Práctica 6 : Lógica de Primer Orden

Tomás Felipe Melli

June 26, 2025

Índice

1 Sintaxis de la Lógica de Primer Orden **2**
1.1 Ejercicio 1 2
1.2 Ejercicio 2 2
1.3 Ejercicio 3 3
1.4 Ejercicio 4 4

2 Unificación **4**
2.1 Ejercicio 5 4
2.2 Ejericicio 6 7
2.3 Ejercicio 8 7

3 Deducción Natural **9**
3.1 Ejercicio 9 9
3.2 Ejercicio 10 13

4 Semántica **13**
4.1 Ejercicio 13 13
4.2 Ejercicio 14 14

1 Sintaxis de la Lógica de Primer Orden

1.1 Ejercicio 1

Dados $\mathcal{F} = \{d, f, g\}$ donde la aridad es 0,2,3 respectivamente. Cuáles de las siguiente cadenas son términos ? Recordemos que toda constante (símbolo de función de aridad 0) es término y si $f \in \mathcal{F}$ con aridad n y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ también lo es.

1. $g(d, d)$ sabemos que $g \in \mathcal{F}$ y su aridad es 3, es decir se puede escribir que g toma t_1, t_2, t_3 y $g(t_1, t_2, t_3)$ es término. Si bien d es una constante, no coincide la aridad de g con la cantidad de parámetros que recibe. Por tanto, no es término.

2. $f(X, g(X, Y), d)$. Las variables son términos, por tanto X e Y están bien definidas. Los problemas que surgen son : la aridad de f es 2 y la de g es 3. Por tanto, si bien todos los parámetros son términos, no corresponde la aridad de f y g con la cantidad de parámetros que reciben. Por tanto, no es un término.

3. $g(X, f(d, Z), d)$ sabemos que $g \in \mathcal{F}$ y su aridad es 3, es decir se puede escribir que g toma t_1, t_2, t_3 y $g(t_1, t_2, t_3)$ es término. Donde $t_1 = X, t_2 = f(d, Z), t_3 = d$ analizamos cada uno de ellos para confirmar que sean términos : X es una variable y por tanto es un término, $f(d, Z) \in \mathcal{F}$ con aridad 2, por tanto $f(t'_1, t'_2)$ es término (en este caso $t'_1 = d, t'_2 = Z$ ambos términos bien formados) y finalmente $t_3 = d$. Concluimos que el es término.

4. $g(X, h(Y, Z), d)$ con el razonamiento anterior, vemos que $t_2 = h(Y, Z)$ pero el problema es que $h \notin \mathcal{F}$. Concluimos que no es término.

5. $f(f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d)), g(d, d)), g(f(d, d, X), d), Z)$ sabemos que X, Y, Z son variables y por tanto, términos válidos. También sabemos que la aridad de d es 0 (constante) y por tanto un término válido. Dentro de la f tenemos $(f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d)), g(d, d)), g(f(d, d, X), d), Z)$ donde podemos definir $t_1 = f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d)), g(d, d))$ $t_2 = g(f(d, d, X), d)$ y $t_3 = Z$. Decimos entonces que t_3 es válido. Pero miremos t_1 y t_2

   - $t_1 = f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d)), g(d, d))$ dentro tenemos $t_{1_1} = g(d, X), t_{1_2} = f(g(d, X), Y, g(Y, d))$ y $t_{1_3} = g(d, d)$. Miramos dentro de cada uno de ellos : t_{1_1} no es válido ya que la aridad de g es 3 y aquí sólo toma dos términos (que por cierto, son válidos); t_{1_2} está formado por $t_{1_{2_1}} = g(d, X), t_{1_{2_2}} = Y, t_{1_{2_3}} = g(Y, d)$ donde sólo $t_{1_{2_2}}$ está bien formado, el resto la aridad de g no se corresponde con la cantidad de argumentos que toma; t_{1_3} está mal formado ya que la aridad de g es 3 y en este caso toma dos constantes d.
   - t_2 está formado por $t_{2_1} = f(d, d, X), t_{2_2} = d$ pero, t_{2_1} está mal formado ya que la aridad de f es 2 y aquí recibe 3 términos (válidos), para el caso de t_{2_2} está bien formado.

   Finalmente, concluimos que el término está mal formado en muchas partes, y en particular en su expresión más grande que es $f(t_1, t_2, t_3)$ ya que la aridad de f es 2.

1.2 Ejercicio 2

Nos piden decidir cuáles de las siguientes son fórmulas. Sean c una constante, f un símbolo de función de aridad 1 y S y B dos símbolos de predicado binarios (aridad 2). Recordemos : **una fórmula atómica es una expresión de la forma $\mathbf{P}(t_1, \ldots, t_n)$ donde P es un símbolo de predicado de aridad n y cada t_i es un término**

1. $S(c, X)$ es una fórmula atómica válida ya que $S(t_1, t_2)$ es fórmula si t_1 y t_2 son términos, en este caso, $t_1 = c$ y $t_2 = X$ ambos términos válidos y S es símbolo de predicado

2. $B(c, f(c))$ escribimos a $B(t_1, t_2)$ con $t_1 = c$ y $t_2 = f(c)$, se cumple la aridad de B que es símbolo de predicado. En este caso, t_1 es un término válido. t_2 está formado por $f(c)$ donde $f(t'_1)$ es un término válido, ya que sólo recibe c como argumento, cumpliendo la aridad de f. Esta es una fórmula.

3. $f(c)$ f no es símbolo de predicado, con lo cual no es una fórmula.

4. $B(B(c, X), Y)$ el problema acá es que el predicado toma otro predicado, por tanto no es fórmula.

5. $S(B(c), Z)$ lo reescribimos como $S(t_1, t_2)$ cumple la aridad de S. Tenemos que ver que sean términos válidos :$t_1 = B(c)$ pero sabemos que B tiene aridad 2, por tanto t_1 no es un término ; $t_2 = Z$ es un término válido. Concluimos que no es una fórmula atómica.

6. $(B(X, Y) \Rightarrow (\exists Z.S(Z, Y)))$ lo podemos abstraer a $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$ para analizar la fórmula. Tomamos $\sigma_1 = B(X, Y)$ donde $B(t_1, t_2)$ y $t_1 = X, t_2 = Y$ son dos variables y por tanto σ_1 es un término válido. Veamos $\sigma_2 = \exists Z.S(Z, Y)$ donde podemos reescribir como $\sigma_2 = \exists Z.\sigma'_2$ y analizar si σ'_2 es un término válido. $\sigma'_2 = S(Z, Y)$ donde $S(t'_1, t'_2)$ es un término si tanto t'_1 como t'_2 lo son. Afortunadamente, $t'_1 = Z, t'_2 = Y$ ambas variables y por tanto términos, se cumple la aridad de S y por tanto, σ_2 es término. Concluimos entonces que $(B(X, Y) \Rightarrow (\exists Z.S(Z, Y)))$ es una fórmula atómica

7. $(S(X,Y) \Rightarrow S(Y, f(f(X))))$ reescribimos como $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$ donde $\sigma_1 = S(X,Y)$ un término válido (ya que X e Y son variables) ; $\sigma_2 = S(Y, f(f(X)))$ que reescrito, $\sigma_2 = S(t_1, t_2)$ donde $t_1 = Y$ un término válido y $t_2 = f(f(X))$ no hay problema acá con la aridad de f ya que $t_2 = f(t_2')$ donde $t_2' = f(X)$ que es un término dado que f toma la variable X respetando su aridad. Concluimos que t_2 es un término valido y por ello σ_2 . Como consecuencia, $(S(X,Y) \Rightarrow S(Y, f(f(X))))$ es una fórmula atómica.

8. $B(X,Y) \Rightarrow f(X)$ reescrito $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$ donde $\sigma_1 = B(X,Y)$ es un término ya que la aridad de B es 2 y tanto X como Y son variables, ergo términos válidos ; $\sigma_2 = f(X)$ es un símbolo de función no de predicado. Por tanto, concluimos que $B(X,Y) \Rightarrow f(X)$ no es una fórmula atómica.

9. $S(X, f(Y)) \wedge B(X,Y)$ queremos reescribirlo como $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ donde $\sigma_1 = S(X, f(y))$ que podemos reescribir como $\sigma_1 = S(t_1, t_2)$ y por tanto vale la aridad de S, y , $t_1 = X$ un término válido, $t_2 = f(Y)$ que corresponde a la aridad de f y por tanto t_2 es un término válido ya que Y es una variable ; $\sigma_2 = B(X,Y)$ que reescrito como $\sigma_2 = B(t_1', t_2')$ cumple la aridad de B y $t_1' = X, t_2' = Y$ cumplen ser términos válidos. Concluimos entonces que $S(X, f(Y)) \wedge B(X,Y)$ es una fórmula atómica.

10. $\forall X.B(X, f(X))$ lo reescribimos como $\forall X.\sigma$ donde $\sigma = B(t_1, t_2)$ que respeta la aridad de B, ahora queremos ver si $t_1 = X, t_2 = f(X)$ son términos. Como t_1 sólo representa una variable, es un término válido. Por otro lado, $t_2 = f(t_1')$ respeta la aridad de f y en particular $t_1' = X$ una variable, por tanto t_2 es término. Concluimos que $\forall X.B(X, f(X))$ es una fórmula.

11. $\exists X.B(Y, X(c))$ podemos escribirla como $\exists X.\sigma$ donde $\sigma = B(Y, X(c))$ que reescrito como $\sigma = B(t_1, t_2)$ vemos que corresponde la aridad de B, tenemos que constatar que tanto t_1 como t_2 sean términos. $t_1 = Y$ lo cual es un término válido. $t_2 = X(c)$ el problema es que la variable X no está definida como símbolo de función y por tanto, no corresponde a un término válido. Como conclusión, $\exists X.B(Y, X(c))$ no es una fórmula atómica.

1.3 Ejercicio 3

Sea $\sigma = \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,Z)$

1. Podemos reescribir σ con paréntesis para poder detectar cuáles están ligadas y en qué scope como sigue : $\sigma = ((\exists X.P(Y,Z)) \wedge (\forall Y.\neg Q(Y,X))) \vee P(Y,Z)$ con esto en mente podríamos reescribir $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$ donde $\sigma_1 = (\exists X.P(Y,Z)) \wedge (\forall Y.\neg Q(Y,X))$ que a su vez $\sigma_1 = \sigma_{1_1} \wedge \sigma_{1_2}$ donde $\sigma_{1_1} = \exists X.P(Y,Z)$ este término tiene ligada al cuantificador la variable X y aparecen libres Y, Z. Por otra parte, $\sigma_{1_2} = \forall Y.\neg Q(Y,X)$ contiene ligada la variable Y al cuantificador universal pero aparece libre X. Finalmente, en σ_2, tanto Y como Z aparecen libres.
   Esta bueno pensar que `la conjunción es como una multiplicación y la disyunción como una adición` para poder detectar este "scope".

2. Nos piden hacer sustituciones en σ. Recordar que las sustituciones se hacen donde la variable aparece libre.

   - $\sigma\{X := W\}$
   $$\begin{aligned} \sigma =& \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,Z) \\ & \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,Z)\{X := W\} \\ \overset{\{X:=W\}}{\equiv} & \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,W) \vee P(Y,Z) \end{aligned}$$

   - $\sigma\{Y := W\}$
   $$\begin{aligned} \sigma =& \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,Z) \\ & \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,Z)\{Y := W\} \\ \overset{\{Y:=W\}}{\equiv} & \exists X.P(W,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(W,Z) \end{aligned}$$

   - $\sigma\{Y := f(X)\}$ tenemos que renombrar ya que sino, se produce captura. $\sigma\{Y := f(X')\}$
   $$\begin{aligned} \sigma =& \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,Z) \\ & \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,Z)\{Y := f(X')\} \\ \overset{\{Y:=f(X')\}}{\equiv} & \exists X.P(f(X'),Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(f(X'),Z) \end{aligned}$$

   - $\sigma\{Z := g(Y,Z)\}$
   $$\begin{aligned} \sigma =& \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,Z) \\ & \exists X.P(Y,Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,Z)\{Z := g(Y,Z)\} \\ \overset{\{Z:=g(Y,Z)\}}{\equiv} & \exists X.P(Y,g(Y,Z)) \wedge \forall Y.\neg Q(Y,X) \vee P(Y,g(Y,Z)) \end{aligned}$$

1.4 Ejercicio 4

Dada $\sigma = \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)$

1. Podemos reescribir $\sigma = \neg\sigma'$ donde $\sigma' = \forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)$ que podemos reescribir como $\sigma' = \sigma_1' \wedge \sigma_2'$ y separar los casos de análisis en $\sigma_1' = \forall X.\sigma_1''$ con $\sigma_1'' = \exists Y.\sigma_1'''$ donde $\sigma_1''' = P(X,Y,Z)$ y concluir que en σ_1' tenemos a X, Y ligadas por un cuantificador universal y existencial respectivamente, dejando libre a la variable Z. Por el otro lado, $\sigma_2' = \forall Z.\sigma_2''$ la podemos analizar como $\sigma_2'' = P(X,Y,Z)$ y concluir que sólo está ligada por el cuantificador universal la variable Z y tanto X como Y aparecen libres.

2. Nos piden hacer sustituciones en σ

   - $\sigma\{X := g(f(g(Y,Y)),Y)\}$

$$\begin{aligned}\sigma =& \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)\\ & \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)\{X := g(f(g(Y,Y)),Y)\}\\ \equiv& \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(g(f(g(Y,Y)),Y),Y,Z)\end{aligned}$$

   - $\sigma\{Y := g(f(g(Y,Y)),Y)\}$

$$\begin{aligned}\sigma =& \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)\\ & \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)\{Y := g(f(g(Y,Y)),Y)\}\\ \equiv& \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,g(f(g(Y,Y)),Y),Z)\end{aligned}$$

   - $\sigma\{Z := g(f(g(Y,Y)),Y)\}$ tenemos que renombrar para no capturar

$$\begin{aligned}\sigma =& \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)\\ & \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)\{Z := g(f(g(Y,Y)),Y)\}\\ \equiv& \neg\forall X.(\exists Y'.P(X,Y',g(f(g(Y,Y)),Y))) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)\end{aligned}$$

3. Nos piden hacer sustituciones en σ. Tenemos que renombrar

   - $\sigma\{X := g(f(g(Y,Y)),Y), Y := g(f(g(Y,Y)),Y), Z := g(f(g(Y,Y)),Y)\}$

$$\begin{aligned}\sigma =& \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)\\ & \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)\{X := g(f(g(Y,Y)),Y)\}\\ \equiv& \neg\forall X.(\exists Y'.P(X,Y',g(f(g(Y,Y)),Y))) \wedge \forall Z.P(g(f(g(Y,Y)),Y),g(f(g(Y,Y)),Y),Z)\end{aligned}$$

4. Nos piden hacer sustituciones en σ. Aplicar una composición quiere decir que tenemos que aplicar de derecha a izquierda las sustituciones, por tanto renombramos las ligadas

   - $\sigma(\{X := g(f(g(Y,Y)),Y)\} \circ \{Y := g(f(g(Y,Y)),Y)\} \circ \{Z := g(f(g(Y,Y)),Y)\})$

$$\begin{aligned}\sigma =& \neg\forall X'.(\exists Y'.P(X',Y',Z)) \wedge \forall Z'.P(X,Y,Z')\\ & \neg\forall X'.(\exists Y'.P(X',Y',Z)) \wedge \forall Z'.P(X,Y,Z')\\ \equiv& \neg\forall X'.(\exists Y'.P(X',Y',g(f(g(Y,Y)),Y))) \wedge \forall Z'.P(g(f(g(Y,Y)),Y),g(f(g(Y,Y)),Y),Z')\end{aligned}$$

2 Unificación

2.1 Ejercicio 5

Tenemos que unir las expresiones que unifican entre sí, para ellas exhibir el mgu. Asumimos que a es una constante, X, Y, Z variables, f, g son símbolos de función y P, Q predicados.

- $P(f(X))$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
  - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos ya que no existe sustitución posible
  - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ podemos sustituir por $\{X := a\}$ por tanto, unifica y el mgu es $S = \{X := a\}$
  - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no podemos ya que no existe sustitución posible
  - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y),X)$ no podemos ya que no existe sustitución posible

- $P(f(X)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos ya que no existe sustitución posible
- $P(f(X)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos ya que no existe sustitución posible
- $P(f(X)) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos ya que no existe sustitución posible
- $P(f(X)) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos ya que no existe sustitución posible

- $P(a)$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
  - $P(a) \stackrel{?}{=} P(X)$ con $\{X := a\}$ podemos unificar, por tanto el mgu es $S = \{X := a\}$
  - $P(a) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no hay sustitución posible
  - $P(a) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no hay sustitución posible
  - $P(a) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ no hay sustitución posible
  - $P(a) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no hay sustitución posible
  - $P(a) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no hay sustitución posible
  - $P(a) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no hay sustitución posible
  - $P(a) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no hay sustitución posible
- $P(Y)$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
  - $P(Y) \stackrel{?}{=} P(X)$ podemos sustituir por $\{X := Y\}$ como consecuencia, el mgu es $S = \{X := Y\}$
  - $P(Y) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ podemos sustituir por $\{Y := f(a)\}$ y este será el mgu
  - $P(Y) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ podemos sustituir por $\{Y := g(Z)\}$ y este será el mgu
  - $P(Y) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ no podemos sustituir
  - $P(Y) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
  - $P(Y) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos unificar
  - $P(Y) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos unificar
  - $P(Y) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Y))$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
  - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ podemos sustituir por $\{X := f(Y)\}$ dando el mgu $S = \{X := f(Y)\}$
  - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Z))$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
  - $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ podemos sustituir $\{Y := Z\}$ y luego $\{X := f(Z)\}$ dando un mgu $S = S_2 \circ S_1 = \{X := f(Z), Y := Z\}$

- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ podemos unificar con $\{X := f(Y)\}$ y luego $\{Z := X\}$ dando un mgu $S = S_2 \circ S_1 = \{Z := X, X := f(Y)\}$
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ podemos unificar con $\{X := f(Y)\}$ y luego $\{Y := f(Z)\}$ dando un mgu $S = S_2 \circ S_1 = \{Y := f(Z), X := f(Y)\}$
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos unificar

- $Q(X, f(a))$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
  - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ podemos sustituir $\{X := f(a)\}$ y luego $\{Y := a\}$ dando como mgu $S = S_2 \circ S_1 = \{Y := a, X := f(a)\}$
  - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X)))$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ podemos sustituir con $\{X := f(Y)\}$ y luego $\{Y := f(a)\}$ como mgu nos queda $S = S_2 \circ S_1 = \{Y := f(a), X := f(Y)\}$
  - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos unificar
  - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos unificar
- X con cuáles expresiones podemos unificar ?
  - $X \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
  - $X \stackrel{?}{=} P(f(a))$ sustituimos $\{X := P(f(a))\}$ y este es el mgu
  - $X \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ sustituimos $\{X := P(g(Z))\}$ y este es el mgu
  - $X \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ no podemos unificar
  - $X \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
  - $X \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ sustituimos $\{X := Q(f(Y), Y)\}$ y este es el mgu
  - $X \stackrel{?}{=} f(f(c))$ sustituimos por $\{X := f(f(c))\}$ y este es el mgu
  - $X \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ sustituimos por $\{X := f(g(Y))\}$ y este es el mgu
- $f(X)$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
  - $f(X) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
  - $f(X) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no podemos unificar
  - $f(X) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no podemos unificar
  - $f(X) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ no podemos unificar
  - $f(X) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
  - $f(X) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos unificar
  - $f(X) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ sustituimos por $\{X := f(c)\}$ este es el mgu
  - $f(X) \stackrel{?}{=} f(g(Z))$ sustituimos por $\{X := g(Z)\}$ este es el mgu

2.2 Ejericicio 6

Determinar con el algoritmo de Martelli-Montanari si las siguientes expresiones se pueden unificar

1. $f(X, X, Y) \stackrel{?}{=} f(a, b, Z)$

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{f(X, X, Y) \stackrel{?}{=} f(a, b, Z)\} \\
\texttt{decompose} &: \{X \stackrel{?}{=} a, X \stackrel{?}{=} b, Y \stackrel{?}{=} Z\} \\
\texttt{elim var} &: \{X \stackrel{?}{=} a, X \stackrel{?}{=} b\} \texttt{ con S1 = } \{Y := Z\} \\
\texttt{colision} &: \textbf{falla}
\end{aligned}$$

Las expresiones no se pueden unificar.

2. $Y \stackrel{?}{=} f(X)$

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{Y \stackrel{?}{=} f(X)\} \\
\texttt{elim var} &: \emptyset \texttt{ con S1 = } \{Y := f(X)\ \}
\end{aligned}$$

La expresión se puede unificar y el mgu es $S = S_1 = \{Y := f(X)\}$

3. $f(g(c, Y), X) \stackrel{?}{=} f(Z, g(Z, a))$

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{f(g(c, Y), X) \stackrel{?}{=} f(Z, g(Z, a))\} \\
\texttt{decompose} &: \{g(c, Y) \stackrel{?}{=} Z, X \stackrel{?}{=} g(Z, a)\} \\
\texttt{elim var} &: \{X \stackrel{?}{=} g(g(c, Y), a)\} \texttt{ con S1 = } \{Z := g(c, Y)\} \\
\texttt{elim var} &: \emptyset \texttt{ con S2 = } \{X := g(g(c, Y), a)\}
\end{aligned}$$

Por tanto, la expresión se puede unificar, donde el mgu es

$$S = S_2 \circ S_1 = \{X := g(g(c, Y), a), Z := g(c, Y)\}$$

4. $f(a) \stackrel{?}{=} g(Y)$

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{f(a) \stackrel{?}{=} g(Y)\} \\
\texttt{colision} &: \textbf{falla}
\end{aligned}$$

5. $f(X) \stackrel{?}{=} X$

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{f(X) \stackrel{?}{=} X\} \\
\texttt{occurs check} &: \textbf{falla}
\end{aligned}$$

6. $g(X, Y) \stackrel{?}{=} g(f(Y), f(X))$

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{g(X, Y) \stackrel{?}{=} g(f(Y), f(X))\} \\
\texttt{decompose} &: \{X \stackrel{?}{=} f(Y), Y \stackrel{?}{=} f(X)\} \\
\texttt{elim var} &: \{Y \stackrel{?}{=} f(f(Y))\} \texttt{ con S1 =} \{X := f(Y)\} \\
\texttt{occurs check} &: \textbf{falla}
\end{aligned}$$

2.3 Ejercicio 8

Sean las constantes `Nat` y `Bool`, y la función binaria $\rightarrow$ (representada como un operador infijo). Determinar el resultado de aplicar el algoritmo MGU (*most general unifier*) sobre las ecuaciones planteadas a continuación. En caso de tener éxito, mostrar la sustitución resultante.

1. $MGU\{T_1 \to T_2 \doteq Nat \to Bool\}$

$$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{T_1 \to T_2 \stackrel{?}{=} Nat \to Bool\} \\ \texttt{decompose} &: \{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, T_2 \stackrel{?}{=} Bool\} \\ \texttt{elim var} &: \{T_2 \stackrel{?}{=} Bool\} \texttt{ con S1 = } \{T_1 := Nat\} \\ \texttt{elim var} &: \emptyset \texttt{ con S2 = } \{T_2 := Bool\} \end{aligned}$$

Dicho esto,

$$S = S_2 \circ S_1 = \{T_2 := Bool, T_1 := Nat\}$$

2. $MGU\{T_1 \to T_2 \doteq T_3\}$

$$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{T_1 \to T_2 \stackrel{?}{=} T_3\} \\ \texttt{elim var} &: \emptyset \texttt{ con S1 = } \{T_3 := T_1 \to T_2\} \end{aligned}$$

Entonces

$$S = S1 = \{T_3 := T_1 \to T_2\}$$

3. $MGU\{T_1 \to T_2 \doteq T_2\}$

$$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{T_1 \to T_2 \stackrel{?}{=} T_2\} \\ \texttt{occurs check} &: \textbf{falla} \end{aligned}$$

4. $MGU\{(T_2 \to T_1) \to Bool \doteq T_2 \to T_3\}$

$$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{(T_2 \to T_1) \to Bool \stackrel{?}{=} T_2 \to T_3\} \\ \texttt{decompose} &: \{(T_2 \to T_1) \stackrel{?}{=} T_2, Bool \stackrel{?}{=} T_3\} \\ \texttt{elim var} &: \{(T_2 \to T_1) \stackrel{?}{=} T_2\} \texttt{ con S1 = } \{T_3 := Bool\} \\ \texttt{occurs check} &: \textbf{falla} \end{aligned}$$

5. $MGU\{T_2 \to T_1 \to Bool \doteq T_2 \to T_3\}$

$$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{T_2 \to T_1 \to Bool \stackrel{?}{=} T_2 \to T_3\} \\ \texttt{decompose} &: \{T_2 \stackrel{?}{=} T_2, T_1 \to Bool \stackrel{?}{=} T_3\} \\ \texttt{elim triv} &: \{T_1 \to Bool \stackrel{?}{=} T_3\} \\ \texttt{elim var} &: \emptyset \texttt{ con S1 = } \{T_3 := T_1 \to Bool\} \end{aligned}$$

Con esto

$$S = S1 = \{T_3 := T_1 \to Bool\}$$

6. $MGU\{T_1 \to Bool \doteq Nat \to Bool, T_1 \doteq T_2 \to T_3\}$

$$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{T_1 \to Bool \stackrel{?}{=} Nat \to Bool, T_1 \stackrel{?}{=} T_2 \to T_3\} \\ \texttt{decompose} &: \{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, Bool \stackrel{?}{=} Bool, T_1 \stackrel{?}{=} T_2 \to T_3\} \\ \texttt{elim triv} &: \{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, T_1 \stackrel{?}{=} T_2 \to T_3\} \\ \texttt{colision} &: \textbf{falla} \end{aligned}$$

7. $MGU\{T_1 \to Bool \doteq Nat \to Bool, T_2 \doteq T_1 \to T_1\}$

$$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{T_1 \to Bool \stackrel{?}{=} Nat \to Bool, T_2 \stackrel{?}{=} T_1 \to T_1\} \\ \texttt{decompose} &: \{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, Bool \stackrel{?}{=} Bool, T_2 \stackrel{?}{=} T_1 \to T_1\} \\ \texttt{elim triv} &: \{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, T_2 \stackrel{?}{=} T_1 \to T_1\} \\ \texttt{elim var} &: \{T_2 \stackrel{?}{=} Nat \to Nat\} \texttt{ con S1 =} \{T_1 := Nat\} \\ \texttt{elim var} &: \emptyset \texttt{ con S2 =} \{T_2 := Nat \to Nat\} \end{aligned}$$

Con esto,

$$S = S_2 \circ S_1 = \{T_2 := Nat \to Nat, T_1 := Nat\}$$

8. $MGU\{T_1 \to T_2 \doteq T_3 \to T_4, T_3 \doteq T_2 \to T_1\}$

$$
\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{T_1 \to T_2 \stackrel{?}{=} T_3 \to T_4, T_3 \stackrel{?}{=} T_2 \to T_1\} \\
\texttt{decompose} &: \{T_1 \stackrel{?}{=} T_3, T_2 \stackrel{?}{=} T_4, T_3 \stackrel{?}{=} T_2 \to T_1\} \\
\texttt{elim var} &: \{T_1 \stackrel{?}{=} T_3, T_3 \stackrel{?}{=} T_4 \to T_1\} \texttt{ con S1 = } \{T_2 := T_4\} \\
\texttt{elim var} &: \{T_3 \stackrel{?}{=} T_4 \to T_3\} \texttt{ con S1 = } \{T_1 := T_3\} \\
\texttt{ocurs check} &: \textbf{falla}
\end{aligned}
$$

3 Deducción Natural

3.1 Ejercicio 9

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas, sin usar princnipios de razonamiento clásico, salvo que se indique lo contrario:

1. Intercambio ($\forall$): $\forall X.\forall Y.P(X,Y) \Leftrightarrow \forall Y.\forall X.P(X,Y)$

   - Arrancamos con la ida : $\implies$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\forall X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash \forall X.\forall Y.P(X,Y)}\,ax}{(\forall X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash \forall Y.P(x,Y)}\,\forall_e}{(\forall X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash P(x,y)}\,\forall_e}{(\forall X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash \forall X.P(X,y)}\,\forall_i}{(\forall X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash \forall Y.\forall X.P(X,Y)}\,\forall_i}{\vdash \forall X.\forall Y.P(X,Y) \implies \forall Y.\forall X.P(X,Y)}\,\Rightarrow_i
$$

   - Vamos con la vuelta : $\impliedby$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\forall Y.\forall X.P(X,Y)) \vdash \forall Y.\forall X.P(X,Y)}\,ax}{(\forall Y.\forall X.P(X,Y)) \vdash \forall X.P(X,y)}\,\forall_e}{(\forall Y.\forall X.P(X,Y)) \vdash P(x,y)}\,\forall_e}{(\forall Y.\forall X.P(X,Y)) \vdash \forall Y.P(x,Y)}\,\forall_i}{(\forall Y.\forall X.P(X,Y)) \vdash \forall X.\forall Y.P(X,Y)}\,\forall_i}{\vdash \forall Y.\forall X.P(X,Y) \implies \forall X.\forall Y.P(X,Y)}\,\Rightarrow_i
$$

2. Intercambio ($\exists$): $\exists X.\exists Y.P(X,Y) \Leftrightarrow \exists Y.\exists X.P(X,Y)$

   - Ida $\implies$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \exists X.\exists Y.P(X,Y)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \exists Y.P(x,Y)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma', P(x,y) \vdash P(x,y)}\,ax}{\Gamma', P(x,y) \vdash \exists X.P(X,y)}\,\exists_i}{\Gamma', P(x,y) \vdash \exists Y.\exists X.P(X,Y)}\,\exists_i}{\Gamma, (\exists Y.P(x,Y)) \vdash \exists Y.\exists X.P(X,Y)}\,\exists_e}{(\exists X.\exists Y.P(X,Y)) \vdash \exists Y.\exists X.P(X,Y)}\,\exists_e}{\vdash \exists X.\exists Y.P(X,Y) \Rightarrow \exists Y.\exists X.P(X,Y)}\,\Rightarrow_i
$$

   - Vuelta $\impliedby$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \exists Y.\exists X.P(X,Y)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \exists X.P(X,y)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma', P(x,y) \vdash P(x,y)}\,ax}{\Gamma', P(x,y) \vdash \exists Y.P(x,Y)}\,\exists_i}{\Gamma', P(x,y) \vdash \exists X.\exists Y.P(X,Y)}\,\exists_i}{\Gamma, (\exists X.P(X,y)) \vdash \exists X.\exists Y.P(X,Y)}\,\exists_e}{(\exists Y.\exists X.P(X,Y)) \vdash \exists X.\exists Y.P(X,Y)}\,\exists_e}{\vdash \exists Y.\exists X.P(X,Y) \Rightarrow \exists X.\exists Y.P(X,Y)}\,\Rightarrow_i
$$

3. Intercambio ($\exists/\forall$):$\exists X.\forall Y.P(X,Y) \Rightarrow \forall Y.\exists X.P(X,Y)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \exists X.\forall Y.P(X,Y)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma', \forall Y.P(x,Y) \vdash \forall Y.P(x,Y)}\,ax}{\Gamma', \forall Y.P(x,Y) \vdash P(x,y)}\,\forall_e}{\Gamma', \forall Y.P(x,Y) \vdash \exists X.P(X,y)}\,\exists_i}{\Gamma', \forall Y.P(x,Y) \vdash \forall Y.\exists X.P(X,Y)}\,\forall_i}{\Gamma, (\exists X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash \forall Y.\exists X.P(X,Y)}\,\exists_e}{\Gamma \vdash \exists X.\forall Y.P(X,Y) \Rightarrow \forall Y.\exists X.P(X,Y)}\,\Rightarrow_i
$$

4. Universal implica existencial:$\forall X.P(X) \Rightarrow \exists X.P(X)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall X.P(X)}\,ax}{\Gamma \vdash P(x)}\,\forall_e}{(\forall X.P(X)) \vdash \exists X.P(X)}\,\exists_i}{\vdash \forall X.P(X) \Rightarrow \exists X.P(X)}\,\Rightarrow_i
$$

5. Diagonal ($\forall$):$\forall X.\forall Y.P(X,Y) \Rightarrow \forall X.P(X,X)$ (chequear)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\forall X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash \forall X.\forall Y.P(X,Y)}\,ax}{(\forall X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash \forall Y.P(x,Y)}\,\forall_e}{(\forall X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash P(x,x)}\,\forall_e}{(\forall X.\forall Y.P(X,Y)) \vdash \forall X.P(X,X)}\,\forall_i}{\vdash \forall X.\forall Y.P(X,Y) \Rightarrow \forall X.P(X,X)}\,\Rightarrow_i
$$

6. Diagonal ($\exists$): $\exists X.P(X,X) \Rightarrow \exists X.\exists Y.P(X,Y)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \exists X.P(X,X)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(x,x) \vdash P(x,x)}\,ax}{\Gamma, P(x,x) \vdash \exists Y.P(x,Y)}\,\exists_i}{\Gamma, P(x,x) \vdash \exists X.\exists Y.P(X,Y)}\,\exists_i}{(\exists X.P(X,X)) \vdash \exists X.\exists Y.P(X,Y)}\,\exists_e}{\vdash \exists X.P(X,X) \Rightarrow \exists X.\exists Y.P(X,Y)}\,\Rightarrow_i
$$

7. De Morgan (I): $\neg\exists X.P(X) \Leftrightarrow \forall X.\neg P(X)$

   - Ida $\Longrightarrow$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(x) \vdash P(x)}\,ax}{\Gamma, P(x) \vdash \exists X.P(X)}\,\exists_i \qquad \dfrac{}{\Gamma, P(x) \vdash \neg\exists X.P(X)}\,ax}{\Gamma, P(x) \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma \vdash \neg P(x)}\,\neg_i}{\neg\exists X.P(X) \vdash \forall X.\neg P(X)}\,\forall_i}{\vdash \neg\exists X.P(X) \Rightarrow \forall X.\neg P(X)}\,\Rightarrow_i
$$

- Vuelta $\Longleftarrow$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \exists X.P(X)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma', P(x) \vdash \bot P(x)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma', P(x) \vdash \bot \forall X.\neg P(X)}\,ax}{\Gamma', P(x) \vdash \bot \neg P(x)}\,\forall_e}{\Gamma', P(x) \vdash \bot}\,\neg_e}{\dfrac{\Gamma, \exists X.P(X) \vdash \bot}{\dfrac{\forall X.\neg P(X) \vdash \neg \exists X.P(X)}{\vdash \forall X.\neg P(X) \Rightarrow \neg \exists X.P(X)}\,\Rightarrow_i}\,\neg_i}\,\exists_e$$

8. De Morgan (II): $\neg \forall X.P(X) \Leftrightarrow \exists X.\neg P(X)$
   Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

- Ida $\Longrightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma'' \vdash \neg \exists X.\neg P(X)}\,ax \qquad \dfrac{}{\Gamma' \vdash \neg \exists X.\neg P(X) \Rightarrow \forall X.\neg\neg P(X)}\,De\ Morgan\ I}{\Gamma, \neg \exists X.\neg P(X) \vdash \forall X.\neg\neg P(X)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, \neg \exists X.\neg P(X) \vdash P(X)}\,\forall_e}{\Gamma, \neg \exists X.\neg P(X) \vdash P(X)}\,\neg\neg_e}{\Gamma, \neg \exists X.\neg P(X) \vdash \forall X.P(X)}\,\forall_i \qquad \dfrac{}{\Gamma' \vdash \neg \forall X.P(X)}\,ax}{\dfrac{\neg \forall X.P(X), \neg \exists X.\neg P(X) \vdash \bot}{\dfrac{\neg \forall X.P(X) \vdash \exists X.\neg P(X)}{\vdash \neg \forall X.P(X) \Rightarrow \exists X.\neg P(X)}\,\Rightarrow_i}\,PBC}\,\neg_e$$

- Vuelta $\Longleftarrow$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \exists X.\neg P(X)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma', \neg P(x) \vdash \forall X.P(X)}\,ax}{\Gamma', \neg P(x) \vdash P(x)}\,\forall_e \qquad \dfrac{}{\Gamma', \neg P(x) \vdash \neg P(x)}\,ax}{\Gamma', \neg P(x) \vdash \bot}}{\dfrac{\Gamma, \forall X.P(X) \vdash \bot}{\dfrac{\exists X.\neg P(X) \vdash \neg \forall X.P(X)}{\vdash \exists X.\neg P(X) \Rightarrow \neg \forall X.P(X)}\,\Rightarrow_i}\,\neg_i}\,\exists_e$$

9. Universal/conjunción: $\forall X.(P(X) \wedge Q(X)) \Leftrightarrow (\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X))$

- Ida $\Longrightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall X.(P(X) \wedge Q(X))}\,ax}{\Gamma \vdash P(x) \wedge Q(x)}\,\forall_e}{\Gamma \vdash P(x)}\,\wedge_{e_1}}{\Gamma \vdash \forall X.P(X)}\,\forall_i \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall X.(P(X) \wedge Q(X))}\,ax}{\Gamma \vdash P(x) \wedge Q(x)}\,\forall_e}{\Gamma \vdash Q(x)}\,\wedge_{e_2}}{\Gamma \vdash \forall X.Q(X)}\,\forall_i}{\dfrac{\forall X.(P(X) \wedge Q(X) \vdash \forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X)}{\vdash \forall X.(P(X) \wedge Q(X)) \Rightarrow (\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X))}\,\Rightarrow_i}\,\wedge_i$$

- Vuelta $\Longleftarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X)}\,ax}{\Gamma \vdash \forall X.P(X)}\,\wedge_{e_1}}{\Gamma \vdash P(x)}\,\forall_e\ \texttt{con \{ X := x\}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X)}\,ax}{\Gamma \vdash \forall X.Q(X)}\,\wedge_{e_2}}{\Gamma \vdash Q(x)}\,\forall_e\ \texttt{con \{ X := x\}}}{\dfrac{\Gamma \vdash P(x) \wedge Q(x)}{\dfrac{(\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X)) \vdash \forall X.(P(X) \wedge Q(X))}{\vdash (\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X)) \Rightarrow \forall X.(P(X) \wedge Q(X))}\,\Rightarrow_i}\,\forall_i}\,\wedge_i$$

10. Universal/disyunción: $\forall X.(P(X) \vee \sigma) \Leftrightarrow (\forall X.P(X)) \vee \sigma$,
asumiendo que $X \notin \mathrm{fv}(\sigma)$.
Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

- Ida $\Longrightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \sigma \vee \neg\sigma}\,LEM \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \sigma \vdash \sigma}\,ax}{\Gamma, \sigma \vdash (\forall X.P(X)) \vee \sigma}\,\vee i_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg\sigma \vdash \forall X.(P(X) \vee \sigma)}{\Gamma, \neg\sigma \vdash P(x) \vee \sigma}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg\sigma, P(x) \vdash P(x)}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg\sigma, \sigma}}{\Gamma, \neg\sigma \vdash P(x)}}{\Gamma, \neg\sigma \vdash \forall X.P(X)}\,\forall_i}{\Gamma, \neg\sigma \vdash (\forall X.P(X)) \vee \sigma}\,\vee i_1}{\dfrac{\forall X.(P(X) \vee \sigma) \vdash (\forall X.P(X)) \vee \sigma}{\vdash \forall X.(P(X) \vee \sigma) \Rightarrow (\forall X.P(X)) \vee \sigma}\,\Rightarrow_i}$$

- Vuelta $\Longleftarrow$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (\forall X.P(X)) \vee \sigma}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \forall X.(P(X)}\,ax}{\Gamma' \vdash P(x)}\,\forall_e \ \texttt{con}\ \{\texttt{X := x}\}}{\Gamma' \vdash P(x) \vee \sigma}\,\vee_{i_1}}{\Gamma, (\forall X.P(X)) \vdash \forall X.(P(X) \vee \sigma)}\,\forall_i \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \sigma \vdash \sigma}\,ax}{\Gamma, \sigma \vdash P(x) \vee \sigma}\,\vee_{i_2}}{\Gamma, \sigma \vdash \forall X.(P(X) \vee \sigma)}\,\forall_i}{\dfrac{(\forall X.P(X)) \vee \sigma \vdash \forall X.(P(X) \vee \sigma)}{\vdash (\forall X.P(X)) \vee \sigma \Rightarrow \forall X.(P(X) \vee \sigma)}\,\Rightarrow_i}\,\vee_e$$

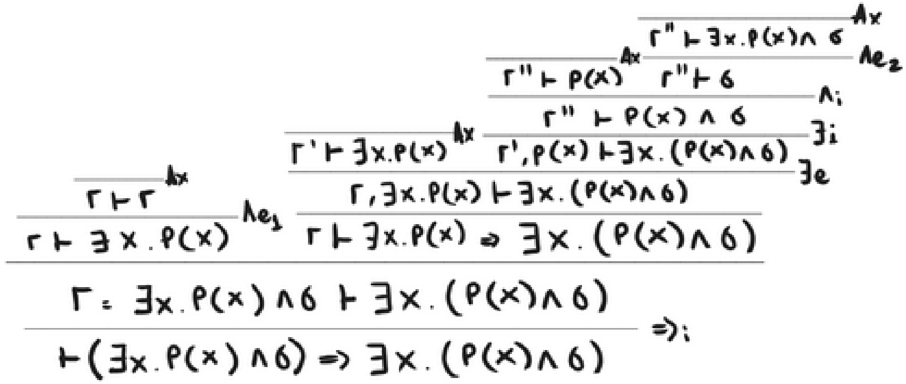
11. Existencial/disyunción: $\exists X.(P(X) \vee Q(X)) \Leftrightarrow (\exists X.P(X) \vee \exists X.Q(X))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Gamma}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash P(x) \vee Q(x)}\,Ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma', P(x) \vdash P(x)}\,Ax}{\Gamma', P(x) \vdash \exists x.P(x)}\,\exists_i \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma', Q(x) \vdash Q(x)}\,Ax}{\Gamma', Q(x) \vdash \exists x.Q(x)}\,\exists_i}{\Gamma, P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)}}{\Gamma = \exists x.(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)}\,\exists e}{\vdash \exists x.(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x))}\,\Rightarrow_i$$

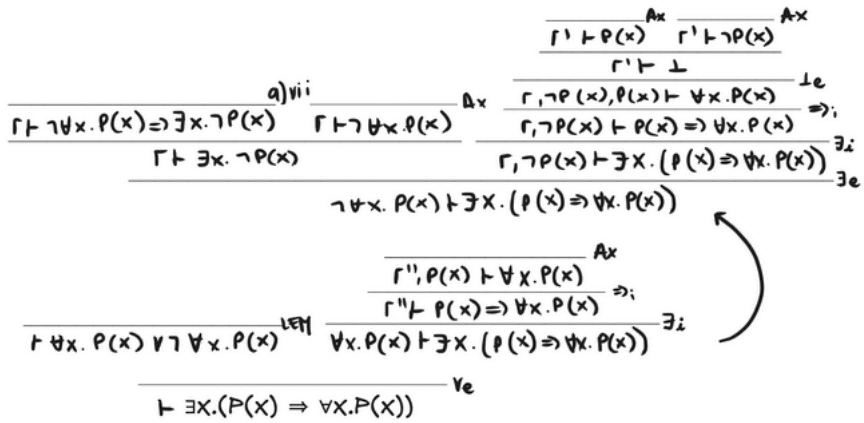
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Gamma}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \exists x.P(x) \vdash \exists x.P(x)}\,Ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash P(x)}\,Ax}{\Gamma' \vdash P(x) \vee Q(x)}\,\vee_{i_1}}{\Gamma, \exists x.P(x), P(x) \vdash \exists x.(P(x) \vee Q(x))}\,\exists_i}{\Gamma, \exists x.P(x) \vdash \exists x.(P(x) \vee Q(x))}\,\exists e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \exists x.Q(x) \vdash \exists x.Q(x)}\,Ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma'' \vdash Q(x)}\,Ax}{\Gamma'' \vdash P(x) \vee Q(x)}\,\vee_{i_2}}{\Gamma, \exists x.Q(x), Q(x) \vdash \exists x.(P(x) \vee Q(x))}\,\exists_i}{\Gamma, \exists x.Q(x) \vdash \exists x.(P(x) \vee Q(x))}\,\exists e}{\Gamma = \exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x) \vdash \exists x.(P(x) \vee Q(x))}\,\vee e}{\vdash (\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)) \Rightarrow \exists x.(P(x) \vee Q(x))}\,\Rightarrow_i$$

12. Existencial/conjunción: $\exists X.(P(X) \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\exists X.P(X) \wedge \sigma)$,
asumiendo que $X \notin \mathrm{fv}(\sigma)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Gamma}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(x) \wedge \sigma \vdash P(x) \wedge \sigma}\,Ax}{\Gamma, P(x) \wedge \sigma \vdash P(x)}\,\wedge e_1}{\Gamma, P(x) \wedge \sigma \vdash \exists x.P(x)}\,\exists i}{\Gamma \vdash \exists x.P(x)}\,\exists e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Gamma}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(x) \wedge \sigma \vdash P(x) \wedge \sigma}\,Ax}{\Gamma, P(x) \wedge \sigma \vdash \sigma}\,\wedge e_2}{\Gamma \vdash \sigma}\,\exists e}{\Gamma = \exists x.(P(x) \wedge \sigma) \vdash \exists x.P(x) \wedge \sigma}\,\wedge_i}{\vdash \exists x.(P(x) \wedge \sigma) \Rightarrow (\exists x.P(x) \wedge \sigma)}\,\Rightarrow_i$$



13. Principio del bebedor: $\exists X.(P(X) \Rightarrow \forall X.P(X))$
    En este ítem es necesario usar principios de razonamiento clásicos.



3.2 Ejercicio 10

Demostrar en deducción natural : $(\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \Rightarrow (\forall X.R(X, f(f(X))))$ (cchequear)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma, (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \vdash \forall X.\forall Y.R(X, f(Y)))}\ ax}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \vdash \forall Y.R(x, f(Y)))}\ \forall_e \quad \texttt{con \{ X := x\}}}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \vdash R(x, f(f(x)))}\ \forall_e \quad \texttt{con \{ Y := f(x)\}}}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \vdash \forall X.R(X, f(f(X)))}\ \forall_i}{\Gamma \vdash (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \Rightarrow (\forall X.R(X, f(f(X))))}\ \Rightarrow_i
$$

4 Semántica

4.1 Ejercicio 13

Sea L el lenguaje de primer orden que incluye (junto con las variables, conectivos y cuantificadores) la constante a_1, el símbolo de función f de aridad 2 y el símbolo de predicado P de aridad 2. Sea σ la fórmula:

$$\forall X_1 \, \forall X_2 \, (P(f(X_1, X_2), a_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$$

Definamos una interpretación $\mathcal{I}$ para L como sigue: $D_{\mathcal{I}}$ *es* $\mathbb{Z}$, $\overline{a_1} = 0$, $\overline{f}(X, Y) = X - Y$, y $\overline{P}(X, Y)$ es $X < Y$.

1. Escribir la interpretación de σ en castellano.
   La interpretación de la fórmula en castellano es la siguiente : ”para toda variable del dominio X_1 y X_2 si vale que la diferencia entre las variables es menor que cero entonces, en particular vale que X_1 es menor que X_2”

2. ¿El enunciado es verdadero o falso?
   El enunciado es verdadero bajo la interpretación definida.

3. Hallar una interpretación de σ en la cual el enunciado tenga el valor de verdad opuesto.
   Si proponemos una interepretación $\mathcal{I}'$ para $\mathcal{L}$ donde $D_{\mathcal{I}'}$ es $\mathbb{Z}$, $\overline{a_1} = 0$, $\overline{f}(X,Y) = X + Y$, y $\overline{P}(X,Y)$ es un predicado que define la igualdad. Bajo esta nueva interpretación, la fórmula σ es falsa.

4.2 Ejercicio 14

Sea $\mathbb{N}$ la interpretación aritmética donde $D_{\mathcal{I}} = \mathbb{N}$ y:

$\overline{c}^0$ es 0

$\overline{P}^2$ es $=$

$\overline{f}_1^1$ $es\ la\ función\ sucesor$

$\overline{f}_2^2$ $es\ la\ suma\ +$

$\overline{f}_3^2$ $es\ el\ producto\times$

Hallar, si es posible, asignaciones que **satisfagan** y que **no satisfagan** las siguientes fórmulas:

1. $P(f_2(X_1, X_1), f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))$
   Sea $a : var \to \mathbb{N}$. $\quad a(X_1) = n \in \mathbb{N}$

   $$P(f_2(X_1, X_1), f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))$$
   $$a(f_2(X_1, X_1) = a(f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))$$
   $$a(X_1) + a(X_1) = (a(X_1) + 1) \times (a(X_1) + 1)$$

   $\mathbb{N} \models_a P(f_2(X_1, X_1), f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))$ `vale ...`
   $\iff a(X_1) + a(X_1) = (a(X_1) + 1) \times (a(X_1) + 1)$
   $\iff 2n = n^2 + 2n + 1 \quad i.e \quad n^2 + 1 = 0$

   No está definida la raíz en $\mathbb{N}$, por tanto, no hay asignación que satisfaga.

2. $P(f_2(X_1, c), X_2) \Rightarrow P(f_2(X_1, X_2), X_3)$
   Sea $a : var \to \mathbb{N}$. $\quad a(X_1) = n \in \mathbb{N}, \quad a(X_2) = s \in \mathbb{N}, \quad a(X_3) = t \in \mathbb{N}, \quad a(c) = 0 \in \mathbb{N}$

   $$P(f_2(X_1, c), X_2) \Rightarrow P(f_2(X_1, X_2), X_3)$$
   $$((a(X_1) + a(c)) = a(X_2)) \Rightarrow (a(X_1) + a(X_2) = a(X_3))$$

   $\mathbb{N} \models_a P(f_2(X_1, c), X_2) \Rightarrow P(f_2(X_1, X_2), X_3)$ `vale ...`
   $\iff ((a(X_1) + a(c)) = a(X_2)) \Rightarrow (a(X_1) + a(X_2) = a(X_3))$
   $\iff n + 0 = s \Rightarrow n + s = t$
   $\iff n = s \Rightarrow s + s = t$
   $\iff n = s \Rightarrow 2s = t$

   Existe asignación que satisfaga. $n = 1 = s \wedge t = 2$

3. $\neg P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))$ Sea $a : var \to \mathbb{N}$. $\quad a(X_1) = n \in \mathbb{N}, \quad a(X_2) = s \in \mathbb{N}, \quad a(X_3) = t \in \mathbb{N}, \quad a(c) = 0 \in \mathbb{N}$

   $$\neg P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))$$
   $$a(X_1) \times a(X_2) \neq a(X_2) \times a(X_3)$$

   $\mathbb{N} \models_a \neg P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))$ `vale ...`
   $\iff a(X_1) \times a(X_2) \neq a(X_2) \times a(X_3)$
   $\iff n \times s \neq s \times t$
   $\iff n \neq t$

   Existe asignación que satisfaga.

4. $\forall X_1.\, P(f_3(X_1, X_2), X_3)$ Sea $a : var \to \mathbb{N}$. $\quad a(X_1) = n \in \mathbb{N}, \quad a(X_2) = s \in \mathbb{N}, \quad a(X_3) = t \in \mathbb{N}, \quad a(c) = 0 \in \mathbb{N}$

$$\forall X_1.\, P(f_3(X_1, X_2), X_3)$$
$$a(X_1) \times a(X_2) = a(X_3)$$

$\mathbb{N} \models_a \forall X_1.\, P(f_3(X_1, X_2), X_3)$ `vale` ...
$\iff a(X_1) \times a(X_2) = a(X_3)$
$\iff n \times s = t$
$\iff n = t/s \quad s \neq 0$

Existe asignación que satisfaga, pero el cuantificador universal exige que toda asignación satisfaga, y por tanto, es falsa para todo X_1

5. $\forall X_1.\, (P(f_3(X_1, c), X_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$ Sea $a : var \to \mathbb{N}$. $\quad a(X_1) = n \in \mathbb{N}, \quad a(X_2) = s \in \mathbb{N}, \quad a(c) = 0 \in \mathbb{N}$

$$\forall X_1.\, (P(f_3(X_1, c), X_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$$
$$a(X_1) \times a(c) = a(X_1) \Rightarrow a(X_1) = a(X_2)$$

$\mathbb{N} \models_a \forall X_1.\, (P(f_3(X_1, c), X_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$ `vale` ...
$\iff a(X_1) \times a(c) = a(X_1) \Rightarrow a(X_1) = a(X_2)$
$\iff n \times 0 = n \Rightarrow n = s$
$\iff 0 = n \Rightarrow n = s$

Si $n \neq 0$ por antecedente falso, la asignación es verdadera. Si $s = 0 \wedge n = 0$ también vale; pero qué pasa si $s \neq 0 \wedge n = 0$? Se rompe todo, por tanto, no vale para todo n.