Signali i sustavi

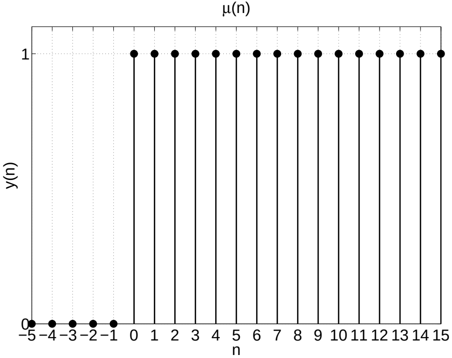
Profesor
Branko Jeren

veljača 2007.

Vremenski diskretan jedinični skok – vremenski diskretna jedinična step funkcija

- vremenski diskretan jedinični skok definiran je kao:

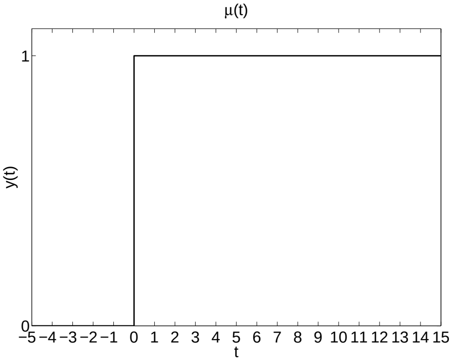
$$\mu : \mathit{Cjelobrojni} \rightarrow \mathit{Realni}$$
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Vremenski kontinuiran jedinični skok – vremenski kontinuirana jedinična step funkcija

- vremenski kontinuiran jedinični skok definiran je kao:

$$\mu : Realni \rightarrow Realni$$
$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Jedinična kosina

- vremenski diskretna

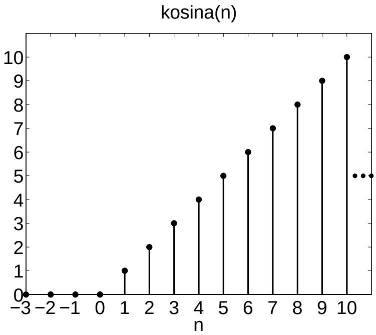
$$kosina : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$

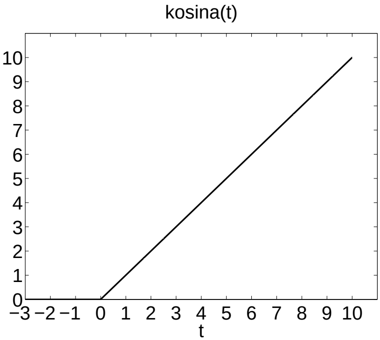
$$kosina(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

- vremenski kontinuirana

$$kosina : Realni \rightarrow Realni$$

$$kosina(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$





Veza jediničnog skoka i jedinične kosine

- veza vremenski diskretne jedinične kosine i jediničnog skoka je

$$kosina : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$

$$kosina(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \mu(m-1)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{n-1} \mu(m)$$

- s druge strane vremenski diskretan jedinični skok možemo definirati pomoću kosine kao

$$\mu(n) = kosina(n+1) - kosina(n)$$

- vremenski kontinuiranu jediničnu kosinu definiramo s jediničnim skokom kao

$$kosina : Realni \rightarrow Realni$$

$$kosina(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(\tau) d\tau = t\mu(t)$$

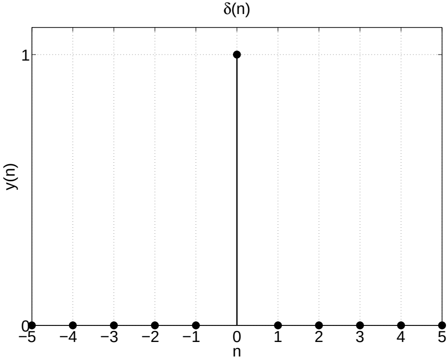
- s druge strane vremenski kontinuiran jedinični skok možemo definirati pomoću kosine kao

$$\mu(t) = \frac{d(kosina(t))}{dt}$$

Vremenski diskretan jedinični impuls – Kroneckerova delta funkcija

- vremenski diskretan jedinični impuls je vremenski diskretan signal definiran kao:

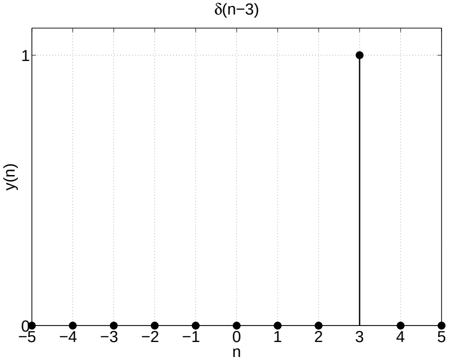
$$\delta : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Vremenski diskretan jedinični impuls – primjena1

- za m koraka pomaknuti vremenski diskretan jedinični impuls definiran je kao

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1 & n = m \quad \forall m \in Cjelobrojni \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

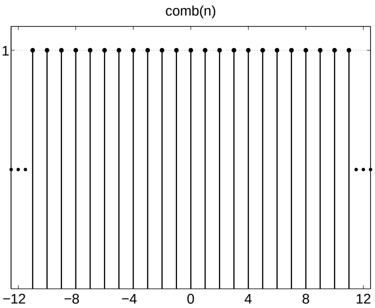


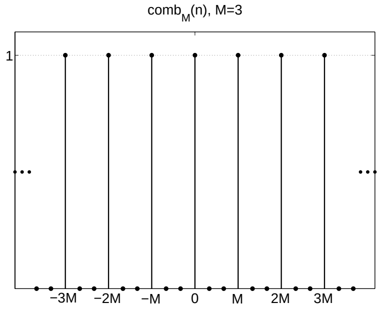
Niz vremenski diskretnih jediničnih impulsa

- definiraju se nizovi jediničnih impulsa označenih vremenski diskretnom funkcijom *comb* (prema engleskom nazivu ove funkcije)

$$comb : Cjelobrojni \rightarrow Cjelobrojni$$
$$comb(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m)$$

$$comb : Cjelobrojni \rightarrow Cjelobrojni$$
$$comb_M(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-mM)$$



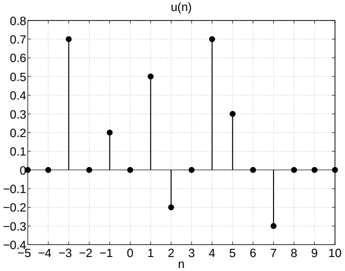


Vremenski diskretan jedinični impuls – primjena2

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć niza vremenski diskretnih jediničnih impulsa što proizlazi iz:

$$u(n) = u(n) \cdot comb(n) = u(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$$



$$\begin{aligned} u(n) = {} & .7\delta(n+3) + .2\delta(n+1) + \\ & +.5\delta(n-1) - .2\delta(n-2) + \\ & +.7\delta(n-4) + .3\delta(n-5) - \\ & -.3\delta(n-7) \end{aligned}$$

Diracova delta funkcija – vremenski kontinuirani jednični impuls

- definira se vremenski kontinuiran jedinični impuls ili Diracova delta funkcija
- zbog svojih svojstava ona se izdvaja iz skupa regularnih matematičkih funkcija i svrstava su u klasu tzv. distribucija ili singularnih funkcija
- teorija generaliziranih funkcija, koja objedinjuje singularne i regularne funkcije, razvijana je koncem devetnaestog, i u prvoj polovici dvadestog stoljeća, a prvenstveno zbog potreba izučavanja električnih krugova i nekih problema u fizici
- za potrebe ovog predmeta ovdje se uvodi vremenski kontinuirani jedinični impuls ne ulazeći u strogi matematički postupak

Diracova delta funkcija – vremenski kontinuirani jednični impuls

- vremenski kontinuiran jednični impuls $\delta(t)$ prvi je definirao P. A. M. Dirac kao

$$\delta(t) = 0 \qquad \text{za } t \neq 0$$

$$\int_{\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

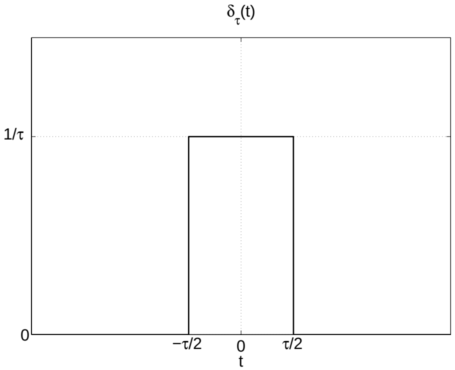
- u čast Diracu vremenski kontinuiran jednični impuls $\delta(t)$ naziva se i Diracova delta funkcija

Diracova delta funkcija 1

- izvod za Diracovu delta funkciju započinje s definicijom pravokutnog impulsa površine jednake jedan

$$\delta_\tau : Realni \longrightarrow Realni$$

$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

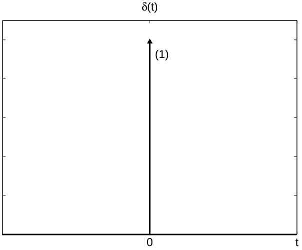


Diracova delta funkcija 2

- za $\tau \to 0$ pravokutni impuls δ_τ postaje sve uži i sve viši ali pri tome površina ostaje uvijek vrijednosti jedan
- za granični slučaj slijedi

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \delta_\tau(t)$$

- Diracovu delta funkciju prikazujemo kao na slici
- strelica u $t = 0$ ukazuje kako je površina impulsa koncentrirana u $t = 0$, a visina strelice i oznaka "1" označuje jediničnu površinu impulsa
- površina ispod impulsa se naziva "težina" ili njegov "intenzitet"



Umnožak Diracove delta funkcije i vremenski kontinuirane regularne funkcije

- razmatra se umnožak Diracove delta funkcije s nekom vremenski kontinuiranom regularnom funkcijom $f(t)$ koja je konačna i kontinuirana u $t = 0$
- kako je jedinični impuls različit od nule samo za $t = 0$ a vrijednost od $f(t)$ u $t = 0$ je $f(0)$ slijedi

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \tag{1}$$

- dakle, umnožak vremenski kontinuirane funkcije $f(t)$ i $\delta(t)$ rezultira s impulsom "intenziteta" ili "težine" $f(0)$ (što je vrijednost funkcije $f(t)$ na mjestu impulsa)
- isto tako, za funkciju koja je konačna i kontinuirana u $t = t_0$, vrijedi

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \tag{2}$$

Svojstvo otipkavanja Diracove delta funkcije

- iz jednadžbe (1) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \tag{3}$$

- isto tako, iz jednadžbe (2), slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(t_0) \tag{4}$$

- što znači da je površina produkta funkcije i impulsa $\delta(t)$ jednaka vrijednosti funkcije u trenutku u kojem je definiran jedinični impuls
- može se također reći da Diracova delta funkcija "vadi" ili "otipkava" vrijednost podintegralne funkcije na mjestu na kojem je impuls definiran

Diracova delta funkcija kao generalizirana funkcija

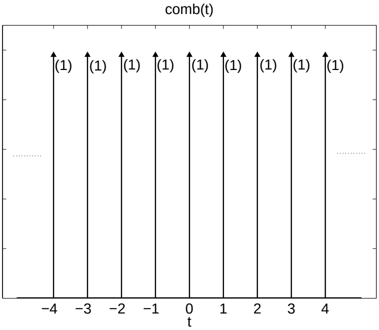
- Diracovu delta funkciju se ne može promatrati kao regularnu funkciju jer ona ima vrijednost nula za sve vrijednosti osim za vrijednost $t = 0$, a za taj t nije definirana
- zato Diracovu delta funkciju definiramo u smislu teorije distribucija ili generaliziranih funkcija
- generaliziranu funkciju, umjesto njezinih vrijednosti za sve vrijednosti domene, definiramo preko njezina djelovanja na druge, "testne" ("ispitne"), regularne funkcije
- definicija Diracove delta funkcija u smislu teorije distribucija je dana u jednadžbama (3) i (4) dakle:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(t_0) \tag{5}$$

Niz Diracovih delta funkcija

- niz Diracovih delta funkcija, označen kao funkcija $comb(t)$ prema engleskom nazivu ove funkcije, definiran je kao

$$comb(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m), \qquad m \in Cjelobrojni$$

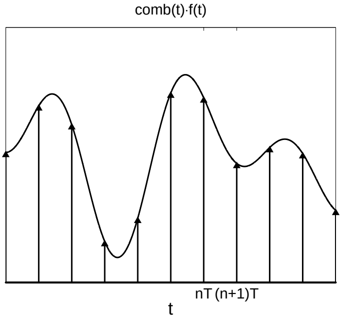


Produkt niza Diracovih delta funkcija i vremenski kontinuiranog signala

- produkt niza Diracovih delta funkcija, razmaknutih za T, i kontinuiranog signala $f(t)$ naziva se impulsno otikpavanje kontinuiranog signala ili impulsna modulacija
- rezultat množenja je niza δ funkcija intenziteta koji odgovaraju trenutnim vrijednostima funkcije $f(t)$ na mjestima $t = nT$ za $n \in \mathit{Cjelobrojni}$

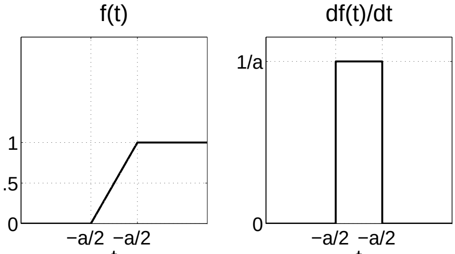
$$f_\delta(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$



Veza vremenski kontinuiranog jediničnog impulsa i vremenski kontinuiranog jediničnog skoka 1

- derivacija funkcije jediničnog skoka svuda je nula osim na mjestu diskontinuiteta u $t = 0$ gdje derivacija nije definirana
- uvodi se tzv. generalizirana derivacija i pokazuje se kako je Diracova δ funkcija generalizirana derivacija funkcije jediničnog skoka
- do ovog zaključka dolazi se sljedećim razmatranjem
- za funkciju $f(t)$ na slici prikazana je i njezina derivacija



Veza vremenski kontinuiranog jediničnog impulsa i vremenski kontinuiranog jediničnog skoka 2

- derivacija funkcije $f(t)$ definirana je za svaki t osim za $t = -a/2$ i $t = a/2$
- smanjivanjem a funkcija $f(t)$ se u konačnici približava jediničnom skoku, a pravokutni impuls, površine jedan, koji predstavlja $df(t)/dt$, prelazi u jediničnu Diracovu δ funkciju
- ovako postignuta derivacija naziva se generalizirana derivacija, a jedinični impuls je generalizirana derivacija jediničnog skoka

$$\delta(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}$$

- iz ovoga slijedi i

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda) d\lambda$$

Generalizirana derivacija funkcije $g(t)$ s diskontinuitetom u $t = t_0$

- generalizirana derivacija funkcije $g(t)$ s diskontinuitetom u $t = t_0$ definirana je kao

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \frac{d}{dt}(g(t))_{t \neq t_0} + \lim_{\epsilon \to 0}[g(t+\epsilon) - g(t-\epsilon)]\delta(t - t_0), \epsilon > 0$$

Primjer generalizirana derivacija funkcije $g(t)$ s diskontinuitetima

- neka je funkcija $g(t)$ zadana s

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ -t+3 & 1 < t \leq 4 \\ 0.5(t-6) & 4 < t \leq 8 \\ 2 & 8 < t \leq 9 \\ -t+11 & 9 < t \leq 11 \\ 0 & 11 < t \end{cases}$$

- odnosno

$$\begin{aligned} g(t) = {} & (-t+3)[\mu(t-1) - \mu(t-4)] \\ & +0.5(t-6)[\mu(t-4) - \mu(t-8)] \\ & +2[\mu(t-8) - \mu(t-9)] \\ & +(-t+11)[\mu(t-9) - \mu(t-11)] \end{aligned}$$

Primjer generalizirana derivacija funkcije $g(t)$ s diskontinuitetima

- dakle, za zadanu funkciju $g(t)$

$$\begin{aligned} g(t) = (-t+3)[\mu(t-1)-\mu(t-4)] \\ +0.5(t-6)[\mu(t-4)-\mu(t-8)] \\ +2[\mu(t-8)-\mu(t-9)] \\ +(-t+11)[\mu(t-9)-\mu(t-11)] \end{aligned}$$

- generalizirana derivacija je

$$\begin{aligned} g'(t) = -1\cdot[\mu(t-1)-\mu(t-4)] \\ +0.5[\mu(t-4)-\mu(t-8)] \\ -1\cdot[\mu(t-9)-\mu(t-11)] \\ +[g(1^+)-g(1^-)]\delta(t-1) \\ +[g(8^+)-g(8^-)]\delta(t-8) \end{aligned}$$

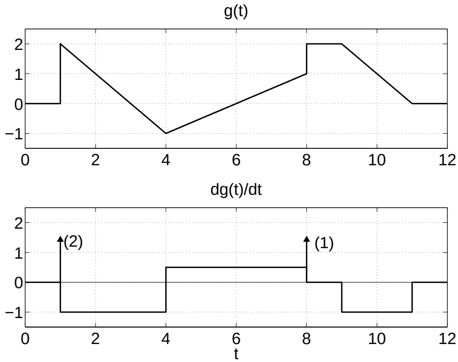
Generalizirana derivacija funkcije s diskontinuitetima

- za funkciju $g(t)$

$$
\begin{aligned}
g(t) = {} & (-t+3)[\mu(t-1)-\mu(t-4)] \\
& +0.5(t-6)[\mu(t-4)-\mu(t-8)] \\
& +2[\mu(t-8)-\mu(t-9)] \\
& +(-t+11)[\mu(t-9)-\mu(t-11)]
\end{aligned}
$$

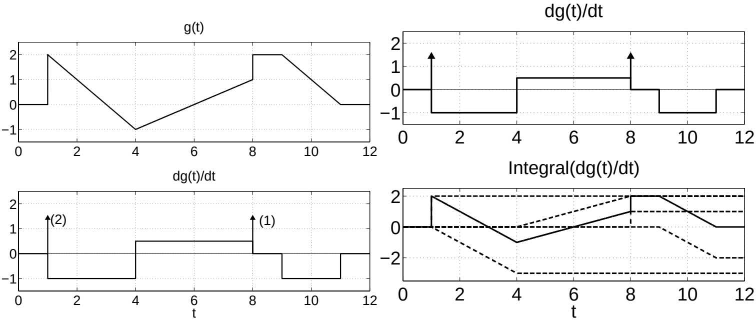
- generalizirana derivacija je

$$
\begin{aligned}
g'(t) = {} & -1\cdot[\mu(t-1)-\mu(t-4)] \\
& +0.5[\mu(t-4)-\mu(t-8)] \\
& -1\cdot[\mu(t-9)-\mu(t-11)] \\
& +[g(1^+)-g(1^-)]\delta(t-1) \\
& +[g(8^+)-g(8^-)]\delta(t-8)
\end{aligned}
$$



Generalizirana derivacija funkcije $g(t)$ s diskontinuitetom 2

- prikazana je generalizirana derivacija funkcije $g(t)$ s diskontinuitetima te integral dobivene funkcije



Vremenski kontinuiran sinusoidni signal 1

- u uvodnim izlaganjima navedena važnost sinusoidnog signala
- vremenski kontinuiran sinusoidni signal definiramo funkcijom

$$f : Realni \rightarrow Realni$$
$$f(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta) = A\cos(\Omega_0 t + \theta) = A\cos(\frac{2\pi}{T_0} t + \theta)$$
$$F_0 = \frac{1}{T_0}, \qquad \Omega_0 = 2\pi F_0$$

gdje su

A = realna amplituda sinusoidnog signala

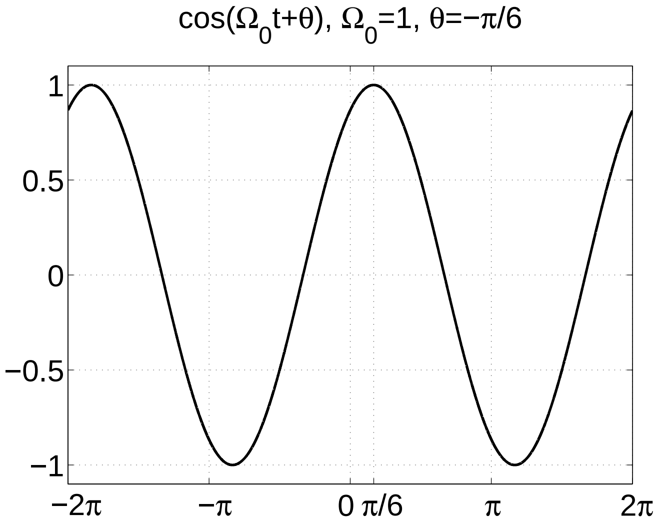
T_0 = realni osnovni period signala

F_0 = realna osnovna frekvencija signala, [Hz]

Ω_0 = realna kutna frekvencija signala, [rad/s]

θ = faza, [rad]

Vremenski kontinuiran sinusoidni signal 2



Slika 1: Vremenski kontinuiran sinusoidni signal

Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 4

Profesor Branko Jeren

Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal 1

- kompleksna eksponencijalna funkcija odlikuje se nizom značajki koje mogu poslužiti u jednostavnijem i boljem razumijevanju pojava i postupaka kod realnih signala i sustava
- zato se definira vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

$$
\begin{aligned}
& f : Realni \rightarrow Kompleksni \\
& s_0 = \sigma_0 + j\Omega_0 \in Kompleksni, \\
& C = Ae^{j\theta} \in Kompleksni, A, \theta \in Realni \\
& f(t) = Ce^{s_0 t} = Ae^{j\theta} e^{(\sigma_0 + j\Omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} e^{j(\Omega_0 t + \theta)}
\end{aligned}
$$

Vremenski kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal 2

- primjenom Eulerove relacije vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal prikazujemo i kao

$f : Realni \rightarrow Kompleksni$

$f(t) = Ae^{\sigma_0 t} e^{j(\Omega_0 t + \theta)} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\Omega_0 t + \theta) + j\sin(\Omega_0 t + \theta)]$

$F_0 = \frac{1}{T_0}, \qquad \Omega_0 = 2\pi F_0$

gdje su

A = realna amplituda kompleksnog eksponencijalnog signala

s_0 = kompleksna frekvencija

T_0 = realni osnovni period sinusoidnog signala

F_0 = realna osnovna frekvencija sinusnog signala, [Hz]

Ω_0 = realna kutna frekvencija sinusnog signala, [rad/s]

σ_0 = prigušenje $\quad \theta$ = faza, [rad]

Primjer vremenski kontinuirane kompleksne eksponencijalne funkcije 1

- za $s_0 = \sigma_0 + j\Omega_0$, kompleksna eksponencijala je

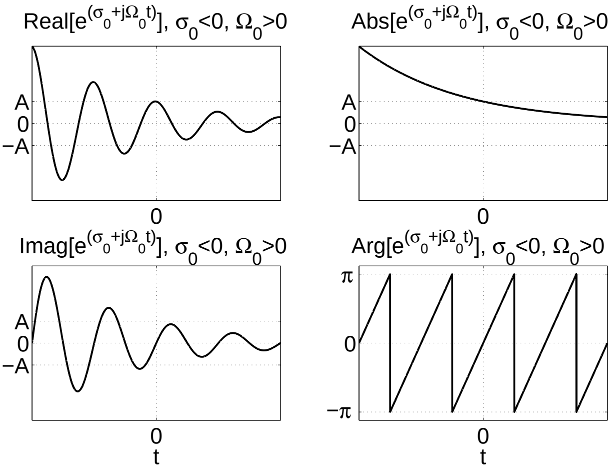
$$f(t) = Ae^{s_0 t} = Ae^{(\sigma_0 + j\Omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\Omega_0 t) + j\sin(\Omega_0 t)]$$

- neka je na primjer $\sigma_0 = -0.1$, $\Omega_0 = 1$ i $A = 1$ tada je

$$f(t) = e^{(-0.1+j)t} = e^{(-0.1t)}[\cos(t) + j\sin(t)]$$

- za danu kompleksnu eksponencijalu možemo prikazati realni i imaginarni dio, te modul i fazu

Primjer vremenski kontinuirane kompleksne eksponencijalne funkcije 2



Slika 2: Vremenski kontinuirana kompleksna eksponencijala

Primjena kompleksne eksponencijale $Ae^{s_0 t}$ u prikazu nekih realnih funkcija 1

- za $s_0 = \sigma_0 + j\Omega_0$, vremenski kontinuiranu kompleksnu eksponencijalu prikazujemo kao

$$Ae^{s_0 t} = Ae^{(\sigma_0 + j\Omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\Omega_0 t) + j\sin(\Omega_0 t)]$$

- za $s_0^* = \sigma_0 - j\Omega_0$, konjugirano od s_0, vrijedi

$$Ae^{s_0^* t} = Ae^{(\sigma_0 - j\Omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\Omega_0 t) - j\sin(\Omega_0 t)]$$

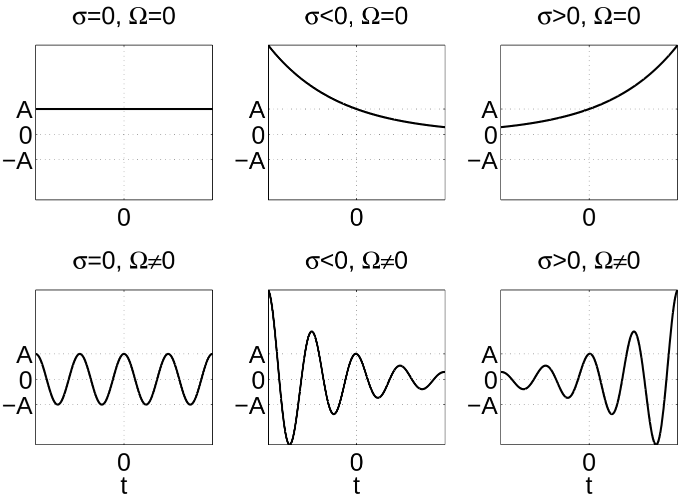
- pa dalje slijedi

$$Ae^{\sigma_0 t}cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2}[Ae^{s_0 t} + Ae^{s_0^* t}]$$

Primjena kompleksne eksponencijale $Ae^{s_0 t}$ u prikazu nekih realnih funkcija 2

- pozicija kompleksnih frekvencija $s_0 = \sigma_0 \pm j\Omega_0$ u kompleksnoj ravnini određuje ponašanje $Ae^{\sigma_0 t} cos(\Omega_0 t)$
- kompleksnu ravninu podijelimo na četiri dijela:
  - imaginarna os $j\Omega$ za $\{s|\sigma = 0\}$
  - realna os σ za $\{s|\Omega = 0\}$
  - lijeva kompleksna poluravnina za $\{s|\sigma < 0\}$
  - desna kompleksna poluravnina za $\{s|\sigma > 0\}$
- razmatramo četiri mogućnosti za $f(t) = Ae^{st}$
- za s na imaginarnoj $j\Omega$ osi
  - $s = \sigma = \Omega = 0$ rezultira u konstanti $f(t) = A$
  - $\sigma = 0$ i $s = \pm j\Omega$ rezultira u $f(t) = A\cos(\Omega t)$
- za s na realnoj σ osi
  - $s = \sigma$ i $\Omega = 0$ rezultira u $f(t) = Ae^{\sigma t}$
- za $s = \sigma \pm \Omega$
  - $s = \sigma \pm j\Omega$ rezultira u $f(t) = Ae^{\sigma t}\cos(\Omega t)$

Primjena kompleksne eksponencijale Ae^{st} u prikazu nekih relanih funkcija 3



Slika 3: $Ae^{\sigma t}\cos(\Omega t)$

Prikaz realnog sinusoidnog signala s kompleksnim eksponencijalnim signalom

- iz prije izvedenoga slijedi:

$$A\cos(\Omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j\Omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j\Omega_0 t} = Re\{Ae^{j(\Omega_0 t + \theta)}\}$$

$$A\sin(\Omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2j} e^{j\theta} e^{j\Omega_0 t} - \frac{A}{2j} e^{-j\theta} e^{-j\Omega_0 t} = Im\{Ae^{j(\Omega_0 t + \theta)}\}$$

Vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal 1

- vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal (ili niz) prikazujemo funkcijom

$$
\begin{aligned}
&f : Cjelobrojni \rightarrow Realni \\
&z_0 \in Kompleksni, \qquad z_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \\
&f(n) = Ae^{z_0 n} = Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)n} = A\alpha^n \\
&A \in Kompleksni, \quad \alpha \in Kompleksni \\
&\text{gdje su } \alpha = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)}, \quad A = |A|e^{\theta}
\end{aligned}
$$

- uobičajeno se kompleksna eksponencijala označuje kao $A\alpha^n$, no promotrimo i alternativni način prikaza

Kompleksni eksponencijalni niz 2

- kako su $A \in Kompleksni$ i $\alpha \in Kompleksni$ možemo pisati

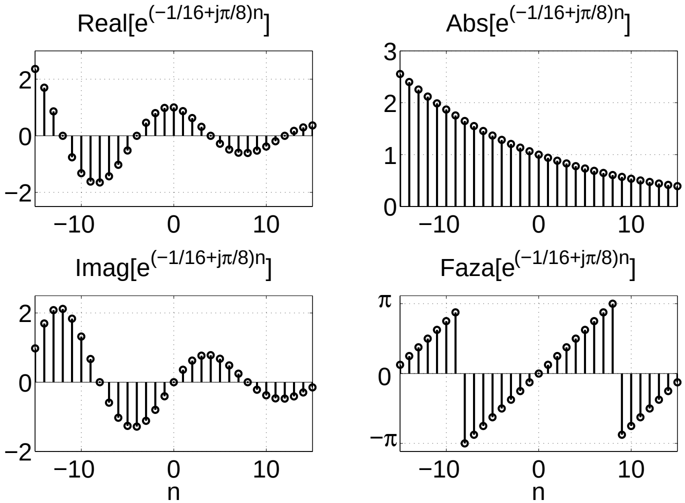
$$A = |A|e^{j\theta} \text{ i } \alpha = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)} = e^{\sigma_0}e^{j\omega_0} = |\alpha|e^{j\omega_0}$$

- uz $e^{j\omega_0 n} = cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n$ slijedi

$$f(n) = A\alpha^n = |A||\alpha|^n\cos(\omega_0 n + \theta) + j|A||\alpha|^n\sin(\omega_0 n + \theta)$$

- $|\alpha|$ i ω_0 definiraju ponašanje kompleksne eksponecijale
  - za $|\alpha| = 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi.
  - za $|\alpha| < 1$ oni su sinusoidni nizovi množeni s eksponencijalom koja se prigušuje te
  - za $|\alpha| > 1$ oni su sinusoidni nizovi množeni s eksponencijalom koja se raspiruje

Primjer eksponencijalnog niza



Slika 4: Kompleksni niz–primjer

Eksponencijalni niz u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza 1

- za kompleksni niz

$$A\alpha^n = Ae^{\sigma_0 n}e^{j\omega_0 n} = A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n) + jA|\alpha|^n \sin(\omega_0 n)$$

- je njegov konjugirano kompleksni

$$A(\alpha^*)^n = Ae^{\sigma_0 n}e^{-j\omega_0 n} = A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n) - jA|\alpha|^n \sin(\omega_0 n)$$

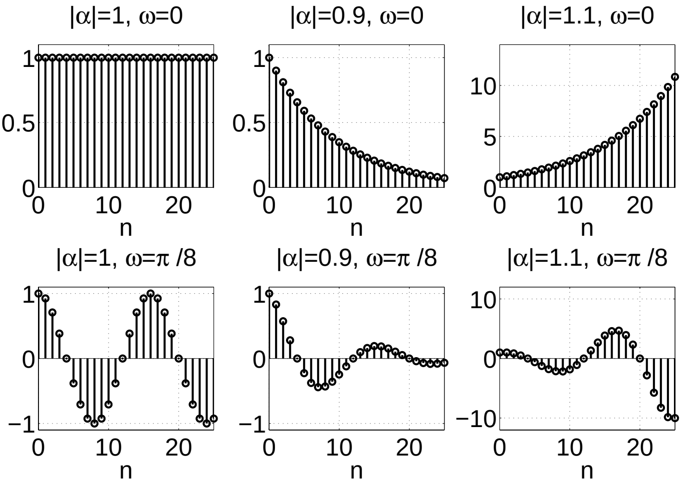
- pa vrijedi

$$A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}[A\alpha^n + A(\alpha^*)^n]$$

Eksponencijalni niz u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza 2

- analiziramo $A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n)$ za razne vrijednosti $|\alpha|$ i ω_0
- za $\omega_0 = 0$
    - $|\alpha = 1|$, $|\alpha| < 1$, $|\alpha| > 1$
- za $\omega_0 = \pm\frac{\pi}{8}$
    - $|\alpha = 1|$, $|\alpha| < 1$, $|\alpha| > 1$

Primjena kompleksne eksponencijale Ae^{st} u prikazu nekih relanih funkcija 2



Slika 5: $A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n)$

Sinousoidni signal 1

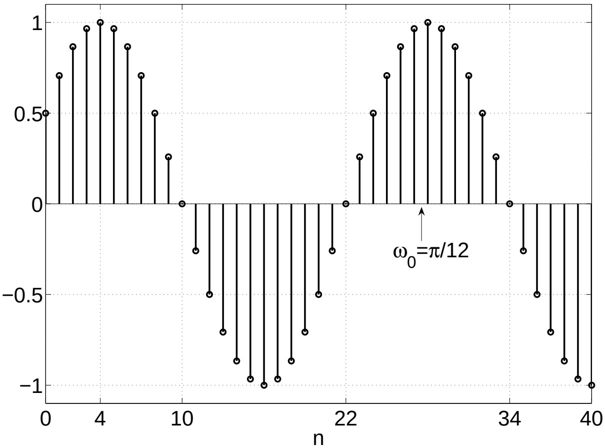
- neovisno o načinu nastajanja diskretna se sinusoida definira kao

$f : Cjelobrojni \rightarrow Realni$
$f(n) = A\cos(\omega_0 n + \theta) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) = A\cos(\frac{2\pi n}{N_0} + \theta)$
$f_0 = \frac{1}{N_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$
gdje su $\quad N_0 \in Realni, A \in \ Realni$

- A je amplituda, ω_0 [radijana/uzorku] kutna frekvencija, a θ [radijana] faza signala
- N_0 je broj uzoraka jedne periode
- f_0 je dimenzije [perioda/uzorku] i predstavlja dio periode koji odgovara jednom uzorku

Primjer realnog sinusoidnog niza

- primjer sinusoidnog niza za $\omega_0 = \frac{\pi}{12} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{24}$, te $\theta = \frac{\pi}{3}$



Slika 6: $\cos(\frac{\pi}{12} n - \frac{\pi}{3})$

Periodičnost sinusoidnog niza

- niz $u(n) = \cos(\omega_0 n + \theta)$ je periodičan ako vrijedi

$$\cos[\omega_0(n + N) + \theta] = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

- izvodimo

$$\cos[\omega_0(n+N)+\theta] = \cos(\omega_0 n+\theta)\cos(\omega_0 N) - \sin(\omega_0 n+\theta)\sin(\omega_0 N)$$

- desna je strana jednaka $\cos(\omega_0 n + \theta)$ za

$$\cos(\omega_0 N) = 1, \quad \text{i} \quad \sin(\omega_0 N) = 0$$

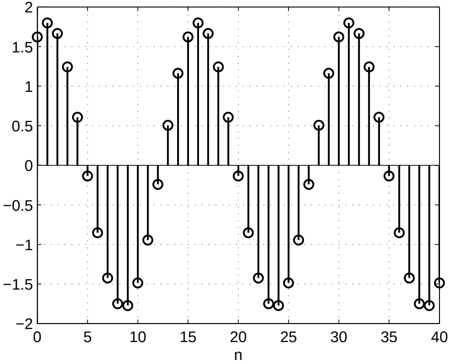
- a to je za

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad \text{ili} \quad \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}, \quad \text{ili} \quad f_0 = \frac{k}{N}$$

Primjer periodičnog sinusoidnog niza

- za niz $1.8\cos(\frac{2\pi}{15}n - \frac{\pi}{7})$ vrijedi

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{15} \text{ pa je } N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{2}{15}\pi} = 15 \text{ za } k = 1$$

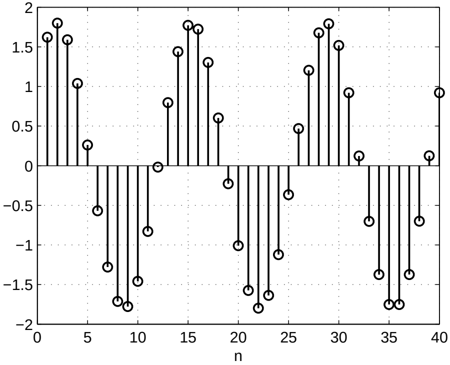


Slika 7: Periodični sinusoidni niz

Primjer neperiodičnog sinusoidnog niza

- za niz $1.8\cos(\frac{\sqrt{5}\pi}{15}n - \frac{\pi}{7})$ vrijedi

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{5}\pi}{15} \text{ pa je } N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{\sqrt{5}}{15}\pi} = \frac{30}{\sqrt{5}}k$$



Slika 8: Neperiodičan sinusoidni niz

Nejednoznačnost valnih oblika vremenski diskretne sinusoide

- valni oblici vremenski kontinuirane sinusoide $\cos(\Omega t)$ su jednoznačni za svaku realnu vrijednost Ω iz intervala 0 do ∞
- u slučaju vremenski diskretne sinusoide imamo drugačiju pojavu
- razmotrimo sinusoidne signale kutne frekvencije $\omega_0 + 2k\pi$, za $k \in \mathit{Cjelobrojni}$

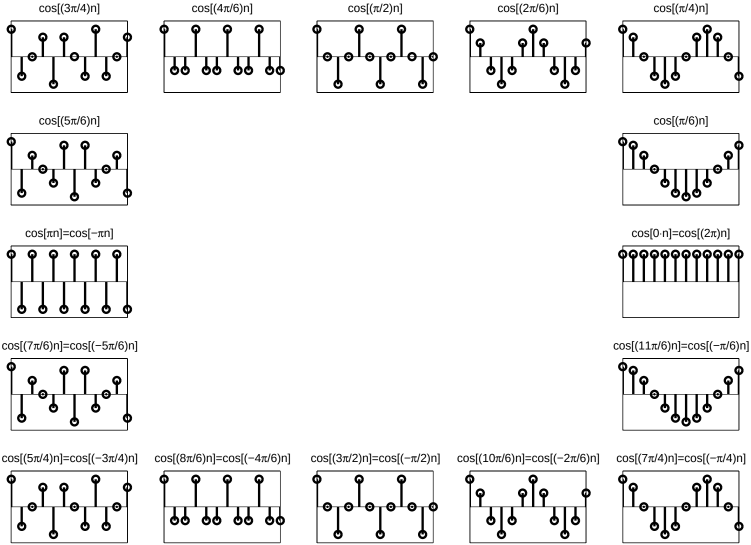
$$\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \theta) = \cos((\omega_0 n + \theta) + 2k\pi n) = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

- vidi se da su sinusoidni signali frekvencije $\omega_0 + 2k\pi$ identični signalu frekvencije ω_0
- slijedi zaključak kako je dovoljno razmatrati samo vremenski diskretne sinusoide čije su kutne frekvencija unutar intervala $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi$ odnosno $-\pi \leq \omega_0 \leq +\pi$

Još o periodičnosti vremenski diskretne sinusoide

- zbog upravo pokazane periodičnosti vremenski diskretne sinusoide jasno je da ne postoji kontinuirani porast broja oscilacija kako raste ω_0
- na slici koja slijedi ilustrirano je kako s porastom ω_0 od 0 prema π raste broj oscilacija, a s porastom ω_0 od π prema 2π, smanjuje broj oscilacija
- prikazane su sinusoide $\cos(\omega_0 n)$ za $\omega_0 = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{8\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{10\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$

Primjer realnog sinusoidnog niza

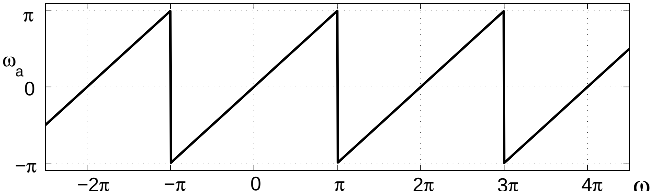


Slika 9: $\cos(\omega_0 n)$

Još o nejednoznačnosti prikaza vremenski diskretne sinusoide

- prethodni primjer potvrđuje kako će vremenski diskretna sinusoida biti jednoznačnog valnog oblika samo za vrijednosti $\omega \in [-\pi, \pi]$ ovaj interval se naziva *osnovno frekvencijsko područje*
- bilo koja frekvencija ω bez obzira na njezinu visinu bit će identična nekoj frekvenciji ω_a u temeljnom području $(-\pi \leq \omega_a \leq \pi)$
- dakle možemo pisati

$$\omega_a = \omega - 2\pi k, \quad -\pi \leq \omega_a \leq \pi \text{ i } k \in \mathit{Cjelobrojni}$$



Još o nejednoznačnosti prikaza vremenski diskretne sinusoide 2

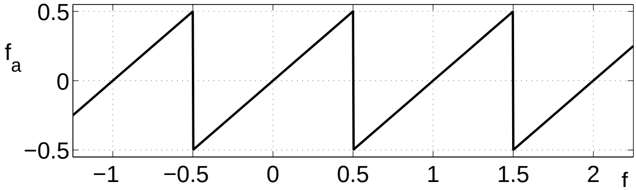
- slično se razmatranje može provesti i za prikaz sinusoide uz pomoć frekvencije f_0 koja predstavlja dio periode koja odgovara jednom uzorku
- pokazuje se da su sve sinusoide čije se frekvencije razlikuju za cjelobrojnu vrijednost identične (npr. za frekvencije 0.4, 1.4, 2.4,...)
- ovaj zaključak slijedi iz

$$\cos[(\omega_0 + 2k\pi)n + \theta] = \cos(\omega_0 n + \theta) \quad \text{za } \omega_0 = 2\pi f_0 \text{ vrijedi}$$
$$\cos[(2\pi f_0 + 2k\pi)n + \theta] = \cos[2\pi(f_0 + k)n + \theta)] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

- jednoznačno može biti prikazana vremenski diskretna sinusoida $\cos(2\pi fn + \theta)$ za vrijednosti f iz intervala $(-0.5 \leq f \leq 0.5)$

Veza f i f_a

- zaključujemo kako je svaka frekvencija f, bez obzira na njezin iznos, identična jednoj od frekvencija, f_a u osnovnom intervalu $(-0.5 \leq f \leq 0.5)$

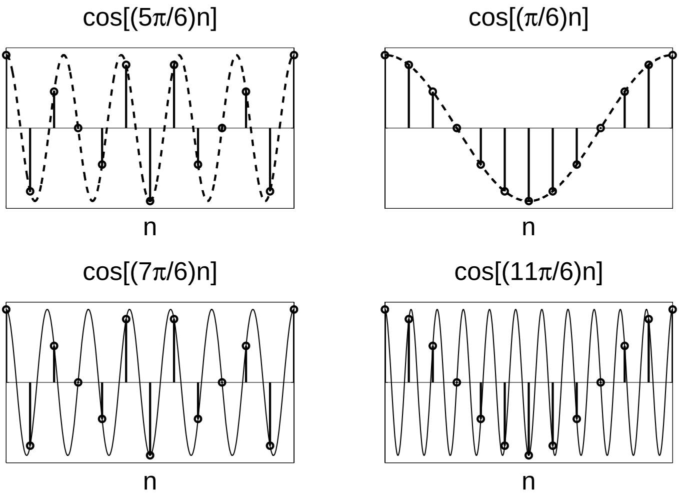


Slika 11: Odnos f i f_a

Frekvencijski alias 1

- prethodna razmatranja "sugeriraju" kako za diskretne signale ne postoje frekvencije iza $|\omega| = \pi$ ili $|f| = \frac{1}{2}$ i kako je najviša frekvencije $\omega = \pi (f = 0.5)$ i najniža 0
- treba naglasiti kako frekvencije više od ovdje navedenih postoje ali se one "predstavljaju" odgovarajućom frekvencijom unutar osnovnog područja frekvencija dakle one imaju svoj "alias"
- primjer sinusoidnih signala frekvencija unutar i izvan osnovnog frekvencijskog područja ilustrira pojavu koju nazivamo, prema engleskoj terminologiji, aliasing
- bit će pokazano kako signal $\cos(\frac{7\pi}{6})$ ima svoj "alias" u $\cos(\frac{5\pi}{6})$ odnosno $\cos(\frac{11\pi}{6})$ svoj "alias" u $\cos(\frac{\pi}{6})$

Frekvencijski alias 2



Slika 12: Aliasing