# Práctica 5 : Inferencia de Tipos

Tomás Felipe Melli

June 4, 2025

## Índice

# 1 Ejercicios

Gramáticas a tener en cuenta :

- Términos **anotados**

  $$M ::= x \mid \lambda x : \sigma.\, M \mid M\ M \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \mid \text{zero} \mid \text{succ}(M) \mid \text{pred}(M) \mid \text{isZero}(M) \mid \mu x : \sigma.\, M$$

  Donde la letra $x$ representa un nombre de variable arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado:

  $$X = \{w, w_1, w_2, \ldots, x, x_1, x_2, \ldots, y, y_1, y_2, \ldots, f, f_1, f_2, \ldots\}$$

- Términos **sin anotaciones**

  $$U ::= x \mid \lambda x.\, U \mid U\ U \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } U \text{ then } U \text{ else } U \mid \text{zero} \mid \text{succ}(U) \mid \text{pred}(U) \mid \text{isZero}(U) \mid \mu x.\, U$$

- Tipos

  $$\tau ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \tau \to \tau \mid X_n$$

  Donde $n$ es un número natural, de tal modo que $X_n$ representa una variable de tipo arbitraria tomada de un conjunto:

  $$T = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$$

  **Nota:** también podemos referirnos a las variables de tipo como *incógnitas*.

## 1.1 Ejercicio 1

1. $\lambda x : Bool.succ(x)$ esta expresión es válida sintácticamente y corresponde a `Términos anotados`
2. $\lambda x.isZero(x)$ esta expresión es válida en la gramática de `Términos sin anotaciones`
3. $X_1 \to \sigma$ es una expresión válida y corresponde a la grmática de `Tipos`
4. `erase(f y)`
5. $X_1$ es una variable de tipo (incógnita en este caso) que sintácticamente está bien formada y corresponde a `Tipos`
6. $X_1 \to (Bool \to X_2)$ tenemos este término que se corresponde a la gramática de `Tipos` compuesto por dos incógnitas.
7. $\lambda x : X_1 \to X_2.if\ zero\ then\ True\ else\ zero\ succ(True)$ no es una expresión válida. Es evidente que falla dado que $succ(True)$ no es válido
8. `erase(`$\lambda f : Bool \to$ `s.`$\lambda y : Bool.f\ \ y$`)`

## 1.2 Ejericio 2

Tenemos que aplicar la sustitución $S$ al término. O sea, el resultado de $S(..algo..)$

1. Sea $S = \{X_1 := Nat\}$

   $$\begin{aligned} & S(\{x : X_1 \to Bool\}) \\ \overset{\{X_1\}}{=} & \{x : Nat \to Bool\} \end{aligned}$$

2. Sea $S = \{X_1 := X_2 \to X_3, X_4 := Bool\}$

   $$\begin{aligned} & S(\{x : X_4 \to Bool\}) \vdash S(\lambda x : X_1 \to Bool.x) : S(Nat \to X_2) \\ \overset{\{X_4\}}{=} & \{x : Bool \to Bool\} \vdash S(\lambda x : X_1 \to Bool.x) : S(Nat \to X_2) \\ \overset{\{X_1\}}{=} & \{x : Bool \to Bool\} \vdash \lambda x : X_2 \to X_3 \to Bool.x : S(Nat \to X_2) \\ \overset{\{no\ hay\ reemplazo\}}{=} & \{x : Bool \to Bool\} \vdash \lambda x : X_2 \to X_3 \to Bool.x : Nat \to X_2 \end{aligned}$$

## 1.3 Ejercicio 3

Elegimos los pares de tipos que unifican entre sí. Por cada uno, mostramos el *mgu*

- Primero presentamos el par que consideramos que podría unificar : (nombramos $E$ al conjunto finito de ecuaciones) $E = \{X_1 \overset{?}{=} Nat\}$. Luego presentamos el **unificador** (es decir, la sustitución que hace valer la igualdad) $S = \{X_1 := Nat\}$

- $$E = \{X_1 \to X_2 \overset{?}{=} Nat \to Bool\}$$
  $$S = \{X_1 := Nat, X_2 := Bool\}$$

- $$E = \{X_2 \to Bool \overset{?}{=} Nat \to Bool\}$$
  $$S = \{X_2 := Nat\}$$

- $$E = \{X_3 \to X_4 \to X_5 \overset{?}{=} Nat \to X_2 \to Bool\}$$
  $$S = \{X_3 := Nat, X_4 := X_2, X_5 := Bool\}$$

## 1.4 Ejercicio 4

Utilizar el **Algoritmo de inferencia** para decidir cuáles son tipables.

1. $U = \lambda z.if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)$

   (a) Paso I : Rectificación. $z$ es la única variable ligada y no hay otra variable (ni libre ni ligada). Concluimos que el término está **rectificado**.

   (b) Paso II : Anotación. Agregamos un **contexto a las variables libres** y un **término anotado**. Como no hay variables libres,agregamos el **contexto vacío**, pero sí **anotamos una incógnita a** $z$.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \lambda z : X_1.if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)$$

   Recordar que $U = \texttt{erase}(M_0)$ debe valer.

   (c) Paso III : Restricciones.

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda z : X_1.if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero) = (X_1 \to Nat \mid E)$$

   $$\mathcal{I}(z : X_1 \mid if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)) = (Nat \mid \{X_1 \overset{?}{=} Bool,\ Nat \overset{?}{=} Nat\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset)$$

   $$\mathcal{I}(z : X_1 \mid z) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(z : X_1 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(z : X_1 \mid succ(zero)) = (Nat \mid \{Nat \overset{?}{=} Nat\} \cup \emptyset)$$

   $$\mathcal{I}(z : X_1 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset)$$

   (d) Paso IV: Unificación.

   `entrada` $:\{Nat \overset{?}{=} Nat, Nat \overset{?}{=} Nat, X_1 \overset{?}{=} Bool\}$

   `elim triv` $:\{X_1 \overset{?}{=} Bool\}$

   `elim var` $:\emptyset$ `con S1 = { X:= Bool}`

   Concluimos que el unificador es :

   $$S = \{X_1 := Bool\}$$

Con ello, el término $U$ es tipable y vale el siguiente juicio:

$$\begin{aligned}&S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to Nat)\\ &\quad \equiv \emptyset \vdash S(\lambda z : Bool.if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero)) : S(Bool \to Nat)\end{aligned}$$

2. $U = \lambda y.succ((\lambda x.x)y)$

   (a) Paso I: Rectificación. Tenemos sólo dos variables, ambas ligadas $x$ e $y$. Tienen distintos nombres. Concluimos que el término está rectificado.

   (b) Paso II : Anotación. Como no hay variables libres, el contexto es vacío. Anotamos a las ligadas

   $$\begin{aligned}\Gamma_0 =& \emptyset\\ M_0 =& \lambda y : X_1.succ((\lambda x : X_2.x)y)\end{aligned}$$

   (c) Paso III : Restricciones.

   $$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda y : X_1.succ((\lambda x : X_2.x)y)) = (X_1 \to Nat \mid E)}$$

   $$\boxed{\mathcal{I}(y : X_1 \mid succ((\lambda x : X_2.x)y)) = (Nat \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat\} \cup \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\})}$$

   $$\boxed{\mathcal{I}(y : X_1 \mid (\lambda x : X_2.x)\ y) = (X_3 \mid \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\} \cup \emptyset \cup \emptyset)}$$

   $$\boxed{\mathcal{I}(y : X_1 \mid \lambda x : X_2.x) = (X_2 \to X_2 \mid \emptyset)} \qquad \boxed{\mathcal{I}(y : X_1 \mid y) = (X_1 \mid \emptyset)}$$

   $$\boxed{\mathcal{I}(y : X_1,\, x : X_2 \mid x) = (X_2 \mid \emptyset)}$$

   (d) Paso IV : Unificación.

   $$\begin{aligned}\texttt{entrada}\ :& \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\}\\ \texttt{decompose}\ :& \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat, X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\}\\ \texttt{elim var}\ :& \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\} \quad \texttt{con S1 = \{}\ X_3 := Nat\}\\ \texttt{elim var}\ :& \{Nat \stackrel{?}{=} X_1\} \quad \texttt{con S2 = \{}\ X_2 := Nat\}\\ \texttt{elim var}\ :& \emptyset \quad \texttt{con S3 = \{}\ X_1 := Nat\}\end{aligned}$$

   Con esto, el unificador más general es :

   $$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat, X_2 := Nat, X_3 := Nat\}$$

   Por tanto, existe $U$ tipable y por ello vale el siguiente juicio:

   $$\begin{aligned}&S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to Nat)\\ &\quad \equiv \emptyset \vdash S(\lambda y : Nat.succ((\lambda x : X_2.x)y)) : S(Nat \to Nat)\end{aligned}$$

3. $U = \lambda x.if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x)$

   (a) Paso I : Rectificación . Tenemos una sola variable en el término, $x$ y está ligada. El término está rectificado

   (b) Paso II : Anotación. Tenemos contexto vacío y anotamos la ligada

   $$\begin{aligned}\Gamma_0 =& \emptyset\\ M_0 =& \lambda x{:}\ X_1.if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x)\end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones.

- $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x)) = (X_1 \to X_1 \mid E)$
  - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid if\ isZero(x)\ then\ x\ else(if\ x\ then\ x\ else\ x)) = (X_1 \mid \{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\})$
    - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid isZero(x)) = (Bool \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$
      - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid x)) = (X_1 \mid \emptyset)$
    - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$
    - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid if\ x\ then\ x\ else\ x) = (X_1 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset)$
      - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$
      - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$
      - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$

(d) Paso IV : Unificación

`entrada` : $\{Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1, X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_1 \stackrel{?}{=} X_1\}$

`elim triv` : $\{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, X_1 \stackrel{?}{=} Bool\}$

`colisión` : **falla**

Concluimos que $U$ no es tipable.

4. $U = \lambda x.\lambda y.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)$

(a) Paso I : Rectificación. El término tiene dos variables solamente, ambas ligadas y con nombres diferentes.

(b) Paso II : Anotación.

$\Gamma_0 = \emptyset$

$M_0 = \lambda x{:}\ X_1.\lambda y{:}\ X_2.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)$

(c) Paso III : Restricciones

- $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)) = (X_1 \to X_2 \to X_2 \mid E)$
  - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)) = (X_2 \to X_2 \mid E)$
    - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2 \mid if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)) = (X_2 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool,\ X_2 \stackrel{?}{=} Nat\})$
      - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$
      - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)$
      - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2 \mid succ(zero)) = (Nat \mid \{Nat \stackrel{?}{=} Nat\})$
        - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset)$

Queremos ahora buscar el **mgu**

`entrada` : $\{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} Nat\}$

`elim triv`: $\{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$

`elim var`: $\{X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$ `con S1 = {` $X_1$ `:= Bool}`

`elim var`: $\emptyset$ `con S2 = {` $X_2$ `:= Nat}`

Podemos concluir que el unificador es :

$S = S_2 \circ S_1 = \{X_2 := Nat, X_1 := Bool\}$

Existe $U$ tipable y por tanto vale el siguiente juicio :

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_2 \to \sigma)$$
$$\equiv \emptyset \vdash S(\lambda x Bool.\lambda y : Nat.if\ x\ then\ y\ else\ succ(zero)) : S(Bool \to Nat \to Nat)$$

5. $U = if\ True\ then\ (\lambda x.zero)zero\ else\ (\lambda x.zero)False$

   (a) Paso I : Rectificación. Hay dos variables en este término, ambas ligadas con el mismo nombre. Las $\alpha-$*renombramos* para rectificarlo. $U = if\ True\ then\ (\lambda x.zero)zero\ else\ (\lambda y.zero)False$

   (b) Paso II: Anotación.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = if\ True\ then\ (\lambda x{:}\ X_1.zero)zero\ else\ (\lambda y{:}\ X_2.zero)False$$

   (c) Paso III: Restricciones

   - $\mathcal{I}(\emptyset \mid if\ True\ then\ (\lambda x : X_1.zero)zero\ else\ (\lambda y : X_2.zero)False) = (\tau_1 \mid \{Bool \overset{?}{=} Bool,\ \tau_1 \overset{?}{=} \tau_2\})$
     - $\mathcal{I}(\emptyset \mid True) = (Bool \mid \emptyset)$
     - $\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda x : X_1.zero)zero) = (\tau_1 \mid \{(X_1 \to Nat) \overset{?}{=} (Nat \to \tau_1)\})$
       - $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.zero) = (X_1 \to Nat \mid \emptyset)$
         - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset)$
       - $\mathcal{I}(\emptyset \mid zero) = (Nat \mid \emptyset))$
     - $\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda y : X_2.zero)False) = (\tau_2 \mid \{(X_2 \to Nat) \overset{?}{=} (Bool \to \tau_1)\})$
       - $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda y : X_2.zero) = (X_2 \to Nat \mid \emptyset)$
         - $\mathcal{I}(y : X_2 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset))$
       - $\mathcal{I}(\emptyset \mid False) = (Bool \mid \emptyset))$

   Con esto dicho, queremos el **mgu**

   $$\texttt{entrada} : \{Bool \overset{?}{=} Bool, \tau_1 \overset{?}{=} \tau_2, X_1 \to Nat \overset{?}{=} Nat \to \tau_1, X_2 \to Nat \overset{?}{=} Bool \to \tau_1\}$$
   $$\texttt{elim triv} : \{\tau_1 \overset{?}{=} \tau_2, X_1 \to Nat \overset{?}{=} Nat \to \tau_1, X_2 \to Nat \overset{?}{=} Bool \to \tau_1\}$$
   $$\texttt{decompose} : \{\tau_1 \overset{?}{=} \tau_2, X_1 \overset{?}{=} Nat, Nat \overset{?}{=} \tau_1, X_2 \overset{?}{=} Bool, Nat \overset{?}{=} \tau_1\}$$
   $$\texttt{elim var} : \{Nat \overset{?}{=} \tau_2, X_1 \overset{?}{=} Nat, X_2 \overset{?}{=} Bool\}\ \texttt{con S1 =}\ \{\tau_1 := Nat\}$$
   $$\texttt{elim var} : \{X_1 \overset{?}{=} Nat, X_2 \overset{?}{=} Bool\}\ \texttt{con S2 =}\ \{\ \tau_2 := Nat\}$$
   $$\texttt{elim var} : \{X_2 \overset{?}{=} Bool\}\ \texttt{con S3 =}\ \{\ X_1 = Nat\}$$
   $$\texttt{elim var} : \emptyset\ \texttt{con S4 =}\ \{\ X_2 := Bool\ \}$$

   Concluimos entonces que el **mgu** es :

   $$S = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_2 := Bool, X_1 = Nat, \tau_2 := Nat, \tau_1 := Nat\}$$

   Y por ello, $U$ es tipable y vale el siguiente juicio:

   $$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(\tau_1)$$
   $$\equiv \emptyset \vdash S(if\ True\ then\ (\lambda x : Nat.zero)zero\ else\ (\lambda y : Bool.zero)False) : S(Nat)$$

6. $U = (\lambda f.if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False)\ (\lambda x.zero)$

   (a) Paso I : Rectificación. Tenemos dos variables, ambas ligadas y con distinto nombre. Está rectificado.

   (b) Paso II: Anotación. No hay variables entonces el contexto es vacío, pero tenemos que anotar $f$ y $x$

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = (\lambda f : X_1.if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False)\ (\lambda x : X_2.zero)$$

   (c) Paso III : Restricciones

   - $\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda f : X_1.if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False)\ (\lambda x : X_2.zero)) = (X_5 \mid \{X_1 \to X_3 \overset{?}{=} X_2 \to Nat \to X_5\} \cup E)$
     - $\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda f : X_1.if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False) = (X_1 \to X_3 \mid E)$
       - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid if\ True\ then\ f\ zero\ else\ f\ False) = (X_3 \mid \{Bool \overset{?}{=} Bool,\ X_3 \overset{?}{=} X_4\} \cup \{X_1 \overset{?}{=} Nat \to X_3\} \cup \{X_1 \overset{?}{=} Bool \to X_4\}$
         - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid True) = (Bool \mid \emptyset)$
         - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid f\ zero) = (X_3 \mid \{X_1 \overset{?}{=} Nat \to X_3 \cup \emptyset \cup \emptyset\})$
           - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset)$
           - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset)$
         - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid f\ False) = (X_4 \mid \{X_1 \overset{?}{=} Bool \to X_4 \cup \emptyset \cup \emptyset\})$
           - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset)$
           - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid False) = (Bool \mid \emptyset)$
     - $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_2.zero) = (X_2 \to Nat \mid \emptyset)$
       - $\mathcal{I}(x : X_2 \mid zero) = (Nat \mid \emptyset)$

(d) Paso IV : Unificación

$$
\begin{aligned}
\texttt{entrada } &: \{Bool \overset{?}{=} Bool, X_3 \overset{?}{=} X_4, X_1 \overset{?}{=} Nat \to X_3, X_1 \overset{?}{=} Bool \to X_4, X_1 \to X_3 \overset{?}{=} X_2 \to Nat \to X_5\} \\
\texttt{elim triv } &: \{X_3 \overset{?}{=} X_4, X_1 \overset{?}{=} Nat \to X_3, X_1 \overset{?}{=} Bool \to X_4, X_1 \to X_3 \overset{?}{=} X_2 \to Nat \to X_5\} \\
\texttt{colisión } &: \textbf{falla}
\end{aligned}
$$

No existe $U$ tipable.

7. $U = \lambda x.\lambda y.\lambda z.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)$

(a) Paso I: Rectificación. El término tiene 3 variables ambas tres ligadas y de distinto nombre. Por tanto, está rectificado.

(b) Paso II : Anotación. No tiene variables libres y por tanto tenemos contexto vacío.

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 =& \emptyset \\
M_0 =& \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.\lambda z : X_3.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)
\end{aligned}
$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.\lambda z : X_3.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) = (X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_2 \mid E)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.\lambda z : X_3.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) = (X_2 \to X_3 \to X_2 \mid E)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2 \mid \lambda z : X_3.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) = (X_3 \to X_2 \mid E)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) = (X_2 \mid \{X_3 \overset{?}{=} Bool,\ X_2 \overset{?}{=} Nat\} \cup \{X_1 \overset{?}{=} Nat\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid z) = (X_3 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid succ(x)) = (Nat \mid \{X_1 \overset{?}{=} Nat\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación.

$$
\begin{aligned}
\texttt{entrada } &: \{X_3 \overset{?}{=} Bool,\ X_2 \overset{?}{=} Nat, X_1 \overset{?}{=} Nat\} \\
\texttt{elim var } &: \{X_2 \overset{?}{=} Nat, X_1 \overset{?}{=} Nat\}\ \texttt{con S1 = }\{\ X_3 := Bool\} \\
\texttt{elim var } &: \{X_1 \overset{?}{=} Nat\}\ \texttt{con S2 = }\{\ X_2 := Nat\} \\
\texttt{elim var } &: \emptyset\ \texttt{con S3 = }\{\ X_1 := Nat\}
\end{aligned}
$$

Con esto dicho, el **mgu** es:

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_1 := Nat, X_2 := Nat, X_3 := Bool\}$$

Por tanto, $U$ es tipable y vale el siguiente juicio:

$$
\begin{aligned}
&S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_2) \\
&\quad \equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : Nat.\lambda y : Nat.\lambda z : Bool.if\ z\ then\ y\ else\ succ(x)) : S(Nat \to Nat \to Bool \to Nat)
\end{aligned}
$$

## 1.5 Ejercicio 5

1. $U = \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ z\ x\ y\ z$

(a) Paso I : Rectificación. El término está rectificado, ya que cada variable ligada cuenta con nombre distinto de las demás.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$
$$M_0 = \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.\lambda z : X_3.\ z\ x\ y\ z$$

(c) Paso III : Restricciones

- $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.\lambda z : X_3.\ z\ x\ y\ z) = (X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_6 \mid E)$
  - $\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.\lambda z : X_3.\ z\ x\ y\ z) = (X_2 \to X_3 \to X_6 \mid E)$
    - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2 \mid \lambda z : X_3.\ z\ x\ y\ z) = (X_3 \to X_6 \mid E)$
      - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid ((z\ x)\ y)\ z) = (X_6 \mid \{X_5 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_6\} \cup \{X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \to X_5)\} \cup \{X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_4)\})$
        - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid (z\ x)\ y) = (X_5 \mid \{X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \to X_5)\} \cup \{X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_4)\})$
          - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid z\ x) = (X_4 \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_4)\})$
            - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid z) = (X_3 \mid \emptyset)$
            - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$
          - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)$
        - $\mathcal{I}(x : X_1,\ y : X_2,\ z : X_3 \mid z) = (X_3 \mid \emptyset)$

(d) Paso IV : Unificación.

$$
\begin{aligned}
\texttt{entrada } &: \{X_5 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_6, X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \to X_5), X_3 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_4)\} \\
\texttt{elim var } &: \{X_5 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_4 \to X_6, X_4 \stackrel{?}{=} (X_2 \to X_5)\} \\
\texttt{elim var } &: \{X_4 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_1 \to X_4 \to X_6\} \\
\texttt{occurs check } &: \textbf{falla}
\end{aligned}
$$

2. $U = \lambda x.\ x\ (w\ (\lambda y.\ w\ y))$

(a) Paso I : Rectificación. Tenemos dos variables ligadas con nombres diferentes y una libre que también difiere en nombre, por tanto, $U$ está rectificado.

(b) Paso II : Anotación

$$\Gamma_0 = w : X_1$$
$$M_0 = \lambda x : X_2.\ x\ (w\ (\lambda y : X_3.\ w\ y))$$

(c) Paso III : Restricciones

- $\mathcal{I}(w : X_1 \mid \lambda x : X_2.\ x\ (w\ (\lambda y : X_3.\ w\ y))) = (X_2 \to X_6 \mid E)$
  - $\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid\ x\ (w\ (\lambda y : X_3.\ w\ y))) = (X_6 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} X_5 \to X_6\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4 \to X_5\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\})$
    - $\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid\ x) = (X_2 \mid \emptyset)$
    - $\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid w\ (\lambda y : X_3.\ w\ y)) = (X_5 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4 \to X_5\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\})$
      - $\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid w) = (X_1 \mid \emptyset)$
      - $\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2 \mid \lambda y : X_3.\ w\ y) = (X_3 \to X_4 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\})$
        - $\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2,\ y : X_3 \mid\ w\ y) = (X_4 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\})$
          - $\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2,\ y : X_3 \mid\ w) = (X_1 \mid \emptyset)$
          - $\mathcal{I}(w : X_1,\ x : X_2,\ y : X_3 \mid y) = (X_3 \mid \emptyset)$

(d) Paso IV : Unificación

$$\texttt{entrada} : \{X_2 \stackrel{?}{=} X_5 \to X_6, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4 \to X_5, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4\}$$
$$\texttt{colisión} : \textbf{falla}$$

3. $U = \lambda x.\lambda y.xy$

   (a) Paso I : Rectificación. Está rectificado ambas variables son ligadas y tienen distinto nombre.

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.xy$$

   (c) Paso III : Restricciones

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.xy) = (X_1 \to X_2 \to X_3 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.xy) = (X_2 \to X_3 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid xy) = (X_3 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)$$

   (d) Paso IV : Unificación

   $$\texttt{entrada} : \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\}$$
   $$\texttt{elim var} : \emptyset \quad \texttt{con S1 =} \{X_1 := X_2 \to X_3\}$$

   Con esto, el mgu es :

   $$S = S1 = \{X_1 := X_2 \to X_3\}$$

   Decimos que $U$ es tipable y vale :

   $$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_2 \to X_3)$$
   $$\equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : X_2 \to X_3.\lambda y : X_2.xy) : S(X_2 \to X_3 \to X_2 \to X_3)$$

4. $U = \lambda x.\lambda y.yx$

   (a) Paso I : Rectificación. Está rectificado ambas variables son ligadas y tienen distinto nombre.

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.yx$$

   (c) Paso III : Restricciones

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.\lambda y : X_2.yx) = (X_1 \to X_2 \to X_3 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_3\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.yx) = (X_2 \to X_3 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_3\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid yx) = (X_3 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_3\})$$
   $$\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

$$\texttt{entrada :} \quad \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_3\}$$
$$\texttt{elim var :} \quad \emptyset \quad \texttt{con S1 =} \{X_2 := X_1 \to X_3\}$$

Con esto, el mgu es :

$$S = S1 = \{X_2 := X_1 \to X_3\}$$

Decimos que $U$ es tipable y vale :

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_2 \to X_3)$$
$$\equiv \emptyset \vdash S(\lambda x : X_1.\lambda y : X_1 \to X_3.xy) : S(X_1 \to X_1 \to X_3 \to X_3)$$

5. $U = \lambda x.(\lambda x.x)$

(a) Paso I : Rectificación. El término no está rectificado. Tenemos que $\alpha - renombrar$ porque tenemos dos variables ligadas con el mismo nombre:

$$\lambda x.(\lambda y.y)$$

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$
$$M_0 = \lambda x : X_1.(\lambda y : X_2.y)$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.(\lambda y : X_2.y)) = (X_1 \to X_2 \to X_2 \mid \emptyset)}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1 \mid \lambda y : X_2.y) = (X_2 \to X_2 \mid \emptyset)}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)}$$

(d) Paso IV : Unificación.
Ni idea

6. $U = \lambda x.(\lambda y.y)\ x$

(a) Paso I : Rectificación. Todo en regla

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$
$$M_0 = \lambda x : X_1.(\lambda y : X_2.y)\ x$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_1.(\lambda y : X_2.y)\ x) = (X_1 \to X_3 \mid \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\})}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1 \mid (\lambda y : X_2.y)\ x) = (X_3 \mid \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\})}$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1 \mid (\lambda y : X_2.y)) = (X_2 \to X_2 \mid \emptyset)} \qquad \boxed{\mathcal{I}(x : X_1 \mid x) = (X_1 \mid \emptyset)}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\mathcal{I}(x : X_1, y : X_2 \mid y) = (X_2 \mid \emptyset)}$$

(d) Paso IV : Unificación.

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_3)\} \\
\texttt{decompose} &: \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\} \\
\texttt{elim var} &: \{X_2 \stackrel{?}{=} X_2, X_2 \stackrel{?}{=} X_3\} \texttt{ con S1 = } \{X_1 := X_2\} \\
\texttt{elim triv} &: \{X_2 \stackrel{?}{=} X_3\} \\
\texttt{elim var} &: \{X_3 \stackrel{?}{=} X_3\} \texttt{ con S2 = } \{X_2 := X_3\} \\
\texttt{elim triv} &: \emptyset
\end{aligned}$$

Con esto, el **mgu**

$$S = S_2 \circ S_1 = \{X_1 := X_2, X_2 := X_3\}$$

Por tanto, $U$ es tipable y vale el juicio

$$\begin{aligned}
&S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_1 \to X_3) \\
&\equiv \emptyset \vdash S(\lambda x :?.(\lambda y :?.y)\ x) : S(??)
\end{aligned}$$

7. $U = (\lambda z \lambda x.x\ (z\ (\lambda y.z)))\ \mathit{True}$

(a) Paso I : Rectificación. Está rectificado.

(b) Paso II : Anotación.

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \emptyset \\
M_0 &= (\lambda z : X_1 \lambda x : X_2.x\ (z\ (\lambda y : X_3.z)))\ \mathit{True}
\end{aligned}$$

(c) Paso III : Restricciones

$$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda z : X_1 \lambda x : X_2.x\ (z\ (\lambda y : X_3.z)))\ \mathit{True}) = (X_6 \mid \{X_1 \to X_2 \to X_5 \stackrel{?}{=} \mathit{Bool} \to X_6\} \cup E)}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda z : X_1 \lambda x : X_2.x\ (z\ (\lambda y : X_3.z))) = (X_1 \to X_2 \to X_5 \mid E)} \qquad \boxed{\mathcal{I}(\emptyset \mid \mathit{True}) = (\mathit{Bool} \mid \emptyset)}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(z : X_1 \mid \lambda x : X_2.x\ (z\ (\lambda y : X_3.z))) = (X_2 \to X_5 \mid E)}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(z : X_1, x : X_2 \mid x\ (z\ (\lambda y : X_3.z))) = (X_5 \mid \{X_2 \stackrel{?}{=} X_4 \to X_5\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_1 \to X_4\})}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(z : X_1, x : X_2 \mid x) = (X_2 \mid \emptyset)} \qquad \boxed{\mathcal{I}(z : X_1, x : X_2 \mid z\ (\lambda y : X_3.z)) = (X_4 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_1 \to X_4\})}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(z : X_1, x : X_2 \mid z) = (X_1 \mid \emptyset)} \qquad \boxed{\mathcal{I}(z : X_1, x : X_2 \mid \lambda y : X_3.z) = (X_3 \to X_1 \mid \emptyset)}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(z : X_1, x : X_2, y : X_3 \mid z) = (X_1 \mid \emptyset)}$$

(d) Paso IV : Unificación

$$\begin{aligned}
\texttt{entrada} &: \{X_1 \to X_2 \to X_5 \stackrel{?}{=} \mathit{Bool} \to X_6, X_2 \stackrel{?}{=} X_4 \to X_5, X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_1 \to X_4\} \\
\texttt{occurs check} &: \textbf{falla}
\end{aligned}$$

## 1.6 Ejercicio 8

Tener en cuenta el tipo de los pares definido como:c$\tau ::= \cdots \mid \tau \times \tau$ Con expresiones nuevas definidas como: $M ::= \cdots \mid \langle M, M\rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$

Y las siguientes reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \tau \times \sigma}\text{(T-Pair)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \tau}\text{(T-Proj1)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \sigma}\text{(T-Proj2)}$$

Se extiende el algoritmo $I$ con las siguientes reglas:

$$I(\Gamma \mid \langle M_1, M_2\rangle) = (\tau \times \sigma \mid E_1 \cup E_2)$$

donde:

$$I(\Gamma \mid M_1) = (\tau \mid E_1) \quad \text{e} \quad I(\Gamma \mid M_2) = (\sigma \mid E_2)$$

$$I(\Gamma \mid \pi_1(M)) = (\sigma \mid \{\tau = \sigma \times \rho\} \cup E) \quad \text{donde } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$I(\Gamma \mid \pi_2(M)) = (\rho \mid \{\tau = \sigma \times \rho\} \cup E) \quad \text{donde } I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

1. Tipar la expresión: $(\lambda f.\langle f, 2\rangle)(\lambda x.x\,1)$ utilizando la versión extendida del algoritmo.
2. Intentar tipar la siguiente expresión utilizando la versión extendida del algoritmo:$(\lambda f.\langle f\,2, f\,\text{True}\rangle)(\lambda x.x)$ Mostrar en qué punto la inferencia falla y por qué motivo.

### 1.6.1 1

$U = \lambda f.\langle f, \underline{2}\rangle)(\lambda x.x\ \underline{1})$

1. Paso I : Rectificación. Todo bien.
2. Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$
$$M_0 = \lambda f : X_1.\langle f, \underline{2}\rangle)(\lambda x : X_2.x\ \underline{1})$$

3. Paso III : Restricciones

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda f : X_1.\langle f,\underline{2}\rangle)(\lambda x : X_2.x\ \underline{1})) = (X_4 \mid \{X_1 \to X_1 \times Nat \overset{?}{=} X_2 \to X_3 \to X_4\} \cup \{X_2 \overset{?}{=} Nat \to X_3\})$$

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda f : X_1.\langle f,\underline{2}\rangle) = (X_1 \to X_1 \times Nat \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid \langle f,\underline{2}\rangle) = (X_1 \times Nat \mid \emptyset \cup \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(f : X_1 \mid \underline{2}) = (Nat \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_2.x\ \underline{1}) = (X_2 \to X_3 \mid \{X_2 \overset{?}{=} Nat \to X_3\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_2 \mid x\ \underline{1}) = (X_3 \mid \{X_2 \overset{?}{=} Nat \to X_3\})$$

$$\mathcal{I}(x : X_2 \mid x) = (X_2 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_2 \mid \underline{1}) = (Nat \mid \emptyset)$$

4. Paso IV : Unificación.

   `entrada` $:\{X_1 \to X_1 \times Nat \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3 \to X_4, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})$

   `decompose` $:\{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3, X_1 \times Nat \stackrel{?}{=} X_4, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})$

   `elim var` $:\{X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3, X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})$ `con S1 = {` $X_4 := X_1 \times Nat\}$

   `elim var` $:\{X_2 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})$ `con S2 =` $\{X_1 := X_2 \to X_3\}$

   `elim var` $:\emptyset$ `con S3 =` $\{X_2 := Nat \to X_3\}$

   Con esto el **mgu** es

   $$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_4 := X_1 \times Nat, X_1 := X_2 \to X_3, X_2 := Nat \to X_3\}$$

   Y por tanto, $U$ es tipable y valeel siguiente juicio

   $$\begin{aligned} &S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(X_4) \\ &\quad \equiv \emptyset \vdash S((\lambda f : X_2 \to X_3.\langle f, \underline{2}\rangle)(\lambda x : Nat \to X_3.x\ \underline{1})) : S(X_1 \times Nat) \end{aligned}$$

### 1.6.2 2

$U = (\lambda f.\langle f\,2, f\,\text{True}\rangle)(\lambda x.x)$

1. Paso I : Rectificación. Todo en regla.

2. Paso II : Anotación.

   $$\begin{aligned} &\Gamma_0 = \emptyset \\ &M_0 = (\lambda f : X_1.\langle f\,2, f\,\text{True}\rangle)(\lambda x : X_2.x) \end{aligned}$$

3. Paso III : Restricciones

   - $\mathcal{I}(\emptyset \mid (\lambda f : X_1.\langle f\,\underline{2}, f\,\text{True}\rangle)(\lambda x : X_2.x)) = (X_6 \mid \{X_1 \to X_5 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_2 \to X_6\} \cup E)$
     - $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda f : X_1.\langle f\,\underline{2}, f\,\text{True}\rangle) = (X_1 \to X_5 \mid E)$
       - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid \langle f\,\underline{2}, f\,\text{True}\rangle) = (X_5 \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} X_4 \to X_5\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4\})$
         - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid f\,\underline{2}) = (X_3 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3\})$
           - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset)$
           - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid \underline{2}) = (Nat \mid \emptyset)$
         - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid f\,\text{True}) = (X_4 \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4\})$
           - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid f) = (X_1 \mid \emptyset)$
           - $\mathcal{I}(f : X_1 \mid \text{True}) = (Bool \mid \emptyset)$
     - $\mathcal{I}(\emptyset \mid \lambda x : X_2.x) = (X_2 \to X_2 \mid \emptyset)$
       - $\mathcal{I}(x : X_2 \mid x) = (X_2 \mid \emptyset)$

4. Paso IV : Unificación

   `entrada` $:\{X_1 \to X_5 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_2 \to X_6, X_3 \stackrel{?}{=} X_4 \to X_5, X_1 \stackrel{?}{=} Nat \to X_3, X_1 \stackrel{?}{=} Bool \to X_4\}$

   `colision` : **falla**

## 1.7 Ejercicio 9

Se extienden el Cálculo Lambda y el algoritmo de inferencia para soportar uniones disjuntas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\tau ::= \ldots \mid \tau + \tau \\ &M ::= \ldots \mid \text{left}_\tau(M) \mid \text{right}_\tau(M) \mid \text{case } M \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M \;[\!]\; \text{right}(y) \rightsquigarrow M \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{left}_\sigma(M)) = (\tau + \sigma \mid E)$$
$$donde : I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$
$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{right}_\sigma(M)) = (\sigma + \tau \mid E)$$
$$donde : I(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{case } M_1 \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M_2 \; [\![ \; \text{right}(y) \rightsquigarrow M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} X_x + X_y, \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

donde:

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$$
$$\mathcal{I}(\Gamma, x : X_x \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$$
$$\mathcal{I}(\Gamma, y : X_y \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$$
$$X_x \; y \; X_y \; \texttt{son variables frescas}$$

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

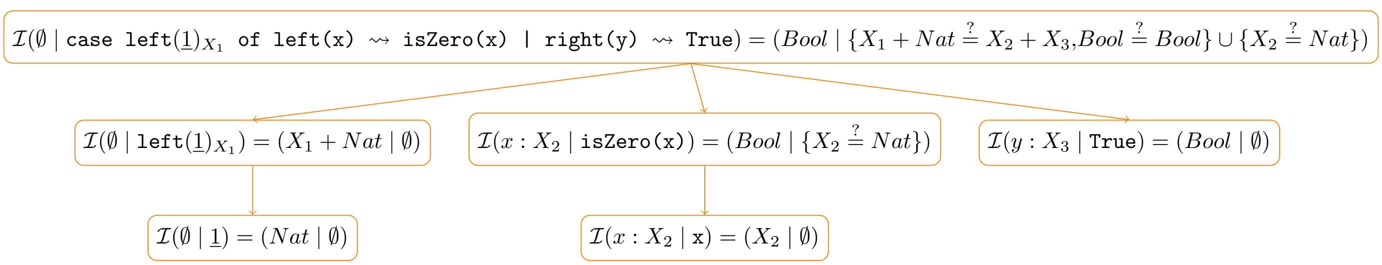
1. `case left(`$\underline{1}$`) of left(x)` $\rightsquigarrow$ `isZero(x) | right(y)` $\rightsquigarrow$ `True`

   (a) Paso I : Rectificación. Está todo bien

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \texttt{case left}(\underline{1})_{X_1} \texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{True}$$

   (c) Paso III : Restricciones




   (d) Paso IV : Unificación

   $$\texttt{entrada} : \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_2 + X_3, Bool \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$$
   $$\texttt{elim triv} : \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_2 + X_3, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\}$$
   $$\texttt{elim var} : \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} Nat + X_3\} \texttt{ con S1 = } \{X_2 := Nat\}$$
   $$\texttt{decompose} : \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} X_3\}$$
   $$\texttt{elim var} : \{Nat \stackrel{?}{=} X_3\} \texttt{ con S2 = } \{X_1 := Nat\}$$
   $$\texttt{elim var} : \emptyset \texttt{ con S3 = } \{X_3 := Nat\}$$

   Con esto 1 es tipable y el mgu es

   $$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat, X_1 := Nat, X_2 := Nat\}$$

   y vale entonces el siguiente juicio

   $$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(Bool)$$
   $$\equiv \emptyset \vdash S(\texttt{case left}(\underline{1})_{Nat} \texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{True}) : S(Bool)$$

2. `case right(z) of left(x)` $\rightsquigarrow$ `isZero(x) | right(y)` $\rightsquigarrow$ `y`

(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = z : X_3$$

$$M_0 = \texttt{case right}(z)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \leadsto \texttt{isZero(x) | right(y)} \leadsto \texttt{y}$$

(c) Paso III : Recstricción

$$\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{case right}(z)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \leadsto \texttt{isZero(x) | right(y)} \leadsto \texttt{y}) = (Bool \mid \{X_1 + X_3 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$$

$$\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{right}(z)_{X_1}) = (X_1 + X_3 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{isZero(x)}) = (Bool \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}) \qquad \mathcal{I}(z : X_3, y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{z}) = (X_3 \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{x}) = (X_1 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

$$\texttt{entrada} : \{X_1 + X_3 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$$

$$\texttt{elim var} : \{Nat + X_3 \stackrel{?}{=} Nat + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2, \} \texttt{ con S1 = } \{X_1 := Nat\}$$

$$\texttt{elim var} : \{Nat + X_3 \stackrel{?}{=} Nat + Bool\} \texttt{ con S2 = } \{X_2 := Bool\}$$

$$\texttt{elim var} : \emptyset \quad \texttt{con S3 = } \{X_3 := Bool\}$$

El mgu por tanto es

$$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Bool, X_2 := Bool, X_1 := Nat\}$$

Concluimos que vale el siguiente juicio de tipado

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(Bool)$$

$$\equiv z : Bool \vdash S(\texttt{case right}(z)_{Nat} \texttt{ of left(x)} \leadsto \texttt{isZero(x) | right(y)} \leadsto \texttt{y}) : S(Bool)$$

3. `case right(zero) of left(x) ⇝ isZero(x) | right(y) ⇝ y`

(a) Paso I : Rectificación.

(b) Paso II : Anotación.

$$\Gamma_0 = \emptyset$$

$$M_0 = \texttt{case right}(zero)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \leadsto \texttt{isZero(x) | right(y)} \leadsto \texttt{y}$$

(c) Paso III : Recstricción

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{case right}(z)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \leadsto \texttt{isZero(x) | right(y)} \leadsto \texttt{y}) = (Bool \mid \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$$

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{right}(zero)_{X_1}) = (X_1 + Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1 \mid \texttt{isZero(x)}) = (Bool \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}) \qquad \mathcal{I}(y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{zero}) = (Nat \mid \emptyset) \qquad \mathcal{I}(x : X_1 \mid \texttt{x}) = (X_1 \mid \emptyset)$$

(d) Paso IV : Unificación

$$\texttt{entrada} : \{X_1 + Nat \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$$

$$\texttt{elim var} : \{Nat + Nat \stackrel{?}{=} Nat + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \texttt{ con S1 = } \{X_1 := Nat\ \}$$

$$\texttt{decompose} : \{Nat \stackrel{?}{=} Nat, Nat \stackrel{?}{=} X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\}$$

$$\texttt{elim triv} : \{Nat \stackrel{?}{=} X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\}$$

`colision` : **falla**

4. `case x of left(x) ⇝ isZero(x) | right(y) ⇝ y`

   (a) Paso I : Rectificación. El término no está rectificado ya que tenemos una ligada $x$ que se llama igual que la libre $x$ en M1. Por tanto, rectificamos

   `case z of left(x) ⇝ isZero(x) | right(y) ⇝ y`

   (b) Paso II : Anotación. Como $z$ está libre, agregamos al contexto su tipo.

   $$\Gamma_0 = z : X_3$$
   $$M_0 = \texttt{case z of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}$$

   (c) Paso III : Recstricción

   $$\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{case z of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) = (Bool \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$$

   - $\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{z}) = (X_3 \mid \emptyset)$
   - $\mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{isZero(x)}) = (Bool \mid \{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\})$
     - $\mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{x}) = (X_1 \mid \emptyset)$
   - $\mathcal{I}(z : X_3, y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)$

   (d) Paso IV : Unificación

   $$\texttt{entrada} : \{X_3 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2, X_1 \stackrel{?}{=} Nat\}$$
   $$\texttt{elim var} : \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat + X_2, Bool \stackrel{?}{=} X_2\} \quad \texttt{con S1 =} \{X_1 := Nat\}$$
   $$\texttt{elim var} : \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat + Bool\} \quad \texttt{con S2 =} \{X_2 := Bool\}$$
   $$\texttt{elim var} : \emptyset \quad \texttt{con S3 =} \{X_3 := Nat + Bool\}$$

   Concluimos que el mgu es

   $$S = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = \{X_3 := Nat + Bool, X_2 := Bool, X_1 := Nat\}$$

   y vale entonces el siguiente juicio

   $$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(Bool)$$
   $$\equiv z : Nat + Bool \vdash S(\texttt{case z of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{isZero(x) | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) : S(Bool)$$

5. `case left(z) of left(x) ⇝ z | right(y) ⇝ y`

   (a) Paso I : Rectificación.

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\Gamma_0 = \emptyset$$
   $$M_0 = \texttt{case left}(z)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{z | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}$$

   (c) Paso III : Recstricción

   $$\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{case left}(z)_{X_1} \texttt{ of left(x)} \rightsquigarrow \texttt{z | right(y)} \rightsquigarrow \texttt{y}) = (Bool \mid)$$

   - $\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{left}(z)_{X_1}) = (\mid \emptyset)$
     - $\mathcal{I}(\emptyset \mid \texttt{z}) = (\mid \emptyset)$
   - $\mathcal{I}(z : X_1 \mid \texttt{z}) = (X_1 \mid \emptyset)$
   - $\mathcal{I}(y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)$

6. `case z of left(x) ⇝ z | right(y) ⇝ y`

   (a) Paso I : Rectificación.

   (b) Paso II : Anotación.

   $$\Gamma_0 = z : X_3$$
   $M_0 =$ `case z of left(x) ⇝ z | right(y) ⇝ y`

   (c) Paso III : Recstricción

   $\boxed{\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{case z of left(x)} \leadsto \texttt{z | right(y)} \leadsto \texttt{y}) = (X_3 \mid \{X_3 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, X_3 \stackrel{?}{=} X_2\})}$

   $\boxed{\mathcal{I}(z : X_3 \mid \texttt{z}) = (X_3 \mid \emptyset)}$ $\boxed{\mathcal{I}(z : X_3, x : X_1 \mid \texttt{z}) = (X_3 \mid \emptyset)}$ $\boxed{\mathcal{I}(z : X_3, y : X_2 \mid \texttt{y}) = (X_2 \mid \emptyset)}$

   (d) Paso IV : Unificación

   `entrada` $: \{X_3 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2, X_3 \stackrel{?}{=} X_2\}$
   `elim var` $: \{X_2 \stackrel{?}{=} X_1 + X_2\}$ `con S1 =` $\{X_3 := X_2\}$
   `colision` : **falla**

## 1.8 Ejercicio 10

Se extienden el Cálculo Lambda y el algoritmo de inferencia para soportar listas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \tau & ::= & \ldots \mid [\tau] \\ M & ::= & \ldots \mid [\,]^\tau \mid M :: M \mid \text{foldr } M \text{ base} \leadsto M;\ \text{rec}(h, r) \leadsto M \end{array}$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid [\,]^\tau) = ([\tau] \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1 :: M_2) = (\tau_2 \mid \{\tau_2 \stackrel{?}{=} [\tau_1]\} \cup E_1 \cup E_2)$$

donde :

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1) \qquad \mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{foldr } M_1 \text{ base} \leadsto M_2 \text{ ; rec}(h, r) \leadsto M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} [X_h], \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3, \tau_3 \stackrel{?}{=} X_r\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

donde :

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1) \qquad \mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2) \qquad \mathcal{I}(\Gamma, h : X_h, r : X_r \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$$

donde $X_h$ y $X_r$ son variables de tipo frescas.
Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

1. `foldr` $x :: [\,]$ `base` $\leadsto [\,]$ `;` `rec`$(h, r) \leadsto$ `isZero`$(h) :: r$
2. `foldr` $(\lambda x.\,\texttt{succ}(x)) :: [\,]$ `base` $\leadsto [\,]$ `;` `rec`$(x, r) \leadsto$ `if` $p\,x$ `then` $x :: r$ `else` $r$
3. `foldr` $x$ `base` $\leadsto x$ `;` `rec`$(h, r) \leadsto$ `isZero`$(h) :: r$
4. `foldr` $x$ `base` $\leadsto$ `True` `;` `rec`$(h, x) \leadsto x$