

Elektromagnetska polja

3. domaća zadaća ak. god. 2007./2008.

- skenirani postupci rješavanja, verzija: v0.1.
- navedena rješenja nisu potvrđena kao točna

by: Tywin



1. U vakuumu je zadana jakost električnog polja jednačbom $\mathbf{E} = x z \mathbf{a}_y$ u [kV/m]. Odredite gustoću energije električnog polja u [J/m³] u točki (1m,5m,7m), pri čemu je točka označena u obliku (x, y, z).

Rješenje: 0.000217 J/m³

2. U vakuumu je zadana jakost magnetskog polja jednačbom $\mathbf{H} = 200x \mathbf{a}_y$ u [A/m]. Odredite gustoću energije magnetskog polja u [mJ/m³] u točki (2m,5m,1m), pri čemu je točka označena u obliku (x, y, z).

Rješenje: 201.06 mJ/m³

3. Odredite amplitudu vala u [V/m] zadanog izrazom $\mathbf{E}(z,t) = 10\sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x - 15\sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$ [V/m] u $t = 0$, $z = 0.75\lambda$.

Rješenje: 18.03 V/m

4. U vakuumu je električno polje zadano jednačbom $\mathbf{E}(z,t) = 10 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$ [V/m]. Odredite srednju snagu u [W] koja prolazi krugom radijusa 1.5 m u ravnini $z=2m$.

Rješenje: 0.9375 W

5. U vakuumu je električno polje zadano jednačbom $\mathbf{E}(z,t) = 150 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$ [V/m]. Odredite srednju snagu u [W] koja prolazi pravokutnikom stranica 3cm i 1.5cm u ravnini $z = 2m$.

Rješenje: 0.0134 W

6. Vlažno tlo ima vodljivost 10^{-3} [Sm⁻¹] i relativnu dielektričnost 2.5. Odredite amplitudu gustoće pomačnih struja u [μA/m²] u točki u kojoj je $E = 6 \cdot 10^{-6} \sin(9 \cdot 10^9 t)$ [V/m].

Rješenje: 1.195 μA/m²

7. U prostoru je jakost električnog polja zadana izrazom $\mathbf{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$. Odredite amplitudu (pozitivan broj) jakosti magnetskog polja u [A/m] ukoliko je $E_m = 10$ [V/m], $\beta = 0.6 \text{ m}^{-1}$, $\omega = 100000 \text{ rad/s}$.

Rješenje: 47.75 V/m

8. U prostoru je jakost električnog polja zadana izrazom $\mathbf{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$. Odredite amplitudu (pozitivan broj) magnetske indukcije u [mT] ukoliko je $E_m = 10$ [V/m], $\beta = 0.6 \text{ m}^{-1}$, $\omega = 10000 \text{ rad/s}$.

Rješenje: 0.06 mT

9. Za materijal koji ima vodljivost 5 [Sm⁻¹] i $\epsilon_r=1.5$ jakost električnog polja zadana je izrazom $E = 250 \sin(10^{10} t)$ [V/m]. Odredite frekvenciju u [GHz] pri kojoj gustoće pomačne i provodne struje imaju jednake amplitude.

Rješenje: 59.92 GHz

- ① U vakuumu je zadana jakost električnog polja jednačicom $\vec{E} = xz \vec{a}_y$ [kV/m]. Odredite gustoću energije električnog polja u [J/m³] u tački (1m, 5m, 7m), pri čemu je tačka označena u obliku (x, y, z).

→ prema formuli iz prvog cilusa (2. str. Formula za 1. MI by I V A N)

$$w_e = \frac{\epsilon |\vec{E}|^2}{2} = \frac{\epsilon_0 |\vec{E}|^2}{2}$$

$$\vec{E} = xz \vec{a}_y \Big|_{(1, 5, 7)} = 7000 \vec{a}_y \text{ V/m} \Rightarrow E = 7000 \text{ V/m}$$

$$w_e = 0.000217 \text{ J/m}^3$$

- ② U vakuumu je zadana jakost magnetskog polja jednačicom $\vec{H} = 200x \vec{a}_y$ [A/m]. Odredite gustoću energije magnetskog polja u [mJ/m³] u tački (2m, 5m, 1m), pri čemu je tačka označena u obliku

$$w_m = \frac{\mu |\vec{H}|^2}{2} = \frac{\mu_0 |\vec{H}|^2}{2}$$

$$\vec{H} = 200x \vec{a}_y \Big|_{(2, 5, 1)} = 400 \vec{a}_y \Rightarrow H = 400 \text{ A/m}$$

$$w_m = 201.06 \text{ mJ/m}^3$$

- ③ Odredite amplituda vala u $[V/m]$ zadanog izrazom
 $\vec{E}(z,t) = 10 \sin(\omega t - \beta z) \vec{a}_x - 15 \sin(\omega t - \beta z) \vec{a}_y \quad [V/m]$
 u $t=0 \quad z=0.75\lambda$

\rightarrow znamo: $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\vec{E}(z,t) = 10 \sin(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}) \vec{a}_x - 15 \sin(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}) \vec{a}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(0.75\lambda, 0) &= 10 \sin(-0.75 \cdot 2\pi) \vec{a}_x - 15 \sin(-0.75 \cdot 2\pi) \vec{a}_y \\ &= 10 \vec{a}_x - 15 \vec{a}_y \end{aligned}$$

$$E = |\vec{E}| = \sqrt{10^2 + 15^2} = 18.03 \text{ V/m}$$

- ④ U vakuumu je električno polje zadano jednačicom
 $\vec{E}(z,t) = 10 \cos(\omega t - \beta z) \vec{a}_x \quad [V/m]$. Odredite srednju snagu
 u $[W]$ koja prolazi krugom radijusa 1.5 m u ravini $z=2$.

$$\vec{E}(z,t) = 10 \cos(\omega t - \beta z) \vec{a}_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \vec{a}_x$$

$$\text{iz } \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \text{ slijedi}$$

$$\vec{H} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos(\omega t - \beta z) \vec{a}_y = H_0 \cos(\omega t - \beta z) \vec{a}_y$$

$$H_0 = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{E_0}{Z} \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - \beta z) \vec{a}_z$$

$$\vec{N}_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{E} \times \vec{H}) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 H_0 \cos^2(\omega t - \beta z) dt \vec{a}_z$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2}$$

$$N_{sr} = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{E_0^2}{2Z}$$

$$P_{sr} = \iint_S N_{sr} dS = N_{sr} \cdot S = N_{sr} \cdot r^2 \pi$$

$$P_{sr} = \frac{E_0^2 r^2 \pi}{2 \cdot Z} = 0.9375 \text{ W}$$

- ⑤ U vakuumu je električno polje zadano jednačinom $\vec{E}(z,t) = 150 \sin(\omega t - \beta z) \vec{a}_x$ [V/m]. Odredite srednju snagu u [W] koja prolazi pravobutničkom stranica 3 cm i 1.5 cm u ravni $z=2$.

→ analogno kao i u 4. zadatku

$$\vec{E} = E_0 \sin(\omega t - \beta z) = E_0 \cos(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}) \quad (E_0 = 150)$$

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2})$$

$$H_0 = \frac{E_0}{Z}; \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi$$

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}) \vec{a}_z$$

$$\vec{N}_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{N} dt = \frac{E_0 H_0}{2} \vec{a}_z$$

$$N_{sr} = \frac{E_0^2}{2Z}$$

$$P_{sr} = \iint_S N_{sr} dS = N_{sr} \cdot S = N_{sr} \cdot a \cdot b = \frac{E_0^2 \cdot a \cdot b}{2Z}$$

$$= 0.0134 \text{ W}$$

- ⑥ Vlažno tlo ima vodljivost 10^{-3} [S/m] i relativnu dielektričnost 2.5. Odredite amplitudu gustoće pomaknute struje u [$\mu\text{A/m}^2$] u točki u kojoj je $E = 6 \cdot 10^{-6} \sin(9 \cdot 10^9 t)$ [V/m]

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{J}_s \rightarrow$ slobodna gustoća struje; $\epsilon \vec{E} \rightarrow$ provodna gustoća struje

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow$ gustoća struje pomaka

$$J_{pom} = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot 6 \cdot 10^{-6} \frac{d \sin(9 \cdot 10^9 t)}{dt}$$

$$= \epsilon_0 \epsilon_r 6 \cdot 10^{-6} \cdot \cos(9 \cdot 10^9 t) \cdot 9 \cdot 10^9$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \cos(9 \cdot 10^9 t)}{\text{amplituda}}; \quad \epsilon_r = 2.5$$

$$J_{max} = 1.195 \frac{\mu\text{A}}{\text{m}^2}$$

⑦ U prostoru je jakost električnog polja zadana izrazom $\vec{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z) \vec{a}_y$. Odredite amplitudu (pozitivan broj) jakosti magnetnog polja u $[A/m]$ ukoliko je $E_m = 10 [V/m]$, $\beta = 0.6 [\frac{1}{m}]$, $\omega = 10^6 [\frac{rad}{s}]$

$$\vec{E} = A e^{-\lambda z} \cos(\omega t - \beta z + \delta) \vec{a}_y$$

$$\vec{H} = \frac{A}{Z} e^{-\lambda z} \cos(\omega t - \beta z + \delta) \vec{a}_z$$

$$\lambda = 0 ; \delta = -\frac{\pi}{2}$$

$$H_m = \frac{E_m}{Z} ; Z = \frac{\omega \mu}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} e^{j \arctan \frac{\lambda}{\beta}} = \frac{\omega \mu}{\beta}$$

$$H_m = \frac{E_m \beta}{\omega \mu} ; \text{ ništa ne govore pa je } \mu = \mu_0$$

$$= \frac{E_m \beta}{\omega \mu_0} = 47.75 \text{ } V/m$$

⑧ U prostoru je jakost električnog polja zadana izrazom $\vec{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z) \vec{a}_y [V/m]$. Odredite amplitudu (pozitivan broj) magnetske indukcije u $[mT]$ ukoliko je $E_m = 10 [V/m]$, $\beta = 0.6 [\frac{1}{m}]$, $\omega = 10^5 [\frac{rad}{s}]$.

$$\vec{E} = A e^{-\lambda z} \cos(\omega t - \beta z + \delta) \vec{a}_y$$

$$\vec{H} = \frac{A}{Z} e^{-\lambda z} \cos(\omega t - \beta z + \delta) \vec{a}_z$$

$$\lambda = 0 ; \delta = -\frac{\pi}{2}$$

$$H_m = \frac{A}{Z} = \frac{E_m}{Z} = \frac{E_m \beta}{\omega \mu}$$

$$B_m = \mu H_m = \frac{E_m \beta}{\omega} = 0.06 \text{ mT}$$

9) Za materijal koji ima vodljivost 5 [S/m] i $\epsilon_r = 1.5$ jakost električnog polja zadana je izrazom $E = 250 \sin(10^{10} t) \text{ [V/m]}$. Odredite frekvenciju ω [GHz] pri kojoj gustoće pomacne i provodne struje imaju jednake amplitude.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$I_{\text{pom}} = I_{\text{prov}} \quad | : S$$

$$J_{\text{pom}} = J_{\text{prov}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \kappa E$$

$$\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial t} = \kappa E$$

$$\epsilon_0 \epsilon_r \cdot 250 \frac{\partial \sin(\omega t)}{\partial t} = \kappa \cdot 250 \sin(\omega t)$$

$$\epsilon_0 \epsilon_r 250 \omega \cos(\omega t) = \kappa 250 \sin(\omega t)$$

→ za jednake amplitude te $\omega = 2\pi f$

$$\epsilon_0 \epsilon_r 250 \cdot 2\pi f = \kappa 250$$

$$f = \frac{\kappa}{\epsilon_0 \epsilon_r 2\pi} = 59.92 \text{ GHz}$$