Električni krugovi

Rješenja jednadžbi krugova

Rješenja jednadžbi krugova

▪Diferencijalne jednadžbe

U svakom opisanom sustavu jednadžbi:

neovisni $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{naponski izvori} \\ \textbf{strujni izvori} \end{array} \right\}$ $\Longrightarrow$ **poticaj ili pobuda**

Struja ili napon neke grane $\Longrightarrow$ **odziv kruga**

- Postavljanjem jednadžbi:
  - **petlji**
  - **čvorova**
  - **rezova**

sistem integrodiferencijalnih jednadžbi 1.reda

- **Deriviranjem**

- Sistem od *n* lin. dif. jed. 0.-2. reda s *n*-nepoznanica

Rješenja jednadžbi krugova

- Obično se traži rješenje samo za 1 nepoznanicu

- Metodom eliminacije:

- 1 diferencijalna jednadžba *n*-tog reda s 1 nepoznanicom

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_0 x$$

- Opći oblik linearne diferencijalne jednadžbe n-toga reda

$x(t) \longrightarrow$ poznata vremenska funkcija $\rightarrow$ pobuda

$y(t) \rightarrow$ nepoznata funkcija vremena $\rightarrow$ odziv

$\left.\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ b_1, b_2, \ldots, b_m \end{matrix}\right\} \rightarrow$ poznate konstante karakteristične za promatranu mrežu

- Svaki $y \rightarrow$ koji zadovoljava jednadžbu:

  RJEŠENJE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

- Pretpostavka $\rightarrow$ $y_n(t) \rightarrow$ rješenje jednadžbe
- Provjera $\rightarrow$ uvrštenjem u jednadžbu.

$$a_n \frac{d^n y_n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_n}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y_n = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_0 x$$

- Ako je lijeva strana jednaka desnoj $\rightarrow y_n(t)$ je rješenje.

- ***Homogena diferencijalna jednadžba***

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = 0$$

- Rješenje $y(t) = y_h(t)$ → rješenje homogene dif. jed.

- Ako je $y_n(t)$ rješenje nehomogene dif. jed., tada je njeno rješenje i

$$y(t) = y_h(t) + y_n(t)$$

- Suma svih mogućih rješenja → OPĆE RJEŠENJE

$y_h(t) \rightarrow$ sadrži n nedefiniranih konstanti

↓

Određuju se iz općeg rješenja

<u>OPĆE RJEŠENJE</u> dif. jed.

rješenje homogene $y_h(t)$
(komplementarno rješenje)

posebno rješenje $y_n(t)$
(partikularni integral)

$y_h(t) \rightarrow$ ***slobodni odziv***.

$y_n(t) \rightarrow$ ***prisilni odziv***
ima oblik kao i ***pobuda***.

- Homogena diferencijalna jednadžba

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

- Rješenja homogene dif. jednadžbe su oblika $y(t) = A \cdot e^{st}$
- Uvrštenjem u homogenu dif. jed.

$$a_n A s^n e^{st} + a_{n-1} A s^{n-1} e^{st} + \ldots + a_0 A e^{st} = 0 \;\; /:\left(Ae^{st}\right)$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

- → ***karakteristična jednadžba homogene dif. jed.***
- → n rješenja za s: ⟶ $s_1, s_2, \ldots, s_n$

- Ako su sva rješenja međusobno različita,
- → rješenje homogene diferencijalne jednadžbe je

$$y_h(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t} + \ldots + A_n \cdot e^{s_n t}$$

⬇

- Konstante A_1, A_2,..., A_n → iz općeg rješenja.
- Komplementarno rješenje → ne sadrži pobudu $x(t)$.
- → ovisi o elementima mreže, a ne o pobudi.

- Rješenja karakteristične jednadžbe: $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$
- → određuju oblik rješenja homogene dif. jed.
- → ovise samo o elementima kruga i nazivaju se

vlastitim ili prirodnim frekvencijama kruga.

- **Vlastite ili prirodne frekvencije kruga**
- Određuju valni oblik slobodnog odziva.
- Korijeni karakteristične jednadžbe s_i mogu biti

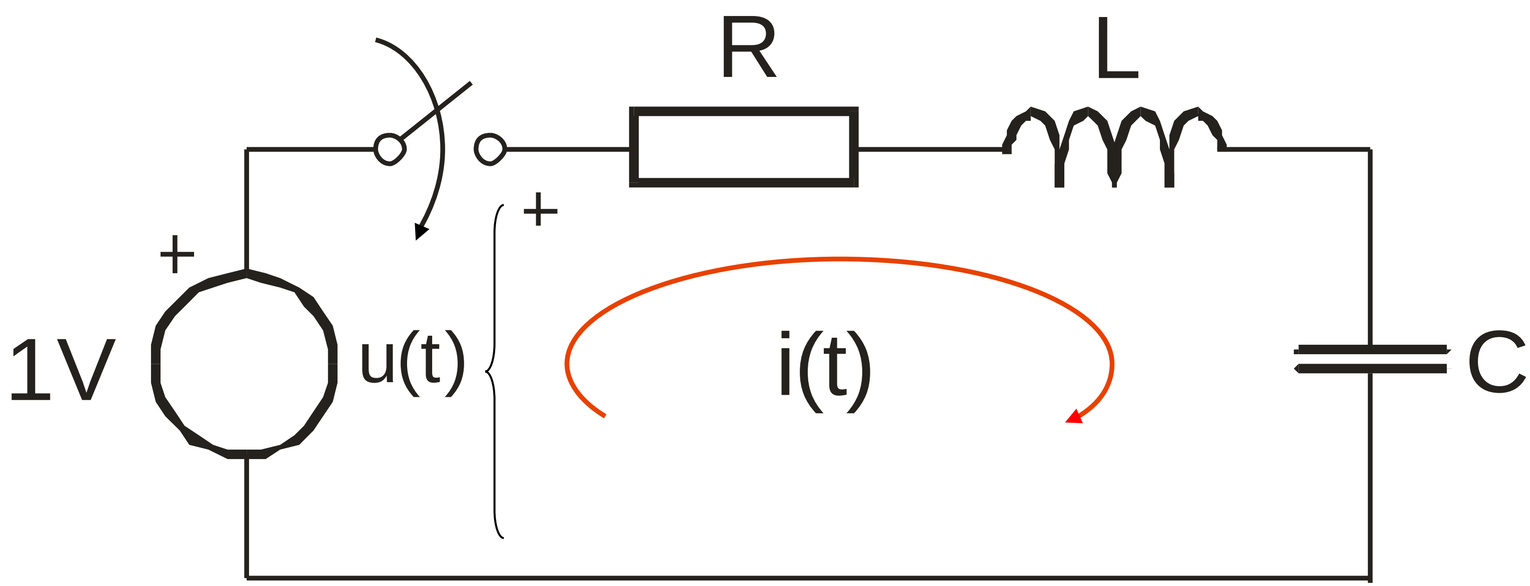
  realni, kompleksni ili imaginarni.

- Realni korijeni su uvijek negativni
- Kompleksni korijeni imaju:
  - negativni realni dio
  - konjugirano kompleksni par
- Imaginarni korijeni mogu biti samo jednostruki

- konstante $A_1,..., A_n$ → iz općeg rješenja
  → iz početnih uvjeta: $u_C(0)$ i $i_L(0)$
- Ovisne o:
  - početnim uvjetima, pobudnim funkcijama i elementima mreže.

Partikularni integral ili prisilni odziv
→ rješavanjem nehomogene dif. jed. poznatim metodama, npr. metodom neodređenih koeficijenata.

Primjer: RLC krug



$$R = 3\Omega$$

$$L = 1H$$

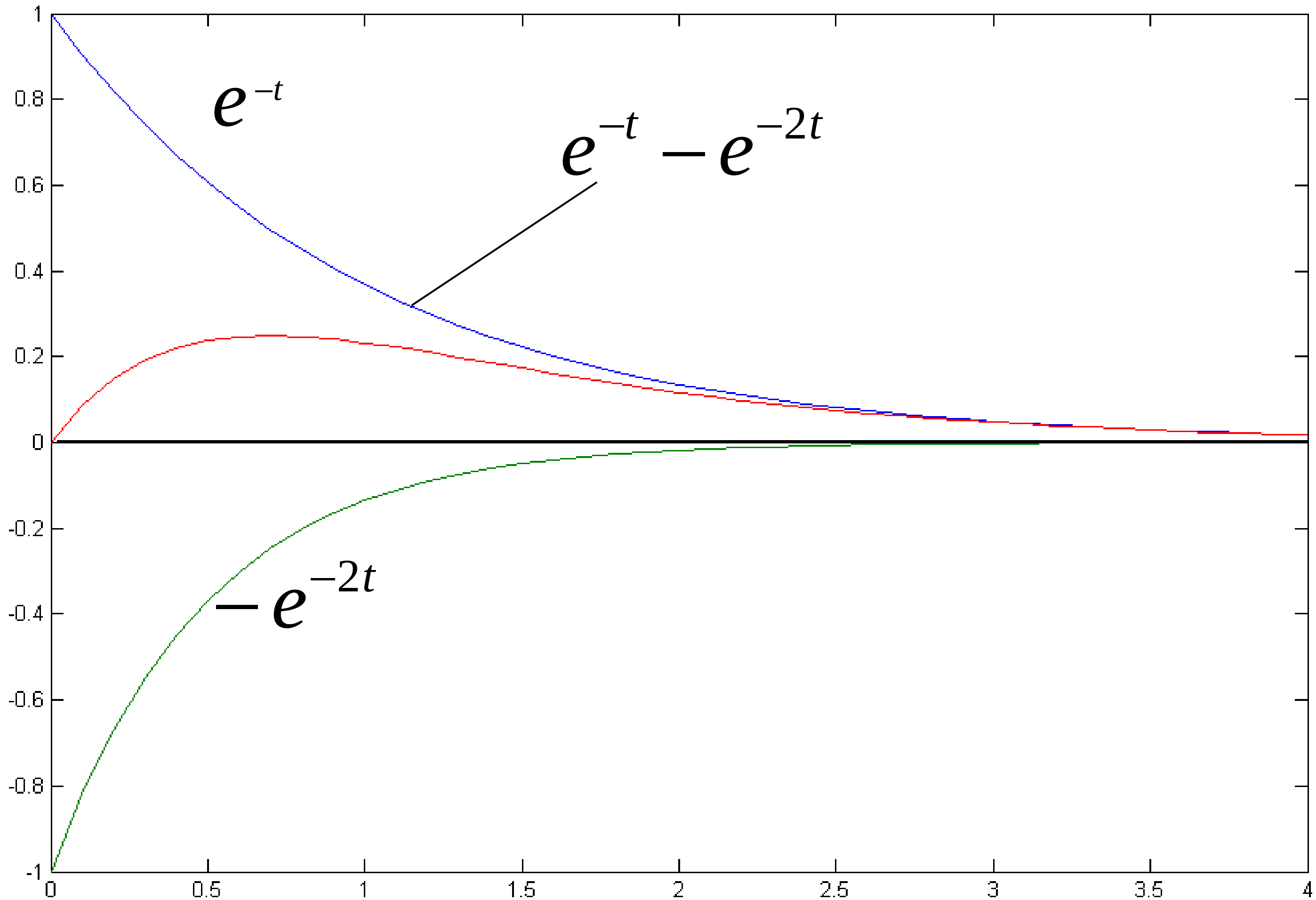
$$C = 0.5F$$

$$i_L(0) = 0$$

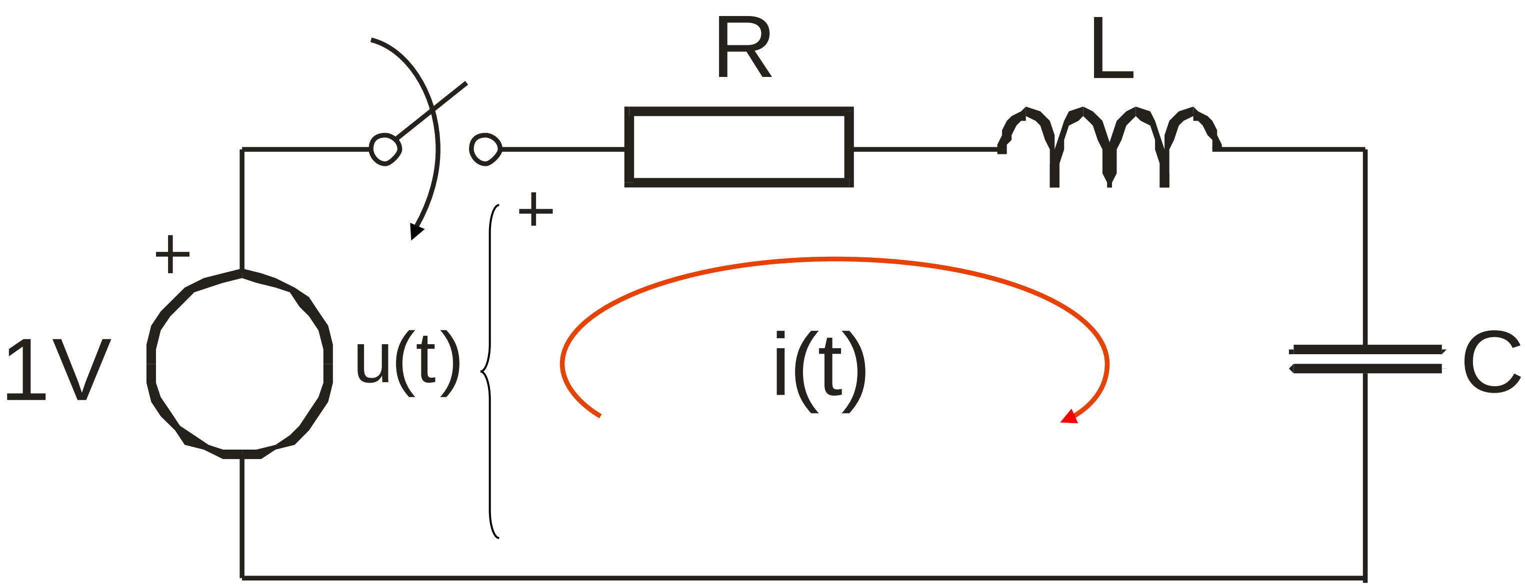
$$u_C(0) = 0$$

$$i(t) = ?$$

- Rješenje: $$i(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)S(t)$$



Primjer 2: isti krug s R=2Ω

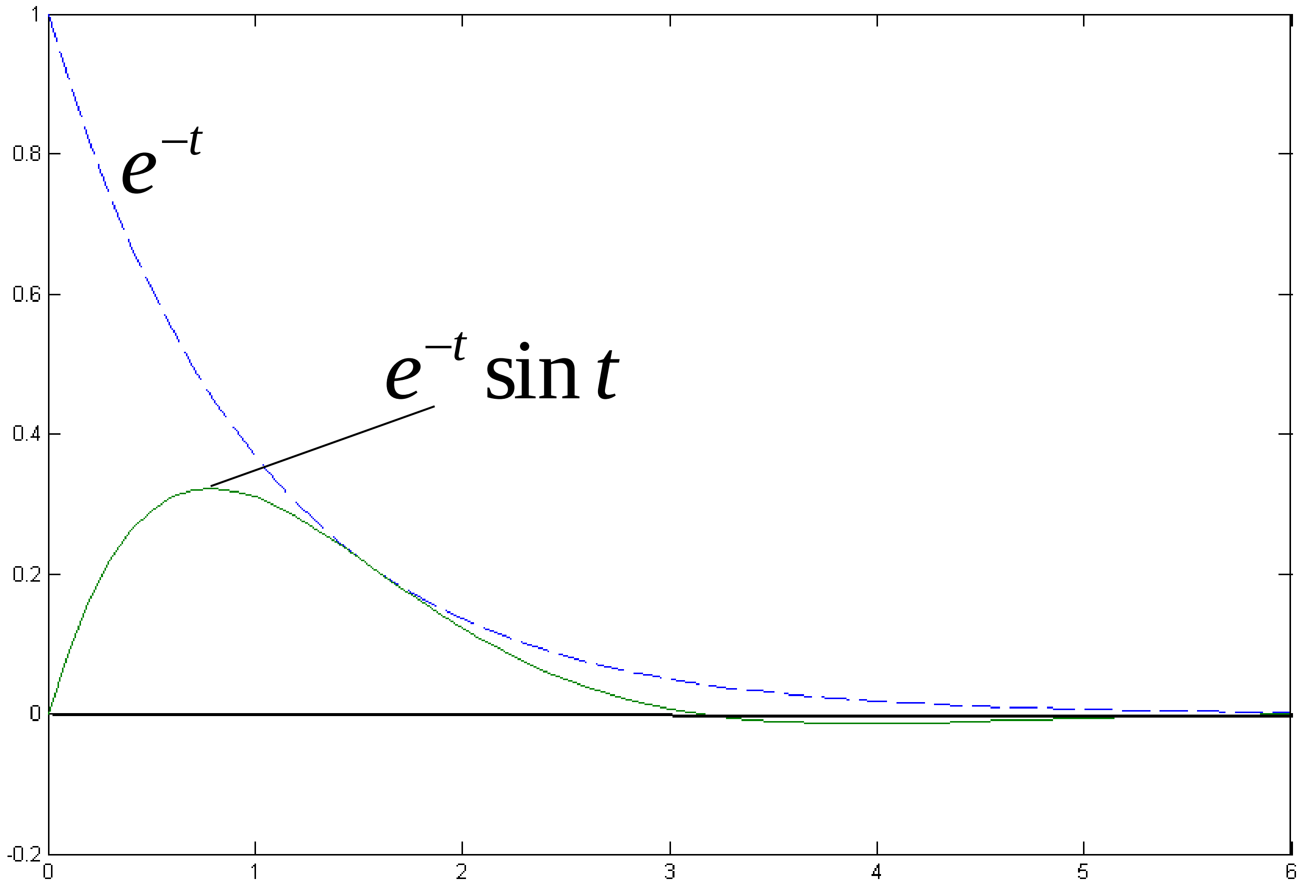


$$R = 2\Omega$$
$$L = 1H$$
$$C = 0.5F$$
$$i_L(0) = 0$$
$$u_C(0) = 0$$

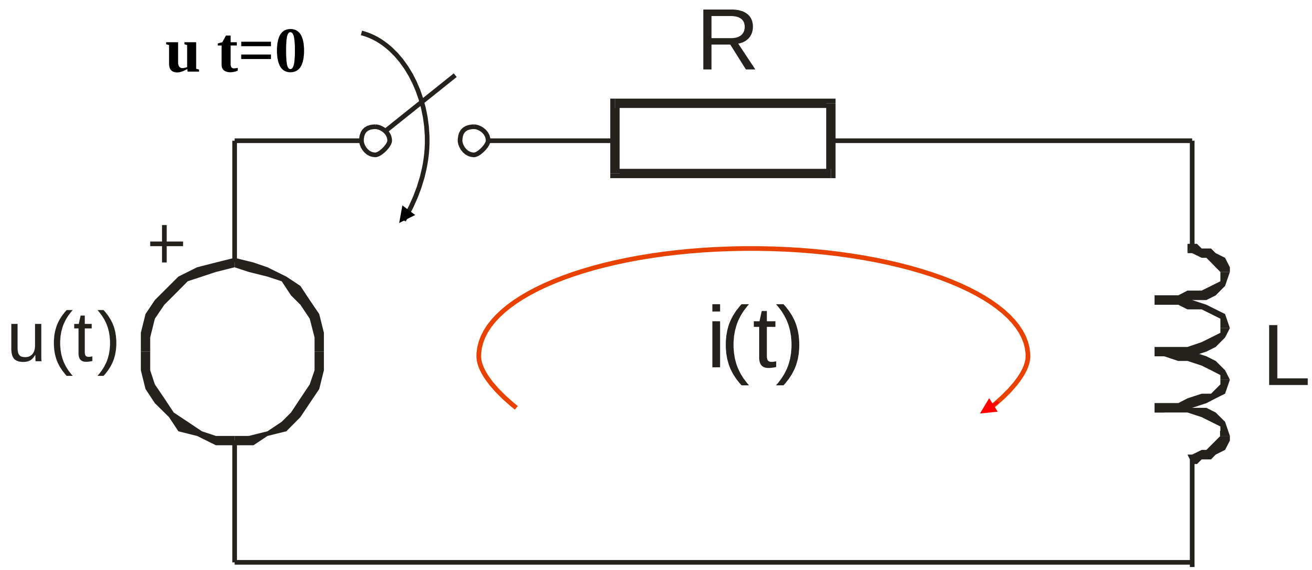
$$i(t) = ?$$

Rješenje:

$$i(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{2j}e^{jt} - \frac{1}{2j}e^{-jt}\right) = e^{-t}\sin t\, S(t)$$



Primjer 3: RL krugova



$$u(t) = V \sin \omega t$$

$$i_L(0) = 0$$

$$i(t) = ?$$

Rješenje:

$$\boxed{i(t)=\frac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left[-\sin\varphi\cdot e^{-\frac{R}{L}t}+\sin(\omega t+\varphi)\right]}$$

▪Primjena L-transformacije u rješavanju krugova

- Ulazno izlazni odnos neke mreže
- → opći slučaj je diferencijalne jednadžbe

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_0 x$$

- Primjenom L-transformacije:

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right]=Y(s)$$
$$\mathcal{L}\left[dy(t)/dt\right]=sY(s)-y(0)$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{L}\left[d^n y(t)/dt^n\right]=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$$

$$a_n\left(s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-\ldots\right)+a_{n-1}\left(s^{n-1}Y(s)-s^{n-2}y(0)-\ldots\right)+\ldots+a_0Y(s)=$$
$$=b_m\left(s^mX(s)-s^{m-1}x(0)-s^{m-2}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}-\ldots\right)+\ldots+b_0X(s)$$

- Pretpostavka →svi početni uvjeti jednaki su nuli.

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0\right) X(s)$$

- Formiramo funkciju

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$P(s)$ i $Q(s) \rightarrow$ polinomi kompleksne varijable s

$a_i, b_i \rightarrow$ realni koeficijenti

- To je funkcija mreže ili funkcija sistema
- Njome je u potpunosti definiran odnos odziva i poticaja

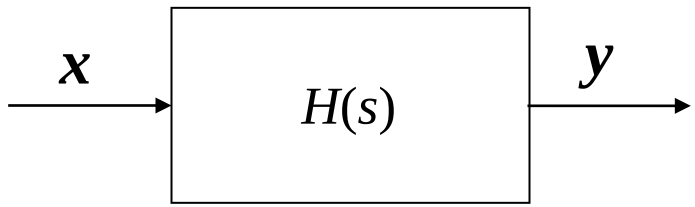
- H(s)→ racionalna funkcija kompleksne varijable *s*
- Odziv mreže je u potpunosti definiran ovom funkcijom

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \cdot X(s)$$

- Za slučaj da su početni uvjeti ≠ 0

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \cdot X(s) + \frac{D(s)}{Q(s)}$$

- Odziv mreže na pobudu $x(t)$



$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

- Produkt dviju funkcija u frekvencijskoj domeni

- U vremenskoj domeni to je konvolucija

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

- Za slučaj kad je $x(t)=\delta(t)$ → Diracova δ-funkcija

$$X(s) = 1$$

odziv je

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = H(s) \cdot 1$$

- U vremenskoj domeni

$$y(t) = h(t)$$ → jedinični ili impulsni odziv mreže

- Funkcija mreže $H(s)$ je Laplaceova transformacija odziva mreže na Diracov δ-impuls.

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}$$

$$H(s)=k\frac{(s-s_{01})(s-s_{02})\cdots(s-s_{0m})}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})\cdots(s-s_{pn})}=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-s_{0i})}{\prod_{j=1}^{n}(s-s_{pj})}$$

$$s_{0i}=\sigma_{0i}+j\omega_{0i}$$

$s_{0i}\rightarrow$ nule funkcije mreže

$s_{pj}\rightarrow$ polovi funkcije mreže

$\Big\}$ realni ili kompleksni (konjugirano kompleksni parovi)

$$s_{pj}=\sigma_{pj}+j\omega_{pj}$$

- Odziv mreže $y(t)$ → razvojem $Y(s)$ u parcijalne razlomke
  1. Ako je $m > n$ → podijeliti $P(s)$ sa $Q(s)$ tako da se dobije

$$Y(s) = P_1(s) + \frac{P_2(s)}{Q(s)}$$

$P_1(s) \rightarrow$ polinom

$P_2(s) \rightarrow$ polinom čiji je stupanj niži od stupnja $Q(s)$

Odziv sistema koji odgovara $P_1(s)$ su δ funkcije i njene derivacije

2.Ostatak funkcije $H(s)$ → u parcijalne razlomke

$$\frac{P_2(s)}{Q(s)} = \frac{k_1}{s - s_{p1}} + \frac{k_2}{s - s_{p2}} + \ldots + \frac{k_n}{s - s_{pn}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s - s_{pi}}$$

- U vremenskoj domeni svakom članu sume odgovara eksponencijalna funkcija.

- Odziv ovisi o polovima funkcije
- Mogući su različiti oblici odziva $Y(s)$
- Neka npr. suma u gornjem izrazu sadrži član oblika

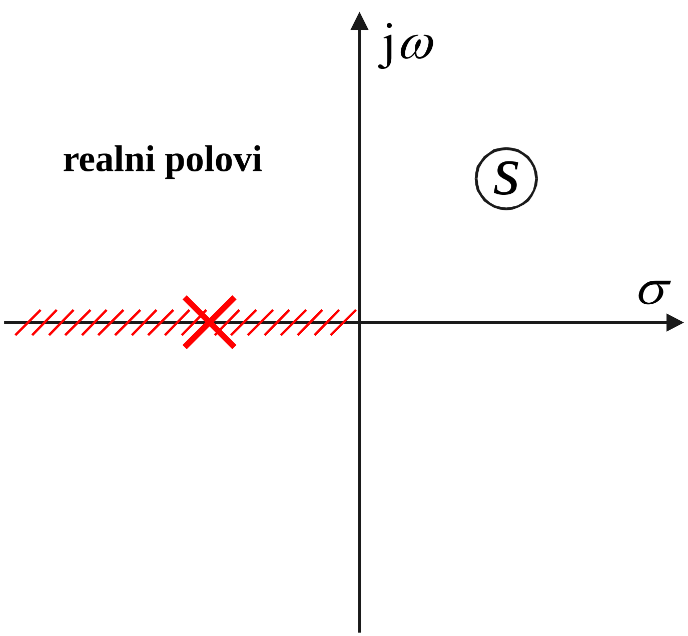
$$Y_i(s) = \frac{k_i}{s - \sigma_{pi}} \qquad s_{pi} = \sigma_{pi} \rightarrow \text{ realni pol}$$

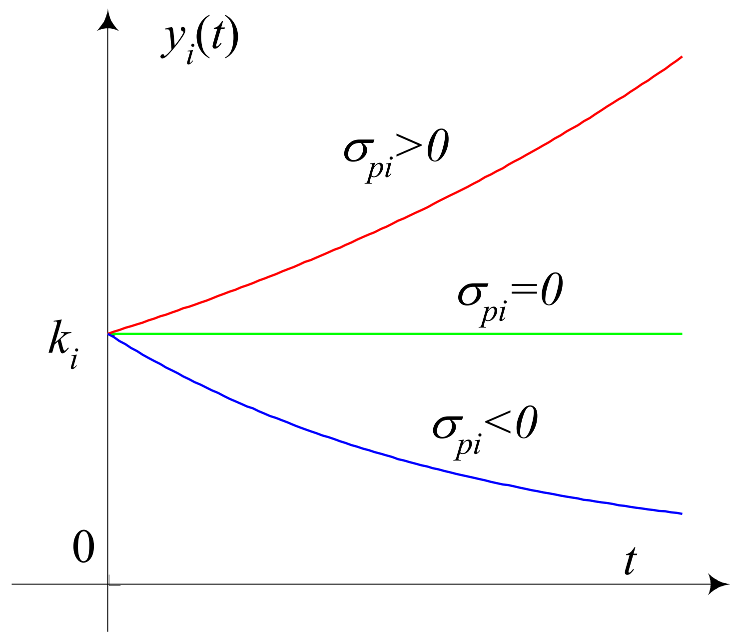
Transformacijom u vremensku domenu dobiva se

$$Y_i(s) = \frac{k_i}{s - \sigma_{pi}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_i}{s - \sigma_{pi}}\right] = k_i \cdot e^{\sigma_{pi} \cdot t}$$

$$y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_i}{s-\sigma_{pi}}\right] = k_i \cdot e^{\sigma_{pi} \cdot t}$$

- Da bi ova funkcija bila stabilna mora biti: $\sigma_{pi}<0$.



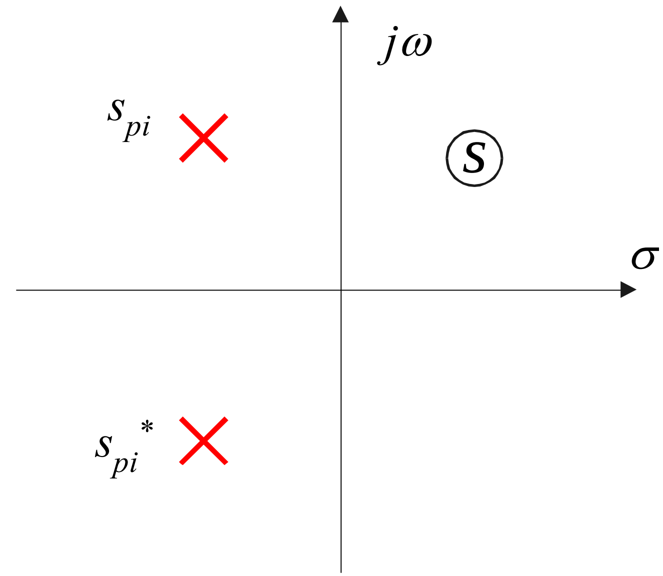


Za $\sigma_{pi}=0$ odziv je step funkcija.

- Za slučaj da je neki pol s_{pi} kompleksan,

$$s_{pi} = \sigma_{pi} + j\omega_{pi}$$

uvijek postoji njegov konjugirano kompleksni par



$$s_{pi}^{*} = \sigma_{pi} - j\omega_{pi}$$

- U tom se slučaju u sumi pojavljuje izraz oblika

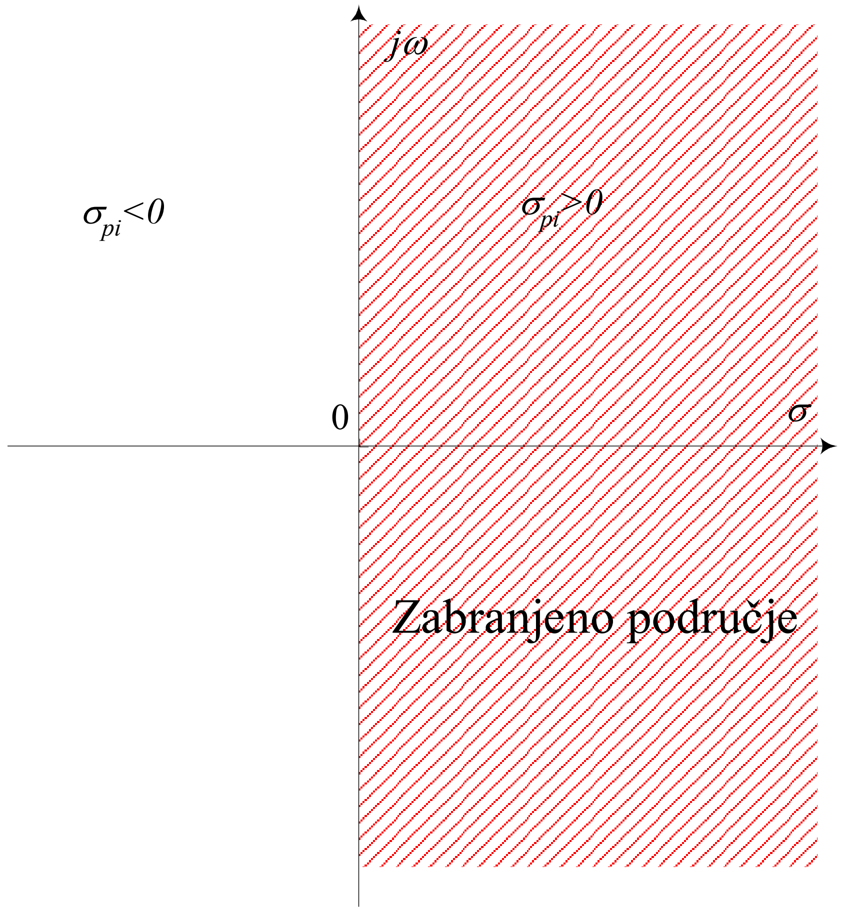
$$Y_i(s) = \frac{k_i}{s - \sigma_{pi} - j\omega_{pi}} + \frac{k_i}{s - \sigma_{pi} + j\omega_{pi}}$$

- Sređivanjem se dobiva

$$Y_i(s) = k_i \frac{s-\sigma_{pi} + \cancel{j\omega_{pi}} + s - \sigma_{pi} - \cancel{j\omega_{pi}}}{(s-\sigma_{pi})^2 + \omega_{pi}^2} = 2k_i \frac{s-\sigma_{pi}}{(s-\sigma_{pi})^2 + \omega_{pi}^2}$$

$$y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[2k_i \frac{s-\sigma_{pi}}{(s-\sigma_{pi})^2 + \omega_{pi}^2}\right] = 2k_i \cdot e^{\sigma_{pi}\cdot t} \cdot \cos\omega_{pi}t$$

- Za stabilan odziv mora biti ispunjeno $\sigma_{pi} \leq 0$

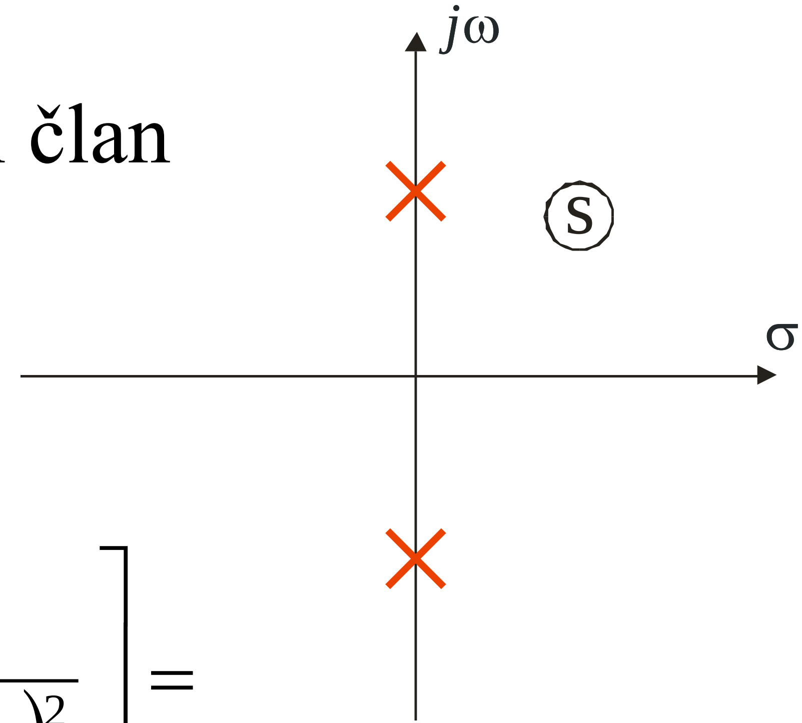


Za slučaj $\sigma_{pi} = 0 \rightarrow$ **oscilatorni odziv**

Višestruki pol na jω-osi

- Za taj slučaj u sumi će postojati član

$$Y(s)=\frac{k_i}{(s-j\omega_i)^2}+\frac{k_i}{(s+j\omega_i)^2}$$



pa je

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_i}{(s+j\omega_{pi})^2}+\frac{k_i}{(s-j\omega_{pi})^2}\right]=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[k_i\frac{2(s^2-\omega_{pi}^2)}{(s^2+\omega_{pi}^2)^2}\right]=2k_i\cdot t\cdot\cos\omega_0 t$$

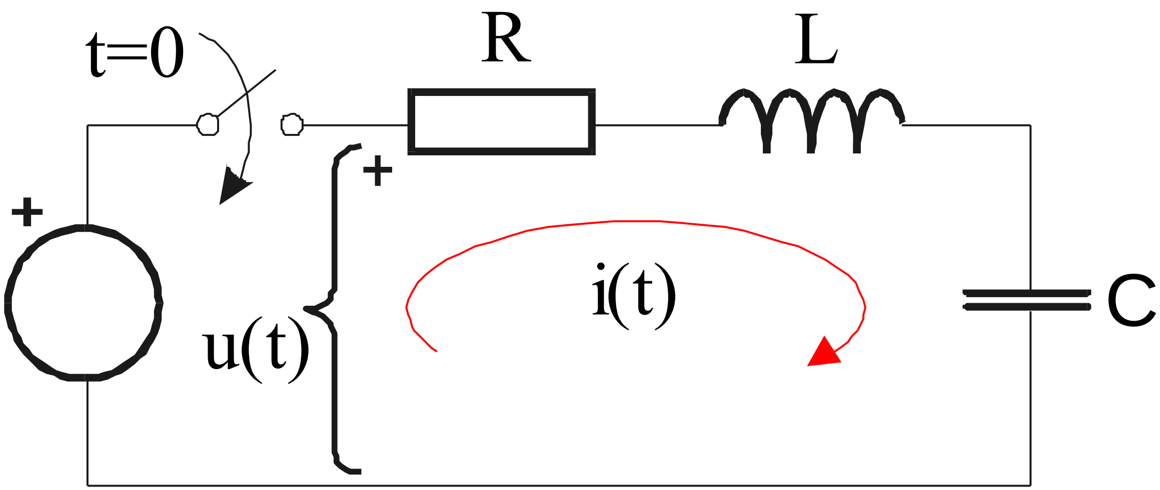
- Amplituda teži u ∞ → nestabilan odziv→ nije dozvoljen

- Moguće je zaključiti:

  Funkcije mreže:

  - racionalna funkcija kompleksne varijable “s” s realnim koeficijentima
  - polovi funkcije $H(s)$ ne smiju biti desnoj poluravnini
  - polovi na jω osi ne smiju biti višestruki

Primjer: RLC-krug



u(t)=S(t)

$$R = 3\Omega$$

$$L = 1H$$

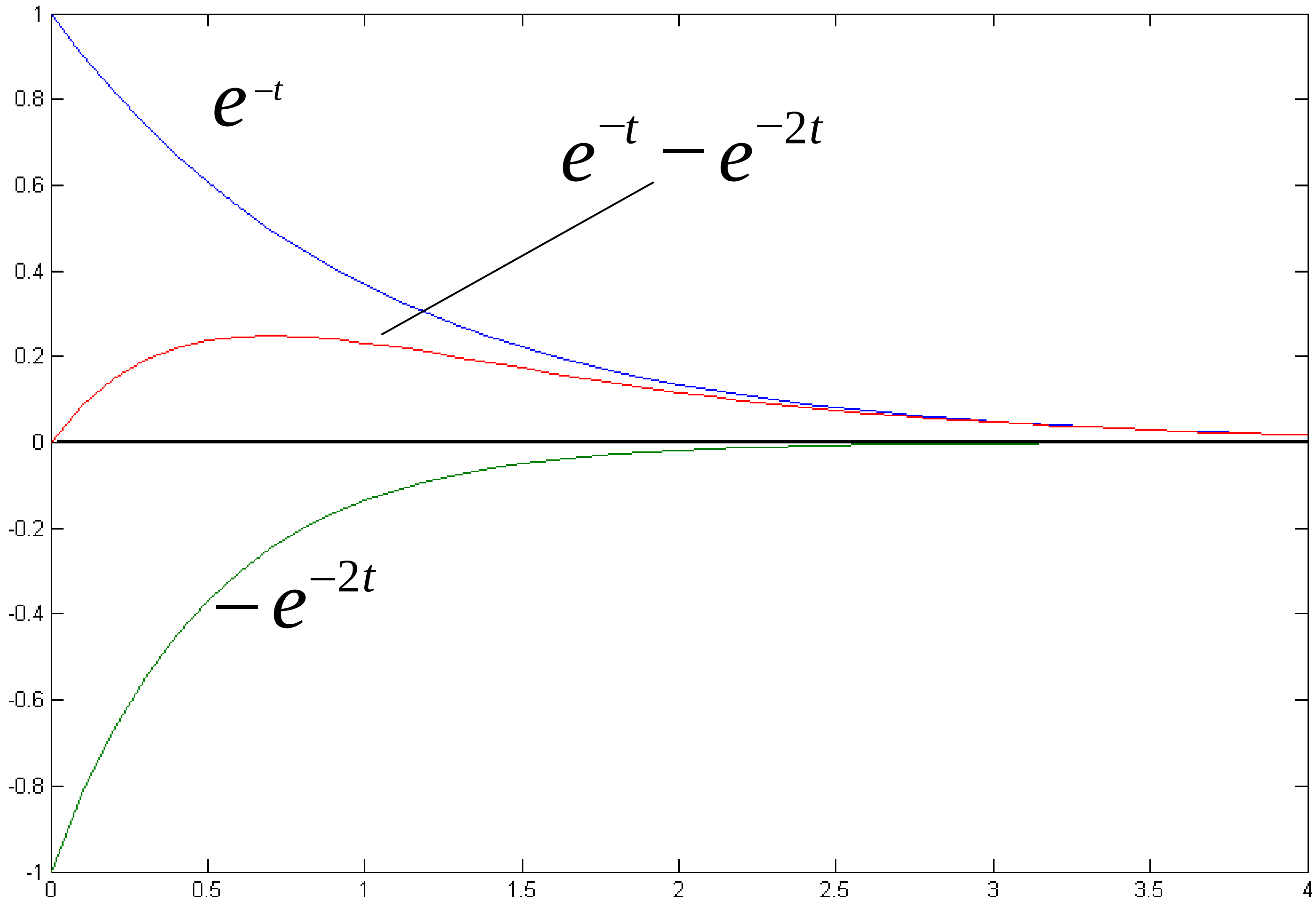
$$C = 0.5F$$

$$i_L(0) = 0$$

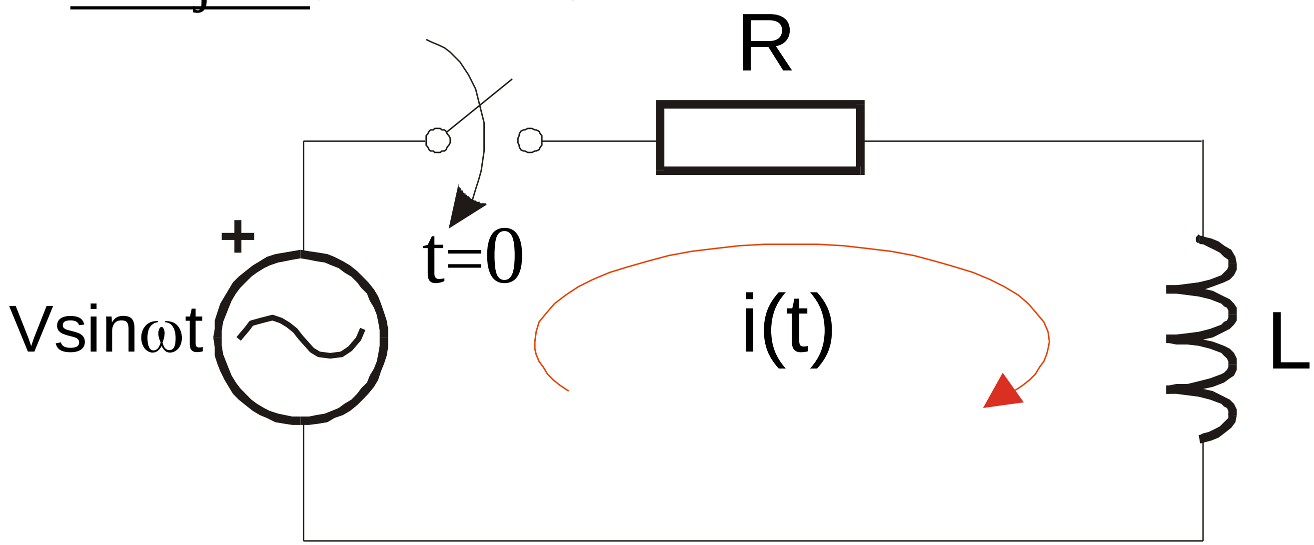
$$u_C(0) = 0$$

Rješenje:

$$\boxed{i(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)S(t)}$$



Primjer 2: RL mreža



$$u(t) = V \sin \omega t \cdot S(t)$$

$$i_L(0) = 0$$

$$I(s) \cdot R + sL \cdot I(s) = U(s)$$

Rješenje:

$$i(t) = \frac{V\omega}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot \left(-L\cos(\omega t) + \frac{R}{\omega}\sin(\omega t) + e^{-\frac{R}{L}t} \right) S(t)$$