

STATIČKO MAGNETSKO POLJE U VAKUUMU

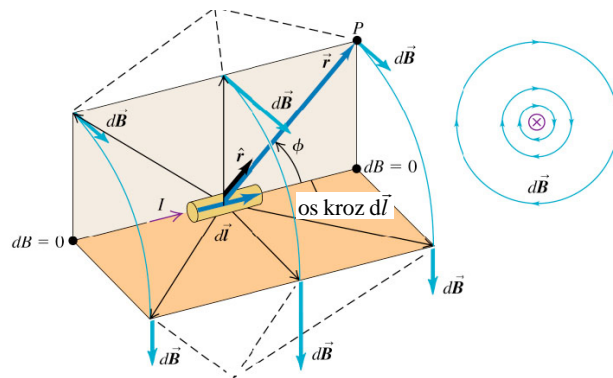
Biot-Savartov zakon

- H.C. Oersted (1777–1851)
- Fizičar i kemičar
- Profesor u Kopenhagenu
- 1819. otkrio da se magnetska igla u blizini vodiča protjecanog strujom zakreće okomito na smjer struje
- Ustanovio vezu elektriciteta i magnetizma - elektromagnetizam



- 1820. su J.B. Biot i F. Savart eksperimentalno otkrili zakon koji povezuje struju i gustoću magnetskog toka (magnetsku indukciju) u vakuumu:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3} ; \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' ; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (Vs/Am = H/m)}$$



12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

3

- Inverzni kvadratni zakon kao Coulombov
- Bitno različiti vektorski karakter
- Ako struje teku u volumenu V

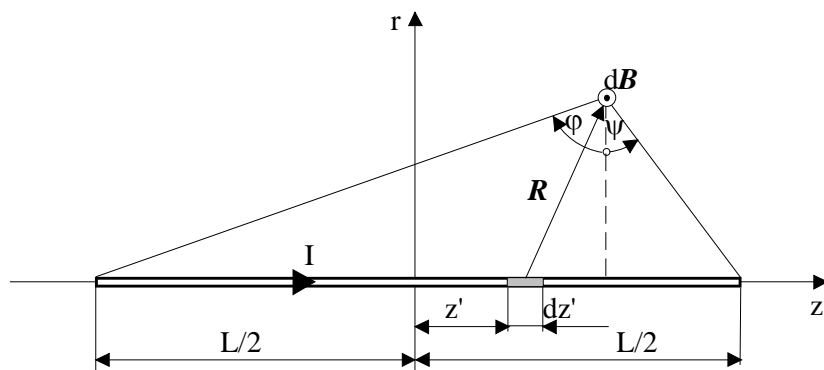
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

4

1. Odrediti magnetsku indukciju kratke ravne strujnice duljine L kojom protječe istosmjerna struja I .

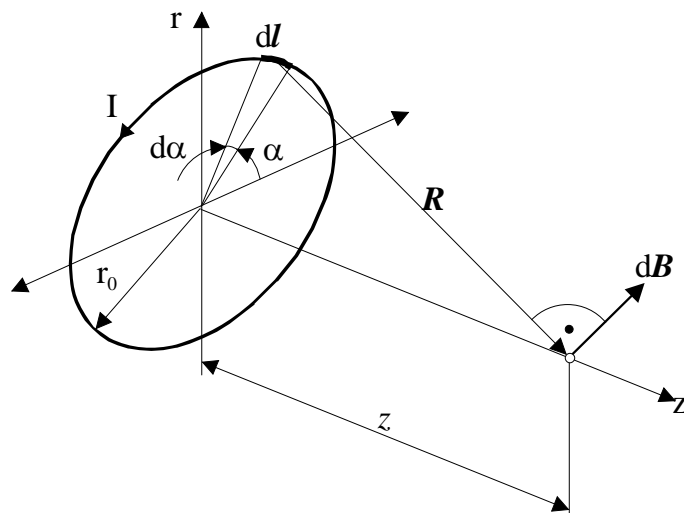


12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

5

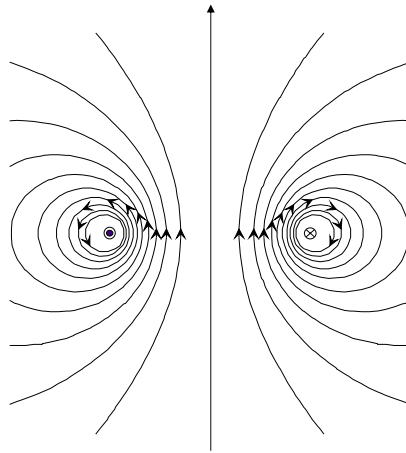
2. Odrediti magnetsku indukciju na osi kružne strujnice polumjera r_0 kojom teče istosmjerna struja I .



12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

6



12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u
vakuumu

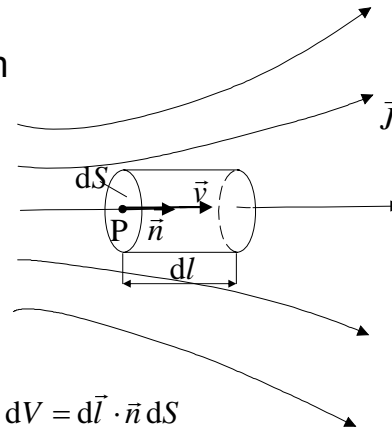
7

Sila na strujni element u magnetskom polju

- Razmotrimo prostor u kojem se naboji gustoće ρ gibaju brzinom \vec{v}
- dS okomit na \vec{v} u točki P
- Tijekom dt naboj prijeđe put

$$d\vec{l} = \vec{v} dt$$

- Naboj dq koji u dt prođe kroz dS je unutar volumena $dV = d\vec{l} \cdot \vec{n} dS$
i iznosi $dq = \rho dV = \rho \vec{v} dt \cdot \vec{n} dS$



12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u
vakuumu

8

- Struja koja prolazi kroz dS je: $I = \frac{dq}{dt} = \rho v dS$
- Gustoća struje je: $J = \frac{I}{dS} = \rho v$
- Sila na naboj dq je:

$$d\vec{F} = dq(\vec{v} \times \vec{B}) = \rho dl dS \vec{v} \times \vec{B} = \rho \vec{v} \times \vec{B} dV = \vec{J} \times \vec{B} dV$$
- Sila na struju u volumenu V je: $\vec{F} = \iiint_V \vec{J} \times \vec{B} dV$
- Tanka žica (struja teče po liniji) $\rightarrow \vec{J} \cdot \vec{n} dS = I$

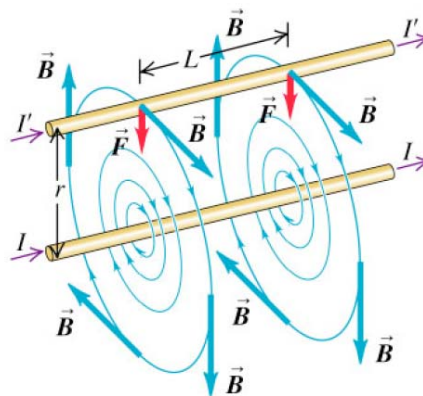
$$\vec{F} = I \int_{\text{žica}} d\vec{l} \times \vec{B}$$

12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

9

Primjer: Sila između dva duga vodiča



12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

10

Ampèreov zakon i jednačbe statičkog magnetskog polja

- Vrijedi:
$$\frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Biot-Savartov zakon možemo pisati u obliku:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

- Divergencija gustoće magnetskog toka je:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla \cdot \left[\nabla \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV = 0$$

– jer je $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$

12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

11

- Gaussov zakon** za magnetsko polje

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$$

- Ne postoji skalarni izvor magnetskog polja (magnetski monopol)
- Magnetski tok kroz zatvorenu plohu je jednak ničiti
- Linije magnetskog polja su zatvorene krivulje

12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

12

- Iz Biot-Savartovog zakona slijedi:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla \times \left[\nabla \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV$$

- Koristimo identitete:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad ; \quad \nabla(u\vec{A}) = u(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla u)$$

- Slijedi:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\nabla \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] &= \nabla \left[\nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] - \Delta \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \\ &= \nabla \left[\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] - \vec{J}(\vec{r}') \Delta \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \end{aligned}$$

$$\text{-- jer je u statičkim poljima: } \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

13

- Vrijedi:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla \left[\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \Delta \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

- Korištenjem relacije $\iiint_V \nabla u dV = \oint_S u \vec{n} dS$ prvi integral prelazi u:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla \left[\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \vec{n} dS = 0$$

- Budući da V obuhvaća cijeli volumen u kojem teku struje pa je S izvana u području u kojem ne teku struje i $J=0$

12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

14

- Za određivanje drugog integrala koristimo relaciju:

$$\Delta \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

- Pa vrijedi:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \mu_0 \vec{J}$$

André Marie Ampère (1775-1836)

- Legenda: do dvanaeste godine savladao svu poznatu matematiku
- 1809. postaje profesor matematike
- Bavio se i fizikom i kemijom
- 1820. formulirao kružni zakon
- 1826. matematička teorija elektrodinamičkih pojava



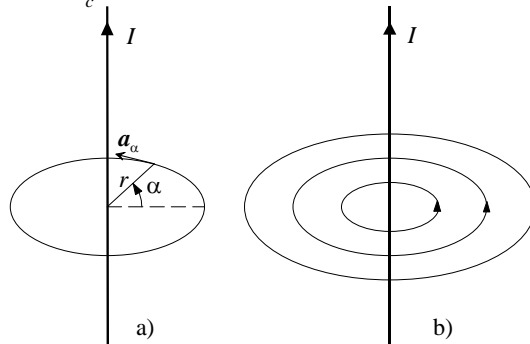
- **Ampèreov kružni zakon**

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 I$$

1. Odrediti magnetsku indukciju beskonačne strujnice protjecane strujom I .

– Osa simetrija $\vec{B} = B\vec{a}_\alpha$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\alpha r d\alpha = 2r\pi B = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{a}_\alpha$$

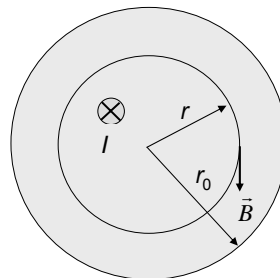


12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

17

2. Odrediti magnetsku indukciju unutar beskonačno dugog ravnog vodiča kružnog presjeka, polumjera r_0 , protjecanog strujom I .

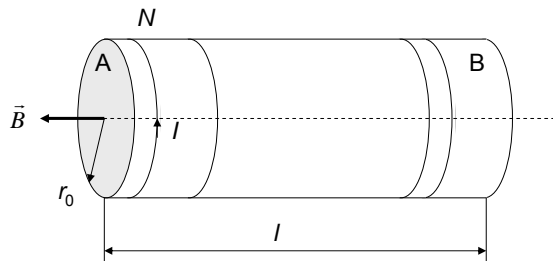


12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

18

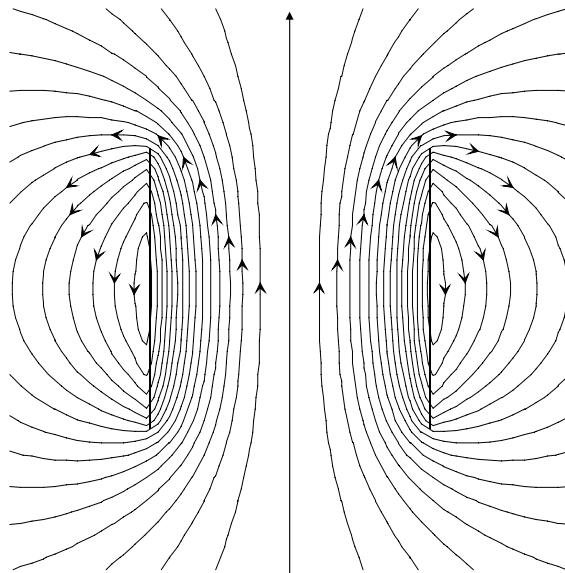
3. Odrediti magnetsku indukciju na osi ravne duge zavojnice duljine l , namotane s N zavoja na jezgru kružnog poprečnog presjeka polumjera r_0 , protjecane strujom I .



12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u
vakuumu

19

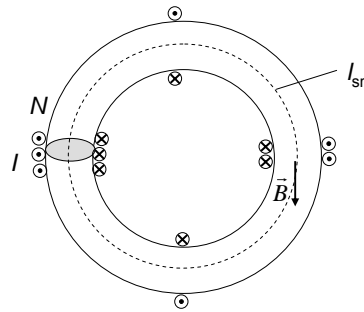


12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u
vakuumu

20

4. Odrediti magnetsku indukciju torusne zavojnice srednjeg opsega l_{sr} , namotane s N zavoja na jezgru kružnog poprečnog presjeka polumjera r_0 , protjecane strujom I .



12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

21

Vektorski magnetski potencijal

- Temeljni zakoni statičkog magnetskog polja u vakuumu jesu:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

- Iz identiteta $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$ slijedi: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
- \vec{A} zovemo **vektorski magnetski potencijal**
 - Kontinuirana funkcija
 - Sloboda u propisivanju divergencije \rightarrow baždarenje
 - Najjednostavnije Coulombovo baždarenje $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

22

Diferencijalna jednađžba vektorskog magnetskog potencijala

- Vrijedi: $\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$
- Korištenjem Coulombovog baždarenja dobivamo:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

- Rješenje za volumne struje u neograničenom prostoru

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

- Plošne struje

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

23

- Linijske struje

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Magnetski tok:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

12.4.2007

EMP - statičko magnetsko polje u vakuumu

24

Slika statičkog magnetskog polja

- Linije polja ili B -linije $\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$

- U 2D zadacima:

$$\vec{J} = J(x, y)\vec{a}_z \Rightarrow \vec{A} = A(x, y)\vec{a}_z \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A(x, y)}{\partial y}\vec{a}_x - \frac{\partial A(x, y)}{\partial x}\vec{a}_y$$

- Jednadžba linije polja:

$$B_x dy - B_y dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow dA(x, y) = 0$$

$$A(x, y) = \text{konst.} \rightarrow \text{jednadžba linije polja}$$