Signali i sustavi – zadaci za bodove iz aktivnosti

III. tjedan

1. Izračunajte izraze

   a. $\int_{0}^{\infty} \delta(t-2)t^2 dt$,

   b. $\int_{-\infty}^{\infty} (\cos t)\mu(t-1)\delta(t)dt$,

   gdje je $\delta(t)$ jedinični impuls, a $\mu(t)$ jedinični skok.

RJEŠENJE:

a) $\int_{0}^{\infty} \delta(t-2)\, t^2\, dt$

$t_0 = 2$

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t-2)\, t^2\, dt = \boxed{t_0^2 \int_{0}^{\infty} \delta(t)\, dt = 4}$$

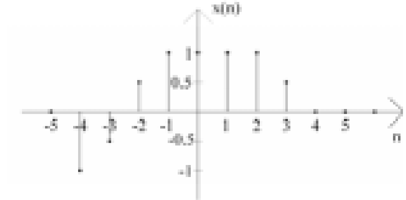
b) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos t \cdot \mu(t-1)\, \delta(t)\, dt = \quad \Rightarrow t_0 = 0$

$$= \cos t_0 \cdot \mu(t_0 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt$$

$$= \cos 0 \cdot \underbrace{\mu(-1)}_{0}$$

$$\boxed{= 0}$$

2. Zadan je diskretni signal *x(n)* prikazan slikom 1.



Slika 1. Diskretan signal

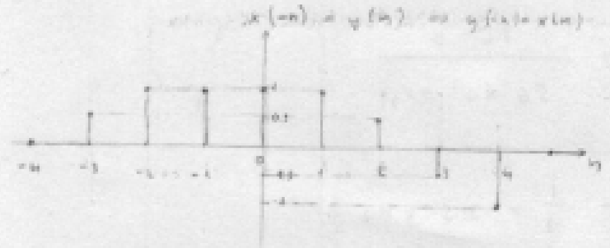
   a. Zapišite ovaj signal pomoću vremenski diskretnih jediničnih impulsa.
   b. Odredite *x(6-2n)* grafički i dobiveno rješenje prikažite pomoću sume vremenski pomaknutih diskretnih jediničnih skokova.

RJEŠENJE:

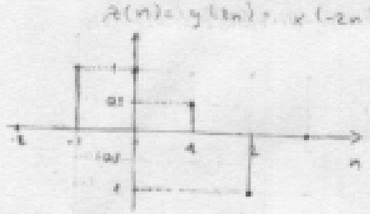
a) $x(n) = -\delta(n+4) - 0.5\,\delta(n+3) + 0.5\,\delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) +$
$+ \delta(n-2) + 0.5\,\delta(n-3)$

- grafičkim putem: $x(6-2n) = x(2\cdot(-n+3))$

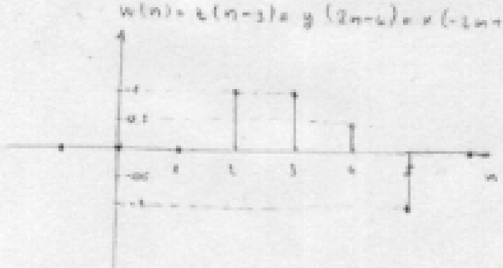
$x(-n) = y(n) \Rightarrow y(-n) = x(n)$



$z(n) = y(2n) = x(-2n)$



$w(n) = z(n-3) = y(2n-6) = x(-2n+6)$



$w(n) = x(-2n+6) = -\delta(n-5) + 0.5\,\delta(n-4) + \delta(n-3) + \delta(n-2)$ (2)

→ ZAPIS POMOĆU SUME VREMENSKI POMAKNUTIH DISKRETNIH JEDINIČNIH SKOKOVA $\left(\mu(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases},\ \mu(n-\alpha) = \begin{cases} 1, & n \geq \alpha \\ 0, & n < \alpha \end{cases}\right)$:

→ uzimamo u obzir $\delta(n-\alpha) = \mu(n-\alpha) - \mu(n-\alpha-1)$ u (2) dobivamo:

$x(6-2n) = -(\mu(n-5) - \mu(n-6)) + 0.5(\mu(n-4) - \mu(n-5)) + (\mu(n-3) - \mu(n-4)) + (\mu(n-2) - \mu(n-3))$

$x(6-2n) = \mu(n-6) - 1.5\,\mu(n-5) - 0.5\,\mu(n-4) + \mu(n-2)$

3. Pretpostavite da želite uživo, preko Interneta slušati prijenos nekog koncerta. Pri tome Internet ne koristite za nikakav drugi prijenos podataka. Neka je za predstavljanje svakog audio uzorka potrebno 16 bita.

   a. Nalazite se kod kuće i spojeni ste s modemom, 56 kbps (kilobita u sekundi), na Internet. Kojom maksimalnom frekvencijom uzorkovanja može biti diskretiziran audio signal koji slušate?
   b. Koja je frekvencija u pitanju ako se nalazite na 100 Mbps LAN-u?

RJEŠENJE:

a)

v_I=56kbps=56000bps

Za jedan uzorak treba 16 bitova => N= 16 bit

v_I=56000bit/s

Frekvenciju cemo dobiti tako da podjelimo brzinu prijenosa sa kolicinom podataka po jednom uzorku.

$$f_{MAX} = \frac{v_I}{N} = \frac{56000bit/s}{16bit} = 3500Hz$$

$$f_{MAX} = 3.5kHz$$

b) Analogno prvom slučaju radimo i za drugi slučaj

v_I=100Mbps=100000000bps

$$f_{MAX} = \frac{v_I}{N} = \frac{100000000bit/s}{16bit} = 6.25MHz$$

4. Zadan je diskretan signal $x(n)=\cos\left(\dfrac{n\pi}{8}\right)$. Nađite dva različita kontinuirana signala koja otipkavanjem daju ovaj diskretan signal. Frekvencija otipkavanja neka je $f_s=10kHz$.

RJEŠENJE:

(4) $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$

$f_s = 10kHz$

PRETPOSTAVIMO:

$$x_1(t)=\cos(2\pi f n T_s)=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$$

$$2\pi f n T_s=\frac{n\pi}{8}$$

$$f=\frac{1}{16T_s}=\frac{f_s}{16}$$

$$=\frac{10\,000\,Hz}{16}=625\,Hz$$

$$x_1(t)=\cos(2\pi f n T_s)=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$$

$$2\pi f n T_s=\frac{n\pi}{8}+2n\pi$$

$$2 f T_s=\frac{17}{8}$$

$$f=\frac{17}{16}f_s=$$

$$=\frac{17}{16}\,10000\,Hz=$$

$$=10\,625\,Hz$$

$$x_1(t)=\cos(2\pi\cdot 625\,Hz\cdot t)$$

$$x_2(t)=\cos(2\pi\cdot 10625\,Hz\cdot t)$$

5. Odredi je li zadani diskretan sustav vremenski promjenjiv, linearan i memorijski.

$$y(n) = 2^{u(n)}.$$

RJEŠENJE:

– NIJE MEMORIJSKI, KORISTI SAMO $u(n)$

– $2^{\alpha u_1(n)+\beta u_2(n)} = 2^{\alpha u_1(n)} \cdot 2^{\beta u_2(n)} =$

$= \left(2^{u_1(n)}\right)^{\alpha} \cdot \left(2^{u_2(n)}\right)^{\beta}$ ⇒ NIJE LINEARNO

(NIJE OBLIKA $\alpha y_1 + \beta y_2$)

– $u_1(n) = u(n-M)$

$y_1(n) = 2^{u_1(n)} = 2^{u(n-M)}$

$y(n-M) = 2^{u(n-M)}$ ⇒ $y_1(n) = y(n-M)$

↓

NIJE VREMENSKI PROMJENJIV

6. Odredi je li zadani kontinuirani sustav vremenski promjenjiv, linearan i memorijski.

$$y(t) = u(t^2)\,.$$

RJEŠENJE:

• vremenska promjenjivost:

$$u_1(t) = u(t-T)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = u_1(t^2) = u(t^2-T) \\ y_2(t) = y(t-T) = u((t-T)^2) = u(t^2-2tT+T^2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ y_1(t) \neq y_2(t)$ (u općem slučaju) $\Rightarrow$ signal je vremenski promjenjiv

• linearnost:

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

$$y_1(t) = u_1(t^2)$$

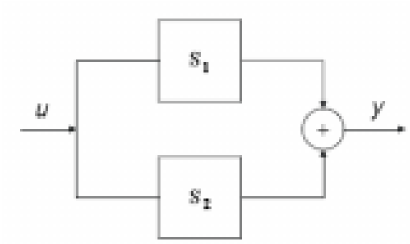
$$y_2(t) = u_2(t^2)$$

$$y(t) = u(t^2) = \alpha u_1(t^2) + \beta u_2(t^2) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ S(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha S(u_1) + \beta S(u_2) \Rightarrow$ signal je linearan

Budući je za izlaz u trenutku t potrebno znati ulaz u trenutku t^2 što je ili budućnost $(t \in R\backslash\langle 0,1\rangle)$ ili prošlost $(t \in \langle 0,1\rangle)$ sustav je memorijski

7. Promatraju se dva diskretna sustava S_1 i S_2 spojena u paralelnu vezu (slika 2.). Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite, te obrazložite svoj odgovor.



Slika 2. Paralelni spoj dva diskretna sustava

a. Ako su oba sustava S_1 i S_2 linearna i vremenski nepromjenjiva, hoće li i njihov paralelan spoj biti linearan i vremenski nepromjenjiv?
b. Ako su oba sustava S_1 i S_2 nelinearna, je li i njihov paralelni spoj nužno nelinearan?
c. Ako su oba sustava S_1 i S_2 vremenski promjenjiva, je li i njihov paralelni spoj nužno vremenski promjenjiv?

RJEŠENJE:

a)

$y(n) = f(u(n)) = f_1(u(n)) + f_2(u(n))$

$= f_1(\alpha u_1(n) + \beta u_2(n)) + f_2(\alpha u_1(n) + \beta u_2(n)) =$
(linearnost)

$= \alpha f_1(u_1(n)) + \beta f_1(u_2(n)) + \alpha f_2(u_1(n)) + \beta f_2(u_2(n))$

$= \alpha [f_1(u_1(n)) + f_2(u_1(n))] + \beta [f_1(u_2(n)) + f_2(u_2(n))]$

$= \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$ spoj je linearan

$u_1(n) = u(n-M)$

$y_1(n) = f(u_1(n)) = f_1(u_1(n)) + f_2(u_1(n)) = f_1(u(n-M)) + f_2(u(n-M)) = y(n-M)$

spoj je vremenski nepromjenjiv

b) Npr. može: prva funkcija može biti npr. $f_1(u(n)) = u(n) + 2^n$

a druga $f_2(u(n)) = u(n) - 2^n$

Njihov zbroj je $f(u(n)) = 2u(n)$, dakle linearna funkcija

c) Npr. uzmimo vremenski promjenjive

$f_1(u(n)) = n\,u(n)$

$f_2(u(n)) = -(n-1)\,u(n)$

$f(u(n)) = f_1 + f_2 = u(n)$, što je vremenski nepromjenjiva funkcija

8. Odziv na jedinični skok, $u(t) = \mu(t)$, linearnog vremenski nepromjenjivog sustava glasi $y(t) = \left(1 - e^{-2t}\right)\mu(t)$. Nađite odziv ovog sustava na ulaz $u(t) = 4\mu(t) - 4\mu(t-1)$.

RJEŠENJE:

$$u(t) = \mu(t)$$

$$y(t) = \left(1 - e^{-2t}\right)\mu(t) = S(\mu)(t)$$

$$\varepsilon(t) = \mu(t-1)$$

zbog linearnosti

zbog vremenske nepromjenjivosti

$$y_{2}(t) = S(4\mu - 4\varepsilon) = 4S(\mu) - 4S(\varepsilon) = 4y(t) - 4y(t-1) =$$

$$= 4\left(1 - e^{-2t}\right)\mu(t) - 4\left(1 - e^{-2t+2}\right)\mu(t-1) =$$

$$= 4\left[\mu(t) - \mu(t-1) - e^{-2t}\left(\mu(t) - e^{2}\mu(t-1)\right)\right]$$