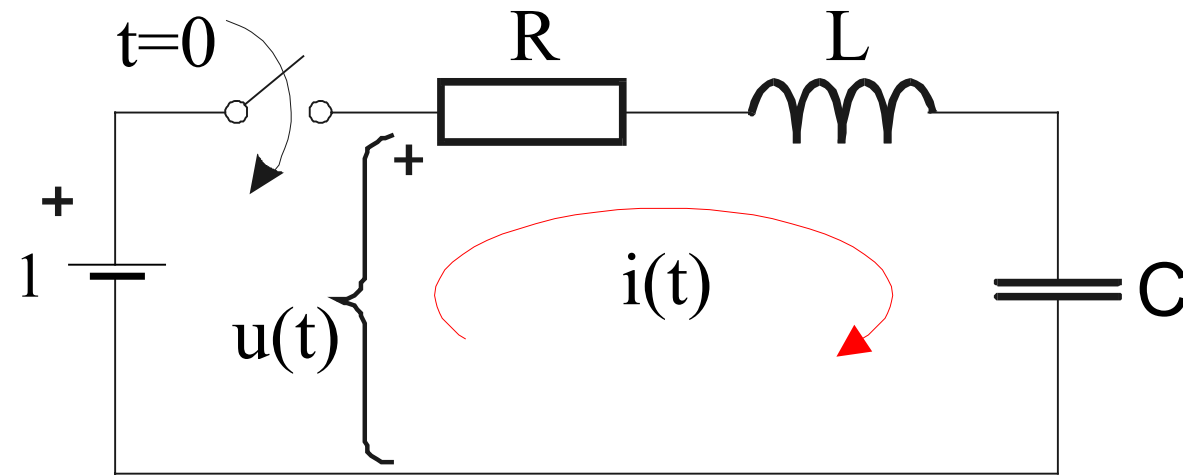


RLC-krug –karakterističan krug drugog reda



$$u(t)=S(t)$$

$$u(t)=S(t) \rightarrow U(s)=\frac{1}{s}$$

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L} \cdot s}{s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC}} \cdot U(s) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC}}$$

Polovi:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad \longrightarrow \quad s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Neka je

$$\frac{R}{2L} = \alpha \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

4 karakteristična slučaja odziva RLC-kruža:

1) Nadkritično prigušeni odziv

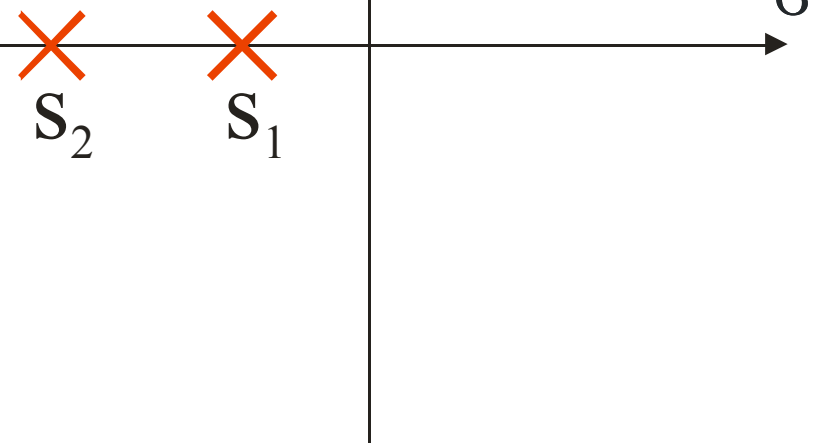
$$\alpha > \omega_0 \Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

s_1 i $s_2 \rightarrow$ realni i različiti

$$s_1 = -\alpha_1$$

$$s_2 = -\alpha_2$$



$$I(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{(s + a_1) \cdot (s + a_2)} = \frac{k_1}{s + a_1} + \frac{k_2}{s + a_2}$$

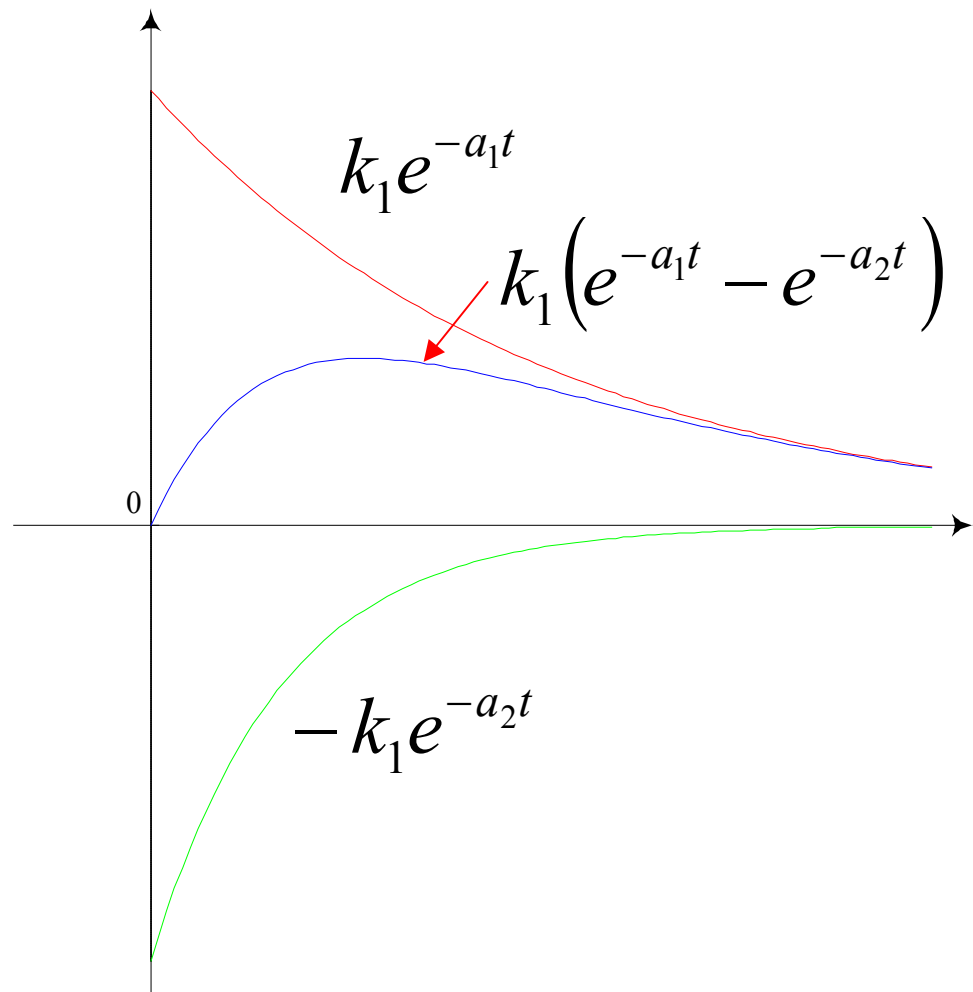
$$\frac{1}{L} = k_1(s + a_2) + k_2(s + a_1) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 a_2 + k_2 a_1 = \frac{1}{L} \end{cases}$$

$$k_1 = -k_2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{a_2 - a_1}$$

■ Odziv

$$i(t) = k_1 e^{-a_1 t} + k_2 e^{-a_2 t}$$

$$i(t) = k_1 (e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t})$$

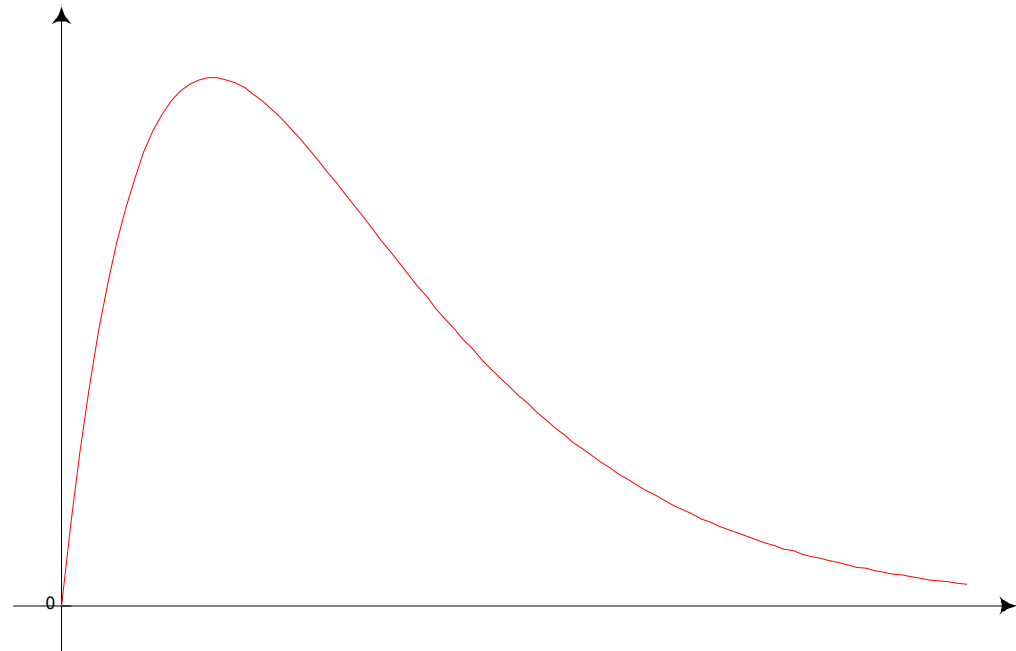
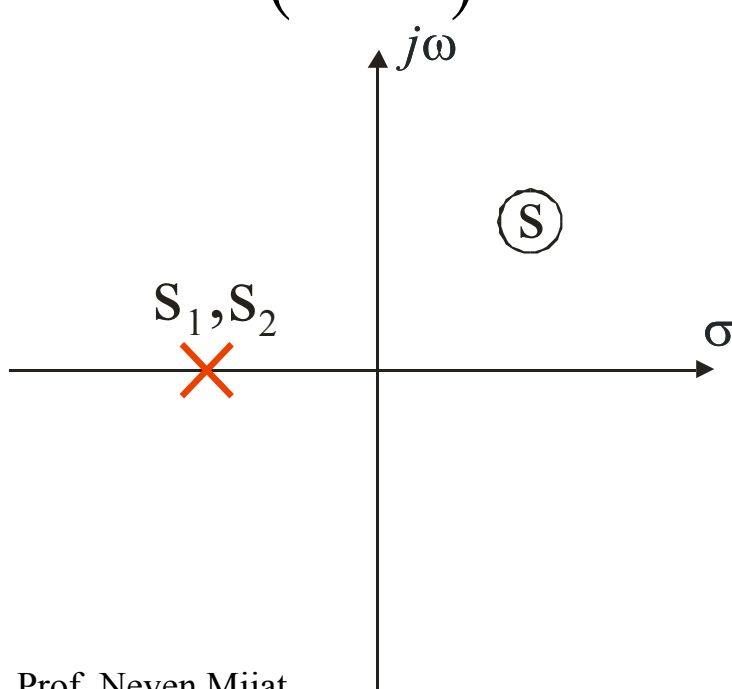


2) Kritično prigušeni odziv

$$\alpha = \omega_0 \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_1 = s_2 = -\alpha$$

$$I(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2} \longrightarrow i(t) = k \cdot t \cdot e^{-\alpha t}$$



3) Podkritično prigušeni odziv

$$\alpha < \omega_0 \Rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

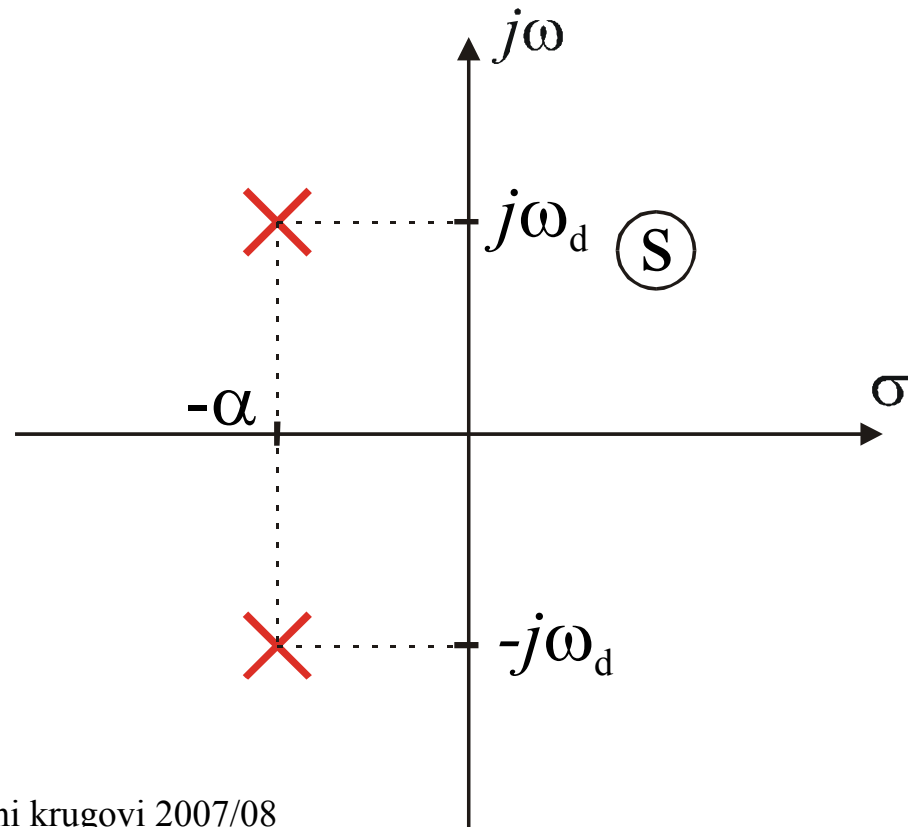
$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$\alpha^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \longrightarrow \quad$ konjugirano kompleksni korijeni

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

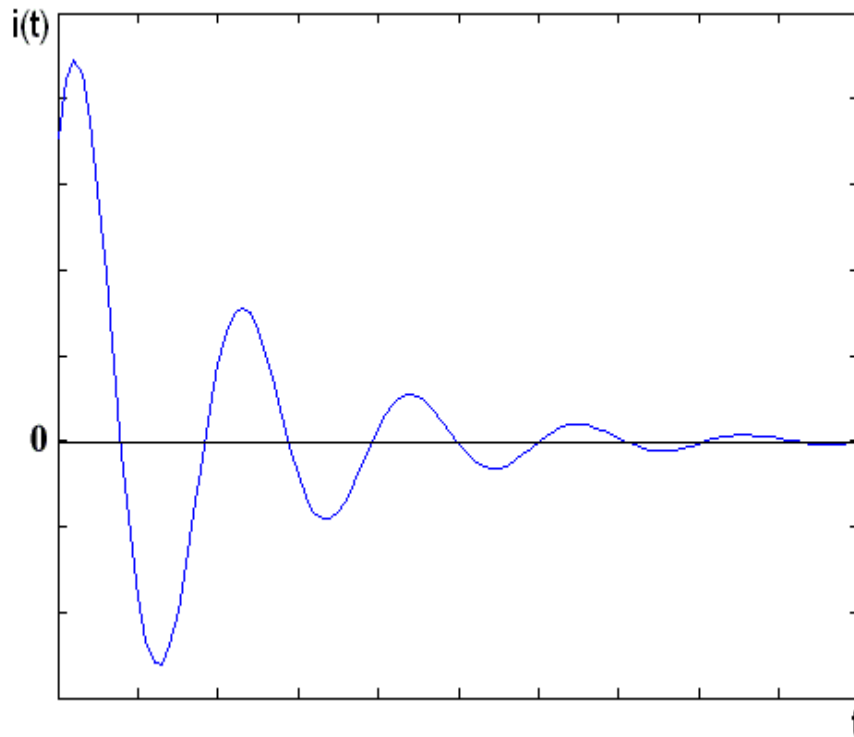
$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$



$$I(s) = \frac{k}{s + \alpha - j\omega_d} + \frac{k^*}{s + \alpha + j\omega_d}$$

$$i(t) = k \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$



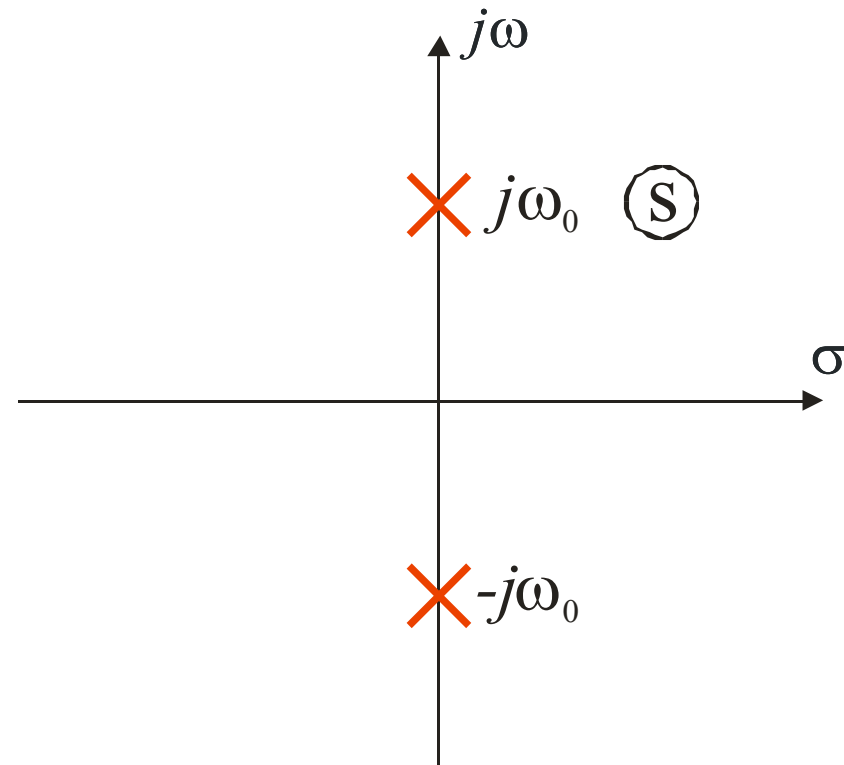
4) Neprigušeni odziv

$$\alpha = 0 \Rightarrow R = 0;$$

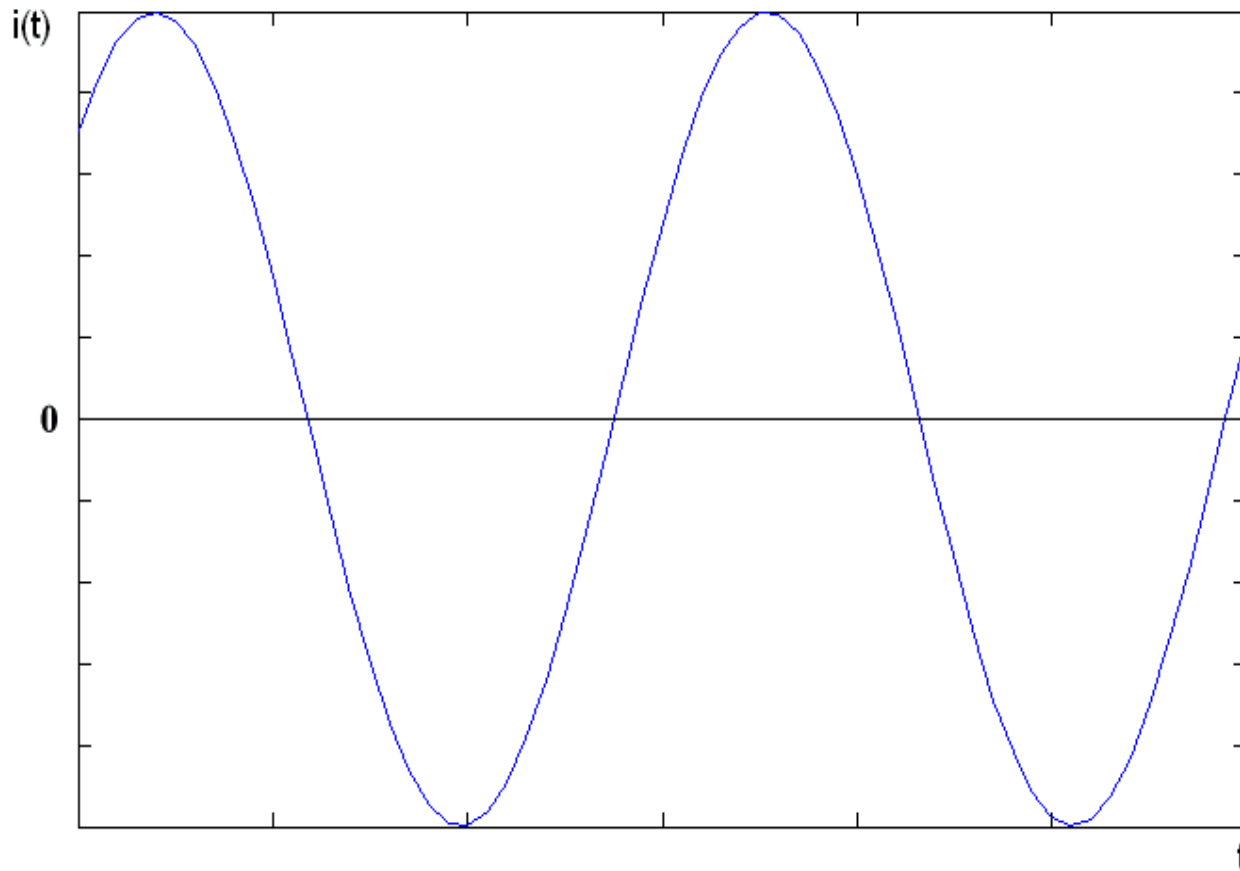
$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Imaginarni polovi: $s_{1,2} = \pm j\omega_0$

$$I(s) = \frac{k}{s - j\omega_0} + \frac{k^*}{s + j\omega_0}$$



$$i(t) = k \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



Električni krugovi

Jednadžbe krugova u uvjetima
stacionarne sinusne pobude

Jednadžbe krugova u uvjetima stacionarne sinusne pobude

- Poseban režim rada električnog kruga je u uvjetima *stacionarnoga sinusnog signala*.
- Pobudni signal \rightarrow sinusnog valnog oblika
- Početak djelovanja $\rightarrow -\infty$.
- Sve prijelazne pojave nakon uključjenja \rightarrow završene.

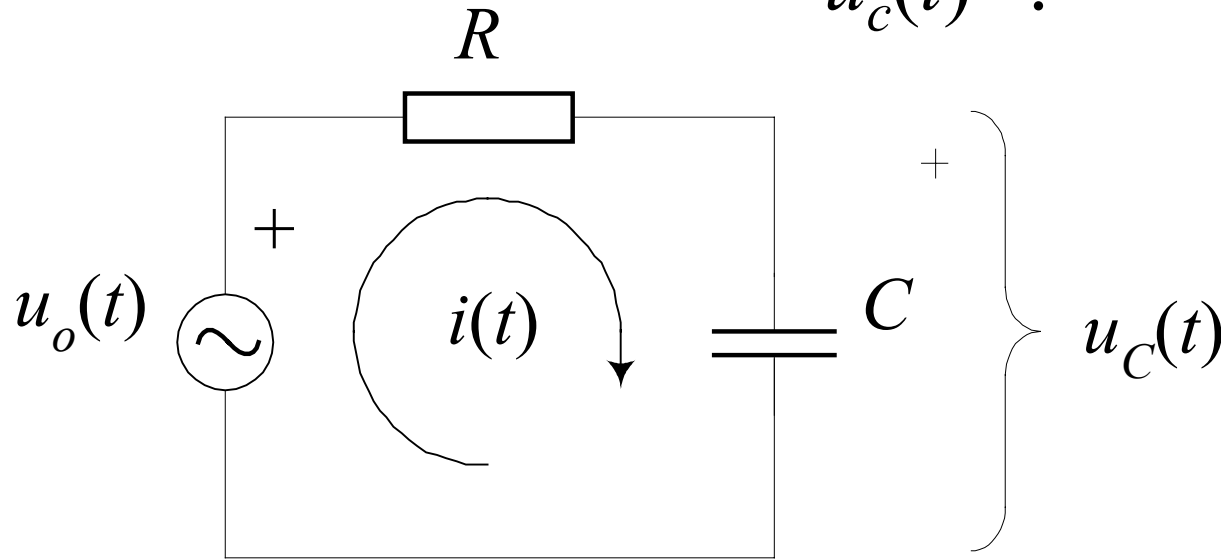
- U takvim uvjetima:
 - svi naponi i struje u krugu imaju sinusni valni oblik;
 - frekvencije svih signala jednake su frekvenciji izvora
 - razlikuju se samo po **amplitudi** i **faznim pomacima**.
-
- Jednadžbe krugova u tom slučaju moguće je znatno pojednostavniti primjenom koncepta

fazora.

- Primjer: serijski RC krug

$$u_o(t) = U_m \cos(\omega t)$$

$$u_c(t) = ?$$



- U vremenskoj domeni \rightarrow diferencijalna jednačba

$$u_o(t) = R \cdot i(t) + u_c(t)$$

$$u_o(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

- Pobuda $u_0(t) \rightarrow$ sinusni valni oblik
- Pretpostavka: $u_C(t)$ ima također sinusni valni oblik

$$u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_C \cos(\varphi) \cos(\omega t) - U_C \sin(\varphi) \sin(\omega t) = \\ &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$u_o(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

- Uvrštenjem u diferencijalnu jednažbu

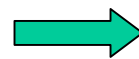
$$U_m \cos(\omega t) = RC \frac{d}{dt} (U_C \cos(\omega t + \varphi)) + U_C \cos(\omega t + \varphi)$$

$$U_m \cos(\omega t) = RC(-A\omega \cdot \sin(\omega t) + B\omega \cdot \cos(\omega t)) + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

- Izjednačenjem koeficijenata uz sin i cos funkcije

$$-RCA\omega + B = 0$$

$$RCB\omega + A = U_m$$



rješenja za A i B

$$A = U_C \cos(\varphi) = \frac{U_m}{(RC\omega)^2 + 1}$$

$$B = U_C \sin(\varphi) = \frac{RC\omega U_m}{(RC\omega)^2 + 1}$$

■ Napon $u_C(t)$ je

$$u_C(t) = \frac{U_m}{(RC\omega)^2 + 1} \cos(\omega t) - \frac{\omega RC U_m}{(RC\omega)^2 + 1} \sin(\omega t)$$

- U_C i faza φ
$$U_C = \frac{U_m}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$$
$$\varphi = -\arctg(\omega RC)$$
- Napon $u_C(t)$
$$u_C(t) = \frac{U_m}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \cos(\omega t - \arctg(\omega RC))$$
- Iz primjera je vidljivo:
 - analiza jednostavnog kruga prilično je složena;
 - krug sa više grana i čvorišta bit će puno kompliciraniji za analizu.

- Drugi način : \rightarrow umjesto sinusne pobude uvodimo

- *eksponencijalnu funkciju* $\rightarrow U \cdot e^{j\omega t}$

$$U \cdot e^{j\omega t} = U \cdot \cos(\omega t) + j \cdot U \cdot \sin(\omega t)$$

- Stvarna pobuda \rightarrow realni dio

$$u(t) = U \cos(\omega t) = \operatorname{Re}[U \cdot e^{j\omega t}]$$

- Odziv \rightarrow eksponencijalna funkcija $\rightarrow U_c e^{j(\omega t + \varphi)}$

- Stvarni odziv \rightarrow realni dio

$$u_c(t) = U_c \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[U_c \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

■ Diferencijalna jednačžba

$$u_o(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

$$U_m \cos(\omega t) = RC \frac{d}{dt} (U_c \cos(\omega t + \varphi)) + U_c \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Re}[U_m e^{j\omega t}] = \text{Re} \left[RC \frac{d}{dt} (U_c e^{j(\omega t + \varphi)}) + U_c e^{j(\omega t + \varphi)} \right]$$

$$U_m e^{j\omega t} = RCj\omega \cdot U_c e^{j(\omega t + \varphi)} + U_c e^{j(\omega t + \varphi)} \quad /: e^{j\omega t}$$

$$U_m = RCj\omega \cdot U_c e^{j\varphi} + U_c e^{j\varphi}$$

■ Rezultat:

$$U_c e^{j\varphi} = \frac{U_m}{1 + j\omega RC}$$

■ Množenjem s $e^{j\omega t} \rightarrow$ odziv na pobudu $U_m e^{j\omega t}$

$$U_c e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{U_m e^{j\omega t}}{1 + j\omega RC} = \frac{U_m}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} e^{j(\omega t - \arctg(RC\omega))}$$

$$U_c = \frac{U_m}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \quad \varphi = -\arctg(\omega RC)$$

■ Vremenski odziv $u_c(t) \rightarrow$ realni dio

$$u_c(t) = \frac{U_m}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \cos(\omega t - \arctg(\omega RC))$$

- Zaključak:
- Umjesto opće funkcije $f(t)=A\cos(\omega t + \varphi)$ koristimo funkciju $f(t)=Ae^{j(\omega t + \varphi)}$.

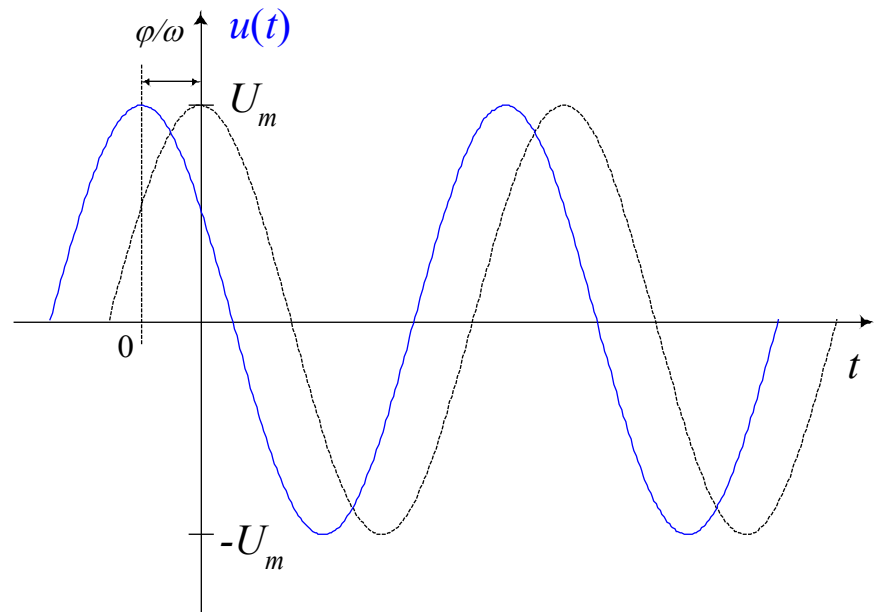
$$f(t) = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = A \cdot e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \mathbf{A} \cdot e^{j\omega t}$$

- Veličina $\mathbf{A}=Ae^{j\varphi}$ je **fazor** sinusnoga signala
- **Fazor** sadrži sve informacije o amplitudi i fazi sinusnoga signala.

•Fazor

- Fazor je kompleksni broj pridružen sinusnoj veličini, koji sadrži informaciju o njezinoj amplitudi i faznom pomaku.
- Neka je npr. $u(t)$ naponski signal definiran izrazom

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$



- Taj signal je moguće prikazati kao

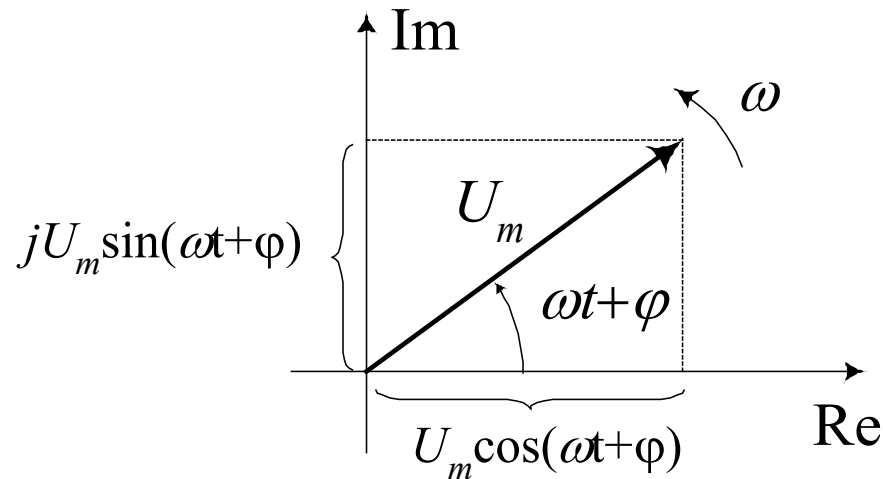
$$u(t) = \operatorname{Re} \left[U_m e^{j(\omega t + \varphi)} \right]$$

- $U_m e^{j(\omega t + \varphi)} \rightarrow$ kompleksni broj
- Trigonometrijski oblik

$$U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m \cos(\omega t + \varphi) + j U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

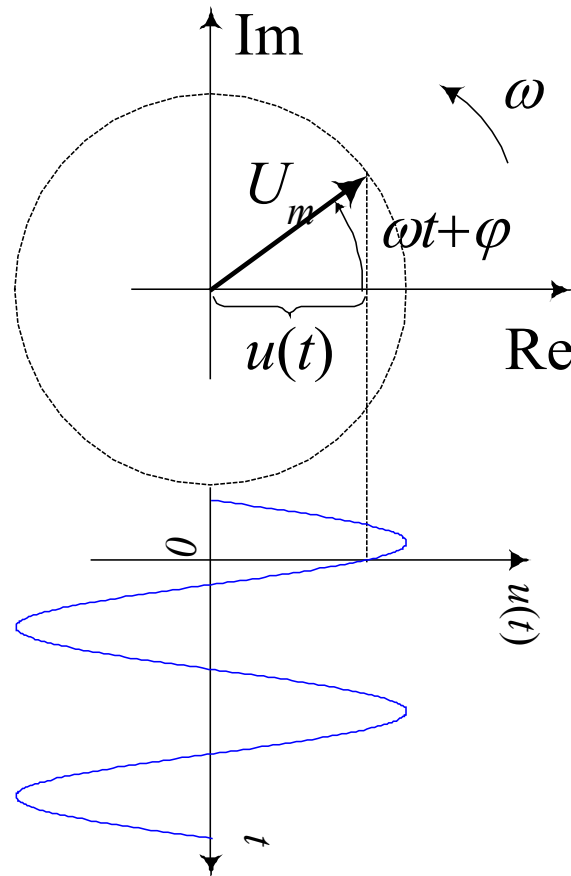
- Signal $u(t) \rightarrow$ realni dio tog kompleksnog broja
- $U_m \rightarrow$ modul
- $\omega t + \varphi \rightarrow$ faza

- U kompleksnoj ravnini \rightarrow vektor duljine U_m , koji rotira oko ishodišta kutnom brzinom ω



- $\varphi \rightarrow$ kut kojeg vektor čini s realnom osi u $t=0$.

- Taj se vektor naziva ***rotirajućim fazorom***.
- Njegova projekcija na realnu os je signal $u(t)$.



- Svi signali u krugu \rightarrow sinusoidalni s frekvencijom ω
- Svi signali \rightarrow rotirajući fazori
- Svaki ima definiran:
 - duljinu ili modul \rightarrow amplituda sinusnoga signala
 - kut $\varphi \rightarrow$ fazni pomak sinusnoga signala.
- Vektori rotiraju istom kutnom brzinom
- Ako umjesto fazora rotira koordinatni sustav u suprotnome smjeru,
- Vektori su nepomični i nazivaju se *fazorima*.
- Rotirajući fazor $\rightarrow U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U e^{j\omega t}$
- Fazor \rightarrow rotirajući vektor u trenutku $t=0$ $U = U_m e^{j\varphi}$

- Fazor \rightarrow kompleksni broj
- U *trigonometrijskome* obliku

$$U = U_m e^{j\varphi} = U_m \cos(\varphi) + j U_m \sin(\varphi)$$

- U *algebarskome obliku* $\rightarrow U = \operatorname{Re}[U] + j \operatorname{Im}[U]$

$$\operatorname{Re}[U] = U_m \cdot \cos(\varphi)$$

$$U_m = \sqrt{\operatorname{Re}^2[U] + \operatorname{Im}^2[U]}$$

$$\operatorname{Im}[U] = U_m \cdot \sin(\varphi)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}[U]}{\operatorname{Re}[U]}\right)$$

- U *polarnome obliku*. $U = U_m \cdot e^{j\varphi}$

uobičajena oznaka

$$U = U_m \angle \varphi$$

- U analizi mreže nužno je koristiti sve oblike fazora.
- Za zbrajanje ili oduzimanje \rightarrow algebarski oblik.
- Npr.

$$\mathbf{X}_1 = A_1 + jB_1$$

$$\mathbf{X}_2 = A_2 + jB_2$$

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = A_1 + A_2 + j(B_1 + B_2)$$

- Polarni oblik \rightarrow kod množenja i dijelenja.
- Npr. umnožak dvaju fazora u polarnome obliku

$$\mathbf{X}_1 = X_1 e^{j\varphi_1}$$

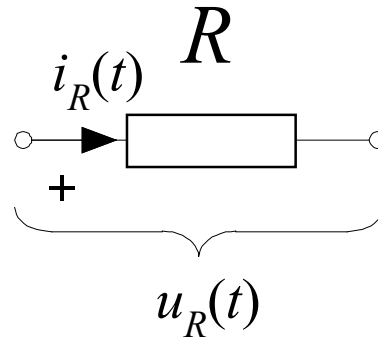
$$\mathbf{X}_2 = X_2 e^{j\varphi_2}$$

$$\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = X_1 \cdot X_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

u algebarskome obliku

$$\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = A_1 \cdot A_2 - B_1 \cdot B_2 + j(A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1)$$

- Odnosi između napona i struja na elementima krugova
- Otpor



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

- Ako je struja sinusnoga valnog oblika $i_R(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$

tada je napon

$$u_R(t) = R i_R(t) = R I \cos(\omega t + \varphi)$$

- U fazorskom prikazu

$$\mathbf{I}_R = I e^{j\varphi}$$

$$\mathbf{U}_R = R \cdot I e^{j\varphi} = R \cdot \mathbf{I}_R$$

- Ako je napon na otporu dan izrazom

$$u_R(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

tada je struja

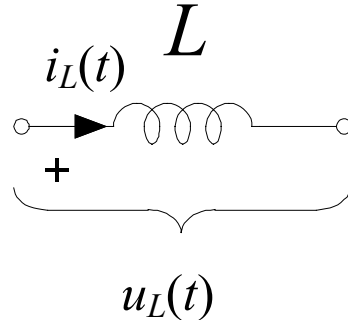
$$i_R(t) = \frac{1}{R} u_R(t) = \frac{1}{R} U \cos(\omega t + \varphi)$$

- U fazorskom prikazu

$$\mathbf{U}_R = U e^{j\varphi}$$

$$\mathbf{I}_R = \frac{1}{R} U e^{j\varphi} = \frac{1}{R} \mathbf{U}_R$$

■ Induktivitet



$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

■ Ako je struja sinusnoga valnog oblika $i_L(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$ tada je napon

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} \{I \cos(\omega t + \varphi)\} = \omega L I \cos(\omega t + \varphi + \pi / 2)$$

■ U fazorskom prikazu $I_L = I e^{j\varphi}$

$$U_L = \omega L I e^{j(\varphi + \pi / 2)} = j \omega L I e^{j\varphi} = j \omega L I_L$$

- Ako je napon na induktivitetu dan izrazom

$$u_L(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

tada je struja

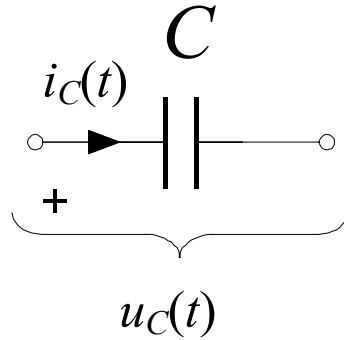
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t (U \cos(\omega \tau + \varphi)) d\tau = \frac{1}{\omega L} U \cos(\omega t + \varphi - \pi / 2)$$

- U fazorskom prikazu

$$\mathbf{U}_L = U e^{j\varphi}$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{1}{\omega L} U e^{j(\varphi - \pi/2)} = \frac{1}{j\omega L} U e^{j\varphi} = \frac{1}{j\omega L} \mathbf{U}_L$$

■ Kapacitet



$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

- Ako je struja sinusnoga valnog oblika $i_C(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$ tada je napon

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t (I \cos(\omega \tau + \varphi)) d\tau = \frac{1}{\omega C} I \cos(\omega t + \varphi - \pi / 2)$$

- U fazorskom prikazu $I_C = I e^{j\varphi}$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I e^{j(\varphi - \pi / 2)} = \frac{1}{j\omega C} I e^{j\varphi} = \frac{1}{j\omega C} I_C$$

- Ako je napon na kapacitetu dan izrazom

$$u_C(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

tada je struja

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d}{dt} \{U \cos(\omega t + \varphi)\} = \omega C U \cos(\omega t + \varphi + \pi / 2)$$

- U fazorskom prikazu

$$U_C = U e^{j\varphi}$$

$$I_C = \omega C U e^{j(\varphi + \pi / 2)} = j\omega C U e^{j\varphi} = j\omega C U_C$$

- Zaključak:
- Derivaciji sinusnoga signala u vremenskoj domeni u fazorskome prikazu odgovara množenje fazora s $j\omega$.
- Integriranju sinusnoga signala u vremenskoj domeni u fazorskome prikazu odgovara dijelenje fazora s $j\omega$.
- Fazori odzivnih signala \rightarrow općenito funkcije frekvencije ω .
- Moduli faze $\varphi \rightarrow$ zavisne varijable ovisne o frekvencije ω .
- Zbog toga se analiza kruga primjenom fazora često naziva *analizom u frekvencijskoj domeni*.

- Odnos napona i struje na dvopolu u fazorskom prikazu

$$U = Z \cdot I$$

$Z \rightarrow \textit{impedancija}$.

- Isto tako vrijedi

$$I = Y \cdot U$$

$Y \rightarrow \textit{admitancijom}$.

- Impedancija i admitancija \rightarrow kompleksne veličine
- U općem slučaju \rightarrow funkcije frekvencije ω .

- Za tri osnovna pasivna dvopola

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L = \omega L \cdot e^{j90^\circ} = \omega L \angle 90^\circ$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j90^\circ} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

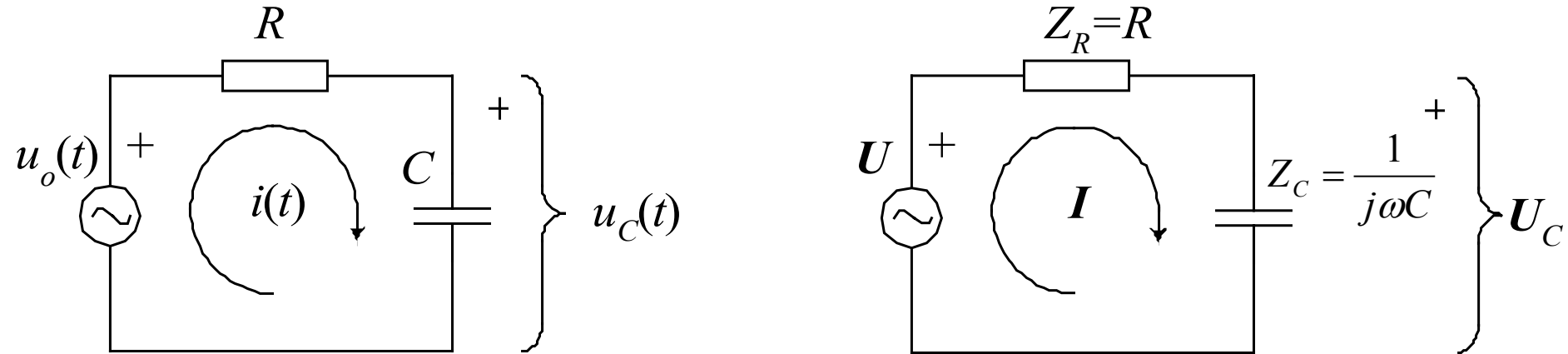
- Admitancije

$$Y_R = \frac{1}{R}$$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} \cdot e^{-j90^\circ} = \frac{1}{\omega L} \angle -90^\circ$$

$$Y_C = j\omega C = \omega C e^{j90^\circ} = \omega C \angle 90^\circ$$

- Primjer: Izračunati pomoću fazora napon $u_c(t)$ ako je $u_o(t) = U_m \cos(\omega t)$.



- U frekvencijskoj domeni primjenom fazora

$$U_C = \frac{U}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} U = \frac{U \angle -\arctg(\omega RC)}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

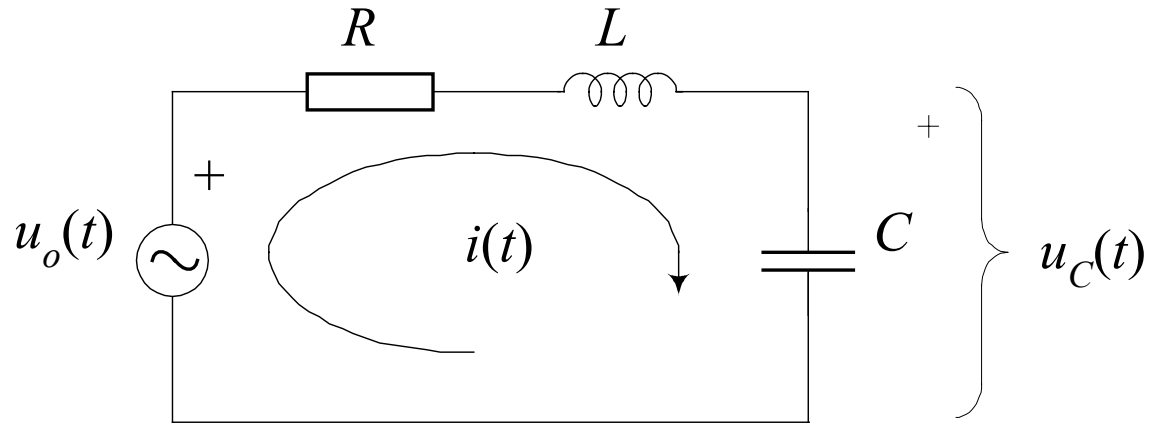
- Primjer: Za RLC krug na slici odrediti napon $u_C(t)$.

$$R = 2\Omega \quad L = 1H$$

$$C = 1F$$

$$u_0(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s}$$

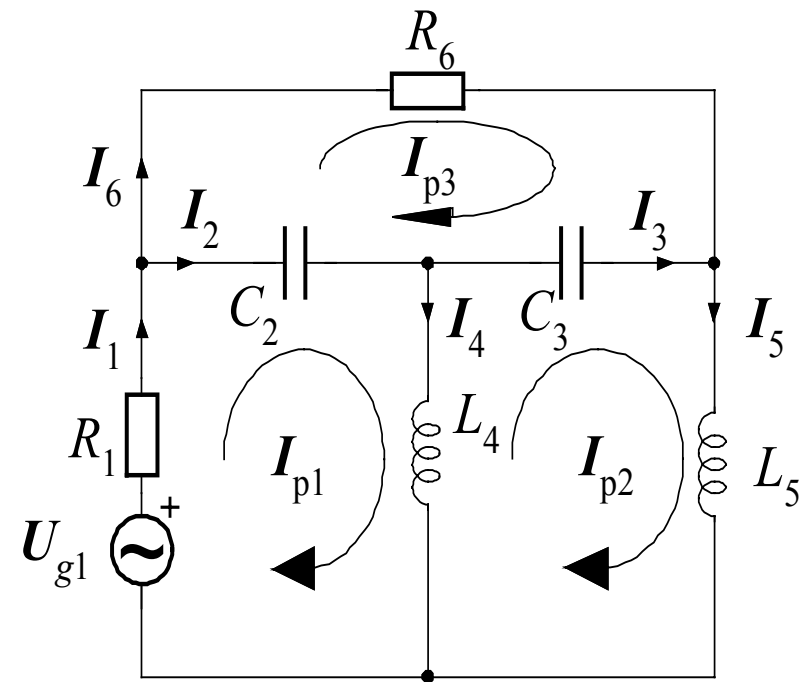
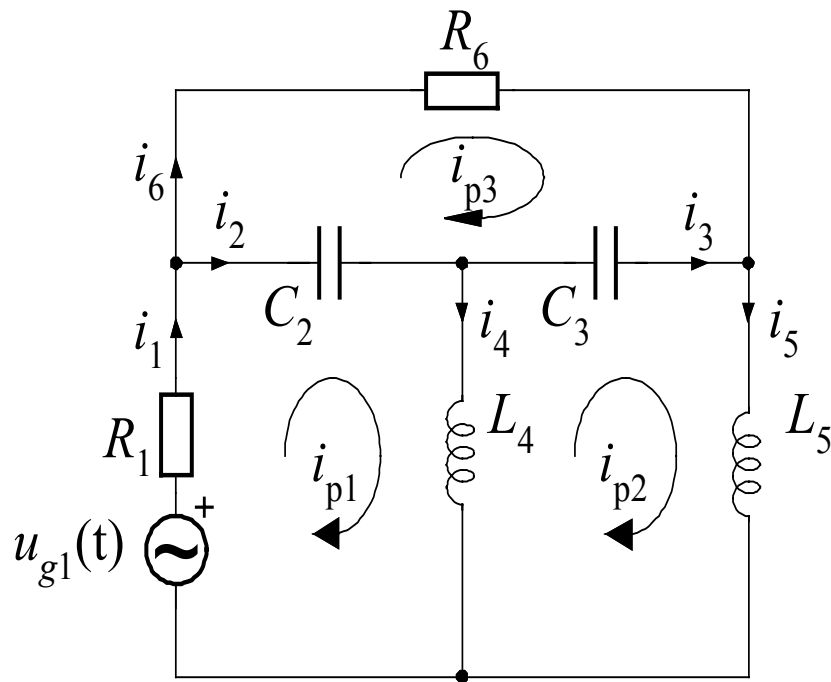


$$U_C = \frac{2 \cdot e^{j(\pi/4)}}{1 + 2j - 1} = \frac{2}{2j} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$U_C = 1 \cdot e^{-j \arctg(1)} = 1 \cdot e^{-j(\pi/4)} \quad \Rightarrow \quad u_C(t) = \cos(t - \pi/4)$$

- Jednadžbe krugova dobivene primjenom fazora imaju isti oblik kao i jednadžbe dobivene primjenom Laplaceove transformacije, uz napomenu:
 - početni uvjeti za napone i struje jednaki su nuli i
 - umjesto kompleksne varijable s kao varijabla se pojavljuje $j\omega$.

- Tako npr. za mrežu na slici, u slučaju da je $u_{g1}(t)$ stacionarna sinusna pobuda, sustav jednažbi petlji se može pisati u fazorskom obliku.



$$-U_{g1} + R_1 \mathbf{I}_{p1} + \frac{1}{j\omega C_2} (\mathbf{I}_{p1} - \mathbf{I}_{p3}) + j\omega L_4 (\mathbf{I}_{p1} - \mathbf{I}_{p2}) = 0$$

$$j\omega L_4 (\mathbf{I}_{p2} - \mathbf{I}_{p1}) + \frac{1}{j\omega C_3} (\mathbf{I}_{p2} - \mathbf{I}_{p3}) + j\omega L_5 \mathbf{I}_{p2} = 0$$

$$\frac{1}{j\omega C_2} (\mathbf{I}_{p3} - \mathbf{I}_{p1}) + R_6 \mathbf{I}_{p3} + \frac{1}{j\omega C_3} (\mathbf{I}_{p3} - \mathbf{I}_{p2}) = 0$$