

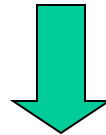
Električni krugovi

Transformacije izvora

Teoremi mreža

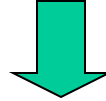
Transformacije izvora

- Kirchhoffovi zakoni omogućuju definiranje:
 - elementarnih transformacija krugova
 - teorema koji omogućuju jednostavnije analize.
-
- Najjednostavnije transformacije



Transformacije izvora.

- Dvije elementarne operacije s izvorima



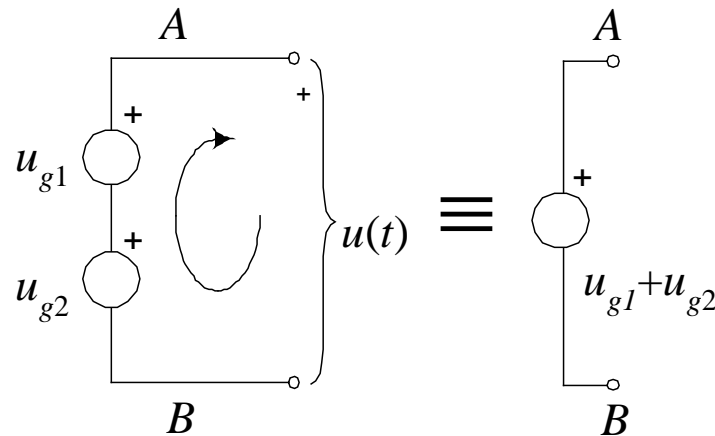
- transformacija serijski spojenih naponskih izvora
i
- transformacija paralelno spojenih strujnih izvora



- posljedice svojstva linearnosti mreže

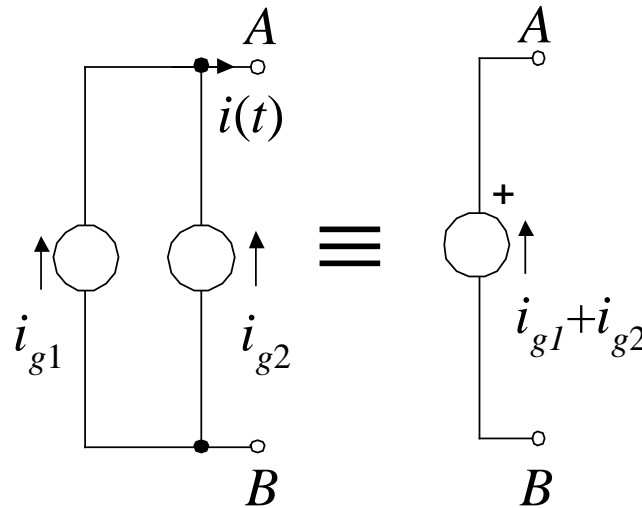
Transformacije izvora

- Serijski spoj naponskih izvora, ekvivalentan je jednome naponskom izvoru, čiji je napon jednak njihovoj sumi.

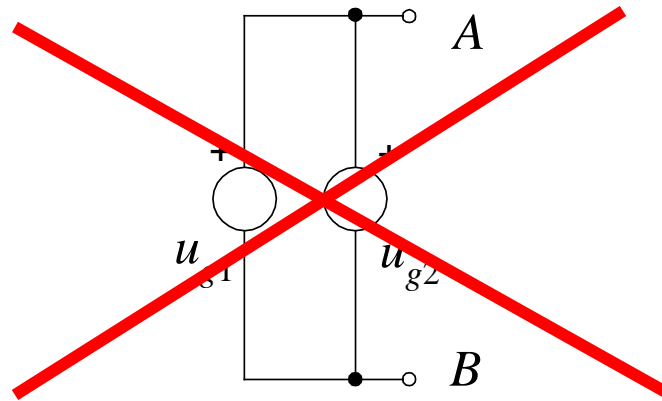


Transformacije izvora

- Paralelni spoj strujnih izvora moguće je nadomjestiti jednim strujnim izvorom, čija je struja jednaka njihovoj sumi.



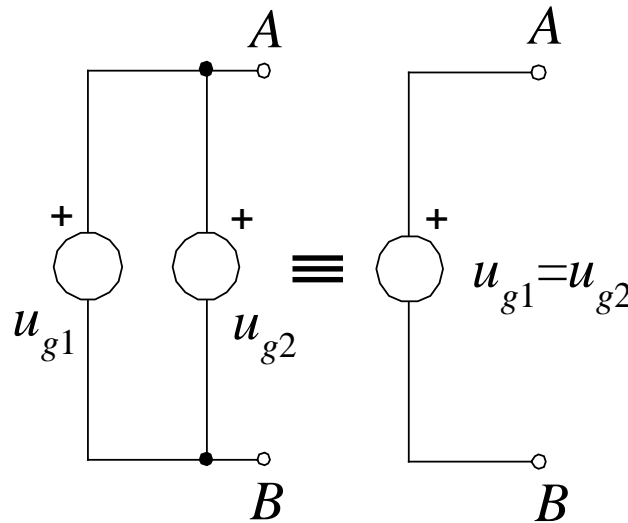
- Važno!
- Paralelni spoj dvaju različitih naponskih izvora $u_{g1}(t)$ i $u_{g2}(t)$ nije dopušten.



- U petlji koju čine ta dva izvora nije ispunjen KZN.

Transformacije izvora

- Paralelni spoj ima smisla samo kad se radi o identičnim izvorima, tj. kad je $u_{g1}(t)=u_{g2}(t)$.

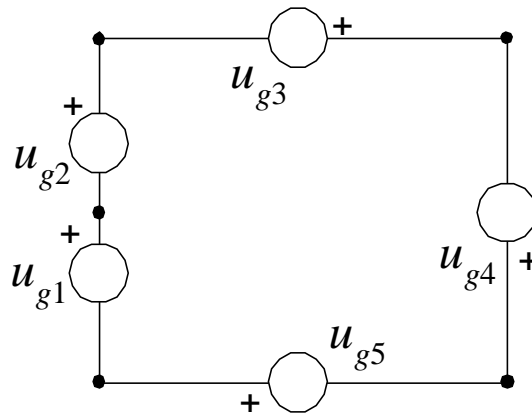


Uvjet: $u_{g1}=u_{g2}$

- Paralelni spoj dvaju **identičnih** naponskih izvora ekvivalentan jednome naponskom izvoru.

Transformacije izvora

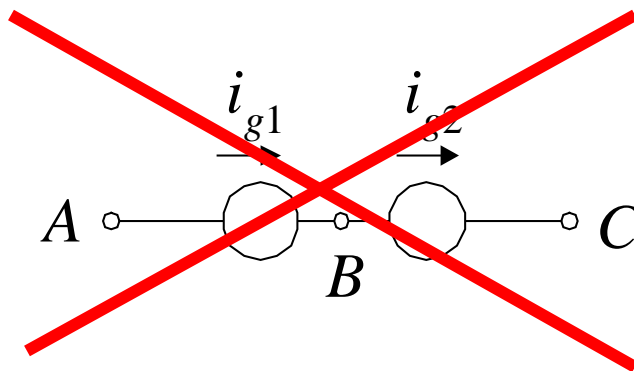
- Prethodni je zaključak moguće proširiti i na jednu zatvorenu konturu
- Nije dopustivo spojiti više naponskih izvora u zatvorenu petlju, osim u slučaju kad je njihova algebarska suma jednaka nuli.



$$\text{Uvjet : } \sum_{i=1}^5 u_{gi}(t) = 0$$

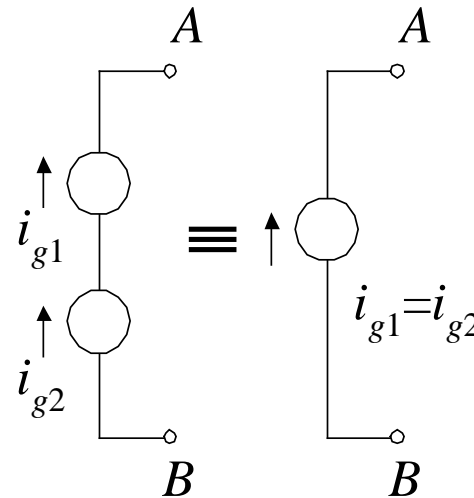
Transformacije izvora

- Strujni izvori:
- Serijski spoj dvaju strujnih izvora $i_{g1}(t)$ i $i_{g2}(t)$ dopušten je samo ako su identični po smjeru i iznosu.
- U protivnom \rightarrow paradoks jer struja grane u kojoj se oni nalaze ima istovremeno vrijednost $i_{g1}(t)$ i $i_{g2}(t)$.



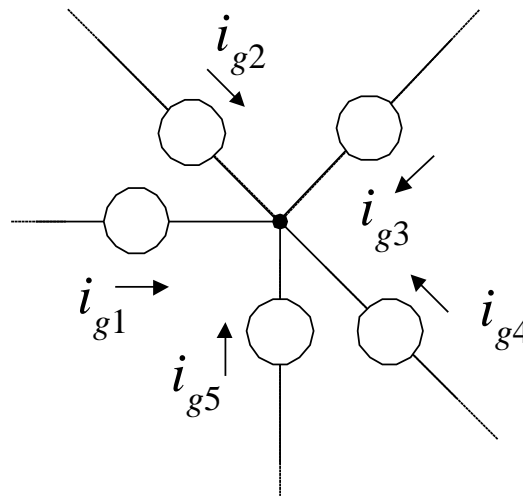
- Za zajedničko čvorište B, nije zadovoljen KZS.

- Serijski spoj dvaju **identičnih** strujnih izvora ekvivalentan je jednome strujnom izvoru.



Uvjet: $i_{g1} = i_{g2}$

- Nije dopušteno spojiti isključivo strujne izvore na jedno čvorište mreže, osim kad je njihova algebarska suma jednaka nuli, jer bi u protivnom bio prekršen KZS.

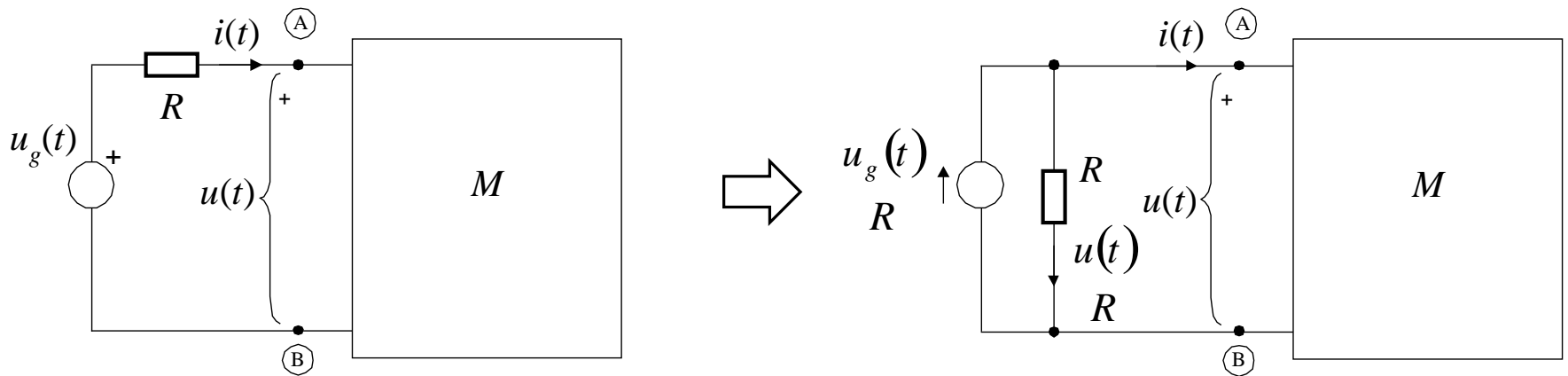


$$\text{Uvjet : } \sum_{i=1}^5 i_{gi}(t) = 0$$

- U određenim situacijama naponske je izvore moguće transformirati u strujne i obratno.
- To su slučajevi kad je naponskome izvoru u seriju, ili strujnome izvoru paralelno spojen neki pasivni dvopolni element.

Transformacije izvora

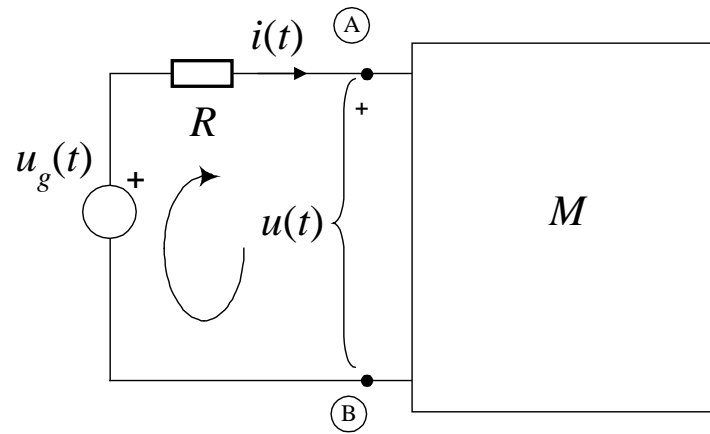
- Serijski spoj naponskoga izvora $u_g(t)$ i otpora R u grani nekog kruga moguće je transformirati u paralelni spoj strujnoga izvora i tog istog otpora.



- Transformacija naponskoga izvora u strujni

Transformacije izvora

- Primjer: Na serijski spoj naponskoga izvora $u_g(t)$ i otpora R spojena je preko čvorišta A-B mreža M .



- Primjena KZN

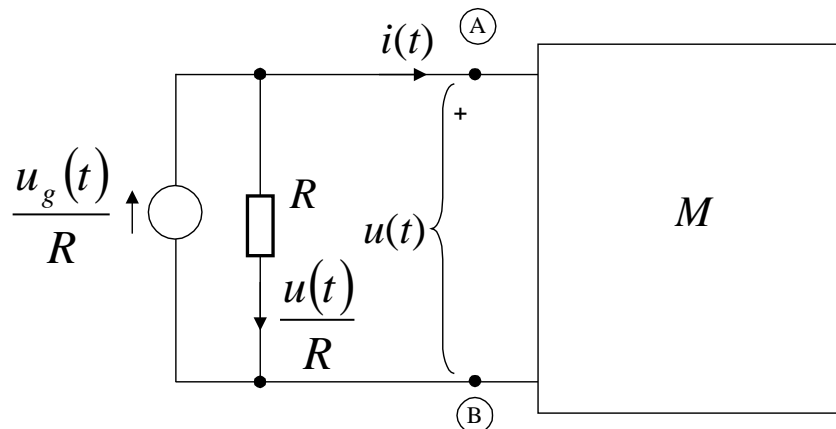
$$u_g(t) = i(t) \cdot R + u(t)$$

- Struja $i(t)$

$$i(t) = \frac{u_g(t)}{R} - \frac{u(t)}{R}$$

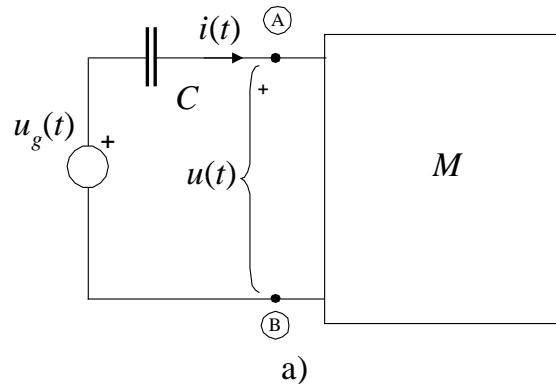
- $u(t)/R \rightarrow$ struja kroz otpor R

- $u_g(t)/R \rightarrow$ struja paralelno spojenog strujnog izvora.



Transformacije izvora

- Istu transformaciju \rightarrow i s nekim drugim pasivnim elementom umjesto otpora R .
- Serijski spoj naponskoga izvora i kapaciteta C



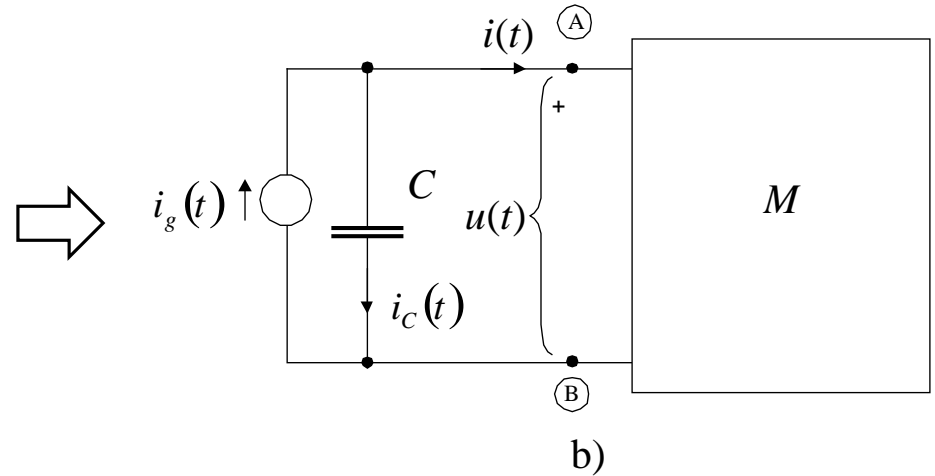
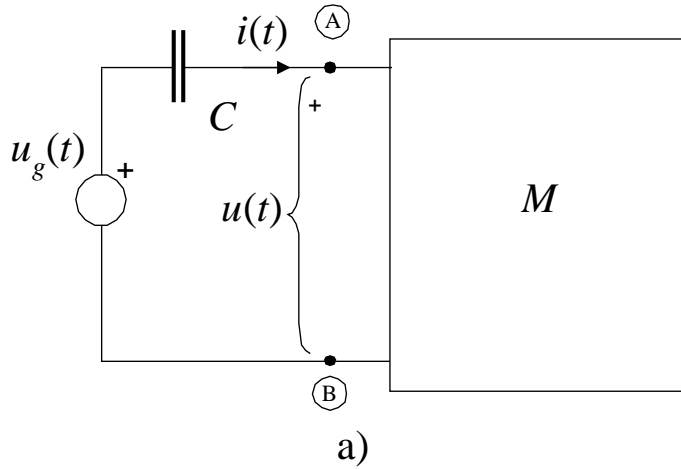
$$u_g(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + u(t)$$

- Deriviranjem izraza i množenjem s $C \rightarrow$ struja $i(t)$

$$i(t) = C \frac{du_g(t)}{dt} - C \frac{du(t)}{dt}$$

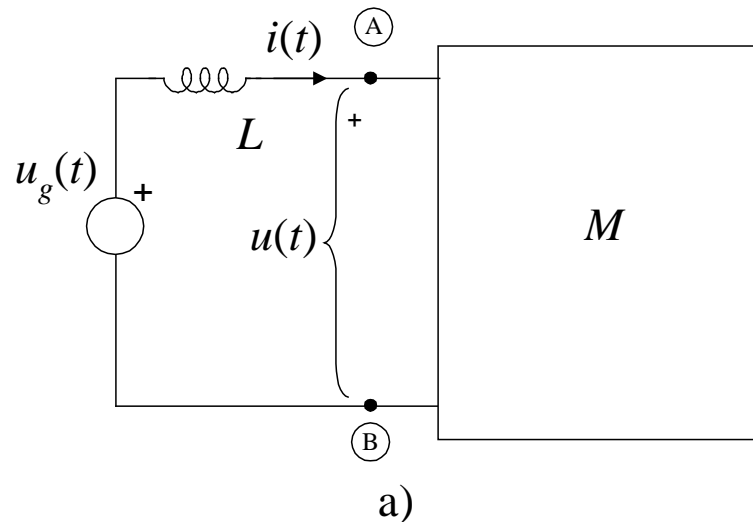
- $i_g(t) = C du_g/dt$ posljedica djelovanja naponskoga izvora \rightarrow strujni izvor
- $i_C(t) = C du/dt \rightarrow$ struja kroz kapacitet C spojen paralelno izvoru.

Transformacije izvora



- Izraz je ustvari primjena KZS na čvorište A

- Serijski spoj naponskoga izvora i induktiviteta L



$$u_g(t) = L \frac{di(t)}{dt} + u(t)$$

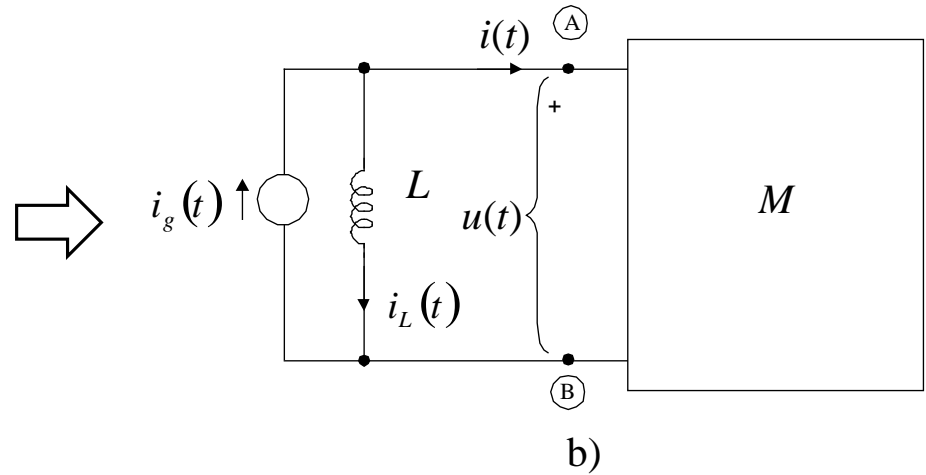
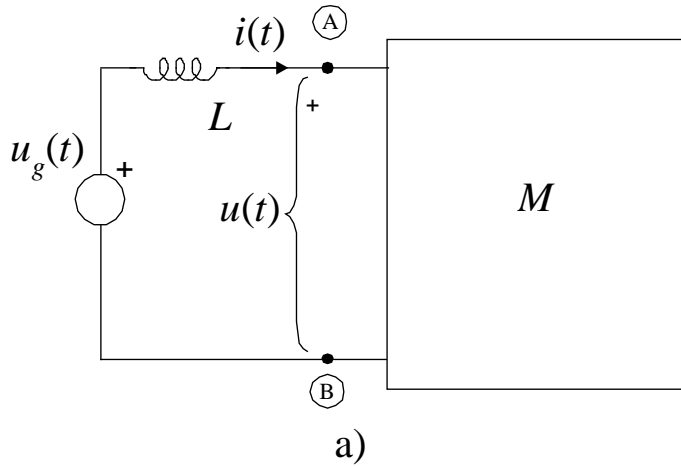
- Integriranjem po t dijeljenjem s L , \rightarrow struja $i(t)$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_g(\tau) d\tau - \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

$$i_g(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_g(\tau) d\tau \quad \rightarrow \text{strujni izvor.}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad \text{je struja kroz induktivitet } L \text{ spojen paralelno izvoru.}$$

Transformacije izvora



- Dobiveni izraz je primjena KZS na čvorište A mreže na slici.

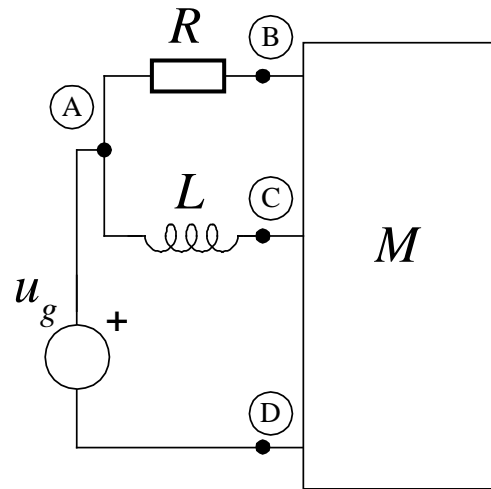
■ Zaključak:

- Naponski izvor $u_g(t)$, i serijski spojen pasivni dvopolni element, uvijek je moguće transformirati u paralelni spoj strujnoga izvora i istog pasivnog elementa.
- Strujni izvor $i_g(t)$, s paralelnim pasivnim dvopolnim elementom, moguće je transformirati u serijski spoj naponskoga izvora i istog pasivnog elementa.

■ **Posmicanje naponskoga izvora**

- Električni krugovi često sadrže
 - naponske izvore, bez serijskog pasivnog elementa,
 - strujne izvore bez paralelnog pasivnog elementa.
- Transformacija takvih izvora nije moguća.
- U takvim slučajevima → primijeniti postupak tzv. **posmicanju izvora u krugu.**

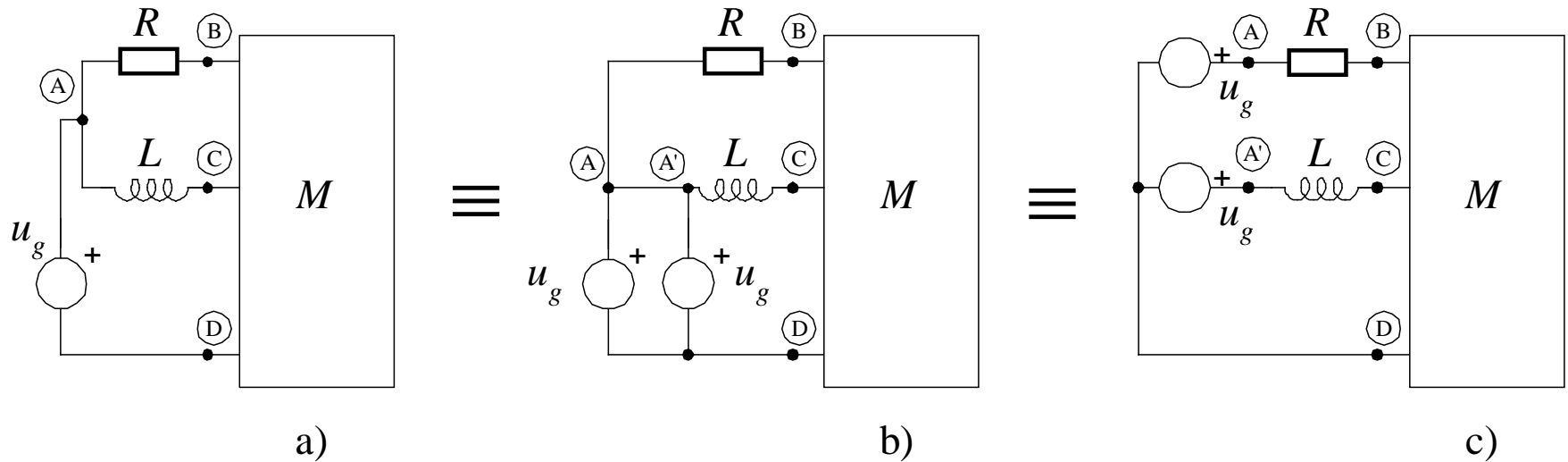
■ Primjer:



- Naponski izvor nije moguće transformirati u strujni
- Nema serijski spojenoga pasivnog dvopola kao u prethodnim primjerima.

Transformacije izvora

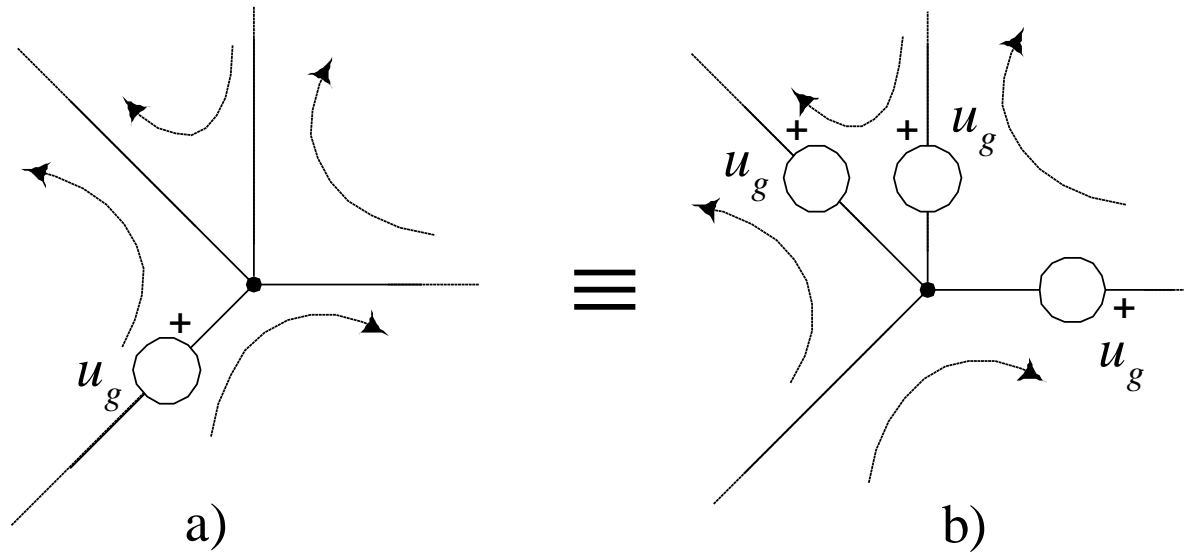
- Izvor nadomjestiti s 2 identična paralelna izvora



- Razdvojiti čvorište A na A i A'
- Naponski izvori sada imaju serijske pasivne dvopole.

- Naponski izvor je “provučen” kroz čvorište A i nadomješten s dva identična naponska izvora.
 - Taj se postupak naziva
posmicanjem naponskoga izvora.
-
- Općenito:
 - Ako je na čvorište neke mreže priključena grana s naponskim izvorom, tada je taj naponski izvor moguće "progurati" kroz promatrani čvor u svaku od preostalih grana priključenih na isto čvorište.

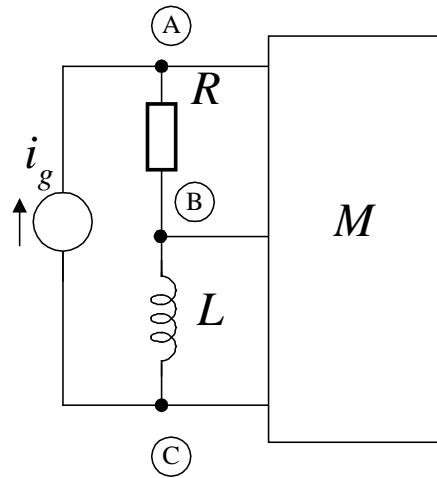
Transformacije izvora



- Posmicanje naponskoga izvora

■ Posmicanje strujnoga izvora

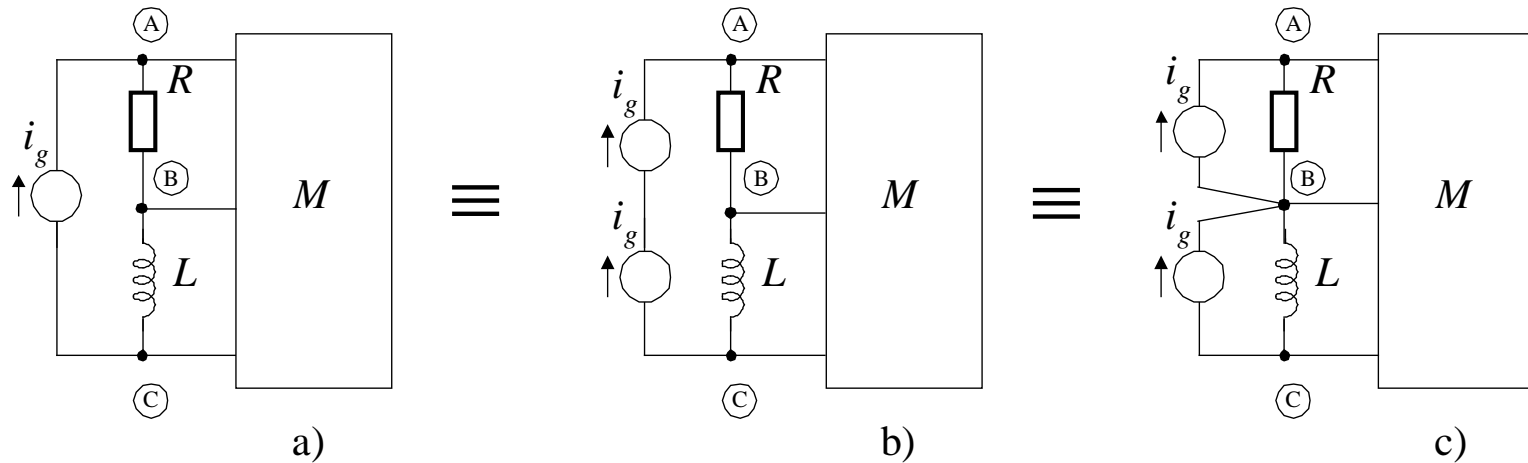
- Primjer: krug sa strujnim izvorom i_g na slici



- Transformacija strujnog izvora nije moguća
→ nema paralelno spojenoga pasivnog dvopola.

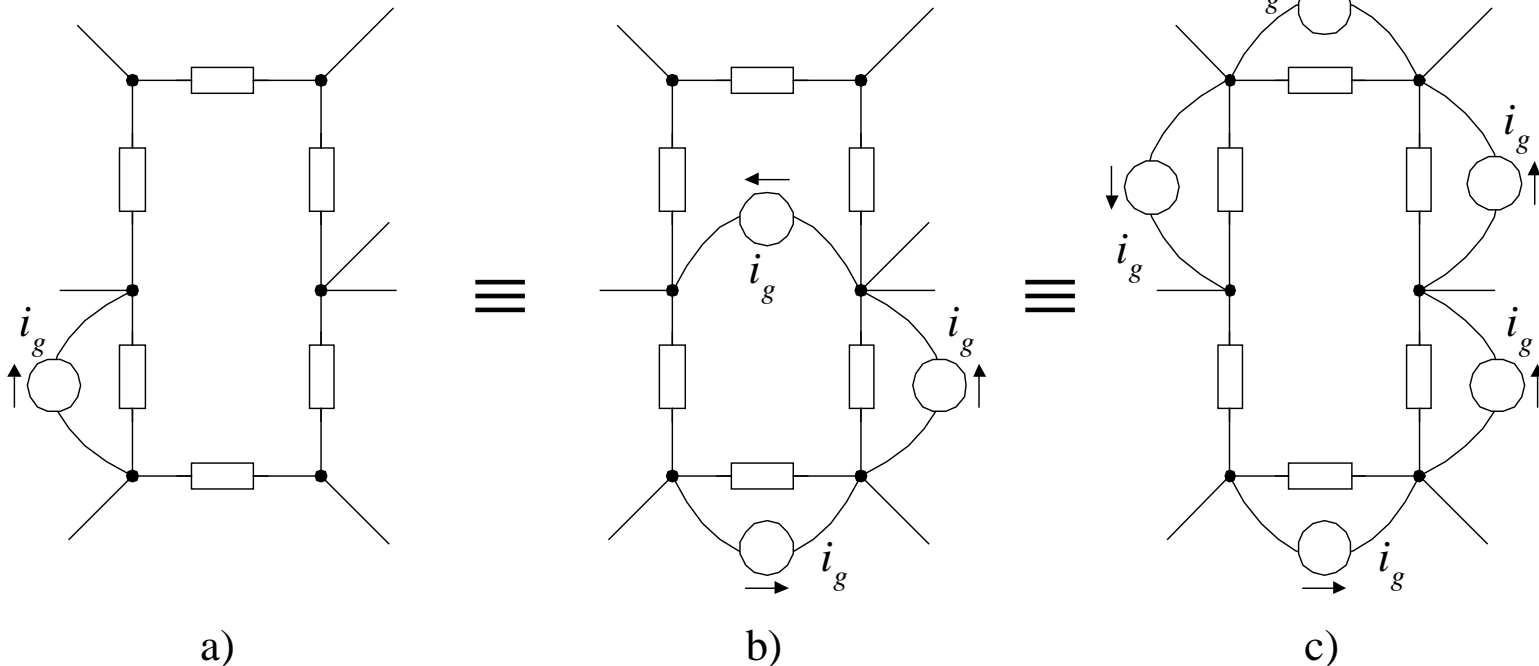
Transformacije izvora

- Nadomjestiti izvor s 2 identična serijska izvora.



- Spojiti njihovo zajedničko čvorište na čvorište B
- Nema promjene \rightarrow suma struja u B ostala je ista.
- U novome krugu svaki izvor ima paralelno spojen pasivni dvopol

- Općenito:
- strujni izvor između para čvorišta neke mreže, moguće je nadomjestiti identičnim strujnim izvorima priključenim na sve parove čvorišta, koji s promatranim parom čine zatvorenu konturu.



Teoremi mreža

- U postupcima analize električnih krugova korisno je upotrebiti neke teoreme mreža.
- Teoremi mreža omogućuju pojednostavnjenje
 - analitičkih postupaka i
 - teoretskih izvoda

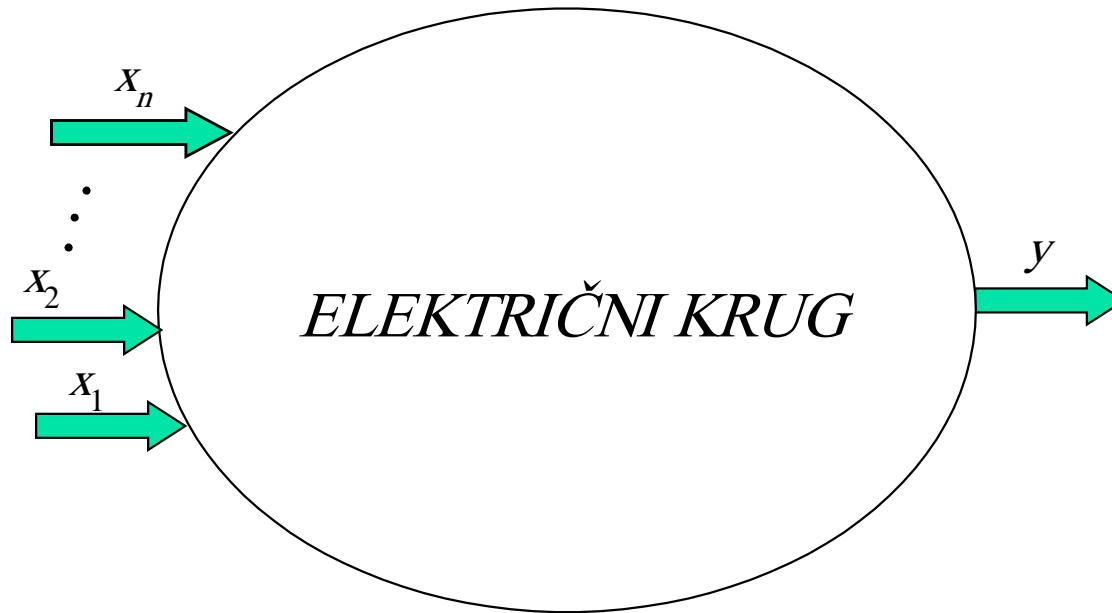
Teorem superpozicije

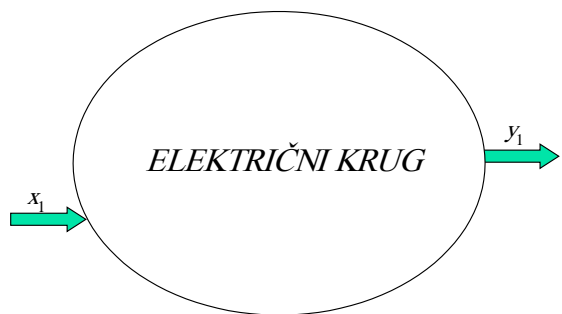
- Odziv $y(t)$ linearnog kruga na istovremeno djelovanje n različitih pobuda $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, koje kad se primijene pojedinačno daju odzive $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, jednak je sumi svih tih odziva, tj.

$$y(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t)$$

Teoremi mreža

- Pobude mogu biti neovisni naponski ili strujni izvori, kao i početni naponi na kapacitetima i struje u induktivitetima.
- Ovaj teorem je posljedica svojstva linearnosti.





$$y_1(t) = \mathbf{M}[x_1(t)]$$

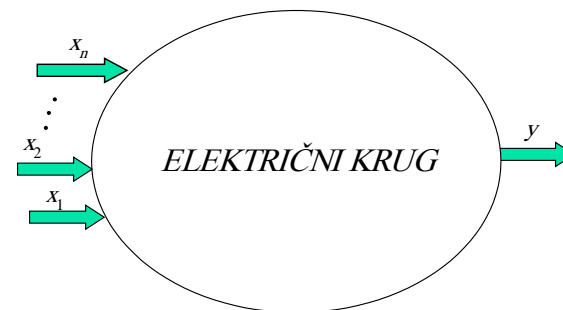


$$y_2(t) = \mathbf{M}[x_2(t)]$$

⋮



$$y_n(t) = \mathbf{M}[x_n(t)]$$

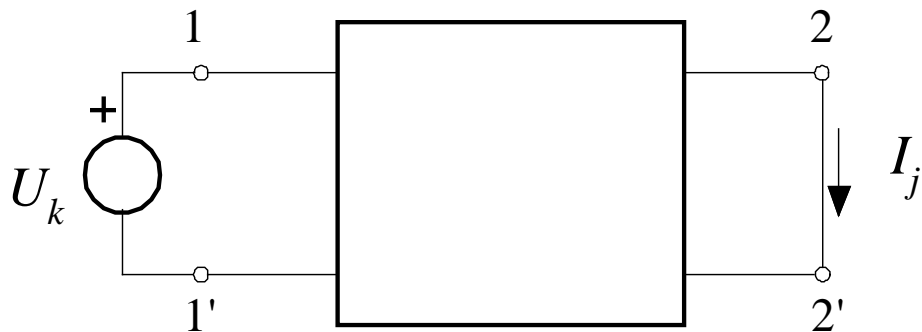


$$y(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t)$$

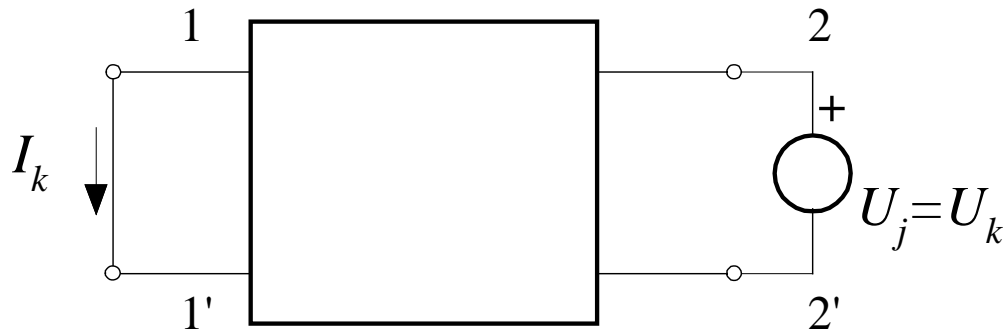
Teorem recipročnosti

- Pojam recipročnosti odnosi se na pasivne krugove sastavljene od elemenata
- R , L , C , M ,
- idealnih transformatora,
- i jednoga neovisnoga naponskog ili strujnog izvora kao pobude.

- Napon kao pobuda u k -toj grani kruga
- Struja kao odziv u j -toj grani

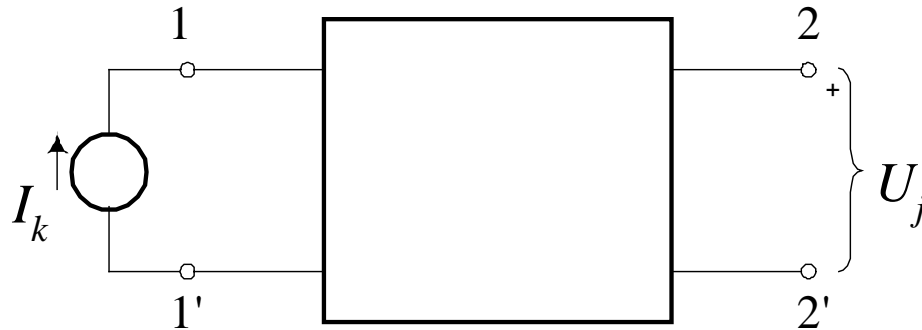


- Zamjenom mjesta pobude i odziva
→ premiještanjem naponskog izvora u j -tu granu, kroz kratki spoj koji je ostao na njegovom mjestu teći će struja I_k kao odziv

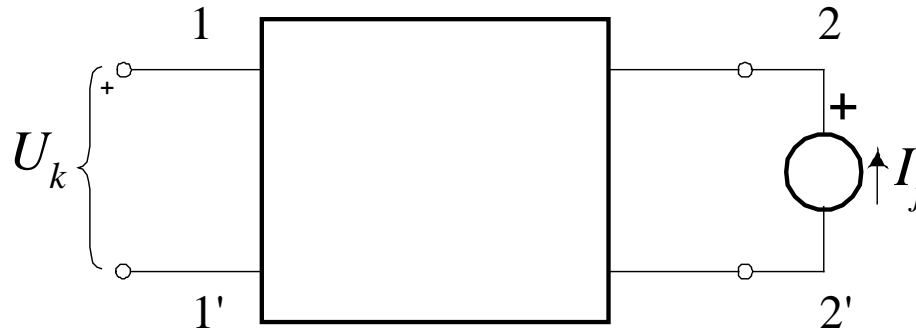


- Za *recipročan* električni krug
 - $I_j = I_k$

- Slično \rightarrow strujni izvor kao pobuda
- Napon između dva čvorišta kao odziv
- Strujni izvor I_k kao pobuda u k -toj grani kruga, uzrokuje naponski odziv U_j između dva čvorišta na nekom drugom mjestu u krugu

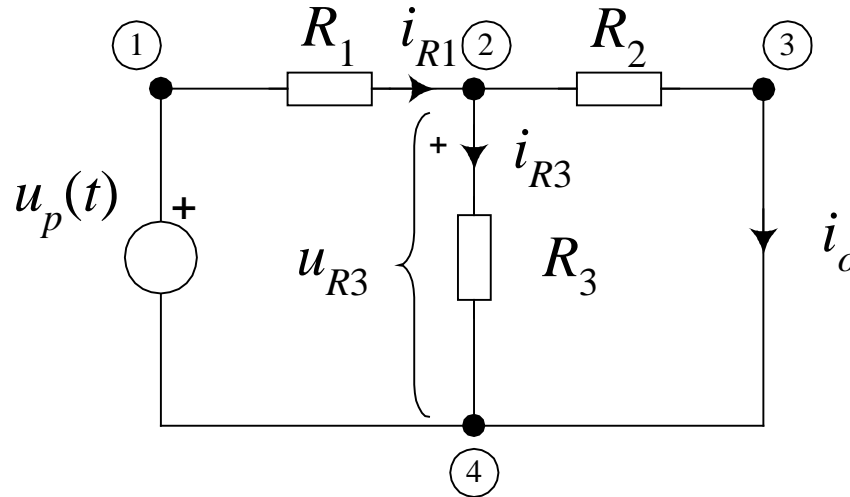


- Ako njihovom međusobnom zamjenom
→ premiještanjem strujnog izvora između ta dva čvorišta, napon U_k koji kao odziv nastaje na mjestu gdje je prije bio strujni izvor, ima isti iznos kao odziv U_j u prethodnom slučaju krug je *recipročan*.



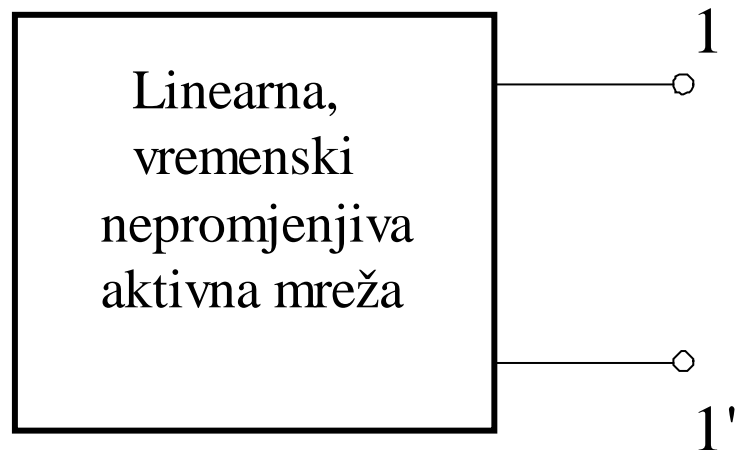
Primjer: Teorem recipročnosti

- U krugu na slici u_p je pobuda, a odziv je struja i_o .
- Pokazati da je krug recipročan.

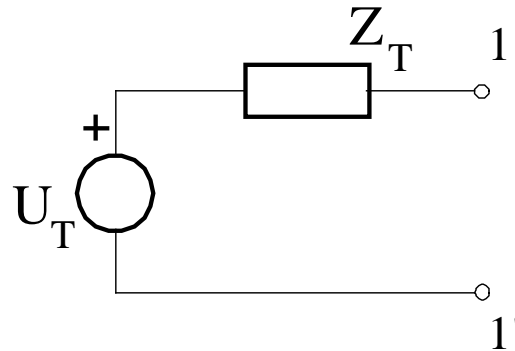


Theveninov teorem

- Theveninov teorem odnosi se na aktivne mreže s jednim prilazom.



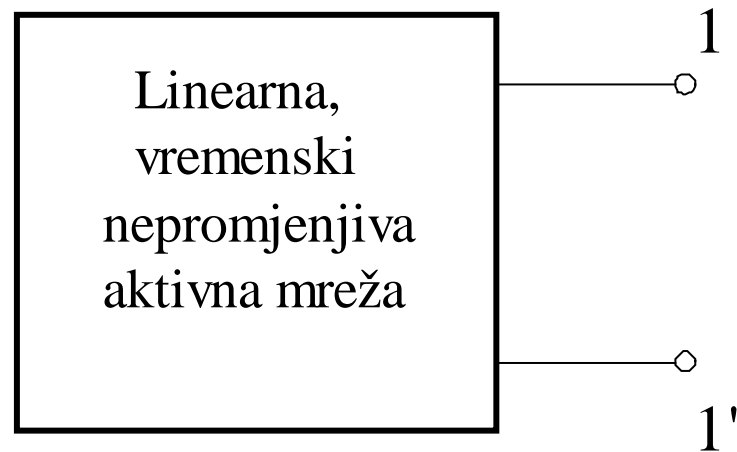
- Svakoj linearnoj, vremenski nepromjenjivoj, aktivnoj mreži s jednim prilazom moguće je odrediti ekvivalentni dvopol koji se sastoji od jednog neovisnog naponskog izvora U_T i jedne serijski spojene impedancije Z_T



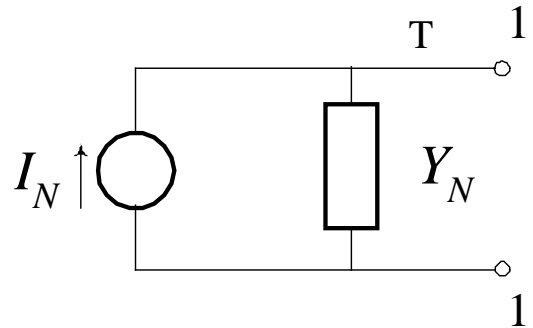
- Napon U_T naponskog izvora jednak je naponu na otvorenim priključnicama promatrane mreže.
- Impedancija Z_T je jednaka impedanciji gledanoj sa prilaza mreže uz
- ugašene sve neovisne izvore (ovisni izvori ostaju u krugu) i
- uz početne uvjete na kapacitetima i induktivitetima jednake nuli.

Nortonov teorem

- Nortonov teorem se također odnosi na aktivne mreže s jednim prilazom.



- Svakoj linearnoj, vremenski nepromjenjivoj, aktivnoj mreži s jednim prilazom moguće je odrediti ekvivalentni dvopol koji se sastoji od jednog neovisnog strujnog izvora I_N i jedne paralelno spojene admitancije Y_N



- Struja I_N strujnog izvora jednaka je struji kroz kratko spojene priključnice promatrane mreže
- Admitancija Y_N je jednaka admitanciji gledanoj sa prilaza mreže uz ugašene sve neovisne izvore i uz početne uvjete na kapacitetima i induktivitetima jednake nuli.

Tellegenov teorem

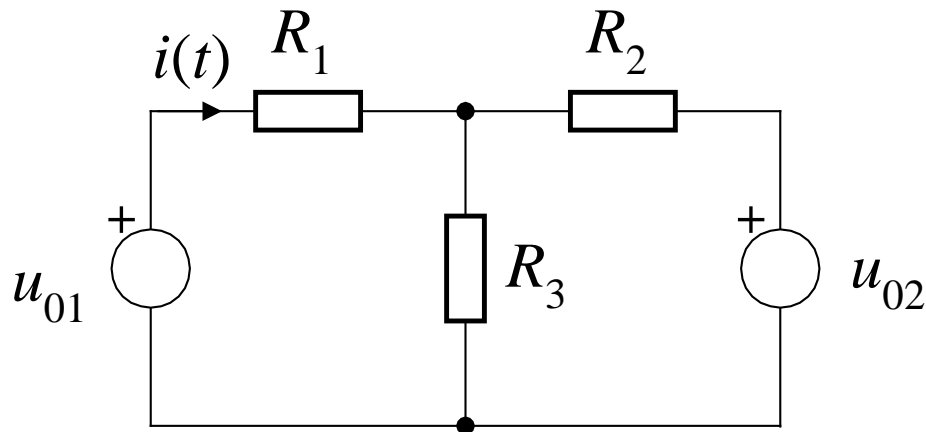
- Za mrežu koja ima N_b grana sa strujama grana
 - $i_1, i_2, i_3, \dots, i_{N_b}$,
- i odgovarajućim naponima
 - $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{N_b}$,
- ukupna suma snaga na svim granama u svakom je trenutku jednaka nuli.

$$\sum_{k=1}^{N_b} u_k(t) i_k(t) = 0$$

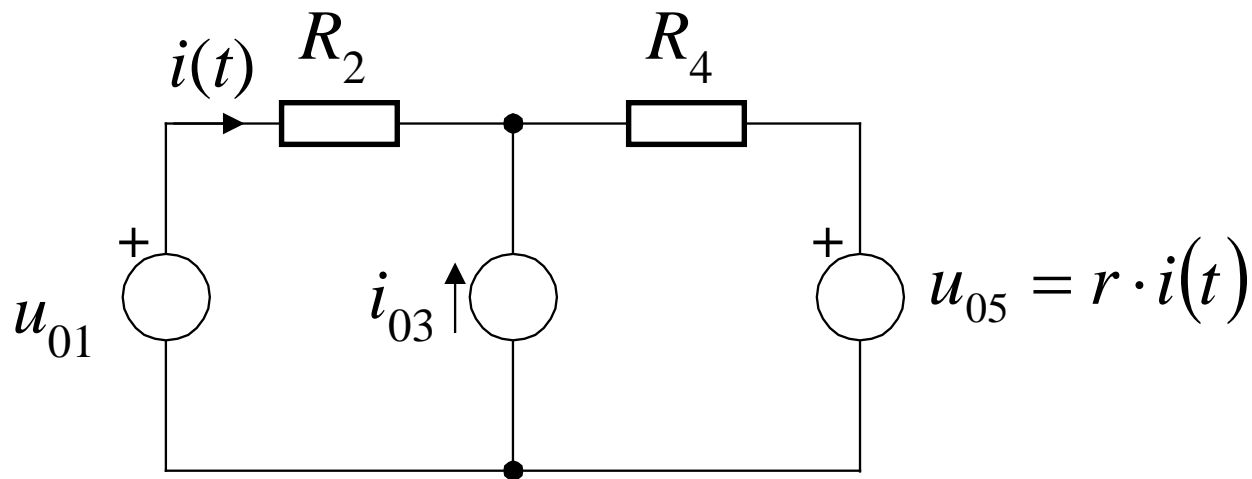
- Teorem vrijedi za sve mreže za koje vrijede Kirchhoff'ovi zakoni.
- On izražava činjenicu da je u mreži s koncentriranim parametrima energija sačuvana, tj. ukupna snaga isporučena mreži od grana koje sadrže izvore mora biti apsorbirana od preostalih grana.

Teoremi mreža

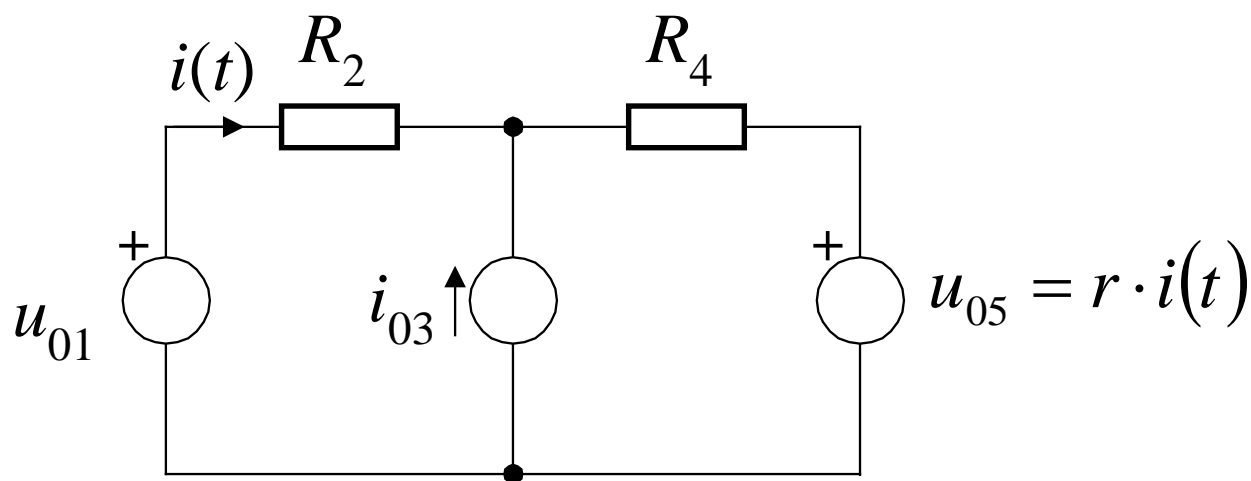
- 1. U krugu na slici odrediti struju $i(t)$ reducirajući krug pomoću transformacije izvora, ako je $u_{01}=5\text{V}$, $u_{02}=3\text{V}$, $R_1=5\text{k}\Omega$, $R_2=30\text{k}\Omega$ i $R_3=20\text{k}\Omega$.



- 2. U krugu na slici odrediti struju $i(t)$, ako je $u_{01}=24\text{V}$, $R_2=3\Omega$, $i_{03}=7\text{A}$, $R_4=2\Omega$, $r=3\Omega$ i $u_{05}=r \cdot i(t)$.

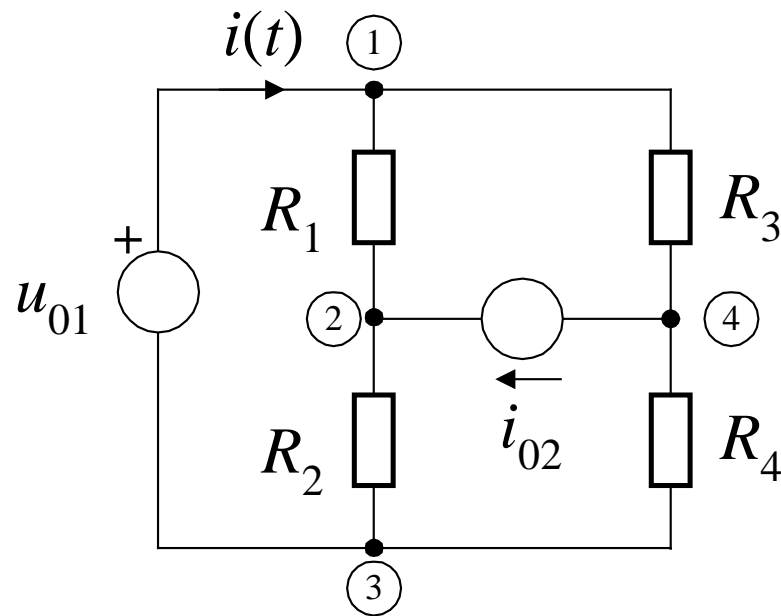


- 3. Riješiti primjer 2. primjenom teorema superpozicije.

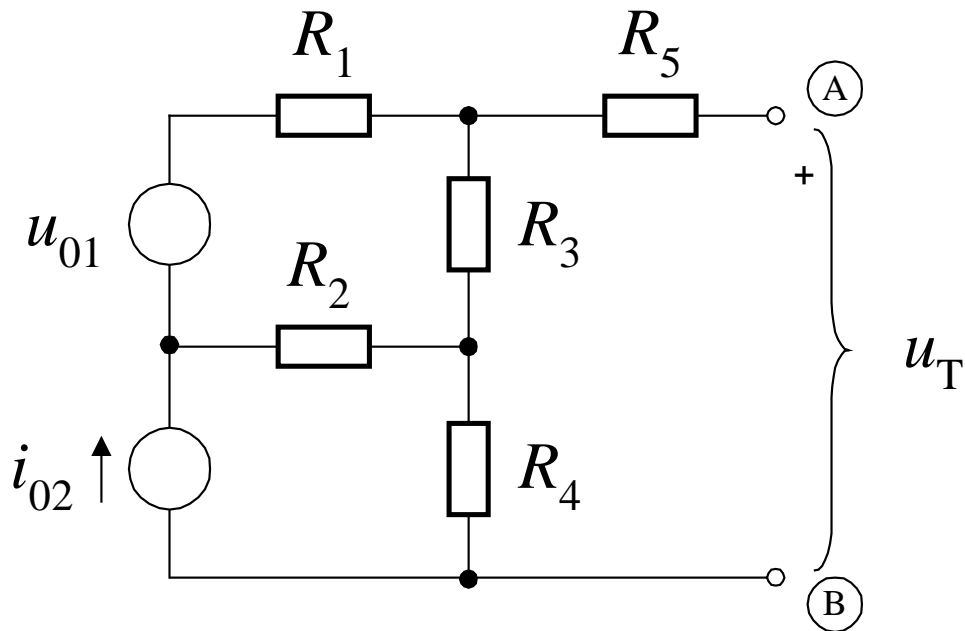


Teoremi mreža

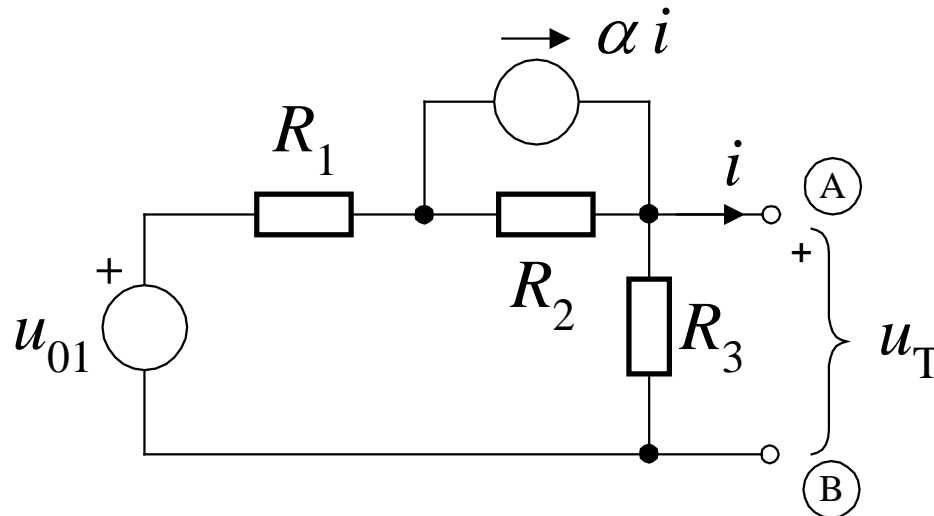
- 4. U krugu na slici odrediti struju $i(t)$, ako je $u_0=5$ V, $i_0=2$ mA, $R_1=2\text{k}\Omega$, $R_2=3\text{k}\Omega$, $R_3=3\text{k}\Omega$ i $R_4=2\text{k}\Omega$.



5. Za mrežu prikazanu slikom odrediti Theveninov i Nortonov nadomjesni dvopol obzirom na polove A-B, ako je $u_{01}=18\text{ V}$, $i_{01}=12\text{ mA}$, $R_1=4\text{k}\Omega$, $R_2=2\text{k}\Omega$, $R_3=3\text{k}\Omega$, $R_4=1\text{k}\Omega$ i $R_5=4\text{k}\Omega$.



- 6. Za mrežu na slici odrediti Theveninov i Nortonov nadomjesni dvopol obzirom na polove A-B.



Teoremi mreža

7. Za mrežu na slici odrediti Theveninov i Nortonov nadomjesni dvopol obzirom na polove A-B. Zadane su vrijednosti elemenata: $R_1=5\text{k}\Omega$, $R_2=10\text{k}\Omega$ i $R_3=10\text{k}\Omega$.

