Električni krugovi

Valni oblici električnih signala

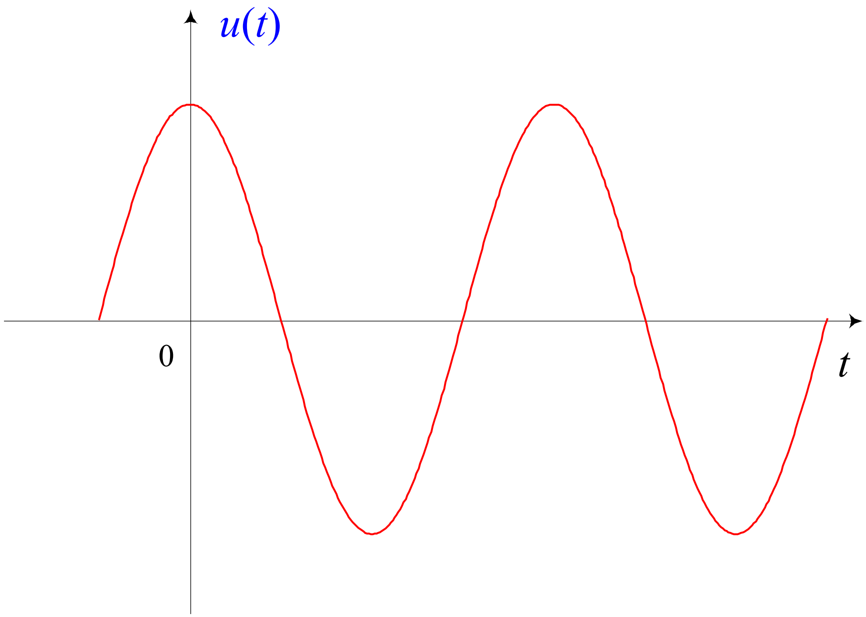
Lit.: V. Naglić: Osnovi teorije mreža, p. 1.7, 6.4

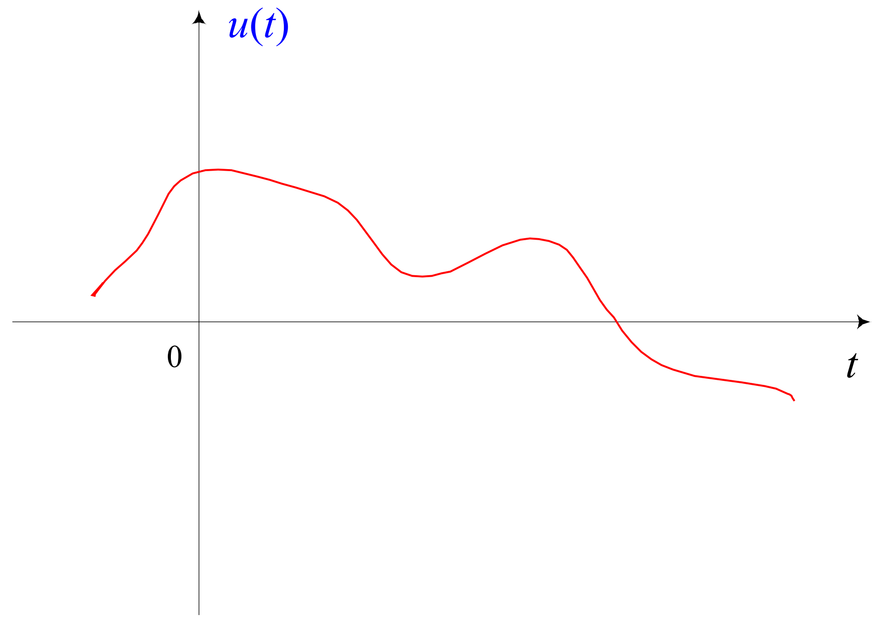
Valni oblici električnih signala

- **Signal** → fizikalna veličina koja sadrži informaciju sa svrhom da je prenese od nekog izvora prema odredištu.
- U električnim sistemima → električne veličine.
- Najčešći signali u analizi električnih krugova:
  - $u(t)$ - funkcija napona
  - $i(t)$ - funkcija struje
- Osim njih:
  - $p(t)$ snaga
  - $E(t)$ energija
  - $q(t)$ naboj
  - $\varphi(t)$ magn. tok

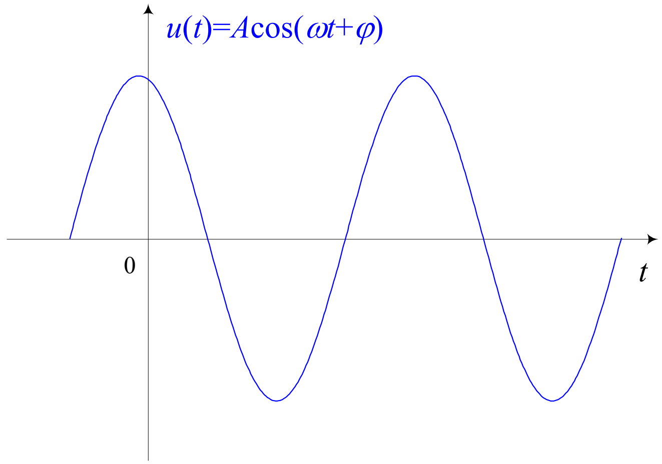
  itd.

- Električni signal → vremenski ovisna električna veličina
  - npr. $u(t)$
- → t neovisna varijabla.



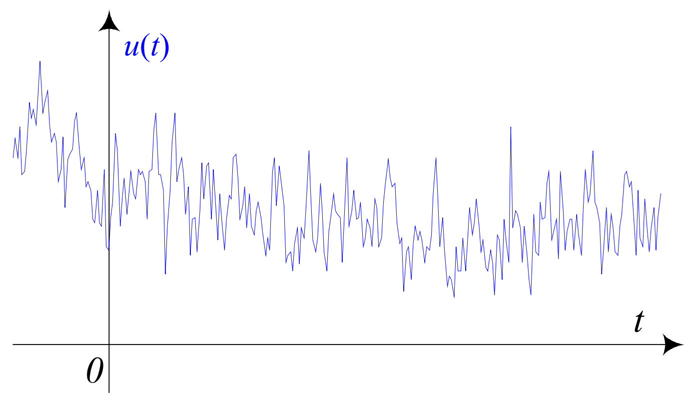


- Signale je moguće podijeliti na
  - ***deterministične*** i
  - ***slučajne***.
- Deterministički signal
- → jednoznačno određen za svaki trenutak *t*.

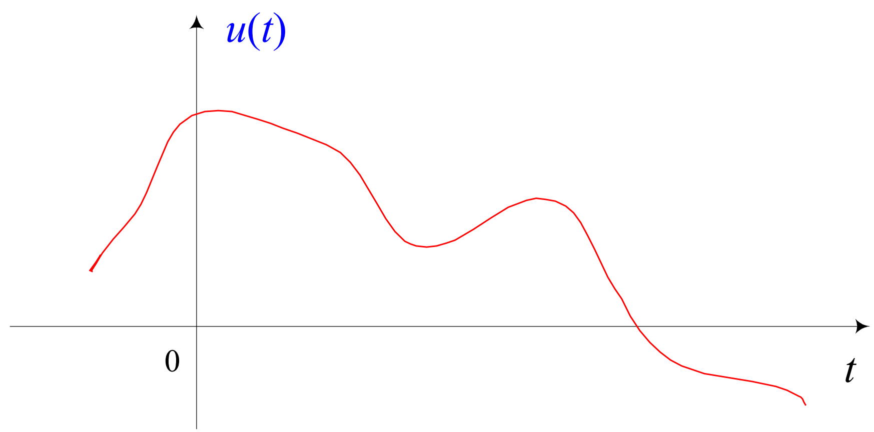


- Prikazuje se kao funkcija vremena $f(t)$.

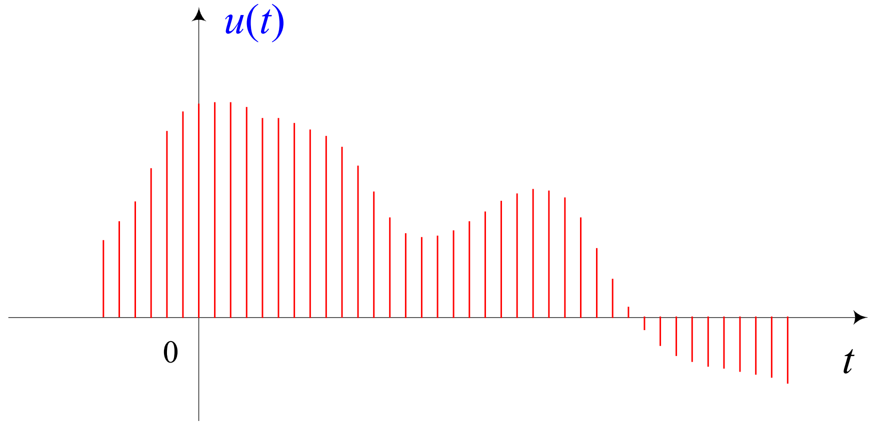
- Slučajni signal → nije unaprijed jednoznačno određen
- Govorimo o vjerojatnosti da u određenome trenutku t, signal poprimi neku vrijednost u zadanome intervalu $f_1 < f(t) < f_2$.



- Obzirom vremensku ovisnost signali mogu biti
  - ***analogni*** i
  - ***diskretni***.
- Analogni signali → kontinuirane funkcije vremena t
- Imaju definiranu funkcijsku vrijednost ***za svaki iznos*** t.



- Diskretni signali → definirani samo u ***diskretnim vrijednostima*** varijable t.



- Električnim krugovima obrađuju se ili prenose analogni signali, ali ima električnih krugova koji služe i za obradu diskretnih signala.

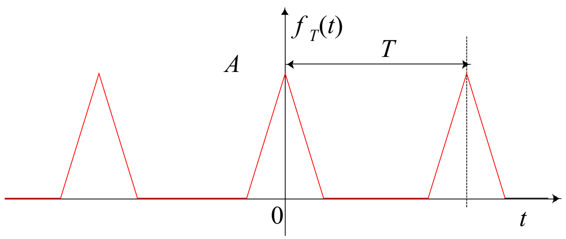
PERIODIČKI I *NEPERIODIČKI SIGNALI*

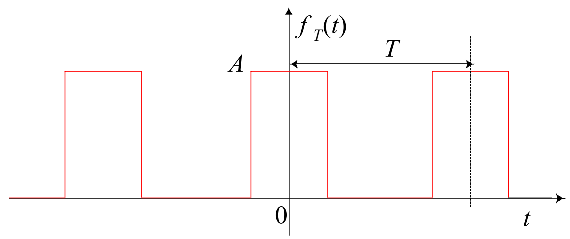
- Periodički signal s periodom *T* je onaj za kojeg vrijedi

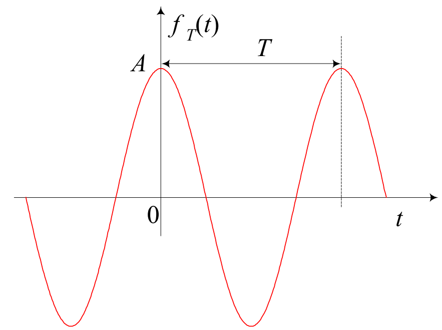
$$f(t) = f(t + T) \qquad -\infty < t < \infty$$

- U potpunosti definiran ako je poznat jedan njegov period.

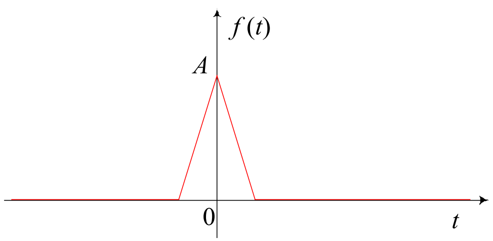
- Periodički signali

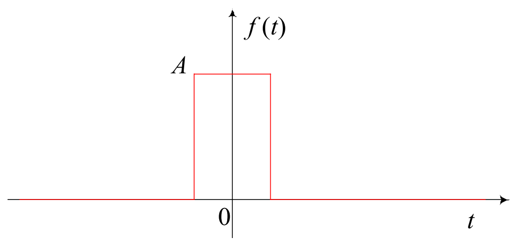


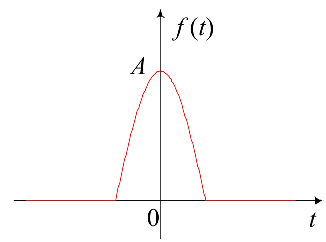




- Neperiodički signali







Valni oblici električnih signala

- U analizi električnih krugova koristimo
  - osnovne valne oblike i
  - kombinacije tih valnih oblika.

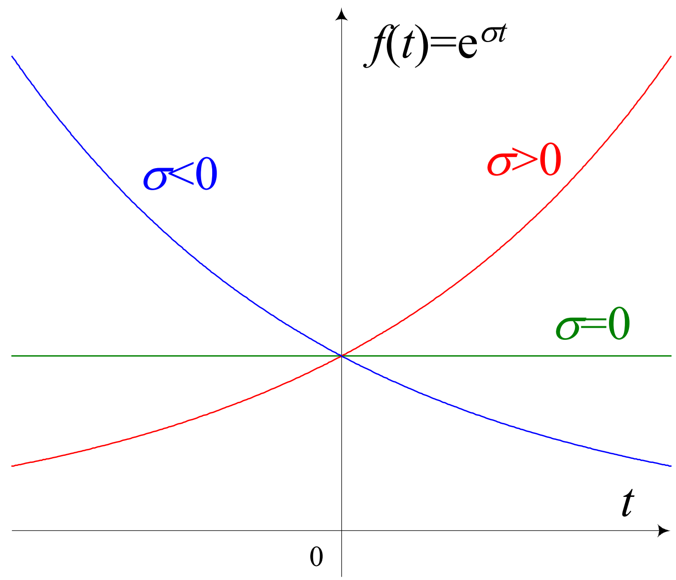
- Svojstvo linearnosti električnih sistema
  - → mogućnost primjene principa superpozicije.

- Odziv mreže na složene pobudne funkcije:
  - Funkciju predstaviti sumom jednostavnih funkcija,
  - Odziv je jednak sumi svih dobivenih odziva na njene jednostavne komponente.

- Važno je istražiti odzive na jednostavne pobudne funkcije, koje mogu biti komponente složenih funkcija.

Eksponencijalna funkcija

$$f(t)=k\cdot e^{\sigma t}$$



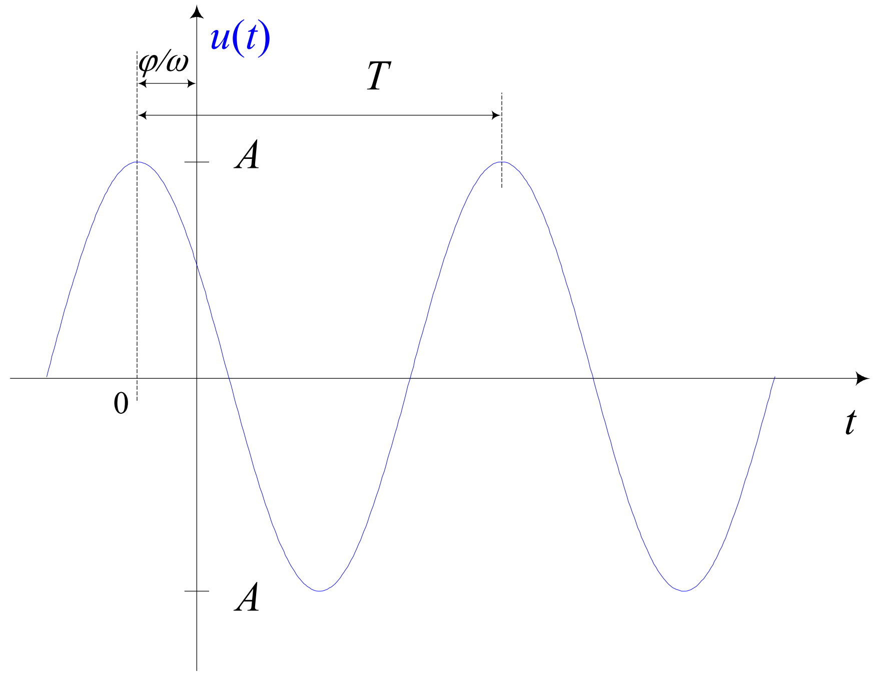
- Važno svojstvo:
  - derivacija ili integral eksponencijalne funkcije također je eksponencijalna funkcija

Trigonometrijska sin i cos funkcija

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

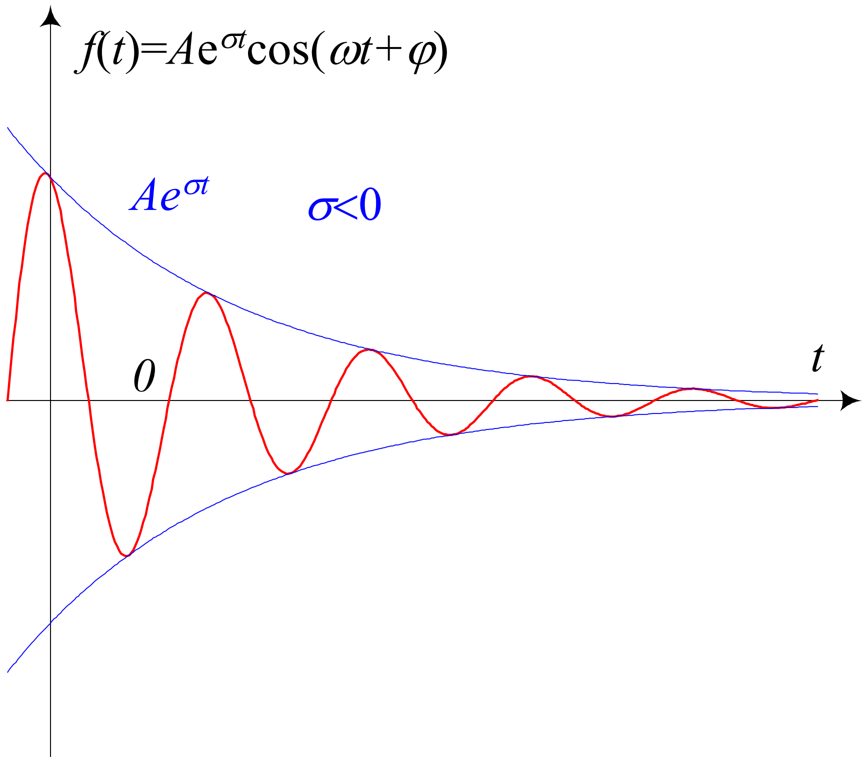
$$\omega = 2\pi f$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$



Prigušena sinusoida

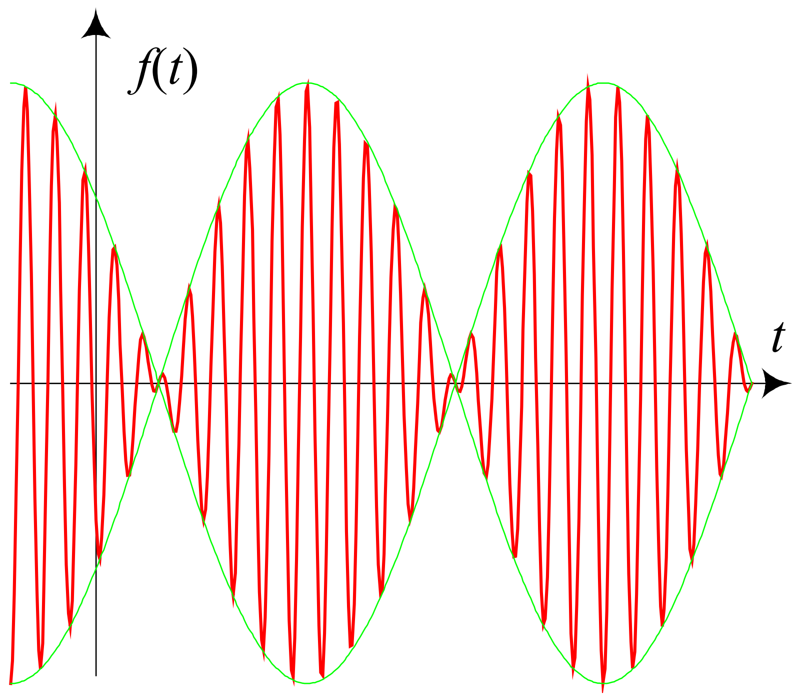
$$f(t) = Ae^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)$$



Modulirana sinusoida

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t)$$

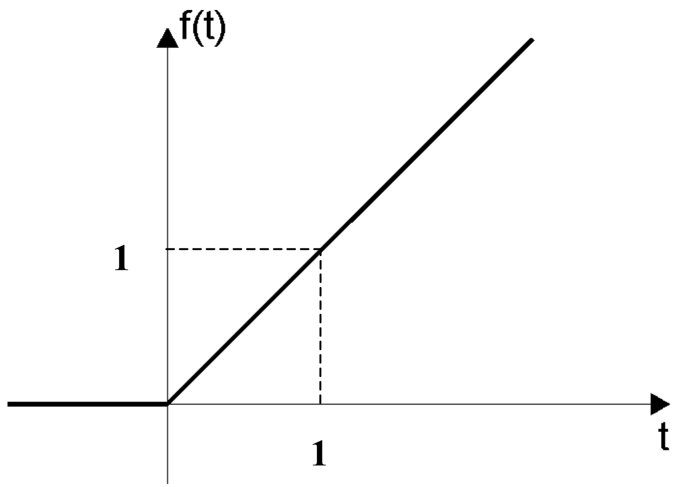
$\omega_1 < \omega_2$



Kauzalne funkcije

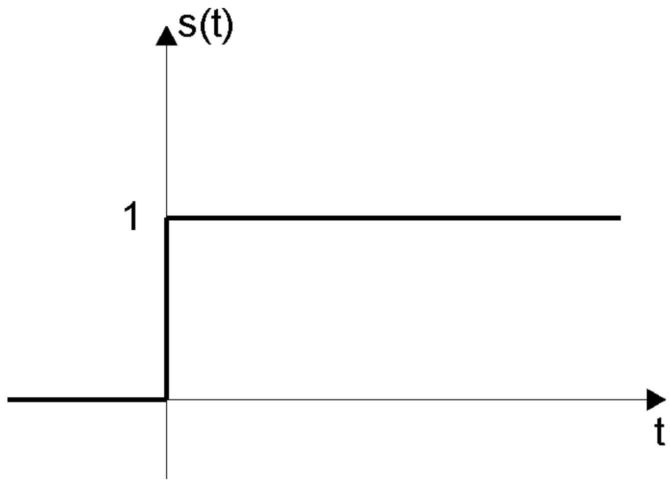
Jedinični uspon (rampa)

$$f(t) = r(t) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad t < 0 \\ t & \text{za} \quad t \geq 0 \end{cases}$$



Jedinični skok (step funkcija)

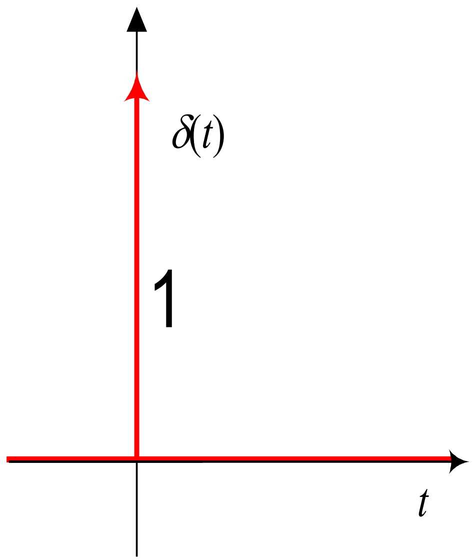
$$S(t)=\begin{cases}0 & \text{za} \quad t<0\\ 1 & \text{za} \quad t>0\end{cases}$$



Jedinični impuls (Diracova δ-funkcija)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{za} \quad t = 0 \end{cases}$$

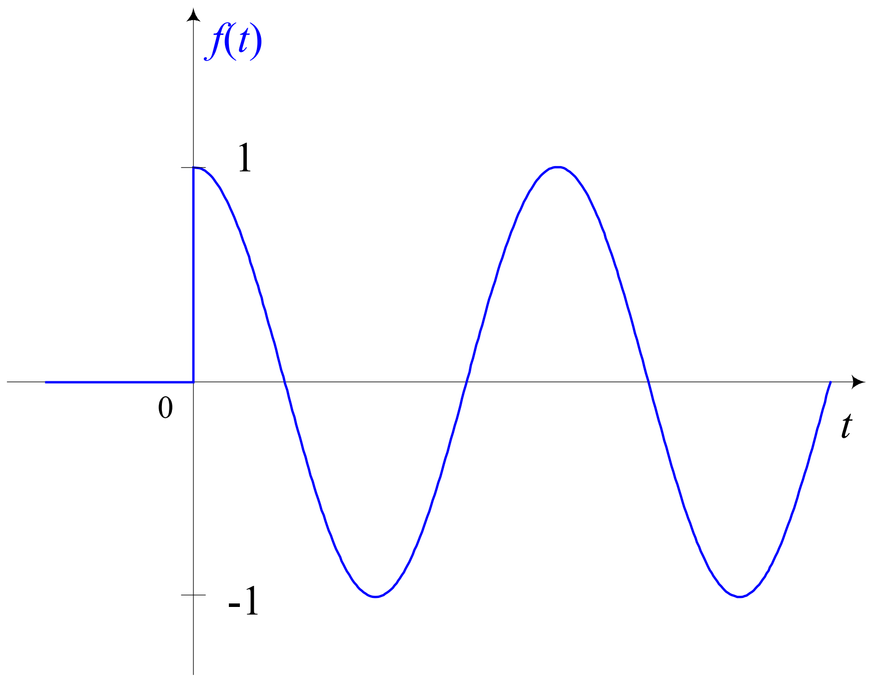
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t)\,dt = f(0)$$

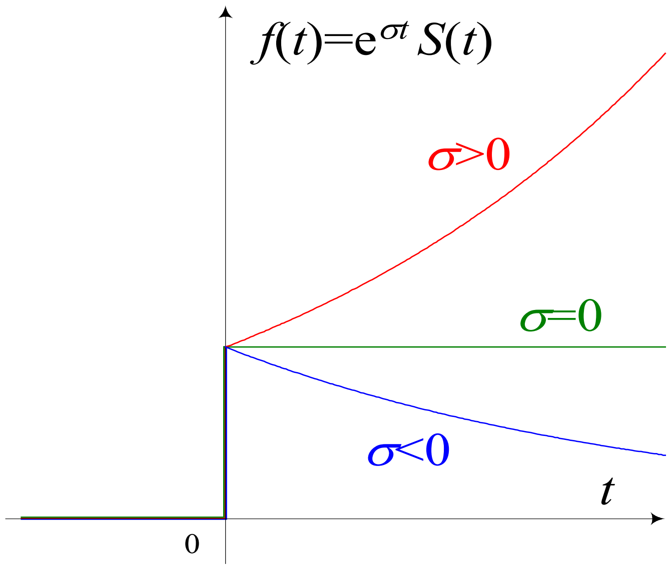
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$$

Sinusoidalne funkcije



$$f(t) = \cos(\omega t + \varphi) \cdot S(t)$$

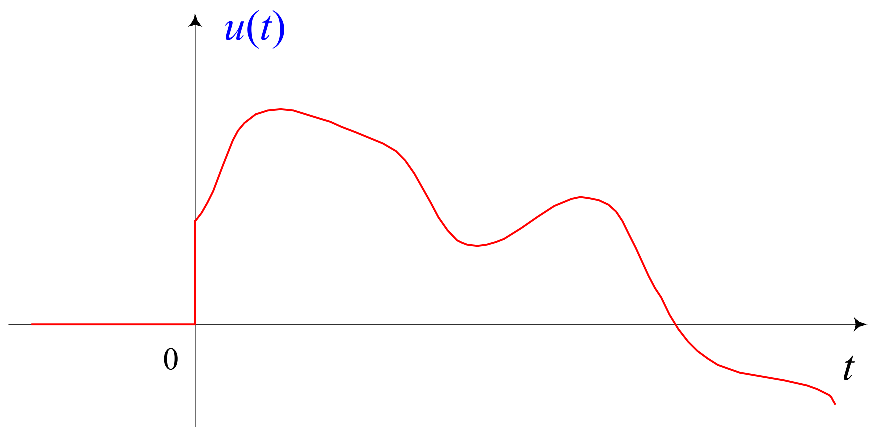
Eksponencijalne funkcije



$$f(t) = e^{\sigma t} \cdot S(t)$$

Laplaceova transformacija

- Laplaceova transformacija → omogućava analizu krugova bez potrebe rješavanja diferencijalnih jednadžbi.
- Jednostrana Laplaceova transformacija → primjenjuje se na kauzalne funkcije, dakle
  - samo na $f(t)$ definirane u intervalu $t \geq 0$.
  - Za $t<0$ → $f(t)=0$.



- Laplaceova transformacija kauzalne funkcije $f(t)$ definirana je integralom

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$s \rightarrow$ kompleksna varijabla $\boxed{s = \sigma + j\omega}$.

- Funkcija $F(s)$ je ***transformacija*** ili ***slika*** funkcije $f(t)$ u domeni kompleksne varijable s.

- Laplaceova transformacija funkcije $f(t)$ postoji ako je:

$$\int_{0}^{+\infty} \left| f(t) \right| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

$\sigma_0 \rightarrow$ apscisa apsolutne konvergencije.

- Inverzna transformacija:

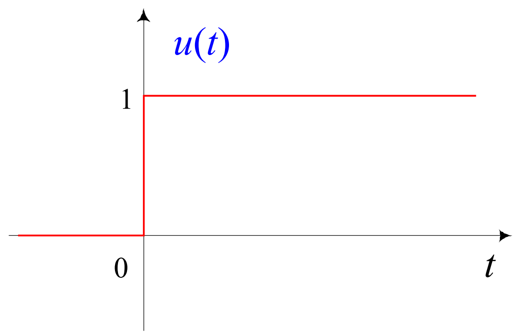
$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds \qquad \sigma_1 > \sigma_0$$

- Za razne oblike funkcije $f(t)$ ➡ <u>tablice $\mathscr{L}$-transformacija</u>

Laplaceova transformacija nekih karakterističnih funkcija

- Step funkcija (Jedinični skok):

$$S(t)=\begin{cases}1 & \text{za} \quad t>0 \\ 0 & \text{za} \quad t<0\end{cases}$$

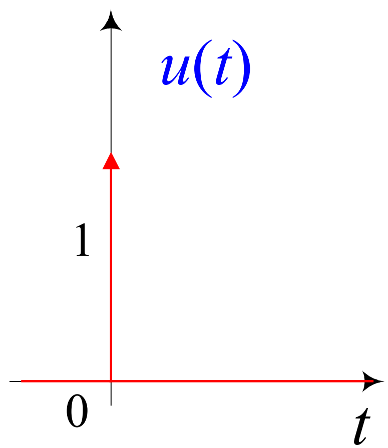


$$\mathscr{L}[S(t)]=\int_{0}^{+\infty} S(t)e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{s}$$

$$S(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \qquad \sigma_0=\mathrm{Re}[s]>0$$

- <u>Diracov δ impuls:</u> (Jedinični impuls)

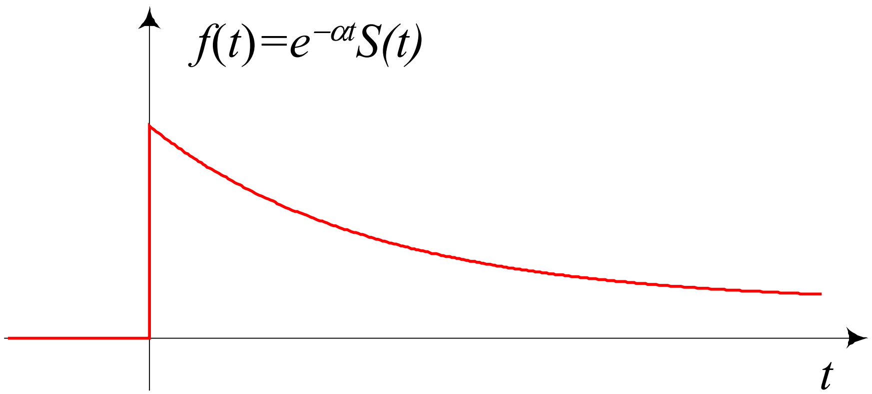
$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^0 = 1$$



- Laplaceova transformacija → na kauzalne funkcije ($t \geq 0$).
- U skladu s tim sve su funkcije pomnožene sa S(t).

- <u>Eksponencijalna funkcija</u>:

$$f(t) = A \cdot e^{-\alpha t} S(t)$$



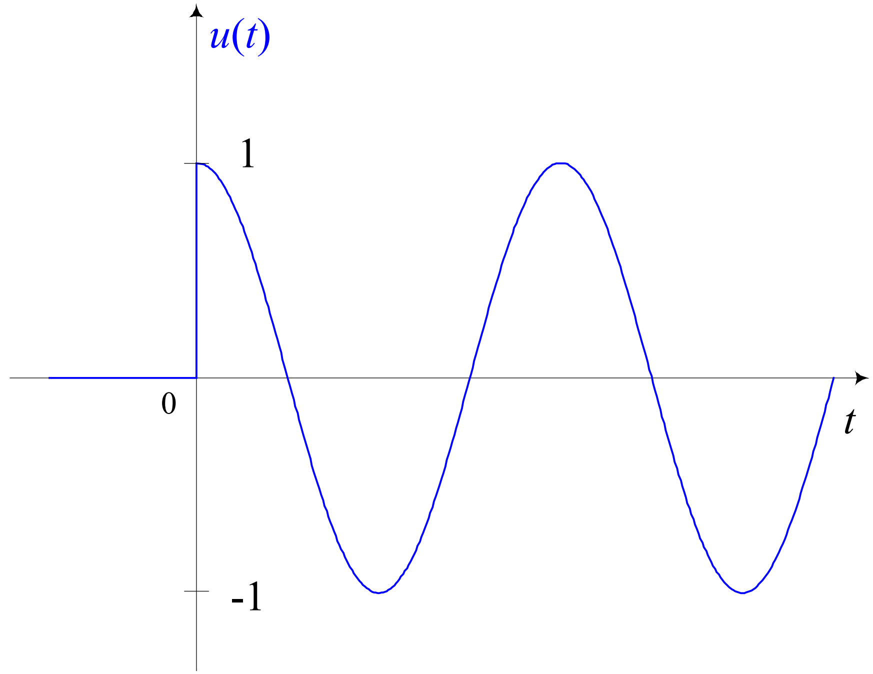
- A -> realna konstanta
- α -> realna ili kompleksna konstanta

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} A e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} A e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{A}{\alpha - s} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{s-\alpha}$$

$$\text{uz } \sigma_0 = \mathrm{Re}[s-\alpha] > 0$$

- Sinusna funkcija:

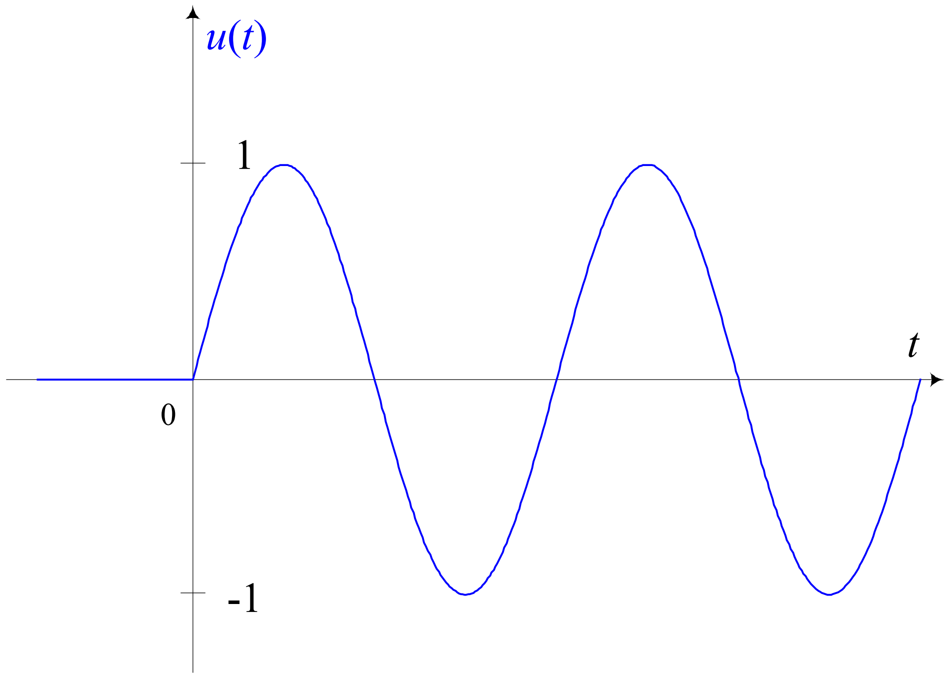
$$f(t)=\cos(\omega t)=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)$$



$$\mathscr{L}[\cos(\omega t)S(t)]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

- Sinusna funkcija:

$$f(t)=\sin(\omega t)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)$$



$$\mathscr{L}[\sin(\omega t)S(t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Svojstva Laplaceove transformacije

1. Linearnost:

- ako je: $F_1(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\; f_1(t)$

  $F_2(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\; f_2(t)$

- tada vrijedi: $\mathscr{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = \mathscr{L}[c_1 f_1(t)] + \mathscr{L}[c_2 f_2(t)] =$

$$= c_1 \mathscr{L}[f_1(t)] + c_2 \mathscr{L}[f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- Dokaz → supstitucijom u definicijski integral

2. Transformacija derivacije:

- Ako je: $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$

- tada je: $\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt =$ → parcijalnom integracijom

$$= sF(s) - f(0)$$

- slično je: $\mathscr{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$

itd.

- Vrijedi (za *n*-tu derivaciju):

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} -$$

$$- \ldots - s \left.\frac{df^{n-2}(t)}{dt^{n-2}}\right|_{t=0^-} - \left.\frac{df^{n-1}(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}$$

3. Transformacija integrala:

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

- Ova tri svojstva su naročito važna za transformaciju integro-diferencijalnih jednadžbi.

4. Vremenski pomak:

- Ako je: $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$

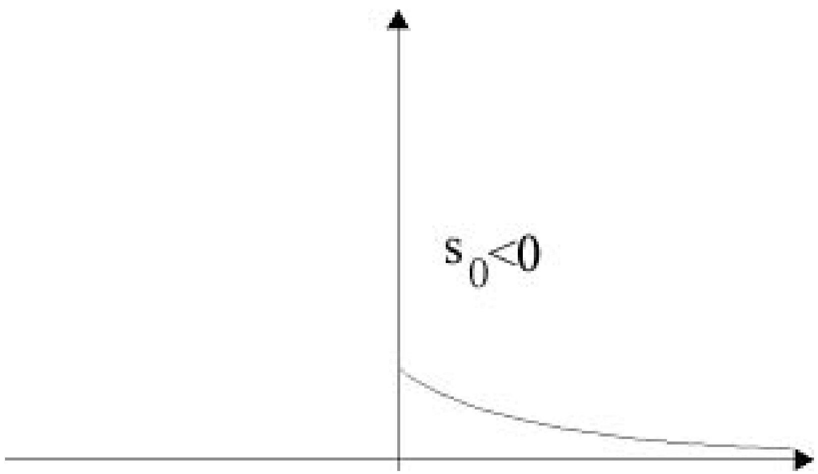
- tada je: $\mathscr{L}\left[f(t-t_0)S(t-t_0)\right] = F(s)\cdot e^{-st_0}$

5. Množenje s eksponencijalom:

$$\mathscr{L}[f(t)\cdot e^{s_0 t}] = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{s_0 t} e^{-st} dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-(s-s_0)t} dt = F(s-s_0)$$

- Primjer: $f(t) = e^{s_0 t} \cdot S(t)$



$$\mathscr{L}[S(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathscr{L}\left[e^{s_0 t} \cdot S(t)\right] = \frac{1}{s - s_0}$$

6. Vremensko skaliranje:

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$$

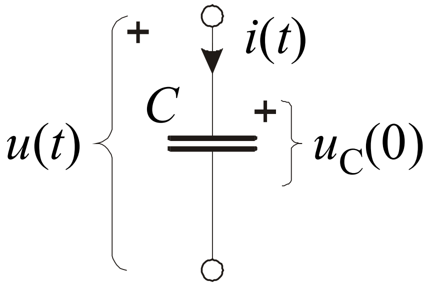
$$\mathscr{L}[f(a \cdot t)S(t)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad a > 0$$

7. $\mathscr{L}$-transformacija periodičkih funkcija:

$$f(t)=f(t+T)$$ -> periodička funkcija

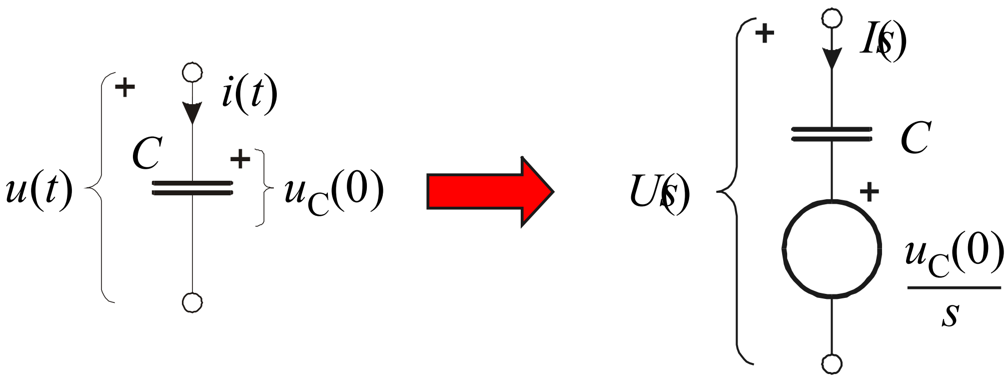
$$\mathscr{L}[f(t)\cdot S(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-s\cdot t}\cdot dt$$

Kapacitet

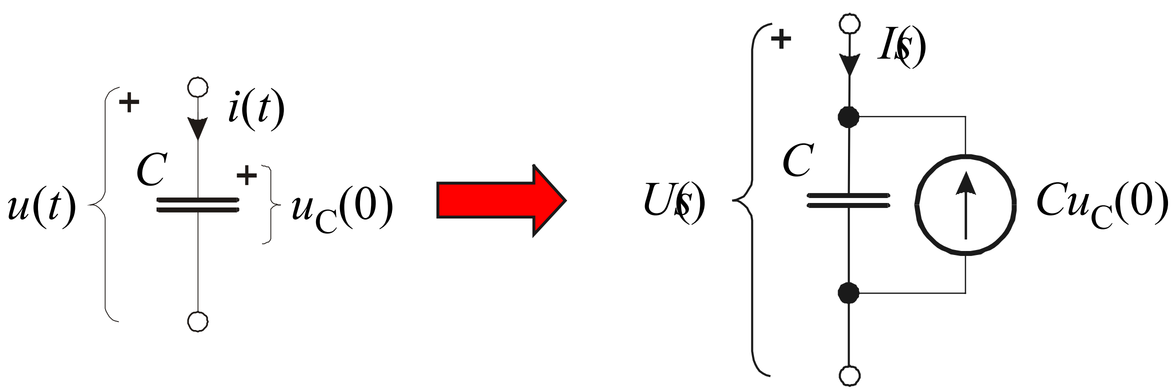


$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)d\tau + u_C(0) \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$



$$U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u_C(0)}{s}$$



$$I(s) = sCU(s) - Cu_C(0)$$

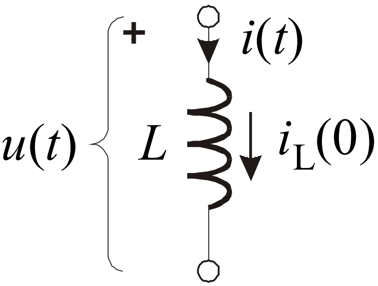
- Impedancija kapaciteta je

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$$

- a njegova admitancija

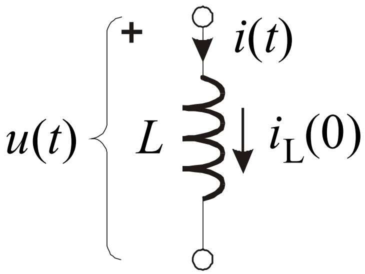
$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = sC$$

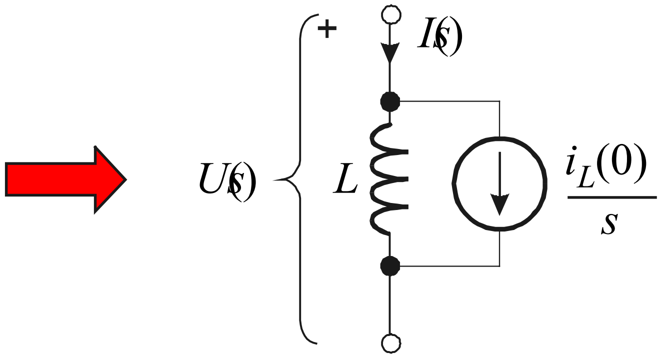
Induktivitet



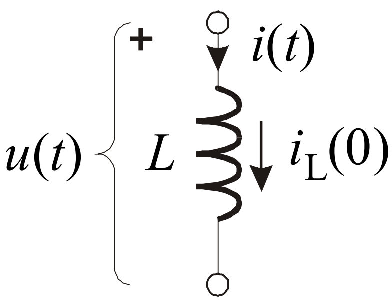
$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau=\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\tau)d\tau+i_L(0)\quad\Big/\frac{d}{dt}$$

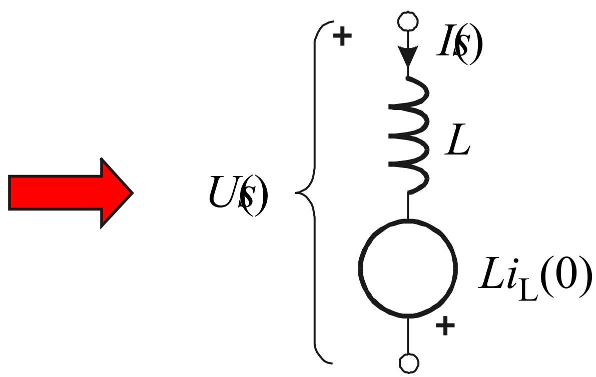
$$u(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$





$$I(s)=\frac{1}{sL}U(s)+\frac{i_L(0)}{s}$$





$$U(s)=sLI(s)-Li_L(0)$$

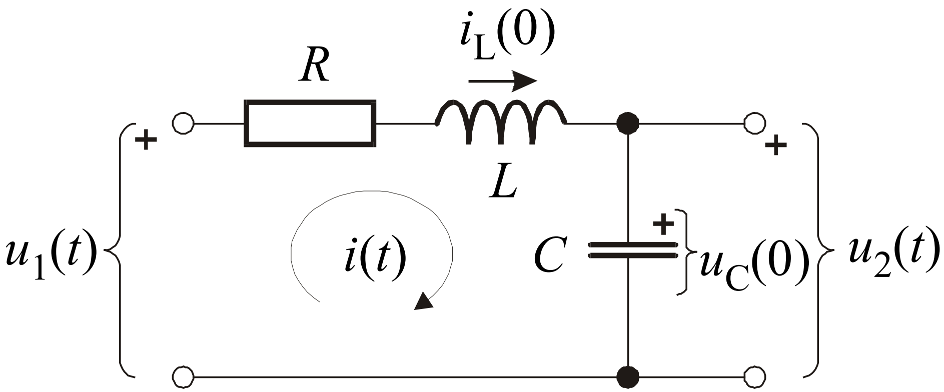
- Impedancija induktiviteta je

$$Z(s)=\frac{U(s)}{I(s)}=sL$$

- a njegova admitancija

$$Y(s)=\frac{I(s)}{U(s)}=\frac{1}{sL}$$

Primjer: RLC krug



$$u_C(0) = 1\ \mathrm{V}$$

$$i_L(0) = i(0) = 1\ \mathrm{A}$$

$$u(t) = S(t)$$

$$R = 1\Omega, L = 1\mathrm{H}, C = 1\mathrm{F}$$

integrodiferencijalna jednadžba

$$u_1(t) = R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

Primjena $\mathscr{L}$-transformacije