Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

01. lipnja 2010.

Odziv diskretnog sustava na pobudu kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je kako je odziv mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, na svevremensku eksponencijalu Uz^n,

$$y(n) = H(z)Uz^n$$

pri čemu je

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

- za $z \in \mathbb{C}$, $H(z)$ je kompleksna funkcija

Dvostrana z–transformacija

z–transformacija

- zbroj

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

  možemo interpretirati kao transformaciju vremenske funkcije, impulsnog odziva $h(n)$ diskretnog sustava, u kompleksnu funkciju $H(z)$
- ovako definiranu transformaciju nazivamo dvostrana ili bilateralna **z-transformacija**
- z – transformacija $H(z)$ predstavlja, dakle, alternativni prikaz vremenskog niza $h(n)$

z–transformacija

- za diskretni signal $x(n)$, definira se dvostrana z–transformacija

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- z–transformacija označuje se simbolički kao

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$$

ili još jednostavnije

$$x(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

z–transformacija – primjer 1

- neka je zadan vremenski diskretan signal, kao konačni niz, $x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 3, 2, 1\}, n \geq 0$
- slijedi kako je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{5} x(n) z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

odnosno

$$X(z) = \frac{z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^5}$$

- gornji zbroj konvergira, pa time $X(z)$ poprima konačne vrijednosti, za sve $z \in \mathbb{C}$ osim za $z = 0$
- primjer pokazuje kako je signalu $x(n)$, zadanom u vremenskoj domeni, pridružena njegov alternativni prikaz ("slika") $X(z)$, u z–domeni (frekvencijskoj domeni)

z–transformacija – primjer 1

- veza između

$$x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

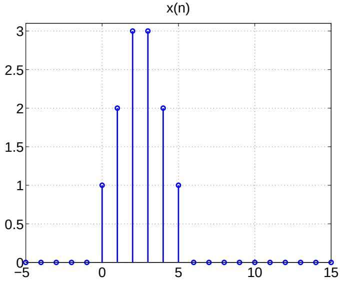
  i

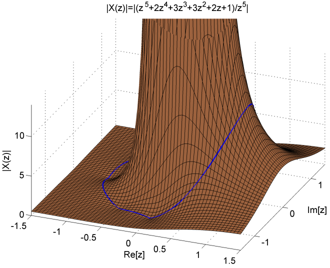
$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

  je očigledna:
  koeficijent uz z^{-n} je vrijednost signala u koraku n, drugim riječima, eksponent od z sadrži vremensku informaciju potrebnu da bi se identificirali uzorci signala
- usporedimo prikaz $x(n)$ u vremenskoj i frekvencijskoj domeni[1]

[1] prikazuje se samo $|X(z)|$

z–transformacija





- polovi i nule $X(z)$ su

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 0; & z_1 &= -1.0000 = e^{j\pi} \\
p_2 &= 0; & z_2 &= +j1.0000 = e^{j\frac{\pi}{2}} \\
p_3 &= 0; & z_3 &= -j1.0000 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \\
p_4 &= 0; & z_4 &= -0.5000 + j0.8660 = e^{j\frac{2\pi}{3}} \\
p_5 &= 0; & z_5 &= -0.5000 - j0.8660 = e^{-j\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

z–transformacija – primjer 2

- određuje se z–transformacija niza

$$x(n) = \alpha^n \mu(n)$$

- signal $x(n)$ čini beskonačni broj uzoraka

$$x(n) = \{\underline{1}, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\}$$

- iz definicije z–transformacije slijedi

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n}$$

$$X(z) = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \ldots$$

što je sukladno prije izrečenoj interpretaciji z–transformacije

z–transformacija – primjer 2

- u

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

prepoznaje se geometrijski red

- da bi $X(z)$ konvergirao mora biti $|\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n| < \infty$ a to će biti za

$$|\alpha z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |\alpha|$$

- tada je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}, \qquad \text{za } |z| > |\alpha|$$

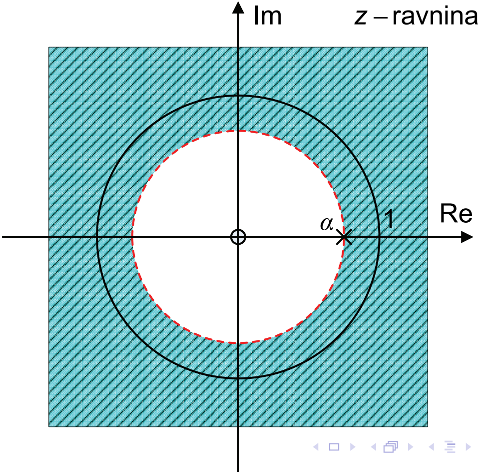
- područje kompleksne ravnine, $|z| > |\alpha|$, za koje $X(z)$ konvergira, nazivamo područje konvergencije[2], $\mathcal{PK}$, z–transformacije

[2] U literaturi je uobičajena kratica *RoC*, prema engleskom Region of Convergence

Područje konvergencije z–transformacije

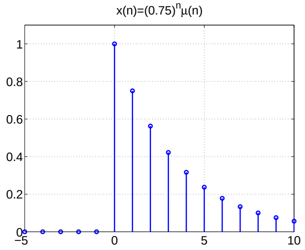
Područje konvergencije z–transformacije

- z–transformacija je racionalna funkcija
- z–transformacija niza $x(n) = \alpha^n \mu(n)$ ima jednu **nulu** u $z = 0$ i jedan **pol** u $z = \alpha$



z–transformacija – primjer 3

- određuje se z–transformacija niza
  $x(n) = \alpha^n \mu(n) = 0.75^n \mu(n)$



- z–transformacija je

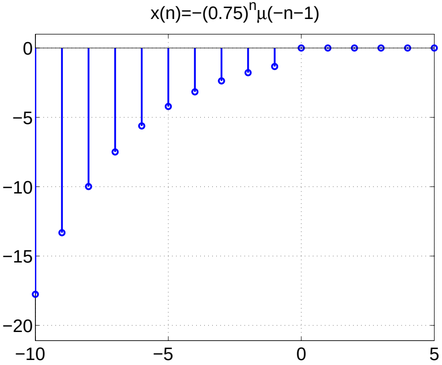
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.75z^{-1})^n = \frac{z}{z-0.75}$$

$$\text{za } |0.75z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |0.75|$$

z–transformacija – primjer 4

- određuje se z–transformacija niza
  $x(n) = -\alpha^n \mu(-n-1) = -0.75^n \mu(-n-1)$

n	$x(n)$
≥ 0	0
-1	-1.3333
-2	-1.7778
-3	-2.3704
-4	-3.1605
-5	-4.2140
-6	-5.6187
-7	-7.4915
-8	-9.9887
-9	-13.3183
-10	-17.7577



z–transformacija – primjer 4

- z–transformacija je

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n \mu(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^n$$

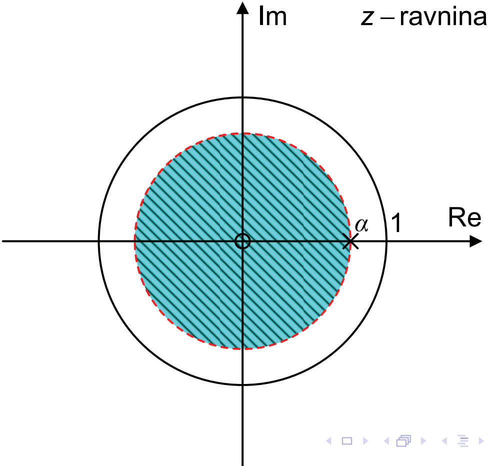
ako je $|\alpha^{-1} z| < 1 \Leftrightarrow |z| < |\alpha|$
tada gornji zbroj konvergira i vrijedi:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-\alpha^{-1}z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$$

za $|z| < |\alpha|$

Područje konvergencije z–transformacije

- z–transformacija je racionalna funkcija
- z–transformacija niza $x(n) = -\alpha^n \mu(-n-1)$ ima jednu **nulu** u $z = 0$ i jedan **pol** u $z = \alpha$



Područje konvergencije z–transformacije

- usporedbom primjera 3 i primjera 4

$$\alpha^n \mu(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} \quad \text{za } |z| > |\alpha|$$

odnosno

$$-\alpha^n \mu(-n-1) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} \quad \text{za } |z| < |\alpha|$$

zaključujemo kako dva različita signala, jedan strogo kauzalan a drugi antikauzalan, imaju identične izraze za z–transformaciju i kako se njihova razlika očituje samo u području konvergencije, $\mathcal{PK}$,

- područje konvergencije $\mathcal{PK}$, z–transformacije, je važna i nužna informacija i tek definirano $\mathcal{PK}$ daje jednoznačnu vezu između niza i njegove z–transformacije
- stoga, z–transformacija mora biti uvijek zadana s njezinim $\mathcal{PK}$

z–transformacija – primjer 5

- određuje se z–transformacija niza

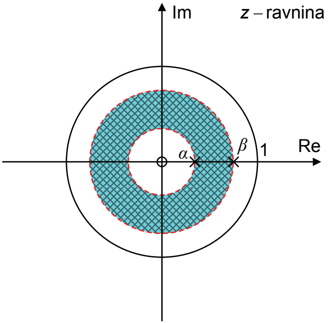
$$x(n) = \alpha^n \mu(n) + \beta^n \mu(-n-1)$$

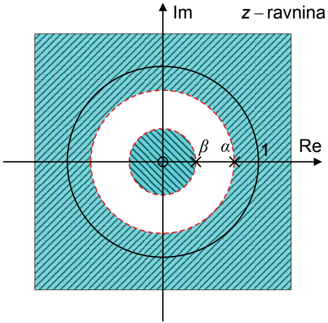
- iz definicije z–transformacije slijedi

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^m$$

- prvi zbroj konvergira za $|\alpha z^{-1}|$ ili $|z| > |\alpha|$
- drugi zbroj konvergira za $|\beta^{-1} z| < 1$ ili $|z| < |\beta|$
- u određivanju konvergencije $X(z)$ postoje dva slučaja
  - $|\beta| < |\alpha|$ – ne postoji područje preklapanja područja konvergencije i ne postoji $X(z)$
  - $|\beta| > |\alpha|$ – postoji prsten u z–ravnini u kojem obje sume konvergiraju i on predstavlja područje konvergencije $X(z)$

z–transformacija – primjer 5





pa je z–transformacija niza $x(n) = \alpha^n \mu(n) + \beta^n \mu(-n-1)$

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{1}{1-\beta z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha} - \frac{z}{z-\beta}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)z}{z^2-(\alpha+\beta)z+\alpha\beta}$$

uz područje konvergencije z–transformacije $|\alpha| < |z| < |\beta|$

Jednostrana z–transformacija

Signali i sustavi
školska godina 2009/2010
Cjelina 14.

Profesor Branko Jeren

z–transformacija kauzalnih nizova

- z–transformacija kauzalnih nizova definirana je kao

$$X : \mathcal{PK}(x) \to \mathbb{C}$$

$$\forall z \in \mathcal{PK}(x), \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

gdje je područje konvergencije, $\mathcal{PK}(x) \subset \mathbb{C}$, definirano[3] [4] s

$$\mathcal{PK}(x) = \left\{ z = re^{j\Omega} \in \mathbb{C} \middle| \sum_{n=0}^{\infty} | \, x(n) r^{-n} | < \infty \right\}$$

- ovako definirana $X(z)$ naziva se jednostrana z–transformacija

[3] apsolutna konvergencija sume garantira i konvergenciju $X(z)$

[4] iz $\sum_{n=0}^{\infty} | \, x(n) z^{-n}|$ a uz, $z = re^{j\Omega}$, za koji zbroj konvergira, vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)(re^{j\Omega})^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} | \, x(n) r^{-n}||e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n) r^{-n}|$

Područje konvergencije z–transformacije kauzalnih nizova

- za jednostranu z–transformaciju, u području konvergencije, vrijedi

$$|X(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x(n)|}{|z|^n} < \infty$$

- svaki kauzalni signal $x(n)$ koji ne raste brže od eksponencijalnog signala r_0^n zadovoljava ovaj uvjet[5], pa ako je

$$|x(n)| \leq r_0^n, \quad \text{za neki } r_0$$

tada je

$$|X(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{|z|}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{r_0}{|z|}} \quad |z| > r_0$$

što znači da je za kauzalne signale, koji ne rastu brže od eksponencijalnog signala r_0^n, područje konvergencije $|z| > r_0$

[5] a to su gotovo svi signali od praktičnog interesa

z–transformacija kauzalnih nizova

- jednostrana z– transformacija pokazuje se posebno pogodnom u postupcima rješavanja jednadžbi diferencija sa zadanim početnim uvjetima
- jednostrana z– transformacija limitirana je samo na kauzalne signale i sustave
- kako je u ovom predmetu većina pozornosti okrenuta kauzalnim signalima i sustavima u nastavku se razmatra uglavnom jednostrana z–transformacija
- sukladno većini literature pod nazivom z–transformacija podrazumijevati će se jednostrana z–transformacija, a u slučaju dvostrane transformacije to će biti posebno istaknuto

z–transformacija osnovnih nizova

z–transformacija osnovnih nizova

$$\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{Z}\{\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1},$$

za $|z| > 1$

$$\mathcal{Z}\{a^n \mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|$$

z–transformacija osnovnih nizova

$$\mathcal{Z}\{\cos(\Omega_0 n)\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\Omega_0 n)\mu(n) z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{j\Omega_0 n} z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\Omega_0 n} z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\Omega_0}z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1-e^{-j\Omega_0}z^{-1}+1-e^{j\Omega_0}z^{-1}}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}-e^{-j\Omega_0}z^{-1}+z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{\cos(\Omega_0 n)\mu(n)\} = \frac{1-z^{-1}\cos(\Omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\Omega_0)+z^{-2}} \qquad |z|>1$$

Tablica osnovnih z–transformacija[6]

	$x(n)$	$X(z)$
1	$\delta(n)$	1
2	$\delta(n-m)$	z^{-m}
3	$\mu(n)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$n\mu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
5	$n^2\mu(n)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$n^3\mu(n)$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
7	$a^n\mu(n)$	$\frac{z}{z-a}$
8	$na^n\mu(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
9	$n^2a^n\mu(n)$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
10	$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{a^m m!}a^n\mu(n)$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$

[6] izvor:B.P. Lathi:Linear Systems and Signals str. 498

Tablica osnovnih z–transformacija[7]

	$x(n)$	$X(z)$
11	$\cos(\Omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{z(z-\cos(\Omega_0))}{z^2-2\cos(\Omega_0)z+1}$
12	$\sin(\Omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{\sin(\Omega_0)z}{z^2-2\cos(\Omega_0)z+1}$
13	$a^n\cos(\Omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{z(z-a\cos(\Omega_0))}{z^2-2a\cos(\Omega_0)z+a^2}$
14	$a^n\sin(\Omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{a\sin(\Omega_0)z}{z^2-2a\cos(\Omega_0)z+a^2}$

[7] izvor: A.V.Oppenheim, A. S. Willsky: Signals and Systems str. 655

Osnovna svojstva z–transformacije

z–transformacija – linearnost

neka je $w(n) = ax(n) \pm by(n)$
tada je z–transformacija od $w(n)$

$$W(z) = aX(z)+bY(z), \qquad \forall z \in \mathcal{PK}(w) \text{ sadrži } \mathcal{PK}(x)\cap\mathcal{PK}(y)$$

područje konvergencije od $W(z)$ mora uključiti područja konvergencije od $X(z)$ i $Y(z)$
linearnost z–transformacije proizlazi iz definicije

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}[ax(n) \pm by(n)]z^{-n} =$$

$$= a\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \pm b\sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = aX(z) \pm bY(z)$$

z–transformacija – pomak unaprijed za p–koraka

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je, uz $p > 0$,

$$\mathcal{Z}\{x(n+p)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+p)z^{-n} = \left| n+p=m \right| =$$

$$= \sum_{m=p}^{\infty} x(m)z^{-m+p} = z^p \sum_{m=p}^{\infty} x(m)z^{-m} =$$

$$= z^p \Bigg[\underbrace{\sum_{m=p}^{\infty} x(m)z^{-m} + \sum_{m=0}^{p-1} x(m)z^{-m}}_{X(z)} - \sum_{m=0}^{p-1} x(m)z^{-m} \Bigg] \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{x(n+p)\} = z^p \left[X(z) - \sum_{m=0}^{p-1} x(m)z^{-m} \right]$$

za $p = 1, \quad \mathcal{Z}\{x(n+1)\} = zX(z) - zx(0)$

za $p = 2, \quad \mathcal{Z}\{x(n+2)\} = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$

z–transformacija – kašnjenje za p–koraka

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je, uz $p > 0$,

$$\mathcal{Z}\{x(n-p)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-p)z^{-n} = \big|n-p=m\big| =$$

$$= \sum_{m=-p}^{\infty} x(m)z^{-m-p} = z^{-p} \sum_{m=-p}^{\infty} x(m)z^{-m} =$$

$$= z^{-p}\left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} + \sum_{m=-p}^{-1} x(m)z^{-m}\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{x(n-p)\} = z^{-p}\left[X(z) + \sum_{m=-p}^{-1} x(m)z^{-m}\right]$$

za $p = 1$ i $p = 2$ vrijedi

$$\mathcal{Z}\{x(n-1)\} = z^{-1}\left[X(z) + zx(-1)\right] = z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$\mathcal{Z}\{x(n-2)\} = z^{-2}\left[X(z) + zx(-1) + z^2x(-2)\right] =$$

$$= z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

z–transformacija – konvolucijski zbroj kauzalnih nizova

za $y(n) = h(n) * u(n)$, te $U(z) = \mathcal{Z}\{u(n)\}$ i $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}$, vrijedi[8]

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \mathcal{Z}\{y(n)\} = \mathcal{Z}\{u(n) * h(n)\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{p=0}^{\infty} u(p)h(n-p)\right] z^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} u(p) \sum_{n=0}^{\infty} h(n-p) z^{-n} \\
&= \Big| n-p=m \Big| = \sum_{p=0}^{\infty} u(p) \sum_{m=-p}^{\infty} h(m) z^{-(m+p)} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} u(p) z^{-p} \sum_{\underbrace{m=0}_{h(m)=0 \text{ za } m<0}}^{\infty} h(m) z^{-m} = U(z)H(z)
\end{aligned}
$$

$$h(n) * u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} H(z)U(z)$$

[8] pribrajajući nule, $h(m) = 0$ za $m < 0$, konvolucijski zbroj kauzalnih nizova $\sum_{p=0}^{n} u(p)h(n-p)z^{-n}$ proširujemo u $\sum_{p=0}^{\infty} u(p)h(n-p)z^{-n}$ (potreba izvoda)

z–transformacija – množenje s a^n

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je z–transformacija niza $y(n) = a^n x(n)$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

slično za $y(n) = e^{j\Omega_0 n} x(n)$ vrijedi

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\Omega_0 n} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{e^{j\Omega_0}}\right)^{-n} = X\left(ze^{-j\Omega_0}\right)$$

korištenjem gornjeg svojstva proizlazi i svojstvo **modulacije** za $y(n) = x(n) cos(\Omega_0 n) = x(n)\frac{1}{2}[e^{-j\Omega_0 n} + e^{j\Omega_0 n}]$ slijedi

$$\mathcal{Z}\{x(n) cos(\Omega_0 n)\} = \frac{1}{2}[X(ze^{j\Omega_0}) + X(ze^{-j\Omega_0})]$$

z–transformacija – množenje s n

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je z–transformacija niza $y(n) = nx(n)$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{nx(n)\} = z\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\underbrace{nz^{-n-1}}_{-\frac{d}{dz}z^{-n}} = z\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\left(-\frac{d}{dz}z^{-n}\right) =$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}\right) = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

množenje s n^p

$$\mathcal{Z}\{n^p x(n)\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^p X(z)$$

z–transformacija – početna vrijednost niza

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ početna vrijednost niza izračunava se iz

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

z–transformacija – konačna vrijednost niza

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ konačna vrijednost niza izračunava se iz

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z), \text{ ako postoji } x(\infty)$$

limes za $z \to 1$ ima smisla samo kada je točka $z = 1$ locirana unutar područja konvergencije $X(z)$

dokaz započinjemo z–transformacijom niza $[x(n) - x(n-1)]$

$$\mathcal{Z}\{x(n) - x(n-1)\} = X(z) - z^{-1}X(z) - x(-1) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}[x(n) - x(n-1)]z^{-n}$$

$$(1 - z^{-1})X(z) - x(-1) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n) - x(n-1)]z^{-n}$$

z–transformacija – konačna vrijednost niza

uzmimo limes za $z \to 1$

$$\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)]-x(-1) = \lim_{z\to 1}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)]z^{-n} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)]z^{-n} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}[x(0)-x(-1)+x(1)-x(0)+x(2)-x(1)+\ldots] =$$

$$= -x(-1) + \lim_{N\to\infty} x(N)$$

$$\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) = \lim_{N\to\infty} x(N)$$

Inverzna z–transformacija

Inverzna z–transformacija

- razmotrimo li $X(z)$ za z u polarnom obliku, $z = re^{j\Omega}$,

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{j\Omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(n)r^{-n}\right] e^{-j\Omega n}$$
$$= DTFT\{x(n)r^{-n}\},$$

pa niz $x(n)$ možemo odrediti korištenjem inverzne Fourierove transformacije $X(re^{j\Omega})$. Iz

$$x(n)r^{-n} = IDTFT\{X(re^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}\, d\Omega,$$

množenjem obje strane s r^n, slijedi

$$x(n) = \frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})\left(re^{j\Omega}\right)^n d\Omega.$$

Inverzna z–transformacija

- integral $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})\left(re^{j\Omega}\right)^n d\Omega$ možemo, zamjenom $re^{j\Omega} = z$, transformirati u integral po varijabli z
- vrijedi

$$dz = jre^{j\Omega}\, d\Omega \quad \text{odnosno} \quad d\Omega = \frac{1}{j} z^{-1}\, dz$$

- integracija se provodi po varijabli Ω, pa r možemo smatrati konstantom
- integracija po Ω je u intervalu $-\pi$ do π, što u varijabli $z = re^{j\Omega}$, odgovara jednom obilasku po krivulji radijusa $|z| = r$, pa se integral može zapisati u obliku integrala po zatvorenoj krivulji u smjeru suprotnom kazaljci na satu

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1}\, dz.$$

što predstavlja opći izraz za inverznu z–transformaciju

Inverzna z–transformacija – integralom po zatvorenoj krivulji

- inverzna z–transformacija je dana kao

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

gdje je integral po zatvorenoj krivulji C koja zatvara ishodište i leži unutar područja konvergencije $X(z)$

- integral se izračunava primjenom Cauchy-evog teorema o reziduumima koji kazuje kako je integral, u pozitivnom smjeru duž zatvorene krivulje C, koja obuhvaća konačno izoliranih singularnih točaka (polova) jednak sumi residuuma u obuhvaćenim singularnim točkama, dakle,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{m=1} Res_m[X(z) z^{n-1}]$$

$$Res_m[X(z) z^{n-1}] = \lim_{z \to z_m} [X(z) z^{n-1} (z - z_m)]$$

Inverzna z–transformacija – drugi postupci

- inverzna z–transformacija, integralom po zatvorenoj krivulji, navedena je ovdje zbog cjelovitosti izlaganja
- u nastavku se daju dva jednostavna postupka inverzne z–transformacije koji ne traže dublje poznavanje teorije funkcije kompleksne varijable
- prvo se razmatra inverzna z–transformacija postupkom razvoja u red
- pokazano je kako je z–transformacija kauzalnog niza $x(n)$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots$$

- pa je inverzna z–transformacija

$$x(n) = x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) + \dots$$

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- kad je $X(z)$ razlomljena racionalna funkcija, koeficijente prethodnog reda možemo dobiti jednostavnim dijeljenjem brojnika s nazivnikom
- ovo će biti ilustrirano narednim primjerom
- pokazano je da je $X(z) = \mathcal{Z}\{(0.75)^n\mu(n)\} = \frac{1}{1-0.75z^{-1}}$
- razvoj u red za $X(z)$ postižemo dijeljenjem brojnika s nazivnikom

$$
\begin{array}{l}
(1 + 0 \cdot z^{-1}) : (1 - 0.75z^{-1}) = 1 + 0.75z^{-1} + (0.75)^2 z^{-2} + (0.75)^3 z^{-3} + \ldots \\
\underline{\pm 1 \mp 0.75z^{-1}} \\
\qquad 0.75z^{-1} \\
\qquad \underline{\pm 0.75z^{-1} \mp (0.75)^2 z^{-2}} \\
\qquad\qquad (0.75)^2 z^{-2} \\
\qquad\qquad \underline{\pm (0.75)^2 z^{-2} \mp (0.75)^3 z^{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad (0.75)^3 z^{-3}
\end{array}
$$

pa prepoznajemo

$$x(n) = \delta(n) + 0.75\delta(n-1) + (0.75)^2\delta(n-2) + (0.75)^3\delta(n-3) + \ldots = (0.75)^n\mu(n)$$

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- prijenosna funkcija $H(z)$ predstavlja z–transformaciju impulsnog odziva $h(n)$, sukladno tome impulsni odziv je inverzna z–transformacija prijenosne funkcije
- za zadanu prijenosnu funkciju nalazimo impulsni odziv

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}\right\}$$

- inverznu z–transformaciju provodimo dijeljenjem brojnika $H(z)$ s njezinim nazivnikom

$$\begin{array}{l}
(1+2z^{-1}) : (1-1.1314z^{-1}+0.64z^{-2}) = 1 + 3.1314z^{-1} + 2.9028z^{-2} + \dots \\
\underline{-1+1.1314z^{-1}-0.64z^{-2}} \\
\qquad +3.1314z^{-1}-0.64z^{-2} \\
\qquad \underline{-3.1314z^{-1}+3.5428z^{-2}-2.0041z^{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad +2.9028z^{-2}-2.0041z^{-3}
\end{array}$$

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- pa je inverzna transformacija

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{1 + 3.1314z^{-1} + 2.9028z^{-2} + \dots\}$$

$$h(n) = \delta(n) + 3.1314\delta(n-1) + 2.9028\delta(n-2) + \dots$$

- ovim postupkom određivanja inverzne z–transformacije, moguće je brzo i jednostavno odrediti nekoliko prvih uzoraka signala,
- međutim ovdje je, iz poznatih uzoraka, teško prepoznati kompaktni izraz za impulsni odziv

$$h(n) = 4.6444(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right)\mu(n)$$

i on će biti određen postupkom rastava na parcijalne razlomke

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- metoda inverzne z–transformacije rastavom na parcijalne razlomke temelji se na prikazu funkcije $X(z)$ kao

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \dots \alpha_K X_K(z)$$

  gdje su $X_1(z), X_2(z), \dots X_K(z)$ izrazi čije su inverzne transformacije $x_1(n), x_2(n), \dots x_K(n)$ dane u tablici osnovnih z-transformacija

- ako je moguća takva dekompozicija tada se, korištenjem linearnosti, određuje inverzna transformacija $X(z)$ kao

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \dots + \alpha_K x_K(n)$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(z)$ je razlomljena racionalna funkcija i možemo je prikazati kao

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

- za $N > M$ radi se o pravoj razlomljenoj racionalnoj funkciji koju je moguće rastaviti na parcijalne razlomke
- u slučaju $M \geq N$, $X(z)$ je neprava razlomljena racionalna funkcija, pa je prije rastave na parcijalne razlomke potrebno, dijeljenjem brojnika i nazivnika, $X(z)$ dovesti u oblik

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_{M-N} z^{-(M-N)} + \underbrace{\frac{B_1(z)}{A(z)}}_{\text{prava razlomljena racionalna funkcija}}$$

Inverzna z–transformacija – primjer

- neka je z-transformacija kauzalnog niza $x(n)$, neprava razlomljena racionalna funkcija $X(z)$

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2}}$$

- u ovom primjeru je $M > N$ pa je, prije rastava na parcijalne razlomke, potrebno modificirati $X(z)$ na sumu polinoma i prave razlomljene funkcije
- to se postiže dijeljenjem polinoma u brojniku s polinomom u nazivniku[9]
- dakle iz
  $(4z^{-3} + 3z^{-2} + 2z^{-1} + 1) : (-0.06z^{-2} - 0.1z^{-1} + 1)$ slijedi

$$X(z) = -66.6667z^{-1} + 61.1111 + \frac{-60.1111 + 74.7777z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2}}$$

[9] u obrnutom poretku kako bi eliminirali članove z^{-2} i z^{-3}

Inverzna z–transformacija – primjer

- $X(z)$ je priređen za rastav na parcijalne razlomke

$$X(z) = 61.1111 - 66.6667z^{-1} + \underbrace{\frac{-60.1111 + 74.7777z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2}}}_{\text{prava funkcija}}$$

- rastavom na parcijalne razlomke, što se pokazuje na narednim prikaznicama, slijedi

$$X(z) = 61.1111 - 66.6667z^{-1} + \frac{113.4889}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{-173.6}{1 + 0.2z^{-1}}$$

pa je, uvidom u tablice, inverzna z-transformacija

$$\begin{aligned} x(n) = {} & 61.1111\delta(n) - 66.6667\delta(n-1) + \\ & + 113.4889(0.3)^n\mu(n) - 173.6(-0.2)^n\mu(n) \end{aligned}$$

Inverzna z–transformacija – primjer

- provjeru dobivenog rezultata možemo učiniti postupkom dijeljenjem brojnika i nazivnika $X(z)$, dakle,

$$
\begin{aligned}
&(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}) : (1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2}) = \\
&\quad = 1 + 2.1z^{-1} + 3.27z^{-2} + 4.453z^{-3} + 0.6415z^{-4} + \dots
\end{aligned}
$$

pa je inverzna transformacija

$$
\begin{aligned}
x(n) = \delta(n) &+ 2.1\delta(n-1) + 3.27\delta(n-2) + \\
&+ 4.453\delta(n-3) + 0.6415\delta(n-4) + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{dok } x(n) = 61.1111\delta(n) &- 66.6667\delta(n-1) + \\
&+ 113.4889(0.3)^n\mu(n) - 173.6(-0.2)^n\mu(n)
\end{aligned}
$$

za $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ daje uzorke $1, 2.1, 3.27, 4.453, 0.6415, \dots$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- neka je $X(z)$ prava razlomljena racionalna funkcija

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

gdje je $N > M$

- postupak rastava na parcijalne razlomke pojednostavljujemo množenjem brojnika i nazivnika sa z^N, što rezultira u

$$X(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- ovako transformiranu $X(z)$ možemo prikazati kao

$$X(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{B_1(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

- inverznu z–transformaciju rastavom na parcijalne razlomke započinjemo definiranjem pomoćne funkcije

$$X_1(z) = \frac{X(z)}{z}$$

- funkcija $X_1(z)$ se rastavlja na parcijalne razlomke, pa za jednostruke polove slijedi

$$X_1(z) = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{c_N}{z-p_N}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(z)$ je tada

$$X(z) = zX_1(z) = \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \ldots + \frac{c_N z}{z - p_N}$$

pri čemu se koeficijenti $c_i, i = 1, 2, \ldots, N$ određuju iz

$$c_i = \lim_{z \to p_i} \left\{ (z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right\}$$

- iz tablice z–transformacija prepoznaju se članovi $x(n)$

$$x(n) = [c_1 (p_1)^n + c_2 (p_2)^n + \ldots + c_N (p_N)^n] \mu(n)$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za višestruke polove $X(z)$ je

$$X(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{B_1(z)}{(z-p_1)^r (z-p_{r+1}) \cdots (z-p_N)}$$

- pomoćna funkcija $X_1(z)$ se rastavlja na parcijalne razlomke oblika

$$X_1(z) = \frac{c_{11}}{z-p_1} + \frac{c_{12}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r}}{(z-p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{z-p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{z-p_{r+2}} + \ldots + \frac{c_N}{z-p_N}$$

$$c_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{z \to p_1} \left\{ \frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} (z-p_1)^r \frac{X(z)}{z} \right\} \qquad (1)$$

$$c_i = \lim_{z \to p_i} \left\{ (z-p_i) \frac{X(z)}{z} \right\} \qquad (2)$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za zadanu prijenosnu funkciju nalazimo impulsni odziv

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}\right\}$$

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}} = \frac{z^2+2z}{z^2-0.8\sqrt{2}z+0.64}$$

$$p_{1,2} = 0.5657 \pm j0.5657 = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

- inverznu z–transformaciju provodimo rastavom na parcijalne razlomke

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz

$$c_1 = \lim_{z \to p_1} \left\{ (z-p_1) \frac{H(z)}{z} \right\} = \lim_{z \to p_1} \left\{ \cancel{(z-p_1)} \frac{z+2}{\cancel{(z-p_1)}(z-p_2)} \right\} =$$

$$= \frac{p_1 + 2}{p_1 - p_2} = \frac{0.5657 + j0.5657 + 2}{0.5657 + j0.5657 - 0.5657 + j0.5657} =$$

$$= 0.5000 - j2.2678 = 2.2222 e^{-j1.3538}$$

$$c_2 = \lim_{z \to p_2} \left\{ (z-p_2) \frac{H(z)}{z} \right\} = \lim_{z \to p_2} \left\{ \cancel{(z-p_2)} \frac{z+2}{(z-p_1)\cancel{(z-p_2)}} \right\} =$$

$$= \frac{p_2 + 2}{p_2 - p_1} = \frac{0.5657 - j0.5657 + 2}{0.5657 - j0.5657 - 0.5657 - j0.5657} =$$

$$= 0.5000 + j2.2678 = 2.3222 e^{j1.3538}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $H(z)$ pišemo kao

$$H(z) = \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2}$$

i inverzna z–transformacija je

$$\begin{aligned} h(n) &= c_1(p_1)^n \mu(n) + c_2(p_2)^n \mu(n) = \\ &= 2.3222 e^{-j1.3538}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3222 e^{j1.3538}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} = \\ &= 4.6444(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right)\mu(n) \end{aligned}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- određuje se prijenosna funkcija mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, primjenom z–transformacije
- neka je sustav opisan jednadžbom diferencija

$$
\begin{aligned}
&y(n)+a_1 y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_N y(n-N) = \\
&= b_0 u(n)+b_1 u(n-1)+\ldots+b_{M-1}u(n-M+1)+b_M u(n-M)
\end{aligned}
$$

- z–transformacijom ove jednadžbe, uzimajući u obzir da je sustav miran, i koristeći svojstvo $\mathcal{Z}\{x(n-p)\} = z^{-p}X(z)$ slijedi

$$
\begin{aligned}
&Y(z)+a_1 z^{-1}Y(z)+\ldots+a_{N-1}z^{-N+1}Y(z)+a_N z^{-N}Y(z) = \\
&= b_0 U(z)+b_1 z^{-1}U(z)+\ldots+b_{M-1}z^{-(M-1)}U(z)+b_M z^{-M}U(z)
\end{aligned}
$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

$$[1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}] Y(z) =$$
$$= [b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}] U(z)$$

odnosno

$$Y(z) = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}}}_{H(z)} U(z)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}$$

pa, prijenosnu funkciju diskretnog sustava, $H(z)$, definiramo kao omjer z–transformacija odziva i pobude, uz početne uvjete jednake nuli

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(n)\}}{\mathcal{Z}\{u(n)\}}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- primjenu z–transformacije u analizi linearnih sustava ilustriramo primjerom sustava opisanog jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- sustav je pobuđen s $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ a početni uvjeti su $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- z–transformacija jednadžbe je

$$Y(z) - 0.8\sqrt{2}\left[z^{-1}Y(z) + y(-1)\right] + \\ + 0.64\left[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\right] = U(z)$$

$$\left[1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}\right]Y(z) = \\ = U(z) + 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.64y(-1)z^{-1}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(z) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}}_{H(z)} U(z)}_{\text{odziv mirnog sustava}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.64y(-1)z^{-1}}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}}$$

množenjem brojnika i nazivnika sa z^2 i uvrštenjem zadanih početnih uvjeta $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} U(z) + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- z–transformacija zadane pobude $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ je (iz tablice z–transformacija)

$$U(z) = \frac{-0.2z\left(z - \cos(\frac{\pi}{8})\right)}{z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{8})z + 1}$$

pa je totalni odziv sustava na danu pobudu

$$Y(z) = \frac{-0.2z^3\left(z - \cos(\frac{\pi}{8})\right)}{(z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64)(z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{8})z + 1)} + \\ + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(z) = \underbrace{\frac{-0.2z^3\left(z - \cos(\frac{\pi}{8})\right)}{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})(z - e^{j\frac{\pi}{8}})(z - e^{-j\frac{\pi}{8}})}}_{Y_m(z)} + \underbrace{\frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})}}_{Y_0(z)}$$

rastavom na parcijalne razlomke

$$Y(z) = \underbrace{\frac{c_1 z}{z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_2 z}{z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_3 z}{z - e^{j\frac{\pi}{8}}} + \frac{c_4 z}{z - e^{-j\frac{\pi}{8}}}}_{Y_m(z)} + \underbrace{\frac{c_5 z}{z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_6 z}{z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}}}_{Y_0(z)}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- inverznom z–transformacijom će totalni odziv, u vremenskoj domeni, biti

$$y(n) = \left[c_1(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + c_3 e^{j\frac{\pi}{8}n} + c_4 e^{-j\frac{\pi}{8}n}\right]\mu(n) + \\ + \left[c_5(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_6(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]\mu(n)$$

- c_1, c_2, c_3 i c_4 određujemo iz $\frac{Y_m(z)}{z}$, a c_5 i c_6 iz $\frac{Y_0(z)}{z}$

$$c_1 = \lim_{z \to 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} \left\{ \cancel{\left(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right)} \frac{-0.2z^2\left(z - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)}{\cancel{\left(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right)}\left(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z - e^{j\frac{\pi}{8}}\right)\left(z - e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)} \right\}$$

$$c_1 = 0.1858e^{j0.6757}$$

$$c_5 = \lim_{z \to 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} \left\{ \cancel{\left(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right)} \frac{-1.3028z + 1.28}{\cancel{\left(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right)}\left(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)} \right\} = 0.8091e^{-j2.5066}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 0.1858e^{j0.6757}\\
c_2 &= 0.1858e^{-j0.6757}\\
c_3 &= 0.2452e^{-j3.0935} = -0.2452e^{j0.04809}\\
c_4 &= 0.2452e^{j0.3.0935} = -0.2452e^{-j0.04809}\\
c_5 &= 0.8091e^{-j2.5066}\\
c_6 &= 0.8091e^{j2.5066}
\end{aligned}
$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$y_m(n) = \Big[0.1858e^{j0.6757}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.1858e^{-j0.6757}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.2452e^{j0.04809}e^{j\frac{\pi}{8}n} - 0.2452e^{-j0.04809}e^{-j\frac{\pi}{8}n}\Big]\mu(n)$$

$$y_0(n) = \Big[0.8091e^{-j2.5066}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.8091e^{j2.5066}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}\Big]\mu(n)$$

$$y(n) = y_0(n) + y_m(n)$$

$$y(n) = \underbrace{1.6182 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5066)\mu(n)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} + \underbrace{0.3716 \cdot 0.8^n cos(\frac{\pi}{4}n + 0.6759)\mu(n) - 0.4904 cos(\frac{\pi}{8}n + 0.04809)\mu(n)}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

- sugestija: usporediti s postupkom izračuna odziva ovog sustava u vremenskoj domeni (na prikaznici 84)

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- analiziran je odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- sustav je bio pobuđen s $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ a početni su uvjeti bili $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- učinimo li pomak u vremenu za dva koraka, supstitucijom $n = n + 2$, dobivamo jednadžbu diferencija oblika

$$y(n+2) - 0.8\sqrt{2}y(n+1) + 0.64y(n) = u(n+2) \quad (3)$$

- ova jednadžba opisuje isti sustav i na zadanu pobudu $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$, daje isti odziv
- u izračunu odziva potrebno je poznavati početne uvjete $y(0)$ i $y(1)$, i njih je potrebno odrediti iz zadanih početnih uvjeta $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- iz

$$y(n+2) - 0.8\sqrt{2}y(n+1) + 0.64y(n) = u(n+2)$$

za $n = -2$ slijedi,

$$y(0) - 0.8\sqrt{2}y(-1) + 0.64y(-2) = \underbrace{u(0)}_{-0.2} \Rightarrow y(0) = -1.5028$$

za $n = -1$ je

$$y(1) - 0.8\sqrt{2}y(0) + 0.64y(-1) = \underbrace{u(1)}_{-0.1848} \Rightarrow y(1) = -0.6050$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- z–transformacija jednadžbe je

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - z0.8\sqrt{2}Y(z) + z0.8\sqrt{2}y(0) + \\ + 0.64Y(z) = z^2U(z) - z^2u(0) - zu(1)$$

$$\left[z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64\right]Y(z) = \\ = z^2U(z) - z^2u(0) - zu(1) + z^2y(0) + zy(1) - z0.8\sqrt{2}y(0)$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}U(z) + \\ + \frac{-z^2u(0) - zu(1) + z^2y(0) + zy(1) - z0.8\sqrt{2}y(0)}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- uvrštenjem izračunatih $y(0) = -1.5028$ i $y(1) = -0.6050$ slijedi

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}U(z) + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

što je identično prije izvedenoj z–transformaciji totalnog odziva

Samostalni rad studenta

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

- izračunava se odziv sustava za generiranje jeke opisanog jednadžbom

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- na pobudu

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- neka je sustav miran dakle
  $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

- podsjetimo se da je z-transformacija

$$\mathcal{Z}\{y(n-j)\} = z^{-j}\left[Y(z) + \sum_{m=-j}^{-1} y(m)z^{-m}\right]$$

- kako su $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$ i $j = 4$ slijedi

$$\mathcal{Z}\{y(n-4)\} = z^{-4}Y(z)$$

- iz $u(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$ slijedi

$$U(z) = 1 + z^{-1}$$

- z-transformacija zadane jednadžbe diferencija je

$$Y(z) - 0.6z^{-4}Y(z) = U(z)$$

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

- pa je

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 0.6z^{-4}} U(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.6z^{-4}} = \frac{z^4 + z^3}{z^4 - 0.6}$$

- rastavljamo na parcijalne razlomke funkciju

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3 + z^2}{z^4 - 0.6}$$

- korijeni[10] polinoma u nazivniku su

$$p_1 = -0.8801, \; p_2 = -j0.8801, \; p_3 = +j0.8801, \; p_4 = 0.8801$$

[10] Korištenjem Matlab naredbe – roots([1 0 0 0 -0.6])

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

- rastav na parcijalne razlomke je

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3 + z^2}{z^4 - 0.6} =$$

$$= \frac{z^3 + z^2}{(z + 0.8801)(z - j0.8801)(z + j0.8801)(z - 0.8801)} =$$

$$= \frac{c_1}{z + 0.8801} + \frac{c_2}{z + j0.8801} + \frac{c_3}{z - j0.8801} + \frac{c_4}{z - 0.8801}$$

određujemo konstante

$$c_1 = \left\{ \cancel{(z + 0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z + 0.8801)}(z^2 + 0.8801^2)(z - 0.8801)} \right\}_{z=-0.8801} =$$

$$= -0.0341$$

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$c_2 = \left\{ \cancel{(z + j0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z + j0.8801)}(z^2 - 0.8801^2)(z - j0.8801)} \right\}_{z=-j0.8801} =$$

$$= 0.2500 + j0.2841 = 0.3784 e^{j0.8491}$$

$$c_3 = \left\{ \cancel{(z - j0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z - j0.8801)}(z^2 - 0.8801^2)(z + j0.8801)} \right\}_{z=j0.8801} =$$

$$= 0.2500 - j0.2841 = 0.3784 e^{-j0.8491}$$

$$c_4 = \left\{ \cancel{(z - 0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z - 0.8801)}(z^2 + 0.8801^2)(z + 0.8801)} \right\}_{z=0.8801} =$$

$$= 0.5341$$

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{c_1 z}{z+0.8801} + \frac{c_2 z}{z+j0.8801} + \frac{c_3 z}{z-j0.8801} + \frac{c_4 z}{z-0.8801} = \\
&= \frac{-0.0341 z}{z+0.8801} + \frac{0.3784 e^{j0.8491} z}{z+j0.8801} + \\
&\qquad + \frac{0.3784 e^{-j0.8491} z}{z-j0.8801} + \frac{0.5341 z}{z-0.8801}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(n) &= -0.0341(-0.8801)^n + 0.3784 e^{j0.8491}(-j0.8801)^n + \\
&\quad + 0.3784 e^{-j0.8491}(j0.8801)^n + 0.5341(0.8801)^n \quad n \geq 0 \\
y(n) &= -0.0341(-0.8801)^n + 0.3784 e^{j0.8491} 0.8801^n e^{-j\frac{\pi}{2}n} + \\
&\quad + 0.3784 e^{-j0.8491} 0.8801^n e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0.5341(0.8801)^n \quad n \geq 0 \\
&= -0.0341(-0.8801)^n + 0.5341(0.8801)^n + \\
&\quad + 0.7568(0.8801)^n \cos(\frac{\pi}{2}n - 0.8491) \quad n \geq 0
\end{aligned}
$$

Primjer inverzne z–transformacije

- određuje se inverzna z-transformacija kauzalnog signala $x(n)$

$$X(z) = \frac{-1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}{(1 + 0.25z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})^2} = \frac{-z^3 + 0.5z^2 + 0.25z}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2} = \frac{c_1}{z + 0.25} + \frac{c_{21}}{z + 0.5} + \frac{c_{22}}{(z + 0.5)^2}$$

koeficijent c_1 možemo odrediti pomoću izraza (2)

$$c_1 = \left\{ \cancel{(z + 0.25)} \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{\cancel{(z + 0.25)}(z + 0.5)^2} \right\}_{z=-0.25} = 1$$

a koeficijente c_{21} i c_{22} iz (1), uz $r = 2$ i za $j = 1, 2$,

$$c_{2j} = \frac{1}{(r - j)!} \lim_{z \to -0.5} \left\{ \frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} (z + 0.5)^r \frac{X(z)}{z} \right\}$$

Primjer inverzne z–transformacije

$$c_{22} = \left\{ \cancel{(z+0.5)^2} \frac{-z^2+0.5z+0.25}{\cancel{(z+0.5)^2}(z+0.25)} \right\}_{z=-0.5} = 1$$

$$c_{21} = \left\{ \frac{d}{dz} \cancel{(z+0.5)^2} \frac{-z^2+0.5z+0.25}{\cancel{(z+0.5)^2}(z+0.25)} \right\}_{z=-0.5} =$$

$$= \left\{ \frac{(-2z+0.5)(z+0.25)-(-z^2+0.5z+0.25)}{(z+0.25)^2} \right\}_{z=-0.5} = -2$$

- pokazuje se i drugi način određivanja koeficijenta c_1, c_{21} i c_{22}
- koeficijente c_1, c_{21} i c_{22} zamjenjujemo s A, B i C (radi bolje preglednosti jednačaba)

Primjer inverzne z–transformacije

$$
\begin{aligned}
\frac{X(z)}{z} &= \frac{-z^2+0.5z+0.25}{(z+0.25)(z+0.5)^2} = \frac{A}{z+0.25}+\frac{B}{z+0.5}+\frac{C}{(z+0.5)^2} \\
&= \frac{A(z+0.5)^2+B(z+0.25)(z+0.5)+C(z+0.25)}{(z+0.25)(z+0.5)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{-z^2+0.5z+0.25}{(z+0.25)(z+0.5)^2} = \\
&= \frac{(A+B)z^2+(A+0.75B+C)z+(0.25A+0.125B+0.25C)}{(z+0.25)(z+0.5)^2}
\end{aligned}
$$

pa izjednačavanjem lijeve i desne strane slijedi

$$
\begin{aligned}
A+B &= -1 \\
A+0.75B+C &= 0.5 \\
0.25A+0.125B+0.25C &= 0.25
\end{aligned}
$$

Primjer inverzne z–transformacije

- rješenja prethodnih jednadžbi su $A = 1$, $B = -2$ i $C = 1$, pa je rastav na parcijalne razlomke

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z + 0.25} + \frac{-2}{z + 0.5} + \frac{1}{(z + 0.5)^2} \quad \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{z}{z + 0.25} + \frac{-2z}{z + 0.5} + \frac{z}{(z + 0.5)^2}$$

- podsjetimo se da je

$$\mathcal{Z}\{a^n \mu(n)\} = \frac{z}{z - a} \text{ i } \mathcal{Z}\{n a^n \mu(n)\} = \frac{az}{(z - a)^2}$$

$$X(z) = \frac{z}{z - (-0.25)} + -2\frac{z}{z - (-0.5)} - 2\frac{(-0.5)z}{(z - (-0.5))^2}$$

pa je inverzna transformacija

$$x(n) = (-0.25)^n \mu(n) - 2(-0.5)^n \mu(n) - 2n(-0.5)^n \mu(n)$$

Rješenje jednadžbe diferencija klasičnim postupkom – primjer[11]

- odredimo odziv sustava

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- na pobudu $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n)$ te uz početne uvjete $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- prvo se određuje rješenje homogene jednadžbe ovog sustava

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = 0$$

[11] Ovdje radi usporedbe s postupkom izračuna odziva pomoću z-transformacije

Rješenje homogene jednadžbe – primjer

- pretpostavimo rješenje oblika cq^n i ono mora zadovoljiti homogenu jednadžbu

$$cq^n - 0.8\sqrt{2}cq^{n-1} + 0.64cq^{n-2} = 0$$

$$cq^{n-2}(q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64) = 0$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64 = 0$$

- korijeni karakteristične jednadžbe su

$$q_{1,2} = 0.4\sqrt{2}(1 \pm j) = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- kako je pobuda $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K_1 cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\frac{\pi}{8}n)$$

- koeficijente K_1 i K_2 određujemo metodom neodređenog koeficijenta
- uvrštenjem $y_p(n)$ u polaznu jednadžbu slijedi

$$y_p(n) - 0.8\sqrt{2}y_p(n-1) + 0.64y_p(n-2) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n);$$

$$\begin{aligned}
&K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - 0.8\sqrt{2}K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] - \\
&-0.8\sqrt{2}K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] + 0.64K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] + \\
&+0.64K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)
\end{aligned}$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- primjenom trigonometrijskih transformacija slijedi

$$
\begin{aligned}
&K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - \\
&\quad -0.8\sqrt{2}K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] - \\
&\quad -0.8\sqrt{2}K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] + \\
&\quad +0.64K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] + \\
&\quad +0.64K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)
\end{aligned}
$$

- razvrstavanjem slijedi

$$
\begin{aligned}
&\{[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\
&\quad +[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}cos(\tfrac{\pi}{8}n) + \\
&\{-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\
&\quad +[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}sin(\tfrac{\pi}{8}n) = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)
\end{aligned}
$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- usporedbom lijeve i desne strane pišemo

$$\begin{aligned}
&[1-0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8})+0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1+\\
&\qquad+[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8})-0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2=-0.2\\
&-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8})-0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1+\\
&\qquad+[1-0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8})+0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2=0
\end{aligned}$$

- rješenjem ovih jednadžbi izračunavamo K_1 i K_2

$$K_1=-0.4899, \qquad K_2=0.0236$$

- pa je partikularno rješenje

$$\begin{aligned}
y_p(n)&=-0.4899cos(\tfrac{\pi}{8}n)+0.0236sin(\tfrac{\pi}{8}n)=\\
&=-0.4905cos(\tfrac{\pi}{8}n+0.0481)
\end{aligned}$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- totalno rješenje je $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$

$$y(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4905 cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

- izračunavanje $y(0)$ i $y(1)$ potrebnih u izračunavanju c_1 i c_2, a uz $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$,

$$n = 0 \quad y(0) = 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.2cos(\tfrac{\pi}{8}0) = -1.5027$$
$$n = 1 \quad y(1) = 0.8\sqrt{2}y(0) - 0.64y(-1) - 0.2cos(\tfrac{\pi}{8}1) = -0.6049$$

- iz totalnog rješenja

$$n = 0$$
$$y(0) = c_1 + c_2 - 0.4899cos(0.0481) = -1.5027$$
$$n = 1$$
$$y(1) = c_1 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + c_2 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} - 0.4905cos(\tfrac{\pi}{8} + 0.0481) =$$
$$= -0.6049$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- izračunate konstante c_1 i c_2 su

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.5064 - j0.3638 = 0.6235e^{-j2.5186} \\ c_2 &= -0.5064 + j0.3638 = 0.6235e^{j2.5186} \end{aligned}$$

- totalni odziv je

$$y(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4905cos(\tfrac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

$$\begin{aligned} y(n) = {} & 0.6235e^{-j2.5186}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.6235e^{j2.5186}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \\ & -0.4905cos(\tfrac{\pi}{8}n + 0.0481) \end{aligned}$$

- i konačno

$$y(n) = \underbrace{1.2471(0.8)^n cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5186)}_{\text{prirodni ili prijelazni odziv}} \underbrace{-0.4905cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)}_{\text{prisilni odziv}}$$