



Signal i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

# Signal i sustavi

Profesor  
Branko Jeren

2010.



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija složenih sustava



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija i blokovski dijagram

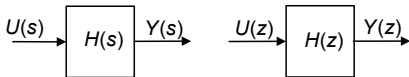
- vremenski kontinuirani i diskretni sustavi opisani su svojim prijenosnim funkcijama, definiranim, za miran sustav, kao

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$

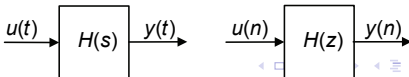
odnosno

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(n)\}}{\mathcal{Z}\{u(n)\}}$$

- sustav zadan prijenosnom funkcijom prikazujemo blokovskim dijagramom u frekvencijskoj domeni



- ali i u vremenskoj domeni





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

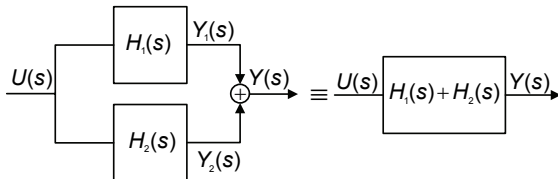
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija složenih sustava

- paralelni spoj podsustava<sup>1</sup>



$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) = H_1(s)U(s) + H_2(s)U(s) = \\ &= [H_1(s) + H_2(s)]U(s) \end{aligned}$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

<sup>1</sup>ovdje će biti razmatrani samo kontinuirani sustavi jer za diskretne sustave vrijedi identična blokovska algebra



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

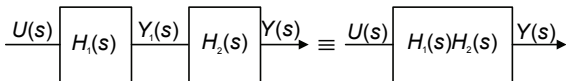
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija složenih sustava

- kaskadni spoj podsustava



$$Y(s) = H_2(s) \cdot \underbrace{Y_1(s)}_{H_1(s)U(s)} = H_2(s)H_1(s)U(s) = H_1(s)H_2(s)U(s)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija složenih sustava

- definira se prijenosna funkcija inverznog sustava
- ako je

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

prijenosna funkcija sustava  $S$ , tada je prijenosna funkcija inverznog sustava  $S_i$  dana kao

$$H_i(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{\frac{B(s)}{A(s)}} = \frac{A(s)}{B(s)}$$

- očigledno je kako vrijedi

$$H(s)H_i(s) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$



Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

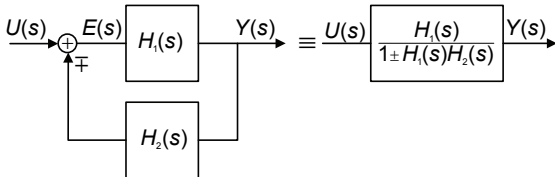
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija složenih sustava

- prstenasti spoj podsustava – sustav s povratnom vezom



$$E(s) = U(s) \mp H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)E(s) = H_1(s)[U(s) \mp H_2(s)Y(s)]$$

$$Y(s)[1 \pm H_1(s)H_2(s)] = H_1(s)U(s)$$

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

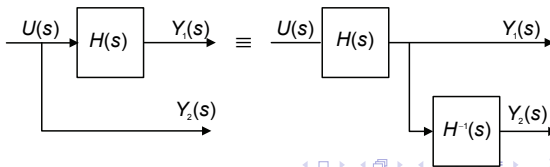
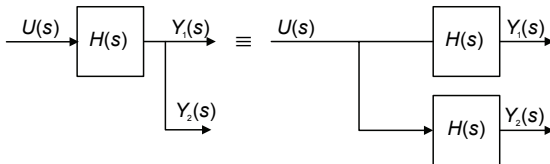
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija složenih sustava

- prikazana blokovska algebra elementarnih spojeva  
podsustava predstavlja temelj u analizi složenih sustava  
prikazanih blokovskim dijagramima
- u analizi složenih sustava korisne su i slijedeće  
transformacije blokovskih dijagrama
  - prijenos točke grananja







Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

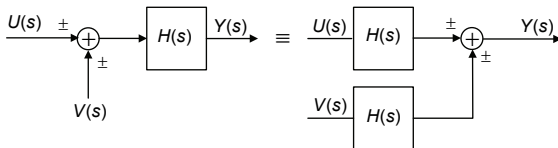
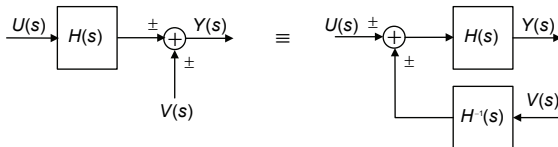
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija složenih sustava

- pomak zbrajala





Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

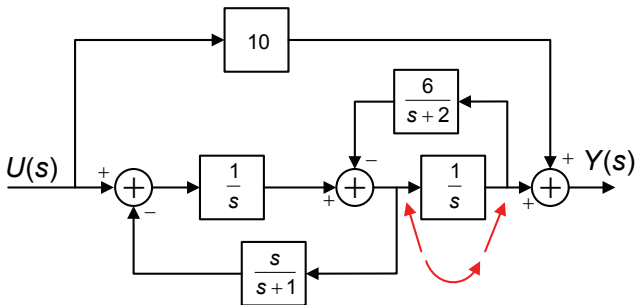
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija složenih sustava – primjer

- određuje se prijenosna funkcija sustava sažimanjem blokovskog dijagrama



- polazni blokovski dijagram transformira se pomakom točke grananja kako je naznačeno na slici





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

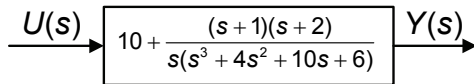
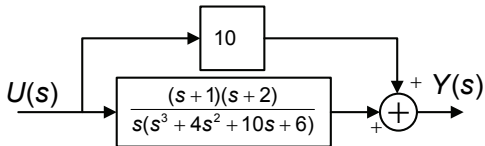
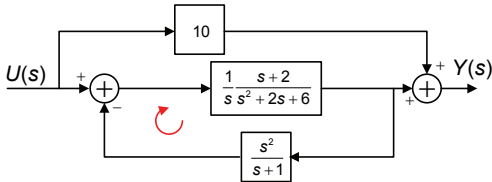
Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija složenih sustava – primjer





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Blokovska realizacije vremenski diskretnih sustava



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Blokovska realizacije vremenski diskretnih sustava

- vremenski se diskretni sustavi, opisani prijenosnom funkcijom, razlažu u strukture koje sadrže elementarne blokove
  - element za jedinično kašnjenje
  - zbrajalo
  - množilo s konstantom
- izvedene strukture nazivaju se realizacije i ovdje se razmatraju
  - direktna,
  - kaskadna, i
  - paralelna realizacija
- u slučaju da se određuje realizacija sustava zadanog s jednadžbom diferencija, pretpostavljaju se početni uvjeti jednaki nuli, i zatim se z–transformacijom odredi prijenosna funkcija koja je polazište za sve postupke realizacije sustava



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

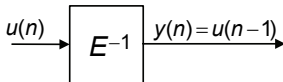
Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Prijenosna funkcija elementa za jedinično kašnjenje

- određuje se prijenosna funkcija sustava za jedinično kašnjenje



Slika 1: Element za jedinično kašnjenje

- primjenom z–transformacije na ulaz i izlaz slijedi

$$Y(z) = z^{-1}U(z) + u(-1), \text{ za } u(-1) = 0 \Rightarrow Y(z) = z^{-1}U(z)$$

- prijenosna funkcija elementa za jedinično kašnjenje je stoga

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) = z^{-1}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

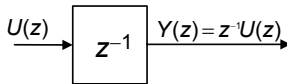
Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

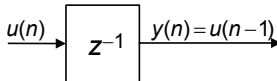
## Prijenosna funkcija elementa za jedinično kašnjenje

- blokovski dijagram elementa za jedinično kašnjenje možemo prikazati kao



Slika 2: Element za jedinično kašnjenje

- odnosno<sup>2</sup>



Slika 3: Element za jedinično kašnjenje

---

<sup>2</sup>Često se, u prikazima blokovskih dijagrama u vremenskoj domeni, operator pomaka  $E^{-1}$  zamjenjuje sa  $z^{-1}$





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

**Direktna  
realizacija**

Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Direktne realizacije vremenski diskretnih sustava



# Direktna realizacija

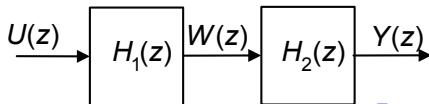
- diskretne sustave opisujemo jednažbom diferencija

$$y(n) = - \sum_{m=1}^N a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m u(n-m)$$

- ili prijenosnom funkcijom

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^N b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} = \underbrace{\left( \sum_{m=0}^N b_m z^{-m} \right)}_{H_1(z)} \underbrace{\frac{1}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}}_{H_2(z)}$$

- sustav realiziramo kao kaskadu





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Direktna I realizacija

- iz

$$\begin{aligned} W(z) &= H_1(z)U(z) = \\ &= (b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{N-1}z^{-(N-1)} + b_Nz^{-N})U(z) \end{aligned}$$

možemo nacrtati blokovski dijagram za prijenosnu funkciju  $H_1(z)$ , a iz

$$Y(z) = H_2(z)W(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} W(z),$$

odnosno

$$Y(z) = W(z) - (a_1z^{-1} + \dots + a_{N-1}z^{-(N-1)} + a_Nz^{-N})Y(z),$$

crtamo blokovski dijagram za prijenosnu funkciju  $H_2(z)$



# Direktna I realizacija

Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

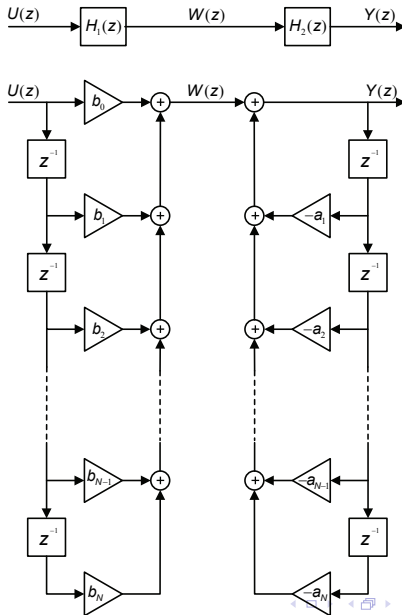
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija

Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja





# Direktna II realizacija

Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

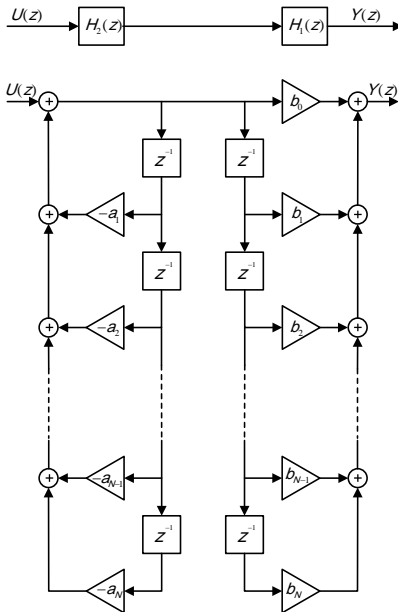
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija

Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja





# Direktna II realizacija

Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

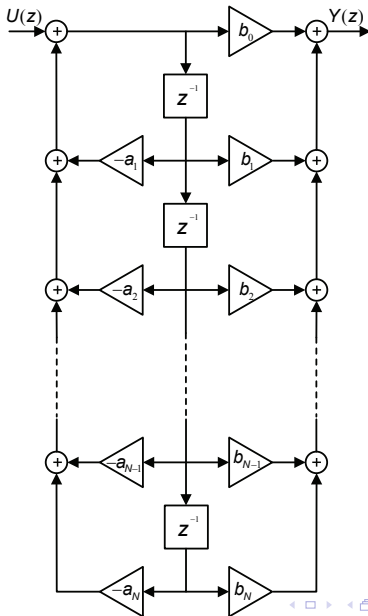
Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

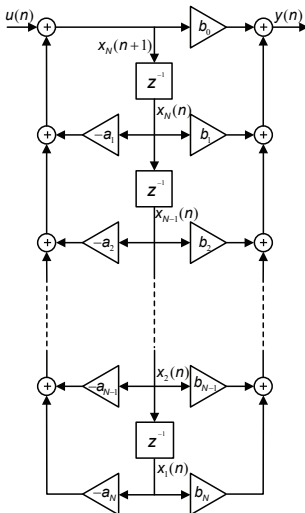
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Direktna II realizacija – izbor varijabli stanja



- kao varijable stanja izabiremo izlaze iz elemenata za kašnjenje (memorijski elementi) kako je prikazano na slici

$$x_1(n+1) = x_2(n)$$

$$x_2(n+1) = x_3(n)$$

$$\vdots$$

$$x_{N-1}(n+1) = x_N(n)$$

$$x_N(n+1) = u(n) - \sum_{j=1}^N a_{N+1-j} x_j(n)$$

$$y(n) = b_0 u(n) + \sum_{j=1}^N (b_{N+1-j} - b_0 a_{N+1-j}) x_j(n)$$

- jednadžbe pišemo kao matrične jednadžbe i određujemo matrice  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$



# Direktna II realizacija

Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_{N-1}(n+1) \\ x_N(n+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_{N-1}(n) \\ x_N(n) \end{bmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(n)$$

$$y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} (b_N - b_0 a_N) & (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) & \dots & (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix} + \underbrace{b_0}_D u(n)$$





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
**Kaskadna  
realizacija**  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Kaskadna realizacija vremenski diskretnih sustava



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Kaskadna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje prijenosne funkcije  $H(z)$  na sekcije nižeg reda
- polinomi u brojniku i nazivniku prikazuju se kao produkti polinoma nižeg reda
- primjer

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_1(z) \cdot B_2(z) \cdot B_3(z)}{A_1(z) \cdot A_2(z) \cdot A_3(z)}$$

- različite kaskadne realizacije postižu se različitim uparivanjem polova i nula ili/i izmjenom redoslijeda sekcija u kaskadi
- slijedi prikaz, 12 od mogućih 36, realizacija zadane prijenosne funkcije



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

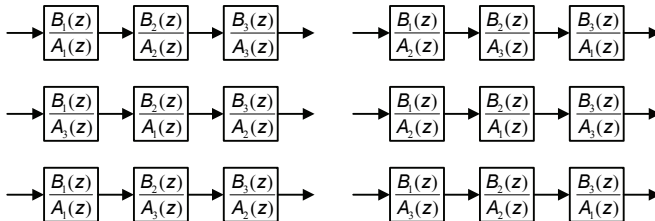
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Kaskadna realizacija diskretnih sustava



- različite ekvivalentne kaskadne realizacije različitim uparivanjem polova



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

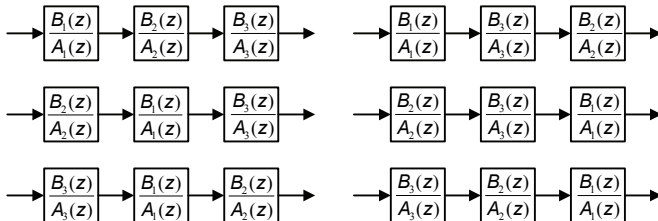
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Kaskadna realizacija diskretnih sustava



- različite ekvivalentne kaskadne realizacije promjenom redoslijeda sekcija



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Kaskadna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje prijenosne funkcije  $H(z)$  na sekcije prvog i drugog reda

$$H(z) = b_0 \prod_{j=1}^L H_j(z)$$

$$H_j(z) = \frac{1 + \beta_{1j}z^{-1}}{1 + \alpha_{1j}z^{-1}}$$

$$H_j(z) = \frac{1 + \beta_{1j}z^{-1} + \beta_{2j}z^{-2}}{1 + \alpha_{1j}z^{-1} + \alpha_{2j}z^{-2}}$$

- svaku od sekcija realiziramo direktnom II realizacijom



# Kaskadna realizacija diskretnih sustava

Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

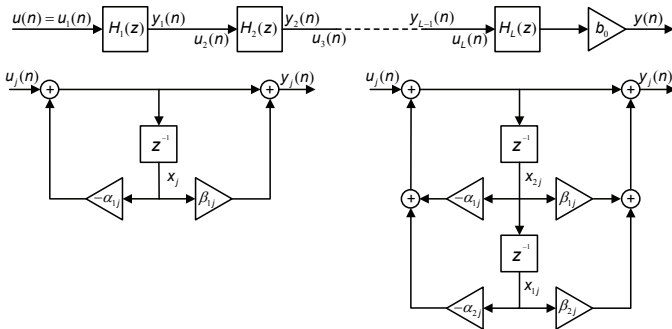
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

$$H(z) = b_0 \prod_{j=1}^L H_j(z)$$



$$H_j(z) = \frac{1 + \beta_{1j}z^{-1}}{1 + \alpha_{1j}z^{-1}}$$

$$H_j(z) = \frac{1 + \beta_{1j}z^{-1} + \beta_{2j}z^{-2}}{1 + \alpha_{1j}z^{-1} + \alpha_{2j}z^{-2}}$$



Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

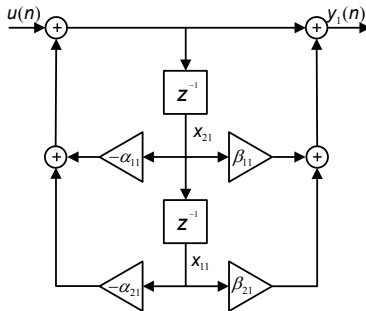
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
**Kaskadna  
realizacija**  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Kaskadna realizacija diskretnih sustava



$$x_{11}(n+1) = x_{21}(n)$$

$$x_{21}(n+1) = -\alpha_{21}x_{11}(n) - \alpha_{11}x_{21}(n) + u(n)$$

$$y_1(n) = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) + u(n)$$

- izabrane su varijable stanja i napisane jednačbe stanja, te izlazna jednačba, za prvu sekciju
- isto će biti učinjeno za još nekoliko narednih sekcija



Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

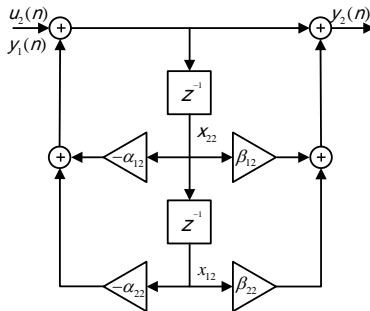
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Kaskadna realizacija diskretnih sustava



$$x_{12}(n+1) = x_{22}(n)$$

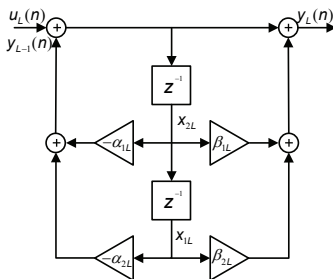
$$x_{22}(n+1) = -\alpha_{22}x_{12}(n) - \alpha_{12}x_{22}(n) + \underbrace{u_2(n)}_{y_1(n)}$$

$$x_{22}(n+1) = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) - \alpha_{22}x_{12}(n) - \alpha_{12}x_{22}(n) + u(n)$$

$$y_2(n) = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) + (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}(n) + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}(n) + u(n)$$



## Kaskadna realizacija diskretnih sustava



$$x_{1L}(n+1) = x_{2L}(n)$$

$$x_{2L}(n+1) = -\alpha_{2L}x_{1L}(n) - \alpha_{1L}x_{2L}(n) + \underbrace{u_L(n)}_{y_{L-1}(n)}$$

$$\begin{aligned} x_{2L}(n+1) = & (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) + \\ & + (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}(n) + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}(n) + \dots + \\ & - \alpha_{2L}x_{1L}(n) - \alpha_{1L}x_{2L}(n) + u(n) \end{aligned}$$

$$y_L(n) = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) + \\ + (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}(n) + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}(n) + \dots + \\ + (\beta_{2L} - \alpha_{2L})x_{1L}(n) + (\beta_{1L} - \alpha_{1L})x_{2L}(n) + u(n)$$

$$y(n) = b_0 y_L(n)$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Kaskadna realizacija diskretnih sustava – primjer $L=3$

- dan je primjer kaskadne realizacije sustava šestog reda pomoću tri sekcije drugog reda
- pišemo, prije izvedene, jednadžbe za svaku od sekcija

$$x_{11}(n+1) = x_{21}(n)$$

$$x_{21}(n+1) = -\alpha_{21}x_{11}(n) - \alpha_{11}x_{21}(n) + u(n)$$

$$y_1(n) = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) + u(n)$$

$$x_{12}(n+1) = x_{22}(n)$$

$$x_{22}(n+1) = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) - \alpha_{22}x_{12}(n) - \alpha_{12}x_{22}(n) + u(n)$$

$$y_2(n) = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) + (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}(n) + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}(n) + u(n)$$

$$x_{13}(n+1) = x_{23}(n)$$

$$x_{23}(n+1) = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) + (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}(n) + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}(n) - \alpha_{23}x_{13}(n) - \alpha_{13}x_{23}(n) + u(n)$$

$$y_3(n) = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}(n) + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}(n) + (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}(n) + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}(n) + (\beta_{23} - \alpha_{23})x_{13}(n) + (\beta_{13} - \alpha_{13})x_{23}(n) + u(n)$$

$$y(n) = b_0 y_3(n)$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Kaskadna realizacija diskretnih sustava – primjer L=3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{11}(n+1) \\ x_{21}(n+1) \\ x_{12}(n+1) \\ x_{22}(n+1) \\ x_{13}(n+1) \\ x_{23}(n+1) \end{bmatrix}}_{x(n+1)} = A \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11}(n) \\ x_{21}(n) \\ x_{12}(n) \\ x_{22}(n) \\ x_{13}(n) \\ x_{23}(n) \end{bmatrix}}_{x(n)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(n)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{21} - \alpha_{21} & \beta_{11} - \alpha_{11} & -\alpha_{22} & -\alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_{21} - \alpha_{21} & \beta_{11} - \alpha_{11} & \beta_{22} - \alpha_{22} & \beta_{12} - \alpha_{12} & -\alpha_{23} & -\alpha_{13} \end{bmatrix}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
**Kaskadna  
realizacija**  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Kaskadna realizacija diskretnih sustava – primjer $L=3$

$$y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0(\beta_{21} - \alpha_{21}) \\ b_0(\beta_{11} - \alpha_{11}) \\ b_0(\beta_{22} - \alpha_{22}) \\ b_0(\beta_{12} - \alpha_{12}) \\ b_0(\beta_{23} - \alpha_{23}) \\ b_0(\beta_{13} - \alpha_{13}) \end{bmatrix}^T}_{C} \begin{bmatrix} x_{11}(n) \\ x_{21}(n) \\ x_{12}(n) \\ x_{22}(n) \\ x_{13}(n) \\ x_{23}(n) \end{bmatrix} + b_0 u(n)$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
**Paralelna  
realizacija**

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Paralelna realizacija vremenski diskretnih sustava



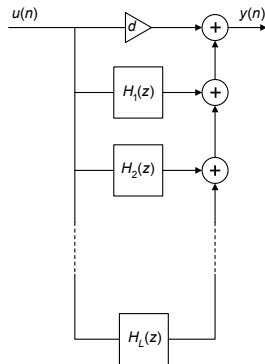
## Paralelna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje prijenosne funkcije  $H(z)$  na zbroj sekcija nižeg reda spojenih u paralelu

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^N b_j z^{N-j}}{z^n + \sum_{j=1}^N a_j z^{N-j}} = d + \sum_j H_j(z)$$

odnosno

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^N b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} = d + \sum_j H_j(z)$$





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Paralelna realizacija diskretnih sustava – primjer

- za sustav trećeg reda provodi se razlaganje u sustave prvog reda i drugog reda spojenih u paralelni spoj – paralelna realizacija I

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

- postupak se temelji na razlaganju prijenosne funkcije na parcijalne razlomke
- zadana  $H(z)$  je neprava razlomljena racionalna funkcija pa ju je, prije razlaganja na parcijalne razlomke, potrebno dovesti u pogodan oblik dijeljenjem brojnika i nazivnika

$$\begin{aligned} (b_3 z^{-3} + b_2 z^{-2} + b_1 z^{-1} + b_0) : (a_3 z^{-3} + a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1) = \\ = \underbrace{\frac{b_3}{a_3}}_d + \frac{B_1(z)}{\underbrace{a_3 z^{-3} + a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}_{\text{prava razlomljena racionalna funkcija}}} \end{aligned}$$



Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Paralelna realizacija diskretnih sustava – primjer

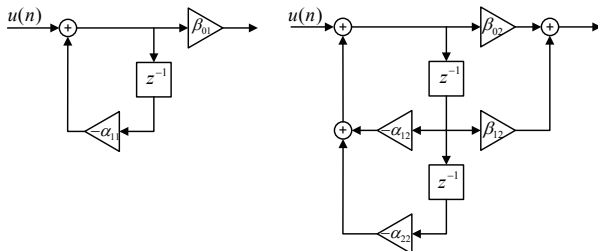
- sukladno kazanom, rastav na parcijalne razlomke, zadane prijenosne funkcije  $H(z)$ , je

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} =$$

$$= d_I + \frac{\beta_{01}}{1 + \alpha_{11} z^{-1}} + \frac{\beta_{02} + \beta_{12} z^{-1}}{1 + \alpha_{12} z^{-1} + \alpha_{22} z^{-2}}$$

gdje je  $d_I = \frac{b_3}{a_3}$

- obje sekcije realiziramo direktnom realizacijom II







Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Paralelna realizacija diskretnih sustava – primjer

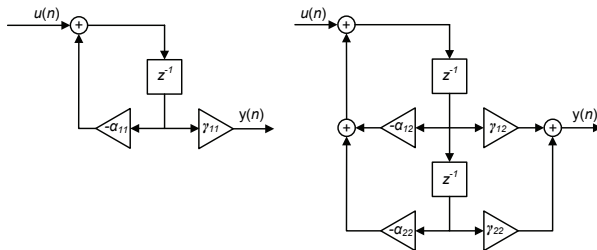
- moguće je i razlaganje (paralelna realizacija II)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$$

$$= d_{II} + \frac{\gamma_{11}}{z + \alpha_{11}} + \frac{\gamma_{12}z + \gamma_{22}}{z^2 + \alpha_{12}z + \alpha_{22}} = d_{II} + \frac{\gamma_{11}z^{-1}}{1 + \alpha_{11}z^{-1}} + \frac{\gamma_{12}z^{-1} + \gamma_{22}z^{-2}}{1 + \alpha_{12}z^{-1} + \alpha_{22}z^{-2}}$$

gdje je<sup>3</sup>  $d_{II} = b_0$

- obje sekcije realiziramo direktnom realizacijom II



<sup>3</sup>jer je  $H(z)$  nepravna razlomljena racionalna funkcija



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

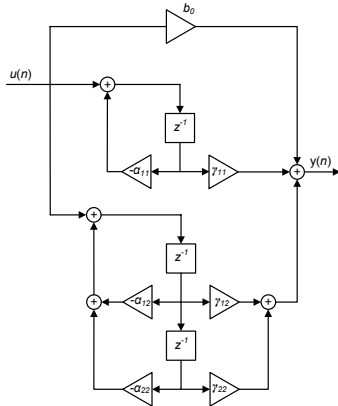
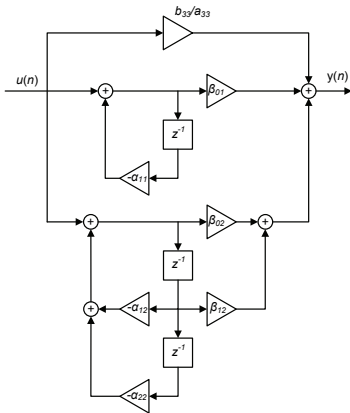
Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Paralelna realizacija diskretnih sustava – primjer

- lijeva strana slike predstavlja paralelnu realizaciju I a desna paralelnu realizaciju II



- dalje razmatramo samo paralelnu realizaciju I



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

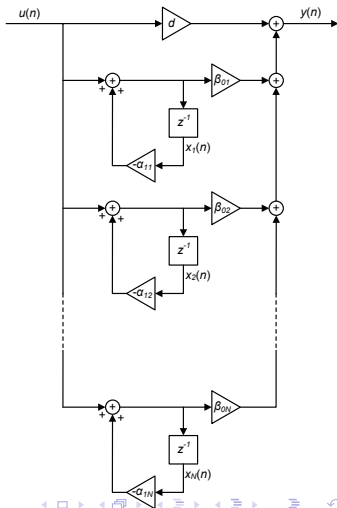
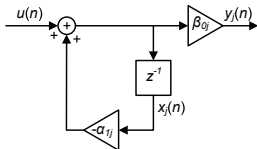
## Paralelna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje transfer funkcije  $H(z)$  na zbroj sekcija prvog reda,

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^N b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}$$

$$H(z) = d + \sum_{j=1}^N H_j(z)$$

$$d = \frac{b_N}{a_N}, \quad H_j(z) = \frac{\beta_{0j}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1}}$$





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
**Paralelna  
realizacija**

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja

## Paralelna realizacija diskretnih sustava – jednažbe stanja

- jednažbe stanja i izlazna jednažba su

$$x_1(n+1) = -\alpha_{11}x_1(n) + u(n)$$

$$x_2(n+1) = -\alpha_{12}x_2(n) + u(n)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_N(n+1) = -\alpha_{1N}x_N(n) + u(n)$$

$$y(n) = -\alpha_{11}\beta_{01}x_1(n) - \alpha_{12}\beta_{02}x_2(n) - \cdots - \alpha_{1N}\beta_{0N}x_N(n) + (d + \beta_{01} + \beta_{02} + \cdots + \beta_{0N})u(n)$$



# Paralelna realizacija diskretnih sustava – jednačbe stanja

Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha_{1N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -\alpha_{11}\beta_{01} & -\alpha_{12}\beta_{02} & \dots & -\alpha_{1N}\beta_{0N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix} + (d + \beta_{01} + \beta_{02} + \dots + \beta_{0N})u(n)$$

- u općem slučaju neki od polova mogu biti kompleksni i u tom su slučaju  $\beta_{0j}$  također kompleksni
- želimo li izbjeći množenja s kompleksnim brojevima kombiniramo konjugirano kompleksne korijene kako bi formirali podsustave drugog reda s realnim koeficijentima prijenosne funkcije



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

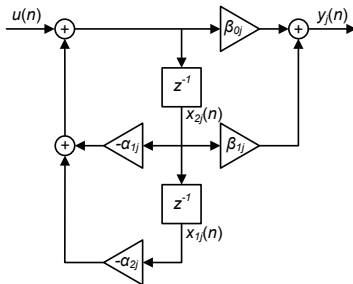
Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

# Paralelna realizacija diskretnih sustava – razlaganje na podsustave drugog reda

- razlaganje transfer funkcije  $H(z)$  na sekcije drugog reda

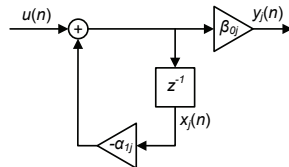
$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^N b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{j=1}^L H_j(z)$$

$$d = \frac{b_N}{a_N}, \quad H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j} z^{-1}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1} + \alpha_{2j} z^{-2}}$$



za realni pol

$$\alpha_{2j} = \beta_{1j} = 0$$





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

## Paralelna realizacija diskretnih sustava – primjer

- neka je zadani sustav

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5}}$$

- $N$  je neparan i barem je jedan pol realan
- neka su preostali polovi konjugirano kompleksni
- razlaganje na parcijalne razlomke je oblika

$$H(z) = \frac{b_5}{a_5} + \frac{\beta_{01}}{1 + \alpha_{11} z^{-1}} + \\ + \frac{\beta_{02} + \beta_{12} z^{-1}}{1 + \alpha_{12} z^{-1} + \alpha_{22} z^{-2}} + \frac{\beta_{03} + \beta_{13} z^{-1}}{1 + \alpha_{13} z^{-1} + \alpha_{23} z^{-2}}$$



# Paralelna realizacija diskretnih sustava – primjer

Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

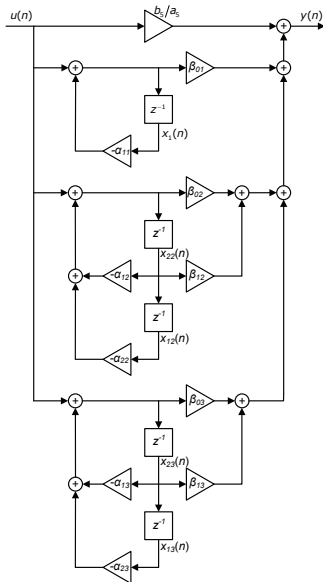
Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
Paralelna  
realizacija

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama



$$x_1(n+1) = -\alpha_{11}x_1(n) + u(n)$$

$$x_{12}(n+1) = x_{22}(n)$$

$$x_{22}(n+1) = -\alpha_{22}x_{12}(n) - \alpha_{12}x_{22}(n) + u(n)$$

$$x_{13}(n+1) = x_{23}(n)$$

$$x_{23}(n+1) = -\alpha_{23}x_{13}(n) - \alpha_{13}x_{23}(n) + u(n)$$

$$y(n) = -\beta_{01}\alpha_{11}x_1(n) - \beta_{02}\alpha_{22}x_{12}(n) + (\beta_{12} - \beta_{02}\alpha_{12})x_{22} - \beta_{03}\alpha_{23}x_{13}(n) + (\beta_{13} - \beta_{03}\alpha_{13})x_{23} + \left(\frac{b_5}{a_5} + \beta_{01} + \beta_{02} + \beta_{03}\right)u(n)$$





## Paralelna realizacija diskretnih sustava – primjer

Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Direktna  
realizacija  
Kaskadna  
realizacija  
**Paralelna  
realizacija**

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_{12}(n+1) \\ x_{22}(n+1) \\ x_{13}(n+1) \\ x_{23}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{22} & -\alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} & -\alpha_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_{12}(n) \\ x_{22}(n) \\ x_{13}(n) \\ x_{23}(n) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -\beta_{01}\alpha_{11} & -\beta_{02}\alpha_{22} & \beta_{12}-\beta_{02}\alpha_{12} & -\beta_{03}\alpha_{23} & \beta_{13}-\beta_{03}\alpha_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_{12}(n) \\ x_{22}(n) \\ x_{13}(n) \\ x_{23}(n) \end{bmatrix} + \left( \frac{b_5}{a_5} + \beta_{01} + \beta_{02} + \beta_{03} \right) u(n)$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Blokovske realizacije vremenski kontinuiranih sustava



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Realizacije kontinuiranih sustava

- vremenski kontinuirani sustavi, opisani prijenosnom funkcijom, razlažu se u strukture koje sadrže elementarne blokove
  - integrator
  - zbrajalo
  - množilo s konstantom
- izvedene strukture nazivaju se realizacije i ovdje se razmatraju
  - direktna,
  - kaskadna, i
  - paralelna realizacija
- u slučaju da se određuje realizacija sustava zadanog s diferencijalnom jednadžbom, pretpostavljaju se početni uvjeti jednaki nuli, i zatim se  $\mathcal{L}$ -transformacijom odredi prijenosna funkcija koja je polazište za sve postupke realizacije sustava



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Prijenosna funkcija idealnog integratora

- za integrator, čiji su početni uvjeti  $y(0^-) = 0$ , vrijedi

$$y(t) = \int_{0^-}^t u(\tau) d\tau$$

odnosno

$$Y(s) = \frac{1}{s} U(s)$$

pa je prijenosna funkcija

$$H(s) = \frac{1}{s}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Direktna realizacija vremenski kontinuiranih sustava



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Direktna realizacija kontinuiranih sustava

- prijenosna funkcija kontinuiranog sustava je

$$H(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \dots + b_{N-1} s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + a_N}$$

odnosno

$$H(s) = \frac{b_0 + \frac{b_1}{s} + \dots + \frac{b_{N-1}}{s^{N-1}} + \frac{b_N}{s^N}}{1 + \frac{a_1}{s} + \dots + \frac{a_{N-1}}{s^{N-1}} + \frac{a_N}{s^N}}$$

$H(s)$  možemo izraziti i kao

$$H(s) = \left( b_0 + \frac{b_1}{s} + \dots + \frac{b_{N-1}}{s^{N-1}} + \frac{b_N}{s^N} \right) \left( \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \dots + \frac{a_{N-1}}{s^{N-1}} + \frac{a_N}{s^N}} \right)$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

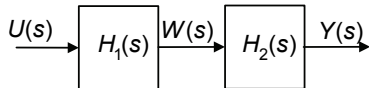
## Direktna I realizacija kontinuiranih sustava

- označimo li

$$H_1(s) = b_0 + \frac{b_1}{s} + \cdots + \frac{b_{N-1}}{s^{N-1}} + \frac{b_N}{s^N}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{s^{N-1}} + \frac{a_N}{s^N}}$$

- sustav realiziramo kao kaskadu



- pa su

$$W(s) = H_1(s)U(s)$$

$$Y(s) = H_2(s)W(s)$$



## Direktna I realizacija kontinuiranih sustava

- iz

$$W(s) = \left( b_0 + \frac{b_1}{s} + \cdots + \frac{b_{N-1}}{s^{N-1}} + \frac{b_N}{s^N} \right) U(s)$$

možemo nacrtati blokovski dijagram za prijenosnu funkciju  $H_1(s)$  a iz

$$Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{s^{N-1}} + \frac{a_N}{s^N}} W(s)$$

odnosno

$$Y(s) = W(s) - \left( \frac{a_1}{s} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{s^{N-1}} + \frac{a_N}{s^N} \right) Y(s)$$

crtamo blokovski dijagram za prijenosnu funkciju  $H_2(s)$





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

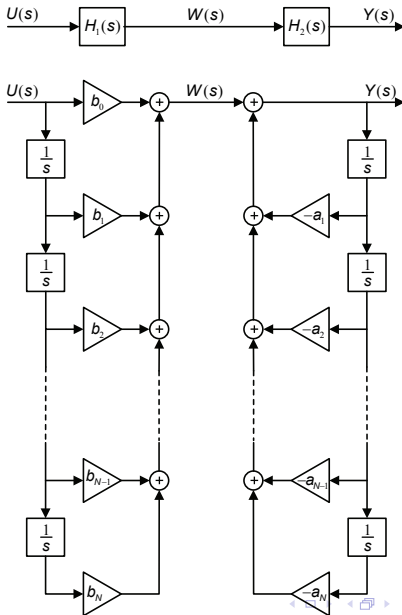
Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Direktna I realizacija kontinuiranih sustava





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

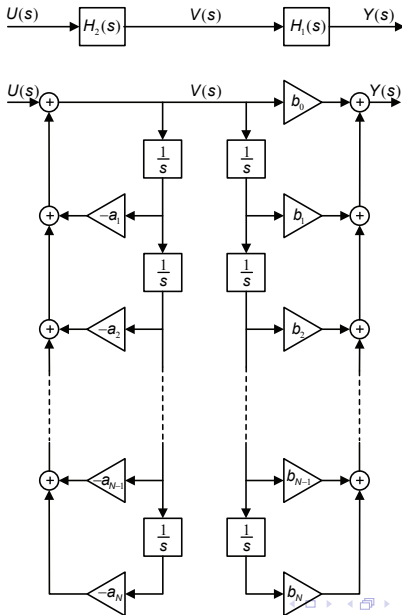
Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Direktna II realizacija kontinuiranih sustava





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

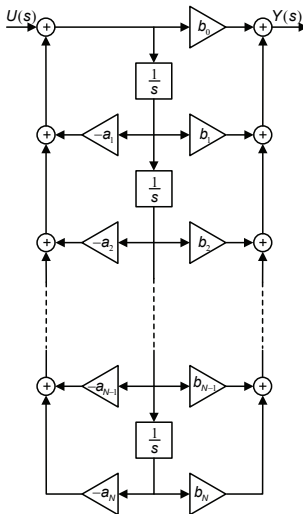
Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Direktna II realizacija kontinuiranih sustava





Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

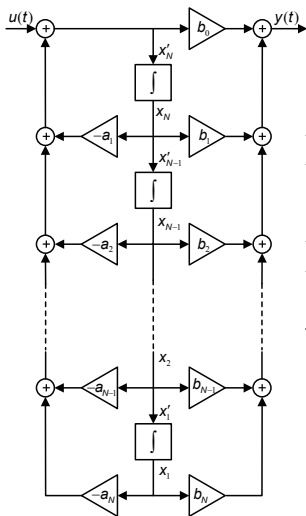
Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

# Direktna II realizacija kontinuiranih sustava – izbor varijabli stanja



$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$x'_{N-1} = x_N$$

$$x'_N = -a_N x_1 - a_{N-1} x_2 - \cdots - a_2 x_{N-1} - a_1 x_N + u$$

$$y = (b_N - b_0 a_N) x_1 + (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) x_2 + \cdots \\ \cdots + (b_2 - b_0 a_2) x_{N-1} + (b_1 - b_0 a_1) x_N + b_0 u$$



## Direktna II realizacija

Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}'(t) \\ x_N'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} (b_N - b_0 a_N) & (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) & \dots & (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Kaskadna realizacija vremenski kontinuiranih sustava



Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Kaskadna realizacija kontinuiranih sustava

- razlaganje prijenosne funkcije  $H(s)$  na sekcije prvog i drugog reda

$$H(s) = b_{N-M} \prod_{j=1}^L H_j(s)$$

- pri čemu su sekcije u nekom od slijedeća četiri oblika

$$H_j(s) = \frac{s + \beta_{1j}}{s + \alpha_{1j}},$$

$$H_j(s) = \frac{s^2 + \beta_{1j}s + \beta_{2j}}{s^2 + \alpha_{1j}s + \alpha_{2j}},$$

$$H_j(s) = \frac{1}{s + \alpha_{1j}},$$

$$H_j(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha_{1j}s + \alpha_{2j}}$$



# Kaskadna realizacija kontinuiranih sustava

Signali i sustavi

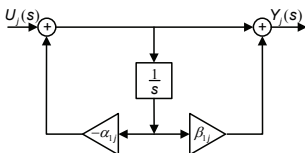
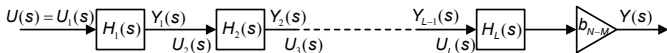
školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

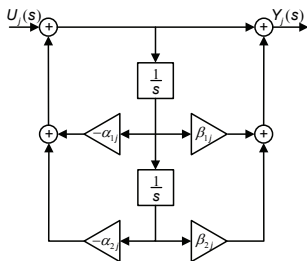
Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi



$$H_j(s) = \frac{s + \beta_{1j}}{s + \alpha_{1j}}$$



$$H_j(s) = \frac{s^2 + \beta_{1j}s + \beta_{2j}}{s^2 + \alpha_{1j}s + \alpha_{2j}}$$





Signali i  
sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

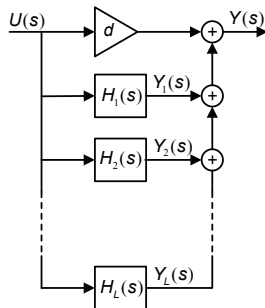
## Paralelna realizacija vremenski kontinuiranih sustava



## Paralelna realizacija kontinuiranih sustava

- razlaganje transfer funkcije  $H(s)$  na zbroj sekcija nižeg reda dakle,

$$\begin{aligned} N &\geq M \\ H(s) &= \frac{\sum_{m=0}^M b_{N-M+m} s^{M-m}}{s^N + \sum_{m=1}^N a_m s^{N-m}} = \\ &= d + \sum_j H_j(s) \end{aligned}$$
$$d = \begin{cases} b_0 & \text{za } N = M \\ 0 & \text{za } N > M \end{cases}$$





Signali i sustavi

školska godina  
2009/2010  
Cjelina 17

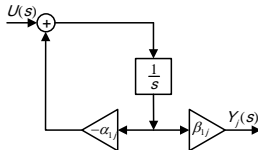
Profesor  
Branko Jeren

Prijenosna  
funkcija  
složenih  
sustava

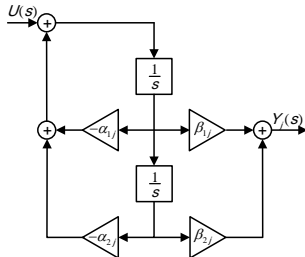
Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
diskretni  
sustavi

Razlaganje  
sustava i  
prijelaz u  
model s  
varijablama  
stanja –  
kontinuirani  
sustavi

## Paralelna realizacija kontinuiranih sustava



$$H_j(s) = \frac{\beta_{1j}}{s + \alpha_{1j}}$$



$$H_j(s) = \frac{\beta_{1j}s + \beta_{2j}}{s^2 + \alpha_{1j}s + \alpha_{2j}}$$