Magnetostatika

1. Jednadžbe statičkog strujnog polja i uvjeti na granici dvaju vodiča

Jednadžba kontinuiteta (imamo stacionarno strujanje):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\boldsymbol{J} = \kappa \cdot \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

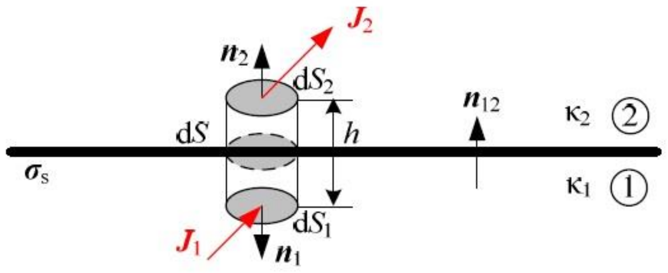
$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \nabla \cdot \big(\kappa \cdot (-\nabla \varphi)\big) = 0$$

Laplaceova jednadžba:

$$\Delta \varphi = 0$$

Uvjeti na granici:

Na graničnoj površini S dva vodiča provodnosti κ_1 i κ_2 nalazi se slobodni naboj plošne gustoće σ_s.



Primjenjujemo jednadžbu kontinuiteta na cilindar visine h i površine baze S:

$$\oiint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_s dV$$

$$\boldsymbol{J_1} \cdot \boldsymbol{n_1} \cdot dS_1 + \boldsymbol{J_2} \cdot \boldsymbol{n_2} \cdot dS_2 + (doprinos\ struji\ kroz\ plašt) = -\frac{d}{dt}(\rho_s \cdot h \cdot dS)$$

Smanjujemo visinu cilindra na 0:

$$\lim_{h \to 0}\{-\boldsymbol{J_1} \cdot \boldsymbol{n_{12}} \cdot dS + \boldsymbol{J_2} \cdot \boldsymbol{n_{12}} \cdot dS + (doprinos\ struji\ kroz\ plašt)\} = -\frac{d}{dt} \lim_{h \to 0}(\rho_s \cdot h \cdot dS)$$

Kad visina cilindra teži k nuli, i doprinos struji kroz plašt teži k nuli. Ako podijelimo jednadžbu s dS, na desnoj strani dobivamo plošnu gustoću slobodnog naboja σ_s:

$$\boldsymbol{n_{12}} \cdot (\boldsymbol{J_2} - \boldsymbol{J_1}) = -\frac{d\sigma_s}{dt}$$

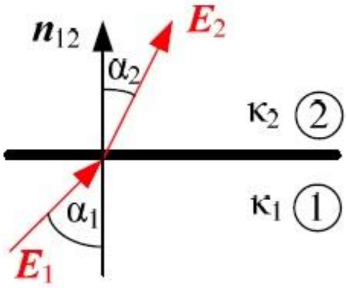
$$J_{1n} = J_{2n} \rightarrow \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

Za promjenu jakosti električnog polja vrijede isti uvjeti kao i za statičko električno polje:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\boldsymbol{n_{12}} \times (\boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_1}) = 0$$

Zakon loma (vrijedi i kog električnih polja):



$$\tan\alpha_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}\ ;\ \tan\alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\frac{E_{1t}}{E_{1n}}}{\frac{E_{2t}}{E_{2n}}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

2. Analogija statičkog strujnog polja i statičkog električnog polja i odslikavanje u statičkom strujnom polju

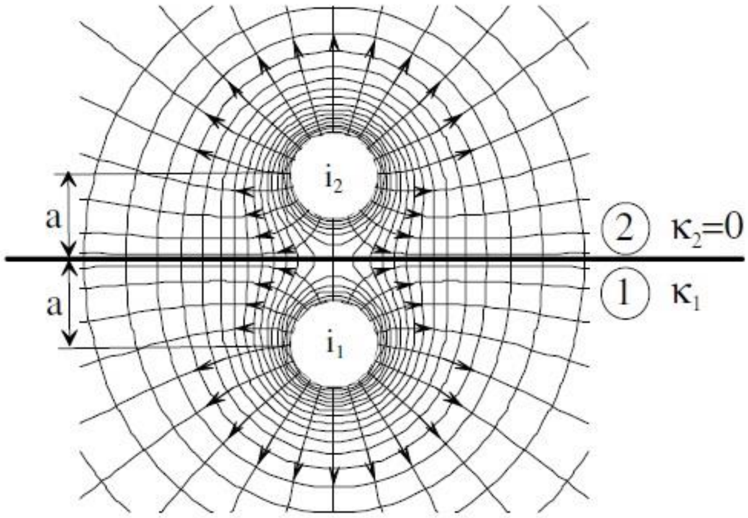
Električno polje koje uzrokuje vođenje struje u vodičima nazivamo statičkim strujnim poljem. Električno polje u dielektriku stvara električni tok, a električno polje u vodiču stvara električnu struju. Analogije:

Homogeni dielektrik bez naboja		**Vodljivi materijal**	
Gaussov zakon	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$	Jednadžba kontinuiteta	$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$
	$\boldsymbol{D} = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E}$		$\boldsymbol{J} = \kappa \cdot \boldsymbol{E}$
	$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$		$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$
Laplaceova jednadžba	$\Delta\varphi = 0$	Laplaceova jednadžba	$\Delta\varphi = 0$
Električni tok (**D**)	$\phi_e = \iint_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$	Strujni tok (**J**)	$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$
Kapacitet	$C = \frac{Q}{U_{ab}}$	Vodljivost	$G = \frac{I}{U_{ab}}$

Analogne veličine:

Homogeni dielektrik bez naboja	Vodljivi materijal
$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{J}$
$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E}$
ε	κ
φ	φ
ϕ_e	I
C	G

Odslikavanje



U vodljivom sredstvu 1 provodnosti κ_1 nalazi se točkasti strujni izvor $i_1 = i$ na udaljenosti a od granice s dielektrikom kojemu je provodnost jednaka nuli. U sredstvu 2 koje nije vodljivo nema strujnog polja:

$$J_{1n} = J_{2n}\ ;\ J_{2n} = 0 \rightarrow;\ J_{1n} = 0\ ;\ E_{1n} = E_{2n} = 0\ ;\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0$$

Ovaj uvjet u statičkom električnom polju postiže se u slučaju dvaju točkastih naboja istog predznaka odmaknutih za a od granične ravnine. Prema analogiji, u statičkom strujnom polju ovaj uvjet je ispunjen u slučaju dvaju točkastih strujnih izvora istog predznaka odmaknutih za a od granične ravnine.

3. Gubitci snage u vodiču u statičkom strujnom polju

$$dW = dq[\varphi(a) - \varphi(b)] = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS\ \cdot dt\ \cdot \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}\, dV\ \cdot dt$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \iiint_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}\, dV$$

$$\nabla \cdot (\varphi \cdot \boldsymbol{J}) = \varphi \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{J}) + \boldsymbol{J} \cdot (\nabla \varphi) = -\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$$

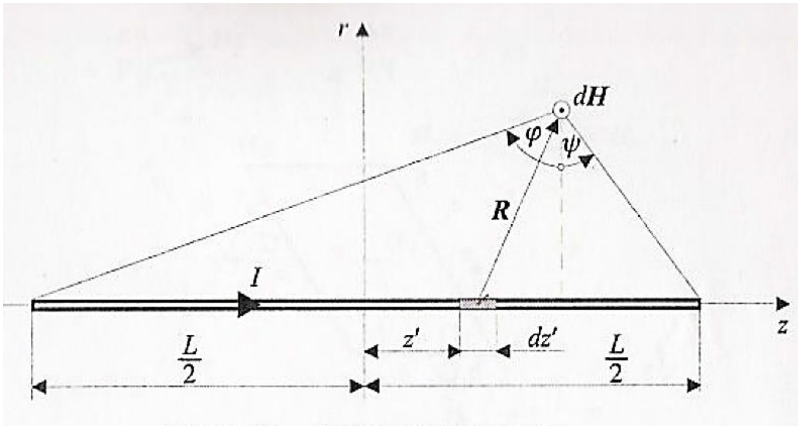
Primjenom Gaussovog zakona:

$$P = -\iiint_v \nabla(\varphi \cdot \boldsymbol{J})dV = \oiint_S \varphi \cdot \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = I \cdot \varphi_2 - I \cdot \varphi_2 = I \cdot U = I^2 \cdot R$$

4. Biot-Savartov zakon i magnetska indukcija kratke ravne strujnice

Jakost magnetskog polja određena je Biot-Savartovim zakonom:

$$d\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}}{R^3}$$



$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_z dz'$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_r r + \boldsymbol{a}_z z\, ; \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}_z z'$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}_r r + \boldsymbol{a}_z (z - z')$$

$$d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{a}_\alpha r dz'$$

$$d\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}}{R^3} = \boldsymbol{a}_\alpha \frac{I}{4\pi} \frac{r\, dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_\alpha \frac{Ir}{4\pi} \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

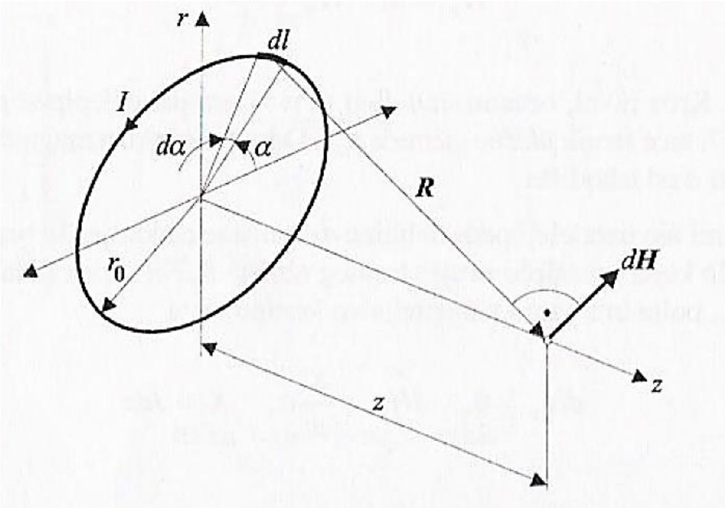
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_\alpha \frac{I}{4\pi r} \left[\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} \right] = \boldsymbol{a}_\alpha \frac{I}{4\pi r} (\sin\varphi + \sin\psi)$$

Za beskonačno dugu strujnicu ($L \to \infty$) vrijedi:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_\alpha \frac{I}{2\pi r}$$

5. Biot-Savartov zakon i magnetska indukcija na osi kružne strujnice

Neka kružnom strujnicom polumjera r_0 protječe struja I:



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_z z$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}_r r_0$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}_z z - \boldsymbol{a}_r r_0$$

$$d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{a}_z r_0 + \boldsymbol{a}_r z) r_0 d\alpha$$

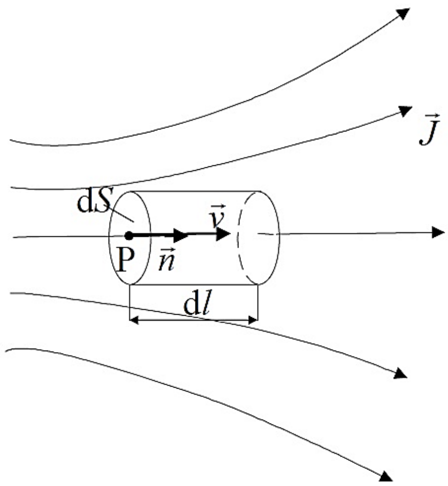
$$H = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{a}_z r_0 + \boldsymbol{a}_r z}{(r_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} r_0 d\alpha = \boldsymbol{a}_r H_r + \boldsymbol{a}_z H_z$$

$$\boldsymbol{a}_r H_r = \frac{I r_0 z}{4\pi (r_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \boldsymbol{a}_r d\alpha = \boldsymbol{0}$$

$$H_z = \frac{I {r_0}^2}{4\pi (r_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\alpha=0}^{2\pi} d\alpha = \frac{I}{2} \frac{{r_0}^2}{(r_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

6. Sila na strujni element u magnetskom polju

Ako se vodič protjecan strujom nalazi u magnetskom polju, na slobodne elektrone u vodiču, čuje gibanje predstavlja električnu struju, djelovat će magnetska sila koja se prenosi na čitav materijal vodiča.



Razmatramo prostor u kojem se naboji gustoće ρ gibaju brzinom $\boldsymbol{v}$. dS je okomit na brzinu u točki P. Put kojeg naboj prijeđe tijekom vremena dt:

$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}dt$$

$$dV = d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

$$dq = \rho dV = \rho \cdot \boldsymbol{v}\, dt \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \rho \cdot v\, dS \rightarrow J = \frac{I}{dS} = \rho \cdot v$$

$$d\boldsymbol{F} = dq(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \rho(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})dV = (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B})dV$$

$$\boldsymbol{F} = \iiint_V (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B})dV$$

Za struju u tankom vodiču:

$$\boldsymbol{F} = I \int_l d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

7. Jednadžbe statičkog magnetskog polja u diferencijalnom i integralnom obliku

Biot-Savartov zakon:

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}}{R^3}, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, {}^{Vs}/_{Am}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{R}}{R^3} dV$$

Gaussov zakon:

$$\oiint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{B}\, dV = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

Ampereov zakon kružnog protjecanja:

Magnetska indukcija ravne, beskonačno duge strujnice:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_\alpha \frac{I\mu_0}{2\pi r}$$

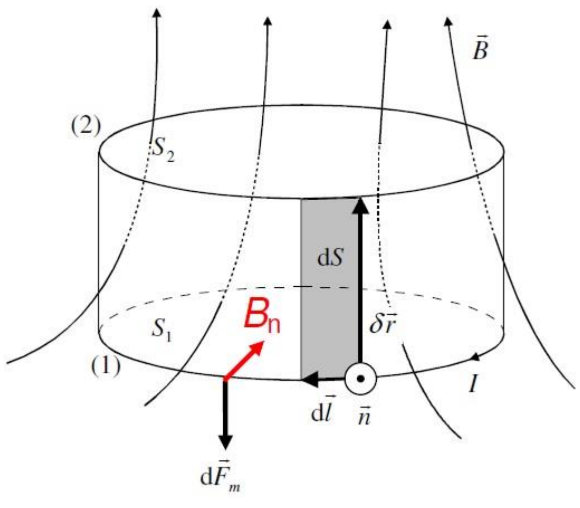
$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_\alpha r d\alpha$$

$$\oint_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = I \cdot \mu_0$$

Integral magnetske indukcije po nekoj zatvorenoj krivulji jednak je struji koja je obuhvaćena tom krivuljom, pomnoženom s μ_0.

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot \boldsymbol{J}$$

8. Energija pohranjena u magnetskom polju izražena pomoću magnetskog toka



Na diferencijalni dio strujnice djeluje magnetska sila:

$$d\boldsymbol{F}_m = I(d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$$

$$d\boldsymbol{F}_v = -d\boldsymbol{F}_m$$

$$\delta W = d\boldsymbol{F}_v \cdot \delta\boldsymbol{r} = -I(d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) \cdot \delta\boldsymbol{r}$$

Identitet:

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$

$$\delta W = -I \cdot \boldsymbol{B} \cdot (\delta\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l}) = -I \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

Pri pomaku strujnice iz položaja 1 u položaj 2 strujnica opiše valjak baza S_1 i S_2, a kroz diferencijalnu površinu plašta tog valjka dS uđe diferencijalni magnetski tok:

$$\delta\phi_{pl} = \boldsymbol{B} \cdot (-\boldsymbol{n}) dS$$

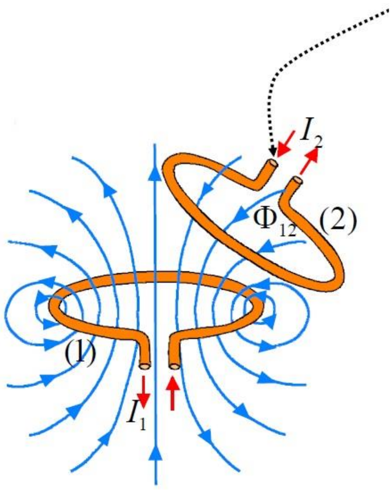
$$\delta W = I \cdot \delta\phi_{pl}$$

$$dW = I \cdot d\phi_{pl}$$

$$W = I(\phi_2 - \phi_1)$$

9. Magnetska energija sustava strujnih petlji izražena pomoću vektorskog magnetskog potencijala

U polje strujnice 1 dovodimo strujnicu 2:



$$W_{12} = I_2 \cdot \phi_{12} = W_{21} = I_1 \cdot \phi_{21} = W$$

$$2W = I_1 \cdot \phi_{21} + I_2 \cdot \phi_{12} \rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot (I_1 \cdot \phi_{21} + I_2 \cdot \phi_{12})$$

Za n strujnica:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} I_i \cdot \phi_{ji}$$

$$\phi = \oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$I_i = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

Jer su **n** i **l** kolinearni vektori:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A}\, dV$$

10. Magnetska energija sustava strujnih petlji izražena pomoću vektora magnetskog polja

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A}\, dV = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\, dV + \frac{1}{2}\iiint_V \nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A})\, dV$$

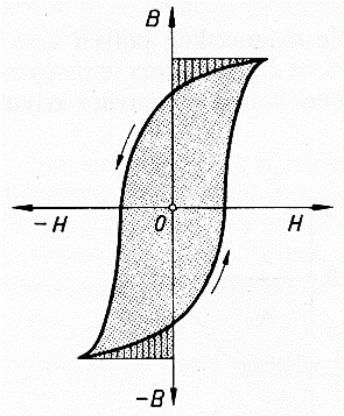
$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\, dV + \frac{1}{2}\oiint_S (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

Prvi integral predstavlja energiju magnetskog polja sadržanu u volumenu V, a drugi doprinos energiji magnetskog polja u prostoru izvan volumena V. Ako V uključuje cijeli prostor, površina S postaje zatvorena površina u beskonačnost. Produkt H i A će padati s $1/r^3$, površina S rasti s r^2 i, konačno, cijela podintegralna funkcija težiti k nuli kad r teži u beskonačnost. Tada imamo:

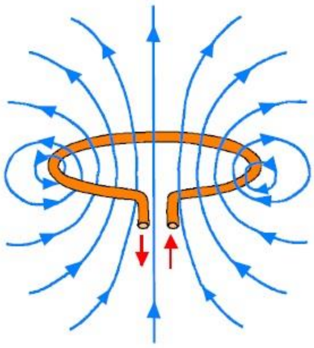
$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\, dV = \frac{1}{2}\mu \iiint_V H^2\, dV = \frac{1}{2\mu}\iiint_V B^2\, dV$$

11. Magnetska energija u nelinearnim materijalima i gubitci zbog histereze

Kod feromagnetskih materijala pri magnetiziranju materijala (povećanju magnetske indukcije od 0 do B) izvor daje energiju magnetskom polju (zasjenjena površina na slici). Pri demagnetiziranju magnetsko polje vraća energiju izvoru (crtkani dio na slici). Daljnjim magnetiziranjem i demagnetiziranjem opisuje se petlja histereze, a razlika u predanoj i vraćenoj energiji razmjerna je površini petlje histereze. Gubitak energije pretvara se u toplinu, a posljedica je trenja.



12. Induktivitet strujne petlje



$$L = \frac{\phi}{I}$$

Induktivitet je omjer toka kojeg petlja obuhvaća i električne struje koja protječe kroz petlju.

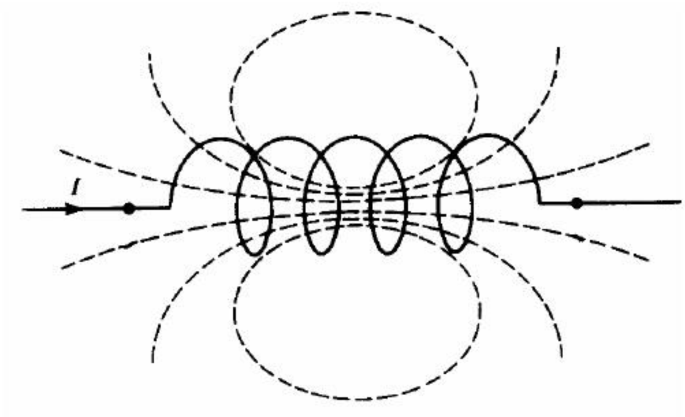
$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\, dV$$

$$L = \frac{\iiint_V \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\, dV}{I^2} = \frac{\iiint_{Vu} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\, dV}{I^2} + \frac{\iiint_{Vv} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\, dV}{I^2} = L_u + L_v$$

L_U ovdje predstavlja unutarnji induktivitet, tj. induktivitet koji prolazi kroz presjek vodiča. L_V je vanjski induktivitet i predstavlja dio magnetskog toka koji prolazi izvan vodiča. Ukupan induktivitet zbroj je vanjskog i unutarnjeg induktiviteta.

Kod strujne petlje s N zavoja imamo ulančani magnetski tok ψ:

$$\psi = N \cdot \phi$$

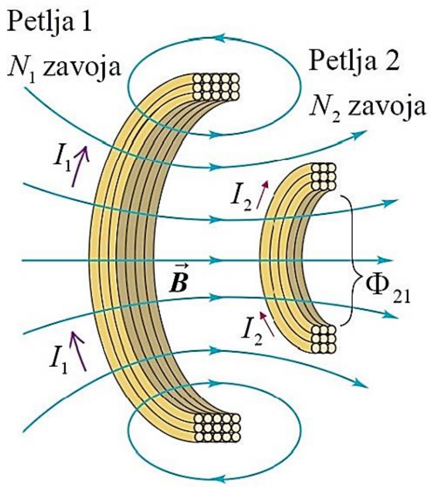


$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{N \cdot \phi}{I} = \frac{N \cdot N \cdot \phi_1}{I} = N^2 \cdot L_1$$

L_1 ovdje označava induktivitet samo jednog zavoja. Ukupan induktivitet zavojnice razmjeran je kvadratu broja zavoja.

13. Međuinduktivitet

Ako imamo dva strujna kruga koja su blizu jedan drugome, tada će magnetski tok proizveden strujom I_1 prvog kruga u cijelosti ili djelomično prolaziti kroz drugi strujni krug i biti njime obuhvaćen, i obratno.



$$\phi_{21} = k \cdot \phi_1, k \leq 1$$

Omjer magnetskog toka obuhvaćenog krugom 2, ϕ_{21} i struje I_1 prvog kruga koja je proizvela taj magnetski tok naziva se međuinduktivitet:

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1}$$

Ako je petlja strujnog kruga 1 načinjena s N_1 zavoja, tada će njezin ukupni magnetski tok biti N_1 puta veći. Ako je petlja strujnog kruga 2 načinjena s N_2 zavoja, tada će ukupni magnetski tok kojeg ona obuhvaća biti N_2 puta veći. Međuinduktivitet je onda:

$$M_{21} = \frac{\psi_{21u}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot \phi_{21u}}{I_1} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot \phi_{21}}{I_1}$$

Analogno vrijedi i za međuinduktivitet kojeg struja u drugom strujnom krugu izaziva na prvom strujnom krugu. Ti međuinduktiviteti su jednakog iznosa.

14. Odnos međuinduktiviteta i samoinduktiviteta dviju strujnih petlji

$$M_{12} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot \phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot k_2 \cdot \phi_2}{I_2} = k_2 \cdot N_1 \cdot \frac{L_2}{N_2}$$

$$M_{21} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot \phi_{21}}{I_1} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot k_1 \cdot \phi_1}{I_1} = k_1 \cdot N_2 \cdot \frac{L_1}{N_1}$$

$$M_{12} \cdot M_{21} = k_1 \cdot k_2 \cdot L_1 \cdot L_2 = k^2 \cdot L_1 \cdot L_2 = M^2$$

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

Koeficijent k naziva se koeficijent magnetske sprege i ima vrijednost između 0 i 1. Vektorski potencijal strujnice 1:

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\psi_{21} = \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_1 \cdot d\boldsymbol{l_2} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Međuinduktivitet:

$$M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Možemo uočiti da je međuinduktivitet dviju okomitih strujnica jednak nuli.

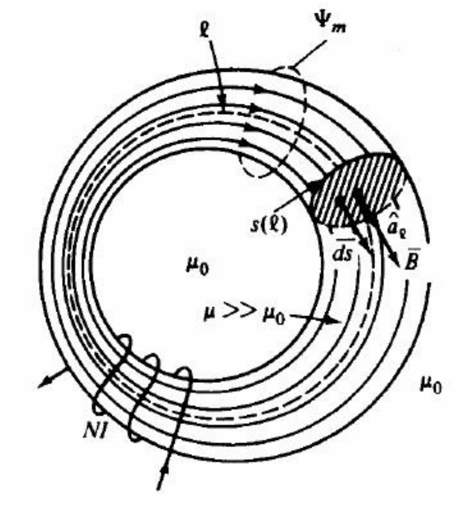
15. Magnetski krug

Prostor u kojem je gustoća magnetskih silnica znatno veća nego u preostalom dijelu prostora naziva se magnetski krug. Za realizaciju magnetskog kruga potrebno je magnetizirati magnetski krug vanjskim magnetskim poljem tako da mu permeabilnost bude velik.

Prostor polja dijelimo u elementarne silocijevi kroz koje je magnetski tok konstantan, a silocijev je zatvorena sama u sebe.

$$\phi_m = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = B_{sr} \cdot S_{sr}$$

$$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = NI = H_{sr} \cdot l_{sr}$$



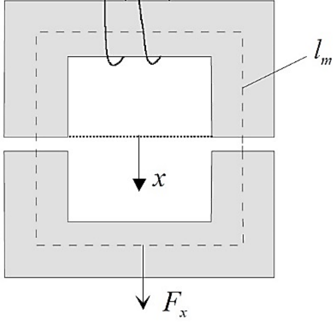
Magnetski otpor:

$$R_m = \frac{NI}{\phi} = \frac{H_{sr} \cdot l_{sr}}{B_{sr} \cdot S_{sr}} = \frac{1}{\mu} \frac{l_{sr}}{S_{sr}}$$

16. Analogija magnetskog kruga i kruga istosmjerne struje

Magnetski krug		**Strujni krug**	
Magnetski tok (vektora **B**)	$\phi_m = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$	Strujni tok (vektora **J**)	$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$
Magnetska indukcija (**B**)	$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$	Gustoća struje (**J**)	$\boldsymbol{J} = \kappa \boldsymbol{E}$
Jakost magnetskog polja **H**		Jakost električnog polja **E**	
Magnetska permeabilnost μ		Električna provodnost κ	
Magnetska pobuda	$NI = \oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}$	Napon	$U = \oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$
Magnetski otpor	$R_m = \frac{\Theta}{\phi} = \frac{\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}}{\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS}$	Električni otpor	$R = \frac{U}{I} = \frac{\oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}}{\iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS}$
Magnetska vodljivost	$\Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS}{\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}}$	Električna vodljivost	$G = \frac{1}{R} = \frac{\iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS}{\oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}}$

17. Magnetski krug elektromagneta



$$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = NI$$

$$H_m \cdot l_m + 2H_\delta \cdot \delta = NI$$

$$B_m = B_\delta = B$$

$$\frac{B}{\mu_0 \mu_r} \cdot l_m + 2\frac{B}{\mu_0}\delta = NI$$

$$\phi = B \cdot S = \frac{NI}{\frac{1}{\mu}\frac{l_m}{S} + \frac{2}{\mu_0}\frac{\delta}{S}}$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{N\phi}{I} = \frac{N^2}{\frac{1}{\mu}\frac{l_m}{S} + \frac{2}{\mu_0}\frac{\delta}{S}}$$

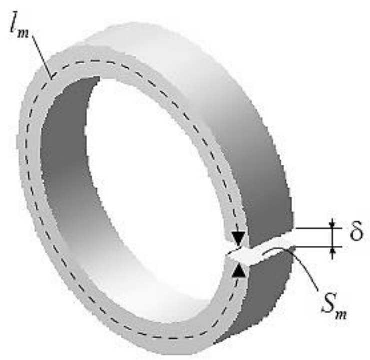
$$W = \frac{1}{2}NI\phi = \frac{1}{2}\psi I = \frac{1}{2}LI^2$$

Sila po zračnom rasporu:

$$\boldsymbol{F}_x = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial W_x}{\partial \delta} = -\boldsymbol{a}_x \frac{1}{2}N^2 I^2 \frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{1}{\frac{1}{\mu}\frac{l_m}{S} + \frac{2}{\mu_0}\frac{\delta}{S}}\right) = -\boldsymbol{a}_x \frac{\phi^2}{\mu_0 S} == -\boldsymbol{a}_x \frac{B_\delta^2 \cdot S}{\mu_0}$$

Uočimo da sila želi smanjiti zračni raspor.

18. Magnetski krug permanentnog magneta



$$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = NI = 0$$

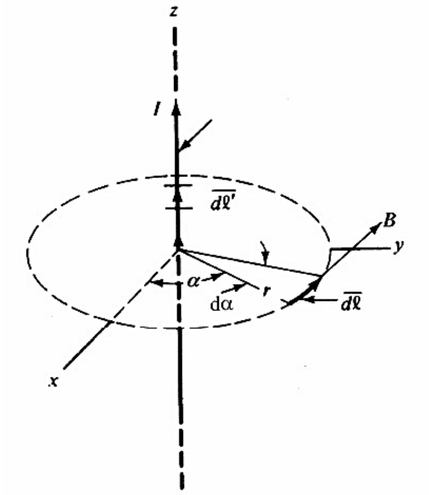
$$H_m \cdot l_m + H_\delta \cdot \delta = 0$$

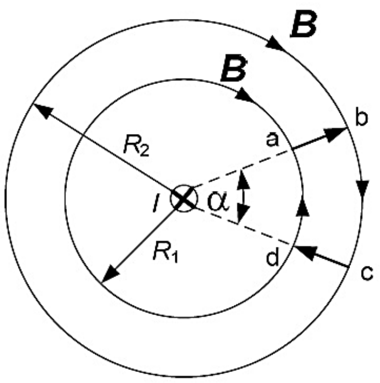
$$B_m = B_\delta = B$$

$$B = -\frac{H_m \cdot l_m \mu_0}{\delta}$$

$$\phi = B \cdot S = \frac{-H_m \cdot l_m \cdot \mu_0 \cdot S}{\delta}$$

19. Ampereov kružni zakon i polje beskonačno dugog ravnog vodiča polumjera R protjecanog strujom i jednoliko raspoređenom po presjeku vodiča





Magnetska indukcija ravne, beskonačno duge strujnice na kružnici polumjera r:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_\alpha r d\alpha$$

$$\oint_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_c \boldsymbol{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \boldsymbol{a}_\alpha r d\alpha = \mu_0 I$$

Integral magnetske indukcije po zatvorenoj krivulji jednak je struji koja je obuhvaćena tom krivuljom, pomnoženom s μ_0. Načinimo to isto za krivulju a-b-c-s pokraj ravne, beskonačno duge strujnice prema desnoj slici.

$$\oint_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{r=R_1}^{R_2} \boldsymbol{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \boldsymbol{a}_r dr + \int_b^c \boldsymbol{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2} \boldsymbol{a}_\alpha R_2 d\alpha - \int_{r=R_1}^{R_2} \boldsymbol{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \boldsymbol{a}_r dr - \int_d^a \boldsymbol{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \boldsymbol{a}_\alpha R_1 d\alpha$$

$$\oint_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_b^c d\alpha - 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_d^a d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \alpha - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \alpha = 0$$

$$\oint_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS \to \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

Unutar vodiča:

$$\oint_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

$$B \cdot 2r\pi = \mu_0 \cdot J \cdot r^2\pi = \mu_0 \cdot \frac{I}{{r_0}^2\pi} \cdot r^2\pi$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2{r_0}^2\pi} \cdot r$$

20. Vektorski magnetski potencijal, diferencijalna jednadžba i proračun tokova u magnetskom polju

Gaussov zakon: $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

Vrijedi za bilo koji vektor: $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$

Uvodimo novo vektorsko polje **A** takvo da vrijedi:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Veličina **A** naziva se vektorski magnetski potencijal i mjeri se u Wb/m. Jedno njegovo vrlo važno svojstvo je da je vektorski magnetski potencijal kontinuirana funkcija. Ukoliko bi postojao diskontinuitet, na njegovom mjestu bi magnetska indukcija imala beskonačan iznos, što je fizikalno nemoguće.

Coulombovo baždarenje: $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$

$$\phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_c \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_S$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{J}_S$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \mu \cdot \boldsymbol{J}_S$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} = \mu \cdot \boldsymbol{J}_S$$

Dobivamo Poissonovu jednadžbu:

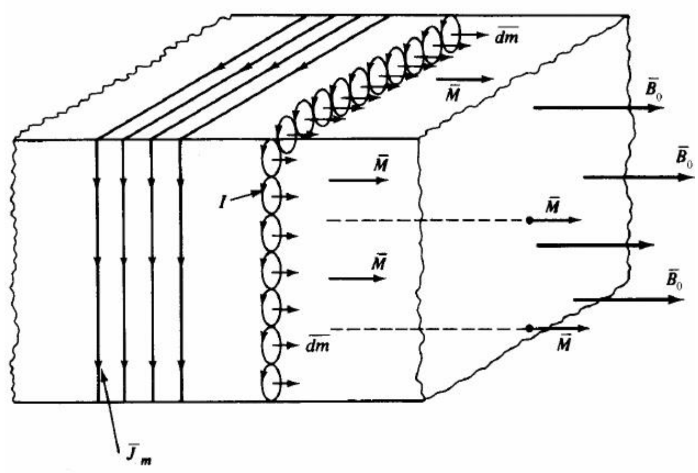
$$\Delta \boldsymbol{A} = -\mu \cdot \boldsymbol{J}_S$$

Ako u prostoru nema slobodnih struja, dobivamo Laplaceovu jednadžbu:

$$\Delta \boldsymbol{A} = 0$$

21. Magnetizacija i amperske struje

Magnetizacija je promjena koja se iskazuje u mikroskopskim magnetskim dipolnim momentima prilikom unosa određenih materijala u magnetsko polje. Homogeno vanjsko magnetsko polje $\mathbf{B}_0$ koje je stvoreno slobodnim strujama gustoće $\mathbf{J}_S$ u materijalu će uzrokovati jednoliku magnetizaciju. Struje susjednih petlji će se u unutrašnjosti materijala svugdje poništavati, a samo na površini materijala ostat će rezultirajuća plošna struja magnetizacije koju nazivamo amperska struja gustoće $\mathbf{J}_M$.



Ukupno magnetsko polje unutar materijala određuju onda vanjske slobodne struje $\mathbf{J}_S$ ikoje stvaraju vanjsko polje indukcije $\mathbf{B}_0$ i amperske struje magnetizacije u materijalu $\mathbf{J}_M$ koje stvaraju svoje magnetsko polje indukcije $\mathbf{B}_M$.

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \cdot S \cdot I$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{\Delta V} \boldsymbol{m}_i}{\Delta V} = \frac{d\boldsymbol{m}}{dV}$$

$$d\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\, dV = \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = I_a \cdot \boldsymbol{n}\, dS\, ;\; I_a = \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{l}$$

22. Jakost magnetskog polja i ponašanje materijala u magnetskom polju

Ukupna magnetska indukcija u materijalu:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_M \rightarrow \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_M$$

Primijenimo Ampereov zakon:

$$\oint_c \boldsymbol{B}_0 d\boldsymbol{l} = \mu_0 \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_c (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_M) d\boldsymbol{l}$$

$$\oint_c \frac{(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_M)}{\mu_0} d\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

Uvodimo veličine jakost magnetskog polja **H** i vektor gustoće magnetiziranja **M**:

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\, ; \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{B}_M}{\mu_0}$$

Ampereov zakon u prisustvu materijala:

$$\oint_c \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \cdot \boldsymbol{H}$$

gdje χ_m predstavlja magnetsku susceptibilnost.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_M = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0 \cdot \chi_m \cdot \boldsymbol{H} = \mu_0(1 + \chi_m) \cdot \boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu \cdot \boldsymbol{H}$$

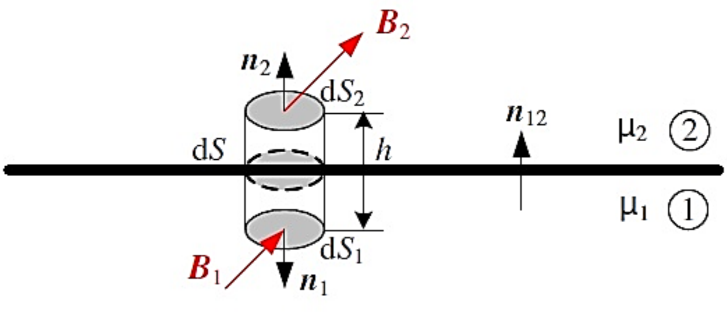
Podjela materijala prema ponašanju u magnetskom polju:

i) Dijamagnetizam: posljedica djelovanja magnetskog polja na orbitalne elektrone. Zbog tog dolazi do neravnoteže sila koja se kompenzira smanjenjem brine, ali i magnetskog momenta orbitalnog elektrona. Kod dijamagnetskih materijala vektor magnetizacije **M** ima smjer suprotan narinutom magnetskom polju, što znači da je magnetska susceptibilnost negativna, a relativna permeabilnost manja od 1. Primjer takvih materijala su vodik, bizmut, helij, inertni plinovi, bakar, zlato, silicij, ugljik, itd.

ii) Paramagnetizam: narinuto vanjsko magnetsko polje zakreće dipole u djelomično usmjeren poredak u smjeru polja, čime se ukupno magnetsko polje u paramagnetskom materijalu povećava. Paramagnetski materijali imaju vektor magnetizacije M u smjeru narinutog magnetskog polja, pozitivnu magnetsku susceptibilnost i relativnu permeabilnost veću od 1, ali samo neznatno veću. Primjer takvih materijala su kisik, aluminij, olovo, itd.

iii) Feromagnetizam: pod djelovanjem vanjskog magnetskog polja magnetski momenti domena postavljaju se u smjer polja što se očituje u porastu ukupnog magnetiziranja materijala u smjeru polja. Magnetizacija kod feromagnetskih materijala je mnogo veća nego kod dijamagnetskih i paramagnetskih. Primjer takvih materijala su željezo, kobalt, nikal i njihove legure. Relativna magnetska permeabilnost kod ovakvih materijala je nelinearna i mnogo veća od 1.

23. Uvjeti za vektore magnetskog polja na granici 2 materijala



Na plošnoj površini S 2 magnetska materijala nalazi se plošna struja gustoće K. Primjenjujemo Gaussov na cilindar visine h i površine baze dS:

$$\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$$

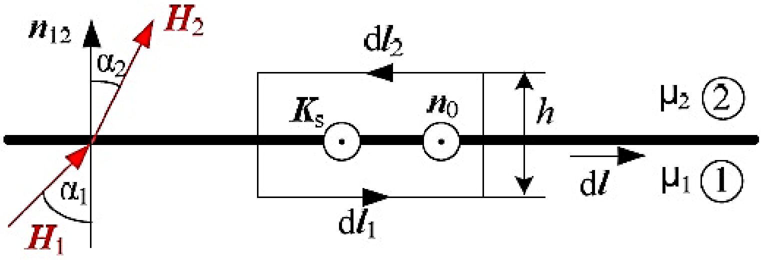
$$B_1 \cdot n_1 \cdot dS_1 + B_2 \cdot n_2 \cdot dS_2 + (doprinos\ toku\ kroz\ plašt) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \{-B_1 \cdot n_{12} \cdot dS + B_2 \cdot n_{12} \cdot dS + (doprinos\ toku\ kroz\ plašt)\} = 0$$

Kad visina ide u 0, i doprinos toku kroz plašt ide u 0. Ako podijelimo jednadžbu s dS, dobivamo:

$$n_{12} \cdot (B_2 - B_1) = 0$$

Normalna komponenta magnetskog polja ne mijenja se na granici.



$$\oint_c \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

$$\boldsymbol{H}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_1 + H_2 \cdot d\boldsymbol{l}_2 + (doprinosi\ na\ stranicama\ h) = \boldsymbol{J}_S \cdot \boldsymbol{n}_0 \cdot h \cdot d\boldsymbol{l}$$

Ako stranice duljine h smanjimo na 0:

$$\lim_{h \to 0} \{\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{t} - \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{t} + (doprinosi\ na\ stranicama\ h)\} = \lim_{h \to 0} (\boldsymbol{J}_S \cdot \boldsymbol{n}_0 \cdot h \cdot d\boldsymbol{l})$$

Kad h teži u nulu, i doprinosi na bočnim stranicama teže u 0. Ako podijelimo jednadžbu s dl, na desnoj strani dobivamo strujni oblog K_S:

$$(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{K}_S$$

gdje je t jedinični tangencijalni vektor:

$$\boldsymbol{t} = -(\boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{n}_{12})$$

$$(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) \cdot (\boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{n}_{12}) = \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{K}_S$$

Identitet: $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A})$

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \left(\boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)\right) = \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{K}_S$$

Na kraju imamo:

$$\left(\boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)\right) = \boldsymbol{K}_S$$

Drugim riječima, tangencijalne komponente jakosti magnetskog polja mijenjaju se za iznos strujnog obloga na granici. Ukoliko strujnog obloga nema, tangencijalne komponente ostaju iste.

24. Indirektno mjerenje magnetskog polja u feromagnetskoj torusnoj jezgri u pokusu snimanja dinamičke petlje histereze

Imamo dvije zavojnice koje su namotane na feromagnetsku jezgru tako da su tokovi koje obuhvaćaju jednaki. Primarnu zavojnicu priključimo na izvor sinusnog napona te mjerimo struju koja kroz nju teče. Sekundarna je bez tereta i na njoj mjerimo napon. Primarna zavojnica ima N_1 zavoja i srednju duljinu silnica l_{sr} pa vrijedi Ampereov zakon:

$$\oint_{l_{sr}} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = N_1 I = H \cdot l_{sr}$$

U drugoj zavojnici ne teče struja, a jakost magnetskog polja možemo smatrati približno jednakim u svim točkama na zatvorenoj liniji l_{sr}.

$$H(t) = \frac{N_1 \cdot i(t)}{l_{sr}}$$

Ukoliko je na primaru spojen otpornik R_1 takav da je po iznosu znatno manji od impedancije mjerene na primarnom namotu, možemo ga iskoristiti za posredno mjerenje struje primarnog namota, a time i jakosti magnetskog polja:

$$H(t) = \frac{N_1 \cdot i(t)}{l_{sr}} = \frac{N_1 \cdot u_{R1}(t)}{l_{sr} \cdot R_1}$$

25. Indirektno mjerenje magnetske indukcije u feromagnetskoj torusnoj jezgri u pokusu snimanja dinamičke petlje histereze

Kroz poprečni presjek zavojnice S teče magnetski tok:

$$\phi(t) = B(t) \cdot S$$

B je ovisan o H na način definiran petljom histereze.

Na sekundaru s N_2 zavoja će se za bilo koju promjenjivu struju inducirati elektromotorna sila definirana Faradayevim zakonom:

$$e(t) = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = -N_2 S \frac{dB(t)}{dt}$$

U skladu s referentnim smjerovima struje i napona na induktivitetu, napon na zavojnici u(t) označavamo bez minus predznaka:

$$u(t) = -e(t)$$

$$B(t) = \frac{1}{N_2 S} \int u(t) dt$$

Ukoliko na sekundar priključimo otpornik R i kondenzator C, pri čemu je R>>1/ωC, struja kroz sekundar će biti:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{N_2 S}{R}\frac{dB(t)}{dt}$$

$$B(t) = \frac{R}{N_2 S}\int i(t)dt$$

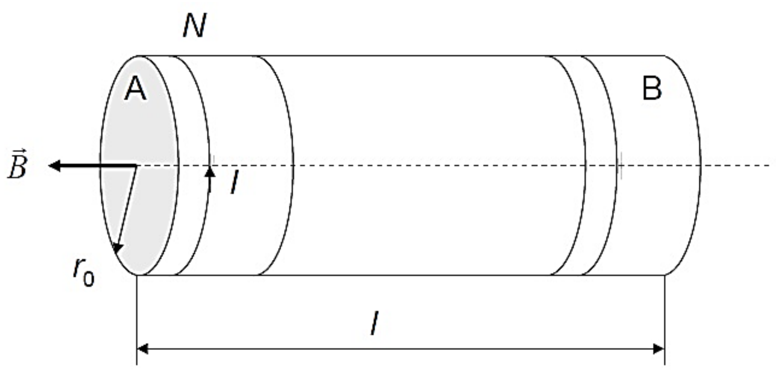
Napon na kondenzatoru se pritom može prikazati kao:

$$u_c = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Pa konačno imamo:

$$B(t) = \frac{RC}{N_2 S}u_c(t)$$

26. Točni proračun magnetske indukcije na osi jednoslojne zavojnice



Imamo zavojnicu duljine d i polumjera r_0 koja se sastoji od N zavoja kojima protječe struja I. Elementarni dio takve zavojnice duljine dz' može se nadomjestiti kružnom strujnicom kojom teče struja:

$$dI = \frac{NI}{d}dz$$

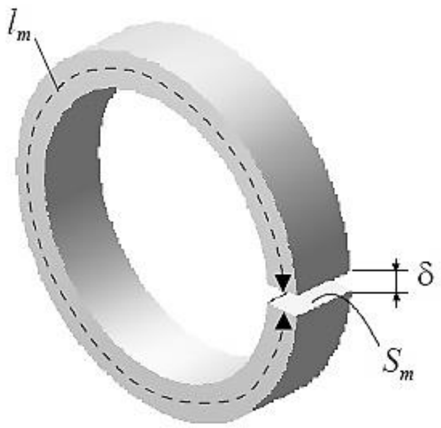
$$\boldsymbol{B}_z = \boldsymbol{a}_z\mu_0\frac{NIr_0^2}{2d}\int_{z'=0}^{d}\frac{dz'}{[r_0^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boldsymbol{B}_z = \boldsymbol{a}_z\mu_0\frac{NI}{2d}\left(\frac{d-z}{\sqrt{r_0^2 + (d-z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{r_0^2 + z^2}}\right)$$

Ako je duljina zavojnice puno veća od njenog polumjera, dobivamo rješenje koje bismo dobili i primjenom Ampereovog zakona:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_z\mu_0\frac{NI}{d}$$

27. Grafoanalitičko rješavanje magnetskog kruga sa zračnim rasporom



$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$$

Za linearne materijale:

$$H_m = \frac{B_m}{\mu_0 \cdot \mu_r}$$

$$\phi_m = \phi_\delta$$

$$B_m \cdot S_m = B_\delta \cdot S_\delta \rightarrow B_m = B_\delta$$

$$NI = H_m \cdot l_m + H_\delta \cdot \delta = H_m \cdot l_m + \frac{B_m \cdot \delta}{\mu_0}$$

$$B_m = \frac{\mu_0}{\delta}(NI - H_m \cdot l_m)$$

28. Slika statičkog magnetskog polja – linije polja

Sliku statičkog magnetskog polja čine silnice (**B**-linije). Određujemo ih pomoću diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

U dvodimenzionalnim slučajevima možemo iz pronaći izravno iz vektorskog magnetskog potencijala ukoliko je on konstantan:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial y} - \boldsymbol{a}_y \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial x} = \boldsymbol{a}_x B_x + \boldsymbol{a}_y B_y$$

$$B_x \cdot dy - B_y \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial y} dy + \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial x} dx = 0$$

$$dA(x,y) = 0 \rightarrow A(x,y) = const$$