PRIMJER RJEŠAVANJA DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI U VREMENSKOJ DOMENI

- za sustav 1. reda oblika

$$y' + a_1 y = b_0 u' + b_1 u$$

za pobude oblika: $u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t) \cdot \mu(t)$

ili $u(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \mu(t)$

ili $u(t) = A_0 \cdot \mu(t)$

- postupak rješavanja za pobude bez $\delta(t)$ i za pobude koje sadrže $\delta(t)$

- nalaženje impulsnog odziva

Problem prebacivanja poč uvjeta iz 0^- u 0^+

Za dif jedn. oblika

$$y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + a_2 y^{(N-2)} + \dots + a_{N-1} y' + a_N y =$$

$$b_0 u^{(N)} + b_1 u^{(N-1)} + \dots + b_{N-1} u' + b_N u$$

zadani su poč. uvj. u $t = 0^-$

$$y(0^-),\ y'(0^-),\ y''(0^-) \dots y^{(N-2)}(0^-),\ y^{(N-1)}(0^-)$$

Radi određivanja koeficijenata uz članove odziva vlastitim frekvenc. $(c_1 \dots c_N)$ potrebno je odrediti poč. uv. za $t = 0^+$

Na predavanjima je pokazano da se to radi rješavanjem sustava $N \times N$ oblika:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_{N-2} & a_{N-3} & \cdots \ a_1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \\ \Delta y'' \\ \vdots \\ \Delta y^{(N-1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b_{N-1} & b_{N-2} & b_{N-3} & \cdots \ b_1 & b_0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{bmatrix} u(0^+) \\ u'(0^+) \\ u''(0^+) \\ \vdots \\ u^{(N-1)}(0^+) \end{bmatrix}$$

Gdje je traženi stupac:

$$\begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \\ \vdots \\ \Delta y^{(N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0^+) - y(0^-) \\ y'(0^+) - y'(0^-) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(0^+) - y^{(N-1)}(0^-) \end{bmatrix}$$

dakle traženi vektor poč. uv. se nalazi kao:

$$\begin{bmatrix} y(0^+) \\ y'(0^+) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0^-) \\ y'(0^-) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(0^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \\ \vdots \\ \Delta y^{(N-1)} \end{bmatrix}$$

Sustav jednadžbi je donjeg trokutastog oblika pa se rješenje nalazi jednostavnom unaprijednom supstitucijom počevši od Δy, pa $\Delta y'$, ... sve do $\Delta y^{(N-1)}$.

Uoči da sustav jed. ne sadrži koeficijente a_N i b_N iz diferencijalne jednadžbe !!

Ako desna strana jed. degenerira u sljedeći oblik

(lijeva) $= b_N \cdot u$

to znači da su svi koef. uz derivacije pobude $(b_{N-1}, \ldots b_0)$ jednaki nuli. Zbog toga desna strana matrične jednadžbe postaje jednaka nul-vektoru i to neovisno o konačnim vrijednostima pobude i njenih derivacija u $\emptyset$, jer matrica B postaje nul-matrica:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \\ \vdots \\ \Delta y^{(N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice A jednaka je 1, $\det(A)=1$, neovisno o vrijednostima a-koef. dif. jednadžbe, pa stoga slijedi da je konačno rješenje $\begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \\ \Delta y^{(N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \end{bmatrix}$

Dakle pokazali smo da će početni uvjeti biti jednaki u $t=0^-$ i $t=\emptyset^+$ ako desna strana diferencijalne jednadžbe sadrži samo zadnji član $(b_N \cdot u(t))$. $\Rightarrow$ $\boxed{y^{(i)}(0^+) = y^{(i)}(0^-)}$

Prema tome, ako se desna strana prevede u ovu formu, tada nije uopće potrebno provoditi preračunavanje rubnih uvjeta !!

Kako to napraviti … JEDNOSTAVNIM deriviranjem pobude kako to traži desna strana

(1c)

Umjesto zadane pobude $u(t)$ formiramo novi pobudni signal $u_n(t)$ kao:

$$u_n(t) = b_0 \cdot u^{(N)}(t) + b_1 u^{(N-1)}(t) + \ldots + b_{N-1} u'(t) + b_N u(t)$$

te formiramo novu diferencijalnu jednadžbu:

$$(\text{lijeva}) = b_{N_{novo}} \cdot u_n(t) \quad ,$$

gdje je $b_{N_{novo}} = 1$

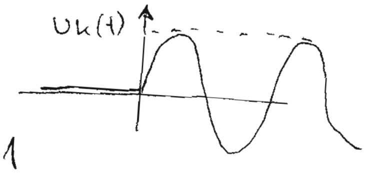
Dodatna prednost deriviranja pobude jest u svrhu provjere da li se u $u_n(t)$ javljaju $\delta(t)$ funkcije ili njihove derivacije, jer ako je to slučaj tada se dif. jednadžba ne može rješavati uobičajenim postupkom sa metodom neodređenog koeficijenta i pretpostavkom sve-vremenske pobude i sve-vremenskog partikularnog rješenja, nego se mora koristiti pristup temeljen na određivanju impulsnog odziva, odnosno njegovih derivacija.

Ovi postupci će biti ilustrirani na primjeru sustava prvog reda.

Promotrimo prvo pobudu sustava i desnu stranu dif. jed. 2

$u_s(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$ sve-vremenska pobuda

kauzalna pobuda $u_k(t) = u_s(t) \cdot \mu(t)$
$= A_0 \sin(\omega_0 t) \cdot \mu(t)$



Desna strana diferenc. jed. sustava prvog reda za $M=N=1$

$$(\text{lijeva}) = b_0 u'(t) + b_1 u(t)$$

Za kauzalnu pobudu $u_k(t)$ uvrštavanje u desnu stranu daje:

$$b_0 \cdot (A_0 \sin(\omega_0 t) \cdot \mu(t))' + b_1 A_0 \sin(\omega_0 t) \cdot \mu(t) =$$

$$= b_0 \left(A_0 \sin(\omega_0 t) \cdot \delta(t) + A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \mu(t) \right) + b_1 A_0 \sin(\omega_0 t) \cdot \mu(t)$$

$\neq 0$ za $t=0$

$A \sin(\omega_0 t)$ za $t=0$ iznosi 0 ... dakle ovaj član je $0 \cdot \delta(t)$, pa stoga desna strana glasi:

$$= (b_0 A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) + b_1 A_0 \sin(\omega_0 t)) \cdot \mu(t)$$

Uočimo da desna strana ne sadrži $\delta(t)$ funkcije ili pak njihove derivacije. Dakle problem se može rješavati postupcima opisanim u 11. predavanju i početku 12. predavanja.

Cijela desna strana diferencijalne jednadžbe može se zamijeniti novom pobudom $u_n(t)$ i novim koef. desne strane: b_{0n} i b_{1n},

$$(\text{lijeva}) = \underset{= b_{0n}}{0} \cdot u_n'(t) + \underset{= b_{1n}}{1} \cdot u_n(t)$$

gdje je $u_n(t) = (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) \cdot \mu(t)$

a konstante A & B su:

$$A = b_0 A_0 \omega_0$$
$$B = b_1 A_0$$

ALTERNATIVNI PRIKAZ HARMONIJSKE POBUDE

Pobude oblika $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ ili $|C|\cdot\cos(\omega_0 t + \gamma)$ pogodno je prikazati u obliku kompleksne exponenc. $Re(C\cdot e^{j\omega_0 t})$

$$= Re(C\cdot e^{j\omega_0 t}) \qquad C = |C|\cdot e^{j\gamma}$$

$$= Re(|C|\cdot e^{j\gamma}\cdot e^{j\omega_0 t})$$

$$= Re(|C|\cdot e^{j(\omega_0 t + \gamma)})$$

$$= |C|\cdot\cos(\omega_0 t + \gamma)$$

$$= |C|\cdot\cos(\omega_0 t)\cos\gamma - |C|\cdot\sin(\omega_0 t)\sin\gamma$$

$$= (|C|\cdot\cos\gamma)\cdot\cos(\omega_0 t) + (-|C|\cdot\sin\gamma)\cdot\sin(\omega_0 t)$$

$$= A\cdot\cos(\omega_0 t) + B\cdot\sin(\omega_0 t)$$

---

kako naći $|C|$ i γ iz $\boxed{A \text{ i } B}$?

$$A = |C|\cdot\cos\gamma \quad /^2$$
$$B = -|C|\cdot\sin\gamma \quad /^2 \quad +$$

$$A^2 + B^2 = |C|^2\cdot(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) = |C|^2$$

$$\Rightarrow |C| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{A}{|C|} \qquad \sin\gamma = -\frac{B}{|C|}$$

$$\gamma = atan2(\sin\gamma, \cos\gamma)$$
$$= atan2\left(-\frac{B}{|C|}, \frac{A}{|C|}\right)$$

Za odabrani primjer sustava prvog reda $A = b_0 A_0 \omega_0$, $B = b_1 A_0$

pa stoga: $|C| = \sqrt{(b_0 A_0 \omega_0)^2 + (b_1 A_0)^2} = A_0\sqrt{b_0^2\omega_0^2 + b_1^2}$

$$\cos\gamma = \frac{b_0 \cancel{A_0} \omega_0}{\cancel{A_0}\sqrt{b_0^2\omega_0^2 + b_1^2}} = \frac{b_0\omega_0}{\sqrt{b_0^2\omega_0^2 + b_1^2}} \qquad \sin\gamma = -\frac{b_1 \cancel{A_0}}{\cancel{A_0}\sqrt{b_0^2\omega_0^2 + b_1^2}} = \frac{-b_1}{\sqrt{b_0^2\omega_0^2 + b_1^2}}$$

$$\gamma = atan2(\sin\gamma, \cos\gamma) = atan2\left(\frac{b_0\omega_0}{\sqrt{b_0^2\omega_0^2 + b_1^2}}, \frac{-b_1}{\sqrt{b_0^2\omega_0^2 + b_1^2}}\right) = atan2(b_0\omega_0, -b_1$$

pozitivni nazivnik ne utječe na kut

Dakle polazni sustav: (4)

$$(\text{lijeva}) = b_0 u'(t) + b_1 u(t)$$

uz pobudu $u_k(t) = A_0 \sin(\omega_0 t) \cdot \mu(t)$

sveli smo na novi ekvivalentni sustav:

$$(\text{lijeva}) = \emptyset \cdot u_n'(t) + 1 \cdot u_n(t)$$

uz novu pobudu $u_n(t) = Re(Ce^{j\omega_0 t}) \cdot \mu(t)$

gdje je C kompleksna amplituda kompl. eksponencijale

$$C = |C| \cdot e^{j\gamma}, \quad |C| = A_0\sqrt{b_0^2\omega_0^2 + b_1^2}, \quad \gamma = atan2(b_0\omega_0, -b_1)$$

Obzirom da nova pobuda ne sadrži $\delta(t)$ možemo diferencijalnu jed. rješavati uz pretpostavku sve-vremenskih signala pobude i odziva, pa tek na samom kraju nakon određivanja rješenja na osnovu početnih uvjeta pomnožiti sve-vremensko rješenje odziva sa $\mu(t)$.

Dakle sve-vremensko partikularno rješenje možemo pretpostaviti u obliku:

$$y_{pc} = K \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Uvrštavanjem ovakvog pretpostavljenog rj. u dif. jed. odredit ćemo kompleksni koeficijent K. Zbog činjenice da sustav ima realne koef. imaginarni dio odziva je odziv na imaginarni dio pobude $Im(Ce^{j\omega_0 t})$, a realni dio odziva je odziv na realni dio pobude, jednako kao što je opisano kod vrem. diskretnih sustava. Dakle, nakon što nađemo K i y_{pc} realni dio rješenja predstavlja željeni partikularni dio rješenja

$$y_p(t) = Re(y_{pc}(t)) = Re(K \cdot e^{j\omega_0 t}),$$

uz $K = |K| \cdot e^{j\delta} \Rightarrow \quad y_p(t) = |K| \cdot \cos(\omega_0 t + \delta)$

Ilustrirajmo ovo na stvarnom primjeru:

$$a_0 y'(t) + a_1 y(t) = b_{0n} u_n'(t) + b_{1n} \cdot u_n(t)$$

gdje $b_{0n} = \emptyset$, $b_{1n} = 1$, $a_0 = 1$ (zbog normalizacije, ... tj uvijek možemo lijevu i desnu stranu dif. jednadžbe podijeliti sa a_0, ako je on $\neq \emptyset$)

Dakle dif jed. glasi:

$$y'(t) + a_1 y(t) = u_n(t)$$

Uz pretpostavljenu sve-vremensku kompleksnu pobudu oblika:

$$u_{nc}(t) = C \cdot e^{j\omega_0 t},$$ i odziv oblika $y_{pc}(t) = K \cdot e^{j\omega_0 t}$

dobivamo uvrštavanjem u dif. jed.:

$$K \cdot j\omega_0 e^{j\omega_0 t} + a_1 K e^{j\omega_0 t} = C \cdot e^{j\omega_0 t} \; / \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

$$jK\omega_0 + a_1 K = C$$

$$K(j\omega_0 + a_1) = C \Rightarrow K = \frac{C}{j\omega_0 + a_1} = |K| \cdot e^{j\delta}$$

$$|K| = \frac{|C|}{\sqrt{a_1^2 + \omega_0^2}} \qquad e^{j\delta} = e^{j\gamma} \cdot e^{-j\arg(\text{nazivnik})}$$

$$= e^{j\gamma} \cdot e^{-j\,\mathrm{atan2}(\omega_0, a_1)}$$

$$= e^{j(\gamma - \mathrm{atan2}(\omega_0, a_1))}$$

$$\Rightarrow \delta = \gamma - \mathrm{atan2}(\omega_0, a_1)$$

Dakle sve-vremensko partikularno rješenje je

$$y_p(t) = Re(y_{pc}(t)) = Re\left(|K| \cdot e^{j\delta} \cdot e^{j\omega_0 t}\right) =$$

$$= |K| \cdot \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$= \frac{|C|}{\sqrt{a_1^2 + \omega_0^2}} \cdot \cos(\omega_0 t + (\gamma - \mathrm{atan2}(\omega_0, a_1)))$$

↑ predstavlja odziv na <u>$Re(u_{nc}(t))$</u>

Promotrimo sada lijevu stranu jednadžbe koja određuje titranje vlastitim frekvencijama. Neka je zadan početni uvjet $y(0^-) = y_{poc}$ u trenutku $t = 0^-$.

Nađimo prvo karakteristične frekvencije iz homogene jed.

$$y'(t) + a_1 y(t) = 0$$

Pretpostavimo sve-vremensko rješenje oblika

$$y_H(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t}$$

, te uvrstimo ga u dif. jed.

$$y_H'(t) + a_1 y_H(t) = C_1 s_1 e^{s_1 t} + a_1 C_1 e^{s_1 t} = C_1 e^{s_1 t} \underbrace{(s_1 + a_1)}_{\text{ne trivijalno rj.}} = 0$$

$s_1 + a_1 = 0$ ... karakteristična jednadžba

$s_1 = -a_1$ ... karakteristična frekv. (realna, jednostruka)

Dakle:

$$y_H(t) = C_1 \cdot e^{-a_1 t}$$

Ako želimo odrediti odziv nepobuđenog sustava $y_0(t)$ dovoljno je odrediti konstantu C_1 iz zadanog rubnog uvjeta $\underbrace{y(0) = y(0^-) = y(0^+)} = y_{poc}$ ⟸

Ova jednakost uvijek vrijedi za odziv nepobuđenog sustava

Pa pišemo:

$$y_0(t) = y_H(t) = C_1 \cdot e^{-a_1 t}$$

za $t = 0$ $y_0(0) = C_1 \cdot e^0 = C_1$, a zadano je $y(0^-) = y_{poc}$, a obzirom da vrijedi, pišemo:

$$\boxed{y_{poc} = C_1}$$

Dakle odziv nepobuđenog sustava glasi:

$$y_0(t) = y_{poc} \cdot e^{-a_1 t}$$

Odredimo sada odziv mirnog sustava na traženu pobudu. Prije ovog, potvrdimo da je frekvencija pobude $\xi = j\omega_0$, a vlastita frekvencija sustava $s_1 = -a_1 \in \mathbb{R}$. Vidimo da $\xi \neq s_1$ osim za slučaj $\omega_0 = \emptyset$ (istosmjerni signal, $\cos(\emptyset t) = 1$). Dakle, osim ovog specijalnog slučaja kada je $a_1 = \emptyset$ & $\omega_0 = \emptyset$ vlastita frekvencija sustava se razlikuje od frekvencije pobude. Tada se partikularno rješenje smije pretpostaviti u obliku pobude $u_n(t)$

Dakle odziv mirnog sustava pretpostavljamo u obliku

$$y_m(t) = \underbrace{C_{1m} \cdot e^{s_1 t}}_{\substack{\text{titranje} \\ \text{vlastitim frek.} \\ \text{uslijed neskladа početnog} \\ \text{i stacionarnog stanja}}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{partikularno rj.}}$$

ako su $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = \emptyset$ ovo se ne mora raditi jer $y^{(i)}(0^+) = y^{(i)}(0^-)$

Konstantu C_{1m} moramo odrediti na osnovu početnog uvjeta $y_m(0^+)$, a ova se mora odrediti iz $y_m(0^-)$ koja je jednaka nuli, jer se radi o odzivu mirnog sustava na kauzalnu pobudu.

Prijenos početnog uvjeta iz 0^- u 0^+ radimo postupkom opisanom u 11. predavanju. (SLIDE 29) ... za sustav prvog reda

$$y_m(0^+) - y_m(0^-) = b_{0n} \cdot u_n(0^+)$$

Obzirom da je $b_{0n} = \emptyset$ neovisno o $u_n(0^+)$, slijedi da su početni uvjeti u 0^+ i 0^- jednaki: $y_m(0^+) = y_m(0^-)$, iako

$$u_n(0^+) = \mathrm{Re}(C \cdot e^{j\omega_0 \cdot 0^+}) = \mathrm{Re}(C) = |C| \cdot \cos\gamma \text{, što je}$$

općenito $\neq \emptyset$

Da odredimo C_{1m}, evaluiramo rješenje $y_m(t)$ za $t = 0^+$, te izjednačimo to rješenje sa početnim uvjetom $y_m(0^+)$, za koji smo pokazali da je jednak $y_m(0^-)$, a koji je jednak nuli.

$$y_m(0^+) = C_{1m} \cdot \underbrace{e^{s_1 \cdot 0^+}}_{1} + y_p(0^+) = 0$$

Prije smo izveli $y_p(t) = \frac{|C|}{\sqrt{a_1^2 + \omega_0^2}} \cdot \cos(\omega_0 t + (\gamma - \mathrm{atan2}(\omega_0, a_1)))$

za $t = 0^+$ imamo

$$y_p(0^+) = \frac{|C|}{\sqrt{a_1^2 + \omega_0^2}} \cdot \cos(\underbrace{\gamma - \mathrm{atan2}(\omega_0, a_1)}_{\delta})$$

Dakle obzirom da sve konstante $|C|, \gamma, a_1, \omega_0$ poznamo, možemo odrediti (izračunati) iznos $y_p(0^+)$, a tražena konstanta $C_{1m} = -y_p(0^+)$

Konačno dobivamo sve-vremenski odziv mirnog sustava!

$$y_m(t) = C_{1m} \cdot e^{s_1 t} + y_p(t)$$

$$= -\frac{|C|}{\sqrt{a_1^2 + \omega_0^2}} \cos(\delta) \cdot e^{-a_1 t} + \frac{|C|}{\sqrt{a_1^2 + \omega_0^2}} \cdot \cos(\omega_0 t + \delta)$$

Za provjeru uvjerimo se da uvrštavanjem $t = 0$ u gornji izraz dobivamo $y_m(0) = 0$, što predstavlja traženi početni uvjet ovog mirnog sustava.

$$y_m(t) = \frac{|C|}{\sqrt{a_1^2 + \omega_0^2}} \Big(\underbrace{\cos(\omega_0 t + \delta)}_{\substack{\text{titranje frekv.} \\ \text{pobude } (j\omega_0)}} - \cos(\delta) \cdot \underbrace{e^{-a_1 t}}_{\substack{\text{titranje} \\ \text{vlastitim} \\ \text{frekvencijama}}} \Big)$$

Kauzalni odziv na kauzalnu pobudu $u_m(t) \cdot \mu(t)$ dobivamo množenjem dobivenog sve-vremenskog rješenja $y_m(t)$ sa $\mu(t)$

$$y_{m_{kauz}}(t) = y_m(t) \cdot \mu(t)$$

Da dobijemo totalni odziv sustava moramo zbrojiti odziv nepobuđenog sustava $y_0(t)$ i odziv mirnog sustava. Sve-vremensko rješenje je stoga:

$$y_{tot}(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

$$= y_{poc}\cdot e^{-a_1 t} + \frac{|c|}{\sqrt{a_1^2+w_0^2}}\left(\cos(w_0 t+\delta) - \cos(\delta)\cdot e^{-a_1 t}\right), \text{ ili}$$

zbrajanjem dijelova koji opisuju titranje vlastitim frekvencijama imamo:

$$= \underbrace{\left(y_{poc} - \frac{|c|}{\sqrt{a_1^2+w_0^2}}\cos(\delta)\right) e^{-a_1 t}}_{y_{prir}(t)} + \underbrace{\frac{|c|}{\sqrt{a_1^2+w_0^2}}\cdot\cos(w_0 t+\delta)}_{y_{pris}(t)}$$

$y_{prir}(t)$ prirodni ili prijelazni odziv sustava = ukupno titranje vlastitim frekvencijama

$y_{pris}(t)$ prisilni odziv sustava

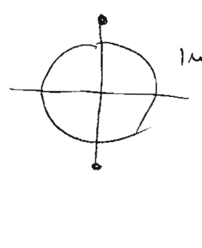
kauzalni totalni odziv

$$y_{tot\_kauz}(t) = y_{tot}(t)\cdot \mu(t)$$

Uočimo da za $t=0$ $y_{tot}(0) = y_{poc}$, a za $t \nearrow \infty$, ako je $Re(s_1) < 0$ tada $|e^{+s_1 t}|$ teži $\searrow 0$. U našem slučaju $Re(s_1) = -a_1 < 0$ ako $a_1 > 0$. Inače za rubni slučaj $a_1 = 0$ odziv postaje:

$$y_{tot}(t)\Big|_{a_1=0} = \left(y_{poc} - \frac{|c|}{|w_0|}\cdot\cos(\delta)\right)\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ 1}}{e^{0}} + \frac{|c|}{|w_0|}\cdot\cos(w_0 t+\delta)$$

obzirom da je $\delta = \gamma - \mathrm{atan}_2(\underset{\substack{\nearrow\\ Im}}{w_0}, \underset{\substack{\uparrow\\ Re=0}}{a_1}) = \gamma - \mathrm{sign}(w_0)\cdot\frac{\pi}{2}$



Ako promatramo samo pozitivnu frekv. pobude $\omega_0 > 0$

tada je $\delta = \gamma - \frac{\pi}{2}$, pa odziv postaje:

$$y_{tot}(t)\Big|_{a_1=\varnothing} = y_{poc} + \frac{|c|}{\omega_0}\left(\cos\left(\omega_0 t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= y_{poc} + \underbrace{\frac{|c|}{\omega_0}\left(\sin(\omega_0 t + \gamma) - \sin(\gamma)\right)}_{\int_\varnothing^t u_n(\tau)\,d\tau}$$

Provjerimo ovo rješenje.....

Za $a_1 = \varnothing$ diferencijalna jednadžba degenerira u slijedeći oblik:

$$y'(t) = b_{1n} \cdot u_n(t), \quad \text{uz } b_{1n} = 1 \quad \Big/ \int_\varnothing^t$$

Integriramo obje strane jednakosti od nula do t

$$\int_\varnothing^t y'(\tau)\,d\tau = \int_\varnothing^t u_n(\tau)\cdot d\tau$$

$$y(t) - y(\varnothing) = \int_0^t u_n(\tau)\,d\tau,$$

$$y(t) = y(\varnothing) + \int_0^t |c|\cdot\cos(\omega_0\tau + \gamma)\,d\tau$$

$$= y(\varnothing) + |c|\cdot\frac{1}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0\tau + \gamma)\Big|_0^t$$

$$= y(\varnothing) + \underbrace{\frac{|c|}{\omega_0}\left(\sin(\omega_0 t + \gamma) - \sin(\gamma)\right)}_{\int_0^t u_n(\tau)\,d\tau}$$

OK ✓

Dakle za navedeni rubni slučaj kada se vlastita frekvencija s_1 nalazi na $j\omega$ osi ($s_1 = -a_1 = \varnothing$) odziv vlastitim frekvencijama je neprigušen pa stoga početni uvjet y_{poc} ostaje trajno prisutan u odzivu sustava, tj. nikada se ne „istitra".

Kada totalni odziv postaje jednak prisilnom odzivu ?

⇒ Nikada, ali mu asimptotski teži ako su vlastite frekvencije sustava takve da vrijedi $Re(s_i) < 0$.

Tada prirodni odziv sustava $y_{prir}(t)$ trne eksponencijalno kako vrijeme teži $\nearrow \infty$

$$y_{tot}(t) = y_{prir}(t) + y_{pris}(t)$$

$$|y_{prir}(t)| \searrow 0 \quad \text{kada } t \nearrow \infty ,$$ dakle

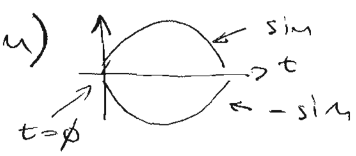
$$y_{tot}(t) \nearrow y_{pris}(t) \quad \text{kada } t \nearrow \infty ,$$ pa

kažemo da prisilni odziv sustava predstavlja stacionarno stanje totalnog odziva. Još ga nazivamo "ravnotežnim" stanjem.

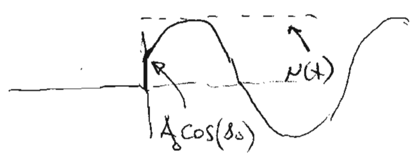
Promotrimo sada isti sustav, ali uz drugačiju pobudu

$$u_k(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \vartheta_0) \cdot \mu(t)$$

Do sada razmatran primjer odgovara specijalnom slučaju za $\vartheta_0 = -\pi/2$ kada se dobiva $A \sin(\omega_0 t) \cdot \mu(t)$
Za taj slučaj (ili za drugi slučaj kada $\vartheta_0 = \pi/2$) pobuda počinje iz 0 u $t = 0$ kao sin (ili −sin)



Međutim za općenit (proizvoljan) ϑ_0 kauzalna pobuda ima skok u $t = 0$ zbog množenja sa $\mu(t)$



Uvrstimo ovu novu pobudu u desnu stranu polazne diferencijalne jednadžbe:

$$(\text{lijeva}) = b_0 u'(t) + b_1 u(t)$$

$u(t) = u_k(t) = \underbrace{A_0\cos(\omega_0 t + \vartheta_0)\cdot\mu(t)}$

produkt dvije funkcije koji deriviramo po pravilima deriviranja produkta

$$(\text{lijeva}) = b_0\big(A_0\omega_0\cdot(-\sin(\omega_0 t+\vartheta_0))\mu(t) +$$
$$A_0\cos(\omega_0 t+\vartheta_0)\cdot\delta(t)\big) +$$
$$+ b_1\cdot\big(A_0\cos(\omega_0 t+\vartheta_0)\cdot\mu(t)\big)$$

$\neq \emptyset$ samo za $t=0$

$A_0\cos(\omega_0 t+\vartheta_0)$ za $t=\emptyset$ iznosi $A_0\cos(\vartheta_0)$

$$= -b_0 A_0\omega_0\big(\sin(\omega_0 t)\cos\vartheta_0 + \cos(\omega_0 t)\cdot\sin\vartheta_0\big)\cdot\mu(t)$$
$$+ b_1 A_0\big(\cos(\omega_0 t)\cdot\cos\vartheta_0 - \sin(\omega_0 t)\cdot\sin\vartheta_0\big)\cdot\mu(t)$$
$$+ b_0 A_0\cos(\vartheta_0)\cdot\delta(t)$$

$$= \Big[\cos(\omega_0 t)\cdot\overbrace{(-b_0A_0\omega_0\sin\vartheta_0 + b_1A_0\cos\vartheta_0)}^{A} +$$
$$\sin(\omega_0 t)\cdot\underbrace{(-b_0A_0\omega_0\cos\vartheta_0 - b_1A_0\sin\vartheta_0)}_{B}\Big]\mu(t) + b_0A_0\cos(\vartheta_0)\cdot\delta(t)$$

$$= \big(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\big)\cdot\mu(t) + b_0A_0\cos(\vartheta_0)\cdot\delta(t)$$

$$A = -b_0A_0\omega_0\sin\vartheta_0 + b_1A_0\cos\vartheta_0$$
$$B = -b_0A_0\omega_0\cos\vartheta_0 - b_1A_0\sin\vartheta_0$$

Provjerimo da li ovaj općenit oblik vodi na konstante A i B za prvi primjer kod kojeg je $\vartheta_0 = -\pi/2$

$$A\Big|_{\vartheta_0=-\pi/2} = -b_0A_0\omega_0(-1) + b_1A_0\cdot\emptyset = b_0A_0\omega_0 \quad \checkmark$$
$$B\Big|_{\vartheta_0=-\pi/2} = -b_0A_0\omega_0\cdot\emptyset - b_1A_0(-1) = b_1A_0 \quad \checkmark$$

ok

Dakle u ovom slučaju novu pobudu s desne strane diferencijalne jednadžbe možemo rastaviti u dva dijela

$$u_n(t) = u_{n1}(t) + u_{n2}(t) \rightarrow u_{n2}(t) = b_0A_0\cos(\vartheta_0)\cdot\delta(t)$$

$$\Downarrow$$

$$u_{n1}(t) = \big(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\big)\cdot\mu(t)$$

Prvi dio pobude $u_{n1}(t)$ jednak je po obliku prvom primjeru, a jedino se razlikuju konstante A & B uz cos i sin. Zbog linearnosti sustava odziv na $u_n(t) = u_{n1}(t) + u_{n2}(t)$ možemo odrediti kao sumu odziva $H(u_{n1}(t)) = y_1(t)$ i $H(u_{n2}(t)) = y_2(t)$. Dakle, odziv $y_1(t)$ nalazimo istim postupkom opisanom za prvi primjer, dok odziv na $u_{n2}(t) = b_0 A_0 \cos(\vartheta_0) \cdot \delta(t)$ zapravo predstavlja skalirani impulsni odziv $h(t)$ sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom:

$$h'(t) + a_1 h(t) = \delta(t)$$

$$y_2(t) = b_0 A_0 \cos(\vartheta_0) \cdot h(t)$$

Određivanje $y_2(t)$ se stoga svodi na nalaženje impulsnog odziva sustava čija je desna strana diferencijalne jednadžbe $= u(t)$

$b_1 = 1$, $b_0 = \emptyset$

Promatramo ovaj impulsni odziv postupkom opisanim na 12. predavanju.

Jednadžba $h'(t) + a_1 h(t) = \delta(t)$ postaje homogena za $t > \emptyset$, pa je dovoljno pretpostaviti rješenje oblika:

$$h(t) = C_h \cdot e^{-a_1 t}$$

gdje konstantu C_h nalazimo na osnovu početnih uvjeta u $t = \emptyset^+$

Obzirom da se radi o sustavu 1. reda postoji samo jedan početni uvjet, a to je $h(\emptyset^+)$, koji u skladu sa diskusijom na 12. predavanju mora biti jednak 1.

Evaluacijom izraza $h(t)$ za $t = \emptyset^+$ i izjednačavanjem sa očekivanim početnim uvjetom slijedi:

$$h(\emptyset^+) = C_h \cdot e^{-a_1 \cdot 0^+} = C_h \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

Dakle vidimo da je $C_h = 1$

Prema tome impulsni odziv promatranog sustava je:

$$h(t) = e^{-a_1 t}$$

Naglasimo da je to izraz za sve-vremenski impulsni odziv. Obzirom da se radi o kauzalnom sustavu, impulsni odziv mora biti kauzalna funkcija, pa je dovoljno dobiveni sve-vremenski $h(t)$ pomnožiti sa $\mu(t)$:

$$h_{kauz}(t) = h(t) \cdot \mu(t) = e^{-a_1 t} \cdot \mu(t)$$

Za provjeru uvrstimo rješenje za kauzalni impulsni odziv u diferencijalnu jednadžbu iz koje smo ga izveli:

$$h'_{kauz}(t) + a_1 h_{kauz}(t) = \delta(t)$$

$$\cancel{-a_1 \cdot e^{-a_1 t} \cdot \mu(t)} + e^{-a_1 t} \cdot \underbrace{\delta(t)}_{t=\emptyset} + \cancel{a_1 \cdot e^{-a_1 t} \mu(t)} = \delta(t)$$

$$\underbrace{e^{-a_1 \cdot \emptyset}}_{1} \cdot \delta(t) = \delta(t)$$

$$\underline{\delta(t) = \delta(t)}$$ ok ... vidimo da zadovoljava.

Dakle drugi dio odziva $y_2(t)$ se nalazi skaliranjem dobivenog $h(t)$:

$$y_2(t) = b_0 A_0 \cos(\vartheta_0) \cdot e^{-a_1 t} \cdot \mu(t)$$

Očito je da za $|\vartheta_0| = \pi/2$, $\cos(\vartheta_0) = \emptyset$, pa je $y_2(t) = \emptyset$, što je bio slučaj za prvi primjer, sa pobudom $A_0 \sin(\omega_0 t)$

Sustav prvog reda: (isti kao do sada)

$$a_0 \cdot y'(t) + a_1 y(t) = b_0 u'(t) + b_1 u(t)$$

($a_0 = 1$)

Riješimo prvo slučaj kada je $b_0 = \emptyset$, a $b_1 = 1$

Dakle $y'(t) + a_1 y(t) = u(t)$

Pretpostavimo tj. homogene jed. za sve-vremenski slučaj

$$y_h(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t}$$

$$\boxed{\text{PRIMJER SA POBUDOM } \mu(t)}$$

Uvrstimo u jednadžbu:

$$y_h'(t) + a_1 y_h(t) = \emptyset$$

$$C_1 s_1 e^{s_1 t} + a_1 C_1 e^{s_1 t} = \emptyset$$

$$C_1 e^{s_1 t} \underbrace{(s_1 + a_1)}_{} = \emptyset$$

netrivijalno rješenje $s_1 = -a_1$

Dakle sve-vremenski odziv moramo pretpostaviti u obliku

$$y_h(t) = C_1 \cdot e^{-a_1 t}$$

Nađimo odziv sustava na $\overset{A}{1} \cdot \mu(t)$ „jedinični step"

... to je specijalni slučaj sve-vremenske pobude sa konstantom $A = 1$

... pretpostavimo sve-vremensko rješenje oblika konstante K ... $y_p(t) = K$

Uvrstimo u dif. jed. i dobivamo:

$$y_p'(t) + a_1 y_p(t) = A$$

$$\emptyset + a_1 \cdot K = A \Rightarrow K = A/a_1$$

Dakle $y_p(t) = \dfrac{A}{a_1}$

Ukupno sve-vremensko rješenje se dakle sastoji od:

$$y_{tot}(t) = C_1 \cdot e^{-a_1 t} + \frac{A}{a_1}$$

Neka je početni uvjet definiran u $t=0^-$

$$y(0^-) = y_{poc}$$

Ovaj početni uvjet možemo prebaciti u $t=0^+$ korištenjem sustava jednadžbi na SLIDE 29, PREDAVANJE 11.

$$y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+)$$

Za odabrani primjer $b_0 = 0$, pa stoji.

$$y(0^+) = y(0^-) = y_{poc}$$

Radi određivanja konstante C_1 moramo evaluirati opće rješenje $y_{tot}(t)$ za $t=0^+$, te ga usporediti (izjednačiti) sa $y(0^+) = y_{poc}$, pa dobivamo:

$$y(0^+) = y_{poc} = C_1 \cdot e^{-a_1 \cdot 0^+} + \frac{A}{a_1}$$

$$= C_1 \cdot 1 + \frac{A}{a_1}$$

$$\Rightarrow C_1 = y_{poc} - \frac{A}{a_1}$$

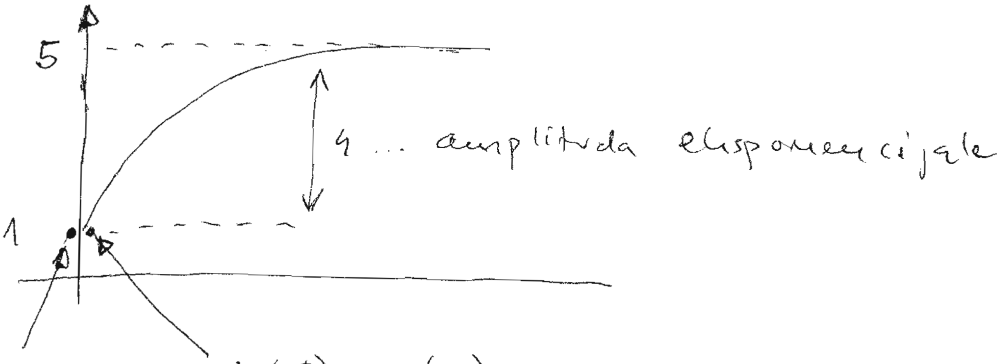
Dakle ukupno rješenje sustava prvog reda u odzivu na step je

$$y_{tot}(t) = \underbrace{\Big[\underbrace{\left(y_{poc} - \frac{A}{a_1}\right) e^{-a_1 t} + \frac{A}{a_1}}_{\text{sve-vremensko rješenje}} \Big] \cdot \mu(t)}_{\text{kauzalno rj. na kauzalnu pobudu}}$$

Uzmimo sada konkretni primjer za $a_1 = 0.2$ & $y_{poc} = 1$ i amplitudu pobudnog stepa $A=1$

$$y_{tot}(t) = \left[\left(1 - \frac{1}{0{,}2}\right) e^{-0{,}2t} + \frac{1}{0{,}2} \right] \cdot \mu(t)$$

$$= \left[-4 e^{-0{,}2t} + 5 \right] \cdot \mu(t)$$



$y(0^-) = y_{poc} = 1 \quad y(0^+) = y(0^-) = y_{poc} = 1$

za $t \nearrow \infty \quad y_{tot}(t) = [-4 \cdot \varnothing + 5] \cdot 1$

$= 5$ ... odziv u stacionarnom stanju

Sada dozvolimo da postoji i član $u'(t)$ sa desne strane, tj $b_0 \neq \varnothing$.

Sve-vremensko rješenje homogene jednadžbe ostaje jednako kao i prije jer ne ovisi o desnoj strani. Dakle

$$y_h(t) = C_1 \cdot e^{-a_1 t}$$

Uvrštavanjem pobude $x_1(t)$ u desnu stranu dif. jednadžbe dobivamo novu pobudu $u_n(t)$

Ovaj slučaj rješavamo jednako kao onaj sa harmonijskom pobudom proizvoljne početne faze kod koje postoji skok u $t = \varnothing$

varijanta je da $u_n(t) = A \cdot b_0 \delta(t) + A b_1 \mu(t)$

rastavimo na dva dijela $u_n(t) = u_1(t) + u_2(t)$

$u_1(t) = A \cdot b_0 \cdot \delta(t) \ldots \quad y_1 = H(u_1) = A \cdot b_0 \cdot h(t)$

$u_2(t) = A \cdot b_1 \mu(t) \ldots \quad y_2 = H(u_2) \ldots$

↳ ako je b_1 i dalje $b_1 = 1$ tada y_2 smo već odredili u prošlom primjeru.

Dakle sve što moramo napraviti jest da odzivu prošlog primjera dodamo $A \cdot b_0 \cdot h(t)$ ... skalirani imp. odziv

18

U skladu sa kratkim predavanjem nadimo impulsni odziv mirnog sustava

$$a_0^{=1} \cdot y'(t) + a_1 y(t) = u(t)$$

$u(t) = \delta(t)$, $y(t) = h(t)$

$$h'(t) + a_1 h(t) = \delta(t)$$

za $t > 0$ prelazi u homogenu jednadžbu.

$$h(t) = C_1 \cdot e^{-a_1 t}$$

Obzirom da smo početni uvjet već uključili u odzivu vezanom za u_2, pretpostavljamo da je sustav mirovan $h(0^-) = 0$

Potrebno je odrediti $h(0^+)$

Radi se o sustavu 1. reda $(N=1)$ dakle

$$\underline{h(0^+) = 1} \quad \text{jer} \quad h^{(N-1)}(0^+) = 1$$

$N=1 \ldots$

Napišimo opis oblika impulsnog odziva i evaluirajmo ga za $t = 0^+$

$$h(0^+) = C_1 \cdot e^{-a_1 0^+} = 1 \Rightarrow C_1 = 1$$

Dakle, konačni impulsni odziv glasi

$$h(t) = e^{-a_1 t} \cdot \mu(t)$$

---

zaključimo $y_1(t) = A \cdot b_0 \cdot h(t) = A \cdot b_0 \cdot e^{-a_1 t} \cdot \mu(t)$

$$y_2(t) = \left[\left(y_{poc} - \frac{b_1 A}{a_1}\right) e^{-a_1 t} + \frac{b_1 A}{a_1}\right] \cdot \mu(t)$$

za općenit b_0, b_1

$$y_{tot}(t) = y_1(t) + y_2(t) = \left[\left(A b_0 + y_{poc} - \frac{A b_1}{a_1}\right) e^{-a_1 t} + \frac{b_1 A}{a_1}\right] \mu(t)$$

Provjerimo pomoću Laplace-a (OVO TEK BUDEMO UČILI) 19

$$y'(t) + a_1 y(t) = b_0 u'(t) + b_1 u(t)$$

$$sY(s) - y(0^-) + a_1 Y(s) = s b_0 U(s) - b_0 u(0^-) + b_1 U(s)$$

$$Y(s)(s+a_1) = y(0^-) + U(s)(s b_0 + b_1) - \underbrace{b_0 u(0^-)}_{=\varnothing}$$

zbog kauzalnosti pobude

$U(s) = A/s$

$$Y(s) = \frac{y(0^-)}{s+a_1} + \frac{A}{s}\,\frac{s b_0 + b_1}{s+a_1}$$

$y(0^-) = y_{poc}$

$$y(t) = y_{poc} \cdot e^{-a_1 t} \cdot \mu(t)$$

$$\frac{A b_0}{s+a_1} + \frac{A b_1}{s(s+a_1)}$$

$$A b_0 \cdot e^{-a_1 t} \mu(t) \qquad \frac{A b_1}{a_1}\left(1 - e^{-a_1 t}\right)\mu(t)$$

$$y(t) = \left(\left(y_{poc} + A b_0 - \frac{A b_1}{a_1}\right) e^{-a_1 t} + \frac{A b_1}{a_1}\right)\mu(t)$$

OK

Isto rješenje kao i superpozicijom normalnog odziva i impulsnog odziva.

Konačno pokažimo da se do rješenja za odziv mirnog sustava može doći i na drugi način bez određivanja impulsnog odziva. Osnovna ideja je odrediti opći oblik totalnog rješenja za mirni sustav i to kauzalnog, ali sa neodređenim koef. Takvo rješenje uvrštavamo u dif. jednadžbu i u jednom koraku nalazimo sve tražene koeficijente. Jedini problem ovakvog načina određivanja odziva je u nemogućnosti postavljanja početnih uvjeta koji su $\neq \varnothing$. Za odziv mirnog sustava, to je OK, ali za općenit odziv treba na $y_m(t)$ dodati $y_0(t)$ $\Downarrow$

Sada dozvolimo da desna strana sadrži i derivacije pobude. Obzirom da tražimo odziv na step, derivacija stepa je $\delta(t)$. Dakle u prisilnom odzivu na $A_0 \mu(t)$ moramo pretpostaviti odziv oblika

$$y_p(t) = K_1 \cdot \delta(t) + K_2 \mu(t)$$

kako ovaj tip pobude i odziva više nije sve-vremenski već je kauzalan, moramo i homogeni dio rješenja pretpostaviti u kauzalnom obliku

ALTERNATIVNI NAČIN ODREĐIVANJA RJ. ODZIVA MIRNOG SUSTAVA ČIJA POBUDA SADRŽI $\delta(t)$ ILI NJEGOVE DERIVACIJE

$$y_h = C_1 \cdot e^{-a_1 t} \cdot \mu(t)$$

Dakle totalno rješenje je

$$y_{tot}(t) = y_h(t) + y_p(t)$$
$$= C_1 \cdot e^{-a_1 t} \mu(t) + K_1 \delta(t) + K_2 \mu(t)$$

Ovakvo totalno rješenje mora zadovoljiti dif. jed.

$$y' + a_1 y = b_0 u' + b_1 u$$

$$y'_{tot}(t) = C_1 \cdot e^{-a_1 t} \cdot (-a_1) \cdot \mu(t) + \underbrace{C_1 e^{-a_1 t}}_{C_1 \; t=0} \cdot \delta(t) + K_1 \delta'(t) + K_2 \delta(t)$$

$$a_1 y(t) = a_1 C_1 e^{-a_1 t} \mu(t) + a_1 K_1 \delta(t) + a_1 K_2 \mu(t)$$

$$b_0 u' + b_1 u = A b_0 \delta(t) + A b_1 \mu(t)$$

$$C_1 e^{-a_1 t} \underbrace{(-a_1 + a_1)}_{\emptyset} \mu(t) = \emptyset \cdot \mu(t) \cdot e^{-a_1 t} \text{ u on homogeni dio}$$

$$C_1 \delta(t) + K_2 \delta(t) + a_1 K_1 \delta(t) = A b_0 \cdot \delta(t)$$

$$(C_1 + K_2 + a_1 K_1) = A b_0$$

$$K_1 \delta'(t) = \emptyset \cdot \delta'(t) \Rightarrow K_1 = \emptyset$$

IZJEDNAČAVANJEM ISTIH OBLIKA FUNKC. SA LIJEVE I DESNE STRANE DIF. JED.

$$a_1 k_2 \mu(t) = A b_1 \mu(t)$$

$$k_2 = \frac{A b_1}{a_1} \qquad k_1 = \emptyset$$

$$c_1 + k_2 + a_1 k_1 = A b_0$$

$$c_1 = A b_0 - k_2$$

$$= A b_0 - \frac{A b_1}{a_1}$$

Dakle totalno rješenje bi bilo

$$y_{tot}(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= c_1 e^{-a_1 t} \mu t + k_1 \delta(t) + k_2 \mu(t)$$

$$= \left(A b_0 - \frac{A b_1}{a_1}\right) e^{-a_1 t} \mu(t) + \emptyset \cdot \delta(t) + \frac{A b_1}{a_1} \cdot \mu(t)$$

$$= \left(\left(A b_0 - \frac{A b_1}{a_1}\right) e^{-a_1 t} + \frac{A b_1}{a_1} \right) \mu(t)$$

Ovo što je dobiveno predstavlja odziv mirnog sustava uz $y_{poc} = \emptyset$. Uočimo da su konstante c_1 & (k_1 & k_2) nađene u jednom koraku uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja mirnog sustava u dif. jedn. (a ne na osnovu početnih uvjeta) ∇... koji su naravno nula u t=0 pošto se radi o mirnom sustavu