Elektromagnetizam

1. Faradayev zakon i Lenzovo pravilo

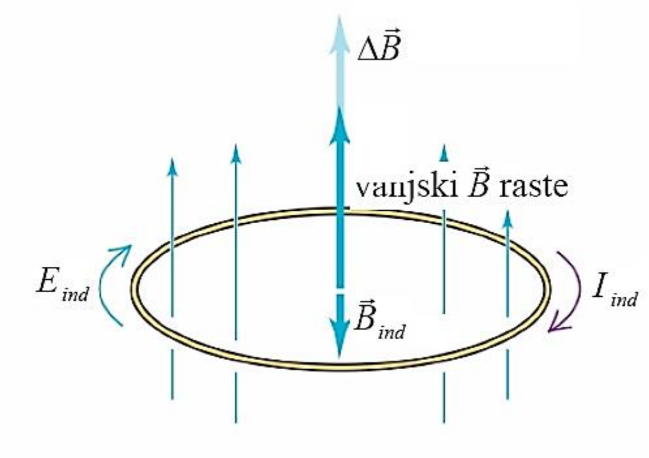
Faradayev zakon

Inducirani napon u vodljivoj petlji površine S koja je obrubljena konturom c razmjerna je vremenskoj promjeni magnetskog toka:

$$u_{ind} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS$$

Lenzovo pravilo

Inducirana struja ima takav smjer da se suprotstavlja promjeni magnetskog toka. Smjer sile inducirane struje u vodiču je suprotan smjeru gibanju vodiča – nastoji se poništiti uzrok indukcije.



2. Induciranje napona zbog promjene toka i gibanja: integralni i diferencijalni oblik

$$u_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS + \oint_c (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l}$$

U ovom izrazu prvi član predstavlja napon transformacije, koji nastaje kao posljedica promjene magnetskog toka u vremenu, a drugi napon gibanja, koji nastaje kao posljedica gibanja petlje u magnetskom polju. Primjenom Stokesovog zakona dobivamo diferencijalni oblik:

$$\nabla \times \boldsymbol{E_{ind}} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

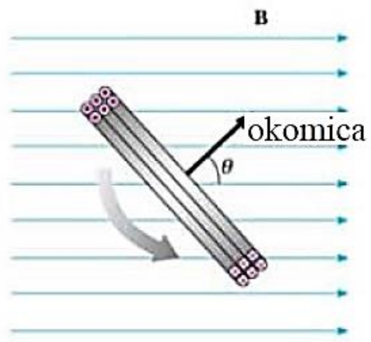
3. Načelo rada generatora

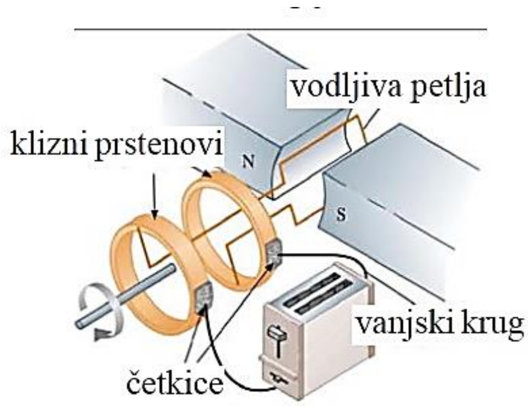
Generator pretvara mehanički rad u električnu energiju. To se postiže rotiranjem vodljivog zavoja površine S oko vlastite osi u homogenom magnetskom polju indukcije B.

$$\phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \cdot S = B \cdot S \cdot \cos(\alpha) = B \cdot S \cdot \cos(\omega t)$$

$$u_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

Ako imamo N zavoja spojenih u seriju, inducirani napon bit će N puta veći. Vidimo da se generira napon sinusno promjenjiv u vremenu.

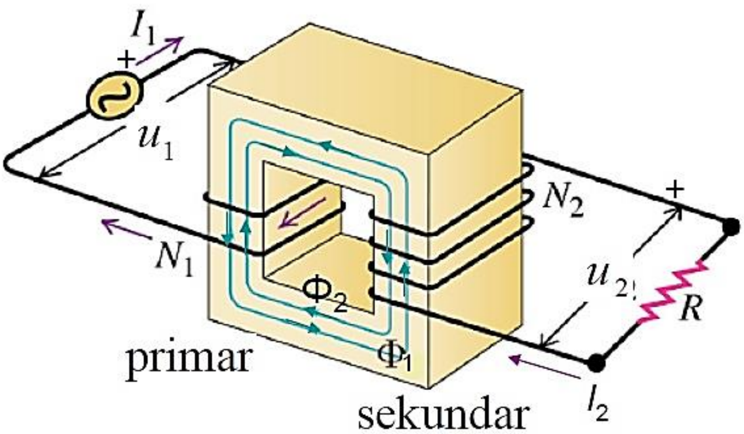




4. Načelo rada transformatora

Transformator se sastoji od 2 namota: primarnog s N_1 zavoja i sekundarnog s N_2 zavoja namotanih na zajedničku feromagnetsku jezgru. Vremenski promjenjiva struja kroz primarni namot stvara vremenski promjenjiv tok ϕ_m kroz feromagnetsku jezgru. Taj magnetski tok inducirat će napone na krajevima primara i sekundara:

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\phi_m}{dt} \; ; \; u_2 = N_2 \cdot \frac{d\phi_m}{dt}$$



$$\phi = N_1 \cdot I_1 = N_2 \cdot I_2$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Snaga ostaje očuvana:

$$p_1 = u_1 \cdot i_1 = u_2 \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot i_2 \cdot \frac{N_2}{N_1} = u_2 \cdot i_2 = p_2$$

5. Napon samoindukcije i međuindukcije

Vremenski promjenjiv magnetski tok ψ induciran vremenski promjenjivom strujom *i* i obuhvaćen tim istim strujnim krugom izražavamo preko induktiviteta L:

$$L = \frac{\psi}{I}$$

Napon samoindukcije:

$$u_{ind} = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot i) = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

Vremenski promjenjiv magnetski tok ψ_{21} induciran vremenski promjenjivom strujom i_1 u strujnom krugu '1' obuhvaćen strujnim krugom '2' izražavamo preko međuinduktiviteta M_{21} = M:

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1}$$

Napon međuindukcije:

$$u_{ind,2} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M \cdot i_1) = -M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

6. Maxwellovo proširenje kružnog zakona

Ampereov zakon: $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$

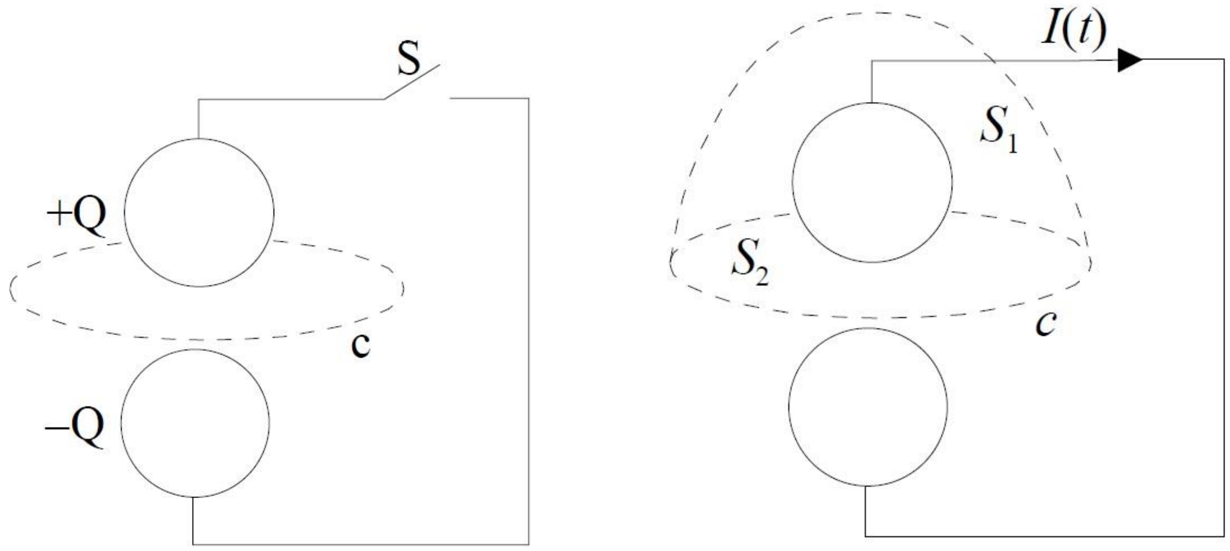
Identitet: $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$

Jednadžba kontinuiteta:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

Uočimo kontradikciju: u nekim slučajevima Ampereov zakon ne vrijedi.



Maxwellovo proširenje: $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{D})$$

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Primjenom Stokesovog zakona dobivamo integralni oblik:

$$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I + \frac{d\phi_e}{dt} = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS$$

U ovoj jednadžbi prvi član predstavlja *provodne struje* koje prolaze kroz bilo koju površinu omeđenu sa c, a drugi član su *struje pomaka* koje se pojavljuju na mjestima promjene električnog toka, poput kondenzatora na gornjim slikama. U statičkim uvjetima drugi član jednak je nuli.

7. Maxwellove jednadžbe u integralnom i diferencijalnom obliku

	DIFERENCIJALNI	**INTEGRALNI**
Gaussov zakon za električno polje	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_s$	$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS = \iiint_V \rho_s \cdot dV$
Gaussov zakon za magnetsko polje	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	$\oiint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS = 0$
Faradayev zakon	$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS$
Ampere – Maxwellov zakon	$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J_S} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{J_S} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS$

8. Poyntingov teorem

Ukupna trenutna snaga predana od elektromagnetskog polja slobodnim i vezanim nabojima koji se nalaze u stanju gibanja pretara se jednim dijelom u neki drugi reverzibilni oblik energije (ubrzanje, usporenje – kinetička energija, smanjenje ili povećanje potencijalne energije), a drugim dijelom u ireverzibilni oblik energije – toplinu. Zbog toga imamo neki gubitak energije. Zakon očuvanja energije govori nam da snaga predana nabojima od elektromagnetskog polja mora biti iskazana kao smanjenje energije polja ili kao tok snage prenesene poljem iz izvora. Prema ideji polja, govorimo o energiji koja je pohranjena u samom polju. Energija koja ostaje ili se prenosi pomoću elektromagnetskog polja nazivano elektromagnetskom energijom.

Poyntingov teorem iskazuje zakon očuvanja energije za elektromagnetsko polje izravna je posljedica Maxwellovih jednadžbi i vrijedi samo u elektrodinamici.

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = q \cdot (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l} = q \cdot \left(\boldsymbol{E} + \frac{d\boldsymbol{l}}{dt} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot d\boldsymbol{l} = q \cdot \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = q \cdot \boldsymbol{E} \cdot \frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = q \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}\,; q = \rho dV$$

$$dP = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} \cdot dV = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} dV$$

$$P = \iiint_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} dV$$

Identitet: $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$

Maxwellove jednadžbe:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J_S} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) - \boldsymbol{E} \cdot \left(\boldsymbol{J_S} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J_S} - \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$
$$= -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J_S} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}\right)$$

Integracijom po volumenu i primjenom teorema o divergenciji dobivamo:

$$\iiint_V \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J_S} dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}\right) dV = \oiint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{n} \cdot dS$$

Prvi član ovog izraza označava snagu kojom elektromagnetsko polje snabdijeva naboje u gibanju. Drugi član označava snagu proisteklu od vremenske promjene gustoća električnog i magnetskog polja. Poyntingov vektor, koji označava gustoću toka elektromagnetske snage, jednak je:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

9. Maxwellove jednadžbe u fazorskoj domeni

Ovakve jednadžbe koriste se u vremenski sinusno promjenjivim poljima (harmoničkim poljima).

Vektor jakosti električnog polja u harmoničkim poljima:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_x(\vec{r}) \cos[\omega_0 t + \psi_x(\vec{r})] \overrightarrow{a_x} + E_y(\vec{r}) \cos[\omega_0 t + \psi_y(\vec{r})] \overrightarrow{a_y} + E_z(\vec{r}) \cos[\omega_0 t + \psi_z(\vec{r})] \overrightarrow{a_z}$$

$$Acos(\omega t + \psi) = Re\{Ae^{j\psi}e^{j\omega t}\} = Re\{\underline{A}e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\{[E_x(\vec{r})e^{j\psi_x(\vec{r})}\overrightarrow{a_x} + E_y(\vec{r})e^{j\psi_y(\vec{r})}\overrightarrow{a_y} + E_z(\vec{r})e^{j\psi_z(\vec{r})}\overrightarrow{a_z}]e^{j\omega_0 t}\} = Re\{\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega_0 t}\}$$

U fazorskoj domeni parcijalne derivacije po vremenu svode se na množenje s kompleksnim brojem jω:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = Re\{j\omega \underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}\}$$

Maxwellove jednadžbe u fazorskoj domeni:

$$\nabla \cdot \underline{\vec{D}} = \underline{\rho_S}$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}$$

10. Kompleksni oblik Poyntingovog teorema

$$\vec{E} = E_x \cos(\omega_0 t + \psi_{E_x}) \overrightarrow{a_x} + E_y \cos\left(\omega_0 t + \psi_{E_y}\right) \overrightarrow{a_y} + E_z \cos(\omega_0 t + \psi_{E_z}) \overrightarrow{a_z}$$

$$\vec{H} = H_x \cos(\omega_0 t + \psi_{H_x}) \overrightarrow{a_x} + H_y \cos\left(\omega_0 t + \psi_{H_y}\right) \overrightarrow{a_y} + H_z \cos(\omega_0 t + \psi_{H_z}) \overrightarrow{a_z}$$

$$\overrightarrow{N_{sr}} = \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{E} \times \vec{H}) dt$$

U sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima zanimaju nas srednje, a ne trenutne vrijednosti toka energije. Identitet:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N_{sr}} &= \frac{1}{2}\left[E_y \cdot H_z \cdot \cos\left(\psi_{E_y} - \psi_{H_z}\right) - E_z \cdot H_y \cdot \cos(\psi_{E_z} - \psi_{H_y})\right] \overrightarrow{a_x} \\
&+ \frac{1}{2}\left[E_z \cdot H_x \cdot \cos(\psi_{E_z} - \psi_{H_x}) - E_x \cdot H_z \cdot \cos(\psi_{E_x} - \psi_{H_z})\right] \overrightarrow{a_y} \\
&+ \frac{1}{2}\left[E_x \cdot H_y \cdot \cos\left(\psi_{E_x} - \psi_{H_y}\right) - E_y \cdot H_x \cdot \cos(\psi_{E_y} - \psi_{H_x})\right] \overrightarrow{a_z} = Re\left\{\frac{1}{2}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}'})\right\}
\end{aligned}$$

<u>**H'**</u> predstavlja kompleksno konjugirani fazor od <u>**H**</u>.

Srednji gubitci za sinusno promjenjiva polja:

$$P_{g,sr} = \frac{1}{2\kappa} \iiint_V \left|\underline{\vec{J}}\right|^2 dV$$

Srednja energija pohranjena u magnetskom polju:

$$W_{m,sr} = \frac{\mu}{4} \iiint_V \left|\underline{\vec{H}}\right|^2 dV$$

Srednja energija pohranjena u električnom polju:

$$W_{e,sr} = \frac{\varepsilon}{4} \iiint_V \left|\underline{\vec{E}}\right|^2 dV$$

Primjenom Faradayevog i Ampereovog zakona:

$$\oiint_S (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}'}) \cdot \vec{n}\, dS = -\iiint_V \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}'} dV + j\omega \iiint_V (\varepsilon \cdot E^2 - \mu \cdot H^2) dV$$

$$P_N = \oiint_S \underline{\vec{N}} \cdot \vec{n}\, dS = -P_{g,sr} + 2j\omega\left(W_{e,sr} - W_{m,sr}\right)$$

P_N se naziva prividna srednja snaga koja u jedinici vremena proteče kroz zatvorenu plohu S.

11. Jednadžba ravnog vala

Razmatramo prostor ispunjen idealnim dielektrikom as značajkama ε=konst, μ=konst i κ=0. U prostoru ne postoje izvori polja ($\rho_s=0$, $J_s=0$). U tom slučaju Maxwellove jednadžbe imaju oblik:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J_S} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Primjenjujemo rotor na Faradayev zakon:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Identitet: $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A}$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \Delta \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B})$$

Prema Gaussovom zakonu za električno polje $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$.

Iz Ampereovog zakona slijedi: $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu(\nabla \times \boldsymbol{H}) = \mu\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

Valna jednadžba:

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

Zbog jednostavnosti gledamo rješenje ove jednadžbe u samo jednoj prostornoj koordinati, tj. pretpostavljamo da su $E_y=E_z=0$. Takve valove nazivano *ravnim valovima.* Takvi valovi u prirodi ne postoje, ali se neki valovi u određenim situacijama (na velikim udaljenostima od izvora polja i tla) mogu dobro opisati ravnim valovima.

12. Putujući val – brzina širenja vala

Rješenje jednadžbe ravnog vala je funkcija oblika:

$$E_x(z,t) = Af\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + Bg(t + z\sqrt{\mu\varepsilon})$$

Oblik funkcija f i g ovisi u problemu koji rješavamo. Funkcija f giba se u smjeru osi +z brzinom $1/(\mu\varepsilon)^{0.5}$. Funkcija g giba se u smjeru osi −z tom istom brzinom. Ako promatramo jednu točku i definiramo njene pozicije u određenim trenucima, možemo odrediti brzinu prostiranja vala. Funkcija ima istu vrijednost u obje točke pa i njeni argumenti moraju biti jednaki:

$$t_1 - z_1\sqrt{\mu\varepsilon} = t_2 - z_2\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$v = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

U vakuumu je brzina prostiranja vala jednaka brzini svjetlosti:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = c$$

13. Valna impedancija

Valna impedancija je omjer komponente električnog i magnetskog polja. U materijalu s gubitcima ona je kompleksni broj, a u materijalu bez gubitaka realni.

U materijalu s gubitcima:

$$Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot e^{jarctg\frac{\alpha}{\beta}}$$

U materijalu bez gubitaka imamo valni otpor:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{E}{H}$$

U vakuumu ona iznosi 120π=377Ω.

14. Sinusni ravni val – valna dužina i fazna konstanta

Jednadžba sinusnog ravnog vala je:

$$y = Asin(\omega t - \beta x)$$

Val se prostire brzinom $v_f = \lambda f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Ovaj izraz povezuje prostornu i vremensku promjenu polja. Valna dužina λ jednaka je:

$$\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Fazna konstanta β jednaka je:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Fazna konstanta je mjera brzine promjene faze s udaljenošću z u određenom trenutku t = t_0.

15. Jednadžba vala koji se giba u proizvoljnom smjeru

Ako odaberemo koordinatni sustav takav da se val prostire u proizvoljnom smjeru, a ne u smjeru osi z, brzine promjene faza u smjeru koordinatnih osi će biti manje od brzine kojom se faza mijenja u smjeru prostiranja koji je okomit na ravnine konstantnih faza. Val se giba u smjeru:

$$\vec{r} = x\overrightarrow{a_x} + y\overrightarrow{a_y} + z\overrightarrow{a_z}$$

Brzina promjene faze jednaka je:

$$\vec{\beta} = \beta_x\overrightarrow{a_x} + \beta_y\overrightarrow{a_y} + \beta_z\overrightarrow{a_z}$$

Tada se ravni val prostire u smjeru $\vec{\beta}$ kao

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

16. Struja magnetiziranja zavojnice s feromagnetskom jezgrom

Struja magnetiziranja je struja koja protječe u praznom hodu kroz zavojnicu s feromagnetskom jezgrom spojenom na izvor napona. To je struja koja je potrebna za postizanje magnetskog toka u svitku. Ako je zavojnica spojena na izvor sinusnog napona u_1,i tok u feromagnetskoj jezgri konstantnog presjeka je sinusnog valnog oblika:

$$u_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\phi = \frac{1}{N_1} \int u_1 dt$$

Struja i_1 koja teče kroz zavojnicu povezana je s magnetskim poljem H na linearan način Ampereovim zakonom:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = N_1 i_1$$

Ako je l_{sr}srednja duljina silnica u jezgri, imamo:

$$i_1 = \frac{H l_{sr}}{N_1}$$

Vrijedi $B = \mu H$, a kako je magnetska permeabilnost promjenjiva veličina, ne postoji linearna ovisnost između *B* i *H*. Zato će sinusni valni oblik funkcije magnetskog toka i indukcije stvoriti vremenski periodičan, nesinusni valni oblik jakosti magnetskog polja i struje u zavojnici. Struju magnetiziranja možemo konstruirati grafički pomoću krivulje histereze.

17. Određivanje dielektrične konstante izolacije koaksijalnog kabela mjerenjem brzine prostiranja

Idealni dvožični vod i koaksijalni kabel su prijenosni sustavi u kojima su vektori E i H transverzalni i nemaju komponente u smjeru prostiranja. Uzduž linije putuje direktni ravni val.

Fazna brzina vala u dielektriku bez gubitaka u vakuumu je:

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = c$$

U sredstvu u kojem je $\mu_r = 1$ faznu brzinu možemo izraziti kao:

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Ako je impedancija tereta različita od karakteristične impedancije linije, doći će do refleksije signala. Ako je linija otvorena, doći će do potpune refleksije. Ako je magnetska permeabilnost jednaka 1, mjerenjem vremena između početka pobudnog impulsa i refleksije na otvorenoj liniji poznate duljine možemo odrediti brzinu širenja valova u sredstvu, a na temelju toga i dielektričnu konstantu tog sredstva.

$$\varepsilon_r = \frac{c^2}{v_f^2}$$

18. Mjerenje promjene magnetskog toka pomoću elektromagnetske indukcije

Inducirani napon u zavojnici povezan je s promjenom ulančenog magnetskog toka kao

$$u = \frac{d\psi}{dt}$$

Ako je na stezaljke zavojnice spojen otpornik, struja u krugu će, ukoliko je teret R vrlo velik u odnosu na unutrašnju impedanciju zavojnice, biti:

$$i = \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{1}{R}$$

Integriramo li struju po vremenu, dobivamo ukupni broj naboja koji proteče krugom tijekom promjene magnetskog toka:

$$Q = \int idt = \frac{1}{R} \int \frac{d\psi}{dt} dt = \frac{1}{R} \int d\psi = \frac{1}{R}(\psi_2 - \psi_1) = \frac{\Delta\psi}{R}$$

$$\Delta\psi = Q \cdot R$$

Ako je struja, a time i tok u početnom trenutku bio jednak 0, možemo odrediti ulančeni tok, a onda i međuinduktivitet zavojnica:

$$M = \frac{\psi}{I}$$

19. Određivanje međuinduktiviteta sustava zavojnica na temelju mjerenja ekvivalentnog induktiviteta serijskog spoja

Međuinduktivitet u sustavu dviju zavojnica može se računski odrediti kao:

$$M = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \frac{\psi_{21}}{I_2}$$

I_1 i I_2 su struje kroz zavojnicu 1 i 2 respektivno, ψ_{12} je ulančeni magnetski tok kroz zavojnicu 2 stvoren strujom I_1, a ψ_{21} ulančeni magnetski tok kroz zavojnicu 1 stvoren strujom I_2. Napon na serijskom spoju će biti:

$$u = L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \pm 2M \frac{di}{dt}$$

Na svakoj zavojnici će se zbog promjene struje inducirati napon samoindukcije te napon međuindukcije. Kroz obje zavojnice protječe ista struja pa je i napon međuindukcije isti, a on može imati pozitivan ili negativan predznak, ovisno o tome potpomažu li se ili poništavaju tokovi kroz zavojnice. Ako izlučimo derivaciju struje, napon možemo izraziti preko ekvivalentnog induktiviteta serijskog spoja zavojnica:

$$u = L_{ekv} \frac{di}{dt}$$

$$L_{ekv} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Zavojnice spajamo u seriju i mjerimo ekvivalentni induktivitet. Zatim jednu zavojnicu prespajamo tako da joj zamijenimo stezaljke. Ukoliko su se magnetski tokovi poništavali, sada će se potpomagati i obrnuto pa će se obrnuti predznak uz 2M u jednadžbi. Od većeg ekvivalentnog induktiviteta oduzimamo manji i imamo:

$$\Delta L_{ekv} = L_1 + L_2 + 2M - L_1 - L_2 + 2M = 4M$$

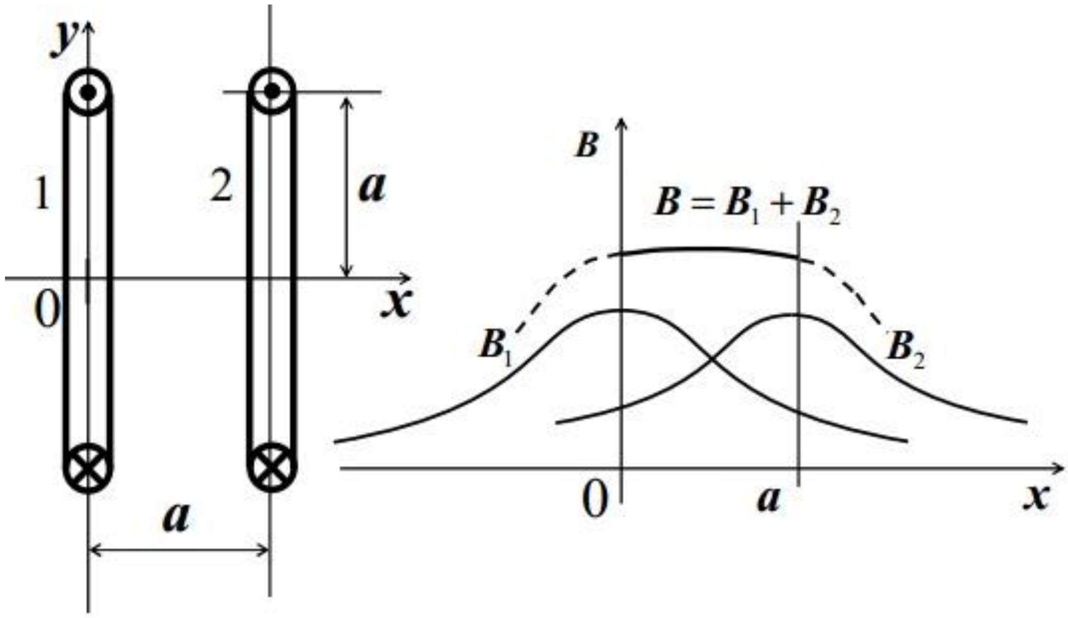
$$M = \frac{\Delta L_{ekv}}{4}$$

<u>Provjera</u>: uzimamo veći ekvivalentni induktivitet i uvrštavamo:

$$M = \frac{L_{ekv} - L_1 - L_2}{2}$$

20. Helmholtzovi svitci

Helmholtzovi svitci koriste se za precizno dobivanje uniformnih magnetskih polja kada prostor u kojem je polje uniformno mora biti lako dostupan. U velikom dijelu prostora između svitaka polje se na njihovoj osi značajnije ne mijenja. Koriste se za generiranje vremenski stalnih magnetskih polja te za generiranje promjenjivih polja niskih frekvencija.



21. Pokus levitirajućeg prstena – inducirani napon, struja i sila

Uređaj se sastoji od ravne zavojnice s feromagnetskom jezgrom koja dijelom izlazi iz zavojnice. Na jezgru je nataknut prsten načinjen od vodljivog nemagnetičnog materijala koji se, ukoliko uređaj nije priključen na izvor napona, nalazi naslonjen na zavojnicu. Ako na zavojnicu spojimo izvor dovoljno velikog sinusoidnog napona, prsten će levitirati na određenoj visini.

Struja kroz zavojnicu stvorit će magnetsko polje čije će silnice unutar zavojnice biti približno paralelne s osi zavojnice, a izvan zavojnice tvorit će zakrivljene, u sebe zatvorene linije. U svakom položaju prstena magnetsko polje zavojnice imat će aksijalnu i radijalnu komponentu:

$$\overrightarrow{B_z} = B_{z0}\sin(\omega t)\overrightarrow{a_z}$$

$$\overrightarrow{B_r} = B_{r0}\sin(\omega t)\overrightarrow{a_r}$$

Inducirano električno polje po obodu prstena povezano je s aksijalnom komponentom magnetske indukcije i dobivamo ga preko Faradayevog zakona:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E}(b,t) = -\frac{\omega b B_{z0}}{2}\cos(\omega t)\overrightarrow{a_{\alpha}}$$

gdje je b polumjer prstena. Inducirani napon će biti:

$$e = \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\omega \cdot 2\pi b^2 \cdot B_{z0}}{2}\cos(\omega t)$$

Ako je impedancija prstena $Z_p = \sqrt{R_p^2 + \left(\omega L_p\right)^2}$, inducirana struja u prstenu bit će jednaka:

$$i_p = \frac{e}{Z_p} = -\frac{\omega \pi b^2 B_{z0}}{Z_p}\cos(\omega t - \varphi_p)$$

Fazni kut impedancije prstena:

$$\varphi_p = arctg\,\frac{\omega L_p}{R_p}$$

Ako se prsten nalazi u magnetskom polju indukcije B, sila kojom polje djeluje na infinitezimalni segment vodiča dl jednaka je:

$$d\vec{F} = i_p d\vec{l} \times \vec{B}$$

Ukupna sila na prsten jednaka je:

$$F = i_p 2\pi b B_{r0} \sin(\omega t)$$

Aksijalna komponenta uzrokuje silu u radijalnom smjeru, a radijalna komponenta uzrokuje silu u aksijalnom smjeru, no ona je jednaka nuli ukoliko je prsten postavljen vodoravno.