Električni krugovi

Uvod u teoriju linija

Uvod u teoriju linija

- Električni krugovi s koncentriranim elementima
  - električna svojstva elemenata ne ovise o njihovim fizičkim dimenzijama.
  - svaka promjena signala u jednoj točki → trenutni odziv u svakoj drugoj točki mreže.
  - pretpostavka o koncentriranosti parametara →
    - ako su dimenzije elemenata puno manje od valne duljine signala.

- Na vrlo visokim frekvencijama
  - → valna duljina signala može postati usporediva s dimenzijama sustava.
  - → nema trenutnog odziva na promjenu pobude.
  - → signal putuje kroz sustav konačnom brzinom.
  - → signal ima različite faze u različitim točkama sustava.

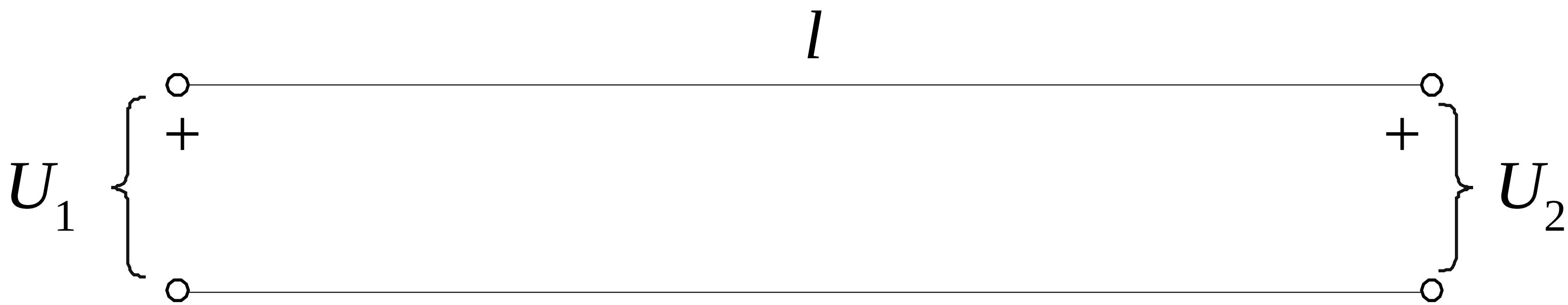
Električne prijenosne linije

- Par paralelnih vodiča:
  - izolirani jedan od drugog i prema okolini,
  - na razmaku zanemarivome u odnosu na njihovu duljinu
  - služe za prijenos električne energije ili signala na veće udaljenosti,

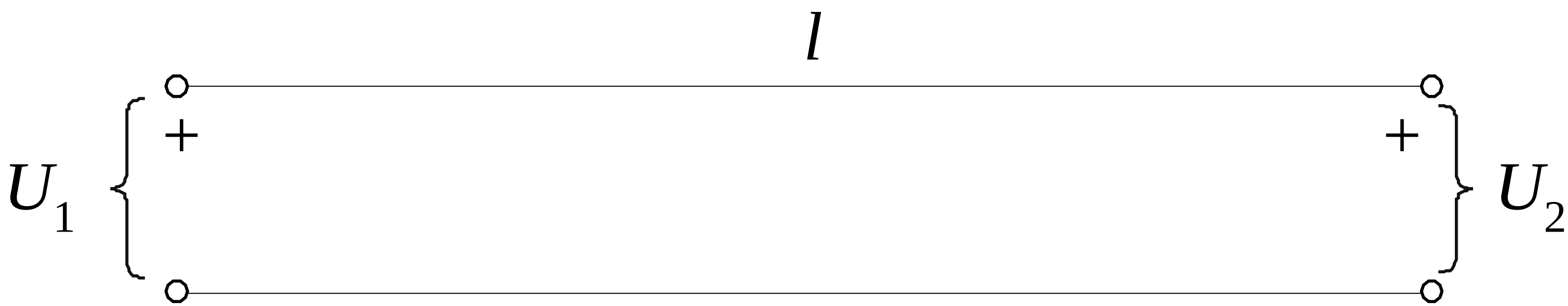
nazivamo ***električnim prijenosnim linijama***.

- Termin “veća udaljenost” → relativan → ovisi o valnoj duljini signala koji se prenosi.

- Model linije: idealizirana homogena linija → dva paralelno postavljena vodiča duljine *l*.



- Električna linija → sistem s raspodijeljenim parametrima.
- Liniju nije moguće prikazati koncentriranim elementima R, L i C, ako njena duljina nije puno kraća od najmanje valne duljine signala koji se prenosi.
- Parametri su raspodijeljeni duž linije.



$R \rightarrow$ otpor linije po jedinici duljine [W/m]

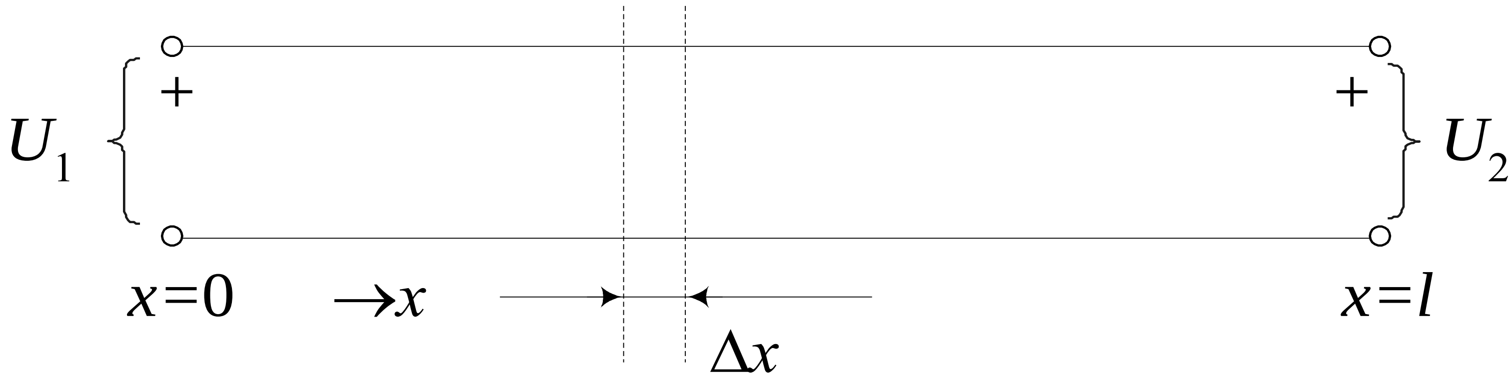
$L \rightarrow$ induktivitet linije po jedinici duljine [H/m]

$G \rightarrow$ vodljivost linije po jedinici duljine [S/m]

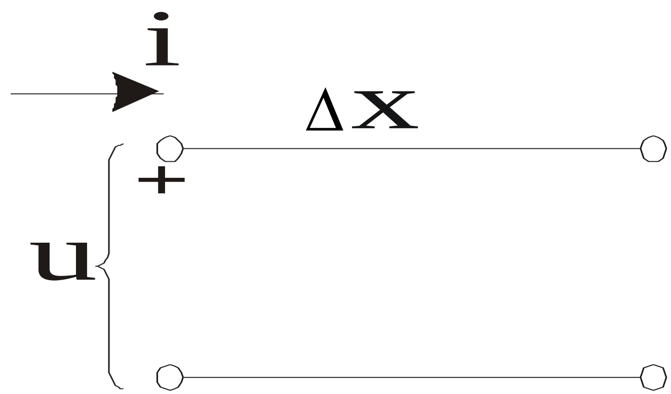
$C \rightarrow$ kapacitet linije po jedinici duljine [F/m]

R, L , C i G → **primarni parametri linije**

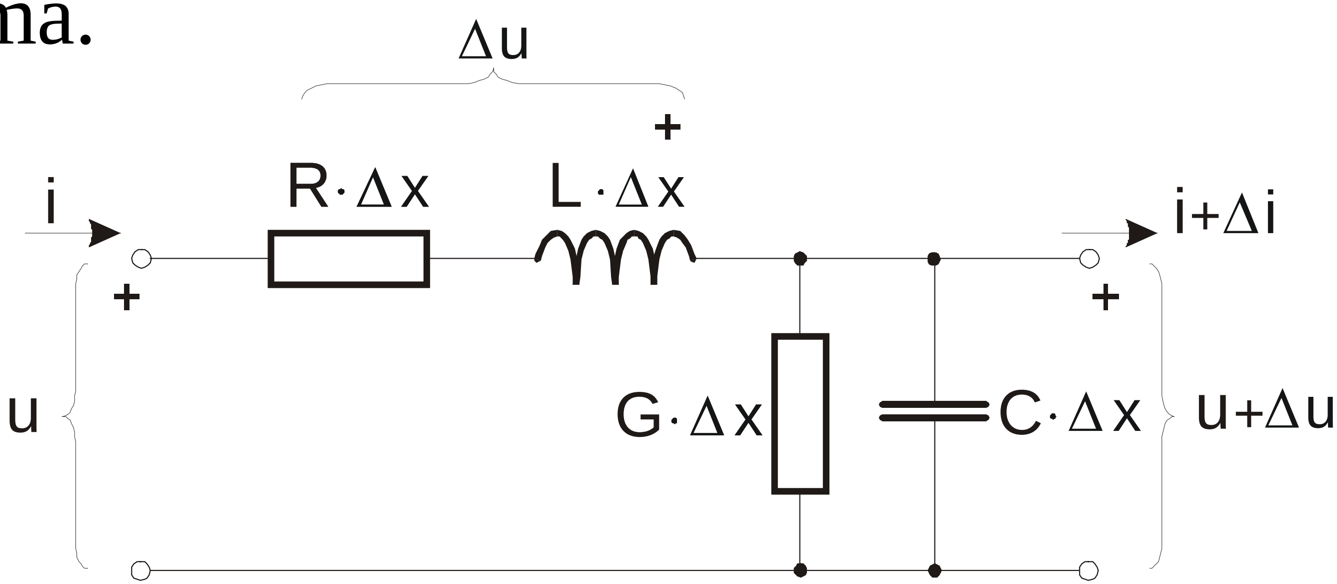
- Zamislimo jedan segment linije duljine Δx.



- Δx je puno manji od najmanje valne duljine signala.



- Segment linije je moguće predočiti koncentriranim parametrima.



- Vrijede slijedeće jednadžbe

$$\cancel{u}=(R\cdot\Delta x)\cdot i+(L\cdot\Delta x)\cdot\frac{di}{dt}+\cancel{u}+\Delta u$$

$$\cancel{i}=(G\cdot\Delta x)\cdot u+(C\cdot\Delta x)\cdot\frac{du}{dt}+\cancel{i}+\Delta i$$

$$:\Delta x$$

$$-\frac{\Delta u}{\Delta x} = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$-\frac{\Delta i}{\Delta x} = G \cdot u + C \cdot \frac{du}{dt}$$

- Ako se Δx smanjuje tako da $\Delta x \rightarrow \partial x$ tada se smanjuje i Δi, kao i Δu, pa vrijedi

$$\Delta i \rightarrow \partial i$$

$$\Delta u \rightarrow \partial u$$

- Dobiva se

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R\cdot i + L\cdot\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G\cdot u + C\cdot\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}} \longrightarrow \textbf{PAR SIMULTANIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI LINIJE}$$

- U gornjim jednadžbama su

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,t) \\ i &= i(x,t) \end{aligned}\right\} \quad \text{za svaki } x \text{ i } t$$

- Pri tome su:

$$u,\, i \longrightarrow \text{zavisne varijable}$$

$$t,\, x \longrightarrow \text{nezavisne varijable}$$

pa jednadžbe glase:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + G \cdot u + C \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \end{aligned}}$$

- Linije o kojima je ovdje riječ su:

linearne, vremenski nepromjenjive i homogene.

- Linearne → parametri ne ovise o $u(x,t)$ ni $i(x,t)$ na liniji
- Vremenski nepromjenjive → parametri neovisni o vremenu
- Homogene → parametri ne ovise o mjestu na liniji x

Rješenje diferencijalnih jednadžbi: →rubni i početni uvjeti

$$\left.\begin{array}{lll} x=0 & u(0,t) & i(0,t) \\ x=l & u(l,t) & i(l,t) \end{array}\right\} \text{Rubni uvjeti}$$

$$\left.\begin{array}{lll} t=0 & u(x,0) & i(x,0) \\ & \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} & \left.\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} \end{array}\right\} \text{Početni uvjeti}$$

- Dif. jednadžbe je moguće transformirati u drugi oblik
- Deriviramo li prvu jednadžbu po *t* i drugu po *x*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \Big/ \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + G \cdot u + C \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \Big/ \quad \frac{\partial}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = R \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + L \cdot \frac{\partial i^2}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = G \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + C \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

- Nakon jednostavne računice dobiva se

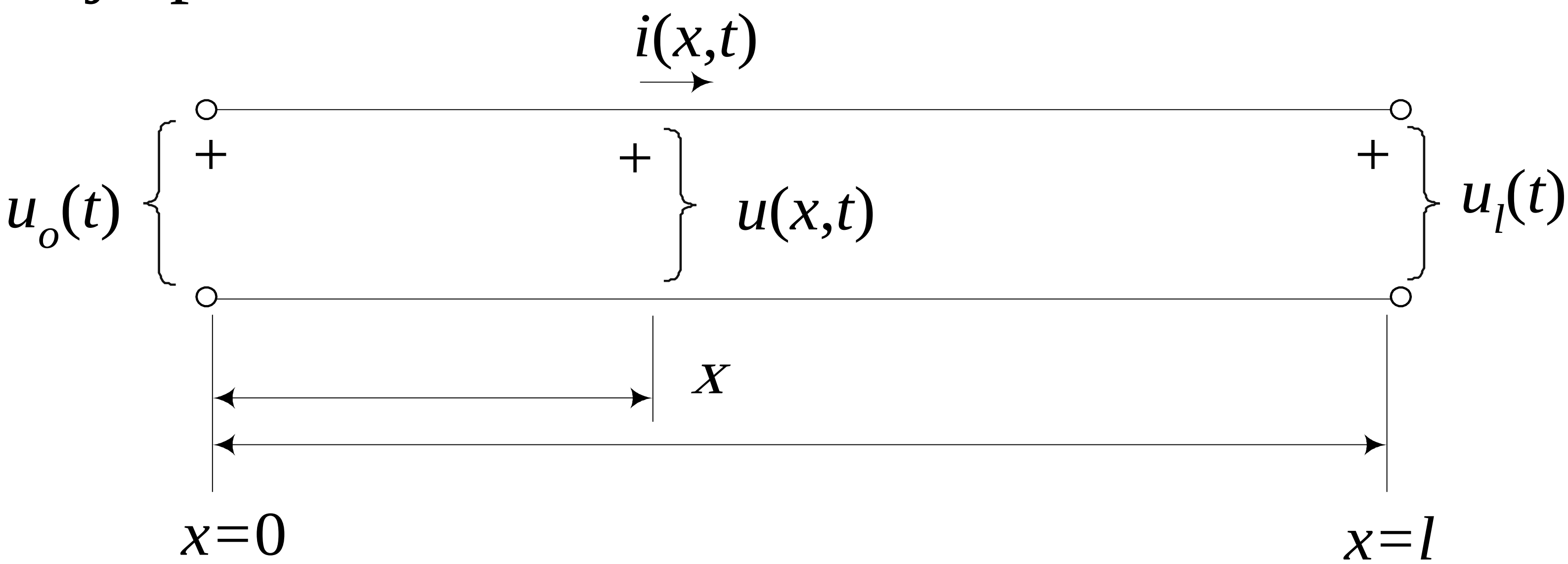
$$\boxed{\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R \cdot G \cdot i(x,t)}$$

- Istim postupkom dobiva se i dif. jednadžba za napon

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = LC \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (R \cdot C + L \cdot G)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + R \cdot G \cdot u(x,t)}$$

- Ove su dif. jednadžbe u literaturi poznate kao
  - ***telegrafske jednadžbe linije***

- Za liniju prema slici



- odredit ćemo napon i struju na bilo kojem mjestu x linije.

- Rješenja dif. jednadžbi linije→Laplaceovom transformacijom

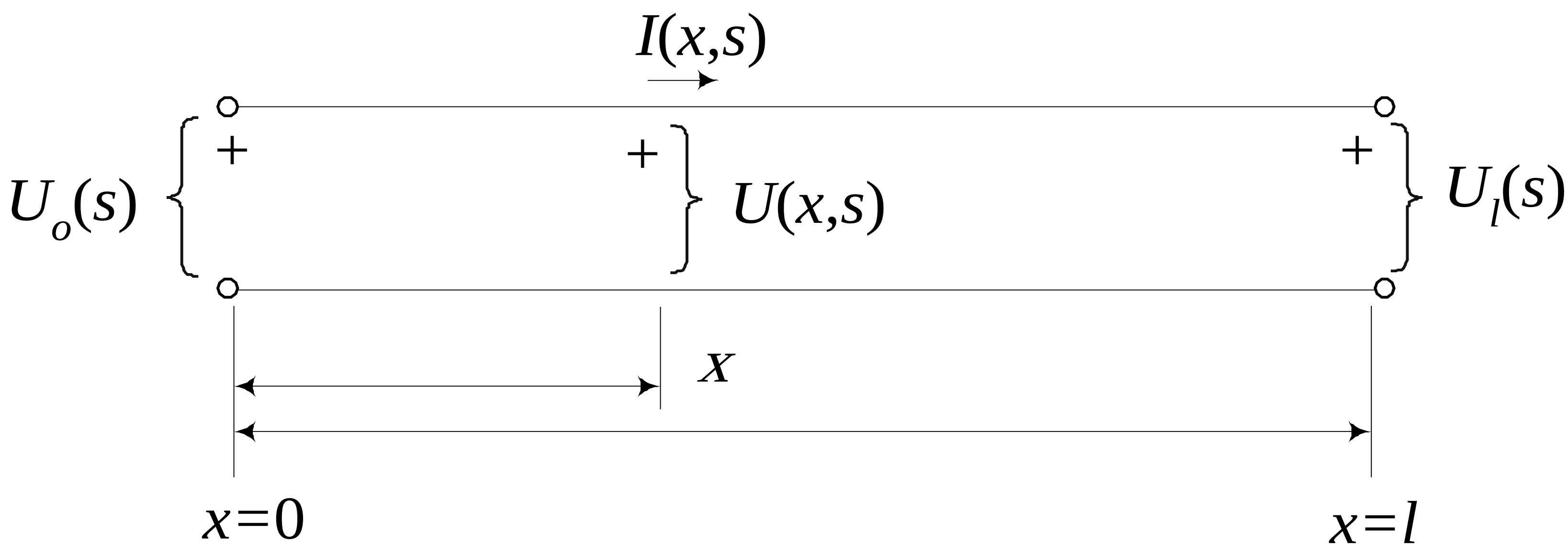
$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G \cdot u + C \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}}$$

Primjenom Laplace-a

$$u(x,t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; U(x,s)$$

$$i(x,t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; I(x,s)$$

- Naponi i struje na liniji → funkcije od x i s



Laplaceova transformacija djeluje na funkcije od t.

$$-\frac{\partial U(x,s)}{\partial x} = R \cdot I(x,s) + L \cdot s \cdot I(x,s) - L \cdot i(x,0)$$

$$-\frac{\partial I(x,s)}{\partial x} = G \cdot U(x,s) + C \cdot s \cdot U(x,s) - C \cdot u(x,0)$$

- $i(x,0)$ i $u(x,0)$ → raspodjela struje i napona na liniji u $t=0$.
- Pretpostavka: $i(x,0)=0$ i $u(x,0)=0$ →jednostavnije jednadžbe

$$-\frac{\partial U(x,s)}{\partial x} = (R + L \cdot s) \cdot I(x,s)$$

$$-\frac{\partial I(x,s)}{\partial x} = (G + C \cdot s) \cdot U(x,s)$$

- Deriviranjem prve jednadžbe po *x*

$$-\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}=(R+sL)\cdot\frac{dI(x,s)}{dx}$$

- Nakon uvrštenja :

$$-\frac{dI(x,s)}{dx}=(G+C\cdot s)\cdot U(x,s)$$

$$\boxed{\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}=(R+sL)(G+sC)U(x,s)}$$

- Istim je postupkom → jednadžba za struju

$$\boxed{\frac{d^2I(x,s)}{dx^2}=(R+sL)(G+sC)I(x,s)}$$

- Formalno iste jednadžbe za napon i za struju

Uz oznaku $(R+sL)(G+sC)=\gamma^2$

dobiva se $$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-\gamma^2\cdot U(x,s)=0$$

- Homogena dif. jed.2. reda za raspodjelu napona duž linije.
- Za raspodjelu struje na liniji → jednadžba istoga oblika

$$\frac{d^2I(x,s)}{dx^2}-\gamma^2\cdot I(x,s)=0$$

- Opće rješenje za napon → eksponencijalnoga oblika

$$U(x,s) = A \cdot e^{px}$$

- Uvrštenjem u diferencijalnu jednadžbu

$$Ap^2 e^{px} - \gamma^2 A e^{px} = 0 \qquad \Rightarrow p^2 - \gamma^2 = 0$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \pm\gamma \qquad \text{rješenja karakteristične jednadžbe}$$

- Rješenje diferencijalne jednadžbe za raspodjelu napona

$$\boxed{U(x,s) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}}$$

- Pri tome je

$$\gamma = \sqrt{(R + sL)(G + sC)} \longrightarrow$$

faktor prijenosa homogene linije

- Faktor prijenosa γ nije konstantan, već ovisi o s.

$$\gamma = \gamma(s)$$

- Često se koristi i termin ***faktor propagacije***.

Pošto za struju $I(x,s)$ vrijedi formalno isti izraz, rješenje je:

$$\boxed{I(x,s) = B_1 e^{-\gamma x} + B_2 e^{\gamma x}}$$

$A_1, A_2, B_1, B_2 \rightarrow$ određuju se iz rubnih uvjeta

$$\Downarrow$$

$$U(0,s) \quad I(0,s) \quad U(l,s) \quad I(l,s)$$

- Veličine A_1 i A_2 povezane su s veličinama B_1 i B_2.
- To slijedi iz diferencijalnih jednadžbi

$$-\frac{dU(x,s)}{dx}=(R+sL)I(x,s)$$

$$-\frac{dI(x,s)}{dx}=(G+sC)U(x,s)$$

- Uvrštenjem rješenja za $U(x,s)$ i $I(x,s)$, dobiva se:

$$A_1\gamma \cdot e^{-\gamma \cdot x} - A_2\gamma \cdot e^{\gamma \cdot x} = (R + sL)\left(B_1 e^{-\gamma \cdot x} + B_2 e^{\gamma \cdot x}\right)$$

$$\left(A_1 - \frac{R + sL}{\gamma} B_1\right) e^{-\gamma \cdot x} - \left(A_2 + \frac{R + sL}{\gamma} B_2\right) e^{\gamma \cdot x} = 0$$

- Izraz

$$\frac{R + sL}{\gamma} = \boxed{\sqrt{\frac{R + sL}{G + sC}} = Z_0}$$

je ***valna ili karakteristična impedancija*** homogene linije

- Iz zadnje jednadžbe slijedi:

$$A_1 - Z_0 B_1 = 0 \qquad \Rightarrow B_1 = \frac{A_1}{Z_0}$$

$$A_2 + Z_0 B_2 = 0 \qquad \Rightarrow B_2 = -\frac{A_2}{Z_0}$$

- pa rješenja za napon i struju glase

$$\boxed{U(x,s) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}}$$

$$\boxed{I(x,s) = \frac{A_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_0} e^{\gamma x}}$$

- Rubni uvjeti za x=0 → $U(0,s)=U(0)$, i $I(0,s)=I(0)$

$$U(0)=A_1e^{-\gamma\cdot 0}+A_2e^{\gamma\cdot 0}=A_1+A_2$$

$$I(0)=\frac{A_1}{Z_0}e^{-\gamma\cdot 0}-\frac{A_2}{Z_0}e^{\gamma\cdot 0}=\frac{A_1}{Z_0}-\frac{A_2}{Z_0}$$

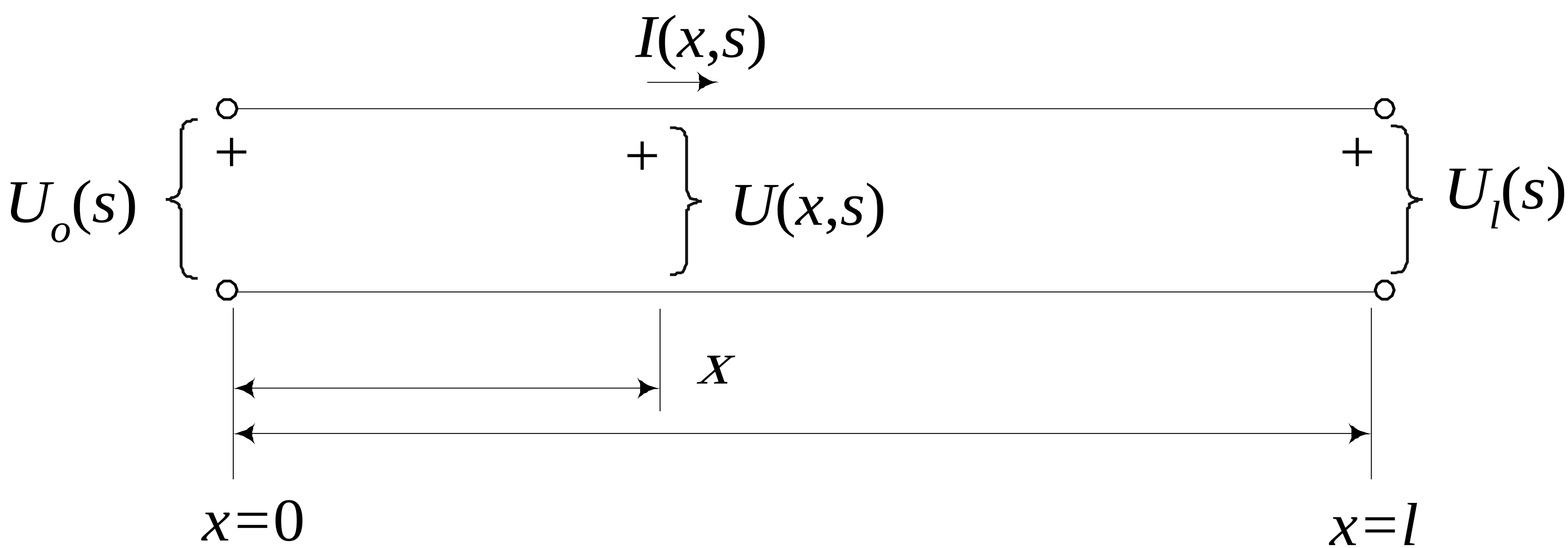
- Iznosi koeficijenata A_1 i A_2 su onda

$$\boxed{A_1=\frac{U(0)+I(0)Z_0}{2}} \qquad \boxed{A_2=\frac{U(0)-I(0)Z_0}{2}}$$

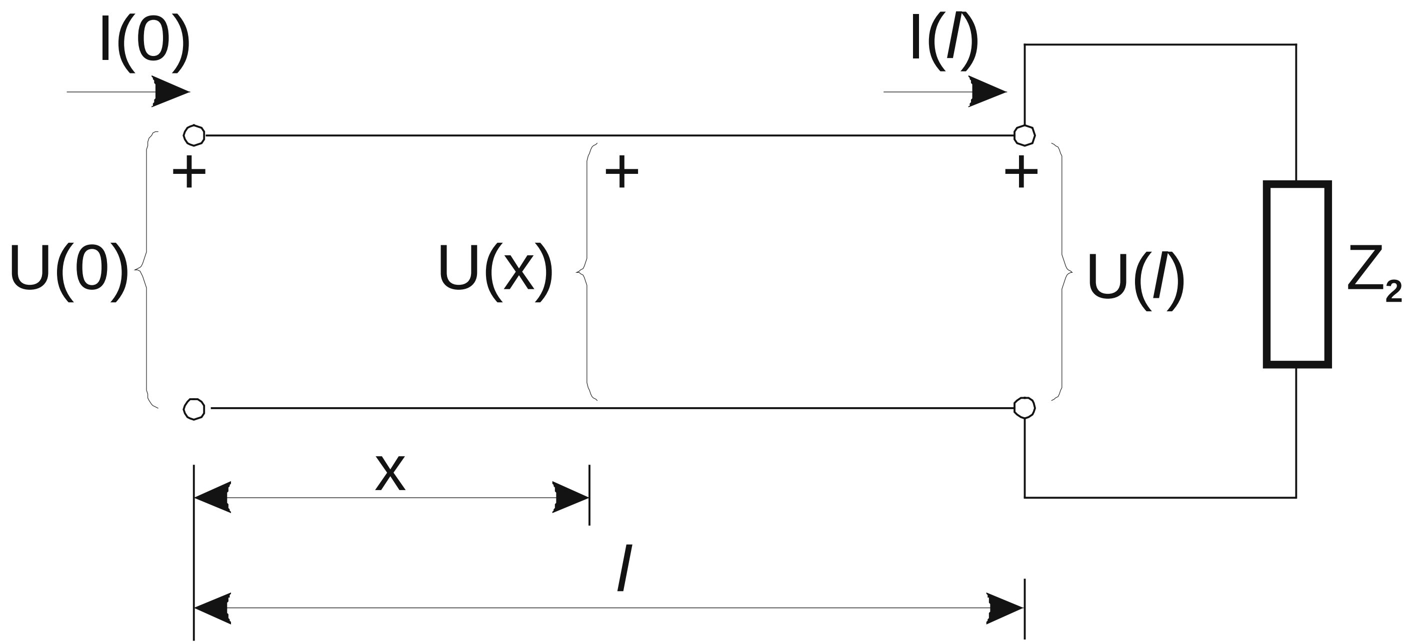
- Prema tome uz poznati napon i struju na početku linije, rješenje za napon i struju na mjestu x linije glasi

$$\boxed{U(x,s)=\frac{U(0)+I(0)Z_0}{2}e^{-\gamma\cdot x}+\frac{U(0)-I(0)Z_0}{2}e^{\gamma\cdot x}}$$

$$\boxed{I(x,s)=\frac{U(0)/Z_0+I(0)}{2}e^{-\gamma x}-\frac{U(0)/Z_0-I(0)}{2}e^{\gamma x}}$$



Homogena linija zaključena impedancijom Z_2



$$x = l \rightarrow \quad U(x,s) = U(l) \qquad \frac{U(l)}{I(l)} = Z_2$$

$$I(x,s) = I(l)$$

- Iz izraza za rješenje linije slijedi za $x=l$

$$U(l) = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l}$$

$$I(l) = \frac{1}{Z_0}\left(A_1 e^{-\gamma l} - A_2 e^{\gamma l}\right)$$

$$\boxed{Z_2 = \frac{U(l)}{I(l)} = Z_0 \frac{A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l}}{A_1 e^{-\gamma l} - A_2 e^{\gamma l}}}$$

- Vrijedi nadalje

$$U(l) = A_1 e^{-\gamma \cdot l} + A_2 e^{\gamma \cdot l}$$

$$Z_0 I(l) = A_1 e^{-\gamma \cdot l} - A_2 e^{\gamma \cdot l}$$

- odakle slijedi za A_1 i A_2

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(U(l) + Z_0 I(l)\right) e^{\gamma \cdot l} = \frac{I(l)}{2}\left(Z_2 + Z_0\right) e^{\gamma \cdot l}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(U(l) - Z_0 I(l)\right) e^{-\gamma \cdot l} = \frac{I(l)}{2}\left(Z_2 - Z_0\right) e^{-\gamma \cdot l}$$

$$\boxed{\frac{A_2}{A_1} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} e^{-2\gamma l}}$$

Omjer $\dfrac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$

se naziva ***koeficijentom refleksije na izlazu*** i označava kao

$$\boxed{\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}}$$

Prema tome vrijedi za A_1 i A_2

$$\boxed{A_2 = A_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}}$$

- Napon na početku linije je

$$U(0) = A_1 + A_2 = A_1\left(1 + \Gamma_2 e^{-2\gamma \cdot l}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_1 = \frac{U(0)}{1 + \Gamma_2 e^{-2\gamma l}}}$$

$$\boxed{A_2 = \frac{\Gamma_2 e^{-2\gamma l}}{1 + \Gamma_2 e^{-2\gamma l}} U(0)}$$

- Ako je poznat napon na početku linije, tada je moguće odrediti napon i struju na bilo kojem mjestu *x* linije kao

$$U(x,s)=\frac{U(0)}{1+\Gamma_2 e^{-2\gamma\cdot l}}\left(e^{-\gamma\cdot x}+\Gamma_2 e^{-2\gamma\cdot l}e^{\gamma\cdot x}\right)$$

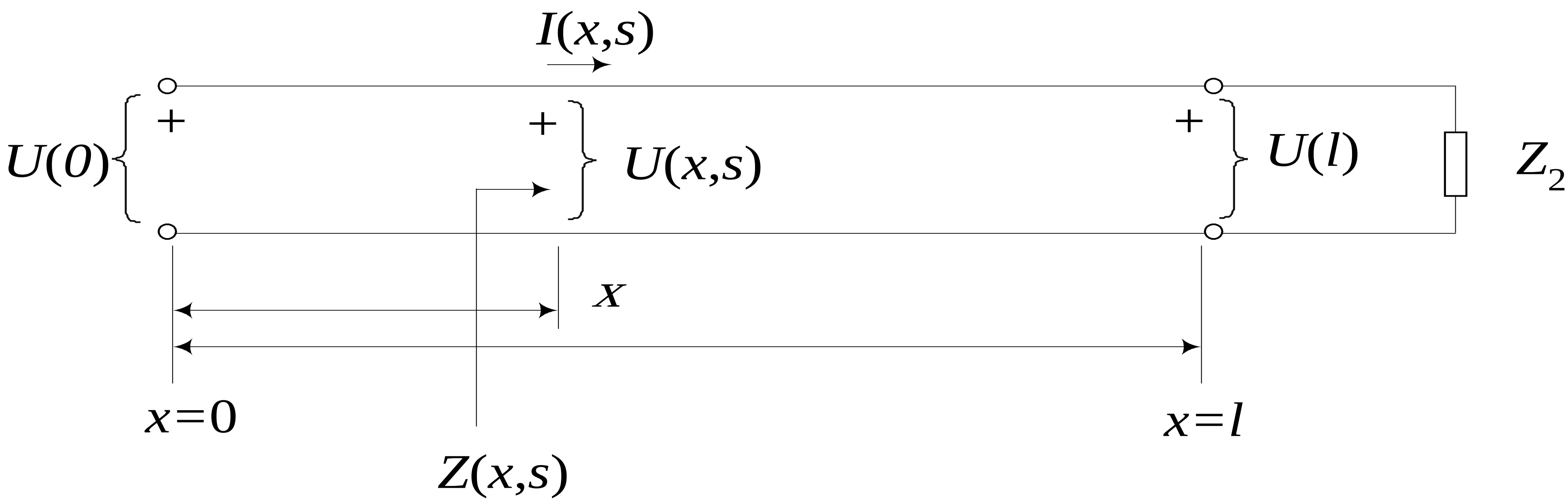
$$I(x,s)=\frac{U(0)}{Z_0\left(1+\Gamma_2 e^{-2\gamma\cdot l}\right)}\left(e^{-\gamma\cdot x}-\Gamma_2 e^{-2\gamma\cdot l}e^{\gamma\cdot x}\right)$$

- Nakon sređivanja

$$U(x,s)=U(0,s)\cdot\frac{e^{-\gamma(x-l)}+\Gamma_2 e^{\gamma(x-l)}}{e^{\gamma l}+\Gamma_2 e^{-\gamma l}}$$

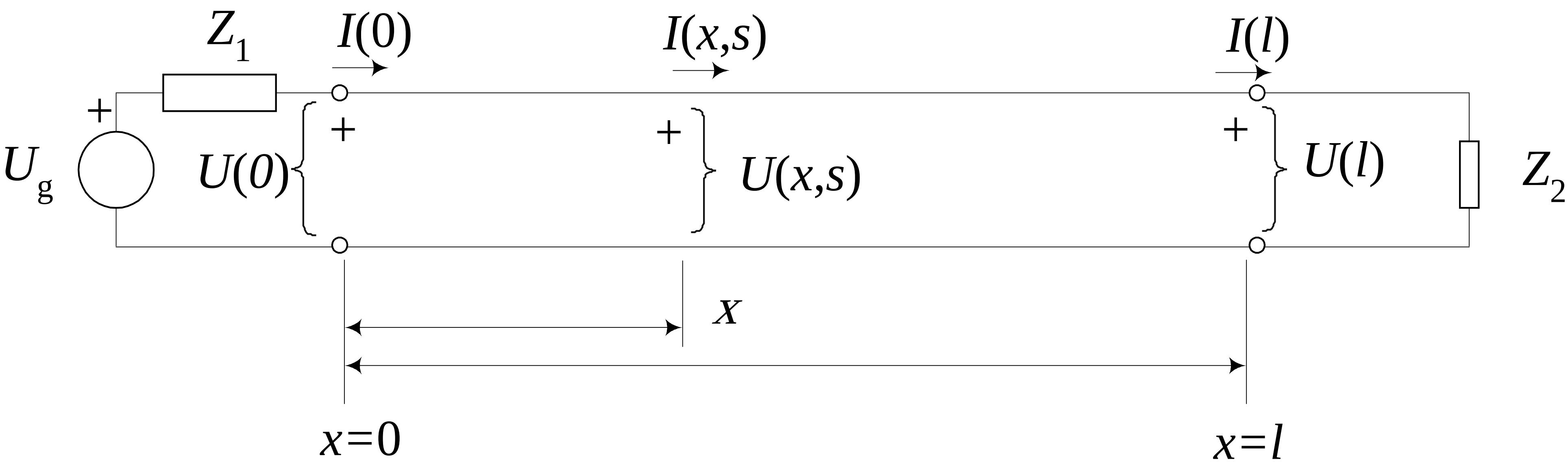
$$I(x,s)=\frac{U(0,s)}{Z_0}\cdot\frac{e^{-\gamma(x-l)}-\Gamma_2 e^{\gamma(x-l)}}{e^{\gamma l}+\Gamma_2 e^{-\gamma l}}$$

- Impedancija na mjestu x linije gledana prema izlazu



$$Z(x,s)=\frac{U(x,s)}{I(x,s)}=Z_0\frac{e^{-\gamma(x-l)}+\Gamma_2 e^{\gamma(x-l)}}{e^{-\gamma(x-l)}-\Gamma_2 e^{\gamma(x-l)}}$$

Linija zaključena na oba kraja



$$U(0) = U_g - Z_1 I(0)$$

$$U(l) = I(l) Z_2$$

$$U(0) = A_1 + A_2$$

$$I(0) = \frac{A_1}{Z_0} - \frac{A_2}{Z_0}$$

$$A_1 + A_2 = U_g - Z_1\left(\frac{A_1}{Z_0} - \frac{A_2}{Z_0}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$A_1\left(\frac{Z_0 + Z_1}{Z_0}\right) + A_2\left(\frac{Z_0 - Z_1}{Z_0}\right) = U_g$$

$$\Downarrow$$

$$A_1 - A_2\,\frac{Z_1 - Z_0}{Z_0 + Z_1} = U_g\,\frac{Z_0}{Z_0 + Z_1}$$

- Izraz

$$\frac{Z_1 - Z_0}{Z_0 + Z_1}$$

se naziva ***koeficijentom refleksije na ulazu*** i označava kao

$$\boxed{\Gamma_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}}$$

Vrijedi

$$A_1 - \Gamma_1 A_2 = U_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \qquad A_2 = A_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}$$

$$A_1 - A_1 \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l} = U_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1}$$

$$\boxed{A_1 = U_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}}}$$

$$\boxed{A_2 = U_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \cdot \frac{\Gamma_2 e^{-2\gamma l}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma l}}}$$

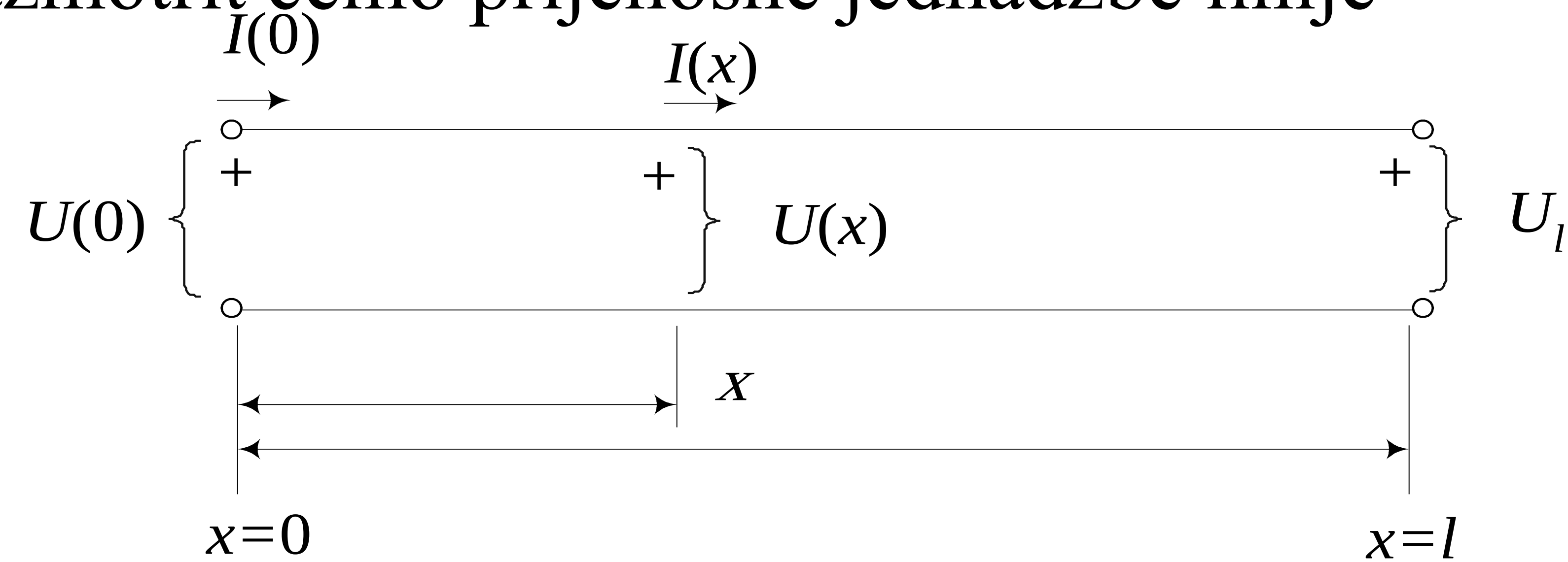
Prijenosne jednadžbe linije

- Linija je četveropol, kojeg je moguće opisati bilo kojim parametrima četveropola.
- Pošto je to sustav za prijenos signala ili energije

$\Downarrow$

najpogodniji → prijenosni parametri

- Razmotrit ćemo prijenosne jednadžbe linije



- Vrijedi

$$U(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \qquad A_1 = \left(U(0) + Z_0 I(0)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$I(x) = \frac{A_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_0} e^{\gamma x} \qquad A_2 = \left(U(0) - Z_0 I(0)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$U(x)=\frac{U(0)+Z_0 I(0)}{2}e^{-\gamma\cdot x}+\frac{U(0)-Z_0 I(0)}{2}e^{\gamma\cdot x}$$

$$I(x)=\frac{U(0)/Z_0+I(0)}{2}e^{-\gamma\cdot x}-\frac{U(0)/Z_0-I(0)}{2}e^{\gamma\cdot x}$$

- Napon i struja na mjestu *x* linije:

$$U(x) = U(0)\cdot\frac{e^{\gamma\cdot x}+e^{-\gamma\cdot x}}{2} - Z_0 I(0)\cdot\frac{e^{\gamma\cdot x}-e^{-\gamma\cdot x}}{2}$$

$$I(x) = -\frac{U(0)}{Z_0}\cdot\frac{e^{\gamma\cdot x}-e^{-\gamma\cdot x}}{2} + I(0)\cdot\frac{e^{\gamma\cdot x}+e^{-\gamma\cdot x}}{2}$$

$$U(x) = U(0)ch(\gamma x) - Z_0 I(0)sh(\gamma x)$$

$$I(x) = -\frac{U(0)}{Z_0}sh(\gamma x) + I(0)ch(\gamma x)$$

$$U(0) = U(x)ch(\gamma x) + Z_0 I(x) sh(\gamma x)$$

$$I(0) = \frac{U(x)}{Z_0} sh(\gamma x) + I(x) ch(\gamma x)$$

Za $x = l$

$$U(0) = U(l)ch(\gamma l) + Z_0 I(l) sh(\gamma l)$$

$$I(0) = \frac{U(l)}{Z_0} sh(\gamma l) + I(l) ch(\gamma l)$$

$$A = ch(\gamma l) = D$$

$$B = Z_0 sh(\gamma l)$$

$$C = \frac{sh(\gamma l)}{Z_0}$$

- Pošto je A=D linija je simetričan četveropol.