Práctica 7 : Resolución Lógica

Tomás Felipe Melli

June 24, 2025

Índice

1 Resolución en Lógica Proposicional

1.1 Ejercicio 1

Tenemos que pasar primero a Forma Normal Conjuntiva y luego a la Clausal las siguientes fórmulas :

1. $P \Rightarrow P$

$$
\begin{aligned}
& P \Rightarrow P \\
& \overset{\Rightarrow_e}{\equiv} \neg P \vee P \\
& \overset{CNF}{\equiv} \underbrace{\underbrace{\neg P}_{l_1} \vee \underbrace{P}_{l_2}}_{k_1} \\
& \overset{F.Clausal}{\equiv} \{\{\neg P, P\}\}
\end{aligned}
$$

2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$

$$
\begin{aligned}
& (P \wedge Q) \Rightarrow P \\
& \overset{\Rightarrow_e}{\equiv} \neg(P \wedge Q) \vee P \\
& \overset{\neg \rightarrow \wedge}{\equiv} \neg P \vee \neg Q \vee P \\
& \overset{CNF}{\equiv} \underbrace{\underbrace{\neg P}_{l_1} \vee \underbrace{\neg Q}_{l_2} \vee \underbrace{P}_{l_3}}_{k_1} \\
& \overset{F.Clausal}{\equiv} \{\{\neg P, \neg Q, P\}\}
\end{aligned}
$$

3. $(P \vee Q) \Rightarrow P$

$$
\begin{aligned}
& (P \vee Q) \Rightarrow P \\
& \overset{\Rightarrow_e}{\equiv} \neg(P \vee Q) \vee P \\
& \overset{\neg \rightarrow \vee}{\equiv} (\neg P \wedge \neg Q) \vee P \\
& \overset{\wedge \leftarrow \vee}{\equiv} (\neg P \vee P) \wedge (\neg Q \vee P) \\
& \overset{CNF}{\equiv} \underbrace{(\underbrace{\neg P}_{l_1} \vee \underbrace{P}_{l_2})}_{k_1} \wedge \underbrace{(\underbrace{\neg Q}_{l_3} \vee \underbrace{P}_{l_3})}_{k_2} \\
& \overset{F.Clausal}{\equiv} \{\{\neg P, P\}, \{\neg Q, Q\}\}
\end{aligned}
$$

4. $\neg(P \iff \neg P)$

$$
\begin{aligned}
& \neg(P \iff \neg P) \\
& \overset{\iff}{\equiv} \neg(P \Rightarrow \neg P \wedge \neg P \Rightarrow P) \\
& \overset{\Rightarrow_e}{\equiv} \neg((\neg P \vee \neg P) \wedge (\neg\neg P \vee P)) \\
& \overset{\neg\neg_e}{\equiv} \neg((\neg P \vee \neg P) \wedge (P \vee P)) \\
& \overset{\vee_{idem}}{\equiv} \neg(\neg P \wedge P) \\
& \overset{\neg \rightarrow \wedge}{\equiv} \neg\neg P \vee \neg P \\
& \overset{\neg\neg_e}{\equiv} P \vee \neg P \\
& \overset{\neg\neg_e}{\equiv} \underbrace{\underbrace{P}_{l_1} \vee \underbrace{\neg P}_{l_2}}_{k_1} \\
& \overset{F.Clausal}{\equiv} \{\{P, \neg P\}\}
\end{aligned}
$$

5. $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

$$
\begin{aligned}
&\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)\\
&\overset{\Rightarrow_e}{\equiv} \neg(\neg(P \wedge Q)) \vee (\neg P \vee \neg Q)\\
&\overset{\neg\rightarrow\wedge}{\equiv} \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)\\
&\overset{\neg\rightarrow\vee}{\equiv} (\neg\neg P \wedge \neg\neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)\\
&\overset{\neg\neg_e}{\equiv} (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)\\
&\overset{\vee}{\equiv} ((P \wedge Q) \vee \neg P) \vee \neg Q\\
&\overset{\wedge\leftarrow\vee}{\equiv} ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P)) \vee \neg Q\\
&\overset{\wedge\leftarrow\vee}{\equiv} (P \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg P \vee \neg Q)\\
&\overset{CNF}{\equiv} \underbrace{(P \vee \neg P \vee \neg Q)}_{k_1} \wedge \underbrace{(Q \vee \neg P \vee \neg Q)}_{k_2}\\
&\overset{F.Clausal}{\equiv} \{\{P, \neg P, \neg Q\}, \{Q, \neg P, \neg Q\}\}
\end{aligned}
$$

6. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\\
&\overset{\vee\rightarrow\wedge}{\equiv} ((P \wedge Q) \vee P) \wedge ((P \wedge Q) \vee R)\\
&\overset{\wedge\leftarrow\vee}{\equiv} (P \vee P) \wedge (Q \vee P) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)\\
&\overset{\vee_{idem}}{\equiv} P \wedge (Q \vee P) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)\\
&\overset{CNF}{\equiv} \underbrace{P}_{k_1} \wedge \underbrace{(Q \vee P)}_{k_2} \wedge \underbrace{(P \vee R)}_{k_3} \wedge \underbrace{(Q \vee R)}_{k_4}\\
&\overset{F.Clausal}{\equiv} \{\{P\}, \{Q, P\}, \{P, R\}, \{Q, R\}\}
\end{aligned}
$$

7. $(P \wedge Q) \Rightarrow R$

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \Rightarrow R\\
&\overset{\Rightarrow_e}{\equiv} \neg(P \wedge Q) \vee R\\
&\overset{\neg\rightarrow\wedge}{\equiv} \neg P \vee \neg Q \vee R\\
&\overset{CNF}{\equiv} \underbrace{\neg P \vee \neg Q \vee R}_{k_1}\\
&\overset{F.Clausal}{\equiv} \{\{\neg P, \neg Q, R\}\}
\end{aligned}
$$

8. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

$$
\begin{aligned}
&P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\\
&\overset{\Rightarrow_e}{\equiv} P \Rightarrow (\neg Q \vee R)\\
&\overset{\Rightarrow_e}{\equiv} \neg P \vee (\neg Q \vee R)\\
&\overset{\vee}{\equiv} \neg P \vee \neg Q \vee R\\
&\overset{CNF}{\equiv} \underbrace{\neg P \vee \neg Q \vee R}_{k_1}\\
&\overset{F.Clausal}{\equiv} \{\{\neg P, \neg Q, R\}\}
\end{aligned}
$$

1.2 Ejercicio 2

1. Demostrar (con el método de resolución) las que sean tautologías del ejercicio anterior, para las que no, indicar qué pasa si intentamos demostrarlas. (Vale elegir la misma 2 veces). Negamos, obtenemos la fórmula en su forma clausal y aplicamos el método de resolución.

(a) $P \Rightarrow P \xrightarrow{\neg} \neg(P \Rightarrow P) \xrightarrow{\Rightarrow_e} \neg(\neg P \vee P) \rightarrow \neg\neg P \wedge \neg P \xrightarrow{\neg\neg_e} P \wedge \neg P$ que en forma clausal es $\{\{P\}\{\neg P\}\}$ y con esto aplicamos el método de resolución $\xrightarrow{\texttt{1 y 2}} \{\}$. Queda probado.

(b) $(P \wedge Q) \Rightarrow P \xrightarrow{\neg} \neg((P \wedge Q) \Rightarrow P) \xrightarrow{\Rightarrow_e} \neg(\neg(P \wedge Q) \vee P) \xrightarrow{\neg\to} \neg\neg(P \wedge Q) \wedge \neg P \xrightarrow{\neg\neg_e} P \wedge Q \wedge \neg P$ que en su forma clausal es $\{\{P\}\{Q\}\{\neg P\}\}$ aplicamos entonces $\xrightarrow{\texttt{1 y 3}} \{\}$ queda probado.

(c) $(P \vee Q) \Rightarrow P \xrightarrow{\neg} \neg((P \vee Q) \Rightarrow P) \xrightarrow{\Rightarrow_e} \neg(\neg(P \vee Q) \vee P) \xrightarrow{\neg\to} \neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg P \xrightarrow{\neg\neg_e} (P \vee Q) \wedge \neg P$ que en su forma clausal es $\{\{P, Q\}\{\neg P\}\}$ no podemos probarlo, por tanto, no es tautología.

(d) $\neg(P \iff \neg P) \xrightarrow{\neg} \neg(\neg(P \iff \neg P)) \xrightarrow{\iff} \neg(\neg(P \Rightarrow \neg P \wedge \neg P \Rightarrow P)) \xrightarrow{\neg\neg_e} \neg\neg(P \Rightarrow \neg P \wedge \neg P \Rightarrow P) \xrightarrow{\neg\neg_e} (P \Rightarrow \neg P \wedge \neg P \Rightarrow P) \xrightarrow{\Rightarrow_e} (\neg P \vee \neg P \wedge \neg\neg P \vee P) \xrightarrow{\neg\neg_e} (\neg P \vee \neg P \wedge P \vee P)$ que en su forma clausal es $\{\{\neg P\}\{P\}\}$ podemos decir que es tautología ya que aplicamos el método $\xrightarrow{\texttt{1 y 2}} \{\}$

(e) $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q) \xrightarrow{\neg} \neg(\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)) \xrightarrow{\Rightarrow_e} \neg(\neg\neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \xrightarrow{\neg} \neg\neg\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)) \xrightarrow{\neg} \neg\neg\neg(P \wedge Q) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg\neg Q)) \xrightarrow{\neg\neg_e} \neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)) \xrightarrow{\neg} (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q))$ que en su forma clausal es $\{\{\neg P, \neg Q\}\{P, Q\}\}$ que si aplicamos el método $\xrightarrow{\texttt{1 y 2}} \{Q, \neg Q\}$ `este es 3` $\xrightarrow{\texttt{1 y 2}} \{P, \neg P\}$ pero nunca llegamos a nada, por tanto no es tautología.

(f) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(g) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$

(h) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

2. Se deduce $(P \wedge Q)$ de $(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$? Contestar utilizando el método de resolución para la lógica proposicional. Nos piden demostrar que vale $(P \wedge Q)$ a partir de todo lo otro. O sea que, pasamos todo a forma clausal, con lo que queremos demostrar negado y aplicamos el método.

$$(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$$
$$\xrightarrow{\Rightarrow_e} (\neg\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg P \vee \neg Q)$$
$$\xrightarrow{\neg\neg_e} (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

(a) $\{P, Q\}$

(b) $\{\neg P, Q\}$

(c) $\{P, \neg Q\}$

(d) $\{\neg P, \neg Q\}$

Aplicamos el método de resolución

$$\xrightarrow{\texttt{d y c}} \{\neg Q\}$$
$$\xrightarrow{\texttt{e y b}} \{\neg P\}$$
$$\xrightarrow{\texttt{f y a}} \{Q\}$$
$$\xrightarrow{\texttt{e y f}} \{\}$$

1.3 Ejercicio 4

Un grupo de amigos quería juntarse a comer en una casa, pero no decidían en cuál. Prevalecían dos propuestas: la casa de Fabiana, que era cómoda y espaciosa, y la de Manuel, más chica pero con un amplio jardín y parrilla al aire libre. Finalmente, acordaron basar su elección en el pronóstico del tiempo. Si anunciaban lluvia, se reunirían en la casa de Fabiana; y si no, en la de Manuel (desde ya, la reunión tendría lugar en una sola casa).
Finalmente, llegó el día de la reunión, y el grupo se juntó a comer en la casa de Fabiana, pero no llovió.
Utilizar las siguientes proposiciones para demostrar —mediante el método de resolución— que el pronóstico se equivocó (es decir, que anunció lluvia y no llovió, o viceversa).

- P: El pronóstico anunció lluvia.
- F: El grupo se reúne en la casa de Fabiana.
- M: El grupo se reúne en la casa de Manuel.
- L: Llueve en el día de la reunión.

Ayuda: por la descripción de arriba sabemos que: $P \Rightarrow F$, $\neg P \Rightarrow M$, $\neg(F \wedge M)$, además de que F, $\neg L$ son verdaderas. Pensar en lo que se quiere demostrar para decidir qué pares de cláusulas utilizar.

Solución

Qué tenemos ? Lo pasamos a forma clausal

Se tiene :

1. $P \implies F \rightsquigarrow \neg P \vee F$
2. $\neg P \implies M \rightsquigarrow P \vee M$
3. $\neg(F \wedge M) \rightsquigarrow \neg F \vee \neg M$
4. F
5. $\neg L$

Qué queremos probar ?

Y queremos ver que :

$$(P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)$$

Negación

$$\neg((P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)) \rightsquigarrow (\neg P \vee L) \wedge (P \vee \neg L)$$

Expresamos las cláusulas como conjuntos

Todo, lo que tenemos y lo que queremos probar :

1. $\{\neg P, F\}$
2. $\{P, M\}$
3. $\{\neg F, \neg M\}$
4. $\{F\}$
5. $\{\neg L\}$
6. $\{\neg P, L\}$
7. $\{P, \neg L\}$

Aplicamos la regla (pensando en qué queremos demostrar)

$$\begin{aligned}
\{P, M\}\ \{\neg P, L\} &\rightsquigarrow \{L, M\} \\
\{L, M\}\ \{\neg F, \neg M\} &\rightsquigarrow \{L, \neg F\} \\
\{L, \neg F\}\ \{F\} &\rightsquigarrow \{L\} \\
\{L\}\ \{\neg L\} &\rightsquigarrow \{\}
\end{aligned}$$

La forma que usamos para resolver es :

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{2 \text{ y } 6} \{L, M\} \\
&\xrightarrow{7 \text{ y } 3} \{L, \neg F\} \\
&\xrightarrow{8 \text{ y } 4} \{L\} \\
&\xrightarrow{9 \text{ y } 5} \{\}
\end{aligned}$$

2 Resolución en LPO

2.1 Ejercicio 5

Convertir a **Forma Normal Negada (NNF)** las siguientes fórmulas de primer orden:

`breve repaso :` $\sigma_{nnf} ::= \mathbf{P} \mid \neg\mathbf{P} \mid \sigma_{nnf} \wedge \sigma_{nnf} \mid \sigma_{nnf} \vee \sigma_{nnf}$

1. $\forall X\, \forall Y\, (\neg Q(X,Y) \Rightarrow \neg P(X,Y))$

$$\overset{\Rightarrow_e}{\rightarrow} \forall X\, \forall Y\, (\neg(\neg Q(X,Y)) \vee \neg P(X,Y))$$
$$\overset{\neg\rightarrow}{\rightarrow} \forall X\, \forall Y\, ((\neg\neg Q(X,Y) \vee \neg P(X,Y))$$
$$\overset{\neg\neg}{\rightarrow} \forall X\, \forall Y\, (Q(X,Y) \vee \neg P(X,Y))$$

2. $\forall X\, \forall Y\, ((P(X,Y) \wedge Q(X,Y)) \Rightarrow R(X,Y))$

$$\overset{\Rightarrow_e}{\rightarrow} \forall X\, \forall Y\, (\neg(P(X,Y) \wedge Q(X,Y)) \vee R(X,Y))$$
$$\overset{\neg\rightarrow}{\rightarrow} \forall X\, \forall Y\, (\neg P(X,Y) \vee \neg Q(X,Y) \vee R(X,Y))$$

3. $\forall X\, \exists Y\, (P(X,Y) \Rightarrow Q(X,Y))$

$$\overset{\Rightarrow_e}{\rightarrow} \forall X\, \exists Y\, (\neg P(X,Y) \vee Q(X,Y))$$

2.2 Ejercicio 6

Convertir a **Forma Normal de Skolem** y luego a **Forma Clausal** las siguientes fórmulas de primer orden:

1. $\exists X.\exists Y.(X < Y)$, siendo $<$ un predicado binario usado de forma infija.

$$\overset{Skolem}{\rightarrow} \exists Y.(a < Y)$$
$$\overset{Skolem}{\rightarrow} (a < b)$$

Que podemos escribir en Forma Clausal como : $\{a < b\}$

2. $\forall X.\exists Y.(X < Y)$

$$\overset{Skolem}{\rightarrow} \forall X.(X < f(X))$$

Que podemos escribir en Forma Clausal como : $\{X < f(x))\}$

3. $\forall X.\neg(P(X) \wedge \forall Y\, (\neg P(Y) \vee Q(Y)))$

$$\overset{\neg\rightarrow}{\rightarrow} \forall X.(\neg P(X) \vee \neg\forall Y\, (\neg P(Y) \vee Q(Y)))$$
$$\overset{\neg\forall}{\rightarrow} \forall X.(\neg P(X) \vee \exists Y\, \neg(\neg P(Y) \vee Q(Y)))$$
$$\overset{\neg\rightarrow}{\rightarrow} \forall X.(\neg P(X) \vee \exists Y\, (\neg\neg P(Y) \wedge \neg Q(Y)))$$
$$\overset{\neg\neg_e}{\rightarrow} \forall X.(\neg P(X) \vee \exists Y\, (P(Y) \wedge \neg Q(Y)))$$
$$\overset{Skolem}{\rightarrow} \forall X.(\neg P(X) \vee (P(f(X)) \wedge \neg Q(f(X)))$$
$$\overset{\vee\rightarrow\wedge}{\rightarrow} \forall X.\neg P(X) \vee Pf(X) \wedge \forall X.\neg P(X) \vee \neg Q(f(X))$$

Que podemos escribir en su Forma Clausal como $\{\{\neg P(X), P(f(X))\}\{\neg P(X), \neg Q(f(X))\}\}$ es conveniente renombrar $\{\{\neg P(X), P(f(X))\}\{\neg P(Z), \neg Q(f(Z))\}\}$

4. $\exists X.\forall Y.(P(X,Y) \wedge Q(X) \wedge \neg R(Y))$

$\overset{Skolem}{\rightarrow} \forall Y.(P(a,Y) \wedge Q(a) \wedge \neg R(Y))$ `X no depende de Y, por tanto se reemplaza por constante`

$\overset{\forall}{\rightarrow} \forall Y.(P(a,Y) \wedge \forall Y.Q(a) \wedge \forall Y.\neg R(Y))$ `es conveniente renombrar luego`

Que podemos escribir en su Forma Clausal como $\{\{P(a,Y)\}\{Q(a)\}\{\neg R(Z)\}\}$

5. $\forall X.(P(X) \wedge \exists Y.(Q(Y) \vee \forall Z.\exists W.(P(Z) \wedge \neg Q(W))))$

$\overset{Skolem}{\rightarrow} \forall X.(P(X) \wedge (Q(f(X)) \vee \forall Z.\exists W.(P(Z) \wedge \neg Q(W))))$ `Y depende de X`

$\overset{Skolem}{\rightarrow} \forall X.(P(X) \wedge (Q(f(X)) \vee \forall Z.(P(Z) \wedge \neg Q(g(X,Z)))))$ `W depende de X y de Z`

$\overset{\forall\leftarrow}{\rightarrow} \forall X.(P(X) \wedge (\forall Z.(Q(f(X)) \vee (P(Z) \wedge \neg Q(g(X,Z))))))$ `Z` $\notin fv(Q(f(X))$

$\overset{\forall\leftarrow}{\rightarrow} \forall X.\forall Z.P(X) \wedge (Q(f(X)) \vee (P(Z) \wedge \neg Q(g(X,Z))))$ `Z` $\notin fv(P(X))$

$\overset{\vee\rightarrow}{\rightarrow} \forall X.\forall Z.P(X) \wedge (Q(f(X)) \vee P(Z)) \wedge (Q(f(X)) \vee \neg Q(g(X,Z)))$

Pasamos a forma clausal haciendo el adecuado renombre : $\{\{P(X_1)\}\{Q(f(X_2)), P(Z_2)\}\{Q(f(X_3)) \vee \neg Q(g(X_3, Z_3))\}\}$

2.3 Ejercicio 8

La computadora de la policía registró que el Sr. Smullyan no pagó una multa. Cuando el Sr. Smullyan pagó la multa, la computadora grabó este hecho pero, como el programa tenía errores, no borró el hecho que expresaba que no había pagado la multa. A partir de la información almacenada en la computadora, mostrar utilizando resolución que el jefe de gobierno es un espía.

Utilizar los siguientes predicados y constantes: `Pagó(X)` para expresar que X pagó su multa, `Espía(X)` para X es un espía, `smullyan` para el Sr. Smullyan y `jefeGob` para el jefe de gobierno.

- El `Sr.Smullyan` no había pagado la multa y luego pagó $\rightsquigarrow$ {{¬`(Pagó(smullyan))`}{`(Pagó(smullyan))`}}
- Queremos saber si el `jefeGob` es un espía $\rightsquigarrow$ `Espía(jefeGob)` como queremos probar esto, negamos $\rightsquigarrow$ {¬`(Espía(jefeGob))`}

Voy a enumerar las cláusulas

1. {¬`Pagó(smullyan)`}
2. {`Pagó(smullyan)`}
3. {¬`Espía(jefeGob)`}

Aplicamos el método de resolución

$\overset{\texttt{1 y 2}}{\rightarrow} \{\}$

2.4 Ejercicio 9

Cuáles de las siguientes fórmulas son válidas ? Para aquellas que lo sean demostarlas usando resolución.

1. $[\exists X.\forall Y.\, R(X,Y)] \Rightarrow \forall Y.\exists X.\, R(X,Y)$
   En castellano la fórmula dice que existe un X tal que para todo Y, `X se relaciona con Y` y que esto implica que para todo Y existe algún X para el cuál `X se relaciona con Y`. Con lo cuál es válida. Para demostrarla quermos aplicar el método de resolución pero primero necesitamos negarla y pasarla la fórmula a su forma clausal...

   $\overset{\neg}{\rightarrow} \neg(\neg[\exists X.\forall Y.\, R(X,Y)] \vee \forall Y.\exists X.\, R(X,Y))$

   $\overset{\Rightarrow_e}{\rightarrow} \neg(\neg[\exists X.\forall Y.\, R(X,Y)] \vee \forall Y.\exists X.\, R(X,Y))$

   $\overset{\neg\vee}{\rightarrow} \neg\neg[\exists X.\forall Y.\, R(X,Y)] \wedge \neg\forall Y.\exists X.\, R(X,Y))$

   $\overset{\neg\neg_e}{\rightarrow} [\exists X.\forall Y.\, R(X,Y)] \wedge \neg\forall Y.\exists X.\, R(X,Y)$

   $\overset{\neg\forall}{\rightarrow} [\exists X.\forall Y.\, R(X,Y)] \wedge \exists Y.\neg\exists X.\, R(X,Y)$

   $\overset{\neg\exists}{\rightarrow} [\exists X.\forall Y.\, R(X,Y)] \wedge \exists Y.\forall X.\, \neg R(X,Y)$

   $\overset{Skolem}{\rightarrow} [\forall Y.\, R(a,Y)] \wedge \exists Y.\forall X.\, \neg R(X,Y)$

   $\overset{Skolem}{\rightarrow} [\forall Y.\, R(a,Y)] \wedge \forall X.\, \neg R(X,b)$

   $\overset{\leftarrow\forall}{\rightarrow} \forall Y.\forall X.(\, R(a,Y) \wedge\, \neg R(X,b))$

   Que en su forma clausal es $\{\{R(a,Y)\}\{\neg R(X,b)\}\}$ con lo cual :

   $\overset{\texttt{1 y 2}}{\rightarrow} \{\}$ `con S = { X := a, Y := b }`

2. $[\forall X.\exists Y.\, R(X,Y)] \Rightarrow \exists Y.\forall X.\, R(X,Y)$
En castellano, para todo X existe al menos un Y con el cuál X se relaciona implica que existe un Y tal que para todo X, X se relaciona con Y. A priori ni idea, negamos y pasamos a forma clausal para ver si llegamos a algo

$$\xrightarrow{\neg} \neg([\forall X.\exists Y.\, R(X,Y)] \Rightarrow \exists Y.\forall X.\, R(X,Y))$$
$$\xrightarrow{\Rightarrow_e} \neg(\neg[\forall X.\exists Y.\, R(X,Y)] \vee \exists Y.\forall X.\, R(X,Y))$$
$$\xrightarrow{\neg\to} \neg\neg[\forall X.\exists Y.\, R(X,Y)] \wedge \neg\exists Y.\forall X.\, R(X,Y))$$
$$\xrightarrow{\neg\neg_e} [\forall X.\exists Y.\, R(X,Y)] \wedge \neg\exists Y.\forall X.\, R(X,Y))$$
$$\xrightarrow{\neg\exists} [\forall X.\exists Y.\, R(X,Y)] \wedge \forall Y.\neg\forall X.\, R(X,Y))$$
$$\xrightarrow{\neg\forall} [\forall X.\exists Y.\, R(X,Y)] \wedge \forall Y.\exists X.\, \neg R(X,Y))$$
$$\xrightarrow{\texttt{renombro}} [\forall X.\exists Y.\, R(X,Y)] \wedge \forall Z.\exists W.\, \neg R(W,Z))$$
$$\xrightarrow{\texttt{Skolem}} \forall X.\, R(X,f(X)) \wedge \forall Z.\neg R(g(Z),Z))$$
$$\xrightarrow{\forall\leftarrow} \forall X.\forall Z.\, R(X,f(X)) \wedge \neg R(g(Z),Z))$$

Que en su forma clausal es $\{\{R(X,f(X))\}\{\neg R(g(Z),Z)\}\}$ que si aplicamos el método

$\xrightarrow{\texttt{1 y 2}}$ `si tomamos S = { X := g(Z), Z := f(X) } error`

Tenemos un problemón, porque hay una dependencia circular `occurs check`. Por tanto, no existe sustitución válida.

3. $\exists X.\, [P(X) \Rightarrow \forall X.\, P(X)]$
Podríamos reescribir para mayor claridad $\exists X.\, [P(X) \Rightarrow \forall Y.\, P(Y)]$ con esto en mente decimos que existe un elemento X que cumple cierta propiedad con lo cual implica que todo elemento Y también la cumpla. Vamos a intentar probarla con el método de resolución.

$$\xrightarrow{\neg} \neg(\exists X.\, [P(X) \Rightarrow \forall Y.\, P(Y)])$$
$$\xrightarrow{\Rightarrow_e} \neg(\exists X.\, [\neg P(X) \vee \forall Y.\, P(Y)])$$
$$\xrightarrow{\neg\to} \neg\exists X.\, [\neg P(X) \vee \forall Y.\, P(Y)]$$
$$\xrightarrow{\neg\exists} \forall X.\, \neg[\neg P(X) \vee \forall Y.\, P(Y)]$$
$$\xrightarrow{\neg\to} \forall X.\, \neg\neg P(X) \wedge \neg\forall Y.\, P(Y)$$
$$\xrightarrow{\neg\neg} \forall X.\, P(X) \wedge \neg\forall Y.\, P(Y)$$
$$\xrightarrow{\neg\forall} \forall X.\, P(X) \wedge \exists Y.\, \neg P(Y)$$
$$\xrightarrow{Skolem} \forall X.\, P(X) \wedge \neg P(a)$$

Que en su forma clausal es $\{\{P(X)\}\{\neg P(a)\}\}$ lo cual nos queda bárbaro para aplicar el método :

$\xrightarrow{\texttt{1 y 2}} \{\}$ `con S { X := a}`

4. $\exists X.\, [P(X) \vee Q(X)] \Rightarrow [\exists X.\, P(X) \vee \exists X.\, Q(X)]$
Por comodidad renombro a $\exists X.\, [P(X) \vee Q(X)] \Rightarrow [\exists Z.\, P(Z) \vee \exists W.\, Q(W)]$

$$\xrightarrow{\neg} \neg(\exists X.\, [P(X) \vee Q(X)] \Rightarrow [\exists Z.\, P(Z) \vee \exists W.\, Q(W)])$$
$$\xrightarrow{\Rightarrow_e} \neg(\neg\exists X.\, [P(X) \vee Q(X)] \vee [\exists Z.\, P(Z) \vee \exists W.\, Q(W)])$$
$$\xrightarrow{\neg\to} \neg\neg\exists X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge \neg[\exists Z.\, P(Z) \vee \exists W.\, Q(W)])$$
$$\xrightarrow{\neg\neg} \exists X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge \neg[\exists Z.\, P(Z) \vee \exists W.\, Q(W)])$$
$$\xrightarrow{\neg\to} \exists X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge [\neg\exists Z.\, P(Z) \wedge \neg\exists W.\, Q(W)])$$
$$\xrightarrow{\neg\exists} \exists X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge [\forall Z.\, \neg P(Z) \wedge \forall W.\, \neg Q(W)])$$
$$\xrightarrow{Skolem} [P(a) \vee Q(a)] \wedge [\forall Z.\, \neg P(Z) \wedge \forall W.\, \neg Q(W)])$$

Que si lo escribimos en su forma clausal $\{\{P(a),Q(a)\}\{\neg P(Z)\}\{\neg Q(W)\}\}$ con esto

$\xrightarrow{\texttt{1 y 2}} \{Q(a)\}$ `con` S_4 `= { Z := a }`

$\xrightarrow{\texttt{4 y 3}} \{\}$ `con` S_5 `= { W := a }`

5. $\forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \Rightarrow [\forall X.\, P(X) \vee \forall X.\, Q(X)]$
   Volvemos a reescribir por mayor claridad $\forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \Rightarrow [\forall Z.\, P(Z) \vee \forall W.\, Q(W)]$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\neg}{\rightarrow} \neg(\forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \Rightarrow [\forall Z.\, P(Z) \vee \forall W.\, Q(W)]) \\
&\overset{\Rightarrow_e}{\rightarrow} \neg(\neg\forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \vee [\forall Z.\, P(Z) \vee \forall W.\, Q(W)]) \\
&\overset{\neg\rightarrow}{\rightarrow} \neg\neg\forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge \neg[\forall Z.\, P(Z) \vee \forall W.\, Q(W)] \\
&\overset{\neg\neg_e}{\rightarrow} \forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge \neg[\forall Z.\, P(Z) \vee \forall W.\, Q(W)] \\
&\overset{\neg\rightarrow}{\rightarrow} \forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge [\neg\forall Z.\, P(Z) \vee \forall W.\, Q(W)] \\
&\overset{\neg\rightarrow}{\rightarrow} \forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge [\neg\forall Z.\, P(Z) \wedge \neg\forall W.\, Q(W)] \\
&\overset{\neg\forall}{\rightarrow} \forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge [\exists Z.\, \neg P(Z) \wedge \exists W.\, \neg Q(W)] \\
&\overset{Skolem}{\rightarrow} \forall X.\, [P(X) \vee Q(X)] \wedge [\, \neg P(a) \wedge \neg Q(b)]
\end{aligned}
$$

   Que si lo escribimos en su forma clausal $\{\{P(X), Q(X)\}\{\neg P(a)\}\{\neg Q(b)\}\}$ que si aplicamos el método

   $\overset{1\ y\ 2}{\rightarrow} \{Q(X)\}$ `con` S_4 `= { X := a}`

   $\overset{4\ y\ 3}{\rightarrow}$ `tenemos que sustituir con` S_5 `= { X := b}` `y el problema es componer las sustituciones para obtener el MGU donde` `X` $\overset{?}{=}$ `a` , `X` $\overset{?}{=}$ `b` `dando un clash.`

6. $[\exists X.\, P(X) \wedge \forall X.\, Q(X)] \Rightarrow \exists X.\, [P(X) \wedge Q(X)]$

7. $\forall X. \exists Y. \forall Z. \exists W.\, [P(X, Y) \vee \neg P(W, Z)]$

8. $\forall X. \forall Y. \forall Z.\, ([\neg P(f(a)) \vee \neg P(Y) \vee Q(Y)] \wedge P(f(Z)) \wedge [\neg P(f(f(X))) \vee \neg Q(f(X))])$

2.5 Ejercicio 11

Dadas las siguiente cláusulas

1. $\{P(X), \neg P(X), Q(a)\}$
2. $\{P(X), \neg Q(Y), \neg R(X, Y)\}$
3. $\{\neg P(X, X, Z), \neg Q(X, Y), \neg Q(Y, Z)\}$
4. $\{M(1, 2, X)\}$

Cúales son cláusulas de Horn ? Indicar su tipo y luego la fórmula de primer orden que le corresponde

1. No es de Horn ya que hay dos literales positivos, rompiendo con la condición de que a lo sumo 1 puede ser positivo. Su fórmula de primer orden es

$$
\begin{aligned}
&\{P(X), \neg P(X), Q(a)\} \\
&P(X) \vee \neg P(X) \vee Q(a)
\end{aligned}
$$

2. Es de Horn, tiene cabeza (literal positivo) y cola de dos sólo literale (los negados), esto en particular es una cláusula `Definite` que representa la regla $P(X) \leftarrow Q(Y) \wedge R(X, Y)$ que en su fórmula de primer orden es $Q(Y) \wedge R(X, Y) \Rightarrow P(X)$

3. Es de Horn, como se trata de una cláusula `Objective` (Goal) que son las que usamos para representar una consulta, todos los literales están negados. Su fórmula de primer orden es $P(X, X, Z) \wedge Q(X, Y) \wedge Q(Y, Z)$

4. Es de Horn, en particular, una cláusula `Definite` donde sólo tenemos la cabeza, esto se usa para representar Hechos. Su fórmula de primer orden es $M(1, 2, X)$

2.6 Ejercicio 12

Cuáles de las siguientes condiciones son necesarias para una demo por resolución SLD?

- Realizarse de manera lineal (utilizando en cada paso el resolvente obtenido en el paso anterior).
- Utilizar únicamente cláusulas de Horn.
- Utilizar cada cláusula a lo sumo una vez.
- Empezar por una cláusula objetivo (sin literales positivos).
- Empezar por una cláusula que provenga de la negación de lo que se quiere demostrar.
- Recorrer el espacio de búsqueda de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.
- Utilizar la regla de resolución binaria en lugar de la general.

1. En la resolución SLD uno de los literales a utilizar en la unificación siempre proviene de la cláusula resultante del paso anterior, por tanto, es lineal.
2. La resolución SLD es un método completo para cláusulas de Horn únicamente.
3. No, la restricción en SLD está en que siempre una de las dos proviene del paso anterior.
4. Sí, siempre en resolución SLD vamos a comenzar con una cláusula `Objective` (con todos sus literales negados).
5. No necesariamente.
6. Esa condición tiene que ver con una estrategia propia de Prolog, no necesariamente es condición de SLD.
7. Exacto, se unifica una cláusula `Objective` con una `Definite` en cada paso.

2.7 Ejercicio 13

Alan es un robot japonés. Cualquier robot que puede resolver un problema lógico es inteligente. Todos los robots japoneses pueden resolver todos los problemas de esta práctica. Todos los problemas de esta práctica son lógicos. Existe al menos un problema en esta práctica. ¿Quién es inteligente? Encontrarlo utilizando resolución SLD y composición de sustituciones. Utilizar los siguientes predicados y constantes: R(X) para expresar que X es un robot, Res(X, Y) para X puede resolver Y, PL(X) para X es un problema lógico, Pr(X) para X es un problema de esta práctica, I(X) para X es inteligente, J(X) para X es japonés y la constante alan para Alan.

Anotaciones

1. $R(\texttt{alan}) \land J(\texttt{alan})$
2. $R(X) \land PL(Y) \land Res(X,Y) \implies I(X)$
3. $R(X) \land J(X) \land Pr(Y) \implies Res(X,Y)$
4. $Pr(X) \implies PL(X)$
5. $Pr(Y)$

Queremos probar que

$$I(X)$$

Por tanto, lo negamos $\neg I(X)$

Pasamos todas las fórmulas a su forma clausal para poder aplicar el método

1. $\{R(\texttt{alan})\}$

2. $\{J(\texttt{alan})\}$

3. $R(X) \wedge PL(Y) \wedge Res(X,Y) \implies I(X)$

   $\overset{\Rightarrow_e}{\to} \neg(R(X) \wedge PL(Y) \wedge Res(X,Y)) \vee I(X)$

   $\overset{\neg\to}{\to} \neg R(X) \vee \neg PL(Y) \vee \neg Res(X,Y)) \vee I(X)$

   Que en su forma clausal es $\{\neg R(X_3), \neg PL(Y_3), \neg Res(X_3,Y_3)), I(X_3)\}$

4. $R(X) \wedge J(X) \wedge Pr(Y) \implies Res(X,Y)$

   $\overset{\Rightarrow_e}{\to} \neg(R(X) \wedge J(X) \wedge Pr(Y)) \vee Res(X,Y)$

   $\overset{\neg\to}{\to} \neg R(X) \vee \neg J(X) \vee \neg Pr(Y) \vee Res(X,Y)$

   Que en su forma clausal es $\{\neg R(X_4), \neg J(X_4), \neg Pr(Y_4), Res(X_4,Y_4)\}$

5. $Pr(X) \implies PL(X)$

   $\overset{\Rightarrow_e}{\to} \neg Pr(X) \vee PL(X)$

   Que en su forma clausal es $\{\neg Pr(X_5), PL(X_5)\}$

6. $\{Pr(Y_6)\}$

7. $\{\neg I(X_7)\}$

Resolvemos

$\overset{3\text{ y }7}{\to} \{\neg R(X_3), \neg PL(Y_3), \neg Res(X_3,Y_3)\}$ `con` S_8 `=` `{` X_3 `:=` X_7 `}`

$\overset{4\text{ y }8}{\to} \{\neg R(X_3), \neg PL(Y_3), \neg J(X_3), \neg Pr(Y_3))\}$ `con` S_9 `=` `{` X_4 `:=` X_3`,` Y_4 `:=` Y_3 `}`

$\overset{5\text{ y }9}{\to} \{\neg R(X_3), \neg J(X_3), \neg Pr(Y_3))\}$ `con` S_{10} `=` `{` X_5 `:=` Y_3 `}`

$\overset{6\text{ y }10}{\to} \{\neg R(X_3), \neg J(X_3)\}$ `con` S_{11} `=` `{` Y_6 `:=` Y_3 `}`

$\overset{11\text{ y }1}{\to} \{\neg J(alan)\}$ `con` S_{12} `=` `{` X_3 `:= alan}`

$\overset{12\text{ y }2}{\to} \{\ \}$

Entonces `S` `=` $S_{12} \circ S_{11} \circ S_{10} \circ S_9 \circ S_8 = \{X_3 := alan, Y_6 := Y_3, X_5 := Y_3, X_4 := X_3, Y_4 := Y_3, X_3 := X_7\}$

Quién es inteligente ?

`Alan`

2.8 Ejercicio 14

Sean las siguientes cláusulas (en forma clausal), donde `suma` y `par` son predicados, `suc` es una función y `cero` una constante:

1. $\{\neg suma(X_1, Y_1, Z_1), suma(X_1, suc(Y_1), suc(Z_1))\}$

2. $\{suma(X_2, cero, X_2)\}$

3. $\{\neg suma(X_3, X_3, Y_3), par(Y_3)\}$

Demostrar utilizando resolución que suponiendo (1), (2), (3) se puede probar `par(suc(suc(cero)))`. Si es posible, aplicar resolución SLD. En caso contrario, utilizar resolución general. Mostrar en cada aplicación de la regla de resolución la sustitución utilizada.

Negamos la fórmula que queremos probar

$\neg(par(suc(suc(cero))))$

Resolvemos

$\xrightarrow{1\ y\ 3}$ $\{\neg suma(suc(Y_1), Y_1, Z_1), par(suc(Z_1))\}$ `con` S_5 `= {` X_1 `:=` X_3`,` X_3 `:= suc(`Y_1`) ,` Y_3 `:= suc(`Z_1`) }`

$\xrightarrow{2\ y\ 5}$ $\{\neg suma(suc(cero), cero, suc(cero)), par(suc(suc(cero)))\}$ `con` S_6 `= {` X_2 `:= suc(`Y_1`),` Y_1 `:= cero ,` X_2 `:=` Z_1 `}`

$\xrightarrow{6\ y\ 4}$ $\{\neg suma(suc(cero), cero, suc(cero))\}$

$\xrightarrow{2\ y\ 7}$ $\{\}$ `con` S_8 `= {` X_2 `:= suc(cero) }`

La resolución no es SLD ya que no comenzamos con una cláusula `Objective`.

2.9 Ejercicio 16

Un lógico estaba sentado en un bar cuando se le ocurrió usar el método de resolución para demostrar el teorema del bebedor: siempre que haya alguien en el bar, habrá allí alguien tal que, si está bebiendo, todos en el bar están bebiendo. Sin embargo, el lógico en cuestión había bebido demasiado y la prueba no le salió muy bien. Esto fue lo que escribió en una servilleta del bar:
Teorema del bebedor: $(\exists X.\, \text{enBar}(X)) \Rightarrow \exists Y.(\text{enBar}(Y) \wedge (\text{bebe}(Y) \Rightarrow \forall Z.(\text{enBar}(Z) \Rightarrow \text{bebe}(Z))))$
Elimino implicaciones: $(\neg\exists X.\, \text{enBar}(X)) \vee \exists Y.(\text{enBar}(Y) \wedge (\neg\text{bebe}(Y) \vee \forall Z.(\neg\text{enBar}(Z) \vee \text{bebe}(Z))))$
Skolemizo: $(\neg\text{enBar}(c)) \vee (\text{enBar}(k) \wedge (\neg\text{bebe}(k) \vee \forall Z.(\neg\text{enBar}(Z) \vee \text{bebe}(Z))))$
Paso a Forma Clausal:

1. {¬enBar(c)}
2. {enBar(k)}
3. {¬bebe(k)}
4. {¬enBar(Z), bebe(Z)}

Aplico resolución:
De 3 y 4 con $\sigma = \{k \leftarrow Z\}$:

5. {¬enBar(Z)}

De 5 y 1 con $\sigma = \{Z \leftarrow c\}$:

$\square$

1. Identificar los 5 errores cometidos en la demostración. (La fórmula original es correcta, notar que salteó pasos importantes e hizo mal otros).
2. Demostrar el teorema de manera correcta, usando resolución.
3. Indicar si la resolución utilizada en el punto 2 es o no SLD. Justificar.

Demo

Lo primero que hacemos es negar lo que queremos probar

$\stackrel{\neg}{\rightarrow} \neg((\exists X.\, \text{enBar}(X)) \Rightarrow \exists Y.(\text{enBar}(Y) \wedge (\text{bebe}(Y) \Rightarrow \forall Z.(\text{enBar}(Z) \Rightarrow \text{bebe}(Z)))))$

$\stackrel{\Rightarrow_e}{\rightarrow} \neg(\neg(\exists X.\, \text{enBar}(X)) \vee \exists Y.(\text{enBar}(Y) \wedge (\neg\text{bebe}(Y) \vee \forall Z.(\neg\text{enBar}(Z) \vee \text{bebe}(Z)))))$

$\stackrel{\neg\rightarrow}{\rightarrow} (\neg\neg\exists X.\, \text{enBar}(X)) \wedge \neg\exists Y.(\text{enBar}(Y) \wedge (\neg\text{bebe}(Y) \vee \forall Z.(\neg\text{enBar}(Z) \vee \text{bebe}(Z))))$

$\stackrel{\neg\neg}{\rightarrow} (\exists X.\, \text{enBar}(X)) \wedge \neg\exists Y.(\text{enBar}(Y) \wedge (\neg\text{bebe}(Y) \vee \forall Z.(\neg\text{enBar}(Z) \vee \text{bebe}(Z))))$

$\stackrel{\neg\exists}{\rightarrow} (\exists X.\, \text{enBar}(X)) \wedge \forall Y.\neg(\text{enBar}(Y) \wedge (\neg\text{bebe}(Y) \vee \forall Z.(\neg\text{enBar}(Z) \vee \text{bebe}(Z))))$

$\stackrel{\neg\rightarrow}{\rightarrow} (\exists X.\, \text{enBar}(X)) \wedge \forall Y.(\neg\text{enBar}(Y) \vee \neg(\neg\text{bebe}(Y) \vee \forall Z.(\neg\text{enBar}(Z) \vee \text{bebe}(Z))))$

$\stackrel{\neg\rightarrow}{\rightarrow} (\exists X.\, \text{enBar}(X)) \wedge \forall Y.(\neg\text{enBar}(Y) \vee (\neg\neg\text{bebe}(Y) \wedge \neg\forall Z.(\neg\text{enBar}(Z) \vee \text{bebe}(Z))))$

$\stackrel{\neg\forall}{\rightarrow} (\exists X.\, \text{enBar}(X)) \wedge \forall Y.(\neg\text{enBar}(Y) \vee (\neg\neg\text{bebe}(Y) \wedge \exists Z.\neg(\neg\text{enBar}(Z) \vee \text{bebe}(Z))))$

$\stackrel{\neg\rightarrow}{\rightarrow} (\exists X.\, \text{enBar}(X)) \wedge \forall Y.(\neg\text{enBar}(Y) \vee (\neg\neg\text{bebe}(Y) \wedge \exists Z.(\neg\neg\text{enBar}(Z) \wedge \neg\text{bebe}(Z))))$

$\stackrel{\neg\neg_e}{\rightarrow} (\exists X.\, \text{enBar}(X)) \wedge \forall Y.(\neg\text{enBar}(Y) \vee (\text{bebe}(Y) \wedge \exists Z.(\text{enBar}(Z) \wedge \neg\text{bebe}(Z))))$

$\stackrel{Skolem}{\rightarrow} (\text{enBar}(a)) \wedge \forall Y.(\neg\text{enBar}(Y) \vee (\text{bebe}(Y) \wedge (\text{enBar}(f(Y)) \wedge \neg\text{bebe}(f(Y)))))$

$\stackrel{\forall\leftarrow}{\rightarrow} \forall Y.(\text{enBar}(a) \wedge (\neg\text{enBar}(Y) \vee (\text{bebe}(Y) \wedge (\text{enBar}(f(Y)) \wedge \neg\text{bebe}(f(Y)))))$ `vale pues` $Y \notin fv(\text{enBar}(a))$

2.10 Ejercicio 18

Dadas las siguientes definiciones de Descendiente y Abuelo a partir de la relación Progenitor :

- $\{\neg\text{Progenitor}(X, Y),\ \text{Descendiente}(Y, X)\}$
- $\{\neg\text{Abuelo}(X, Y),\ \text{Progenitor}(X,\ \text{medio}(X, Y))\}$
- $\{\neg\text{Descendiente}(X, Y),\ \neg\text{Descendiente}(Y, Z),\ \text{Descendiente}(X, Z)\}$
- $\{\neg\text{Abuelo}(X, Y),\ \text{Progenitor}(\text{medio}(X, Y),\ Y)\}$

Demostrar usando resolución general que los nietos son descendientes; es decir, que

$\forall X\ \forall Y\ (\text{Abuelo}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$

Ayuda: tratar de aplicar el método a ciegas puede traer problemas. Conviene tener en mente lo que se quiere demostrar.

Vamos a numerar las cláusulas y renombrar

1. $\{\neg\text{Progenitor}(X_1, Y_1),\ \text{Descendiente}(Y_1, X_1)\}$
2. $\{\neg\text{Abuelo}(X_2, Y_2),\ \text{Progenitor}(X_2,\ \text{medio}(X_2, Y_2))\}$
3. $\{\neg\text{Descendiente}(X_3, Y_3),\ \neg\text{Descendiente}(Y_3, Z_3),\ \text{Descendiente}(X_3, Z_3)\}$
4. $\{\neg\text{Abuelo}(X_4, Y_4),\ \text{Progenitor}(\text{medio}(X_4, Y_4),\ Y_4)\}$

Tenemos que agregar la 5ta que es lo que queremos probar

$\neg(\forall X\ \forall Y\ (\text{Abuelo}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X)))$

$\stackrel{\neg\rightarrow}{\rightarrow} \neg\forall X\ \forall Y\ (\text{Abuelo}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$

$\stackrel{\neg\forall}{\rightarrow} \exists X\ \neg\forall Y\ (\text{Abuelo}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$

$\stackrel{\neg\forall}{\rightarrow} \exists X\ \exists Y\ \neg(\text{Abuelo}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$

$\stackrel{\Rightarrow_e}{\rightarrow} \exists X\ \exists Y\ \neg(\neg\text{Abuelo}(X, Y) \vee \text{Descendiente}(Y, X))$

$\stackrel{\neg\rightarrow}{\rightarrow} \exists X\ \exists Y\ (\neg\neg\text{Abuelo}(X, Y) \wedge \neg\text{Descendiente}(Y, X))$

$\stackrel{\neg\neg_e}{\rightarrow} \exists X\ \exists Y\ (\text{Abuelo}(X, Y) \wedge \neg\text{Descendiente}(Y, X))$

$\stackrel{Skolem}{\rightarrow} \exists Y\ (\text{Abuelo}(a, Y) \wedge \neg\text{Descendiente}(Y, a))$

$\stackrel{Skolem}{\rightarrow} \text{Abuelo}(a, b) \wedge \neg\text{Descendiente}(b, a)$

Ahora sí : $\{\{\text{Abuelo}(a,b)\}\{\neg\text{Descendiente}(b,a)\}\}$

5. $\{\text{Abuelo}(a,b)\}$
6. $\{\neg\text{Descendiente}(b,a)\}$

$\xrightarrow{3 \text{ y } 6}$ $\{\neg\texttt{Descendiente}(b,Y_3), \neg\texttt{Descendiente}(Y_3,a)\}$ con S_7 = $\{X_3$:= b, Z_3 := a$\}$

$\xrightarrow{5 \text{ y } 4}$ $\{\texttt{Progenitor}(\texttt{medio}(a,b),b)\}$ con S_8 = $\{X_4$:= a, Y_4 := b$\}$

$\xrightarrow{8 \text{ y } 1}$ $\{\texttt{Descendiente}(b,\texttt{medio}(a,b))\}$ con S_9 = $\{X_1$:= medio(a,b), Y_1 := b$\}$

$\xrightarrow{9 \text{ y } 7}$ $\{\neg\texttt{Descendiente}(\texttt{medio}(a,b),a)\}$ con S_{10} = $\{Y_3$:= medio(a,b)$\}$

$\xrightarrow{5 \text{ y } 4}$ $\{\texttt{Progenitor}(a,\texttt{medio}(a,b))\}$ con S_{11} = $\{X_4$:= a,Y_4 := b$\}$

$\xrightarrow{11 \text{ y } 1}$ $\{\texttt{Descendiente}(\texttt{medio}(a,b),a)\}$ con S_{12} = $\{X_1$:= a,Y_2 := medio(a,b)$\}$

$\xrightarrow{12 \text{ y } 10}$ $\{\}$

2.11 Ejercicio 19

Dadas las siguientes definiciones:

1. R es irreflexiva: $\forall X.\, \neg R(X,X)$
2. R es simétrica: $\forall X.\, \forall Y.\, (R(X,Y) \Rightarrow R(Y,X))$
3. R es transitiva: $\forall X.\, \forall Y.\, \forall Z.\, ((R(X,Y) \wedge R(Y,Z)) \Rightarrow R(X,Z))$
4. R es vacía: $\forall X.\, \neg\exists Y.\, R(X,Y)$

Utilizando resolución, demostrar que sólo una relación vacía puede cumplir a la vez las propiedades 1 a 3. Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD (y justificar).

Pasamos las fórmulas a su forma clausal

Está hecho en el resúmen de la clase práctica sobre Resolución.

Renombramos y Numeramos

1. $\{\neg R(X_1,X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2,Y_2), R(Y_2,X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3,Y_3), \neg R(Y_3,Z_3), R(X_3,Z_3)\}$
4. $\{R(a,b)\}$

Resolvemos

$\xrightarrow{4 \text{ y } 2}$ $\{R(b,a)\}$ con S_5 = { X_2 := a, Y_2 := b }

$\xrightarrow{5 \text{ y } 3}$ $\{\neg R(X_6,b), R(X_6,a)\}$ con S_6 = { Y_3 := b, Z_3 := a } renombramos X_3 a X_6

$\xrightarrow{6 \text{ y } 4}$ $\{R(a,a)\}$ con S_7 = { X_6 := a }

$\xrightarrow{7 \text{ y } 1}$ $\{\}$ con S_8 = { X_1 := a }

Es SLD?

Es resolución general, no es SLD ya que no siempre estamos resolviendo una Objetivo con una de Definición .

Otra forma (cambiando el objetivo) SLD

$\xrightarrow{1 \text{ y } 3} \{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\}$ con S_5 = { X_3 := X_1, Z_3 := X_1}

$\xrightarrow{5 \text{ y } 4} \{\neg R(b, a)\}$ con S_6 = { X_1 := a, Y_3 := b}

$\xrightarrow{6 \text{ y } 2} \{\neg R(a, b)\}$ con S_7 = { X_2 := a, Y_2 := b}

$\xrightarrow{7 \text{ y } 4} \{\}$

No es la única...

$\xrightarrow{1 \text{ y } 3} \{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\}$ con S_5 = { X_3 := X_1, Z_3 := X_1}

$\xrightarrow{5 \text{ y } 2} \{\neg R(X_2, Y_2)\}$ con S_6 = { X_1 := X_2, Y_3 := Y_2}

$\xrightarrow{6 \text{ y } 4} \{\}$ con S_7 = { X_2 := a, Y_2 := b}

2.12 Ejercicio 20

```
natural(cero).
natural(suc(X)) :- natural(X).

mayorOIgual(suc(X),Y) :- mayorOIgual(X,Y).
mayorOIgual(X,X) :- natural(X).
```

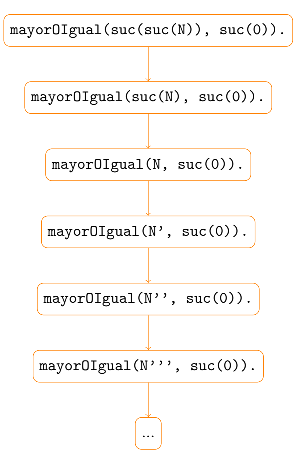
1. Qué sucede con la consulta `?- mayorOIgual(suc(suc(N)), suc(cero)).` ?

   ```
   % ERROR: Stack limit (1.0Gb) exceeded
   % ERROR:   Stack sizes: local: 0.9Gb, global: 87.9Mb, trail: 43.9Mb
   % ERROR:   Stack depth: 5,749,042, last-call: 0%, Choice points: 5,749,035
   % ERROR:   Possible non-terminating recursion:
   % ERROR:     [5,749,042] user:mayorOIgual(_23038330, <compound suc/1>)
   % ERROR:     [5,749,041] user:mayorOIgual(<compound suc/1>, <compound suc/1>)
   ```

   Si hacemos `trace`, lo que sucede es que :

   ```
   [trace] 7 ?- mayorOIgual(suc(suc(N)), suc(0)).
      Call: (10) mayorOIgual(suc(suc(_7688)), suc(0)) ? creep
      Call: (11) mayorOIgual(suc(_7688), suc(0)) ? creep
      Call: (12) mayorOIgual(_7688, suc(0)) ? creep
      Call: (13) mayorOIgual(_10652, suc(0)) ? creep
      Call: (14) mayorOIgual(_11466, suc(0)) ? creep
      Call: (15) mayorOIgual(_12280, suc(0)) ? creep
      ...
   ```

   Que si lo miramos como un árbol...

   Esto nos dice que como `N` no está instanciada, Prolog va a unificar `N` $\stackrel{?}{=}$ $suc(X)$ lo cual logra, y llama a esa otra variable *ad infinitum*. Esto sucede porque el caso base no es alcanzable para Prolog.

2. Queremos demostrar con resolución que la consulta es válida.

Pasamos todas las fórmulas a su forma clausal

(a) $\{natural(cero)\}$

(b) $natural(X) \Rightarrow natural(suc(X)) \rightsquigarrow \{\neg natural(X_b), natural(suc(X_b))\}$

(c) $mayorOIgual(X, Y) \Rightarrow mayorOIgual(suc(X), Y) \rightsquigarrow \{\neg mayorOIgual(X_c, Y_c), mayorOIgual(suc(X_c), Y_c)\}$

(d) $natural(X) \Rightarrow mayorOIgual(X, X) \rightsquigarrow \{\neg natural(X_d), mayorOIgual(X_d, X_d)\}$

(e) $\{\neg mayorOIgual(suc(suc(N)), suc(cero))\}$

Resolvemos

$\xrightarrow{\texttt{e y c}} \{\neg mayorOIgual(suc(N), suc(cero))\}$ `con` S_f `= {` X_c `:= suc(N) ,` Y_c `:= suc(cero)}`

$\xrightarrow{\texttt{f y c}} \{\neg mayorOIgual(N, suc(cero))\}$ `con` S_g `= {` X_c `:= N ,` Y_c `:= suc(cero)}`

$\xrightarrow{\texttt{g y d}} \{\neg natural(suc(cero))\}$ `con` S_h `= {` X_d `:= N ,` X_d `:= suc(cero)}`

$\xrightarrow{\texttt{h y b}} \{\neg natural(cero)\}$ `con` S_i `= {` X_b `:= cero}`

$\xrightarrow{\texttt{i y a}} \{\}$

3. Es SLD, arrancamos con una `Objective` y `Definition` y luego la aplicación siempre se hace con una cláusula que viene del paso anterior (todas son de Horn). Prolog no sigue este orden como ya vimos arriba.

2.13 Ejercicio 22

Se tiene el siguiente programa en Prolog :

```
preorder(nil,[]).
preorder(bin(I,R,D),[R|L]) :- append(LI,LD,L), preorder(I,LI), preorder(D,LD).

append([],YS,YS).
append([X|XS],YS,[X|L]) :- append(XS,YS,L).
```

Qué sucede al realizar la consulta : `?- preorder(bin(bin(nil,2,nil), 1, nil), lista)` ?

```
3 ?- preorder(bin(bin(nil,2,nil),1,nil),Lista).
Lista = [1, 2] ;
...
```

Tira ese resultado y si le pedimos más respuestas se cuelga.

Utilizar el método de resolución para encontrar la solución al problema

Primero convertimos todo el programa a forma clausal

1. $\{preorder(nil, [\,])\}$

2. $\{preorder(bin(I_2, R_2, D_2), [R_2|L_2]), \neg append(LI_2, LD_2, L_2), \neg preorder(I_2, LI_2), \neg preorder(D_2, LD_2)\}$

3. $\{append([\,], YS_3, YS_3)\}$

4. $\{append([X_4|XS_4], YS_2, [X_4|L_4]), \neg append(XS_4, YS_4, L_4)\}$

5. $\neg preorder(bin(bin(nil, 2, nil), 1, nil), Lista_5)$

Aplicamos el método de resolución

$\overset{2\ y\ 5}{\rightarrow} \{\neg append(LI_2, LD_2, L_2), \neg preorder(bin(nil, 2, nil), LI_2), \neg preorder(nil, LD_2)\}$

con S_6 = { $Lista_5$:= [uno|L_2], I_2 := bin(nil,2,nil), R_2 := uno,D_2 := nil }

$\overset{2\ y\ 6}{\rightarrow} \{\neg append(LI_7, LD_7, L_7), \neg preorder(I_7, nil), \neg preorder(nil, LD_7), \neg append([dos|L_7], LD_2, L_2), \neg preorder(nil, LD_2)\}$

renombrando LI_2, LD_2 y L_2 en 2...

con S_7 = { LI_2 := [dos | L_7], I_2 := nil, R_2 := dos, D_2 := nil }

$\overset{7\ y\ 1}{\rightarrow} \{\neg append([\,], [\,], L_7), \neg append([dos|L_7], [\,], L_2)\}$

con S_8 = { LD_2 := [ ], LD_7 := [ ], LI_7 := [ ]}

$\overset{8\ y\ 4}{\rightarrow} \{\neg append(L_7, [\,], L_4), \neg append([\,], [\,], L_7)\}$

con S_9 = { YS_4 := [ ], L_2 := [dos | L_4], X_4 := dos, XS_4 := L_7 }

$\overset{9\ y\ 3}{\rightarrow} \{\}$ con S_10 = { YS_3 := [ ],L_7 := [ ], L_4 := [ ]}

Se trata de Resolución SLD ?

No es SLD, fue resolución general no binaria ya que unificamos más de una cláusula de un tiro. Si hubiésemos hecho binaria, hubiera sido SLD. Son todas de Horn y sabemos que si hay una resolución existe resolución SLD. Recordar que en la SLD la resolución es lineal, todas las cláusulas son de Horn y arrancamos por una **Objetivo**.