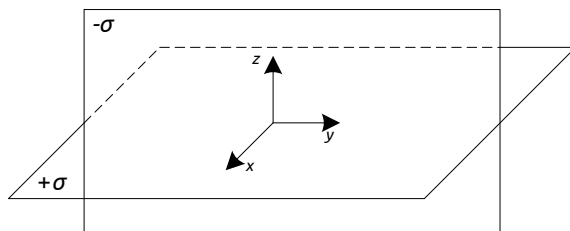


Elektromagnetska polja

Međuispit - 26.4.2013.

Zadatak 5. naboj plošne gustoće $+\sigma$ leži u xy ravnini, a naboj plošne gustoće $-\sigma$ leži u xz ravnini Kartezijevog koordinatnog sustava. Zadano je $|\sigma| = 15 \text{ nC/m}^2$ i $\varepsilon = \varepsilon_0$.



(a) Odredite iznos jakosti električnog polja u V/m u točki $A(2; 0, 5; 3)$.

Električno polje za ravninu xy :

$$\vec{E}_{xy} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z, & z < 0 \end{cases}$$

Električno polje za ravninu xz :

$$\vec{E}_{xz} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_x, & x > 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_x, & x < 0 \end{cases}$$

Za točku A je $x > 0$ i $z > 0$ pa je:

$$\vec{E}_{uk} = \vec{E}_{xy} + \vec{E}_{xz} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z$$

Iznos jakosti električnog polja je:

$$E_{uk} = \sqrt{\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2} = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} \sqrt{2} = 1198 \text{ V/m}$$

(b) Odredite iznos napona U_{BC} u V između točaka $B(-1; -2; -3)$ i $C(-3; -6; -9)$.

Vrijedi:

$$U_{BC} = \varphi(B) - \varphi(C) = - \int_C^B \vec{E}_{uk} d\vec{l}$$

I za točku B i za točku C je $x < 0$ i $z < 0$ pa je:

$$\vec{E}_{uk} = \vec{E}_{xy} + \vec{E}_{xz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_x - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{a}_z$$

Uz $d\vec{l} = dx\vec{a}_x + dy\vec{a}_y + dz\vec{a}_z$ dobije se:

$$\vec{E}_{uk} d\vec{l} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (dx - dz)$$

Gornji integral ne ovisi po putu pa od dočke B do točke C možemo ići po pravcu koji ih spaja:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$$
$$\frac{x + 1}{-2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z + 3}{-6} = t$$

Sada je:

$$x = -2t - 1 \rightarrow dx = -2dt$$

$$y = -4t - 2 \rightarrow dy = -4dt$$

$$z = -6t - 3 \rightarrow dz = -6dt$$

i parametar t je jednak 0 za točku B , odnosno 1 za točku C . Konačno slijedi:

$$U_{BC} = - \int_C^B \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (dx - dz) = - \int_1^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (-2dt + 6dt) = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} = 3388\text{V}$$