TEORIJA MREŽA I LINIJA

Nino Stojković

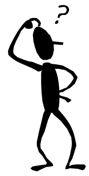
Izvanredni profesor

Literatura:

1. **Stojković N**., Naglić V., Mijat N.
   Teorija mreža i linija, Fintrade, Rijeka, 2005.

2. **Stojković N**., Mijat N.
   Analogna obrada signala, Fintrade, Rijeka, 2005.

3. **Stojković N**.
   Teorija mreža i linija - zbirka zadataka, Fintrade, Rijeka, 2005.

Kako (najlakše) proći ispit: 

a) Testovi 6 x 5bodova = 30 bodova (30%)

b) Kontrolne zadaće 3 x 15bodova =45 bodova (45%)

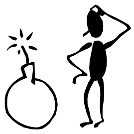
c) Domaće zadaće 5 x 5bodova = 25 bodova (25%)

Na kraju slijedi ocjena prema tablici:

Bodovi a) + b) + c)	Ocjena a) + b) + c)	Usmeni	Ocjena
85 - 100	5	NE	**5**
73 - 84	4	NE	**4**
61 - 72	3	NE	**3**
50 - 60	2	NE	**2**
45 - 49	-2	DA	-
0 - 44	1	-	

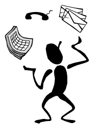
GRADIVO:

1.Mreže 

2.Topološka analiza mreža 

3.Funkcije mreža 

4.Sinteza dvopola 

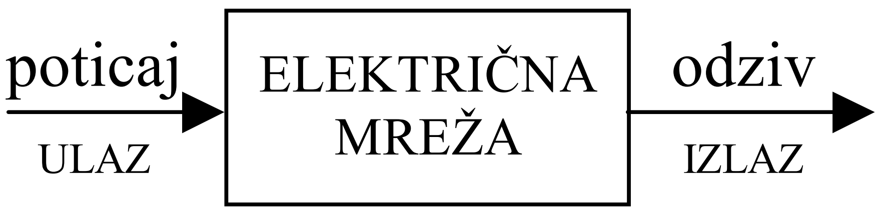
5.Četveropoli 

6.Filtri 

7.Linije 

1. MREŽE

Električna mreža - skup povezanih električkih elemenata između kojih vrijede određene električke zakonitosti.



Analiza sustava – poznati su poticaj i građa električne mreže, traži se odziv.

Sinteza sustava - poznati su poticaj i odziv, potrebno je odrediti elemente električne mreže

Električna mreža je geometrijska struktura međusobno povezanih idealiziranih elemenata od kojih svaki ima definiran odnos između dvije zavisne varijable.

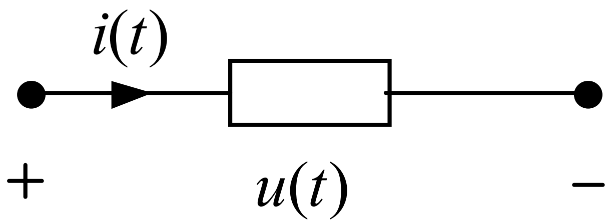
Stvarna električna mreža se predstavlja svojim matematičkim modelom s idealiziranim elementima

Geometrijski gledano, električna se mreža sastoji od grana i čvorova.

Svakom paru čvorova pridružena je vremenski zavisna varijabla napona $u(t)$, koja je definirana valnim oblikom i polaritetom.

Svakoj se grani postavlja vremenski zavisna varijabla struje $i(t)$, koja je definirana valnim oblikom i smjerom.

Napon i struja na određenoj grani su definirani odnosom



1.2. Klasifikacija električnih mreža

Zbijenost parametara

Sva se električna vrijednost nalazi u jednoj točki.
Vs.
Mreže s raspodijeljenim parametrima.

Linearnost

$$F\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 F\left[x_1(t)\right] + a_2 F\left[x_2(t)\right]$$

Nelinearne mreže svode se na linearne.

Vremenska nepromjenljivost

Odziv je neovisan o trenutku primjene poticaja.

ako je za pobudu $x(t)$ odziv $F[x(t)]$
onda je za pobudu $x(t-T)$ odziv $F[x(t-T)]$

Pasivnost

Pasivna mreža - prima (apsorbira) energiju.

Aktivna mreža - u određenim uvjetima daje energiju prema van.

Energija je integral snage u vremenu, a snaga umnožak napona i struje:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\cdot i(\tau) d\tau$$

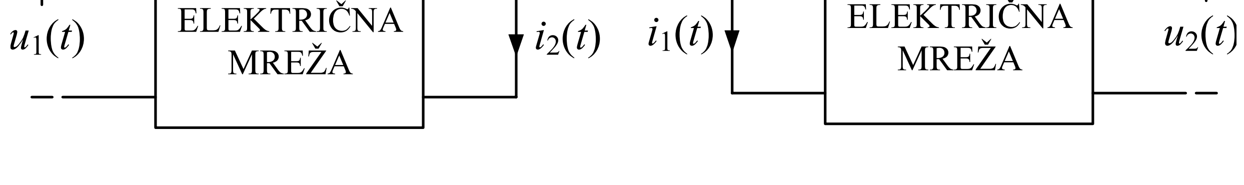
Pasivna mreža – integral je veći ili jednak 0.

Mreža bez gubitaka - integral je točno jednak nuli.

Aktivna mreža – integral je manji od 0.

Recipročnost

Zamjenom prilaza poticaja i odziva, njihov međusobni odnos ostaje isti.



Vrijedi: za $u_1(t)=u_2(t)$ slijedi $i_1(t)=i_2(t)$.

1.3. Elementi električnih mreža

nekoliko grupa prema građi i svojstvima

Pasivni dvopolni elementi

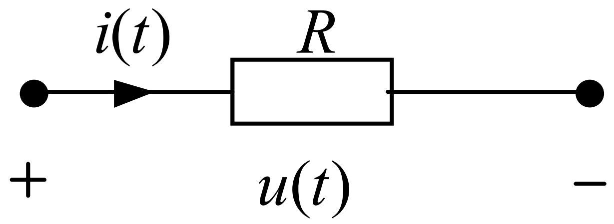
Višepolni elementi

Nezavisni izvori

Zavisni izvori

Pasivni dvopolni elementi

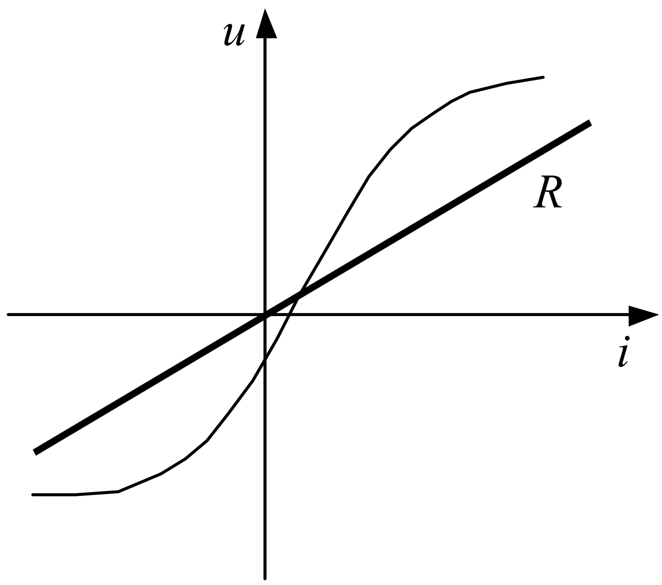
Otpor *R*



Za tako označen otpor vrijedi:

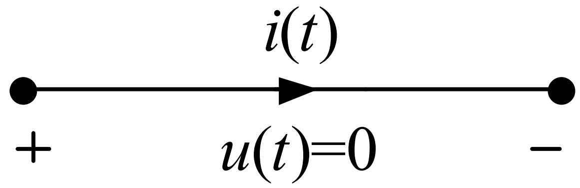
$$u(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = G \cdot u(t) \quad , \quad G = 1/R$$

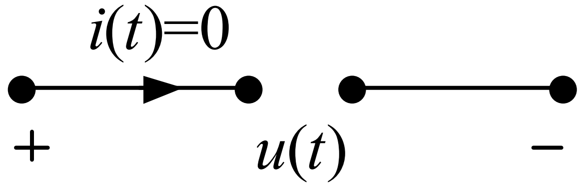


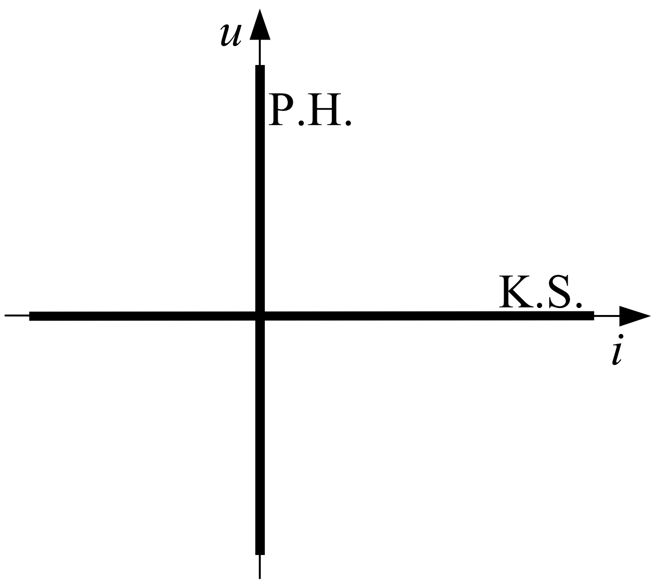
Dvije su karakteristične vrijednosti otpora:

a) R=0 , kratak spoj (K.S.) i tada je $u(t)$=0

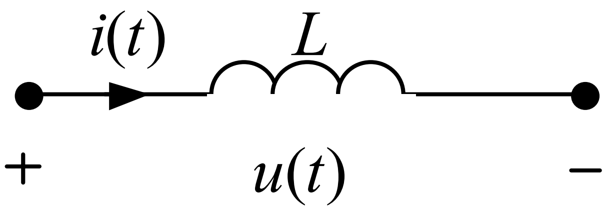


b) R=∞ , prazan hod (P.H.) i tada je $i(t)$=0





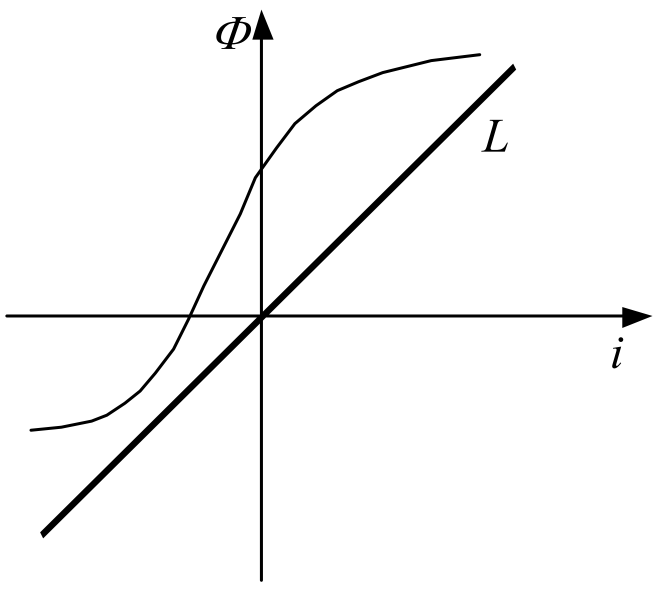
Induktivitet *L*



Za tako označen induktivitet vrijedi:

$$u(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt}$$

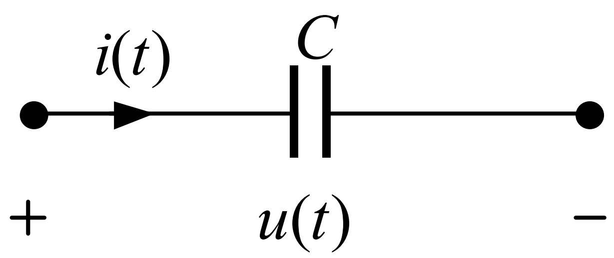
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$



$$\Phi(t) = L \cdot i(t)$$

$$\frac{d\,\Phi(t)}{dt} = u(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt}$$

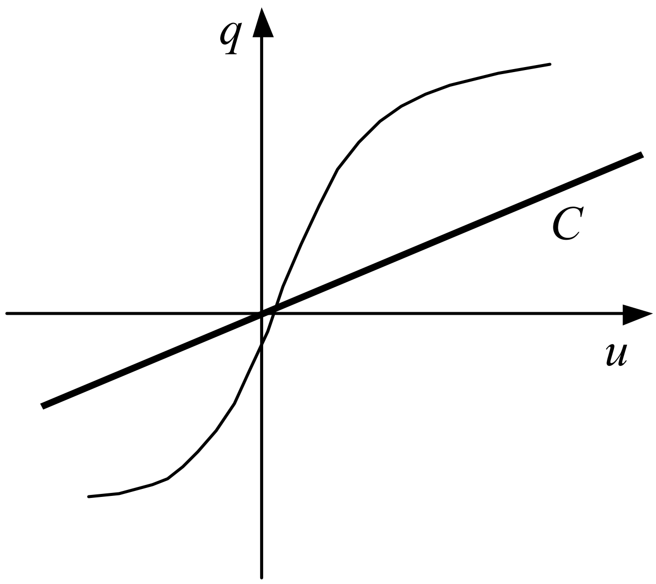
Kapacitet *C*



Za tako označen kapacitet vrijedi:

$$i(t) = C\,\frac{d\,u(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$



$$q(t) = C \cdot u(t)$$

$$\frac{d\,q(t)}{dt} = i(t) = C\,\frac{d\,u(t)}{dt}$$

$R \quad L \quad C$ recipročni elementi

$L \quad C$ elementi s memorijom

L: $\quad i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0}u(\tau)d\tau+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\tau)d\tau=i(0)+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\tau)d\tau$

C: $\quad u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0}i(\tau)d\tau+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}i(\tau)d\tau=u(0)+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}i(\tau)d\tau$

Struja $i(0)$ i napon $u(0)$ - početna stanja u trenutku t=0

Dok je na induktivitetu napon konačan (ograničen), struja se ne može skokovito promijeniti.

U trenutku ukapčanja induktiviteta u mrežu napon se javi odmah, a struja postepeno raste.

Dok je na kapacitetu struja konačna, napon se ne može skokovito promijeniti.

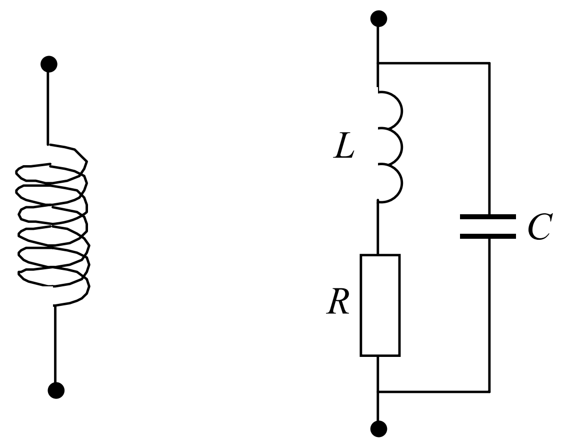
U trenutku ukapčanja kapaciteta u mrežu struja poteče odmah, a napon se postepeno javlja.

Idealiziranost elemenata

elementi su: otpornik zavojnica kondenzator

svojstva su: otpor induktivitet kapacitet

primjer: zavojnica



žica ima svoj otpor - R

N zavoja uzrokuje induktivitet - L

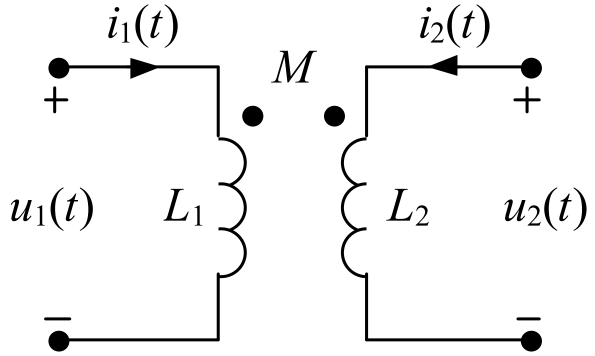
električki izolirani zavoji daju kapacitet - C

Višepolni elementi

Vezani induktiviteti

Pojava napona na jednom paru priključnica ako je na drugom paru vremenski promjenljiva struja.

Dva magnetski vezana induktiviteta.



$$M = k \cdot \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\Phi_1(t) = L_1 \cdot i_1(t) + M \cdot i_2(t)$$
$$\Phi_2(t) = M \cdot i_1(t) + L_2 \cdot i_2(t)$$

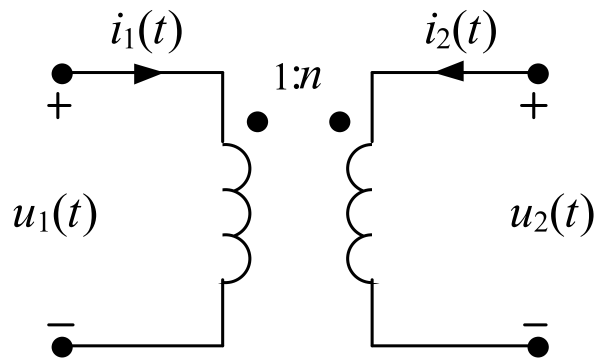
$$u_1(t) = L_1 \frac{d\, i_1(t)}{dt} + M \frac{d\, i_2(t)}{dt}$$
$$u_2(t) = M \frac{d\, i_1(t)}{dt} + L_2 \frac{d\, i_2(t)}{dt}$$

Promjena jednog smjera struje ili promjena jednog polariteta napona mijenja predznak te veličine u jednadžbama, a promjena položaja jedne točke međuinduktivne veze mijenja predznak međuinduktivitetu M.

Idealan transformator

Prebacivanje (transformacija) napona i struja s jednog para priključnica na drugi.

Omogućeno odvajanje strujnih krugova.



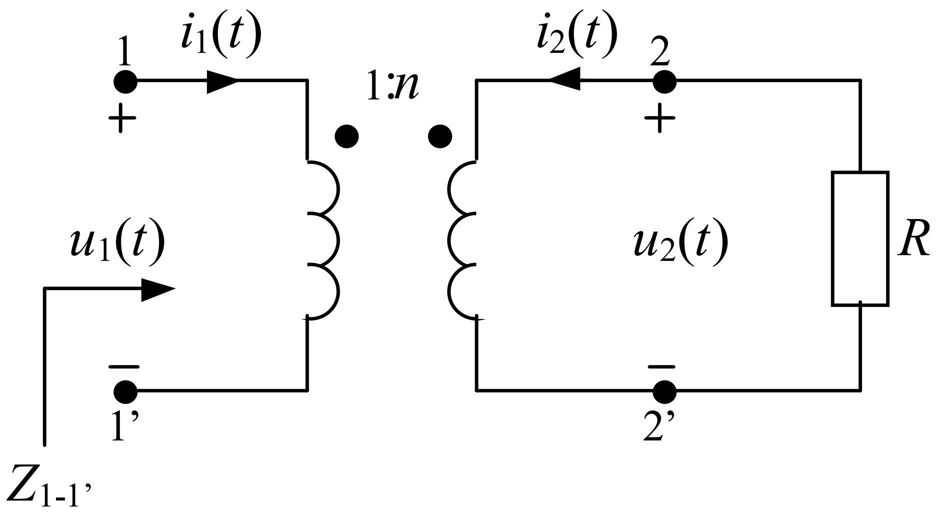
Definicijske jednadžbe idealnog transformatora:

$$u_2(t) = n \cdot u_1(t)$$

$$i_2(t) = -\frac{1}{n} i_1(t)$$

Promjena jednog smjera struje ili promjena jednog polariteta napona mijenja predznak te veličine u jednadžbi, a promjena položaja jedne točke transformatorske veze mijenja predznak u obje jednadžbe (množenje s –1). Promjena omjera transformacije iz 1:n → n:1 u jednadžbama mijenja n → 1/n.

Prebacivanje impedancije:



$$u_1(t) = \tfrac{1}{n} u_2(t) = \tfrac{1}{n}\left(-R\, i_2(t)\right) = \tfrac{1}{n}\left(-R\left(-\tfrac{1}{n} i_1(t)\right)\right) = \frac{1}{n^2} R \cdot i_1(t)$$

Transformator skalira impedanciju:

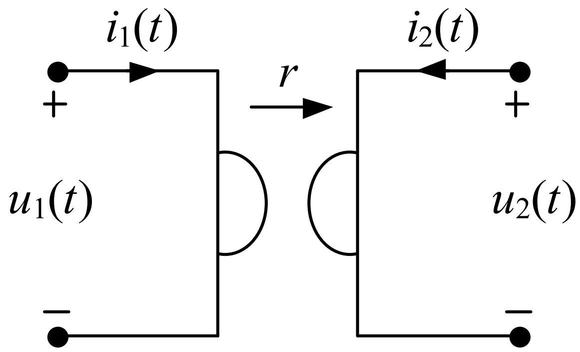
u slučaju omjera transformacije *1:n* dobivena je impedancija n^2 puta manja od zaključne.

u slučaju omjera *n:1* impedancija je na ulazu n^2 puta veća od zaključne.

Prilagođavanje mreža po impedancijama.

Girator

Veza između napona na jednim priključnicama i struje na drugim priključnicama.



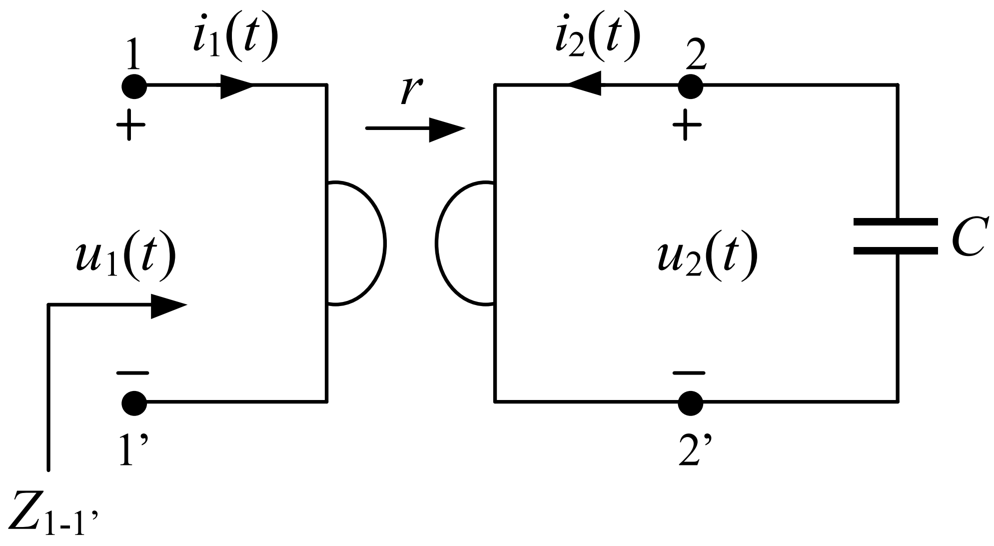
Definicijske jednadžbe giratora:

$$u_1(t) = r \cdot i_2(t)$$

$$i_1(t) = -\frac{1}{r} u_2(t)$$

Promjena jednog smjera struje ili promjena jednog polariteta napona mijenja predznak te veličine u jednadžbi, a promjena smjera zakretanja mijenja predznak u obje jednadžbe (množenje s –1).

Pretvorba tipa impedancije:



$$u_1(t) = r \cdot i_2(t) = r\left(-C\frac{d\,u_2(t)}{dt}\right) = r\left(-C\left(-r\frac{d\,i_1(t)}{dt}\right)\right) = r^2 C\frac{d\,i_1(t)}{dt}$$

Definicijska jednadžba induktiviteta

$$u(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt}$$

daje

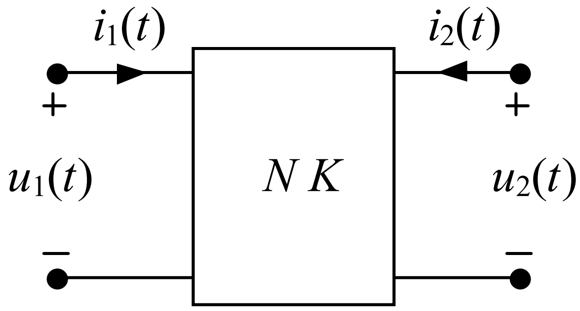
$$L_{ekv.} = r^2 C$$

U praksi: lakše realizirati precizan kapacitet nego precizan induktivitet.

Girator nije recipročan element za razliku od prva dva opisana četveropolna pasivna elementa.

Negativni konvertor

Mijenja predznak napona ili struje, tj. impedancije.



Definicijske jednadžbe negativnog konvertora:

$$u_1(t) = k \cdot u_2(t)$$
$$i_1(t) = \frac{1}{k} i_2(t)$$

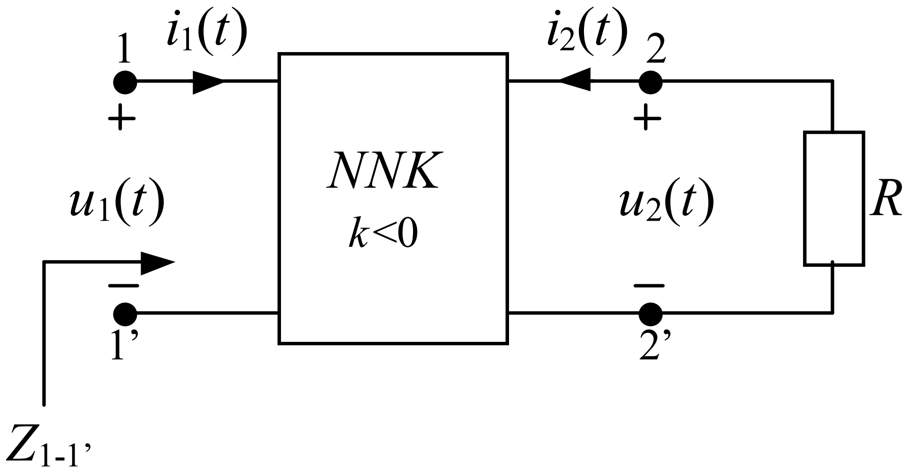
Faktor k je omjer pretvorbe (konverzije):

za $k>0$ - strujno invertirani tip

za $k<0$ - naponsko invertirani tip

Promjena jednog smjera struje ili promjena jednog polariteta napona mijenja predznak te veličine u jednadžbi, (množenje s –1).

Promjena predznaka impedancije:



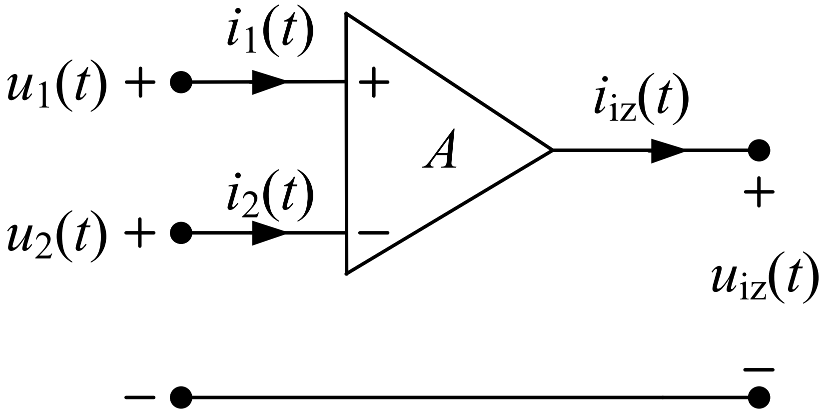
$$Z_{1-1'} = \frac{u_1(t)}{i_1(t)} = \frac{-|k| \cdot u_2(t)}{-\left|\frac{1}{k}\right| i_2(t)} = \frac{-|k|\left(-R \cdot i_2(t)\right)}{-\left|\frac{1}{k}\right| i_2(t)} = -k^2 R$$

Ovisno da li je k veće ili manje od 1 to će i dobiveni otpor biti veći ili manji od zaključnog otpora R.

Za k=1 otporu R se samo promijeni predznak.

Operacijsko pojačalo

Aktivni element mreža (napajanje):



Definicijske jednadžbe operacijskog pojačala:

$$i_1(t) = i_2(t) = 0$$

$$A \to \infty$$

$$\underline{u_{iz}(t) = A[u_1(t) - u_2(t)]}$$

Jednadžba izlaznog napona pojačala:

$$u_{iz}(t) = A\left[u^+(t) - u^-(t)\right]$$

u^+ - napon na plus ulazu, a u^- - napon na minus ulazu.

Idealno pojačalo:

beskonačan ulazni otpor

izlazni otpor jednak nuli

Realno pojačalo:

ulazne struje stotinjak pA

A 300000-500000

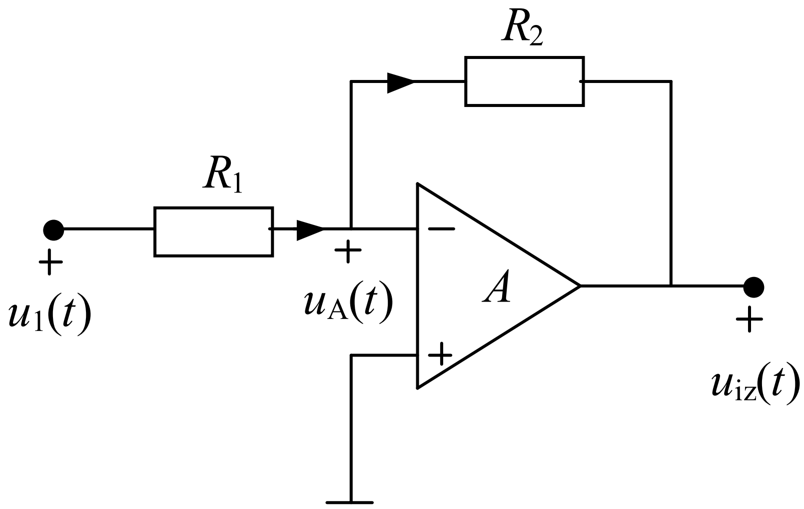
ulazni otpor stotinjak MΩ

izlazni otpor nekoliko desetaka Ω

Matematičke operacije (povratna veza):

zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje

Množenje s konstantom:



Struja kroz R_1: $$i_{R1}(t)=\frac{u_1(t)-u_A(t)}{R_1}$$

ulazna struja u pojačalo jednaka nuli → sva struja kroz R_1 ide kroz R_2

$$i_{R2}(t)=\frac{u_A(t)-u_{iz}(t)}{R_2}$$

Izjednačenjem struja slijedi:

$$u_A(t)=\frac{\dfrac{u_1(t)}{R_1}+\dfrac{u_{iz}(t)}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$$

Definicijska jednadžba pojačala:

$$u_{iz}(t) = -A\,u_A(t)$$

Dobije se:

$$u_{iz}(t)\left[1 + A\,\frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\right] = -A\,\frac{\frac{u_1(t)}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$

Dijeljenjem s pojačanjem A i primjenom $A \to \infty$ slijedi:

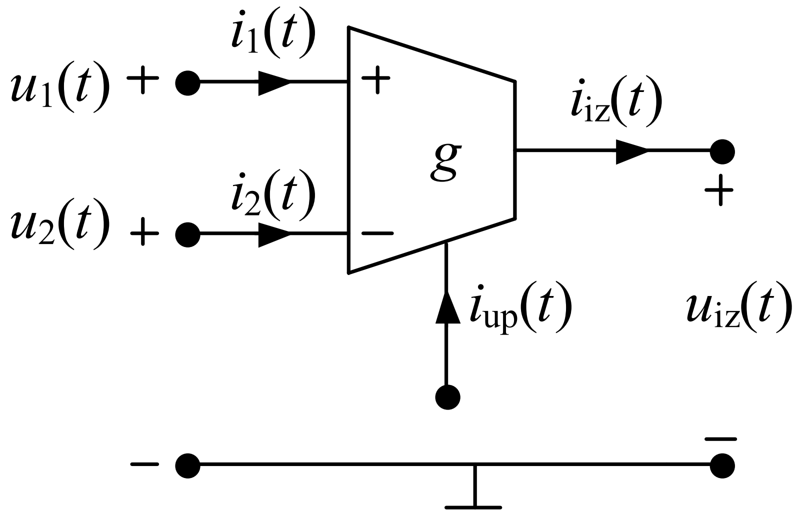
$$\frac{u_{iz}(t)}{R_2} = -\frac{u_1(t)}{R_1}$$

$$u_{iz}(t) = -\frac{R_2}{R_1}\,u_1(t)$$

U slučaju kapaciteta u povratnoj vezi može se ostvariti deriviranje ili integriranje ulaznog napona.

Strminsko pojačalo

Aktivni element mreža (napajanje):



Definicijske jednadžbe strminskog pojačala:

$$i_1(t) = i_2(t) = 0$$

$$i_{iz}(t) = g[u_1(t) - u_2(t)]$$

$$g = 20 i_{up}(t)$$

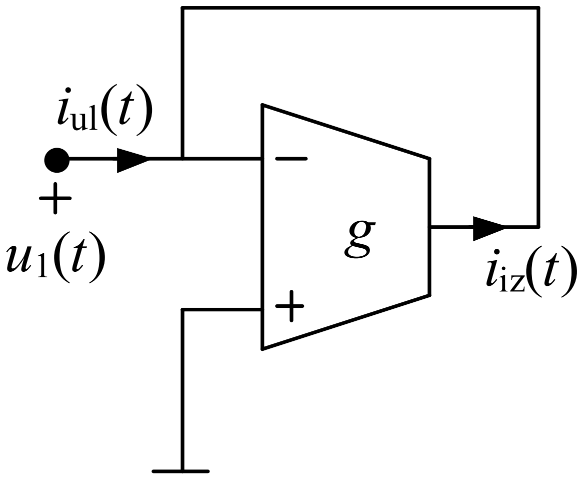
I_{up} - upravljačka struja $\qquad$ g - strmina

Jednadžba izlazne struje pojačala:

$$i_{iz}(t) = g\left[u^+(t) - u^-(t)\right]$$

u^+ - napon na plus ulazu, a u^- - napon na minus ulazu.

Upravljivi otpor:



Izlazna struja iz pojačala:

$$i_{iz}(t) = -g\,u_1(t)$$

iz slike:

$$i_{iz}(t) = -i_{ul}(t)$$

vrijedi:

$$R_{ul} = \frac{u_1(t)}{i_1(t)} = \frac{u_1(t)}{-(-g\,u_1(t))} = \frac{1}{g}$$

Na ulazu - uzemljeni otpor promijenljivog otpora $1/g$.

Kako se mijenja upravljačka struja I_{up} tako se mijenja i strmina g, a time (obrnuto proporcionalno) i otpor R_{ul}.

Nezavisni izvori

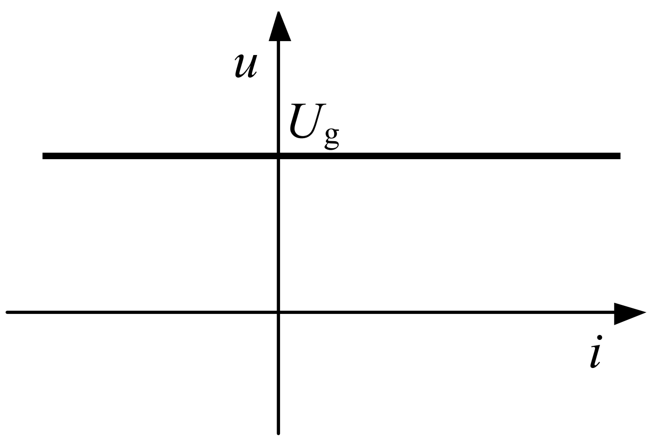
Dvopoli koji daju energiju u mrežu

Iznos napona odnosno struje, ovisno o tipu izvora, pri tome ne ovisi o tome što je na njih priključeno.

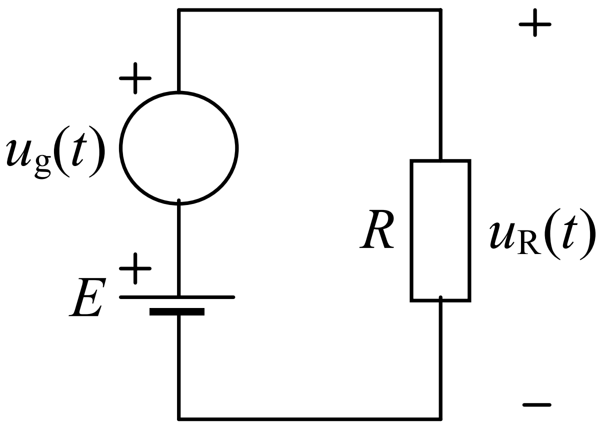
Nezavisni naponski izvor

Daje napon određenog valnog oblika bez obzira što je na njega spojeno.

Naponsko-strujna karakteristika:



Serijski spoj dozvoljen



Za $u_g(t)$: $$u_g(t) = U_g \sin \omega t$$

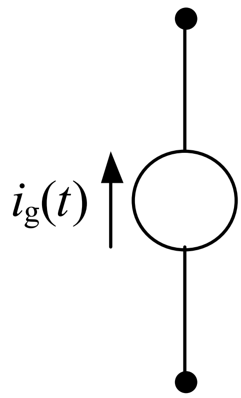
na otporu *R*

$$u_R(t) = E + U_g \sin \omega t$$

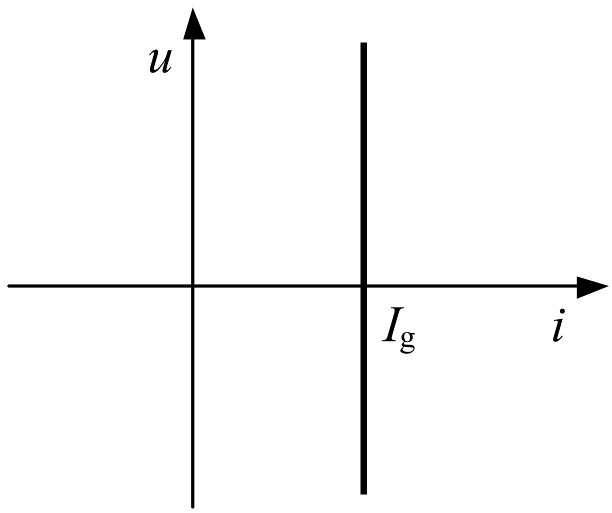
Paralelno vezanje naponskih izvora dopušteno je samo za istovrsne izvore istih iznosa.

Nezavisni strujni izvor

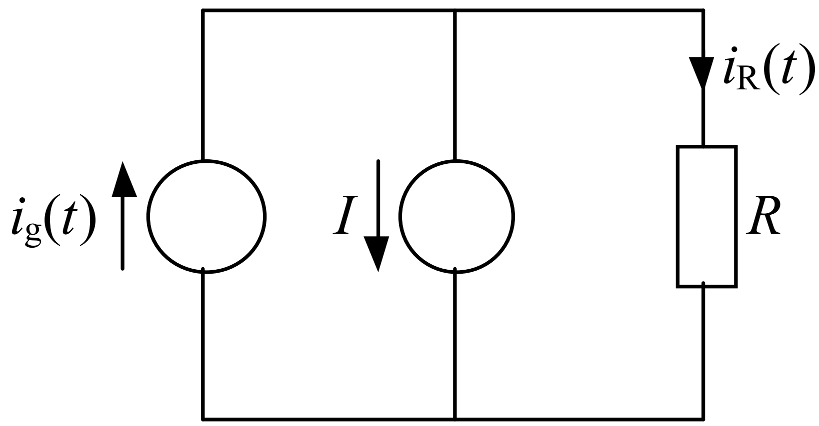
Daje struju određenog valnog oblika bez obzira što je na njega spojeno.



Naponsko-strujna karakteristika:



Paralelni spoj dozvoljen



Za $i_g(t)$: $$i_g(t) = I_g \cos \omega t$$

kroz otpor R

$$i_R(t) = I_g \cos \omega t - I$$

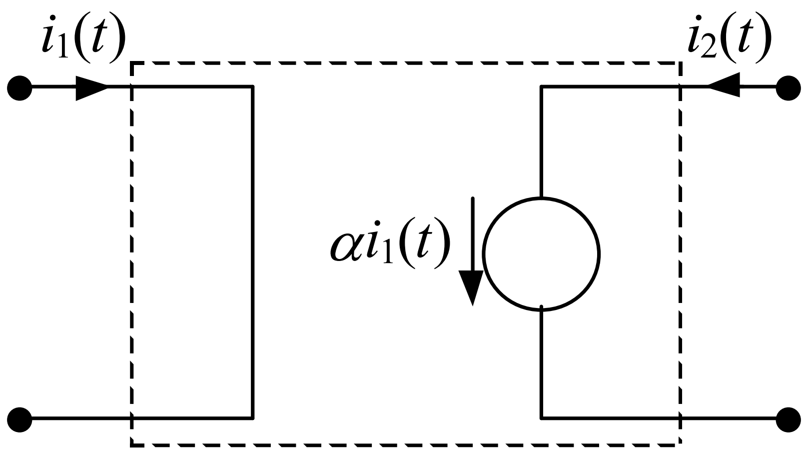
Serijsko vezanje strujnih izvora dopušteno je samo za istovrsne izvore istih iznosa.

Zavisni izvori

Zavisni (upravljani) izvori po građi su četveropolni elementi.

Iznos zavisnih izvora ovisi o nekom parametru u mreži.

Strujno zavisni strujni izvor



Izlazna struja je po definiciji strujno zavisnog strujnog izvora jednaka:

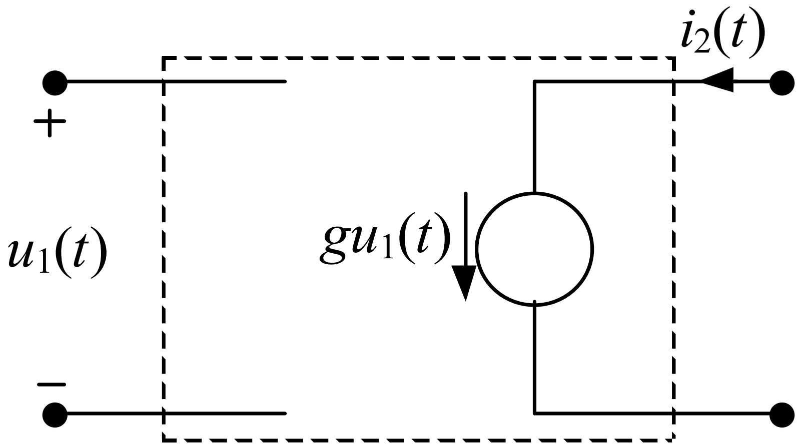
$$i_2(t) = \alpha\, i_1(t)$$

α - faktor zavisnosti, prijenosni omjer struja

$i_1(t)$ - zavisna veličina

Negativni konvertor je strujno zavisni strujni izvor.

Naponsko zavisni strujni izvor



Izlazna struja je po definiciji naponsko zavisnog strujnog izvora jednaka:

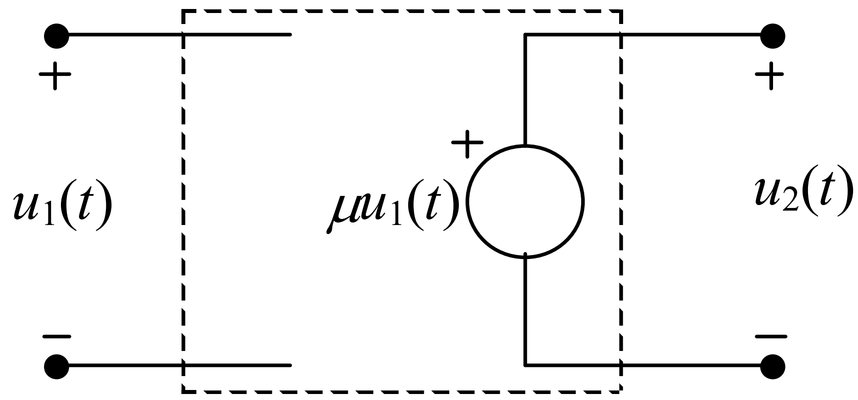
$$i_2(t) = g\,u_1(t)$$

g - faktor zavisnosti, prijenosna vodljivost

$u_1(t)$ - zavisna veličina

Strminsko pojačalo je naponsko zavisni strujni izvor.

Naponsko zavisni naponski izvor



Izlazni napon je po definiciji naponsko zavisnog naponskog izvora jednak:

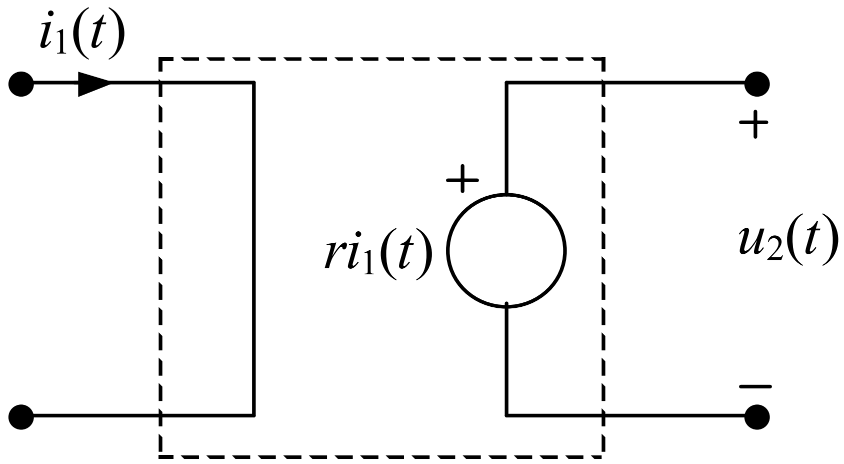
$$u_2(t) = \mu\, u_1(t)$$

μ - faktor zavisnosti, prijenosni omjer napona

$u_1(t)$ - zavisna veličina.

Operacijsko pojačalo je naponsko zavisni naponski izvor.

Strujno zavisni naponski izvor



Izlazni napon je po definiciji strujno zavisnog naponskog izvora jednak:

$$u_2(t) = r\, i_1(t)$$

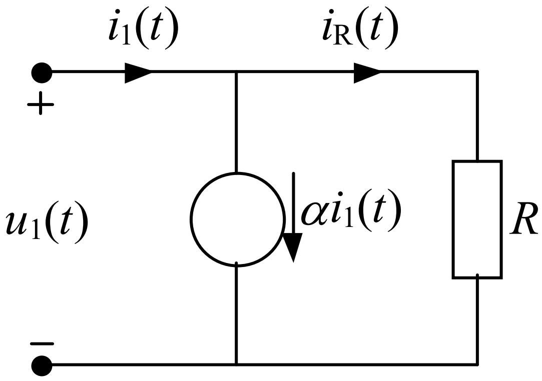
r - faktor zavisnosti, prijenosna otpornost

$i_1(t)$ - zavisna veličina.

U svojoj osnovi, girator je strujno zavisni naponski izvor.

Zavisni izvori služe za modeliranje raznih električnih uređaja koji imaju u sebi sadržanu prirodu zavisnih izvora, npr. tranzistor.

Primjer - dobivanje negativnih otpora



Ulazni otpor jednak je:

$$R_{ul} = \frac{u_1(t)}{i_1(t)} = \frac{R \cdot i_R(t)}{i_1(t)} = \frac{R\left(i_1(t) - \alpha i_1(t)\right)}{i_1(t)} = (1-\alpha)R$$

Postavivši faktor zavisnosti α tako da bude veći od 1, na ulazu je ostvaren ekvivalentni negativni otpor

$$R_{ekv} = -|1 - \alpha|\, R$$

1.4. Metode rješavanja mreža

analiza mreža - poznata mreža (zadana elementima)
poznat ili poticaj ili odziv mreže

riješiti mrežu - odrediti električne veličine u mreži; napone i struje

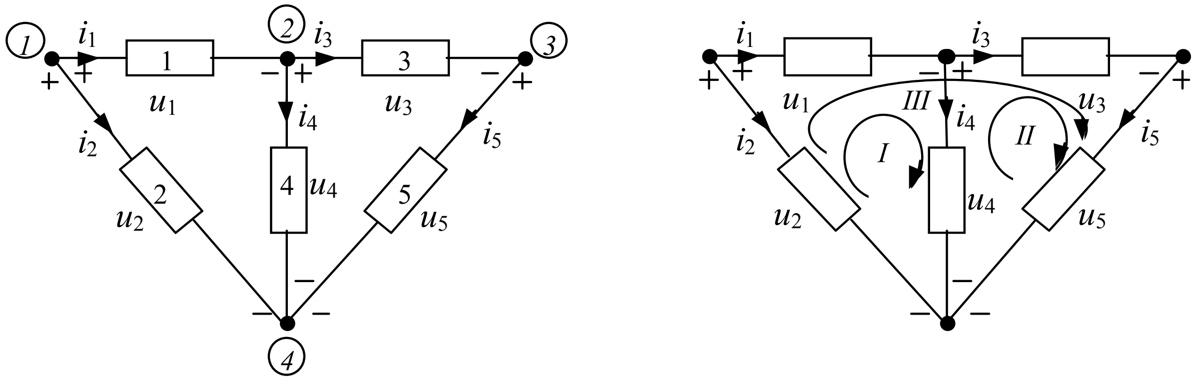
sustav *n*-jednadžbi s *n*-nepoznanica poštujući električne zakonitosti.

Kirchhoffovi zakoni

mreža - skup grana i čvorova

Svakoj se grani pridruži jedna funkcija napona, napon grane u_g i jedna funkcija struje, struja grane i_g između kojih postoji definiran odnos.

Primjer: električna mreža s čvorovima i petljama



- brojevi pridjeljeni čvorovima, granama i petljama su proizvoljni

- smjer strelice, odnosno struje grane je također proizvoljan, po dogovoru plus polaritet napona grane je na čvoru iz kojeg struja izlazi, a minus na čvoru u koji grana ulazi

Prvi Kirchhoffov zakon, odnosno Kirchhoffov zakon za struje (KZS) kaže da je algebarska suma svih struja grana koje su vezane na neki čvor jednaka nuli.

Pri tome ulazne struje idu s jednim predznakom (ili pozitivnim ili negativnim), a izlazne struje sa suprotnim predznakom (ili negativnim ili pozitivnim).

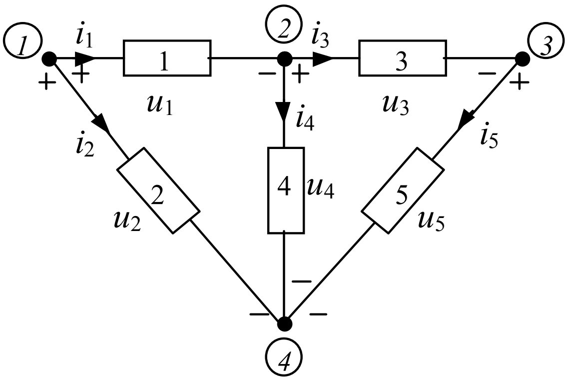
Drugi Kirchhoffov zakon, odnosno Kirchhoffov zakon za napone (KZN) kaže da je algebarska suma svih napona grana u nekoj zatvorenoj petlji jednaka nuli.

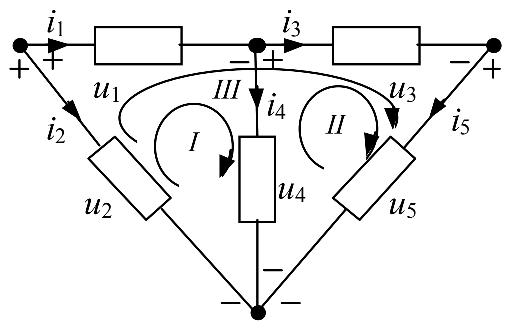
Pri tome porasti napona idu s jednim predznakom (ili pozitivnim ili negativnim), a padovi napona sa suprotnim predznakom (ili negativnim ili pozitivnim).

Pri tome se kao porast napona smatra napon kod kojeg prvo u smjeru obilaska petlje naiđemo na minus polaritet, a onda na plus, a za pad napona se smatra napon kod kojeg u smjeru obilaska petlje prvo naiđemo na plus polaritet, a zatim na minus.

KZS i KZN - linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

Kirchhoffovi zakoni ne uzimaju u obzir vrstu elementa u grani, ali za potpuno rješavanje mreže mora biti poznat svaki element jer će on dati vezu između struje i napona grane te će se na taj način nadopuniti sustav jednadžbi.





KZS:

$$
\begin{array}{ll}
1 & i_1 + i_2 = 0 \\
2 & -i_1 + i_3 + i_4 = 0 \\
3 & -i_3 + i_5 = 0 \\
4 & -i_2 - i_4 - i_5 = 0
\end{array}
$$

KZN:

$$
\begin{array}{ll}
I & u_1 + u_4 - u_2 = 0 \\
II & u_3 + u_5 - u_4 = 0 \\
III & u_1 + u_3 + u_5 - u_2 = 0
\end{array}
$$

- 7 jednadžbi - 2 suvišne (linearna kombinacija)

- sustav 5 linearno nezavisnih jednadžbi (tri iz KZS i dvije iz KZN) s 10 nepoznanica (pet struja grana i pet napona grana)

- 5 jednadžbi slijede iz poznavanja elemenata u grani te iz toga pripadnih naponsko strujnih odnosa

Ako je u grani 1 bio poznati otpor *R* tada je šesta jednadžba:

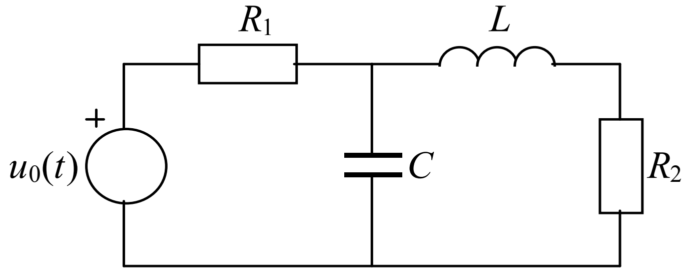
$$u_1 = R \cdot i_1$$

i tako dalje za ostale grane, odnosno jednadžbe.

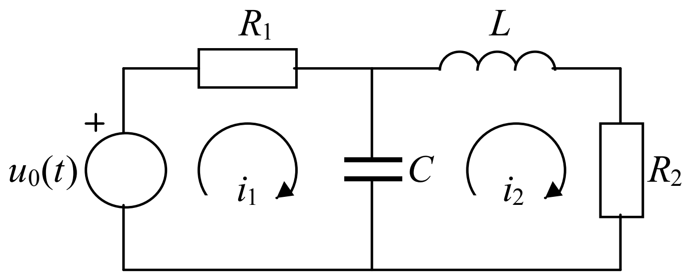
Jednadžbe petlji

Jednadžbe petlji su naponske jednadžbe čijim se rješenjem dobivaju struje petlji (proizlaze iz KZN).

Primjer: zadana je mreža sa svojim elementima



potrebno je odrediti petlje i struje kroz njih, oznake i smjerovi petlji su proizvoljni



U vremenskoj domeni:

$$(1) \quad u_0(t) = i_1(t)\cdot R_1 + \frac{1}{C}\int_0^t [i_1(\tau) - i_2(\tau)]d\tau$$

$$(2) \quad 0 = L\frac{d\,i_2(t)}{dt} + i_2(t)\cdot R_2 + \frac{1}{C}\int_0^t [i_2(\tau) - i_1(\tau)]d\tau$$

Neka se do trenutka t=0 ništa nije događalo pa donja granica integrala može biti 0, a početne vrijednosti napona na kapacitetu i struje u induktivitetu jednake su nuli.

Jednadžbe petlji u frekvencijskoj domeni:

$$(1) \quad U_0(s) = I_1(s) \cdot R_1 + \frac{1}{C}\left[\frac{I_1(s)}{s} - \frac{I_2(s)}{s}\right]$$

$$(2) \quad 0 = L[s \cdot I_2(s) - i_2(0)] + I_2(s) \cdot R_2 + \frac{1}{C}\left[\frac{I_2(s)}{s} - \frac{I_1(s)}{s}\right]$$

integriranje - dijeljenje sa s

deriviranje - množenje sa s

frekvencijska domena - velika slova

vremenska domena - mala slova

$$(1) \quad I_1(s)\left(R_1 + \frac{1}{sC}\right) - I_2(s)\frac{1}{sC} = U_0(s)$$

$$(2) \quad -I_1(s)\frac{1}{sC} + I_2(s)\left(R_2 + sL + \frac{1}{sC}\right) = 0$$

algoritam za pisanje jednadžbi petlji:

Zapisati struju za koju se piše jednadžba puta sve impedancije grana unutar te petlje plus/minus struja susjedne petlje puta zajedničke impedancije jednako je sumi porasta napona aktivnih izvora u smjeru obilaska petlje minus suma padova napona aktivnih izvora. Ako se smjerovi struja podudaraju na zajedničkim impedancijama onda je predznak plus, a za suprotne smjerove je predznak minus.

Impedancije su: kapaciteta $Z_C=1/sC$, induktiviteta $Z_L=sL$ i otpora $Z_R=R$.

Jednadžbe mreže u stacionarnom stanju - završile su prijelazne pojave u mreži

vrijedi supstitucija $s \rightarrow j\omega$ (frekvencijska domena)

Jednadžbe postaju:

$$(1) \quad I_1\left(R_1+\frac{1}{j\omega C}\right)-I_2\frac{1}{j\omega C}=U_0$$

$$(2) \quad -I_1\frac{1}{j\omega C}+I_2\left(R_2+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)=0$$

naponi i struje su fazori

dobiven je sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice.

struje petlji su struje kroz vanjske elemente petlji, a kroz unutrašnje elemente teče suma odnosno (u ovom slučaju) razlika struja petlji

Jednadžbe čvorova

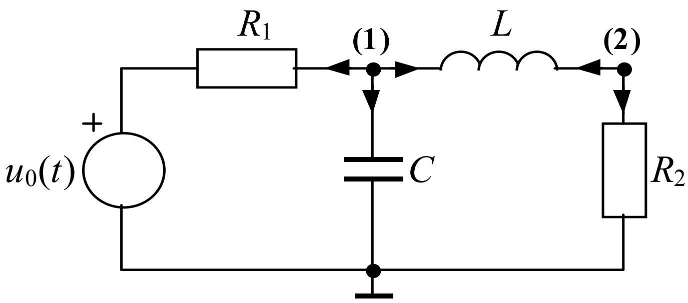
Jednadžbe čvorova su strujne jednadžbe čijim se rješenjem dobivaju naponi čvorova (proizlaze iz KZS).

<u>Primjer:</u> zadana je ista mreža

potrebno je postaviti čvorove i napone na njima.

napon čvora - potencijal čvora prema zemlji

Jedan čvor, proizvoljno koji, obavezno se uzemlji, tj. pridjeli mu se nulti potencijal, $U_Č$=0.



U vremenskoj domeni:

$$(1) \quad \frac{u_1(t)-u_0(t)}{R_1}+C\frac{d\,u_1(t)}{dt}+\frac{1}{L}\int_0^t[u_1(\tau)-u_2(\tau)]d\tau=0$$

$$(2) \quad \frac{1}{L}\int_0^t[u_2(\tau)-u_1(\tau)]d\tau+\frac{u_2(t)}{R_2}=0$$

Ponovo vrijedi da se do trenutka t=0 ništa nije događalo pa donja granica integrala može biti 0, a početne vrijednosti napona na kapacitetu i struje u induktivitetu jednake su nuli.

U frekvencijskoj domeni:

$$(1) \quad \frac{U_1(s)}{R_1} - \frac{U_0(s)}{R_1} + C[s \cdot U_1(s) - u_1(0)] + \frac{1}{L}\left[\frac{U_1(s)}{s} - \frac{U_2(s)}{s}\right] = 0$$

$$(2) \quad \frac{1}{L}\left[\frac{U_2(s)}{s} - \frac{U_1(s)}{s}\right] + \frac{U_2(s)}{R_2} = 0$$

$$(1) \quad U_1(s)\left(\frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL}\right) - U_2(s)\frac{1}{sL} = \frac{U_0(s)}{R_1}$$

$$(2) \quad -U_1(s)\frac{1}{sL} + U_2(s)\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2}\right) = 0$$

---

algoritam za pisanje jednadžbi čvorova:

Zapisati napon za koji se piše jednadžba puta sve admitancije grana spojene na taj čvor minus napon susjednog čvora puta zajedničke admitancije jednako je sumi struja aktivnih izvora koje ulaze u čvor minus suma struja aktivnih izvora koje izlaze iz čvora.

Admitancije su: kapaciteta $Y_C = sC$, induktiviteta $Y_L = 1/sL$ i otpora $Y_R = 1/R$.

U stacionarnom stanju uz supstituciju $s \rightarrow j\omega$:

$$(1) \quad U_1\left(\frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right) - U_2 \frac{1}{j\omega L} = \frac{U_0}{R_1}$$

$$(2) \quad -U_1 \frac{1}{j\omega L} + U_2\left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_2}\right) = 0$$

---

naponi i struje su fazori.

Odabire se u pravilu ona metoda koja daje manje jednadžbi, tj. ono čega u mreži ima manje.

Izuzetak su mreže koje sadrže međuinduktivnu vezu koju je bitno lakše zapisati u jednadžbama petlji nego u jednadžbama čvorova te mreže koje sadrže operacijsko ili strminsko pojačalo koje je lakše zapisati u jednadžbama čvorova nego u jednadžbama petlji.

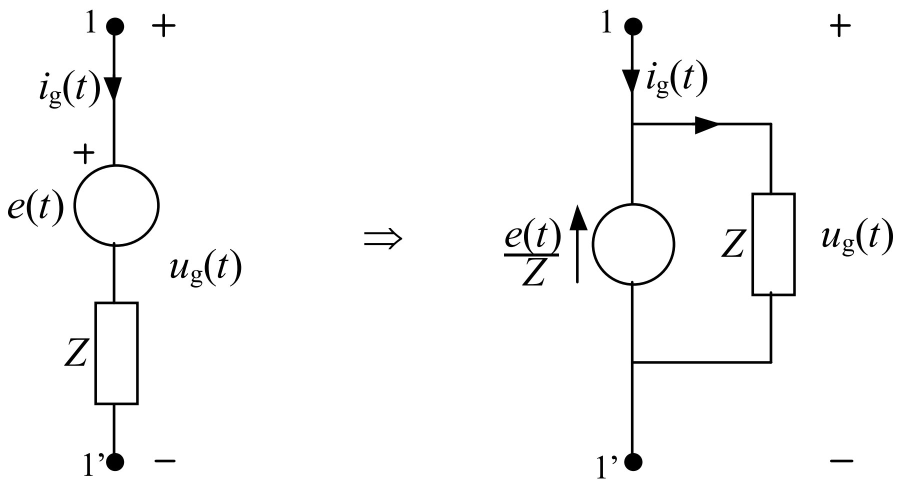
Transformacije izvora

a) s impedancijom u seriji/paraleli

algoritam za pisanje jednadžbi petlji na desnoj strani traži naponske izvore

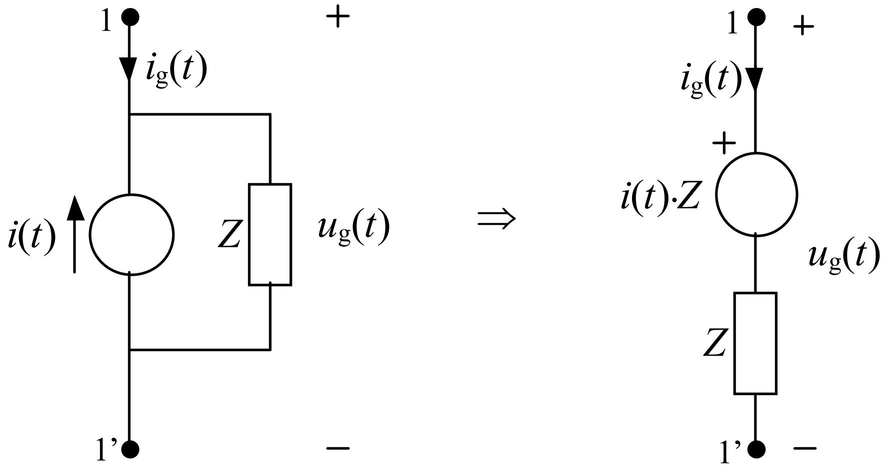
algoritam za pisanje jednadžbi čvorova na desnoj strani traži strujne izvore

Transformacija naponskog izvora u seriji s impedancijom:



$$u_g(t) = e(t) + Z \cdot i_g(t) \qquad i_g(t) = -\frac{e(t)}{Z} + \frac{u_g(t)}{Z}$$

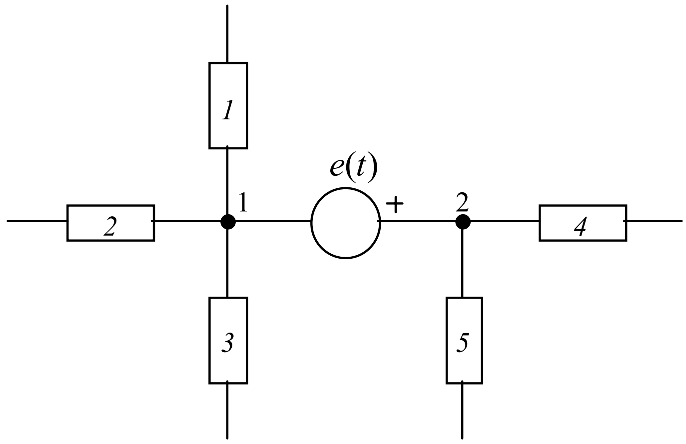
Transformacija strujnog izvora u paraleli s impedancijom:

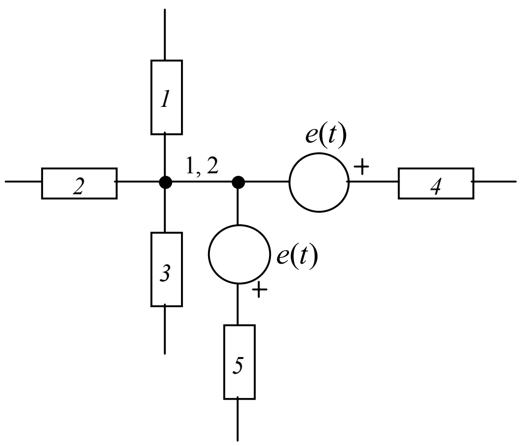


$$i_g(t) = -i(t) + \frac{u_g(t)}{Z} \qquad u_g(t) = i(t)\cdot Z + i_g(t)\cdot Z$$

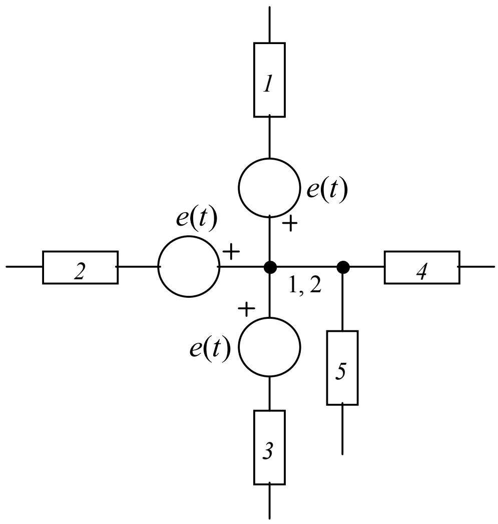
Transformacije izvora

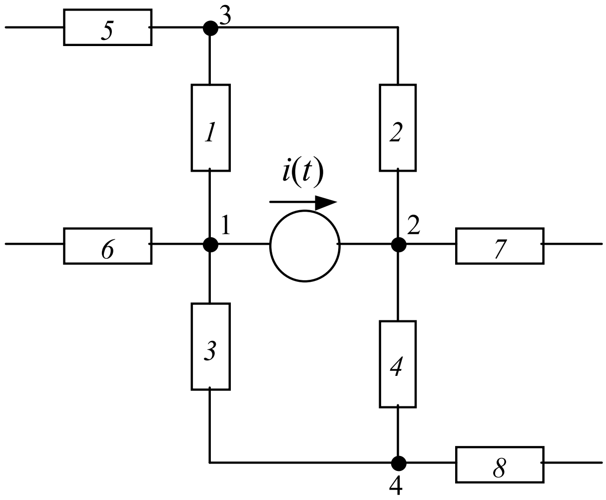
b) bez impedancije u seriji/paraleli

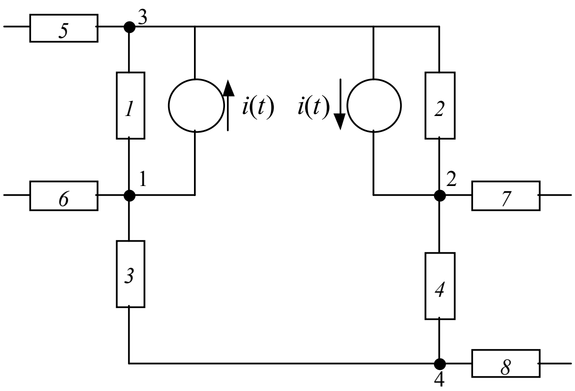




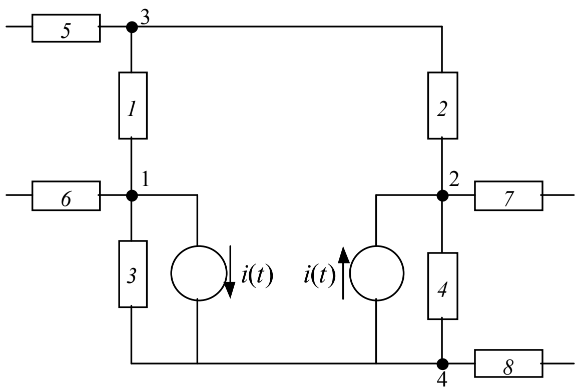
ili





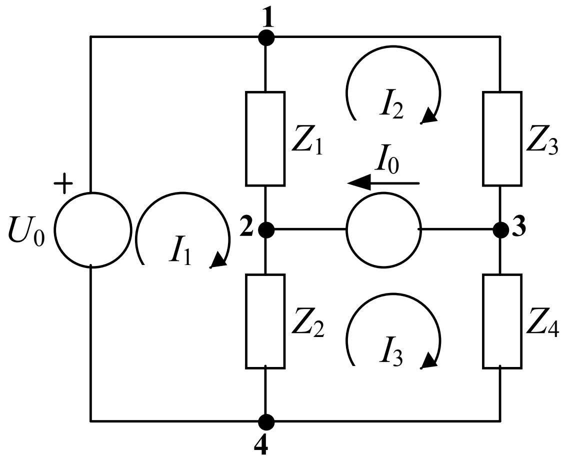


ili



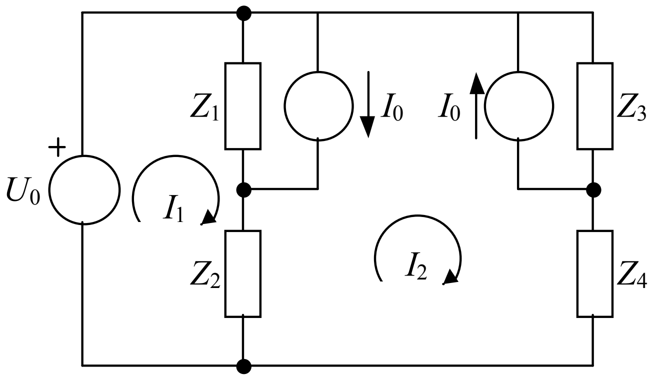
Transformacije vrijede kako za nezavisne tako i za zavisne izvore, ali pri tome treba paziti da se kod mreža sa zavisnim izvorima ne promijeni zavisna veličina.

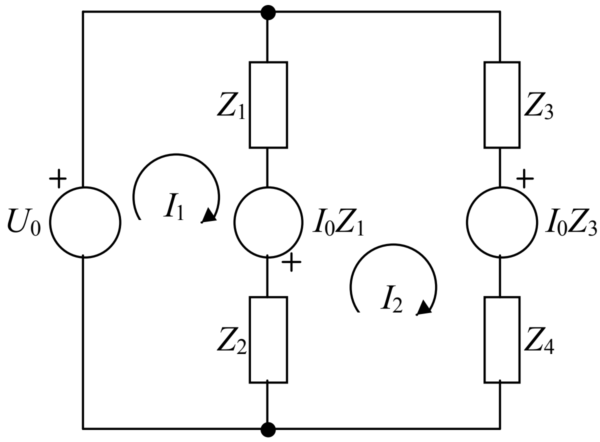
Primjer: Napisati jednadžbe petlji i jednadžbe čvorova.



- kod jednadžbi petlji nije poznat napon na strujnom izvoru I_0,
- kod jednadžbi čvorova nije poznata struja kroz naponski izvor U_0.

Jednadžbe petlji:





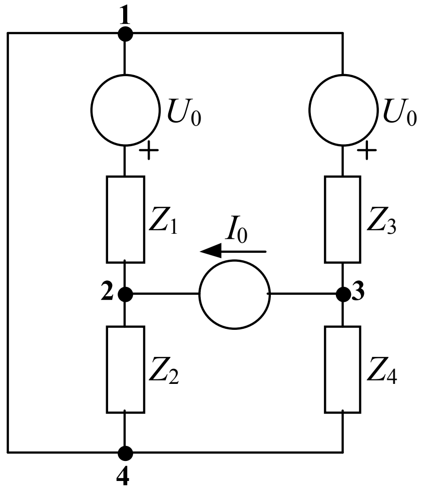
$$(1) \quad I_1(Z_1 + Z_2) - I_2(Z_1 + Z_2) = U_0 + I_0 Z_1$$

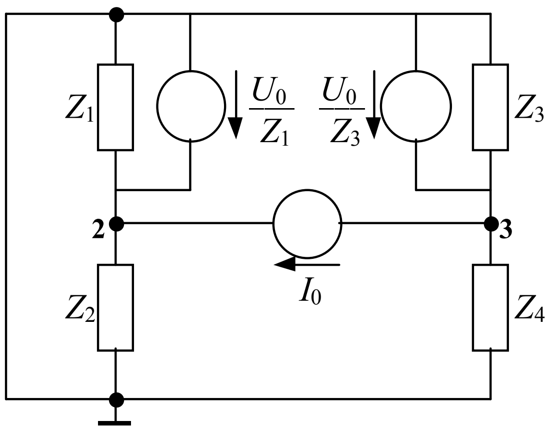
$$(2) \quad I_2(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) - I_1(Z_1 + Z_2) = -I_0 Z_1 - I_0 Z_3$$

zadana mreža i mreža ostvarena pretvorbom izvora su električno jednake.

Ista struja kroz npr. impedanciju Z_4 teče u sve tri prikazane mreže.

Jednadžbe čvorova:





$$(2) \quad U_2\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)=\frac{U_0}{Z_1}+I_0$$

$$(3) \quad U_3\left(\frac{1}{Z_3}+\frac{1}{Z_4}\right)=\frac{U_0}{Z_3}-I_0$$

Također su zadana mreža i mreža ostvarena pretvorbom izvora električno jednake.

Početna stanja

vrijedi:

za induktivitet L: $$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)d\tau$$

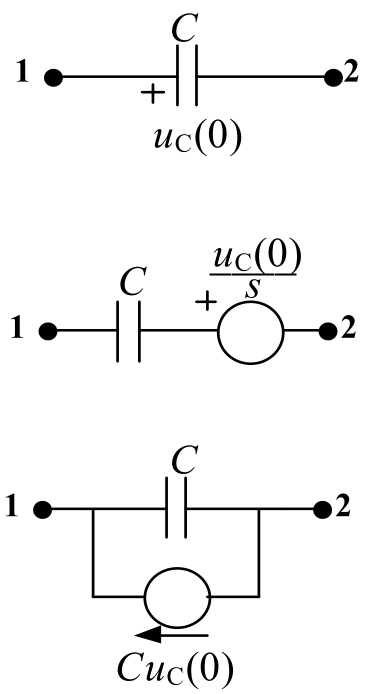
za kapacitet C: $$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau$$

$i_L(0)$ i $u_C(0)$ su početna stanja mreže

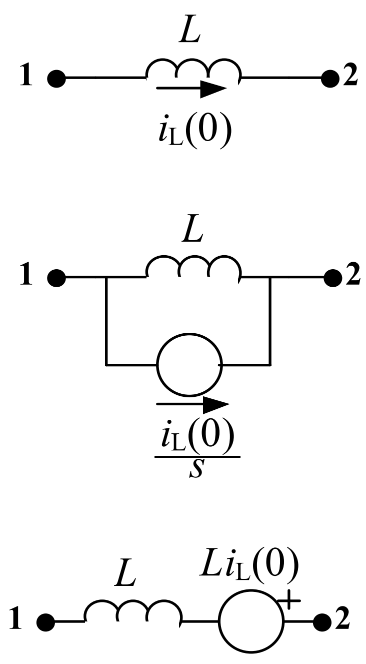
Početna stanja su realan broj.

Induktivitet i kapacitet će zapamtiti stanje u trenutku promjene u mreži - imat će neku energiju.

kapacitet:



induktivitet:



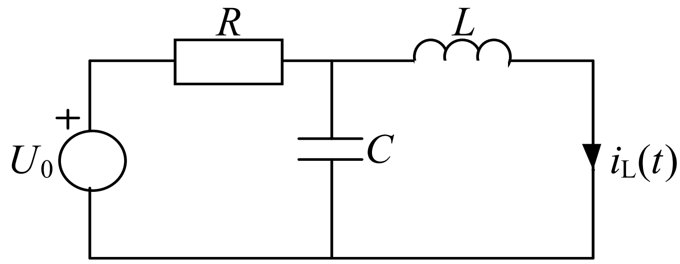
ekvivalentni naponski izvori: $u_C(0)/s$ i $Li_L(0)$

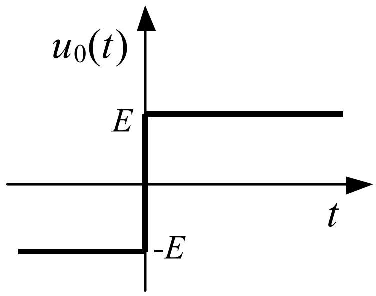
ekvivalentni strujni izvori: $Cu_C(0)$ i $i_L(0)/s$

izrazi za napon i struju:

	napon	struja
L	$U_L = I_L sL \pm Li_L(0) \pm I_{L2} sM$	$I_L = \frac{U_L}{sL} \pm \frac{i_L(0)}{s} \pm I_{L2} \frac{M}{L}$
C	$U_C = I_C \frac{1}{sC} \pm \frac{u_C(0)}{s}$	$I_C = U_C sC \pm Cu_C(0)$

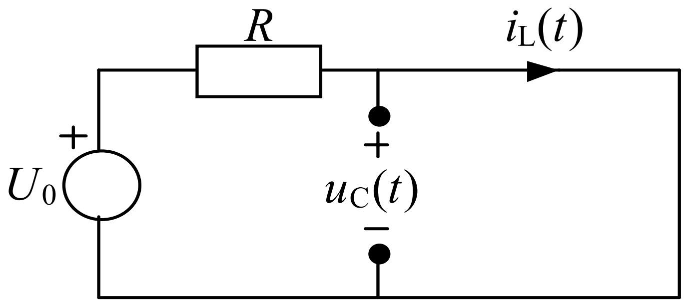
Primjer: odrediti struju $i_L(t)$





pobuda istosmjerna: induktivitet - kratak spoj
kapacitet prazan hod

modificirana mreža:



jedan strujni krug:

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{-E}{R}$$

cijela struja teče kroz induktivitet

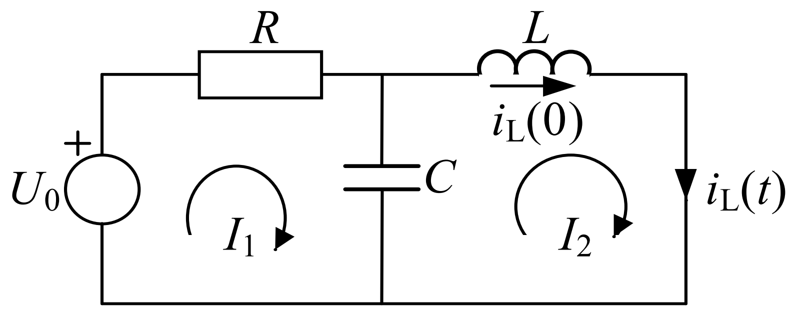
$$i(0) = i_L(0) = \frac{-E}{R}$$

kapacitet je kratko spojen

$$u_C(0) = 0$$

određena su početna stanja u trenutku promjene

Dobivena mreža



Laplaceova transformacija - jednadžbe petlji za t>0.

$$(1) \quad I_1\left(R + \frac{1}{sC}\right) - I_2 \frac{1}{sC} = U_0(s)$$

$$(2) \quad I_2\left(sL + \frac{1}{sC}\right) - I_1 \frac{1}{sC} = Li_L(0)$$

I_1 iz (1) $\rightarrow$ (2):

$$I_2(s) = \frac{\frac{E}{s} - L\frac{E}{R} - s \cdot CLE}{s^2 RLC + sL + R}$$

Neka je zadano: R=1, L=2, C=1/2 i E=5.

$$I_2(s)=\frac{\frac{5}{s}-10-5s}{s^2+2s+1}=\frac{5}{s(s+1)^2}-\frac{10}{(s+1)^2}-\frac{5s}{(s+1)^2}$$

prvi član:

$$\frac{5}{s(s+1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{(s+1)^2}$$

$$As^2+2As+A+Bs^2+Cs=5$$

$$\left.\begin{aligned}A+B&=0\\2A+C&=0\\A&=5\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=5\\B&=-5\\C&=-10\end{aligned}$$

$$\frac{5}{s(s+1)^2}=\frac{5}{s}-\frac{5s}{(s+1)^2}-\frac{10}{(s+1)^2}$$

$$I_2(s)=\frac{5}{s}-\frac{20}{(s+1)^2}-\frac{10s}{(s+1)^2}$$

treći član:

$$-\frac{10s}{(s+1)^2}=-\frac{10(s+1-1)}{(s+1)^2}=-\frac{10(s+1)}{(s+1)^2}+\frac{10}{(s+1)^2}=-\frac{10}{s+1}+\frac{10}{(s+1)^2}$$

struja u frekvencijskoj domeni:

$$I_2(s)=\frac{5}{s}-\frac{10}{s+1}-\frac{10}{(s+1)^2}$$

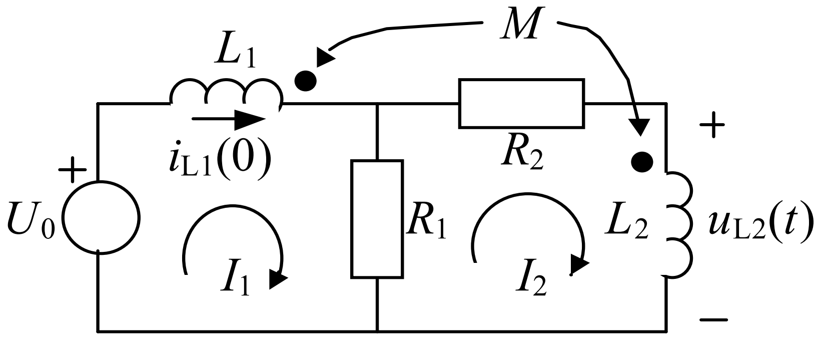
Tablice Laplaceove transformacije

struja u vremenskoj domeni:

$$\underline{i_2(t)=\left(5-10e^{-t}-10te^{-t}\right)S(t)=\left[5-10(1+t)e^{-t}\right]S(t)}$$

$S(t)$ - odziv mreže od vremena nula na dalje.

Primjer: odrediti odziv napona $u_{L2}(t)$ ako je zadano: $L_1=L_2=2$, $k=1$, $R_1=R_2=1$, $i_{L1}(0)=1$ i $u_0(t)=2S(t)$.



međuinduktivna veza na elementu s početnim stanjem

jednadžbe petlji:

$$(1) \qquad I_1 sL_1 - L_1 i_{L1}(0) - I_2 sM + (I_1 - I_2)R_1 - U_0 = 0$$

$$(2) \qquad I_2 R_2 + I_2 sL_2 - \left(I_1 - \frac{i_{L1}(0)}{s} \right) sM + (I_2 - I_1)R_1 = 0$$

KZN: određen je napon na svakom elementu:

$I_1 sL_1$ pad napona - protjecanje struje

$-L_1 i_{L1}(0)$ porast napona - početno stanje

$-I_2 sM$ napon induciran na induktivitetu

Napon induciran uslijed međuinduktivne veze se u jednadžbe zapisuje preko sljedećeg algoritma:

zapisati međuinduktivnu vezu (sM), pomnožiti sa strujom kroz drugi induktivitet s kojim je promatran induktivitet međuinduktivno vezan i zapisati predznak. Ako su isti smjerovi struja u točkama međuinduktivne veze (obje struje ulaze ili obje struje izlaze) onda je pozitivan predznak, a različiti smjerovi struja (jedna ulazi, a druga izlazi) daju negativan predznak.

$(I_1 - I_2)R_1$ pad napona - protjecanje struje

$-U_0$ porast napona - nezavisni izvor

$-\left(I_1 - \frac{i_{L1}(0)}{s}\right)sM$ algoritam za međuinduktivnu vezu

napon je:

$$U_{L2} = I_2 sL_2 - \left(I_1 - \frac{i_{L1}(0)}{s}\right)sM$$

sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

Sređivanjem i uvrštavanjem zadanih vrijednosti:

$$(1) \qquad I_1(2s+1) - I_2(2s+1) = \frac{2}{s} + 2$$

$$(2) \qquad I_2(2s+2) - I_1(2s+1) = -2$$

struje petlji:

$$I_1 = \frac{6s+4}{s(2s+1)} \qquad \text{i} \qquad I_2 = \frac{2}{s}$$

u frekvencijskoj domeni:

$$U_{L2} = 4 - \frac{12s+8}{2s+1} + 2 = \frac{12s+6-12s-8}{2s+1} = -\frac{2}{2s+1} = -\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

u vremenskoj domeni:

$$\underline{u_{L2}(t) = -e^{-\frac{1}{2}t} S(t)}$$

Normiranje vrijednosti elemenata

normirane vrijednosti - bez dimenzija (fizikalnih jedinica)

a) normiranje frekvencije

Umjesto kompleksne frekvencije s uvodi se normirana kompleksna frekvencija s_n:

$$s_n = \frac{s}{\omega_0}$$

gdje je ω_0 konstantna realna frekvencija. Pri tome impedancije moraju ostati nepromijenjene:

$$Z_L(s_n) = \frac{s}{\omega_0} L\omega_0 = s_n L_n$$

$$Z_C(s_n) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} C\omega_0} = \frac{1}{s_n C_n}$$

Ovime su dobivene normirane vrijednosti za L i C:

$$L_n = L\omega_0 \ \ [\Omega]$$

$$C_n = C\omega_0 \ \ [\Omega]^{-1}$$

b) normiranje impedancije

Umjesto zadanih impedancija *Z(s)* uvodi se normirana normirana impedancija $Z_n(s)$:

$$Z_n(s) = \frac{Z(s)}{R_0}$$

gdje je R_0 konstantan otpor. Impedancije postaju:

$$Z_{R_n}(s) = \frac{R}{R_0} = R_n$$

$$Z_{L_n}(s) = \frac{sL}{R_0} = sL_n$$

$$Z_{C_n}(s) = \frac{1}{sCR_0} = \frac{1}{sC_n}$$

normirane vrijednosti za R, L i C:

$$R_n = \frac{R}{R_0}$$

$$L_n = \frac{L}{R_0} \ \left[\frac{\mathrm{H}}{\Omega}\right]$$

$$C_n = CR_0 \ \left[\mathrm{F}\Omega\right]$$

c) normiranje frekvencije i impedancije

Impedancije:

$$Z_{R_n}(s_n) = \frac{R}{R_0} = R_n$$

$$Z_{L_n}(s_n) = \frac{s}{\omega_0}\frac{L\omega_0}{R_0} = s_n L_n$$

$$Z_{C_n}(s_n) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} C\omega_0 R_0} = \frac{1}{s_n C_n}$$

Normirani elementi (bez fizikalnih jedinica):

$$R_n = \frac{R}{R_0}$$

$$L_n = \frac{L\omega_0}{R_0}$$

$$C_n = C\omega_0 R_0$$

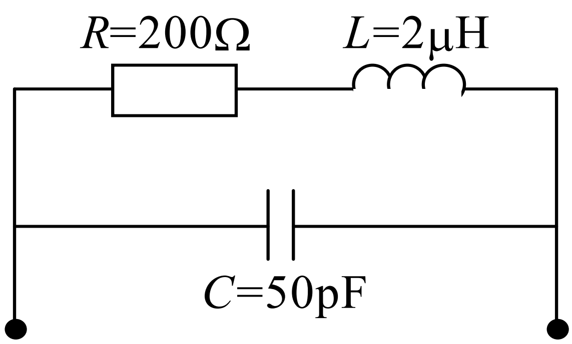
Denormiranje - prave vrijednosti elemenata:

$$R = R_n R_0 \; [\Omega]$$

$$L = \frac{L_n R_0}{\omega_0} \; [\mathrm{H}]$$

$$C = \frac{C_n}{\omega_0 R_0} \; [\mathrm{F}]$$

<u>Primjer</u>: normirati zadanu mrežu na otpor R_0=200Ω i frekvenciju ω_0=10^8rad/s.



Normiranje impedancije i frekvencije:

$$R_n = \frac{200}{200} = 1 \;\;,\;\; L_n = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8}{200} = 1 \;\;,\;\; C_n = 50 \cdot 10^{-12} \cdot 10^8 \cdot 200 = 1$$

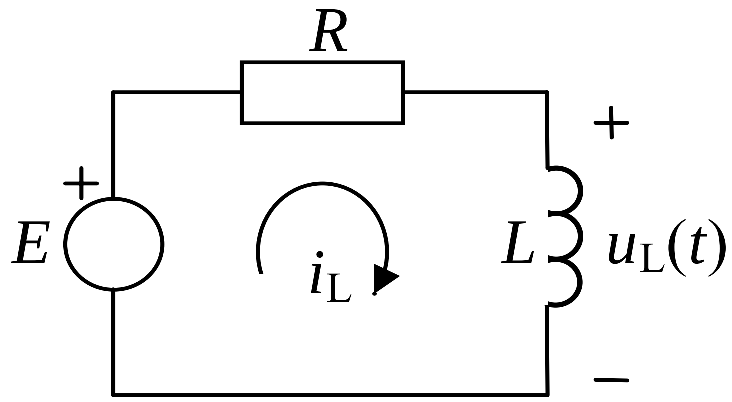
1.5. Pobude i pripadni odzivi

Istosmjerna pobuda

pobuda - u trenutku t=0

odziv mreže - u stacionarnom stanju

Serijska RL mreža



Istosmjerni napon iznosa E spojen je na RL mrežu.

diferencijalna jednadžba: $$E = R\, i_L(t) + L \frac{d\, i_L(t)}{dt}$$

Homogena dif. jedn.: $$L \frac{d\, i_L(t)}{dt} + R\, i_L(t) = 0$$

Pretpostavljeno rješenje: $$i_h(t) = A_1 \cdot e^{rt}$$

$$L \cdot A_1 \cdot e^{rt} \cdot r + R \cdot A_1 \cdot e^{rt} = 0$$

$$L \cdot r + R = 0$$

odnosno

$$r = -\frac{R}{L}$$

r - karakteristični korijen (vlastita frekvencija mreže).

Slijedi: $$i_h(t) = A_1 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Rješenje nehomog. dif. jedn. (u obliku pobude):

$$i_n(t) = A_2$$

$$L \cdot 0 + R \cdot A_2 = E$$

$$A_2 = \frac{E}{R}$$

zbrojimo homogeno rješenje i nehomogeno rješenje:

$$i(t) = i_h(t) + i_n(t) = A_1 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

$$i(0) = A_1 \cdot e^0 + \frac{E}{R} = 0$$

Slijedi: $$A_1 = -\frac{E}{R}$$

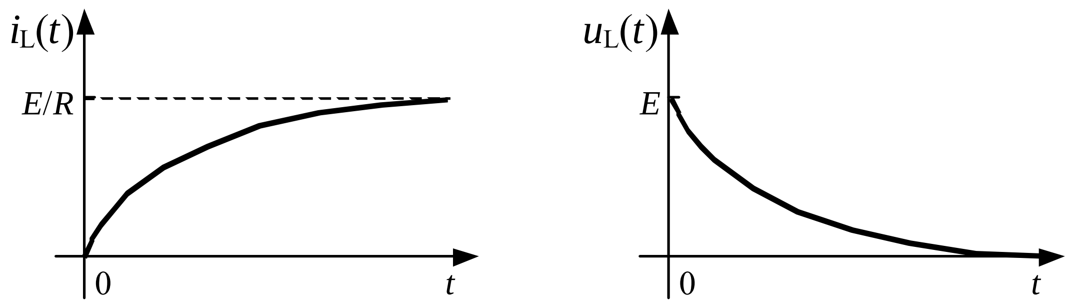
struja u mreži:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

napon na induktivitetu:

$$\underline{u_L(t) = L\frac{d\,i_L(t)}{dt} = E \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}$$

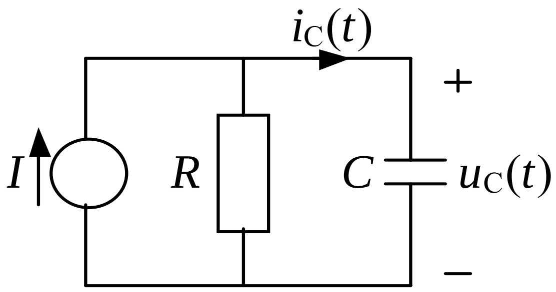
Grafički:



prijelazna pojava na induktivitetu uz istosmjernu pobudu.

vremenska konstanta induktiviteta: $$\tau_L = \frac{L}{R}$$

Paralelna *RC* mreža



diferencijalna jednadžba: $$I = \frac{1}{\mathrm{R}} u_C(t) + C\frac{d\,u_C(t)}{dt}$$

Homogena dif. jedn.: $$C\frac{d\,u_C(t)}{dt} + \frac{1}{R} u_C(t) = 0$$

Pretpostavljeno rješenje: $$u_h(t) = A_1 \cdot e^{rt}$$

$$C \cdot A_1 \cdot e^{rt} \cdot r + \frac{1}{R} \cdot A_1 \cdot e^{rt} = 0$$

$$C \cdot r + \frac{1}{R} = 0$$

odnosno

$$r = -\frac{1}{RC}$$

r - karakteristični korijen, (vlastita frekvencija mreže.

$$u_h(t) = A_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Rješenje nehomog. dif. jedn. (u obliku pobude):

$$u_n(t) = A_2$$

$$C \cdot 0 + \frac{1}{R} \cdot A_2 = I$$

$$A_2 = I \cdot R$$

zbrojimo homogeno rješenje i nehomogeno rješenje:

$$u(t) = u_h(t) + u_n(t) = A_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + IR$$

$$u(0) = A_1 \cdot e^0 + IR = 0$$

Slijedi

$$A_1 = -IR$$

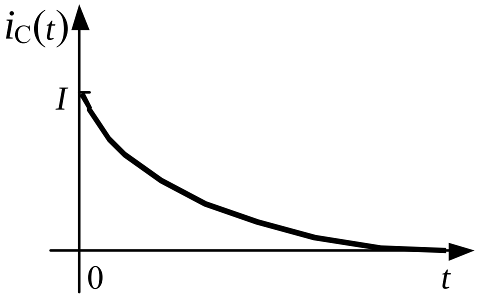
napon u mreži:

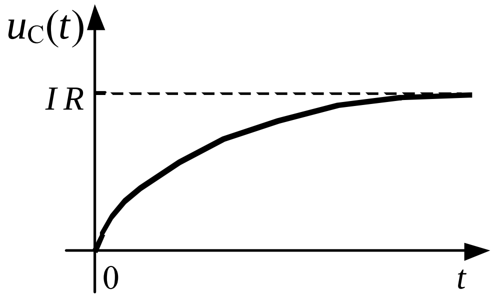
$$u_C(t) = IR - I\,\mathrm{R}e^{-\frac{1}{RC}t} = IR\left[1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right]$$

struja kroz kapacitet:

$$\underline{i_C(t) = C\frac{d\,u_C(t)}{dt} = I \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

Grafički:





prijelazna pojava na kapacitetu

vremenska konstanta kapaciteta $\tau_C = RC$

5 vremenskih konstanti - odziv prijeđe 99% konačne vrijednosti.

kod istosmjerne pobude u stacionarnom stanju:

induktiviteti - kratki spoj

kapaciteti - prazni hod

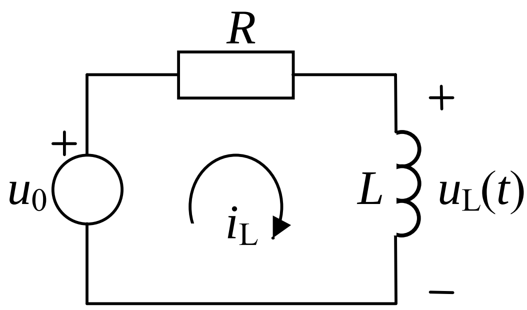
na induktivitetu u trenutku ukapčanja napon se javi odmah, a struja postupno raste

na kapacitetu struja odmah poteče, a napon postupno raste

Sinusoidalna pobuda

odziv mreže u stacionarnom stanju, fazorski račun ($j\omega$)

Serijska *RL* mreža



pobuda: $$u_0(t) = U_0 \sin \omega_0 t$$

jednadžba petlje: $$\boldsymbol{I}_L \left(R + j\omega_0 L \right) = \boldsymbol{U}_0$$

struja: $$\boldsymbol{I}_L = \frac{\boldsymbol{U}_0}{R + j\omega_0 L}$$

$$\boldsymbol{I}_L = \frac{\boldsymbol{U}_0 (R - j\omega_0 L)}{(R + j\omega_0 L)(R - j\omega_0 L)} = \frac{\boldsymbol{U}_0 R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} - j \frac{\boldsymbol{U}_0 \omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2}$$

napon:

$$\boldsymbol{U}_L = \boldsymbol{I}_L j\omega_0 L = \frac{\boldsymbol{U}_0 (\omega_0 L)^2}{R^2 + (\omega_0 L)^2} + j \frac{\boldsymbol{U}_0 R \omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2}$$

struja:

$$\boldsymbol{I}_L = \frac{\boldsymbol{U}_0 R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} - j\frac{\boldsymbol{U}_0 \omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = \mathrm{Re}[\boldsymbol{I}_L] + j\,\mathrm{Im}[\boldsymbol{I}_L]$$

napon:

$$\boldsymbol{U}_L = \frac{\boldsymbol{U}_0 (\omega_0 L)^2}{R^2 + (\omega_0 L)^2} + j\frac{\boldsymbol{U}_0 R \omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = \mathrm{Re}[\boldsymbol{U}_L] + j\,\mathrm{Im}[\boldsymbol{U}_L]$$

u vremenskoj domeni:

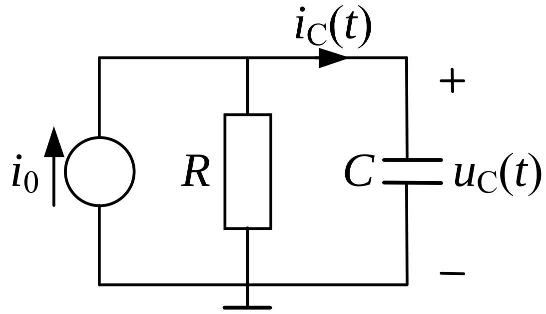
struja:

$$i_L(t) = \sqrt{(\mathrm{Re}[\boldsymbol{I}_L])^2 + (\mathrm{Im}[\boldsymbol{I}_L])^2}\,\sin\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\mathrm{Im}[\boldsymbol{I}_L]}{\mathrm{Re}[\boldsymbol{I}_L]}\right)$$

napon:

$$u_L(t) = \sqrt{(\mathrm{Re}[\boldsymbol{U}_L])^2 + (\mathrm{Im}[\boldsymbol{U}_L])^2}\,\sin\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\mathrm{Im}[\boldsymbol{U}_L]}{\mathrm{Re}[\boldsymbol{U}_L]}\right)$$

Paralelna RC mreža



pobuda: $$i_0(t) = I_0 \cos\omega_0 t$$

jednadžba čvora: $$\boldsymbol{U}_C\left(\frac{1}{R} + j\omega_0 C\right) = \boldsymbol{I}_0$$

napon: $$\boldsymbol{U}_C = \frac{\boldsymbol{I}_0}{\frac{1}{R} + j\omega_0 C}$$

$$\boldsymbol{U}_C = \frac{\boldsymbol{I}_0\left(\frac{1}{R} - j\omega_0 C\right)}{\left(\frac{1}{R} + j\omega_0 C\right)\left(\frac{1}{R} - j\omega_0 C\right)} = \frac{\frac{\boldsymbol{I}_0}{R}}{\frac{1}{R^2} + (\omega_0 C)^2} - j\frac{\boldsymbol{I}_0 \omega_0 C}{\frac{1}{R^2} + (\omega_0 C)^2}$$

struja:

$$\boldsymbol{I}_C = \boldsymbol{U}_C\, j\omega_0 C = \frac{\boldsymbol{I}_0 (\omega_0 C)^2}{\frac{1}{R^2} + (\omega_0 C)^2} + j\frac{\boldsymbol{I}_0 \frac{\omega_0 C}{R}}{\frac{1}{R^2} + (\omega_0 C)^2}$$

napon:

$$\boldsymbol{U}_C = \frac{\dfrac{\boldsymbol{I}_0}{R}}{\dfrac{1}{R^2}+(\omega_0 C)^2} - j\frac{\boldsymbol{I}_0\omega_0 C}{\dfrac{1}{R^2}+(\omega_0 C)^2} = \mathrm{Re}[\boldsymbol{U}_C] + j\,\mathrm{Im}[\boldsymbol{U}_C]$$

struja:

$$\boldsymbol{I}_C = \frac{\boldsymbol{I}_0(\omega_0 C)^2}{\dfrac{1}{R^2}+(\omega_0 C)^2} + j\frac{\boldsymbol{I}_0\dfrac{\omega_0 C}{R}}{\dfrac{1}{R^2}+(\omega_0 C)^2} = \mathrm{Re}[\boldsymbol{I}_C] + j\,\mathrm{Im}[\boldsymbol{I}_C]$$

u vremenskoj domeni:

napon:

$$u_C(t) = \sqrt{(\mathrm{Re}[\boldsymbol{U}_C])^2 + (\mathrm{Im}[\boldsymbol{U}_C])^2}\cos\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\mathrm{Im}[\boldsymbol{U}_C]}{\mathrm{Re}[\boldsymbol{U}_C]}\right)$$

struja:

$$i_C(t) = \sqrt{(\mathrm{Re}[\boldsymbol{I}_C])^2 + (\mathrm{Im}[\boldsymbol{I}_C])^2}\cos\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\mathrm{Im}[\boldsymbol{I}_C]}{\mathrm{Re}[\boldsymbol{I}_C]}\right)$$

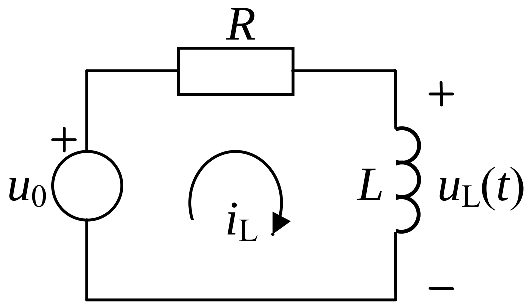
Pobuda s početkom u trenutku nula

odziv: članovi uslijed prijelaznih pojava
članovi uslijed stacionarnog stanja

i pobuda i odziv počinju u t=0

jednadžbe primjenom Laplaceove transformacije

<u>Primjer</u>: odrediti odziv struje.



pobuda: $$u_0(t) = U_0 \cos \omega_0 t \cdot S(t)$$

Jednadžba petlje: $$I_L(R + sL) = U_0(s)$$

što daje struju: $$I_L(s) = \frac{1}{R + sL} \frac{U_0 s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Rastav na parcijalne razlomke:

$$I_L(s) = \frac{A}{sL + R} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$As^2 + A\omega_0^2 + BLs^2 + BRs + CLs + CR = U_0 s$$

$$\left.\begin{aligned} A + BL &= 0 \\ BR + CL &= U_0 \\ A\omega_0^2 + CR &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{U_0 RL}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \\ B = \dfrac{U_0 R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \\ C = \dfrac{U_0 \omega_0^2 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \end{cases}$$

struja u frekvencijskoj domeni:

$$I_L(s) = -\frac{U_0 R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{U_0 R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{U_0 \omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

inverzna Laplaceova. transf. → vremenska domena

$$i_L(t) = \left[-\frac{U_0 R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0 R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \cos \omega_0 t + \frac{U_0 \omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \sin \omega_0 t \right] S(t)$$

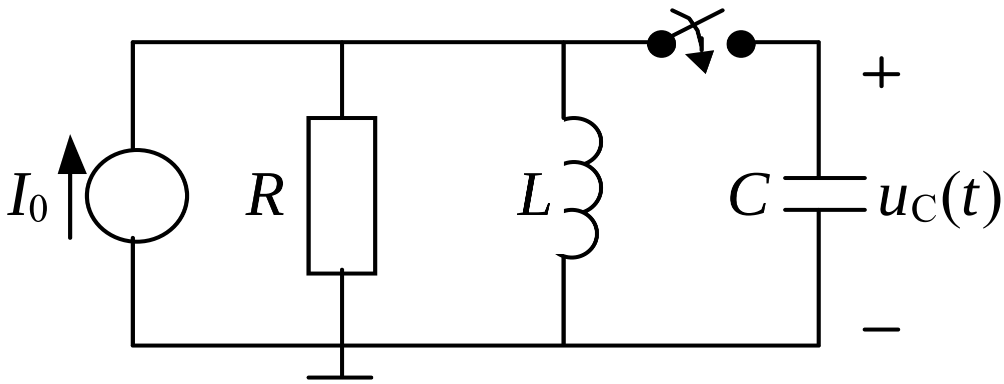
$$i_L(t) = \left[\frac{U_0}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \left(-R \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + R \cdot \cos \omega_0 t + \omega_0 L \cdot \sin \omega_0 t \right) \right] S(t)$$

Slobodni i prisilni odziv mreže

Prisilni je odziv mreže onaj koji je posljedica primijenjene pobude u proizvoljnom trenutku pod uvjetom da je mreža u tom trenutku bila u stanju nula.

Slobodni je odziv onaj koji je posljedica stanja mreže pod uvjetom da je pobuda jednaka nuli.

Primjer: odrediti prisilni, slobodni i ukupni odziv napona $u_C(t)$ nakon zatvaranja sklopke u t=0 ako je pobuda jednaka $i_0(t) = 5\cos 2t$.
Zadani su elementi mreže: R=1, L=1, C=1.



potrebno je poznavati stanje mreže u trenutku zatvaranja kroz kapacitet ne teče struja → napon jednak nuli

struja kroz induktivitet - fazorske jednadžbe

Napon: $$\boldsymbol{U}_L = \boldsymbol{I}_0 \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}$$

struja: $$\boldsymbol{I}_L = \frac{\boldsymbol{U}_L}{j\omega L} = \frac{\boldsymbol{I}_0 R}{R + j\omega L} = \frac{5}{1 + j2}$$

$$\boldsymbol{I}_L = \frac{5}{1 + j2} \frac{1 - j2}{1 - j2} = \frac{5 - j10}{1 + 4} = 1 - j2$$

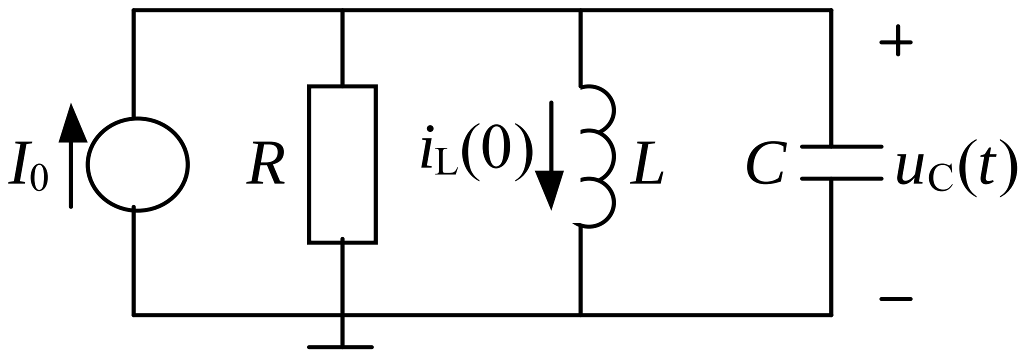
U vremenskoj domeni

$$i_L(t) = \sqrt{5} \cos\left(2t - 63.43^{\circ}\right)$$

Početno stanje na induktivitetu dobije se za $t=0$:

$$i_L(0) = \sqrt{5} \cos\left(-63.43^{\circ}\right) = 1$$

zatvorena sklopka:



jednadžba čvora:

$$U_C(s)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{sL}+sC\right)=I_0(s)-\frac{i_L(0)}{s}$$

$$U_C(s)=\frac{I_0(s)-\frac{i_L(0)}{s}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{sL}+sC}$$

dva člana:

član koji sadrži pobudu $I_0(s)$ dat će prisilni odziv

član koji sadrži početno stanje $i_L(0)$ dat će slobodni odziv prisilni odziv:

$$U_P(s) = \frac{I_0(s)}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC} = \frac{\frac{5s}{s^2+4}}{1 + \frac{1}{s} + s} = \frac{5s^2}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+s+1\right)}$$

$$\frac{5s^2}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+s+1\right)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+s+1}$$

$$As^3 + As^2 + As + Bs^2 + Bs + B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D = 5s^2$$

$$\left.\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B + D &= 5 \\ A + B + 4C &= 0 \\ B + 4D &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{20}{13} \\ B = \dfrac{60}{13} \\ C = -\dfrac{20}{13} \\ D = -\dfrac{15}{13} \end{cases}$$

$$U_P(s) = \frac{\frac{20}{13}s + \frac{60}{13}}{s^2 + 4} - \frac{\frac{20}{13}s + \frac{15}{13}}{s^2 + s + 1}$$

u frekvencijskoj domeni:

$$U_P(s) = \frac{20}{13}\frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{30}{13}\frac{2}{s^2 + 2^2} - \frac{20}{13}\frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{10}{13\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

u vremenskoj domeni:

$$u_P(t) = \frac{20}{13}\cos 2t + \frac{30}{13}\sin 2t - \frac{20}{13}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{10}{13\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\underline{u_P(t) = \frac{10}{13}\left[2\cos 2t + 3\sin 2t - e^{-\frac{1}{2}t}\left[2\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right]\right]S(t)}$$

Slobodni odziv:

$$U_S(s)=\frac{-\frac{i_L(0)}{s}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{sL}+sC}=\frac{-\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}+s}=\frac{-1}{s^2+s+1}$$

u frekvencijskoj domeni:

$$U_S(s)=\frac{-1}{s^2+s+1}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

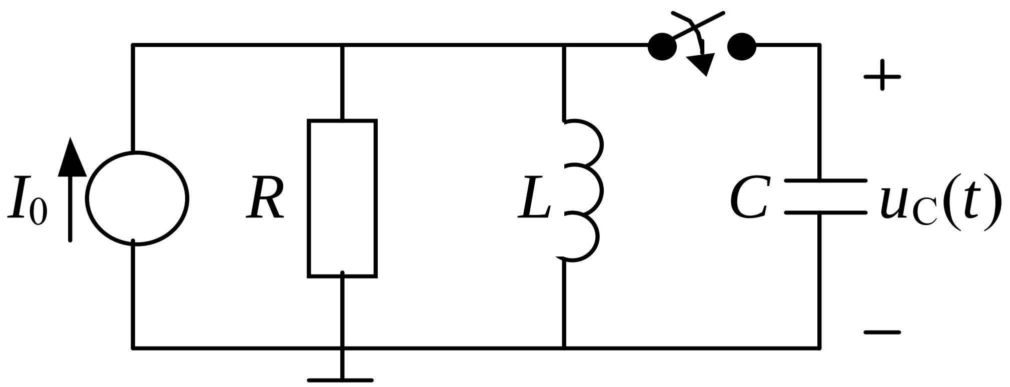
u vremenskojdomeni:

$$\underline{u_S(t)=\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]S(t)}$$

Ukupni odziv je zbroj prisilnog i slobodnog odziva

$$\underline{u(t)=u_P(t)+u_S(t)=\frac{10}{13}\left[2\cos 2t+3\sin 2t-e^{-\frac{1}{2}t}\left[2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{36}{10\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]\right]S(t)}$$

Primjer: odrediti prisilni, slobodni i ukupni odziv napona $u_C(t)$ nakon zatvaranja sklopke u t=0 ako je pobuda jednaka $i_0(t) = 5$.
Zadani su elementi mreže: R=1, L=1, C=1.



induktivitet - kratki spoj

$$i_L(0) = I_0 = 5$$

zatvorena sklopka:

$$U_C(s) = \frac{I_0(s) - \frac{i_L(0)}{s}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC}$$

Prisilni odziv:

$$U_P(s) = \frac{I_0(s)}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC} = \frac{\frac{5}{s}}{1 + \frac{1}{s} + s} = \frac{5}{s^2 + s + 1}$$

u frekvencijskoj domeni:

$$U_P(s) = \frac{10}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

u vremenskoj domeni:

$$\underline{u_P(t) = \left[\frac{10}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right] S(t)}$$

Slobodni odziv:

$$U_S(s) = \frac{-\frac{i_L(0)}{s}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC} = \frac{-\frac{5}{s}}{1 + \frac{1}{s} + s} = \frac{-5}{s^2 + s + 1}$$

u frekvencijskoj domeni:

$$U_S(s) = -\frac{10}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

u vremenskoj domeni:

$$\underline{u_S(t) = \left[-\frac{10}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \tfrac{\sqrt{3}}{2} t\right] S(t)}$$

Ukupni odziv:

$$\underline{u(t) = \frac{10}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \tfrac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{10}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \tfrac{\sqrt{3}}{2} t = 0}$$

1.6. Teoremi mreža

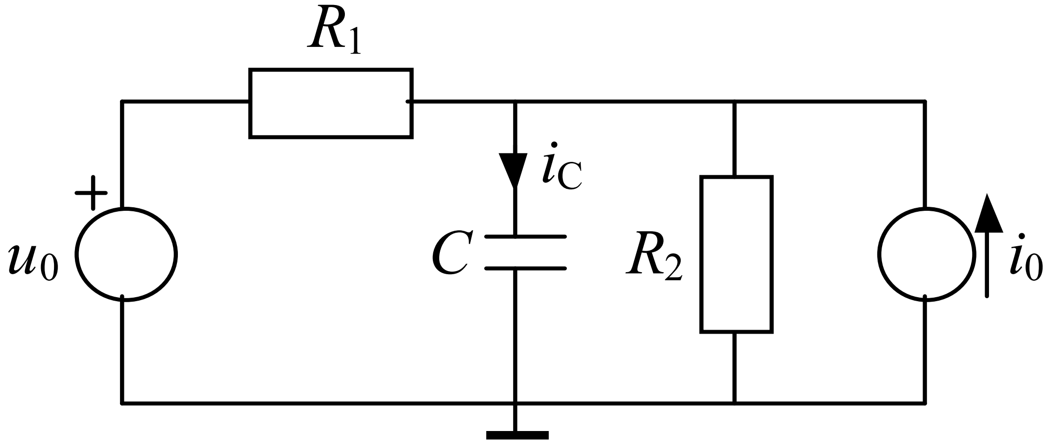
Teorem superpozicije

Odziv mreže nastao kao posljedica djelovanja više nezavisnih izvora u mreži jednak je zbroju odziva mreže nastalog uslijed svakog pojedinog od njih, dok su ostali izvori ugašeni.

ugašen naponski izvor - kratki spoj

ugašen strujni izvor - prazan hod

Primjer: odrediti odziv struje $i_C(t)$ ako je $u_0(t) = 10S(t)$, $i_0(t) = 5\delta(t)$, R_1=R_2=1, C=2.



a) bez primjene teorema superpozicije

jednadžba čvora:

$$U_C(s)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+sC\right)=\frac{U_0(s)}{R_1}+I_0(s)$$

napon:

$$U_C(s)=\frac{\frac{10}{s\cdot 1}+5}{1+1+2s}=\frac{\frac{10}{s}+5}{2+2s}=5\frac{1}{s(s+1)}+\frac{5}{2}\frac{1}{s+1}$$

struja:

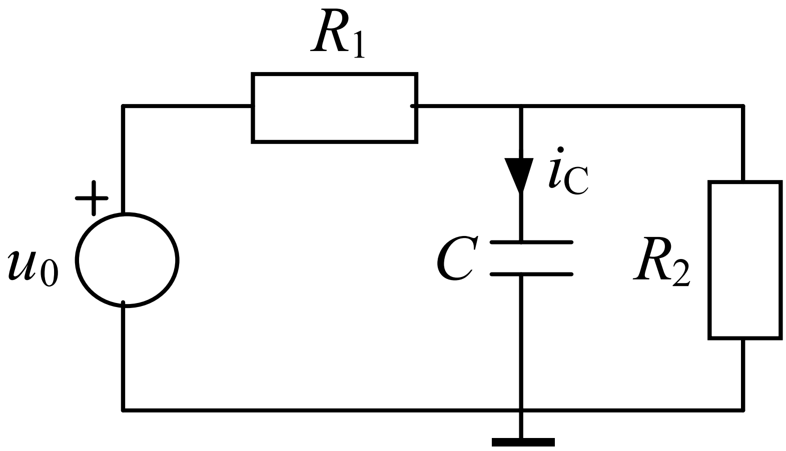
$$I_C(s)=U_C(s)\cdot sC=\frac{10}{s+1}+5\frac{s}{s+1}$$

$$I_C(s)=\frac{10}{s+1}+5\frac{s+1-1}{s+1}=\frac{5}{s+1}+5$$

$$\underline{i_C(t)=5e^{-t}S(t)+5\delta(t)}$$

b) primjenom teorema superpozicije

ugašen strujni izvor:



Jednadžba čvora:

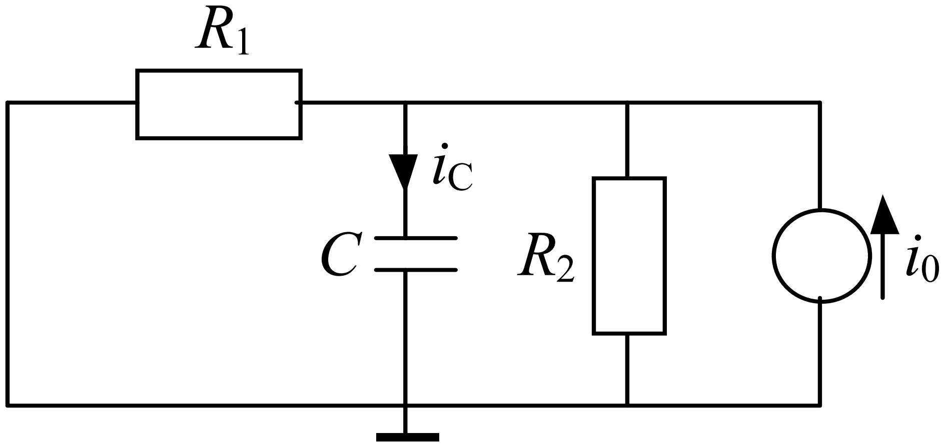
$$U_{C_1}(s)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+sC\right)=\frac{U_0(s)}{R_1}$$

napon: $$U_{C_1}(s)=\frac{10}{2s(s+1)}$$

struja: $$I_{C_1}(s)=U_{C_1}(s)\cdot sC=\frac{10}{s+1}$$

$$i_{C_1}(t)=10e^{-t}S(t)$$

ugašen naponski izvor:



Jednadžba čvora:

$$U_{C_2}(s)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+sC\right)=I_0(s)$$

napon: $$U_{C_2}(s)=\frac{5}{2(s+1)}$$

struja:

$$I_{C_2}(s)=U_{C_2}(s)\cdot sC=\frac{5s}{s+1}=\frac{5(s+1-1)}{s+1}=5-\frac{5}{s+1}$$

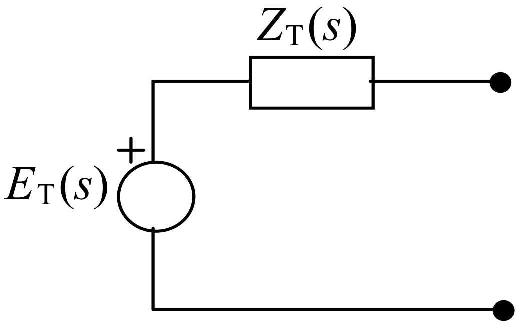
$$i_{C_2}(t)=5\delta(t)-5e^{-t}S(t)$$

zbrojeno:

$$\underline{i_C(t)=i_{C_1}(t)+i_{C_2}(t)=5e^{-t}S(t)+5\delta(t)}$$

Theveninov teorem

ekvivalentna dvoelementna mreža:



Zadanu se mrežu može prema van nadomjestiti jednim naponskim izvorom iznosa $E_T(s)$ *u seriji s impedancijom* $Z_T(s)$.

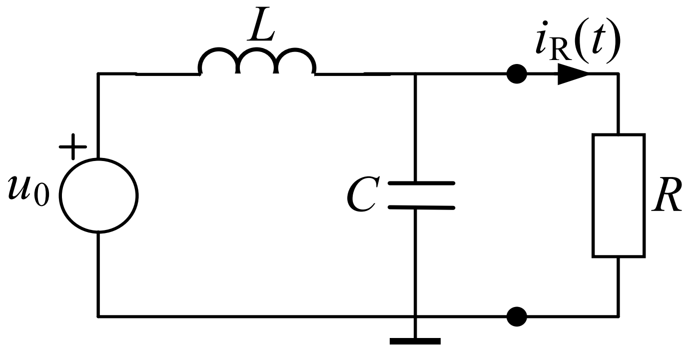
$E_T(s)$ - na otvorenim priključnicama
- uslijed nezavisnih izvora i početnih stanja

$Z_T(s)$ - ugasiti nezavisne izvore i početna stanja
- na ulaz priključiti naponski izvor napona U koji daje struju I , $Z_T(s)=U/I$.

Theveninovi parametri ne ovise o opterećenju priključenom na mrežu, već samo o zadanoj mreži.

Theveninovi parametri - u frekvencijskoj domeni

Primjer: odrediti odziv struje kroz priključeni otpor $i_R(t)$ ako je $u_0(t) = 5S(t)$, R=1/2, L=1, C=1.



bez primjene Theveninova teorema

Jednadžba čvora:

$$U_R(s)\left(\frac{1}{sL} + sC + \frac{1}{R}\right) = \frac{U_0(s)}{sL}$$

napon:

$$U_R(s) = \frac{\frac{5}{s}\cdot\frac{1}{s}}{\frac{1}{s} + s + 2} = \frac{\frac{5}{s}}{s^2 + 2s + 1} = 5\frac{1}{s(s+1)^2}$$

struja:

$$I_R(s) = \frac{U_R(s)}{R} = 10\frac{1}{s(s+1)^2}$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2}$$

$$As^2 + 2As + A + Bs^2 + Cs = 1$$

$$A = 1 \quad , \quad B = -1 \quad , \quad C = -2$$

$$I_R(s) = 10\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{(s+1)^2} - 2\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

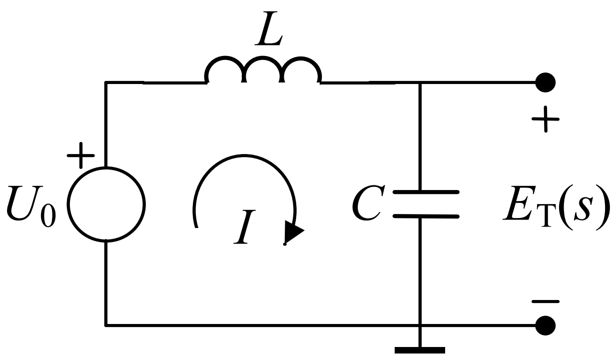
$$I_R(s) = 10\left[\frac{1}{s} - \frac{s+1-1}{(s+1)^2} - 2\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$I_R(s) = 10\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$\underline{i_R(t) = 10\left[1 - e^{-t} - t \cdot e^{-t}\right] \ S(t)}$$

primjena Theveninova teorema

Theveninov napon:



$$E_T(s) = I(s)\frac{1}{sC}$$

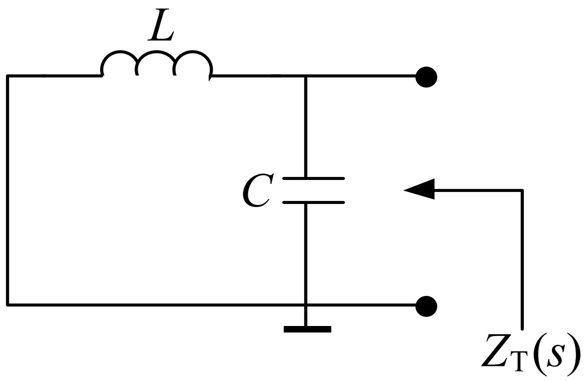
jednadžba petlje:

$$I(s)\left(sL + \frac{1}{sC}\right) = U_0(s)$$

$$I(s) = \frac{\frac{5}{s}}{s + \frac{1}{s}} = \frac{5}{s^2+1}.$$

$$\underline{E_T(s) = \frac{5}{s\left(s^2+1\right)}}$$

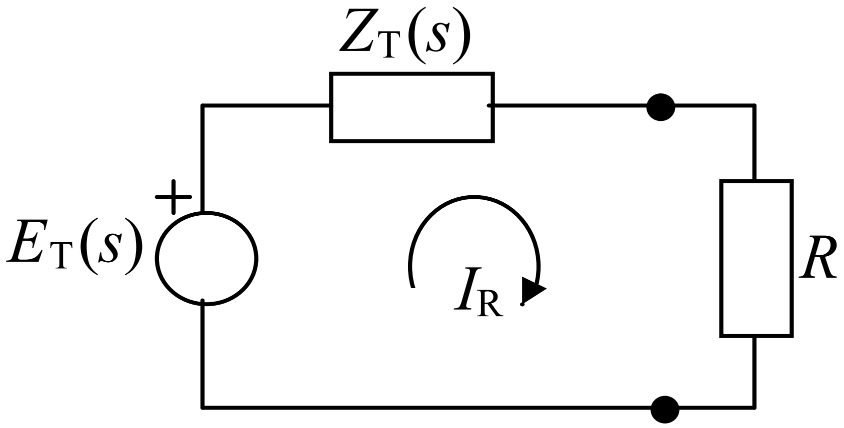
Theveninova impedancija:



$$Z_T(s) = sL \| \frac{1}{sC} = \frac{sL \frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}}$$

$$\underline{Z_T(s) = \frac{s}{s^2 + 1}}$$

Priključi li se otpor R:



struja kroz otpor:

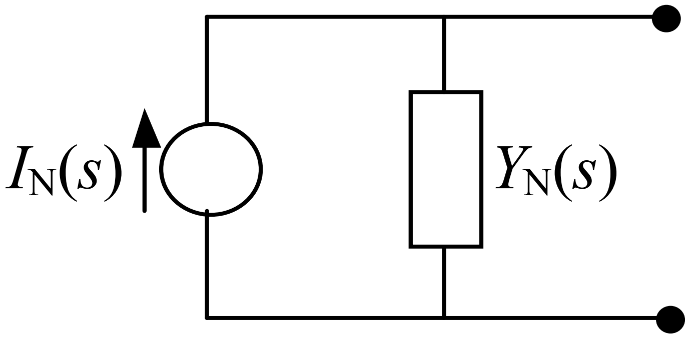
$$I_R(s) = \frac{E_T(s)}{Z_T(s)+R} = \frac{\dfrac{5}{s\left(s^2+1\right)}}{\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{1}{2}} = \frac{5}{s^2+\dfrac{1}{2}s\left(s^2+1\right)}$$

$$I_R(s) = \frac{10}{s\left(s^2+2s+1\right)} = \frac{10}{s(s+1)^2}$$

dobivena je ista struja kroz otpor

Nortonov teorem

ekvivalentna dvoelementna mreža:



Zadanu se mrežu može prema van nadomjestiti jednim strujnim izvorom iznosa $I_N(s)$ *u paraleli s admitancijom* $Y_N(s)$.

$I_N(s)$ - na kratko spojenim priključnicama
- uslijed nezavisnih izvora i početnih stanja

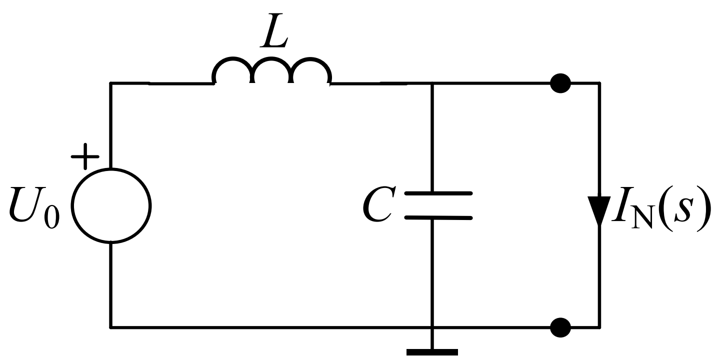
$Y_N(s)$ - ugasiti nezavisne izvore i početna stanja
- na ulaz priključiti strujni izvor struje I na kojem je napon U, $Y_N(s)=I/U$.

Nortonovi parametri ne ovise o opterećenju priključenom na mrežu, već samo o zadanoj mreži.

Nortonovi parametri - u frekvencijskoj domeni

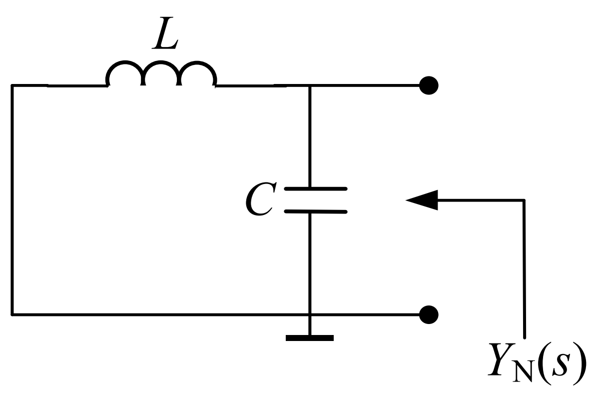
Primjer: ista mreža kao kod Theveninova teorema.

Nortonova struja:



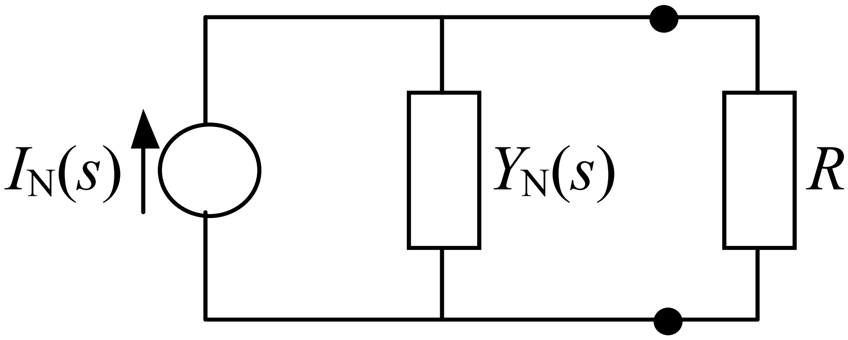
$$I_N(s) = \frac{U_0(s)}{sL} = \frac{\frac{5}{s}}{s} = \frac{5}{s^2}$$

Nortonova admitancija:



$$Y_N(s) = \frac{1}{sL} + sC = \frac{1}{s} + s = \frac{s^2+1}{s}$$

Priključi li se otpor *R*:



jednadžba čvora:

$$U_R(s)\left(Y_N+\frac{1}{R}\right)=I_N(s)$$

napon:

$$U_R(s)=\frac{I_N(s)}{Y_N(s)+\frac{1}{R}}=\frac{\frac{5}{s^2}}{\frac{s^2+1}{s}+2}=\frac{5}{s\left(s^2+1\right)\;+2s^2}$$

struja:

$$I_R(s)=\frac{U_R(s)}{R}=\frac{5}{\left(s^3+2s^2+s\right)\frac{1}{2}}=\frac{10}{s(s+1)^2}$$

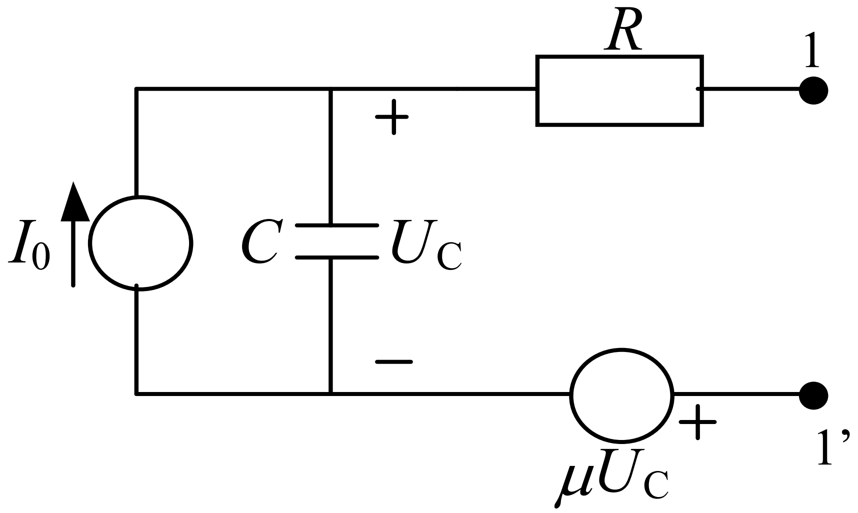
dobivena je ista struja kroz otpor

Veza Theveninovih i Nortonovih parametara

$$E_T(s) = \frac{I_N(s)}{Y_N(s)} \qquad Z_T(s) = \frac{1}{Y_N(s)}$$

$$I_N(s) = \frac{E_T(s)}{Z_T(s)} \qquad Y_N(s) = \frac{1}{Z_T(s)}$$

Primjer: zadanu mrežu nadomjestiti po Theveninu na priključnicama *1-1'*.



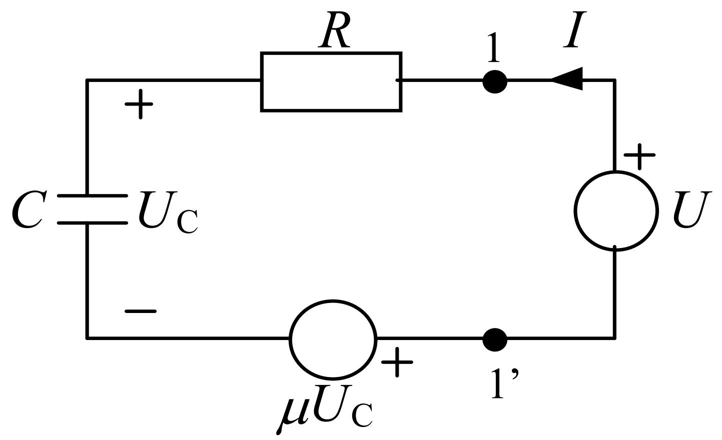
Theveninov napon:

$$E_T = I_0 \frac{1}{sC} - \mu U_C$$

$$U_C = I_0 \frac{1}{sC}$$

$$\underline{E_T = I_0 \frac{1}{sC} - \mu I_0 \frac{1}{sC} = I_0 (1-\mu) \frac{1}{sC}}$$

Theveninova impedancija:



Jednadžba petlje:

$$I\left(R+\frac{1}{sC}\right)=U+\mu U_C$$

Zavisna veličina:

$$U_C=I\frac{1}{sC}$$

Jednadžba petlje:

$$I\left(R+\frac{1}{sC}-\frac{\mu}{sC}\right)=U$$

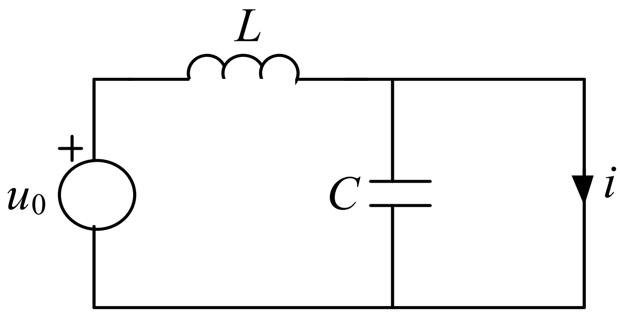
Theveninova impedancija:

$$\underline{Z_T=\frac{U}{I}=R+(1-\mu)\frac{1}{sC}}$$

Teorem recipročnosti

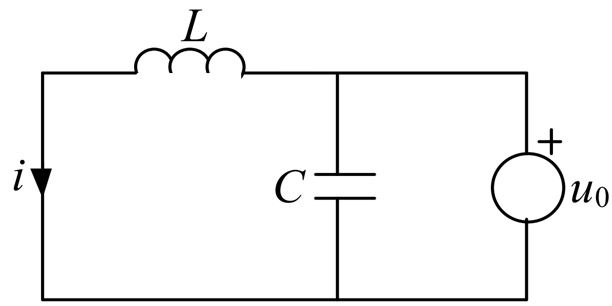
Mreža je recipročna ako zamjenom priključnica poticaja i odziva njihov međusobni odnos ostaje isti.

Primjer: L=1 , C=1, $u_0(t) = 5S(t)$



struja: $\underline{i(t) = 5t \cdot S(t)}$

Zamjena grana poticaja i odziva:



struja: $$I(s) = \frac{U_0}{sL} = \frac{5}{s^2}$$

$$\underline{i(t) = 5t \cdot S(t)}$$

Mreža je recipročna ako su svi elementi mreže recipročni.

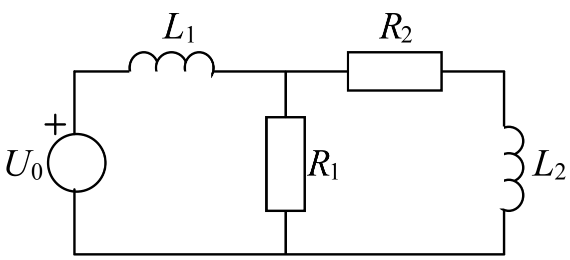
Obrnuta tvrdnja ne vrijedi, kombinacija nerecipročnih elemenata, kakvi su npr. zavisni izvori ili girator, može dati recipročnu mrežu.

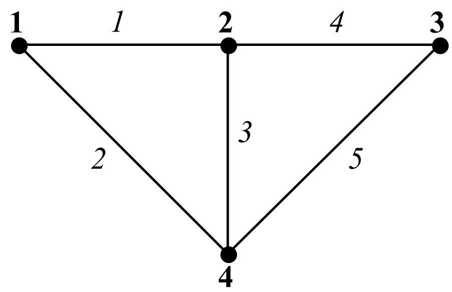
2. TOPOLOŠKA ANALIZA MREŽA

2.1. Osnovni pojmovi iz teorije grafova

topologija

Graf mreže je skup grana i čvorova takav da svaka grana počinje i završava s čvorom.



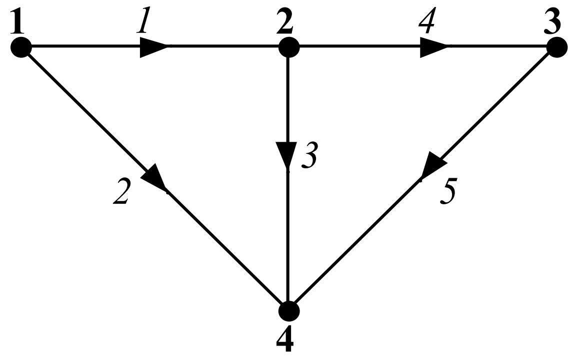


povezan graf - postoji najmanje jedan put između bilo koja dva čvora u grafu.

Oznake čvorova i grana su proizvoljni.

Granama možemo proizvoljno pridijeliti i orijentacije (smjerove).

orijentirani graf:



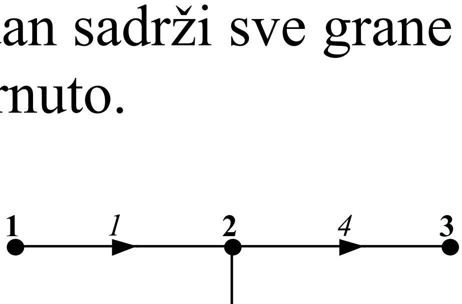
Strujni referentni smjerovi grana.

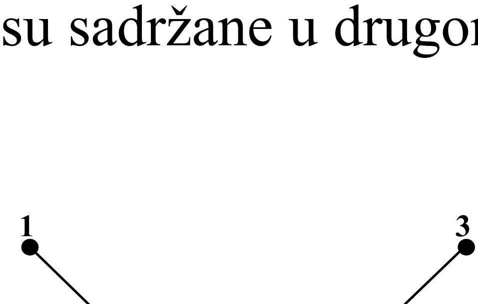
Naponski polariteti su u skladu s dogovorom.

Subgraf je dio grafa, odnosno sadrži samo neke grane i čvorove od originalnog grafa.

Čvor bez grane jest graf, a grana bez čvora nije graf.

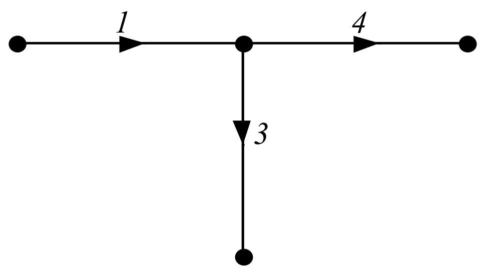
Dva subgrafa istog grafa su komplementarna ako jedan sadrži sve grane koje nisu sadržane u drugom i obrnuto.

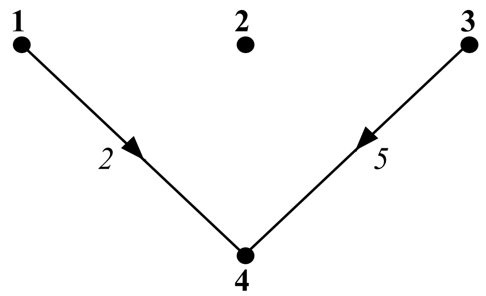




Rez grafa je skup grana za koje vrijedi:

- uklone li se sve grane iz reza, preostali graf ima točno dva dijela
- vrati li se bilo koja grana iz reza u graf on postaje povezan





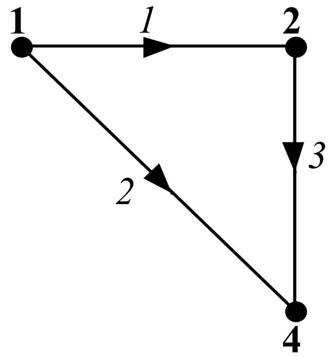
rez - grane *1*, *3* i *4*.

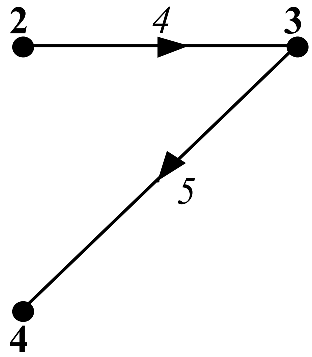
dva subgrafa zadanog grafa (čvor **2** jedan je subgraf)

Doda li se bilo koja grana iz reza u preostali graf postoji put preko grana između bilo koja dva čvora.

Petlja grafa je skup grana za koje vrijedi:

- taj skup čini povezan subgraf
- točno dvije grane vezane su na svaki čvor





petlja - grane *1*, *2* i *3*.

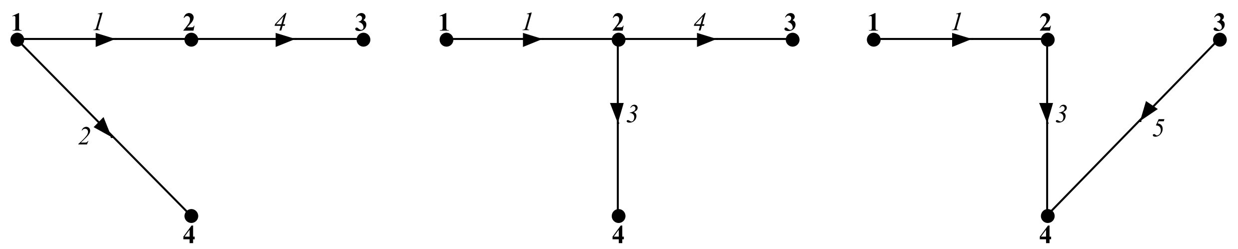
subgraf povezan - na svaki čvor spojene dvije grane

Stablo grafa je subgraf koji sadrži sve čvorove, ali ne sadrži petlju.

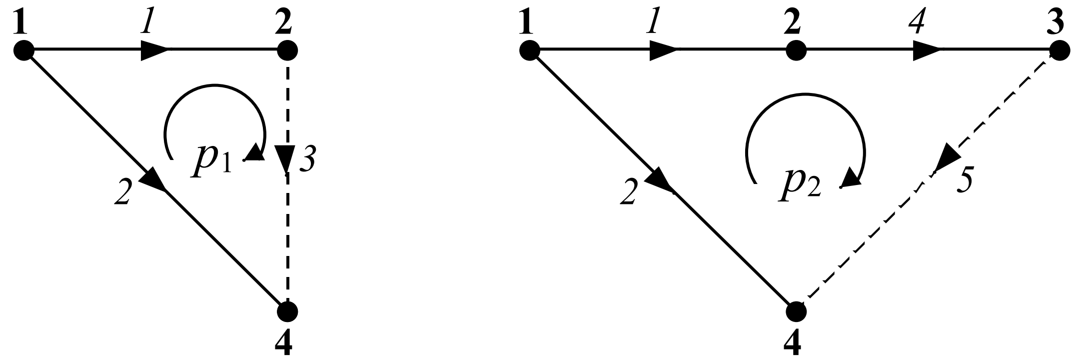
grane grafa - stablene i spojne grane (spone)

Rang grafa je broj stablenih grana.

Nulitet grafa je broj spona.

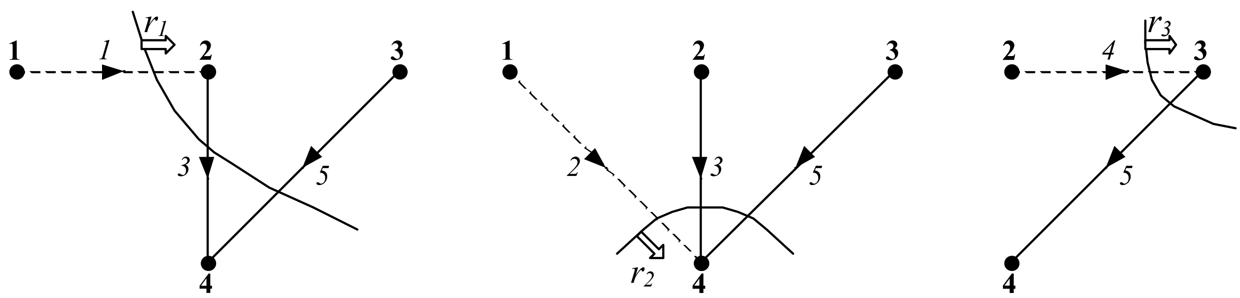


Temeljna petlja sadrži samo jednu spojnu granu, ostalo su stablene grane - smjer petlje u smjeru spone.



5 grana od kojih su 3 stablene. Dodavanjem po jedne spone - temeljna petlja, u smjeru spone.

Temeljni rez sadrži samo jednu stablenu granu, a ostalo su spone - smjer reza u smjeru stablene grane.

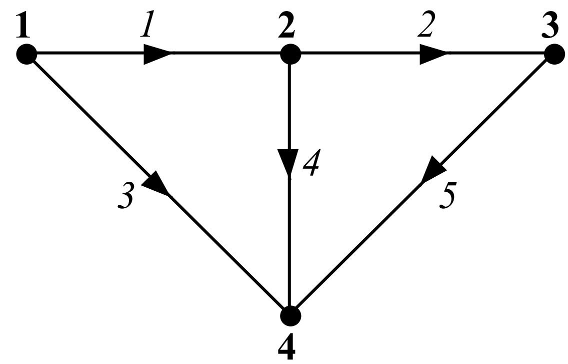


stablo ima 3 grane - sustav temeljnih rezova ima 3 reza. U svakom rezu - jedna stablena grana, a ostale presječene grane su spone. Rez je usmjeren prema čvoru u koji ulazi stablena grana.

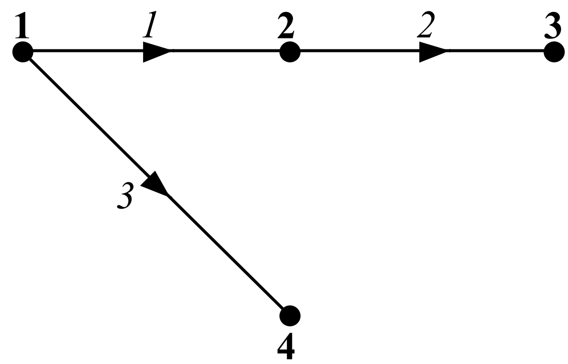
2.2. Topološke matrice grafova

u matričnim jednadžbama - matrice proizašle iz temeljnog sustava

graf:



stablo:



Matrica incidencije *V*

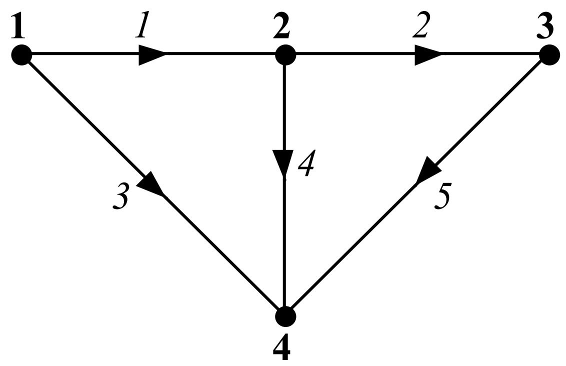
$$\begin{array}{cc} & \quad G\ \ R\ \ A\ \ N\ \ E \\ \mathbf{V} = & \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \check{C}VO- \\ RO- \\ VI \end{matrix} \end{array}$$

Element u matrici je:

1 ako grana izlazi iz čvora

-1 ako grana ulazi u čvor

0 ako grana nije povezana s čvorom



$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{matrix}$$

U svakom stupcu samo jedan element jednak 1, samo jedan jednak –1, a ostalo su 0.

reducirana matrica incidencije $\boldsymbol{V}_{\mathbf{r}}$.

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{r}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{r}} = \left[\boldsymbol{V}_{\mathbf{r}\mathrm{ST}} \;\vdots\; \boldsymbol{V}_{\mathbf{r}\mathrm{SP}}\right]$$

Temeljna spojna matrica *S*

$$\begin{array}{ll} & \quad G\ R\ A\ N\ E \\ \boldsymbol{S} = & \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} TEME- \\ LJNE \\ PET- \\ LJE \end{matrix} \end{array}$$

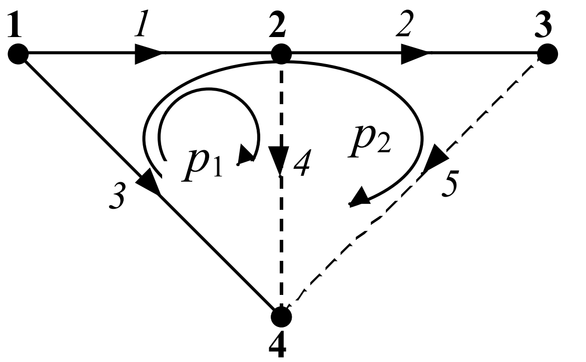
Element u matrici je:

1 ako je grana u smjeru temeljne petlje

-1 ako je grana protivna smjeru temeljne petlje

0 ako grana nije u temeljnoj petlji

Temeljna petlja sadrži samo jednu sponu, smjer petlje u smjeru spone, a ostale grane su stablene.



$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} p1 \\ p2 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{S} = \left[\boldsymbol{S}_{\mathrm{ST}} \;\vdots\; \boldsymbol{S}_{\mathrm{SP}} \right]$$

Temeljna rastavna matrica *Q*

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} G\ \ R\ \ A\ \ N\ \ E \\ \left[\begin{array}{ccccc} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} TEME\ - \\ LJNI \\ REZO\ - \\ VI \end{array}$$

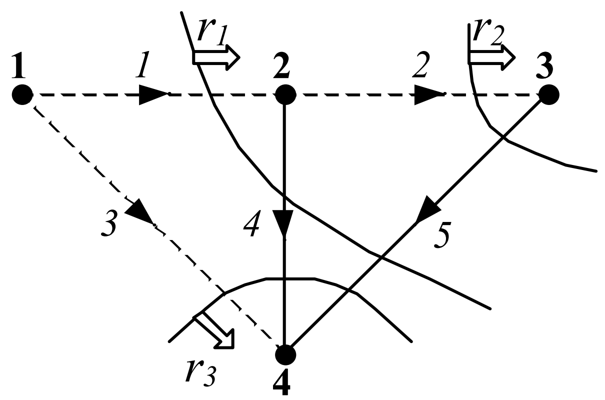
Element u matrici je:

1 ako je grana u smjeru temeljnog reza

-1 ako je grana protivna smjeru temeljnog reza

0 ako grana nije u temeljnom rezu

Temeljni rez sadrži samo jednu stablenu granu, smjer reza u smjeru stablene grane, a ostale grane su spone



$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r1 \\ r2 \\ r3 \end{array}$$

$$\boldsymbol{Q} = \left[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{ST}} \ \vdots\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{SP}}\right]$$

vrijedi:

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{0} \quad , \quad \text{odnosno} \quad \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{0} \quad , \quad \text{odnosno} \quad \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{0}$$

Oznaka ^{T} predstavlja transponiranu matricu.

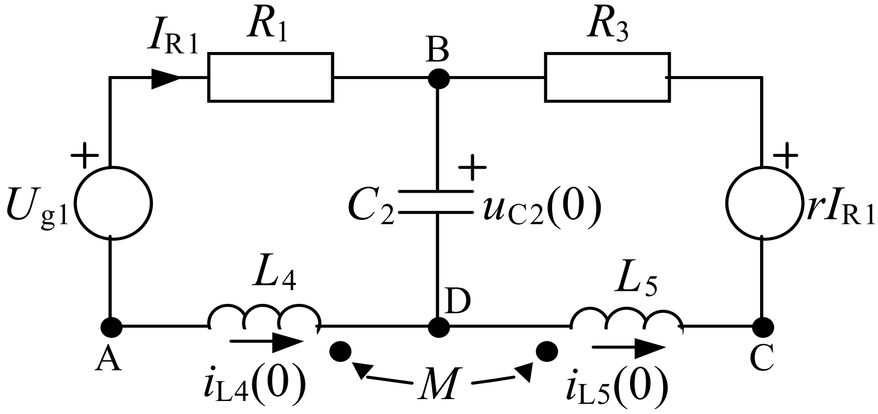
za provjeru - prva relacija:

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{S}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0-1+0+0 & 1+0-1+0+0 \\ -1+0+0+1+0 & -1+1+0+0+0 \\ 0+0+0+0+0 & 0-1+0+0+1 \\ 0+0+1+0-1 & 0+0+1+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

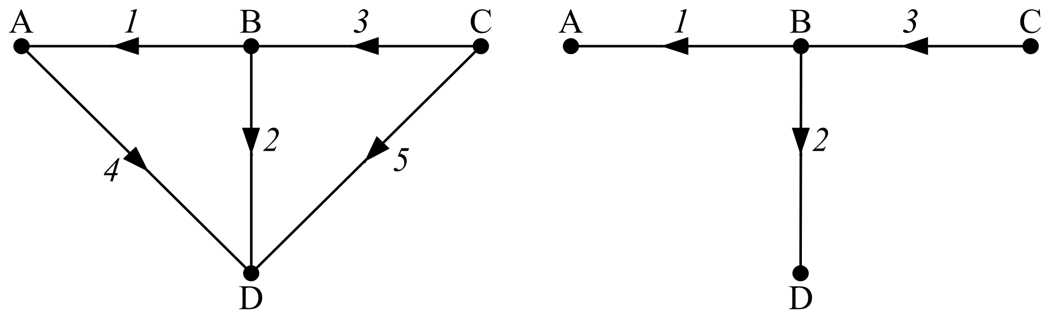
2.3. Jednadžbe mreža u matričnom obliku

Temeljni sustav jednadžbi petlji

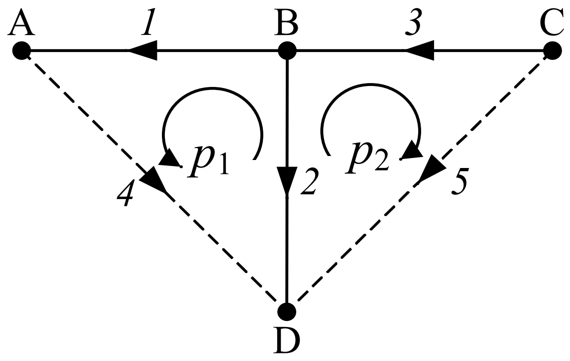
Električna mreža:



Graf i jedno stablo:



Sustav temeljnih petlji:



KZS (osim za čvor D):

$$\begin{array}{ll} A & -i_1 + i_4 = 0 \\ B & i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ C & i_3 + i_5 = 0 \end{array}$$

U matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{i}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{V}_{\mathbf{r}}$ reducirana matrica incidencije, a $\boldsymbol{i}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{t})$ je matrica struja grana.

KZN (*p1* i *p2*):

$$p1 \quad u_1 - u_2 + u_4 = 0$$

$$p2 \quad -u_2 - u_3 + u_5 = 0$$

U matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{u_b}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{S}$ temeljna spojna matrica, a $\boldsymbol{u}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{t})$ je matrica napona grana.

Sustav 5 jednadžbi s 10 nepoznanica

Ostalih 5 jednadžbi - iz naponsko strujnih relacija grana:

$$u_1(t) = i_1(t) \cdot R_1 + u_{g1}(t)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + u_{C2}(0)$$

$$u_3(t) = i_3(t) \cdot R_3 + r \cdot i_1(t)$$

$$u_4(t) = L_4 \frac{d\, i_4(t)}{dt} + M \frac{d\, i_5(t)}{dt}$$

$$u_5(t) = M \frac{d\, i_4(t)}{dt} + L_5 \frac{d\, i_5(t)}{dt}$$

Matrični zapis napona grana:

$$\boldsymbol{u_b}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u_g}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{R_b} \cdot \boldsymbol{i_b}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{L_b} \frac{d}{dt} \boldsymbol{i_b}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{D_b} \int_0^t \boldsymbol{i_b}(\boldsymbol{\tau}) d\tau + \boldsymbol{u_C}(\mathbf{0})$$

$\boldsymbol{u}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{t})$ - vektor napona grana

$\boldsymbol{u}_{\mathbf{g}}(\boldsymbol{t})$ - vektor nezavisnih naponskih izvora grana

$\boldsymbol{i}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{t})$ - vektor struja grana

$\boldsymbol{R}_{\mathbf{b}}$ - matrica otpora grana

$\boldsymbol{L}_{\mathbf{b}}$ - matrica induktiviteta grana

$\boldsymbol{D}_{\mathbf{b}}=1/\boldsymbol{C}_{\mathbf{b}}$ - matrica kapaciteta grana

$\boldsymbol{u}_{\mathrm{C}}(\mathbf{0})$ - vektor početetnih napona na kapacitetima u granama u frekvencijskoj domeni:

$$\boldsymbol{U_b}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{R_b} \cdot \boldsymbol{I_b}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{L_b}[\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{I_b}(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{i_b}(\mathbf{0})] + \boldsymbol{D_b}\,\frac{\boldsymbol{I_b}(\boldsymbol{s})}{\boldsymbol{s}} + \frac{\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0})}{\boldsymbol{s}}$$

$\boldsymbol{i}_{\mathbf{b}}(\mathbf{0})$ - vektor početnih struja u induktivitetima u granama

$$\boldsymbol{Z_b}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{R_b} + s\boldsymbol{L_b} + \frac{1}{s}\boldsymbol{D_b}$$

Zapis napona grana:

$$\boldsymbol{U_b}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{Z_b}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{I_b}(\boldsymbol{s}) + \frac{1}{s}\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0}) - \boldsymbol{L_b}\boldsymbol{i_b}(\mathbf{0})$$

Za mrežu iz primjera - matrični zapis:

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \\ U_4(s) \\ U_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{g1}(s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sL_4 & sM \\ 0 & 0 & 0 & sM & sL_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ I_4(s) \\ I_5(s) \end{bmatrix} + \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 0 \\ u_{C2}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & M \\ 0 & 0 & 0 & M & L_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_4(0) \\ i_5(0) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{U_b}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{Z_b}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{I_b}(\boldsymbol{s}) + \frac{1}{s}\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0}) - \boldsymbol{L_b}\boldsymbol{i_b}(\mathbf{0})\right] = 0$$

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{Z_b}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{I_b}(\boldsymbol{s}) = -\boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) + \frac{\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0})}{s} - \boldsymbol{L_b}\boldsymbol{i_b}(\mathbf{0})\right]$$

Struje grana $\boldsymbol{i}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{t})$ preko struja petlji $\boldsymbol{i}_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{t})$

$$\boldsymbol{i_b}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{i_m}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{Z_b}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{I_m}(\boldsymbol{s}) = -\boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) + \frac{\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0})}{s} - \boldsymbol{L_b i_b}(\mathbf{0})\right]$$

Jednadžba temeljnog sustava petlji:

$$\underline{\boldsymbol{Z_m}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{I_m}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{E_m}(\boldsymbol{s})}$$

$$\boldsymbol{Z_m}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{Z_b}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}}$$

$$\underline{\boldsymbol{E_m}(\boldsymbol{s}) = -\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E_b}(\boldsymbol{s})}$$

$\boldsymbol{Z}_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{s})$ - matrica impedancija petlji

$\boldsymbol{I}_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{s})$ - matrica struja petlji

$\boldsymbol{E}_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{s})$ - matrica nezavisnih izvora i početnih stanja u petljama

$\boldsymbol{E}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{s})$ - matrica nezavisnih izvora i početnih stanja grana

$$E_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) + \frac{\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0})}{s} - \boldsymbol{L_b i_b}(\mathbf{0})$$

Rješenja dobivena ovim matričnim rješavanjem nisu jednoznačna - proizvoljnost odabira grafa i stabla.

$$\boldsymbol{Z_m}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{Z_b}(\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sL_4 & sM \\ 0 & 0 & 0 & sM & sL_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z_m}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{sC_2} + sL_4 & \frac{1}{sC_2} + sM \\ -r + \frac{1}{sC_2} + sM & \frac{1}{sC_2} + R_3 + sL_5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_m}(\boldsymbol{s}) = -\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E_b}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{g1}(s) \\ \frac{u_{C2}(0)}{s} \\ 0 \\ -L_4 i_{L4}(0) - M\, i_{L5}(0) \\ -M\, i_{L4}(0) - L_5 i_{L5}(0) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_m}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} -U_{g1}(s) + \frac{u_{C2}(0)}{s} + L_4 i_{L4}(0) + M\, i_{L5}(0) \\ \frac{u_{C2}(0)}{s} + M\, i_{L4}(0) + L_5 i_{L5}(0) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I_m}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

Temeljni sustav jednadžbi čvorova

$$\boldsymbol{U_b}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{Z_b}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{I_b}(\boldsymbol{s}) + \frac{1}{s}\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0}) - \boldsymbol{L_b i_b}(\mathbf{0})$$

$$\boldsymbol{I_b}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s})\left[\boldsymbol{U_b}(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) - \frac{1}{s}\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{L_b i_b}(\mathbf{0})\right]$$

$$\boldsymbol{V_r} \cdot \boldsymbol{I_b}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{V_r} \cdot \boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s})\left[\boldsymbol{U_b}(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) - \frac{1}{s}\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{L_b i_b}(\mathbf{0})\right] = 0$$

$$\boldsymbol{V_r} \cdot \boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{U_b}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{V_r} \cdot \boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s})\left[\boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) + \frac{1}{s}\boldsymbol{u_C}(\mathbf{0}) - \boldsymbol{L_b i_b}(\mathbf{0})\right]$$

Naponi grana $\boldsymbol{u}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{t})$ s naponima čvorova $\boldsymbol{u}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{t})$

$$u_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{V}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{u_n}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{V_r} \cdot \boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{V_r^T} \cdot \boldsymbol{U_n}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{V_r} \cdot \boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s})\left[\boldsymbol{U_g}(\boldsymbol{s}) + \frac{1}{s}\boldsymbol{u_C}(0) - \boldsymbol{L_b i_b}(0)\right]$$

Jednadžba temeljnog sustava čvorova:

$$\underline{\boldsymbol{Y_n}(\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{U_n}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{I_n}(\boldsymbol{s})}$$

$$\boldsymbol{Y_n}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{V_r}\cdot\boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{V_r^T}$$

$$\underline{\boldsymbol{I_n}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{V_r}\cdot\boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{E_b}(\boldsymbol{s})}$$

$\boldsymbol{Y}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{s})$ - matrica admitancija čvorova

$\boldsymbol{U}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{s})$ - matrica napona čvorova

$\boldsymbol{I}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{s})$ - matrica nezavisnih izvora i početnih stanja u čvorovima

Rješenja dobivena ovim matričnim rješavanjem nisu jednoznačna - proizvoljnost odabira grafa i referentnog čvora

Inverzna matrica impedancije grana $\boldsymbol{Z}_{\mathbf{b}}^{-1}(\boldsymbol{s})$.

2x2 - algoritam:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

a,b,c i *d* - neke opće impedancije

Dijagonalna matrica dimenzija 3x3 također se jednostavno invertira, kao i svaka dijagonalna

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

3x3:

b i c - međuinduktivna veza u granama 1 i 3.

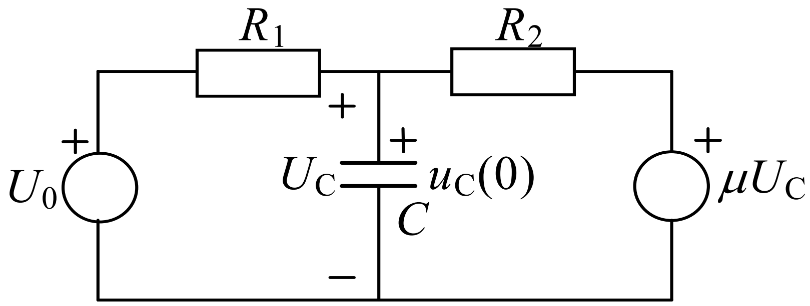
$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & x & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix}$$

b i c - međuinduktivna veza u granama 2 i 3.

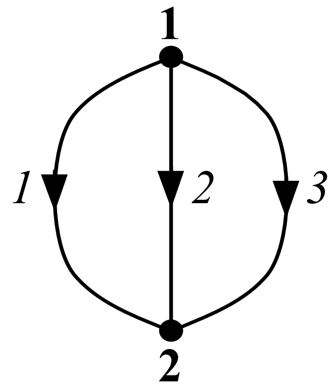
$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \quad 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Primjer: odrediti temeljni sustav jednadžbi čvorova u matričnom obliku.



graf:



čvor *2* - referentan

$$\mathbf{V_r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Naponsko strujne relacije grana:

$$U_1(s) = I_1(s) \cdot R_1 + U_0(s)$$

$$U_2(s) = I_2(s)\frac{1}{sC} + \frac{u_C(0)}{s}$$

$$U_3(s) = I_3(s) \cdot R_2 + \mu \cdot U_C(s)$$

zavisna veličina U_C

$$U_C(s) = U_2(s) = I_2(s)\frac{1}{sC} + \frac{u_C(0)}{s}$$

grana *3*:

$$U_3(s) = I_2(s)\frac{\mu}{sC} + I_3(s)\cdot R_2 + \frac{\mu \cdot u_C(0)}{s}$$

matrica impedancija grana $\boldsymbol{Z}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{s})$:

$$\boldsymbol{Z_b}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sC} & 0 \\ 0 & \dfrac{\mu}{sC} & R_2 \end{bmatrix}$$

Inverzna matrica impedancija grana $\boldsymbol{Z}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{-1}}(\boldsymbol{s})$ (matrica admitancija grana $\boldsymbol{Y}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{s})$)

$$\boldsymbol{Y_b}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & sC & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mu}{R_2} & \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

matrica naponskih izvora i početnih stanja grana $\boldsymbol{E}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{s})$:

$$\boldsymbol{E_b}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} U_0 \\ \dfrac{u_C(0)}{s} \\ \dfrac{\mu\, u_C(0)}{s} \end{bmatrix}$$

Množenjem:

$$\boldsymbol{Y_n}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{V_r} \cdot \boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{V_r^T} = \left[\frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{R_2}(1-\mu) \right]$$

$$\boldsymbol{I_n}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{V_r} \cdot \boldsymbol{Z_b^{-1}}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{E_b}(\boldsymbol{s}) = \left[\frac{U_0}{R_1} + Cu_C(0) \right]$$

$$\boldsymbol{U_n}(\boldsymbol{s}) = [U_1(s)]$$

$$\underline{\boldsymbol{Y_n}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{U_n}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{I_n}(\boldsymbol{s})}$$

3. FUNKCIJE MREŽA

3.1. Općenito o funkcijama mreža

Funkcije mreža se mogu definirati omjerom Laplaceove transformacije prisilnog odziva i Laplaceove transformacije poticaja:

$$F(s) = \frac{\mathcal{L}[prisilni\ odziv]}{\mathcal{L}[poticaj]}$$

mreža - nema nezavisnih izvora i početnih stanja

Za pobudu jediničnim impulsom $\delta(t)$ vrijedi: Laplaceov transformat impulsnog odziva $h(t)$ jednak je funkciji mreže:

$$F(s) = \frac{\mathcal{L}[prisilni\ odziv]}{\mathcal{L}[\delta(t)]} = \frac{\mathcal{L}[prisilni\ odziv]}{1} = \mathcal{L}[h(t)]$$

rješenje - omjer polinoma u brojniku i nazivniku:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{a_M\cdot s^M+a_{M-1}\cdot s^{M-1}+\ldots+a_1\cdot s+a_0}{b_N\cdot s^N+b_{N-1}\cdot s^{N-1}+\ldots+b_1\cdot s+b_0}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{M}a_m\cdot s^m}{\sum\limits_{n=0}^{N}b_n\cdot s^n}$$

faktorizirani oblik:

$$F(s)=k\frac{(s-s_{o1})(s-s_{o2})\cdot\ldots\cdot(s-s_{oM})}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})\cdot\ldots\cdot(s-s_{pN})}=k\frac{\prod\limits_{m=1}^{M}(s-s_{om})}{\prod\limits_{n=1}^{N}(s-s_{pn})}\qquad k=\frac{a_M}{b_N}$$

s_{om} - korijeni polinoma $P(s)$, nultočke funkcije

s_{pn} - korijeni polinoma $Q(s)$, polovi funkcije

Nule funkcije mreže su vrijednosti argumenta s gdje funkcija poprima vrijednost 0, a to su nultočke brojnika ili nazivnik teži u beskonačnost uz konačan brojnik.

Polovi funkcije mreže su vrijednosti argumenta s gdje funkcija poprima vrijednost ∞, a to su nultočke nazivnika ili brojnik teži u beskonačnost uz konačan nazivnik.

funkcija mreže - u potpunosti određena nulama, polovima i faktorom k

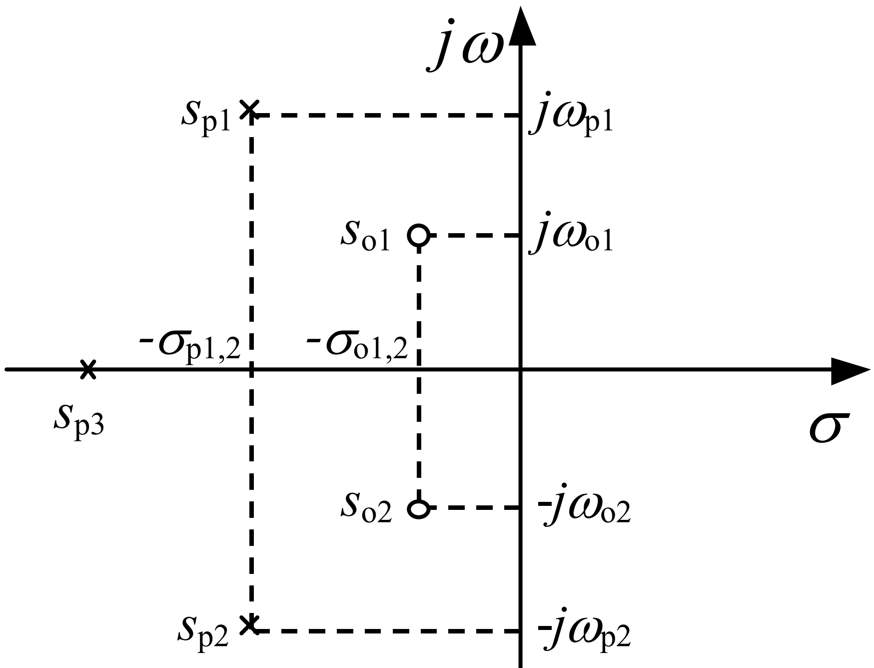
realni koeficijenti → nule i polovi u konjugirano kompleksnim parovima

$$s_i = -\sigma_i + j\omega_i \qquad , s_i^* = -\sigma_i - j\omega_i$$

ili su realni

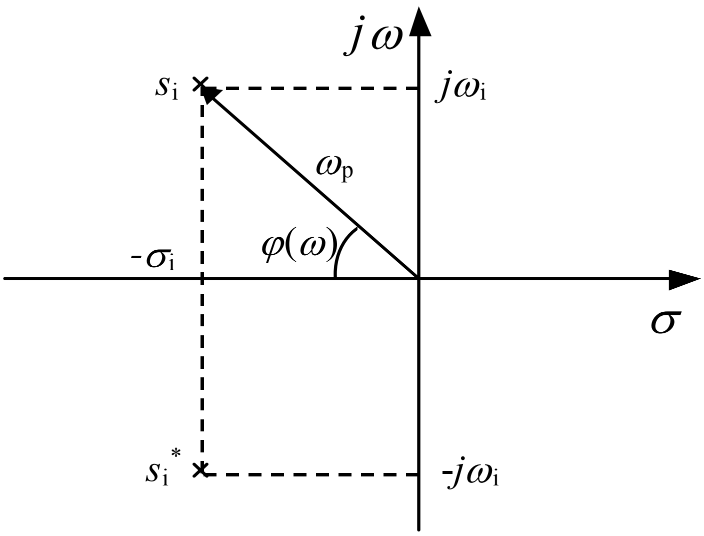
$$s_i = -\sigma_i$$

kompleksna s-ravnina:



množenje konjugirano kompleksnih parova polova:

$$(s - s_i)(s - s_i^*) = (s + \sigma_i - j\omega_i)(s + \sigma_i + j\omega_i) = s^2 + 2\sigma_i s + \sigma_i^2 + \omega_i^2$$



udaljenost pola od ishodišta (modul vektora):

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}$$

faktor kvalitete pola:

$$q_p = \frac{\omega_p}{2\sigma_i}$$

$$(s - s_i)(s - s_i^*) = s^2 + \frac{\omega_p}{q_p} s + \omega_p^2$$

Stabilnost mreže

stabilnost - odziv mreže na konačnu pobudu mora biti konačan

Uvjeti:

- $F(s)$ je racionalna funkcija varijable s s realnim koeficijentima
- Polovi funkcije $F(s)$ ne smiju biti u desnoj poluravnini kompleksne s-ravnine
- Polovi funkcije $F(s)$ na imaginarnoj osi moraju biti jednostruki

Frekvencijske karakteristike

Zamjenom $s=j\omega$ u funkciji mreže $F(s)$ → omjer fazora odziva i fazora poticaja za mrežu u sinusoidalnom stacionarnom stanju na frekvenciji ω.

Funkcija mreže $F(j\omega)$:

$$F(j\omega) = \mathrm{Re}[F(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[F(j\omega)]$$

amplitudno frekvencijska karakteristika:

$$|F(j\omega)| = \sqrt{(\mathrm{Re}[F(j\omega)])^2 + (\mathrm{Im}[F(j\omega)])^2}$$

$$A(\omega) = 20\log|F(j\omega)| \quad [\mathrm{dB}]$$

fazno frekvencijska karakteristika:

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}[F(j\omega)]}{\mathrm{Re}[F(j\omega)]}$$

zapis u polarnom obliku:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

iz poznatih nula i polova funkcije:

$$F(j\omega) = k\frac{\prod_{m=1}^{M}(j\omega - s_{om})}{\prod_{n=1}^{N}(j\omega - s_{pn})}$$

amplitudno frekvencijska karakteristika:

$$|F(j\omega)| = k\frac{\prod_{m=1}^{M}|j\omega - s_{om}|}{\prod_{n=1}^{N}|j\omega - s_{pn}|}$$

fazno frekvencijska karakteristika:

$$\varphi(\omega) = \sum_{m=1}^{M}\arctan\frac{\mathrm{Im}(j\omega - s_{om})}{\mathrm{Re}(j\omega - s_{om})} - \sum_{n=1}^{N}\arctan\frac{\mathrm{Im}(j\omega - s_{pn})}{\mathrm{Re}(j\omega - s_{pn})}$$

Izračunavanje odziva preko funkcija mreža

pobuda $M(s)$, odziv $N(s)$

Za pobudu zadanu od vremena nula na dalje:

$$N(s) = F(s) \cdot M(s)$$

U vremenskoj domeni:

$$n(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[N(s)\right]$$

Za sinusoidalnu pobudu frekvencije ω_0:

$$N(j\omega_0) = F(j\omega_0) \cdot M(j\omega_0)$$

U vremenskoj domeni:

$$n(t) = \sqrt{\left(\mathrm{Re}[N(j\omega_0)]\right)^2 + \left(\mathrm{Im}[N(j\omega_0)]\right)^2}\, funkcijapobude\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\mathrm{Im}[N(j\omega_0)]}{\mathrm{Re}[N(j\omega_0)]}\right)$$

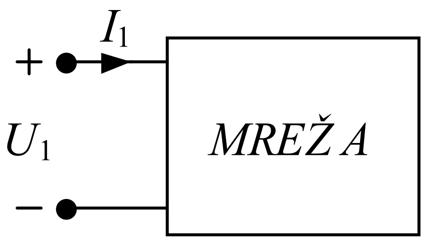
Funkcije mreža: funkcije imitancija

prijenosne funkcije

3.2. Funkcije imitancija

Funkcija imitancije je omjer Laplaceovih transformacija funkcije napona i funkcije struje, ili obrnuto, na istom paru priključnica mreže.

Imitancija: impedancija i admitancija



Impedancija: $$Z(s)=\frac{U_1(s)}{I_1(s)}$$

Admitancija: $$Y(s)=\frac{I_1(s)}{U_1(s)}$$

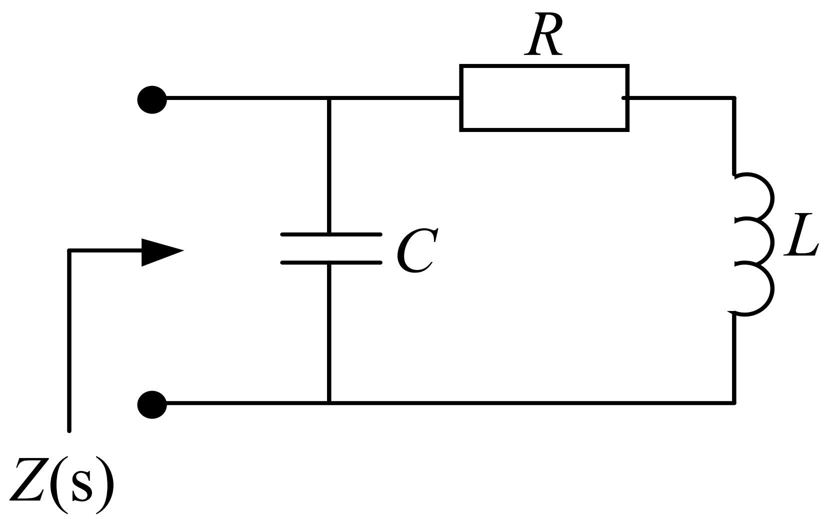
$$Z(j\omega)=\mathrm{Re}[Z(j\omega)]+j\,\mathrm{Im}[Z(j\omega)]=R(\omega)+jX(\omega)$$

$R(\omega)$ - rezistancija $\quad$ $X(\omega)$ reaktancija

$$Y(j\omega)=\mathrm{Re}[Y(j\omega)]+j\,\mathrm{Im}[Y(j\omega)]=G(\omega)+jB(\omega)$$

$G(\omega)$ - konduktancija $\quad$ $B(\omega)$ susceptancija

Primjer: odrediti funkciju ulazne impedancije $Z(s)$, nacrtati raspored polova i nula u kompleksnoj s-ravnini i nacrtati modul i fazu funkcije $Z(j\omega)$. Zadano je: R=1, L=1, C=1.



$$Z(s)=\frac{\frac{1}{sC}(R+sL)}{\frac{1}{sC}+R+sL}=\frac{sL+R}{s^2LC+sRC+1}$$

$$Z(s)=\frac{1}{C}\frac{s+\frac{R}{L}}{s^2+s\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$

$$Z(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

Nule: nultočke brojnika

$$s + 1 = 0$$

$$s_{o1} = -1$$

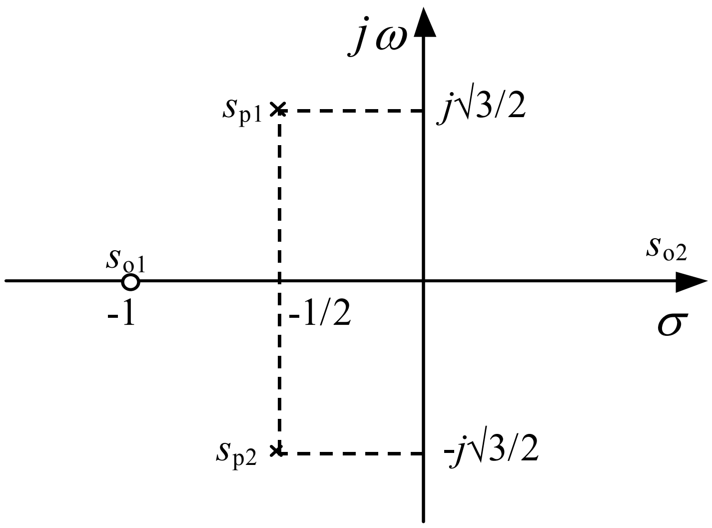
beskonačan nazivnik uz konačan brojnik

$$s_{o2} = \infty$$

Polovi: nultočke nazivnika

$$s^2 + s + 1 = 0$$

$$s_{p1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$



Funkcija impedancije $Z(j\omega)$:

$$Z(j\omega) = Z(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega + 1}{-\omega^2 + j\omega + 1} = \frac{1 + j\omega}{\left(1-\omega^2\right) + j\omega}$$

$$Z(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{\left(1-\omega^2\right) + j\omega} \frac{\left(1-\omega^2\right) - j\omega}{\left(1-\omega^2\right) - j\omega} = \frac{\left(1-\omega^2\right) - j\omega + j\omega\left(1-\omega^2\right) + \omega^2}{\left(1-\omega^2\right)^2 + \omega^2}$$

$$Z(j\omega) = \frac{1 - j\omega^3}{1 - \omega^2 + \omega^4} = \frac{1}{\omega^4 - \omega^2 + 1} + j\frac{-\omega^3}{\omega^4 - \omega^2 + 1}$$

A-f karakteristika (modul funkcije):

$$\left|Z(j\omega)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega^4 - \omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{-\omega^3}{\omega^4 - \omega^2 + 1}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+\omega^6}}{\sqrt{\left(\omega^4 - \omega^2 + 1\right)^2}} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1}}$$

jednostavnije:

$$\left|Z(j\omega)\right| = \left|Z(s)\right|_{s=j\omega}\Big| = \left|\frac{j\omega + 1}{-\omega^2 + j\omega + 1}\right| = \frac{\left|1 + j\omega\right|}{\left|\left(1-\omega^2\right) + j\omega\right|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2 + \omega^2}} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1}}$$

analiza toka funkcije:

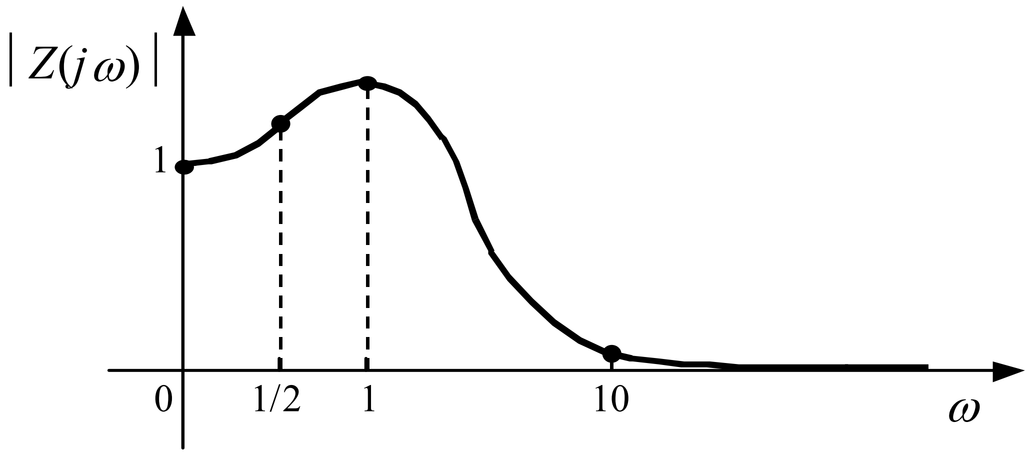
nula u konačnosti nema

polovi: $\omega^4 - \omega^2 + 1 = 0$

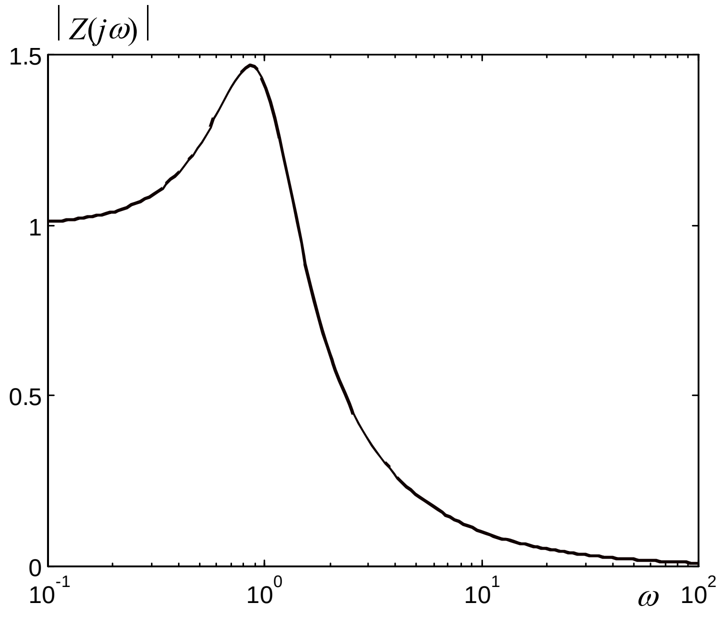
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

karakteristične frekvencije ω i pripadne vrijednosti

ω	0	1/2	1	10	∞
$\lvert Z(j\omega)\rvert$	1	1.24	1.41	0.1	0



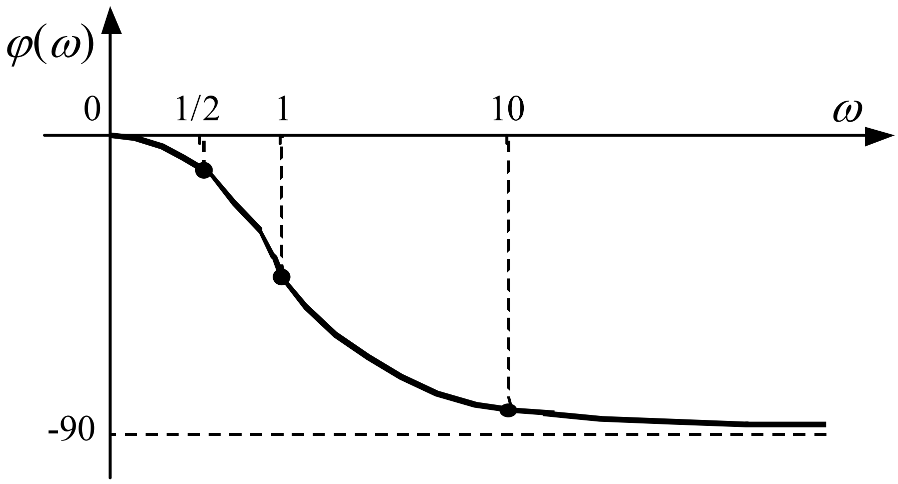
MATLAB



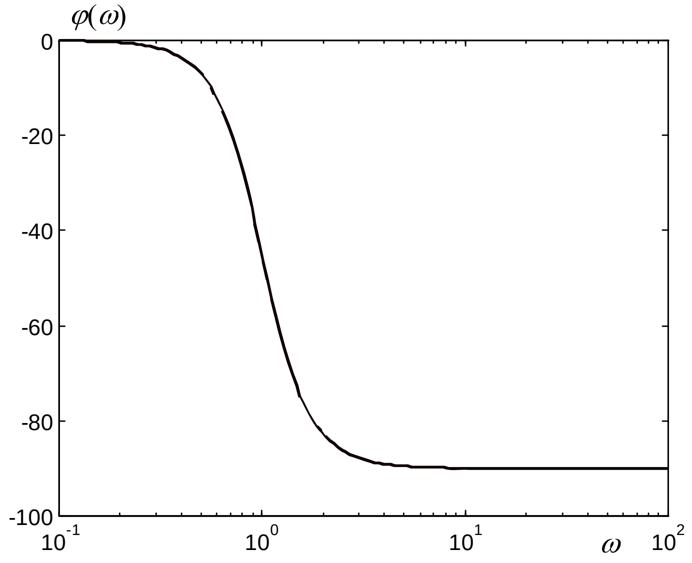
F-f karakteristika:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\dfrac{-\omega^3}{\omega^4 - \omega^2 + 1}}{\dfrac{1}{\omega^4 - \omega^2 + 1}} = \arctan\left(-\omega^3\right)$$

ω	0	1/2	1	10	∞
$\varphi(\omega)$	0	-7,1^{O}	-45^{O}	-84,3^{O}	-90^{O}



MATLAB



Ponašanje mreže:

za istosmjernu pobudu impedancija ima vrijednost 1 (vrijednost otpora R)

s porastom frekvencije apsolutna vrijednost impedancije prvo raste, a zatim je sve manja

za visoke frekvencije impedancija poprima vrijednost 0 (kapacitet kratak spoj)

fazni kut negativan - mreža je kapacitivna

ulazna admitancija - recipročna ulaznoj impedanciji

3.3. Prijenosne funkcije

Prijenosna funkcija je omjer Laplaceovih transformacija funkcije odziva i funkcije pobude na različitom paru priključnica mreže.

četiri vrste:

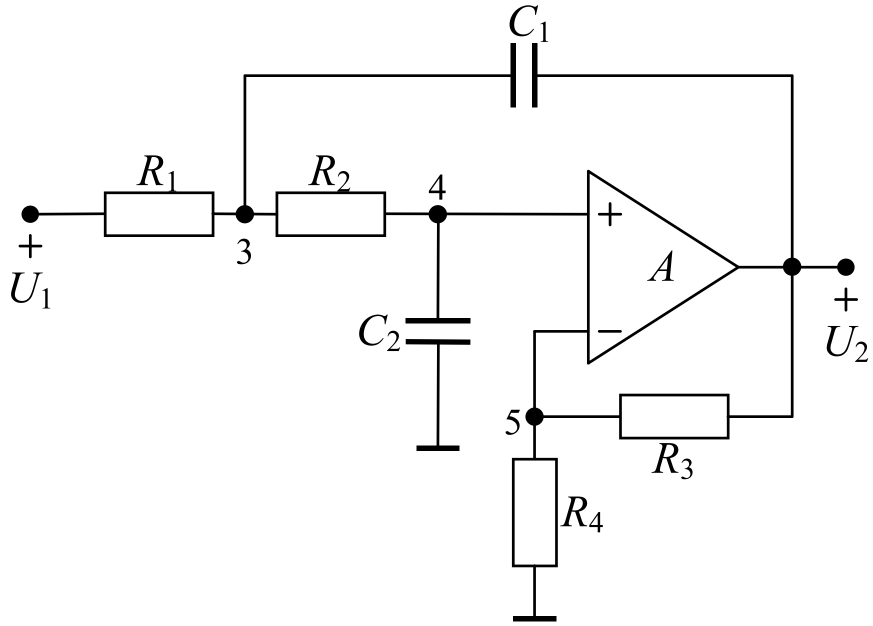
a) prijenosni omjer napona $$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

b) prijenosni omjer struja $$T(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$$

c) prijenosna impedancija $$T(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}$$

d) prijenosna admitancija $$T(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}$$

Primjer: odrediti prijenosnu funkciju $T(s)=U_2(s)/U_1(s)$, nacrtati raspored polova i nula u kompleksnoj s-ravnini i nacrtati modul i fazu funkcije $T(j\omega)$. Zadano je: $R_1=2$, $R_2=R_3=1/2$, $R_4=1$, $C_1=C_2=1$.



Jednadžbe čvorova:

$$(3)\quad U_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+sC_1\right)-U_1\frac{1}{R_1}-U_2sC_1-U_4\frac{1}{R_2}=0$$

$$(4)\quad U_4\left(\frac{1}{R_2}+sC_2\right)-U_3\frac{1}{R_2}=0$$

$$(5)\quad U_5\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)-U_2\frac{1}{R_3}=0$$

Izlazni čvor:

$$U_2 = A \cdot (U_4 - U_5)$$

iz (*3*) $\rightarrow U_3 \rightarrow$ (*4*)

$$U_4 = \frac{U_1 \frac{1}{R_1 R_2}}{\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{sC_1}{R_2} + \frac{sC_2}{R_1} + \frac{sC_2}{R_2} + s^2 C_1 C_2} + \frac{U_2 \frac{sC_1}{R_2}}{\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{sC_1}{R_2} + \frac{sC_2}{R_1} + \frac{sC_2}{R_2} + s^2 C_1 C_2}$$

iz (*5*) $\rightarrow U_5$

$$(5) \qquad U_5 = U_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$U_2 = A\left[\frac{U_1 \frac{1}{R_1 R_2}}{\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{sC_1}{R_2} + \frac{sC_2}{R_1} + \frac{sC_2}{R_2} + s^2 C_1 C_2} + \frac{U_2 \frac{sC_1}{R_2}}{\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{sC_1}{R_2} + \frac{sC_2}{R_1} + \frac{sC_2}{R_2} + s^2 C_1 C_2} - \frac{U_2 \cdot R_4}{R_3 + R_4}\right]$$

$$U_2\left[\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{sC_2}{R_1} + \frac{sC_2}{R_2} - \frac{sC_1 R_3}{R_2 R_4} + s^2 C_1 C_2\right] = U_1 \frac{\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)}{R_1 R_2}$$

Naponska prijenosna funkcija

$$T(s) = \frac{U_2}{U_1} = \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \frac{1}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + sC_2 R_1 + sC_2 R_2 - s\frac{C_1 R_1 R_3}{R_4} + 1}$$

$$T(s)=\frac{\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right)\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2+s\left(\frac{1}{C_1R_1}+\frac{1}{C_1R_2}-\frac{R_3}{C_2R_2R_4}\right)+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

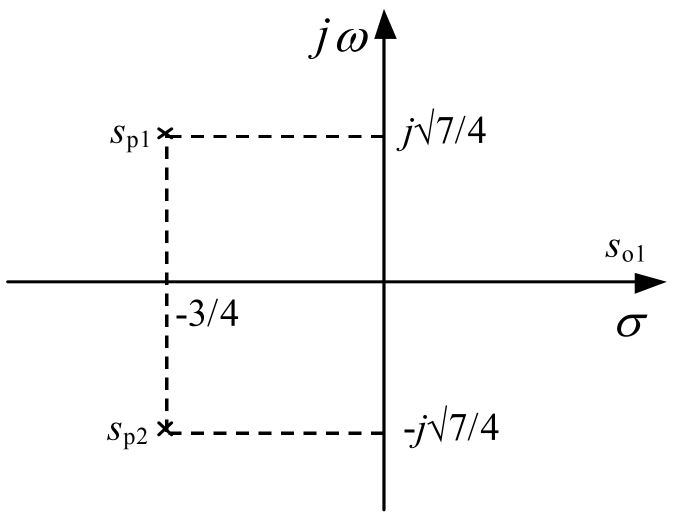
$$T(s)=\frac{\frac{3}{2}}{s^2+\frac{3}{2}s+1}$$

nula: u beskonačnosti

polovi: rješenja jednadžbe

$$s^2+\frac{3}{2}s+1=0$$

$$s_{p1,2}=\frac{-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-4}}{2}=\frac{-\frac{3}{2}\pm j\sqrt{\frac{7}{4}}}{2}=-\frac{3}{4}\pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$$



usporedbom

$$s^2 + \frac{\omega_p}{q_p} s + \omega_p^2 = s^2 + \frac{3}{2} s + 1$$

frekvencija pola: $\omega_p = 1$

faktor kvalitete pola (Q-faktor): $q_p = \frac{2}{3}$

A-f karakteristika:

$$\left|T(j\omega)\right| = \left|T(s)\right|_{s=j\omega}\Big| = \frac{3}{2} \frac{1}{\left|-\omega^2 + j\frac{3}{2}\omega + 1\right|} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2 + \frac{9}{4}\omega^2}}$$

$$\left|T(j\omega)\right| = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + \frac{1}{4}\omega^2 + 1}}$$

nula: u beskonačnosti

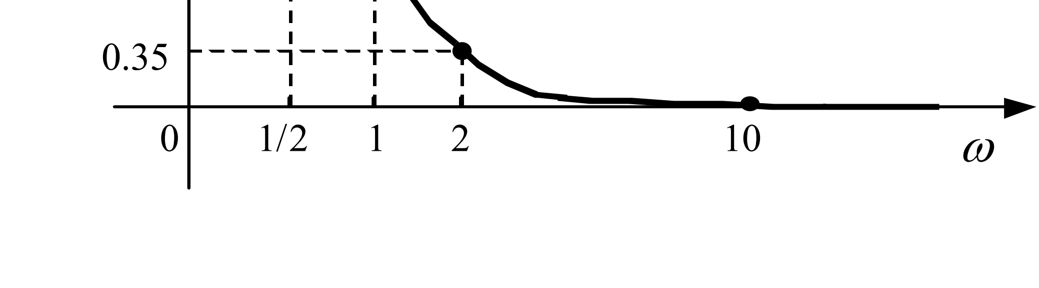
polovi: rješenja jednadžbe

$$\omega^4 + \frac{1}{4}\omega^2 + 1 = 0$$

$$\omega_{p1,2}^2 = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - 4}}{2} = -\frac{1}{8} \pm j\frac{\sqrt{63}}{8}$$

tablica:

ω	0	1/2	1	2	10	∞
$\lvert T(j\omega) \rvert$	1.5	1.41	1	0.35	0.015	0



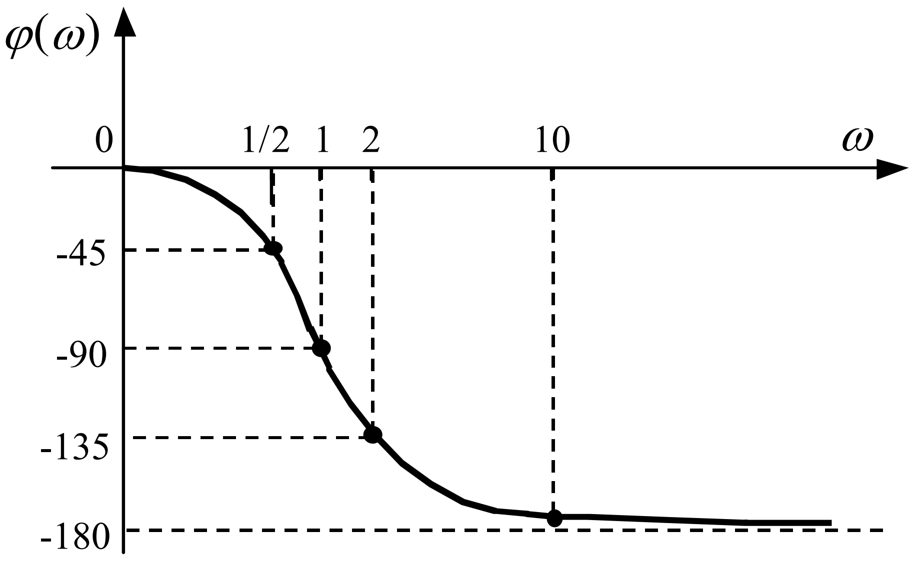
F-f karakteristika:

$$T(j\omega)=\frac{3}{2}\frac{1}{\left(1-\omega^2\right)+j\frac{3}{2}\omega}\cdot\frac{\left(1-\omega^2\right)-j\frac{3}{2}\omega}{\left(1-\omega^2\right)-j\frac{3}{2}\omega}=\frac{3}{2}\frac{\left(1-\omega^2\right)-j\frac{3}{2}\omega}{\left(1-\omega^2\right)^2+\frac{9}{4}\omega^2}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{-\frac{3}{2}\omega}{1-\omega^2}$$

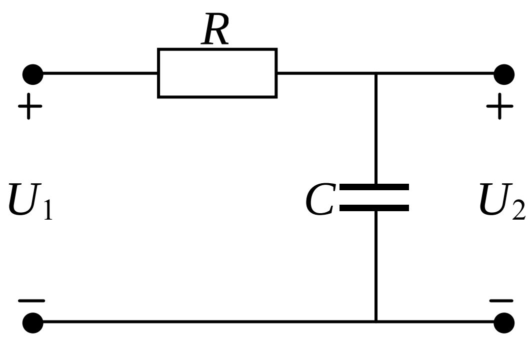
tablica:

ω	0	1/2	1	2	10	∞
$\varphi(\omega)$	0	-45^O	-90^O	-135^O	-171^O	-180^O



3.4. Funkcije mreža 1. reda

RC član i *LR* član



$$T(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC}+R}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{\alpha}{s+\alpha}$$

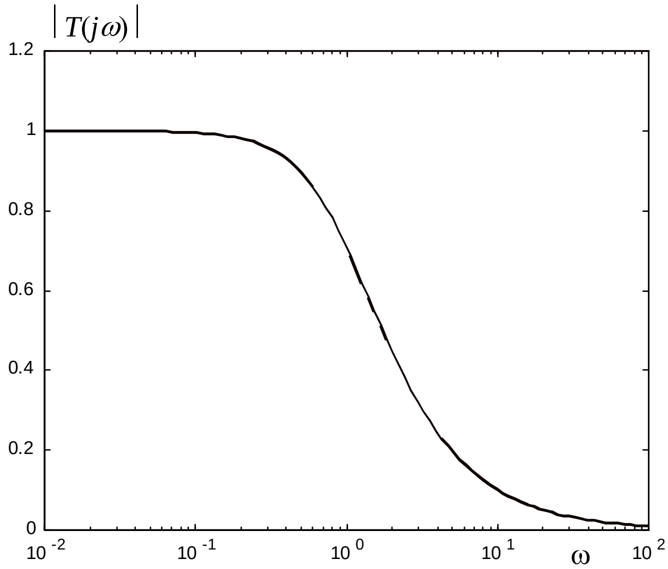
α - recipročna vrijednost vremenske konstante τ_C

$$\alpha=\frac{1}{\tau_C}=\frac{1}{RC}$$

nula: $s=\infty$

realan pol: $s=-\alpha$.

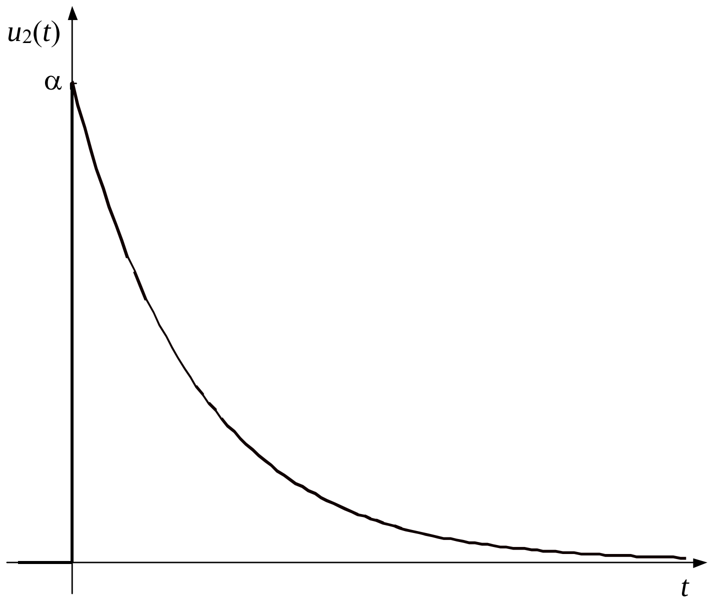
Za R=C=1:



pobuda: $\delta(t)$

odziv: $U_2(s) = T(s) \cdot U_1(s) = \dfrac{\alpha}{s+\alpha} \cdot 1 = \dfrac{\alpha}{s+\alpha}$

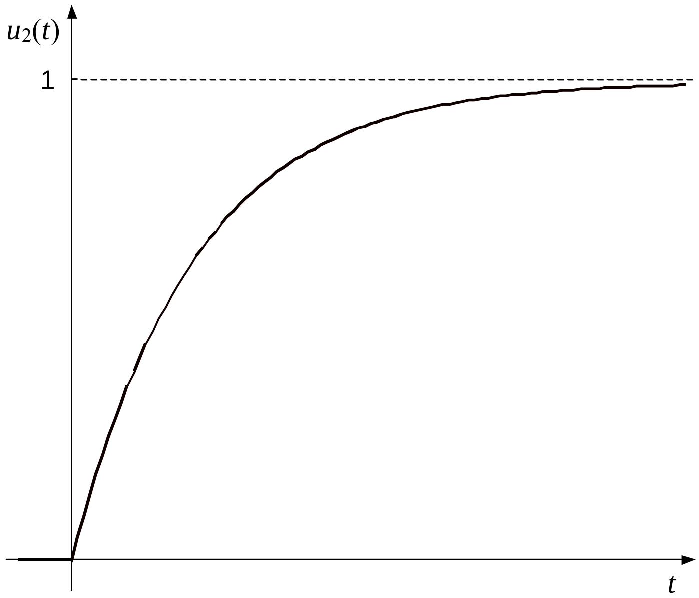
$$u_2(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha t} S(t)$$



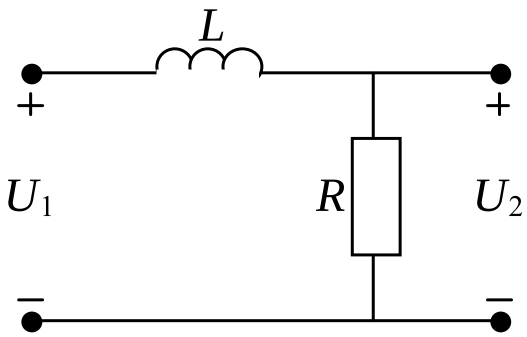
pobuda: $S(t)$

odziv: $U_2(s) = T(s) \cdot U_1(s) = \dfrac{\alpha}{s+\alpha} \cdot \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+\alpha}$

$$u_2(t) = \left(1 - e^{-\alpha t}\right) S(t)$$

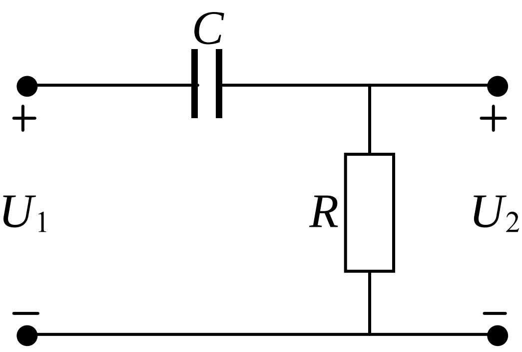


LR član (isto ponašanje):



$$\alpha = \frac{1}{\tau_L} = \frac{R}{L}$$

CR član i *RL* član



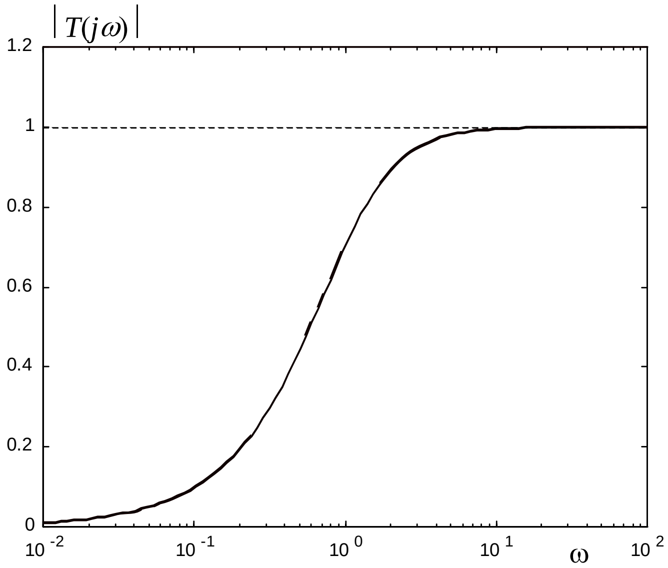
$$T(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{R}{\frac{1}{sC}+R}=\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{s}{s+\alpha}$$

α - recipročna vrijednost vremenske konstante τ_C

nula: s=0

realan pol: s=-α

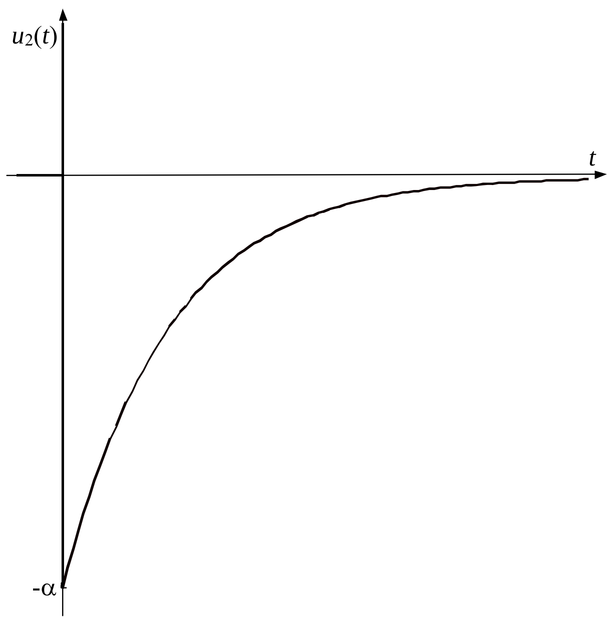
R=C=1



pobuda: $\delta(t)$

odziv: $$U_2(s)=T(s)\cdot U_1(s)=\frac{s}{s+\alpha}\cdot 1=\frac{s+\alpha-\alpha}{s+\alpha}=1-\frac{\alpha}{s+\alpha}$$

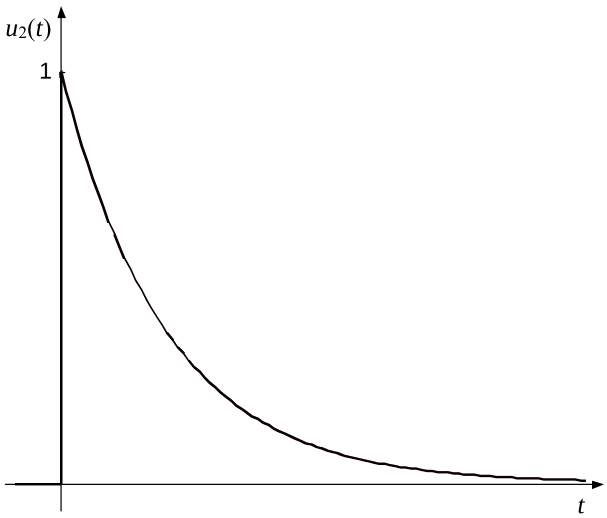
$$u_2(t)=\delta(t)-\alpha\cdot e^{-\alpha t}S(t)$$



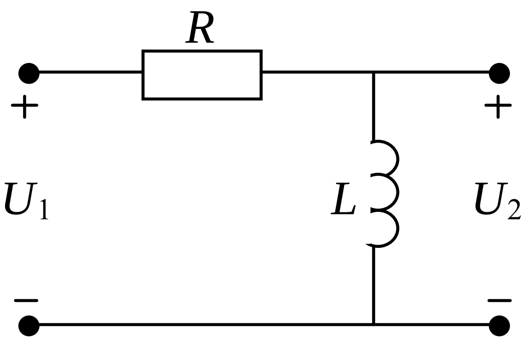
pobuda: $S(t)$

odziv: $U_2(s) = T(s) \cdot U_1(s) = \frac{s}{s+\alpha} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s+\alpha}$

$$u_2(t) = e^{-\alpha t} S(t)$$



RL član (isto ponašanje):



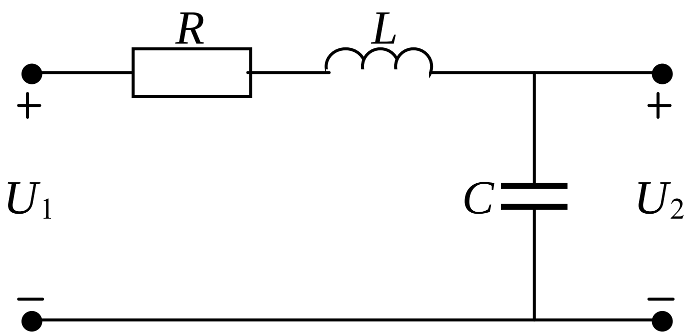
mreže 1. reda - samo jedan reaktivan element

3.5. Funkcije mreža 2. reda

- dva raznovrsna reaktivna elementa ili dva istovrsna reaktivna elementa koja se ne mogu nadomjestiti serijskim/paralelnim spojem

- odziv - ovisan o položaju polova prijenosne funkc.

RL-C **mreža**



$$T(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2}$$

α - prigušenje mreže: $\alpha = \dfrac{R}{2L}$

ω_0 - frekvencija mreže: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

nula - u beskonačnosti

polovi - rješenja karakteristične jednadžbe mreže

$$s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{p1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Odnos prigušenja α i frekvencije ω_0 daje četiri karakteristična odziva mreže:

a) nadkritično prigušenje, $\alpha > \omega_0$

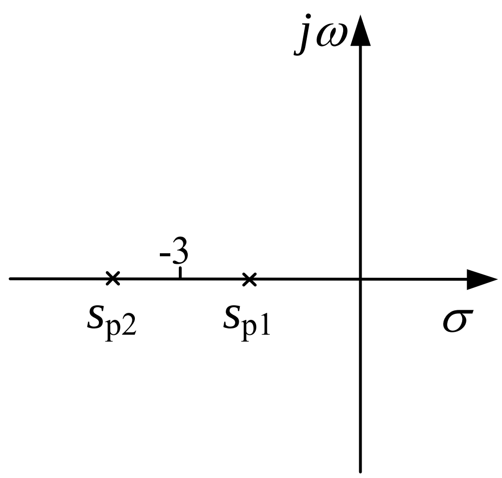
broj pod korijenom pozitivan i polovi su realni

$$s_{p1} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad , \quad s_{p2} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

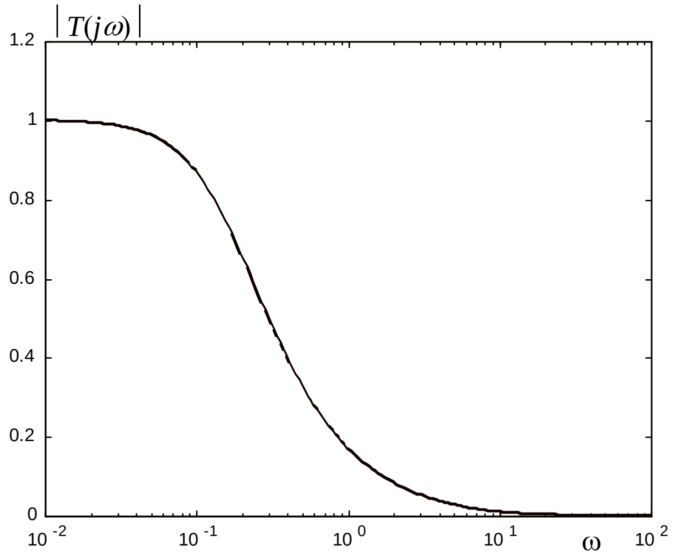
vrijedi: $$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Neka je: α=3 i ω_0=1

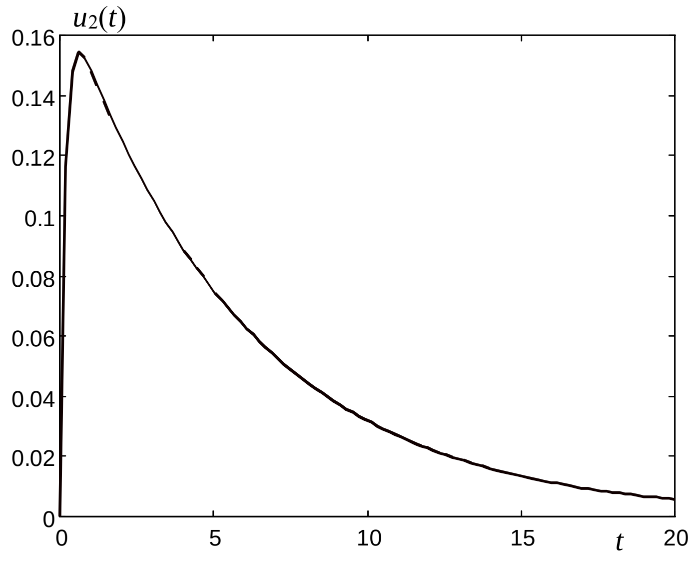
polovi: $s_{p1} = -3 + 2\sqrt{2} \quad , \quad s_{p2} = -3 - 2\sqrt{2}$



A-f karakteristika: $\left|T\left(j\omega\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2 + 36\omega^2}}$



Odziv na $\delta(t)$: $u_2(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} e^{-3t} \mathrm{sh}\left(2\sqrt{2}t\right) \cdot S(t)$



b) kritično prigušenje, $\alpha=\omega_0$

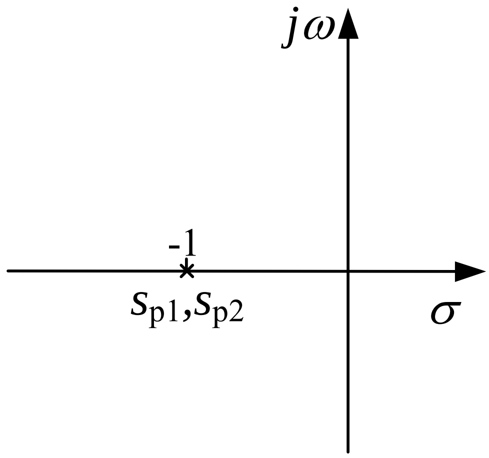
broj pod korijenom jednak nuli i polovi su realni i jednaki

$$s_{p1} = s_{p2} = -\alpha$$

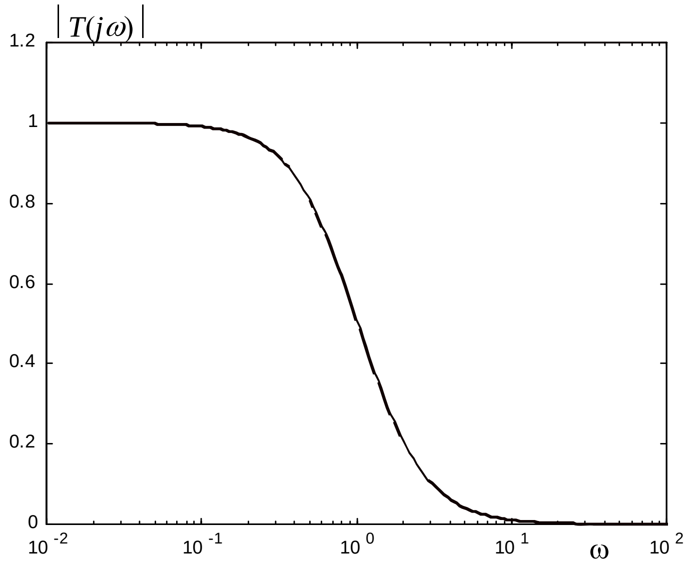
vrijedi: $$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Neka je: $\alpha=\omega_0=1$

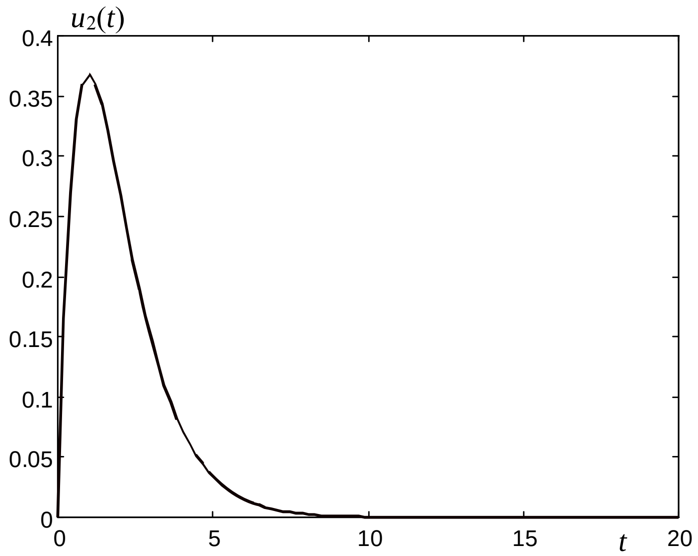
Polovi: $$s_{p1} = s_{p2} = -1$$



A-f karakteristika: $$\left|T(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2 + 4\omega^2}}$$



Odziv na $\delta(t)$: $$u_2(t) = te^{-t} \cdot S(t)$$



c) potkritično prigušenje, $\alpha<\omega_0$

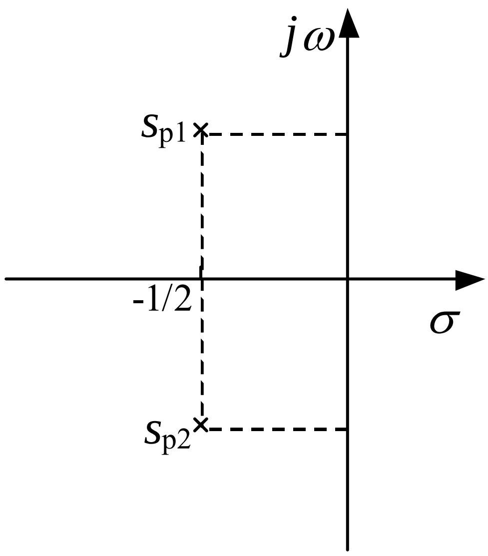
broj pod korijenom negativan i polovi su kompleksni

$$s_{p1}=-\alpha+j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2} \quad , \quad s_{p2}=-\alpha-j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

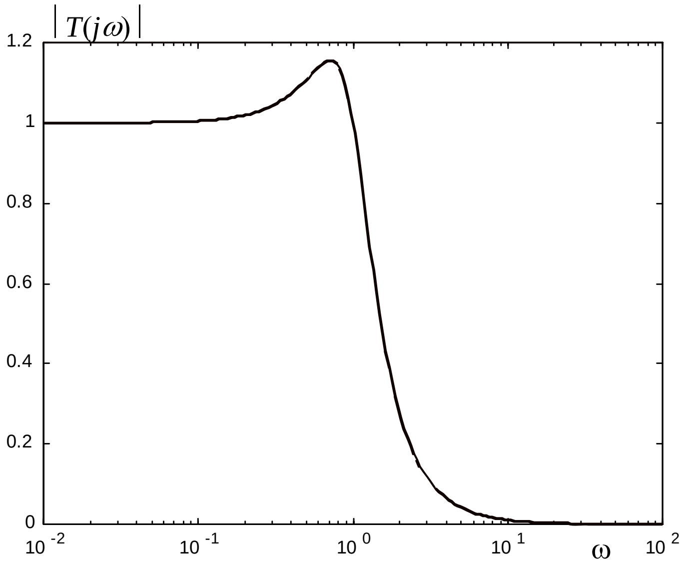
vrijedi: $\qquad R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Neka je: $\alpha=1/2$ i $\omega_0=1$

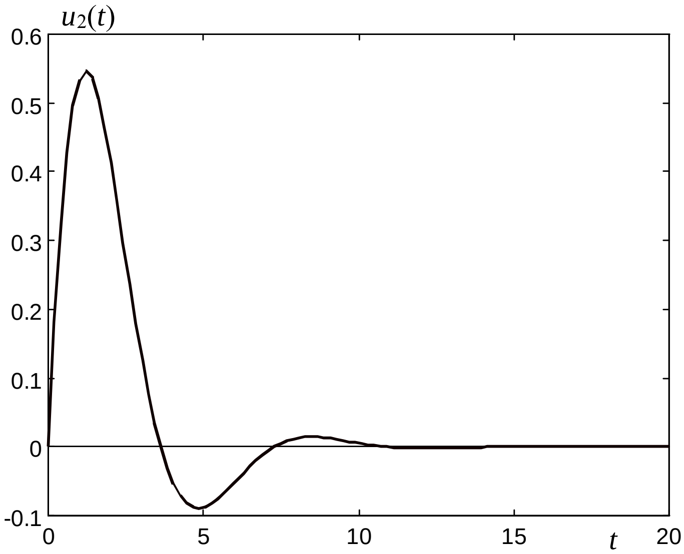
polovi: $\quad s_{p1}=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad s_{p2}=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$



A-f karakteristika: $$\left|T(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2 + \omega^2}}$$



Odziv na $\delta(t)$: $$u_2(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} t \cdot S(t)$$



d) neprigušen odziv, α=0

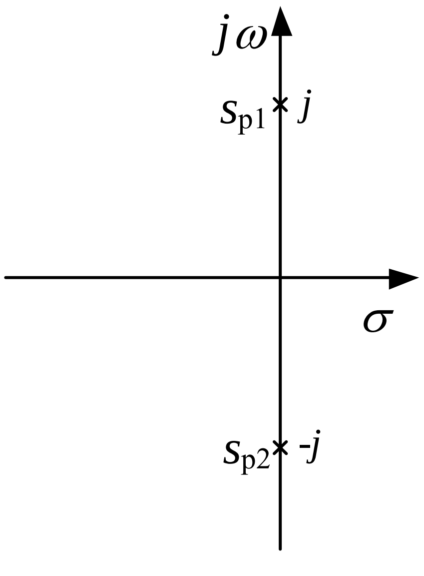
broj pod korijenom negativan i polovi su imaginarni

$$s_{p1} = j\omega_0 \quad , \quad s_{p2} = -j\omega_0$$

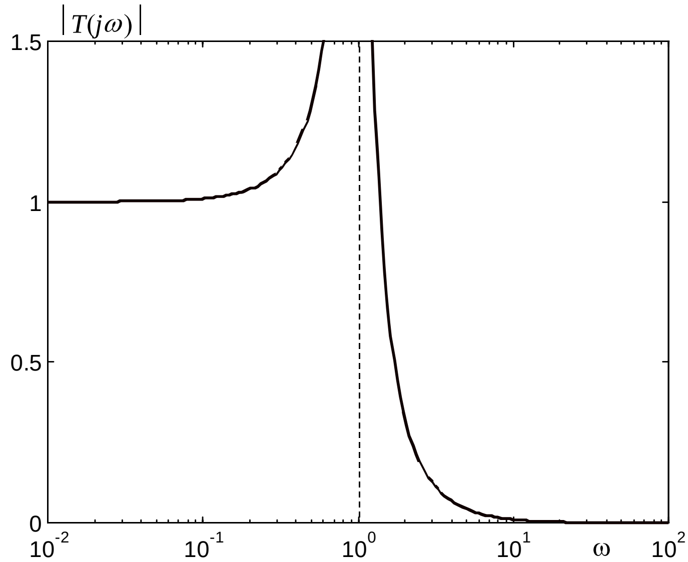
vrijedi: R=0 (samo reaktivni elementi u mreži)

Neka je: α=0 i ω_0=1

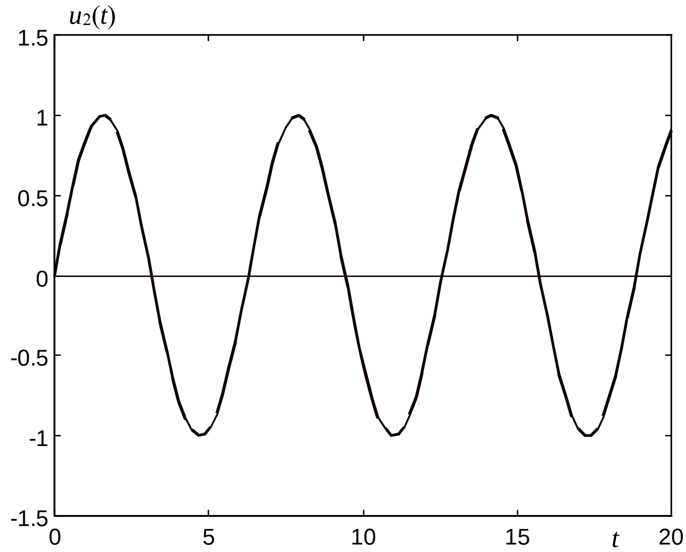
polovi: $s_{p1} = +j \quad , \quad s_{p2} = -j$



A-f karakteristika: $\left|T(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2}}$



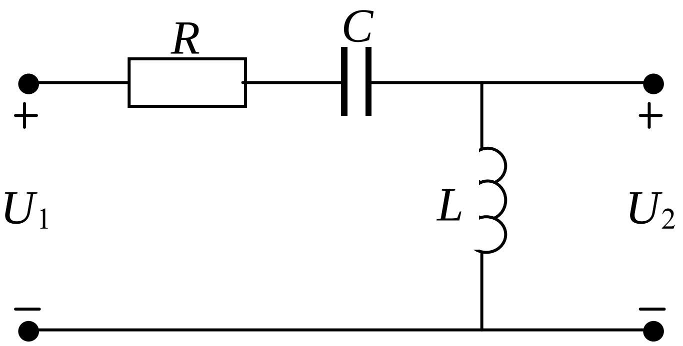
Odziv na $\delta(t)$: $u_2(t) = \sin t \cdot S(t)$



Pol prijenosne funkcije $\left|T(j\omega)\right|$ na frekvenciji $\omega_0=1$. Odziv je oscilatoran (neprigušen).

RL-*C* mreža propušta signale nižih frekvencija.

RC-L mreža



$$T(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{sL}{R+\frac{1}{sC}+sL}=\frac{s^2}{s^2+s\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$

$$T(s)=\frac{s^2}{s^2+2\alpha\cdot s+\omega_0^2}$$

nule: dvostruka u ishodištu

polovi - rješenja karakteristične jednadžbe mreže

odnos prigušenja α i frekvencije ω_0 daje četiri karakteristična odziva mreže:

a) nadkritično prigušenje, $\alpha > \omega_0$

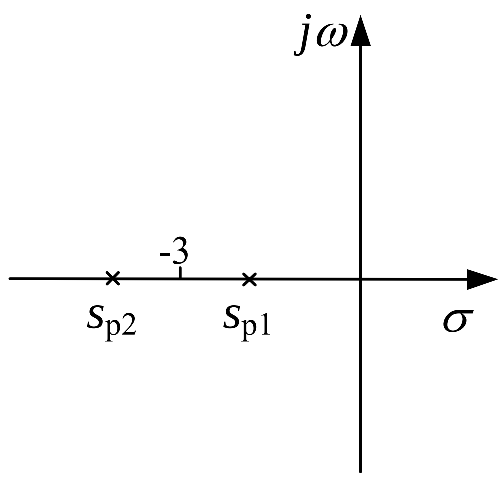
broj pod korijenom pozitivan i polovi su realni

$$s_{p1} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad , \quad s_{p2} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

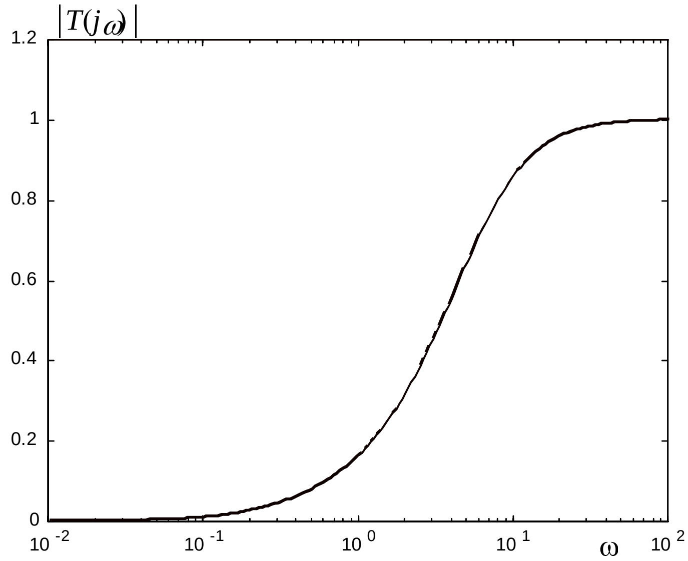
vrijedi: $$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Neka je: α=3 i ω_0=1

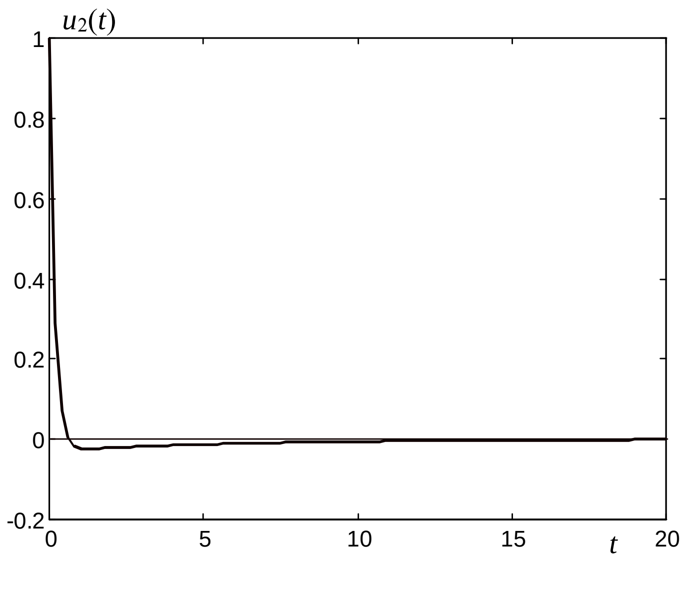
polovi: $s_{p1} = -3 + 2\sqrt{2} \quad , \quad s_{p2} = -3 - 2\sqrt{2}$



A-f karakteristika: $$\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+36\omega^2}}$$



Odziv na $S(t)$: $$\left[e^{-3t}\,\mathrm{ch}\left(2\sqrt{2}t\right)-\frac{3\sqrt{2}}{4}e^{-3t}\,\mathrm{sh}\left(2\sqrt{2}t\right)\right]S(t)$$



b) kritično prigušenje, $\alpha=\omega_0$

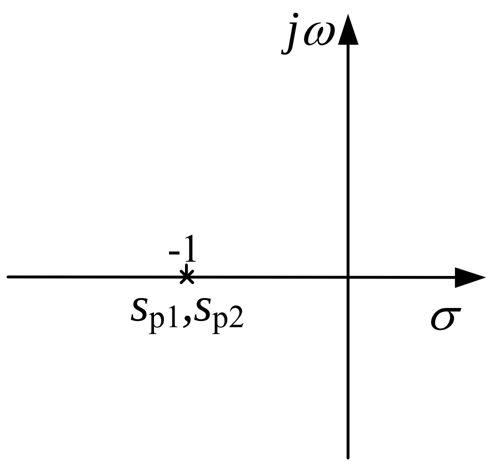
broj pod korijenom jednak nuli i polovi su realni i jednaki

$$s_{p1} = s_{p2} = -\alpha$$

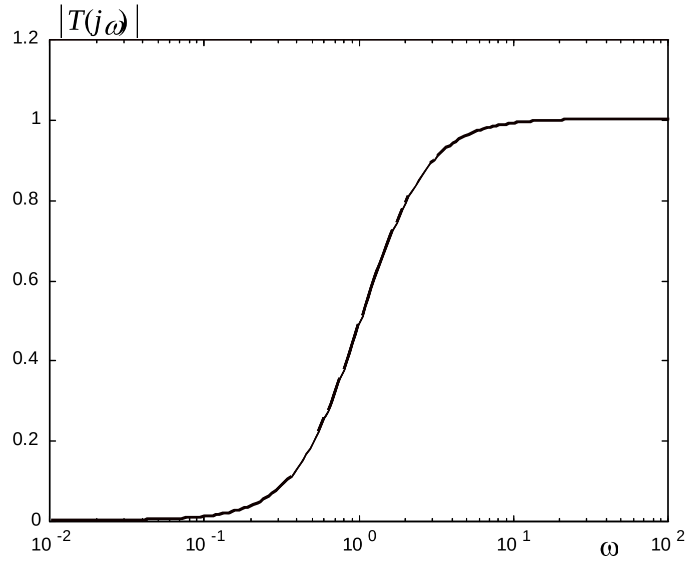
vrijedi: $$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Neka je: $\alpha=\omega_0=1$

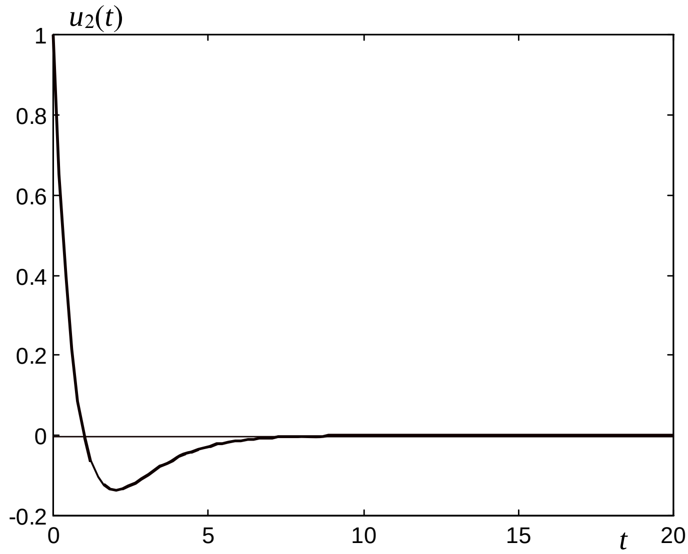
Polovi: $$s_{p1} = s_{p2} = -1$$



A-f karakteristika: $$\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+4\omega^2}}$$



Odziv na $S(t)$: $$\left(1-t\right)e^{-t}\cdot S\left(t\right)$$



c) potkritično prigušenje, $\alpha<\omega_0$

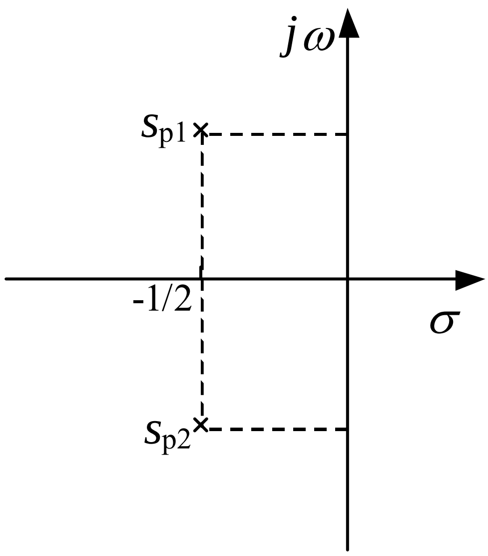
broj pod korijenom negativan i polovi su kompleksni

$$s_{p1} = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad , \; s_{p2} = -\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

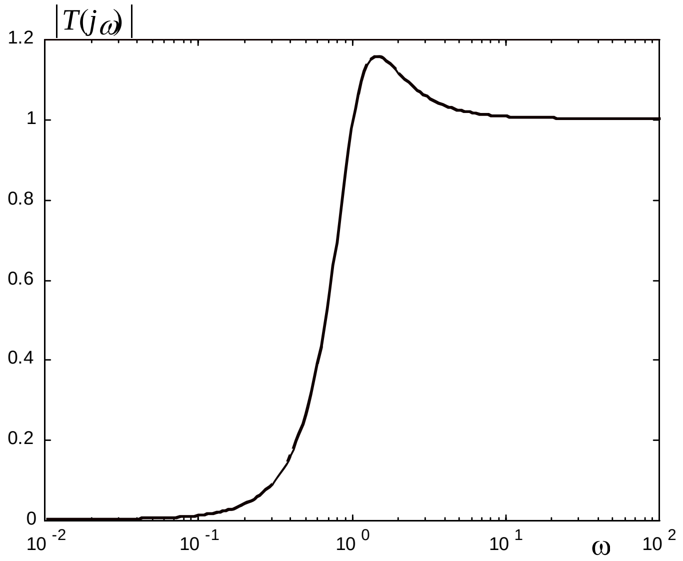
vrijedi: $$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Neka je: α=1/2 i ω_0=1

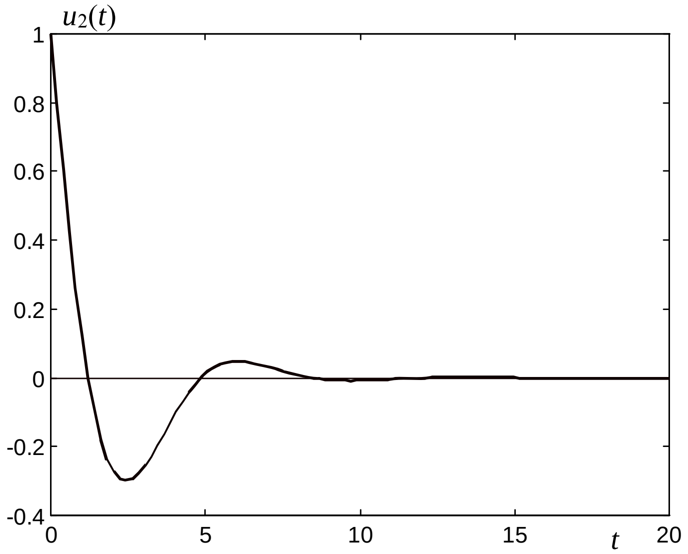
polovi: $$s_{p1} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad s_{p2} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$



A-f karakteristika: $$\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}}$$



Odziv na $S(t)$: $$\left[e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]S(t)$$



d) neprigušen odziv, α=0

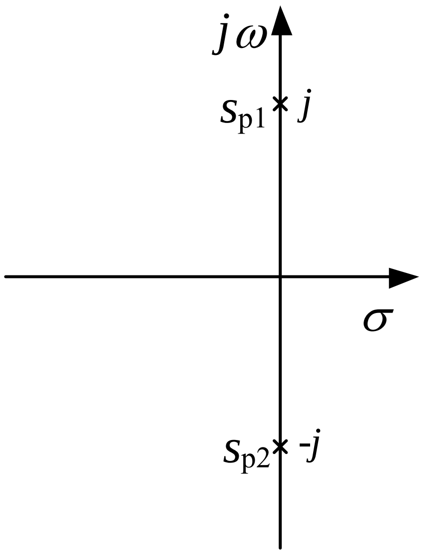
broj pod korijenom negativan i polovi su imaginarni

$$s_{p1} = j\omega_0 \quad , \quad s_{p2} = -j\omega_0$$

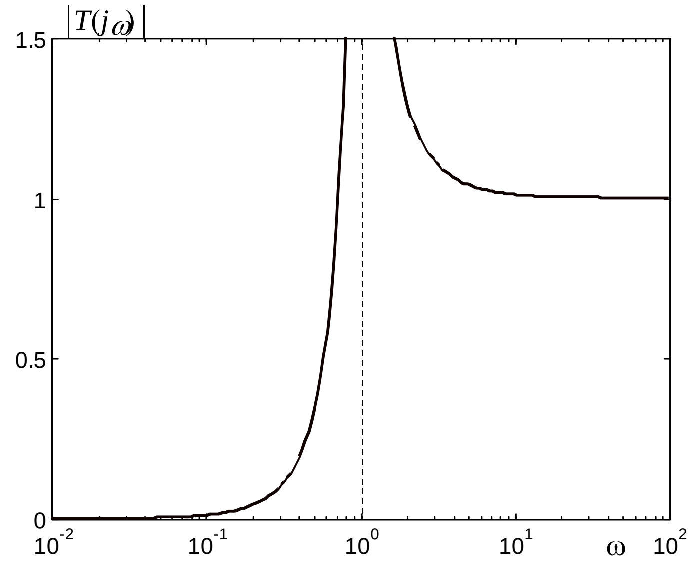
vrijedi: R=0 (samo reaktivni elementi u mreži)

Neka je: α=0 i ω_0=1

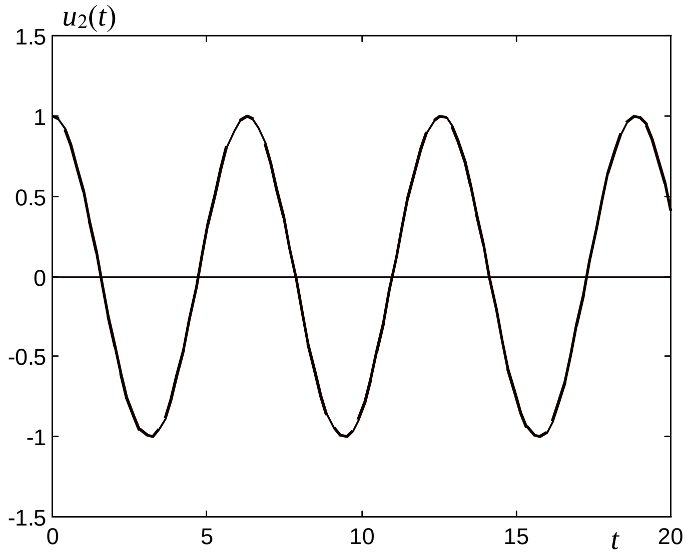
polovi: $s_{p1} = +j \quad , \quad s_{p2} = -j$



A-f karakteristika: $\dfrac{\omega^2}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2}}$



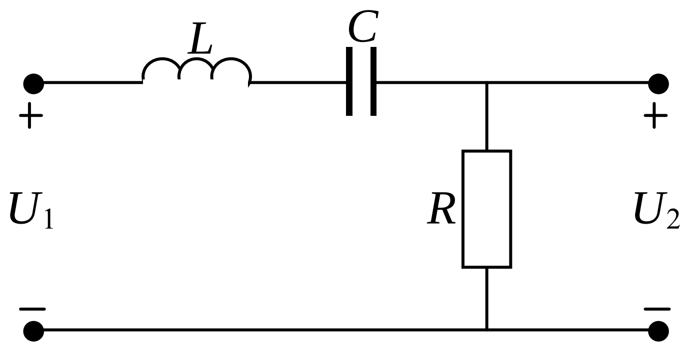
Odziv na $S(t)$: $\cos t \cdot S(t)$

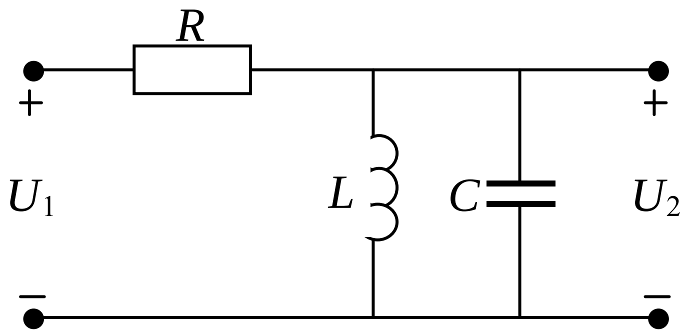


Pol prijenosne funkcije $\left|T(j\omega)\right|$ na frekvenciji ω_0=1. Odziv je oscilatoran (neprigušen).

RC-L mreža propušta signale viših frekvencija

LC-R mreža i *R-LC* mreža, tip1



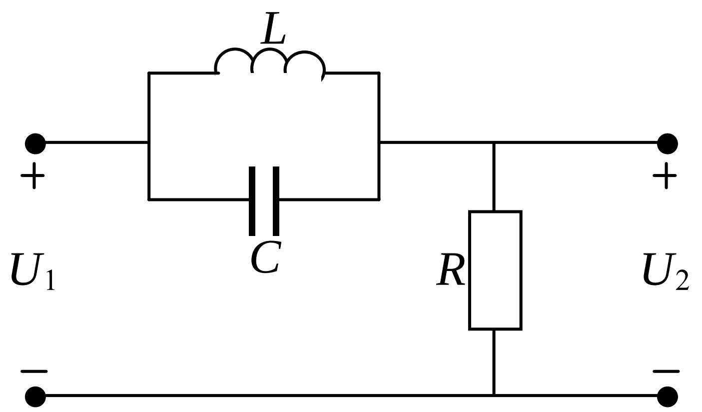


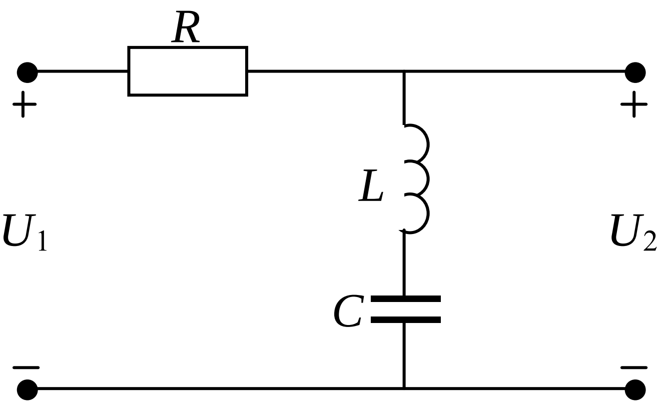
LC-R mreža: $$T(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{s\frac{R}{L}}{s^2+s\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$

R-LC mreža: $$T(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{s\frac{1}{RC}}{s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

Propuštanje signala samo u jednom frekvencijskom pojasu.

LC-*R* mreža i *R*-*LC* mreža, tip2





LC-*R* mreža:
$$T(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

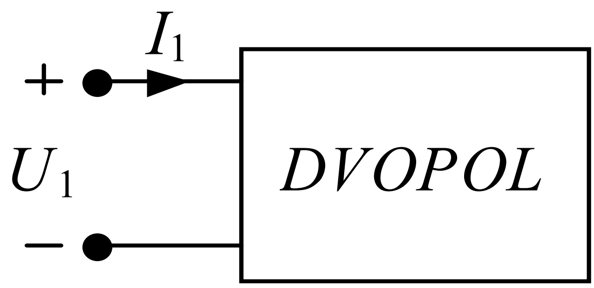
R-*LC* mreža:
$$T(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+s\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$

Propuštanje signala nižih i viših frekvencija.

4. SINTEZA DVOPOLA

4.1. Općenito o dvopolima

dvopol (jednoprilaz): dvije vanjske priključnice



Struja koja ulazi na jednom priključku po iznosu jednaka je struji koja izlazi na drugom priključku.

Poznati odnos između napona i struje u potpunosti određuje dvopol.

Sinteza: iz funkcije imitancije $F(s)$ → električna mreža.

Realizacija kombinacijom pasivnih R, L, C elemenata - zadovoljenje uvjeta za PRF:

- polovi funkcije $F(s)$ ne smiju biti u desnoj poluravnini kompleksne s-ravnine

- polovi funkcije $F(s)$ na imaginarnoj osi moraju biti jednostruki s realnim pozitivnim reziduumima

- realni dio funkcije $F(j\omega)$ je veći ili jednak 0 za sve vrijednosti frekvencije ω

Dodatni uvjeti, koji matematički slijede iz gornjih i služe za lakšu provjeru su:

- polinom u brojniku i nazivniku ima realne pozitivne koeficijente

- stupanj polinoma u brojniku i nazivniku može se razlikovati najviše za 1, kako najviši tako i najniži član

Ako su ispunjeni dodatni uvjeti, (nužni ali ne i dovoljni), tada se provjeravaju gornji uvjeti za PRF

vrijedi: PRF je funkcija imitancije i obrnuto

4.2. Sinteza *LC* dvopola

podskup: reaktivne mreže (*LC* dvopoli)

Funkcije imitancija $F(s)$ takovih mreža imaju sljedeća svojstva:

- svi polovi i nule funkcije $F(s)$ su jednostruki, nalaze se na $j\omega$ osi kompleksne s-ravnine i pri tome se naizmjenično pojavljuju (alterniraju)
- stupnjevi polinoma u brojniku i nazivniku funkcije $F(s)$ razlikuju se za 1
- funkcija imitancije $F(s)$ ima na frekvencijama $s=0$ i $s=\infty$ pol ili nulu

Argument x naziva se nula funkcije $f(x)$ ako je vrijednost funkcije nula, tj. $f(x)=0$.

Argument x naziva se pol funkcije $f(x)$ ako je vrijednost funkcije beskonačno, tj. $f(x)=\infty$.

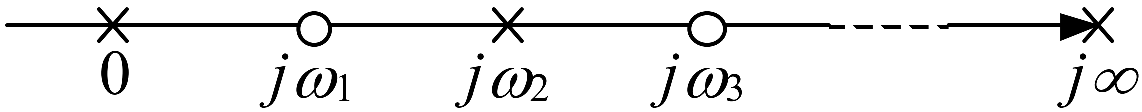
Funkcija imitancije *LC* dvopola ima jedan od oblika:

a) pol na frekvenciji $\omega=0$ i pol na frekvenciji $\omega=\infty$

Opći oblik:

$$F(s)=k\,\frac{\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_3^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(s^2+\omega_n^2\right)}{s\left(s^2+\omega_2^2\right)\left(s^2+\omega_4^2\right)\;\cdot\ldots\cdot\left(s^2+\omega_{n-1}^2\right)}$$

Raspored polova i nula:

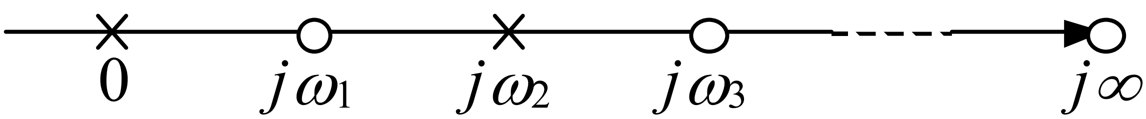


b) pol na frekvenciji $\omega=0$ i nula na frekvenciji $\omega=\infty$

Opći oblik:

$$F(s)=k\,\frac{\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_3^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(s^2+\omega_{n-1}^2\right)}{s\left(s^2+\omega_2^2\right)\left(s^2+\omega_4^2\right)\;\cdot\ldots\cdot\left(s^2+\omega_n^2\right)}$$

Raspored polova i nula:

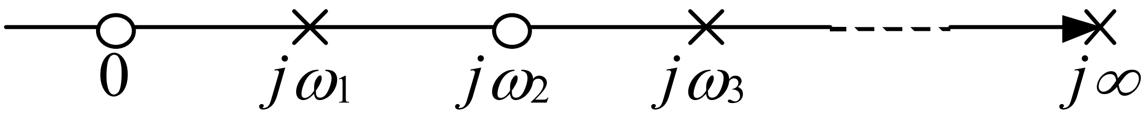


c) nula na frekvenciji ω=0 i pol na frekvenciji ω=∞

Opći oblik:

$$F(s)=k\,\frac{s\left(s^2+\omega_2^2\right)\left(s^2+\omega_4^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(s^2+\omega_n^2\right)}{\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_3^2\right)\ \cdot\ldots\cdot\left(s^2+\omega_{n-1}^2\right)}$$

Raspored polova i nula:

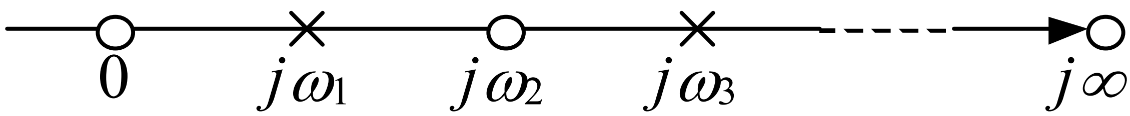


d) nula na frekvenciji ω=0 i nula na frekvenciji ω=∞

Opći oblik:

$$F(s)=k\,\frac{s\left(s^2+\omega_2^2\right)\left(s^2+\omega_4^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(s^2+\omega_{n-1}^2\right)}{\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_3^2\right)\ \cdot\ldots\cdot\left(s^2+\omega_n^2\right)}$$

Raspored polova i nula:



Sinteza po Fosteru (Fosterova realizacija)

kanonski oblici

razvoj $F(s)$ po polovima:

$$F(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{k_i \cdot s}{s^2 + \omega_i^2} + k_\infty \cdot s$$

koeficijenti: k_0 - reziduum u polu $s=0$

k_i - reziduumi u polovima $s^2=-\omega_i^2$

k_∞ - reziduum u polu $s=\infty$

$$k_0 = \lim_{s \to 0}\left[s \cdot F(s)\right]$$

$$k_i = \lim_{s^2 \to -\omega_i^2}\left[\frac{s^2 + \omega_i^2}{s} F(s)\right]$$

$$k_\infty = \lim_{s \to \infty}\left[\frac{1}{s} \cdot F(s)\right]$$

Prvi Fosterov kanonski oblik

za funkcije impedancije $F(s)=Z(s)$

rastav: $$Z(s)=\frac{k_0}{s}+\sum_i \frac{k_i \cdot s}{s^2+\omega_i^2}+k_\infty \cdot s$$

koeficijenti: $$k_0=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot Z(s)\right]$$

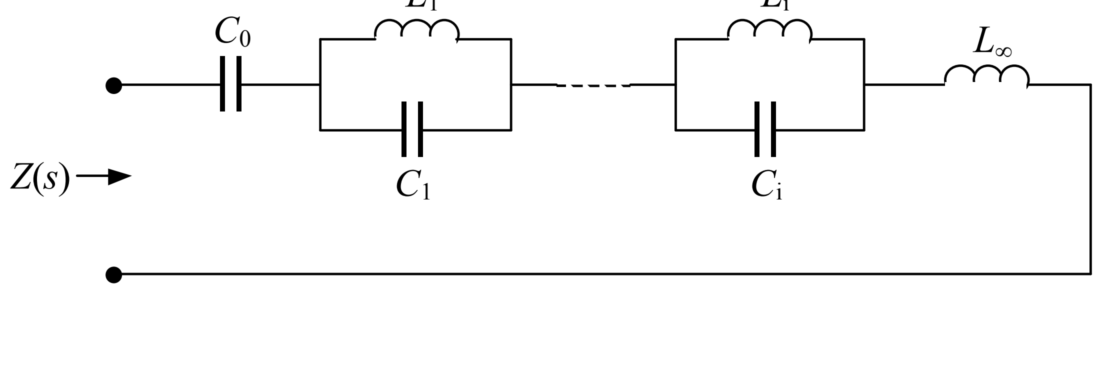
$$k_i=\lim_{s^2\to -\omega_i^2}\left[\frac{s^2+\omega_i^2}{s}Z(s)\right]$$

$$k_\infty=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{s}\cdot Z(s)\right]$$

elementi: $$C_0=\frac{1}{k_0} \qquad C_i=\frac{1}{k_i}$$

$$L_\infty=k_\infty \qquad L_i=\frac{k_i}{\omega_i^2}$$

realizacija:



Drugi Fosterov kanonski oblik

za funkcije admitancije $F(s)=Y(s)$

rastav: $$Y(s)=\frac{k_0}{s}+\sum_i \frac{k_i \cdot s}{s^2+\omega_i^2}+k_\infty \cdot s$$

koeficijenti: $$k_0=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot Y(s)\right]$$

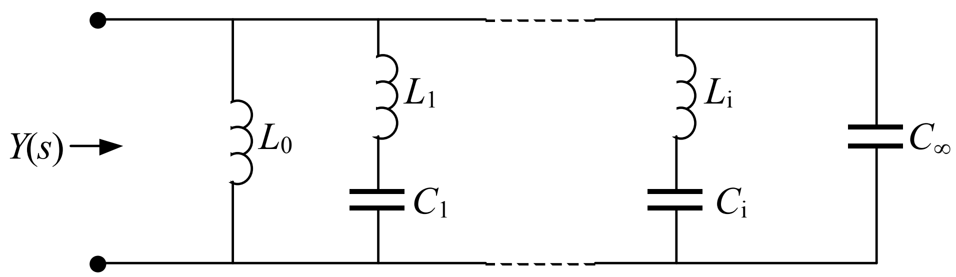
$$k_i=\lim_{s^2\to -\omega_i^2}\left[\frac{s^2+\omega_i^2}{s}Y(s)\right]$$

$$k_\infty=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{s}\cdot Y(s)\right]$$

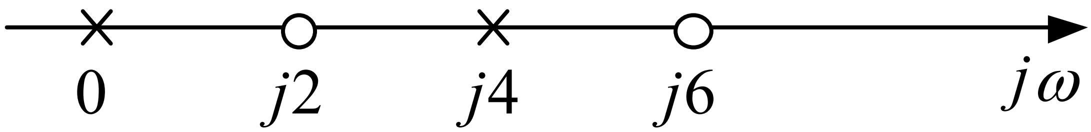
elementi: $$L_0=\frac{1}{k_0} \qquad L_i=\frac{1}{k_i}$$

$$C_\infty=k_\infty \qquad C_i=\frac{k_i}{\omega_i^2}$$

realizacija:



<u>Primjer</u>: zadan je raspored polova i nula impedancije reaktantnog dvopola prema Slici. Odrediti Fosterove kanonske oblike ako je poznata vrijednost funkcije reaktancije $jX(16)=j3$.



a) I Fosterov oblik - funkcija impedancije

opći oblik:

$$F(s)=Z(s)=k\frac{\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_3^2\right)}{s\left(s^2+\omega_2^2\right)}$$

$s=j\omega \rightarrow$ funkcija reaktancije:

$$Z(j\omega)=jX(\omega)=j\cdot k\frac{\left(\omega^2-\omega_1^2\right)\left(\omega^2-\omega_3^2\right)}{\omega\left(\omega^2-\omega_2^2\right)}$$

uz zadanu vrijednost funkcije na poznatoj frekvenciji:

$$jX(16) = j \cdot k \frac{\left(16^2 - 2^2\right)\left(16^2 - 6^2\right)}{16\left(16^2 - 4^2\right)} = j \cdot k \frac{231}{16} = j3$$

$$k = 0.208$$

funkcija impedancije:

$$Z(s) = 0.208 \frac{\left(s^2 + 4\right)\left(s^2 + 36\right)}{s\left(s^2 + 16\right)}$$

rastav:

$$Z(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{k_2 \cdot s}{s^2 + 16} + k_\infty \cdot s$$

koeficijenti:

$$k_0 = \lim_{s \to 0}\left[s \cdot Z(s)\right] = 0.208 \frac{(0+4)(0+36)}{(0+16)} = 1.87$$

$$k_2 = \lim_{s^2 \to -16}\left[\frac{s^2 + 16}{s} Z(s)\right] = 0.208 \frac{(-16+4)(-16+36)}{-16} = 3.12$$

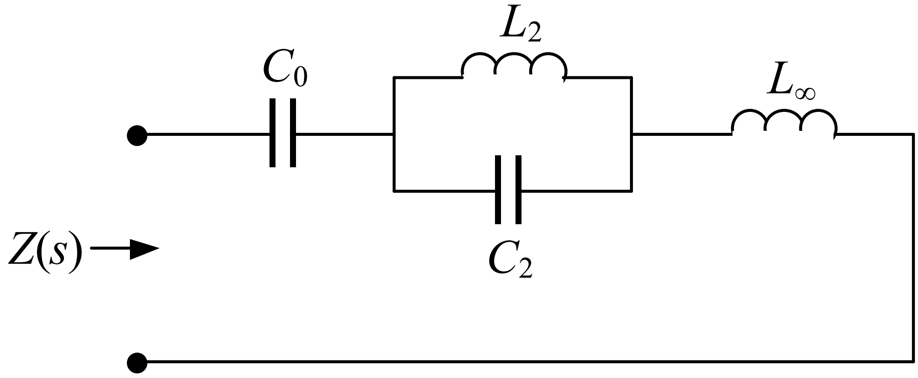
$$k_\infty = \lim_{s \to \infty}\left[\frac{1}{s} \cdot Z(s)\right] = 0.208 \left.\frac{\left(s^2 + 4\right)\left(s^2 + 36\right)}{s^2\left(s^2 + 16\right)}\right|_{s \to \infty} = 0.208 \left.\frac{\left(1 + \frac{4}{s^2}\right)\left(1 + \frac{36}{s^2}\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{16}{s^2}\right)}\right|_{s \to \infty} = 0.208$$

elementi:

$$C_0 = \frac{1}{k_0} = 0.535 \qquad C_2 = \frac{1}{k_2} = 0.321$$

$$L_2 = \frac{k_2}{\omega_2^2} = 0.195 \qquad L_\infty = k_\infty = 0.208$$

realizacija:



b) II Fosterov oblik - funkcija admitancije

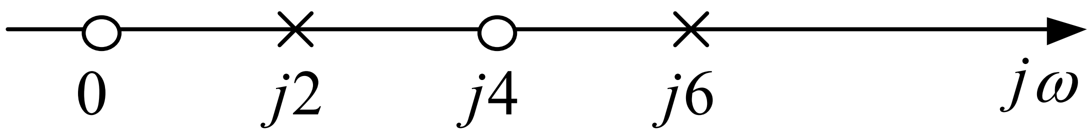
$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = 4.813\frac{s\left(s^2+16\right)}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+36\right)}$$

rastav:

$$Y(s) = \frac{k_1 \cdot s}{s^2+4} + \frac{k_3 \cdot s}{s^2+36}$$

funkcija admitancije - inverzna funkciji impedancije

u nuli i beskonačnosti ima nule, a ne polove



Koeficijenti pripadni tim frekvencijama k_0 i k_∞ jednaki su nuli.

U realizaciji ne postoje elementi pripadni tim koeficijentima.

koeficijenti:

$$k_1 = \lim_{s^2 \to -4} \left[\frac{s^2 + 4}{s} Y(s) \right] = 4.813 \frac{(-4+16)}{(-4+36)} = 1.80$$

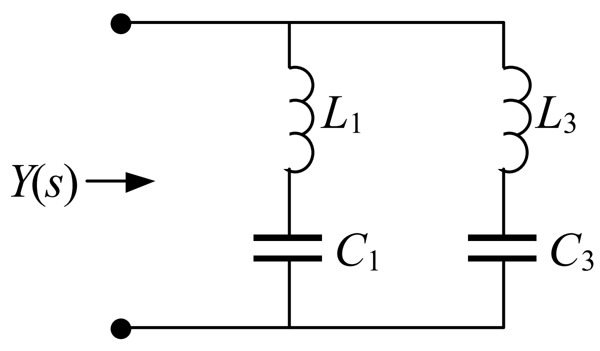
$$k_3 = \lim_{s^2 \to -36} \left[\frac{s^2 + 36}{s} Y(s) \right] = 4.813 \frac{(-36+16)}{(-36+4)} = 3.01$$

elementi:

$$L_1 = \frac{1}{k_1} = 0.556 \qquad C_1 = \frac{k_1}{\omega_1^2} = 0.45$$

$$L_3 = \frac{1}{k_3} = 0.332 \qquad C_3 = \frac{k_3}{\omega_3^2} = 0.084$$

realizacija:



Sinteza po Caueru (Cauerova realizacija)

kanonski oblici

razvoj u lančani razlomak (ljestvičasta mreža)

Prvi Cauerov kanonski oblik

a) najveća potencija od *s* u brojniku veća od najveće potencije od *s* u nazivniku

zapis funkcije imitancije $F(s)$ u lančanom razlomku:

$$F(s) = k_1 s + \cfrac{1}{k_2 s + \cfrac{1}{k_3 s + \ldots + \cfrac{1}{k_n s}}}$$

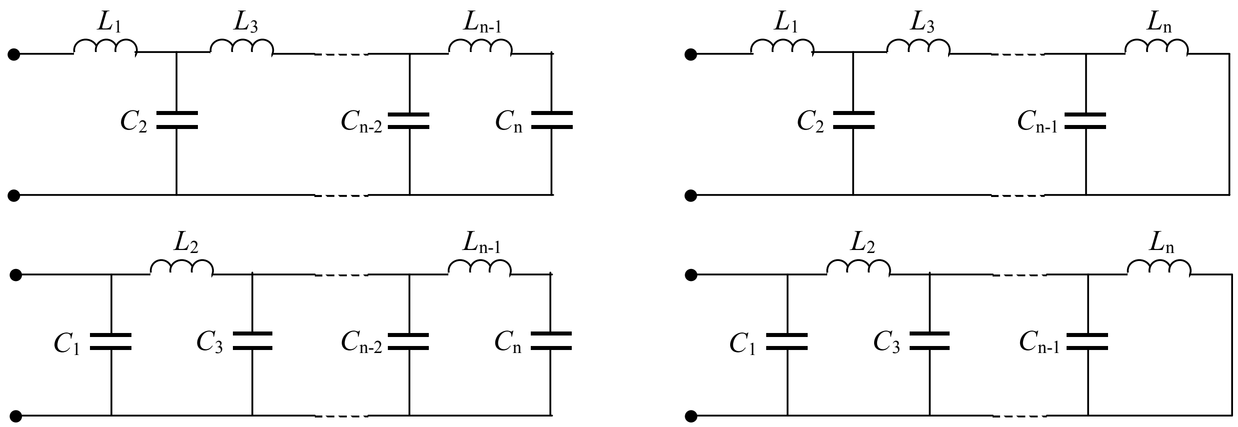
b) najveća potencija od *s* u brojniku manja od najveće potencije od *s* u nazivniku

zapis funkcije imitancije $F(s)$ u lančanom razlomku:

$$F(s) = \cfrac{1}{k_1 s + \cfrac{1}{k_2 s + \cfrac{1}{k_3 s + \ldots + \cfrac{1}{k_n s}}}}$$

Rastavi vrijede jednako bez obzira radi li se o funkciji impedancije ili admitancije.

ljestvičasti dvopol - jedan od sljedećih oblika:



Vrijednosti elemenata u tim realizacijama jednaki su koeficijentima k_i iz rastava.

U vodoravnim granama su induktiviteti, a u okomitim kapaciteti.

Drugi Cauerov kanonski oblik

c) najmanja potencija od *s* u brojniku manja od najmanje potencije od *s* u nazivniku

zapis funkcije imitancije *F*(*s*) u lančanom razlomku:

$$F(s)=\frac{k_1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{k_2}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{k_3}{s}+\ldots+\cfrac{1}{\cfrac{k_n}{s}}}}$$

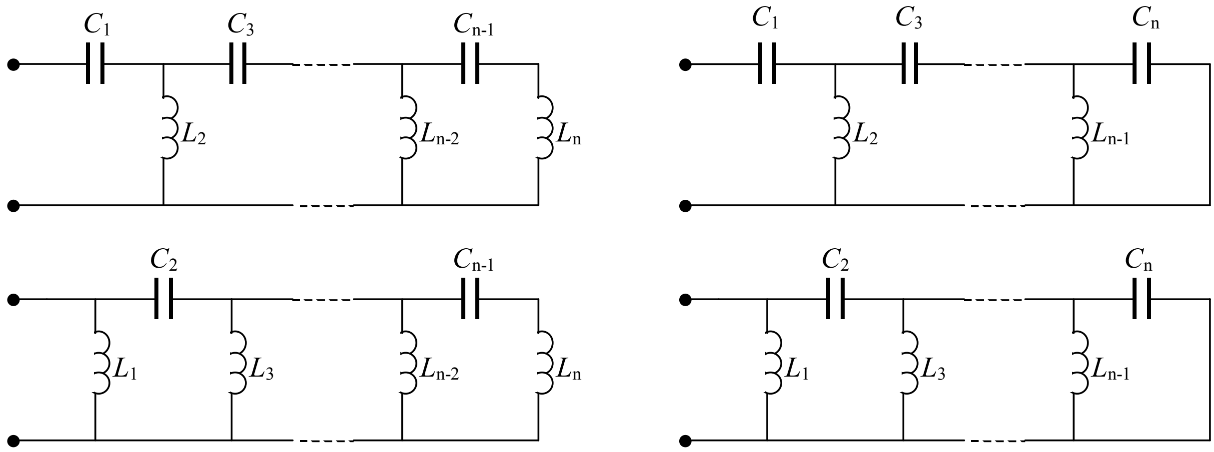
d) najmanja potencija od *s* u brojniku veća od najmanje potencije od *s* u nazivniku

zapis funkcije imitancije *F*(*s*) u lančanom razlomku:

$$F(s)=\cfrac{1}{\cfrac{k_1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{k_2}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{k_3}{s}+\ldots+\cfrac{1}{\cfrac{k_n}{s}}}}}$$

Rastavi vrijede jednako bez obzira radi li se o funkciji impedancije ili admitancije.

ljestvičasti dvopol - jedan od sljedećih oblika:



Vrijednosti elemenata u tim realizacijama jednaki su recipročnim koeficijentima k_i iz rastava.

U vodoravnim granama su kapaciteti, a u okomitim induktiviteti.

Primjer: odrediti Cauerove kanonske oblike funkcije admitancije dvopola

$$Y(s)=\frac{s\left(s^2+16\right)}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+36\right)}$$

a) I Cauerov oblik

$$Y(s)=\frac{s^3+16s}{s^4+40s^2+144}$$

Najveća potencija od s u brojniku manja je od najveće potencije od s u nazivniku (3<4).

rastav funkcije u lančanom razlomku

$$F(s)=\cfrac{1}{k_1 s+\cfrac{1}{k_2 s+\cfrac{1}{k_3 s+\ldots+\cfrac{1}{k_n s}}}}$$

iz admitancije $Y(s)$ → u impedanciju $Z(s)$

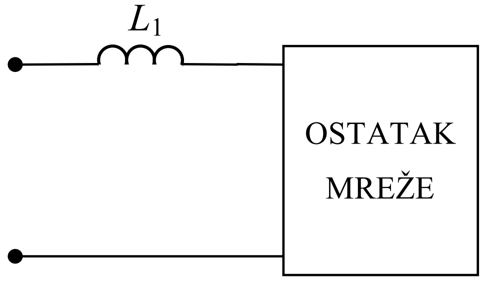
$$Z(s)=\frac{1}{Y(s)}=\frac{s^4+40s^2+144}{s^3+16s}$$

Dijeljenjem se izlučuju elementi:

$$\left(s^4+40s^2+144\right):\left(s^3+16s\right)=1\cdot s$$

$$\begin{array}{r}\pm s^4 \pm 16s^2 \\ \hline 24s^2+144\end{array}$$

rezultat: impedancija induktiviteta sL_1, L_1=1

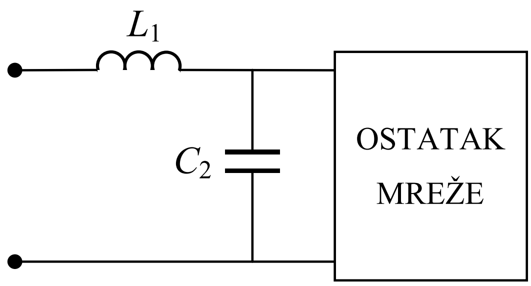


Nazivnik iz prethodnog dijeljenja postaje brojnik, a ostatak nazivnik:

$$\left(s^3+16s\right):\left(24s^2+144\right)=\frac{1}{24}s$$

$$\begin{array}{r}\pm s^3 \pm 6s \\ \hline 10s\end{array}$$

rezultat: admitancija kapaciteta sC_2, C_2=1/24

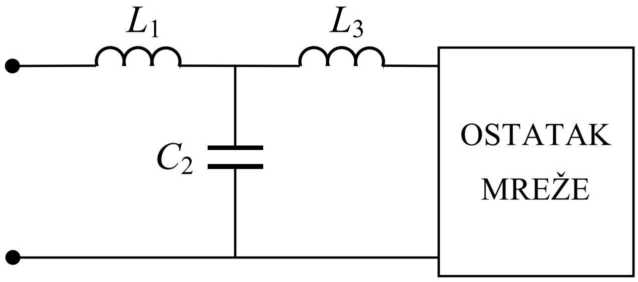


Nazivnik iz prethodnog dijeljenja postaje brojnik, a ostatak nazivnik:

$$\left(24s^2 + 144\right) : 10s = \frac{24}{10}s$$

$$\frac{\pm 24s^2}{\qquad 144}$$

rezultat: impedancija induktiviteta sL_3, L_3=24/10

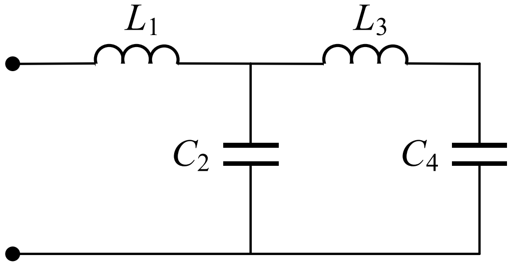


Nazivnik iz prethodnog dijeljenja postaje brojnik, a ostatak nazivnik:

$$10\mathrm{s} : 144 = \frac{10}{144}s$$

$$\frac{\pm 10s}{0}$$

rezultat: admitancija kapaciteta sC_4, C_4=10/144



Funkcija admitancije u lančanom zapisu:

$$Y(s)=\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{\cfrac{1}{24}s+\cfrac{1}{\cfrac{24}{10}s+\cfrac{1}{\cfrac{10}{144}s}}}}$$

provjera na karakterističnim frekvencijama

b) II Cauerov oblik

$$Y(s) = \frac{16s + s^3}{144 + 40s^2 + s^4}$$

Najmanja potencija od *s* u brojniku veća je od najmanje potencije od *s* u nazivniku (1>0).

rastav funkcije u lančanom razlomku

$$F(s) = \cfrac{1}{\cfrac{k_1}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{k_2}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{k_3}{s} + \ldots + \cfrac{1}{\cfrac{k_n}{s}}}}}$$

iz admitancije $Y(s)$ → u impedanciju $Z(s)$

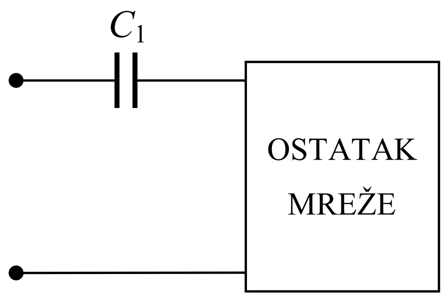
$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{144 + 40s^2 + s^4}{16s + s^3}$$

Dijeljenjem se izlučuju elementi:

$$\left(144 + 40s^2 + s^4\right) : \left(16s + s^3\right) = \frac{9}{s}$$

$$\frac{\pm 144 \pm 9s^2}{31s^2 + s^4}$$

rezultat: impedancija kapaciteta $1/sC_1$, $C_1=1/9$

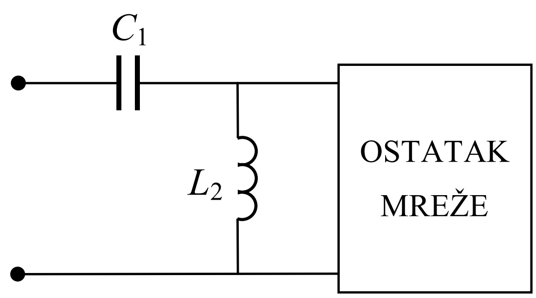


Nazivnik iz prethodnog dijeljenja postaje brojnik, a ostatak nazivnik:

$$\left(16s + s^3\right) : \left(31s^2 + s^4\right) = \frac{16}{31s}$$

$$\frac{\pm 16s \pm \frac{16}{31}s^3}{\frac{15}{31}s^3}$$

rezultat: admitancija induktiviteta $1/sL_2$, $L_2=31/16$

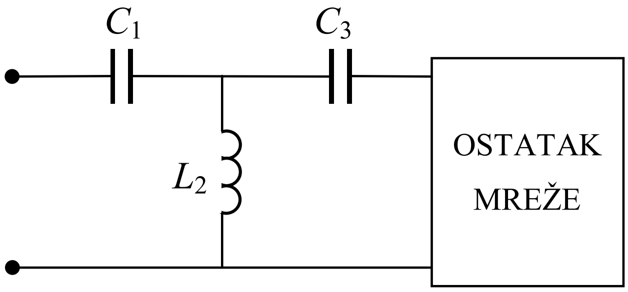


Nazivnik iz prethodnog dijeljenja postaje brojnik, a ostatak nazivnik:

$$\left(31s^2 + s^4\right) : \frac{15}{31}s^3 = \frac{961}{15s}$$

$$\begin{array}{r} \pm 31s^2 \\ \hline s^4 \end{array}$$

rezultat: impedancija kapaciteta $1/sC_3$, C_3=15/961

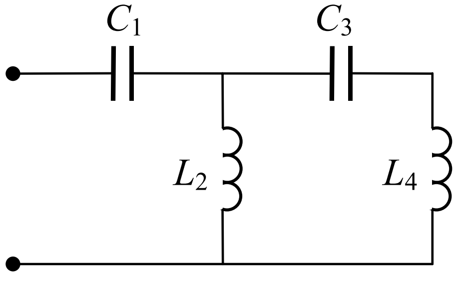


Nazivnik iz prethodnog dijeljenja postaje brojnik, a ostatak nazivnik:

$$\frac{15}{31}s^3 : s^4 = \frac{15}{31s}$$

$$\begin{array}{c} \pm \frac{15}{31}s^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

rezultat: admitancija induktiviteta $1/sL_4$, L_4=31/15



Funkcija admitancije u lančanom zapisu je:

$$Y(s) = \cfrac{1}{\cfrac{9}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{16}{\cfrac{31}{s}} + \cfrac{1}{\cfrac{961}{\cfrac{15}{s}} + \cfrac{1}{\cfrac{15}{\cfrac{31}{s}}}}}}$$

provjera na karakterističnim frekvencijama

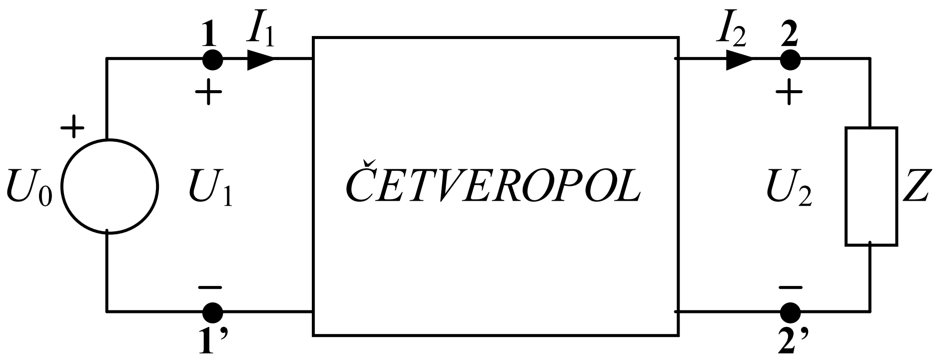
5. ČETVEROPOLI

5.1. Općenito o četveropolima

Četveropoli (dvoprilazi) - elementi mreža

ne sadrže nezavisne izvore

linearni, vremenski nepromjenjivi četveropoli



ulazne i izlazne varijable: (naponi i struje)

5.2. Jednadžbe i parametri četveropola

u potpunosti određen s 4 parametra

z parametri četveropola

naponske jednadžbe četveropola:

$$U_1 = I_1 \cdot z_{11} - I_2 \cdot z_{12}$$

$$\underline{U_2 = I_1 \cdot z_{21} - I_2 \cdot z_{22}}$$

slijede *z*-parametri:

ulazna impedancija 1 na prazno $z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$

prijenosna impedancija 2→1 na prazno $z_{12} = -\left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$

prijenosna impedancija 1→2 na prazno $z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$

ulazna impedancija 2 na prazno $z_{22} = -\left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$

matrica *z*-parametara:

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & -z_{12} \\ z_{21} & -z_{22} \end{bmatrix}$$

***y* parametri četveropola**

struje iz naponskih jednadžbi:

$$I_1 = U_1 \frac{1}{z_{11}} + I_2 \frac{z_{12}}{z_{11}}$$

$$I_2 = -U_2 \frac{1}{z_{22}} + I_1 \frac{z_{21}}{z_{22}}$$

međusobno uvrštavanje

$$I_1 = U_1 \frac{1}{z_{11}} + \left(-U_2 \frac{1}{z_{22}} + I_1 \frac{z_{21}}{z_{22}} \right) \frac{z_{12}}{z_{11}}$$

$$I_2 = -U_2 \frac{1}{z_{22}} + \left(U_1 \frac{1}{z_{11}} + I_2 \frac{z_{12}}{z_{11}} \right) \frac{z_{21}}{z_{22}}$$

odnosno

$$I_1 \left(1 - \frac{z_{21} z_{12}}{z_{22} z_{11}} \right) = U_1 \frac{1}{z_{11}} - U_2 \frac{z_{12}}{z_{22} z_{11}}$$

$$I_2 \left(1 - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} z_{22}} \right) = U_1 \frac{z_{21}}{z_{11} z_{22}} - U_2 \frac{1}{z_{22}}$$

$$I_1 = U_1 \frac{z_{22}}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} - U_2 \frac{z_{12}}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}$$

$$I_2 = U_1 \frac{z_{21}}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} - U_2 \frac{z_{11}}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}$$

strujne jednadžbe četveropola:

$$I_1 = U_1 \cdot y_{11} - U_2 \cdot y_{12}$$
$$\underline{I_2 = U_1 \cdot y_{21} - U_2 \cdot y_{22}}$$

slijede *y*-parametri:

ulazna admitancija 1 na kratko $y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0}$

prijenosna admitancija 2→1 na kratko $y_{12} = -\left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0}$

prijenosna admitancija 1→2 na kratko $y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0}$

ulazna admitancija 2 na kratko $y_{22} = -\left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0}$

matrica *y*-parametara:

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} \\ y_{21} & -y_{22} \end{bmatrix}$$

4 parametra koji u potpunosti određuju četveropol

A parametri četveropola

napon i struja na 1-1' na istoj strani:

$$U_1 = I_1 \cdot z_{11} - I_2 \cdot z_{12}$$
$$I_1 = U_2 \frac{1}{z_{21}} + I_2 \frac{z_{22}}{z_{21}}$$

uvrsti li se struja I_1

$$U_1 = U_2 \frac{z_{11}}{z_{21}} + I_2 \left(\frac{z_{22} z_{11}}{z_{21}} - z_{12} \right)$$
$$I_1 = U_2 \frac{1}{z_{21}} + I_2 \frac{z_{22}}{z_{21}}$$

prijenosne jednadžbe četveropola:

$$U_1 = U_2 \cdot A + I_2 \cdot B$$
$$\underline{I_1 = U_2 \cdot C + I_2 \cdot D}$$

slijede A-parametri:

prijenosni omjer napona na prazno $$A = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0}$$

prijenosna impedancija 2→1 na kratko $$B = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{U_2=0}$$

prijenosna admitancija 2→1 na prazno $$C = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0}$$

prijenosni omjer struja na kratko $$D = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_2=0}$$

matrica A-parametara:

$$[A] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

4 parametra koji u potpunosti određuju četveropol

A_2 parametri četveropola

napon i struja na 2-2' na istoj strani:

$$I_2 = I_1 \frac{z_{11}}{z_{12}} - U_1 \frac{1}{z_{12}}$$

$$U_2 = I_1 \cdot z_{21} - I_2 \cdot z_{22}$$

uvrsti li se struja I_2

$$U_2 = U_1 \frac{z_{22}}{z_{12}} - I_1 \left(\frac{z_{11} z_{22}}{z_{12}} - z_{21} \right)$$

$$I_2 = -U_1 \frac{1}{z_{12}} + I_1 \frac{z_{11}}{z_{12}}$$

prijenosne jednadžbe četveropola:

$$U_2 = U_1 \cdot A_2 - I_1 \cdot B_2$$

$$\underline{I_2 = -U_1 \cdot C_2 + I_1 \cdot D_2}$$

slijede A_2-parametri:

prijenosni omjer napona na prazno $$A_2 = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_1=0}$$

prijenosna impedancija 1→2 na kratko $$B_2 = -\left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{U_1=0}$$

prijenosna admitancija 1→2 na prazno $$C_2 = -\left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{I_1=0}$$

prijenosni omjer struja na kratko $$D_2 = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_1=0}$$

matrica A_2-parametara:

$$[A_2] = \begin{bmatrix} A_2 & -B_2 \\ -C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

4 parametra koji u potpunosti određuju četveropol

***h* parametri četveropola**

ulazni napon i izlazna struja na istoj strani:

$$U_1 = I_1 \cdot z_{11} - I_2 \cdot z_{12}$$

$$I_2 = I_1 \frac{z_{21}}{z_{22}} - U_2 \frac{1}{z_{22}}$$

uvrsti li se struja I_2

$$U_1 = I_1 \left(z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22}} \right) + U_2 \frac{z_{12}}{z_{22}}$$

$$I_2 = I_1 \frac{z_{21}}{z_{22}} - U_2 \frac{1}{z_{22}}$$

hibridne jednadžbe četveropola:

$$U_1 = I_1 \cdot h_{11} + U_2 \cdot h_{12}$$

$$\underline{I_2 = I_1 \cdot h_{21} - U_2 \cdot h_{22}}$$

slijede h-parametri:

ulazna impedancija na kratko $$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0}$$

prijenosni omjer napona na prazno $$h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0}$$

prijenosni omjer struja na kratko $$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0}$$

izlazna admitancija na prazno $$h_{22} = \left.-\frac{I_2}{U_2}\right|_{I_1=0}$$

matrica h-parametara:

$$[h] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & -h_{22} \end{bmatrix}$$

4 parametra koji u potpunosti određuju četveropol

g parametri četveropola

ulaznu struja i izlazni napon na istoj strani:

$$I_1 = U_1 \frac{1}{z_{11}} + I_2 \frac{z_{12}}{z_{11}}$$

$$U_2 = I_1 \cdot z_{21} - I_2 \cdot z_{22}$$

uvrsti li se struja I_1

$$I_1 = U_1 \frac{1}{z_{11}} + I_2 \frac{z_{12}}{z_{11}}$$

$$U_2 = U_1 \frac{z_{21}}{z_{11}} - I_2 \left(z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11}} \right)$$

hibridne jednadžbe četveropola:

$$I_1 = U_1 \cdot g_{11} + I_2 \cdot g_{12}$$

$$\underline{U_2 = U_1 \cdot g_{21} - I_2 \cdot g_{22}}$$

slijede g-parametri:

ulazna admitancija na prazno $$g_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{I_2=0}$$

prijenosni omjer struja na kratko $$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_1=0}$$

prijenosni omjer napona na prazno $$g_{21} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0}$$

izlazna impedancija na kratko $$g_{22} = \left.-\frac{U_2}{I_2}\right|_{U_1=0}$$

matrica g-parametara:

$$[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & -g_{22} \end{bmatrix}$$

4 parametra koji u potpunosti određuju četveropol

šest pari jednadžbi četveropola

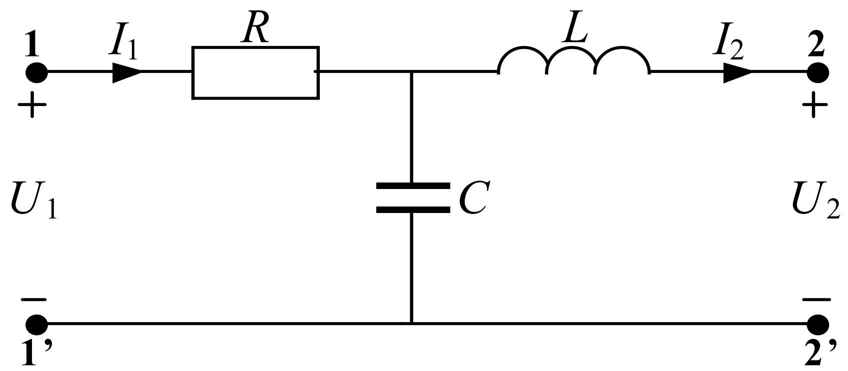
jednadžbe - linearne funkcije kompleksne frekvencije *s*.

četveropol u potpunosti određuju 4 parametra

Jedne je parametre nužno odrediti rješavanjem jednadžbi mreža i računajući tražene omjere, a ostali se parametri mogu odrediti pretvorbom parametara.

pretvorba *z*-parametara u ostalih 5 vrsta parametara

Primjer: odrediti z i y parametre četveropola.



a) z parametri

I_2=0:

$$U_1 = I_1 R + I_1 \frac{1}{sC}$$

$$U_2 = I_1 \frac{1}{sC}$$

slijedi:

$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = R + \frac{1}{sC}$$

$$z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{sC}$$

I_1=0:

$$U_1 = -I_2 \frac{1}{sC}$$

$$U_2 = -I_2 \frac{1}{sC} - I_2 \cdot sL$$

slijedi:

$$z_{12} = -\left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{sC}$$

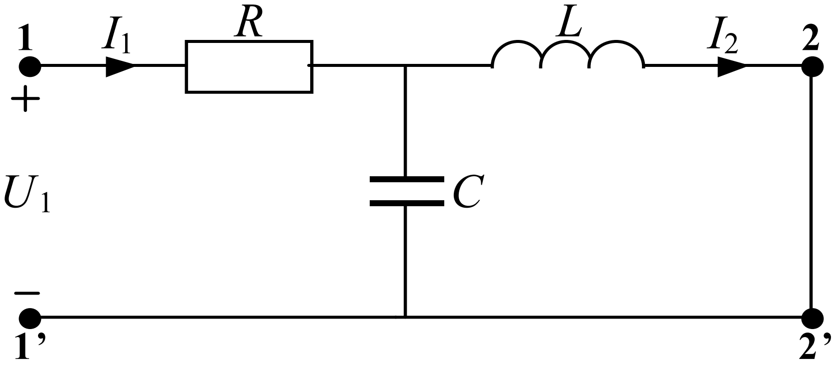
$$z_{22} = -\left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{sC} + sL$$

Matrica *z* parametara:

$$\underline{[z] = \begin{bmatrix} R + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} \\ \frac{1}{sC} & -\left(\frac{1}{sC} + sL\right) \end{bmatrix}}$$

b) *y* parametri

U_2=0: (uvijek je dobro nacrtati modificiranu mrežu)



Jednadžbe petlji:

$$U_1 = I_1 R + (I_1 - I_2)\frac{1}{sC} = I_1\left(R + \frac{1}{sC}\right) - I_2\frac{1}{sC}$$

$$0 = I_2 sL + (I_2 - I_1)\frac{1}{sC} = I_2\left(sL + \frac{1}{sC}\right) - I_1\frac{1}{sC}$$

iz druge jednadžbe:

$$I_2 = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} I_1 = \frac{1}{s^2 LC + 1} I_1$$

uvršteno u prvu jednadžbu:

$$U_1 = I_1\left(R + \frac{1}{sC}\right) - I_1 \frac{1}{s^2LC+1} \cdot \frac{1}{sC} = I_1\left[R + \frac{1}{sC} - \frac{1}{sC\left(s^2LC+1\right)}\right]$$

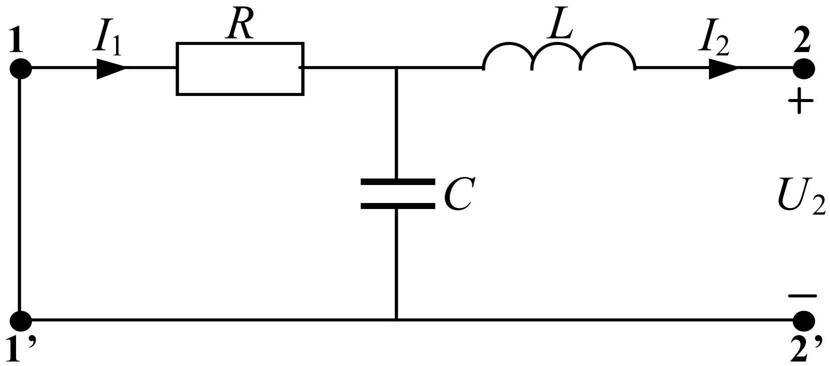
$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0} = \frac{1}{R + \frac{1}{sC} - \frac{1}{sC\left(s^2LC+1\right)}}$$

Uz obrnutu supstituciju:

$$U_1 = \left(s^2LC+1\right)I_2\left(R + \frac{1}{sC}\right) - I_2 \frac{1}{sC} = I_2\left[\left(s^2LC+1\right)\left(R + \frac{1}{sC}\right) - \frac{1}{sC}\right]$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0} = \frac{1}{\left(s^2LC+1\right)\left(R + \frac{1}{sC}\right) - \frac{1}{sC}}$$

U_1=0:



Jednadžbe petlji:

$$0 = I_1 R + \left(I_1 - I_2\right)\frac{1}{sC} = I_1\left(R + \frac{1}{sC}\right) - I_2 \frac{1}{sC}$$

$$U_2 = -I_2 sL - \left(I_2 - I_1\right)\frac{1}{sC} = -I_2\left(sL + \frac{1}{sC}\right) + I_1 \frac{1}{sC}$$

iz prve jednadžbe:

$$I_1 = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} I_2 = \frac{1}{sRC + 1} I_2$$

uvršteno u drugu jednadžbu:

$$U_2 = -I_2\left(sL + \frac{1}{sC}\right) + I_2 \frac{1}{sRC+1}\frac{1}{sC} = -I_2\left[sL + \frac{1}{sC} - \frac{1}{sC(sRC+1)}\right]$$

$$y_{22} = -\frac{I_2}{U_2}\bigg|_{U_1=0} = \frac{1}{sL + \frac{1}{sC} - \frac{1}{sC(sRC+1)}}$$

Uz obrnutu supstituciju:

$$U_2 = -I_1(sRC+1)\left(sL + \frac{1}{sC}\right) + I_1\frac{1}{sC} = -I_1\left[(sRC+1)\left(sL + \frac{1}{sC}\right) - \frac{1}{sC}\right]$$

$$y_{12} = -\frac{I_1}{U_2}\bigg|_{U_1=0} = \frac{1}{(sRC+1)\left(sL + \frac{1}{sC}\right) - \frac{1}{sC}} = \frac{1}{(s^2LC+1)\left(R + \frac{1}{sC}\right) - \frac{1}{sC}}$$

Matrica y parametara:

$$[y] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R + \frac{1}{sC} - \frac{1}{sC(s^2LC+1)}} & -\dfrac{1}{(s^2LC+1)\left(R + \frac{1}{sC}\right) - \frac{1}{sC}} \\ \dfrac{1}{(s^2LC+1)\left(R + \frac{1}{sC}\right) - \frac{1}{sC}} & -\dfrac{1}{sL + \frac{1}{sC} - \frac{1}{sC(sRC+1)}} \end{bmatrix}$$

y parametri iz već poznatih z parametara:

$$y_{11}=\frac{z_{22}}{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}=\frac{sL+\frac{1}{sC}}{\left(R+\frac{1}{sC}\right)\left(sL+\frac{1}{sC}\right)-\frac{1}{s^2C^2}}$$

$$y_{12}=\frac{z_{12}}{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}=\frac{\frac{1}{sC}}{\left(R+\frac{1}{sC}\right)\left(sL+\frac{1}{sC}\right)-\frac{1}{s^2C^2}}$$

$$y_{21}=\frac{z_{21}}{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}=\frac{\frac{1}{sC}}{\left(R+\frac{1}{sC}\right)\left(sL+\frac{1}{sC}\right)-\frac{1}{s^2C^2}}$$

$$y_{22}=\frac{z_{11}}{z_{11}z_{22}-z_{12}z_{21}}=\frac{R+\frac{1}{sC}}{\left(R+\frac{1}{sC}\right)\left(sL+\frac{1}{sC}\right)-\frac{1}{s^2C^2}}$$

isto kao preko jednadžbi mreža i definicijskih omjera za y parametre

npr.:

$$y_{11}=\frac{1}{R+\frac{1}{sC}-\frac{1}{sC\left(s^2LC+1\right)}}\frac{\left(sL+\frac{1}{sC}\right)}{\left(sL+\frac{1}{sC}\right)}=\frac{sL+\frac{1}{sC}}{\left(R+\frac{1}{sC}\right)\left(sL+\frac{1}{sC}\right)-\frac{\left(sL+\frac{1}{sC}\right)}{s^2C^2\left(sL+\frac{1}{sC}\right)}}$$

$$y_{11}=\frac{sL+\frac{1}{sC}}{\left(R+\frac{1}{sC}\right)\left(sL+\frac{1}{sC}\right)-\frac{1}{s^2C^2}}$$

5.3. Svojstva četveropola

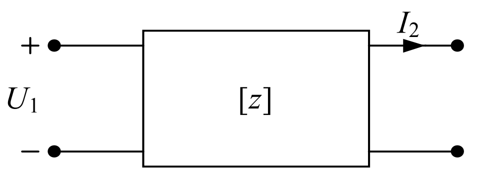
Recipročnost

$$z_{12} = z_{21} \qquad AD - BC = 1 \qquad h_{12} = h_{21}$$

$$y_{12} = y_{21} \qquad A_2 D_2 - B_2 C_2 = 1 \qquad g_{12} = g_{21}$$

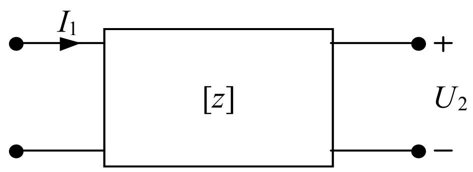
svojstvo građe četveropola, a ne vrste parametara

poticaj struja I_2



$$z_{12} = -\left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

poticaj struja I_1



$$z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

Odnos odziva i poticaja ostaje isti (isti su promatrani parametri).

Ako su svi elementi četveropola recipročni, tada je i četveropol recipročan (obrnuta tvrdnja ne vrijedi).

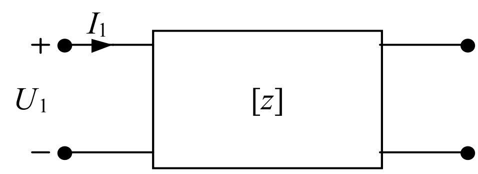
Simetričnost

$$z_{11} = z_{22} \qquad A = D \qquad h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1$$

$$y_{11} = y_{22} \qquad A_2 = D_2 \qquad g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1$$

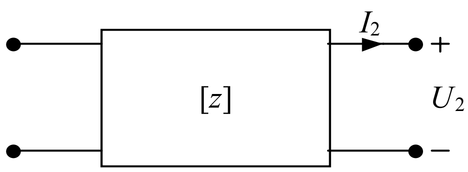
svojstvo građe četveropola, a ne vrste parametara

poticaj struja I_1



$$z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

poticaj struja I_2



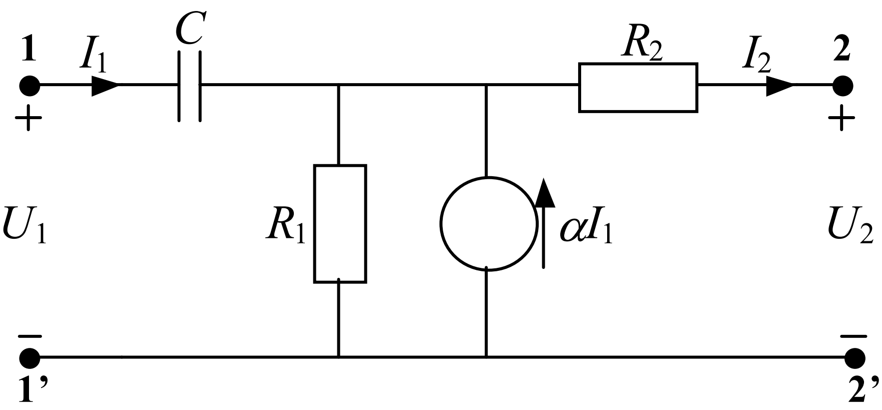
$$z_{22} = -\left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Ulazne impedancije na oba kraja su jednake (isti su promatrani parametri).

Ako je četveropol geometrijski simetričan, tada je i električki simetričan (obrnuta tvrdnja ne vrijedi).

recipročnost ili simetričnost: tri parametra
recipročnost i simetričnost: dva parametra

Primjer: odrediti da li je prikazani četveropol recipročan i simetričan.



provjera preko z parametara

uvjet I_2=0:

$$U_1 = I_1 \frac{1}{sC} + (I_1 + \alpha I_1) R_1 = I_1 \left(\frac{1}{sC} + (1+\alpha) R_1 \right)$$

$$U_2 = (I_1 + \alpha I_1) R_1 = I_1 (1+\alpha) R_1$$

dva parametra:

$$z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{sC} + (1+\alpha) R_1$$

$$z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = (1+\alpha) R_1$$

uvjet $I_1=0$: (vrijedi $\alpha I_1=0$)

$$U_1 = -I_2 R_1$$

$$U_2 = -I_2 R_1 - I_2 R_2 = -I_2 \left(R_1 + R_2 \right)$$

dva parametra:

$$z_{12} = -\left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = R_1$$

$$z_{22} = -\left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = R_1 + R_2$$

provjera:

$$\underline{z_{12} \neq z_{21}}$$

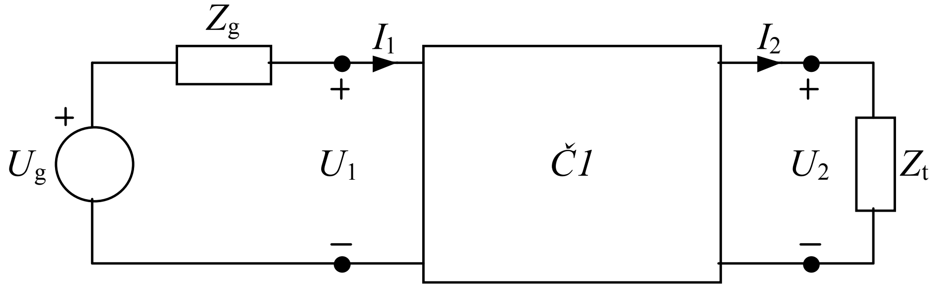
četveropol nije recipročan

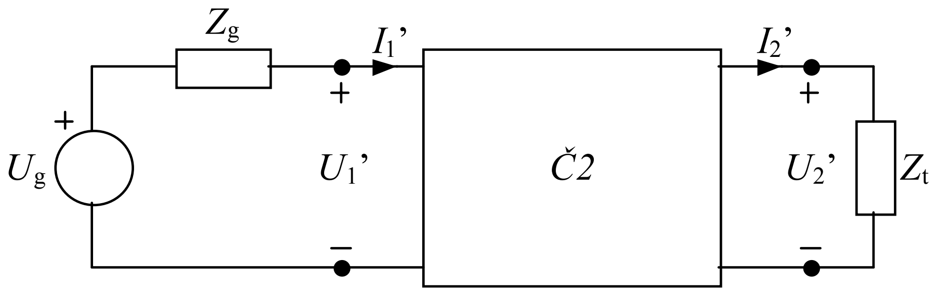
$$\underline{z_{11} \neq z_{22}}$$

četveropol nije simetričan

Ekvivalentni četveropoli

Dva su četveropola ekvivalentna (električno jednaka) ako na svojim prilazima imaju iste napone i struje neovisno o frekvenciji i priključenom opterećenju.





Četveropoli *Č1* i *Č2* su ekvivalentni ako vrijedi:

$$U_1 = U_1^{'} \quad , \quad U_2 = U_2^{'} \quad , \quad I_1 = I_1^{'} \quad , \quad I_2 = I_2^{'}$$

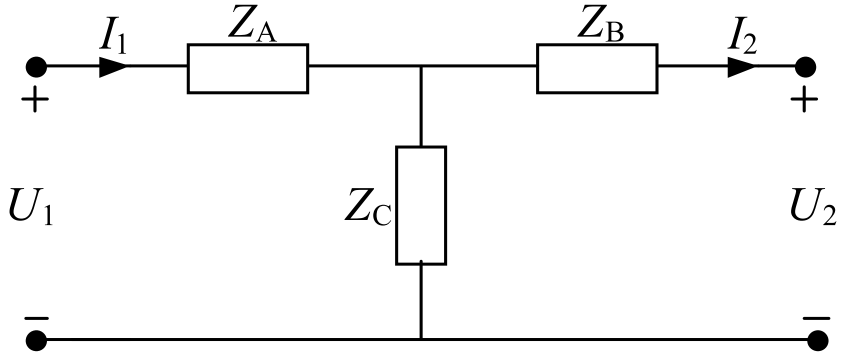
Nužan i dovoljan uvjet: matrice ekvivalentnih četveropola su jednake (imaju jednake parametre na svim frekvencijama).

$$[z]_1 = [z]_2 \qquad [A]_1 = [A]_2 \qquad [h]_1 = [h]_2$$

$$[y]_1 = [y]_2 \qquad [A_2]_1 = [A_2]_2 \qquad [g]_1 = [g]_2$$

Svakom se *recipročnom* četveropolu mogu odrediti nadomjesni ekvivalentni četveropoli u T- i Π-spoju.

T-spoj



Uvjet I_2=0:

$$U_1 = I_1(Z_A + Z_C)$$

$$U_2 = I_1 Z_C$$

dva parametra:

$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_A + Z_C$$

$$z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_C$$

Uvjet $I_1=0$:

$$U_1 = -I_2 Z_C$$

$$U_2 = -I_2 \left(Z_B + Z_C \right)$$

dva parametra:

$$z_{12} = -\left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_C$$

$$z_{22} = -\left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_B + Z_C$$

Matrica z parametara četveropola u T-spoju:

$$[z] = \begin{bmatrix} Z_A + Z_C & -Z_C \\ Z_C & -\left(Z_B + Z_C \right) \end{bmatrix}$$

Usporedba s općom matricom z parametara:

$$z_{11} = Z_A + Z_C$$

$$z_{12} = z_{21} = Z_C$$

$$z_{22} = Z_B + Z_C$$

Slijede elemenati nadomjesnog T-spoja:

$$Z_A = z_{11} - z_{12}$$

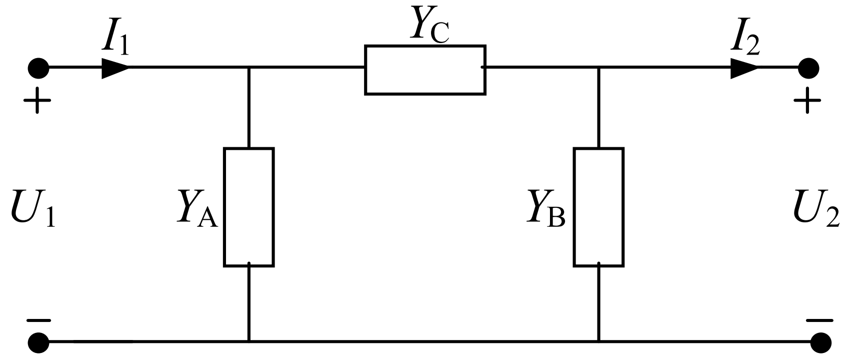
$$Z_B = z_{22} - z_{12}$$

$$\underline{Z_C = z_{12} = z_{21}}$$

Ako je zadani četveropol i simetričan $\rightarrow$ $Z_A = Z_B$.

Ako se nekom četveropolu želi odrediti ekvivalentan četveropol u T-spoju potrebno je poznavati njegove *z* parametare.

Π-spoj



Potrebno je odrediti *y* parametre i njih usporediti sa *y* parametrima četveropola kojem se želi odrediti ekvivalentan četveropol u Π-spoju.

Uvjet U_2=0:

$$I_1 = U_1(Y_A + Y_C)$$

$$I_2 = U_1 Y_C$$

dva parametra:

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0} = Y_A + Y_C$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0} = Y_C$$

Uvjet U_1=0:

$$I_1 = -U_2 Y_C$$

$$I_2 = -U_2 \left(Y_B + Y_C \right)$$

dva parametra:

$$y_{12} = -\left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = Y_C$$

$$y_{22} = -\left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = Y_B + Y_C$$

Matrica y parametara četveropola u Π-spoju:

$$[y] = \begin{bmatrix} Y_A + Y_C & -Y_C \\ Y_C & -\left(Y_B + Y_C \right) \end{bmatrix}$$

Usporedba s općom matricom y parametara:

$$y_{11} = Y_A + Y_C$$

$$y_{12} = y_{21} = Y_C$$

$$y_{22} = Y_B + Y_C$$

Slijede elemenati nadomjesnog Π-spoja:

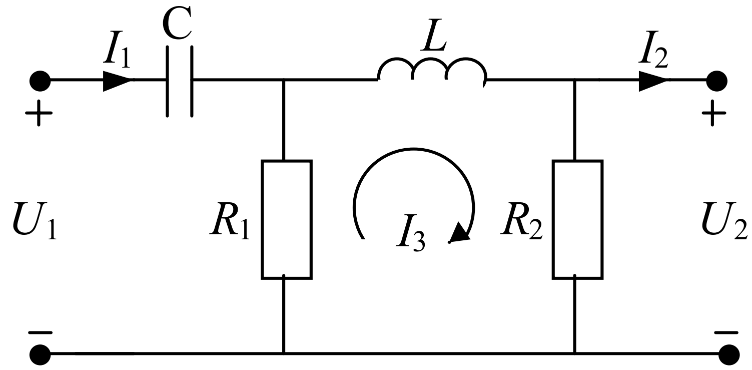
$$Y_A = y_{11} - y_{12}$$

$$Y_B = y_{22} - y_{12}$$

$$\underline{Y_C = y_{12} = y_{21}}$$

Ako je zadani četveropol i simetričan → $Y_A = Y_B$.

Primjer: zadanom četveropolu odrediti ekvivalentni T-spoj.



Uvjet I_2=0:

$$U_1 = I_1 \frac{1}{sC} + (I_1 - I_3)R_1 = I_1\left(\frac{1}{sC} + R_1\right) - I_3 R_1$$

$$0 = (I_3 - I_1)R_1 + I_3 sL + I_3 R_2 = -I_1 R_1 + I_3(R_1 + R_2 + sL)$$

Napon U_2 je:

$$U_2 = I_3 R_2$$

Izrazi li se struja I_3

$$I_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + sL} I_1$$

dobije se:

$$U_1 = I_1\left(\frac{1}{sC} + R_1 - \frac{R_1^2}{R_1 + R_2 + sL}\right)$$

$$U_2 = I_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + sL}$$

dva parametra:

$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{sC} + R_1 - \frac{R_1^2}{R_1 + R_2 + sL}$$

$$z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + sL}$$

Uvjet I_1=0 (jednadžbe petlji):

$$0 = I_3 R_1 + I_3 sL + \left(I_3 - I_2\right) R_2 = -I_2 R_2 + I_3\left(R_1 + R_2 + sL\right)$$

$$U_2 = \left(I_3 - I_2\right) R_2 = -I_2 R_2 + I_3 R_2$$

Napon U_1 je:

$$U_1 = -I_3 R_1$$

Izrazi li se struja I_3

$$I_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + sL} I_2$$

dobije se:

$$U_1 = -I_2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + sL}$$

$$U_2 = -I_2 \left(R_2 - \frac{R_2^2}{R_1 + R_2 + sL} \right)$$

dva parametra:

$$z_{12} = -\frac{U_1}{I_2}\bigg|_{I_1=0} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + sL}$$

$$z_{22} = -\frac{U_2}{I_2}\bigg|_{I_1=0} = R_2 - \frac{R_2^2}{R_1 + R_2 + sL}$$

Četveropol je recipročan, z_{12}=z_{21} i mogu se odrediti elementi ekvivalentnog T-spoja:

$$Z_A = z_{11} - z_{12} = \frac{1}{sC} + R_1 - \frac{R_1^2 + R_1R_2}{R_1 + R_2 + sL}$$

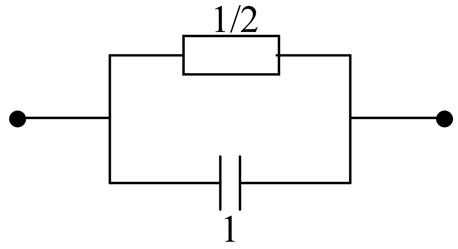
$$Z_B = z_{22} - z_{12} = R_2 - \frac{R_2^2 + R_1R_2}{R_1 + R_2 + sL}$$

$$Z_C = z_{12} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + sL}$$

Neka je zadano: $R_1=R_2=1$, $L=1$ i $C=1$

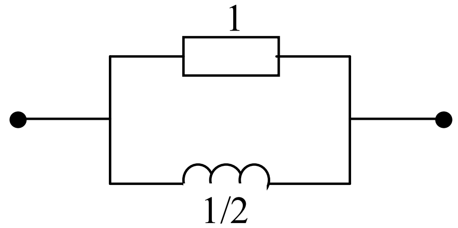
Impedancija Z_C je:

$$Z_C = \frac{1}{2+s} = \frac{1}{Y_C} = \frac{1}{\frac{1}{R}+sC}$$



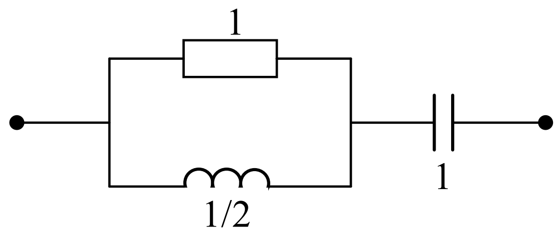
Impedancija Z_B je:

$$Z_B = 1 - \frac{2}{2+s} = \frac{s}{2+s} = \frac{1}{\frac{2}{s}+1} = \frac{1}{Y_B} = \frac{1}{\frac{1}{sL}+\frac{1}{R}}$$



Impedancija Z_A je:

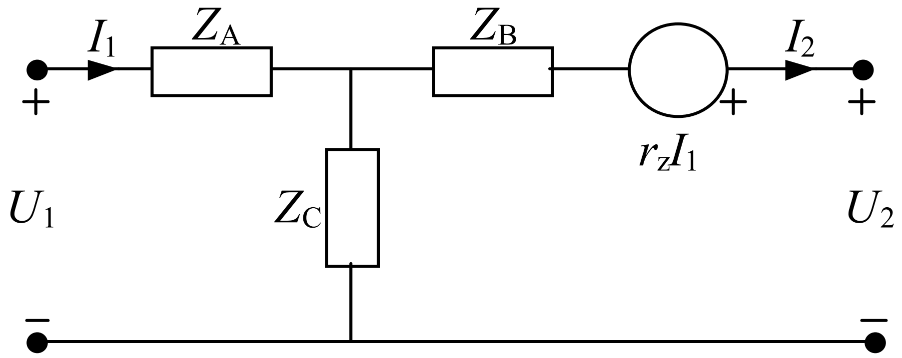
$$Z_A = \frac{1}{s} + 1 - \frac{2}{2+s} = \frac{s^2+s+2}{s(s+2)} = \frac{s^2}{s(s+2)} + \frac{s+2}{s(s+2)} = \frac{s}{s+2} + \frac{1}{s}$$



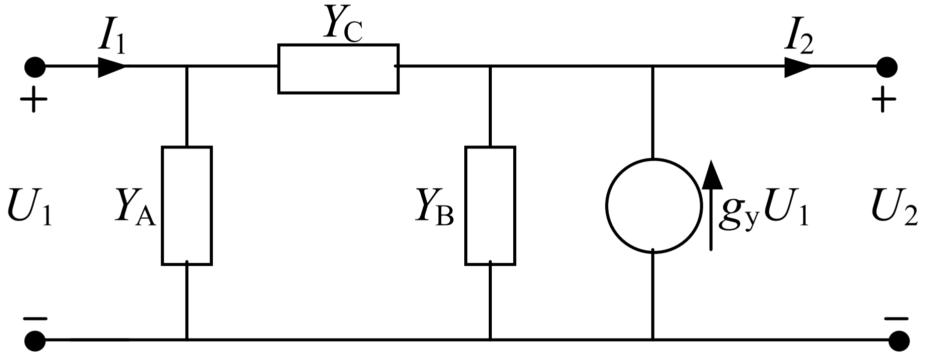
Ekvivalentni T i Π četveropoli određeni su za recipročan četveropol.

Modificirani ekvivalentni četveropoli u T i Π spoju mogu se odrediti i za nerecipročne četveropole. U tom slučaju oba se četveropola sastoje od tri impedancije i jednog zavisnog izvora.

T-spoj:



Π-spoj:



T-spoj

Uvjet I_2=0:

$$U_1 = I_1(Z_A + Z_C)$$

$$U_2 = I_1(Z_C + r_z)$$

dva parametra:

$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_A + Z_C$$

$$z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_C + r_z$$

Uvjet I_1=0:

$$U_1 = -I_2 Z_C$$

$$U_2 = -I_2(Z_B + Z_C)$$

dva parametra:

$$z_{12} = -\left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_C$$

$$z_{22} = -\left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_B + Z_C$$

Slijedi:

$$Z_A = z_{11} - z_{12}$$

$$Z_B = z_{22} - z_{12}$$

$$Z_C = z_{12}$$

$$\underline{r_z = z_{21} - z_{12}}$$

Π-spoj

Uvjet U_2=0:

$$I_1 = U_1\left(Y_A + Y_C\right)$$

$$I_2 = U_1\left(Y_C + g_y\right)$$

dva parametra:

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0} = Y_A + Y_C$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0} = Y_C + g_y$$

Uvjet U_1=0:

$$I_1 = -U_2 Y_C$$

$$I_2 = -U_2\left(Y_B + Y_C\right)$$

dva parametra:

$$y_{12} = -\left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0} = Y_C$$

$$y_{22} = -\left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0} = Y_B + Y_C$$

Slijedi:

$$Y_A = y_{11} - y_{12}$$

$$Y_B = y_{22} - y_{12}$$

$$Y_C = y_{12}$$

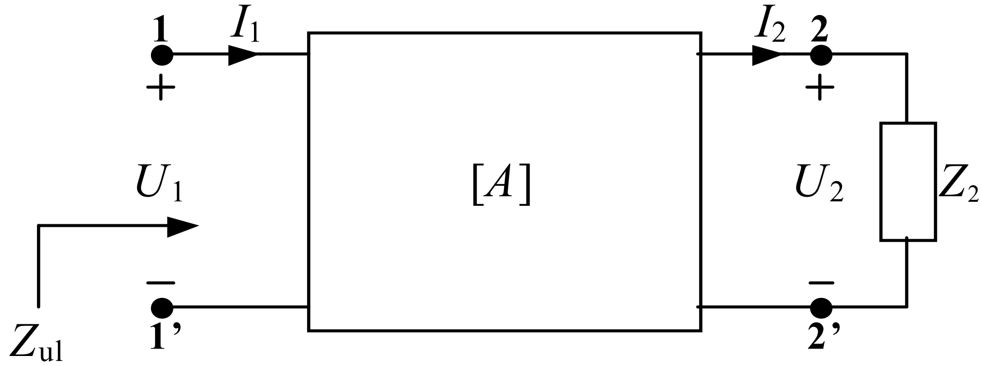
$$\underline{g_y = y_{21} - y_{12}}$$

5.4. Zrcalni parametri četveropola

za recipročne četveropole

Ulazna impedancija četveropola

Omjer napona i struje na ulazu četveropola ako je suprotni prilaz zaključen impedancijom Z_2 .



$$Z_{ul} = \frac{U_1}{I_1}$$

$$Z_{ul} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cdot A + I_2 \cdot B}{U_2 \cdot C + I_2 \cdot D}$$

Na *2-2'* vrijedi: $$Z_2 = \frac{U_2}{I_2}$$

$$Z_{ul} = \frac{Z_2 I_2 \cdot A + I_2 \cdot B}{Z_2 I_2 \cdot C + I_2 \cdot D} = \underline{\frac{A \cdot Z_2 + B}{C \cdot Z_2 + D}}$$

Ulazna impedancija preko z parametara:

$$Z_{ul} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \frac{z_{11}}{z_{21}} + I_2 \left(\frac{z_{22} z_{11}}{z_{21}} - z_{12} \right)}{U_2 \frac{1}{z_{21}} + I_2 \frac{z_{22}}{z_{21}}}$$

$$Z_{ul} = \frac{Z_2 z_{11} + z_{22} z_{11} - z_{12} z_{21}}{Z_2 + z_{22}} = \frac{z_{11}(Z_2 + z_{22}) - z_{12} z_{21}}{Z_2 + z_{22}}$$

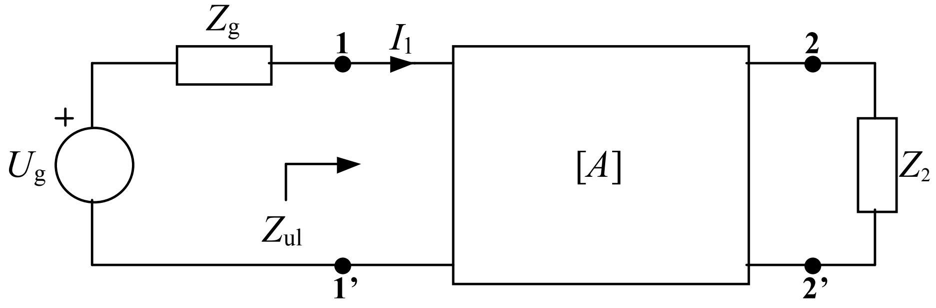
$$\underline{Z_{ul} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{Z_2 + z_{22}}}$$

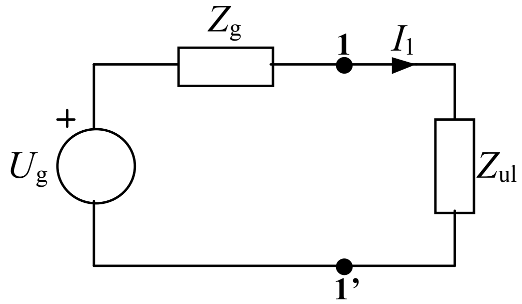
Ulazna admitancija preko y parametara:

$$\underline{Y_{ul} = y_{11} - \frac{y_{12} y_{21}}{Y_2 + y_{22}}}$$

$$Y_{ul} = \frac{1}{Z_{ul}}$$

Vrijedi:

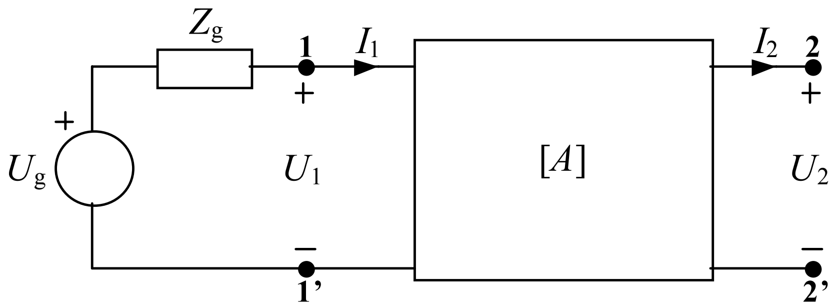




Struja I_1 ista je u oba slučaja:

$$I_1 = \frac{U_g}{Z_g + Z_{ul}}$$

Primjer: zadanu mrežu nadomjestiti po Theveninu na priključnicama *2-2'*.



a) određivanje Theveninova napona E_T

prijenosna jednadžba četveropola:

$$I_1 = U_2 \cdot C + I_2 \cdot D$$

$$I_2 = 0 \quad \rightarrow \quad U_2 = \frac{I_1}{C}$$

nadomještavanje ulaznom impedancijom:

$$Z_{ul_{1-1'}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A \cdot Z_2 + B}{C \cdot Z_2 + D}$$

$$Z_{ul_{1-1'}} = \frac{A + \frac{B}{Z_2}}{C + \frac{D}{Z_2}} = \frac{A}{C}$$

struja I_1 je:

$$I_1 = \frac{U_g}{Z_g + Z_{ul_{1-1'}}} = \frac{U_g}{Z_g + \frac{A}{C}}$$

slijedi Theveninov napon:

$$\underline{E_T = \frac{\frac{U_g}{Z_g + \frac{A}{C}}}{C} = \frac{U_g}{C \cdot Z_g + A}}$$

b) određivanje Theveninove impedancije Z_T

$$Z_T = \frac{U_2}{-I_2}$$

iz prijenosnih jednadžbi:

$$U_2 = \frac{D}{AD - BC} U_1 - \frac{B}{AD - BC} I_1$$

$$I_2 = -\frac{C}{AD - BC} U_1 + \frac{A}{AD - BC} I_1$$

$$Z_T = \frac{D \cdot U_1 - B \cdot I_1}{C \cdot U_1 - A \cdot I_1}$$

vrijedi:

$$Z_g = -\frac{U_1}{I_1}$$

slijedi:

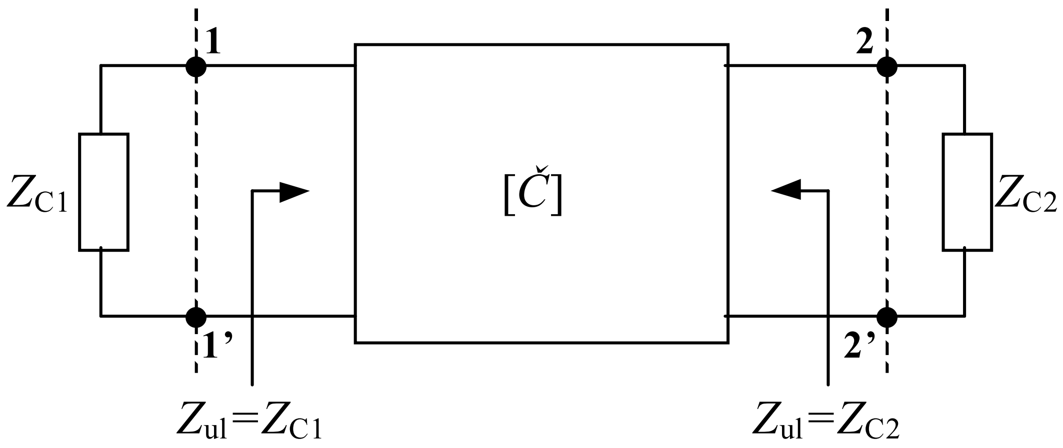
$$\underline{Z_T = \frac{D\left(-Z_g I_1\right) - B \cdot I_1}{C\left(-Z_g I_1\right) - A \cdot I_1} = \frac{D \cdot Z_g + B}{C \cdot Z_g + A}}$$

Zrcalni parametri četveropola

zrcalni / valni / karakteristični parametri

za recipročne četveropole - određeni s tri parametra

tri zrcalna parametra: zrcalne impedancije Z_C na oba prilaza i zrcalna konstanta prijenosa g



prilagođenje po zrcalnim impedancijama (samo na jednoj frekvenciji)

zrcalna konstanta prijenosa g

$$g = a + jb$$

a - zrcalna konstanta gušenja četveropola

b - zrcalna konstanta faze četveropola

Zrcalni parametri:

$$Z_{C1} = \sqrt{Z_{k1} \cdot Z_{p1}} \qquad\qquad Z_{C2} = \sqrt{Z_{k2} \cdot Z_{p2}}$$

$$\operatorname{th} g = \sqrt{\frac{Z_{k1}}{Z_{p1}}} = \sqrt{\frac{Z_{k2}}{Z_{p2}}}$$

gdje je:

$$Z_{k1} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0} = \frac{1}{y_{11}}$$

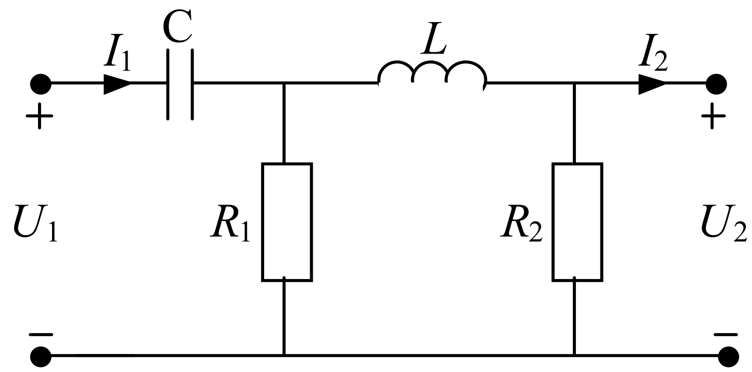
$$Z_{p1} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = z_{11}$$

$$Z_{k2} = -\left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{U_1=0} = \frac{1}{y_{22}}$$

$$Z_{p2} = -\left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = z_{22}$$

Za simetrične četveropole vrijedi $Z_{C1}=Z_{C2}$ - dva parametra u potpunosti opisuju četveropol koji je recipročan i simetričan.

Primjer: odrediti zrcalne parametre četveropola



četveropol je recipročan

ulazne impedancije:

$$Z_{k1}=\left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0}=\frac{1}{sC}+\left(R_1\|sL\right)=\frac{1}{sC}+\frac{R_1\cdot sL}{R_1+sL}$$

$$Z_{k1}=\frac{s^2LCR_1+sL+R_1}{s^2LC+sCR_1}$$

$$Z_{p1}=\left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{1}{sC}+\left(R_1\|(sL+R_2)\right)=\frac{1}{sC}+\frac{R_1(sL+R_2)}{R_1+sL+R_2}$$

$$Z_{p1}=\frac{s^2LCR_1+s(CR_2+L)+(R_1+R_2)}{s^2LC+sC(R_1+R_2)}$$

$$Z_{k2} = -\frac{U_2}{I_2}\bigg|_{U_1=0} = R_2 \Big\| \left(sL + \left(R_1 \Big\| \frac{1}{sC} \right) \right) = \frac{R_2 \left(sL + \frac{R_1 \frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}} \right)}{R_2 + sL + \frac{R_1 \frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}}}$$

$$Z_{k2} = \frac{s^2 LCR_1R_2 + sLR_2 + R_1R_2}{s^2 LCR_1 + s(CR_1R_2 + L) + (R_1 + R_2)}$$

$$Z_{p2} = -\frac{U_2}{I_2}\bigg|_{I_1=0} = R_2 \| (sL + R_1) = \frac{R_2(sL + R_1)}{R_2 + sL + R_1}$$

$$Z_{p2} = \frac{sLR_2 + R_1R_2}{sL + (R_1 + R_2)}$$

neka je: R_1=R_2=1, C=1, L=1

$$Z_{k1} = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s} \qquad Z_{p1} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 2s}$$

$$Z_{k2} = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 2} \qquad Z_{p2} = \frac{s + 1}{s + 2}$$

Zrcalne impedancije su:

$$Z_{C1} = \sqrt{Z_{k1} \cdot Z_{p1}} = \sqrt{\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s} \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 2s}}$$

$$\underline{Z_{C1} = \sqrt{\frac{s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 2}{s^4 + 3s^3 + 2s^2}}}$$

$$Z_{C2} = \sqrt{Z_{k2} \cdot Z_{p2}} = \sqrt{\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 2} \frac{s + 1}{s + 2}}$$

$$\underline{Z_{C2} = \sqrt{\frac{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}}}$$

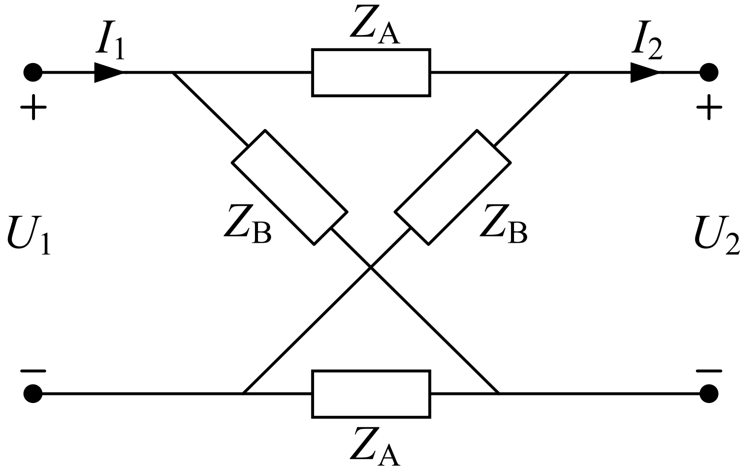
Tangens hiperbolni zrcalne konstante prijenosa je:

$$\mathrm{th}\, g = \sqrt{\frac{Z_{k1}}{Z_{p1}}} = \sqrt{\frac{\dfrac{s^2 + s + 1}{s^2 + s}}{\dfrac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 2s}}}$$

$$\underline{\mathrm{th}\, g = \sqrt{\frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}}}$$

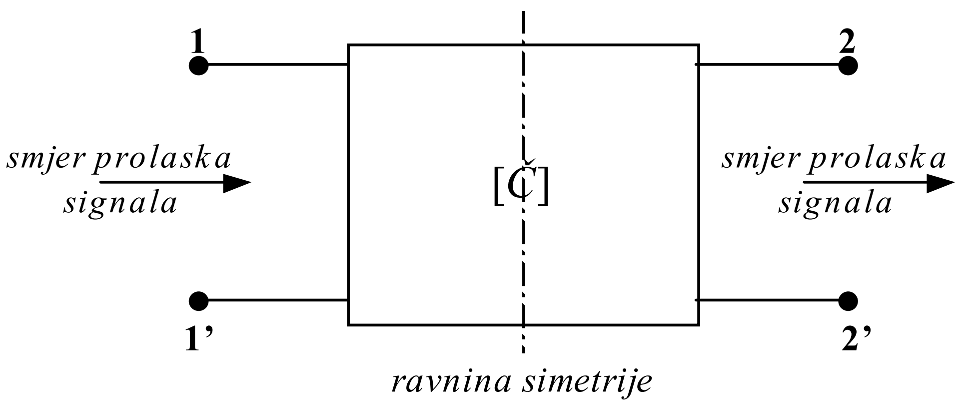
Ekvivalentni četveropol u X-spoju

za recipročne i simetrične četveropole



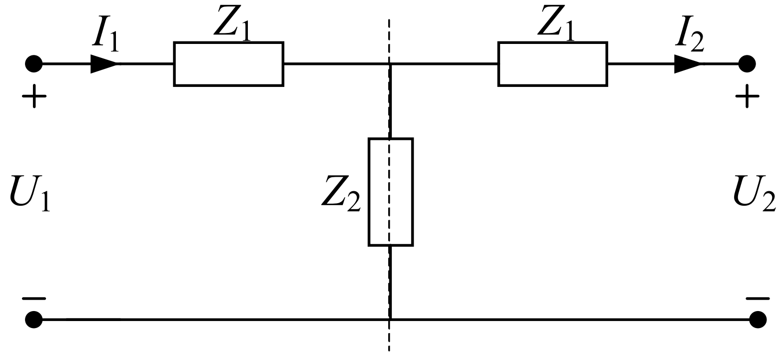
Bartlettov teorem:
svakom se simetričnom četveropolu koji je i simetrično građen može odrediti ekvivalentan X-spoj. U vodoravne grane dolazi impedancija polučlana zadanog četveropola na kratko, a u poprečne grane impedancija polučlana na prazno.

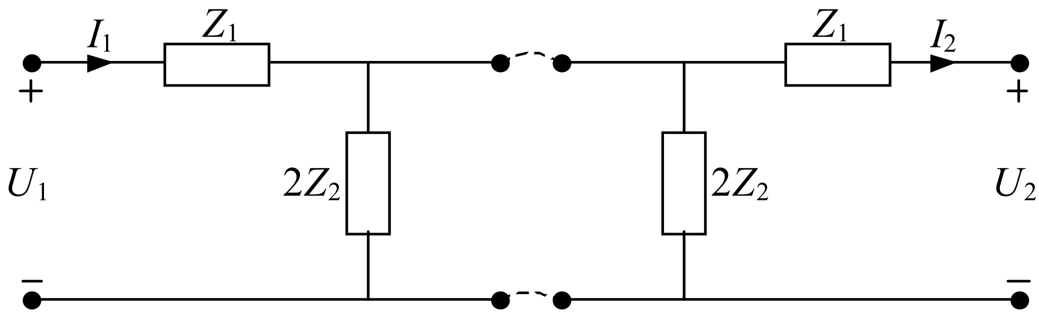
ravnina simetrije koja određuje polučlan - okomita na smjer prolaska signala

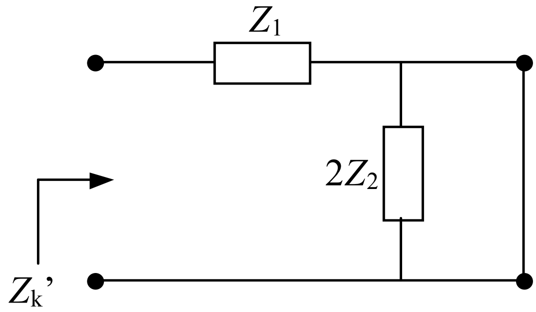


a) četveropol nema ukrižane unutarnje grane

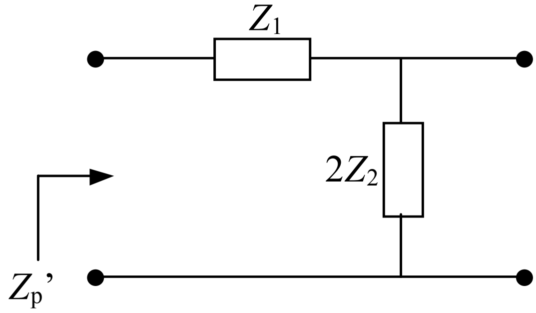
simetrični T-spoj:







$$Z_k^{'} = Z_1$$



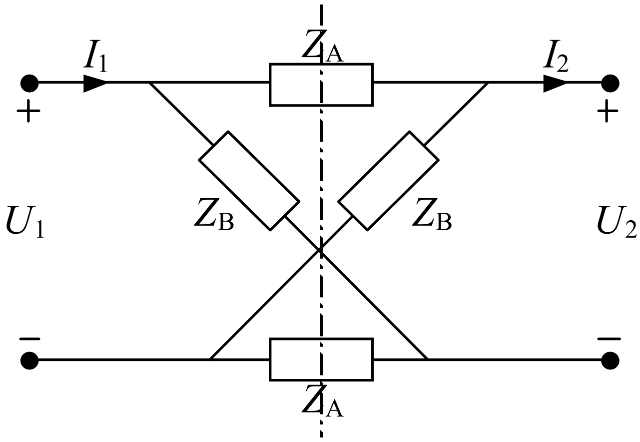
$$Z_p^{'} = Z_1 + 2Z_2$$

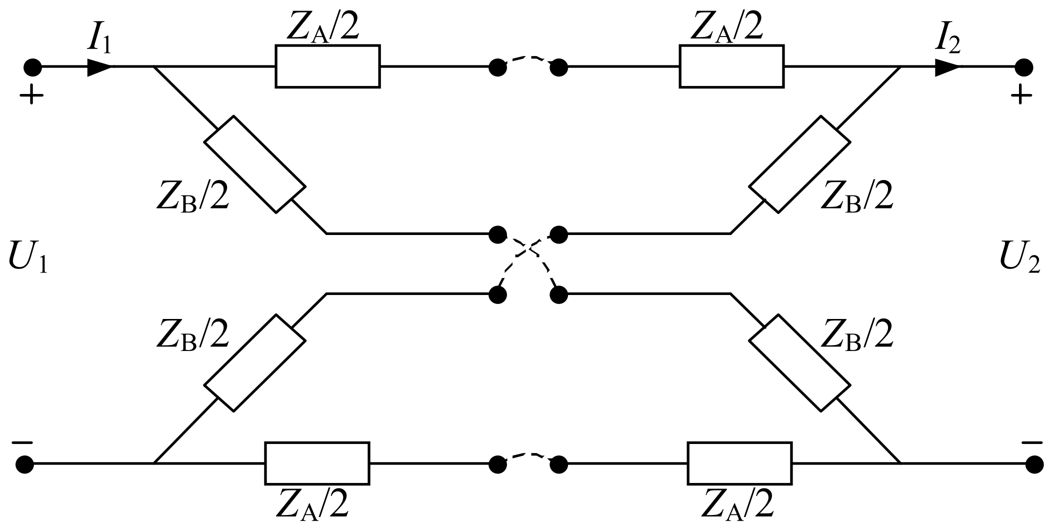
elementi X-spoja:

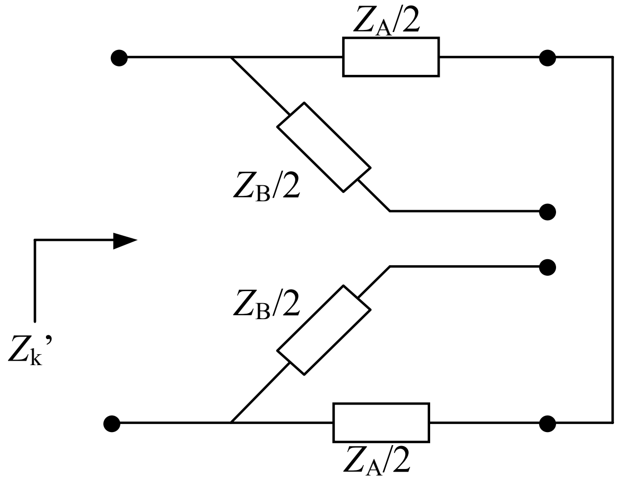
$$Z_A = Z_k^{'} = Z_1 \qquad Z_B = Z_p^{'} = Z_1 + 2Z_2$$

b) četveropol ima ukrižene unutarnje grane

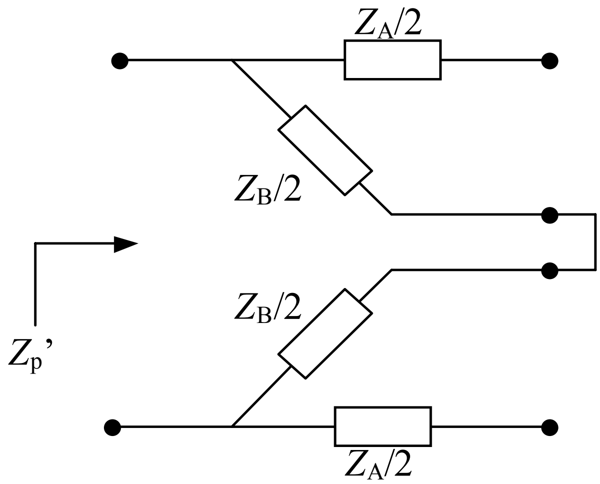
X-spoj:







$$Z_k^{'} = Z_A$$



$$Z_p^{'} = Z_B$$

Zrcalne impedancije polučlana:

$$Z_C^{'} = \sqrt{Z_k^{'} \cdot Z_p^{'}} = \sqrt{Z_A \cdot Z_B}$$

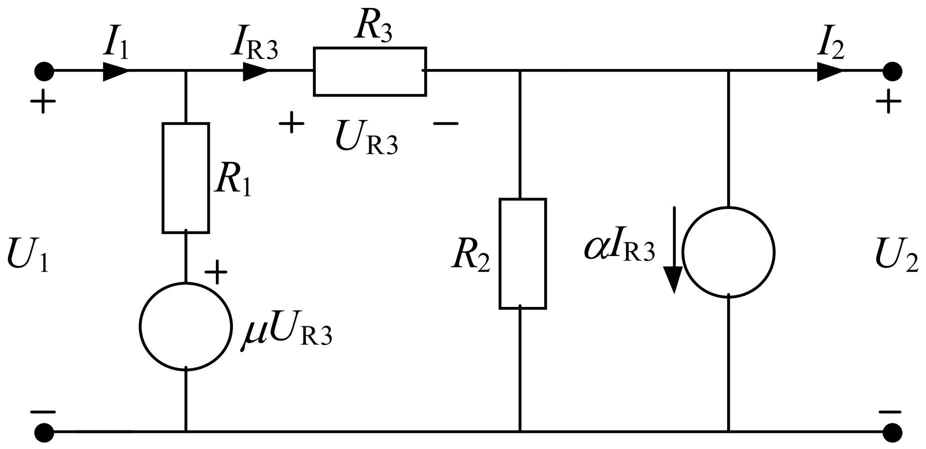
Tangens hiperbolni zrcalne konstante prijenosa:

$$\mathrm{th}\, g' = \sqrt{\frac{Z_k^{'}}{Z_p^{'}}} = \sqrt{\frac{Z_A}{Z_B}}$$

Zrcalne impedancije polučlana i cijelog X-spoja su jednake.

Zrcalna konstanta prijenosa polučlana dvostruko je manja od zrcalne konstante prijenosa cijelog X-spoja.

Primjer: odrediti ekvivalentni X-spoj ako je zadano: $R_1 = R_2 = 2$, $R_3 = 1$, $\alpha = 1/2$.

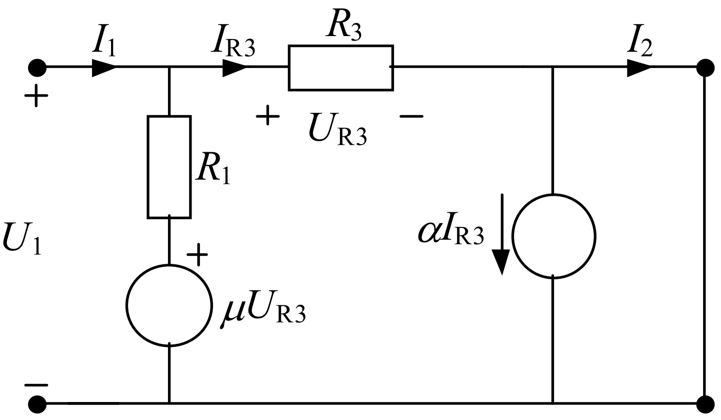


treba odrediti ekvivalentan simetričan Π-spoj

provjera recipročnosti i simetričnosti

korištenje y parametara

Uvjet U_2=0:



strujne jednadžbe: $I_1 = \dfrac{U_1 - \mu U_{R3}}{R_1} + I_{R3}$

$$I_2 = I_{R3} - \alpha I_{R3}$$

zavisne veličine: $U_{R3} = U_1$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{U_1}{R_3}$$

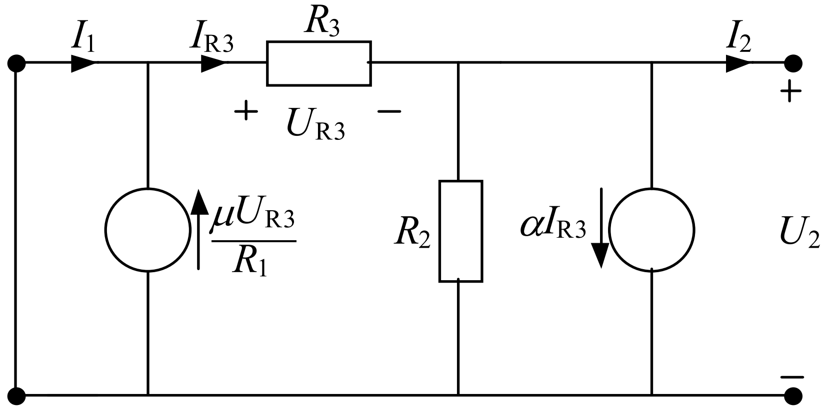
$$I_1 = \frac{U_1 - \mu U_1}{R_1} + \frac{U_1}{R_3} = U_1\left(\frac{1}{R_1}(1-\mu) + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$I_2 = U_1 \frac{1-\alpha}{R_3}$$

dva parametra: $y_{11} = \left.\dfrac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0} = \dfrac{1}{R_1}(1-\mu) + \dfrac{1}{R_3}$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0} = \frac{1-\alpha}{R_3}$$

Uvjet U_1=0:



strujne jednadžbe:
$$I_1 = I_{R3} - \frac{\mu U_{R3}}{R_1}$$
$$I_2 = I_{R3} - \frac{U_2}{R_2} - \alpha I_{R3}$$

zavisne veličine:
$$U_{R3} = -U_2$$
$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = -\frac{U_2}{R_3}$$

$$I_1 = \frac{-U_2}{R_3} + \frac{\mu U_2}{R_1} = -U_2\left(\frac{1}{R_3} - \frac{\mu}{R_1}\right)$$
$$I_2 = -\frac{U_2}{R_3} - \frac{U_2}{R_2} + \frac{\alpha U_2}{R_3} = -U_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1-\alpha}{R_3}\right)$$

dva parametra:
$$y_{12} = -\left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0} = \frac{1}{R_3} - \frac{\mu}{R_1}$$
$$y_{22} = -\left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0} = \frac{1}{R_2} + \frac{1-\alpha}{R_3}$$

Provjera uvjeta recipročnosti $y_{12} = y_{21}$

$$\frac{1}{R_3} - \frac{\mu}{R_1} = \frac{1-\alpha}{R_3}$$

$$1 - \frac{\mu}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mu = 1$$

Provjera uvjeta simetričnosti $y_{11} = y_{22}$

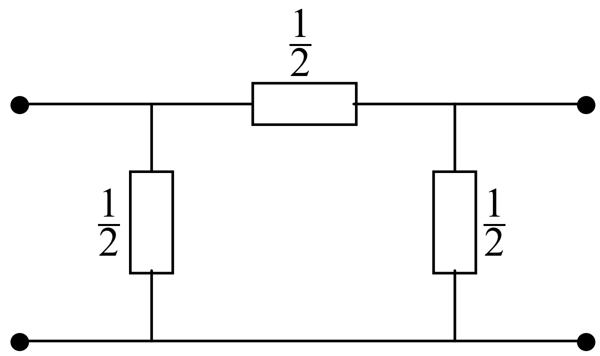
$$\frac{1}{R_1}(1-\mu) + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{1-\alpha}{R_3}$$

$$\frac{1}{2}(1-1) + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

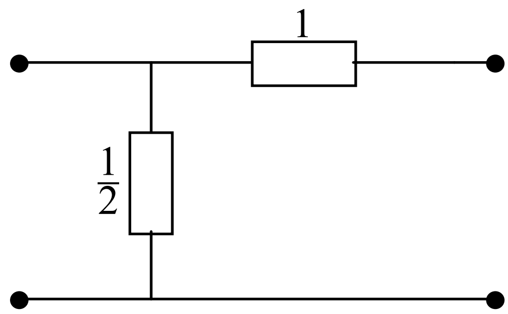
Elementi dobivenog simetričnog Π-spoja:

$$Y_A = Y_B = y_{11} - y_{12} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Y_C = y_{12} = \frac{1}{2}$$



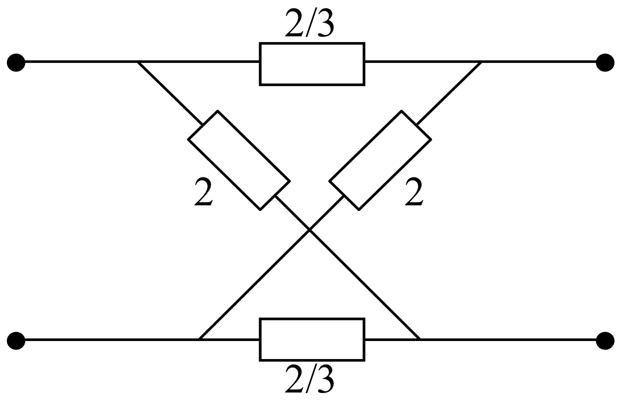
Polučlan:



$$Z_k^{'} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}+1}} = \frac{2}{3}$$

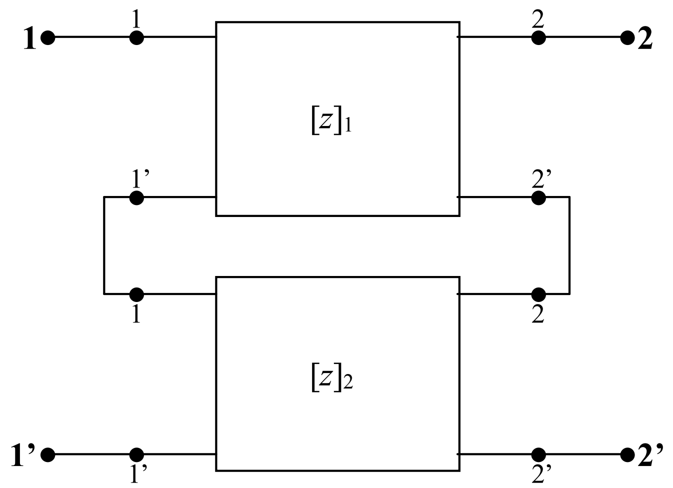
$$Z_p^{'} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = 2$$

Prema Bartlettovu teoremu dobiveni X-spoj:



5.5. Spojevi četveropola

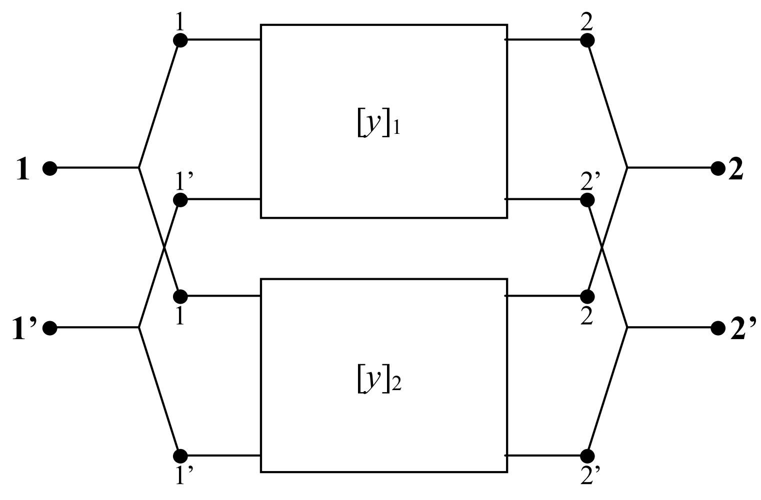
a) serijski spoj



$$[z] = [z]_1 + [z]_2$$

$$[z] = [z]_1 + [z]_2 + \ldots + [z]_N$$

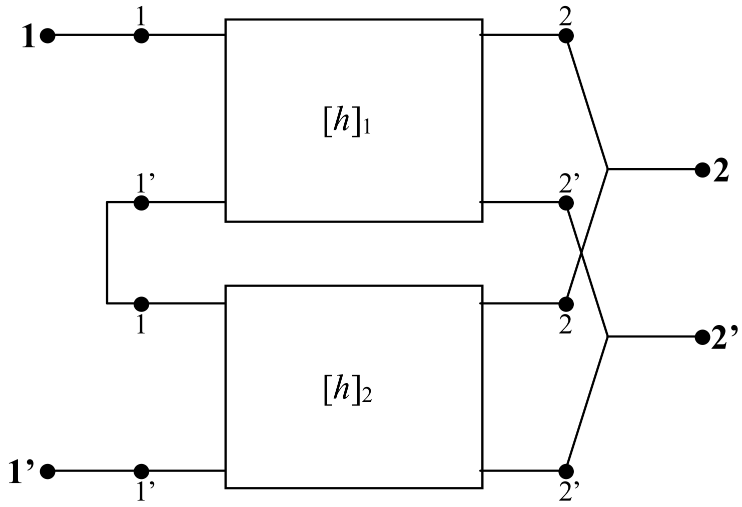
b) paralelan spoj



$$[y] = [y]_1 + [y]_2$$

$$[y] = [y]_1 + [y]_2 + \ldots + [y]_N$$

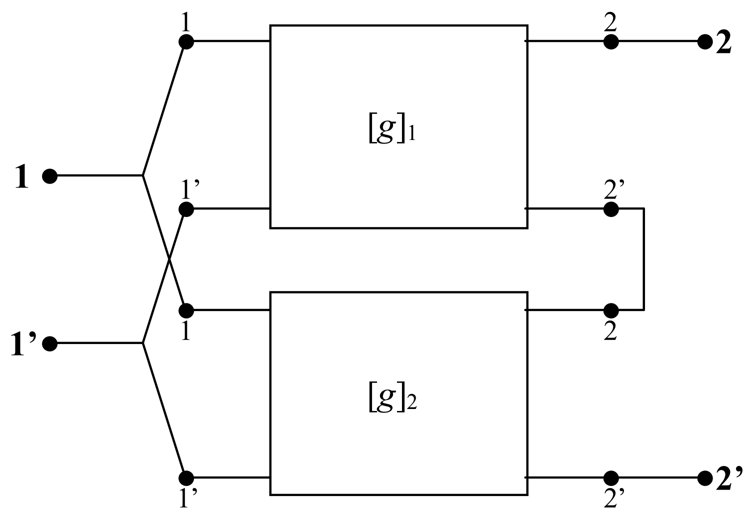
c) serijsko-paralelan spoj



$$\left[h\right]=\left[h\right]_1+\left[h\right]_2$$

$$\left[h\right]=\left[h\right]_1+\left[h\right]_2+\ldots+\left[h\right]_N$$

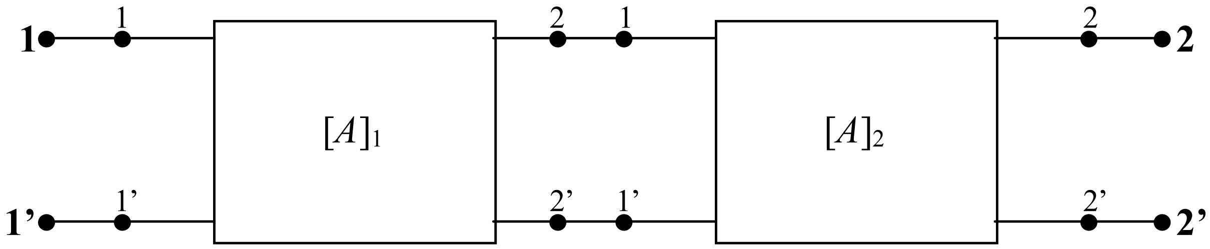
d) paralelno-serijski spoj



$$\left[g\right]=\left[g\right]_1+\left[g\right]_2$$

$$\left[g\right]=\left[g\right]_1+\left[g\right]_2+\ldots+\left[g\right]_N$$

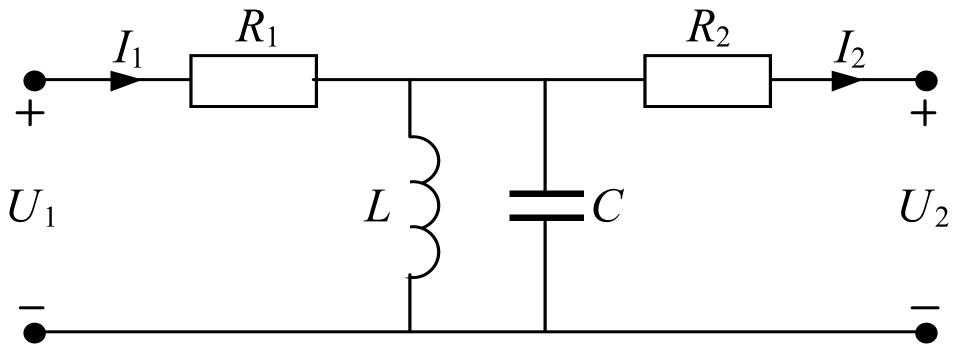
e) kaskadni (lančani) spoj



$$\left[A\right]=\left[A\right]_1\cdot\left[A\right]_2$$

$$\left[A\right]=\left[A\right]_1\cdot\left[A\right]_2\cdot\ldots\cdot\left[A\right]_N$$

Primjer: odrediti matricu A parametara četveropola.



a) matrica A parametara zadanog četveropola

Uvjet I_2=0:

$$U_1 = I_1 R_1 + I_1 \frac{sL \cdot \frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = I_1\left(R_1 + \frac{sL}{s^2LC+1}\right)$$

$$U_2 = I_1 \frac{sL \cdot \frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = I_1 \frac{sL}{s^2LC+1}$$

dva parametra:

$$A = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{R_1 + \frac{sL}{s^2LC+1}}{\frac{sL}{s^2LC+1}} = sCR_1 + 1 + \frac{R_1}{sL}$$

$$C = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{s^2LC+1}{sL} = sC + \frac{1}{sL}$$

Uvjet U_2=0:

$$U_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2$$

$$(I_1 - I_2)\frac{sL}{s^2 LC + 1} = I_2 R_2$$

$$U_1 = I_2\left(\frac{s^2 LCR_1 R_2 + sLR_1 + R_1 R_2}{sL} + R_2\right)$$

$$I_1 = I_2 \frac{s^2 LCR_2 + sL + R_2}{sL}$$

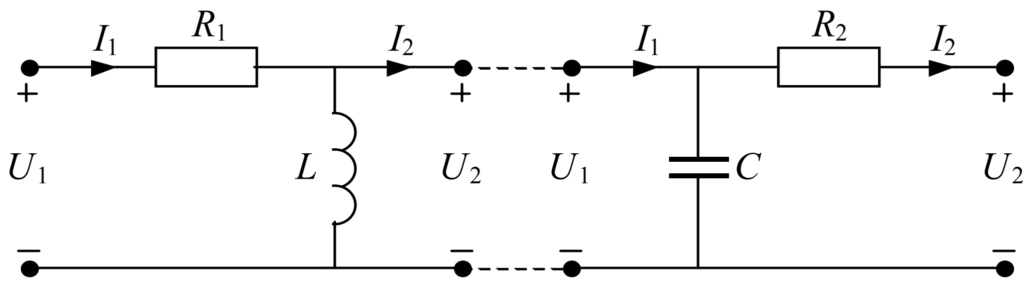
dva parametra:

$$B = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{U_2=0} = sCR_1 R_2 + \frac{R_1 R_2}{sL} + R_1 + R_2$$

$$D = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_2=0} = sCR_2 + 1 + \frac{R_2}{sL}$$

$$\underline{[A] = \begin{bmatrix} sCR_1 + 1 + \dfrac{R_1}{sL} & sCR_1 R_2 + \dfrac{R_1 R_2}{sL} + R_1 + R_2 \\ sC + \dfrac{1}{sL} & sCR_2 + 1 + \dfrac{R_2}{sL} \end{bmatrix}}$$

b) matrica A parametara svakog četveropola u kaskadnom spoju



b1) $R_1 L$ četveropol

Uvjet I_2=0:

$$U_1 = I_1(R_1 + sL)$$

$$U_2 = I_1 sL$$

dva parametra:

$$A = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = 1 + \frac{R_1}{sL}$$

$$C = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{sL}$$

Uvjet U_2=0:

$$U_1 = I_1 R_1$$

$$I_1 = I_2$$

dva parametra:

$$B = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{U_2=0} = R_1$$

$$D = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_2=0} = 1$$

Matrica A parametara R_1L četveropola je

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{R_1}{sL} & R_1 \\ \dfrac{1}{sL} & 1 \end{bmatrix}$$

b2) CR_2 četveropol

Uvjet I_2=0:

$$U_1 = U_2$$

$$U_2 = I_1 \frac{1}{sC}$$

dva parametra:

$$A = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = 1$$

$$C = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = sC$$

Uvjet U_2=0:

$$U_1 = I_2 R_2$$

$$\left(I_1 - I_2 \right) \frac{1}{sC} = I_2 R_2$$

dva parametra:

$$B = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0} = R_2$$

$$D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0} = sCR_2 + 1$$

Matrica A parametara CR_2 četveropola je

$$\left[A \right]_2 = \begin{bmatrix} 1 & R_2 \\ sC & sCR_2 + 1 \end{bmatrix}$$

kaskadni spoj:

$$[A]=[A]_1\cdot[A]_2=\begin{bmatrix}1+\dfrac{R_1}{sL} & R_1\\ \dfrac{1}{sL} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & R_2\\ sC & sCR_2+1\end{bmatrix}$$

$$[A]=\begin{bmatrix}1+\dfrac{R_1}{sL}+SCR_1 & R_2+\dfrac{R_1R_2}{sL}+sCR_1R_2+R_1\\ \dfrac{1}{sL}+sC & \dfrac{R_2}{sL}+sCR_2+1\end{bmatrix}$$

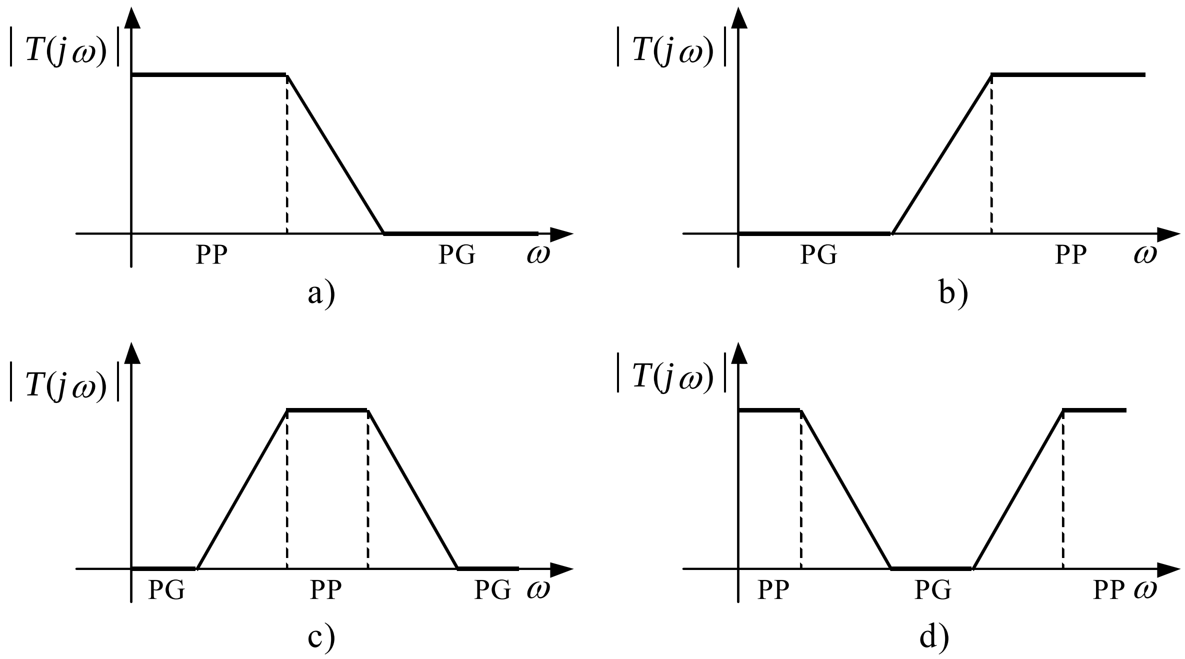
ista matrica parametara

6. FILTRI

6.1. Općenito o filtrima

U jednom frekvencijskom području propuštaju signale, a u drugom ih ne propuštaju (guše).

Podjela: NP, VP, PP i PB



područje propuštanja - područje gušenja - prijelazno područje

Opći oblik prijenosnih funkcija filtara 1. reda

NP	VP
$T(s)=\dfrac{k\cdot\omega_p}{s+\omega_p}$	$T(s)=\dfrac{k\cdot s}{s+\omega_p}$

k - pojačanje filtra ω_p - granična frekvencija

Opći oblik prijenosnih funkcija filtara 2.reda

NP	VP
$T(s)=\dfrac{k\cdot\omega_p^2}{s^2+\dfrac{\omega_p}{Q_p}s+\omega_p^2}$	$T(s)=\dfrac{k\cdot s^2}{s^2+\dfrac{\omega_p}{Q_p}s+\omega_p^2}$
PP	**PB**
$T(s)=\dfrac{k\cdot\dfrac{\omega_p}{Q_p}s}{s^2+\dfrac{\omega_p}{Q_p}s+\omega_p^2}$	$T(s)=\dfrac{k\left(s^2+\omega_p^2\right)}{s^2+\dfrac{\omega_p}{Q_p}s+\omega_p^2}$

k, ω_p i Q_p su parametri filtra

amplitudno frekvencijska i fazno frekvencijska karakteristika

podjela: pasivni filtri i aktivni filtri

6.2. Pasivni filtri

građeni od pasivnih elemenata mreža

RC i *LR* članovi - niskopropusni filtri 1. reda

CR i *RL* članovi - visokopropusni filtri 1. reda

pojačanje tih filtara jednako je jedinici

granična frekvencija jednaka je recipročnoj vrijednosti vremenske konstante

RL-*C* mreža - niskopropusni filtar 2. reda s parametrima:

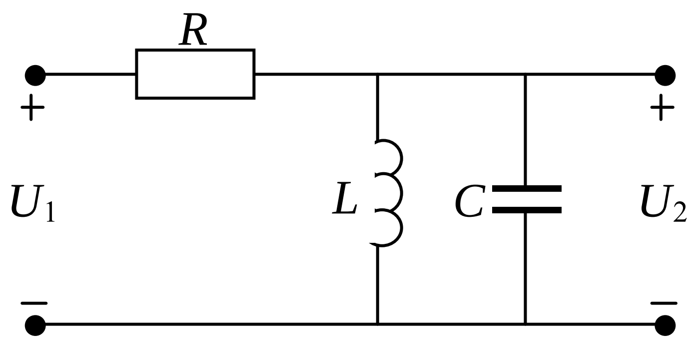
$$k = 1 \quad , \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q_p = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

RC-*L* mreža - visokopropusni filtar 2. reda s istim parametrima

LC-*R* i *R*-*LC* tip 1 - pojasnopropusni filtri

LC-*R* i *R*-*LC* tip 2 - pojasne brane

Primjer: odrediti parametre filtra i nacrtati amplitudno frekvencijsku karakteristiku ako je zadano: R=1, L=1, C=1.



$$T(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{s\frac{1}{RC}}{s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

$$T(s)=\frac{s}{s^2+s+1}$$

pojasnopropusni filtar

$$\omega_p^2=1 \qquad \frac{\omega_p}{Q_p}=1 \qquad k\cdot\frac{\omega_p}{Q_p}=1$$

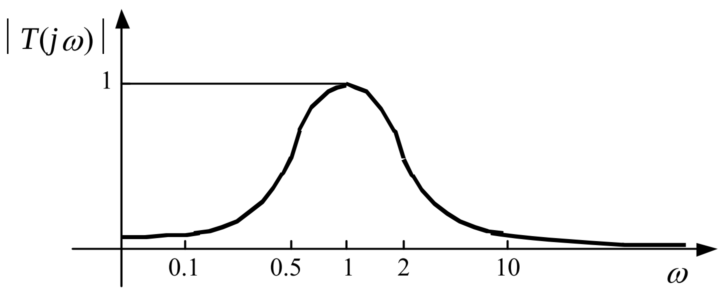
parametri filtra:

$$\underline{\omega_p=1} \quad , \quad \underline{Q_p=1} \quad , \quad \underline{k=1}$$

A-f karakteristika:

$$\left|T(j\omega)\right| = \frac{\omega}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^4-\omega^2+1}}$$

ω	0	0.1	0.5	1	2	10	∞
$\lvert T(j\omega)\rvert$	0	0.1	0.55	1	0.55	0.1	0



logaritamsko frekvencijsko mjerilo

MATLAB

Reaktantni četveropoli

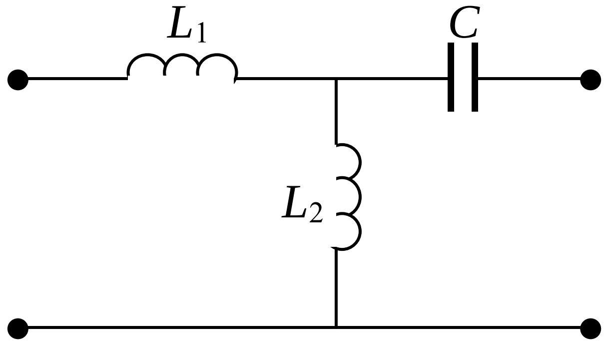
induktiviteti i kapaciteti

ulazne reaktancije četveropola na kratko X_k i na prazno X_p

područje propuštanja signala - frekvencijski pojas gdje su X_k i X_p suprotnog predznaka

područje gušenja signala - frekvencijski pojas gdje su X_k i X_p istog predznaka

Primjer: odrediti područja propuštanja i gušenja reaktantnog četveropola ako je zadano: $L_1=L_2=1$, $C=1/4$.



Ulazna impedancija na kratko:

$$Z_k = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \cdot \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2}{1-\omega^2 L_2 C}$$

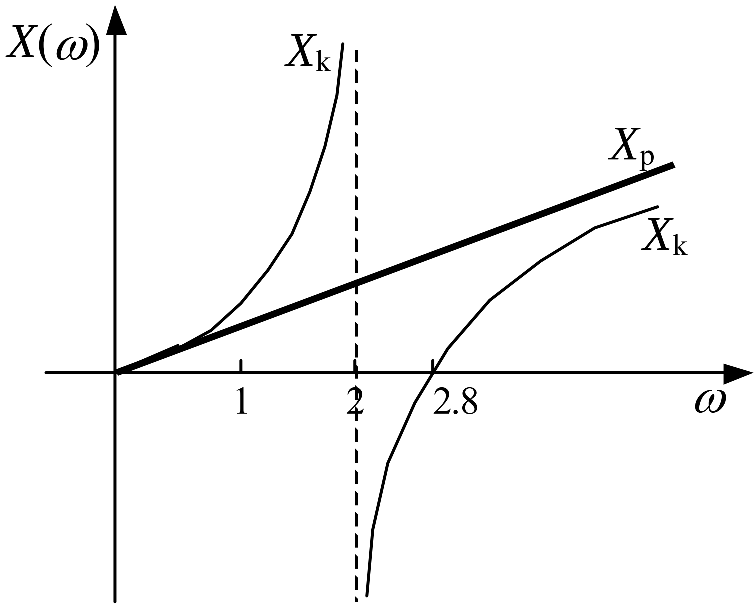
$$X_k = \omega L_1 + \frac{\omega L_2}{1-\omega^2 L_2 C} = \omega + \frac{4\omega}{4-\omega^2} = \frac{\omega\left(8-\omega^2\right)}{4-\omega^2}$$

Ulazna impedancija na prazno:

$$Z_p = j\omega L_1 + j\omega L_2$$

$$X_p = \omega\left(L_1 + L_2\right) = 2\omega$$

ω	0	1	2	2.5	2.83	∞
X_k	0	2.33	∞	-1.94	0	∞
X_p	0	2	4	5	5.66	2∞



područje propuštanja: $\omega \in (2, 2.83)$

područje gušenja: $\omega \in [0, 2]$ i $\omega \in [2.83, \infty)$

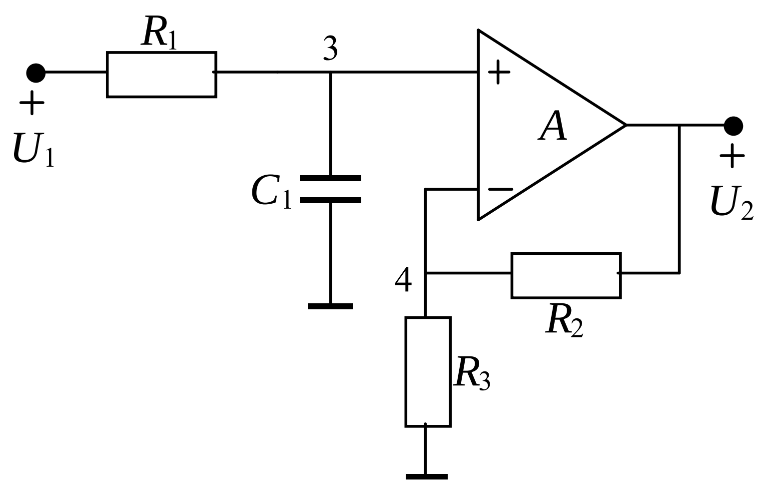
pojasnopropusni filtar

6.3. Aktivni filtri

operacijsko pojačalo, strminsko pojačalo

analogna obrada signala

<u>Primjer</u>: odrediti parametre i nacrtati amplitudno frekvencijsku karakteristiku filtra ako je zadano: R_1=10kΩ, R_2=99kΩ, R_3=1kΩ, C_1=10nF.



Jednadžbe čvorova:

$$(3)\quad U_3\left(\frac{1}{R_1}+sC_1\right)-U_1\frac{1}{R_1}=0$$

$$(4)\quad U_4\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-U_2\frac{1}{R_2}=0$$

$$U_2=A\cdot\left(U_3-U_4\right)$$

iz (3): $$U_3 = \frac{U_1}{1 + sC_1R_1}$$

iz (4): $$U_4 = \frac{U_2}{1 + \frac{R_2}{R_3}}$$

slijedi:

$$U_2 = A\left[\frac{U_1}{1 + sC_1R_1} - \frac{U_2}{1 + \frac{R_2}{R_3}}\right]$$

$$U_2(1 + sC_1R_1) = U_1\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)$$

Naponska prijenosna funkcija:

$$T(s) = \frac{U_2}{U_1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)\frac{1}{sC_1R_1 + 1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)\frac{\frac{1}{C_1R_1}}{s + \frac{1}{C_1R_1}}$$

$$T(s) = 100\frac{10000}{s + 10000}$$

niskopropusna prijenosna funkcija filtra 1. reda

parametri filtra:

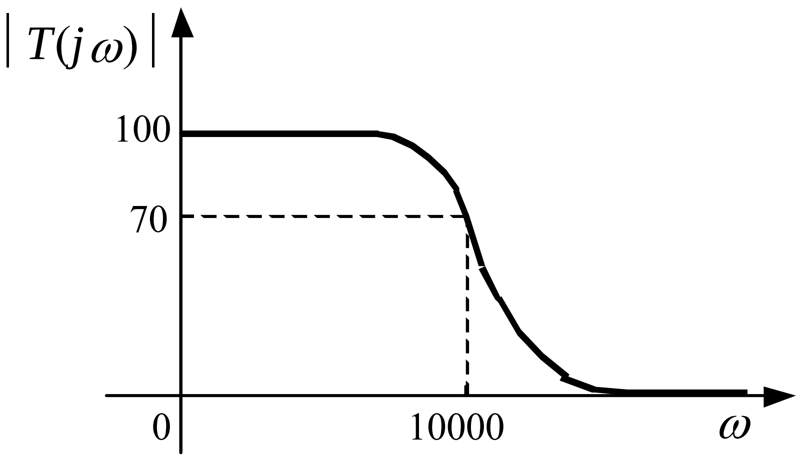
granična frekvencija $\omega_p = 10000$ rad/s

pojačanje $k = 100$

A-f karakteristika:

$$\left|T(j\omega)\right| = \left|\frac{100 \cdot 10000}{j\omega + 10000}\right| = \frac{10^6}{\sqrt{10^8 + \omega^2}}$$

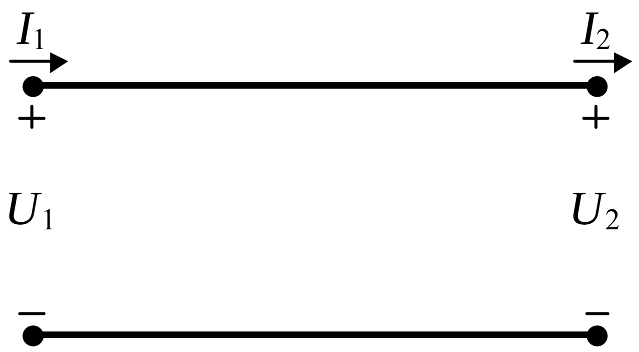
ω	0	1000	10000	100000	∞
$\lvert T(j\omega)\rvert$	100	99,5	70,7	9,95	0



7. LINIJE

7.1. Općenito o linijama

Linija - sustav međusobno izoliranih vodiča za prijenos energije (signala) sa svojstvom da je duljina linije puno veća od poprečnog presjeka vodiča.



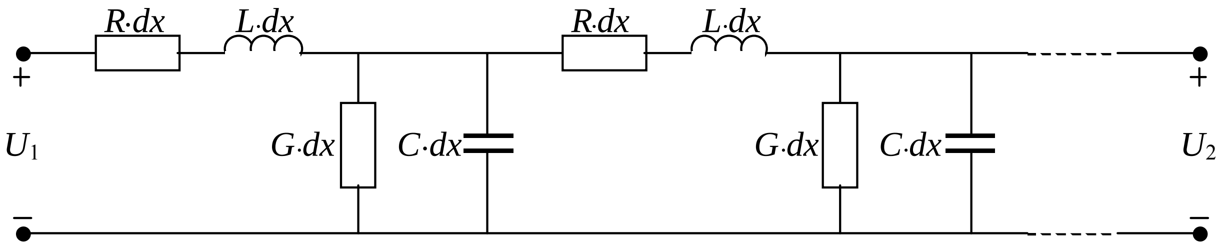
energija - signal

homogena linija - cijelom duljinom jednak sastav i dimenzije

paralelno postavljeni vodiči ili koaksijalno postavljeni vodiči

teorija elektromagnetskog polja

element mreža s raspodijeljenim parametrima



dio linije duljine *dx* - 4 koncentrirana elementa:

otpor *Rdx*,

induktivitet *Ldx*,

vodljivost *Gdx*

kapacitet *Cdx*

Primarni parametri linija:

R – otpor vodiča po jedinici duljine [Ω/km]

L – induktivitet vodiča po jedinici duljine [H/km]

G – vodljivost izolacije po jedinici duljine [S/km]

C – kapacitet između vodova po jedinici duljine [F/km]

po jedinici duljine (kilometru)

Sekundarni parametri linija:

zrcalna (valna, karakteristična) impedancija linije Z_0

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + sL}{G + sC}}$$

zrcalni (valni, karakteristični) faktor prijenosa linije po jedinici duljine γ

$$\gamma = \sqrt{(R + sL)(G + sC)}$$

zrcalni faktor prijenosa cijele linije g

$$g = \gamma \cdot l$$

sinusoidalna pobuda:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)\ (G + j\omega C)}$$

Prijenosne jednadžbe linije

prostorna i vremenska ovisnost

$$u(x,t) = U(x)\mathrm{e}^{st}$$

$$i(x,t) = I(x)\mathrm{e}^{st}$$

e^{st} daje vremensku ovisnost napona i struje

$U(x)$ i $I(x)$ daju prostornu ovisnost

Prostorna ovisnost napona i struje na liniji - prijenosne jednadžbe linije:

$$U(x) = U(0)\operatorname{ch}\gamma x - I(0)Z_0 \operatorname{sh}\gamma x$$

$$I(x) = -U(0)\frac{\operatorname{sh}\gamma x}{Z_0} + I(0)\operatorname{ch}\gamma x$$

x	- udaljenost od početka linije
γ i Z_0	- sekundarni parametri linije
$U(0)$ i $I(0)$	- napon i struja na početku linije

Sva svojstva linije sadržana su u dva sekundarna parametra, Z_0 i γ.

Cijela duljina linije (x=l):

$$U(l) = U(0)\mathrm{ch}\, g - I(0) Z_0 \,\mathrm{sh}\, g$$

$$I(l) = -U(0)\frac{\mathrm{sh}\, g}{Z_0} + I(0)\mathrm{ch}\, g$$

Napon i struja na početku linije kao funkcije napona i struje na kraju linije:

$$U(0) = U(l)\mathrm{ch}\, g + I(l) Z_0 \,\mathrm{sh}\, g$$

$$I(0) = U(l)\frac{\mathrm{sh}\, g}{Z_0} + I(l)\mathrm{ch}\, g$$

Linija kao četveropol

iz prijenosnih jednadžbi - matrica prijenosnih parametara

$$[A]=\begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,g & Z_0\,\mathrm{sh}\,g \\ \dfrac{\mathrm{sh}\,g}{Z_0} & \mathrm{ch}\,g \end{bmatrix}$$

$U(0)$ i $I(0)$ - U_1 i I_1 $U(l)$ i $I(l)$ - U_2 i I_2

Uvjet recipročnosti AD-BC=1:

$$\mathrm{ch}^2\,g-\mathrm{sh}^2\,g=1$$

linija - recipročan četveropol

Uvjet simetričnosti A=D:

$$\mathrm{ch}\,g=\mathrm{ch}\,g$$

linija - simetričan četveropol

Pretvorba *A* parametara u *z* parametre:

$$z_{11} = z_{22} = Z_0 \operatorname{cth} g$$

$$z_{12} = z_{21} = \frac{Z_0}{\operatorname{sh} g}$$

Ekvivalentan simetričan četveropol u T-spoju:

$$Z_A = Z_B = z_{11} - z_{21} = Z_0 \operatorname{th}\frac{g}{2}$$

$$Z_C = z_{21} = \frac{Z_0}{\operatorname{sh} g}$$

Pretvorbom *A* parametara u *y* parametre:

$$y_{11} = y_{22} = \frac{\operatorname{cth} g}{Z_0}$$

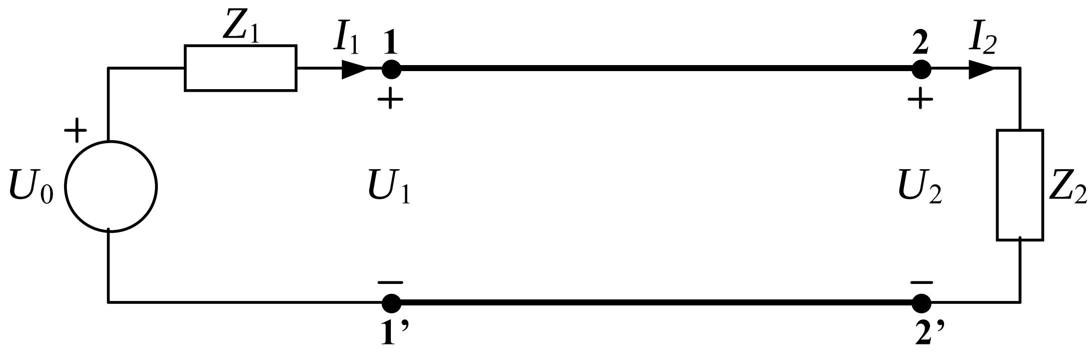
$$y_{12} = y_{21} = \frac{1}{Z_0 \operatorname{sh} g}$$

Ekvivalentan simetričan četveropol u Π-spoju:

$$Y_A = Y_B = y_{11} - y_{21} = \frac{\operatorname{th}\frac{g}{2}}{Z_0}$$

$$Y_C = y_{21} = \frac{1}{Z_0 \operatorname{sh} g}$$

Ulazna impedancija linije



ulazna impedancija (omjer napona i struje na ulazu)

$$Z_{ul} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \operatorname{ch} g + I_2 Z_0 \operatorname{sh} g}{U_2 \dfrac{\operatorname{sh} g}{Z_0} + I_2 \operatorname{ch} g}$$

$$U_2 = I_2 \cdot Z_2$$

$$Z_{ul} = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} g + Z_0 \operatorname{sh} g}{Z_2 \operatorname{sh} g + Z_0 \operatorname{ch} g}$$

Faktor odbijanja (refleksije) linije

$$\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \qquad \Gamma_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$$

$$|\Gamma_2| = \frac{|U_{odb}|}{|U_{pol}|}$$

prilagođenje po impedancijama

7.2. Posebni slučajevi linija

Linija bez gubitaka

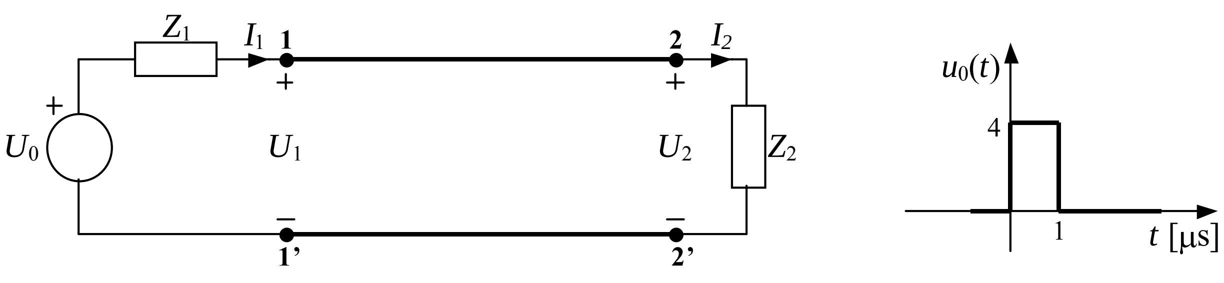
nema smanjenja amplitude signala duž linije

$$R = G = 0$$

Sekundarni parametri:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \gamma = s\sqrt{LC}$$

<u>Primjer</u>: odrediti napon i struju na kraju linije bez gubitaka duljine 10km, primarnih parametara L=25μH/km i C=10nF/km i impedancijama zaključenja Z_1=Z_2=50Ω. Napon izvora zadan je slikom.



Prvo je potrebno odrediti napon i struju na početku linije.

nadomještavanje ulaznom impedancijom linije

Sekundarni parametri:

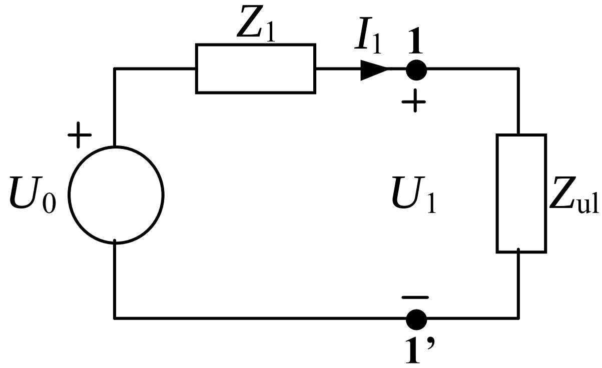
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-9}}} = 50\Omega$$

$$g = \gamma \cdot l = s\sqrt{LC} \cdot l = s\sqrt{25 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-9}} \cdot 10 = s \cdot 5 \cdot 10^{-6}$$

$$Z_{ul} = Z_0 = 50\Omega$$

teorija 4-pola (zrcalne impedancije) - prilagođenje

Nadomjesna mreža:



$$U_1 = \frac{Z_{ul}}{Z_1 + Z_{ul}} U_0 \qquad I_1 = \frac{1}{Z_1 + Z_{ul}} U_0$$

Za:

$$u_0(t) = 4 \cdot S(t) - 4 \cdot S(t - 1\mu\text{s})$$

$$U_0(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s} \mathrm{e}^{-s \cdot 10^{-6}}$$

Napon i struja na početku linije:

$$U_1 = \frac{2}{s} - \frac{2}{s}\mathrm{e}^{-s\cdot 10^{-6}}$$

$$I_1 = \frac{1}{25}\frac{1}{s} - \frac{1}{25}\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s\cdot 10^{-6}}$$

Uz prijenosne jednadžbe:

$$U_2 = U_1 \operatorname{ch} g - I_1 Z_0 \operatorname{sh} g$$

$$I_2 = -U_1 \frac{\operatorname{sh} g}{Z_0} + I_1 \operatorname{ch} g$$

Napon i struja na kraju linije:

$$U_2 = U_1 (\operatorname{ch} g - \operatorname{sh} g) = U_1 \mathrm{e}^{-g}$$

$$I_2 = \frac{U_1}{Z_0} (\operatorname{ch} g - \operatorname{sh} g) = \frac{U_1}{Z_0}\mathrm{e}^{-g}$$

$$U_2 = \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s}\mathrm{e}^{-s\cdot 10^{-6}}\right)\mathrm{e}^{-s\cdot 5\cdot 10^{-6}} = \frac{2}{s}\mathrm{e}^{-s\cdot 5\cdot 10^{-6}} - \frac{2}{s}\mathrm{e}^{-s\cdot 6\cdot 10^{-6}}$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{25s} - \frac{1}{25s}\mathrm{e}^{-s\cdot 10^{-6}}\right)\mathrm{e}^{-s\cdot 5\cdot 10^{-6}} = \frac{1}{25s}\mathrm{e}^{-s\cdot 5\cdot 10^{-6}} - \frac{1}{25s}\mathrm{e}^{-s\cdot 6\cdot 10^{-6}}$$

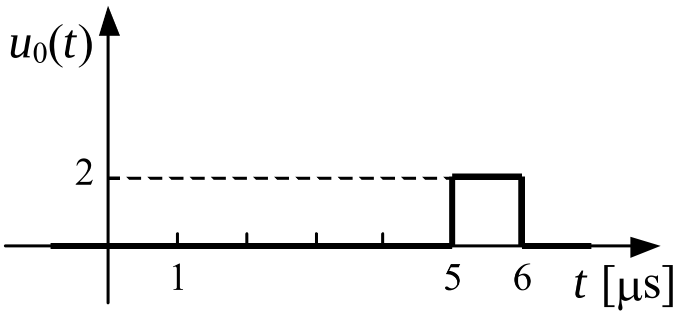
Vremenska domena:

$$u_2(t) = 2 \cdot S(t - 5\mu s) - 2 \cdot S(t - 6\mu s)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{25} \cdot S(t - 5\mu s) - \frac{1}{25} \cdot S(t - 6\mu s)$$

$$I_2(s) = \frac{U_2(s)}{Z_2(s)}$$

Napon na kraju linije:



Na ulazu i na kraju linije isti napon - linija bez gubitaka.

Napon na izlazu zakašnjen za iznos zrcalne konstante prijenosa.

Linija pobuđena sinusoidalnim izvorom

sinusoidalan izvor frekvencije ω_0

valna duljina λ_0: $$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{LC}}$$

općenito:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

$$g = (\alpha + j\beta)l = a + jb$$

α - faktor gušenja linije po jedinici duljine

β - faktor faze linije po jedinici duljine

linije bez gubitaka (R=G=0) → α=0 (nema prigušenja signala na liniji)

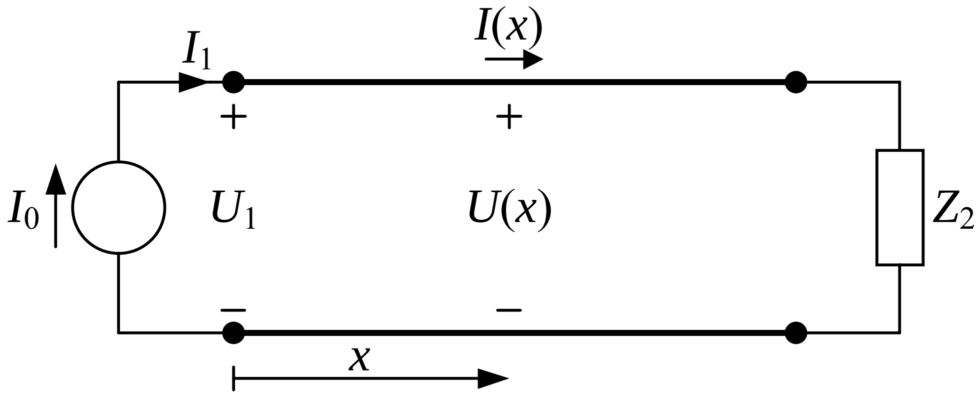
β pokazuje kašnjenje signala: $\beta = \omega\sqrt{LC}$

brzina vala na liniji: $$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

vrijedi:

$$g = \gamma \cdot l = \gamma \cdot k \cdot \lambda = j\omega\sqrt{LC} \cdot k \cdot \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} = j2\pi k$$

Primjer: odrediti napon i struju na polovici linije bez gubitaka duljine $l = \lambda_0/2$km, primarnih parametara L=25μH/km i C=10nF/km i impedancijom zaključenja Z_2=50Ω. Struja izvora je $i_0(t) = 2\sin 100\pi t$. Koliko je duga linija i koliko iznosi brzina širenja vala na liniji?



Nadomještavanjem linije i njenog zaključenja ulaznom impedancijom:

$$Z_{ul} = Z_0 = 50\Omega$$

Fazor struje na ulazu - fazor struje strujnog izvora:

$$I_1 = I_0 = 2$$

Fazor napona na ulazu u liniju:

$$U_1 = I_0 \cdot Z_{ul} = 100$$

Prijenosne jednadžbe na mjestu *x*:

$$U(x) = U_1 \operatorname{ch} \gamma x - I_1 Z_0 \operatorname{sh} \gamma x$$

$$I(x) = -U_1 \frac{\operatorname{sh} \gamma x}{Z_0} + I_1 \operatorname{ch} \gamma x$$

Sekundarni parametri:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-9}}} = 50\Omega$$

$$\gamma \cdot x = \gamma \cdot \frac{l}{2} = \gamma \cdot \frac{k \cdot \lambda}{2} = j\omega\sqrt{LC} \cdot \frac{\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}}{2} = j\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{ch} \gamma x = \operatorname{ch} j\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\operatorname{sh} \gamma x = \operatorname{sh} j\frac{\pi}{2} = j\sin\frac{\pi}{2} = j$$

Napon i struja na polovici linije:

$$U(x) = -I_1 Z_0 \operatorname{sh} \gamma x = -2 \cdot 50 \cdot j = -j100$$

$$I(x) = -U_1 \frac{\operatorname{sh} \gamma x}{Z_0} = -100\frac{j}{50} = -j2$$

Vremenska domena:

$$u_x(t) = 100\sin\left(100\pi t - 90^{\circ}\right)$$
$$\underline{i_x(t) = 2\sin\left(100\pi t - 90^{\circ}\right)}$$

Duljina linije:

$$l = k \cdot \lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{100\pi \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 20000\text{km}$$

Brzina širenja vala na liniji:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2 \cdot 10^{6}\,\text{km/s}$$