

# Práctica 5 : Inferencia de Tipos

Tomás Felipe Melli

June 2, 2025

## Índice

<b>1</b>	<b>Ejercicios</b>	<b>2</b>
1.1	Ejercicio 1 . . . . .	2
1.2	Ejercicio 2 . . . . .	2
1.3	Ejercicio 3 . . . . .	3
1.4	Ejercicio 4 . . . . .	3
1.5	Ejercicio 5 . . . . .	7
1.6	Ejercicio 8 . . . . .	12
1.6.1	1 . . . . .	12
1.6.2	2 . . . . .	13
1.7	Ejercicio 9 . . . . .	13
1.8	Ejercicio 10 . . . . .	16

# 1 Ejercicios

Gramáticas a tener en cuenta :

- Términos **anotados**

$$M ::= x \mid \lambda x : \sigma. M \mid M M \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \mid \text{zero} \mid \text{succ}(M) \mid \text{pred}(M) \mid \text{isZero}(M) \mid \mu x : \sigma. M$$

Donde la letra  $x$  representa un nombre de variable arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado:

$$X = \{w, w_1, w_2, \dots, x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, f, f_1, f_2, \dots\}$$

- Términos **sin anotaciones**

$$U ::= x \mid \lambda x. U \mid U U \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } U \text{ then } U \text{ else } U \mid \text{zero} \mid \text{succ}(U) \mid \text{pred}(U) \mid \text{isZero}(U) \mid \mu x. U$$

- Tipos

$$\tau ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \tau \rightarrow \tau \mid X_n$$

Donde  $n$  es un número natural, de tal modo que  $X_n$  representa una variable de tipo arbitraria tomada de un conjunto:

$$T = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$$

**Nota:** también podemos referirnos a las variables de tipo como *incógnitas*.

## 1.1 Ejercicio 1

1.  $\lambda x : \text{Bool}. \text{succ}(x)$  esta expresión es válida sintácticamente y corresponde a **Términos anotados**
2.  $\lambda x. \text{isZero}(x)$  esta expresión es válida en la gramática de **Términos sin anotaciones**
3.  $X_1 \rightarrow \sigma$  es una expresión válida y corresponde a la gramática de **Tipos**
4. `erase(f y)`
5.  $X_1$  es una variable de tipo (incógnita en este caso) que sintácticamente está bien formada y corresponde a **Tipos**
6.  $X_1 \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow X_2)$  tenemos este término que se corresponde a la gramática de **Tipos** compuesto por dos incógnitas.
7.  $\lambda x : X_1 \rightarrow X_2. \text{if zero then True else zero succ(True)}$  no es una expresión válida. Es evidente que falla dado que  $\text{succ(True)}$  no es válido
8. `erase( $\lambda f : \text{Bool} \rightarrow \text{s}. \lambda y : \text{Bool}. f y$ )`

## 1.2 Ejercicio 2

Tenemos que aplicar la sustitución  $S$  al término. O sea, el resultado de  $S(..algo..)$

1. Sea  $S = \{X_1 := \text{Nat}\}$

$$S(\{x : X_1 \rightarrow \text{Bool}\}) \\ \stackrel{\{X_1\}}{=} \{x : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}\}$$

2. Sea  $S = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3, X_4 := \text{Bool}\}$

$$S(\{x : X_4 \rightarrow \text{Bool}\}) \vdash S(\lambda x : X_1 \rightarrow \text{Bool}. x) : S(\text{Nat} \rightarrow X_2) \\ \stackrel{\{X_4\}}{=} \{x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}\} \vdash S(\lambda x : X_1 \rightarrow \text{Bool}. x) : S(\text{Nat} \rightarrow X_2) \\ \stackrel{\{X_1\}}{=} \{x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}\} \vdash \lambda x : \text{X}_2 \rightarrow \text{X}_3 \rightarrow \text{Bool}. x : S(\text{Nat} \rightarrow X_2) \\ \stackrel{\{no\ hay\ reemplazo\}}{=} \{x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}\} \vdash \lambda x : X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow \text{Bool}. x : \text{Nat} \rightarrow \text{X}_2$$

### 1.3 Ejercicio 3

Elegimos los pares de tipos que unifican entre sí. Por cada uno, mostramos el *mg*

- Primero presentamos el par que consideramos que podría unificar : (nombramos  $E$  al conjunto finito de ecuaciones)  
 $E = \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$ . Luego presentamos el **unificador** (es decir, la sustitución que hace valer la igualdad)  $S = \{X_1 := Nat\}$

•

$$E = \{X_1 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow Bool\}$$

$$S = \{X_1 := Nat, X_2 := Bool\}$$

•

$$E = \{X_2 \rightarrow Bool \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow Bool\}$$

$$S = \{X_2 := Nat\}$$

•

$$E = \{X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_2 \rightarrow Bool\}$$

$$S = \{X_3 := Nat, X_4 := X_2, X_5 := Bool\}$$

### 1.4 Ejercicio 4

Utilizar el **Algoritmo de inferencia** para decidir cuáles son tipables.

1.  $U = \lambda z. \text{if } z \text{ then zero else succ}(\text{zero})$

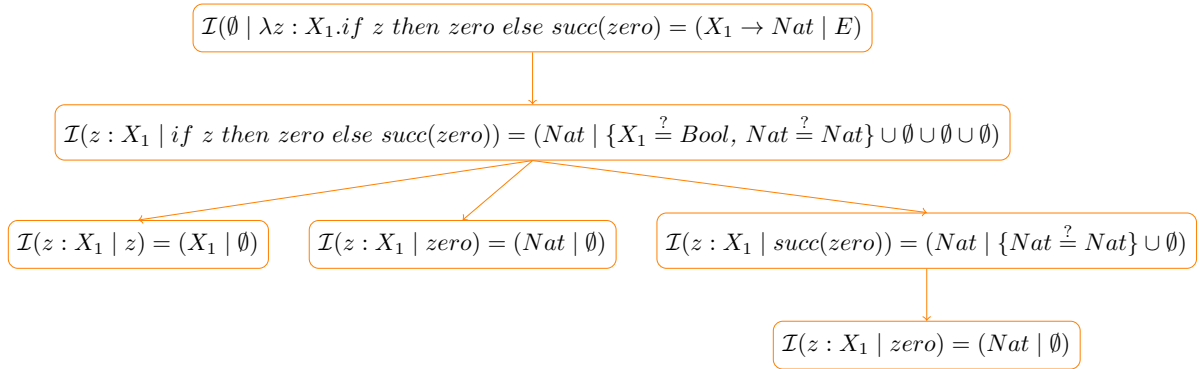
- Paso I : Rectificación.  $z$  es la única variable ligada y no hay otra variable (ni libre ni ligada). Concluimos que el término está **rectificado**.
- Paso II : Anotación. Agregamos un **contexto a las variables libres** y un **término anotado**. Como no hay variables libres, agregamos el **contexto vacío**, pero sí **anotamos una incógnita a  $z$** .

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda z : X_1. \text{if } z \text{ then zero else succ}(\text{zero})$$

Recordar que  $U = \text{erase}(M_0)$  debe valer.

- Paso III : Restricciones.



- Paso IV: Unificación.

$$\text{entrada} : \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Bool\}$$

$$\text{elim triv} : \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool\}$$

$$\text{elim var} : \emptyset \quad \text{con } S1 = \{X := Bool\}$$

Concluimos que el unificador es :

$$S = \{X_1 := Bool\}$$

Con ello, el término  $U$  es tipable y vale el siguiente juicio:

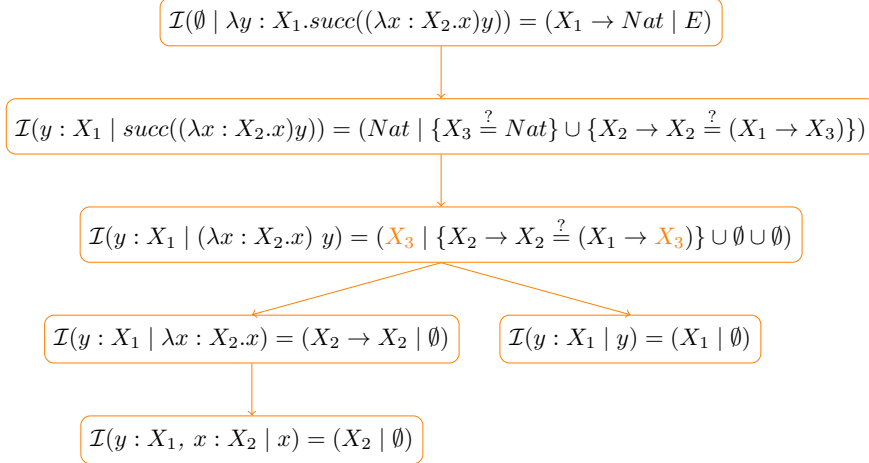
$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow Nat) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\lambda z : Bool. if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)) : S(Bool \rightarrow Nat) \end{aligned}$$

2.  $U = \lambda y. succ((\lambda x. x)y)$

- (a) Paso I: Rectificación. Tenemos sólo dos variables, ambas ligadas  $x$  e  $y$ . Tienen distintos nombres. Concluimos que el término está rectificado.
- (b) Paso II : Anotación. Como no hay variables libres, el contexto es vacío. Anotamos a las ligadas

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= \lambda y : X_1. succ((\lambda x : X_2. x)y) \end{aligned}$$

- (c) Paso III : Restricciones.



- (d) Paso IV : Unificación.

$$\begin{aligned} \text{entrada} &: \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_3)\} \\ \text{decompose} &: \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\} \\ \text{elim var} &: \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\} \quad \text{con } S1 = \{X_3 := Nat\} \\ \text{elim var} &: \{Nat \stackrel{?}{=} X_1\} \quad \text{con } S2 = \{X_2 := Nat\} \\ \text{elim var} &: \emptyset \quad \text{con } S3 = \{X_1 := Nat\} \end{aligned}$$

Con esto, el unificador más general es :

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat, X_2 := Nat, X_1 := Nat\}$$

Por tanto, existe  $U$  tipable y por ello vale el siguiente juicio:

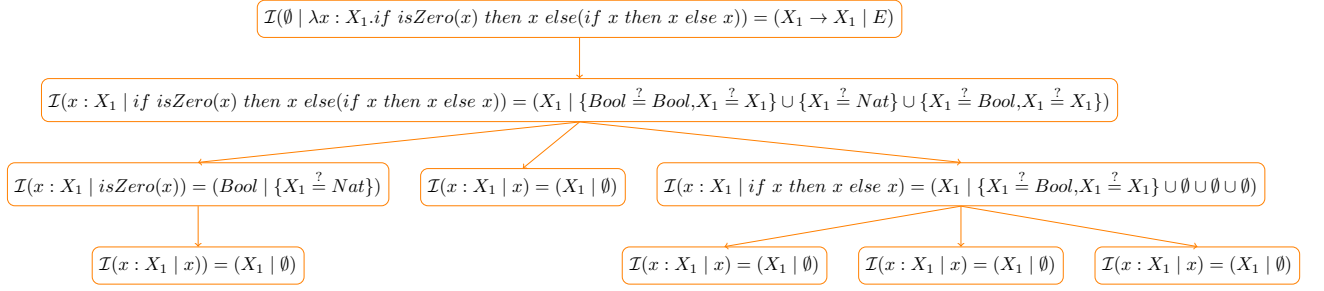
$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow Nat) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\lambda y : Nat. succ((\lambda x : X_2. x)y)) : S(Nat \rightarrow Nat) \end{aligned}$$

3.  $U = \lambda x. if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x)$

- (a) Paso I : Rectificación . Tenemos una sola variable en el término,  $x$  y está ligada. El término está rectificado
- (b) Paso II : Anotación. Tenemos contexto vacío y anotamos la ligada

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= \lambda x : X_1. if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x) \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones.



(d) Paso IV : Unificación

**entrada** :  $\{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1, X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\}$   
**elim triv** :  $\{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Bool\}$   
**colisión** : **falla**

Concluimos que  $U$  no es tipable.

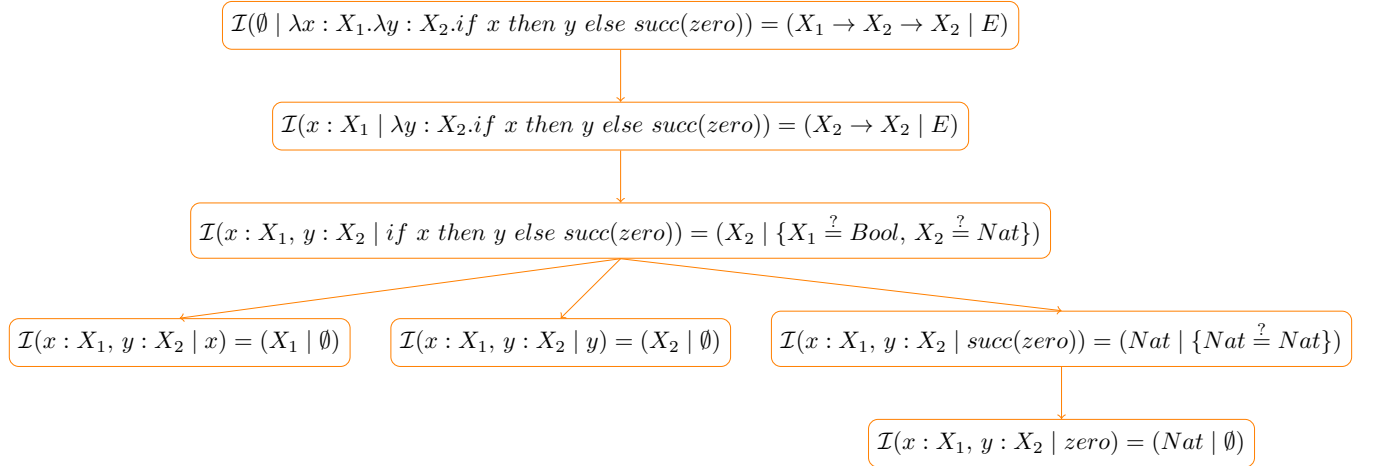
4.  $U = \lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then } y \text{ else succ}(\text{zero})$

(a) Paso I : Rectificación. El término tiene dos variables solamente, ambas ligadas y con nombres diferentes.

(b) Paso II : Anotación.

$\Gamma_0 = \emptyset$   
 $M_0 = \lambda x : \textcolor{red}{X}_1. \lambda y : \textcolor{red}{X}_2. \text{if } x \text{ then } y \text{ else succ}(\text{zero})$

(c) Paso III : Restricciones



Queremos ahora buscar el **mg**

**entrada** :  $\{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} Nat\}$   
**elim triv** :  $\{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$   
**elim var** :  $\{X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$  con  $S1 = \{ X_1 := Bool \}$   
**elim var** :  $\emptyset$  con  $S2 = \{ X_2 := Nat \}$

Podemos concluir que el unificador es :

$S = S_2 \circ S_1 = \{X_2 := Nat, X_1 := Bool\}$

Existe  $U$  tipable y por tanto vale el siguiente juicio :

$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \sigma)$   
 $\equiv \emptyset \vdash S(\lambda x Bool. \lambda y : Nat. \text{if } x \text{ then } y \text{ else succ}(\text{zero})) : S(Bool \rightarrow Nat \rightarrow Nat)$

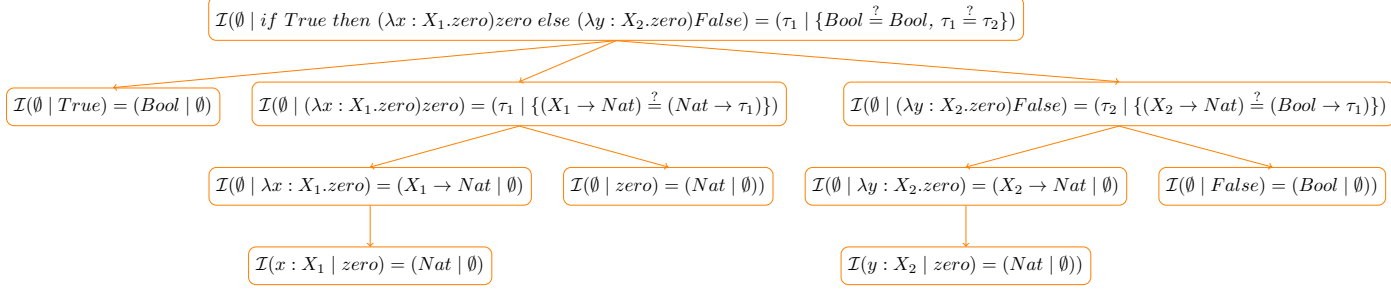
5.  $U = \text{if } \text{True} \text{ then } (\lambda x.\text{zero})\text{zero} \text{ else } (\lambda x.\text{zero})\text{False}$

- (a) Paso I : Rectificación. Hay dos variables en este término, ambas ligadas con el mismo nombre. Las  $\alpha$  – renombramos para rectificarlo.  $U = \text{if } \text{True} \text{ then } (\lambda x.\text{zero})\text{zero} \text{ else } (\lambda y.\text{zero})\text{False}$
- (b) Paso II: Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{if } \text{True} \text{ then } (\lambda x : X_1.\text{zero})\text{zero} \text{ else } (\lambda y : X_2.\text{zero})\text{False}$$

- (c) Paso III: Restricciones



Con esto dicho, queremos el **mgu**

$$\begin{aligned} \text{entrada} &: \{ \text{Bool} \stackrel{?}{=} \text{Bool}, \tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \rightarrow \text{Nat} \stackrel{?}{=} \text{Nat} \rightarrow \tau_1, X_2 \rightarrow \text{Nat} \stackrel{?}{=} \text{Bool} \rightarrow \tau_1 \} \\ \text{elim triv} &: \{ \tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \rightarrow \text{Nat} \stackrel{?}{=} \text{Nat} \rightarrow \tau_1, X_2 \rightarrow \text{Nat} \stackrel{?}{=} \text{Bool} \rightarrow \tau_1 \} \\ \text{decompose} &: \{ \tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \stackrel{?}{=} \text{Nat}, \text{Nat} \stackrel{?}{=} \tau_1, X_2 \stackrel{?}{=} \text{Bool}, \text{Nat} \stackrel{?}{=} \tau_1 \} \\ \text{elim var} &: \{ \text{Nat} \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \stackrel{?}{=} \text{Nat}, X_2 \stackrel{?}{=} \text{Bool} \} \text{ con } S1 = \{ \tau_1 := \text{Nat} \} \\ \text{elim var} &: \{ X_1 \stackrel{?}{=} \text{Nat}, X_2 \stackrel{?}{=} \text{Bool} \} \text{ con } S2 = \{ \tau_2 := \text{Nat} \} \\ \text{elim var} &: \{ X_2 \stackrel{?}{=} \text{Bool} \} \text{ con } S3 = \{ X_1 = \text{Nat} \} \\ \text{elim var} &: \emptyset \text{ con } S4 = \{ X_2 := \text{Bool} \} \end{aligned}$$

Concluimos entonces que el **mgu** es :

$$S = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{ X_2 := \text{Bool}, X_1 = \text{Nat}, \tau_2 := \text{Nat}, \tau_1 := \text{Nat} \}$$

Y por ello,  $U$  es tipable y vale el siguiente juicio:

$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(\tau_1) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\text{if } \text{True} \text{ then } (\lambda x : \text{Nat}.\text{zero})\text{zero} \text{ else } (\lambda y : \text{Bool}.\text{zero})\text{False}) : S(\text{Nat}) \end{aligned}$$

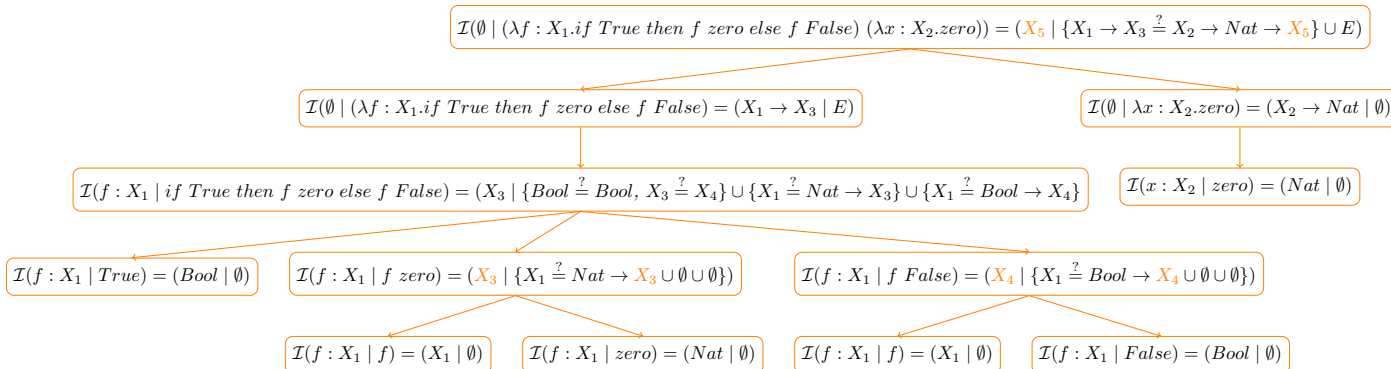
6.  $U = (\lambda f.\text{if } \text{True} \text{ then } f \text{ zero} \text{ else } f \text{ False}) (\lambda x.\text{zero})$

- (a) Paso I : Rectificación. Tenemos dos variables, ambas ligadas y con distinto nombre. Está rectificado.
- (b) Paso II: Anotación. No hay variables entonces el contexto es vacío, pero tenemos que anotar  $f$  y  $x$

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = (\lambda f : X_1.\text{if } \text{True} \text{ then } f \text{ zero} \text{ else } f \text{ False}) (\lambda x : X_2.\text{zero})$$

- (c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

**entrada** :  $\{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_3 \stackrel{?}{=} X_4, X_1 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3, X_1 \stackrel{?}{=} Bool \rightarrow X_4, X_1 \rightarrow X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow Nat \rightarrow X_5\}$   
**elim triv** :  $\{X_3 \stackrel{?}{=} X_4, X_1 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3, X_1 \stackrel{?}{=} Bool \rightarrow X_4, X_1 \rightarrow X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow Nat \rightarrow X_5\}$   
**colisión** : **falla**

No existe  $U$  tipable.

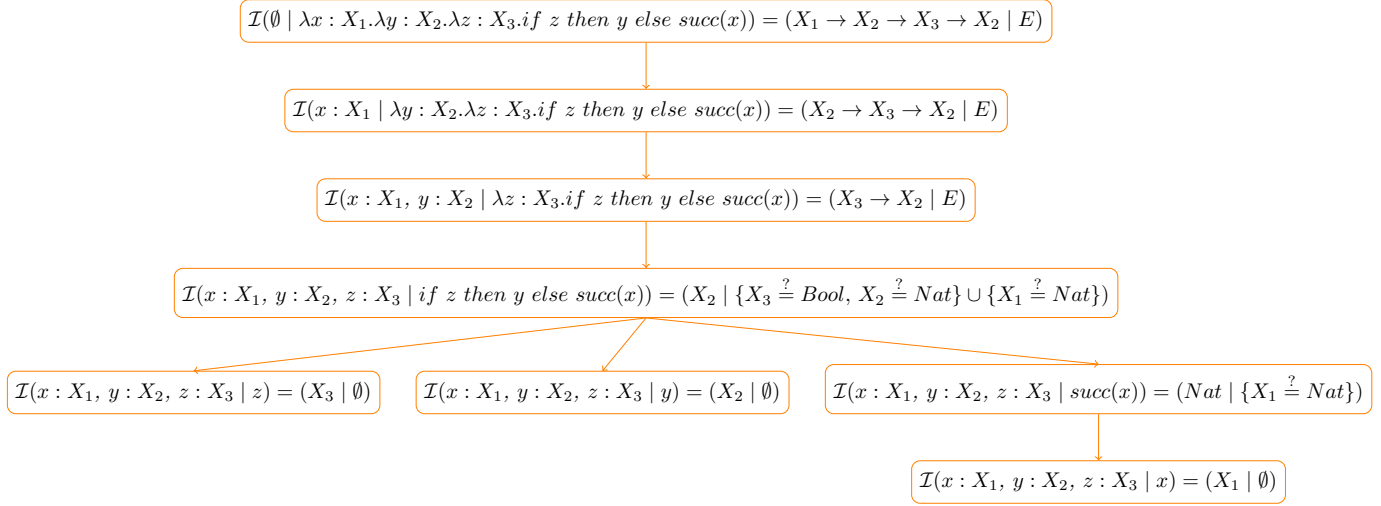
7.  $U = \lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } z \text{ then } y \text{ else succ}(x)$

- (a) Paso I: Rectificación. El término tiene 3 variables ambas tres ligadas y de distinto nombre. Por tanto, está rectificado.  
(b) Paso II : Anotación. No tiene variables libres y por tanto tenemos contexto vacío.

$\Gamma_0 = \emptyset$

$M_0 = \lambda x : X_1. \lambda y : X_2. \lambda z : X_3. \text{if } z \text{ then } y \text{ else succ}(x)$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación.

**entrada** :  $\{X_3 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$   
**elim var** :  $\{X_2 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$  con  $S1 = \{ X_3 := Bool \}$   
**elim var** :  $\{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$  con  $S2 = \{ X_2 := Nat \}$   
**elim var** :  $\emptyset$  con  $S3 = \{ X_1 := Nat \}$

Con esto dicho, el **mgu** es:

$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_1 := Nat, X_2 := Nat, X_3 := Bool\}$

Por tanto,  $U$  es tipable y vale el siguiente juicio:

$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2)$   
 $\equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : Nat. \lambda y : Nat. \lambda z : Bool. \text{if } z \text{ then } y \text{ else succ}(x)) : S(Nat \rightarrow Nat \rightarrow Bool \rightarrow Nat)$

## 1.5 Ejercicio 5

1.  $U = \lambda x. \lambda y. \lambda z. z \ x \ y \ z$

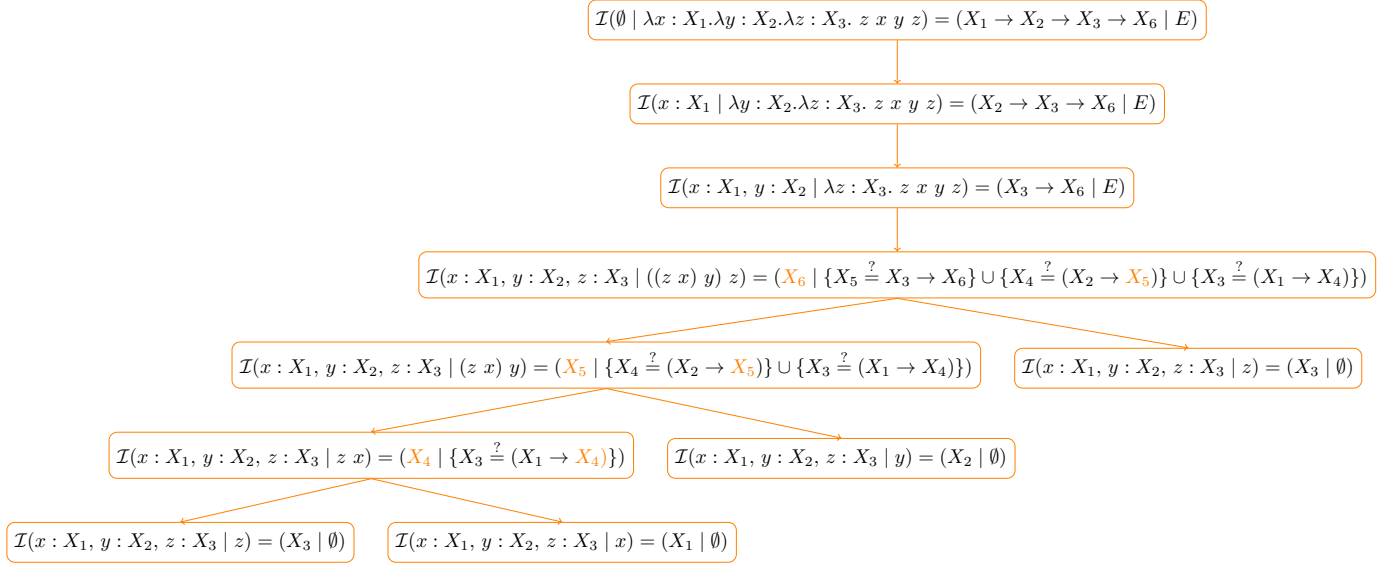
- (a) Paso I : Rectificación. El término está rectificado, ya que cada variable ligada cuenta con nombre distinto de las demás.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda x : \mathbf{X}_1. \lambda y : \mathbf{X}_2. \lambda z : \mathbf{X}_3. z \ x \ y \ z$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación.

$$\text{entrada} : \{X_5 \stackrel{?}{=} X_3 \rightarrow X_6, X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \rightarrow X_5), X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_4)\}$$

$$\text{elim var} : \{X_5 \stackrel{?}{=} X_1 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6, X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \rightarrow X_5)\}$$

$$\text{elim var} : \{X_4 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6\}$$

occurs check : falla

$$2. U = \lambda x. x \ (w \ (\lambda y. w \ y))$$

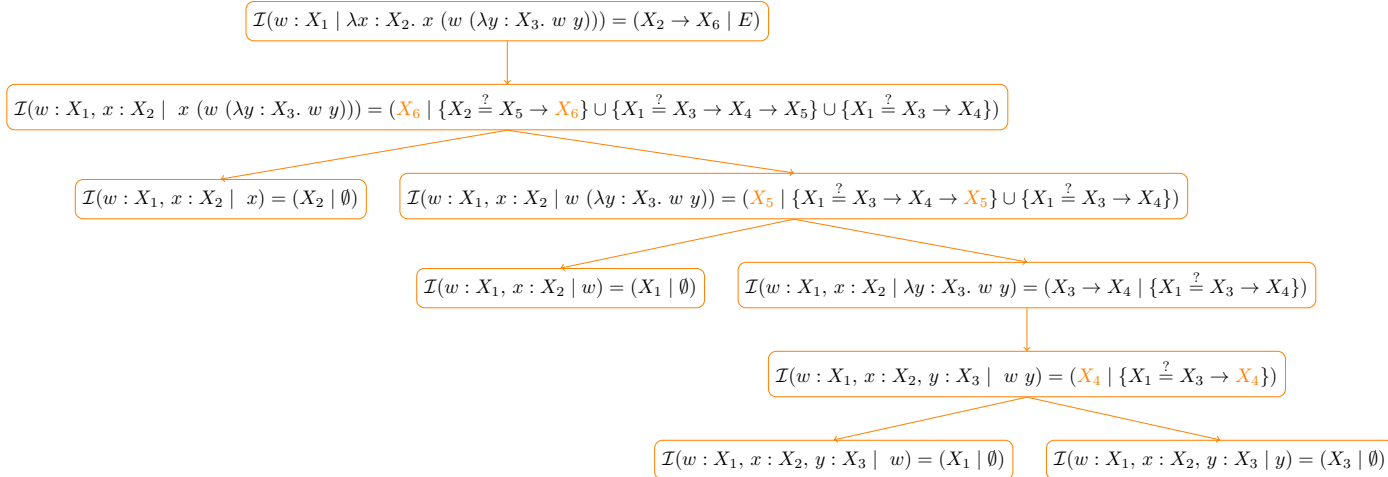
(a) Paso I : Rectificación. Tenemos dos variables ligadas con nombres diferentes y una libre que también difiere en nombre, por tanto,  $U$  está rectificado.

(b) Paso II : Anotación

$$\Gamma_0 = w : X_1$$

$$M_0 = \lambda x : \mathbf{X}_2. x \ (w \ (\lambda y : \mathbf{X}_3. w \ y))$$

(c) Paso III : Restricciones





(d) Paso IV : Unificación

**entrada** :  $\{X_2 \stackrel{?}{=} X_5 \rightarrow X_6, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \rightarrow X_4\}$   
**colisión** : **falla**

3.  $U = \lambda x. \lambda y. xy$

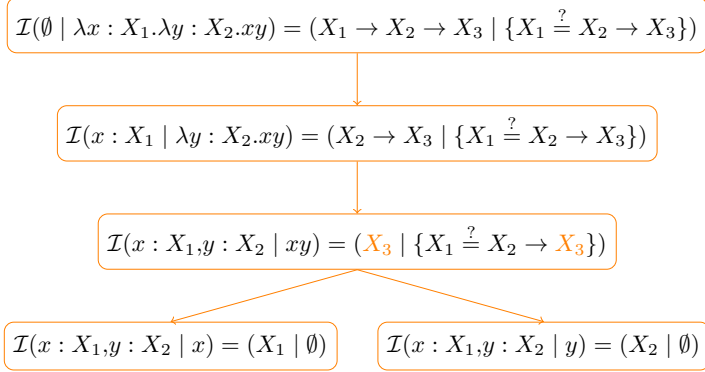
(a) Paso I : Rectificación. Está rectificado ambas variables son ligadas y tienen distinto nombre.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda x : \mathbf{X}_1. \lambda y : \mathbf{X}_2. xy$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

**entrada** :  $\{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3\}$   
**elim var** :  $\emptyset$     **con S1** =  $\{X_1 := X_2 \rightarrow X_3\}$

Con esto, el mgu es :

$$S = S1 = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3\}$$

Decimos que  $U$  es tipable y vale :

$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : X_2 \rightarrow X_3. \lambda y : X_2. xy) : S(X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3) \end{aligned}$$

4.  $U = \lambda x. \lambda y. yx$

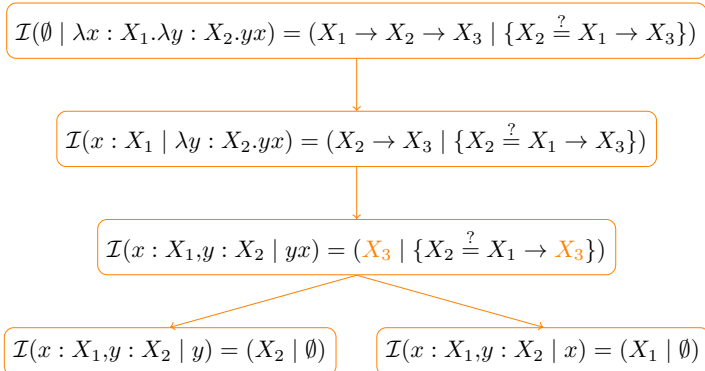
(a) Paso I : Rectificación. Está rectificado ambas variables son ligadas y tienen distinto nombre.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda x : \mathbf{X}_1. \lambda y : \mathbf{X}_2. yx$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

$$\begin{aligned} \text{entrada} &: \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \rightarrow X_3\} \\ \text{elim var} &: \emptyset \quad \text{con } S1 = \{X_2 := X_1 \rightarrow X_3\} \end{aligned}$$

Con esto, el mgu es :

$$S = S1 = \{X_2 := X_1 \rightarrow X_3\}$$

Decimos que  $U$  es tipable y vale :

$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : X_1. \lambda y : X_1 \rightarrow X_3. xy) : S(X_1 \rightarrow X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_3) \end{aligned}$$

5.  $U = \lambda x. (\lambda x. x)$

(a) Paso I : Rectificación. El término no está rectificado. Tenemos que  $\alpha$  – *renombrar* porque tenemos dos variables ligadas con el mismo nombre:

$$\lambda x. (\lambda y. y)$$

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= \lambda x : X_1. (\lambda y : X_2. y) \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1. (\lambda y : X_2. y)) &= (X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_2 \mid \emptyset) \\ \downarrow \\ \mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2. y) &= (X_2 \rightarrow X_2 \mid \emptyset) \\ \downarrow \\ \mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) &= (X_2 \mid \emptyset) \end{aligned}$$

(d) Paso IV : Unificación.

Ni idea

6.  $U = \lambda x. (\lambda y. y) x$

(a) Paso I : Rectificación. Todo en regla

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= \lambda x : X_1. (\lambda y : X_2. y) x \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1. (\lambda y : X_2. y) x) &= (X_1 \rightarrow X_3 \mid \{X_2 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_3)\}) \\ \downarrow \\ \mathcal{I}(x : X_1 \mid (\lambda y : X_2. y) x) &= (X_3 \mid \{X_2 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_3)\}) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathcal{I}(x : X_1 \mid (\lambda y : X_2. y)) &= (X_2 \rightarrow X_2 \mid \emptyset) \quad \mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset) \\ \downarrow \\ \mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) &= (X_2 \mid \emptyset) \end{aligned}$$

(d) Paso IV : Unificación.

entrada :  $\{X_2 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_3)\}$   
 decompose :  $\{X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$   
 elim var :  $\{X_2 \stackrel{?}{=} X_2, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$  con  $S1 = \{X_1 := X_2\}$   
 elim triv :  $\{X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$   
 elim var :  $\{X_3 \stackrel{?}{=} X_3\}$  con  $S2 = \{X_2 := X_3\}$   
 elim triv :  $\emptyset$

Con esto, el **mg**

$$S = S_2 \circ S_1 = \{X_1 := X_2, X_2 := X_3\}$$

Por tanto,  $U$  es tipable y vale el juicio

$$\begin{aligned}
 S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_3) \\
 \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : ?. (\lambda y : ?. y) x) : S(??)
 \end{aligned}$$

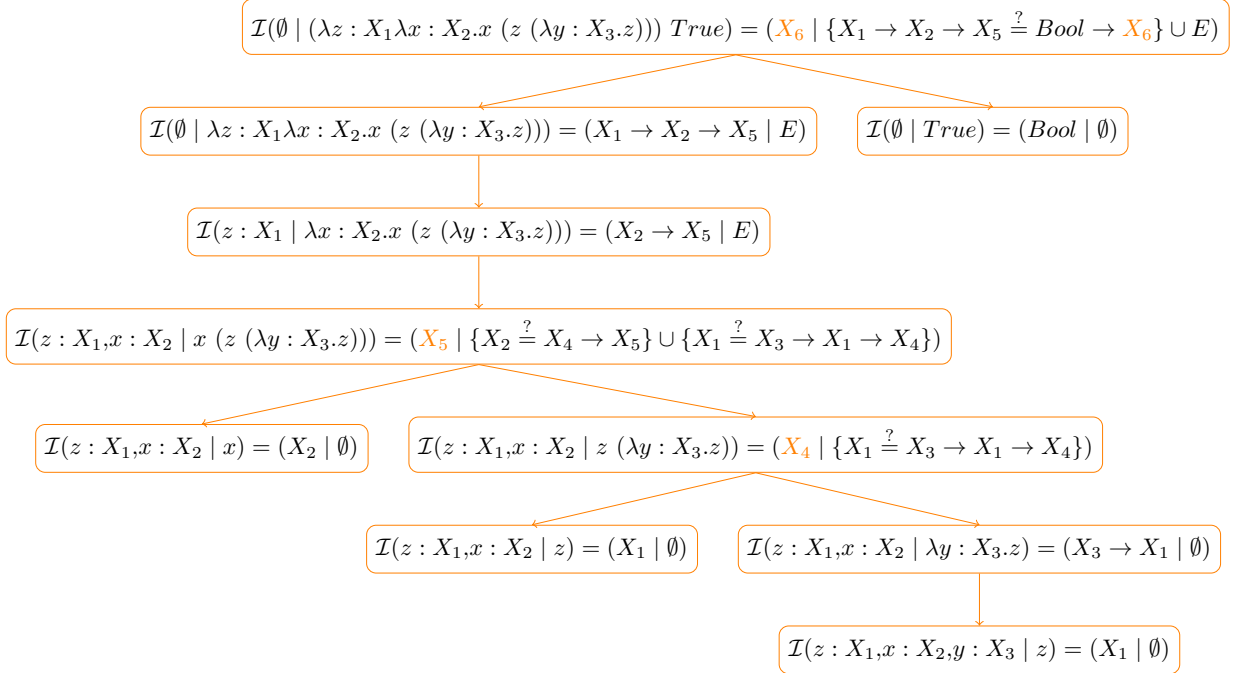
7.  $U = (\lambda z \lambda x. x (z (\lambda y. z))) \text{ True}$

(a) Paso I : Rectificación. Está rectificado.

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= \emptyset \\
 M_0 &= (\lambda z : \mathbf{X}_1 \lambda x : \mathbf{X}_2. x (z (\lambda y : \mathbf{X}_3. z))) \text{ True}
 \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

entrada :  $\{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_5 \stackrel{?}{=} \text{Bool} \rightarrow X_6, X_2 \stackrel{?}{=} X_4 \rightarrow X_5, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \rightarrow X_1 \rightarrow X_4\}$   
 occurs check : falla

## 1.6 Ejercicio 8

Tener en cuenta el tipo de los pares definido como:  $c\tau ::= \dots \mid \tau \times \tau$  Con expresiones nuevas definidas como:  $M ::= \dots \mid \langle M, M \rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$

Y las siguientes reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \tau \times \sigma} \text{ (T-Pair)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \tau} \text{ (T-Proj1)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \sigma} \text{ (T-Proj2)}$$

Se extiende el algoritmo  $I$  con las siguientes reglas:

$$I(\Gamma \mid \langle M_1, M_2 \rangle) = (\tau \times \sigma \mid E_1 \cup E_2)$$

donde:

$$I(\Gamma \mid M_1) = (\tau \mid E_1) \quad \text{e} \quad I(\Gamma \mid M_2) = (\sigma \mid E_2)$$

$$I(\Gamma \mid \pi_1(M)) = (\sigma \mid \{\tau = \sigma \times \rho\} \cup E) \quad \text{donde } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$I(\Gamma \mid \pi_2(M)) = (\rho \mid \{\tau = \sigma \times \rho\} \cup E) \quad \text{donde } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

1. Tipar la expresión:  $(\lambda f. \langle f, 2 \rangle)(\lambda x. x \ 1)$  utilizando la versión extendida del algoritmo.
2. Intentar tipar la siguiente expresión utilizando la versión extendida del algoritmo:  $(\lambda f. \langle f \ 2, f \ \text{True} \rangle)(\lambda x. x)$  Mostrar en qué punto la inferencia falla y por qué motivo.

### 1.6.1 1

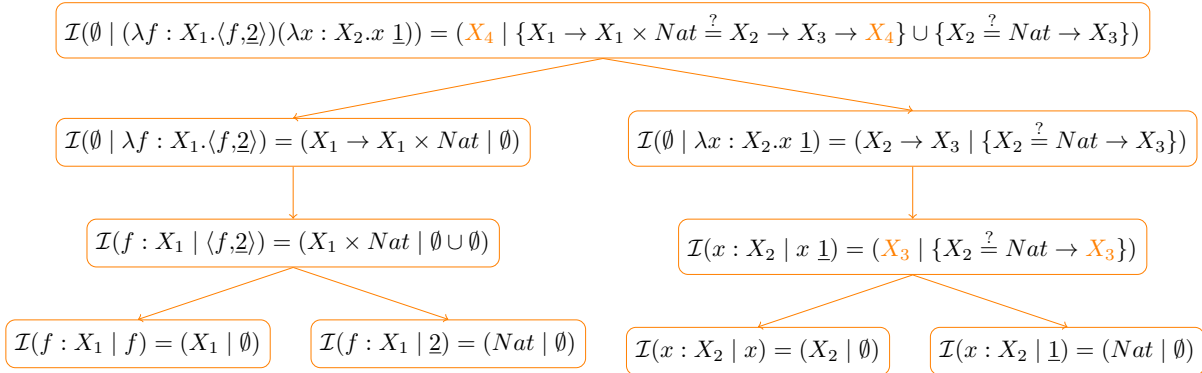
$$U = \lambda f. \langle f, \underline{2} \rangle (\lambda x. x \ \underline{1})$$

1. Paso I : Rectificación. Todo bien.
2. Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda f : \mathbf{X}_1. \langle f, \underline{2} \rangle (\lambda x : \mathbf{X}_2. x \ \underline{1})$$

3. Paso III : Restricciones



#### 4. Paso IV : Unificación.

$\text{entrada} : \{X_1 \rightarrow X_1 \times \text{Nat} \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4, X_2 \stackrel{?}{=} \text{Nat} \rightarrow X_3\}$   
 $\text{decompose} : \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3, X_1 \times \text{Nat} \stackrel{?}{=} X_4, X_2 \stackrel{?}{=} \text{Nat} \rightarrow X_3\}$   
 $\text{elim var} : \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3, X_2 \stackrel{?}{=} \text{Nat} \rightarrow X_3\} \quad \text{con } S1 = \{X_4 := X_1 \times \text{Nat}\}$   
 $\text{elim var} : \{X_2 \stackrel{?}{=} \text{Nat} \rightarrow X_3\} \quad \text{con } S2 = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3\}$   
 $\text{elim var} : \emptyset \quad \text{con } S3 = \{X_2 := \text{Nat} \rightarrow X_3\}$

Con esto el **mg** es

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_4 := X_1 \times \text{Nat}, X_1 := X_2 \rightarrow X_3, X_2 := \text{Nat} \rightarrow X_3\}$$

Y por tanto,  $U$  es tipable y vale el siguiente juicio

$$\begin{aligned}
 S(\Gamma_0) &\vdash S(M_0) : S(X_4) \\
 &\equiv \emptyset \vdash S((\lambda f : X_2 \rightarrow X_3. \langle f, \underline{2} \rangle)(\lambda x : \text{Nat} \rightarrow X_3. x \ \underline{1})) : S(X_1 \times \text{Nat})
 \end{aligned}$$

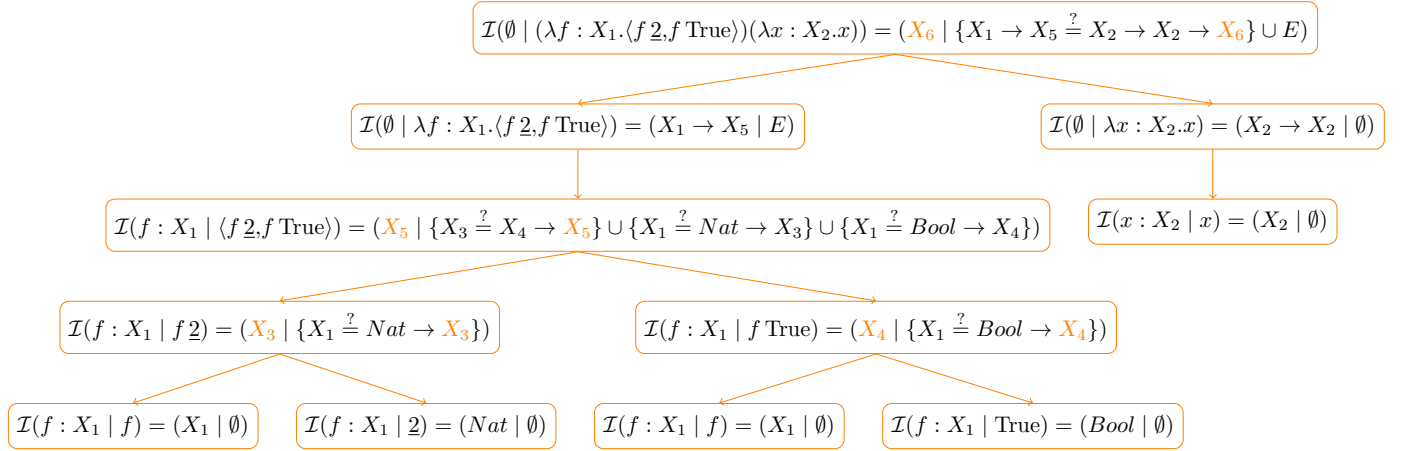
### 1.6.2 2

$$U = (\lambda f. \langle f \ \underline{2}, f \ \text{True} \rangle)(\lambda x. x)$$

1. Paso I : Rectificación. Todo en regla.
2. Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= \emptyset \\
 M_0 &= (\lambda f : \textcolor{brown}{X}_1. \langle f \ \underline{2}, f \ \text{True} \rangle)(\lambda x : \textcolor{brown}{X}_2. x)
 \end{aligned}$$

#### 3. Paso III : Restricciones



#### 4. Paso IV : Unificación

$\text{entrada} : \{X_1 \rightarrow X_5 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_2 \rightarrow X_6, X_3 \stackrel{?}{=} X_4 \rightarrow X_5, X_1 \stackrel{?}{=} \text{Nat} \rightarrow X_3, X_1 \stackrel{?}{=} \text{Bool} \rightarrow X_4\}$   
 $\text{colision} : \text{falla}$

## 1.7 Ejercicio 9

Se extienden el Cálculo Lambda y el algoritmo de inferencia para soportar uniones disjuntas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \tau &::= \dots \mid \tau + \tau \\
 M &::= \dots \mid \text{left}_\tau(M) \mid \text{right}_\tau(M) \mid \text{case } M \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow M
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{left}_\sigma(M)) = (\tau + \sigma \mid E)$$

$$\text{donde : } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{right}_\sigma(M)) = (\sigma + \tau \mid E)$$

$$\text{donde : } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{case } M_1 \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M_2 \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} X_x + X_y, \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

donde:

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma, x : X_x \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma, y : X_y \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$$

$X_x$  y  $X_y$  son variables frescas

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

1. `case left(1) of left(x) ~ isZero(x) | right(y) ~ True`

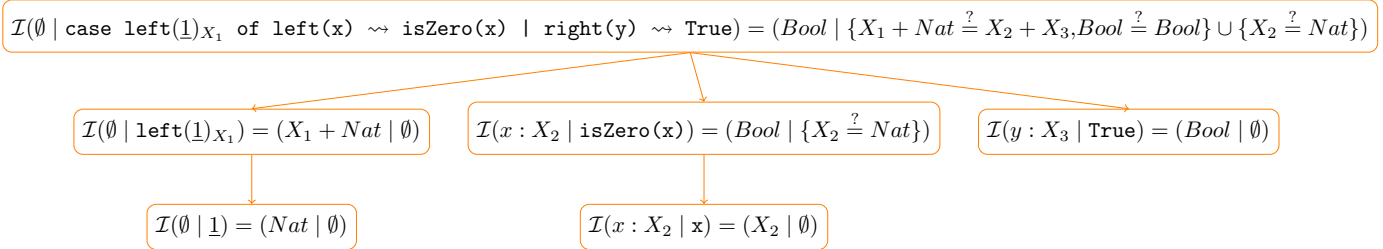
(a) Paso I : Rectificación. Está todo bien

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case left}(1)_{x_1} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow \text{True}$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

$$\text{entrada} : \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_2 + X_3, Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$$

$$\text{elim triv} : \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_2 + X_3, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$$

$$\text{elim var} : \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} Nat + X_3\} \text{ con } S1 = \{X_2 := Nat\}$$

$$\text{decompose} : \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} X_3\}$$

$$\text{elim var} : \{Nat \stackrel{?}{=} X_3\} \text{ con } S2 = \{X_1 := Nat\}$$

$$\text{elim var} : \emptyset \text{ con } S3 = \{X_3 := Nat\}$$

Con esto 1 es tipable y el mgu es

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat, X_1 := Nat, X_2 := Nat\}$$

y vale entonces el siguiente juicio

$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(Bool) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\text{case left}(1)_{Nat} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow \text{True}) : S(Bool) \end{aligned}$$

2. `case right(z) of left(x) ~ isZero(x) | right(y) ~ y`

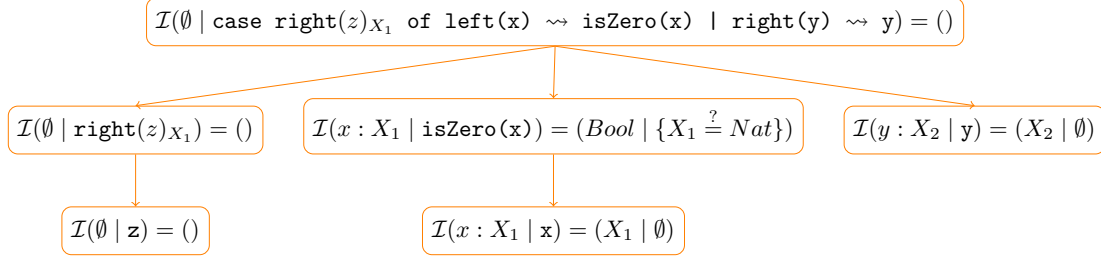
(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case right}(z)_{X_1} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

(c) Paso III : Recstricción



3.  $\text{case right}(\text{zero}) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$

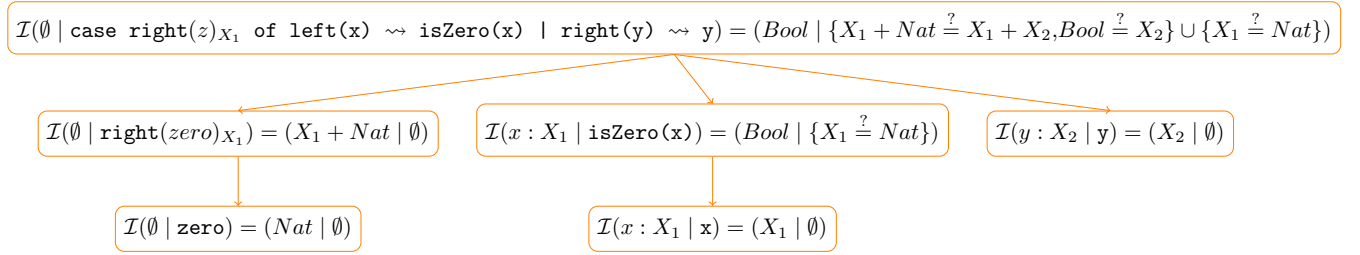
(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case right}(\text{zero})_{X_1} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

(c) Paso III : Recstricción



(d) Paso IV : Unificación

$$\text{entrada} : \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$$

$$\text{elim var} : \{Nat + Nat \stackrel{?}{=} Nat + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \text{ con } S1 = \{X_1 := Nat\}$$

$$\text{decompose} : \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\}$$

$$\text{elim triv} : \{Nat \stackrel{?}{=} X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\}$$

$$\text{colision} : \text{falla}$$

4.  $\text{case } x \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$

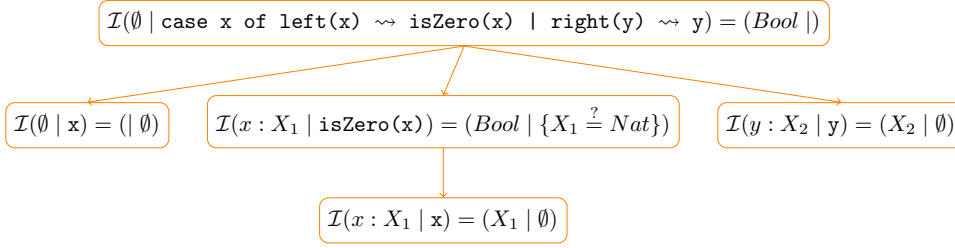
(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case } x \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

(c) Paso III : Recstricción



5. `case left(z) of left(x) ~ z | right(y) ~ y`

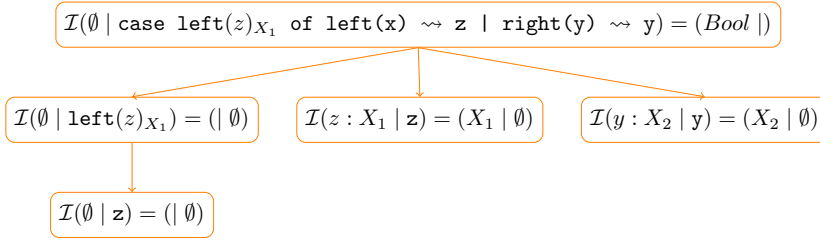
(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case left}(z)_{x_1} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow z \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

(c) Paso III : Recstricción



6. `case z of left(x) ~ z | right(y) ~ y`

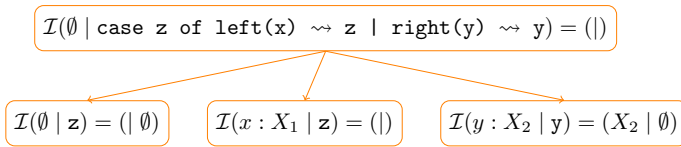
(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case } z \text{ of left}(x) \rightsquigarrow z \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

(c) Paso III : Recstricción



## 1.8 Ejercicio 10

Se extienden el Cálculo Lambda y el algoritmo de inferencia para soportar listas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau &::= \dots \mid [\tau] \\ M &::= \dots \mid []^\tau \mid M :: M \mid \text{foldr } M \text{ base } \rightsquigarrow M; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow M \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid []^\tau) = ([\tau] \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1 :: M_2) = (\tau_2 \mid \{\tau_2 \stackrel{?}{=} [\tau_1]\} \cup E_1 \cup E_2)$$

donde :

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1) \quad \mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$$



$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{foldr } M_1 \text{ base } \rightsquigarrow M_2 ; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} [X_h], \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3, \tau_3 \stackrel{?}{=} X_r\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

donde :

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1) \quad \mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2) \quad \mathcal{I}(\Gamma, h : X_h, r : X_r \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$$

donde  $X_h$  y  $X_r$  son variables de tipo frescas.

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

1. `foldr x :: [] base ~> [] ; rec(h, r) ~> isZero(h) :: r`
2. `foldr (\lambda x. succ(x)) :: [] base ~> [] ; rec(x, r) ~> if px then x :: r else r`
3. `foldr x base ~> x ; rec(h, r) ~> isZero(h) :: r`
4. `foldr x base ~> True ; rec(h, x) ~> x`