fer2.net

Električni krugovi

Tutorial - Grafovi (matrice)

by: Tywin

Svaku mrežu možemo jednoznačno opisati uz pomoć grafova. Pri tome se služimo matricama. Kako bi nam bilo što lakše pratiti proučimo prvo oznake kojima ćemo se koristiti:

- **b** → grana (odnosno grane)
- **v** → čvor (čvorovi)
- **p** → petlja (petlje)
- **t** → grana stabla (grane stabla)
- **s** → spona (spone)
- **r** → rez (rezovi)
- **N** → broj nečega (npr. N_b – broj grana)

Osnovne relacije i pojmovi koje nam olakšavaju računanje su:

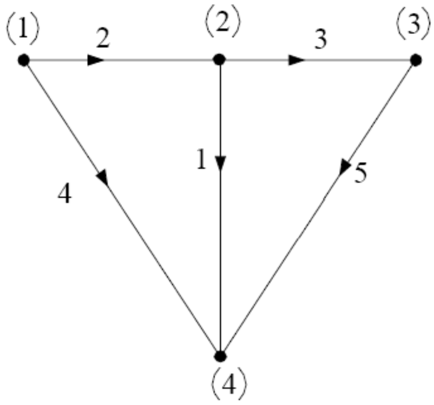
- Stablo je skup grana koje obuhvaćaju sva čvorišta ali ne tvore zatvoreni strujni krug (u stablu nema toka struje)
- Spone su preostale grane mreže, a dodavanjem jedne spone u stablo stvaramo jednu petlju (gdje postoji tok struje)
- Prilikom označavanja rednog broja grana na prva mjesta dolaze grane stabla a tek poslije grane spona.
- $N_t = N_r = N_v - 1$
- $N_s = N_p = N_b - N_v + 1$

Matrice uz pomoć kojih možemo opisati izgled mreže, ali ne i njezin sastav su:

- $\mathbf{A_a}$ → matrica incidencije; veličine je $N_v \times N_b$
- **A** → reducirana matrica incidencije; veličine je $N_t \times N_b$
- **S** → spojna matrica; veličine je $N_s \times N_b$
- **Q** → rastavna matrica; veličine je $N_t \times N_b$

Uz ove matrice postoje još i matrice **U**, **I**, **Z** i **Y** ali ćemo o njima nešto više tek kasnije. Prvo pogledajmo kako se određuju matrice **A**, **S** i **Q**. Matricu $\mathbf{A_a}$ ne koristimo u računu pa nju nećemo obradit (iako se radi analogno kao i **A** samo što postoji još jedan redak za referenti čvor).

Evo primjera na kojem se objašnjava (znam da je isti takav i u slajdovima al je najbolji). Dakle, broj čvorova je 4, broj grana je 5, što znači da je matrica incidencije **A** veličine 3 × 5. Pri tome smo jedan čvor izbacili jer smo ga proglasili referentnim (uzemljen je), neka to bude čvor (4). Matricu popunjavamo tako da promatramo međusobni odnos grana i čvorova. Ako grana ulazi u čvor pišemo vrijednost „**-1**“, ako iz čvora izlazi vrijednost „**1**“ a ako nisu u odnosu „**0**“. Tako naša matica **A** iznosi:

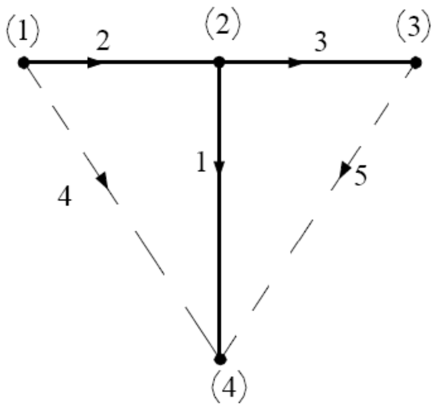


$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g1 & g2 & g3 & g4 & g5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ č1 \\ č2 \\ č3 \end{array}$$

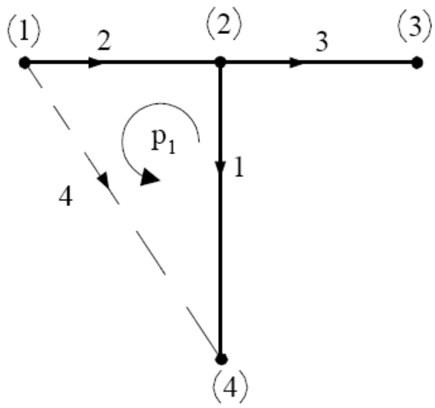
Računamo broj stablenih grana → 3,
te broj spona → 2.

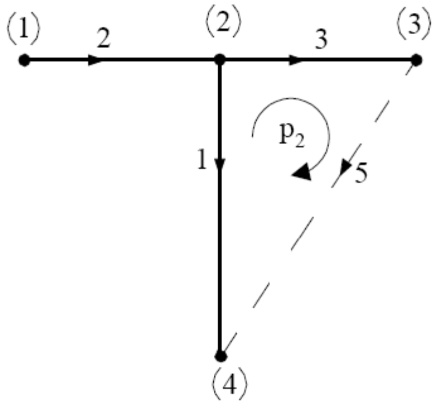
Dogovorno vrijedi da su grane 1, 2 i 3 grane stabla a ostale grane, 4 i 5, spone.

Grane stabla su označene podebljanom, a spone isprekidanom crtom.



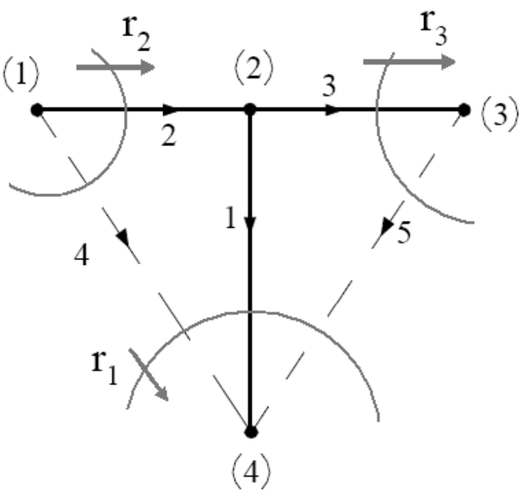
Kada pišemo spojnu matricu **S** tada za svaki redak gledamo stablo i samo jednu sponu. Dodajući jednu sponu u stablo stvaramo jedan zatvoreni krug, odnosno jednu temeljnu petlju, prema tome jedna spona čini jednu petlju. Pa je broj petlji jednak broju spona → 2. Tom petljom obilazimo u smjeru spone a u matricu **S** unosimo „**1**“ za grane koje se poklapaju sa smjerom petlje, „**-1**“ za one koje su u suprotnom smjeru te „**0**“ za one grane koje petlja ne obuhvaća.





$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g1 & g2 & g3 & g4 & g5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p1 \\ p2 \end{array}$$

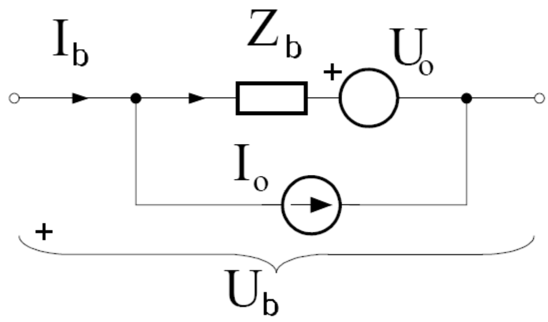
Ostaje nam još samo rastavna matrica, odnosno matrica temeljnih rezova **Q**. Ovu matricu određujemo prema grafu sa svim granama, označenim koje su grane dio stabla a koje su spone. Rezova ima koliko i grana stabla → 3, zbog toga što ćemo svakom rezu pridružiti samo jednu granu stabla. Rez radimo tako da „prerežemo“ graf na bilo koji način ali tako da „prerežemo“ samo jednu stablenu granu. Tada nam ta stablena grana određuje smjer reza. Pa u matricu unosimo „**1**“ za grane koje se poklapaju sa smjerom reza, „**-1**“ za grane koje su suprotnog smjera a „**0**“ za one koje rez ne obuhvaća.



$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g1 & g2 & g3 & g4 & g5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ r1 \\ r2 \\ r3 \end{array}$$

Eto, sad kad znamo kako se pišu ove „obične" matrice koje obavezno morate znati možemo na prave stvari ☺.

Što je zapravo grana?? Jedna grana može imati maksimalno jedan element (otpornik, zavojnica ili kondenzator). Osim tog jednog elementa u grani se mogu nalaziti izvori i početni uvjeti. Grana je jednoznačno određena strujom i naponom i to na sljedeći način:



U svakoj je grani dopuštena pretvorba izvora iz strujnog u naponski i obratno. Ovo nam je potrebno znati jer je to prvi korak u zapisu grafa u matričnom obliku. Tek sad dolazimo do matrica koje opisuju sastav, ali ne i izgled, grafa. To su matrice **U**, **I**, **Z** i **Y**, a postoji više vrsta svake od ovih matrica. Neke od ovih matrica su nepoznanice a neke su poznate (odnosno vrijednosti u matricama se zapisuju iz grafa). Nepoznanice su:

- $\mathbf{U_b}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja jedan napon grane
- $\mathbf{U_v}$ → vektor stupac duljine N_v gdje svaki član matrice predstavlja jedan napon čvora
- $\mathbf{U_r}$ → vektor stupac duljine N_r gdje svaki član matrice predstavlja jedan napon reza
- $\mathbf{I_b}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja jednu struju grane
- $\mathbf{I_p}$ → vektor stupac duljine N_p gdje svaki član matrice predstavlja jednu struju petlje

Poznate matrice, odnosno matrice koje znamo popuniti vrijednostima ili izračunati iz drugih matrica su:

- $\mathbf{U_{0b}}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost napona izvora i početnih uvjeta u grani
- $\mathbf{U_{0p}}$ → vektor stupac duljine N_p gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost napona izvora i početnih uvjeta u petlji

- $\mathbf{I}_{0b}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost struje izvora i početnih uvjeta u grani
- $\mathbf{I}_{0v}$ → vektor stupac duljine N_v gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost struje izvora i početnih uvjeta čvora
- $\mathbf{I}_{0r}$ → vektor stupac duljine N_r gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost struje izvora i početnih uvjeta reza
- $\mathbf{Z}_b$ → kvadratna matrica veličine $N_b \times N_b$; sadrži impedancije grana
- $\mathbf{Z}_p$ → kvadratna matrica veličine $N_p \times N_p$; sadrži impedancije petlji
- $\mathbf{Y}_b$ → kvadratna matrica veličine $N_b \times N_b$; sadrži admitancije grana
- $\mathbf{Y}_v$ → kvadratna matrica veličine $N_v \times N_v$; sadrži admitancije čvorova
- $\mathbf{Y}_r$ → kvadratna matrica veličine $N_r \times N_r$; sadrži admitancije rezova

Oke, gdje koristimo sve te silne matrice?? Koristimo ih pri zapisu matričnih jednadžbi. Dvije najvažnije jednadžbe su jednadžbe strujno-naponskih relacija:

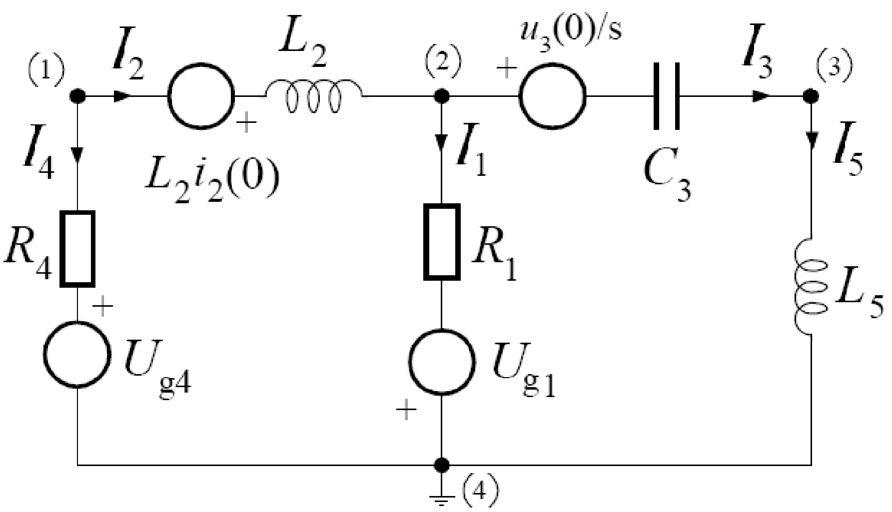
$$\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_b + \mathbf{U}_{0b}$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b + \mathbf{I}_{0b}$$

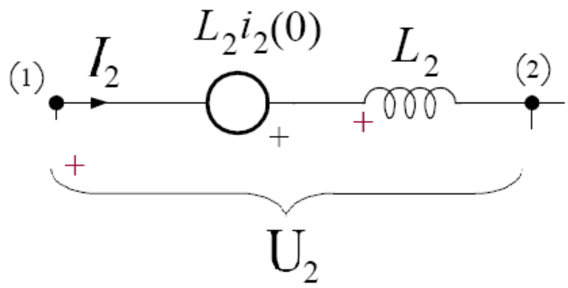
Ostale tri matrične jednadžbe su:

- Jednadžbe petlji → $\mathbf{Z}_p \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{U}_{op}$
- Jednadžbe čvorova → $\mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v = \mathbf{I}_{ov}$
- Jednadžbe rezova → $\mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{U}_r = \mathbf{I}_{or}$

Jednadžbe strujno-naponskih relacija su nam najvažnije jer je njih najlakše odrediti a zatim se ostale tri jednadžbe lako odrede množenjem matrica. Da bi zapisali jednadžbe strujno-naponskih relacija prvo je potrebno na temelju mreže napisati strujno-naponske relacije za svaku granu pojedinačno. Napravimo to na primjeru (dani primjer odgovara prije danom grafu, te je već prebačen u Laplaceovu domenu!):



Prvo što trebamo napraviti je zapisati napone svake grane, napon označavamo na prikazani način. I pri tome su crveno označeni **+** stavljeni tamo gdje struja ulazi. Analogno ovome označavamo i ostale grane.



Te jednadžbe pišemo u matrice na način da prvi redak vektora stupca $\mathbf{U}_b$ odgovara naponu U_1, umnožak prvog retka matrice $\mathbf{Z}_b$ i vektor stupca $\mathbf{I}_b$ padovima napona U_1 što ga čine struje grana te prvi redak vektora stupca $\mathbf{U}_{0b}$ naponima izvora i početnim uvjetima napona U_1. Analogno tome ide i za druge. Strujno-naponske relacije grana te matrična jednadžba $\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_b + \mathbf{U}_{0b}$:

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 - U_{g1}$$
$$U_2 = I_2 \cdot sL_2 - L_2 i_2(0)$$
$$U_3 = I_3 \cdot \frac{1}{sC_3} + \frac{u_3(0)}{s}$$
$$U_4 = I_4 \cdot R_4 + U_{g4}$$
$$U_5 = I_5 \cdot sL_5$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sL_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{sC_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U_{g1} \\ -L_2 i_2(0) \\ \frac{u_3(0)}{s} \\ U_{g4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iste te jednadžbe zapisane preko struja te matrična jednadžba $\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b + \mathbf{I}_{0b}$:

$$I_1 = \frac{1}{R_1} \cdot U_1 + \frac{U_{g1}}{R_1}$$
$$I_2 = \frac{1}{sL_2} \cdot U_2 + \frac{i_2(0)}{s}$$
$$I_3 = sC_3 \cdot U_3 - C_3 u_3(0)$$
$$I_4 = \frac{1}{R_4} \cdot U_4 - \frac{U_{g4}}{R_4}$$
$$I_5 = \frac{1}{sL_5} \cdot U_5$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sL_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sC_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{U_{g1}}{R_1} \\ \frac{i_2(0)}{s} \\ -C_3 u_3(0) \\ -\frac{U_{g4}}{R_4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tako smo odredili naše najvažnije matrične jednadžbe, i pri tome vrijedi $\mathbf{Z}_b = \mathbf{Y}_b^{-1}$. Da bi dobili ostale tri matrične jednadžbe koristimo se sljedećim izrazima:

Jednadžbe petlji:

$$\mathbf{Z}_p \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{U}_{op}$$

Formule pretvorbe:

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{S}^T$$

$$\mathbf{U}_{0p} = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_{0b}$$

$$\mathbf{U}_{0p} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_{0b}$$

Jednadžbe čvorova:

$$\mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v = \mathbf{I}_{ov}$$

Formule pretvorbe:

$$\mathbf{Y}_v = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{I}_{0v} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{0b}$$

$$\mathbf{I}_{0v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{0b}$$

Jednadžbe rezova:

$$\mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{U}_r = \mathbf{I}_{or}$$

Formule pretvorbe:

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{I}_{0r} = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}_{0b}$$

$$\mathbf{I}_{0r} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{0b}$$

Daljnji nam su problemi matematičke operacije nad matricama. Ono što je potrebno znati je transponiranje, množenje te traženje inverzne matrice.

Transponiranje matrica:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Množenje matrica:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot j + b \cdot m + c \cdot p & a \cdot k + b \cdot n + c \cdot r & a \cdot l + b \cdot o + c \cdot s \\ d \cdot j + e \cdot m + f \cdot p & d \cdot k + e \cdot n + f \cdot r & d \cdot l + e \cdot o + f \cdot s \\ g \cdot j + h \cdot m + i \cdot p & g \cdot k + h \cdot n + i \cdot r & g \cdot l + h \cdot o + i \cdot s \end{bmatrix}$$

Traženje inverzne matrice jedan je od najvećih problema ali nam je važno poznavati kako se to radi jer se u nekim zadacima mora (npr. zapiši jednadžbe čvorova u matričnom obliku, $\mathbf{Y}_v$ odredi preko $\mathbf{Z}_b$ – i tad se mora odrediti $\mathbf{Y}_b = \mathbf{Z}_b^{-1}$). Da bi se mogla odrediti inverzna matrica determinanta mora biti različita od nule (matrica mora biti regularna).

U gore danom primjeru nije problem odrediti inverznu matricu jer ako je matrica ispunjena samo po dijagonali tada svaki element invertiramo zasebno (stavimo na $^{-1}$, okrenemo) i dobili smo invertiranu matricu. Odnosno:

$$\mathbf{Z}_b{}^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sL_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{sC_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sL_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sC_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL_5} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_b$$

U slučaju da matrica nije popunjena samo po dijagonali (što se događa ukoliko imamo zavisne izvore ili međuinduktivitet u mreži) moramo koristiti neki drugi postupak. Prvo što se radi je iz matrice kojoj tražimo inverz odredimo dio (kvadratna submatrica) počevši od jednog kraja dijagonale tako da obuhvatimo što manji dio a opet sve elemente koji nisu na dijagonali. Primjer:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{sL_3} & \mathbf{0} & \mathbf{sM} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{R_4} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{sM} & \mathbf{0} & \mathbf{sL_5} \end{bmatrix}^{-1} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{R_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{sL_2} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{\frac{1}{sC_3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_5 \end{bmatrix}^{-1}$$

Neodređeni dio invertiramo kao da se radi o matrici ispunjenoj samo po dijagonali (okrenemo elemente).

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ 0 & sC_2 & \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{sL_3} & \mathbf{0} & \mathbf{sM} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R_4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{sM} & \mathbf{0} & \mathbf{sL_5} \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{sL_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{\frac{1}{sC_3}} \end{bmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{sL_5} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Dio koji smo označili treba invertirati na jedan od slijedećih načina. Neka je, radi jednostavnosti, zadana matrica:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Inverz možemo naći tako da pokraj ove napišemo jediničnu matricu (po dijagonali ispunjenu jedinicama) a zatim zadanu matricu svodimo na jediničnu. Pritom sve operacije koje izvršimo nad zadanom matricom izvršimo i nad jediničnom.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 & e_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 & g_2 & h_2 & i_2 \end{array}\right)$$

I tada vrijedi:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix}$$

Drugi način za određivanje inverza je taj da se prvo odredi determinanta:

$$det\mathbf{M} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

A zatim se transponirana matrica množitelja (množitelji su oni brojevi koje množimo kada tražimo determinantu početne matrice) podjeli sa determinantom:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{det\mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{det\mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{det\mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} (e \cdot i - f \cdot h) & (c \cdot h - b \cdot i) & (b \cdot f - c \cdot e) \\ (f \cdot g - d \cdot i) & (a \cdot i - c \cdot g) & (c \cdot d - a \cdot f) \\ (d \cdot e - g \cdot h) & (b \cdot g - a \cdot h) & (a \cdot e - b \cdot d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(e \cdot i - f \cdot h)}{det\mathbf{M}} & \frac{(c \cdot h - b \cdot i)}{det\mathbf{M}} & \frac{(b \cdot f - c \cdot e)}{det\mathbf{M}} \\ \frac{(f \cdot g - d \cdot i)}{det\mathbf{M}} & \frac{(a \cdot i - c \cdot g)}{det\mathbf{M}} & \frac{(c \cdot d - a \cdot f)}{det\mathbf{M}} \\ \frac{(d \cdot e - g \cdot h)}{det\mathbf{M}} & \frac{(b \cdot g - a \cdot h)}{det\mathbf{M}} & \frac{(a \cdot e - b \cdot d)}{det\mathbf{M}} \end{bmatrix}$$

Ukoliko je matrica manja (2×2) tada je puno lakše:

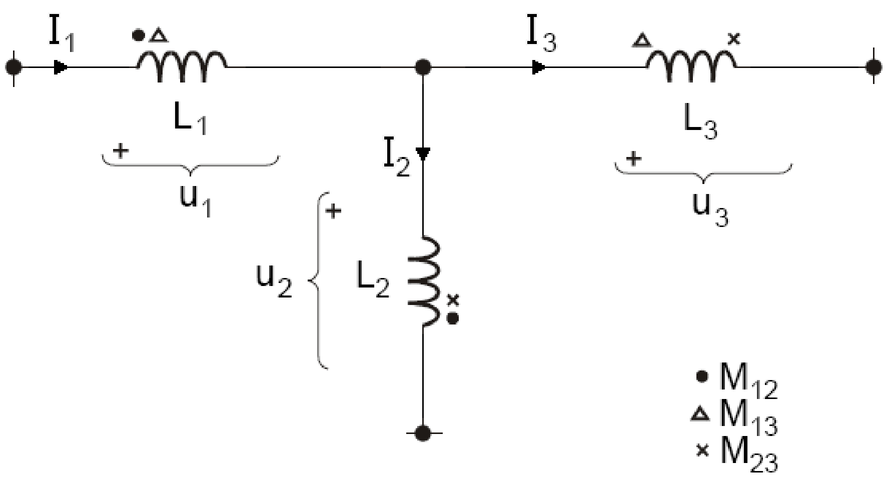
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d}{a \cdot d - b \cdot c} & \frac{-b}{a \cdot d - b \cdot c} \\ \frac{-c}{a \cdot d - b \cdot c} & \frac{a}{a \cdot d - b \cdot c} \end{bmatrix}$$

Već smo rekli zašto nam je ovo potrebno. No da bi to uopće mogli koristit moramo znati zapisati strujno-naponske jednadžbe grana (problem međuinduktiviteta) ili iste staviti u matrice (problem zavisnih izvora).

Ukoliko u mreži imamo međuinduktivitet tada ga moramo i zapisati a zapisujemo ga kao pad napona. Što je uopće međuinduktivitet?? Međuinduktivitet je pojava da se u zavojnici inducira napon uslijed prolaska struje kroz neku drugu zavojnicu ako su njih dvije međuinduktivno vezane (vezu označavamo točkom, zvjezdicom, trokutom, iksom i sl.).

To znači da ćemo prilikom zapisa napona neke grane osim običnih padova napona koja stvara struja prilikom prolaska kroz zavojnicu grane, napona početnog uvjeta i izvora morat zapisat i pad napona koji stvara neka druga struja a vezana je međuinduktivitetom. Evo jedan primjer (malo teži al eto…)



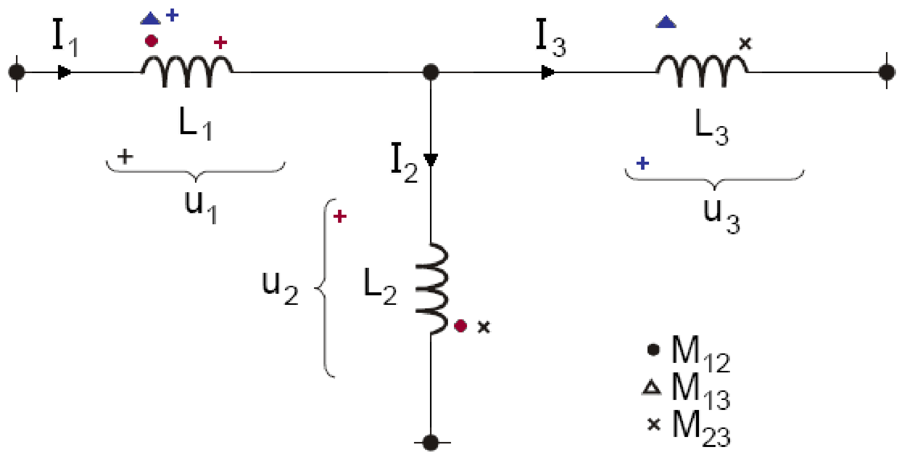
Prvo što trebamo napraviti je odgovarajuće postaviti predznake napona kojeg stvaraju struje na zavojnicama. Promotrimo najprije prvu zavojnicu, ona ima svoj pad napona kojeg stvara struja I_1 → $sL_1 \cdot I_1$. No osim njega postoji još i pad napona prouzrokovan međuinduktivnim vezama. To je pad napona kojeg stvara struja I_2 preko veze M_{12} a iznosi → $sM_{12} \cdot I_2$ te pad napona kojeg stvara struja I_3 preko veze M_{13} a iznosi → $sM_{13} \cdot I_3$. Pa za napon prve grane pišemo:

$$U_1 = sL_1 \cdot I_1 \pm^? sM_{12} \cdot I_2 \pm^? sM_{13} \cdot I_3$$

Još je samo potrebno odrediti predznake padova napona stvorenih međuinduktivitetom.

Struja I_2 ulazi u zavojnicu L_2 na mjesto gdje nema točke (**suprotno od točke**) i tamo stvara **+**, to znači da će i na zavojnici L_1, preko međuinduktivne veze, **+** napona $sM_{12} \cdot I_2$ biti tamo gdje nema točke (**suprotno od točke**).

Struja I_3 ulazi u zavojnicu L_3 na mjesto **gdje je trokut** i tamo stvara **+**, to znači da će na zavojnici L_1, preko međuinduktivne veze, **+** napona $sM_{13} \cdot I_3$ biti tamo **gdje je trokut.**



Tako da jednadžba glasi:

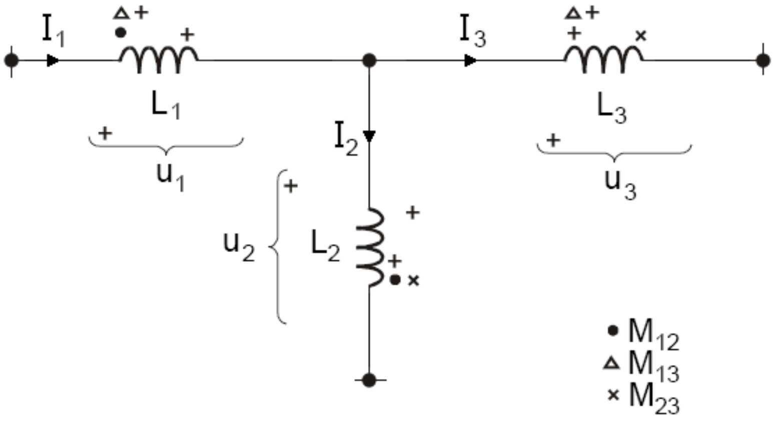
$$U_1 = sL_1 \cdot I_1 - sM_{12} \cdot I_2 + sM_{13} \cdot I_3$$

Na temelju ovoga možemo zapisati i ostale jednadžbe:

$$U_2 = sL_2 \cdot I_2 \pm^? sM_{12} \cdot I_1 \pm^? sM_{23} \cdot I_3$$

$$U_3 = sL_3 \cdot I_3 \pm^? sM_{13} \cdot I_1 \pm^? sM_{23} \cdot I_2$$

Zapisati predznake pojedinih napona:



Te konačno sve strujno-naponske relacije:

$$U_1 = sL_1 \cdot I_1 - sM_{12} \cdot I_2 + sM_{13} \cdot I_3$$

$$U_2 = sL_2 \cdot I_2 - sM_{12} \cdot I_1 + sM_{23} \cdot I_3$$

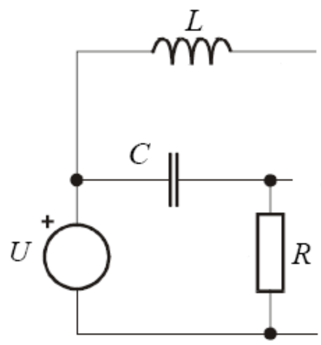
$$U_3 = sL_3 \cdot I_3 + sM_{13} \cdot I_1 + sM_{23} \cdot I_2$$

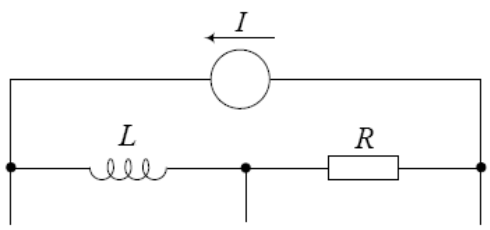
Kod problema zavisnih izvora sve što nam je potrebno su već zapisane strujno-naponske relacije svih grana. Ono što moramo činiti je da ukoliko je potrebno zapisati matričnu jednadžbu $\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_b + \mathbf{U}_{0b}$ tada zavisnost izvora moramo zapisati u ovisnosti o struji. A ako se traži matrična jednadžba $\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b + \mathbf{I}_{0b}$ tada zavisnost izvora moramo zapisati preko napona, a u slučaju da imamo i međuinduktivitet tada i njegove strujne ovisnosti moramo zapisati preko napona.

Te zadnji problem, jedan od važnijih.

Uvijek napomenu da matrice $\mathbf{Z}_b$ i $\mathbf{Y}_b$ moraju biti regularne (niti jedan redak ili stupac ispunjen samo nulama), odnosno definicija grane je da mora sadržavati točno jedan otpornik, zavojnicu ili kondenzator. S njim može biti naponski izvor vezan serijski i strujni izvor vezan paralelno (najčešće je samo jedno od ovog dvoje iako može doći kombinacija izvora i početnog uvjeta).

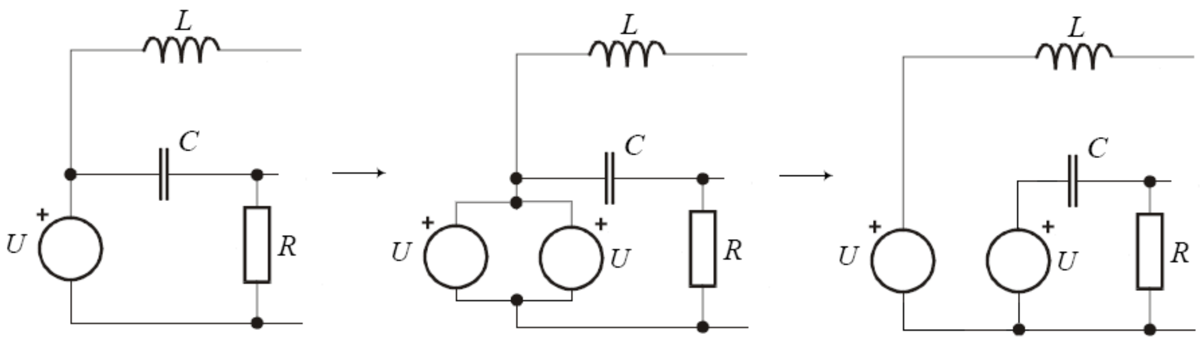
No, u koje grane spadaju ovi izvori:



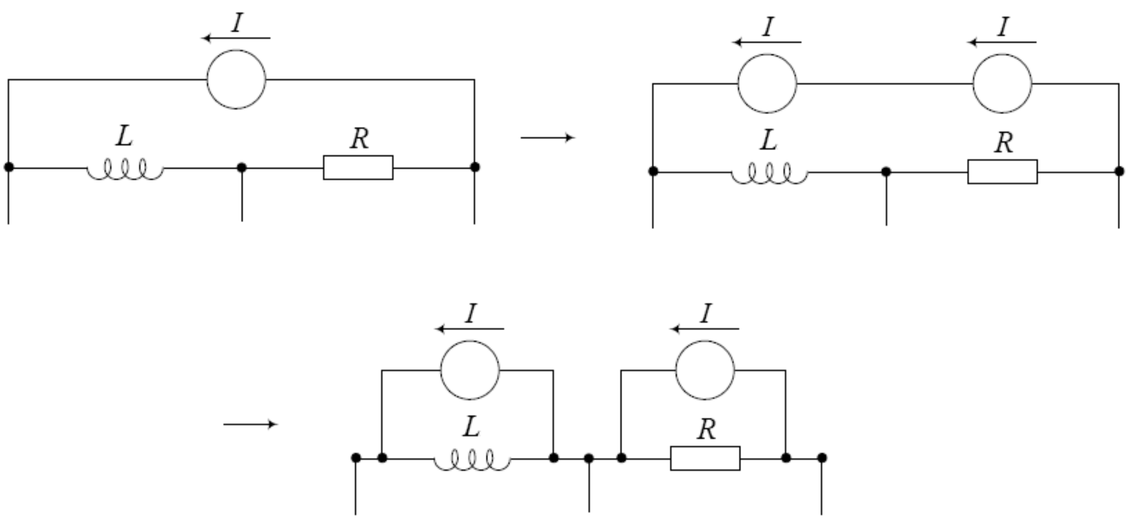


Ove izvore ne možemo stavit u svoju granu jer naponski nema niti jedan element spojen serijski s njime dok strujni nema niti jedan element spojen s njim paralelno (da to napravimo gore navedene matrice ne bi bile regularne!). Sada primjenjujemo nešto što se naziva **posmicanje izvora**. Kako se mogu posmicati izvori??

Naponski se izvor posmiče tako da umjesto jednog izvora napravimo dva izvora istog iznosa spojenih **paralelno**. Zatim tražimo čvorište na jednom od krajeva grane, u kojoj se nalaze izvori, gdje se u čvoru spajaju još dvije grane (ili više ako je potrebno – a često nije) ali tako da je u svakoj jedan element. Tada svaki od izvora **serijski** pridružimo po jednoj grani:



Strujni se izvor posmiče tako da umjesto jednog izvora napravimo dva izvora istog iznosa spojenih **serijski**. Zatim tražimo dvije grane (ili više ako je potrebno – a često nije) koje se nalaze između čvorova grane u kojoj se nalaze izvori ali tako da svaka grana sadrži po jedan element. Tada svaki od izvora **paralelno** pridružujemo po jednoj grani:



I na ovaj način rješavamo problem regularnosti matrica a time i zaključujemo ovo poglavlje o matricama i matričnom računu.