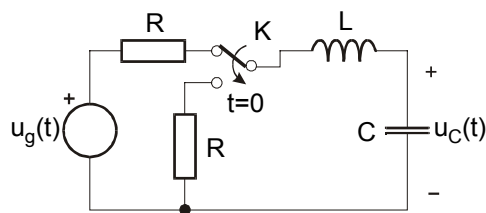


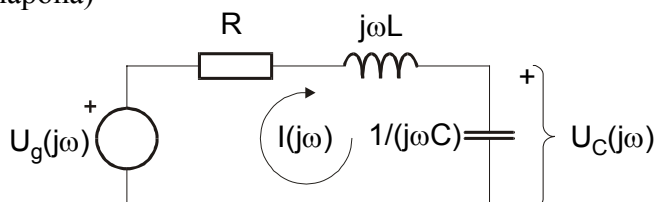
1. Za mrežu na slici odrediti napon na kapacitetu $u_C(t)$ ako se u trenutku $t=0$ prebaci sklopka K. Zadano je: $R=4$, $C=1/2$, $L=2$, $u_g(t)=10\sin 2t$; $-\infty < t < \infty$ (sinusoidalno stacionarno stanje).



Rješenje:

Zadatak se rješava u dva koraka: u prvom a) koraku se pomoću fazora za $t < 0$ izračuna utjecaj pobude tako da se nađu početni uvjeti: napon na kapacitetu i početna struja kroz induktivitet. U drugom b) koraku se za $t \geq 0$ uz poznate početne uvjete pomoću Laplaceove transformacije izračuna traženi napon na kapacitetu $u_C(t)$.

a) $t < 0$ (fazori struje i napona)

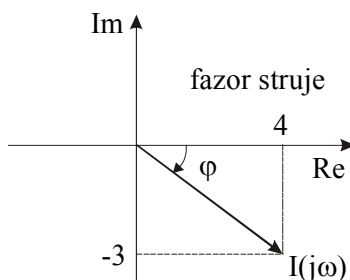


$$U_g(j\omega) = 10 \angle 0^\circ, \quad \omega = 2$$

Fazor struje u električnom krugu:

$$I(j\omega) = \frac{U_g(j\omega)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{U_g(j\omega)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{10}{4 + j\left(2 \cdot 2 - \frac{1}{2 \cdot (1/2)}\right)}$$

$$= \frac{10}{4 + j3} \cdot \frac{4 - j3}{4 - j3} = \frac{10 \cdot (4 - j3)}{25} = \frac{2}{5} \cdot (4 - j3)$$



$$|I(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctg \frac{-3}{4} = -36.87^\circ$$

Iz fazora slijede podaci o struji u električnom krugu u vremenskoj domeni:

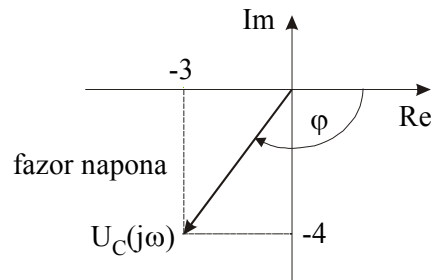
$$i(t) = 2 \cdot \sin(2t - 36.87^\circ)$$

U trenutku $t=0$ se tada može izračunati početna struja u el. krugu koja je ujedno i početna struja kroz induktivitet.

$$i_L(0) = i(t)_{t=0} = 2 \cdot \sin(-36.87^\circ) = 2 \cdot (-0.6) = -1.2 \text{ A}$$

Fazor napon na kapacitetu C u električnom krugu je:

$$U_C(j\omega) = I(j\omega) \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{10}{4+j3} \cdot \frac{1}{j2\frac{1}{2}} = \frac{10}{4+j3} \cdot \frac{1}{j} = \frac{10}{-3+j4} = \frac{2}{5}(-3-j4)$$



$$|U_C(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

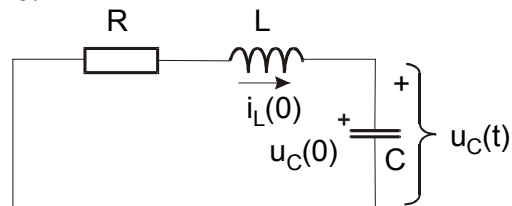
$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctg \frac{-3}{-4} = -126.87^\circ$$

$$u_C(t) = 2 \cdot \sin(2t - 126.87^\circ)$$

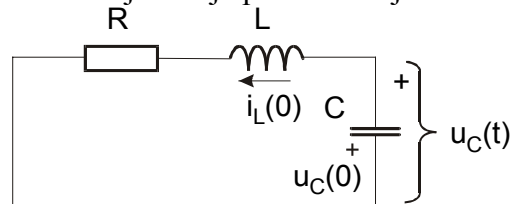
$$u_C(0) = 2 \cdot \sin(-126.87^\circ) = 2 \cdot (-0.8) = -1.6V$$

b) $t \geq 0$ (Laplaceova transformacija)

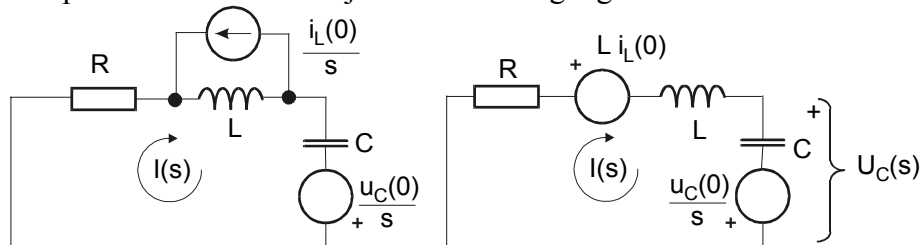
Uz poznate početne uvjete $i_L(0) = -1.2A$ i $u_C(0) = -1.6V$, te pobudu $u_g(t) = 0$, (za $t \geq 0$) električni krug izgleda ovako:



Ako bismo htjeli uvrstiti pozitivne vrijednosti početnih uvjeta $i_L(0) = 1.2A$ i $u_C(0) = 1.6V$, tada trebamo izmjeniti referentne orijentacije početnih uvjeta kao na slijedećoj slici:



Uz primjenu Laplaceove transformacije električni krug izgleda ovako:



Jednadžba za struju za električni krug

$$I(s) \cdot \left(R + \frac{1}{sC} + sL \right) + L \cdot i_L(0) - \frac{u_C(0)}{s} = 0$$

uz uvrštene vrijednosti:

$$I(s) \left(4 + \frac{2}{s} + 2s \right) + 2 \cdot 1.2 - \frac{1.6}{s} = 0$$

$$I(s) = \frac{\frac{1.6}{s} - 2.4}{4 + \frac{2}{s} + 2s} = \frac{1.6 - 2.4s}{2s^2 + 4s + 2} = \frac{0.8 - 1.2s}{s^2 + 2s + 1}$$

Traženi napon na kapacitetu je:

$$U_C(s) = I(s) \cdot \frac{1}{sC} - \frac{u_C(0)}{s}$$

uz uvrštene vrijednosti:

$$U_C(s) = \underbrace{\frac{0.8 - 1.2s}{s^2 + 2s + 1}}_{(*)} \cdot \frac{2}{s} - \frac{1.6}{s}$$

Rastav na parcijalne razlomke izraza (*):

$$(*) = \frac{1.6 - 2.4s}{s^2 + 2s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{As + B}{s^2 + 2s + 1} + \frac{C}{s} = \frac{As^2 + Bs + Cs^2 + 2Cs + C}{(s^2 + 2s + 1) \cdot s} = \frac{(A + C)s^2 + (B + 2C)s + C}{(s^2 + 2s + 1) \cdot s}$$

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + 2C &= -2.4 \\ C &= 1.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= -C = -1.6; \\ B &= -2C - 2.4 = -3.2 - 2.4 = -5.6. \end{aligned}$$

$$(*) = \frac{-1.6s - 5.6}{s^2 + 2s + 1} + \frac{1.6}{s}$$

Konačno je:

$$U_C(s) = \underbrace{-1.6 \cdot \frac{s}{(s+1)^2} - 5.6 \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1.6}{s}}_{(*)} - \frac{1.6}{s} = -1.6 \cdot \frac{s}{(s+1)^2} - 5.6 \frac{1}{(s+1)^2} =$$

$$= -1.6 \left[\frac{s+1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \right] - 5.6 \frac{1}{(s+1)^2} =$$

$$= -1.6 \frac{1}{s+1} + \frac{1.6}{(s+1)^2} - 5.6 \frac{1}{(s+1)^2} = -\frac{1.6}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2}$$



$$u_C(t) = (-1.6 \cdot e^{-t} - 4t \cdot e^{-t}) \cdot S(t)$$