

Práctica 6 : Lógica de Primer Orden

Tomás Felipe Melli

June 5, 2025

Índice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Sintaxis de la Lógica de Primer Orden | 2 |
| 1.1 | Ejercicio 1 | 2 |
| 1.2 | Ejercicio 2 | 2 |
| 1.3 | Ejercicio 3 | 3 |
| 1.4 | Ejercicio 4 | 4 |
| 2 | Unificación | 4 |
| 2.1 | Ejercicio 5 | 4 |
| 2.2 | Ejercicio 6 | 7 |
| 2.3 | Ejercicio 8 | 7 |
| 3 | Deducción Natural | 9 |
| 3.1 | Ejercicio 9 | 9 |
| 3.2 | Ejercicio 10 | 12 |
| 4 | Semántica | 12 |
| 4.1 | Ejercicio 13 | 12 |
| 4.2 | Ejercicio 14 | 12 |

1 Sintaxis de la Lógica de Primer Orden

1.1 Ejercicio 1

Dados $\mathcal{F} = \{d, f, g\}$ donde la aridad es 0,2,3 respectivamente. Cuáles de las siguientes cadenas son términos? Recordemos que toda constante (símbolo de función de aridad 0) es término y si $f \in \mathcal{F}$ con aridad n y t_1, \dots, t_n son términos, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ también lo es.

1. $g(d, d)$ sabemos que $g \in \mathcal{F}$ y su aridad es 3, es decir se puede escribir que g toma t_1, t_2, t_3 y $g(t_1, t_2, t_3)$ es término. Si bien d es una constante, no coincide la aridad de g con la cantidad de parámetros que recibe. Por tanto, no es término.
2. $f(X, g(X, Y), d)$. Las variables son términos, por tanto X e Y están bien definidas. Los problemas que surgen son: la aridad de f es 2 y la de g es 3. Por tanto, si bien todos los parámetros son términos, no corresponde la aridad de f y g con la cantidad de parámetros que reciben. Por tanto, no es un término.
3. $g(X, f(d, Z), d)$ sabemos que $g \in \mathcal{F}$ y su aridad es 3, es decir se puede escribir que g toma t_1, t_2, t_3 y $g(t_1, t_2, t_3)$ es término. Donde $t_1 = X, t_2 = f(d, Z), t_3 = d$ analizamos cada uno de ellos para confirmar que sean términos: X es una variable y por tanto es un término, $f(d, Z) \in \mathcal{F}$ con aridad 2, por tanto $f(t'_1, t'_2)$ es término (en este caso $t'_1 = d, t'_2 = Z$ ambos términos bien formados) y finalmente $t_3 = d$. Concluimos que el es término.
4. $g(X, h(Y, Z), d)$ con el razonamiento anterior, vemos que $t_2 = h(Y, Z)$ pero el problema es que $h \notin \mathcal{F}$. Concluimos que no es término.
5. $f(f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d))), g(d, d)), g(f(d, d, X), d), Z)$ sabemos que X, Y, Z son variables y por tanto, términos válidos. También sabemos que la aridad de d es 0 (constante) y por tanto un término válido. Dentro de la f tenemos $(f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d))), g(d, d)), g(f(d, d, X), d), Z)$ donde podemos definir $t_1 = f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d))), g(d, d)$, $t_2 = g(f(d, d, X), d)$ y $t_3 = Z$. Decimos entonces que t_3 es válido. Pero miremos t_1 y t_2
 - $t_1 = f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d))), g(d, d)$ dentro tenemos $t_{1_1} = g(d, X), t_{1_2} = f(g(d, X), Y, g(Y, d))$ y $t_{1_3} = g(d, d)$. Miramos dentro de cada uno de ellos: t_{1_1} no es válido ya que la aridad de g es 3 y aquí sólo toma dos términos (que por cierto, son válidos); t_{1_2} está formado por $t_{1_{2_1}} = g(d, X), t_{1_{2_2}} = Y, t_{1_{2_3}} = g(Y, d)$ donde sólo $t_{1_{2_2}}$ está bien formado, el resto la aridad de g no se corresponde con la cantidad de argumentos que toma; t_{1_3} está mal formado ya que la aridad de g es 3 y en este caso toma dos constantes d .
 - t_2 está formado por $t_{2_1} = f(d, d, X), t_{2_2} = d$ pero, t_{2_1} está mal formado ya que la aridad de f es 2 y aquí recibe 3 términos (válidos), para el caso de t_{2_2} está bien formado.

Finalmente, concluimos que el término está mal formado en muchas partes, y en particular en su expresión más grande que es $f(t_1, t_2, t_3)$ ya que la aridad de f es 2.

1.2 Ejercicio 2

Nos piden decidir cuáles de las siguientes son fórmulas. Sean c una constante, f un símbolo de función de aridad 1 y S y B dos símbolos de predicado binarios (aridad 2). Recordemos: **una fórmula atómica es una expresión de la forma $P(t_1, \dots, t_n)$ donde P es un símbolo de predicado de aridad n y cada t_i es un término**

1. $S(c, X)$ es una fórmula atómica válida ya que $S(t_1, t_2)$ es fórmula si t_1 y t_2 son términos, en este caso, $t_1 = c$ y $t_2 = X$ ambos términos válidos.
2. $B(c, f(c))$ escribimos a $B(t_1, t_2)$ con $t_1 = c$ y $t_2 = f(c)$, se cumple la aridad de B . En este caso, t_1 es un término válido. t_2 está formado por $f(c)$ donde $f(t'_1)$ es un término válido, ya que sólo recibe c como argumento, cumpliendo la aridad de f . Esta es una fórmula atómica.
3. $f(c)$ lo analizamos en el ítem anterior. Es una fórmula válida.
4. $B(B(c, X), Y)$ lo podemos reescribir como $B(t_1, t_2)$ para verlo por partes. t_1 es un término válido, la demostración es análoga al ítem 1 de este ejercicio. t_2 está formado por una variable y por tanto es un término válido. Concluimos que se trata de una fórmula atómica.
5. $S(B(c), Z)$ lo reescribimos como $S(t_1, t_2)$ cumple la aridad de S . Tenemos que ver que sean términos válidos: $t_1 = B(c)$ pero sabemos que B tiene aridad 2, por tanto t_1 no es un término; $t_2 = Z$ es un término válido. Concluimos que no es una fórmula atómica.

6. $(B(X, Y) \Rightarrow (\exists Z. S(Z, Y)))$ lo podemos abstraer a $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$ para analizar la fórmula. Tomamos $\sigma_1 = B(X, Y)$ donde $B(t_1, t_2)$ y $t_1 = X, t_2 = Y$ son dos variables y por tanto σ_1 es un término válido. Veamos $\sigma_2 = \exists Z. S(Z, Y)$ donde podemos reescribir como $\sigma_2 = \exists Z. \sigma'_2$ y analizar si σ'_2 es un término válido. $\sigma'_2 = S(Z, Y)$ donde $S(t'_1, t'_2)$ es un término si tanto t'_1 como t'_2 lo son. Afortunadamente, $t'_1 = Z, t'_2 = Y$ ambas variables y por tanto términos, se cumple la aridad de S y por tanto, σ_2 es término. Concluimos entonces que $(B(X, Y) \Rightarrow (\exists Z. S(Z, Y)))$ es una fórmula atómica.
7. $(S(X, Y) \Rightarrow S(Y, f(f(X))))$ reescribimos como $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$ donde $\sigma_1 = S(X, Y)$ un término válido (ya que X e Y son variables); $\sigma_2 = S(Y, f(f(X)))$ que reescrito, $\sigma_2 = S(t_1, t_2)$ donde $t_1 = Y$ un término válido y $t_2 = f(f(X))$ no hay problema acá con la aridad de f ya que $t_2 = f(t'_2)$ donde $t'_2 = f(X)$ que es un término dado que f toma la variable X respetando su aridad. Concluimos que t_2 es un término válido y por ello σ_2 . Como consecuencia, $(S(X, Y) \Rightarrow S(Y, f(f(X))))$ es una fórmula atómica.
8. $B(X, Y) \Rightarrow f(X)$ reescrito $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$ donde $\sigma_1 = B(X, Y)$ es un término ya que la aridad de B es 2 y tanto X como Y son variables, ergo términos válidos; $\sigma_2 = f(X)$ es un término ya que la aridad de f es uno y sólo toma un parámetro X (que sí es término por ser variable). Concluimos que $B(X, Y) \Rightarrow f(X)$ es una fórmula atómica.
9. $S(X, f(Y)) \wedge B(X, Y)$ queremos reescribirlo como $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ donde $\sigma_1 = S(X, f(y))$ que podemos reescribir como $\sigma_1 = S(t_1, t_2)$ y por tanto vale la aridad de S , y, $t_1 = X$ un término válido, $t_2 = f(Y)$ que corresponde a la aridad de f y por tanto t_2 es un término válido ya que Y es una variable; $\sigma_2 = B(X, Y)$ que reescrito como $\sigma_2 = B(t'_1, t'_2)$ cumple la aridad de B y $t'_1 = X, t'_2 = Y$ cumplen ser términos válidos. Concluimos entonces que $S(X, f(Y)) \wedge B(X, Y)$ no es una fórmula atómica.
10. $\forall X. B(X, f(X))$ lo reescribimos como $\forall X. \sigma$ donde $\sigma = B(t_1, t_2)$ que respeta la aridad de B , ahora queremos ver si $t_1 = X, t_2 = f(X)$ son términos. Como t_1 sólo representa una variable, es un término válido. Por otro lado, $t_2 = f(t'_1)$ respeta la aridad de f y en particular $t'_1 = X$ una variable, por tanto t_2 es término. Concluimos que $\forall X. B(X, f(X))$ es una fórmula.
11. $\exists X. B(Y, X(c))$ podemos escribirla como $\exists X. \sigma$ donde $\sigma = B(Y, X(c))$ que reescrito como $\sigma = B(t_1, t_2)$ vemos que corresponde la aridad de B , tenemos que constatar que tanto t_1 como t_2 sean términos. $t_1 = Y$ lo cual es un término válido. $t_2 = X(c)$ el problema es que la variable X no está definida como símbolo de función y por tanto, no corresponde a un término válido. Como conclusión, $\exists X. B(Y, X(c))$ no es una fórmula atómica.

1.3 Ejercicio 3

Sea $\sigma = \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z)$

1. Podemos reescribir σ con paréntesis para poder detectar cuáles están ligadas y en qué scope como sigue: $\sigma = ((\exists X. P(Y, Z)) \wedge (\forall Y. \neg Q(Y, X))) \vee P(Y, Z)$ con esto en mente podríamos reescribir $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$ donde $\sigma_1 = (\exists X. P(Y, Z)) \wedge (\forall Y. \neg Q(Y, X))$ que a su vez $\sigma_1 = \sigma_{11} \wedge \sigma_{12}$ donde $\sigma_{11} = \exists X. P(Y, Z)$ este término tiene ligada al cuantificador la variable X y aparecen libres Y, Z . Por otra parte, $\sigma_{12} = \forall Y. \neg Q(Y, X)$ contiene ligada la variable Y al cuantificador universal pero aparece libre X . Finalmente, en σ_2 , tanto Y como Z aparecen libres.
2. Nos piden hacer sustituciones en σ . Recordar que las sustituciones se hacen donde la variable aparece libre.

- $\sigma\{X := W\}$

$$\begin{aligned} \sigma &= \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z) \\ &\quad \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z)\{X := W\} \\ &\stackrel{\{X:=W\}}{\equiv} \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, \textcolor{brown}{W}) \vee P(Y, Z) \end{aligned}$$

- $\sigma\{Y := W\}$

$$\begin{aligned} \sigma &= \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z) \\ &\quad \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z)\{Y := W\} \\ &\stackrel{\{Y:=W\}}{\equiv} \exists X. P(\textcolor{brown}{W}, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(\textcolor{brown}{W}, Z) \end{aligned}$$

- $\sigma\{Y := f(X)\}$ tenemos que renombrar ya que sino, se produce captura. $\sigma\{Y := f(X')\}$

$$\begin{aligned} \sigma &= \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z) \\ &\quad \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z)\{Y := f(X')\} \\ &\stackrel{\{Y:=f(X')\}}{\equiv} \exists X. P(\textcolor{brown}{f(X')}, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(\textcolor{brown}{f(X')}, Z) \end{aligned}$$

- $\sigma\{Z := g(Y, Z)\}$

$$\begin{aligned}\sigma &= \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z) \\ &\quad \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z) \{Z := g(Y, Z)\} \\ &\stackrel{\{Z := g(Y, Z)\}}{\equiv} \exists X. P(Y, g(Y, Z)) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, g(Y, Z))\end{aligned}$$

1.4 Ejercicio 4

Dada $\sigma = \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z)$

1. Podemos reescribir $\sigma = \neg \sigma'$ donde $\sigma' = \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z)$ que podemos reescribir como $\sigma' = \sigma'_1 \wedge \sigma'_2$ y separar los casos de análisis en $\sigma'_1 = \forall X. \sigma''_1$ con $\sigma''_1 = \exists Y. \sigma'''_1$ donde $\sigma'''_1 = P(X, Y, Z)$ y concluir que en σ'_1 tenemos a X, Y ligadas por un cuantificador universal y existencial respectivamente, dejando libre a la variable Z . Por el otro lado, $\sigma'_2 = \forall Z. \sigma''_2$ la podemos analizar como $\sigma''_2 = P(X, Y, Z)$ y concluir que sólo está ligada por el cuantificador universal la variable Z y tanto X como Y aparecen libres.

2. Nos piden hacer sustituciones en σ

- $\sigma\{X := g(f(g(Y, Y)), Y)\}$

$$\begin{aligned}\sigma &= \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z) \\ &\quad \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z) \{X := g(f(g(Y, Y)), Y)\} \\ &\equiv \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(g(f(g(Y, Y)), Y), Y, Z)\end{aligned}$$

- $\sigma\{Y := g(f(g(Y, Y)), Y)\}$

$$\begin{aligned}\sigma &= \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z) \\ &\quad \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z) \{Y := g(f(g(Y, Y)), Y)\} \\ &\equiv \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, g(f(g(Y, Y)), Y), Z)\end{aligned}$$

- $\sigma\{Z := g(f(g(Y, Y)), Y)\}$ tenemos que renombrar para no capturar

$$\begin{aligned}\sigma &= \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z) \\ &\quad \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z) \{Z := g(f(g(Y, Y)), Y)\} \\ &\equiv \neg \forall X. (\exists Y'. P(X, Y', g(f(g(Y, Y)), Y))) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z)\end{aligned}$$

3. Nos piden hacer sustituciones en σ . Tenemos que renombrar

- $\sigma\{X := g(f(g(Y, Y)), Y), Y := g(f(g(Y, Y)), Y), Z := g(f(g(Y, Y)), Y)\}$

$$\begin{aligned}\sigma &= \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z) \\ &\quad \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z) \{X := g(f(g(Y, Y)), Y)\} \\ &\equiv \neg \forall X. (\exists Y'. P(X, Y', g(f(g(Y, Y)), Y))) \wedge \forall Z. P(g(f(g(Y, Y)), Y), g(f(g(Y, Y)), Y), Z)\end{aligned}$$

4. Nos piden hacer sustituciones en σ . Aplicar una composición quiere decir que tenemos que aplicar de derecha a izquierda las sustituciones, por tanto renombramos las ligadas

- $\sigma(\{X := g(f(g(Y, Y)), Y)\} \circ \{Y := g(f(g(Y, Y)), Y)\} \circ \{Z := g(f(g(Y, Y)), Y)\})$

$$\begin{aligned}\sigma &= \neg \forall X'. (\exists Y'. P(X', Y', Z)) \wedge \forall Z'. P(X, Y, Z') \\ &\quad \neg \forall X'. (\exists Y'. P(X', Y', Z)) \wedge \forall Z'. P(X, Y, Z') \\ &\equiv \neg \forall X'. (\exists Y'. P(X', Y', g(f(g(Y, Y)), Y))) \wedge \forall Z'. P(g(f(g(Y, Y)), Y), g(f(g(Y, Y)), Y), Z')\end{aligned}$$

2 Unificación

2.1 Ejercicio 5

Tenemos que unir las expresiones que unifican entre sí, para ellas exhibir el mgu. Asumimos que a es una constante, X, Y, Z variables, f, g son símbolos de función y P, Q predicados.

- $P(f(X))$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
 - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos ya que no existe sustitución posible
 - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ podemos sustituir por $\{X := a\}$ por tanto, unifica y el mgu es $S = \{X := a\}$
 - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no podemos ya que no existe sustitución posible
 - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ no podemos ya que no existe sustitución posible
 - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos ya que no existe sustitución posible
 - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos ya que no existe sustitución posible
 - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos ya que no existe sustitución posible
 - $P(f(X)) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos ya que no existe sustitución posible
- $P(a)$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
 - $P(a) \stackrel{?}{=} P(X)$ con $\{X := a\}$ podemos unificar, por tanto el mgu es $S = \{X := a\}$
 - $P(a) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no hay sustitución posible
 - $P(a) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no hay sustitución posible
 - $P(a) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ no hay sustitución posible
 - $P(a) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no hay sustitución posible
 - $P(a) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no hay sustitución posible
 - $P(a) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no hay sustitución posible
 - $P(a) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no hay sustitución posible
- $P(Y)$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
 - $P(Y) \stackrel{?}{=} P(X)$ podemos sustituir por $\{X := Y\}$ como consecuencia, el mgu es $S = \{X := Y\}$
 - $P(Y) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ podemos sustituir por $\{Y := f(a)\}$ y este será el mgu
 - $P(Y) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ podemos sustituir por $\{Y := g(Z)\}$ y este será el mgu
 - $P(Y) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ no podemos sustituir
 - $P(Y) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
 - $P(Y) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos unificar
 - $P(Y) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos unificar
 - $P(Y) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Y))$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
 - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ podemos sustituir por $\{X := f(Y)\}$ dando el mgu $S = \{X := f(Y)\}$
 - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(Y)) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Z))$ con cuáles expresiones podemos unificar ?

- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ podemos sustituir $\{Y := Z\}$ y luego $\{X := f(Z)\}$ dando un mgu $S = S_2 \circ S_1 = \{X := f(Z), Y := Z\}$
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos unificar
- $Q(X, f(a))$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
 - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ podemos sustituir $\{X := f(a)\}$ y luego $\{Y := a\}$ dando como mgu $S = S_2 \circ S_1 = \{Y := a, X := f(a)\}$
 - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ no podemos unificar
 - $Q(X, f(a)) \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ no podemos unificar
- X con cuáles expresiones podemos unificar ?
 - $X \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
 - $X \stackrel{?}{=} P(f(a))$ sustituimos $\{X := P(f(a))\}$ y este es el mgu
 - $X \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ sustituimos $\{X := P(g(Z))\}$ y este es el mgu
 - $X \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ no podemos unificar
 - $X \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
 - $X \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ sustituimos $\{X := Q(f(Y), Y)\}$ y este es el mgu
 - $X \stackrel{?}{=} f(f(c))$ sustituimos por $\{X := f(f(c))\}$ y este es el mgu
 - $X \stackrel{?}{=} f(g(Y))$ sustituimos por $\{X := f(g(Y))\}$ y este es el mgu
- $f(X)$ con cuáles expresiones podemos unificar ?
 - $f(X) \stackrel{?}{=} P(X)$ no podemos unificar
 - $f(X) \stackrel{?}{=} P(f(a))$ no podemos unificar
 - $f(X) \stackrel{?}{=} P(g(Z))$ no podemos unificar
 - $f(X) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), X)$ no podemos unificar
 - $f(X) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))$ no podemos unificar
 - $f(X) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), Y)$ no podemos unificar
 - $f(X) \stackrel{?}{=} f(f(c))$ sustituimos por $\{X := f(c)\}$ este es el mgu
 - $f(X) \stackrel{?}{=} f(g(Z))$ sustituimos por $\{X := g(Z)\}$ este es el mgu

2.2 Ejercicio 6

Determinar con el algoritmo de Martelli-Montanari si las siguientes expresiones se pueden unificar

$$1. f(X, X, Y) \stackrel{?}{=} f(a, b, Z)$$

entrada : $\{f(X, X, Y) \stackrel{?}{=} f(a, b, Z)\}$
 decompose : $\{X \stackrel{?}{=} a, X \stackrel{?}{=} b, Y \stackrel{?}{=} Z\}$
 elim var : $\{X \stackrel{?}{=} a, X \stackrel{?}{=} b\}$ con $S1 = \{Y := Z\}$
 colision : **falla**

Las expresiones no se pueden unificar.

$$2. Y \stackrel{?}{=} f(X)$$

entrada : $\{Y \stackrel{?}{=} f(X)\}$
 elim var : \emptyset con $S1 = \{Y := f(X)\}$

La expresión se puede unificar y el mgu es $S = S_1 = \{Y := f(X)\}$

$$3. f(g(c, Y), X) \stackrel{?}{=} f(Z, g(Z, a))$$

entrada : $\{f(g(c, Y), X) \stackrel{?}{=} f(Z, g(Z, a))\}$
 decompose : $\{g(c, Y) \stackrel{?}{=} Z, X \stackrel{?}{=} g(Z, a)\}$
 elim var : $\{X \stackrel{?}{=} g(g(c, Y), a)\}$ con $S1 = \{Z := g(c, Y)\}$
 elim var : \emptyset con $S2 = \{X := g(g(c, Y), a)\}$

Por tanto, la expresión se puede unificar, donde el mgu es

$$S = S_2 \circ S_1 = \{X := g(g(c, Y), a), Z := g(c, Y)\}$$

$$4. f(a) \stackrel{?}{=} g(Y)$$

entrada : $\{f(a) \stackrel{?}{=} g(Y)\}$
 colision : **falla**

$$5. f(X) \stackrel{?}{=} X$$

entrada : $\{f(X) \stackrel{?}{=} X\}$
 occurs check : **falla**

$$6. g(X, Y) \stackrel{?}{=} g(f(Y), f(X))$$

entrada : $\{g(X, Y) \stackrel{?}{=} g(f(Y), f(X))\}$
 decompose : $\{X \stackrel{?}{=} f(Y), Y \stackrel{?}{=} f(X)\}$
 elim var : $\{Y \stackrel{?}{=} f(f(Y))\}$ con $S1 = \{X := f(Y)\}$
 occurs check : **falla**

2.3 Ejercicio 8

Sean las constantes Nat y Bool, y la función binaria \rightarrow (representada como un operador infijo). Determinar el resultado de aplicar el algoritmo MGU (*most general unifier*) sobre las ecuaciones planteadas a continuación. En caso de tener éxito, mostrar la sustitución resultante.

1. $MGU\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq Nat \rightarrow Bool\}$

entrada : $\{T_1 \rightarrow T_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow Bool\}$
 decompose : $\{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, T_2 \stackrel{?}{=} Bool\}$
 elim var : $\{T_2 \stackrel{?}{=} Bool\}$ con $S1 = \{T_1 := Nat\}$
 elim var : \emptyset con $S2 = \{T_2 := Bool\}$

Dicho esto,

$$S = S_2 \circ S_1 = \{T_2 := Bool, T_1 := Nat\}$$

2. $MGU\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq T_3\}$

entrada : $\{T_1 \rightarrow T_2 \stackrel{?}{=} T_3\}$
 elim var : \emptyset con $S1 = \{T_3 := T_1 \rightarrow T_2\}$

Entonces

$$S = S1 = \{T_3 := T_1 \rightarrow T_2\}$$

3. $MGU\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq T_2\}$

entrada : $\{T_1 \rightarrow T_2 \stackrel{?}{=} T_2\}$
 occurs check : **falla**

4. $MGU\{(T_2 \rightarrow T_1) \rightarrow Bool \doteq T_2 \rightarrow T_3\}$

entrada : $\{(T_2 \rightarrow T_1) \rightarrow Bool \stackrel{?}{=} T_2 \rightarrow T_3\}$
 decompose : $\{(T_2 \rightarrow T_1) \stackrel{?}{=} T_2, Bool \stackrel{?}{=} T_3\}$
 elim var : $\{(T_2 \rightarrow T_1) \stackrel{?}{=} T_2\}$ con $S1 = \{T_3 := Bool\}$
 occurs check : **falla**

5. $MGU\{T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow Bool \doteq T_2 \rightarrow T_3\}$

entrada : $\{T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow Bool \stackrel{?}{=} T_2 \rightarrow T_3\}$
 decompose : $\{T_2 \stackrel{?}{=} T_2, T_1 \rightarrow Bool \stackrel{?}{=} T_3\}$
 elim triv : $\{T_1 \rightarrow Bool \stackrel{?}{=} T_3\}$
 elim var : \emptyset con $S1 = \{T_3 := T_1 \rightarrow Bool\}$

Con esto

$$S = S1 = \{T_3 := T_1 \rightarrow Bool\}$$

6. $MGU\{T_1 \rightarrow Bool \doteq Nat \rightarrow Bool, T_1 \doteq T_2 \rightarrow T_3\}$

entrada : $\{T_1 \rightarrow Bool \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow Bool, T_1 \stackrel{?}{=} T_2 \rightarrow T_3\}$
 decompose : $\{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, Bool \stackrel{?}{=} Bool, T_1 \stackrel{?}{=} T_2 \rightarrow T_3\}$
 elim triv : $\{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, T_1 \stackrel{?}{=} T_2 \rightarrow T_3\}$
 colision : **falla**

7. $MGU\{T_1 \rightarrow Bool \doteq Nat \rightarrow Bool, T_2 \doteq T_1 \rightarrow T_1\}$

entrada : $\{T_1 \rightarrow Bool \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow Bool, T_2 \stackrel{?}{=} T_1 \rightarrow T_1\}$
 decompose : $\{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, Bool \stackrel{?}{=} Bool, T_2 \stackrel{?}{=} T_1 \rightarrow T_1\}$
 elim triv : $\{T_1 \stackrel{?}{=} Nat, T_2 \stackrel{?}{=} T_1 \rightarrow T_1\}$
 elim var : $\{T_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow Nat\}$ con $S1 = \{T_1 := Nat\}$
 elim var : \emptyset con $S2 = \{T_2 := Nat \rightarrow Nat\}$

Con esto,

$$S = S_2 \circ S_1 = \{T_2 := Nat \rightarrow Nat, T_1 := Nat\}$$

8. $MGU\{T_1 \rightarrow T_2 \doteq T_3 \rightarrow T_4, T_3 \doteq T_2 \rightarrow T_1\}$

entrada : $\{T_1 \rightarrow T_2 \stackrel{?}{=} T_3 \rightarrow T_4, T_3 \stackrel{?}{=} T_2 \rightarrow T_1\}$
 decompose : $\{T_1 \stackrel{?}{=} T_3, T_2 \stackrel{?}{=} T_4, T_3 \stackrel{?}{=} T_2 \rightarrow T_1\}$
 elim var : $\{T_1 \stackrel{?}{=} T_3, T_3 \stackrel{?}{=} T_4 \rightarrow T_1\}$ con $S1 = \{T_2 := T_4\}$
 elim var : $\{T_3 \stackrel{?}{=} T_4 \rightarrow T_3\}$ con $S1 = \{T_1 := T_3\}$
 occurs check : **falla**

3 Deducción Natural

3.1 Ejercicio 9

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas, sin usar principios de razonamiento clásico, salvo que se indique lo contrario:

1. Intercambio (\forall): $\forall X.\forall Y.P(X, Y) \Leftrightarrow \forall Y.\forall X.P(X, Y)$

- Arrancamos con la ida : \Rightarrow

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash \forall X.\forall Y.P(X, Y)} ax \\
 \frac{}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash \forall Y.P(x, Y)} \forall_e \\
 \frac{}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash P(\textcolor{violet}{x}, y)} \forall_e \\
 \frac{}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash \forall X.P(X, \textcolor{violet}{y})} \forall_i \\
 \frac{}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash \forall Y.\forall X.P(X, Y)} \forall_i \\
 \hline
 \Gamma \vdash \forall X.\forall Y.P(X, Y) \Rightarrow \forall Y.\forall X.P(X, Y) \Rightarrow_i
 \end{array}$$

- Vamos con la vuelta : \Leftarrow

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, (\forall Y.\forall X.P(X, Y)) \vdash \forall Y.\forall X.P(X, Y)} ax \\
 \frac{}{\Gamma, (\forall Y.\forall X.P(X, Y)) \vdash \forall X.P(X, y)} \forall_e \\
 \frac{}{\Gamma, (\forall Y.\forall X.P(X, Y)) \vdash P(x, \textcolor{violet}{y})} \forall_e \\
 \frac{}{\Gamma, (\forall Y.\forall X.P(X, Y)) \vdash \forall Y.P(\textcolor{violet}{x}, Y)} \forall_i \\
 \frac{}{\Gamma, (\forall Y.\forall X.P(X, Y)) \vdash \forall X.\forall Y.P(X, Y)} \forall_i \\
 \hline
 \Gamma \vdash \forall Y.\forall X.P(X, Y) \Rightarrow \forall X.\forall Y.P(X, Y) \Rightarrow_i
 \end{array}$$

2. Intercambio (\exists): $\exists X.\exists Y.P(X, Y) \Leftrightarrow \exists Y.\exists X.P(X, Y)$

- Ida \Rightarrow

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma' \vdash \exists X.\textcolor{violet}{\exists Y}.P(\textcolor{violet}{X}, \textcolor{violet}{Y})} ax \\
 \frac{}{\Gamma'' \vdash \exists Y.\textcolor{violet}{P}(\textcolor{violet}{x}, \textcolor{violet}{Y})} ax \\
 \frac{}{\Gamma'', P(x, y) \vdash P(x, y)} ax \\
 \frac{}{\Gamma'', P(x, y) \vdash \exists X.P(X, \textcolor{violet}{y})} \exists_i \\
 \frac{}{\Gamma'', P(x, y) \vdash \exists Y.\exists X.P(X, Y)} \exists_i \\
 \frac{}{\Gamma', (\exists Y.P(\textcolor{violet}{x}, Y)) \vdash \exists Y.\exists X.P(X, Y)} \exists_e \\
 \hline
 \Gamma \vdash \exists X.\exists Y.P(X, Y) \Rightarrow \exists Y.\exists X.P(X, Y) \Rightarrow_i
 \end{array}$$

- Vuelta \Leftarrow

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\Gamma', P(x, y) \vdash P(x, y)}{ax} \exists_i}{\Gamma'', P(x, y) \vdash \exists Y.P(x, Y)} \exists_i}{\Gamma'', P(x, y) \vdash \exists X.\exists Y.P(X, Y)} \exists_e \\
\frac{\frac{\Gamma' \vdash \exists X.P(X, y)}{ax} \exists_e}{\Gamma', (\exists X.P(X, y)) \vdash \exists X.\exists Y.P(X, Y)} \exists_e \\
\frac{\Gamma' \vdash \exists Y.\exists X.P(X, Y)}{ax} \exists_e \quad \frac{\Gamma', (\exists X.P(X, y)) \vdash \exists X.\exists Y.P(X, Y)}{\Gamma, (\exists Y.\exists X.P(X, Y)) \vdash \exists X.\exists Y.P(X, Y)} \Rightarrow_i \\
\Gamma \vdash \exists Y.\exists X.P(X, Y) \Rightarrow \exists X.\exists Y.P(X, Y)
\end{array}$$

3. Intercambio $(\exists/\forall): \exists X.\forall Y.P(X, Y) \Rightarrow \forall Y.\exists X.P(X, Y)$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\Gamma', \forall Y.P(x, Y) \vdash \forall Y.P(x, Y)}{ax} \forall_e}{\Gamma', \forall Y.P(x, Y) \vdash P(x, y)} \exists_i \\
\frac{\Gamma', \forall Y.P(x, Y) \vdash \exists X.P(X, y)}{\Gamma', \forall Y.P(x, Y) \vdash \forall Y.\exists X.P(X, Y)} \forall_i \\
\frac{\Gamma' \vdash \exists X.\forall Y.P(X, Y)}{ax} \forall_e \quad \frac{\Gamma', \forall Y.P(x, Y) \vdash \forall Y.\exists X.P(X, Y)}{\Gamma, (\exists X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash \forall Y.\exists X.P(X, Y)} \Rightarrow_i \\
\Gamma \vdash \exists X.\forall Y.P(X, Y) \Rightarrow \forall Y.\exists X.P(X, Y)
\end{array}$$

4. Universal implica existencial: $\forall X.P(X) \Rightarrow \exists X.P(X)$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma' \vdash \forall X.P(X)}{ax} \forall_e \\
\frac{\Gamma' \vdash P(x)}{\Gamma, (\forall X.P(X)) \vdash \exists X.P(X)} \exists_i \\
\Gamma \vdash \forall X.P(X) \Rightarrow \exists X.P(X)
\end{array}$$

5. Diagonal $(\forall): \forall X.\forall Y.P(X, Y) \Rightarrow \forall X.P(X, X)$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash \forall X.\forall Y.P(X, Y)}{ax} \forall_e \\
\frac{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash \forall Y.P(x, Y)}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash P(x, x)} \forall_e \\
\frac{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash P(x, x)}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.P(X, Y)) \vdash \forall X.P(X, X)} \forall_i \\
\Gamma \vdash \forall X.\forall Y.P(X, Y) \Rightarrow \forall X.P(X, X)
\end{array}$$

6. Diagonal $(\exists): \exists X.P(X, X) \Rightarrow \exists X.\exists Y.P(X, Y)$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma', P(x, x) \vdash P(x, x)}{ax} \exists_i \\
\frac{\Gamma', P(x, x) \vdash \exists Y.P(x, Y)}{\Gamma', P(x, x) \vdash \exists X.\exists Y.P(X, Y)} \exists_i \\
\frac{\Gamma' \vdash \exists X.P(X, X)}{ax} \exists_e \quad \frac{\Gamma', P(x, x) \vdash \exists X.\exists Y.P(X, Y)}{\Gamma, (\exists X.P(X, X)) \vdash \exists X.\exists Y.P(X, Y)} \Rightarrow_i \\
\Gamma \vdash \exists X.P(X, X) \Rightarrow \exists X.\exists Y.P(X, Y)
\end{array}$$

7. De Morgan (I): $\neg \exists X.P(X) \Leftrightarrow \forall X.\neg P(X)$

• Ida \Rightarrow

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma', P(x) \vdash P(x)}{ax} \exists_i \\
\frac{\Gamma', P(x) \vdash \exists X.P(X)}{\Gamma', P(x) \vdash \neg \exists X.P(X)} \neg_e \\
\frac{\Gamma', P(x) \vdash \perp}{\Gamma' \vdash \neg P(x)} \neg_i \\
\frac{\Gamma, \neg \exists X.P(X) \vdash \forall X.\neg P(X)}{\Gamma \vdash \neg \exists X.P(X) \Rightarrow \forall X.\neg P(X)} \Rightarrow_i
\end{array}$$

- Vuelta \Leftarrow (consultar)

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma', \exists X.P(X) \vdash} \quad \overline{\Gamma', \exists X.P(X) \vdash}}{\Gamma', \exists X.P(X) \vdash \perp} \neg_i}{\Gamma, \forall X.\neg P(X) \vdash \neg \exists X.P(X)} \neg_i}{\Gamma \vdash \forall X.\neg P(X) \Rightarrow \neg \exists X.P(X)} \Rightarrow_i$$

8. De Morgan (II): $\neg \forall X.P(X) \Leftrightarrow \exists X.\neg P(X)$

Para la dirección \Rightarrow es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

- Ida \Rightarrow
- Vuelta \Leftarrow (consultar)

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma', \forall X.P(X) \vdash \forall X.P(X)} \quad ax}{\Gamma', \forall X.P(X) \vdash P(\textcolor{violet}{x})} \forall_e \quad \frac{\overline{\Gamma'' \vdash} \quad \overline{\Gamma'' \vdash}}{\Gamma', \forall X.P(X) \vdash} \exists_e}{\frac{\frac{\overline{\Gamma', \forall X.P(X) \vdash \perp}}{\Gamma, \exists X.\neg P(X) \vdash \neg \forall X.P(X)} \neg_i}{\Gamma \vdash \exists X.\neg P(X) \Rightarrow \neg \forall X.P(X)} \Rightarrow_i} \neg_e$$

9. Universal/conjunción: $\forall X.(P(X) \wedge Q(X)) \Leftrightarrow (\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X))$

- Ida \Rightarrow

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma' \vdash \forall X.(P(X) \wedge Q(X))} \quad ax}{\Gamma' \vdash P(x) \wedge Q(x)} \forall_e \quad \frac{\overline{\Gamma' \vdash \forall X.(P(X) \wedge Q(X))} \quad ax}{\Gamma' \vdash P(x) \wedge Q(x)} \forall_e}{\frac{\frac{\overline{\Gamma' \vdash P(\textcolor{violet}{x})}}{\Gamma' \vdash \forall X.P(X)} \forall_i \quad \frac{\overline{\Gamma' \vdash Q(\textcolor{violet}{x})}}{\Gamma' \vdash \forall X.Q(X)} \forall_i}{\frac{\overline{\Gamma, \forall X.(P(X) \wedge Q(X) \vdash \forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X))} \wedge_i}{\Gamma \vdash \forall X.(P(X) \wedge Q(X)) \Rightarrow (\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X))} \Rightarrow_i} \wedge_{e1}$$

- Vuelta \Leftarrow

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma' \vdash \forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X)} \quad ax}{\Gamma' \vdash \forall X.P(X)} \wedge_{e1} \quad \frac{\overline{\Gamma' \vdash \forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X)} \quad ax}{\Gamma' \vdash \forall X.Q(X)} \wedge_{e2}}{\frac{\frac{\overline{\Gamma' \vdash P(x)}}{\Gamma' \vdash P(x)} \forall_e \quad \frac{\overline{\Gamma' \vdash Q(x)}}{\Gamma' \vdash Q(x)} \forall_e}{\frac{\overline{\Gamma' \vdash P(x) \wedge Q(\textcolor{violet}{x})}}{\Gamma, (\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X)) \vdash \forall X.(P(X) \wedge Q(X))} \wedge_i} \forall_e \quad \text{con } \{ X := \textcolor{violet}{x} \}$$

10. Universal/disyunción: $\forall X.(P(X) \vee \sigma) \Leftrightarrow (\forall X.P(X)) \vee \sigma$,
asumiendo que $X \notin \text{fv}(\sigma)$.

Para la dirección \Rightarrow es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

- Ida \Rightarrow (por qué usamos LEM ?)

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma' \vdash} \quad \overline{\Gamma'} \quad \overline{\Gamma'}}{\Gamma, \forall X.(P(X) \vee \sigma) \vdash (\forall X.P(X)) \vee \sigma} \vee_e}{\Gamma \vdash \forall X.(P(X) \vee \sigma) \Rightarrow (\forall X.P(X)) \vee \sigma} \Rightarrow_i$$

- Vuelta \Leftarrow

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma'' \vdash \forall X.(P(X))}{\Gamma'' \vdash P(x)} \forall_e \quad \text{con } \{X := x\}}{\Gamma'' \vdash P(x) \vee \sigma} \vee_{i_1} \quad \frac{\frac{\Gamma' \vdash \forall X.(P(X))}{\Gamma', (\forall X.P(X)) \vdash \forall X.(P(X) \vee \sigma)} \forall_i \quad \frac{\frac{\Gamma', \sigma \vdash \sigma}{\Gamma', \sigma \vdash P(x) \vee \sigma} \vee_{i_2}}{\Gamma', \sigma \vdash \forall X.(P(X) \vee \sigma)} \forall_i \quad \frac{\Gamma' \vdash (\forall X.P(X)) \vee \sigma}{\Gamma \vdash (\forall X.P(X)) \vee \sigma} \vee_e \quad \frac{\Gamma, (\forall X.P(X)) \vee \sigma \vdash \forall X.(P(X) \vee \sigma)}{\Gamma \vdash (\forall X.P(X)) \vee \sigma \Rightarrow \forall X.(P(X) \vee \sigma)} \Rightarrow_i$$

11. Existencial/disyunción: $\exists X.(P(X) \vee Q(X)) \Leftrightarrow (\exists X.P(X) \vee \exists X.Q(X))$
12. Existencial/conjunción: $\exists X.(P(X) \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\exists X.P(X) \wedge \sigma)$,
asumiendo que $X \notin \text{fv}(\sigma)$.
13. Principio del bebedor: $\exists X.(P(X) \Rightarrow \forall X.P(X))$
En este ítem es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

3.2 Ejercicio 10

Demostrar en deducción natural : $(\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \Rightarrow (\forall X.R(X, f(f(X))))$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \vdash \forall X.\forall Y.R(X, f(Y)))}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \vdash \forall Y.R(x, f(Y)))} \forall_e \quad \text{con } \{X := x\}}{\Gamma, (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \vdash R(x, f(f(x)))} \forall_e \quad \text{con } \{Y := f(x)\}} \vee_i \quad \frac{\Gamma, (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \vdash \forall X.R(X, f(f(X)))}{\Gamma \vdash (\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \Rightarrow (\forall X.R(X, f(f(X))))} \Rightarrow_i$$

4 Semántica

4.1 Ejercicio 13

Sea L el lenguaje de primer orden que incluye (junto con las variables, conectivos y cuantificadores) la constante a_1 , el símbolo de función f de aridad 2 y el símbolo de predicado P de aridad 2. Sea σ la fórmula:

$$\forall X_1 \forall X_2 (P(f(X_1, X_2), a_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$$

Definamos una interpretación \mathcal{I} para L como sigue: $D_{\mathcal{I}}$ es \mathbb{Z} , $\overline{a_1} = 0$, $\overline{f}(X, Y) = X - Y$, y $\overline{P}(X, Y)$ es $X < Y$.

1. Escribir la interpretación de σ en castellano.
La interpretación de la fórmula en castellano es la siguiente : "para toda variable del dominio X_1 y X_2 si vale que la diferencia entre las variables es menor que cero entonces, en particular vale que X_1 es menor que X_2 "
2. ¿El enunciado es verdadero o falso?
El enunciado es verdadero bajo la interpretación definida.
3. Hallar una interpretación de σ en la cual el enunciado tenga el valor de verdad opuesto.
Si proponemos una interpretación \mathcal{I}' para \mathcal{L} donde $D_{\mathcal{I}'}$ es \mathbb{Z} , $\overline{a_1} = 0$, $\overline{f}(X, Y) = X + Y$, y $\overline{P}(X, Y)$ es un predicado que define la igualdad. Bajo esta nueva interpretación, la fórmula σ es falsa.

4.2 Ejercicio 14

Sea \mathbb{N} la interpretación aritmética donde $D_{\mathcal{I}} = \mathbb{N}$ y:

$$\begin{aligned}
\overline{c^0} &\text{ es } 0 \\
\overline{P^2} &\text{ es } = \\
\overline{f_1^1} &\text{ es la función sucesor} \\
\overline{f_2^2} &\text{ es la suma } + \\
\overline{f_3^2} &\text{ es el producto } \times
\end{aligned}$$

Hallar, si es posible, asignaciones que **satisfagan** y que **no satisfagan** las siguientes fórmulas:

1. $P(f_2(X_1, X_1), f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))$
 $: \{P(f_2(X_1, X_1), f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))\}$
 $P : \{f_2(X_1, X_1) \stackrel{?}{=} f_3(f_1(X_1), f_1(X_1))\}$
 $f_2 : \{X_1 + X_1 \stackrel{?}{=} f_3(f_1(X_1), f_1(X_1))\}$
 $f_3 : \{X_1 + X_1 \stackrel{?}{=} f_1(X_1) \times f_1(X_1)\}$
 $f_1 : \{2 \times X_1 \stackrel{?}{=} X_1^2 + X_1 + 1\}$
 $f_1 : \{0 \stackrel{?}{=} X_1^2 - X_1 + 1\}$

No está definida la raíz en \mathbb{N} por tanto, no hay sustitución que satisfaga esta fórmula en esta interpretación.

2. $P(f_2(X_1, c), X_2) \Rightarrow P(f_2(X_1, X_2), X_3)$
 $: \{P(f_2(X_1, c), X_2) \Rightarrow P(f_2(X_1, X_2), X_3)\}$
 $P : \{f_2(X_1, c) \stackrel{?}{=} X_2 \Rightarrow f_2(X_1, X_2) \stackrel{?}{=} X_3\}$
 $f_2 : \{X_1 + c \stackrel{?}{=} X_2 \Rightarrow X_1 + X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$
 $c : \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \Rightarrow X_1 + X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$
 $: \{X_1 + X_1 \stackrel{?}{=} X_3\} \text{ con } S1 = \{X_2 := X_1\}$
 $: \emptyset \text{ con } S2 = \{X_3 := X_1 + X_1\}$

La sustitución que satisface es $S = S_2 \circ S_1 = \{X_3 := X_1 + X_1, X_2 := X_1\}$.

3. $\neg P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))$
 $: \{\neg P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))\}$
 $: \{P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))\}$
 $P : \{f_3(X_1, X_2) \stackrel{?}{=} f_3(X_2, X_3)\}$
 $\text{decompose} : \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$
 $\text{elim var} : \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3\} \text{ con } S1 = \{X_2 := X_3\}$
 $\text{elim var} : \emptyset \text{ con } S2 = \{X_1 := X_3\}$

Existe una sustitución que satisface $S = S_2 \circ S_1 = \{X_1 := X_3, X_2 := X_3\}$

4. $\forall X_1. P(f_3(X_1, X_2), X_3)$
 $: \{\forall X_1. P(f_3(X_1, X_2), X_3)\}$
 $: \{f_3(X_1, X_2) \stackrel{?}{=} X_3\}$
 $: \{(X_1 \times X_2) \stackrel{?}{=} X_3\}$
 $: \emptyset \text{ con } S = \{X_3 := (X_1 \times X_2)\}$

Es falso que vale para todos los X_1 del dominio, vale sólo para aquellos que cumplen $(X_1 \times X_2) := X_3$

5. $\forall X_1. (P(f_3(X_1, c), X_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$
 $: \{P(f_3(X_1, c), X_1) \Rightarrow P(X_1, X_2)\}$
 $P : \{f_3(X_1, c) \stackrel{?}{=} X_1 \Rightarrow X_1 \stackrel{?}{=} X_2\}$
 $f_3 : \{X_1 \times c \stackrel{?}{=} X_1 \Rightarrow X_1 \stackrel{?}{=} X_2\}$
 $\text{elim var} : \{c \times c \stackrel{?}{=} c \Rightarrow c \stackrel{?}{=} X_2\} \text{ con } S1 = \{X_1 := c\}$
 $\text{elim var} : \{c \stackrel{?}{=} c\} \text{ con } S2 = \{X_2 := c\}$
 $\text{elim triv} : \emptyset$

Con esto dicho, satisface sólo $X_1 := c$ por tanto, es falso que vale para todo elemento del dominio de la interpretación.