Signali i sustavi

Drugi međuispit (grupa A) – 12. svibnja 2008.

1. Kontinuirani signal ima spektar koji je jednak nuli za sve kružne frekvencije osim onih iz intervala $\omega \in \langle -10\pi, -\pi\rangle \cup \langle \pi, 10\pi\rangle$. Kojom frekvencijom moramo otipkati signal ako želimo da rekonstrukcija temeljem dobivenih uzoraka bude moguća? Odaberite najmanju frekvenciju otipkavanja tako da ne dođe do preklapanja spektra (eng. *aliasing*).

a) $f_s > 0$ **b)** $f_s > 5$ **c)** $f_s > 5\pi$ **d)** $f_s > 10\pi$ **e)** $f_s > 10$

2. Zadan je periodički niz pravokutnih impulsa. Trajanje impulsa je T_0, a period signala je $T_p > T_0$. Može li se taj signal otipkati tako da ne dođe do preklapanje spektra (eng. *aliasing*)? Ako da, kolika mora biti frekvencija otipkavanja?

a) Može, $f > \frac{2}{T_0}$. **b)** Može, $f > \frac{2}{T_p}$. **c)** Može, $f > \frac{2}{T_0+T_p}$. **d)** Može, $f > \max(\frac{2}{T_0}, \frac{2}{T_p})$. **e)** Ne može!

3. Promatramo diskretni periodični signal zadan osnovnim periodom $x(n) = \begin{cases} |n|, & |n| \le 2 \\ 0, & n = 3 \end{cases}$. Nulti član vremenski diskretnog Fourierovog reda (DTFS) toga signala je:

a) $X_0 = 1$ **b)** $X_0 = -\frac{1}{6}$ **c)** $X_0 = -\frac{1}{2}$ **d)** $X_0 = \frac{1}{2}$ **e)** $X_0 = -1$

4. Kontinuirani signal čiji spektar je $X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & -1 < \Omega < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ je otipkan uz period otipkavanja $T = \pi$. Vrijednost spektra diskretnog signala $X(e^{j\omega})$ za $\omega = \frac{\pi}{2}$ je:

a) 0 **b)** $\frac{1}{\pi}$ **c)** $\frac{2}{\pi}$ **d)** $\frac{3}{\pi}$ **e)** $\frac{4}{\pi}$

5. Kolika je vrijednost DFT transformacije u četiri točke signala $x(n) = \{\underline{0}, 1, 0, 0\}$ za $k = 3$?

a) 0 **b)** 1 **c)** -1 **d)** j **e)** $-j$

6. Promatramo diskretnu kompleksnu eksponencijalu konačne duljine N opisanu izrazom $x(n) = \begin{cases} e^{j\Omega_0 n}, & 0 \le n < N-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.
Za transformacije $X[k] = \text{DFT}\big[x(n)\big]$ i $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\big[x(n)\big]$ vrijedi:

a) $X[k] = X(e^{j\omega})$ za $\omega = 2\pi\frac{k}{N-1}$ **b)** $X[k] = X(e^{j\omega})$ za $\omega = 2\pi\frac{k}{N}$ **c)** $X[k] = X(e^{j\omega})$ za $\omega = 2\pi\frac{k}{N+1}$
d) $X[N-k] = X(e^{j\omega})$ za $\omega = 2\pi\frac{k}{N}$ **e)** $X[k] = X(e^{j\omega})$ za $\omega = 2\pi\frac{k}{N-k}$

7. Neka su $u_1(t)$ i $u_2(t)$ ulazi u sustav S i neka su α i β neki brojevi. Definiciju linearnosti možemo pisati:

a) $\exists\, \alpha, \beta$: $S\big(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)\big) = \alpha S\big(u_1(t)\big) + \beta S\big(u_2(t)\big)$ **b)** $\exists\, \alpha, \beta$: $S\big(u_1(\alpha t) + u_2(\beta t)\big) = \alpha S\big(u_1(t)\big) + \beta S\big(u_2(t)\big)$
c) $\forall\, \alpha, \beta$: $S\big(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)\big) = \alpha S\big(u_1(t)\big) + \beta S\big(u_2(t)\big)$ **d)** $\forall\, \alpha, \beta$: $S\big(u_1(\alpha t) + u_2(\beta t)\big) = \alpha S\big(u_1(t)\big) + \beta S\big(u_2(t)\big)$
e) $\forall\, \alpha, \beta$: $S\big(u_1(\alpha t_1 + \beta t_2) + u_2(\alpha t_1 + \beta t_2)\big) = \alpha S\big(u_1(t_1)\big) + \beta S\big(u_2(t_2)\big)$

8. Odziv na jedinični skok $u(t) = \mu(t)$ kontinuiranog LTI sustava je $y(t) = (1-t)\,\mu(t)$. Koliki je odziv na pobudu $u(t) = \mu(t) - \mu(t-2008)$?

a) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1-t, & 0 \le t < 2008 \\ -2007, & \text{inače} \end{cases}$ **b)** $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1-t, & 0 \le t < 2008 \\ -2008, & \text{inače} \end{cases}$ **c)** $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1-t, & 0 \le t < 2008 \\ 2008, & \text{inače} \end{cases}$
d) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t-1, & 0 \le t < 2008 \\ -2007, & \text{inače} \end{cases}$ **e)** $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1-t, & 0 \le t < 2007 \\ -2008, & \text{inače} \end{cases}$

9. Neka je $y(t)$ odziv sustava S na pobudu $u(t)$, dakle $y(t) = S\big(u(t)\big)$, te neka je $T \in \mathbb{R}$. Za sustav S kažemo da je vremenski nepromjenjiv ako za svaku pobudu vrijedi:

a) $\forall\, T$: $S\big(u(t-T)\big) = y(t-T)$ **b)** $\forall\, T$: $S\big(u(t-T)\big) = y(t+T)$ **c)** $\exists\, T$: $S\big(u(t-T)\big) = y(t-T)$
d) $\exists\, T$: $S\big(u(t-T)\big) = y(t+T)$ **e)** $\exists\, T$: $S\big(u(t+T)\big) = y(t+T)$

10. Zadan je sustav $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} u(k)$. Taj sustav je:

a) bezmemorijski i linearan **b)** nelinearan i memorijski **c)** linearan i vremenski nepromjenjiv
d) linearan i vremenski promjenjiv **e)** bezmemorijski i vremenski nepromjenjiv

11. Zadan je sustav $y(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)$. Taj sustav je:

a) bezmemorijski i linearan **b)** nelinearan i memorijski **c)** linearan i vremenski nepromjenjiv
d) linearan i vremenski promjenjiv **e)** bezmemorijski i vremenski nepromjenjiv

12. Zadan je LTI sustav opisan matricama $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$. Koliko iznosi odziv nepobuđenog sustava za $n \geq 0$ uz početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$? Uputa: raspišite $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$ i računajte $A \cdot A$, $A \cdot A \cdot A$ itd.

a) 0 **b)** 1 **c)** n **d)** $1 + n$ **e)** $2 + n$

13. Zadan je LTI sustav opisan matricama $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$. Ukoliko su početni uvjeti $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ pronađite prve dvije vrijednosti $u(0)$ i $u(1)$ ulaznog signala tako da se sustav u koraku dva nađe u stanju $\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

a) $u(0) = -x_1 - 2x_2,\ u(1) = x_1 + x_2$ **b)** $u(0) = -2x_1 - 2x_2,\ u(1) = 0$ **c)** $u(0) = -x_1,\ u(1) = -x_2$
d) $u(0) = -2x_1,\ u(1) = -4x_2$ **e)** $u(0) = -2x_1 - x_2,\ u(1) = -x_1 - x_2$

14. Ako je impulsni odziv diskretnog LTI sustava $h(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ diferencijska jednadžba koja opisuje taj sustav je:

a) $y(n) = u(n) + 2u(n-2)$ **b)** $y(n) = u(n-2) + 2u(n)$ **c)** $y(n) + y(n-2) = u(n)$ **d)** $y(n-2) + 2y(n) = u(n)$
e) $y(n) + 2y(n-2) = u(n) + 2u(n-2)$

15. Nađite odziv kontinuiranog LTI sustava s impulsnim odzivom $h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ na pobudu $u(t) = \begin{cases} 1, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

a) $y(t) = \begin{cases} 2 - |t-1|, & 0 < t < 2 \\ 0, \text{inače} \end{cases}$ **b)** $y(t) = \begin{cases} 1 - |t-1|, & 1 < t < 3 \\ 0, \text{inače} \end{cases}$ **c)** $y(t) = \begin{cases} 2 - |t-2|, & 1 < t < 3 \\ 0, \text{inače} \end{cases}$
d) $y(t) = \begin{cases} 1 - |t-2|, & 1 < t < 3 \\ 0, \text{inače} \end{cases}$ **e)** $y(t) = \begin{cases} 2 - |t-1|, & 0 < t < 1 \\ 0, \text{inače} \end{cases}$

16. Konvolucija $\big(x(t) + y(t) * \delta(t+2)\big) * \delta(t-1)$ je:

a) $x(t-1) \cdot \mu(t)$ **b)** $y(t-1) + x(t+1)$ **c)** $x(t-1)$ **d)** $x(t+1) + y(t+3)$ **e)** $x(t-1) + y(t+1)$

17. Promatramo diskretni LTI sustav opisan diferencijskom jednadžbom $y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 4u(n)$. Ako je pobuda $u(n) = (1 - 3n)\,\mu(n)$ onda je odziv mirnog sustava:

a) $y(n) = \big(-12 - 4n\big)\,\mu(n)$ **b)** $y(n) = 4 \cdot 2^n\,\mu(n)$ **c)** $y(n) = 20 \cdot 2^n\,\mu(n)$ **d)** $y(n) = \big(16 \cdot 2^n - 4n - 12\big)\,\mu(n)$
e) $y(n) = \big(20 \cdot 2^n - 4n - 12\big)\,\mu(n)$

18. Promatramo diskretni LTI sustav opisan diferencijskom jednadžbom $y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 4u(n)$. Ako je pobuda $u(n) = (1 - 3n)\,\mu(n)$ i ako su početni uvjeti $y(-1) = 2$ i $y(-2) = 1$ onda je prisilni odziv sustava:

a) $y(n) = \big(-12 - 4n\big)\,\mu(n)$ **b)** $y(n) = 4 \cdot 2^n\,\mu(n)$ **c)** $y(n) = 20 \cdot 2^n\,\mu(n)$ **d)** $y(n) = \big(16 \cdot 2^n - 4n - 12\big)\,\mu(n)$
e) $y(n) = \big(20 \cdot 2^n - 4n - 12\big)\,\mu(n)$

19. Promatramo diskretni LTI sustav opisan diferencijskom jednadžbom $y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 4u(n)$. Ako su početni uvjeti $y(-1) = 2$ i $y(-2) = 1$ onda je odziv nepobuđenog sustava:

a) $y(n) = \big(4 \cdot 2^n + 4 \cdot 4^n\big)\,\mu(n)$ **b)** $y(n) = 4 \cdot 2^n\,\mu(n)$ **c)** $y(n) = 20 \cdot 2^n\,\mu(n)$ **d)** $y(n) = \big(16 \cdot 2^n - 4n - 12\big)\,\mu(n)$
e) $y(n) = \big(20 \cdot 2^n - 4n - 12\big)\,\mu(n)$

20. Promatramo diskretni LTI sustav opisan diferencijskom jednadžbom $y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 4u(n)$. Ako je pobuda $u(n) = (1 - 3n)\,\mu(n)$ i ako su početni uvjeti $y(-1) = 2$ i $y(-2) = 1$ onda je totalni odziv sustava:

a) $y(n) = \big(-12 - 4n\big)\,\mu(n)$ **b)** $y(n) = 4 \cdot 2^n\,\mu(n)$ **c)** $y(n) = 20 \cdot 2^n\,\mu(n)$ **d)** $y(n) = \big(16 \cdot 2^n - 4n - 12\big)\,\mu(n)$
e) $y(n) = \big(20 \cdot 2^n - 4n - 12\big)\,\mu(n)$