Električni krugovi

Električni filtri

Električni filtri

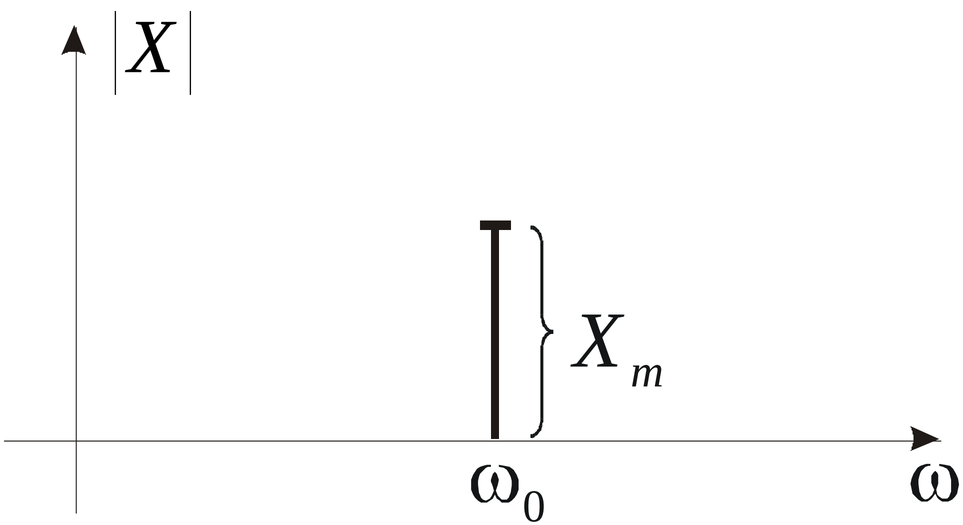
- Električni filtar je električni krug koji mijenja amplitudu i fazu frekvencijskih komponenti signala
- Svaki signal sadrži konačan ili beskonačan broj frekvencijskih komponenti
- Frekvencijske komponente → stacionarni sinusni signali
- Filtar neke komponente guši, a druge propušta

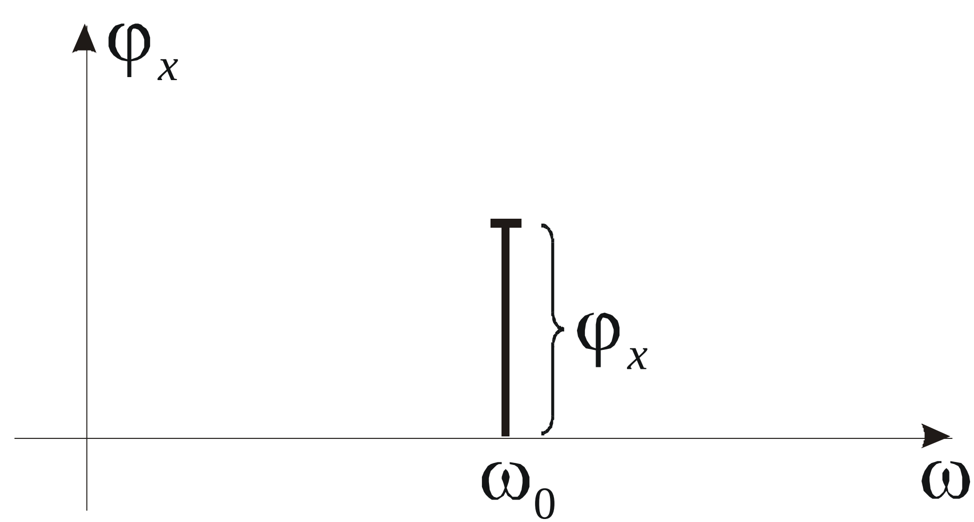
- Primjer: signal $x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_x) = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{X} \cdot e^{j\omega_0 t}\right]$

sadrži jednu frekvencijsku komponentu

$\boldsymbol{X} = X_m e^{j\varphi_x}$ ⟹ Fazor sinusnoga signala

Amplitudu i fazu te komponente je moguće prikazati kao funkcije frekvencije ω





Svaka linija → jedna frekvencijska komponenta signala

- Primjer: x(t) → pobuda , a y(t) → odziv električnoga kruga

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t)$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \\ y(t) &= Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi_y) \end{aligned}\right\}$$ stacionarni sinusni signali

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= X_m e^{j\varphi_x} \\ \boldsymbol{Y} &= Y_m e^{j\varphi_y} \end{aligned}\right\}$$ Fazori

- $H(s) \Longrightarrow H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

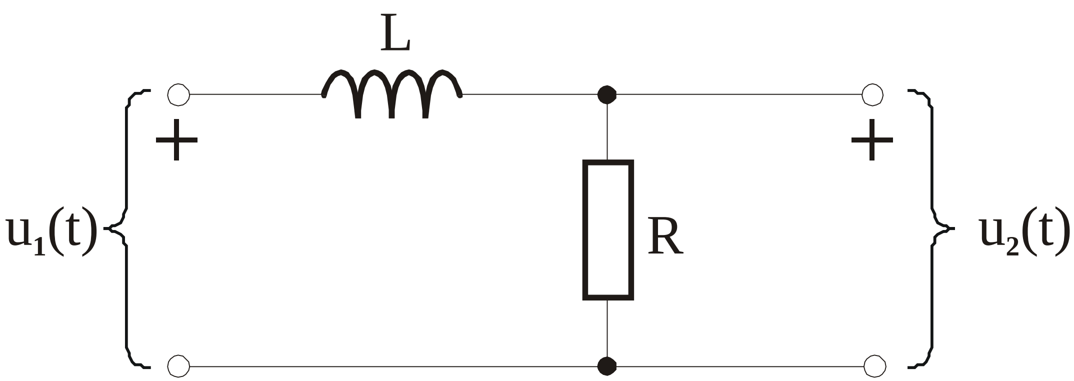
Odnos fazora odziva i pobude:

$$\boldsymbol{Y} = H(j\omega) \cdot \boldsymbol{X} \Longrightarrow \begin{cases} Y_m = |H(j\omega)| X_m \\ \varphi_y = \varphi(\omega) + \varphi_x \end{cases}$$

Ako je $|H(j\omega)| \approx 1 \rightarrow \quad Y_m \approx X_m$

Ako je $|H(j\omega)| \approx 0 \rightarrow \quad Y_m \approx 0$

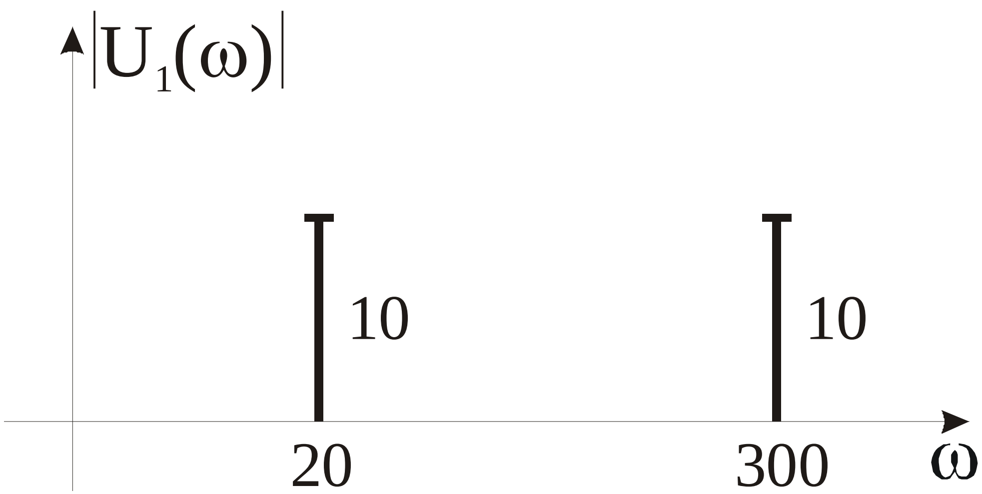
<u>Primjer</u>: Pobuda $u_1(t) = 10\cos 20t + 10\cos 300t$ (stacionarno)
djeluje na RL mrežu na slici

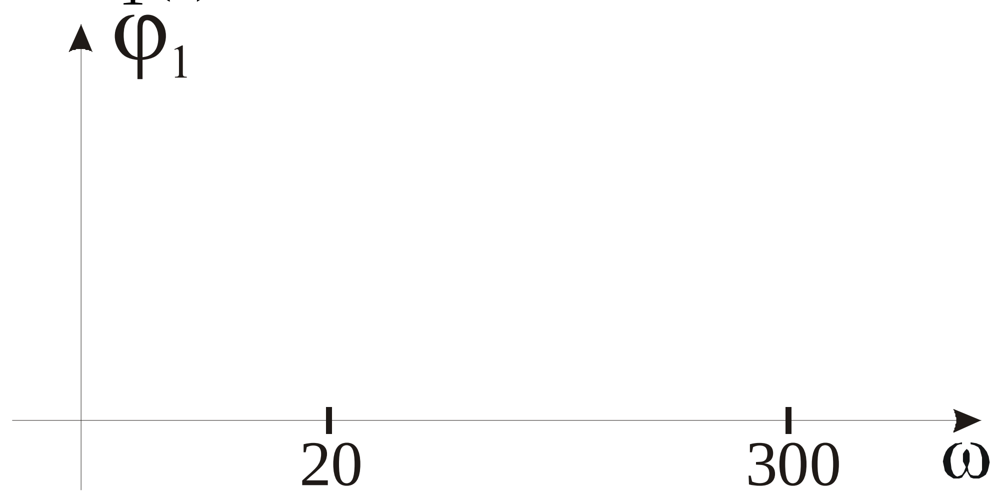


$$R = 8\Omega$$

$$L = 0,2\,H$$

Frekvencijske komponente napona $u_1(t)$ su:





Prijenosna funkcija

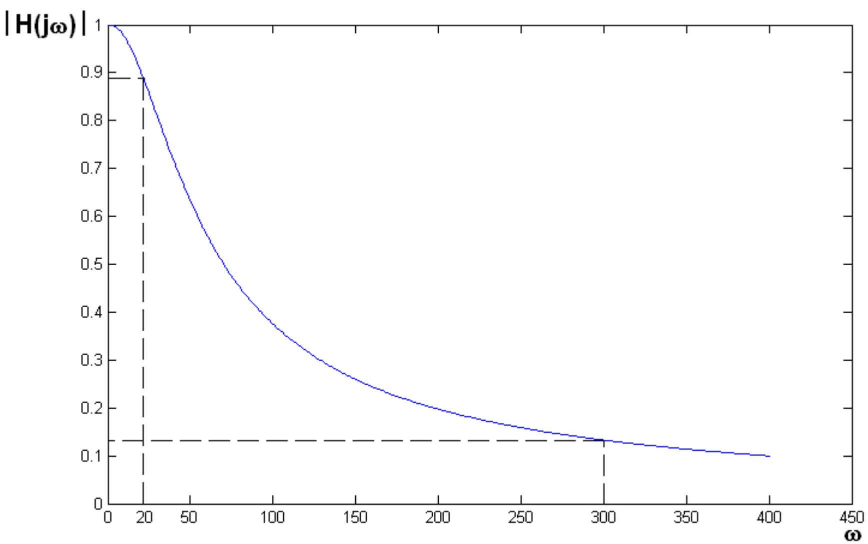
$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{R}{sL+R}=\frac{40}{s+40}$$

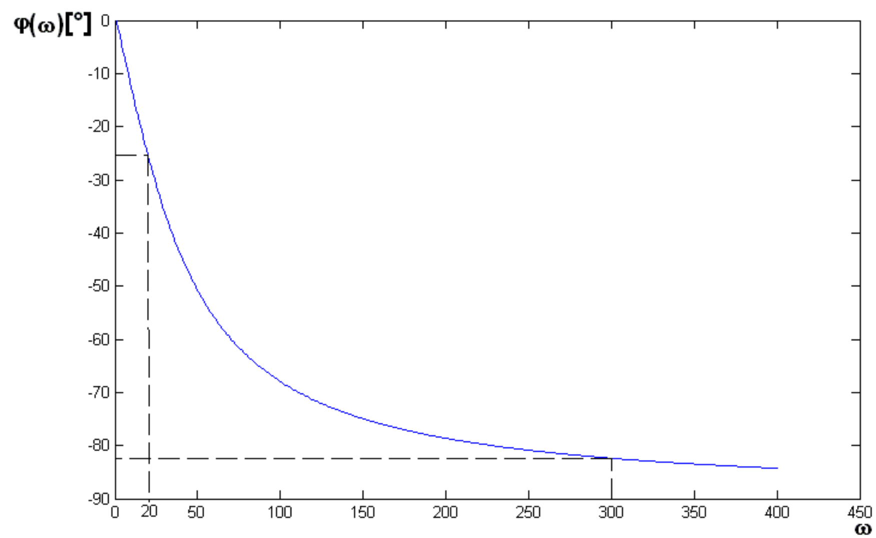
- Stacionarna sinusna pobuda → s=jω

$$H(j\omega)=\frac{R/L}{j\omega+R/L}=\frac{40}{j\omega+40}$$

$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{40}{\sqrt{\omega^2+1600}}$$

$$\varphi(\omega)=\angle H(j\omega)=-arctg\frac{\omega}{40}$$

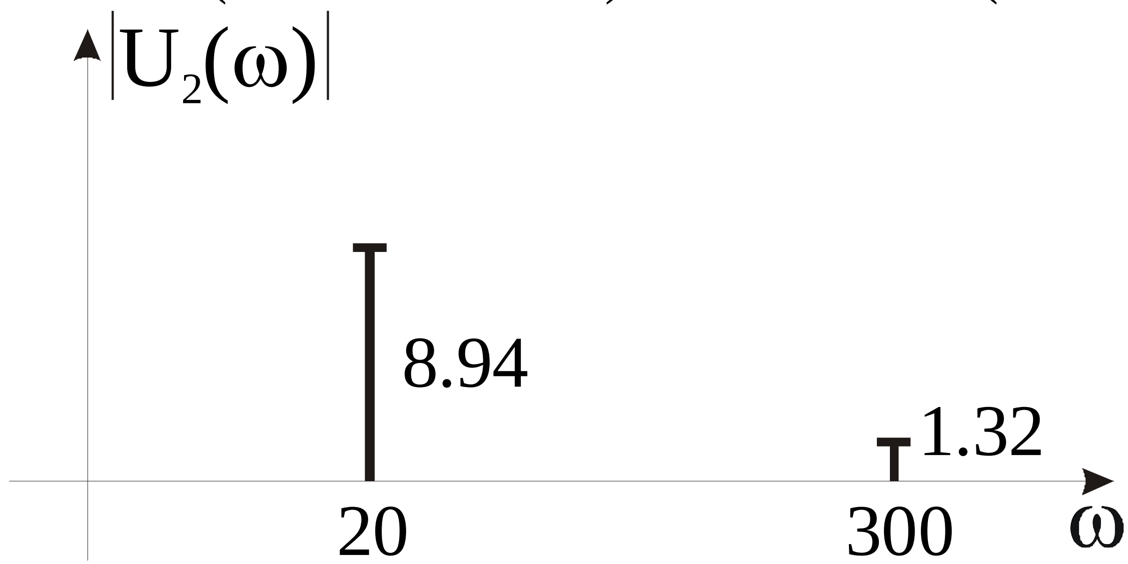




$$\left|H(j20)\right| = 0.894 \qquad \varphi(20) = -26.6°$$

$$\left|H(j300)\right| = 0.132 \qquad \varphi(300) = -82.4°$$

$$u_2(t) = 8.94\cos(20t - 26.6°) + 1.32\cos(300t - 82.4°)$$



RL krug djeluje kao ***filtar*** jer neke frekvencijske komponente signala propušta na izlaz, a neke guši.

Frekvencijske karakteristike

Najvažniji podatak o filtru daje frekvencijska karakteristika.

amplitudno frekvencijska karakteristika

$$a(\omega) = |H(j\omega)|$$

fazno frekvencijska karakteristika

$$\varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$$

- Filtri su frekvencijski selektivni krugovi.
- To su u pravilu četveropoli → krugovi s 2 prilaza.

- Svojstva filtra određuje prvenstveno amplitudna karakteristika
- Filtar djeluje na frekvencijska svojstva signala tako da
  - propušta neke frekvencijske komponente signala na izlaz,
  - guši druge komponente i ne propušta ih na izlaz.
- Koje će komponente biti propuštene, ovisi o frekvenciji.
- Razlikujemo dva područja frekvencija:
  - Područje frekvencija signala koji su propušteni na izlaz
    - ***Pojas ili područje propuštanja filtra*** **($|H(j\omega)| \approx 1$)**
  - Područje frekvencija signala koji nisu propušteni
    - ***Pojas ili područje gušenja filtra*** **($|H(j\omega)| \approx 0$)**

Tipovi filtara

- Obzirom na to koje frekvencijske komponente signala su propuštene a koje ne, postoje

↓

4 tipa filtara

1) Niskopropusni (NP)
2) Visokopropusni (VP)
3) Pojasno propusni (PP)
4) Pojasna brana (PB)

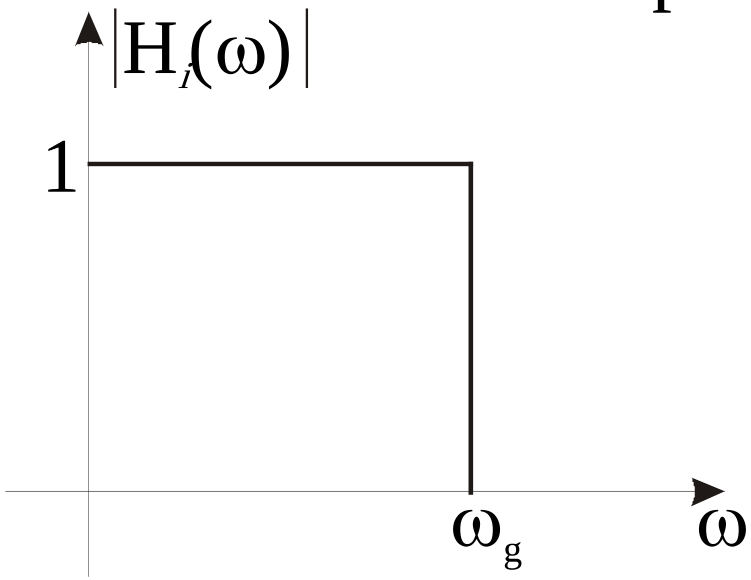
1) Niskopropusni filtar (NP)

- NP filtar propušta signale čije frekvencijske komponente su u području $\omega<\omega_g$ i guši signale za koje je $\omega>\omega_g$.

Područje propuštanja NP filtra $0<\omega<\omega_g$

Područje gušenja NP filtra $\omega_g<\omega<\infty$

Idealni NP filtar ima amplitudnu karakteristiku prema slici

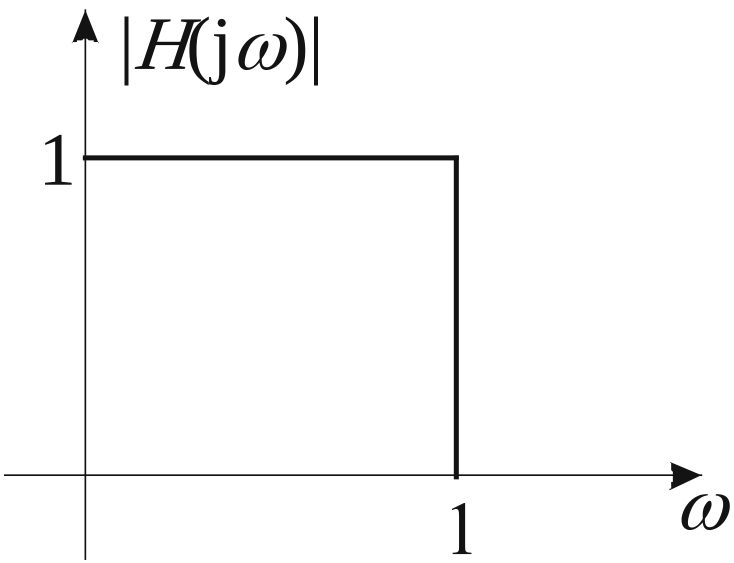


$$|H_i(j\omega)|=\begin{cases}1 & za\ \omega<\omega_g\\ 0 & za\ \omega>\omega_g\end{cases}$$

$\omega_g \rightarrow$ granična frekvencija

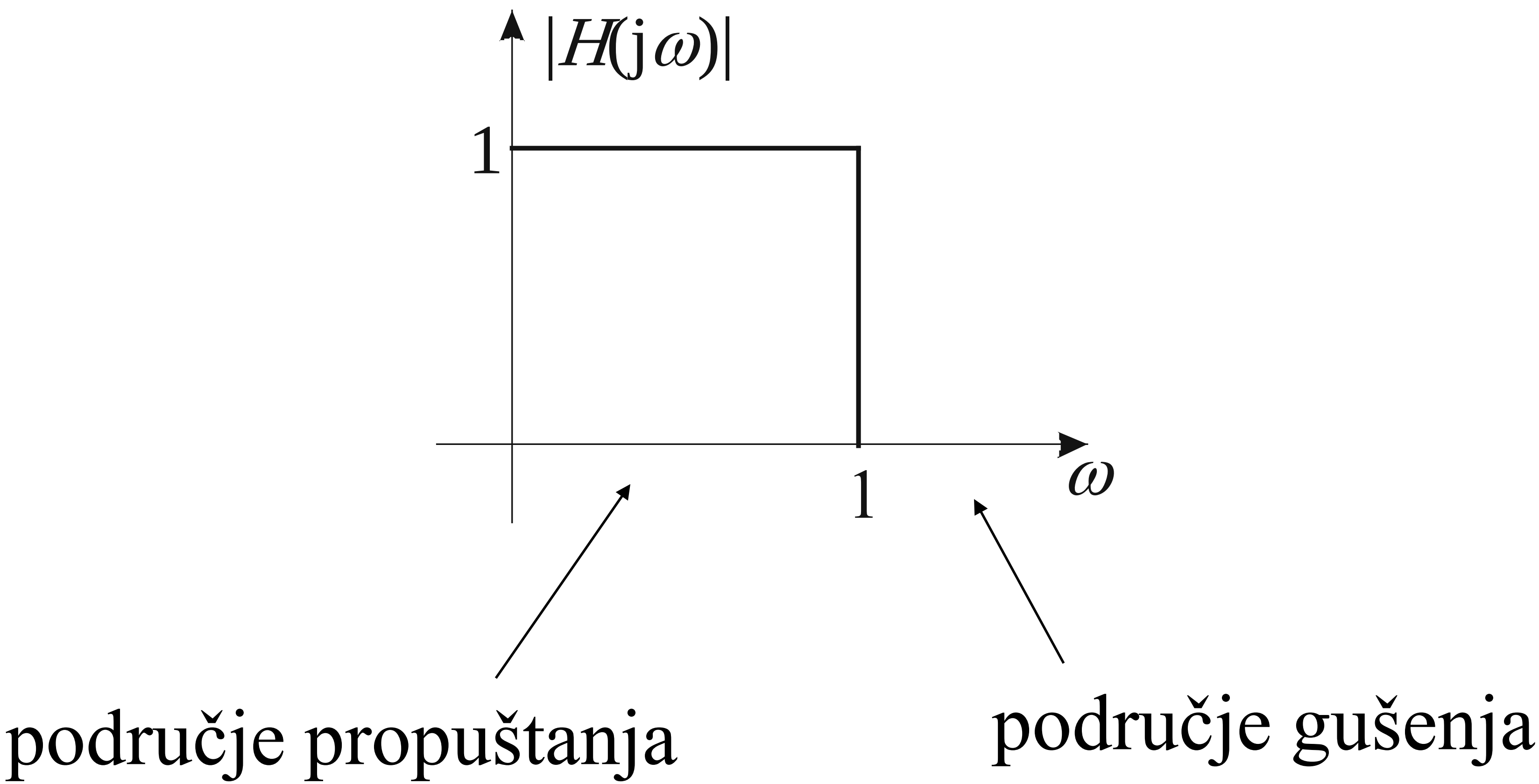
Često je karakteristika normirana na graničnu frekvenciju ω_g. U tom je slučaju normirana ω_g jednaka 1.

- Idealni normirani niskopropusni filtar

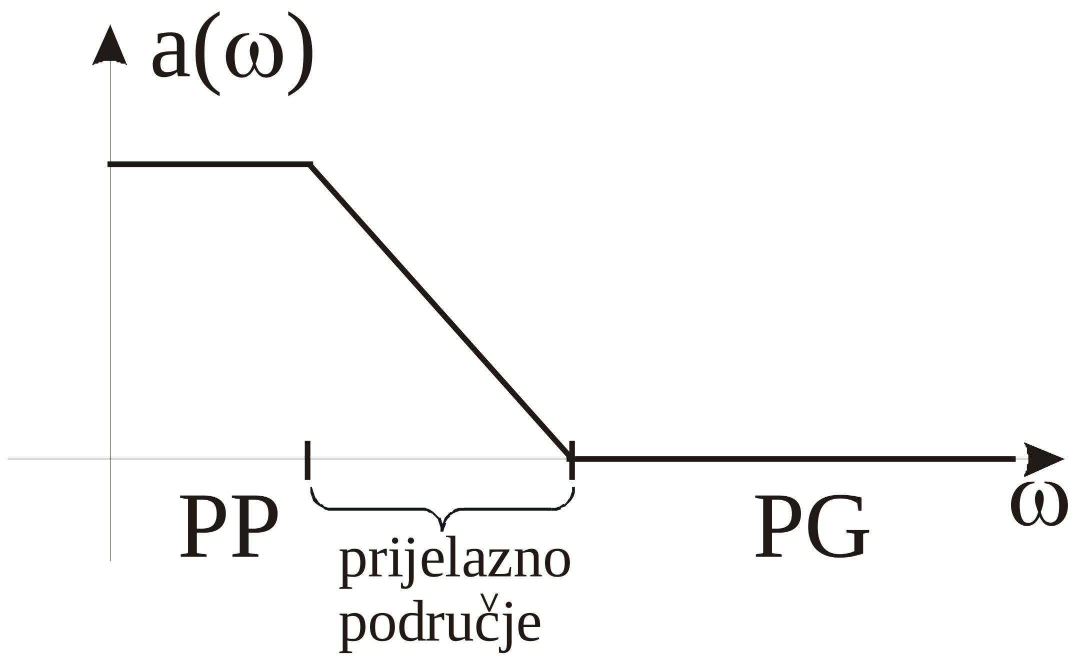


- Realnom mrežom nije moguće ostvariti idealnu karakteristiku.
- Realne karakteristike → aproksimiraju idealne
- Viši stupanj prijenosne funkcije→moguća bolja aproksimacija

- Idealni filtar ima jasno odijeljeno područje propuštanja ($|H(j\omega)|=1$) od područja gušenja ($|H(j\omega)|=0$).



- U realnim filtrima nema oštre granice.
- Karakteristike realnih filtara su glatke funkcije bez diskontinuiteta.
- Zato se definira i prijelazno područje, koje ne pripada ni području propuštanja niti području gušenja filtra.



Primjer: Opća prijenosna funkcija NP filtra 1. reda je:

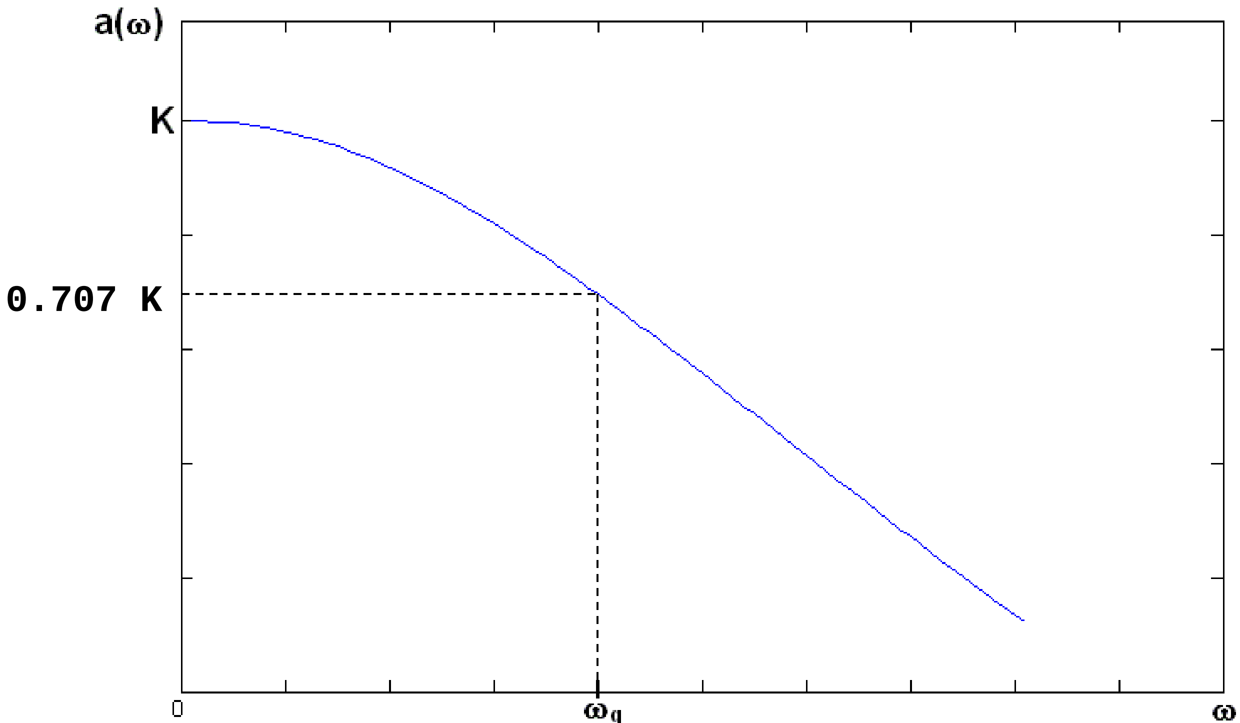
$$H(s) = K \cdot \frac{\omega_g}{s + \omega_g}$$

Pol: $s_p = -\omega_g$ Nula: $s_o \to \infty$

Frekvencijska karakteristika $\Rightarrow$ $s = j\omega$

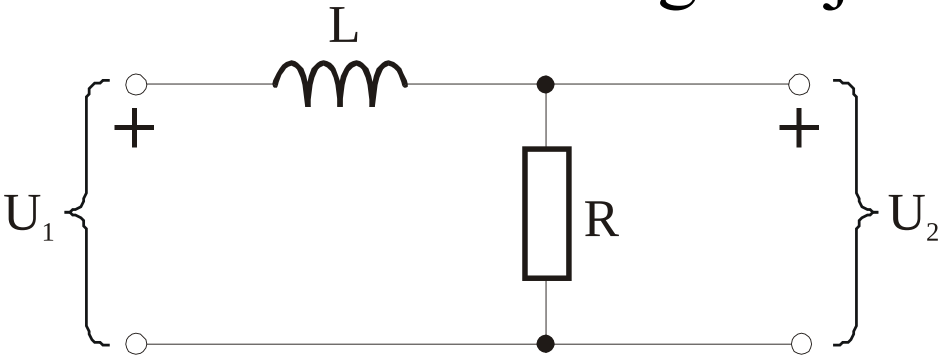
$$H(j\omega) = K \cdot \frac{\omega_g}{j\omega + \omega_g}$$

Amplitudno frekvencijska karakteristika $a(\omega) = \dfrac{K}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}$



- filtar propušta signale frekvencija $\omega \ll \omega_g$ s pojačanjem ≈ K,
- visoko frekvencijske komponente pojavljuju se na izlazu sa reduciranim amplitudama.
- Granična frekvencija je ona za koju vrijedi $a(\omega_g) = \dfrac{K}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,K$

- NP filtar 1. reda moguće je realizirati RL četveropolom

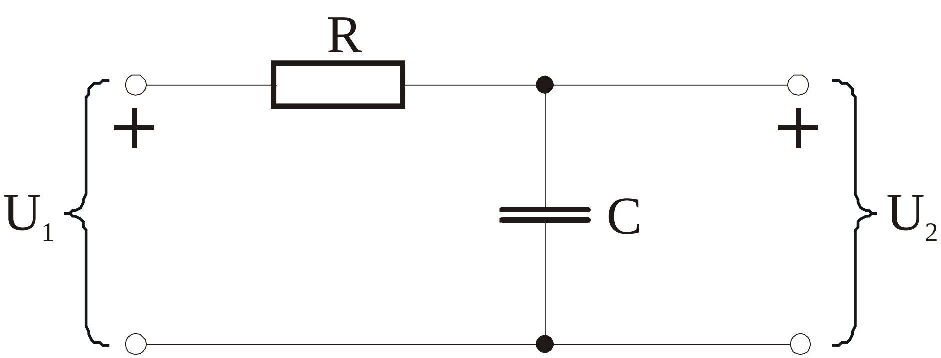


$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L}$$

Usporedbom s općom prijenosnom funkcijom 1. reda

$$K = 1 \qquad \omega_g = R/L$$

- Realizacija s RC četveropolom

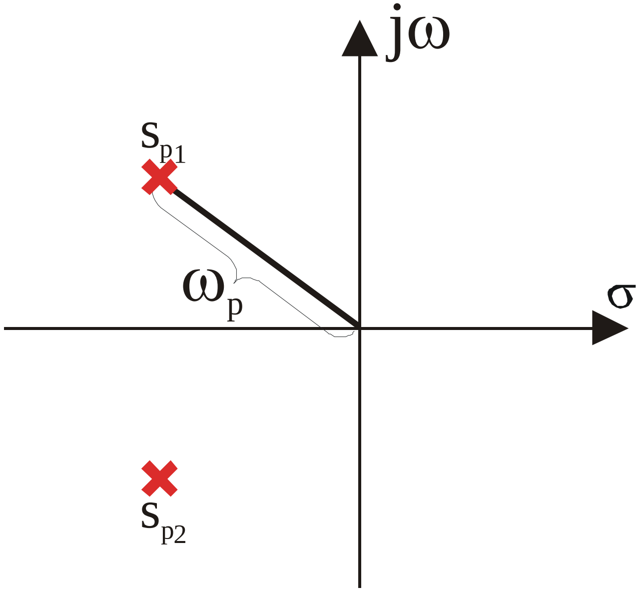


$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

$$K = 1$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

- Opći oblik funkcije NP filtra 2. reda: $H(s) = K\dfrac{\omega_p^2}{s^2 + \dfrac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2}$



Polovi:

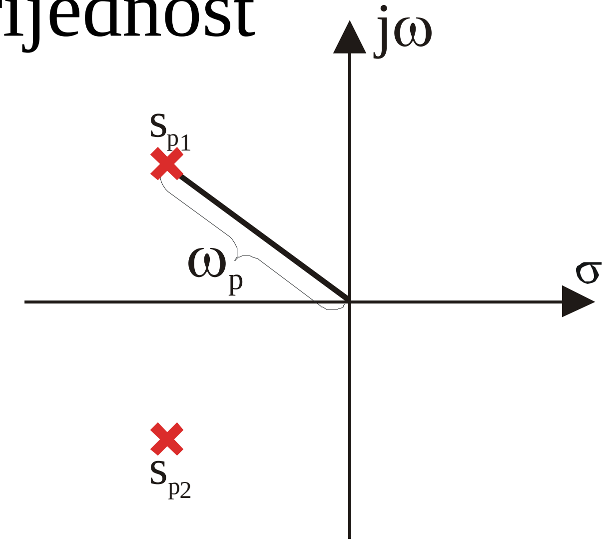
$$s_{p_{1,2}} = \sigma_p \pm j\tilde{\omega}_p = -\frac{\omega_p}{2Q_p} \pm j\omega_p\sqrt{1-\frac{1}{4Q_p^2}}$$

ako su kompleksni, tj. $Q_p > 0{,}5$

Nule: $s_{o_{1,2}} \to \infty$

$\omega_p \rightarrow$ Frekvencija polova ili apsolutna vrijednost

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2}$$

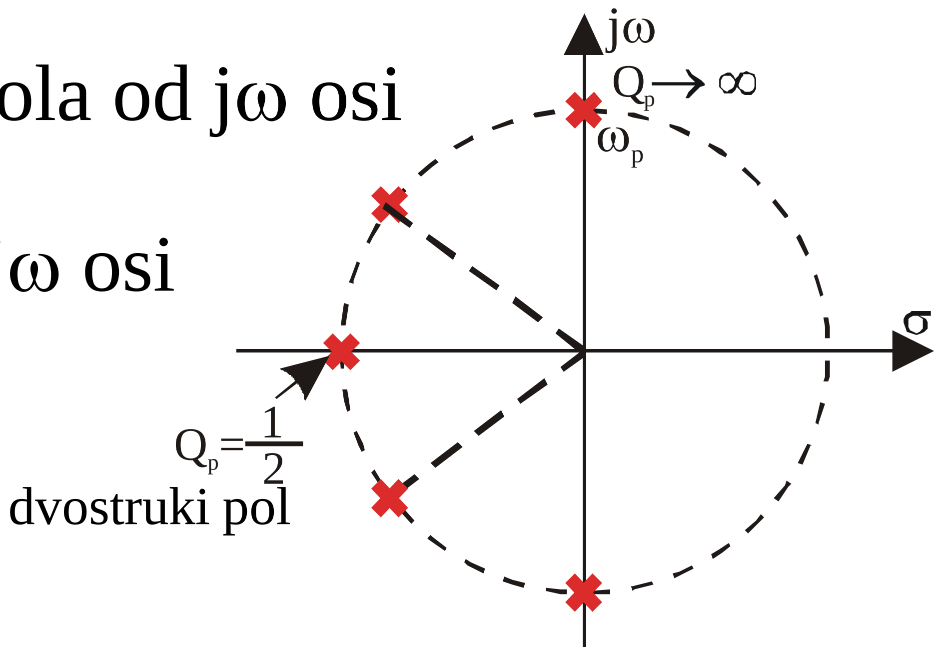


$Q_p \rightarrow$ faktor kvalitete ili Q faktor polova

$$Q_p = -\frac{\omega_p}{2\sigma_p} \rightarrow \text{mjera udaljenosti pola od j}\omega\text{ osi}$$

$Q_p \rightarrow$ raste kad se pol približava jω osi

Pol na jω osi ima $Q_p \rightarrow \infty$



Frekvencijske karakteristike filtra 2. stupnja:

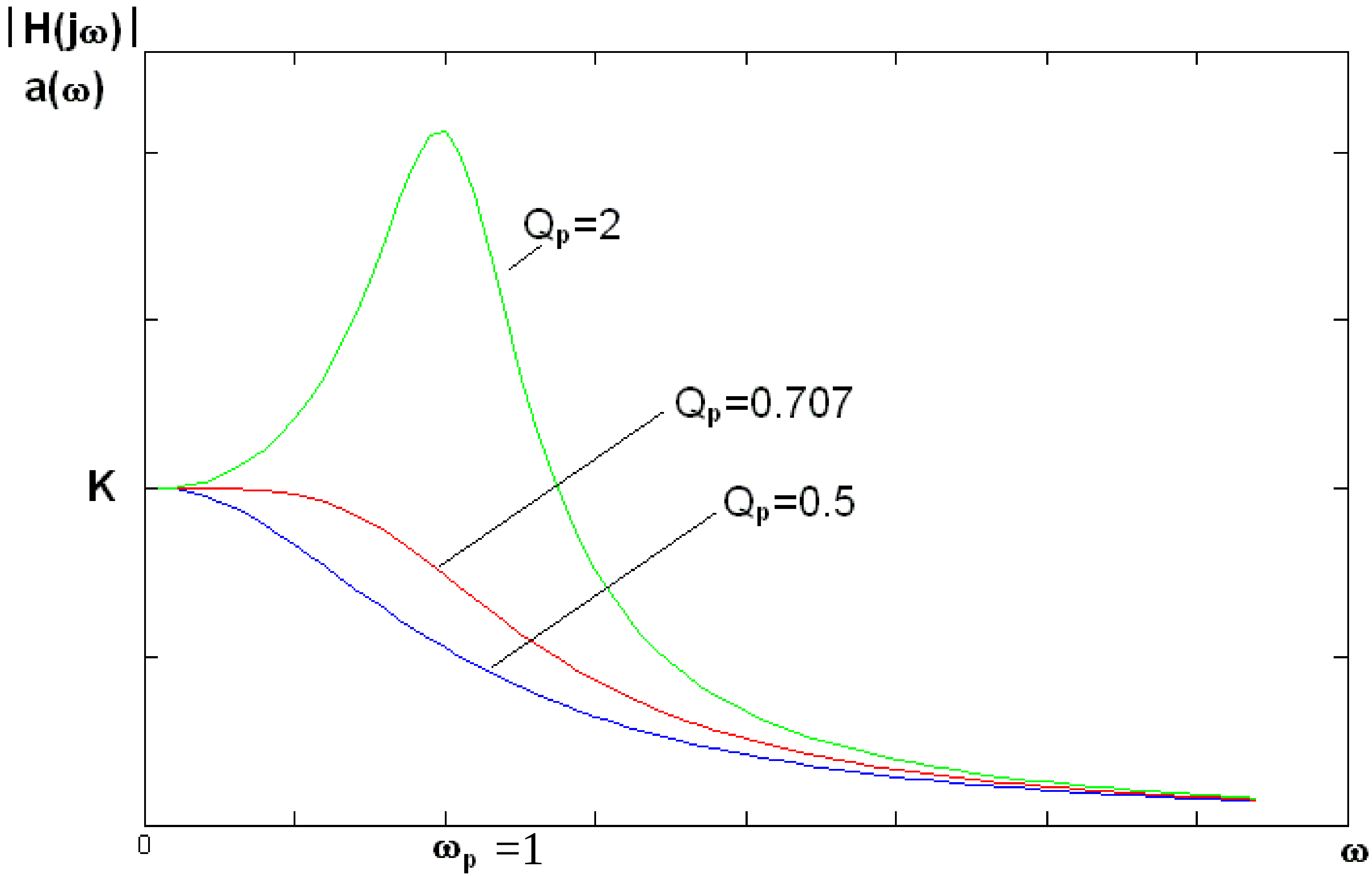
$$H(j\omega) = K \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega\omega_p}{Q_p}}$$

Amplitudno frekvencijska karakteristika

$$a(\omega) = \left|H(j\omega)\right| = K \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\left(\omega_p^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega\omega_p}{Q_p}\right)^2}} = K \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right) + \left(\dfrac{1}{Q_p}\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

Za normiranu karakteristiku $\omega_p = 1$

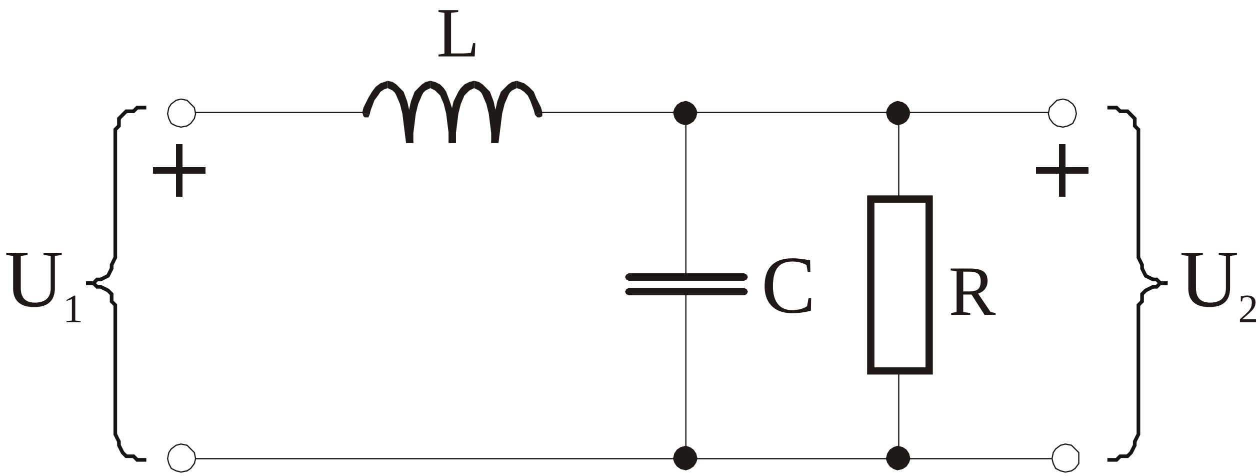
Amplitudno frekvencijska karakteristika



Tipovi filtara

- Zajedničko svim krivuljama a(ω):
- veće pojačanje na niskim frekvencijama nego na visokim.
- za $\omega \rightarrow 0$ pojačanje $a(\omega) \rightarrow K$
- $K \rightarrow$ istosmjerno pojačanje
- na visokim frekvencijama kad $\omega \rightarrow \infty$ tada $a(\omega) \rightarrow 0$.
- Zaključak:
  - filtar propušta signale niskih frekvencija
  - guši signale visokih frekvencija.

NP filtar 2. reda →moguće ostvariti RLC mrežom



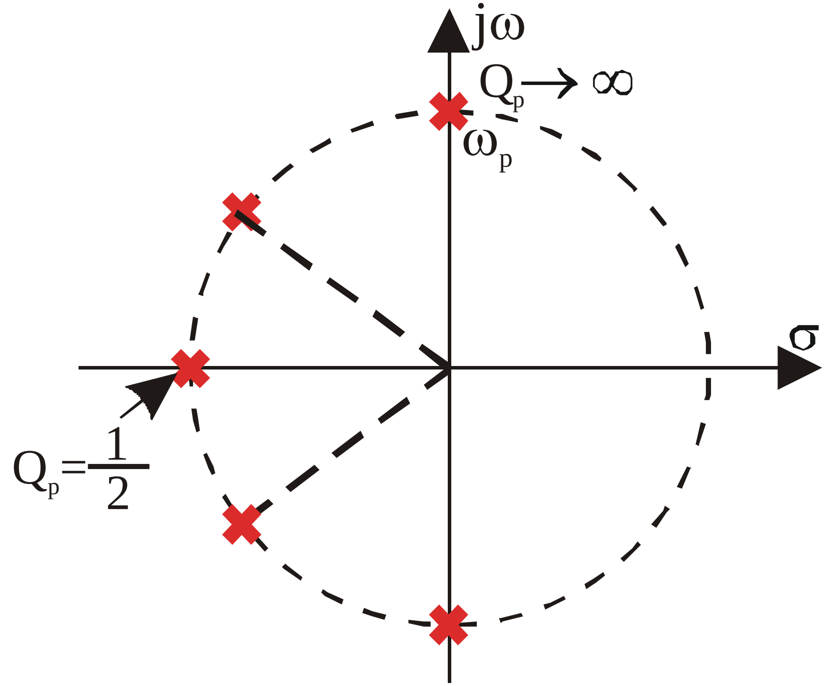
$$H(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{1/LC}{s^2+s/RC+1/LC}$$

- Za RLC NP filtar:
- Polovi:

$$s_{p_{1,2}} = -\frac{1}{2RC} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

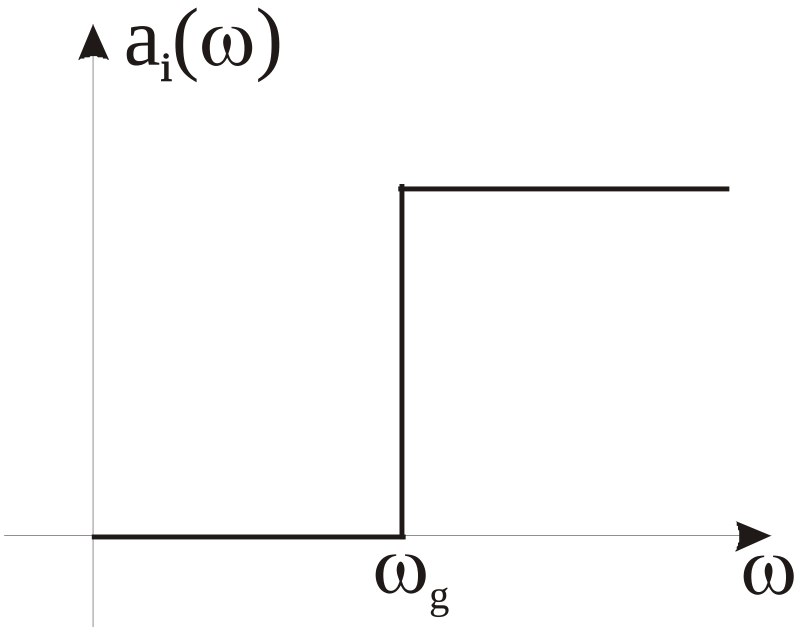
$$\frac{\omega_p}{Q_p} = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad Q_p = \omega_p RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$



Promjenom vrijednosti R → promjena Q faktora → ω_p ostaje isti → polovi se pomiču po kružnici

2) Visokopropusni filtar (VP)

- VP filtar ima amplitudno frekvencijsku karakteristiku koja:
  - omogućava propuštanje na izlaz frekv. komponenti s $\omega > \omega_g$
  - gušenje frekv. komponenti s $\omega < \omega_g$
- Idealni VP filtar ima amplitudno frekv. karakteristiku oblika



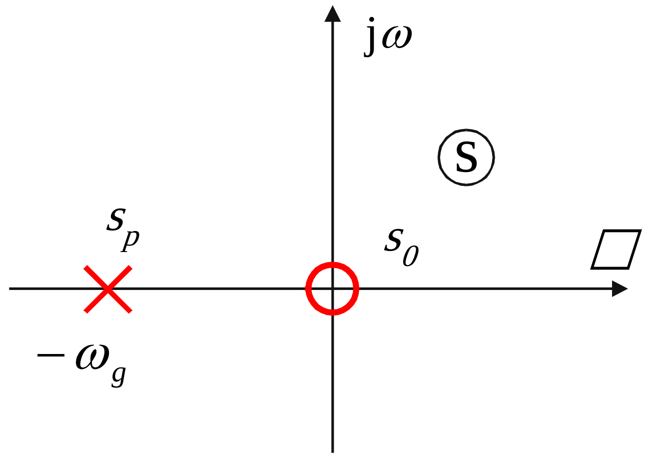
$$a_i(\omega) = |H_i(j\omega)| = \begin{cases} 1 & za \;\; \omega > \omega_g \\ 0 & za \;\; \omega < \omega_g \end{cases}$$

- Idealni VP filtar nije moguće realizirati konačnom mrežom.
- Najjednostavnija realizacija → VP filtar 1. reda

$$H_{VP}(s)=\frac{K\cdot s}{s+\omega_g}$$

Pol: $s_p=-\omega_g$

Nula: $s_o=0$



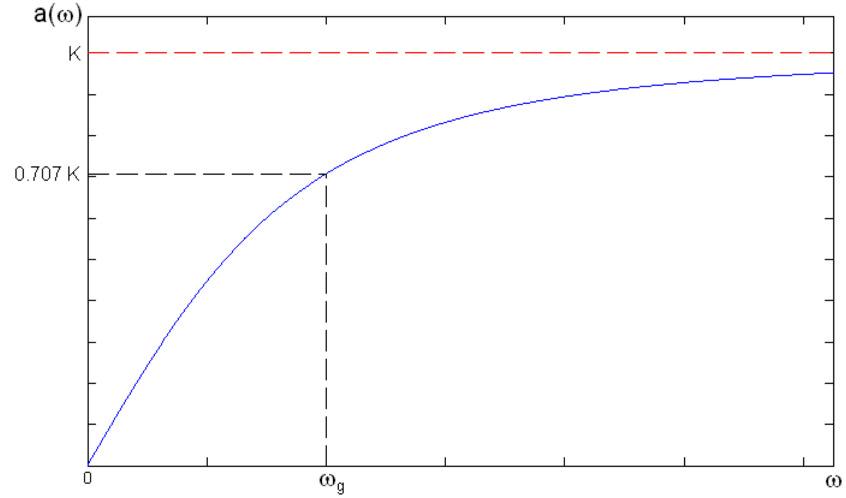
Frekvencijska karakteristika $H_{VP}(j\omega)=K\dfrac{j\omega}{j\omega+\omega_g}$

Amplitudno frekvencijska karakteristika

$$a(\omega)=\left|H(j\omega)\right|=K\frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2+\omega_g^2}}=\frac{K\cdot\left|\omega/\omega_g\right|}{\sqrt{1+\left(\omega/\omega_g\right)^2}}$$

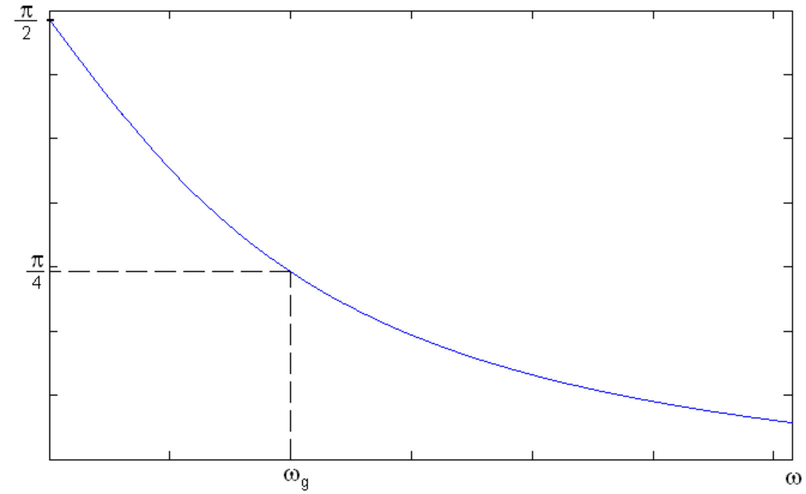
Amplitudno frekvencijska karakteristika

$$a(\omega) = \left|H(j\omega)\right| = K\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_g^2}}$$

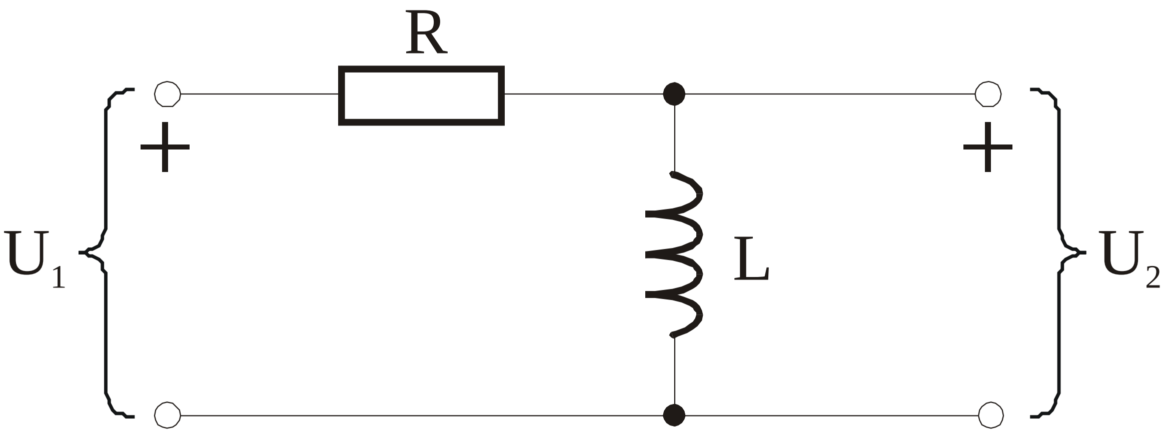


Fazno frekvencijska karakteristika

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$$



VP filtar → realizacija RL četveropolom



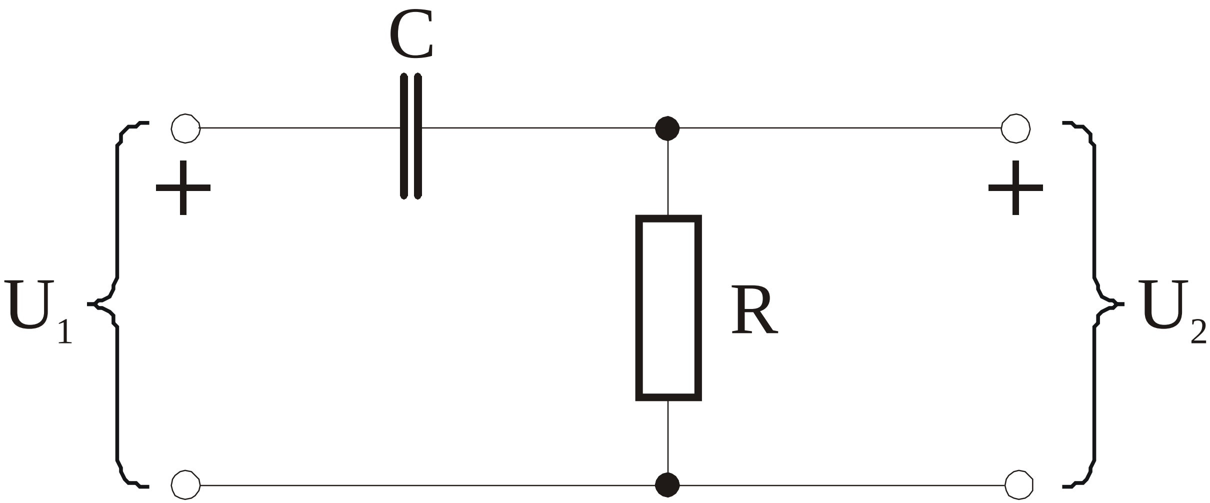
$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{s}{s+\frac{R}{L}}$$

$$K=1 \qquad \omega_g=\frac{R}{L}$$

Pol: $s_p=-R/L$

Nula: $s_o=0$

VP filtar → realizacija RC četveropolom



$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s}{s + \dfrac{1}{RC}}$$

$$K = 1 \qquad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

Pol: $s_p = -1/RC$

Nula: $s_o = 0$

VP filtar 2. reda

- Mreža 2. reda daje bolju aproksimaciju idealnog filtra.

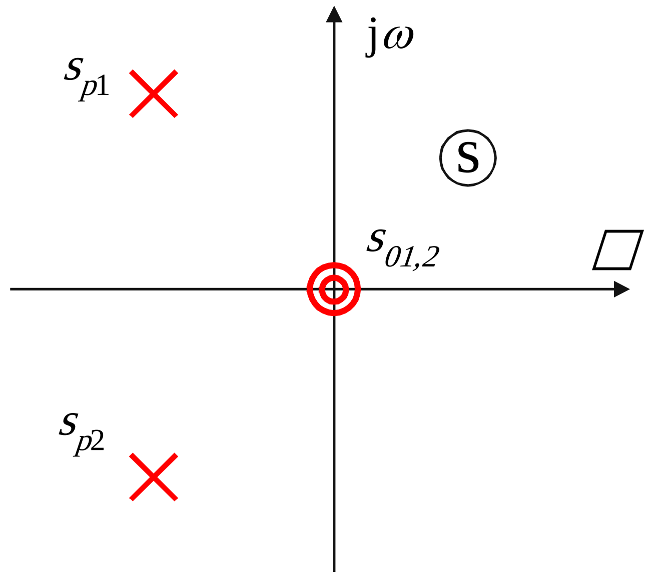
- Opći oblik funkcije filtra 2. reda

$$H(s) = K \cdot \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2}$$

Polovi: $$s_{p_{1,2}} = -\frac{\omega_p}{2Q_p} \pm j\omega_p \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_p^2}}$$

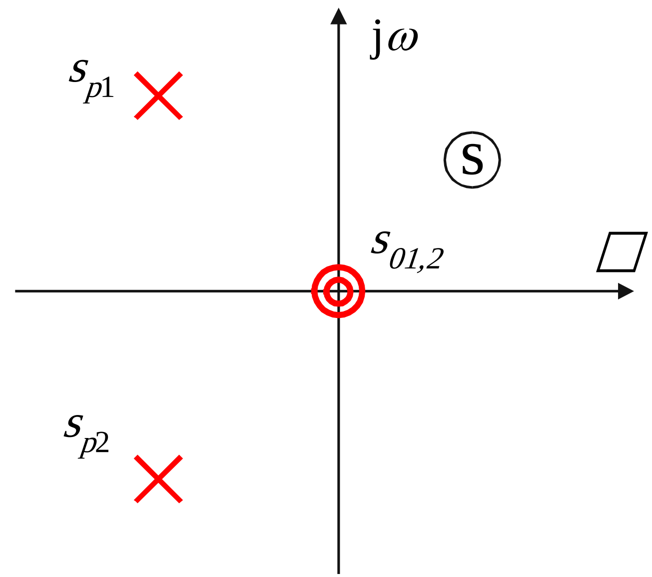
ako su kompleksni (Q_p>0,5)

Nule: $$s_{o_{1,2}} = 0$$



$H(s) \rightarrow$ ima kompleksne (ili realne) polove

$\rightarrow$ ima dvostruku nulu u ishodištu



$$s_{p_{1,2}} = \sigma_p \pm j\tilde{\omega}_p$$

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_p^2 + \tilde{\omega}_p^2}$$

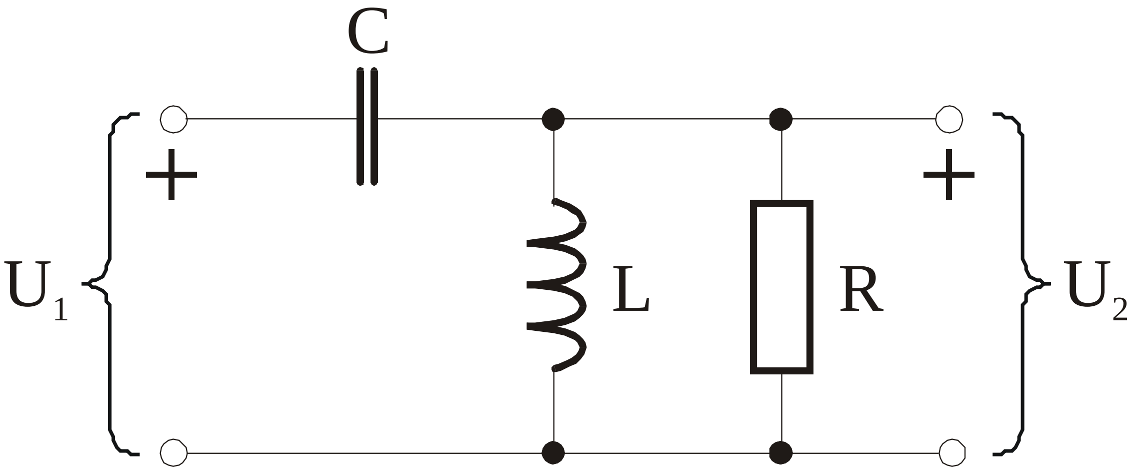
$$\downarrow$$

Frekvencija polova ili apsolutna vrijednost

$$Q_p = -\frac{\omega_p}{2\sigma_p} \rightarrow$$

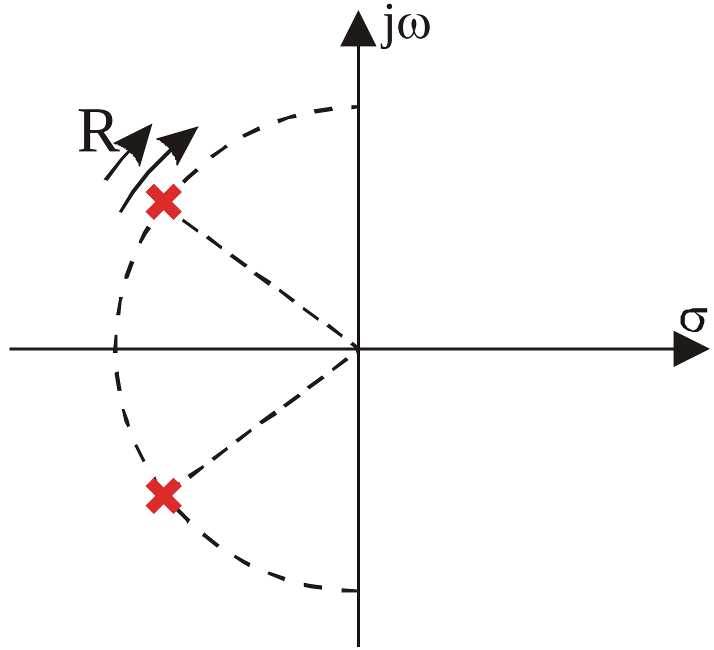
faktor kvalitete polova →
mjera udaljenosti pola od jω osi

- Realizacija VP filtra 2. reda RLC četveropolom



$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+s\cdot\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q_p=R\sqrt{\frac{C}{L}}\rightarrow$$



promjenom R mijenja se

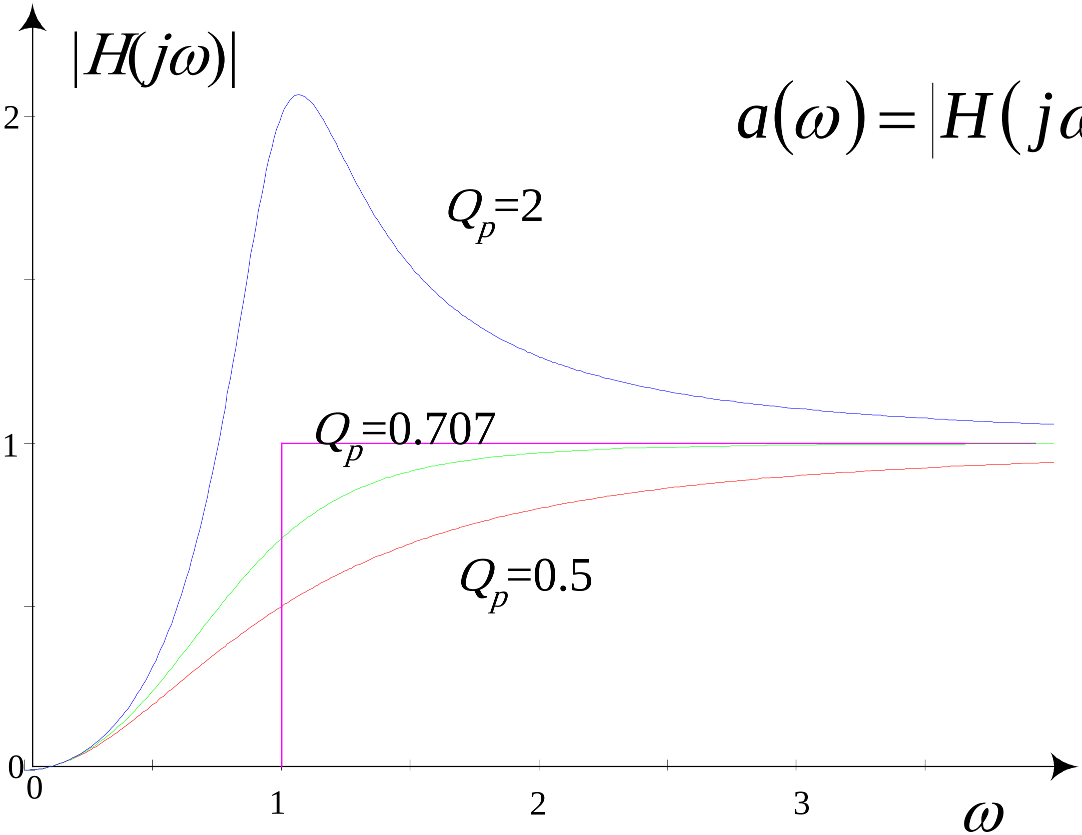
Q_p po kružnici

Frekvencijske karakteristike VP filtra 2. stupnja:

$$H(j\omega) = K\frac{-\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega\omega_p}{Q_p}}$$

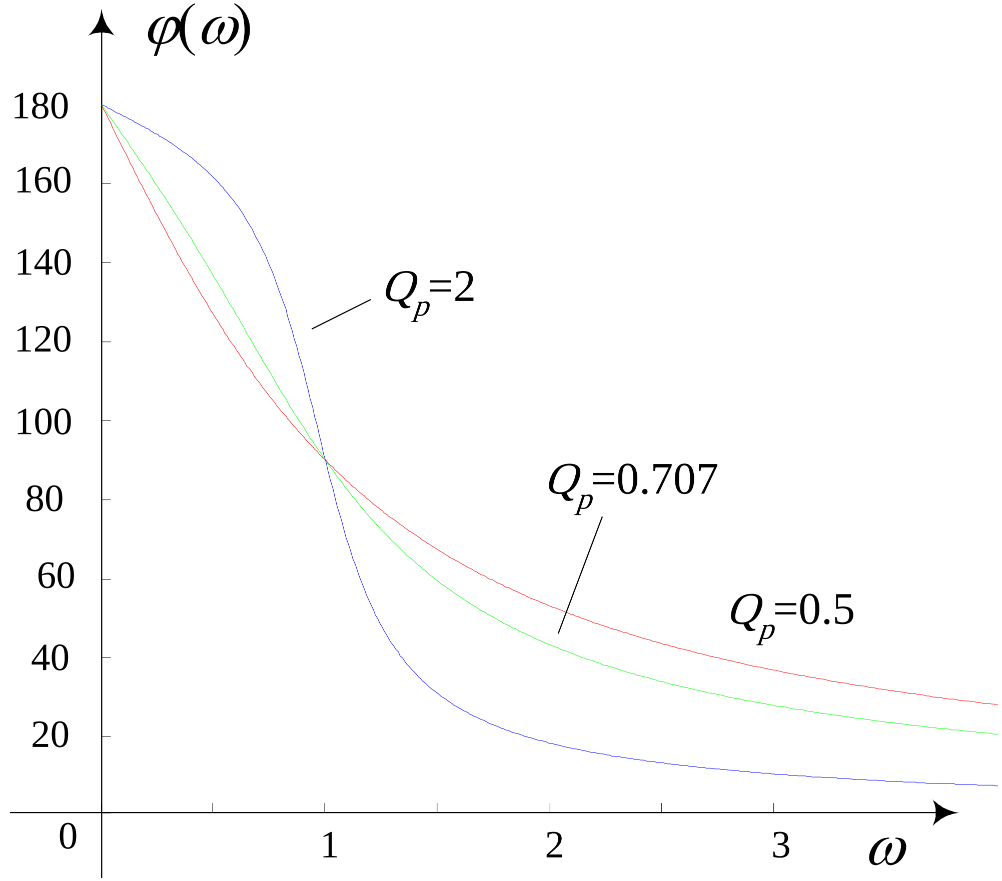
Amplitudno frekvencijska karakteristika

$$a(\omega) = \left|H(j\omega)\right| = K\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_p^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega\omega_p}{Q_p}\right)^2}}$$



Fazno frekvencijska karakteristika

$$\varphi(\omega) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega_p \cdot \omega / Q_p}{\omega_p^2 - \omega^2}$$

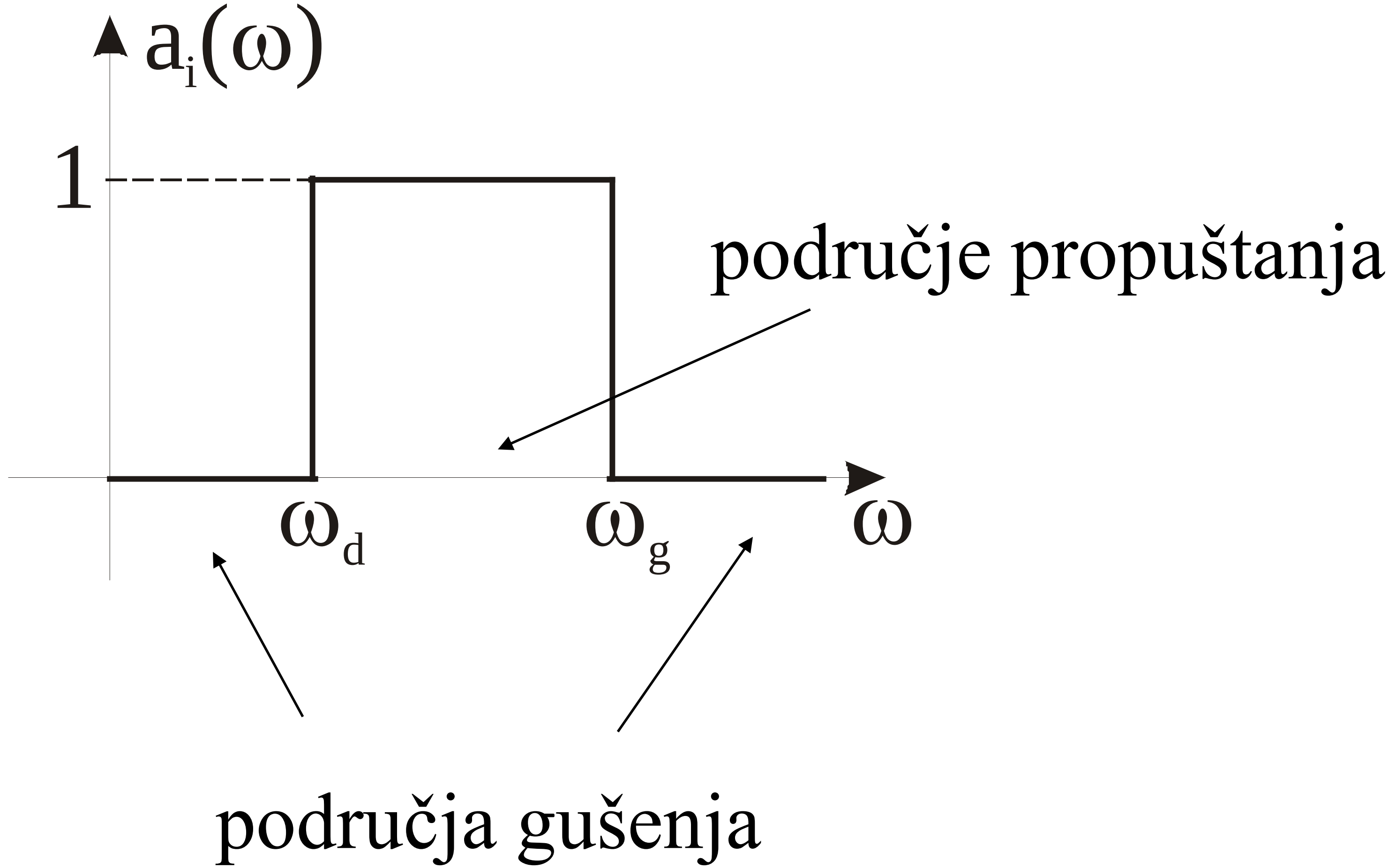


3) Pojasno-propusni filtar (PP)

- Pojasno propusni filtar propušta signale čije su frekv. komponente smještene između dviju frekvencija ω_d i ω_g.
- Pritom je $\omega_g > \omega_d$.
- ω_d i ω_g su granične frekvencije pojasa propuštanja.
- Signali čije su frekvencijske komponente u području
  - $0<\omega< \omega_d$ ili
  - $\omega> \omega_g$

prigušeni su i ne propuštaju se na izlaz filtra.

- Idealni PP filtar ima amplitudnu karakteristiku oblika:



Vrijedi:

$$a_{ipp}(\omega) = \left|H_{ipp}(\omega)\right| = \begin{cases} 1 \quad za \quad \omega_d < \omega < \omega_g \\ 0 \quad za \quad 0 < \omega < \omega_d \\ 0 \quad za \quad \omega_g < \omega < \infty \end{cases}$$

$\omega_d \rightarrow$ donja granična frekvencija

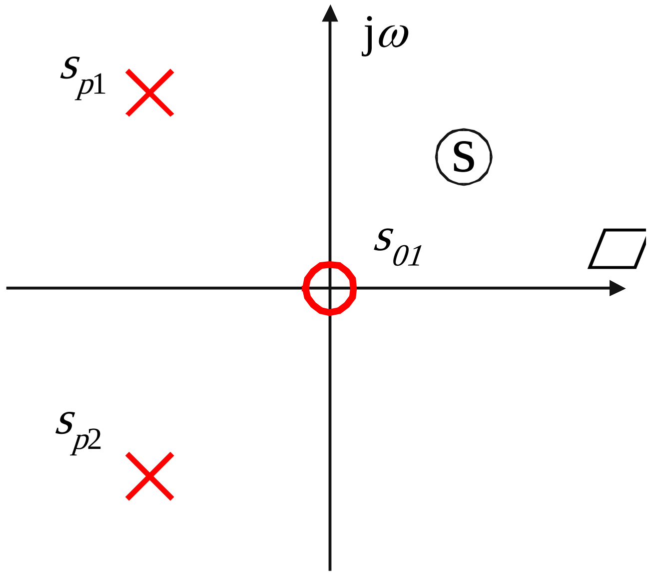
$\omega_g \rightarrow$ gornja granična frekvencija

Za PP karakteristiku filtar mora biti najmanje 2. reda.

PP filtar 2. Reda

Opća prijenosna funkcija PP filtra 2. reda

$$H_{PP}(s) = K \cdot \frac{s \cdot \dfrac{\omega_p}{Q_p}}{s^2 + \dfrac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2}$$



Polovi $s_{p_{1,2}} = -\dfrac{\omega_p}{2Q_p} \pm j\omega_p \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

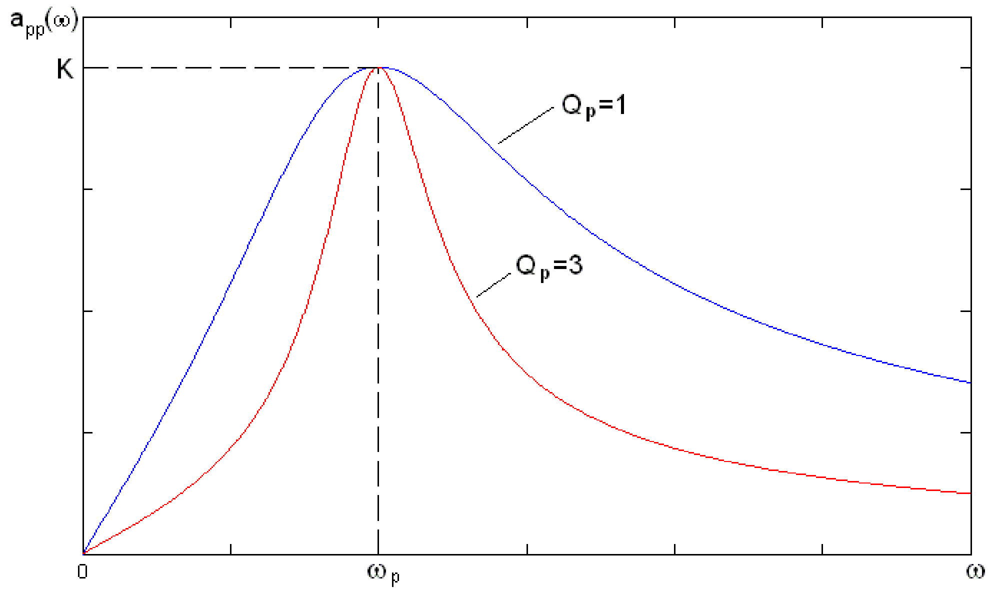
Nule $s_{0_1} = 0 \quad s_{0_2} \rightarrow \infty$

Prijenosna funkcija $H_{PP}(j\omega)$

$$H_{PP}(j\omega)=\frac{K\cdot\dfrac{j\omega_p\omega}{Q_p}}{-\omega^2+\omega_p^2+j\dfrac{\omega\omega_p}{Q_p}}=\frac{K}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_p}-\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)}$$

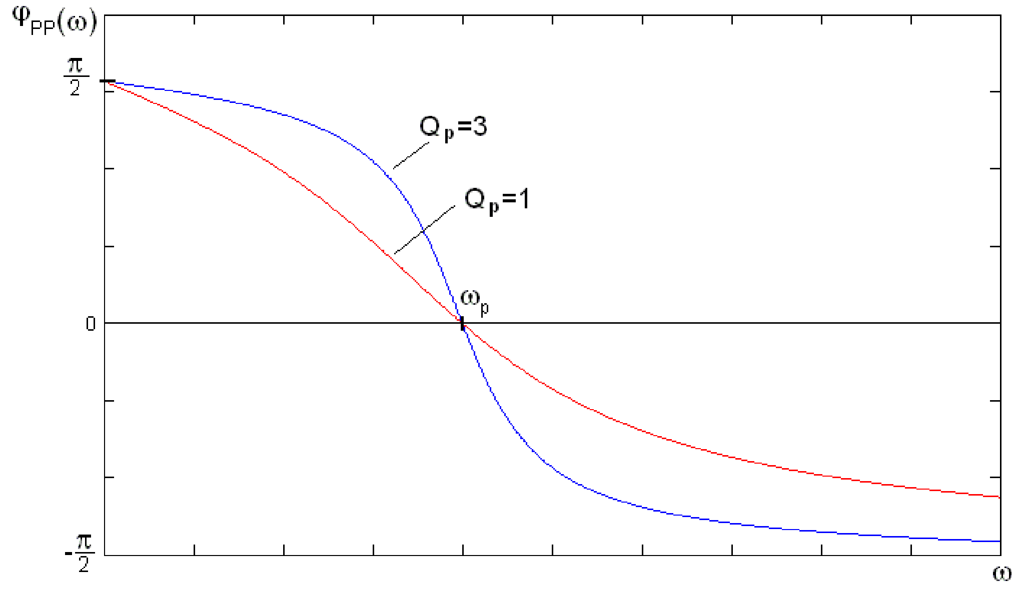
Amplitudno frekvencijska karakteristika

$$a_{pp}(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+Q_P^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_p}-\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$



Fazno frekvencijska karakteristika

$$\varphi_{pp}(\omega) = -\mathrm{arctg}\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \right]$$



Amplitudno frekvencijska karakteristika ima

Maksimum $a(\omega) \rightarrow K$ kad je $\omega=\omega_p$

$a(\omega) \rightarrow 0$ kad $\omega \rightarrow 0$

$a(\omega) \rightarrow 0$ kad $\omega \rightarrow \infty$

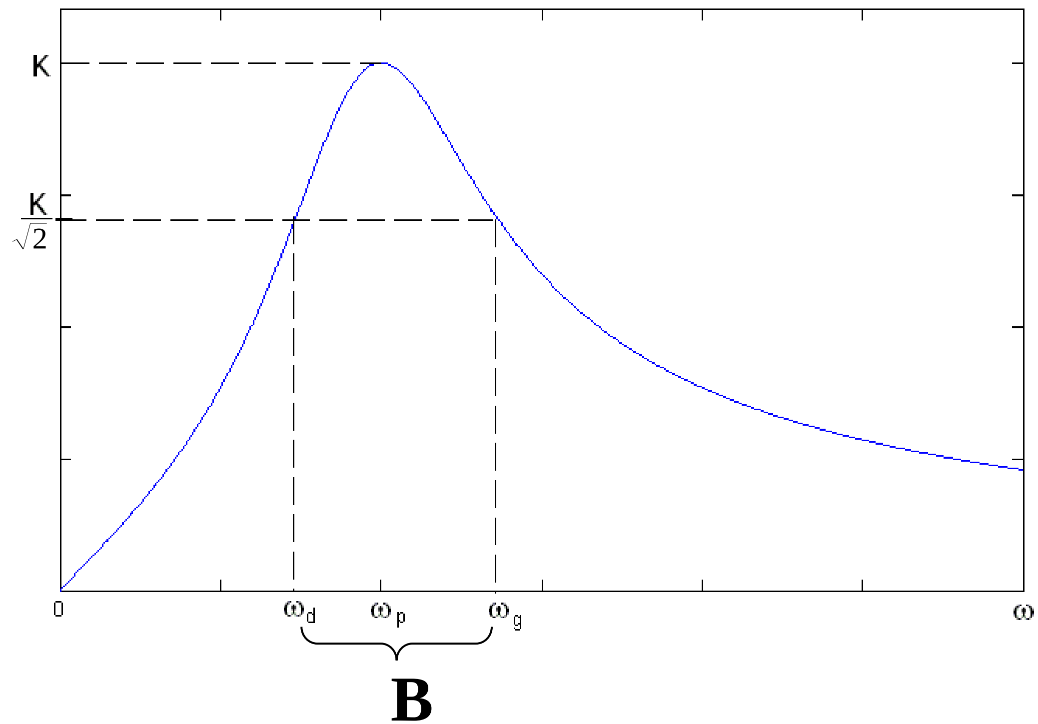
- Filtar ne propušta signale vrlo niskih i vrlo visokih frekvencija
- Propušta signale s frekvencijama oko ω_p s pojačanjem K

- Povećanjem Q-faktora karakteristika se sužava
  - → postaje selektivnija
- Granične frekvencije
  - → frekvencije na kojima karakteristika ima iznos $\frac{K}{\sqrt{2}}$

$$a_{pp}(\omega_d) = a_{pp}(\omega_g) =$$

$$= \frac{a_{pp}(\omega_p)}{\sqrt{2}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

B → širina pojasa propuštanja PP filtra



Granične frekvencije

$$a(\omega)\Big|_{\omega=\omega_{d,g}} = \left.\frac{K}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}\right|_{\omega=\omega_{d,g}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \qquad \omega_{g,d} = \omega_p\sqrt{1+\frac{1}{4Q_p^2}} \pm \frac{\omega_p}{2Q_p}$$

Širina pojasa propuštanja : $B = \omega_g - \omega_d = \dfrac{\omega_p}{Q_p}$

B se smanjuje kad Q_p raste.

Funkcija $a_{pp}(\omega)$ je geometrijski simetrična oko ω_p.

$\omega_p^2 = \omega_d \cdot \omega_g \rightarrow \omega_p$ je geometrijska sredina od ω_d i ω_g.

$\omega_p = \omega_c \rightarrow$ centralna frekvencija PP filtra

U praksi su često u primjeni →uskopojasni PP filtri

To su filtri za koje vrijedi $B << \omega_c$

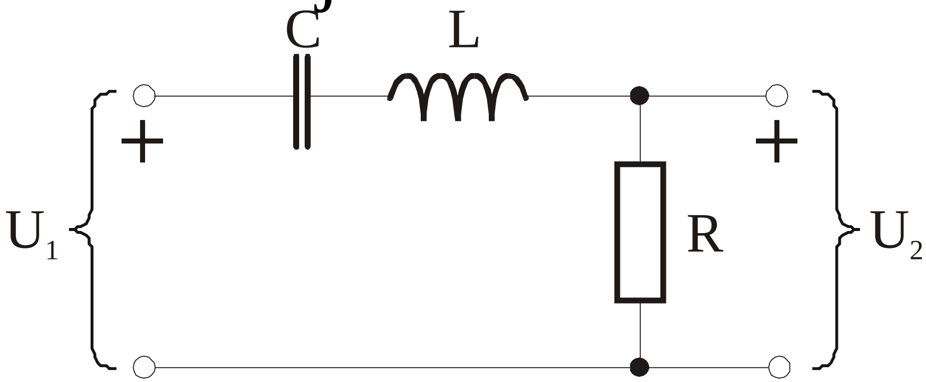
$\downarrow$

Filtri sa visokim Q faktorom

$$Q = \frac{\omega_c}{B} \geq 10$$

Tada je $$\omega_{g,d} \cong \omega_p \pm \frac{\omega_p}{2Q_p} = \omega_p \pm \frac{1}{2}B$$

Realizacija PP filtra 2. reda serijskim RLC krugom



$$H(s)=\frac{s\cdot\frac{R}{L}}{s^2+s\cdot\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q_p=\omega_p\cdot\frac{L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

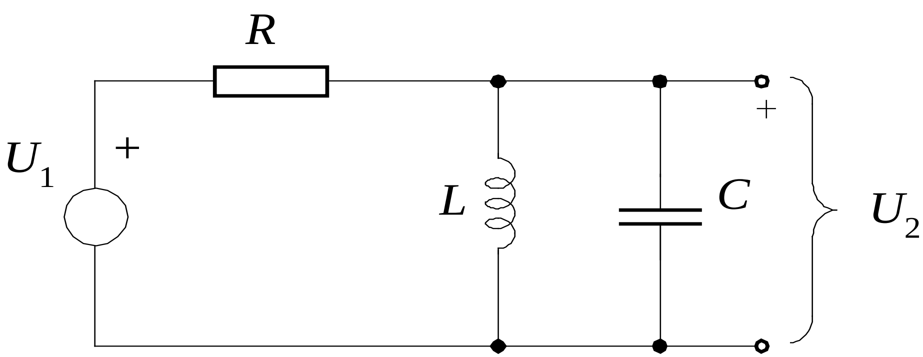
Amplit. frekv. karakteristika $$|H(j\omega)|=\frac{\omega\cdot R/L}{\sqrt{\left((1/LC)-\omega^2\right)^2+(\omega\cdot R/L)^2}}$$

Na rezonantnoj frekvenciji $\omega=\omega_p=1/(LC)^{1/2}$

impedancija serijskoga spoja L i C jednaka je nuli, pa je

$$U_1=U_2 \qquad \Rightarrow \left|H\left(j\omega_p\right)\right|=1$$

- Realizacija PP filtra 2. reda s paralelnim LC krugom



$$H(s)=\frac{s\cdot\frac{1}{RC}}{s^2+s\cdot\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}}\qquad Q_p=\omega_p\cdot RC=R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Amplit. frekv. karakteristika $\left|H(j\omega)\right|=\dfrac{\omega/RC}{\sqrt{\left((1/LC)-\omega^2\right)^2+(\omega/RC)^2}}$

Na rezonantnoj frekvenciji je $\omega=\omega_p=1/(LC)^{1/2}$

$$U_1=U_2\;\Rightarrow\left|H(j\omega_p)\right|=1$$

- Primjer: Potrebno je realizirati PP filtar s područjem propuštanja 20 kHz ± 250 Hz. Na raspolaganju je induktivitet od 1 mH. Odrediti R i C.

- Širina pojasa filtra je

B=2x250 =500 Hz

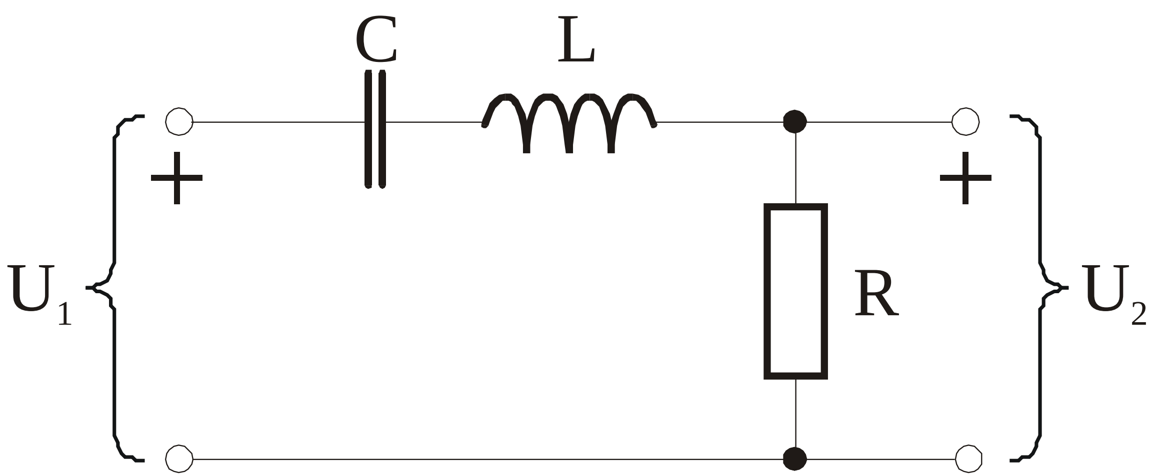
centralna frekvencija je 20 kHz

To odgovara Q faktoru

$$Q_p = \frac{\omega_p}{B} = \frac{20 \cdot 10^3}{500} = 40$$

- Prema tome radi se o uskopojasnome filtru.

- Gornja granična frekvencija je f_g=20.25 kHz
- Donja granična frekvencija je f_d=19.75 kHz
- Geometrijska sredina → $f_c=(f_g\, f_d)^{1/2}$=19.998 kHz

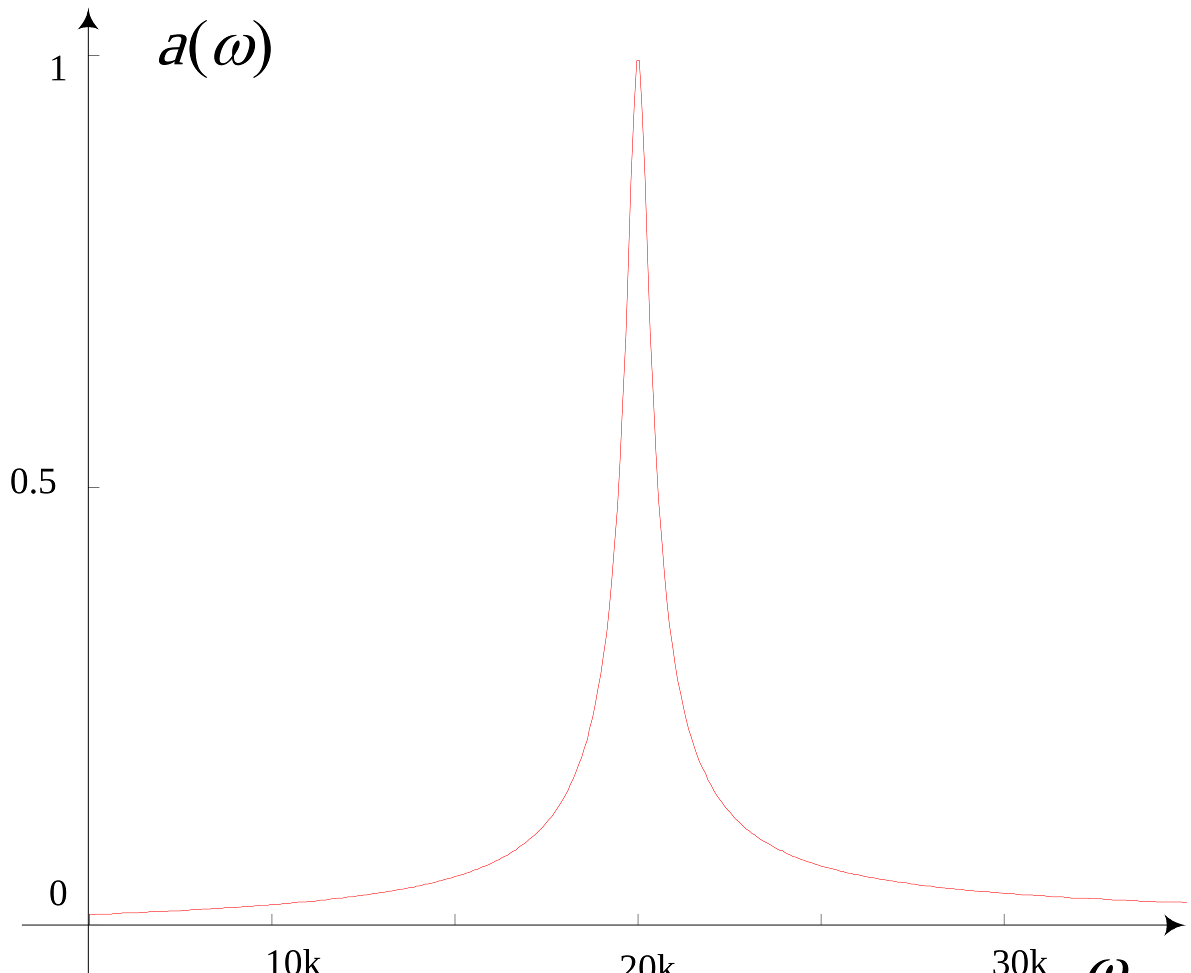


$$H(s)=\frac{s\cdot\frac{R}{L}}{s^2+s\cdot\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}}\qquad \Rightarrow C=\frac{1}{\omega_p^2 L}=\frac{1}{(2\cdot\pi\cdot 19.998)^2\cdot 10^{-3}}=63.3\,\mathrm{nF}$$

$$Q_p = \omega_p \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \Rightarrow R = \frac{1}{Q_p}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{40}\sqrt{\frac{10^{-3}}{63.3 \cdot 10^{-9}}}$$

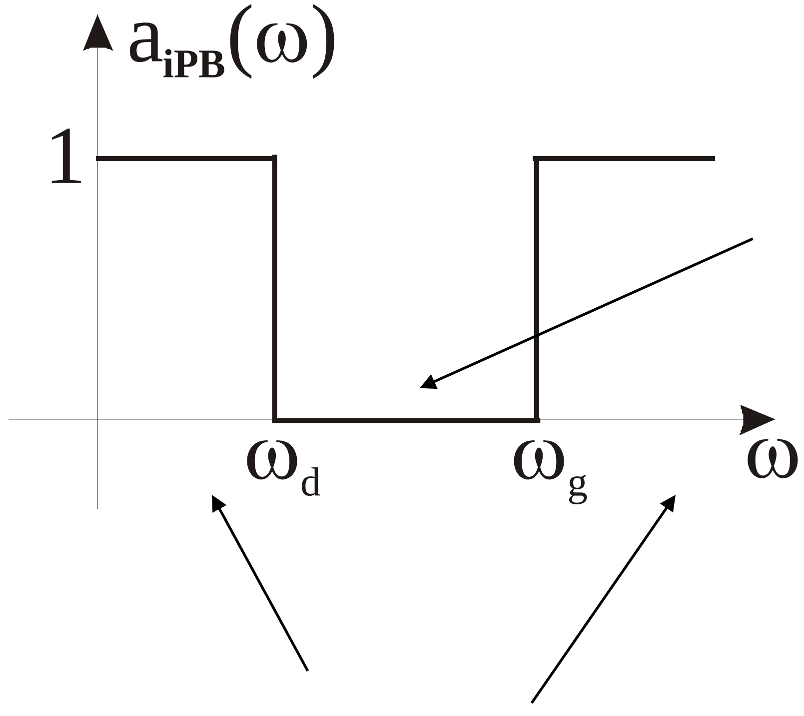
$$\Rightarrow R = 394.9\,\Omega$$



4) Pojasna brana (PB)

- Pojasna brana je filtar koji:
  - propušta signale čije su frekvencije niže of zadane ω_d
  - ili više od ω_g .
- Pritom je $\omega_g > \omega_d$.
- Signali čije su frekv. komponente smještene između dviju frekvencija ω_d i ω_g , tj. $\omega_d<\omega<\omega_g$ prigušeni su i ne propuštaju se na izlaz filtra.
- PB ima 2 područja propuštanja i jedno područje gušenja.

- Idealna karakteristika pojasne brane ima oblik



područje gušenja

područja propuštanja

Vrijedi

$$a_{iPB}(\omega) = \left|H_{iPB}(j\omega)\right| = \begin{cases} 1 & za \quad 0 < \omega < \omega_d \\ 1 & za \quad \omega_g < \omega < \infty \\ 0 & za \quad \omega_d < \omega < \omega_g \end{cases}$$

$\omega_d \rightarrow$ donja granična frekvencija

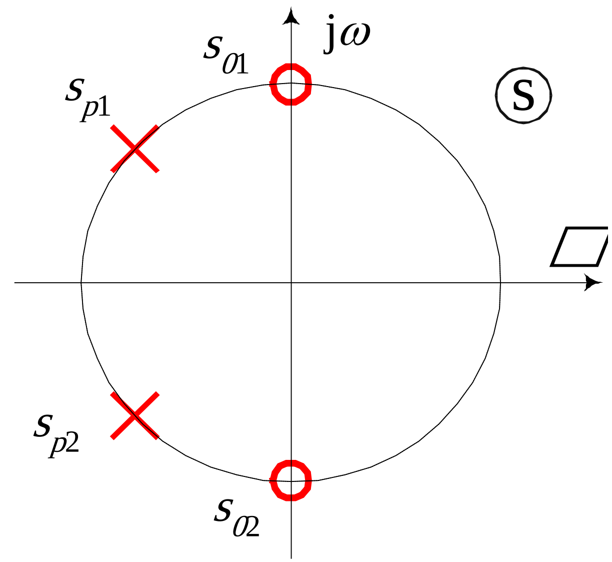
$\omega_g \rightarrow$ gornja granična frekvencija

Prijenosna funkcija PB mora biti najmanje 2. stupnja.

Pojasna brana 2. reda

Opći oblik prijenosne funkcije PB 2. reda glasi

$$H_{PB}(s) = K \cdot \frac{s^2 + \omega_p^2}{s^2 + \dfrac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2}$$



Polovi $\quad s_{p_{1,2}} = -\dfrac{\omega_p}{2Q_p} \pm j\omega_p \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

Nule $\quad s_{0_{1,2}} = \pm j\omega_p$

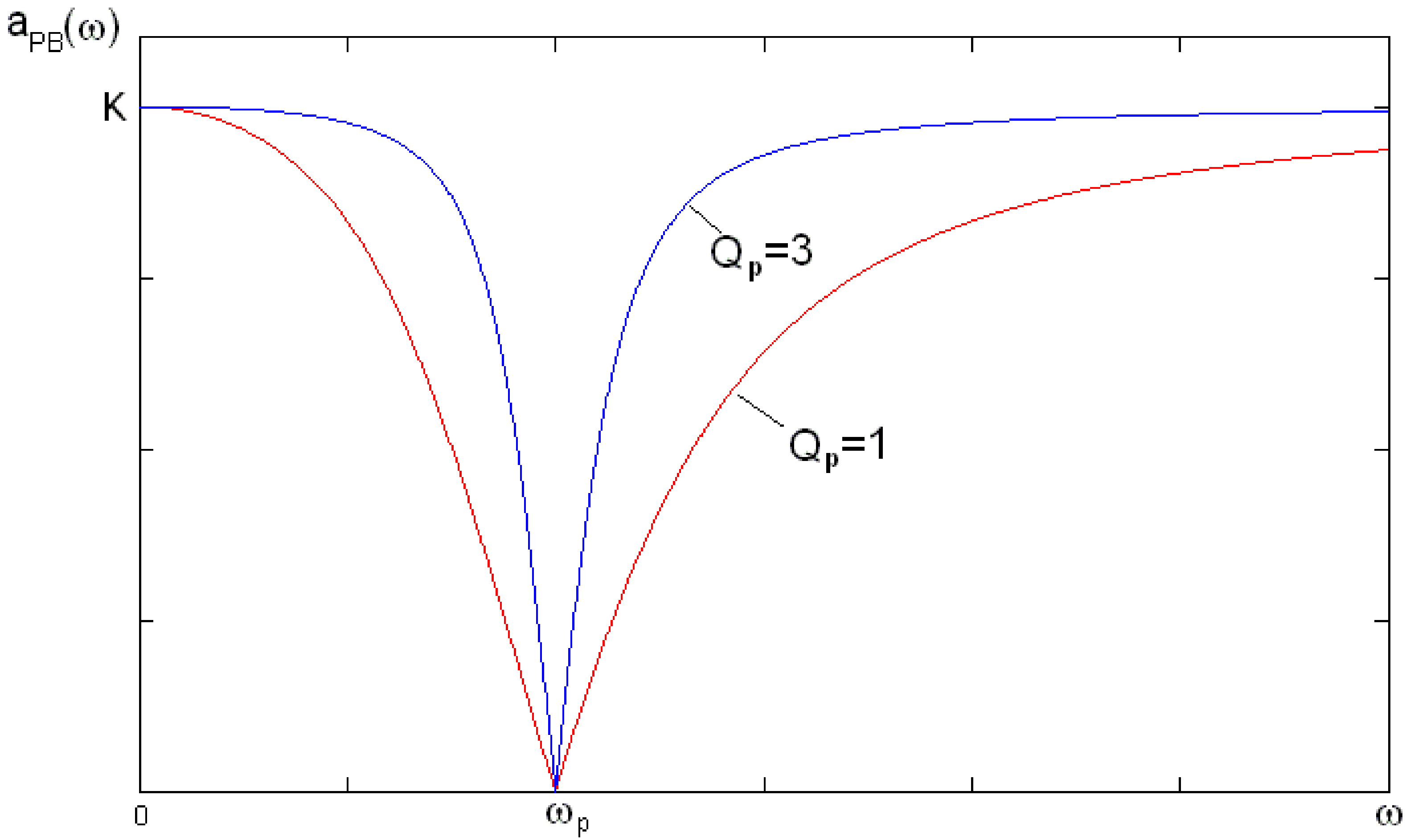
Prijenosnu funkciju H(jω) moguće je napisati kao

$$H(j\omega)=\frac{K\left(\omega_p^2-\omega^2\right)}{\omega_p^2-\omega^2+j\dfrac{\omega\omega_p}{Q_p}}=K\frac{jQ_p\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)}{1+jQ_p\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

$$a_{PB}(\omega)=K\cdot\frac{Q_p\left|\dfrac{\omega_p}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega_p}\right|}{\sqrt{1+Q_p^2\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

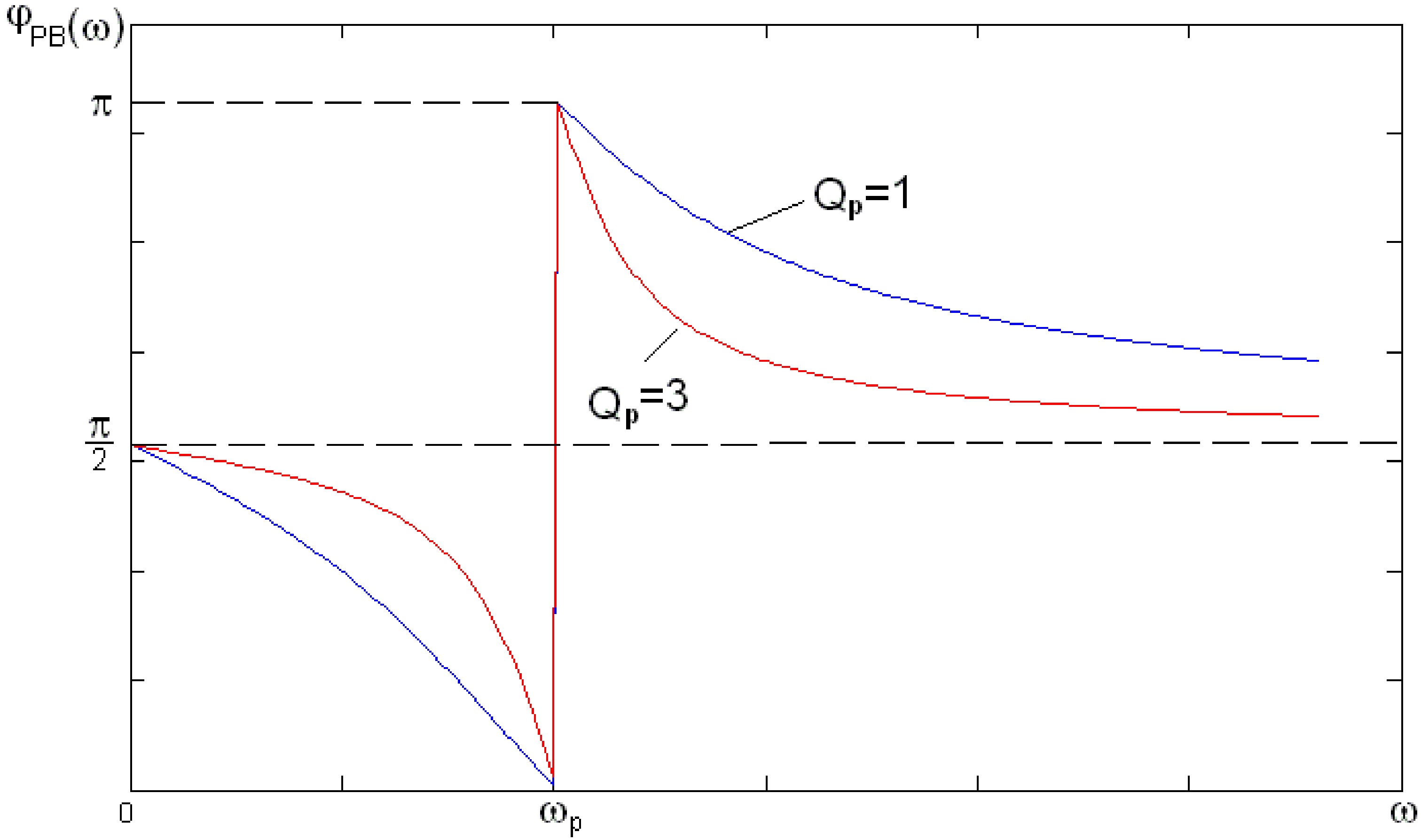
$$\varphi_{PB}(\omega)=\pi S\left(\omega-\omega_p\right)-\mathrm{arctg}\left(Q_p\left(\frac{\omega_p}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_p}\right)\right)$$

Amplitudno frekvencijska karaktersitika



Fazno frekvencijska karaktersitika

$$\varphi_{PB}(\omega) = \pi\, S(\omega - \omega_p) - \mathrm{arctg}\left(Q_p \left(\frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_p} \right) \right)$$



- Za amplitudno frekvencijsku karakteristiku pojasne brane vrijedi

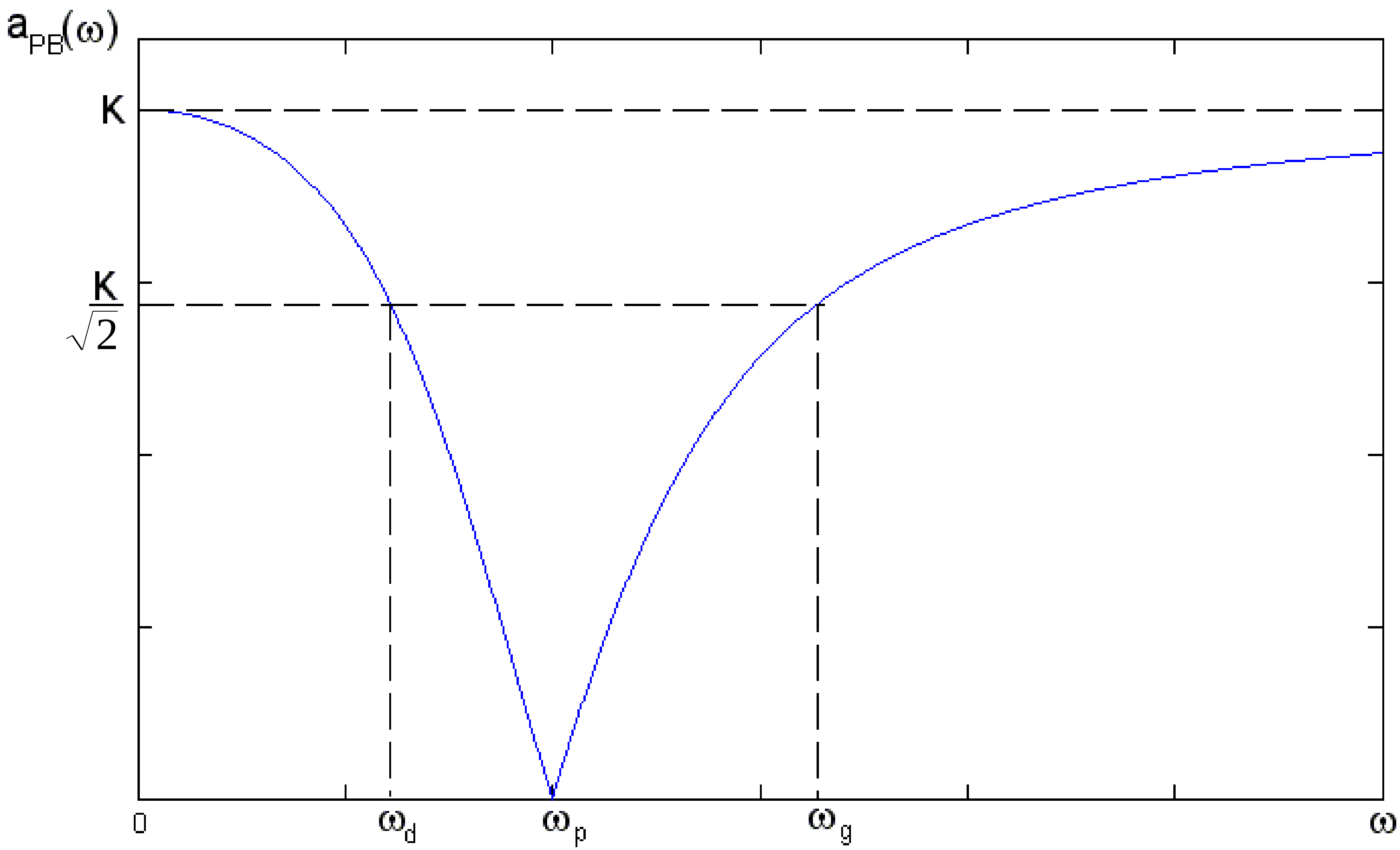
  - $a(\omega)$ ima nulu u $\omega=\omega_p$
  - $a(\omega) \rightarrow K$ kad $\omega \rightarrow 0$
  - $a(\omega) \rightarrow K$ kad $\omega \rightarrow \infty$

- Filtar:
- propušta signale vrlo niskih i vrlo visokih frekvencija
- ne propušta signale s frekvencijama oko ω_p

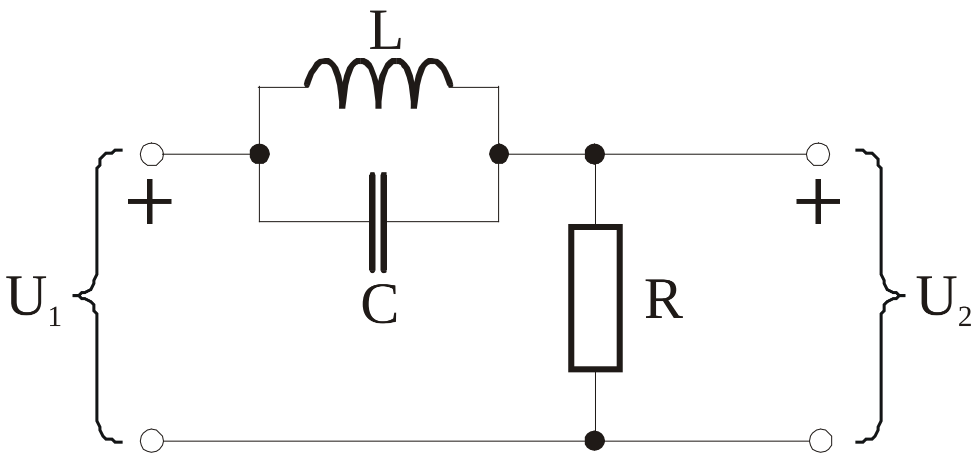
- Granične frekvencije ω_d i ω_g
  - frekvencije na kojima karakterstika ima $\sqrt{2}$ puta manji iznos od maksimuma.

$$a_{PB}(\omega_d) = a_{PB}(\omega_g) = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

Amplitudno frekvencijska karaktersitika



Realizacija PB sa RLC četveropolom



$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + s \cdot \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q_p = RC\omega_p = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad K = 1$$

Amplitudno frekvencijska karakteristika glasi

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{\left|\frac{1}{LC} - \omega^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \cdot \frac{1}{RC}\right)^2}}$$

Na rezonantnoj frekvenciji kad je $\omega=\omega_p=1/(LC)^{1/2}$

impedancija paralelnoga spoja L i C postaje beskonačna

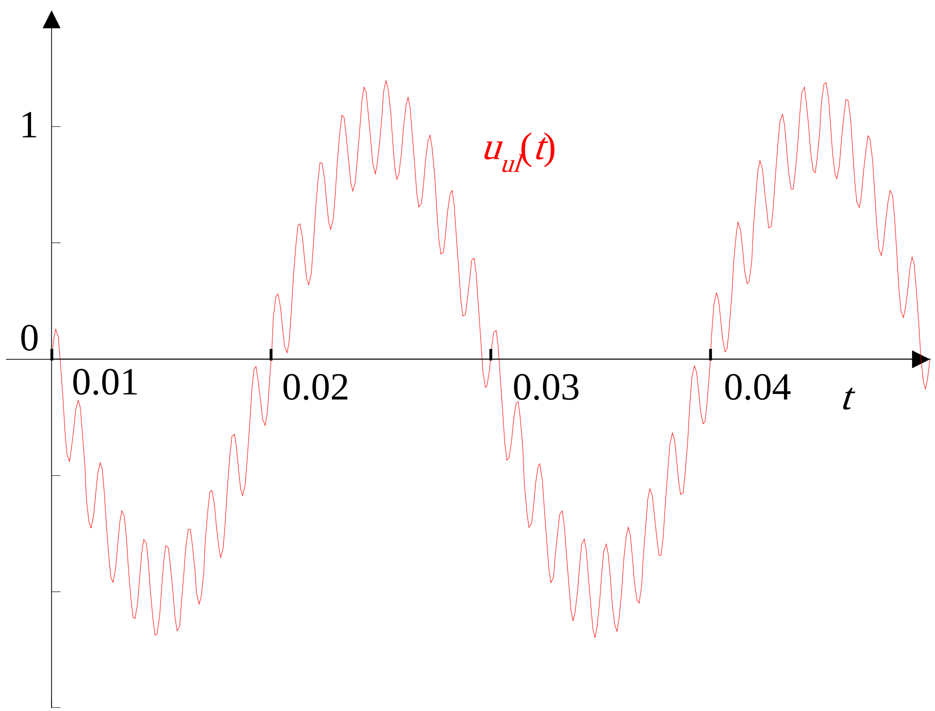
→struja kroz otpor R je jednaka nuli

→napon na R jednak je nuli

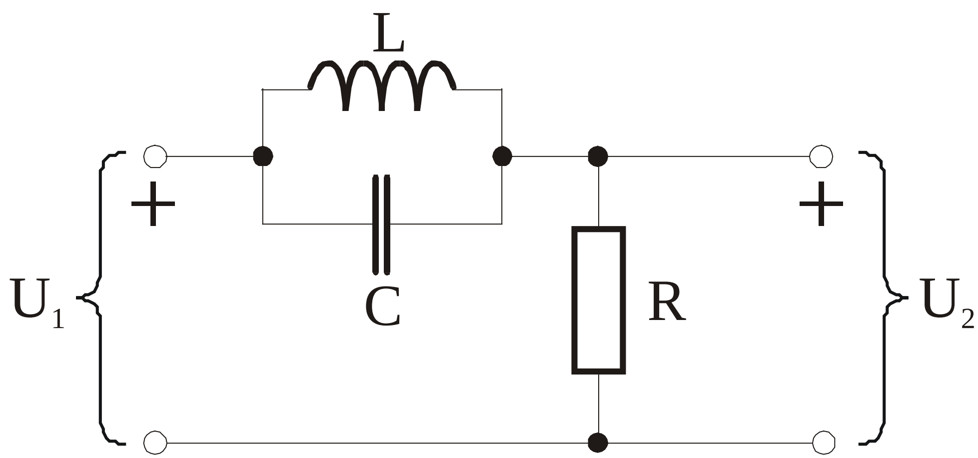
$$U_2 = 0 \qquad \Rightarrow \left|H(j\omega_p)\right| = 0$$

Primjer: Telefonski prijenosni sistem sadrži osim korisnoga signala i smetnju od gradske mreže frekvencije 50 Hz.

Za ilustraciju neka je ulazni napon sastavljen od sinusnoga signala frekvencije 1000 Hz i smetnje frekvencije 50 Hz.



Za eliminaciju smetnje →pojasna brana s f_p=50 Hz.



Otpor R predstavlja ekvivalentnu impedanciju sustava.

Paralelna kombinacija L i C ima impedanciju

$$Z(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{L/C}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L}$$

Naponska prijenosna funkcija je

$$\frac{U_2}{U_1} = H(j\omega) = \frac{R}{R + Z(j\omega)} = \frac{(j\omega)^2 + 1/LC}{(j\omega)^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

Rezonantna frekvencija LC kruga je 50 Hz ili

$$\omega_p = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$$

Odabere li se za kapacitet C=100 μF, potrebna vrijednost induktiviteta je

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{100^2 \pi^2 100 \cdot 10^{-6}} = 101.3\,\mathrm{mH}$$

Ulazni napon je sastavljen od sinusnoga signala frekvencije 1000 Hz i smetnje frekvencije 50 Hz, tj.

$$u_1(t) = \sin(2\pi \cdot 50t) + 0.2 \cdot \sin(2\pi \cdot 1000t)$$

Ulazni i izlazni napon prikazani su na slici.

Izlazni napon ne sadrži više komponentu od 50 Hz.