

Signali i sustavi

Auditorne vježbe 7.

Zadatak 1.

- Riješi jednadžbu diferencija
$$8y[n] - 6y[n-1] + y[n-2] = \delta[n] + 2\delta[n-125]$$
uz početne uvjete
$$y[-1] = 2^{125} + 2^{250}$$
$$y[-2] = 1 + 2^{126} + 2^{252}$$
- Problem predstavljaju upravo dva dosta razmaknuta impulsa kao pobuda
- Najprije računamo odziv samo na prvi impuls
- Taj odziv nam određuje početna stanja za drugi impuls u trenutku $n = 125$

2

Zadatak 1. karakteristična jednadžba

- Karakteristična jednadžba je
$$q^{n-2} (8q^2 - 6q + 1) = 0$$
- Netrivijalni korijeni karakteristične jednadžbe su
$$q_1 = 1/2, q_2 = 1/4$$
- Opće rješenje homogene jednadžbe je stoga
$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

3

Zadatak 1. prvi impuls

- Da bi odredili konstante C_1 i C_2 moramo najprije odrediti $y[0]$ i $y[1]$ korak-po-korak
$$8y[0] - 6(2^{125} + 2^{250}) + 1 + 2^{125} + 2^{252} = 1$$
$$8y[1] - 6y[0] + 2^{125} + 2^{250} = 0$$
- Dobivamo $y[0] = 2^{124} + 2^{248}$ i $y[1] = 2^{123} + 2^{246}$
- Sada određujemo C_1 i C_2 iz

$$C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 2^{124} + 2^{248}$$

$$C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 2^{123} + 2^{246}$$

4

Zadatak 1. prvi impuls

- Konstante su $C_1 = 2^{124}$ i $C_2 = 4^{124}$ te je rješenje
$$y[n] = 2^{124} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4^{124} \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad 0 \leq n < 125$$
- Gornje rješenje nam određuje $y[123]$ i $y[124]$, tj. početne uvjete za drugi impuls
- Dobivamo

$$y[123] = 2^{124} \left(\frac{1}{2}\right)^{123} + 4^{124} \left(\frac{1}{4}\right)^{123} = 6$$

$$y[124] = 2^{124} \left(\frac{1}{2}\right)^{124} + 4^{124} \left(\frac{1}{4}\right)^{124} = 2$$

5

Zadatak 1. drugi impuls

- Da bi odredili konstante C_1 i C_2 za drugi impuls opet moramo odrediti $y[125]$ i $y[126]$ korak-po-korak
$$8y[125] - 6 \cdot 2 + 6 = 2$$
$$8y[126] - 6y[125] + 2 = 0$$
- Dobivamo $y[125] = 1$ i $y[126] = 1/2$
- Sada određujemo C_1 i C_2 iz

$$C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{125} + C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{125} = 1$$

$$C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{126} + C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{126} = \frac{1}{2}$$

6

Zadatak 1. drugi impuls

- Konstante C_1 i C_2 za drugi impuls su

$$C_1 = 2^{125}, \quad C_2 = 0$$

- Rješenje za drugi impuls je sada

$$y[n] = 2^{125} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 0 \left(\frac{1}{4} \right)^n, \quad 125 \leq n$$

7

Zadatak 1. konačno rješenje

- Sada možemo napisati i konačno rješenje zadane jednadžbe

$$y[n] = \begin{cases} 2^{126} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 4^{124} \left(\frac{1}{4} \right)^n & 0 \leq n < 125 \\ 2^{125} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 0 \left(\frac{1}{4} \right)^n & 125 \leq n \end{cases}$$

8

Zadatak 2. varijacija parametara

- Riješi jednadžbu diferencija
 $y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = n^2$
metodom varijacije parametara.
- Kod metode varijacije parametara najprije tražimo rješenje pripadajuće homogene jednadžbe, $y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \dots$
- U tom rješenju tada konstante zamjenjujemo s funkcijama varijable n ,
 $y[n] = C_1[n] q_1^n + C_2[n] q_2^n + \dots$
- Određivanjem funkcija $C_1[n]$, $C_2[n]$... dobivamo rješenje jednadžbe

9

Zadatak 2. rješenje homogene

- Homogena jednačina je
$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = 0$$
- Rješavanjem karakteristične jednačine dobivamo polove $q_1 = 2$ i $q_2 = 3$
- Homogeno rješenje je
$$y_h[n] = C_1 2^n + C_2 3^n$$
- Opće rješenje tražimo u obliku
$$y[n] = C_1[n] 2^n + C_2[n] 3^n$$

10

Zadatak 2. operatori E i Δ

- Da bi mogli primijeniti metodu varijacije parametara uvodimo operator pomaka unaprijed E i operator diferencije Δ
- Vrijedi $E = 1 + \Delta$
- Prvo transformiramo jednačinu
$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = n^2$$
u operatorski oblik. Dobivamo
$$(E^2 - 5E + 6) y[n] = n^2$$
$$(\Delta^2 - 3\Delta + 2) y[n] = n^2$$

11

Zadatak 2. operatori E i Δ

- Opće rješenje oblika
$$y[n] = C_1[n] 2^n + C_2[n] 3^n$$
mora zadovoljiti jednačinu
$$(\Delta^2 - 3\Delta + 2) y[n] = n^2$$
- Odredimo najprije $\Delta y[n] = y[n+1] - y[n]$
$$\Delta [C_1[n] 2^n + C_2[n] 3^n] = \Delta [C_1[n] 2^n] + \Delta [C_2[n] 3^n]$$
$$= 2^{n+1} \Delta [C_1[n]] + C_1[n] \Delta [2^n] + 3^{n+1} \Delta [C_2[n]] + C_2[n] \Delta [3^n]$$
$$= 2^n C_1[n] + 2^{n+1} \Delta [C_1[n]] + 2 \cdot 3^n C_2[n] + 3^{n+1} \Delta [C_2[n]]$$

12

Zadatak 2. varijacija parametara

- Opće rješenje je oblika $y = C_1 f_1 + \dots + C_m f_m$
- Kako je potrebno m uvjeta da bi odredili funkcije $C_1 \dots C_m$ tražimo da vrijedi

$$\begin{aligned} f_1 \Delta C_1 + f_2 \Delta C_2 + \dots + f_m \Delta C_m &= 0 \\ \Delta f_1 \Delta C_1 + \Delta f_2 \Delta C_2 + \dots + \Delta f_m \Delta C_m &= 0 \\ \vdots \\ \Delta^{m-2} f_1 \Delta C_1 + \Delta^{m-2} f_2 \Delta C_2 + \dots + \Delta^{m-2} f_m \Delta C_m &= 0 \\ \Delta^{m-1} f_1 \Delta C_1 + \Delta^{m-1} f_2 \Delta C_2 + \dots + \Delta^{m-1} f_m \Delta C_m &= u[n] \end{aligned}$$

13

Zadatak 2. varijacija parametara

- Odredili smo $\Delta y[n]$

$$\Delta[y[n]] = 2^n C_1[n] + 2 \cdot 3^n C_2[n] + \underbrace{2^{n+1} \Delta[C_1[n]] + 3^{n+1} \Delta[C_2[n]]}_{=0}$$

- Kao prvu jednadžbu izjednačili smo dio dobivenog s $\Delta y[n]$ nulom
- Sada određujemo $\Delta^2 y[n]$ i uvrštavamo sve u zadanu jednadžbu diferencija
- Nakon sređivanja dobivamo

$$2^{n+1} \Delta[C_1[n]] + 2 \cdot 3^{n+1} \Delta[C_2[n]] = n^2$$

14

Zadatak 2. varijacija parametara

- Sada imamo sustav

$$2^{n+1} \Delta[C_1[n]] + 3^{n+1} \Delta[C_2[n]] = 0$$

$$2^{n+1} \Delta[C_1[n]] + 2 \cdot 3^{n+1} \Delta[C_2[n]] = n^2$$

- Rješenja ovog sustava su

$$\Delta[C_1[n]] = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3^{n+1} \\ n^2 & 2 \cdot 3^{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+1} & 2 \cdot 3^{n+1} \end{vmatrix}} = -\frac{n^2}{2^{n+1}}$$

15

Zadatak 2. varijacija parametara

$$\Delta[C_2[n]] = \frac{\begin{vmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} & n^2 \\ 2^{n+1} & 2 \cdot 3^{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+1} & 2 \cdot 3^{n+1} \end{vmatrix}} = \frac{n^2}{3^{n+1}}$$

- Očito je

$$C_1[n] = \Delta^{-1} \left[-\frac{n^2}{2^{n+1}} \right] \quad \text{i} \quad C_2[n] = \Delta^{-1} \left[\frac{n^2}{3^{n+1}} \right]$$

16

Zadatak 2. operatorski račun

- Da bi odredili Δ^{-1} koristimo operatorski račun
- Ako je $\phi(E)$ funkcija operatora, vrijedi

$$\frac{1}{\phi(E)}[c^n] = \frac{c^n}{\phi(c)}, \quad \phi(c) \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{\phi(E)}[P(n)] = \frac{1}{\phi(1+\Delta)}[P(n)] = (b_0 + b_1\Delta + \dots + b_m\Delta^m + \dots)[P(n)]$$

$$\frac{1}{\phi(E)}[c^n P(n)] = c^n \frac{1}{\phi(cE)}[P(n)]$$

- Gdje je $1/\phi(E)$ inverz funkcije i $P(n)$ polinom

17

Zadatak 2. operatorski račun

- Određujemo $C_1[n]$

$$\begin{aligned} C_1[n] &= \frac{1}{\Delta} \left[-\frac{n^2}{2^{n+1}} \right] = -\frac{1}{E-1} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{n^2}{2} \right] \\ &= -\left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{\frac{1}{2}E-1} \left[\frac{n^2}{2} \right] = -\left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{E-2} [n^2] \\ &= -\left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{E-2} [n^2] = \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{1-\Delta} [n^2] \end{aligned}$$

18

Zadatak 2. operatorski račun

$$\begin{aligned}C_1[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1-\Delta} [n^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 + \Delta + \Delta^2 + \dots) [n^2] \\&= \left(\frac{1}{2}\right)^n (n^2 + \Delta[n^2] + \Delta^2[n^2]) \\&= \left(\frac{1}{2}\right)^n (n^2 + 2n + 1 + 2)\end{aligned}$$

- Na kraju dobivamo

$$C_1[n] = \frac{1}{2^n} (n^2 + 2n + 3) + A$$

19

Zadatak 2.

- Na jednak način određujemo i $C_2[n]$
- Dobivamo

$$C_1[n] = \frac{1}{2^n} (n^2 + 2n + 3) + A$$

$$C_2[n] = -\frac{1}{2 \cdot 3^n} (n^2 + n + 1) + B$$

- A i B su proizvoljne konstante

20

Zadatak 2. konačno rješenje

- $C_1[n]$ i $C_2[n]$ uvrštavamo u
 $y[n] = C_1[n] 2^n + C_2[n] 3^n$
i dobivamo konačno rješenje

$$\begin{aligned}y[n] &= \left(\frac{1}{2^n} (n^2 + 2n + 3) + A \right) 2^n \\&\quad + \left(-\frac{1}{2 \cdot 3^n} (n^2 + n + 1) + B \right) 3^n\end{aligned}$$

$$y[n] = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + \frac{5}{2}$$

21

Konvolucijska sumacija

- Omogućuje nam određivanje odziva na bilo kakvu pobudu kada je poznat odziv na δ niz.
- Za vremenski nepromjenjiv sustav vrijedi

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[n-i]$$

odnosno

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]u[n-i]$$

Konvolucijska sumacija

- U slučaju da radimo s kauzalnim sustavima i promatramo odziv za pobudu zadanu za $n \geq 0$, gornje relacije prelaze u:

$$y[n] = \sum_{i=0}^n u[i]h[n-i]$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^n h[i]u[n-i]$$

Zadatak 3.

- Diskretni sustav opisan je jednadžbom diferencija:

$$y[n] - \frac{1}{16}y[n-2] = u[n-1] - u[n-2]$$

- Korištenjem konvolucijske sumacije naći odziv na pobudu:

$$u[n] = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{za } n \geq 0 \\ 0 & \text{za } n < 0 \end{cases}$$

Zadatak 3., nastavak ...

- Najprije je potrebno odrediti impulsni odziv.
- Za pobudu $u[n] = \delta[n]$ ona prelazi, za $n \geq 3$ u homogenu jednadžbu.
- Rješavanjem ove homogene jednadžbe diferencijom određujemo $h[n]$ za $n \geq 3$.
- $h[0]$, $h[1]$ i $h[2]$ određujemo izračunavanjem korak po korak.
- Dakle za $u[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$
- Za $n \geq 3$ vrijedi: $h[n] - \frac{1}{16}h[n-2] = 0$.

Zadatak 3., nastavak ...

- Za pretpostavljeni $h[n] = q^n$ slijedi karakteristična jednadžba:

$$q^n - \frac{1}{16}q^{n-2} = 0 \quad / : q^{n-2},$$

$$q^2 - \frac{1}{16} = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{4} \quad q_2 = \left(-\frac{1}{4}\right).$$

- Pa je impulsni odziv za $n \geq 3$

$$h[n] = C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^n + C_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{za } n \geq 3.$$

Zadatak 3., nastavak ...

- Za određivanje konstanti C_1 i C_2 potrebno je poznavati vrijednosti $h[3]$ i $h[4]$.
- Ove vrijednosti određujemo iz polazne jednadžbe.
- Za $u[n] = \delta[n]$ polaznu jednadžbu možemo pisati:

$$h[n] - \frac{1}{16}h[n-2] = \delta[n-1] - \delta[n-2]$$

$$h[n] = \frac{1}{16}h[n-2] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$$

Zadatak 3. - nastavak...

- Uvrštavanjem vrijednosti za n dobivamo:

$$\text{za } n=0 \quad h[0] = \frac{1}{16}h[-2] + \delta[-1] - \delta[-2] = 0$$

$$\text{za } n=1 \quad h[1] = \frac{1}{16}h[-1] + \delta[0] - \delta[-1] = 1$$

$$\text{za } n=2 \quad h[2] = \frac{1}{16}h[0] + \delta[1] - \delta[0] = -1$$

$$\text{za } n=3 \quad h[3] = \frac{1}{16}h[1] + \delta[2] - \delta[1] = \frac{1}{16}$$

$$\text{za } n=4 \quad h[4] = \frac{1}{16}h[2] + \delta[3] - \delta[2] = -\frac{1}{16}$$

Zadatak 3. - nastavak...

- Poznavajući $h[3]$ i $h[4]$ možemo odrediti C_1 i C_2 .

$$\text{za } n=3 \quad h[3] = \frac{1}{16} = C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^3 + C_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 4^3$$

$$\text{za } n=4 \quad h[4] = -\frac{1}{16} = C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^4 + C_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^4 \cdot 4^4$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 - C_2 = 4 \\ C_1 + C_2 = -16 \end{array} \right\} \Rightarrow 2C_1 = -12 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -6 \\ C_2 = -10 \end{cases}$$

Zadatak 3. - nastavak ...

- Pa je konačno:

$$h[n] = -6\left(\frac{1}{4}\right)^n - 10\left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{za } n \geq 3.$$

- Odnosno:

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{za } n = 0 \\ 1 & \text{za } n = 1 \\ -1 & \text{za } n = 2 \\ -6\left(\frac{1}{4}\right)^n - 10\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \text{za } n \geq 3. \end{cases}$$

Zadatak 3. - nastavak ...

- Odziv sustava na pobudu $u[n] = [-0.5]^n$ je:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{i=0}^n h[i]u[n-i] = \\ &= h[0]u[n] + h[1]u[n-1] + h[2]u[n-2] + \sum_{i=3}^n h[i]u[n-i] = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \sum_{i=3}^n \left[-6\left(\frac{1}{4}\right)^i - 10\left(-\frac{1}{4}\right)^i\right] \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-i} = \\ &= -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[-6\sum_{i=3}^n \left(\frac{1}{4}\right)^i - 10\sum_{i=3}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^i\right] = \end{aligned}$$

Zadatak 3. - nastavak ...

$$\begin{aligned} &= -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[-6\sum_{i=3}^n \left(\frac{1}{4}\right)^i - 10\sum_{i=3}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^i\right] = \\ &= -6\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[-6\sum_{i=3}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^i - 10\sum_{i=3}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i\right] = \\ &= -6\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[\sum_{i=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^i - \left(-\frac{1}{2}\right)^0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] - \\ &\quad - 10\left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i - \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \end{aligned}$$

Zadatak 3. - nastavak ...

$$\begin{aligned} &= -6\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] - \\ &\quad - 10\left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \\ &= -6\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[-6\left(\frac{1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}\right) - 10\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} - \frac{7}{4}\right)\right] = \\ &= -6\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[-4 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{18}{4} - 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{70}{4}\right] = \end{aligned}$$

Zadatak 3. konačno rješenje

$$= -6\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[-4 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{18}{4} - 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{70}{4} \right] =$$

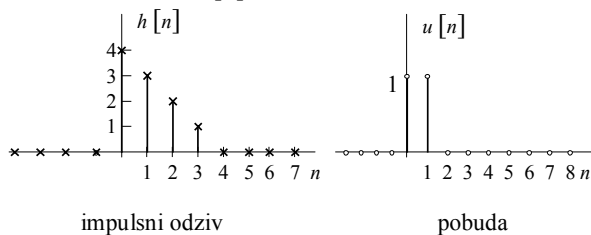
$$= -6\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[-2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

- Kao konačan odziv sustava $y[n]$ na pobudu $u[n] = [-0.5]^n$ dobivamo:

$$y[n] = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 10\left(-\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$$

Zadatak 4.

- Korištenjem konvolucijske sumacije odrediti odziv diskretnog sustava zadanog impulsnim odzivom $h[n]$. Sustav je pobuđen s $u[n]$.

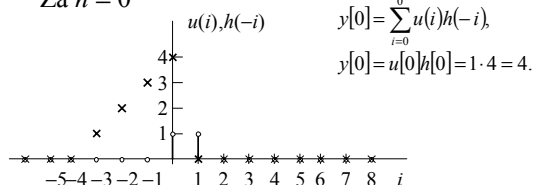


Zadatak 4. grafička interpretacija

- Rješenje ćemo grafički interpretirati iz :

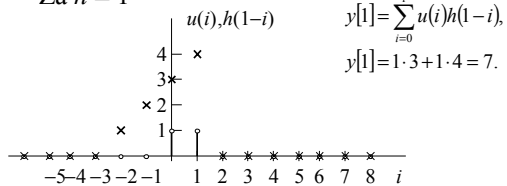
$$y[n] = \sum_{i=0}^n u(i)h(n-i).$$

Za $n = 0$



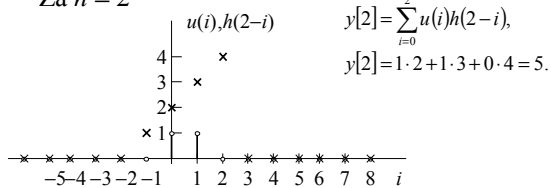
Zadatak 4. grafička interpretacija

Za $n = 1$



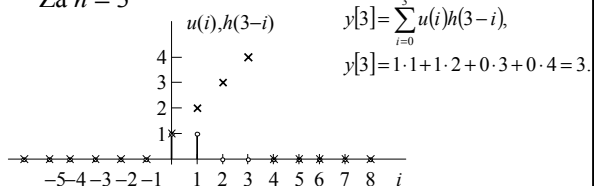
Zadatak 4. grafička interpretacija

Za $n = 2$



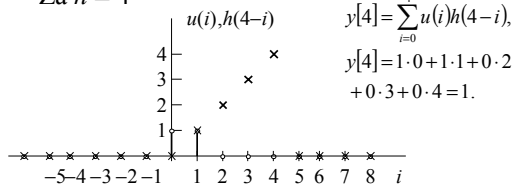
Zadatak 4. grafička interpretacija

Za $n = 3$



Zadatak 4. grafička interpretacija

Za $n = 4$



- Dalje je $y[5], y[6] \dots = 0$.

Zadatak 4. konačno rješenje

- Pa je odziv

