Elektrostatika

1. Zakon Lorentzove sile – napisati i reći definicije E i B

Ukupna sila F na točkasti naboj q koji se giba brzinom v:

$$\boldsymbol{F} = q \cdot (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Ova jednadžba je jednadžba Lorentzove sile na naboj u elektromagnetskom polju čije djelovanje je opisano s 2 vektorska polja: jakosti električnog polja **E** i magnetske indukcije **B**. Ovo je definicijska relacija za ova 2 vektorska polja pa definicije za jakosti svakog od ta 2 polja slijede iz ove jednadžbe.

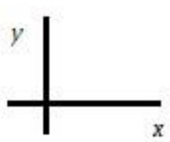
$$\boldsymbol{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{q}, \boldsymbol{v} = 0$$

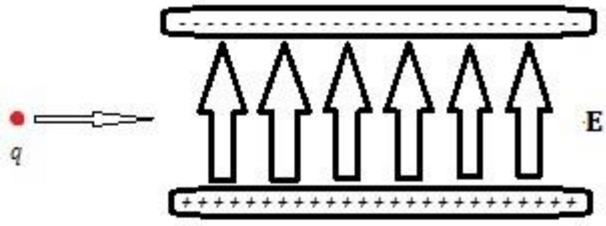
Jakost električnog polja **E** (V/m) je omjer sile na naboj u mirovanju i iznosa tog naboja. Potrebno je da ispitni naboj q bude vrlo malih dimenzija, a najbolje bi bilo kad bi se radilo o točki – tada bi se polje mjerilo u točki prostora. Isto tako i iznos ispitnog naboja treba biti što manji kako njegovo unošenje ne bi mijenjalo polje koje se mjeri.

Magnetska indukcija **B** (T):

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{q} \cdot (\boldsymbol{F} - q \cdot \boldsymbol{E})$$

2. Odredi putanju čestice koja okomito upada u homogeno el. polje





$$\vec{E} = E \cdot \overrightarrow{a_y}$$

$$\overrightarrow{v_0} = v_{x0} \cdot \overrightarrow{a_x}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{a_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{a_y}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\overrightarrow{a_x} + \frac{dv_y}{dt}\overrightarrow{a_y}$$

$$m \cdot \vec{a} = q \cdot \vec{E} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\overrightarrow{a_x} \cdot m \cdot \frac{dv_x}{dt} + \overrightarrow{a_y} \cdot m \cdot \frac{dv_y}{dt} = \overrightarrow{a_y} \cdot q \cdot E$$

X-komponenta:

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = 0 \rightarrow v_x = const = v_x(t=0) = v_{x0}$$

$$x(t) = \int v_x dt = \int v_{x0} dt = v_{x0} \cdot t + x(t=0) = v_{x0} \cdot t \rightarrow t = \frac{x(t)}{v_{x0}}$$

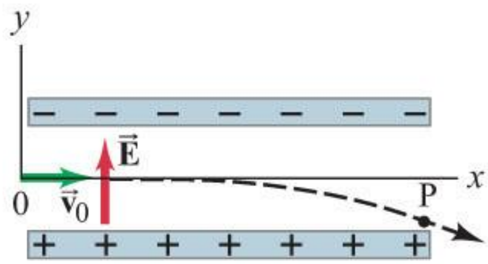
Y-komponenta:

$$m \cdot \frac{dv_y}{dt} = q \cdot E \rightarrow \frac{dv_y}{dt} = \frac{q \cdot E}{m}$$

$$v_y = \int \frac{q \cdot E}{m} dt = \frac{q \cdot E}{m} \cdot t + v_y(t=0) = \frac{q \cdot E}{m} \cdot t$$

$$y(t) = \int v_y dt = \frac{q \cdot E}{m} \int t dt = \frac{q \cdot E}{2 \cdot m} \cdot t^2 + y(t=0) = \frac{q \cdot E}{2 \cdot m} \cdot t^2$$

$$y(x) = \frac{q \cdot E}{2 \cdot m \cdot v_{x0}^2} \cdot x^2$$



Na ovoj slici vidimo putanju elektrona ($q = -e$).

3. Gustoća naboja i struje – definicija ρ, λ, σ i J

Gustoća naboja u nekoj točki definira se kao:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial Q}{\partial V} \left[{}^{C}/_{m^3}\right]$$

Gustoća struje koja teče kroz element površine ΔS je:

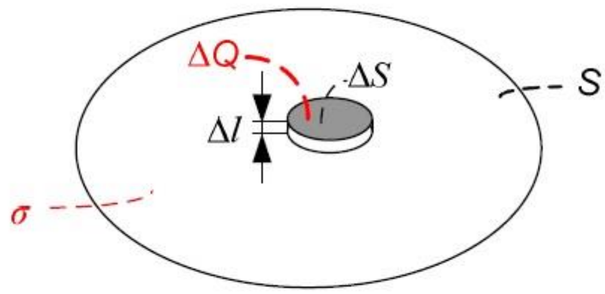
$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) = \overrightarrow{a_v}\frac{dI}{dS}$$

Vektor $\overrightarrow{a_v}$ je jedinični vektor u smjeru gibanja pozitivnog naboja. Za kondukcijske struje koje su rezultat strujanja elektrona i/ili iona u provodnim materijalima vrijedi Ohmov zakon:

$$\boldsymbol{J} = \kappa \cdot \boldsymbol{E}$$

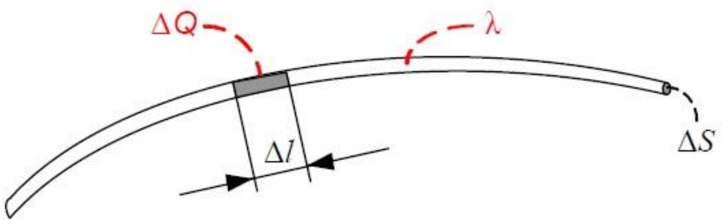
κ je električna provodnost materijala.

Plošni naboj je raspodijeljen u sloju debljine 0 pa je njegova gustoća σ na plohi S:



$$\sigma = \frac{dQ}{dS} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\rho \cdot \Delta S \cdot \Delta l}{\Delta S} = \lim_{\substack{\rho \to \infty \\ \Delta l \to 0}}(\rho \cdot \Delta l)$$

Za nabijene vodiče velike duljine i zanemarivog poprečnog presjeka uvodimo pojam **gustoće linijskog naboja**. On je raspodijeljen po presjeku debljine 0 pa je njegova gustoća λ na liniji duljine l:



$$\lambda = \frac{dQ}{dl} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\rho \cdot \Delta S \cdot \Delta l}{\Delta l} = \lim_{\substack{\rho \to \infty \\ \Delta S \to 0}}(\rho \cdot \Delta S)$$

4. Jednadžba kontinuiteta – integralni oblik i izvod diferencijalnog oblika

Postulat o očuvanju električnog naboja jedan je od temeljnih postulata teorijske fizike. On utvrđuje da je struja (tok električnog naboja) I iz zatvorenog, konačnog prostora volumena V kojeg obrubljuje ploha S jednak iznosu smanjenja naboja Q unutar tog prostora:

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

Gdje **n** predstavlja normalu na plohu S. Ova parcijalna diferencijalna jednadžba naziva se *jednadžba kontinuiteta*. Primjenom Gaussovog teorema:

$$\oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dV$$

Gdje je **A** neki opći vektor dobivamo diferencijalni oblik jednadžbe kontinuiteta:

$$\nabla \cdot J = -\frac{d\rho}{dt}$$

5. Coulombov zakon – izraz i definicija za E

Sila između 2 vrlo mala nabijena tijela koja se nalaze u vakuumu na udaljenosti koja ej puno veća od dimenzija tijela proporcionalna je naboju na svakom od tijela i obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti.

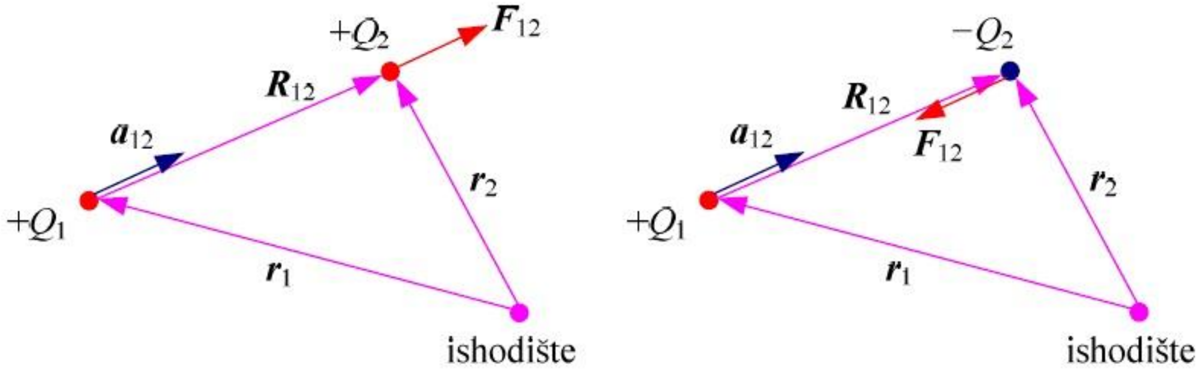
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Gdje je ε_0 relativna dielektrična konstanta praznog prostora i iznosi:

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, {}^{F}\!/_{m}$$

Ako se radi o istoimenim nabojima (oba pozitivna ili oba negativna), sila ima pozitivan predznak i odbojna je; u suprotnom ima negativan predznak i privlačna je.

$$\boldsymbol{F_{12}} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_{12}^3} \cdot \boldsymbol{R_{12}}\ ;\ \boldsymbol{R_{12}} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$$



Sila kojom Q_1 djeluje na Q_2 je jednakog iznosa, ali suprotnog smjera od sile kojom naboj Q_2 djeluje na naboj Q_1.

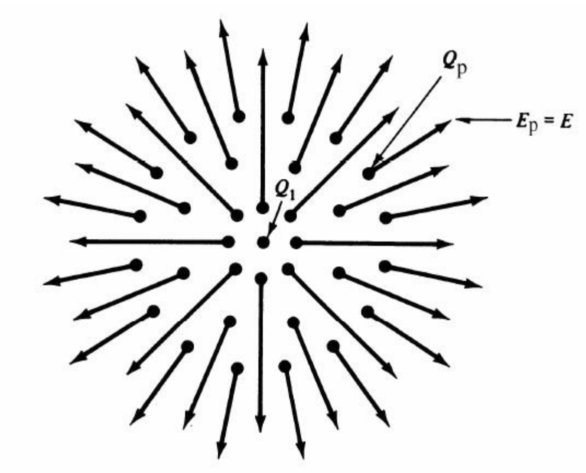
Ukoliko je jedan od naboja probni (beskonačno malih dimenzija i iznosa):

$$\boldsymbol{F_{1p}} = \frac{Q_1 \cdot Q_p}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_{1p}^3} \cdot \boldsymbol{R_{1p}}$$

$$\frac{\boldsymbol{F_{1p}}}{Q_p} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R_{1p}^3} \cdot \boldsymbol{R_{1p}} = \boldsymbol{E_p}$$

Jakost električnog polja definiramo kao silu na jedinični naboj. Ova jednadžba je u skladu s jednadžbom za Lorentzovu silu (**v**=0). Električno polje možemo opisati kao pobuđeno stanje prostora u okolišu mirujućih naboja u kojem se osjeća djelovanje električne, Coulombove sile na mirujući pokusni naboj. Jakost električnog polja proizvedenog jednim točkastim nabojem Q u vakuumu:

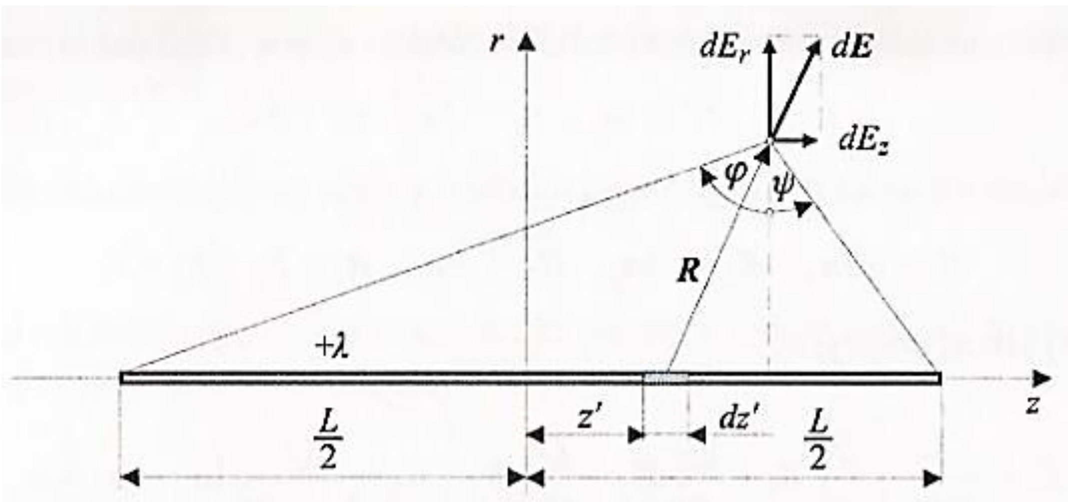
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^2} \cdot \overrightarrow{a_r}$$



Uočimo da se polje širi radijalno od pozitivnog točkastog naboja.

6. Odrediti jakost električnog polja jednoliko nabijene dužine

Imamo jednoliko nabijenu dužinu duljine L nabijenu nabojem linijske gustoće λ.



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a_r} r + \boldsymbol{a_z} z$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a_z} z'$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a_r} r + \boldsymbol{a_z}(z - z')$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \lambda \frac{\boldsymbol{a_r} r + \boldsymbol{a_z}(z - z')}{(r^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} dz' = \boldsymbol{a_r} E_r + \boldsymbol{a_z} E_z$$

$$E_r = \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z'=\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{(r^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_r = \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} (\sin\varphi + \sin\psi)$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z'=\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(z - z')dz'}{(r^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \left[\frac{r}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} - \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} (\cos\psi - \cos\varphi)$$

Za točke na simetrali štapa vrijedi:

$$E_r = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \frac{L}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}$$

$$E_z = 0$$

Za beskonačno dugi štap ($l \to \infty$):

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_z = 0$$

7. Poissonova i Laplaceova jednadžba

Poissonova jednadžba primjenjuje se na rješavanje potencijala u homogenom sredstvu:

$$\varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_s$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \cdot \varphi$$

$$\varepsilon \nabla \cdot (-\nabla \cdot \varphi) = \rho_s$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}$$

Ako u prostoru nema slobodnih naboja ($\rho_s = 0$), Poissonova jednadžba prelazi u Laplaceovu jednadžbu u homogenom prostoru:

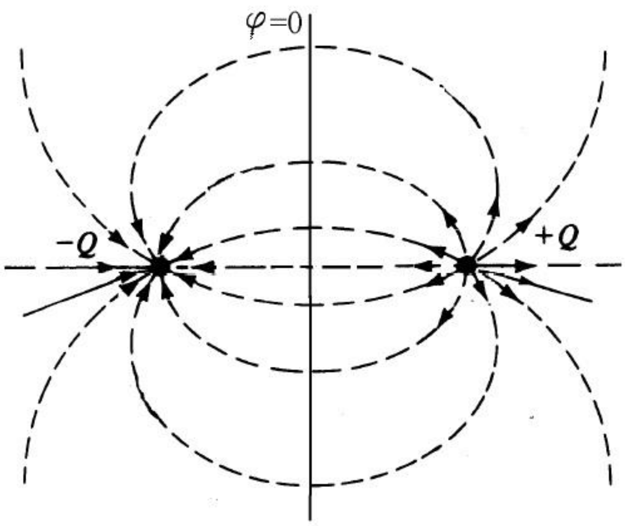
$$\Delta\varphi = 0$$

Beskonačno mnogo rješenja za skalarno polje potencijala može zadovoljiti Laplaceovu i Poissonovu jednadžbu. Da bi rješenje bilo jedinstveno, ono mora također zadovoljavati uvjete potencijala na rubovima područja proračuna (rubni uvjeti).

$$\Delta\varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon}\ ;\ \Delta\varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

a) <u>Dirichletovi uvjeti</u>: rješenje Poissonove (Laplaceove) jednadžbe jedinstveno je u području proračuna V ako je zadan potencijal na zatvorenoj površini S koja obuhvaća područje proračuna V:
$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$
b) <u>Neummanovi uvjeti</u>: rješenje Poissonove (Laplaceove) jednadžbe jedinstveno je do na konstantu u području proračuna C ako je zadana derivacija potencijala na zatvorenoj površini S koja obuhvaća područje proračuna V.
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 0 \rightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$
c) Miješani uvjeti: rješenje Poissonove (Laplaceove) jednadžbe jedinstveno je u području proračuna V ako je na jednom dijelu zatvorene površine S koja obuhvaća područje proračuna V zadan potencijal, a na ostatku površine S zadana derivacija potencijala.

8. Metoda odslikavanja



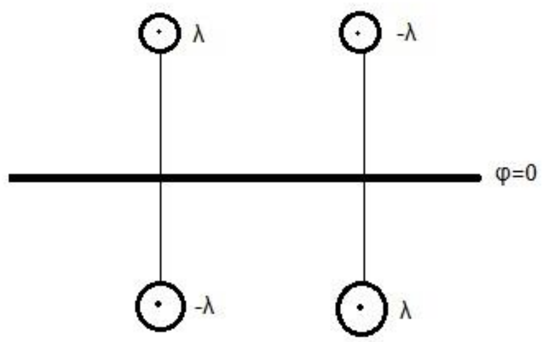
Ako imamo pozitivan točkasti naboj ispred beskonačne vodljive ravnine koja je uzemljena, silnice električnog polja točkastog naboja završavaju na vodljivoj ravnini i na njoj influenciraju negativne naboje. Ukupni influencirani naboj je jednak –Q. Plošna gustoća influenciranog naboja na ravnini je različita i opada s povećanjem udaljenosti od točkastog naboja.

Ako vodljivu ravninu na kojoj se nalazi nejednolika gustoća influenciranog naboja zamijenimo točkastim nabojem –Q smještenim na jednakoj udaljenosti od vodljive ravnine na kojoj je i naboj +Q, na mjestu ravnine bit će potencijal jednak nuli, a u svim točkama na površini ravnine jakost električnog polja bit će normalna na ravninu.

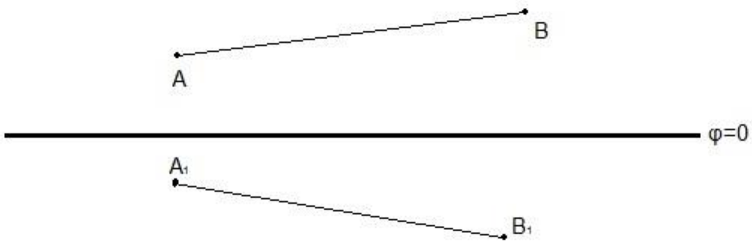
Ukoliko imamo strujno polje, preslikavamo strujni izvor istog predznaka.

9. Polje voda iznad površine tla

Vodovi predstavljaju linijski naboj gustoće λ, a tlo ekvipotencijalnu plohu s potencijalom jednakim 0. Pri proračunu koristimo metodu odslikavanja.

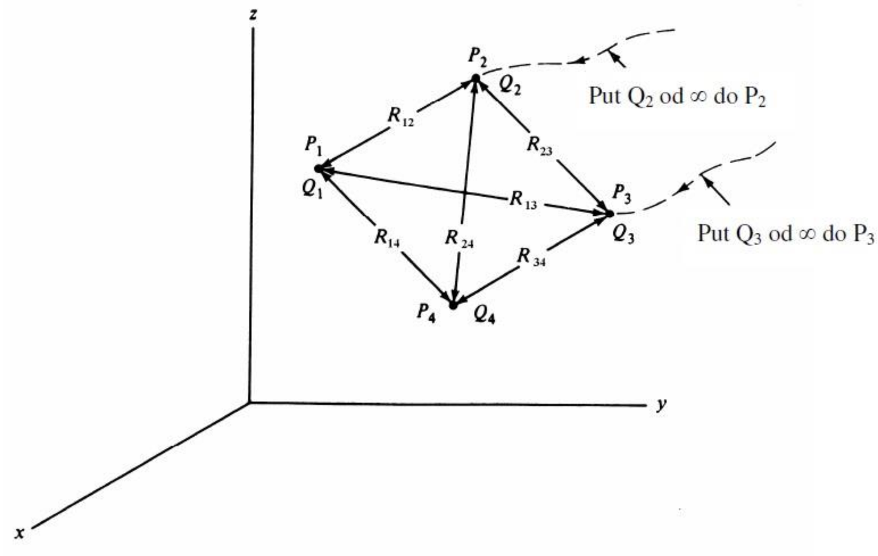


$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{a_r}$$



$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\cdot\lambda(\boldsymbol{r})$$

10. Energija sustava točkastih naboja



Analizirat ćemo sustav od 4 točkasta naboja, što se analogijom može prevesti i na njih n. Sustav naboja gradimo tako da jedan po jedan dovodimo iz beskonačnosti. Za dovođenje prvog nije potrebno utrošiti energiju s obzirom da u prostoru ne postoji nikakvo električno polje. Za dovođenje drugog potrebno je utrošiti energiju da se svlada polje naboja Q_1:

$$W_2 = \varphi_{12} \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_{12}} Q_2$$

Tu istu energiju trebali bismo utrošiti kad bismo prvo u prostor uveli naboj Q_2, a nakon njega naboj Q_1. Za dovođenje trećeg naboja u prostor potrebna je energija da se svlada električno polje koje stvaraju prvi i drugi naboj:

$$W_3 = \varphi_{13} \cdot Q_3 + \varphi_{23} \cdot Q_3 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_{13}} Q_3 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon R_{23}} Q_3$$

Za dovođenje četvrtog naboja potrebna je energija kako bi se svladalo polje prva 3 naboja:

$$W_4 = \varphi_{14} \cdot Q_4 + \varphi_{24} \cdot Q_4 + \varphi_{34} \cdot Q_4 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_{14}} Q_4 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon R_{24}} Q_4 + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon R_{34}} Q_4$$

Energija potrebna da se formira sustav od ova 4 naboja dobiva se zbrojem ovih triju energija:

$$W = W_2 + W_3 + W_4 = (\varphi_{21} \cdot Q_1) + (\varphi_{31} \cdot Q_1 + \varphi_{32} \cdot Q_2) + (\varphi_{41} \cdot Q_1 + \varphi_{42} \cdot Q_2 + +\varphi_{43} \cdot Q_3)$$

$$W = W_2 + W_3 + W_4 = (\varphi_{12} \cdot Q_2) + (\varphi_{13} \cdot Q_3 + \varphi_{23} \cdot Q_3) + (\varphi_{14} \cdot Q_4 + \varphi_{24} \cdot Q_4 + \varphi_{34} \cdot Q_4)$$

Ako ove 2 energije zbrojimo i podijelimo s 2, dobivamo ukupno energiju potrebnu da se formira sustav od ova 4 naboja:

$$W = \frac{1}{2} \cdot [(\varphi_{21} + \varphi_{31} + \varphi_{41}) \cdot Q_1 + (\varphi_{12} + \varphi_{32} + \varphi_{42}) \cdot Q_2 + (\varphi_{13} + \varphi_{23} + \varphi_{43}) \cdot Q_3 + (\varphi_{14} + \varphi_{24} + \varphi_{34}) \cdot Q_4] = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_1 \cdot Q_1 + \varphi_2 \cdot Q_2 + \varphi_3 \cdot Q_3 + \varphi_4 \cdot Q_4)$$

Za n točkastih naboja imamo:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \cdot Q_i$$

$$\varphi_i = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \varphi_{ji}$$

11. Energija prostorne raspodjele naboja i sustava vodljivih tijela

Ako imamo naboj prostorne gustoće ρ raspodijeljen u prostoru volumena V, diferencijalno mali volumen dV u kojem se nalazi diferencijalni naboj $dQ = \rho dV$ možemo smatrati točkastim nabojem. Ukupnu energiju izračunavamo „zbrajanjem" doprinosa tih diferencijalnih naboja dQ. Ovdje se radi o kontinuiranoj raspodjeli naboja pa sprovodimo integraciju po volumenu V:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \cdot \varphi \, dV$$

gdje je φ ukupni potencijal na mjestu diferencijalnog volumena dV kojeg stvaraju svi naboji u sustavu, uključujući i sam naboj dQ, kojeg nismo uračunavali kad smo zbrajali diskretne energije točkastih naboja.

Potencijal nabijenog vodljivog tijela ovisan je o količini naboja koja se na tom tijelu nalazi, ali i o iznosu i predznaku naboja na vodljivim tijelima u njegovoj blizini. Sustav nabijenih vodljivih tijela može se prikazati preko parcijalnih kapaciteta. Električno polje tada je povezano preko nabojima Q na vodljivim tijelima s naponom U između njih.

12. Energija prikazana vektorima električnog polja

Gaussov zakon u diferencijalnom obliku:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_s$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varphi \cdot \nabla \boldsymbol{D} \, dV$$

Identitet: $\nabla \cdot (f \cdot \boldsymbol{A}) = f \cdot (\nabla \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \cdot (\nabla f)$

$$\nabla \cdot (\varphi \cdot \boldsymbol{D}) = \varphi \cdot (\nabla \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla \varphi)$$

$$\varphi \cdot (\nabla \boldsymbol{D}) = \nabla \cdot (\varphi \cdot \boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D} \cdot (\nabla \varphi) = \nabla \cdot (\varphi \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\varphi \cdot \boldsymbol{D}) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}\, dV$$

Primjenom Gaussovog teorema dobivamo:

$$W = \frac{1}{2} \oiint_S \varphi \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, dS + \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}\, dV$$

Ovdje prvi integral predstavlja doprinos energiji električnog polja u prostoru izvan volumena V, dok drugi predstavlja energiju električnog polja sadržanu u volumenu V. Ako volumen V sadrži cijeli prostor, S postaje zatvorena površina u beskonačnosti. Prvi integral će tada za $r \to \infty$ težiti k nuli($\varphi \cdot D \sim \frac{1}{r^3}, S \sim r^2;\ \varphi \cdot D \cdot S \sim \frac{1}{r}$)

U tom slučaju imamo:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}\, dV = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon \cdot E^2 dV$$

13. Kapacitet i energija pohranjena u kondenzatoru

Ako vodiču dovodimo naboj, njegov potencijal raste:

$$Q = C \cdot \varphi \to C = \frac{Q}{\varphi} [F]$$

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d}$$

Za kuglu:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon r$$

Kondenzator je sustav od 2 vodljiva tijela nabijena jednakim iznosom naboja Q, ali suprotnih predznaka. Energija naboja na pozitivno nabijenoj elektrodi čiji je potencijal φ_1:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \cdot \varphi_1 dS = \frac{1}{2} Q \cdot \varphi_1$$

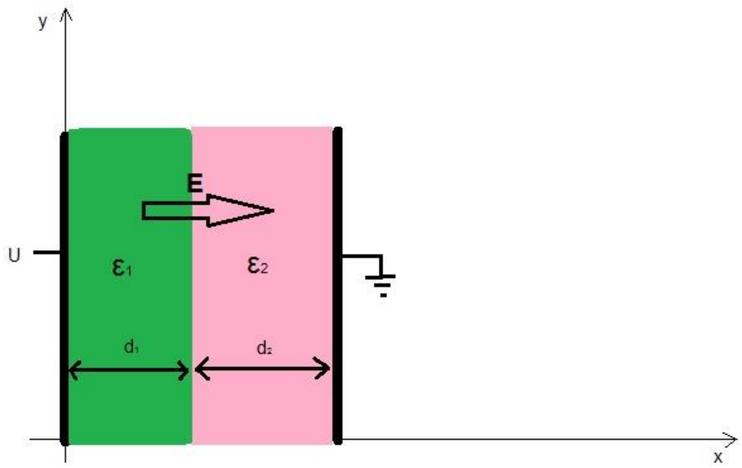
Elektroda je ekvipotencijalna ploha s ukupnim nabojem Q. Energija na negativno nabijenoj elektrodi čiji je potencijal φ_2:

$$W = -\frac{1}{2} Q \cdot \varphi_2$$

Ukupna energija sadržana u električnom polju kondenzatora je:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} Q \cdot \varphi_1 - \frac{1}{2} Q \cdot \varphi_2 = \frac{1}{2} Q \cdot U_{12}$$

14. Kapacitet dvoslojnog pločastog kondenzatora (granica paralelna s pločama)



$$D_{n1} = D_{n2}$$

$$E_{t1} = E_{t2} = 0$$

$$\varepsilon_1 \cdot \boldsymbol{E}_1 = \varepsilon_2 \cdot \boldsymbol{E}_2$$

Na površini ploče:

$$D = \sigma = \frac{Q}{S}$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_1 \cdot S}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_2 \cdot S}$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_2^1 \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}\,;\ d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a_x}dx;\ \boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{a_x}E_1;\ \boldsymbol{E_2} = \boldsymbol{a_x}E_2$$

$$U = -\int_2^g \boldsymbol{E_2}d\boldsymbol{l} - \int_g^1 \boldsymbol{E_1}d\boldsymbol{l} = -\int_2^g E_2 dx - \int_g^1 E_1 dx$$

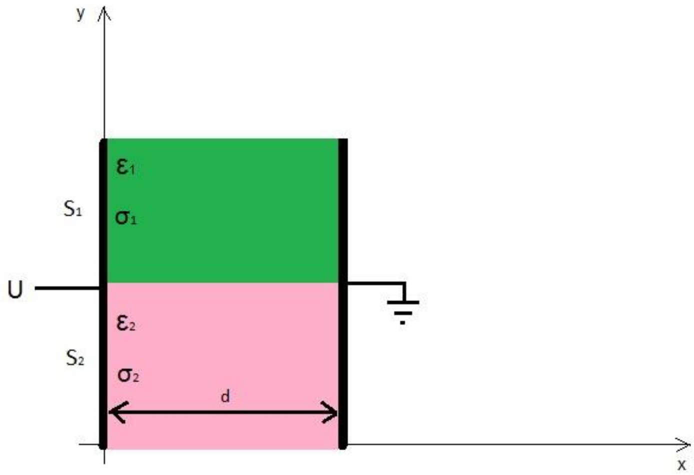
$$U = -E_2[x_g - x_2] - E_1[x_1 - x_g] = E_2 d_2 + E_1 d_1$$

$$U = \frac{Q}{\varepsilon_1 \cdot S} d_1 + \frac{Q}{\varepsilon_2 \cdot S} d_2 = Q\left[\frac{d_1}{\varepsilon_1 \cdot S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 \cdot S}\right]$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1 \cdot S} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2 \cdot S}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 \cdot S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 \cdot S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

15. Kapacitet dvoslojnog pločastog kondenzatora (granica okomita na ploče)



$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$E_1 = E_2 = E$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2}$$

$$D_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_1$$

Na površini metala: $D = \sigma$

$$\sigma_1 = D_1; \sigma_2 = D_2$$

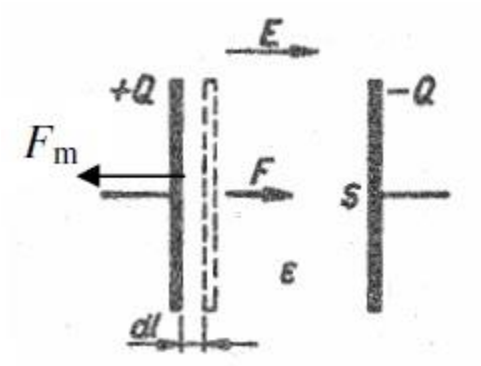
$$Q = \sigma_1 \cdot S_1 + \sigma_2 \cdot S_2 = D_1 \cdot S_1 + D_2 \cdot S_2 = \varepsilon_1 \cdot E \cdot S_1 + \varepsilon_2 \cdot E \cdot S_2$$

$$U_{12} = -\int_2^1 \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -\int_d^0 E dx = E \cdot d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_1 \cdot E \cdot S_1 + \varepsilon_2 \cdot E \cdot S_2}{E \cdot d} = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} + \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} = C_1 + C_2$$

Uočimo da kad nam je granica okomita na ploče, ukupni kapacitet kondenzatora ponaša se kao kapacitet 2 kondenzatora spojenih u paralelu. S druge strane, kad je granica paralelna s pločama, ukupni kapacitet ponaša se kao 2 kondenzatora spojena u seriju.

16. Sile u električnom polju – konstantni naboji u sustavu i konstantni potencijali u sustavu



Sile ćemo određivati pomoću načela virtualnog pomaka koji se temelji na zakonu o očuvanju energije.

$$dW_m = dW_e \rightarrow F_m \cdot dl = w \cdot dV = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S \cdot dl$$

Radi se o izoliranom sustavu pa se naboj na elektrodama ne će promijeniti. Zbog toga će i jakost polja između elektroda ostati nepromijenjena. Iznos sile na elektrodu pločastog kondenzatora:

$$F_m = F_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S$$

a) Konstantni naboj (izolirani sustav): vodiče smo spojili na izvor, nabili i nakon toga odspojili od izvora. Svi pomaci u sustavu tada se izvršavaju na račun energije pohranjene u statičkom električnom polju:

$$\boldsymbol{F_s} = -\frac{\delta W_e}{\delta s}\boldsymbol{a_s} = -\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)\boldsymbol{a_s} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{1}{C}\right)\boldsymbol{a_s}$$

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

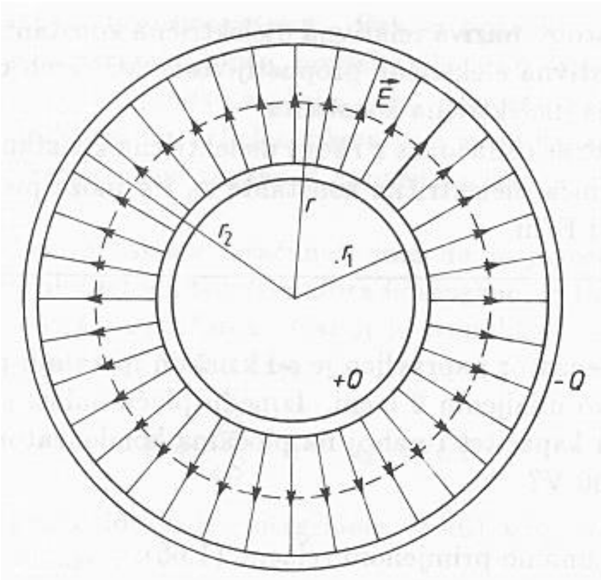
b) Konstantni potencijal (neizolirani sustav): vodiči ostaju spojeni na izvore koji im održavaju potencijale konstantnim bez obzira na pomake. Pri pomaku nekog vodiča za δs iz izvora se dovode dodatni naboji δQ_k pri čemu se troši rad na izvoru.

$$F = \frac{\delta W_e}{\delta s}\boldsymbol{a_s} = \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{1}{2}C \cdot U^2\right)\boldsymbol{a_s} = \frac{U^2}{2}\frac{\delta C}{\delta s}\boldsymbol{a_s}$$

$$W = \frac{1}{2}C \cdot U^2$$

U oba slučaja sila nastoji povećati kapacitet. U izoliranom sustavu sile djeluju tako da nastoje sustav dovesti u stanje minimalne energije, dok u neizoliranom sustavu djeluju tako da nastoje dovesti sustav u stanje maksimalne energije.

17. Sile na elektrode izoliranog kuglastog kondenzatora



Neka je vanjska elektroda na nultom potencijalu, a unutarnja na potencijalu φ_0 (izolirani sustav).

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a_r} E$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a_r} dr$$

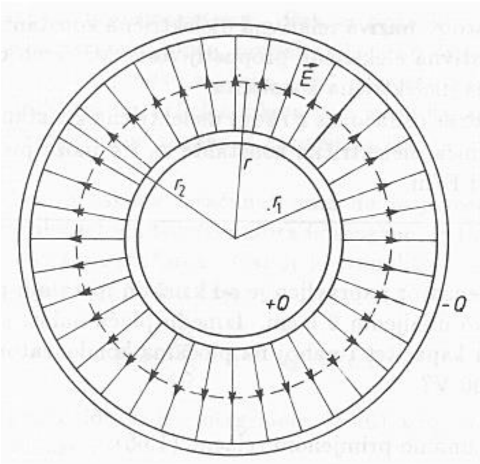
$$\varphi_0 - 0 = U = -\int_2^1 \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(-\int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

$$F_{r_1} = -\frac{\partial W}{\partial r_1} = -\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon \cdot r_1^2}$$

$$F_{r_2} = -\frac{\partial W}{\partial r_2} = -\frac{\partial}{\partial r_2}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{-Q^2}{8\pi\varepsilon \cdot r_2^2}$$

18. Sile na elektrode cilindričnog kondenzatora spojenog na izvor napona



Kondenzator je priključen na napon U na način da je unutrašnja elektroda priključena na napon U, a vanjska je uzemljena.

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a_r} \frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$\boldsymbol{S} = 2r\pi \cdot l \cdot \boldsymbol{a_r}$$

$$Q = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{S} = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{U \cdot 2\pi l \cdot \varepsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi l \cdot \varepsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$\boldsymbol{F_{r_1}} = \frac{\partial W}{\partial r_1} \boldsymbol{a_{r1}} = \boldsymbol{a}_{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{U^2 \cdot C}{2}\right) = \boldsymbol{a}_{r_1} \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial r_1} = \boldsymbol{a}_{r_1} \frac{U^2 \pi l \varepsilon}{r_1 \cdot \left(\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right)^2}$$

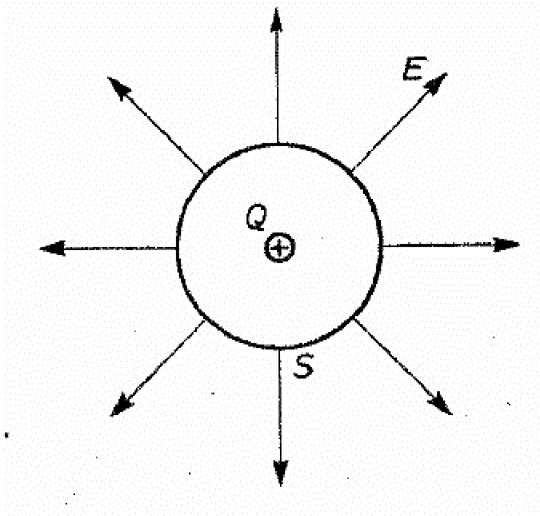
$$\boldsymbol{F_{r_2}} = \frac{\partial W}{\partial r_2} \boldsymbol{a_{r2}} = \boldsymbol{a}_{r_2} \frac{\partial}{\partial r_2}\left(\frac{U^2 \cdot C}{2}\right) = \boldsymbol{a}_{r_2} \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial r_2} = -\boldsymbol{a}_{r_2} \frac{U^2 \pi l \varepsilon}{r_2 \cdot \left(\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right)^2}$$

19. Gaussov zakon za električno polje – integralni i diferencijalni oblik

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \rho_s\, dV$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_s$$

20. Izvod Gaussova zakona iz Coulombovog zakona



Iz točkastog naboja radijalno izlaze silnice električnog polja i njihova gustoća opada s udaljenošću r od točkastog naboja s $1/r^2$. Kroz bilo kakvu plohu koja u volumenu kojeg okružuje sadrži točkasti naboj prolazi isti broj silnica, tj. isti električni tok i ne ovisi o obliku zatvorene površine. Jakost el. polja točkastog naboja:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a_r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

Jakost el. polja na površini kugle koja okružuje točkasti naboj je konstantnog iznosa i radijalnog smjera. Takav je i vektor **D**:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a_r}\frac{Q}{4\pi r^2}$$

Normala na kuglu je $\mathbf{n}=\mathbf{a}_r$ pa vrijedi:

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{Q}{4\pi r^2} = const$$

Električni tok kroz sferu površine S koja okružuje tu kuglu:

$$\phi_e = \oiint_S D\cdot n\, dS = \frac{Q}{4\pi r^2}\oiint_S dS = \frac{Q}{4\pi r^2}\cdot 4\pi r^2 = Q$$

Drugim riječima, električni tok kroz zatvorenu površinu koja obuhvaća točkasti naboj jednak je iznosu tog naboja. Ako imamo više takvih naboja unutar zatvorene plohe, ukupni iznos toka dobivamo superpozicijom svih naboja. Ako unutar plohe nema naboja, tok je jednak nuli.

Načelo superpozicije možemo primijeniti i za kontinuiranu raspodjelu naboja, ali u tom slučaju moramo integrirati količinu obuhvaćenog naboja u volumenu:

$$\oiint_S D\cdot n\, dS = \iiint_V \rho\, dV$$

21. Skalarni električni potencijal – veza skalarnog električnog potencijala i rada

Električni potencijal u nekoj točki el. polja je omjer potencijalne energije naboja u toj točki polja i iznosa tog naboja:

$$\varphi(a) = \frac{W_p(a)}{q}$$

Električni potencijal u nekoj točki polja možemo izračunati iz poznate jakosti el. polja **E**:

$$\varphi(a) = -\int_{\infty}^{a} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Potencijalna energija naboja u jednoj točki polja može se iskazati samo u odnosu na neku referentnu točku. U statičkom električnom polju za referentnu točku obično uzimamo beskonačnost. U beskonačno dalekoj točki jakost električnog polja jednaka je nuli pa je i potencijalna energija naboja jednaka nuli. Potencijalna energija naboja q u nekoj točki električnog polja a jednaka je radu kojeg je potrebno izvršiti da bi se naboj q iz beskonačnosti doveo u točku polja a suprotno djelovanju sile električnog polja:

$$W_p(a) = -\int_{\infty}^{a} q \cdot \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Ako pomičemo naboj od točke do točke:

$$W_p(a) - W_p(b) = -\int_{\infty}^{a} q \cdot \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = +\int_{\infty}^{b} q \cdot \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -q\int_{a}^{b} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = q(\varphi(a) - \varphi(b))$$

$$W_p(a) - W_p(b) = q \cdot U_{ab}$$

Promjena potencijalne energije jednaka je radu.

22. Potencijal točkastog naboja; Potencijal jednoliko nabijene dužine

Polje točkastog naboja:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a_r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}; d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a_r} dr$$

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

Polje jednoliko nabijene dužine:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a_r} r + \boldsymbol{a_z} z$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a_z} z'$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a_r} r + \boldsymbol{a_z}(z - z')$$

$$dQ = \lambda\, dz'$$

$$\varphi(r) = \int_l \frac{dQ}{4\pi\varepsilon\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}}$$

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} + z + \frac{L}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2} + z - \frac{L}{2}}$$

23. Izvod veze jakosti električnog polja i skalarnog električnog potencijala

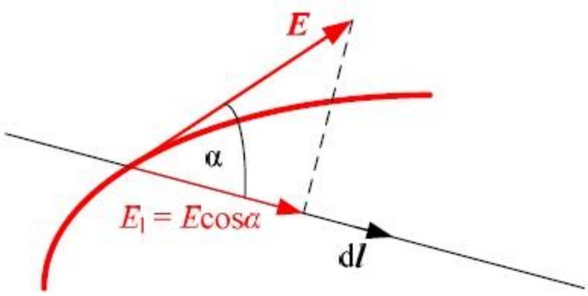
Razlika potencijala između točaka a i b električnog polja **E**:

$$U_{ab} = \varphi(a) - \varphi(b) = -\int_b^a \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Diferencijalna razlika potencijala na udaljenosti d**l** puta od točke b do točke a:

$$d\varphi = -\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -E \cdot dl \cdot cos\alpha = -E_1 \cdot dl$$

gdje je α kut između vektora jakosti električnog polja **E** i puta d**l**, a E_1 komponenta jakosti polja **E** u smjeru puta d**l**:



Nadalje, ako gornju jednadžbu podijelimo s dl, imamo:

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E_1 = -E \cdot cos\alpha$$

Ova derivacija je usmjerena derivacija i ovisi o smjeru d**l**, odnosno kutu α. Ako je d**l** u smjeru jediničnog vektora $\mathbf{a}_E$, $\alpha = 0$ i vrijedi:

$$\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a_E} \cdot dl} = -E$$

Ako je dl suprotan od smjera jediničnog vektora $\mathbf{a}_E$, $\alpha = \pi$ i vrijedi:

$$\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{d\boldsymbol{l}=-\boldsymbol{a}_E\cdot dl} = E$$

Maksimalna derivacija potencijala je u smjeru suprotnom od smjera električnog polja **E** i po iznosu je jednaka jakosti tog električnog polja. Ako ovaj izraz pomnožimo jediničnim vektorom $-\mathbf{a}_E=\mathbf{a}_{-E}$, dobivamo:

$$\boldsymbol{a}_{-E}\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{max} = \boldsymbol{a}_{-E}\cdot E = -\boldsymbol{a}_E\cdot E = -\boldsymbol{E}$$

Izraz na lijevoj strani predstavlja vektorsku veličinu koju nazivamo gradijentom od φ:

$$\boldsymbol{a}_{-E}\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{max} = \mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = -\boldsymbol{E}$$

Odnosno, veza jakosti električnog polja i skalarnog električnog potencijala je:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$$

24. Dokaz neovisnosti razlike potencijala o putu integracije

$$\varphi(a) = -\int_{\infty}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

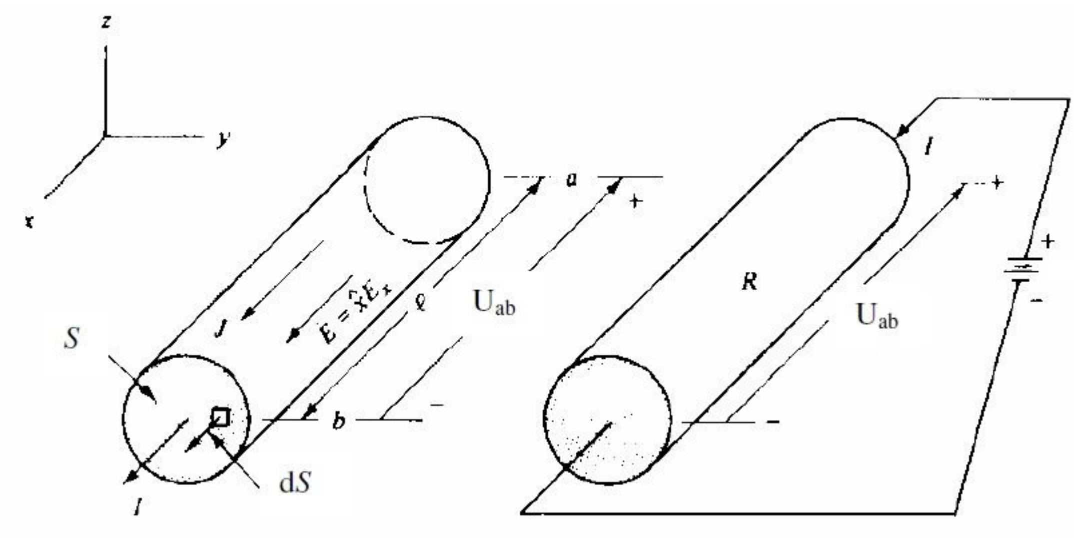
$$\varphi(a)-\varphi(b) = -\int_{b}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\varphi(b)-\varphi(a) = -\int_{a}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$-\int_{a}^{b}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}-\int_{b}^{a}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{l}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

Razlika potencijala po bilo kojoj zatvorenoj krivulji u statičkom električnom polju je jednaka nuli – razlika potencijala ne ovisi o putu integracije.

25. Izvod Ohmovog zakona u elementarnom obliku



$$\boldsymbol{v} = \mu \cdot \boldsymbol{E}$$

Broj elektrona u jedinici volumena:

$$\rho = -N \cdot e$$

$$\boldsymbol{J} = \rho \cdot \boldsymbol{v} = -N \cdot e \cdot \mu \cdot \boldsymbol{E} = \kappa \cdot \boldsymbol{E}$$

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \kappa \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \kappa E_x S$$

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = \int_0^l E_x dx = \int_0^l \frac{I}{\kappa S} dx = I \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{S} = I \cdot R$$

$$U = I \cdot R$$

26. Ponašanje slobodnih naboja u vodiču u vanjskom električnom polju (relaksacija)

U vodiču postoje statički uvjeti kad u njemu nema usmjerenog gibanja slobodnih elektrona, tj. kad je ukupna struja u vodiču jednaka nuli. Zamislimo da smo u vodič u statičkim uvjetima unijeli neku količinu slobodnih naboja ρ_0. Ti će naboji u vodiču uzrokovati električno polje, a naboj i njegovo gibanje moraju zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vrijedi Ohmov zakon: $\boldsymbol{J} = \kappa \cdot \boldsymbol{E}$

Uvrštavanjem Ohmovog zakona u jednadžbu kontinuiteta dobivamo:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vrijedi Gaussov zakon: $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_s$, tj.:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon} == -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

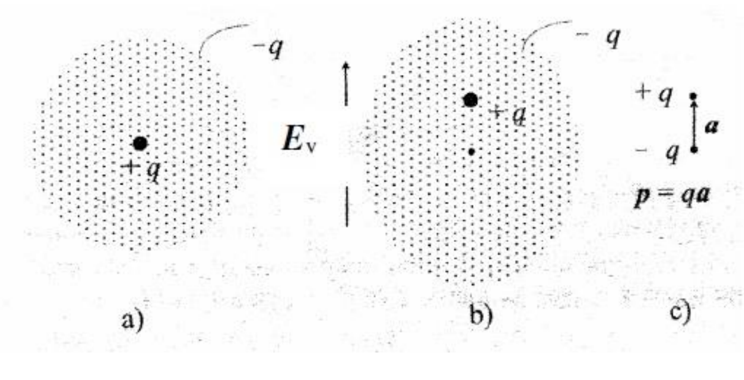
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\kappa}{\varepsilon}\rho = 0$$

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot t} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

gdje je τ vremenska konstanta relaksacije naboja. Za 3 do 5 vremenskih konstanti relaksacije u vodiču više nema slobodnih naboja i sav se rasporedi po površini vodiča. Vremenska konstanta specifična je za svaki materijal.

27. Izolatori u električnom polju – polarizacija; Gustoća električnog toka – definicija i veza s polarizacijom

Značajka izolatora je da ne posjeduju slobodne elektrone, već su njihovi elektroni vezani za matične atome i ne mogu ih pod djelovanjem vanjskog električnog polja napuštati. U dielektričnim materijalima pod djelovanjem vanjskog električnog polja dolazi do poremećaja u raspodjeli pozitivnog i negativnog naboja koji se naziva električna polarizacija.



Na atome dielektrika vanjsko električno polje djeluje tako da uzrokuje izduženje elektronske putanje suprotno od smjera polja. Taj poremećaj prikazujemo kao dipol.

Polarizacijski naboj stvara $\mathbf{E}_{pol}$ usmjereno suprotno od vanjskog polja. Superpozicijom ta 2 polja dobivamo polje umanjenog iznosa:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} + \boldsymbol{E_{pol}} < \boldsymbol{E_0}$$

$$\boldsymbol{E_{pol}} = -\chi_e \cdot \boldsymbol{E}$$

gdje χ_e predstavlja električnu susceptibilnost. Njome se kvantificira utjecaj vanjskog električnog polja na polarizaciju. Predznak '-' označava da je polje polarizacijskog naboja suprotno usmjereno od vanjskog električnog polja.

Ukupno električno polje:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} + \boldsymbol{E_{pol}} = \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} - \chi_e \cdot \boldsymbol{E}$$

$$\varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E_0} - \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E_0} - \boldsymbol{P}$$

gdje je **P** vektor polarizacije.

$$\varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E_0} = \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E}(1 + \chi_e)$$

Uvodimo novu veličinu, *vektor električne indukcije*:

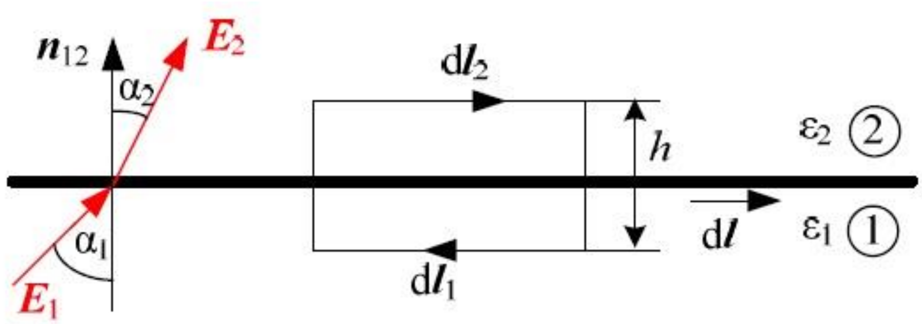
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E_0}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E}(1 + \chi_e) = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E}$$

Izraz $(1 + \chi_e)$ naziva se relativna dielektrična konstanta i specifična je za svaki materijal.

28. Uvjeti na granici – izvod uvjeta za jakost električnog polja



Primjenom uvjeta konzervativnosti na pravokutnu petlju sa stranicama h i dl dobivamo:

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l_1} + \boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l_1} + (doprinosi\ na\ stranicama\ h) = 0$$

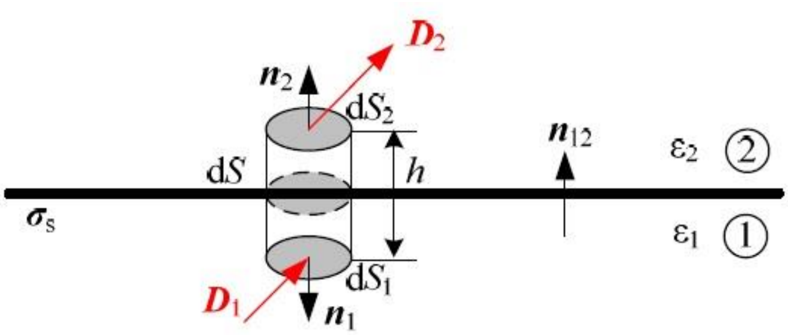
$$\lim_{h \to 0} \{-\boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l} + \boldsymbol{E}_2 \cdot d\boldsymbol{l} + (doprinosi\ na\ stranicama\ h)\} = 0$$

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{E}_2 \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$E_1 \cdot \sin(\alpha_1) = E_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow \boldsymbol{n_{12}} \times (\boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_1}) = 0$$

29. Uvjeti na granici – izvod uvjeta za gustoću električnog toka



Na graničnoj površini S dva dielektrika nalazi se slobodni naboj plošne gustoće σ_s. Primijenimo Gaussov zakon na cilindar visine h i povšina baza dS:

$$\boldsymbol{n_{12}} = \boldsymbol{n_2} = -\boldsymbol{n_1}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \rho_s dV$$

$$\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 \cdot dS_1 + \boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 \cdot dS_2 + (doprinos\ toku\ kroz\ plašt) = \rho_s \cdot h \cdot dS$$

$$\lim_{h\to 0}\{-\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n}_{12} \cdot dS + \boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{n}_{12} \cdot dS + (doprinos\ toku\ kroz\ plašt)\} = \lim_{h\to 0}(\rho_s \cdot h \cdot dS)$$

Kad visina cilindra teži u 0, doprinos toku kroz plašt također teži u 0. Podijelimo li ovu jednadžbu s dS, na desnoj strani dobivamo plošnu gustoću slobodnog naboja σ_s. Dobivamo:

$$\boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{D_2} - \boldsymbol{D_1}) = \sigma_s$$

30. Pločasti zračni kondenzator nabijen i odspojen od izvora – promjena napona, energije i kapaciteta s razmicanjem ploča

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d}$$

Razmicanjem ploča kapacitet se smanjuje.

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon \cdot S}$$

Razmicanjem ploča napon između ploča raste.

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cdot d}{\varepsilon \cdot S}$$

Razmicanjem ploča energija kondenzatora raste.