Clase Práctica 4 : Sistemas Deductivos

Tomás Felipe Melli

July 9, 2025

Índice

1 Lógica Proposicional

Sintaxis

$$\varphi ::= P \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \to \varphi$$

Donde P representa una variable proposicional.

Valuaciones

Una **valuación** es una función: $v : V \to \{V, F\}$
Una valuación v satisface una proposición φ (y se escribe $v \models \varphi$) cuando:

- $v \models P \iff v(P) = V$
- $v \models \neg\varphi \iff v \not\models \varphi$
- $v \models \varphi \vee \psi \iff v \models \varphi$ o $v \models \psi$
- $v \models \varphi \wedge \psi \iff v \models \varphi$ y $v \models \psi$
- $v \models \varphi \to \psi \iff v \not\models \varphi$ o $v \models \psi$

Equivalencia

$\varphi \equiv \psi$ cuando $v \models \varphi \iff v \models \psi$ para toda valuación v.

2 Sistemas deductivos

Están definidos por un conjunto de **reglas** donde cada una de estas tiene la forma

$$\frac{\texttt{Premisa-1} \quad \dots \quad \texttt{Premisa-n}}{\texttt{Conclusión}}\ \texttt{Nombre de la regla}$$

Intuitivamente podemos pensar que `Premisa-1,...,Premisa-n`$\Rightarrow$ `Conclusión`.

Secuentes

`Fórmula-1, ... , Fórmula-n` $\vdash$ `Fórmula-n+1`

Por ejemplo,

`P,Q` $\vdash$ `P` $\wedge$ `Q`

Demostración de un secuente → árbol

$$\dfrac{\dfrac{}{\texttt{P,Q} \vdash \texttt{Q}}\ \text{ax} \qquad \dfrac{}{\texttt{P,Q} \vdash \texttt{P}}\ \text{ax}}{\texttt{P,Q} \vdash \texttt{P} \wedge \texttt{Q}}\ \wedge_i$$

2.1 Reglas básicas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \text{ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\ \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\ \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\ \wedge_{e_2}$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\ \Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\ \vee_e$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \bot_e$$

Lógica intuicionista (LJ)

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg_e$$

Lógica clásica (LK)

De estas reglas se derivan :

Reglas intuicionistas

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \text{MT}$$

Reglas clásicas

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \text{PBC} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \text{LEM}$$

Las reglas $\neg\neg_e$, `PBC` y `LEM` son equivalentes.

$\neg\neg_e \rightsquigarrow$ PBC

Asumimos que $\Gamma, \neg\tau \vdash \bot$ y queremos ver que $\Gamma \vdash \tau$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg_i}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg_e$$

PBC $\rightsquigarrow$ LEM

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \tau}\ \text{ax}}{\Gamma' \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \vee_{i_2} \quad \dfrac{}{\Gamma' \vdash \neg(\tau \vee \neg\tau)}\ \text{ax}}{\dfrac{\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau), \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \tau}\ PBC}\ \neg_e \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma'' \vdash \tau}\ \text{ax}}{\Gamma'' \vdash (\tau \vee \neg\tau)}\ \vee_{i_1} \quad \dfrac{}{\Gamma'' \vdash \neg(\tau \vee \neg\tau)}\ \text{ax}}{\dfrac{\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau), \tau \vdash \bot}{\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \neg\tau}\ \neg_i}\ \neg_e}{\dfrac{\Gamma, \neg(\tau \vee \neg\tau) \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\ PBC}\ \neg_e$$

LEM $\rightsquigarrow \neg\neg_e$

Asumimos $\neg\neg\tau$ queremos probar τ. En este caso vemos la demo **sin weakening**

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \text{LEM} \quad \dfrac{}{\Gamma', \tau \vdash \tau}\ \text{ax}}{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma', \neg\tau \vdash \neg\tau}\ \text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma', \neg\tau \vdash \neg\neg\tau}\ \text{ax}}{\Gamma', \neg\tau \vdash \bot}\ \neg_e}{\Gamma', \neg\tau \vdash \tau}\ \bot_e}{\Gamma, \neg\neg\tau \vdash \tau}\ \vee_e}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau \Rightarrow \tau}\ \Rightarrow_i}{\Gamma \vdash \tau}\ \Rightarrow_e$$

2.2 Ejercicio de la guía

Absurdo clásico

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg P \Rightarrow \bot}\ \text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg P}\ \text{ax}}{\neg P \Rightarrow \bot, \neg P \vdash \bot}\ \Rightarrow_e}{\dfrac{\neg P \Rightarrow \bot \vdash P}{\vdash (\neg P \Rightarrow \bot) \Rightarrow P}\ \Rightarrow_i}\ \text{PBC}$$

2.3 Último ejercicio

Demostrar en deducción natural que vale

$$\vdash (\rho \vee \tau) \wedge (\sigma \vee \tau) \Rightarrow \tau \vee (\rho \wedge \sigma)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (\rho \vee \tau) \wedge (\sigma \vee \tau)}\,\text{ax}}{\Gamma \vdash \rho \vee \tau}\,\wedge_{e_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \rho \vdash (\rho \vee \tau) \wedge (\sigma \vee \tau)}\,\text{ax}}{\Gamma, \rho \vdash \sigma \vee \tau}\,\wedge_{e_2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \rho}\,\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma' \vdash \sigma}\,\text{ax}}{\Gamma' \vdash \rho \wedge \sigma}}{\Gamma' \vdash \tau \vee (\rho \wedge \sigma)}\,\vee i_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \tau}\,\text{ax}}{\Gamma' \vdash \tau \vee (\rho \wedge \sigma)}\,\vee_{i_1}}{\Gamma, \rho \vdash \tau \vee (\rho \wedge \sigma)}\,\vee_e \qquad \dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\,\text{ax}}{\dfrac{(\rho \vee \tau) \wedge (\sigma \vee \tau) \vdash \tau \vee (\rho \wedge \sigma)}{\vdash (\rho \vee \tau) \wedge (\sigma \vee \tau) \Rightarrow \tau \vee (\rho \wedge \sigma)}\,\Rightarrow_i}$$