1.

R: Otipkavanjem kontinuiranog signala dobivamo

$$x(n) = x(nT_s) = e^{j\omega_0 n T_s}$$

Ako je $x(n)$ periodičan s temeljnim periodom N_0, tada vrijedi $x(n) = x(n+N_0)$

$$\Rightarrow e^{j\omega_0(n+N_0)T_s} = e^{j\omega_0 n T_s} \Rightarrow e^{j\omega_0 N_0 T_s} = 1$$

$$\Rightarrow \omega_0 N_0 T_s = \frac{2\pi}{T_0} N_0 T_s = m 2\pi, \quad m \in N$$

$$\Rightarrow \frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N_0} \in Q.$$

$\Rightarrow x(n)$ je periodičan, ako je omjer $\frac{T_s}{T_0}$ (perioda otipkavanja i temeljnog perioda signala $x(t)$) racionalan broj.

2. Da bi signal bio periodičan mora vrijediti:

$\cos(an+1) = \cos(a(n+N)+1+2k\pi)$, za $N \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dakle, $an+1 = a(n+N)+1+2k\pi$,

Odnosno izraz, $N = -\dfrac{2k\pi}{a}$ mora biti prirodan.

Iz gornjeg, evidentno slijedi da a mora biti racionalni višekratnik broja π , tj.

$$a = \frac{m}{n}\pi,\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

U tom slučaju

$$N = -\frac{2k\pi}{\frac{m}{n}\pi} = -\frac{2kn}{m},$$

Očito za svaki izbor *m* i *n*, postoji takav *k* da je gornji izraz prirodan broj!

3.

GORAN RADANOVIĆ 0036419588

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$; $\forall n$:

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - k\,p) \quad , \; p \in \mathbb{N}$$

$N \in \mathbb{N}$

$$f(n+N) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n + N - k\,p)$$

za $N = m \cdot p$, $m \in \mathbb{N}$:

$$f(n+N) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - p \cdot (k-m)) = \left| \begin{array}{l} t = k - m \\ k = +\infty \Rightarrow t = +\infty \\ k = -\infty \Rightarrow t = -\infty \end{array} \right|$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} g(n - t \cdot p) = f(n) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} \; \big(f(n+N) = f(n) \big) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ signal $f(n)$ je periodičan

4. Energija diskretnog signala definirana je na sljedeći način:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|^2$$

U našem slučaju

$$E = \sum_{n=0}^{2007} n^2 = 2696779140$$

Pri tome smo koristili sljedeću relaciju

$$\sum_{n=0}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

5.

a) $\int_{0}^{\infty} \delta(t-2)\, t^2\, dt$

$t_0 = 2$

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t-2)\, t^2\, dt = t_0^2 \int_{0}^{\infty} \delta(t)\, dt = \boxed{4}$$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos t \cdot \mu(t-1)\, \delta(t)\, dt = \qquad \Rightarrow \quad t_0 = 0$

$$= \cos t_0 \cdot \mu(t_0 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt$$

$$= \cos \phi \cdot \underbrace{\mu(-1)}_{\phi}$$

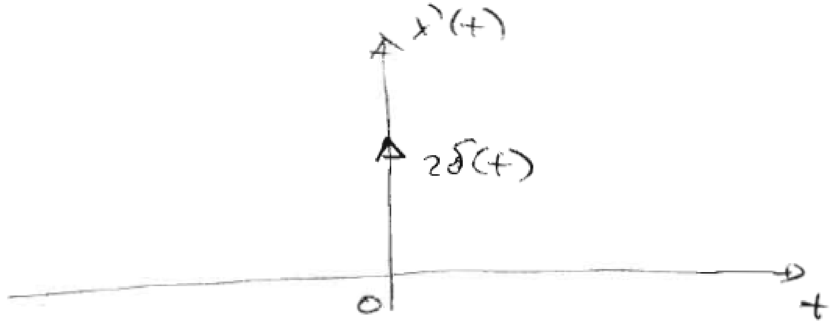
$$\boxed{= \phi}$$

6.

R: $x(t) = \operatorname{sgn}(t) = \mu(t) - \mu(-t) \Rightarrow$

$x'(t) = \mu'(t) - \mu'(-t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x'(t) = \delta(t) - [-\delta(t)] = 2\delta(t)$



7. U zadatku je trebalo naći generalizirane derivacije,

Rj:

a) $\mu(t)-\mu(t-1)-\delta(t-1)-\left[\mu(t-2)-\mu(t-3)\right]+\delta(t-2)$

b) $-\left[\mu(t)-\mu(t-1)\right]+3\delta(t)-2\delta(t-1)-\left[\mu(t-2)-\mu(t-3)\right]+\delta(t-2)$

Za vježbu, zgodno je nacrtati signale i iz slike pokušati skicirati oblik derivacije signala. Nakon toga računom provjeriti dobiveni rezultat!

8. Izračunat ćemo oba integrala te ih usporediti

Na lijevoj strani imamo

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(|x| + x\right)\varphi'(x)dx = \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx = x\varphi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx$$

Pri tome smo koristili činjenicu $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ -

Na desno strani imamo

$$-\int_{-1}^{1} \mu(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx$$

S obzirom da su integrali jednaki za $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(I)$, zaključujemo da je step funkcija generalizirana derivacija polazne funkcije!