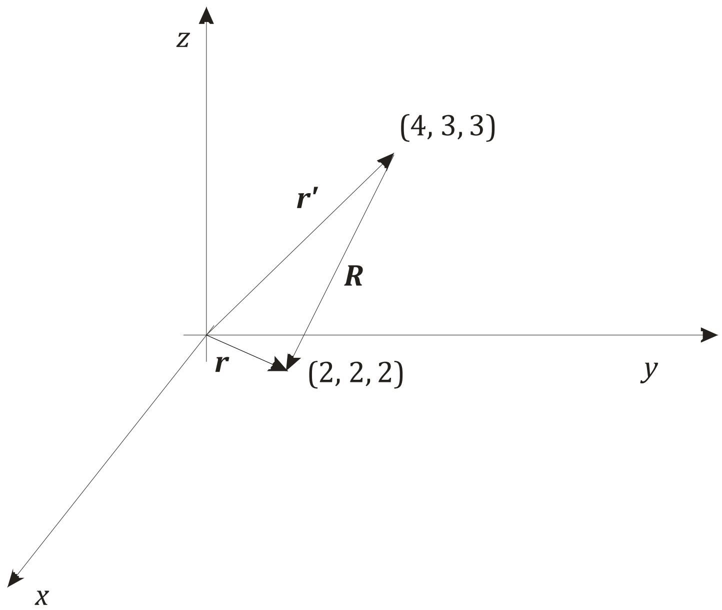
## Matematički uvod

1. Dva su radijvektora $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{r'}$ zadana slikom 1.1. Odredite vektor $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}$ i jedinični vektor $\boldsymbol{a_R}$ u smjeru vektora $\boldsymbol{R}$.




Rj. $\boldsymbol{R} = -2\boldsymbol{a_x} - \boldsymbol{a_y} - \boldsymbol{a_z}$; $\boldsymbol{a_R} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{a_x} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{a_y} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{a_z}$

2. Za točku T (2, 1, 3) zadanu u Kartezijevom koordinatnom sustavu odredi koordinate u cilindričnom i sfernom koordinatnom sustavu.

   Rj. $T_{cil}$ ( 2,236, 0,464, 3); $T_{sfe}$ ( 3,742, 0,641, 0,464)

3. Za zadane vektorske funkcije $\boldsymbol{A} = yz\,\boldsymbol{a_x} - 2x\boldsymbol{a_y} + \boldsymbol{a_z}$ i $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a_x} + z\boldsymbol{a_y}$ odredite u točki T (3, 1, 1) :
   a. $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$
   b. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$
   c. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$
   d. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

   Rj. a. $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = -7\boldsymbol{a_y} + \boldsymbol{a_z}$

   b. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{a_x} - 5\boldsymbol{a_y} + \boldsymbol{a_z}$

   c. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -5$

   d. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{a_x} + \boldsymbol{a_y} + 7\boldsymbol{a_z}$

4. Integracijom odredite površinu $S$ definiranu u sfernom koordinatnom sustavu sa $r = 1{,}5$ m; $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; $\frac{\pi}{3} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

   Rj. 7,07 $m^2$

5. Integracijom odredite u cilindričnom koordinatnom sustavu volumen V područja definiranog sa $1\text{m} \leq r \leq 3\text{m}$; $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$; $1\text{m} \leq z \leq 2\text{m}$.
   Rj. 6,28$m^3$

6. Za zadane vektore $\boldsymbol{A} = 2\,\boldsymbol{a_x} - 3\boldsymbol{a_y} + 2\boldsymbol{a_z}$ i $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a_x} + 2\boldsymbol{a_y} + \boldsymbol{a_z}$ odredite projekciju vektora $\boldsymbol{B}$ na vektor $\boldsymbol{A}$ i manji kut između vektora primjenom relacije za skalarni produkt vektora $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$.
   Rj. -0,485; 101,42°

7. Za vektore iz zadatka 6. odredite manji kut između vektora $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ primjenom izraza za vektorski produkt.
   Rj. 101,42° (napomena: primjenom vektorskog produkta dobivaju se dva rješenja 78,58°i 101,42° zbog svojstava funkcije sinus, od kojih je samo jedno točno. Primjenom skalarnog produkta kao u 6. zadatku dobiva se jedno rješenje. Rezultat je lako provjeriti skiciranjem vektora.)

8. Neka je vektor $\boldsymbol{A} = (y+2)\,\boldsymbol{a_x} + (x-1)\boldsymbol{a_y}$. Odredite vektor u točki (7, 5, 1) i njegovu projekcije na vektor $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{a_x} - 3\boldsymbol{a_y} + 2\boldsymbol{a_z}$.
   Rj. $\boldsymbol{A}(7,5,1) = 7\,\boldsymbol{a_x} + 6\boldsymbol{a_y}$.; $\frac{10}{\sqrt{17}}$

9. Odredite površinu dijela valjkaste plohe, određene s radijusom r =3m, visinom h = 2m i kutem $10° \leq \alpha \leq 100°$.
   Rj. S=3π $m^2$

10. Za vektor $\boldsymbol{A} = 5\,\boldsymbol{a_x}$ i vektor $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{a_x} + B_y\boldsymbol{a_y}$ odredite $B_y$ takav da je kut između vektora $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ 45°.
    Rj. $B_y = \pm 4$;

11. Odredite jedinični vektor između točaka (2, -5, -2) i (14,-5,3).
    Rj. $\boldsymbol{a} = \frac{12}{13}\boldsymbol{a_x} + \frac{5}{13}\boldsymbol{a_z}$;

12. Za koje su vrijednosti α i β vektori $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_r} + \pi\boldsymbol{a_\alpha} + 3\boldsymbol{a_z}$ i $\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{a_r} + \beta\boldsymbol{a_\alpha} - 6\boldsymbol{a_z}$ paralelni?
    Rj. $\alpha = -2$; $\beta = -2\pi$;

13. Za koje su vrijednosti α vektori $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_x} + 2\boldsymbol{a_y} - \boldsymbol{a_z}$ i $\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{a_x} + \boldsymbol{a_y} + 3\boldsymbol{a_z}$ međusobno okomiti?
Rj. $\alpha = 1$

14. Neka je zadano skalarno polje $\varphi = 2x \cdot y - 5z$. Odredite gradijent polja $\varphi$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{a_x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{a_y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{a_z}$ u točki (1, 2, 3).
Rj. $4\boldsymbol{a_x} + 2\boldsymbol{a_y} - 5\boldsymbol{a_z}$.

15. Za vektorsko polje $\boldsymbol{E} = \frac{50}{r}\boldsymbol{a_r} - 4\boldsymbol{a_z}$. Odredite jedinični vektor $\boldsymbol{a_E}$u točki (10, 20°, 2).
Rj. $0{,}734\boldsymbol{a_x} + 0{,}267\boldsymbol{a_y} - 0{,}625\boldsymbol{a_z}$.

16. Za vektorsko polje iz primjera 15 odredite površinu za koju vrijedi $|\boldsymbol{E}| = 10$.
Rj. $r$=5,46 cilindrična ploha.

17. U točki P prostora dva su vektora definirana u sfernom koordinatnom sustavu $\boldsymbol{A} = 10\boldsymbol{a_r} - 3\boldsymbol{a_\vartheta} + 5\boldsymbol{a_\alpha}$ i $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{a_r} + 5\boldsymbol{a_\vartheta} + 3\boldsymbol{a_\alpha}$. Odredite skalarnu komponentu vektora $\boldsymbol{B}$ u smjeru vektora $\boldsymbol{A}$.
Rj. 1,728

18. Odredite vektor koji u točki P okomit na ravninu koju određuju vektori $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ iz zadatka 17.
Rj. $0{,}496\boldsymbol{a_r} + 0{,}292\boldsymbol{a_\vartheta} - 0{,}818\boldsymbol{a_\alpha}$.

19. Izrazite vektorsko polje $\boldsymbol{A} = (x^2 - y^2)\,\boldsymbol{a_y} + (x \cdot z)\boldsymbol{a_z}$ u koordinatama cilindričnog sustava u točki P $(r = 6, \alpha = 60°, z = -4)$.
Rj. $-9\sqrt{3}\boldsymbol{a_r} - 9\boldsymbol{a_\alpha} - 12\boldsymbol{a_z}$.

20. Unutar sfere radijusa 0,2m nalazi naboj volumne gustoće $\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$. Odredite ukupni naboj unutar sfere.
Rj. Q=0,789C

21. Odredite gradijent polja $f(x, y, z) = 5x + 10x \cdot z - x \cdot y + 6$.
Rj. $(5 + 10z - y)\boldsymbol{a_x} + (-x)\boldsymbol{a_y} + 10x\boldsymbol{a_z}$.

22. Odredite gradijent polja $f(x, y, z) = 2\sin(\alpha) - r \cdot z + 4$.
Rj. $(-z)\boldsymbol{a_r} + \frac{2}{r}\cos(\alpha)\,\boldsymbol{a_\alpha} - r\boldsymbol{a_z}$.

23. Odredite gradijent polja $f(x, y, z) = 2\mathrm{r}\cos(\vartheta) - 5\alpha + 2$.
Rj. $2\cos(\vartheta)\,\boldsymbol{a_r} - 2\sin(\vartheta)\,\boldsymbol{a_\vartheta} - \frac{5}{r\sin(\vartheta)}\boldsymbol{a_\alpha}$.

24. Odredite gradijent skalarnog polja $f(x, y, z) = x \cdot y + 2z^2$ u točki (1,1,1) u smjeru vektora $\boldsymbol{a_x} - 2\boldsymbol{a_y} + \boldsymbol{a_z}$.
    Rj. $\frac{3}{\sqrt{6}}$

25. Odredite linijski integral vektorskog polja $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + y)\boldsymbol{a_x} - x\boldsymbol{a_y} + z\boldsymbol{a_z}$ po dužini od točke A(0,1,2) do B (1,0,2).
    Rj. 1,5

26. Odredite linijski integral vektorskog polja $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{a_x} + 2\boldsymbol{a_y} + \boldsymbol{a_z}$ po kružnom luku točke A(1,0,1) do B (0,1,1). Središte kružnog luka je u točki (0,0,1).
    Rj. 1

27. Odredite tok vektorskog polja $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 2\,x^2 \cdot y\boldsymbol{a_x} + z\boldsymbol{a_y} + y\boldsymbol{a_z}$ kroz jediničnu kocku $0 \leq x, y, z \leq 1$.
    Rj. 1

28. Odredite divergenciju vektorskog polja $\boldsymbol{F}(x, y, z) = e^{-\alpha y}(\cos(\beta x)\,\boldsymbol{a_x} - \sin(\beta x))\boldsymbol{a_y}$.
    Rj. $(\alpha - \beta)e^{-\alpha y}\sin\,(\beta x)$

29. Odredite divergenciju vektorskog polja $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 5x^2 \cdot \sin\,(\pi x)\boldsymbol{a_x}$ u točki x=0,5.
    Rj. 5

30. Odredite rotor vektorskog polja $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x \cdot y\boldsymbol{a_x} + 2y \cdot z\boldsymbol{a_y} - \boldsymbol{a_z}$.
    Rj. $-2y\boldsymbol{a_x} - x\boldsymbol{a_z}$

31. Odredite rotor vektorskog polja $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 2\boldsymbol{a_r} + \sin\,(\alpha)\boldsymbol{a_\alpha} - z\boldsymbol{a_z}$.
    Rj. $\frac{\sin\,(\alpha)}{r}\boldsymbol{a_z}$

32. Odredite linijski integral vektorskog polja $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x \cdot y\boldsymbol{a_x} + 2\boldsymbol{a_y}$ po zatvorenoj krivulji određenoj točkama (0,0,0),(1,0,0) i (0,1,0). Smjer obilaska definiran je redoslijedom točaka.
    Rj. $-\frac{1}{6}$