Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

8. svibnja 2013.

Vremenski diskretni sustavi – model uzlaz-izlaz

- razmatraju se vremenski diskretni sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom, opisani s modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- razmatramo vremenski diskretne sustave opisane s jednadžbama diferencija
- osnovni cilj u analizi dinamičkih sustava je odrediti odziv (izlaz) sustava na pobudu (ulaz) sustava, uzimajući u obzir interna stanja sustava (početna stanja sustava)
- ovaj cilj se ostvaruje rješavanjem jednadžbi diferencija

Vremenski diskretni sustavi – primjer

- razmatra se sustav za generiranja jeke (eho efekta) signala, koji se može opisati jednadžbom diferencija

$$y(n) = u(n) + \alpha y(n - N), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

neka su $N = 4, \quad \alpha = 0.6, \quad y(n) = 0$ za $n < 0, \quad$ i

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- jednadžba je

$$y(n) = u(n) + 0.6y(n - 4), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- odziv ovog sustava, za $n \in \mathbb{Z}$, određuje se rješavanjem ove jednadžbe

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- jednadžbu $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$ rješavamo korak po korak
- iz jednadžbe je očigledno da za određivanje odziva, za $n \geq 0$, treba poznavati pobudu $u(n)$ za $n \geq 0$, i četiri prethodne vrijednosti odziva, $y(n-1)$, $y(n-2)$, $y(n-3)$, $y(n-4)$,
- odziv ovog sustava određujemo za $n \geq 0$, pa u izračunavanju $y(0)$ treba poznavati početne uvjete (interna stanja sustava) $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$, $y(-4)$,
- u ovom primjeru početni uvjeti neka su jednaki nuli

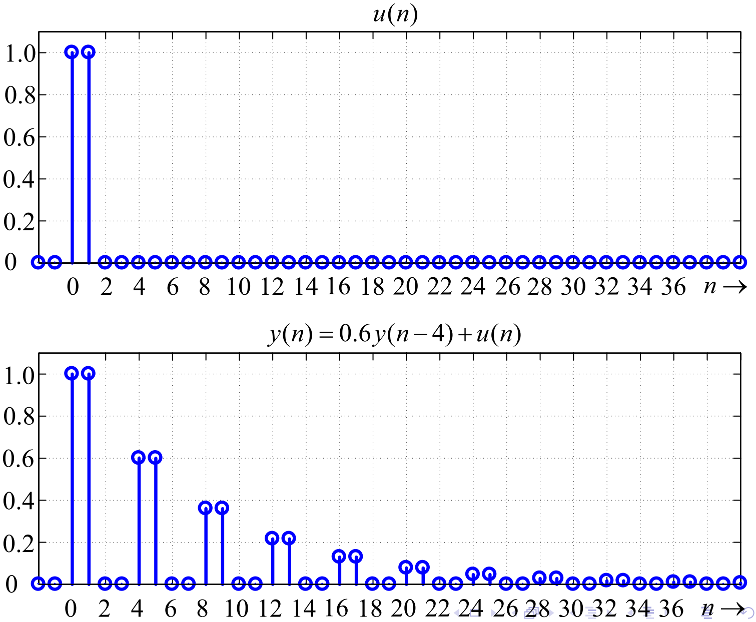
Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- jednadžbu $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$ rješavamo korak po korak, uz $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$ i

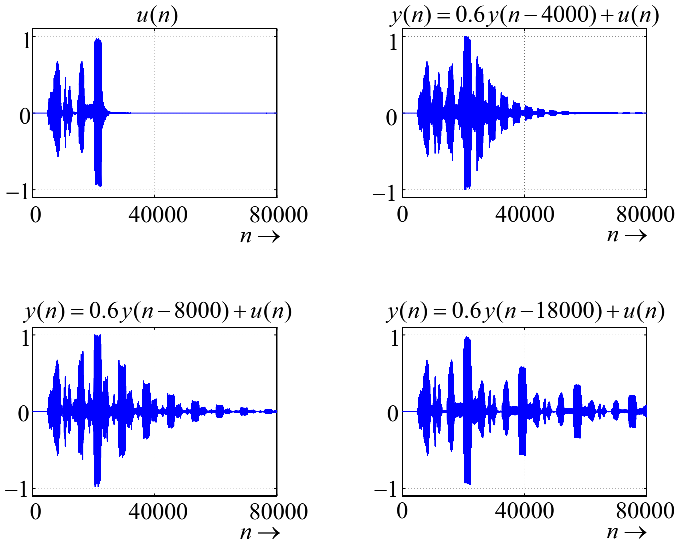
$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll}
n = 0 & y(0) = u(0) + 0.6y(-4) & = 1 + 0.6 \cdot 0 & = 1 \\
n = 1 & y(1) = u(1) + 0.6y(-3) & = 1 + 0.6 \cdot 0 & = 1 \\
n = 2 & y(2) = u(2) + 0.6y(-2) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 3 & y(3) = u(3) + 0.6y(-1) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 4 & y(4) = u(4) + 0.6y(0) & = 0 + 0.6 \cdot 1 & = 0.6 \\
n = 5 & y(5) = u(5) + 0.6y(1) & = 0 + 0.6 \cdot 1 & = 0.6 \\
n = 6 & y(6) = u(6) + 0.6y(2) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 7 & y(7) = u(7) + 0.6y(3) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 8 & y(8) = u(8) + 0.6y(4) & = 0 + 0.6 \cdot 0.6 & = 0.36 \\
n = 9 & y(9) = u(9) + 0.6y(5) & = 0 + 0.6 \cdot 0.6 & = 0.36
\end{array}$$

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija – primjer



Jeka govornog signala



Red sustava

- jednadžbu diferencija $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$, koja opisuje sustav za generiranje jeke, možemo pisati i kao

$$y(n)+0\cdot y(n-1)+0\cdot y(n-2)+0\cdot y(n-3)-0.6y(n-4) = u(n)$$

- dani sustav opisan je jednadžbom diferencija 4–tog reda
- red sustava odgovara redu jednadžbe diferencija
- vremenski diskretan sustav N–tog reda definiran je ulazno–izlaznom jednadžbom diferencija, za $N \geq M$,

$$y(n) = F(y(n-1), \ldots, y(n-N), u(n), u(n-1), \ldots, u(n-M), n)$$

- u najopćenitijem slučaju $N = M$

Linearan vremenski diskretan sustav N-tog reda

- linearan, vremenski stalan, vremenski diskretan sustav N–tog reda definiran je kao

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = \\ = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \ldots + b_{N-1} u(n-N+1) + b_N u(n-N)$$

gdje su koeficijenti $\{a_m\}$ i $\{b_m\}$ realne konstante[1]

- gornju jednadžbu možemo zapisati i kao

$$\sum_{m=0}^{N} a_m y(n-m) = \sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m), \quad \text{za } a_0 = 1, \quad \text{ili}$$

$$y(n) + \sum_{m=1}^{N} a_m y(n-m) = \sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m)$$

[1] Ako je neki od koeficijenata funkcija vremena tada govorimo o vremenski varijantnom sustavu koje ne razmatramo u okviru ovog predmeta

Linearan vremenski diskretan sustav N-tog reda

- u literaturi se navodi i drugi oblik zapisa jednadžbe diferencija

$$y(n+N)+a_1y(n+N-1)+\ldots+a_{N-1}y(n+1)+a_Ny(n)=$$
$$=b_0u(n+N)+b_1u(n+N-1)+\ldots+b_{N-1}u(n+1)+b_Nu(n)$$

- ovaj zapis se uglavnom koristi u matematičkoj literaturi i potpuno je ekvivalentan s prije danim
- naime, supstitucijom $n=n'-N$, u gornjoj jednadžbi, dolazimo u polazni oblik jednadžbe diferencija za sustav N-tog reda
- ilustrirajmo tu ekvivalenciju na primjeru sustava drugog reda

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- razmatra se sustav drugog reda pobuđen s pobudom $u(n) = (0.5)^n \mu(n)$, dakle pobuda započinje u $n = 0$
- razmotrimo tri jednadžbe diferencija koje opisuju isti sustav drugog reda

$$y(n+2) + 0.5y(n+1) + 0.06y(n) = u(n+1) \qquad (1)$$
$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = u(n-1) \qquad (2)$$
$$y(n+1) + 0.5y(n) + 0.06y(n-1) = u(n) \qquad (3)$$

- do jednadžbe (2) dolazimo pomakom jednadžbe (1) za dva koraka unazad, a do jednadžbe (3) pomakom za jedan korak unazad[2]
- sve tri jednadžbe daju identičan odziv ali samo onda ako su kroz njih korektno propagirani početni uvjeti

[2] Uočiti kako se u sva tri slučaja radi o jednadžbi diferencija drugog reda jer razlika najviše i najniže diferencije iznosi 2

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- za $n = 0$, jednadžba (1) prelazi u

$$y(2) + 0.5y(1) + 0.06y(0) = u(1)$$

  pa, uz poznati $u(1)$, $y(0)$ i $y(1)$ predstavljaju početne uvjete za izračun $y(2)$
- $y(0)$ i $y(1)$ su rezultat djelovanja pobude $u(n)$, za $n \geq 0$, i početnih uvjeta (internih stanja sustava) prije djelovanja pobude
- neka su $y(0) = 1$ i $y(1) = -1$
- slično
  - odziv sustava prema jednadžbi (2) je za $n \geq 0$ pa su potrebni početni uvjeti $y(-2)$ i $y(-1)$
  - odziv sustava prema jednadžbi (3) je za $n \geq 1$ pa su potrebni početni uvjeti $y(-1)$ i $y(0)$

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- neka su zadani početni uvjeti $y(0) = 1$ i $y(1) = -1$ koji se koriste u određivanju odziva prema jednadžbi (1)

$$y(n+2) + 0.5y(n+1) + 0.06y(n) = u(n+1)$$

- početni uvjeti $y(-2)$ i $y(-1)$ potrebni u određivanju odziva prema jednadžbi (2) određuju se iz gornje jednadžbe za $n = -1$ i $n = -2$

za $n = -1$ i uz $y(0) = 1$ i $y(1) = -1,$ slijedi

$$\underbrace{y(1)}_{-1} + 0.5\underbrace{y(0)}_{1} + 0.06y(-1) = \underbrace{u(0)}_{0.5^0=1} \Rightarrow y(-1) = 25$$

za $n = -2$ slijedi

$$\underbrace{y(0)}_{1} + 0.5\underbrace{y(-1)}_{25} + 0.06y(-2) = \underbrace{u(-1)}_{0} \Rightarrow y(-2) = -225$$

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- finalno, odziv sustava, na pobudu $u(n) = (0.5)^n \mu(n)$, bit će, uz dane početne uvjete, identičan za sve tri jednadžbe

$$y(n+2) + 0.5y(n+1) + 0.06y(n) = u(n+1),$$
$$y(1) = -1, \quad y(0) = 1$$

$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = u(n-1),$$
$$y(-1) = 25, \quad y(-2) = -225$$

$$y(n+1) + 0.5y(n) + 0.06y(n-1) = u(n),$$
$$y(0) = 1, \quad y(-1) = 25$$

Iterativno određivanje odziva vremenski diskretnih sustava

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- ilustracija odziva, na pobudu $u(n) = (0.5)^n \mu(n)$, sustava opisanog jednadžbom, uz $y(-1) = 25$ i $y(-2) = -225$,

$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = u(n-1)$$

$$n = 0 \quad y(0) + 0.5\underbrace{y(-1)}_{25} + 0.06\underbrace{y(-2)}_{-225} = \underbrace{u(-1)}_{0} \Rightarrow y(0) = 1$$

$$n = 1 \quad y(1) + 0.5\underbrace{y(0)}_{1} + 0.06\underbrace{y(-1)}_{25} = \underbrace{u(0)}_{1} \Rightarrow y(1) = -1$$

$$n = 2 \quad y(2) + 0.5\underbrace{y(1)}_{-1} + 0.06\underbrace{y(0)}_{1} = \underbrace{u(1)}_{0.5} \Rightarrow y(2) = 0.94$$

$$n = 3 \quad y(3) + 0.5\underbrace{y(2)}_{0.94} + 0.06\underbrace{y(1)}_{-1} = \underbrace{u(2)}_{0.25} \Rightarrow y(3) = -0.16$$

$$n = 4 \quad y(4) + 0.5\underbrace{y(3)}_{-0.16} + 0.06\underbrace{y(2)}_{0.94} = \underbrace{u(3)}_{0.125} \Rightarrow y(4) = 0.1486$$

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- izravni način određivanja odziva diskretnog sustava N-tog reda je izračunavanje $y(n)$ iz

$$y(n) = -\sum_{m=1}^{N} a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m)$$

- kako bi se odredio odziv sustava $y(n)$, potreban je $2N+1$ podatak
  - N prethodnih vrijednosti izlaza $y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N)$
  - N prethodnih vrijednosti ulaza $u(n-1), u(n-2), \ldots, u(n-N)$, i
  - trenutna vrijednost ulaza $u(n)$
- u određivanju vrijednosti izlaza $y(0)$, treba poznavati početne uvjete, $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$, i $u(0)$ (zbog kauzalnosti su ostali $u(-n) = 0$)

Blokovski dijagram jednadžbi diferencija

- jednadžbu diferencija, s kojom je opisan LTI vremenski diskretan sustav,

$$y(n) + \sum_{m=1}^{N} a_m y(n-m) = \underbrace{\sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m)}_{w(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

možemo razložiti na dvije jednadžbe

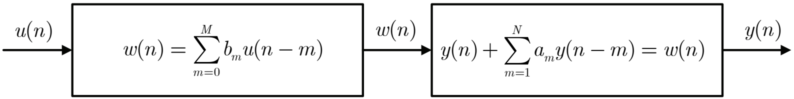
$$w(n) = \sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m)$$

$$y(n) + \sum_{m=1}^{N} a_m y(n-m) = w(n)$$

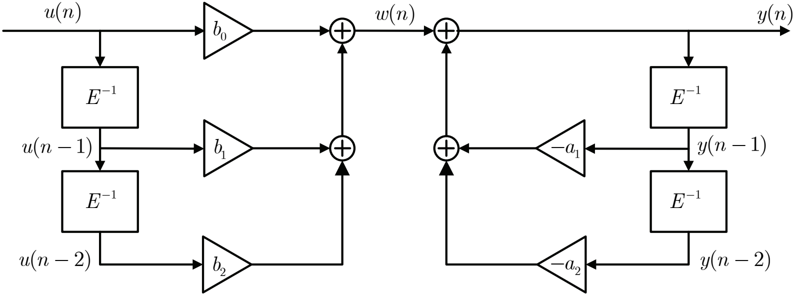
od kojih svaka od njih realizira LTI podsustav polaznog sustava

Blokovski dijagram jednadžbi diferencija

prethodno razlaganje sustava možemo prikazati blokovskim dijagramom

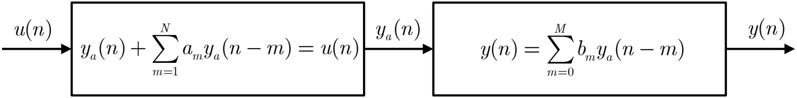


razlaganjem na osnovne blokove postižemo **direktnu realizaciju I** polazne jednadžbe (na slici je $N = M = 2$)

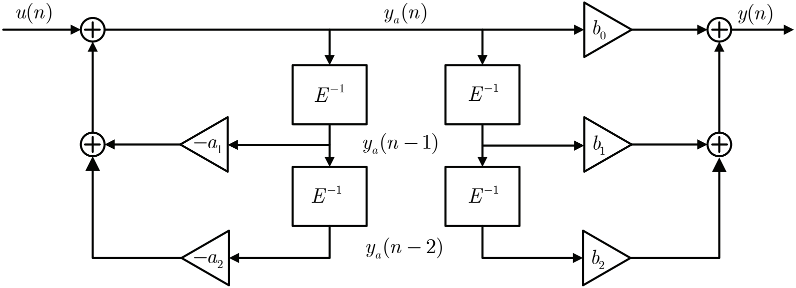


Blokovski dijagram jednadžbi diferencija

zamjenimo li redoslijed LTI podsustava

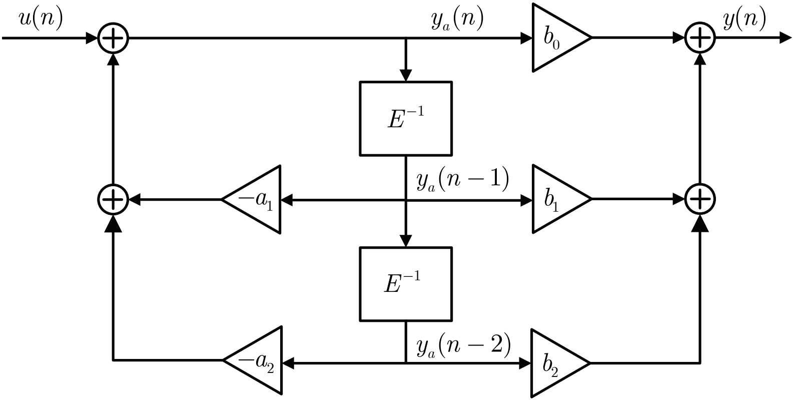


razlaganjem na osnovne blokove za $N = M = 2$ crtamo



Blokovski dijagram jednadžbi diferencija

- prethodni blokovski dijagram reduciramo u **direktnu realizaciju II** polazne jednadžbe diferencija



Operatorski zapis jednadžbe diferencija

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- linearni, vremenski stalni, diskretan sustav opisan je jednadžbom diferencija

$$y(n)+a_1y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)=$$
$$b_0u(n)+b_1u(n-1)+\ldots+b_{N-1}u(n-N+1)+b_Nu(n-N)$$

- jednadžbu zapisujemo pomoću operatora pomaka definiranog kao

za $n \in \mathbb{Z}$

$E^{-1}w(n)=w(n-1)$ – pomak za jedan korak

$E^{-K}w(n)=w(n-K)$ – pomak za K koraka

$$[1+a_1E^{-1}+\ldots+a_{N-1}E^{-N+1}+a_NE^{-N}]y(n)=$$
$$=[b_0+b_1E^{-1}+\ldots+b_{N-1}E^{-N+1}+b_NE^{-N}]u(n)$$

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- operatorski zapis jednadžbe diferencija

$$[1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}] y(n) =$$
$$= [b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}] u(n)$$

skraćeno pišemo kao

$$A(E^{-1}) y(n) = B(E^{-1}) u(n)$$

gdje su $A(E^{-1})$ i $B(E^{-1})$ složeni operatori

$$A(E^{-1}) = 1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}$$
$$B(E^{-1}) = b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}$$

Klasični postupak rješavanja jednadžbi diferencija

Totalno rješenje jednadžbe diferencija

- već je kazano kako se izračunavanje odziva diskretnog sustava svodi na rješavanje jednadžbe diferencija s kojom je sustav opisan
- primjenom klasičnog postupka rješavanja jednadžbi diferencija potrebno je odrediti homogeno i partikularno rješenje jer njihov zbroj predstavlja totalno rješenje jednadžbe

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

- homogeno rješenje je izravno vezano uz početne uvjete, a partikularno rješenje je izravna posljedica funkcije pobude

Totalno rješenje jednadžbe diferencija

- homogeno rješenje $y_h(n)$ je rješenje homogene jednadžbe $A(E^{-1})y(n) = 0$ pa vrijedi

$$A(E^{-1})y_h(n) = 0$$

- partikularno rješenje $y_p(n)$ rješenje je nehomogene jednadžbe $A(E^{-1})y(n) = B(E^{-1})u(n)$ pa vrijedi

$$A(E^{-1})y_p(n) = B(E^{-1})u(n)$$

- jasno je da je totalni odziv $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$ rješenje jednadžbe $A(E^{-1})y(n) = B(E^{-1})u(n)$ jer vrijedi

$$A(E^{-1})[y_h(n) + y_p(n)] = B(E^{-1})u(n)$$

$$\underbrace{A(E^{-1})y_h(n)}_{=0} + A(E^{-1})y_p(n) = B(E^{-1})u(n)$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- izračunavanje odziva diskretnog sustava započinjemo rješavanjem homogene jednadžbe diferencija

$$y_h(n)+a_1 y_h(n-1)+\ldots+a_{N-1} y_h(n-N+1)+a_N y_h(n-N)=0$$

odnosno

$$[1+a_1 E^{-1}+\ldots+a_{N-1} E^{-N+1}+a_N E^{-N}] y_h(n)=0$$

- jednadžba kazuje da je linearna kombinacija $y_h(n)$ i zakašnjelih $y_h(n)$ jednaka nuli za sve vrijednosti n
- ovo je moguće samo onda kada su $y_h(n)$ i svi zakašnjeli $y_h(n)$ istog oblika
- ovaj zahtjev ispunjava eksponencijalna funkcija q^n

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- budući da vrijedi

$$E^{-k}q^n = q^{n-k} = q^{-k}q^n$$

  q^{-k} je konstanta pa je pokazano kako je pomakom eksponencijale sačuvan njezin oblik

- to je razlog da odziv homogene jednadžbe diferencija treba biti oblika

$$y_h(n) = cq^n$$

- c i q izračunavamo iz homogene jednadžbe diferencija

$$cq^n + a_1cq^{n-1} + \ldots + a_{N-1}cq^{n-N+1} + a_Ncq^nq^{-N} = 0$$

$$\underbrace{\left(q^N + a_1q^{N-1} + \ldots + a_{N-2}q^2 + a_{N-1}q + a_N\right)}_{0}cq^{n-N} = 0$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- za netrivijalno rješenje $cq^n \neq 0$ je

$$q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N = 0$$

- prema tome q ima N rješenja
- homogena jednadžba ima isto N rješenja $c_1 q_1^n, c_2 q_2^n, \ldots, c_N q_N^n$ pa je rješenje homogene jednadžbe linearna kombinacija

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- konstante $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz
  - početnih uvjeta kada određujemo odziv nepobuđenog sustava
  - iz početnih uvjeta i totalnog rješenja kada određujemo totalni odziv

Karakteristični polinom, karakteristične frekvencije

- polinom $q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N$ nazivamo karakterističnim polinomom sustava
- jednadžbu $q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N = 0$ nazivamo karakterističnom jednadžbom sustava
- korijeni karakteristične jednadžbe $q_1, q_2, \ldots, q_N$ nazivaju se karakteristične vrijednosti ili karakteristične frekvencije ili vlastite frekvencije ili vlastite vrijednosti
- karakteristične frekvencije mogu biti realne ili kompleksne, jednostruke ili višestruke
- kompleksne karakteristične frekvencije dolaze u konjugiranim parovima što je posljedica realnosti koeficijenata karakterističnog polinoma
- vrijednosti tj. položaj karakterističnih frekvencija u kompleksnoj ravnini definira prijelazni odziv sustava kao i stabilnost sustava

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za višestruke karakteristične vrijednosti

- za karakteristični korijen q_1 višestrukosti m karakteristična jednadžba, u faktoriziranom obliku, je

$$(q - q_1)^m (q - q_{m+1})(q - q_{m+2}) \cdots (q - q_N) = 0$$

- rješenje homogene jednadžbe je tada

$$\begin{aligned} y_h(n) = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \ldots + c_m n^{m-1}) q_1^n + \\ + c_{m+1} q_{m+1}^n + c_{m+2} q_{m+2}^n + \ldots + c_N q_N^n \end{aligned}$$

- korijen $q = 0$ se ne uzima u obzir jer on samo smanjuje red jednadžbe za jedan, odnosno za m u slučaju njegove višestrukosti

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave kompleksni korijeni dolaze u konjugirano kompleksnim parovima
- u određivanju homogenog rješenja jednadžbe diferencija konjugirane kompleksne korijene možemo koristiti na isti način kao i realne
- činjenica da su parovi kompleksnih korijena q i q^* konjugirani može biti iskorištena za alternativni prikaz
- tako je za,

$$q = |q|e^{j\beta} \quad \text{i} \quad q^* = |q|e^{-j\beta}$$

rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q^n + c_2 (q^*)^n = c_1 |q|^n e^{j\beta n} + c_2 |q|^n e^{-j\beta n}$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave je $y_h(n)$ realna funkcija pa konstante c_1 i c_2 moraju biti konjugirane
- za

$$c_1 = \frac{c}{2}e^{j\theta} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{c}{2}e^{-j\theta}$$

proizlazi

$$y_h(n) = \frac{c}{2}|q|^n[e^{j(\beta n+\theta)} + e^{-j(\beta n+\theta)}]$$

odnosno, finalno,

$$y_h(n) = c|q|^n \cos(\beta n + \theta)$$

Partikularno rješenje jednadžbe diferencija

Partikularno rješenje jednadžbe diferencija

- za sustav opisan nehomogenom jednadžbom diferencija potrebno je odrediti i partikularno rješenje
- određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrange-ova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
    - primjena rezultira složenim zbrojevima
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
    - veliki se broj pobuda može aproksimirati gore navedenim nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava

Partikularno rješenje jednadžbe diferencija

- za pobudu polinomom oblika

$$u(n) = A_0 + A_1 n + \ldots + A_M n^M$$

- partikularno je rješenje u obliku polinoma M-tog stupnja

$$y_p(n) = K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M$$

- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

Partikularno rješenje jednadžbe diferencija

- slično vrijedi i za nizove

pobuda $u(n)$	partikularno rješenje $y_p(n)$
A (konstanta)	K
$Ar^n, \quad r \neq q_i (i = 1, 2, \ldots, N)$	Kr^n
$Ar^n, \quad r = q_i$	Knr^n
An^M	$K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M$
$r^n n^M$	$r^n(K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M)$
$Acos(\omega_0 n)$	$K_1 cos(\omega_0 n) + K_2 sin(\omega_0 n)$
$Asin(\omega_0 n)$	$K_1 cos(\omega_0 n) + K_2 sin(\omega_0 n)$

Rješenje jednadžbe diferencija klasičnim postupkom – primjer

Rješenje jednadžbe diferencija klasičnim postupkom – primjer

- odredimo odziv sustava

$$y(n)-0.9y(n-1)+0.2y(n-2) = u(n)+u(n-1)+u(n-2)$$

- na pobudu $u(n) = -9(-0.9)^n$, za $n \geq 0$, te uz početne uvjete $y(-1) = 6$ i $y(-2) = -3$
- prvo se određuje rješenje homogene jednadžbe ovog sustava

$$y(n) - 0.9y(n-1) + 0.2y(n-2) = 0$$

Rješenje homogene jednadžbe – primjer

- pretpostavimo rješenje oblika cq^n i ono mora zadovoljiti homogenu jednadžbu

$$cq^n - 0.9cq^{n-1} + 0.2cq^{n-2} = 0$$

$$cq^{n-2}(q^2 - 0.9q + 0.2) = 0$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$q^2 - 0.9q + 0.2 = 0$$

- korijeni karakteristične jednadžbe – vlastite frekvencije – su

$$q_1 = 0.5 \quad i \quad q_2 = 0.4$$

- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- budući da je pobuda $u(n) = -9(-0.9)^n$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K(-0.9)^n$$

- koeficijent K određujemo metodom neodređenog koeficijenta
- uvrštenjem $y_p(n)$ u polaznu jednadžbu slijedi

$$y_p(n) - 0.9y_p(n-1) + 0.2y_p(n-2) = u(n) + u(n-1) + u(n-2)$$

$$K(-0.9)^n - 0.9K(-0.9)^n(-0.9)^{-1} + 0.2K(-0.9)^n(-0.9)^{-2}$$

$$= -9(-0.9)^n - 9(-0.9)^n(-0.9)^{-1} - 9(-0.9)^n(-0.9)^{-2}$$

$$K\underbrace{[1 - 0.9(-0.9)^{-1} + 0.2(-0.9)^{-2}]}_{2.2469} = \underbrace{-9 \cdot [1 + (-0.9)^{-1} + (-0.9)^{-2}]}_{-10.1111}$$

$\Rightarrow K = -4.5$ pa je partikularno rješenje

$$y_p(n) = -4.5(-0.9)^n, \text{ za } n \geq 0$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- totalno rješenje je $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$

$$y(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n - 4.5(-0.9)^n$$

- izračunavanje $y(0)$ i $y(1)$ potrebnih u izračunavanju c_1 i c_2, a uz $y(-1) = 6$ i $y(-2) = -3$, provodimo iz polazne jednadžbe diferencija

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.2y(n-2) + u(n) + u(n-1) + u(n-2)$$

za $n = 0$

$$y(0) = 0.9\underbrace{y(-1)}_{6} - 0.2\underbrace{y(-2)}_{-3} + \underbrace{u(0)}_{-9} + \underbrace{u(-1)}_{0} + \underbrace{u(-2)}_{0} = -3$$

za $n = 1$

$$y(1) = 0.9\underbrace{y(0)}_{-3} - 0.2\underbrace{y(-1)}_{6} + \underbrace{u(1)}_{-9(-0.9)} + \underbrace{u(0)}_{-9} + \underbrace{u(-1)}_{0} = -4.8$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- pa iz

$$y(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n$$

za $n = 0$ i $n = 1$ određujemo c_1 i c_2

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \quad c_1 + c_2 - 4.5 = -3 \\ y(1) &= \quad 0.5c_1 + 0.4c_2 - 4.5(-0.9) = -4.8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} c_1 &= -94.5 \\ c_2 &= 96 \end{aligned}$$

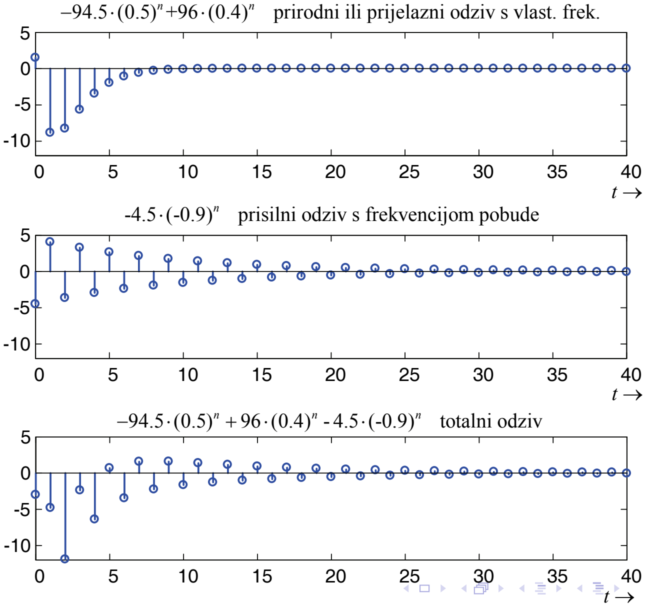
totalni odziv je

$$y(n) = -94.5 \cdot (0.5)^n + 96 \cdot (0.4)^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n$$

pri čemu totalni odziv interpretiramo

$$y(n) = \underbrace{\left(-94.5 \cdot (0.5)^n + 96 \cdot (0.4)^n\right)}_{\substack{\text{prirodni ili} \\ \text{prijelazni odziv} \\ \text{(vlastite frekvencije)}}} + \underbrace{\left(-4.5 \cdot (-0.9)^n\right)}_{\substack{\text{prisilni} \\ \text{odziv} \\ \text{(frekvencija pobude)}}}, \qquad n \geq 0$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer



Odziv linearnog vremenski diskretnog sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i odziva mirnog sustava

Odziv linearnog vremenski diskretnog sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i odziva mirnog sustava

- u interpretaciji inkrementalno linearnih sustava u Cjelini 8 pokazano je da se odziv sustava može interpretirati kao

totalni odziv = odziv nepobuđenog sustava+odziv mirnog sustava

odnosno

$$y(n) = y_0(n) + y_m(n)$$

- odziv nepobuđenog sustava, $y_0(n)$, je komponenta totalnog odziva koja je posljedica samo djelovanja početnih uvjeta (uz pobudu jednaku nula)
- odziv mirnog sustava, $y_m(n)$, je komponenta odziva koja je posljedica djelovanja pobude uz početne uvjete jednake nuli

Odziv nepobuđenog diskretnog sustava

- za nepobuđeni vremenski diskretan sustav N-tog reda, opisan s jednadžbom diferencija N-tog reda, odziv $y_0(n)$ je jednak rješenju homogene jednadžbe diferencija $y_h(n)$, pa je

$$y_0(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- koeficijente $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz N početnih uvjeta $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$

Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije

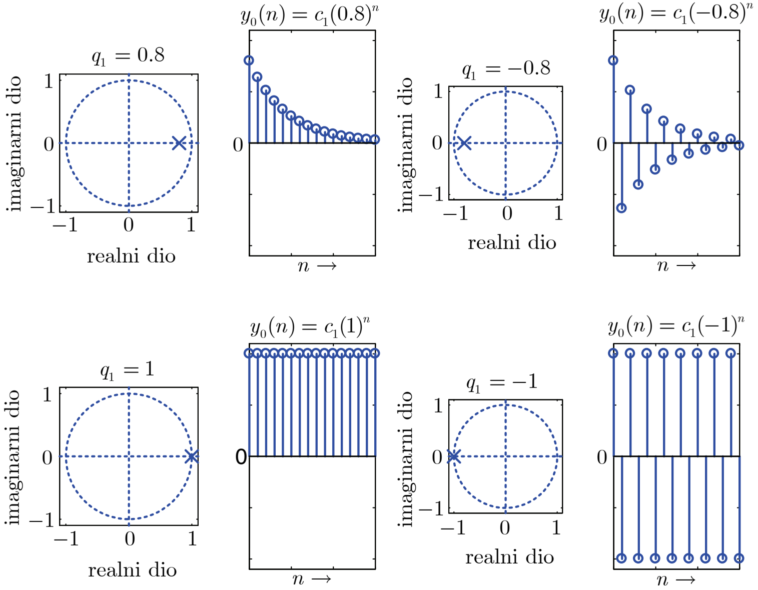
Odziv nepobuđenog diskretnog sustava

- nepobuđeni sustav titra eksponencijalama čije su frekvencije vlastite frekvencije sustava, pa je za pojedinu vlastitu frekvenciju q_1, komponenta nepobuđenog odziva q_1^n
- neka je u općem slučaju $q \in \mathbb{C}$ pa možemo pisati $q = |q|e^{j\beta}$, a kako je modul $|e^{j\beta}| = 1$ za svaki n, slijedi za:

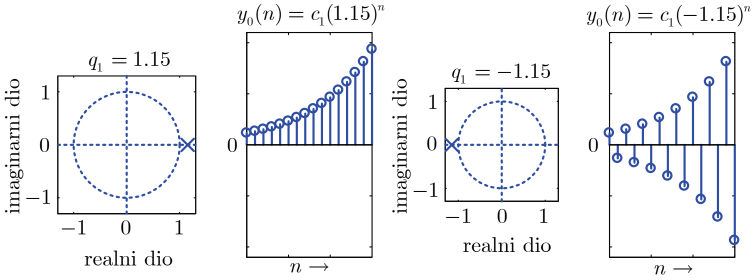
$$
\begin{array}{lll}
|q| < 1 & q^n \to 0 & \text{za } n \to \infty \\
|q| > 1 & q^n \to \infty & \text{za } n \to \infty \\
|q| = 1 & |q|^n = 1 & \text{za } \forall n
\end{array}
$$

- slijede primjeri koji ilustriraju odziv nepobuđenog sustava za razne vrijednosti q

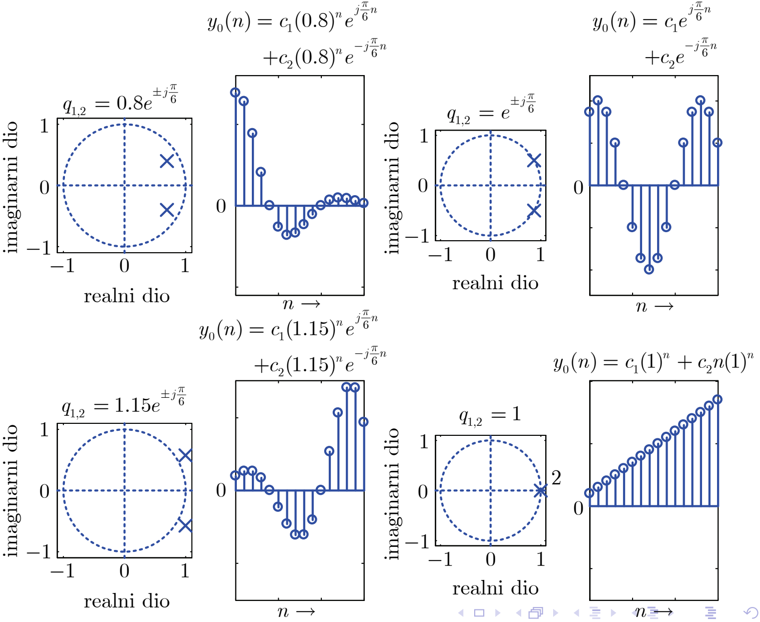
Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv pobuđenog sustava

Odziv pobuđenog sustava

- kako je kazano totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava, dakle

$$y(n) = \sum_{m=1}^{N} c_m q_m^n + \textit{odziv mirnog sustava}$$

- odziv mirnog sustava na bilo koju pobudu možemo odrediti
  - klasičnim rješavanjem jednadžbe diferencija
  - korištenjem konvolucijskog zbroja

Odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- odredimo totalni odziv sustava prije razmatranog sustava (odziv određen klasičnim postupkom rješavanja jednadžbe diferencija)

$$y(n)-0.9y(n-1)+0.2y(n-2) = u(n)+u(n-1)+u(n-2)$$

- na pobudu $u(n) = -9(-0.9)^n$, za $n \geq 0$, te uz početne uvjete $y(-1) = 6$ i $y(-2) = -3$ ali tako da odziv izračunavamo kao zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava
- prvo određujemo odziv nepobuđenog sustava za dane početne uvjete
- u drugom koraku određujemo odziv mirnog sustava na zadanu pobudu

Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- nepobuđeni sustav zadan je jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.9y(n-1) + 0.2y(n-2) = 0,$$

s početnim uvjetima $y(-2) = -3$ i $y(-1) = 6$.

- pretpostavimo rješenje oblika cq^n

$$cq^n - 0.9cq^{n-1} + 0.2cq^{n-2} = 0$$

$$cq^{n-2}(q^2 - 0.9q + 0.2) = 0$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$q^2 - 0.9q + 0.2 = 0$$

Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- korijeni karakteristične jednadžbe su

$$q_1 = 0.5 \quad q_2 = 0.4$$

- pa je rješenje homogene jednadžbe, odnosno odziv nepobuđenog sustava

$$y_h(n) = y_0(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n$$

- konstante c_1 i c_2 određuju se iz početnih uvjeta $y(-2) = -3$ i $y(-1) = 6$ i

$$\left.\begin{aligned} y_h(-1) &= c_1 \cdot 0.5^{-1} + c_2 \cdot 0.4^{-1} = 6 \\ y_h(-2) &= c_1 \cdot 0.5^{-2} + c_2 \cdot 0.4^{-2} = -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 18,\ c_2 = -12$$

pa je odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(n) = 18 \cdot (0.5)^n - 12 \cdot (0.4)^n, \quad n \geq 0$$

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- preostaje odrediti odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n + y_p(n) \quad n \geq 0$$

dakle, treba odrediti partikularno rješenje $y_p(n)$ te c_1 i c_2 za $y(-1) = 0$ i $y(-2) = 0$

- kako je pobuda $u(n) = -9(-0.9)^n$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K \cdot (-0.9)^n$$

- partikularno rješenje je određeno prije (slučaj klasičnog rješavanja jednadžbe diferencija za isti primjer)

$$y_p(n) = -4.5 \cdot (-0.9)^n \quad n \geq 0$$

pa je odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n \quad n \geq 0$$

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- za miran sustav je $y(-1) = y(-2) = 0$
- odziv mirnog sustava je posljedica djelovanja pobude za $n \geq 0$, pa se c_1 i c_2 izračunavaju iz odziva mirnog sustava za $n \geq 0$
- zato je potrebno iz polazne jednadžbe

$$y(n) - 0.9y(n-1) + 0.2y(n-2) = u(n) + u(n-1) + u(n-2)$$

odrediti $y_m(0)$ i $y_m(1)$

za $n = 0$

$$y_m(0) = 0.9\underbrace{y(-1)}_{0} - 0.2\underbrace{y(-2)}_{0} + \underbrace{u(0)}_{-9} + \underbrace{u(-1)}_{0} + \underbrace{u(-2)}_{0} = -9$$

$n = 1$

$$y_m(1) = 0.9\underbrace{y(0)}_{-9} - 0.2\underbrace{y(-1)}_{0} + \underbrace{u(1)}_{-9\cdot(-0.9)} + \underbrace{u(0)}_{-9} + \underbrace{u(-1)}_{0} = -9$$

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- iz rješenja za odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n$$

$$\text{za } n = 0 \Rightarrow y_m(0) = -9 = c_1 + c_2 - 4.5$$
$$\text{za } n = 1 \Rightarrow y_m(1) = -9 = 0.5c_1 + 0.4c_2 - 4.5 \cdot (-0.9)$$

iz dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -4.50 \\ 0.5c_1 + 0.4c_2 &= -13.05 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = -112.5, \; c_2 = 108$$

pa je odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = -112.5 \cdot 0.5^n + 108 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n \quad n \geq 0$$

Totalni odziv sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i mirnog sustava – primjer

- totalni odziv sustava je $y(n) = y_0(n) + y_m(n)$

$$y(n) = \underbrace{18 \cdot (0.5)^n - 12 \cdot (0.4)^n}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} +$$

$$\underbrace{-112.5 \cdot 0.5^n + 108 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n}_{\text{odziv mirnog sustava}} \quad n \geq 0$$

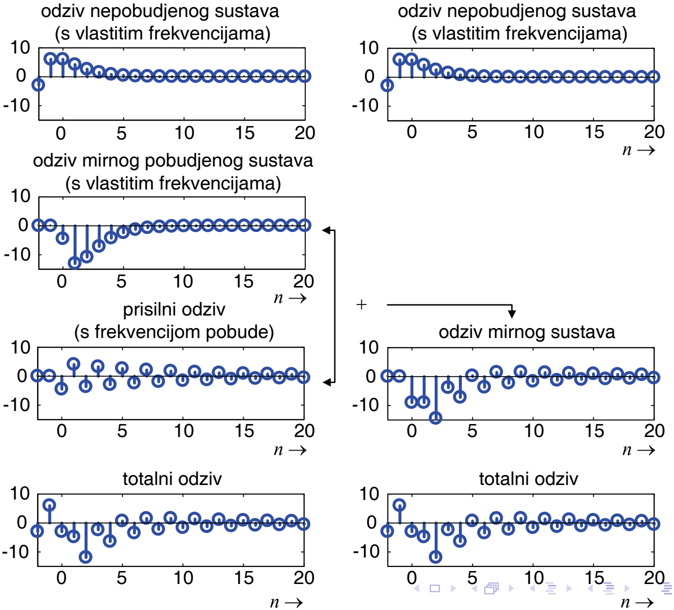
ili, kako je prije pokazano,

$$y(n) = \underbrace{18 \cdot (0.5)^n - 12 \cdot (0.4)^n - 112.5 \cdot 0.5^n + 108 \cdot 0.4^n}_{\text{prirodni odziv}} +$$

$$\underbrace{-4.5 \cdot (-0.9)^n}_{\text{prisilni odziv}}$$

$$y(n) = \underbrace{-94.5 \cdot (0.5)^n + 96(0.4)^n}_{\text{prirodni odziv}} \underbrace{-4.5 \cdot (-0.9)^n}_{\text{prisilni odziv}}, \; n \geq 0$$

Totalni odziv sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i mirnog sustava – primjer



Signali i sustavi školska godina 2012/2013 Cjelina 10.

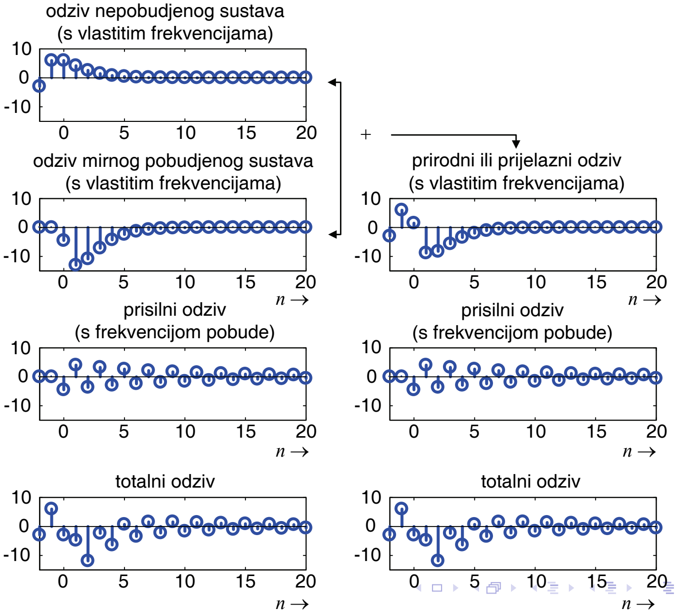
Profesor Branko Jeren

Vremenski diskretni sustavi – opis s jednadžbama diferencija

Odziv linearnih vremenski stalnih diskretnih sustava

Određivanje impulsnog odziva

Totalni odziv sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i mirnog sustava – primjer



Određivanje impulsnog odziva

Određivanje impulsnog odziva

- pokazano je da odziv pobuđenog mirnog sustava možemo odrediti konvolucijskim zbrojem

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m)$$

- potrebno je odrediti impulsni odziv sustava, dakle totalni odziv sustava na pobudu $u(n) = \delta(n)$ uz početne uvjete jednake nuli

Određivanje impulsnog odziva – korak po korak

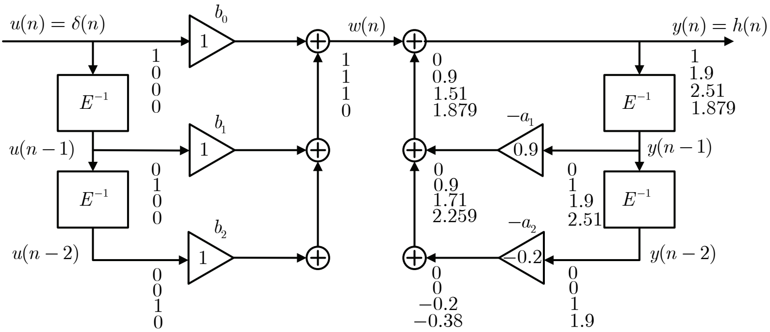
- za prije razmatrani sustav odredimo impulsni odziv $h(n)$
- sustav je bio zadan jednadžbom diferencija

$$y(n)-0.9y(n-1)+0.2y(n-2) = u(n)+u(n-1)+u(n-2)$$

- impulsni odziv određujemo za miran sustav (prije dovođenja pobude interno stanje sustava je nula) $y(-1) = h(-1) = 0$ i $y(-2) = h(-2) = 0$ i pobudu $u(n) = \delta(n)$
- izračun korak po korak ilustriramo na blokovskom dijagramu na narednoj prikaznici (direktna realizacija I)
- uočavamo da vanjska pobuda, Kroneckerov delta u koraku nula, “ubacuje” informaciju (energiju) u sustav čime unutarnje stanje sustava postaje različito od nule
- za korake $n \geq 1$ na ulazu u sustav je nula i sustav se dalje odziva kao nepobuđeni sustav (koji titra zbog postojanja unutarnjeg stanja)

Određivanje impulsnog odziva – korak po korak

$$y(n) = \underbrace{u(n) + u(n-1) + u(n-2)}_{w(n)} + 0.9y(n-1) - 0.2y(n-2)$$



Određivanje impulsnog odziva – 1. način

- odredimo odziv sustava $h(n)$ rješavanjem jednadžbe diferencija
- impulsni odziv određujemo za miran sustav $y(-1) = h(-1) = 0$ i $y(-2) = h(-2) = 0$ i pobudu $u(n) = \delta(n)$ pa pišemo

$$h(n) - 0.9h(n-1) + 0.2h(n-2) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

- očigledno je da gornja jednadžba prelazi u homogenu jednadžbu za $n > 2$ i da se određivanje impulsnog odziva svodi na određivanje rješenja homogene jednadžbe za $n > 2$ uz početne uvjete u $h(1)$ i $h(2)$

Određivanje impulsnog odziva – 1. način

- rješenje homogene jednadžbe ovog sustava, prije određeno, je

$$h(n) = c_1(0.5)^n + c_2(0.4)^n, \quad n > 2 \tag{4}$$

- početni uvjeti $h(1)$ i $h(2)$, potrebni u određivanju konstanti c_1 i c_2, izračunavaju se korak po korak iz polazne jednadžbe

$$h(n) = 0.9h(n-1) - 0.2h(n-2) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$h(0) = 0.9\underbrace{h(-1)}_{0} - 0.2\underbrace{h(-2)}_{0} + \underbrace{\delta(0)}_{1} + \underbrace{\delta(-1)}_{0} + \underbrace{\delta(-2)}_{0} = 1$$

$$h(1) = 0.9\underbrace{h(0)}_{1} - 0.2\underbrace{h(-1)}_{0} + \underbrace{\delta(1)}_{0} + \underbrace{\delta(0)}_{1} + \underbrace{\delta(-1)}_{0} = 1.9$$

$$h(2) = 0.9\underbrace{h(1)}_{1.9} - 0.2\underbrace{h(0)}_{1} + \underbrace{\delta(2)}_{0} + \underbrace{\delta(1)}_{0} + \underbrace{\delta(0)}_{1} = 2.51$$

Određivanje impulsnog odziva – 1. način

- uz sada poznate $h(1)$ i h(2) određujemo konstante c_1 i c_2

$$\left.\begin{array}{l} h(1) = c_1(0.5)^1 + c_2(0.4)^1 = 1.9 \\ h(2) = c_1(0.5)^2 + c_2(0.4)^2 = 2.51 \end{array}\right\} c_1 = 35, \quad c_2 = -39$$

- pa je

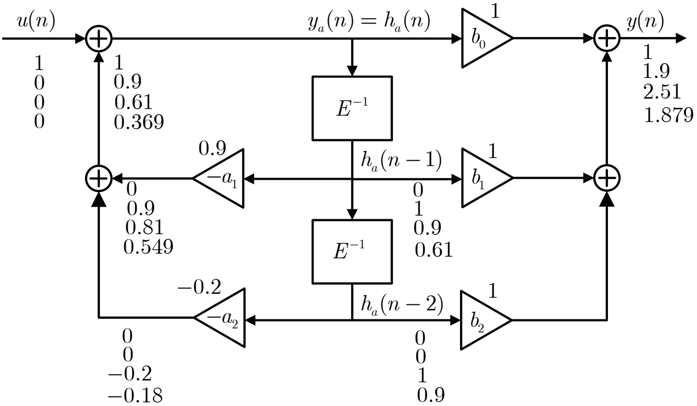
$$h(n) = 35 \cdot (0.5)^n - 39 \cdot (0.4)^n \quad n > 0$$

- gornje rješenje vrijedi za $n > 0$ jer su $h(1)$ i $h(2)$ početni uvjeti koji zadovoljavaju gornju jednadžbu
- preostaje odgovoriti što je se $h(0)$?
- uvidom u blokovski dijagram zaključujemo da postoji izravna veza s ulaza na izlaz pa je za $n = 0$, $h(0) = \delta(n) = 1$, a isto je pokazano izračunom korak po korak
- cjelokupni impulsni odziv je zato

$$h(n) = \delta(n) + [35 \cdot (0.5)^n - 39 \cdot (0.4)^n]\mu(n-1) \quad n \geq 0$$

Određivanje impulsnog odziva – 2. način

- impulsni odziv sustava $h(n)$ možemo odrediti postupkom koji se temelji na razlaganju sustava direktnom realizacijom II



Određivanje impulsnog odziva – 2. način

- impulsni odziv sustava $h(n)$ izračunavamo u dva koraka
- prvo izračunamo impulsni odziv podsustava opisanog jednadžbom

$$h_a(n) - 0.9 \cdot h_a(n-1) + 0.2 \cdot h_a(n-2) = \delta(n)$$

i zatim

$$h(n) = h_a(n) + h_a(n-1) + h_a(n-2)$$

- odredimo $h_a(n)$
- za $n > 0$ rješavamo homogenu jednadžbu

$$h_a(n) - 0.9 \cdot h_a(n-1) + 0.2 \cdot h_a(n-2) = 0$$

čije je rješenje

$$h_a(n) = c_1 \cdot (0.5)^n + c_2 \cdot (0.4)^n \quad n > 0$$

Određivanje impulsnog odziva – 2. način

- uz početne uvjete $h_a(-1) = 0$ i $h_a(0) = 1$ određujemo konstante c_1 i c_2

$$\left.\begin{aligned} c_1 \cdot (0.5)^{-1} + c_2 \cdot (0.4)^{-1} = 0 \\ c_1 \cdot (0.5)^{\,0} + c_2 \cdot (0.4)^{\,0} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 5, \quad c_2 = -4$$

pa je

$$h_a(n) = 5 \cdot (0.5)^n - 4 \cdot (0.4)^n \quad n \geq 0$$

- impulsni odziv sustava, $h(n)$, određujemo iz

$$\begin{aligned} h(n) &= h_a(n) + h_a(n-1) + h_a(n-2) \\ &= 5 \cdot (0.5)^n - 4 \cdot (0.4)^n + 5 \cdot (0.5)^{n-1} - 4 \cdot (0.4)^{n-1} \\ &\quad + 5 \cdot (0.5)^{n-2} - 4 \cdot (0.4)^{n-2} \\ &= 5 \cdot (0.5)^n [1 + (0.5)^{-1} + (0.5)^{-2}] \\ &\quad - 4 \cdot (0.4)^n [1 + (0.4)^{-1} + (0.4)^{-2}] \\ &= 35 \cdot (0.5)^n - 39 \cdot (0.4)^n, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

Određivanje impulsnog odziva – 2. način

- za $n = 0, 1$

$$h(0) = h_a(0) + \underbrace{h_a(-1)}_{0} + \underbrace{h_a(-2)}_{0} = 5 \cdot (0.5)^0 - 4 \cdot (0.4)^0 = 1$$

$$h(1) = h_a(1) + \underbrace{h_a(0)}_{1} + \underbrace{h_a(-1)}_{0} = \underbrace{5 \cdot (0.5)^1 - 4 \cdot (0.4)^1}_{0.9} + 1 = 1.9$$

Samostalni rad studenata

Odziv sustava za generiranje jeke

- treba naći odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- na pobudu

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- neka je sustav miran dakle
  $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$
- za $n > 1$, $u(n) = 0$ i gornja jednadžba postaje homogena

Odziv sustava za generiranje jeke

- dakle, problem rješavanja polazne jednadžbe

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n)$$

svodimo na problem rješavanja homogene jednadžbe

$$y(n) - 0.6y(n-4) = 0 \quad \text{za } n > 1$$

čiji su početni uvjeti tada

$$y_h(1) = y(1),\ y_h(0) = y(0),\ y_h(-1) = y(-1) \text{ i } y_h(-2) = y(-2)$$

- $y(1)$ i $y(0)$ određujemo iterativnim postupkom iz polazne jednadžbe uz primjenu zadane pobude, a $y(-1)$ i $y(-2)$ su zadani početni uvjeti

Odziv sustava za generiranje jeke

- za pretpostavljeno rješenje homogene jednadžbe $y_h(n) = cq^n$ iz

$$y(n) - 0.6y(n-4) = 0,$$

- slijedi

$$\begin{aligned} cq^n - 0.6cq^{n-4} &= 0 \\ cq^{n-4}(q^4 - 0.6) &= 0 \end{aligned}$$

- pa je karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$q^4 - 0.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_1 = & -0.8801 & \\ q_2 = & j0.8801 & = 0.8801e^{j\frac{\pi}{2}} \\ q_3 = & -j0.8801 & = 0.8801e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ q_4 = & 0.8801 & \end{cases}$$

Odziv sustava za generiranje jeke

- rješenje homogene jednadžbe je

$$y_h(n) = c_1(-0.8801)^n + c_2(j0.8801)^n + c_3(-j0.8801)^n + c_4(0.8801)^n$$

- rješenje vrijedi za $n > 1$ pa su početni uvjeti, potrebni u postupku određivanja c_1, c_2, c_3, c_4, vrijednosti $y_h(1), y_h(0), y_h(-1)$ i $y_h(-2)$
- $y_h(-1) = y(-1)$ i $y_h(-2) = y(-2)$ su zadani početni uvjeti, a $y_h(0) = y(0)$ i $y_h(1) = y(1)$ izračunavamo iterativnim postupkom iz nehomogene jednadžbe dakle za zadanu pobudu

Odziv sustava za generiranje jeke

- uz $y_h(-1) = y(-1) = 0$ i $y_h(-2) = y(-2) = 0$
- iz polazne jednadžbe slijedi za:

$$
\begin{array}{lll}
n = 0 & y(0) = u(0) + 0.6y(-4) = 1 & \Rightarrow y_h(0) = y(0) = 1 \\
n = 1 & y(1) = u(1) + 0.6y(-3) = 1 & \Rightarrow y_h(1) = y(1) = 1
\end{array}
$$

- pa iz

$$y_h(n) = c_1(-0.8801)^n + c_2(j0.8801)^n + c_3(-j0.8801)^n + c_4(0.8801)^n$$

- slijedi

$$
\begin{aligned}
y_h(1) &= c_1(-0.8801)^1 + c_2(j0.8801)^1 + c_3(-j0.8801)^1 + c_4(0.8801)^1 \\
y_h(0) &= c_1(-0.8801)^0 + c_2(j0.8801)^0 + c_3(-j0.8801)^0 + c_4(0.8801)^0 \\
y_h(-1) &= c_1(-0.8801)^{-1} + c_2(j0.8801)^{-1} + c_3(-j0.8801)^{-1} + c_4(0.8801)^{-1} \\
y_h(-2) &= c_1(-0.8801)^{-2} + c_2(j0.8801)^{-2} + c_3(-j0.8801)^{-2} + c_4(0.8801)^{-2}
\end{aligned}
$$

Odziv sustava za generiranje jeke

- izračunati su koeficijenti

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -0.0341 \\
c_2 &= 0.2500 - j0.2841 = 0.3784 e^{-j0.8491} \\
c_3 &= 0.2500 + j0.2841 = 0.3784 e^{j0.8491} \\
c_4 &= 0.5341
\end{aligned}
$$

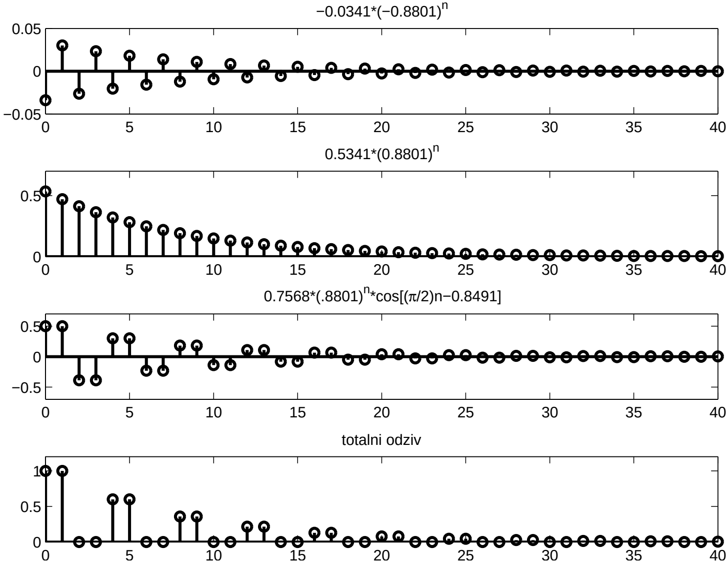
- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$
\begin{aligned}
y_h(n) = {} & -0.0341(-0.8801)^n + 0.3784 e^{-j0.8491} 0.8801^n e^{j\frac{\pi}{2}n} \\
& + 0.3784 e^{j0.8491} 0.8801^n e^{-j\frac{\pi}{2}n} + 0.5341(0.8801)^n
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
y_h(n) = {} & -0.0341(-0.8801)^n + 0.5341(0.8801)^n \\
& + 0.7568 \cdot 0.8801^n \cos(\tfrac{\pi}{2} n - 0.8491),
\end{aligned}
$$

Odziv sustava za generiranje jeke



Slika 2: Odziv sustava za generiranje jeke