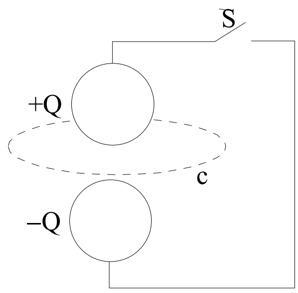
MAXWELLOVE JEDNADŽBE

Poopćenje Amperèovog kružnog zakona

Amperèov kružni zakon smo izveli za statička magnetska polja u obliku:

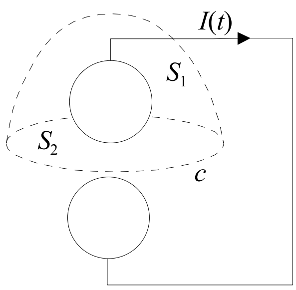
$$\oint_c \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I$$

što znači da je linijski integral vektora jakosti magnetskog polja $\vec{H}$ po bilo kojoj zatvorenoj krivulji jednak ukupnoj struji obuhvaćenoj tom krivuljom. Pokazali smo primjenu tog zakona na magnetskim poljima uzrokovanim istosmjernim strujama i budući da istosmjerne struje moraju teći u zatvorenim krugovima njegova primjena je bila jasna i nedvosmislena. Razmotrimo sada slijedeći primjer: dvije nabijene metalne kugle su spojene žicom uz otvorenu sklopku S (slika 1.):



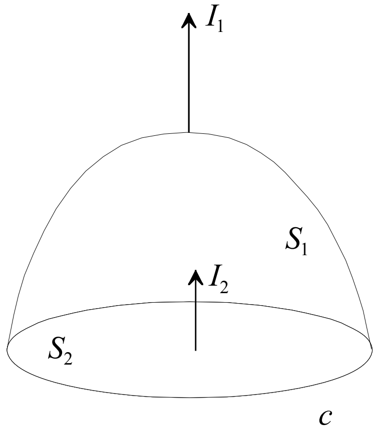
Slika 1.

Kad u nekom trenutku zatvorimo sklopku S poteći će struja kroz žicu. Krug u kojem teče ta struja nije zatvoren. Gibanje naboja (struja) postoji u žici, ali ne i u prostoru između kugli koji je ispunjen idealnim izolatorom. Struja kroz žicu će uzrokovati magnetsko polje, ali nije jasno kako se može Amperèov kružni zakon primijeniti na to polje budući da je teško reći da li zatvorena kontura c obuhvaća struju ili ne (slika 2.).



Slika 2.

Naime, Amperèov kružni zakon u obliku definiranom prethodnom jednadžbom pretpostavlja da struja teče u zatvorenim petljama. Ako se naboji nakupljaju ili nestaju u bilo kojem dijelu sustava, struja neće teći u zatvorenim konturama i Amperèov kružni zakon u tom obliku neće biti primjenjiv. Smjernicu za upotpunjivanje tog zakona možemo dobiti ako uočimo da poteškoća u definiranju struje obuhvaćene zatvorenom krivuljom c leži u činjenici da su površine S_1 i S_2 obrubljene istom krivuljom c, a da ih presijecaju različite struje (slika 2.). Razmotrimo sada općenitiji slučaj. Neka je krivulja c u regiji koja je djelomice ili u potpunosti vodljiva i neka ona obrubljuje dvije otvorene površine S_1 i S_2 (slika 3.).



Slika 3.

Ako struje I_1 i I_2 prolaze kroz te površine u naznačenom smjeru u svakom trenutku, onda za ukupni naboj Q u prostoru između S_1 i S_2 mora vrijediti:

$$I_2 - I_1 = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

U skladu s Gaussovim zakonom Q je jednak električnom toku koji izlazi iz tog međuprostora. Ako je Φ_{e1} električni tok kroz površinu S_1, a Φ_{e2} električni tok kroz S_2 (referentni smjerovi tokova su jednaki smjerovima struja), onda je

$$Q = \Phi_{e1} - \Phi_{e2}$$

Iz prethodne dvije jednadžbe dobije se:

$$I_2 - I_1 = \frac{\mathrm{d}\Phi_{e1}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Phi_{e2}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad I_1 + \frac{\mathrm{d}\Phi_{e1}}{\mathrm{d}t} = I_2 + \frac{\mathrm{d}\Phi_{e2}}{\mathrm{d}t}$$

pa iako obuhvaćena struja nije jednaka za sve površine obrubljene krivuljom c veličina ($I + \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}$) jest jednaka za sve takve površine. Stoga Amperèov kružni zakon u općenitom slučaju ima oblik:

$$\oint_c \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I + \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}$$

I je provodna struja koja prolazi kroz bilo koju površinu omeđenu sa c, a Φ_e je električni tok koji prolazi kroz tu površinu. Budući da je Φ_e u stvari tok vektora $\vec{D}$ kojeg nazivamo i vektor električnog pomaka, veličinu $\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}$ nazivamo *struja pomaka* iako ne predstavlja nikakav provodni tok naboja. U statičkim (vremenski nepromjenjivim) uvjetima $\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}$ je nula, pa Amperèov kružni zakon poprima prije izvedeni oblik.

U praznom prostoru ne postoje provodne struje (κ=0), ali može postojati električno polje. Ako se to električno polje mijenja u vremenu tada mora postojati i magnetsko polje koje je s električnim povezano jednadžbom:

$$\oint_c \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}$$

Već smo ranije vidjeli da u prostoru vremenski promjenjivog magnetskog toka mora postojati električno polje. Ta dva polja povezana su Faradayevim zakonom elektromagnetske indukcije

$$\oint_c \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$$

Sličnost ovih jednadžbi je velika, razlikuju se samo u predznaku. Te dvije jednadžbe usko povezuju električne i magnetske veličine u jedinstveni entitet: *elektromagnetsko polje*. Ta činjenica nije bila poznata do sredine 19. stoljeća. Tada je škotski matematičar i fizičar J.C. Maxwell (1831.-1879.) uočio nesklad Amperèova kružnog zakona i jednadžbe kontinuiteta. Primjenom identiteta:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) \equiv 0$$

na diferencijalni oblik Amperèova kružnog zakona

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \nabla \cdot \vec{J}_s \equiv 0$$

rezultira kontradikcijom jednadžbi kontinuiteta

$$\nabla \cdot \vec{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

Stoga je Maxwell korigirao Amperèov kružni zakon u oblik:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Primijenimo li Stokesov teorem na lijevu stranu ove jednadžbe dobivamo integralni oblik poopćenog Amperèovog kružnog zakona:

$$\oint_c \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \vec{J}_s \cdot \vec{n}\mathrm{d}S + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D} \cdot \vec{n}\mathrm{d}S$$

To otkriće, temeljeno na matematičkoj skladnosti i kasnije potvrđeno Hertzovim pokusima, jedan je od najvažnijih doprinosa u povijesti znanosti.

Poopćenje Ampèreova zakona koje je uveo Maxwell rezultiralo je fizikalno i matematički skladnim skupom fundamentalnih jednadžbi koje točno opisuju ponašanje vremenski promjenjivog elektromagnetskog polja:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

koje zovemo **Maxwellove jednadžbe**. U prirodnim zadaćama izvor (slobodni naboji ρ_s i slobodne struje $\boldsymbol{J}_s$ moraju biti zadani tako da zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta:

$$\nabla \cdot \vec{J}_s + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0$$

Integralni oblik Maxwellovih jednadžbi je:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \vec{J}_s \cdot \vec{n} \mathrm{d}S + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \iiint_V \rho_s \mathrm{d}V$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = 0$$

Odgovarajući uvjeti na graničnoj plohi između dva homogena izotropna materijala jesu:

$$\vec{n}_{12} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$$

$$\vec{n}_{12} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{K}_s$$

$$\vec{n}_{12} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_s$$

$$\vec{n}_{12} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

gdje je $\vec{n}_{12}$ okomica usmjerena iz sredstva 1 u sredstvo 2.

Vektore polja povezuju relacije građe koje za linearne homogene izotropne materijale glase:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

Maxwellove jednadžbe i relacije građe tvore potpun sustav jednadžbi za jedinstveno određivanje vektora elektromagnetskog polja za zadane izvore, te rubne i početne uvjete. Ako u području zanimanja postoje različiti materijali tada na graničnim plohama moraju biti zadane raspodjele slobodnih plošnih naboja σ_s i slobodnih plošnih struja K_s koje također moraju zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta.

ENERGIJA U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU

Predmet ovoga poglavlja jest uvođenje energetske točke promatranja u studij elektromagnetskih polja. Pojam energije jedan je od najznačajnijih pojmova u fizici. Proširit ćemo stoga shvaćanje pojma energije, koju obično povezujemo s materijalnim tijelima, i na prostor u kojem djeluju elektromagnetske sile. Do sada smo elektromagnetsko polje definirali kao prostor u kojem djeluju sile na naboje i struje. Učinit ćemo korak dalje i pridružiti energiju elektromagnetskom polju. Iz definicija vektora polja ***E*** i ***B***, koje se temelje na izrazu za Lorentzovu silu na naboj u gibanju, očito je da se prostor u kojem postoji elektromagnetsko polje nalazi u posebnom stanju. Svakom elementu toga prostora možemo pridružiti određenu energiju. U svezi s tim moglo bi se postaviti pitanje realnosti elektromagnetskog polja kao neovisnog fizikalnog entiteta. Poznato je da se još Maxwell odvažio da elektromagnetskom polju pripiše velik stupanj fizikalne realnosti na izravan mehanički način. Treba naglasiti Maxwellovo shvaćanje elektromagnetskog polja kao realne fizikalne biti u kojoj je pohranjena energija, a ne kao matematičke veličine koja služi za opisivanje sile na jedinični naboj. Prostor u kojem djeluje polje je izmijenjen. Polje samo po sebi nosi energiju, bez obzira na to da li u prostoru u kojem ono postoji ima naboja ili ih nema.

Energetska točka promatranja je također korisno oruđe u određivanju ostalih svojstava elektromagnetskog sustava. Mnoge zadaće u elektromehaničkim sustavima bitno se pojednostavnjuju pomoću energetskih analiza i razmatranja.

Jednadžbu za Lorentzovu silu upotrijebili smo za definiranje polja ***E*** i ***B***, no još nismo analizirali radnju koja je povezana s djelovanjem sile na naboj u gibanju. Iz mehanike nam je poznato da će djelovanje sile na materijalnu česticu biti uzrokom promjene brzine gibanja, što će imati za posljedicu promjenu kinetičke energije čestice, tj. njezinog energetskog stanja. Drugim riječima, pri gibanju nabijene čestice u elektromagnetskom polju u vakuumu polje će, djelujući Lorentzovom silom na naboj, obaviti radnju koja će biti utrošena na promjenu putanje i brzine čestice. To će imati za posljedicu promjenu ukupne energije nabijene čestice.

Sile na naboje u gibanju

Usmjerimo našu pažnju na određivanje sila interakcije kojima elektromagnetsko polje djeluje na različite raspodjele električnih naboja i struja. Smatrat ćemo da se svi naboji gibaju i struje teku u praznom prostoru, što će nam poslije poslužiti za jednostavan elektromagnetski opis unesenih materijala u polje.

Započet ćemo s izrazom za Lorentzovu silu na diskretni točkasti električni naboj q, koji se giba brzinom ***v*** u vakuumu

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

gdje su ***E*** (u V/m) i ***B*** (u Vs/m^2) zadani vektori vanjskog narinutog elektromagnetskog polja. ***F*** je sila kojom to polje djeluje na električni naboj i mjeri se u *njutnima* (N). Učinit ćemo korak dalje u proučavanju sila na naboje u elektromagnetskim poljima. Lako je od izraza za sile na individualne naboje prijeći na izraze za sile na naboje u elementu volumena dV. Prethodno je potrebno pojam singularne raspodjele naboja zadane delta funkcijama, tj. diskretnu raspodjelu točkastih naboja, zamijeniti kontinuiranom raspodjelom naboja. Kontinuirana raspodjela naboja u vakuumu opisuje se neprekinutim funkcijama odrednica prostora $\rho = \rho(\boldsymbol{r},t)$. Sila na beskonačno mali djelić volumena dV, koji sadrži električni naboj iznosa dQ = ρdV je

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = \left(\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}\right)\mathrm{d}V$$

Ukupna sila kojom elektromagnetsko polje djeluje na sustav kontinuirano raspodijeljenih električnih u gibanju u vakuumu, unutar konačne regije volumena V, određuje se integracijom po volumenu V:

$$\vec{F} = \iiint_V \left(\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}\right) \mathrm{d}V$$

Preostaje još da odredimo volumnu gustoću sila, tj. sile po jedinici volumena kojima polje djeluje na kontinuiranu raspodjelu električnih naboja u jediničnom volumenu u okolišu promatrane točke:

$$f = \rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}$$

Te sile se često nazivaju "volumne sile" i mjere se u *njutnima po prostornom metru* (N/m^3). Uvedemo li gustoću električne struje u vakuumu $\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v}$, dobivamo volumnu silu na električne naboje ρ i električne struje $\boldsymbol{J}$ u polju u praznom prostoru kao:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

Ovime smo utvrdili sve potrebne relacije za sile interakcije elektromagnetskih polja i sustava kontinuiranih raspodjela naboja i struja. One će nam pomoći da bismo odredili energetske odnose u takvim interakcijama.

Energija i snaga predana nabojima u gibanju

Pristup elektromagnetskoj energiji temeljit će se na utvrđivanju snage predane od elektromagnetskog polja nabojima u gibanju u praznom prostoru. Pritom ćemo pod snagom razumijevati brzinu prijenosa energije iz polja k nabojima u gibanju. Trenutna vrijednost snage određuje se iz relacije:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

i mjeri se u *volt-amperima* tj. *vatima* (W). S W smo obilježili energiju mjerenu u *vat-sekundama* (Ws) odnosno *džulima* (J), a s t vrijeme mjereno u *sekundama* (s).

Odredit ćemo najprije energiju predanu u jedinici vremena tj. snagu predanu od elektromagnetskog polja ($\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$) točkastom električnom naboju q koji se giba brzinom $\boldsymbol{v}$ u vakuumu. Ona je upravo jednaka obavljenom radu u jedinici vremena kada polje djeluje silom $\boldsymbol{F}$ na naboj u gibanju. Na putu d$\boldsymbol{l}$ sila $\boldsymbol{F}$ obavi rad:

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\left(\vec{E} + \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

pa je polje naboju predalo snagu:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Usmjerimo našu pažnju na električne naboje čija je kontinuirana raspodjela u praznom prostoru dana funkcijom ρ($\boldsymbol{r}$,t) koji se gibaju brzinama $\boldsymbol{v}$($\boldsymbol{r}$,t). Sile kojima će elektromagnetsko polje djelovati na naboje u elementarnom volumenu dV dane su s:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \left(\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}\right) \mathrm{d}V$$

Ove sile predaju ukupnu energiju u jedinici vremena ili ukupnu trenutnu snagu električnim nabojima u gibanju unutar elementarnog volumena određenu izrazom:

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}\vec{F} \cdot \vec{v} = \left(\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}\mathrm{d}V = \rho\vec{v} \cdot \vec{E}\mathrm{d}V = \vec{J} \cdot \vec{E}\mathrm{d}V$$

Ukupna energija predana od elektromagnetskog polja u jedinici vremena (trenutna predana snaga) nabojima u volumenu V određuje se integracijom:

$$P = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E}\mathrm{d}V$$

Električni naboji u gibanju mogu biti slobodni i vezani. Slobodni naboji mogu predstavljati vanjske (konvekcijske) naboje, čije gibanje se ubrzava ili usporava poljem ***E***. Takve raspodjele mogu se naći npr. u ioniziranim plinovima i plazmama i u snopu elektrona u vakuumskim cijevima. Slobodni naboji mogu također predstavljati i unutarnje (kondukcijske) naboje u materijalu, a brzina im je algebarski povezana s električnim poljem ***E***. U ovoj relaciji izrazili smo gustoću energije predane u jedinici vremena od elektromagnetskog polja u danoj točki električnim nabojima u gibanju u praznom prostoru kao skalarni produkt električnog polja ***E*** i ukupne gustoće električne struje ***J*** u točki. Ovdje ***J*** predstavlja doprinose struji kako od gibanja slobodnih električnih naboja, tako i od vezanih električnih naboja koji rezultiraju iz makroskopskog modela polariziranog materijala te doprinose amperskih struja iz makroskopskog modela magnetiziranog materijala.

Iz prethodnog možemo zaključiti da iako se volumna energija predana u jedinici vremena odnosi na raspodjele ***J*** u vakuumu, ovaj izraz može korisno poslužiti i dovoljno je općenit za primjenu i u ekvivalentnim makroskopskim modelima materijala, koje nadomještamo raspodjelama električnih naboja i amperskih struja u praznom prostoru.

Očuvanje elektromagnetske energije – Poyntingov teorem

Ukupna trenutna snaga predana od elektromagnetskog polja slobodnim (kondukcijskim i konvekcijskim) i vezanim (električnim) nabojima, koji se uvijek nalaze u stanju gibanja, prema iskustvu iz mehanike pretvara se jednim dijelom u neki drugi *reverzibilni oblik energije*; npr. kroz ubrzanje ili usporenje naboja u povećanje ili smanjenje kinetičke energije, ili pak kroz promjenu međusobnog položaja naboja u povećanje ili smanjenje potencijalne energije sustava naboja. Drugim dijelom za pretpostaviti je da se nabojima od polja predana energija pretvara i u *ireverzibilni oblik energije*, tj. u toplinu. Toplina nastala pomacima, i uopće gibanjem naboja, predstavlja nepovratno izgubljenu elektromagnetsku energiju. Nazivamo je stoga gubitkom energije ili jednostavno *gubitkom* (snage). S druge strane univerzalno prirodno *načelo očuvanja energije* upućuje nas na pretpostavku da se snaga predana od elektromagnetskog polja nabojima u gibanju mora namiriti i iskazati kao smanjenje energije polja i kao tok snage prenesene poljem iz izvora. Suprotno načelu djelovanja na daljinu, načelo polja kao što je već rečeno uvodi polje sila, koje lokalnom interakcijom prenose učinke od točke do točke kroz prostor. Suglasno ideji polja mi govorimo o *energiji koja je pohranjena* u samom polju i koja se *prenosi poljem*, tj. kroz prostor. *To nam omogućuje da energiju koja ostaje ili se prenosi pomoću elektromagnetskog polja nazivamo "elektromagnetskom energijom".*

U ovom odjeljku analizirat ćemo prijenos i pohranjivanje elektromagnetske energije u praznom prostoru. Središnja točka te analize bit će *Poyntingov teorem*, temeljna relacija očuvanja energije u elektromagnetskom sustavu. Pokazat ćemo da je s matematičke točke gledišta Poyntingov teorem izravna posljedica Maxwellovih jednadžbi. Njegova fizikalna interpretacija od bitnog je značaja za studij energetskih odnosa u elektromagnetskom polju i u elektromagnetskoj teoriji uopće.

Temeljnu relaciju za očuvanje energije u elektromagnetskom sustavu, Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, izvest ćemo polazeći od izraza za ukupnu trenutnu volumnu snagu koju elektromagnetsko polje predaje električnim i magnetskim nabojima u gibanju:

$$\mathrm{d}P = p\mathrm{d}V = \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad p = \vec{J}\cdot\vec{E}$$

Korištenjem identiteta:

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right) - \vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)$$

i Maxwellovih jednadžbi

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

dobivamo

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) = -\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{J}\cdot\vec{E}$$

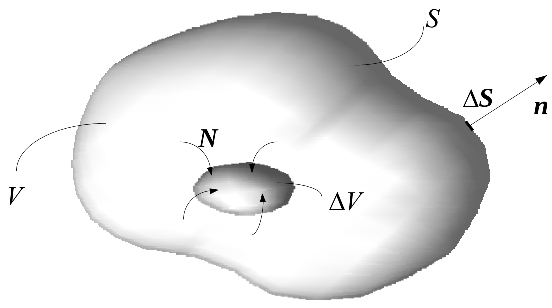
U linearnim izotropnim materijalima vrijedi:

$$\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right) \quad ; \quad \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)$$

pa možemo konačno napisati izraz za snagu

$$p = \vec{J}\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

koju elektromagnetsko polje predaje svim električnim nabojima u gibanju unutar jediničnog volumena praznog prostora ili materijala. Prethodna jednadžba je *Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku*. Predstavlja temeljnu relaciju očuvanja elektromagnetske energije u općem slučaju. Izveo ju je prvi put 1884. godine Poynting, a potom iste godine i Heaviside.



Slika 4. Tok energije u volumenu V, kojeg zatvara ploha S

Integracijom obiju strana prethodne relacije po ukupnom volumenu V, kojega zatvara ploha S, kao na slici 4., dobivamo:

$$\iiint_V p\mathrm{d}V = \iiint_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V = -\iiint_V \nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V\left\{\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right\}\mathrm{d}V$$

Totalna derivacija zamijenila je parcijalnu derivaciju budući da volumen V ne ovisi o vremenu. Uz primjenu Gaussova teorema divergencije slijedi *relacija za Poyntingov energetski teorem u integralnom obliku*:

$$\iiint_V p \mathrm{d}V = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, \mathrm{d}V = -\oiint_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right\} \mathrm{d}V$$

Ove relacije predstavljaju integralni oblik Poyntingova teorema. One vrijede općenito, tj. i u praznom prostoru i u prostoru ispunjenom materijalom.

Pojašnjenje Poyntingova teorema o očuvanju energije u općenito vremenski ovisnim elektromagnetskim poljima započet ćemo tumačenjem pojedinih članova u ovom izrazu. Značenje desne strane postat će razumljivije uvedemo li dvije nove veličine. Prije svega uvest ćemo skalarnu veličinu:

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

koju možemo protumačiti kao *volumnu gustoću energije pohranjene u elektromagnetskom polju.*

Za vremenski ovisna elektromagnetska polja gustoća pohranjene energije w, koja je raspodijeljena po prostoru, također je funkcija vremena. Zato pojam vremenski ovisne gustoće energije u raznim točkama u prostoru mora biti udružen s hipotezom o toku energije u polju. Ova ideja nameće se ako želimo da načelo očuvanja energije bude zadržano. U svakom slučaju promjena jakosti polja $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ i gustoće energije w mora biti povezana s idejom o toku energije u elektromagnetskom polju. Uvedimo zato još jednu novu vektorsku veličinu:

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

poznatu pod nazivom *Poyntingov vektor*.

Promotrimo najprije diferencijalni oblik Poyntingova teorema koji sada možemo pojednostavnjeno pisati kao:

$$-\nabla \cdot \vec{N} - \frac{\partial w}{\partial t} = p$$

Desna strana izvedena je iz sila koje djeluju na sve vrste električnih naboja i predstavlja energiju koju u jedinici vremena elektromagnetsko polje predaje svim nabojima u gibanju unutar jediničnog volumena prostora. Drugim riječima to je snaga kojom elektromagnetsko polje snabdijeva naboje u gibanju u jedinici volumena. Ta snaga će biti oduzeta od elektromagnetskog polja bilo iz njegove lokalno pohranjene energije u okolišu točke u kojoj se nalazi naboj, bilo pak negdje drugdje, što onda podrazumijeva prijenos energije poljem kroz prostor. Lijeva strana te jednadžbe reducirana je na dva člana koji sadrže samo polja $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{H}$ i njihove prostorne i vremenske derivacije. To sugerira da ta dva člana predstavljaju inherentne značajke elektromagnetskog polja povezane s pohranjivanjem i s protokom energije u njemu. Iz matematičkog oblika tih izraza identificirat ćemo jedan kao divergenciju toka elektromagnetske snage i drugi kao iznos vremenske promjene elektromagnetske energije pohranjene u polju.

Prvi član u jednadžbi je gustoća s kojom vektorsko polje $\boldsymbol{N}$ ponire u bilo kojoj točki prostora u kojem postoji elektromagnetsko polje. Može se tumačiti kao gustoća toka snage od elektromagnetskog polja izvan ΔV u ΔV (prema slici 4.). *To znači da se* ***N*** *može tumačiti kao tok elektromagnetske snage po jedinici površine koja se prenosi kroz prostor ispunjen elektromagnetskim poljem.*

Drugi član na lijevoj strani jednadžbe je negativna vremenska derivacija skalarne veličine w, koja ima dimenziju energije po jedinici volumena. To nas navodi da drugi član protumačimo kao gustoću kojom se snaga predaje nabojima lokalno pomoću elektromagnetskog polja. U tom je slučaju naša pretpostavka za w kao o gustoći energije pohranjene u elektromagnetskom polju valjana.

Tako ovu relaciju, koja predstavlja Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, možemo tumačiti na sljedeći način: ako je gustoća snage predane nabojima u jediničnom volumenu ΔV kao na slici 4., tada se ta snaga oduzima dijelom od energije w pohranjene lokalno pomoću $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{H}$ polja unutar ΔV ($-\partial w/\partial t$ je iznos za koji se ta energija u ΔV smanjuje) a dijelom se prenosi, tj. dotječe iz okolnog prostora gdje god egzistira elektromagnetsko ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$) polje (-div($\boldsymbol{N}$) je iznos energije koja u jedinici vremena doteče iz cijelog vanjskog prostora u jedinični volumen ΔV). Kao što se može vidjeti, mjerne jedinice svih članova jesu: *vati po prostornom metru* (W/m^3). Zanimljiv je slučaj u prostoru bez naboja. Tada je i snaga predana nabojima $p = 0$, pa Poyntingov teorem poprima oblik:

$$\nabla \cdot \vec{N} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

koji je sličan jednadžbi kontinuiteta za očuvanje naboja. Očito je, po analogiji, da ova jednadžba kontinuiteta izražava *očuvanje elektromagnetske energije u regiji bez naboja*, pri čemu je w funkcija distribucije energije, a $\boldsymbol{N}$ vektor toka energije.

Integralni oblik Poyntingova teorema češće je u upotrebi. Pojednostavnjeno pisan glasi:

$$-\oiint_S \vec{N} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V w\,\mathrm{d}V = P$$

gdje je P ukupna (trenutna) elektromagnetska snaga predana nabojima u gibanju unutar zatvorenog volumena V i mjeri se u *vatima* (W). Prvi član na lijevoj strani, negativni integral od $\boldsymbol{N}$ po zatvorenoj plohi S (prema slici 4.), mora biti ukupna elektromagnetska snaga koja utječe u volumen V izvana iz okolnog prostora kroz zatvorenu plohu S. Drugi član predstavlja vremensku promjenu, tj. smanjenje (ako ga uzmemo s negativnim predznakom) ukupne energije pohranjene u elektromagnetskom polju unutar zatvorenog volumena V.

Iz ove jednadžbe i načela o očuvanju energije, na temelju rečenog možemo zaključiti da ukupna elektromagnetska snaga P predana svim električnim i magnetskim nabojima unutar volumena V mora biti nadoknađena iz vremenske promjene koja rezultira smanjenjem ukupne elektromagnetske energije W pohranjene u elektromagnetskom polju unutar V, i također od "čistog" toka elektromagnetske snage P_N u V iz vanjskog prostora (gdje negativni predznak označava tok prema unutra u V kroz zatvorenu plohu S).

Pohranjena elektromagnetska energija

Poći ćemo od izraza za skalarnu veličinu

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2 + \frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}\right|^2$$

koju smo uveli kao volumnu gustoću energije pohranjene u elektromagnetskom polju u vakuumu. Otuda je očito da je elektromagnetska energija pohranjena u onom dijelu prostora gdje se nalazi elektromagnetsko polje (***E***, ***H***). Na taj smo način pridružili energiju elektromagnetskom polju. Kako se vidi iz prethodne relacije *pohranjena energija w* je funkcija veličina polja ***E*** i ***H***, tj. neovisna je o izvorima polja bilo slobodnim ili vezanim u materiji. Ova činjenica nam omogućava da odijelimo elektromagnetsku energiju od ostalih oblika energije koji istovremeno mogu biti prisutni u prostoru. Moguće je dalje gustoću w pohranjene energije u elektromagnetskom polju razlučiti u dio:

$$w_E = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2$$

udružen s električnim poljem koji predstavlja gustoću energije pohranjene u električnom polju i u dio

$$w_M = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}\right|^2$$

udružen s magnetskim poljem koji predstavlja gustoću energije pohranjene u magnetskom polju.

S druge strane Poyntingov vektor, tj. gustoća N toka elektromagnetske snage rezultira iz interakcije električnog i magnetskog polja, i zato ne može biti razdvojen u komponente udružene odvojeno s ***E*** i s ***H***. Uz poznatu gustoću w elektromagnetske energije moguće je odrediti ukupnu pohranjenu elektromagnetsku energiju W u prostoru zadanog volumena V pomoću:

$$W = \iiint_V w\,\mathrm{d}V = \iiint_V \left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)\mathrm{d}V$$

Isto tako ukupnu pohranjenu elektromagnetsku energiju možemo odijeliti u ukupnu energiju pohranjenu u električnom polju unutar V:

$$W_E = \iiint_V w_E\,\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\varepsilon}{2}\left|\vec{E}\right|^2\mathrm{d}V$$

i u ukupnu energiju pohranjenu u magnetskom polju unutar V

$$W_M = \iiint_V w_M\,\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\mu}{2}\left|\vec{H}\right|^2\mathrm{d}V$$

Potrebno je, također, skrenuti pozornost na činjenicu da se može opaziti određena nejedinstvenost pri izvođenju članova za pohranjenu električnu i magnetsku energiju u elektromagnetskom polju. Gustoće pohranjene energije izvedene su iz člana s vremenskom derivacijom u Poyntingovu teoremu. Očito je da se uvijek može dodati kojigod vremenski neovisan član obadvjema i w_E i w_H, bez utjecaja na iznos njihove vremenske derivacije, tj. bez utjecaja na bilancu snage u Poyntingovu teoremu. Tu višeznačnost možemo lako izbjeći tako da jednostavno izaberemo proizvoljni nulti nivo gustoće pohranjene elektromagnetske energije u sustavu kada je on elektromagnetski "umrtvljen", tj. kada su sve elektromagnetske veličine jednake ništici.

Tok elektromagnetske energije. Poyntingov vektor

U prethodnim poglavljima izveli smo Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku za očuvanje elektromagnetske energije u elementarnom volumenu. Tako smo uveli vektorsku veličinu:

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

poznatu pod nazivom *Poyntingov vektor*. Ona predstavlja gustoću toka elektromagnetske snage, tj. energiju koja proteče u jedinici vremena kroz jediničnu površinu u okolišu točke u prostoru u kojem postoji elektromagnetsko polje. Jedinica za $\boldsymbol{N}$ u SI sustavu je *vat po četvornom metru* (W/m^2). Integral od $\boldsymbol{N}$:

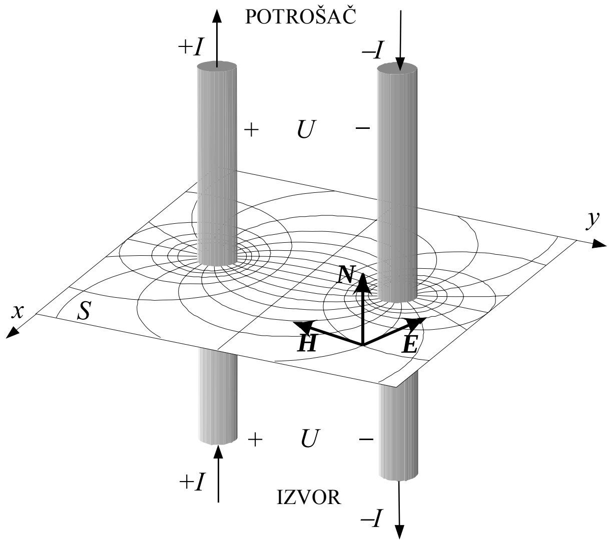
$$\oiint_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \oiint_S \vec{N} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = P_N$$

jedinstveno određuje tok elektromagnetske snage kroz zatvorenu plohu *S*. Važno je upozoriti da naše tumačenje Poyntingova vektora $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ kao gustoće elektromagnetske snage u svakoj točki prostora nije strogo opravdano za oba oblika Poyntingova teorema. Poteškoća je u tome što iako divergencija od $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ (ili integral od $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ preko zatvorene plohe) uvijek daje točnu vrijednost snage prenesene elektromagnetskim poljem, vektoru $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ uvijek se može dodati kojigod vektor $\boldsymbol{C}$ koji je bez izvora (čija je divergencija jednaka nula:div$\boldsymbol{C} = 0$), tako da bude $\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{C}$. Obje vrijednosti i $\boldsymbol{N}$ i $\boldsymbol{N}'$ zadovoljavaju oba oblika Poyntingova teorema. Drugim riječima, ekstrapolacija prave vrijednosti vektora $\boldsymbol{N}$ iz njegove divergencije u danoj regiji nije jedinstven postupak. Potrebne su dodatne informacije.

Usvajanje definicije Poyntingova vektora $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ samoga, bez dodatnog člana, kao gustoće toka elektromagnetske snage u točki, ima nekoliko prednosti:

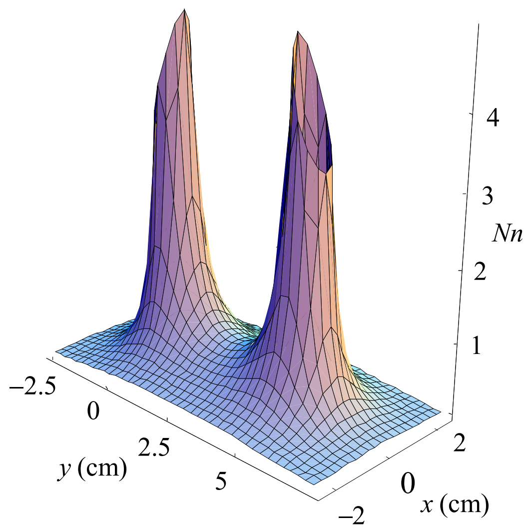
1) daje uvijek točne vrijednosti za ukupnu snagu koja protječe iz ili u zatvorenu regiju;
2) u elektrostatičkom sustavu gdje je $\boldsymbol{H} = 0$ i u magnetostatičkom sustavu gdje je $\boldsymbol{E} = 0$, rezultantna vrijednost za $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = 0$ je u suglasju s nepostojanjem bilo kojeg opaženog toka snage utvrđenog eksperimentalno;
3) vrlo je jednostavna.

U suglasju s prije rečenim postuliramo da je tok elektromagnetske snage kroz jediničnu plohu u svakoj točki prostora određen Poyntingovim vektorom $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$. Na primjeru dvožičnog prijenosnog voda pokazat ćemo kako se tok elektromagnetske snage u prostoru oko vodiča može predočiti pomoću Poyntingova vektora. Na slici 2 prikazali smo dvožični vod koji služi za prijenos elektromagnetske energije od izvora do potrošača.



Slika 5. Dvožični prijenosni vod; slika polja vektora E i H

Materijal vodiča je idealni provodnik ($\kappa \rightarrow \infty$), tako da u vodičima nema gubitaka niti uzdužne komponente jakosti električnog polja, $\boldsymbol{E}_z = 0$. Vektori električnog polja $\boldsymbol{E}$ i magnetskog polja $\boldsymbol{H}$ međusobno su okomiti u svakoj točki P i imaju samo transverzalne komponente, tj. leže u poprečnoj ravnini S. Njihove veličine mogu se odrediti jednostavnim proračunom pomoću zadanog napona između vodiča i struja koje teku vodičima, te pomoću koordinata točke P. Lako se onda izračuna Poyntingov vektor kao $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ u svakoj točki P. $\boldsymbol{N}$ je uvijek okomit na ravninu S, tj. kolinearan je s osima vodiča, pa ima samo N_z komponentu.



Slika 6. Dvožični prijenosni vod; raspodjela normalizirane gustoće toka snage $Nn = N/N_0$; udaljenost između vodiča $d = 5$ cm, polumjer vodiča $r_0 = d/10$, $N_0 = UI/[4\pi \ln (d/r_0)]$

To pokazuje da sva elektromagnetska snaga protječe duž voda od izvora prema potrošaču. Njezinu normaliziranu raspodjelu oko vodiča u poprečnoj ravnini S prikazali smo dijagramom na slici 6.

Potencijali u elektromagnetskim poljima

U prethodnom poglavlju opisali smo različite oblike Maxwellovih jednadžbi pomoću kojih se rješavaju elektromagnetska polja. Polja smo predstavljali glavnim vektorima polja ***E*** i ***B*** i pomoćnim vektorima polja ***D*** i ***H***. Sljedeći korak učinit ćemo u ovom poglavlju tako da ćemo za predstavljanje polja uvesti pomoćne funkcije poznate kao *elektromagnetski potencijali*. Te pomoćne matematičke funkcije, nazvane *vektorski* i *skalarni potencijali*, bit će uvedene tako da budu suglasne s Maxwellovim jednadžbama. S druge strane, ako se upotrijebe potencijali, proračun i analiza elektromagnetskih polja često će biti znatno pojednostavnjeni i olakšani.

Općenito smo zainteresirani za pronalaženje *pomoćnih funkcija* pomoću kojih bi što jednostavnije predstavljali i proračunavali elektromagnetska polja. Različiti oblici sustava Maxwellovih jednadžbi, za polja u vakuumu tj. slobodnom prostoru i u materijalu koji se ne giba, uvedeni u prethodnom poglavlju, predstavljaju skupove međusobno povezanih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Da bi se proračunalo elektromagnetsko polje, nužno je cijeli sustav jednadžbi, zbog njihove međusobne povezanosti, rješavati simultano. Simultano rješavanje tako velikih sustava jednadžbi vrlo je teška, a često i nerješiva zadaća.

Očita je potreba da se uvede nova klasa funkcija pomoću kojih ćemo predstavljati elektromagnetska polja, umjesto do sada upotrebljavanih vektorskih funkcija jakosti polja ***E*** i ***H***, te indukcija ***B*** i ***D***. Definiranje i uvođenje novih potencijalnih funkcija u teoriju elektromagnetskih polja imat će smisla ako se njihovim uvođenjem prvo bitno smanji broj jednadžbi koje treba rješavati u matematičkom modelu polja i drugo, ako uvođenje tih funkcija omogući razdvajanje jednadžbi u sustavu tako da ih se može pojedinačno i odvojeno rješavati. U ovom odjeljku pokazat ćemo upravo to, uvođenjem dviju klasa potencijalnih funkcija koje ćemo nazvati *potencijalima*.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Budući da je magnetsko polje uvijek *solenoidalno* (bez izvora) vektor ***B*** može biti predstavljen kao rotor drugog vektora ***A***, tj.:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Vektorsko polje ***A*** je vektorska potencijalna funkcija elektromagnetskog polja i naziva se *magnetski vektorski potencijal*. Vektorski identitet:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) \equiv 0$$

osigurava valjanost Maxwellove jednadžbe:

$$\nabla \cdot \vec{B} \equiv 0$$

Slijedi:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

budući da je:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv 0$$

Negativni predznak pred gradijentom je posljedica definicije potencijala φ; prema dogovoru želimo da u statičkom električnom polju vektor $\boldsymbol{E}$ ima smjer od većeg prema manjem potencijalu. Jedinica za vektorski potencijal $\boldsymbol{A}$ je *veber po metru* (Wb/m), a za skalarni potencijal φ je *volt* (V).

Ove jednadžbe dopuštaju da se polja $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ u ovom sustavu izraze pomoću dva potencijala φ i $\boldsymbol{A}$. Potencijali su dvije potpuno proizvoljne i neovisne funkcije prostora i vremena.

U primijenjenoj teoriji elektromagnetskih polja ima slučajeva kada je polja i njihove potencijale pogodno računati iz zadane raspodjele neovisnih izvora. Pod neovisnim izvorima razumijevamo one na čiju raspodjelu ne djeluju polja obuhvaćena sustavom Maxwellovih jednadžbi koje rješavamo. Zato ćemo sad izvesti diferencijalne jednadžbe u kojima ćemo povezati neovisne izvore polja i odgovarajuće potencijale $\boldsymbol{A}$ i φ koje oni uzrokuju.

Pretpostavit ćemo da polje postoji u neograničenom prostoru koji je ispunjen linearnim homogenim izotropnim materijalom sa zadanim značajkama ε, μ i κ, koje su općenito različite od nule. Raspodjela neovisnih izvora zadana je tako da je zadana neovisna raspodjela slobodnih naboja, koju ćemo označiti s ρ_s' da bi istakli da je neovisna i da na nju izračunato polje ne djeluje. Za gustoću slobodne struje $\boldsymbol{J}_s$ pretpostavit ćemo da se sastoji iz dva dijela: jednog koji je ovisan o polju koje se računa i koji je određen Ohmovim zakonom te iznosi $\kappa\boldsymbol{E}$, i drugog dijela koji je zadan sa $\boldsymbol{J}_s'$ i koji uzimamo da ne ovisi o polju koje računamo. To možemo pisati tako da je $\boldsymbol{J}_s' = \kappa\boldsymbol{E}'$, gdje je $\boldsymbol{E}'$ električno polje koje nije obuhvaćeno Maxwellovim jednadžbama, za razliku od polja $\boldsymbol{E}$ koje računamo iz Maxwellovih jednadžbi. Drugim riječima, $\boldsymbol{J}_s'$ je dio zadane gustoće struje koji proizvode vanjske elektromotorne sile. On ne sadrži niti jedan dio struje uzrokovane električnim poljima u vodljivom materijalu. Dakle, imamo:

$$\vec{J}_s = \kappa\vec{E} + \vec{J}_s' = \kappa\left(\vec{E} + \vec{E}'\right)$$

Sustav Maxwellovih jednadžbi u ovom slučaju poprima oblik:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s{}' + \kappa\vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Uvođenjem vektorskog potencijala:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

i skalarnog potencijala

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

dobivamo jednadžbe:

$$\Delta\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu\kappa\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\mu\vec{J}_s' + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\kappa\varphi\right)$$

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}$$

par povezanih linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za potencijale φ i $\boldsymbol{A}$, koje se mogu razdvojiti pogodnim izborom potencijala. U ove jednadžbe uveden je Laplaceov skalarni operator kao:

$$\Delta\varphi = \nabla\cdot\left(\nabla\varphi\right)$$

a Laplaceov vektorski operator $\Delta\boldsymbol{A}$ određuje se iz vektorske relacije:

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$$

Vektorski i skalarni potencijali za jedno te isto elektromagnetsko polje *nisu jedinstveni*. S druge strane, sva parcijalna rješenja sustava jednadžbi za φ i $\boldsymbol{A}$ vode k istim vektorima $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ elektromagnetskog polja, ako su subjekt istih rubnih i početnih uvjeta. Ta parcijalna rješenja za potencijale razlikovat će se međusobno za proizvoljnu funkciju Ψ. Ova sloboda u izboru potencijala dopušta nam da zahtijevamo da vektorski i skalarni potencijali zadovoljavaju još i jedan drugi uvjet, osim uvjeta da određuju upravo željene vektore polja $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$. Taj *dodatni uvjet* sastoji se u propisivanju divergencije vektorskog potencijala. Taj izbor je uvijek moguć budući da su rotor i divergencija bilo kojeg vektorskog polja (takvog kao $\boldsymbol{A}$) potpuno neovisna svojstva polja, a samo smo rot $\boldsymbol{A}$ do sada propisali.

Dodatni uvjet se općenito bira tako da razdvoji i pojednostavni jednadžbe koje treba riješiti da bi se izračunali potencijali. Nalazimo da će se potencijali φ i $\boldsymbol{A}$ razdvojiti u jednadžbama ako propišemo da divergencija $\boldsymbol{A}$ iznosi:

$$\nabla\cdot\vec{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\kappa\varphi$$

Taj je uvjet poznat kao *Lorentzov uvjet*. Uvrštenjem Lorentzovog uvjeta u jednadžbe potencijala dobivamo simetrične valne jednadžbe:

$$\Delta\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu\kappa\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\mu\vec{J}_s'$$

$$\Delta\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \mu\kappa\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\rho_s'}{\varepsilon}$$

To su *nehomogene prigušene valne jednadžbe* iz kojih se u linearnom izotropnom i homogenom materijalu mogu izračunati potencijali $\boldsymbol{A}$ i φ kao posljedica neovisnih izvora elektromagnetskog polja zadanih pomoću gustoća ρ_s' i $\boldsymbol{J}_s'$. Parcijalna rješenja tih jednadžbi mogu se izraziti kao integrali preko zadanih raspodjela naboja i struja, dok su njihova komplementarna rješenja, tj. ona od homogenih dijelova jednadžbi, očigledno valna rješenja.

Integralno predstavljanje potencijala

U ovom odjeljku prikazat ćemo pristup elektromagnetskim zadaćama pomoću integralnih jednadžbi, koji ćemo razviti usporedo s dosad obrađenim pristupom poljima putem diferencijalnih jednadžbi. Matematički modeli u elektromagnetskoj teoriji koji sadrže integralne jednadžbe čine osnovu tzv. metode momenata.

Razmatrat ćemo izvore i temeljnu zadaću određivanja elektromagnetskog polja izgrađenog zadanom raspodjelom neovisnih naboja i struja. Formalno, matematički problem povezivanja polja s njihovim izvorima jest rješenje nehomogene valne jednadžbe elektromagnetskih potencijala.

Uz Lorentzovo baždarenje, za zadane raspodjele struja i naboja, skalarni potencijal φ i kartezijske komponente vektorskog potencijala $\boldsymbol{A}$ u jednadžbama potencijala zadovoljavaju skalarnu nehomogenu valnu jednadžbu oblika:

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -g(\vec{r},t)$$

Ovdje funkcija ψ predstavlja skalarni potencijal ili bilo koju pravokutnu komponentu vektora polja ili vektorskog potencijala, a funkcija $g(\boldsymbol{r},t)$ funkciju gustoće izvora. Pretpostavljamo da je zadana raspodjela izvora moguća, tj. da ne proturječi jednadžbama polja, i još k tome da je raspodjela struja i naboja neovisna, tj. da izračunato polje ne utječe na nju niti je mijenja. U prethodnoj jednadžbi stavili smo $\mu\varepsilon$ da je jednako $1/c^2$, gdje c ima dimenziju brzine (m/s). Pretpostavili smo također da je prostor ispunjen materijalom koji je homogen i izotropan i koji ima vodljivost jednaku nuli.

Rješavanju valne jednadžbe pristupit ćemo postupno. Prvo ćemo riješiti polje točkastog izvora, a potom ćemo izvesti opći integral jednadžbe za kontinuiranu raspodjelu izvora u neograničenom prostoru. U stvarnosti samo neki od idealiziranih slučajeva mogu biti riješeni relativno jednostavno. Za praktične primjene pri dobivanju integralnih rješenja u zadaćama zamršene geometrije potrebno je koristiti numeričke metode.

Najjednostavnija raspodjela naboja koju možemo promatrati je ona koja je posvuda mala izuzev u neposrednom okolišu ishodišta. To nas vodi prema hipotetički idealiziranom modelu naboja koncentriranog u ishodište sustava. Takav izvor nazivamo točkastim nabojem. Gustoća takvog točkastog naboja posvuda je nula, izuzev u naboju gdje je beskonačna. Zamislimo dalje točkasti naboj iznosa $g(t)$ koji miruje, ali se njegov iznos vremenski mijenja, tj. poznata je funkcija vremena. To je fizikalno nemoguće, ali će nam ta pretpostavka pomoći da učinimo prvi korak prema rješenju postavljene zadaće. Radi jednostavnosti smjestili smo naboj u ishodište sfernog koordinatnog sustava. Homogeni dio jednadžbe potencijala:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

mora vrijediti za sve točke neograničenog prostora izuzev za ishodište sustava. S φ smo označili skalarni potencijal točkastog naboja smještenog u ishodištu. Očito je da potencijal ovisi samo o radijalnoj udaljenosti od ishodišta $\boldsymbol{r}$ i da je neovisan o smjeru. Prema tome, zbog sferne simetrije φ je funkcija samo od $\boldsymbol{r}$ i t. Zato ova jednadžba pisana u sfernom koordinatnom sustavu glasi:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

Rješenje ove jednadžbe dano je izrazom:

$$\varphi = \frac{g\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{h\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}$$

Razmotrimo prvo član $g(t - r/c)$ u rješenju jednadžbe. Ako t poraste na $t + t'$ i r se poveća na $r + ct'$, argument od g ostaje nepromijenjen. Drugim riječima, ako g ima neku vrijednost u trenutku t u točki na udaljenosti r, ona će imati istu vrijednost nakon vremena t' kasnije i u točki na udaljenosti većoj za ct' od prijašnje. Tako smo dobili *val koji se giba prema vani od ishodišta brzinom c*. Zaključimo da prvi član od φ predstavlja *izlazeći val* čija se amplituda smanjuje zbog faktora $1/r$ kako se val giba prema vani. Slično i drugi član od φ predstavlja *ulazeći val* koji putuje prema ishodištu i čija amplituda stalno raste kako se on giba prema ishodištu. Točno određivanje funkcija g i h ovisi o postavljenim uvjetima. Ako npr. pretpostavimo da smo odjednom postavili naboj u ishodište neograničenog prostora, to će uzrokovati val koji će se rasprostirati prema vani, i tada moramo staviti da je h identično jednako nuli, jer h predstavlja val koji putuje prema unutra. Općenito h predstavlja poremećaj koji možemo opaziti prije nego li ga je proizveo izvor. Budući da je takvo ponašanje u suprotnosti s makroskopskim eksperimentalnim opažanjima u elektromagnetizmu, to ćemo pretpostaviti da je h jednako nuli. Funkciju g treba tako izabrati da točno određuje naboj u ishodištu. Ako naboj ima konstantan iznos Q, tada je elektrostatički potencijal $\varphi = Q/4\pi\varepsilon r$, pri čemu se pretpostavlja da je potencijal u beskonačnosti jednak nuli. Konačno, skalarni potencijal točkastog naboja iznosa $q(t)$ smještenog u ishodištu neograničenog prostora jest:

$$\varphi = \frac{q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon r}$$

Potencijal naboja smještenog u točki **r**' u točki **r** neograničenog prostora je:

$$\varphi = \frac{q\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right)}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Ako su u neograničenom prostoru unutar volumena V' zadane raspodjele naboja:

$$\rho_s(\vec{r}\,', t)$$

i struja

$$\vec{J}_s(\vec{r}\,', t)$$

onda su njihovi potencijali u točki **r**:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V'}\frac{\rho_s\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}dV' \quad , \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}_s\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}dV'$$

Vremenski sinusno promjenjiva polja i fazorska notacija

U dinamičkim elektromagnetskim poljima često analiziramo vremenski sinusno promjenjiva polja koja se često nazivaju i harmonička polja. U takvim poljima propisujemo da se sve veličine polja mijenjaju sinusno po vremenu na istoj kružnoj frekvenciji ω_0. Iako takvo propisivanje na prvi pogled izgleda jako ograničavajuće, u velikom broju zadaća veličine polja se mijenjaju sinusno, ili ih pomoću Fourierova reda možemo nadomjestiti sumom sinusno promjenjivih članova. Vektor jakosti električnog polja u harmoničkim se poljima može općenito izraziti kao:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_x(\vec{r})\cos[\omega_0 t + \psi_x(\vec{r})]\vec{a}_x + E_y(\vec{r})\cos[\omega_0 t + \psi_y(\vec{r})]\vec{a}_y + E_z(\vec{r})\cos[\omega_0 t + \psi_z(\vec{r})]\vec{a}_z$$

Analogno izražavamo i ostale veličine elektromagnetskog polja. Prikaz sinusne funkcije vremena kao realnog dijela kompleksne funkcije:

$$A\cos(\omega t + \psi) = \mathrm{Re}\{A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\underline{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

vodi na prikaz takve funkcije kompleksnim brojem $\underline{A}$ kojeg nazivamo *fazor*. Primjenom takvog prikaza na skalarne i vektorske veličine sinusno promjenjivih elektromagnetskih polja dobivamo njihov prikaz fazorima. Tako za jakost električnog polja vrijedi:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\left[E_x(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_x(\vec{r})}\vec{a}_x + E_y(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_y(\vec{r})}\vec{a}_y + E_z(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_z(\vec{r})}\vec{a}_z\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\} = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\}$$

Uvođenjem fazorske notacije *preslikavamo veličine elektromagnetskog polja iz vremenske u fazorsku domenu*. Time izbacujemo vremensku ovisnost iz veličina elektromagnetskog polja i one su u fazorskoj domeni funkcije samo prostornih varijabli. Jedina je poteškoća predočavanje fazora kao vektora u trodimenzionalnom prostoru. Svaka komponenta je kompleksni broj, pa je u svakoj točki fazor određen sa šest brojeva. Uobičajeno je da posebno prikazujemo amplitude i fazne kutove takvih polja.

U sustavu Maxwellovih jednadžbi pojavljuju se parcijalne derivacije po vremenu. U fazorskoj domeni one se svode na množenje s kompleksnim brojem jω. Vrijedi:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \mathrm{Re}\{\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

pa sustav Maxwellovih jednadžbi u fazorskoj domeni ima oblik:

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}}$$
$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega\underline{\vec{D}}$$
$$\nabla \cdot \underline{\vec{D}} = \underline{\rho}_s$$
$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

Jednadžba kontinuiteta u fazorskoj domeni je:

$$\nabla \cdot \underline{\vec{J}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\rho}$$

a vektorski i skalarni potencijal uvodimo pomoću izraza:

$$\underline{\vec{B}} = \nabla \times \underline{\vec{A}} \quad ; \quad \underline{\vec{E}} = -\nabla\underline{\varphi} - \mathrm{j}\omega\underline{\vec{A}}$$

Prijelaz iz fazorske u vremensku domenu se svodi se na množenje apsolutne vrijednosti vektora u fazorskoj domeni s faktorom $\cos(\omega_0 t + \psi)$.

Energija i snaga u sinusno promjenjivim poljima

U sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima zanimaju nas srednje, a ne trenutne vrijednosti toka energije. Ako su vektori ***E*** i ***H*** zadani s komponentama (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z su maksimalne vrijednosti):

$$\vec{E} = E_x \cos\left(\omega_0 t + \psi_{E_x}\right)\vec{a}_x + E_y \cos\left(\omega_0 t + \psi_{E_y}\right)\vec{a}_y + E_z \cos\left(\omega_0 t + \psi_{E_z}\right)\vec{a}_z$$

$$\vec{H} = H_x \cos\left(\omega_0 t + \psi_{H_x}\right)\vec{a}_x + H_y \cos\left(\omega_0 t + \psi_{H_y}\right)\vec{a}_y + H_z \cos\left(\omega_0 t + \psi_{H_z}\right)\vec{a}_z$$

srednja vrijednost Poyntingova vektora za sinusno promjenjivo polje periode T iznosi:

$$\vec{N}_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\mathrm{d}t$$

Korištenjem identiteta:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

dobivamo izraz za srednju vrijednost Poyntingova vektora:

$$\begin{aligned}\vec{N}_{sr} &= \frac{1}{2}\left[E_y H_z \cos\left(\psi_{E_y} - \psi_{H_z}\right) - E_z H_y \cos\left(\psi_{E_z} - \psi_{H_y}\right)\right]\vec{a}_x + \\ &+ \frac{1}{2}\left[E_z H_x \cos\left(\psi_{E_z} - \psi_{H_x}\right) - E_x H_z \cos\left(\psi_{E_x} - \psi_{H_z}\right)\right]\vec{a}_y + \\ &+ \frac{1}{2}\left[E_x H_y \cos\left(\psi_{E_x} - \psi_{H_y}\right) - E_y H_x \cos\left(\psi_{E_y} - \psi_{H_x}\right)\right]\vec{a}_z = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\left(\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*\right)\right\}\end{aligned}$$

gdje je $\underline{\boldsymbol{H}}^*$ konjugirano kompleksni fazor $\underline{\boldsymbol{H}}$:

$$\underline{\vec{H}}^* = H_x \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_{H_x}}\vec{a}_x + H_y \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_{H_y}}\vec{a}_y + H_z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_{H_z}}\vec{a}_z$$

Srednji gubici za sinusno promjenjiva polja izraženi u funkciji fazora $\underline{\boldsymbol{J}}$ (J_x, J_y, J_z su maksimalne vrijednosti) jesu:

$$\begin{aligned}P_{g,sr} &= \frac{1}{\kappa}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \iiint_V \left|J_x \cos\left(\omega t + \psi_{J_x}\right)\vec{a}_x + J_y \cos\left(\omega t + \psi_{J_y}\right)\vec{a}_y + J_z \cos\left(\omega t + \psi_{J_z}\right)\vec{a}_z\right|^2 \mathrm{d}V = \\ &= \frac{1}{2\kappa}\iiint_V \left|\underline{\vec{J}}\right|^2 \mathrm{d}V\end{aligned}$$

Srednja energija pohranjena u magnetskom polju izražena u funkciji fazora $\underline{\boldsymbol{H}}$ (H_x, H_y, H_z su maksimalne vrijednosti) jest:

$$\begin{aligned}W_{m,sr} &= \frac{\mu}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \iiint_V \left|H_x \cos\left(\omega t + \psi_{H_x}\right)\vec{a}_x + H_y \cos\left(\omega t + \psi_{H_y}\right)\vec{a}_y + H_z \cos\left(\omega t + \psi_{H_z}\right)\vec{a}_z\right|^2 \mathrm{d}V = \\ &= \frac{\mu}{4}\iiint_V \left|\underline{\vec{H}}\right|^2 \mathrm{d}V\end{aligned}$$

a srednja energija pohranjena u električnom polju izražena u funkciji fazora $\underline{\boldsymbol{E}}$ (E_x, E_y, E_z su maksimalne vrijednosti) jest:

$$W_{e,sr} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \iiint_V \left| E_x \cos\left(\omega t + \psi_{E_x}\right)\vec{a}_x + E_y \cos\left(\omega t + \psi_{E_y}\right)\vec{a}_y + E_z \cos\left(\omega t + \psi_{E_z}\right)\vec{a}_z \right|^2 \mathrm{d}V =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4}\iiint_V \left|\underline{\vec{E}}\right|^2 \mathrm{d}V$$

Napišimo sada prošireni Amperèov kružni zakon za konjugirano kompleksne fazore $\underline{\boldsymbol{H}}^*$, $\underline{\boldsymbol{E}}^*$ i $\underline{\boldsymbol{J}}^*$ i Faradayev zakon za fazore $\underline{\boldsymbol{H}}^*$ i $\underline{\boldsymbol{E}}^*$:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}}^* = \underline{\vec{J}}^* - \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}^*$$
$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}}$$

Ako prvu od ove dvije jednadžbe pomnožimo s fazorom $\underline{\boldsymbol{E}}$, a drugu sa konjugirano kompleksnim fazorom $\underline{\boldsymbol{H}}^*$ i odbijemo prvu od druge, dobivamo:

$$\underline{\vec{H}}^* \cdot \left(\nabla \times \underline{\vec{E}}\right) - \underline{\vec{E}} \cdot \left(\nabla \times \underline{\vec{H}}^*\right) = -\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* - \mathrm{j}\omega\left(\mu\underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{H}}^* - \varepsilon\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*\right)$$

Nakon primjene vektorskog identiteta

$$-\nabla \cdot \left(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right) = \underline{\vec{E}} \cdot \left(\nabla \times \underline{\vec{H}}^*\right) - \underline{\vec{H}}^*\left(\nabla \times \underline{\vec{E}}\right)$$

i integracije po volumenu V kojeg ograničava ploha S, uz korištenje Gaussova teorema o divergenciji, slijedi

$$\oiint_S \left(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = -\iiint_V \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^*\mathrm{d}V + \mathrm{j}\omega\iiint_V \left(\varepsilon\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* - \mu\underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{H}}^*\right)\mathrm{d}V$$

Množenjem ove jednadžbe s faktorom 1/2 i usporedbom s izrazima srednju energiju pohranjenu u magnetskom i električnom polju te srednje gubitke, dobivamo *kompleksnu relaciju za Poyntingov teorem* koja izražava načelo očuvanja energije u sinusno promjenjivom elektromagnetskom polju

$$P_N = \oiint_S \underline{\vec{N}} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = -P_{g,sr} + 2\mathrm{j}\omega\left(W_{e,sr} - W_{m,sr}\right)$$

P_N nazivamo *prividnom srednjom snagom* koja u jedinici vremena proteče kroz zatvorenu plohu S. Ova jednadžba kazuje da je u sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima negativni realni dio prividne srednje snage jednak srednjim gubicima u volumenu V, dok je imaginarni dio prividne srednje snage jednak umnošku 2ω i razlike srednjih vrijednosti ukupne električne i magnetske energije pohranjene u volumenu V. Stoga u sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima možemo nadomjesne elemente mreže odrediti iz imaginarnog i realnog dijela prividne snage.