

# 計測通論 C レポート (奈良先生担当分)

計数工学科 J4-210848 中根敦久

## 問題 1

(1)

原子間力顕微鏡は, 光てこによって微小な変位を光学的に拡大している. 本質的には, オプチメータと同じなのでこれを説明する. Figure1 のように, スピンドルが  $x$  だけ変位すると, てこは  $\theta = x/a$  だけ傾く. すると, 光の反射方向は  $d = 2L\theta = \frac{2L}{a}x$  だけ変位する. つまり  $x$  の微小変位が  $\frac{2L}{a}$  倍に拡大されている. 例えばオプチメータはこの原理によって  $\pm 100\mu\text{m}$  の範囲を最小目盛  $1\mu\text{m}$  で測ることができる.

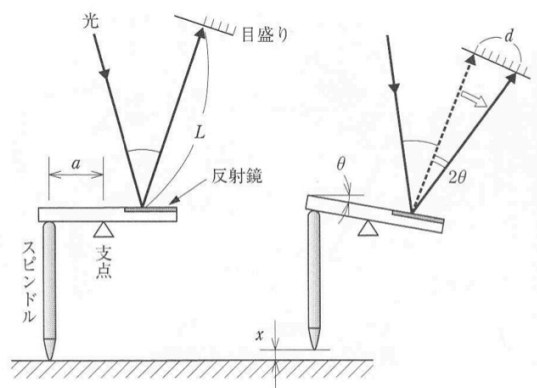


図 2.19 光てこを使った測微器 (オプチメータ) の原理

Figure1 参考文献 [1] より引用

(2)

$10^{-9}\text{N}$  ほどの微視的な原子間力によるカンチレバーの変位は, 前述の光てこ方式などによってレーザー光の反射角度に変換される. この計測に差動計測が用いられている. 差動計測の利点は, 妨害物理量の影響を排除し対象物理量の影響のみを残す点である. 例えば, 原子間力顕微鏡では, 反射光に対する光の 2 つのフォトダイオードの出力差を計測する. ここで両フォトダイオードに共通の外部磁場などの誤差 (妨害物理量) が加わったとき, 出力の差をとる限りその影響は現れない.

(3)

計測のフローを次のようなシステムとみなして, そのラプラス領域を考える. 測定物理量を  $D(s)$ , 測定器による物理量の変換 (微小な差動  $D(s)$  の増幅) を  $A(s)$  出力を  $V(s)$ , フィードバックによる制御器を  $G(s)$  とする.(Figure2)

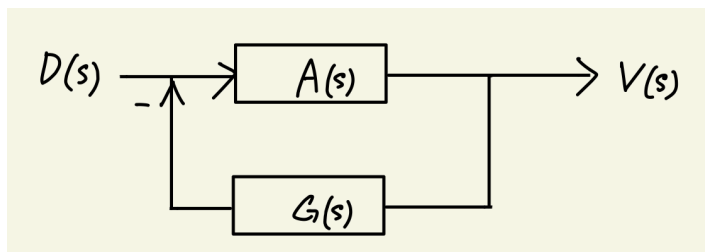


Figure2 フィードバックを用いた計測の模式図

さて, このシステムの伝達関数を計算すると, 次式のようになる.

$$V(s) = \frac{A(s)}{1 + G(s)A(s)} D(s) \quad (1)$$

ここで, ゲイン  $A(s)$  を十分大きく設定しておくと  $V(s) \simeq \frac{1}{G(s)} D(s)$  となる. つまり, 伝達関数は  $A(s)$  に依存せず, 測定中の増幅機の変化 (原子間力顕微鏡の例で言えば, カンチレバーの温度変化による変形) にロバストな計測が可能となる. 偏位法では増幅機の変化がそのまま不確かさに影響することと比較するとこれは大きな利点である. このように, 零位法では, 偏位法と異なり, 微小な差動計測を十分大きく増幅して計測することが可能である.

## 問題 2

$\Delta x, \Delta y$  を微小量として,  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_z(x, y)$  は次のように近似的に表せる.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_z(x, y) &\simeq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B(x, y + \Delta y) - B(x, y)}{\Delta y} \right) \\
 &\simeq \frac{\frac{B(x + \Delta x, y + \Delta y) - B(x + \Delta x, y)}{\Delta y} - \frac{B(x, y + \Delta y) - B(x, y)}{\Delta y}}{\Delta x} \\
 &= \frac{B(x + \Delta x, y + \Delta y) - B(x + \Delta x, y) - B(x, y + \Delta y) + B(x, y)}{\Delta x \Delta y}
 \end{aligned} \tag{2}$$

この表式から, 次のようなアイデアを得る. Figure3 のような小さな正方形のコイルを用意し, これを磁場中に置くと, コイルにはまさに 2 式に比例した誘導起電力が現れる. これを直交検波することで所望の  $B_z(x, y)$  を得られる. この計測方法の問題点は, 空間分解能がコイルの大きさのみに依存しており, 精密に作る必要があること, また座標軸に対して厳密に平行にコイルを設置しなければいけないことが挙げられる.

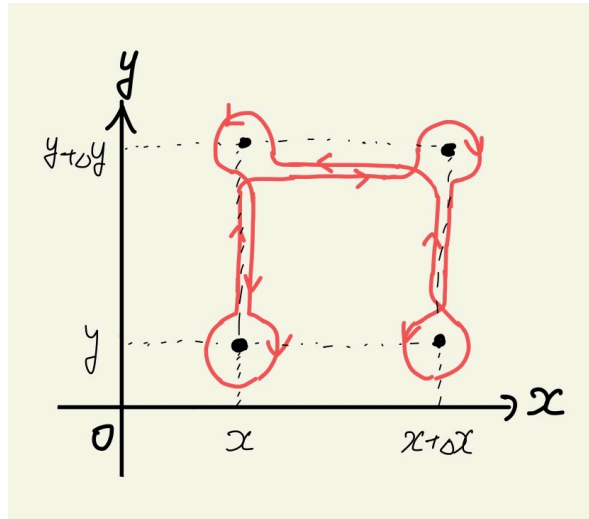


Figure3 コイルの作成例

### 問題 3

(1)

python3.6 のライブラリ pandas を用いてプロットした. 答えは Figure4 の通り.

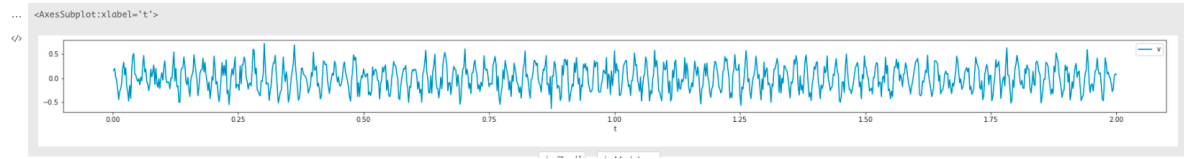


Figure4 信号のグラフ. 横軸が時刻を, 縦軸が信号のサンプル値を表す.

(2)

測定信号の角周波数が既知 ( $\omega_0 = 2\pi * 50\text{Hz} = 100\pi\text{Hz}$ ) であるので, 測定信号中のこの角周波数の正弦波成分の位相と振幅は直交検波によって求めることができる. 信号を時刻  $t$  の関数  $x(t)$  で表し, サンプルング時間を時刻 0s から  $T = 2\text{s}$  までとすると, 次のように振幅  $A$  と位相  $\phi$  を求められる.

$$I \equiv \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_0 t = \frac{A}{2} \cos \phi \quad (3)$$

$$Q \equiv \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_0 t = \frac{A}{2} \sin \phi \quad (4)$$

$$A = 2\sqrt{I^2 + Q^2} \quad (5)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{Q}{I} \quad (6)$$

なお, 実際には有限の数のデータがサンプリングされているので, 積分ではなく和を取って近似的にこの処理を行う. サンプルング間隔  $dt = 0.002\text{s}$  を用いて,

$$I \equiv \sum_{n=1}^{1000} x(t_n) \sin (\omega_0 t_n) dt \quad (7)$$

$$Q \equiv \sum_{n=1}^{1000} x(t_n) \cos (\omega_0 t_n) dt \quad (8)$$

とする. この計測では時間積分を取り, その過程で角周波数  $\omega_0$  の正弦波成分を増幅しており, 一方でノイズは相殺されるので, 相対的にノイズの影響を小さくできる.

(3)

python で Figure5 のように記述した. なお, 同じコードを GitHub(<https://github.com/Tonkyu/Masurement>) に掲載している. これより, およそ,  $A = 0.2993$ ,  $\phi = 1.0364$  と測定された.

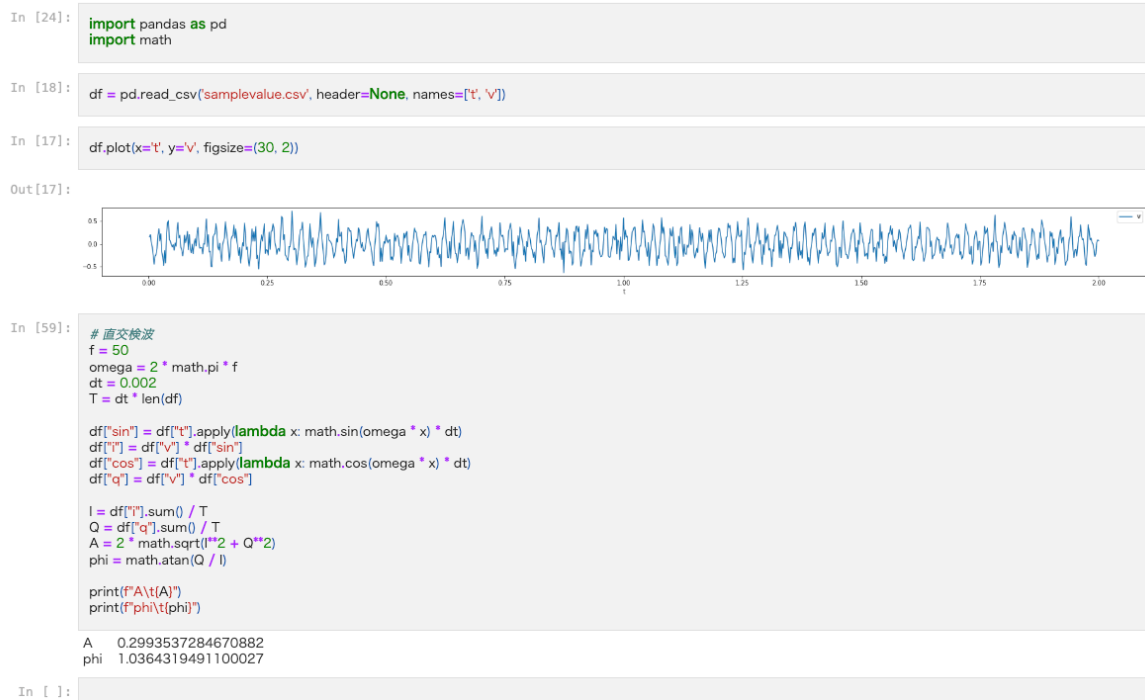


Figure5 Jupyter Notebook(Python3.6) での実行結果

## 問題 4

モアレ縞を用いた分解能の拡大を取り扱う。

### (1) 計測の原理

波数の近い 2 つの進行波を重ね合わせると、大きな包絡波が生まれ、その速度 (変調速度) が非常に速くなることで分解能を拡大する。

2 つの振幅の同じ進行正弦波  $W_1$  (波数  $k_1$ , 速度  $v_1$ ) と  $W_2$  (波数  $k_2$ , 速度  $v_2$ ) の重ね合わせを考えると、

$$\begin{aligned} & \cos(k_1(x - v_1 t)) + \cos(k_2(x - v_2 t)) \\ &= 2 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} \left(x - \frac{k_1 v_1 + k_2 v_2}{k_1 + k_2} t\right)\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \left(x - \frac{k_1 v_1 - k_2 v_2}{k_1 - k_2} t\right)\right) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。 $v_1$  と  $v_2$  がそれほど近い値でなければ、 $k_1 \simeq k_2$  から、変調速度  $\frac{k_1 v_1 - k_2 v_2}{k_1 - k_2}$  は位相速度  $\frac{k_1 v_1 + k_2 v_2}{k_1 + k_2}$  より非常に大きな値となる。つまり、微小な変位が拡大される。例として、ノギスを考える。主尺がの 1 目盛を  $1\text{mm}$ 、副尺の 1 目盛を  $19/20\text{mm}$  とする。これらの尺はそれぞれ波数が  $k_1 = 1\text{mm}^{-1}$ ,  $k_2 = 20/19\text{mm}^{-1}$  の正弦波とみなすことができる。そこで副尺を  $v$  で動かすと、変調速度は  $\frac{-k_2 v}{k_1 - k_2} = 20v$  となる。これはまさに副尺の微小な変位が、20 倍に拡大されて主尺と副尺の一致点の変位として現れることを意味する。

### (2) 興味を持った点

カーテンのなびきなどに見られる身近な現象が三角関数で数学的に説明でき、それを計測に応用しているところに、科学・工学の醍醐味が凝縮されていると感じた。また橋梁に縞模様のテープを貼付するのみで容易に非破壊検査ができる点が魅力的だった。

### (3) 改善の可能性

分解能の拡大を複数回重ねて行うことができると考えられる。先述のノギスの例に倣うと、分解能は  $-k_2/(k_1 - k_2)$  倍になり、変位は波数  $(k_1 - k_2)/2$  の波として現れる。ここで波数が  $k_3 \simeq (k_1 - k_2)/2$  である新たな波と重ね合わせればさらに変位が拡大される。

## References

- [1] 南茂夫, 木村一郎, 荒木勉. 講談社. はじめての計測工学, 2012 年