1. Zakon Lorentzove sile – napisati i reći definicije E i B.

Lorentzova sila – sila koja djeluje na električni naboj ***q*** koji se giba brzinom ***v*** u magnetskom polju ***B*** i na njega djeluje električno polje ***E***.

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

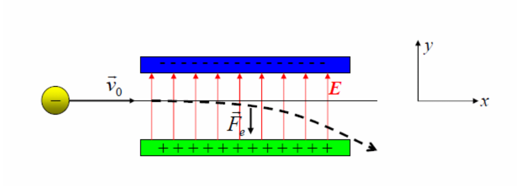
Jakost električnog polja (E) – omjer je sile na naboj u mirovanju $(v=0)$ i iznosa naboja ***q***. Iznos ispitanog naboja mora biti što manji $(q \to 0)$ kako njegovo unošenje ne bi mijenjalo polje koje se mjeri.

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \left[\frac{\vec{F}}{q} \right]; \; v = 0$$

Magnetska indukcija (B) – pojava da se u vodiču koji u magnetskom polju ima komponentu brzine okomitu na smjer magnetskog polja inducira napon

$$\vec{v} \times \vec{B} = \left(\frac{\vec{F}}{q} - \vec{E} \right)$$

2. Odredi putanju nabijene čestice koja okomito upada u homogeno el.polje.



Ravnotežna sila: $\quad m \cdot \vec{a} = -e \cdot \vec{E}$

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \left(\vec{a}_x \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{a}_y \frac{d^2y}{dt^2} \right) \qquad \vec{F} = -e \cdot \vec{E} \qquad \vec{E} = E \cdot \vec{a}_y$$

$$-e \cdot E \cdot \vec{a}_y = m \cdot \left(\vec{a}_x \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{a}_y \frac{d^2y}{dt^2} \right) \qquad \vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{a}_x$$

$$(\vec{a}_x) \qquad v_0 = v_{x(x=0)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Big/ \int \;\to \frac{dx}{dt} = v_x = C_1 \to C_1 = v_0 \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \Big/ \int \;\to x_{(t)} = v_0 \cdot t + C_2$$

PU: $t = 0 \to C_2 = 0 \qquad \underline{\underline{x_{(t)} = v_0 \cdot t}}$

$\left(\overrightarrow{a_y}\right)$

$$-e\cdot E = m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\Big/\int \quad\rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-e\cdot E}{m}\cdot t + C_1 \qquad\qquad \text{PU: } t=0\rightarrow C_1=0$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-e\cdot E}{m}\cdot t\Big/\int \quad\rightarrow y=\frac{-e\cdot E}{m}\cdot\frac{t^2}{2}+C_2 \qquad\qquad \text{PU: } t=0\rightarrow C_2=0$$

$$\underline{\underline{y_{(t)}=\frac{-e\cdot E}{m}\cdot\frac{t^2}{2}}}$$

3. Gustoća naboja i struje – definicija λ, σ, ρ i J.

Linijski naboj (λ) je naboj raspodijeljen po presjeku debljine nula, pa je njegova gustoća λ na liniji l: $\lambda=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta l}=\frac{dQ}{dl}$

Plošni naboj (σ) je naboj raspodijeljen u sloju debljine nula, pa je njegova gustoća σ na plohi S: $\sigma=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S}=\frac{dQ}{dS}$

Gustoća naboja (ρ) je količina el. naboja u nekoj točki prostora:

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V}=\frac{dQ}{dV}$$

Gustoća struje (J) tok el. naboja po jedinici površine u jedinici vremena:

$$\vec{J}=\overrightarrow{a_v}\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{\Delta Q}{\Delta t\cdot\Delta S}=\overrightarrow{a_v}\frac{dI}{dS}$$

4. Jednadžba kontinuiteta – integralni oblik i izvod diferencijalnog oblika.

Tok električnog naboja (struja) I iz zatvorenog konačnog prostora volumena V kojeg obrubljuje ploha S je jednak iznosu smanjenja naboja Q unutar tog prostora, zbog zakona očuvanja ukupnog naboja.

$$I=-\frac{dQ}{dt} \qquad\qquad \oint\!\!\!\!\iint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\cdot dS=-\iiint_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

Primjenom Gaussovog teorema $\oint\!\!\!\!\iint_s \vec{A}\cdot\vec{n}\cdot dS=\iiint_v\nabla\cdot\vec{A}\cdot dV$ dobijemo:

$$div\vec{J}=\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

5. Coulombov zakon – izraz i definicija E

Sila između dva vrlo mala nabijena tijela koja se nalaze u vakuumu na udaljenosti koja je puno veća od dimenzija tijela proporcionalna naboju na svakom od tijela i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti između tijela.

$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{R^2}; \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}; \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ As/Vm; \qquad F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Jakost električnog polja (E) definiramo kao silu na jedinični naboj.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a_r}$$

6. Odredite jakost električnog polja jednoliko nabijene dužine.

Naboj je raspodijeljen po liniji l s linijskom gustoćom λ. Ukupna jakost električnog polja je zbroj doprinosa diferencijalnih naboja $dQ = \lambda \cdot dl$ integracijom po l.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_l \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{R} = \int_l \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \lambda(\vec{r}) \cdot dl$$

7. Poissonova i Laplaceova jednadžba.

Poissonova jednadžba je diferencijalna jednadžba i primjenjuje se na rješavanje potencijala u homogenom sredstvu:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \left(\varepsilon \cdot \vec{E}\right) = \rho_s; \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi; \qquad \nabla \cdot [\varepsilon \cdot (-\nabla\varphi)] = \rho_s$$

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \qquad \Delta\varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}$$

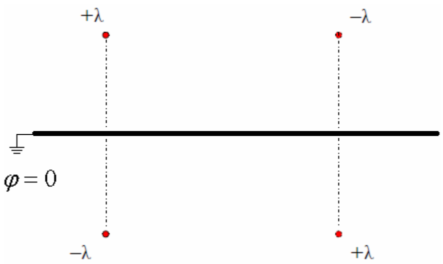
Ako u prostoru nema slobodnih naboja $\rho_s = 0$, tada Poissonova jednadžba prelazi u **Laplaceovu jednadžbu** u homogenom prostoru: $\Delta\varphi = 0$

8. Metoda odslikavanja.

Sve silnice električnog polja nekog naboja završavaju na vodljivoj ravnini i na njoj stvore naboje suprotnog predznaka. Plošna gustoća stvorenog naboja na ravnini je različita i opada s povećanjem udaljenosti od naboja. Ako se ta ravnina zamijeni s nabojem suprotnog predznaka jednako udaljenim od ravnine, na mjestu ravnine potencijal će biti nula $(\varphi = 0)$. Taj se naboj naziva ***odslikani naboj***, a postupak zamjene naziva se ***metoda odslikavanja***.

9. Polje voda iznad površine tla.

Vrijedi sve iz zadatka 8, samo što naboj nije točkasti već linijski, a površina tla predstavlja vodljivu ravninu. Pa formula za udio električnog polja pojedinog voda glasi:



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{a}_r$$

10. Energija sustava točkastih naboja.

Za dovođenje prvog naboja Q_1 iz beskonačnosti u točku P_1 nije potrebno utrošiti nikakav rad budući da u prostoru ne postoji nikakvo električno polje.
Za dovođenje drugog naboja Q_2 iz beskonačnosti u točku P_2 potrebno je utrošiti energiju jer postoji električno polje stvoreno nabojem Q_1. Istu bi energiju trebalo utrošiti da smo prvo iz beskonačnosti doveli naboj Q_2 u točku P_2, a zatim iz beskonačnosti u točku P_1 doveli naboj Q_1.

$$W_2 = \varphi_{12} \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_{12}} Q_2$$

Za dovođenje trećeg naboja Q_3 iz beskonačnosti u točku P_3 potrebno je utrošiti energiju jer postoji električno polje stvoreno nabojima Q_1 i Q_2.

$$W_3 = \varphi_{13} \cdot Q_3 + \varphi_{23} \cdot Q_3 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_{13}} Q_3 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon R_{23}} Q_3$$

Isti postupak je za dovođenje n-tog naboja Q_n iz beskonačnosti u točku P_n.
Ukupna energija dobije se zbrojem svih energija:

$$W = W_2 + W_3 = (\varphi_{12} \cdot Q_2) + (\varphi_{13} \cdot Q_3 + \varphi_{23} \cdot Q_3)$$

Isto bi se dobilo da su se naboji dovodili različitim redoslijedom:

$$W = W_2 + W_3 = (\varphi_{21} \cdot Q_1) + (\varphi_{31} \cdot Q_1 + \varphi_{32} \cdot Q_2)$$

Ako zbrojimo i podijelimo s dva ova dva rješenja dobije se:

$$W = \frac{1}{2}[(\varphi_{21} + \varphi_{31})Q_1 + (\varphi_{12} + \varphi_{32})Q_2 + (\varphi_{21} + \varphi_{21})Q_3]$$

Kako vrijedi da je:

$\varphi_1 = \varphi_{21} + \varphi_{31}$; $\varphi_2 = \varphi_{12} + \varphi_{32}$; $\varphi_3 = \varphi_{13} + \varphi_{23}$

Izraz za ukupnu energije prelazi u:

$$W = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 \cdot Q_1 + \varphi_2 \cdot Q_2 + \varphi_3 \cdot Q_3\right)$$

Za skupinu od n točkastih naboja vrijedi:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \varphi_i$$

11. Energija prostorne raspodijele naboja i sustava vodljivih tijela

Ako imamo naboj prostorne gustoće ρ raspodijeljen po volumenu V, u diferencijalno malom volumenu dV nalazi se diferencijalni naboj $dQ = \rho \cdot dV$ pa ga možemo smatrati točkastim nabojem kojemu je energija određena s:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \varphi_i$$

Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodijeli naboja, umjesto sume potrebno je provesti integraciju po volumenu V:

$W = \frac{1}{2}\iiint_V \rho \cdot \varphi \cdot dV$ - energija prostorne raspodijele naboja

Sustav vodljivih tijela se može prikazati nadomjesnom shemom parcijalnih kapaciteta. Električno polje $\vec{E}$ u tom sustavu povezano je preko naboja Q na vodičima s naponom U (razlikom potencijala).

12. Energija prikazana vektorima električnog polja.

Primijenimo izraze za Gaussov zakon u diferencijalnom obliku i energiju prostorne raspodijele naboja:

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s$ $W = \frac{1}{2}\iiint_V \rho \cdot \varphi \cdot dV$

Općenito vrijedi:

$$\nabla \cdot \left(\varphi \cdot \vec{D}\right) = \varphi \cdot \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) + \vec{D} \cdot (\nabla \cdot \varphi) \Rightarrow \varphi \cdot \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) = \nabla \cdot \left(\varphi \cdot \vec{D}\right) - \vec{D} \cdot (\nabla \cdot \varphi) = \nabla \cdot \left(\varphi \cdot \vec{D}\right) + \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Pa se uvrštavanjem dobije:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \varphi \cdot \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) \cdot dV = \frac{1}{2}\iiint_V \nabla \cdot \left(\varphi \cdot \vec{D}\right) \cdot dV + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

$$W = \frac{1}{2}\oiint_S \varphi \cdot \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

Prvi integral predstavlja doprinos energiji električnog polja u prostoru izvan volumena V, a drugi integral predstavlja energiju sadržanu u volumenu. Kako uzimamo cijeli prostor, kada $r \to \infty$, a doprinos energiji opada s $1/r^3$, podintegralna funkcija u prvom integralu će težiti k nuli. Pa imamo:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon \cdot E^2 \cdot dV$$

13. Kapacitet i energija pohranjena u kondenzatoru.

Kondenzatori su najčešće dva međusobno izolirana vodljiva tijela, nabijena istim nabojima Q suprotnog predznaka i služe za pohranjivanje naboja, odnosno energije električnog polja. Električno polje $\vec{E}$ u tom sustavu povezano je nabojima na vodičima i naponom (razlikom potencijala).

$$Q = C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = C \cdot U_{12} = C \cdot U \qquad C = \frac{Q}{U}$$

Veličinu C, koja je konstanta, nazivamo ***kapacitetom kondenzatora***.
U kondenzatoru naboj na elektrodama je isti, suprotnih predznaka $\pm Q$.
Energija naboja na pozitivno nabijenoj elektrodi čiji je potencijal φ_1 je:

$$W_1 = \frac{1}{2}\iint_S \sigma \cdot \varphi_1 \cdot dS = \frac{1}{2}\varphi_1 \iint_s \sigma \cdot dS = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \varphi_1$$

Energija naboja na negativno nabijenoj elektrodi čiji je potencijal φ_2 je:

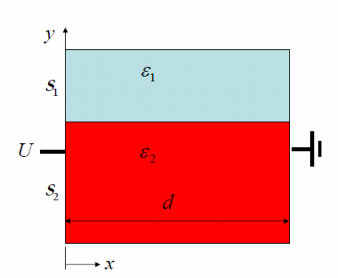
$$W_2 = \frac{1}{2}\iint_S \sigma \cdot \varphi_2 \cdot dS = \frac{1}{2}\varphi_2 \iint_s \sigma \cdot dS = -\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \varphi_2$$

Ukupna energija sadržana u električnom polju kondenzatora je:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}Q \cdot \varphi_1 - \frac{1}{2}Q \cdot \varphi_2 = \frac{1}{2}Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}Q \cdot U_{12} = \frac{1}{2}Q \cdot U$$

Odnosno uz $Q = C \cdot U$ slijedi: $W = \frac{1}{2}C \cdot U^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

14. Kapacitet dvoslojnog pločastog kondenzatora (granica paralelna s pločama).



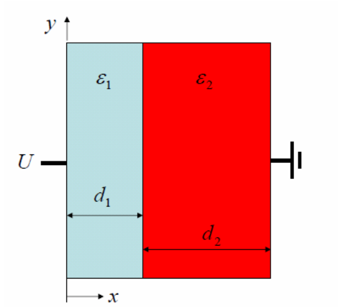
$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2} = \vec{E}$$

$$Q = \oiint_{S_1} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS + \oiint_{S_2} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = D_1 \cdot S_1 + D_2 \cdot S_2 = \varepsilon_1 \cdot E \cdot S_1 + \varepsilon_2 \cdot E \cdot S_2$$

$$U = U_{AB} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_1 \cdot \frac{S_1}{d} + \varepsilon_2 \cdot \frac{S_2}{d}$$

15. Kapacitet dvoslojnog pločastog kondenzatora (granica okomita na ploče).



$$\vec{D}_{n1} = \vec{D}_{n2} = D; \qquad \varepsilon_1 \cdot E_1 = \varepsilon_2 \cdot E_2$$

$$Q = \oiint_{S_1} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = D \cdot S \Rightarrow D = \frac{Q}{S}$$

$$U = U_{AB} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_B^C E_2 \cdot dx - \int_C^A E_1 \cdot dx = -\int_{d_1+d_2}^{d_1} E_2 \cdot dx - \int_{d_1}^{0} E_2 \cdot dx = \frac{D}{\varepsilon_2} \cdot d_2 + \frac{D}{\varepsilon_1} \cdot d_1$$

$$U = Q \cdot \left(\frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S} \right); \qquad \frac{U}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S}$$

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S}{d_1}; \qquad C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{S}{d_2}$$

16. Sile u električnom polju – Konstantni naboji u sustavu i konstantni potencijali u sustavu.

Analizom sustava statičkog električnog polja kojeg stvara N nabijenih vodiča zamislimo da je električna sila koja djeluje na jedan vodič iz tog sustava pomaknula taj vodič za virtualno mali pomak δs u smjeru osi s. Ako je s-komponenta sile na taj vodič F_s, ta je sila izvršila rad δA_s, pa je s-komponenta sile:

$$F_s = \frac{\delta A_s}{\delta s}$$

Rad električne sile δA_s možemo izraziti iz promjene energije pohranjene u statičkom električnom polju.

Konstantni naboji u sustavu (izolirani sustav). Vodiče smo spojili na izvor, nabili i nakon toga odspojili od izvora. Svi pomaci u sustavu (rad) u tom slučaju mogu biti izvršeni samo na račun energije pohranjene u statičkom električnom polju $\delta A_e = -\delta W_e$:

$$F_s = -\frac{\delta W_e}{\delta s}$$

Konstantni potencijali u sustavu (neizolirani sustav). Vodiči su ostali spojeni na izvore koji ima održavaju potencijale konstantnim bez obzire na pomake. Pri pomaku vodiča za δs mora se iz izvora dovesti na sve vodiče dodatni naboj δQ_k jer su se promijenili parcijalni kapaciteti pa se mijenjaju i naboji na vodičima. Ukupni rad δA_i kojeg pri tome obave izvori je:

$$\delta A_i = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \cdot \delta Q_k$$

Prema zakonu o očuvanju energije taj se rad može utrošiti na rad električnih sila δA_e i na povećanje energije pohranjene u polju:

$$\delta A_i = \delta A_e + \delta W_e ; \qquad \delta W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \varphi_k \cdot \delta Q_k ; \qquad \delta A_e = \delta W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \varphi_k \cdot \delta Q_k$$

Pa sila iznosi:

$$F_s = \frac{\delta W_e}{\delta s}$$

17. Sile na elektrode izoliranog kuglastog kondenzatora.

Općenito kod izoliranog kondenzatora naboj konstantan:

$$F_s = -\left\{\frac{\delta W_e}{\delta s}\right\}_{Q=konst.} = -\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right\}_{Q=konst.} = -\frac{1}{2}Q^2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{C}\right)$$

18. Sile na elektrode cilindričnog kondenzatora spojenog na izvor napona.

Općenito kod izoliranog kondenzatora napon konstantan:

$$F_s = \left\{\frac{\delta W_e}{\delta s}\right\}_{U=konst.} = \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{2}CU^2\right\}_{U=konst.} = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial s}$$

19. Gaussov zakon za električno polje – integralni i diferencijalni oblik.

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS = \iiint_V \rho_s \cdot dV \,; \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_s$$

20. Izvod Gaussova zakona iz Coulombovog zakona

Tok električnog polja kroz bilo kakvu zatvorenu površinu oko točkastog naboja Q, kao izvora električnog polja, uvijek je isti neovisno o obliku zatvorene površine $(\Phi_e = \Phi'_e)$.

Iz Coulombovog zakona vrijedi:

$$\vec{F} = \frac{Q_1\cdot Q_2}{4\pi\varepsilon\cdot R^3}\vec{R}\,; \qquad E = \frac{F}{Q}\,; \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\cdot R^2}\vec{a}_r = konst.$$

Vektor $\vec{D}$ je također konstantnog iznosa i radijalan:

$$\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\cdot R^2}\vec{a}_r = konst.$$

Normala na kuglu je radijalan vektor $(\vec{n} = \vec{a}_r)$ pa vrijedi:

$$\vec{D}\cdot\vec{n} = \frac{Q}{4\pi\cdot R^2}\vec{a}_r\cdot\vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi\cdot R^2} = konst.$$

Pa je električni tok kroz zatvorenu površinu S jednak:

$$\Phi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint\!\!\oint_S \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} dS = \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} \oint\!\!\oint_S dS = \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} S = \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} \cdot 4\pi \cdot R^2 = Q$$

Ukupni električni tok kroz zatvorenu površinu koja obuhvaća naboj Q po iznosu je jednaka naboju Q.

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V \rho_s \cdot dV$$

21. Skalarni električni potencijal – veza skalarnog električnog potencijala i rada.

Električni potencijal u nekoj točki električnog polja je omjer potencijalne energije naboja u toj točki polja i iznosa tog naboja:

$$\varphi(a) = \frac{W_p(a)}{q}$$

Potencijalna energija naboja q u nekoj točki električnog polja a jednaka je radu kojeg je potrebno izvršiti da bi se naboj q iz beskonačnosti doveo u točku polja a, suprotno djelovanju sile električnog polja:

$$W_p(a) = -\int_\infty^a q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Promjena potencijalne energije pri pomaku naboja q od točke a do točke b je ***utrošeni rad***.

$$W_p(a) + W_p(b) = -q\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \cdot (\varphi(a) - \varphi(b)) = q \cdot U_{ab}$$

22. Potencijal točkastog naboja; Potencijal jednoliko nabijene dužine.

Jakost električnog polja točkastog naboja Q je:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot r^2} \vec{a}_r$$

Izračun potencijala neovisan je o putu integracije pa uzimamo radijalni jer je najkraći $d\vec{l} = dr \cdot \vec{a}_r$. Potencijal točke koja je na udaljenosti r od točkastog naboja je:

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_\infty^r \frac{1}{r^2} \cdot \vec{a}_r \cdot \vec{a}_r \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot r}$$

Kada je naboj raspodijeljen po liniji l sa zadanom gustoćom λ, na diferencijalno maloj dužini dl se nalazi diferencijalna količina naboja $dQ = \lambda \cdot dl$. Ukupni potencijal se izračunava integriranjem diferencijalnih naboja dQ po liniji l.

$$\varphi(r) = \int_l \frac{dQ}{4\pi\varepsilon R} = \int_l \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\varepsilon R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\lambda \cdot dl}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\lambda \cdot dl}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$$

23. Izvod veze jakosti električnog polja i skalarnog električnog potencijala

Izvod sličan kao u 21. zadatku. ***Električni potencijal*** u nekoj točki električnog polja je omjer potencijalne energije naboja u toj točki polja i iznosa tog naboja:

$$\varphi(a) = \frac{W_p(a)}{q}$$

Potencijalna energija naboja q u nekoj točki električnog polja a jednaka je radu kojeg je potrebno izvršiti da bi se naboj q iz beskonačnosti doveo u točku polja a, suprotno djelovanju sile električnog polja:

$$W_p(a) = -\int_{\infty}^{a} q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Pa se dobije:

$$\varphi(a) = \frac{1}{q} \cdot \left(-\int_{\infty}^{a} q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = -\int_{\infty}^{a} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

24. Dokaz neovisnosti razlike potencijala o putu integracije.

Potencijalna energija u nekoj točki a iznosi:

$$W_p(a) = -\int_{a_{ref}}^{a} q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Rad je jednak razlici potencijalnih energija dviju točaka a i b integriranjem po nekom putu l:

$$W_p(a) - W_p(b) = -\int_{b}^{a} q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Isti rezultat bismo dobili integriranjem po putu l' koji ima obrnuti smjer od puta l:

$$W_p(b)-W_p(a)=-\int_a^b q\cdot\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Zbrojimo li te dvije relacije dobije se:

$$0=-\int_b^a q\cdot\vec{E}\cdot d\vec{l}-\int_a^b q\cdot\vec{E}\cdot d\vec{l}\Rightarrow\oint_l q\cdot\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

25. Izvod Ohmovog zakona u elementarnom obliku.

$$I=J\cdot S=\kappa\cdot E\cdot S\Rightarrow E=\frac{I}{\kappa\cdot S}$$

$$U=U_{AB}=-\int_B^A\vec{E}\cdot d\vec{l}=E\cdot l=\frac{I}{\kappa\cdot S}\cdot l$$

$$U=I\cdot R\,; \qquad R=\frac{l}{\kappa\cdot S}$$

26. Ponašanje slobodnih naboja u vodiču, u vanjskom električnom polju (relaksacija).

Ako se vodljivi materijal postavi u električno polje, električno polje će na slobodne elektrone u vodiču djelovati silom koja je usmjerena suprotno od smjera električnog polja.

Slobodni elektroni u vodiču će se grupirati uz površinu vodiča na dijelu vodiča gdje električno polje ulazi u vodič, a na suprotnoj strani preostat će manjak slobodnih elektrona.

Ova pojava se naziva ***električna influencija***, a razdvojeni pozitivni i negativni naboj na vodiču se naziva ***inducirani naboj.***

Inducirani naboj stvara u vanjskom prostoru svoje vlastito električno polje koje se superponira na vanjsko narinuto polje.

Djelovanje vanjskog električnog polja na vodič može se nadomjestiti odgovarajućom raspodjelom plošnog slobodnog naboja na vodiču gustoće σ_{inf} .

27. Izolatori u električnom polju – polarizacija; Gustoća električnog toka – definicija i veza s polarizacijom.

Izolatori ili dielektrični materijali ne posjeduju slobodne elektrone, već su njihovi elektroni vezani za matične atome i ne mogu ih pod djelovanjem vanjskog električnog polja napuštati.

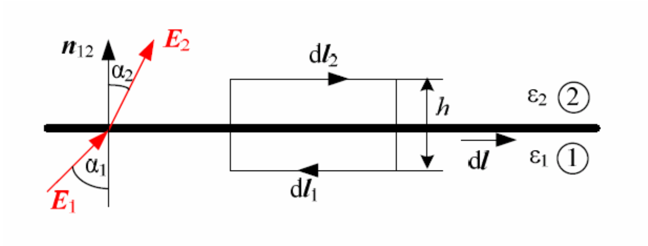
U dielektričnim materijalima, pod djelovanjem vanjskog električnog polja dolazi do poremećaja u raspodjeli pozitivnog i negativnog naboja koji se naziva ***električna polarizacija***.

Gustoća električnog toka (vektor električnog pomaka) je vektor istog smjera kao i vanjsko električno polje.

Služi za kvantificiranje utjecaja električnog polja na dielektrični materijal.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

28. Uvjeti na granici – Izvod uvjeta za jakost električnog polja.



$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad d\vec{l} = -d\vec{l}_1 = d\vec{l}_2$$

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 + (doprinos\_na\_stranicama\_h) = 0$$

Ako stranice h smanjujemo $(h \to 0)$ dobije se:

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 + (doprinos\_na\_stranicama\_h) \right\} = 0$$

Ako smanjimo stranice, smanjit ce se i doprinos na stranicama h:

$$-\vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 \Rightarrow \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

Vrijedi:

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = E_1 \cdot dl \cdot \cos(90° - \alpha_1) = E_1 \cdot dl \cdot \sin\alpha_1$$
$$\vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = E_2 \cdot dl \cdot \cos(90° - \alpha_2) = E_2 \cdot dl \cdot \sin\alpha_2$$

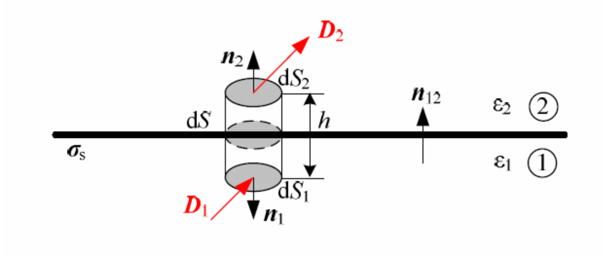
To prelazi u:

$$E_1 \cdot dl \cdot \sin\alpha_1 = E_2 \cdot dl \cdot \sin\alpha_2$$

Ako podijelimo s dl, dobije se:

$$E_1 \cdot \sin\alpha_1 = E_2 \cdot \sin\alpha_2 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t} \qquad \vec{n}_{12} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$$

29. Uvjeti na granici – Izvod uvjeta za gustoću električnog toka.



$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS = \iiint_V \rho_s \cdot dV$$

$$\vec{D}_1\cdot\vec{n}_1\cdot dS_1 + \vec{D}_2\cdot\vec{n}_2\cdot dS_2 + (doprinos\_toku\_kroz\_plašt) = \rho_s \cdot h \cdot dS$$

Ako visinu cilindra h smanjujemo $(h \to 0)$ dobije se:

$$\lim_{h\to 0}\left\{-\vec{D}_1\cdot\vec{n}_{12}\cdot dS_1 + \vec{D}_2\cdot\vec{n}_{12}\cdot dS_2 + (doprinos\_toku\_kroz\_plašt)\right\} = \lim_{h\to 0}\{\rho_s \cdot h \cdot dS\}$$

Kada smanjimo visinu cilindra h, smanjit će se i doprinos toku kroz plašt cilindra:

$$\vec{D}_1\cdot\vec{n}_{12}\cdot dS_1 + \vec{D}_2\cdot\vec{n}_{12}\cdot dS_2 = \rho_s \cdot h \cdot dS$$

Podijelimo li s dS, na desnoj strani dobijemo plošnu gustoću slobodnog naboja σ_s:

$$\vec{n}_{12}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_s$$

Ako na granici nema slobodnog naboja $\sigma_s = 0$, onda su normalne komponente vektora gustoće električnog toka $\vec{D}$ s obje strane granice jednake:

$$\vec{n}_{12}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

30. Pločasti kondenzator nabijen i odspojen od izvora – promjena napona, energije i kapaciteta s razmicanjem ploča.

Razmicanjem ploča nabijenog i odspojenog kondenzatora d se povećava pa stoga:

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d}$$ - kapacitet opada

$$U = \frac{Q}{C} = Q \cdot \frac{d}{\varepsilon \cdot S}$$ - napon raste

$$W = \frac{1}{2}\cdot Q \cdot U = \frac{1}{2}\cdot Q^2 \cdot \frac{d}{\varepsilon \cdot S}$$ - energija raste

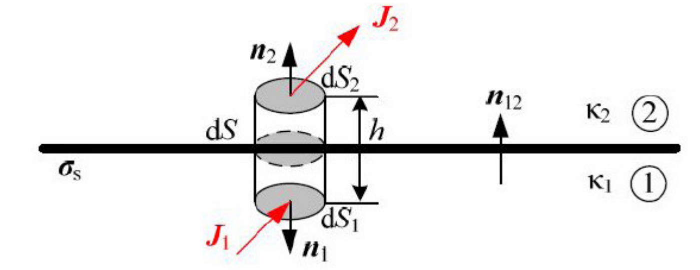
1. **Jednadžbe statičkog strujnog polja i uvjeti na granici dvaju vodiča.**

Prema analogiji strujnog polja i statičkog električnog polja jednadžbe strujnog polja glase:

$$\nabla\cdot\vec{J}=0\Rightarrow\oint\!\!\!\oint_S\vec{J}\cdot\vec{n}\cdot dS=0\qquad\vec{J}=\kappa\cdot\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{E}=0\Rightarrow\oint_c\vec{E}\cdot d\vec{l}=0\qquad\vec{E}=-\nabla\varphi$$

Uvjeti na granici:



$$n_{12}=-n_1=n_2\qquad dS=dS_1=dS_2\qquad\vec{n}_{12}\cdot\left(\vec{J}_2-\vec{J}_1\right)=-\frac{d\sigma_s}{dt}$$

Normalna komponenta vektora gustoće struje $\vec{J}$ mijenja se na granici za iznos vremenske promjene gustoće plošnog slobodnog naboja na granici. Ako na granici nema slobodnog naboja $\sigma_s=0$ ili se on ne mijenja u vremenu $d\sigma_s/dt=0$, onda su normalne komponente vektora gustoće struje $\vec{J}$ s obje strane granice jednake.

$$\oint\!\!\!\oint_S\vec{J}\cdot\vec{n}\cdot dS=0\Rightarrow\vec{n}_{12}\cdot\left(\vec{J}_2-\vec{J}_1\right)=0\qquad J_{1n}=J_{2n}\Rightarrow\kappa_1E_{1n}=\kappa_2E_{2n}\Rightarrow\frac{E_{1n}}{E_{2n}}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

$$\oint_c\vec{E}\cdot d\vec{l}=0\Rightarrow\vec{n}_{12}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0\qquad E_{1t}=E_{2t}\Rightarrow\frac{J_{1t}}{\kappa_1}=\frac{J_{2t}}{\kappa_2}\Rightarrow\frac{J_{1t}}{J_{2t}}=\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

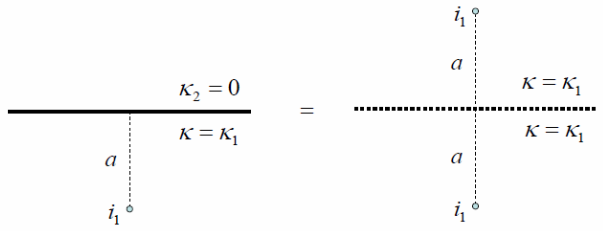
2. **Analogija statičkog strujnog polja i statičkog električnog polja i odslikavanje u statičkom strujnom polju.**

$$D\to J\,;\quad\varepsilon\to\kappa\,;\quad\Phi\to I\,;\quad E\to E\,;\quad\varphi\to\varphi$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=0\Rightarrow\oint\!\!\!\oint_S\vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS=0\qquad\vec{D}=\varepsilon\cdot\vec{E}\qquad\Phi=D\cdot S$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=0\Rightarrow\oint\!\!\!\oint_S\vec{J}\cdot\vec{n}\cdot dS=0\qquad\vec{J}=\kappa\cdot\vec{E}\qquad I=J\cdot S$$

Metoda odslikavanja statičkog strujnog polja je analogna metodi odslikavanja statičkog električnog polja, jedino što je u ovom slučaju odslikana vrijednost istog predznaka kao i originalna.



3. Gubici snage u vodiču u statičkom strujnom polju.

Gubitak energije u statičkom strujno polju od točke A do točke B:

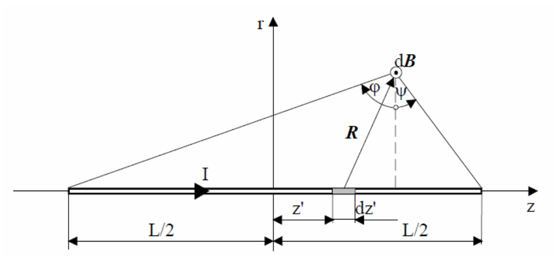
$$dW = dq \cdot [\varphi(A) - \varphi(B)] = \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot dV \cdot dt$$

Gubitak snage od točke A do točke B:

$$P = \frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot dV \qquad \nabla \cdot \left(\varphi \cdot \vec{J}\right) = \varphi \cdot \nabla \cdot \vec{J} + (\nabla \cdot \varphi) \cdot \vec{J} = 0 - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$P = -\iiint_V \nabla \cdot \left(\varphi \cdot \vec{J}\right) \cdot dV = -\oint\!\!\oint_S \varphi \cdot \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS = I \cdot \varphi_1 - I \cdot \varphi_2 = I \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = I \cdot U = I^2 \cdot R$$

4. Biot-Savartov zakon i magnetska indukcija kratke ravne strujnice.



$$\vec{r} = r \cdot \vec{a}_r + z \cdot \vec{a}_z \qquad d\vec{l} = dz' \cdot \vec{a}_z$$

$$\vec{r}' = z' \cdot \vec{a}_z \qquad d\vec{l} \times \vec{R} = r \cdot dz' \cdot \vec{a}_\alpha$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = r \cdot \vec{a}_r + (z - z') \cdot \vec{a}_z$$

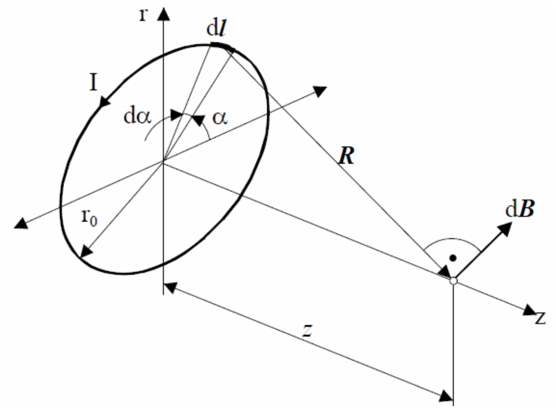
Biot-Savart: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|^3}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{r \cdot dz \cdot \vec{a}_\alpha}{\left[r^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d\vec{B} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{r \cdot dz \cdot \vec{a}_\alpha}{\left[r^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} = \vec{a}_\alpha \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \left[\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} \right]$$

$$\vec{B} = \vec{a}_\alpha \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} [\sin\varphi + \sin\psi]$$

5. Biot-Savartov zakon i magnetska indukcija na osi kružne strujnice.



$$\vec{r} = z \cdot \vec{a}_z \qquad \vec{R} = z \cdot \vec{a}_z - r_0 \cdot \vec{a}_r$$

$$\vec{r}' = r_0 \cdot \vec{a}_r \qquad d\vec{l} = \vec{a}_\alpha \cdot r_0 \cdot d\alpha$$

$$d\vec{l} \times \vec{R} = \vec{a}_\alpha \times \left(z \cdot \vec{a}_z - r_0 \cdot \vec{a}_r\right) \cdot r_0 \cdot d\alpha = \left(z \cdot \vec{a}_r + r_0 \cdot \vec{a}_z\right) \cdot r_0 \cdot d\alpha$$

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi} d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z\vec{a}_r + r_0 \cdot \vec{a}_z}{\left[r^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \cdot r_0 \cdot d\alpha = B_r \cdot \vec{a}_r + B_z \cdot \vec{a}_z$$

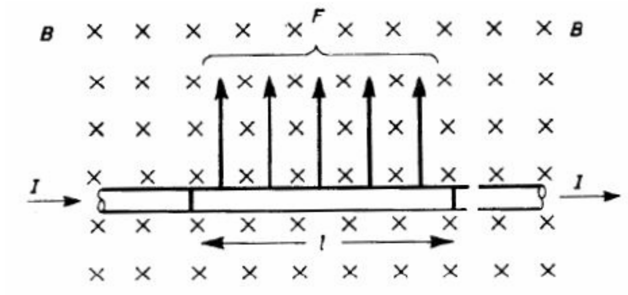
$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{r_0^2 \cdot \vec{a}_z}{\left[r^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r_0^2}{2 \cdot \left[r^2 + (z + z')^2\right]^{3/2}} \cdot \vec{a}_z$$

$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{z}{\left[r^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \cdot r_0 \int_0^{2\pi} \vec{a}_r \cdot d\alpha \qquad \vec{a}_r = \vec{a}_x \cdot \cos\alpha + \vec{a}_y \cdot \sin\alpha$$

$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{z}{\left[r^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \cdot r_0 \int_0^{2\pi} \left(\vec{a}_x \cdot \cos\alpha + \vec{a}_y \cdot \sin\alpha\right) \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{z}{\left[r^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \cdot (0 - 0) = 0$$

$$\vec{B} = B \cdot \vec{a}_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r_0^2}{2 \cdot \left[r^2 + (z + z')^2\right]^{3/2}} \cdot \vec{a}_z$$

6. **Sila na strujni element u magnetskom polju.**



Za homogeno magnetsko polje vrijedi:

$$\vec{f} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \qquad \vec{F} = N \cdot \vec{f} = n \cdot l \cdot S \cdot q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$dQ = N \cdot q = n \cdot l \cdot S \cdot q = n \cdot v \cdot dt \cdot S \cdot q \qquad I = \frac{dQ}{dt} = n \cdot v \cdot S \cdot q$$

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

Ako magnetsko polje nije homogeno ili ako vodič nije ravan:

$$d\vec{F} = I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B}) \qquad \vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})$$

7. **Jednadžbe statičkog magnetskog polja u diferencijalnom obliku i integralnom obliku.**

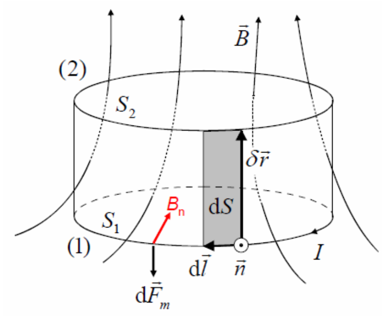
Gaussov zakon za magnetsko polje:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$

Iz Biot-Savartovog zakona se dobije:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

8. Energija pohranjena u magnetskom polju izražena pomoću magnetskog toka.



Pri pomaku strujne petlje iz položaja (1) u položaj (2) na $d\vec{l}$ djeluje sila:

$$d\vec{F} = I \cdot \left(d\vec{l} \times \vec{B}\right)$$

Pri tome se obavi rad:

$$\delta W = d\vec{F} \cdot \delta\vec{r} = -I \cdot \left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) \cdot \delta\vec{r} = -I \cdot \vec{B} \cdot \left(\delta\vec{r} \times d\vec{l}\right) = -I \cdot \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Magnetski tok koji kroz dS uđe u valjak kroz plašt je:

$$\delta\Phi_{pl} = -\vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Ukupno povećanje energije iz položaja (1) u položaj (2) je:

$$dW = I \cdot d\Phi_{pl} = I \cdot \left(\Phi_2 - \Phi_1\right)$$

9. Magnetska energija sustava strujnih petlji izražena pomoću vektorskog magnetskog potencijala.

Za skupinu n strujnica vrijedi:

$$W = \sum_{i=1}^{n} I_i \cdot \Phi_i$$

Za prostorno raspoređenu struju vrijedi:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} \oint_{c_i} \vec{A}_j \cdot d\vec{l}_i \qquad I_i = \iint_{S_i} \vec{J}_i \cdot \vec{n}_i \cdot dS_i$$

Konačno vrijedi:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot dV$$

10. Magnetska energija sustava strujnih petlji izražena pomoću vektora magnetskog polja.

Kako vrijedi:

$$\nabla \cdot \left(\vec{H} \times \vec{A}\right) = \vec{A} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) - \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \vec{J} \cdot \vec{A} - \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Pa slijedi:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dV + \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot \left(\vec{H} \times \vec{A}\right) dV$$

Ako V obuhvaća cijeli prostor polja:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dV = \frac{\mu}{2} \iiint_V \left|\vec{H}\right|^2 \cdot dV$$

11. Magnetska energija u nelinearnim materijalima i gubici zbog histereze.

Za nelinearne materijale vrijedi:

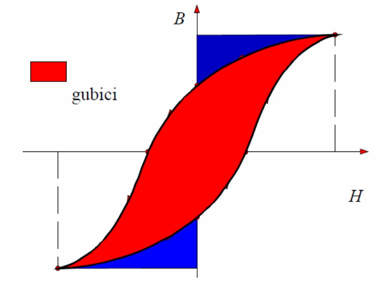
$$dW = i \cdot d\Phi = i \iint_S d\vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Kako je:

$$i = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} \qquad \vec{n} \cdot d\vec{l} = dl \qquad dS \cdot dl = dV$$

Slijedi:

$$dW = \iiint_V \vec{H} \cdot d\vec{B} \cdot dV$$



Gubici nastaju zbog histereze, tj. pojave da B zaostaje za H, te da krivulja magnetiziranja nije ista za rastuće i padajuća polja.

12. Induktivitet strujne petlje.

Vrijedi:

$$W = \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \Rightarrow L = \frac{1}{I^2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} \cdot dV$$

Pomoću vektorskog magnetskog potencijala određuje se:

$$L = \frac{1}{I^2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot dV$$

Za tanke strujne petlje vrijedi:

$$\vec{J} \cdot dV = I \cdot d\vec{l} \Rightarrow L = \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}{I} = \frac{\Phi}{I}$$

Kod petlji sa N namotanih zavoja:

$$\psi = N \cdot \Phi \Rightarrow L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{\psi}{I}$$

13. Međuinduktivitet.

Omjer magnetskog toka obuhvaćenog jednim strujnim krugom Φ_1 i struje drugog strujnog kruga I_2 koja je proizvela tok Φ_1 na prvom strujnom krugu naziva se **međuinduktivitet**.

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

14. Odnos međuinduktiviteta i samoinduktiviteta dviju strujnih petlji.

Ako se petlja prvog strujnog kruga sastoji od N_1 zavoja, tada će njen ukupni magnetski tok, kao i dio toka koji prelazi u drugu petlju biti N_1 puta veći:

$$\Phi_{1uk} = N_1 \cdot \Phi_1 \qquad \Phi_{21uk} = N_1 \cdot \Phi_{21} = k_1 \cdot N_1 \cdot \Phi_1 = k_1 \cdot \Phi_{1uk}$$

Ako se petlja drugog strujnog kruga sastoji od N_2 zavoja, tada će ukupni magnetski tok kojeg ona obuhvaća biti N_2 puta veći:

$$\psi_{21uk} = N_2 \cdot \Phi_{21uk} = N_1 \cdot N_2 \cdot \Phi_{21} \qquad M_{21} = \frac{\psi_{21uk}}{I_1} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1}$$

Analogno tome vrijedi za prvi i drugi strujni krug:

$$M_{12} = k_2 \cdot N_1 \cdot \frac{L_2}{N_2} \qquad M_{21} = k_1 \cdot N_2 \cdot \frac{L_1}{N_1} \qquad M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

15. Magnetski krug.

Prostor polja možemo podijeliti u sustav elementarnih cijevi (silocijevi). Magnetski tok kroz tu cijev je konstantan. Elementarna silocijev je zatvorena sama u sebe. Njena permeabilnost i presjek se mogu mijenjati duž cijevi.

Za zatvorenu krivulju kroz os te cijevi vrijedi:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = N \cdot I$$

16. Analogija magnetskog kruga i kruga istosmjerne struje.

U osi elementarne silocijevi su $\vec{H}$ i $d\vec{l}$ kolinearni pa vrijedi:

$$\oint_c \frac{B}{\mu} \cdot dl = \oint_c \frac{B \cdot dS}{\mu \cdot dS} \cdot dl = \oint_c \frac{d\Phi}{\mu \cdot dS} \cdot dl = N \cdot I$$

Kako je tok u silocijevi konstantan vrijedi:

$$d\Phi \oint_C \frac{dl}{\mu \cdot dS} = N \cdot I \Rightarrow d\Phi = \frac{N \cdot I}{\oint_C \frac{dl}{\mu \cdot dS}}$$

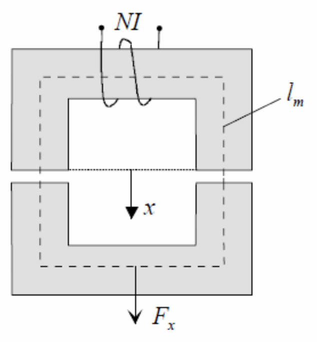
Za cijevi konačnog presjeka gdje je $N \cdot I$ magnetomotorna sila, a $\oint_c \frac{dl}{\mu \cdot S}$ magnetski otpor vrijedi:

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{\oint_c \frac{dl}{\mu \cdot S}}$$

Ovaj izraz je analogan Ohmovom zakonu za istosmjerni krug gdje je U elektromagnetska sila, a $\oint_c \frac{dl}{\kappa \cdot S}$ električni otpor.

$$I = \frac{U}{\oint_c \frac{dl}{\kappa \cdot S}}$$

17. Magnetski krug elektromagneta.

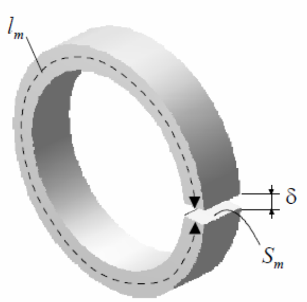


$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot I \qquad H_m \cdot l_m + 2H_\delta \cdot \delta = N \cdot I \qquad B = B_m = B_\delta$$

$$\frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot l_m + 2\frac{B}{\mu_0} \cdot \delta = N \cdot I \qquad B = \frac{N \cdot I}{\frac{l_m}{\mu_0 \cdot \mu_r} + 2\frac{\delta}{\mu_0}} \qquad \Phi = B \cdot S = \frac{N \cdot I}{\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{l_m}{S} + \frac{2}{\mu_0} \cdot \frac{\delta}{S}}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot N \cdot I \cdot \Phi \qquad \vec{F_x} = \vec{a_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} W_x = \vec{a_x} \cdot \frac{\partial}{\partial \delta} W_x = \ldots = -\vec{a_x} \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot S$$

18. Magnetski krug permanentnog magneta.



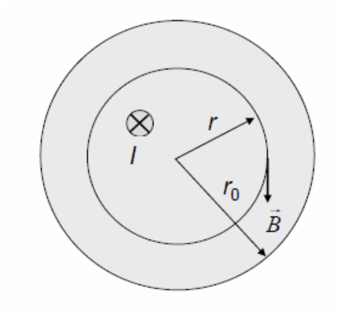
$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot I = 0 \qquad H_m \cdot l_m + H_\delta \cdot \delta = 0 \qquad B = B_m \qquad B = \frac{-H_m \cdot \mu_0 \cdot l_m}{\delta}$$

$$\Phi = B \cdot S = \frac{-H_m \cdot \mu_0 \cdot l_m \cdot S}{\delta} \qquad \vec{F_x} = \vec{a_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} W_x = \vec{a_x} \cdot \frac{\partial}{\partial \delta} W_x = \ldots = -\vec{a_x} \cdot \frac{H_m \cdot \mu_0 \cdot l_m \cdot S}{\delta^2}$$

19. Ampereov kružni zakon i polje beskonačno dugog ravnog vodiča polumjera R protjecanog strujom I jednoliko raspoređenom po presjeku vodiča.

Ampereov kružni zakon glasi:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \Rightarrow \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS = \mu_0 \cdot I$$



$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS \qquad \vec{B} = B \cdot \overrightarrow{a_\alpha} \qquad d\vec{l} = r \cdot d\alpha \cdot \overrightarrow{a_\alpha}$$

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot \vec{J} \cdot r^2 \cdot \pi \qquad \vec{J} = \frac{I}{r_0^2 \cdot \pi} \qquad \vec{B} = \overrightarrow{a_\alpha} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r}{2\pi \cdot r_0^2}$$

20. Vektorski magnetski potencijal, diferencijalna jednadžba i proračun tokova u magnetskom polju.

Temeljni zakoni statičkog magnetskog polja u vakuumu i opći identitet:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \qquad \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0 \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

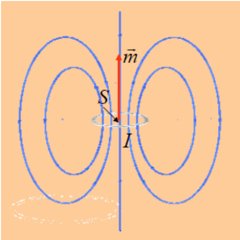
Korištenjem Coulumbovog baždarenja dobivamo:

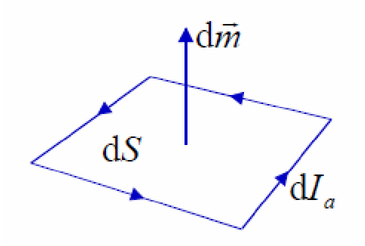
$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = \mu_0 \cdot \vec{J} \qquad \Delta\vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{J}$$

Magnetski tok:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

21. Magnetizacija i amperske struje.





Pomoću magnetskog momenta $\vec{m}$ uvodimo magnetizaciju:

$$\vec{m} = \vec{n} \cdot S \cdot I \qquad \vec{M}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{\Delta V} \vec{m}_i}{\Delta V} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

Elementarni volumen tijela dV možemo nadomjestiti magnetskim dipolom protjecanim strujom I_a, koju nazivamo amperska struja:

$$d\vec{m} = \vec{M} \cdot dV = \vec{M} \cdot dl \cdot dS = (\vec{M} \cdot d\vec{l}) \cdot \vec{n} \cdot dS = dI \cdot \vec{n} \cdot dS \qquad dI_a = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

22. Jakost magnetskog polja i ponašanje materijala u magnetskom polju.

Iz ukupne amperske struje proizlazi Stokesov teorem:

$$I_a = \oint_c \vec{M} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}_a \cdot \vec{n} \cdot dS \qquad \nabla \times \vec{M} = \vec{J}_a$$

Magnetska indukcija u materijalu $\vec{B}$ jednaka je zbroju indukcije u vakuumu $\vec{B}_0$ stvorene slobodnim strujama vodiča $\vec{J}_s$ i indukcije $\vec{B}_a$ stvorene od dodatnog izvora amperskih struja $\vec{J}_a$:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_a \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{J}_s + \vec{J}_a) \qquad \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_s$$

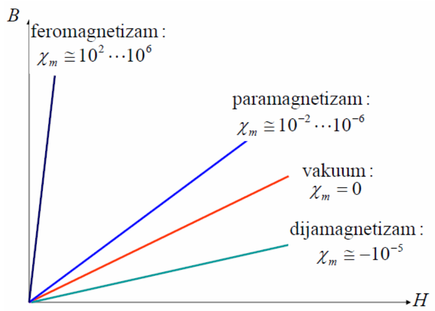
Uvodimo dodatni vektor jakosti magnetskog polja:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s$$

Za magnetske materijale, gdje je χ_m magnetska susceptibilnost, vrijedi:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{M} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

Ponašanje materijala u magnetskom polju:



Feromagnet – susceptibilnost je veliki pozitivan broj

Paramagnet – susceptibilnost je mali pozitivan broj

Dijamagnet – susceptibilnost je mali negativan broj

23. Uvjeti za vektore magnetskog polja na granici dva materijala.

Postupak je analogan onom za statičko električno polje.

Tangencijalna komponenta $\vec{H}$:

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right) = \vec{K}_s$$

Okomita komponenta $\vec{B}$:

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right) = 0$$

24. Indirektno mjerenje magnetskog polja u feromagnetskoj torusnoj jezgri u pokusu snimanja dinamičke petlje histereze.

Ako primarna zavojnica ima N_1 zavoja, namotanih oko torusne jezgre načinjene od feromagnetskog materijala, za srednju duljinu silnica l_{sr} vrijedi Ampereov zakon:

$$l_{sr} = 2\pi \cdot R_{sr} \qquad \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = N_1 \cdot I$$

Jakost magnetskog polja H možemo zbog simetrije smatrati stalnim u svim točkama na kružnici l_{sr}, pa vrijedi:

$$H \cdot l_{sr} = N_1 \cdot I \qquad H = \frac{N_1 \cdot I}{2\pi \cdot R_{sr}}$$

25. Indirektno mjerenje magnetske indukcije u feromagnetskoj torusnoj jezgri u pokusu snimanja dinamičke petlje histereze.

Oko iste jezgre iz prethodnog zadatka namotana je i sekundarna zavojnica s N_2 zavoja, te će se oko nje na sekundarnoj strani inducirati elektromotorna sila, tj. napon:

$$e(t) = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -N_2 \cdot S \cdot \frac{dB(t)}{dt} \qquad u_2(t) = -e(t) \qquad B(t) = \frac{1}{N_2 \cdot S} \int u_2(t)dt$$

$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = \frac{N_2 \cdot S}{R_2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} \qquad B(t) = \frac{R_2}{N_2 \cdot S} \int i_2(t)dt$$

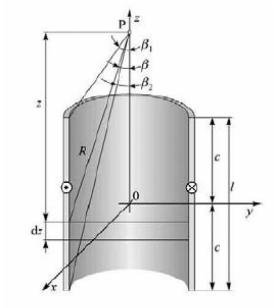
Napon i struja na kondenzatoru su povezani izrazom:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_2(t)dt$$

Konačno slijedi:

$$B(t) = \frac{R_2 \cdot C}{N_2 \cdot S} \cdot u_C(t)$$

26. Točni proračun magnetske indukcije na osi jednoslojne zavojnice.



Prema Biot-Savartovom zakonu magnetska indukcija u smjeru osi z u točki P je:

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r^2}{2 \cdot \left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

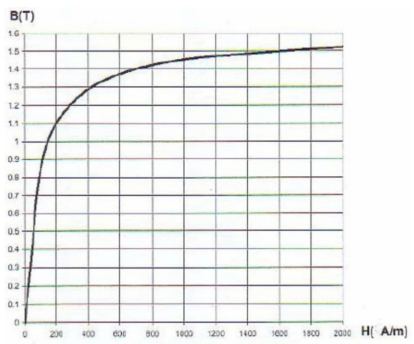
Ukupna magnetska indukcija na osi z dobiva se zbrajanjem polja pojedinih strujnica:

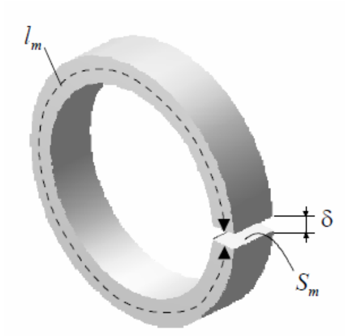
$$dB_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot r^2}{2 \cdot l \cdot \left(r^2 + z^2\right)^{3/2}} \cdot dz \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot l} \left[\frac{z + c}{\sqrt{(z+c)^2 + r^2}} - \frac{z - c}{\sqrt{(z-c)^2 + r^2}} \right]; \qquad c = \frac{l}{2}$$

U središtu zavojnice $(z = 0)$ magnetska indukcija iznosi:

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2 + r^2}}$$

27. Grafoanalitičko rješavanje magnetskog kruga sa zračnim rasporom.



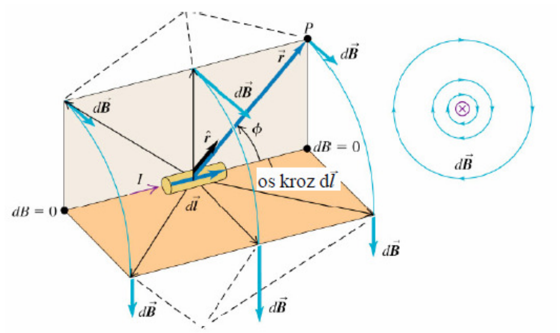


Grafički dio rješavanja magnetskog kruga se izvodi iščitavanjem iz krivulje magnetizacije.

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} \qquad H_m = \frac{B_m}{\mu_0 \cdot \mu_m} \qquad \Phi_m = \Phi_\delta \Rightarrow B_m \cdot S_m = B_\delta \cdot S_\delta \qquad S_m = S_\delta$$

$$\Phi = N \cdot I = H_m \cdot l_m + H_\delta \cdot \delta \qquad B_m = \frac{\mu_0}{\delta} \cdot \left(N \cdot I - H_m \cdot l_m\right)$$

28. Slika statičkog magnetskog polja - linije.



29. Snaga gubitaka i gubitci u pokusu snimanja dinamičke petlje histereze.

Volumna gustoća energije gubitaka u jezgri po jednom ciklusu magnetiziranja određena je površinom koju zatvara petlja histereze:

$$w = \oint_B H \cdot dB$$

Pa ukupna snaga gubitaka, gdje je V volumen jezgre, l_{sr} srednja duljina stranica u jezgri, S poprečni presjek jezgre, a f frekvencija izmjenične struje magnetiziranja, iznosi:

$$P = V \cdot w \cdot f = l_{sr} \cdot S \cdot w \cdot f$$

Specifični gubici izražavaju se kao snaga gubitaka po jedinici mase jezgre:

$$P_s = \frac{P}{m} = \frac{w \cdot f}{\rho}$$

30. Mjerenje energije linearne zavojnice pomoću spoja zavojnice i otpornika.

Za krug sa serijskim spojem zavojnice i otpornika vrijedi:

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad u_L(t) = U \cdot e^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

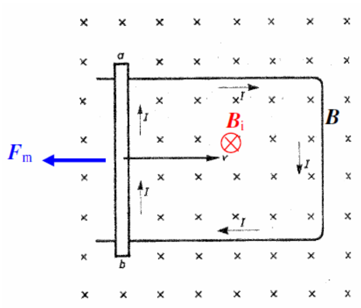
$$p_L(t) = u_L(t) \cdot i(t) = \frac{U^2}{R}\left(e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau}\right)$$

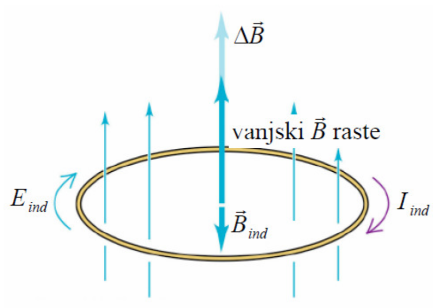
$$W = \int_0^\infty p_L(t) \cdot dt = \frac{U^2}{R}\left[-\tau \cdot e^{-t/\tau} + \frac{\tau}{2} \cdot e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{LI^2}{2}$$

1. **Faradayev zakon elektromagnetske indukcije i Lorentzovo pravilo.**

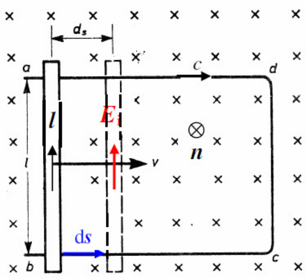
U Faradayevom zakonu je formulirano da će se električni učinci pojaviti samo ako dolazi do promjena u magnetskom polju.

Pomakom vodića u smjeru gibanja, smanjuje se magnetski tok jer se smanjuje površina kroz koju magnetski tok prolazi. Inducirana struja stvorit će stvorit će magnetsko polje $\vec{B}_{ind}$. Ukupna magnetska indukcija će se povećati čime će se pokušait kompenzirati smanjene magnetskog toka. Znači inducirana struje je takvog smjera da se suprotsavlja promjeni magnetskog toka. Ovo pravilo za induciranu struju naziva se **Lorentzovo pravilo** koje kaže da je predznak em. sile negativan jer se ona opire uzorku indukcije, tj. promjeni magnetskog toka.





2. **Induciranje napona zbog promjene toka i gibanja: integralni i diferencijalni oblik.**



Obiđemo li u smjeru kazaljke na satu zatvorenu konturu dobit ćemo inducirani napon:

$$u = -\oint_c \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

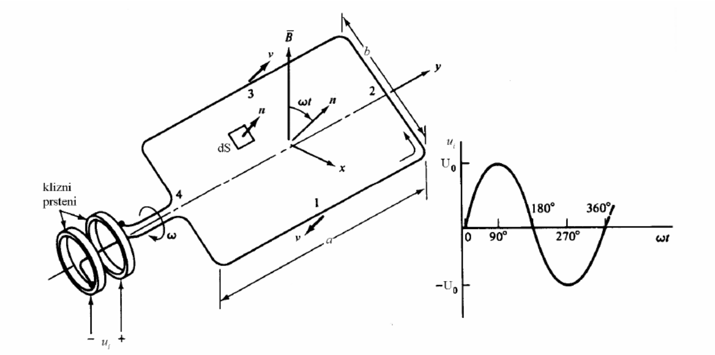
Ako na ovaj izraz primjenimo Stokesov teorem:

$$\int_S rot\vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

dobit ćemo inducirani napon u diferencijalnom obliku:

$$\nabla \times \vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

3. Načelo rada generatora.

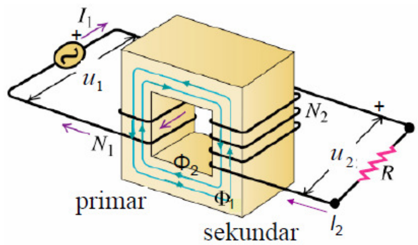


Generator je rotirajući sustav koji mehaničku energiju pretvara u električnu. Vodljivi zavoj koji zatvara površinu S rotira oko svoje osi u honmogenom magnetskom polju $\vec{B}$. Krajevi zavoja spojeni su na vodljive klizne prstenove koji rotiraju zajedno sa zavojem, a kontakt s vanjskim strujnim krugom se ostvaruje preko četkica koje klize po prstenovima.

Iznos induciranog napona iznosi za N takvih zavoja spojenih u seriju iznosi:

$$u_i = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

4. Načelo rada ransformatora.



Tipični transformator se sastoji od dva namota: primarnog s N_1 zavoja i sekundarnog s N_2 zavoja, namotanih na zajedničku jezgru načinjenu od feromagnetskih limova.

Ako kroz primarni krug teče vremenski promjenjiva struja i_m, a stezaljke sekundara su otvorene, primarna struja će stvoriti vremenski promjenjivi tok Φ_m kroz jezgru. Struja i_m se naziva struja magnetiziranja, a magnetski tok će u zavojima primarnog i sekunarnog namota inducirati napone:

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi_m}{dt} \qquad u_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Napon u_1 je inducirani napon primarnog namota koji je u ravnoteži s narinutim naponom izvora. Napon u_2 je napon otvorenih stezaljki sekundarnog namota. Njihov omjer jednak je omjeru broja zavoja:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow u_2 = u_1 \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

Ako zatvorimo strujni krug sekundara tako da na stezaljke sekundara npr. spojimo otpornik, kroz sekundarni namot će poteći struja i_2. Njen smjer je po Lorentzovom zakonu takav da stvara svoj magnetski tok suprotstavljen primarnom magnetskom. Da bi se održao magnetski tok u jezgri, iz izvora mora poteći dodatna struja i_1 takvog iznosa kojom će se poništiti magnetski tok sekundarne struje i_2. Omjer struja obrnuto je proporcionalan omjeru broja zavoja namota:

$$N_1 i_1 = N_2 i_2 \Rightarrow i_2 = i_1 \cdot \frac{N_1}{N_2}$$

Transformator služi za transformiranje električne energije jednih parametara (u_1, i_1) u električnu energiju drugih parametara (u_2, i_2).

$$p = u \cdot i \Rightarrow p_2 = u_2 \cdot i_2 = u_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot i_1 \cdot \frac{N_1}{N_2} = u_1 \cdot i_1 = p_1$$

5. Napon samoindukcije i međuindukcije.

Vremenski promjenijv magnetski tok Φ proizveden vremenski promjenjivom strujom i u strujnom krugu te tok ψ obuhvaćen istim tim strujnim krugom možemo izraziti preko induktiviteta:

$$L = \frac{\psi}{i} \Rightarrow \psi = L \cdot i$$

Prema tome inducirani napon je:

$$u_{ind} = \oint_c \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

Vremneski promjenjivi magnetski tok ψ_{21} proizveden vremenski promjenjivom strujom i_1 u jednom strujnom krugu i obuhvaćen drugim strujnim krugom možemo izraziti preko međuinduktiviteta $M_{21} = M$:

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} \Rightarrow \psi_{21} = M \cdot i_1$$

Inducirani napon u drugom strujnom krugu iznosi:

$$u_{ind2} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

6. **Maxwellovo proširenje kružnog zakona.**

Ampereov kružni zakon u diferencijalnom i integralnom obliku glasi:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Kontradikcija s jednadžbom kontinuiteta i Maxwellovo proširenje:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \nabla \cdot \vec{D} \Rightarrow \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

7. **Maxwellove jednadžbe u integralnom i diferencijalnom obliku.**

Coulombov zakon:

$$\iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V \rho \cdot dV \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Faradayev zakon:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Gaussov zakon:

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Ampereov zakon:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \vec{n} \cdot dS \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

8. **Poyntingov teorem.**

Ukupna trenutna snaga predana od elektromagnetskog polja slobodnim i vezanim nabojima, koji se uvijek nalaze u stanju gibanja, pretvara se u neki drugi oblik energije.

Toplina nastala gibanjem naboja predstavlja „gubitke energije“. *Načelo očuvanja energije* nalaže da snaga predana od elektromagnetskog polja nabojima u gibanju mora namiriti gubitke i iskazati kao smanjenje energije polja, tj. tok prenesene snage. Što znači da postoji elektromagnetska energija koja je pohranjena u samom polju. Poyntingov teorem iskazuje zakon o očuvanju energije za to elektromagnetsko polje, te vrijedi samo u elektrodinamici. S matematičke točke gledišta on je izravna posljedica Maxwellovih jednadžbi

Sila naboja q koji se giba brzinom $\vec{v}$ u polju $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$:

$$\vec{F}=q\cdot\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Na putu $d\vec{l}$ pritom obavi rad:

$$dW=\vec{F}\cdot d\vec{l}=q\cdot\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l}=q\cdot\left(\vec{E}+\frac{d\vec{l}}{dt}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l}=q\cdot\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Polje je naboju predalo snagu:

$$\frac{dW}{dt}=q\cdot\vec{E}\cdot\frac{d\vec{l}}{dt}=q\cdot\vec{E}\cdot\vec{v}=\rho\cdot dV\cdot\vec{E}\cdot\vec{v}=\rho\cdot\vec{v}\cdot\vec{E}\cdot dV=\vec{J}\cdot\vec{E}\cdot dV\rightarrow P=\iiint_V\vec{J}\cdot\vec{E}\cdot dV$$

Konačno Poyntingov vektor predstavlja tok snage:

$$P=\oint\!\!\oint_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{n}\cdot dS=\oint\!\!\oint_S\vec{N}\cdot\vec{n}\cdot dS \qquad \vec{N}=\vec{E}\times\vec{H}$$

9. Maxwellove jednadžbe u fazorskoj domeni.

Sve veličine polja su vremenski sinusno promjenjive:

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}_x\left(\vec{r}\right)\cdot\cos\left[\omega_0 t+\psi_x\left(\vec{r}\right)\right]\cdot\vec{a}_x+\vec{E}_y\left(\vec{r}\right)\cdot\cos\left[\omega_0 t+\psi_y\left(\vec{r}\right)\right]\cdot\vec{a}_y+\vec{E}_z\left(\vec{r}\right)\cdot\cos\left[\omega_0 t+\psi_z\left(\vec{r}\right)\right]\cdot\vec{a}_z$$

Vrijedi da je:

$$A\cdot\cos(\omega t+\psi)=\mathrm{Re}\left\{Ae^{j\psi}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\underline{A}e^{j\omega t}\right\}$$

Pa je:

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\mathrm{Re}\left\{\underline{\vec{E}}\left(\vec{r}\right)\cdot e^{j\omega_0 t}\right\}\rightarrow\frac{\partial\vec{E}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}=\mathrm{Re}\left\{j\cdot\omega\cdot\underline{\vec{E}}\left(\vec{r}\right)\cdot e^{j\omega_0 t}\right\}$$

Pa sustav Maxwellovi jednadžbi u fazorskoj domeni ima oblik:

$$\nabla\times\underline{\vec{E}}=-j\omega\underline{\vec{B}} \qquad \nabla\times\underline{\vec{H}}=\underline{\vec{J}}+j\omega\underline{\vec{D}} \qquad \nabla\cdot\underline{\vec{D}}=\underline{\rho}_s \qquad \nabla\cdot\underline{\vec{B}}=0$$

10. Kompleksni oblik Poyntingovog teorema.

Srednje vrijednosti polja su:

$$\vec{E} = E_x \cdot \cos\left[\omega_0 t + \psi_{E_x}\left(\vec{r}\right)\right] \cdot \vec{a}_x + E_y \cdot \cos\left[\omega_0 t + \psi_{E_y}\left(\vec{r}\right)\right] \cdot \vec{a}_y + E_z \cdot \cos\left[\omega_0 t + \psi_{E_z}\left(\vec{r}\right)\right] \cdot \vec{a}_z$$

$$\vec{H} = H_x \cdot \cos\left[\omega_0 t + \psi_{H_x}\left(\vec{r}\right)\right] \cdot \vec{a}_x + H_y \cdot \cos\left[\omega_0 t + \psi_{H_y}\left(\vec{r}\right)\right] \cdot \vec{a}_y + H_z \cdot \cos\left[\omega_0 t + \psi_{H_z}\left(\vec{r}\right)\right] \cdot \vec{a}_z$$

Iz srednje vrijednosti Poyntingova vektora i identiteta:

$$\vec{N}_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) dt \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\omega t + \psi_E) \cdot \cos(\omega t + \psi_H) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t + \psi_E + \psi_H) + \cos(\psi_E - \psi_H)\right] = \frac{1}{2}\cos(\psi_E - \psi_H)$$

Slijedi da je:

$$\begin{aligned}\vec{N}_{sr} &= \frac{1}{2}\left[E_y \cdot H_z \cdot \cos\left(\psi_{E_y} - \psi_{H_z}\right) - E_z \cdot H_y \cdot \cos\left(\psi_{E_z} - \psi_{H_y}\right)\right] \cdot \vec{a}_x + \\ &+ \frac{1}{2}\left[E_z \cdot H_x \cdot \cos\left(\psi_{E_z} - \psi_{H_x}\right) - E_x \cdot H_z \cdot \cos\left(\psi_{E_x} - \psi_{H_z}\right)\right] \cdot \vec{a}_y + \\ &+ \frac{1}{2}\left[E_x \cdot H_y \cdot \cos\left(\psi_{E_x} - \psi_{H_y}\right) - E_y \cdot H_x \cdot \cos\left(\psi_{E_y} - \psi_{H_x}\right)\right] \cdot \vec{a}_z\end{aligned}$$

$$\vec{N}_{sr} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\left(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right)\right\}$$

11. Jednadžbe ravnog vala.

Razmotrimo prostor u kojem ne postoji izvor polja $(\rho_s = 0, J_s = 0)$ ispunjen idealnim dielektrikim $(\varepsilon = konst, \mu = konst, \kappa = 0)$. Maxwellove jednadžbe u tom slučaju imaju oblik:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Primjenom raznih operatora i matematičkih izraza dobijemo dobijemo vektorsku valnu jednadžbu:

$$\Delta \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Rješenja ove jednadžbe koja ovise o vremenu i samo jednoj prostornoj konstanti se nazivaju **ravni valovi**. U prirodi takvi valovi ne postoje, ali na udaljenostima dalekima od izvora polja i tla, elektromagnetski valovi se mogu dobro približiti ravnim valovima.

12. Putujući val – brzhina širenja vala.

Svaka vrijednost polja se ponavlja u vremenskim intervalima $2\pi/\omega$. Broj ponavljanja u jednoj sekundi je frekvencija:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

U određenom trenutku $t = t_0$ prostorni period ponavljanja iznosi:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Taj interval zovemo valna dužina. Argumente funkcije kosinus zovemo faze:

$$\omega\left(t \mp z\sqrt{\mu\varepsilon}\right) + \varphi$$

Promatrač se mora gibati brzinom c da bi slijedio istu fazu. Tu brzinu zovemo i fazna brzina:

$$v_f = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

13. Valna impedancija.

Valna impedancija je omjer komponenate električnog i magnetskog polja:

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

U slučaju dielektrika, gdje je vodljivost σ jednaka nuli, izraz je sveden na:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

14. Sinusni ravni val – valna dužina i fazna konstanta.

Val se prostire brzinom:

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \lambda \cdot f$$

Ovaj izraz povezuje prostornu i vremensku promjenu polja u elektromagnetskom valu. Veličinu:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

nazivamo **fazna konstanta**. Ona je mjera brzine promjene faze s udaljenošću z u određenom trenutku $t = t_0$. Valnu dužinu možemo izraziti u funkciji fazne konstante:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad v_f = \frac{\omega}{\lambda}$$

15. Jednadžbe vala koji se giba u proizvoljnom smjeru.

Ako se val giba u proizvoljnom smjetru brzine promjene faze $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ su manje od brzine promjene faze u smjeru gibanja vala. Ako uvedemo vektore fazne konstante i položaja točke:

$$\vec{\beta} = \beta_x \cdot \vec{a}_x + \beta_y \cdot \vec{a}_y + \beta_z \cdot \vec{a}_z \qquad \vec{r} = x \cdot \vec{a}_x + y \cdot \vec{a}_y + z \cdot \vec{a}_z$$

Te finalno fazu i vektor jakosti električnog polja ravnog vala koji se prostire u proizvoljnom smjeru $\vec{\beta}$ možemo pisati:

$$\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \varphi \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \varphi\right)$$

16. Struja magnetiziranja zavojnice s feromagnetskom jezgrom.

Objašnjeno već kod načela rada transformatora, al eto opet:

Tipični transformator se sastoji od dva namota: primarnog s N_1 zavoja i sekundarnog s N_2 zavoja, namotanih na zajedničku lameliziranu jezgru – što znači da je jezgra načinjena od feromagnetskih limova umjesto od jedne masivne jezgre kako bi se smanjili gubici zagrijavanja nastali zbog generiranja vrtložnih struja u jezgri.

Ako kroz primarni krug teče vremenski promjenjiva struja i_m, a stezaljke sekundara su otvorene na sekundarnoj strani neće biti struje te će struja primara i_m u potpunosti služiti za magnetiziranje jezgre. Ta se struja još naziva i **struja magnetiziranja**.

17. Određivanje dielektrične konstante izolacije koaksijalnog kabela mjerenjem brzine prostiranja.

Koaksijalni kabel je prijenosni sustav u kojima su vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$ transverzalni (okomiti jedan na drugoga i okomiti na smjer širenja vala) i nemaj komponente u smjeru prostiranja vala. Fazna brzina iznosi:

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Uzmimo u obzir da je brzina svjetlosti u vakuumu:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3\cdot 10^8\ m/s$$

Te faznu brzinu u sredstvu u kojemu je relativna magnetska permeabilnost $\mu_r = 1$ izraziti:

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

I konačno dielektričnu konstantu izolacije kabela dobijemo preko izraza:

$$\varepsilon_r = \left(\frac{c}{v_f}\right)^2$$

18. Mjerenje promjene magnetskog toka pomoću elektromagnetske indukcije.

Inducirani napon je povezan s promjenom ulančenog magnetskog toka preko izraza:

$$u = \frac{d\psi}{dt}$$

Ako na stezaljke zavojnice spojimo otpornik, struja u krugu će biti: $i = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{1}{R}$

gdje je R ukupan otpor, koji je suma unutarnjeg otpora žice zavojnice i vanjskog otpornika. Integriramo li struju po vremenu, dobijamo ukupni naboj koji proteče krugom tijekom promjene magnetskog toka:

$$Q = \int i\cdot dt = \frac{1}{R}\int\frac{d\psi}{dt}dt = \frac{1}{R}\int d\psi = \frac{1}{R}\cdot(\psi_2 - \psi_1) = \frac{1}{R}\Delta\psi$$

Na ovaj način možemo odrediti promjenu ulančenog magnetskog toka iz naboja Q:

$$\Delta\psi = Q\cdot R$$

19. Određivanje međuinduktiviteta sustava zavojnica na temelju mjerenja ekvivalentnog induktiviteta serijskog spoja.

Međuinduktivitet u sustavu dviju zavojnica spojenih serijski može se izračunati kao:

$$M = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \frac{\psi_{21}}{I_2}$$

gdje su I_1 i I_2 struje kroz prvu odnosno drugu zavojnicu, a ψ_{12} je ulančeni magnetski tok kroz drugu zavojnicu stvoren strujom I_1, dok je ψ_{21} ulančeni magnetski tok kroz prvu zavojnicu stvoren strujom I_2.

Kako imamo dvije međuinduktivno povezane zavojnice spojene serijski i ako kroz njjih prtječe vremenski promjenjiva struja i, napon na serijskom spoju će biti:

$$u = L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + 2M \frac{di}{dt}$$

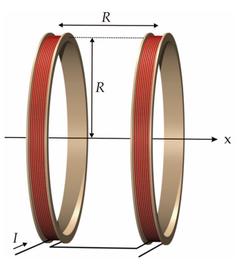
Kako kroz obje zavojnice protječe ista struja, naponi međuindukcije su isti i u zbroj dolaze s negativnim ili pozitivnim predznakom ovisno o međusobnom položaju zavojnica i smjeru motanja. Možemo izraziti ekvivalentni induktivitet serijskog spoja zavojnica:

$$L_{ekv} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Na taj način možemo mjerenjem ekvivalentnog induktiviteta odrediti međuinduktivitet zavojnica i to na način da izmjerimo ekvivalentni induktivitet te nakon toga jednu zavojnicu prspojimo tako da zamijenimo stezaljke pa ponovo izmjerimo ekvivalentni induktivitet i od većeg iznos oduzmemo manji:

$$\Delta L_{ekv} = L_1 + L_2 + 2M - L_1 - L_2 + 2M = 4M \Rightarrow M = \frac{\Delta L_{ekv}}{4}$$

20. Helmholtzovi svitci.



Helmholtzovi svitci se koriste za precizno dobivanje uniformnih (homogenih) magnetskih polja, kada prostor u kojem je polje uniformno mora biti lako dostupan.

U velikom dijelu prostora između svitaka polje se na njihovoj osi značajnije ne mijenja. Koriste se za generiranje vremenski stalnih magnetskih polja te za generiranje promjenjivih polja niskih frekvencija.