Clase Práctica 8 : Lógica de Primer Orden

Tomás Felipe Melli

June 11, 2025

Índice

1 Sintaxis de la LPO

1.1 Lenguajes de primer orden

En vez de variables proposicionales, ahora tenemos

- **Variables** por ejemplo : $\mathcal{X} = \{X, Y, Z...\}$
- **Conjunto de símbolos de función** $\mathcal{F} = \{f, g, h, ...\}$ con aridad ≥ 0. Las constantes son funciones de aridad 0.
- **Conjunto (no vacío) de símbolos de predicado** $\mathcal{P} = \{P, Q, R, ...\}$ con aridad ≥ 0

1.2 Términos de primer orden

$$t ::= X \mid f(t_1, ..., t_n)$$

1.3 Fórmulas de primer orden

$$\sigma ::= \mathbf{P}(t_1, ..., t_n) \mid \forall X.\sigma \mid \exists X.\sigma \mid \bot \mid \sigma \Rightarrow \sigma \mid \sigma \wedge \sigma \mid \sigma \vee \sigma \mid \neg\sigma$$

donde $\mathbf{P}$ es un predicado de aridad n y los cuantificadores *ligan variables*. Podemos también *sustituir ocurrencias libres de variables por un término en una fórmula*

$$\sigma\{X := t\}$$

Evitar captura de variables.

1.4 Ejercicios

1.4.1 1

Dados $\mathcal{F} = \{c, f, g\}$ de aridades 0,1 y 2 y $\mathcal{P} = \{P\}$ binario, determinar si son términos, fórmulas o expresiones mal formadas

- c es término
- $\forall f(P(X, Y)).g(c, Y)$ mal formado, después del para todo debe haber una variables
- $P(f(X), Y) \Rightarrow \exists Y.P(c, Y)$ fórmula
- $f(g(c, X))$ término
- $\forall Y.(\exists X \ g(X, Y))$ mal formado
- $\forall Y.(\exists X \ P(X, Y))$ fórmula

1.4.2 2

Identificar las variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas y realizar la sustitución marcada

1. $\sigma = \exists X.P(X, Y)$ con $\sigma\{Y := f(Z)\}$

$$\exists X.P(X, Y)$$
$$\overset{\sigma\{Y:=f(Z)}{\rightarrow} \exists X.P(X, f(Z))$$

2. $\sigma = P(f(X), Y) \Rightarrow \forall X.P(g(X, Y), Y)$ con $\sigma\{Y := f(X)\}$

$$P(f(X), Y) \Rightarrow \forall X.P(g(X, Y), Y)$$
$$\overset{\sigma\{Y:=f(X)}{\rightarrow} P(f(X), f(X)) \Rightarrow \forall f(Z).P(g(X, Z), f(Z))$$

Sólo podemos renombrar las variables ligadas.

3. $\sigma = \exists X.P(f(X), Y) \wedge P(X, g(Y, c))$ con $\sigma\{Y := g(X, Z)\}$

$$\exists X.P(f(X), Y) \wedge P(X, g(Y, c))$$
$$\overset{Y:=g(X,Z)}{\rightarrow} \exists Q.P(f(Q), g(Q, Z)) \wedge P(X, g(g(X, Z), c))$$

1.5 Adaptación de Unificación en expresiones de primer orden

Dados $\mathcal{F} = \{a, b, f, g\}$ de aridades 0,0,1 y 1 y $\mathcal{P} = \{P, Q\}$ predicados unario y binario, unir las expresiones entre una fila y otrar de forma que unifiquen entre sí : (no se pueden unificar fórmulas con términos)

- $P(a) \stackrel{?}{=} P(X)$ puede ya que $\sigma\{X := a\}$ $P(a) \stackrel{?}{=} P(b)$ no unifica porque sólo podemos sustituir variables, y $a \neq b$
- $g(X)$ no va con ninguna.
- $f(b) \stackrel{?}{=} f(X)$ se puede con $\sigma\{X := b\}$
- $Q(Y, f(X)) \stackrel{?}{=} Q(f(X), Y)$ se puede con $\sigma\{Y := f(X)\}$

2 Deducción natural en LPO

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash \exists x.P(x)}\,Ax
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma, P(x) \vdash P(x)}\,Ax
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(x) \vdash \forall Y.(P(Y) \Rightarrow Q(Y))}\,Ax}{\Gamma, P(x) \vdash P(x) \Rightarrow Q(x)}\,\forall e
}{\Gamma, P(x) \vdash Q(x)}\,\Rightarrow e
}{\Gamma, P(x) \vdash \exists z.Q(z)}\,\exists i
}{
\dfrac{
\dfrac{\Gamma = \exists X.P(X), \forall Y.(P(Y) \Rightarrow Q(Y)) \vdash \exists Z.Q(Z)}{\exists X.P(X) \vdash (\forall Y.(P(Y) \Rightarrow Q(Y))) \Rightarrow \exists Z.Q(Z)}\,\Rightarrow i
}{\vdash (\exists X.P(X)) \Rightarrow (\forall Y.(P(Y) \Rightarrow Q(Y))) \Rightarrow \exists Z.Q(Z)}\,\Rightarrow i
}\,\exists e
$$

3 Semántica en LPO

Dado un lenguaje de primer orden, llamamos **estructura** al par $(\mathcal{M}, \mathcal{I})$ tal que:

- $\mathcal{M}$ es un conjunto no vacío llamado **universo**
- $\mathcal{I}$ es una función que **interpreta**(o sea, le da una semántica) a cada símbolo en términos del universo. Es decir,
  - **Símbolos de constantes en elemento de** $\mathcal{M}$
  - **Símbolos de funciones en funciones de** $\mathcal{M}$
  - **Símbolos de predicados en relaciones de**$\mathcal{M}$

  Ademś tenemos asignaciones que a cada variable le asocian un elemento del universo. Combinándola con $\mathcal{I}$, se la puede extender a todos los términos de la lógica. Entonces, sea fija la estructura

  - *Fórmulas verdaderas para alguna asignación* : **satisfactible**
  - *Fórmulas verdaderas para cualquier asignación* : **válidas**

  Lo que se prueba por deducción natural son fórmulas **universalmente válidas**(es decir, valen para cualquier estructura y asignación)