

ENERGIJA MAGNETSKOG POLJA I INDUKTIVITETI

Energija pohranjena u statičkom magnetskom polju

- Pomak strujne petlje u magnetskom polju iz položaja (1) u položaj (2)

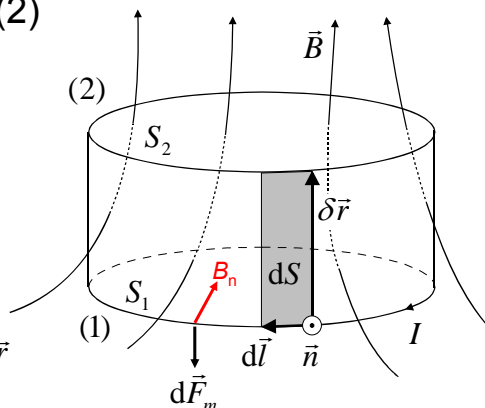
- Na $d\vec{l}$ djeluje sila:

$$d\vec{F}_m = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

- Za pomak $\delta\vec{r}$ vanjska sila $d\vec{F}_v = -d\vec{F}_m$

- pri tom obavi rad:

$$\delta W = d\vec{F}_v \cdot \delta\vec{r} = -I(d\vec{l} \times \vec{B}) \cdot \delta\vec{r}$$



- Identitet $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
 $\delta W = -I(\vec{dl} \times \vec{B}) \cdot \delta \vec{r} = -I\vec{B} \cdot (\delta \vec{r} \times \vec{dl}) = -I\vec{B} \cdot \vec{n} dS$
- Pri pomaku iz (1) u (2) strujnica obuhvati valjak baza S_1 i S_2 . Magnetski tok koji kroz dS uđe u valjak kroz plašt je:
 $\delta \Phi_{pl} = -\vec{B} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \delta W = I \delta \Phi_{pl}$
- Ukupno povećanje energije pri pomaku iz (1) u (2) je: $dW = I d\Phi_{pl} = I(\Phi_2 - \Phi_1)$
- Ako u položaju (1) nema polja ($\Phi_1 = 0$) onda je ukupni prirast energije:
 $W = I\Phi_2 = I\Phi$

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

3

Magnetska energija sustava strujnice

- Formiranje sustava dvije strujnice

– U polje strujnice (1) dovodimo (2)

- Utroši se rad $W_{12} = \Phi_{12} I_2$

– U polje strujnice (2) dovodimo (1)

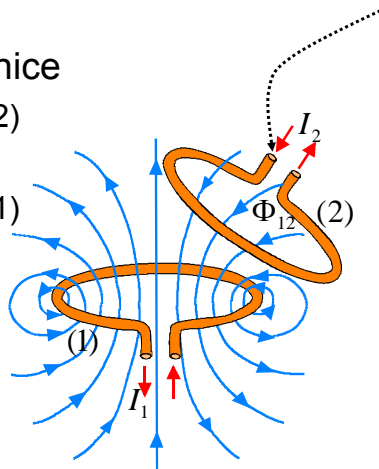
- Utroši se rad $W_{21} = \Phi_{21} I_1$

– Vrijedi:

$$W_{12} = W_{21} = W \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}(\Phi_{12} I_2 + \Phi_{21} I_1)$$

- energija međudjelovanja



20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

4

- Za skupinu n strujnica vrijedi:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Phi_{ji} = \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad ; \quad \Phi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Phi_{ji}$$

– nije uključena energija same strujnice

- Za prostorno raspoređenu struju je:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N \oint_{C_i} \vec{A}_j \cdot d\vec{l}_i$$

- Struja kroz i -ti vodič je:

$$I_i = \iint_{S_i} \vec{J}_i \cdot \vec{n}_i dS_i \Rightarrow W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \vec{J}_i \cdot \vec{n}_i dS_i \left(\sum_{j=1}^N \oint_{C_i} \vec{A}_j \cdot d\vec{l}_i \right)$$

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

5

- Konačno:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV \quad ; \quad (\vec{n}_i \cdot d\vec{l}_i = dl_i \Rightarrow dS_i dl_i = dV_i)$$

- Vrijedi:

$$\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \cdot \vec{A} - \vec{B} \cdot \vec{H}$$

- Pa slijedi:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV + \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV + \frac{1}{2} \oint_S (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

- Ako V obuhvaća cijeli prostor polja: $W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

6

- U linearnim materijalima vrijedi:

$$W = \frac{\mu}{2} \iiint_V |\vec{H}|^2 dV = \frac{1}{2\mu} \iiint_V |\vec{B}|^2 dV$$

- Za nelinearne materijale je: $dW = i d\Phi = i \iint_S d\vec{B} \cdot \vec{n} dS$

- Kako je $i = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l}$; $\vec{n} \cdot d\vec{l} = dl$; $dS dl = dV$

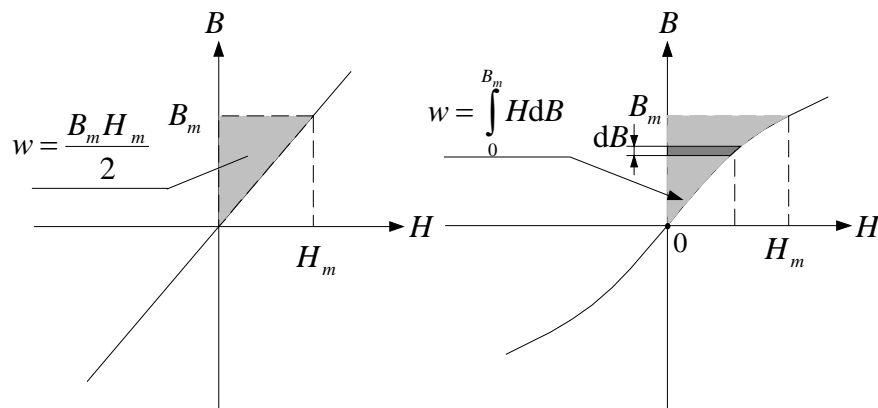
- Slijedi:

$$dW = \iiint_V \vec{H} \cdot d\vec{B} dV \Rightarrow W = \iiint_V \left(\int_{B=0}^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) dV$$

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

7

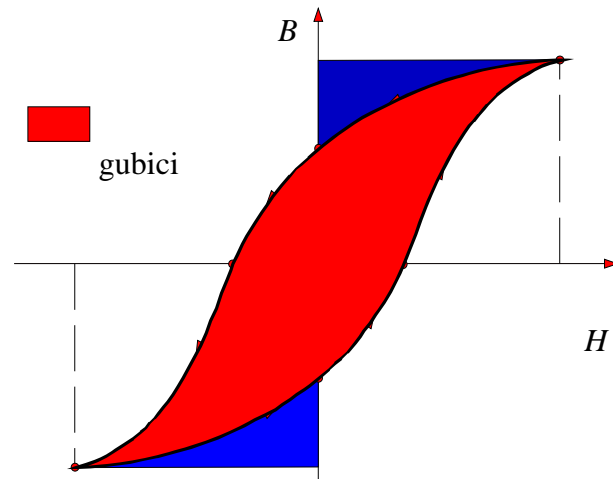


20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

8

Gubici zbog histereze



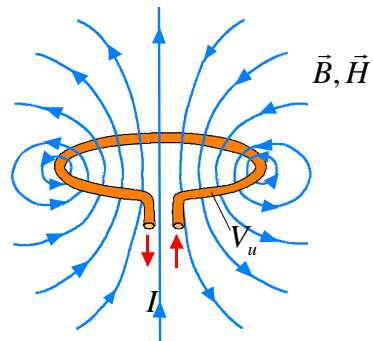
20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

9

Induktiviteti

- Najjednostavniji sustav
 - Jedna strujna petlja u linearnom materijalu



(H proporcionalno I ; B proporcionalno I)

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

10

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow L = \frac{1}{I^2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

– L : *induktivitet* ili *samoinduktivitet*, jedinica: 1H

– Često pišemo:

$$L = \frac{1}{I^2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{I^2} \iiint_{V_u} \vec{H} \cdot \vec{B} dV + \frac{1}{I^2} \iiint_{V_v} \vec{H} \cdot \vec{B} dV = L_u + L_v$$

– V_u je volumen vodiča, V_v je volumen izvan vodiča, L_u je unutrašnji induktivitet, L_v je vanjski induktivitet

– Induktivitet možemo odrediti i pomoću vektorskog magnetskog potencijala:

$$L = \frac{1}{I^2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$$

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

11

Induktivitet tankih strujnih petlji

- Za tanke strujne petlje vrijedi:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi$$

$$\vec{J} dV = Id\vec{l} \Rightarrow L = \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}}{I} = \frac{\Phi}{I}$$

– Omjer obuhvaćenog toka i struje koja ga je uzrokovala

- Često koristimo petlje namotane s N zavoja od kojih svaki obuhvaća isti tok Φ

20.4.2007

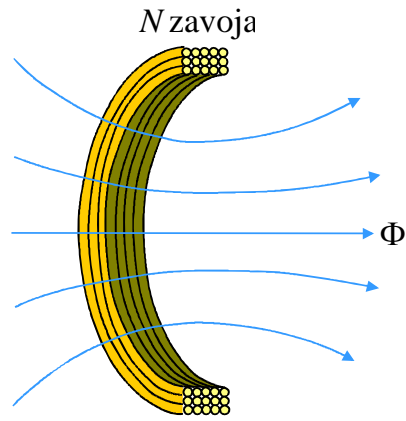
EMP - Magnetska energija i induktiviteti

12

- Uvodimo pojam *obuhvaćenog (ulančenog)* toka

$$\psi = N\Phi \Rightarrow L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\psi}{I}$$

- Induktivitet je omjer obuhvaćenog toka i struje koja stvara magnetsko polje

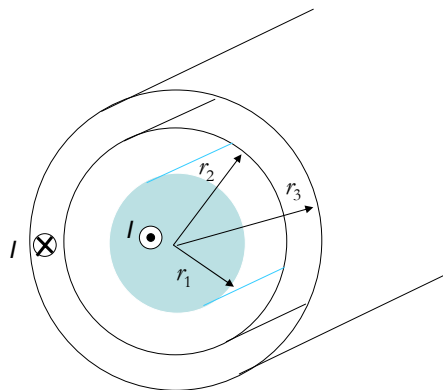


20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

13

1. Odrediti unutarnji i vanjski induktivitet po jedinici duljine koaksijalnog kabela prema slici.

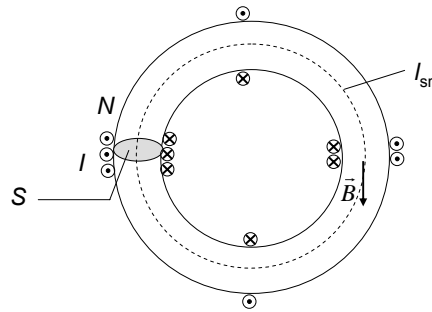


20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

14

2. Odrediti induktivitet torusne zavojnice srednjeg opsega l_{sr} , namotane s N zavoja na jezgru načinjenu od materijala s $\mu = konst.$, kružnog poprečnog presjeka S , protjecane strujom I .



20.4.2007

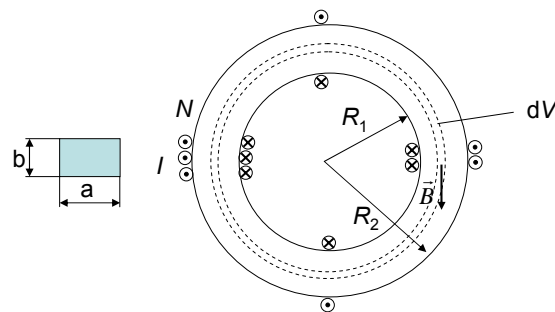
EMP - Magnetska energija i induktiviteti

15

3. Odrediti magnetsku energiju sadržanu u jezgri torusne zavojnice pravokutnog poprečnog presjeka ako je: a) $\mu_r = 5000$, b) krivulja magnetiziranja aproksimirana jednačbom:

$$B = k\sqrt{H}, \quad k = 0,1 \text{ VsA}^{-\frac{1}{2}} \text{m}^{-\frac{3}{2}}$$

Zadano: $R_1 = 5 \text{ cm}$, $a = 2 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$, $N = 100$, $I = 1 \text{ A}$.



20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

16

Međuiduktivitet

- Sustav dvije strujne petlje

- Struje I_1 i I_2
- Linearni materijal
- Superpozicija: $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$; $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H}_1 \cdot \vec{B}_1 dV + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H}_2 \cdot \vec{B}_2 dV + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H}_2 \cdot \vec{B}_1 dV + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H}_1 \cdot \vec{B}_2 dV = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + L_{12} I_1 I_2$$

- L_{12} je međuiduktivitet, L_{11} i L_{22} su samoinduktiviteti

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

17

Međuiduktivitet tankih strujnih petlji

- Dvije tanke strujne petlje namotane sa više zavoja

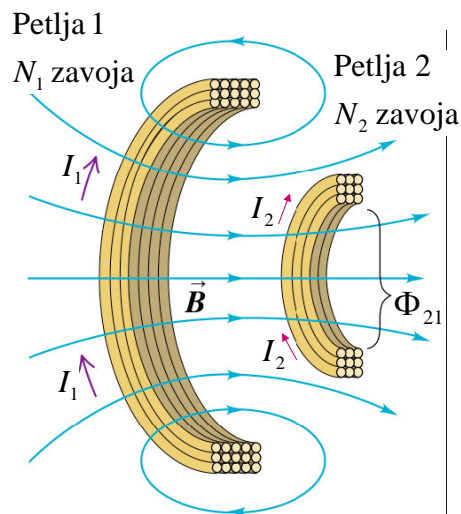
- Vrijedi:

$$\vec{J}_1 dV_1 = I_1 d\vec{l}_1 ; \vec{J}_2 dV_2 = I_2 d\vec{l}_2$$

- Odnosno:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{I_1 I_2} \iiint_{V_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{A}_1 dV$$

$$L_{21} = \frac{1}{I_1} \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}$$



20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

18

- Ukupna pohranjena energija je:

$$W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 = \frac{I_1^2}{2} (L_{11} + L_{22} p^2 + 2L_{12} p) \quad ; \quad p = \frac{I_2}{I_1}$$

- Deriviranje po p rezultira s:

$$\frac{dW}{dp} = I_1^2 (L_{22} p + L_{12}) = 0 \Rightarrow p = -\frac{L_{12}}{L_{22}}$$

- Minimum pohranjene energije je

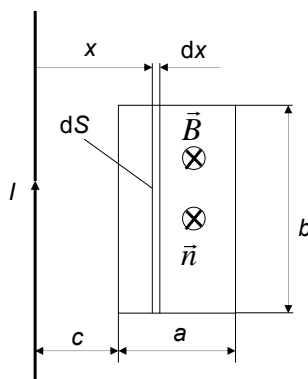
$$W_{\min} = \frac{I_1^2}{2} \left(L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}} \right) \geq 0 \Rightarrow L_{12} \leq \sqrt{L_{11} L_{22}}$$

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

19

4. Odrediti međuinduktivitet ravne, beskonačno duge strujnice i pravokutne vodljive petlje prema slici.

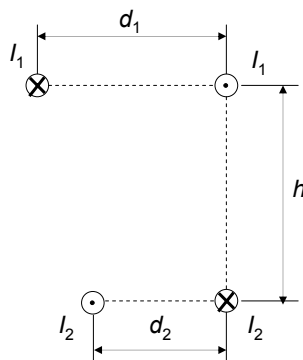


20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

20

5. Odrediti međuinuktivitet po jedinici duljine dvožičnog voda prema slici.



20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

21

Određivanje sila pomoću energije

- Sile možemo odrediti pomoću energije
 - Načelo virtualnog pomaka – mehanika
 - Određivanje rezultantne sile
- Magnetski vektorski potencijal je konstantan (izolirani sustav)
 - Sila u smjeru pomaka s je: $\vec{F}_s = -\frac{\delta W_m}{\delta s} \vec{a}_s$
- Gustoća struje je konstantna (neizolirani sustav)
 - Sila u smjeru pomaka s je: $\vec{F}_s = \frac{\delta W_m}{\delta s} \vec{a}_s$

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i induktiviteti

22

$$\vec{F}_s = \frac{\delta W_m}{\delta s} \vec{a}_s = \vec{a}_s \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{2} L I^2 \right\}_{I=\text{konst.}} = \vec{a}_s \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial s}$$

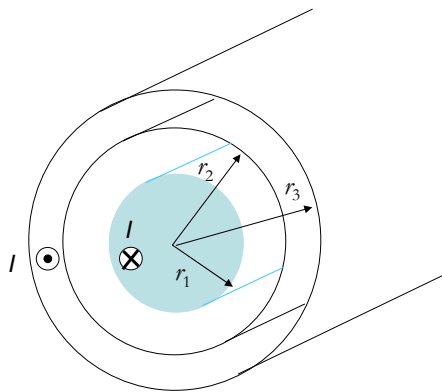
Sila djeluje tako da nastoji povećati induktivitet.

20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

23

6. Odrediti silu po jedinici duljine na vanjski vodič koaksijalnog kabela prema slici.



20.4.2007

EMP - Magnetska energija i
induktiviteti

24