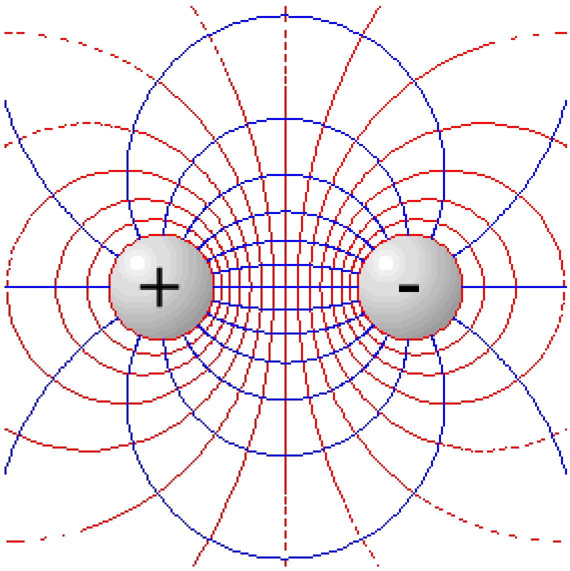
# Elektromagnetska polja




## 20 zadataka iz domaće zadaće

### FER2

### 2006./2007.

Velika zahvala kolegama:
**aspire , Bundy, cox3.14, db42006, Franz Floyd FERdinand, Fumarek, hobit, Incubus, Keyser, Lonac, matrix, mbaris18, Misl@, Rasta, Vedran Lanc, zbrekal1, Yeentrancemperium**

**1. Uz zadani potencijal u zraku φ =3x2+4y3 [V] odredite energiju u [pJ] pohranjenu u volumenu 0≤x≤1m, 0≤y≤1m, 0≤z≤1m. (nekakav potencijal)**
**skroz identican berberovic pr.6.1.2 (razne granice za x,y,z, različita jednadžba potencijala ).**

Zadatak 1 i tipovi.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{a_x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overline{a_y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overline{a_z})$$

$$E^2 = E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint E^2\, dV =$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}(E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2)dxdydz$$

**2. Električno polje u zraku između dva metalna suosna cilindrična vodiča zadano je izrazom E=20^5 r-1 ar [V/m]. Radijus unutrašnjeg vodiča je R1=0.02m, a vanjskog R2=0.05m. Odredite energiju u [J] pohranjenu u 0.5m duljine vodiča. (različit radijus)**

W=0,5*eps §§§ E^2 dV

V=r^2 pi*L
dV=2r*pi*L*dr

To i E uvrstimo u formulu i dobijemo izraz: nesto*eps *pi*l*ln(r2/r1)

**3. Odredite električni tok u [C] kroz sferu radijusa 3m, ako ona obuhvaća naboj gustoće ρ=5sin^2(α)r-2 [C/m3] 1m≤r≤2m koji se nalazi između dvije koncentrične sfere radijusa R1=1m i R2=2m. (različit radijus, različita jednadžba gustoće)**

Q=∫∫∫ρdV
dV= r^2*sin(Θ)dr d Θ d α
Q=∫∫∫ρ*r^2*sin(Θ)dr d Θ d α

pa točno za ovaj primjer bi bilo...

granice integrala su r = 1..2, α = 0..2Π, Θ = 0.. Π

Q=∫∫∫5sin^2(α)*r^-2 *r^2*sin(Θ)dr d Θ d α

...r se krati i ostaje....

Q=∫∫∫5sin^2(α) *sin(Θ)dr d Θ d α

....integriramo uz navedene granice i dobijemo rješenje...u ostalim varijantama se mjenjaju granice r-a, i u integralu nekad ostane r^-2, bude cos umjesto sin ili tako nešto zbog drukčije zadane gustoće....uglavnom...

**4. Linijski naboj gustoće 5nCm-1 leži na x osi. Odredite z komponentu vektora gustoće električnog toka u nCm-2 u točki (3m,2m,1m). (neka vec tocka) (različit naboj, različita točka)**

$$D = \varepsilon E$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{13}$$

$$E_y = E\cos\alpha =>$$

$$\cos\alpha = \frac{E_y}{E}$$

$$Dy = E_y\varepsilon = \varepsilon\frac{y}{r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} = \frac{3}{\sqrt{13}}\frac{5}{2\pi\sqrt{13}} = 0.18nC/m^2$$

**5. Naboj linijske gustoće 1nCm-1 je jednoliko raspoređen je po rubovima kvadrata koji je zadan vrhovima (3m,-3m,0)(3m,3m,0)(-3m,3m,0)(-3m,-3m,0). Odredite potencijal u [V] u točki (0,0,2m). (različit naboj, različite točke)**

prvo ćemo izračunati djelovanje jednog linijskog naboja na potencijal u tocki (0,0,5)

formula (9.25) na 43. strani one "knjige" Elektrostatika

fi(r)=1/(4*pi*eps) int[lamda*dl/R]

r=x*ax + y*ay
r'=5az

|R|=sqrt(x^2+y^2+25)

sad se to uvrsti u gornju formulu, sredi (za x se uvrsti 3) i dobije se:

fi(r)=1/(4*pi*eps) int[dl/sqrt(l^2+34)]

y je ovdje zamijenjem sa l, nije bitna oznaka, bitno je da je to velicina po kojoj se integrira!

kad se to izintegrira:

fi(r)=1/(4*pi*eps) * [ln|l+sqrt(l^2+34)|]<-3,3>

uvrsti se, pomnozi sa 4 da se dobije utjecaj 4 ista takva linijska naboja i dobije se 35.57

**6. Naboj plošne gustoće ρ=0.2(x2+y2+16)3/2 [nC/m2] raspoređen je po pravokutniku -3≤x≤3,-3≤y≤3 [m] u ravnini z=0. Odredite jakost električnog polja u V/m u točki (0,0,4m).**
**(različit naboj, različite granice, različita točka)**

$$\rho = 2(x^2 + y^2 + 9)^{\frac{3}{2}}$$
$$-2 \le x \le 2$$
$$-2 \le y \le 2$$
$$z = 0$$
$$T(0,0,3)$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y$$
$$\vec{r}\,' = 3a_z$$
$$\vec{r} - \vec{r}\,' = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y - 3a_z$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_S \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{(\vec{r} - \vec{r}\,')^3}\sigma(\vec{r}\,')dS =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_S \frac{x\vec{a}_x + y\vec{a}_y - 3a_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9}^3} 2(x^2 + y^2 + 9)^{\frac{3}{2}} dxdy =$$
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left[\iint_S x\vec{a}_x dxdy + \iint_S y\vec{a}_y dxdy + 3\iint_S \vec{a}_z dxdy\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon}(-3)\iint_S \vec{a}_z dxdy = -\frac{3}{2\pi\varepsilon}\vec{a}_z 4^2 =$$
$$= 862.82(-\vec{a}_z)$$
$$|E(\vec{r})| = 862.82 V/m$$

**7. U sfernom koordinatnom sustavu vlada polje E=16r^-2ar V/m. Odredite napon UAB u [V] između točaka A(2m, pi, pi/2) i B(4m,0, pi) , pri čemu su točke zadane kao (r,theta,alpha). (različito polje, različite tocke)**

Uab= -§[B,A] E*dl (E i dl su VEKTORI!)= §[B,A] Edr (ostali se diferencijali ponište i jedino kaj je bitno jest pocetna i konacna vrijednost od r) = 16*-1/r [4,2]=-4 V

**8. U cilindričnom koordinatnom sustavu jakost električnog polja zadana je u obliku E=5r^-2 ar V/m za 0<r≤2m i E=1.25ar V/m za r>2m. Odredite razliku potencijala UAB u [V] između točaka A(1m,0,0) i B(4m,0,0), pri čemu je točka zadana u obliku (r,α,z). (različito polje, vrijednosti za r i točke)**

Uab = - int. (od B do A) E dL = - int. (od 4 do 1) E dL

= - int. (od 4 do 2) 1.25 dr - int. (od 2 do 1) 5 r^-2 dr

.
.
.
Uab = 5 V

$$U_{AB} = -\int_B^A Edl = -\int_4^1 Edl = -\int_4^2 Edl - \int_2^1 Edl =$$

$$= -\int_4^2 2.5r^{-2}dr - \int_2^1 5r^{-3}dr = -2.5\left.\frac{r^{-1}}{-1}\right|_4^2 - 5\left.\frac{r^{-2}}{-2}\right|_2^1 =$$

$$= 2.5(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{5}{2}(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}) = 2.5\frac{1}{4} + 2.5\frac{3}{4} = 2.5V$$

**9. Na točkasti naboj iznosa q1=100nC, koji se nalazi u točki (1m,-1m,3m), djeluje sila F=5ax-3ay+2az [mN], uzrokovana nabojem q2 u točki (-4m,2m,1m).**
**Odredite q2 u µC.**
**(različit naboj, različite točke)**

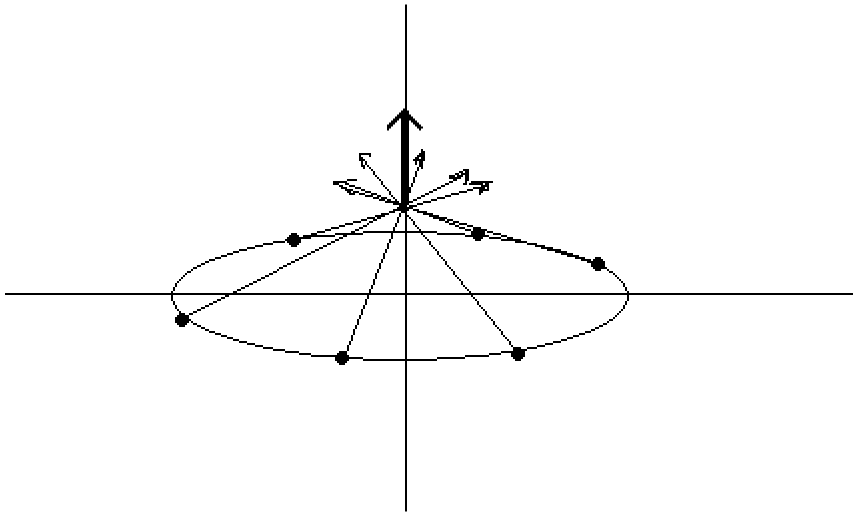
$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\varepsilon\pi r^2}$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}$$

$$Q_1 = F\frac{4\varepsilon\pi r^2}{Q_2}$$

**10. Šest jednakih naboja iznosa 300nC svaki postavljeno je na kružnicu radijusa 3m tako da su svi međusobno jednako udaljeni. Odredite silu u µN na naboj iznosa 20nC, smješten u točki na osi kružnice, od ravnine kružnice udaljenoj 1m.**



$Q = 300nC$

$Q' = 20nC$

$r = 3m$

$d = 1m$

$$F_{12} = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon R^2}$$

$$R = \sqrt{r^2 + d^2} = \sqrt{10}$$

$$F = 6F_{12}\sin\alpha = 6\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{d}{R} = 6\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{1}{10} = 10.23*10^{-6}N$$

**11. Za zadani vektor gustoće električnog toka D=10x ax Cm^-2 odredite električni tok u [C] koji prolazi površinom 1m^2 okomitom na x os na x = 3m. (različit vektor, različita površina)**

tok=Q=intDdS=DS=10*3*1=30

**12. Naboj linijske gustoće 15 nC/m raspoređen je po z osi od z = 3 m do +∞ i od z =-3 m do -∞. Odredite jakost električnog polja u V/m u točki (4m,0,0). (različit naboj, različita tocka, razlicite vrijednosti za integraciju)**

uzmete da je vektor polozaja tocke r=4*ax a vektor polozaja izvora r'=ksi*az onda je vektor koji povezuje te dvije tocke R=r-r'=4*ax-ksi*az
E1=lambda/(4*pi*epsilon0) int[-3,besk] (4*ax-ksi*az)/(sqrt(4^2+ksi^2))^3 * d(ksi)
i taj vektor polja ima dvije komponente Ex i Ez
Ex1=(4*lambda)/(4*pi*epsilon0) int[-besk,-3] 1/(sqrt(4^2+ksi^2))^3 * d(ksi) ... to sad integrirate dobije se lambda/(pi*epsilon*40)
Ez1=(-4*lambda)/(4*pi*epsilon0) int[-besk,-3] ksi/(sqrt(4^2+ksi^2))^3 * d(ksi) i to se dobije -lambda/(pi*epsilon*5)

e sad moramo to isto uraditi i za drugi naboj i sve ce biti isto samo sto integracija ide od 3 do plus beskonacno...

ispast ce vam iste vrijednosti samo sto ce Ez biti negativno pa ce se ponistiti a Ex ce se zbrojiti znaci imat cemo da je E=2*Ex1...

**13. Odredite rad u [nJ] koji je potrebno uložiti da se točkasti naboj iznosa -10nC pomakne iz ishodišta kartezijevog koordinatnog sustava u točku (2m,0,0) u polju E = (2x+2y)ax + 2x ay [V/m]. (različit naboj, različite točke, različito polje)**

E=(2x+2y)ax+2xay u točki(2,0,0), točkati naboj=-10nC
W=-q int[T1-T2]Edl, dl=axdx+aydy+azdz
W=-q int[T1-T2]((2x+2y)ax+2xay)(axdx+aydy))
(integriramo samo po x, jer je y=0 zbog zadane točke) i y=0

W=-q int[0,2]2xdx=-q*x^2=40nJ

**14. Ukupni naboj 15nC raspoređen je jednoliko po disku radijusa 3m. Odredite potencijal u [V] u točki na osi diska 6m udaljenoj od ravnine diska.(različit naboj,različita udaljenost)**

---

koristimo jednadžbu potencijala za tijelo s jednoliko raspoređenim nabojem plošne gustoće $\sigma$.

$$\sigma(\vec{r}) = konst = \frac{q}{S} = \frac{q}{R^2\pi}$$

potencijal:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{dQ}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

gdje je:

$$dQ = \sigma \cdot dS$$

$$dS = r\,d\alpha\,dr$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma \cdot r}{\sqrt{z^2+r^2}}\,d\alpha\,dr$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}}\,dr$$

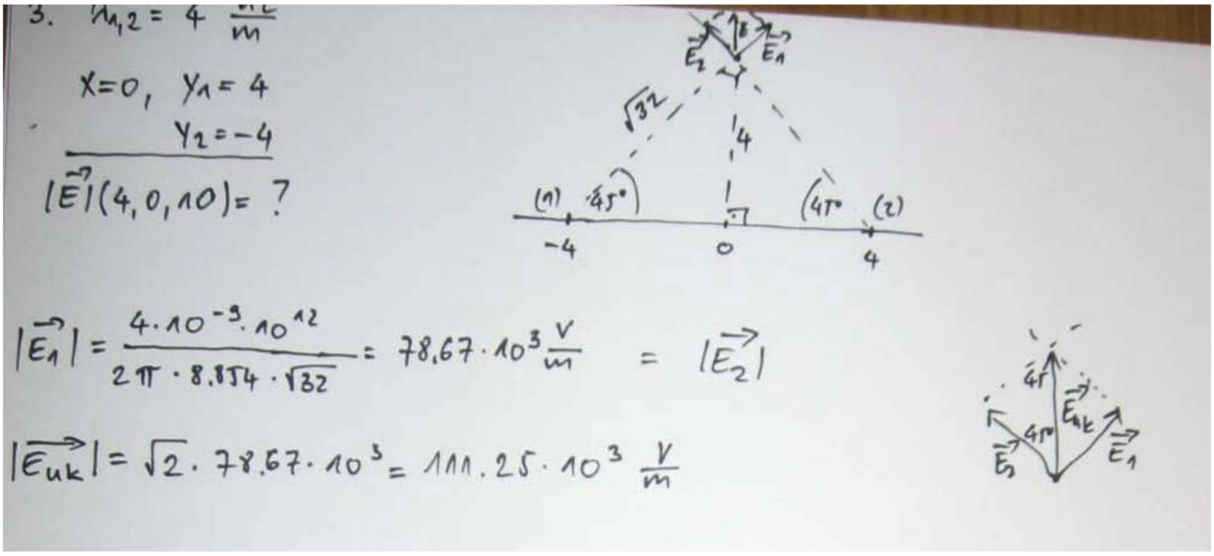
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{z^2+r^2}\Big|_{r=0}^{R}$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right)$$

potencijal diska radijusa R u točki na osi diska udaljenosti z od ravnine diska i s nabojem q:

$$\varphi(z) = \frac{q}{2R^2\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right)$$

**15. Dva beskonačno duga linijska naboja jednoliko raspodijeljene gustoće 10nC/m leže u ravnini x=0 paralelno s osi z, na lokacijama y1=+2m i y2=-2m. Odredite jakost električnog polja u V/m u točki (6m,0,3m). (različit naboj, različita gustoća, različite lokacije, različita točka)**




**16. Odredite rad u [nJ] koji je potrebno uložiti da se točkasti naboj iznosa 1nC pomakne iz ishodišta sfernog koordinatnog sustava u točku (2m, 0.25pi, 0.5pi), pri čemu je točka označena u obliku (r, α, θ ), ako u prostoru vlada polje E=4e^-0.25r ar [V/m]. (u neku tocku uz polje e)**
**(različit naboj, različite točke, različito polje)**

Q=1nC, T(2m, 0.25pi, 0.5pi),
E=4e^-0.25r ar V/m:

fi = -int[0, r] E dr = - 4int[0,2]e^-0.25r dr = 16 ( e^-0.5 - 1)
W = fi * Q = - 6.2955 nC

**17. Četiri jednaka naboja iznosa Q=10nC svaki nalaze se u točkama (3m,0,0),(-3m,0,0),(0,3m,0) i (0,-3m,0). Odredite iznos sile u μN na naboj iznosa 100nC smješten u točki (0,0,3m). (različit naboj, različite točke)**

Četiri jednaka naboja iznosa Q=20nC svaki nalaze se u točkama
(3m,0,0), (a,0,0)
(-3m,0,0), (-a,0,0)
(0,3m,0) i (0,a,0)
(0,-3m,0). (0,-a,0)
Odredite iznos sile u μN na naboj iznosa 100nC smješten u točki (0,0,4m).
rj:
Q=20n
A(a,0,0) poseban slucaj xa=-xb , yc=-yd
B(-a,0,0)
C(0,a,0)
D(0,-a,0)
Q1=100n
X(0,0,b)

................

F=(16*Q*Q1)/(4*pi*epsilon0*(a^2+b^2)^(3/2))

**18. Naboj jednolike gustoće 0.3 nC/m2 raspoređen je po ravnini zadanoj jednadžbom 3x-3y+z = 6[m]. Odredite z komponentu jakosti električnog polja u V/m u ishodištu. (različita ravnina, različita komponenta-y)**

Gledaj, u svakom slučaju prvidio ti je isti:E(z)=lambda/(2*epsilon)
sad s čim se to množi ovisiti o ravnini koja je zadana
u onom slučaju je bilo 3x-3y+z=6
električno polje ti ovisi o radijalnoj komponenti koja je okrenuta od ravnine prema ishodištu,pa zato mjenjaš predznake, znači dobiš n=-3x+3y-z
i sad ako se traži z komponenta rješenje ti je:
E(z)=[lambda/(2*epsilon)]*[(-1)/sqrt(3^2+3^2+1^2)]=....

OPĆENITA FORMULA:
w-komponenta (može biti x,y ili z)

E(w)=[lambda/(2*epsilon)]*[(w)/sqrt(x^2+y^2+z^2)]

**19. Naboj plošne gustoće ρ=10^-9*cos^2α raspoređen je po kružnom disku radijusa 4m. Odredite jakost električnog polja u V/m u točki na osi diska udaljenoj od diska 2m. (različit radijus, različita gustoća, različita udaljenost)**

$$\rho(\alpha) = 10^{-9} \cdot \cos^2(\alpha)$$

$$R = 4m$$

$$z = 2m$$

---

formula jakosti el. polja:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dQ$$

$$\vec{r}\,' = r\vec{a}_r$$

$$\vec{r} = z\vec{a}_z$$

$$dQ = \rho(\alpha) dS$$

$$dS = r d\alpha dr$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{z\vec{a}_z - r\vec{a}_r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \rho(\alpha) r d\alpha dr$$

$$\vec{E} = E_r\vec{a}_r + E_z\vec{a}_z$$

radijalna komponenta se poništava, i jednaka je nuli ( $E_r$=0 )

z komponenta:

$$E_z = \frac{10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\cos^2(\alpha)\,d\alpha\int_0^R \frac{z\cdot r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}dr = \frac{10^{-9}\cdot z}{4\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\Bigg|_{r=0}^{R}$$

konačan izraz za jakost el. polja na osnoj udaljenosti z od diska radijusa R i plošne gustoće $\rho$:

$$E_z = \frac{10^{-9}}{4\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

**20. Točkasti naboj iznosa 18nC smješten je u ishodište sfernog koordinatnog sustava. Odredite tok u [nC] koji prolazi površinom 4πm2 koncentrične sfere radijusa 3m. (neki naboj, neka povrsina) (različit naboj, različit r, različita površina)**

Naboj u ishodištu proizvodi el,polje E=Q/(4pi*eps0)*R/(R^3)
treba nam R

r=ar*r
r'=0 točka izvora je u ishodištu
R=ar*r
=>imamo samo radijalnu komponentu
tok kreoz neku površinu je jednak Tok=int(površine)[eps0*E*ds]
površina je na sferi pa ima radijalnu normalu n=ar

=>Tok=(Q/(4*pi)*r*ar/r^3)*S S=ar*4

Tok=Q/(pi*r^2)