EMP – Elektrostatika 1/3

~ Wolfman

1.

$$\vec{r} = 5\vec{x} + 10\vec{z}$$
$$\overrightarrow{r'} = 3\vec{y} + z\vec{z}$$
$$dl = dz$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \lambda\, dz \frac{5\vec{x} - 3\vec{y} + (10 - z)\vec{z}}{(25 + 9 + (10 - z)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Doprinosi u z smjeru će se poništiti tijekom integracije (zbog simetrije). Također će se doprinosi u y smjeru jedne žice poništiti s y doprinosima druge žice (opet simetrija). Zato treba računati samo x komponentu jakosti polja. Integrira se po varijabli z od –inf do +inf.

$$\overrightarrow{E_x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5\lambda dz}{(34 + (10 - z)^2)^{\frac{3}{2}}} = nać i\ tip\ integrala\ u\ tablici = 5.28676\ V/m$$

Ukupno polje je u promatranoj točki duplo veće, jer smo ovdje izračunali samo doprinos jedne žice. Dakle Eukupno=10.57 V/m

2.

$$\vec{r} = 4\vec{z}$$
$$\overrightarrow{r'} = x\vec{x} + y\vec{y}$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint \sigma\, dS \frac{4\vec{z} - x\vec{x} - y\vec{y}}{(x^2 + y^2 + 16)^{\frac{3}{2}}}$$

Napravimo prijelaz u polarne koordinate:

$$dS = rdrd\varphi$$
$$x = rcos\varphi$$
$$y = rsin\varphi$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint \sigma\, rdrd\varphi \frac{4\vec{z} - rcos\varphi\vec{x} - rsin\varphi\vec{y}}{(r^2 + 16)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \sigma \frac{4\vec{z} - rcos\varphi\vec{x} - rsin\varphi\vec{y}}{(r^2 + 16)^{\frac{3}{2}}} rdr$$

Komponente x i y su nula što se vidi direktno iz integrala (cos(fi) i sin(fi) od nula do 2PI su nula), ali i iz simetrije diska. Dakle preostaje z komponenta:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 4}{(r^2 + 16)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{4\pi\varepsilon} 2\pi \cdot \frac{5}{4\sqrt{41}} = 5.51\ MV/m$$

3.

Električni tok i Gaussov zakon:

$$\iint \vec{D}\vec{n}dS = \iiint \rho dV$$

Prvo ćemo iz poznate gustoće naboja izračunati D. D je uvijek okomit na sferu i istog je iznosa po jednoj sferi, pa onaj skalarni produkt vektora **D** i **n** možemo pisati kao samo D. Budući da je D konst. može ići van integrala.

$$D\iint dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta \int_1^2 \frac{5\sin^2\varphi}{r^2} r^2 dr$$

Objašnjenje gornjeg izraza. U izračunu naboja s desne strane jednakosti smo prešli u sferne koordinate. Granice su valjda jasne. R ide od 1 do 2 zato što moramo obuhvatiti sav naboj.

$$D \cdot 4\pi R^2 = 5\pi \cdot 2$$

Integral od dS je S, a to je površina sfere na kojoj računamo iznos vektora D. Uzimamo R=3, jer ćemo kroz tu sferu kasnije računati tok, pa nam taj D treba.

$$D = \frac{5}{18}$$

Konačno je naš tok:

$$\phi = \iint DdS = \frac{5}{18} \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot \pi = 10\pi = 31{,}42\ C$$

4.

$$\sigma = \frac{30nC}{\pi}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint \frac{\sigma dS}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

$$\vec{r} = 2\vec{z}$$

$$\vec{r'} = x\vec{x} + y\vec{y}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint \frac{\sigma dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$$

Opet idemo na polarne:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint \frac{\sigma r dr d\varphi}{\sqrt{r^2+4}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{r^2+4}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} \cdot 2\pi \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right) = 127.3\ V$$

5.

$$
\begin{aligned}
&\vec{F} = 8\vec{x} - 8\vec{y} + 4\vec{z}\ [mN] \\
&\vec{r_1} = (1, -1, 3) \\
&\vec{r_2} = (3, -3, 2) \\
&\overrightarrow{R_{21}} = \vec{r_1} - \vec{r_2} \\
&\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} Q_1 Q_2 \cdot \frac{\overrightarrow{R_{21}}}{R_{21}^3} \\
&\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} Q_1 Q_2 \cdot \frac{-2\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}}{(4+4+2)^{1.5}} \\
&(8\vec{x} - 8\vec{y} + 4\vec{z}) \cdot 10^{-3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} Q_1 Q_2 \cdot \frac{-2\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}}{(4+4+1)^{1.5}}
\end{aligned}
$$

Izjednačimo po komponentama. Recimo po x:

$$
\begin{aligned}
&8 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} Q_1 Q_2 \cdot \left(-\frac{2}{27}\right) \\
&Q_2 = -40.05\ \mu C
\end{aligned}
$$

6.

Postavit ćemo koordinatni sustav tako da nam zadana ravnina leži u xy ravnini. Primjetimo da je ta naša xy ravnina zakrenuta pod nekim kutovima u odnosu na xy ravninu u normalnom koordinatnom sustavu. To ćemo na kraju uzeti u obzir. Zasad smo postavili koordinatni sustav ovako zato da bi si olakšali život. :D U normalnom koordinatnom sustavu ćemo izračunati udaljenost ishodišta od zadane ravnine. U našem pomaknutom koordinatnom sustavu ćemo onda postaviti neku točku na izračunatu udaljenost od xy osi u z smjeru i dobit ćemo ekvivalentnu stvar. Dakle:

$$
\begin{aligned}
&\vec{r'} = x\vec{x} + y\vec{y} \\
&\vec{r} = Z\vec{z}
\end{aligned}
$$

Z predstavlja tu udaljenost ishodišta od naše ravnine. Ravnina je zadana kao 2x-3y+z=6. Dakle vektor normale je (2,-3,1). Provući ćemo pravac kroz ishodište (zadana točka čiju udaljenost od ravnine računamo) okomito na ravninu. Dakle vektor pravca je isto (2,-3,1). Pravac možemo zapisati kanonski i parametarski:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1} = t \\
&x = 2t \\
&y = -3t \\
&z = t
\end{aligned}
$$

Uvrstimo to u jednadžbu ravnine da dobijemo točku presjeka pravca i ravnine:

$$2 \cdot 2t - 3 \cdot (3t) + t = 6$$
$$t = \frac{3}{7}$$

Uvrstimo parametar u izraze za x, y i z da bi dobili točne koordinate točke. T(6/7,-9/7,3/7)

Dakle tražena udaljenost je $Z = \sqrt{\left(\frac{6}{7} - 0\right)^2 + \left(-\frac{9}{7} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{7} - 0\right)^2} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$

Dakle:

$$\vec{r} = \frac{3\sqrt{14}}{7}\vec{z}$$

Sada iz općenitog izraza za polje nabijene plohe:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint \sigma\, dS \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon}\iint dS \frac{Z\vec{z} - x\vec{x} - y\vec{y}}{(Z^2 + x^2 + y^2)^{1.5}}$$

Opet idemo na polarne (i zanemarujemo komponente uz x i y jer su one 0):

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr \cdot \frac{Z}{(Z^2 + r^2)^{1.5}} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon}$$

E sad, ovo je iznos polja u z smjeru našeg pomaknutog koordinatnog sustava. Mi se sad trebamo opet prešaltati natrag u normalni koordinatni sustav. Mi znamo da vektor jakosti polja mora djelovati u smjeru vektora koji je okomit na našu ravninu (to smo dobili i našim računom, ravnina je bila u xy, a smjer polja je u z). Dakle da bi dobili vektor jakosti polja u nezakrenutom koordinatnom sustavu, treba pomnožiti iznos polja koji smo izračunali (Ez) s jediničnim vektorom u smjeru vektora zadane ravnine. Već smo vidjeli da je taj vektor (2,-3,1). Jedinični je vektor tada:

$$\vec{n} = \frac{2\vec{x} - 3\vec{y} + \vec{z}}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{2\vec{x} - 3\vec{y} + \vec{z}}{\sqrt{14}}$$

Vektor jakosti polja je onda:

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon} \cdot \vec{n} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon} \cdot \frac{2\vec{x} - 3\vec{y} + \vec{z}}{\sqrt{14}} = -9.055\vec{x} + 13.58\vec{y} - 4.52\vec{z}$$

Dakle tražena komponenta u x smjeru je Ex=-9.055 V/m.

7.

Električni tok je:

$$\phi = \iint \vec{D} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Zadan je vektor **D**=10x^3**x**, te dio ravnine površine S=2m^2, okomitom na x-os, u x=2.

Dakle, **D**=10*2^3**x** i **dS**=dS**x.**

$$\phi = \iint \vec{D} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint 80 \cdot \vec{x} \cdot \vec{x} \cdot dS = 80 \iint dS = 80 \cdot S = 80 \cdot 2 = 160\ C$$

8.

Označimo s 4 točku gdje je r=4, s 2 gdje je r=2, te s 1 gdje je r=1. Trebamo razliku potencijala između 4 i 1, ali fora je u tome što polje ima jedan oblik u području r>2, a drugi oblik na r<2. Općenito, razlika potencijala:

$$\varphi(A) - \varphi(B) = -\int_B^A \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Zadano je:

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{5}{r^2}\vec{r}, \qquad 0 < r < 2$$
$$\overrightarrow{E_2} = \frac{2.5}{r}\vec{r}, \qquad r > 2$$

Možemo pisati:

$$\varphi(4) - \varphi(2) = -\int_2^4 \overrightarrow{E_2} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_2^4 \frac{2.5}{r}\vec{r} \cdot \vec{r} dr = -\int_2^4 \frac{2.5}{r} dr = -2.5(ln4 - ln2)$$
$$\varphi(2) - \varphi(1) = -\int_2^4 \frac{5}{r^2} dr = -\frac{5}{2} => \varphi(2) = \varphi(1) - \frac{5}{2}$$
$$\varphi(4) - \left(\varphi(1) - \frac{5}{2}\right) = -2.5(ln4 - ln2)$$
$$\varphi(A) - \varphi(B) = \varphi(1) - \varphi(4) = 2.5(ln4 - ln2) + \frac{5}{2} = 4.2328\ V$$

9.

Imamo osam naboja raspoređenih u pravilni osmerokut. Postavimo ih tako u ravninu da dva leže na x osi (nacrtati sliku!). Onda za jedan takav naboj (koji je na +strani x osi) možemo pisati (nalazi se na kružnici polumjera 5):

$$\overrightarrow{r_1} = 5\vec{x}$$

Za točku u kojoj se nalazi naboj na koji silu računamo možemo pisati:

$$\overrightarrow{r_2} = 2\vec{z}$$

$$\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = 2\vec{z} - 5\vec{x}$$

Sila tog jednog naboja koji se nalazi na x=5 je:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} Q_1 Q_2 \cdot \frac{2\vec{z} - 5\vec{x}}{(25+4)^{1.5}}$$

Treba primijetiti da će se komponenta u x smjeru poništiti s komponentom sile u x smjeru naboja koji se nalazi dijametralno suprotno na kružnici u odnosu na naš naboj (onaj koji je na x=-5). Svaki naboj koji leži u vrhu pravilnog osmerokuta ima naboj koji se nalazi dijametralno suprotno (po dijagonali), pa će se i u ukupnoj sili sve komponente u xy smjeru poništiti. Dakle treba samo izračunati komponentu sile u z smjeru jednog naboja te to pomnožiti s 8 (jer ima 8 naboja) i to je ukupna sila.

$$F_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon} Q_1 Q_2 \cdot \frac{2}{29^{1.5}} = 2.3 \cdot 10^{-7}\ N$$
$$F_{UK} = 8F_z = 1.84\ \mu N$$

10.

$$\vec{r} = 3\vec{x} + 3\vec{y} + \vec{z}$$
$$\overrightarrow{r'} = x\vec{x}$$
$$\vec{R} = (3-x)\vec{x} + 3\vec{y} + \vec{z}$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \lambda\, dl \frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|^3}$$
$$dl = dx$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \lambda\, dx \frac{(3-x)\vec{x} + 3\vec{y} + \vec{z}}{((3-x)^2 + 3^2 + 1^2)^{1.5}}$$

Traži nas se samo y komponenta:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot \frac{3dx}{((x-3)^2 + 10)^{1.5}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{3}{5} = 26.9627 \frac{V}{m}$$

Vektor gustoće električnog toka je:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$D_y = \varepsilon E_y = 0.239\ nC\ m^{-2}$$

11.

Opet imamo 4 međusobno simetrično postavljena naboja (u kutovima kvadrata). Gledamo kolika je sila na peti naboj koji se nalazi točno tri metra iznad sjecišta dijagonala. Dakle, sve je simetrično, doprinosi ukupnoj sili pojedinih naboja u xy smjeru će se dokinuti, pa treba samo izračunati silu u z smjeru jednog naboja i pomnožiti to s 4 da dobijemo ukupnu silu.

$$\overrightarrow{r_1} = 4\vec{x}$$
$$\overrightarrow{r_2} = 3\vec{z}$$

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} Q_1 Q_2 \cdot \frac{3\vec{z} - 4\vec{x}}{(9+16)^{1.5}} =$$
$$F_{1z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} Q_1 Q_2 \cdot \frac{3}{125} = 4.314 \cdot 10^{-7}\, N$$
$$F_{UK} = 4 \cdot F_{1z} = 1.73\, \mu N$$

12.

$$\vec{r} = 3\vec{x}$$
$$\overrightarrow{r'} = z\vec{z}$$
$$dl = dz$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int\int \lambda\, dz \cdot \frac{3\vec{x} - z\vec{z}}{(9+z^2)^{1.5}}$$

Opet će z komponenta biti nula (uvjerite se integriranjem ili nacrtajte sliku pa uočite simetriju).

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot \frac{3dz}{(z^2+9)^{1.5}} = \frac{3\lambda}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-8} \frac{dz}{(z^2+9)^{1.5}} + \int_{8}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+9)^{1.5}} \right) = \frac{3\lambda}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{2}{9} - \frac{16}{9\sqrt{73}} \right)$$
$$= 11.45 \frac{V}{m}$$

13.

Potencijal linijske raspodjele naboja:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\lambda dl}{\left| \vec{r} - \overrightarrow{r'} \right|}$$

Naša krivulja po kojoj računamo gornji linijski naboj je kvadratna petlja u xy ravnini. Mi ćemo ju podijeliti na 4 dijela (po stranicama kvadrata). Pa ćemo tako prvo parametrizirati stranicu od (3,-3,0) do (3,3,0).

$$\overrightarrow{r'} = (1-t)(3\vec{x} - 3\vec{y}) + t(3\vec{x} + 3\vec{y}) = 3\vec{x} + (6t-3)\vec{y}$$

Parametar t ide od nula do jedan. Za t=0 dobivamo točku (3,-3,0), za t=1 točku (3,3,0), a za 0<t<1 dobivamo sve ostale točke između, pa smo se uvjerili da je parametrizacija u redu.

$$\vec{r} = 5\vec{z}$$
$$\vec{r} - \overrightarrow{r'} = -3\vec{x} - (6t-3)\vec{y} + 5\vec{z}$$
$$dl = \sqrt{(3')^2 + ((6t-3)')^2}dt = \sqrt{36}dt = 6dt$$

Ona ' u izrazu za dl predstavlja derivaciju komponente po parametru t.

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^1 \frac{\lambda \cdot 6dt}{\sqrt{9 + (6t-3)^2 + 25}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{3}{\sqrt{34}} \right) = 8.8822\, V$$

Isto tako postupimo za ostale stranice kvadrata, no uvijek ćemo dobiti isto (uvjerite se integriranjem!). Dakle ukupan potencijal je:

$$\varphi_{UK} = 4 \cdot 8.8822 = 35.53\, V$$

14.

$$\sigma = 10^{-9}\cos^2\varphi\,\frac{C}{m^2}$$
$$R = 4$$
$$Z = 2$$

$$\overrightarrow{r'} = x\vec{x} + y\vec{y}$$
$$\vec{r} = Z\vec{z} = 2\vec{z}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \sigma dS\,\frac{-x\vec{x} - y\vec{y} + 2\vec{z}}{(x^2+y^2+4)^{1.5}}$$

Opet su x i y komponente nula.

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon}\iint \frac{\sigma dS}{(x^2+y^2+4)^{1.5}} = \frac{2}{4\pi\varepsilon}\iint \frac{10^{-9}\cos^2\varphi \cdot r dr d\varphi}{(r^2+4)^{1.5}} = \frac{10^{-9}}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^4 \frac{r dr}{(r^2+4)^{1.5}}$$
$$= \frac{10^{-9}}{2\pi\varepsilon}\cdot 0.2764\pi = 15.61\ V/m$$

15.

$$\vec{E} = -\frac{16}{r^2}\vec{r}$$
$$A\left(2, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$B(4, 0, \pi)$$
$$\varphi(A) - \varphi(B) = -\int_B^A E dr = \int_4^2 \frac{16}{r^2} dr = -4\ V$$

16.

Naboji iznosa Q1=10nC se nalaze u točkama (1,0,0), (0,0,0) i (1,1,1), a naboj iznosa Q2=20nC u (0,0,1). Traži se sila na ovaj od 20nC.

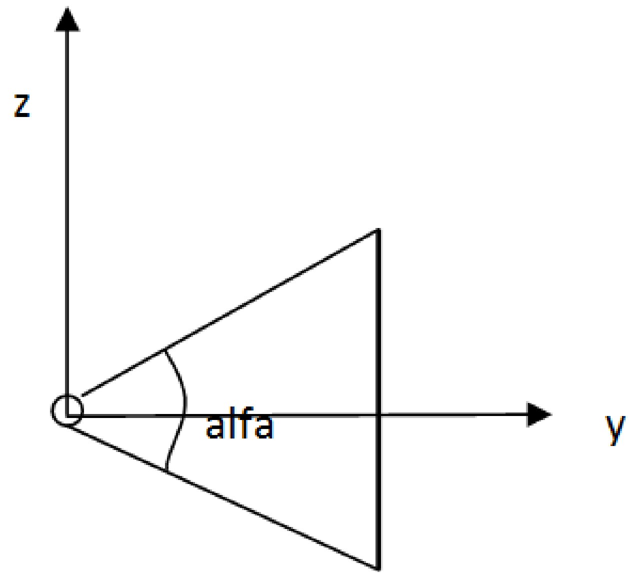
$$\overrightarrow{F_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}Q_1Q_2\cdot\frac{(-1,0,1)}{(1+1)^{1.5}}$$

Ovo (-1,0,1) je vektor koji spaja točku (1,0,0) i (0,0,1). Tako odredimo sile ostala 2 naboja:

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}Q_1Q_2\cdot\frac{(0,0,1)}{(1)^{1.5}}$$
$$\overrightarrow{F_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}Q_1Q_2\cdot\frac{(-1,-1,0)}{(1+1)^{1.5}}$$
$$\overrightarrow{F_{UK}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon}Q_1Q_2}{2^{1.5}}(-1,0,1) + \frac{1}{4\pi\varepsilon}Q_1Q_2(0,0,1) + \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon}Q_1Q_2}{2^{1.5}}(-1,-1,0)$$
$$= 0.6355(-1,0,1) + 1.7975(0,0,1) + 0.6355(-1,-1,0)[\mu N]$$
$$= -1.27\vec{x} - 0.6355\vec{y} - 2.4325\vec{z}$$
$$\left|\overrightarrow{F_{UK}}\right| = \sqrt{1.27^2 + 0.6355^2 + 2.4325^2} = 2.82\ \mu N$$

17.

Ovaj zadatak je po meni pomalo neprecizno zadan. Naime, iz teksta zadatka bi se moglo zaključiti da se traži koliki postotak toka prolazi kroz zadani do ravnine y=6 u odnosu na ukupni tok koji prolazi kroz tu ravninu. No, autor zadatka je zapravo mislio u odnosu na ukupni tok oko linijskog naboja. Ako tako shvatimo zadatak onda je stvar jednostavna.



U radijalnom smjeru je tok svuda jednak. Ukupni tok se širi radijalno na sve strane. Dakle, pod kutom od 2PI. Dio tog toka koji prolazi kroz zadani dio ravnine y=6 za -1<z<1, je onaj dio toka za naznačeni radijalni kut alfa. Prema tome traženi postotak možemo dobiti kao omjer kutova:

$$P = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 100\% = 2 \cdot \frac{\tan^{-1}\frac{1}{6}}{2\pi} \cdot 100\% = 5.2568\ \%$$

18.

$$Q = 18\ nC$$
$$R = 3m$$
$$S = 4\pi\ m^2$$
$$Gauss: \iint \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q$$

Budući da se radi o sferi, vektor D je na sferi konstantnog iznosa i uvijek je okomit na sferu:

$$D \iint dS = Q$$
$$D \cdot 4R^2\pi = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4R^2\pi} = 1.5915 \cdot 10^{-10}$$

Nama treba tok kroz dio površine sfere iznosa S.

$$\phi = \iint DdS = D \iint dS = D \cdot S = D \cdot 4\pi = 1.999938\ nC \approx 2\ nC$$

19.

$$\sigma = 3(x^2 + y^2 + 1)^{1.5} \frac{nC}{m^2}$$
$$\vec{r} = 1\vec{z}$$
$$\vec{r'} = x\vec{x} + y\vec{y}$$
$$\vec{r} - \vec{r'} = -x\vec{x} - y\vec{y} + \vec{z}$$
$$\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3 = (x^2 + y^2 + y)^{1.5}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \sigma dS \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint 3 \cdot 10^{-9} \cdot (x^2 + y^2 + 1)^{1.5} dxdy \frac{-x\vec{x} - y\vec{y} + \vec{z}}{(x^2 + y^2 + y)^{1.5}}$$
$$= \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon}\iint (-x\vec{x} - y\vec{y} + \vec{z}) dxdy$$

Opet x i y komponente su nula:

$$E_x = \frac{-3 \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon}\int_{-2}^{2} xdx \int_{-2}^{2} dy = 0$$
$$E_y = 0$$
$$E_z = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon}\int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} dy = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon} \cdot 16 = 431.402 \frac{V}{m}$$

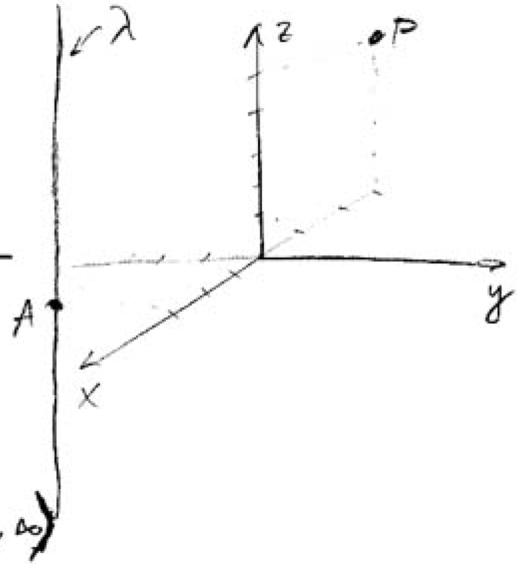
20.

$$\lambda(x, y, z) = 2x + 3y - 4z$$
$$Linija\ je\ od\ (2,1,5)\ do\ (4,3,6)(pravac).\ Parametrizacija\ pravca:$$
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{1} = t$$
$$x = 2t + 2$$
$$y = 2t + 1$$
$$z = t + 5$$
$$dl = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dt = \sqrt{4 + 4 + 1} dt = 3dt$$
$$Q = \int_l \lambda(t) dl = \int_0^1 (4t + 4 + 6t + 3 - 4t - 20) \cdot 3dt = \int_0^1 (18t - 39)\, dt = 9 - 39 = -30\ C$$

(21.) $\lambda = 0{,}4\ \mu C/m$

$A(3,-3,\emptyset)$

$P(-3,0,5)$



$$\frac{x-3}{\emptyset} = \frac{y+3}{\emptyset} = \frac{z}{1} = \mathcal{Z}$$

$x = 3$
$y = -3$
$z = \mathcal{Z}$

$\mathcal{Z} \in (-\infty, \infty)$

$\vec{r} = -3\vec{a_x} + 5\vec{a_z}$

$\vec{r'} = 3\vec{a_x} - 3\vec{a_y} + \mathcal{Z}\vec{a_z}$

$\vec{r} - \vec{r'} = -6\vec{a_x} + 3\vec{a_y} + (5-\mathcal{Z})\vec{a_z}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int \lambda\, d\mathcal{Z} \cdot \frac{\left(-6\vec{a_x} + 3\vec{a_y} + (5-\mathcal{Z})\vec{a_z}\right)}{\left(45 + (5-\mathcal{Z})^2\right)^{3/2}}$$

$E_z = \emptyset$

$$E_x = \frac{-6}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot \frac{d\mathcal{Z}}{\left(45+(5-\mathcal{Z})^2\right)^{3/2}} = \frac{-6\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\mathcal{Z}}{90\sqrt{\mathcal{Z}^2+45}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{\lambda}{30\pi\varepsilon_0} \cdot 2 =$$

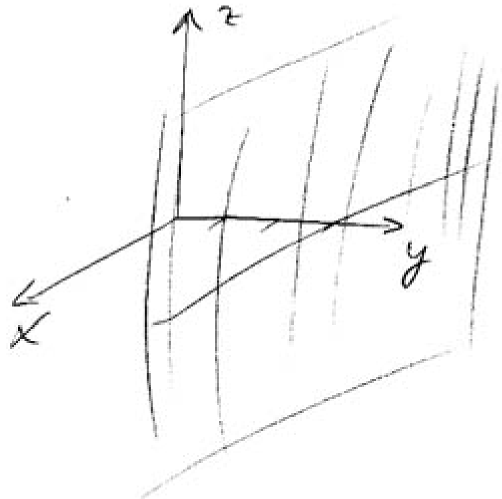
$$= -958{,}67\ V/m$$

$$E_y = \frac{3\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\left(45+z^2\right)^{3/2}} = +479{,}34\ V/m$$

$$\vec{E} = -958{,}67\vec{a_x} + 479{,}34\vec{a_y}\ [V/m]$$

(22.) $y = 3$

$\sigma = \frac{1}{600\pi}\ \mu C/m^2$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \sigma \cdot dS \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r} = x\vec{a_x} + y\vec{a_y} + z\vec{a_z}$

$\vec{r}' = 3\vec{a_y}$

$\vec{r} - \vec{r}' = x\vec{a_x} + (y-3)\vec{a_y} + z\vec{a_z}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \sigma \cdot \frac{(x\vec{a_x} + (y-3)\vec{a_y} + z\vec{a_z})}{(x^2+z^2+(y-3)^2)^{3/2}}\,dx\,dz$$

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{r\cos\varphi \cdot r\,dr}{(r^2+(y-3)^2)^{3/2}} = \emptyset$$

$\Downarrow \emptyset$

$E_z = \emptyset$

$$E_y = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{(y-3)\cdot r\,dr}{(r^2+(y-3)^2)^{3/2}} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y-3 = a \\ u = r^2+a^2 \\ du = 2r\,dr \end{array} \right|$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{2r\,dr}{(r^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{\infty} u^{-3/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot(-2)\Big|_{a^2}^{\infty} = -\left(0 - \frac{1}{|a|}\right) = \frac{1}{|a|}$$

$$\Rightarrow E_y = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi \cdot \frac{a}{|a|} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi \cdot \frac{y-3}{|y-3|} = 29{,}96 \cdot \frac{y-3}{|y-3|}$$

$$\Rightarrow \vec{E_y} = \begin{cases} 29{,}96\,\vec{a_y}, & y > 3 \\ -29{,}96\,\vec{a_y}, & y < 3 \end{cases}$$

23.

$$\vec{r} = \vec{a_x} + \vec{a_y} + \vec{a_z}$$

$$\vec{r'} = z\vec{a_z}$$

$$\vec{r} - \vec{r'} = \vec{a_x} + \vec{a_y} + (1-z)\vec{a_z}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \cdot dz \cdot \frac{(\vec{a_x} + \vec{a_y} + (1-z)\vec{a_z})}{(2 + (1-z)^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-z)\,dz}{(2+(1-z)^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u\,du}{(2+u^2)^{3/2}} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{u^2+2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

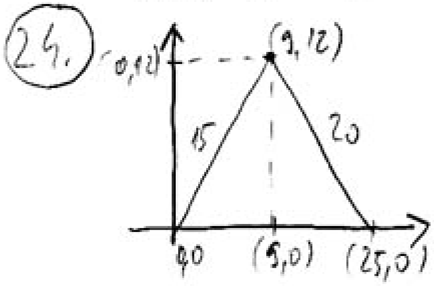
$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot (\emptyset - \emptyset) = \emptyset$$

$$E_x = E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{((1-z)^2+2)^{3/2}} = \cdots = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{a_x} + \vec{a_y}\right)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \emptyset$$

24.



$$\sqrt{x^2+y^2} = 15 \quad /^2$$

$$\sqrt{(x-25)^2+y^2} = 20 \quad /^2 \; +$$

$$x = 9$$

$$y = 12$$

$$\vec{E_1} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(0{,}09,\ 0{,}12)}{0{,}20^3} \equiv 0{,}09\vec{a_x} + 0{,}12\vec{a_y}$$

$$= 4793{,}36\,\vec{a_x} + 6391{,}147\,\vec{a_y}$$

$$\vec{E_2} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-0{,}16,\ 0{,}12)}{0{,}20^3} = -1797{,}51\,\vec{a_x} + 1348{,}132\,\vec{a_y}$$

$$\vec{E_{uk}} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = 2995{,}85\,\vec{a_x} + 7739{,}279\,\vec{a_y}$$

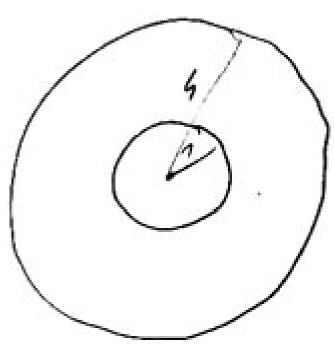
$$|\vec{E_{uk}}| = 8298{,}88 = 8{,}3\ \mathrm{kV/m}$$

25.

$R = 1\,m$

$\rho(r) = 1 - r^3$

$r = 4\,m$



Gauss:

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho\, dV$$

$$D\cdot\iint dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 (1-r^3)\cdot r^2\, dr$$

$$D\cdot 4r^2\pi = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{6}$$

$$D = \frac{1}{6\cdot r^2} \Rightarrow D = \varepsilon_0 E \Rightarrow E = \frac{1}{6r^2\varepsilon_0} = \frac{1}{96\varepsilon_0}$$

26.

$$D_1 = \begin{cases} \frac{5r^2}{4}, & r \le 2 \\ \frac{20}{r^2}, & r > 2 \end{cases}$$

1° $r \le 2$

$$\oiint \vec{D}_1\, d\vec{S} = \iiint \rho\, dV$$

$$D_1\cdot\iint dS = \iiint \rho\, dV$$

$$D_1\cdot 4\pi r^2 = 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^r r^2\cdot\rho(r)\, dr$$

$$\frac{5r^2}{4}\cdot\cancel{4\pi}\cdot r^2 = \cancel{4\pi}\int_0^r \rho(r)\cdot r^2\, dr$$

$$\frac{5r^4}{4} = \int_0^r \rho(r)\cdot r^2\, dr \;\Big/ \frac{d}{dr}$$

$$\frac{5\cdot\cancel{4}r^3}{\cancel{4}} = \rho(r)\cdot r^2$$

$$\boxed{\rho(r) = 5r,\ r \le 2}$$

2° $r > 2$

$$D_2\cdot\cancel{4\pi}r^2 = \cancel{4\pi}\cdot\int_0^2 \rho(r)\cdot r^2\, dr$$

$$\frac{20}{\cancel{r^2}}\cdot\cancel{r^2} = \int_0^2 \rho(r)\cdot r^2\, dr \;\Big/ \frac{d}{dr}$$

$$0 = \rho(r)\cdot r^2$$

$$\Rightarrow \rho(r) = 0,\ r > 2$$