SIS

AUDITORNE VJEŽBE 5

… podsjetimo se

Definicija: Konačan Automat je uređena petorka (Stanja, Ulaz, Izlaz, FunkcijaPrijelaza, pocetnoStanje)

1. Stanja označavaju prostor stanja
2. Ulaz predstavlja ulazni alfabet (skup simbola)
3. Izlaz predstavlja izlazni alfabet (skup simbola)
4. pocetnoStanje ∈ Stanja, predstavlja inicijalno stanje
5. FunkcijaPrijelaza: $Stanja \times Ulaz \rightarrow Stanja \times Izlaz$

… ovo već znamo!

- Možemo li konačnim automatom realizirati relaciju "jednako"?
- Ne postoji konačan automat koji za ulazni binarni niz može odrediti da li u nizu postoji jednak broj nula i jedinica!
- Za svaki s iz skupa Stanja i x iz skupa Ulaza vrijedi:

$$Prijelaz(s,x) = \begin{cases} (0, jednako), & (x=1 \wedge s=-1) \vee (x=0 \wedge s=1) \\ (s+1, različito), & x=1 \wedge s \neq -1 \\ (s-1, različito), & x=0 \wedge s \neq 1 \\ (s, odsutan), & inače \end{cases}$$

Beskonačni automati

- FunkcijaPrijelaza: $Realni^N \times Realni^M \rightarrow Realni^N \times Realni^K$
- FunkcijaPrijelaza = (SljedećeStanje, Izlaz)
- SljedećeStanje: $Realni^N \times Realni^M \rightarrow Realni^N$
- Izlaz: $Realni^N \times Realni^M \rightarrow Realni^K$
- $\forall s \in Realni^N$, $\forall x \in Realni^M$, *FunkcijaPrijelaza(s,x) = (SljedećeStanje(s,x), Izlaz(s,x))*.
- Te dvije funkcije odvojeno određuju sljedeće stanje automata te trenutni izlaz iz automata

Beskonačni automati

- Za ulazni niz *x(0), x(1), …*, gdje je $x(i) \in Realni^M$, sustav rekurzivno generira određena stanja sustava *s(0), s(1), …*, gdje je $s(i) \in Realni^N$, te određuje izlaz *y(0), y(1), …*, gdje je $y(i) \in Realni^K$
- Kako?
- *S(0) = pocetnoStanje*
- *(s(n+1), y(n)) = FunkcijaPrijelaza(s(n), x(n))*
- $\forall n \in$ *Prirodni*, $n \geq 0$, *s(n+1) = SljedećeStanje(s(n),x(n))* - jednadžba prijelaza
- $\forall n \in$ *Prirodni*, $n \geq 0$, *y(n) = Izlaz(s(n),x(n))* - izlazna jednadžba
- jednadžba prijelaza + izlazna jednadžba = model s varijablama stanja

Diskretni linearni sustavi

- *SljedećeStanje(s(n), x(n)) = As(n) + Bx(n)*
- *Izlaz(s(n), x(n)) = Cs(n) + Dx(n)*
- *s(n+1) = As(n) + Bx(n)*
- *y(n) = Cs(n) + Dx(n)*
- Ako su matrice A, B, C i D konstantne u vremenu onda predstavljaju LTI sustav

Zadatak 1. Model Paučine

- Promotrimo situaciju u kojoj proizvodnu odluku proizvođač mora donositi za jedno razdoblje unaprijed u odnosu na stvarnu prodaju - dobar primjer je poljoprivredna industrija. Pretpostavimo da je proizvodna odluka u godini n temeljena na tadašnjim cijenama P. Budući da proizvodnja neće biti raspoloživa za prodaju do sljedeće godine, tj. do razdoblja $(n+1)$, te cijene $P(n)$ neće određivati ponudu $Q_s(n)$, već $Q_s(n+1)$

Zadatak 1. Model Paučine

- Prema tome imamo "pomaknutu" funkciju ponude
- $Q_s(n+1) = S(P(n))$, a to je ekvivalentno,
- $Q_s(n) = S(P(n-1))$, gdje je S neka funkcija
- Funkcija potražnje je oblika $Q_d(n) = D(P(n))$, gdje je D neka funkcija,
- Funkcija potražnje je očito "nepomaknuta"

Zadatak 1. Model Paučine

- Očito vrijedi sljedeće;
  - $n \in$ *Prirodni* (godina koja se promatra)
  - $P(n) \in$ *Realni*$^+$ (Cijena proizvoda u tekućoj godini)
  - $Q_s(n) \in$ *Realni*$^+$ (Ponuda promatranog proizvoda na tržištu u tekućoj godini)
  - $Q_d(n) \in$ *Realni*$^+$ (Potražnja za promatranim proizvodom na tržištu u tekućoj godini)
- Pretpostavljajući i uzimajući linearne funkcije (pomaknute) ponude i (nepomaknute) potražnje i pretpostavljajući da su u svakom vremenskom razdoblju tržišne cijene zadane na razini koja čisti tržište, imamo model tržišta sa sljedeće tri jednadžbe:

Zadatak 1. Model Paučine

- Jednadžbe modela izgledaju ovako:
- $Q_d(n) = Q_s(n)$
- $Q_d(n) = a - bP(n),\ (a,b>0)$
- $Q_s(n) = -c + dP(n-1),\ (c,d>0)$
- Kombiniranjem jednadžbi, te definiranjem potražnje u tekućoj godini kao stanja sustava, a cijene kao izlaza sustava dolazimo do sljedećeg oblika

$$s(n+1) = \frac{d}{b}s(n) - (\frac{ad}{b}+c)x(n)$$

$$y(n) = \frac{1}{b}s(n) - \frac{a}{b}x(n)$$

Gdje je
$s(n+1) = Q_d(n) = Q_s(n)$,
$y(n+1) = P(n)$,
$x(n) = 1,\ \forall n \in Prirodni^0$

Zadatak 1. Model Paučine

- Sustav jednadžbi predstavlja beskonačni automat s jedne strane, dok s druge strane radi se o linearnom vremenski diskretnom sustavu s matricama A, B, C, D sa dimenzijama 1×1.
- Tako je

$$A = \frac{d}{b},\quad B = -\left(\frac{ad}{b}+c\right),$$

$$C = \frac{1}{b},\quad D = -\frac{a}{b},$$

Jasno je da smo mogli drugačije odabrati varijablu stanja, kao i izlaz iz sustava, no sjetite se da jedan automat može simulirati drugi i obrnuto te da ne postoji u tom smislu jedinstveni prikaz

Zadatak 1. Model Paučine

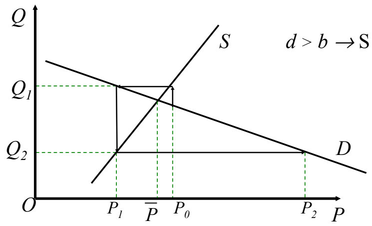
- Kombiniranjem polaznih jednadžbi možemo dobiti i drugu formu prikaza sustava

$$P(n+1) + \frac{d}{b}P(n) = \frac{a+c}{b}$$

- Ovakav oblik zove se ulazno - izlazni prikaz sustava, a sam oblik jednadžbe zove se jednadžba diferencije
- Da bi sustav u potpunosti opisali potrebno je još specificirati početni uvjet, tj. $P(0) = P_0$

Zadatak 1. Model Paučine

- Kvalitativna analiza sustava

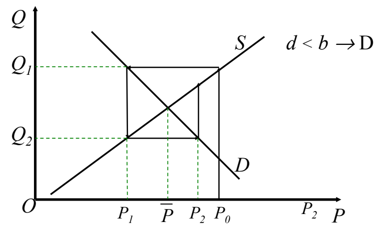


$d > b \rightarrow$ S je strmiji od D

Eksplozija

Zadatak 1. Model Paučine

- Kvalitativna analiza sustava



$d < b \rightarrow$ D je strmiji od S

Prigušeno

Zadatak 1. Model Paučine

- U nastavku promatramo slučaj eksplozivnih oscilacija te kao dodatni mehanizam uvodimo pojam maksimalne cijene na tržištu. Potrebno je analizirati ponašanje proizvoda na tržištu u tom slučaju. Uočite da smo ovime izašli iz domene linearnog modela te da imamo posla s nelinearnim analizom

Zadatak 1. Model Paučine

- Krenimo od izraza

$$P(n+1)+\frac{d}{b}P(n)=\frac{a+c}{b}$$

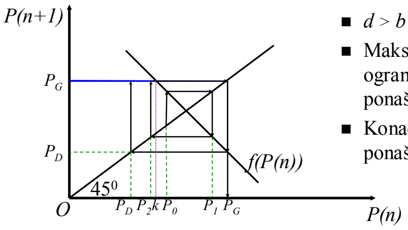
- Zapišimo ga u malo drugačijoj formi

$$P(n+1)=f(P(n))=\frac{a+c}{b}-\frac{d}{b}P(n),\qquad \frac{d}{b}>0$$

- Eksplozivne oscilacije → d > b

Zadatak 1. Model Paučine

- Kvalitativna analiza



- $d > b$ → Eksplozija
- Maksimalna cijena → ograničena dinamika ponašanja
- Konačno oscilatorno ponašanje

Oscilatorno

Zadatak 1. Model Paučine

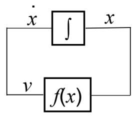
- Za opisivanje ovakvog modela matematički potrebno nam je više od jedne jednadžbe

$$P(n+1)=\begin{cases} P_G, & P(n)\le k \\ \frac{a+c}{b}-\frac{d}{b}P(n), & P(n)>k \end{cases}$$

- Gdje k označava vrijednost $P(n)$ u točki loma

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

Primjer 1.



$\dot{x} = v$

$v = f(x)$

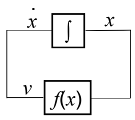
Diferencijalna jednadžba koja opisuje sustav:

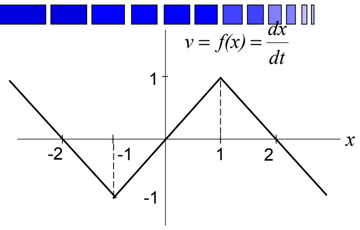
$\dot{x} - f(x) = 0$

- Neka je *f*(x) nelinearna funkcija, aproksimirana pravcima po odsječcima.

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

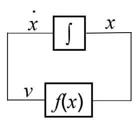
Primjer 1.

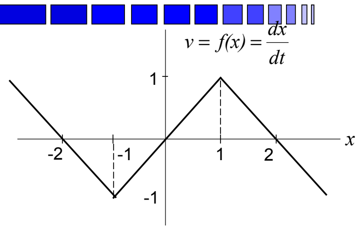




$$v = \begin{cases} -x+2 & x \geq 1 \\ x & |x| < 1 \\ -x-2 & x \leq -1 \end{cases}$$

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav



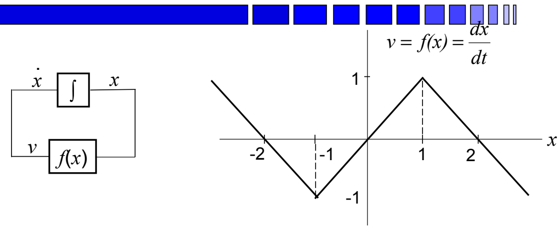


x - stanje sustava

dx/*dt* - brzina promjene stanja

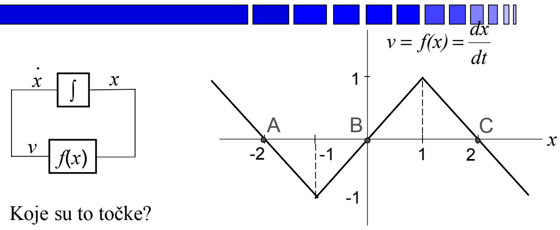
sign(*dx*/*dt*) - smjer promjene stanja

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav



Točke X_i za koje vrijedi da je: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x_i} = 0$
nazivaju se točke ravnoteže; u njima nema promjene stanja sustava!

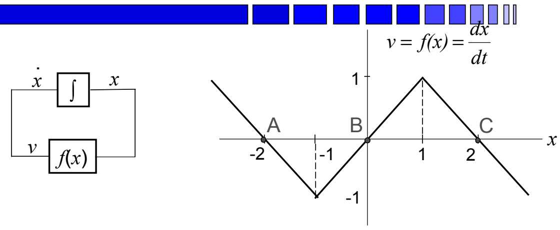
Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav



Koje su to točke?

$$\frac{dx}{dt} = v = 0 \quad \begin{cases} -x+2=0 \\ x=0 \\ -x-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_C = 2 \\ x_B = 0 \\ x_A = -2 \end{cases} \quad \text{su točke ravnoteže}$$

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav



Jesu li točke ravnoteže stabilne?
Što se događa ako x "malo" izvedemo iz A,B,C?

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

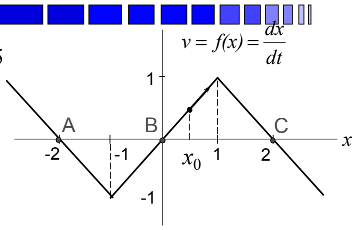
Točka ravnoteže x_e je stabilna točka ako vrijedi:

$$x_1 > x_e \quad \dot{x} < 0$$
$$x_1 < x_e \quad \dot{x} > 0$$

- Točke x_A, x_C su stabilne točke.
- Točke x_B nije stabilna točka.

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

Početni uvjet $x_0 = 0,5$

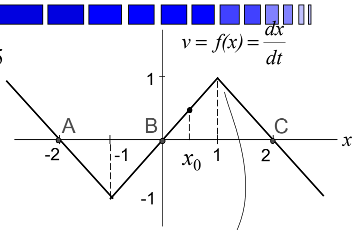


Kako će se mijenjati stanje sustava?
Kuda će "putovati" točka x?

Udesno!

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

Početni uvjet $x_0 = 0,5$



Dva slučaja:

$x < 1 \quad \dot{x} = x$

$x \geq 1 \quad \dot{x} = -x + 2$

t_1 - trenutak dostizanja točke loma krivulje

$x(t_1) = 1$ početni uvjet za drugi slučaj (jednadžbu)

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

1. slučaj: $\dot{x} = x$

Homogena jednadžba: $x = e^{st}$

$$se^{st} = e^{st}$$
$$s = 1$$
$$x = \mathrm{C}e^{t}$$
$$x(0) = x_0 = \mathrm{C}$$
$$x = x_0 e^{t}$$

- Rješenje je jednako rješenju homogene jednadžbe (nema pobude).

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

2. slučaj: $\dot{x} = -x + 2 \;\equiv\; \dot{x} + x = 2$

Homogena: $\dot{x} + x = 0$

$$s + 1 = 0$$
$$x_H = \mathrm{C}e^{-t}$$

Partikularno: $x_p = \mathrm{K}$

$$\mathrm{K} = 2$$

Ukupno: $x = \mathrm{C}e^{-t} + 2$

Koliko je C? $x(t_1) = 1 = \mathrm{C}e^{-t} + 2$

$$\mathrm{C} = -e^{-t_1}$$

i konačno:

$$x = 2 - e^{-(t-t_1)}$$

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

$t_1 = ?$ kada dostižemo točku loma?

$$x(t_1) = x_0 e^{t_1} = 2 - e^{-(t-t_1)}$$

Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

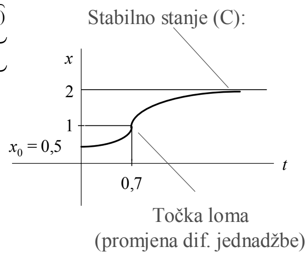
$t_1 = ?$

$$x(t_1) = \underbrace{x_0}_{0,5} e^{t_1} = \underbrace{2 - \underbrace{e^{-\overbrace{(t-t_1)}^{0}}}_{1}}_{1}$$

$$0{,}5 e^{t_1} = 1$$

$$t_1 = \ln 2 \approx 0{,}7$$

Grafički:



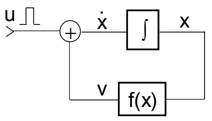
Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

- Kao što smo već naveli, sustav u prethodnom primjeru ima dva ravnotežna stanja koja su stabilna.
- To je jednostavan model elektroničkog sklopa, tzv. bistabila, koji ima široku primjenu u digitalnoj tehnici.
- Dva stabilna stanja odgovaraju binarnim stanjima 0 i 1.

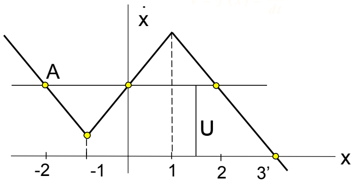
Zadatak 2. Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav

- Da bi se obavljale logičke operacije, bistabil treba prebacivati iz jednog stanja u drugo i obratno.
- To se može izvršiti dovođenjem tzv. okidnog signala.

Primjer - Model bistabila



$\dot{x} = f(x) + u$



$\dot{x} > 0 \quad , \quad \forall x$

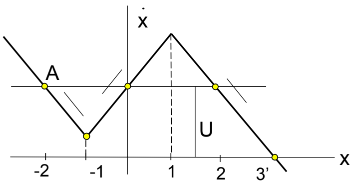
$A \to 3'$ Počela ravnoteža

Primjer - Model bistabila - nastavak

Uvjeti prebacivanja:

$U > |\min f(x)|$

t dovoljno veliko da x prijeđe x_{e2} (točku B)

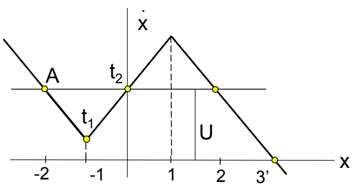


Primjer - Model bistabila - nastavak

Uvjeti prebacivanja:

$U > |\min f(x)|$

t dovoljno veliko da x prijeđe x_{e2}



$x < -1$

$\dot{x} = -x - 2 + U \;\to\; x = Ce^{-t} + U - 2$

$x(0) = x_A = -2 \;\to\; C = -U$

$x(t) = U(1 - e^{-t}) - 2$

$x(t_1) = -1 \;\Rightarrow\; t_1 = \ln\dfrac{U}{U-1}$ prvi odsječak

Primjer - Model bistabila - nastavak

$|x| < 1$

$\dot{x} = x + U \rightarrow x = Ce^{(t-t_1)} - U$

$x(t_1) = -1 \rightarrow C = U - 1$

$x(t) = (U-1)e^{(t-t_1)} - U$

$x(t_2) = 0$

$t_2 - t_1 = \ln\frac{U}{U-1}$

$t_2 = 2\ln\frac{U}{U-1} \qquad t > 2\ln\frac{U}{U-1}$