STATIČKO STRUJNO POLJE

Vektor gustoće struje $\bar{J}$

Jednadžba kontinuiteta: $\nabla\cdot\bar{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow\oiint_S\bar{J}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}S=0$

Jednadžbe statičkog strujnog polja

$$\nabla\cdot\bar{J}=0\Rightarrow\oiint_S\bar{J}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}S=0\qquad\bar{J}=\kappa\bar{E}$$

$$\nabla\times E=0\Rightarrow\oint_c\bar{E}\cdot\mathrm{d}\bar{l}=0\Rightarrow\bar{E}=-\nabla\varphi$$

Analogija statičkog strujnog i statičkog električnog polja

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\bar{E}&=0\\\nabla\cdot\bar{D}&=0\\\bar{D}&=\varepsilon\bar{E}\end{aligned}\right\}\text{staticko elek. polje}\qquad\left.\begin{aligned}\nabla\times\bar{E}&=0\\\nabla\cdot\bar{J}&=0\\\bar{J}&=\kappa\bar{E}\end{aligned}\right\}\text{staticko strujno polje}$$

- Analogne veličine: $\bar{D}\leftrightarrow\bar{J}\quad\varepsilon\leftrightarrow\kappa\quad C\leftrightarrow G=\frac{1}{R}$
- Rješenja se preslikavaju iz statičkih električnih u statička strujna polja $G=\frac{1}{R}=\frac{\kappa}{\varepsilon}C$

Uvjeti na granici dva vodiča (statičko polje)

$$\oiint_S\bar{J}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}S=0\quad\Rightarrow\quad\bar{n}_{12}\cdot(\bar{J}_2-\bar{J}_1)=0$$

$$\bar{n}_{12}\times(\bar{E}_2-\bar{E}_1)=0\quad\Rightarrow\quad\bar{n}_{12}\times\left(\frac{\bar{J}_2}{\kappa_2}-\frac{\bar{J}_1}{\kappa_1}\right)$$

Ohmov zakon i električna vodljivost

- Ponašanje velikog broja vodiča

Linearni odnos između gustoće struje i jakosti električnog polja: $\bar{J}=\kappa\bar{E}$

Ako vodič ima konstantni presjek S onda su $\bar{J}$ i $\bar{E}$ konstantni u vodiču pa je ukupna struja kroz vodič:

$$I=JS=\kappa ES\quad\Rightarrow\quad E=\frac{I}{\kappa S}$$

Razlika potencijala između točaka A i B je:

$$U=U_{AB}=-\int_B^A\bar{E}\cdot\mathrm{d}\bar{l}=El=\frac{I}{\kappa S}l\quad\Rightarrow\quad U=IR\quad;\quad R=\frac{l}{\kappa S}$$

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}q[\varphi(\mathrm{A})-\varphi(\mathrm{B})]=\bar{J}\cdot\bar{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\,\bar{E}\cdot\mathrm{d}\bar{s}=\bar{J}\cdot\bar{E}\mathrm{d}S\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\bar{J}\cdot\bar{E}\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

$$P=\iiint_V\bar{J}\cdot\bar{E}\mathrm{d}V=-\iiint_V\nabla\cdot(\varphi\bar{J})\mathrm{d}V=-\oiint_S\varphi\bar{J}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}S$$

Elektromotorna sila:

$$\mathrm{EMS}=\oint_c(\bar{E}_k+\bar{E}_m)\cdot\mathrm{d}\bar{l}=\oint_c\bar{E}_m\cdot\mathrm{d}\bar{l}=\oint_c\frac{\bar{J}}{\kappa}\cdot\mathrm{d}\bar{l}=\frac{I}{S}\frac{l}{\kappa}=IR$$

STATIČKO MAGNETSKO POLJE U VAKUUMU

$$\mathrm{d}\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\bar{l}\times\bar{R}}{|\bar{R}|^3}\quad;\quad\bar{R}=\bar{r}-\bar{r}'\quad;\quad\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ (\mathrm{Vs/Am=H/m})$$

Ako struje teku u volumenu V

$$\bar{B}(\bar{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\bar{J}(\bar{r}')\times(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\mathrm{d}V$$

Struja koja prolazi kroz dS je: $I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\rho v\,\mathrm{d}S$

Gustoća struje je: $J=\frac{I}{\mathrm{d}S}=\rho v$

Sila na naboj dq je:

$$\mathrm{d}\bar{F}=\mathrm{d}q(\bar{v}\times\bar{B})=\rho\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}S\,\bar{v}\times\bar{B}=\rho\,\bar{v}\times\bar{B}\,\mathrm{d}V=\bar{J}\times\bar{B}\,\mathrm{d}V$$

Sila na struju u volumenu V je: $\bar{F}=\iiint\bar{J}\times\bar{B}\,\mathrm{d}V$

Tanka žica (struja teče po liniji) → $\bar{J}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}S=I$

STATIČKO MAGNETSKO POLJE U VAKUUMU

$$\bar{F}=I\int_{\check{z}ici}\mathrm{d}\bar{l}\times\bar{B}$$

Biot-Savartov zakon možemo pisati u obliku:

$$\bar{B}(\bar{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\bar{J}(\bar{r}')\times(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\mathrm{d}V=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\nabla\times\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\mathrm{d}V$$

Divergencija gustoće magnetskog toka je:

$$\nabla\cdot\bar{B}(\bar{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\nabla\cdot\left[\nabla\times\left(\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\right)\right]\mathrm{d}V=0$$

jer je $\nabla\cdot(\nabla\times\bar{A})\equiv0$

Gaussov zakon za magnetsko polje

$$\nabla\cdot\bar{B}=0\quad\Rightarrow\quad\oiint_S\bar{B}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}S=0$$

Ne postoji skalarni izvor magnetskog polja (magnetski monopol)

Magnetski tok kroz zatvorenu plohu je jednak ništici

Linije magnetskog polja su zatvorene krivulje

$$\nabla\times\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\bar{J}\,4\pi\,\delta(\bar{r}-\bar{r}')\mathrm{d}V=\mu_0\bar{J}$$

Ampèreov kružni zakon

$$\nabla\times\bar{B}=\mu_0\bar{J}\quad\Rightarrow\quad\oint_c\bar{B}\cdot\mathrm{d}\bar{l}=\mu_0\iint_S\bar{J}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}S=\mu_0I$$

Temeljni zakoni statičkog magnetskog polja u vakuumu jesu:

$$\nabla\cdot\bar{B}=0$$

$$\nabla\times\bar{B}=\mu_0\bar{J}$$

Iz identiteta $\nabla\cdot(\nabla\times\bar{A})\equiv0$ slijedi: $\bar{B}=\nabla\times\bar{A}$

$\bar{A}$ zovemo **vektorski magnetski potencijal**

Kontinuirana funkcija

Sloboda u propisivanju divergencije → baždarenje

Najjednostavnije Coulombovo baždarenje $\nabla\cdot\bar{A}=0$

Diferencijalna jednadžba vektorskog magnetskog potencijala

- Vrijedi: $\nabla\times\bar{B}=\nabla\times(\nabla\times\bar{A})=\nabla(\nabla\cdot\bar{A})-\Delta\bar{A}=\mu_0\bar{J}$
- Korištenjem Coulombovog baždarenja dobivamo:

$$\Delta\bar{A}=-\mu_0\bar{J}$$

Rješenje za volumne struje u neograničenom prostoru

$$\bar{A}(\bar{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\mathrm{d}V$$

Plošne struje

$$\bar{A}(\bar{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S\frac{\bar{K}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\mathrm{d}S$$

Linijske struje

$$\bar{A}(\bar{r})=\frac{\mu_0I}{4\pi}\int_c\frac{\mathrm{d}\bar{l}}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

Magnetski tok:

$$\Phi=\iint_S\bar{B}\cdot\bar{n}\mathrm{d}S=\iint_S(\nabla\times\bar{A})\cdot\bar{n}\mathrm{d}S=\oint_c\bar{A}\cdot\mathrm{d}\bar{l}$$

Slika statičkog magnetskog polja

- Linije polja ili B-linije $\frac{\mathrm{d}x}{B_x}=\frac{\mathrm{d}y}{B_y}=\frac{\mathrm{d}z}{B_z}$
- U 2D zadaćama:

$$\bar{J}=J(x,y)\bar{a}_z\Rightarrow\bar{A}=A(x,y)\bar{a}_z\Rightarrow\bar{B}=\nabla\times\bar{A}=\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\bar{a}_x-\frac{\partial A(x,y)}{\partial x}\bar{a}_y$$

- Jednadžba linije polja:

$$B_x\mathrm{d}y-B_y\mathrm{d}x=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial A(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y=0\quad\Rightarrow\quad\mathrm{d}A(x,y)=0$$

$A(x,y)=\text{konst.}\quad\rightarrow\quad$ jednadžba linije polja

MATERIJALI U MAGNETSKOM POLJU

Uvodimo magnetizaciju:

$$\bar{M}(\bar{r}) = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \text{oko } \bar{r}}} \frac{\sum_{\Delta V} \bar{m}_i}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\bar{m}}{\mathrm{d}V} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\bar{m} = \bar{M}\mathrm{d}V$$

Dipolni moment je:

$$\mathrm{d}\bar{m} = \bar{M}\mathrm{d}V = \bar{M}\mathrm{d}l\mathrm{d}S = \left(\bar{M}\cdot\mathrm{d}\bar{l}\right)\bar{n}\mathrm{d}S = \mathrm{d}I\,\bar{n}\mathrm{d}S$$

Veza magnetizacije i amperskih struja

- Ukupna amperska struja je:

$$I_a = \oint_c \bar{M}\cdot\mathrm{d}\bar{l} = \iint_{S_C} \bar{J}_a \cdot \bar{n}_{S_C}\mathrm{d}S$$

- Stokesov teorem

$$\nabla\times\bar{M} = \bar{J}_a$$

- Ako je $\nabla\times\bar{M}$ singularan
  - Granična ploha
  - Amperska plošna struja

$$\bar{K}_a = \bar{M}\times\bar{n}$$

Vektor jakosti magnetskog polja

- Ukupnu indukciju dobivamo superpozicijom:

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}_a \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\bar{B} = \mu_0\left(\bar{J}_s + \bar{J}_a\right) \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}\right) = \bar{J}_s$$

- Uvodimo dodatni vektor jakosti magnetskog polja:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\bar{H} = \bar{J}_s$$

Magnetski materijali

- Vrijedi: $\bar{B} = \mu_0\bar{H} + \bar{M} = \mu_0(1+\chi_m)\bar{H} = \mu_0\mu_r\bar{H}$

Jednadžbe statičkog magnetskog polja u materijalu

- Ampereov zakon u materijalima:

$$\nabla\times\bar{H} = \bar{J}_s \quad \Rightarrow \quad \oint_c \bar{H}\cdot\mathrm{d}\bar{l} = \iint_S \bar{J}_s\cdot\bar{n}\mathrm{d}S = I$$

- Jednadžba

$$\nabla\cdot\bar{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oiint_S \bar{B}\cdot\bar{n}\mathrm{d}S = 0$$

ne uključuje izvore polja pa se ne mijenja prisutnošću materijala

Uvjeti na granici dva materijala

- Izvode se iz integralnog oblika jednadžbi polja
- Postupak analogan pokazanom za statičko električno polje
- Tangencijalna komponenta $\bar{H} \rightarrow$ skok za iznos gustoće slobodnih plošnih struja na granici:

$$\bar{n}\times\left(\bar{H}_2 - \bar{H}_1\right) = \bar{K}_s$$

- Okomita komponenta $\bar{B}$ $\rightarrow$ kontinuirano prelazi granicu:

$$\bar{n}\cdot\left(\bar{B}_2 - \bar{B}_1\right) = 0$$

ENERGIJA MAGNETSKOG POLJA I INDUKTIVITETI

Energija pohranjena u statičkom magnetskom polju

- Pomak strujne petlje u magnetskom polju iz položaja (1) u položaj (2)
- Na $\mathrm{d}\bar{l}$ djeluje sila:

$$\mathrm{d}\bar{F}_m = I\left(\mathrm{d}\bar{l}\times\bar{B}\right)$$

ENERGIJA MAGNETSKOG POLJA I INDUKTIVITETI

Magnetska energija sustava strujnica

- Formiranje sustava dvije strujnice

  U polje strujnice (1) dovodimo (2)
  - Utroši se rad $W_{12} = \Phi_{12}I_2$

  U polje strujnice (2) dovodimo (1)
  - Utroši se rad $W_{21} = \Phi_{21}I_1$

  Vrijedi:

$$W_{12} = W_{21} = W \quad \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\Phi_{12}I_2 + \Phi_{21}I_1\right)$$

  - energija međudjelovanja

- Za skupinu n strujnica vrijedi:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Phi_{ji} = \sum_{i=1}^{n} I_i\Phi_i \quad ; \quad \Phi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Phi_{ji}$$

  nije uključena energija same strujnice

- Za prostorno raspoređenu struju je:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} \oint_{c_i} \bar{A}_j\cdot\mathrm{d}\bar{l}_i$$

- Struja kroz i-ti vodič je:

$$I_i = \iint_{S_i} \bar{J}_i\cdot\bar{n}_i\mathrm{d}S_i \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i} \bar{J}_i\cdot\bar{n}_i\mathrm{d}S_i\left(\sum_{j=1}^{N}\oint_{c_i}\bar{A}_j\cdot\mathrm{d}\bar{l}_i\right)$$

- Konačno:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \bar{J}\cdot\bar{A}\mathrm{d}V \quad ; \quad \left(\bar{n}_i\cdot\mathrm{d}\bar{l}_i = \mathrm{d}l_i \Rightarrow \mathrm{d}S_i\mathrm{d}l_i = \mathrm{d}V_i\right)$$

- Vrijedi:

$$\nabla\cdot\left(\bar{H}\times\bar{A}\right) = \bar{A}\cdot\left(\nabla\times\bar{H}\right) - \bar{H}\cdot\left(\nabla\times\bar{A}\right) = \bar{J}\cdot\bar{A} - \bar{B}\cdot\bar{H}$$

- Pa slijedi:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \bar{J}\cdot\bar{A}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V \bar{B}\cdot\bar{H}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\iiint_V \nabla\cdot\left(\bar{H}\times\bar{A}\right)\mathrm{d}V =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_V \bar{B}\cdot\bar{H}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\oiint_S \left(\bar{H}\times\bar{A}\right)\cdot\bar{n}\mathrm{d}S$$

- Ako V obuhvaća cijeli prostor polja: $W = \frac{1}{2}\iiint_V \bar{B}\cdot\bar{H}\mathrm{d}V$

- U linearnim materijalima vrijedi:

$$W = \frac{\mu}{2}\iiint_V \left|\bar{H}\right|^2\mathrm{d}V = \frac{1}{2\mu}\iiint_V \left|\bar{B}\right|^2\mathrm{d}V$$

- Za nelinearne materijale je: $\mathrm{d}W = i\mathrm{d}\Phi = i\iint_S \mathrm{d}\bar{B}\cdot\bar{n}\mathrm{d}S$

- Kako je $i = \oint_c \bar{H}\cdot\mathrm{d}\bar{l}$; $\bar{n}\cdot\mathrm{d}\bar{l} = \mathrm{d}l$; $\mathrm{d}S\mathrm{d}l = \mathrm{d}V$

- Slijedi:

$$\mathrm{d}W = \iiint_V \bar{H}\cdot\mathrm{d}\bar{B}\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad W = \iiint_V\left(\int_{B=0}^{B}\bar{H}\cdot\mathrm{d}\bar{B}\right)\mathrm{d}V$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \bar{H}\cdot\bar{B}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}LI^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{I^2}\iiint_V \bar{H}\cdot\bar{B}\mathrm{d}V$$

L: *induktivitet* ili *samoinduktivitet*, jedinica: 1H

Često pišemo:

$$L = \frac{1}{I^2}\iiint_V \bar{H}\cdot\bar{B}\mathrm{d}V = \frac{1}{I^2}\iiint_{V_u} \bar{H}\cdot\bar{B}\mathrm{d}V + \frac{1}{I^2}\iiint_{V_v} \bar{H}\cdot\bar{B}\mathrm{d}V = L_u + L_v$$

V_u je volumen vodiča, V_v je volumen izvan vodiča, L_u je unutrašnji induktivitet, L_v je vanjski induktivitet

Induktivitet možemo odrediti i pomoću vektorskog magnetskog potencijala:

$$L = \frac{1}{I^2}\iiint_V \bar{J}\cdot\bar{A}\mathrm{d}V$$

ENERGIJA MAGNETSKOG POLJA I INDUKTIVITETI

Induktivitet tankih strujnih petlji

- Za tanke strujne petlje vrijedi:

$$\bar{J}\mathrm{d}V = I\mathrm{d}\bar{l} \Rightarrow L = \frac{\oint_c \bar{A}\cdot\mathrm{d}\bar{l}}{I} = \frac{\Phi}{I}$$

- Uvodimo pojam o*buhvaćenog* (*ulančenog*) toka

$$\psi = N\Phi \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\psi}{I}$$

Međuinduktivitet

- Sustav dvije strujne petlje

  Struje I_1 i I_2

  Linearni materijal

  Superpozicija: $\bar{H} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2 \quad ; \quad \bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2$

$$W = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 + L_{12}I_1I_2$$

L_{12} je *međuinduktivitet*, L_{11} i L_{22} su *samoinduktiviteti*

Međuinduktivitet tankih strujnih petlji

- Dvije tanke strujne petlje namotane sa više zavoja
- Vrijedi:

$$\bar{J}_1\mathrm{d}V_1 = I_1\mathrm{d}\bar{l}_1 \,;\, \bar{J}_2\mathrm{d}V_2 = I_2\mathrm{d}\bar{l}_2$$

- Odnosno:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{I_1I_2}\iiint_{V_2}\bar{J}_2\bar{A}_1\mathrm{d}V$$

$$L_{21} = \frac{1}{I_1}\oint_{c_2}\bar{A}_1\cdot\mathrm{d}\bar{l}_2 = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}$$

- Ukupna pohranjena energija je:

$$W = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 + L_{12}I_1I_2 = \frac{I_1^2}{2}\left(L_{11} + L_{22}p^2 + 2L_{12}p\right) \quad ; \quad p = \frac{I_1}{I_2}$$

- Deriviranje po p rezultira s:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}p} = I_1^2\left(L_{22}p + L_{12}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{L_{12}}{L_{22}}$$

- Minimum pohranjene energije je

$$W_{\min} = \frac{I_1^2}{2}\left(L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad L_{12} \leq \sqrt{L_{11}L_{22}}$$

Određivanje sila pomoću energije

$$\bar{F}_s = \frac{\delta W_m}{\delta s}\bar{a}_s = \bar{a}_s\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{2}LI^2\right\}_{I=\text{konst.}} = \bar{a}_s\frac{1}{2}I^2\frac{\partial L}{\partial s}$$

MAGNETSKI KRUGOVI

Magnetski krug

Za zatvorenu krivulju *c* kroz os silocijevi vrijedi:

$$\oint_c \bar{H}\cdot d\bar{l} = \sum I = NI$$

- U osi elementarne silocijevi su $\bar{H}$ i $d\bar{l}$ kolinearni, pa ako su materijali u silocijevi linearni, vrijedi:

$$\oint_c \frac{B}{\mu}\mathrm{d}l = \oint_c \frac{B\mathrm{d}S}{\mu\mathrm{d}S}\mathrm{d}l = \oint_c \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mu\mathrm{d}S}\mathrm{d}l = NI$$

- Za cijevi konačnog presjeka (uz uvjete za elementarnu silocijev) je: $\Phi = \dfrac{NI}{\oint_c \frac{\mathrm{d}l}{\mu S}}$

- Ovaj izraz je analogan Ohmovom zakonu za istosmjerni krug

$$\Phi = \frac{NI}{\oint_c \frac{\mathrm{d}l}{\mu S}} \quad \leftrightarrow \quad I = \frac{U}{\oint_c \frac{\mathrm{d}l}{\kappa S}}$$

NI – *magnetomotorna sila*

$\oint_c \frac{\mathrm{d}l}{\mu S}$ – *magnetski otpor*