

Elektromagnetizam

4.1 Faradayev zakon elektromagnetske indukcije

U vodljivoj petlji površine S , obrubljenoj konturom c , koja se nalazi u magnetskom polju indukcije \mathbf{B} , inducirani napon ovisi o vremenskoj promjeni magnetskog toka na način:

$$u_{ind} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

Derivacija po vremenu odnosi se i na prvi i na drugi član pod znakom integrala u gornjoj jednažbi. Ukoliko je magnetska indukcija promjenjiva u vremenu, a petlja se giba brzinom \mathbf{v} u magnetskom polju, gornji se integral može zapisati u formi:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Prvi član odnosi se na inducirani napon uslijed vremenske promjene gustoće magnetskog toka, a drugi član na inducirani napon zbog gibanja petlje brzinom \mathbf{v} u magnetskom polju.

4.2 Maxwellove jednažbe u diferencijalnom obliku

1. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

2. Ampereov kružni zakon protjecanja

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

3. Gaussov zakon za električno polje

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

4. Gaussov zakon za magnetsko polje

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

4.3 Maxwellove jednađbe u integralnom obliku

1. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

2. Ampereov kružni zakon protjecanja

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

3. Gaussov zakon za električno polje

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_v \rho dV$$

4. Gaussov zakon za magnetsko polje

$$\oiint_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

4.4 Relacije građe

Relacije građe povezuju veličine polja preko parametara dielektričnosti ϵ , permeabilnosti μ i vodljivosti κ , na način:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$$

4.5 Poyntingov teorem i Poyntingov vektor

Za proračune koji uključuju strujanje energije u prostoru uvodimo Poyntingov vektor \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \text{ [W/m}^2\text{]}$$

Integralom:

$$P = \oiint_s \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS = \oiint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

određen je tok elektromagnetske snage kroz zatvorenu plohu S .

Poyntingov teorem je oblika:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dV = \int_V \frac{J^2}{\kappa} dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

Član s lijeve strane znaka jednakosti označava smanjenje energije pohranjene u elektromagnetskom polju. Smanjenje energije jednako je zbroju gubitaka u prostoru $\int_V \frac{J^2}{\kappa} dV$ i strujanja energije iz promatranog prostora $\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$.

4.6 Jednadžbe ravnog vala u realnim dielektricima i vodičima

U linearnom, izotropnom i homogenom sredstvu u kojem nema izvora ($\rho_s = 0, J_s = 0$), valne su jednadžbe oblika:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

Uz pretpostavku harmonički promjenjivog polja vremenski ovisnog s funkcijom $e^{j\omega t}$ račun možemo pojednostaviti uvođenjem fazora:

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} = \gamma^2 \underline{\mathbf{E}}$$

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} = \gamma^2 \underline{\mathbf{H}}$$

Pri tom je kompleksni broj γ valna konstanta:

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu\epsilon + j\omega\mu\kappa$$

Realni dio valne konstante naziva se prigušna konstanta i označava s α , a imaginarni dio se naziva fazna konstanta i označava se s β .

Pretpostavimo da val putuje npr. u smjeru z , i ne ovisi o prostornim koordinatama x i y . Takav val naziva se ravnim valom jer su vrijednosti polja u bilo kojoj ravnini okomitoj na smjer rasprostiranja konstantne. Pored toga jakosti električnog i magnetskog polja su okomite i međusobno i na smjer rasprostiranja vala.

U Kartezijevom koordinatnom sustavu rješenja su valnih jednadžbi za ravni val:

$$E = E_1 e^{\gamma z} + E_2 e^{-\gamma z}$$

$$H = H_1 e^{\gamma z} + H_2 e^{-\gamma z}$$

Za prigušnu i faznu konstantu vrijede jednačbe:

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1}$$

Veličina c je brzina čela vala:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Uvedimo i valnu impedanciju Z :

$$Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{E_2}{H_2} = -\frac{E_1}{H_1}$$

Valnu duljinu λ u smjeru prostiranja vala računamo prema jednačbi:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Dubina prodiranja d definira se omjerom:

$$d = \frac{1}{\alpha}$$

Period T ponavljanja je:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

4.7 Jednačbe ravnog vala u sredstvima bez gubitaka

Rješenje valne jednačbe u fazorskom obliku:

$$\Delta \underline{E} = \gamma^2 \underline{E}$$

uz $\kappa=0$ i uz pretpostavku: $\underline{E} = \underline{E}_x(z, t) \underline{a}_x$ je:

$$\underline{E} = \left(E_0^+ \cos(\omega(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + \varphi) + E_0^- \cos(\omega(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) + \varphi) \right) \underline{a}_x$$

E_0^+ predstavlja amplitudu vala koji putuje u smjeru z , a E_0^- amplitudu vala koji putuje u smjeru $-z$.

Ukoliko se val giba u proizvoljnom smjeru definiranom vektorom $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_x \mathbf{a}_x + \beta_y \mathbf{a}_y + \beta_z \mathbf{a}_z,$$

uz vektor položaja točke $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$, fazu (argument funkcije kosinus) možemo pisati na način:

$$\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} + \varphi.$$

U fazorskom obliku sada možemo pisati za električno polje:

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 e^{j\varphi} e^{-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}} \text{ i analogno:}$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_0 e^{j\varphi} e^{-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}} = \underline{\mathbf{H}}_0 e^{-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}}.$$

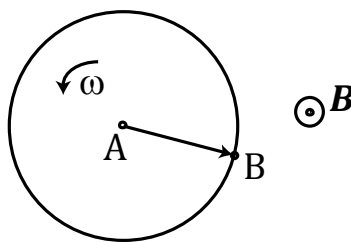
Veza između \mathbf{E} i \mathbf{H} je:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$$

Valni otpor Z_0 povezuje amplitude E_0 i H_0 .

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{E_0}{H_0}$$

Primjer 4.1 Kružni disk radijusa r_0 prema slici rotira kružnom frekvencijom ω u homogenom polju $\mathbf{B} = B\mathbf{a}_z$. Odredite inducirani napon u_{BA} između točke na obodu diska i središta diska.



Na udaljenosti r od središta diska obodna je brzina:

$$\mathbf{v} = \omega r \mathbf{a}_\alpha,$$

Vrijedi:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega r \mathbf{a}_\alpha \times B \mathbf{a}_z = \omega r B \mathbf{a}_r$$

Inducirani napon između točaka B i A je uz $d\mathbf{l}$:

$$u_{BA} = \int_r (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{r=0}^{r_0} \omega r B \mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r = \frac{\omega r_0^2 B}{2}$$

Primjer 4.2 Magnetska je indukcija u prostoru određena jednačinom:

$$\mathbf{B} = 0,1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \sin(377t) \mathbf{a}_z [\text{T}].$$

Odredite inducirani napon u petlji kvadratnog oblika koja leži u xy ravnini s vrhovima (0,0,0), (1m,0,0), (1m,1m,0), (0,1m,0).

Magnetski tok kroz petlju s normalom $\mathbf{n} = \mathbf{a}_z$ je:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0,1 \sin(377t) \int_{x=0}^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \int_{y=0}^1 \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) dy = \frac{0,4}{\pi^2} \sin(377t)$$

Inducirani je napon:

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{0,4}{\pi^2} \cdot 377 \cos(377t) = 15,28 \text{ V}$$

Primjer 4.3 Odredite gustoću struje pomaka u blizini uređaja koji emitira signal s jakosti magnetskog polja:

$$\mathbf{H} = 0,2 \cos(6,3 \cdot 10^8 t - 2,1x) \mathbf{a}_z \left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right].$$

Rotor magnetskog polja je:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

jer je u zraku $\kappa = 0$ pa nema protjecanja provodne struje \mathbf{J} .

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{a}_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{a}_y = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Gustoća struja pomaka je:

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{a}_y = -0,2 \cdot 2,1 \sin(6,3 \cdot 10^8 t - 2,1x) \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{J}_p = -0,42 \cdot \sin(6,3 \cdot 10^8 t - 2,1x) \mathbf{a}_y$$

Primjer 4.4 Odredite omjer amplitude gustoće provodnih struja i amplitude gustoće struja pomaka u materijalu s parametrima (ε, μ, κ) u kojem vlada polje jakosti:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{a}_x.$$

Gustoća provodnih struja je:

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} = \kappa E_0 \cos(\omega t) \mathbf{a}_x$$

Amplituda gustoće provodnih struja je:

$$J_m = \kappa E_0$$

Gustoća struje pomaka je:

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\varepsilon \omega E_0 \sin(\omega t) \mathbf{a}_x$$

Amplituda gustoće provodnih struja je:

$$J_{p,m} = \varepsilon \omega E_0$$

Omjer amplitude gustoće provodnih struja i amplitude gustoće struja pomaka:

$$\frac{J_m}{J_{p,m}} = \frac{\kappa}{\varepsilon \omega}$$

Primjer 4.5 Odredite Poytingov vektor za polje:

$$\mathbf{E} = \cos(-\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x + \sin(-\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y$$

Iz Faradayeva zakona možemo dobiti jakost magnetskog polja:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Odredimo prvo rotor električnog polja:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{a}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{a}_y = \\ &= -\beta(\cos(-\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x + \sin(-\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y) \end{aligned}$$

Integracijom u vremenu dobije se magnetska indukcija:

$$\mathbf{B} = -\frac{\beta}{\omega}(\sin(-\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x - \cos(-\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y)$$

Poytingov je vektor definiran jednađbom:

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

Uvrštenjem jednađbi za \mathbf{E} i \mathbf{B} dobije se:

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \cos(-\omega t + \beta z) & \sin(-\omega t + \beta z) & 0 \\ -\frac{\beta}{\omega} \sin(-\omega t + \beta z) & \frac{\beta}{\omega} \cos(-\omega t + \beta z) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\beta}{\mu\omega} \mathbf{a}_z$$

Primjer 4.6 Jakost električnog polja ravnog vala u koji se širi u materijalu zadano je izrazom:

$$\mathbf{E} = 2\cos(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_y.$$

Odredite relativnu dielektričnost prostora, faznu konstantu, prigušnu konstantu, valnu duljinu vala i odgovarajuću jednađbu magnetskog polja vala.

Iz jednađbe za jakost električnog polja slijedi:

$$\beta = 2$$

$$\alpha = 0$$

Val se rasprostire u smjeru +x, a jakost magnetskog polja ima smjer \mathbf{a}_z . S obzirom da nema prigušenja radi se o izolatoru pa se valna duljina može računati prema:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \pi \text{ [m]}$$

Brzina čela vala je:

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot 10^8}{2} = 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

Relativnu dielektričnost dobije se iz jednađbe:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{c^2 \mu_r \mu_0 \epsilon_0} = 9$$

Jakost je magnetskog polja:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} (2\cos(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_z) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (2\cos(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_z) = \frac{1}{40\pi} (2\cos(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_z)$$

Zadaci za vježbu

- 4.1. U vakuumu je zadana jakost električnog polja jednadžbom $\mathbf{E} = 2x \mathbf{a}_y$ u [kV/m].
Odredite gustoću energije električnog polja u [μ Jm⁻³] u točki (4m,5m,7m), pri čemu je točka označena u obliku (x,y,z).

Rj. 283,3

- 4.2. Za materijal koji ima vodljivost 5 [Sm⁻¹] i $\epsilon_r=1.5$ jakost električnog polja zadana je izrazom $E=250 \sin(10^{10} t)$ [V/m]. Odredite frekvenciju u [GHz] pri kojoj gustoće pomaćne i provodne struje imaju jednake amplitude.

Rj. 59,9

- 4.3. U prostoru je jakost električnog polja zadana izrazom $\mathbf{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$.
Odredite amplitudu (pozitivan broj) magnetske indukcije u [mT] ukoliko je $E_m=10$ [V/m], $\beta=0.6\text{m}^{-1}$, $\omega=10000$ rad/s.

Rj. 0,6

- 4.4. U vakuumu je električno polje zadano jednadžbom $\mathbf{E}(z,t)=50 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$ [V/m]. Odredite srednju snagu u [W] koja prolazi krugom radijusa 2.5 m u ravnini $z=2\text{m}$.

Rj. 65,1

- 4.5. U vakuumu je zadana jakost električnog polja jednadžbom $\mathbf{E} = xz \mathbf{a}_y$ u [kV/m].
Odredite gustoću energije električnog polja u [Jm⁻³] u točki (1m,5m,7m), pri čemu je točka označena u obliku (x,y,z).

Rj. 0,000217

- 4.6. U vakuumu je električno polje zadano jednadžbom $\mathbf{E}(z,t)=10 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$ [V/m]. Odredite srednju snagu u [W] koja prolazi krugom radijusa 1.5 m u ravnini $z=2\text{m}$.

Rj. 0,938

- 4.7. U vakuumu je zadana jakost magnetskog polja jednadžbom $\mathbf{H} = 200x \mathbf{a}_y$ u [A/m].
Odredite gustoću energije magnetskog polja u [Jm⁻³] u točki (2m,5m,1m), pri čemu je točka označena u obliku (x,y,z).

Rj. 100,5

- 4.8. Vlažno tlo ima vodljivost 10^{-3} [S/m] i relativnu dielektričnost 2.5. Odredite amplitudu gustoće provodnih struja u [nAm⁻²] u točki u kojoj je $E=6 \cdot 10^{-6} \sin(9 \cdot 10^9 t)$ [V/m].

Rj. 6

- 4.9. Odredite amplitudu vala u [V/m] zadanog izrazom:
 $E(z,t)=10 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x - 15 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$ [V/m]
 u $t=0, z=0.75\lambda$.

Rj. 18,03

- 4.10. U vakuumu je električno polje zadano jednadžbom $E(z,t)=150 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$ [V/m]. Odredite srednju snagu u [W] koja prolazi pravokutnikom stranica 3cm i 1,5cm u ravnini $z=2m$.

Rj. 0,0134

- 4.11. U vakuumu je zadana jakost magnetskog polja jednadžbom $H = 100xy \mathbf{a}_z$ u [A/m]. Odredite gustoću energije magnetskog polja u [Jm⁻³] u točki (2m,5m,1m), pri čemu je točka označena u obliku (x,y,z).

Rj. 628,3

- 4.12. Vlažno tlo ima vodljivost 10^{-3} [Sm⁻¹] i relativnu dielektričnost 2.5. Odredite amplitudu gustoće pomaćnih struja u [μA/m²] u točki u kojoj je:
 $E=6 \cdot 10^{-6} \sin(9 \cdot 10^9 t)$ [V/m].

Rj. 1,19

- 4.13. Kružna petlja radijusa 5 cm nalazi se u xy ravnini u polju indukcije
 $B = 0,5 \cos(377t) (4\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z)$ [T].

Odredite inducirani napon u petlji u [V].

Rj. 5,92

- 4.14. Provjerite da li polje određeno s:

$$E = E_m \sin(x) \sin(t) \mathbf{a}_y \text{ i}$$

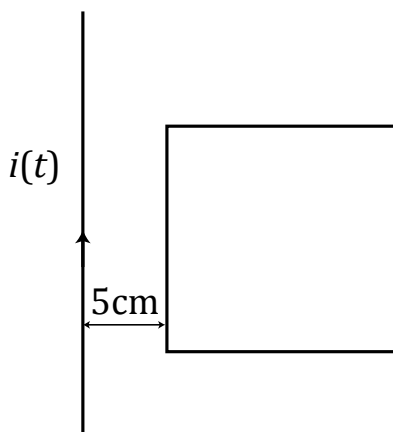
$$H = \frac{E_m}{\mu_0} \cos(x) \cos(t) \mathbf{a}_z$$

zadovoljava Maxwelllove jednadžbe.

Rj. Polje ne zadovoljava Maxwelllove jednadžbe.

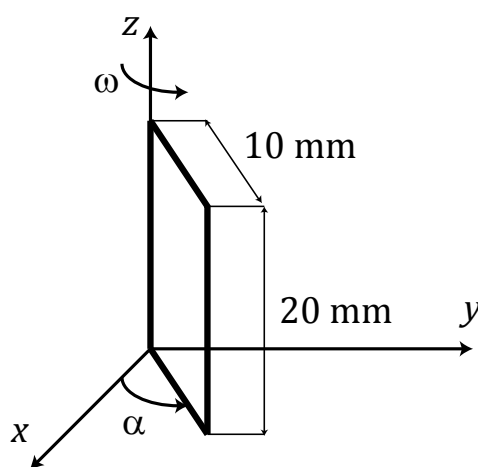
- 4.15. Kvadratna petlja stranice 20 cm nalazi se pored beskonačno duge strujnice prema slici. Ako strujnicom protječe sinusna struja efektivne vrijednosti 1 [A], frekvencije 5 kHz, odredite inducirani napon u petlji u [mV].

Rj. 2



- 4.16. Pravokutna petlja ukupnog otpora žice 20 [mΩ] rotira frekvencijom 2 [rad/s] oko jedne svoje stranice u polju indukcije $B = 10\mathbf{a}_y$ [mT], prema slici. Odredite induciranu struju u petlji u [mA], u trenutku u kojem je petlja u položaju $\alpha = 0,25\pi$.

Rj. 0,14



- 4.17. Za polje u vakuumu zadano jednačbama:

$$\mathbf{E} = E_m \cos(\omega \cdot t - k_2 \cdot z) \mathbf{a}_x \text{ i}$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_m}{k_1} \cos(\omega \cdot t - k_2 \cdot z) \mathbf{a}_y$$

pri čemu su k_1 i k_2 konstante odredite konstantu k_1 .

Rj. $k_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

4.18. Za polje u vakuumu zadano jednađbama:

$$\mathbf{E} = E_m \cos(\omega \cdot t - k_2 \cdot z) \mathbf{a}_x \text{ i}$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_m}{k_1} \cos(\omega \cdot t - k_2 \cdot z) \mathbf{a}_y$$

pri čemu su k_1 i k_2 konstante odredite konstantu k_2 .

$$\text{Rj. } k_2 = \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

4.19. Za zadano polje u slobodnom prostoru:

$$\mathbf{E} = E_m \cos(\beta \cdot x) \cos(\omega t) \mathbf{a}_z$$

odredite magnetsko polje.

$$\text{Rj. } \mathbf{H} = -\frac{\omega}{\beta} \cdot \varepsilon_0 E_m \sin(\beta \cdot x) \sin(\omega t) \mathbf{a}_y$$

4.20. Za zadatak 4.19. odredite omjer $\frac{\omega}{\beta}$.

$$\text{Rj. } \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$$

4.21. Neka je polje u prostoru zadano jednađbama:

$$\mathbf{E} = 100 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{5} x) \mathbf{a}_z \text{ [V/m]}$$

$$\mathbf{H} = \frac{100}{120\pi} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{5} x) \mathbf{a}_y \text{ [A/m]}$$

Odredite fazor Poyntingovog vektora u $[\text{W/m}^2]$.

$$\text{Rj. } -26,53$$

4.22. Neka je polje u prostoru zadano jednađbama:

$$\mathbf{E} = 100 \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3} x) \mathbf{a}_z \text{ [V/m]}$$

$$\mathbf{H} = \frac{100}{120\pi} \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3} x) \mathbf{a}_y \text{ [A/m]}$$

a) Odredite fazor električnog polja $\underline{\mathbf{E}}$.

$$\text{Rj. } 100 e^{j\frac{4}{3}\pi x} \mathbf{a}_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b) Odredite fazor magnetskog polja $\underline{\mathbf{H}}$.

$$\text{Rj. } \frac{100}{120\pi} e^{j\frac{4}{3}\pi x} \mathbf{a}_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

c) Odredite trenutnu vrijednost Poyntingova vektora u $x = 1\text{m}$ i $t = 2\text{s}$ u smjeru \mathbf{a}_x .

$$\text{Rj. } -10,14 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

- d) Odredite prosječnu snagu koja prolazi pravokutnikom određenim točkama $(0;0;0)$, $(0;2;0)$, $(0;2;2)$ i $(0;0;2)$ i normalom $\mathbf{n} = \mathbf{a}_x$.
Rj. -53 W

4.23. Jakost električnog polja ravnog elektromagnetskog vala koji se širi dielektrikom relativne magnetske permeabilnosti $\mu_r = 1$ zadana je jednadžbom:

$$\mathbf{E} = 3 \sin(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

- a) Odredite smjer u kojem se giba val
Rj. \mathbf{a}_x

- b) Odredite valnu duljinu λ
Rj. $\pi \text{ m}$

- c) Odredite relativnu dielektričnost sredstva ϵ_r .
Rj. 9

- d) Odredite vektor \mathbf{H} .
Rj. $0,024 \sin(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$

4.24. Cilindrični kondenzator radijusa unutrašnje elektrode 5mm, radijusa vanjske elektrode 6mm, duljine 500mm ispunjen je dielektrikom relativne dielektričnosti $\epsilon_r = 6,7$. Ako je unutrašnja elektroda uzemljena, a vanjska na potencijalu $\varphi = 250 \sin(377t) \text{ V}$ odredite:

- a) Jakost električnog polja u dielektriku na udaljenosti $r = 5,5 \text{ mm}$ od osi kondenzatora.

Rj. $-249310 \sin(377t) \mathbf{a}_r \frac{\text{V}}{\text{m}}$

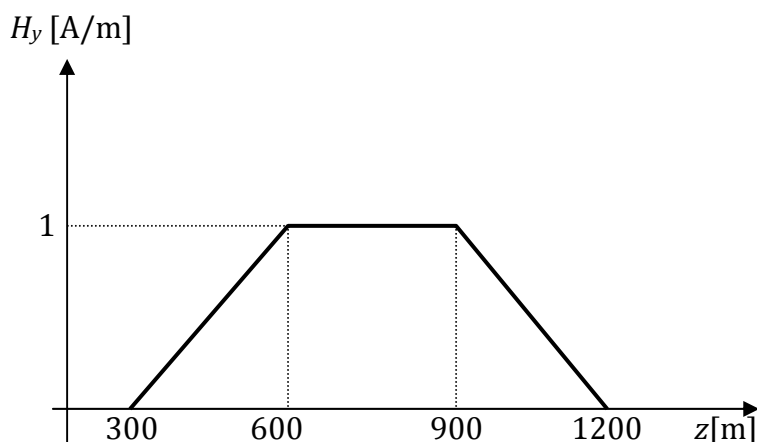
- b) Gustoću struje pomaka u dielektriku na udaljenosti $r = 5,2 \text{ mm}$ od osi kondenzatora.

Rj. $-5,9 \cdot 10^{-3} \cos(377t) \mathbf{a}_r \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

- c) Iznos ukupne struje pomaka
Rj. $9,63 \cdot 10^{-5} \cos(377t) \text{ A}$

- d) Kapacitet kondenzatora
Rj. 1 nF

- 4.25. Ravni val giba se u +z smjeru u prostoru ($\mu_r = 1$; $\varepsilon_r = 4$). Jakost električnog polja ima samo x komponentu, a prostorna promjena jakosti magnetskog polja, koje ima samo y komponentu zadana je slikom u $t = 1\mu\text{s}$.



- a) Odredite $E(t = -1\mu\text{s}, z = 0)$.

Rj. 0

- b) Odredite $E(t = -1,5\mu\text{s}, z = 0)$.

Rj. $47,13 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

- c) Odredite $E(t = -4\mu\text{s}, z = 0)$.

Rj. $188,5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

- d) Odredite $E(t = -6\mu\text{s}, z = 0)$.

Rj. $94,25 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

- 4.26. Sat s metalnim kazaljka, koji leži u xy ravnini nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije 0.5 T usmjerenom u ravninu crtanja prema slici. Kazaljka 1, koja pokazuje minute dugačka je 20cm. Kazaljka 2, koja pokazuje sate dugačka je 10cm. Kazaljka 3, koja pokazuje sekunde dugačka je 5cm. Uz pretpostavku da se kazaljke gibaju kontinuirano u vremenu i da su osovine svih kazaljki električki spojene odredite:

- a) Iznos napona U_{AB} induciranog između vrhova kazaljki za minute i sate u trenutku kad sat pokazuje $t_h = 2\text{h}15\text{min}30\text{s}$.

Rj. $17,1\mu\text{V}$

- b) Iznos napona U_{AC} induciranog između vrhova kazaljki za minute i sekunde u trenutku kad sat pokazuje $t_h = 2\text{h}15\text{min}30\text{s}$.

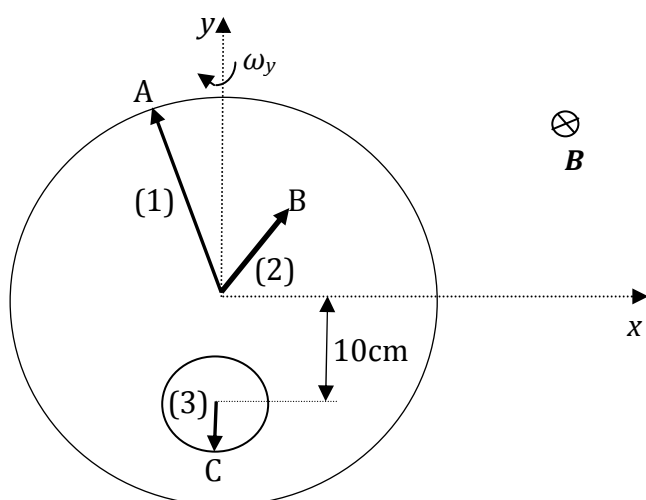
Rj. $48\mu\text{V}$

- c) U trenutku kad sat pokazuje $t_h=3\text{h}30\text{min}30\text{s}$, sat počinje rotirati kutnom brzinom $\omega_y=0,5\pi\text{ rad/s}$ oko osi y . Odredite iznos induciranog napona U_{AC} između vrhova kazaljki za minute i sekunde u trenutku kad sat pokazuje $t_h=3\text{h}30\text{min}32\text{s}$.

Rj. $48\text{ }\mu\text{V}$

- d) U trenutku kad sat pokazuje $t_h=3\text{h}30\text{min}30\text{s}$, sat počinje rotirati kutnom brzinom $\omega_y=0,5\pi\text{ rad/s}$ oko osi y . Odredite iznos induciranog napona U_{AC} između vrhova kazaljki za minute i sekunde u trenutku kad sat pokazuje $t_h=3\text{h}30\text{min}34\text{s}$.

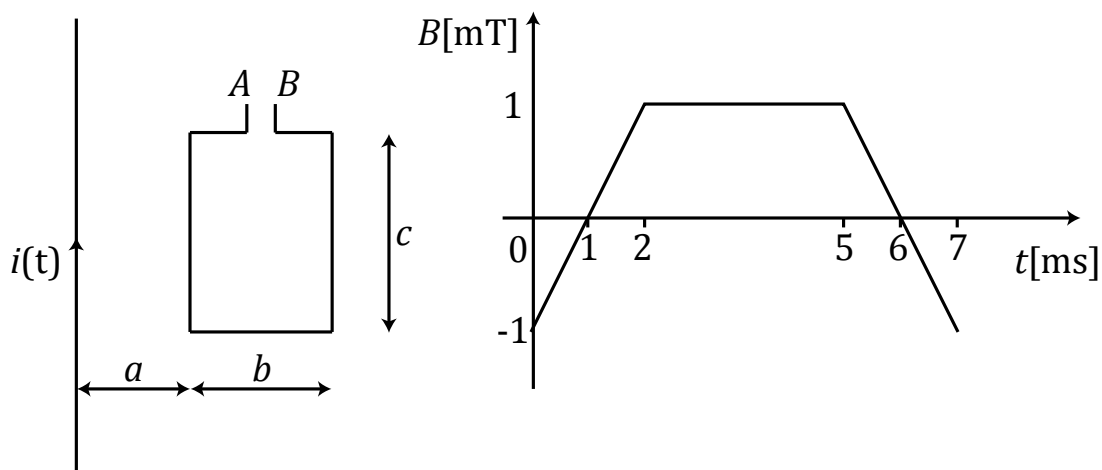
Rj. $48\text{ }\mu\text{V}$



- 4.27. Na udaljenosti 1m od beskonačno dugog vodiča kroz koji protječe struja $i(t)$ izmjerena je magnetska indukcija prikazana slikom. Zadano je: $a=2\text{m}$, $b=1\text{m}$, $c=2\text{m}$.

- a) Odredite struju u beskonačno dugom vodiču u trenutku $t = 4\text{ ms}$ u [kA].

Rj. 5



b) Odredite inducirani napon U_{AB} u petlji u trenutku $t = 1 \text{ ms}$ u [V].

Rj. -0,8

c) Odredite inducirani napon U_{AB} u petlji u trenutku $t = 3 \text{ ms}$ u [V].

Rj. 0

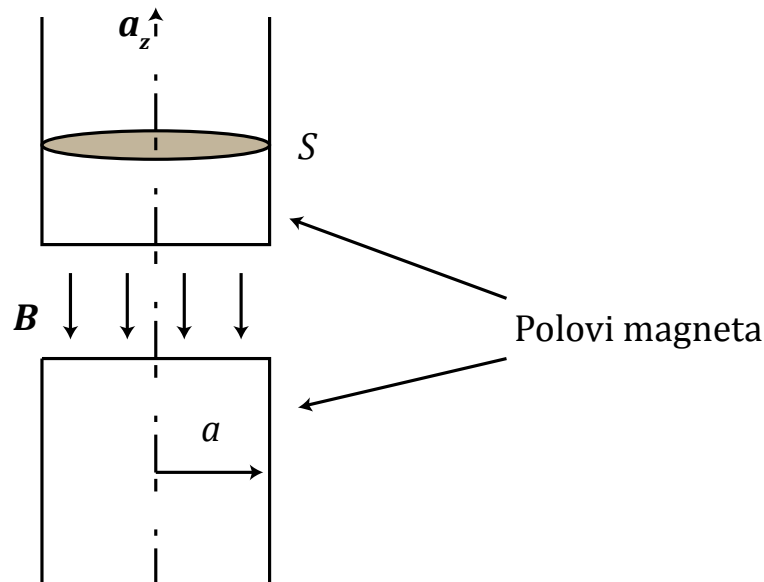
d) Odredite inducirani napon U_{AB} u petlji u trenutku $t = 5,5 \text{ ms}$ u [V].

Rj. 0,8

4.28. Između dva pola cilindričnih magneta prema slici magnetska indukcija može se aproksimirati jednačbom:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -B_0 \frac{a \cdot t}{\sqrt{a^2 + r^2}} \mathbf{a}_z & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Zadano je: $a=0,1\text{m}$, $B_0 = 1\text{T}$, $\kappa=0$, $\varepsilon_r = 1$.



a) Odredite primjenom Faradayevog zakona iznos jakosti električnog polja u prostoru između polova u trenutku $t = 1\text{ms}$ za $r = 0,05 \text{ m}$ u [mV/m].

Rj. 23,6

b) Odredite primjenom Faradayevog zakona iznos jakosti električnog polja u prostoru između polova u trenutku $t = 3\text{ms}$ za $r = 0,1 \text{ m}$ u [mV/m].

Rj. 41,4

c) Odredite primjenom Faradayevog zakona iznos jakosti električnog polja u prostoru između polova u trenutku $t = -1\text{ms}$ za $r = 0,05 \text{ m}$ u [mV/m].

Rj. 0

d) Odredite iznos magnetskog toka koji prolazi plohom S magneta u $t = 1\text{ms}$ u [μWb].

Rj. 26

4.29. Smjer širenja vala frekvencije 10 MHz u slobodnom prostoru prikazan je slikom.

Smjer širenja vala čini kut od 30° s $+z$ osi, a njegova projekcija na x - y ravninu čini kut od 45° s $+x$ osi. Jakost električnog polja nema z komponente, a u $t=10^{-6}$ s u točki ($x=0$, $y=0$, $z=0$) ima iznos $10\cos(\omega \cdot t - \pi/6)$ V/m. Odredite, uz pretpostavku $E_{0x} > 0$:

a) E_{0x} u [V/m]

Rj. 7,1

b) E_{0y} u [V/m]

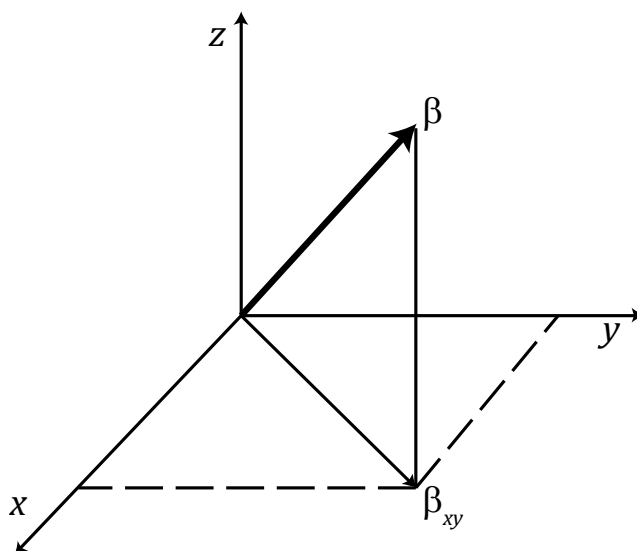
Rj. -7,1

c) H_{0x} u [mA/m]

Rj. 16,2

d) H_{0y} u [mA/m]

Rj. 16,2



4.30. Ravni je val u sredstvu ($\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 2$) zadan jednažbom za jakost magnetskog polja:

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_y 10 \cos(\omega t - 3x) \text{ A/m}$$

a) Odredite faznu konstantu β u [m^{-1}].

Rj. 3

b) Odredite brzinu širenja vala u [m/s].

Rj. $2,12 \cdot 10^8$

c) Odredite jakost električnog polja u $t = 10 \text{ ns}$ i $x = 0,4 \text{ m}$ u [kV/m].

Rj. 1,2

d) Odredite smjer širenja vala.

Rj. \mathbf{a}_x

4.31. U ishodištu sfernog koordinatnog sustava nalazi se izvor polja:

$$\mathbf{E} = 100 \sin(\vartheta) \cdot r^{-1} \cdot \cos(10^{10}t - r) \mathbf{a}_\vartheta \text{ V/m}$$

$$\mathbf{H} = \frac{100}{120\pi} \sin(\vartheta) \cdot r^{-1} \cdot \cos(10^{10}t - r) \mathbf{a}_\alpha \text{ A/m}$$

a) Odredite smjer prostiranja vala.

Rj. \mathbf{a}_r

b) Odredite iznos Poyntingova vektora \mathbf{N} na udaljenosti $r=2\text{m}$ u trenutku $t = 1 \text{ ns}$ za $\vartheta = \pi/6$ u $[\text{mW/m}^2]$.

Rj. 35,1

c) Odredite srednju vrijednost Poyntingova vektora N_{sr} za $r = 4\text{m}$ i $\vartheta = \pi/4$ u $[\text{mW/m}^2]$.

Rj. 414,5

d) Odredite ukupnu srednju snagu izvora u $[\text{W}]$.

Rj. 111