Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

XV. tjedan

Z-transformacija

1. Znate da je prijenosna funkcija nekog LTI diskretnog sustava
$$H(z) = \frac{(e^{-2} - e^{-1})z}{(z - e^{-2})(z - e^{-1})},$$
no ne znate koje je područje konvergencije. Postoje tri moguća područja konvergencije:
   a. $|z| > e^{-1}$,
   b. $e^{-2} < |z| < e^{-1}$,
   c. $|z| < e^{-2}$.

   Za svako od navedenih područja konvergencije odredite impulsni odziv sustava. Za koji od navedenih slučajeva možemo tvrditi da je impulsni odziv kauzalan?

Rješenje:

Zadana prijenosna funkcija se može napisati u obliku:
$$H(z) = \frac{(e^{-2} - e^{-1})z}{(z - e^{-2})(z - e^{-1})} = \frac{z}{z - e^{-2}} - \frac{z}{z - e^{-1}}$$
Iz predavanja je poznato:
$$\alpha^n \mu(n) \mapsto \frac{z}{z - \alpha}, \text{za } |z| > |\alpha|$$
$$-\alpha^n \mu(-n-1) \mapsto \frac{z}{z - \alpha}, \text{za } |z| < |\alpha|$$
Pa slijedi:

a. Ako je $|z| > e^{-1}$ vrijedi i $|z| > e^{-2}$, pa se oba dijela $H(z)$ pretvaraju pomoću prve relacije:
$$h(n) = (e^{-2n} - e^{-n})\mu(n).$$
Ovakav signal je kauzalan.

b. Ako je $|z| < e^{-1}$ i $|z| > e^{-2}$, onda se dio $H(z)$ pretvara pomoću prve, a dio pomoću druge relacije:
$$h(n) = e^{-2n}\mu(n) + e^{-n}\mu(-n-1).$$
Ovaj signal je svevremenski.

c. Ako je $|z| < e^{-2}$ vrijedi i $|z| < e^{-1}$, pa se oba dijela $H(z)$ pretvaraju pomoću druge relacije:
$$h(n) = (-e^{-2n} + e^{-n})\mu(-n-1).$$
Ovaj signal je antikauzalan.

2. Poznat je impulsni odziv LTI sustava u vremenskoj domeni $\{\ldots,0,\underline{2},1,0,-1,0,0,0,\ldots\}$. Nađite odziv sustava na pobudu $\{\ldots,0,\underline{0},1,2,1,0,0,\ldots\}$ koristeći:
   a. konvolucijsku sumaciju,
   b. *z* – transformaciju.

   (Podvučena vrijednost je amplituda impulsa u trenutku *n=0*.)

<u>Rješenje:</u>

a. Formula za konvolucijsku sumaciju glasi:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m).$$

Uvrštavajući u formulu možemo izračunati odziv na zadanu pobudu $\{\ldots,0,\underline{0},1,2,1,0,0,\ldots\}$ poznavajući impulsni odziv $\{\ldots,0,\underline{2},1,0,-1,0,0,0,\ldots\}$:

$$y(0) = \sum_{m=0}^{0} u(m)h(0-m) = u(0)h(0) = 0$$

$$y(1) = \sum_{m=0}^{1} u(m)h(1-m) = u(0)h(1) + u(1)h(0) = 0 + 2 = 2$$

$$y(2) = \sum_{m=0}^{2} u(m)h(2-m) = u(0)h(2) + u(1)h(1) + u(2)h(0) = 1 + 4 = 5$$

$$y(3) = \sum_{m=0}^{3} u(m)h(3-m) = 2 + 2 = 4$$

$$y(4) = \sum_{m=0}^{4} u(m)h(4-m) = -1 + 1 = 0$$

$$y(5) = \sum_{m=0}^{5} u(m)h(5-m) = -2$$

$$y(6) = \sum_{m=0}^{6} u(m)h(6-m) = -1$$

$$y(5) = \sum_{m=0}^{7} u(m)h(7-m) = 0 \ldots$$

Traženi odziv je $y(n) = \{\ldots,0,\underline{0},2,5,4,0,-2,-1,0\ldots\}$.

b. Zadana je pobuda $u(n) = \{\ldots,0,\underline{0},1,2,1,0,0,\ldots\}$.
Koristeći $\delta(n) \longmapsto 1$ i $\delta(n-m) \longmapsto z^{-m}$, njezina Z-transformacija je

$$U(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}.$$

Impulsni odziv je $h(n) = \{\ldots,0,\underline{2},1,0,-1,0,0,\ldots\}$. Njegova Z-transformacija je

$$H(z) = 2 + z^{-1} - z^{-3}.$$

Kako je Z-transformacija impulsnog odziva zapravo prijenosna funkcija vrijedi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)},$$

pa je zato odziv sustava

$$Y(z) = H(z)U(z).$$

Za zadane signale je

$$Y(z) = (2 + z^{-1} - z^{-3})(z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}) =$$

$$= 2z^{-1} + 5z^{-2} + 4z^{-3} - 2z^{-5} - z^{-6},$$

odnosno u vremenskoj domeni

$$y(n) = \{\dots, 0, \underline{0}, 2, 5, 4, 0, -2, -1, 0 \dots\}.$$

Kako je vidljivo, rješenja bilo kojom od ovih metoda su jednaka.
Poopćeno: konvolucija u vremenskoj domeni odgovara množenju u Z-domeni

$$h(n) * u(n) \longmapsto H(z)U(z).$$

3. Sustav je zadan prijenosnom funkcijom:

$$H(z) = \frac{2z(3z-23)}{(25-6z+z^2)(z-1)^2}$$

Odredite:

a. razvojem u red (dijeljenje razlomaka) amplitudu trećeg elementa niza uz impulsnu pobudu;
b. impulsni odziv sustava u vremenskoj domeni koristeći parcijalne razlomke.

<u>Rješenje:</u>

a. Dijeljenje polinoma s polinomom

$$\begin{array}{l}
(6z^2-46z):(z^4-8z^3+38z^2-56z+25) = 6z^{-2}+2z^{-3}-212z^{-4}+\cdots \\
\underline{-6z^2+48z-228+336z^{-1}-150z^{-2}} \\
\quad 2z-228+336z^{-1}-150z^{-2} \\
\quad \underline{-2z+\ \ 16-\ \ 76z^{-1}+112z^{-2}-50z^{-3}} \\
\qquad -212+260z^{-1}-38z^{-2}-50z^{-3}
\end{array}$$

Kako je potencija od *z* zapravo kašnjenje impulsa, $\delta(n-m) \longmapsto z^{-m}$, traženi impulsni odziv se očita:

$$h(n) = 6\delta(n-2) + 2\delta(n-3) - 212\delta(n-4) + \cdots$$

Ili drugačiji zapis:

$$h(n) = \{\dots,0,\underline{0},0,6,2,-212,\dots\}$$

U koraku $n = 3$ odziv sustava ima vrijednost 2.

b. Drugi način vraćanja u vremensku domenu je korištenjem rastava na parcijalne razlomke.

$$H(z) = \frac{2z(3z-23)}{(25-6z+z^2)(z-1)^2}$$

$$H(z) = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{z-3+4j} + \frac{Dz}{z-3-4j}$$

Nepoznate koeficijente nalazimo tako da sve svedemo na zajednički nazivnik, te izjednačimo lijevu i desnu stranu (odnosno ovdje gornji i donji redak):

$$Az(z-1)(z^2-6z+25) + Bz(z^2-6z+25) + Cz(z-1)^2(z-3-4j) \\ + Dz(z-1)^2(z-3+4j) = 2z(3z-23)$$

Rješavanjem četiri jednadžbe sa četiri nepoznanice pronalazimo konstante:

$$A = -\frac{1}{10}, B = -2, C = \frac{2+9j}{40}, D = \frac{2-9j}{40}.$$

Prijenosna funkcija se sada može napisati u obliku

$$H(z) = -\frac{1}{10}\frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2+9j}{40}\frac{z}{z-3+4j} + \frac{2-9j}{40}\frac{z}{z-3-4j}.$$

Vraćanjem u vremensku domenu:

$$h(n) = \frac{1}{40}(-4 - 80n + (2 + 9j)(3 - 4j)^n + (2 - 9j)(3 + 4j)^n)\mu(n).$$

Kako zadani sustav posjeduje realne koeficijente i rješenje bi bilo trebalo napisati sa istima:

$$\frac{1}{20} + \frac{9}{40}j = 0.23e^{1.35j} \qquad 3 + 4j = 5e^{0.927j}$$

$$\frac{1}{20} - \frac{9}{40}j = 0.23e^{-1.35j} \qquad 3 - 4j = 5e^{-0.927j}$$

Pa je impulsni odziv:

$$\begin{aligned} h(n) &= \left[-\frac{1}{10} - 2n + 0.23e^{1.35j}5^n e^{-0.927nj} + 0.23e^{-1.35j}5^n e^{0.927nj}\right]\mu(n) = \\ &= \left[-\frac{1}{10} - 2n + 0.23 \cdot 5^n \left[e^{(1.35-0.927n)j} + e^{-(-0.927n+1.35)j}\right]\right]\mu(n) = \\ &= \left[-\frac{1}{10} - 2n + 0.46 \cdot 5^n \cos(0.927n - 1.35)\right]\mu(n) \end{aligned}$$

4. LTI sustav je zadan jednadžbom diferencija:

$$y(n+2)-y(n+1)=4u(n+2)-3u(n+1)+u(n)$$

Neka je pobuda $u(n)=\mu(n)+\mu(n-1)$, a početni uvjeti $y(-1)=1, y(-2)=1$.

   a. Nađite prijenosnu funkciju sustava.
   b. Nađite odziv mirnog sustava.
   c. Nađite odziv nepobuđenog sustava.

Rješenje:

a. Prijenosna funkcija dobiva se korištenjem Z-transformacije uz početne uvjete jednake nuli.

$$z^2Y(z)-zY(z)=4z^2U(z)-3zU(z)+U(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{4z^2-3z+1}{z^2-z}$$

b. Računanje početnih uvjeta pobude:

$$u(0)=\mu(0)+\mu(-1)=1$$
$$u(1)=\mu(1)+\mu(0)=2$$

I početnih uvjeta odziva:

$$y(n+2)=4u(n+2)-3u(n+1)+u(n)+y(n+1)$$

$$y(0)=4u(0)-3u(-1)+u(-2)+y(-1)=5$$

$$y(1)=4u(1)-3u(0)+u(-1)+y(0)=10$$

Koristeći svojstva Z-transformacije:

$$y(n+1)\mapsto zY(z)-zy(0)$$

$$y(n+2)\mapsto z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)$$

Pretvaramo:

$$z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)-\big(zY(z)-zy(0)\big)$$
$$=4\big(z^2U(z)-z^2u(0)-zu(1)\big)-3\big(zU(z)-zu(0)\big)+U(z)$$

Uvrštavanje početnih uvjeta:

$$z^2Y(z)-5z^2-10z-zY(z)+5z=4(z^2U(z)-z^2-2z)-3(zU(z)-z)+U(z)$$

$$Y(z)=\frac{4z^2-3z+1}{z^2-z}U(z)+\frac{z^2}{z^2-z}$$

Z-transformacija pobude je:

$$U(z)=\frac{z}{z-1}+z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{1+z}{z-1}.$$

Odziv mirnog sustava je:

$$Y(z) = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z^2 - z} U(z) = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z^2 - z} \cdot \frac{1 + z}{z - 1}$$

Vraćanjem u vremensku domenu:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z - 1} + \frac{D}{(z - 1)^2} = \frac{4z^3 + z^2 - 2z + 1}{z^2(z - 1)^2}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik:

$$Az^3 - 2Az^2 + Az + Bz^2 - 2Bz + B + Cz^3 - Cz^2 + Dz^2 = 4z^3 + z^2 - 2z + 1$$

Uspoređivanjem koeficijenata uz jednake potencije *z*, dobiva se:

$$A = 0, B = 1, C = 4, D = 4.$$

$$Y_m(z) = \frac{1}{z} + \frac{4z}{z - 1} + \frac{4z}{(z - 1)^2},$$

odnosno u vremenskoj domeni:

$$y_m(n) = \delta(n - 1) + 4\mu(n) + 4n\mu(n).$$

c. Nepobuđeni sustav

$$Y_n(z) = \frac{z^2}{z^2 - z} = \frac{z}{z - 1}$$

$$y_n(n) = \mu(n).$$

5. LTI sustav je zadan jednadžbom diferencija:

$$y(n) - y(n-2) = u(n).$$

   a. Nađite prijenosnu funkciju sustava.
   b. Odredite početnu i konačnu vrijednost odziva na jediničnu stepenicu iz z-domene. Je li zadani sustav stabilan?
   c. Nađite odziv na jediničnu stepenicu $\mu(n)$.

Rješenje:

a. Prijenosna funkcija zadanog sustava je

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

b. Pobuda je jedinična stepenica $u(n) = \mu(n)$. Njena Z-transformacija je $U(z) = \frac{z}{z-1}$. Odziv sustava je

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}\frac{z}{z - 1} = \frac{z^3}{(z + 1)(z - 1)^2}.$$

Početna vrijednost odziva može se izračunati iz Z-domene:

$$y(0) = \lim_{z \to \infty} Y(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z^3}{(z + 1)(z - 1)^2} = 1.$$

Konačna vrijednost niza također se može naći iz Z-domene (ukoliko ona postoji):

$$\lim_{n \to \infty} y(n) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})Y(z) =$$
$$= \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{z^3}{(z + 1)(z - 1)^2} =$$
$$= \lim_{z \to 1} \frac{z^2}{z^2 - 1} = \infty.$$

Kako odziv na konačnu pobudu nije konačan, sustav nije stabilan. Promatrajući na drugačiji način – polove sustava, postoje dva pola koji su na rubu stabilnosti. Kako je frekvencija ulaznog signala jednaka vlastitoj frekvenciji sustava, sustav postaje nestabilan.

c. Odziv na jediničnu stepenicu:

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}\frac{z}{z - 1} = \frac{z^3}{z^3 - z^2 - z + 1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

Nakon svođenja na zajednički nazivnik:

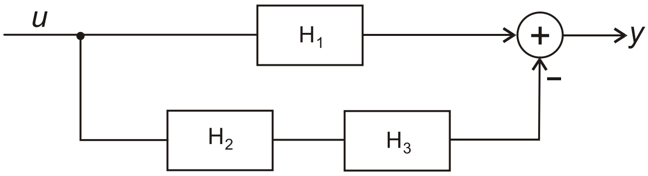
$$Az^2 - 2Az + A + Bz^2 - B + Cz + C = z^2$$

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{4}, C = \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{z + 1} + \frac{\frac{3}{4}z}{z - 1} + \frac{\frac{1}{2}z}{(z - 1)^2}$$

Odnosno u vremenskoj domeni: $y(n) = \left(\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n\right)\mu(n)$.

6. Složeni mirni diskretni sustav zadan je slikom:



Koliki je impulsni odziv drugog podsustava $h_2(n)$ ako je impulsni odziv prvog podsustava $h_1(n) = \{\underline{0}, 0, 1, 3, 3, 3, 3, \dots\}$, impulsni odziv trećeg podsustava $h_3(n) = \{\underline{0}, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots\}$, te prijenosna funkcija sustava $H(z) = 0$?

Rješenje:

Impulsni odziv prvog podsustava je $h(n) = \{\underline{0}, 0,1,3,3, \dots\}$. Njegova prijenosna funkcija glasi:

$$H_1(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \cdots = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{z^i} = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z+2}{z^2(z-1)}.$$

Impulsni odziv trećeg podsustava je $h(n) = \{\underline{0}, 0,1,2,0,1,2,0, \dots\}$. Njegova prijenosna funkcija glasi:

$$\begin{aligned}H_3(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \frac{2}{z^6} + \cdots = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \cdots\right) + \frac{2}{z^3}\left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \cdots\right)\\ &= \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right)\left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \cdots\right) = \frac{z+2}{z^3}\cdot\sum_{i=0}^{\infty} z^{-3i} = \frac{z+2}{z^3}\cdot\frac{1}{1-z^{-3}} = \frac{z+2}{z^3}\cdot\frac{z^3}{z^3-1}\\ &= \frac{z+2}{(z-1)(z^2+z+1)}.\end{aligned}$$

Prijenosna funkcija cijelog sustava može se dobiti iz slike: $H_1(z)$ je paralelan kaskadi $H_2(z)\cdot H_3(z)$. Taj ukupni sustav mora imati prijenosnu funkciju jednaku nuli:

$$H_1(z) - H_2(z)H_3(z) = 0.$$

Prijenosna funkcija drugog sustava je onda $H_2(z) = \frac{H_1(z)}{H_3(z)}$

$$H_2(z) = \frac{z+2}{z^2(z-1)} : \frac{z+2}{(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{z^2+z+1}{z^2}.$$

Impulsni odziv se dobije vraćajući ovu prijenosnu funkciju u vremensku domenu:

$$h_2(n) = \{\underline{1}, 1,1,0,0, \dots\}.$$

Laplaceova transformacija

1. Zadan je kontinuiran sustav

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = u(t) + 3u'(t),$$

$y(0^-) = 3, y'(0^-) = 0$. Pronađite odziv sustava na pobudu $u(t)$=2$\mu(t)$.

   a. U vremenskoj domeni (homogeno + partikularno).
   b. Pomoću Laplaceove transformacije.

Rješenje:

a. Karakteristična jednadžba

$$s^2 - 5s + 6 = 0$$

$$s_1 = 2, s_2 = 3.$$

Pa je homogeno rješenje $y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.

Kako se pobuda sastoji od dva dijela: $u(t) + 3u'(t)$, a sustav je LTI, možemo tražiti odziv na svaku pobudu posebno. Tako imamo jednadžbu

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 2\mu(t),$$

Čije je partikularno rješenje $y_p(t) = K \rightarrow\ 6K\ = 2 \rightarrow K = \frac{1}{3}$:

$$y_{p1}(t) = \frac{1}{3}.$$

Druga jednadžba je

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 6\delta(t).$$

Ovdje moramo naći impulsni odziv:

$$h_A(t) = y_h(t)$$

$$h_A(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$h_A'(t) = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t},$$

$$h_A'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 1,$$

$$C_1 = -1, C_2 = 1.$$

Pa je $h_A(t) = -e^{2t} + e^{3t}$.

Impulsni odziv je $h(t) = 6h_A(t) = -6e^{2t} + 6e^{3t}$.

Totalno rješenje je $y(t) = y_h(t) + y_{p1}(t) + h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{3} - 6e^{2t} + 6e^{3t}$.

Konstante C_1 i C_2 tražimo iz početnih uvjeta. Njih prvo moramo pretvoriti:

$$y\ (0^+) - y(0^-) = 0 \rightarrow y(0^+) = 3,$$

$$y'(0^+) - y'(0^-) = u(0^+) + 5 \cdot \big(y(0^+) - y(0^-)\big) = 3 \cdot 2 \rightarrow y'(0^+) = 6.$$

Tako imamo:

$$y(0^+) = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} - 6 + 6 = 3$$

$$y'(0^+) = 2C_1 + 3C_2 - 12 + 18 = 6$$

Pa su tražene konstante $C_1 = 8, C_2 = -\frac{16}{3}$.

Totalni odziv je

$$y(t) = \left(8e^{2t} - \frac{16}{3}e^{3t} + \frac{1}{3} - 6e^{2t} + 6e^{3t}\right)\mu(t) = \left(2e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}\right)\mu(t).$$

b. Jednadžbu možemo riješiti i koristeći Laplaceovu transformaciju. U tu svrhu koristimo svojstvo deriviranja originala:

$$y'(t) \to sY(s) - y(0^-)$$

$$y''(t) \to s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)$$

Pa zadani sustav u Laplaceovoj domeni glasi:

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) - 5 \cdot \big(sY(s) - y(0^-)\big) + 6Y(s) = U(s) + 3\big(sU(s) - u(0^-)\big).$$

Uvrštavanjem brojeva:

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) = (1 + 3s)U(s) + 3s - 15$$

Zadana pobuda kada se pretvori u Laplaceovu domenu: $u(t) = 2\mu(t) \to U(s) = \frac{2}{s}$.

Odziv sustava je

$$Y(s) = \frac{1 + 3s}{s^2 - 5s + 6} \cdot \frac{2}{s} + \frac{3s - 15}{s^2 - 5s + 6}.$$

Kako bi dobili odziv u vremenskoj domeni, *Y(s)* moramo rastaviti na parcijalne razlomke:

$$Y(s) = \frac{3s^2 - 9s + 1}{s(s^2 - 5s + 6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - 2} + \frac{C}{s - 3}$$

$$A(s^2 - 5s + 6) + Bs(s - 3) + Cs(s - 2) = 3s^2 - 9s + 1$$

Tražene konstante su: $A = \frac{1}{3}, B = 2, C = \frac{2}{3}$.

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s} + \frac{2}{s - 2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s - 3}$$

Korištenjem tablica Laplaceove transformacije:

$$y(t) = \left(\frac{1}{3} + 2e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}\right)\mu(t).$$

Dobiveno rješenje jednako je onome dobivenom računajući u vremenskoj domeni.

2. Zadan je kontinuirani sustav

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t).$$

   a. Nađite impulsni odziv sustava koristeći Laplaceovu transformaciju.
   b. Nađite odziv sustava u vremenskoj domeni ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = (12t + 16)\mu(t)$ te ako su početni uvjeti $y(0^-) = 3, y'(0^-) = -8$. Riješite sa i bez korištenja Laplaceove transformacije.

<u>Rješenje:</u>

   a. Ako je pobuda $u(t) = \delta(t)$, onda je $U(s) = 1$. Pa je $Y(s) = H(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$. U vremenskoj domeni je to $y(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})\mu(t)$.
   b. $y(t) = (-4e^{-2t} + 6e^{-3t} + 1 + 2t)\mu(t)$.

3. Zadan je impulsni odziv kontinuiranog LTI sustava $h(t) = 2te^{-t}\mu(t)$. Pronađite:
   a. prijenosnu funkciju sustava,
   b. odziv sustava, ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = 2\mu(t)$ te ako su početni uvjeti $y(0^-) = 2, y'(0^-) = 0$.

<u>Rješenje:</u>

   a. Direktnim korištenjem Laplaceove transformacije izlazi prijenosna funkcija $H(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$. Impulsni odziv u vremenu je prijenosna funkcija u Laplaceovoj domeni.
   b. Iz prijenosne funkcije slijedi diferencijalna jednadžba
   $$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2u(t).$$
   Rješavanjem ove jednadžbe izlazi rješenje $y(t) = \big((-2 - 2t)e^{-t} + 4\big)\mu(t)$.

4. Kontinuirani kauzalni LTI sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y'(t) + 4y(t) = u(t) + 2u'(t)$$

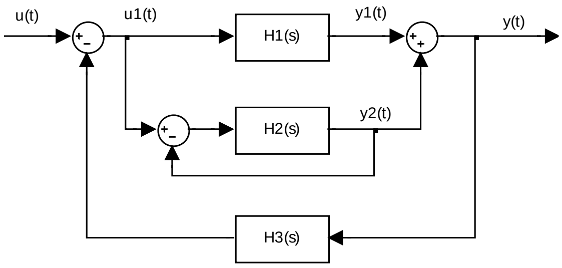
pobuđen je signalom $u(t) = \mu(t)$. Početni uvjet je $y(0^-) = 2$.

   a. Izračunajte početni uvjet u $y(0^+)$.
   b. Odredite odziv sustava na zadanu pobudu rješavanjem jednadžbe u vremenskoj domeni.
   c. Odredite odziv sustava na zadanu pobudu korištenjem Laplaceove transformacije.
   d. Odredite prijenosnu funkciju sustava. Je li sustav stabilan?

<u>Rješenje:</u>

   a. Početni uvjet izlazi iz $y(0^+) - y(0^-) = 2u(0^+)$, $y(0^+) = 4$.
   b. Homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{-4t}$.
      Partikularno rješenje $y_p(t) = K = \frac{1}{4}$.
      Ukupno rješenje $y(t) = \left(\frac{15}{4}e^{-4t} + \frac{1}{4}\right)\mu(t)$.
   c. Korištenjem Laplacea i pretvaranjem zadane diferencijalne jednadžbe uzevši u obzir početne uvjete $Y(s) = U(s)\left(2 - \frac{7}{s+4}\right) + \frac{2}{s+4}$.
      Laplaceova transformacija od zadane pobude je $U(s) = \frac{1}{s}$.
      Odziv u L-domeni $Y(s) = \frac{1}{4}s + \frac{\frac{15}{4}}{s+4}$, dok u vremenskoj iznosi $y(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{15}{4}e^{-4t}\right)\mu(t)$.
   d. Prijenosna funkcija sustava $H(s) = \frac{2s+1}{s+4}$. Pol sustava je $s = -4$, što je manje od nula, pa je sustav stabilan.

5. Kontinuirani sustav prikazan je pomoću blokovskog dijagrama. Odredite ekvivalentnu prijenosnu funkciju cijelog sustava. Ako su dani podsustavi kauzalni, s prijenosnim funkcijama: $H_1(s) = \frac{1}{s+2}$, $H_2(s) = \frac{1}{s+1}$, $H_3(s) = \frac{1}{s+4}$, ispitati stabilnost cijelog sustava. Naći odziv sustava na jedinični skok (početni uvjeti su nula).



Rješenje:

Podsustav $H_2(s)$ ima povratnu vezu, pa je prijenosna funkcija tog dijela sustava

$$(U_1 - Y_2)H_2 = Y_2 \rightarrow U_1 H_2 = Y_2(1 + H_2) \rightarrow \frac{Y_2}{U_1} = \frac{H_2}{1 + H_2}.$$

Ovakav sustav je u paraleli sa $H_1(s)$: $H' = H_1 + \frac{H_2}{1+H_2}$. Ta prijenosna funkcija ima povratnu vezu sa $H_3(s)$ → $(U - YH_3)H' = Y$. Ukupna prijenosna funkcija je:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H'}{1 + H'^{H_3}} = \frac{H_1 + \frac{H_2}{1 + H_2}}{1 + H_3\left(H_1 + \frac{H_2}{1 + H_2}\right)} = \frac{H_1 + H_1 H_2 + H_2}{1 + H_2 + H_1 H_3 + H_1 H_2 H_3 + H_2 H_3}.$$

Ako su prijenosne funkcije podsustava $H_1(s) = \frac{1}{s+2}$, $H_2(s) = \frac{1}{s+1}$ i $H_3(s) = \frac{1}{s+4}$, prijenosna funkcija cijelog sustava je:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2}\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+1}\frac{1}{s+4}} = \frac{2s+4}{s^2 + 6s + 10}.$$

Polovi ovakvog sustava su $s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = -3 \pm i$.

Kako se radi o kontinuiranim sustavima, realni dijelovi svih polova moraju biti manji od nule da bi sustav bio stabilan. Kako je to ovdje slučaj, sustav je stabilan.

Odziv sustava na jedinični skok $u(t) = \mu(t) \rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$ iznosi:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{2s+4}{s^2+6s+10}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+6s+10} = \frac{2}{5}\frac{1}{s} + \frac{-\frac{2}{5}s - \frac{2}{5}}{s^2+6s+10}$$
$$= \frac{2}{5}\frac{1}{s} - \frac{2}{5}\frac{s+3}{(s+3)^2+1} + \frac{4}{5}\frac{1}{(s+3)^2+1}$$

Odnosno u vremenskoj domeni $y(t) = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\cos t\, e^{-3t} + \frac{4}{5}\sin t\, e^{-3t}\right)\mu(t)$.