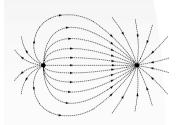
Elektrostatika

- Veza električnog polja i potencijala.
- Električni potencijal.
- Potencijalna energija.
- Rad.
- Zakon o očuvanju energije.





Stranica:II-3

Uvodni pojmovi

 Svakoj točki prostora u kojoj postoji električno polje može se pridijeliti skalarna veličina - električni potencijal. Pri tome je el. potencijal funkcija el. polja:

$$\varphi = f(\vec{E})$$

■ Potencijal promatrane točke:

$$oldsymbol{arphi}_{promatrane\ tocke} = -\int\limits_{referentna\ tocka}^{promatrana\ tocka} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ako se el. polje mijenja samo u smjeru osi x, onda vrijedi:

$$oldsymbol{arphi}_{promatrana\ tocke} = -\int\limits_{referentina\ tocka}^{promatrana\ tocka} oldsymbol{ar{E}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{ar{x}}$$

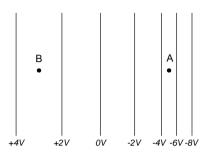
 Potencijal neke točke se definira u odnosu na referentnu točku za koju vrijedi:

$$\varphi_{referentne\,tocke} = 0$$



1. zadatak

Na slici su prikazane ekvipotencijalne plohe nekog elektrostatskog polja. Odredite u kakvom su odnosu iznosi sila FA i FB koje djeluju na pozitivan točkasti naboj. Također, odredite smjerove vektora sila F_A i





Početna stranica



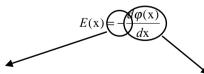
Stranica:II- 4

Uvodni pojmovi

■ El. polje se također može prikazati kao funkcija potencijala:

$$\vec{E} = g(\boldsymbol{\varphi})$$

Ovisnost polja o potencijalu:



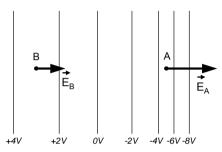
Smjer porasta električnog potencijala suprotan je smjeru vektora električnog polja.

Iznos električnog polja je jednak brzini promjene električnog potencijala.

■ Polje električnog potencijala prikazuje se ekvipotencijalnim plohama (plohama istog potencijala).

Rješenje zadatka

- Da bi se odredio smjer sile na naboj g potrebno je prvo odrediti smjer električnog polja.
- Smjer električnog polja je suprotan od smjera porasta potencijala tako da za prikazano elektrostatsko polje vektori polja u točkama A i B su sljedeći:



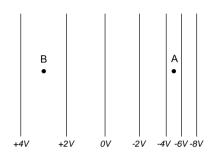
 Kako se radi o silama na pozitivan naboj i smjerovi sila u točkama A i B su istog smjera kao i vektori polja.

Početna stranica



■ Iznosi polja su proporcionalni brzini promjene potencijala. Za prikazano polje vrijedi:

$$\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{A} > \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{B}$$



Kako je sila proporcionalna polju vrijedi:



Početna stranica



Stranica:II-7

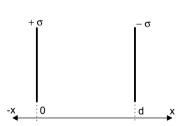
2. zadatak

Nacrtajte funkciju promjene potencijala između dvije raznoimeno nabijene ravnine uz različito definirane referentne točke:

a)
$$x_{ref} = 0$$

b)
$$x_{ref} = d/2$$

c)
$$x_{ref} = d$$

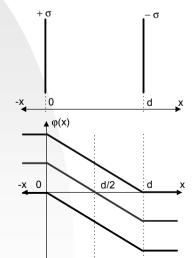




Stranica:II-8

Rješenje zadatka

■ Polje između dvije ravnine je homogeno:



$$E(x) = E$$
 za $0 < x < d$

Potencijal bilo koje točke između dvije ravnine je:

$$\varphi(x) = -\int_{xref}^{x} E \cdot dx = -E \cdot x \Big|_{xref}^{x}$$

$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot x_{ref}$$

$$za x_{ref} = 0$$
:

$$\varphi(x) = -E \cdot x$$

$$za x_{ref} = d/2$$
:

$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot d / 2$$

$$za x_{ref} = d$$
:

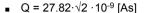
$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot d$$



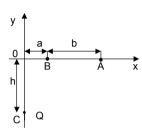
Stranica:II- 10

3. zadatak

Točkasti naboj Q nalazi se u točki C. Položaj dviju točaka A i B prikazan je na slici. Odredite napon U_{AB} . Ukoliko se točka A nalazi na potencijalu ϕ_A odredite točku na x osi u kojoj će potencijal imati vrijednost 0 [V]. Zadano:



$$\epsilon = \epsilon_0$$





Početna stranica



Stranica:II- 11

Uvodni pojmovi

Polje potencijala u okolini točkastog naboja može se odrediti na sljedeći način:



$$\varphi(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

Za definiranu referentnu točku u beskonačnosti vrijedi:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

Napon između dviju točaka u polju točkastog naboja:

$$U_{AB} = \boldsymbol{\varphi}_{A} - \boldsymbol{\varphi}_{B}$$

$$U_{\rm AB} = \frac{\rm Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{\rm A}} - \frac{1}{r_{\rm ref}}\right) - \frac{\rm Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{\rm B}} - \frac{1}{r_{\rm ref}}\right) = \frac{\rm Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{\rm A}} - \frac{1}{r_{\rm B}}\right)$$





Uvodni pojmovi

- Polje potencijala u nekom prostoru može se odrediti na dva načina:
 - Najprije se na osnovu zadane raspodjele naboja odredi električno polje (na osnovu poznatih postupaka dosada razmatranih) u prostoru. Zatim se uz zgodno* odabranu referentnu točku polje potencijala traži po definiciji:

$$\varphi(x) = -\int_{x_{ref}}^{x} \vec{E}(x) \cdot d\vec{x}$$

- Zadana raspodjela naboja promatra se kao skup točkastih naboja ("model točkastog naboja"). Ukupan potencijal nalazi se superpozicijom, skalarni doprinosi (sumom ili integralom), doprinosa tih elementarnih naboja. Osim modela točkastog naboja, nekada se mogu koristiti i drugi modeli čije potencijale znamo ili smo ih prethodno izračunali (nabijeni štap, prsten, ploča).
- * različitim izborom referentne točke dobit ćemo različite iznose potencijala, ali će razlike potencijala uvijek biti jednake za bilo koje dvije točke prostora.

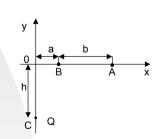




Stranica:II- 12

Rješenje zadatka

■ Potencijal točka A i B može se izračunati kao:



$$\varphi_{A} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{A}} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

$$r_{\rm A} = \sqrt{h^2 + (a+b)^2}$$

$$\varphi_{\rm B} = \frac{\rm Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{\rm B}} - \frac{1}{r_{\rm ref}} \right)$$

$$r_{\rm B} = \sqrt{h^2 + a^2}$$

■ Napon U_{AB} je onda:

$$U_{\mathrm{AB}} = \varphi_{\mathrm{A}} - \varphi_{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{Q}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{ref}}} \right) - \frac{\mathrm{Q}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{\mathrm{B}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{ref}}} \right)$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{A}} - \frac{1}{r_{B}}\right) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{h^{2} + (a+b)^{2}}} - \frac{1}{\sqrt{h^{2} + a^{2}}}\right)$$



$$U_{AB} = \frac{27.82 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2^2 + (1+3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right) = -79[V]$$

- Napon se može odrediti bez određivanja referentne točke, ier je razlika potencijala između dvije točke u prostoru neovisna o odabranoi referentnoi točki.
- Iz poznatog potencijala točke A može se odrediti udaljenost ekvipotencijalne plohe referentnog potencijala u zadatku:

$$\varphi_{A} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_{A}} - \frac{1}{r_{ref}}\right) \qquad r_{ref} = \frac{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}}{\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_{A}} - \varphi_{A}}$$

$$r_{ref} = \frac{\frac{27.82}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}}}{\frac{27.82}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{20}} - (-46)} = 2.83[m]$$

■ Na osi x to je točka: $x_{ref} = \sqrt{r_{ref}^2 - h^2} = \sqrt{2.83^2 - 2^2} = 2[m]$

Početna stranica





Uvodni pojmovi

 Polje potencijala u okolini nabijenog ravnog vodiča može se odrediti na sljedeći način:



$$\varphi(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_{ref}}{r}$$

Napon između dviju točaka u polju ravnog vodiča:

$$U_{\rm AB} = \boldsymbol{\varphi}_{\rm A} - \boldsymbol{\varphi}_{\rm B}$$

$$U_{\rm AB} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_{\rm ref}}{r_{\rm A}} - \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_{\rm ref}}{r_{\rm B}} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_{\rm B}}{r_{\rm A}}$$

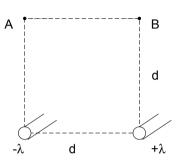




4. zadatak

Odredite rad prilikom pomicania pokusnog točkastog naboja Q₀ iz točke A u točku B. Točke A i B predstavljaju vrhove zamišljenog kvadrata koji leži u ravnini okomitoj na dva paralelna i suprotno nabijena ravna vodiča (slika). Zadano:

- $Q_0 = -4.10^{-12} [As/m]$
- $|\lambda| = 1.77 \cdot 10^{-8} [As/m]$ A
- $\mathbf{\epsilon} = \mathbf{\epsilon}_0$









Stranica:II- 16

Uvodni pojmovi

 Potencijalna energija točkastog naboja u električnom polju u točki A:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{PA}} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{A}}$$

pri čemu je el. polje stvorilo neko drugo nabijeno tijelo (točkasti naboj, ravni vodič, kugla, ploča, itd.).

Rad pri pomicanju točkastog naboja definiran je kao:

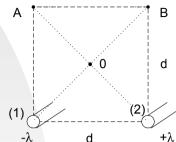
$$A = Q \cdot (\varphi_{pocetak} - \varphi_{krai})$$

Predznak rada:

- A>0; pomicanje pod utjecajem sile električnog polja = smanjenje potencijalne energije
- A<0; pomicanje pod utjecajem vanjske sile = povećanje potencijalne energije

Rješenje zadatka

■ Rad pri pomicanju pokusnog naboja Q₀ je:



$$A = Q_0 \cdot (\varphi_A - \varphi_B)$$

Da bi se odredili potencijali točaka A i B potrebno je odrediti referentnu točku. Pretpostavimo da se ona nalazi u središtu kvadrata.

■ Potencijalu u točki A doprinose oba vodiča:







Početna stranica

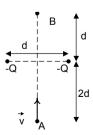




5. zadatak

Zadana su dva točkasta naboja Q na udaljenosti d prema slici. Koliko mora iznositi minimalna brzina elektrona u točki A udaljenoj 2d od spojnice naboja, da bi on mogao stići u točku B (udaljenu d od spojnice naboja) s druge strane spojnice. Elektron se giba po simetrali spojnice. Zadano:

- $Q = -10 \cdot 10^{-11} [C]$
- d = 0.1 [m]
- $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ [kg]}$
- $q_0 = -1.6 \cdot 10^{-19}$ [C]



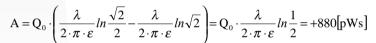




- $\varphi_{A} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \ln \frac{\overline{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Potenciial u točki B određuje se na isti način:

$$\begin{split} \varphi_{\mathrm{B}} &= \varphi_{\mathrm{B1}} + \varphi_{\mathrm{B2}} \\ \varphi_{\mathrm{B}} &= \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \ln \frac{r_{10}}{r_{\mathrm{B1}}} + \frac{+\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \ln \frac{r_{20}}{r_{\mathrm{B2}}} \\ \varphi_{\mathrm{B}} &= \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \ln \frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{\frac{d\sqrt{2}}{d\sqrt{2}}} + \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \ln \frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{\frac{d}{d}} \\ \varphi_{\mathrm{A}} &= \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \left(-\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \ln \sqrt{2} \end{split}$$

Rad pri pomicanju naboja onda iznosi:



gdje nam pozitivan predznak govori o dobivenom radu.

Početna stranica

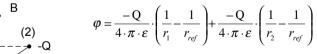


Stranica:II- 20

Rješenje zadatka

■ Potencijal u nekoj točki na spojnici A-B može se izračunati kao:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$



Budući da je $r_1 = r_2$ i uz pretpostavljenu referentnu točku u beskonačnosti. za potencijal vrijedi:

$$\varphi = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1}$$

Funkcija potencijala mijenja se kao što je prikazano na slici:

Da bi elektron stigao do točke B potrebno je nadvladati potencijalnu barijeru prikazanu na slici.



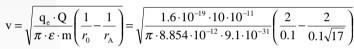
- Elektron se od točke 0 do točke B giba pod utjecajem električnog polja.
- Međutim, da bi elektron stigao do točke 0 na elektron se mora djelovati vanjskim utjecajem, odnosno vrijedi sliedeće:

$$W_{kinA} + W_{potA} = W_{pot0}; \quad W_{kin0} = 0$$

$$\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}^2}{2} + (-\mathbf{q}_e) \cdot \varphi_A = (-\mathbf{q}_e) \cdot \varphi_0$$

$$r_A = \sqrt{(2d)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = d \frac{\sqrt{17}}{2}; \quad r_0 = \frac{d}{2}$$

$$\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}^2}{2} = -\mathbf{q}_e \cdot \left(\frac{-\mathbf{Q}}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \frac{1}{r_0} - \frac{-\mathbf{Q}}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \frac{1}{r_A}\right) = \frac{\mathbf{q}_e \cdot \mathbf{Q}}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_A}\right)$$



 $v = 3.1 \cdot 10^6 \, [m/s]$

Početna stranica



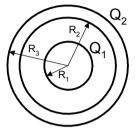
6. zadatak

U metalnoj kuglinoj ljusci (R2, R3) koncentrično se nalazi metalna kugla polumiera R₄ (slika). Kuglina liuska nabijena je nabojem Q₂, a metalna kugla nabojem Q₁. Nacrtajte dijagrame funkcije promjene el. polia E(r) i potencijala ω(r) u zavisnosti o udaljenosti r od središta sustava ako je:

- 1) $Q_1 = -2 [nC], Q_2 = 0, r_{ref} = \infty$
- 2) $Q_1 = +2 [nC], Q_2 = +2 [nC], r_{ref} = \infty$
- 3) $Q_1 = +2 [nC], Q_2 = -2 [nC], r_{ref} = \infty$

Zadano:

- R₁ = 2 [cm]
- $R_2 = 4 \text{ [cm]}$
- $R_3 = 4.5 \text{ [cm]}$





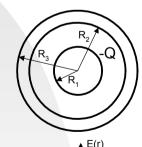




Stranica:II- 23

Rješenje zadatka

Prvi slučaj: E(r)



Za r<R₁:

$$E(r) = 0$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

Unutar metala nema polja; za $R_2 < r < R_3$:

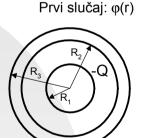


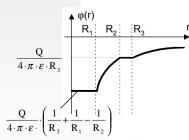
Zbog el. influencije polje za ⊈r>R₃ iznosi:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$









Referentna točka nalazi se u beskonačnosti:

$$\varphi_{ref} = 0$$

Za r>R₃:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_{ref}} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r}$$

Za R₂< r <R₃ potencijal je konstantan jer u metalu nema

$$\varphi(r) = \varphi(\mathbf{R}_2) = \varphi(\mathbf{R}_3) = \frac{\mathbf{Q}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{R}_3}$$

Za $R_1 < r < R_2$:

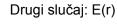
$$\varphi(r) = U_{rR2} + \varphi(R_2)$$

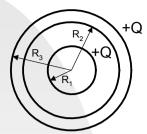
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_2} + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_3}$$

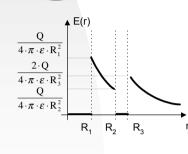
Za r<R₁ potencijal je konstantan:

$$\varphi(r) = \varphi(\mathbf{R}_1) = U_{R1R2} + \varphi(\mathbf{R}_2)$$









Za r<R₁:

$$E(r) = 0$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

Za R_2 < r < R_3 :

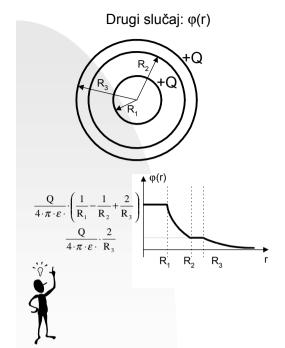
$$E(r) = 0$$

Zbog nabijene vanjske kugle i el. influencije polje za $r > R_3$:

$$E(r) = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

Početna stranica





Referentna točka nalazi se u beskonačnosti:

$$\varphi_{ref} = 0$$

Za r>R₃:

$$\varphi(r) = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} - \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_{ref}} = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r}$$

Za R₂< r <R₃ potencijal je konstantan jer u metalu nema polia:

$$\varphi(r) = \varphi(R_2) = \varphi(R_3)$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$\varphi(r) = U_{rR2} + \varphi(R_2)$$

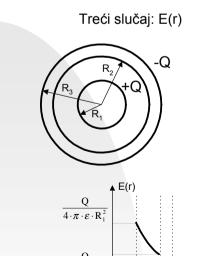
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_2} + \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_3}$$

Za r<R₁ potencijal je konstantan:

$$\varphi(r) = \varphi(\mathbf{R}_1) = U_{R1R2} + \varphi(\mathbf{R}_2)$$



Stranica:II- 27



 $\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_2^2}$

 R_1 R_2 R_3

Za r<R₁:

$$E(r) = 0$$

Za R₁< r <R₂:

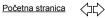
$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

Za $R_2 < r < R_3$:

$$E(r) = 0$$

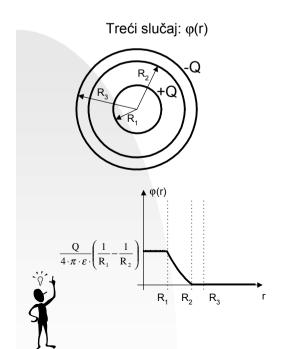
Zbog nabijene vanjske kugle i el. influencije polje za $r > R_3$:

$$E(r) = \frac{Q - Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} = 0$$



Stranica:II- 28

Stranica:II- 26



Referentna točka nalazi se u beskonačnosti:

$$\varphi_{ref} = 0$$

Budući da izvan sustava nema polja, za r>R₃:

$$\varphi(r) = 0$$

Za R₂< r <R₃ potencijal je konstantan jer u metalu nema polia:

$$\varphi(r) = \varphi(R_2) = \varphi(R_3) = 0$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$\varphi(r) = U_{rR2} + \varphi(R_2)$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_2}$$

Za r<R₁ potencijal je konstantan:

$$\varphi(r) = \varphi(\mathbf{R}_1) = U_{R1R2} + \varphi(\mathbf{R}_2)$$

