Práctica 5 : Inferencia de Tipos

Tomás Felipe Melli

June 26, 2025

Índice

1 Ejercicios

Gramáticas a tener en cuenta :

- Términos **anotados**

  $$M ::= x \mid \lambda x : \sigma.\, M \mid M\ M \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \mid \text{zero} \mid \text{succ}(M) \mid \text{pred}(M) \mid \text{isZero}(M) \mid \mu x : \sigma.\, M$$

  Donde la letra x representa un nombre de variable arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado:

  $$X = \{w, w_1, w_2, \ldots, x, x_1, x_2, \ldots, y, y_1, y_2, \ldots, f, f_1, f_2, \ldots\}$$

- Términos **sin anotaciones**

  $$U ::= x \mid \lambda x.\, U \mid U\ U \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } U \text{ then } U \text{ else } U \mid \text{zero} \mid \text{succ}(U) \mid \text{pred}(U) \mid \text{isZero}(U) \mid \mu x.\, U$$

- Tipos

  $$\tau ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \tau \to \tau \mid X_n$$

  Donde n es un número natural, de tal modo que X_n representa una variable de tipo arbitraria tomada de un conjunto:

  $$T = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$$

  Nota: también podemos referirnos a las variables de tipo como *incógnitas*.

1.1 Ejercicio 1

1. $\lambda x : Bool.succ(x)$ esta expresión es válida sintácticamente y corresponde a `Términos anotados`
2. $\lambda x.isZero(x)$ esta expresión es válida en la gramática de `Términos sin anotaciones`
3. $X_1 \to \sigma$ no es una expresión válida y se debe a que σ no es un tipo sino una `metavariable` que representa un tipo.
4. `erase(f y)` no es sintácticamente válido.
5. X_1 es una variable de tipo (incógnita en este caso) que sintácticamente está bien formada y corresponde a `Tipos`
6. $X_1 \to (Bool \to X_2)$ tenemos este término que se corresponde a la gramática de `Tipos` compuesto por dos incógnitas.
7. $\lambda x : X_1 \to X_2.if\ zero\ then\ True\ else\ zero\ succ(True)$ es una expresión válida sintácticamente que corresponde a un `Término anotado`. Es evidente que semánticamente no tiene sentido.
8. `erase(`$\lambda f : Bool \to$ `s`$.\lambda y : Bool.f\ \ y$`)` no es válido sintácticamente.

1.2 Ejericio 2

Tenemos que aplicar la sustitución S al término. O sea, el resultado de $S(..algo..)$

1. Sea $S = \{X_1 := Nat\}$

   $$\begin{aligned} & S(\{x : X_1 \to Bool\}) \\ \overset{\{X_1\}}{=} & \{x : Nat \to Bool\} \end{aligned}$$

2. Sea $S = \{X_1 := X_2 \to X_3, X_4 := Bool\}$

   $$\begin{aligned} & S(\{x : X_4 \to Bool\}) \vdash S(\lambda x : X_1 \to Bool.x) : S(Nat \to X_2) \\ \overset{\{X_4\}}{=} & \{x : Bool \to Bool\} \vdash S(\lambda x : X_1 \to Bool.x) : S(Nat \to X_2) \\ \overset{\{X_1\}}{=} & \{x : Bool \to Bool\} \vdash \lambda x : X_2 \to X_3 \to Bool.x : S(Nat \to X_2) \\ = & \{x : Bool \to Bool\} \vdash \lambda x : X_2 \to X_3 \to Bool.x : Nat \to X_2 \end{aligned}$$

1.3 Ejercicio 3

Elegimos los pares de tipos que unifican entre sí. Por cada uno, mostramos el *mgu*

- Primero presentamos el par que consideramos que podría unificar : (nombramos E al conjunto finito de ecuaciones (que llamaremos `entrada`)) $E = \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$. Luego presentamos el **unificador** (es decir, la sustitución que hace valer la igualdad) $S = \{X_1 := Nat\}$. Vamos a hacer uso de las reglas para poder obtener el MGU.

- $$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{X_1 \to X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to Bool\} \\ \texttt{decompose} &: \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} Bool\} \\ \texttt{elim var} &: \{X_2 := Bool\} \texttt{ con S1 = \{ } X_1 \texttt{ := Nat\}} \\ \texttt{elim var} &: \{\} \texttt{ con S2 = \{ } X_2 \texttt{ := Bool\}} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{X_2 \to Bool \stackrel{?}{=} Nat \to Bool\} \\ \texttt{decompose} &: \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat, Bool \stackrel{?}{=} Bool\} \\ \texttt{elim triv} &: \{X_2 := Nat\} \\ \texttt{elim var} &: \{\} \texttt{ con S = \{ } X_2 \texttt{ := Nat\}} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{X_3 \to X_4 \to X_5 \stackrel{?}{=} Nat \to X_2 \to Bool\} \\ \texttt{decompose} &: \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat, X_4 \stackrel{?}{=} X_2, X_5 \stackrel{?}{=} Bool\} \\ \texttt{elim var} &: \{X_4 \stackrel{?}{=} X_2, X_5 \stackrel{?}{=} Bool\} \texttt{ con S1 = \{ } X_3 \texttt{ := Nat\}} \\ \texttt{elim var} &: \{X_4 \stackrel{?}{=} X_2\} \texttt{ con S2 = \{ } X_5 \texttt{ := Bool\}} \\ \texttt{elim var} &: \{\} \texttt{ con S3 = \{ } X_4 \texttt{ := } X_2\texttt{\}} \end{aligned}$$

1.4 Ejercicio 4

Utilizar el **Algoritmo de inferencia** para decidir cuáles son tipables.

1. $U = \lambda z.if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)$

   (a) Paso I : Rectificación. z es la única variable ligada y no hay otra variable (ni libre ni ligada). Concluimos que el término está **rectificado**.

   (b) Paso II : Anotación. Agregamos un **contexto a las variables libres** y un **término anotado**. Como no hay variables libres,agregamos el **contexto vacío**, pero sí **anotamos una incógnita a** z.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \lambda z : X_1.if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)$$

   Recordar que $U = \texttt{erase}(M_0)$ debe valer.

   (c) Paso III : Restricciones.

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda z : X_1.if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)) = (X_1 \to Nat \mid E)$$

   $$\mathcal{I}(z : X_1 \mid if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)) = (Nat \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool,\ Nat \stackrel{?}{=} Nat\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset)$$

   $$\mathcal{I}(z : X_1 \mid z) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(z : X_1 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(z : X_1 \mid succ(zero)) = (Nat \mid \{Nat \stackrel{?}{=} Nat\} \cup \emptyset)$$

   $$\mathcal{I}(z : X_1 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV: Unificación.

$$\texttt{entrada}\ : \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Bool\}$$
$$\texttt{elim triv}\ : \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool\}$$
$$\texttt{elim var}\ : \emptyset \quad \texttt{con S1 = \{ X:= Bool\}}$$

Concluimos que el unificador es :

$$S = \{X_1 := Bool\}$$

Con ello, el término U es tipable y vale el siguiente juicio:

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to Nat)$$
$$\equiv \emptyset \vdash S(\lambda z : Bool.if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)) : S(Bool \to Nat)$$

2. $U = \lambda y.succ((\lambda x.x)y)$

(a) Paso I: Rectificación. Tenemos sólo dos variables, ambas ligadas x e y. Tienen distintos nombres. Concluimos que el término está rectificado.

(b) Paso II : Anotación. Como no hay variables libres, el contexto es vacío. Anotamos a las ligadas

$$\Gamma_0 = \emptyset$$
$$M_0 = \lambda y : X_1.succ((\lambda x : X_2.x)y)$$

(c) Paso III : Restricciones.

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda y : X_1.succ((\lambda x : X_2.x)y)) = (X_1 \to Nat \mid E)$$

$$\mathcal{I}(y : X_1 \mid succ((\lambda x : X_2.x)y)) = (Nat \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat\} \cup \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\})$$

$$\mathcal{I}(y : X_1 \mid (\lambda x : X_2.x)\ y) = (X_3 \mid \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\} \cup \emptyset \cup \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(y : X_1 \mid \lambda x : X_2.x) = (X_2 \to X_2 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(y : X_1 \mid y) = (X_1 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(y : X_1,\ x : X_2 \mid x) = (X_2 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación.

$$\texttt{entrada}\ : \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\}$$
$$\texttt{decompose}\ : \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}$$
$$\texttt{elim var}\ : \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\} \quad \texttt{con S1 = \{}\ X_3 := Nat\}$$
$$\texttt{elim var}\ : \{Nat \stackrel{?}{=} X_1\} \quad \texttt{con S2 = \{}\ X_2 := Nat\}$$
$$\texttt{elim var}\ : \emptyset \quad \texttt{con S3 = \{}\ X_1 := Nat\}$$

Con esto, el unificador más general es :

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat, X_2 := Nat, X_3 := Nat\}$$

Por tanto, existe U tipable y por ello vale el siguiente juicio:

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to Nat)$$
$$\equiv \emptyset \vdash S(\lambda y : Nat.succ((\lambda x : X_2.x)y)) : S(Nat \to Nat)$$

3. $U = \lambda x.if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x)$

   (a) Paso I : Rectificación . Tenemos una sola variable en el término, x y está ligada. El término está rectificado

   (b) Paso II : Anotación. Tenemos contexto vacío y anotamos la ligada

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \lambda x{:}\ X_1.if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x)$$

   (c) Paso III : Restricciones.

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x)) = (X_1 \to X_1 \mid E)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x)) = (X_1 \mid \{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid isZero(x)) = (Bool \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid x)) = (X_1 \mid \emptyset)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid if\ x\ then\ x\ else\ x) = (X_1 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$$

   (d) Paso IV : Unificación

   `entrada` $:\{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1, X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\}$

   `elim triv` $:\{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Bool\}$

   `colisión` : **falla**

   Concluimos que U no es tipable.

4. $U = \lambda x.\lambda y.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)$

   (a) Paso I : Rectificación. El término tiene dos variables solamente, ambas ligadas y con nombres diferentes.

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \lambda x{:}\ X_1.\lambda y{:}\ X_2.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)$$

   (c) Paso III : Restricciones

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)) = (X_1 \to X_2 \to X_2 \mid E)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)) = (X_2 \to X_2 \mid E)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)) = (X_2 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool,\ X_2 \stackrel{?}{=} Nat\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid succ(zero)) = (Nat \mid \{Nat \stackrel{?}{=} Nat\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset)$$

   Queremos ahora buscar el **mgu**

   `entrada` $:\{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} Nat\}$

   `elim triv:`$\{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$

   `elim var:`$\{X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$ `con S1 = {` X_1 `:= Bool}`

   `elim var:`$\emptyset$ `con S2 = {` X_2 `:= Nat}`

Podemos concluir que el unificador es :

$$S = S_2 \circ S_1 = \{X_2 := Nat, X_1 := Bool\}$$

Existe U tipable y por tanto vale el siguiente juicio :

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_2 \to \sigma)$$
$$\equiv \emptyset \vdash S(\lambda x Bool.\lambda y : Nat.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)) : S(Bool \to Nat \to Nat)$$

5. $U = if\ True\ then\ (\lambda x.zero)zero\ else\ (\lambda x.zero)False$
   (a) Paso I : Rectificación. Hay dos variables en este término, ambas ligadas con el mismo nombre. Las $\alpha-renombramos$ para rectificarlo. $U = if\ True\ then\ (\lambda x.zero)zero\ else\ (\lambda y.zero)False$
   (b) Paso II: Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$
$$M_0 = if\ True\ then\ (\lambda x\!: X_1.zero)zero\ else\ (\lambda y\!: X_2.zero)False$$

   (c) Paso III: Restricciones

- $\mathcal{I}(\emptyset \mid if\ True\ then\ (\lambda x : X_1.zero)zero\ else\ (\lambda y : X_2.zero)False) = (\tau_1 \mid \{Bool \stackrel{?}{=} Bool,\ \tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2\})$
  - $\mathcal{I}(\emptyset \mid True) = (Bool \mid \emptyset)$
  - $\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda x : X_1.zero)zero) = (\tau_1 \mid \{(X_1 \to Nat) \stackrel{?}{=} (Nat \to \tau_1)\})$
    - $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.zero) = (X_1 \to Nat \mid \emptyset)$
      - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset)$
    - $\mathcal{I}(\emptyset \mid zero) = (Nat \mid \emptyset))$
  - $\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda y : X_2.zero)False) = (\tau_2 \mid \{(X_2 \to Nat) \stackrel{?}{=} (Bool \to \tau_1)\})$
    - $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda y : X_2.zero) = (X_2 \to Nat \mid \emptyset)$
      - $\mathcal{I}(y : X_2 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset))$
    - $\mathcal{I}(\emptyset \mid False) = (Bool \mid \emptyset))$

Con esto dicho, queremos el **mgu**

$$\texttt{entrada}\ :\{Bool \stackrel{?}{=} Bool, \tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \to Nat \stackrel{?}{=} Nat \to \tau_1, X_2 \to Nat \stackrel{?}{=} Bool \to \tau_1\}$$
$$\texttt{elim triv}\ :\{\tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \to Nat \stackrel{?}{=} Nat \to \tau_1, X_2 \to Nat \stackrel{?}{=} Bool \to \tau_1\}$$
$$\texttt{decompose}\ :\{\tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} \tau_1, X_2 \stackrel{?}{=} Bool, Nat \stackrel{?}{=} \tau_1\}$$
$$\texttt{elim var}\ :\{Nat \stackrel{?}{=} \tau_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} Bool\}\ \texttt{con S1 = }\{\tau_1 := Nat\}$$
$$\texttt{elim var}\ :\{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} Bool\}\ \texttt{con S2 = }\{\ \tau_2 := Nat\}$$
$$\texttt{elim var}\ :\{X_2 \stackrel{?}{=} Bool\}\ \texttt{con S3 = }\{\ X_1 = Nat\}$$
$$\texttt{elim var}\ :\emptyset\ \texttt{con S4 = }\{\ X_2 := Bool\ \}$$

Concluimos entonces que el **mgu** es :

$$S = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_2 := Bool, X_1 = Nat, \tau_2 := Nat, \tau_1 := Nat\}$$

Y por ello, U es tipable y vale el siguiente juicio:

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(\tau_1)$$
$$\equiv \emptyset \vdash S(if\ True\ then\ (\lambda x : Nat.zero)zero\ else\ (\lambda y : Bool.zero)False) : S(Nat)$$

6. $U = (\lambda f.if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False)\ (\lambda x.zero)$
   (a) Paso I : Rectificación. Tenemos dos variables, ambas ligadas y con distinto nombre. Está rectificado.
   (b) Paso II: Anotación. No hay variables entonces el contexto es vacío, pero tenemos que anotar f y x

$$\Gamma_0 = \emptyset$$
$$M_0 = (\lambda f : X_1.if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False)\ (\lambda x : X_2.zero)$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda f : X_1.if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False)\ (\lambda x : X_2.zero)) = (X_5 \mid \{X_1 \to X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \to Nat \to X_5\} \cup E)$$

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda f : X_1.if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False) = (X_1 \to X_3 \mid E)$$

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_2.zero) = (X_2 \to Nat \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False) = (X_3 \mid \{Bool \stackrel{?}{=} Bool,\ X_3 \stackrel{?}{=} X_4\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4\}$$

$$\mathcal{I}(x : X_2 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid True) = (Bool \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid f\ zero) = (X_3 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3 \cup \emptyset \cup \emptyset\})$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid f\ False) = (X_4 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4 \cup \emptyset \cup \emptyset\})$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(f : X_1 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(f : X_1 \mid False) = (Bool \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada}\ &: \{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_3 \stackrel{?}{=} X_4, X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3, X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4, X_1 \to X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \to Nat \to X_5\} \\
\texttt{elim triv}\ &: \{X_3 \stackrel{?}{=} X_4, X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3, X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4, X_1 \to X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \to Nat \to X_5\} \\
\texttt{colisión}\ &: \textbf{falla}
\end{aligned}$$

No existe U tipable.

7. $U = \lambda x.\lambda y.\lambda z.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)$

(a) Paso I: Rectificación. El término tiene 3 variables ambas tres ligadas y de distinto nombre. Por tanto, está rectificado.

(b) Paso II : Anotación. No tiene variables libres y por tanto tenemos contexto vacío.

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \emptyset \\
M_0 &= \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.\lambda z : X_3.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)
\end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.\lambda z : X_3.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) = (X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_2 \mid E)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.\lambda z : X_3.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) = (X_2 \to X_3 \to X_2 \mid E)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2 \mid \lambda z : X_3.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) = (X_3 \to X_2 \mid E)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) = (X_2 \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} Bool,\ X_2 \stackrel{?}{=} Nat\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid z) = (X_3 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid succ(x)) = (Nat \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación.

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada}\ &: \{X_3 \stackrel{?}{=} Bool,\ X_2 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\} \\
\texttt{elim var}\ &: \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}\ \texttt{con S1 = }\{\ X_3 := Bool\} \\
\texttt{elim var}\ &: \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}\ \texttt{con S2 = }\{\ X_2 := Nat\} \\
\texttt{elim var}\ &: \emptyset\ \texttt{con S3 = }\{\ X_1 := Nat\}
\end{aligned}$$

Con esto dicho, el **mgu** es:

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_1 := Nat, X_2 := Nat, X_3 := Bool\}$$

Por tanto, U es tipable y vale el siguiente juicio:

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_2)$$
$$\equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : Nat.\lambda y : Nat.\lambda z : Bool.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) : S(Nat \to Nat \to Bool \to Nat)$$

1.5 Ejercicio 5

1. $U = \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ z\ x\ y\ z$

   (a) Paso I : Rectificación. El término está rectificado, ya que cada variable ligada cuenta con nombre distinto de las demás.

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.\lambda z : X_3.\ z\ x\ y\ z$$

   (c) Paso III : Restricciones

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.\lambda z : X_3.\ z\ x\ y\ z) = (X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_6 \mid E)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.\lambda z : X_3.\ z\ x\ y\ z) = (X_2 \to X_3 \to X_6 \mid E)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2 \mid \lambda z : X_3.\ z\ x\ y\ z) = (X_3 \to X_6 \mid E)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid ((z\ x)\ y)\ z) = (X_6 \mid \{X_5 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_6\} \cup \{X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \to X_5)\} \cup \{X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_4)\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid (z\ x)\ y) = (X_5 \mid \{X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \to X_5)\} \cup \{X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_4)\}) \qquad \mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid z) = (X_3 \mid \emptyset)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid z\ x) = (X_4 \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_4)\}) \qquad \mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid z) = (X_3 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$$

   (d) Paso IV : Unificación.

   $$\begin{aligned} \texttt{entrada} &: \{X_5 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_6, X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \to X_5), X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_4)\} \\ \texttt{elim var} &: \{X_5 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_4 \to X_6, X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \to X_5)\} \\ \texttt{elim var} &: \{X_4 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_1 \to X_4 \to X_6\} \\ \texttt{occurs check} &: \textbf{falla} \end{aligned}$$

2. $U = \lambda x.\ x\ (w\ (\lambda y.\ w\ y))$

   (a) Paso I : Rectificación. Tenemos dos variables ligadas con nombres diferentes y una libre que también difiere en nombre, por tanto, U está rectificado.

   (b) Paso II : Anotación

   $$\Gamma_0 = w : X_1$$
   $$M_0 = \lambda x : X_2.\ x\ (w\ (\lambda y : X_3.\ w\ y))$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\mathcal{I}(w : X_1 \mid \lambda x : X_2.\ x\ (w\ (\lambda y : X_3.\ w\ y))) = (X_2 \to X_6 \mid E)$$

$$\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid\ x\ (w\ (\lambda y : X_3.\ w\ y))) = (X_6 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} X_5 \to X_6\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4 \to X_5\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\})$$

$$\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid\ x) = (X_2 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid w\ (\lambda y : X_3.\ w\ y)) = (X_5 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4 \to X_5\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\})$$

$$\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid w) = (X_1 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid \lambda y : X_3.\ w\ y) = (X_3 \to X_4 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\})$$

$$\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2,\ y : X_3 \mid\ w\ y) = (X_4 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\})$$

$$\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2,\ y : X_3 \mid\ w) = (X_1 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2,\ y : X_3 \mid y) = (X_3 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

$$\begin{aligned} \texttt{entrada}\ :& \{X_2 \stackrel{?}{=} X_5 \to X_6, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4 \to X_5, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\} \\ \texttt{colisión}\ :&\ \textbf{falla} \end{aligned}$$

3. $U = \lambda x.\lambda y.xy$

(a) Paso I : Rectificación. Está rectificado ambas variables son ligadas y tienen distinto nombre.

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned} \Gamma_0 =& \emptyset \\ M_0 =& \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.xy \end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.xy) = (X_1 \to X_2 \to X_3 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.xy) = (X_2 \to X_3 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid xy) = (X_3 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

$$\begin{aligned} \texttt{entrada}\ :&\ \ \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\} \\ \texttt{elim var}\ :&\ \ \emptyset \quad \texttt{con S1 =}\ \{X_1 := X_2 \to X_3\} \end{aligned}$$

Con esto, el mgu es :

$$S = S1 = \{X_1 := X_2 \to X_3\}$$

Decimos que U es tipable y vale :

$$\begin{aligned} & S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_2 \to X_3) \\ & \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : X_2 \to X_3.\lambda y : X_2.xy) : S(X_2 \to X_3 \to X_2 \to X_3) \end{aligned}$$

4. $U = \lambda x.\lambda y.yx$

   (a) Paso I : Rectificación. Está rectificado ambas variables son ligadas y tienen distinto nombre.

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\begin{aligned}\Gamma_0 =& \emptyset \\ M_0 =& \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.yx\end{aligned}$$

   (c) Paso III : Restricciones

   $$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.yx) = (X_1 \to X_2 \to X_3 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_3\})}$$

   $$\downarrow$$

   $$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.yx) = (X_2 \to X_3 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_3\})}$$

   $$\downarrow$$

   $$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid yx) = (X_3 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_3\})}$$

   $$\swarrow \qquad \searrow$$

   $$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)} \qquad \boxed{\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)}$$

   (d) Paso IV : Unificación

   $$\begin{aligned}\texttt{entrada :}& \quad \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_3\} \\ \texttt{elim var :}& \quad \emptyset \quad \texttt{con S1 =} \{X_2 := X_1 \to X_3\}\end{aligned}$$

   Con esto, el mgu es :

   $$S = S1 = \{X_2 := X_1 \to X_3\}$$

   Decimos que U es tipable y vale :

   $$\begin{aligned}&S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_2 \to X_3) \\ &\equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : X_1.\lambda y : X_1 \to X_3.xy) : S(X_1 \to X_1 \to X_3 \to X_3)\end{aligned}$$

5. $U = \lambda x.(\lambda x.x)$

   (a) Paso I : Rectificación. El término no está rectificado. Tenemos que $\alpha - renombrar$ porque tenemos dos variables ligadas con el mismo nombre:

   $$\lambda x.(\lambda y.y)$$

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= \lambda x : X_1.(\lambda y : X_2.y)\end{aligned}$$

   (c) Paso III : Restricciones

   $$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.(\lambda y : X_2.y)) = (X_1 \to X_2 \to X_2 \mid \emptyset)}$$

   $$\downarrow$$

   $$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.y) = (X_2 \to X_2 \mid \emptyset)}$$

   $$\downarrow$$

   $$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)}$$

(d) Paso IV : Unificación.
Ni idea

6. $U = \lambda x.(\lambda y.y)\ x$

(a) Paso I : Rectificación. Todo en regla

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}\Gamma_0 =& \emptyset\\ M_0 =& \lambda x : X_1.(\lambda y : X_2.y)\ x\end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.(\lambda y : X_2.y)\ x) = (X_1 \to X_3 \mid \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\})} \arrow[d] & \\
 & \boxed{\mathcal{I}(x : X_1 \mid (\lambda y : X_2.y)\ x) = (X_3 \mid \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\})} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{\mathcal{I}(x : X_1 \mid (\lambda y : X_2.y)) = (X_2 \to X_2 \mid \emptyset)} \arrow[d] & & \boxed{\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)} \\
\boxed{\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)} & &
\end{tikzcd}$$

(d) Paso IV : Unificación.

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \quad \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\}\\
\texttt{decompose} &: \quad \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}\\
\texttt{elim var} &: \quad \{X_2 \stackrel{?}{=} X_2, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}\ \texttt{con S1 =}\ \{X_1 := X_2\}\\
\texttt{elim triv} &: \quad \{X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}\\
\texttt{elim var} &: \quad \{X_3 \stackrel{?}{=} X_3\}\ \texttt{con S2 =}\ \{X_2 := X_3\}\\
\texttt{elim triv} &: \quad \emptyset
\end{aligned}$$

Con esto, el **mgu**

$$S = S_2 \circ S_1 = \{X_1 := X_2, X_2 := X_3\}$$

Por tanto, U es tipable y vale el juicio

$$\begin{aligned}&S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_3)\\ &\quad \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x :?.(\lambda y :?.y)\ x) : S(??)\end{aligned}$$

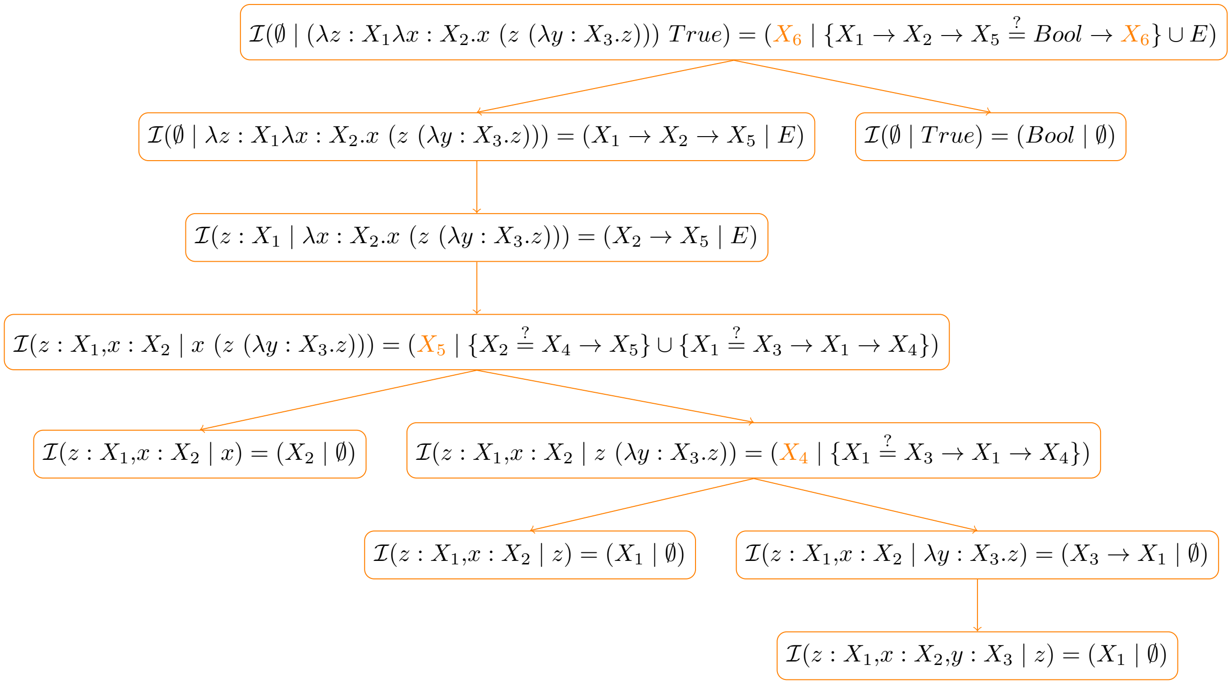
7. $U = (\lambda z \lambda x.x\ (z\ (\lambda y.z)))\ True$

(a) Paso I : Rectificación. Está rectificado.

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}\Gamma_0 =& \emptyset\\ M_0 =& (\lambda z : X_1 \lambda x : X_2.x\ (z\ (\lambda y : X_3.z)))\ True\end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones



(d) Paso IV : Unificación

`entrada` : $\{X_1 \to X_2 \to X_5 \stackrel{?}{=} Bool \to X_6, X_2 \stackrel{?}{=} X_4 \to X_5, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_1 \to X_4\}$

`occurs check` : **falla**

1.6 Ejercicio 8

Tener en cuenta el tipo de los pares definido como:c$\tau ::= \cdots \mid \tau \times \tau$ Con expresiones nuevas definidas como: $M ::= \cdots \mid \langle M, M \rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$

Y las siguientes reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \tau \times \sigma}\ \text{(T-Pair)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \tau}\ \text{(T-Proj1)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \sigma}\ \text{(T-Proj2)}$$

Se extiende el algoritmo I con las siguientes reglas:

$$I(\Gamma \mid \langle M_1, M_2 \rangle) = (\tau \times \sigma \mid E_1 \cup E_2)$$

donde:

$$I(\Gamma \mid M_1) = (\tau \mid E_1) \quad \text{e} \quad I(\Gamma \mid M_2) = (\sigma \mid E_2)$$

$$I(\Gamma \mid \pi_1(M)) = (\sigma \mid \{\tau = \sigma \times \rho\} \cup E) \quad \text{donde } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$I(\Gamma \mid \pi_2(M)) = (\rho \mid \{\tau = \sigma \times \rho\} \cup E) \quad \text{donde } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

1. Tipar la expresión: $(\lambda f.\langle f, 2 \rangle)(\lambda x.x\,1)$ utilizando la versión extendida del algoritmo.
2. Intentar tipar la siguiente expresión utilizando la versión extendida del algoritmo:$(\lambda f.\langle f\,2, f\,\text{True}\rangle)(\lambda x.x)$ Mostrar en qué punto la inferencia falla y por qué motivo.

1.6.1 1

$U = \lambda f.\langle f, \underline{2}\rangle)(\lambda x.x\ \underline{1})$

1. Paso I : Rectificación. Todo bien.
2. Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}\Gamma_0 =& \emptyset \\ M_0 =& \lambda f : X_1.\langle f, \underline{2}\rangle)(\lambda x : X_2.x\ \underline{1})\end{aligned}$$

3. Paso III : Restricciones

$$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda f : X_1.\langle f,\underline{2}\rangle)(\lambda x : X_2.x\ \underline{1})) = (X_4 \mid \{X_1 \to X_1 \times Nat \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3 \to X_4\} \cup \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda f : X_1.\langle f,\underline{2}\rangle) = (X_1 \to X_1 \times Nat \mid \emptyset)} \qquad \boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_2.x\ \underline{1}) = (X_2 \to X_3 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(f : X_1 \mid \langle f,\underline{2}\rangle) = (X_1 \times Nat \mid \emptyset \cup \emptyset)} \qquad \boxed{\mathcal{I}(x : X_2 \mid x\ \underline{1}) = (X_3 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset)} \quad \boxed{\mathcal{I}(f : X_1 \mid \underline{2}) = (Nat \mid \emptyset)} \quad \boxed{\mathcal{I}(x : X_2 \mid x) = (X_2 \mid \emptyset)} \quad \boxed{\mathcal{I}(x : X_2 \mid \underline{1}) = (Nat \mid \emptyset)}$$

4. Paso IV : Unificación.

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada}\ :& \{X_1 \to X_1 \times Nat \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3 \to X_4, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\}) \\
\texttt{decompose}\ :& \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3, X_1 \times Nat \stackrel{?}{=} X_4, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\}) \\
\texttt{elim var}\ :& \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})\ \ \texttt{con S1 = }\{\ X_4 := X_1 \times Nat\} \\
\texttt{elim var}\ :& \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})\ \ \texttt{con S2 = }\{X_1 := X_2 \to X_3\} \\
\texttt{elim var}\ :& \emptyset\ \ \texttt{con S3 = }\{X_2 := Nat \to X_3\}
\end{aligned}$$

Con esto el **mgu** es

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_4 := X_1 \times Nat, X_1 := X_2 \to X_3, X_2 := Nat \to X_3\}$$

Y por tanto, U es tipable y valeel siguiente juicio

$$\begin{aligned}&S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_4) \\ &\equiv \emptyset \vdash S((\lambda f : X_2 \to X_3.\langle f,\underline{2}\rangle)(\lambda x : Nat \to X_3.x\ \underline{1})) : S(X_1 \times Nat)\end{aligned}$$

1.6.2 2

$U = (\lambda f.\langle f\, 2, f\, \text{True}\rangle)(\lambda x.x)$

1. Paso I : Rectificación. Todo en regla.
2. Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \emptyset \\ M_0 &= (\lambda f : X_1.\langle f\, 2, f\, \text{True}\rangle)(\lambda x : X_2.x)\end{aligned}$$

3. Paso III : Restricciones

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda f : X_1.\langle f\ \underline{2}, f\ \text{True}\rangle)(\lambda x : X_2.x)) = (X_6 \mid \{X_1 \to X_5 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_2 \to X_6\} \cup E)$$

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda f : X_1.\langle f\ \underline{2}, f\ \text{True}\rangle) = (X_1 \to X_5 \mid E) \qquad \mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_2.x) = (X_2 \to X_2 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid \langle f\ \underline{2}, f\ \text{True}\rangle) = (X_5 \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} X_4 \to X_5\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4\}) \qquad \mathcal{I}(x : X_2 \mid x) = (X_2 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid f\ \underline{2}) = (X_3 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\}) \qquad \mathcal{I}(f : X_1 \mid f\ \text{True}) = (X_4 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4\})$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(f : X_1 \mid \underline{2}) = (Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(f : X_1 \mid \text{True}) = (Bool \mid \emptyset)$$

4. Paso IV : Unificación

$$\texttt{entrada}\ : \{X_1 \to X_5 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_2 \to X_6, X_3 \stackrel{?}{=} X_4 \to X_5, X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3, X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4\}$$
$$\texttt{colision}\ : \textbf{falla}$$

1.7 Ejercicio 9

Se extienden el Cálculo Lambda y el algoritmo de inferencia para soportar uniones disjuntas de la siguiente manera:

$$\tau ::= \ldots \mid \tau + \tau$$
$$M ::= \ldots \mid \text{left}_\tau(M) \mid \text{right}_\tau(M) \mid \text{case } M \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M \mathbin{[\!]} \text{right}(y) \rightsquigarrow M$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{left}_\sigma(M)) = (\tau + \sigma \mid E)$$
$$donde : I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$
$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{right}_\sigma(M)) = (\sigma + \tau \mid E)$$
$$donde : I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{case } M_1 \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M_2 \mathbin{[\!]} \text{right}(y) \rightsquigarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} X_x + X_y, \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

donde:

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$$
$$\mathcal{I}(\Gamma, x : X_x \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$$
$$\mathcal{I}(\Gamma, y : X_y \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$$
$$X_x\ y\ X_y\ \texttt{son variables frescas}$$

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

1. `case left(`$\underline{1}$`) of left(x)` $\rightsquigarrow$ `isZero(x) | right(y)` $\rightsquigarrow$ `True`
   (a) Paso I : Rectificación. Está todo bien
   (b) Paso II : Anotación.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \texttt{case left(}\underline{1}\texttt{)}_{X_1}\texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{True}$$

   (c) Paso III : Restricciones

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{case left}(\underline{1})_{X_1}\ \texttt{of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{True}) = (Bool \mid \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_2 + X_3, Bool \stackrel{?}{=} Bool\} \cup \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat\})$$

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{left}(\underline{1})_{X_1}) = (X_1 + Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_2 \mid \texttt{isZero(x)}) = (Bool \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}) \qquad \mathcal{I}(y : X_3 \mid \texttt{True}) = (Bool \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \underline{1}) = (Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_2 \mid \texttt{x}) = (X_2 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

entrada $:\{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_2 + X_3, Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$

elim triv $:\{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_2 + X_3, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$

elim var $:\{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} Nat + X_3\}$ con S1 = $\{X_2 := Nat\}$

decompose $:\{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} X_3\}$

elim var $:\{Nat \stackrel{?}{=} X_3\}$ con S2 = $\{X_1 := Nat\}$

elim var $:\emptyset$ con S3 = $\{X_3 := Nat\}$

Con esto 1 es tipable y el mgu es

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat, X_1 := Nat, X_2 := Nat\}$$

y vale entonces el siguiente juicio

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(Bool)$$
$$\equiv \emptyset \vdash S(\texttt{case left}(\underline{1})_{Nat}\ \texttt{of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{True}) : S(Bool)$$

2. `case right(z) of left(x)` $\rightsquigarrow$ `isZero(x) | right(y)` $\rightsquigarrow$ `y`

(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = z : X_3$$
$$M_0 = \texttt{case right}(z)_{X_1}\ \texttt{of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}$$

(c) Paso III : Recstricción

$$\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{case right}(z)_{X_1}\ \texttt{of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) = (Bool \mid \{X_1 + X_3 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$$

$$\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{right}(z)_{X_1}) = (X_1 + X_3 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{isZero(x)}) = (Bool \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}) \qquad \mathcal{I}(z : X_3, y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{z}) = (X_3 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{x}) = (X_1 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

entrada $:\{X_1 + X_3 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$

elim var $:\{Nat + X_3 \stackrel{?}{=} Nat + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2,\}$ con S1 = $\{X_1 := Nat\}$

elim var $:\{Nat + X_3 \stackrel{?}{=} Nat + Bool\}$ con S2 = $\{X_2 := Bool\}$

elim var $:\emptyset$ con S3 = $\{X_3 := Bool\}$

El mgu por tanto es

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Bool, X_2 := Bool, X_1 := Nat\}$$

Concluimos que vale el siguiente juicio de tipado

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(Bool)$$
$$\equiv z : Bool \vdash S(\texttt{case right}(z)_{Nat} \texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) : S(Bool)$$

3. `case right(zero) of left(x)` $\rightsquigarrow$ `isZero(x) | right(y)` $\rightsquigarrow$ `y`

   (a) Paso I : Rectificación.

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \texttt{case right}(zero)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}$$

   (c) Paso III : Recstricción

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{case right}(z)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) = (Bool \mid \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$$

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{right}(zero)_{X_1}) = (X_1 + Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1 \mid \texttt{isZero(x)}) = (Bool \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}) \qquad \mathcal{I}(y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)$$

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{zero}) = (Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1 \mid \texttt{x}) = (X_1 \mid \emptyset)$$

   (d) Paso IV : Unificación

   $$\begin{aligned} \texttt{entrada } &: \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\} \\ \texttt{elim var } &: \{Nat + Nat \stackrel{?}{=} Nat + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \texttt{ con S1 = } \{X_1 := Nat\ \} \\ \texttt{decompose } &: \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \\ \texttt{elim triv } &: \{Nat \stackrel{?}{=} X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \\ \texttt{colision } &: \textbf{falla} \end{aligned}$$

4. `case x of left(x)` $\rightsquigarrow$ `isZero(x) | right(y)` $\rightsquigarrow$ `y`

   (a) Paso I : Rectificación. El término no está rectificado ya que tenemos una ligada x que se llama igual que la libre x en M1. Por tanto, rectificamos

   `case z of left(x)` $\rightsquigarrow$ `isZero(x) | right(y)` $\rightsquigarrow$ `y`

   (b) Paso II : Anotación. Como z está libre, agregamos al contexto su tipo.

   $$\Gamma_0 = z : X_3$$
   $$M_0 = \texttt{case z of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}$$

   (c) Paso III : Recstricción

   $$\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{case z of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) = (Bool \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$$

   $$\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{z}) = (X_3 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{isZero(x)}) = (Bool \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}) \qquad \mathcal{I}(z : X_3, y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)$$

   $$\mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{x}) = (X_1 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

$$
\begin{aligned}
&\texttt{entrada} : \{X_3 \overset{?}{=} X_1 + X_2, Bool \overset{?}{=} X_2, X_1 \overset{?}{=} Nat\}\\
&\texttt{elim var} : \{X_3 \overset{?}{=} Nat + X_2, Bool \overset{?}{=} X_2\} \ \texttt{con S1 = } \{X_1 := Nat\}\\
&\texttt{elim var} : \{X_3 \overset{?}{=} Nat + Bool\} \ \texttt{con S2 = } \{X_2 := Bool\}\\
&\texttt{elim var} : \emptyset \quad \texttt{con S3 = } \{X_3 := Nat + Bool\}
\end{aligned}
$$

Concluimos que el mgu es

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat + Bool, X_2 := Bool, X_1 := Nat\}$$

y vale entonces el siguiente juicio

$$
\begin{aligned}
&S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(Bool)\\
\equiv\ & z : Nat + Bool \vdash S(\texttt{case z of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) : S(Bool)
\end{aligned}
$$

5. `case left(z) of left(x)` $\rightsquigarrow$ `z | right(y)` $\rightsquigarrow$ `y`

(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \emptyset\\
&M_0 = \texttt{case left}(z)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{z | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}
\end{aligned}
$$

(c) Paso III : Recstricción

$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{case left}(z)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{z | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) = (Bool \mid)}$

- $\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{left}(z)_{X_1}) = (\mid \emptyset)}$
  - $\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{z}) = (\mid \emptyset)}$
- $\boxed{\mathcal{I}(z : X_1 \mid \texttt{z}) = (X_1 \mid \emptyset)}$
- $\boxed{\mathcal{I}(y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)}$

6. `case z of left(x)` $\rightsquigarrow$ `z | right(y)` $\rightsquigarrow$ `y`

(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_0 = z : X_3\\
&M_0 = \texttt{case z of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{z | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}
\end{aligned}
$$

(c) Paso III : Recstricción

$\boxed{\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{case z of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{z | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) = (X_3 \mid \{X_3 \overset{?}{=} X_1 + X_2, X_3 \overset{?}{=} X_2\})}$

- $\boxed{\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{z}) = (X_3 \mid \emptyset)}$
- $\boxed{\mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{z}) = (X_3 \mid \emptyset)}$
- $\boxed{\mathcal{I}(z : X_3, y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)}$

(d) Paso IV : Unificación

$$
\begin{aligned}
&\texttt{entrada} : \{X_3 \overset{?}{=} X_1 + X_2, X_3 \overset{?}{=} X_2\}\\
&\texttt{elim var} : \{X_2 \overset{?}{=} X_1 + X_2\} \ \texttt{con S1 = } \{X_3 := X_2\}\\
&\texttt{colision} : \textbf{falla}
\end{aligned}
$$

1.8 Ejercicio 10

Se extienden el Cálculo Lambda y el algoritmo de inferencia para soportar listas de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rcl}
\tau & ::= & \ldots \mid [\tau] \\
M & ::= & \ldots \mid [\,]^{\tau} \mid M :: M \mid \text{foldr } M \text{ base} \rightsquigarrow M;\ \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow M
\end{array}
$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid [\,]^{\tau}) = ([\tau] \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1 :: M_2) = (\tau_2 \mid \{\tau_2 \overset{?}{=} [\tau_1]\} \cup E_1 \cup E_2)$$

donde :

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1) \qquad \mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{foldr } M_1 \text{ base} \rightsquigarrow M_2 \ ;\ \text{rec}(h, r) \rightsquigarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \overset{?}{=} [X_h], \tau_2 \overset{?}{=} \tau_3, \tau_3 \overset{?}{=} X_r\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

donde :

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1) \qquad \mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2) \qquad \mathcal{I}(\Gamma, h : X_h, r : X_r \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$$

donde X_h y X_r son variables de tipo frescas.
Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

1. `foldr` $x :: [\,]$ `base` $\rightsquigarrow [\,]$ `;` `rec`$(h, r) \rightsquigarrow$ `isZero`$(h) :: r$
   (a) Paso I : Rectificación. Está bien rectificado.
   (b) Paso II: Anotación

$$\Gamma_0 = x : X_1$$

$$M_0 = \ \texttt{foldr x ::}[\,]_{X_2} \ \texttt{base} \rightsquigarrow [\,]_{X_3} \ \texttt{; rec(h, r)} \rightsquigarrow \texttt{isZero}(h) :: r$$

   (c) Paso III : Restricciones

$$\mathcal{I}(x : X_1 \mid \texttt{foldr x base} \to [\,]_{X_2}\texttt{; rec(h,r)} \to \texttt{isZero(h) :: r}) = ([\,]_{X_3} \mid \{[X_2] \overset{?}{=} [X_h], [X_3] \overset{?}{=} X_r, X_r \overset{?}{=} X_r, [X_2] \overset{?}{=} [X_1], X_h \overset{?}{=} Nat, X_r \overset{?}{=} [\text{Bool}]\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1 \mid [\,]_{X_2}) = ([X_2] \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{isZero(h) :: r}) = (X_r \mid \{X_r \overset{?}{=} \texttt{[Bool]}, X_h \overset{?}{=} Nat\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{isZero(h)} = (Bool \mid \{X_h \overset{?}{=} Nat\}) \qquad \mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{r} = (X_r \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{h} = (X_h \mid \emptyset)$$

   (d) Paso IV : Unificación

$$
\begin{array}{rl}
\texttt{entrada}: & \{[X_2] \overset{?}{=} [X_h], [X_3] \overset{?}{=} X_r, X_r \overset{?}{=} X_r, [X_2] \overset{?}{=} [X_1], X_h \overset{?}{=} Nat, X_r \overset{?}{=} [Bool]\} \\
\texttt{elim triv}: & \{[X_2] \overset{?}{=} [X_h], [X_3] \overset{?}{=} X_r, [X_2] \overset{?}{=} [X_1], X_h \overset{?}{=} Nat, X_r \overset{?}{=} [Bool]\} \\
\texttt{elim var}: & \{[X_2] \overset{?}{=} [Nat], [X_3] \overset{?}{=} X_r, [X_2] \overset{?}{=} [X_1], X_r \overset{?}{=} [Bool]\} \ \texttt{con S1 = \{} \ X_h \ \texttt{:= Nat\}} \\
\texttt{elim var}: & \{[X_2] \overset{?}{=} [Nat], [X_3] \overset{?}{=} [Bool], [X_2] \overset{?}{=} [X_1]\} \ \texttt{con S2 = \{} \ X_r \ \texttt{:= [Bool]\}} \\
\texttt{decompose}: & \{X_2 \overset{?}{=} Nat, [X_3] \overset{?}{=} [Bool], [X_2] \overset{?}{=} [X_1]\} \\
\texttt{decompose}: & \{X_2 \overset{?}{=} Nat, X_3 \overset{?}{=} Bool, [X_2] \overset{?}{=} [X_1]\} \\
\texttt{decompose}: & \{X_2 \overset{?}{=} Nat, X_3 \overset{?}{=} Bool, X_2 \overset{?}{=} X_1\} \\
\texttt{elim var}: & \{X_3 \overset{?}{=} Bool, Nat \overset{?}{=} X_1\} \ \texttt{con S3 = \{} \ X_2 \ \texttt{:= Nat\}} \\
\texttt{elim var}: & \{\} \ \texttt{con S4 = \{} \ X_1 \ \texttt{:= Nat\}}
\end{array}
$$

Con esto podemos decir que el MGU es

$$S = \{X_1 := Nat, X_3 := Bool, X_2 := Nat, X_r := [Bool], X_h := Nat\}$$

`y vale el siguiente juicio de tipado`

$x : Nat \vdash$ `foldr x ::`$[\,]_{Nat}$ `base` $\rightsquigarrow [\,]_{Bool}$ `; rec(h, r)` $\rightsquigarrow$ `isZero`$(h) :: r : [Bool]$

2. `foldr` $(\lambda x.\, \texttt{succ}(x)) :: [\,]$ `base` $\rightsquigarrow [\,]$ `;` $\texttt{rec}(x, r) \rightsquigarrow$ `if` $p\,x$ `then` $x :: r$ `else` r

   (a) Paso I : Rectificación. Tiene dos ligadas con el mismo nombre

   `foldr` $(\lambda x.\, \texttt{succ}(x)) :: [\,]$ `base` $\rightsquigarrow [\,]$ `;` $\texttt{rec}(h, r) \rightsquigarrow$ `if` $p\,h$ `then` $h :: r$ `else` r

   (b) Paso II : Anotación

   $\Gamma_0 = p : X_4$

   $M_0 = \texttt{foldr}\ (\lambda x : X_1.\, \texttt{succ}(x)) :: [\,]_{X_2}$ `base` $\rightsquigarrow [\,]_{X_3}$ `;` $\texttt{rec}(h, r) \rightsquigarrow$ `if` $p\,h$ `then` $h :: r$ `else` r

   (c) Paso III : Restricciones

   $\mathcal{I}(p : X_4 \mid \texttt{foldr (}\lambda\texttt{ x : } X_1\texttt{.succ (x)) :: [ ]}_{X_2}\texttt{ base} \rightsquigarrow \texttt{[ ]}_{X_3}\texttt{ ; rec (h, r)}\rightsquigarrow\texttt{ if p h then h :: r else r)} = (\mid \{\})$

   $\mathcal{I}(p : X_4 \mid \lambda\texttt{ x : } X_1\texttt{.succ (x)) :: [ ]}_{X_2} = (\mid \{\})$

   $\mathcal{I}(p : X_4 \mid \texttt{[ ]}_{X_3} = ([X_3] \mid \emptyset)$

   $\mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{if p h then h :: r else r)}) = (\mid \{\})$

3. `foldr` x `base` $\rightsquigarrow x$ `;` $\texttt{rec}(h, r) \rightsquigarrow \texttt{isZero}(h) :: r$

   (a) Paso I : Rectificación. Está bien rectificado.

   (b) Paso II : Anotación

   $\Gamma_0 = x : X_1$

   $M_0 = \texttt{foldr x base} \to \texttt{x ; rec(h,r)} \to \texttt{isZero(h) :: r}$

   (c) Paso III : Restricciones

   $\mathcal{I}(x : X_1 \mid \texttt{foldr x base} \to \texttt{x ; rec(h,r)} \to \texttt{isZero(h) :: r}) = (X_1 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} [X_h], X_1 \stackrel{?}{=} X_r, X_r \stackrel{?}{=} X_r, X_r \stackrel{?}{=} [\text{Bool}], X_h \stackrel{?}{=} Nat\})$

   $\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$

   $\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$

   $\mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{isZero(h) :: r}) = (X_r \mid \{X_r \stackrel{?}{=} \texttt{[Bool]}, X_h \stackrel{?}{=} Nat\})$

   $\mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{isZero(h)} = (Bool \mid \{X_h \stackrel{?}{=} Nat\})$

   $\mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{r} = (X_r \mid \emptyset)$

   $\mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{h} = (X_h \mid \emptyset)$

   (d) Paso IV : Unificación.

   $\texttt{entrada} : \{X_1 \stackrel{?}{=} [X_h], X_1 \stackrel{?}{=} X_r, X_r \stackrel{?}{=} X_r, X_r \stackrel{?}{=} [\text{Bool}], X_h \stackrel{?}{=} Nat\}$

   $\texttt{elim triv} : \{X_1 \stackrel{?}{=} [X_h], X_1 \stackrel{?}{=} X_r, X_r \stackrel{?}{=} [\text{Bool}], X_h \stackrel{?}{=} Nat\}$

   $\texttt{elim var} : \{[X_h] \stackrel{?}{=} X_r, X_r \stackrel{?}{=} [\text{Bool}], X_h \stackrel{?}{=} Nat\}$ `con S1 =` $\{X_1$ `:=` $[X_h]\}$

   $\texttt{swap} : \{X_r \stackrel{?}{=} [X_h], X_r \stackrel{?}{=} [\text{Bool}], X_h \stackrel{?}{=} Nat\}$

   $\texttt{elim var} : \{X_r \stackrel{?}{=} [Nat], X_r \stackrel{?}{=} [\text{Bool}]\}$ `con S2 =` $\{X_h$ `:= Nat`$\}$

   $\texttt{colision} : \texttt{falla}$

4. `foldr` x `base` $\rightsquigarrow$ `True` `;` $\texttt{rec}(h, x) \rightsquigarrow x$

(a) Paso I : Rectificación. Tenemos una ligada y una libre con el mismo nombre, por tanto, renombramos

$$\texttt{foldr x base} \rightsquigarrow \texttt{True ; rec(h,r)} \rightsquigarrow \texttt{r}$$

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = x : X_1$$
$$M_0 = \texttt{foldr x base} \rightsquigarrow \texttt{True ; rec(h,r)} \rightsquigarrow \texttt{r}$$

(c) Paso III: Restricciones

$$\mathcal{I}(x : X_1 \mid \texttt{foldr x base} \to \texttt{True ; rec(h,r)} \to \texttt{r}) = (Bool \mid \{X_1 \overset{?}{=} [X_h], \text{Bool} \overset{?}{=} X_r, X_r \overset{?}{=} X_r\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1 \mid True) = (Bool \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1, h : X_h, r : X_r \mid \texttt{r}) = (X_r \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{X_1 \overset{?}{=} [X_h], \text{Bool} \overset{?}{=} X_r, X_r \overset{?}{=} X_r\} \\
\texttt{elim triv} &: \{X_1 \overset{?}{=} [X_h], \text{Bool} \overset{?}{=} X_r\} \\
\texttt{elim var} &: \{\text{Bool} \overset{?}{=} X_r\} \texttt{ con S1 = } \{\ X_1 \texttt{ := } [X_h]\ \} \\
\texttt{elim var} &: \{\} \texttt{ con S2 = } \{\ X_r \texttt{ := Bool}\ \}
\end{aligned}$$

Dicho esto, vale el siguiente juicio

$$x : [X_h] \vdash \texttt{foldr x base} \rightsquigarrow \texttt{True ; rec(h,r)} \rightsquigarrow \texttt{r :Bool}$$