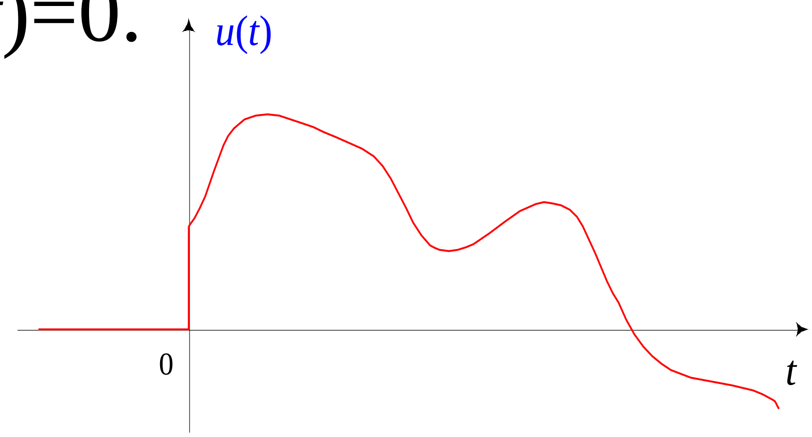
Laplaceova transformacija

- Laplaceova transformacija → omogućava analizu krugova bez potrebe rješavanja diferencijalnih jednadžbi.
- Jednostrana Laplaceova transformacija → primjenjuje se na **kauzalne funkcije**, dakle
  - samo na $f(t)$ definirane u intervalu $t \geq 0$.
  - Za t<0 → $f(t)=0$.



- Laplaceova transformacija kauzalne funkcije $f(t)$ definirana je integralom

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$s \rightarrow$ kompleksna varijabla $\boxed{s=\sigma+j\omega}$.

- Funkcija $F(s)$ je ***transformacija*** ili ***slika*** funkcije $f(t)$ u domeni kompleksne varijable s.

- Laplaceova transformacija funkcije *f*(*t*) postoji ako je:

$$\int_{0}^{+\infty} \left| f(t) \right| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

$\sigma_0 \rightarrow$ apscisa apsolutne konvergencije.

- Inverzna transformacija:

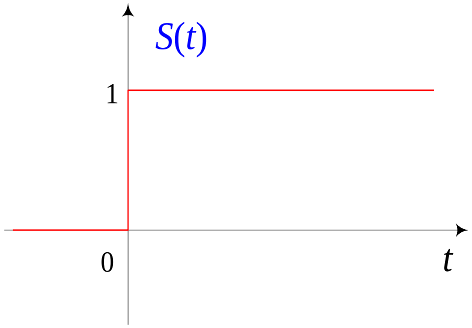
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds \qquad \sigma_1 > \sigma_0$$

- Za razne oblike funkcije *f*(*t*) $\Rightarrow$ tablice L-transformacija

Laplaceova transformacija nekih karakterističnih funkcija

- Step funkcija (Jedinični skok):

$$S(t)=\begin{cases}1 & \text{za} \quad t>0 \\ 0 & \text{za} \quad t<0\end{cases}$$

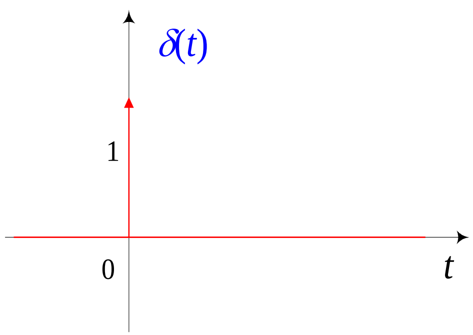


$$\mathcal{L}\,[S(t)]=\int_{0}^{+\infty} S(t)e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{s}$$

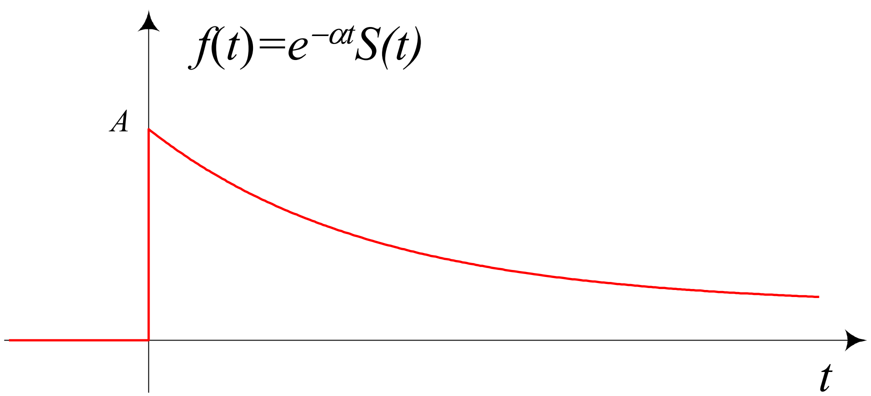
$$S(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s} \qquad\qquad \sigma_0=\mathrm{Re}[s]>0$$

- <u>Diracov δ impuls:</u> (Jedinični impuls)

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=\int_{0}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=e^{0}=1$$



- Laplaceova transformacija → na kauzalne funkcije ($t \geq 0$).
- U skladu s tim sve su funkcije pomnožene sa S(t).
- Eksponencijalna funkcija: $f(t) = A \cdot e^{-\alpha t} S(t)$



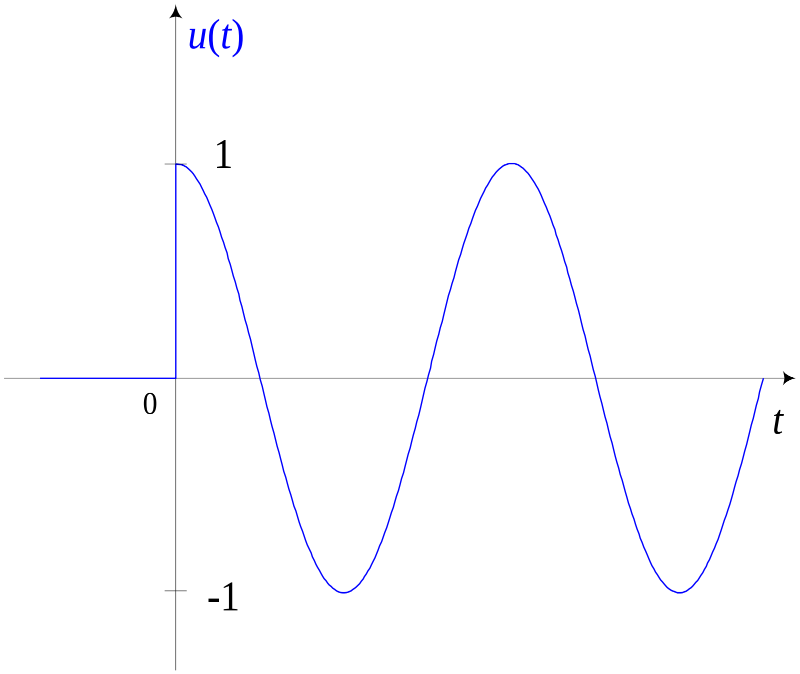
- A -> realna konstanta
- α -> realna ili kompleksna konstanta

$$\mathrm{L}\,[f(t)] = \int_0^{+\infty} A e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} A e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{A}{\alpha - s} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{s-\alpha}$$

$$\text{uz } \sigma_0 = \mathrm{Re}[s-\alpha] > 0$$

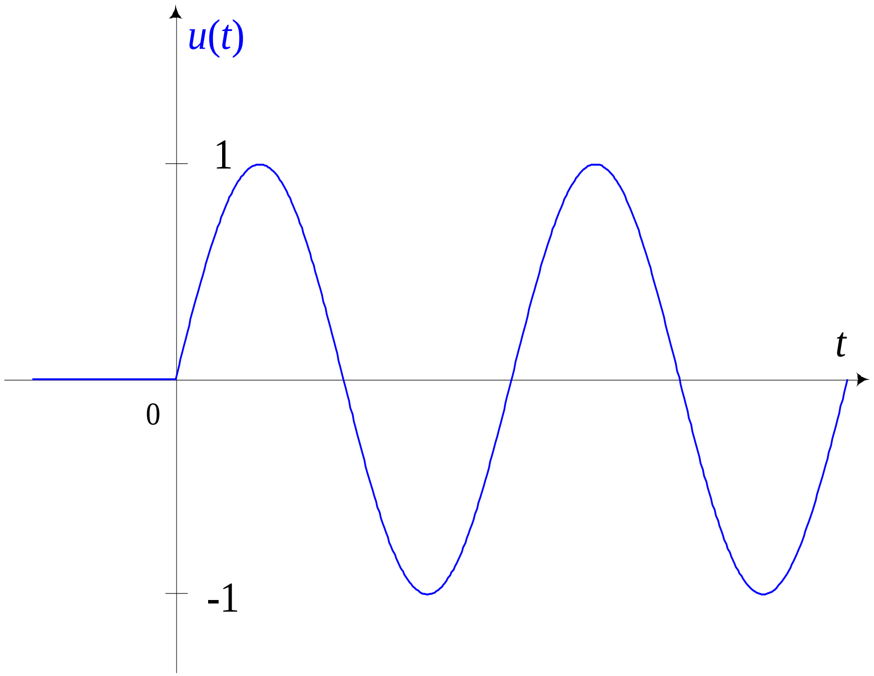
- Sinusna funkcija:

$$f(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$



$$\mathrm{L}\left[\cos(\omega t) S(t)\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

- Sinusna funkcija: $$f(t)=\sin(\omega t)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)$$



$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)S(t)\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Svojstva Laplaceove transformacije

1. Linearnost:

- ako je: $F_1(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\ f_1(t)$

  $F_2(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\ f_2(t)$

- tada vrijedi: $\mathcal{L}\,[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)]=\mathcal{L}\,[c_1 f_1(t)]+\mathcal{L}\,[c_2 f_2(t)]=$

  $=c_1\mathcal{L}\,[f_1(t)]+c_2\mathcal{L}\,[f_2(t)]=c_1F_1(s)+c_2F_2(s)$

- Dokaz → supstitucijom u definicijski integral

2. Transformacija derivacije:

- Ako je: $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$

- tada je: $\mathcal{L}\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right] = \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{df(t)}{dt} e^{-st} dt =$ → parcijalnom integracijom

$$= sF(s) - f(0)$$

- slično je: $\mathcal{L}\left[\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - \left.\dfrac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$

itd.

- Vrijedi (za *n*-tu derivaciju):

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} -$$

$$- \ldots - s \left.\frac{df^{\,n-2}(t)}{dt^{n-2}}\right|_{t=0^-} - \left.\frac{df^{\,n-1}(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

3. Transformacija integrala:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$$

- Ova tri svojstva su naročito važna za transformaciju integro-diferencijalnih jednadžbi.

4. Vremenski pomak:

- Ako je: $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$

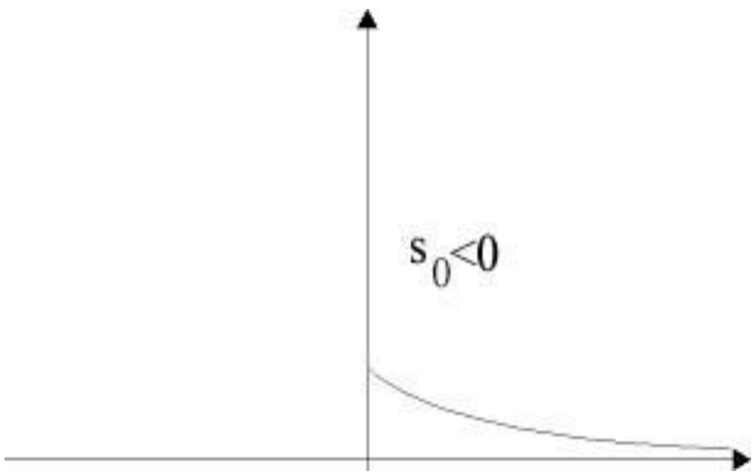
- tada je: $\mathcal{L}\left[f(t-t_0)S(t-t_0)\right] = F(s)\cdot e^{-st_0}$

5. Množenje s eksponencijalom:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\cdot e^{s_0 t}\right]=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{s_0 t}e^{-st}dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-(s-s_0)t}dt = F(s-s_0)$$

- Primjer: $f(t)=e^{s_0 t}\cdot S(t)$



$$\mathcal{L}\left[S(t)\right]=\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{s_0 t}\cdot S(t)\right]=\frac{1}{s-s_0}$$

6. Vremensko skaliranje:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(s)$$

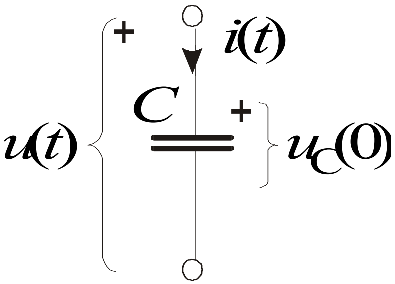
$$\mathcal{L}\left[f(a\cdot t)S(t)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad a>0$$

7. L-transformacija periodičkih funkcija:

$f(t)=f(t+T)$ -> periodička funkcija

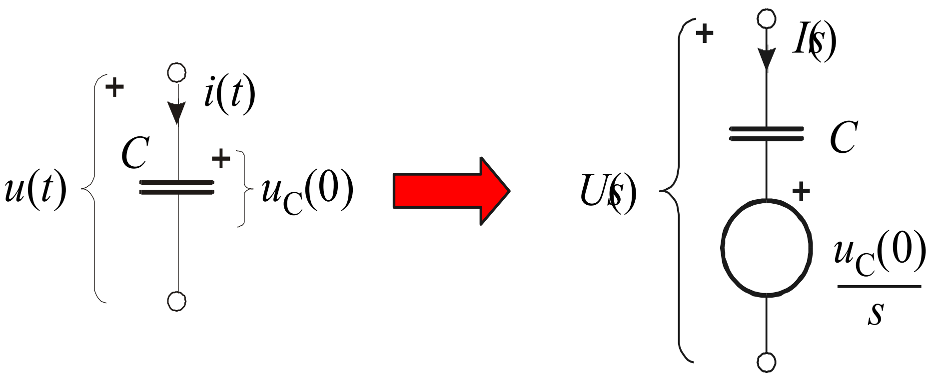
$$\mathcal{L}\left[f(t)\cdot S(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_{0}^{T} f(t)e^{-s\cdot t}\cdot dt$$

Kapacitet

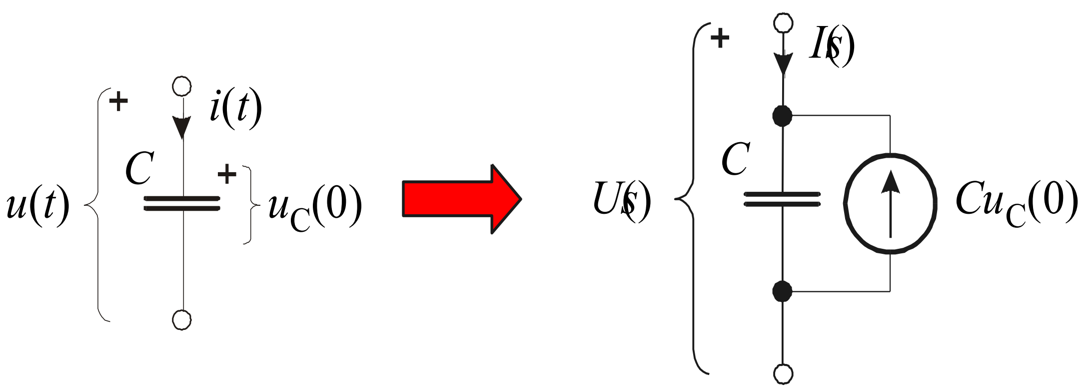


$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau=\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)d\tau+u_C(0) \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$i(t)=C\frac{du(t)}{dt}$$



$$U(s)=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{u_C(0)}{s}$$



$$I(s)=sCU(s)-Cu_C(0)$$

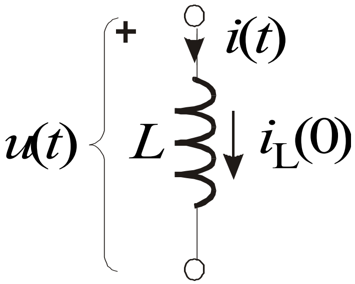
- Impedancija kapaciteta je

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$$

- a njegova admitancija

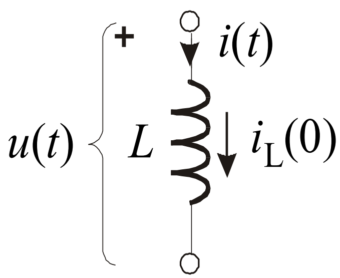
$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = sC$$

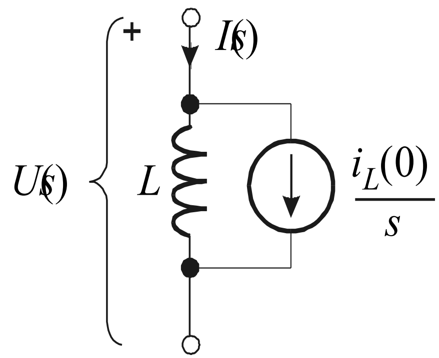
Induktivitet



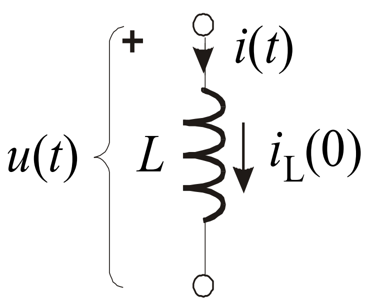
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u(\tau)d\tau + i_L(0) \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

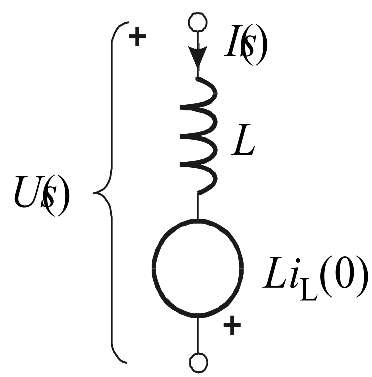
$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$





$$I(s) = \frac{1}{sL}U(s) + \frac{i_L(0)}{s}$$





$$U(s) = sLI(s) - Li_L(0)$$

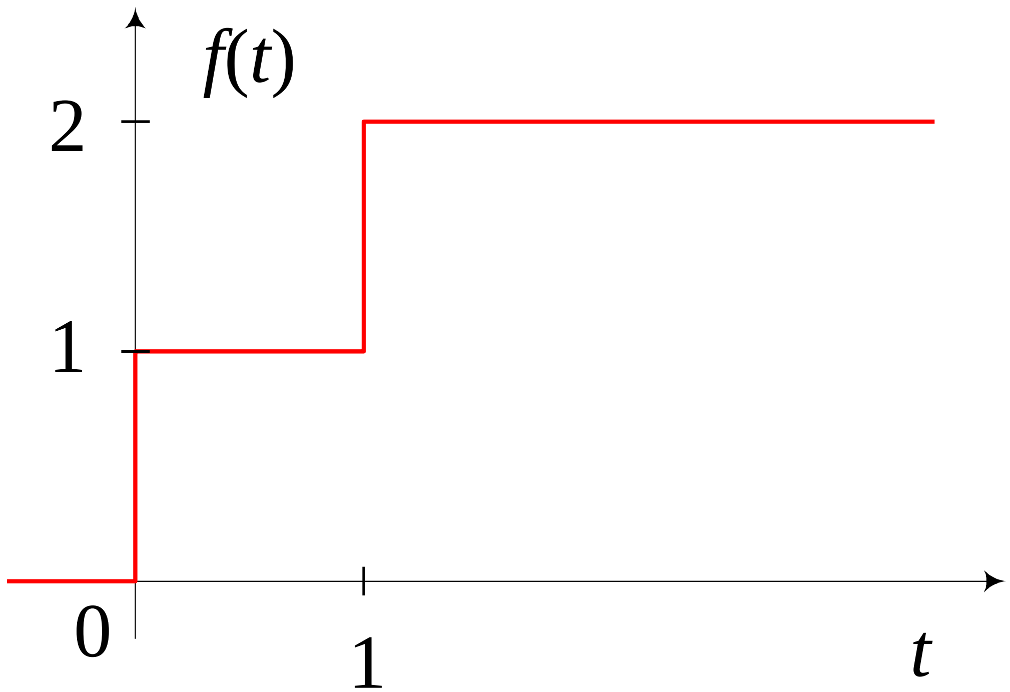
- Impedancija induktiviteta je

$$Z(s)=\frac{U(s)}{I(s)}=sL$$

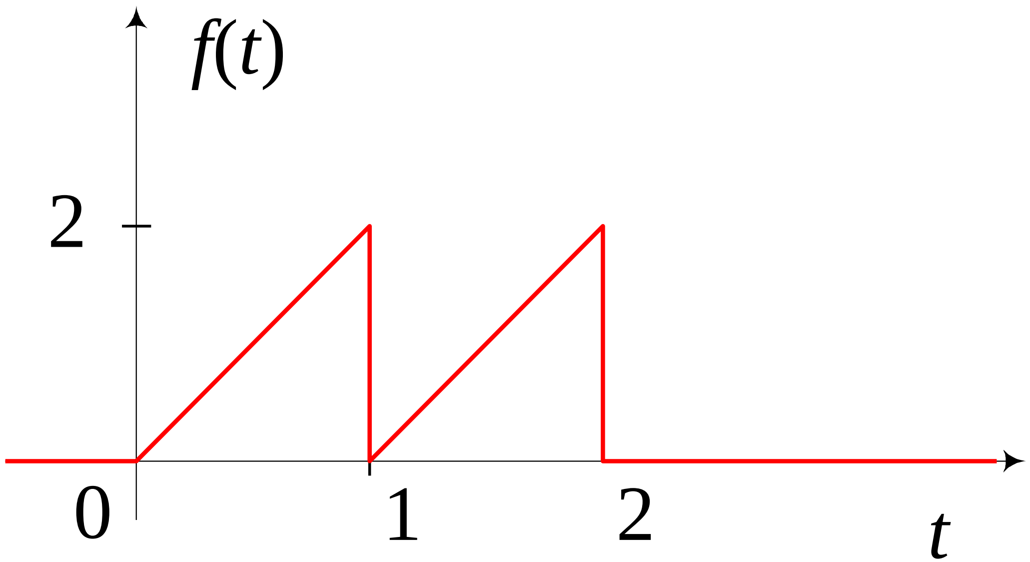
- a njegova admitancija

$$Y(s)=\frac{I(s)}{U(s)}=\frac{1}{sL}$$

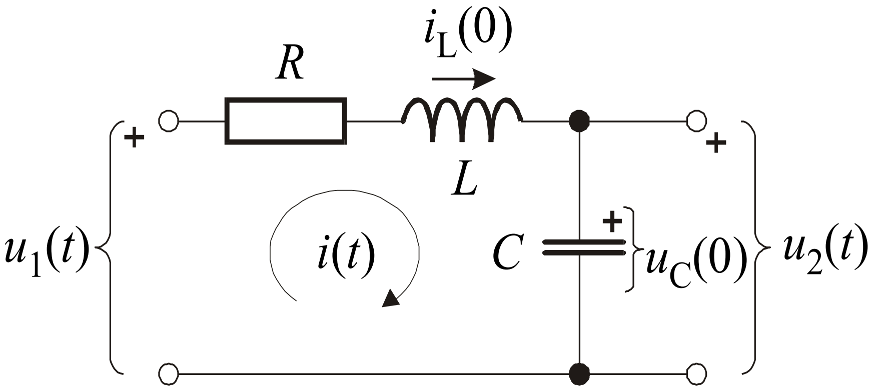
Primjer: 1. Odrediti Laplaceovu transformaciju signala prikazanoga slikom.



Primjer: 1. Odrediti Laplaceovu transformaciju signala prikazanoga slikom.



Primjer: RLC krug



$$u_C(0) = 1\,\mathrm{V}$$

$$i_L(0) = i(0) = 1\,\mathrm{A}$$

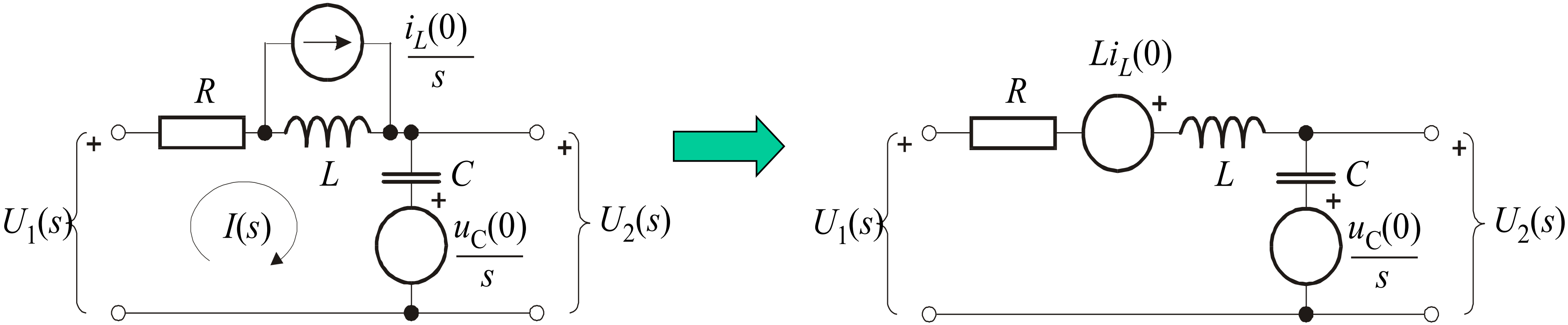
$$u(t) = S(t)$$

$$R = 1\Omega, L = 1\mathrm{H}, C = 1\mathrm{F}$$

integrodiferencijalna jednadžba

$$u_1(t) = R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

Primjena L-transformacije



Električni krugovi

Normalizacije

Normalizacije

- 1. <u>Normiranje frekvencije</u>
  - umjesto kompleksne frekvencije *s* uvodi se normalizirana frekvencija

$$s_n = \frac{s}{\omega_0}$$

  - gdje je ω_0 konstantna realna frekvencija.

- Impedancije induktiviteta i kapaciteta ostaju nepromijenjene → dobivamo nove vrijednosti za L i C

$$Z_L(s_n) = sL = L\omega_0 \frac{s}{\omega_0} = L_n s_n \qquad \Rightarrow \qquad L_n = L\omega_0 [H/s]$$

$$Z_C(s_n) = \frac{1}{sC} = \frac{1}{C\omega_0 \frac{s}{\omega_0}} = \frac{1}{C_n s_n} \qquad \Rightarrow \qquad C_n = C\omega_0 [F/s]$$

- L_n i C_n su normirane vrijednosti induktiviteta i kapaciteta po frekvenciji ω_0

- 2. Normiranje impedancije
    - umjesto stvarnih (zadanih) vrijednosti impedancija uvodi se nove vrijednosti impedancija

$$Z_n(s) = \frac{Z(s)}{R_0}$$

- gdje je R_0 konstantan realan otpor.

- Impedancije ovom normalizacijom mijenjaju vrijednost, ali zadržavaju isti oblik.

$$Z_{Rn}(s) = \frac{R}{R_0} = R_n \qquad \Rightarrow \qquad R_n = R / R_0$$

$$Z_{Ln}(s) = \frac{sL}{R_0} = sL_n \qquad \Rightarrow \qquad L_n = L / R_0 [H / \Omega]$$

$$Z_{Cn}(s) = \frac{1}{sCR_0} = \frac{1}{sC_n} \qquad \Rightarrow \qquad C_n = CR_0 [F\Omega]$$

- R_n, L_n i C_n su normirane vrijednosti otpora, induktiviteta i kapaciteta po impedanciji R_0 .

- 3. <u>Normiranje frekvencije i impedancije (1+2)</u>
  - u praksi se najčešće provodi istovremeno normiranje frekvencije i impedancije
  - elementi mreže dobivaju nove normirane vrijednosti
  - bez dimenzija !

- Umjesto stvarne vrijednosti nekog otpora *R*, u mreži se dobiva normirana vrijednost

$$Z_{Rn}(s_n) = \frac{R}{R_0} = R_n \qquad \Rightarrow \qquad R_n = \frac{R}{R_0}$$

- Normirana vrijednost induktiviteta

$$Z_{Ln}(s_n) = \frac{sL}{R_0}\frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{s}{\omega_0}\frac{\omega_0}{R_0}L = s_n\frac{\omega_0}{R_0}L = s_n L_n$$

$$\Rightarrow \qquad L_n = \frac{\omega_0}{R_0}L$$

- Normirana vrijednost kapaciteta

$$Z_{Cn}(s_n) = \frac{1}{R_0\omega_0\dfrac{s}{\omega_0}C} = \frac{1}{s_n\omega_0 R_0 C} = \frac{1}{s_n C_n}$$

$$\Rightarrow \qquad C_n = \omega_0 R_0 C$$

- <u>Denormalizacija</u>
  - je inverzan postupak normalizaciji iz kojeg se, počevši od normiranih elementa, izvode električne mreže s realnim vrijednostima elemenata.

$$R = R_0 R_n \left[\Omega\right]$$

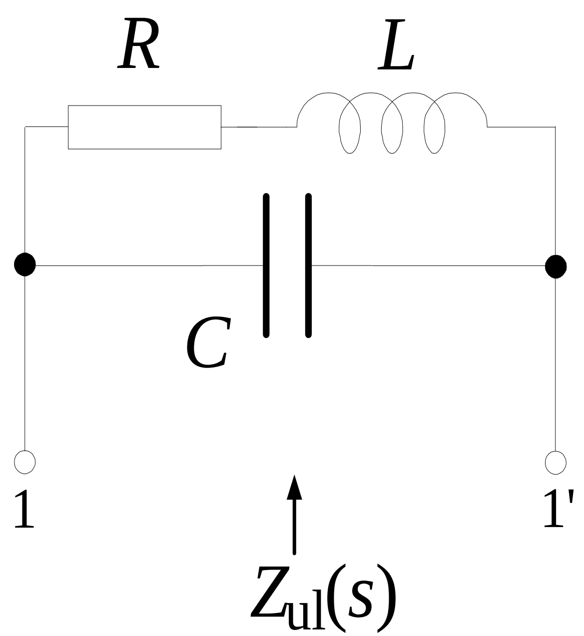
$$C = \frac{C_n}{\omega_0 R_0} \left[F\right]$$

$$L = \frac{R_0}{\omega_0} L_n \left[H\right]$$

Normalizacija: Zaključak

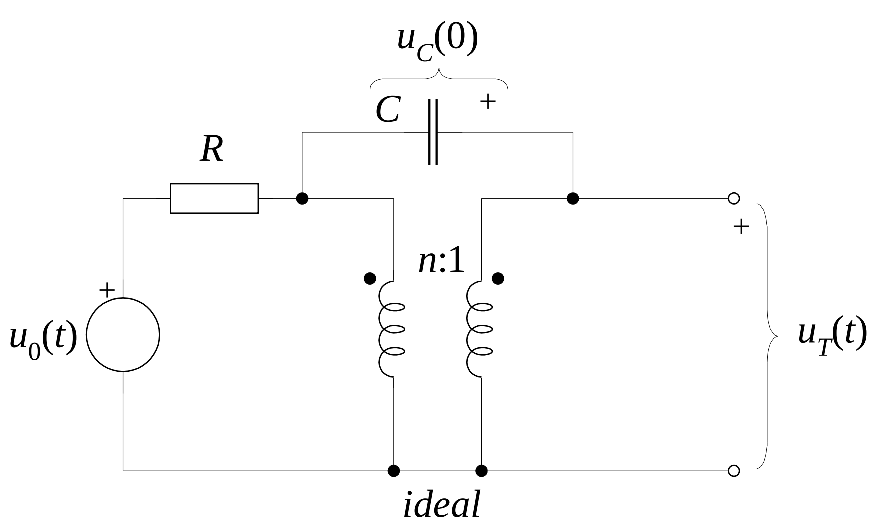
- Normirani elementi su bezdimenzionalne veličine ukoliko ω_0 ima dimenziju [rad/s], a R_0 dimenziju [Ω].
- ω_0 i R_0 su konstante koje se mogu odabrati proizvoljno.
- ω_0 i R_0 se u pravilu odabiru tako da su povezane s nekim karakterističnim veličinama u mreži.
- za vrijednost ω_0 se obično uzima granična frekvencija električnog kruga (npr. granična frekvencija filtra)
- za vrijednost R_0 se obično uzima vrijednost nekog otpora u mreži ili otpornosti kojom je mreža zaključena (npr. telefonska linija je zaključena sa 600 Ω).

- <u>Primjer</u> :
  - Za električni krug prikazan slikom izračunati ulaznu impedanciju $Z_{ul}(s)$ s obzirom na stezaljke 1-1' ako su zadane vrijednosti elemenata: R=200Ω, L=2μH, C=50pF. Izvršiti normalizaciju elemenata po frekvenciji $\omega_0=10^8$rad/s i impedanciji R_0 =200Ω i zatim ponovo izračunati $Z_{ul}(s)$.

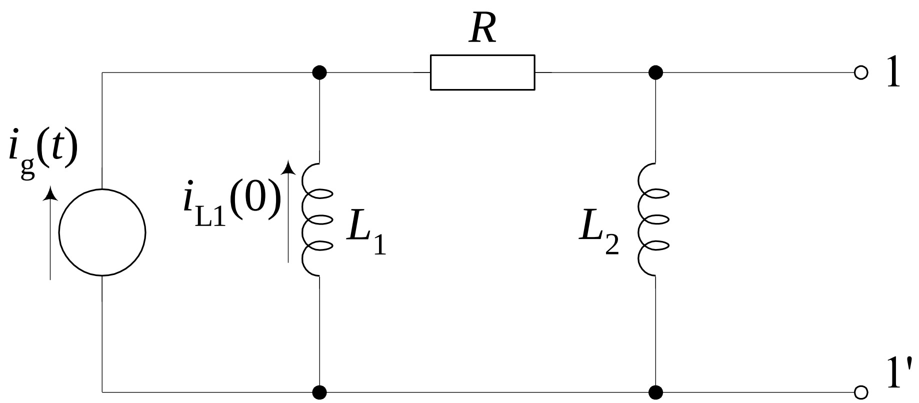


Primjeri:

1. Za mrežu prikazanu slikom odrediti parametre nadomjesne mreže po Theveninu $U_T(s)$ i $Z_T(s)$, obzirom na priključnice 1-1'. Zadano je: R=1, C=1, $u_C(0)=1$, n=2 $u_0(t)=S(t)$.



2. Za mrežu prikazanu slikom odrediti nadomjesne parametre po Nortonu $I_N(s)$ i $Y_N(s)$ s obzirom na priključnice 1-1', ako su zadane normirane vrijednosti elemenata: R=1Ω, L_1=1H, L_2=2H, $i_g(t)=2\delta(t)$ i $i_L(0)$=1A.



3. *Za mrežu prikazanu slikom odrediti valni oblik napona* $u_2(t)$, ako se u trenutku t=0 preklopka K prebaci iz položaja 1 u položaj 2. Zadano je: E=1, L_1=L_2=1, R=1,

$$r = \sqrt{2}$$

$$i_{L1}(0) = 1/2$$

$$i_{L2}(0) = \sqrt{2}/2$$