

Práctica 5 : Inferencia de Tipos

Tomás Felipe Melli

June 1, 2025

Índice

1	Ejercicios	2
1.1	Ejercicio 1	2
1.2	Ejercicio 2	2
1.3	Ejercicio 3	3
1.4	Ejercicio 4	3
1.5	Ejercicio 5	8
1.6	Ejercicio 8	13
1.6.1	1	13
1.6.2	2	14
1.7	Ejercicio 9	15
1.8	Ejercicio 10	18

1 Ejercicios

Gramáticas a tener en cuenta :

- Términos **anotados**

$$M ::= x \mid \lambda x : \sigma. M \mid M M \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \mid \text{zero} \mid \text{succ}(M) \mid \text{pred}(M) \mid \text{isZero}(M) \mid \mu x : \sigma. M$$

Donde la letra x representa un nombre de variable arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado:

$$X = \{w, w_1, w_2, \dots, x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, f, f_1, f_2, \dots\}$$

- Términos **sin anotaciones**

$$U ::= x \mid \lambda x. U \mid U U \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } U \text{ then } U \text{ else } U \mid \text{zero} \mid \text{succ}(U) \mid \text{pred}(U) \mid \text{isZero}(U) \mid \mu x. U$$

- Tipos

$$\tau ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \tau \rightarrow \tau \mid X_n$$

Donde n es un número natural, de tal modo que X_n representa una variable de tipo arbitraria tomada de un conjunto:

$$T = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$$

Nota: también podemos referirnos a las variables de tipo como *incógnitas*.

1.1 Ejercicio 1

1. $\lambda x : \text{Bool}. \text{succ}(x)$ esta expresión es válida sintácticamente y corresponde a **Términos anotados**
2. $\lambda x. \text{isZero}(x)$ esta expresión es válida en la gramática de **Términos sin anotaciones**
3. $X_1 \rightarrow \sigma$ es una expresión válida y corresponde a la gramática de **Tipos**
4. `erase(f y)`
5. X_1 es una variable de tipo (incógnita en este caso) que sintácticamente está bien formada y corresponde a **Tipos**
6. $X_1 \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow X_2)$ tenemos este término que se corresponde a la gramática de **Tipos** compuesto por dos incógnitas.
7. $\lambda x : X_1 \rightarrow X_2. \text{if zero then True else zero succ(True)}$ no es una expresión válida. Es evidente que falla dado que succ(True) no es válido
8. `erase($\lambda f : \text{Bool} \rightarrow \text{s}. \lambda y : \text{Bool}. f y$)`

1.2 Ejercicio 2

Tenemos que aplicar la sustitución S al término. O sea, el resultado de $S(..algo..)$

1. Sea $S = \{X_1 := \text{Nat}\}$

$$S(\{x : X_1 \rightarrow \text{Bool}\}) \\ \stackrel{\{X_1\}}{=} \{x : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}\}$$

2. Sea $S = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3, X_4 := \text{Bool}\}$

$$S(\{x : X_4 \rightarrow \text{Bool}\}) \vdash S(\lambda x : X_1 \rightarrow \text{Bool}. x) : S(\text{Nat} \rightarrow X_2) \\ \stackrel{\{X_4\}}{=} \{x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}\} \vdash S(\lambda x : X_1 \rightarrow \text{Bool}. x) : S(\text{Nat} \rightarrow X_2) \\ \stackrel{\{X_1\}}{=} \{x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}\} \vdash \lambda x : \text{X}_2 \rightarrow \text{X}_3 \rightarrow \text{Bool}. x : S(\text{Nat} \rightarrow X_2) \\ \stackrel{\{no\ hay\ reemplazo\}}{=} \{x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}\} \vdash \lambda x : X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow \text{Bool}. x : \text{Nat} \rightarrow \text{X}_2$$

1.3 Ejercicio 3

Elegimos los pares de tipos que unifican entre sí. Por cada uno, mostramos el *mgu*

- Primero presentamos el par que consideramos que podría unificar : (nombramos E al conjunto finito de ecuaciones)
 $E = \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$. Luego presentamos el **unificador** (es decir, la sustitución que hace valer la igualdad) $S = \{X_1 := Nat\}$

•

$$E = \{X_1 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow Bool\}$$

$$S = \{X_1 := Nat, X_2 := Bool\}$$

•

$$E = \{X_2 \rightarrow Bool \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow Bool\}$$

$$S = \{X_2 := Nat\}$$

•

$$E = \{X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_2 \rightarrow Bool\}$$

$$S = \{X_3 := Nat, X_4 := X_2, X_5 := Bool\}$$

1.4 Ejercicio 4

Utilizar el **Algoritmo de inferencia** para decidir cuáles son tipables.

1. $U = \lambda z. \text{if } z \text{ then zero else succ}(\text{zero})$

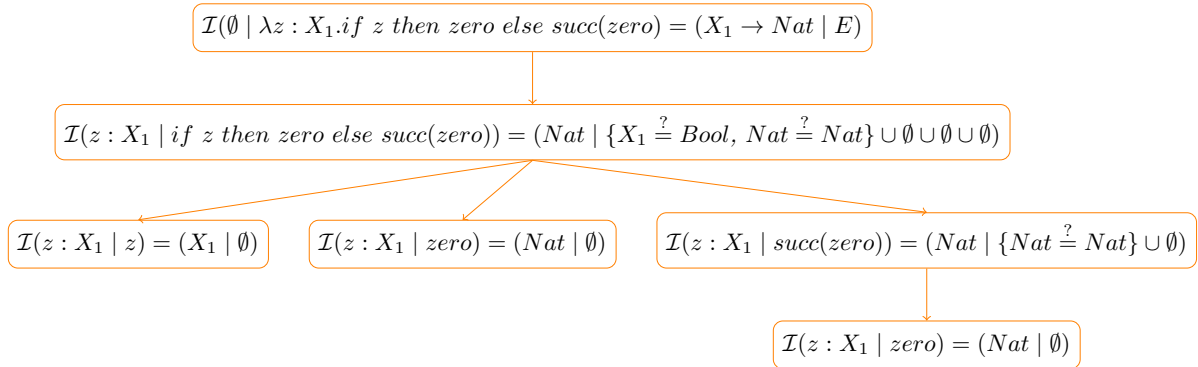
- Paso I : Rectificación. z es la única variable ligada y no hay otra variable (ni libre ni ligada). Concluimos que el término está **rectificado**.
- Paso II : Anotación. Agregamos un **contexto a las variables libres** y un **término anotado**. Como no hay variables libres, agregamos el **contexto vacío**, pero sí **anotamos una incógnita a z** .

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda z : X_1. \text{if } z \text{ then zero else succ}(\text{zero})$$

Recordar que $U = \text{erase}(M_0)$ debe valer.

- Paso III : Restricciones.



- Paso IV: Unificación.

$$\text{entrada} : \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Bool\}$$

$$\text{elim triv} : \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool\}$$

$$\text{elim var} : \{Bool \stackrel{?}{=} Bool\} \quad \text{con } S1 = \{X := Bool\}$$

$$\text{elim triv} : \emptyset$$

Concluimos que el unificador es :

$$S = \{X_1 := Bool\}$$

Con ello, el término U es tipable y vale el siguiente juicio:

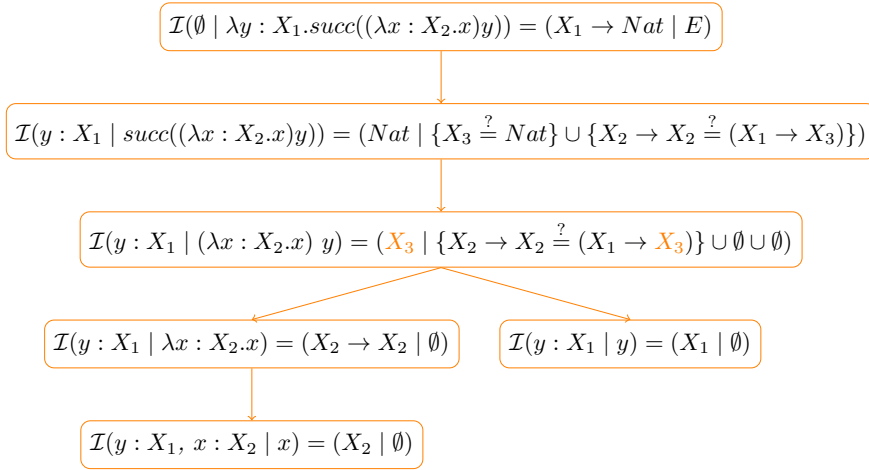
$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow Nat) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\lambda z : Bool. if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)) : S(Bool \rightarrow Nat) \end{aligned}$$

2. $U = \lambda y. succ((\lambda x. x)y)$

- (a) Paso I: Rectificación. Tenemos sólo dos variables, ambas ligadas x e y . Tienen distintos nombres. Concluimos que el término está rectificado.
- (b) Paso II : Anotación. Como no hay variables libres, el contexto es vacío. Anotamos a las ligadas

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= \lambda y : X_1. succ((\lambda x : X_2. x)y) \end{aligned}$$

- (c) Paso III : Restricciones.



- (d) Paso IV : Unificación.

$$\begin{aligned} \text{entrada} &: \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_3)\} \\ \text{decompose} &: \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\} \\ \text{elim var} &: \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\} \quad \text{con } S1 = \{X_3 := Nat\} \\ \text{elim triv} &: \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\} \\ \text{elim var} &: \{Nat \stackrel{?}{=} X_1, Nat \stackrel{?}{=} Nat\} \quad \text{con } S2 = \{X_2 := Nat\} \\ \text{elim triv} &: \{Nat \stackrel{?}{=} X_1\} \\ \text{elim var} &: \{Nat \stackrel{?}{=} Nat\} \quad \text{con } S3 = \{X_1 := Nat\} \\ \text{elim triv} &: \emptyset \end{aligned}$$

Con esto, el unificador más general es :

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat, X_2 := Nat, X_1 := Nat\}$$

Por tanto, existe U tipable y por ello vale el siguiente juicio:

$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow Nat) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\lambda y : Nat. succ((\lambda x : X_2. x)y)) : S(Nat \rightarrow Nat) \end{aligned}$$

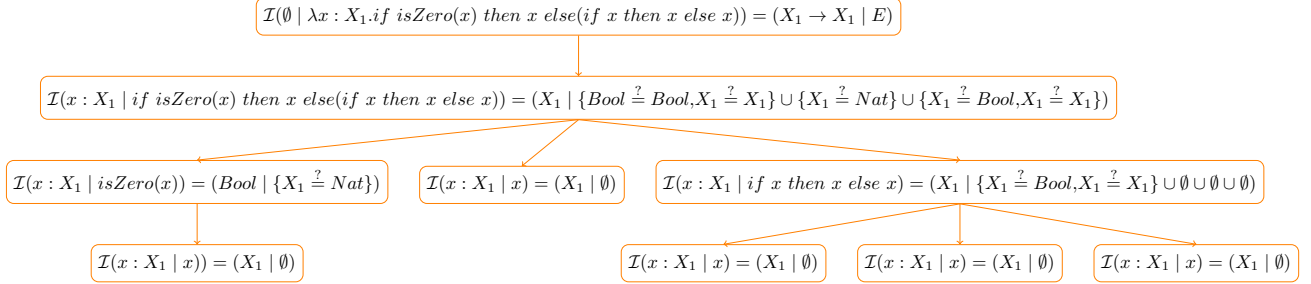
3. $U = \lambda x. \text{if } \text{isZero}(x) \text{ then } x \text{ else } (\text{if } x \text{ then } x \text{ else } x)$

- (a) Paso I : Rectificación . Tenemos una sola variable en el término, x y está ligada. El término está rectificado
- (b) Paso II : Anotación. Tenemos contexto vacío y anotamos la ligada

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda x: \mathbf{X}_1. \text{if } \text{isZero}(x) \text{ then } x \text{ else } (\text{if } x \text{ then } x \text{ else } x)$$

- (c) Paso III : Restricciones.



- (d) Paso IV : Unificación

$$\text{entrada} : \{ \text{Bool} \stackrel{?}{=} \text{Bool}, X_1 \stackrel{?}{=} X_1, X_1 \stackrel{?}{=} \text{Nat}, X_1 \stackrel{?}{=} \text{Bool}, X_1 \stackrel{?}{=} X_1 \}$$

$$\text{elim triv} : \{ X_1 \stackrel{?}{=} \text{Nat}, X_1 \stackrel{?}{=} \text{Bool} \}$$

$$\text{colisión} : \text{falla}$$

Concluimos que U no es tipable.

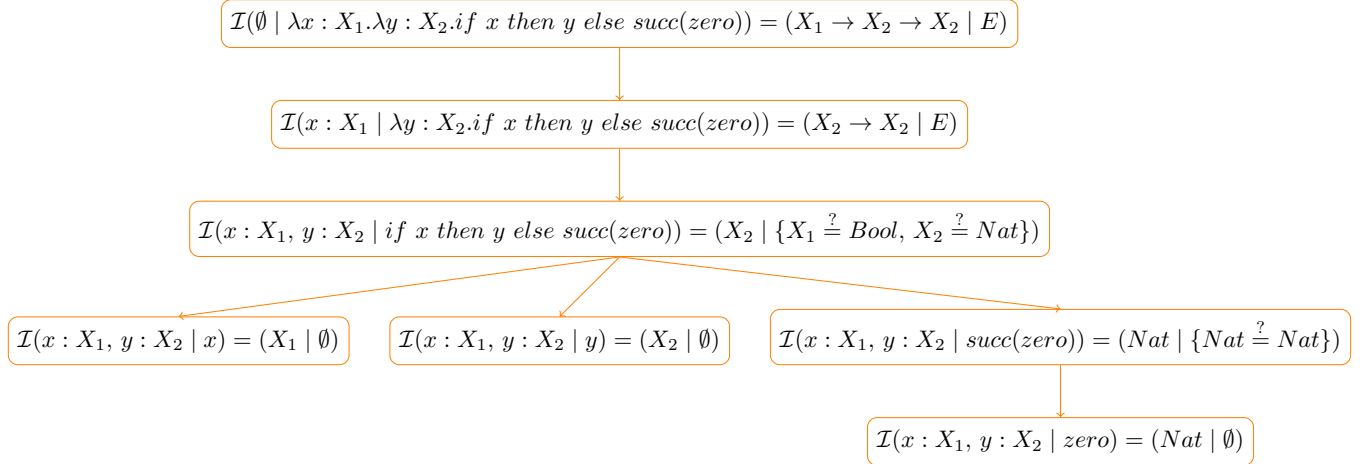
4. $U = \lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then } y \text{ else succ}(\text{zero})$

- (a) Paso I : Rectificación. El término tiene dos variables solamente, ambas ligadas y con nombres diferentes.
- (b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda x: \mathbf{X}_1. \lambda y: \mathbf{X}_2. \text{if } x \text{ then } y \text{ else succ}(\text{zero})$$

- (c) Paso III : Restricciones



Queremos ahora buscar el **mg**

$\text{entrada} : \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} Nat\}$
 $\text{elim triv} : \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$
 $\text{elim var} : \{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\} \text{ con } S1 = \{ X_1 := Bool \}$
 $\text{elim triv} : \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$
 $\text{elim var} : \{Nat \stackrel{?}{=} Nat\} \text{ con } S2 = \{ X_2 := Nat \}$
 $\text{elim triv} : \emptyset$

Podemos concluir que el unificador es :

$$S = S_2 \circ S_1 = \{X_2 := Nat, X_1 := Bool\}$$

Existe U tipable y por tanto vale el siguiente juicio :

$$\begin{aligned}
 S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \sigma) \\
 \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x Bool. \lambda y : Nat. \text{if } x \text{ then } y \text{ else } \text{succ}(\text{zero})) : S(Bool \rightarrow Nat \rightarrow Nat)
 \end{aligned}$$

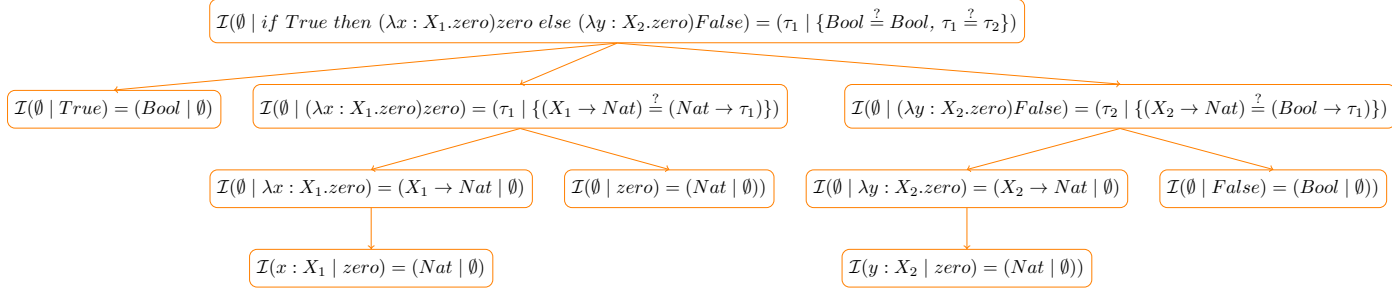
5. $U = \text{if True then } (\lambda x. \text{zero})\text{zero} \text{ else } (\lambda x. \text{zero})\text{False}$

- (a) Paso I : Rectificación. Hay dos variables en este término, ambas ligadas con el mismo nombre. Las α – renombramos para rectificarlo. $U = \text{if True then } (\lambda x. \text{zero})\text{zero} \text{ else } (\lambda y. \text{zero})\text{False}$
- (b) Paso II: Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{if True then } (\lambda x : \textcolor{brown}{X_1}. \text{zero})\text{zero} \text{ else } (\lambda y : \textcolor{brown}{X_2}. \text{zero})\text{False}$$

- (c) Paso III: Restricciones



Con esto dicho, queremos el **mg**

$\text{entrada} : \{Bool \stackrel{?}{=} Bool, \tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \rightarrow Nat \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow \tau_1, X_2 \rightarrow Nat \stackrel{?}{=} Bool \rightarrow \tau_1\}$
 $\text{elim triv} : \{\tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \rightarrow Nat \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow \tau_1, X_2 \rightarrow Nat \stackrel{?}{=} Bool \rightarrow \tau_1\}$
 $\text{decompose} : \{\tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} \tau_1, X_2 \stackrel{?}{=} Bool, Nat \stackrel{?}{=} \tau_1\}$
 $\text{elim var} : \{Nat \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} Bool, Nat \stackrel{?}{=} Nat\} \text{ con } S1 = \{\tau_1 := Nat\}$
 $\text{elim triv} : \{Nat \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} Bool\}$
 $\text{elim var} : \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} Bool\} \text{ con } S2 = \{\tau_2 := Nat\}$
 $\text{elim triv} : \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} Bool\}$
 $\text{elim var} : \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} Bool\} \text{ con } S3 = \{X_1 = Nat\}$
 $\text{elim triv} : \{X_2 \stackrel{?}{=} Bool\}$
 $\text{elim var} : \{Bool \stackrel{?}{=} Bool\} \text{ con } S4 = \{X_2 := Bool\}$
 $\text{elim triv} : \emptyset$

Concluimos entonces que el **mg**u es :

$$S = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_2 := Bool, X_1 = Nat, \tau_2 := Nat, \tau_1 := Nat\}$$

Y por ello, U es tipable y vale el siguiente juicio:

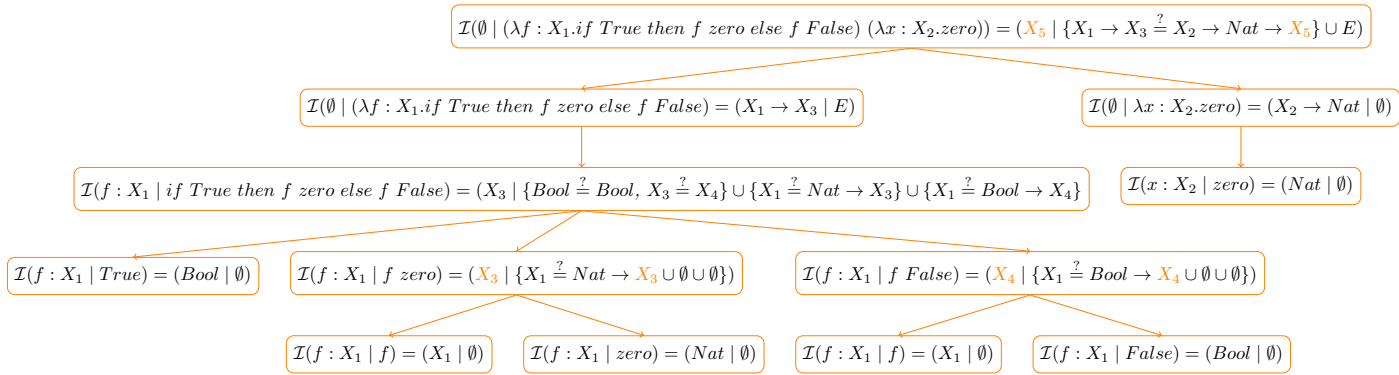
$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(\tau_1) \\ \equiv \emptyset \vdash S(if \ True \ then \ (\lambda x : Nat.zero)zero \ else \ (\lambda y : Bool.zero)False) : S(Nat) \end{aligned}$$

6. $U = (\lambda f.if \ True \ then \ f \ zero \ else \ f \ False) \ (\lambda x.zero)$

- (a) Paso I : Rectificación. Tenemos dos variables, ambas ligadas y con distinto nombre. Está rectificado.
- (b) Paso II: Anotación. No hay variables entonces el contexto es vacío, pero tenemos que anotar f y x

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= (\lambda f : X_1.if \ True \ then \ f \ zero \ else \ f \ False) \ (\lambda x : X_2.zero) \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

$$\begin{aligned} \text{entrada} &: \{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_3 \stackrel{?}{=} X_4, X_1 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3, X_1 \stackrel{?}{=} Bool \rightarrow X_4, X_1 \rightarrow X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow Nat \rightarrow X_5\} \\ \text{elim triv} &: \{X_3 \stackrel{?}{=} X_4, X_1 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3, X_1 \stackrel{?}{=} Bool \rightarrow X_4, X_1 \rightarrow X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow Nat \rightarrow X_5\} \\ \text{colisión} &: \text{falla} \end{aligned}$$

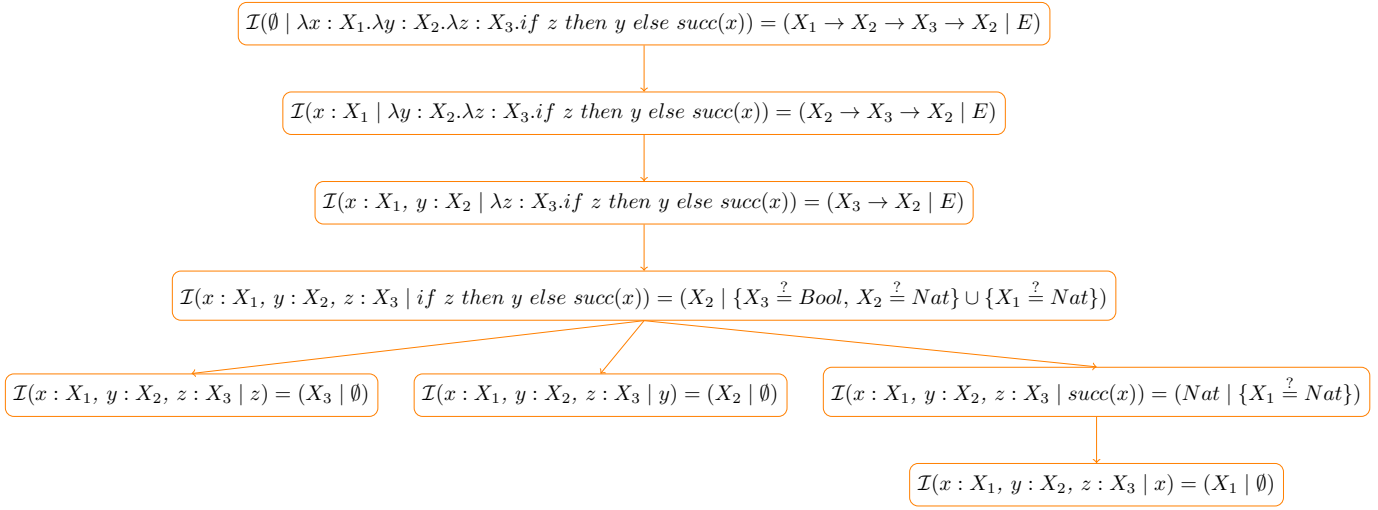
No existe U tipable.

7. $U = \lambda x.\lambda y.\lambda z.if \ z \ then \ y \ else \ succ(x)$

- (a) Paso I: Rectificación. El término tiene 3 variables ambas tres ligadas y de distinto nombre. Por tanto, está rectificado.
- (b) Paso II : Anotación. No tiene variables libres y por tanto tenemos contexto vacío.

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.\lambda z : X_3.if \ z \ then \ y \ else \ succ(x) \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación.

entrada : $\{X_3 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$
 elim var : $\{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$ con S1 = $\{ X_3 := Bool\}$
 elim triv : $\{X_2 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$
 elim var : $\{Nat \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$ con S2 = $\{ X_2 := Nat\}$
 elim triv : $\{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$
 elim var : $\{Nat \stackrel{?}{=} Nat\}$ con S3 = $\{ X_1 := Nat\}$
 elim triv : \emptyset

Con esto dicho, el **mgu** es:

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_1 := Nat, X_2 := Nat, X_3 := Bool\}$$

Por tanto, U es tipable y vale el siguiente juicio:

$$\begin{aligned}
 S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2) \\
 \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : Nat. \lambda y : Nat. \lambda z : Bool. if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) : S(Nat \rightarrow Nat \rightarrow Bool \rightarrow Nat)
 \end{aligned}$$

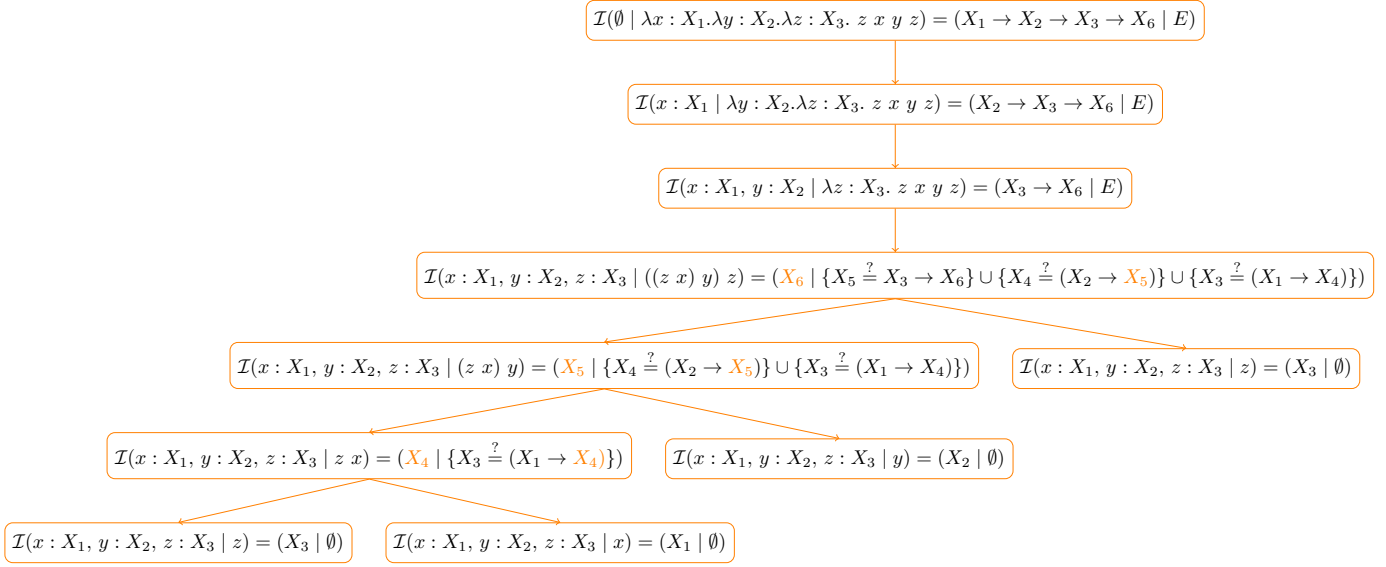
1.5 Ejercicio 5

1. $U = \lambda x. \lambda y. \lambda z. z\ x\ y\ z$

- (a) Paso I : Rectificación. El término está rectificado, ya que cada variable ligada cuenta con nombre distinto de las demás.
- (b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= \emptyset \\
 M_0 &= \lambda x : \textcolor{brown}{X}_1. \lambda y : \textcolor{brown}{X}_2. \lambda z : \textcolor{brown}{X}_3. z\ x\ y\ z
 \end{aligned}$$

- (c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación.

entrada : $\{X_5 \stackrel{?}{=} X_3 \rightarrow X_6, X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \rightarrow X_5), X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_4)\}$
elim var : $\{X_5 \stackrel{?}{=} X_1 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6, X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \rightarrow X_5)\}$
elim var : $\{X_4 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_4 \rightarrow X_6\}$
occurs check : **falla**

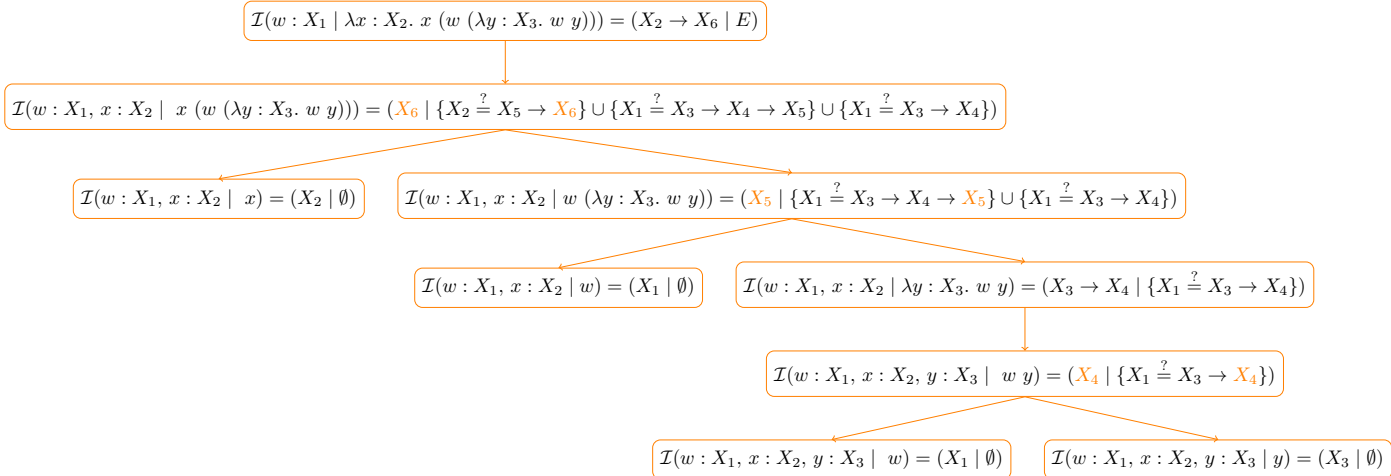
2. $U = \lambda x. x \ (w \ (\lambda y. w \ y))$

(a) Paso I : Rectificación. Tenemos dos variables ligadas con nombres diferentes y una libre que también difiere en nombre, por tanto, U está rectificado.

(b) Paso II : Anotación

$\Gamma_0 = w : X_1$
 $M_0 = \lambda x : X_2. x \ (w \ (\lambda y : X_3. w \ y))$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

entrada : $\{X_2 \stackrel{?}{=} X_5 \rightarrow X_6, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \rightarrow X_4\}$
colisión : **falla**

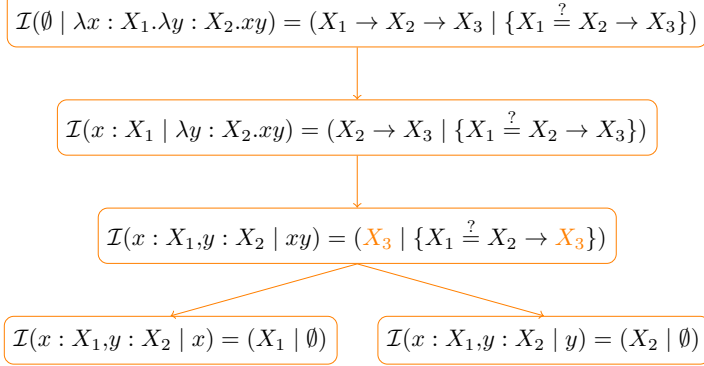
3. $U = \lambda x. \lambda y. xy$

- (a) Paso I : Rectificación. Está rectificado ambas variables son ligadas y tienen distinto nombre.
- (b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda x : \mathbf{X}_1. \lambda y : \mathbf{X}_2. xy$$

- (c) Paso III : Restricciones



- (d) Paso IV : Unificación

$$\text{entrada} : \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3\}$$

$$\text{elim var} : \{X_2 \rightarrow X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3\} \quad \text{con } S1 = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3\}$$

$$\text{elim triv} : \emptyset$$

Con esto, el mgu es :

$$S = S1 = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3\}$$

Decimos que U es tipable y vale :

$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : X_2 \rightarrow X_3. \lambda y : X_2. xy) : S(X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3) \end{aligned}$$

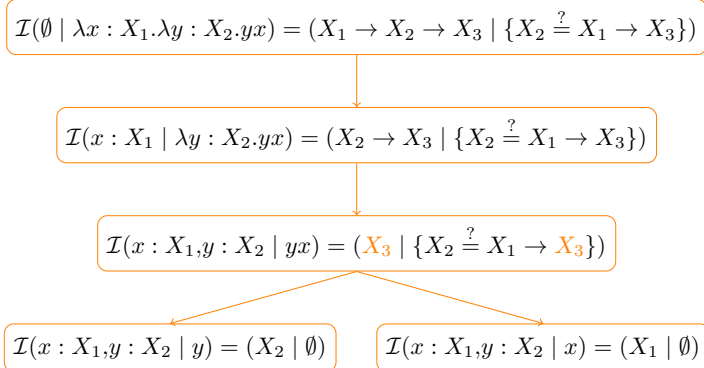
4. $U = \lambda x. \lambda y. yx$

- (a) Paso I : Rectificación. Está rectificado ambas variables son ligadas y tienen distinto nombre.
- (b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda x : \mathbf{X}_1. \lambda y : \mathbf{X}_2. yx$$

- (c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

$$\begin{aligned} \text{entrada} &: \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \rightarrow X_3\} \\ \text{elim var} &: \{X_1 \rightarrow X_3 \stackrel{?}{=} X_1 \rightarrow X_3\} \quad \text{con } S1 = \{X_2 := X_1 \rightarrow X_3\} \\ \text{elim triv} &: \emptyset \end{aligned}$$

Con esto, el mgu es :

$$S = S1 = \{X_2 := X_1 \rightarrow X_3\}$$

Decimos que U es tipable y vale :

$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : X_1. \lambda y : X_1 \rightarrow X_3. xy) : S(X_1 \rightarrow X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_3) \end{aligned}$$

5. $U = \lambda x. (\lambda x. x)$

(a) Paso I : Rectificación. El término no está rectificado. Tenemos que α – *renombrar* porque tenemos dos variables ligadas con el mismo nombre:

$$\lambda x. (\lambda y. y)$$

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= \lambda x : X_1. (\lambda y : X_2. y) \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1. (\lambda y : X_2. y)) &= (X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_2 \mid \emptyset) \\ \downarrow \\ \mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2. y) &= (X_2 \rightarrow X_2 \mid \emptyset) \\ \downarrow \\ \mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) &= (X_2 \mid \emptyset) \end{aligned}$$

(d) Paso IV : Unificación.

Ni idea

6. $U = \lambda x. (\lambda y. y) x$

(a) Paso I : Rectificación. Todo en regla

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= \lambda x : X_1. (\lambda y : X_2. y) x \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1. (\lambda y : X_2. y) x) &= (X_1 \rightarrow X_3 \mid \{X_2 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_3)\}) \\ \downarrow \\ \mathcal{I}(x : X_1 \mid (\lambda y : X_2. y) x) &= (X_3 \mid \{X_2 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_3)\}) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathcal{I}(x : X_1 \mid (\lambda y : X_2. y)) &= (X_2 \rightarrow X_2 \mid \emptyset) \quad \mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset) \\ \downarrow \\ \mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) &= (X_2 \mid \emptyset) \end{aligned}$$

(d) Paso IV : Unificación.

entrada : $\{X_2 \rightarrow X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \rightarrow X_3)\}$
 decompose : $\{X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$
 elim var : $\{X_2 \stackrel{?}{=} X_2, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$ con $S1 = \{X_1 := X_2\}$
 elim triv : $\{X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$
 elim var : $\{X_3 \stackrel{?}{=} X_3\}$ con $S2 = \{X_2 := X_3\}$
 elim triv : \emptyset

Con esto, el **mg**

$$S = S_2 \circ S_1 = \{X_1 := X_2, X_2 := X_3\}$$

Por tanto, U es tipable y vale el juicio

$$\begin{aligned}
 S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \rightarrow X_3) \\
 \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : ?. (\lambda y : ?. y) x) : S(??)
 \end{aligned}$$

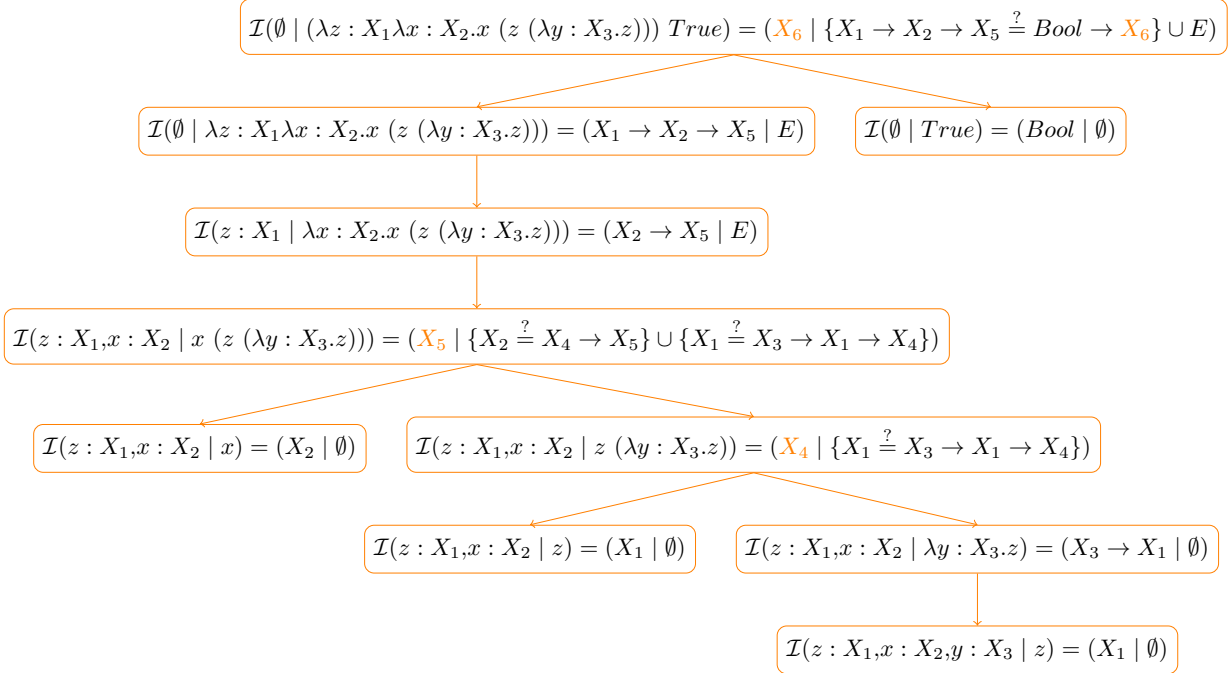
7. $U = (\lambda z \lambda x. x (z (\lambda y. z))) \text{ True}$

(a) Paso I : Rectificación. Está rectificado.

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= \emptyset \\
 M_0 &= (\lambda z : \mathbf{X}_1 \lambda x : \mathbf{X}_2. x (z (\lambda y : \mathbf{X}_3. z))) \text{ True}
 \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

entrada : $\{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_5 \stackrel{?}{=} \text{Bool} \rightarrow X_6, X_2 \stackrel{?}{=} X_4 \rightarrow X_5, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \rightarrow X_1 \rightarrow X_4\}$
 occurs check : falla

1.6 Ejercicio 8

Tener en cuenta el tipo de los pares definido como: $c\tau ::= \dots \mid \tau \times \tau$ Con expresiones nuevas definidas como: $M ::= \dots \mid \langle M, M \rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$

Y las siguientes reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \tau \times \sigma} \text{ (T-Pair)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \tau} \text{ (T-Proj1)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \sigma} \text{ (T-Proj2)}$$

Se extiende el algoritmo I con las siguientes reglas:

$$I(\Gamma \mid \langle M_1, M_2 \rangle) = (\tau \times \sigma \mid E_1 \cup E_2)$$

donde:

$$I(\Gamma \mid M_1) = (\tau \mid E_1) \quad \text{e} \quad I(\Gamma \mid M_2) = (\sigma \mid E_2)$$

$$I(\Gamma \mid \pi_1(M)) = (\sigma \mid \{\tau = \sigma \times \rho\} \cup E) \quad \text{donde } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$I(\Gamma \mid \pi_2(M)) = (\rho \mid \{\tau = \sigma \times \rho\} \cup E) \quad \text{donde } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

1. Tipar la expresión: $(\lambda f. \langle f, 2 \rangle)(\lambda x. x \ 1)$ utilizando la versión extendida del algoritmo.
2. Intentar tipar la siguiente expresión utilizando la versión extendida del algoritmo: $(\lambda f. \langle f \ 2, f \ \text{True} \rangle)(\lambda x. x)$ Mostrar en qué punto la inferencia falla y por qué motivo.

1.6.1 1

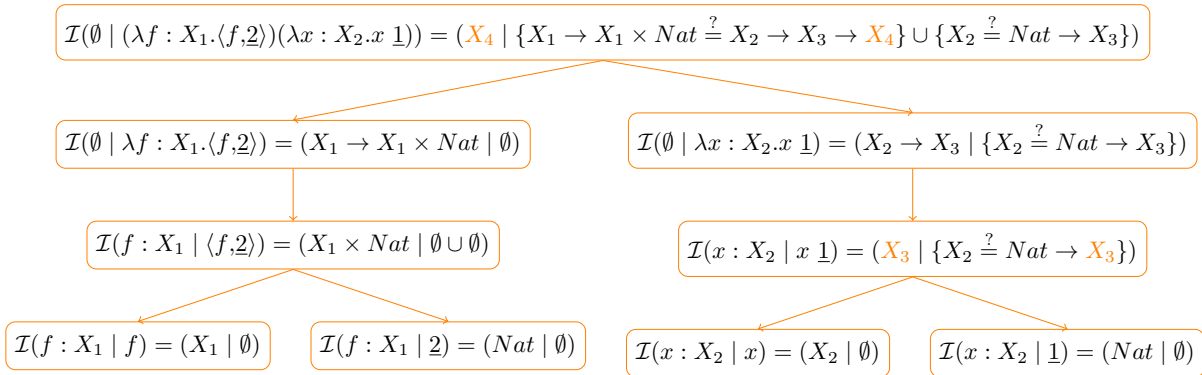
$$U = \lambda f. \langle f, 2 \rangle (\lambda x. x \ 1)$$

1. Paso I : Rectificación. Todo bien.
2. Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \lambda f : \mathbf{X}_1. \langle f, 2 \rangle (\lambda x : \mathbf{X}_2. x \ 1)$$

3. Paso III : Restricciones



4. Paso IV : Unificación.

entrada : $\{X_1 \rightarrow X_1 \times Nat \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3\}$
 decompose : $\{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3, X_1 \times Nat \stackrel{?}{=} X_4, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3\}$
 elim var : $\{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3, X_1 \times Nat \stackrel{?}{=} X_1 \times Nat, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3\}$ con $S1 = \{X_4 := X_1 \times Nat\}$
 elim triv : $\{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3\}$
 elim var : $\{X_2 \rightarrow X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3\}$ con $S2 = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3\}$
 elim triv : $\{X_2 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3\}$
 elim var : $\{Nat \rightarrow X_3 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3\}$ con $S3 = \{X_2 := Nat \rightarrow X_3\}$
 elim triv : \emptyset

Con esto el **mgu** es

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_4 := X_1 \times Nat, X_1 := X_2 \rightarrow X_3, X_2 := Nat \rightarrow X_3\}$$

Y por tanto, U es tipable y vale el siguiente juicio

$$\begin{aligned}
 S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_4) \\
 \equiv \emptyset \vdash S((\lambda f : X_2 \rightarrow X_3. \langle f, \underline{2} \rangle)(\lambda x : Nat \rightarrow X_3. x \ \underline{1})) : S(X_1 \times Nat)
 \end{aligned}$$

1.6.2 2

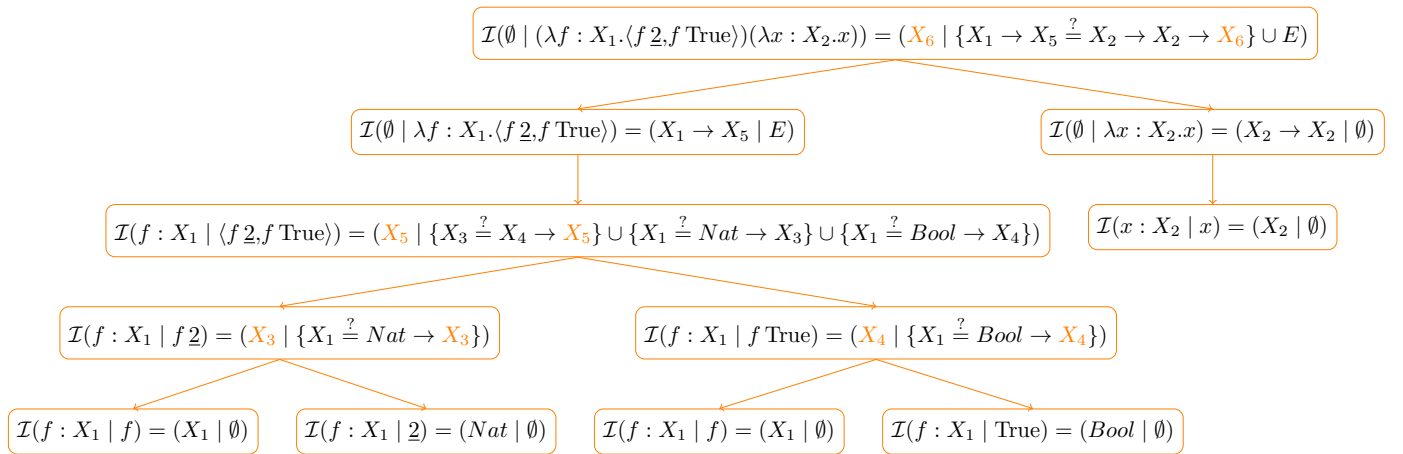
$$U = (\lambda f. \langle f \ 2, f \ \text{True} \rangle)(\lambda x. x)$$

1. Paso I : Rectificación. Todo en regla.

2. Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= \emptyset \\
 M_0 &= (\lambda f : \textcolor{brown}{X}_1. \langle f \ 2, f \ \text{True} \rangle)(\lambda x : \textcolor{brown}{X}_2. x)
 \end{aligned}$$

3. Paso III : Restricciones



4. Paso IV : Unificación

entrada : $\{X_1 \rightarrow X_5 \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_2 \rightarrow X_6, X_3 \stackrel{?}{=} X_4 \rightarrow X_5, X_1 \stackrel{?}{=} Nat \rightarrow X_3, X_1 \stackrel{?}{=} Bool \rightarrow X_4\}$
 colision : falla

1.7 Ejercicio 9

Se extienden el Cálculo Lambda y el algoritmo de inferencia para soportar uniones disjuntas de la siguiente manera:

$$\tau ::= \dots \mid \tau + \tau$$

$$M ::= \dots \mid \text{left}_\tau(M) \mid \text{right}_\tau(M) \mid \text{case } M \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow M$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{left}_\sigma(M)) = (\tau + \sigma \mid E)$$

$$\text{donde : } \mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{right}_\sigma(M)) = (\sigma + \tau \mid E)$$

$$\text{donde : } \mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{case } M_1 \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M_2 \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} X_x + X_y, \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

donde:

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma, x : X_x \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma, y : X_y \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$$

X_x y X_y son variables frescas

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

1. `case left(1) of left(x) ~ isZero(x) | right(y) ~ True`

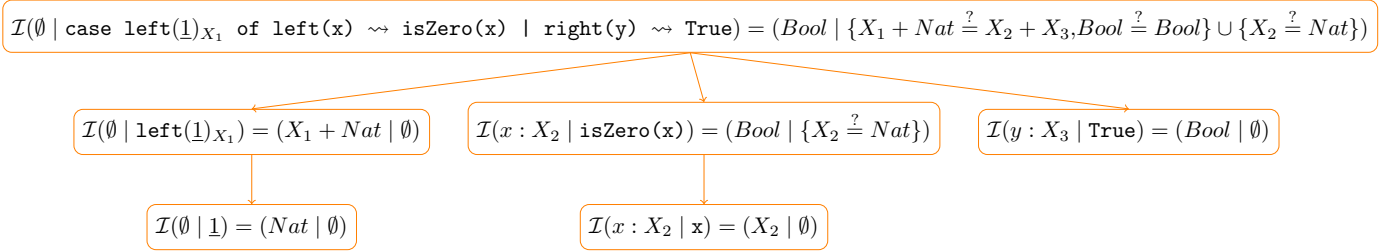
(a) Paso I : Rectificación. Está todo bien

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case left}(1)_{X_1} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow \text{True}$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

$$\text{entrada} : \{X_1 + \text{Nat} \stackrel{?}{=} X_2 + X_3, \text{Bool} \stackrel{?}{=} \text{Bool}, X_2 \stackrel{?}{=} \text{Nat}\}$$

$$\text{elim triv} : \{X_1 + \text{Nat} \stackrel{?}{=} X_2 + X_3, X_2 \stackrel{?}{=} \text{Nat}\}$$

$$\text{elim var} : \{X_1 + \text{Nat} \stackrel{?}{=} \text{Nat} + X_3, \text{Nat} \stackrel{?}{=} \text{Nat}\} \text{ con } S1 = \{X_2 := \text{Nat}\}$$

$$\text{elim triv} : \{X_1 + \text{Nat} \stackrel{?}{=} \text{Nat} + X_3\}$$

$$\text{decompose} : \{X_1 \stackrel{?}{=} \text{Nat}, \text{Nat} \stackrel{?}{=} X_3\}$$

$$\text{elim var} : \{\text{Nat} \stackrel{?}{=} \text{Nat}, \text{Nat} \stackrel{?}{=} X_3\} \text{ con } S2 = \{X_1 := \text{Nat}\}$$

$$\text{elim triv} : \{\text{Nat} \stackrel{?}{=} X_3\}$$

$$\text{elim var} : \{\text{Nat} \stackrel{?}{=} \text{Nat}\} \text{ con } S3 = \{X_3 := \text{Nat}\}$$

$$\text{elim triv} : \emptyset$$

Con esto 1 es tipable y el mgu es

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat, X_1 := Nat, X_2 := Nat\}$$

y vale entonces el siguiente juicio

$$\begin{aligned} S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(Bool) \\ \equiv \emptyset \vdash S(\text{case left}(\underline{1})_{Nat} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow \text{True}) : S(Bool) \end{aligned}$$

2. $\text{case right}(z) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$

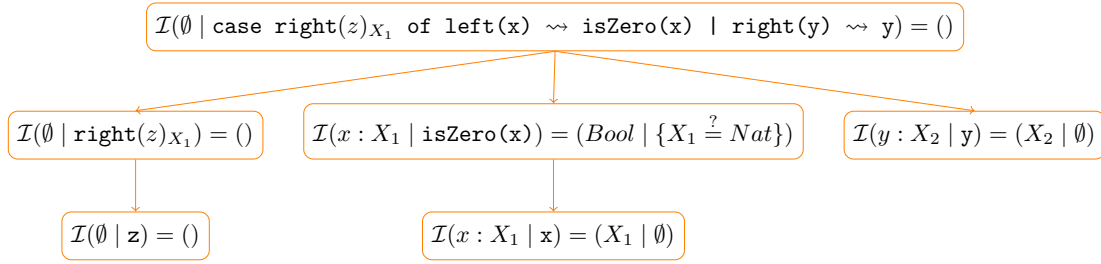
(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case right}(z)_{X_1} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

(c) Paso III : Recstricción



3. $\text{case right}(\text{zero}) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$

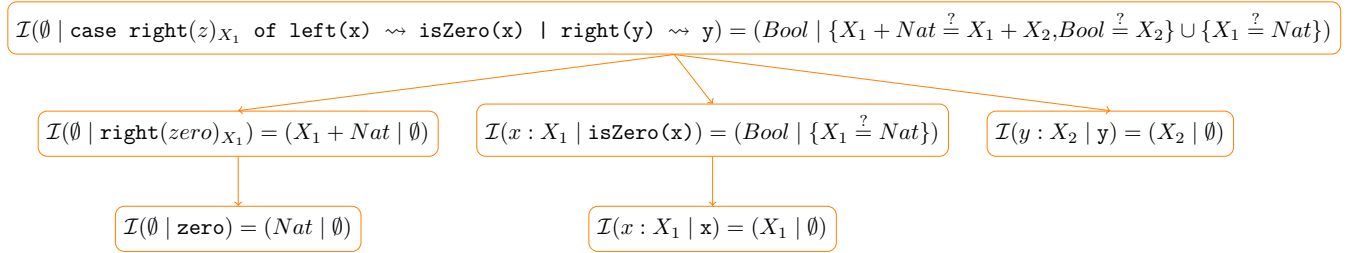
(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case right}(\text{zero})_{X_1} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

(c) Paso III : Recstricción



(d) Paso IV : Unificación

$$\text{entrada} : \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$$

$$\text{elim var} : \{Nat + Nat \stackrel{?}{=} Nat + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2, Nat \stackrel{?}{=} Nat\} \text{ con } S1 = \{X_1 := Nat\}$$

$$\text{elim triv} : \{Nat + Nat \stackrel{?}{=} Nat + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\}$$

$$\text{decompose} : \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\}$$

$$\text{elim triv} : \{Nat \stackrel{?}{=} X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\}$$

$$\text{colision} : \text{falla}$$

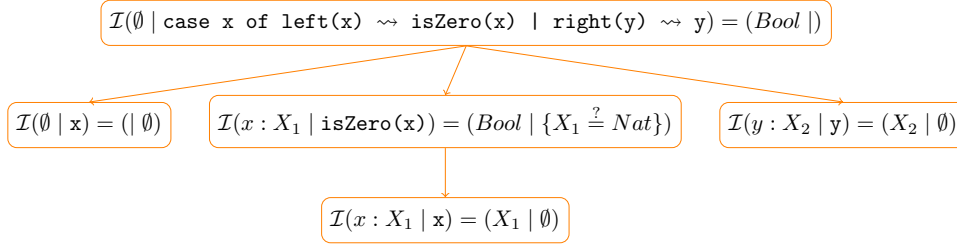
4. `case x of left(x) \rightsquigarrow isZero(x) | right(y) \rightsquigarrow y`

- (a) Paso I : Rectificación.
- (b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case } x \text{ of } \text{left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

- (c) Paso III : Recstricción



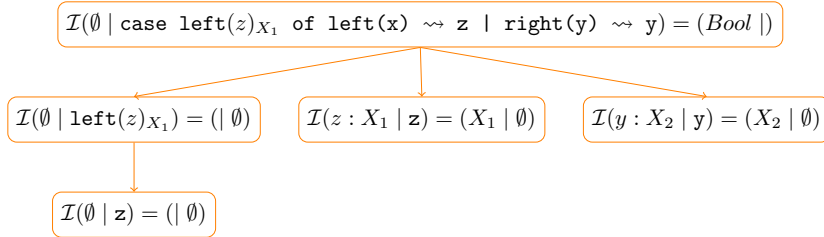
5. `case left(z) of left(x) \rightsquigarrow z | right(y) \rightsquigarrow y`

- (a) Paso I : Rectificación.
- (b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case left}(z)_{x_1} \text{ of left}(x) \rightsquigarrow z \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

- (c) Paso III : Recstricción



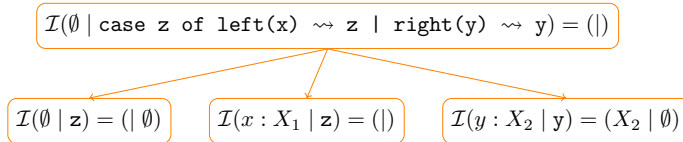
6. `case z of left(x) \rightsquigarrow z | right(y) \rightsquigarrow y`

- (a) Paso I : Rectificación.
- (b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \text{case } z \text{ of left}(x) \rightsquigarrow z \mid \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

- (c) Paso III : Recstricción



1.8 Ejercicio 10

Se extienden el Cálculo Lambda y el algoritmo de inferencia para soportar listas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tau &::= \dots \mid [\tau] \\ M &::= \dots \mid []^\tau \mid M :: M \mid \text{foldr } M \text{ base } \rightsquigarrow M; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow M\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid []^\tau) = ([\tau] \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1 :: M_2) = (\tau_2 \mid \{\tau_2 \stackrel{?}{=} [\tau_1]\} \cup E_1 \cup E_2)$$

donde :

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1) \quad \mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{foldr } M_1 \text{ base } \rightsquigarrow M_2; \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} [X_h], \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3, \tau_3 \stackrel{?}{=} X_r\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

donde :

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1) \quad \mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2) \quad \mathcal{I}(\Gamma, h : X_h, r : X_r \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$$

donde X_h y X_r son variables de tipo frescas.

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

1. `foldr x :: [] base ~> [] ; rec(h, r) ~> isZero(h) :: r`
2. `foldr (\lambda x. succ(x)) :: [] base ~> [] ; rec(x, r) ~> if px then x :: r else r`
3. `foldr x base ~> x ; rec(h, r) ~> isZero(h) :: r`
4. `foldr x base ~> True ; rec(h, x) ~> x`