Práctica 3: Demostración en Lógica Proposicional

Tomás Felipe Melli

April 19, 2025

Índice

1 Semántica

1.1 Ejercicio 1

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones (fórmulas). El valor de verdad de $P, Q : Verdadero$ y el de $S, T : Falso$

1. $(\neg P \vee Q)$

$$\neg(V) \vee V$$
$$F \vee V$$
$$V$$

2. $(P \vee (S \wedge T) \vee Q)$

$$(V \vee (F \wedge F) \vee V)$$
$$(V \vee F \vee V)$$
$$(V \vee V)$$
$$V$$

3. $\neg(Q \vee S)$

$$\neg(V \vee F)$$
$$\neg(V)$$
$$F$$

4. $(\neg P \vee S) \iff (\neg P \wedge \neg S)$

$$(\neg V \vee F) \iff (\neg V \wedge \neg F)$$
$$F \iff F$$
$$V$$

5. $((P \vee S) \wedge (T \vee Q))$

$$((V \vee F) \wedge (F \vee V))$$
$$(V \wedge V)$$
$$V$$

6. $(((P \vee S) \wedge (T \vee Q)) \iff (P \vee (S \wedge T) \vee Q))$

$$(((V \vee F) \wedge (F \vee V)) \iff (V \vee (F \wedge F) \vee V))$$
$$((V \wedge V) \iff (V \vee F \vee V))$$
$$(V \iff (V \vee V))$$
$$(V \iff V)$$
$$V$$

7. $(\neg Q \wedge \neg S)$

$$(\neg V \wedge \neg F)$$
$$(F \wedge V)$$
$$F$$

1.2 Ejercicio 2

Dado una fórmula τ, demostrar que existe otra fórmula τ' equivalente a τ, que usa solo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

1. Caso Base :

$$\tau = P$$

   Donde sólo usamos $\neg, \vee$ y no usamos $\wedge, \Rightarrow$

2. Caso Inductivo :

   - $\vee$

$$\tau = \alpha \vee \beta$$

$$\overset{H.I}{\equiv} \alpha' \vee \beta'$$

     ** HI : α , β se pueden escribir usando $\neg, \vee$. $\exists \alpha', \beta'$ equivalentes $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$.

   - $\neg$

$$\tau = \neg\alpha$$

$$\equiv \neg\alpha'$$

$$\equiv \tau'$$

     $\exists \tau' \equiv \tau$ usando $\neg, \vee$.

   - $\wedge$

$$\tau \equiv \alpha \wedge \beta$$

$$\overset{(??)}{\equiv} \neg(\neg\alpha' \vee \neg\beta')$$

     Queremos que toda evaluación que valide $\alpha \wedge \beta$ valide $\neg(\neg\alpha' \vee \neg\beta')$. Por tanto,
     Sea $v \models \alpha \wedge \beta \iff v \models \alpha\ y\ v \models \beta$ por HI $v \models \alpha'\ y\ v \models \beta'$.
     Qué podemos decir de las negaciones y sus equivalencias ?
     $v \not\models \neg\alpha'$ o $v \not\models \neg\beta'$ en particular, $v \not\models \neg\alpha' \vee \neg\beta'$, pero si sucede que ...

$$v \models \neg(\neg\alpha' \vee \neg\beta')$$

     Como v es arbitrario...

$$\underbrace{\alpha \wedge \beta}_{\tau} \equiv \neg(\neg\alpha' \vee \neg\beta')$$

     y como α', β' están escritos con $\neg, \vee$ entonces τ' también.

   - $\implies$

$$\tau = \alpha \implies \beta$$

$$\overset{(??)}{\equiv} \neg\alpha' \vee \beta'$$

     Queremos entonces que toda evaluación que valide $\alpha \implies \beta$ valide $\neg\alpha' \vee \beta'$. Por tanto,
     Sea $v \models \alpha \implies \beta \iff v \not\models \alpha$ o $v \models \beta$. En particular $v \not\models \alpha \iff v \models \neg\alpha$. Dicho esto

$$v \models \neg\alpha' \vee \beta'$$

     Dado que v es arbitrario

$$\tau \equiv \neg\alpha' \vee \beta'$$

1.3 Ejercicio 3

Nos piden determinar si las siguientes expresiones son **tautologías**, **contradicciones** o **contingencias**. Primero definamos qué son estos conceptos :

- **Tautología** : una fórmula (expresión lógica) que es siempre verdadera, sin importar los valores de verdad de sus componentes. Una fórmula lógica τ es una tautología si para toda valuación v, se cumple que: $v \models \tau$
- **Contradicción**: La fórmula es falsa bajo toda valuación, es decir, nunca resulta verdadera, sin importar los valores de las variables. $\forall v, v \not\models \tau$
- **Contingencia** : Es verdadera para algunas valuaciones y falsa para otras. Es decir, a veces vale, a veces no, depende de los valores de verdad de sus variables. $\exists v,\ v\tau\quad$ y $\quad\exists v',\ v'\tau$

Ahora bien, nos dicen que $\tau \implies \sigma$ es tautología y $\rho \implies \zeta$ es contradicción.

- $(\tau \implies \sigma) \vee (\rho \implies \zeta)$
  Sabemos que la expresión de la izquierda siempre evalúa a Verdadero, y que la de la derecha siempre a Falso. Por tanto, esta expresión en su totalidad evaluará a Verdadero siempre. Como consecuencia, se trata de una **tautología**.

$$V \vee F$$

$$V$$

- $(\tau \implies \rho) \vee (\sigma \implies \zeta)$
  Como no tenemos información sobre las evaluaciones de las fórmulas, depende enteramente de los valores de verdad que tomen sus variables. Concluimos que se trata de una **contingencia**.
- $(\rho \implies \sigma) \vee (\zeta \implies \sigma)$
  Tenemos el mismo problema que antes, depende del valor de verdad de las variables de la fórmula. Otra **contingencia**.

1.4 Ejercicio 4

Probar que cualquier fórmula que sea una tautología contiene un $\neg$ o una $\Rightarrow$.
Ya vimos que una tautología formalmente es :

$$v \models \tau$$

Tenemos dos casos :

1. Las fórmulas que no tienen $\neg$ ni $\Rightarrow$: entonces tienen que contener $\wedge$ o $\vee$. Es decir que,
   - Para la conjunción puede pasar que si una de sus variables es falsa, chau todo. Por tanto no puede ser tautología.
   - Para la disyunción pasa algo similar de dependencia de las variables, ya que si todas son falsas, no puede ser tautología
2. Las fórmulas que tienen $\neg$ o $\Rightarrow$: en estos casos
   - Si tenemos $\neg$ este operador le cambia el valor de verdad a la varible, por ello la podremos modificar de manera que siempre de un valor de verdad verdadero.
   - Si tenemos $\Rightarrow$ y es tautología y la reescribimos como $\neg P \vee Q$ sigue valiendo aunque usemos disyunción.

2 Deducción Natural

2.1 Ejercicio 5

1. *modus ponens* relativizado : $(\rho \implies \sigma \implies \tau) \implies (\rho \implies \sigma) \implies \rho \implies \tau$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \rho \implies (\sigma \implies \tau)}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \rho}\text{ax}}{\Gamma \vdash \sigma \implies \tau} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \rho \implies \sigma}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \rho}\text{ax}}{\Gamma \vdash \sigma}}{(\rho \implies (\sigma \implies \tau)), (\rho \implies \sigma), \rho \vdash \tau}\Rightarrow_e}{(\rho \implies (\sigma \implies \tau)), (\rho \implies \sigma) \vdash \rho \implies \tau}\Rightarrow_i}{(\rho \implies (\sigma \implies \tau)) \vdash (\rho \implies \sigma) \implies \rho \implies \tau}\Rightarrow_i}{\vdash (\rho \implies (\sigma \implies \tau)) \implies (\rho \implies \sigma) \implies \rho \implies \tau}\Rightarrow_i$$

2. Reducción al absurdo : $(\rho \implies \bot) \implies \neg\rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \rho \implies \bot}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \rho}\text{ax}}{\rho \Rightarrow \bot, \rho \vdash \bot}\Rightarrow_e}{\rho \Rightarrow \bot \vdash \rho}\neg_i}{\vdash (\rho \implies \bot) \implies \neg\rho}\Rightarrow_i$$

3. Introducción de la doble negación $\rho \implies \neg\neg\rho$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \rho}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\rho}\text{ax}}{\Gamma, \neg\rho \vdash \bot}\neg_e}{\Gamma \vdash \neg\neg\rho}\neg_i}{\vdash \rho \implies \neg\neg\rho}\Rightarrow_i$$

4. Eliminación de la triple negación $\neg\neg\neg\rho \implies \neg\rho$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \rho$}
\RightLabel{$\neg\neg_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\neg\rho$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\neg\neg\rho$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\neg\neg\neg\rho, \rho \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\neg\rho \vdash \neg\rho$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\neg\neg\rho \implies \neg\rho$}
\end{prooftree}
$$

5. Contraposición $(\rho \implies \sigma) \implies (\neg\sigma \implies \neg\rho)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \rho \implies \sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \rho$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\sigma$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$(\rho \implies \sigma), \neg\sigma, \rho \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$(\rho \implies \sigma), \neg\sigma \vdash \neg\rho$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$(\rho \implies \sigma) \vdash \neg\sigma \implies \neg\rho$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\rho \implies \sigma) \implies (\neg\sigma \implies \neg\rho)$}
\end{prooftree}
$$

6. Adjunción $((\rho \wedge \sigma) \implies \tau) \iff (\rho \implies \sigma \implies \tau)$

- $\implies$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash (\rho \wedge \sigma) \implies \tau$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \rho$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \sigma$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash (\rho \wedge \sigma)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \implies \tau), \rho, \sigma \vdash \tau$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \implies \tau), \rho \vdash \sigma \implies \tau$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \implies \tau) \vdash \rho \implies \sigma \implies \tau$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash ((\rho \wedge \sigma) \implies \tau) \implies (\rho \implies \sigma \implies \tau)$}
\end{prooftree}
$$

- $\Longleftarrow$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \rho \implies (\sigma \implies \tau)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \rho \wedge \sigma$}
\RightLabel{$\wedge_{e1}$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \rho$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \sigma \implies \tau$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \rho \wedge \sigma$}
\RightLabel{$\wedge_{e2}$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \sigma$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$(\rho \implies (\sigma \implies \tau)), (\rho \wedge \sigma) \vdash \tau$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$(\rho \implies (\sigma \implies \tau)) \vdash (\rho \wedge \sigma) \implies \tau$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\rho \implies (\sigma \implies \tau)) \implies ((\rho \wedge \sigma) \implies \tau)$}
\end{prooftree}
$$

7. DeMorgan (I) $\neg(\rho \vee \sigma) \iff (\neg\rho \wedge \neg\sigma)$

- $\implies$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma), \rho \vdash \rho$}
\RightLabel{$\vee_{i1}$}
\UnaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma), \rho \vdash \rho \vee \sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma), \rho \vdash \neg(\rho \vee \sigma)$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma), \rho \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma) \vdash \neg\rho$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma), \sigma \vdash \sigma$}
\RightLabel{$\vee_{i_2}$}
\UnaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma), \sigma \vdash \rho \vee \sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma), \sigma \vdash \neg(\rho \vee \sigma)$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma), \sigma \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma) \vdash \neg\sigma$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$\neg(\rho \vee \sigma) \vdash \neg\rho \wedge \neg\sigma$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\rho \vee \sigma) \implies (\neg\rho \wedge \neg\sigma)$}
\end{prooftree}
$$

- $\Longleftarrow$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, (\rho \vee \sigma) \vdash (\rho \vee \sigma)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \rho \vdash \rho$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(\neg\rho \wedge \neg\sigma), (\rho \vee \sigma), \rho \vdash (\neg\rho \wedge \neg\sigma)$}
\RightLabel{$\wedge_{e_1}$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \rho \vdash \neg\rho$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \rho \vdash \bot$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \sigma \vdash \sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \sigma \vdash (\neg\rho \wedge \neg\sigma)$}
\RightLabel{$\wedge_{e_2}$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \sigma \vdash \neg\sigma$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \sigma \vdash \bot$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$(\neg\rho \wedge \neg\sigma), (\rho \vee \sigma) \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$(\neg\rho \wedge \neg\sigma) \vdash \neg(\rho \vee \sigma)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\neg\rho \wedge \neg\sigma) \implies \neg(\rho \vee \sigma)$}
\end{prooftree}
$$

8. DeMorgan (II) $\neg(\rho \wedge \sigma) \iff (\neg\rho \vee \neg\sigma)$. Para $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásico.

- $\implies$ falta !!
- $\impliedby$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \rho$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\rho \vee \neg\sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg\rho \vdash \neg\rho$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash \rho \wedge \sigma$}
\RightLabel{$\wedge_{e_2}$}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash \sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma' \vdash \neg\sigma$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \neg\sigma, \rho \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg\sigma \vdash \neg\rho$}
\RightLabel{$\vee e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\rho$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$(\neg\rho \vee \neg\sigma) \vdash \neg(\rho \wedge \sigma)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\neg\rho \vee \neg\sigma) \implies \neg(\rho \wedge \sigma)$}
\end{prooftree}
$$

9. Conmutatividad $\wedge$: $(\rho \wedge \sigma) \implies (\sigma \wedge \rho)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge \sigma) \vdash \rho \wedge \sigma$}
\RightLabel{$\wedge_{e_2}$}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge \sigma) \vdash \sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge \sigma) \vdash \rho \wedge \sigma$}
\RightLabel{$\wedge_{e_1}$}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge \sigma) \vdash \rho$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$(\rho \wedge \sigma) \vdash (\sigma \wedge \rho)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\rho \wedge \sigma) \implies (\sigma \wedge \rho)$}
\end{prooftree}
$$

10. Asociatividad $\wedge$: $((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \iff (\rho \wedge (\sigma \wedge \tau))$

- $\implies$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash ((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau)$}
\RightLabel{$\wedge_{e_1}$}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash (\rho \wedge \sigma)$}
\RightLabel{$\wedge_{e_1}$}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash \rho$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash (\rho \wedge \sigma) \wedge \tau$}
\RightLabel{$\wedge_{e_1}$}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash \rho \wedge \sigma$}
\RightLabel{$\wedge_{e_2}$}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash \sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash (\rho \wedge \sigma) \wedge \tau$}
\RightLabel{$\wedge_{e_2}$}
\UnaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash \tau$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash \sigma \wedge \tau$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \vdash \rho \wedge (\sigma \wedge \tau)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash ((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \implies (\rho \wedge (\sigma \wedge \tau))$}
\end{prooftree}
$$

- $\impliedby$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash \rho \wedge (\sigma \wedge \tau)$}
\RightLabel{$\wedge_{e_1}$}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash \rho$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash \rho \wedge (\sigma \wedge \tau)$}
\RightLabel{$\wedge_{e_2}$}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash \sigma \wedge \tau$}
\RightLabel{$\wedge_{e_1}$}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash \sigma$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash \rho \wedge \sigma$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash \rho \wedge (\sigma \wedge \tau)$}
\RightLabel{$\wedge_{e_2}$}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash \sigma \wedge \tau$}
\RightLabel{$\wedge_{e_2}$}
\UnaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash \tau$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$(\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \vdash (\rho \wedge \sigma) \wedge \tau$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\rho \wedge (\sigma \wedge \tau)) \implies ((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau)$}
\end{prooftree}
$$

11. Conmutatividad $\vee$: $(\rho \vee \sigma) \implies (\sigma \vee \rho)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(\rho \vee \sigma) \vdash (\rho \vee \sigma)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(\rho \vee \sigma), \rho \vdash \rho$}
\RightLabel{$\vee_{i_2}$}
\UnaryInfC{$(\rho \vee \sigma), \rho \vdash (\sigma \vee \rho)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$(\rho \vee \sigma), \sigma \vdash \sigma$}
\RightLabel{$\vee_{i_1}$}
\UnaryInfC{$(\rho \vee \sigma), \sigma \vdash (\sigma \vee \rho)$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$(\rho \vee \sigma) \vdash (\sigma \vee \rho)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\rho \vee \sigma) \implies (\sigma \vee \rho)$}
\end{prooftree}
$$

12. Asociatividad $\vee$: $((\rho \vee \sigma) \vee \tau) \iff (\rho \vee (\sigma \vee \tau))$

- $\implies$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (\rho \lor \sigma) \lor \tau}\,\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, (\rho \lor \sigma) \vdash \rho \lor \sigma}\,\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \rho \vdash \rho}\,\text{ax}}{\Gamma, \rho \vdash \rho \lor (\sigma \lor \tau)}\,\lor_{i_1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \sigma \vdash \sigma}\,\text{ax}}{\Gamma, \sigma \vdash \sigma \lor \tau}\,\lor_{i_1}}{\Gamma, \sigma \vdash \rho \lor (\sigma \lor \tau)}\,\lor_{i_2}}{\Gamma, (\rho \lor \sigma) \vdash \rho \lor (\sigma \lor \tau)}\,\lor_e \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \ \tau}\,\text{ax}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma \lor \tau}\,\lor_{i_2}}{\Gamma, \tau \vdash \rho \lor (\sigma \lor \tau)}\,\lor_{i_2}}{((\rho \lor \sigma) \lor \tau) \vdash \rho \lor (\sigma \lor \tau)}\,\lor_e}{\vdash ((\rho \lor \sigma) \lor \tau) \implies (\rho \lor (\sigma \lor \tau))}\,\Rightarrow_i
$$

- $\Longleftarrow$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \rho \lor (\sigma \lor \tau)}\,\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \rho \vdash \rho}\,\text{ax}}{\Gamma, \rho \vdash \rho \lor \sigma}\,\lor_{i_1}}{\Gamma, \rho \vdash (\rho \lor \sigma) \lor \tau}\,\lor_{i_1} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, (\sigma \lor \tau) \vdash \sigma \lor \tau}\,\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \sigma \vdash \sigma}\,\text{ax}}{\Gamma, \sigma \vdash \rho \lor \sigma}\,\lor_{i_2}}{\Gamma, \sigma \vdash (\rho \lor \sigma) \lor \tau}\,\lor_{i_1} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\,\text{ax}}{\Gamma, \tau \vdash (\rho \lor \sigma) \lor \tau}\,\lor_{i_2}}{\Gamma, (\sigma \lor \tau) \vdash (\rho \lor \sigma) \lor \tau}\,\lor_e}{(\rho \lor (\sigma \lor \tau)) \vdash (\rho \lor \sigma) \lor \tau}\,\lor_e}{\vdash (\rho \lor (\sigma \lor \tau)) \implies ((\rho \lor \sigma) \lor \tau)}\,\Rightarrow_i
$$

2.2 Ejercicio 6

Imprescindible usar **lógica clásica**.

1. Absurdo clásico : $(\neg\tau \implies \bot) \implies \tau$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\tau \implies \bot}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\tau}\,\text{ax}}{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}\implies_e}{(\neg\tau \implies \bot) \vdash \tau}\,PBC}{\vdash (\neg\tau \implies \bot) \implies \tau}\,\Rightarrow_i
$$

2. Ley de Pierce : $((\tau \implies \rho) \implies \tau) \implies \tau$
   Si lo queremos hacer con la intuicionista, nos vamos a quedar trabados acá ....

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (\tau \implies \rho) \implies \tau}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \rho}\,\text{y ahora .. ?}}{\Gamma \vdash (\tau \implies \rho)}\,\Rightarrow_i}{((\tau \implies \rho) \implies \tau) \vdash \tau}\,\Rightarrow_e}{\vdash ((\tau \implies \rho) \implies \tau) \implies \tau}\,\Rightarrow_i
$$

   Con la clásica ...

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}}{((\tau \implies \rho) \implies \tau) \vdash \tau}\,PBC}{\vdash ((\tau \implies \rho) \implies \tau) \implies \tau}\,\Rightarrow_i
$$

3. Tercero excluido : $\tau \lor \neg\tau$ Vamos a probar $PBC \implies LEM$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg(\tau \lor \neg\tau), \neg\tau \vdash \neg\tau}\,\text{ax}}{\Gamma, \neg(\tau \lor \neg\tau), \neg\tau \vdash (\tau \lor \neg\tau)}\,\lor_{i_2} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \neg(\tau \lor \neg\tau), \neg\tau \vdash \neg(\tau \lor \neg\tau)}\,\text{ax}}{\Gamma, \neg(\tau \lor \neg\tau), \neg\tau \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma, \neg(\tau \lor \neg\tau) \vdash \tau}\,\text{PBC}}{\Gamma, \neg(\tau \lor \neg\tau) \vdash \tau \lor \neg\tau}\,\lor_{i_1} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \neg(\tau \lor \neg\tau) \vdash \neg(\tau \lor \neg\tau)}\,\text{ax}}{\Gamma, \neg(\tau \lor \neg\tau) \vdash \bot}\,\neg_e}{\vdash \tau \lor \neg\tau}\,\text{PBC}
$$

4. Consecuencia milagrosa : $(\neg\tau \implies \tau) \implies \tau$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\neg\tau \implies \tau), \neg\tau \vdash (\neg\tau \implies \tau)}\,{\scriptstyle \text{ax}} \qquad \dfrac{}{(\neg\tau \implies \tau), \neg\tau \vdash \neg\tau}\,{\scriptstyle \text{ax}}}{(\neg\tau \implies \tau), \neg\tau \vdash \tau}\,{\scriptstyle \Rightarrow_e} \qquad \dfrac{}{(\neg\tau \implies \tau), \neg\tau \vdash \neg\tau}\,{\scriptstyle \text{ax}}}{\dfrac{(\neg\tau \implies \tau), \neg\tau \vdash \bot}{\dfrac{(\neg\tau \implies \tau) \vdash \tau}{\vdash (\neg\tau \implies \tau) \implies \tau}\,{\scriptstyle \Rightarrow_i}}\,{\scriptstyle \text{PBC}}}\,{\scriptstyle \neg_e}
$$

5. Contraposición clásica : $(\neg\rho \implies \neg\tau) \implies (\tau \implies \rho)$

$$
\dfrac{\dfrac{}{(\neg\rho \implies \neg\tau), \tau, \neg\rho \vdash \tau}\,{\scriptstyle \text{ax}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\neg\rho \implies \neg\tau), \tau, \neg\rho \vdash (\neg\rho \implies \neg\tau)}\,{\scriptstyle \text{ax}} \qquad \dfrac{}{(\neg\rho \implies \neg\tau), \tau, \neg\rho \vdash \neg\rho}\,{\scriptstyle \text{ax}}}{(\neg\rho \implies \neg\tau), \tau, \neg\rho \vdash \neg\tau}\,{\scriptstyle \Rightarrow_e}}{\dfrac{(\neg\rho \implies \neg\tau), \tau, \neg\rho \vdash \bot}{\dfrac{(\neg\rho \implies \neg\tau), \tau \vdash \rho}{\dfrac{(\neg\rho \implies \neg\tau) \vdash (\tau \implies \rho)}{\vdash (\neg\rho \implies \neg\tau) \implies (\tau \implies \rho)}\,{\scriptstyle \Rightarrow_i}}\,{\scriptstyle \Rightarrow_i}}\,{\scriptstyle \text{PBC}}}\,{\scriptstyle \neg_e}
$$

6. Análisis de casos : $(\tau \implies \rho) \implies (\neg\tau \implies \rho) \implies \rho$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\tau \implies \rho}\,{\scriptstyle \text{ax}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \tau \implies \rho}\,{\scriptstyle \text{ax}} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\rho}\,{\scriptstyle \text{ax}}}{\Gamma \vdash \neg\tau}\,{\scriptstyle \text{MT}}}{\Gamma \vdash \rho}\,{\scriptstyle \Rightarrow_e} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\rho}\,{\scriptstyle \text{ax}}}{\dfrac{(\tau \implies \rho), (\neg\tau \implies \rho), \neg\rho \vdash \bot}{\dfrac{(\tau \implies \rho), (\neg\tau \implies \rho) \vdash \rho}{\dfrac{(\tau \implies \rho) \vdash (\neg\tau \implies \rho) \implies \rho}{\vdash (\tau \implies \rho) \implies (\neg\tau \implies \rho) \implies \rho}\,{\scriptstyle \Rightarrow_i}}\,{\scriptstyle \Rightarrow_i}}\,{\scriptstyle PBC}}\,{\scriptstyle \neg_e}
$$

7. Implicación vs disyunción : $(\tau \implies \rho) \iff (\neg\tau \vee \rho)$

- $\implies$ falta !!

$$
\dfrac{\dfrac{\text{— ax}}{(\tau \implies \rho) \vdash (\neg\tau \vee \rho)}}{\vdash (\tau \implies \rho) \implies (\neg\tau \vee \rho)}\,{\scriptstyle \Rightarrow_i}
$$

- $\impliedby$

$$
\dfrac{\dfrac{}{(\neg\tau \vee \rho), \tau \vdash (\neg\tau \vee \rho)}\,{\scriptstyle \text{ax}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\neg\tau \vee \rho), \tau, \neg\tau, \neg\rho \vdash \tau}\,{\scriptstyle \text{ax}} \qquad \dfrac{}{(\neg\tau \vee \rho), \tau, \neg\tau, \neg\rho \vdash \neg\tau}\,{\scriptstyle \text{ax}}}{(\neg\tau \vee \rho), \tau, \neg\tau, \neg\rho \vdash \bot}}{(\neg\tau \vee \rho), \tau, \neg\tau \vdash \rho}\,{\scriptstyle \text{PBC}} \qquad \dfrac{}{(\neg\tau \vee \rho), \tau, \rho \vdash \rho}\,{\scriptstyle \text{ax}}}{\dfrac{(\neg\tau \vee \rho), \tau \vdash \rho}{\dfrac{(\neg\tau \vee \rho) \vdash \tau \implies \rho}{\vdash (\neg\tau \vee \rho) \implies (\tau \implies \rho)}\,{\scriptstyle \Rightarrow_i}}\,{\scriptstyle \Rightarrow_i}}\,{\scriptstyle \vee_e}
$$

2.3 Ejercicio 7

1. **Weakening** : Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido, entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$. Con inducción sobre el tamaño de la derivación

- Caso Base : $\Gamma \vdash \sigma$ es válido por *axioma*. Entonces, $\Gamma = \Gamma', \sigma$ y $\Gamma', \overset{ax}{\sigma} \vdash \sigma$ es la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$.
  qvq $\Gamma, \tau \vdash \sigma$, en otras palabras, que $\Gamma', \sigma, \tau \vdash \sigma$. Esto vale por la siguiente derivación :

$$
\dfrac{}{\Gamma', \sigma, \tau \vdash \sigma}\,{\scriptstyle \text{ax}}
$$

- Paso Inductivo :
  (a) $\implies_i$: $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\implies$. Entonces $\sigma = \rho \implies \sigma'$, es decir que la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es :

$$\cfrac{\overline{\Gamma, \rho \vdash \sigma'}}{\Gamma \vdash \rho \implies \sigma'} \Rightarrow_i$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas, que en este caso la *única* es $\Gamma, \rho \vdash \sigma'$. Entonces, por HI $\Gamma, \rho \vdash \sigma'$. Luego ,

$$\cfrac{\overline{\Gamma, \rho \vdash \sigma'}\ \text{HI}}{\Gamma \vdash \rho \implies \sigma'} \Rightarrow_i$$

Y entonces, $\Gamma, \tau \vdash \rho \implies \sigma'$ es válido.

(b) $\neg_i$: $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\neg_i \implies \sigma = \neg\sigma'$. O sea, la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\cfrac{\overline{\Gamma, \sigma' \vdash \bot}}{\Gamma \vdash \neg\sigma'} \neg_i$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas que en este caso,la única es $\Gamma, \sigma' \vdash \bot$. Entonces por H.I, $\Gamma, \sigma', \tau \vdash \bot$. Luego,

$$\cfrac{\overline{\Gamma, \sigma', \tau \vdash \bot}\ \text{HI}}{\Gamma, \tau \vdash \neg\sigma'} \neg_i$$

Y entonces, $\Gamma, \tau \vdash \sigma'$ es válido.

(c) $\neg_e$: $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\neg_e \implies \sigma = \bot$. O sea, la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\cfrac{\overline{\Gamma \vdash \rho} \qquad \overline{\Gamma \vdash \neg\rho}}{\Gamma \vdash \bot} \neg_e$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas que son $\Gamma \vdash \rho$ y $\Gamma \vdash \neg\rho$. Entonces, por H.I, $\Gamma, \tau \vdash \rho$ y $\Gamma, \tau \vdash \neg\rho$. Luego,

$$\cfrac{\overline{\Gamma \vdash \rho}\ \text{HI} \qquad \overline{\Gamma \vdash \neg\rho}\ \text{HI}}{\Gamma \vdash \bot} \neg_e$$

Y $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido

(d) $\Rightarrow_e$: $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\Rightarrow_e$. O sea, la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\cfrac{\overline{\Gamma \vdash \rho \implies \sigma} \qquad \overline{\Gamma \vdash \rho}}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas que son $\Gamma \vdash \rho \implies \sigma$ y $\Gamma \vdash \rho$. Entonces, por H.I, $\Gamma, \tau \vdash \rho \implies \sigma$ y $\Gamma, \tau \vdash \rho$. Luego,

$$\cfrac{\overline{\Gamma, \tau \vdash \rho \implies \sigma}\ \text{HI} \qquad \overline{\Gamma, \tau \vdash \rho}\ \text{HI}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

Y $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

(e) $\vee_e$: $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\vee_e$. O sea, la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\cfrac{\overline{\Gamma \vdash \rho \vee \psi} \qquad \overline{\Gamma, \rho \vdash \sigma} \qquad \overline{\Gamma, \psi \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \sigma} \vee_e$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas que son $\Gamma \vdash \rho \vee \psi$, $\Gamma, \rho \vdash \sigma$, $\Gamma, \psi \vdash \sigma$. Entonces por H.I, $\Gamma, \tau \vdash \rho \vee \psi$, $\Gamma, \rho, \tau \vdash \sigma$ y $\Gamma, \psi, \tau \vdash \sigma$. Luego :

$$\cfrac{\overline{\Gamma, \tau \vdash \rho \vee \psi}\ \text{HI} \qquad \overline{\Gamma, \rho, \tau \vdash \sigma}\ \text{HI} \qquad \overline{\Gamma, \psi, \tau \vdash \sigma}\ \text{HI}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma} \vee_e$$

Y $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

(f) $\vee_{i_1}$ $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\vee_{i_1}$. Entonces $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$. O sea, la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\cfrac{\overline{\Gamma \vdash \sigma_1}}{\Gamma \vdash \sigma_1 \vee \sigma_2} \vee_{i_1}$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas, en este caso la única es $\Gamma \vdash \sigma_1$. Entonces, por H.I $\Gamma, \tau \vdash \sigma_1$. Luego

$$\cfrac{\overline{\Gamma, \tau \vdash \sigma_1}\ \text{HI}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma_1 \vee \sigma_2} \vee_{i_1}$$

Y entonces, $\Gamma, \tau \vdash \sigma_1 \vee \sigma_2$ es válido.

(g) $\vee_{i_1}$ $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\vee_{i_2}$. Entonces $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$. O sea, la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \sigma_2}}{\Gamma \vdash \sigma_1 \vee \sigma_2}\ \vee_{i_2}$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas, en este caso la única es $\Gamma \vdash \sigma_2$. Entonces, por H.I $\Gamma, \tau \vdash \sigma_2$. Luego

$$\dfrac{\overline{\Gamma, \tau \vdash \sigma_2}\ \text{HI}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma_1 \vee \sigma_2}\ \vee_{i_2}$$

Y entonces, $\Gamma, \tau \vdash \sigma_1 \vee \sigma_2$ es válido.

(h) $\wedge_i$: $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\wedge_i$. Entonces, $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2$. O sea, la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \sigma_1} \qquad \overline{\Gamma \vdash \sigma_2}}{\Gamma \vdash \sigma_1 \wedge \sigma_2}\ \wedge_i$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas que son $\Gamma \vdash \sigma_1$ y $\Gamma \vdash \sigma_2$. Entonces, por H.I, $\Gamma, \tau \vdash \sigma_1$ y $\Gamma, \tau \vdash \sigma_2$. Luego

$$\dfrac{\overline{\Gamma, \tau \vdash \sigma_1}\ \text{HI} \qquad \overline{\Gamma, \tau \vdash \sigma_2}\ \text{HI}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma_1 \wedge \sigma_2}\ \wedge_i$$

Y $\Gamma, \tau \vdash \sigma_1 \wedge \sigma_2$ es válido.

(i) $\wedge_{e_1}$ $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\wedge_{e_1}$. O sea, la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \sigma \wedge \rho}}{\Gamma \vdash \sigma}\ \wedge_{e_1}$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas que en este caso, única, $\Gamma \vdash \sigma \wedge \rho$. Entonces, por H.I, $\Gamma, \tau \vdash \sigma \wedge \rho$. Luego

$$\dfrac{\overline{\Gamma, \tau \vdash \sigma \wedge \rho}\ \text{HI}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\ \wedge_{e_1}$$

Entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

(j) $\wedge_{e_1}$ $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\wedge_{e_1}$. O sea, la derivación de $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \sigma \wedge \rho}}{\Gamma \vdash \sigma}\ \wedge_{e_2}$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas que en este caso, única, $\Gamma \vdash \sigma \wedge \rho$. Entonces, por H.I, $\Gamma, \tau \vdash \sigma \wedge \rho$. Luego

$$\dfrac{\overline{\Gamma, \tau \vdash \sigma \wedge \rho}\ \text{HI}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\ \wedge_{e_2}$$

Entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

(k) $\perp_e$ $\Gamma \vdash \sigma$ es válido y se demostró usando $\perp_e$. O sea, la derivación $\Gamma \vdash \sigma$ es

$$\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \perp}}{\Gamma \vdash \sigma}\ \perp_e$$

Por H.I, la propiedad vale para las premisas, en este caso, única $\Gamma \vdash \perp$. Entonces, por H.I, $\Gamma, \tau \vdash \perp$. Luego

$$\dfrac{\overline{\Gamma, \tau \vdash \perp}\ \text{HI}}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\ \perp_e$$

Entonces, $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

2.