Diferencijalne jednadžbe

Napomena: Prije konzumiranja ovog PDF-a otvorite zadnju stranicu službenog šalabahtera i PDF sa formulama iz diferencijalnih jednadžbi.

Određivanje rješenja u vremenskoj domeni

Za rješavanje bi trebalo slijediti sljedeći algoritam:

(1) Zapisati jednadžbu u obliku danom na zadnjoj stranici službenog šalabahtera kako bi se odredili koeficijenti a_k i b_l (gdje je N red sustava).

$$y^{(N)}(t)+a_1y^{(N-1)}(t)+\cdots+a_Ny(t)=b_0u^{(N)}(t)+b_1u^{(N-1)}(t)+\cdots+b_Nu(t)$$

(2) Iz zadanih početnih uvjeta u trenutku $t=0^-$ odrediti početne uvjete za totalni odziv i za mirni odziv u trenutku $t=0^+$. Podsjetimo se: početni uvjeti za mirni sustav su $y(0^-)=y^{(1)}(0^-)=\cdots=y^{(N-1)}(0^-)=0$, dok su početni uvjeti za totalni odziv obično zadani. (Zadnja stranica šalabahtera!)

(3) Odrediti homogeno i partikularno rješenje te zapisati opće rješenje kao zbroj ta dva, odnosno $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$.

(4) TOTALNI ODZIV je opće rješenje sa konstantama izračunatim iz početnih uvjeta za totalni odziv. Partikularni dio rješenja je PRISILNI ODZIV, dok ostatak totalnog rješenja predstavlja PRIRODNI ODZIV, odnosno $y_{TOT}(t)=y_{PRIR}(t)+y_{PRIS}(t)$.

(5) MIRNI ODZIV je opće rješenje sa konstantama izračunatim iz početnih uvjeta za mirni odziv. NEPOBUĐENI ODZIV je razlika totalnog i mirnog odziva, odnosno $y_{TOT}(t)=y_{MIRNI}(t)+y_{NEPOB}(t)$.

(6) IMPULSNI ODZIV se traži prema formulama za diferencijalne jednadžbe. Početni uvjeti su $h_A(0^+)=h_A^{(1)}(0^+)=\cdots=h_A^{(N-2)}(0^+)=0$, odnosno $h_A^{(N-1)}(0^+)=1$.

Određivanje rješenja u frekvencijskoj domeni

Ovdje je potrebno poznavati Laplaceovu transformaciju. Za rješavanje bi trebalo slijediti sljedeći algoritam:

(1) Zapisati jednadžbu u frekvencijskoj domeni. Kao primjer će nam poslužiti sustav drugog reda opisan jednadžbom

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t)$$

Napravimo transformacije:

$$y''(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, s^2 Y(s) - sy\left(0^-\right) - y'\left(0^-\right)$$
$$y'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, sY(s) - y\left(0^-\right)$$
$$y(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$$
$$u''(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, s^2 U(s) - su\left(0^-\right) - u'\left(0^-\right)$$
$$u'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, sU(s) - u\left(0^-\right)$$
$$u(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, U(s)$$

Jednadžba u frekvencijskoj domeni je

$$s^2 Y(s) - sy\left(0^-\right) - y'\left(0^-\right) + a_1\left[sY(s) - y\left(0^-\right)\right] + a_2 Y(s) =$$
$$= b_0\left[s^2 U(s) - su\left(0^-\right) - u'\left(0^-\right)\right] + b_1\left[sU(s) - u\left(0^-\right)\right] + b_2 U(s)$$

odnosno

$$Y(s) = H(s)\,U(s) + X(s)$$

gdje je

$$H(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$X(s) = \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + a_1 y(0^-) - b_0 su(0^-) - b_0 u'(0^-) - b_1 u(0^-)}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

Obično imamo kauzalnu pobudu, pa je pobuda (kao i sve njene derivacije) u trenutku $t = 0^-$ jednaka 0, pa slijedi

$$X(s) = \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + a_1 y(0^-)}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

(2) $H(s)$ predstavlja prijenosnu funkciju sustava. Vraćanjem u vremensku domenu iz nje dobijemo IMPULSNI ODZIV.

(3) Vraćanjem $H(s)U(s)$ vremensku domenu dobijemo MIRNI ODZIV.

(4) Vraćanjem $X(s)$ u vremensku domenu dobijemo NEPOBUĐENI ODZIV.

(5) Zbrajanjem mirnog i nepobuđenog odziva dobijemo TOTALNI ODZIV. Iz tog odziva se lako očitaju PRIRODNI i PRISILNI ODZIV.

(6) Ukoliko se u zadatku traži, iz $H(s)$ možemo dobiti frekvencijsku karakteristiku.

Zadatak 1.

Zadan je LTI sustav opisan jednadžbom

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2u'(t) + u(t)$$

Ukoliko su pobuda i početni uvjeti

$$u(t) = e^{-2t}\mu(t)$$

$$y\left(0^{-}\right) = -1,\ \ y'\left(0^{-}\right) = -2$$

odredite sve odzive ovog sustava!

Rješenje:

Vremenska domena:

(1) Zapisati jednadžbu u obliku danom na zadnjoj stranici službenog šalabahtera kako bi se odredili koeficijenti a_k i b_l:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t)$$

Iz ovoga slijedi $a_1 = 5,\ a_2 = 6,\ b_0 = 0,\ b_1 = 2,\ b_2 = 1.$

(2) Iz zadanih početnih uvjeta u trenutku $t = 0^{-}$ odrediti početne uvjete za totalni odziv i za mirni odziv u trenutku $t = 0^{+}$. Otvorite zadnju stranicu šalabahtera.

(2.1) **Početni uvjeti za totalni odziv:**

$$\Delta y = b_0 u\left(0^{+}\right) = 0 \cdot e^{0^{+}}\mu\left(0^{+}\right) = 0$$

$$\Delta y = y\left(0^{+}\right) - y\left(0^{-}\right)$$

Iz ovoga slijedi:

$$y\left(0^{+}\right) - y\left(0^{-}\right) = 0 \rightarrow y\left(0^{+}\right) = y\left(0^{-}\right) = -1$$

Nadalje imamo:

$$\Delta y' + a_1 \Delta y = b_0 u'\left(0^{+}\right) + b_1 u\left(0^{+}\right)$$

$$\Delta y' + 5 \cdot 0 = 0 \cdot e^{0^{+}}\mu\left(0^{+}\right) + 2 \cdot e^{0^{+}}\mu\left(0^{+}\right) \rightarrow \Delta y' = 2$$

$$\Delta y' = y'\left(0^{+}\right) - y'\left(0^{+}\right)$$

Iz ovoga slijedi:

$$y'\left(0^{+}\right) - y'\left(0^{-}\right) = 2 \rightarrow y'\left(0^{+}\right) = 0$$

(2.2) **Početni uvjeti za mirni odziv:**
Postupak je jednak kao za (2.1.) samo što uvrštavamo $y(0^-) = y'(0^-) = 0$.

$$\Delta y = b_0 u\left(0^+\right) = 0 \cdot e^{0^+} \mu\left(0^+\right) = 0$$

$$\Delta y = y\left(0^+\right) - y\left(0^-\right)$$

Iz ovoga slijedi:

$$y\left(0^+\right) - y\left(0^-\right) = 0 \rightarrow y\left(0^+\right) = y\left(0^-\right) = 0$$

Nadalje imamo:

$$\Delta y' + a_1 \Delta y = b_0 u'\left(0^+\right) + b_1 u\left(0^+\right)$$

$$\Delta y' + 5 \cdot 0 = 0 \cdot e^{0^+} \mu\left(0^+\right) + 2 \cdot e^{0^+} \mu\left(0^+\right) \rightarrow \Delta y' = 2$$
$$\Delta y' = y'\left(0^+\right) - y'\left(0^+\right)$$

Iz ovoga slijedi:

$$y'\left(0^+\right) - y'\left(0^-\right) = 2 \rightarrow y'\left(0^+\right) = 2$$

(3) Odrediti homogeno i partikularno rješenje te zapisati opće rješenje kao zbroj ta dva, odnosno $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \rightarrow s_1 = -2,\, s_2 = -3$$

Homogeno rješenje je $y_h(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$.

Za partikularno rješenje prvo pogledajmo oblik pobude.

$$u(t) = e^{-2t} = Ae^{\varphi t},\, t \geq 0$$

Partikularno rješenje je onda $y_p(t) = Ke^{\varphi t} t^k$, gdje je k broj ponavljanja φ kao karakteristične frekvencije. Vidimo da se $\varphi = -2$ samo jednom pojavljuje kao karakteristična frekvencija ($s_1 = -2$), pa imamo $y_p(t) = Kte^{-2t}$. Uvrstimo to u početnu jednadžbu kako bi dobili K:

$$\left(Kte^{-2t}\right)'' + 5\left(Kte^{-2t}\right)' + 6Kte^{-2t} = 2\left(e^{-2t}\right) + e^{-2t}$$

Iz ovoga slijedi $K = -3$, pa je partikularno rješenje $y_p(t) = -3te^{-2t}$. Opće rješenje tada glasi:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \left(C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} - 3te^{-2t}\right)\mu(t)$$

(4) TOTALNI ODZIV je opće rješenje sa konstantama izračunatim iz početnih uvjeta za totalni odziv. Partikularni dio rješenja je PRISILNI ODZIV, dok ostatak totalnog rješenja predstavlja PRIRODNI ODZIV, odnosno $y_{TOT}(t) = y_{PRIR}(t) + y_{PRIS}(t)$.

Dakle, početni uvjeti su nam $y(0^+) = -1$ i $y'(0^+) = 0$. Prije nego što ih uvrstimo, trebamo još naći prvu derivaciju općeg rješenja:

$$y'(t) = \left(-2C_1e^{-2t} - 3C_2e^{-3t} - 3e^{-2t} + 6te^{-2t}\right)\mu(t)$$

Sada uvrštavamo početne uvjete:

$$y\left(0^+\right) = C_1 + C_2 = -1$$

$$y'\left(0^+\right) = -2C_1 - 3C_2 - 3 = 0$$

Iz ovoga slijedi $C_1 = 0$ i $C_2 = -1$. TOTALNI ODZIV je:

$$y_{TOT}(t) = \left(-e^{-3t} - 3te^{-2t}\right)\mu(t)$$

PRISILNI ODZIV je partikularno rješenje, odnosno:

$$y_{PRIS}(t) = -3te^{-2t}\mu(t)$$

PRIRODNI ODZIV je onda:

$$y_{PRIR}(t) = -e^{-3t}\mu(t)$$

(5) MIRNI ODZIV je opće rješenje sa konstantama izračunatim iz početnih uvjeta za mirni odziv. NEPOBUĐENI ODZIV je razlika totalnog i mirnog odziva, odnosno $y_{TOT}(t) = y_{MIRNI}(t) + y_{NEPOB}(t)$.

Dakle, početni uvjeti su nam $y(0^+) = 0$ i $y'(0^+) = 2$. Uvrstimo ih:

$$y\left(0^+\right) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y'\left(0^+\right) = -2C_1 - 3C_2 - 3 = 2$$

Iz ovoga slijedi $C_1 = 5$ i $C_2 = -5$. MIRNI ODZIV je:

$$y_{MIRNI}(t) = \left(5e^{-2t} - 5e^{-3t} - 3te^{-2t}\right)\mu(t)$$

NEPOBUĐENI ODZIV je onda:

$$y_{NEPOB}(t) = y_{TOT}(t) - y_{MIRNI}(t) = \left(-5e^{-2t} + 4te^{-2t}\right)\mu(t)$$

(6) IMPULSNI ODZIV se traži prema formulama za diferencijalne jednadžbe.

Red sustava je $N = 2$. Najveći stupanj derivacije pobude je $M = 1$. Obzirom da je $N > M$ koristimo sljedeću formulu:

$$h(t) = \sum_{m=0}^{M} \left(b_{N-m} D^m\right) h_A(t)\,,\ t \geq 0$$

Idemo ju malo raspisati:

$$h(t) = \sum_{m=0}^{1} \left(b_{2-m} D^m\right) h_A(t)$$

$$h(t) = \left(b_{2-0} D^0\right) h_A(t) + \left(b_{2-1} D^1\right) h_A(t) = b_2 h_A(t) + b_1 h'_A(t)$$
$$h(t) = h_A(t) + 2h'_A(t)$$

$h_A(t)$ predstavlja homogeno rješenje, odnosno $h_A(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$, gdje koristimo početne uvjete $h_A(0^+) = 0$ i $h'_A(0^+) = 1$. Moramo naći prvu derivaciju:

$$h'_A(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}$$

I sada uvrštavamo početne uvjete:

$$h_A\left(0^+\right) = C_1 + C_2 = 0$$

$$h'_A\left(0^+\right) = -2C_1 - 3C_2 = 1$$

Iz toga slijedi $C_1 = 1$ i $C_2 = -1$, pa je $h_A(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$. Konačno je:

$$h(t) = \left(e^{-2t} - e^{-3t} + 2\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)'\right) \mu(t)$$

odnosno

$$h(t) = \left(-3e^{-2t} + 5e^{-3t}\right) \mu(t)$$

Frekvencijska domena:

(1) Zapisati jednadžbu u frekvencijskoj domeni. Napravimo transformacije:

$$y''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^2Y(s) - sy\left(0^-\right) - y'\left(0^-\right) = s^2Y(s) + s + 2$$

$$y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sY(s) - y\left(0^-\right) = sY(s) + 1$$

$$y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$$

$$u'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sU(s) - u\left(0^-\right) = sU(s)$$

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(s)$$

Jednadžba u frekvencijskoj domeni je

$$s^2Y(s) + s + 2 + 5sY(s) + 5 + 6Y(s) = 2sU(s) + U(s)$$

$$Y(s)\left(s^2 + 5s + 6\right) = U(s)(2s+1) - s - 7$$

odnosno

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+6}U(s) - \frac{s+7}{s^2+5s+6}$$

gdje je

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+6}$$

$$X(s) = -\frac{s+7}{s^2+5s+6}$$

(2) $H(s)$ predstavlja prijenosnu funkciju sustava. Vraćanjem u vremensku domenu iz nje dobijemo IMPULSNI ODZIV.

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+6} = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Iz ovoga se dobije $A = -3$ i $B = 5$, pa imamo:

$$H(s) = \frac{-3}{s+2} + \frac{5}{s+3}$$

IMPULSNI ODZIV je

$$h(t) = \left(-3e^{-2t} + 5e^{-3t}\right)\mu(t)$$

(3) Vraćanjem $H(s)U(s)$ vremensku domenu dobijemo MIRNI ODZIV.

Obzirom da je pobuda $u(t) = e^{-2t}\mu(t)$, onda je $U(s) = \frac{1}{s+2}$, pa slijedi

$$H(s)U(s) = \frac{2s+1}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+3}$$

Iz ovoga se dobije $A = 5$, $B = -3$ i $C = -5$ pa imamo:

$$H(s)U(s) = \frac{5}{s+2} + \frac{-3}{(s+2)^2} + \frac{-5}{s+3}$$

MIRNI ODZIV je

$$y_{MIRNI}(t) = \left(5e^{-2t} - 5e^{-3t} - 3te^{-2t}\right)\mu(t)$$

(4) Vraćanjem $X(s)$ u vremensku domenu dobijemo NEPOBUĐENI ODZIV.

$$X(s) = -\frac{s+7}{s^2+5s+6} = -\frac{s+7}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Iz ovoga se dobije $A = -5$ i $B = 4$ pa imamo:

$$X(s) = \frac{-5}{s+2} + \frac{4}{s+3}$$

NEPOBUĐENI ODZIV je

$$y_{NEPOB}(t) = \left(-5e^{-2t} + 4e^{-3t}\right)\mu(t)$$

(5) Zbrajanjem mirnog i nepobuđenog odziva dobijemo TOTALNI ODZIV. Iz tog odziva se lako očitaju PRIRODNI i PRISILNI ODZIV.

$$y_{TOT}(t) = y_{MIRNI}(t) + y_{NEPOB}(t) = \left(-e^{-3t} - 3te^{-2t}\right)\mu(t)$$

(6) Ukoliko se u zadatku traži, iz $H(s)$ možemo dobiti frekvencijsku karakteristiku.

$$H(j\omega) = \frac{2j\omega+1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} = \frac{9\omega^2+6}{36+13\omega^2+\omega^4} + j\frac{-2\omega^3+7\omega}{36+13\omega^2+\omega^4}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+4\omega^2}{36+13\omega^2+\omega^4}}$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan\frac{Im}{Re} = \arctan\frac{-2\omega^3+7\omega}{9\omega^2+6}$$

Zadatak 2.

Zadan je LTI sustav opisan jednadžbom

$$y'(t) + 5y(t) = u'(t) - 2u(t)$$

Ukoliko su pobuda i početni uvjeti

$$u(t) = 2e^{-5t}\mu(t)$$

$$y\left(0^-\right) = 1$$

odredite sve odzive ovog sustava!

Rješenje:

Vremenska domena:

(1)

$$y'(t) + a_1 y(t) = b_0 u'(t) + b_1 u(t)$$

Iz ovoga slijedi $a_1 = 5,\ b_0 = 1,\ b_1 = -2.$

(2)

(2.1) **Početni uvjeti za totalni odziv:**

$$\Delta y = b_0 u\left(0^+\right) = 1 \cdot 2e^{0^+}\mu\left(0^+\right) = 2$$

$$\Delta y = y\left(0^+\right) - y\left(0^-\right)$$

Iz ovoga slijedi:

$$y\left(0^+\right) - y\left(0^-\right) = 2 \rightarrow y\left(0^+\right) = y\left(0^-\right) + 2 = 3$$

(2.2) **Početni uvjeti za mirni odziv:**

Postupak je jednak kao za (2.1.) samo što uvrštavamo $y(0^-) = 0$.

$$\Delta y = b_0 u\left(0^+\right) = 1 \cdot 2e^{0^+}\mu\left(0^+\right) = 2$$

$$\Delta y = y\left(0^+\right) - y\left(0^-\right)$$

Iz ovoga slijedi:

$$y\left(0^+\right) - y\left(0^-\right) = 2 \rightarrow y\left(0^+\right) = y\left(0^-\right) + 2 = 2$$

(3)

$$s + 5 = 0 \rightarrow s = -5$$

$$y_h(t) = Ce^{st} = Ce^{-5t}$$

Za partikularno rješenje prvo pogledajmo oblik pobude.

$$u(t) = 2e^{-5t} = Ae^{\varphi t},\ t \geq 0$$

Partikularno rješenje je onda $y_p(t) = Ke^{\varphi t}t^k$, gdje je k broj ponavljanja φ kao karakteristične frekvencije. Vidimo da se $\varphi = -5$ jednom pojavljuje kao karakteristična frekvencija ($s = -5$), pa imamo $y_p(t) = Kte^{-5t}$. Uvrstimo to u početnu jednadžbu kako bi dobili K:

$$\left(Kte^{-5t}\right)' + 5Kte^{-5t} = \left(2e^{-5t}\right) - 4e^{-5t}$$

Iz ovoga slijedi $K = -14$, pa je partikularno rješenje $y_p(t) = -14te^{-5t}$. Opće rješenje tada glasi:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \left(Ce^{-5t} - 14te^{-5t}\right)\mu(t)$$

(4) Dakle, početni uvjet je $y(0^+) = 3$.

$$y\left(0^+\right) = C = 3$$

TOTALNI ODZIV je:

$$y_{TOT}(t) = \left(3e^{-5t} - 14te^{-5t}\right)\mu(t)$$

PRISILNI ODZIV je partikularno rješenje, odnosno:

$$y_{PRIS}(t) = -14te^{-5t}\mu(t)$$

PRIRODNI ODZIV je onda:

$$y_{PRIR}(t) = 3e^{-5t}\mu(t)$$

(5) Dakle, početni uvjet je $y(0^+) = 2$.

$$y\left(0^+\right) = C = 2$$

MIRNI ODZIV je:

$$y_{MIRNI}(t) = 2e^{-5t} - 14te^{-5t}\mu(t)$$

NEPOBUĐENI ODZIV je onda:

$$y_{NEPOB}(t) = y_{TOT}(t) - y_{MIRNI}(t) = e^{-5t}\mu(t)$$

(6) IMPULSNI ODZIV se traži prema formulama za diferencijalne jednadžbe.

Red sustava je $N = 1$. Najveći stupanj derivacije pobude je $M = 1$. Obzirom da je $N = M$ koristimo sljedeću formulu:

$$h(t) = b_0\delta(t) + \sum_{m=0}^{M} (b_{N-m}D^m)\, h_A(t)\,,\ t \geq 0$$

Idemo ju malo raspisati:

$$h(t) = b_0\delta(t) + \sum_{m=0}^{1} (b_{1-m}D^m)\, h_A(t)$$

$$h(t) = b_0\delta(t) + \left(b_{1-0}D^0\right) h_A(t) + \left(b_{1-1}D^1\right) h_A(t) = b_0\delta(t) + b_1 h_A(t) + b_0 h_A'(t)$$

$$h(t) = \delta(t) - 2h_A(t) + h_A'(t)$$

$h_A(t)$ predstavlja homogeno rješenje, odnosno $h_A(t) = Ce^{-5t}$, gdje koristimo početni uvjet $h_A(0^+) = 1$.

$$h_A\left(0^+\right) = C = 1$$

Konačno je:

$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-5t} - 5e^{-5t}$$

odnosno

$$h(t) = \delta(t) - 7e^{-5t}\mu(t)$$

Frekvencijska domena:

(1)

$$y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sY(s) - y\left(0^-\right) = sY(s) - 1$$

$$y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$$

$$u'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sU(s) - u\left(0^-\right) = sU(s)$$

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(s)$$

Jednadžba u frekvencijskoj domeni je

$$sY(s) - 1 + 5Y(s) = sU(s) - 2U(s)$$

$$Y(s)(s+5) = U(s)(s-2) + 1$$

odnosno

$$Y(s) = \frac{s-2}{s+5}U(s) + \frac{1}{s+5}$$

gdje je

$$H(s) = \frac{s-2}{s+5}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+5}$$

(2) $H(s)$ predstavlja prijenosnu funkciju sustava. Vraćanjem u vremensku domenu iz nje dobijemo IMPULSNI ODZIV.

$$H(s) = \frac{s-2}{s+5} = \frac{s+5-7}{s+5} = 1 - \frac{7}{s+5}$$

IMPULSNI ODZIV je

$$h(t) = \delta(t) - 7e^{-5t}\mu(t)$$

(3) Vraćanjem $H(s)U(s)$ vremensku domenu dobijemo MIRNI ODZIV.

Obzirom da je pobuda $u(t) = 2e^{-5t}\mu(t)$, onda je $U(s) = \frac{2}{s+5}$, pa slijedi

$$H(s)U(s) = \frac{2(s-2)}{(s+5)^2} = \frac{s-2}{s+5}\frac{2}{s+5} = \left(1 - \frac{7}{s+5}\right)\frac{2}{s+5}$$

$$H(s)U(s) = \frac{2}{s+5} - \frac{14}{(s+5)^2}$$

MIRNI ODZIV je

$$y_{MIRNI}(t) = \left(2e^{-5t} - 14te^{-5t}\right)\mu(t)$$

(4) Vraćanjem $X(s)$ u vremensku domenu dobijemo NEPOBUĐENI ODZIV.

$$X(s) = \frac{1}{s+5}$$

NEPOBUĐENI ODZIV je

$$y_{NEPOB}(t) = e^{-5t}\mu(t)$$

(5) Zbrajanjem mirnog i nepobuđenog odziva dobijemo TOTALNI ODZIV. Iz tog odziva se lako očitaju PRIRODNI i PRISILNI ODZIV.

$$y_{TOT}(t) = y_{MIRNI}(t) + y_{NEPOB}(t) = \left(3e^{-5t} - 14te^{-5t}\right)\mu(t)$$

(6) Ukoliko se u zadatku traži, iz $H(s)$ možemo dobiti frekvencijsku karakteristiku.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - 2}{j\omega + 5} = \frac{\omega^2 - 10}{\omega^2 + 25} + j\frac{7\omega}{\omega^2 + 25}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 + 4}{\omega^2 + 5}}$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan\frac{Im}{Re} = \arctan\frac{7\omega}{\omega^2 - 10}$$