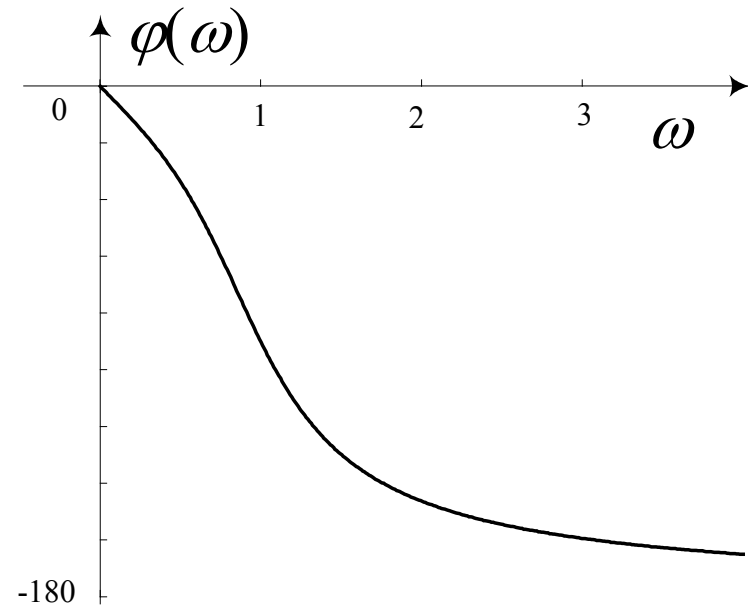
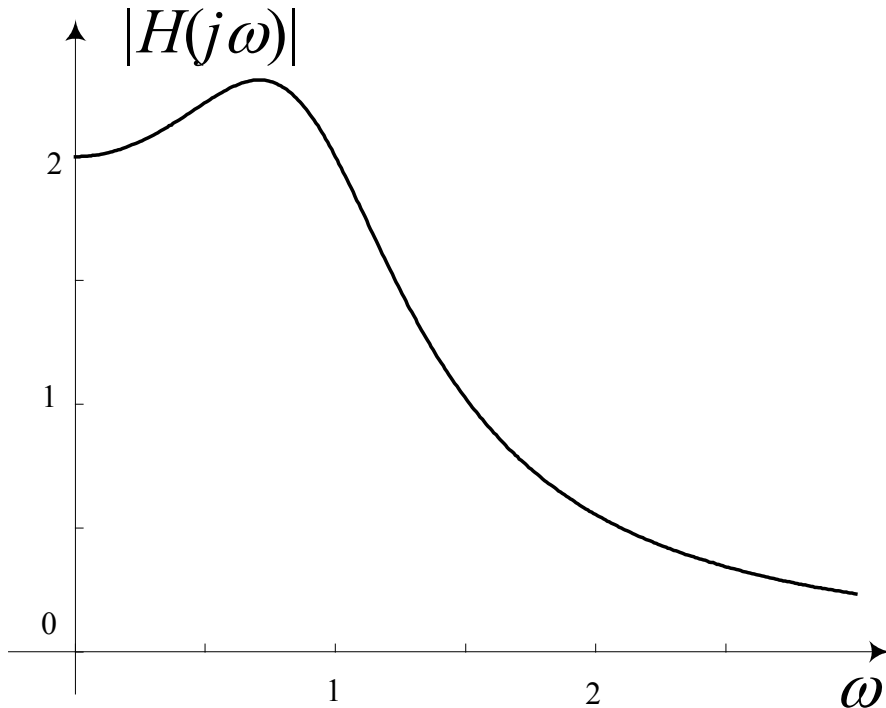


# Električni krugovi

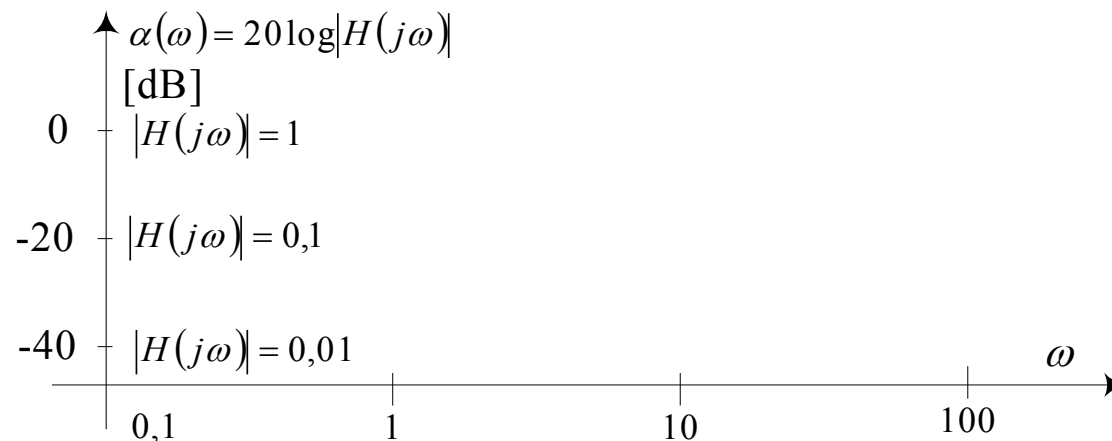
Bodeovi dijagrami

# Bodeovi dijagrami

- Frekvencijske karakteristike prijenosnih funkcija električnih krugova obično se prikazuju u ovisnosti o frekvenciji  $\omega$ - u linearnom mjerilu.



- Koristan prikaz frekvencijskih karakteristika izveo je američki inženjer Hendrick Bode.
- Bodeov prikaz odnosi se na *logaritamsku mjeru pojačanja filtra u decibelima*.
$$\alpha(\omega) = 20 \log a(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$$
- $\alpha(\omega)$  u dB na *frekvencijskoj osi u logaritamskom mjerilu* daje prikaz u širem frekvencijskom području.



- Takve karakteristike dobile su naziv **Bodeovi dijagrami**
- Bodeov prikaz je važan u analizi i projektiranju:
  - filtara
  - pojačala
  - regulacijskih sustava, itd.
- Mnogi računalni programi imaju mogućnost crtanja Bodeovih dijagrama direktno iz zadanih prijenosnih funkcija.

- Bodeove dijagrame moguće je crtati ručno koristeći se jednostavnim asimptotskim prikazom umjesto zamornih numeričkih kalkulacija.
- Bodeovi dijagrami polaze od prikaza prijenosne funkcije u faktoriziranome obliku.

# Faktorizirane prijenosne funkcije

- Svaku prijenosnu funkciju  $H(s)$  višega reda moguće je prikazati kao produkt dviju ili više jednostavnih prijenosnih funkcija  $\rightarrow$  *u faktoriziranome obliku*:

$$H(s) = k \cdot H_1(s) \cdot H_2(s) \cdots$$

- $K \rightarrow$  realna konstanta

$$\left. \begin{array}{l} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{jednostavne funkcije s poznatim} \\ \text{Bodeovim prikazima} \end{array}$$

- Nakon faktoriziranja  $H(s)$  i uvrštenja  $s=j\omega$  dobiva se prijenosna funkcija kao:

$$H(j\omega) = k \cdot H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) \cdots$$

gdje je

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

odnosno

$$H_1(j\omega) = |H_1(j\omega)| e^{j\varphi_1(\omega)}$$

$$H_2(j\omega) = |H_2(j\omega)| e^{j\varphi_2(\omega)}$$

- itd.

- Amplitudno frekvencijsku karakteristiku je moguće prikazati u obliku produkta

$$a(\omega) = |H(j\omega)| = |k| \cdot a_1(\omega) \cdot a_2(\omega) \cdots$$

gdje su

$$a_1(\omega) = |H_1(j\omega)|$$

$$a_2(\omega) = |H_2(j\omega)|$$

itd.

amplitudno frekvencijske karakteristike pojedinih faktora.



- Fazno frekvencijsku karakteristiku je moguće prikazati kao sumu:

$$\varphi(\omega) = \angle H(j\omega) = \angle k + \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots$$

gdje su  $\varphi_1(\omega) = \angle H_1(j\omega)$

$$\varphi_2(\omega) = \angle H_2(j\omega)$$

itd.

fazno frekvencijske karakteristike pojedinih faktora.

- Ako se amplitudno frekvencijska karakteristika prikaže pomoću logaritamske mjere u decibelima kao

$$\alpha(\omega) = 20 \log a(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$$

tada vrijedi

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= 20 \log |k| + 20 \log a_1(\omega) + 20 \log a_2(\omega) + \dots \\ &= k_{\text{dB}} + \alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega) + \dots\end{aligned}$$

- Iskorištena je činjenica da je logaritam produkta jednak sumi logaritama pojedinih faktora.
- Logaritam kvocjenta jednak je razlici logaritama pojedinačnih izraza.

- Bodeov prikaz funkcije  $H(s)$  temelji se na činjenicama:
  - $H_1(s), H_2(s), \dots$ , itd. su jednostavne funkcije od  $s$
  - prikaz njihovih amplitudnih karakteristika u dB i faznih karakteristika u logaritamskome mjerilu moguće je prikazati aproksimativno koristeći ravne linije kao asimptote.
  - ukupni Bodeov prikaz jednak je sumi dobivenih karakteristika.

- Jedinica u kojoj se to izražava je decibel, tj. 1/10 jedinice Bel koja je dobila naziv po Aleksanderu Grahamu Bellu.
- Decibel je logaritamska mjera koja transformira potencije od 10 u produkte, a produkte u sume funkcija.
- Ako je  $a(\omega) = 10^m$

tada je

$$\alpha(\omega) = 20 \log a(\omega) = 20 \cdot m \text{ dB}$$

$ H(j\omega) $	10	2	$\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	0.5	0.1
$\alpha [\text{dB}]$	20	$\approx 6$	$\approx 3$	0	$\approx -3$	$\approx -6$	-20

- Prikaže li se funkcija  $H(s)$  u faktoriziranom obliku tada polinomi u brojniku i nazivniku sadrže faktore koji mogu biti:
  - konstanta
  - faktor koji sadrži pol ili nulu u nuli
  - faktor sa realnim korijenom
  - faktor s konjugirano kompleksnim korijenima

Logaritmi njihovih modula za  $s=j\omega$  su pribrojnici funkcije  $\alpha(\omega)$ .

- Razmotrit ćemo doprinos svakog faktora funkcije  $H(s)$ .
- Pribrojnici koji odgovaraju:
  - faktorima brojnika  $\rightarrow$  imaju pozitivan predznak.
  - faktorima nazivnika  $\rightarrow$  imaju negativan predznak.

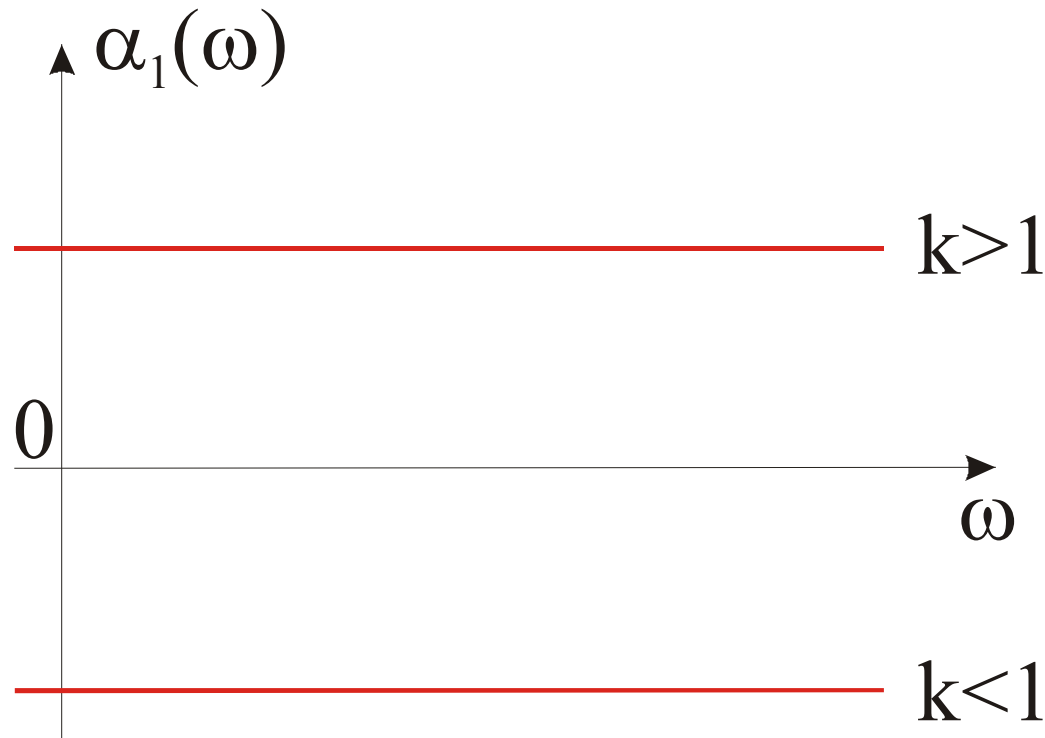
a) konstanta  $k$

- Konstanta  $k$  u izrazu za  $\alpha(\omega)$  predstavlja dio oblika

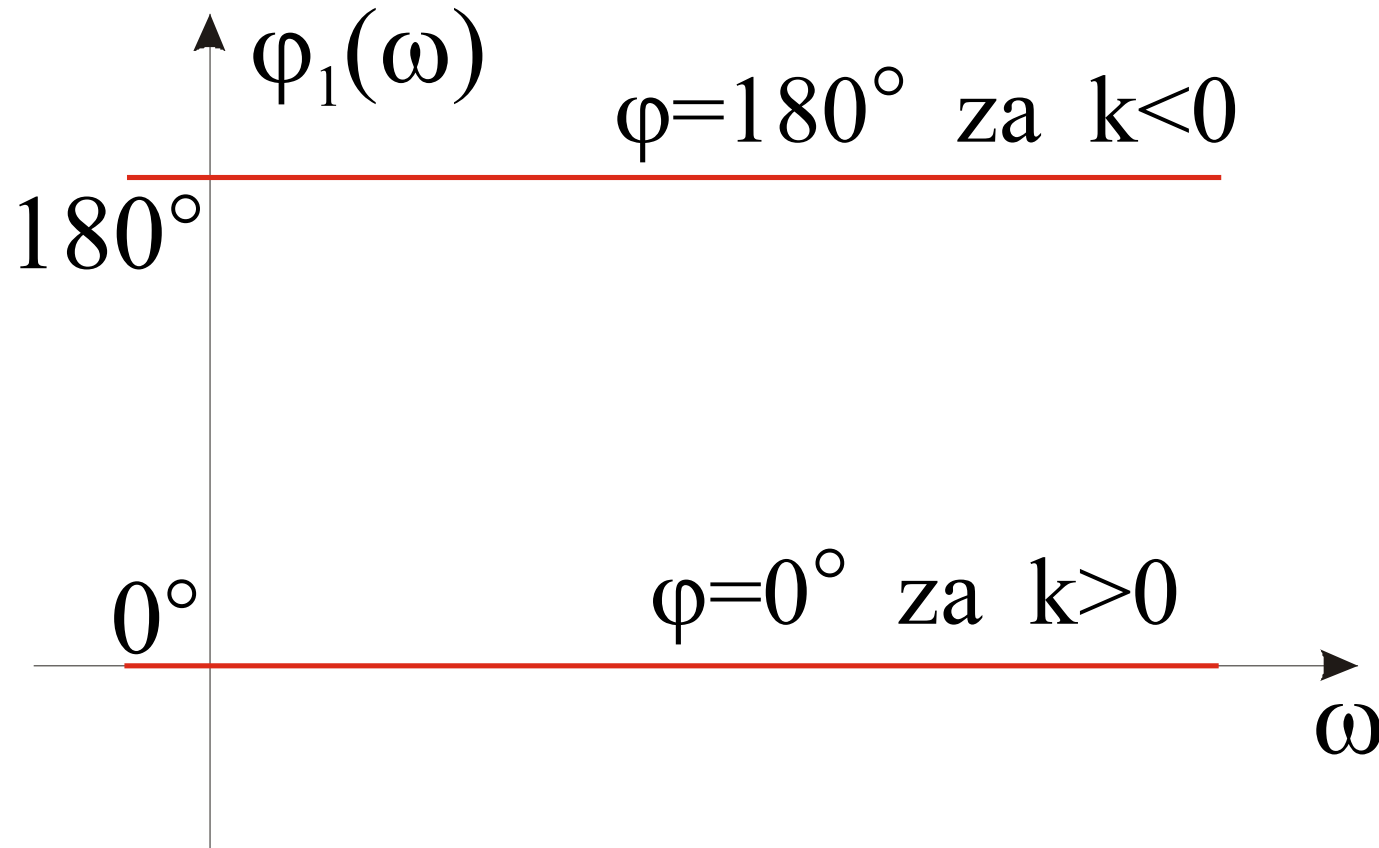
$$\alpha_1(\omega) = 20 \log |k| = k_{dB}$$

dakle također konstantu.

- Konstanta  $k_{dB}$  je pozitivna ako je  $|k| > 1$   
odnosno negativna ako je  $|k| < 1$
- Bodeov dijagram koji odgovara konstanti je pravac paralelan s osi  $\omega$ .



- Pripadajuća fazna karakteristika je također konstantna i iznosi  $0^\circ$  ili  $180^\circ$ , ovisno o tome da li je  $k > 0$  ili je  $k < 0$





b) Faktor s korijenom u nuli  $H_2(s)=s$

■ Logaritamska mjera koja odgovara ovome faktoru je

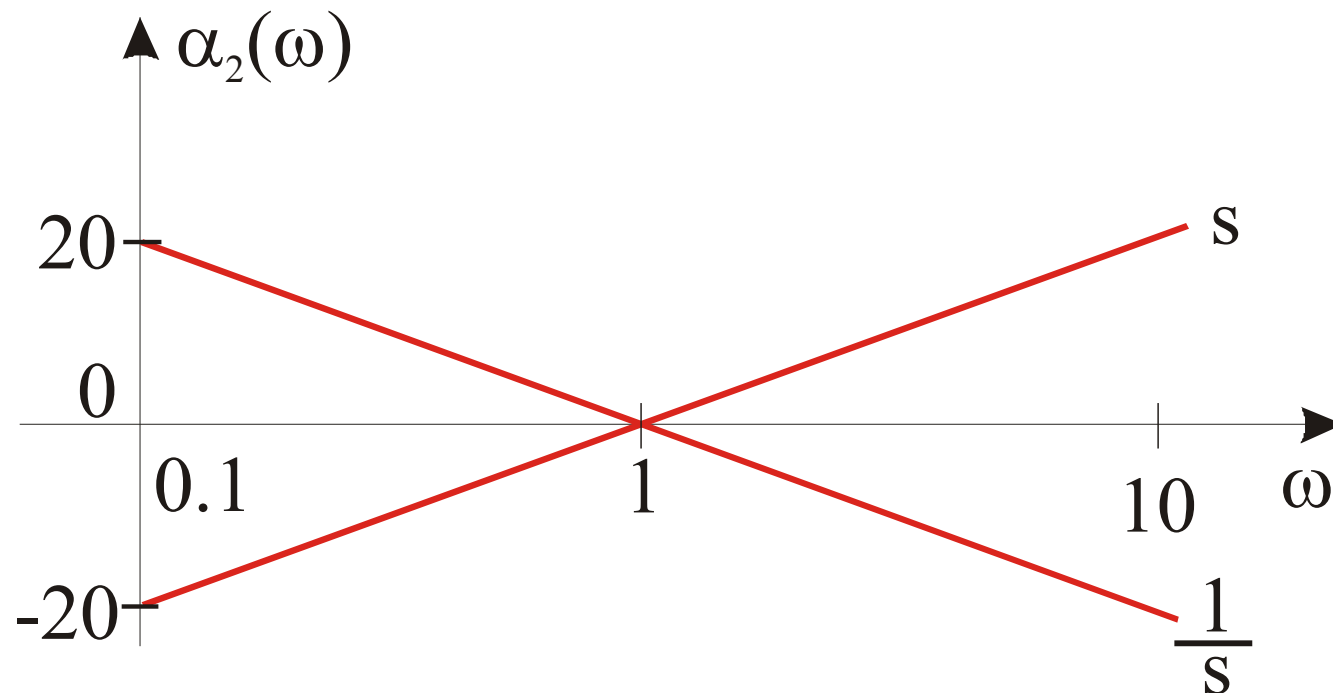
$$\alpha_2(\omega) = 20 \log |j\omega| = 20 \log(\omega)$$

→ ako je faktor u brojniku, odnosno

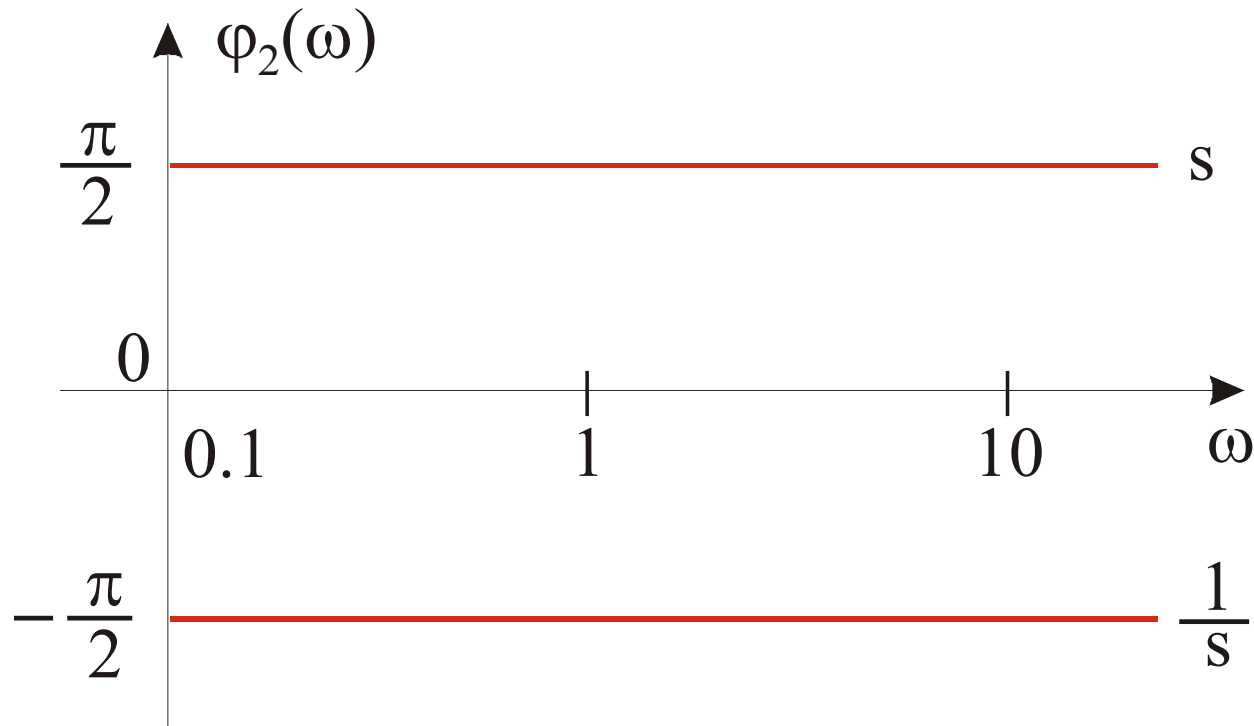
$$\alpha_2(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log |j\omega| = -20 \log(\omega)$$

→ ako je faktor u nazivniku.

- Bodeov dijagram koji odgovara faktoru  $s$  korjenom u nuli je pravac.
- Razlog tome je logaritamsko mjerilo na  $\omega$  osi.



- Fazna karakteristika je pravac paralelan s  $\omega$  osi.



- Fazna karakteristika je konstantna i iznosi  
 $90^\circ$  za faktor  $s$  u brojniku  
 $-90^\circ$  za faktor  $s$  u nazivniku

c) Faktor s realnim korijenom  $\neq 0 \rightarrow H_3(s)=s+\sigma$ .

■ Pogodno je takav faktor prikazati u obliku

$$s + \sigma \rightarrow \sigma(1 + s/\sigma)$$

Odgovarajuća logaritamska mjera pojačanja je

$$\alpha_3(\omega) = 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{\sigma} \right| = 20 \log \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\sigma} \right)^2} = 10 \log \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\sigma} \right)^2 \right]$$

→ ako je faktor u brojniku, odnosno

$$\alpha_3(\omega) = -20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{\sigma} \right| = -10 \log \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\sigma} \right)^2 \right]$$

→ ako je faktor u nazivniku.

- Na frekvencijama za koje vrijedi  $\omega \ll \sigma$  je

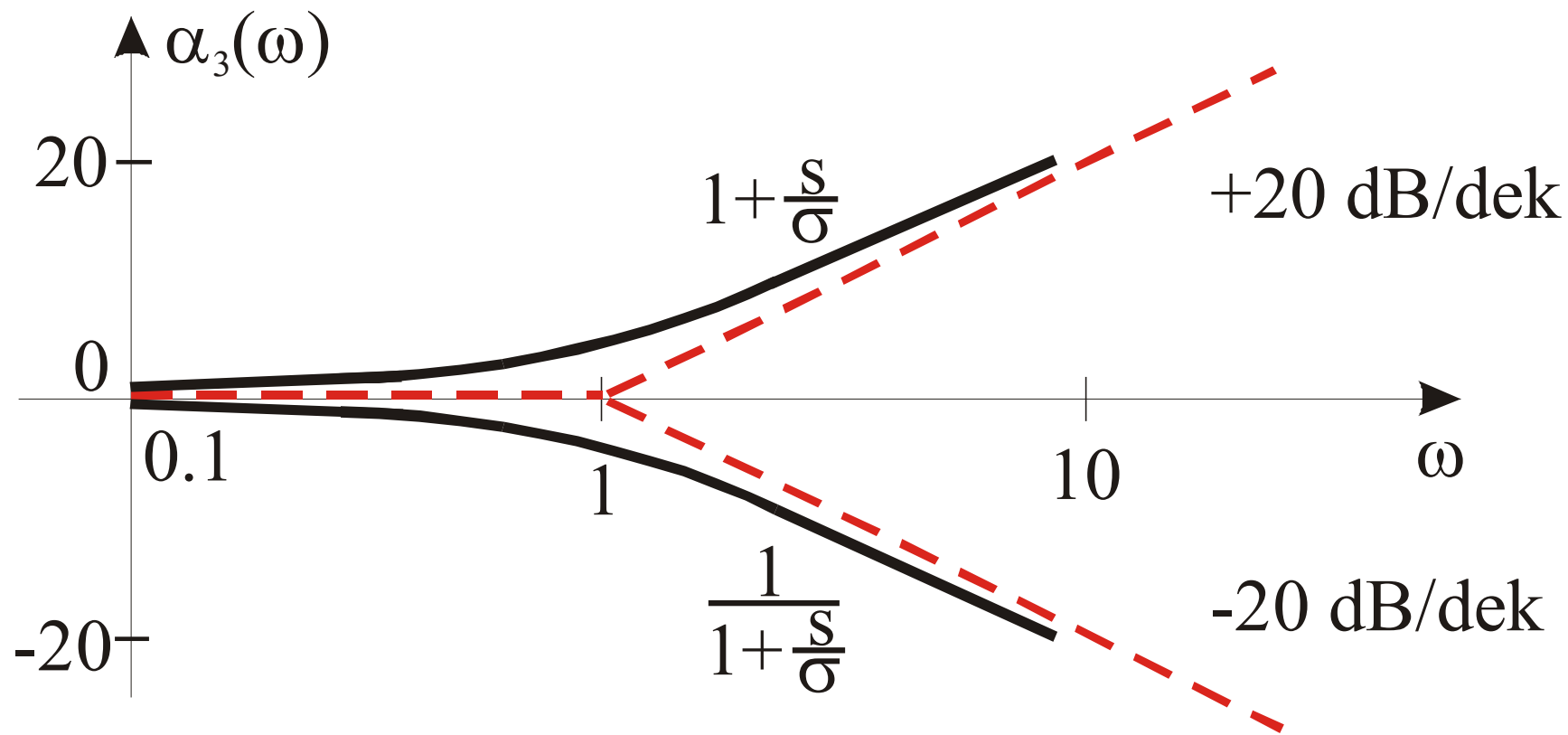
$$\alpha_3(\omega) \cong \pm 20 \log 1 = 0 \text{ dB} \rightarrow \text{pravac } \parallel \text{ osi apscisa}$$

- Na frekvencijama za koje vrijedi  $\omega \gg \sigma$  je

$$\alpha_3(\omega) \cong \pm 20 \log \left( \frac{\omega}{\sigma} \right) \rightarrow \text{pravac, koji prolazi kroz } \text{kroz nulu u točki } \omega = \sigma.$$

- Nagib pravca  $\rightarrow \pm 20 \text{ dB po dekad}$
- Ako je faktor u brojniku  $\rightarrow 20 \text{ dB po dekad}$
- Ako je faktor u nazivniku  $\rightarrow -20 \text{ dB po dekad}$ .

- Spomenuti pravci → asimptote frekvencijske karakteristike
- Bodeov dijagram za spomenuti faktor ima oblik



- Na sličan način → asimptote za faznu karakteristiku
- Fazna karakteristika glasi

$$\varphi_3(\omega) = \pm \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

- Predznak ovisi o tome da li je faktor u brojniku ili nazivniku.
- Na frekvencijama za koje vrijedi  $\omega \ll \sigma$  je

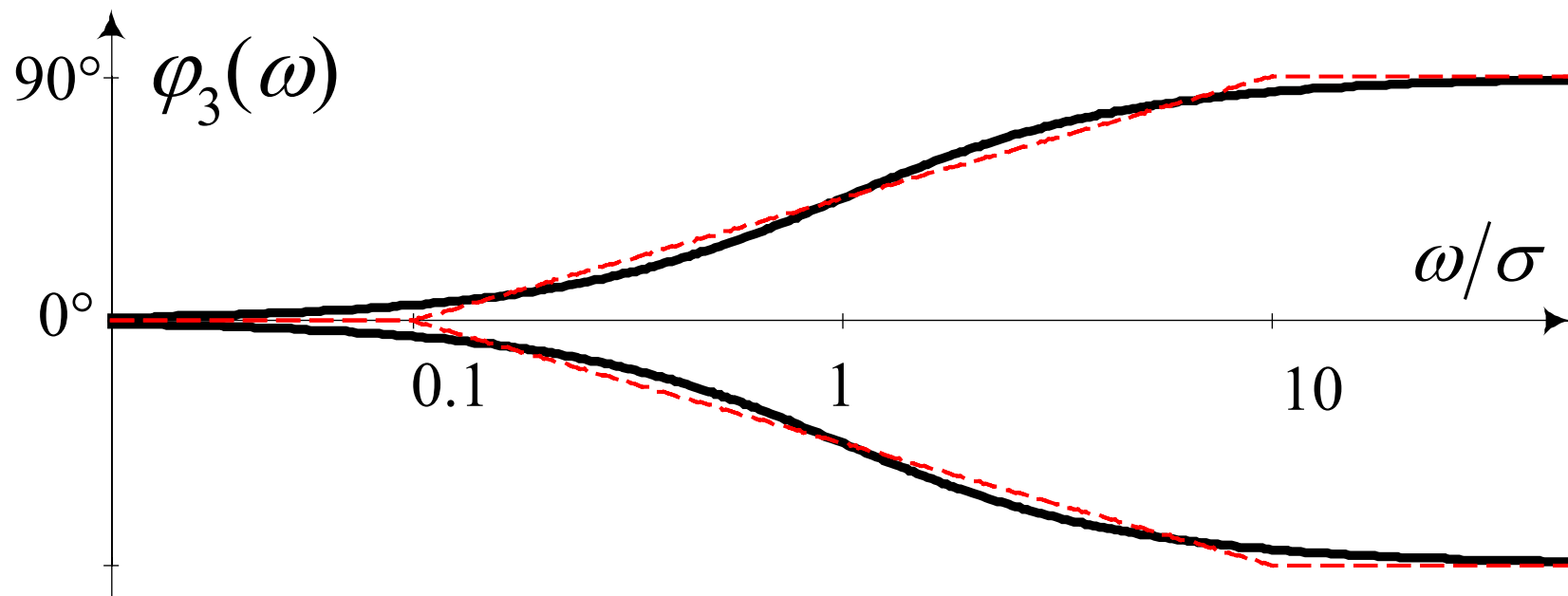
$$\varphi_3(\omega) \cong 0^\circ \rightarrow \text{pravac} = \text{osi apscisa}$$

- Na frekvencijama  $\omega \gg \sigma$  je

$$\varphi_3(\omega) \cong \pm 90^\circ \rightarrow \text{pravac paralelan s } \omega \text{ osi.}$$

- Za  $\omega = \sigma$  je  $\varphi_3(\omega) = \pm 45^\circ$

- U području frekvencija oko  $\omega = \sigma$ , funkciju je moguće aproksimirati pravcem s nagibom 45/dekadi
- Fazna karakteristika ima oblik





d) Faktor koji sadrži konjugirano kompleksni par korijena

$$H_4(s) = (s^2 + 2\zeta s \omega_0 + \omega_0^2)$$

Ovaj je faktor pogodno napisati u obliku

$$s^2 + 2\zeta s \omega_0 + \omega_0^2 \rightarrow \omega_0^2 \left( \frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + 1 \right)$$

$\omega_0 \rightarrow$  modul korijena (neprigušena frekvencija osciliranja)

$\zeta \rightarrow$  koeficijent prigušenja

■ Parcijalni iznos logaritamske mjere pojačanja za ovaj faktor je

$$\alpha_4(\omega) = \pm 20 \log \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2j\zeta\omega}{\omega_0} \right| = \pm 10 \log \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \frac{2\zeta\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)$$

Pozitivni predznak vrijedi za faktor brojnika a negativan za faktor u nazivniku.

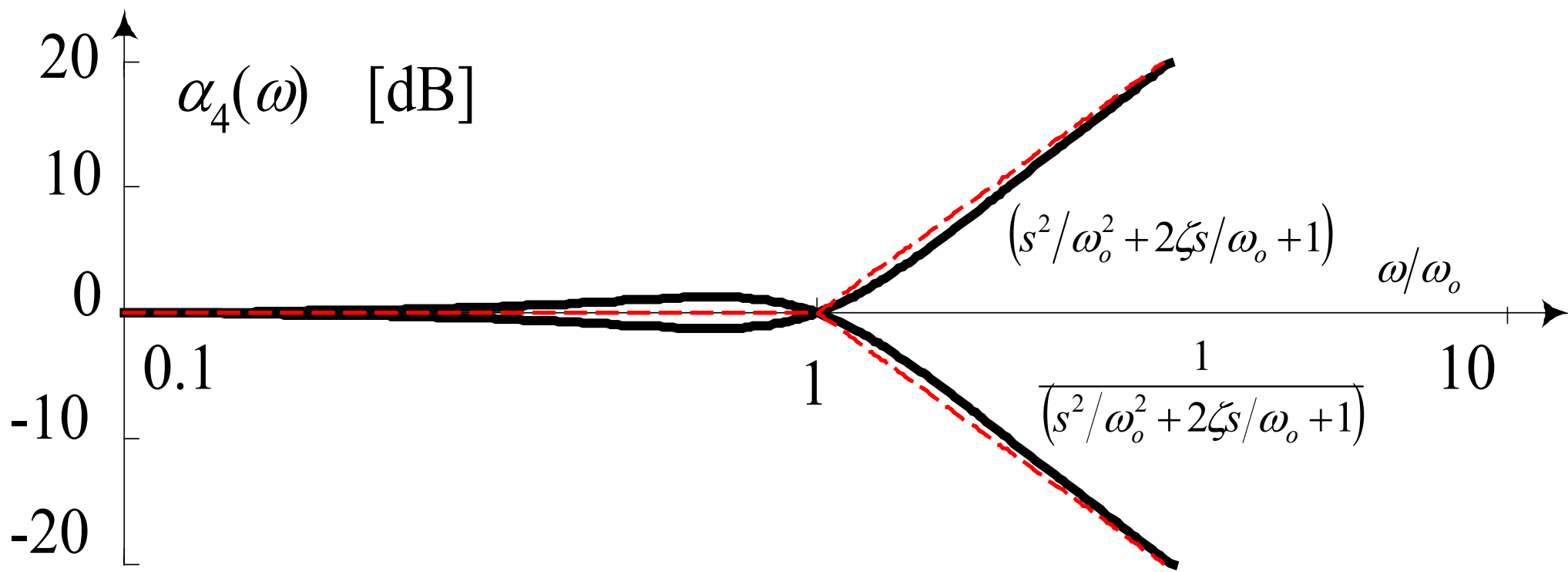
Vrijedi:

$$\text{za } \omega \ll \omega_0 \quad \alpha_4(\omega) \cong \pm 20 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{a za } \omega \gg \omega_0 \quad \alpha_4(\omega) \cong \pm 20 \log\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = \pm 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

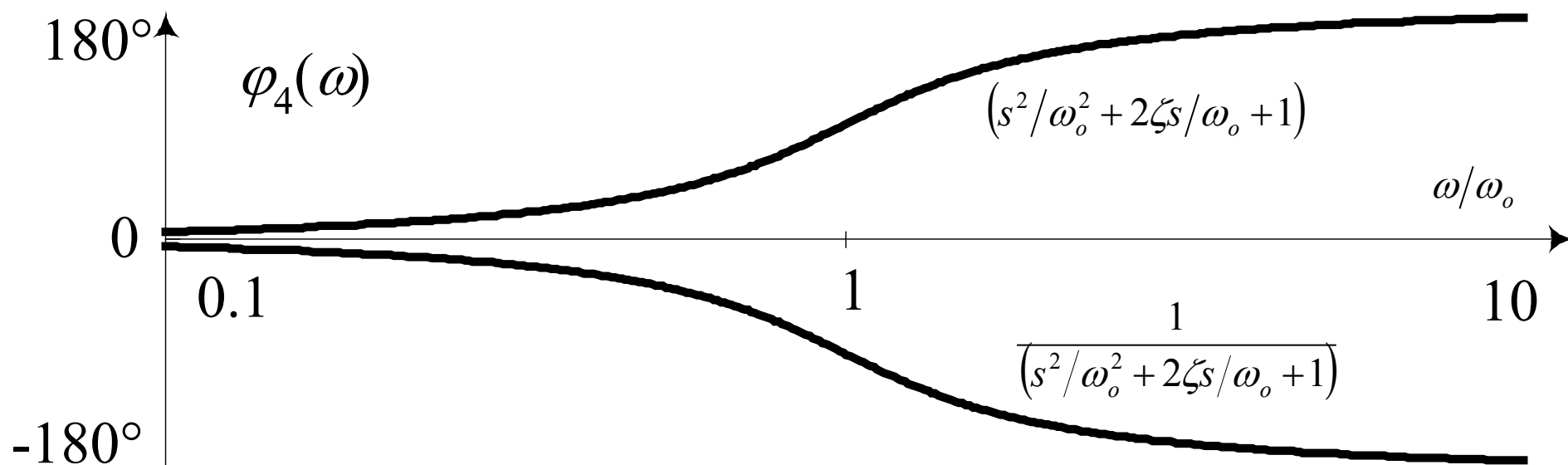
što u logaritamskom mjerilu predstavlja jednadžbu pravca s nagibom 40 dB/dekadi ili 12 dB/oktavi

## Odgovarajući Bodeov dijagram za $\zeta=0.707$

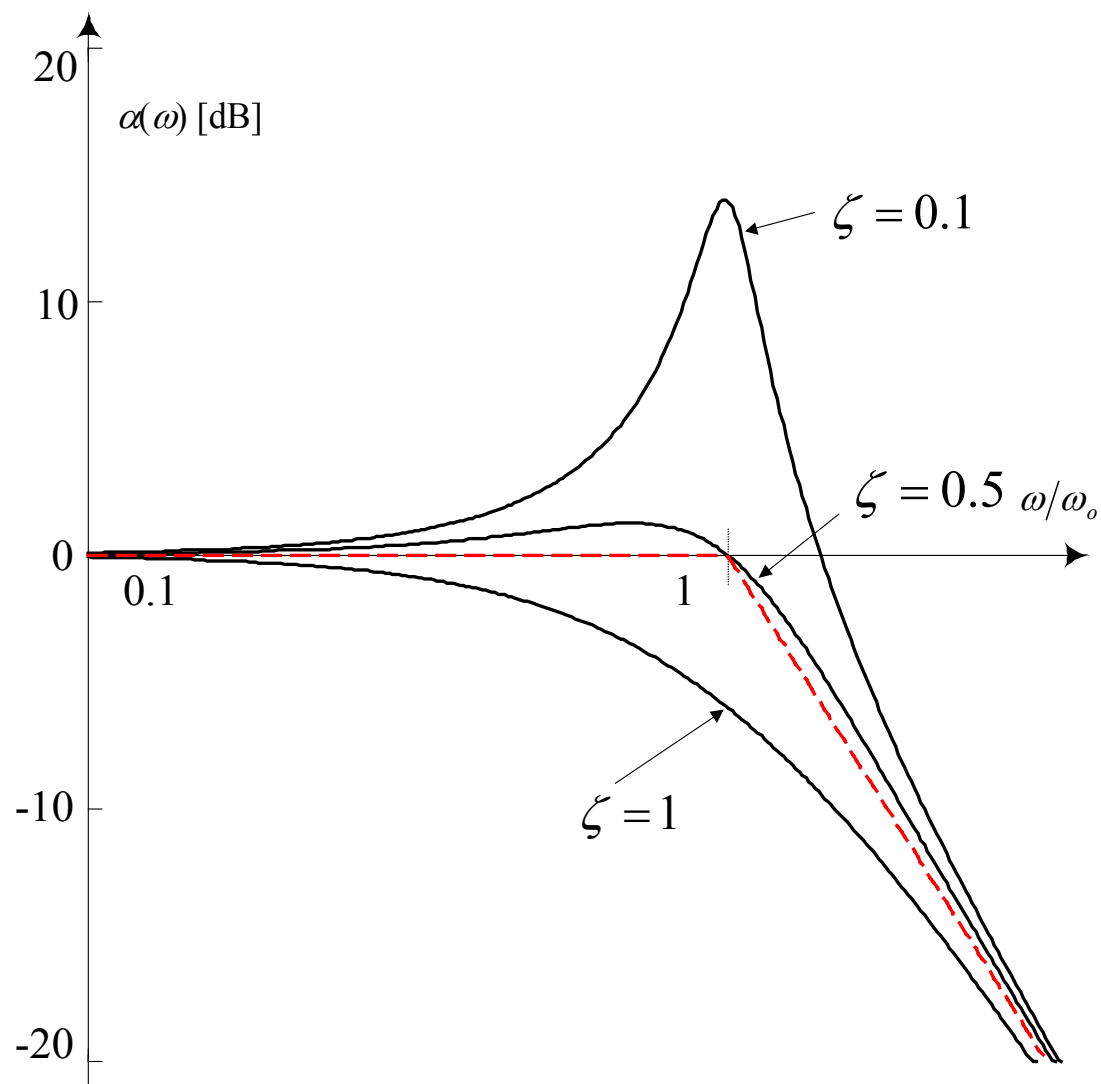


Pripadajući iznos faze ne vodi na jednostavne konstrukcije

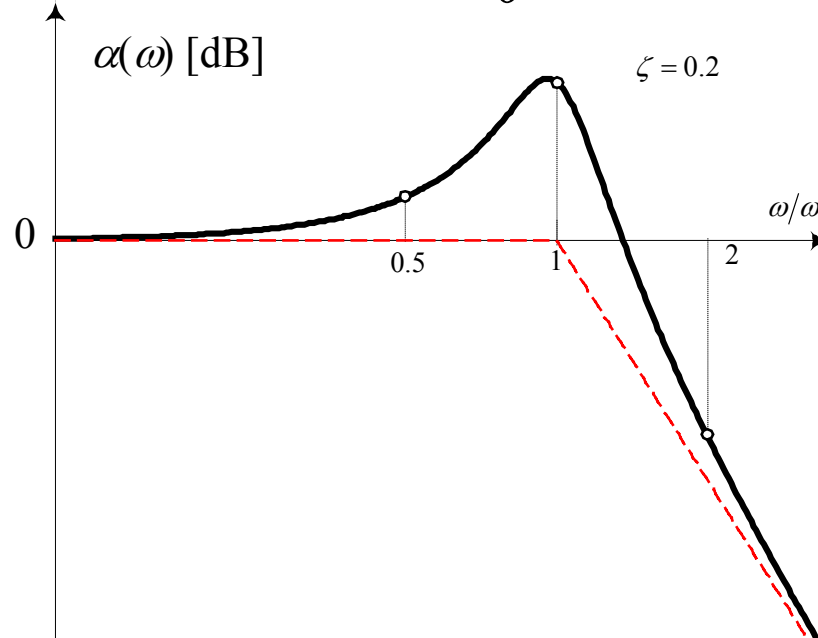
$$\varphi_4(\omega) = \pm \operatorname{arctg} \left( \frac{2\zeta \omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$



Za razne iznose  $\zeta$  karakteristike poprimaju različite oblike

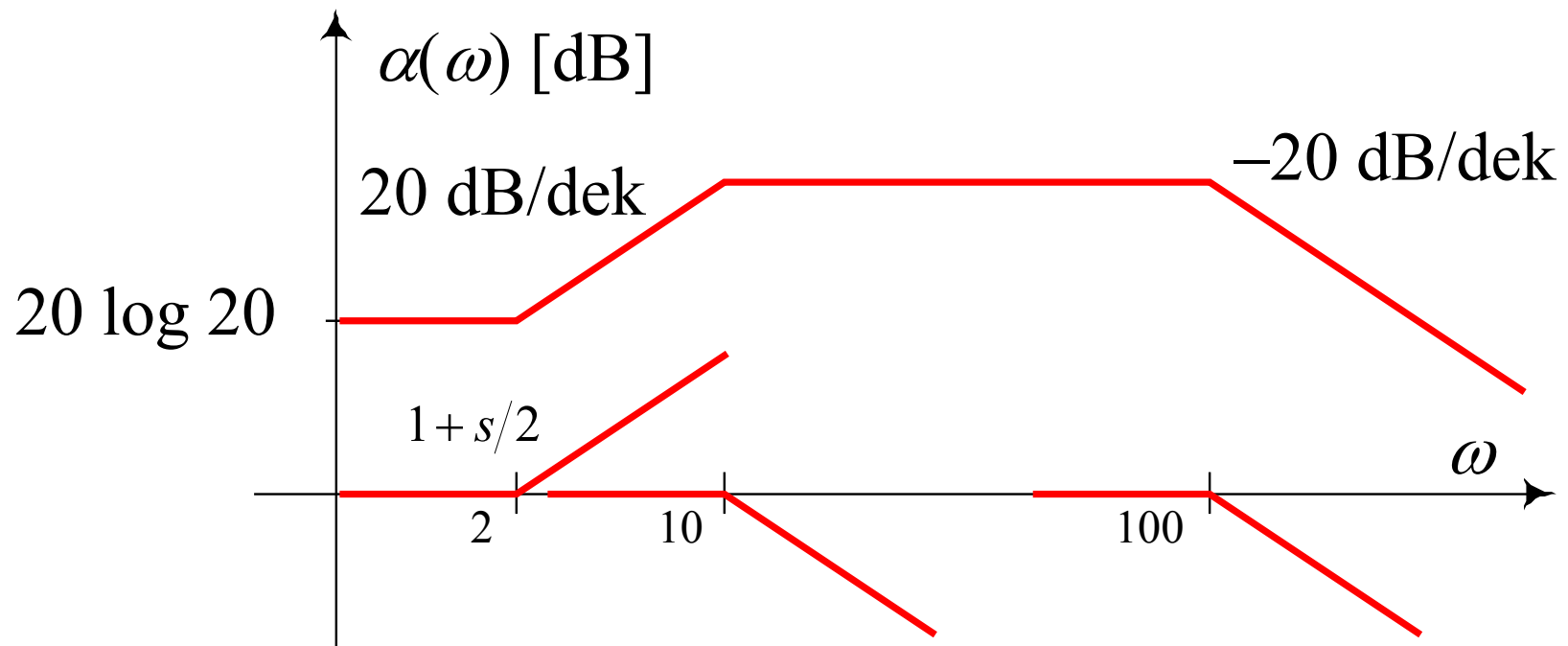


- Oblik karakteristike faktora drugog stupnja jako ovisi o veličini  $\zeta$ .
- Zbog toga često nije dovoljno prikazati funkciju koristeći samo asimptote.
- Potrebno je koristiti i korekcijske članove, tj izračunati iznose  $\alpha(\omega)$  u točkama  $\omega=\omega_0$ ,  $\omega=0.5\omega_0$  i  $\omega=2\omega_0$ .



Primjer:

$$H(s) = \frac{10^4(s+2)}{(s+10)(s+100)} = 20 \frac{(1+s/2)}{(1+s/10)(1+s/100)}$$





## Primjer: Funkcija

$$H(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+10)} = \frac{s}{(s+1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

