ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

Maxwellovo otkriće elektromagnetskih valova, i to dva desetljeća prije Hertzova eksperimentalnog dokaza, i objašnjenje elektromagnetske naravi svjetlosti jedan je od najvećih doprinosa[1] znanosti u XIX. stoljeću. Temeljno svojstvo Maxwellovih jednadžbi za elektromagnetsko polje jest postojanje rješenja za *putujuće valove* koji predstavljaju prijenos energije kroz prostor. Opisat ćemo zato vektorske i skalarne *valne jednadžbe*, koje ćemo izvesti iz sustava Maxwellovih jednadžbi. Ograničit ćemo našu pažnju na rješavanje valnih jednadžbi u neograničenom linearnom, homogenom, izotropnom materijalu *bez izvora* polja. Drugim riječima, studirat ćemo svojstva valova bez da se zanimamo kako su takva polja proizvedena.

S izuzetkom statičkih polja, koja smo do sad razmatrali, najjednostavnija rješenja sustava jednadžbi dinamičkih polja su ona koja ovise o vremenu i o samo jednoj prostornoj varijabli. Takva jednodimenzionalna rješenja u pravocrtnom sustavu predstavljaju *ravne valove*. Mnoge značajke prostiranja elektromagnetskih valova bit će pojašnjene kroz studij svojstava ravnih valova, i zato je analiza ravnih valova subjekt od temeljne važnosti u elektromagnetskoj teoriji.

Raspon frekvencija elektromagnetskih valova koji se koriste u elektrotehnici vrlo je velik i obuhvaća područje od nula do nekoliko tisuća gigaherca. U Tablici 1. dali smo pregled frekvencija, valnih duljina i valnih područja koja se koriste za radiofoniju, televiziju i radar. Treba upozoriti da je kod tih najviših frekvencija još dozvoljen makroskopski pristup i da se tu približavamo granicama valjanosti klasične elektromagnetske teorije, tj. klasične elektrodinamike.

Tablica 1. Valna područja za elektromagnetske valove u radiofoniji i televiziji prema CCIR[2]

Područje	*Pojas broj*	*Američka oznaka*	*Valna duljina* (m)	*Frekvencija*
marijametarsko	4	VLF	$10^{5} - 10^{4}$	3 – 30 kHz
kilometarsko	5 dugi val	LF	$10^{4} - 10^{3}$	30 – 300 kHz
hektometarsko	6 srednji val	MF	$10^{3} - 10^{2}$	300 – 3000 kHz
dekametarsko	7 kratki val	HF	$10^{2} - 10$	3 – 30 MHz
metarsko	8 UKV	VHF	$10 - 1$	30 – 300 MHz
decimetarsko	9	UHF	$1 - 0.1$	300 – 3000 MHz
centimetarsko	10	SHF	$0.1 - 0.01$	3 – 30 GHz
milimetarsko	11	EHF	$10^{-2} - 10^{-3}$	30 – 300 GHz
decimilimetarsko	12	–	$10^{-3} - 10^{!4}$	300 – 3000 GHz

[1] Suvremeni hrvatski fizičar Nikola Cindro u svojoj knjizi *Fizika 2* o tome otkriću piše:

"Spoznaja da je svjetlost elektromagnetski val, i svođenje tako različitih znanstvenih područja kao što su elektricitet, magnetizam i optika u jedinstvenu cjelinu nadilazi sve što je znanost XIX. stoljeća do tada pružila. XX. stoljeće je u tim područjima donijelo samo komplementarna otkrića o kvantnoj prirodi zračenja. Međutim, ono što u tom pogledu karakterizira naše stoljeće jest neslućeni razvoj primjene elektromagnetskih valova u telekomunikacijama.

Spektar elektromagnetskog zračenja, kako ga danas poznajemo, obuhvaća zračenje koje se međusobno toliko razlikuje da je njegovo svođenje na zajedničku prirodu ! elektromagnetske valove koji se razlikuju samo po frekvenciji ! prvorazredni znanstveni uspjeh. Od niskofrekventnog šuma, preko mikrovalova, infracrvenih (toplinskih), svjetlosnih i ultraljubičastih valova, te x- i gama-zraka, ovaj spektar obuhvaća pravilno titranje električnog i magnetskog polja od nekoliko herca do stotine eksaherca (10^{20} Hz). Sve to zračenje ima istu prirodu: sve su to elektromagnetski valovi koji se šire prostorom brzinom $3 \cong 10^{8}$ m/s".

[2] Raspodjela frekvencija prema International Radio Consultative Commitee.

Elektromagnetski valovi u sredstvima bez gubitaka

Razmotrimo prostor ispunjen idealnim dielektrikom sa značajkama ε=*konst.*, μ=*konst.* i κ=0. U prostoru ne postoje izvori polja (ρ_s=0, J_s=0). Maxwellove jednadžbe u tom slučaju imaju oblik:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Primjenom operatora rotora na Faradayev zakon dobivamo izraz

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Korištenjem vektorskog identiteta

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} \equiv \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \Delta \vec{A}$$

i zamjenom redoslijeda deriviranja po vremenu i prostornim koordinatama dobivamo

$$\nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$$

Budući da vrijedi

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\left(\nabla \times \vec{H}\right) = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ova se jednadžba reducira na

$$\Delta \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Ovo je vektorska valna jednadžba, a rastavljanjem na komponente u Kartezijevom koordinatnom sustavu dobivamo tri skalarne valne jednadžbe

$$\Delta E_x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta E_y - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta E_z - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

U općem se slučaju mogu pojaviti sve tri komponente ***E*** i svaka od njih može ovisiti o sve tri prostorne koordinate *x*,*y* i *z,* te o vremenu *t*.

Zbog jednostavnosti ćemo pretpostaviti da su E_y=E_z=0. Tada dobivamo trodimenzionalnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\Delta E_x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

pa ćemo uvesti dodatno pojednostavnjenje pretpostavkom da E_x ne ovisi o koordinatama x i y, t.j.

$$\vec{E} = E_x(z,t)\vec{a}_x$$

Time dobivamo skalarnu valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Rješenje ove jednadžbe ima oblik

$$E_x(z,t) = Af\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + Bg\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

Ovdje su f i g proizvoljne funkcije z i t, a A i B su proizvoljne konstante. Dokaz da ovo rješenje zadovoljava skalarnu valnu jednadžbu izvest ćemo deriviranjem

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -A\sqrt{\mu\varepsilon}\, f'\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + B\sqrt{\mu\varepsilon}\, g'\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = A\mu\varepsilon\, f''\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + B\mu\varepsilon\, g''\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = Af'\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + Bg'\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

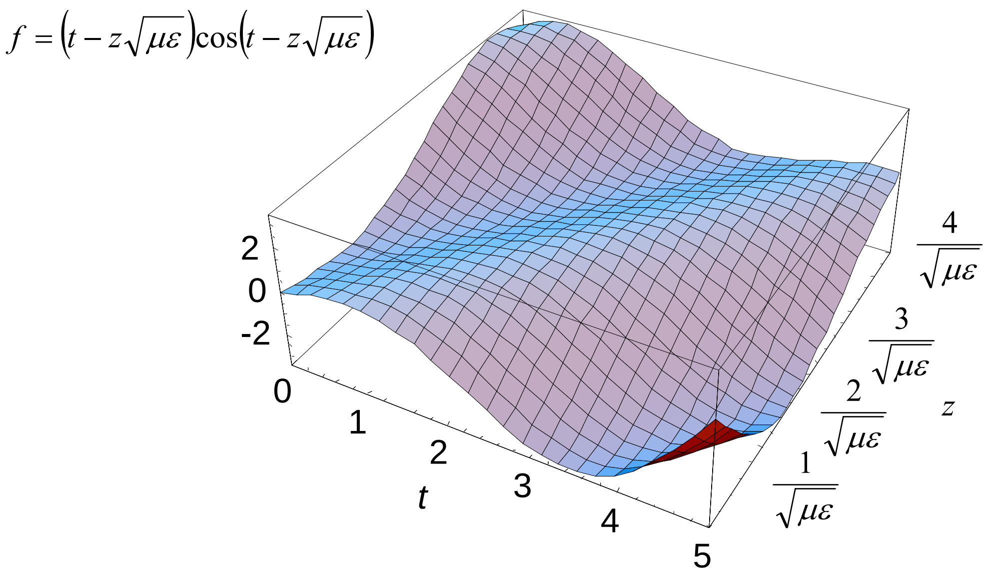
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = Af''\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + Bg''\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

Oblik funkcija f i g ovisi o problemu koji rješavamo. Neki primjeri jesu:

$$\cos\left[\omega\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\right],\ e^{-\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)},\ \left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\sin\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

Razmotrimo značenje funkcija f i g u rješenju skalarne valne jednadžbe analizom primjera (Slika 1)

$$f = \left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\cos\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$



Slika 1. Prikaz funkcije $f = \left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\cos\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$

U jednom trenutku *t* funkcija poprima niz vrijednosti u ovisnosti od *z*. Na Slici 1. možemo uočiti da je funkcija od *z* u proizvoljnom trenutku *t* jednaka funkciji od *z* u trenutku koji prethodi, ali pomaknuta u smjeru rastućeg *z*. Na primjer, od trenutka t=1 do trenutka t=2 ekstrem funkcije *f* se pomakne od mjesta $z = 1/(\mu\varepsilon)^{0.5}$ do mjesta $z = 2/(\mu\varepsilon)^{0.5}$. Stoga funkcija

$$f\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

predstavlja val koji se giba u smjeru osi +*z* sa brzinom $1/(\mu\varepsilon)^{0.5}$. Brzinu prostiranja vala možemo odrediti i ako pratimo određenu točku funkcije i definiramo njezine pozicije z_1 i z_2 u trenutcima t_1 i t_2. Budući da funkcija ima istu vrijednost, njezini argumenti moraju biti jednaki

$$t_1 - z_1\sqrt{\mu\varepsilon} = t_2 - z_2\sqrt{\mu\varepsilon}$$

pa brzina prostiranja vala iznosi:

$$v = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

U vakuumu (slobodnom prostoru) brzina prostiranja vala iznosi

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 3 \cdot 10^8 \quad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Funkcija

$$g\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

predstavlja val koji se giba u smjeru –*z*. Ako slijedimo određenu točku promatrač se u vremenu i prostoru mora gibati tako da vrijedi

$$t + z\sqrt{\mu\varepsilon} = konst. \quad \Rightarrow \quad dt + \sqrt{\mu\varepsilon}dz = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Negativni predznak brzine ukazuje da se promatrač mora gibati u smjeru –*z*, pa funkcija *g* predstavlja val koji putuje u smjeru –*z*.

Jakost magnetskog polja određujemo korištenjem jednadžbe

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times\vec{E} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{a}_y$$

Vrijedi

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -A\sqrt{\mu\varepsilon}f'\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + B\sqrt{\mu\varepsilon}g'\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)$$

$$\vec{B} = -\vec{a}_y\int\frac{\partial E_x}{\partial z}dt = \left[A\sqrt{\mu\varepsilon}f\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) - B\sqrt{\mu\varepsilon}g\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\right]\vec{a}_y$$

pa je

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[Af\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) - B\sqrt{\mu\varepsilon}g\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\right]\vec{a}_y$$

Ako definiramo valni otpor sredstva bez gubitaka kao

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Onda vrijedi

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left[Af\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) - B\sqrt{\mu\varepsilon}g\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\right]\vec{a}_y$$

Za vakuum (slobodni prostor) vrijedi Z=Z_0=120π=377Ω. Ako označimo električna polja u (+*z*) i (-*z*) smjeru s $E_x^+ \ i \ E_x^-$, a magnetska polja u (+*z*) i (-*z*) smjeru s $H_x^+ \ i \ H_x^-$ vrijedi

$$H_y^+ = \frac{E_x^+}{Z} \quad ; \quad H_y^- = -\frac{E_x^-}{Z}$$

Poyntingov vektor pridružen direktnom i inverznom valu je

$$\vec{P}^+ = E_x^+\vec{a}_x \times H_y^+\vec{a}_y = \frac{\left(E_x^+\right)^2}{Z}\vec{a}_z$$

$$\vec{P}^- = E_x^-\vec{a}_x \times H_y^-\vec{a}_y = -\frac{\left(E_x^-\right)^2}{Z}\vec{a}_z$$

Ove jednadžbe ukazuju da je tijek snage pridružen direktnom valu usmjeren u +*z* smjeru, a da je tijek snage pridružen inverznom valu usmjeren u –*z* smjeru.

Zaključno, možemo konstatirati da vremenski promjenjiva električna i magnetska polja rezultiraju prostiranjem elektromagnetskih valova. Najjednostavnije rješenje se sastoji od direktnih valova koji se prostiru u +*z* i inverznih valova koji se prostiru u –*z* smjeru. U tom slučaju je jakost električnog polja u potpunosti usmjerena u smjeru osi x, a jakost magnetskog polja je u potpunosti usmjerena u smjeru osi y. Nadalje, polja su homogena u ravnini okomitoj na smjer prostiranja (z=konst.). Stoga ovakve valove zovemo homogeni ravni valovi. U prirodi ovakvi valovi ne postoje, ali na udaljenostima dalekim od izvora polja i tla elektromagnetski valovi se mogu dobro približiti ravnim valovima.

Posvetimo sad pažnju sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima. Vrijedi

$$\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$$

pa skalarna valna jednadžba u fazorskoj domeni poprima oblik

$$\Delta \underline{\vec{E}} + \omega^2 \mu\varepsilon \underline{\vec{E}} = 0$$

Rješenje ove jednadžbe u vremenskoj domeni je

$$\vec{E} = E_x(z,t)\vec{a}_x = \left\{E_0^+ \cos\left[\omega\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + \varphi\right] + E_0^- \cos\left[\omega\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + \varphi\right]\right\}\vec{a}_x$$

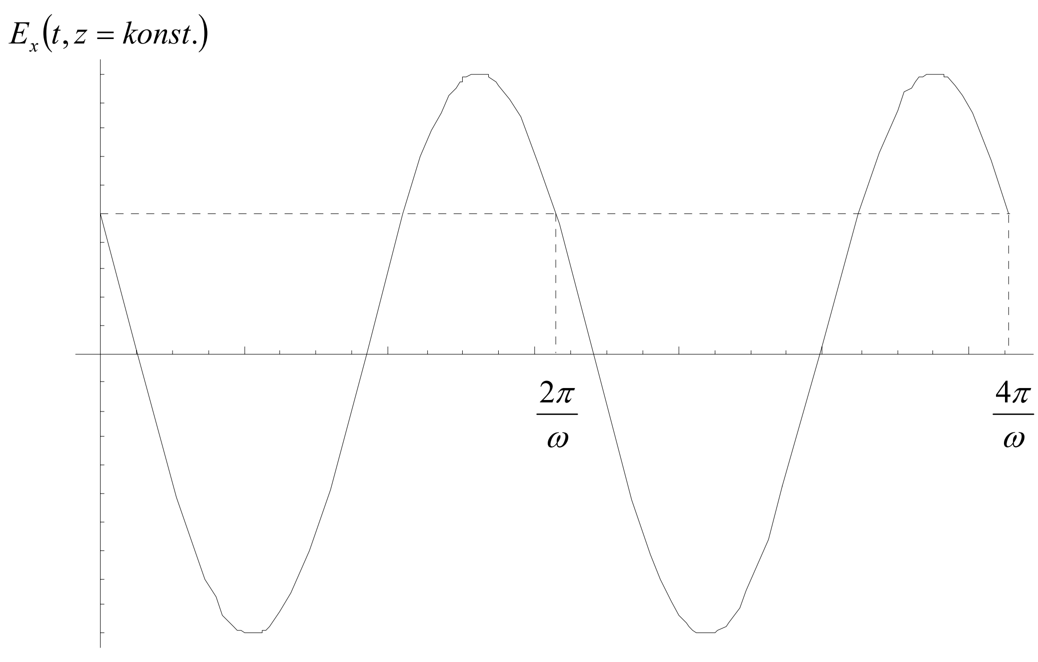
pa iz diferencijalnog oblika Faradayevog zakona u fazorskoj domeni

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega\mu \underline{\vec{H}}$$

slijedi

$$\vec{H} = E_y(z,t)\vec{a}_y = \left\{\frac{E_0^+}{Z} \cos\left[\omega\left(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + \varphi\right] - \frac{E_0^-}{Z} \cos\left[\omega\left(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + \varphi\right]\right\}\vec{a}_y$$

Na svakom mjestu z=*konst*. Polja se mijenjaju u vremenu kao što smo prikazali na Slici 2.

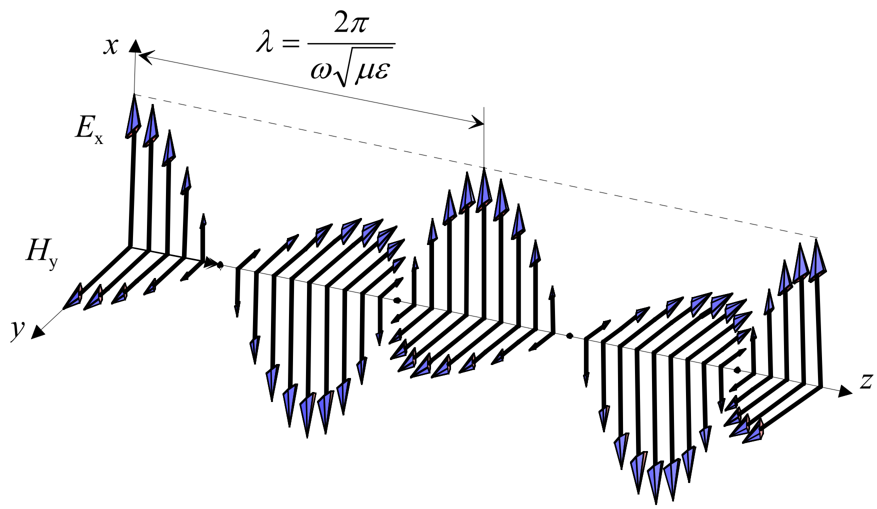


Slika 2. Jakost električnog polja u ravnini z=konst.

Svaka vrijednost polja se ponavlja u vremenskim intervalima 2π/ω. Broj ponavljanja u jednoj sekundi je *frekvencija*:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

U određenom trenutku $t = t_0$ električno i magnetsko polje vala se mijenjaju s udaljenošću kao što smo prikazali na Slici 3.



Slika 3. Elektromagnetsko polje u trenutku $t = t_0$

Svaka vrijednost polja se ponavlja u prostornim intervalima

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Taj interval zovemo *valna dužina*. Argumente funkcije kosinus

$$\omega\left(t \mp z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + \varphi$$

zovemo *faze*. Val se prostire brzinom

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

U ovom slučaju tu brzinu nazivamo *fazna brzina* budući da se promatrač mora gibati tom brzinom u smjeru osi *z* da bi mjerio stalno istu fazu

$$\omega t \mp \omega\sqrt{\mu\varepsilon}z + \varphi = konst. \quad \Rightarrow \quad \omega dt \mp \omega\sqrt{\mu\varepsilon}dz = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \pm\frac{dz}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

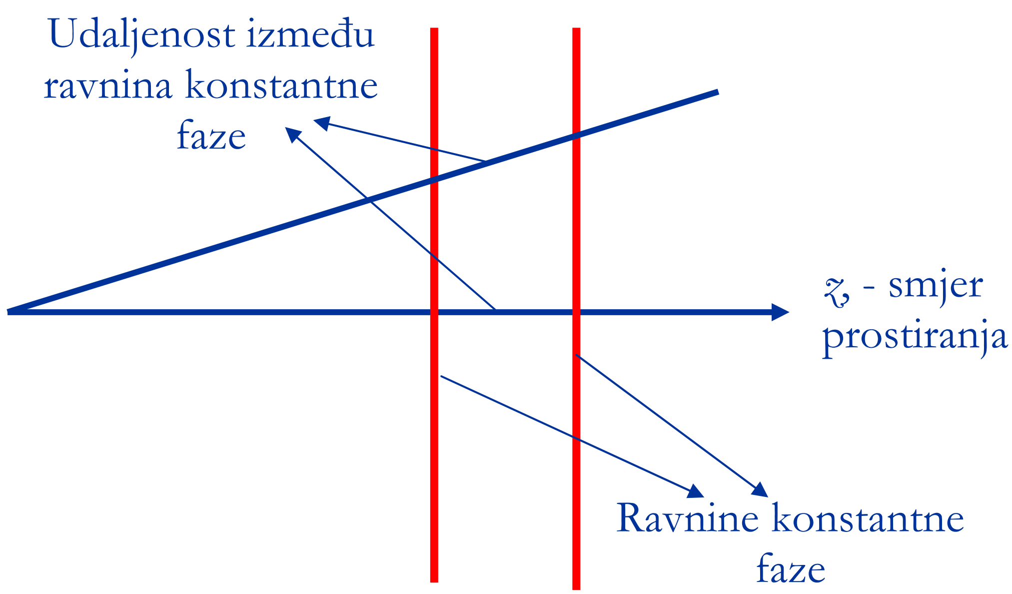
Vrijedi $v_f = \lambda f$ .Ovaj izraz povezuje prostornu i vremensku promjenu polja u elektromagnetskom valu. Veličinu

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

zovemo *fazna konstanta*. Ona je mjera brzine promjene faze s udaljenošću z u određenom trenutku $t=t_0$. Valnu dužinu i faznu brzinu možemo izraziti i u funkciji fazne konstante kao

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad ; \quad v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

Brzina promjene faze je za val koji se prostire u z smjeru najveća u tom istom smjeru budući da je udaljenost između dvije površine konstantnih faza u svakom drugom smjeru veća (Slika 4).



Slika 4. Udaljenost između ravnina konstantne faze

Sukladno tome, ako odaberemo koordinatni sustav takav da se val prostire u proizvoljnom smjeru (a ne u smjeru osi z) brzine promjene faza u smjeru koordinatnih osi će biti manje od brzine kojom se faza mijenja u smjeru prostiranja koji je okomit na ravnine konstantnih faza. Ako fazne konstante u mjeru koordinatnih osi označimo kao $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ i fazu u t=0 kao φ onda je faza u bilo kojoj točki (x,y,z) zadana s

$$\omega t - \left(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z\right) + \varphi$$

Ravnine konstantne faze su zadane s

$$\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z = konst.$$

Smjer gradijenta skalarne funkcije $\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z$ je smjer okomice na površine konstantne faze i ujedno smjer prostiranja vala, a veličina gradijenta daje mjeru promjene faze s udaljenošću, odnosno faznu konstantu β u smjeru širenja vala

$$\nabla\left(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z\right) = \beta_x \vec{a}_x + \beta_y \vec{a}_y + \beta_z \vec{a}_z$$

Veličina gradijenta je

$$\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}$$

Ako uvedemo vektor

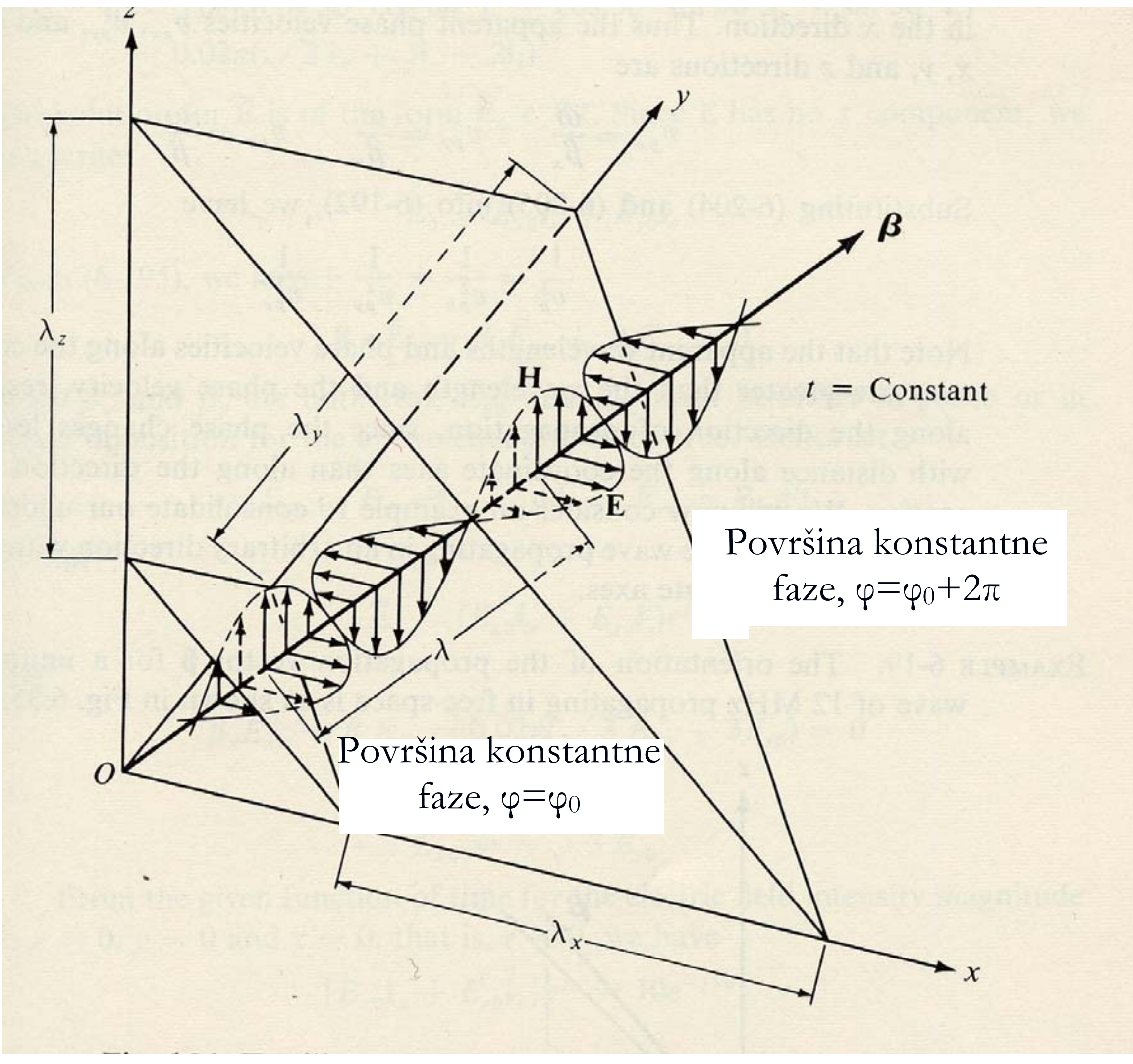
$$\vec{\beta} = \beta_x \vec{a}_x + \beta_y \vec{a}_y + \beta_z \vec{a}_z$$

i vektor položaja točke (x,y,z)

$$\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$$

fazu u proizvoljnoj točki možemo pisati kao

$$\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \varphi$$



Slika 5. Prostiranje vala u proizvoljnom smjeru

Ako označimo jakost električnog polja u ravnini nulte faze s $\boldsymbol{E}_0$ možemo napisati izraz za vektor jakosti električnog polja pridružen homogenom ravnom valu koji se prostire u smjeru $\boldsymbol{\beta}$ kao

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \varphi\right)$$

U fazorskoj domeni pišemo

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j\varphi} e^{-j\vec{\beta}\cdot\vec{r}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-j\vec{\beta}\cdot\vec{r}}$$

Budući da $\boldsymbol{E}_0$ mora biti u ravnini okomitoj na smjer prostiranja vala mora vrijediti

$$\vec{E} \cdot \vec{\beta} = \vec{E}_0 \cdot \vec{\beta} = \underline{\vec{E}}_0 \cdot \vec{\beta} = 0$$

Slično, vektor jakosti magnetskog polja pridružen homogenom ravnom valu koji se prostire u smjeru $\boldsymbol{\beta}$ je

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \varphi\right) \quad ; \quad \underline{\vec{H}} = \vec{H}_0 e^{j\varphi} e^{-j\vec{\beta}\cdot\vec{r}} = \underline{\vec{H}}_0 e^{-j\vec{\beta}\cdot\vec{r}}$$

Budući da $\boldsymbol{H}_0$ mora biti u ravnini okomitoj na smjer prostiranja vala mora vrijediti

$$\vec{H} \cdot \vec{\beta} = \vec{H}_0 \cdot \vec{\beta} = \underline{\vec{H}}_0 \cdot \vec{\beta} = 0$$

Nadalje, $\boldsymbol{E}_0$ i $\boldsymbol{H}_0$ moraju biti u međusobno okomiti, a njihov vektorski produkt (Poyntingov vektor) mora biti usmjeren u smjeru prostiranja vala. Omjer njihovih apsolutnih vrijednosti mora biti jednak valnom otporu pa je

$$\frac{E_0}{H_0} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\omega\mu}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu}\vec{\beta} \times \vec{E}_0 \quad ; \quad \vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{\beta} \times \vec{E}$$

Valna dužina λ u smjeru prostiranja vala je

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

a prividne valne dužine u smjeru koordinatnih osi jesu

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\beta_x}, \lambda_y = \frac{2\pi}{\beta_y}, \lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z}$$

pa vrijedi

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2}$$

Fazna brzina u smjeru prostiranja je

$$\lambda = \frac{\omega}{\beta}$$

Za promatrača koji se giba u smjeru osi x su y i z konstantni. Stoga se on mora gibati brzinom

$$v_{fx} = \frac{\omega}{\beta_x}$$

da bi mjerio stalno istu fazu. Tu brzinu zovemo prividna fazna brzina u smjeru osi x. Prividne brzine u smjeru y i z osi jesu

$$v_{fy} = \frac{\omega}{\beta_y} \quad ; \quad v_{fz} = \frac{\omega}{\beta_z}$$

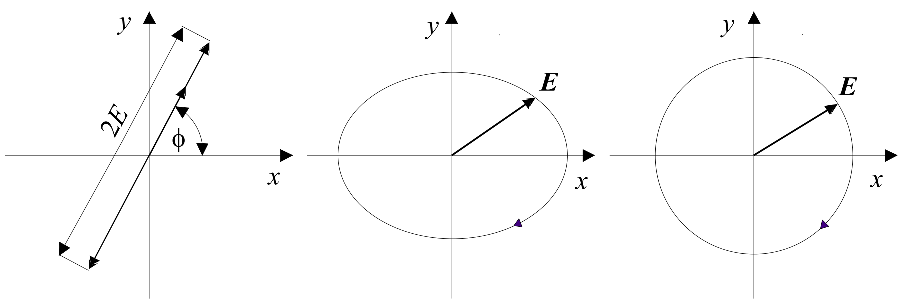
pa vrijedi

$$\frac{1}{v_{fx}^2} = \frac{1}{v_{fx}^2} + \frac{1}{v_{fy}^2} + \frac{1}{v_{fz}^2}$$

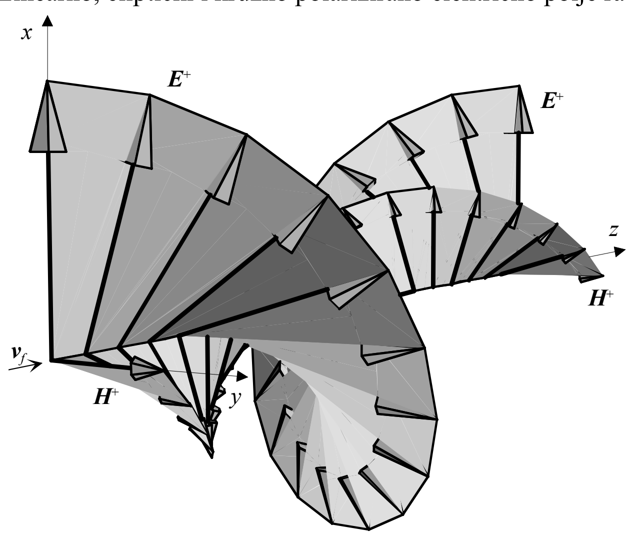
Prividne valne dužine i fazne brzine u smjeru koordinatnih osi su veće od valne dužine i fazne brzine u smjeru prostiranja vala.

Polarizacija

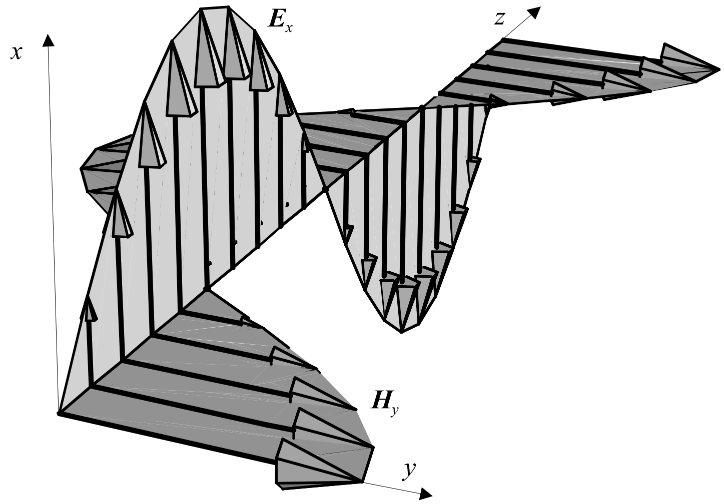
Krivulja položaja vrha vektora ***E*** ravnog vala, koja je funkcija vremena u danoj točki u prostoru, općenito određuje polarizaciju vala. U slučaju linearne polarizacije ta krivulja je pravac, dok je u slučaju kružne polarizacije kružnica. U općem slučaju krivulja koju opisuje vrh vektora ***E*** je elipsa, čije se dimenzije mogu odrediti pomoću analitičke geometrije.



Slika 6. Linearno, eliptički i kružno polarizirano električno polje ravnog vala



Slika 7. Kružno polarizirani direktni val



Slika 8. Linearno polarizirani direktni val

Na kraju možemo zaključiti da:

1. U dielektriku, zato jer je $\kappa = 0$, nema gubitka snage pri prostiranju vala.
2. Zato jer nema gubitaka snage, val se u dielektriku giba bez prigušenja. Konstanta prostiranja vala je imaginarna, $\gamma = j\omega/c$.
3. Fazna brzina gibanja ravnine konstantne faze u dielektriku jednaka je brzini svjetlosti u danom materijalu $v_f = c$.
4. Budući da nema prigušenja amplitude vala, i budući da su fazne brzine valova različitih frekvencija iste, to u idealnom dielektriku nema ni distorzije signala, koji može biti sastavljen iz cijelog spektra sinusnih valova različite frekvencije. To je vrlo važno svojstvo idealnog dielektrika. Slične osobine pokazuju i izrazito dobri izolatori.
6. Valna impedancija dielektrika je realan broj. To uključuje da je fazni pomak između fazora električnog i magnetskog polja vala jednak nuli, $\varphi = 0$, tj. oni su u fazi. Dakle, prostorno su vektori električnog i magnetskog polja postavljeni pod kutom od 90°, dok su vremenski promatrano oni u fazi.
7. Srednja vrijednost kompleksnog Poyntingova vektora za direktni val u smjeru $+z$ u dielektriku je realna i konstantna pa srednja snaga koja se valom prenosi kroz jedinicu površine u dielektriku ne ovisi o prijeđenom putu z.

Elektromagnetski valovi u realnim dielektricima i vodičima
(prigušenje i površinski učinak)

Do sad smo se bavili prostiranjem valova u idealnim dielektricima (κ=0), a sad ćemo razmotriti prostiranje valova u sredstvima s gubicima, posebice u dobrim vodičima. Maxwellove jednadžbe u tom slučaju (ρ_s=J_s= 0) poprimaju oblik

$$\left.\begin{array}{c}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\kappa\vec{E}+\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=\mu\nabla\cdot\vec{H}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta\vec{E}-\mu\kappa\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

Uz pretpostavku $E_y=E_z=0$ ova se jednadžba svodi na

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\mu\kappa\frac{\partial E_x}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0$$

Ako uvedemo uvjet $\vec{E}=E_x(z,t)\vec{a}_x$ (ravni val) slijedi

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\mu\kappa\frac{\partial E_x}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0$$

Ograničit ćemo naše razmatranje samo na sinusno promjenjiva polja, pa ova jednadžba u fazorskoj domeni poprima oblik

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2}-j\omega\mu\kappa\underline{E}_x+\omega^2\mu\varepsilon\underline{E}_x=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2}=j\omega\mu(\kappa+j\omega\varepsilon)\underline{E}_x$$

Definiramo kompleksnu konstantu γ

$$\gamma^2=j\omega\mu(\kappa+j\omega\varepsilon)$$

koju zovemo *konstanta prostiranja*. Možemo pisati

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2}=\gamma^2\underline{E}_x \quad\Rightarrow\quad \underline{E}_x(z)=\underline{A}e^{-\gamma z}+\underline{B}e^{\gamma z}$$

Ovdje su $\underline{A}$ i $\underline{B}$ proizvoljne kompleksne konstante

$$\underline{A}=Ae^{j\delta} \quad ; \quad \underline{B}=Be^{j\nu}$$

Budući da je γ kompleksan broj možemo ga pisati u obliku

$$\gamma=\alpha+j\beta$$

gdje je α realni a β imaginarni dio γ. Izrazi za α i β slijede iz jednakosti

$$\gamma^2=-\omega^2\mu\varepsilon+j\omega\mu\kappa \quad\Rightarrow\quad \alpha^2-\beta^2=-\omega^2\mu\varepsilon \quad ; \quad 2\alpha\beta=\omega\mu\kappa$$

$$\alpha=\frac{\omega}{\sqrt{2}c}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1} \quad ; \quad \beta=\frac{\omega}{\sqrt{2}c}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1} \quad ; \quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Uvrštavanjem α i β u rješenje za električno polje u fazorskoj domeni dobivamo

$$\underline{E}_x(z) = Ae^{-\alpha z}e^{-j\beta z}e^{j\delta} + Be^{\alpha z}e^{j\beta z}e^{j\nu}$$

Preslikavanje u vremensku domenu rezultira s

$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{E}_x(z)e^{j\omega t}\right\} = Ae^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \delta) + Be^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \nu)$$

Zanemarimo načas članove $e^{-\alpha z}$ i $e^{\alpha z}$ u ovom rješenju. Uočavamo da prvi i drugi član predstavljaju direktni (Slika 9a) i inverzni val (Slika 9b). Član $e^{-\alpha z}$ smanjuje vrijednost polja s rastućim z i time prigušuje direktni val koji se giba u $+z$ smjeru. Član $^{-\alpha z}$ smanjuje vrijednost polja s padajućim z i time prigušuje inverzni val koji se giba u $-z$ smjeru. Stoga konstantu α zovemo *prigušna konstanta*. Konstantu β zovemo *fazna konstanta* jer utječe na fazu putujućeg vala. Budući da smo identificirali direktni i inverzni val umjesto $\underline{A}$ i $\underline{B}$ možemo pisati

$$\underline{E}_x(z) = \underline{E}_x^{+}e^{-\gamma z} + \underline{E}_x^{-}e^{\gamma z}$$

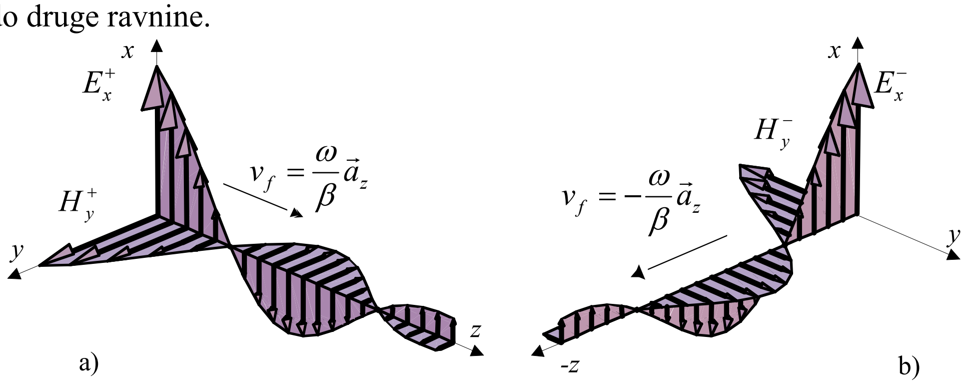
Odgovarajuće rješenje za jakost magnetskog polja slijedi iz Faradayevog zakona

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega\mu\underline{\vec{H}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{H}} = \underline{H}_y(z)\vec{a}_y = \frac{1}{Z}\left(\underline{E}_x^{+}e^{-\gamma z} - \underline{E}_x^{-}e^{\gamma z}\right)\vec{a}_y$$

Ovdje je Z valna impedancija materijala s gubicima koja iznosi

$$Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\varepsilon}} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{j\arctan\frac{\alpha}{\beta}}$$

Ona je kompleksni broj. Naše rješenje predstavlja ravni val u materijalu s gubicima budući da su u ravnini konstantne faze amplitude polja svugdje jednake, a prigušuju se od jedne do druge ravnine.



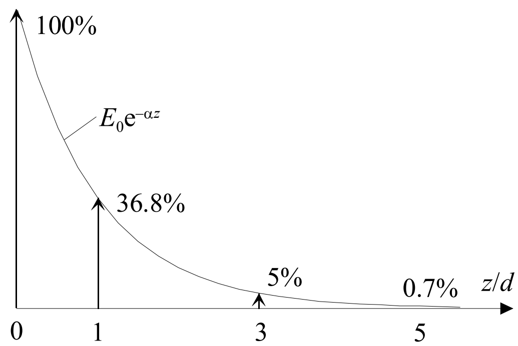
Slika 9. Direktni i inverzni val u materijalu s gubicima

Fazna brzina u materijalu s gubicima je

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\pm c\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1}}$$

Općenite značajke o prostiranju sinusnog ravnog vala u *vodljivom materijalu s gubicima* jesu:

1. U vodljivom materijalu, zbog konačne provodnosti ($\kappa \neq 0$), prigušna konstanta je uvijek različita od nule $\alpha \neq 0$, pa su oba i električno i magnetsko polje putujućeg vala *prigušeni* u smjeru gibanja vala.
2. Prigušenje amplituda oba polja u ravnini konstantne faze vala određeno je konstantom prigušenja α, koja ovisi o frekvenciji polja vala. Prigušenje raste s frekvencijom vala i s povećanjem provodnosti materijala.
3. U analizi elektromagnetskih valova rabi se pojam "dubine prodiranja" vala u vodljivi materijal. To je udaljenost na kojoj se amplituda polja vala priguši na iznos $1/e = 0{,}368$, tj. na približno 36,8% početne vrijednosti, kao što je prikazano na slici 10.



Slika 10. Eksponencijalno prigušenje amplitude električnog polja ravnog vala u smjeru gibanja vala duž osi $+z$ u vodljivom materijalu

Dubina prodiranja vala definirana je sa $z = d$, kada je $\alpha z = \alpha d = 1$, što daje

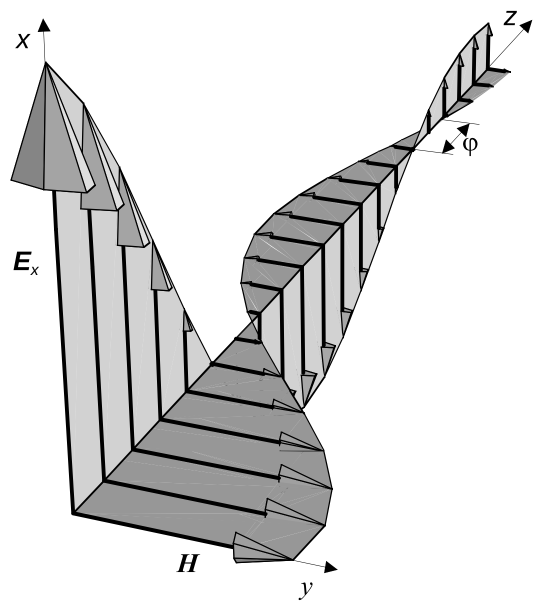
$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{c\sqrt{2}}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1}}$$

Mjeri se u *metrima* (m). Dubina prodiranja vala ovisi o frekvenciji vala i o značajkama materijala. Dubina prodiranja vala je to manja što je frekvencija viša, jer se val brže prigušuje. Isto tako materijal s većom provodnošću κ ima manju dubinu prodiranja. Uobičajeno je u primijenjenoj teoriji elektromagnetskih polja računati s udaljenošću $z = 3d$, odnosno $z = 5d$, na kojoj se amplituda polja priguši na približno 5%, odnosno približno 0.7% početnog iznosa, kao s udaljenošću na kojoj se polje praktički potpuno priguši. Dakle, *uzima se da val iščezne na udaljenosti jednakoj trostrukoj dubini prodiranja* i to s pogreškom od 5%, ili na udaljenosti jednakoj peterostrukoj dubini prodiranja, tada s pogreškom od 0.7%.

1. *Električno i magnetsko polje nisu u fazi*. Magnetsko polje zaostaje za električnim za fazni kut φ. Njegov iznos je

$$\varphi = \arctan\frac{\alpha}{\beta}$$

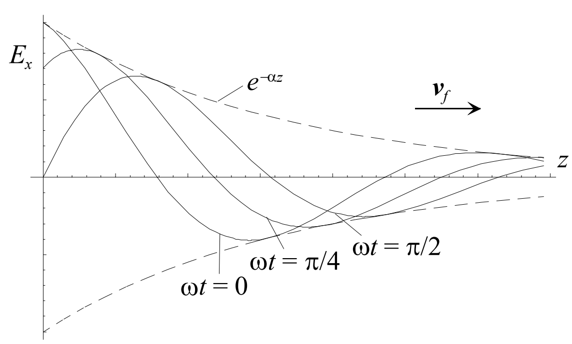
i ovisi o frekvenciji i gradivnim značajkama materijala. Što je provodnost materijala veća i što je niža frekvencija polja, to je kut faznog pomaka između električnog i magnetskog polja veći. Lako je pokazati da je za dielektrike i za materijale sa zanemarivo malom provodnošću $\varphi \approx 0$, a da je za materijale s vrlo velikom provodnošću, kao npr. za kovine $\varphi \approx 45°$. Zato se može ustvrditi da se za sve materijale i za cijelo područje tehničkih frekvencija kut faznog pomaka nalazi u granicama $0 \leq \varphi \leq 45°$.



Slika 11. Vektori električnog i magnetskog polja ravnog prigušenog vala u vodljivom materijalu s gubicima

Na slici 11. prikazana je ovisnost vektora $\boldsymbol{E}_x$ i $\boldsymbol{H}_y$ o odrednici z u određenom vremenskom trenutku $t = 0$, gdje amplitude električnog i magnetskog polja opadaju eksponencijalno, kako se val giba duž osi z. Val magnetskog polja fazno je pomaknut prema valu električnog polja za kut φ.

5. Konačna provodnost materijala $\kappa \neq 0$ ne samo da ima za posljedicu prigušenje putujućeg TEM vala, nego utječe i na njegovu faznu brzinu. Ravnina konstantne faze prostire se faznom brzinom, koja v_f raste s frekvencijom vala tako dugo dok su značajke ε, μ, κ neovisne o frekvenciji.



Slika 12. Gibanje električnog polja ravnog vala koji je linearno polariziran i prostire se duž osi z, prikazano u nekoliko vremenskih trenutaka

Na slici 12. prikazali smo kako se električno polje putujućeg TEM vala giba brzinom v_f duž osi z tijekom vremena. Istovremeno se val i amplitudno prigušuje.

6. Prigušenje putujućeg vala, koji se prostire u vodljivom materijalu, posljedica je gubitaka energije na tom putu. Srednja snaga koja se prenosi putujućim valom kroz jediničnu površinu u okolišu točke na udaljenosti z od ishodišta određena je izrazom

$$N_{\mathrm{Re},sr} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|Z|}e^{-2\alpha z}\cos\varphi$$

E_0 je amplituda, tj. maksimalna vrijednost električnog polja u početnoj točki $z = 0$. Razumljivo je da zbog prigušenja i električnog i magnetskog polja srednja specifična elektromagnetska snaga koju TEM val nosi sobom opada eksponencijalno s $e^{-2\alpha z}$. Za dano polje ta snaga ovisi o modulu impedancije, faznom pomaku i prigušenju u materijalu, koji su pak ovisni o frekvenciji i značajkama materijala.

Dvije su vrste materijala od posebnog interesa u analizi prostiranja ravnih valova. Jedni su *dobri izolatori*, u njima su struje pomaka mnogo veće od provodnih struja, tj. $\kappa/\omega\varepsilon << 1$. Drugi su *dobri vodiči*, u njima su provodne struje mnogo veće od struja pomaka, tj. $\kappa/\omega\varepsilon >> 1$. Očito je da je temeljni kriterij za razvrstavanje jednostavnih materijala pri zadanoj frekvenciji polja u grupu dobrih izolatora, odnosno dobrih vodiča, iznos omjera provodnih i struja pomaka. Taj omjer $\kappa/\omega\varepsilon$ određuje ponašanje materijala u polju elektromagnetskog vala zadane frekvencije. Sad ćemo razviti *približne izraze* za značajke α, β, γ, Z, v_f za ova dva slučaja. Dobiveni izrazi bitno će pojednostavniti i olakšati analizu prostiranja valova u materijalima s gubicima.

Dobri izolatori su materijali u kojima je provodna struja jako mala pa vrijedi

$$\frac{\kappa}{\omega\varepsilon} << 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2$$

Pojednostavnjeni izrazi za značajke vala u tom slučaju jesu

$$\alpha = \frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad ; \quad \beta = \frac{\omega}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{\kappa}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j\frac{\omega}{c} \quad ; \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

- Kod materijala i pri frekvenciji polja, kod kojih je $\kappa/\omega\varepsilon \leq 0.2$, (tj. struje pomaka pet i više puta veće od provodnih), pogreška u proračunu prigušne konstante prema približnom izrazu iznosi samo 0.5% i manje. Očito je da prigušna konstanta nije ovisna o frekvenciji, dok je linearno proporcionalna provodnosti izolatora i idealnoj valnoj impedanciji (otporu).
- Prva aproksimacija za faznu konstantu kod dobrih izolatora je jednaka onoj kod idealnog dielektrika. Analiza točnosti je ista kao za prigušnu konstantu, već kod omjera $\kappa/\omega\varepsilon \leq 0.2$ postiže se točnost s pogreškom od samo 0.5%. Fazna konstanta je linearno ovisna o frekvenciji.
- Ako je omjer $\kappa/\omega\varepsilon \leq 0.2$, valnu impedanciju možemo izjednačiti s valnim otporom idealnog dielektrika. Pri tome činimo u realnom članu pogrešku od najviše 1.5%. Zanemarenjem imaginarnog člana činimo pogrešku od najviše 10%.

Na kraju možemo zaključiti, da se zbog vrlo malih vrijednosti provodnosti κ, polje sinusnog vala vrlo malo, tj. neznatno prigušuje u dobrom izolatoru, dok se u svemu drugom val praktično ponaša kao da se prostire u idealnom dielektriku. Tako npr. prigušna konstanta za porculan kod svih frekvencija do reda 10 GHz iznosi približno $16 \cdot 10^{-12}$ 1/m, što predstavlja vrlo malu vrijednost. Ili drugi primjer, val frekvencije 10 MHz prigušuje se u polistirenu samo 0.5% po kilometru duljine, a električno i magnetsko polje su mu fazno pomaknuti za kut $\varphi = 0.003°$. Valna impedancija, fazna brzina i valna duljina u dobrom izolatoru manji su nego u vakuumu, budući je obično $\varepsilon > \varepsilon_0$ i $\mu = \mu_0$. Gubici u jedinici volumena, vrlo su mali, budući je provodnost κ vrlo mala u dobrim izolatorima.
Dobri vodiči su u sinusnim poljima karakterizirani omjerom $\kappa/\omega\varepsilon >> 1$. *U dobrom vodiču struje pomaka mogu biti potpuno zanemarene* u usporedbi s provodnim strujama. To je jedna od bitnih značajki ponašanja vodiča u sinusno promjenjivim poljima. Analizu ponašanja sinusnog vala u dobrim vodičima učinit ćemo preglednijom ako izvedemo približne izraze za temeljne značajke γ, α, β, Z i v_f materijala uvažavajući da je $\kappa/\omega >> 1$
Dobri vodiči su materijali za koje je

$$\frac{\kappa}{\omega\varepsilon} >> 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} \approx \frac{\kappa}{\omega\varepsilon}$$

Pojednostavnjeni izrazi za značajke vala u to slučaju jesu

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \quad ; \quad \gamma = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \quad ; \quad Z = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\kappa}} \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}}$$

$$\vec{N}_{sr} = \frac{1}{2}\left(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right) = \frac{1}{2}\left|\underline{H}_0\right|^2 e^{-2\alpha z}(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}}\,\vec{a}_z$$

- Prigušna konstanta je za dobre vodiče vrlo velika. Tako za bakar kod 50 Hz ona iznosi 106 1/m, kod 10 MHz je 47000 1/m, a kod 1 GHz ona iznosi 470000 1/m. Prigušenje u dobrim vodičima vrlo je veliko, i to veće što su vodljivost i permeabilnost materijala veći i što je frekvencija polja viša. Tako se npr. val od 10 MHz u *bakru* na putu od 0.06 mm priguši na 5.8% početne vrijednosti. To znači da se val praktički potpuno prigušio i da valovi ne prodiru duboko u kovine. *Kovine djeluju kao štit protiv elektromagnetskih valova*. S druge strane i materijali s lošijom provodnošću, kao npr. *morska voda* sa značajkama $\kappa = 5$ S/m, $\varepsilon = 81\varepsilon_0$ i $\mu = \mu_0$, kod određenih frekvencija ponašaju se kao dobri vodiči. Uvjet koji mora biti ispunjen da bi morska voda bila dobar vodič jest da bude $\kappa/\omega\varepsilon \geq 100$. Dakle, za valove frekvencije $f \leq 11$ MHz morska voda se ponaša kao dobar vodič. To je vrlo široki opseg frekvencija. Pa je tako npr. prigušna konstanta za morsku vodu za valove frekvencije 50 Hz $\alpha = 0.0314$ 1/m, za valove 10 kHz $\alpha = 0.4427$ 1/m i za valove 10 MHz $\alpha = 14.042$ 1/m. Zato će se u morskoj vodi elektromagnetski valovi frekvencije 50 Hz na dubini od 50 m prigušiti na 20.8% početnog iznosa. Približno na isti iznos prigušit će se i valovi frekvencije 10 kHz na dubini od 7.1 m, odnosno valovi frekvencije 10 MHz na dubini od 0.225 m.

- Fazna konstanta približno je jednaka prigušnoj konstanti. Proporcionalna je drugom korijenu frekvencije, permeabilnosti i provodnosti materijala. Jedinica joj je 1/m. Vrijednosti fazne konstante za dobre vodiče su vrlo velike u usporedbi s iznosom fazne konstante za dobre izolatore pri istoj frekvenciji.
- Valna impedancija dobrih vodiča je kompleksna i ekstremno mala kod radiofrekvencija. Tako valna impedancija bakra ima modul 0.012 Ω za frekvenciju 10 MHz. Proporcionalna je drugom korijenu frekvencije, permeabilnosti i recipročne vrijednosti provodnosti materijala. Realni i imaginarni dio su joj približno jednaki, pa *fazni pomak između fazora električnog i magnetskog polja iznosi 45°*.
- Fazna brzina u dobrim vodičima je mnogo manja nego u praznom prostoru. Mjeri se u metrima po sekundi. Posebno treba istaknuti frekvencijsku ovisnost fazne brzine u dobrim vodičima i u vodljivim materijalima uopće. Tako su harmonici višeg reda složenog vala konstantno ubrzani u odnosu na one nižega reda.
- Fazna brzina vala u dobrom vodiču je mnogo manja od brzine vala iste frekvencije u vakuumu $v_f = c_0 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$, pa je *valna duljina u dobrom vodiču mnogo manja od one u vakuumu*. Općenito možemo zaključiti da je valna duljina u dobrom vodiču vrlo mala u usporedbi s valnom duljinom u praznom prostoru. Npr. kod frekvencije od 10 MHz valna duljina u vakuumu je 30 m, dok je u morskoj vodi 0.45 m, a u bakru je samo 0.133 mm.
- Budući je κ dobrih vodiča vrlo visok, pogotovo kovina, to su specifični gubici veliki, posebno na početku ($z = 0$) dok val nije prigušen.

Na kraju možemo zaključiti da se u dobrim vodičima mogu zanemariti struje pomaka (prema provodnim strujama). Polje sinusnog vala se jako prigušuje, budući su specifični gubici u materijalu veliki. Magnetsko polje zaostaje za električnim za fazni kut koji približno iznosi $\varphi \approx 45°$. Kovine kao izrazito dobri vodiči su reflektori elektromagnetskih valova.

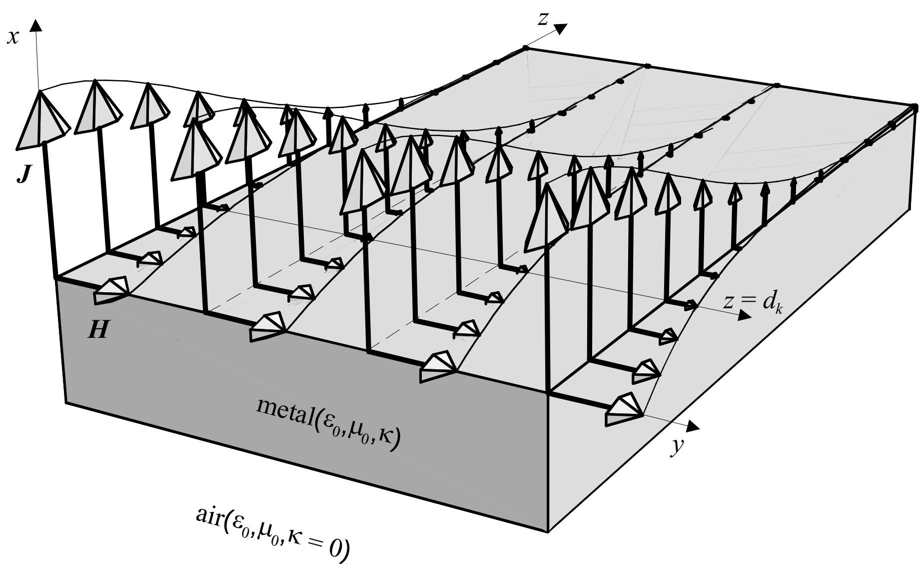
Površinski učinak

Prostiranje valova dosad smo analizirali u vodljivim materijalima s gubicima u i posebno u dobrim vodičima (čiji su izraziti predstavnici kovine). Utvrdili smo da se val koji polazi od površine dobrog vodiča i prostire u njegovu unutrašnjost, vrlo brzo priguši na beznačajnu vrijednost. Zato je u kovinama sinusno elektromagnetsko polje lokalizirano u tankom sloju uz površinu. To ima za posljedicu da su i sinusne provodne struje gustoće $J = \kappa \boldsymbol{E}$, koje teku u kovinama kao posljedica polja, potisnute prema površini i usredotočene u tankom površinskom sloju vodiča. Ova pojava poznata je u elektromagnetskoj teoriji pod nazivom *površinski učinak* (skin efekt).

Objasnili smo da se u praktičnim tehničkim zadaćama uzima da se val u kovinama priguši na beznačajnu vrijednost (na približno 5% početnog iznosa, tj. polja na površini vodiča) na dubini $3d_k$ ispod površine kovine

$$d_k = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}$$

Očito je da elektromagnetsko polje iščezne puno prije (nakon $3d_k$) nego što val uspije prijeći u kovini put koji bi bio jednak jednoj valnoj duljini ($\lambda_k = 6.28d_k$), pa o elektromagnetskom valu u kovini nema smisla govoriti. Budući da je sva struja u kovini usredotočena uz površinu u sloju debljine $3d_\kappa$, to se često govori o *strujnom oblogu* na površini vodiča.



Slika 13. Potiskivanje struja i jakosti magnetskog polja prema površini kovine

Iznos debljine tog strujnog sloja u bakru i aluminiju, koji su izrazito dobri tehnički vodiči, pri različitim frekvencijama polja dan je u tablici 2. Očito je da su te debljine strujnog sloja npr. u bakru reda od 28 mm pri 50 Hz do 2 μm pri frekvenciji od 10 GHz (mikrovalna frekvencija za radar i druge primjene) vrlo male. Stvarno ima smisla govoriti o strujnom oblogu, a nikako o jednolikoj raspodjeli struje u kovini.

Tablica 2. Dubina prodiranja i debljina strujnog sloja uz površinu bakra i aluminija

Frekvencija (Hz)	*Bakar*		*Aluminij*	
	Dubina prodiranja d_κ (mm)	*Debljina strujnog sloja* $3d_\kappa$ (mm)	*Dubina prodiranja* d_κ (mm)	*Debljina strujnog sloja* $3d_\kappa$ (mm)
50	9,4	28,2	12	36
60	8,6	25,8	11	33
10^3	2,1	6,3	2,7	8,1
10^6	0,07	0,21	0,08	0,24
10^9	0,002	0,006	0,003	0,009
10^{10}	$0{,}7\cdot10^{-3}$	$2{,}1\cdot10^{-3}$	$0{,}85\cdot10^{-3}$	$2{,}4\cdot10^{-3}$