FER2.net

Elektromagnetska polja

1. domaća zadaća ak. god. 2007./2008.

- skenirani postupci rješavanja
- navedena rješenja su potvrđena nakon ocjene zadaće

by: Tywin

& Ante

Velike zahvale kolegama:
Schtef, aspire , Bundy, cox3.14, db42006, Franz Floyd FERdinand, Fumarek, hobit, Incubus, Keyser, Lonac, matrix, mbaris18, Misl@, Rasta, Vedran Lanc, zbrekal1, Yeentrancemperium

1. Na točkasti naboj iznosa q_1=200nC, koji se nalazi u točki (1m,-1m,3m), djeluje sila $\mathbf{F}=8\mathbf{a}_x-8\mathbf{a}_y+4\mathbf{a}_z$ [mN], uzrokovana nabojem q_2 u točki (-7m,7m,-1m). Odredite q_2 u μC.

Rješenje: 961.31 μC ✓

2. Dvanaest jednakih naboja iznosa 150nC svaki postavljeno je na kružnicu radijusa 1m tako da su svi međusobno jednako udaljeni. Odredite silu u μN na naboj iznosa 20nC, smješten u točki na osi kružnice, od ravnine kružnice udaljenoj 2m.

Rješenje: 57.88 μN ✓

3. Tri naboja iznosa 5nC svaki nalaze se u točkama (0,1m,1m),(1m,1m,0) i (1m,1m,1m). Odredite iznos sile u μN na naboj q= 20nC smješten u točki (0,0,1m).

Rješenje: 1.484 μN ✓

4. Dva beskonačno duga linijska naboja jednoliko raspodijeljene gustoće 2nC/m leže u ravnini x=0 paralelno s osi z, na lokacijama y_1=+3m i y_2=-3m. Odredite jakost električnog polja u točki (5m,0,10m) u V/m.

Rješenje: 10.58 V/m ✓

5. Naboj linijske gustoće 15 nC/m raspoređen je po z osi od z = 3 m do +∞ i od z = -3 m do -∞. Odredite jakost električnog polja u V/m u točki (4m,0,0).

Rješenje: 26.98 V/m ✓

6. Naboj jednolike gustoće 0.3 nC/m^2 raspoređen je po ravnini zadanoj jednadžbom 3x-3y+z = 6[m]. Odredite y komponentu jakosti električnog polja u V/m u ishodištu.

Rješenje: 11.66 V/m ✓

7. Naboj plošne gustoće $\rho= 4 \cdot 10^{-4} r^{-1}$ C/m^2 raspoređen je na kružnom disku radijusa 6m.Odredite jakost električnog polja u MV/m na osi diska u točki udaljenoj 3m od ravnine u kojoj leži.

Rješenje: 6.735 MV/m ✓

8. Naboj plošne gustoće $\rho=10^{-9} \sin^2\alpha$ C/m^2 raspoređen je po kružnom disku radijusa 3m. Odredite jakost električnog polja u V/m u točki na osi diska udaljenoj od diska 1m.

Rješenje: 19.3 V/m ✓

9. Naboj plošne gustoće $\rho=(x^2+y^2+4)^{3/2}$ [nC/m^2] raspoređen je po pravokutniku $-3\leq x\leq 3$, $-3\leq y\leq 3$ [m] u ravnini z=0. Odredite jakost električnog polja u V/m u točki (0,0,2m).

Rješenje: 647.45 V/m ✓

10. Za zadani vektor gustoće električnog toka $\mathbf{D}=5x^2\,\mathbf{a}_x$ Cm^{-2} odredite električni tok u [C] koji prolazi površinom 4m^2 okomitom na x os na x = 1m.

Rješenje: 20 C ✓

11. Linijski naboj jednoliko je raspoređen po pravcu i leži na x osi kartezijevog koordinatnog sustava. Odredite dio električnog toka u [%] koji prolazi dijelom ravnine y=2m za $-1\text{m}\leq z\leq 1\text{m}$.

Rješenje: 14.96 % ✓

12. Linijski naboj gustoće 5nCm^{-1} leži na x osi. Odredite y komponentu vektora gustoće električnog toka u nCm^{-2} u točki (3m,3m,2m).

Rješenje: 0.184 nC/m2 ✓

13. Odredite električni tok u [C] kroz sferu radijusa 3m, ako ona obuhvaća naboj gustoće $\rho=5\sin^2(\alpha)r^{-4}$ [C/m^3] $1\text{m}\leq r\leq 2\text{m}$ koji se nalazi između dvije koncentrične sfere radijusa R_1=1m i R_2=2m.

Rješenje: 15.7 C ✓

14. Točkasti naboj iznosa 10nC smješten je u ishodište sfernog koordinatnog sustava. Odredite tok u [nC] koji prolazi površinom 3m^2 koncentrične sfere radijusa 1m.

Rješenje: 2.39 nC ✓

15. Ukupni naboj 40nC raspoređen je jednoliko po prstenu radijusa 3m. Odredite potencijal u [V] u točki na osi prstena 2m udaljenoj od ravnine prstena.

Rješenje: 99.76 V ✓

16. Naboj linijske gustoće 1nCm^{-1} je jednoliko raspoređen je po rubovima kvadrata koji je zadan vrhovima (3m,-3m,0)(3m,3m,0)(-3m,3m,0)(-3m,-3m,0). Odredite potencijal u [V] u točki (0,0,1m).

Rješenje: 60.76 V ✓

17. U cilindričnom koordinatnom sustavu jakost električnog polja zadana je u obliku $\mathbf{E}=5r^{-2}\,\mathbf{a_r}$ V/m za $0<r\leq 2$m i $\mathbf{E}=1.25\mathbf{a_r}$ V/m za $r>2$m. Odredite razliku potencijala U_{AB} u [V] između točaka A(1m,0,0) i B(4m,0,0), pri čemu je točka zadana u obliku (r,α,z).

Rješenje: 5 V ✓

I. SILA

① Na točkasti naboj iznosa $Q_1 = 200$ nC, koji se nalazi u točki (1 m, -1 m, 3 m), djeluje sila $\vec{F} = 8\,\vec{a}_x - 8\,\vec{a}_y + 4\,\vec{a}_z$ [mN], uzrokovana nabojem Q_2 u točki (-7 m, 7 m, -1 m). Odredite Q_2 u μC.

Q_1 u $A(A_x, A_y, A_z)$

Q_2 u $B(B_x, B_y, B_z)$

$\vec{F} = F_x\,\vec{a}_x + F_y\,\vec{a}_y + F_z\,\vec{a}_z$

$$r = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} = 12 \text{ m}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 12 \text{ mN}$$

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} \Rightarrow Q_2 = \frac{F \cdot 4\pi\varepsilon_0 r^2}{Q_1} = 961{,}31\ \mu C$$

---

② Dvanaest jednakih naboja iznosa 150 nC svaki postavljeno na kružnicu radiusa 1 m tako da su svi međusobno jednako udaljeni. Odredite silu u μN na naboj iznosa 20 nC, smješten u točki na osi kružnice, od ravnine kružnice udaljenoj 2 m.

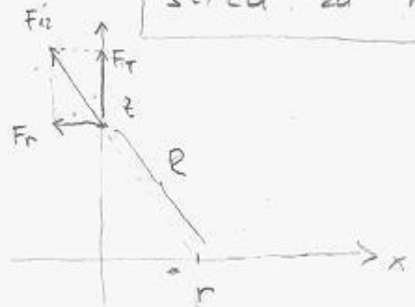
$Q_1 = 150$ nC

$r = 1$ m

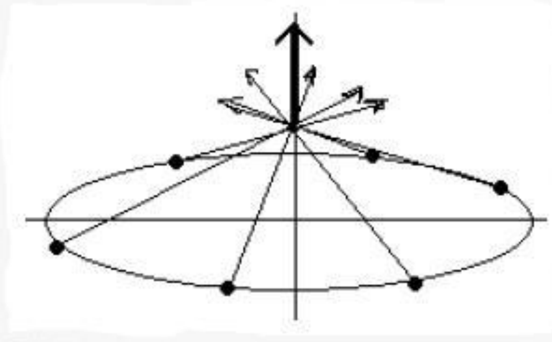
$Q_2 = 20$ nC

$N = 12$

$z = 2$ m



slika za $N = 6$:



radijalna komponenta F_r se poništi a ostaje samo tangencijalna F_T koju zbrajamo N puta.

$$F_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon R^2} \qquad R = \sqrt{z^2 + r^2} = \sqrt{5}$$

$$F_T = F_{12} \cdot \frac{z}{R} = z \cdot \frac{Q_1\, Q_2}{4\pi\varepsilon R^3}$$

$$F_{uk} = N \cdot F_{12} = N \cdot z \cdot \frac{Q_1\, Q_2}{4\pi\varepsilon R^3} = 57{,}88\ \mu N$$

3) Tri naboja iznosa $Q_1 = 5\ nC$ svaki se nalaze u točkama $(0, 1m, 1m)$, $(1m, 1m, 0)$ i $(1m, 1m, 1m)$. Odredite iznos sile u μN na naboj $Q_2 = 20\ nC$ smješten u točki $(0, 0, 1\ m)$

$$A(x_A, y_A, z_A) = (0, 1, 1) \Rightarrow \vec{r}_a = x_a \vec{a}_x + y_a \vec{a}_y + z_a \vec{a}_z = \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$B(x_B, y_B, z_B) = (1, 1, 0) \Rightarrow \vec{r}_b = x_b \vec{a}_x + y_b \vec{a}_y + z_b \vec{a}_z = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$C(x_C, y_C, z_C) = (1, 1, 1) \Rightarrow \vec{r}_c = x_c \vec{a}_x + y_c \vec{a}_y + z_c \vec{a}_z = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$D(x_D, y_D, z_D) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{r}_D = x_D \vec{a}_x + y_D \vec{a}_y + z_D \vec{a}_z = \vec{a}_z$$

$$\vec{R}_A = \vec{r}_D - \vec{r}_A = -\vec{a}_y \qquad R_A = 1$$

$$\vec{R}_B = \vec{r}_D - \vec{r}_B = -\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z \qquad R_B = \sqrt{3}$$

$$\vec{R}_C = \vec{r}_D - \vec{r}_C = -\vec{a}_x - \vec{a}_y \qquad R_C = \sqrt{2}$$

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \left[\frac{\vec{R}_A}{R_A^3} + \frac{\vec{R}_B}{R_B^3} + \frac{\vec{R}_C}{R_C^3}\right] = \left[-\vec{a}_x\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \vec{a}_y\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\vec{a}_z\right]$$

$$= -0,162\ \vec{a}_x - 1,162\ \vec{a}_y + 0,192\ \vec{a}_z$$

$$\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$= 0,899\ (-0,546\ \vec{a}_x - 1,546\ \vec{a}_y + 0,192\ \vec{a}_z)\ \mu N$$

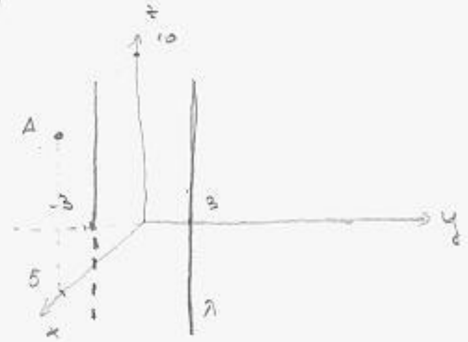
$$= -0,491\ \vec{a}_x - 1,39\ \vec{a}_y + 0,173\ \vec{a}_z\ \mu N$$

$$\vec{F} = \sqrt{0,491^2 + 1,39^2 + 0,173^2} = 1,484\ \mu N$$

2. ELEKTRIČNO POLJE

I. Linijski naboj

(1) Dva beskonačno duga linijska naboja jednoliko raspoređene gustoće $\lambda = 2\,\frac{nC}{m}$ leže u ravnini $x=0$ paralelno s osi z, na lokacijama $y_1 = +3$ m i $y_2 = -3$ m. Odredite jakost električnog polja u točki (5m, 0, 10m) u V/m.



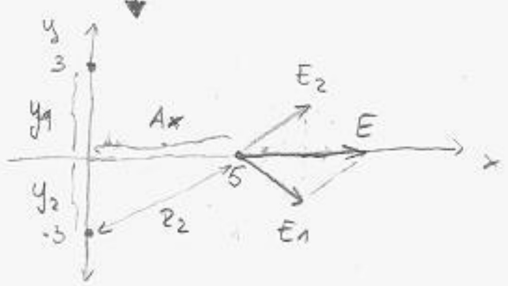
$y_1 = 3$ m

$y_2 = -3$ m

$A(A_x, A_y, A_z) = (5\text{ m}, 0, 10\text{ m})$

$\lambda = 2\,\frac{nC}{m}$

zbog paralelnosti s z-osi $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ neće imati $\vec{a}_z$ komponentu tj $E_{1z} = E_{2z} = 0$ pa račun pojednostavljuje na „visini" A_z.



$\vec{r}_0 = A_x \vec{a}_x = 5\,\vec{a}_x$

$\vec{r}_{y1} = y_1 \vec{a}_y = 3\,\vec{a}_y$

$\vec{r}_{y2} = y_2 \vec{a}_y = -3\,\vec{a}_y$

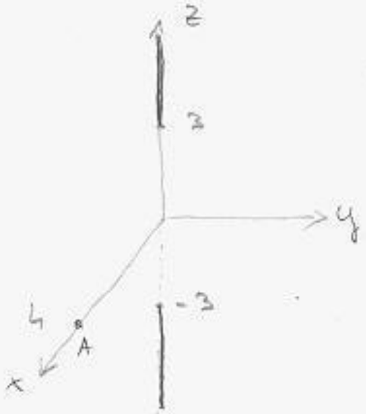
$\vec{R}_1 = \vec{r}_0 - \vec{r}_{y1} = 5\,\vec{a}_x - 3\,\vec{a}_y \Rightarrow R_1 = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$

$\vec{R}_2 = \vec{r}_0 - \vec{r}_{y2} = 5\,\vec{a}_x + 3\,\vec{a}_y \Rightarrow R_2 = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$

$$\frac{\vec{R}}{R^2} = \frac{\vec{R}_1}{R_1^2} + \frac{\vec{R}_2}{R_2^2} = \frac{10}{34}\cdot\vec{a}_x$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{R}}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{10}{34}\,\vec{a}_x = 10{,}58\ \text{V/m}$$

⑤ Naboj linijske gustoće $\lambda = 15\ \frac{nC}{m}$ raspoređen je po z-osi od $z = 3\,m$ do $+\infty$ i $z = -3\,m$ do $-\infty$. Odredite jakost električnog polja u V/m u točki $(4\,m, 0, 0)$.



$A(4, 0, 0) = (A_x, 0, 0)$

$\vec{r'} = z\,\vec{a_z}$

$\vec{r} = A_x\,\vec{a_x} = 4\,\vec{a_x}$

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'} = 4\,\vec{a_x} - z\,\vec{a_z} \Rightarrow R = \sqrt{4^2 + z^2}$

$\vec{E}(\vec{r}) = E_x\,\vec{a_x} + E_z\,\vec{a_z}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\vec{a_x} - z\vec{a_z}}{R^3}\,dz$$

$\rightarrow$ zbog simetrije $E_z = 0$ pa je $\vec{E}(\vec{r}) = E_x\,\vec{a_x}$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{-3} \frac{4}{\sqrt{4^2+z^2}^{\,3}}\,dz + \int_{3}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{4^2+z^2}^{\,3}}\,dz\right]$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{-3} \frac{dz}{\sqrt{4^2+z^2}^{\,3}} + \int_{3}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4^2+z^2}^{\,3}}\right]$$

$$\left\{ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}^{\,3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \right\}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z}{16\sqrt{16+z^2}}\Bigg|_{z=-\infty}^{-3} + \frac{z}{16\sqrt{16+z^2}}\Bigg|_{z=3}^{\infty}\right]$$

$$\left\{ \lim_{z\to\pm\infty} \frac{z}{16\sqrt{16+z^2}} \cdot \frac{\sqrt{16+z^2}}{\sqrt{16+z^2}} = \lim_{z\to\pm\infty} \frac{z\cdot\sqrt{16+z^2}\ /:z^2}{16(16+z^2)\ /:z^2} = \lim_{z\to\infty} \frac{\pm\sqrt{\cancel{\frac{16}{z^2}}^{\to 0}+1}}{16\left(\cancel{\frac{16}{z^2}}^{\to 0}+1\right)} = \frac{\pm 1}{16} \right\}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-3}{80} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{3}{80}\right] = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\cdot 20}$$

$= 26{,}98$ V/m

II Plošni naboj

⑥ Naboj jednolike gustoće $0,3 \frac{nC}{m^2}$ raspoređen je po ravnini zadanoj sa jednadžbom $3x-3y+z=6$ [m]. Odredite y komponentu jakosti električnog polja u V/m u ishodištu

→ ravnina : $Ax+By+Cz=D$

normala pozitivno orjentirane ravnine

$$\vec{n}=A\vec{a_x}+B\cdot\vec{a_y}+C\cdot\vec{a_z}$$

pozitivno orjentirana ravnina gleda od ishodišta prema „van".

Zato je vektor polja $\vec{n}=-A\vec{a_x}-B\vec{a_y}-C\vec{a_z}$

Smjer se polju daje jediničnim vektorom $\vec{n_0}=\frac{\vec{n}}{n}$

$n=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{n_0}$$

$$=16,94\cdot\frac{-3\vec{a_x}+3\vec{a_y}-\vec{a_z}}{\sqrt{19}}$$

$$=-11,66\,\vec{a_x}+11,66\,\vec{a_y}-16,96\,\vec{a_z}$$

$$=E_x\,\vec{a_x}+E_x\,\vec{a_y}+E_z\,\vec{a_z}$$

7) Naboj plošne gustoće $\sigma = 4 \cdot 10^{-4} \frac{1}{r} \frac{C}{m^2}$ raspoređen je na kružnom disku radijusa 6 m. Odredite jakost električnog polja u MV/m na osi diska udaljenoj 3 m od ravnine u kojoj leži disk

$\sigma = \frac{4}{10^4 r} \quad C/m^2$

$R = 6 \ m$

$h = 3 \ m$

$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = h \cdot \vec{a}_z \\ \vec{r}\,' = r\,\vec{a}_r \end{array}\right\}$ cilindrični koordinatni sustav

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, dQ$$

$dQ = \sigma(r') \cdot dS$

$dS = r \cdot d\alpha \cdot dr \Rightarrow r$ dolazi zbog Jakobijana!

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{h\vec{a}_z - r\vec{a}_r}{\sqrt{h^2 + r^2}^{\,3}}\, \sigma(r')\, r\, dr\, d\alpha$$

$\vec{E}(\vec{r}) = E_r \vec{a}_r + E_z \vec{a}_z$; $E_r = 0 \Rightarrow$ poništava se

$$E = E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}^{\,3}} \cdot \frac{4}{10^4 r} \cdot r \cdot dr\, d\alpha$$

$$= \frac{h}{\pi\varepsilon_0 \cdot 10^4} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{1}{\sqrt{h^2+r^2}^{\,3}}\, dr$$

$$= \frac{h}{\pi\varepsilon_0 \cdot 10^4} \cdot \alpha \Big|_{\alpha=0}^{2\pi} \cdot \frac{r}{h^2\sqrt{h^2+r^2}} \Big|_{r=0}^{R}$$

$$= \frac{2 \cdot R}{\varepsilon_0 10^4 h \sqrt{h^2+R^2}} = 6,735 \ MV/m$$

(8) Naboj plošne gustoće $\sigma = 10^{-9} \sin^2 \alpha \ C/m^2$ raspoređen je po kružnom disku radijusa 3 m. Odredite jakost električnog polja u V/m u točki na osi diska udaljenoj od diska 1 m

$\sigma = 10^{-9} \sin^2 \alpha \quad C/m^2$

$R = 3 \ m$

$h = 1 \ m$

$\vec{r} = h \, \vec{a_z}$

$\vec{r}' = \vec{r} \, \vec{a_r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \, dQ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{h\vec{a_z} - r\vec{a_r}}{\sqrt{h^2 + r^2}^3} \, dQ$$

$$dQ = \sigma(\vec{r}') \, dS = \sigma(\vec{r}') \, r \, dr \, d\alpha$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_z \vec{a_z} + E_r \vec{a_r}$$

$E_r = 0 \Rightarrow$ poništava se

$$E_z = E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}^3} \, \frac{\sin^2 \alpha}{10^9} \, r \, dr \, d\alpha$$

$$= \frac{h \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha \int_0^R \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}^3} \, dr$$

$$= \frac{h \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} \, d\alpha \cdot \int_0^R \frac{r}{\sqrt{h + r^2}^3} \, dr$$

$$= \frac{h \, 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \ \Big|_{\alpha=0}^{2\pi} \right] \left[\frac{-1}{\sqrt{h^2 + r^2}} \ \Big|_{r=0}^{R} \right]$$

$$= \frac{h \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \pi \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right]$$

$$= \frac{h \cdot 10^{-9}}{4 \varepsilon_0} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right] \Bigg|_{h=1, \, R=3}$$

$= 19{,}307 \ V/m$

(9) Naboj plošne gustoće $\sigma = \sqrt{x^2+y^2+4}^3 \ \frac{nC}{m^2}$ raspoređen je po pravokutniku $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$ u ravnini $z=0$.
Odredite jakost električnog polja u V/m u točki $(0, 0, 2m)$

$\vec{r} = 2\,\vec{a}_z \Rightarrow$ od točke $T(0,0,2)$

$\vec{r}\,' = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y$

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = 2\vec{a}_z - x\vec{a}_x - y\vec{a}_y$

$R = \sqrt{2^2 + x^2 + y^2}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\vec{R}}{R^3}\,\sigma(\vec{r}\,')\,dS$$

$$= \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{2\vec{a}_z - x\vec{a}_x - y\vec{a}_y}{\sqrt{x^2+y^2+2^2}^3}\sqrt{x^2+y+4}^3\,dx\,dy$$

$$= \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iint_S 2\,dx\,dy\,\vec{a}_z - \iint_S x\,dx\,dy\,\vec{a}_x - \iint_S y\,dx\,dy\,\vec{a}_y\right]$$

$$= \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\int dx\,y\Big|_{y=-3}^{3}\vec{a}_z - \int x\,dx\,y\Big|_{y=-3}^{3}\vec{a}_x - \int y\,dy\,x\Big|_{x=-3}^{3}\vec{a}_y\right]$$

$$= \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left[12\,x\Big|_{x=-3}^{3}\vec{a}_z - 3x^2\Big|_{x=-3}^{3}\vec{a}_x - 3y^2\Big|_{y=-3}^{3}\vec{a}_y\right]$$

$$= \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\cdot a^2\,\vec{a}_z$$

$$= \frac{18\cdot 10^{-9}}{\pi\varepsilon_0}\,\vec{a}_z = 647.45 \text{ V/m}$$

III ELEKTRIČNI TOK

(10) Za zadani vektor gustoće električnog toka $\vec{D} = 5x^2 \vec{a}_x \ \frac{C}{m^2}$ odredite električni tok u [C] koji prolazi površinom $4 \ m^2$ okomitom na x-os na x=1 m

-> zbog okomitosti površine na $\vec{D}$ cav $\vec{D}$ prolazi kroz nju (da nije tako trebalo bi odrediti tu količinu)

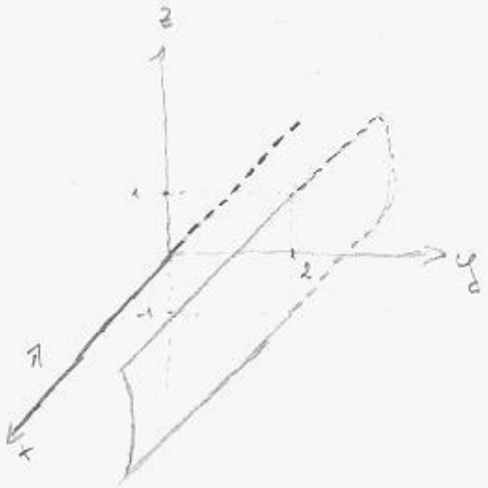
$D(1) = 5 \ \frac{C}{m^2}$

-> električni tok = Q

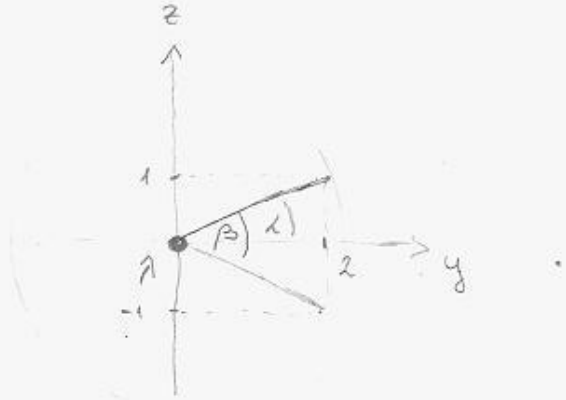
$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \frac{Q}{S}$

$\Phi_E = D \cdot S = 20 \ C$

(11) Linijski naboj jednoliko je raspoređen po pravcu i leži na x osi kartezijevog koordinatnog sustava. Odredite dio električnog toka u [%] koji prolazi dijelom ravnine $y = 2m$ za $-1m \leq z \leq 1m$. => $|z| = 1$



=>



$tg \lambda = \frac{|z|}{y} \Rightarrow \lambda = arctg \frac{|z|}{y}$

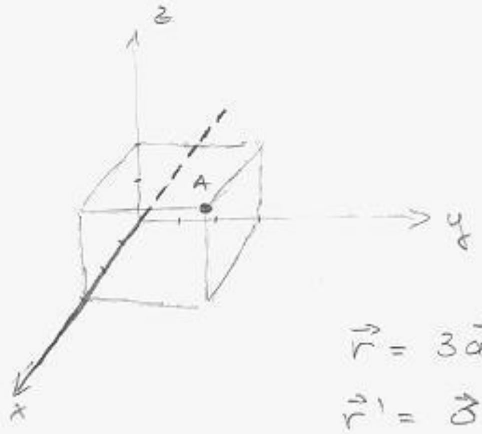
$\beta = 2\lambda$

$\eta = \frac{\beta}{360°} \cdot 100$

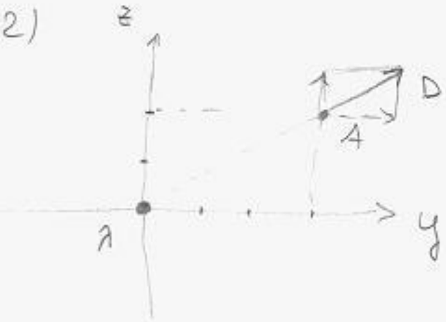
$= \frac{2 arctg \frac{|z|}{y}}{360°} \cdot 100 = 14,76 \ \%$

⑫ Linijski naboj gustoće 5 $\frac{nC}{m}$ leži na x osi. Odredite y komponentu vektora gustoće električnog toka u $\frac{nC}{m^2}$ u točki (3 m, 3 m, 2 m)

A(3, 3, 2)



$\Rightarrow$



$$\vec{r} = 3\vec{a}_y + 2\vec{a}_z \Rightarrow r = \sqrt{13}$$

$$\vec{r}\,' = \vec{0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

↳ jedinični vektor

$$\vec{D} = \varepsilon_0 D = \cancel{\varepsilon} \frac{\lambda}{2\pi\cancel{\varepsilon} r^2} \vec{r} = 0{,}0612\,(3\vec{a}_y + 2\vec{a}_z)$$

$$= 0{,}184\,\vec{a}_y + 0{,}122\,\vec{a}_z$$

$$= D_y\,\vec{a}_y + D_z\,\vec{a}_z \quad \frac{nC}{m^2}$$

---

⑬ Odredite električni tok u [C] kroz sferu radijusa 3 m, ako ona obuhvaća naboj gustoće $\rho = 5\sin^2\alpha\, r^{-4}\ \frac{C}{m^3}$ $1\,m \le r \le 2\,m$ koji se nalazi između dvije koncentrične sfere radijusa $R_1 = 1$ m i $R_2 = 2$ m

$$\rho = \frac{5\sin^2\alpha}{r^4}$$

$R = 3$; da bi se obuhvatio SAV naboj mora biti $R \ge R_1$ i $R \ge R_2$

$$\Phi_E = \iiint_V \rho\, dV$$

$dV = dx\,dy\,dz = r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\alpha$ → sferni koordinatni sustav

$$\Phi_E = \iiint \frac{5\sin^2\alpha}{r^4}\, r^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\alpha$$

$$= 5\int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\, d\alpha \int_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= 5\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha \Big|_{\alpha=0}^{2\pi}\right)\left(-\cos\Theta \Big|_{\Theta=0}^{\pi}\right)\cdot\left(\frac{-1}{r}\Big|_{r=R_1}^{R_2}\right)$$

$$= 5\pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 5\pi = 15{,}7\ C$$

(14) Točkasti naboj iznosa 10 nC smješten je u ishodište sfernog koordinatnog sustava. Odredite tok u [nC] koji prolazi površinom 3 m^2 koncentrične sfere radijusa 1 m

$Q = 10$ nC
$S = 3\ m^2$
$R = 1$ m

$$\Phi_e = \iint_S \vec{D}\, d\vec{s}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}$$

$$\Phi_e = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot S = 2{,}39 \text{ nC}$$

IV. POTENCIJAL

(15) Ukupni naboj 40 nC raspoređen je jednoliko po prstenu radijusa 3 m odredite potencijal u [V] u točki na osi prstena 2m udaljenoj od ravnine prstena.

$Q = 40$ nC
$R = 3$ m
$h = 2$ m

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= h \cdot \vec{a}_z \\ \vec{r}\,' &= r\, \vec{a}_r \end{aligned}\right\} \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = h\, \vec{a}_z - r\, \vec{a}_r \Rightarrow R = \sqrt{h^2 + r^2}$$

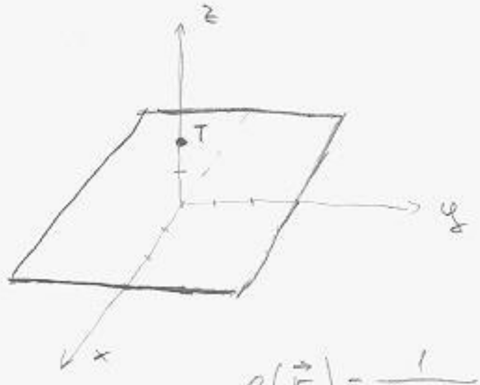
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{\lambda}{R}\, dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dQ}{R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} =$$

$$= 99{,}76 \text{ V}$$

(16) Naboj linijske gustoće 1 $\frac{nC}{m}$ je jednoliko raspoređen po rubovima kvadrata koji je zadan vrhovima $(3m,-3m,0)$ $(3m,3m,0)$ $(-3m,3m,0)$ $(3m,-3m,0)$. Odredite potencijal u [V] u točki $(0,0,1m)$

$\lambda = 1 \ \frac{nC}{m}$

$\varphi(T) = ?$



$\vec{r} = \vec{a}_z$

$\vec{r}\,' = x\,\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y$

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = \vec{a}_z - x\,\vec{a}_x - y\,\vec{a}_y$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda}{R}\, dl$$

→ potrebno je 4 puta integrati po duljinama $[-3, 3]$ dok je jedna veličina (x ili y) konstantna a po drugoj (y ili x) se integrira

$$R = \sqrt{1+x^2+y^2}\,\Big|_{x \text{ ili } y = \pm 3} = \sqrt{10+l^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\cdot \cancel{4} \cdot \int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{10+l^2}}\, dl$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\cdot \ln\left|l+\sqrt{10+l^2}\right|\,\Big|_{l=-3}^{3}$$

$$= 60,76 \ V$$

(17) U cilindričnom koordinatnom sustavu jakost električnog polja zadana je u obliku $\vec{E} = 5\, r^{-2}\, \vec{a}_r$ V/m za $0 \le r \le 2$ m i $\vec{E} = 1{,}25\, \vec{a}_r$ V/m za $r > 2$ m. Odredite razliku potencijala U_{AB} u [V] između točaka A (1m, 0, 0) i B (4m, 0, 0), pri čemu je točka zadana u obliku (r, α, z)

$$\vec{E}_1 = 5\, r^{-2}\, \vec{a}_r$$

$$\vec{E}_2 = 1{,}25\, \vec{a}_r$$

$$U_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\, d\vec{l}$$

-> kako niti jedno od polja nema komponentu $\vec{a}_\alpha$ ili $\vec{a}_z$ znači da potencijal neke točke neće ovisiti o iznosu tih veličina. npr. $\varphi(4, 30°, 2) = \varphi(4, 180°, -17) \neq \varphi(2, 30°, 2)$

-> $d\vec{l} = dr\, \vec{a}_r$

$$U_{AB} = -\int_4^2 E_2\, dr - \int_2^1 E_1\, dr$$

$$= -\int_4^2 1{,}25\, dr - \int_2^1 \frac{5}{r^2}\, dr$$

$$= -1{,}25\, r\Big|_{r=4}^{2} + \frac{5}{r}\Big|_{r=2}^{1} = -1{,}25\,(2-4) + 5\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2{,}5 + 2{,}5 = 5\ \text{V}$$