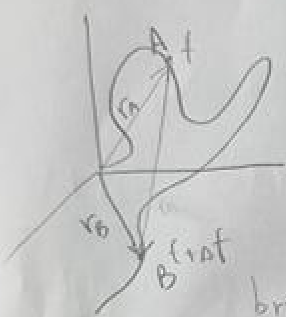
Teorijska pitanja za 1. tjedan

1. Skicirajte putanju čestice u trodimenzionalnom prostoru, označite vektor položaja u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Pomoću tih veličina definirajte pomak čestice, brzinu čestice, akceleraciju čestice.



pomak Δr – vektor koji opisuje promjenu položaja čestice koja nastaje u vremenskom intervalu $t + \Delta t$

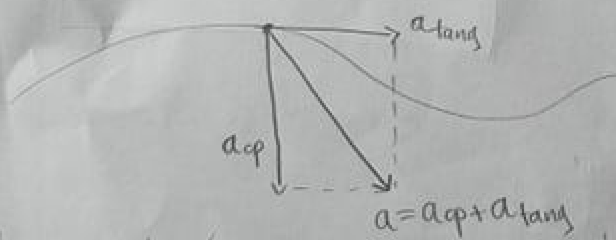
$$\Delta r = r[t+\Delta t] - r[t]$$

brzina čestice – omjer pomaka čestice Δr koji se dogodio u vremenu Δt – brzina je limes tog omjera kada $\Delta t \to 0$. $v[t] = \frac{d\, r[t]}{dt}$

iznos brzine: $v = \frac{ds}{dt}$

akceleracija čestice: limes omjera promjene brzine u vremenskom intervalu Δt: $a[t] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\, v[t]}{dt}$

2. Skicirajte dio zakrivljene putanje čestice, označite vektor akceleracije. Pomoću te skice definirajte centripetalnu akceleraciju $\vec{a}_{cp}$ i tangencijalnu akceleraciju $\vec{a}_{tang}$.



cent.akc. – odražava promjenu smjera gibanja čestice

$$a_{cp} = v \frac{d\hat{v}}{dt}$$ iznos brzine

tan.akc. – leži na tang. na putanji i govori o promjeni iznosa brzine čestice

$a_{tang} = \frac{dv}{dt} \hat{v}$ – jed. vektor vektora brzine koji gleda u smjeru gibanja

3. Krenuvši od izraza za akceleraciju čestice $\vec{a}(t)$, integracijom odredite vektor brzine čestice u bilo kojem trenutku. Krenuvši od izraza za brzinu čestice $\vec{v}(t)$, integracijom odredite vektor položaja čestice u bilo kojem trenutku. Primjenite ove izraze na gibanje sa stalnom akceleracijom $\vec{a}_0$.

$$a[t] = \frac{dv[t]}{dt} \;/\cdot dt \rightarrow dv[t] = a[t]\,dt \;/\int$$

$$v[t] = v_0[t] + a[t]\cdot t$$

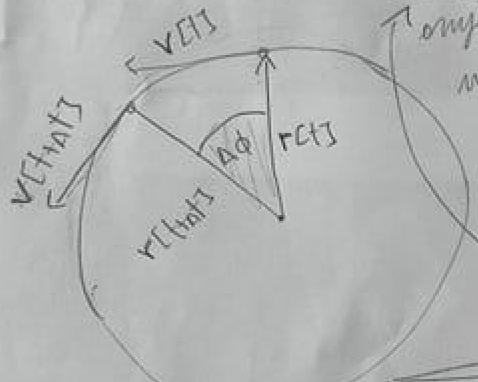
$$v[t] = \frac{dr[t]}{dt} \rightarrow dr[t] = v[t]\cdot dt \;/\int$$

$$r[t] = \int v_0[t]\,dt + \int a[t]\,t\cdot dt$$

$$= v_0[t]\cdot t + \frac{1}{2}a[t]\cdot t^2 + r_0[t]$$

-kada imamo stalnu akceleraciju, umjesto a[t] svugdje pišemo a_0!

4. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite vektore položaja i brzine u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Označite kut koji je za to vrijeme "prebrisao" vektor položaja. Pomoću tih veličina definirajte kutnu brzinu čestice i kutnu akceleraciju čestice.



~~vektor~~ iznos kutne brzine jest limes omjera kuta zakreta $\Delta\phi$ izraženog u radijanima i vremena Δt u kojem je zakret nastupio, kad $\Delta t \rightarrow 0$,

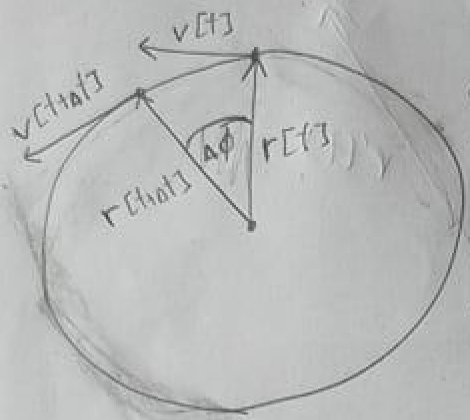
$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}}$$

iznos kutne brzine, orijentacija mu je okomita na ravninu putanje

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

kutna akceleracija

3. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite vektore položaja i brzine u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Označite kut koji je za to vrijeme "prebrisao" vektor položaja. Pomoću tih veličina izvedite vezu između obodne i kutne brzine čestice. Napišite taj izraz u vektorskom obliku. Derivirajte izraza za obodnu brzinu i identificrajte tangencijalnu i centripetalnu akceleraciju.



S obzirom na to da pri zakretu vektora **r** za kut $\Delta\phi$ čestica duž kružnice prevali put duljine $\Delta s = R \cdot \Delta\phi$, iznos njene brzine možemo izraziti kao:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\phi}{\Delta t} = R\frac{d\phi}{dt} = \boxed{R \cdot \omega}$$

u vektorskom obliku $\boxed{v = \omega \times r}$

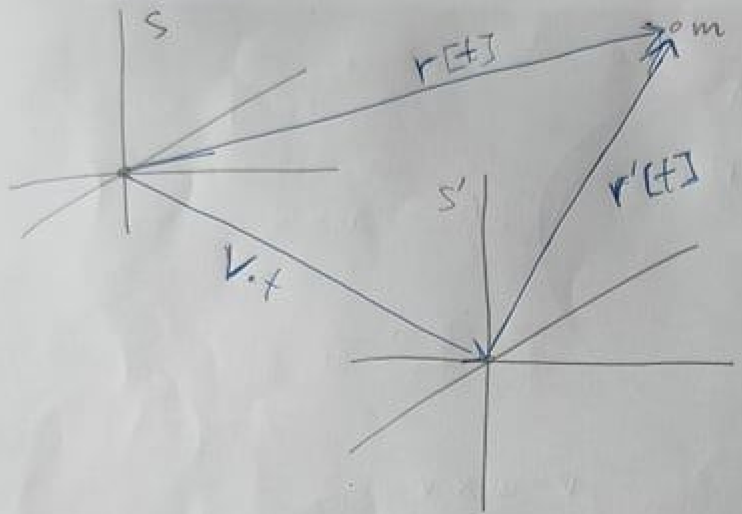
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \times r)}{dt} = \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\text{tangencijalna akceleracija}} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt} \rightarrow \text{centripetalna akceleracija}$$

$\rightarrow a$ – kutna akceleracija

$$\omega \times \frac{dr}{dt} = \omega \times v = \omega \times (\omega \times r) = (\omega \cdot r) \cdot \omega - (\omega \cdot \omega) r$$
$$= -\omega^2 r$$

ω i r su okomiti pa im je umnožak 0!!

6. Skicirajte dva referentna okvira koji se jedan u odnosu na drugi gibaju stalnom brzinom $\vec{V}$. Označite vektor položaja neke čestice u oba referentna okvira i izvedite Galilejeve transformacije za položaj, brzinu čestice i akceleraciju čestice.



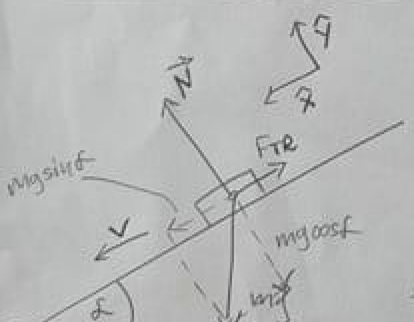
$r[t] = V \cdot t + r'[t]$ — položaj

$v[t] = V + v'[t]$ — brzina, derivacija položaja po vremenu

$a[t] = a'[t]$ — akceleracija

Teorijska pitanja za 2. tjedan

7. Skicirajte dijagram sila za tijelo na kosini nagiba α s kojom tijelo ima koeficijent trenja μ u slučaju kad tijelo klizi uz kosinu te u slučaju kad tijelo klizi niz kosinu. Dodajte odgovarajući koordinatni sustav i napišite jednadžbu gibanja u vektorskom obliku te po komponentama u odabranom koordinatnom sustavu.



sila reakcije podloge

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{tr}$$

$$m a_x \cdot \hat{x} = N\hat{y} + mg(\sin\alpha\,\hat{x} - \cos\alpha\,\hat{y}) \mp \mu_d N\hat{x} \quad (v_x \gtrless 0)$$

− predznak kada tijelo klizi niz kosinu

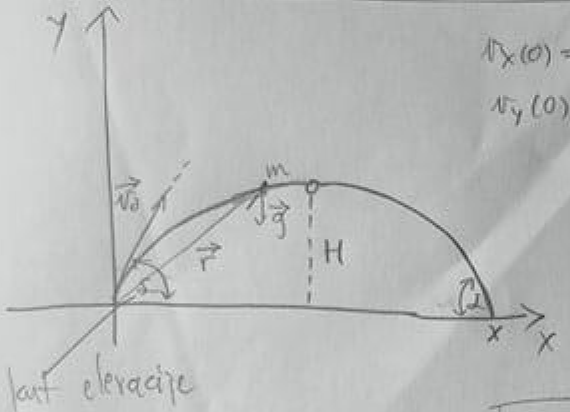
+ predznak kada tijelo klizi uz kosinu

kada rastavimo jedn. po komponentama:

$$m a_x = mg\sin\alpha \mp \mu_d \cdot N \quad (v_x \gtrless 0), \quad 0 = N - mg\cos\alpha$$

$$a_x = g(\sin\alpha \mp \mu_d\cos\alpha) \quad (v_x \gtrless 0)$$

8. Skicirajte dijagram sila za projektil koji se giba pod djelovanjem gravitacijske sile bez prisutnosti sila otpora, uz zadanu početnu brzinu iznosa v_0 pod kutem α u odnosu na horizontalnu ravninu. Dodajte odgovarajući koordinatni sustav i napišite jednadžbu gibanja u vektorskom obliku te po komponentama u odabranom koordinatnom sustavu. Riješite jednadžbu gibanja.



$v_x(0) = v_0 \cos\alpha$

$v_y(0) = v_0 \sin\alpha$ $\quad \vec{a_0} = -g\hat{y}$

$v_y[t] = v_0 \sin\alpha - gt$

$x[t]\,\hat{x} + y[t]\,\hat{y} =$

$v_0 \cos\alpha\, t\,\hat{x} + v_0 \sin\alpha\, t\,\hat{y} - \frac{g}{2}t^2\,\hat{y}$

$= \underbrace{\boxed{v_0 \cos\alpha\, t}}_{x[t]}\,\hat{x} + \underbrace{\boxed{(v_0 \sin\alpha\, t - \frac{g}{2}t^2)}}_{y[t]}\,\hat{y}$

h_{max}

uvjet: $v_y[t_1] = 0$

$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$x_1 = x[t_1] = \ldots$ ubacimo t_1 dobiveni u formulu za $x[t]$

$y_1 = y[t_1] = \ldots$ isto ubacivanje

Domet na vodoravnom tlu:

uvjet $y[t_2] = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$

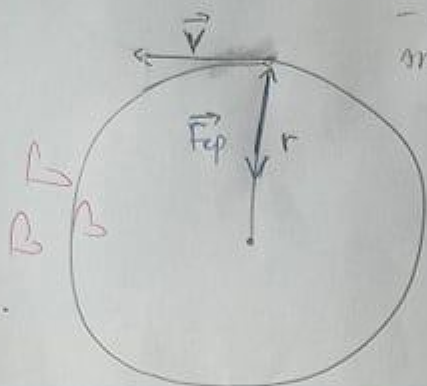
domet $D = x_2 = x[t_2] = \ldots$ ubacivanje u formulu dobivenog t_2!

Jednadžba putanje:

$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ iz jednadžbe za $x[t]$, a onda ubrojimo u $y[t]$:

dobijemo: $y = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}\cdot(u^2+1)$ $\quad \boxed{u = \mathrm{tg}\,\alpha}$

9. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite polumjer zakrivljenosti i vektor brzine u nekom trenutku. Označite silu koja djeluje na tijelo i napišite iznos i smjer koji sila mora imati da bi omogućila gibanje tijela prikazano na skici.



– smjer centripetalne sile je prema središtu zakrivljenosti, iznos joj je

$$\vec{F}_{cp} = m \cdot a_c = \frac{mv^2}{r} \qquad a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$$

TEORIJSKA PITANJA – 3. TJEDAN

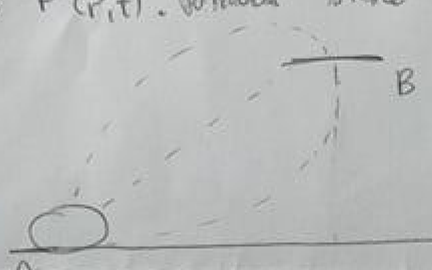
(10.) Nap. izraz za rad koji obavi sila kada se pod njenim djelovanjem tijelo pomakne za vektor pomaka $d\vec{r}$. Napišite i dokažite teorem o radu i kin. energiji.

$\boxed{dW = F \cdot dr}$ T.M. o W i E_{KIN}: $\Delta W = \Delta K$ d – diferencijal, promjena

dokaz: $dW = F \cdot dr = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dr = m \cdot \frac{dr}{dt} \cdot dv = mv \cdot dv = m \frac{dv^2}{2}$
$= d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK$

$\boxed{dv^2 = d(v \cdot v) = 2v \cdot dv}$??

(11.) Skic. nekoliko mogućih putanja između A i B u polju sile $\vec{F}(\vec{r}, t)$. Pomoću skice def. konz. silu.



F_G – konzervativna sila

Primijenite tu definiciju na izvod izraza za pot. energiju (a) pri sabijanju ili rastezanju opruge konst. elastičnosti k (b) pri podizanju tijela mase m na visinu h u gravitacijskom polju

a) $U(x) = -\int_0^x F_x[x']\,dx' = -\int_0^x (-kx')\,dx = k\int_0^x x'\,dx = \boxed{\frac{1}{2}kx^2}$

b) $U[r] = -\int_0^r F \cdot dr' = -\int_0^r (-mg\hat{z}) \cdot (dx'\hat{x} + dy'\hat{y} + dz'\hat{z}) = mg\int_0^z dz' = \underline{\underline{mgz}}$

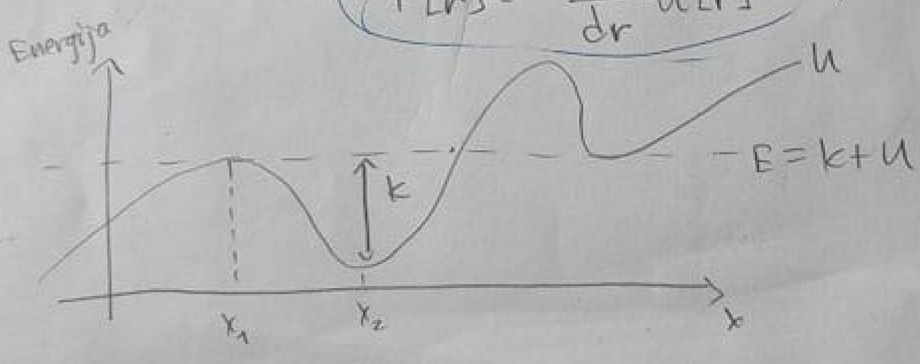
12. Definirajte mehaničku energiju te objasnite u kojim okolnostima je ta veličina očuvana. Opišite primjer sustava u kojem je mehanička energija očuvana te primjer sustava u kojem ona nije očuvana.

- Mehanička energija je zbroj kinetičke i potencijalne energije tijela. Sustav u kojem je mehanička energija očuvana je npr. trampolin, a sustav u kojem nije je npr. pucanje lopte u stol. Meh. energija nije očuvana ako na sustav djeluju vanjske sile (najčešće sile otpora)

13. Za zadanu potencijalnu energiju sustava $U(\vec{r})$ odredite silu koja djeluje na česticu u sustavu. Primijenite izraz na jednodimenzionalni sustav ($U(x)$) i pomoću toga objasnite pojmove stabilne i nestabilne ravnoteže.

Diferencijal potencijalne energije možemo izraziti kao: $dU = -F[r] \cdot dr$ gdje je $F[r] \cdot dr$ diferencijal rada koji obavi konzervativna sila. Taj nam izraz dopušta da polje konzervativne sile izrazimo kao negativnu derivaciju potencijalne energije po položaju:

$$F[r] = -\frac{d}{dr} U[r]$$



$$F_x[x] = -\frac{\partial}{\partial x} U[x]$$

- u točki stabilne ravnoteže udaljavanjem od centra se smanjuje kinetička energija (x_2), a u točki nestabilne ravnoteže (x_1) nalazi se maksimum pot. energije pa se udaljavanjem od njega kin. energija povećava!

14. Definirajte količinu gibanja $\vec{p}$ sustava čestica te je povežite sa zbrojem vanjskih sila koje djeluju na sustav. Pokažite da je količina gibanja očuvana ako je zbroj vanjskih sila koje djeluju na sustav jednak nuli.

Količina gibanja sustava čestice je zbroj količina gibanja $p_i = m_i v_i$ svih čestica u sustavu. Vremenska derivacija količine gibanja sustava jednaka je zbroju vanjskih sila koje djeluju na čestice sustava:

$$\frac{dp}{dt} = \sum_i \frac{dp_i}{dt} = \sum_i F_i = \sum_i \left(F_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} F_{ji}\right) \Rightarrow \sum_i F_i^{(ext)} = F^{(ext)}$$ dok

unutarnje sile u sustavu nemaju nikakav utjecaj.

Stoga, ako je zbroj vanjskih sila koje djeluju na čestice nekog sustava jednak nuli, onda je količina gibanja tog sustava očuvana veličina: $F^{(ext)} = 0 \iff \frac{dp}{dt} = 0.$

15. Definirajte vektor položaja središta mase sustava čestica $\vec{r}_{cm}(t)$. Pokažite da je brzina središta mase sustava razmjerna ukupnoj količini gibanja čestica u sustavu. Pokažite da je ukupna vanjska sila na sustav čestica ($\vec{F}_{ext}$) povezana s akceleracijom središta mase ($\vec{a}_{cm}$).

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$ položaj i masa i-te čestice u sustavu

masa sustava čestice

brzina središta mase je razmjerna količini gibanja sustava:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m}\sum_i \vec{p}_i = \frac{\vec{P}}{m}$$

$$\vec{p}_{CM} = \vec{P} = m \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{F}^{(ext)} = \frac{d}{dt}\vec{P} = m\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = m \cdot \vec{a}_{CM}$$

Teorijska pitanja za 4. tjedan

16. Napišite jednadžbu gibanja za masu na opruzi i izvedite njezino opće rješenje. Napišite izraze za brzinu i akceleraciju mase.

Jednadžba gibanja: $m\ddot{x} = -kx / m$ gdje je $x = x[t]$ funkcija vremena koja opisuje x-koordinatu položaja mase

kad ubacimo $w_0^2 = \frac{k}{m}$ imamo $\ddot{x} + w_0^2 x = 0.$ *

Prema teoriji dif. jednadžbi postoje 2 linearno nezavisna rješenja jednadžbe: $\sin wt$ i $\cos wt$;

$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$ $\quad x[t] = a \sin w_0 t + b \cos w_0 t$, opće rješenje

Zamijenimo li $a = A \cos\varphi_0$ i $b = A \sin\varphi_0$ rješenje poprima oblik

$x(t) = A\cos\varphi_0 \sin w_0 t + A \sin\varphi_0 \cos w_0 t$, zbog identiteta

$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta$ dobivamo: $x(t) = A \sin(w_0 t + \varphi_0)$

brzina: $\frac{d\,x(t)}{dt} = A w_0 \cos(w_0 t + \varphi_0)$

akceleracija: $\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -A w_0^2 \sin(w_0 t + \varphi_0)$

DRUGA STR.

17. Napišite jednadžbu gibanja oscilatora prigušenog silom razmjernom brzini te izvedite njena tri rješenja (ovisno o jakosti prigušenja).

sve to uvrstimo u *:

$-A w_0^2 \sin(w_0 t + \varphi_0) + \frac{k}{m} A \sin(w_0 t + \varphi_0) = 0$, vidimo da je $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, zato jednadžba * ima rješenje u obliku sinusne (harmoničke) funkcije:

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_0\right)$$

TITRANJE TIJELA NA OPRUZI NEZANEMARIVE MASE

$w_0^2 = \frac{k}{M + m/3}$, jednadžba gibanja je ista:

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0 \,!$$

Jednadžba gibanja oscilatora s prigušenjem:

$$:m/ \quad m\ddot{x} = F_x = -kx - \beta\dot{x}$$ –sila otpora

$$\boxed{2\delta = \frac{\beta}{m}} \quad \boxed{\frac{k}{m} = \omega_0^2}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ koeficijent prigušenja – proporcionalna je brzini po pretpostavci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$, pretpostavimo rješenje oblika

$$x(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = Ai\omega e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

uvrstimo u

$$-A\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi_0)} + 2\delta A i\omega e^{i(\omega t+\varphi_0)} + \omega_0^2 A e^{i(\omega t+\varphi_0)} = 0$$

$$[-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2]\, Ae^{i(\omega t+\varphi_0)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \frac{-2i\delta \pm \sqrt{4(i\delta)^2 + 4\omega_0^2}}{-2} =$$

$$\dots = i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

RAZMATRAMO 3 SLUČAJA: $\boxed{1}$ $\delta^2 < \omega_0^2$ malo ili slabo prigušenje

Za slabo prigušenje je $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$, pa rješenje možemo pisati kao:

$$x(t) = Ae^{-\delta t} e^{i(\omega t+\varphi_0)} = Ae^{-\delta t} e^{i\omega t} e^{i\varphi_0}$$ gdje je $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, realni dio te f-je je $x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$

$\boxed{2}$ $\delta^2 > \omega_0^2$ APERIODIČKO TITRANJE (nadkritično prigušenje) prigušenje je tada tako veliko da se zatitrano tijelo kad dosegne odredenu ampl. vraća u ravn. položaj.

Ako je $\omega = i\omega'$ onda rješenje pišemo u obliku:

$$x(t) = e^{-\delta t}(A\operatorname{sh}\omega' t + B\operatorname{ch}\omega' t) \qquad \omega' = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

$\boxed{3.}$ $\delta^2 = \omega_0^2$ KRITIČNO GUŠENJE – sustav se pri kritičnom prigušenju vraća u položaj ravnoteže u najkraćem vremenu.

18. Krenuvši od izraza za ukupnu energiju prigušenog oscilatora, pokažite da energija u vremenu opada s kvadratom brzine.

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$$

Brzina promjene energije u vremenu:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E_k(s') + E_p(s)\right) = \frac{ds'}{ds'}\frac{dE_k}{dt} + \frac{ds}{ds}\frac{dE_p}{dt} =$$

$$\frac{ds'}{dt}\frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{2}ms'^2\right) + \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}ks^2\right)$$

$$\frac{dE}{dt} = s''\frac{1}{2}m2s' + s'\frac{1}{2}k2s = ms''s' + ks's = (ms'' + ks)s'$$

$ms'' + bs' + ks = 0$ (jedn. prig. harm. titranja)

$ms'' + ks = -bs'$

$$\frac{dE}{dt} = -bs's' = -bs'^2 = -bv^2$$ – brzina gubitka energije sustava proporcionalna je kvadratu brzine v^2 kad je disipativna sila lin. proporcionalna brzini ($F_{TR} \propto v$).

19. Krenuvši od njegove općenite definicije, izvedite izraz za Q-faktor prigušenog oscilatora.

Q faktor se definira kao omjer srednje ukupne energije titrajnog sustava $\overline{E}$ između 2 susjedne pozitivne amplitude (npr. a_1 i a_2) i gubitka energije u tom intervalu:

$$Q = 2\pi\frac{\overline{E}}{\Delta E} \qquad \overline{E} = \frac{1}{4}k(a_1^2 + a_2^2) \qquad \Delta E = \frac{1}{2}k(a_1^2 - a_2^2)$$

$$Q = 2\pi\frac{\frac{1}{4}k\left(A^2e^{-2\delta t} + A^2e^{-2\delta(t+T)}\right)}{\frac{1}{2}k\left(A^2e^{-2\delta t} - A^2e^{-2\delta(t+T)}\right)} = \pi\frac{\left(e^{-2\delta t} + e^{-2\delta t}e^{-2\delta T}\right)}{\left(e^{-2\delta t} - e^{-2\delta t}e^{-2\delta T}\right)} =$$

$$\pi\frac{(1 + e^{-2\delta T})}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{\pi(1 + e^{-\delta T}e^{-\delta T})}{1 - e^{-\delta T}e^{-\delta T}} = \frac{\pi e^{-\delta T}}{e^{-\delta T}}\frac{(e^{\delta T} + e^{-\delta T})}{e^{\delta T} - e^{-\delta T}}$$

$$Q = \pi\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}$$ uz $\operatorname{tgh}\lambda = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$ $Q = \frac{\pi}{\operatorname{tgh}\lambda}$, za mali λ je $\operatorname{tgh}\lambda \approx \lambda$ pa slijedi: $Q = \frac{\pi}{\lambda}$ – logaritamski dekrement

Teorijska pitanja za 5. tjedan

20. **Napišite jednadžbu gibanja prisilnog titranja, izvedite njeno rješenje i izraz za rezonantnu frekvenciju (najveća amplituda).**

$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_p \sin\omega_p t \; / : m$ – vanjska harmonijska sila amplitude F_p i frekvencije ω_p.

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \sin\omega_p t \qquad \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \quad \boxed{2\delta = \frac{\beta}{m}} \quad \boxed{A_0 = \frac{F_p}{m}}$$

Pretpostavljamo rješenje oblika: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi)$ – kašnjenje u fazi iza titranja vanjskog oscilatora

amplituda

$$\dot{x} = A(\omega)\omega\cos(\omega t - \varphi) \qquad \ddot{x} = -A(\omega)\omega^2\sin(\omega t - \varphi)$$

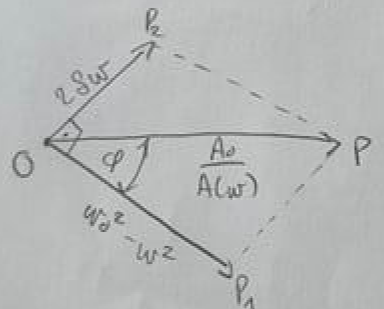
$$-A(\omega)\omega^2\sin(\omega t - \varphi) + 2\delta A(\omega)\omega\cos(\omega t - \varphi) - \omega_0^2 A(\omega)\sin(\omega t - \varphi) = A_0\sin\omega t \; / : A(\omega)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t - \varphi) + 2\delta\omega\cos(\omega t - \varphi) = \frac{A_0}{A(\omega)}\sin\omega t$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t - \varphi) + 2\delta\omega\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{A_0}{A(\omega)}\sin\omega t$$

dva međusobno okomita titranja zaokruženih amplituda

titranje dobiveno zbrajanjem lijevih



$$\left(\frac{A_0}{A(\omega)}\right)^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2 \; / \sqrt{\ }$$

$$\frac{A_0}{A(\omega)} = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\delta\omega)^2} \Rightarrow \boxed{A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}}$$

amplituda

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

$$x[t] = A(\omega)\sin[\omega_p t - \varphi]$$

vanjski oscilator

$A(\omega)$ je max. pri rez. frek. ω_r:

REZONANTNA FREKVENCIJA $\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$ $\qquad$ ω_0 – vlastita frek. sustava

21. Napišite jednadžbu gibanja simetričnog vezanog oscilatora $|-k-m-K-m-k-|$, izvedite frekvencije (vlastitih modova) titranja te napišite opća rješenja $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

1. vlastiti mod - tijela titraju jednakom amplitudom u fazi jedno s drugim ($x_1 = x_2$), duljina srednje opruge se ne mijenja, znači sustav je ekvivalentan sustavu mase $2m$ koje titra na opruzi konstante $2k$.

amplituda, početna faza titranja

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad x_1[t] = x_2[t] = A\cos[\omega_A t + \phi_A]$$

2. vlastiti mod - tijela titraju jednakom amplitudom u protufazi ($x_1 = -x_2$). Kad se bočne opruge rastegnu za Δx i djeluju silom iznosa $k\Delta x$, središnja se opruga sabije za $2\Delta x$ i djeluje silom iznosa $2k'\Delta x$. Slijedi da je iznos ukupne sile koja djeluje na tijela $(k+2k')\Delta x$ te oba tijela u ovom modu titraju frekvencijom $\omega_B = \sqrt{(k+2k')/m}$, a otkloni $x_1[t] = -x_2[t] = B\cos[\omega_B t + \phi_B]$

Općenito gibanje ovog sustava možemo shvatiti kao istovremeno titranje njegovih dvaju vlastitih modova:

$$x_1[t] = A\cos[\omega_A t + \phi_A] + B\cos[\omega_B t + \phi_B]$$
$$x_2[t] = A\cos[\omega_A t + \phi_A] - B\cos[\omega_B t + \phi_B].$$

22. Krenuvši od općeg rješenja za titranje simetričnog vezanog oscilatora $|-k-m-K-m-k-|$, $x_1(t) = A\cos(\omega_A t + \phi_A) - B\cos(\omega_B t + \phi_B)$, $x_2(t) = A\cos(\omega_A t + \phi_A) + B\cos(\omega_B t + \phi_B)$, izvedite osnovnu frekvenciju i frekvenciju udara za gibanje s početnim uvjetima $x_1(0) > 0$, $v_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $v_2(0) = 0$. (Moguće su varijacije zadanih početnih uvjeta.)

Nakon trig. transformacije dobijemo:

$$x_1 = 2A\cos\left(\frac{\omega_A - \omega_B}{2}t + \frac{\phi_A - \phi_B}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2}t + \frac{\phi_A + \phi_B}{2}\right)$$

$$x_2 = 2A\sin\left(\frac{\omega_A - \omega_B}{2}t + \frac{\phi_A - \phi_B}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2}t + \frac{\phi_A + \phi_B}{2}\right)$$

vezani oscilatori titraju frekvencijom $(f_1 + f_2)/2$ i amplituda se mijenja od maksimalne $2A$ do 0.

Frekvencija kojom se ponavlja maksimalna amplituda, tj.

FREKVENCIJA UDARA je:

$$\boxed{f_u = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2}$$

Teorijska pitanja za 6. tjedan

$\mu = \Delta m / \Delta x$

23. Izvedite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) za transverzalno titranje niza masa povezanih napetim oprugama.

Transverzalni otklon elementa užeta od njegovog ravnotežnog položaja možemo opisati funkcijom $y[x,t]$ gdje je x koordinata položaja na užetu, a t trenutak u vremenu. Uže linijske gustoće mase μ i napetosti T prikazujemo kao beskonačni "lanac čestica" koje su razmaknute za Δx, čije su mase $\Delta m = \mu \Delta x$ i koje su povezane oprugama napetosti T. Pretp. da se mogu gibati u transver. smjeru, a otklon i-te čestice od njenog ravn. položaja označavamo s y_i. Jedn. gibanja i-te čestice:

$$\Delta m \ddot{y}_i = T\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + T\frac{y_{i-1} - y_i}{\Delta x}$$

sile kojom opruge s lijeve i desne strane djeluju na i-tu česticu

Koristeći $\Delta m = \mu \Delta x \rightarrow \ddot{y}_i = \frac{T}{\mu}\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$, a pretpostavimo li da se transverzalni otklon bilo koje čestice može opisati glatkom funkcijom $y[x,t]$ (x koordinata čestice, vrijeme), gornju jednadžbu možemo napisati kao

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x_i,t] = \frac{T}{\mu}\frac{y[x_i + \Delta x, t] - 2y[x_i,t] + y[x_i - \Delta x, t]}{(\Delta x)^2}$$

$$\ddot{y}[x,t] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x,t]$$

na kraju dobivamo jednadžbu:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x,t] - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x,t] = 0}$$

24. Izvedite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) za longitudinalno titranje niza masa povezanih oprugama.

Tanki elastični štap načinjen od materijala gustoće ρ i Youngovog modula elastičnosti E možemo shvatiti kao niz elemenata jednake ravnotežne duljine Δx. Ako je S površina pop. presjeka, masa el. štapa je $\Delta m = \rho S \Delta x$, a pri longitudinalnom sažimanju i rastezanju element štapa se ponaša kao opruga konstante $k = \frac{SE}{\Delta x}$.

Longitudinalni otklon čestice od njenog ravn. položaja opisujemo funkcijom $\xi[x,t]$ koordinata ravn. položaja čestice. Označimo li sa x' koordinatu položaja te čestice u nekom trenutku: $x' = x + \xi[x,t]$

IZVOD: El. štap ili stupac stlačivog fluida gustoće φ i površine poprečnog presjeka S duž kojeg putuje long. val prikazujemo kao lanac čestica povezanih oprugama. U ravn. položaju su čestice razmaknute za Δx što znači da im je masa $\Delta m = \varphi S \Delta x$, opruge kojom su čestice povezane imaju konstantu k u otklon i-te čestice od ravn. položaja opisujemo koordinatom ξ_i. Jednadžba gibanja i-te čestice glasi: $\Delta m \ddot{\xi}_i = \underbrace{-k(\xi_i - \xi_{i+1}) - k(\xi_i - \xi_{i-1})}_{\text{sile lijeve i desne opruge na i-tu česticu}}$

Koristeći $\Delta m = \varphi S \Delta x$ možemo pisati:

$$\ddot{\xi}_i = \frac{E}{\varphi} \frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

a pretpostavimo li da se otklon čestice od njenog ravn. položaja može opisati glatkom funkcijom $\xi[x,t]$ jednadžba poprima:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi[x,t] = \frac{E}{\varphi} \left(\frac{\xi[x_i + \Delta x, t] - 2\xi[x_i, t] + \xi[x_i - \Delta x, t]}{(\Delta x)^2} \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi[x,t]$$

DOBIJEMO:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi[x,t] - \frac{E}{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi[x,t] = 0}$$

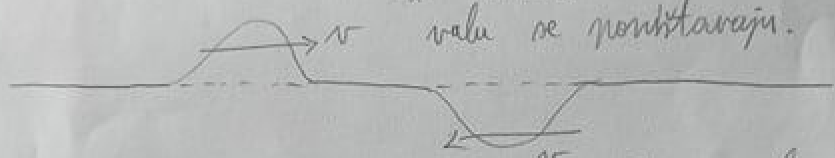
25. Napišite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) vala, dokažite da su funkcije oblika $f(x-vt)$ i $g(x+vt)$ njezina opća rješenja. Pokažite u kojem se smjeru svako od tih rješenja giba.

Tvrdnja dokazujemo uvrštavanjem f i g u jednu od kove-denih valnih jednadžbi. f-ov valni poremećaj se kreće udesno brzinom v, a g-ov valni poremećaj brzinom v ulijevo.

26. Izvedite izraz za prosječnu kinetičku energiju harmoničkog progresivnog vala. Napišite izraze za potencijalnu i ukupnu energiju harmoničkog progresivnog vala, diskutirajte.

Polazimo od vala u kojem je otklon čestica od ravn. položaja dan sa $f[x-vt]$ koji putuje u desno, tom valu dodajemo val $-f[x+vt]$ koji putuje u suprotnom smjeru i očekujemo da superpoziciji valova odgovara energija $2E$

u trenutku $t=0$ otkloni čestica obaju vala se poništavaju.



S obzirom da se u tom trenutku sredstvo nalazi u ravn. stanju, njegova je pot. energija jednaka nuli, slijedi da je uk. energija superpozicije, $2E$, u tom trenutku se sastoji isključivo od kin. energ.

$$2E = \int \frac{1}{2} (\dot{y}[x,0])^2 \, dm$$

brzina elementa u $t=0$; dm element mase sredstva. Brzinu čestica $\dot{y}[x,0]$ računamo iz izraza $\dot{y}[x,t] = \dfrac{dy[x,t]}{dt} = -v f'[x-vt] - v f'[x+vt]$, što za $t=0$ daje $\dot{y}[x,0] = -2v f'[x]$. Konačno, pišući el. mase sredstva kao $dm = \mu dx$, gdje je μ lin. gustoća mase sredstva, dobivamo izraz za energiju E putujućeg vala $f[x-vt]$:

$$E = \mu v^2 \int (f'[x])^2 dx.$$

27. **Za progresivni transverzalni harmonički val koji nailazi na granicu sredstava izvedite izraze za amplitude transmitiranog i reflektiranog vala.**

upadni val: $s_u(x,t) = A_u \sin\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$ Neka je mjesto spoja
reflektirani val: $s_r(x,t) = A_r \sin\omega\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$ užeta ishodište koordinatnog
transmitirani val: $s_t(x,t) = A_t \sin\omega\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$ sustava, odnosno $x=0$.

RUBNI UVJETI MORAJU BITI ISPUNJENI: $s_u + s_r = s_t$ (1)

Na mjestu $x=0$ val se dijeli na ref. i trans.: $\frac{\partial}{\partial x}(s_u+s_r) = \frac{\partial}{\partial x} s_t$ (2) u

graničnoj točki nagibi obaju užeta moraju biti jednaki. U graničnoj točki valne funkcije imaju oblik:
$s_u = A_u \sin\omega t$
$s_r = A_r \sin\omega t$
$s_t = A_t \sin\omega t$

1. rubni uvjet daje:
$A_u \sin\omega t + A_r \sin\omega t = A_t \sin\omega t \Rightarrow \boxed{A_u + A_r = A_t}$

2. rubni uvjet daje:
$\frac{\partial}{\partial x} s_u = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_u \sin\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)\right) = A_u \cos\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)\cdot\left(-\frac{\omega}{v_1}\right)$

$\frac{\partial}{\partial x} s_r = +\frac{\omega}{v_1} A_r \cos\omega\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$

$\frac{\partial}{\partial x} s_t = -\frac{\omega}{v_2} A_t \cos\omega\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$

uz $x=0$:
$\frac{\partial}{\partial x} s_u = -\frac{\omega}{v_1} A_u \cos\omega t$
$\frac{\partial}{\partial x} s_r = +\frac{\omega}{v_1} A_r \cos\omega t$
$\frac{\partial}{\partial x} s_t = \frac{\omega}{v_2} A_t \cos\omega t$

$-\frac{\omega}{v_1} A_u \cancel{\cos\omega t} + \frac{\omega}{v_1} A_r \cancel{\cos\omega t} = \frac{-\omega}{v_2} A_t \cancel{\cos\omega t} \,/ : (-\omega\cos\omega t)$

$\frac{A_u}{v_1} - \frac{A_r}{v_1} = \frac{A_t}{v_2}$ – i onda se dalje igram sa tim i

ovim gornjim uvjetom

PRETEŠKO, VJV NEĆE DOĆ

28. Pokažite da superpozicijom dvaju progresivnih harmoničkih valova može nastati stojni val.

Stojni val se može dobiti tako da se progresivni val reflektira na jednom kraju žice, vrati natrag i zbroji s upadnim valom (interferencija upadnog i reflektiranog vala).
Upadni ili progresivni val se giba zdesna nalijevo u smjeru $-x$ osi (negativne osi) $= s_u(x,t) = A\sin(\omega t + kx)$ valni broj, a reflektirani val mijenja fazu za π: $s_r(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \pi) = -A\sin(\omega t - kx)$,
rezultantna elongacija je zbroj upadnog i reflektiranog:

$$s = s_u + s_r = A\{\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)\} = 2A\sin kx \sin\omega t,$$

amplituda ovisi o x koordinati

ovo nije progresivni val jer nema $(\omega t \pm kx)$ koji pokazuje putovanje faze prostorom, na žici ima točaka koje trajno miruju na mjestima $\sin kx_n = 0 \Rightarrow kx_n = n\pi \Rightarrow x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi\lambda}{2\pi} = \frac{n\lambda}{2}$ - ČVOROVI

TO JE STOJNI VAL!!! TRBUSI $\sin kx_n = \pm 1 \Rightarrow x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

$n = 0, 1, 2 \dots$

29. Izvedite izraze za frekvencije i valne duljine stojnih valova na užetu linijske gustoće μ, napetom silom T i duljine L, s učvršćenim krajevima.

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} \ \text{/ valni broj} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = kv \qquad \lambda\omega = 2\pi v}$$

– to je za putujući harmonijski val

Odaberemo li dva čvora stojnog vala i učvrstimo sredstvo u tim točkama dobili smo stojni val koji titra u sredstvu konačne duljine L s čvrstim krajevima, s obzirom da je udaljenost među čvorovima stoj. vala cjelobrojni umnožak polovina valne duljine, nameće se uvjet: $L = n\frac{\lambda}{2}$. Na osnovu tog uvjeta možemo odrediti dopuštene valne duljine λ_n i frekvencije titranja ω_n stojnog vala u sredstvu zadane duljine L:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad \omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n} = n\frac{\pi v}{L}, \quad n = 1, 2 \dots$$

30. Izvedite izraz promjenu frekvencije zvuka za (a) izvor koji se giba direktno prema ili od nepomičnog prijemnika, (b) prijemnik koji se giba direktno prema ili od nepomičnog izvora, (c) kada se i izvor i prijemnik gibaju direktno jedan prema drugome ili jedan od drugoga.

Razina jakosti buke je veličina dana izrazom: $\langle P \rangle = S I$ (snaga zvuka, površina valnog oblika, intenzitet zvuka)

$$L_{dB} = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$ — granica čujnosti $(10^{-12}\ W m^{-2})$

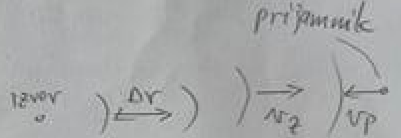
Dopplerova pojava: u situacijama u kojima se izvor zvuka ili prijemnik gibaju u odnosu na zrak, prijemnik može čuti frekvenciju koja je razl. od frek. kojom titra izvor.

usmjeren od točke u kojoj je signal emitiran prema točki u kojoj je signal kasnije primljen!

iznos brzine zvuka u zraku

$$\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot \vec{v}_p}{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot \vec{v}_i}$$

prijemnik, izvor



b) gibanje prijemnika prema mirnom izvoru

Ako izvor odašilje signal u pravilnim vrem. razmacima Δt_i, razmak među valnim frontama je $\Delta r = v_z \Delta t_i$. Prijemnik čuje signal svaki put kad na putu sretne valnu frontu, zbog gibanja prijemnika prema izvoru, brzina prijemnika u odnosu na valne fronte je $v_z + v_p$, pa vrijeme koje protječe između uzastopnih susreta prijemnika s valnim frontama možemo napisati kao: $\Delta t_p = \frac{\Delta r}{v_z + v_p}$, eliminacijom Δr i primjenom $f_i = 1/\Delta t_i$ i $f_p = 1/\Delta t_p$ slijedi

$$\frac{f_p}{f_i} = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_p} = \frac{v_z + v_p}{v_z}$$

a) gibanje izvora prema prijemniku

$\boxed{\Delta r = v_z \cdot \Delta t_i}$ brzina prijemnika u odnosu na valnu frontu =

$$\Delta t_p = \frac{\Delta r}{v_z - v_i}$$

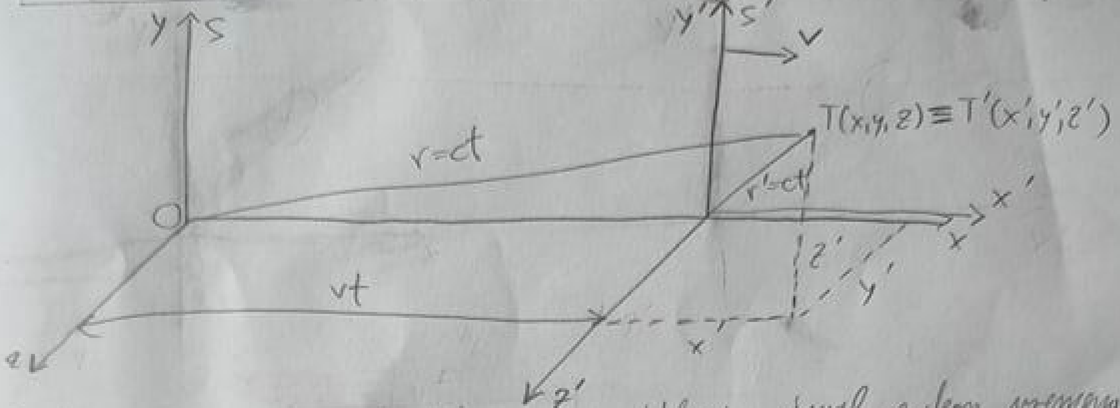
$f_i = 1/\Delta t_i$

~~$f_p = 1/\Delta t_p$~~

$$\cancel{\frac{f_p}{f_i} = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_p} = \frac{\frac{\Delta r}{v_z}}{\frac{\Delta r}{v_i + v_z}} = \frac{v_i + v_z}{v_z}}$$

UBACI SAMO U GORNJI IZRAZ

31. Skicirajte dva inercijalna referentna sustava koji se jedan u odnosu na drugi gibaju brzinom $\vec{v}$. Napišite izraze za Galileijeve i Lorentzove transformacije za tri prostorne i jednu vremensku koordinatu u tim sustavima, te za komponente brzine čestice. Detaljno objasnite razlike između tih transformacija.



U trenu $t=t'=0$ iz ishodišta ide svjetlosni signal, nakon vremena t signal dođe u točku T ($\overline{OT}$ je $r=ct$). Promatrač u sustavu S' opazit će da je svjetlost došla u trenutku t'. Udaljenost koju je signal prešao s obzirom na sustav S' je $\overline{O'T}=r'$. Budući da je c jednaka u oba sustava vrijedi: $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ i $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$.

Transformacija koja će sustav S prevesti u S', a da pri tom budu ispunjeni uvjeti, mora biti linearna zbog homogenosti i izotropnosti prostora:

$x'=Ax+Bt \qquad t'=Cx+Dt$ i mora zadovoljiti uvjete:

1) $t=0,\ t'=0,\ x=0,\ x'=0$ (sustavi se poklapaju u početnom trenu)

2) $x'=0,\ x=vt$ (gibanje ishodišta O' s obzirom na sustav S je jednoliko po pravcu)

TRANSFORMACIJE MORAJU BITI OBLIKA:

$x'=\gamma(x-vt) \quad y'=y \quad z'=z \quad t'=\gamma'(t-ax)$ — $\gamma=A$, $\gamma'=D$ i $a=-\frac{C}{D}$. Ako se odredi iz zahtjeva da brzina svjetlosti c mora biti jednaka u oba sustava: $\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2=c^2\gamma'^2(t-ax)^2$

$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$, ova dva izraza usporedimo

i dobijemo: $\boxed{\gamma=\gamma'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad a=\frac{v}{c^2}}$ i dobijemo:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta=\frac{v}{c}$$

za $v \ll c$ transformacije prelaze u Galilejeve

Galilejeve tran:

$$\boxed{x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \qquad t' = t} \qquad \boxed{u_x' = u_x - v}$$

– isto Galilejeve $u_y' = u_y \quad u_z' = u_z$

32. Skicirajte dva inercijalna referentna sustava koji se jedan u odnosu na drugi gibaju brzinom $\vec{v}$ i česticu koja se giba brzinom $\vec{u}$ mjerenom u jednom od sustava. Izvedite Lorentzove transformacije za komponente brzine čestice.

Ako materijalna točka u sustavu S ima komponente brzine:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}, \text{ a u } S': u_x' = \frac{dx'}{dt'} \quad u_y' = \frac{dy'}{dt'} \quad u_z' = \frac{dz'}{dt'}$$

onda dolje:

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad dy' = dy \quad dz' = dz \quad dt' = \frac{dt - \frac{v\,dx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx - v\,dt}{\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}}}{\frac{dt - \frac{v\,dx}{c^2}}{\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}}} = \frac{dx - v\,dt \;/:dt}{dt - \frac{v\,dx}{c^2} \;/:dt} \Rightarrow u_x' = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy \;/:dt}{\frac{dt - \frac{v\,dx}{c^2} \;/:dt}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_z' = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

33. Uvedite pojam vlastitog vremena i vlastite duljine. Pomoću uvedenih pojmova i Lorentzovih transformacija izvedite izraze za kontrakciju duljine i dilataciju vremena.

Duljina i vrijeme, mjereni s obzirom na sustav u kojem štap miruje, je vlastita duljina i vlastito vrijeme. Odredimo koliku će duljinu d izmjeriti promatrač u sustavu S pokraj kojeg štap i promatrač u sustavu S' prođu brzinom v u smjeru x-osi. Ako je štap orijentiran u smjeru y ili z-osi, duljina će u sustavu S biti jednaka duljini štapa u S':

$$d_0 = y_2' - y_1' = y_2 - y_1 = d \quad \text{ili} \quad d_0 = z_2' - z_1' = z_2 - z_1 = d$$

Ako je štap duljine d_0 u smjeru osi x' čvrsto vezan za sustav S', promatrač u S' izmjeri duljinu: $d_0 = x_2' - x_1'$, a onaj u S izmjeri: $d = x_2 - x_1$, a primjenom Lorentzovih trans. dobijemo:

$$d = x_2 - x_1 = x_2'\sqrt{1-\beta^2} + vt - x_1'\sqrt{1-\beta^2} - vt = (x_2' - x_1')\sqrt{1-\beta^2} \qquad d = d_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Dilatacija vremena: Pokazujemo da je promatraču u sustavu S' proces, koji se događa u S, duži nego promatraču koji se giba zajedno sa sustavom u kojem se događa taj proces. Neka se u sustavu S' na mjestu x' odvija određeni proces u vremenu: $\Delta t' = t_2' - t_1'$, promatrač u sustavu S izmjeri da je proces trajao $\Delta t = t_2 - t_1$. Prema transformacijama vrijedi:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$ – DILATACIJA VREMENA

34. Napišite izraz za relativističku količinu gibanja i relativističku energiju. Primijenite teorem o radu i kinetičkoj energiji i izvedite izraz za relativističku kinetičku energiju.

$\vec{p} = m\lambda\vec{v}$ → RELATIVISTIČKA KOLIČINA GIBANJA

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Za izvod relativističkog izraza za kin. energiju, služimo se definicijom kin. energije. Rad izvršen silom F na putu ds javlja se u obliku povećanja kin. energije čestice na koju djeluje sila: $dE_k = F ds = F v dt = \frac{d}{dt}(m\lambda v) v dt = m(\lambda dv + v d\lambda) v$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Big/^2 \quad \lambda^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \lambda^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda^2\frac{v^2}{c^2} = 1 \;/\cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\lambda^2c^2 - \lambda^2v^2 = c^2 \;/\, \frac{d}{dt}$$

$$2\lambda d\lambda c^2 - 2\lambda d\lambda v^2 - \lambda^2 2v dv = 0 \;/ : 2\lambda$$

$$c^2 d\lambda = v\lambda dv + v^2 d\lambda$$

$$c^2 d\lambda = v(\lambda dv + v d\lambda) \cdot m$$

$$mc^2 d\lambda = mv(\lambda dv + v d\lambda)$$

$$d(m\lambda c^2) = mv(\lambda dv + v d\lambda) = dE_k \;/ \int$$

Granice integracije:
- od $v=0$ gdje je $E_k = 0$
- do konačne brzine v gdje je

$$E_k = m\lambda c^2 - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

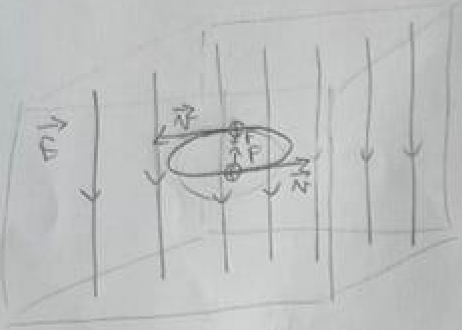
Ukupna energija:

$$\boxed{E = E_k + \underbrace{E_0}_{mc^2} = m\lambda c^2}$$

Teorijska pitanja za 10. tjedan

35. Pokažite da se nabijena čestica u homogenom magnetskom polju može gibati po kružnici, odredite polumjer kružnice (za zadano: m, q, v i B).

$$F_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \sphericalangle(\vec{v}, \vec{B})$$

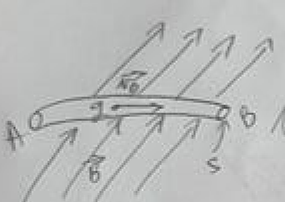


ako je $\sin \sphericalangle(\vec{v}, \vec{B})$ jednak jedan, imamo silu koja je okomita na smjer gibanja i stalna u vremenu – centripetalna sila

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow q \cdot \cancel{v} \cdot B = \frac{mv^{\cancel{2}}}{R}$$

$$\boxed{R = \frac{mv}{qB}}$$

36. Izvedite izraz za silu na element vodiča kojim teče struja I, a nalazi se u magnetskom polju $\vec{B}$.



Pojedini naboji q u vodiču se gibaju brzinom $\vec{v}_D$ pa je sila na njih $q\vec{v}_D \times \vec{B}$. Ukupni naboj u volumenu $dV = S\,dl$ vodiča je: $dQ = nq\,dV = nqS\,dl$ n – broj naboja u jedinici vremena

Ako je struja dana s $I = nqv_D S$, onda silu na vodič duljine dl možemo pisati kao $d\vec{F} = (q\vec{v}_D \times \vec{B})\,nS\,dl = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$ vektor $d\vec{l}$ je u smjeru $\vec{v}_D$.

Ukupnu silu dobijemo zbrajanjem, odnosno integriranjem svih doprinosa $d\vec{F}$ duž vodiča: $\vec{F} = I\int_A^B d\vec{l} \times \vec{B}$

S obzirom da su brzina $\vec{v}_D$, el. struja $\vec{I}$ i $d\vec{l}$ svi u istom smjeru možemo pisati $\vec{F} = \int_A^B (\vec{I} \times \vec{B})\,dl$, uk. sila na dio vodiča između A i B jednaka je sili na dio ravnog vodiča koji spaja točke A i B: $\vec{F} = \int_A^B (\vec{I} \times \vec{B})\,dl = I\vec{AB} \times \vec{B}$

Uk. sila na zatvoreni vodič, kojim teče struja, i koji se nalazi u hom. mag. polju jednak je nula.

Teorijska pitanja za 10. tjedan

37. Pomoću Gaussovog zakona izvedite: polje točkastog naboja, polje unutar i izvan jednoliko nabijene kugle, polje jednoliko nabijene ravne tanke žice, polje jednoliko nabijene plohe.

I. POLJE TOČKASTOG NABOJA A je neka imaginarna sfera oplošja $4\pi R^2$.

$$E\cdot A = \frac{q_{toč}}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot 4\pi R^2 = \frac{q_{toč}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{toč}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q_{toč}}{kR^2}$$

II. UNUTAR NABIJENE I IZVAN NABIJENE KUGLE

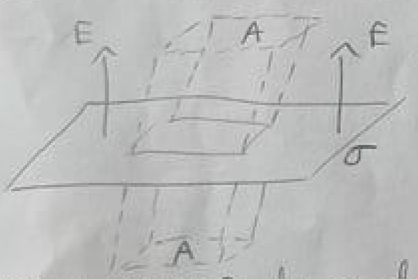
I. UNUTAR $E\cdot \underbrace{A}_{4r_1^2\pi} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{kr_1^2}$

II. IZVAN $E\cdot A = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{kr_2^2}$

III. JEDNOLIKO NABIJENA RAVNA TANKA ŽICA

$$E\cdot(2r\pi h) = \frac{\lambda\cdot h}{\varepsilon_0}$$

IV. JEDNOLIKO NABIJENE PLOHE



$$E(2A) = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$ — KONSTANTNA VRIJEDNOST

46. BOLJI PRISTUP ako se el. žice dl kojim teče struja I nalazi u točki u kojoj je mag. polje vrijednosti B, na njega djeluje el. sile:

$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$. - to je rezultat

čestice $dF = dq\,\vec{v}\times\vec{B}$, ako se radi o el. struji I koja teče žicom, element naboja dq koji proteknu žicom u vremenu dt je $dq = I\,dt$, a pomak koji on pritom napravi duž žice je $d\vec{l} = \vec{v}\,dt$.

Element sile sada možemo izraziti:

$$\boxed{d\vec{F} = I\,dt\,\frac{d\vec{l}}{dt}\times\vec{B} = I\,d\vec{l}\times\vec{B}}$$

$\vec{F} = I\cdot l \times \vec{B}$

$F = I\cdot l\cdot B\cdot \sin\sphericalangle(\vec{l},\vec{B})$

Teorijska pitanja za 11. tjedan

38. Izvedite izraz za elektromotornu silu pri gibanju vodiča u magnetskom polju.

Elektromotorna sila je veličina kojom opisujemo jakost djelovanja mehanizama koji pokreću slobodni naboj u gibanje vodljivim žicama. Definirana je kao integral elektromag. sile po jedinici naboja duž zatvorene krivulje γ.

$$\mathcal{E} = \oint_\gamma \frac{F}{q} \cdot dr = \oint_\gamma (E + v \times B) dr \quad [V]$$

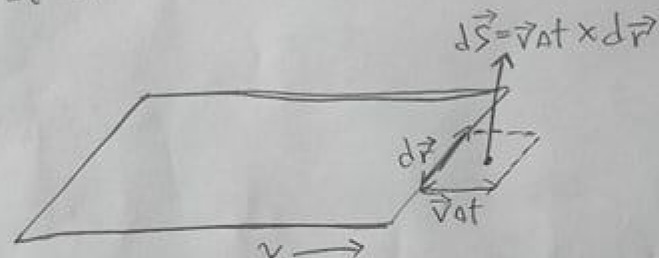
FARADAYEV ZAKON ELEKTROMAG. INDUKCIJE: Elektromot. sila $\mathcal{E}$ inducirana u zatvorenoj krivulji γ jednaka je neg. vrem. derivaciji toka Φ_B mag. polja kroz bilo koju plohu S omeđenu krivuljom γ (vrijedi $\gamma = \partial S$).

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\Phi_B .$$

U slučaju u kojem krivulja γ miruje, a prisutna je vremenska promjena mag. polja B, Faradayev zakon slijedi iz Maxwellove jednadžbe. Elektromotornu silu induciranu duž čitave krivulje γ možemo izraziti kao:

$$\mathcal{E} = \oint_\gamma (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma (d\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} = \frac{1}{\Delta t} \oint_\gamma (d\vec{r} \times \vec{v}\Delta t) \cdot \vec{B}$$

$$= -\frac{1}{\Delta t} \oint_\gamma \vec{B} \cdot (\vec{v}\Delta t \times d\vec{r}) = -\frac{1}{\Delta t} \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



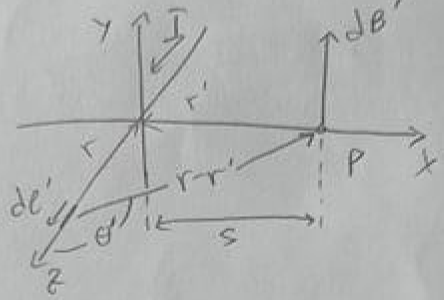
koristimo opći identitet $(a \times b) \cdot c = (c \times a) \cdot b$

39. Koristeći Ampère-Maxwellov zakon izračunajte magnetsko polje beskonačnog ravnog tankog vodiča, a zatim učinite isto primjenom Biot-Savartovog zakona.

Ima i u auditornima 10. – 2. zadatak PRIMJER 1.41.

Primjenom Biot-Savartovog zakona:

Promatramo element žice $d\ell'$ kojim teče struja I i odgovarajući el. mag. polja dB' u točki P koja se nalazi na udaljenosti s od žice.



$$d\vec{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\, d\vec{\ell}'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,|d\vec{\ell}'|\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|\sin\theta'\,\hat{y}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\, d\ell'\sin\theta'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\hat{y}$$

pri čemu smo koristili svojstvo vektorskog produkta, a s θ' smo označili kut koji element žice $d\ell'$ zatvara s vektorom $\vec{r}-\vec{r}\,'$. Uočavamo da neovisno o položaju elementa $d\vec{\ell}'$ na z-osi, element polja ima samo y-komponentu. Nadalje, označimo li sa z' koordinatu položaja elementa $d\vec{\ell}'$ na z-osi, iz slike zaključujemo da je udaljenost točke P od elementa $d\vec{\ell}'$: $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{s^2+z'^2}$ te da sinus kuta θ' možemo izraziti s $\sin\theta' = \frac{s}{\sqrt{s^2+z'^2}}$.

Konačno, izrazimo li element duljine žice kao $d\ell' = dz'$, y-komponenta elementa polja P je $dB_y' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I s\, dz'}{(s^2+z'^2)^{3/2}}$, a y-komponentu dobijemo integracijom dB_y' po čitavoj z-osi,

$$B_y = \int dB_y' = \frac{\mu_0 I s}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{(s^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Teorijska pitanja za 12. tjedan

40. Krenuvši od Maxwellovih jednadžbi u vakuumu izvedite valnu jednadžbu za $\vec{E}$ ili $\vec{B}$.

Valnu jednadžbu izvodimo iz diferencijalnog oblika Maxwellovih jednadžbi: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ (1) $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (3) $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (4)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (2)

Gledamo (3) jednadžbu:

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ / djelujemo operatorom $\vec{\nabla}\times(\ )$ s lijeve strane

OPĆENITO U VEKTORSKOJ ANALIZI VRIJEDI ZA NEKI VEKTOR $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\Delta\vec{A}$$

$\Delta=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ Laplaceov operator $\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\Delta\vec{E}=\underbrace{-\Delta\vec{E}}_{\text{jer je}}=-\vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

jer je

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$

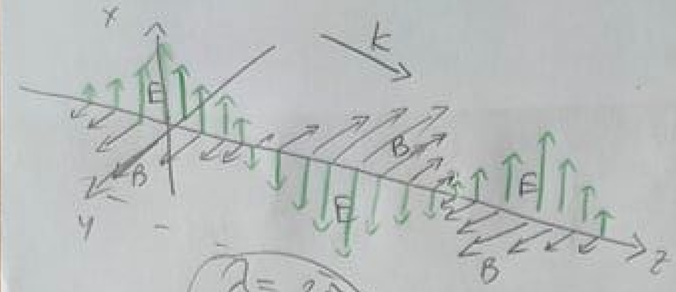
i $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

KONAČNO: $\boxed{\Delta\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}=0}$, na isti način i za magnetsko dobijemo $\boxed{\Delta\vec{B}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}=0}$

41. Napiši izraz za vektore $\vec{E}$ i $\vec{B}$ ravnog linearno polariziranog elektromagnetskog vala te pokažite da su oni rješenja odgovarajućih valnih jednadžbi. Skicirajte vektore $\vec{E}$ i $\vec{B}$ i smjer njihovog širenja.

Ravni linearno polarizirani harm. elektromag. val u vakuumu koji titra kutnom frekvencijom ω i putuje u smjeru određenom tzv. valnim vektorom $k=\frac{\omega}{c}\hat{k}$ - jed. vektor ima el. polje koje možemo izraziti: $\vec{E}[\vec{r},t]=\vec{E_0}\cos[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi]$, $\vec{E_0}\cdot\vec{k}=0$ vektor amplitude el. polja okomit je na smjer gibanja

mag. polje vala $=\vec{B}[\vec{r},t]=\vec{B_0}\cos[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi]$, $\vec{B_0}=\frac{1}{c}\hat{k}\times\vec{E_0}$ konstantni vektor = amplituda titranja magnetskog polja



$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

42. Opišite polarizaciju elektromagnetskog vala (koje se polje koristite za opis, uloga polarizatora) i izvedite Malusov zakon.

- Polarizacija, odnosno smjer titranja, je određena smjerom titranja električnog polja. Polarizatori nam služe tako što oni od prirodne svjetlosti propuste samo komponente koje titraju u jednom smjeru - dobije se linearno polarizirana svjetlost.
- Ako jednostruko polariziranu svjetlost propustimo kroz drugi polarizator, čiji se pravac polarizacije ne poklapa s pravcem polarizacije prvog, intenzitet izlazne svjetlosti iz drugog polarizatora će ovisiti o kutu između pravaca polarizacije 1. i 2. polarizatora.

Malusov zakon: $I(\theta) = I(0)\cos^2\theta$

$I(0)$ – intenzitet polarizirane svjetlosti koja pada na analizator

43. Napišite Poyntingov vektor ravnog vala čije je električno polje dano izrazom $\vec{E}(x,t) = E_0\vec{j}\cdot\cos(\omega t - kx)$. Konačni izraz mora sadržavati smjer, iznos i jedinicu.

$\vec{E}[\vec{r},t] = \vec{E}_0\cos[\underbrace{\vec{k}}_{\text{valni vektor}}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi]$ $\quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$

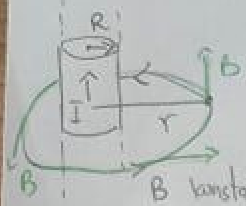
~~za val valne duljine λ koji se u vakuumu širi u smjeru x~~ $\vec{E}_0 = E_0\cdot\hat{y}$

Magnetsko polje dobivamo koristeći izraz $\vec{B} = \hat{k}\times(\vec{E}/c)$ gdje je u ovom slučaju $\hat{k} = \hat{x}$, slijedi: $\vec{B}[x,t] = \frac{E_0}{c}\cdot\hat{z}\cdot\cos[\omega t - kx]$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\hat{x}\cos^2[\omega t - kx]$$

Poytingov vektor

[39] Mag. polje beskonačnog ravnog vodiča Amperovim zakonom



$\oint_{\text{closed loop}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enclosed}}$ — sva struja prolazi kroz zatvorenu površinu O

$\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,dl\cos\theta$

$\oint B\,dl = B\oint dl = B\cdot(2r\pi) = \mu_0 I$

B konstanta jer je kut između njih dl-ova nula

opseg, zbroj svih

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

udaljenost od žice

Teorijska pitanja za 13. tjedan

44. Izvedite izraz za položaje maksimuma intenziteta na zastoru u Youngovom pokusu.

45. Izvedite izraz za položaje minimuma intenziteta na zastoru u Youngovom pokusu.

Izvori valova moraju da imaju iste frekvencije i amplitude. Da bi došlo do konstruktivne inter., razlika faza između dva vala mora biti vremenska konstanta.
Interferencijske pojave se promatraju na zastoru udaljenom D od zaslona s pukotinama (D je reda veličine nekoliko metara). d je razmak među pukotinama, u točki P promatramo interferencijske pojave, a ona je udaljena y od mjesta gdje simetrala 2 pukotine probada zastor (točka O). Rezultanta u točki P je:

$$E_P = \left[2E_0\cos\left(\frac{\omega}{2c}(n_1x_1 - n_2x_2)\right)\right]\cos\left(\omega t_0 - \frac{\omega}{2c}(n_1x_1 + n_2x_2)\right)$$

S obzirom da obje zrake, odnosno oba vala prolaze kroz isto sredstvo, to jest zrak, onda pišemo $n_1 = n_2 = n \approx 1$. Optička razlika hoda u Youngovom pokusu: $\delta = n(x_1 - x_2) = \Delta = d\sin\theta$ – vidimo iz slike

θ kut pod kojim vidimo P iz smjera pukotina

Max. u P: $d\sin\theta_m = m\lambda$ $\quad m = 0, \pm1, \pm2 \dots$

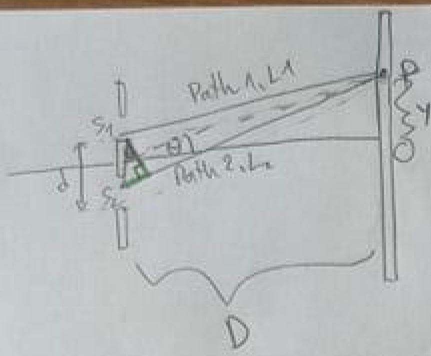
Min. u P: $d\sin\theta_{min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ $\quad m = 0, \pm1, \pm2 \dots$

Max. i min. ovise o položaju točke P, to jest o y: $tg\theta = \frac{y}{D}$, odnosno za mali θ je: $tg\theta \approx \sin\theta \approx \theta$

Slijedi: $\Delta/d \approx y/D$, Položaji maksimuma: $y_{max} = m\lambda D/d$ $\quad m = 0, \pm1, \pm2 \dots$

Položaji minimuma: $y_{min} = (2m+1)\lambda D/2d$ $\quad m = 0, \pm1, \pm2 \dots$

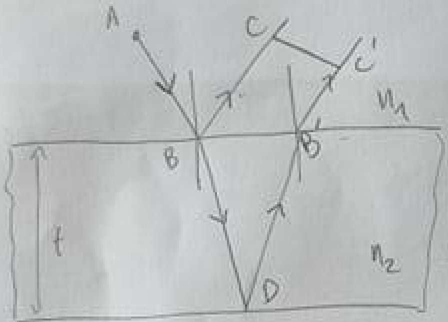
Maksimumi su jednako razmaknuti i ne ovise o kutu, to jest $\boxed{\Delta y_{max} = \lambda D/d}$



Ilustracija Youngovog pokusa

46. Izvedite uvjete maksimuma za interferenciju pri refleksiji na tankom filmu u slučaju kada je $n_{sloj} > n_{podloga}$.

47. Izvedite uvjete maksimuma za interferenciju pri refleksiji na tankom filmu u slučaju kada je $n_{sloj} < n_{podloga}$.



Monokromatska svjetlost iz sredstva indeksa loma $n1$ pada na tanki sloj materijala indeksa loma $n2$ i debljine d.

$n_2 > n_1$

Zraka 1 prijeđe put od A do C:

$$L_1 = n_1\overline{AB} + n_1\overline{BC}$$

Zraka 2 prijeđe optički put od A do C':

$$L_2 = n_1\overline{AB} + n_2\overline{BD} + n_2\overline{DB'} + n_1\overline{B'C'}$$

Iz slike je $\overline{BD} = \overline{DB'}$, a za zrake koje upadaju gotovo okomito možemo pisati: $\overline{BD} = \overline{DB'} = d$ $\cancel{\overline{BC} = \overline{B'C'}}$

Slijedi: – faza prvog vala: $\phi_1 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(n_1\overline{AB} + n_1\overline{BC}) + \pi$ zbog refleksije u optički gušćem sredstvu

– faza drugog vala: $\phi_2 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(n_1\overline{AB} + n_2 2d + n_1\overline{B'C'})$

Razlika faza: $\phi_2 - \phi_1 = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_2 2d - \pi\right)$ $(=\phi)$

Za razliku faza ide u izraz za amplitudu:

$$E_{0r} = \left[2E_0\cos\left(\frac{\omega}{2c}(n_1x_1 - n_2x_2)\right)\right] = 2E_0\cos\frac{\phi}{2}$$

maksimumi: $\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_2 2d - \pi\right) = m\pi$ $m = 1, 2, 3\ldots$

$$d_{max} = \frac{2m-1}{2n_2}\frac{\lambda}{2}$$

minimumi: $d_{min} = \frac{m\lambda}{2n_2}$