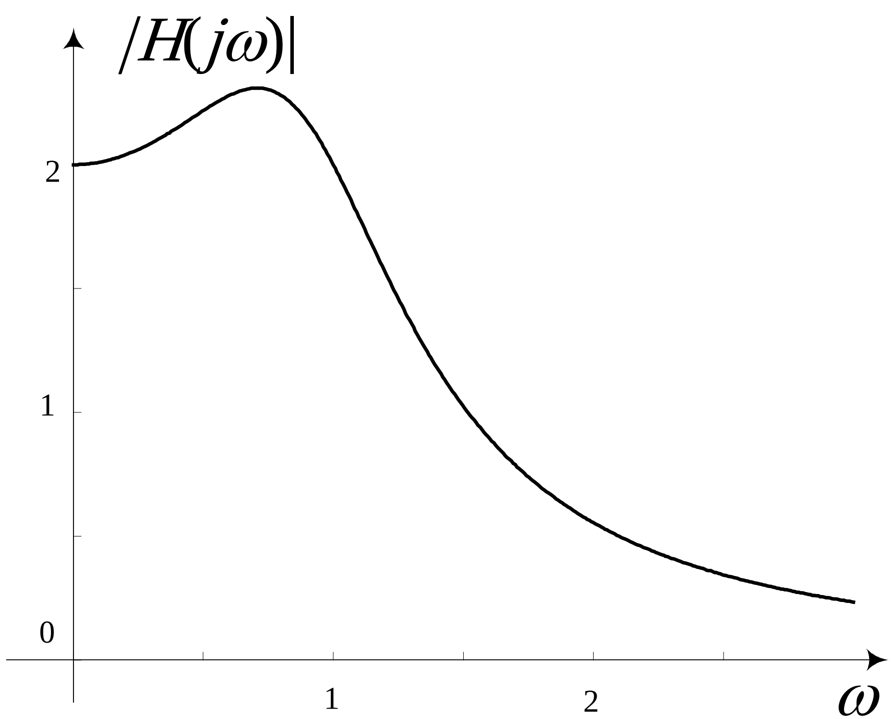
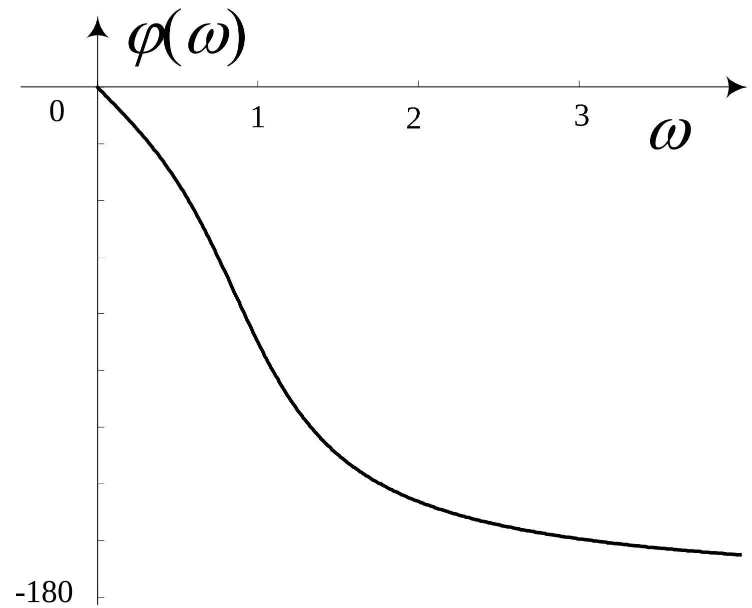
Električni krugovi

Bodeovi dijagrami

Bodeovi dijagrami

- Frekvencijske karakteristike prijenosnih funkcija električnih krugova obično se prikazuju u ovisnosti o frekvenciji ω- u linearnom mjerilu.



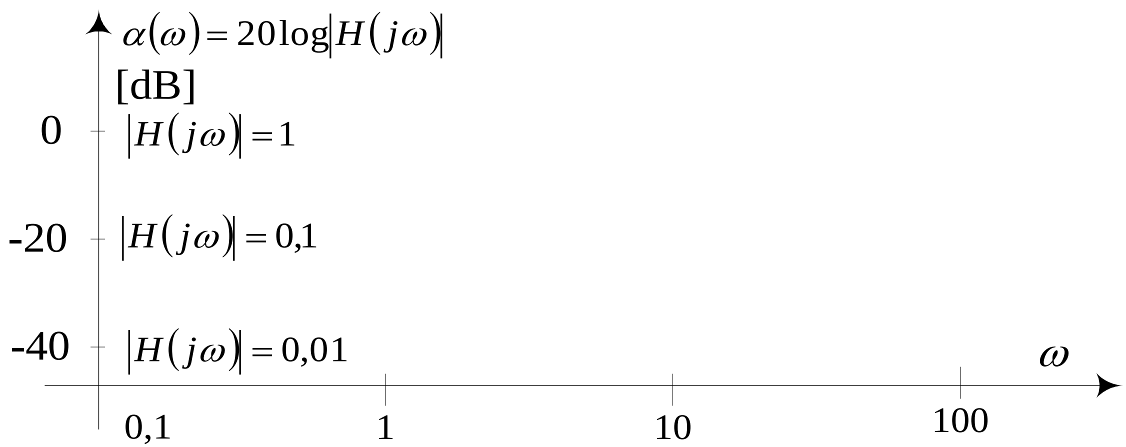


- Koristan prikaz frekvencijskih karakteristika izveo je američki inženjer Hendrick Bode.
- Bodeov prikaz odnosi se na

***logaritamsku mjeru pojačanja filtra u decibelima*.**

$$\alpha(\omega)=20\log a(\omega)=20\log\left|H(j\omega)\right|$$

- $\alpha(\omega)$ u dB na ***frekvencijskoj osi u logaritamskom mjerilu*** daje prikaz u širem frekvencijskom području.



- Takve karakteristike dobile su naziv **Bodeovi dijagrami**
- Bodeov prikaz je važan u analizi i projektiranju:
  - filtara
  - pojačala
  - regulacijskih sustava, itd.
- Mnogi računalni programi imaju mogućnost crtanja Bodeovih dijagrama direktno iz zadanih prijenosnih funkcija.

Bodeovi dijagrami

- Bodeove dijagrame moguće je crtati ručno koristeći se jednostavnim asimptotskim prikazom umjesto zamornih numeričkih kalkulacija.
- Bodeovi dijagrami polaze od prikaza prijenosne funkcije u faktoriziranome obliku.

Faktorizirane prijenosne funkcije

- Svaku prijenosnu funkciju $H(s)$ višega reda moguće je prikazati kao produkt dviju ili više jednostavnih prijenosnih funkcija → ***u faktoriziranome obliku***:

$$H(s) = k \cdot H_1(s) \cdot H_2(s) \cdots$$

- k → realna konstanta

$$\left.\begin{array}{c} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \end{array}\right\} \text{jednostavne funkcije s poznatim Bodeovim prikazima}$$

- Nakon faktoriziranja $H(s)$ i uvrštenja s=jω dobiva se prijenosna funkcija kao:

$$H(j\omega) = k \cdot H_1(j\omega) \cdot H_2 j(\omega) \cdots$$

gdje je

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

odnosno

$$H_1(j\omega) = |H_1(j\omega)| e^{j\varphi_1(\omega)}$$

$$H_2(j\omega) = |H_2(j\omega)| e^{j\varphi_2(\omega)}$$

- itd.

- Amplitudno frekvencijsku karakteristiku je moguće prikazati u obliku produkta

$$a(\omega) = |H(j\omega)| = |k| \cdot a_1(\omega) \cdot a_2(\omega) \cdots$$

gdje su

$$a_1(\omega) = |H_1(j\omega)|$$

$$a_2(\omega) = |H_2(j\omega)|$$

itd.

amplitudno frekvencijske karakteristike pojedinih faktora.

- Fazno frekvencijsku karakteristiku je moguće prikazati kao sumu:

$$\varphi(\omega) = \angle H(j\omega) = \angle k + \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots$$

gdje su

$$\varphi_1(\omega) = \angle H_1(j\omega)$$

$$\varphi_2(\omega) = \angle H_2(j\omega)$$

itd.

fazno frekvencijske karakteristike pojedinih faktora.

- Ako se amplitudno frekvencijska karakteristika prikaže pomoću logaritamske mjere u decibelima kao

$$\alpha(\omega) = 20\log a(\omega) = 20\log\left|H(j\omega)\right|$$

tada vrijedi

$$\alpha(\omega) = 20\log|k| + 20\log a_1(\omega) + 20\log a_2(\omega) + \cdots$$
$$= k_{\mathrm{dB}} + \alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega) + \cdots$$

- Iskorištena je činjenica da je logaritam produkta jednak sumi logaritama pojedinih faktora.
- Logaritam kvocjenta jednak je razlici logaritama pojedinačnih izraza.

- Bodeov prikaz funkcije $H(s)$ temelji se na činjenicama:
  - $H_1(s)$, $H_2(s)$,…, itd. su jednostavne funkcije od s
  - prikaz njihovih amplitudnih karakteristika u dB i faznih karakteristika u logaritamskome mjerilu moguće je prikazati aproksimativno koristeći ravne linije kao asimptote.
  - ukupni Bodeov prikaz jednak je sumi dobivenih karakteristika.

- Jedinica u kojoj se to izražava je decibel, tj. 1/10 jedinice Bel koja je dobila naziv po Aleksanderu Grahamu Bellu.
- Decibel je logaritamska mjera koja transformira potencije od 10 u produkte, a produkte u sume funkcija.
- Ako je $a(\omega)=10^m$

tada je

$$\alpha(\omega)=20\log a(\omega)=20\cdot m\,\mathrm{dB}$$

$\lvert H(j\omega)\rvert$	10	2	$\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	0.5	0.1
$\alpha\,[\mathrm{dB}]$	20	≈ 6	≈ 3	0	≈ -3	≈ -6	-20

- Prikaže li se funkcija $H(s)$ u faktoriziranom obliku tada polinomi u brojniku i nazivniku sadrže faktore koji mogu biti:
  - konstanta
  - faktor koji sadrži pol ili nulu u nuli
  - faktor sa realnim korijenom
  - faktor s konjugirano kompleksnim korijenima

Logaritmi njihovih modula za s=jω su pribrojnici funkcije $\alpha(\omega)$.

- Razmotrit ćemo doprinos svakog faktora funkcije $H(s)$.
- Pribrojnici koji odgovaraju:
  - faktorima brojnika → imaju pozitivan predznak.
  - faktorima nazivnika → imaju negativan predznak.

a) konstanta k

- Konstanta k u izrazu za $\alpha(\omega)$ predstavlja dio oblika

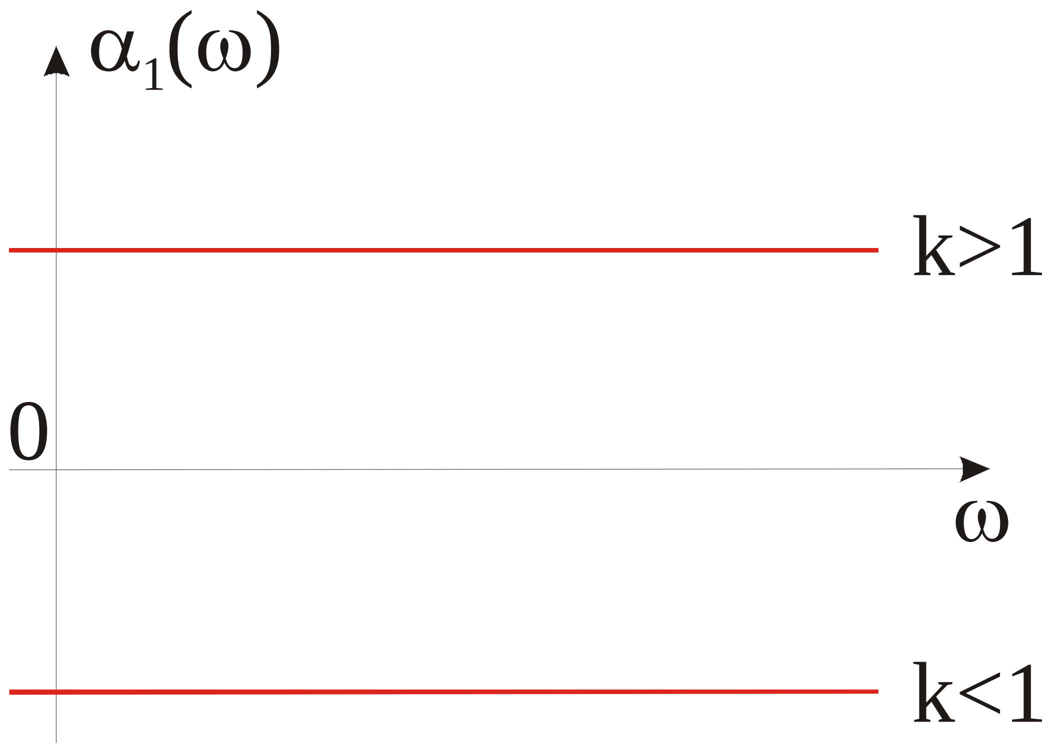
$$\alpha_1(\omega) = 20\log|k| = k_{dB}$$

dakle također konstantu.

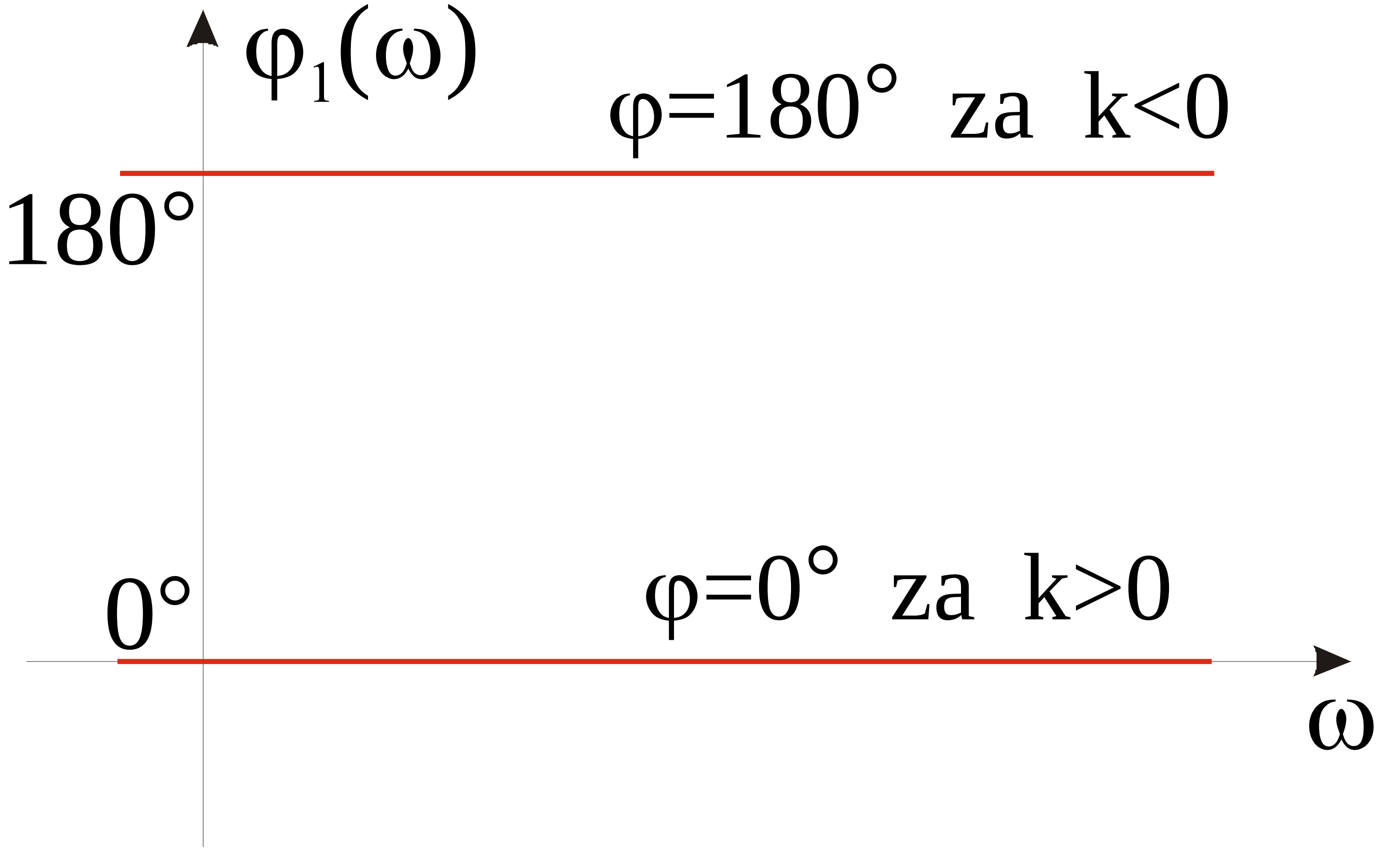
- Konstanta k_{dB} je pozitivna ako je $|k| > 1$

odnosno negativna ako je $|k| < 1$

- Bodeov dijagram koji odgovara konstanti je pravac paralelan s osi ω.



- Pripadajuća fazna karakteristika je također konstantna i iznosi 0° ili 180°, ovisno o tome da li je k>0 ili je k<0



b) Faktor s korijenom u nuli $H_2(s)=s$

- Logaritamska mjera koja odgovara ovome faktoru je

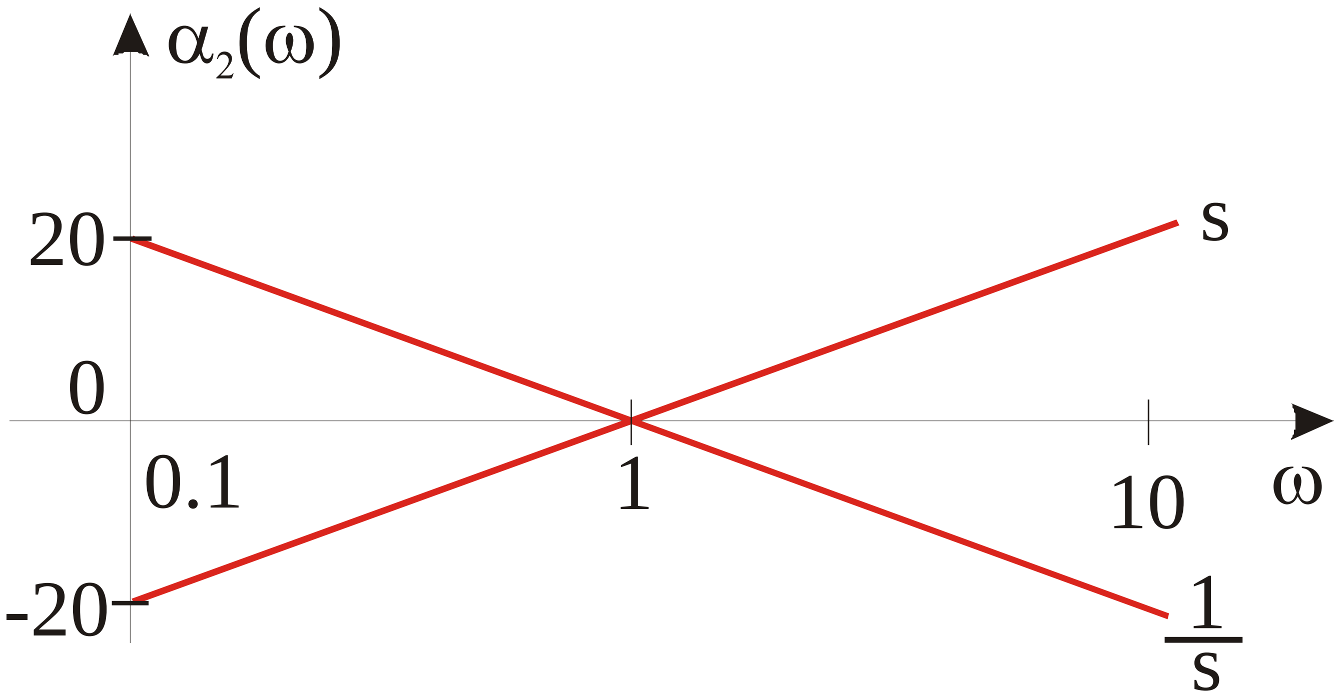
$$\alpha_2(\omega) = 20\log|j\omega| = 20\log(\omega)$$

→ ako je faktor u brojniku, odnosno

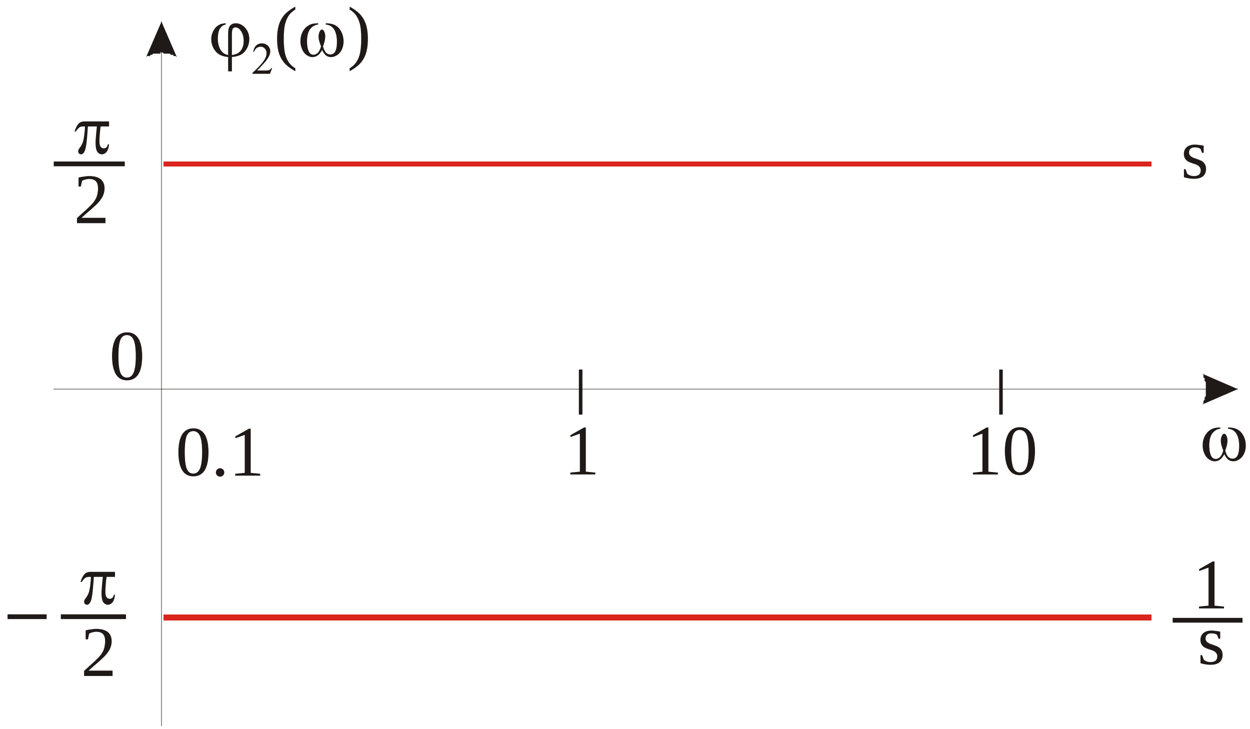
$$\alpha_2(\omega) = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log|j\omega| = -20\log(\omega)$$

→ako je faktor u nazivniku.

- Bodeov dijagram koji odgovara faktoru s korjenom u nuli je pravac.
- Razlog tome je logaritamsko mjerilo na ω osi.



- Fazna karakteristika je pravac paralelan s ω osi.



- Fazna karakteristika je konstantna i iznosi

90° za faktor s u brojniku
-90° za faktor s u nazivniku

c)Faktor s realnim korijenom $\neq 0$ → $H_3(s)=s+\sigma$.

- Pogodno je takav faktor prikazati u obliku

$$s+\sigma \rightarrow \sigma\left(1+s/\sigma\right)$$

Odgovarajuća logaritamska mjera pojačanja je

$$\alpha_3(\omega)=20\log\left|1+\frac{j\omega}{\sigma}\right|=20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^2}=10\log\left[1+\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^2\right]$$

→ ako je faktor u brojniku, odnosno

$$\alpha_3(\omega)=-20\log\left|1+\frac{j\omega}{\sigma}\right|=-10\log\left[1+\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^2\right]$$

→ako je faktor u nazivniku.

- Na frekvencijama za koje vrijedi ω<<σ je

$$\alpha_3(\omega) \cong \pm 20 \log 1 = 0\,\mathrm{dB} \rightarrow$$ pravac || osi apscisa

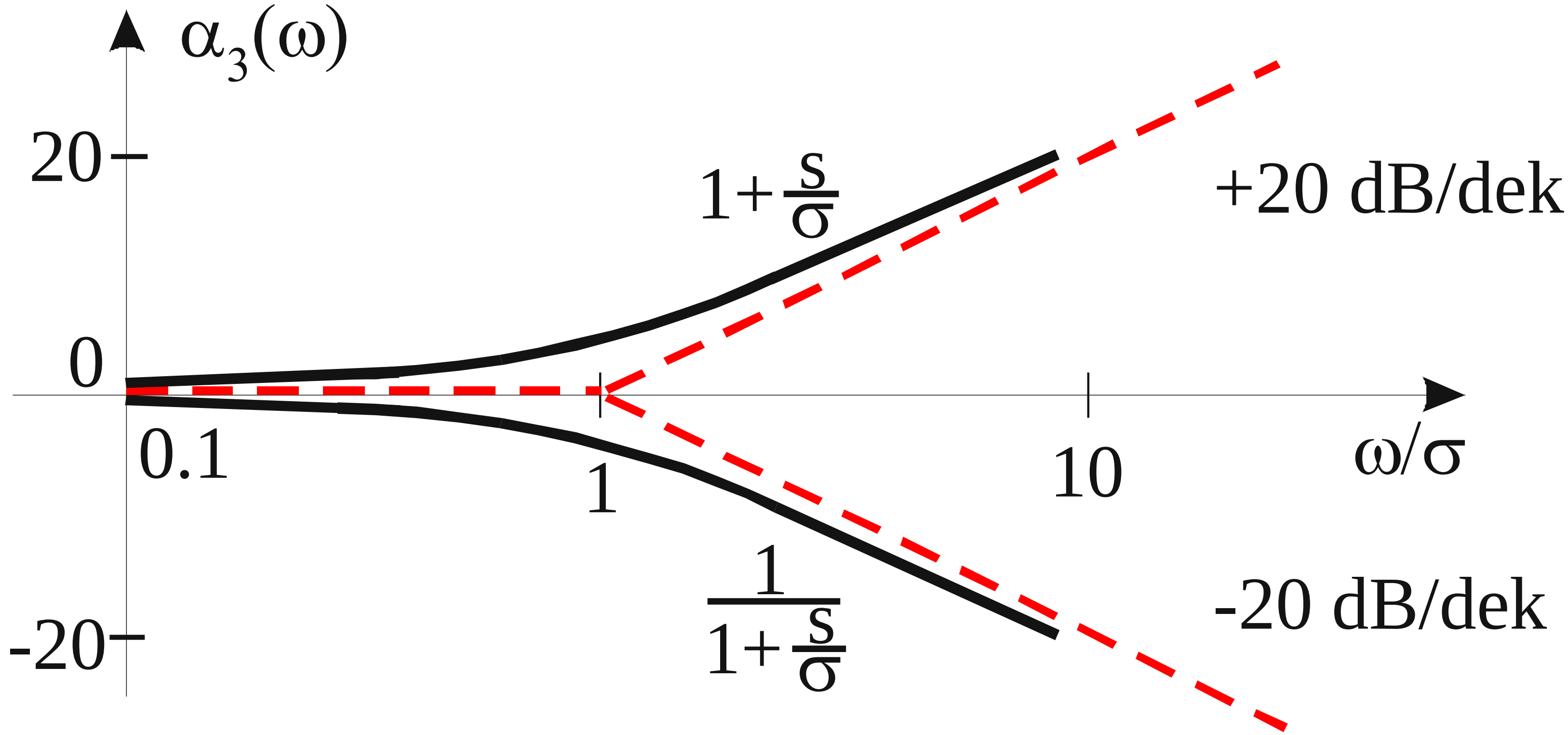
- Na frekvencijama za koje vrijedi ω >> σ je

$$\alpha_3(\omega) \cong \pm 20 \log\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \rightarrow$$ pravac, koji prolazi kroz kroz nulu u točki ω=σ.

- Nagib pravca → ±20 dB po dekadi
- Ako je faktor u brojniku → 20 dB po dekadi
- Ako je faktor u nazivniku → –20 dB po dekadi.

- Spomenuti pravci → asimptote frekvencijske karakteristike

- Bodeov dijagram za spomenuti faktor ima oblik



- Na sličan način →asimptote za faznu karakteristiku
- Fazna karakteristika glasi

$$\varphi_3(\omega) = \pm \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

- Predznak ovisi o tome da li je faktor u brojniku ili nazivniku.
- Na frekvencijama za koje vrijedi ω<<σ je

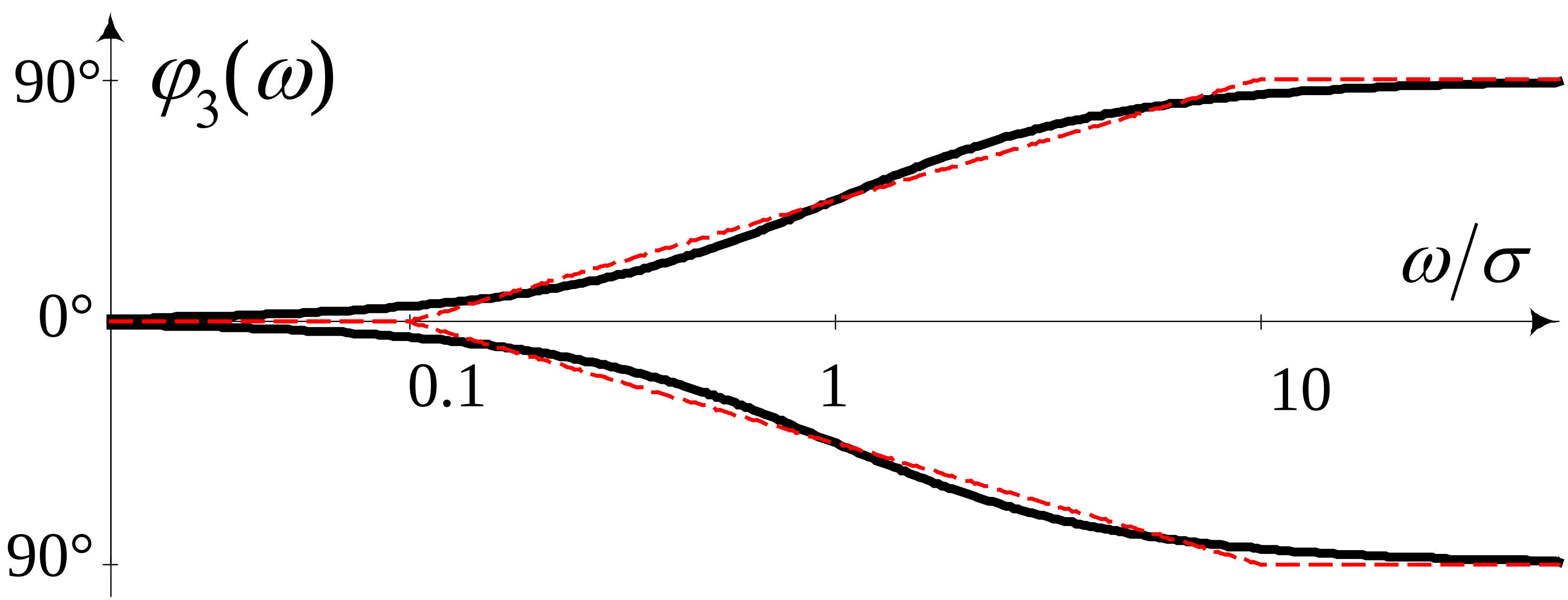
$$\varphi_3(\omega) \cong 0^\circ \rightarrow \quad \text{pravac = osi apscisa}$$

- Na frekvencijama ω >> σ je

$$\varphi_3(\omega) \cong \pm 90^\circ \rightarrow \quad \text{pravac paralelan s } \omega \text{ osi.}$$

- Za $\omega=\sigma$ je $\varphi_3(\omega) = \pm 45^\circ$

- U području frekvencija oko $\omega=\sigma$, funkciju je moguće aproksimirati pravcem s nagibom 45/dekadi
- Fazna karakteristika ima oblik



d) Faktor koji sadrži konjugirano kompleksni par korijena

$$H_4(s) = \left(s^2 + 2\zeta s\omega_0 + \omega_0^2\right)$$

Ovaj je faktor pogodno napisati u obliku

$$s^2 + 2\zeta s\omega_0 + \omega_0^2 \rightarrow \omega_0^2\left(\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + 1\right)$$

$\omega_0 \rightarrow$ modul korijena (neprigušena frekvencija osciliranja)

$\zeta \rightarrow$ koeficijent prigušenja

- Parcijalni iznos logaritamske mjere pojačanja za ovaj faktor je

$$\alpha_4(\omega) = \pm 20\log\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+\frac{2j\zeta\omega}{\omega_0}\right| = \pm 10\log\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Pozitivni predznak vrijedi za faktor brojnika a negativan za faktor u nazivniku.

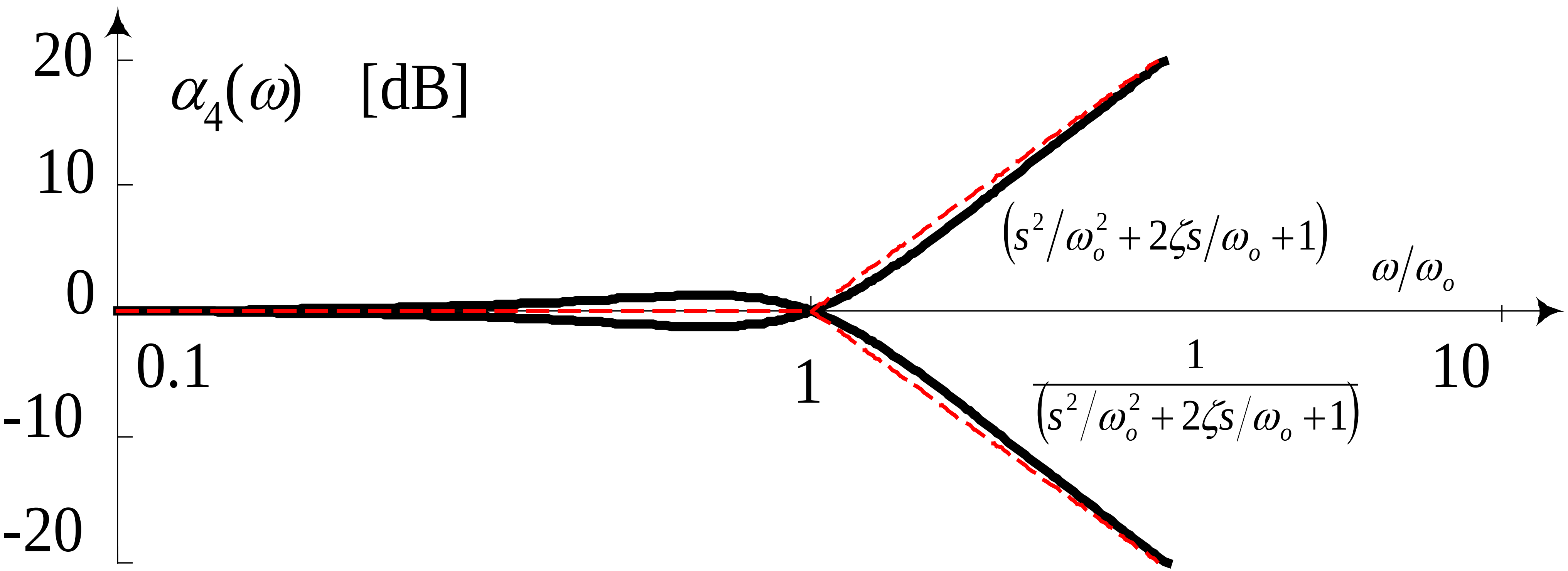
Vrijedi:

za $\omega \ll \omega_0$ $\quad \alpha_4(\omega) \cong \pm 20\log(1) = 0\,\mathrm{dB}$

a za $\omega \gg \omega_0$ $\alpha_4(\omega) \cong \pm 20\log\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = \pm 40\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

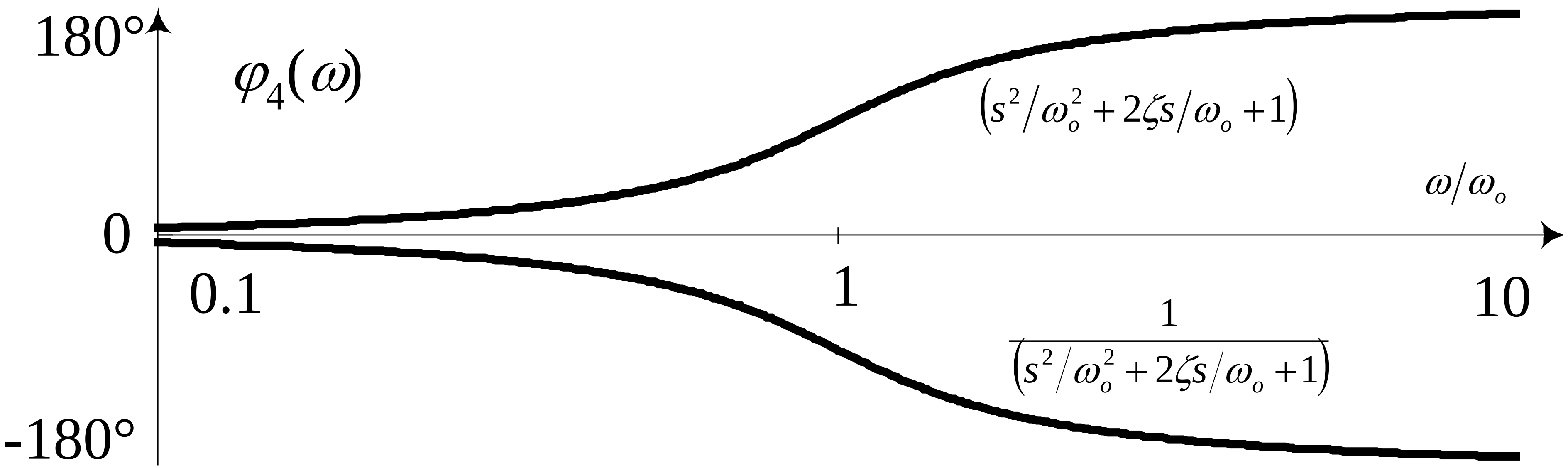
što u logaritamskom mjerilu predstavlja jednadžbu pravca s nagibom 40 dB/dekadi ili 12 dB/oktavi

Odgovarajući Bodeov dijagram za ζ=0.707

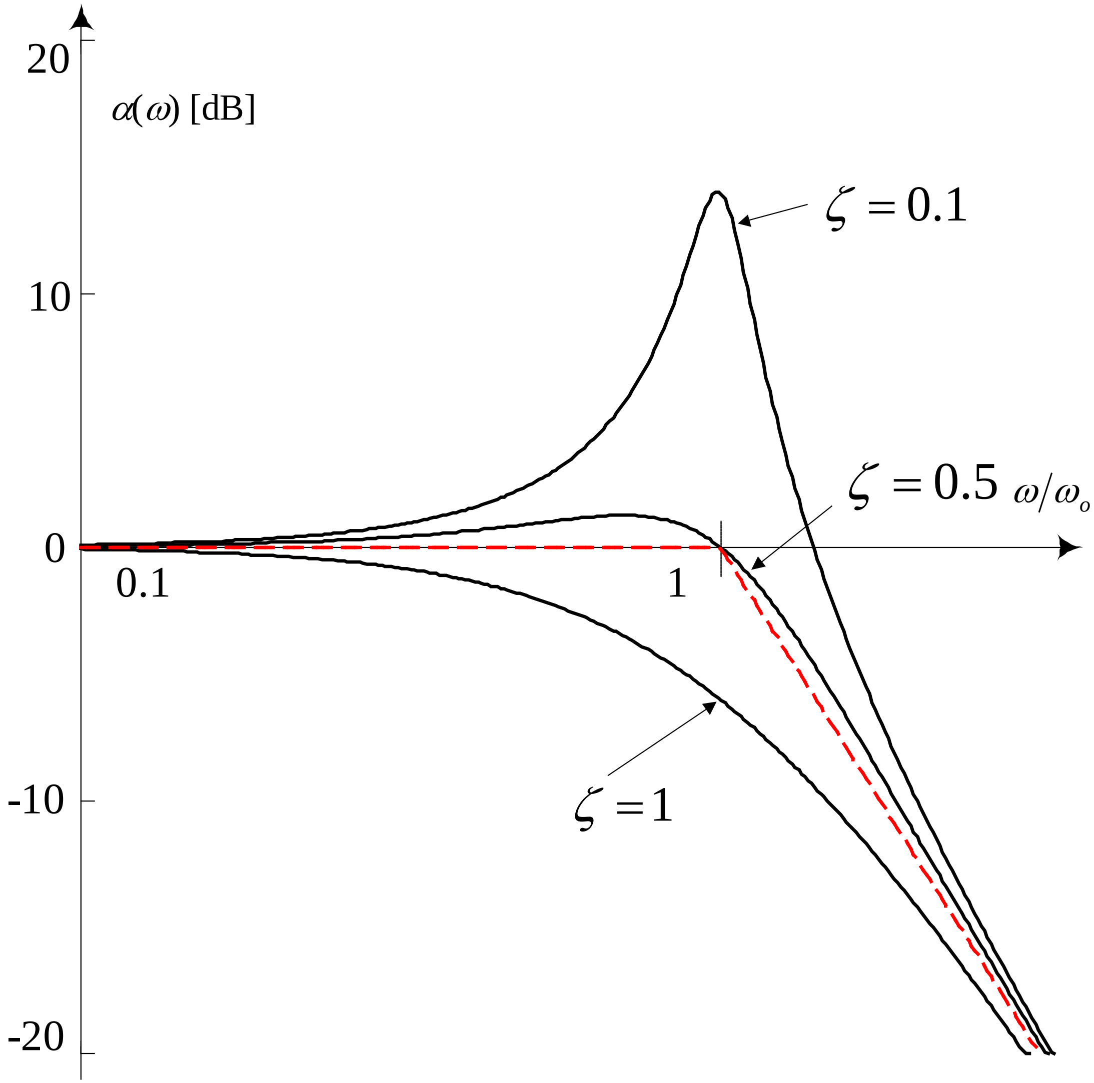


Pripadajući iznos faze ne vodi na jednostavne konstrukcije

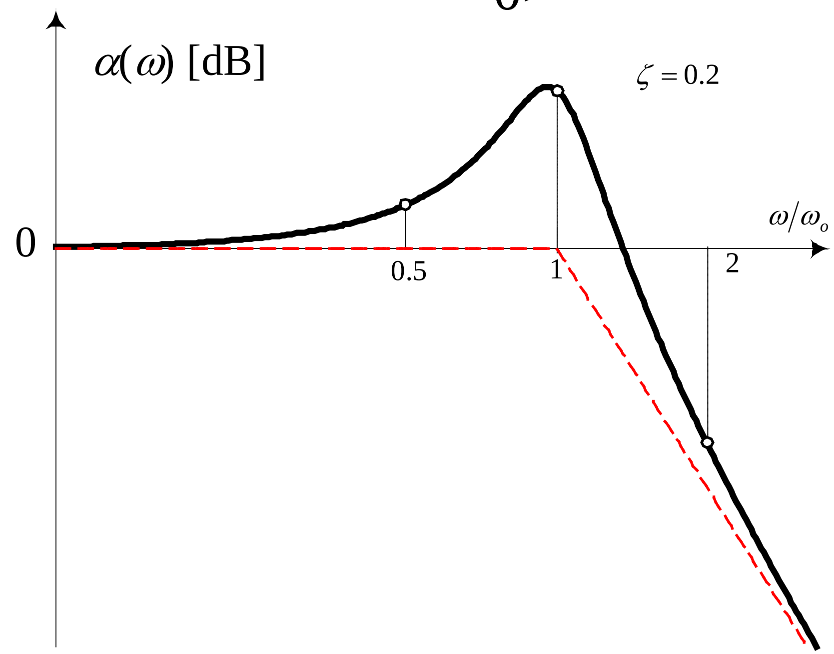
$$\varphi_4(\omega) = \pm \operatorname{arctg}\left(\frac{2\zeta\,\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$



Za razne iznose ζ karakteristike poprimaju različite oblike

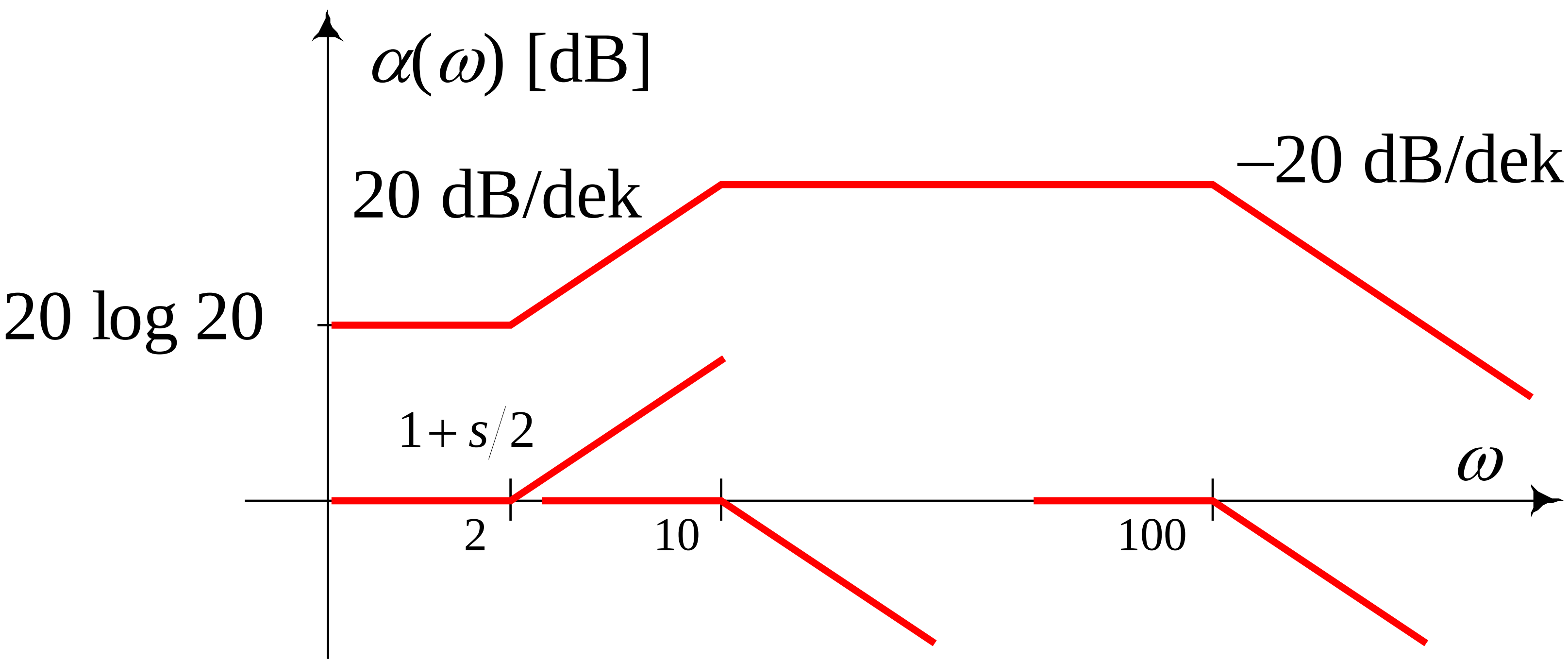


- Oblik karakteristike faktora drugog stupnja jako ovisi o veličini ζ.
- Zbog toga često nije dovoljno prikazati funkciju koristeći samo asimptote.
- Potrebno je koristiti i korekcijske članove, tj izračunati iznose $\alpha(\omega)$ u točkama $\omega=\omega_0$, $\omega=0.5\omega_0$ i $\omega=2\omega_0$.



Primjer:

$$H(s) = \frac{10^4(s+2)}{(s+10)(s+100)} = 20\frac{(1+s/2)}{(1+s/10)(1+s/100)}$$



Primjer: Funkcija

$$H(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+10)} = \frac{s}{(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$