

STATIČKO STRUJNO POLJE

Naboji u jednolikom gibanju ($v = \text{konst.}$)

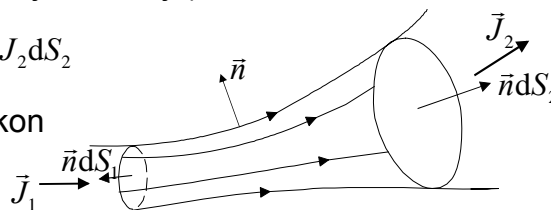
- Vektor gustoće struje \vec{J}

– Jednadžba kontinuiteta: $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0$

– Možemo uvesti koncept linija strujnog toka (\vec{J} je tangencijalna u svakoj točki linije)

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -J_1 dS_1 + J_2 dS_2$$

– Prvi Kirchhoffov zakon



Jednadžbe statičkog strujnog polja

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \vec{J} = \kappa \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi$$

- Diferencijalna jednadžba potencijala

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \vec{J} = \kappa \vec{E} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \varphi = 0$$

Analogija statičkog strujnog i statičkog električnog polja

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{array} \right\} \text{statičko elek. polje} \quad \left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \vec{J} = \kappa \vec{E} \end{array} \right\} \text{statičko strujno polje}$$

- Analogne veličine: $\vec{D} \leftrightarrow \vec{J}$ $\varepsilon \leftrightarrow \kappa$ $C \leftrightarrow G = \frac{1}{R}$

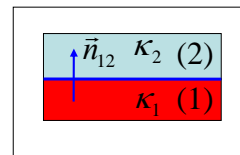
- Rješenja se preslikavaju iz statičkih električnih u statička strujna polja

$$G = \frac{1}{R} = \frac{\kappa}{\varepsilon} C$$

Uvjeti na granici dva vodiča (statičko polje)

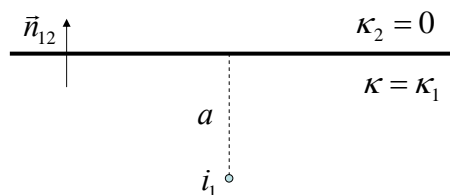
$$\oiint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0 \Rightarrow \vec{n}_{12} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow \vec{n}_{12} \times \left(\frac{\vec{J}_2}{\kappa_2} - \frac{\vec{J}_1}{\kappa_1} \right)$$



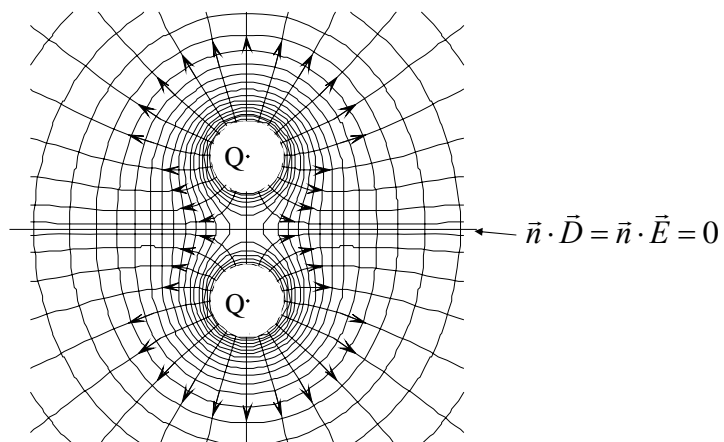
Točkasti strujni izvor ispred ravne granice vodič - izolator

- U vodiču ($\kappa = \kappa_1$) se nalazi točkasti strujni izvor i_1
- Na udaljenosti a nalazi se ravna granica s izolatorom ($\kappa_2 = 0$)

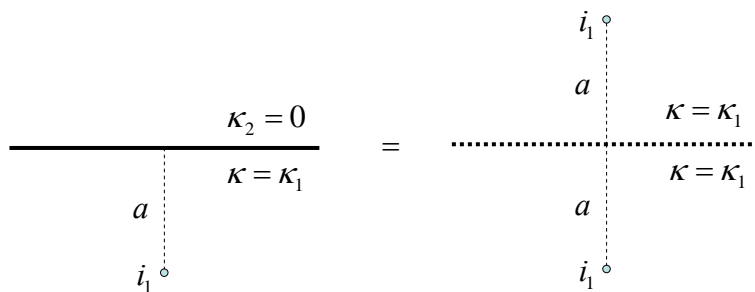


$$\kappa_2 = 0 \Rightarrow \vec{J}_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{12} \cdot \vec{J}_1 = \vec{n}_{12} \cdot \vec{J}_2 = 0 \Rightarrow J_{1n} = 0$$

- Taj problem je analogan problemu dva jednaka točkasta naboja u statičkom električnom polju



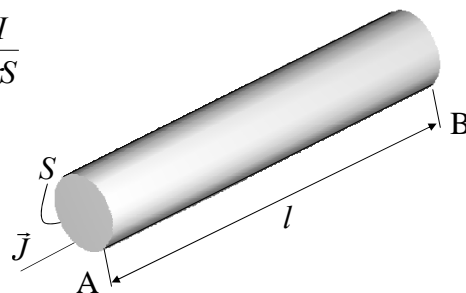
- Odslikavanje u statičkom strujnom polju



Ohmov zakon i električna vodljivost

- Ponašanje velikog broja vodiča
 - Linearni odnos između gustoće struje i jakosti električnog polja: $\vec{J} = \kappa \vec{E}$
 - Ako vodič ima konstantni presjek S onda su \vec{J} i \vec{E} konstantni u vodiču pa je ukupna struja kroz vodič:

$$I = JS = \kappa ES \Rightarrow E = \frac{I}{\kappa S}$$

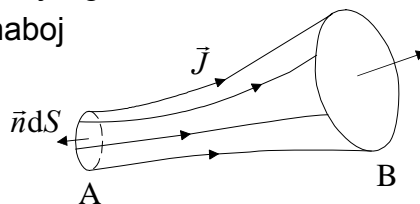


- Razlika potencijala između točaka A i B je:

$$U = U_{AB} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = El = \frac{I}{\kappa S} l \Rightarrow U = IR \quad ; \quad R = \frac{l}{\kappa S}$$

- Tok struje – disipacija energije (naboji se konstantno kreću prema točkama nižeg potencijala)
 - Nositelji naboja se stalno sudaraju sa strukturom atoma i predaju joj kinetičku energiju
 - To se očitava kao zagrijavanje materijala
- Razmotrimo mali element strujnog toka
 - U element kroz A ulazi naboj

$$dq = \vec{J} \cdot \vec{n} dS dt$$



- Taj se naboj nakon dt pomakne za $d\vec{s}$
- Pad potencijala od A do B je $\varphi(A) - \varphi(B) = \vec{E} \cdot d\vec{s}$
- Gubitak energije u elementarnom volumenu je:

$$dW = dq[\varphi(A) - \varphi(B)] = \vec{J} \cdot \vec{n} dS dt \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{J} \cdot \vec{E} dS ds dt = \vec{J} \cdot \vec{E} dV dt$$

- Slijedi da se unutar volumena V gubi snaga:

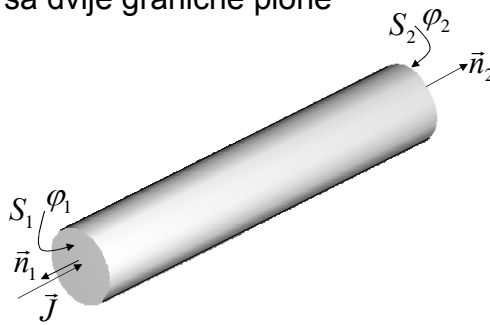
$$P = \frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

- Korištenjem identiteta

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{J}) = \varphi \nabla \cdot \vec{J} + (\nabla \varphi) \cdot \vec{J} = -\vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$P = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\varphi \vec{J}) dV = - \oint_S \varphi \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

- Razmotrimo vodič sa dvije granične plohe



- Vrijedi:

$$P = - \oint_S \varphi \vec{J} \cdot \vec{n} dS = I\varphi_1 - I\varphi_2 = UI = I^2 R$$

- Jouleov zakon

Elektromotorna sila

- Stalni tok struje po zatvorenoj petlji \rightarrow dotok energije $\vec{J} \cdot \vec{E}$ u jedinici vremena po jedinici volumena
- Tu energiju ne može osigurati statičko električno polje jer je:

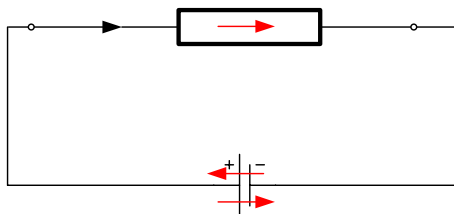
$$\oint_c \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = 0$$

- Za održanje stalnog toka struje \rightarrow izvori električnog polja koje nije konzervativno (baterije ...)
- Elektromotorna sila \rightarrow elektromotorno električno polje \vec{E}_m
- Ukupno polje je superpozicija konzervativnog i elektromotornog: $\vec{E}_u = \vec{E}_k + \vec{E}_m$
- Gustoća struje u prisutnosti \vec{E}_m je: $\vec{J} = \kappa(\vec{E}_k + \vec{E}_m)$

- Elektromotorna sila:

$$\text{EMS} = \oint_c (\vec{E}_k + \vec{E}_m) \cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint_c \frac{\vec{J}}{\kappa} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{S} \frac{l}{\kappa} = IR$$

- Drugi Kirchhoffov zakon



1. Ravni vodič polumjera $r_0 = 1$ cm, duljine $l = 5$ m ukopan je u zemlju provodnosti $\kappa = 0,01$ S/m na dubinu $h = 1$ m paralelno s površinom zemlje. Odrediti otpor rasprostiranja vodiča i razliku potencijala između točaka A i B na površini zemlje razmaknutih za $d = 1$ m ako iz vodiča istječe struja iznosa $I = 100$ A.

