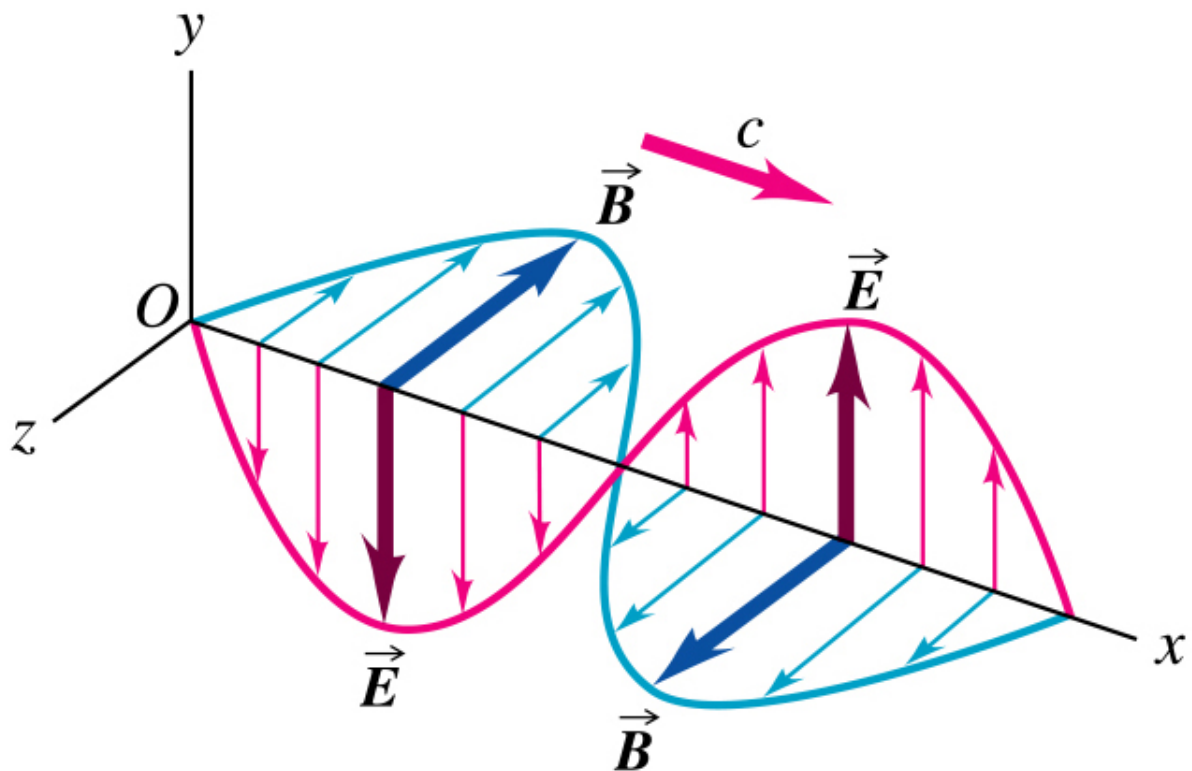


Elektromagnetska polja



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

12 zadataka iz 3. domaće zadaće

Posebna zahvala kolegama:
bullet, DjAci , drvosječa, jovan_ditara

**1. U vakuumu je zadana jakost magnetskog polja jednadžbom $H = 100xy$ az u [A/m].
Odredite gustoću energije magnetskog polja u [mJm⁻²] u točki (2m,5m,1m), pri čemu je točka označena u obliku (x,y,z). (različiti H)**

Traži se plošna gustoća energije mag. polja. Jedino što daje plošnu gustoću a da ja znam za to je Poyntingov vektor. Međutim on predstavlja gustoću el. i mag. polja zajedno. Zbog toga jedino što mi je bilo logično izračunati volumnu gustoću mag. polja po formuli

$$w = \mu/2 * H^2, (\mu = \mu_0 = \text{permeabilnost})$$

H nađemo kad uvrstimo koordinate x i y u izraz za polje.

$$\text{konačno slijedi } w = 628 \text{ mJ/m}^3$$

**2. U vakuumu je jakost električnog polja zadana izrazom $E = E_m \sin(\omega t - \beta z)$ ay.
Odredite amplitudu (pozitivan broj) jakosti magnetskog polja u [A/m] ukoliko je $E_m = 10$ [V/m], $\beta = 0.6 \text{ m}^{-1}$, $\omega = 100000 \text{ rad/s}$. (amplituda u [mT])**

Pa da krenemo:

Prva stvar je ta da je smjer širenja vala u smjeru z osi što se vidi iz argumenta funkcije E. Nadalje znamo da vrijedi formula :

$$H = 1/(\omega * \mu) * (\beta \times E);$$

Pošto je smjer β u smjeru az , a smjer polja E u smjeru ay njihov eks produkt će bit u smjeru - ax . Pošto nam H ima samo jedan smjer nadalje ćemo se baviti samo njegovim iznosom!

$$H = 1/(\omega * \mu) * \beta * E_m;$$

Pošto se sve odvija u nekom sredstvu koji ima neku magnetsku permeabilnost, a nas se traži da odredimo jakost magnetske indukcije gornju jednadžbu pomnožimo sa μ i dobijemo sljedeću relaciju koja je rješenje zadatka:

$$H = 1/(\omega * \mu) * \beta * E_m / \mu B = \mu * H = \beta * E_m / \omega$$

**3. U vakuumu je zadana jakost električnog polja jednadžbom $E = xz$ ay u [kV/m].
Odredite gustoću energije električnog polja u [Jm⁻²] u točki (1m,5m,7m)), pri čemu je točka označena u obliku (x,y,z).**

Ovaj zadatak je sličan 1. samo s mag. poljem. Sve što vrijedi za 1. vrijedi i za ovaj.
Samo je formula $w = \epsilon/2 * E^2 = 1.106^{-4} \text{ J/m}^2$

$$\text{meni tu dođe } w = 2.16 * 10^{-4} \text{ J/m}^3$$

4. Za materijal koji ima vodljivost $4 \text{ [Sm}^{-1}\text{]}$ i $\epsilon_r=1$ jakost električnog polja zadana je izrazom $E=25 \cos(1010 t) \text{ [V/m]}$. Odredite frekvenciju u [GHz] pri kojoj gustoće pomaćne i provodne struje imaju jednake amplitude. (različita vodljivost, ϵ_r i amplituda \cos)

$$\kappa = \epsilon^* \omega$$

$$f = \kappa / (\epsilon_0^* \epsilon_r^* 2\pi) = 71.6$$

5. U vakuumu je električno polje zadano jednačbom $E(z,t)=10 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x \text{ [V/m]}$. Odredite srednju snagu u [W] koja prolazi krugom radijusa 1.5 m u ravnini $z=2\text{m}$. (različito polje, različit radijus)

renimo s relacijom za jakost magnetskog polja:

$$\mathbf{H} = 1/(\omega * \mu) * (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E});$$

Pošto je smjer $\boldsymbol{\beta}$ u smjeru \mathbf{a}_z , a smjer polja \mathbf{E} u smjeru \mathbf{a}_x njihov eks produkt će bit u smjeru \mathbf{a}_y .

$$\mathbf{H} = 1/(\omega * \mu) * \beta * E_m * \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x; E_m = 10$$

Poytingov vektor je definiran relacijom:

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H};$$

Poytingov vektor je u smjeru širenja vala odnosno \mathbf{a}_z ;

$\mathbf{N} = (E_m)^2 / Z (\cos(\omega t - \beta z))^2$ gdje je Z valna impedancija $Z = \sqrt{(\mu/\epsilon)}$ i u vakuumu iznosi 120π .

$$N_{sr} = 1/T * \int_0^T \{ || dt \};$$

Pošto je Integral \cos^2 na jednom periodu $1/2$ bez obzira na argument slijedi krajnja formula:

$$N_{sr} = 1/2 * (E_m)^2 / Z$$

Nadalje treba odrediti srednju snagu u $z=2$ koja prolazi krugom radijusa R . Pošto se sve odvija u vakuumu nema gubitaka snage u smjeru širenja vala pa u zadatku vrijednost $z=2$ nije ni bitna:

Konačna formula za snagu je
 $P_{sr} = N_{sr} * S$ gdje je $S = R^2 * \pi$

$$N_{sr} = (E_m * E_m) / 2 * |Z|$$

$$|Z| = 120 \pi \quad [\Omega]$$

$$P_{sr} = N_{sr} r^2 \pi = 0.9375$$

6. U vakuumu je električno polje zadano jednadžbom $E(z,t) = 150 \sin(\omega t - \beta z) \text{ ax [V/m]}$. Odredite srednju snagu u [W] koja prolazi pravokutnikom stranica 3cm i 1.5cm u ravnini $z=2\text{m}$. (različita amplituda cos, različite stranice)

Poyntingov vektor EM vala u nekoj točki predstavlja plošnu gustoću snage u toj točki. Da bi dobili snagu EM vala po nekoj površini moramo taj Poyntingov vektor integrirati po plohi.

Imamo zadano el. polje

$E = E_0 * \cos(\dots)$ izraz pod cosinusom nije bitan za zadatak

iz toga možemo odrediti mag. polje ono je skroz isto samo amplitudu treba podijeliti s $Z = 120 \pi$ (otpor u vakuumu)

$$H = H_0 * \cos(\dots)$$

Po definiciji Poyntingov vektor je $N = E \times H$, a s obzirom da su E i H okomiti slijedi

$$N = E_0 * H_0 * \cos^2(\dots)$$

E sad njega integriramo po zadanoj plohi G koja ima površinu S koja je dio ravnine $z=2$ (isto bi bilo za $z =$ bilo koji broj)

$$P = \int [G] (NdS)$$

a s obzirom da je N ne ovisi o prostornim koordinatama može ispred integrala

$P = N * \int [G] dS = N * S$, gdje je S površina zadanog pravokutnika ili kruga, a N iznos vektora N, ne samo njegova amplituda nego i titranje ko' što je ranije izračunato, pa slijedi

$$P = N * S = E_0 * H_0 * \cos^2(\dots) * S = N_0 * S * \cos^2(\dots)$$

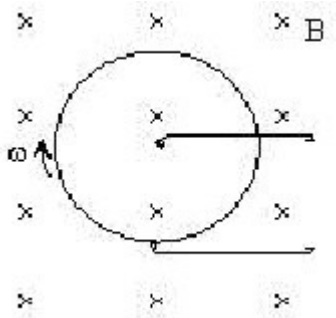
Vremenska funkcija snage titra s \cos^2 i ima amplitudu $N_0 * S$

srednja vrijednost \cos^2 je $1/2$ pa prema tome za srednju snagu treba amplitudu podijeliti s 2

$$P_{sr} = N_0 * S / 2$$

za $E(z,t) = 100 \sin(\omega t - \beta z) \text{ ax [V/m]}$ i stranice 5cm i 7cm u ravnini $z=2\text{m}$
rjesenje: **0.046**

7. Metalni disk polumjera R okreće se oko svog središta u homogenom magnetskom polju indukcije B okomitom na površinu diska, kutnom brzinom ω . Odredite iznos inducirane elektromotorne sile (pozitivan broj) u [V] na kontaktima u središtu i na rubu diska prema slici. Zadano je $B=1\text{T}$, $\omega=60\pi\text{ rads}^{-1}$, $R=0.1\text{m}$.



Ovdje treba baš gledati što se fizikalno dešava. Rotacija će diska izazvati Lorentzovu silu na naboju u disku koja je usmjerena radijalno prema van. Zbog toga će negativni elektroni krenuti prema centru diska dok će na rubu ostati višak poz. naboja. Razdvojeni naboji stvorit će razliku potencijala tj inducirani napon.

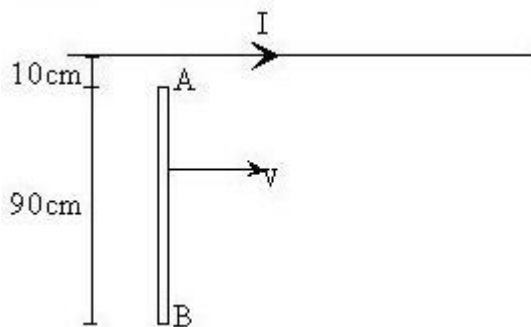
$F_m = qvB = qrB \cdot \omega$, podijelimo silu s nabojem i dobit ćemo el. polje koje stvaraju razdvojeni naboji

$E_i(r) = B \cdot \omega \cdot r$, sad to polje integriramo po radijusu diska da dobijemo napon

$$U = \int [0, R] E_i(r) dr = \frac{1}{2} \omega \cdot B \cdot R^2$$

za $r=R$ slijedi $u=0.94\text{ V}$

8. Metalni štap AB giba se konstantnom brzinom $v=2\text{ms}^{-1}$ paralelno s dugim ravnim vodičem kroz koji teče struja $I = 40\text{A}$. Odredite iznos (pozitivan broj) u $[\mu\text{V}]$ inducirane elektromotorne sile u štapu.



Slično 7. Gibanje štapa uzrokuje Lorentzovu silu koja razdvaja naboje i ovisna je o r .

$$B(r) = \mu I / 2r\pi$$

$$F_m = qvB \Rightarrow E_i(r) = vB(r) = \mu v I / (2r\pi)$$

to integriramo $u = \int_{[0.1, 1]} E_{dr} = \ln(10) / (2\pi) * \mu * I v = 36.84 \text{ uV}$
rjesenje: **36.85 uV**

9. Odredite amplitudu vala u [V/m] zadanog izrazom $E(z, t) = 12 \sin(\omega t - \beta z) a_x - 10 \sin(\omega t - \beta z) a_y$ [V/m] u $t=0$, $z=0.75 \lambda$. (različite amplitude sin)

vrijedi $t=0$ i $z=3/4 * \lambda$

$$\text{vrijedi } \beta = 2\pi / \lambda$$

$$\beta * \lambda = 3\pi / 2$$

kad $t=0$ i $\beta * \lambda = 3\pi/2$ uvrstimo u izraz za polje dobijemo

$$E(0, 3/4 * \lambda) = 12 a_x - 10 a_y$$

iznos tog vektora je $E = \sqrt{(12^2 + 10^2)} = 15.62 \text{ V/m}$

10. Vlažno tlo ima vodljivost 10^{-3} [S/m] i relativnu dielektričnost 2.5. Odredite amplitudu gustoće provodnih struja u [nAm^{-2}] u točki u kojoj je $E = 6 \cdot 10^{-6} \sin(9 \cdot 10^9 t)$ [V/m]. (isti zadatak ali se traže pomaćne struje)

za **pomaćne** struje

Imamo formulu: $\text{rot} H = J + dD/dt$. Prvi član je gustoća provodnih struja, a drugi član je gustoća pomaćnih struja.

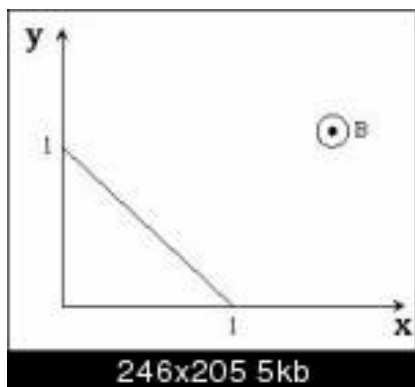
$$D = \epsilon_0 * \epsilon_r * E$$

$$dD/dt = \epsilon_0 * \epsilon_r * dE/dt$$

Dobijemo kosinus i ono što množi cos je amplituda gustoće pomaćnih struja.

rjesenje: **1.19529**

**11. Trokutna vodljiva petlja sa $N=4$ zavoja učvršćena je u položaju prema slici. Petlja se nalazi u magnetskom polju čija se indukcija mijenja po zakonu $B=2\sin(0.4\pi x)\cos(0.4\pi y)\sin[100\pi t]\text{az}[T]$.
Odredite efektivni iznos induciranog napona u [V] u petlji.**



Zadatak nije teoretski težak. Treba odrediti ukupni tok kroz petlju što se radi plošnim integralom indukcije po petlji. Kad se dobije ta vremenski ovisna funkcija treba ju derivirati da se dobije vremenska funkcija induciranog napona.

NE ZABORAVITE taj rezultat pomnožiti s 4 koliko je broj zavoja. Dobit ćemo jednu sinusiodnu f-ju. Za efektivnu vrijednost treba još rezultat amplitudu podijeliti sa $\sqrt{2}$.

Zadatak nije težak za shvatiti ali ima dosta posla (integriranja)

na kraju sam dobio $U_{ef}=316.6 \text{ V}$

**12. Pravokutna vodljiva petlja sa $N=5$ zavoja učvršćena je u položaju prema slici. Petlja se nalazi u polju koje se mijenja po zakonu $B=\sin(0.5\pi x)\cos(0.5\pi y)\sin(2\pi f t)\text{az} [\text{mT}]$.
Odredite efektivni iznos napona u [V] induciranog u petlji ako je frekvencija $f=100\text{Hz}$.**

Petlja je pravokutnik s vrhovima: $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(3,1,0)$, $(0,1,0)$

Mag. tok kroz petlju je:

$$\Phi = \int (B \cdot n \cdot dS) = \int (B dS) = \int (B dx dy) \text{ znači dvostruki int. po } x \text{ i } y \text{ u granicama } x [0,3] \text{ i } y [0,1].$$

Ind. napon u petlji je:

$$e = -N \cdot d\Phi / dt$$

Efektivna vrijednost ind. napona je:

$E_{ef} = \text{amplituda}(e) / \sqrt{2}$ tj. dijelimo s korjenom od 2 jer je (e) cosinusni signal.

rjesenje: **0.9**

$$U_{ind} = - N d\Phi / dt$$

$$d\Phi = 4 * \sin(2\pi ft) / (\pi^2)$$

$$U_{ind} = - 4N * 2\pi * f \cos(2\pi ft) / (\pi^2)$$

$$U_m = 4N * 2f / \pi$$

$$U_{ef} = U_m / \sqrt{2} = 0.9 \text{ V}$$