Signali i sustavi

Završni ispit (grupa A) – 14. lipnja 2011.

1. Promatramo kontinuirani signal $x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

a) Izračunajte Fourierovu transformaciju signala $x(t)$.

b) Navedite teorem očitavanja.

c) Očitajte zadani signal s periodom očitavanja $T = 1$, odnosno odredite signal $y(n) = x(nT)$.

d) Izračunajte Fourierovu transformaciju signala $y(n)$ iz c) podzadatka.

2. Promatramo kauzalan sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = u'(t) + 2u(t).$$

Neka su početni uvjeti $y(0^-) = 1$ i $y'(0^-) = -2$.

a) Odredite impulsni odziv sustava.

b) Korištenjem Laplaceove transformacije odredite odziv sustava na intervalu $t \in [0, +\infty\rangle$ za pobudu $u(t) = e^{-2t}\,\mu(t)$.

c) Odredite odziv sustava za svaki $t \in \mathbb{R}$ za pobudu $u(t) = 4$.

d) Koliko iznose početni uvjeti u trenutku $t = 0^+$ za svaki od prethodnih podzadataka?

3. Promatramo kauzalan sustav opisan diferencijalnom jednadžbom $y'(t) + 6y(t) = u(t)$.

a) Odredite prijenosnu funkciju zadanog sustava.

b) Ispitajte unutrašnju stabilnost zadanog sustava.

c) Postoji li frekvencijska karakteristika zadanog sustava? Ako postoji izračunajte i skicirajte frekvencijsku karakteristiku, a ako ne postoji objasnite zašto ne postoji!

d) Nađite prisilni odziv sustava na pobudu $u(t) = 6 + \sqrt{12}\sin(\sqrt{12}t + \frac{\pi}{6})$.

4. Promatramo kauzalan sustav opisan diferencijskom jednadžbom

$$7y(n) + y(n-1) = 7u(n) + 5u(n-1) + 2u(n-2)$$

uz početne uvjete jednake nuli.

a) Odredite prijenosnu funkciju zadanog sustava.

b) Odredite impulsni odziv zadanog sustava korištenjem inverzne $\mathcal{Z}$ transformacije.

c) Ispitajte unutrašnju stabilnost zadanog sustava.

d) Postoji li frekvencijska karakteristika zadanog sustava? Ako postoji izračunajte je, a ako ne postoji objasnite zašto ne postoji!

e) Nađite prisilni odziv sustava na pobudu $u(n) = 50\cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{7})$.

5. Promatramo vremenski KONTINUIRANI kauzalan sustav za kojeg je poznato su matrice prikaza u prostoru stanja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Koliko ulaza, koliko izlaza i koliko varijabli stanja ima zadani sustav?

b) Odredite matricu karakterističnih frekvencija.

c) Odredite prijenosnu matricu sustava.

d) Izračunajte odziv mirnog sustava na kauzalnu pobudu $u(t) = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ e^{-t}\,\mu(t) \end{bmatrix}$.

1. $x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ $\boxed{A}$

a) CTFT

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-3/2}^{5/2} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-3/2}^{5/2} = \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{5}{2}} - e^{j\omega\frac{3}{2}}\right)$$

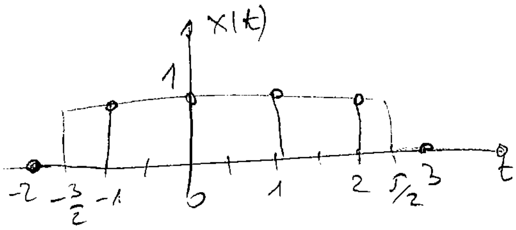
$$= \frac{1}{-j\omega}\, e^{-j\omega\frac{1}{2}}\left(e^{-j\omega\frac{4}{2}} - e^{j\omega\frac{4}{2}}\right) = \frac{1}{-j\omega}\, e^{-j\frac{\omega}{2}}(-2j\sin 2\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\, \frac{2\sin 2\omega}{\omega}$$

b) Vremenski kontinuiran signal $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, s frekvencijama ne većim od f_{max}, može biti egzaktno rekonstruiran iz svojih očitaka $x(n) \hat{=} x(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, ako je očitavanje provedeno frekv. $f_s = \frac{1}{T}$ koja je veća od $2 \cdot f_{max}$.

c) $y(n) = x(nT)$

$T = 1$

$y(n) = \{0, 1, \underline{1}, 1, 1, 0, ..\}$



d) DTFT

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\Omega n}$$

$$= 1 \cdot e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}$$

$$= 2\cos\Omega + e^{-j\Omega}\left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}\right)$$

$$= 2\cos\Omega\left(1 + e^{-j\Omega}\right)$$

2. $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=u'(t)+2u(t)$

A

a) $u(t)=\delta(t)$

$h_A''(t)+6h_A'(t)+8h_A(t)=0$

$s^2+6s+8=0$

$(s+4)(s+2)=0$

$s_1=-4 \quad s_2=-2$

$h_A(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{-2t}$ $\qquad h_A(0)=C_1+C_2=0$

$h_A'(t)=-4C_1e^{-4t}-2C_2e^{-2t}$ $\qquad h_A'(0)=-4C_1-2C_2=1$

$2C_1+2C_2=0$

$-2C_1=1$

$C_1=-\frac{1}{2} \quad C_2=\frac{1}{2}$

$h_A(t)=-\frac{1}{2}e^{-4t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$

$h_A'(t)=2e^{-4t}-e^{-2t}$

$h(t)=2e^{-4t}-e^{-2t}-e^{-4t}+e^{-2t}$

$\boxed{h(t)=e^{-4t}\mu(t)}$

b) $s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+6(sY(s)-y(0^-))+8Y(s)=sU(s)-u(0^-)+2U(s)$

$Y(s)(s^2+6s+8)=U(s)(s+2)-u(0^-)+sy(0^-)+y'(0^-)+6y(0^-)$

$Y(s)=\frac{s+2}{s^2+6s+8}U(s)+\frac{-0+s\cdot1-2+6}{s^2+6s+8}=\frac{1+s+4}{s^2+6s+8}=$

$u(t)=e^{-2t}\mu(t)$

$u(0^-)=0$

$U(s)=\frac{1}{s+2}$

$=\frac{A}{s+4}+\frac{B}{s+2}$

$=\frac{-1/2}{s+4}+\frac{3/2}{s+2}$

$A+B=1$

$2A+4B=5$

$-2A-2B=-2$

$2B=3$

$B=\frac{3}{2} \quad A=-\frac{1}{2}$

$\boxed{y(t)=\left(-\frac{1}{2}e^{-4t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)\mu(t)}$

c) $u(t)=4 \to u'(t)=0$

$y_p(t)=1$

$y_p=K$

$8K=8$

$K=1$

$y_{tot}(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{-2t}+1$ $\qquad y_{tot}(0)=C_1+C_2+1$

$y_{tot}'(t)=-4C_1e^{-4t}-2C_2e^{-2t}$ $\qquad y_{tot}'(0)=-4C_1-2C_2$

$y(0)=1$

$y'(0)=-2$

$C_1+C_2+1=1$

$-4C_1-2C_2=-2$

$C_1+C_2=0$

$-2C_1-C_2=-1$

$-C_1=-1$

$C_1=1 \quad C_2=-1$

$\boxed{y_{tot}(t)=e^{-4t}-e^{-2t}+1}$

d) za a) dio zadatka

$h(0^+)=e^{-4\cdot0}\mu(0)=1$

$h'(t)=-4e^{-4t}\mu(t)+e^{-4t}\delta(t)$

$h'(0^+)=-4$

za b) dio zadatka

$y(0^+)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

$y'(t)=\left(-\frac{1}{2}\cdot(-4)e^{-4t}+\frac{3}{2}(-2)e^{-2t}\right)\mu(t)$
$\quad+\left(-\frac{1}{2}e^{-4t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)\delta(t)$

$y'(0^+)=2-3=-1$

za c) dio zadatka

$y(0^+)=1-1+1=1$

$y'(t)=-4e^{-4t}+2e^{-2t} \to y'(0^+)=-4+2=-2$

3. $y'(t) + 6y(t) = u(t)$

$\boxed{A}$

a) $sY(s) + 6Y(s) = U(s)$

$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+6}$

b) POL $s+6=0$

$s=-6$

$\text{Re}\{s\} < 0 \rightarrow$ STABILAN SUSTAV

c) Kako je sustav stabilan, frekvencijska karakteristika postoji.

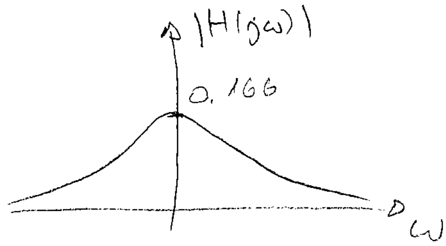
$s = j\omega$

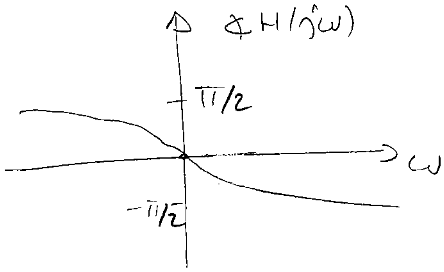
$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+6}$

$= \frac{6-j\omega}{36+\omega^2}$

$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{36}{(36+\omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(36+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{36+\omega^2}}$

$\measuredangle H(j\omega) = -\text{arctg}\,\frac{\omega}{6}$





d) $u(t) = 6 + \sqrt{12}\,\sin\left(\sqrt{12}\,t + \frac{\pi}{6}\right)$

$\omega = \sqrt{12}$

$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{36+12}} = \frac{1}{\sqrt{48}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$\measuredangle H(j\omega) = -\text{arctg}\,\frac{\sqrt{12}}{6} = -\text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$

$\omega = 0$

$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$

$\measuredangle H(j\omega) = -\text{arctg}\,0 = 0$

$y(t) = 6\cdot\frac{1}{6} + \sqrt{12}\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\sqrt{12}\,t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{y(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\sqrt{12}\,t\right)}$

4. $7y(n)+y(n-1)=7u(n)+5u(n-1)+2u(n-2)$ $\boxed{A}$

a) $7Y(z)+z^{-1}Y(z)=7U(z)+5z^{-1}U(z)+2z^{-2}U(z)$

$Y(z)(7+z^{-1})=U(z)(7+5z^{-1}+2z^{-2})$

$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{7+5z^{-1}+2z^{-2}}{7+z^{-1}}=\frac{7z^2+5z+2}{7z^2+z}$

b) Impulsni odziv

$u(n)=\delta(n) \rightarrow U(z)=1$

$Y(z)=\frac{7z^2+5z+2}{7z^2+z}$ $/:z$

$\frac{Y(z)}{z}=\frac{7z^2+5z+2}{z^2(7z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{7z+1}$

$7Az^2+Az+7Bz+B+Cz^2=7z^2+5z+2$

$7A+C=7$
$A+7B=5$ $\quad A=5-7\cdot2=-9$ $\quad C=7-7A$
$B=2$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad =7(1-A)=7\cdot10=70$

$Y(z)=-9+2\cdot z^{-1}+\frac{70}{7z+1}=-9+2z^{-1}+\frac{10}{z+\frac{1}{7}}$

$$\boxed{y(n)=-9\delta(n)+2\delta(n-1)+10\left(-\frac{1}{7}\right)^n\mu(n)}$$

c) POL $7+z^{-1}=0$

$z_1=-\frac{1}{7}$ $\quad |z_1|<1$ $\rightarrow$ sustav je stabilan

d) kako je sustav stabilan – frekvencijska karakteristika postoji.

$H(e^{j\Omega})=\frac{7e^{2j\Omega}+5e^{j\Omega}+2}{7e^{2j\Omega}+e^{j\Omega}}$

e) $u(n)=50\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{7}\right)$

$\Omega=\frac{\pi}{2}$

$H(e^{j\pi/2})=\frac{7e^{j\pi}+5e^{j\frac{\pi}{2}}+2}{7e^{j\pi}+e^{j\pi/2}}=\frac{7(-1)+5\cdot(j)+2}{7\cdot(-1)+j}=\frac{5j-5}{-7+j}=\frac{-35j+35+5+5j}{49+1}$

$=\frac{40-30j}{50}$

$=\frac{4-3j}{5}$

$|H(e^{j\pi/2})|=\sqrt{\frac{25+25}{49+1}}=\sqrt{\frac{25\cdot2}{25\cdot2}}=1$

$\angle H(e^{j\pi/2})=\mathrm{arctg}\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$

$y(n)=50\cdot1\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{7}-\mathrm{arctg}\frac{3}{4}\right)$

$$\boxed{y(n)=50\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{7}-\mathrm{arctg}\frac{3}{4}\right)}$$

A

5.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & -4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

a) Sustav ima - 2 varijable stanja
- 2 ulaza
- 1 izlaz

b)
$$\phi(s)=(sI-A)^{-1}$$
$$=\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & -4\end{bmatrix}\right)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & -4\end{bmatrix}\right)^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}s+2 & -2\\ 0 & s+4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}s+4 & 2\\ 0 & s+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{2}{(s+2)(s+4)}\\ 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}$$

c)
$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}s+4 & 2\\ 0 & s+2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-(s+4) & -2+2s+4\end{bmatrix}\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}-2(s+4) & 2(s+1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{-2}{s+2} & \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s}{s+2} & \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}$$

d)
$$u(t)=\begin{bmatrix}\mu(t)\\ e^{-t}\mu(t)\end{bmatrix} \qquad U(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}\\ \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$Y(s)=H(s)\cdot U(s)=\begin{bmatrix}\frac{s}{s+2} & \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s}\\ \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\frac{1}{s+2}+\frac{2}{(s+2)(s+4)}$$
$$=\frac{s+6}{(s+2)(s+4)}$$
$$=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+4}$$

$A+B=1$
$4A+2B=6$
$2A+B=3$

$A=2$
$B=-1$

$$=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+4}$$

$$\boxed{y(t)=\left(2e^{-2t}-e^{-4t}\right)\mu(t)}$$

Signali i sustavi

Završni ispit (grupa B) – 14. lipnja 2011.

1. Promatramo kontinuirani signal $x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{5}{2} < t < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

a) Izračunajte Fourierovu transformaciju signala $x(t)$.

b) Navedite teorem očitavanja.

c) Očitajte zadani signal s periodom očitavanja $T = 1$, odnosno odredite signal $y(n) = x(nT)$.

d) Izračunajte Fourierovu transformaciju signala $y(n)$ iz c) podzadatka.

2. Promatramo kauzalan sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = u'(t) + u(t).$$

Neka su početni uvjeti $y(0^-) = 1$ i $y'(0^-) = -1$.

a) Odredite impulsni odziv sustava.

b) Korištenjem Laplaceove transformacije odredite odziv sustava na intervalu $t \in [0, +\infty\rangle$ za pobudu $u(t) = e^{-t}\,\mu(t)$.

c) Odredite odziv sustava za svaki $t \in \mathbb{R}$ za pobudu $u(t) = 3$.

d) Koliko iznose početni uvjeti u trenutku $t = 0^+$ za svaki od prethodnih podzadataka?

3. Promatramo kauzalan sustav opisan diferencijalnom jednadžbom $y'(t) + 3y(t) = u(t)$.

a) Odredite prijenosnu funkciju zadanog sustava.

b) Ispitajte unutrašnju stabilnost zadanog sustava.

c) Postoji li frekvencijska karakteristika zadanog sustava? Ako postoji izračunajte i skicirajte frekvencijsku karakteristiku, a ako ne postoji objasnite zašto ne postoji!

d) Nađite prisilni odziv sustava na pobudu $u(t) = 3 + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{6})$.

4. Promatramo kauzalan sustav opisan diferencijskom jednadžbom

$$7y(n) + y(n-1) = 7u(n) + 4u(n-1) + 3u(n-2)$$

uz početne uvjete jednake nuli.

a) Odredite prijenosnu funkciju zadanog sustava.

b) Odredite impulsni odziv zadanog sustava korištenjem inverzne $\mathcal{Z}$ transformacije.

c) Ispitajte unutrašnju stabilnost zadanog sustava.

d) Postoji li frekvencijska karakteristika zadanog sustava? Ako postoji izračunajte je, a ako ne postoji objasnite zašto ne postoji!

e) Nađite prisilni odizv sustava na pobudu $u(n) = 50\sin(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{7})$.

5. Promatramo vremenski KONTINUIRANI kauzalan sustav za kojeg je poznato su matrice prikaza u prostoru stanja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Koliko ulaza, koliko izlaza i koliko varijabli stanja ima zadani sustav?

b) Odredite matricu karakterističnih frekvencija.

c) Odredite prijenosnu matricu sustava.

d) Izračunajte odziv mirnog sustava na kauzalnu pobudu $u(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t}\,\mu(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$.

B

1. $x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{5}{2} < t < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

a) CTFT

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-5/2}^{3/2} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{-5/2}^{3/2} = \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-\frac{3}{2}\omega j} - e^{j\frac{5}{2}\omega}\right)$$

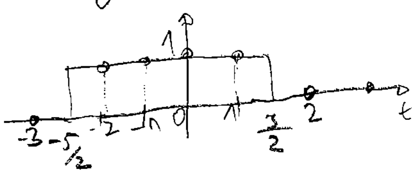
$$= \frac{j}{\omega} e^{j\frac{\omega}{2}} \left(e^{-j\frac{4}{2}\omega} - e^{j\frac{4}{2}\omega}\right) = \frac{1}{\cancel{-j}\omega} e^{j\frac{\omega}{2}} \left(-2\cancel{j} \sin 2\omega\right)$$

$$= \frac{2}{\omega} e^{j\frac{\omega}{2}} \sin 2\omega = 4 e^{j\frac{\omega}{2}} \frac{\sin 2\omega}{2\omega}$$

b) Vremenski kontinuiran signal $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, s frekvencijama ne većim od f_{max}, može biti egzaktno rekonstruiran iz svojih očitaka $x(n) \triangleq x(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, ako je očitavanje provedeno frekv. $f_s = \frac{1}{T}$ koja je veća od $2 f_{max}$.

c) $T = 1$

$y(n) = x(nT) = \{0, 1, 1, \underline{1}, 1, 0, \ldots\}$



d) DTFT

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\Omega n} = +1 e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega}$$

$$= e^{j\Omega}\left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}\right) + \left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}\right) = 2\cos\Omega \cdot \left(1 + e^{j\Omega}\right)$$

B

2. $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=u'(t)+u(t)$

$y(0^-)=1$

$y'(0^-)=-1$

a) IMPULSNI ODZIV

$s^2+4s+3=0$

$(s+3)(s+1)=0$

$s=-3 \quad s=-1$

$h_A(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{-t}$ $\qquad h_A(0^-)=0=h_A(0^+)$

$h_A'(t)=-3c_1e^{-3t}-c_2e^{-t}$ $\qquad h_A'(0^-)=1=h_A'(0^+)$

$h_A'(0^+)-h_A'(0^-)=u(0^+)=0$

$h_A(0^+)=c_1+c_2=0$

$h_A'(0^+)=-3c_1-c_2=1$

$c_1=-c_2$

$2c_2=1$

$c_2=\frac{1}{2} \quad c_1=-\frac{1}{2}$

$h_A(t)=\left(-\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\right)\mu(t)$

$h_A'(t)=\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}$

$h(t)=\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}$

$\boxed{h(t)=e^{-3t}\mu(t)}$

b) $u(t)=e^{-t}\mu(t)$ $\qquad u(0^-)=0$ $\qquad U(s)=\frac{1}{s+1}$

$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+4(sY(s)-y(0^-))+3Y(s)=sU(s)-u(0^-)+U(s)$

$Y(s)(s^2+4s+3)=U(s)(s+1)-u(0^-)+sy(0^-)+y'(0^-)+4y(0^-)$

$Y(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+3}U(s)+\frac{-0+s\cdot 1-1+4}{s^2+4s+3}=\frac{1}{s^2+4s+3}+\frac{s+3}{s^2+4s+3}$

$=\frac{s+4}{s^2+4s+3}$

$=\frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{s+1}$ $\qquad A+B=1$, $A+3B=4$, $2B=3$, $B=\frac{3}{2}$, $A=-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1/2}{s+3}+\frac{3/2}{s+1}$

$\boxed{y(t)=\left(-\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{-t}\right)\mu(t)}$

c) $u(t) = 3$

$y_p(t) = k$

$3k = 3$

$k = 1$

$y_t(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} + 1$

$y_t'(t) = -3C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-t}$

$y_t(0) = C_1 + C_2 + 1 = 1$

$y_t'(0) = -3C_1 - C_2 = -1$

$C_1 + C_2 = 0$

$-3C_1 - C_2 = -1$

$-2C_1 = -1$

$C_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad C_2 = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{y_t(t) = \frac{1}{2} e^{-3t} - \frac{1}{2} e^{-t} + 1}$$

d) za a) dio zadatka

$h(t) = e^{-3t}\mu(t)$

$h'(t) = -3e^{-3t}\mu(t) + e^{-3t}\delta(t)$

$h(0^+) = 1$

$h'(0^+) = -3$

za b) dio zadatka

$y(t) = \left(-\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}\right)\mu(t)$

$y'(t) = \left(\frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-t}\right)\mu(t) + \left(-\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}\right)\delta(t)$

$y(0^+) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

$y'(0^+) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$

za c) dio zadatka

$y_t(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} + 1$

$y_t'(t) = -\frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$

$y_t(0^+) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$

$y_t'(0^+) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$

3. $y'(t)+3y(t)=u(t)$ (B)

a) $sY(s)+3Y(s)=U(s)$

$H(s)=\dfrac{1}{s+3}$

b) $s+3=0$

$s=-3$

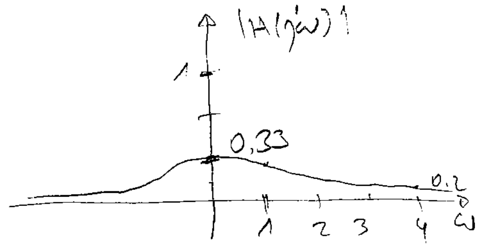
$Re\{s\}<0 \rightarrow$ sustav je stabilan

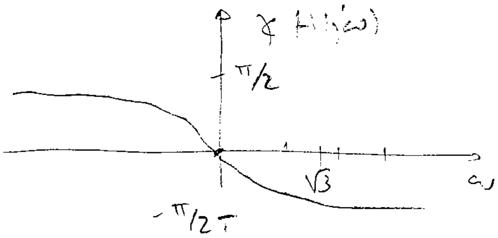
c) Kako je sustav stabilan – frekvencijska karakteristika postoji

$H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}\cdot\dfrac{3-j\omega}{3-j\omega}=\dfrac{3-j\omega}{9+\omega^2}$

$|H(j\omega)|=\sqrt{\dfrac{\cancel{9+\omega^2}}{(9+\omega^2)^{\cancel{2}}}}=\dfrac{1}{\sqrt{9+\omega^2}}$

$\measuredangle H(j\omega)=-\mathrm{arctg}\,\dfrac{\omega}{3}$





d) $u(t)=3+\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t+\frac{\pi}{6})=3\cos(0t)+\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t+\frac{\pi}{6})$

$\underline{\omega=\sqrt{3}}$

$|H(j\sqrt{3})|=\dfrac{1}{\sqrt{12}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$\measuredangle H(j\sqrt{3})=-\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{\pi}{6}$

$\underline{\omega=0}$

$|H(j\cdot 0)|=\dfrac{1}{3}$

$\measuredangle H(j\cdot 0)=0$

$y(t)=3\cdot\frac{1}{3}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})$

$\boxed{y(t)=1+\frac{1}{2}\sin(\sqrt{3}t)}$

(3)

4. $7y(n)+y(n-1)=7u(n)+4u(n-1)+3u(n-2)$

a) $7Y(z)+z^{-1}Y(z)=7U(z)+4z^{-1}U(z)+3z^{-2}U(z)$

$Y(z)\left[7+z^{-1}\right]=U(z)\left[7+4z^{-1}+3z^{-2}\right]$

$$H(z)=\frac{7+4z^{-1}+3z^{-2}}{7+z^{-1}}=\frac{7z^2+4z+3}{7z^2+z}$$

b) $$\frac{H(z)}{z}=\frac{7z^2+4z+3}{z^2(7z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{7z+1}$$

$Az(7z+1)+Cz^2+B\cdot 7z+B=7z^2+4z+3$

$7Az^2+Az+Cz^2+7Bz+B$

$7A+C=7$

$A+7B=4$ $\qquad A=4-7\cdot 3=4-21=-17$

$B=3$ $\qquad C=7-7A=7\cdot 18=126$

$$H(z)=-17+\frac{3}{z}+\frac{126z}{7z+1}=-17+\frac{3}{z}+\frac{18z}{z+\frac{1}{7}}$$

$$\boxed{h(n)=-17\,\delta(n)+3\,\delta(n-1)+18\left(-\tfrac{1}{7}\right)^n\mu(n)}$$

c) POL $\quad z_1=-\frac{1}{7}\quad |z|<1\quad$ STABILNO

d) sustav stabilan - frekvencijska karakteristika postoji

$$\boxed{H(e^{j\Omega})=\frac{7e^{2j\Omega}+4e^{j\Omega}+3}{7e^{2j\Omega}+e^{j\Omega}}}=\frac{7\cos 2\Omega+4\cos\Omega+3+j(7\sin 2\Omega+4\sin\Omega)}{7\cos 2\Omega+\cos\Omega+j(7\sin 2\Omega+\sin\Omega)}$$

$$|H(e^{j\Omega})|=\sqrt{\frac{(7\cos 2\Omega+4\cos\Omega+3)^2+(7\sin 2\Omega+4\sin\Omega)^2}{(7\cos 2\Omega+\cos\Omega)^2+(7\sin 2\Omega+\sin\Omega)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{9+56(\cos 2\Omega\cos\Omega+\sin 2\Omega\sin\Omega)+65+42\cos 2\Omega+24\cos\Omega}{65+14(\cos 2\Omega\cos\Omega+\sin 2\Omega\sin\Omega)}}$$

$$=\sqrt{\frac{74+80\cos\Omega+42\cos 2\Omega}{50+14\cos\Omega}}$$

$$\measuredangle H(e^{j\Omega})=\operatorname{arctg}\frac{7\sin 2\Omega+4\sin\Omega}{7\cos 2\Omega+4\cos\Omega+3}-\operatorname{arctg}\frac{7\sin 2\Omega+\sin\Omega}{7\cos 2\Omega+\cos\Omega}$$

e) $u(n)=50\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{7}\right)$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}})=\frac{-7+3+j\cdot 4}{-7+j}=\frac{-4+4j}{-7+j}=\frac{28-28j+4j+4}{49+1}=\frac{32-24j}{50}$$

$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})|=\sqrt{\frac{16+16}{49+1}}=\sqrt{\frac{16\cdot 2}{25\cdot 2}}=\frac{4}{5}$$

$$\measuredangle H(e^{j\frac{\pi}{2}})=\operatorname{arctg}\frac{-24}{32}=\operatorname{arctg}\frac{-3}{4}=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$

$$\boxed{y(n)=40\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{7}-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)}$$

(B)

5. $A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & -5\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ $\quad C=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}$ $\quad D=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$

a) Sustav ima - 2 varijable stanja
- 1 izlaz
- 2 ulaza

b) Matrica karakterističnih frekvencija

$$\phi(s)=(sI-A)^{-1}=\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & -5\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ -2 & s+5\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+2)(s+5)}\begin{bmatrix}s+5 & 0\\ 2 & s+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & 0\\ \frac{2}{(s+2)(s+5)} & \frac{1}{s+5}\end{bmatrix}$$

c) Prijenosna matrica

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+2)(s+5)}\begin{bmatrix}s+5 & 0\\ 2 & s+2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+2)(s+5)}\begin{bmatrix}2s+10-2 & -(s+2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+2)(s+5)}\begin{bmatrix}2s+8 & -5(s+2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+5)} & \frac{-5}{s+5}+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+5)} & \frac{s}{s+5}\end{bmatrix}$$

d) $u(t)=\begin{pmatrix}e^{-4t}\mu(t)\\ \mu(t)\end{pmatrix}$

$$U(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

$$Y(s)=H(s)\cdot U(s)=\begin{bmatrix}\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+5)} & \frac{s}{s+5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s}\end{bmatrix}=\frac{2}{(s+2)(s+5)}+\frac{1}{s+5}$$

$$=\frac{2+s+2}{(s+2)(s+5)}=\frac{s+4}{(s+2)(s+5)}$$

$$Y(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+5}$$

$$\left.\begin{aligned}A+B&=1\\ 5A+2B&=4\\ -2A-2B&=-2\end{aligned}\right\}\ 3A=2 \qquad A=\frac{2}{3} \qquad B=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{1}{s+2}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{s+5}$$

$$\boxed{y(t)=\left(\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-5t}\right)\mu(t)}$$