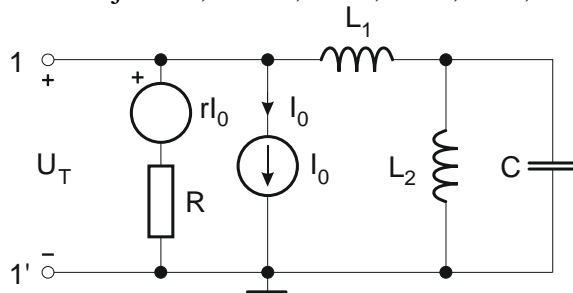


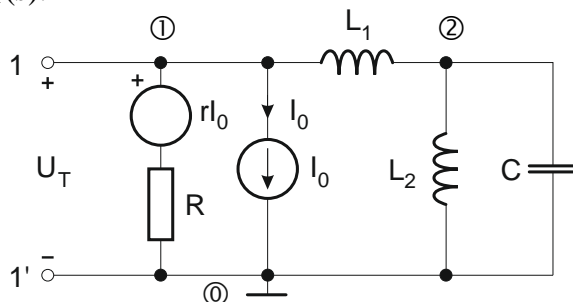
PISMENI ISPIT IZ ELEKTRIČNIH KRUGOVA 2016-2017 – Rješenja

1. Za mrežu prikazanu slikom odrediti nadomjesne parametre po Theveninu $U_T(s)$ i $Z_T(s)$ s obzirom na polove 1–1'. Zadano je: $r=1$, $R=1/2$, $L_1=1$, $L_2=2$, $C=1$, te strujni izvor $I_0(s)=1/s$.



Rješenje:

a) Theveninov napon $U_T(s)$:



Na priključnicama (polovima) 1–1' računamo (ili mjerimo) napon praznog hoda.

To je Theveninov napon.

Naponi čvorišta:

$$(1) \quad U_1 \left(\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{R} \right) - U_2 \frac{1}{sL_1} = \frac{r}{R} I_0 - I_0;$$

$$(2) \quad -U_1 \frac{1}{sL_1} + U_2 \left(\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{sL_2} + sC \right) = 0$$

$$(2) \Rightarrow U_2 \left(1 + \frac{sL_1}{sL_2} + s^2 L_1 C \right) = U_1 \Rightarrow U_2 = \frac{U_1}{(1 + L_1 / L_2) + s^2 L_1 C} \rightarrow (1) \Rightarrow$$

$$U_1 \left(\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{R} \right) - \frac{U_1}{(1 + L_1 / L_2) + s^2 L_1 C} \cdot \frac{1}{sL_1} = \left(\frac{r}{R} - 1 \right) I_0$$

$$U_T(s) = U_1(s) = \frac{\left(\frac{r}{R} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{(1 + L_1 / L_2) + s^2 L_1 C} \cdot \frac{1}{sL_1}} \cdot I_0(s)$$

Uz uvrštene vrijednosti elemenata i nakon malo sređivanja slijedi

$$U_T(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{s} + 2 \right) - \frac{1}{3/2 + s^2} \cdot \frac{1}{s}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{(1 + 2s) - \frac{1}{3/2 + s^2}} = \frac{\frac{3}{2} + s^2}{(1 + 2s) \left(\frac{3}{2} + s^2 \right) - 1}$$

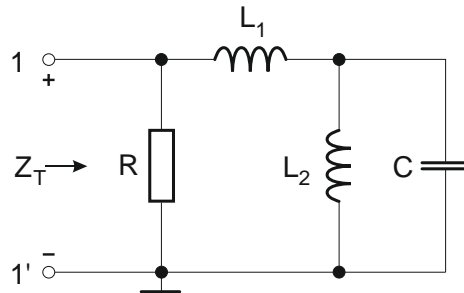
$$U_T(s) = \frac{s^2 + \frac{3}{2}}{2s^3 + s^2 + 3s + \frac{1}{2}} \quad \text{(3 boda)}$$

b) Theveninova impedancija $Z_T(s)$:

Kod izračunavanja Theveninove impedancije ovisni izvori su uključeni, a neovisni izvori i početni uvjeti moraju biti isključeni. Izvana se dodaje pomoćni neovisni izvor.

U ovom zadatku $I_0(s)=0 \Rightarrow r \cdot I_0(s)=0$ pa je isključen i ovisni izvor $r \cdot I_0(s)$ i neovisni izvor $I_0(s)$.

Impedanciju možemo odrediti na jednostavan način.

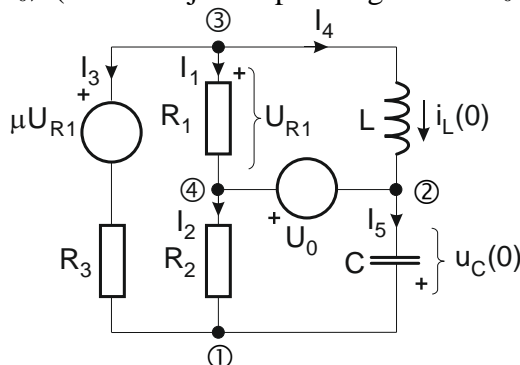


$$Z_T(s) = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL_1 + \frac{1}{\frac{1}{sL_2} + sC}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{s + \frac{1}{\frac{1}{2s} + s}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{s + \frac{2s}{1 + 2s^2}}}$$

$$Z_T(s) = \frac{1}{2 + \frac{1 + 2s^2}{s(1 + 2s^2) + 2s}} = \frac{1}{2 + \frac{1 + 2s^2}{3s + 2s^3}} = \frac{3s + 2s^3}{2(3s + 2s^3) + 1 + 2s^2} = \frac{s\left(s^2 + \frac{3}{2}\right)}{2s^3 + s^2 + 3s + \frac{1}{2}}$$

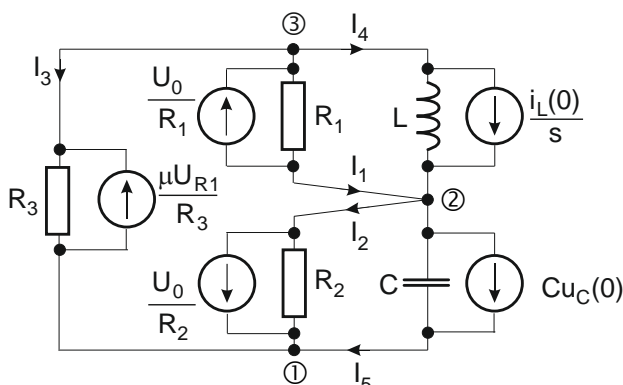
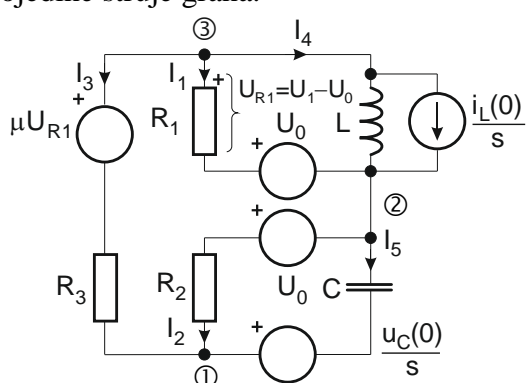
(2 boda)

2. Zadan je električni krug prema slici. Poštujući oznake čvorišta i grana nacrtati pripadni orijentirani graf i napisati matricu incidencija \mathbf{A} . Napisati strujno-naponske jednadžbe grana u matričnom obliku te ispisati matricu admitancija grana \mathbf{Y}_b i vektor početnih uvjeta i nezavisnih strujnih izvora grana \mathbf{I}_{0b} . Matrica \mathbf{Y}_b mora biti regularna. Napisati sustav jednadžbi čvorišta, odnosno odrediti matrice admitancija čvorova \mathbf{Y}_v i vektor početnih uvjeta i nezavisnih izvora čvorova \mathbf{I}_{0v} . (Posmicanjem naponskog izvora U_0 nestaje čvor 4).



Rješenje: Posmicanje naponskog izvora i primjena Laplaceove transformacije (1 bod)

Da bismo na ispravan način postavili naponsko strujne jednadžbe grana, moramo paziti da nakon transformacije (posmicanja naponskog izvora) mreža ostane ista i da naponsko strujni odnosi unutar mreže ostanu nepromijenjeni. Odnosno, moramo paziti kako ćemo označiti pojedine struje grana.



(1 bod)

Strujno-naponske jednadžbe grana (struje izražene pomoću napona):

$$I_1 = U_1 \cdot 1/R_1 - U_0 \cdot 1/R_1$$

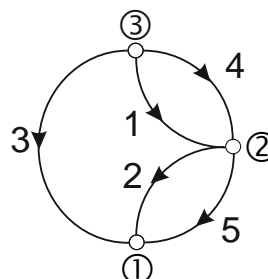
$$I_2 = U_2 \cdot 1/R_2 + U_0 \cdot 1/R_2$$

$$I_3 = -U_1 \cdot \mu/R_3 + U_3 \cdot 1/R_3 + U_0 \cdot \mu/R_3$$

$$I_4 = U_4 \cdot \frac{1}{sL} + \frac{i_L(0)}{s}$$

$$I_5 = U_5 \cdot sC + Cu_C(0)$$

Orijentirani graf:



Matrica incidencija (reducirana):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ bod})$$

Strujno-naponske relacije grana u matričnom obliku: $\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b + \mathbf{I}_{0b}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_b} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{R_3} & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sC \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_b} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_b} + \underbrace{\begin{bmatrix} -U_0 \frac{1}{R_1} \\ U_0 \frac{1}{R_2} \\ U_0 \frac{\mu}{R_3} \\ \frac{i_L(0)}{s} \\ Cu_C(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{0b}} \quad (1 \text{ bod})$$

Matrica \mathbf{Y}_b je regularna. Sustav jednažbi napona čvorova u matričnom obliku $\mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v = \mathbf{I}_{0v}$, gdje su (matrice \mathbf{Y}_v i \mathbf{I}_{0v}):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_v = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{R_3} & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & 0 & -\frac{1}{sL} & sC \\ \frac{1}{R_1} - \frac{\mu}{R_3} & 0 & \frac{1}{R_3} & \frac{1}{sL} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} + sC & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_3} - \frac{1}{sL} & \frac{1}{R_1} + \frac{1-\mu}{R_3} + \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

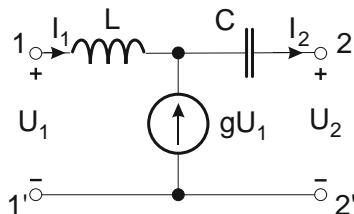
(1 bod)

$$\mathbf{I}_{0v} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{0b} = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -U_0 \frac{1}{R_1} \\ U_0 \frac{1}{R_2} \\ U_0 \frac{\mu}{R_3} \\ \frac{i_L(0)}{s} \\ Cu_C(0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} U_0 \frac{1}{R_1} + U_0 \frac{1}{R_2} - \frac{i_L(0)}{s} + Cu_C(0) \\ -U_0 \frac{1}{R_1} + U_0 \frac{\mu}{R_3} + \frac{i_L(0)}{s} \end{bmatrix}$$

(1 bod)

$$\text{Rješenje: } \mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v = \mathbf{I}_{0v} \Rightarrow \mathbf{U}_v = \begin{bmatrix} U_{v1} \\ U_{v2} \end{bmatrix}$$

3. Za četveropol prikazan slikom izračunati prijenosne $[a]$ -parametre i napisati matricu $[a]$ -parametara. Pomoću poznatih $[a]$ -parametara izračunati naponsku prijenosnu funkciju četveropola $T(s)=U_2(s)/U_1(s)$ te ulaznu impedanciju $Z_{ul1}(s)=U_1(s)/I_1(s)$ ako je na izlaznom prilazu (2–2') spojen otpor R . Da li je četveropol: a) recipročan, b) simetričan ? Obrazložiti odgovor. Zadane su normalizirane vrijednosti elemenata $L=1$, $C=1$ i parametar $g=1$.



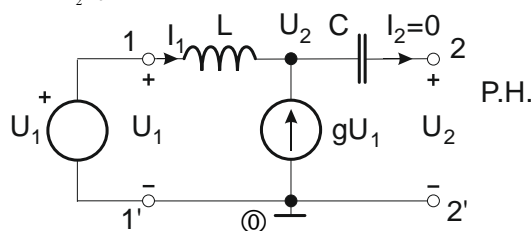
Rješenje:

$[a]$ -parametri:

$$U_1 = A \cdot U_2 + B \cdot I_2$$

$$I_1 = C \cdot U_2 + D \cdot I_2$$

$$\underline{I_2 = 0} \quad A = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} \quad C = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0}$$



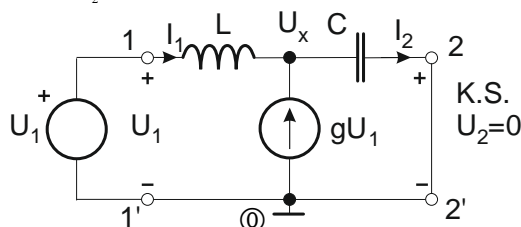
$$(1) \quad \frac{U_2 - U_1}{sL} = gU_1$$

$$(2) \quad gU_1 = -I_1$$

$$(1) \Rightarrow \frac{U_2}{sL} = \left(\frac{1}{sL} + g \right) U_1 \Rightarrow U_2 = (1 + gsL) U_1 \Rightarrow A = \frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{gsL + 1}$$

$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow U_2 = (1 + gsL) \frac{-I_1}{g} \Rightarrow C = \frac{I_1}{U_2} = \frac{-g}{gsL + 1}$$

$$\underline{U_2 = 0} \quad B = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0} \quad D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0}$$



$$(1) \quad U_x \left(\frac{1}{sL} + sC \right) - U_2 sC = gU_1 + \frac{U_1}{sL};$$

$$(2) \quad \underline{-U_x sC + U_2 sC = -I_2}$$

$$U_2 = 0 \quad (1) \Rightarrow U_x \left(\frac{1}{sL} + sC \right) = \left(g + \frac{1}{sL} \right) U_1$$

$$(2) \Rightarrow U_x sC = I_2 \Rightarrow \frac{I_2}{sC} \left(\frac{1}{sL} + sC \right) = \left(g + \frac{1}{sL} \right) U_1 \Rightarrow B = \frac{U_1}{I_2} = \frac{1 + 1/(s^2 LC)}{g + 1/(sL)} = \frac{sL + 1/(sC)}{gsL + 1}$$

$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow \frac{U_1 - U_x}{sL} = I_1 \Rightarrow U_1 - \frac{I_2}{sC} = I_1 sL \Rightarrow \frac{sL + 1/(sC)}{gsL + 1} I_2 - \frac{1}{sC} I_2 = I_1 sL$$

$$\Rightarrow D = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1 + 1/(s^2 LC)}{gsL + 1} - \frac{1}{s^2 LC} = \frac{1 + 1/(s^2 LC) - 1/(s^2 LC) - g/(sC)}{gsL + 1} = \frac{1 - g/(sC)}{gsL + 1}$$

$$[a] = \frac{1}{gsL + 1} \begin{bmatrix} 1 & sL + 1/(sC) \\ -g & 1 - g/(sC) \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & s+1/s \\ -1 & 1-1/s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

(3 boda)

Prijenosna funkcija napona:

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2}{AZ_2 + B} = \frac{s+1}{1+s+1/s} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+1}$$

Ulazna impedancija u četveropol zaključen s otporom R :

$$Z_{ul1}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D} = \frac{1+s+1/s}{-1+1-1/s} = \frac{1+s+1/s}{-1/s} = -(s^2+s+1)$$

(1 bod)

Odgovori na pitanja:

a) Četveropol nije električki recipročan jer sadrži naponsko ovisni strujni izvor i vrijedi da je:

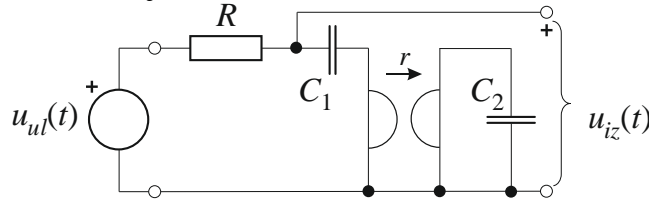
$$|a| = AD - BC = \frac{1 - 1/s + s + 1/s}{(s+1)^2} = \frac{1+s}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} \neq 1;$$

b) Četveropol nije električki simetričan jer se parametri A i D razlikuju:

$$A = \frac{1}{s+1} \neq D = \frac{1-1/s}{s+1}$$

(1 bod)

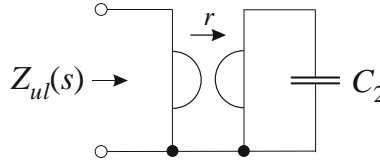
4. Zadan je aktivni-RC električni filtar prikazan slikom s normaliziranim vrijednostima elemenata $R_1=1$, $C_1=1$, $C_2=1/4$, te parametrom giratora $r=2$. a) Izračunati njegovu naponsku prijenosnu funkciju $T(s)=U_{iz}(s)/U_{ul}(s)$. O kojem se tipu filtra radi (NP, VP, PP ili PB)? b) Usporedbom s odgovarajućim općim oblikom prijenosne funkcije filtra 2. stupnja izračunati vrijednost parametara k , ω_p , ω_z , q_p . c) Prikazati raspored polova i nula u kompleksnoj ravnini. d) Nacrtati amplitudno-frekvencijsku karakteristiku.



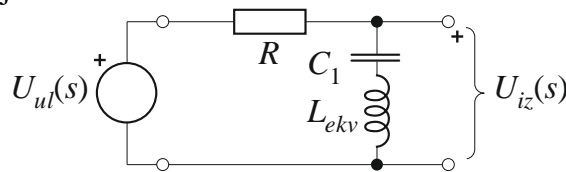
Rješenje:

Ulazna impedancija u girator zaključen kapacitetom C_2 glasi:

$$Z_{ul}(s) = \frac{r^2}{1/(sC_2)} = r^2 s C_2 = s L_{ekv} \Rightarrow L_{ekv} = r^2 C_2 = 1$$



Laplaceova transformacija:



Serijska kombinacija L_{ekv} i C_1 ima impedanciju

$$Z(s) = \frac{1}{sC_1} + sL_{ekv} = \frac{1 + s^2 L_{ekv} C_1}{sC_1}$$

Naponska prijenosna funkcija se da lako izračunati ako se promatrani električni filtar promatra kao naponsko dijelilo i ona za navedeni električni krug glasi:

$$H(s) = \frac{U_{iz}(s)}{U_{ul}(s)} = \frac{Z(s)}{R + Z(s)} = \frac{\frac{1 + s^2 L_{ekv} C_1}{sC_1}}{R + \frac{1 + s^2 L_{ekv} C_1}{sC_1}} = \frac{1 + s^2 L_{ekv} C_1}{s^2 L_{ekv} C + R s C_1 + 1} = \frac{s^2 + \frac{1}{L_{ekv} C_1}}{s^2 + s \frac{R}{L_{ekv}} + \frac{1}{L_{ekv} C_1}}$$

$$H(s) = \frac{U_{iz}(s)}{U_{ul}(s)} = \frac{s^2 + \frac{1}{L_{ekv} C_1}}{s^2 + s \frac{R}{L_{ekv}} + \frac{1}{L_{ekv} C_1}} = \frac{s^2 + \frac{1}{r^2 C_1 C_2}}{s^2 + s \frac{R}{r^2 C_2} + \frac{1}{r^2 C_1 C_2}} = k \cdot \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{q_p} s + \omega_p^2}$$

$$H(s) = \frac{U_{iz}(s)}{U_{ul}(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1}$$

-o kojem se tipu filtra radi (NP, VP, PP ili PB)? \Rightarrow PB

(2 boda)

Odatle slijede parametri:

$$\omega_p = \omega_z = \frac{1}{\sqrt{L_{ekv} C_1}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 C_1 C_2}} = 1, \quad q_p = R \sqrt{\frac{C_1}{L_{ekv}}} = R \sqrt{\frac{C_1}{r^2 C_2}} = 1, \quad k = 1.$$

(1 bod)

Raspored polova i nula u kompleksnoj ravnini:

Nule $s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s_{o1,2} = \pm j$

Polovi $s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s_{p1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 \pm 0,866j$;

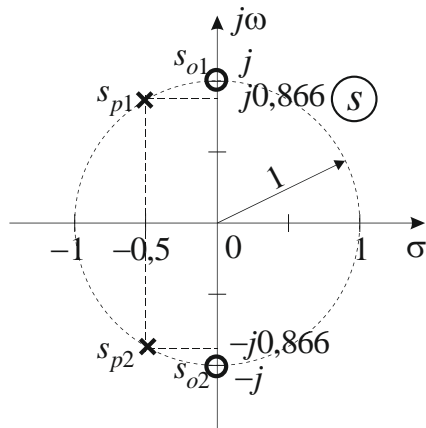
(1 bod)

Amplitudno-frekvencijska (A-F) karakteristika

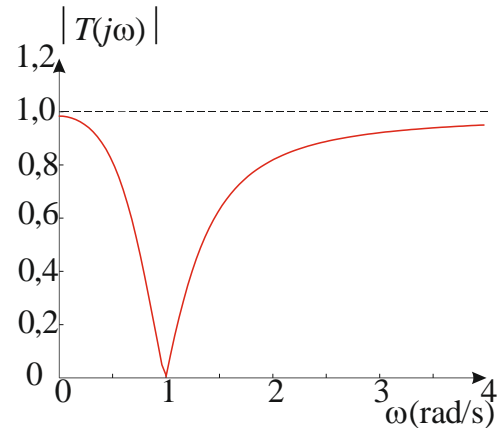
$$s = j\omega \Rightarrow T(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 1}{-\omega^2 + j\omega + 1} \Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{|1 - \omega^2|}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

(1 bod)

Karakteristične točke A-F karakteristike $|T(j0)| = 1$; $|T(j1)| = 0$; $|T(j\infty)| = 1$.

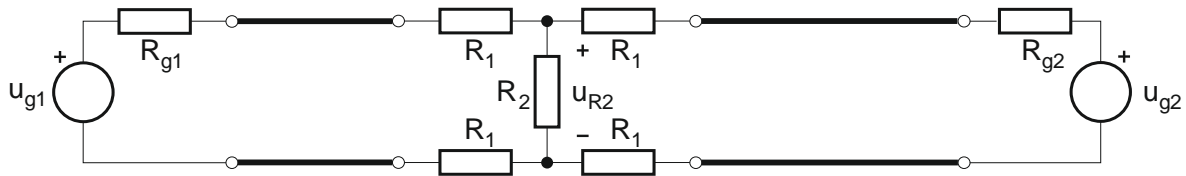


Raspored nula i polova u s -ravnini



Amplitudno frekvencijska karakteristika

5. Zadan je spoj linija s primarnim parametrima $R=0,8\Omega/\text{km}$, $G=12,5\text{mS}/\text{km}$, $L=1,6\mu\text{H}/\text{km}$ i $C=25\text{nF}/\text{km}$. Duljina kraće linije je 10km, a dulje 20km. Unutrašnji otpori generatora prilagođeni su zrcalnim impedancijama pripadnih linija. Da li je zadovoljeno prilagođenje linija po zrcalnim impedancijama i na stranama suprotnim od generatora? Obrazloži. Zadano je: $R_1=2\Omega$, $R_2=6\Omega$, $u_{g1}(t)=u_{g2}(t)=4S(t)$. Odrediti i nacrtati $u_{R2}(t)$ (primijeniti postupak superpozicije).



Rješenje: Ispitajmo da li vrijedi $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$ odnosno $\frac{0,8}{1,6 \cdot 10^{-6}} = \frac{12,5 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-9}}$. Vrijedi! \Rightarrow

To je linija bez distorzije. Računamo sekundarne parametre po pojednostavljenim formulama

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-6}}{25 \cdot 10^{-9}}} = \sqrt{64} = 8\Omega$$

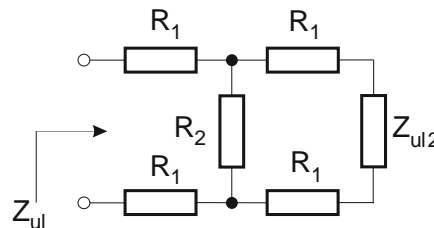
$$\gamma = \sqrt{RG} + s\sqrt{LC} = \sqrt{0,8 \cdot 12,5 \cdot 10^{-3}} + s\sqrt{1,6 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0,1 + s \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}$$

(1 bod)

Metoda superpozicije:

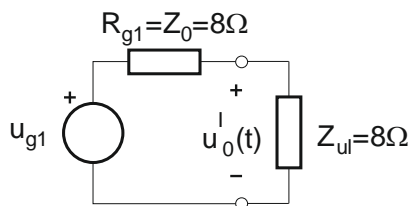
a) izvor $u_{g2}(t)$ isključen (prva linija)

$R_{g1} = 8\Omega$ zbog prilagođenja.



$$Z_{ul} = 8\Omega = 2R_1 + \frac{R_2(2R_1 + Z_{ul2})}{R_2 + 2R_1 + Z_{ul2}} = 4 + \frac{6 \cdot (4 + 8)}{6 + 4 + 8} = 4 + \frac{72}{18} = 8\Omega \text{ prilagođenje je zadovoljeno.}$$

To vrijedi za obje linije jer je mreža sa R_1 i R_2 simetrična. **(1 bod)**



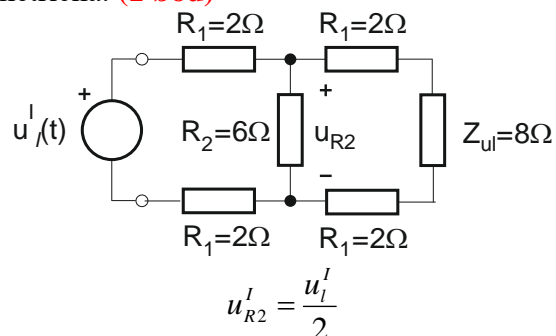
$$u_0^I = \frac{u_{g1}}{2}$$

$$g_1 = \gamma \cdot l_1 = (0,1 + s \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}) \cdot 10 = 1 + s \cdot 2 \cdot 10^{-6}$$

$$U_{R2}^I(s) = \frac{U_{g1}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-1} \cdot e^{-s \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{s} e^{-1} \cdot e^{-s \cdot 2 \cdot 10^{-6}}$$

To vrijedi za obje linije.

(1 bod)



$$u_{R2}^I = \frac{u_l^I}{2}$$

b) izvor $u_{g1}(t)$ isključen (druga linija)

$$g_2 = \gamma \cdot l_2 = (0,1 + s \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}) \cdot 20 = 2 + s \cdot 4 \cdot 10^{-6}$$

$$U_{R2}^{II}(s) = \frac{U_{g2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-2} \cdot e^{-s \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{s} e^{-2} \cdot e^{-s \cdot 4 \cdot 10^{-6}}$$

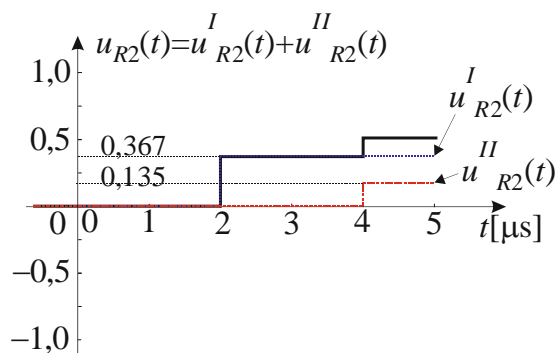
(1 bod)

c) ukupan napon na R_2 :

$$U_{R2}(s) = U_{R2}^I(s) + U_{R2}^{II}(s) = \frac{1}{s} e^{-1} \cdot e^{-s \cdot 2 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{s} e^{-2} \cdot e^{-s \cdot 4 \cdot 10^{-6}}$$

$$u_{R2}(t) = u_{R2}^I(t) + u_{R2}^{II}(t) = \frac{1}{e} S(t - 2 \cdot 10^{-6}) + \frac{1}{e^2} S(t - 4 \cdot 10^{-6}) S(t)$$

$$u_{R2}(t) = 0,367879 \cdot S(t - 2 \cdot 10^{-6}) + 0,135335 \cdot S(t - 4 \cdot 10^{-6})$$



(1 bod)