

Električni krugovi

- Grafovi i mreže

Lit.: V. Naglić: Osnovi teorije mreža, p.: 4.1.-4.4.1

Grafovi i mreže

- Analiza električnih krugova primjenom jednadžbi
 - petlji, čvorišta i sl.,
 - → pogodna kod jednostavnih krugova .
- Za složene krugove
 - → analiza primjenom elektroničkoga računala.

- Kako prikazati:
 - krug,
 - njegovu strukturu,
 - sastavne dijelove,
 - varijable

u obliku pogodnom za obradu računalom?

- → Primjena matričnog pristupa.
- Konfiguracija kruga → **topološka struktura.**
- Primjena **teorije grafova.**

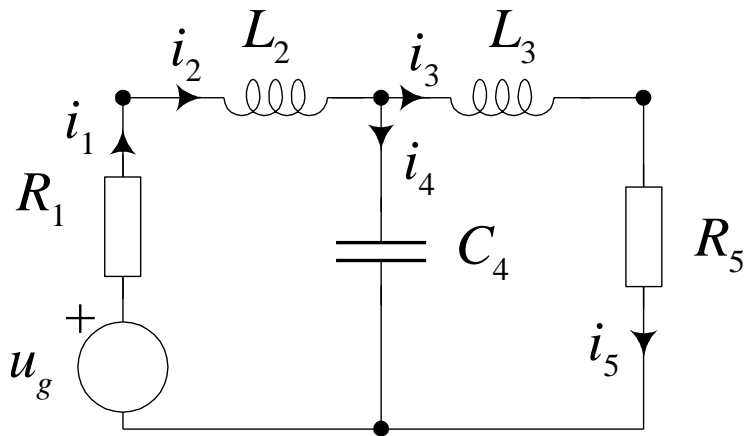
Graf

- Povezanost grana i čvorišta električnoga kruga, moguće je prikazati uz pomoć *linearnog grafa*.
- Elementi u granama \rightarrow *segmenti linija*.
- Definicija:
- **Linearni graf je geometrijska forma sačinjena od konačnog skupa točaka i segmenata linija, koje povezuju identične ili različite parove točaka toga skupa.**

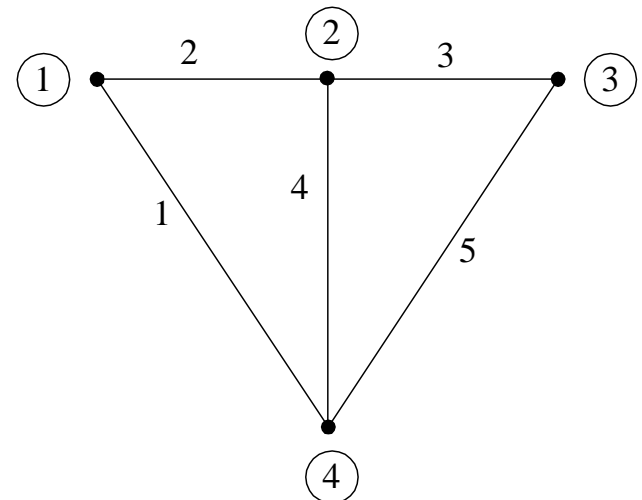
- Formiranje grafa →
 - točke grafa - čvorišta kruga,
 - linije u grafu - grane kruga.

■ Primjer:

■ električni krug:

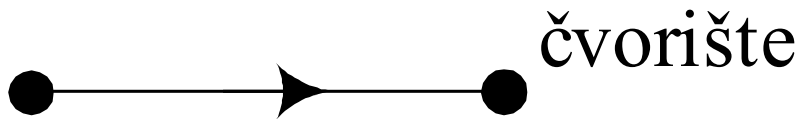


■ Graf



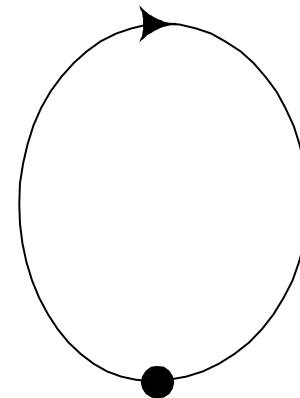
- **Definicije:**

- **Grana** → segment linije koji spaja dvije točke grafa.



grana grafa

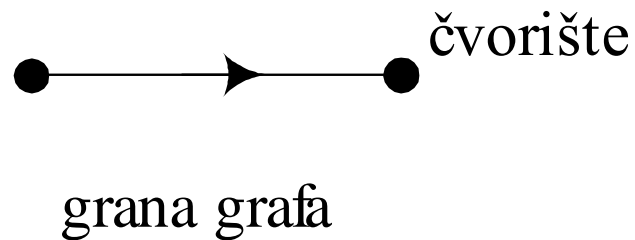
- Ako su te dvije točke identične
- - *singularna grana.*



singularna grana

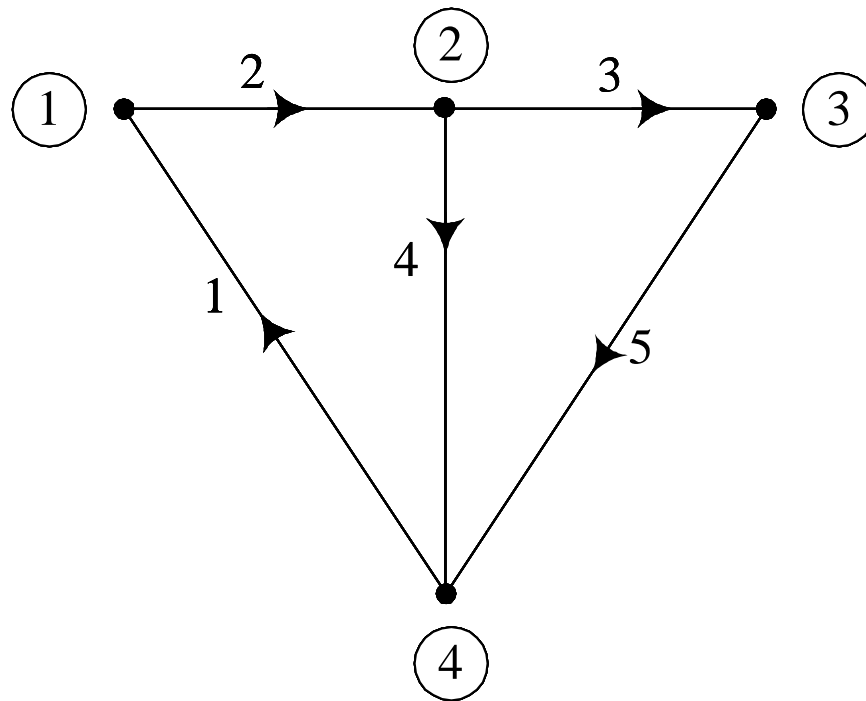
- Singularne grane nisu predmetom razmatranja.

- *Čvorište* → krajnja točka segmenta linije, ili izolirana točka (izolirano čvorište).

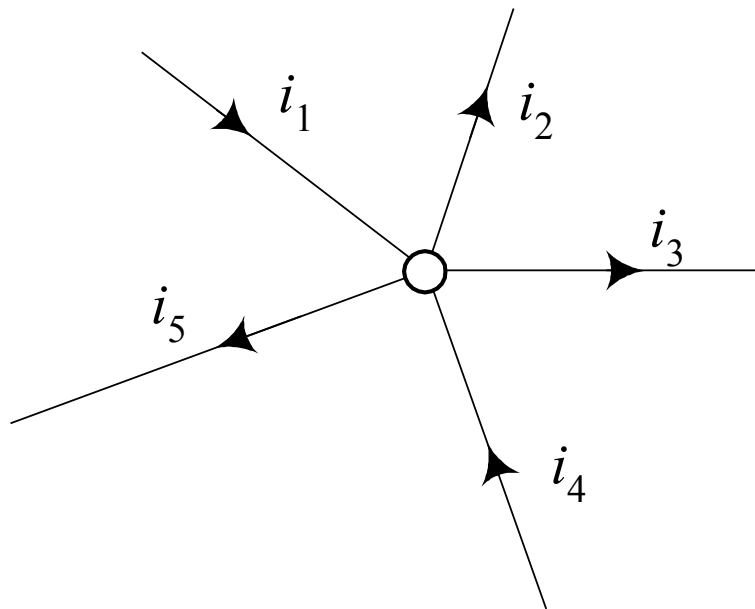


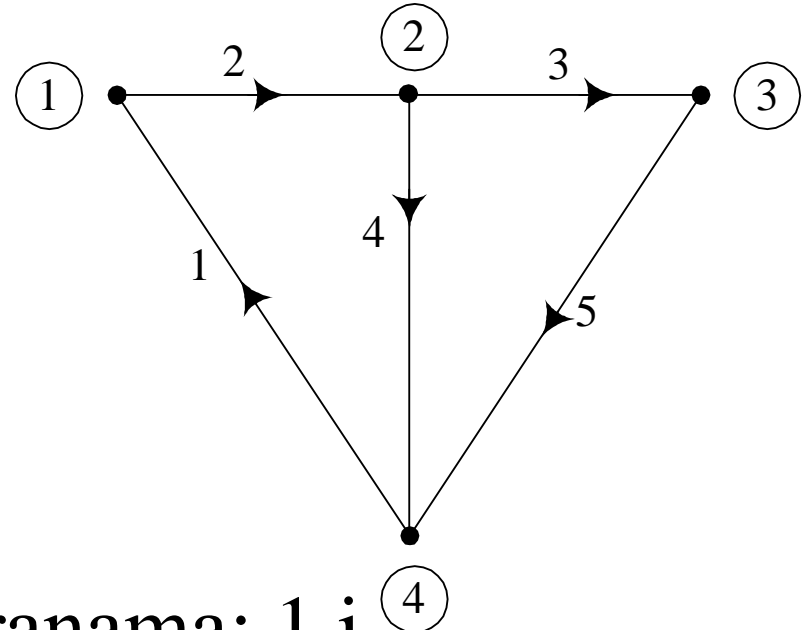
■ *Orijentirani graf*

- - svakoj grani pridružen smjer označen strelicom.



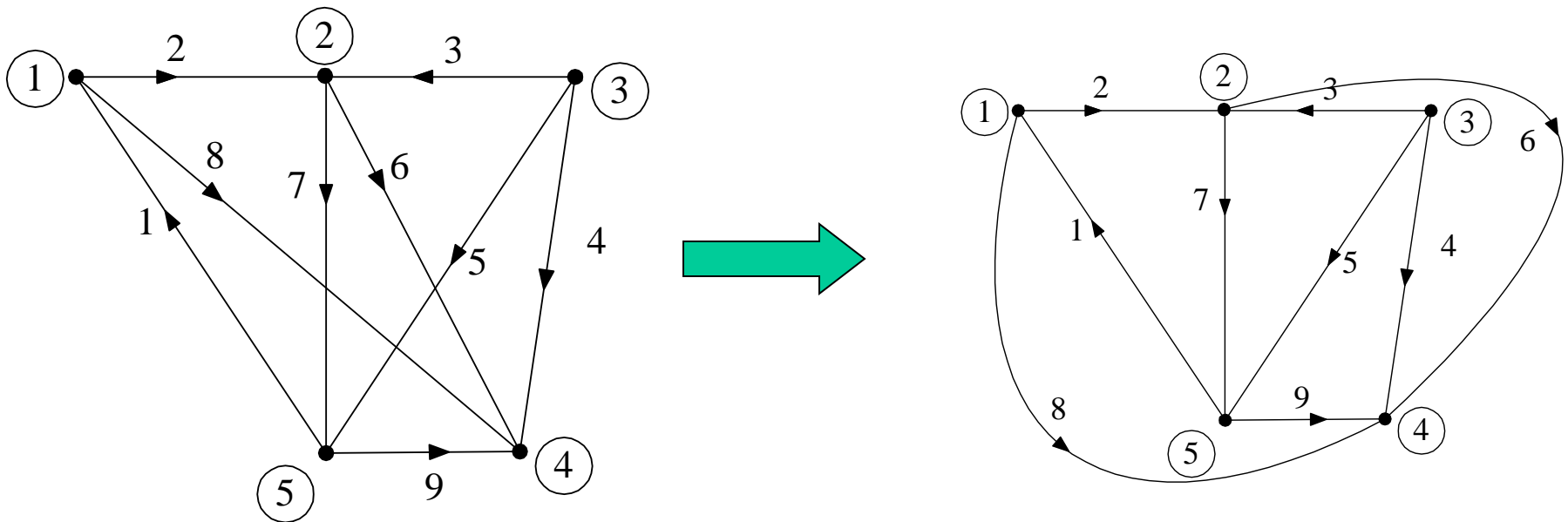
- Čvorište kojim započinje ili završava neka grana *incidentno* je s tom granom.



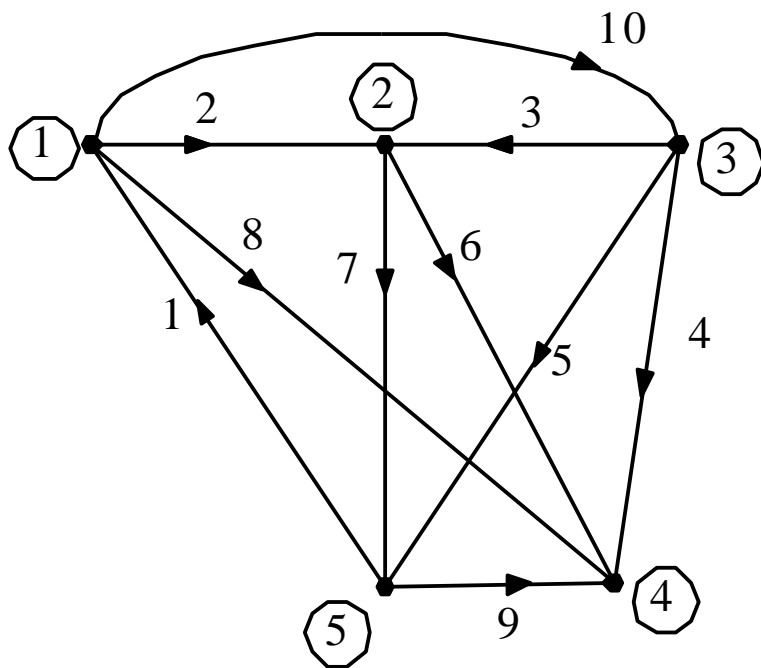


- Za graf na slici:
- čvorište 1 je incidentno s granama: 1 i 2
- čvorište 2 je incidentno s granama: 2, 3 i 4
- čvorište 3 je incidentno s granama: 3 i 5
- čvorište 4 je incidentno s granama: 1, 4 i 5
- ***Red čvorišta*** \rightarrow broj grana incidentnih s čvorištem.

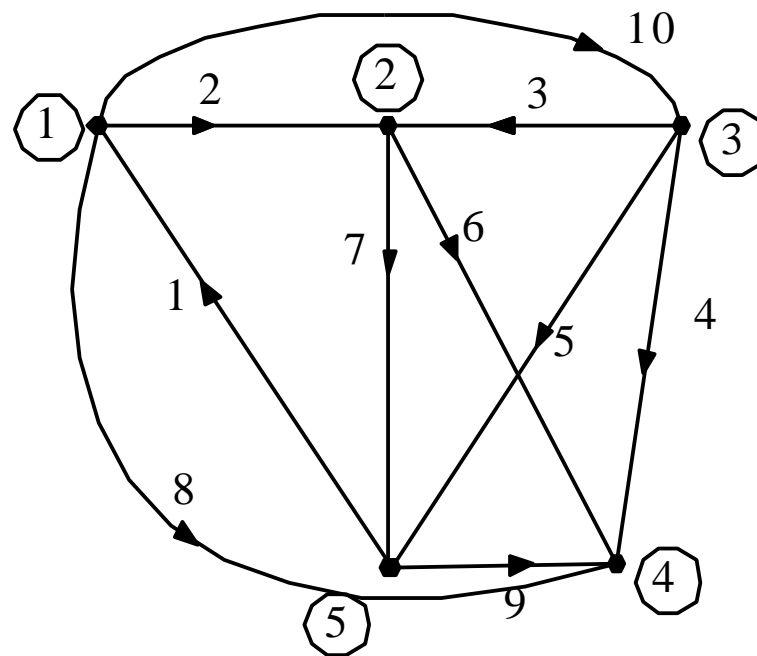
- **PLANARNOST**
- **Planaran graf**
- - moguć prikaz u ravnini bez križanja grana.
- Primjer: planarni graf



■ Primjer: neplanaran graf

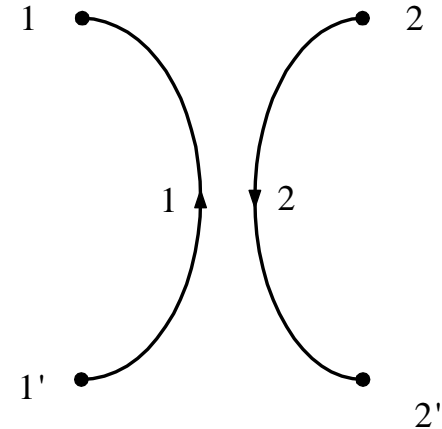
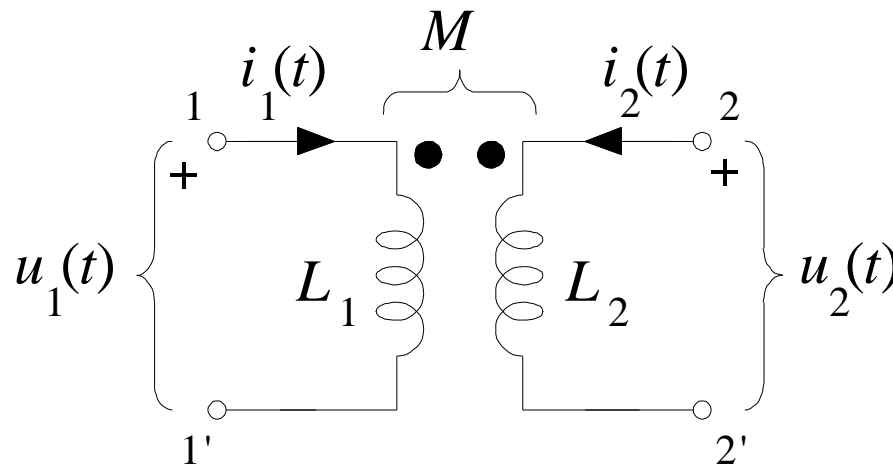


a)



b)

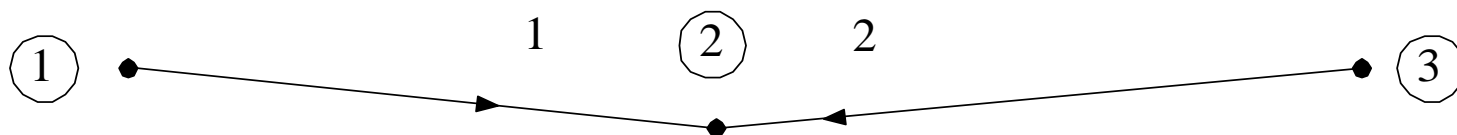
- *Suvisli* ili *povezan* graf \rightarrow sva čvorišta povezana granama
- *Nepovezani* graf \rightarrow Primjer: transformator.



- Transformator i pripadajući nepovezani graf.

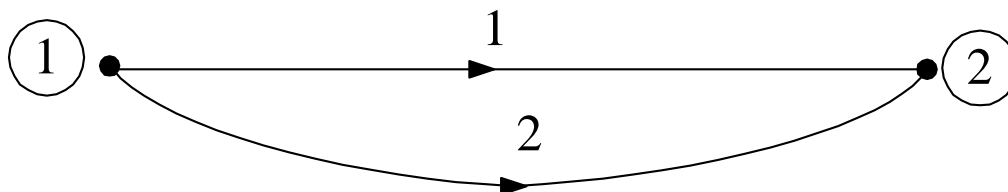
■ *Serijski spoj grana*

- - spoj dviju grana preko čvorišta koje nije incidentno s drugim granama.

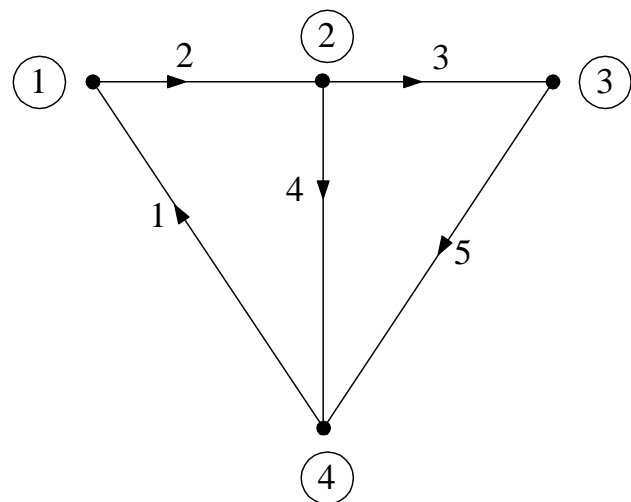


■ *Paralelni spoj grana*

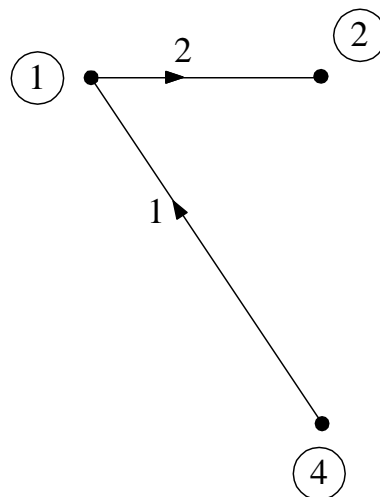
- - grane koje su incidentne s istim parom čvorišta.



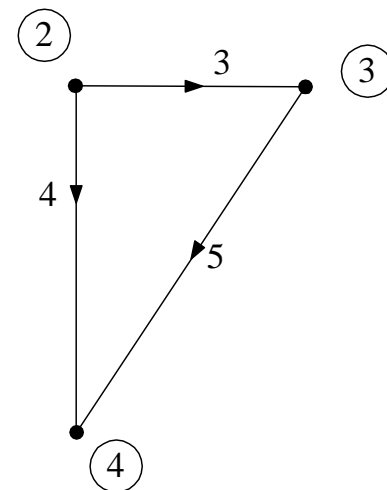
- **Subgraf** \rightarrow graf koji sadrži dio grana originalnog grafa
- Primjer: U grafu G : subgraf G_1 i subgraf G_2 .



graf G



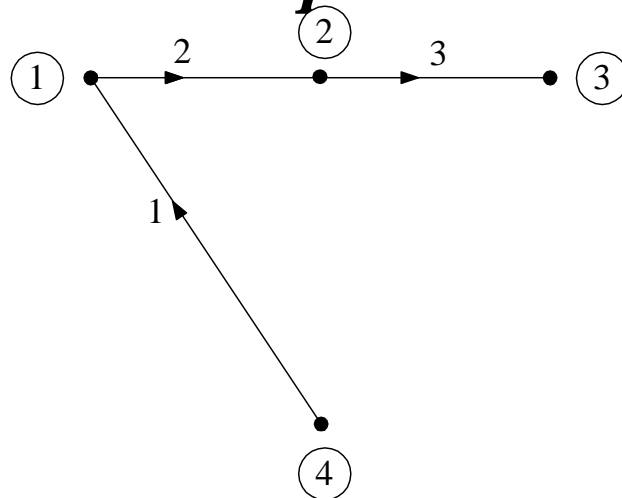
subgraf G_1



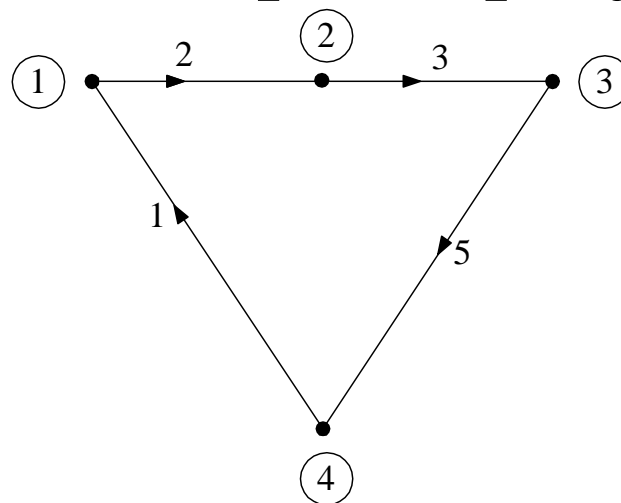
subgraf G_2

- G_1 i G_2 - *komplementarni subgrafovi*.

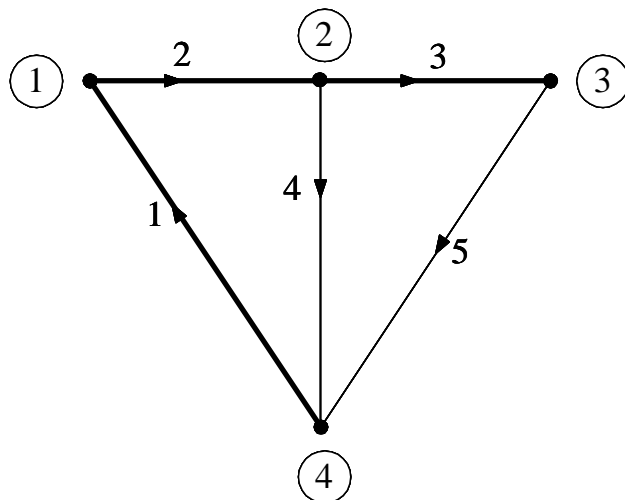
■ *Jednostavni otvoreni put.*



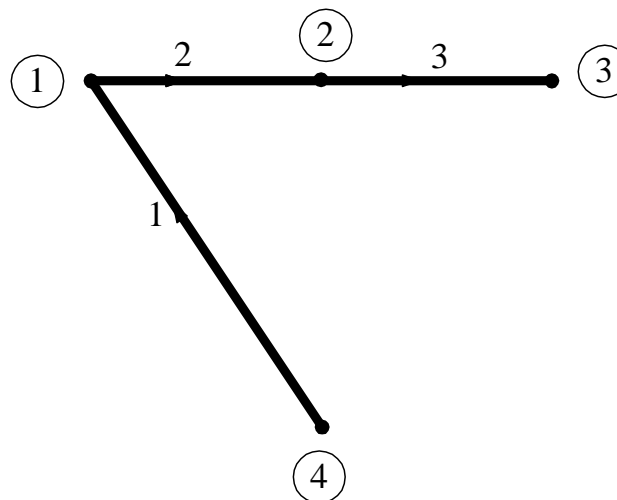
■ *Jednostavni zatvoren put ili petlja.*



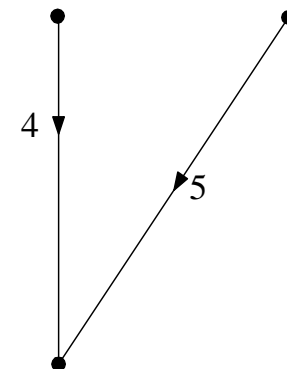
- ***Stablo grafa*** \rightarrow sva čvorišta povezana jednostavnim otvorenim putevima
- ***Grane stabla.***
- ***Spone ili neovisne grane.***



graf



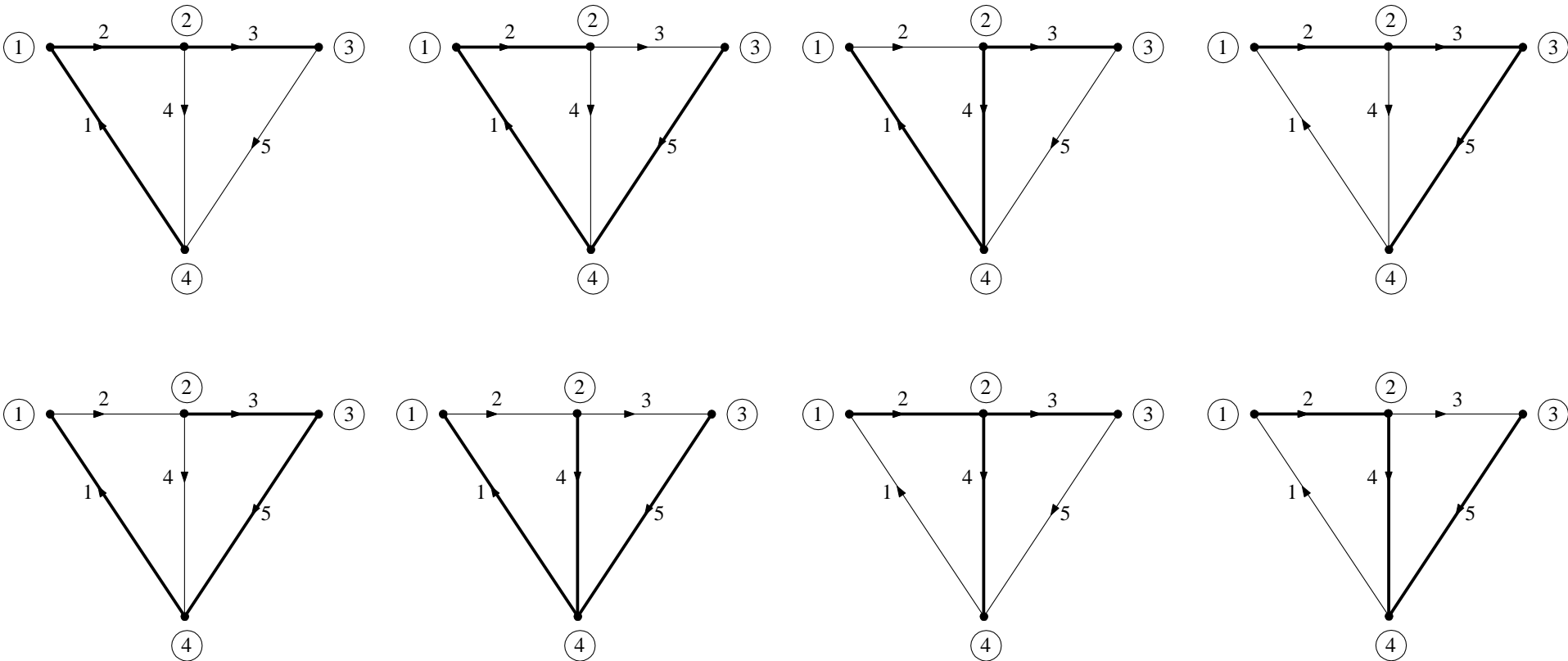
grane stabla



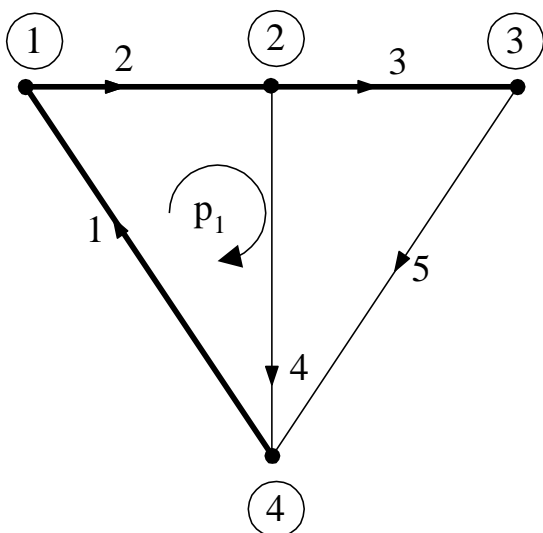
spone

- ***Kostablo*** \rightarrow sustav spona
- U mreži s N_b grana i N_v čvorišta
- Broj grana stabla $N_t = N_v - 1$
- Broj spona $N_s = N_b - N_v + 1$.

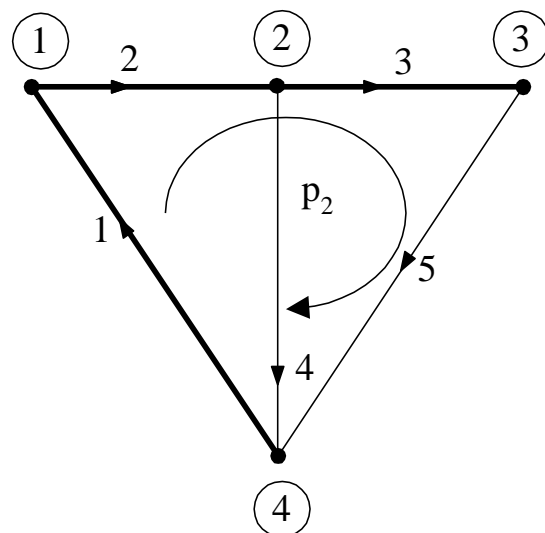
- Moguće je formirati više različitih stabala.
- Za prethodni graf - 8 stabala.



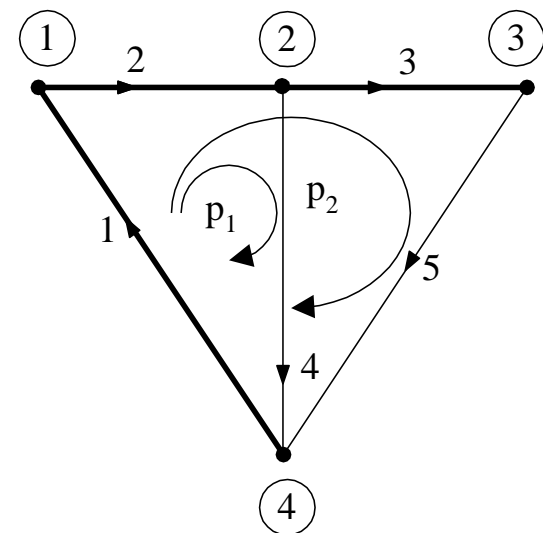
- **Temeljna petlja** \rightarrow jedna spona i grane stabla
-
- **Orijentacija temeljne petlje** \rightarrow prema smjeru spona
-
- **Temeljni sustav petlji** \rightarrow sve temeljne petlje



Temeljna petlja p_1

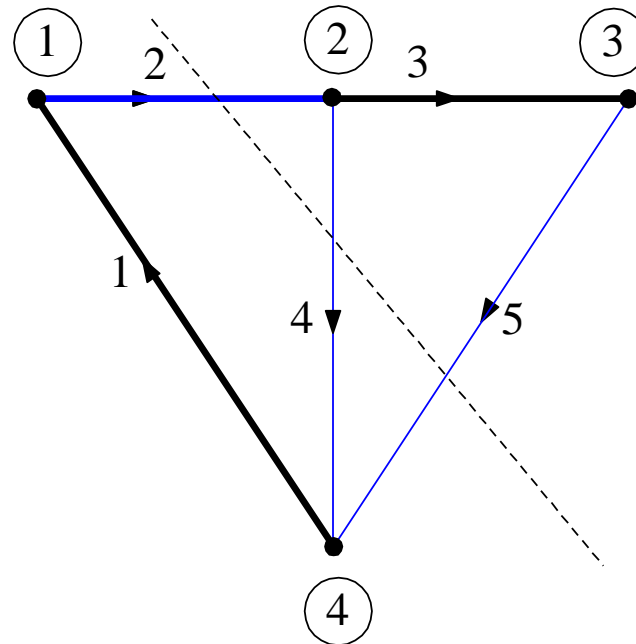


Temeljna petlja p_2



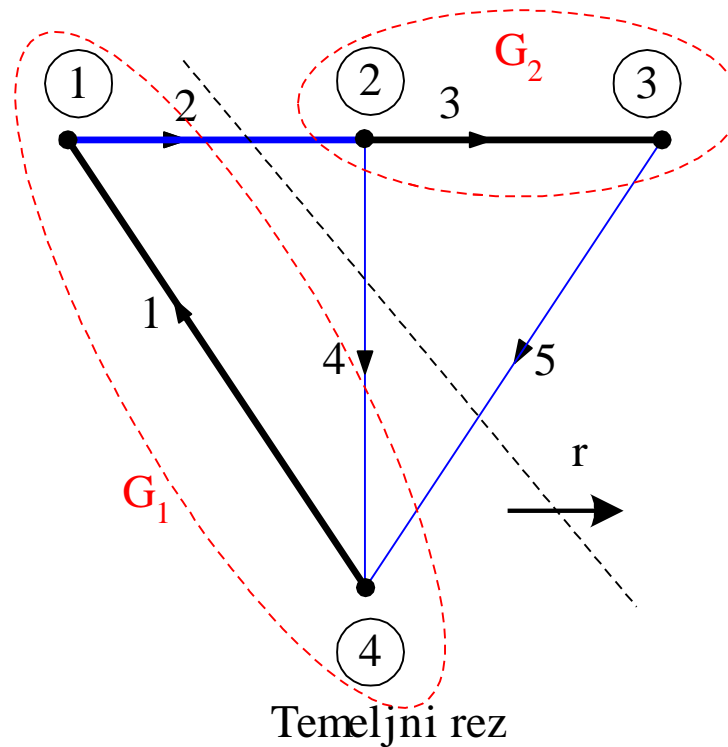
Temeljni sustav petlji

- **Rez** \rightarrow skup grana čijim se odbacivanjem graf dijeli na 2 subgrafa
- **Temeljni rez** \rightarrow jedna grana stabla i spone

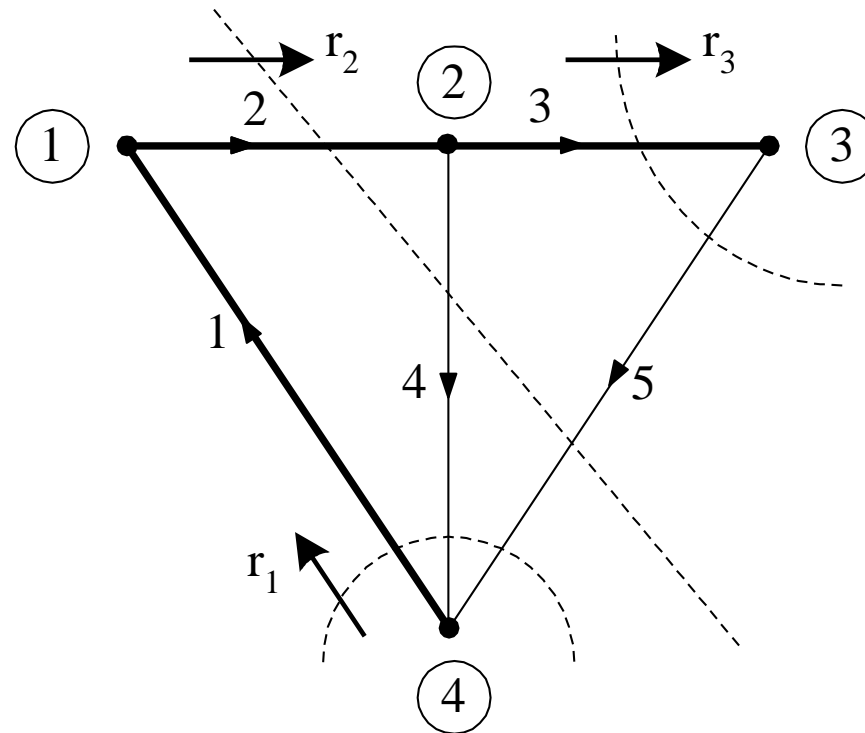


Temeljni rez

- ***Orijentacija temeljnoga reza*** - redoslijed subgrafova
- Subgrafovi G_1 i G_2 .
- Npr. redoslijed (G_1, G_2) definira smjer reza.



- *Temeljni sustav rezova* \rightarrow svi temeljni rezovi



Temeljni sustav rezova

Matrice grafa

- Matrice grafa - sadrže informacije o:
- čvorištima,
- granama,
- strukturi povezanosti grana i čvorišta,
- temeljnome sustavu petlji, rezova itd.

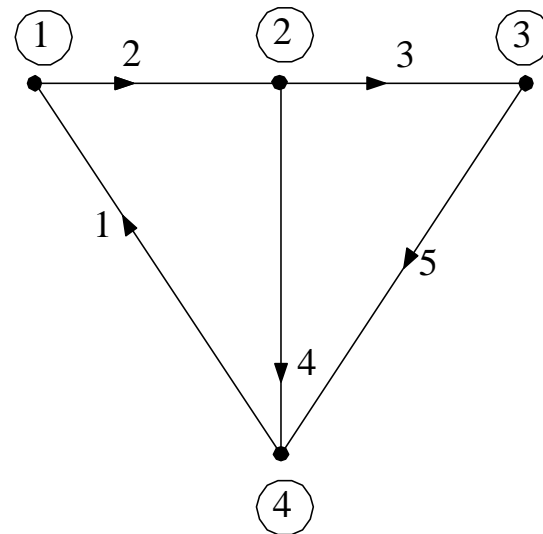
- **Matrica incidencija** \mathbf{A}_a - (N_v, N_b) matrica
- sadrži osnovne podatke o grafu :
 - broj čvorišta N_v ,
 - broj grana grafa N_b ,
 - orijentacije grana i
 - incidencije čvorišta i grana.

- reci \rightarrow čvorišta,
- stupci \rightarrow grane grafa.

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N_b} \\ a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{2N_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{N_v 1} & a_{N_v 2} & & a_{N_v N_b} \end{bmatrix}$$

- Elementi matrice incidencija a_{ij} :
- $a_{ij} = 0 \rightarrow j$ -ta grana nije incidentna s i -tim čvorištem
- $a_{ij} = 1 \rightarrow j$ -ta grana incidentna i orijentirana od i -tog čvorišta
- $a_{ij} = -1 \rightarrow j$ -ta grana incidentna i orijentirana prema i -tom čvorištu

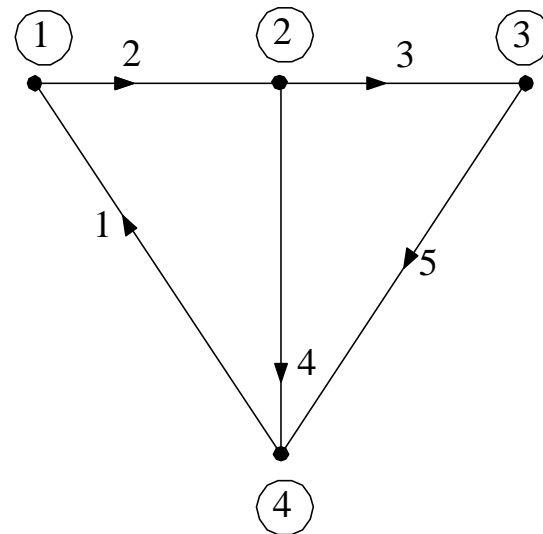
- Primjer: graf na slici



matrica incidencija

$$\mathbf{A}_a = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

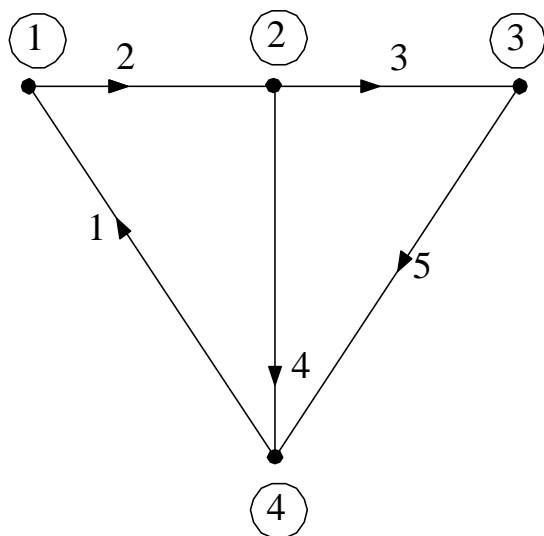
- Primjer: graf na slici



matrica incidencija

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Reciprocal incidence matrix - linearly dependent.
- One row of the incidence matrix - can be discarded.
- Discarded row corresponds to *reference node*.
- **Reduced incidence matrix \mathbf{A}** - $(N_v - 1, N_b)$.
- Example: node 4 - reference

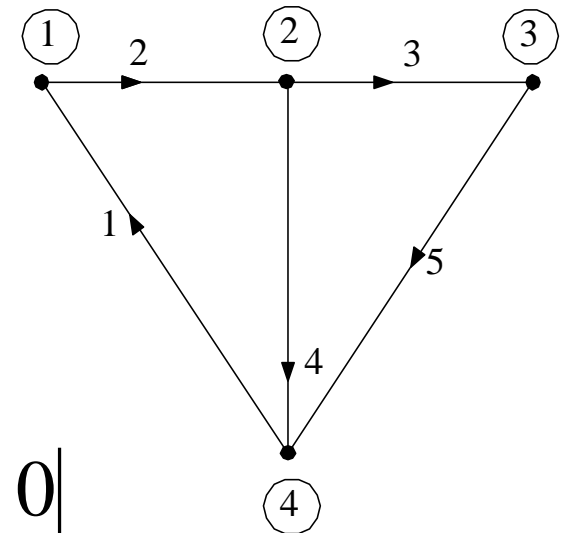


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

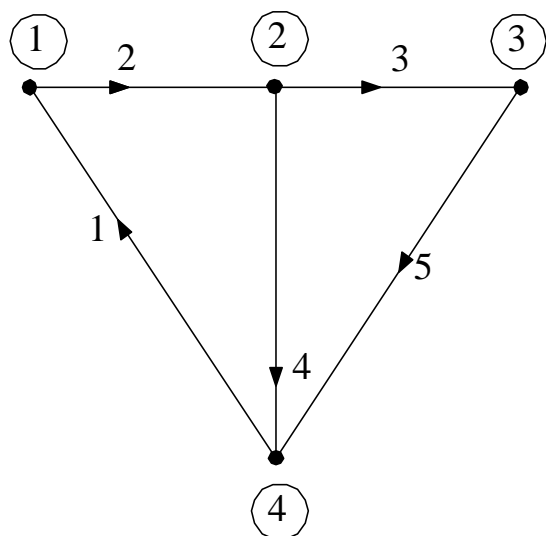
- Subdeterminante matrice incidencija
- Subdeterminanta matrice incidencija, koja odgovara jednoj petlji jednaka je nuli.
- Npr.: kvadratna submatrica, koju čine stupci 3, 4 i 5 i redci 1, 2 i 3

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



- Subdeterminanta matrice incidencija reda N_v-1 , koja je različita od nule, odgovara jednome stablu grafa.
- Npr. subdeterminanta, koju čine reci 1, 2 i 3 i stupci 1, 2 i 3.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

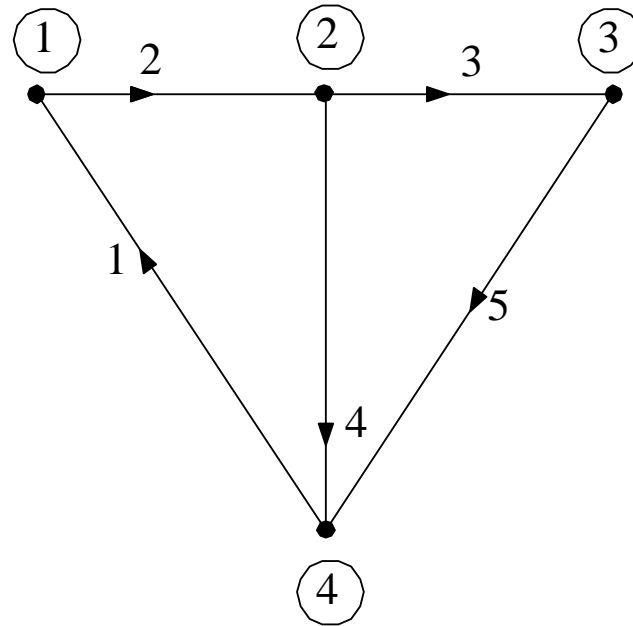
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

- Rang r matrice \rightarrow red najveće subdeterminante $\neq 0$
- Rang matrice incidencija \mathbf{A}_a jednak je N_v-1 .

Redoslijed grana

- Redoslijed grana u grafu - proizvoljan.
- Međutim, zbog jednostavnosti operacija s matricama:
 - prvih $N_v - 1$ grana u nizu \rightarrow stablo
 - preostalih $N_g - N_v + 1$ grana \rightarrow spone.

■ Primjer:



■ redoslijed grana u grafu definiran je za stablo, kojeg čine grane 1, 2 i 3.

- Matrica incidencija → prikaz kao dvije blok matrice.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t \quad \mathbf{A}_s]$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t \quad \mathbf{A}_s] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- \mathbf{A}_t sadrži stupce, koji odgovaraju granama stabla.
- \mathbf{A}_s sadrži stupce, koji odgovaraju sponama.
- U reduciranoj matrici incidencija \mathbf{A}_t - kvadratna.
- Broj stupaca = broju redaka = $N_v - 1$.
- \mathbf{A}_t je matrica incidencija stabla grafa.