Clase Práctica 11 : Resolución Lógica

Tomás Felipe Melli

June 22, 2025

Índice

1 Resolución General

Ya hablamos en el resumen teórico de que este procedimiento se utiliza para determinar la **insatisfactibilidad** de una fórmula. Dijimos que es una técnica útila para demostrar por refutación (es decir si queremos demostrar τ mostramos que $\neg\tau$ es insatisfactible). Mostramos también la regla general y un poco se dijo sobre esta idea de **aplicar sucesivamente una regla de inferencia a un conjunto de cláusulas**.
Respecto de la **satisfactibilidad** y **validez** insistimos en lo siguiente :

- Una **asignación** es una asociación de variables a valores del dominio.
- Una fórmula τ es **válida** si y sólo si **toda** asignación la hace verdadera.
- Una fórmula τ es **satisfactible** si y sólo si **alguna** asignación la hace verdadera.

Con esto en mente, podemos pensar en el siguiente hecho para usarlo como técnica de demostración :

$$\tau \texttt{ es válida} \iff \neg\tau \texttt{ es insatisfactible}$$

Hablamos antes también de la **forma normal conjuntiva** ya que es con esta estructura con la que el método labura, o sea, *conjunción de disyunciones de literales* (los literales son fórmulas atómicas (como también su forma negada)). Una **cláusula** es una de esas disyunciones, su notación es la misma que la de conjuntos, como vemos a continuación :

$$\forall X.\forall Y.(\neg\texttt{menor}(X,Y) \vee \texttt{menor}(c,Y)) \texttt{ es una cláusula}$$
$$\{\neg\texttt{menor}(X,Y), \texttt{menor}(c,Y)\} \texttt{ es su forma normal conjuntiva}$$

Con esto en mente, decimos que la **FNC** es un conjunto de cláusulas. Supongamos el conjunto que tiene a las siguientes cláusulas :

$$\{\texttt{menor}(X,Y), \texttt{menor}(c,Y)\}\{\texttt{impar}(Z), \texttt{mayor}(Z,W)\}$$

Estaría representando la siguiente fórmula :

$$\forall X.\forall Y.(\texttt{menor}(X,Y) \vee \texttt{menor}(c,Y) \wedge \texttt{impar}(Z) \vee \texttt{mayor}(Z,W))$$

1.1 Método de Resolución

La estrategia para demostrar que una fórmula es universalmente válida dijimos que es demostrar que su negación en insatisfactible. Si queremos demostar que τ se deduce de $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ demostramos que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \neg\tau$ es insatisfactible. O sea :

$$(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \implies \tau \texttt{ es válida} \iff (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \neg\tau) \texttt{ es insatisfactible}$$

1.1.1 Esquema General

1. Expresamos la o las fórmulas como cláusulas.
2. Aplicamos sucesivamente un paso de resolución (que nos permitirá generar nuevas cláusulas)
3. Esto lo vamos a hacer hasta llegar a la cláusula vacía, o , concluir que no se puede llegar a ella.
4. Es conveniente **tener un plan** a la hora de aplicar la resolución ya que se pueden presentarse varias opciones.

1.1.2 Regla de resolución en el marco proposicional

$$\frac{\sigma_i = \{A_1, \ldots, A_m, Q\} \qquad \sigma_j = \{B_1, \ldots, B_n, \neg Q\}}{\tau = \{A_!, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}}$$

Desglosemos un poco esta regla :

- τ se llama **resolvente** de (σ_i y σ_j).
- La regla se apoya sobre el hecho de que la siguiente proposición es una tautología:

$$(\alpha \vee P) \wedge (\beta \vee \neg P) \iff (\alpha \vee P) \wedge (\beta \vee \neg P) \wedge (\alpha \vee \beta)$$

- El conjunto de cláusulas $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ es lógicamente equivalente a $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \tau\}$

2 Ejercicio: Práctica 7.4

Un grupo de amigos quería juntarse a comer en una casa, pero no decidían en cuál. Prevalecían dos propuestas: la casa de Fabiana, que era cómoda y espaciosa, y la de Manuel, más chica pero con un amplio jardín y parrilla al aire libre. Finalmente, acordaron basar su elección en el pronóstico del tiempo. Si anunciaban lluvia, se reunirían en la casa de Fabiana; y si no, en la de Manuel (desde ya, la reunión tendría lugar en una sola casa).
Finalmente, llegó el día de la reunión, y el grupo se juntó a comer en la casa de Fabiana, pero no llovió.
Utilizar las siguientes proposiciones para demostrar —mediante el método de resolución— que el pronóstico se equivocó (es decir, que anunció lluvia y no llovió, o viceversa).

- P: El pronóstico anunció lluvia.
- F: El grupo se reúne en la casa de Fabiana.
- M: El grupo se reúne en la casa de Manuel.
- L: Llueve en el día de la reunión.

Ayuda: por la descripción de arriba sabemos que: $P \Rightarrow F$, $\neg P \Rightarrow M$, $\neg(F \wedge M)$, además de que F, $\neg L$ son verdaderas. Pensar en lo que se quiere demostrar para decidir qué pares de cláusulas utilizar.

2.1 Solución

2.1.1 Qué tenemos ? Lo pasamos a forma clausal

Se tiene :

1. $P \implies F \rightsquigarrow \neg P \vee F$
2. $\neg P \implies M \rightsquigarrow P \vee M$
3. $\neg(F \wedge M) \rightsquigarrow \neg F \vee \neg M$
4. F
5. $\neg L$

2.1.2 Qué queremos probar ?

Y queremos ver que :

$$(P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)$$

2.1.3 Negación

$$\neg((P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)) \rightsquigarrow (\neg P \vee L) \wedge (P \vee \neg L)$$

2.1.4 Expresamos las cláusulas como conjuntos

Todo, lo que tenemos y lo que queremos probar :

1. $\{\neg P, F\}$
2. $\{P, M\}$
3. $\{\neg F, \neg M\}$
4. $\{F\}$
5. $\{\neg L\}$
6. $\{\neg P, L\}$
7. $\{P, \neg L\}$

2.1.5 Aplicamos la regla (pensando en qué queremos demostrar)

$$\{P, M\}\ \{\neg P, L\} \rightsquigarrow \{L, M\}\ \texttt{que la agregamos al conjunto}$$
$$\{L, M\}\ \{\neg F, \neg M\} \rightsquigarrow \{L, \neg F\}\ \texttt{que la agregamos al conjunto}$$
$$\{L, \neg F\}\ \{F\} \rightsquigarrow \{L\}\ \texttt{que la agregamos al conjunto}$$
$$\{L\}\ \{\neg L\} \rightsquigarrow \{\}\ \texttt{queda probado}$$

3 Pasaje a FNC

Son una serie de pasos (ya están en el resumen teórico, pero para ir acorde a la clase práctica, reiteramos):

1. Eliminamos la implicación
2. Forma normal negada
3. Forma normal prenexa (opcional)
4. Forma normal de Skolem (skolemización)
5. Forma normal conjuntiva
6. Distribuimos los cuantificadores y renombramos

4 Regla de resolución en LPO

$$\frac{\sigma_i = \{A_1, \ldots, A_m, P_1, \ldots P_k\} \qquad \sigma_j = \{B_1, \ldots, B_n, \neg Q_1, \ldots \neg Q_l\}}{\tau = S(\{A_!, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\})}$$

Donde S es el MGU de $\{P_1 \stackrel{?}{=} \ldots \stackrel{?}{=} P_k \stackrel{?}{=} Q_1 \stackrel{?}{=} \ldots \stackrel{?}{=} Q_l\}$ o sea, $S(P_1) \stackrel{?}{=} \ldots \stackrel{?}{=} S(P_k) \stackrel{?}{=} S(Q_1) \stackrel{?}{=} \ldots \stackrel{?}{=} S(Q_l)$. Le decimos **resolvente** de σ_i y σ_k a τ. Y un detalle no menor, la **satisfactibilidad se preserva en cada paso de resolución por el Teorema de Herbrand-Skolem-Gödel**.

4.1 Detalles importantes !!

- Al skolemizar, usar la misma constante o función si y sólo si la variable que estamos eliminando es **la misma** (nunca para otras, aún si tienen el mismo nombre)
- Para encontrar las dependencias, ver cuáles variables están libres dentro del alcance del cuantificador existencial ($\exists$) (sin contar la que se está eliminando)
- No olvidarse de negar lo que se quiere demostrar !! Y recordar que

  $$\neg((\sigma_1, \wedge \ldots \wedge \sigma_n) \implies \tau) \equiv \sigma_1, \wedge \ldots \wedge \sigma_n \wedge \neg\tau$$

- Antes de empezar a aplicar los pasos de resolución, **convencerse de que lo que se quiere demostrar es verdadero**, y trazar un plan para demostrarlo.
- Recordad cómo funciona la unificación y **sustituir siempre variables** (ni funciones, ni constantes, ni predicados).

5 Ejercicio Recu 2do Parcial 1C 2012

Nos piden representar en forma clausal la siguiente información referida a conjuntos, pertenencia (`Pert`) e inclusión (`Inc`)

$I.\ \forall X.\forall Y.(\texttt{Inc}(X, Y) \iff \forall Z.(\texttt{Pert}(Z, X) \implies \texttt{Pert}(Z, Y)))$

$II.\ \forall X.\neg\texttt{Pert}(X, \emptyset)$

Nos piden usar resolución para probar que el vacío está incluido en todo conjunto. Y a continuación decir si la prueba realizada es **SLD**(después vamos a ver bien a qué se refiere este término).

Pasaje a FNC : I

La fórmula que dice que X está incluida en Y si y sólo si cada elemento en X es un elemento en Y.

$$\begin{aligned}
&\forall X.\forall Y.(\texttt{Inc}(X,Y) \iff \forall Z.(\texttt{Pert}(Z,X) \implies \texttt{Pert}(Z,Y)))\\
&\overset{\Leftrightarrow}{\to}^{e} \forall X.\forall Y.(\texttt{Inc}(X,Y) \implies \forall Z.(\texttt{Pert}(Z,X) \implies \texttt{Pert}(Z,Y))) \wedge \forall X.\forall Y.(\forall Z.(\texttt{Pert}(Z,X) \implies \texttt{Pert}(Z,Y)) \implies \texttt{Inc}(X,Y)\\
&\overset{\Rightarrow}{\to}^{e} \forall X.\forall Y.(\texttt{Inc}(X,Y) \implies \forall Z.(\neg\texttt{Pert}(Z,X) \vee \texttt{Pert}(Z,Y))) \wedge \forall X.\forall Y.(\neg\forall Z.(\texttt{Pert}(Z,X) \implies \neg\texttt{Pert}(Z,Y)) \vee \texttt{Inc}(X,Y))\\
&\overset{\Rightarrow}{\to}^{e} \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Inc}(X,Y) \vee \forall Z.(\neg\texttt{Pert}(Z,X) \vee \texttt{Pert}(Z,Y))) \wedge \forall X.\forall Y.(\neg\forall Z.(\neg\texttt{Pert}(Z,X) \vee \texttt{Pert}(Z,Y)) \vee \texttt{Inc}(X,Y))\\
&\overset{\forall\neg}{\to} \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Inc}(X,Y) \vee \forall Z.(\neg\texttt{Pert}(Z,X) \vee \texttt{Pert}(Z,Y))) \wedge \forall X.\forall Y.(\exists Z.\neg(\neg\texttt{Pert}(Z,X) \vee \texttt{Pert}(Z,Y)) \vee \texttt{Inc}(X,Y))\\
&\overset{\neg\to}{\to} \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Inc}(X,Y) \vee \forall Z.(\neg\texttt{Pert}(Z,X) \vee \texttt{Pert}(Z,Y))) \wedge \forall X.\forall Y.(\exists Z.(\texttt{Pert}(Z,X) \wedge \neg\texttt{Pert}(Z,Y)) \vee \texttt{Inc}(X,Y))\\
&\overset{\leftarrow\exists}{\to} \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Inc}(X,Y) \vee \forall Z.(\neg\texttt{Pert}(Z,X) \vee \texttt{Pert}(Z,Y))) \wedge \forall X.\forall Y.\exists Z.((\texttt{Pert}(Z,X) \wedge \neg\texttt{Pert}(Z,Y)) \vee \texttt{Inc}(X,Y))\\
&\overset{\texttt{Skolem}}{\to} \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Inc}(X,Y) \vee \forall Z.(\neg\texttt{Pert}(Z,X) \vee \texttt{Pert}(Z,Y))) \wedge \forall X.\forall Y.((\texttt{Pert}(f(X,Y),X) \wedge \neg\texttt{Pert}(f(X,Y),Y)) \vee \texttt{Inc}(X,Y))\\
&\overset{\leftarrow\vee}{\to} \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Inc}(X,Y) \vee \forall Z.(\neg\texttt{Pert}(Z,X) \vee \texttt{Pert}(Z,Y))) \wedge \forall X.\forall Y.((\texttt{Pert}(f(X,Y),X) \vee \texttt{Inc}(X,Y)) \wedge\\
&(\neg\texttt{Pert}(f(X,Y),Y) \vee \texttt{Inc}(X,Y)))
\end{aligned}$$

Con esto, ya podemos escribir esta fórmula en su forma normal conjuntiva (como la conjunción de cláusulas) :

$$\{\{\neg\texttt{Inc}(X,Y), \neg\texttt{Pert}(Z,X), \texttt{Pert}(Z,Y))\}\{\texttt{Pert}(f(X,Y),X), \texttt{Inc}(X,Y)\}\{\neg\texttt{Pert}(f(X,Y),Y), \texttt{Inc}(X,Y)\}\}$$

Pasaje a FNC : II

La fórmula en castellano nos dice que ningún elemento está en el conjunto vacío.

$$\forall X.\neg\texttt{Pert}(X,\emptyset)$$

Ya la podemos escribir en FNC :

$$\{\neg\texttt{Pert}(X,\emptyset)\}$$

Unimos todo y renombramos las variables

$\{\{\neg\texttt{Inc}(X_0,Y_0), \neg\texttt{Pert}(Z_0,X_0), \texttt{Pert}(Z_0,Y_0))\}\{\texttt{Pert}(f(X_1,Y_1),X_1), \texttt{Inc}(X_1,Y_1)\}\{\neg\texttt{Pert}(f(X_2,Y_2),Y_2), \texttt{Inc}(X_2,Y_2)\}\{\neg\texttt{Pert}(X_3,\emptyset)$

Nos proponemos probar entonces...

Que el vacío está incluido en todo conjunto:

$$\forall X.\texttt{Inc}(\emptyset,X)$$

Negamos la fórmula

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall X.\texttt{Inc}(\emptyset,X))\\
&\overset{\forall\neg}{\to} \exists X.\neg\texttt{Inc}(\emptyset,X)\\
&\overset{Skolem}{\to} \neg\texttt{Inc}(\emptyset,c)
\end{aligned}$$

Que podemos escribirla como FNC como sigue :

$$\{\neg\texttt{Inc}(\emptyset,c)\}$$

Ahora resolvemos

Vamos a escribir todas las cláusulas como hicimos en el ejercicio anterior para numerarlas.

1. $\{\neg\texttt{Inc}(X_0,Y_0), \neg\texttt{Pert}(Z_0,X_0), \texttt{Pert}(Z_0,Y_0))\}$
2. $\{\texttt{Pert}(f(X_1,Y_1),X_1), \texttt{Inc}(X_1,Y_1)\}$

3. $\{\neg\texttt{Pert}(f(X_2, Y_2), Y_2), \texttt{Inc}(X_2, Y_2)\}$
4. $\{\neg\texttt{Pert}(X_3, \emptyset)\}$
5. $\{\neg\texttt{Inc}(\emptyset, c)\}$

Ahora aplicamos la regla:

$\overset{2\ y\ 5}{\rightarrow} \{\texttt{Pert}(f(\emptyset, c), \emptyset)\}$ `con S =` $\{X_1$ `:=` $\emptyset$`,` Y_1 `:= c` $\}$

$\overset{6\ y\ 4}{\rightarrow} \{\}$ `con S =` $\{X_3$ `:=` $f(\emptyset, c)\}$

6 Ejercicio Recu 2do Parcial 2C 2008

Dadas las siguientes definiciones de `Descendiente` y `Abuela` a partir de la relación `Madre`:

1. Los hijos son descendientes :

$$\forall X.\forall Y.(\texttt{Madre}(X, Y) \implies \texttt{Descendiente}(Y, X))$$

2. La relación de descendencia es transitiva

$$\forall X.\forall Y.\forall Z.(\texttt{Descendiente}(X, Y) \wedge \texttt{Descendiente}(Y, Z) \implies \texttt{Descendiente}(X, Z))$$

3. La abuela es la madre de alguien que es madre de la nieta

$$\forall X.\forall Y.(\texttt{Abuela}(X, Y) \implies \exists Z.(\texttt{Madre}(X, Z) \wedge \texttt{Madre}(Z, Y))$$

Nos piden demostrar usando resolución general que los nietos son descendientes, o sea :

$$\forall X.\forall Y.(\texttt{Abuela}(X, Y) \implies \texttt{Descendiente}(Y, X))$$

Pasaje a FNC de la fórmula 1

$$\forall X.\forall Y.(\texttt{Madre}(X, Y) \implies \texttt{Descendiente}(Y, X))$$
$$\overset{\Rightarrow}{\rightarrow}{}^{e}\ \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Madre}(X, Y) \vee \texttt{Descendiente}(Y, X))$$

Que en su forma normal conjuntiva es :

$$\{\neg\texttt{Madre}(X, Y), \texttt{Descendiente}(Y, X)\}$$

Pasaje a FNC de la fórmula 2

$$\forall X.\forall Y.\forall z.(\texttt{Descendiente}(X, Y) \wedge \texttt{Descendiente}(Y, Z) \implies \texttt{Descendiente}(X, Z))$$
$$\overset{\Rightarrow}{\rightarrow}{}^{e}\ \forall X.\forall Y.\forall Z.(\neg(\texttt{Descendiente}(X, Y) \wedge \texttt{Descendiente}(Y, Z)) \vee \texttt{Descendiente}(X, Z))$$
$$\overset{\neg\rightarrow}{\rightarrow}\ \forall X.\forall Y.\forall Z.(\neg\texttt{Descendiente}(X, Y) \vee \neg\texttt{Descendiente}(Y, Z) \vee \texttt{Descendiente}(X, Z))$$

Que en su forma normal conjuntiva es :

$$\{\neg\texttt{Descendiente}(X, Y), \neg\texttt{Descendiente}(Y, Z), \texttt{Descendiente}(X, Z)\}$$

Pasaje a FNC de la fórmula 3

$$\forall X.\forall Y.(\texttt{Abuela}(X, Y) \implies \exists Z.(\texttt{Madre}(X, Z) \wedge \texttt{Madre}(Z, Y))$$
$$\overset{\Rightarrow}{\rightarrow}{}^{e}\ \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Abuela}(X, Y) \vee \exists Z.(\texttt{Madre}(X, Z) \wedge \texttt{Madre}(Z, Y))$$
$$\overset{Skolem}{\rightarrow}\ \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Abuela}(X, Y) \vee (\texttt{Madre}(X, \texttt{medio}(X, Y)) \wedge \texttt{Madre}(\texttt{medio}(X, Y), Y))$$
$$\overset{\vee\rightarrow}{\rightarrow}\ \forall X.\forall Y.(\neg\texttt{Abuela}(X, Y) \vee \texttt{Madre}(X, \texttt{medio}(X, Y)) \wedge \neg\texttt{Abuela}(X, Y) \vee \texttt{Madre}(\texttt{medio}(X, Y), Y))$$

Que en su forma normal conjuntiva es :

$$\{\neg\texttt{Abuela}(X, Y), \texttt{Madre}(X, \texttt{medio}(X, Y))\}\{\neg\texttt{Abuela}(X, Y), \texttt{Madre}(\texttt{medio}(X, Y), Y)\}$$

Unimos todo y renombramos

$$\{\{\neg\texttt{Madre}(X_1,Y_1),\texttt{Descendiente}(Y_1,X_1)\}\{\neg\texttt{Descendiente}(X_2,Y_2),\neg\texttt{Descendiente}(Y_2,Z_2),\texttt{Descendiente}(X_2,Z_2)\}$$
$$\{\neg\texttt{Abuela}(X_3,Y_3),\texttt{Madre}(X_3,\texttt{medio}(X_3,Y_3))\}\{\neg\texttt{Abuela}(X_4,Y_4),\texttt{Madre}(\texttt{medio}(X_4,Y_4),Y_4)\}\}$$

Queremos probar que..

$$\forall X.\forall Y.(\texttt{Abuela}(X,Y) \implies \texttt{Descendiente}(Y,X))$$
$$\overset{\neg}{\to} \neg(\forall X.\forall Y.(\texttt{Abuela}(X,Y) \implies \texttt{Descendiente}(Y,X)))$$
$$\overset{\neg\to}{\to} \exists X.\exists Y.\neg(\texttt{Abuela}(X,Y) \implies \texttt{Descendiente}(Y,X))$$
$$\overset{\Rightarrow}{\to}^{e} \exists X.\exists Y.\neg(\neg\texttt{Abuela}(X,Y) \vee \texttt{Descendiente}(Y,X))$$
$$\overset{\neg\to}{\to} \exists X.\exists Y.\texttt{Abuela}(X,Y) \wedge \neg\texttt{Descendiente}(Y,X)$$
$$\overset{Skolem}{\to} \exists Y.\texttt{Abuela}(a,Y) \wedge \neg\texttt{Descendiente}(Y,a)$$
$$\overset{Skolem}{\to} \texttt{Abuela}(a,b) \wedge \neg\texttt{Descendiente}(b,a)$$

Que en su forma normal conjuntiva es :

$$\{\{\texttt{Abuela}(a,b)\}\{\neg\texttt{Descendiente}(b,a)\}\}$$

Ahora resolvemos

Vamos a escribir todas las cláusulas para numerarlas

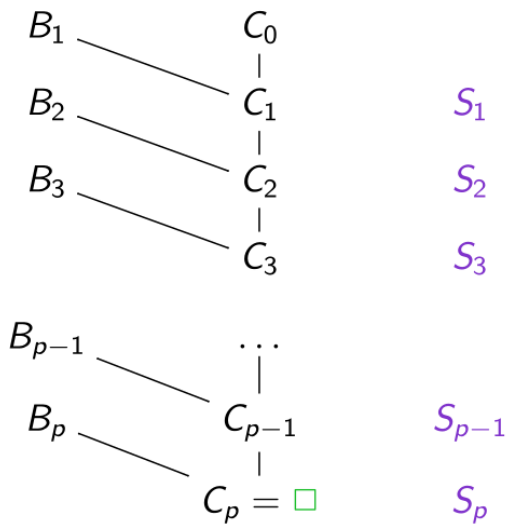
1. $\{\neg\texttt{Madre}(X_1,Y_1),\texttt{Descendiente}(Y_1,X_1)\}$
2. $\{\neg\texttt{Descendiente}(X_2,Y_2),\neg\texttt{Descendiente}(Y_2,Z_2),\texttt{Descendiente}(X_2,Z_2)\}$
3. $\{\neg\texttt{Abuela}(X_3,Y_3),\texttt{Madre}(X_3,\texttt{medio}(X_3,Y_3))\}$
4. $\{\neg\texttt{Abuela}(X_4,Y_4),\texttt{Madre}(\texttt{medio}(X_4,Y_4),Y_4)\}\}$
5. $\{\texttt{Abuela}(a,b)\}$
6. $\{\neg\texttt{Descendiente}(b,a)\}$

$$\overset{2\ \mathtt{y}\ 6}{\to} \{\neg\texttt{Descendiente}(b,Y_2),\neg\texttt{Descendiente}(Y_2,a)\}\ \texttt{con}\ S_7 = \{X_2\ \texttt{:= b,}\ Z_2\ \texttt{:= a}\}$$
$$\overset{5\ \mathtt{y}\ 4}{\to} \{\texttt{Madre}(\texttt{medio}(a,b),b)\}\ \texttt{con}\ S_8 = \{X_4\ \texttt{:= a,}\ Y_4\ \texttt{:= b}\}$$
$$\overset{8\ \mathtt{y}\ 1}{\to} \{\texttt{Descendiente}(b,\texttt{medio}(a,b))\}\ \texttt{con}\ S_9 = \{X_1\ \texttt{:= medio(a,b),}\ Y_1\ \texttt{:= b}\}$$
$$\overset{9\ \mathtt{y}\ 7}{\to} \{\neg\texttt{Descendiente}(\texttt{medio}(a,b),a)\}\ \texttt{con}\ S_{10} = \{Y_2\ \texttt{:= medio(a,b)}\}$$
$$\overset{5\ \mathtt{y}\ 3}{\to} \{\texttt{Madre}(a,\texttt{medio}(a,b))\}\ \texttt{con}\ S_{11} = \{X_3\ \texttt{:= a,}Y_3\ \texttt{:= b}\}$$
$$\overset{11\ \mathtt{y}\ 1}{\to} \{\texttt{Descendiente}(\texttt{medio}(a,b),a)\}\ \texttt{con}\ S_{12} = \{X_1\ \texttt{:= a,}Y_2\ \texttt{:= medio(a,b)}\}$$
$$\overset{12\ \mathtt{y}\ 10}{\to} \{\}$$

7 Resolución Lineal y SLD

7.1 Resolución Lineal

Si un conjunto de cláusulas $\mathcal{C}$ es **insatisfactible**, entonces existe una secuencia de pasos de **resolución lineal que lo refuta**(o sea que prueba su insatisfactibilidad). Esta secuencia será de la forma :



donde C_0 y cada B_i es un elemento de $\mathcal{C}$ o algún C_j con $j < i$.
En simples términos, es un tipo de resolución lógica en el que uno de los dos literales que se utilizan en la unificación proviene de la cláusula resultante del paso anterior.

7.2 Resolución SLD (Selective Linear Definite)

Como venimos viendo, la resolución general de primer orden es un **método de resolución completo** (es decir, demuestra todo lo lógicamente deducible), pero en la práctica no es eficiente debido al gran espacio de búsqueda sobre el cuál explora. Al tener que explorar sin restricciones se vuelve inmanejable. Como consecuencia, presentamos recién la **resolución lineal** como una estrategia en la cual se restringe la forma en que se aplica la resolución, y por tanto, mejora (se limita a seguir una única rama de inferencia a la vez). Ahora es momento de presentar una nueva estrategia que se denomina **Selective Linear Definite Resolution** que **es lineal** , pero es más estructurada y eficiente que la anterior. **Es completa para Cláusulas de Horn**... O sea que sólo funciona si se aplica a ellas.. Y quiénes son estas cláusulas ?

7.2.1 Cláusulas de Horn

Ya hablamos de cláusulas una locura, sabemos que es una disyunción de literales. Ahora tenemos que ver este tipo especial de cláusulas que son las de Horn. Decimos que una cláusula es de Horn cuando **a lo sumo uno de los literales no está negado**, su forma es $\forall X_1 \ldots \forall X_n . L_1 \vee \ldots \vee L_m$. Ahora vamos a ver bien ejemplos, pero antes vamos a presentar un *subtipo* de cláusula de Horn llamada **Cláusula de Definición (Definite Clause)** su forma es $\forall X_1 \ldots \forall X_n . \neg L_1 \vee \ldots \vee \neg L_m \vee \tau$ donde **exactamente uno de los literales no está negado (llamado Cabeza)** en este caso es τ **y el resto están todos negados**. Esto lo podemos interpretar como $\tau \leftarrow L_1 \wedge \ldots \wedge L_m$. Para qué sirve esto, no ? Bueno, en Prolog las **reglas, hechos** se definen así. Ejemplo, si es Dios es es inmortal equivale a $\texttt{inmortal}(X) :- \texttt{Dios}(X)$ que sería $\texttt{inmortal(X)} \leftarrow \texttt{Dios(X)}$ equivalente a $\neg\texttt{Dios}(X) \vee \texttt{inmortal}(X)$. Luego, para **representar lo que queremos probar o consultar** está la **Cláusula Objetivo (Goal)** en la que **están todos los literales negados**. Esta idea es la que ya venimos trabajando, queremos probar que *Dios es inmortal entonces intentamos refutar la negación de que lo es.*
Sea $H = P \cup \{G\}$ un conjunto de cláusulas de Horn (con nombres de variables disjuntos) tal que P es un conjunto de cláusulas de definición (o sea, el programa o base de conocimiento) y G el Goal, una cláusula sin literales positivos. Decimos que **H es el conjunto de entrada**. Es decir que, a partir de H es que vamos a aplicar SLD.
Un pequeño ejercicio para clasificar las cláusulas

- $\{P(X), P(Y), \neg Q(Y, Z)\} \rightarrow$ `No es de Horn, tiene dos literales positivos`
- $\{Q(e, Z)\} \rightarrow$ `Es de Horn, en particular es Definite donde sólo está la cabeza, por tanto es un Hecho`
- $\{P(X), \neg P(e)\} \rightarrow$ `Es de Horn, es Definite` $P(X) \leftarrow P(e)$ `es una Regla`

- $\{P(X), \neg P(e), Q(X,Y)\} \rightarrow$ `No es de Horn, tiene dos literales positivos`
- $\{P(X), \neg P(e), \neg Q(X,Y)\} \rightarrow$ `Es de Horn, en particular es Definite` $P(X) \leftarrow P(e) \wedge Q(X,Y)$ `es una Regla`
- $\{\neg P(X), \neg P(e), \neg Q(X,Y)\} \rightarrow$ `Es de Horn, en particular es Objective ya que no tiene ningún literal positivo`

Dijimos antes que no podemos aplicar SLD a cualquier conjunto de cláusulas, ya vimos a cuáles sí, el tema es que no toda fórmula puede expresarse como una cláusula de Horn, como $\forall X.(P(X) \vee Q(X))$ que tiene dos literales positivos.

7.3 Definición Formal

Una secuencia de pasos de **resolución SLD** para un conjunto de cláusulas de Horn **H** es una secuencia

$$< N_0, N_1, \ldots, N_p >$$

de **cláusulas Objetivo** que satisfacen las siguientes condiciones :

Condición 1

$N_0 \in H$ N_0 **es la cláusula objetivo de H**

Condición 2

Para todo N_i en la secuencia, $0 < i < p$ si N_i es

$$\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \ldots \neg A_n\}$$

entonces hay una **cláusula de definición** C_i de la forma $\{A, \neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$ en H tal que A_k y A son **unificables con MGU S** y N_{i+1} es $\{S(\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_m, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_n,)\}$

Regla

$$\frac{\overbrace{\{R, \neg B_1, \ldots, \neg B_n\}}^{\texttt{Definición}} \qquad \overbrace{\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_m,\}}^{\texttt{Objetivo}}}{\underbrace{S(\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_n, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_m,\}}_{\texttt{Nuevo Objetivo}})}$$

donde **S** es el **MGU** de $\{R \stackrel{?}{=} A_k\}$

En castellano todo esto...

Entonces, la resolución SLD es un caso particular de la resolución General donde usamos las Cláusulas de Horn con una sóla cláusula Objetivo. La idea es resolver la Objetivo con una de Definición lo que nos da una Nueva Objetivo y vamos a repetir eso hasta lograr llegar a la cláusula vacía. Si buscamos un resultado, computamos la sustitución respuesta componiendo todas las que fuimos realizando.

Comentarios

La resolución SLD es **lineal** no hay vuelta atrás posible. Si el objetivo se puede resolver con más de una regla, se elige la correcta. Si hay más de una correcta, elegimos cualquiera. Ahora bien, si nos equivocamos, **lo que hicimos no es parte de la resolución SLD**. Puede haber varias resoluciones SLD posibles

Resolución SLD y Prolog

Lo que Prolog hace es intentar buscar todas (*resolución SLD + Backtracking*).
El mecanismo de búsqueda en la resolución SLD **no está determinado**. El método es completo para cláusulas de Horn como ya dijimos. Prolog usa SLD pero además se le agregan condiciones (siempre elige el primer literal del Goal, intenta las reglas en el orden en que aparecen, usa Backtracking). No es completo aún habiendo resolución SLD puede no encontrarla (esto se debe a que puede entrar en un bucle infinito). Es determinado (por el orden de los literales en el Goal y las reglas del programa).

8 Ejercicio SLD : Los enemigos de mis enemigos son mis amigos

Tenemos las siguientes cláusulas :

1. $\{amigo(A,B), \neg enemigo(A,C), \neg enemigo(C,B)\}$
2. $\{enemigo(\texttt{Dulce Princesa, Rey Helado})\}$
3. $\{enemigo(\texttt{Rey Helado, Ricardio})\}$
4. $\{enemigo(\texttt{Rey Helado, Finn})\}$
5. $\{\neg amigo(\texttt{Dulce Princesa, X})\}$

Plan : queremos encontrar alguien que sea amigo de `Dulce Princesa` para que **5** sea contradicción.

$$\xrightarrow{1 \text{ y } 5} \{\neg enemigo(\texttt{Dulce Princesa}, C), \neg enemigo(C, \texttt{B})\} \texttt{ con } S_6 = \{\texttt{A := Dulce Princesa, X:= B}\}$$

$$\xrightarrow{2 \text{ y } 6} \{\neg enemigo(\texttt{Rey Helado}, \texttt{B})\} \texttt{ con } S_7 = \{\texttt{C := Rey Helado}\}$$

$$\xrightarrow{3 \text{ y } 7} \{\} \texttt{ con } S_8 = \{\texttt{B := Ricardio}\}$$

Decimos entonces que $S = S_8 \circ S_7 \circ S_6 = \{\texttt{B := Ricardio, C := Rey Helado, A := Dulce Princesa, X:= B}\}$

9 Ejercicio : `menorOIgual`

Sean las siguientes reglas :

1. `natural(0)`
2. `natural(suc(X)) :- natural(X)`
3. `menorOIgual(X,suc(Y)) :- menorOIgual(X,Y)`
4. `menorOIgual(X,X) :- natural(X)`

Si ejecutamos la consulta `menorOIgual(0,X)` en Prolog **se cuelga**. Esto sucede porque explora las reglas en orden, y en **3** nunca termina, ya hablamos de esto en la práctica de Prolog. La buena noticia es que con resolución podemos encontrar una respuesta :

$$\neg \texttt{ lo que queremos probar } \rightarrow \{\neg(\texttt{menorOIgual(0,X)})\} \texttt{ y la llamamos 5}$$

$$\xrightarrow{4 \text{ y } 5} \{\neg(\texttt{natural(0)})\} \texttt{ con } S_6 = \{\texttt{X := 0}\}$$

$$\xrightarrow{6 \text{ y } 1} \{\}$$

10 Ejercicio : Árboles binarios

Se tiene el siguiente programa en Prolog :

```
preorder(nil,[]).
preorder(bin(I,R,D),[R|L]) :- append(LI,LD,L), preorder(I,LI), preorder(D,LD).

append([],YS,YS).
append([X|XS],YS,[X|L]) :- append(XS,YS,L).
```

Qué sucede al realizar la consulta : `?- preorder(bin(bin(nil,2,nil), 1, nil), lista)` ?

```
3 ?- preorder(bin(bin(nil,2,nil),1,nil),Lista).
Lista = [1, 2] ;
...
```

Tira ese resultado y si le pedimos más respuestas se cuelga.

Utilizar el método de resolución para encontrar la solución al problema

Primero convertimos todo el programa a forma clausal

1. $\{preorder(nil, [\,])\}$
2. $\{preorder(bin(I_2, R_2, D_2), [R_2|L_2]), \neg append(LI_2, LD_2, L_2), \neg preorder(I_2, LI_2), \neg preorder(D_2, LD_2)\}$
3. $\{append([\,], YS_3, YS_3)\}$
4. $\{append([X_4|XS_4], YS_2, [X_4|L_4]), \neg append(XS_4, YS_4, L_4)\}$
5. $\neg preorder(bin(bin(nil, 2, nil), 1, nil), Lista_5)$

Aplicamos el método de resolución

$\xrightarrow{2\ y\ 5} \{\neg append(LI_2, LD_2, L_2), \neg preorder(bin(nil, 2, nil), LI_2), \neg preorder(nil, LD_2)\}$
con S_6 = { $Lista_5$:= [uno|L_2] , I_2 := bin(nil,2,nil), R_2 := uno,D_2 := nil }
$\xrightarrow{2\ y\ 6} \{\neg append(LI_7, LD_7, L_7), \neg preorder(I_7, nil), \neg preorder(nil, LD_7), \neg append([dos|L_7], LD_2, L_2), \neg preorder(nil, LD_2)\}$
renombrando LI_2, LD_2 y L_2 en 2...
con S_7 = { LI_2 := [dos | L_7], I_2 := nil, R_2 := dos, D_2 := nil }
$\xrightarrow{7\ y\ 1} \{\neg append([\,], [\,], L_7), \neg append([dos|L_7], [\,], L_2)\}$
con S_8 = { LD_2 := [ ], LD_7 := [ ], LI_7 := [ ]}
$\xrightarrow{8\ y\ 4} \{\neg append(L_7, [\,], L_4), \neg append([\,], [\,], L_7)\}$
con S_9 = { YS_4 := [ ], L_2 := [dos | L_4], X_4 := dos, XS_4 := L_7 }
$\xrightarrow{9\ y\ 3} \{\}$ con S_10 = { YS_3 := [ ],L_7 := [ ], L_4 := [ ]}

Se trata de Resolución SLD ?

No es SLD, fue resolución general no binaria ya que unificamos más de una cláusula de un tiro. Si hubiésemos hecho binaria, hubiera sido SLD. Son todas de Horn y sabemos que si hay una resolución existe resolución SLD. Recordar que en la SLD la resolución es lineal, todas las cláusulas son de Horn y arrancamos por una **Objetivo**.

11 Ejercicio : 2do parcial 1C 2011

En este ejercicio usaremos el método de resolución para demostrar una propiedad de las relaciones binarias; a saber, que una relación no vacía no puede ser a la vez irreflexiva, simétrica y transitiva.

Para esto tomaremos una relación R y se demostrará que, si R satisface las tres propiedades mencionadas, entonces es vacía.

Dadas las siguientes definiciones:

1. R es irreflexiva: $\forall X. \neg R(X, X)$
2. R es simétrica: $\forall X. \forall Y. (R(X, Y) \Rightarrow R(Y, X))$
3. R es transitiva: $\forall X. \forall Y. \forall Z. ((R(X, Y) \wedge R(Y, Z)) \Rightarrow R(X, Z))$
4. R es vacía: $\forall X. \neg\exists Y. R(X, Y)$

Utilizando resolución, demostrar que sólo una relación vacía puede cumplir a la vez las propiedades 1 a 3. Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD (y justificar).

Pasaje a FNC 1

$$\forall X. \neg R(X, X)$$

Es directo,

$$\{\neg R(X, X)\}$$

Pasaje a FNC 2

$$\forall X.\forall Y.(R(X,Y) \implies R(Y,X))$$
$$\overset{\Rightarrow}{\rightarrow}^{e} \forall X.\forall Y.(\neg R(X,Y) \vee R(Y,X))$$

Que es su FNC es :

$$\{\neg R(X,Y), R(Y,X)\}$$

Pasaje a FNC 3

$$\forall X.\forall Y.\forall Z.(R(X,Y) \wedge R(Y,Z) \implies R(X,Z))$$
$$\overset{\Rightarrow}{\rightarrow}^{e} \forall X.\forall Y.\forall Z.(\neg(R(X,Y) \wedge R(Y,Z)) \vee R(X,Z))$$
$$\overset{\neg\wedge}{\rightarrow} \forall X.\forall Y.\forall Z.(\neg R(X,Y) \vee \neg R(Y,Z) \vee R(X,Z))$$

Que en su FNC es :

$$\{\neg R(X,Y), \neg R(Y,Z), R(X,Z)\}$$

Queremos demostrar...

$$\forall X.\, \neg \exists Y.\, R(X,Y)$$
$$\overset{\neg}{\rightarrow} \texttt{ la negamos } \neg(\forall X.\, \neg \exists Y.\, R(X,Y))$$
$$\overset{\neg\forall}{\rightarrow} \exists X.\, \neg\neg \exists Y.\, R(X,Y)$$
$$\overset{\neg\neg}{\rightarrow} \exists X.\, \exists Y.\, R(X,Y)$$
$$\overset{Skolem}{\rightarrow} \exists Y.\, R(a,Y)$$
$$\overset{Skolem}{\rightarrow} R(a,b)$$

Que en su FNC es :

$$\{R(a,b)\}$$

Renombramos y Numeramos

1. $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4. $\{R(a,b)\}$

Resolvemos

$$\overset{4\ \texttt{y}\ 2}{\rightarrow} \{R(b,a)\} \texttt{ con } S_5 = \{\ X_2 := \texttt{a},\ Y_2 := \texttt{b}\ \}$$
$$\overset{5\ \texttt{y}\ 3}{\rightarrow} \{\neg R(X_6,b), R(X_6,a)\} \texttt{ con } S_6 = \{\ Y_3 := \texttt{b},\ Z_3 := \texttt{a}\ \} \texttt{ renombramos } X_3 \texttt{ a } X_6$$
$$\overset{6\ \texttt{y}\ 4}{\rightarrow} \{R(a,a)\} \texttt{ con } S_7 = \{\ X_6 := \texttt{a}\ \}$$
$$\overset{7\ \texttt{y}\ 1}{\rightarrow} \{\} \texttt{ con } S_8 = \{\ X_1 := \texttt{a}\ \}$$

Es SLD?

Es resolución general, no es SLD ya que no siempre estamos resolviendo una Objetivo con una de Definición .

Otra forma (cambiando el objetivo) SLD

$\overset{1 \text{ y } 3}{\rightarrow} \{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\}$ con S_5 = { X_3 := X_1, Z_3 := X_1}

$\overset{5 \text{ y } 4}{\rightarrow} \{\neg R(b, a)\}$ con S_6 = { X_1 := a, Y_3 := b}

$\overset{6 \text{ y } 2}{\rightarrow} \{\neg R(a, b)\}$ con S_7 = { X_2 := a, Y_2 := b}

$\overset{7 \text{ y } 4}{\rightarrow} \{\}$

No es la única...

$\overset{1 \text{ y } 3}{\rightarrow} \{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\}$ con S_5 = { X_3 := X_1, Z_3 := X_1}

$\overset{5 \text{ y } 2}{\rightarrow} \{\neg R(X_2, Y_2)\}$ con S_6 = { X_1 := X_2, Y_3 := Y_2}

$\overset{6 \text{ y } 4}{\rightarrow} \{\}$ con S_7 = { X_2 := a, Y_2 := b}