

# Električni krugovi

## Osnovne definicije

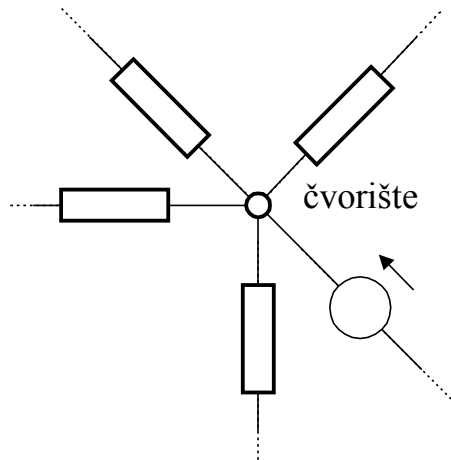
Lit.: V. Naglič: Osnovi teorije mreža, p. 1.1-1.5

## OSNOVNE DEFINICIJE

- Signali: napon i struja
- Elementi: otpor, induktivitet i kapacitet

## ČVORIŠTE

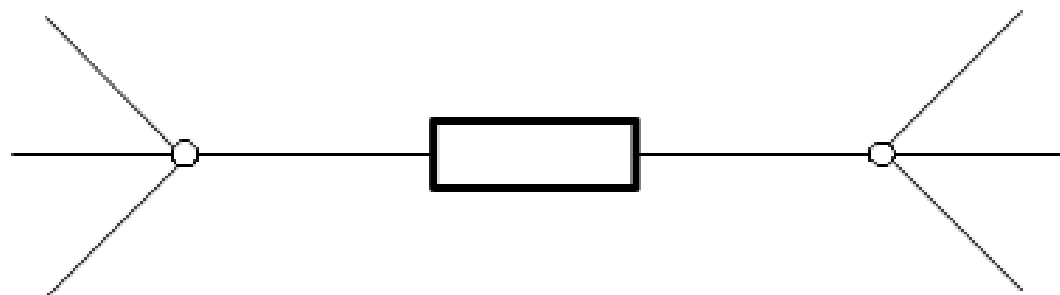
- Točka u mreži na koju su spojene dvije ili više priključnica



O

## GRANA

- Element s dvije priključnice spojen na dva čvorišta mreže



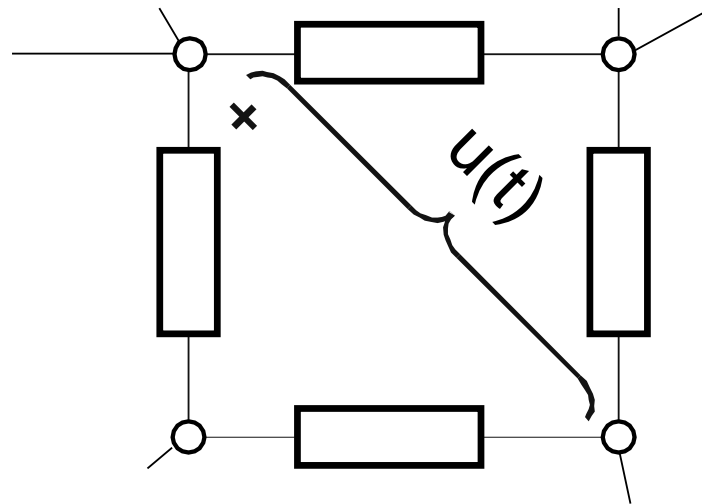
Grana električne mreže

- Svakoj grani električne mreže pridružena je funkcija  $i(t)$ :
  - $i(t)$  je vremenski ovisna
  - definirana je valnim oblikom  $\rightarrow$  matematičkim izrazom i
  - smjeromi naziva se **strujom grane**.
- Smjer struje grane označava se strelicom.



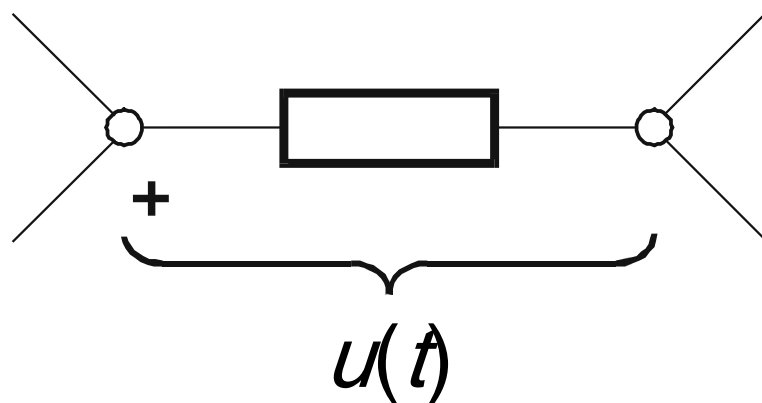
Struja grane električne mreže

- Svakom paru čvorišta mreže pridružena je funkcija  $u(t)$ :
  - $u(t)$  je vremenski ovisna funkcija napona
  - definirana valnim oblikom  $\rightarrow$  matematičkim izrazom i
  - smjerom.
- Orijentacija napona se označava znakom “+” na jednom od dvaju pridruženih čvorišta.



Napon para čvorišta električne mreže

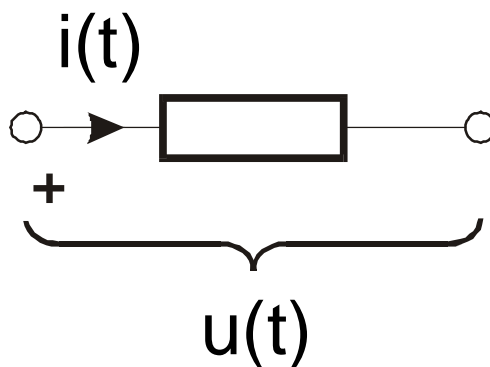
- Napon pridružen paru čvorišta na kraju grane mreže naziva se **naponom grane**.



Napon grane električne mreže

## *Združena referentna usmjerenja.*

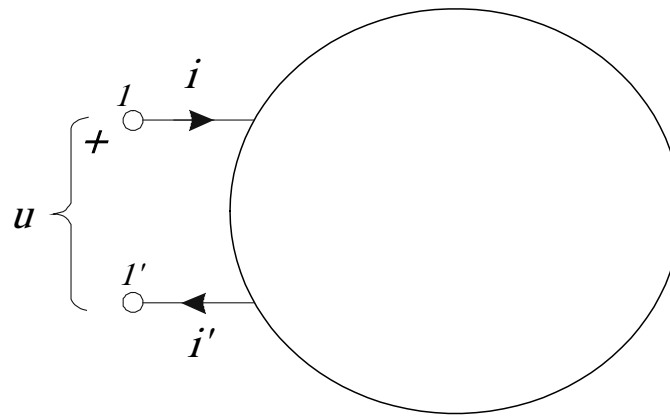
- Znak “+” napona grane na čvorištu kroz kojeg je strelica za oznaku smjera struje grane usmjerena prema elementu.



Združena referentna usmjerenja napona i struje

## ■ PRILAZ

- Par priključnica ili polova sa svojstvom:
- struja, koja ulazi na jedan pol jednaka je struji koja izlazi kroz drugi.



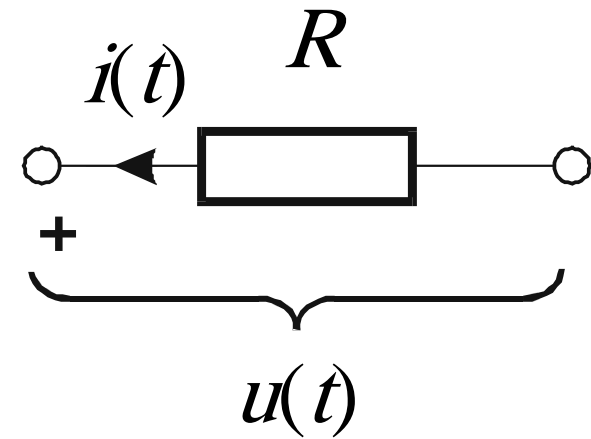
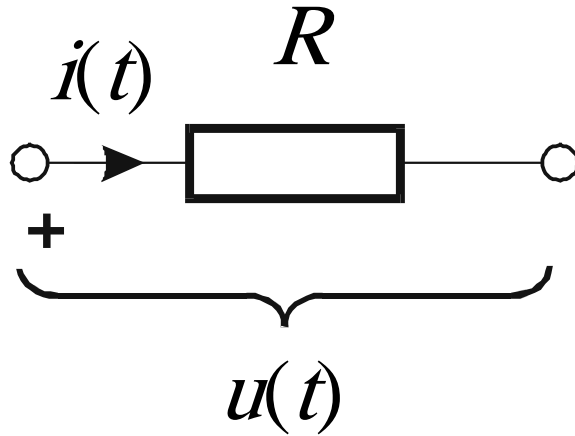
- Ako je  $i=i'$   $\rightarrow$  polovi 1 i 1' čine *prilaz*.

0



- U svrhu analize
  - Za svaku granu električne mreže mora biti poznat matematički odnos između struje i napona.
$$u=f(i) \quad \text{ili} \quad i=f(u)$$
- On vrijedi za združena referentna usmjerenja struje i napona grane.
- Oblik relacije ovisi o prirodi elementa promatrane grane
- Ako orijentacije struje i napona nisu u skladu sa združenim referentnim usmjerenjima, tada odgovarajuća matematička relacija ima suprotni predznak.

Primjer  $\rightarrow$  otpor




0

# Svojstva i klasifikacije

## ■ KONCENTRIRANOST PARAMETARA

- Idealizirani elementi → elementi sa **zbijenim** ili **koncentriranim** parametrima.
- Električna svojstva ne ovise o njihovim fizičkim dimenzijama.
- Mreže ili elementi čija su električna svojstva ovisna o njihovim fizičkim dimenzijama, nazivaju se mrežama odnosno elementima s **raspodijeljenim** ili **distribuiranim** parametrima.

- U realnim krugovima

-  realne električne naprave karakterizirane su između ostalog i svojim fizičkim dimenzijama.

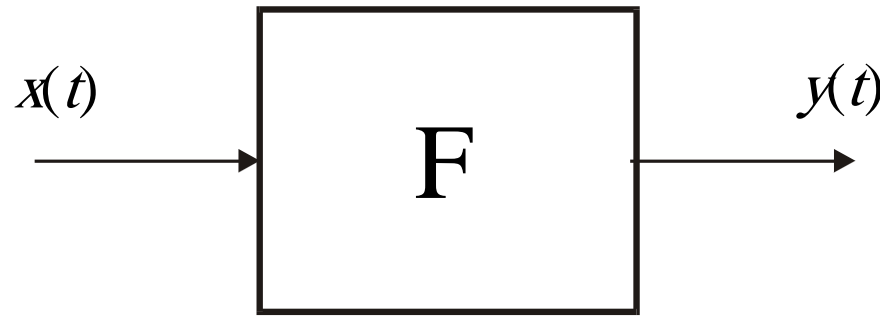
- U nadomjesnim krugovima - modelima

-  električne naprave su predstavljene koncentriranim elementima bez fizičkih dimenzija.

## ■ LINEARNOST

- Cilj analize neke električke mreže je određivanje jedne ili više nepoznatih veličina struja ili napona u njenim granama, koje se nazivaju
  - **odzivom,**
- uz jednu ili više poznatih veličina struja ili napona u drugim granama, koje se nazivaju
  - **pobudom ili poticajem.**
- Najčešće se radi o jednoj funkciji odziva i jednoj funkciji pobude.

- Mreža  $\rightarrow$  sistem s jednim ulazom ili pobudom  $x(t)$  i jednim izlazom ili odzivom  $y(t)$ .

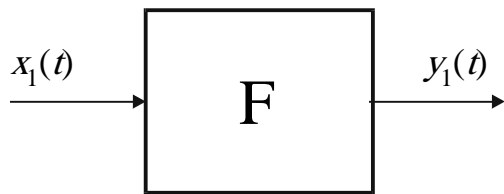


- Sistem  $\rightarrow$  operator koji djeluje na funkciju pobude

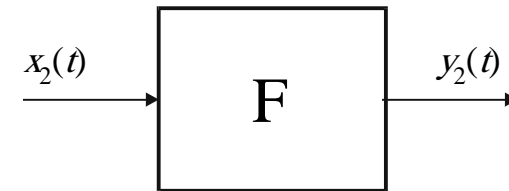
$$y(t) = F[x(t)]$$

gdje je  $F$  operator.

- Električna mreža je linearna ako je  $F$  linearni operator
- $\rightarrow$  zadovoljava princip superpozicije:
  - Ako je  $y_1(t)$  odziv na pobudu  $x_1(t)$ , a  $y_2(t)$  odziv na pobudu  $x_2(t)$ , tj.



$$y_1(t) = F[x_1(t)]$$



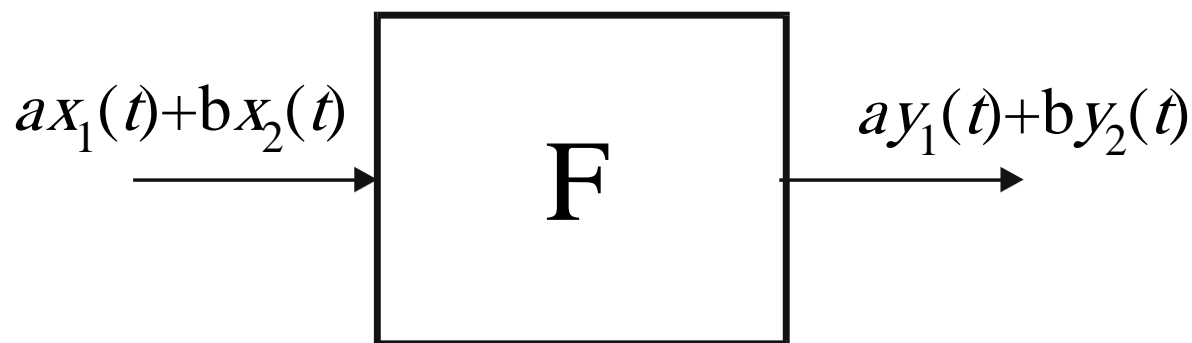
$$y_2(t) = F[x_2(t)]$$

- tada je odziv na linearnu kombinaciju dviju pobuda  $x_1(t)$ , i  $x_2(t)$ , jednak linearnoj kombinaciji odziva  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$ .

$$F[a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)] =$$

$$= a \cdot F[x_1(t)] + b \cdot F[x_2(t)] =$$

$$= a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$



za sve moguće  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , kao i konstante  $a$  i  $b$ . 0



## ■ VREMENSKA NEPROMJENJIVOST

### ■ Svojstvo vremenske nepromjenjivosti mreže :

- oblik odziva  $y(t)$  na pobudu  $x(t)$  ne ovisi o trenutku nastanka pobude.
- Za takvu mrežu vrijedi 
$$y(t-T) = F[x(t-T)]$$

za svaki  $x(t)$ ,  $y(t)$ , i za svaku realnu veličinu  $T$ .

### ■ Mreže koje su u nastavku razmatrane su:

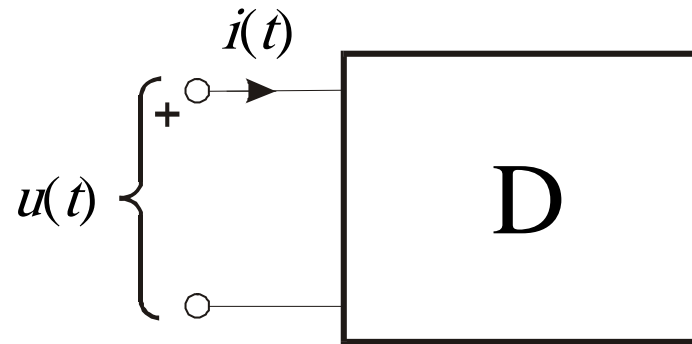
- **linearne,**
- **vremenski nepromjenjive i**
- **sadrže elemente s koncentriranim parametrima.**

## ■ PASIVNOST, AKTIVNOST I GUBICI U ELEKTRIČNIM KRUGOVIMA

### ■ PASIVNOST I AKTIVNOST

- Svojstvo mreže da apsorbira, ili isporučuje električnu energiju.

- Primjer: dvopol



- Uz struju  $i(t)$  i napon  $u(t)$   $\rightarrow$  trenutni iznos snage isporučen krugu

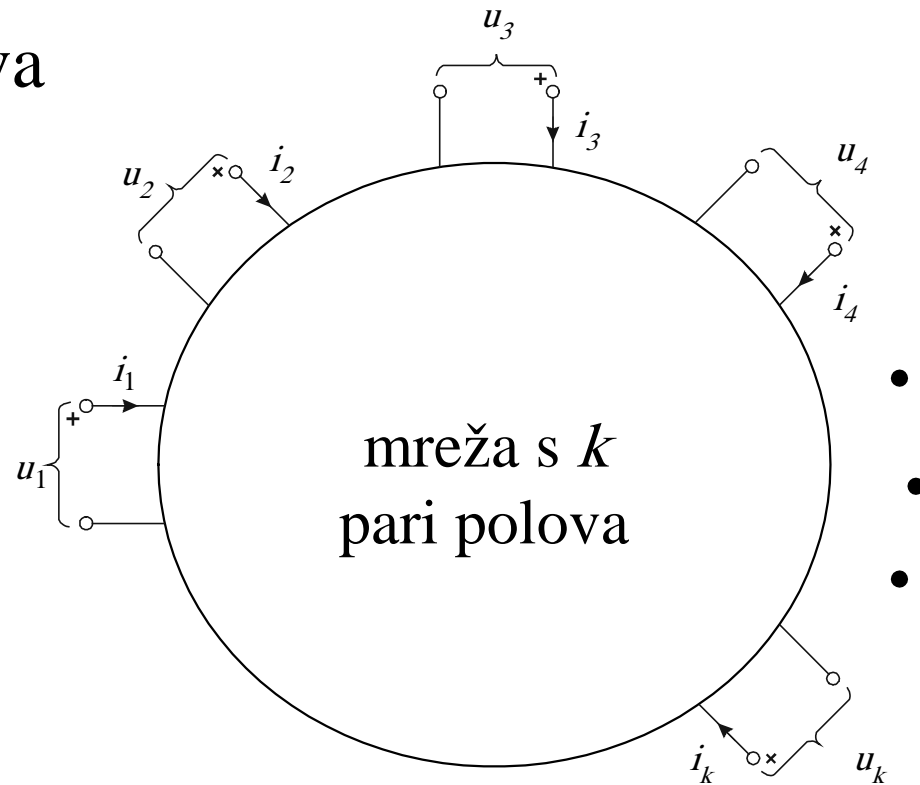
$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Ukupni iznos energije  $E(t)$  isporučene dvopolu do trenutka  $t$

$$E(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau$$

- Ako je  $E(t) > 0 \rightarrow$  mreža je apsorbirala pozitivnu energiju.
- Ako je  $E(t) < 0 \rightarrow$  mreža je isporučila okolnom svijetu pozitivnu energiju, odnosno apsorbirala negativan iznos energije.
- **Pasivna mreža**  $\rightarrow$  ukupan iznos primljene energije veći je ili jednak nuli, za svaki  $t$  i za bilo koji  $u(t)$  i  $i(t)$ .
- **Aktivna mreža**  $\rightarrow$  mreža koja nije pasivna.

- Za mrežu s više pari polova



- Mreža sa  $K$  prilaza je pasivna ako je za bilo koji oblik  $u_k(t)$  i  $i_k(t)$  ( $k=1,\dots,K$ ) ukupna bilanca energije apsorbirane do trenutka  $t$ , **pozitivna, tj.**

$$E(t) = \sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^t u_k(\tau) \cdot i_k(\tau) d\tau > 0$$

- Ako su naponi  $u_k(t)$  i struje  $i_k(t) \rightarrow$  signali s konačnom energijom, tj. ako vrijedi

$$\int_{-\infty}^t u_k^2(\tau) d\tau < \infty \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^t i_k^2(\tau) d\tau < \infty$$

(Iznosi  $u_k(t)$  i  $i_k(t)$  za ekstremne iznose od  $t$  jednaki su nuli:

$$u_k(\infty)=u_k(-\infty)=0 \quad \text{i} \quad i_k(\infty)=i_k(-\infty)=0),$$

tada je mreža za koju vrijedi

$$E(\infty) = \sum_{k=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} u_k(\tau) \cdot i_k(\tau) d\tau = 0 \quad \text{za svaki } u_k(t) \text{ i } i_k(t).$$

# MREŽA BEZ GUBITAKA.

- Pasivne mreže bez gubitaka imaju sposobnost **spremanja energije**,  
jer mogu svu primljenu energiju vratiti vanjskome svijetu.

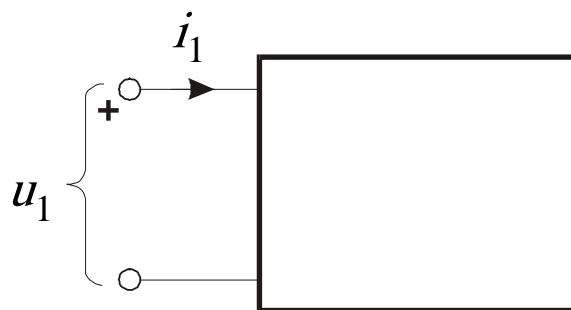
# Električni krugovi

## Elementi električnih krugova

Lit.: V. Naglič: Osnovi teorije mreža, p. 2.1-2.4

# Elementi električnih krugova

- Elementi električnih krugova mogu biti:
  - jednostavni elementi s dvije priključnice → dvopoli

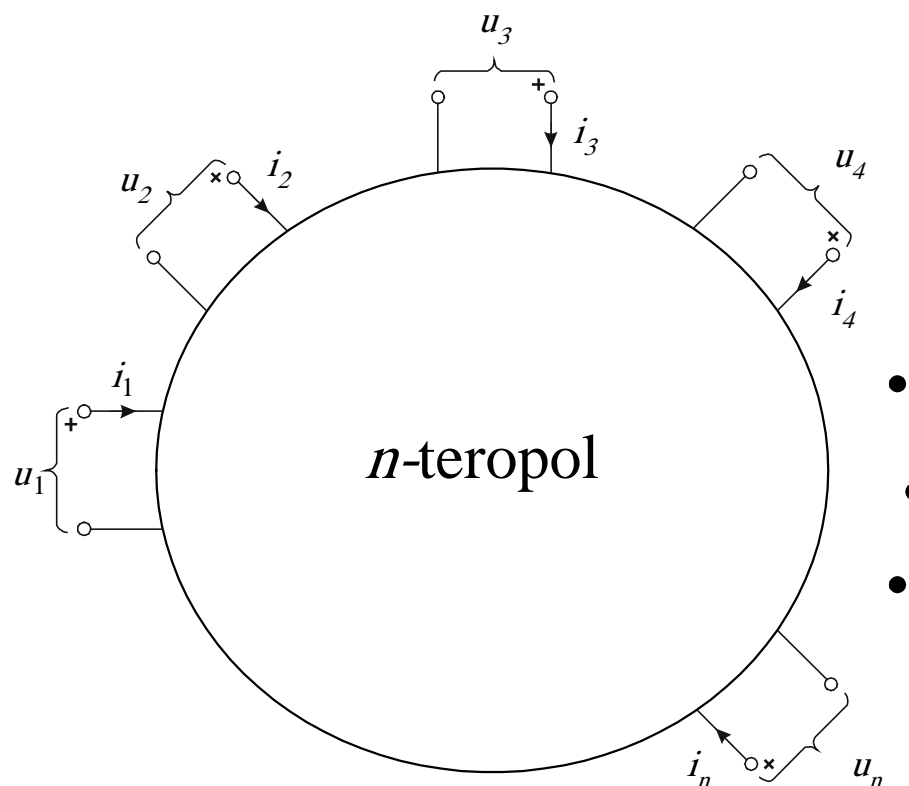


- mreže s 4 priključnice ili četveropoli

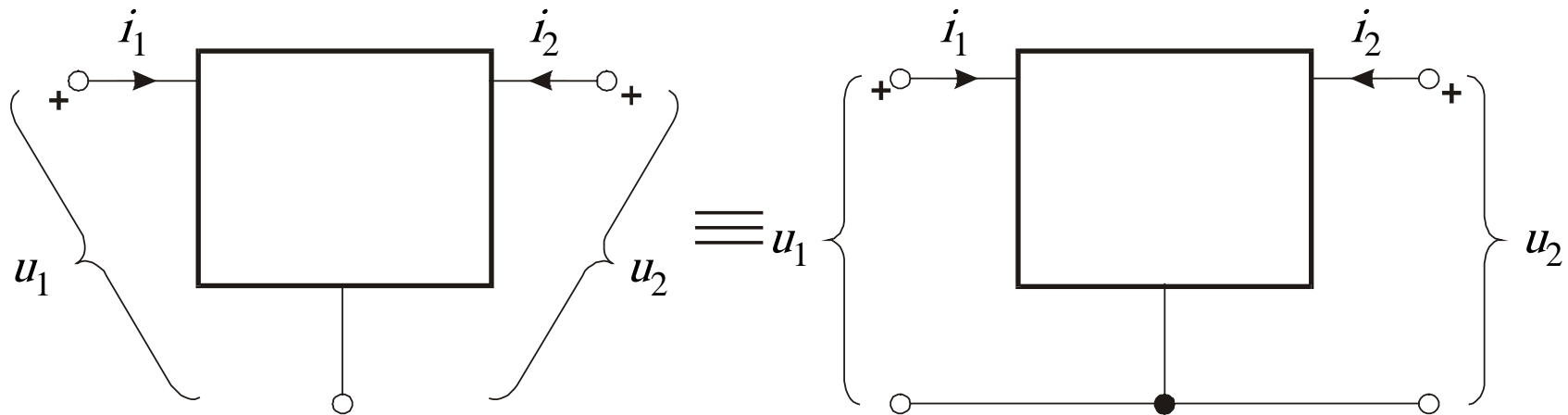
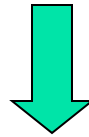




- ali i vrlo složeni podsistemi s više priključnica ili polova



- Broj prilaza ne mora biti jednak polovini broja polova.
  - Npr. mreža s 3 priključnice (tropol)

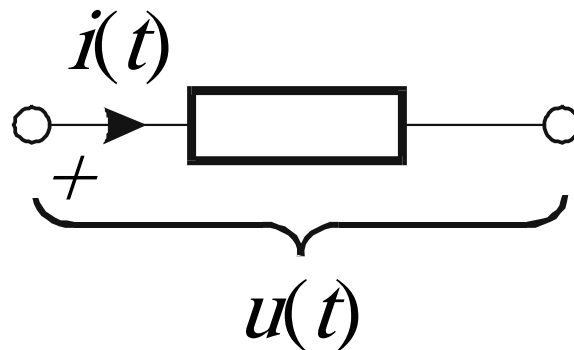


Mreže s dva prilaza.

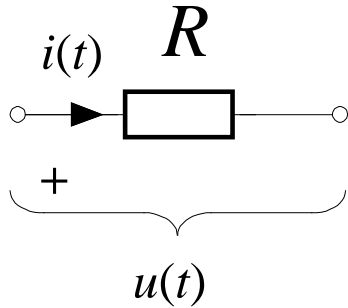
- Jedna od priključnica je zajednička za oba prilaza.

# Dvopolni elementi

- Osnovni dvopolni pasivni elementi električnih krugova:
  - otpor  $R$
  - kapacitet  $C$  i
  - induktivitet  $L$ .
- Njihovi simboli i odnosi između napona  $u(t)$  i struje  $i(t)$ , definirani su za *združena referentna usmjerenja*.



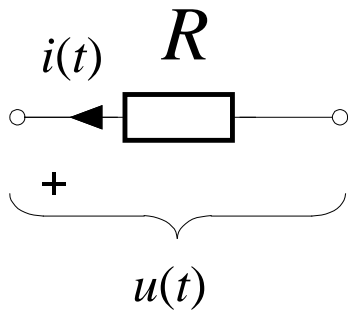
## ■ OTPOR



$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

■ Ako nisu zadovoljena združena referentna usmjerenja

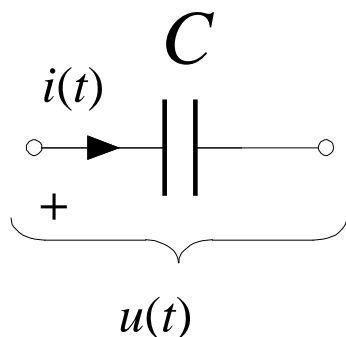


$$i(t) = -\frac{u(t)}{R}$$

$$u(t) = -R \cdot i(t)$$

■ OTPOR je pasivni element jer vrijedi  $E(t) > 0$

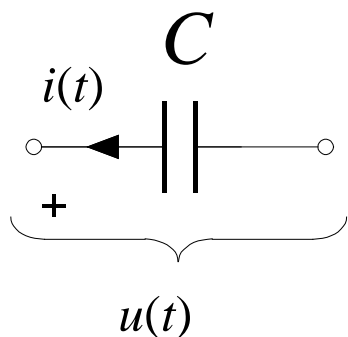
## KAPACITET



$$i(t) = C \frac{d u(t)}{d t}$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d \tau = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d \tau$$

Ako nisu zadovoljena združena referentna usmjerenja

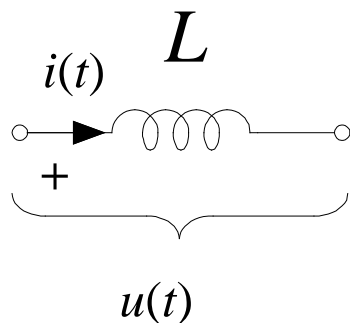


$$i(t) = -C \frac{d u(t)}{d t}$$

$$u(t) = -\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d \tau = -u_C(0) - \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d \tau$$

KAPACITET je pasivni element jer vrijedi  $E(t) = C \frac{u^2}{2} \geq 0$

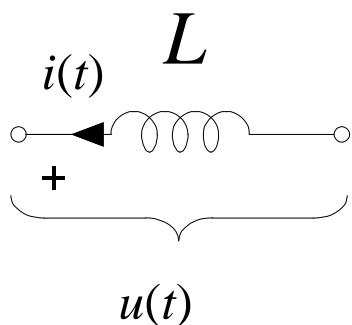
## ■ INDUKTIVITET



$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

- Ako nisu zadovoljena združena referentna usmjerenja

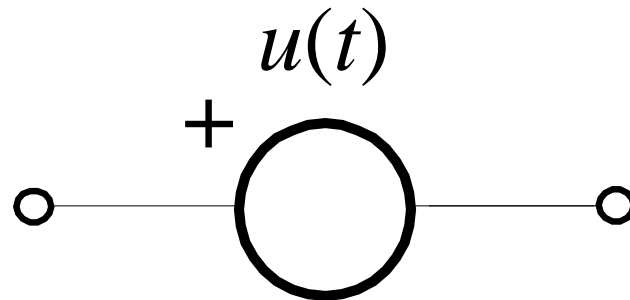


$$i(t) = -\frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = -i_L(0) - \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$u(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$$

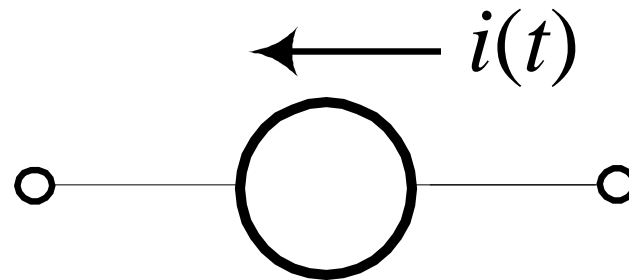
- Induktivitet je pasivni element jer vrijedi  $E(t) = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t) \geq 0$

- Aktivni dvopoli  $\rightarrow$  izvori funkcija pobude:
  - ***NAPONSKI*** i ***STRUJNI IZVOR***.
- ***Naponski izvor***  $\rightarrow$  element na čijim priključnicama djeluje napon iznosa  $u(t)$ , bez obzira na iznos struje.



Naponski izvor

- ***Strujni izvor*** → element, koji definira struju grane  $i(t)$ , bez obzira na napon između njenih čvorišta.

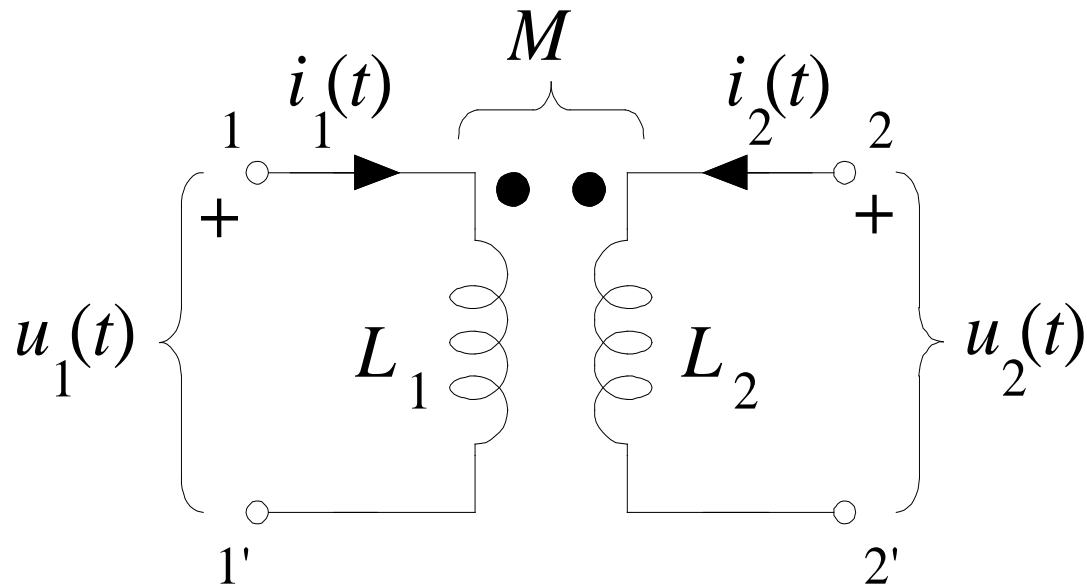


Strujni izvor



# Četveropolni elementi

- **Transformator** → dva induktiviteta koji su međuinduktivno vezani



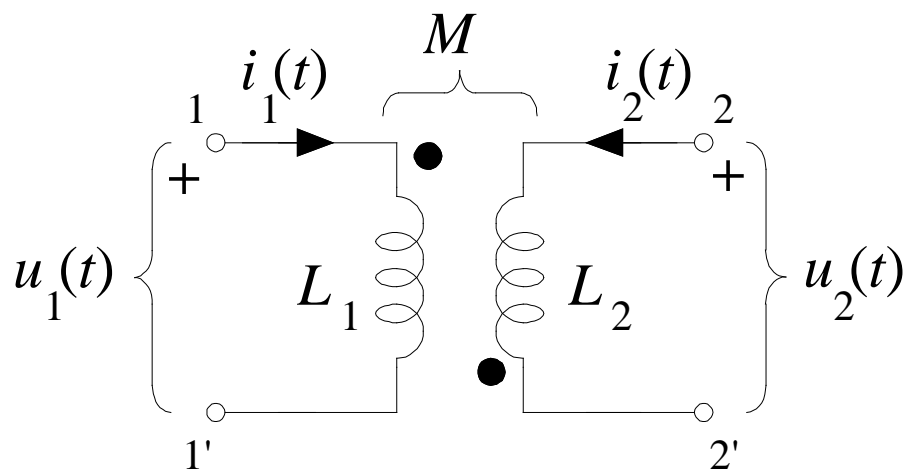
- Veze među naponima i strujama na njegovim prilazima određene su izrazima

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = +M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

- $L_1$  i  $L_2 \rightarrow$  induktiviteti
- $M \rightarrow$  međui induktivitet.

- Međuinduktivitet  $M$  može imati + ili – predznak.
- Pozitivni predznak  $\rightarrow$  ako se smjer struje i položaj točke nalaze u istom odnosu na oba prilaza četveropola.
- U suprotnom, predznak međuinduktiviteta je negativan.
- Za slučaj prema slici



vrijedi

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

- Ponekad umjesto međuinuktiviteta  $\rightarrow$  koeficijent veze:

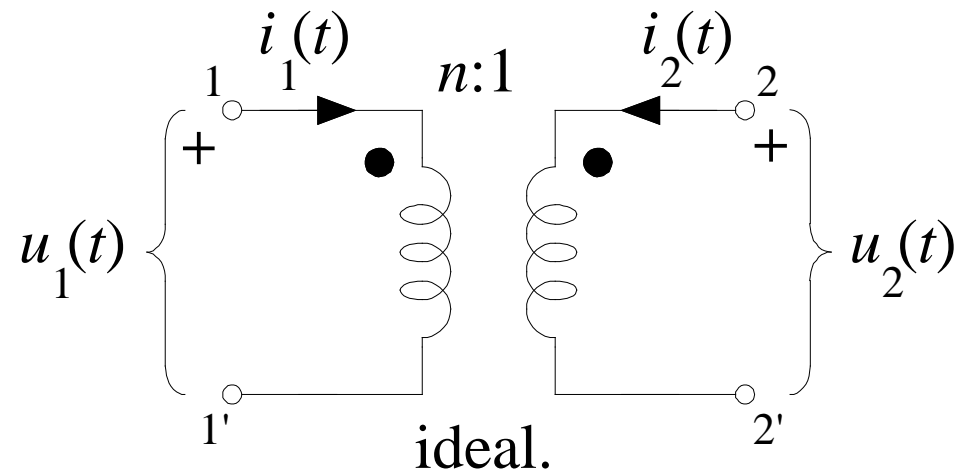
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

- $k$  je po apsolutnome iznosu uvijek manji od jedinice

$$0 < |k| < 1$$

- Transformator s  $k=1$  naziva  $\rightarrow$  **perfektni transformator**
- U praksi ne postoji transformator sa  $k=1$ , ali postoje slučajevi kada je  $k$  vrlo blizu jedinice.

## ■ Idealni transformator



- po nazivu, a i po simbolu sličan transformatoru
- u potpunosti definiran bezdimenzionalnim parametrom  $n$ .
- $n \rightarrow$  *omjer transformacije*  $\rightarrow$  realan broj

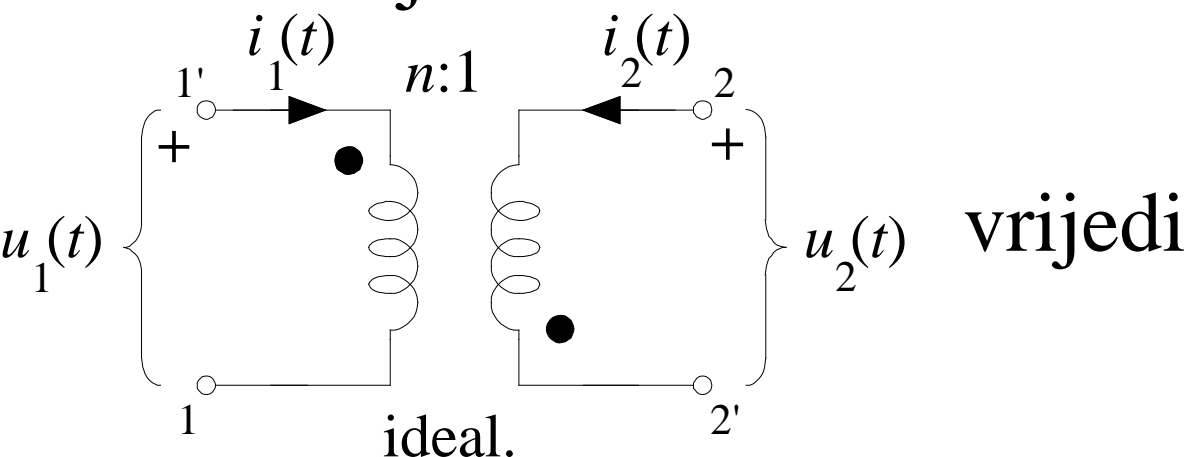
Definicijske jednačbe idealnog transformatora

$$u_1(t) = n \cdot u_2(t)$$

$$i_1(t) = -\frac{1}{n} \cdot i_2(t)$$

## ■ Idealni transformator

- Predznak parametra  $n$  određen je položajem točaka i smjerova struja primara i sekundara
- Za slučaj na slici

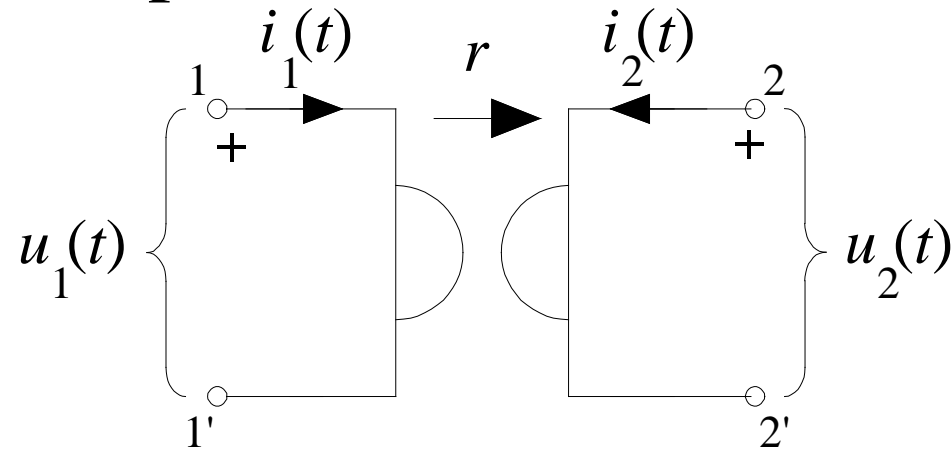


$$u_1(t) = -n \cdot u_2(t)$$

$$i_1(t) = \frac{1}{n} \cdot i_2(t)$$

- Idealni transformator  $\rightarrow$  pasivni četveropol bez gubitaka.
- $E(t)=0$  za svaki  $t$ ,  $\rightarrow$  nije u stanju ni spremiti energiju.

- **Girator** je četveropol određen simbolom



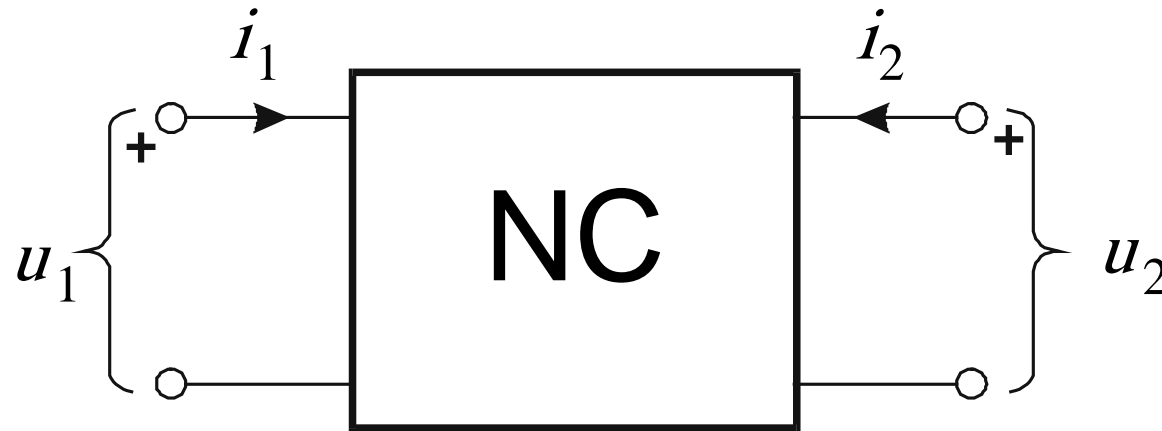
i definicijskim izrazima

$$u_1(t) = r \cdot i_2(t)$$

$$u_2(t) = -r \cdot i_1(t)$$

- $r \rightarrow$  pozitivna i realna konstanta, koja ima dimenziju  $\Omega$ .
- Girator  $\rightarrow$  pasivni četveropol bez gubitaka
- $E(t)=0$  za svaki  $t \rightarrow$  nije u stanju ni spremiti energiju.

- **Negativni konvertor** je četveropolni element definiran općim simbolom na slici



i izrazima

$$u_1(t) = k_1 \cdot u_2(t)$$

$$i_2(t) = k_2 \cdot i_1(t)$$

$$k = k_1 \cdot k_2$$

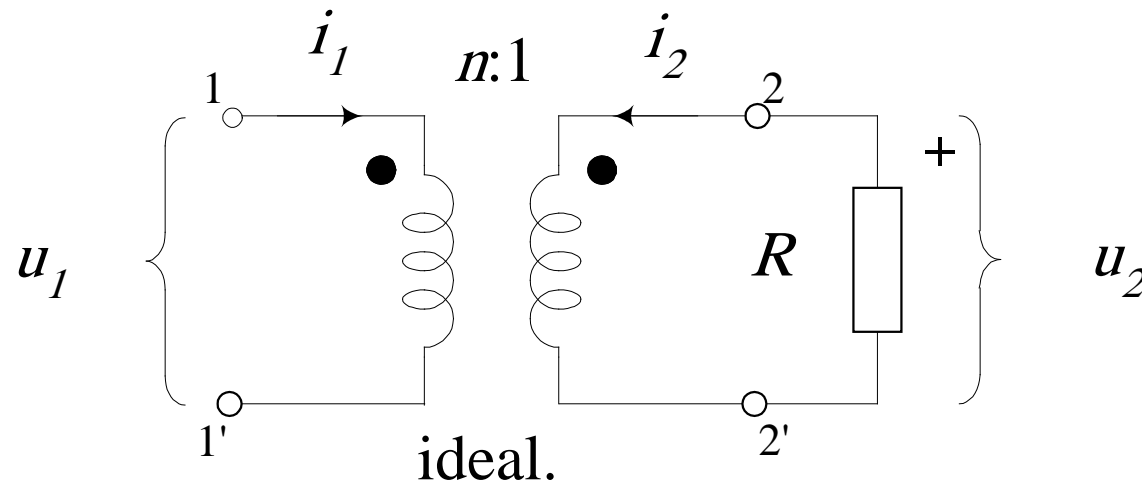
**$k \rightarrow$  omjer konverzije  $\rightarrow$  realna konstanta**



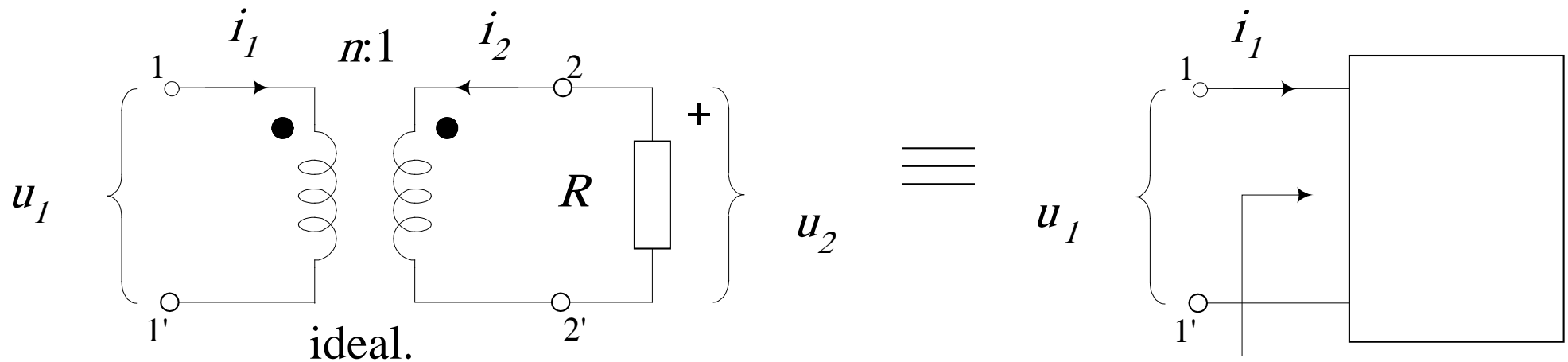
- Važno svojstvo idealnog transformatora, giratora i negativnoga konvertera jest

**transformacija otpora (impedancije).**

- Ako npr. se na priključnice 2-2' idealnoga transformatora spoji otpor  $R$ , dobiva se mreža



- Cijelu mrežu moguće je razmatrati kao dvopol s priključnicama 1-1'.

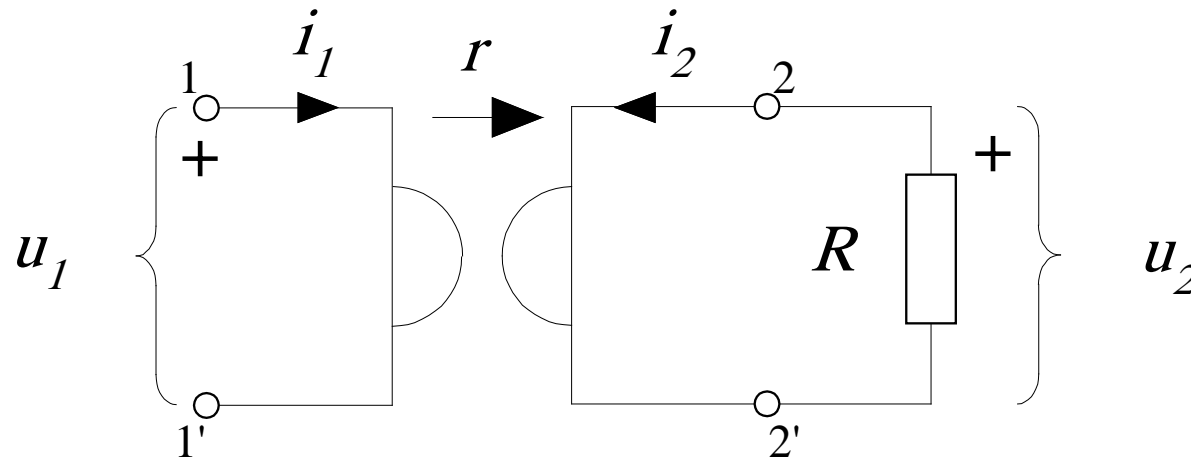


- Otpor  $R_{ulT}$  gledan sa priključnica 1-1' jednak je  $R_{ulT}$

$$R_{ulT} = \frac{u_1}{i_1} = -n^2 \frac{u_2}{i_2} = n^2 R$$

- Zaključak: Idealnim transformatorom je moguće promijeniti vrijednost otpora.

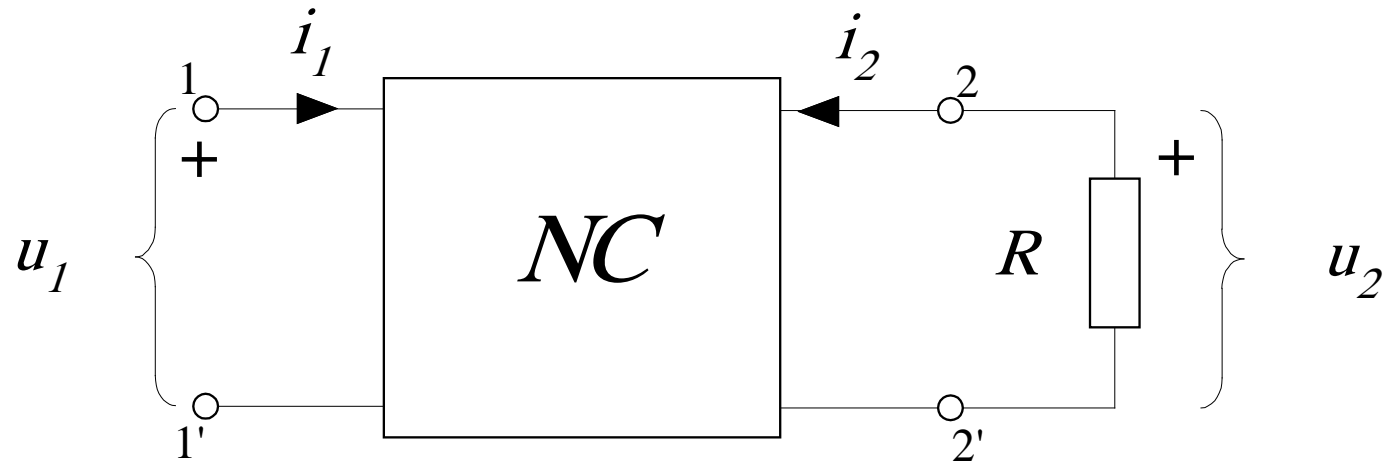
- Ako se isti postupak primjeni na girator



$$R_{ul_G} = \frac{u_1}{i_1} = -r^2 \frac{i_2}{u_2} = \frac{r^2}{R}$$

→ **transformator mijenja** vrijednost otpora  
 → **girator je invertira.**

- Ako se na priključnice 2-2' negativnog konvertora spoji otpor  $R$

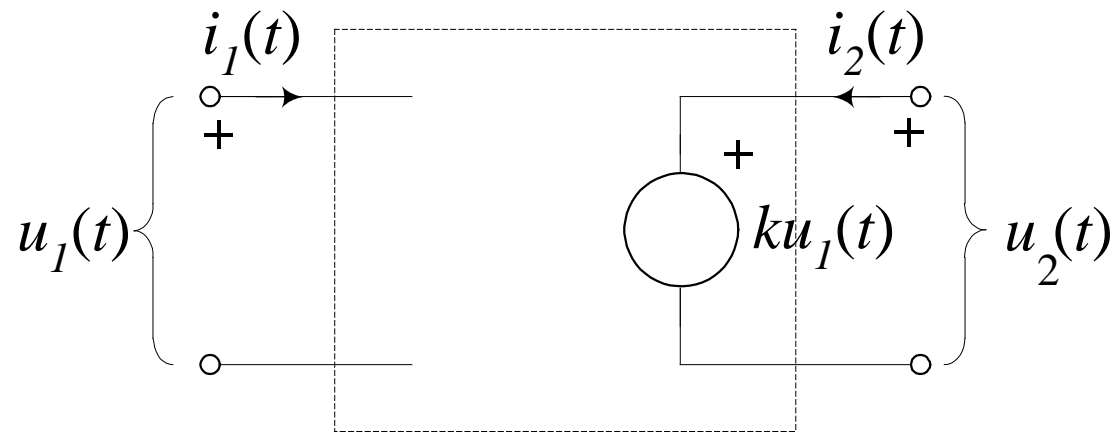


tada je otpor  $R_{ul}$  gledan sa 1-1'  $R_{ul_{NK}} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{k_1 \cdot u_2}{k_2^{-1} \cdot i_2} = -k_1 k_2 R$

- Ulazni otpor **negativnog konvertora** proporcionalan je negativnome iznosu otpora priključenog na njegov izlaz.
- Funkcija **negativnog konvertora** je **promjena predznaka** otporu  $R$ .

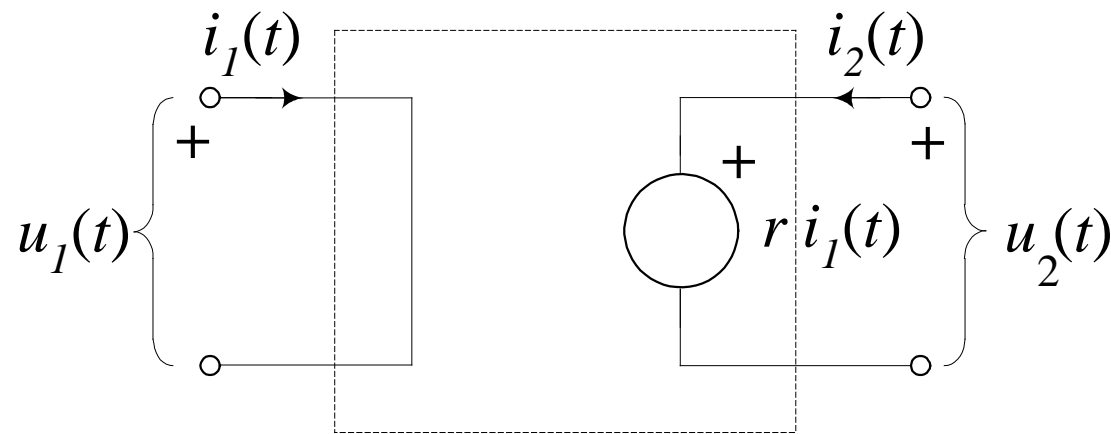
- **Ovisni izvori**
- **Ovisni izvori** su aktivni četveropoli, koji sadrže strujni ili naponski izvor ovisan o nekoj struji ili naponu u mreži.
- Postoje četiri vrste ovisnih izvora.

- **Naponski ovisni naponski izvor (NONI) →** aktivni četveropol, koji sadrži naponski izvor ovisan o nekome naponu u mreži



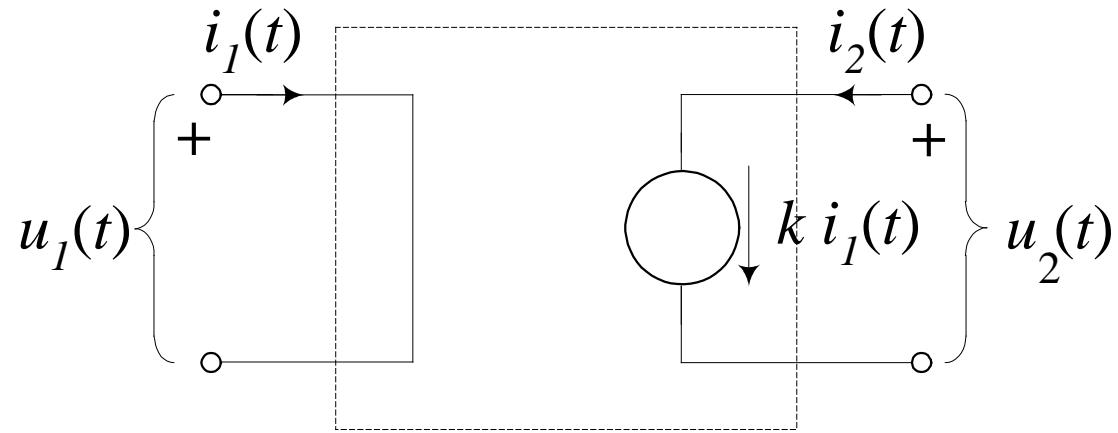
$$u_2 = ku_1 \quad ; \quad i_1 = 0$$

- **Strujno ovisni naponski izvor (SONI)** → aktivni četveropol, koji sadrži naponski izvor ovisan o nekoj struji u mreži,



$$u_2 = r \cdot i_1 \quad ; \quad u_1 = 0$$

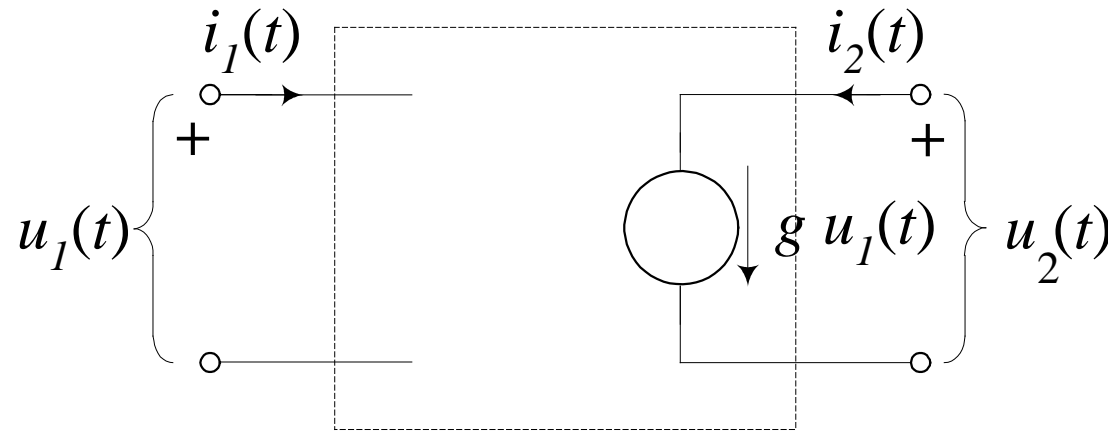
- **Strujno ovisni strujni izvor (SOSI) →** aktivni četveropol, koji sadrži strujni izvor ovisan o nekoj struji u mreži,



$$i_2 = k \cdot i_1 \quad ; \quad u_1 = 0$$

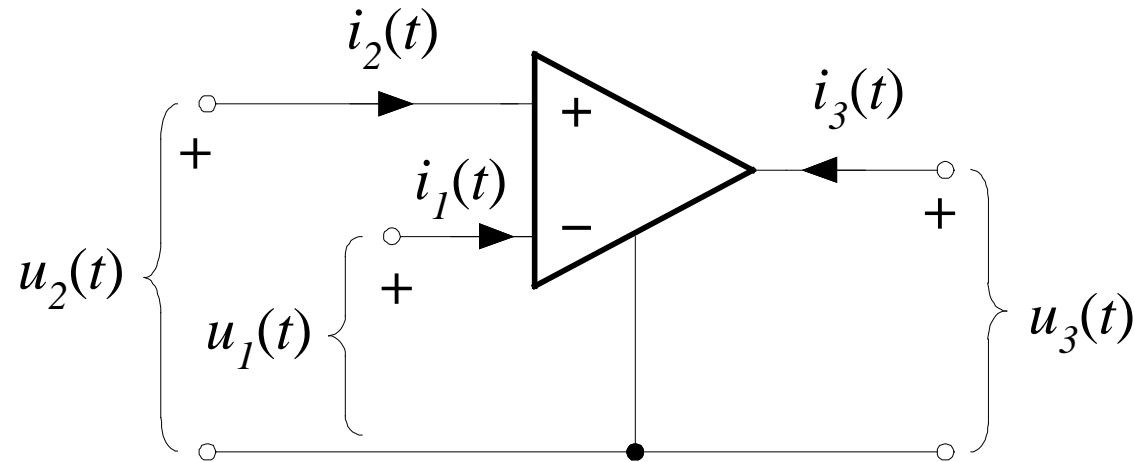


- **Naponski ovisni strujni izvor (NOSI) →** aktivni četveropol, koji sadrži strujni izvor ovisan o nekome naponu u mreži,



$$i_2 = g \cdot u_1 \quad ; \quad i_1 = 0$$

- **Operacijsko pojačalo** → element sa 3 prilaza.



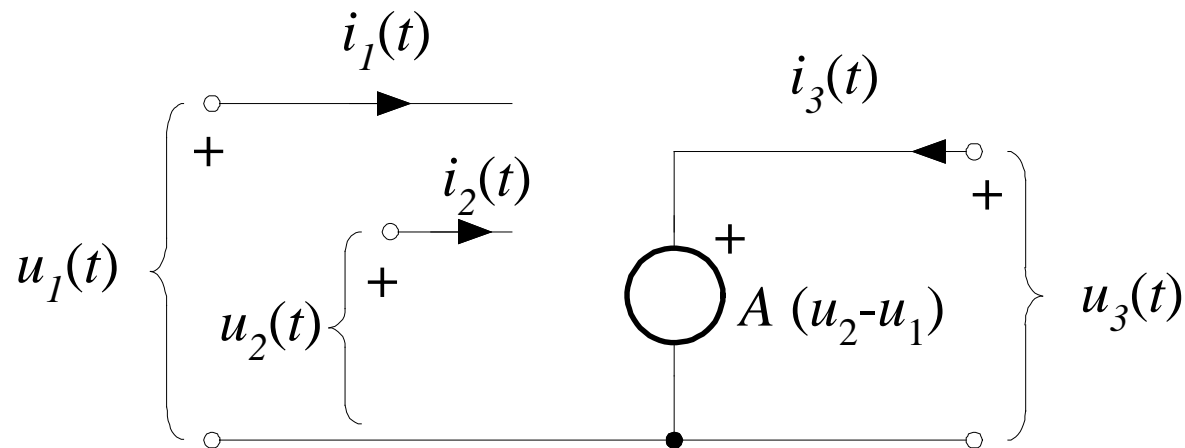
- Dva prilaza → ulazi
- treći prilaz → izlaz operacijskog pojačala
- Sva tri prilaza imaju jednu zajedničku priključnicu.

## ■ Definiicijske jednačbe

$$u_3 = A \cdot (u_2 - u_1) \quad ; \quad i_2 = i_1 = 0$$

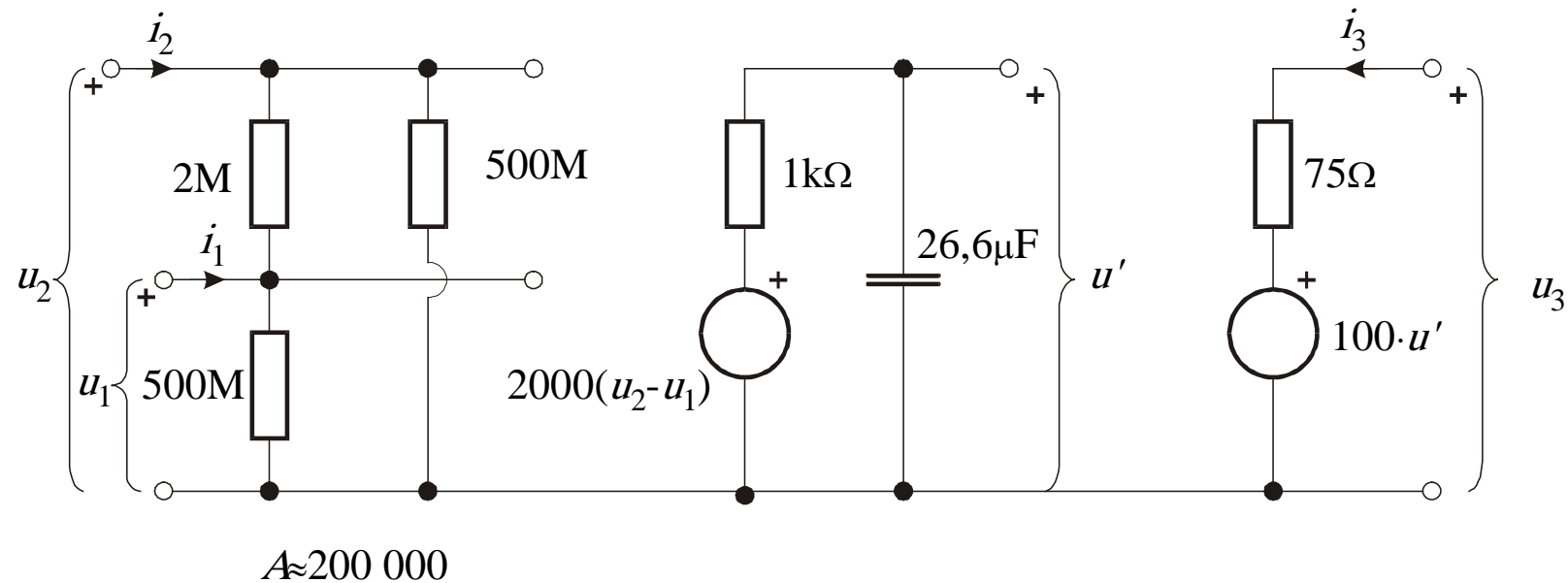
$$A \rightarrow \infty$$

## ■ Operacijsko pojačalo je moguće prikazati modelom s ovisnim naponskim izvorom



- Model prikazuje idealiziranu koncepciju tog elementa.
- U praksi  $\rightarrow$  samo približna verzija te koncepcije.
- Tipično operacijsko pojačalo u realnim uvjetima ima:
  - konačno naponsko pojačanje  $A$  reda veličine  $10^4$
  - pojačanje  $A$  nije konstantno već je frekvencijski ovisno
  - ulazne struje  $i_1$  i  $i_2$  nisu jednake nuli  $\rightarrow$  konačan ulazni otpor
  - tipičan ulazni otpor je reda veličine  $5 \cdot 10^5 \Omega$
  - izlazni otpor je reda  $300 \Omega$ .

- Model koji uzima u obzir realne osobine operacijskoga pojačala



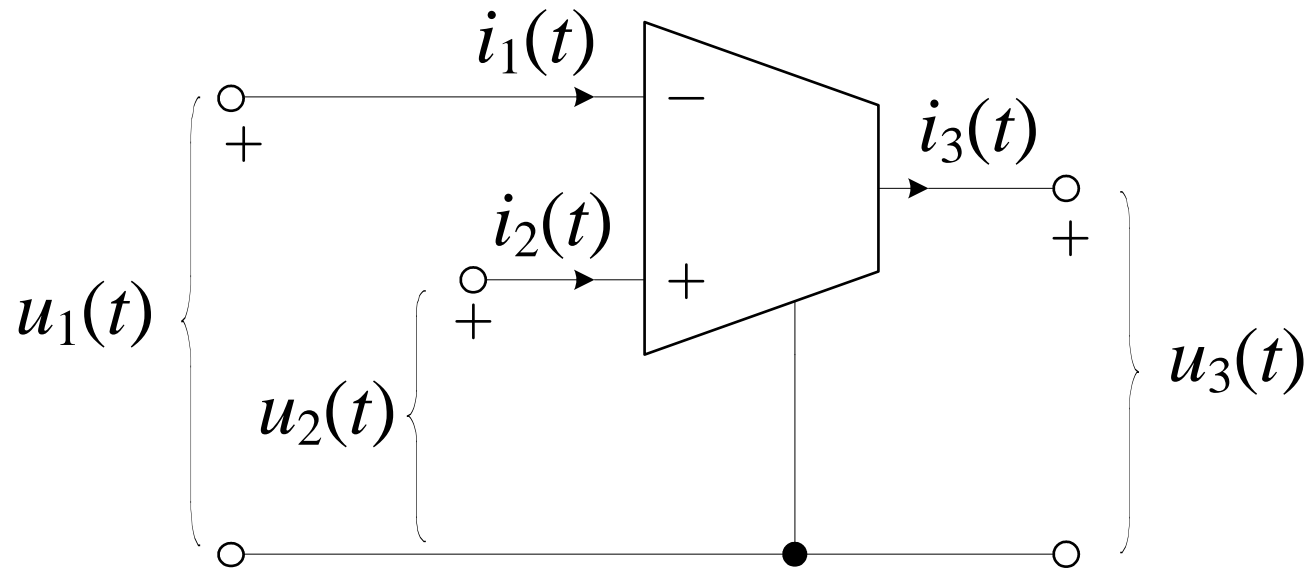
## Realni model operacijskoga pojačala

- **Princip prividnog kratkog spoja**
- Pojednostavnjuje analizu krugova s operacijskim pojačalima
- Iz definicijskih izraza  $\rightarrow$  izlazni napon  $u_3$  je beskonačno mnogo puta veći od razlike napona na ulazima ( $u_2 - u_1$ ).
- Napon  $u_3$  je konačan. Ako  $A \rightarrow \infty \rightarrow$ , razlika napona na ulazima je jednaka nuli

$$u_2 - u_1 = \frac{u_3}{A} \rightarrow 0$$

- Ulazne stezaljke su na istome potencijalu.
- To je **prividni ili virtualni kratki spoj**, jer su struje  $i_1$  i  $i_2$  jednake nuli.

- **Strminsko pojačalo** → element sa 3 prilaza.

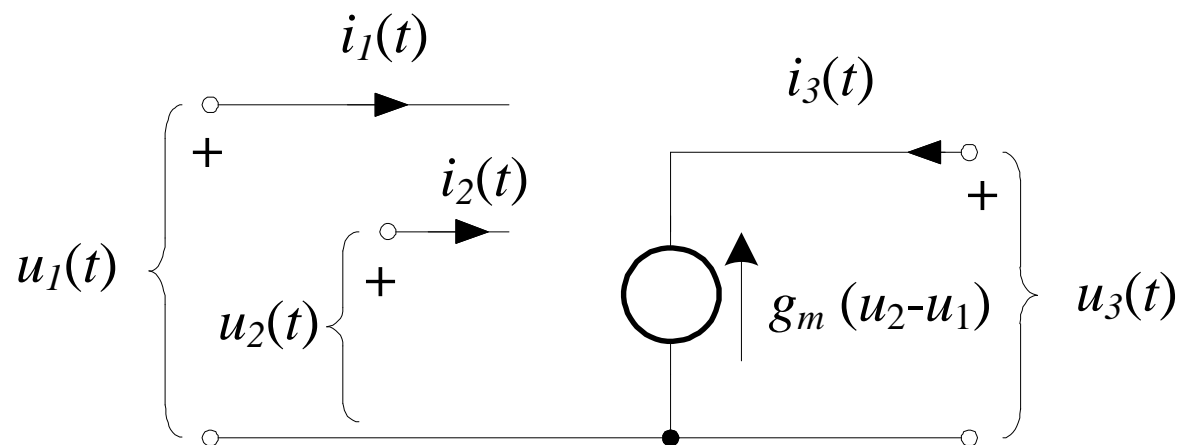


- dva ulazna signala → naponi  $u_1$  i  $u_2$ .
- izlazni signal → struja  $i_3$ .
- Sva tri prilaza imaju jednu zajedničku priključnicu.

## ■ Definiicijske jednačbe

$$i_3 = g_m \cdot (u_2 - u_1) \quad ; \quad i_2 = i_1 = 0$$

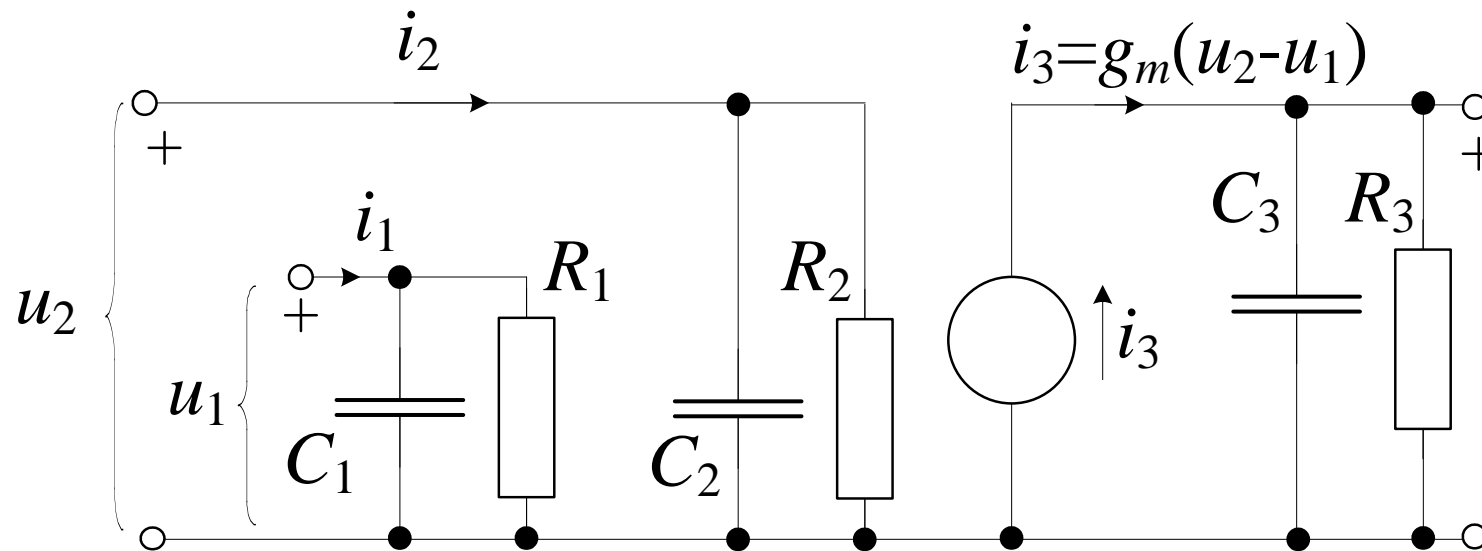
## ■ Strminsko pojačalo je moguće prikazati modelom s naponski ovisnim strujnim izvorom





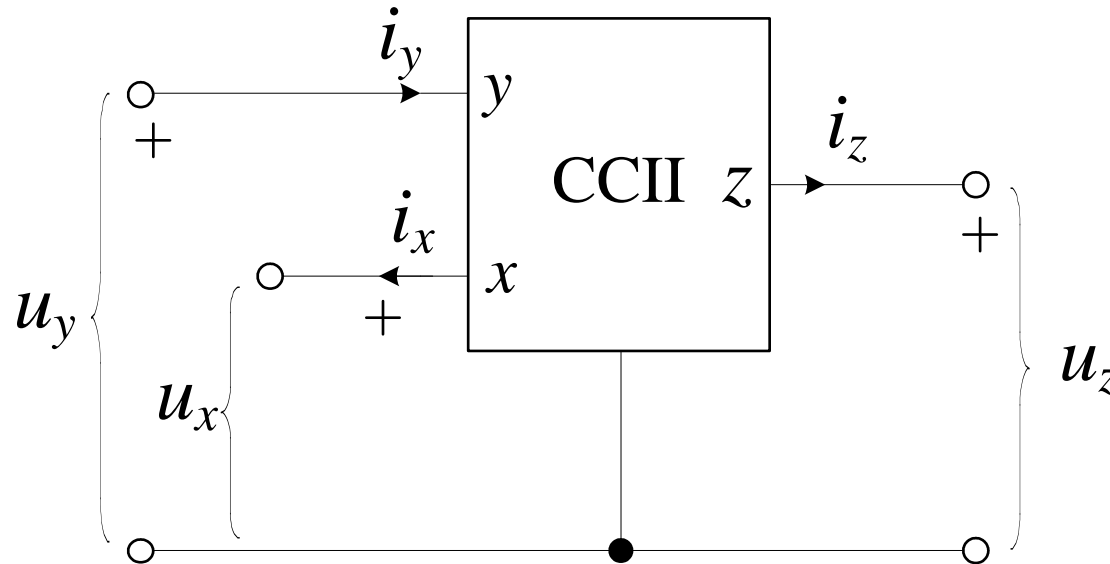
- Model prikazuje **idealiziranu** koncepciju tog elementa.
- $g_m$  je konstanta čija dimenzija je Siemens i naziva se ***strminom*** (engl. *transconductance*).
- Ulazni i izlazni otpori su beskonačni.
- U praksi → samo približna verzija te koncepcije.
- Za tipično strminsko pojačalo u realnim uvjetima:
  - strmina  $g_m$  nije konstantna već je frekvencijski ovisna
  - ulazne struje  $i_1$  i  $i_2$  nisu jednake nuli → konačan ulazni otpor
  - konačan izlazni otpor
  - kapaciteti paralelni s ulazima i izlazom

- Model koji uzima u obzir realne osobine strminskoga pojačala



Realni model strminskoga pojačala

## ■ Strujni prijenosnik (CCII - Current conveyor)\*



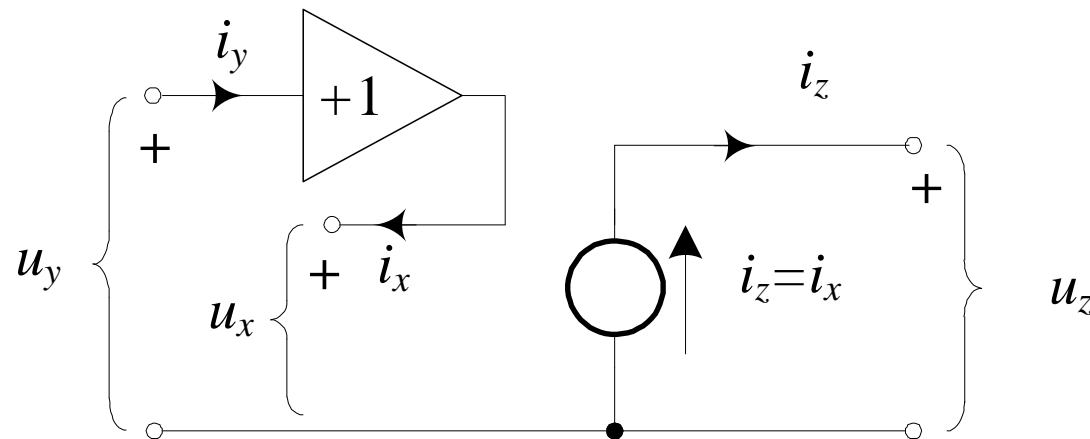
- $y \rightarrow$  naponski ulazni signal  $u_y$  ;  $i_y=0$
- $z \rightarrow$  strujni izlazni signal  $i_z$ .
- $x \rightarrow$  naponski izlazni signal  $u_x$  ili strujni ulazni signal  $i_x$ .

\*CCII - Strujni prijenosnik druge generacije

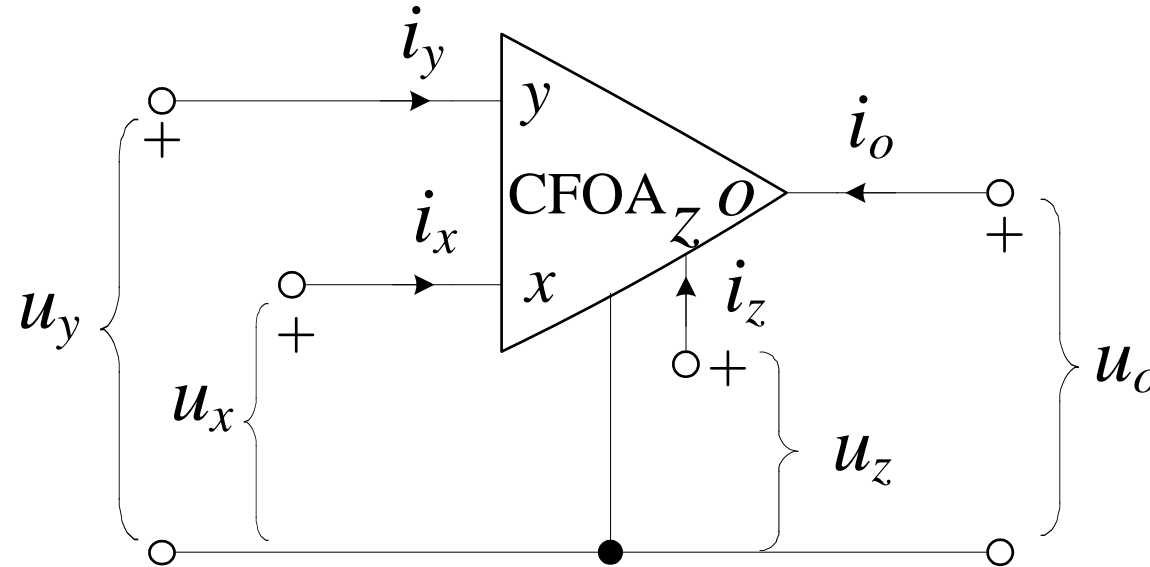
## ■ Definiicijske jednačbe

$$u_x = u_y \quad i_y = 0 \quad i_z = i_x$$

## ■ Strujni prijenosnik je moguće prikazati modelom prema slici



# ■ Operacijsko pojačalo sa strujnom povratnom vezom (CFOA-current-feedback operational amplifier)

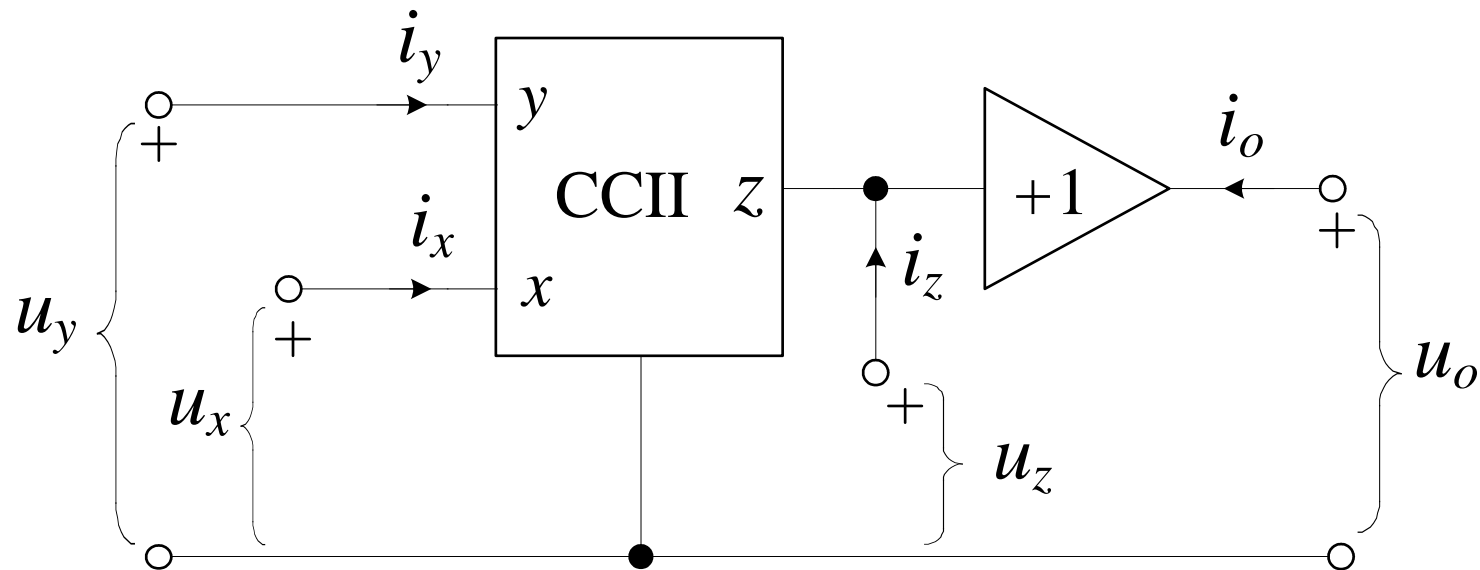


- $y \rightarrow$  naponski ulazni signal  $u_y$ ;  $i_y=0$
- $z \rightarrow$  strujni izlazni signal  $i_z$
- $o \rightarrow$  naponski izlazni signal  $u_o$
- $x \rightarrow$  naponski izlazni signal  $u_x$  ili strujni ulazni signal  $i_x$ .

## ■ Definiicijske jednađžbe

$$u_x = u_y \quad i_y = 0 \quad i_z = i_x \quad u_o = u_z$$

## ■ CFOA je moguće prikazati modelom prema slici



## ■ CFOA je CCII na koji je dodano naponsko slijedilo koje ima ulogu naponskog izlaza (primjer je integrirani krug AD 844).