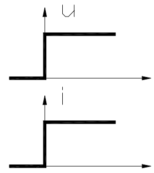
1. UVOD

1. ⊕ Objasnite na nekoliko primjera što znači tvrdnja da model neke naprave posjeduje neka svojstva koja sama naprava ne posjeduje?

U modelu otpornika postoji trenutna promjena napona i struje što u stvarnom slučaju ne postoji. Isto je i za modele kondenzatora i zavojnice.



U modelu kapaciteta postoji uskladištenje naboja, ali u kondenzatoru imamo i gubitke (R, L).

2. ⊕ ∴ U kojim bi slučajevima vrijedio KZS za efektivne vrijednosti struja grane neke mreže?

Vrijedio bi u istosmjernim mrežama (gdje je $I_{ef} = I_{sr}$) i u izmjeničnim mrežama građenim od istovrsnih elemenata (samo L ili samo C) tj. u kvazi-istosmjernim mrežama.

3. Obrazložite vrijedi li KZN za Fourierove koeficijente napona grana neke mreže?

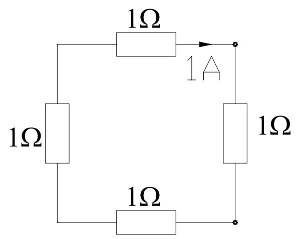
$$u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx;\ \ k = 0,1,2,...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx;\ \ k = 0,1,2,...$$

KZN vrijedi za Fourierove koeficijente napona grana jer za dobivanje koeficijenata koristimo integriranje, a integriranje je linearna transformacija. KZ vrijede za linearne transformacije.

4. ⊕ Petlju prožetu izmjeničnim magnetskim poljem indukcijom b(t) tvore četiri otpornika od 1Ω. Efektivna vrijednost struje petlje je 1A. Odredite efektivnu vrijednost napona između A i B.



Napon ne možemo odrediti jer je petlja prožeta magnetskim poljem pa ne vrijede KZ, odnosno prema drugom i četvrtom postulatu TM nema magnetske veze između naprava tj. nema magnetske veze koja prožima tu petlju

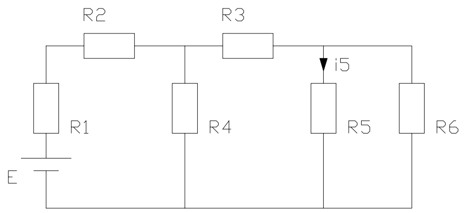
5. Pod kojim uvjetima vrijede Kirchoffovi zakoni?

Kirchoffovi zakoni vrijede ako vrijede četiri postulata teorije mreža:

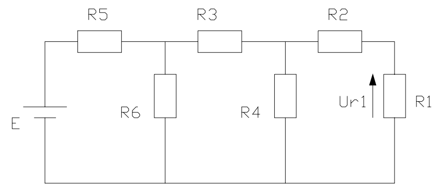
- Dimenzije električnih naprava i od njih stvorena mreža zanemarive su u odnosu na valnu duljinu koja odgovara najvišoj frekvenciji potrebnoj za rad mreže.
- Spojni vodiči među napravama beskonačne su vodljivosti i oko njih nema EM polja.
- Rezultantni naboja svake naprave u mreži jednak je nuli.
- Nema magnetske veze između naprava u mreži.

6. Δ ∇ U mreži prema slici a) izmjerena je struja kroz otpor R_5=1Ω u iznosu 2A. Koliki je napon na R_1=2Ω iste mreže otpora, ali uz premješteni naponski izvor E=10V kako je prikazano slikom b)?

a)

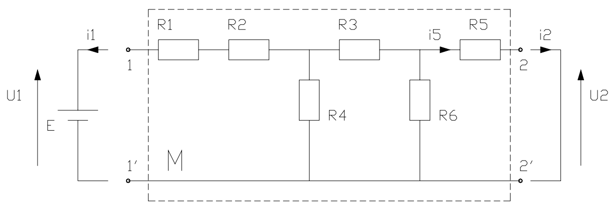


b)

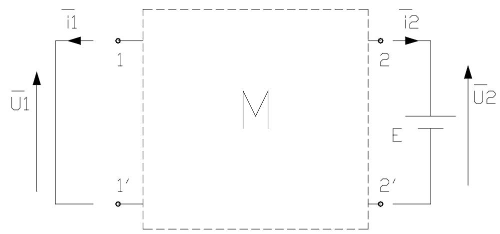


- nadomjesna shema za Tellegenov teorem: $\sum_{k=1}^{b} u_k(t_1) i_k(t_2) = 0$

a)



b)



Prvi pokus:

$$i_{R5} = i_2$$
$$u_2 = E = 10V$$
$$u_2 = 0V$$

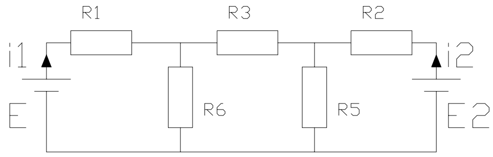
Drugi pokus:

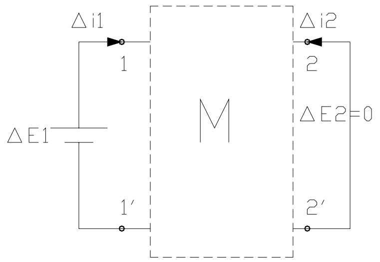
$$\overline{u}_2 = E = 10V$$
$$\overline{u}_1 = 0$$

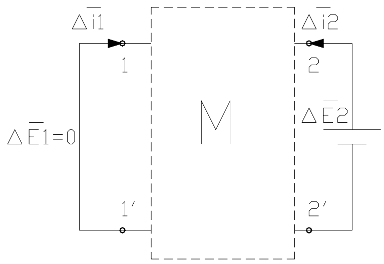
$$u_1(-\overline{i}_1) + u_2(-\overline{i}_2) = \overline{u}_1(-i_1) + \overline{u}_2(-i_2)$$
$$u_1\overline{i}_1 + u_2\overline{i}_2 = \overline{u}_1 i_1 + \overline{u}_2 i_2$$
$$10\overline{i}_1 + 0\overline{i}_2 = 0 i_1 + 10 \cdot 2$$
$$\overline{i}_1 = 2A$$
$$\overline{u}_{R1} = \overline{i}_{R1} R_1 = 2 \cdot 2 = 4$$

(ako struja ulazi u M tada ide s + predznakom, ako izlazi iz mreže s - predznakom)

7. Promjenom napona E_1 za ΔE_1 struja i_1 promjeni se za Δi_1, a struja i_2 za Δi_2. odredite promjenu struje izvora E_1 ako se napon E_2 promjeni za ΔE_2.







$$\Delta E_1 \cdot \Delta \bar{i}_1 + \Delta E_2 \Delta \bar{i}_2 = \Delta \bar{E}_1 \cdot \Delta i_1 + \Delta \bar{E}_2 \Delta i_2$$
$$\Delta E_1 \cdot \Delta \bar{i}_1 = \Delta \bar{E}_2 \cdot \Delta i_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta \bar{i}_1 = \frac{\Delta \bar{E}_2}{\Delta E_1} \Delta i_2}$$

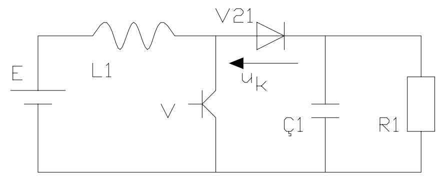
8. Δ U mreži sa b grana napon i struja svake grane rastavljeni su u istosmjernu i izmjeničnu komponentu, što znači da za k-tu granu vrijedi da je: $u_k(t) = U_k(0) + \tilde{u}_k(t)$, $i_k(t) = I_k(0) + \tilde{i}_k(t)$. Čemu je jednak umnožak $\sum_{k=1}^{b} U_k(0) I_k(0)$, a čemu umnošci $\sum_{k=1}^{b} \tilde{u}_k \tilde{i}_k$ i $\sum_{k=1}^{b} U_k(0) \tilde{i}_k$?

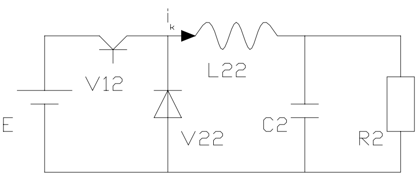
- $\sum_{k=1}^{b} U_k(0) I_k(0) = 0$
- $\sum_{k=1}^{b} \tilde{u}_k \tilde{i}_k = 0$
- $\sum_{k=1}^{b} U_k(0) \tilde{i}_k = 0$ (Tellegen)

a), b) - zakon očuvanja energije (što izvor privede, trošilo mora potrošiti), c) prvi pokus istosmjerni poticaj, drugi pokus izmjenični poticaj → po Tellegenu =0.

- $p(t) = P(0) + \tilde{p}$ - zakon očuvanja snage na frekvenciji $\sum_{k=1}^{b} P(0) = 0;$ $\sum_{k=1}^{b} \tilde{p} = 0$, (Tellegen)

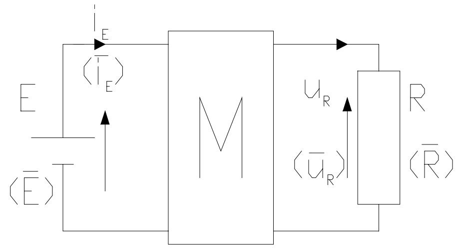
9. $\nabla \therefore$ Vrijedi li za dvije mreže prikazane na slikama a) i b) da je: $\sum_{k=1}^{b} u_k \tilde{i}_k = 0$ gdje je sa u_k označen napon k-te grane prema slici a), a s $\tilde{i}_k$ struja k-te grane prema slici b). Obrazložite.





Izraz $\sum_{k=1}^{b} u_k \tilde{i}_k = 0$ predstavlja Tellegenov teorem i u ovom slučaju vrijedi jer se nije izmijenio graf mreže (broj grana i čvorova je ostao isti). Različite mreže samo moraju imati isti graf jer za KZS i KZN ne igraju ulogu komponente nego samo kako su međusobno spojene.

10. ⊕ Na mreži linearnih vremenski nepromjenjivih otpora M provedena su dva pokusa. U prvom pokusu narinut je napon E=3V i uz opteretni otpor 1Ω izmjerena je struja naponskog izvora i_E=1A i napon na opteretnom otporu u_R=2V. U drugom pokusu narinut je napon $\bar E$ =6V i uz opteretni otpor $\bar R$ =2Ω izmjerena je struja naponskog izvora $\bar i_E$ =1,5A. Odredite napon na opteretnom otporu $\bar u_R$ u drugom pokusu.



$$E\bar i_E + u_R(-\bar i_R) = \bar E i_E + \bar u_R(-\bar i_R)$$
$$E\bar i_E + u_R\left(-\frac{\bar u_R}{\bar R}\right) = \bar E i_E + \bar u_R\left(-\frac{u_R}{R}\right)$$
$$3\cdot 1{,}5 + 2\cdot\left(-\frac{\bar u_R}{2}\right) = 6\cdot 1 + \bar u_R\left(-\frac{2}{1}\right)$$
$$-\bar u_R + 2\bar u_R = 6 - 4{,}5$$
$$\bar u_R = 1{,}5V$$

2. JEDNOPRILAZNI DISIPATIVNI ELEMENTI (OTPORI)

11. ⊕ Zašto je linearni memnistor identičan linearnom otporu?

● Relacija linearnog otpora: $\underline{u = i\cdot R}$

$$\varphi = M\cdot q \quad /\frac{d}{dt}$$

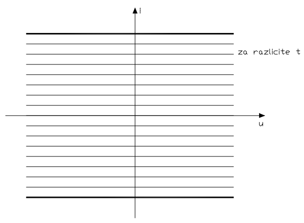
● Relacija linearnog memnistora:
$$\frac{d\varphi}{dt} = M\frac{dq}{dt}$$
$$u = Mi$$

- Identičan je jer su im relacije jednake.

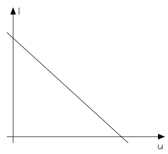
12. ⊕ Nacrtati karakteristiku otpora zadanog sa $i(t) = \hat I\cos(\omega t + \varphi)$.

- minimum funkcije je u $-\hat I$, a maksimum u $\hat I$, zbog cos

- ovo je karakteristika nelinearnog otpora, predstavlja strujni izvor = poopćeni prekid



13. Δ ∇ Zadana je karakteristika otpora prema slici. Je li otpor aktivan / pasivan, linearan / nelinearan i kako je upravljan?



- aktivan jer na dijelu kart. vrijedi $u_R i_R < 0$ (prolazi kroz 2 i 4 kvadrant)
- nelinearan jer ne prolazi kroz ishodišta (nema aditivnosti ni homog.)
- strujno i naponski upravljan (monoton)

Nelinearan jer nije zadovoljio načelo homogenosti

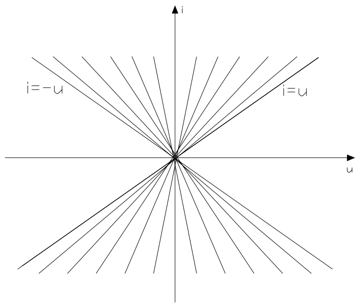
Aktivan jer mu karakteristika prolazi kroz II i IV kvadrant u-i ravnine

VNP jer se u karakteristici eksplicitno ne pojavljuj vrijeme t

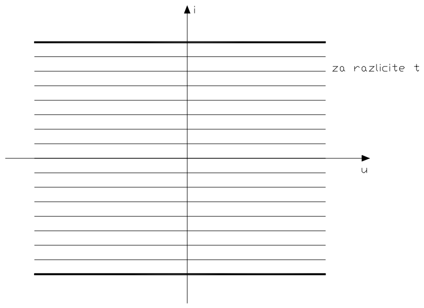
14. Odredite koji je od ovih otpora pasivan, a koji aktivan: a) $i = u\cos 2\omega t$ **, b)** $i = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi)$**, c)** $i = 3 + u + 2u^3$**, d)** $u = sh3i$**, e)** $u = 2i + 3i^2$**.**

- otpor je pasivan ako prolazi kroz 1 i 3 kvadrant
- otpor je aktivan ako prolazi kroz 2 i 4 kvadrant (i 1 i 3 kvadrant)

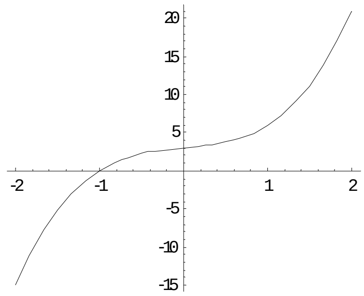
a) $i = u\cos 2\omega t$ - aktivan



b) $i = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi)$ - aktivan

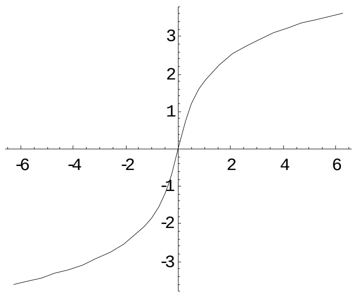


c) $i = 3 + u + 2u^3$ - aktivan

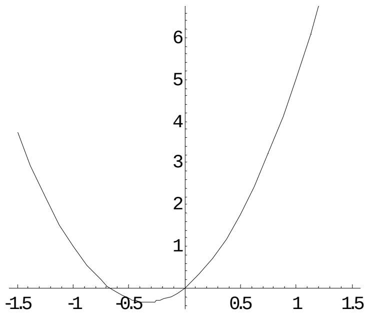


d) $u = sh3i$ - pasivan

- striktno pasivan



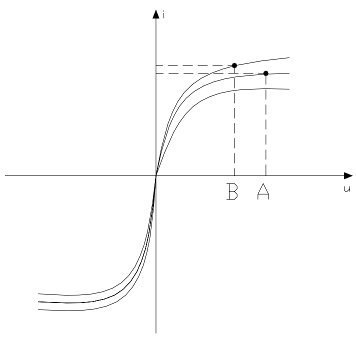
e) $u = 2i + 3i^2$ - aktivan



15. ⊕ Navedite nekoliko primjera naprava s pomoću kojih se može realizirati poopćeni kratki spoj.

Svaki naponski izvor možemo interpretirati kao poopćeni kratki spoj (akumulator, istosmjerni generator, izmjenični generator).

16. ⊕ ⊗ Je li bipolarni tranzistor kvazi-aktivni otpor? Obrazložiti.



$u_A > u_B$

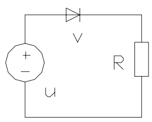
$i_A < i_B$

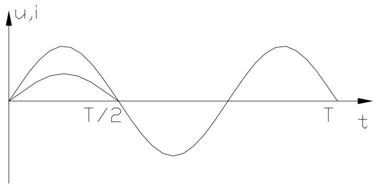
- otpor je kvazi-aktivan ako vrijedi: $[u_A(t) - u_B(t)] \cdot [i_A(t) - i_B(t)] < 0$

a) ako možemo mijenjati struju baze, tj. $i_B = i_B(t)$, tada je tranzistor kvazi-aktivan otpor (možemo naći dvije točke A i B koje zadovoljavaju gornji uvjet – točku A na karakteristici za $i_B(t_1)$, a točku B na karakteristici $i_B(t_2)$).

b) ako je i_B konstantno tada tranzistor nije kvazi-aktivni otpor.

17. ∇ **Odredite jalovu i prividnu snagu izvora** $u=\hat{U}\sin\omega t$ **.**





$$u=\hat{U}\sin\omega t$$

$$i=\hat{I}\sin\omega t=\frac{\hat{U}}{R}\sin\omega t$$

$$f=\frac{1}{T},\ \ \omega=2\pi f\Rightarrow\frac{2\pi}{T}$$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\hat{U}^2}{R}\sin^2(\omega t)dt=\frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{R}\left[\int_0^{T/2}\sin^2(\omega t)dt+\underbrace{\int_{T/2}^{T}\sin^2(\omega t)dt}_{0}\right]=\frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{R}\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{T/2}=$$

$$\frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{R}\left[\frac{1}{2}\frac{T}{2}-\underbrace{\frac{1}{4}\frac{T}{\underbrace{2\pi}_{\omega}}\sin\left(\frac{2\cdot 2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)-(0-0)}_{0}\right]=\frac{\hat{U}^2}{4R}$$

$$S=UI=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2dt}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2}i^2dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\hat{U}^2\int_0^T\sin^2(\omega t)dt}\sqrt{\frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{R^2}\int_0^{T/2}\sin^2(\omega t)dt}=*\cdot **=\frac{\hat{U}^2}{R\sqrt{8}}$$

$$*=\hat{U}\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T}=\hat{U}\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}T-\underbrace{\frac{1}{4}\frac{T}{2\pi}\sin\left(2\frac{2\pi}{T}T\right)}_{0}-(0-0)\right]}=\frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

$$**=\frac{\hat{U}}{R}\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{T/2}}=\frac{\hat{U}}{R}\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}\frac{T}{2}-\underbrace{\frac{1}{4}\frac{T}{2\pi}\sin\left(2\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}_{0}-(0-0)\right]}=\frac{\hat{U}}{R}\frac{1}{2}$$

$$Q=\sqrt{S^2-P^2}=\sqrt{\frac{\hat{U}^4}{8R^2}-\frac{\hat{U}^4}{16R^2}}=\sqrt{\frac{2\hat{U}^4-\hat{U}^4}{16R^2}}=\frac{\hat{U}^2}{4R}$$

18. $\therefore$ **Na otpor** $R(t)=R_0+R_1\sin\omega_1 t$ **narinuta je struja valnog oblika izraza** $i=\hat{I}\sin\omega t$ **. Odredite valni oblik napona na otporu kao i sve članove pripadnog Fourierova reda.**

$$u(t)=R(t)i(t)=\hat{I}R_0\sin(\omega t)+\hat{I}R_1\sin(\omega t)\sin(\omega_1 t)$$

$$u(t)=\hat{I}R_0\sin(\omega t)+\hat{I}R_1\frac{1}{2}\left[\cos\left((\omega-\omega_1)t\right)-\cos\left((\omega+\omega_1)t\right)\right]$$

---

a) ako zbog lakšeg računanja pretpostavimo $\omega_1=n\omega,\ n=1,2,3...$ tada je da je:

$$b_k=R_0\hat{I},\ \ a_k=\frac{1}{2}R_1\hat{I}$$

b) ako nije zadovoljen uvjet $\omega_1=n\omega$ tada se koeficijenti računaju po formuli:

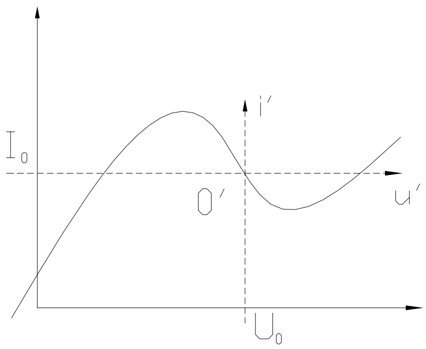
$$u_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx;\ \ k=0,1,2,...$$

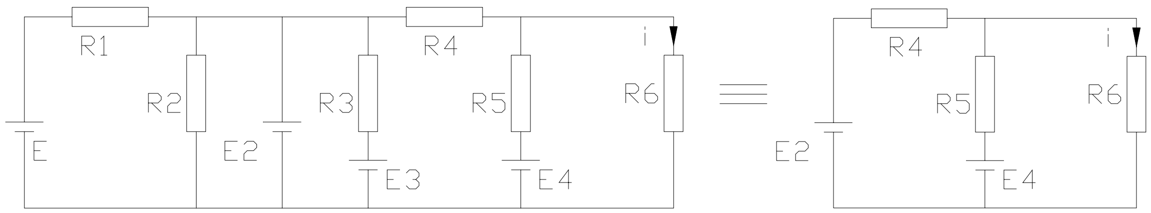
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx;\ \ k=0,1,2,...$$

19. Obrazložite koji uvjeti moraju biti zadovoljeni da bi se realizirao linearni aktivni otpor?

Linearnost zahtjeva da karakteristika prolazi kroz ishodište, a aktivnost da karakteristika ne prolazi kroz ishodište. Kontradikciju možemo izbjeći samo tako da aktivnost definiramo u odnosu na pogodno odabranu fiksnu točku karakteristike (U_0, I_0) tako da u okolišu točke vrijedi $(u - U_0)(i - I_0) < 0$.



20. $\Delta\,\nabla$ U mreži sheme spoja prema slici traži se struja kroz otpor R_6. Nacrtati maksimalno pojednostavljenu shemu spoja zadane mreže na temelju koje se može odrediti tražena struja.



Po Millmanovom tm:
$$U_6 = \frac{\dfrac{E_2}{R_4} + \dfrac{E_4}{R_5} + 0}{\dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5} + \dfrac{1}{R_6}} = \frac{\dfrac{E_2R_5 + E_4R_4}{R_4R_5}}{\dfrac{R_5R_6 + R_4R_6 + R_4R_5}{R_4R_5R_6}} = \frac{(E_2R_5 + E_4R_4)R_6}{R_5R_6 + R_4R_6 + R_4R_5}$$

$$I_6 = \frac{U_6}{R_6} = \frac{E_2R_5 + E_4R_4}{R_5R_6 + R_4R_6 + R_4R_5}$$

3. JEDNOPRILAZNI REAKTIVNI ELEMENTI

21. $\otimes$ Kapacitet je naponom upravljan ako se naboj kapaciteta q(t) može izraziti jednoznačnom funkcijom napona na kapacitetu, tj. q(t)=f[u_c(t)]. Dokažite da je uskladištena energija naponom upravljanog kapaciteta dana izrazom: $\varepsilon_C(t) = u_c(t)q(t) - \int_0^{u_c(t)} q(x)du_c(x)$.

$$\varepsilon_c(t) = \int_0^{q(t)} u_c dq = \int_{-\infty}^{t} u_c \frac{df}{dx} dx \qquad u_c(-\infty) = 0$$

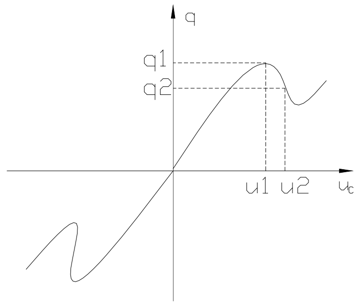
$$\varepsilon_c(t) = u_c(t) f(u_c(t))\Big|_{-\infty}^{t} - \int_{-\infty}^{t} f(u_c) \frac{du_c}{dx} dx$$

$$\varepsilon_c(t) = u_c(t)q(t) - \int_0^{u_c(t)} q du_c$$

22. ⊕ Odredite uskladištenu energiju kapaciteta $-0{,}5\mu F$ nabijenog na napon 10V. Obrazložite!

Energija je beskonačna, tj. onolika koliku je uskladišti izvor. Po konvenciji uskladištena je beskonačna energija, realno onoliko koliko uskladišti izvor.

23. Kako bi se obzirom na svojstvo upravljivosti nazvali kapacitet karakteristike na slici? Je li ovaj kapacitet aktivan ili pasivan?



- Naponom je upravljan (jer tada uvijek imamo točno definiran iznos naboja)

-lokalno aktivan ili kvaziaktivan

vrijedi da je $u_2>u_1$ tj. napon raste a pri tome je $q_2<q_1$ tj. naboj opada odnosno kapacitet se prazni → ponaša se kao izvor. $W_C = \int_{q_1}^{q_2} u_c dq < 0$

24. ⊕ ⊗ Pod kojim je uvjetima moguć skok napona na kapacitetu?

Moguć je ako je kapacitet nelinearan ili vremenski promjenjiv.

a) vremenski promjenjiv

$q(t) = C(t)u_c(t)$

$\underbrace{\Delta q = q(t+0) - q(t-0)}_{=0}$

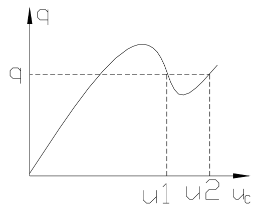
$dq = Cdu_c + u_c dC$

$\Delta u_c = u_c(t+0) - u_c(t-0)$

$\Delta C = C(t+0) - C(t-0)$

$C\Delta u_c + u_c \Delta C = 0$

b) naponom upravljan u području višeznačnosti - više u_c za isti q

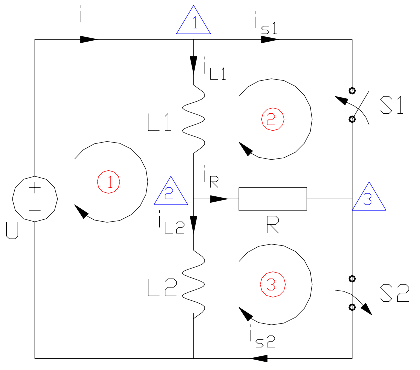


25. Vrijedi li i za nelinearni kapacitet nejednoznačne karakteristike q-u_c da je $I_c(0)$=0?

$$I_C(0) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i_c(t)dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{dq}{dt}dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} dq$$

Vrijede karakteristike ako je pobuda periodična, tj. ako je $q(t) = q(t+T)$.

26. △ ▽ Nacrtajte shemu spoja mreže dualnu zadanoj mreži. S1 i S2 su periodički upravljane sklope koje sklapaju protutaktno.



Dualnsot:

KZN ≙ KZS

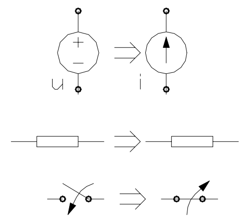
L≙C

i_L ≙ u_C

u_L ≙ i_C

$\varphi \hat{=} q$

u≙i



$i = 0$ $\quad i \neq 0$

$u \neq 0$ $\quad u = 0$

- jednadžbe mreže:

3 petlje → 3 KZN

4 čvora → 3 KZS

KZN: 1. $u = L_1 \dfrac{di_{L1}}{dt} + L_2 \dfrac{di_{L2}}{dt}$

2. $0 = L_1 \dfrac{di_{L1}}{dt} + u_R - u_{S1}$

3. $0 = L_2 \dfrac{di_{L2}}{dt} - u_R - u_{S2}$

KZS: 1. $i = i_{L1} + i_{S1}$

2. $i_R = i_{L1} - i_{L2}$

3. $i_{S2} = i_R + i_{S1}$

Dualnost: 3 KZS, 3KZN

1. KZS $\quad i = C_1 \dfrac{du_{C1}}{dt} + C_2 \dfrac{du_{C2}}{dt}$

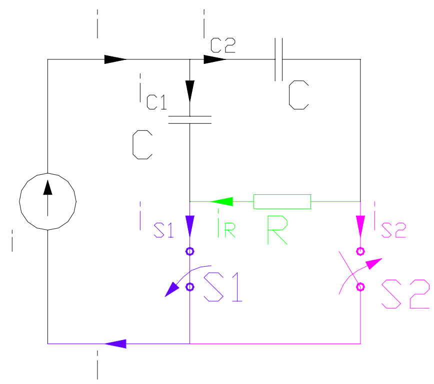
2. KZS $\quad 0 = C_1 \dfrac{du_{C1}}{dt} + i_R - i_{S1}$

3. KZS $\quad 0 = C_2 \dfrac{du_{C2}}{dt} - i_R - i_{S2}$

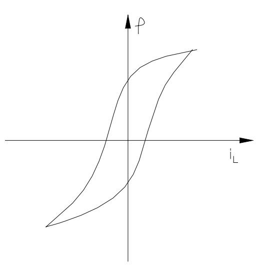
1. KZN $\quad u = u_{C1} + u_{S1}$

2. KZN $\quad u_R = u_{C1} - u_{C2}$

3. KZN $\quad u_{S2} = u_R + u_{S1}$



27. ∴ Je li dvoznačnom karakteristikom prema slici korektno prikazana karakteristika zavojnice s feromagnetskom jezgorm?

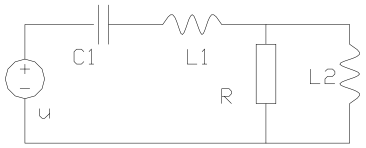


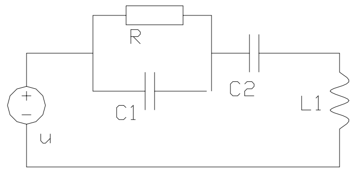
Karakteristikom na slici nije korektno prikazana karakteristika zavojnice jer po definiciji: karakteristika jednoprilaza je da se za bilo koji poticaj, u bilo kojem trenutku t, struja i tok mogu prikazati krivuljom u ravnini i - fi.

Zbog toga ovo nije korektno prikazana karakteristika jer ovisi kakav je poticaj; u ovom slučaju imamo dva poticaja tj. ovisnost odziva da li poticaj raste ili se smanjuje.

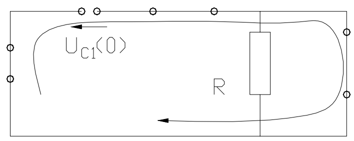
(Karakteristika nije korektno prikazana jer nije zadan smjer obilaska karakteristike.)

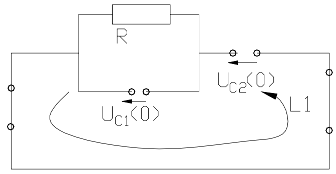
28. ⊗ Δ Je li u mrežama sheme spoja prema slikama a) i b) moguća istosmjerna komponenta napona na kapacitetu C_1 u periodičkom režimu rada?





- nacrtamo mrežu za istosmjerne komponente:





$U_{C1}(0) \equiv 0$

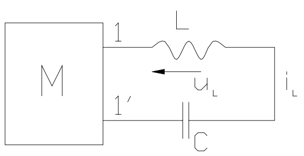
- nije moguća istosmjerna komponenta
- napon na C_1 je izmjeničan

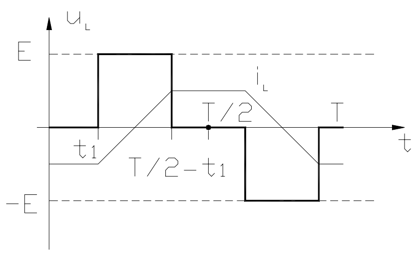
$U_{C1}(0) + U_{C2}(0) = 0$

$U_{C1}(0) \neq 0$

- moguća je istosmjerna komponenta

29. Mreža sastavljena od jednoprilaza M i serijskog spoja induktiviteta L i kapaciteta C nalazi se u periodičkom režimu rada. Valni oblik napona na induktivitetu je zadan. Odredite i nacrtajte valni oblik struje kroz induktivitet.





$I_C(0) \equiv 0$ - da nema C ništa se ne mijenja jer ne znamo što je u mreži, da imamo R tada bi se mijenjalo eksponencijalno.

- periodički režim rada → srednja vrijednost napona mora biti =0 tj. $U_C(0) = 0$

$u_L = L\dfrac{di}{dt}$ $\quad i_L = \dfrac{1}{L}\int u_L dt$; $\quad I_L(0) = 0$ jer je $I_{Csr}(0) = 0$ → i_L će biti izmjenična

$$u_L = \begin{cases} a)\ 0 & 0 \le t \le t_1 \\ b)\ E & t_1 \le t \le \dfrac{T}{2} - t_1 \\ c)\ 0 & \dfrac{T_2}{2} - t_1 \le t \le \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

a) $0 = L\dfrac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = const \neq 0 \;\; i < 0$

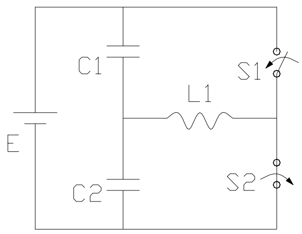
b) $E = L\dfrac{di_L}{dt} \Rightarrow \int_{i_L(t_1)}^{i_L(t)} di_L = \dfrac{E}{L}\int_{t_1}^{t} dt \Rightarrow i_L = \dfrac{E}{L}(t - t_1) + i_L(t_1)$

$\dfrac{di_L}{dt} \approx \dfrac{E}{L} > 0,\;\; i_L \uparrow$

c) $\dfrac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow i_L = const > 0$

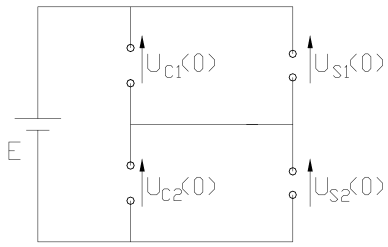
$$\left.\begin{aligned} i_L(t_1) &= -I_1 \\ i_L(T/2 - t_1) &= I_1 \end{aligned}\right\} i_L(t) \rightarrow b) \Rightarrow I_1 = \frac{E}{L}\underbrace{\left(\frac{T}{2} - t_1 - t_1\right)}_{\Delta t} - I_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{I_1 = \frac{E\Delta t}{2L}}$$

30. ⊕ ⊗ Sklopke S1 i S2 periodički i protutaktno sklapaju i to tako da je svaka od sklopki polovinu periode T uklopljena, a polovinu isklopljena. Odredite srednje vrijednosti napona na C1 i C2 ako je poznato L1, E, C1=2C2. Obrazloži.



$$E = U_{C1}(0) + U_{C2}(0)$$
$$jer\ \ U_{L1}(0) \equiv 0$$
$$I_{C1} \equiv I_{C2} \equiv 0$$

- shema za srednje vrijednosti



Kada je sklopka uklopljena na C je napon jednak E, kada je isklopljena onda je napon 0. Kako je pola vremena uključena, a pola isključena tada je srednja vrijednost napona napon na $C_1 = \dfrac{E}{2}$ i $C_2 = \dfrac{E}{2}$.

31. Zašto za vremenski promjenjivi induktivitet ne vrijedi P_L=0? Navesti primjer.

Vremenski promjenjivi induktivitet predstavlja model električke naprave za koje ne važi uvjet ne disipativnosti $\left(W_L(t, t+T) = \int_t^{t+T} u_L(x) i_L(x) dx = 0 \right)$. Fizikalni mehanizam pomoću kojeg se ostvaruje vremenska promjenjivost valja shvatiti kao izvor djelatne snage (uvor). Uloženi mehanički rad pretvara se u električnu energiju (npr. generatori).

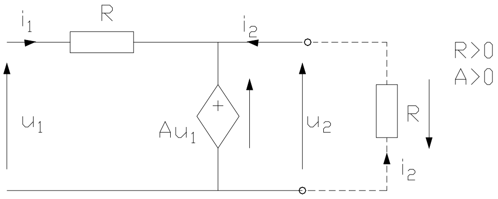
4. VIŠEPRILAZNI DISIPATIVNI ELEMENTI (OTPORI)

32. ∆ Što određuje broj prilaza neke naprave sa 3 ili više priključaka?

Broj prilaza neke naprave ovisi o primjeni naprave odnosno o vrsti spoja naprave.

Npr. ako bipolarni tranzistor radi u spoju pojačala tada je on dvoprilaz, dok ako radi kao sklopka tada je jednoprilaz. (o primjeni naprave)

33. ⊕ ∴ Je li zadani dvoprilaz aktivan ili pasivan?



- opteretimo sa R_2 da vidimo je li dvoprilaz aktivan ili pasivan

$$\left.\begin{aligned} u_1 - Au_1 &= Ri_1 \\ u_2 + i_2R_2 &= 0 \\ u_2 &= Au_1 \end{aligned}\right\} \text{zanima nas}: u_1i_1 + u_2i_2 = ?$$

$$u_1(1-A) = Ri_1$$

$$i_1 = \frac{(1-A)u_1}{R}$$

$$u_2 = -i_2R_2$$

$$i_2 = -\frac{u_2}{R_2} = -\frac{Au_1}{R_2}$$

$$\boxed{u_1i_1 + u_2i_2 = (1-A)\frac{u_1^2}{R} - A^2\frac{u_1^2}{R_2} \quad \begin{matrix}\geq \\ < \end{matrix} 0}$$

$$(1-A)\frac{u_1^2}{R} - A^2\frac{u_1^2}{R_2} \geq 0 \Big/ : u_1^2$$

$$\frac{1-A}{R} \geq \frac{A^2}{R_2}$$

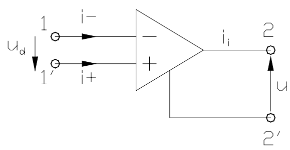
$$(1-A)R_2 \geq A^2R$$

a) $1 - A \geq A^2\dfrac{R}{R_2}$ - dvoprilaz je pasivan

b) $1 - A < A^2\dfrac{R}{R_2}$ - dvoprilaz je aktivan

c) ako je A>1 uvijek je aktivan

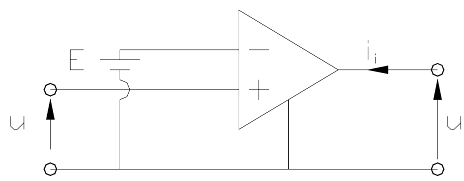
34. Simbol OP prikazan je na slici. Zašto se priključak 2' ne smije u analizi ispustiti i kako je on u stvarnosti realiziran.

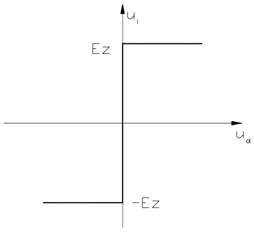


Ako ispustimo priključak 2' u skladu sa KZS-om i konstitutivnom relacijom $i_-=0$, $i_+=0$ vrijedilo bi $i_i=0$ što nije točno. (KZS → Za j-tu napravu N_j sa m-priključaka vrijedi da je: $\sum_{k=1}^{m} a_{jk}i_k = 0$.)

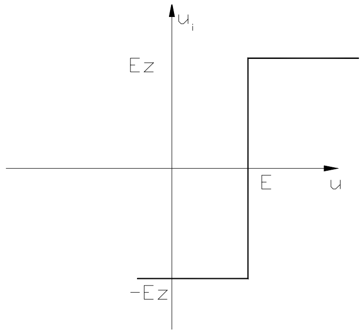
U stvarnosti taj priključak ne postoji nego se napon izlaza u_i definira u odnosu na srednju točku izvora za napajanje.

35. ∴ Odredite prijenosnu karakteristiku sklopa u_i=f(u).

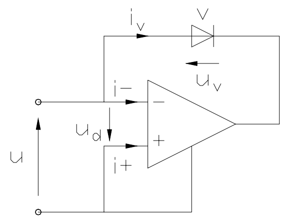


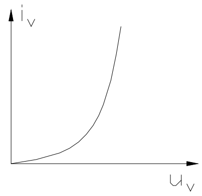


$u_i = f(u)$
$u_d = u - E \Rightarrow u = E$
$u_i = E_Z \quad kad \quad u > E$
$u_i = -E_Z \quad kad\, u < E$



36. ∴ U mreži sheme spoja prema slici a) spojena je dioda V karakteristike na slici b). Odredite u-i karakteristiku mreže.





a) linearni režim

$u_d = 0$
$i_+ = i_- = 0$
$-E_Z \le u_i < E_Z$

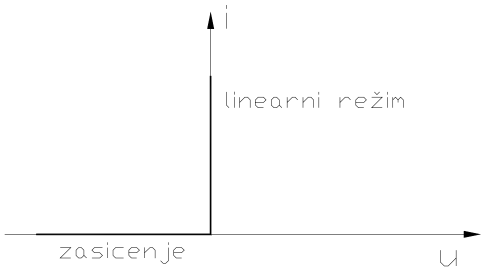
$u + u_d = 0 \Rightarrow u = 0$
$u_i + u_v + u_d = 0 \Rightarrow u_i = -u_v$
$i = i_v$
$za\ -E_Z \le u < E_Z \Rightarrow 0 < i_V = f(E_Z)$

$\boxed{u = 0 \quad i = i_v}$

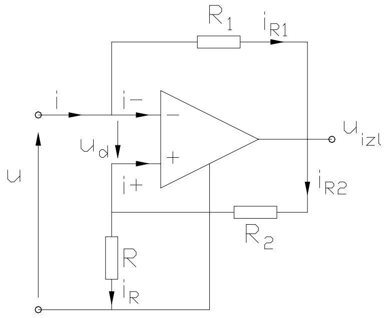
b) nelinearni režim - zasićenje

$u_d > 0$
$i_i = i_+ = 0$
$u_i = E_Z > 0$
$u + u_d = 0 \Rightarrow u < 0$
$E_Z + u_v + u_d = 0 \qquad u_v = -E_Z - u_d$

$\boxed{u_v < 0 \Rightarrow i = 0 = i_V}$



37. ⊕ ∆ Odredite u-i karakteristiku zadane mreže ako se idealno OP nalazi samo u linearnom režimu rada.



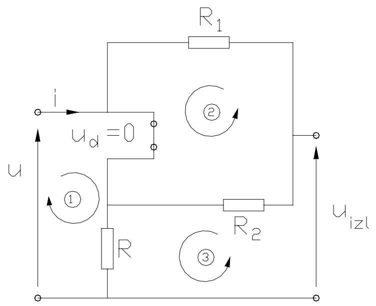
- u-i karakteristika jednoprilaza, $R_{ul}=\frac{u}{i}$

Linearni režim rada

$i_+ = i_- = 0$

$u_d = 0$

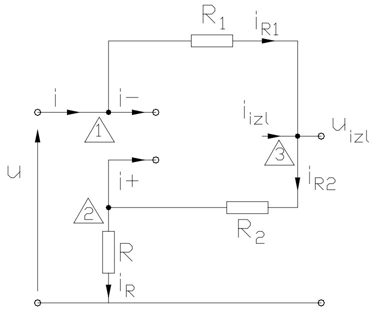
Mreža za KZN



3 KZN-a

1. $u = i_R R$
2. $i_{R1}R_1 + i_{R2}R_2 = 0$
3. $u_{izl} = i_{R_2}R_2 + i_R R$

Mreža za KZS



2 KZS-a

1. $i = i_{R1} + i_-$
2. $i_{R2} = i_R + i_+$

$$\overbrace{u=i_R R}^{(1KZN)} \overset{(2KZS)}{=} i_{R2}R \overset{(2KZN)}{=} \frac{-i_{R1}R_1}{R_2}R \overset{(1KZS)}{=} -i\frac{R_1}{R_2}R \; * \rightarrow \boxed{i=-u\frac{R_2}{R_1R}} \; **$$

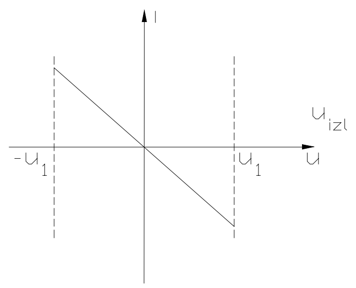
$$\overbrace{u_{izl}=i_{R2}R_2+i_RR}^{(3KZN)} \overset{(2KZS)}{=} i_RR_2+i_RR \overset{(1KZN)}{=} \frac{u}{R}(R_2+R) \overset{**}{=} -i\frac{R_1}{R_2}R\frac{1}{R}(R_2+R) \overset{*}{=} u\frac{R_2}{R_1R}\frac{R_1}{R_2}(R_2+R)$$

$$u_{izl} = u\frac{R_2+R}{R}$$

- linearni režim rada: $-E_Z \le u_{izl} \le E_Z$

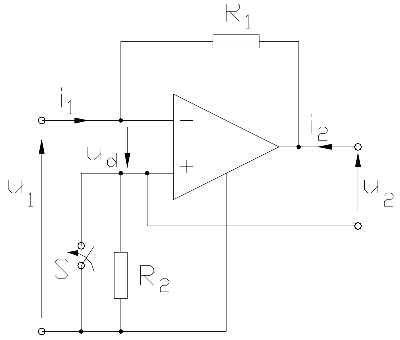
$$-E_Z \le u\frac{R_2+R}{R} \le E_Z$$

$$\underbrace{-E_Z\frac{R}{R_2+R}}_{-u_1} \le u \le \underbrace{E_Z\frac{R}{R_2+R}}_{+u_1}$$



(ovaj element mreže je vremenski ne promjenjiv, linearan, aktivan; negativni otpor)

38. Koji je linearni zavisni izvor realiziran zadanom mrežom nakon što uklopi sklopka S?



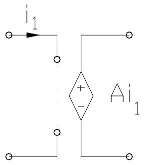
$u_d = 0$

$i_- = i_+ = 0$

- nakon što uklopi sklopka nema više R_2

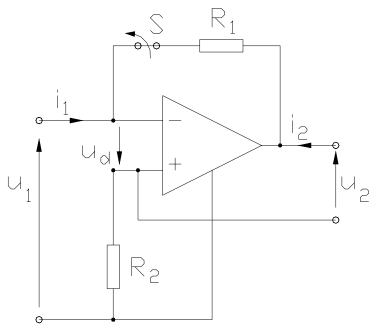
$u_1 = u_d = 0$ - strujom upravljani element mreže

$u_2 = i_1 R_1 = -i_2 R_1$ - Strujom Upravljani Naponski Izvor



SUNI $u_2 = f(i_1, R_1)$

39. Δ Koji je linearni zavisni izvor realiziran mrežom nakon što isklopi S?



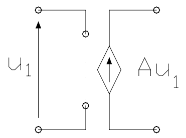
- nakon što isklopi sklopka S nema više R_1

$u_1 + u_d = u_{R2} \Rightarrow u_1 = u_{R2}$

$u_{R2} = i_1 R_2 = -i_2 R_2 = u_1$

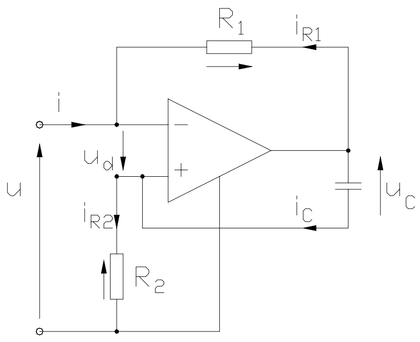
$$i_2 = -\frac{u_1}{R_2}$$

$i_2 = f(u_1, R_2)$ - Naponom Upravljan Strujni Izvor.



NUSI

40. Koji je element mreže realiziran shemom prema slici?



KZN1: $u = i_{R2} R_2$ KZS1: $i + i_{R1} = i_- \Rightarrow i_{R1} = -i$

KZN2: $u_C = R_1 i_{R1}$ KZS2: $i_C = i_{R2} + i_+ \Rightarrow i_C = i_{R2}$

$u = i_c R_2$

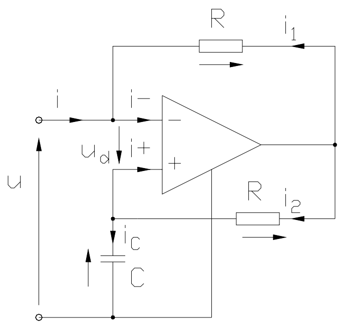
$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

$$u = C\frac{du_C}{dt}R_2 = CR_2\frac{d(R_1 i_{R1})}{dt} = CR_2\frac{d\left(R_1(-i)\right)}{dt} = -CR_1R_2\frac{di}{dt}$$

$$u = -L\frac{di}{dt}, \qquad L = CR_1R_2$$

- negativni induktivitet

41. ⊗ Dokažite koji je element realiziran shemom?



$u_d = 0;\ i_+ = i_- = 0$

1KZN: $u + u_d = u_C$ 1KZS: $i_2 = i_+ + i_C \Rightarrow i_2 = i_C$

2KZN: $0 = u_{R1} - u_{R2}$ 2KZS: $i_- = i + i_1 \Rightarrow i_1 = -i$

$$u = u_C = \frac{1}{C}\int i_C dt = \frac{1}{C}\int i_2 dt$$

$$u_{R1} = u_{R2} \Rightarrow i_1 R = i_2 R \Rightarrow i_2 = i_1 = -i$$

$$u = \frac{1}{C}\int (-i) dt = -\frac{1}{C}\int i dt$$

- realiziran je negativni kapacitet

42. ⊕ Nacrtajte element mreže dualan idealnom transformatoru zadanom konstitutivnim relacijama $u_1 = nu_2, i_2 = -ni_1$.

$i_2 = -ni_1$

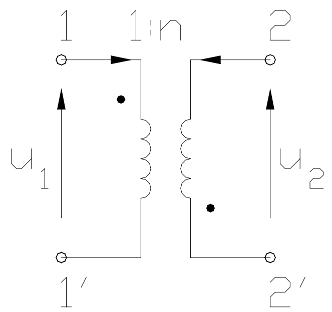
$u_1 = nu_2$

Dualan element:

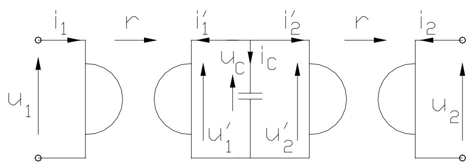
$i_1 = ni_2 \quad \Rightarrow i_2 = \frac{1}{n} i_1$

$u_2 = -nu_1 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{n} u_2$

(kod dualnosti n=-1/n pa se mogu direktno napisati jedndžbe)



43. ∴ Dokažite da se «lebdeći induktivitet» može realizirati mrežom:



Lebdeći induktivitet realiziran je giratorom

$u_1 = ri_2 \quad u_2 = -ri_1$

$u_1 = ri_1'$

$u_1' = -ri_1$

$u_2' = ri_2$

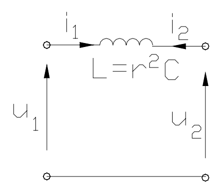
$u_2 = -ri_2' \Rightarrow * i_2' = -\frac{1}{r} u_2$

$0 = u_C - u_1' \quad \Rightarrow u_1' = u_C$

$0 = i_1' + i_2' + i_C \quad \Rightarrow i_1' = -i_2' - i_C$

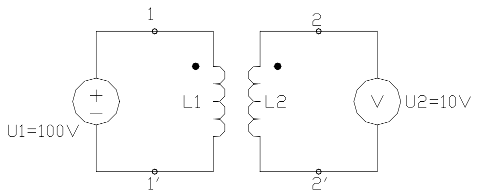
$$u_1 = ri_1' = r(-i_2' - i_C) = r\left(-i_2' - C\frac{du_C}{dt}\right) = -ri_2' - rC\frac{du_1'}{dt} = -r\left(-\frac{1}{r}u_2\right) - rC\frac{d(-ri_1)}{dt}$$

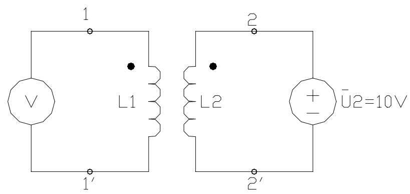
$$u_1 = u_2 + \underbrace{r^2 C}_{L}\frac{di_1}{dt} = u_2 + L\frac{di_1}{dt}$$



5. VIŠEPRILAZNI REAKTIVNI ELEMENTI

44. $\therefore$ **Na linearnom dvonamotnom transformatoru L_1=L_2=100mH provedena su dva mjerenja. U prvom je mjerenju narinut na primar izmjenični napon $U_{1ef}=100V$, a na neopterećenom sekundaru izmjeren je izmjenični napon $U_{2ef}=10V$. U drugom mjerenju narinut je na sekundar izmjenični napon $\bar{U}_{2ef}=10V$. Kolika je izmjerena efektivna vrijednost napona $\bar{U}_1$ na neopterećenom primaru i zašto?**





$$U_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \underbrace{M\frac{di_2}{dt}}_{=0\ jer\ nema\ struje\ i_2} \Rightarrow di_1 = \frac{U_1}{L_1}dt$$

$$U_2 = \underbrace{L_2\frac{di_2}{dt}}_{=0} + M\frac{di_1}{dt} \Rightarrow M = \frac{U_2 dt}{di_1} = \frac{U_2 dt}{\frac{U_1}{L_1}dt}$$

$$\boxed{M = L_1\frac{U_2}{U_1}} \Rightarrow M = 100\cdot 10^{-3}\frac{10}{100} = 0{,}01$$

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{0{,}01}{100\cdot 10^{-3}} = 0{,}1$$

$$\bar{U}_1 = \underbrace{L_1\frac{d\bar{i}_1}{dt}}_{=0} + M\frac{d\bar{i}_2}{dt}$$

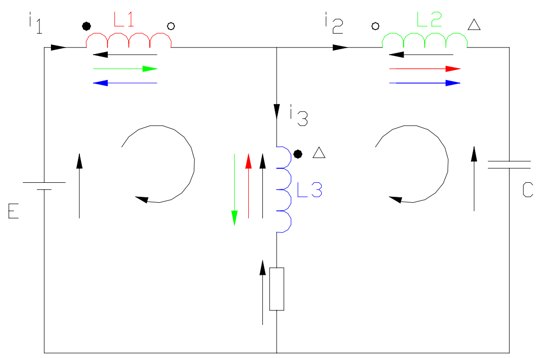
$$\bar{U}_2 = L_2\frac{d\bar{i}_2}{dt} + \underbrace{M\frac{d\bar{i}_1}{dt}}_{=0} \Rightarrow d\bar{i}_2 = \frac{\bar{U}_2 dt}{L_2}$$

$$\bar{U}_1 = M\frac{\bar{U}_2 dt}{L_2 dt} = L_1\frac{U_2}{U_1}\cdot\frac{\bar{U}_2}{L_2} = 100\cdot 10^{-3}\cdot\frac{10}{100}\cdot\frac{10}{100\cdot 10^{-3}}$$

$$\bar{U}_1 = 1V$$

- Pojavu da uz iste induktivitete namota primara i sekundara imamo 10 puta manje inducirani napon na sekundaru možemo objasniti pomoću faktora magnetske veze k<1 (ako je $k \neq 1$ nemamo savršeni trafo pa pri tome ne vrijedi da je $n=\sqrt{L_1/L_2}$!!!)

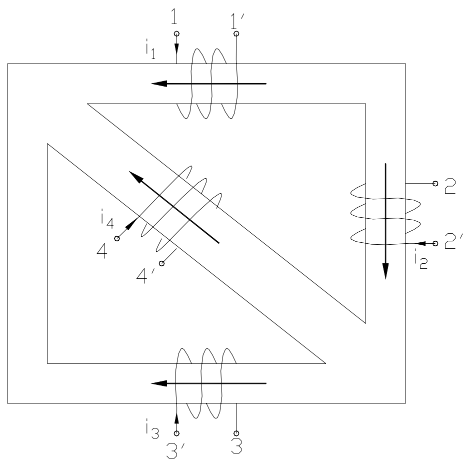
45. Za shemu spoja napišite jednadžbe mreže.



$$E = L_1\frac{di_1}{dt} + L_3\frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 - M_{12}\frac{di_2}{dt} + M_{13}\frac{di_3}{dt} + M_{31}\frac{di_1}{dt} - M_{32}\frac{di_2}{dt}$$

$$0 = L_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int i_2 dt + U_C(0) - R_3 i_3 - L_3\frac{di_3}{dt} - M_{21}\frac{di_1}{dt} - M_{23}\frac{di_3}{dt} - M_{31}\frac{di_1}{dt} + M_{32}\frac{di_2}{dt}$$

46. ∴ Za magnetski krug prema slici odrediti predznake svih međuinduktivnosti.



M>0 ako $\vec{H}_1\vec{H}_2 > 0$, tj. ako

$0 \le \alpha(\vec{H}_1, \vec{H}_2) < 90°$

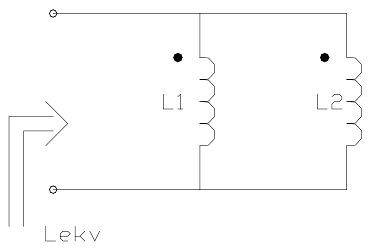
(ne translatirat vektore nego ih "voziti " po jarmu)

$M_{12} < 0 \quad M_{13} < 0 \quad M_{14} < 0$

$M_{23} > 0 \quad M_{24} > 0$

$M_{14} < 0$

47. ⊕ Nadomjesna induktivnost paralelnog spoja dvaju magnetskih vezanih induktiviteta dana je izrazom: $L_{ekv} = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$. Znači li to da je pri savršenoj magnetskoj vezi namota $L_{ekv} = 0$?



- pri savršenoj vezi $k = 1$ i $L_1L_2 = M^2$

- savršenu magnetsku vezu može postići samo ako je broj zavoja jednak i ako žice jednog namota «padaju» u žice drugog. Pri tome vrijedi da je $L_1 = L_2 = L$.

$$L_{ekv} = \frac{L^2 - M^2}{2L - 2M} = \frac{(L+M)(L-M)}{2(L-M)} = \frac{L+M}{2}$$

$\frac{1}{2}(L+M) \approx L$ - ovaj je izraz proporcionalan sa L što znači da je postojao samo jedan induktivitet.

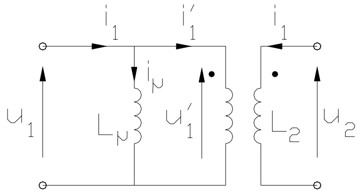
48. ⊕ Objasnite pod kojim uvjetom vrijedi da je induktivitet zavojnice od N zavoja jednak $L = N^2L_1$, gdje je L_1 induktivitet jednog zavoja.

Izraz vrijedi ako je magnetska veza među njima savršena, što znači da se magnetske silnice dvaju susjednih zavoja poklapaju. Problem je što savršena veza ne postoji.

49. ∇ Nacrtajte i objasnite nadomjesnu shemu nelinearnog savršenog transformatora.

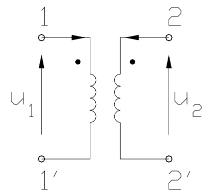
Savršeni:

idealni + induktivitet magnetiziranja



Idealni transformator: $u_1 = nu_2$

$$i_1 + \frac{1}{n} i_2 = 0$$

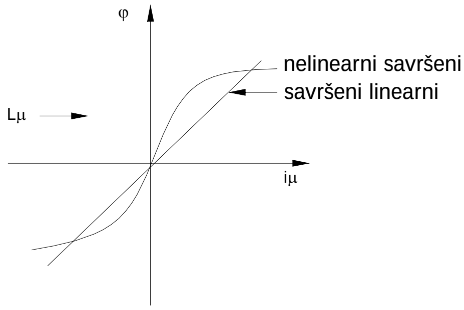


Konstruktivne relacije nelinearnog savršenog transformatora:

$$u_1' = nu_2 = u_1$$

$$i_1' + \frac{1}{n} i_2 = 0$$

$$i_1 = i_\mu + i_1' = i_\mu - \frac{1}{n} i_2 = f(\varphi_1) - \frac{1}{n} i_2$$



$$\boxed{\begin{aligned} &u_1 = nu_2 \\ &i_1 = f(\varphi_1) - \frac{1}{n} i_2 \end{aligned}}$$

Savršeni transformator prikazujemo kao lančani spoj induktiviteta magnetiziranja L_1 i idealnog transformatora.

50. Objasnite je li moguće da u linearnom dvonamotnom transformatoru protjeranom strujama $i_1(t)$ i $i_2(t)$ bude barem u jednom trenutku ukupna uskladištena energija jednaka nuli?

$$W_1(0,T) = \int u_1 i_1 dt = \underbrace{\oint L_1 i_1 di_1}_{0} + \oint M i_1 di_2$$

$$W_2(0,T) = \int u_2 i_2 dt = \underbrace{\oint L_2 i_2 di_2}_{0} + \oint M i_2 di_1$$

(matematika $\oint i_1 di_2 + \oint i_2 di_1 = 0$) pa dobivamo → $W_1(0,T) + W_2(0,T) = 0$

$$\oint M i_1 di_2 + \oint M i_2 di_1 = 0$$

$W_1(0,T) > 0$ → prvi namot se ponaša kao trošilo → $W_2(0,T) = -|W_1(0,T)| < 0$ → drugi namot se ponaša kao izvor.

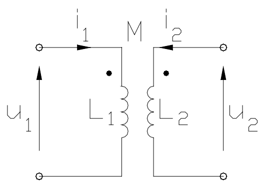
- faktor magnetske veze k: $0 \le k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \le 1$

● ako je k=0 ili ako su u nekom trenutku struje i_1 i i_2 proporcionalne.

51. ⊕ Objasnite način prijenosa električne energije između dva galvanski odvojena sustava u periodičkom režimu rada s pomoću termina TM.

Prijenos električne energije između dva galvanski odvojena sustava moguć je ako postoji međuinduktivitet $M \neq 0$ i drugi uvjet je da u ravnini (i_1, i_2) postoji petlja nenulte površine, da vrijedi $\oint i_1 di_2 = \oint i_2 di_1 \neq 0$. Drugi uvjet je da struje nisu proporcionalne tj. $i_1 \neq A i_2,\ A = konst.$

52. ⊕ ⊗ Odredite snagu prenesenu linearnim dvonamotnim transformatorom trošilu ako su poznati valni oblici struja namota. $i_1 = \hat{I}_1 \cos\omega t - \hat{J}_1 \sin\omega t$ **,** $i_2 = \hat{I}_2 \cos\omega t$ **, te svi parametri transformatora**



$$P_1 + P_2 = 0$$

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_0^T u_1 i_1 dt$$

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt} = L_1\left(\hat{I}_1(-\sin\omega t)\omega - \hat{J}_1\omega\cos\omega t\right) + M_{12}\hat{I}_2 - (\sin\omega t)\omega$$

$$u_1 i_1 = \left(-L_1\hat{I}_1\omega\sin\omega t - L_1\hat{J}_1\omega\cos\omega t - M_{12}\hat{I}_2\omega\sin\omega t\right)\cdot\left(\hat{I}_1\cos\omega t - \hat{J}_1\sin\omega t\right)$$

$$= -L_1\hat{I}_1^2\omega\sin\omega t\cos\omega t + \underline{L_1\hat{I}_1\hat{J}_1\omega\sin^2\omega t} - \underline{L_1\hat{J}_1\hat{I}_1\omega\cos^2\omega t} + L_1\hat{J}_1^2\omega\sin\omega t\cos\omega t - M\hat{I}_1\hat{I}_2\omega\sin\omega t\cos\omega t + \underline{M\hat{I}_2\hat{J}_1\omega\sin^2\omega t}$$

$\sin\omega t\cos\omega t = 0$ - zbog ortogonalnosti

$$u_1 i_1 = L_1\hat{I}_1\hat{J}_1\omega\sin^2\omega t - L_1\hat{I}_1\hat{J}_1\omega\cos^2\omega t + M\hat{I}_2\hat{J}_1\omega\sin^2\omega t$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T\left(L_1\hat{I}_1\hat{J}_1\omega\sin^2\omega t - L_1\hat{I}_1\hat{J}_1\omega\cos^2\omega t + M\hat{I}_2\hat{J}_1\omega\sin^2\omega t\right)dt$$

$$\int_0^T \sin^2\omega t = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right)_0^T = \frac{1}{2}t$$

$$\int_0^T \cos^2\omega t = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right)_0^T = \frac{1}{2}t$$

$$P = \frac{1}{T}\left(L_1\hat{I}_1\hat{J}_1\omega\frac{1}{2}T - L_1\hat{I}_1\hat{J}_1\omega\frac{1}{2}T + M\hat{I}_2\hat{J}_1\omega\frac{1}{2}T\right) \rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}M\omega\hat{I}_2\hat{J}_1}$$

53. ⊕ Objasnite kada se dvonamotni transformator shvaća kao pasivni dvoprilaz, a kada kao aktivni jednoprilaz! Je li on tada reaktivni ili disipativni jednoprilaz?

Sa strane sekundara je aktivni jednoprilaz, tada je on disipativan jednoprilaz

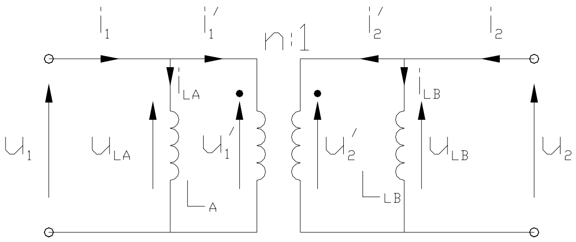
Ako se ispituju svojstva transformatora sa gledišta oba prilaza ta je on pasivan dvoprilaz.

Disipativan je. (Otpori su disipativni elementi mreže kao i izvori.)

54. Zašto idealni transformator nije reaktivni element mreže?

Idealni transformator niti rasipa niti uskladištava energiju. Prijenos energije idealnim transformatorom ne možemo objasniti koristeći pojmove vezane uz reaktivne elemente.

55. ∴ Na slici je prikazana nadomjesna shema linearnog dvonamotnog savršenog transformatora pri čemu je induktivitet magnetiziranja podijeljen u dva induktiviteta L_A i L_B. A) odredite što je dualno linearnom dvonamotnom savršenom transformatoru; B) zašto je bilo nužno razdijeliti induktivitet magnetiziranja u L_A i L_B.



Dualnost:

$$u \mathrel{\hat=} i$$
$$L \mathrel{\hat=} C$$
$$i_L \mathrel{\hat=} u_C$$
$$KZN \mathrel{\hat=} KZS$$

$$u'_1 = nu'_2$$
$$i'_2 = -ni'_1$$

KZN: $u_1 = u'_1 = L\dfrac{di_{LA}}{dt}$ $\quad$ $u_2 = u'_2 = L\dfrac{di_{LB}}{dt}$

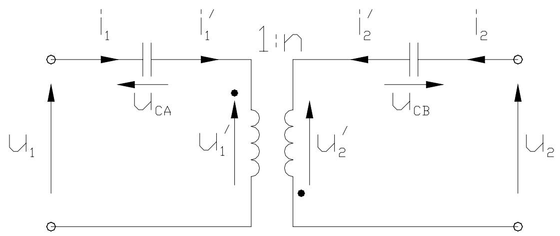
KZS: $i_1 = i_{LA} + i'_1$ $\quad$ $i_2 = i_{LB} + i'_2$

$$i'_1 = ni'_2$$
$$u'_2 = -nu'_1$$

KZS: $i_1 = i'_1 = C\dfrac{du_{CA}}{dt}$ $\quad$ $i_2 = i'_2 = C\dfrac{du_{CB}}{dt}$

KZN: $u_1 = u_{CA} + u'_1$ $\quad$ $u_2 = u_{CB} + u'_2$

a)



b) L_A i L_B nam služe da bi mogli odrediti gubitke transformatora (iz pokusa praznog hoda određujemo gubitke u željezu, a iz pokusa kratkog spoja određujemo gubitke u bakru).

Pošto kod transformatora možemo zamijeniti ulaz s izlazom tada ponovo moramo imati istu konfiguraciju odnosno zbog toga razdvajamo induktivitet.

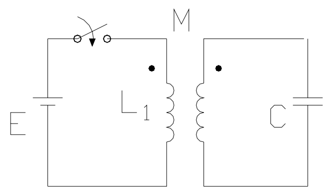
6. ZAKON KOMUTACIJA

56. Objasnite pod kojim uvjetima u mreži nastupa prijelazno stanje.

Promjenom mreže ili nekih parametara mreže nastaje prijelazno stanje. Prijelaznom stanju uvijek prethodi komutacija i prvobitno ustaljeno stanje, a slijedi novo ustaljeno stanje ili nestabilno stanje.

Prijelazno stanje nastaje ako u mreži imamo L i/ili C ili npr. ako priključimo mrežu na napon, ako kratko spojimo dio mreže, nakon skokovitih promjena amplitude ili frekvencije itd.

57. Je li mreža na slici, nakon što uklopi sklopka S dobro ili loše definirana mreža?



$$E = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \left(E - M\frac{di_2}{dt}\right)\frac{1}{L_1}$$

$$u_c = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{u_c = \frac{EM}{L_1} - \frac{M^2}{L_1}\left(\frac{di_2}{dt}\right) - L_2\frac{di_2}{dt}}$$

- ako je $k = 1 \Rightarrow M = \sqrt{L_1L_2}$ tada je $u_c = \frac{E\sqrt{L_1L_2}}{L_1} - \frac{L_1L_2}{L_1}\frac{di_2}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$, tj. postojat će skok napona na kapacitetu: $u_c(+0) = \frac{EM}{L_1}$ pa je mreža loše definirana.

- ako je $k \neq 1$ moguće je da $u_c(-0) = u_c(+0)$ tj. da je mreža dobro definirana

58. Izvedite zakon komutacije za kapacitivnu petlju.

- kapacitivna petlja je svaka petlja koja nastaje komutacijom, a tvore ju samo kapaciteti i naponski izvori.

- obzirom da su naponi na kapacitetu neposredno prije komutacije nezavisni moguća su dva slučaja:

Prije komutacije:

$$1)\ \sum_{k\in C} u_{kj}(-0) + \sum_{k\in E} u_{kj}(-0) = 0$$

$$2)\ \sum_{k\in C} u_{kj}(-0) + \sum_{k\in E} u_{kj}(-0) \neq 0$$

C, E skup svih kapaciteta / naponskih izvora koji NAKON KOMUTACIJE tvore j-tu kapacitivnu petlju.

Nakon komutacije vrijedi: $\sum_{k\in C} u_{kj}(+0) + \sum_{k\in E} u_{kj}(+0) = 0$

- za naponske izvore vrijedi da je $u_k(-0) = u_k(+0)$ dakle pod slučaj 1 je i $u_c(+0) = 0$ te mreža u intervalu [-0,+0] ostaje dobro definirana. U mreži 2 mora doći do skoka napona, a to je moguće samo uz beskonačni impuls struje.

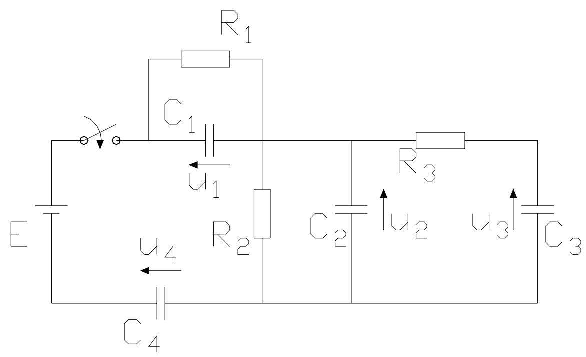
- KZS za n-ti čvor kapacitivne petlje: $\sum_{k\in I} i_{kn} + \sum_{k\in R} i_{kn} + \sum_{k\in L} i_{kn} + \sum_{k\in C}\frac{dq_n}{dt} = 0$

- integriramo jednadžbu u intervalu [-0,+0]:

$$\sum_{k\in I}\int_{-0}^{+0} i_{kn}dt = 0;\ \sum_{k\in R}\int_{-0}^{+0} i_{kn}dt = 0;\ \sum_{k\in L}\int_{-0}^{+0} i_{kn}dt = 0;\ \sum_{k\in C}\int_{-0}^{+0}\frac{dq_n}{dt}dt = 0$$

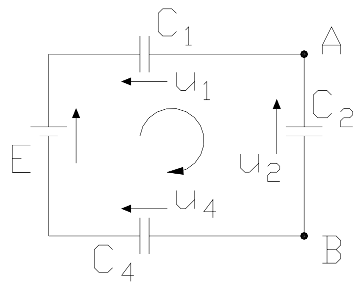
- iz toga slijedi: $\boxed{\sum_{k\in C} q_{kn}(-0) = \sum_{k\in C} q_{kn}(+0)}$

59. Napišite sustav jednadžbi pomoću kojega se mogu odrediti naponi na svim kapacitetima mreže neposredno nakon uklopa S. Do uklopa svi kapaciteti nenabijeni.



Kapacitivna petlja: E, C_1, C_2, C_4

$q(-0) = q(+0)$



$$E = u_{C1}(+0) + u_{C2}(+0) - u_{C4}(+0)$$

$$\sum_A q = 0 \rightarrow -u_{C1}(+0)C_1 + u_{C2}(+0)C_2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad u_{C1}(+0) = \frac{u_{C2}(+0)C_2}{C_1}$$

$$\sum_B q = 0 \rightarrow -u_{C2}(+0)C_2 - u_{C4}(+0)C_4 = 0 \qquad \Rightarrow \quad u_{C4}(+0) = \frac{-u_{C2}(+0)C_2}{C_4}$$

$$E = \frac{u_{C2}(+0)C_2}{C_1} + u_{C2}(+0) - \frac{-u_{C2}(+0)C_2}{C_4}$$

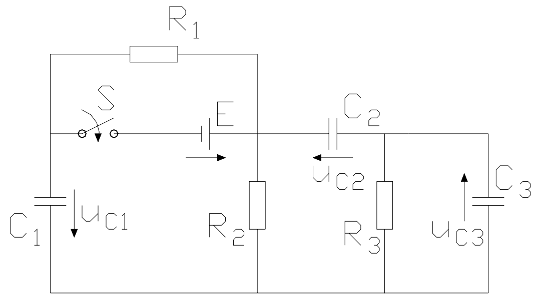
$$u_{C2}(+0) = \frac{E}{\left(\frac{C_2}{C_1} + 1 + \frac{C_2}{C_4}\right)}$$

$$u_{C1}(+0) = \frac{C_2}{C_1}\frac{E}{\left(\frac{C_2}{C_1} + 1 + \frac{C_2}{C_4}\right)}$$

$$u_{C4}(+0) = -\frac{C_2}{C_4}\frac{E}{\left(\frac{C_2}{C_1} + 1 + \frac{C_2}{C_4}\right)}$$

$$u_{C3}(-0) = u_{C3}(+0)$$

60. U zadanoj mreži svi su kapaciteti do t=-0 nenabijeni. U t=0 uklopi sklopka S. Odredite napon na svik kapacitetima u t≠0.



Kapacitivna petlja: C_1, C_2, C_3, E

Loše definirana mreža - 2 spremnika energ.

Za loše definiranu mrežu KZN: $\sum_A q = 0$

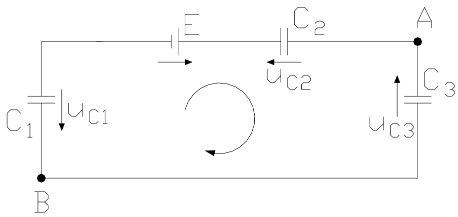
- kapaciteti ne nabijeni:

$u_{C1}(-0) = u_{C2}(-0) = u_{C3}(-0) = 0$, ali

$u_{C1}(+0) \neq u_{C1}(-0) \neq 0$

$u_{C2}(+0) \neq u_{C2}(-0) \neq 0$

$u_{C3}(+0) \neq u_{C3}(-0) \neq 0$



$$E = u_{C2}(+0) + u_{C3}(+0) + u_{C1}(+0)$$

$$\sum_A q = 0 \rightarrow -u_{C2}(+0)C_2 + u_{C3}(+0)C_3 = 0$$

$$\sum_B q = 0 \rightarrow -u_{C3}(+0)C_3 + u_{C1}(+0)C_1 = 0$$

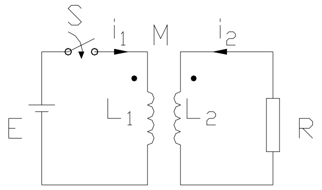
$$\left.\begin{aligned} u_{C1}(+0) &= \frac{u_{C3}(+0)C_3}{C_1} \\ u_{C2}(+0) &= \frac{u_{C3}(+0)C_3}{C_2} \end{aligned}\right\} E = \frac{u_{C3}(+0)C_3}{C_1} + \frac{u_{C3}(+0)C_3}{C_2} + u_{C3}(+0)$$

$$u_{C3}(+0) = \frac{E}{\left(\frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_2} + 1\right)}$$

$$u_{C1}(+0) = \frac{C_3}{C_1} \frac{E}{\left(\frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_2} + 1\right)}$$

$$u_{C2}(+0) = \frac{C_3}{C_2} \frac{E}{\left(\frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_2} + 1\right)}$$

61. U t=0 uklopi sklopka S. Odredite struje primarnog i sekundarnog namota u trenutku t=+0 ako je transformator linearan i savršen.



$$M=\sqrt{L_1L_2}$$

$$E=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$$

$$0=M\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}+Ri_2 \rightarrow \frac{di_1}{dt}=-\frac{L_2}{M}\frac{di_2}{dt}-\frac{R}{M}i_2$$

$$E=L_1\left(-\frac{L_2}{M}\frac{di_2}{dt}-\frac{R}{M}i_2\right)+M\frac{di_2}{dt}$$

$$E=-\frac{L_1L_2}{M}\frac{di_2}{dt}-\frac{RL_1}{M}i_2+M\frac{di_2}{dt}$$

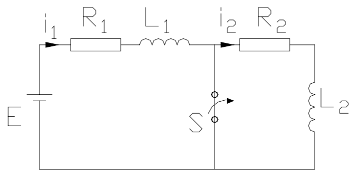
$$E=\frac{di_2}{dt}\left(-\frac{L_1L_2}{M}+M\right)-\frac{RL_1}{M}i_2=\frac{di_2}{dt}\underbrace{\left(\frac{-L_1L_2+M^2}{M}\right)}_{0}-\frac{RL_1}{M}i_2$$

$$E=-\frac{RL_1}{M}i_2$$

$$\boxed{i_2(+0)=-\frac{M}{RL_1}E}$$

Transformator je savršen pa vrijedi: $i_1(+0)+\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}i_2(+0)=0 \rightarrow \boxed{i_1(+0)=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\frac{M}{RL_1}E}$

62. Do trenutka t=-0 mreža je bila ustaljenom stanju. U t=0 isklopi sklopka S. Odrediti struju kroz L_1 u t=+0.



$L_1i_1(-0)+L_2i_2(-0)=L_1i_1(+0)+L_2i_2(+0)$ - zakon očuvanja toka

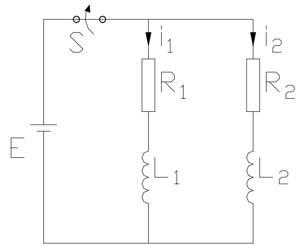
$$i_1(+0)=i_2(+0)$$

$$L_1i_1(-0)=L_1i_1(+0)+L_2i_1(+0) \qquad i_1(-0)=\frac{E}{R_1}$$

$$L_1\frac{E}{R_1}=i_1(+0)[L_1+L_2]$$

$$i_1(+0)=\frac{\frac{L_1E}{R_1}}{L_1+L_2}=\frac{L_1E}{R_1(L_1+L_2)}=\frac{L_1}{L_1+L_2}\frac{E}{R}$$

63. Do t=-0 mreža je bila u ustaljenom stanju. U t=0 isklopi sklopka S. Odredite količinu energije pretvorene u toplinu na sklopci. Komentirajte slučaj $\frac{L_1}{R_1}=\frac{L_2}{R_2}$.

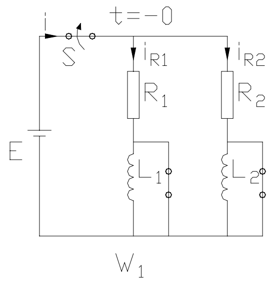


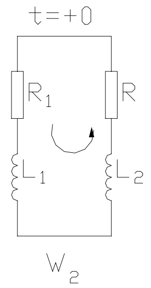
Loše definirana mreža (imamo induktivni čvor)

$i_{L1}(-0) \neq i_{L1}(+0)$

$i_{L2}(-0) \neq i_{L2}(+0)$

$\Delta W_S = ?$





$i_L(+0) = i_{L1}(+0) = i_{L2}(+0)$

$$W_1 = \frac{1}{2}[L_1 i_{R1}{}^2(-0) + L_2 i_{R2}{}^2(-0)]$$

$$W_2 = \frac{1}{2}[(L_1 + L_2) i_L{}^2(+0)]$$

- u ustaljenom stanju (sve veličine ili periodičke ili konstantne): $u_L = L\frac{di_L}{dt} = 0$,

$$i_{R_1} = \frac{E}{R_1};\ i_{R2} = \frac{E}{R_2},\ t = (-0)$$

$$\sum \varphi = 0$$

$$t=-0 \qquad\qquad t=+0$$

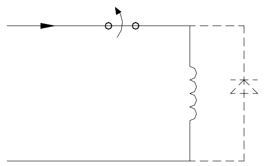
$$L_1 i_{R1}(-0) - L_2 i_{R2}(-0) = (L_1 + L_2) i_L(+0)$$

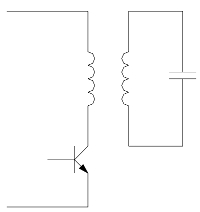
$$i_L(+0) = \frac{E\left(\frac{L_1}{R_1} - \frac{L_2}{R_2}\right)}{L_1 + L_2}$$

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{1}{2}E^2\left[\left(\frac{L_1}{R_1^2} + \frac{L_2}{R_2^2}\right) - \left(\frac{L_1}{R_1} - \frac{L_2}{R_2}\right)^2 \Big/ (L_1 + L_2)\right]$$

- ako $\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$ tada → $\Delta W = \frac{1}{2}E^2\left(\frac{L_1}{R_1^2} + \frac{L_2}{R_2^2}\right)$ i pri tome su gubici najveći na sklopci.

64. Objasnite na primjerima zašto neka stvarna mreža (uređaj) koja na razini najjednostavnijih modela komponenata koje tvore tu mrežu predstavlja loše definiranu mrežu najvjerojatnije neću u praksi uspješno raditi?



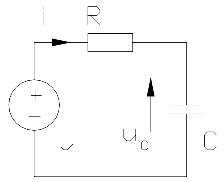


a) Kod uzbude motora prilikom otvaranja sklopka će izgorjeti. Moguća je zaštita reverzno spojena dioda. (bez diode loše definirana mreža, s diodom dobro definrana)

b) Uklapanje / isklapanje tranzistora

<u>7. MREŽE PRVOG REDA</u>

65. Dokažite da je u mreži sheme prema slici napon na kapacitetu od t=+0 dan izrazom $u_C(t) = u_C(+0)e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-\frac{t}{RC}} u(x)dx$



$$u = u_R + u_C = Ri + u_C \qquad i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

$$u = RC\frac{du_C}{dt} + u_C \Rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

$$\tau\frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$ - linearna diferencijalna jednadžba; rješenje: $\boxed{y = e^{-\int Pdx}\left[\int Qe^{\int Pdx}dx + C\right]}$

$$u_C'(t) + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{1}{\tau}u(t) \qquad P = \frac{1}{\tau}, \qquad Q = \frac{u(t)}{\tau}$$

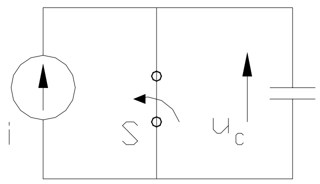
$$u = e^{-\int\frac{1}{\tau}dt}\left[\int\frac{u(t)}{\tau}e^{\int\frac{1}{\tau}dt}dt + C\right]$$

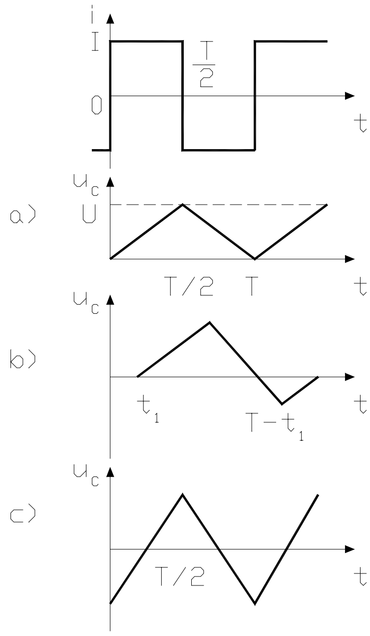
$$= e^{-\frac{t}{\tau}}\left[\frac{1}{\tau}\int u(t)e^{\frac{t}{\tau}}dt + C\right]$$

$$= Ce^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau}\int u(x)e^{-\frac{t}{\tau}+\frac{x}{\tau}}dx$$

$$= u_C(+0)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau}\int_0^T e^{-\frac{t-x}{\tau}}u(x)dx$$

66. U mreži sheme spoja prema slici a) djeluje izmjenični strujni izvor valnog oblika prema slici b). U t=0 isklopi S. A) Odredite valni oblik napona na kapacitetu, b) odredite valni oblik napona na kapacitetu za nekoliko različitih trenutaka isklopa sklopke S. Interpretirajte fizikalno dobivene valne oblike; c) Odredite valni oblik napona na kapacitetu u periodičkom režimu rada.



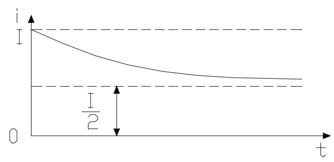


$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t Idt = \frac{I}{C}t \rightarrow linearan$$

c) istosmjerni odziv ne nastaje od periodičnih poticaja. Uzrok - posljedica.

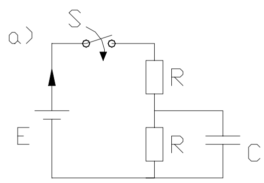
Za periodički poticaj srednja vrijednost =0

67. Na slici je prikazan valni oblik struje kroz jedan element kapacitivne mreže prvog reda nakon sklapanja sklopke u t=0. odredite najjednostavniju shemu spoja te mreže.

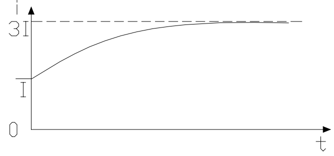


$$t = 0 \quad i = I = \frac{E}{R}$$

$$t = \infty \quad i = \frac{I}{2} = \frac{E}{2R}$$

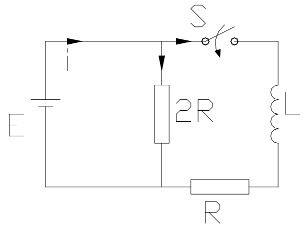


68. Na slici je prikazan valni oblik struje kroz jedan element induktivne mreže prvog reda. Nakon sklapanja sklopke u t=0. odrediti najjednostavniju shemu spoja.



$$t = 0 \rightarrow \ i = I$$

$$t = \infty \rightarrow i = 3I$$

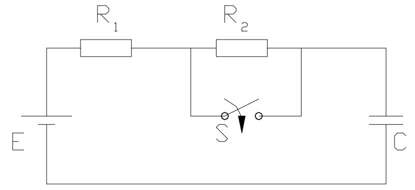


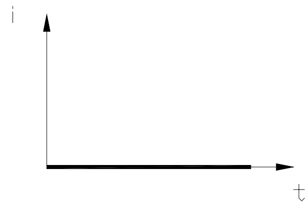
$$t = 0 \quad i = \frac{E}{2R} = I$$

$$i = \frac{E}{\dfrac{2R \cdot R}{2R + R}} = \frac{E}{\dfrac{2R^2}{3R}} = \frac{E \cdot 3R}{2R^2} = \frac{3}{2}\frac{E}{R}$$

$$i = 3I \ \ jer \ \ I = \frac{E}{2R}$$

69. Odredite valni oblik struje izvora ako u t=0 uklopi sklopka S. Do t=-0 mreža je bila u ustaljenom stanju. Nacrtajte mrežu dualnu zadanoj.





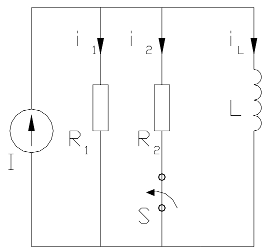
S otvorena: $E = u_{R1} + u_{R2} + u_C$

S zatvorena: $E = u_{R1} + u_C$

Dulano:

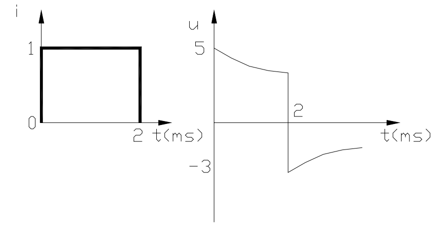
S otvorena: $I = i_{R1} + i_{R2} + i_L$

S zatvorena: $I = i_{R1} + i_L$



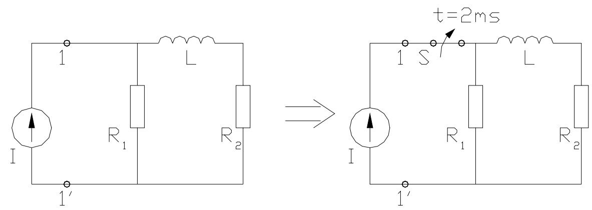
70. U trenutku t=0 uklopi sklopka S. Odredite vremenski interval u kojem vršna vrijednost struje i_2 dosegne 99% svoje ustaljene vrijednosti.

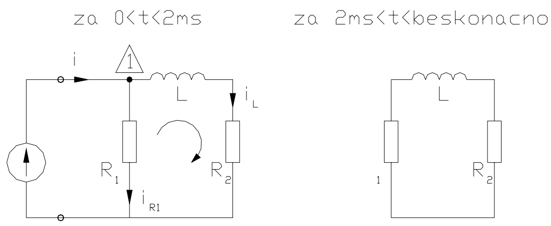
71. Na mrežu prvog reda narinuta je struja valnog oblika prema slici a). Prisilni odziv mreže je na slici b) i sastoji se od dvaju segmenata eksponencijalne funkcije vremenske konstante 1,44ms. Odrediti shemu spoja i vrijednosti elemenata.



Mreža dobro definirana (jer je 1. reda)

- induktivitet
- 2 otpora





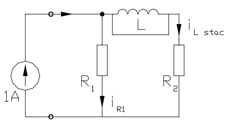
$$i_{R1} + i_L = 1$$

$$R_1 i_{R1} = L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L$$

$$\frac{L}{R_1+R_2}\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{R_1}{R_1+R_2}$$ → dif. jed. Kruga

$$i_L = i_{L\,partikularno} + i_{L\,stacionarno}$$

stacionarno



$$i_{L\,stac} = 1\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Partikularno

$$i_{L\,prijel} = Ke^{st}$$

$$\tau s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{\tau}$$

$$i_{L\,prijel} = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$K = ?$$

$$\boxed{i_L = \frac{R_1}{R_1+R_2} + Ke^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$t = 0 \Rightarrow i_L = 0 \Rightarrow K = -\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$$i_L = \frac{R_1}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$u = R_1 i_{R1}; \quad i_{R1} = 1 - i_L$$

$$\boxed{u = \frac{R_1}{R_1+R_2}\left(R_2 + R_1 e^{-t/\tau}\right)}$$

$$t = 0 \quad u(0) = 5V$$

$$u(0) \Rightarrow R_1 = 5\Omega$$

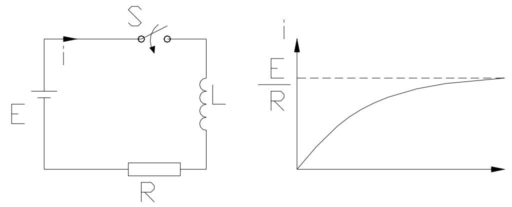
$$t = 2ms \qquad u(2ms) = 2V$$

$$2 = \frac{5}{5+R_2}(R_2 + 5e^{-2/1,44})$$

$$R_2 = 1{,}25\Omega$$

$$\tau = 1{,}44ms = \frac{L}{R_1+R_2} \Rightarrow L = 9mH$$

72. Obrazložite zašto je fizikalno nemoguće da u serijskom RL-krugu napajanom iz istosmjernog izvora napona E i u jednom trenutku struja prisilnog odziva kruga bude veća od E/R.



$$E = L\frac{di}{dt} + iR$$

Prisilni odziv je linearna funkcija vanjskog poticaja, tj. E. U t=0 kada uključimo sklopku zavojnica nema uskladištene energije, tj. ne ponaša se kao izvor. ¸

Jedini poticaj u mreži je E. Kada bi i>E/R bio bi prekršen zakon očuvanja energije.

73. U istosmjernom krugu prvog reda poznat je potpuni odziv za neku varijablu mreže $y = Ae^{-\alpha t} + B,\ t \geq 0$ **. Odredite slobodni i prisilni odziv kruga.**

- pronalaženje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{dy}{dt} + K_1 y = K_2$$

$$-\alpha A e^{-\alpha t} + K_1(Ae^{-\alpha t} + B) = K_2$$

$$e^{-\alpha t}(K_1 A - \alpha A) + K_1 B = e^{-\alpha t} \cdot 0 + K_2$$

$$K_1 A - \alpha A = 0 \rightarrow K_1 = \frac{\alpha A}{A} = \alpha$$

$$K_1 B = K_2 \qquad \rightarrow K_2 = \alpha B$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + \alpha y = \alpha B}$$

$$pretpostavka: \ y = \overbrace{y_1}^{slobodni} + \overbrace{y_2}^{prisi\ln i}$$

- iz definicije prisilnog odziva $y_2(+0) = 0$

$$y_1(+0) = y(+0) = Ae^{-\alpha \cdot 0} + B = A + B$$

$$y_1 = Ke^{-\alpha t}$$

$$y_1(+0) = A + B = Ke^{-\alpha \cdot 0} = K$$

$$y_2 = y - y_1 = Ae^{-\alpha t} + B - Ae^{-\alpha t} - Be^{-\alpha t} = B(1 - e^{-\alpha t})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = (A+B)e^{-\alpha t} \quad t \geq 0 \ \ SLOBODNI\ ODZIV \\ y_2 = B(1 - e^{-\alpha t}) \quad t \geq 0 \ \ PRISILNI\ ODZIV \end{array}}$$

74. Krug prvog reda opisan je diferencijalnom jednadžbom $\frac{dy}{dt} + \alpha y = Ae^{-\alpha t}$. Odredite potpuni odziv ako je $y(0) = y_0$.

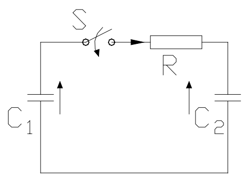
$\frac{dy}{dt} + \alpha y = 0$ → mrtva mreža (slobodni odziv) → $\boxed{y_{slob} = Ke^{-\alpha t}}$

$$\boxed{y_{pris} = Ate^{-\alpha t}}$$

$$y = y_{slob} + y_{pris}$$

$$\begin{aligned} y &= Ke^{-\alpha t} + Ate^{-\alpha t} \\ y(0) &= K \cdot 1 + 0 = K \end{aligned} \rightarrow \boxed{y = (y_0 + At)e^{-\alpha t}}$$

75. Odredite količinu energije pretvorene u toplinu u otporu R nakon uklapanja sklopke S u t=0.



$$u_{C1}(-0) = u_0$$
$$u_{C2}(-0) = 0$$

$$\varepsilon(-0) = \frac{1}{2} C_1 u_0^{\ 2}$$

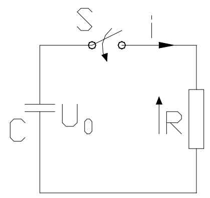
$$C_1 u_{C1}(-0) + \underbrace{C_2 u_{C2}(-0)}_{0} = C_1 u_C(+0) + C_2(+0)$$

$$u_{C1}(+0) = u_{C2}(-0) = u_C(+0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_{C1}(-0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_0$$

$$\varepsilon(+0) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) u_C^{\ 2}(+0) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\frac{C_1^{\ 2}}{(C_1 + C_2)^2} u_0^{\ 2} = \frac{1}{2} u_0^{\ 2} \frac{C_1^{\ 2}}{C_1 + C_2}$$

$$W_R = \varepsilon(-0) - \varepsilon(+0) = \frac{1}{2} C_1 u_0^{\ 2} - \frac{1}{2} u_0^{\ 2} \frac{C_1^{\ 2}}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} C_1 u_o^{\ 2}\left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)$$

76. Od trenutka t=+0 kapacitet C prethodno nabijen na U_0 prazni se u jednom slučaju preko linearnog vremenski ne promjenjivog otpora R, a u drugom slučaju preko otpora konstantne snage zadanog izrazom: $u_R i_R = \frac{U_0^2}{R}$. Nacrtati valne oblike napona na kapacitetu za $t \geq +0$ u oba slučaja.



a)

$$R = R$$

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$U = RC\frac{du_C}{dt}$$

$$U = U_0 e^{-t/\tau} \qquad \tau = RC$$

b)

$$u_R i_R = \frac{U_0^2}{R} \Rightarrow i_R = \frac{U_0^2}{U_R}\frac{1}{R}$$

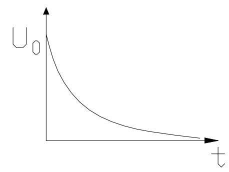
$$u_R C\frac{du_R}{dt} = \frac{U_0^2}{R} \Big/ \frac{dt}{C}$$

$$udu = \frac{U_0^2}{RC}dt$$

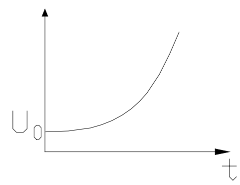
$$u^2 = 2\frac{U_0^2}{RC}t$$

$$u = U_0\sqrt{\frac{2t}{RC}} = K\sqrt{t}$$

a)

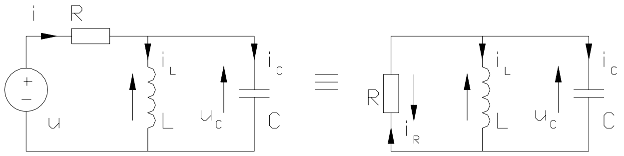


b)



8. MREŽE DRUGOG REDA – SLOBODNI ODZIV

77. Odredite faktor gušenja i vlastite frekvencije mreže.



$$i_L + i_C = i_R$$

$$Ri_R + \frac{1}{C}\int i_C dt = 0$$

$$Ri_R + L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$Ri_R + \frac{1}{C}\int i_C dt = 0$$

$$Ri_R + L\frac{d}{dt}(i_R - i_C) = 0$$

$$i_R = K_1 e^{st} \qquad i_C = K_2 e^{st} \qquad i_L = (K_1 - K_2)e^{st}$$

$$RK_1 e^{st} + \frac{1}{C}\int K_2 e^{st} dt = 0$$

$$RK_1 e^{st} + L(K_1 - K_2)\frac{d}{dt}e^{st} = 0$$

$$RK_1 e^{st} + \frac{1}{C}K_2\frac{1}{s}e^{st} = 0$$

$$RK_1 e^{st} + LK_1 s e^{st} - LK_2 s e^{st} = 0$$

$$RK_1 + \frac{1}{C}\frac{1}{s}K_2 = 0$$

$$(R + Ls)K_1 - LsK_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} R & \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s} \\ R + LS & -LS \end{vmatrix} = -RLs - \frac{1}{Cs}(R + Ls) = 0 \Big/ (-Cs)$$

$$s^2 RLC + R + Ls = 0$$

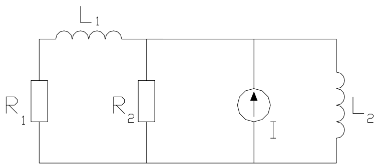
$$s^2 RLC + sL + R = 0 \Big/ : RLC$$

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

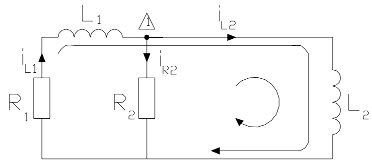
$$2\alpha = \frac{1}{RC}$$

faktor gušenja → $\boxed{\alpha = \frac{1}{2RC}}$ vlastita frekvencija mreže → $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$

78. Odredite faktor gušenja i vlastitu frekvenciju mreže.



- faktor gušenja α i vlastita frekvencija ω_0 su neovisni o poticaju → ukinemo poticaj.



KZN:

$$R_1 i_{L1} + L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = 0$$

$$u_{R_2} = u_{L2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = i_{R2} R_2$$

KZS: $i_{L1} = i_{L2} + i_{R2}$

$$\boxed{\begin{aligned} & i_{L1} - i_{L2} - \frac{L_2}{R_2}\frac{di_{L2}}{dt} = 0 \\ & R_1 i_{L1} + L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = 0 \end{aligned}}$$

$$i_{L1} = K_1 e^{st}$$
$$i_{L2} = K_2 e^{st}$$

→

$$K_1 e^{st} - K_2 e^{st} - \frac{L_2}{R_2} s K_2 e^{st} = 0$$

$$R_1 K_1 e^{st} + L_1 s K_1 e^{st} + L_2 s K_2 e^{st} = 0$$

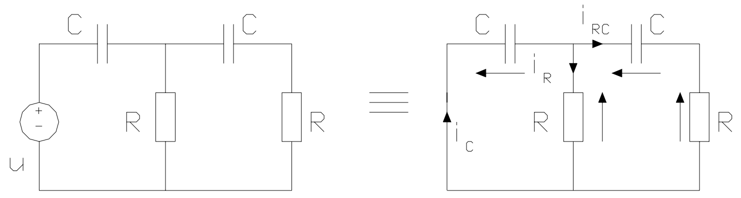
$$K_1 - \left(1 + s\frac{L_1}{R_2}\right) K_2 = 0 \Big/ (R_1 + sL_1)$$

$$(R_1 + sL_1) K_1 + sL_2 K_2 = 0 \qquad ; K_1, K_2 \neq 0$$

$$\left(1 + s\frac{L_1}{R_2}\right)(R_1 + sL_1) = sL_2$$

$$s^2 + \underbrace{\left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right)}_{2\alpha} s + \underbrace{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}_{\omega_0^{\,2}} = 0$$

79. Odredite prirodne frekvencije mreže.



$$i_{RC} = i_C - i_R$$

$$\frac{1}{C}\int i_C dt + i_R R = 0; \qquad i_R = i_C - i_{RC}$$

$$i_R R - i_{RC} R - \frac{1}{C}\int i_{RC} dt = 0$$

$$\frac{1}{C}\int i_C dt + i_C R - i_{RC} R = 0$$

$$i_C R - i_{RC} R - i_{RC} R - \frac{1}{C}\int i_{RC} dt = 0$$

$$i_C = K_1 e^{st}$$

$$i_{RC} = K_2 e^{st}$$

$$i_R = (K_1 + K_2) e^{st}$$

$$\frac{1}{C} K_1 \frac{1}{s} e^{st} + K_1 e^{st} R - K_2 e^{st} R = 0$$

$$K_1 e^{st} R - 2K_2 e^{st} R - \frac{1}{C}\frac{1}{s} K_2 e^{st} = 0$$

$$K_1\left(\frac{1}{C}\frac{1}{s} + R\right) - K_2 R = 0$$

$$K_1 R - K_2\left(2R + \frac{1}{C}\frac{1}{s}\right) = 0$$

$$-\left(\frac{1}{C}\frac{1}{s} + R\right)\left(2R + \frac{1}{C}\frac{1}{s}\right) + R^2 = 0$$

$$-\frac{2R}{Cs} - \frac{1}{C^2 s^2} - 2R^2 - \frac{R}{Cs} + R^2 = 0 \Big/ (-C^2 s^2)$$

$$2RCs + 1 + R^2 C^2 s^2 + RCs = 0$$

$$s^2 R^2 C^2 + s(3RC) + 1 = 0 \big/ : R^2 C^2$$

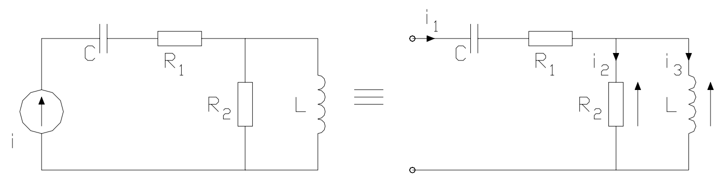
$$s^2 + s\underbrace{\frac{3}{RC}}_{2\alpha} + \underbrace{\frac{1}{R^2 C^2}}_{\omega_0} = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\,2}}$$

$$s_1 = -\frac{3}{2RC} - \sqrt{\frac{9}{4R^2C^2} - \frac{1}{R^2C^2}} = -\frac{3}{2RC} - \sqrt{\frac{9-4}{4R^2C^2}} = -\frac{3}{2RC} - \frac{\sqrt{5}}{2RC}$$

$$\boxed{s_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2RC}} \qquad \boxed{s_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}}$$

80. Odredite prirodne frekvencije mreže.



$$i_2 = i_3 = i_L$$

$$L\frac{di_L}{dt} - R_2 i_L = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{R_2}{L}\frac{dq}{dt} = 0$$

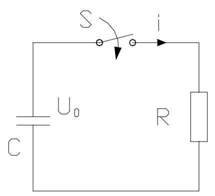
$$s^2 - \frac{R_2}{L}s = 0$$

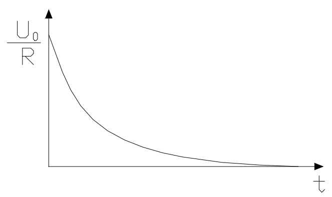
$$s_{1,2} = -\frac{R_2}{2L} \pm \sqrt{\frac{R_2^{\;2}}{4L^2}} = -\frac{R_2}{2L} \pm \frac{R_2}{2L}$$

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -\frac{R_2}{L}$$

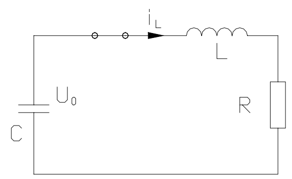
81. Kondenzator kapaciteta C početno nabijen na napon U_0 prazni se od t=0 preko otpornika R. Idealni valni oblik struje pražnjenja dan je na slici. Nacrtajte i objasnite neke od mogućih valnih oblika struje pražnjenja.





Za primjer ćemo se poslužiti otpornikom snage koji je izveden od puno zavoja debele žice, pa osim što ima svojstvo otpora, javlja se i svojstvo induktiviteta.

Možemo nacrtati nadomjesnu shemu:



→ Krug 2. reda diferencijalna jednadžba drugog reda. Za varijablu stanja je zgodno odabrati struju i_L je ista na svim elementima.

.

$$u_C + u_L + u_R = 0$$

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_L(t)dt + L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$

- donju granicu integrala $-\infty$ možemo zamijeniti s nulom ali moramo paziti na u_0

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_L(t) - u_0 + L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{1}{C}i_L + L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + R\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = 0$$

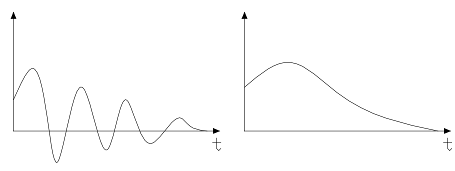
$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$2\alpha = \frac{R}{L}; \qquad \omega_0^{\;2} = \frac{1}{LC}$$

$$s_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$ - prirodne frekv. mreže

a) $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$ - prirodne frekvencije su realni brojevi → aperiodksi odziv

b) $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$ - prirodne frekvencije su konjugirano kompleksni brojevi → oscilatorni odziv.(pošto je α>0 oscilatori odziv je prigušen)



82. Odredite otpor slabo prigušenog serijskog RLC kruga ako je poznat L, C, a vršna vrijednost napona na C se nakon 5 perioda istitravanja smanji na 10% početne vrijednosti.

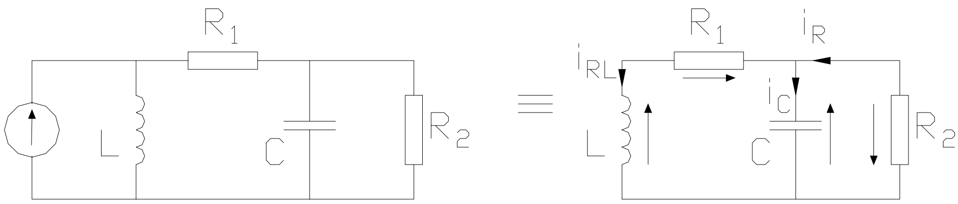
$$\frac{A_m}{A_{m+n}} = \frac{1}{0{,}1} = 10 \qquad n = 5$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = 2\pi\sqrt{LC} \qquad \omega_d \approx \omega_0$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{nT}\ln\frac{A_m}{A_{m+n}} = \frac{1}{5\cdot 2\pi\sqrt{LC}}\ln 10 = \frac{2{,}3}{10\pi\sqrt{LC}} = \frac{0{,}073}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{R}{2L} = \frac{0{,}073}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R = 0{,}146\sqrt{\frac{L}{C}}$$

83. Odredite faktor dobrote slabo prigušenog titrajnog kruga.



$$i_R R_2 + \frac{1}{C}\int i_C dt = 0$$

$$i_R R_2 + i_{RL} R_1 + L\frac{di_{RL}}{dt} = 0$$

$$i_R = i_C + i_{RL} \Rightarrow i_{RL} = i_R - i_C$$

$$i_R R_2 + \frac{1}{C}\int i_C dt = 0$$

$$i_R R_2 + i_R R_1 - i_C R_1 + L\frac{d}{dt}\left(i_R - i_C\right) = 0$$

$$i_R = K_1 e^{st}$$

$$i_C = K_2 e^{st}$$

$$K_1 e^{st} R_2 + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}K_2 e^{st} = 0 \Big/ : e^{st} \neq 0$$

$$K_1 e^{st} R_2 + K_1 e^{st} R_1 - K_2 e^{st} R_1 + L(K_1 - K_2)\cdot s \cdot e^{st} = 0 \Big/ : e^{st}$$

$$K_1 R_2 = -K_2 \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = -R_2 C s$$

$$K_1(R_1 + R_2 + Ls) - K_2(R_1 + Ls) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{R_1 + R_2 + Ls}{R_1 + Ls}$$

$$-R_2 C s = \frac{R_1 + R_2 + Ls}{R_1 + Ls}$$

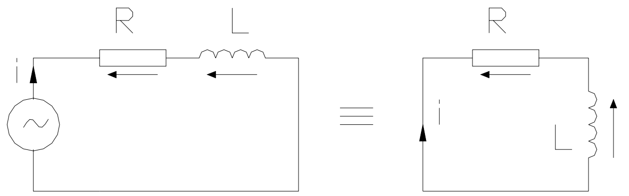
$$-R_1 R_2 C s - R_2 C L s^2 = R_1 + R_2 + Ls$$

$$s^2(R_2 CL) + s(R_1 R_2 C + L) + (R_1 + R_2) = 0 \Big/ : (R_2 CL)$$

$$s^2 + s\underbrace{\left(\frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 CL}\right)}_{2\alpha} + \underbrace{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2 CL}\right)}_{\omega_0^2}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\dfrac{R_1 + R_1}{R_2 CL}}}{\dfrac{R_1 R_2 C + L}{R_2 CL}} = \frac{\sqrt{R_1 + R_2}\cdot\sqrt{R_2 CL}}{R_1 R_2 C + L}$$

84. Odredite faktor dobrote serijskog RL-kruga priključenog na izmjenični izvor frekvencije f.



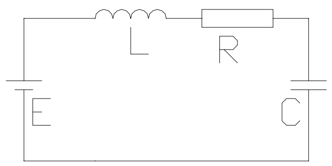
Faktor dobrote: $Q = 2\pi \dfrac{\text{uskladištena energija u krugu}}{\text{disipirana energija u krugu u periodi T}} = 2\pi \dfrac{\varepsilon_\Sigma(t)}{\varepsilon_\Sigma(t) - \varepsilon_\Sigma(t+T)}$

$$\varepsilon_{L,mag} = \frac{1}{2} L\hat{I}_L^{\,2} \qquad (L\ je\ L/VNP)$$

$$P_R T = \frac{1}{2} R\hat{I}_L^{\,2} T \qquad jer\ \ je\ P = RI^2\ \ uz\ I = I_L$$

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L\hat{I}_L^{\,2}}{\frac{1}{2} R\hat{I}_L^{\,2} T} = \frac{2\pi}{T}\frac{L}{R} = \omega \frac{L}{R}$$

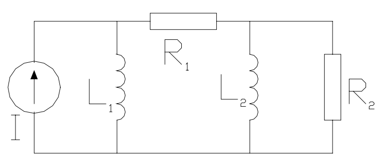
85. Koji uvjet mora biti zadovoljen da bi u istosmjernoj mreži sheme spoja prema slici bio ostvaren periodički režim rada?



Periodički režim rada zadovoljen je ako je $\int_t^{t+T} Ri^2 dt = 0$. Ovaj se uvjet može zadovoljiti samo ako je $R = R(t) \overset{\leq}{\underset{>}{}} 0$. Otpor R mora biti vremenski promjenjiv, ali tako da u dijelu periode T iskazuje svojstvo pasivnog otpora, a u dijelu periode T svojstva aktivnog otpora.

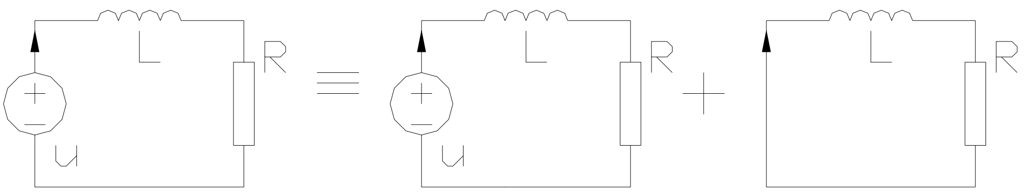
9. MREŽE DRUGOG REDA – POTPUNI ODZIV

86. Zašto je poznavanje slobodnog odziva dovoljno da bi se odredio potpuni odziv istosmjerne mreže.



Poznavanje slobodnog odziva dovoljno je da se odredi potpuni odziv istosmjerne mreže u kojoj je istosmjerni naponski izvor spojen u seriju s kapacitetom ili istosmjerni strujni izvor spojen u paralelu s induktivitetom, jer sa stajališta analize nema razlike između početnog napona na kapacitetu i nezavisnog izvora, odnosno početne struje kroz induktivitet i nezavisnog strujnog izvora spojenog paralelno induktivitetu.

87. Zašto valni oblici odziva u prijelaznom stanju ne ovise o valnim oblicima poticaja? Objasniti na primjeru RL kruga uključenog u t=0 na izvor $u = \hat{U} \sin \omega t$ **.**



ustaljeno stanje + prijelazno stanje

Za krugove s konstantnim ili periodičkim poticajem za određivanje prijelaznog stanja rješavamo homogenu diferencijalnu jednadžbu, dakle ne sudjeluje poticaj. Valni oblici ovise isključivo o prirodnim frekvencijama kruga.

(poticaj ne igra ulogu u prijelaznom stanju, dok početni uvjeti imaju utjecaja)

88. Nacrtajte najjednostavniju shemu spoja mreže napajane iz istosmjernog naponskog izvora pri čemu je struja izvora $i = I_0 + I_1 e^{-\alpha_1 t} + I_2 e^{-\alpha_2 t}$ **.**

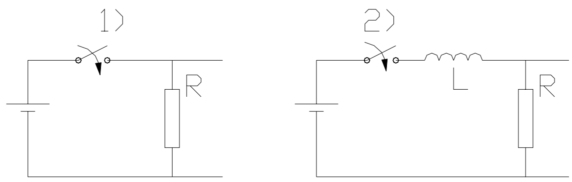
Odziv: I_0, I_1, I_2 → konstante

$\alpha_1, \alpha_2 > 0$

Poticaj: istosmjerni naponski

Ustaljeno stanje: i – istosmjerno;

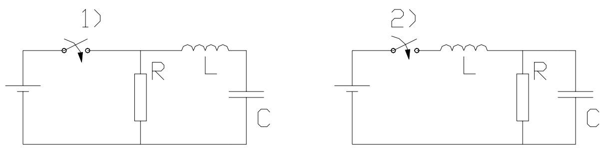
$t = \infty \Rightarrow i = I_0$ (moguća 2 rješenja)



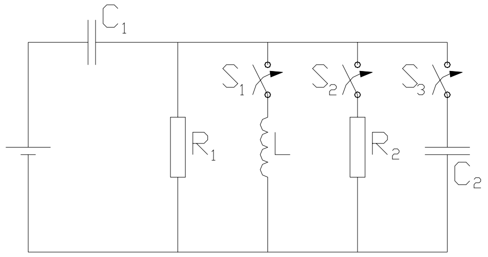
Prijelazno stanje: α_1, α_2 → mreža 2. reda (moguće da se pojave LC, LL, CC)

- moram paziti da ne dobijemo kratki spoj, i da imamo mrežu 2. reda tj. da se od dva C ne može napraviti nadomjesni C).

Rješenje:



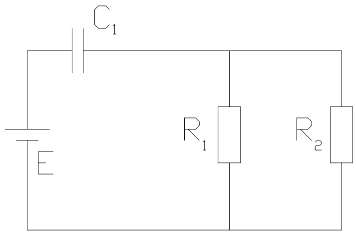
89. Nakon uklopa koje sklopke ili grupe sklopki se može u mreži sheme prema slici postići samo prigušeni odziv neovisno o vrijednostima elemenata mreže?



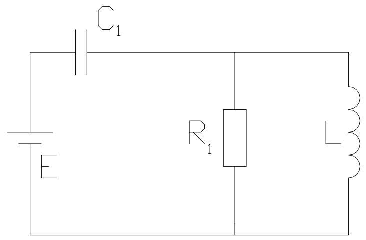
Moguće dvije mogućnosti:

- APERIODSKI ODZIV
- PRIGUŠENI ODZIV : ako je $\alpha > \omega_0$ i prirodne frekvencije s_1 i s_2 su dva realna broja.

- ako uklopi S_2 – mreža je prvog reda, odziv je eksponencijalan (nije moguć ni prigušeni ni aperiodski odziv)

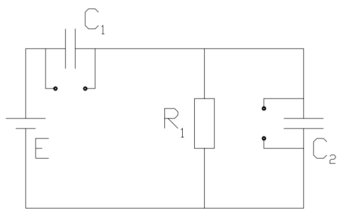


- ako uklopi S_1 → mreža drugog reda



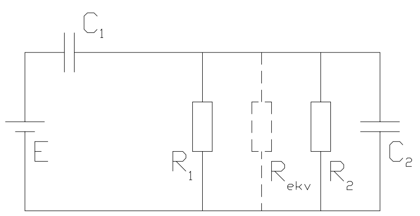
- ako je R_1<0 → aperiodski odziv

- u kombinacijama S_1 S_2, S_1 S_3, S_1 S_2 S_3 → zbog induktiviteta postoji aperiodski odziv
- ako uklopi S_3 mreža je 2. reda (ne postoji induktivitet)

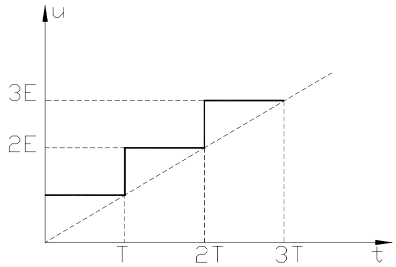


- bez obzira na R i C vrijedi da je odziv prigušen zato što postoji ustaljeno stanje.

- ako uklopi **S_2 i S_3** možemo otpore R_1 i R_2 nadomjestit ekvivalentnim potporom i tada se slučaj svodi na uklop S_3, te je i ovo rješenje zadatka.



90. Na karakteristici kapaciteta grafički prikažite energetske odnose u istosmjernom serijskom RLC krugu ako se napon napajanja skokovito mijenja kao na slici. C je linearan i VNP.

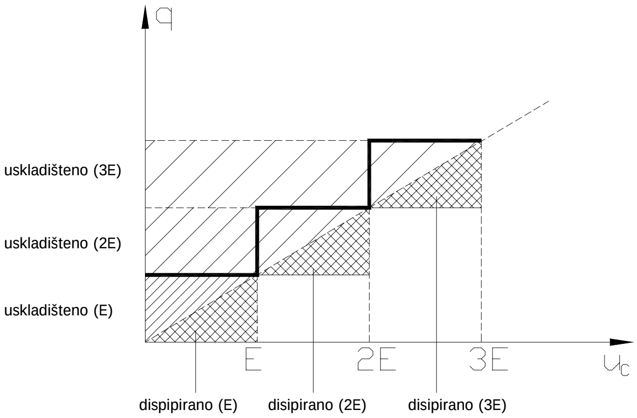


$$\varepsilon_C = \frac{1}{2} C (3E)^2 - \text{uskladištena energija}$$

$$w_R = 3\frac{1}{2} CE^2 \ - \text{disipirana}$$

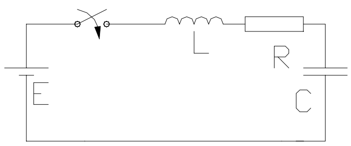
$$\varepsilon_C = \frac{1}{2} C (nE)^2$$

$$w_R = \frac{1}{2} CE^2 n$$



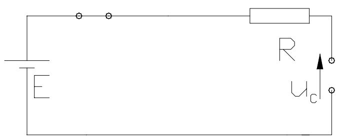
Kod komutacije pri skoku napona nastavljamo na već dobiveno. Kod disipacije padnemo na nulu pa pri skoku počinjemo iznova. Zato imamo iste površine.

91. Odredite koliko se energije pretvorilo u toplinu na otporu R za vrijeme nabijanja kapaciteta karakteristike $q = Au_C\,|u_C|$ na napon izvora E. Prikažite grafičke energetske odnose u krugu.



$$u_C(t_\alpha) = E$$

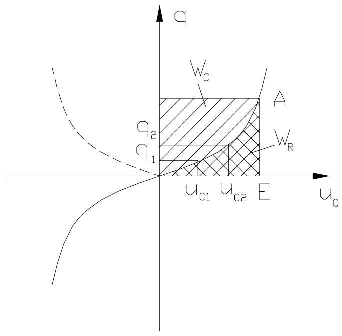
$$t_\alpha - \text{ustaljeno stanje}$$



$$W_C = \int_{q_1}^{q_2} u_C dq > 0$$

$$W_R = \int_{u_{C1}=0}^{u_{C2}=E} q du_C = \int_0^E A u_C{}^2 du_C = A \left.\frac{u_C{}^3}{3}\right|_0^E = A\frac{E^3}{3}$$

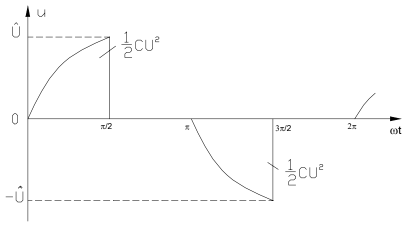
$q = Au_C\,|u_C|$ - karakteristika kapaciteta



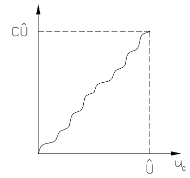
$$u_C \uparrow,\ q \downarrow - \text{punjenje C} \rightarrow \text{trošilo, pasivan}$$

- nelinearan, vremenski nepromjenjiv, pasivan

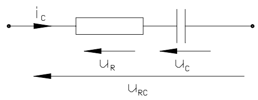
92. Na serijski RC krug narinut je napon valnog oblika prema slici. Koji uvjet mora biti zadovoljen da bi se snaga disipirana na otporu s dovoljnom tehničkom točnošću mogla izračunati prema izrazu: $P_R = fCU^2,\ f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ **?**



(Karakteristika kapaciteta)



$$P_{RC} = \frac{1}{T}\int_0^T u_{RC} i_C dt = \frac{1}{T}\cdot 2 \cdot \int_0^{T/4} u_{RC} C \frac{du_{RC}}{dt} dt = \frac{C}{T} 2 \int_0^{\hat{U}} u_{RC} du_{RC} = 2fC \frac{u_{RC}^{\ 2}}{2}\Bigg|_0^{\hat{U}} = fC\hat{U}^2$$



$$i_C = C\frac{du_{RC}}{dt} \rightarrow \approx i_C = C\frac{du_C}{dt} \quad ako \quad je\ T >> RC \Rightarrow u_C \approx u_{RC}$$

Mora biti zadovoljen uvjet da je $T >> RC$ (tada "odmah" nastupa ustaljeno stanje tj. napon $u_C \approx u_{RC}$) inače bi disipaciju morali računati po $I^2 R$.

93. Količina energije predana serijskom RC krugu iz izvora valnog oblika napona $u = E(1-e^{-t/T});\ T > 0$ **do t=0 do uspostava ustaljenog stanja iznosi:** $W_E = \dfrac{1}{2}CE^2\dfrac{T+2RC}{T+RC}$ **. Odredite količinu energije disipiranu na otporu R te komentirajte slučaj T>>RC i T<<RC.**

$$W_R = W_E - \varepsilon_C$$

$$\varepsilon_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}CE^2\left(1-2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-2\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{CE^2 - 2CE^2 e^{-\frac{t}{\tau}} + CE^2 e^{-2\frac{t}{\tau}}}{2}$$

$$W_R = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{T+2RC}{T+RC} - \frac{1}{2}CE^2\left(1-2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-2\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{1}{2}CE^2\left(\frac{T+2RC}{T+RC} - 1 + 2e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-2\frac{t}{RC}}\right)$$

1) T>>RC

(odmah nastupa ustaljeno stanje)

- kapacitet je L/VNP pa je $\varepsilon_C = \dfrac{1}{2}CE^2$

$$W_R(0,\infty) = W_E - \varepsilon_C = \frac{1}{2}CE^2\frac{T + \overset{<<T}{2RC}}{T + \underset{<<T}{RC}} - \frac{1}{2}CE^2$$

$$W_R \cong 0$$

2) T<<RC

$$W_R = \frac{1}{2}CE^2\left(\frac{2RC}{RC} - 1\right) = \frac{1}{2}CE^2$$

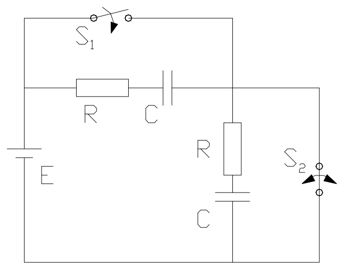
ili

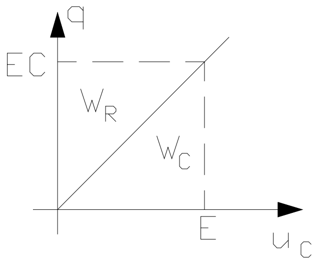
$$W_R = \frac{1}{2}CE^2\frac{\overset{<<RC}{T} + 2RC}{\underset{<<RC}{T} + RC} - \frac{1}{2}CE^2 = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2$$

$$W_R = \frac{1}{2}CE^2$$

Koliko se energije uskladišti na kondenzatoru toliko se disipira na otporniku.

94. a) Odredite snagu istosmjernog naponskog izvora E ako sklopke S1 i S2 sklapaju protutaktno, svaka je uklopljena polovinu periode T i T>>RC. B) Da li se smanjivanjem periode T u odnosu na vremensku konstantu kruga poveća ili smanjuje potrebna snaga istosmjernog naponskog izvora?





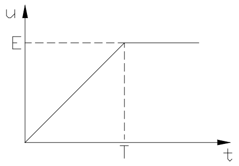
- ako je T>>RC "odmah" nastupa ustaljeno stanje
- u pola periode na R_1C_1 energije je $\frac{1}{2}CE^2$, i u drugoj polovini periode na R_2C_2 je $\frac{1}{2}CE^2$, pa je ukupna energije

$$W = 2\frac{1}{2}CE^2 = CE^2$$

b) ako se smanjuje perioda Tu odnosu na vremensku konstantu RC tj. sada je T>RC energija će se povećati (duže treba da dođe do ustaljenog stanja tj. da C bude prekid)

95. Količina energije pretvorene u toplinu u serijskom RC krugu napajanog iz naponskog izvora valnog oblika prema slici, do uspostave ustaljenog stanja iznosi: $W_R = CE^2\frac{\tau}{T}\left[1-\left(1-e^{-T/\tau}\right)\frac{\tau}{T}\right]$; $\tau = RC$ **. Odredite količinu energije pretvorene u toplinu za dva posebna slučaja a)** $T >> \tau$ **, b)** $T << \tau$ **te objasnite rezultate.**

$$W_R = CE^2\frac{\tau}{T}\left[1-\left(1-e^{-T/\tau}\right)\frac{\tau}{T}\right]; \qquad \tau = RC$$



a) $T >> \tau \rightarrow W_R \rightarrow 0$

b) $T << \tau$

$$Taylor\ e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...$$

$$e^{-T/\tau} = 1-\frac{T}{\tau}+\frac{1}{2}\frac{T^2}{\tau^2}$$

$$W_R = CE^2\frac{\tau}{T}\left[1-\left(\frac{\tau}{T}-\left(\frac{\tau}{T}-1+\frac{1}{2}\frac{T}{\tau}\right)\right)\right]$$

$$= CE^2\frac{\tau}{T}\left[1-\left(\frac{\tau}{T}-\frac{\tau}{T}+1-\frac{1}{2}\frac{T}{\tau}\right)\right]$$

$$= CE^2\frac{\tau}{T}\left[1-1+\frac{1}{2}\frac{T}{\tau}\right] = \frac{1}{2}CE^2$$

96. Za mrežu opisanu diferencijalnom jednadžbom $\frac{d^2y}{dt^2}+2\alpha\frac{dy}{dt}+\omega_0{}^2y=\hat{X}\sin\omega t$ **pretpostavljeno je rješenje u ustaljenom stanju** $y=\hat{Y}\sin(\omega t+\varphi)$**. Odrediti** $\hat{Y}$ **i** φ **metodom izjednačavanja koeficijenata uz ortogonalne komponente rješenja.**

$$y=\hat{Y}\sin(\omega t+\varphi)$$
$$\dot{y}=\hat{Y}\cos(\omega t+\varphi)\omega$$
$$\ddot{y}=-\hat{Y}\sin(\omega t+\varphi)\omega^2$$

$$\sin(\omega t+\varphi)=\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi$$
$$\cos(\omega t+\varphi)=\cos\omega t\cos\varphi-\sin\omega t\sin\varphi$$

$$-\omega^2\hat{Y}(\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi)+2\alpha\omega_0\hat{Y}(\cos\omega t\cos\varphi-\sin\omega t\sin\varphi)+\omega_0{}^2\hat{Y}(\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi)=\hat{X}\sin\omega t$$

izjednačimo koeficijente uz $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$

$$-\omega^2\hat{Y}\cos\varphi-2\alpha\omega_0\hat{Y}\sin\varphi+\omega_0{}^2\hat{Y}\cos\varphi=\hat{X}\,/:\cos\varphi$$
$$-\omega^2\hat{Y}\sin\varphi+2\alpha\omega_0\hat{Y}\cos\varphi+\omega_0{}^2\hat{Y}\sin\varphi=0\,/:\sin\varphi$$

$$-\omega^2+2\alpha\omega\, ctg\varphi+\omega_0{}^2=0$$

$$ctg\varphi=\frac{\omega^2-\omega_0{}^2}{2\alpha\omega}\qquad tg\varphi=\frac{2\alpha\omega}{\omega^2-\omega_0{}^2}\qquad \boxed{\varphi=arctg\frac{2\alpha\omega}{\omega^2-\omega_0{}^2}}$$

$$-\omega^2\hat{Y}-2\alpha\omega_0\hat{Y}tg\varphi+\omega_0{}^2\hat{Y}=\frac{\hat{X}}{\cos\varphi}$$

$$\hat{Y}\left(-\omega^2-2\alpha\omega_0\frac{2\alpha\omega}{\omega^2-\omega_0{}^2}+\omega_0{}^2\right)=\frac{\hat{X}}{\cos\varphi}$$

$$\hat{Y}=\frac{\hat{X}}{\cos\varphi}\frac{\omega^2-\omega_0{}^2}{-4\alpha^2\omega_0\omega+(\omega_0{}^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_0{}^2)}$$

10. FAZORSKA TRANSFORMACIJA

97. Zašto umnožak fazora nije fazor?

FAZOR - kompleksni broj kojim je prikazana jednoharmonijska funkcija.

Monoharmonijske funkcije: $\sin x,\cos x,\sin 2x,\sin(x-\varphi)$

- neka su zadana dva fazora: $\dot{U}=\hat{U}/0\rightarrow u=\hat{U}\sin\omega t$, $\dot{I}=\hat{I}/0\rightarrow i=\hat{I}\sin\omega t$

$\dot{U}\dot{I}$ - nije fazor. $\quad ui=\hat{U}\hat{I}\sin^2\omega t=\hat{U}\hat{I}\frac{(1-\cos 2\omega t)}{2}=\hat{U}\hat{I}\left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{ist.član}\underbrace{-\frac{1}{2}\cos 2\omega t}_{izmj.član}\right]$

Pri množenju dva fazora ne dobijemo jednoharmonijsku funkciju pa zaključujemo da umnožak fazora nije fazor.

98. Metodom fazorske transformacije odrediti valni oblik odziva u ustaljenom stanju mreže opisane diferencijalnom jednadžbom: $0{,}1\dfrac{d^2x}{dt}+0{,}6\dfrac{dx}{dt}+2x=20\sin 10t,\quad \omega=10$.

$$0{,}1\omega^2 j^2\dot{x}+0{,}6j\omega\dot{x}+2\dot{x}=20/0°$$
$$-0{,}1\omega\dot{x}+0{,}6j\omega\dot{x}+2\dot{x}=20/0°$$
$$-10\dot{x}+j6\dot{x}+2\dot{x}=20/0°$$
$$\dot{x}=\frac{20/0°}{-10+2+j6}=\frac{20/0°}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{20/0°}{10/\varphi}=2/\varphi°$$

$$x(t)=\mathrm{Re}\left\{\hat{X}e^{j(\omega t+\varphi)}\right\}\quad\leftrightarrow\dot{X}$$
$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{Re}\left\{j\omega\hat{X}e^{j(\omega t+\varphi)}\right\}\quad\leftrightarrow j\omega\dot{X}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{Re}\left\{-\omega^2\hat{X}e^{j(\omega t+\varphi)}\right\}\leftrightarrow-\omega^2\dot{X}$$
$$20\sin 10t\leftrightarrow 20^{/0°}$$

$x=2\sin(10t+\varphi)$, $\quad\varphi=arctg\dfrac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}$

99. Funkcija $x=\sin(\omega t+\varphi)$ prikazana je fazorom $\dot{x}=1$. Kojim je fazorom prikazana funkcija $y=\sin(\omega t+\psi)$.

$x=\sin(\omega t+\varphi)\leftrightarrow\dot{x}=1$ deriviramo $\cos(\omega t+\varphi)\leftrightarrow j$

$$\sin(\omega t+\psi)=\sin(\omega t+\psi+\varphi-\varphi)=\sin[(\omega t+\varphi)+(\psi-\varphi)]=\sin(\omega t+\varphi)\cos(\psi-\varphi)+\cos(\omega t+\varphi)\sin(\psi-\varphi)$$

$$\boxed{\cos(\psi-\varphi)+j\sin(\psi-\varphi)\leftrightarrow y}$$

100. Funkcija $\hat{A}\sin(\omega t+\varphi)$ prikazana je fazorom $\dot{A}=A$. Kojim je fazorom prikazana funkcija $\hat{B}\cos\omega t$?

$\hat{A}\sin(\omega t+\varphi)\leftrightarrow\dot{A}=A\qquad\hat{A}=\sqrt{2}A$

$\hat{B}\cos\omega t\leftrightarrow ?\quad\Rightarrow B(\sin\varphi+j\cos\varphi)$

$\sin(\omega t+\varphi)\leftrightarrow 1$

$\cos(\omega t+\varphi)\leftrightarrow j$

$$\cos(\omega t+\varphi-\varphi)=\cos(\omega t+\varphi)\cos\varphi+\sin(\omega t+\varphi)\sin\varphi\leftrightarrow j\cos\varphi+\sin\varphi$$

101. Funkcija $C\sin(\omega t+\varphi)$ prikazana je fazorom $A+jB$. Kojim je fazorom prikazana funkcija $D\sin(\omega t+\psi)$?

$$\sin(\omega t+\varphi)\leftrightarrow\frac{A}{C}+j\frac{B}{C}\qquad\qquad\cos(\omega t+\varphi)\leftrightarrow j\frac{A}{C}-\frac{B}{C}$$

$$\sin(\omega t+\psi+\varphi-\varphi)=\sin[(\omega t+\varphi)+(\psi-\varphi)]=\sin(\omega t+\varphi)\cos(\psi-\varphi)+\cos(\omega t+\varphi)\sin(\psi-\varphi)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(\frac{A}{C}+j\frac{B}{C}\right)\cos(\psi-\varphi)+\left(j\frac{A}{C}-\frac{B}{C}\right)\sin(\psi-\varphi)$$
$$D\sin(\omega t+\psi)\leftrightarrow\left(\frac{AD}{C}+j\frac{BD}{C}\right)\cos(\psi-\varphi)+\left(j\frac{AD}{C}-\frac{BD}{C}\right)\sin(\psi-\varphi)$$
$$D\sin(\omega t+\psi)\leftrightarrow\left[\frac{AD}{C}\cos(\psi-\varphi)-\frac{BD}{C}\sin(\psi-\varphi)\right]+j\left[\frac{BD}{C}\cos(\psi-\varphi)+\frac{AD}{C}\sin(\psi-\varphi)\right]$$

102. Fazorom jA prikazana je funkcija $A\cos\omega t$. Kojim je fazorom prikazana funkcija $B\cos(\omega t-\varphi)$?

$\cos\omega t \leftrightarrow j$ deriviramo $\begin{matrix} -\sin\omega t \leftrightarrow -1 \\ \sin\omega t \leftrightarrow 1 \end{matrix}$

$$\cos(\omega t-\varphi)=\cos\omega t\cos\varphi+\sin\omega t\sin\varphi$$

$$\leftrightarrow j\cos\varphi+\sin\varphi$$

$$B\cos(\omega t-\varphi)\leftrightarrow B(\sin\varphi+j\cos\varphi)$$

103. Funkcija $\hat{A}\cos(\omega t+\varphi)$ prikazana je fazorom $\dot{A}=A$. Koja je funkcija prikazana fazorom $A+jA$?

$\cos(\omega t+\varphi)\leftrightarrow 1$ deriviramo $-\sin(\omega t+\varphi)\leftrightarrow j$

$$\cos(\omega t+\varphi)-\sin(\omega t+\varphi)\leftrightarrow 1+j$$

$$\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)-\sin(\omega t+\varphi)=2\cos\frac{\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}+\omega t+\varphi}{2}\sin\frac{\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}-\omega t-\varphi}{2}=2\cos\frac{2\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}2\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\hat{A}\sqrt{2}\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\leftrightarrow A+jA$$

104. Zadan je fazor A+jB. Koje od te tri navedene funkcije prikazuju taj fazor?

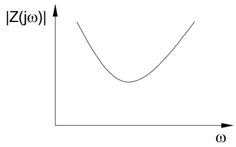
a) $\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t+arctg\frac{B}{A})$

b) $C\sin(\omega t+\varphi)\quad C\neq\sqrt{A^2+B^2}\quad \varphi\neq arctg\frac{B}{A}$

c) $\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t+\frac{\pi}{4})$

- sve tri funkcije su rješenje jer način preslikavanja nije zadan. Fazorska transformacija počinje nakon definiranja pravila preslikavanja.

105. Zadana je amplitudna karakteristika impedanijce neke naprave. Odredite najjednostavniju shemu spoja te naprave.



$Z(j\omega)$ - ulazna funkcija mreže

$$Z(j\omega)=\frac{\dot{U}_u}{\dot{I}_u}$$

- nadomjesna shema: na niskim i visokim frekvencijama ulazna impedancija je beskonačna, a na srednjim frekvencijama ima minimum.

- elementi mreže zapisani u fazorskom području:

Slika kapaciteta

$$\dot{U}_C=\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C$$

Slika induktiviteta

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}_L$$

Minimum - područje konstantne impedancije.

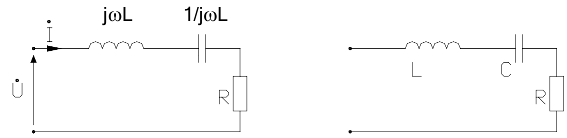
niske frekvencije

$\omega\to 0$ → $|Z(j\omega)|\to\infty$

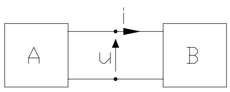
visoke frekvenicije

$\omega\to\infty$ → $|Z(j\omega)|\to\infty$

- induktivitet
- kapacitet
- otpor



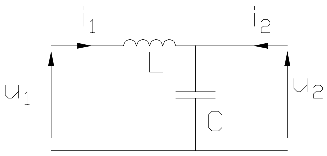
106. Koji se elementi mreže nalaze u crnoj kutiji B ako je $u=120\sin(314t+60°)$, $i=15\cos(314t+80°)$



$$u=120\sin(314t+60°)$$
$$i=15\sin(314t+170°)$$

Ako kut između napona i struje nije između -90° i 90° radi se o aktivnim elementima mreže. Zaključujemo da je u crnoj kutiji B naponski ili strujni izvor.

107. Odredite prijenosne funkcije mreže dvoprilaza. Poticaj djeluje na prilazu 1.



$$\dot{U}_2=\frac{\dot{I}_1}{j\omega C}$$

$$\dot{U}_1=\dot{I}_1\left(j\omega L-\frac{1}{j\omega C}\right)$$

Prijenosna impedancija: $Z_{21}(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}=\frac{\dot{I}_1/j\omega C}{\dot{I}_1}=\frac{1}{j\omega C}$

Prijenosni omjer struja: $\alpha_{21}(j\omega)=\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}=0$

Prijenosni omjer napona: $A_{21}(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\dot{I}_1/j\omega C}{\dot{I}_1\left(1-\omega^2 LC\right)/j\omega C}=\frac{1}{1-\omega^2 LC}$

Prijenosna admitancija: $\dot{Y}_{21}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}=\frac{0}{\dot{I}_1/j\omega C}=0$

108. Zadana je prijenosna funkcija mreže $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\omega}{\alpha + j\omega}$. Odredite efektivnu vrijednost u₂(t) ako je poznat valni oblik poticaja: $u_1 = \hat{U}_1 \sin t + \hat{U}_3 \sin 3t + \hat{U}_5 \cos 5t$.

$$U_2(\omega) = U_1(\omega)\frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$U_2(3\omega) = U_1(3\omega)\frac{3\omega}{\sqrt{\alpha^2 + 9\omega^2}}$$

$$U_2(5\omega) = U_1(5\omega)\frac{5\omega}{\sqrt{\alpha^2 + 25\omega^2}}$$

$$U_2 = \sqrt{U_1^2\frac{\omega^2}{\alpha^2+\omega^2} + U_3^2\frac{9\omega^2}{\alpha^2+9\omega^2} + U_5^2\frac{25\omega^2}{\alpha^2+25\omega^2}} = \omega\sqrt{U_1^2\frac{1}{\alpha^2+\omega^2} + U_3^2\frac{9}{\alpha^2+9\omega^2} + U_5^2\frac{25}{\alpha^2+25\omega^2}}$$

11. REZONANCIJA I FREKVENCIJSKI ODZIV

109. Zašto se ne može reći da je rezonancija nastupila u točno određenom trenutku?

Rezonancija je pojava koja se promatra u ustaljenom stanju. Stanje u nekom trenutku nije bitno, bitan je proces koji traje.

110. Amplituda napona na kapacitetu u serijskom RLC krugu napajanom iz naponskog izvora $u = \hat{U}\cos\omega t$ dana je izrazom : $\hat{U}_C = \hat{U}\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\alpha^2\omega^2}}$, gdje je α faktor gušenja, a ω_0 vlastita frekvencija kruga. Odredite maksimalnu vrijednost napona na kapacitetu ako se mijenja ω_0.

$$\frac{dU_C(\omega_0)}{d\omega_0} = 0$$

$$\hat{U}\frac{2\omega_0\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2} - \omega_0^2\frac{1}{2\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}2(\omega_0^2-\omega^2)2\omega_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2} = 0$$

$$2\omega_0[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2] - 2\omega_0^3(\omega_0^2-\omega^2) = 0$$

$$\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 + 4\alpha^2\omega^2 - \omega_0^4 + \omega_0^2\omega^2 = 0$$

$$-2\omega_0^2 + \omega^2 + 4\alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$-\omega_0^2 = -4\alpha^2 - \omega^2$$

$$\boxed{\omega_{0r} = \sqrt{\omega^2 + 4\alpha^2}}$$

$$U_C(\omega_{0r}) = \hat{U}\frac{\omega^2+4\alpha^2}{\sqrt{(\omega^2+4\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}} = \hat{U}\frac{\omega^2+4\alpha^2}{\sqrt{16\alpha^4+4\alpha^2\omega^2}} = \hat{U}\frac{\omega^2+4\alpha^2}{\sqrt{4\alpha^2(4\alpha^2+\omega^2)}}$$

$$U_C(\omega_{0r}) = \hat{U}\frac{\omega_{0r}^2}{2\alpha\omega_{0r}} = \hat{U}\frac{\omega_{0r}}{2\alpha}$$

111. Zašto je definicija faktora dobrote $Q = 2\pi \dfrac{\varepsilon_\Sigma(t)}{\varepsilon_\Sigma(t) - \varepsilon_\Sigma(t+T)}$ gdje je $\varepsilon_\Sigma(t)$ uskladištena energija u krugu u nekom trenutku t, a T perioda titranja, neprimjenjiva na harmonički poticane krugove?

Kod harmonički poticanih krugova energije u trenutku t i t+T su jednake pa bi u izrazu za dobrotu nazivnik bio jednak 0 i dobrota bi bila beskonačna.

112. Zašto je rezonancija odziv na jednoharmonijski poticaj?

Ako u nekoj mreži djeluje npr. poći periodički poticaj (ems) periode $T_r = \dfrac{2\pi}{\omega_r}$, u Fourierovom rastavu nema harmonijskog člana potrebne frekvencije ω_r pa rezonancije neće biti.

Npr. RLC serijski kad na njega djeluje višeharmonijski naponski izvor:

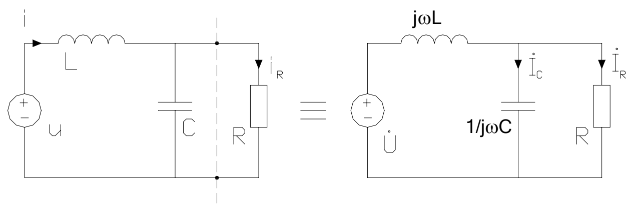
$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = \sum_{n=1}^{N} \hat{U}(n)\cos(n\omega t + \psi_n)$$

$$i = \sum_{n=1}^{N} \hat{I}(n)\cos(n\omega t + \psi_n + \varphi_n)$$

$$\hat{I}(n) = \frac{\hat{U}(n)}{L}\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^{\,2} - n^2\omega^2}{n\omega}\right)^2 + 4\alpha^2}}$$

Odavde vidimo da je za frekvenciju $n\omega$ moguća rezonancija, ali samo ako postoji odgovarajući poticaj $\hat{U}(n)$ na toj frekvenciji.

113. Trošilo otpora R napaja se preko LC kruga iz izmjenične mreže. Koji uvjet mora biti zadovoljen da efektivna vrijednost struje trošila ne bi ovisila o vrijednosti otpora? Koja svojstva posjeduje u tom slučaju promatrana mreža?



$$\dot{U} = j\omega L(\dot{I}_C + \dot{I}_R) + R\dot{I}_R$$

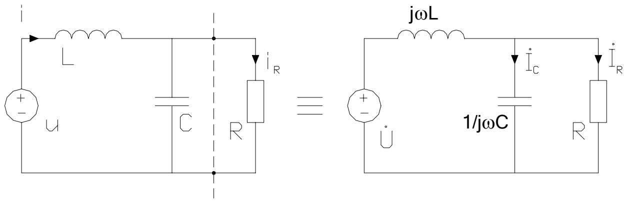
$$\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = R\dot{I}_R \Rightarrow \dot{I}_C = \dot{I}_R j\omega RC$$

$$\dot{U} = j\omega L(\dot{I}_R j\omega RC + \dot{I}_R) + R\dot{I}_R = \dot{I}_R(j\omega L - \omega^2 LRC + R)$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L} \cdot \frac{\dot{U}}{j\omega L}$$

- ako je $\omega^2 LC \equiv 1$ → da efektivna vrijednost trošila ne bi ovisila o R vlastita frekvencija kruga mora biti jednaka frekvenciji poticaja.

113. Trošilo otpora R napaja se preko LC kruga iz izmjenične mreže. Koji uvjet mora biti zadovoljen da efektivna vrijednost struje trošila ne bi ovisila o vrijednosti otpora? Koja svojstva posjeduje u tom slučaju promatrana mreža?



$$\dot{U} = j\omega L(\dot{I}_C + \dot{I}_R) + R\dot{I}_R$$

$$\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = R\dot{I}_R \Rightarrow \dot{I}_C = \dot{I}_R j\omega RC$$

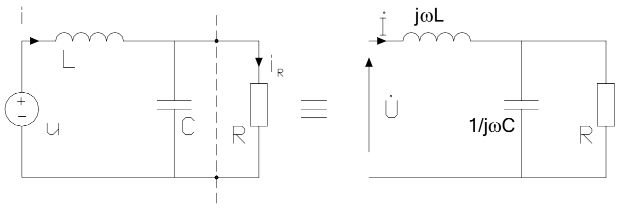
$$\dot{U} = j\omega L(\dot{I}_R j\omega RC + \dot{I}_R) + R\dot{I}_R = \dot{I}_R(j\omega L - \omega^2 LRC + R)$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L} \cdot \frac{\dot{U}}{j\omega L}$$

- ako je $\omega^2 LC \equiv 1$ → da efektivna vrijednost trošila ne bi ovisila o R vlastita frekvencija kruga mora biti jednaka frekvenciji poticaja.

Mreža posjeduje svojstvo strujnog izvora.

114. Trošilo otpora R napaja se preko LC kruga iz izmjenične mreže. Koji uvjet mora biti zadovoljen da efektivna vrijednost struje izvora ne ovisi o promjeni otpora trošila.



UVJET: $I \neq f(R)$

- treba naći frekvenciju poticaja da bi to bilo ispunjeno

$$Z_{ul} = j\omega L + \frac{R\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega L - \omega^2 RLC + R}{1 + j\omega RC} = j\omega L\frac{1 + j\omega RC - j\frac{R}{\omega L}}{1 + j\frac{R}{\omega L}\omega^2 LC} = j\omega L\frac{1 - j\frac{R}{\omega L}\left(-\omega^2 LC + 1\right)}{1 + j\frac{R}{\omega L}\omega^2 LC}$$

$$Z_{ul} = \underbrace{j\omega L}_{Z_3}\frac{\overbrace{1 - j\frac{R}{\omega L}\left(1 + \omega^2 LC\right)}^{Z_1}}{\underbrace{1 + j\frac{R}{\omega L}\omega^2 LC}_{Z_2}}$$

$$|Z_{ul}| = \omega L\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2\left(1 - \omega LC\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2(\omega^2 LC)^2}}$$

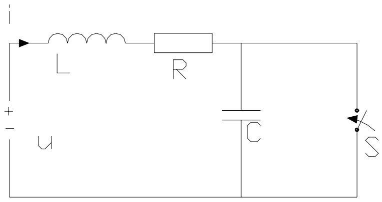
→ izjednačimo brojnik i nazivnik

$$1 - \omega^2 LC = \omega^2 LC$$

$$\omega^2 LC = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{2LC}}$$

- frekvencija mora biti $\sqrt{\frac{1}{2LC}}$ i tada je ostvaren uvjet da $I \neq f(R)$¸

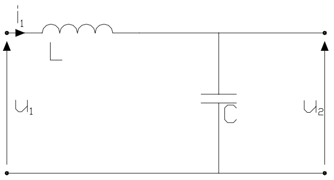
115. Koliki mora kapacitet C biti da se u zadanoj mreži nakon uklopa sklopke S ne promijeni efektivna vrijednost struje izvora

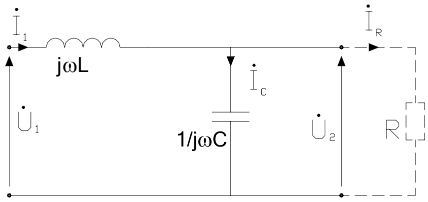


$$|Z_{ul}| = |Z_{ul}^*|$$
$$|R + j(X_L - X_C)| = |R + jX_L|$$
$$R^2 + (X_L - X_C)^2 = R^2 + X_L^2$$
$$X_L - X_C = X_L$$
$$\boxed{X_C = 2X_L}$$

$$\frac{1}{\omega C} = 2\omega L$$
$$2\omega^2 LC = 1$$
$$\rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2\omega^2 L}}$$

116. Nacrtajte amplitudnu karakteristiku funkcije mreže $H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$. Koji uvjet mora biti zadovoljen da bi se ova mreža ponašala kao niskopropusni filtar?





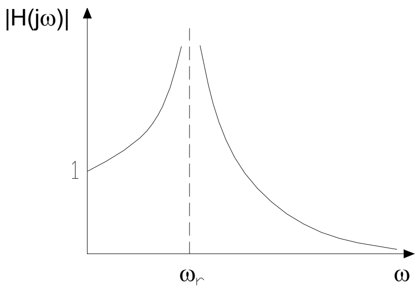
- prilaz 2 nije opterećen pa je $\dot{I}_R = 0$

KZN:
$$\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \dot{I}_1 = j\omega C \dot{U}_2$$
$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 j\omega L + \dot{U}_2 = \dot{U}_2 (1 - \omega^2 LC)$$

$$\rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}$$

$$1 - \omega^2 LC = 0$$
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\omega = \omega_r \Rightarrow |H(j\omega)| \to \infty$$

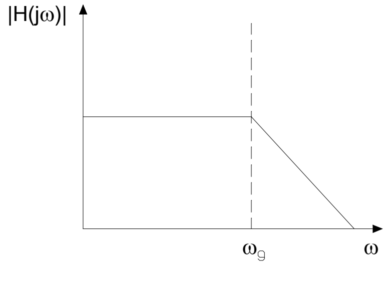


- amplitudna karakteristika - kako se modul mijenja ovisno o frekvenciji.

- Niski propust - propušta niske frekvencije. Pojačanje do ω_g treba biti konstantno, treba postojati konstantan omjer struje i napona (R) odnosno treba mrežu M opteretiti.

KZN, KZS:
$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 j\omega L + \dot{I}_C \frac{1}{j\omega C}$$
$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R = \dot{I}_C \frac{1}{j\omega C}$$
$$\dot{I}_C = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \left(\frac{j\omega L + R(1 - \omega^2 LC)}{R} \right)$$
$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{R}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$
$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 (1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}}}$$

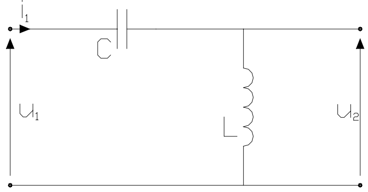


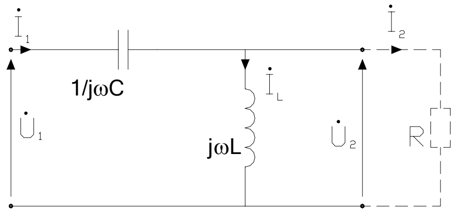
$\omega = 0 \rightarrow |H(j\omega)| = 1$, $\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = 0$

- ω_g - gornja granična frekvencija : ona kod koje pojačanje opadne za 3 dB

- $|H(j\omega_g)| = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$ - bitan za određivanje granične frekvencije

117. Nacrtati amplitudnu karakteristiku funkcije mreže $H(j\omega)=\dfrac{\dot U_2}{\dot U_1}$. Koji uvjet mora biti zadovoljen da bi se mreža ponašala kao visokopropusni filtar?





- prilaz 2 nije opterećen pa $\dot I_2 = 0$

$$\dot U_2 = \dot I_1 j\omega L \Rightarrow \dot I_1 = \frac{\dot U_2}{j\omega L}$$

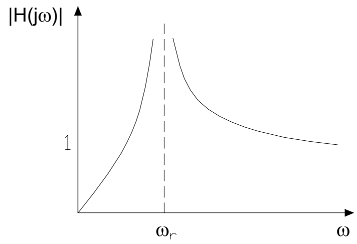
$$\dot U_1 = \dot I_1 \frac{1}{j\omega C} + \dot U_2 = \dot U_2\left(1-\frac{1}{\omega^2 LC}\right)$$

$$\rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{\dot U_2}{\dot U_2\left(1-\dfrac{1}{\omega^2 LC}\right)} = \frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - 1}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{(\omega^2 LC)^2}{(\omega^2 LC-1)^2}} = \frac{(\omega^2 LC)}{(\omega^2 LC - 1)}$$

$$\omega^2 LC - 1 = 0$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)| \to \infty$$



- Visoki propust - propušta visoke frekvencije. Pojačanje do ω_g treba biti konstantno, treba postojati konstantan omjer struje i napona (R) odnosno treba mrežu M opteretiti.

$$\dot U_1 = \dot I_1 \frac{1}{j\omega C} + \dot U_2$$

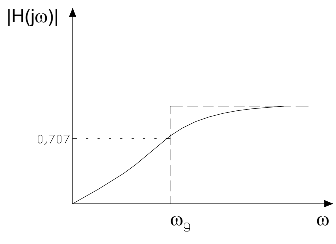
$$\dot U_2 = \dot I_2 R = \dot I_L j\omega L$$

$$\dot I_1 = \dot I_L + \dot I_2 = \frac{\dot U_2}{R} + \frac{\dot U_2}{j\omega L}$$

$$\dot U_1 = \frac{1}{j\omega C}\left(\frac{\dot U_2}{R} + \frac{\dot U_2}{j\omega L}\right) + \dot U_2 = \dot U_2\left(\frac{1}{j\omega RC} - \frac{1}{\omega^2 LC} + 1\right) = \dot U_2 \frac{\omega L - jR + j\omega^2 RLC}{j\omega^2 RLC}$$

$$H(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot U_2 \dfrac{\omega L - jR(1-\omega^2 LC)}{j\omega^2 RLC}} = \frac{j\omega^2 RLC}{\omega L - jR(1-\omega^2 LC)}$$

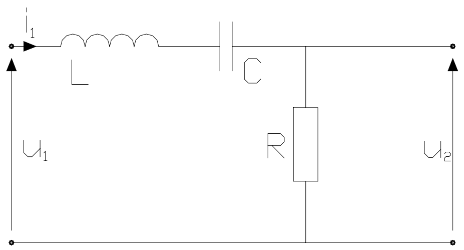
$$|H(j\omega)| = \frac{\omega RLC}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2(1-\omega^2 LC)^2}}$$

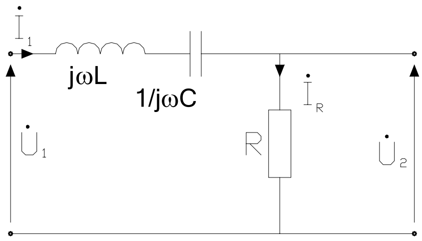


$$\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = 0$$

$$\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = \infty$$

118. Dokažite da u reaktivnom pojasnom propustu sheme spoja prema slici vrijedi da je: $\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega+j(\omega^2-\omega_0{}^2)}$, $B=2\alpha$, gdje je α faktor gušenja, a ω_0 vlastita frekvencija.





$$\dot U_2=\dot I_1R\Rightarrow \dot I_1=\frac{\dot U_2}{R}$$

$$\dot U_1=\dot I_1\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)+\dot U_2=\dot U_2\left(\frac{j\omega L}{R}+\frac{1}{j\omega CR}+1\right)$$

$$\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{\dot U_2}{\frac{\dot U_2}{R}\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}+R\right)}=\frac{R}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}+R}=\frac{R}{\frac{-\omega^2LC+1+j\omega RC}{j\omega C}}=\frac{j\omega RC}{-\omega^2LC+1+j\omega RC}\cdot\frac{\frac{1}{LC}}{\frac{1}{LC}}=\frac{j\omega\frac{R}{L}}{-\omega^2+\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0{}^2}+j\omega\underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha}}$$

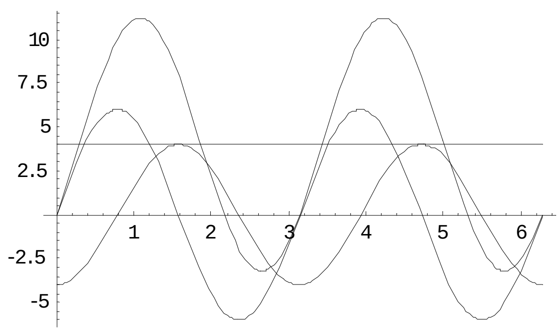
$$=\frac{j\omega 2\alpha}{j\omega 2\alpha+(\omega_0{}^2-\omega^2)}\cdot\frac{-j}{-j}=\frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega-j(\omega_0{}^2-\omega^2)}=\frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega+j(\omega^2-\omega_0{}^2)}$$

119. Obrazložite fizikalni smisao pojma jalove snage. Zašto dimenzije reaktivnih elemenata ovise o njihovoj jalovoj snazi?

Jalova snaga je mjera za količinu energije koja njiše između izvora i pasivnog jednoprilaza i ne sudjeluje u pretvorbi električne energije u drugi oblik.

Jalova snaga je amplituda trenutne snage i zato je mjera za dimenzije reaktivnih komponenti. Veći elementi se lakše rashlađuju.

120. Valni oblik trenutne snage jednoprilaza dan je izrazom $p=4(1-\cos 2\omega t)+6\sin 2\omega t, W$. Odredite djelatnu, jalovu i prividnu snagu jednoprilaza. Obrazložite fizikalni smisao prividne snage.



$$P_1=11{,}211102$$

$$P_2=3{,}211102$$

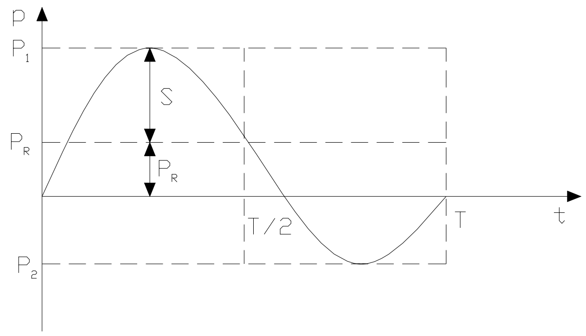
$$P=\frac{1}{2}(P_1-P_2)=4$$

$$S=\frac{1}{2}(P_1+P_2)=7.211102$$

$$Q=\sqrt{S^2-P^2}=\sqrt{P_1P_2}=5.9999$$

Prividna snaga je najveća moguća djelatna snaga koju bi jednoprilaz mogao preuzeti iz izvora pri danim efektivnim vrijednostima napona i struje jednoprilaza.

121. Zadana je pozitivna amplituda P_1 trenutne snage i negativna amplituda P_2 trenutne snage. Odredite djelatnu, jalovu i prividnu snagu jednoprilaza.



P - DJELATNA SNAGA - srednja vrijednost trenutne snage

$$P_1 - P = P_2 + P \qquad \Rightarrow P = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)$$

S - PRIVIDNA SNAGA - amplituda izmjeničnog dijela trenutne snage

$$S = P_1 - P = P_2 + P \qquad \Rightarrow S = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$$

Q - JALOVA SNAGA

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \qquad \Rightarrow Q = \sqrt{P_1 P_2}$$

122. Zašto za kompleksnu snagu vrijedi zakon o očuvanju, a ne vrijedi za prividnu snagu?

Ako u nekoj mreži vrijede Kirchoffovi zakoni vrijedi i zakon očuvanja energije što je posljedica Tellegenova teorema.

Zakon očuvanja energije vrijedi za linearne transformacije, a prividna snaga je dana izrazom $S = \sqrt{P_R^{\,2} + Q^2}$; korjenovanje nije linearna transformacija pa ne vrijedi zakon očuvanja prividne snage.

Kompleksna snaga dana je izrazom $\dot{S} = P_R + jQ$. Zbrajanje jest linearna transformacija pa vrijedi zakon očuvanja kompleksne snage.

Dokaz Kirchoffovih zakona za fazore:

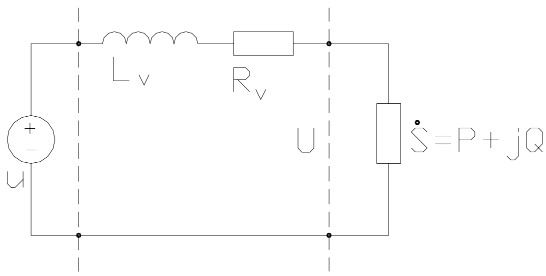
KZS: $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} i_k = 0$ za j-ti čvor

$\dot{I}_K = \hat{I}_K e^{j\varphi_k}$ → jednoharmonijska funkcija $i_K = \mathrm{Re}\{i_k e^{j\omega t}\}$ → linearno

KZN: $\sum_{k=1}^{n} b_{jk} \dot{U}_k = 0$, iz Tellegena: $\sum_{k=1}^{b} \frac{1}{2} \dot{U}_k \dot{I}_k = \sum_{k=1}^{b} \dot{S}_k = 0$

- u svakoj linearnoj vremenski nepromjenjivoj mreži u kojoj djeluju izvori na samo jednoj frekvenciji ω očuvana je kompleksna snaga.

123. Trošilo i izvor spojeni su parom vodova induktiviteta L_V i otpora R_V. Neka se na trošilu održava konstantna efektivna vrijednost napona U i djelatna snaga P. Dokažite da su gubici u prijenosu energije minimalni ako je jalova snaga trošila potpuno kompenzirana.



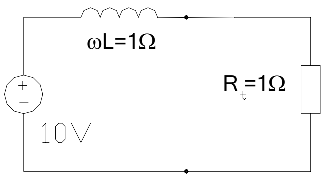
GUBICI PRIJENOSA: ono što se izgubilo na vodu u toku prijenosa energije.

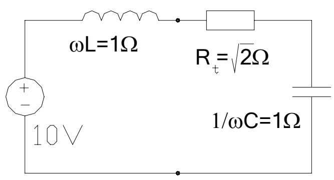
$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{U}$$

$$P_R = I^2 R_V = R_V \left[\underbrace{\frac{P^2}{U^2}}_{konst.} + \frac{Q^2}{U^2} \right]; \quad P_{R\min} \Rightarrow za\ Q = 0$$

- P i U su konstantni, pa će P_R biti minimalan ako je Q=0, odnosno kompenzirana jalova snaga.

124. Iz izmjeničnog naponskog izvora efektivne vrijednosti napona U=10V i impedancije ωL=1Ω napaja se u jednom slučaju radno trošilo, a u drugom slučaju radno-kapacitivno trošilo kako je to prikazano na slikama a) i b). Izračunajte u oba slučaja djelatne snage trošila i pripadne faktore snage. Iz dobivenih rezultata proizišao bi zaključak da se maksimalna djelatna snaga trošila pri istoj efektivnoj vrijednosti struje ne postiže uz faktor snage trošila $\cos\varphi_T = 1$. Je li taj zaključak ispravan?





$$Z = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{10}{\sqrt{2}} A$$

$$P_R = RI^2 = 1 \cdot \frac{100}{2} = 50W$$

$$Q_L = \omega L I^2 = 1\frac{100}{2} = 50VAr$$

$$\cos\varphi = \frac{P_R}{\sqrt{P_R^2 + Q_L^2}} = \frac{50}{\sqrt{50^2 + 50^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\varphi_T = \frac{P_R}{\sqrt{P_R^2}} = 1$$

$$U = I\sqrt{R_T^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{R_T^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} A$$

$$P_R = RI^2 = \sqrt{2}\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50\sqrt{2}W$$

$$Q_L = \omega L I^2 = 50VAr$$

$$Q_C = \frac{I^2}{\omega C} = 50VAr$$

$$\cos\varphi = \frac{P_R}{\sqrt{P_R^2 + (Q_L - Q_C)^2}} = 1$$

$$\cos\varphi_T = \frac{P_R}{\sqrt{P_R^2 + Q_C^2}} = \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{(50\sqrt{2})^2 + 50^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Da, ali maksimalnu djelatnu snagu koju bi jednoprilaz mogao uzeti iz izvora pri danim efektivnim vrijednostima struje i napona je pri $\cos\varphi = 1 \Rightarrow P_R = \frac{1}{2}R\hat{I}^2 = UI = S$.

125. Zašto je u pasivnim mrežama složenosti po volji na svakom prilazu fazni pomak napona i struje tog prilaza u granicama $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$?

Impedancija u pasivnim mrežama dana je izrazom: $Z(j\omega)=\frac{2P_R+j4\omega(\bar{\varepsilon}_L-\bar{\varepsilon}_C)}{\hat{I}^2}$

$P\geq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{Z(j\omega)\}\geq 0,\quad \operatorname{Im}\{Z(j\omega)\}\substack{\leq\\>}0$, pa je kut impedancije $\varphi=arctg\frac{4\omega(\bar{\varepsilon}_L-\bar{\varepsilon}_C)}{2P}$.

Ovaj kut je uvijek: $-\frac{\pi}{2}\leq\angle(Z(j\omega))\leq\frac{\pi}{2}$

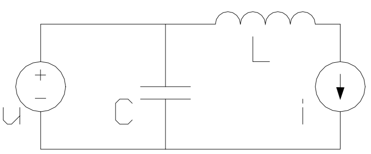
$\dot{U}=Z\cdot\dot{I}$, tako je maksimalni fazni pomak između U i I $-\frac{\pi}{2}\leq\angle(Z(j\omega))\leq\frac{\pi}{2}$.

126. Koji uvjeti moraju biti zadovoljeni da bi u jdenopirlaznoj mreži složenosti po volji nastupila fazna rezonancija, a koji da bi nastupila prava rezonancija.

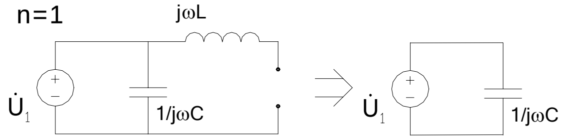
$Z(j\omega)=\frac{2P+j4\omega(\bar{\varepsilon}_L'-\bar{\varepsilon}_C')}{\hat{I}_1^2}$, Z(jω) - impedancija općeg jednoprilaza, $\bar{\varepsilon}_L'$ - srednja magnetska energija uskladištena u svim induktivitetima mreže, $\bar{\varepsilon}_C'$ - srednja elektrostatička energija uskladištena u svim kapacitetima mreže M.

- fazna rezonancija nastupa pod uvjetom da je $\boxed{\bar{\varepsilon}_L'=\bar{\varepsilon}_C'}$
- ako npr. je $\bar{\varepsilon}_L'\neq\bar{\varepsilon}_C'$, ali je razlika $|\bar{\varepsilon}_L'-\bar{\varepsilon}_C'|$mala u odnosu na $\bar{\varepsilon}_L'$odnosno $\bar{\varepsilon}_C'$, tada smo sigurni da smo u okolišu točke fazne rezonancije. Ako je istodobno $\frac{P}{\omega}$ malen u odnosu prema $\bar{\varepsilon}_L'$ odnosno $\bar{\varepsilon}_C'$, tada se sigurno nalazimo u blizini maksimuma amplitudnih karakteristika. (Uočimo da se pri $\alpha<<\omega_0$ fazna rezonancija podudara s "pravim" rezonancijama)

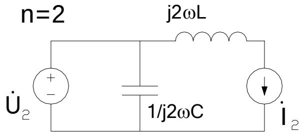
127. U mreži sheme prema slici poznat je valni oblik napona naponskog izvora $u=\hat{U}_1\sin\omega t+\hat{U}_2\cos 2\omega t$ te valni oblik struje strujnog uvora $i=\hat{I}_2\sin(2\omega t+\varphi_2)+\hat{I}_3\sin 3\omega t$. Nacrtati nadomjesnu shemu za prvi, drugi i treći harmonik.



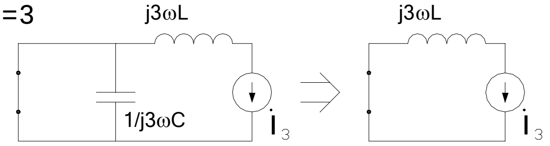
n=1



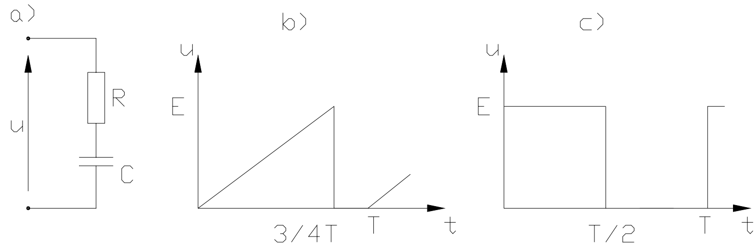
n=2



n=3



128. Odredite snagu otpora R ako je RC<<T i to ako je u jednom slučaju valni oblik napona u(t) kao na slici b), a u drugom slučaju kao na slici c).



a)

$$P = \int uidt$$

$$i = C\frac{du}{dt} \qquad u_C = u \qquad \text{zbog} \quad RC << T \quad u_C = u\left(1 - \underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\equiv 0}\right)$$

$$u = \begin{Bmatrix} \frac{4}{3}\frac{E}{T}t & 0 < t < \frac{3}{4}T \\ 0 & \frac{3}{4}T < t < T \end{Bmatrix} \qquad i = \begin{Bmatrix} \frac{4}{3}\frac{E}{T}C & 0 < t < \frac{3}{4}T \\ 0 & \frac{3}{4}T < t < T \end{Bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)du = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{3}{4}T} \frac{4}{3}\frac{E}{T}t \cdot \frac{4}{3}\frac{E}{T}C + 0$$

$$P = \frac{1}{T}\frac{16}{9}E^2C\frac{1}{T^2}\frac{1}{2}t^2\Big|_0^{\frac{3}{4}T} = \frac{8}{9}\frac{1}{T^3}E^2C\frac{9}{16}T^2 = \frac{1}{2}\frac{E^2C}{T}$$

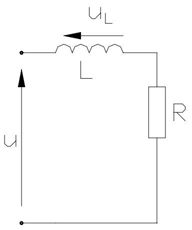
$$\boxed{P = \frac{1}{2}fE^2C}$$

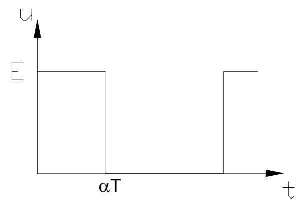
b)

$$u = \begin{Bmatrix} E & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{Bmatrix} \qquad i = \{0\}$$

$$P = 0 \qquad P_R = \frac{1}{T}CE^2 = CE^2 f$$

129. Odredite valni oblik napona na induktivitetu u ustaljenom stanju kao i srednju vrijednost struje izvora ako je $\frac{L}{R} >> T$.





$$u = L\frac{di}{dt} + iR$$

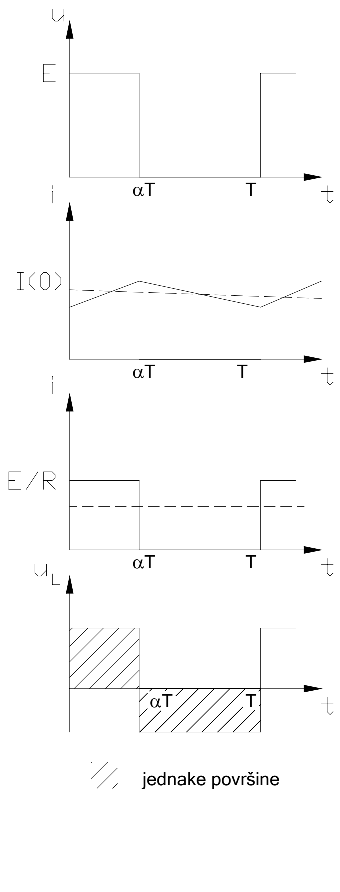
$i(t) \approx I(0) = \frac{U(0)}{R}$ → ustaljeno stanje

$$u = u_L + RI(0)$$

$$U_L = U - \alpha E$$

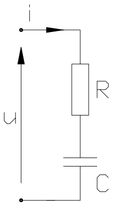
Srednja vrijednost je: $I(0) = \frac{U_0}{R} = \frac{\alpha E}{R}$

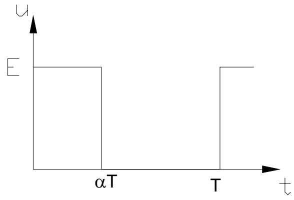
$$u_L = E\begin{Bmatrix} 1-\alpha & 0,\alpha T \\ -\alpha & \alpha T, T \end{Bmatrix}$$



jednake površine

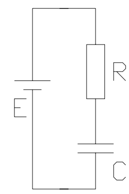
130. Odredite valni oblik struje izvora u ustaljenom stanju za dva granična slučaja a)T>>RC, b)T<<TC.

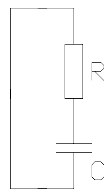




Dvije mreže linearne na odsječku

Interval A Interval B





$0 \le t \le \alpha T$ $\qquad \alpha T \le t \le T$

$$u = u_C + u_R$$

$$i_C R + u_C = u$$

$$\underbrace{\tau}_{RC}\frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

$$\tau\frac{du_{CA}}{dt} + u_{CA} = E \qquad \tau\frac{du_{CB}}{dt} + u_{CB} = 0$$

$$u_{CA} = K_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + E \qquad u_{CB} = K_2 e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}}$$

Određivanje K1 i K2:

1) periodički režim rada: $u_{CA}(0) = u_{CB}(T)$

2) dobro definirana mreža - svojstvo neprekinutosti napona na kapacitetu : $u_{CA}(\alpha T) = u_{CB}(\alpha T)$

$$\left.\begin{aligned} E + K_1 &= K_2 e^{-\frac{T(1-\alpha)}{\tau}} \\ E + K_1 e^{-\frac{\alpha T}{\tau}} &= K_2 \end{aligned}\right\} 2\ jed.s\ 2\ nep.$$

$$K_1 = -E\frac{1-e^{-\frac{T(1-\alpha)}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}, \qquad K_2 = E\frac{1-e^{-\frac{\alpha T}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

$$\boxed{u_{CA} = E - E\frac{1-e^{-\frac{T(1-\alpha)}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad u_{CB} = E\frac{1-e^{-\frac{\alpha T}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}}}$$

$$i = i_C = \frac{u-u_C}{R} = \begin{cases} A \to & \dfrac{E}{R}\cdot\dfrac{1-e^{-\frac{T(1-\alpha)}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ B \to & -\dfrac{E}{R}\cdot\dfrac{1-e^{-\frac{\alpha T}{\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{\tau}}}e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}} \end{cases}$$

a) $T >> \tau, \quad i_C'$

$$e^{-T/\tau} = \frac{1}{e^{T/\tau}} = \frac{1}{e^{\infty}} \to 0$$

$$e^{-\frac{T(1-\alpha)}{\tau}} \to 0$$

$$e^{-\alpha T/\tau} \to 0$$

$$\rightarrow \boxed{i_C' = \begin{cases} A \to & \dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ B \to & -\dfrac{E}{R}e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}} \end{cases}}$$

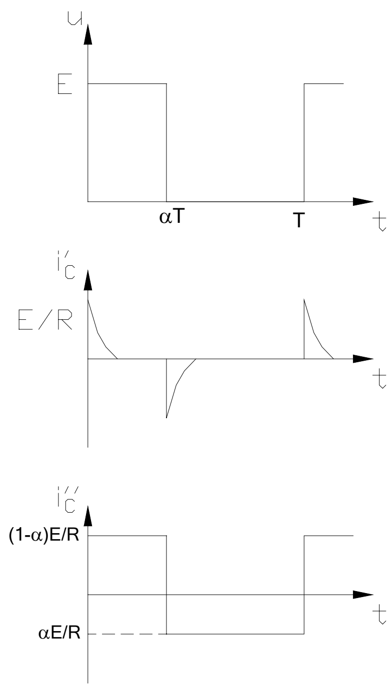
b) $T << \tau \quad i_C''$

$$e^{-T/\tau} \to 1$$

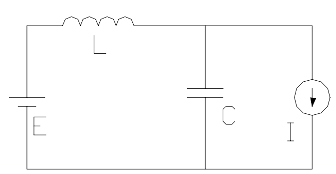
$$1-e^{-T/\tau} \to 1-1+\frac{T}{\tau} \to \frac{T}{\tau}$$

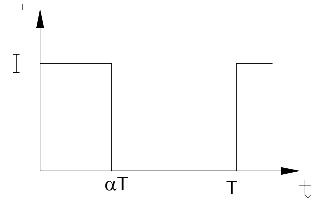
$$1-e^{-\frac{T(1-\alpha)}{\tau}} \to 1-1+\frac{1-\alpha}{\tau}T \to (1-\alpha)\frac{T}{\tau}$$

$$\boxed{i_C'' = \begin{cases} A \to & \dfrac{E}{R}(1-\alpha) \\ B \to & -\dfrac{\alpha E}{R} \end{cases}}$$



131. Odredite efektivnu vrijednost struje kapaciteta C ako je $T << 2\pi\sqrt{LC}$. Za koju se vrijednost α postiže najveća efektivna vrijednost struje I_C.





$$\left.\begin{array}{l} E = U_L(0) + U_C(0) \\ \underline{I_L(0) = I_C(0) + I(0)} \end{array}\right\} KZ\ za\ srednje\ vrijednosti$$

$$\left.\begin{array}{l} U_C(0) = E \\ I_L(0) = I(0) \end{array}\right\} jer\ T << 2\pi\sqrt{LC}$$

Pobuda je periodičer pa : $I_C(0) = U_L(0) \equiv 0$

$$u_C = E$$

$$i_L = I(0) = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} I dt = \frac{I}{T}\alpha T = I\alpha$$

$$i_C = i_L - i = \left\{\begin{array}{ll} \alpha I - I = I(\alpha - 1) & 0 \le t \le \alpha T \\ \alpha I - 0 = \alpha I & \alpha T < t \le T \end{array}\right\}$$

$$I_C = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T {i_C}^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\alpha}(\alpha I - I)^2 dt + \frac{1}{T}\int_{\alpha T}^T (\alpha I)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}(\alpha I - I)^2 \alpha T + \frac{1}{T}(\alpha I)^2 T(1-\alpha)}$$

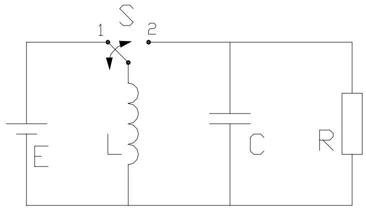
$$I_C = \sqrt{\alpha I^2(\alpha - 1)^2 + \alpha^2 I^2 (1-\alpha)} = \sqrt{\alpha I^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1 + a - \alpha^2)} = \sqrt{\alpha I^2(1-\alpha)} = I\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$$

$$\frac{dI_c}{d\alpha} = 0 \quad \text{za najvećajefektivnu vrijednost}$$

$$I\frac{(1-\alpha) - \alpha}{2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-2\alpha}{2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \quad \Rightarrow \quad 1 = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

132. Odredite valni oblik napona na induktivitetu te srednju vrijednost napona na otporu R, ako je u periodi rada T sklopka S u položaju 1 αT vremena, a u položaju 2 (1-α)T vremena.

$RC >> T$

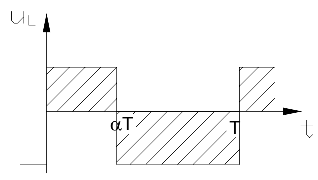


$$U_L(0) \equiv 0$$

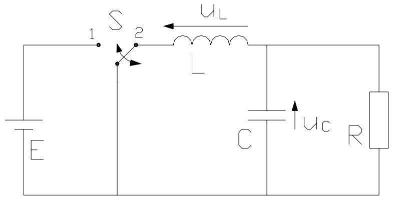
$$U_C = konst. \quad RC >> T \quad \Rightarrow u_L \approx u_C$$

$$E\alpha T = u_C(1-\alpha)T$$

$$U_C = U_R(0) = E\frac{\alpha}{1-\alpha}$$



133. Odredite valni oblik napona na induktivitetu L i kapacitetu C, ako je u periodi rada T sklopka S u položaju 1 αT vremena, a položaju 2 (1-α)T vremena.

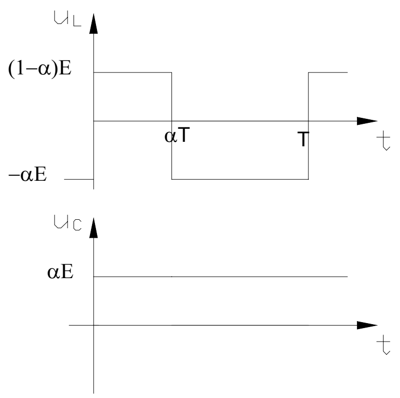


$$\frac{L}{R} >> T$$
$$RC >> T$$

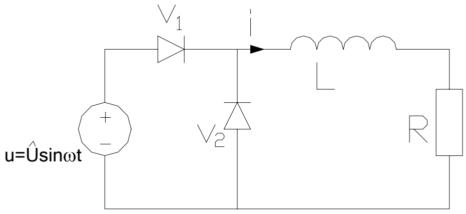
$$i_L \approx I(0) = \frac{\alpha E}{R}$$
$$U_C = U_R \approx RI(0) = \alpha E$$
$$U_L + U_C - U = U - \alpha E = (1-\alpha)E$$

U_C je konstantna i ne mijenja se preklopom sklopke pa i kroz R teče konstantna struja.

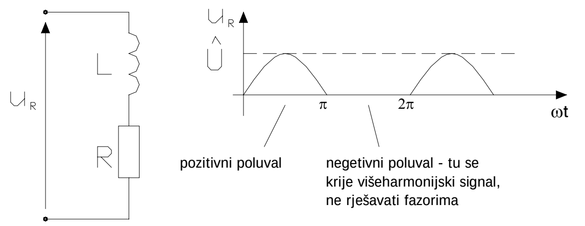
$$U_\alpha = E - \alpha E = (1-\alpha)E$$



134. Odredite valni oblik struje trošila za dva granična slučaja a) $\frac{L}{R} << T$, b) $\frac{L}{R} >> T$.

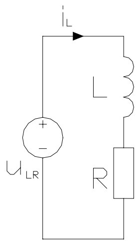


Nadomjesna shema



V_1 i V_2 su idealne

a) $\frac{L}{R} >> T$



$$u_{LR} = u_L + u_R$$

$$u_{LR} = L\frac{di_L}{dt} + Ri_L \Big/ : R$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{u_{LR}}{R} \Big/ \frac{1}{T}$$

$$\frac{L/R}{T}\frac{di_L}{dt} = \underbrace{\left(\frac{u_{LR}}{R} - i_L\right)}_{konačon}\frac{1}{T}$$

$$\frac{L}{R} >> T \Rightarrow \left(\frac{L/R}{T}\right) \to \infty$$

$$\text{mora } \frac{di_L}{dt} \to 0, \text{tj. } i_L = konst. = I_L = I_L(0)$$

$$U_{LR}(0) = U_L(0) + U_R(0)$$

$$U_L(0) \equiv 0$$

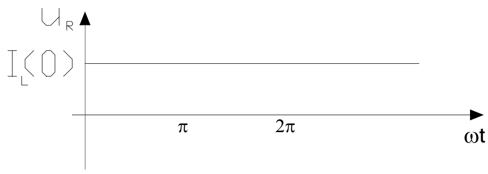
$$U(0) = U_R(0) = I_L(0)R$$

$$i_L = konst \quad I_L(0)$$

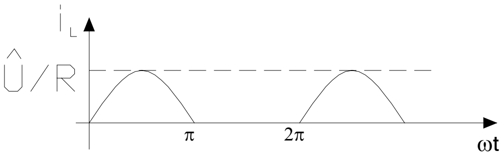
$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \hat{U}\sin\omega t \, d\omega t =$$

$$U(0) = \frac{\hat{U}}{2\pi}(\cos\omega t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\hat{U}}{2\pi}[1-(-1)] = \frac{\hat{U}}{\pi}$$

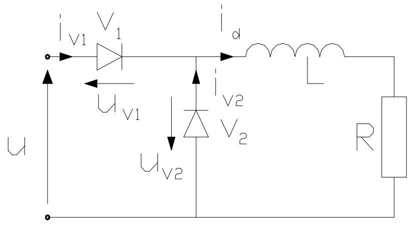
$$\boxed{I_L(0) = \frac{\hat{U}}{\pi R}}$$

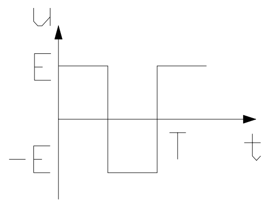


b) $\frac{L}{R} << T$ ustaljeno stanje je nastupilo trenutno, trošilo je čisti otpor tj. $i = \frac{U_{LR}}{R}$, te je valni oblik struje jednak kao i valni oblik napona trošila.



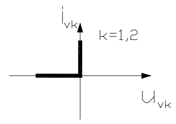
135. Za mrežu sheme spoja prema slici objasnite postupak određivanja tipa periodičkog rješenja ako je L/R>T/2.





KZN, KZS

$$u = u_{V1} + u_d$$
$$0 = u_{V2} + u_d$$
$$i_d = i_{V1} + i_{V2}$$
$$u_d = L\frac{di_d}{dt} + R_d i_d$$



Postoje 4 moguća načina intervala rada:

a) V_1 i V_2 vode

b) V1 ne vodi, V2 ne vodi

c) V_1 vodi, V_2 ne vodi

d) V_1 ne vodi, V_2 vodi

a) $u_{v2}=0$ → $u_d=0$ & $u_{v1}=0$ → u=0, a u≠0 - nije moguć

b) $i_d=0$ → $u_d=0$ → $u_{v2}=0$ (moguće u ishodištu) , $u_{v1}=u$ (ne vodi ako je negativna poluperioda). b) moguće ako **U<0**

c) $u_{v1}=0$, u_{v2} - samo ako je u_d pozitivan. ako je u_d pozitivan moguće samo ako je **U>0.**

d) $u_{v2}=0$ → $u_d=0$ → ne smije voditi v1→ $u_{v1}<0$ → **U<0.**

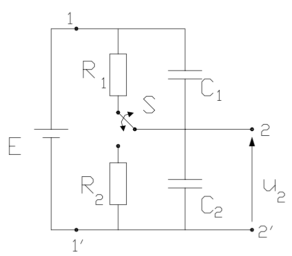
- ako U<0 moguća rješenja B, BD, D, DB.

Rješenje **B i BD nemoguće** jer pri slučaju C, U>0 → imamo struju i_d, a pri U<0 nemamo struju odnosno tada bi bio srušen zakon o očuvanju toka. Slučaj **D, DB su mogući**, struja i dalje teče i može pasti na nulu.

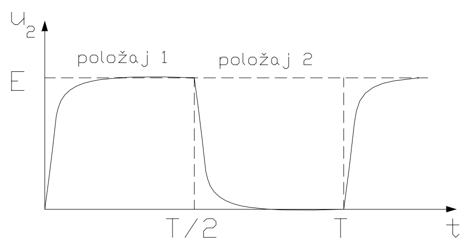
U pozitivnoj polu periodi moguć je samo slučaj C, a u negativnoj zbog $\frac{L}{R} > \frac{T}{2}$ slučaj D.

Sada dobivamo: $L\frac{di}{dt} + Ri = \begin{Bmatrix} E & 0 < t < T/2 \\ 0 & T/2 < t < T \end{Bmatrix}$

136. Periodički upravljana sklopka S polovinu periode T je u položaju 1, a drugu polovinu u položaju 2. Sve vremenske konstante kruga zanemarive su u odnosu na trajanja periode T. A) nacrtajte valni oblik napona u_2(t). B) odredite ukupnu snagu disipiranu na otporima R_1 i R_2.

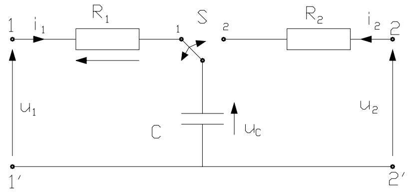


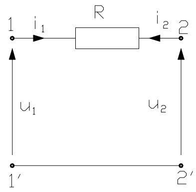
$$E = iR_1 + \frac{1}{C}\int idt \qquad 0 < t < \frac{T}{2}$$
$$E = i(R_1 + R_2) \qquad \frac{T}{2} < t < T$$
$$P = \frac{W_R}{T}$$
$$P_{R1+R2} = E^2(C_1 + C_2)f$$



$$f = \frac{1}{T} \qquad \begin{matrix} R_1C_1 << T \\ R_2C_2 << T \end{matrix}$$

137. Objasnite kako se s pomoću sklopkama preklapanim kapacitetom realizira otpor.





Neka je S polovinu periode u 1, polovinu u 2. $R_1C << T$

$$R_1C\frac{du_C}{dt}+u_C=\begin{Bmatrix} u_1 & 0\le t\le T/2 \\ u_2 & T/2\le t\le T\end{Bmatrix}$$

Perioda T je dovoljno kratka da se u_1 i u_2 unutar nje ne promjene.

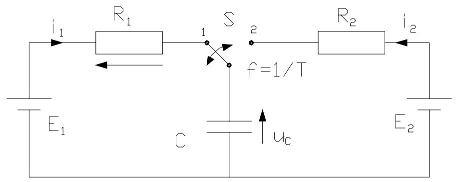
$$u_C=\begin{Bmatrix} u_1 & 0\le t\le T/2 \\ u_2 & T/2\le t\le T\end{Bmatrix}$$

Količina naboja prenesena kapacitetom od prilaza 1 do 2 u periodi T jednaka je:

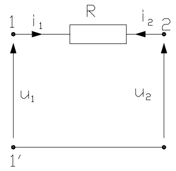
$$q=C(u_1-u_2) \quad i=\frac{dq}{dt}=\frac{C(u_1-u_2)}{T}=fC(u_1-u_2)=i\ ,$$

a to je ekvivalentno prolazu iste količine naboja kroz otpornik otpornosti $R=\frac{1}{jC}$.

138. Odredite ukupnu snagu disipiranu na R_1 i R_2 ako je S trećinu periode rada T u položaju 1, a dvije trećine periode u 2.



$$R_1C << T$$
$$R_2C << T$$



$$0\le t\le\frac{T}{3}$$
$$R_1i_1+u_C=E_1$$
$$R_1C\frac{du_C}{dt}+u_c=E_1$$

$$\frac{T}{3}\le t\le T$$
$$R_2C\frac{du_C}{dt}+u_C=E_2$$

$$\Rightarrow u_C\approx\begin{Bmatrix} E_1 & 0\le t\le T/3 \\ E_2 & T/3\le t\le T\end{Bmatrix},\ zbog\ \begin{matrix} R_1C<<T \\ R_2C<<T\end{matrix}$$

- količina naboja prenesena od E_1 do E_2 u T:

$$C=\frac{q}{U}\Rightarrow w=CU$$
$$q=C(E_1-E_2)$$
$$\frac{C(E_1-E_2)}{T}=fC(E_1-E_2)=i \qquad i=\frac{U}{R}$$

- zbog 1 nabijanja i 1izbijanja C u periodi: $W_R=2\frac{1}{2}CU^2=\frac{q}{U}U^2=qU=C(E_1-E_2)U=C(E_1-E_2)^2$

- disipacija na otporima R_1 i R_2: $P=\frac{W_R}{T}=fC(E_1-E_2)^2$

139. Zašto je rješenje nelinearne diferencijalne jednadžbe, kojom opisujemo ustaljeno stanje neke mreže, dobiveno primjenom načela o ravnoteži harmonijskih članova uvijek približno rješenje?

Diferencijalna jednadžba se ne može u potpunosti riješiti jer nakon što postavimo jednadžbu kruga i pretpostavimo rješenje dolazimo do izvora kod kojeg bi prema načelu ravnoteže harmonijskih članova trebali izjednačiti koeficijente s lijeve i desne strane jednadžbe, a zbog nelinearnih elemenata uvijek se jave članovi koji nemaju svoj par na desnoj strani, tj. član koji ne možemo uravnotežiti.

140. Odrediti osnovni harmonijski član struje induktiviteta ako je zadana karakteristika induktiviteta $i = a\phi + b\phi^3$, te $\phi = \hat{\phi}\sin\omega t$.

$$i = a\hat{\phi}\sin\omega t + b\hat{\phi}^3\sin^3\omega t \qquad \sin^3\omega t = \frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\sin 3\omega t$$

$$i = a\hat{\phi}\sin\omega t + b\hat{\phi}^3\frac{3}{4}\sin\omega t - b\hat{\phi}^3\frac{1}{4}\sin 3\omega t$$

$$\hat{I}(1) = a\hat{\phi} + \frac{3}{4}b\hat{\phi}^3$$

141. Odredite valni oblik napona i struje induktiviteta karakteristike $i = a\varphi + b\varphi^3$, ako je zadan valni oblik toka $\varphi = \hat{\phi}\cos\omega t$.

$$i = a\hat{\phi}\cos\omega t + b\hat{\phi}^3\cos^3\omega t \qquad \cos^3\omega t = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$$

$$i = a\hat{\phi}\cos\omega t + b\hat{\phi}^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t\right) = a\hat{\phi}\cos\omega t + b\hat{\phi}^3\frac{3}{4}\cos\omega t + b\hat{\phi}^3\frac{1}{4}\cos 3\omega t$$

$$\underline{\hat{I}(1) = a\hat{\phi} + \frac{3}{4}b\hat{\phi}^3}$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = l\left[-a\hat{\phi}\omega\sin\omega t - \frac{3}{4}b\hat{\phi}^3\omega\sin\omega t - \frac{3}{4}b\hat{\phi}^3\omega\sin 3\omega t\right] = -L\omega\left[\left(a\hat{\phi} + \frac{3}{4}b\hat{\phi}^3\right)\sin\omega t + \frac{3}{4}b\hat{\phi}^3\sin 3\omega t\right]$$

142. Na nelinearni element mreže karakteristike $y = ax^3$ narinut je poticaj $x = X(0) + \hat{X}(1)\sin\omega t$. Dokažite da istosmjerna komponenta odziva Y(0) ovisi o X(0), ali i o $\hat{X}(1)$. Pod kojim se uvjetom u odzivu pojavljuju parni harmonijski članovi.

$$y = a\left[X^3(0) + 3X^2(0)\hat{X}(1)\sin\omega t + 3X(0)\hat{X}^2(1)\sin^2\omega t + \hat{X}^3(1)\sin^3\omega t\right]$$

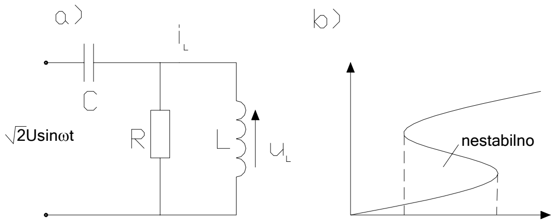
$$y = a\left[X^3(0) + 3X^2(0)\hat{X}(1)\sin\omega t + 3X(0)\hat{X}^2(1)\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) + \hat{X}^3(1)\left(\frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\sin 3\omega t\right)\right]$$

$$y = a\left[X^3(0) + 3X^2(0)\hat{X}(1)\sin\omega t + \frac{3}{2}X(0)\hat{X}^2(1) - \frac{3}{2}X(0)\hat{X}^2(1)\cos 2\omega t + \hat{X}^3(1)\frac{3}{4}\sin\omega t - \hat{X}^3(1)\frac{1}{4}\sin 3\omega t\right]$$

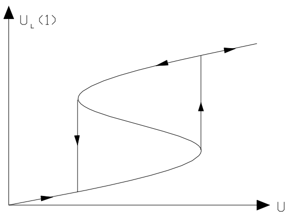
$$y(0) = a\left[X^3(0) + \frac{3}{2}X(0)\hat{X}^2(1)\right] = aX(0)\left[X^2(0) + \frac{3}{2}\hat{X}^2(1)\right]$$

- parni harmonijski članovi pojavljuju se ako se pobuda (poticaj) sastoji od zbroja ili razlike istosmjerne komponente i jednoharmonijske komponente ili ako je istosmjerna komponenta ± dvoharmonijska komponenta.

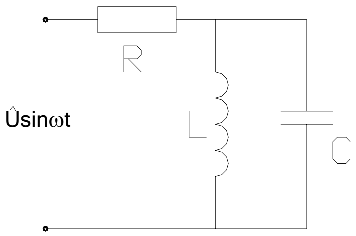
143. Za mrežu shemem spoja prema slici a) s nelinearnim induktivitetom L izračunata je i nacrtana karakteristika $U_L(1) = f(U)$ prikazana na slici b). Je li moguće mjerenjem efektivnih vrijednosti $U_L(1)$ i U u potpunosti rekonstruirati izračunatu karakteristiku?



- uz stalni faktor gušenja α i fiksiranu frekvenciju poticaja ω i promjenu amplitude poticaja $\hat{X}$ dobiva se prikazana karakteristika



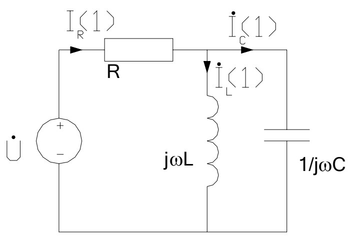
144. Odredite efektivnu vrijednost osnovnog harmonijskog člana napona na C ako je poznata karakteristika nelinearnog induktiviteta $i_L(1) = \alpha U_L(1) + \beta U_L^{3}(1)$ gdje su $I_L(1)\, i\, U_L(1)$ efektivne vrijednosti osnovnih harmonijskih članova struje i napona nelinearnog induktiviteta.



- monoharmonijska funkcija

Rješenje tražimo u frekvencijskom području →

L - je nelinearan, opisujemo ga funkcijom, ne brojem



KZN:
$$\dot{U} = R\dot{I}_R(1) + \dot{U}_C$$
$$\dot{U}_C(1) = \dot{U}_L(1)$$

KZS:
$$\dot{I}_R(1) = \dot{I}_L(1) + \dot{I}_C(1) = \frac{\dot{U}_L(1)}{jX_L} + j\omega C\dot{U}_C(1)$$

$$\dot{U} = \dot{U}_C(1) + \dot{U}_L(1)\left[-j\frac{R}{X_L} + j\omega RC\right]$$

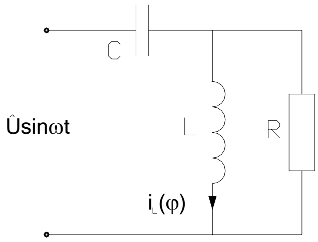
$$X_L = \frac{\dot{U}_L(1)}{\dot{I}_L(1)} = \frac{\dot{U}_C(1)}{\alpha\dot{U}_C(1) + \beta\dot{U}_C^{3}(1)}$$

$$\boxed{\dot{U} = \dot{U}_C(1)\left[j\omega RC - jR(\alpha + j\beta\dot{U}_C^{2}(1)\right]}$$

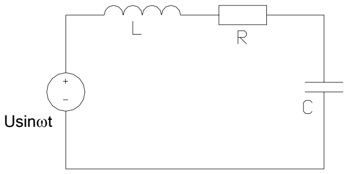
Efektivne vrijednosti:

$$U = \sqrt{U_C^{2}(1)\left[1 + R^2\left(\omega L - \alpha\beta U_C^{2}(1)\right)^2\right]}$$

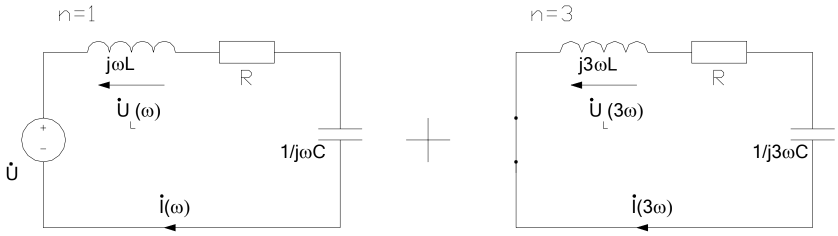
145. Pokažite da u mreži prema slici može u nelinearnom induktivitetu u ustaljnom stanju rada postojati istosmjerni tok.



146. Zbog nelinearnog induktiviteta struja RLC – kruga u ustaljenom stanju dana je izrazom $i = \hat{I}(1)\sin(\omega t - \varphi_1) + \hat{I}(3)\sin(3\omega t - \varphi_3)$. Nacrtajte fazorski dijagram za treći harmonijski član. Komentirajte rezultat.



Nadomjesne mreže po harmonicima

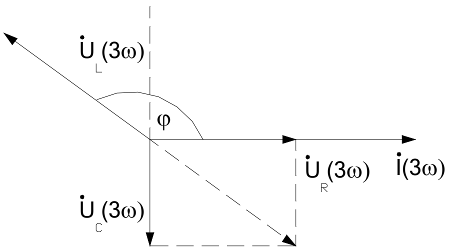


- svaki naponski izvor je popćeni kratki spoj (za harmonik kojeg nema će izvor biti K.S.)

n=3, zbog lakšeg crtanja φ_3=0

KZN: $\boxed{\dot{U}_L(3\omega) + \dot{U}_R(3\omega) + \dot{U}_C(3\omega) = 0}$

$$\sum_{n=1}^{3} U_n(3\omega) = 0$$



$\varphi - kut\ izmeđz\ \dot{I}(3\omega), \dot{U}_L(3\omega)$

-element mreže: $\begin{matrix} pasivan\ ako\ \ \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ aktivan\ ako\ \ \varphi \ge \dfrac{\pi}{2} \end{matrix}$

- kut φ je veći od 90° i induktivitet se ponaša kao aktivni element mreže.
- induktivitetu je omogužena pretvorba snage na frekvenciji

147. U linearnoj vremenski nepromjenjivoj mreži djeluju dva naponska izvora. Koji uvjet mora biti zadovoljen da bi u toj mreži i za djelatne snage vrijedilo načelo superpozicije?

Superpozicija: $P_{uk} = P_1 + P_2$,

P_1 - disipirana snaga na otporima ako djeluje izvor u_1.

P_2 - disipirana snaga na otporima ako djeluje izvor u_2.

$$P_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T}\int_0^T i_k^{\,2}(u_1) R_k dt$$

$$P_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T}\int_0^T i_k^{\,2}(u_2) R_k dt$$

$i_k(u_1)$ - struja k-te grane ako u mreži djeluje samo u_1.

$i_k(u_2)$ - struja k-te grane ako u mreži djeluje samo u_2.

Djelatna snaga mreže: $P = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T}\int_0^T \left(i_k(u_1) + i_k(u_2)\right)^2 R_k dt$

Superpozicija za djelatne snage: $P = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T}\int_0^T \left(i_k^{\,2}(u_1) + i_k^{\,2}(u_2)\right) R_k dt$

Da bi superpozicija vrijedila: $P = P_{uk}$ → $\int_0^T \left(i_k(u_1) + i_k(u_2)\right)^2 R_k dt = \int_0^T \left(i_k^{\,2}(u_1) + i_k^{\,2}(u_2)\right) R_k dt$

$\boxed{\Rightarrow 2\int_0^T i_k(u_1) i_k(u_2) \equiv 0}$, ako su struje ortogonalne (npr. cosωt i sinωt, k≠1)

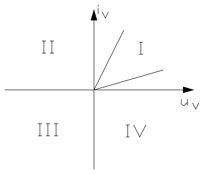
148. Zašto ne možemo izgraditi ispravljač koji bi se sastojao samo od reaktivnih komponenti?

Svojstvo ispravljača je da se ponaša kao istosmjerni izvor, tj. istosmjerna snaga mora biti negativna.

Istosmjerna snaga linearnih i nelinearnih vremenskih nepromjenjivih reaktivnih elemenata jednaka je nuli, pa se ti elementi ne mogu upotrijebiti za izradu ispravljača.

$$P_L(0) < 0 \quad U_L(0)I_L(0) = 0$$
$$P_C(0) < 0 \quad U_C(0)I_C(0) = 0$$

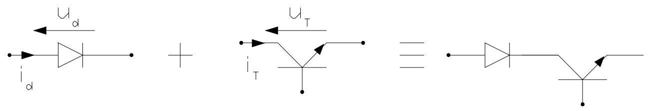
149. Zašto se ne može izgraditi ispravljač koji bi kao komponente za pretvorbu djelatne snage imao samo bipolarne tranzistore?

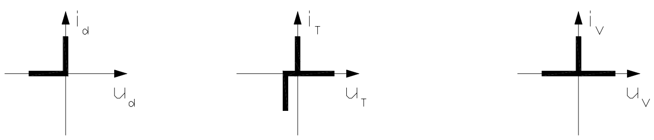


Za bilo koji trenutak vrijedi $U_V(0)I_V(0) > 0$

Za ispravljač je potreban da vrijedi uvjet $U_V(0)I_V(0) < 0$, a to se s bipolarnim tranzistorom ne može postići.

150. Objasnite pretvaračka svojstva serijskog spoja diode i bipolarnog tranzistora u sklopnom načinu rada.





$$P_V(0) = U_V(0)I_V(0) \lessgtr 0$$

iz ovog uvjeta je vidljivo da se izmjenična snaga može pretvoriti u istosmjernu i obrnuto.

151. Dokažite da za djelatnu snagu na frekvenciji vrijedi zakon o očuvanju.

Zakon očuvanja srednje djelatne snage: $\sum_{\alpha=1}^{b} \frac{1}{T}\int_0^T u_\alpha i_\alpha dt = \sum_{\alpha=1}^{b} P_\alpha = 0, \quad b - broj\ grana$

Ovaj izraz vrijedi i za svaku komponentu na bilo kojoj frekvenciji $\omega_n = n\omega,\ n = 0,1,2...$

Vrijede KZ pa vrijedi i Tellegenov teorem. Treba pokazati da vrijede KZ za komponente rastava valnih oblika napona i struje u Fourierovom redu.

$$\sum_{\alpha=1}^{b} a_{j\alpha} i_\alpha(t) = 0 \quad za\ j - ti\ čvor$$
$$\sum_{\alpha=1}^{b} b_{j\alpha} u_\alpha(t) = 0 \quad za\ j - tu\ petlju$$

$$\sum_{\alpha=1}^{b} a_{j\alpha} \hat{I}_\alpha(n) = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{b} a_{j\alpha} \hat{J}_\alpha(n) = 0$$
$$\sum_{\alpha=1}^{b} b_{j\alpha} \hat{U}_\alpha(n) = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{b} a_{j\alpha} \hat{V}_\alpha(n) = 0$$

u skladu s Tellegoenovim teoremom slijedi:

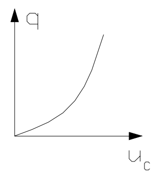
$$\sum_{\alpha=1}^{b} \hat{U}_\alpha(n)\hat{I}_\alpha(n) = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{b} \hat{V}_\alpha(n)\hat{J}_\alpha(n) = 0, \ n = 0,1,2$$

polazna je tvrdnja dokazana: $\sum_{\alpha=1}^{b} P_\alpha(n) = 0$

Ako se neki element mreže ponaša kao izvor na frekvenciji ω_n, neki drugi element mora biti trošilo na toj frekvenciji.

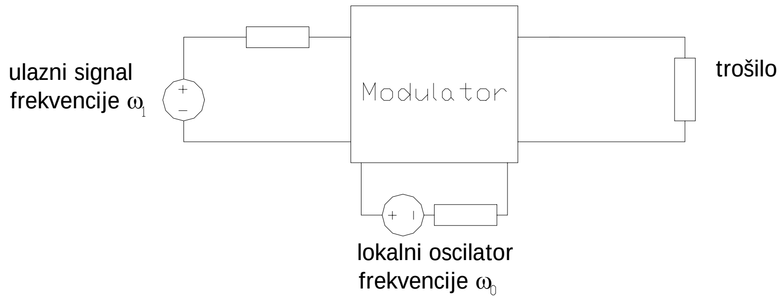
152. Nelinearni kapacitet zadan je karakteristikom $q = u_C{}^2$ **. Obrazložite osnovna energetska svojstva ovog kapaciteta ako je:** $u_C = \hat{U}_C(1)\sin\omega t + \hat{U}_C(2)\sin 2\omega t + \hat{U}_C(3)\sin 3\omega t$

- ovaj kapacitet može generirati više harmonike, moguća pretvorba snage na frekvenciji.



153. Nelinearni kapacitet zadan je sa $u_C = aq + bq^2$ **. Odredite iznos djelatne snage koju ovaj kapacitet prima, odnosno predaju drugim dijelovima ako je poznato** $i_C = \hat{I}_C(1)\sin\omega t + \hat{I}_C(2)\cos 2\omega t$ **.**

154. Objasnite Hartleyev efekt.



$$P_1 + P_0 + P_{mn} = 0 \qquad m, n \in Z$$

$$\frac{P_1}{\omega_1} + \frac{mP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0 \qquad \frac{P_0}{\omega_0} + \frac{nP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0$$ - Manley-Posove jednadžbe za slučaj 3 frek.

- za slučaj m=-1, n=1, $\omega_0 > \omega_1$ $\qquad P_{11} = P_-$

$$\frac{P_1}{\omega_1} - \frac{P_-}{\omega_0 - \omega_1} = 0 \qquad \frac{P_0}{\omega_0} + \frac{P_-}{\omega_0 - \omega_1} = 0$$

$$P_- < 0, P_0 > 0, P_1 < 0$$

Lokalni oscilator daje energiju izlaznom krugu, ali i ulaznom krugu. Ovo znači da nelinearni kapacitet prima energiju na frekvenciji lokalnog oscilatora ω_0 i vraća dio energije generatora signala. Ovo je isto kao da je u ulazni krug uveden negativni otpor koji nadmašivši pozitivne otpore generatora ulaznog signala može dovesti do nestabilnosti rada modulatora.

155. Pod kojim je uvjetom skup svih harmonijskih članova struje jednoprilaza jednak skupu svih harmonijskih članova napona jednoprilaza?

Neka je M konačan skup harmonijskih članova struje, a N konačan skup harmonijskih članova napona. Samo u slučaju kada spojna mreža nije modelirana idealnim izvorom M=N jer tada skup M nema članova, a ni N nema tada članova.

156. Odredite jalovu snagu $Q_\alpha(n)$ elementa mreže α na n-tom harmonijskom članu ako su valni oblici napona i struje na n-tom harmonijskom članu dani kao:

$$u_\alpha(n,t) = \hat{U}_\alpha(n)\cos n\omega t + \hat{V}_\alpha(n)\sin n\omega t$$
$$i_\alpha(n,t) = \hat{I}_\alpha(n)\cos n\omega t + \hat{J}_\alpha(n)\sin n\omega t$$.

$$P_\alpha(n) = \frac{1}{T}\int_0^T u_\alpha(n,t) i_\alpha(n,t)dt = \frac{1}{2}\left[\hat{U}_\alpha(n)\hat{I}_\alpha(n) + \hat{V}_\alpha(n)\hat{J}_\alpha(n)\right]$$

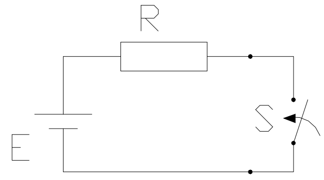
$$P_\alpha^{\ 2}(n) = \frac{1}{4}\left[\hat{U}_\alpha^{\ 2}(n)\hat{I}_\alpha^{\ 2}(n) + 2\hat{U}_\alpha(n)\hat{I}_\alpha(n)\hat{V}_\alpha(n)\hat{J}_\alpha(n) + \hat{V}_\alpha^{\ 2}(n)\hat{J}_\alpha^{\ 2}(n)\right]$$

$$S_\alpha^{\ 2}(n) = \frac{1}{4}\left[\hat{U}_\alpha^{\ 2}(n) + \hat{V}_\alpha^{\ 2}(n)\right]\left[\hat{I}_\alpha^{\ 2}(n) + \hat{J}_\alpha^{\ 2}(n)\right]$$

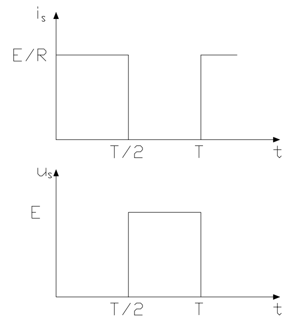
$$Q_\alpha^{\ 2}(n) = S_\alpha^{\ 2}(n) - P_\alpha^{\ 2}(n) = \frac{1}{4}\left[U^2I^2 + U^2J^2 + V^2I^2 + V^2J^2\right] - \frac{1}{4}\left[U^2I^2 + V^2J^2 + 2UIVJ\right]$$

$$Q_\alpha^{\ 2}(n) = \frac{1}{4}\left[\hat{V}_\alpha(n)\hat{I}_\alpha(n) - \hat{U}_\alpha(n)\hat{J}_\alpha(n)\right]^2 \Rightarrow \underline{Q_\alpha(n) = \frac{1}{2}\left[\hat{V}_\alpha(n)\hat{I}_\alpha(n) - \hat{U}_\alpha(n)\hat{J}_\alpha(n)\right]}$$

157. Istosmjerni izvor napona E i unutarnjeg otpora R opterećen je trošilom koje se sastoji od periodički upravljene sklopke S koja je polovinu periode rada T uklopljena, a polovinu isklopljena. A) nacrtajte valne oblike napona i struje sklopke, b) postoji li prijenos energije između izvora i trošila, c) postoji li jalova snaga trošila.



a)



b)

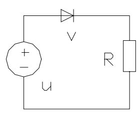
$$P_S = \frac{1}{T}\int_0^T u_S i_S dt = 0$$

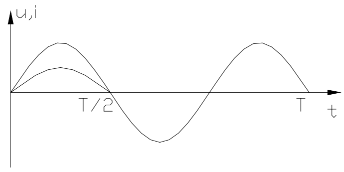
c)

$$S_S = U_S I_S = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt \cdot \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \frac{1}{T}\sqrt{E^2\left(T-\frac{T}{2}\right)\cdot\frac{E^2}{R^2}\frac{T}{2}}$$

$$S_S = \frac{1}{T}\sqrt{E^2\frac{T}{2}\frac{E^2}{R^2}\frac{T}{2}} = \frac{1}{T}\frac{T}{2}\frac{E^2}{R} = \frac{E^2}{2R} = Q_S$$

158. Odredite djelatnu, jalovu i prividnu snagu te faktor snage trošila R.





$$u = \hat{U}\sin\omega t$$

$$i = \hat{I}\sin\omega t = \frac{\hat{U}}{R}\sin\omega t$$

$$f = \frac{1}{T},\ \omega = 2\pi f \Rightarrow \frac{2\pi}{T}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{U}^2}{R}\sin^2(\omega t)dt = \frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{R}\left[\int_0^{T/2}\sin^2(\omega t)dt + \underbrace{\int_{T/2}^{T}\sin^2(\omega t)dt}_{0}\right] = \frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{R}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{T/2} =$$

$$\frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{R}\left[\frac{1}{2}\frac{T}{2} - \underbrace{\frac{1}{4}\frac{T}{\underbrace{2\pi}_{\omega}}\sin\left(\frac{2\cdot 2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - (0-0)}_{0}\right] = \frac{\hat{U}^2}{4R}$$

$$S = UI = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\hat{U}^2\int_0^T \sin^2(\omega t)dt}\sqrt{\frac{1}{T}\frac{\hat{U}^2}{R^2}\int_0^{T/2}\sin^2(\omega t)dt} = *\cdot ** = \frac{\hat{U}^2}{R\sqrt{8}}$$

$$* = \hat{U}\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T} = \hat{U}\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}T \underbrace{- \frac{1}{4}\frac{T}{2\pi}\sin\left(2\frac{2\pi}{T}T\right) - (0-0)}_{0}\right]} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

$$** = \frac{\hat{U}}{R}\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{T/2}} = \frac{\hat{U}}{R}\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}\frac{T}{2} \underbrace{- \frac{1}{4}\frac{T}{2\pi}\sin\left(2\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - (0-0)}_{0}\right]} = \frac{\hat{U}}{R}\frac{1}{2}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{\frac{\hat{U}^4}{8R^2} - \frac{\hat{U}^4}{16R^2}} = \sqrt{\frac{2\hat{U}^4 - \hat{U}^4}{16R^2}} = \frac{\hat{U}^2}{4R}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{UI/4}{UI/\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

159. Obrazložite je li za pojavu jalove snage nužno postojanje reaktivnih elemenata u mreži.

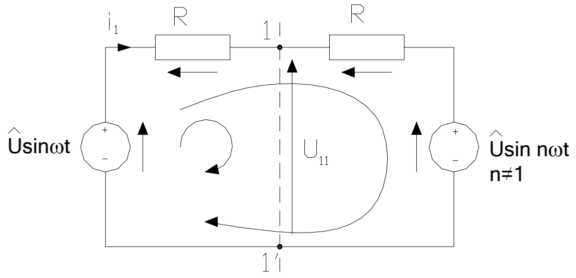
Nije. Za pojavu jalove snage u mreži mora postojati element koji je varijabilan (npr. sklopka)

160. Zašto samo u jednoharmonijskim mrežama postoji fizikalna interpretacija jalove snage kao mjere za njihanje energije između izvora i trošila.

161. Zašto je prividna snaga dogovorna veličina?

Prividna snaga je dogovorna veličina jer ovisi o izboru referentne točke 0.

162. Odredite djelatnu, jalovu i prividnu snagu na prilazu 1.



KZN, KZS:

$$u_1 = 2Ri_1 + u_2 \Rightarrow i_1 = \frac{u_1 - u_2}{2R}$$

$$u_{11} = u_1 - Ri_1 = u_1 - \frac{u_1 - u_2}{2} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$$

$$u = U_1 = U_2 = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Djelatna snaga:

$$P_{11} = \frac{1}{T}\int_0^T u_{11} i\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(u_1+u_2)\frac{(u_1-u_2)}{2R}dt = \frac{1}{4RT}\int_0^T (u_1^2 - u_2^2)dt = \frac{1}{4RT}\underbrace{\left[\int_0^T \underbrace{u_1^2 dt}_{U_1^2} - \int_0^T \underbrace{u_2^2 dt}_{U_2^2}\right]}_{kvadrat\ efektivne\ vrijednosti} = \frac{1}{4R}\left(\underbrace{U_1^2 - U_2^2}_{U^2 - U^2}\right) = 0$$

Prividna snaga:

$$S_{11} = \sqrt{P_{11}^2 + Q_{11}^2} = Q_{11}$$

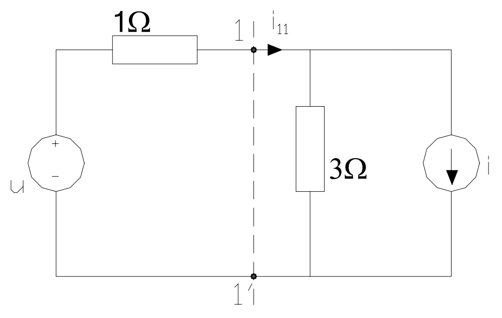
$$S_{11} = U_{11} I \qquad (ef.vr.) \qquad\qquad 2u_1u_2 = (\hat{U}\sin\omega t \cdot \hat{U}\sin n\omega t)$$

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{4R^2}(u_1 - u_2)^2 dt = \frac{1}{4R^2 T}\int_0^T (\underbrace{u_1^2}_{U_1^2} + \underbrace{2u_1u_2}_{u_1 u_2\ \text{su ortogonalni}} + \underbrace{u_2^2}_{U_2^2})dt = \frac{1}{4R^2}(U_1^2 + U_2^2) = \frac{U^2}{2R^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{I = \frac{U}{\sqrt{2}R}}$$

$$U_{11}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u_{11}^2 dt = \frac{1}{4T}\int_0^T (u_1 + u_2)^2 dt = \frac{1}{4}(U_1^2 + U_2^2) = \frac{U^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{U_{11} = \frac{U}{\sqrt{2}}}$$

$$S_{11} = U_{11} I = \frac{U^2}{2R} = Q_{11}$$

163. Odredite djelatnu, jalovu i prividnu snagu na prilazu 1 ako je $u = \sqrt{2}\cdot 100\sin\omega t, V;\ i = \sqrt{2}\cdot 100\cos\omega t, A$.



$$U = 100V$$

$$\underline{I = 20A}$$

superpozicija:

$$i_{11} = \frac{3}{4}i + \frac{1}{4}u = \frac{1}{4}(u + 3i)$$

$$u_{11} = u - i_u = \frac{3}{4}(u - i)$$

$$u_{11} = \sqrt{2}(75\sin\omega t - 15\cos\omega t)$$

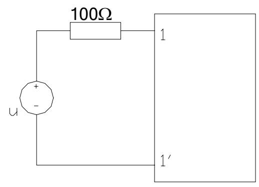
$$\underline{i_{11} = \sqrt{2}(25\sin\omega t + 15\cos\omega t)}$$

$$P_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}(-15\cdot 15 + 75\cdot 25) = 1650W$$

$$S_{11} = U_{11}I_{11} = \sqrt{75^2 + 15^2}\cdot\sqrt{25^2 + 15^2} = 76{,}48\cdot 29{,}15 = 2229{,}756VA$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 1499{,}77VAr$$

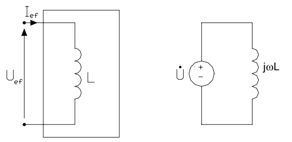
164. Izmjenični izvor napona $u=\sqrt{2}\cdot 100\sin 314t, V$ napaja jednoprilaz. Efektivna vrijednost napona jednoprilaza je 70,7 V, a struje 0,707A. Djelatna snaga izmjerena na jednoprilazu je 0W. Odredite što se nalazi u jednoprilazu (barem 3 rješenja).



$$u=\sqrt{2}\cdot 100\sin 314t, V$$
$$U_{ef}=70{,}7V$$
$$I_{ef}=0{,}707A$$
$$P\equiv 0$$

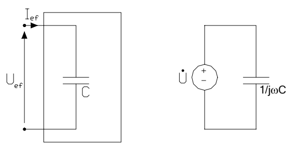
1) Nedisipativni element mreže P=0

a) induktivitet jωL



$$U=\omega LI$$
$$L=\frac{U}{\omega I}=\frac{70{,}7}{314\cdot 0{,}707}=03H$$

b) kapacitet

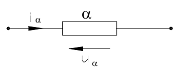


$$I=\omega CU$$
$$C=\frac{I}{\omega U}=\frac{0{,}707}{70{,}7\cdot 314}=30\mu F$$

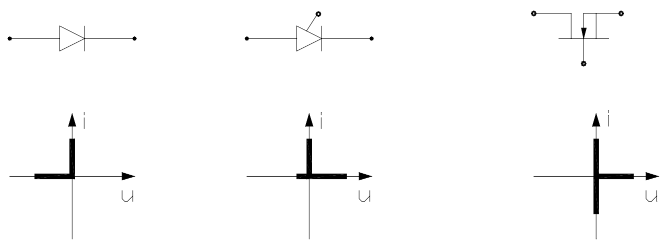
2) α element mreže

pretvaračke komponente

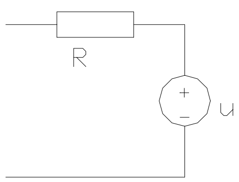
$$P=\frac{1}{T}\int_0^T u_\alpha i_\alpha dt \qquad \begin{cases} u_\alpha=0 \\ i_\alpha\neq 0 \end{cases} K.S.$$



$$\begin{cases} u_\alpha\neq 0 \\ i_\alpha=0 \end{cases} P.H.$$



3)

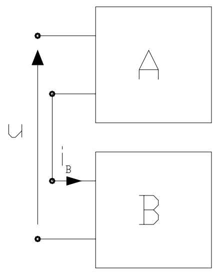


$$u=\hat{U}\cos 314t \;\; ili \;\; u=\hat{U}\sin n314t,\; n\neq 1$$
$$U_{ef}=100V$$

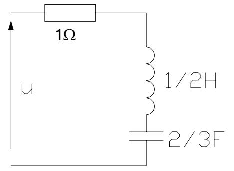
165. Struja k-te grane rastavljena je na djelatnu, jalovu i raspršenu komponentu, tj: $i_k=i_{k\alpha}+i_{kr}+i_{ks}$. Dokažite da KZS za neki čvor u mreži vrijedi posebno za svaku od komponenata rastava struje grane, tj. $\sum_{k=1}^{N} i_{k\alpha}=0 \;\; \sum_{k=1}^{N} i_{kr}=0 \;\; \sum_{k=1}^{N} i_{ks}=0$, gdje je sa N označen ukupni broj grana spojenih na promatrani čvor.

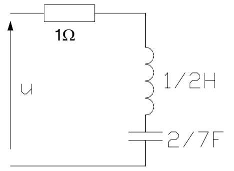
KZS vrijedi posebno za svaku od komponenti struje jer rastavom dobijemo linearne funkcije pojedine komponente, koje su međusobno ortogonalne. KZ vrijedi za linearne funkcije pa će ovdje vrijediti i za komponente.

166. Dva linearna jednoprilaza A i B spojena su u seriju. Struja svakog jednoprilaza može se rastaviti u djelatnu, jalovu i raspršenu komponentu, tj. $i_A = i_{Aa} + i_{Ar} + i_{As}$ $i_B = i_{Ba} + i_{Br} + i_{Bs}$. Očigledno je $i_A = i_B$. Vrijedi li to i za pojedine komponente struje prilaza, tj. $i_{Aa} = i_{Ba}, i_{Ar} = i_{Br}, i_{As} = i_{Bs}$.



167. Parametri dvaju trošila na slikama a) i b) odabrani su da kad se trošila napajaju iz izvora istog valnog oblika $u=\sqrt{2}\cdot 10(\sin t+\sin 3t), V$ djelatne i prividne snage trošila su jednake. U kojoj od tih mreža se ne može nikakvim filtrom paralelno spojenim trošilu postići potpuna kompenzacija faktora snage, tj. λ=1.





a)

$$Z(j1)=1+j\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=1-j1$$

$$Z(j3)=1+j\left(3\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{3}{2}\right)=1+j1$$

$$G_1=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z(j1)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-j}\cdot\frac{1+j}{1+j}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1+j}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

$$G_3=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z(j3)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1+j}\cdot\frac{1-j}{1-j}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1-j}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

$G_1=G_3\rightarrow$ moguće je kompenzacija

b)

$$Z(j1)=1+j\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)=1-j3$$

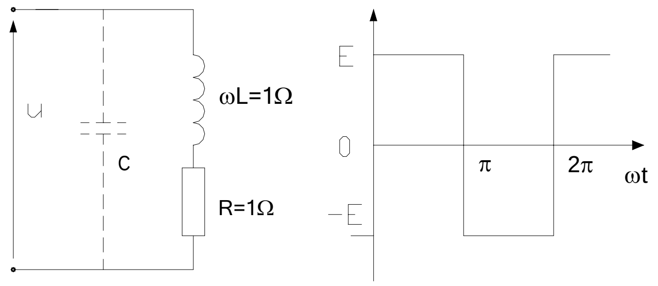
$$Z(j3)=1+j\left(3\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{7}{2}\right)=1+j\frac{2}{6}=1+j\frac{1}{3}$$

$$G_1=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z(j1)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-j3}\cdot\frac{1+j3}{1+j3}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1+j3}{10}\right\}=\frac{1}{10}$$

$$G_3=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z(j3)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1+j\frac{1}{3}}\cdot\frac{1-j\frac{1}{3}}{1-j\frac{1}{3}}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1-j3}{\frac{10}{9}}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{9-j27}{10}\right\}=\frac{9}{10}$$

$G_1\neq G_3\rightarrow$ nije moguće kompenzacija

168. Zašto se u mreži sheme spoja prema slici faktor snage λ ne može potpuno kompenzirati spajanjem kapaciteta paralelno trošilu?



- ako je $G_n=f(n)$ ne može se kompenzirati
- raspršena komponenta

$$G_n=f(n)$$

$$G_n=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z(jn)}\right\}$$

$$Z(jn)=1+jn$$

$$G_n=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z(jn)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1+jn}\cdot\frac{1-jn}{1-jn}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1-jn}{1+n^2}\right\}=\frac{1}{1+n^2}$$

vodljivost ovisi o n i ne možemo napraviti kompenziaciju.

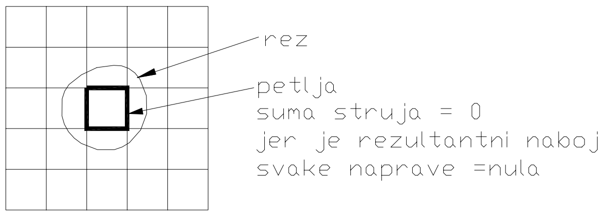
169. Objasnite pod kojim uvjetima vrijede Kirchoffov zakon napona koristeći postulate teorije mreža i pojam petlje.

Za svaku petlju vrijedi KZN. On ostaje vrijediti i ako se petlja definira, a to je zbog toga što prema četvrtom postulatu TM niti jedna nije prožeta magnetskim tokom tj. po drugom postulatu oko vodiča nema elektromagnetskog polja. Zaključujemo da u terminima TM petlja ne zauzima realan prostor.

170. Povežite stavak o kontinuitetu i pojam reza te dokažite da za svaki rez mora vrijediti Kirchoffov zakon struje.

U skladu s trećim postulatom teorije mreža rezultantni naboj svake naprave jednak je nuli.

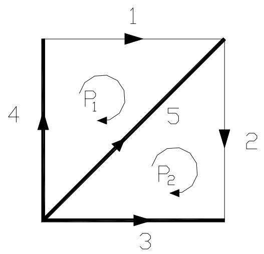
Na razini modela znači da je rezultantni naboj elementa mreže svake grane jednak nuli, što znači da količina naboja koja uđe u plohu S mora biti jednaka količini naboja koja iz te plohe izađe, dakle vrijedi KZS za rez.



171. Dokažite da svaka spojnica s odgovarajućim borjem grana stabla određuje jednu jedinstvenu petlju.

Ovo je treća točka temeljnog teorema teorije grafova.

Primjer:



Broj grana stabla n=3

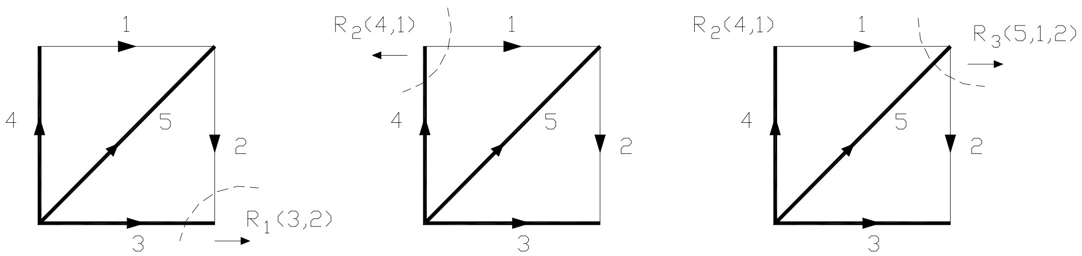
T(3, 4, 5) odabrano stablo

L(1, 2) spojnice

Broj spojenica l=b-n=5-3=2

- između bilo koja dva čvora postoji samo 1 put duž stabla
- P_1(1,4, 5) i P_2(2, 3, 5) su temeljne petlje – svaka spojnica zatvara jednu petlju sa granama stabla i smjer petlje određuje smjer spojnice.

172. Dokažite da svaka grana stabla s odgovarajućim brojem spojnica određuje jedan jedinstveni rez.



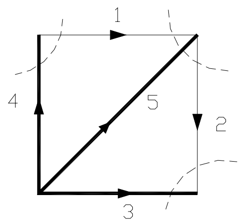
- grana 3 i spojnica 2 čine rez

- grana 3 i spojnica 1

- grana 5 i spojnice 1 i 2

- svaka grana stabla zajedno s odgovarajućim brojem spojnica tvori jedan jedinstven rez – temeljni rez
- dogovoreni smjer reza određuje smjer presječene grane stabla.

173. Dokažite da struje spojnica određuju struje grana stabla.



$R_1(2,3)$ $R_2(1,2,5)$ $R_3(1,4)$

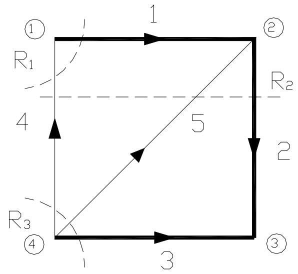
$i_3 = -i_2$ $i_5 = i_2 - i_1$ $i_4 = i_1$

i_3, i_4, i_5 – struje grana

i_1, i_2 – struje spojnica

- ukoliko su struje spojnica zadane, možemo odrediti struje grana jer u jednom rezu može biti samo jedna grana i više spojnica

174. Označimo sa l broj spojnica u mreži od b grana, a sa n broj grana stabla. Dokažite da je l najmanji broj struja koji treba odrediti u mreži da bi sve struje mreže bile poznate. Pokažite to na primjeru zadanog grafa.



T(1,2,3)

L(4,5)

l - broj spojnica =b-n=5-3=2

i_4, i_5 - poznato

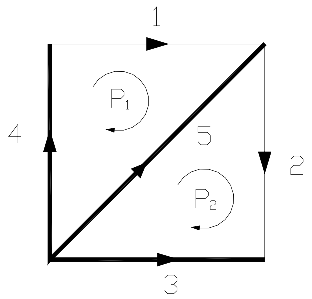
$R_1(1,4)$ $i_1 - i_4 = 0 \Rightarrow i_1 = i_4$

$R_2(2,4,5)$ $i_2 - i_4 - i_5 = 0 \Rightarrow i_2 = i_4 + i_5$

$R_3(3,4,5)$ $i_3 + i_4 + i_5 = 0 \Rightarrow i_3 = -i_4 - i_5$

Da bi odredili sve ostale struje moraju nam biti poznate barem dvije struje (struje spojnica) čime je pretpostavka dokazana.

175. Dokažite da naponi grana stabla određuju napone spojnica.



T(3,4,5)

$P_1(1,4,5)$ $u_1 - u_5 + u_4 = 0$

$P_2(2,3,5)$ $u_2 - u_3 + u_5 = 0$

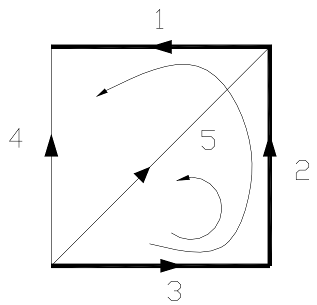
$u_1 = u_5 - u_4$

$u_2 = u_3 - u_5$

- ako su poznati naponi grana stabla, po KZN određujemo napone spojnica.

- Po KZN-u suma svih napona u stablu jednaka je naponu spojnice.

176. Označimo sa l broj spojnica u mreži od b grana, a sa n broj grana stabla. Dokažite da je n najmanji broj napona koji treba odrediti u mreži da bi svi naponi bili poznati. Pokažite to na primjeru zadanog grafa.



l - broj spojnica

b - broj grana

N - broj grana stabla

u_1....u_n → N

T(1,2,3) →N=3

Jednadžbe temeljnih petlji (KZN)

l(4,5)→l=2 (b=N+l=5)

$u_4 = u_1 + u_2 + u_3$

$u_5 = u_2 + u_3$

$\rightarrow u_1, u_2, u_3$ moramo poznavati da bi mogli odrediti u_4, u_5.

177. Koji uvjet mora biti zadovoljen da bi se mreža od b grana pri sustavnom zapisu jednadžbi mogla opisati sa 2b jednadžbi? Koliko je u općem slučaju od tih 2b jednadžbi linearnih?

Uvjet da se mreža od b grana pri sustavnom zapisu jednadžbi mreže može opisati sa 2b jednadžbi je da su sve grane mreže normalne.

Normalna grana se smatra svaka grana čiji napon i struja u početku analize nisu poznati. (grane koje se sastoje samo od nezavisnih izvora to nisu jer su kod njih unaprijed poznati valni oblici)

n+1 - čvorova; b - grana

$$\begin{aligned} &\text{za svaku temeljnu petlju KZN}: l = b - n \\ &\text{za svaki temeljni rez KZS}: \quad n \\ &\text{konstitutivne relacije grana}: \quad b \\ &\textstyle\sum = 2b \text{ jednadžbi} \end{aligned}$$

- linearnih jednadžbi ima b (one koje su napisane na temelju konstitutivnih relacija grana)

178. Za neku mrežu poznate su jednadžbe napona temeljnih petlji napisanih s obzirom na jedno stablo grafa pripadne mreže. Napišite jednadžbe struja temeljnih rezova s obzirom na isto stablo grafa pripadne mreže.

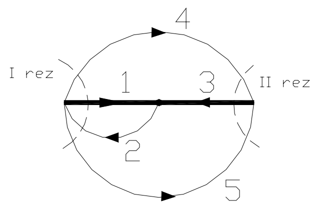
$$u_1 + u_2 = 0$$
$$u_4 - u_1 + u_3 = 0$$
$$u_5 - u_1 - u_3 = 0$$

Petlja = stablo + **jedna spojnica** → grana koja se pojavljuje samo jednom je spojnica

Broj grana b = 5

Spojnice = 2, 4, 5; l=3

Stablo grafa - grane: 1,2; N=2



Ukupni broj grafova:

$$T = m^{m-2}$$
$$m - broj\ čvorova$$

Jednadžbe temeljnih rezova:

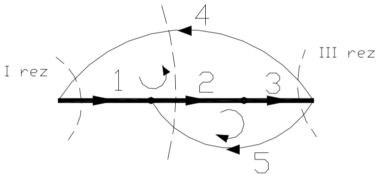
$$I\ rez: \ i_1 - i_2 + i_4 + i_5 = 0$$
$$II\ rez: i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

Rez = spojnica + **jedna grana** stabla grafa

Broj rezova = broju grana stabla = 2

179. Za neku mrežu poznate su jednadžbe struja temeljnih rezova napisanih s obzirom na jedno stablo grafa pripadne mreže. Napišite jednadžbe napona temeljnih petlji s obzirom na isto stablo grafa pripadne mreže.

$$i_1 - i_4 = 0$$
$$i_2 - i_4 - i_5 = 0$$
$$i_3 - i_4 - i_5 = 0$$



Grane stabla: 1, 2, 3

Spojnice: 4, 5

Jednadžbe temeljnih petlji:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$$
$$u_2 + u_3 + u_5 = 0$$

180. Zašto varijable stanja moraju biti neprekinute vremenske funkcije?

Temeljni zahtjev na jednadžbe mreža je da moraju biti takvog zapisa da je moguć jednostavan numerički proračun pripadnih diferencijalnih jednadžbi i da ne postoje ograničenja na vrstu analizirane mreže. Te zahtjeve zadovoljavaju sustavi diferencijalnih jednadžbi prvog reda $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$. Da bi odredili x(t) funkciju razvijemo u Taylorov red. Osnovna pretpostavka za razvoj u funkcije u Taylorov red je neprekinutost funkcije.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t); \quad \frac{x_1 - x_0}{\Delta t} \approx f(x_0, t_0)$$

$$t_0, x_0 \qquad x_1 = x_0 + \Delta t f(x_0, t_0)$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n, t_n)$$

$$x - mora\,biti\,neprekinut$$

Zbog toga za varijable stanja uzimamo napon kapaciteta jer je on neprekinut po zakonu o očuvanju naboja, odnosno na induktivitetu struju induktiviteta jer je nema skoka struje na induktivitetu zbog zakona o očuvanju toka.

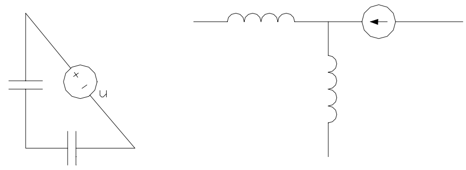
181. Zašto pri izgradnji prikladnog stabla svi nezavisni naponski izvori moraju biti u stablu a nezavisni strujni izvori u spojnicama?

Nezavisni naponski izvor. U skladu s temeljnim teoremom teorije grafova znamo da napon svake spojnice određuju naponi svih grana stabla koje s tom spojnicom čine petlju. Budući da je po definiciji napon nezavisnog naponskog izvora zadan, to se on ne može odrediti iz napona drugih grana koje čine stablo. Zbog toga NNI moraju biti u stablu.

(Naponski izvor - svaki kapacitet je privremeni naponski izvor (pridijelimo mu određenu količinu naboja i nakon toga promatramo evoluciju signala). Ako je privremeni, a ova mreža vrijedi za svaki trenutak, onda to znači da naponski izvor (koji je trajni i mora vrijediti za svaki trenutak koji promatramo - mreža mora vrijediti za svaki $t>t_0$ uključivo za t_0) mora biti u stablu.)

Nezavisni strujni izvor. Analogno prethodnom objašnjenju, struju svake grane stabla određuju struje svih spojnica koje s tom granom stabla čine rez. Proizlazi da nezavisni strujni izvor ne može biti u stablu budući da bi njegova struja, a koja je zadana, inače bila određena strujama spojnica. Zbog toga nezavisni strujni izvori moraju biti u spojnicama.

Primjer su kapacitivna pelja i induktivni rez. Npr. kod kapacitivne petlje bi napon naponskog izvora bio određen naponima na kapacitetima što je kontradikcija jer je napon naponskog izvora zadan. Kod induktivnog reza bi struju strujnog izvor odredili početni uvjeti na induktivitetima što je ponovno kontradikcija.



182. Zašto pri izgradnji prikladnog stabla svi induktiviteti moraju biti u spojnicama, a svi kapaciteti u stablu?

Svaka jednadžba stanja mora imati jednu jedinu derivaciju.

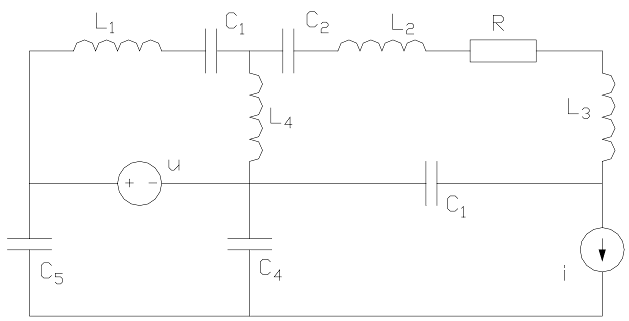
1 spojnica + pripadne grane stabla → KZN

1 grana + pripadne spojnice KZS

Kapacitet treba biti u stablu jer ako napišemo KZS tada imamo struju kroz kapacitet koju prikažemo kao $C\frac{du_C}{dt}$ + preostale spojnice (u kojima nisu kapaciteti) te dobivamo diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

Iz istog razloga induktiviteti idu u spojnice za koje pišemo KZN ta napon na induktivitetu prikažemo kao $L\frac{di_L}{dt}$ + pripadne grane stabla (u kojima nisu induktiviteti) te dobivamo diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

183. Što je red složenosti mreže N i koliki je u mreži sheme spoja prema slici?



Red složenosti mreže jednak je broju varijabli stanja. U dobro definiranim mrežama je to broj reaktivnih elemenata, a u loše definiranim mrežama broj varijabli stanja smanjen za zbroj kapacitivnih petlji i induktivnih rezova.

$$N = 9 - (\underbrace{1}_{C_4, C_5, u} + \underbrace{3}_{\substack{L_1, L_2, L_4 \\ L_1, L_3, L_4 \\ L_2, L_3}}) = 5$$

184. Kako se zove mreža u kojoj barem 1 kapacitet mora biti u spojnicama i/ili barem jedan induktivitet u stablu? Koliki je red složenosti takve mreže?

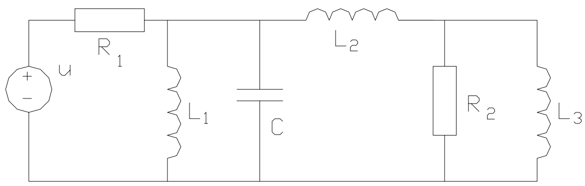
Takva mreža je loše definirana mreža.

Red složenosti dobijemo da do ukupnog broja reaktivnih elemenata oduzmemo 1 za svaki induktivni rez i/ili kapacitivnu petlju.

$N - broj\ reaktivnih\ elemenata$ $\quad DDM$

$N - broj\ reakt.elem. - (broj\ C\ petlji + broj\ L\ rezova)$ $\quad LDM$

185. U mreži prema slici nalazi se jedna induktivna petlja. Utječe li to na red složenosti mreže?

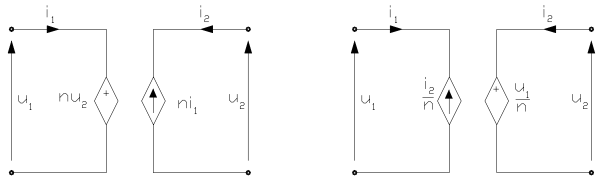


Induktivna petlja ne utječe na red složenosti mreže. Na red složenosti utječe kapacitivna petlja i induktivni rez.

186. Objasnite način izgradnje prikladnog stabla u mreži sa zavisnim izvorima.

	Upravljačka grana	Upravljana grana	
NUNI	Spojnica	Stablo	$i_1 = 0; u_2 = Au_1$
NUSI	Spojnica	Spojnica	$i_1 = 0; i_2 = gu_1$
SUNI	Stablo	Stablo	$u_1 = 0; u_2 = ri_1$
SUSI	Stablo	Spojnica	$u_1 = 0; i_2 = \alpha i_1$

Idealni trafo — Može se shvatiti kao da se sastoji od dva zavisna izvora. Jednu granu treba staviti u stablo, a drugu u spojnice.



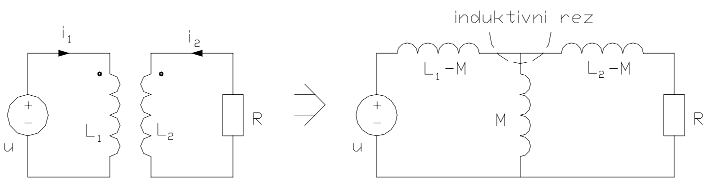
$u_1 = nu_2;\ i_2 = -ni_1$

grana 1 u stablo, 2 u spojnice

$i_1 = -\frac{i_2}{n};\ u_2 = \frac{u_1}{n}$

grana 1 u spojnice, 2 u stablo

187. Za shemu prema slici ne mogu se napisati jednadžbe stanja u normalnom obliku. Što valja učiniti da se one ipak mogu napisati i da njihovo rješenje bude prihvatljivo s tehničkog stajališta?



Normalni oblik jednadžbi:

$$\frac{dx_n}{dt} = f(x_{1\dots n}, u, i_n, M_n, R_n, C_n)$$

x - varijabla stanja

n - broj varijabli stanja

Konstitutivne relacije transformatora:

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

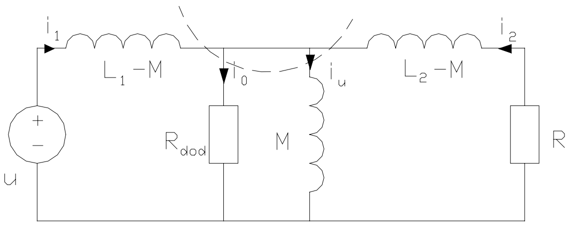
$$u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

KZN:

$$u = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + i_2R_2 = 0$$

← u jednoj jednadžbi imamo dvije varijable stanja i_1 i i_2. (nemamo normalni oblik)



$$u = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + i_0R_{Fe}$$

$$0 = R_{Fe}i_0 - M\frac{di_\mu}{dt}$$

$$0 = Ri_2 + (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + R_{Fe}i_0$$

$$0 = i_1 + i_2 - i_0 - i_\mu$$

Normalni oblik:

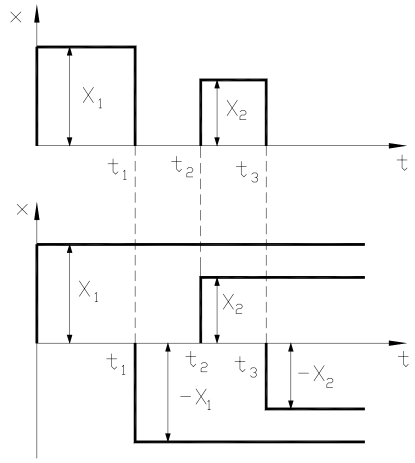
$$\frac{di_1}{dt} = \frac{u - R_{Fe}i_0}{(L_1 - M)}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{-Ri_2 - R_{Fe}i_0}{(L_2 - M)}$$

$$\frac{di_\mu}{dt} = \frac{R_{Fe}i_0}{M}$$

Jednadžbe stanja možemo pisati ako dodamo otpor $R_{dod} = R_{Fe}$ u induktivni rez. To je otpor koji s tehničkog stajališta predstavlja gubitke u željezu (mjeri se pokusom PH)

188. Odredite valni odziv y(t) za t>t₃ za stepenasti poticaj prikazan na slici te ako je skokovni odziv dan sa $s(t)=1-e^{-t/\tau}$.



$$\underset{poticaj}{A\,S(t)} \Rightarrow \underset{odziv}{A\,s(t)}$$

$$y(t)=X_1[s(t)-s(t-t_1)]+X_2[\underset{početak}{s(t-t_2)}-\underset{kraj}{s(t-t_3)}]$$

$$s(t)=1-e^{-t/\tau}$$

$$y(t)=X_1\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}-1+e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}\right]+X_2\left[1-e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}-1+e^{-\frac{t-t_3}{\tau}}\right]$$

$$y(t)=X_1\left(e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)+X_2\left(e^{-\frac{t-t_3}{\tau}}-e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}\right)$$

189. Parcijalnom integracijom izraza $i(t)=f(0)u(t)+\int_0^t \frac{df(t-x)}{dx}u(x)dx;\ t\geq 0$ odredite drugi oblik Du Hamelovog integrala.

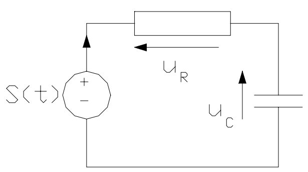
$$\int udv=uv-\int vdu$$

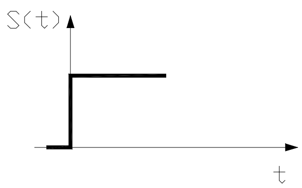
$$i(t)=f(0)u(t)-\left[u(x)f(t-x)\Big|_0^t\right]+\int_0^t \frac{du(x)}{dx}f(t-x)dx$$

$$i(t)=f(0)u(t)-u(t)f(0)+u(0)f(t)+\int_0^t \frac{du(x)}{dx}f(t-x)dx$$

$$i(t)=u(0)f(t)+\int_0^t \frac{du(x)}{dx}f(t-x)dx$$

190. Odredite odziv struje serijskog RC-kruga na jedinični skok napona.



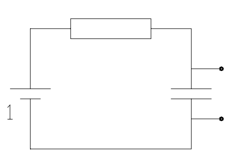


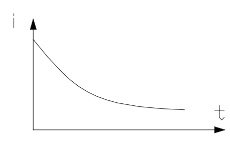
$$KZN: 1=u_R+u_C$$

$$\underline{1=iR+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt} \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$0=R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i \ \Rightarrow\ \underline{RC\frac{di}{dt}+i=0,\ \tau=RC}$$

$$i=Ke^{st}=Ke^{-\frac{t}{\tau}},\ K=?$$





$$t=+0 \rightarrow i(+0)=K\cdot 1=K$$

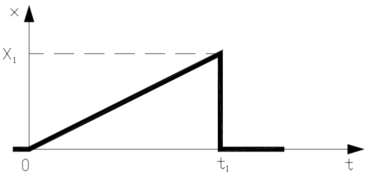
$$Ri+\underbrace{\frac{1}{C}\int_0^{+0} i(x)dx}_{0}=1$$

$$i(+0)=\frac{1}{R} \ \Rightarrow\ i=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Odziv na jedinični skok s(t)

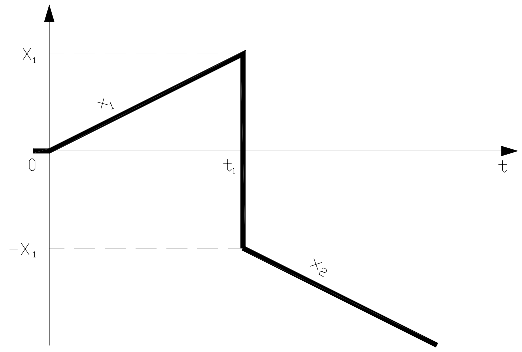
$$\boxed{\begin{array}{l} s(t)=i(t)S(t) \\ s(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}S(t) \end{array}}$$

191. Odredite valni oblik odziva y(t) za t>t_1 na poticaj zadan valnim oblikom prema slici ako je skokovni odziv dan sa $s(t)e^{-t/\tau}$.



$$i(t)=\underbrace{U(0)f(t)}_{slobodni\ odziv}+\int_0^t \underbrace{\frac{du(x)}{dt}}_{\substack{derivacija\\ poticaja}} f(t-x)dx$$

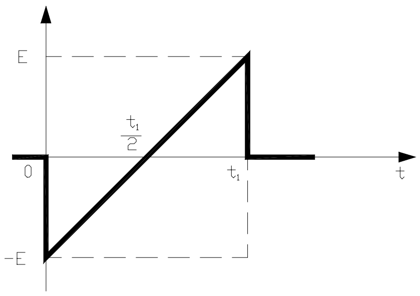
$$x_1(t)=\begin{cases}\dfrac{x_1}{t_1}t & 0\le t\le t_1\\ 0 & t>t_1\end{cases} \qquad x_2(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le t_1\\ -\dfrac{x_1}{t_1}t & t>t_1\end{cases}$$



$$y(t)=0\cdot s(t)+\int_0^{t_1}\frac{x_1}{t_1}s(t-x)dx+\int_{t_1}^{t}\frac{x_1}{t_1}s(t-x)dx-X_1s(t-t_1)-\int_0^{t_1}\frac{x_1}{t_1}s(t-x)dx-\int_{t_1}^{t}\frac{x_1}{t_1}s(t-x)dx$$

$$\boxed{y(t)=\int_0^{t_1}\frac{x_1}{t_1}s(t-x)dx-X_1s(t-t_1)}$$

192. Na ulazu jednoprilaza poznatog skokovnog odziva s(t) djeluje napon valnog oblika prema slici. Odredite valni oblik struje i(t) a) u intervalu $0\le t\le t_1$, b) u intervalu $t_1\le t<\infty$.



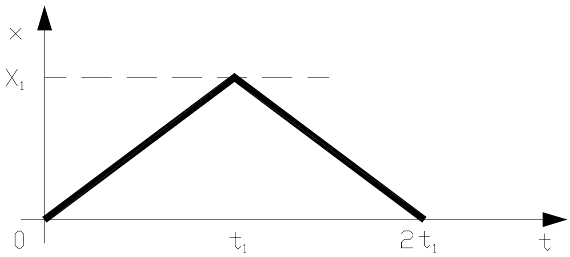
$$u=\begin{cases}\dfrac{2E}{t_1}\left(t-\dfrac{t_1}{2}\right) & 0\le t\le t_1\\ 0 & t>t_1\end{cases}$$

$$i(t)=U(0)f(t)+\int_0^t\frac{du(x)}{dx}f(t-x)dx$$

a) $i(t)=-Es(t)+\dfrac{2E}{t_1}\int_0^t s(t-x)dx \qquad 0\le t\le t_1$

b) $i(t)=-Es(t)+\dfrac{2E}{t_1}\int_0^{t_1} s(t-x)dx-Es(t-t_1) \qquad t>t_1$

193. Na ulazu jednoprilaza poznatog skokovnog odziva s(t) djeluje poticaj valnog oblika prema slici. Odredite valni oblik y(t) u a) intervalu $t_1 \le t \le 2t_1$, b) u intervalu $2t_1 \le t \le \infty$.

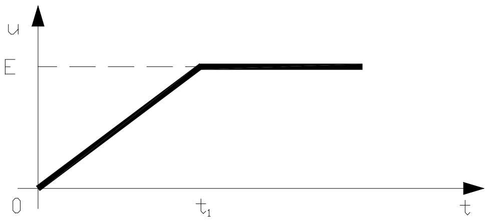


$$x = \begin{cases} \dfrac{X_1}{t_1} t & 0 \le t \le t_1 \\ -\dfrac{X_1}{t_1} t + 2X_1 & t_1 \le t \le 2t_1 \\ 0 & t > 2t_1 \end{cases}$$

a) $y(t) = 0s(t) + \int_0^{t_1} \frac{X_1}{t_1} s(t-x)dx + \int_{t_1}^{t} \frac{X_1}{t_1} s(t-x)dx$

b) $y(t) = \int_0^{t_1} \frac{X_1}{t_1} s(t-x)dx - \int_t^{2t_1} \frac{X_1}{t_1} s(t-x)dx + \left[-\frac{X_1}{t_1} t + 2X_1 \right] s(t-2t_1)$

194. Na ulazu jednoprilaza poznatog skokovnog odziva s(t) djeluje napon valnog oblika prema slici. Odredite valni oblik struje i(t), a)u intervalu $0 \le t \le t_1$, b) u intervalu $t_1 \le t < \infty$.

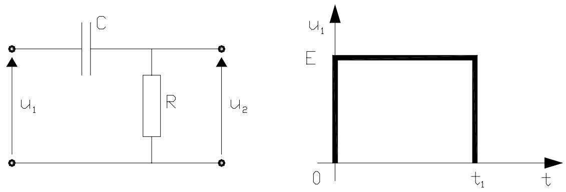


$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{E}{t_1} t & 0 \le t \le t_1 \\ E & t > t_1 \end{cases}$$

a) $i(t) = 0s(t) + \int_0^{t} \frac{E}{tl1} s(t-x)dx \qquad 0 \le t \le t_1$

b) $i(t) = 0s(t) + \int_0^{t_1} \frac{E}{t_1} s(t-x)dx + \int_{t_1}^{t} \frac{E}{t_1} s(t-x)dx \qquad t > t_1$

195. Na ulazu dvoprilaza djeluje impuls napona prikazan na slici. Odredite valni oblik napona na izlazu dvoprilaza u intervalu $t_1 \le t < \infty$.



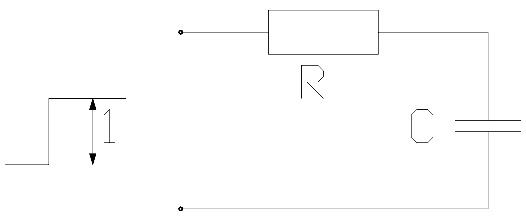
$$s(t) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{R \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{E} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$h(t) = \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_2(t) = \int_0^{t_1} u_1(x) h(t-x)dx = E\int_0^{t_1} -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-x}{\tau}} dx$$

$$u_2(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

196. Odredite odziv struje serijskog RC kruga na jedinični impuls napona.



$$iR + \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx = 1 \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$i = Ke^{-t/\tau}$$

$$i(+0) = K$$

$$Ri = 1 \Rightarrow i = \frac{1}{R} = K$$

$$i(t) = \int_0^t u(x)h(t-x)dx$$

$$i(t) = \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = s(t)$$

$$h(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$

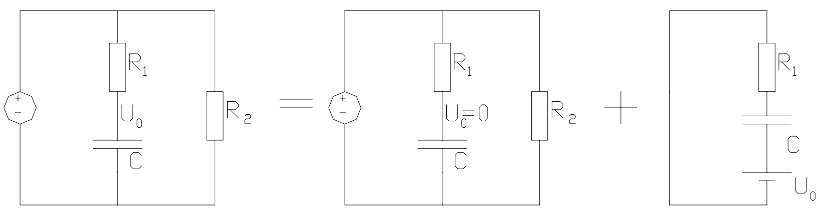
$$h(t) = -\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

197. Koji uvjeti moraju biti zadovoljeni da bi se mreže mogle analizirati pomoću superpozicijskih integrala?

Svi pasivni elementi mreže moraju biti linearni i vremenski nepromjenjivi.

198. Kako primijeniti superpozicijske integrale ako analizirana mreža nije mrtva?

Tada mrežu teoremom superpozicije rastavimo na onoliko mreža koliko treba da svaka bude mrtva i riješimo svaku posebno.

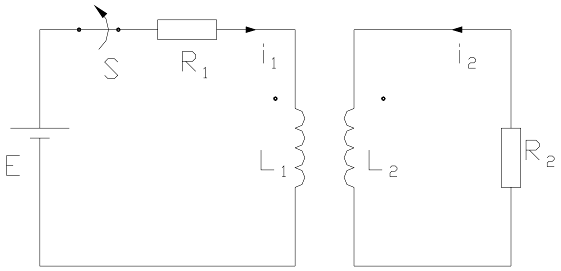


199. Koji su osnovni razlozi za primjenu Laplaceove transformacije u analizi mreža?

Laplaceova nam transformacija omogućuje da se integro-diferencijalne jednadžbe mreže pretvore u algebarske jednadžbe, te dopušta u analizi razne vrste poticaja i omogućuje dobivanje potpunog odziva.

200. U kojim je slučajevima nužno da donja granica definicijskog integrala Laplaceove transformacije bude t=-0? Ilustrirati primjerom.

Kod loše definiranih mreža samo izbor t=-0 kao donje granice definicijskog integrala omogućuje da dobijemo rješenje. Ako je mreža dobro definirana ne postoji diskontinuitet početnih uvjeta, tada je nebitno je li donja granica t=-0 ili t=+0.



$$i_1(-0)=\frac{E}{R_1}$$

$$i_2(-0)=0$$

$$i_1(+0)=0 \quad t\geq +0$$

$$I:\ \ E=i_1R+L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}+u_s$$

$$II:\ \ 0=R_2i_2+L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}$$

t=-0, $II.$

$$0=R_2I_2(s)+sL_2I_2(s)-L_2\underset{=0}{i_2(-0)}+sM\underset{=0}{I_2(s)}-Mi_1(-0)$$

$$0=R_2I_2(s)+sL_2I_2(s)-Mi_1(-0)$$

$$I_2(s)=\frac{Mi_1(-0)}{R_2+sL_2}=\frac{Mi_1(-0)}{L_2}\cdot\frac{1}{s+\frac{R_2}{L_2}}$$

$$i_2(t)=\frac{Mi_1(-0)}{L_2}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{M}{L_2}\cdot\frac{E}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

t=+0

$$0=R_2I_2(s)+sL_2I_2(s)-L_2i_2(+0)+sM\underset{=0}{I_1(s)}-M\underset{=0}{i_1(+0)}$$

$$I_2(s)=i_2(+0)\frac{1}{s+\frac{R_2}{L_2}}$$

$$i_2(t)=i_2(+0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$i_2(+0)$ ne znamo pa ne možemo riješiti zadatak

201. Riješite diferencijalnu jednadžbu $\frac{dx}{dt}+\alpha x = A \quad x(-0)=B$ i iskažite rješenje u obliku zbroja slobodnog i prisilnog odziva.

Laplaceova transformacija deriviranja:

$$f^{n}(t) = s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\underset{(n=1)}{f'(t)} = \frac{dx}{dt} = sX(s) - X(0)$$

$$\alpha x \rightarrow \alpha X(s)$$

$$\left(\underset{\substack{f-ija\, jed.\\ skoka}}{s(t)\cdot}\right) \quad A \rightarrow \frac{A}{s}$$

$$\frac{dx}{dt}+\alpha x = A$$

$$sX(s) - X(0) + \alpha X(s) = \frac{A}{s}$$

$$(s+\alpha)X(s) = \frac{A}{s} + B$$

$$X(s) = \underset{\text{Prisilni odziv}}{\frac{A}{s(s+\alpha)}} + \underset{\text{Slobodni}}{\frac{B}{s+\alpha}}$$

Prisilni - jer je A u dif. jed. poticaj, a slobodni - jer je B posljedica akumulirane energije u reaktivnom elementu mreže.

$$X(s) = \frac{1}{sT+1} \xrightarrow[L^{-1}]{} \frac{1}{T}e^{-t/T}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(sT+1)} \xrightarrow[L^{-1}]{} 1 - e^{-t/T}$$

$$L^{-1}\left(\frac{A}{s(s+\alpha)}\right) = L^{-1}\left(\frac{A}{\alpha}\frac{1}{s\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}\right) \rightarrow \frac{A}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{B}{s+\alpha}\right) = L^{-1}\left(\frac{B}{\alpha}\frac{1}{\frac{s}{\alpha}+1}\right) = Be^{-\alpha t}$$

$$\boxed{x(s) = Be^{-\alpha t} + \frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}$$

$$x_s = Be^{-\alpha t}, \qquad x_{pr} = \frac{A}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$$

202. Prvi korak pri određivanju Laplaceove transformacije neke periodičke funkcije $f(t) = f(t+T)$ je da se uvede nova funkcija $f_1(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \le t \le T \\ 0 & t > T \end{cases}$ za koju vrijedi da je $f[f_1(t)] = F_1(s)$. Provedite postupak određivanja Laplaceove transformacije do kraja.

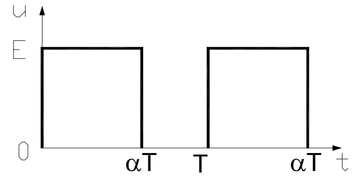
$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

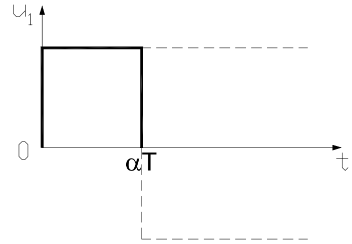
$$L[f_1(t)] = F_1(s)$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(t-kT)\cdot S(t-kT)$$

$$L[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} F_1(s)e^{-kTs} = F_1(s)\underset{geometrijski\, red}{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs}} = F_1(s)\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

203. Odredite Laplaceovu transformaciju pravokutnog napona prema slici?





$$u_1 = Es(t) - Es(t-\alpha T) \rightarrow \quad L[u_1(t)] = E\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-\alpha Ts}\right) = \frac{E(1-e^{-\alpha Ts})}{s}$$

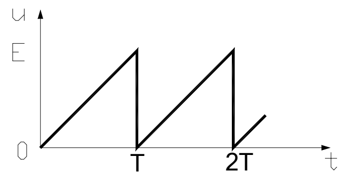
$$L[u(t)] = E\frac{1-e^{-\alpha Ts}}{s(1-e^{-Ts})}$$

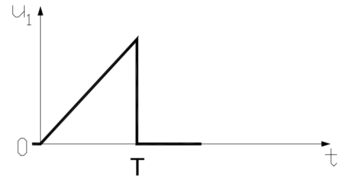
ili ?

$$L[u(t)] = \frac{F_1(s)}{1-e^{-st}} = \frac{E}{s}\frac{1-e^{-s\alpha T}}{1-e^{-sT}}$$

$$F_1(s) = \int_{-0}^{\alpha T} Ee^{-st}dt = -\frac{E}{s}e^{-st}\Big|_0^{\alpha T} = -\frac{E}{s}\left(e^{-s\alpha T}-1\right) = \frac{E}{s}\left(1-e^{-s\alpha T}\right)$$

204. Odredite Laplaceovu transformaciju pilastog napona prema slici.





$$u_1 = \frac{E}{T}\cdot t\cdot S(t) - E\cdot S(t-T) - \frac{E}{T}\cdot(t-T)\cdot S(t-T)$$

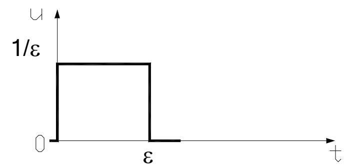
vremenski pomak : $\quad L[f(t-a)S(t-a)] = e^{-as}F(s)$

$$L[u_1(t)] = \frac{E}{T}\cdot\frac{1}{s^2} - E\frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{E}{T}\frac{e^{-Ts}}{s^2} = U_1(s)$$

$$U(s) = \frac{U_1(s)}{1-e^{-sT}} = \frac{\frac{E}{T}\cdot\frac{1}{s^2} - E\frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{E}{T}\frac{e^{-Ts}}{s^2}}{1-e^{-sT}}$$

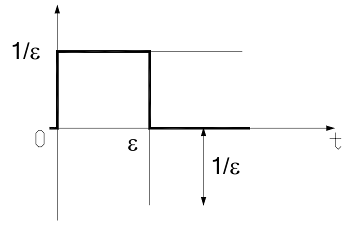
205. Odredite Laplacovu transformaciju impulsa jedinične površine prikazanog na slici. Čemu je jednaka Laplacove transformacija impulsa ako $\varepsilon \rightarrow 0$.

u(t) → prikazati preko f-je jedinične stepenice S(t)



$$u(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[S(t) - S(t-\varepsilon)\right]$$

$$L[u(t)] \xrightarrow[L.t.]{direktna} U(s) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-\varepsilon s}\right] = \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

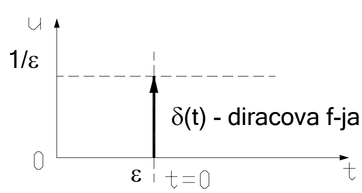


$$\varepsilon \rightarrow 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} U(s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = \frac{0}{0}$$

kada sumiramo dvije jed. stepenice dobijemo f-ju

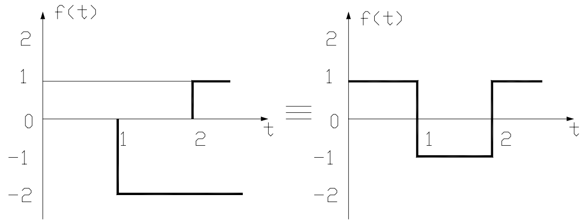
$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(t)dt = 1$$



206. Odredite i nacrtajte funkciju f(t) Laplaceova transformacija koja je $F(s)=\frac{1}{s}(1-e^{-s})^2$.

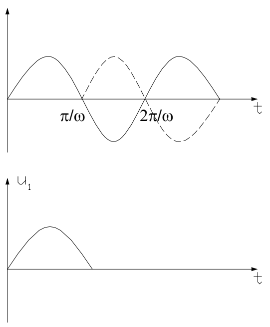
$$F(s)=\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)^2=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s}=\frac{1}{s}-2\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$f(t)=S(t)-2s(t-1)+s(t-2)$$



207. Ako je $L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$ odredite Laplaceovu transformaciju funkcije

$$u(t)=\begin{cases}\hat{U}\sin\omega t & 0\le t\le \pi/\omega\\ 0 & \pi/\omega\le t<\infty\end{cases}.$$



$$u_1=\hat{U}\sin\omega t\cdot s(t)+\hat{U}\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\cdot s\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)$$

$$L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$L[u_1(t)]=\frac{\omega\hat{U}}{s^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{\omega}s}\right)$$

208. Struja neke grane mreže dana je u frekvencijskom području $I(s)=\frac{b_0s^2+b_1s+b_2}{a_0s^2+a_1s+a_2}$. Svi koeficijenti su realni i pozitivni. Što se sve može zaključiti o toj mreži samo na temelju zadanog izraza prije transformacije funkcije I(s) u vremensko područje?

- teorem konačne vrijednosti: $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot F(s)$

$$\lim_{s\to 0}s\cdot F(s)=\lim_{s\to 0}\frac{b_0s^3+b_1s^2+b_2s}{a_0s^2+a_1s+a_2}=\frac{0}{a_2}=0,$$

$\boxed{i(\infty)=0}$ → stabilnost mreže

- teorem početne vrijednosti: $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}s\cdot F(s)$

$$\lim_{s\to\infty}s\cdot F(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{b_0s^3+b_1s^2+b_2s}{a_0s^2+a_1s+a_2}\cdot\frac{\frac{1}{s^3}}{\frac{1}{s^3}}=\frac{b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}}{\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s^2}+\frac{a_2}{s^3}}=\frac{b_0}{0}=\infty,$$

$\boxed{i(0)=+\infty}$ → skok struje → LDM

209. Objasniti vezu između Laplaceove transformacije i fazorske transformacije.

Ako su svi početni uvjeti u t=-0 jednaki nuli, pravila Laplaceove transformacije identična su pravilima fazorske transformacije samo se varijabla s zamjeni sa jω.

Npr. za serijski RLC krug

Fazorska transformacija: $\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega\right]\dot{U}_C = \omega_0^2\dot{U}$

Laplaceova transformacija: $[s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2]U_C(s) = \omega_0^2 U(s)$

Ako se stavi s=jω jednadžbe su potpuno istog oblika, ali imaju posve različita značenja.

210. Vrijedi li KZ za napon i struju u frekvencijskom s-području? Posjeduju li pojmovi transformiranih napona i struja fizikalni smisao?

Laplaceova transformacija je linearna transformacija pa za nju vrijede KZ.

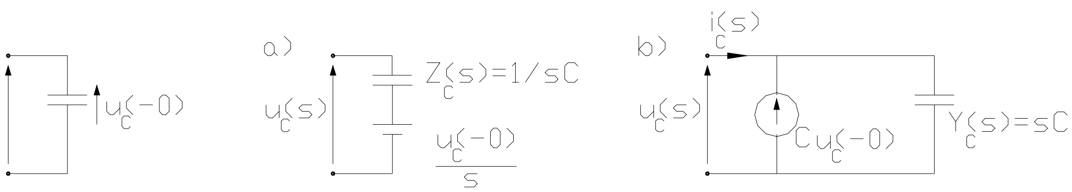
Transformirani napon i struja nemaju fizikalni smisao jer zapravo oni i nisu naponi i struje. Dimenzija transformiranog napona je Vs, a struje As.

211. Pod kojim uvjetom svaki reaktivni element u frekvencijskom području ponaša kao otpor.

Pod uvjetom da je mreža «mrtva», tj. da su svi početni uvjeti (i_L i u_C) jednaki nuli.

$\left.\begin{array}{l} u_L = sLI_L \\ i_C = sCU_C \end{array}\right\}\text{ako su počočetuvjeti } 0$, (ako je mreža mrtva)

212. Objasnite moguće prikaze kapaciteta u frekvencijskom području.



a) pomoću transformirane impedancije $Z_C(s)$

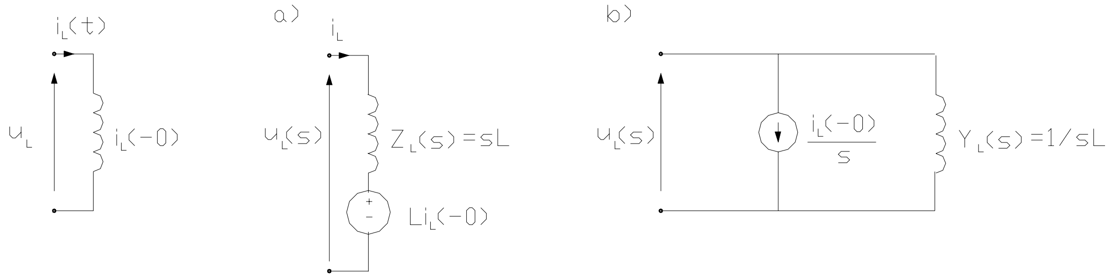
$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{U_C(-0)}{s}$$

- matematički izraz ima isti oblik ako Ohmov zakon za «napon» $U_C(s)$ na otporu $\frac{1}{sC}$ kroz koji prolazi struja $I_C(s)$ i u seriju s kojim je uključen «naponski izvor» $\frac{U_C(-0)}{s}$

b) pomoću transformirane admitancije

$$I_C(s) = sCU(s) - CU_C(-0)$$

213. Objasnite moguće prikaze induktiviteta u frekvencijskom području.



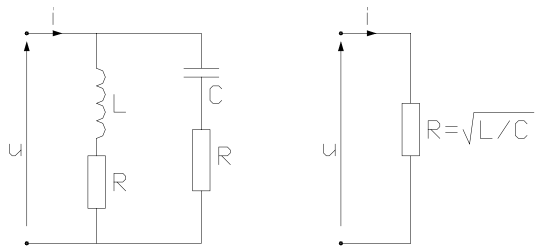
a) pomoću transformirane impedancije $Z_L(s)$

$$U_L(s) = SLI_L(s) - Li_L(-0)$$

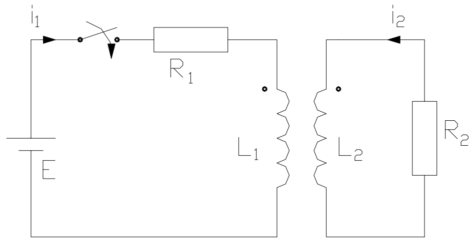
b) pomoću transformirane admitancije $Y_L(s)$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{i_L(-0)}{s}$$

214. Može li se za bilo koji napon narinut na oba jednoprilaza pronaći razlika u valnom obliku struje? Obrazložite.



215. Pomoću teorema o početnoj vrijednosti odredite početne vrijednosti struja $i_1(+0),\ i_2(+0)$ kroz otpore R$_1$ i R$_2$ nakon uklopa sklopke u t=0 i to za slučajeve: a) $M^2 < L_1L_2$, b) $M^2 = L_1L_2$



$$\frac{E}{s} = R_1 I_1(s) + sL_1 I_1(s) - L_1 \underbrace{i_1(-0)}_{=0} + sMI_2(s) - M\underbrace{i_2(-0)}_{=0}$$

$$0 = sMI_1(s) + sL_2 I_2(s) + R_2 I_2(s)$$

$$\frac{E}{s} = I_1(s)[R_1 + sL_1] + I_2(s)\cdot sM$$

$$0 = I_1(s)\cdot sM + I_2(s)[sL_2 + R_2]$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + sL_1 & sM \\ sM & R_2 + sL_2 \end{vmatrix} = (R_1 + sL_1)(R_2 + sL_2) - s^2M^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{E}{s} & sM \\ 0 & R_2 + sL_2 \end{vmatrix} = \frac{E}{s}(R_2 + sL_2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_1 + sL_1 & \frac{E}{s} \\ sM & 0 \end{vmatrix} = -\frac{E}{s} sM = -EM$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{E}{s}(R_2 + sL_2)}{(R_1 + sL_1)(R_2 + sL_2) - s^2M^2} = \frac{sEL_2 + ER_2}{sR_1R_2 + s^2R_1L_2 + s^2L_1R_2 + s^3L_1L_2 - s^3M^2}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-EM}{R_1R_2 + sR_1L_2 + sL_1R_2 + s^2L_1L_2 - s^2M^2}$$

a)

$$\lim_{s\to\infty} I_1 = 0, \qquad i_1(+0) = 0$$

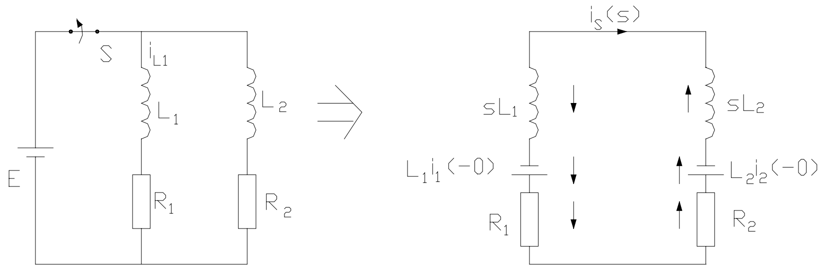
$$\lim_{s\to\infty} I_2 = \frac{0}{L_1L_2 - M^2} = 0 \quad i_2(+0) = 0$$

b)

$$i_1(+0) + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\, i_2(+0) = 0$$

$$i_1(+0) = \frac{ER_2}{L_1R_2 + L_2R_1} \qquad i_2(+0) = \frac{-EM}{L_1R_2 + L_2R_1}$$

216. Odredite valni oblik struje induktiviteta L_1 nakon što isklopi sklopka u t=0. Što se događa ako je $\frac{L_1}{R_1}=\frac{L_2}{R_2}$?



$$i_1(-0)=\frac{E}{R} \qquad i_2(-0)=\frac{E}{R_2}$$

$$(sL_1+sL_2+R_1+R_2)I_S(s)=-L_1\frac{E}{R_1}+L_2\frac{E}{R_2}$$

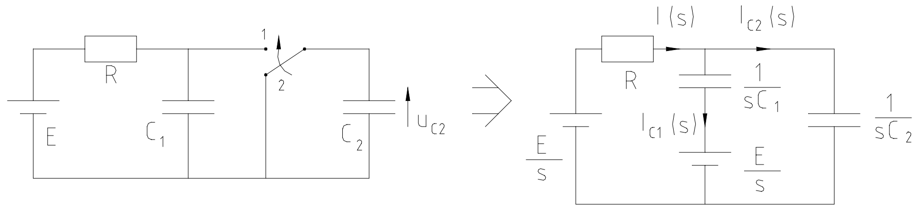
$$I_S(s)=\frac{\frac{L_2R_1-L_1R_2}{R_1R_2}E}{R_1+R_2+s(L_1+L_2)}=\frac{\frac{L_2R_1-L_1R_2}{(L_1+L_2)(R_1+R_2)}}{s+\underbrace{\frac{R_1R_2}{L_1+L_2}}_{\alpha}}$$

$$i(t)=\frac{E\left(L_2R_1\frac{R_2}{R_2}-L_1R_2\frac{R_1}{R_1}\right)}{(L_1+L_2)R_1R_2}e^{-\alpha t}$$

$$i(t)=\frac{E}{L_1+L_2}\left(\frac{L_2}{R_2}-\frac{L_1}{R_1}\right)e^{-\alpha t}$$

$$ako\ je\ \frac{L_1}{R_1}=\frac{L_2}{R_2} \;\rightarrow\; i(t)=0$$

217. Odredite valni oblik napona na C_2 ako u t=0 sklopka preklopi iz 2 u 1.



ustaljeno stanje(prije prebacivanja sklopke) :

$$U_{C1}(-0)=E$$
$$U_{C2}(-0)=0$$

$$\frac{E}{s}=I(s)R+I_{C1}(s)\frac{1}{sC_1}+\frac{E}{s}$$

$$U_{C2}(s)=I_{C1}(s)\frac{1}{sC_1}+\frac{E}{s}=I_{C2}(s)\frac{1}{sC_2}$$

$$I(s)=I_{C1}(s)+I_{C2}(s)$$

$$U_{C2}(s)\left(\frac{1+sR(C_1+C_2)}{1+sRC_1}\right)=\frac{E}{s} \qquad \tau=R(C_1+C_2)$$

$$U_{C2}(s)=\frac{E}{s}\left(\frac{1+sR_1C_1}{1+s\tau}\right)=\frac{E}{\tau s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}+E\frac{\overset{R=\frac{\tau}{C_1+C_2}}{R}\ C_1}{1+s\tau}$$

$$U_{C2}(s)=\frac{E}{\tau s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}+\frac{C_1}{C_1+C_2}\frac{E}{s+\frac{1}{\tau}}$$

- svođenje na parcijalne razlomke

$$U_{C2}(s)=\frac{\frac{E}{\tau}+\frac{C_1}{C_1+C_2}Es}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$A\left(s+\frac{1}{\tau}\right)+Bs=\frac{E}{\tau}+\frac{C_1}{C_1+C_2}Es$$

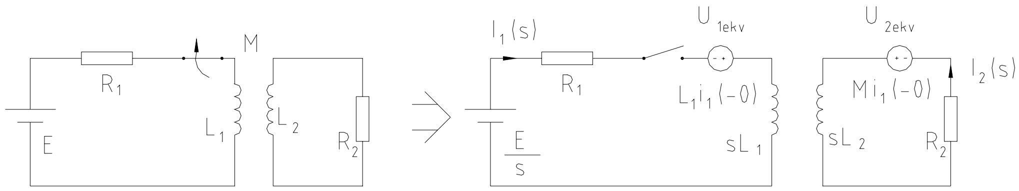
$$A\frac{1}{\tau}=\frac{E}{\tau}\Rightarrow A=E; \quad B=-E\frac{C_2}{C_1+C_2}$$

$$U_{C2}(s)=\frac{E}{s}-\frac{C_2}{C_1+C_2}\frac{E}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$L^{-1}[U_{C2}(s)]=E-\frac{C_2}{C_1+C_2}Ee^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_{C2}(t)=E\left(1-\frac{C_2}{C_1+C_2}e^{-t/\tau}\right)}$$

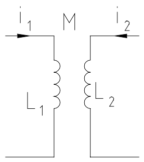
218. Odredite valni oblik struje kroz R_2 nakon isklopa sklopke u t=0.



$$i_1(-0) = \frac{E}{R_1}$$

$$i_2(-0) = 0 \underset{LDM}{\neq} i_2(+0)$$

vezani induktiviteti:



$$M > 0$$

$$U_{1ekv} = L_1 i_1(-0) + M \underbrace{i_2(-0)}_{=0}$$

$$U_{2ekv} = L_2 \underbrace{i_2(-0)}_{=0} + M i_1(-0)$$

$$(sL_2 + R_2) I_2(s) = U_{2ekv} = M \frac{E}{R_1}$$

$$I_2(s) = M \frac{E}{R_1} \frac{1}{sL_2 + R_2} = \frac{ME}{L_2 R_1} \frac{1}{s + \frac{R_2}{L_2}}$$

$$\tau = \frac{L_2}{E_2} \Rightarrow I_2(s) = \frac{ME}{L_2 R_1} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$L^{-1}[I_2(s)] = L^{-1}\left[\frac{ME}{L_2 R_1} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right] \quad \Rightarrow \quad i_2(t) = \frac{ME}{L_2 R_1} e^{-t/\tau}$$

219. Zašto je pri rješavanju neke mreže s pomoću metode jednadžbi struja petlji «zgodno» sve početne uvjete prikazati kao naponske izvore?

Ako početne uvjete prikažemo kao naponske izvore svaka mreža sa reaktivnim elementima ponaša se kao otporna mreža i lakše ju je analizirati i brže dolazimo do rješenja. Broj petlji ostaje isti uz minimalan broj jednadžbi.

220. Zašto je pri rješavanju neke mreže pomoću metode jednadžbi napona čvorova «zgodno» sve početne uvjete prikazati kao strujene izvore?

Transformirana mreža ponaša se kao otporna mreža. Broj čvorova ostaje isti uz minimalan broj jednadžbi.

221. Pod kojim uvjetima vrijedi definicija funkcije mreže? Koja je osnovna razlika između definicije funkcije mreže u frekvencijskom s-području u odnosu na definiciju funkcije mreže u frekvencijskom ω području?

Definicija funkcije mreže vrijedi za svaku linearnu vremenski nepromjenjivu mrežu u kojoj djeluje samo jedan nezavisni izvor.

$$H(S) = \frac{L[\text{prisilni odziv}]}{L[\text{poticaj}]} = \frac{R(s)}{E(s)}$$

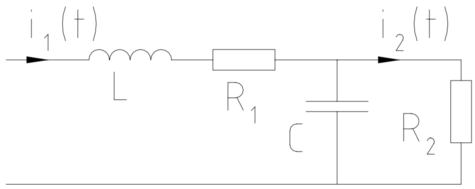
U frekvencijskom ω-području funkcija mreže H(jω) je kompleksni broj koji pomožen s fazorom poticaja daje fazor odziva, a u mreži koju karakteirzira H(s) svi početni uvjeti jednaki su nuli i u mreži nema unutarnjih nezavisnih izvora.

222. Koji je fizikalni smisao polova i nula funkcija mreže?

Polovi definiranju valni oblik odziva, a nule veličine svakog dijela odziva. polovi su podskup frekvencija iz skupa prirodnih frekvencija odziva.

223. Što su to prirodne frekvencije varijable mreže r(t)? Ilustrirajte primjerom.

Odziv se sastoji od valnog oblika u kojem se nalaze frekvencije p_i koje ovise samo o funkciji mreže i zovu se prirodne frekvencije varijable mreže r(t).



$$s^2 + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R^2 C}\right)s + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{LC} = 0$$

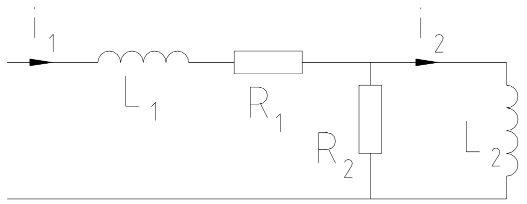
prirodne frekvencije varijable $i_2(t)$ su rješenja ove karakteristične jednadžbe ako je poticaj naponski izvor $u_1(t)$ što proizlazi iz $Y_{21} = \dfrac{I_2(s)}{U_2(s)}$.

$$Y_{21} = \frac{I_2(s)}{U_2(s)}$$

ako je poticaj srujni izvor, funkcija mreže je $\alpha_{21}(s) = \dfrac{I_2(s)}{I_1(s)}$ pa je rješenje ove karakteristične jednadžbe jedna prirodna frekvencija.

Neki broj S_1 prirodna je frekvencija varijable mreže x(t) ako za neko početno stanje mreže slobodni odziv varijable x(t) sadržava član $K_1 e^{s_1 t}$.

224. Odredite prordne frekvencije varijable i$_2$(t) ako je a) poticaj oblika $\hat{U}\sin\omega t$, b) poticaj oblika $i_1 = Ie^{-\alpha t}$.



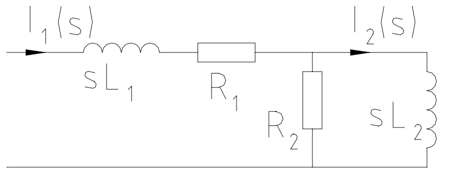
krug drugog reda

karakteristična jednadžba ne ovisi o poticaju

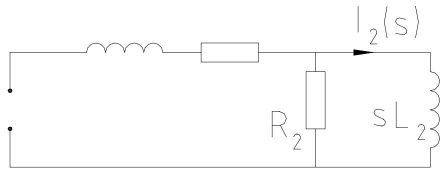
$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0{}^2 = 0$$

prirodne frekvencije: $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$

a)



b)



a) poticaj naponski izvor → k.s. → dvije prirodne frekvencije

$$(sL_1 + R_2)I_1(s) + R_2(I_1(s) - I_2(s)) = 0$$

$$I_2(s)sL_2 - R_2[I_1(s) - I_2(s)] = 0$$

determinanta sustava:

$$(sL_1 + R_1 + R_2)(sL_2R_2) - R_2{}^2 = 0$$

$$s^2 + \left(\underbrace{\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}}_{2\alpha}\right)s + \underbrace{\frac{R_1R_2}{L_1L_2}}_{\omega_0{}^2} = 0$$

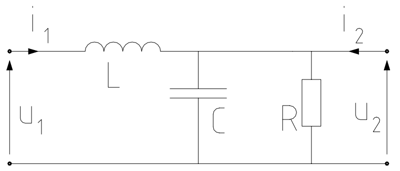
b) poticaj strujni izvor → p.h. → jedna prirodna frekvencija

$$(sL_2 + R_2)I_2(s) = 0$$

$$s + \frac{R_2}{L_2} = 0$$

$$s_1 = -\frac{R_2}{L_2}$$

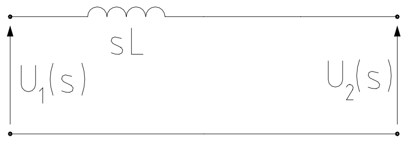
225. Pokažite na primjeru mreže sheme spoja prema slici da recipročna funkcjia neke prijenosne funkcije mreže ne mora biti funkcija mreže.



$$A_{21}(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

$$A_{12}(s) = \frac{U_1(s)}{U_2(s)} \rightarrow \text{poticaj } \mathrm{u}_2$$

$$A_{21} \neq \frac{1}{A_{12}}$$



226. Između zadanih racionalnih funkcija odredite one koje mogu biti ulazne funkcije mreže.

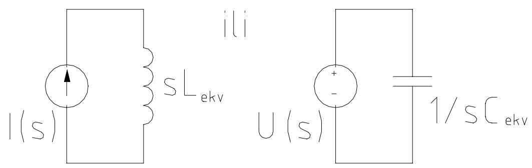
$$Z_1(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^3+s+1}; \quad Y_2(s) = \frac{s-3}{s^2+3s+1}; \quad Y_3(s) = \frac{3s+2}{s^4+s^3+2s^2+s+1}; \quad Y_4(s) = \frac{s^2+s+1}{s+2}$$

ulazne funkcije mreže: $Z_1 = \frac{U_1(s)}{I_1(s)}$; $Y_1(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)}$

I.) na višim frekvencijama dominira svojstvo jednog elementa mreže. To znači da je mreža:

$Z_1(s)$ *ili* $Y_1(s)$

$$Z_1(s) = \frac{I(s)sL_{ekv}}{I(s)} = sL_{ekv}$$



- razlika stupnja polinoma u brojniku i nazivniku mora biti 1 (P(s)-Q(s)=1) → Y_3 otpada

II.) mreža je L/VNP, R>0 → pasivni elementi mreže, svi koeficijenti P(s) i Q(s) moraju biti pozitivni → otpada Y_2.

III.) u polinomu moraju postojati svi članovi od najvišeg ka najnižem osim ako nedostaju svi parni ili svi neparni → otpada $Z_1(s)$.

- funkcija $Y_4(s)$ može biti ulazna.

227. Odredite koje funkcije mogu bit prijenosne funkcije mreže,

$$A_{21}(s)=\frac{s^3+2s}{s^2+s+1};\quad Z_{21}(s)=\frac{s^2+s-1}{s^2+2s+2};\quad \alpha_{21}(s)=\frac{1}{s^2-2s+2};\quad Y_{21}(s)=\frac{s^3+2s}{s^4+3s^2}.$$

$$A_{21}(s)=\frac{s^3+2s}{s^2+s+1}$$

Ne jer za prijenosne funkcije $A_{21}(s)$ i $\alpha_{21}(s)$ najviši mogući stupanj brojnika jednak je stupnju polinoma nazivnika

$$\alpha_{21}(s)=\frac{1}{s^2-2s+2}$$

Ne, Q(s) mora imati pozitivne koeficijente

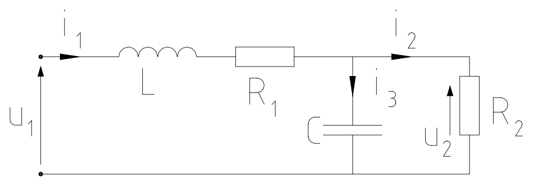
$$Z_{21}(s)=\frac{s^2+s-1}{s^2+2s+2}$$

Ova funkcija može bit prijenosna funkcija mreže

$$Y_{21}(s)=\frac{s^3+2s}{s^4+3s^2}$$

Ne. Nedostaje Q(s) član uz s^0.

228. Odredite prijenosnu impedanciju $Z_{21}(s)$ i prijenosnu admitanciju mreže prema slici.



$$Z_{21}(s)=\frac{U_2(s)}{I_1(s)}\qquad Y_{21}(s)=\frac{I_2(s)}{U_2(s)}$$

$$U_1(s)=sLI_1(s)+R_1I_1(s)+\frac{1}{sC}[I_1(s)-I_2(s)]$$

$$\frac{1}{sC}[I_1(s)-I_2(s)]-R_2I_2(s)=0$$

$$\frac{1}{sC}[I_1(s)-I_2(s)]=R_2I_2(s)\qquad \frac{1}{sC}I_1(s)=R_2I_2(s)+I_2(s)\frac{1}{sC}$$

$$I_1(s)=I_2(s)\left(R_2+\frac{1}{sC}\right)sC=I_2(s)\cdot(1+R_2sC)$$

$$U_1(s)=sLI_2(s)(1+R_2sc)+R_1I_2(s)(1+R_2sC)+\frac{1}{sC}I_2(s)(1+R_2sC)-\frac{1}{sC}I_2(s)$$

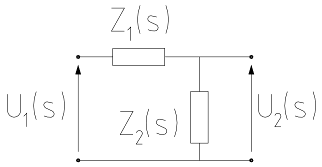
$$U_1(s)=sL_2I_2(s)+s^2LR_2CI_2(s)+R_1I_2(s)+R_1R_2sCI_2(s)+I_2(s)R_2$$

$$U_1(s)=I_2(s)[sL_2+s^2LR_2C+R_1+R_1R_2sC+R_2]$$

$$Y_{21}(s)=\frac{I_2(s)}{U_1(s)}=\frac{I_2(s)}{I_2(s)[s^2LR_2C+sR_1R_2C+R_1+R_2]}=\frac{1}{s^2LR_2C+sR_1R_2C+R_1+R_2}$$

$$Z_{21}(s)=\frac{U_2(s)}{I_1(s)}=\frac{I_2(s)R_2}{I_2(s)(1+R_2sC)}=\frac{R_2}{1+R_2sC}$$

229. Dokažite da je za prijenosnu funkciju mreže $A_{21}(s)$ najviši mogući stupanj polinoma brojnika P(s) jednak stupnju polinoma nazivnika Q(s).



$$A_{21}=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{Z_2(s)I(s)}{[Z_1(s)+Z_2(s)]I(s)}=\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}$$

imamo 3 elementa mreže, a po dva uzimamo istodobno. Postoje kombinacije: -ako su elementi iste vrste, A_{21}=kost., a ako su različiti sve kombinacije impedancija dvaju elemenata od 3 moguća (sL, 1/sC, R) pokazuju da stupanj P(s) ne premašuje stupanj Q(s).

primjer: 1). $Z_1(s)=R$, $Z_2(s)=sL$ $\quad A_{21}=\dfrac{sL}{R+sL}$ 2.) $Z_1(s)=\dfrac{1}{sC}$, $Z_2(s)=sL$ $\quad A_{21}=\dfrac{sL}{sL+\dfrac{1}{sC}}=\dfrac{s^2LC}{s^2LC+1}$

230. Prisilni odziv jednoprilaza na jedinični skok je $y_1(t)=e^{-\alpha t}$. Odredite periodički odziv jednoprilaza na poticaj $x(t)=A\cos\omega t$.

$y_1(t)=e^{-\alpha t}$

$x(t)=A\cos\omega t$

$$H(s)=\frac{L[\text{prisilni odziv}]}{L[\text{poticaj}]}=\frac{\frac{1}{s+\alpha}}{\frac{1}{s}}=\frac{s}{s+\alpha}$$ → funkcija mrže

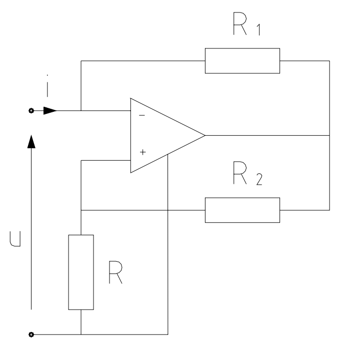
231. Prisilni odziv mreže na koju je narinut poticaj $Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$ je $Be^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$. odredite prisilni odziv te mreže na poticaj AS(t).

232. Dokažite da je pasivnost mreže dovoljan, ali ne i nužan uvjet stabilnosti mreža.

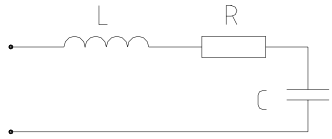
Sve pasivne mreže su stabilne, ali sve stabilne mreže ne moraj biti pasivne. Stabilna mreža je ona gdje ograničen poticaj proizvede ograničen odziv.

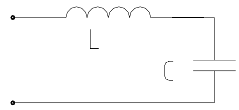
233. Objasnite i pokažite na primjeru kako bez detaljnije analize prepoznati da neki sklop s operacijskim pojačalom može raditi kao oscilator.

Sklopovi s pozitivnom povratnom vezom mogu raditi kao oscilatori.

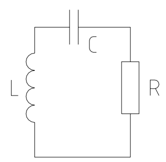


234. Objasnite pojam stabilnosti impusnog odziva na primjerima mreža prema slici.





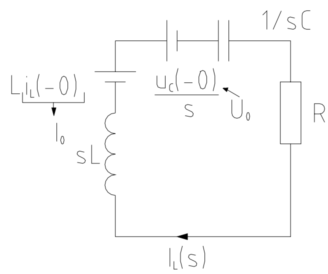
235. Objasnite pojam stabilnosti slobodnog odziva na primjeru mreže prema slici.



odziv neke mreže na poticaj =

slobodni odziv (moraju biti nenulti početni uvjeti)

+prisilni odziv (zbog poticaja)



$$sLI_L(s) - LI_0 + \frac{U_0}{s} + I_L(s)\frac{1}{sC} + I_L(s)R = 0$$

$$I_L(s) = \frac{sLI_0 - U_0}{L\left(s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\right)}, \qquad 2\alpha = \frac{R}{L},\ \omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$$

stabilnost: ispitivanje polinoma u nazivniku

karakteristična jednadžba: $s^2 + 2\alpha s + \omega_0{}^2 = 0 \Rightarrow\ s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0{}^2}$ - prirodne frekvencije

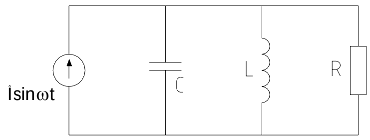
$|\alpha| < |\omega_0|$ - odziv je oscilatoran , $|\alpha| = |\omega_0|$ - konzervatoran odziv

$|\alpha| > |\omega_0|$ - rješenje je realni broj → aperdiodski odziv (stabilna mreža)

$\alpha > 0$ - prigušenje

Sustav će biti stabilan ako je $\alpha \geq 0$ odnosno $\frac{R}{L} \geq 0$ tj. ako su R i L pasivni.

236. Objasnite pojam stabilnosti prisilnog odziva na primjeru mreže prema slici.



237. Odredite koji je od zadanih polinoma Hurwitzov polinom.

$Q_1(s) = s^2 + 5s + 6;\qquad Q_2(s) = s^2 + s - 6;\qquad Q_3(s) = s^4 + 8s^2 + 16$.

238. Koji su osnovni nedostaci Hrwitzovog testa stabilnosti?

1) nepoznata «udaljenost od granice stabilnosti»

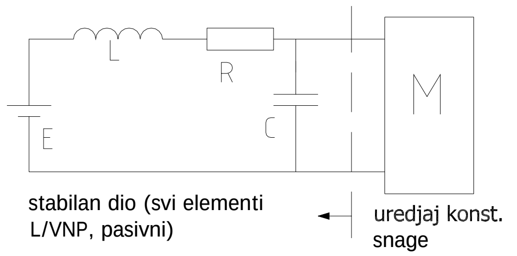
2) transformat impulsnog odziva najčešće nije poznat

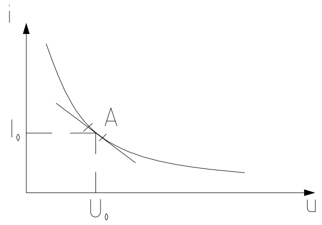
239. Objasnite pojam lokalne stabilnosti mreže.

240. Kako bi u vremenskom području izgledao valni oblik neke varijable stan ja sustava koja je lokalno nestabilna a globalno stabilna?

241. U kojim je primjerima korisna stabilnost neke električne mreže, a u kojima primjerima nestabilnost? Ilustrirajte odgovor primjerima.

242. Uređaj konstantne snage napaja se preko niskopropusnog LC filtra iz istosmjernog naponskog izvora. Primijenivši metodu Ljapunova pokažite da sustav filtar-uređaj može postati nestabilan!





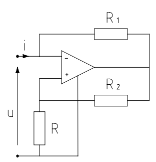
$$p = konst = u \cdot i$$

$$u \cdot i = k \;\Rightarrow\; u = \frac{k}{i}$$

$$R_{uredred} = \left.\frac{du}{di}\right|_{I_0,U_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{k}{i}\right) = k(-1)i^{-2} = -\left.\frac{k}{i^2}\right|_{I_0,U_0} \le 0$$

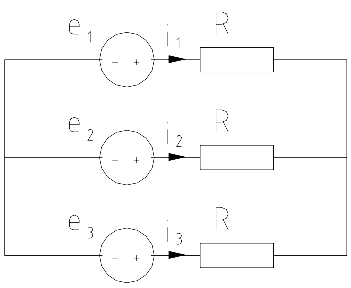
otpor sustava filtra + uređaj konstantne snage $\le$ 0

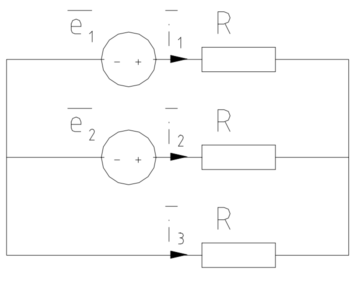
aktivni otpor ,realizacija:



- sve mreže koje sadrže o.p. ili zavisni izvor (nuni, nusi, suni, susi) su potencijalno nestabilne mreže

243. Objasnite relativnost pojma faze sa stajališta teorije mreža.





$$\overline{e}_1 = e_1 - e_3$$
$$\overline{e}_2 = e_1 - e_2$$

opisivanje mreža, KZN, KZS:

$$e_1 - Ri_1 = e_3 - Ri_3 \qquad \overline{e}_1 - R\overline{i}_1 = -R\overline{i}_3$$
$$e_2 - Ri_2 = e_3 - Ri_3 \qquad \overline{e}_2 - R\overline{i}_2 = -R\overline{i}_3$$
$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \qquad \overline{i}_1 + \overline{i}_2 + \overline{i}_3 = 0$$

- sa stajališta teorije mreža → iste mreže: $\overline{i}_1 + \overline{i}_2 + \overline{i}_3 = i_1 + i_2 + i_3$

- sa stajališta stvarnih mreža: prva mreža je simetrična trofazna, a druga nesimetrična dvofazna.

- po teoriji mreža pojam faze je relativan

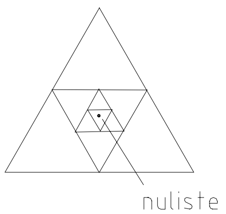
244. Kako je definiran fazni napon m-fazne m-žilne mreže? Koje je osnovno svojstvo nulišta?

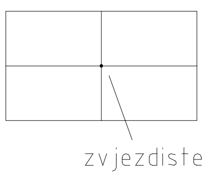
Višefaznu mrežu opteretimo m-krakom zvijezdom jednakih otpora R, a u jednoharmonijskoj mreži m-krakom zvijezdom elemenata mreže jednakih impedancija u svakoj fazi. Tada je fazni napon m-fazne i m-žilne mreže jednak umnošku struje kroz m-fazu i otpora R. $u_k = Ri_k$

Osnovno svojstvo nulišta je da su sume faznih napona m-fazne m-žilne mreže jednake nuli. $\sum_{k=1}^{m} u_k = 0$.

245. S pomoću geometrijskih argumenata pokažite da su u svakoj simetričnoj višefaznoj mreži potencijali zvjezdišta i nulišta jednaki.

Nulište dobivamo tako da n-terokutu raspolovimo stranice i taj postupak ponovimo za novi n-terokut i tako sve dok se n-terokut ne stegne u točku. Ta točka je nulište sustava. Za trofazni sustav nulište je težište trokuta linijskih napona.





Ukoliko je težište isto što i nulište, a težište je isto što i zvjezdište zaključujemo da su potencijali zvjezdišta i nulišta jednaki.

246. Koje je osnovno svojstvo uravnotežene mreže i kojim je primjenama to važno? postoje li i uravnotežene nesimetrične mreže?

Osnovno svojstvo uravnotežene mreže je da je trenutna snaga mreže konstantna u ustaljenom stanju. $\sum_{k=1}^{m} e_k(t) i_k(t) = konst.$ i jednaka zbroju srednjih snaga pojedinih faza.

(3-fazni asinkroni motor ne okreće se pulzativno ??? (pulsirajući) nego konstantnom brzinom)

Postoje uravnotežene nesimetrične mreže (dvofazne trožilne mreže) gdje su naponi $e_1 = \hat{E}\cos\omega t,\ e_2 = \hat{E}\sin\omega t$.

247. Odredite napon faze 2 u četverofaznoj mreži ako su poznate trenutne vrijednosti svih međufaznih (linijskih) napona?

$$u_k = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} u_{lk} \qquad k = 2$$

$$m = 4$$

$$u_2 = \frac{1}{4}[u_{12} + u_{32} + u_{42}]$$

248. U četverofaznoj simetričnoj mreži poznata je efektivna vrijednost napona jedne faze. odredite efektivne vrijednosti svih međufaznih napona.

četverofazna simetrična mreža - međufazni naponi: $U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{23}, U_{24}, U_{34}$

- fazni naponi: $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3, \dot{U}_4$

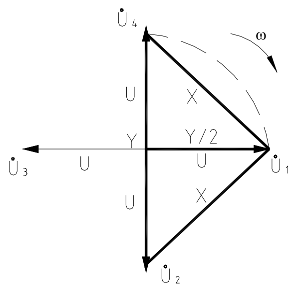
fazni dijagram, 360:4=90°

$$U_1 = \hat{U}\sin\omega t$$

$$U_2 = \hat{U}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_3 = \hat{U}\sin(\omega t + \pi)$$

$$U_4 = \hat{U}\sin\left(\omega t + 3\frac{\pi}{2}\right)$$



- U_{13}, U_{24}
- $U_{12}, U_{14}, U_{34}, U_{23}$

veza između efektivnih vrijednosni faznih i linijskih napona: $m\sum_{i=1}^{m} U_i^{\,2} = \sum_{l\le q<s\le m} U^2{}_{sq}$,

$m - broj\ faza$

$$m = 4$$

$$4\left(U_1^{\,2} + U_2^{\,2} + U_3^{\,2} + U_4^{\,2}\right) = \left(U_{21}^{\,2} + \underline{U_{31}}^{\,2} + U_{32}^{\,2} + U_{41}^{\,2} + \underline{U_{42}}^{\,2} + U_{43}^{\,2}\right)$$

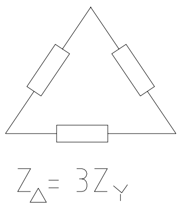
$$4\cdot 4U^2 = 2Y^2 + 4X^2 \ /:2$$

$$\underline{8U^2 = Y^2 + 2X^2}$$

$$iz\ dijagrama \Rightarrow X^2 = \frac{Y^2}{4} + \frac{Y^2}{4} = \frac{Y^2}{2}$$

$$8U^2 = 2Y^2 \Rightarrow \begin{matrix} Y = 2U \\ X = \sqrt{2}U \end{matrix}$$

249. Poznate su efektivne vrijednosti linijskih struja trofazne mreže. Mogu li se u općem slučaju odrediti efektivne vrijednosti faznih struja?



$$m\sum_{k=1}^{m} U_k^{\,2} = \sum_{l\le q<s\le m} U_{sq}^{\,2}$$

$$3\left(U_1^{\,2}+U_2^{\,2}+U_3^{\,2}\right)=U_{21}^{\,2}+U_{31}^{\,2}+U_{32}^{\,2}$$

$$3\cdot 3U_f^{\,2}=3U_l^{\,2}$$

$$3Z_Y^{\,2}I_f^{\,2}=3\cdot 9Z_Y^{\,2}I_l^{\,2}$$

$$I_f=\sqrt{3}I_l$$

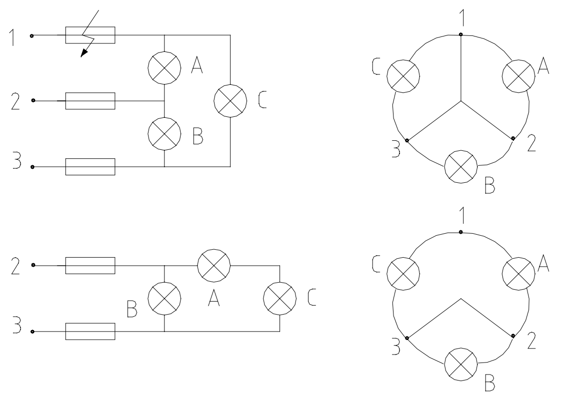
Fazne struje mogu se odrediti samo ako je mreža simetrična.

250. Za 3-fazni sustav prikazan fazorima vrijedi da se nulište nalazi u težištu linijskih napona. a) vrijedi li to i za trenutne vrijednosti linijskih napona, b) vrijedi li to općenito i za efektivne vrijednosti napona?

a) Vrijedi za trenutne vrijednosti $u_k = \dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} u_{lk}$

b) Ne vrijedi za efektivne vrijednosti jer ne vrijedi KZN za efektivne vrijednosti.

251. Na simetričnu trofaznu mrežu efektivne vrijednosti linijskog napona U priključene su tri žarulje iste snage. a) Što se događa s intenzitetom svjetla pojedinih žarulja ako pregori osigurač u fazi 1? Kolike su efektivne vrijednosti napona na pojedinim žaruljama? b) Koju efektivnu vrijednost napona pokazuje voltmetar V ako se uz ispravne osigurače žarulje prespoje prema slici?



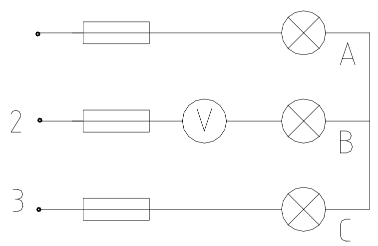
žarulje imaju istu snagu → svijetle jednako

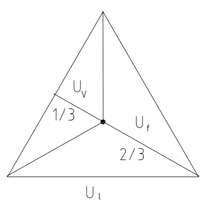
žarulja B → meni je dobro!

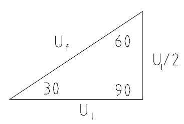
$U_B = U_{23} = U$ → ja svijetlim kao i prije

žarulja A i C → nama nije dobro, jer mi ne svijetlimo kao i prije

$$U_A = U_C = \frac{U_{23}}{2} = \frac{U}{2}$$







$$U_f = \frac{2}{3}U_V \rightarrow U_V = \frac{3}{2}U_f$$

$$\cos 30 = \frac{U_l/2}{U_f} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}}$$

$$U_V = \frac{3}{2}\frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}U_l = \frac{\sqrt{3}}{2}U$$

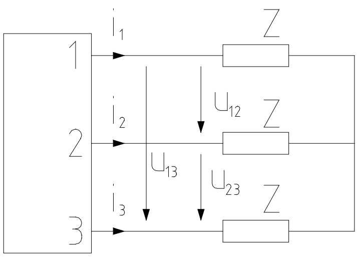
252. Efektivna vrijednost linijskog napona trofaznog sustava uvijek je manja od $\sqrt{3}$ -struke efektivne vrijednosti faznog napona ako u faznom naponu postoje viši harmonici reda 3k, k=1,2,3,...Zašto?

$$u_2 = \hat{U}_{22}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \hat{U}_{23}\sin(3\omega t)$$

$$u_3 = \hat{U}_{32}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \hat{U}_{33}\sin(3\omega t)$$

Zato što 3-struki harmonici uvijek tvore jednofazni sustav.

253. Trofazni jednoharmonijski nesimetrični naponski izvor napaja simetrično trošilo impedancije Z(jω). Odredite efektivnu vrijednost linijskog napona U_{12} ako su poznate efektivne vrijednosti struja I_1, I_2, I_3 te efektivne vrijednosti linijskih napona U_{23} i U_{13}.

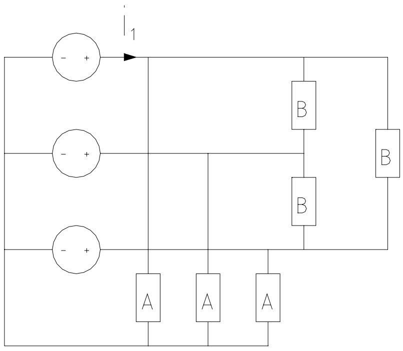


$$3\left(U_1^{\,2} + U_2^{\,2} + U_3^{\,2}\right) = U_{12}^{\,2} + U_{23}^{\,2} + U_{31}^{\,2}$$

$$3\,|\,Z\,|\left(I_1^{\,2} + I_2^{\,2} + I_3^{\,2}\right) = U_{12}^{\,2} + U_{23}^{\,2} + U_{31}^{\,2}$$

$$U_{12} = \sqrt{3\,|\,Z\,|\sum_{k=1}^{3} I_k^{\,2} - (U_{23}^{\,2} + U_{31}^{\,2})}$$

254. Odredite efektivne vrijednosti struje faza i neutralnog vodiča ako je simetrični trofazni sustav napona opterećen simetričnim trošilom A i B, a struja faze 1 je $i_1 = \hat{I}\sin\omega t + k\hat{I}\sin(3\omega t + 30°)$



$$I_m = \hat{I}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}, \quad m = 1,2,3$$

$$I_0 = \frac{3}{2}k\hat{I}$$

255. Objasnite postupak određivanja simetričnih komponenata m-fazne mreže. Koji je fizikalni smisao simetričnih komponenata 3-faznog sustava?

Ako je zadano m-fazora ($\dot{A}_k,\ k=1,2,...m$) $\dot{A}_k = \sum_{k=1}^{m} \dot{B}_{kV}$

npr. m=3 → 9 fazora, m=5 → 25 fazora $\dot{B}_{kV} = \dot{B}_V e^{-j\frac{2\pi}{m}(k-1)V}$, $k=1,...m$

B_k → k-ta simetrična komponenta

$$\dot{B}_V = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{m}(k-1)V}$$

Fizikalni smisao simetričnih komponenti 3-faznog sustava je rastavljanje nesimetričnog sustava u 3 simetrična sustava: dva trofazan (inverzni i direktni) i jednog jednofaznog (nulti).

256. Navedite osnovna svojstva Steinetzovog operatora.

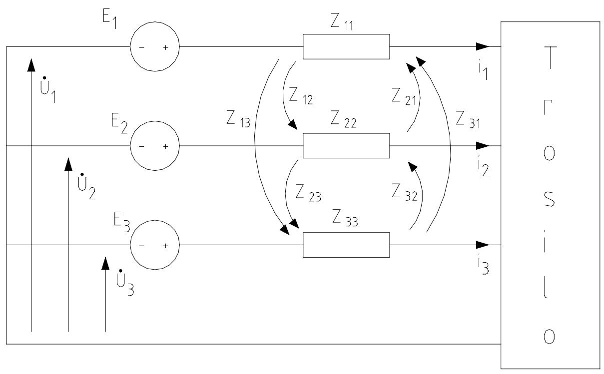
$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1/120°$$

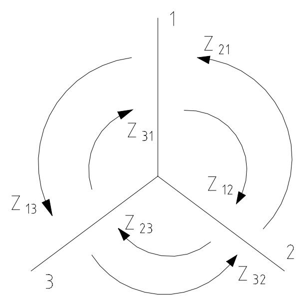
Ovaj operator zakreće fazu za 120°, a koristi se i za računanje simetričnih komponenti.

257. Što su to ciklički simetrične mreže? Ilustrirajte odgovor primjerom.

Mreža je ciklički simetričan ako vrijedi: $\left.\begin{array}{l} Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} \\ Z_{21} = Z_{32} = Z_{13} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\text{ove gornje} \\ \text{različazlod donjih}\end{array}$

$Z_{11} = Z_{22} = Z_{33}$





primjer: sinkroni stroj (sinkroni generator)

Mreža nije recipročna. Ne statička mreža

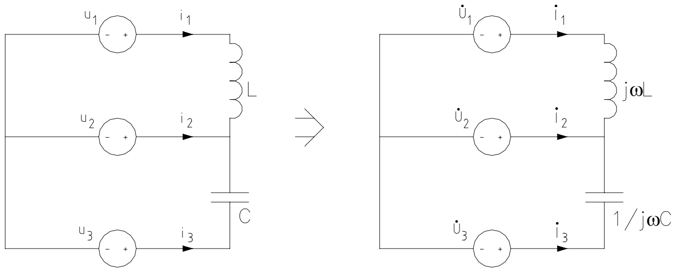
258. Zašto je pri analizi nesimetričnih trofaznih mreža zgodno uvesti metodu analize pomoću simetričnih komponenti?

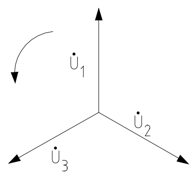
Analiza nesimetričnih trofaznih mreža metodom simetričnih komponenti pojednostavljuje proračun. u nekim slučajevima (npr. rotacijski strojevi u mreži) elemente nadomjesne sheme spoja mreže možemo odrediti samo metodom simetričnih komponenti.

259. Što treba znati da bi se nesimetrična višefazna mreža mogla rješavati bilo kojom standardnom metodom analize?

Treba poznavati elemente nadomjesne sheme mreže ili te elemente treba odrediti mjerenjem.

260. Na trošilo za koje vrijedi $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ narinut je direktni sustav napona. Pokažite da struje faza tvore inverzni sustav.





$$\dot{U}_1 = U$$
$$\dot{U}_2 = a^2 U$$
$$\dot{U}_3 = aU$$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \hat{U}\sin\omega t \\ U_2 &= \hat{U}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} monoharmonijski$$

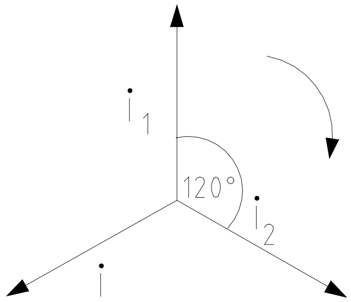
$$X = \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Fazorska transformacija: 2KZN, 1KZS:

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = jX\dot{I}_1$$
$$\dot{U}_3 - \dot{U}_2 = -jX\dot{I}_3$$
$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{1-a^2}{jX}U \\ \dot{I}_3 &= -\frac{a-a^2}{jX}U \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{I}_2 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_3 = \underbrace{\frac{U}{jX}}_{\frac{U}{jX}=\frac{\dot{I}_1}{1-a^2}}(-1+a) = (-1+a)\frac{\dot{I}_1}{(-1+a)(-1-a)} = \frac{-\dot{I}_1}{1+a}$$

$$1 + a + a^2 = 0$$
$$1 + a = -a^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{I}_2 = \dot{I}a^{-2} = \dot{I}_1 a}$$
$$a^2 = a^{-1} = \frac{1}{a}$$
$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = -(a+1)\dot{I}_1$$
$$\boxed{\dot{I}_3 = a^2\dot{I}_1}$$



261. Veza između simetričnih komponenti i nesimetričnih trofaznih napona dana je izrazom. Odredite fazore direktnog, inverznog i nultog sustava ako je $\dot{U}_1 = 1,\ \dot{U}_2 = 1 - j\sqrt{3},\ \dot{U}_3 = -1 + j\sqrt{3}$.

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_d \\ \dot{U}_i \\ \dot{U}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix}, \quad a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_d \\ \dot{U}_i \\ \dot{U}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 - j\sqrt{3} \\ -1 + j\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \\ 1 - 1 - j\sqrt{3} - 1 + j\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{U}_d = \frac{5}{3},\ \dot{U}_i = -\frac{1}{3},\ \dot{U}_0 = -\frac{1}{3}$$

262. Veza nesimetričnih trofaznih napona i simetričnih komponenti dana je izrazom. Odredite $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$ ako su referentni fazori simetričnih komponenti $\dot{U}_d = 2, \dot{U}_i = 1, \dot{U}_0 = j$.

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{U}_d \\ \dot{U}_i \\ \dot{U}_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_d + \dot{U}_i + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_2 &= a^2\dot{U}_d + a\dot{U}_i + \dot{U}_0 \\ \dot{U}_3 &= a\dot{U}_d + a^2\dot{U}_i + \dot{U}_0 \end{aligned}$$

a - Steimmetzov operator

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

svojstva operatora:

$$1 + a + a^2 = 0$$

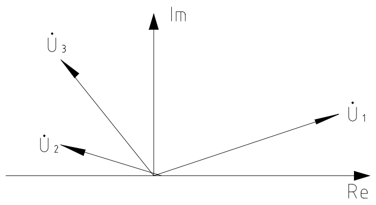
$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}}; \quad a^3 = 1$$

$$a^{-1} = a^2; \quad a^{-2} = a$$

$$\dot{U}_1 = 2 + 1 + j = 3 + j$$

$$\dot{U}_2 = 2a^2 + a + j = 2\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} + j\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{U}_3 = 2a + a^2 + j = -\frac{3}{2} + j\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Nesimetrični sustav napona, trofazni.

263. Je li nužno simetričnu trofaznu mrežu rješavati metodom simetričnih komponenti ako se zna direktna, inverzna i nulta impedancija izvora? Obrazložite.

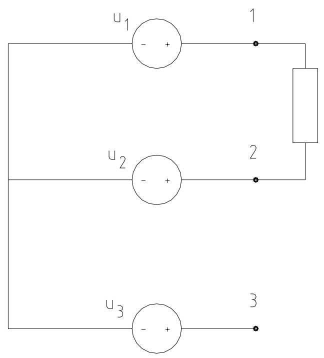
Nije nužno, ali je logično. Ako znamo direktnu, inverznu i nultu impedanciju možemo rješavati mrežu bilo kojom metodom.

264. Zašto je višefaznom sustavu važno dogovoriti referentnu točku s obzirom na koju je definirana trenutna snaga.

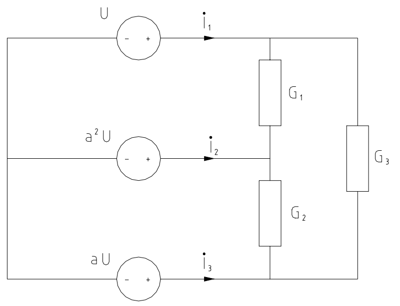
265. Što je aritmetička prividna snaga i zašto je ona uvijek manja od sistemske prividne snage?

266. Što je sistemska prividna snaga i pod kojim uvjetom je ostvarena potpuna kompenzacija faktora snage λ.

267. Odredite aritmetičku i sistemsku prividnu snagu te djelatnu snagu simetrične trofazne mreže opterećene otporom R.



268. Trofazna mreža direktnog sustava opterećena je trima otporima G_1, G_2, G_3, Fazori struja pojedinih faza dani su izrazima… Pretpostavite da je $G_1 = G_2 = G, G_3 = 2G$. Nacrtajte fazorske dijagrame napona i struja trofaznih mreža i objasnite opravdanost uvođenja pojma sistemske prividne snage.



$$\dot{I}_1 = \frac{U}{2}\left[3(G_1 + G_3) + j\sqrt{3}(G_1 - G_3)\right]$$

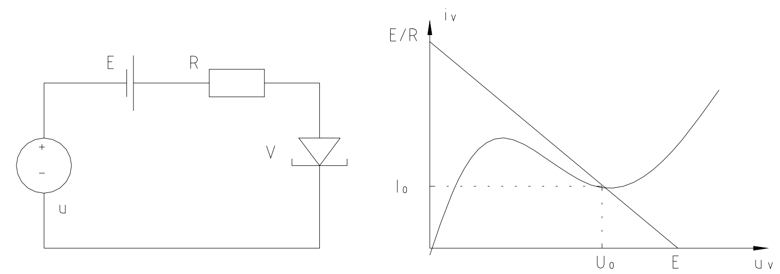
$$\dot{I}_2 = \frac{U}{2}\left[-3G_1 - j\sqrt{3}(G_1 + 2G_2)\right]$$

$$\dot{I}_3 = \frac{U}{2}\left[-3G_3 + j\sqrt{3}(G_3 + 2G_2)\right]$$

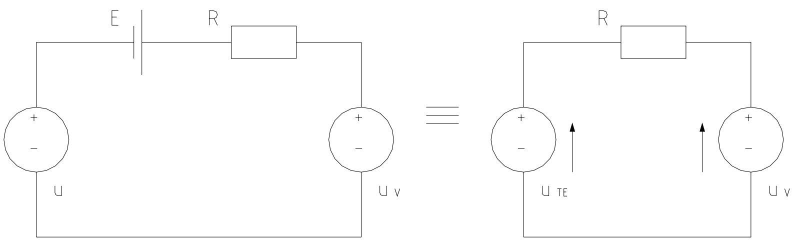
269. Zašto nije moguća trenutna kompenzacija nedjelatnih komponenti sistemske prividne snage?

270. Zašto nije moguća trenutna kompenzacija u jednofaznim mrežama?

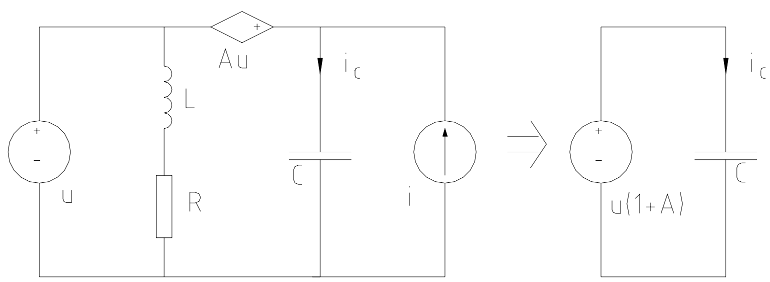
271. Nacrtajte nadomjesnu shemu spoja zadane mrež.



Naponom upravljan



272. Odredite struju kroz kapacitet C maksimalno pojednostavnivši zadanu mrežu. (Greška Au_1 → nije definirana upravljačka grana NUNI-a)



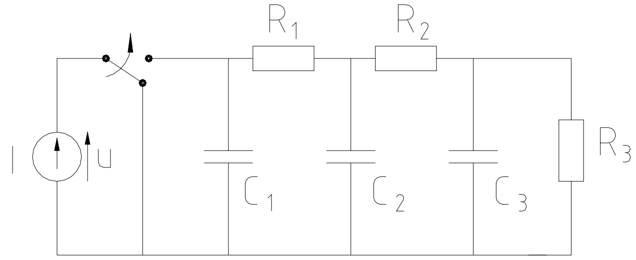
- napon na L i R =U
- strujni izvor ne određuje struju kroz C

$$u_C = Au + u$$

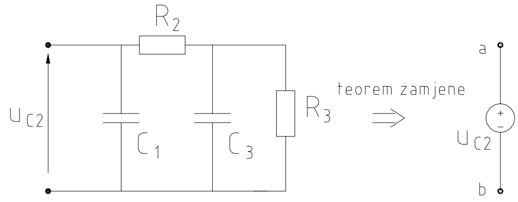
$$\underline{u_C = u(1+A)}$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\big(u(1+A)\big) = (1+A)C\frac{du}{dt}$$

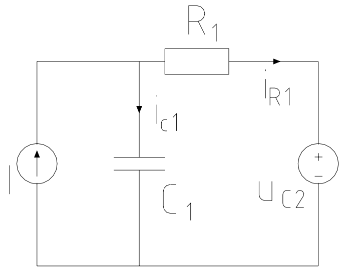
273. Odredite valni oblik napona izvora nakon uklopa sklopke u t=0 ako je od t=0 poznat valni oblik napona na C_2, $u_{C2}(t)$.



rješenje:



Nadomjesna mreža:



KZN: (-istosmjerni izvor)=1, KZS: 1

KZN: $u = R_1 i_{R1} + u_{C2}$

KZS: $i = i_{R1} + i_{C1} = i_{R1} + C\dfrac{du_C}{dt} \Rightarrow i_{R1} = i - C\dfrac{du_C}{dt}$

Konst. relacije za C: $i_C = C\dfrac{du_C}{dt} = C\dfrac{du}{dt}$

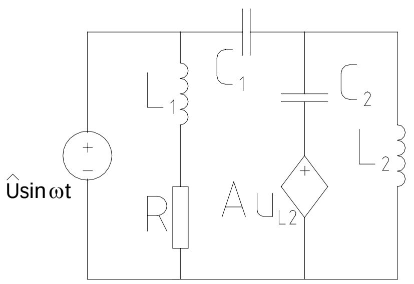
$$u = R_1\left(i - C\frac{du}{dt}\right) + u_{C2} \rightarrow \boxed{R_1 C_1 \frac{du}{dt} + u = \underbrace{R_1 i + u_{C2}}_{=R_1 I + u_{C2}}}$$

$R_1 C_1 = \tau$ str. 28. izraz 31.

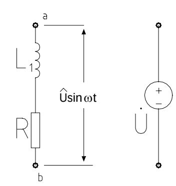
$$u(t) = \underbrace{u(+0)}_{=0} e^{-t/\tau} + \underline{\frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{t-x}{\tau}} \left(R_1 I + u_{C2}(x)\right) dx},$$

$$u_{C1}(-0) = 0 = u(-0)$$
$$u_{C1}(+0) = 0 = u(+0)$$

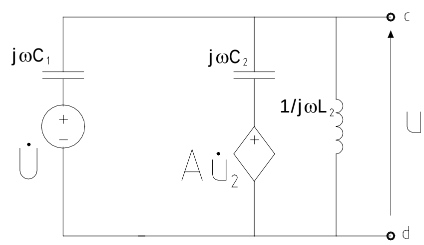
274. Odredite valni oblik napona na induktivitetu L_2 u ustaljenom stanju primjenivši Millmanov teorem.



teorem zamjene:



nadomjesna mreža:



NUNI: $\dot{u}_{cd} = \dfrac{\sum_{n=1}^{k} Y_k \dot{U}_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$

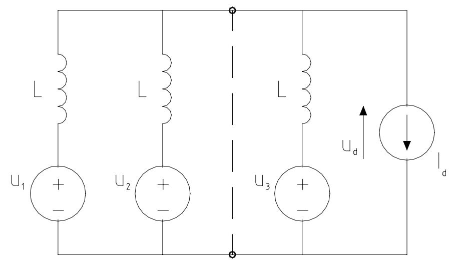
k= broj poprečnih grana =3

$$\dot{U}_{L2} = \frac{j\omega C_1 \dot{U} + j\omega C_2 A\dot{U}_2 + \dfrac{1}{j\omega L_2}\cdot 0}{j\omega C_1 + j\omega C_2 + \dfrac{1}{j\omega L_2}}$$

$$\dot{U}_{L2} = \frac{\dot{U}\omega^2 L_2 C_1}{1-\omega^2 L_2[C_1 + C_2(1-A)]} \Rightarrow u_{L2}(t) = \hat{U}\frac{\omega^2 L_2 C_1 \sin(\omega t + 0)}{1-\omega^2 L_2[C_1 + C_2(1-A)]}$$

$$\varphi = arctg\frac{0}{\mathrm{Re}} = 0$$

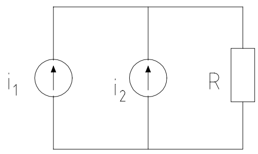
275. Dokažite da u mrežo vrijedi da je $u_d = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k(t)$.



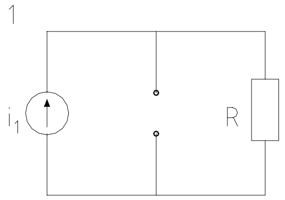
$$u_d = \frac{\sum_{k=1}^{n}\dot{U}_k Y_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k} = \frac{\dot{U}_1\frac{1}{j\omega L_1} + \dot{U}_2\frac{1}{j\omega L_2} + \dot{U}_3\frac{1}{j\omega L_3} + \ldots + \dot{U}_n\frac{1}{j\omega L_n}}{n\frac{1}{j\omega L}}$$

$$u_d = \frac{1}{j\omega L}\left(\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \ldots + \dot{U}_n\right)\frac{1}{n\frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dot{U}_k$$

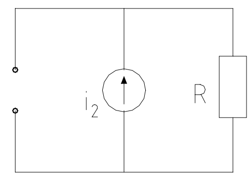
276. Odredite snagu trošila R ako je zadano $i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin\omega t$, $i_2 = \sqrt{2}I_2\sin(\omega t + \varphi)$. Koji uvjet mora vrijediti da bi za snage vrijedio teorem superpozicije?



1



2

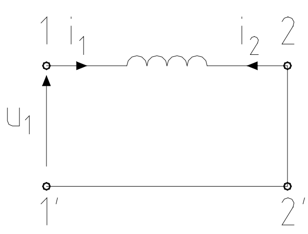


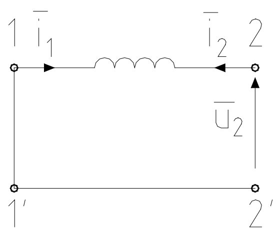
$$P_R = i_1^{\,2}R = 2I_1^{\,2}\sin^2\omega t \cdot R \qquad\qquad P_R = i_2^{\,2}R = 2I_2^{\,2}\sin^2(\omega t + \varphi)\cdot R$$

$$P_{Ruk} = 2R\left(I_1^{\,2}\sin^2\omega t + I_2^{\,2}\sin^2(\omega t + \varphi)\right)$$

Ne može se riješit jer da bi za snage vrijedio teorem superpozicije ne smije biti interakcije između odziva nastalih kao rezultat različitih poticaja.

277. Dokažite da je linearni vremenski nepromjenjivi induktivitet recipročni element mreže.





$$u_1 = L\frac{di_1}{dt} = -L\frac{di_2}{dt} \qquad\qquad \bar{u}_2 = L\frac{d\bar{i}_2}{dt} = -L\frac{d\bar{i}_1}{dt}$$

Ako $u_1 = \bar{u}_2$ slijedi da je $i_2 = \bar{i}_1$ pa je zadovoljen uvjet recipročnosti.

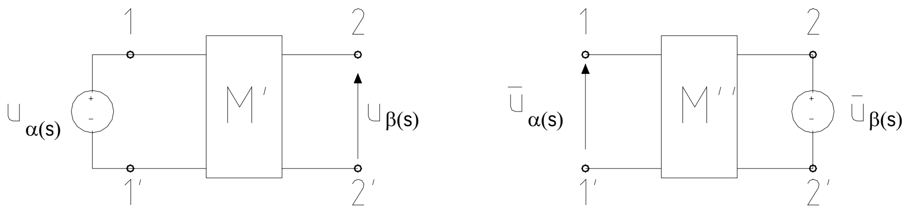
278. Je li linearnost neke mreže nužan uvjet da bi ta mreža bila recipročna?

Linearnost je dovoljan, ali ne i nužan uvjet recipročnosti. Iz definicije recipročnosti (zamjena odziva i poticaja) proizlazi da će i svaki nelinearni otpor (neparno simetrične karakteristike) biti recipročan element mreže.

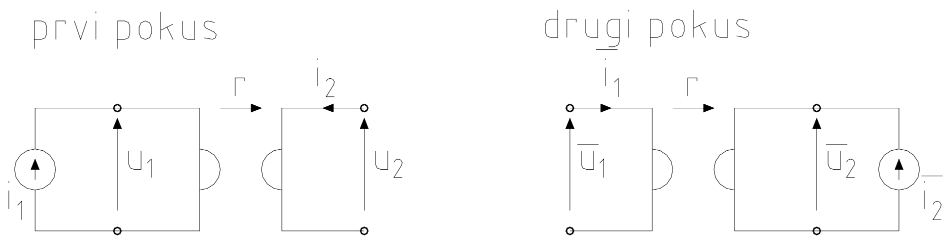
279. Objasnite na primjeru temeljni uvjet za izbor para pokusa kojim se dokazuje eventualna recipročnost neke mreže.

Temeljni uvjet izbora para pokusa pri određivanju recipročnosti mreže je da se zamjenom mjesta poticaja i odziva struktura mreže ne mijenja.

primjer:

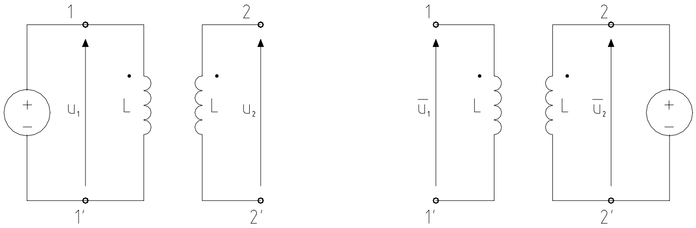


280. Dokažite da girator nije recipročni element mreže.

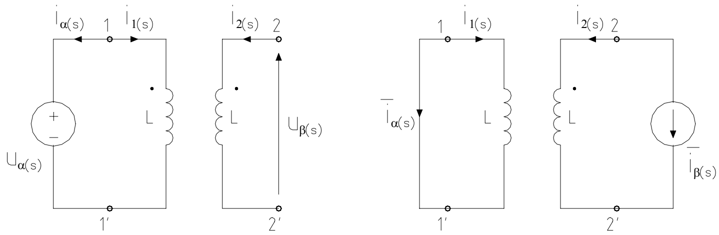


$$\left.\begin{aligned} u_2 &= -ri_1 \\ \bar{u}_1 &= r\bar{i}_2 \end{aligned}\right\} uz\ \ i_1 = \bar{i}_2\ \ slijedi\ \bar{u}_1 = -\bar{u}_2\ \ i\ slijedi\, da\ \ girator\ \ nije\ \ recipročec\, element\ \ mreze$$

281. Zašto se na temelju dvaju pokusa prikazanih na slici ne može dokazati recipročnost linearnog dvonamotnog transformatora. Koje pokuse treba provesti i zašto?



Ovi pokusi ne mogu se koristiti u dokazivanju recipročnosti jer je mreža strukturno promijenjena. Strukturno gledano u pokusu 1 mreža je kratko spojena na prilazu 1, 1', a prekinuta u 2, 2', dok je kod pokusa 2 mreža kratko spojena na prilazu 2, 2', a prekinuta na 1, 1'. Treba provesti slijedeće pokuse:



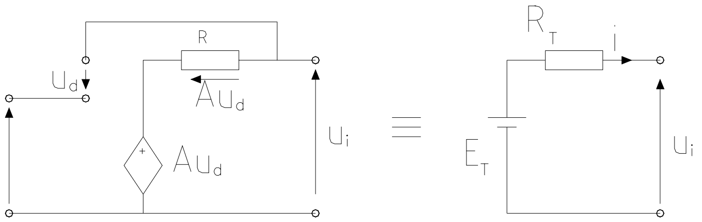
$$U_{\alpha(s)}\bar{I}_{\alpha(s)} + U_{\beta(s)}\bar{I}_{\beta(s)} = \bar{U}_{\alpha(s)}I_{\alpha(s)} + \bar{U}_{\beta(s)}I_{\beta(s)}$$

282. Recipročni dvoprilaz takve je sheme spoja da je pri narinutom skoku struje I_1 na prilazu 1 struja KS na prilazu 2 jednaka $i_2 = I_2 e^{-\alpha t}$. Odredite valni oblik napona na prilazu 1, $\bar{u}_1$, ako se na prilaz 2 narine napon valnog oblika $\bar{u}_2 = U_2 e^{-\beta t}$.

283. Pod kojim uvjetima vrijedi Thevenin - Nortonov teorem?

Thevenin - Nortonov teorem vrijedi za mreže sa jednoznačnim rješenjem te za mreže u kojima nema međudjelovanja između oba jednoprilaza. Ovaj teorem ne vrijdi za mrže sa magnetski vezanim induktivitetima, te za mreže sa zavisnim izvorima.

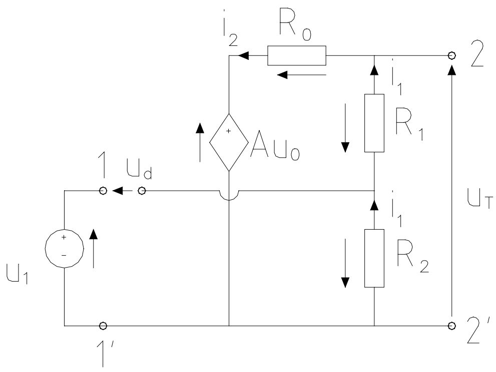
284. Odredite elemente Theveninove nadomjesne sheme naponskog slijedila izvedenog pomoću OP konačnog pojačanja A i izlaznog otpora R.



$$E = u_i + u_d \qquad u_d = E - u_i$$
$$Au_d - Ri = u_i$$
$$u_i(1+A) = AE - Ri$$
$$u_i = \frac{A}{1+A}E - \frac{R}{1+A}i$$

$$u_i = E_T - R_T i$$
$$E_T = \frac{A}{1+A}E$$
$$R_T = \frac{R}{1+A}$$

285. Odredite elemente Theveninove nadomjesne sheme obzirom na prilaz 2.

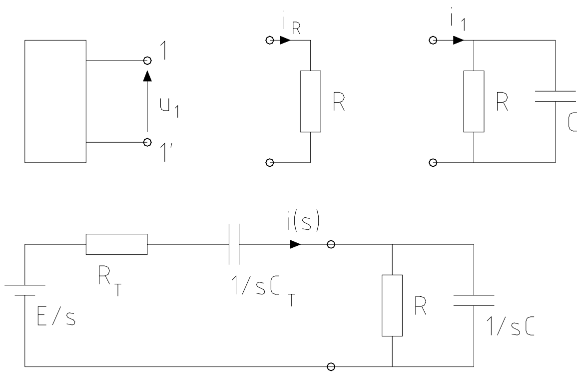


$$u_2 = i_1(R_1 + R_2) \Rightarrow i_1 = \frac{u_2}{R_1 + R_2}$$
$$u_0 = i_1 R_2$$
$$u_2 = -Au_0 + i_1 R_0$$
$$u_2 = -AR_2 i_1 + R_0 i_2 - Ri_1$$
$$u_2 = -(AR_2 + R_0)\frac{u_2}{R_1 + R_2} + R_0 i_2$$
$$R_T = \frac{u_2}{\,} = \frac{R_1 + R_2}{\,} R_0$$

$$u_T = -i_1(R_1 + R_2) \qquad i_1 = -\frac{u_T}{R_1 + R_2}$$
$$u_T = Au_0 - R_0 i_2 = Au_1 - A\frac{u_T}{R_1 + R_2}R_2 + R_0 i_1$$
$$u_0 = u_1 - \frac{u_T}{R_1 + R_2}R_2$$
$$i_1 = -i_2$$

$$u_T = Au_1 - A\frac{u_T R_2}{R_1 + R_2} - \frac{u_T R_0}{R_1 + R_2}$$
$$u_T = Au_1 - u_T\frac{AR_2 + R_0}{R_1 + R_2}$$
$$u_T = \frac{Au_1(R_1 + R_2)}{R_0 + R_1 + (1+A)R_2}$$

286. Valni oblik na prilazu 1 neke L/VNP mreže je $u_1 = E$. Ako se na prilaz 1 spoji otpor, struja kroz otpor će biti valnog oblika $i_R = Ie^{-\alpha t}$. Odredite struju tog prilaza ako se paralelno otporu spoji i kapacitet C.



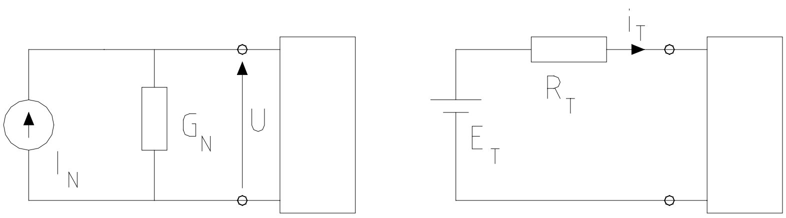
$$u_1 = u_T = E$$

$$Z_T = \frac{U_T(s) - RI_R(s)}{I_R(s)} = R_0 - R + R_0\frac{\alpha}{s} = R_T + \frac{1}{sC_T}$$

$$I(s) = \frac{E}{sZ(s)} = \frac{E}{R_T}\cdot\frac{s + \frac{1}{RC}}{s^2 + s\underbrace{\left[\frac{1}{RC} + \frac{1}{R_T C_T}\right]}_{2\alpha} + \underbrace{\frac{1}{R_T C_T RC}}_{\omega_0^2}}$$

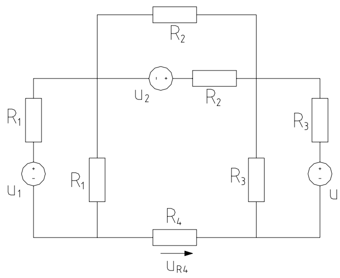
$$i(t) = \frac{E}{R_T}\frac{\left(\frac{1}{RC} - s_1\right)e^{-s_1 t} - \left(\frac{1}{RC} - s_2\right)e^{-s_2 t}}{s_2 - s_1}$$

287. U skladu s Thevenin – Nortonovim teoremom, mreže prikazane na slici su ekvivalentne, ako za zadanu Nortonovu struju I_N i Nortonovu vodljivost G_N vrijedi da je $E_T = \frac{I_N}{G_N}$; $R_T = \frac{1}{G_N}$. Kako to da je $G_N U^2 \neq R_T I^2$.

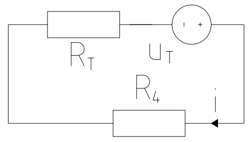


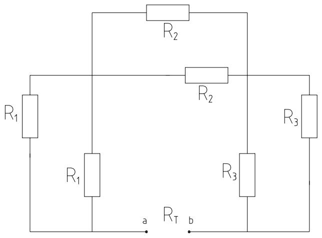
$G_N U^2 \neq R_T I^2$ → zbog ekvivalencije. Ako je prazan hod prva se mreža grije, a druga ne.

288. Odredite napon na otporniku R_4.



nadomjesna shema:





$$\boxed{R_T = \frac{1}{2}\left(R_1 + R_2 + R_3\right)}$$

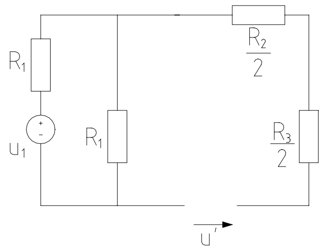
superpozicijom

$$u_T = \underset{u_1}{u_T'} + \underset{u_2}{u_T''} + \underset{u_3}{u_T'''}$$

$$u_T' = \frac{u_1}{2}$$

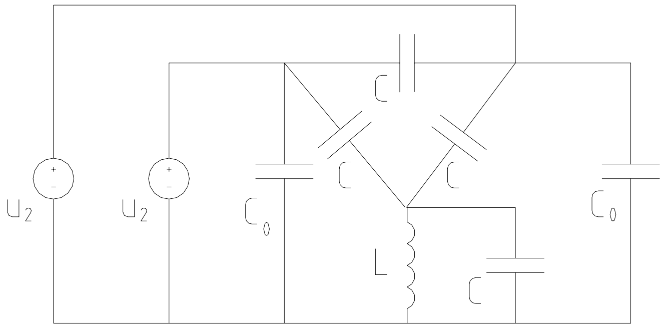
$$\vdots$$

$$u_T = \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{2}$$

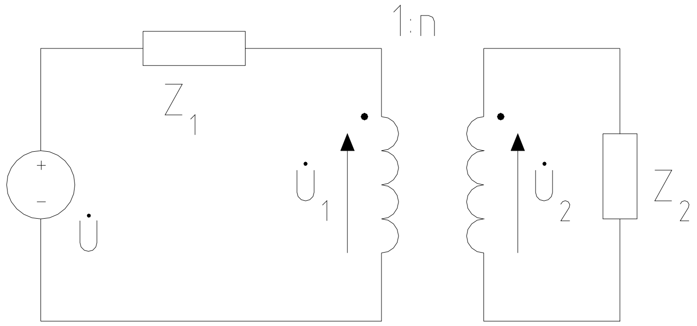


$$u_{R4} = iR_4 = \frac{u_T}{R_T + R_4} R_4 = \frac{\frac{1}{2}\left(u_1 + u_2 + u_3\right)R_4}{\frac{1}{2}\left(R_1 + R_2 + R_3\right) + R_4}$$

289. Odredite valni oblik struje induktiviteta L u periodičkom režimu rada ako su zadani naponi naponskih izvora $u_1 = \hat{U}\sin\omega t, u_2 = \hat{U}\sin(\omega t - 2\pi/3)$ **.**



290. Odredite maksimalnu snagu koja se može prenijeti trošilu ako se u mreži sheme spoja prema slici može mijenjati samo prijenosni omjer idealnog transformatora.



$$Z_1 = R_1 + jX_1$$
$$Z_2 = R_2 + jX_2$$

$$P = I_1^2 R_2' = \frac{U^2}{(R_1 + R_2')^2 + (X_1 + X_2')^2} R_2'$$

$$Z_2' = \frac{1}{n^2} Z_2 = R_2' + jX_2'$$

maksimalni prijenos: $\frac{\partial P}{\partial |Z'|} = 0 \Rightarrow \underbrace{R_1^2 + X_1^2 = |Z_2'|^2}_{uvjet\ prijenosa}$

291. U nekoj jednoharmonijskoj mreži «prijenos» maksimalne snage postiže se ako je impedancija trošila jednaka konjugiranoj vrijednosti Thevenivnove impedancije. Koji uvjet pri tome mora biti zadovoljen. Što ako taj uvjet nije zadovoljen?

a) realni i imaginarni dio impedancije trošila moraju biti nezavisni $R \neq f(X)$

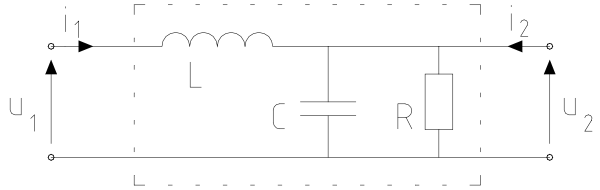
b) ako to nije zadovoljeno, nego se neovisno mijenja samo modul $|Z(j\omega)|$ maksimalna snaga trošila se postiže ako je $|Z(j\omega)| = |Z_T(j\omega)|$

Mreža mora biti u sinusoidalnom ustaljenom stanju

292. Zašto je prijenos maksimalne snage tako važan u elektronici, a posve nevažan u elektroenergetici?

U elektronici je uvijek zadana Theveninova impedancija i na nju ne možemo utjecati. $R=R_T$ pa samo 50% energije izvora prenosi se na trošila, a poželjno je da se što više energije prenese trošilu. U elektronici je bitan stupanj iskorištenosti a u energetici je najbitniji prijenos velike snage, a ne iskorištenost.

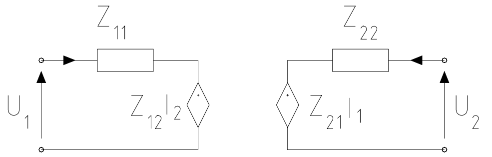
293. Koji uvjeti moraju biti zadovoljeni da bi dvoprilaz sheme spoja prema slici bio linearan i vremenski nepromjenjiv?



U dvoprilazima nema prethodno uskladištene energije, $i_1 = -i_2$, unutar dvoprilaza nema izvora, L i C linearni i vremenski nepromjenjivi

294. Nacrtajte nadomjesnu shemu dvoprilaza iskazanog pomoću impedancijskih parametara.

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$
$$U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$



295. Zašto za potpuni opis recipročnog dvoprilaza dosta je određivanje triju parametara.

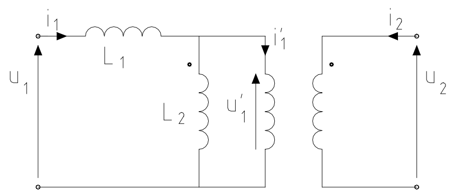
Dvoprilaz je recipročan ako se sastoji od recipročnih dijelova mreže. Jedno od osnovnih svojstava recipročne mreže je jednakost prijenosnih admitancija $Y_{21} = Y_{12}$.

Tri parametra su: Y_{11}, Y_{12}, Y_{22}.

296. Objasnite pojam simetričnog dovprilaza i navedite nekoliko primjera.

Dvoprilaz je simetričan ako zamjenom ulaznih i izlaznih priključaka se ne promjene naponi i struje vanjskih krugova. Vrijedi i $Y_{11} = Y_{22}$.

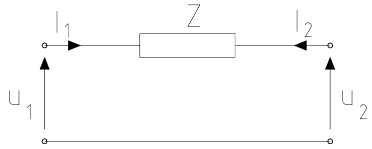
297. Odredite impedancijske parametre dvoprilaza. Transformator je idealan prijenosnog omjera $n = \frac{u_1'}{u_2}$.



$$U_1 = sL_1I_1 + sL_2(I_1 - I_1')$$
$$\underline{U_1' = sL_2(I_1 - I_1')}$$
$$U_1' = nU_2$$
$$\underline{I_2 = -nI_1' \qquad I_1' = -\frac{1}{n}I_2}$$
$$U_1 = sL_1I_1 + sL_2I_1 + \frac{1}{n}sL_2I_2$$
$$\underline{U_2 = sL_2\frac{1}{n}I_1 + \frac{1}{n^2}sL_2I_2}$$
$$U_1 = (sL_1 + sL_2)I_1 + \frac{1}{n}sL_2I_2$$
$$U_2 = \left(sL_2\frac{1}{n}\right)I_1 + \left(\frac{1}{n^2}sL_2\right)I_2$$

$$Z_{11} = sL_1 + sL_2$$
$$Z_{12} = \frac{1}{n}sL_2$$
$$Z_{21} = \frac{1}{n}sL_2$$
$$Z_{22} = \frac{1}{n^2}sL_2$$

298. Odredite z- i y- parametre uzdužne impedancije Z.



$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$$
$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0}$$
$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0}$$
$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0}$$
$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0}$$

$$U_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}$$
$$U_2 = I_1 Z_{12} + I_2 Z_{22}$$

$$I_1 = -I_2$$
$$Y_{11} = -Y_{21}$$
$$Y_{12} = -Y_{22}$$

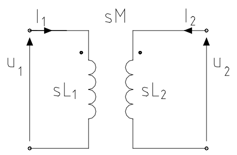
iz strujenih jednadžbi admitancije parametre:

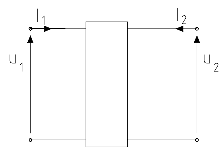
$$Y_{11} = \frac{1}{Z}$$
$$Y_{12} = -\frac{1}{Z}$$
$$Y_{21} = -\frac{1}{Z}$$
$$Y_{22} = \frac{1}{Z}$$

$$Z_{11} = \infty$$
$$\vdots$$
$$Z_{22} = \infty$$

---

299. Odredite α- parametre linearnog dvonamotnog transformatora kao i idealnog transformatora.





$$u_1 = a_{11}u_2 - a_{12}I_2$$
$$I_1 = a_{21}u_2 - a_{22}I_2$$

$$U_1 = sL_1 I_1 + sMI_2$$
$$U_2 = sMI_1 + sL_2 I_2 \;/ : sm$$

$$I_1 = \underbrace{\frac{1}{sM}}_{a_{21}} U_2 - \underbrace{\frac{L_2}{M}}_{a_{22}} I_2$$

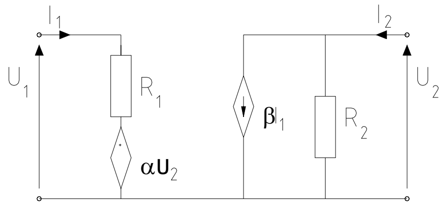
$$U_1 = sL_1\left(\frac{U_2}{sM} - \frac{L_2}{M} I_2\right) + sMI_2$$

$$U_1 = \underbrace{\frac{L_1}{M}}_{a_{11}} U_2 - I_2 \underbrace{\left(s\frac{L_1 L_2}{M} - sM\right)}_{a_{12}}$$

b) idealni :

$$u_1 = nu_2 \qquad a_{11} = n$$
$$I_1 = -\frac{1}{n} I_2 \qquad a_{12} = a_{21} = 0$$
$$a_{22} = \frac{1}{n}$$

300. Na slici je prikazana pojednostavljena nadomjesna shema bipolarnog tranzistora. Odredite h parametre.



$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2$$

iz KS na izlazu:

$$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0} = \frac{I_1R_1}{I_1} = R_1$$

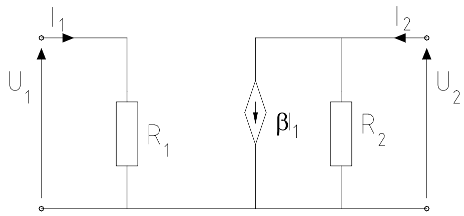
$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0} = \frac{\beta I_1}{I_1} = \beta$$

iz PH na ulazu:

$$h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\alpha U_2}{U_2} = \alpha$$

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{I_1=0} = \frac{I_2}{I_2R_2} = \frac{1}{R_2}$$

301. Na slici je prikazan pojednostavljena nadomjesna shema MOSFET-a. Odredite g-parametre.



iz KS na ulazu U_1=0

$$I_1 = g_{11}U_1 + g_{12}I_2$$
$$U_2 = g_{21}U_1 + g_{22}I_2$$

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_1=0} = \frac{I_1}{\beta I_1} = \frac{1}{\beta}$$

$$g_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{U_1=0} = \frac{I_2R_2}{I_2} = R_2$$

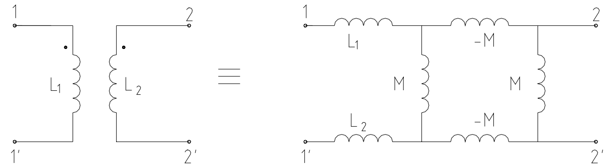
iz PH na izlazu I_2=0

$$g_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{I_1R_1}{I_1} = R_1$$

$$g_{21} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0} = \frac{I_2R_2}{I_1R_1} = \frac{\beta I_1R_2}{I_1R_1} = \beta\frac{R_2}{R_1}$$

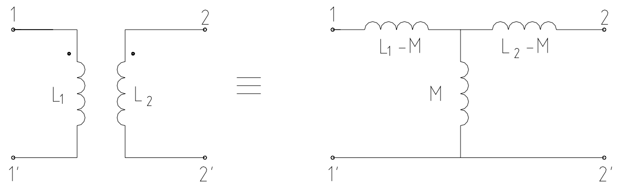
302. Objasnite na primjeru linearnog dvonamotnog transformatora razliku između potpune ekvivalencije i ekvivalencije obzirom na prilaze.

Potpuna ekvivalencija:



- jednaki naponi i struje obiju mreža na svim priključcima

Ekvivalencija obzirom na prilaze:

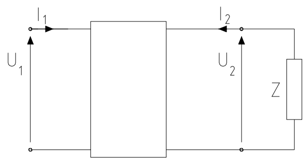


- jednaki naponi i struje obiju mreža na svim prilazima

303. Zašto se u općem slučaju petljasta mreža ne može transformirati u ekvivalentnu zvjezdastu mrežu.

Trokut u zvijezdu ne ide jer u općem slučaju broj elemenata nije jednak. Moguće je samo ako je broj elemenata 3 jer je tada broj elemenata jednak u zvijezdi i u trokutu.

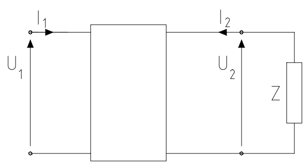
304. Odredite ulaznu impedanciju dvoprilaza opterećenog impedancijom Z. Iskoristiti impedancijske parametre dvoprilaza.



$$U_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}$$
$$U_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22}$$
$$U_2 + Z I_2 = 0$$
$$Z_{U1} = \frac{U_1}{I_1}$$

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12}\left(\frac{-Z_{21}}{Z + Z_{22}}\right) I_1$$
$$\frac{U_1}{I_1} = Z_{U1} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z + Z_{22}}$$

305. Koji uvjeti moraju biti zadovoljeni da se dvoprilaz pri stalnom ulaznom naponu ponaša kao strujni izvor, tj. da struja na prilazu 2 ne ovisi o priključenoj impedanciji? Iskoristiti admitancijske parametre dvoprilaza.



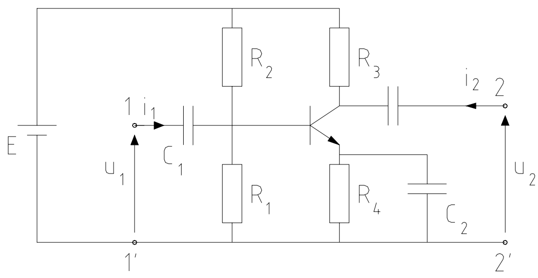
$$I_2 \neq f(Z)$$

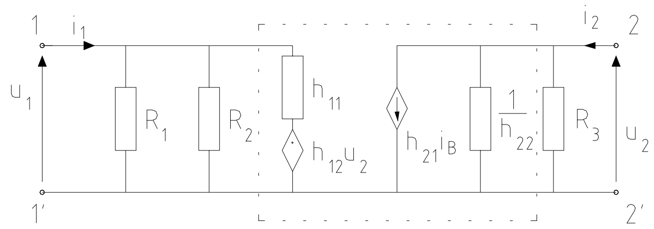
$$I_1 = Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2$$
$$I_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2$$
$$U_2 = -I_2 Z$$
$$I_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} I_2 Z$$

$$\boxed{I_2 = \frac{Y_{21}}{1 + Y_{22} Z} U_1}$$

$$Y_{22} = 0$$

306. Nacrtajte najjednostavniju shemu mreže prema slici za mali izmjenični signal ako su poznati h-parametri bipolarnog tranzistora. Impedancije kapaciteta zanemarive su na frekvenciji ulaznog signala u_i.

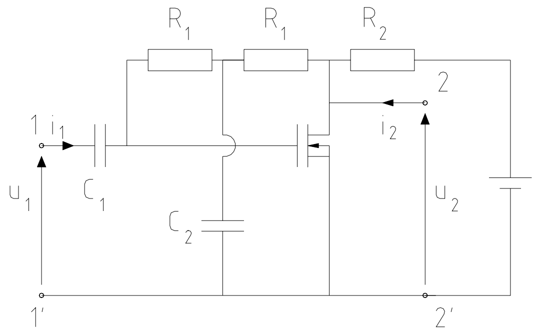


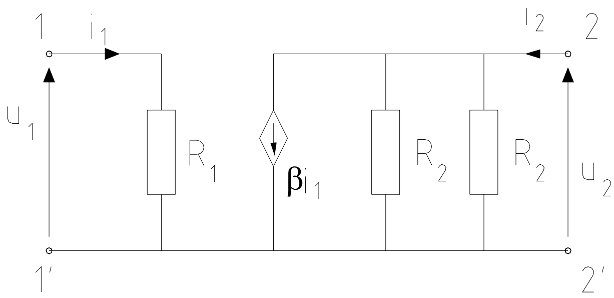


$$U_{BE} = h_{11} I_B + h_{12} U_{CE}$$
$$I_C = h_{21} I_B + h_{22} U_{CE}$$

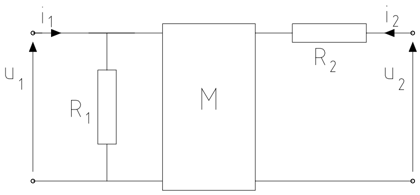
jednosptepeno tranzistorsko pojačalo

307. Nacrtajte nadomjesnu shemu mreže prema slici za mali izmjenični signal ako su poznati Y-parametri MOSFET-a. Impedancije kapaciteta zanemarive su na frekvenciji ulaznog signala u_1.



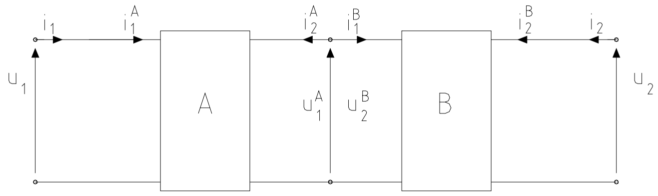


308. Odredite g-parametre dvoprilaza ako su poznati g-parametri dvoprilaza M.

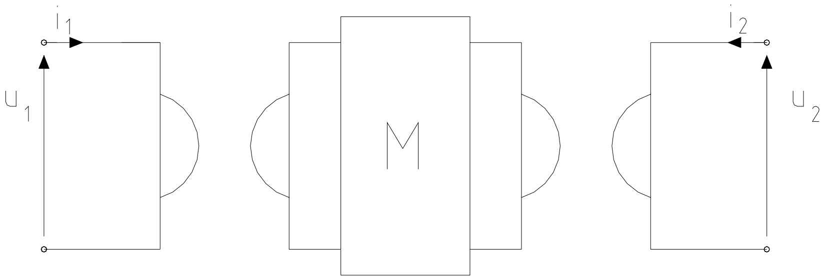


309. Navedite osnovna svojstva lančanog spoja više dvoprilaza.

Lančani spoj je spoj dvaju ili više dvoprilaza gdje je pri spajanju uključen samo jedan od prilaza svakog od spojnih dvoprilaza. Lančani spoj uvijek je moguć.

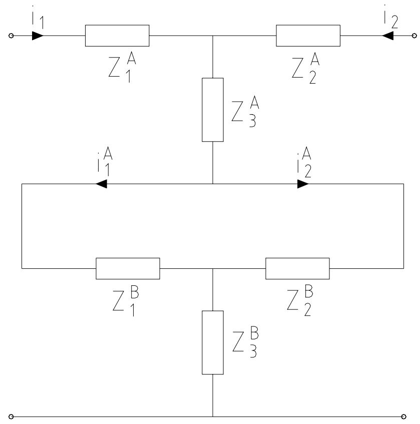


310. Pokažite da je lančani spoj prema slici recipročni dvoprilaz ako je dvoprilaz M recipročan.



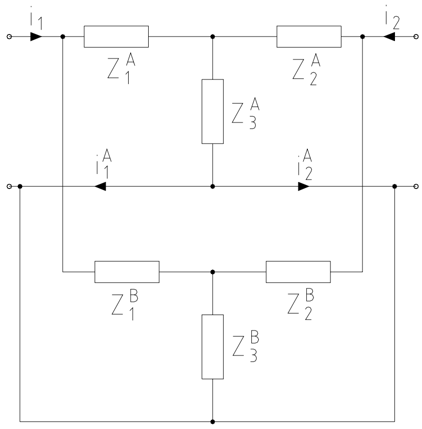
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

311. Objasnite zašto serijski spoj dvaju dvoprilaza nije uvijek moguć.



Nakon serijskog spoja došlo je do promjene sheme spoja dvoprilaza B ($Z_1^B \, i \, Z_2^B$ kratko spojeni).

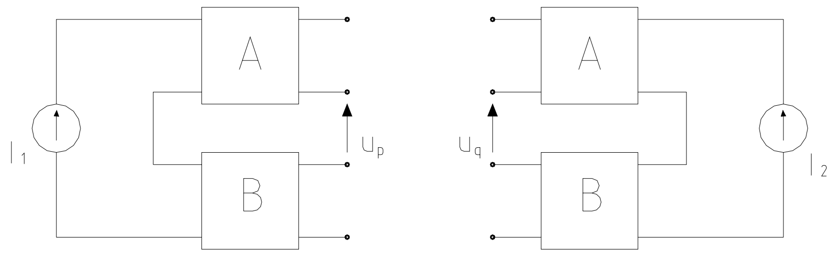
312. Objasnite zašto paralelni spoj dvaju prilaza nije uvijek moguć.



$Z_1^A \; i \; Z_2^A \; te \; Z_1^B \; i \; Z_2^B$ su kratko spojeni.

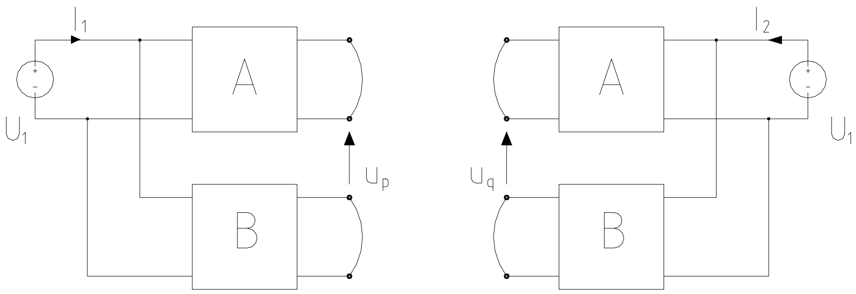
Mijenja se shema i parametri dvoprilaza.

313. Kako se provode testovi valjanosti serijskog spoja?



Ako je $u_p = u_q = 0$ dvoprilazi A i B mogu se serijski spojiti, inače ne.

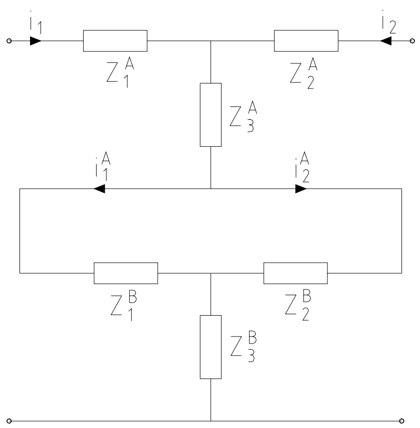
314. Kako se provode testovi valjanosti paralelnog spoja.



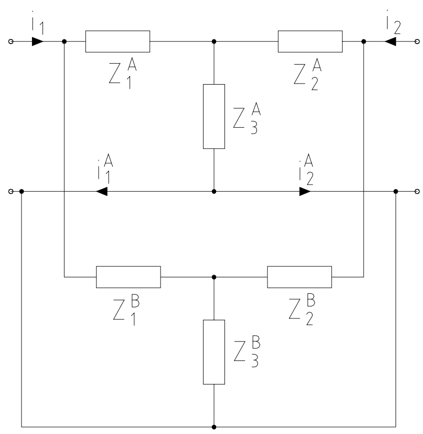
Ako je $u_p = u_q = 0$ dvoprilazi A i B mogu se paralelno spojiti bez promjene parametara pojedinih dvoprilaza, inače ne.

315. Što su to regularni spojevi dvoprilaza?

Regularni spojevi dvoprilaza su spojevi u kojima su sheme spoja dvoprilaza poznate, pa na taj način izbjegavamo spojeve s idealnim transformatorom.



serijski



paralelni