

# Električni krugovi

- Grafovi i mreže
  - Matrice grafa

# Spojna matrica

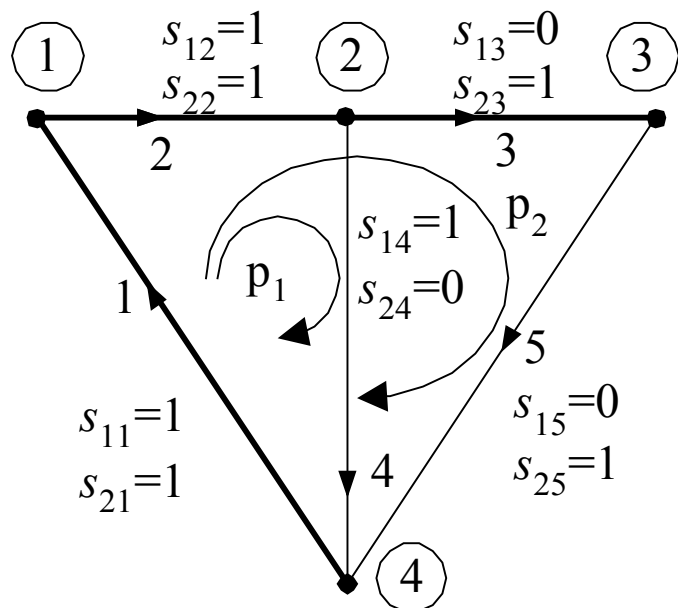
- **Spojna matrica**  $\mathbf{S}$  je  $(N_b - N_v + 1, N_b)$  matrica, koja sadrži podatke o:
  - granama grafa,
  - odabranome stablu i
  - temeljnom sustavu petlji.

- reci  $\rightarrow$  temeljne petlje
- stupci  $\rightarrow$  grane grafa

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1N_b} \\ s_{21} & s_{31} & \cdots & s_{2N_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{N_p 1} & s_{N_p 2} & & s_{N_p N_b} \end{bmatrix}$$

- $N_p = N_b - N_v + 1 \rightarrow$  ukupni broj temeljnih petlji grafa.

- Elementi spojne matrice  $s_{ij}$  mogu biti 1, -1 ili 0.
- $s_{ij}=0 \rightarrow j$ -ta grana nije u  $i$ -toj petlji,
- $s_{ij}=1 \rightarrow j$ -ta grana u  $i$ -toj petlji i orijentirana kao i petlja,
- $s_{ij}=-1 \rightarrow j$ -ta grana u  $i$ -toj petlji  $\rightarrow$  orijentirana suprotno.



Temeljni sustav petlji

■ Spojna matrica:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{S}_t \quad \mathbf{S}_s]$$

■  $\mathbf{S}_t$  blok submatrica za grane stabla

■  $\mathbf{S}_s$  blok submatrica za spone

$$\mathbf{S}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

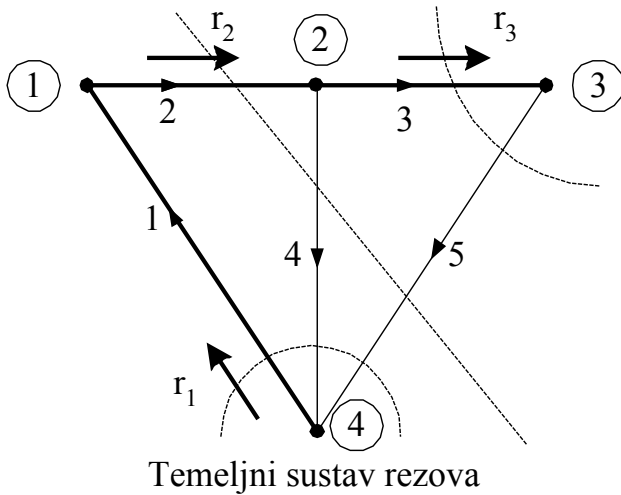
■ Submatrica  $\mathbf{S}_s$  je jednaka jediničnoj matrici  $\mathbf{E}$ .

# Rastavna matrica

- ***Rastavna matrica***  $\mathbf{Q}$  je  $(N_v-1, N_b)$  matrica
- reci odgovaraju temeljnim rezovima,
- stupci odgovaraju granama grafa.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N_b} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ q_{N_v-1,1} & q_{N_v-1,2} & & q_{N_v-1,N_b} \end{bmatrix}$$

- Elementi rastavne matrice  $q_{ij}$  mogu biti 1, -1 ili 0.
- $q_{ij}=0 \rightarrow j$ -ta grana nije obuhvaćena  $i$ -tim rezom
- $q_{ij}=1 \rightarrow j$ -ta grana obuhvaćena  $i$ -tim rezom i orijentirana kao i rez
- $q_{ij}=-1 \rightarrow j$ -ta grana je obuhvaćena  $i$ -tim rezom i orijentirana suprotno od njega



■ Rastavna matrica:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_t \quad \mathbf{Q}_s]$$

■  $\mathbf{Q}_t$ ,  $\rightarrow$  blok submatrica granama stabla

■  $\mathbf{Q}_s$ ,  $\rightarrow$  blok submatrica spona

$$\mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

■ Submatrica  $\mathbf{Q}_t$  je jednaka jediničnoj matrici  $\mathbf{E}$ .

# Odnosi među matricama grafa

- Produkt matrice incidencija i spojne matrice
- Produkt matrice incidencija i transponirane spojne matrice jednak je nul-matrici, tj.

$$\mathbf{A}_a \cdot \mathbf{S}^t = \mathbf{0}$$

- produkt spojne matrice i transponirane matrice incidencija također je jednak nul-matrici, tj.

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_a^t = \mathbf{0}$$



- Isto vrijedi i za reduciranu matricu incidencija

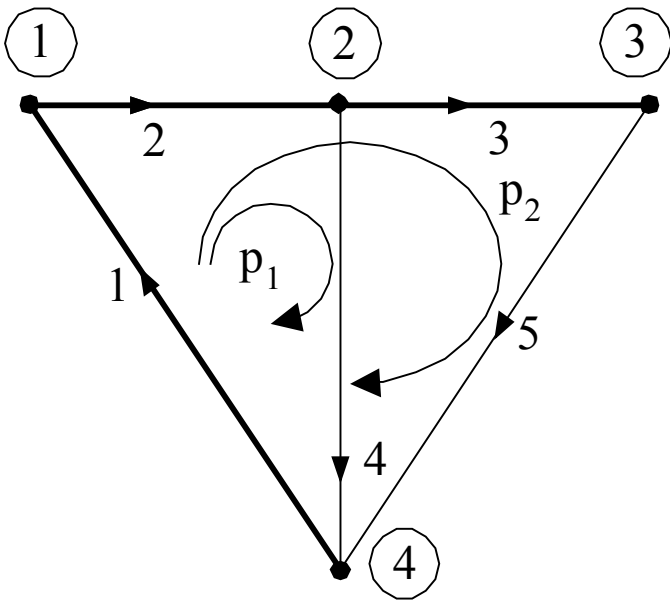
$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^t = \mathbf{0}$$

- Korištenjem blok matrica

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t = [\mathbf{S}_t \quad \mathbf{E}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t^t \\ \mathbf{A}_s^t \end{bmatrix} = \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{A}_t^t + \mathbf{A}_s^t = \mathbf{0}$$

■ Za graf na slici



$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t \quad \mathbf{A}_s] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_t \quad \mathbf{S}_s] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t &= \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{A}_t^t + \mathbf{A}_s^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■ Vrijedi

$$\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{A}_t^t + \mathbf{A}_s^t = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A}_s^t = -\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{A}_t^t$$

## ■ Produkt rastavne i spojne matrice

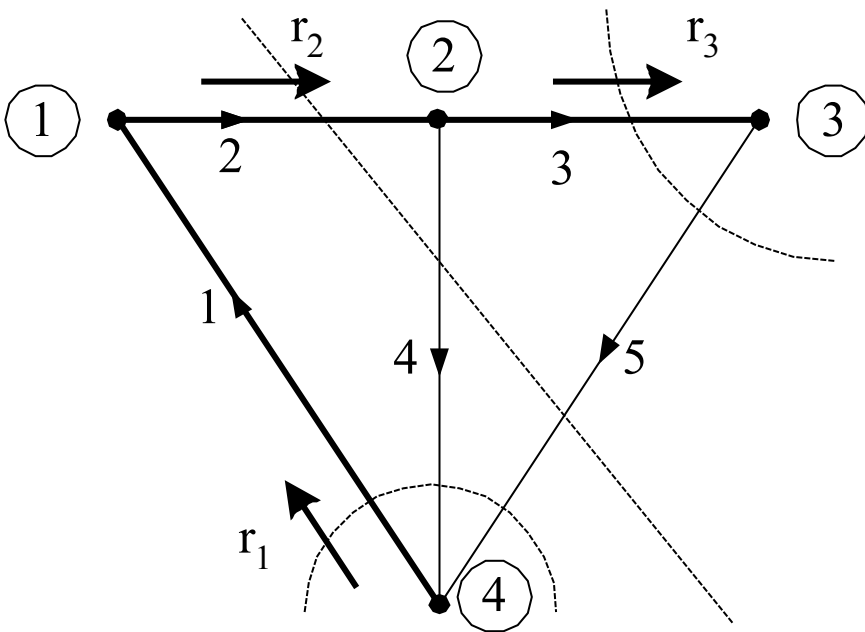
- Produkt rastavne matrice i transponirane spojne matrice jednak je nul-matrici

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^t = \mathbf{0}$$

- tj. vrijedi

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^t = [\mathbf{E} \quad \mathbf{Q}_s] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t^t \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_t^t + \mathbf{Q}_s = \mathbf{0}$$

- Za graf sa slike



$$\mathbf{S}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}_t = \mathbf{S}_t^t + \mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Vrijedi  $\mathbf{S}_t^t + \mathbf{Q}_s = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}_s = -\mathbf{S}_t^t$

- Produkt spojne matrice i transponirane rastavne matrice također je jednak nul-matrici, tj.

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^t = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^t = [\mathbf{S}_t \quad \mathbf{E}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Q}_s^t \end{bmatrix} = \mathbf{S}_t + \mathbf{Q}_s^t = \mathbf{0}$$

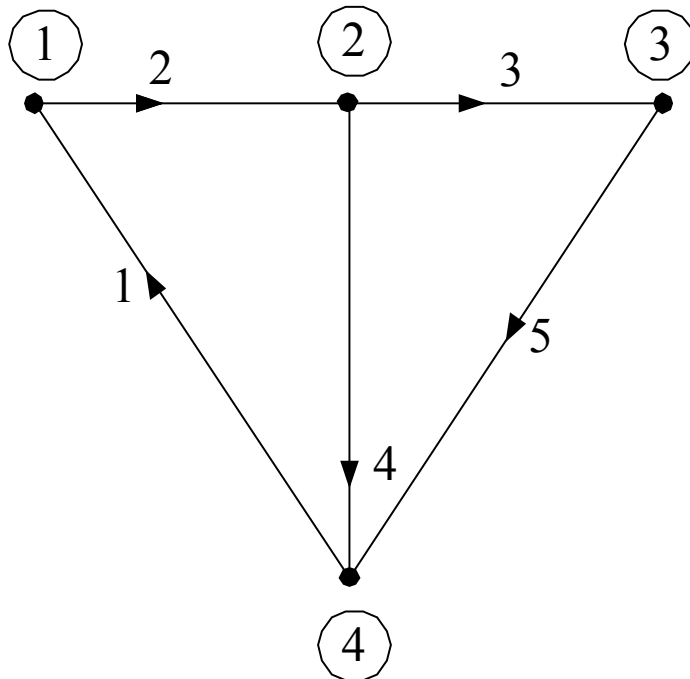
- Vrijedi

$$\mathbf{S}_t = -\mathbf{Q}_s^t$$

# Kirchhoffovi zakoni i matrice grafa

- Matricama grafa moguće je interpretirati Kirchhoffove zakone.
- Pretpostavka:
- orijentacije struja grana u mreži identične su orijentacijama grana u grafu.

- KZS primjenjen na čvorišta
- Ako se svakoj grani grafa pridruži jedna struja, jednačbe KZS primjenjene na čvorišta grafa



glase

$$-i_1 + i_2 = 0$$

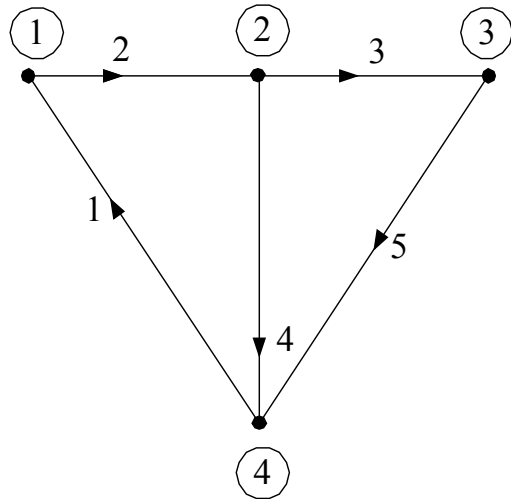
$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$-i_3 + i_5 = 0$$

- U matričnoj formi  $\rightarrow$  korištenjem matrice incidencija

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_b = \mathbf{0}$$

- $\mathbf{I}_b \rightarrow$  vektor struja grana

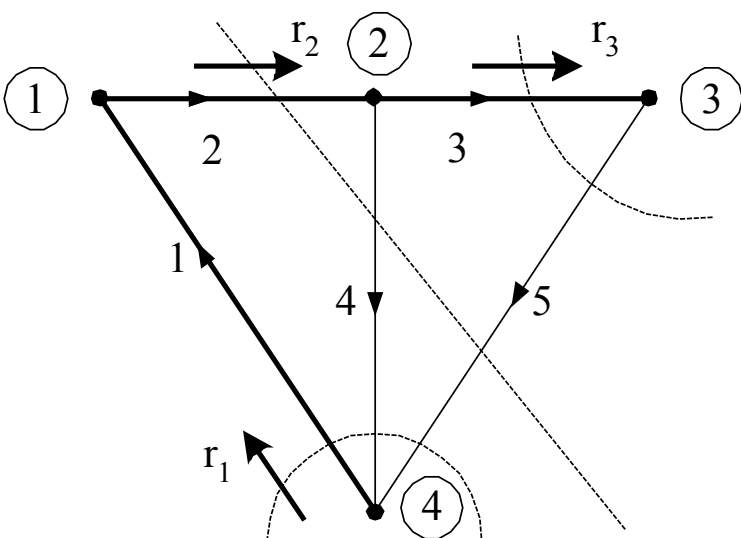


$$\mathbf{I}_b = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_b = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 + i_2 \\ -i_2 + i_3 + i_4 \\ -i_3 + i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



- KZS primjenjen na rezove
- KZS je moguće primijeniti i na temeljne rezove.
- Za graf na slici vrijedi



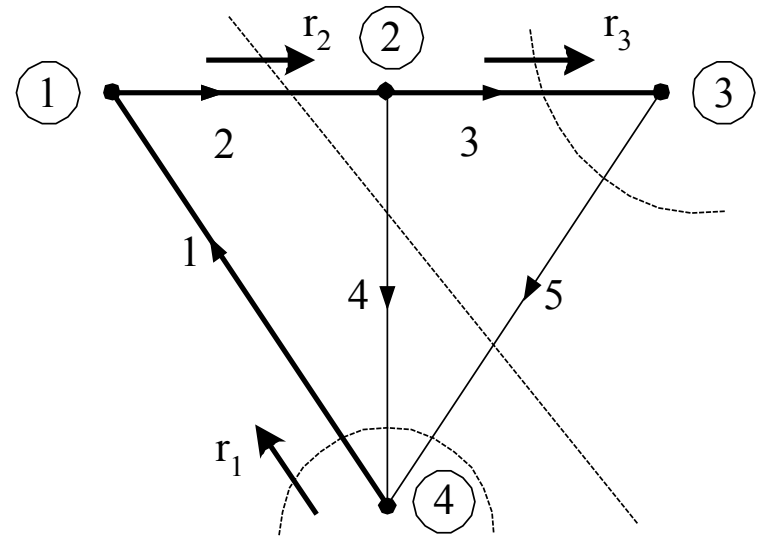
$$i_1 - i_4 - i_5 = 0$$

$$i_2 - i_4 - i_5 = 0$$

$$i_3 - i_5 = 0$$

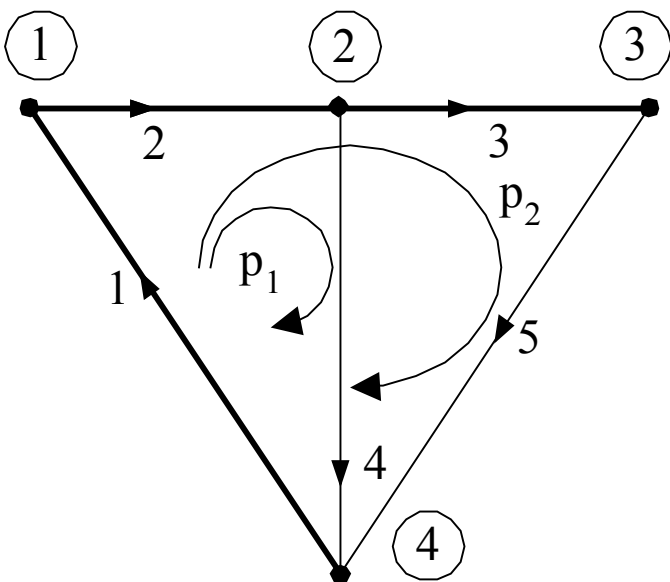
- U matričnom obliku → korištenjem rastavne matrice.

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}_b = \mathbf{0}$$



$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_4 - i_5 \\ i_2 - i_4 - i_5 \\ i_3 - i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- KZN primjenjen na temeljne petlje
- Ako se svakoj grani grafa pridruži jedan napon, jednačbe KZN primjenjene na temeljne petlje grafa



glase

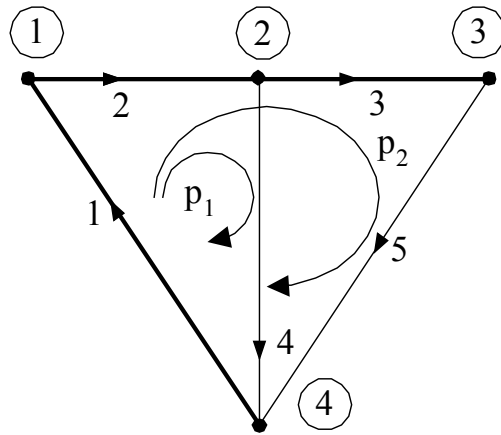
$$u_1 + u_2 + u_4 = 0$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_5 = 0$$

- U matričnoj formi  $\rightarrow$  korištenjem spojne matrice

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_b = \mathbf{0}$$

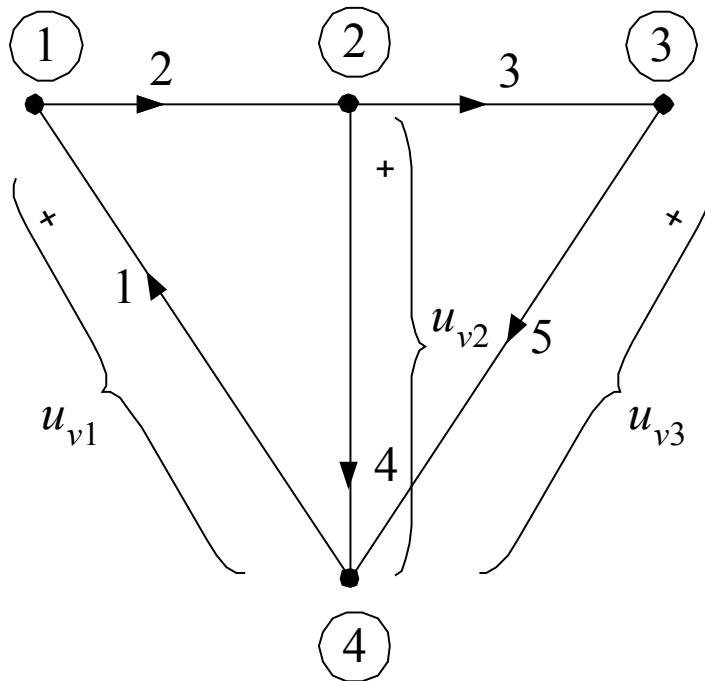
- $\mathbf{U}_b \rightarrow$  vektor napona grana



$$\mathbf{U}_b = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Odnosi između napona grana i napona čvorišta
- Napone grana i napone čvorišta povezuje matrica incidencija.
- Primjer:



$$u_1 = -u_{v1}$$

$$u_2 = u_{v1} - u_{v2}$$

$$u_3 = u_{v2} - u_{v3}$$

$$u_4 = u_{v2}$$

$$u_5 = u_{v3}$$

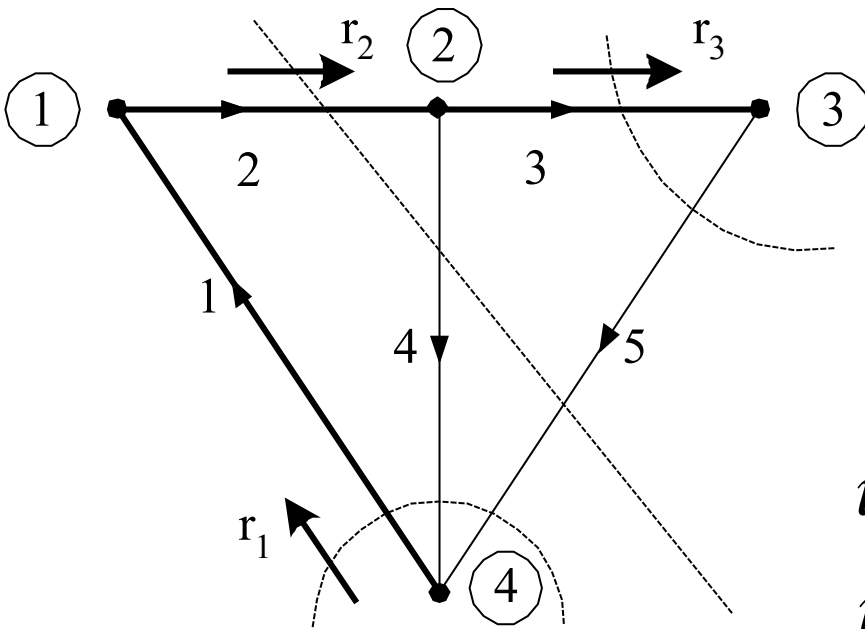
- Matrica incidencija:

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{U}_v$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{U}_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{v1} \\ u_{v2} \\ u_{v3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{v1} \\ u_{v1} - u_{v2} \\ u_{v2} - u_{v3} \\ u_{v2} \\ u_{v3} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{U}_v \rightarrow$  vektor napona čvorišta.

- Odnosi između napona grana i napona rezova
- Naponima rezova  $\rightarrow$  naponi onih grana stabla grafa, koje su obuhvaćene nekim rezom.
- Za graf na slici naponi rezova su



$$u_{r1} = u_1$$

$$u_{r2} = u_2$$

$$u_{r3} = u_3$$

- Također vrijedi

$$u_4 = -u_1 - u_2 = -u_{r1} - u_{r2}$$

$$u_5 = -u_1 - u_2 - u_3 = -u_{r1} - u_{r2} - u_{r3}$$

- Napone grana i napone rezova povezuje rastavna matrica

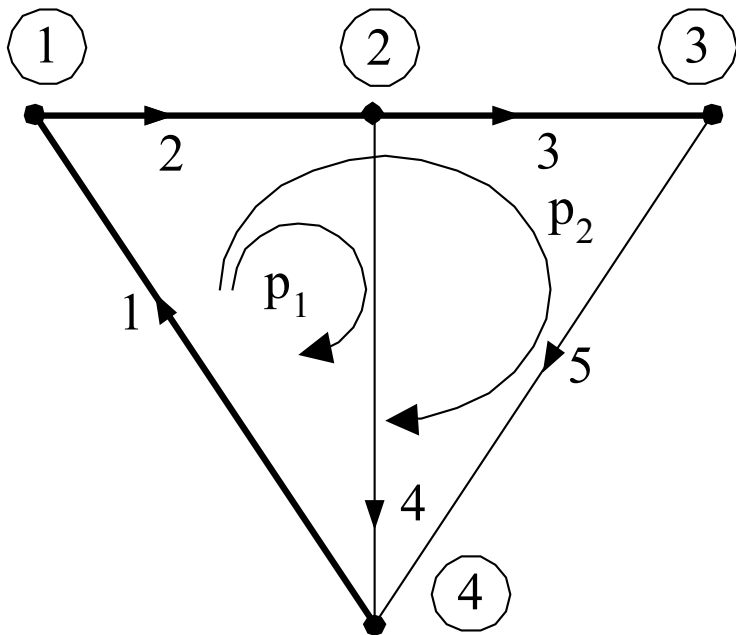
$$\mathbf{U}_b = \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{U}_r$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ -u_{r1} - u_{r2} \\ -u_{r1} - u_{r2} - u_{r3} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{U}_r \rightarrow$  vektor napona temeljnog sustava rezova.



- Odnosi između struja grana i struja petlji
- Struje grana i struje petlji povezuje spojna matrica.
- Primjer:



$$i_1 = i_{p1} + i_{p2}$$

$$i_2 = i_{p1} + i_{p2}$$

$$i_3 = i_{p2}$$

$$i_4 = i_{p1}$$

$$i_5 = i_{p2}$$

- Spojna matrica:

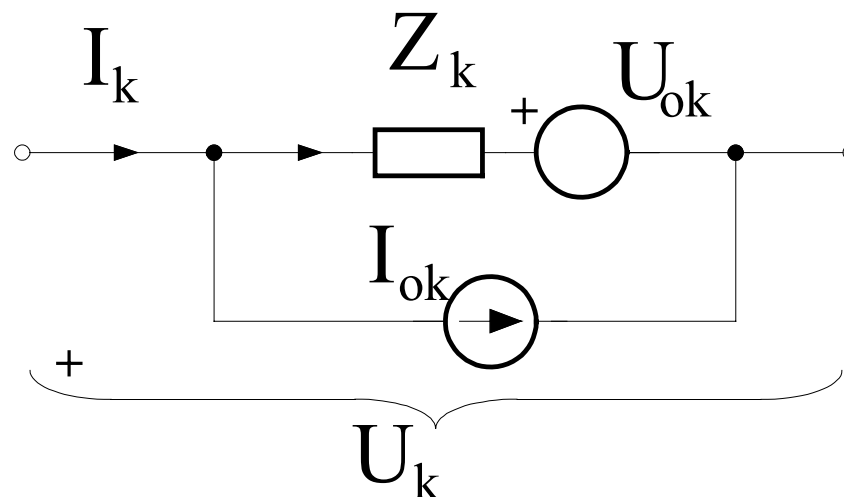
$$\mathbf{I}_b = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{I}_p$$

- $\mathbf{I}_p \rightarrow$  vektor struja temeljnih petlji

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{I}_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{p1} \\ i_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{p1} + i_{p2} \\ i_{p1} + i_{p2} \\ i_{p2} \\ i_{p1} \\ i_{p2} \end{bmatrix}$$

# Jednadžbe mreža i matrice grafova

- Standardna grana
- **Standardna grana** električne mreže definirana za analizu primjenom teorije grafova sastoji se od
  - jedne impedancije,
  - jednog naponskog izvora i
  - jednog strujnog izvora u spoju prema slici



- Odnos između napona i struje standardne grane u domeni kompleksne frekvencije  $s$

$$U_k(s) = U_{ok}(s) + Z_k(s)(I_k(s) - I_{ok}(s))$$

odnosno

$$I_k(s) = I_{ok}(s) + Y_k(s)(U_k(s) - U_{ok}(s))$$

## Jednadžbe temeljnog sustava petlji

- Postave li se za svaku granu u mreži naponsko-strujne jednadžbe, one će imati oblik općeg izraza

$$U_k(s) = U_{ok}(s) + Z_k(s)(I_k(s) - I_{ok}(s))$$

- U matričnoj formi :

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{U}_{ob} + \mathbf{Z}_b \cdot (\mathbf{I}_b - \mathbf{I}_{ob})$$

$\mathbf{Z}_b \rightarrow$  matrica impedancija grana.

- $\mathbf{Z}_b$  je kvadratna
- Za recipročnu mrežu  $\rightarrow \mathbf{Z}_b$  je simetrična oko glavne dijagonale.
- Ako recipročna mreža ne sadrži međuinduktivitete,  $\mathbf{Z}_b$  je dijagonalna matrica, a elementi glavne dijagonale su impedancije grana.

- Jednadžbe temeljnoga sustava petlji:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_b = \mathbf{0}$$

- Izrazi li se  $\mathbf{U}_b$  kao

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{U}_{ob} + \mathbf{Z}_b \cdot (\mathbf{I}_b - \mathbf{I}_{ob})$$

- dobiva se

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_{ob} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_b - \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_{ob} = \mathbf{0}$$

- Struje grana moguće je izraziti strujama petlji

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{I}_p$$

pa se tom supstitucijom dobiva

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_{ob} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{I}_p - \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_{ob} = \mathbf{0}$$

- Produkt matrica  $\mathbf{S} \mathbf{Z}_b \mathbf{S}^t$  označit ćemo kao  $\mathbf{Z}_p$

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{S}^t$$



- $\mathbf{Z}_p$  je kvadratna i naziva se  
*matricom impedancija petlji.*
- Matrični oblik *jednadžbi temeljnih petlji:*

$$\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{U}_{ob} + \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_{ob}) = \mathbf{Z}_p \cdot \mathbf{I}_p$$

- Lijeva strana  $\rightarrow$  vektor koji sadrži neovisne izvore u koje su uključeni i početni uvjeti.
- Nepoznanica u sustavu  $\rightarrow$  vektor struja petlji  $\mathbf{I}_p$ .

- Rješenje za vektor struja petlji  $\mathbf{I}_p \rightarrow$  množenjem jednačbe s s lijeva s inverznom matricom impedancija petlji

$$\mathbf{Z}_p^{-1} \cdot \mathbf{Z}_p \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{I}_p = \mathbf{Z}_p^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot (-\mathbf{U}_{ob} + \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_{ob})$$

- **Jednadžbe temeljnog sustava rezova**
- Strujno-naponske jednadžbe standardne grane

$$I_k(s) = I_{ok}(s) + \frac{1}{Z_k(s)}(U_k(s) - U_{ok}(s)) = I_{ok}(s) + Y_k(s)(U_k(s) - U_{ok}(s))$$

- Sustav strujno-naponskih jednadžbi za sve grane u mreži u matričnoj formi

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Y}_b \cdot (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_{ob})$$

- $\mathbf{Y}_b \rightarrow$  *matrica admitancija grana.*

- $\mathbf{Y}_b$  je kvadratna matrica
- Za recipročnu mrežu  $\rightarrow$  simetrična oko glavne dijagonale.
- Ako recipročna mreža ne sadrži međuinduktivitete, tada je  $\mathbf{Y}_b$  dijagonalna matrica, a elementi glavne dijagonale su admitancije grana.

- Za jednađbe temeljnoga sustava rezova  $\rightarrow$  rastavna matrica i matrični izraz

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}_b = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Y}_b \cdot (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_{ob})$$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{ob} = \mathbf{0}$$

- Napone grana moguće je izraziti naponima rezova

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{U}_r$$

Supstitucijom se dobiva

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{U}_r - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{ob} = \mathbf{0}$$

- Produkt matrica  $\mathbf{Q} \mathbf{Y}_b \mathbf{Q}^t$  označit ćemo kao  $\mathbf{Y}_r$

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{Q}^t$$

- $\mathbf{Y}_r$  je kvadratna i naziva se  
*matricom admitancija rezova.*
- Matrični oblik *jednadžbi temeljnih rezova:*

$$\mathbf{Q} \cdot (-\mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{ob}) = \mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{U}_r$$

- Lijeva strana  $\rightarrow$  vektor koji sadrži neovisne izvore u koje su uključeni i početni uvjeti.
- Nepoznanica u sustavu  $\rightarrow$  vektor napona rezova  $\mathbf{U}_r$ .

- Rješenje sustava za vektor napona rezova  $\mathbf{U}_r$ ,  $\rightarrow$  množenjem jednačbe s lijeva s inverznom matricom admitancija rezova

$$\mathbf{Y}_r^{-1} \cdot \mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{U}_r = \mathbf{U}_r = \mathbf{Y}_r^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (-\mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{ob})$$



- **Jednadžbe čvorišta**
- Za formuliranje jednađbi → strujno-naponske jednađbe grana u matričnom obliku

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Y}_b \cdot (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_{ob})$$

- Za jednađbe  $\rightarrow$  reducirana matrica incidencija i matrični izraz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_b = \mathbf{0}$$

- Uvrštenjem

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Y}_b \cdot (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_{ob})$$

- dobiva se

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{ob} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b - \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{ob} = \mathbf{0}$$

- Naponi grana  $\rightarrow$  naponima čvorišta

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{U}_v$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{ob} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{U}_v - \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{ob} = \mathbf{0}$$

- Produkt matrica  $\mathbf{A} \mathbf{Y}_b \mathbf{A}^t$  označit ćemo kao  $\mathbf{Y}_v$

$$\mathbf{Y}_v = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^t$$

- $\mathbf{Y}_v$  je kvadratna i naziva se  
*matricom admitancija čvorišta.*
- Matrični oblik *jednadžbi čvorišta*

$$\mathbf{A} \cdot (-\mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{ob}) = \mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v$$

- Lijeva strana  $\rightarrow$  vektor koji sadrži neovisne izvore u koje su uključeni i početni uvjeti.
- Nepoznanica u sustavu  $\rightarrow$  vektor napona čvorišta  $\mathbf{U}_v$ .

- Rješenje sustava za vektor napona čvorišta  $\mathbf{U}_v$  dobiva se množenjem jednadžbe s lijeva s inverznom matricom admitancija čvorišta

$$\mathbf{Y}_v^{-1} \cdot \mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v = \mathbf{U}_v = \mathbf{Y}_v^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{I}_{ob} + \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{ob})$$