Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

7. travnja 2008.

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- signale prikazujemo u dvije domene, u frekvencijskoj i u vremenskoj domeni, i pokazano je:
- spektar aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala je
  - kontinuiran,
    !!!*zbog aperiodičnosti u vrem. domeni*
  - aperiodičan
    !!!*zbog kontinuiranosti u vrem. domeni*
- spektar periodičnih vremenski kontinuiranih signala, perioda T_0 je
  - diskretan, razmak između uzoraka $\frac{2\pi}{T_0}$,
    !!! diskretnost zbog periodičnosti u vrem. domeni
  - aperiodičan
    !!! aperiodičnost zbog kontinuiranosti u vrem. domeni
- spektar aperiodičnih vremenski diskretnih signala
  - kontinuiran
    !!! kontinuiranost zbog aperiodičnosti u vrem. domeni
  - periodičan, s periodom 2π
    !!! periodičnost zbog diskretnosti u vrem. domeni

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- zaključujemo kako periodičan vremenski diskretan signal $x(n) = x(n+N), \forall n \in Cjelobrojni$, ima
  - PERIODIČAN spektar (zbog diskretnosti signala u vremenskoj domeni) koji se ponavlja svakih $2\pi \Rightarrow$ područje frekvencija je $(-\pi, \pi)$ ili $(0, 2\pi)$
  - DISKRETAN spektar (zbog periodičnosti signala u vremenskoj domeni) pri čemu je razmak između susjednih frekvencijskih komponenti $\frac{2\pi}{N}$ radijana $\Rightarrow$ Fourierov red za periodični diskretni signal sadržava najviše N frekvencijskih komponenti
- dakle, za diskretni periodični signal $x(n) = x(n+N)$, perioda N, Fourierov red sadrži N harmonički vezanih kompleksnih eksponencijalnih funkcija

$$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- iz svega kazanog slijedi

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

  što je Fourierov red za vremenski diskretan periodični signal ili, prema engleskoj terminologiji DTFS – discrete–time Fourier series

- koeficijente Fourierovog reda, izvod sličan izvodu za kontinuirane signale, izračunavamo iz

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- iz izraza za koeficijente Fourierovog reda

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

  zaključujemo kako koeficijenti Fourierovog reda X_k omogućuju prikaz $x(n)$ u frekvencijskoj domeni, tako da X_k predstavljaju amplitudu i fazu vezanu uz frekvencijske komponente $e^{jk\frac{2\pi}{N}} = e^{j\omega_k n}$ gdje je $\omega_k = k\frac{2\pi}{N}$
- spektar diskretnog signala je periodičan što vrijedi i za X_k koji je periodičan s osnovnim periodom N

$$X_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = X_k$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- zaključno, par za Fourierovu transformaciju periodičnih vremenski diskretnih signala je

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

- Parsevalova jedankost za periodične diskretne signale[1]

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

[1] izvod sličan kao i u prijašnjim slučajevima

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- Fourierovom transformacijom vremenski diskretnom periodičnom signalu, definiranom u vremenskoj domeni, pridružuje se frekvencijski diskretan periodičan signal, definiran u frekvencijskoj domeni
- to pridruživanje označujemo kao $DTFS$, prema engleskom Discrete-time Fourier Series, i definiramo kao

$$DTFS : DisktPeriod_N \to DisktPeriod_N$$

$$N \in Cjelobrojni, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

za $\forall x \in DisktPeriod_N$ i $\forall X \in DisktPeriod_N$

Inverzna Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- inverznom Fourierovom transformacijom frekvencijski diskretnom periodičnom signalu (spektru), definiranom u frekvencijskoj domeni, pridružuje se vremenski diskretan periodičan signal, definiran u vremenskoj domeni
- to pridruživanje označujemo *IDTFS*, prema engleskom Inverse Discrete-time Fourier Series, i definiramo kao

$$IDTFS : DisktPeriod_N \to DisktPeriod_N$$

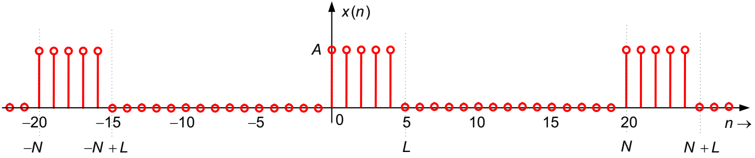
$$N \in Cjelobrojni, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

za $\forall X \in DisktPeriod_N$ i $\forall x \in DisktPeriod_N$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala – primjer

- određuje se Fourierova transformacija periodičnog vremenski diskretnog pravokutnog signala kao

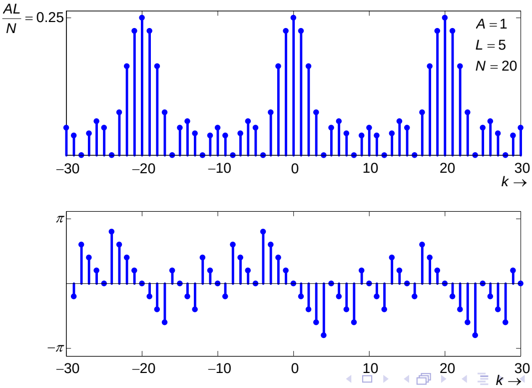


$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-jk\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$= \begin{cases} \frac{AL}{N} & k = 0 \\ \frac{A}{N}\frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}L}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} & k = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases}$$

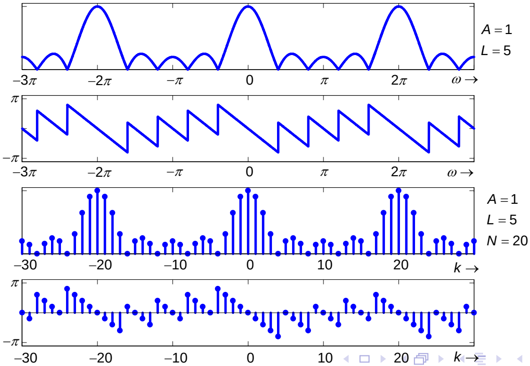
Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala – primjer

$$X_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{A}{N} e^{-jk\frac{\pi}{N}(L-1)} \dfrac{sin\left(k\frac{\pi}{N}L\right)}{sin\left(k\frac{\pi}{N}\right)} & \text{inače} \end{cases}$$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala – primjer

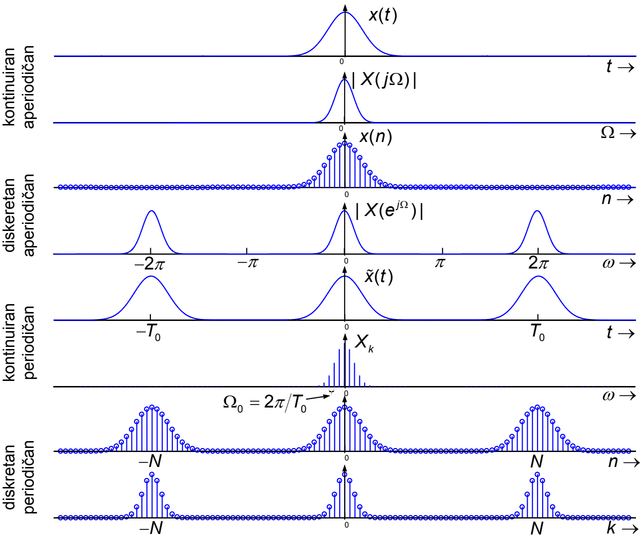
- uspoređuju se spektri vremenski diskretnih aperiodičnih i periodičnih signala
- može se uočiti kako je $X_k = \frac{1}{N} X(k\frac{2\pi}{N})$, dakle, spektar periodičnog signala možemo promatrati kao frekvencijski otipkani spektar aperiodičnog signala



Fourierove transformacije

	aperiodičan	periodičan
kontinuirani	$CTFT: KontSignali \to KontSignali$ $X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$ $ICTFT: KontSignali \to KontSignali$ $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$	$CTFS: KontPeriod_{T_0} \to DisktSignali$ $X_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$ $ICTFS: DisktSignali \to KontPeriod_{T_0}$ $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$
diskretni	$DTFT: DisktSignali \to KontPeriod_{2\pi}$ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ $IDTFT: KontPeriod_{2\pi} \to DisktSignali$ $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$DTFS: DisktPeriod_N \to DisktPeriod_N$ $X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ $IDTFS: DisktPeriod_N \to DisktPeriod_N$ $x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

Fourierove transformacije[2]



[2] pogledati narednu prikaznicu

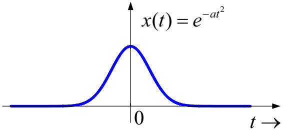
Fourierova transformacija – primjer Gaussov impuls

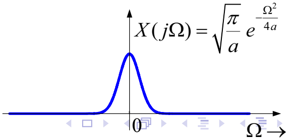
- pokazuje se kako je Fourierova transformacija aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala $x(t) = e^{-at^2}$, $\forall t \in Realni$, opet Gaussov impuls

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2 + j\Omega t)}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(\sqrt{a}t + \frac{j\Omega}{2\sqrt{a}})^2 + \frac{\Omega^2}{4a}]}\, dt = e^{-\frac{\Omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}t + \frac{j\Omega}{2\sqrt{a}})^2}\, dt$$

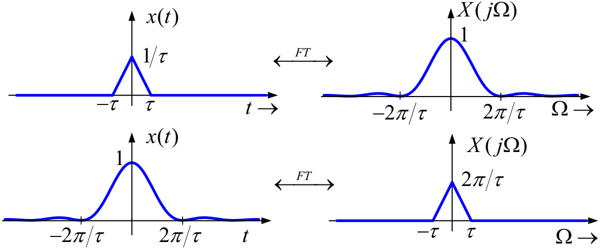
$$= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\Omega^2}{4a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\, d\beta}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\Omega^2}{4a}}$$





Spektar vrem. omeđenih i vrem. neomeđenih signala

- razmatraju se transformacije sljedećih signala (dualnost!)



$$\underbrace{\begin{cases} \frac{1}{\tau^2}t + \frac{1}{\tau} & -\tau \le t < 0 \\ -\frac{1}{\tau^2}t + \frac{1}{\tau} & 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{inače} \end{cases}}_{x(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{FT}} \underbrace{\left[\frac{\sin\frac{\tau\Omega}{2}}{\frac{\tau\Omega}{2}}\right]^2}_{X(j\Omega)}$$

$$\underbrace{\left[\frac{\sin\frac{\tau t}{2}}{\frac{\tau t}{2}}\right]^2}_{X(jt)} \xleftrightarrow{\mathcal{FT}} \underbrace{\begin{cases} \frac{2\pi}{\tau^2}\Omega + \frac{2\pi}{\tau} & -\tau \le \Omega < 0 \\ -\frac{2\pi}{\tau^2}\Omega + \frac{2\pi}{\tau} & 0 \le \Omega \le \tau \\ 0 & \text{inače} \end{cases}}_{2\pi x(-\Omega)=2\pi x(\Omega)}$$

Spektar vrem. omeđenih i vrem. neomeđenih signala

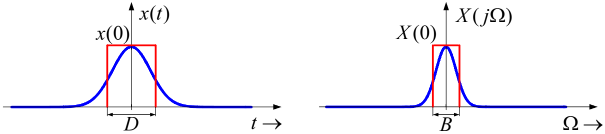
- iz prethodnih prikaznica zaključujemo:
  - signal neomeđen u vremenu može imati frekvencijski neomeđen spektar - primjer Gaussovih impulsa u obje domene
  - spektar vremenski omeđenog signala je frekvencijski neomeđen - primjer pravokutni ili trokutni impuls
  - frekvencijski omeđeni spektar je spektar vremenski neomeđenog signala - primjer signala $sin(t)/t$, ili $sin^2(t)/t^2$
  - signal i njegov spektar ne mogu biti istovremeno omeđeni u obje domene

Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- u više je navrata pokazana bliska veza trajanja signala i odgovarajuće širine spektra signala
- tako u slučaju pravokutnog impulsa, spektar se "širi" kako se trajanje impulsa "skraćuje" (unatoč činjenici da je spektar pravokutnog impulsa frekvencijski neomeđen)
- za spektar pravokutnog signala se također može zaključiti kako, iako frekvencijski neomeđen , većina spektra ipak koncentrirana u nekom konačnom intervalu,
- taj interval možemo nazvati širina frekvencijskog pojasa spektra, i korisno je definirati odgovarajuću mjeru za trajanje signala, odnosno širinu frekvencijskog pojasa njegovog spektra

Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- postoji više načina definicije trajanja signala i širine frekvencijskog pojasa spektra signala a ovdje se navodi postupak koji nazivamo, prema engleskom, pravokutnik iste površine (Equal–Area Rectangle)
- razmatramo parni realan signal



- prema ovoj definiciji trajanje signala $x(t)$ je trajanje pravokutnog signala koji je iste površine i visine kao sam signal $x(t)$
- identično se definira širina frekvencijskog pojasa spektra signala

Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- uz

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\, dt \quad \& \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

i uz

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt}_{X(0)} = Dx(0) \quad \& \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\, d\Omega}_{2\pi x(0)} = BX(0)$$

slijedi

$$D = \frac{X(0)}{x(0)} \quad \& \quad B = 2\pi\frac{x(0)}{X(0)} \quad \Rightarrow \quad DB = 2\pi$$

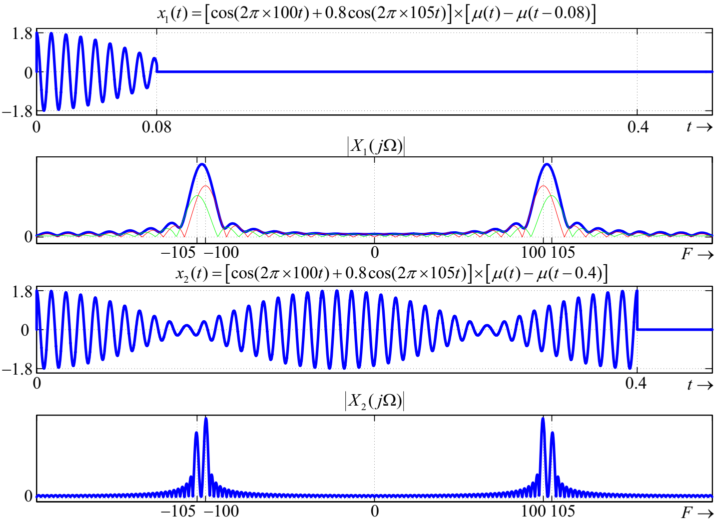
Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- očigledno su trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa njegovog spektra recipročni
- dakle, skraćivanje trajanja signala rezultira u širenju frekvencijskog pojasa spektra (i obrnuto)
- zaključujemo kako je produkt

(trajanje signala) x (frekvencijski pojas spektra) = konstanta

- ova činjenica je od velike važnosti u nizu primjena, a posebno u komunikacijama
- naredni primjer ilustrira utjecaj trajanja signala na njegov spektar

Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala



Digitalna obradba kontinuiranih signala

- digitalna obradba vremenski kontinuiranih signala sastoji se od tri osnovna koraka
    - pretvorba vremenski kontinuiranog signala u vremenski diskretan signal
    - obradba vremenski diskretnog signala
    - pretvorba obrađenog diskretnog signala u vremenski kontinuiran signal
- ovdje se pokazuje pod kojim uvjetima treba diskretizirati vremenski kontinuirani signal kako bi se mogao obrađivati kao vremenski diskretan signal

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- pokazano je kako se otipkavanjem kontinuiranog signala $x(t)$ čiji je spektar $X(j\Omega)$, dobiva signal $x_s(t)$ čiji je spektar periodičan i vrijedi

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\frac{2\pi}{T})) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$

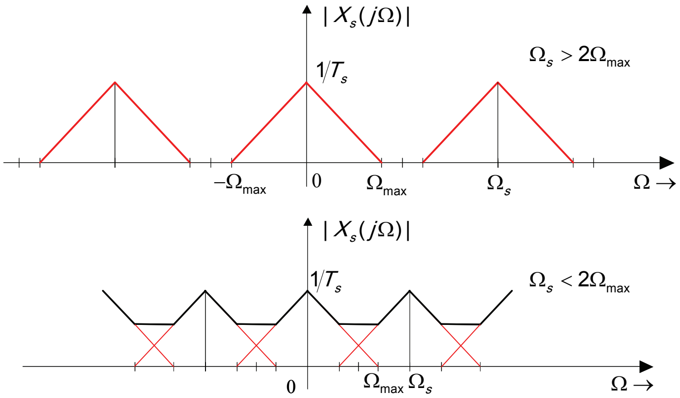
dakle, spektar otipkanog signala $X_s(j\Omega)$ je periodično ponavljani spektar $X(j\Omega)$ kontinuiranog signala

- pretpostavimo da je spektar $X(j\Omega)$ frekvencijski ograničen

$$X(j\Omega) = 0 \text{ za } |\Omega| > \Omega_{max}$$

- različite frekvencije tipkanja signala $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ mogu u spektru $X_s(j\Omega)$ izazvati različite rezultate zavisno od toga je li $\Omega_s - \Omega_{max} > \Omega_{max} \Rightarrow \Omega_s > 2\Omega_{max}$ ili $\Omega_s - \Omega_{max} < \Omega_{max} \Rightarrow \Omega_s < 2\Omega_{max}$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala



- za frekvenciju otipkavanja $\Omega_s < 2\Omega_{max}$, na donjoj slici, javlja se preklapanje ponavljajućih sekcija spektra, i ta se pojava naziva, prema engleskoj terminologiji, aliasing

Shannonov teorem otipkavanja

- vremenski diskretni signal smatramo ekvivalentim kontinuiranom ako je moguće rekonstruirati izvorni signal $x(t)$ iz otipkanog $x_s(t)$, odnosno, ako se iz spektra $X_s(j\Omega)$ može dobiti originalni $X(j\Omega)$
- postupak rekonstrukcije pretpostavlja izdvajanje osnovne sekcije spektra filtriranjem a to će biti moguće samo ako je spektar $X(j\Omega)$ ograničen na Ω_{max} te ako je frekvencija otipkavanja $\Omega_s > 2\Omega_{max}$
- gore kazano predstavlja Shannonov teorem i možemo ga precizno iskazati kao:[3]

> Vremenski kontinuirani signal $x(t)$, s frekvencijama ne većim od F_{max}, može biti egzaktno rekonstruiran iz svojih uzoraka $x(n) \triangleq x(nT)$, ako je otipkavanje provedeno s frekvencijom $F_s = \frac{1}{T}$ koja je veća od $2F_{max}$

[3] teorem je iskazan, kao što je uobičajeno, frekvencijom u Hz uzimajući u obzir $\Omega = 2\pi F$

Primjer otipkavanja aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala

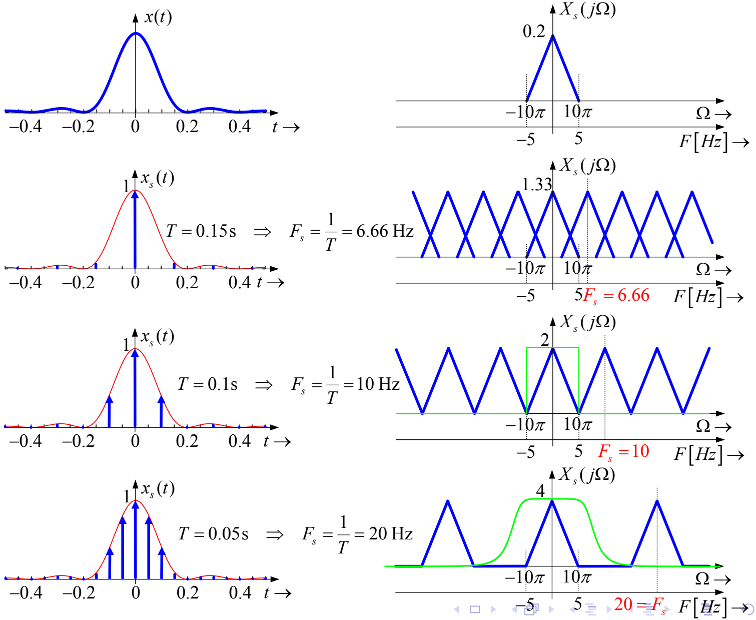
- otipkava se signal (slika na narednoj prikaznici)

$$x(t) = \left[\frac{sin \frac{\tau t}{2}}{\frac{\tau t}{2}} \right]^2$$

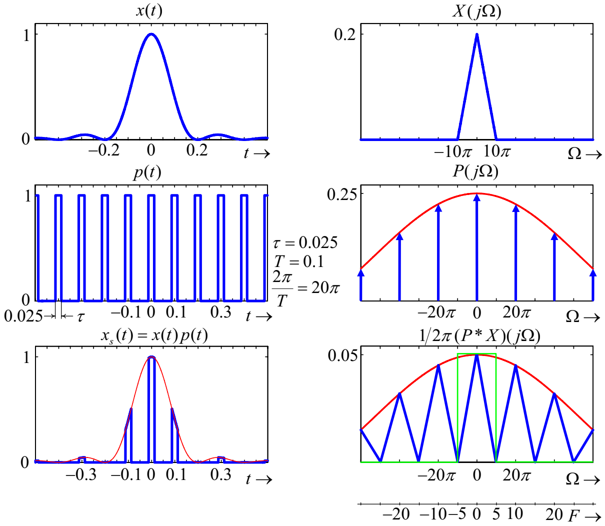
uz $\tau = 10\pi$ i $T = 0.15; 0.1; 0.05;$

- minimalna frekvencija otipkavanja za koju je moguća rekonstrukcija signala x iz njegovih uzoraka x_s naziva se Nyquistova frekvencija
- za ovaj primjer Nyquistova frekvencija iznosi 10 Hz
- otipkavanje s $T = 0.15\,$s, što znači s frekvencijom otipkavanja $F_s = 6.66\,$Hz, je slučaj podotipkavanja i dolazi do pojave frekvencijskog aliasinga
- slučaj otpikavanja s $T = 0.05$ s, dakle $F_s = 20$, predstavlja tzv. nadotipkavanje i omogućuje rekonstrukciju signala primjenom realnih filtara

Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala



Primjer otipkavanja pravokutnim impulsima



korištenjem idealnog filtra moguća potpuna rekonstrukcija kontinuiranog signala (uz skaliranje amplitude s faktorom 0.25)

Primjer otipkavanja pravokutnim impulsima

$$P(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T});$$

$$P_k = \frac{\tau}{T} \frac{sin \frac{k\pi\tau}{T}}{\frac{k\pi\tau}{T}} = 0.25 \frac{sin(0.25k\pi)}{0.25k\pi}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)p(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - \Psi))P(j\Psi)\, d\Psi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - \Psi)) \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \delta(\Psi - k\frac{2\pi}{T}) \right] d\Psi$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - \Psi))\delta(\Psi - k\frac{2\pi}{T})\, d\Psi \right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k X(j(\Omega + k\frac{2\pi}{T})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sin 0.25k\pi}{k\pi} X(j(\Omega + 20\pi k))$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

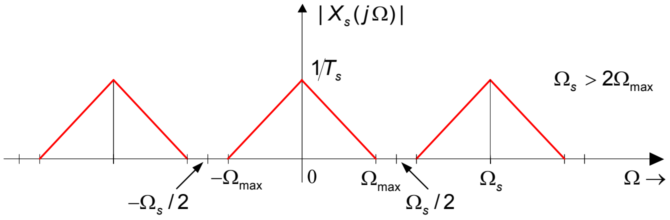
- periodični se spektar $X_s(j\Omega)$, nastao otipkavanjem, može dobiti i iz

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} \end{aligned}$$

u dobivenom izrazu se može prepoznati Fourierov red za periodični spektar $X_s(j\Omega)$

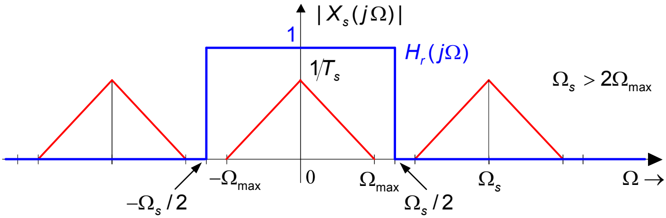
Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog



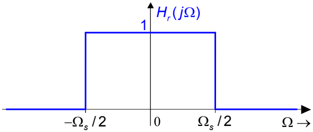
Da bi se dobila osnovna sekcija spektra $X_s(j\Omega)$ odnosno po mogućnosti $X(j\Omega)$, potrebno je izvršiti filtraciju $X_s(j\Omega)$ s tzv. rekonstrukcijskim filtrom frekvencijske karakteristike $H_r(j\Omega)$,

$$X_c(j\Omega) = X_s(j\Omega)H_r(j\Omega)$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog



pretpostavimo kako je $H_r(j\Omega)$ idealan filtar čija je frekvencijska karakteristika dana na slici



$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\Omega| > \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

Neka je frekvencija otipkavanja $\Omega_s > 2\Omega_{max}$, tako da unutar pojasa ponavljanja $(-\Omega_s/2, \Omega_s/2)$ nema preklapanja sekcija spektra. Tada je

$$X_s(j\Omega)H_r(j\Omega) = \frac{1}{T}X(j\Omega)$$

uz prije izvedeno

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT}$$

slijedi

$$\frac{1}{T}X(j\Omega) = H_r(j\Omega)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT}\right]$$

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 8.

Profesor Branko Jeren

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

Inverznom Fourierovom transformacijom spektra $X(j\Omega)$ slijedi:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\Omega)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT}\right]e^{j\Omega t}d\Omega =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega(t-nT)}d\Omega \Rightarrow$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

Kontinuirani signal $x(t)$ rekonstruiran je iz uzoraka otipkanog signala $x(nT)$ interpolacijom s funkcijom

$$\frac{1}{T}\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

Možemo zaključiti kako je vremenski kontinuirani signal $x(t)$, koji ima frekvencijski omeđen spektar tj. $X(j\Omega) = 0$ za $|\Omega| > \Omega_s/2$, jednoznačno određen trenutnim vrijednostima u jednoliko raspoređenim trenutcima $t_n = nT = n\frac{2\pi}{\Omega_s}$.

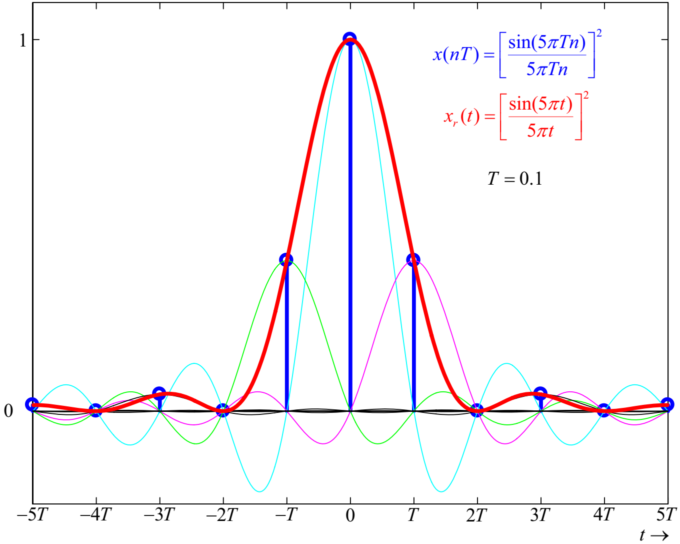
Interpolacijska funkcija predstavlja impulsni odziv[4] idealnog filtra

$$h_r(t) = \frac{1}{T}\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Idealni filtar ima nekauzalan impulsni odziv (odziv na impuls počinje prije nego se impuls pojavio) i prema tome je neostvariv.

[4] Impulsni se odziv definira kao odziv na jedinični impuls, i detaljno razmatra kasnije. Ovdje kažimo kako se impulsni odziv može odrediti kao inverzna Fourierova transformacija frekvencijske karakteristike filtra

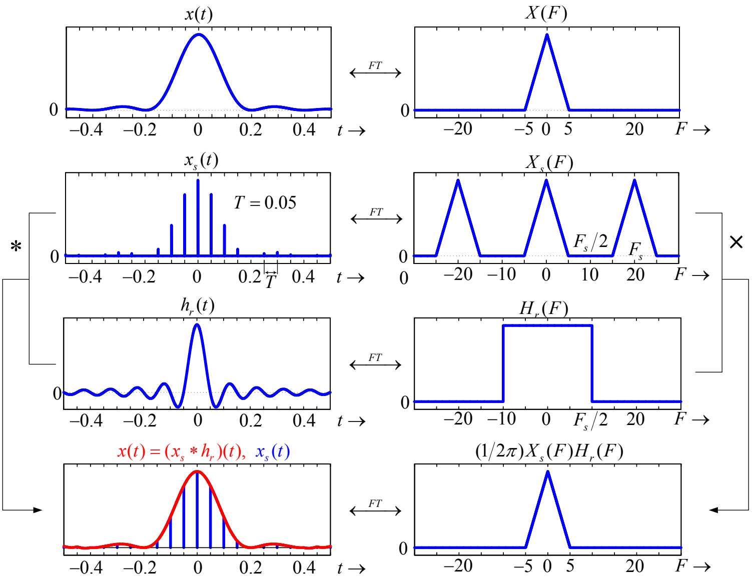
Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – idealnim filtrom

- postupku filtracije odgovara produkt spektra signala i frekvencijske karakteristike rekonstrukcijskog filtra u frekvencijskoj domeni
- u vremenskoj domeni tomu odgovara konvolucija otipkanog signala i impulsnog odziva filtra
- naredna prikaznica je ilustracija obnavljanja ili rekonstrukcije vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – idealnim filtrom
- graf u donjem lijevom kutu prikaznice pokazuje rekonstruirani signal (crveno)

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – idealnim filtrom

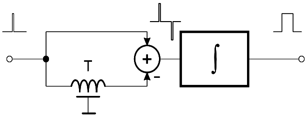


Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 8.

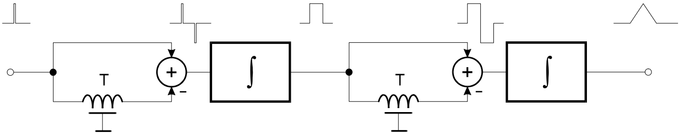
Profesor Branko Jeren

Interpolatori nultog i prvog reda

- interpolatori nultog i prvog reda mogu se jednostavno realizirati realnim sustavima
- interpolator nultog reda dan je blokovskim dijagramom



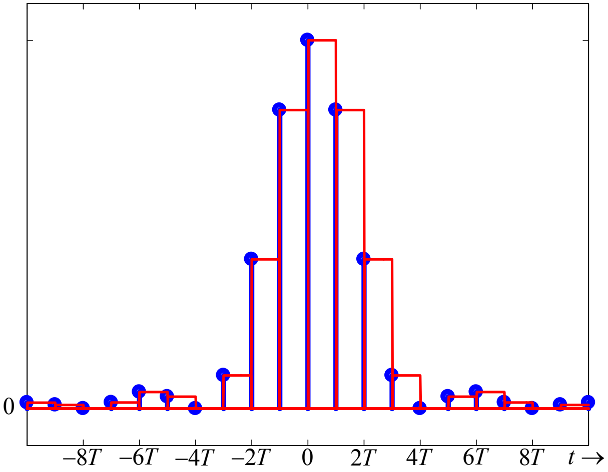
a interpolator prvog reda blokovskim dijagramom



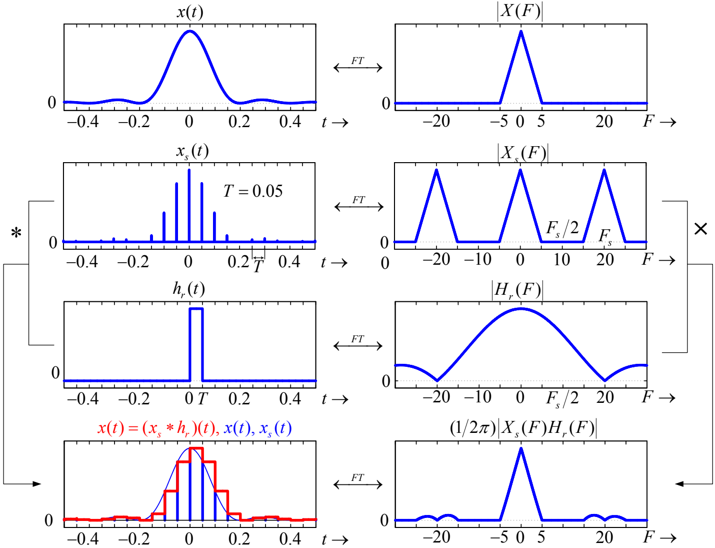
- njihova primjena ilustrirana ja na naredne tri prikaznice

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – interpolator nultog reda

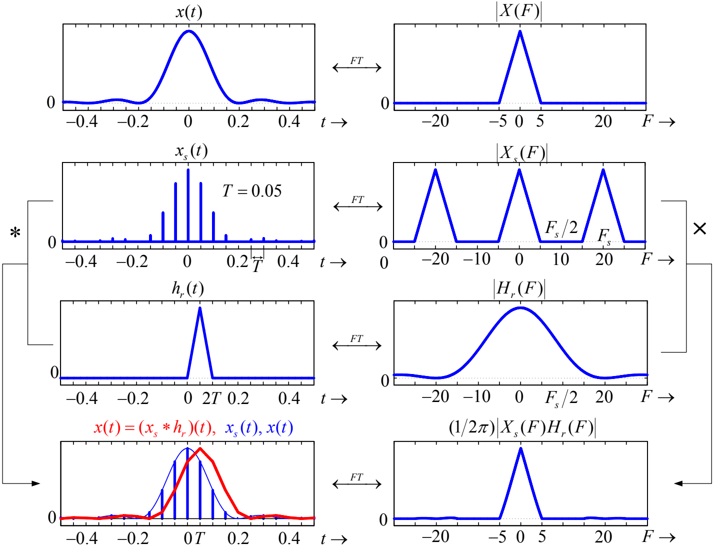
- interpolacija vremenski diskretnog signala interpolatorom nultog reda dana je na slici



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – interpolator nultog reda



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – interpolator prvog reda



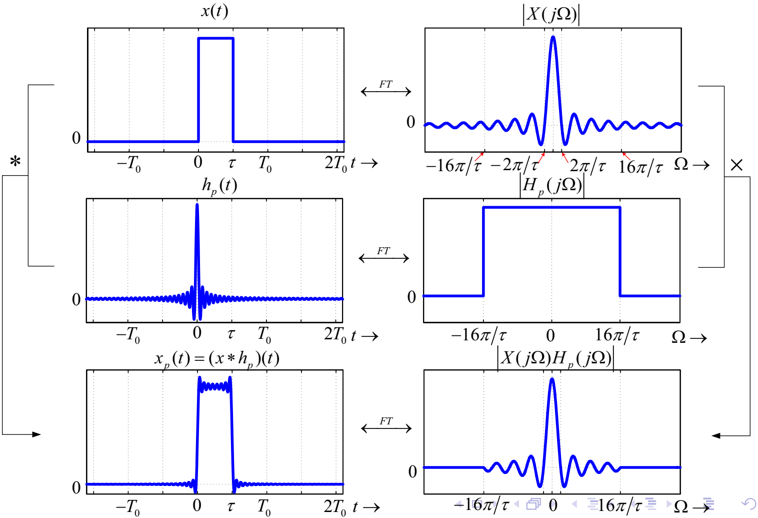
Otipkavanje vremenski kontinuiranih signala frekvencijski neomeđenog spektra

- u praksi, mnogi signali nisu frekvencijski omeđeni
- otipkavanjem takvih signala pojavljuje se aliasing i time pojava greške kod rekonstrukcije otipkanog signala
- da bi se ta greška smanjila potrebno je, prije otipkavanja, takve signale frekvencijski omeđiti
- ovo je moguće korištenjem tzv. analognih prefiltara[5] koje obično nazivamo antialiasing filtri
- postupak omeđenja spektra ilustriran je narednim prikaznicama

[5] Analogni prefiltar – filtracija analognog signala prije postupka otipkavanja

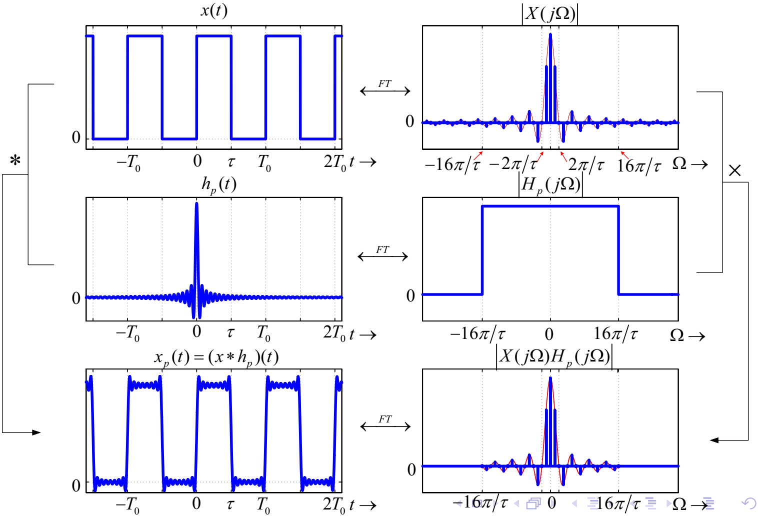
Idealni antialiasing filtar

- pokazuje se omeđenje spektra - analogna prefiltracija idealnim analognim prefiltrom



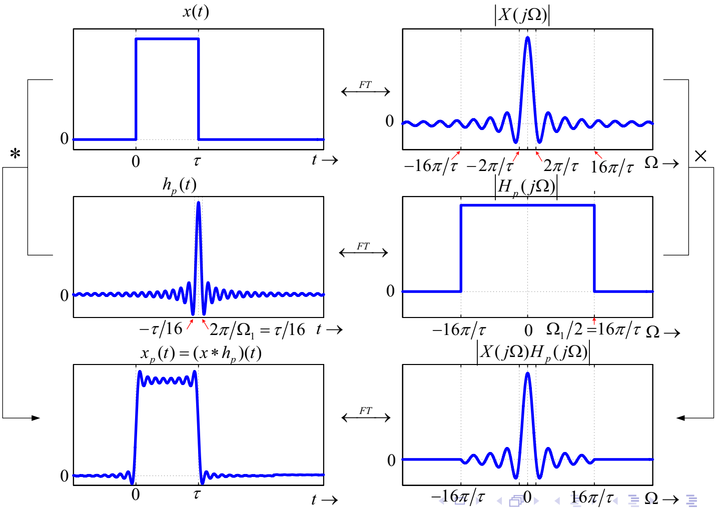
Idealni antialiasing filtar

- analogna prefiltracija, periodičnog signala, idealnim analognim prefiltrom (Gibbsova pojava – pravokutni otvor)



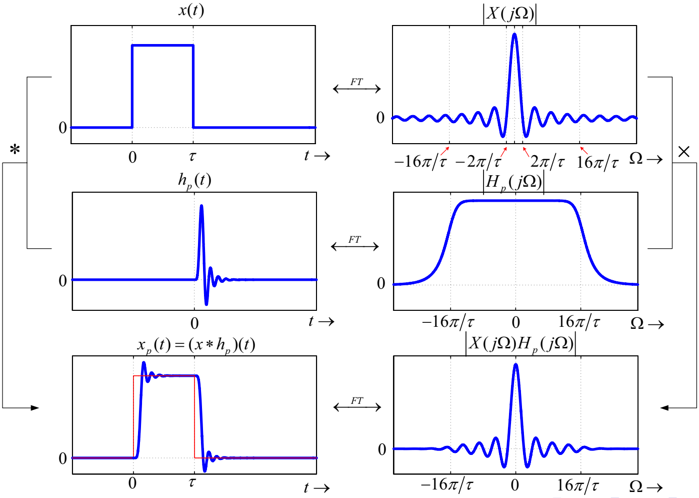
Idealni antialiasing filtar

- razmotrimo još jednom primjenu idealnog antialiasing filtra na aperiodičan vremenski kontinuiran pravokutni impuls



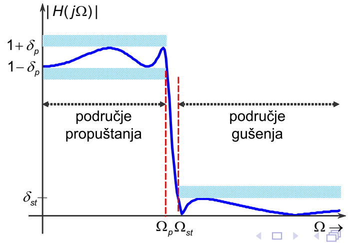
Realni antialiasing filtar

- idealni antialiasing filtar ima nekauzalan impulsni odziv i kao antialiasnig filtre koristimo realne filtre



Antialiasing filtri

- aliasing koji se javlja pri otipkavanju frekvencijski neomeđenog signala, izbjegava se filtriranjem kontinuiranog signala tzv. antialiasing filtrom
- antialiasing filtri su niskopropusni analogni filtri koji propuštaju komponente spektra frekvencija nižih od pola frekvencije otipkavanja, dok više guše
- koriste se realni filtri koji imaju konačnu širinu prijelaznog pojasa frekvencijske karakteristike i konačno gušenje u pojasu gušenja

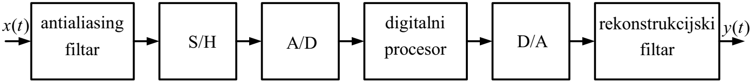


Antialiasing filtri

- zbog konačne širine prijelaznog područja realnih antialiasing filtara potrebno je signal otipkavati nešto većom frekvencijom od dvostruke maksimalne frekvencije signala
- kod digitalne obradbe glazbenih signala, čije frekvencijsko područje širine 20kHz osigurava visoko vjernu reprodukciju, frekvencija otipkavanja (kod CD npr.) je 44.1 kHz što je dakle nešto više od dvostruke maksimalne frekvencije

Digitalna obradba vremenski kontinuiranog signala

- lanac sklopova potrebnih za digitalnu obradbu vremenski kontinuiranih signala prikazan je blok dijagramom[6]



[6] S/H – sample-and-hold sklop; D/A – digitalno analogni pretvornik; A/D – digitalno analogni pretvornik

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- spektar aperiodičnih kontinuiranih signala je kontinuiran
- spektar aperiodičnih diskretnih signala također je kontinuiran i još k tome i periodičan
- ovdje se razmatra postupak otipkavanja spektra tj. diskretizacija u frekvencijskoj domeni
- postupak koji ćemo ovdje primjeniti identičan je postupku primjenjenom kod otipkavanja vremenski kontinuiranih signala

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- diskretizaciju kontinuiranog spektra možemo interpretirati kao modulaciju impulsnog niza

$$\delta_{\Omega_o}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o),$$

funkcijom $X(j\Omega)$, dakle,:

$$X_d(j\Omega) = X(j\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_o)\delta(\Omega - k\Omega_o)$$

- periodičan niz $\delta_{\Omega_o}(\Omega)$ nastaje ponavljanjem delta funkcije svakih Ω_o, i kao svaka periodična funkcija se dade predstaviti Fourierovim redom:

$$\delta_{\Omega_o}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnT_p\Omega}, \qquad T_p = \frac{2\pi}{\Omega_o}$$

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- koeficijenti prethodnog Fourierovog reda su

$$c_n = \frac{1}{\Omega_o} \int_{-\Omega_o/2}^{\Omega_o/2} \delta(\Omega) e^{-jnT_p\Omega} d\Omega = \frac{1}{\Omega_o}$$

- pa se δ_{Ω_o} može prikazati i kao

$$\delta_{\Omega_o}(\Omega) = \frac{1}{\Omega_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnT_p\Omega}$$

odnosno $X_d(j\Omega)$ kao

$$X_d(j\Omega) = X(j\Omega)\delta_{\Omega_o}(\Omega) = \frac{1}{\Omega_o} X(j\Omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnT_p\Omega}$$

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- inverznom Fourierovom $X_d(j\Omega)$ dobiva se kontinuirani signal $x_d(t)$ koji odgovara otipkanom spektru

$$x_d(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_d(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\Omega_o}X(j\Omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnT_p\Omega}\right]e^{j\Omega t}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{\Omega_o}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega(t+nT_p)}d\Omega}_{x(t+nT_p)} \Rightarrow$$

$$x_d(t) = \frac{1}{\Omega_o}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+nT_p)$$

dakle, otipkavanje kontinuiranog spektra $X(j\Omega)$, signala $x(t)$, rezultira u njegovom periodičnom ponavljanju svakih $T_p = \frac{2\pi}{\Omega_o}$
$\Rightarrow$ moguć aliasing u vremenskoj domeni

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- uz $X_d(j\Omega)$ prikazan kao:

$$X_d(j\Omega) = X(j\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_o)\delta(\Omega - k\Omega_o)$$

$x_d(t)$ dobivamo inverznom transformacijom kao:

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_d(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_o)\delta(\Omega - k\Omega_o) \right] e^{j\Omega t} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_o) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o) e^{j\Omega t} d\Omega = \end{aligned}$$

$$x_d(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_o) e^{jk\Omega_o t}, \qquad \Omega_o = \frac{2\pi}{T_p}$$

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- $x_d(t)$ je periodična funkcija prikazana Fourierovim redom
- rekonstrukciju kontinuiranog spektra realizira se izdvajanjem samo osnovne sekcije od $x_d(t)$ što se postiže množenjem $x_d(t)$ s idealnim pravokutnim otvorom u vremenskoj domeni

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_p/2 \\ 0 & |t| > T_p/2 \end{cases}$$

čiji je spektar:

$$W(j\Omega) = T_p \frac{\sin(\Omega T_p/2)}{\Omega T_p/2} = T_p \frac{\sin(\pi\Omega/\Omega_o)}{\pi\Omega/\Omega_o}$$

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- prvu sekciju signala dobivamo množenjem s $w(t)$:

$$x_d(t)w(t) = \frac{1}{\Omega_o}x(t) = \left[\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_o)e^{jk\Omega_o t}\right] w(t)$$

- spektar $X(j\Omega)$, izražen uz pomoć $X(jk\Omega_o)$, slijedi iz

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega_o}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_o)e^{jk\Omega_o t}\right] w(t)e^{-j\Omega t}dt =$$

$$= \frac{\Omega_o}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_o)\int_{-T_p/2}^{T_p/2} e^{-j(\Omega-k\Omega_o)t}dt \Rightarrow$$

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- pa je spektar $X(j\Omega)$, izražen uz pomoć $X(jk\Omega_o)$,

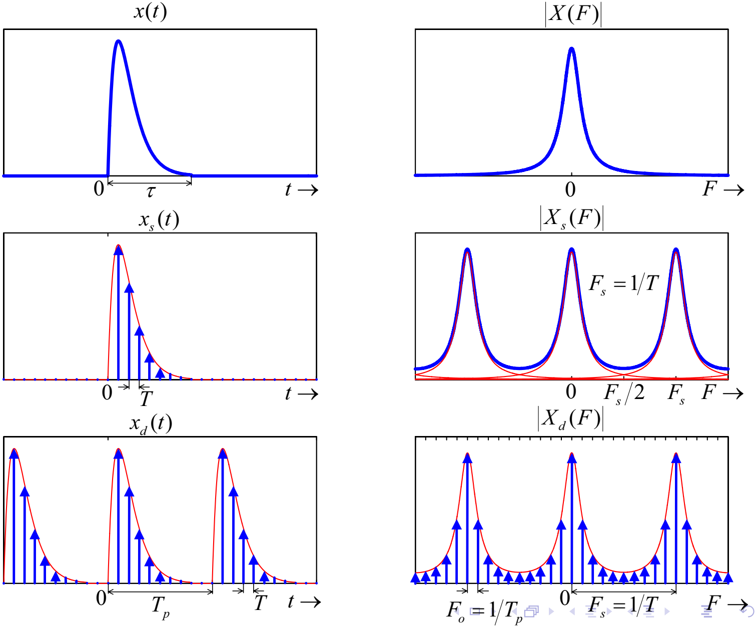
$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_o) \frac{\sin(\pi(\Omega - k\Omega_o)/\Omega_o)}{\pi(\Omega - k\Omega_o)/\Omega_o}$$

dakle, spektar je $X(j\Omega)$ jednoznačno određen iz njegovih uzoraka $X(jk\Omega_o)$ interpolacijom s funkcijom

$$W(j\Omega) = T_p \frac{\sin(\Omega T_p/2)}{\Omega T_p/2} = T_p \frac{\sin(\pi\Omega/\Omega_o)}{\pi\Omega/\Omega_o}$$

Zaključak: kontinuirani spektar signala koji ima omeđeno trajanje, $x(t) = 0$ za $|t| > T_p/2$, jednoznačno je određen svojim uzorcima na jednoliko raspoređenim frekvencijama $\Omega_k = k\Omega_o = k/T_p$

Numeričko izračunavanje Fourierove transformacije



Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 8.

Profesor Branko Jeren

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- za veliku većinu signala nije moguće definirati matematički izraz, pa tako nije moguće primjeniti do sada izvedene transformacije
- zato se pristupa numeričkom određivanju spektra i uvodi se diskretna Fourierova transformacija – *DFT*
- signal i njegov spektar treba predstaviti njihovim uzorcima, odnosno otipkati, što znači da će se otipkani signal i njegov spektar periodički produžiti
- spektar aperiodičnog otipkanog signala je kontinuiran i periodičan s periodom 2π

$$\forall \omega \in Realni, \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

- kako je spektar periodičan, dovoljno je, pri otipkavanju spektra, uzeti samo N uzoraka iz osnovnog perioda, pri čemu će razmak između uzoraka biti $2\pi/N$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- otipkavanjem $X(e^{j\omega})$, na frekvencijama $\omega = \frac{2\pi}{N}k$, slijedi

$$k = 0, 1, \ldots, N-1; \quad X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

suma se transformira u beskonačni broj suma od N članova

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \ldots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} +$$
$$+ \sum_{n=N}^{2N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \ldots =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=mN}^{mN+N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- zamjenom indeksa n u unutarnjoj sumi s $n - mN$ i zamjenom redoslijeda sumiranja slijedi:

$$k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \Bigg[\underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - mN)}_{\tilde{x}(n)} \Bigg] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- signal $\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - mN)$ dobiven je periodičnim ponavljanjem $x(n)$, $\forall n \in \mathit{Cjelobrojni}$, i periodičan je s periodom N, te može biti prikazan s Fourierovim redom (*DTFS*)

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

- koeficijenti ovog Fourierovog reda su

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

ako se usporede X_k i $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$,, za $k = 0, 1, \ldots, N-1$, zaključuje se da vrijedi

$$X_k = \frac{1}{N} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- uvodimo oznaku $X(k)$ za uzorke diskretnog spektra, gdje je $X(k) \triangleq X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$, pa je otipkani spektar

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- otipkavanjem spektra aperiodičnog diskretnog signala može doći do pojave aliasinga u vremenskoj domeni
- za aperiodične diskretne signale x, duljine L, pri čemu je $L \leq N$, nema aliasinga i vrijedi da je:

$$x(n) = \tilde{x}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

iz svega slijedi:

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- za aperiodičan diskretni signal $x(n)$, duljine L ($x(n) = 0$ za $n < 0$ i $n \geq L$) vrijedi par

diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

inverzna diskretna Fourierova transformacija – *IDFT*

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Dimenzionalnost signala

- tipkanje signala u vremenskoj domeni $\Rightarrow$ ponavljanje spektra s Ω_s (aliasing u frekvencijskoj domeni – FD)
- tipkanje signala u frekvencijskoj domeni $\Rightarrow$ ponavljanje signala u vremenskoj domeni s T_p (aliasing u vremenskoj domeni – VD)
- relativna greška u FD i VD može biti ocijenjena energijom signala i spektra izvan izabranog trajanja signala T_p, odnosno frekvencijskog pojasa Ω_s, prema ukupnoj energiji

$$\underbrace{\varepsilon_{FD} = \frac{2\int_{\Omega_s/2}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega}{2\int_0^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega}}_{\text{relativna greška u FD}} \qquad \underbrace{\varepsilon_{VD} = \frac{2\int_{T_p/2}^{\infty} |x(t)|^2 dt}{2\int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt}}_{\text{relativna greška u VD}}$$

- greške se mogu ocijeniti poznavanjem brzine opadanja signala i spektra za $|t| > T_p/2$ odnosno $|\Omega| > \Omega_s/2$

Dimenzionalnost signala

- uz specificiranu dozvoljenu grešku aliasinga u FD i VD dobivamo T_p i F_s - trajanje i širinu pojasa signala
- potreban broj uzoraka u VD

$$N_T T = T_p = N_T \frac{2\pi}{\Omega_s} \Rightarrow N_T = \frac{T_p \Omega_s}{2\pi} = T_p F_s$$

- potreban broj uzoraka u FD

$$N_{\Omega_o} \Omega_o = \Omega_s = N_{\Omega_o} \frac{2\pi}{Tp} \Rightarrow N_{\Omega_o} = \frac{T_p \Omega_s}{2\pi} = T_p F_s$$

pa je dimenzija signala

$$N_{\Omega_o} = N_T = \frac{T_p \Omega_s}{2\pi} = T_p F_s$$

Dimenzionalnost signala – primjer

- želimo numerički odrediti spektar signala otipkanog s $F_s = 44100\,\text{Hz}$, s rezolucijom $F_o = 10\,\text{Hz}$,
- za traženu rezoluciju trajnje signala mora biti minimalno

$$T_p = \frac{1}{F_o} = 0.1\,\text{s}$$

pa je potrebni broj uzoraka

$$N = T_p F_s = 0.1x44100 = 4410$$