Signali i sustavi – Zadaci za aktivnost – Tjedan ~~10.~~

Akademska školska godina 2006./2007.

1. Nađite model s varijablama stanja SISO LTI sustava II. reda zadanih ulazno – izlaznim diferencijalnim jednadžbama.

   a. $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+4y(t)=2u(t)$
   b. $\ddot{y}(t)-4y(t)=u(t)$

   Rješenje:

a) $\ddot{y}+2\dot{y}+4y=2u(t)$

$x_1(t)=y(t)$ | $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$

$x_2(t)=\dot{y}(t)$ | $\dot{x}_2(t)=-2\dot{y}(t)-4y(t)+2u(t)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+0u(t)$$

b) $\ddot{y}-4y=u(t)$

$x_1(t)=y(t)$

$x_2(t)=\dot{y}(t)$

$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$

$\dot{x}_2=4y+u(t)=4x_1+u(t)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+0u(t)$$

2. Nađite ulazno – izlazni model SISO LTI sustava II. reda zadanog modelom s varijablama stanja. Usporedite diferencijalne jednadžbe dobivene pod a. i pod b. Zašto su modeli s varijablama stanja različiti? Dobivene sustave prikažite pomoću blokovskog dijagrama.

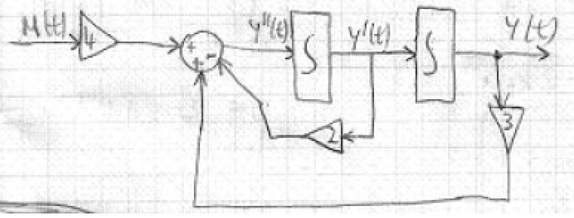
a.
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Rješenje:

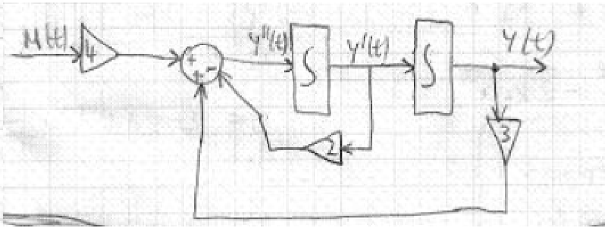
a.

$$y(t) = x_1(t)$$
$$x_1'(t) = x_2(t) = y'(t)$$
$$x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + 4 \cdot u(t) = y''(t)$$
$$\boxed{y''(t) = 3y(t) - 2y'(t) + 4u(t)}$$



b.

$$y(t) = x_2(t)$$
$$x_1'(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + 4u(t) = y''(t)$$
$$x_2'(t) = x_1(t) = y'(t)$$
$$\boxed{y''(t) = -2y'(t) + 3y(t) + 4u(t)}$$



Diferencijalne jednadžbe dobivene pod a. i b. dijelom zadatka su jednake. Modeli s varijablama stanja su različiti, jer je na mnogo različitih načina moguće izabrati varijable stanja. Ovdje su u a. slučaju odabrane kao $x_1(t)=y(t)$, a u b. $x_2(t)=y(t)$. (Ovo nije jedini mogući izbor varijabli stanja, više o tome kasnije…)

3. Izračunajte:
   a. Nađite odziv nepobuđenog SISO LTI sustava zadanog modelom s varijablama stanja iz zadatka 2.a. Neka je početno stanje $x(0^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   b. Nađite odziv nepobuđenog SISO LTI sustava zadanog diferencijalnom jednadžbom dobivenom u zadatku 2.a. Neka su početni uvjeti $y(0^-) = 1,\ \dot{y}(0^-) = 0$.
   c. Usporedite rješenja a. i b. dijela zadatka. Je li zadani sustav stabilan?

Rješenje:

$\boxed{3.}$ a) $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$s^2 - Ts + \Delta = 0, \quad T = -2, \quad \Delta = -3$$

$$s^2 + 2s - 3 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad -1 \pm 2$$

$$s_1 = 1, \quad s_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad s_1 - s_2 = 4$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{t}}{4} + \frac{1}{4}e^{-3t} & \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \\ \frac{3}{4}e^{t} - \frac{3}{4}e^{-3t} & \frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t} \\ \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t}, \quad t \geq 0}$$

b) $y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 4u(t)$

$s^2 + 2s - 3 = 0$

$s_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = -1 \pm 2$

$s_1 = -3$

$s_2 = 1$

$y_o(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{t}$

$y_o(0) = 1 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1 - C_1$

$y_o'(0) = -3C_1 + C_2 = 0 = -3C_1 + 1 - C_1 = 1 - 4C_1$

$4C_1 = 1$

$\boxed{C_1 = \frac{1}{4}}$ $\boxed{C_2 = \frac{3}{4}}$

$\boxed{y_o(t) = \frac{3}{4} e^{t} + \frac{1}{4} e^{-3t}}$ $t \geq 0$

c) OBA SU RJEŠENJA EKVIVALENTNA

SUSTAV NIJE STABILAN

JER $s_2 = 1 > 0$ PA $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \infty$

Rješavanje jednadžbi preko matrica je još jedna od metoda rješavanja diferencijalnih jednadžbi i jednadžbi diferencija.

4. Odredite odzive varijabli stanja $x_1(t)$ i $x_2(t)$ nepobuđenog SISO LTI sustava II. reda zadanog varijablama stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

uz početne uvjete $\begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Nacrtajte dobivene odzive, kao i trajektoriju stanja.

Rješenje:

$\boxed{4.}$ $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$s^2 - Ts + \Delta = 0$, $T = -6$, $\Delta = 25$

$s^2 + 6s + 25 = 0$, $s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = -3 \pm 4j$

$$x_1(t) = \left(\frac{a_{11} - s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{s_1 - a_{11}}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \right) x_1(0^-) + 0$$

$x_2(0^-) = 0$

$$x_2(t) = \left(\frac{a_{21}}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{a_{21}}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \right) x_1(0^-) + 0$$

$s_1 - s_2 = \cancel{-3} + 4j \cancel{+3} + 4j = 8j$

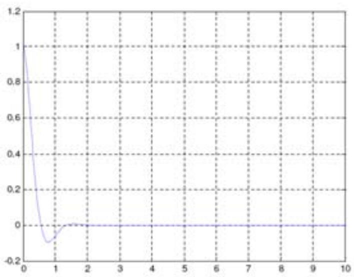
$$x_1(t) = \frac{4-3j}{8} e^{(-3+4j)t} + \frac{4+3j}{8} e^{(-3-4j)t}$$

$$x_2(t) = \frac{25j}{8} e^{(-3+4j)t} + \frac{-25j}{8} e^{(-3-4j)t}$$

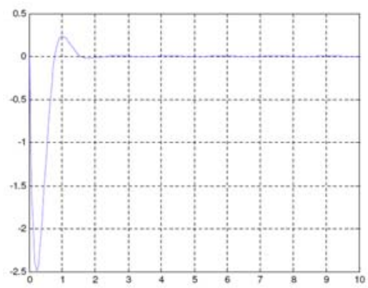
$$x_1(t) = \frac{e^{-3t}}{4} \left(3\sin 4t + 4\cos 4t \right) \mu(t)$$

$$x_2(t) = -\frac{25}{4} e^{-3t} \sin 4t \mu(t)$$

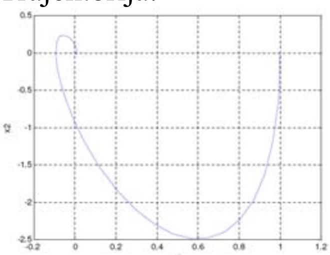
Odziv x_1:



Odziv x_2:



Trajektorija:



5. Dan je mirni SISO LTI sustav II. reda:

$$\ddot{y}(t)+10\dot{y}(t)+100y(t)=10u(t)$$

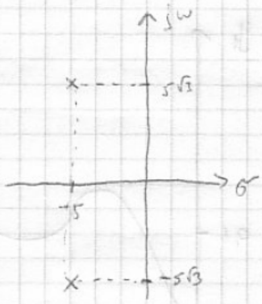
   a. Odredite vlastite frekvencije ovog sustava. Skicirajte ih u koordinatnom sustavu s realnom i imaginarnom osi. Identificirajte stupanj prigušenja i neprigušenu prirodnu frekvenciju. Što možete zaključiti o danom sustavu na temelju stupnja prigušenja?
   b. Nađite odziv na jediničnu stepenicu i skicirajte ga.

Rješenje:
a.

5) $\ddot{y}+10\dot{y}+100y=10u$

a) $s^2+10s+100=0$

$s_{1,2}=-5\pm j5\sqrt{3}$



$\Omega^2=100$ $\quad$ $\boxed{\Omega=10}$

$2\xi\Omega=10$ $\quad$ $\boxed{\xi=0{,}5}$

↓

PODKRITIČNO PRIGUŠEN SUSTAV

b.
Radi se o mirnom sustavu pa je $y(0^-)=y'(0^-)=0$, a kako je pobuda $u(t)=\mu(t)$ slijedi $y(0^+)=y'(0^+)=0$.

Pretpostavljamo partikularno rješenje $y_p(t)=K\mu(t)$ i uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobivamo $100K\mu(t)=10\mu(t)$, odakle je $K=\frac{1}{10}$.

Sada imamo...

$$y(t)=e^{-5t}\left(C_1e^{5\sqrt{3}jt}+C_2e^{-5\sqrt{3}jt}\right)+\tfrac{1}{10}\mu(t)$$
$$y'(t)=e^{-5t}\left[5C_1e^{5\sqrt{3}jt}\left(\sqrt{3}j-1\right)-5C_2e^{-5\sqrt{3}jt}\left(\sqrt{3}j+1\right)\right]+\tfrac{1}{10}\delta(t)$$

Koristeći početne uvjete dobivamo sustav jednadžbi

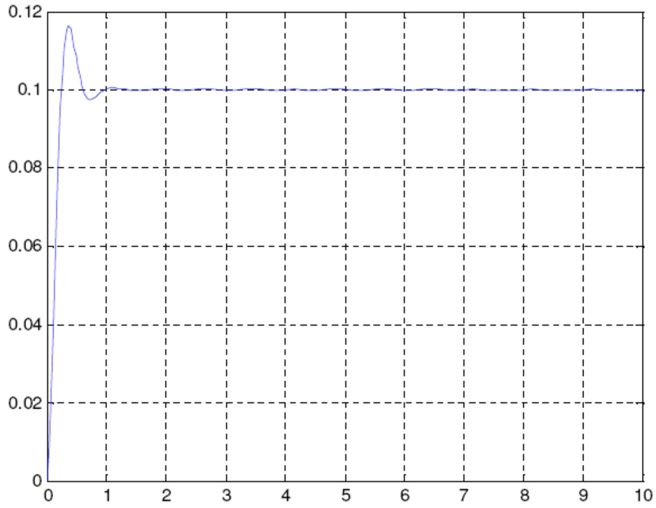
$$C_1+C_2=-\tfrac{1}{10},$$
$$C_1\left(\sqrt{3}j-1\right)=C_2\left(\sqrt{3}j+1\right),$$

čija su rješenja $C_1=-\frac{1}{20}+\frac{\sqrt{3}}{60}j$ i $C_2=-\frac{1}{20}-\frac{\sqrt{3}}{60}j$.

Konačno dolazimo do odziva...

$$y(t)=e^{-5t}\left[-\tfrac{1}{20}\left(e^{5\sqrt{3}jt}+e^{-5\sqrt{3}jt}\right)+\tfrac{\sqrt{3}}{60}j\left(e^{5\sqrt{3}jt}-e^{-5\sqrt{3}jt}\right)\right]+\tfrac{1}{10}\mu(t)$$
$$y(t)=e^{-5t}\left(-\tfrac{1}{10}\cos 5\sqrt{3}t-\tfrac{\sqrt{3}}{30}\sin 5\sqrt{3}t\right)+\tfrac{1}{10}\mu(t)$$

Skica odziva:



6. Za mirni SISO sustav iz 5. zadatka $\ddot{y}(t)+10\dot{y}(t)+100y(t)=10u(t)$ odredite odziv kada $t\to\infty$ na pobudu $u(t)=\cos(10t)\cdot\mu(t)$.

Rješenje:

Već imamo $y_h(t)=e^{-5t}\left(C_1e^{5\sqrt{3}jt}+C_2e^{-5\sqrt{3}jt}\right)$.

Pretpostavljamo partikularno rješenje oblika $y_p(t)=(A\sin 10t+B\cos 10t)\mu(t)$.

Imamo derivacije za $t>0$:

$$y_p'(t)=10(A\cos 10t-B\sin 10t)$$
$$y_p''(t)=-100(A\sin 10t+B\cos 10t)=-100y_p(t)$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo

$$10y_p'(t)=10\cos 10t$$
$$100(A\cos 10t-B\sin 10t)=10\cos 10t$$

odakle je $A=\frac{1}{10}$ i $B=0$.

Sada imamo:

$$y(t)=e^{-5t}\left(C_1e^{5\sqrt{3}jt}+C_2e^{-5\sqrt{3}jt}\right)+\tfrac{1}{10}\sin 10t\cdot\mu(t)$$
$$y'(t)=e^{-5t}\left[5C_1e^{5\sqrt{3}jt}\left(\sqrt{3}j-1\right)-5C_2e^{-5\sqrt{3}jt}\left(\sqrt{3}j+1\right)\right]+\cos 10t\cdot\mu(t)+\tfrac{1}{10}\sin 10t\cdot\delta(t)$$

Koristeći iste početne uvjete kao u 5. zadatku dobijemo sustav jednadžbi

$$C_1+C_2=0,$$
$$5C_1\left(\sqrt{3}j-1\right)+1=5C_2\left(\sqrt{3}j+1\right),$$

čija su rješenja $C_1=\frac{\sqrt{3}}{30}j$ i $C_2=-\frac{\sqrt{3}}{30}j$.

Konačno, uvrštavanjem i sređivanjem dobijemo odziv $y(t)=-\frac{\sqrt{3}}{15}e^{-5t}\sin 5\sqrt{3}t+\frac{1}{10}\sin 10t\cdot\mu(t)$.

Odziv kada $t\to+\infty$ zbog padajuće eksponencijale je zapravo $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=\frac{1}{10}\sin 10t$.

Primijetite da kada $t\to\infty$ više ne postoji homogeni dio rješenja, tj. mogli smo i bez poznavanja konstanti C_1 i C_2 odrediti odziv u $t\to\infty$.

7. Zadan je mirni SISO LTI sustav $\ddot{y}(t)+100y(t)=10u(t)$.

   a. Nađite impulsni odziv ovog sustava.
   b. Nađite odziv na pobudu $u(t)=\sin(10t)\mu(t)$ koristeći konvoluciju.
   c. Skicirajte odziv. Kako se naziva dobivena pojava? Kada dolazi do nje?

Rješenje:

a) Nađite impulsni odziv ovog sustava.

Kako se radi o mirnom sustavu, a pobuda je $u(t)=\delta(t)$, iz $y(0^-)=y'(0^-)=0$ slijedi $y(0^+)=y(0^-)=0$ i $y'(0^+)=10\delta(0)=10$.

Karakteristična jednadžba $s^2+100=0$ ima rješenja $s_{1,2}=\pm 10j$.
Imamo oblik homogenog rješenja $y_h(t)=C_1e^{10jt}+C_2e^{-10jt}$.
Odavde je $y_h'(t)=10jC_1e^{10jt}-10jC_2e^{-10jt}$.

Za $t>0$ dana diferencijalna jednadžba je homogena, pa iz početnih uvjeta možemo odrediti konstante C_1 i C_2. Dobijemo sustav jednadžbi

$$C_1+C_2=0,$$
$$10j(C_1-C_2)=10,$$

čija su rješenja $C_1=-\frac{1}{2}j$ i $C_2=\frac{1}{2}j$.

Dakle, $y_h(t)=-\frac{1}{2}je^{10jt}+\frac{1}{2}je^{-10jt}=-j^2\frac{1}{2j}\left(e^{10jt}-e^{-10jt}\right)=\sin 10t$.

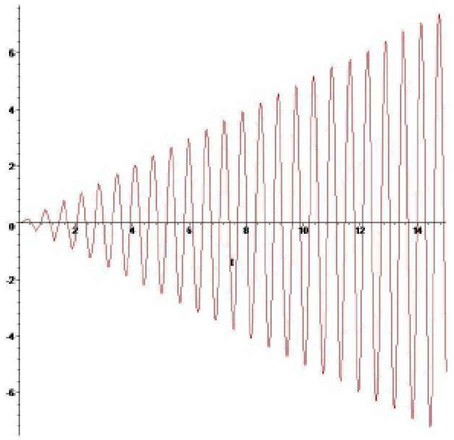
Impulsni odziv je $h(t)=\sin 10t$, $t\geq 0$.

b) Nađite odziv na pobudu $u(t)=\sin 10t\cdot\mu(t)$ koristeći konvoluciju.

Odziv na danu pobudu je $y_1(t)=h(t)*u(t)$.

$$y_1(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_0^t\sin(10t-10\tau)\sin 10\tau d\tau$$
$$y_1(t)=\tfrac{1}{2}\int_0^t\cos(10t-10\tau-10\tau)d\tau-\tfrac{1}{2}\int_0^t\cos(10t-10\tau+10\tau)d\tau$$
$$y_1(t)=\tfrac{1}{2}\int_0^t\cos(20\tau-10t)d\tau-\tfrac{1}{2}\cos 10t\int_0^t d\tau$$
$$y_1(t)=\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{20}\sin(20\tau-10t)\Big|_0^t-\tfrac{1}{2}t\cos 10t$$
$$y_1(t)=\tfrac{1}{40}\sin 10t-\tfrac{1}{40}\sin(-10t)-\tfrac{1}{2}t\cos 10t$$
$$y_1(t)=\tfrac{1}{20}\sin 10t-\tfrac{1}{2}t\cos 10t$$

c) Skicirajte odziv. Kako se naziva dobivena pojava? Kada dolazi do nje?



Dobivena pojava je rezonancija, a javlja se kada je frekvencija pobude jednaka vlastitoj frekvenciji sustava.

8. Idealni Hilbertov transformator je linearni stacionarni sustav koji na pobudu $u(t) = \cos(\omega_0 t)$ daje odziv $y(t) = \sin(\omega_0 t)$, za svaki $\omega_0 \geq 0$.

   a. Nađite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje ovaj sustav.
   b. Nađite odziv ovog sustava na pobude $u(t) = e^{j\omega_0 t}$, $u(t) = e^{-j\omega_0 t}$ te $u(t) = \sin \omega_0 t$.

Rješenje:

$\boxed{8.}$ $u(t) = \cos(w_0 t)$

$y(t) = \sin(w_0 t)$

$, \forall w_0 \geq 0$

a) $y'(t) = w_0 \cdot \underbrace{\cos(w_0 t)}_{u(t)} \rightarrow u(t) = \frac{y'(t)}{w_0}$

$y'(t) = w_0 \cdot u(t)$

b) I. $u(t) = e^{jw_0 t} = \cos(w_0 t) + j\sin(w_0 t)$

$y'(t) = w_0 u(t)$

$y(t) = \int w_0 u(t) dt = \int w_0 (\cos(w_0 t) + j\sin(w_0 t)) dt$

$= \cancel{w_0} \cdot \frac{\sin(w_0 t)}{\cancel{w_0}} + \cancel{w_0} \cdot \frac{-j\cos(w_0 t)}{\cancel{w_0}} = \sin(w_0 t) - j\cos(w_0 t)$

II. $u(t) = e^{-jw_0 t} = \cos(w_0 t) - j\sin(w_0 t)$

$y(t) = \int w_0 u(t) dt = \sin(w_0 t) + j\cos(w_0 t)$

III. $u(t) = \sin(w_0 t)$

$y(t) = \int w_0 u(t) dt = -\cos(w_0 t)$