LINIJE

2008./2009.

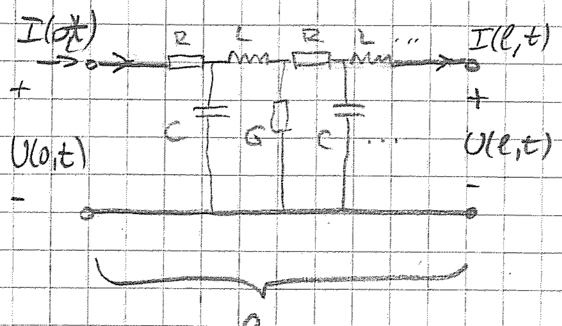
by LEFTWING

ZA POČETAK MALO TEORIJE:

1. → DO SADA SMO SE BAVILI ELEKTRIČNIM KRUGOVIMA S KONCENTRIRANIM ELEMENTIMA
   ⇒ TO ZNAČI DA ELEKTRIČNA SVOJSTVA ELEMENATA NE OVISE O NJIHOVIM DIMENZIJAMA TJ. SVAKA PROMJENA SIGNALA U 1 TOČKI UZROKUJE ISTOVREMENI ODZIV U SVIM TOČKAMA MREŽE

2. → NA VRLO VISOKIM FREKVENCIJAMA:
   - VALNA DULJINA SIGNALA MOŽE POSTATI SUMJERLJIVA S DIMENZIJAMA ELEMENTA
   ⇒ REZULTAT JE DA SIGNAL PUTUJE KROZ MREŽU KONAČNOM BRZINOM, DRUGIM RIJEČIMA NEMA TRENUTNOG ODZIVA, A U RAZLIČITIM TOČKAMA SUSTAVA SIGNAL IMA RAZLIČITE FAZE (TJ. MOŽE IMATI I RAZLIČITE VRIJEDNOSTI)

ELEKTRIČNA PRIJENOSNA LINIJA



⇒ ELEKTRIČNA PRIJENOSNA LINIJA JE ZAPRAVO PAR PARALELNIH, MEĐUSOBNO IZOLIRANIH VODIČA

→ SVAKA JE LINIJA ODREĐENA SVOJIM PRIMARNIM PARAMETRIMA

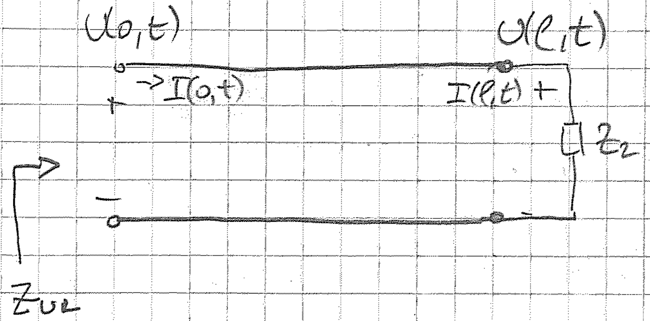
R → otpor

C → kapacitet

G → vodljivost

L → induktivitet

$\left.\begin{matrix} R \\ C \\ G \\ L \end{matrix}\right\}$ PO JEDINICI DULJINE



- SVAKA LINIJA IMA I SVOJE KARAKTERISTIČNE PARAMETRE (KOJI SE IZRAŽAVAJU PREKO PRIMARNIH PARAMETARA R, C, G, L)

1. VALNA ILI KARAKTERISTIČNA IMPEDANCIJA

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}}}$$

2. FAKTOR PRIJENOSA (PROPAGACIJE)

$$\boxed{\gamma = \sqrt{(R+sL)(G+sC)}}$$

$s \to j\omega$

$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta}$ → KOMPLEKSNI BROJ

α - KARAKTERISTIČNI FAKTOR GUŠENJA

β - KARAKT. FAKT. FAZE

⇒ S OBZIROM DA KOD LINIJA DOLAZE VALNA SVOJSTVA SIGNALA DO IZRAŽAJA, A KAD SPOMINJEMO VALOVE, MORAMO SPOMENUTI I REFLEKSIJU

⇒ DAKLE SIGNAL PUTUJE PO LINIJI (VODU), DOĐE DO KRAJA (TJ. ZAKLJUČENJA LINIJE) I DIO SE REFLEKTIRA NAZAD

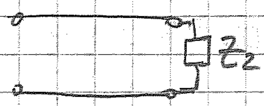
⇒ KOLIKI JE TAJ DIO KOJI SE REFLEKTIRA ?

O TOME NAM GOVORI <u>FAKTOR REFLEKSIJE</u>

PA TAKO IMAMO:

1. FAKTOR REFLEKSIJE NA IZLAZU

$$\boxed{\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}}$$



- koji govori koliki dio se vraća s izlaza na ulaz

$Z_2 \rightarrow$ impedancija kojom je zaključen izlaz

$Z_0 \rightarrow$ karakteristična impedancija linije

2. FAKTOR REFLEKSIJE NA ULAZU

$$\boxed{\Gamma_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}}$$

- koji govori koliki dio se vraća od ulaza prema izlazu (val koji je već reflektiran na izlazu sad putuje prema ulazu i tamo se opet reflektira)

FORMULE KOJE SE ČESTO KORISTE U ZADACIMA

$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta}} \quad (\gamma = \alpha + j\beta) \qquad \boxed{\lambda = \frac{v}{\beta}}$$

valna duljina

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$$

- MISLIM DA SU IZVODI NEPOTREBNI

KARAKTERISTIČNI SLUČAJEVI KOD LINIJA:

1. LINIJA BEZ GUBITAKA:

$$R = 0$$
$$G = 0$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R+sL)(G+sC)} = \sqrt{s^2LC} = s\sqrt{LC}$$

=> ako imamo sinusnu pobudu

$$s = j\omega$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \qquad (\text{a isto tako } \gamma = \alpha + j\beta)$$

$$\boxed{j\beta = j\omega\sqrt{LC}}$$

ČESTO POTREBNO U ZADACIMA

2. LINIJA BEZ DISTORZIJE

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$ $\Rightarrow$ uvjet za ostvarenje linije bez distorzije

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}} \qquad \gamma = \underbrace{\sqrt{RC}}_{\alpha} + \underbrace{j\omega\sqrt{LC}}_{\beta}$$

IZRAZI ZA NAPON I STRUJU NA MJESTU X

$$U(x,t) = U(0,t)\,ch(\gamma x) - Z_0 I(0,t)\,sh(\gamma x)$$

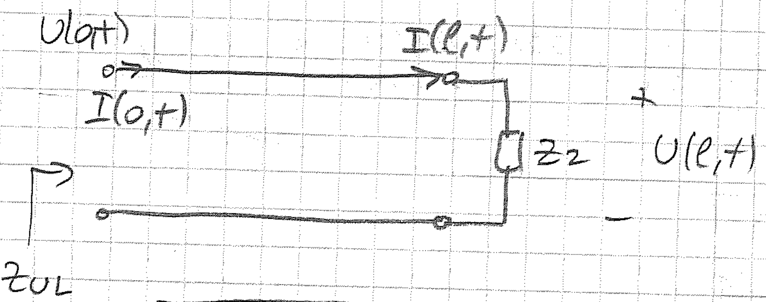
$$I(x,t) = \frac{U(0,t)}{Z_0}\,sh(\gamma x) + I(0,t)\,ch(\gamma x)$$

IZRAZI ZA NAPON I STRUJU NA POČETKU LINIJE

$$U(0,t) = U(l,t)\,ch(\gamma \cdot l) + Z_0 I(l,t)\,sh(\gamma \cdot l)$$

$$I(0,t) = \frac{U(l,t)}{Z_0}\,sh(\gamma l) + I(l,t)\,ch(\gamma l)$$

$l \Rightarrow$ udaljenost od početka



$$\boxed{Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)}} \qquad \boxed{Z_2 = \frac{U(l,t)}{I(l,t)}}$$

ulazna impedancija
$\Rightarrow$ omjer napona i struje na ulazu u liniju

$\Rightarrow$ omjer napona i struje na kraju linije

PRIMJERI:

① ZADANA JE LINIJA BEZ GUBITAKA SA PRIM. PARAMETRIMA: $L = 4\,mH/km$, $C = 8\,nF/km$.

a) KOLIKO NAJMANJE MORA BITI DUGA OVA LINIJA DA KOD $\omega = 10^6\,rad/s$ ULAZNA IMPEDANCIJA BUDE Ø KAD JE SUPROTNI KRAJ OTVOREN!

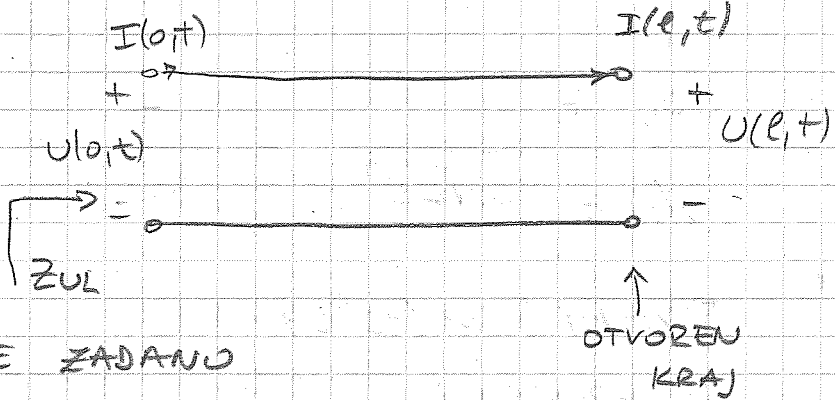
b) KOLIKI SU $U(0,t)$, $I(l,t)$, $U(l,t)$ NA TOJ LINIJI AKO JE $I(0,t) = 5\cos(10^6 t) = ?$

a) LINIJA BEZ GUBITAKA =>

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}$$

$\gamma = s\sqrt{LC}$, ali kako je sinusna pobuda zadana



-> UVJETOM ZADATKA JE ZADANO

$$Z_{UL} = 0$$

-> napon/struja na početku

$$\Rightarrow Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)} = \frac{U(l,t)\,ch(\gamma l) + Z_0 I(l,t)\,sh(\gamma l)}{\frac{U(l,t)}{Z_0}\,sh(\gamma l) + I(l,t)\,ch\,\gamma(l)}$$

=> KOLIKA JE $I(l,t)$?? => LINIJA NIJE ZATVORENA, PREMA TOME, $I(l,t) = 0$

$$\Rightarrow Z_{UL} = \frac{\cancel{U(l,t)}\,ch(\gamma l)}{\frac{\cancel{U(l,t)}}{Z_0}\,sh(\gamma l)} = Z_0\frac{ch(\gamma l)}{sh(\gamma l)}$$

$$Z_{UL} = Z_0 \frac{ch(\gamma l)}{sh(\gamma l)}$$ i mora biti $= 0$

$$Z_0 \frac{ch(\gamma l)}{sh(\gamma l)} = 0$$ $\Rightarrow$ kada je zadovoljeno ??

kada je brojnik $= 0$

$$ch(\gamma l) = 0$$

$$ch(j\omega\sqrt{LC} \cdot l) = 0$$ $\rightarrow$ budući da vrijedi

$$\cos \omega\sqrt{LC} \cdot l = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} ch\, j\beta &= \cos\beta \\ sh\, j\beta &= j\sin\beta \end{aligned}}$$

$$\omega\sqrt{LC} \cdot l = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\text{periodičnost}}_{}$$

zanemarimo ju tj. $k = 0$, da bi dobili minimalnu duljinu

$$ch\,x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{\pi}{2\omega\sqrt{LC}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = 0{,}277\ km = 277\ m$$

b)

$$I(0,t) = 5\cos(10^6 t)$$

$\hookrightarrow$ FAZORSKI $\quad I(0,t) = 5\angle 0^\circ$

$$U(l,t) = \underbrace{U(0,t)}_{=?}\, ch(\gamma l) - Z_0 I(0,t)\, sh(\gamma l)$$

ALI POGLEDAJMO UVJET ZADATKA

$$Z_{UL} = 0 \Rightarrow Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)}$$

$\hookrightarrow$ znamo da je $I(0,t) \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{U(0,t) = 0}$$

$$U(l,t) = -Z_0\, I(0,t)\, sh(\gamma l)$$

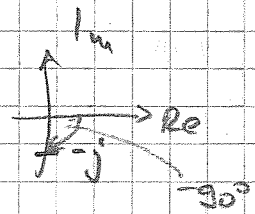
kad se uvrste vrij. $\gamma l = j\frac{\pi}{2}$

$$= -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot 5\angle 0^\circ \cdot sh\left(j\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot 5\angle 0^\circ \cdot j\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$$

$$= -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot -5\angle 0^\circ \cdot j = -5 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 10^8}\cdot j =$$

$$= \frac{5\cdot 10^3}{\sqrt{2}}(-j) = \underbrace{\frac{5\cdot 10^3}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ}_{\text{fazor}}$$



$$\boxed{U(l,t) = \frac{5\cdot 10^3}{\sqrt{2}}\cos(10^6 t - 90^\circ)}$$

$I(l,t)=0$ → ranije već zaključeno

② LINIJA BEZ GUBITAKA s $L = 0{,}8\,mH/km$, $C = 80\,nF/km$ DULJINE $l = \frac{\lambda_0}{4}$. NA ULAZU JE SPOJEN GENERATOR ULAZNOG OTPORA R_g, A LINIJA JE ZAKLJUČENA OTPOROM $R_2 = 1\,k\Omega$. KOD FREKVENCIJE $\omega_0 = 10^5\,rad/s$ TREBA ULAZNA IMPEDANCIJA BITI PRILAGOĐENA NA R_g. KOLIKO IZNOSI R_g?

KOLIKO JE DUGA LINIJA?

$U(l,t)$, $I(l,t) = ?$ AKO JE $u_g = 4\cos(\omega_0 t)$

Rješenje:

LIN. BEZ. GUBITAKA

$$\left.\begin{array}{l} R=0 \\ G=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 100\,\Omega \\ \gamma = j\underbrace{\omega\sqrt{LC}}_{\beta} = j\beta \end{array}$$

PREMA RANIJE DANOM IZRAZU $\Rightarrow$

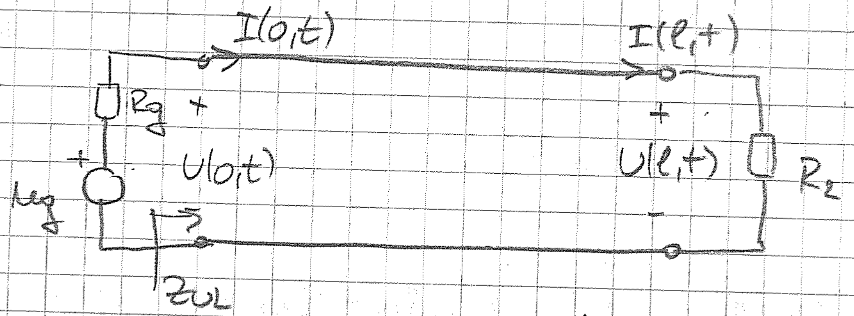
$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}$$

A UVJETOM ZADATKA $l = \frac{\lambda_0}{4}$

$$\Rightarrow l = \frac{\pi}{2\omega\sqrt{LC}} = 2m$$

$$\boxed{l = 2m}$$

NAŠA LINIJA IZGLEDA OVAKO:



$$\Rightarrow Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)} = \left(\begin{array}{c}\text{omjer napona i} \\ \text{struje na početku}\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Uvrstimo izraze za $U(0,t)$ i $I(0,t)$

$$Z_{UL} = \frac{U(l,t)\,ch(\gamma l) + Z_0\, I(l,t)\, sh(\gamma l)}{\frac{U(l,t)}{Z_0} sh(\gamma l) + I(l,t)\, ch(\gamma l)} =$$

$$= \frac{\cancel{I(l,t)}\left(\frac{U(l,t)}{I(l,t)} \cdot ch(\gamma l) + Z_0\, sh(\gamma l)\right)}{\cancel{I(l,t)}\left(\frac{U(l,t)}{I(l,t)} \cdot \frac{1}{Z_0}\, sh(\gamma l) + ch(\gamma l)\right)}$$

$\Rightarrow$ UOČIMO DA JE $\frac{U(l,t)}{I(l,t)} = R_2$

$\Rightarrow$

$$Z_{UL} = \frac{R_2\, ch(\gamma l) + Z_0\, sh(\gamma l)}{\frac{R_2}{Z_0}\, sh(\gamma l) + ch(\gamma l)}$$

$\gamma \cdot l = j\frac{\pi}{2}$ → kad se uvrste zadane vrij. i izračunati l

$$Z_{UL} = \frac{R_2\, ch(j\frac{\pi}{2}) + Z_0\, sh(j\frac{\pi}{2})}{\frac{R_2}{Z_0}\, sh(j\frac{\pi}{2}) + ch(j\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \frac{R_2 \overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0} + Z_0 j \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}}{\frac{R_2}{Z_0} j \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} + Z_0 j \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}}$$

$$= \frac{\cancel{j} Z_0}{\cancel{j}\frac{R_2}{Z_0}} \Rightarrow Z_{UL} = \frac{Z_0^2}{R_2} = \frac{100^2}{1000} = 10\,\Omega$$

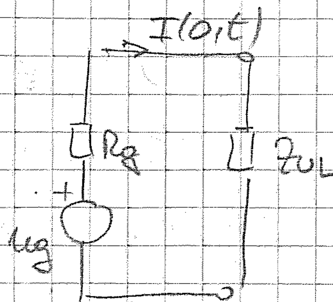
$$\boxed{Z_{UL} = 10\,\Omega}$$

KOLIKI JE R_g?

UVJET PRILAGOĐENJA ZNAČI

$$R_g = Z_{UL} \Rightarrow \boxed{R_g = 10\,\Omega}$$

$$U(l,t) = \underbrace{U(0,t)\, \underbrace{ch(\gamma l)}_{0}}_{0} - Z_0 I(0,t)\, sh(\gamma l)$$



$$U(l,t) = -Z_0 I(0,t)\, j \sin\frac{\pi}{2} = -j Z_0 I(0,t)$$

$$U(l,t) = -j Z_0 \cdot \frac{U_g}{R_g + Z_{UL}} = \ldots = 20\angle{-90^\circ}$$

$$I(0,t) = \frac{u_g}{R_g + Z_{UL}}$$

$$u(l,t) = 20\cos(\omega_0 t - 90^\circ)\ [V]$$

$$I(l,t) = \frac{U(0,t)}{Z_0} sh(\gamma l) + \underbrace{\overset{0}{I(0,t)\, ch(\gamma l)}}_{0}$$

$$I(l,t) = \frac{U(0,t)}{Z_0} sh(\gamma l) =$$

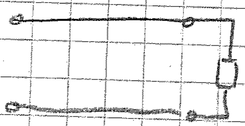
$$= I(0,t) \cdot Z_{UL} \frac{sh(\gamma l)}{Z_0}$$

$$= \ldots = \frac{U_g}{2} \cdot \frac{1}{Z_0} \cdot j = -j \frac{1}{50}$$

$$\boxed{I(l,t) = 0{,}02 \cos(\omega_0 t - 90^\circ)}$$

NAPOMENA:

1. KADA JE LINIJA ZAKLJUČENA VLASTITOM KARAKT. IMPEDANCIJOM => NEMA REFLEKTIRANOG VALA, ZAŠTO?



$$\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = 0$$

faktor refleksije

dolazni

$$u_r = \Gamma_2 \cdot u_d$$

reflektirani

$$\boxed{u_r = 0}$$

(OVO SE ČESTO POJAVLJUJE U ZADACIMA)

2. AKO JE LINIJA ZAKLJUČENA VLASTITOM IMPEDANCIJOM $Z_2 = Z_0$ => TADA JE NJENA ULAZNA IMPEDANCIJA

$$\boxed{Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)} = Z_0}$$