FER2.net

Elektromagnetska polja

2. domaća zadaća ak. god. 2007./2008.

- skenirani postupci rješavanja, verzija: v2.0.1.

- navedena rješenja su potvrđena nakon ocjene zadaće

by: Tywin

Veliko **HVALA** svima koji su mi ukazivali na greške i pomagali mi tokom izrade ovoga pedeefa

Napomena: ***svi zadaci za koje se traži jedna od komponenti vektora imaju isti postupak rješavanja i isti vektor rješenja neovisno o traženoj komponenti. Zbog toga su izračunate sve komponente vektora, a kao rješenje unosite samo traženu komponentu (što nije isto!).***

1. Odredite jakost struje u [A] koja prolazi dijelom ravnine $x = 0$ određene sa -0.25π m $\leq y \leq 0.25\pi$ m, -0.01 m $\leq z \leq 0.01$ m ukoliko je gustoća struje zadana izrazom:
   a) $\mathbf{J} = 100\, y \sin(2y)\, \mathbf{a_x}$ [Am^{-2}]

      Rješenje: 1 A

   b) $\mathbf{J} = 100 \cos(2y)\, \mathbf{a_x}$ [Am^{-2}]

      Rješenje: 2 A

2. Odredite jakost struje u [mA] koja prolazi dijelom ravnine $y = 0$ određene sa -0.1 m $\leq x \leq 0.1$ m, -0.002 m $\leq z \leq 0.002$ m ukoliko je gustoća struje zadana izrazom: $\mathbf{J} = 100\,|x|\, \mathbf{a_y}$ [Am^{-2}]

   Rješenje: 4 mA

3. Odredite jakost struje u [mA] koja teče vodičem kružnog poprečnog presjeka, polumjer vodiča je 0.002 m, ako je gustoća struje po presjeku vodiča zadana izrazom :
   a) $\mathbf{J} = 15\,(1 - e^{-1000r})\mathbf{a_z}$ [Am^{-2}]

      Rješenje: 0.133 mA

   b) $\mathbf{J} = 100\,(1 - 2e^{-1000r})\mathbf{a_z}$ [Am^{-2}]

      Rješenje: 0.51 mA

4. Vektorski magnetski potencijal zadan je izrazom: $\mathbf{A} = \cos x \sin y\, \mathbf{a_x} + \sin x \cos y\, \mathbf{a_y}$ [Tm]. Odredite magnetsku indukciju u [T] u točki (1m, 1m, 1m).

   Rješenje: 0 T

5. Vektorski magnetski potencijal u sfernom koordinatnom sustavu zadan je izrazom $\mathbf{A} = 2.5\, \mathbf{a_\theta} + 5\, \mathbf{a_\alpha}$ [Tm]. Odredite magnetsku indukciju u [T] u točki (2m, $\pi/6$, 0) **u smjeru $\mathbf{a_r}$**, pri čemu je točka označena u obliku (r, θ, α).

   Rješenje: 4.33 T

6. Vektorski magnetski potencijal u cilindričnom koordinatnom sustavu zadan je izrazom $\mathbf{A} = \sin(2\alpha)\, \mathbf{a_\alpha}$ [Tm]. Odredite iznos magnetske indukcije u [T] u točki (2m, 0.25π, 0), pri čemu je točka označena u obliku (r, α, z).

   Rješenje: 0.5 T

7. Vektorski magnetski potencijal zadan je u cilindričnom koordinatnom sustavu jednadžbom $\mathbf{A} = e^{-2z} \sin(0.5\alpha)\, \mathbf{a}_\alpha$. [Tm]. Odredite komponentu magnetske indukcije u [T] **u smjeru $\mathbf{a}_z$** u točki (0.8m, $\pi/3$, 0.5m), pri čemu je točka označena u obliku (r, α, z).

   Rješenje: 0.23 T ✓

8. Vektorski magnetski potencijal zadan je izrazom $\mathbf{A} = -\cos x \cos y\, \mathbf{a}_z$ [Tm]. Odredite magnetsku indukciju u [T] u ishodištu koordinatnog sustava.

   Rješenje: 0 T ✓

9. Područje 1, za koje je relativna permeabilnost $\mu_{r1} = 5$ je na strani ravnine 6x+4y+3z=12 [m] koja uključuje ishodište. Za područje 2 vrijedi $\mu_{r2}=3$. Uz zadanu jakost magnetskog polja u području 1 $\mathbf{H}_1 = (\mu_0^{-1})(3\,\mathbf{a}_x - 0.5\,\mathbf{a}_y)$ [Am^{-1}] odredite komponentu magnetske indukcije u [T] u području 2 **u smjeru osi y**.

   a) **Rješenje:** 0.598 T ✓

   b) Za podatke: $\mu_{r1} = 4$, $\mu_{r2} = 3$, granica: 4x + 4y + 2z = 8, $\mathbf{H}_1 = (\mu_0^{-1})(2\,\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)$

   Rješenje: - 2.55 T ✓

10. Strujni oblog $\mathbf{K} = 6.5\,\mathbf{a}_z$ [Am^{-1}] je zadan na granici x = 0 koja razdvaja područje1, x < 0, za koje je jakost magnetskog polja $\mathbf{H}_1 = 10\,\mathbf{a}_y$ [Am^{-1}] i područje2 , x > 0. Odredite jakost magnetskog polja u [Am^{-1}] u području 2.

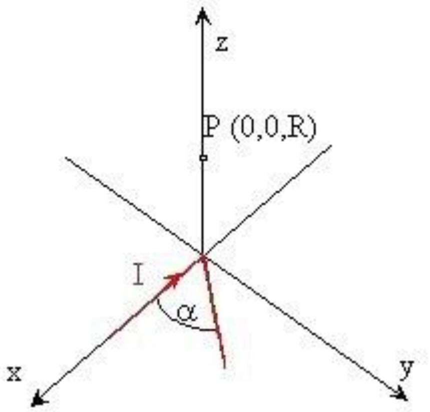
    Rješenje: 16.5 A/m ✓

11. Strujni oblog $\mathbf{K} = 9\,\mathbf{a}_y$ [Am^{-1}] je zadan na granici z = 0 koja razdvaja područje 1, z < 0, $\mu_{r1} = 4$, i područje 2, z > 0, $\mu_{r2} = 3$. Ako je jakost magnetskog polja u području 2 $\mathbf{H}_2=14.5\,\mathbf{a}_x+ 8\,\mathbf{a}_z$ [Am^{-1}], odredite komponentu jakosti magnetskog polja u [Am^{-1}] u području 1 **okomitu** na granicu.

    Rješenje: 6 A/m ✓

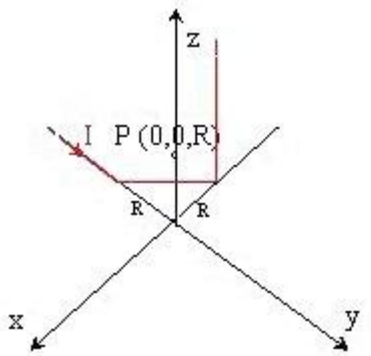
    Rješenje: 5.5 A/m → ako se traži **tangencijalna** komponenta ✓

12. Strujnicom prema slici teče struja I = 10 A. Odredite komponentu jakosti magnetskog polja u [Am^{-1}] **u smjeru osi y** u točki P, uz zadane vrijednosti R = 1m, α = π/6



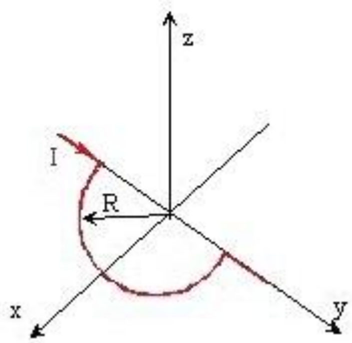
Rješenje: 0.107 A/m ✓

13. Strujnom petljom prema slici protječe struja I=10A. Odredite komponentu jakosti magnetskog polja u [Am^{-1}] u točki P **u smjeru osi x**, pri čemu je R=1m.



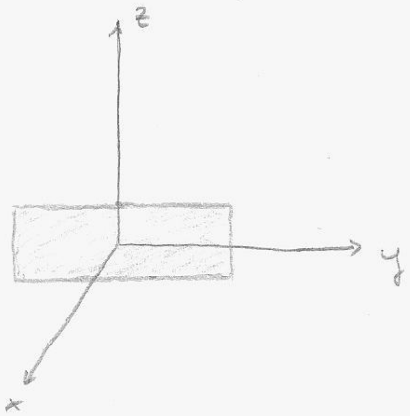
Rješenje: 0.608 A/m ✓

14. Strujna petlja protjecana strujom 1 A prema slici leži u xy ravnini . Odredite jakost magnetskog polja u [Am^{-1}] **u smjeru osi x** u točki (0,0,3R), pri čemu je R=1m.



Rješenje: 0.051 A/m ✓

① Odredite jakost struje u [A] koja prolazi dijelom ravnine $x=0$ određene sa $-0{,}25\pi\ m \le y \le 0{,}25\pi\ m$, $-0{,}01\ m \le z \le 0{,}01\ m$ ukoliko je gustoća struje zadana izrazom: a) $\vec{J} = 100\, y \sin(2y)\, \vec{a}_x$



$$I = \iint_S \vec{J}\, d\vec{S}$$

$\rightarrow d\vec{S} = \vec{n}\, dS$ – orjentirat ćemo je tako da $\vec{n} = \vec{a}_x$

$$I = \iint_S J\, dS = \int_{-0{,}01}^{0{,}01} dz \int_{-0{,}25\pi}^{0{,}25\pi} 100 y \sin(2y)\, dy$$

$$= 2 \int_{-0{,}25\pi}^{0{,}25\pi} y \cdot \sin(2y)\, dy$$

$$\left\{ \text{uz: } \int x \sin(cx)\, dx = \frac{1}{c^2}\left[\sin(cx) - cx \cdot \cos(cx)\right] \right\}$$

$$I = 2 \cdot \frac{1}{4}\left[\sin 2y - 2y \cdot \cos 2y\right]\Big|_{y=-0{,}25\pi}^{0{,}25\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 0 - (-1 - 0)\right] = 1\ A$$

---

b) $\vec{J} = 100 \cos(2y)\, \vec{a}_x$

$$I = \iint_S \vec{J}\, d\vec{S} = \int_{-0{,}01}^{0{,}01} dz \int_{-0{,}25\pi}^{0{,}25\pi} 100 \cos(2y)\, dy$$

$$= 2 \int_{-0{,}25\pi}^{0{,}25\pi} \cos(2y)\, dy = \sin 2y \Big|_{-0{,}25\pi}^{0{,}25\pi} = 1 - (-1) = 2\ A$$

(2) Odredite jakost struje u [mA] koja prolazi dijelom ravnine $y=0$ određene sa $-0{,}1\,m \le x \le 0{,}1\,m$, $-0{,}002\,m \le z \le 0{,}002\,m$ ukoliko je gustoća struje zadana izrazom $\vec{J} = 100\,|x|\,\vec{a}_y$ A/m^2

$$I = \iint_S \vec{J}\,d\vec{S} = \iint_S J\,dS$$

$$= \int_{-0{,}002}^{0{,}002} dz \int_{-0{,}1}^{0{,}1} 100\,|x|\,dx$$

$$= 0{,}4\left[-\int_{-0{,}1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{0{,}1} x\,dx\right]$$

$$= 0{,}4\left[-\frac{x^2}{2}\Big|_{-0{,}1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{0{,}1}\right] = 0{,}4\left[-0 + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}01}{2} - 0\right]$$

$$= 4\ mA$$

(3) Odredite jakost struje u [mA] koja teče vodičem kružnog poprečnog presjeka, ako je gustoća struje po presjeku vodiča dana izrazom $\vec{J} = 15(1-e^{-1000r})\vec{a}_z$. Polumjer vodiča je 0,002 m.

a) $\vec{J} = 15(1-e^{-1000r})\vec{a}_z$

$$I = \iint_S \vec{J}\,\vec{n}\,dS = \iint_S J\,dS = \left\{dS = 2\pi r\,dr\right\}$$

$$= \int_0^{0{,}002} 15(1-e^{-1000r})\cdot 2\pi r\,dr$$

$$= \int_0^{0{,}002} 30\pi r\,dr - \int_0^{0{,}002} 30\pi r\,e^{-1000r}\,dr = 30\pi\left[\frac{r^2}{2} + \frac{e^{-1000r}(1+1000r)}{1000^2}\Big|_{r=0}^{0{,}002}\right]$$

$$= 30\pi\left[2\cdot 10^{-6} + 0{,}406\cdot 10^{-6} - \varnothing - 1\cdot 10^{-6}\right] = 0{,}1325\ mA$$

---

b) $\vec{J} = 100(1-2e^{-1000r})\vec{a}_z$

$$I = \int_0^{0{,}002} 100(1-2e^{-1000r})\,2\pi r\,dr =$$

$$= 200\pi\,\frac{r^2}{2}\Big|_0^{0{,}002} + 400\pi\,\frac{e^{-1000r}(1+1000r)}{1000^2}\Big|_0^{0{,}002}$$

$$= 0{,}51\ mA$$

(4) Vektorski magnetski potencijal zadan je $\vec{A} = \cos x \sin y\, \vec{a}_x + \sin x \cos y\, \vec{a}_z$ [Tm]. Odredite magnetsku indukciju u [T] u točki (1m, 1m, 1m).

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a}_x \cdot 0 - \vec{a}_y \cdot 0 + \vec{a}_z \left[\cos x \cos y - \cos x \cos y \right] = \vec{0}$$

---

(5) Vektorski magnetski potencijal u sfernom koordinatnom sustavu zadan je izrazom $\vec{A} = 2{,}5\, \vec{a}_\Theta + 5\, \vec{a}_\lambda$ [Tm]. Odredite magnetsku indukciju u [T] u točki $(2m, \frac{\pi}{6}, 0)$ u smjeru $\vec{a}_r$, pri čemu je točka označena sa (r, Θ, λ).

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$= \vec{a}_r \frac{1}{r \sin\Theta} \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin\Theta \cdot A_\lambda) - \frac{\partial A_\Theta}{\partial \lambda} \right] + \vec{a}_\Theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial A_r}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\lambda) \right] +$$

$$+ \vec{a}_\lambda \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\Theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \Theta} \right]$$

$$= \vec{a}_r \frac{1}{r \sin\Theta} \left[5 \cos\Theta - 0 \right] + \vec{a}_\Theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\Theta} \cdot 0 - 5 \right] + \vec{a}_\lambda \frac{1}{r} \left[2{,}5 - 0 \right]$$

$$= \vec{a}_r \frac{5 \cos\Theta}{r \sin\Theta} + \vec{a}_\Theta \frac{-5}{r} + \vec{a}_\lambda \frac{2{,}5}{r}$$

$$\vec{B} \Big|_{(2, \frac{\pi}{6}, 0)} = \vec{a}_r \frac{5}{2}\sqrt{3} - \vec{a}_\Theta \frac{5}{2} + \vec{a}_\lambda \frac{5}{4}$$

$B_r = 4{,}33$ T

→ formula za rotaciju može se naći u skripti ELEKTROSTATIKA na stranici br. 40.

(6) Vektorski magnetski potencijal u cilindričnom koordinatnom sustavu zadan je izrazom $\vec{A} = \sin(2\alpha)\,\vec{a}_\alpha$ [Tm]. Odredite iznos magnetske indukcije u [T] u točki (2m, 0,25π, 0), pri čemu je točka zadana u obliku (r, α, z).

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$= \vec{a}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\right] + \vec{a}_\alpha\left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right] + \vec{a}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha}\right]$$

$$= \vec{a}_r\left[\frac{1}{r}\cdot 0 - 0\right] + \vec{a}_\alpha\left[0 - 0\right] + \vec{a}_z\frac{1}{r}\left[\sin(2\alpha) - 0\right]$$

$$= \vec{a}_z\frac{1}{r}\sin 2\alpha\,\Big|_{(2,\,0.25\pi,\,0)} = 0,5\,\vec{a}_z$$

---

(7) Vektorski magnetski potencijal zadan je u cilindričnom koordinatnom sustavu jednadžbom $\vec{A} = e^{-2z}\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{a}_\alpha$ [Tm]. Odredite komponentu magnetske indukcije u [T] u smjeru $\vec{a}_z$ u točki (0.8m, $\frac{\pi}{3}$, 0.5m), pri čemu je točka označena u obliku (r, α, z).

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \vec{a}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\right] + \vec{a}_\alpha\left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right] + \vec{a}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha}\right]$$

$$= \vec{a}_r\left[\frac{1}{r}\cdot 0 - \left(-2e^{-2z}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right] + \vec{a}_\alpha\left[0 - 0\right] + \vec{a}_z\frac{1}{r}\left[e^{-2z}\sin\frac{\alpha}{2} - 0\right]$$

$$= 2e^{-2z}\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{a}_r + \frac{1}{r}e^{-2z}\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{a}_z\,\Big|_{(0.8,\,\frac{\pi}{3},\,0.5)} =$$

$$= 0,368\,\vec{a}_r + 0,23\,\vec{a}_z \quad T$$

(8) Vektorski magnetski potencijal zadan je izrazom $\vec{A} = -\cos x \cos y \ \vec{a}_z$ [Tm]. Odredite magnetsku indukciju u [T] u ishodištu koordinatnog sustava

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\cos x \cos y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a}_x \left[-\cos x \sin y\right] - \vec{a}_y \left[-\sin x \cos y\right] + \vec{a}_z \cdot 0$$

$$= -\cos x \sin y \ \vec{a}_x + \sin x \cos y \ \vec{a}_y$$

$$\vec{B}\Big|_{(0,0,0)} = \vec{0} \ \mathrm{T}$$

(9) Područje 1, za koje je relativna permeabilnost $\mu_{r1} = 5$ je na strani ravnine $6x + 4y + 3z = 12$ [m] koja uključuje ishodište. Za područje 2 vrijedi $\mu_{r2} = 3$. Uz zadanu jakost magnetskog polja u području 1 $H_1 = \dfrac{3\vec{a}_x - 0.5\,\vec{a}_y}{\mu_0}$ [Am^{-1}] odredite komponentu magnetske indukcije u [T] u području 2 u smjeru osi y.

$\rightarrow$ uvjeti na granici: $\begin{cases} \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_s \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{cases}$

$\vec{n}$ - jedinična normala granice koja gleda od područja 1 prema području 2

a)
$$\vec{n} = \frac{6\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 3\vec{a}_z}{\sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{6\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 3\vec{a}_z}{\sqrt{61}}$$

$\vec{K}_s = 0$ $\rightarrow$ na granici nema slobodnih struja

rješenje je oblika: $\vec{B}_2 = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z$

pa je
$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0 \mu_{r2}} = \frac{B_x}{\mu_0\mu_{r2}} \vec{a}_x + \frac{B_y}{\mu_0\mu_{r2}} \vec{a}_y + \frac{B_z}{\mu_0\mu_{r2}} \vec{a}_z$$

$$= H_x \vec{a}_x + H_y \vec{a}_y + H_z \vec{a}_z$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \mu_{r1} \vec{H}_1 = 15\,\vec{a}_x - 2.5\,\vec{a}_y$$

prvi uvjet:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{6}{\sqrt{61}} & \frac{4}{\sqrt{61}} & \frac{3}{\sqrt{61}} \\ \frac{B_x}{\mu_0\mu_{r2}} - \frac{3}{\mu_0} & \frac{B_y}{\mu_0\mu_{r2}} + \frac{0.5}{\mu_0} & \frac{B_z}{\mu_0\mu_{r2}} \end{vmatrix} = \vec{0} \quad / \cdot \sqrt{61}\,\mu_0\mu_{r2}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 6 & 4 & 3 \\ B_x - 9 & B_y + 1{,}5 & B_z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_x \left[4B_z - 3B_y - 4{,}5 \right] - \vec{a}_y \left[6B_z - 3B_x + 27 \right] + \vec{a}_z \left[6B_y + 9 - 4B_x + 36 \right] = \vec{0}$$

(1) $4B_z - 3B_y = 4.5$
(2) $6B_z - 3B_x = -27$
(3) $6B_y - 4B_x = -45$

oprez! ovo nije sustav 3 jednadžbe s 3 nepoznanice nego 2 jednadžbe i 3 nepoznanice. 3. se jednadžba može dobiti iz druge dvije.

drugi uvjet:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\frac{6\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 3\vec{a}_z}{\sqrt{61}} \cdot \left[(B_x - 15)\,\vec{a}_x + (B_y + 2.5)\,\vec{a}_y + B_z\,\vec{a}_z \right] = 0 \quad / \cdot \sqrt{61}$$

(4) $6B_x + 4B_y + 3B_z = 80$

$$\left.\begin{aligned} (2) \quad & 3B_z = 1.5\,B_x - 13.5 \\ (3) \quad & 4B_y = 2.667\,B_x - 30 \end{aligned}\right\} \text{ u } (4)$$

$$10.167\,B_x = 123.5 \Rightarrow B_x = 12{,}148$$

$B_y = 0{,}598$

$B_z = 1{,}574$

$$\vec{B}_2 = 12{,}148\,\vec{a}_x + 0{,}598\,\vec{a}_y + 1{,}574\,\vec{a}_z \ \mathrm{T}$$

b) za podatke:

granica $\rightarrow 4x + 4y + 2z = 8$

$\mu_{r1} = 4 \qquad \vec{H}_1 = \frac{2\vec{a_x} - \vec{a_y}}{\mu_0}$

$\mu_{r2} = 3$

$\vec{B}_1 = \mu_0 \mu_r \vec{H}_1 = 8\vec{a_x} - 4\vec{a_y}$

$\vec{n} = \frac{4\vec{a_x} + 4\vec{a_y} + 2\vec{a_y}}{6}$

prvi uvjet:

$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} \vec{a_x} & \vec{a_y} & \vec{a_z} \\ \frac{4}{6} & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{B_x}{\mu_0 \mu_{r2}} - \frac{2}{\mu_0} & \frac{B_y}{\mu_0 \mu_{r2}} + \frac{1}{\mu_0} & \frac{B_z}{\mu_0 \mu_{r2}} \end{vmatrix} = \vec{0} \quad / \cdot 3 \mu_0 \mu_{r2}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a_x} & \vec{a_y} & \vec{a_z} \\ 2 & 2 & 1 \\ B_x - 6 & B_y + 3 & B_z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{a_x}\left[2B_z - B_y - 3\right] - \vec{a_y}\left[2B_z - B_x + 6\right] + \vec{a_z}\left[2B_y - 2B_x + 18\right] = \vec{0}$$

$B_z = 0.5 B_x - 3$

$B_y = B_x - 9$

drugi uvjet:

$\vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \Rightarrow \frac{4\vec{a_x} + 4\vec{a_y} + 2\vec{a_z}}{6}\left[(B_x - 8)\vec{a_x} + (B_y + 4)\vec{a_y} + B_z \vec{a_z}\right] = 0 \quad / \cdot 3$

$2B_x - 16 + 2B_y + 8 + B_z = 0$

$2B_x + 2B_x - 18 + 0.5B_x - 3 - 8 = 0$

$4.5 B_x = 29$

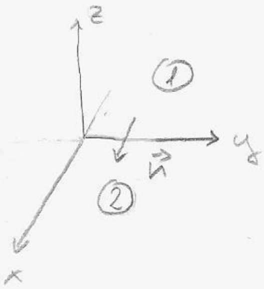
$B_x = -6.44 \text{ T}$

$B_y = -2.55 \text{ T}$

$B_z = 0.22 \text{ T}$

$\vec{B}_2 = 6.44\vec{a_x} - 2.55\vec{a_y} + 0.22\vec{a_z} \text{ T}$

(10). Strujni oblog $\vec{K} = 6.5\ \vec{a}_z$ [Am^{-1}] je zadan na granici $x=0$ koja razdvaja područje 1, $x<0$, za koje je jakost magnetskog polja $\vec{H}_1 = 10\ \vec{a}_y$ [Am^{-1}] i područje 2, $x>0$. Odredite jakost magnetskog polja u [Am^{-1}] u području 2.



- granica je zapravo yz ravnina na $x=0$
- $\vec{n}$ je jedinični vektor normale granice koji gleda iz područja 1 u područje dva

pretpostavimo: $\vec{H}_2 = H_x\vec{a}_x + H_y\vec{a}_y + H_z\vec{a}_z$

$\vec{a}_x \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ H_x & H_y - 10 & H_z \end{vmatrix} = \vec{K}$$

$\cancel{0} \cdot \vec{a}_x - H_z \cdot \vec{a}_y + (H_y - 10)\vec{a}_z = 6.5\ \vec{a}_z$

$H_z = 0$

$H_y - 10 = 6.5 \Rightarrow H_y = 16.5$

$\vec{B}_1 = \mu_0\mu_r \vec{H}_1 = \mu_0 \vec{H}_1$

$\vec{B}_{1n} = \vec{n}\cdot\vec{B}_1 = 0 \Rightarrow$ nema okomite komponente, a ona prelazi granici kontinuirano pa je i

$\vec{B}_{2n} = 0 \Rightarrow B_{2x} = 0 \Rightarrow H_x = 0$

$\vec{H}_2 = 16.5\ \vec{a}_y$

$H_2 = |H| = 16.5$ A/m

(11) Strujni oblog $\vec{K} = 9\ \vec{a}_y$ [A/m] je zadan na granici $z=0$ koja razdvaja područje 1, $z<0$, $\mu_{r1}=4$, i područje 2, $z>0$, $\mu_{r2}=3$. Ako je jakost magnetskog polja u području 2 $\vec{H}_2 = 14,5\ \vec{a}_x + 8\ \vec{a}_z$ [A/m], odredite komponentu jakosti magnetskog polja u [A/m] u području 1 okomitu na granicu.

$\vec{n}$ → jedinični vektor normale granice koja gleda iz područja 1 prema području 2

$\vec{n} = \vec{a}_z$ → granica $z=0$

rješenje je oblika

$$\vec{H}_1 = H_x\ \vec{a}_x + H_y\ \vec{a}_y + H_z\ \vec{a}_z$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \mu_{r1} H_1\ \vec{a}_x + \mu_0 \mu_{r1} H_y\ \vec{a}_y + \mu_0 \mu_{r1} H_z\ \vec{a}_z = \mu_0 4 H_x\ \vec{a}_x + \mu_0 4 H_y\ \vec{a}_y + \mu_0 4 H_z\ \vec{a}_z$$

$$= B_x\ \vec{a}_x + B_y\ \vec{a}_y + B_z\ \vec{a}_z$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \mu_{r2} \vec{H}_2 = 43.5 \mu_0\ \vec{a}_x + 24 \mu_0\ \vec{a}_z$$

uvjeti na granici:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 14,5 - H_x & -H_y & 8 - H_z \end{vmatrix} = 9\ \vec{a}_y$$

$$H_y\ \vec{a}_x + (14,5 - H_x)\ \vec{a}_y + 0 \cdot \vec{a}_z = 9\ \vec{a}_y$$

$$\underline{H_y = 0} \quad ; \quad H_x = 5.5$$

$$\vec{n} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\vec{a}_z \cdot \left[(43,5\mu_0 - 4\mu_0 H_x)\ \vec{a}_x - 4\mu_0 H_y\ \vec{a}_y + (24\mu_0 - 4\mu_0 H_z)\ \vec{a}_z \right] = 0$$

$$24\mu_0 - 4\mu_0 H_z = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z = 6$$

$$\vec{H}_1 = 5.5\ \vec{a}_x + 6\ \vec{a}_z$$

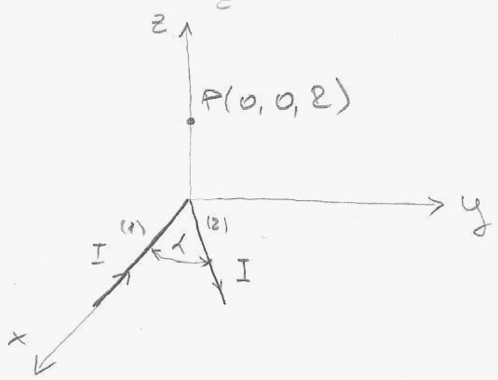
okomita komponenta je $H_{1O} = \vec{H}_1 \cdot \vec{n}$

$$H_{1O} = 6 \text{ A/m}$$

tangencijalna komponenta je: $\vec{H}_{1T} = \vec{n} \times \vec{H}_1 = 5,5\ \vec{a}_y$

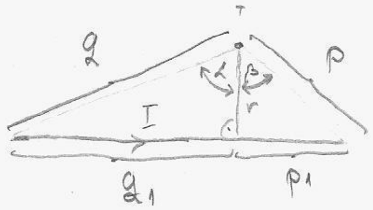
$$H_{1T} = 5,5 \text{ A/m}$$

(12) Strujnicom prema slici teče struja $I = 10\ A$. Odredite komponentu jakosti magnetskog polja u [A/m] u smjeru osi y u točki P, uz zadane vrijednosti $R = 1\ m$, $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$



→ strujnice možemo rastaviti na (1) i (2)

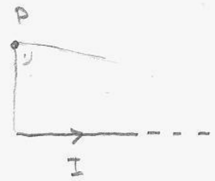
koristimo se sljedećim:



u točki T jakost mag. polja iznosi: $H = \frac{I}{4\pi r}\left[\sin\alpha + \sin\beta\right]$

$$= \frac{I}{4\pi r}\left[\frac{q_1}{q} + \frac{p_1}{p}\right]$$

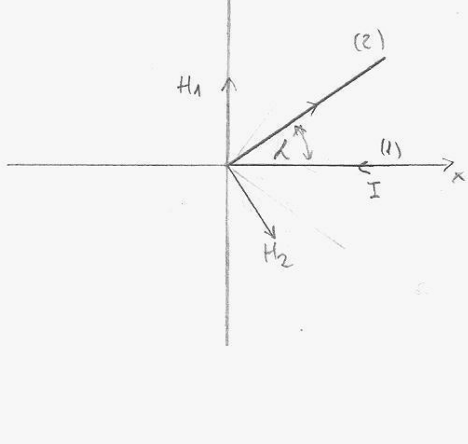
→ za strujnice (1) i (2) situacija je sljedeća:



$$H = \frac{I}{4\pi R}\cdot(\sin 0° + \sin 90°) = \frac{I}{4\pi R} = H_1 = H_2$$

→ po pravilu desne ruke treba odredi smjer jakosti mag. polja.

H_1 → u smjeru y-osi
H_2 → u smjeru +x i -y osi
} određuje se sa 3D slike!



$$\vec{H}_1 = H_1\,\vec{a_y} = \frac{I}{4\pi R}\,\vec{a_y}$$

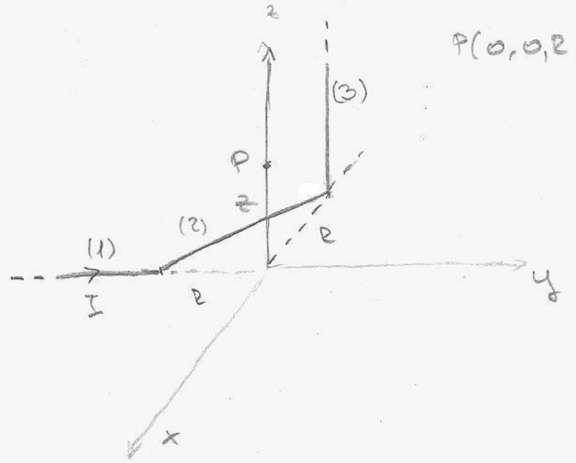
$$\vec{H}_2 = H_2\left[\cos(\alpha - 90°)\,\vec{a_x} + \sin(\alpha - 90°)\,\vec{a_y}\right]$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

$$= \frac{I}{4\pi R}\cdot\cos(\alpha - 90°)\,\vec{a_x} + \frac{I}{4\pi R}\left[1 + \sin(\alpha - 90°)\right]\vec{a_y}$$

$$= 0{,}398\,\vec{a_x} + 0{,}1066\,\vec{a_y}\ A/m$$

(13) Strujnom petljom prema slici protječe struja $I = 10\ A$. Odredite komponentu jakosti magnetskog polja u $[A\,m^{-1}]$ u točki P u smjeru osi x, pri čemu je $R = 1\ m$



$P(0,0,R) = P(0,0,z)$

(1) → na osi y od $-\infty$ do R

(2) → u xy ravnini od $y=R$ do $x=-R$

(3) → na $y=0$; $x=-R$; paralelan sa z osi

iznosi:

$$H_1 = \frac{I}{4\pi z}\left[1 + \frac{-R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] = \frac{I}{4\pi z}\left[\sin 90^\circ + \sin(-45^\circ)\right]$$

$$H_2 = \frac{I}{4\pi\sqrt{z^2+\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}}\left[\frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] = \frac{I}{4\pi\sqrt{z^2+\frac{R^2}{2}}}\left[\sin(30^\circ) + \sin(30^\circ)\right]$$

$$H_3 = \frac{I}{4\pi R}\left[1 + \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] = \frac{I}{4\pi R}\left[\sin 90^\circ + \sin(45^\circ)\right]$$

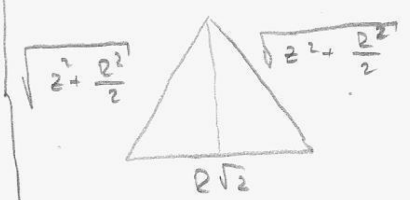
smjerovi:

(1): $\vec{n}_{01} = \vec{a}_x$

(2): $\vec{n}_{02} = \dfrac{\vec{a}_x + \vec{a}_y - \vec{a}_z}{\sqrt{3}}$

(3): $\vec{n}_{03} = \vec{a}_y$

za dio (2)



$\vec{H} = H_1 \cdot \vec{n}_{01} + H_2 \cdot \vec{n}_{02} + H_3 \cdot \vec{n}_{03}$

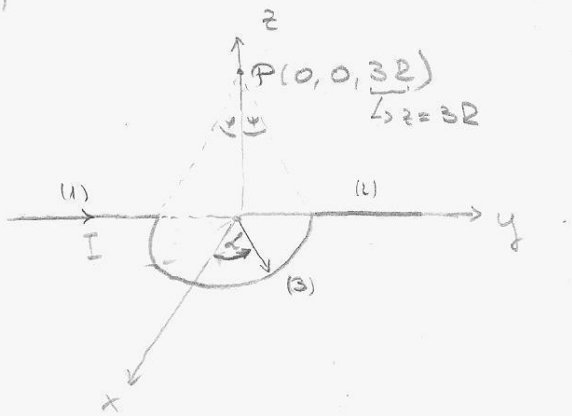
$\vec{H}_1 = 0{,}233\ \vec{a}_x$

$\vec{H}_2 = 0{,}375\ \vec{a}_x + 0{,}375\ \vec{a}_y - 0{,}375\ \vec{a}_z$

$\vec{H}_3 = 1{,}358\ \vec{a}_y$

$\vec{H} = 0{,}608\ \vec{a}_x + 1{,}733\ \vec{a}_y - 0{,}375\ \vec{a}_z$

14. Strujna petlja protjecana strujom 1 A prema slici leži u xy ravnini. Odredite jakost magnetskog polja u $[A\,m^{-1}]$ u smjeru osi x u točki $(0,0,3R)$, pri čemu je $R = 1$ m



$$\sin\varphi = \sin\psi = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

→ polje od djelova vodiča (1) i (2) jednako je polju beskonačno dugog pravca umanjenog za iznos koji nedostaje:

$$H_{12} = \frac{I}{2\pi z} - \frac{I}{4\pi z}\cdot(\sin\varphi + \sin\psi) = \{\sin\varphi = \sin\psi\}$$

$$= \frac{I}{2\pi z} - \frac{I}{2\pi z}\sin\varphi = \frac{I}{2\pi z}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

→ pravilo desne ruke za smjer:

$$\vec{H}_{12} = \frac{I}{2\pi z}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)\cdot \vec{a}_x$$

→ za dio vodiča (3):

$$H_3 = \frac{I}{4\pi}\int \frac{z\cdot\cos\alpha\,\vec{a}_x + z\cdot\sin\alpha\,\vec{a}_y + R\cdot\vec{a}_z}{\sqrt{(R^2+z^2)}^3}\cdot R\,d\alpha$$

$$H_{3x} = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{R\cdot z}{\sqrt{R^2+z^2}^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{I\cdot R\cdot z}{2\pi\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$H_{3y} = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{R\cdot z}{\sqrt{R^2+z^2}^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,d\alpha = \emptyset$$

$$H_{3z} = \frac{I}{4\pi}\,\frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\alpha = \frac{I R^2}{4\sqrt{R^2+z^2}^3}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_{12} + \vec{H}_3 = \left[\frac{I}{2\pi z}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \frac{I\,R\,z}{2\pi\sqrt{R^2+z^2}^3}\right]\vec{a}_x + \frac{I\,R^2}{4\sqrt{R^2+z^2}^3}\,\vec{a}_z$$

$$= 0{,}0514\,\vec{a}_x + 0{,}0079\,\vec{a}_z \;\; A/m$$