Signali i sustavi – Zadaci za vježbu – 15. tjedan

Akademska godina 2006/2007.

1. Znate da je prijenosna funkcija nekog LTI diskretnog sustava

$$H(z) = \frac{\left(e^{-2} - e^{-1}\right)z}{\left(z - e^{-2}\right)\left(z - e^{-1}\right)},$$

no ne znate koje je područje konvergencije. Postoje tri moguća područja konvergencije:

a. $|z| > e^{-1}$,

b. $e^{-2} < |z| < e^{-1}$,

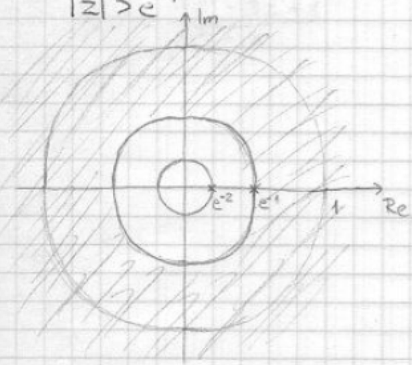
c. $|z| < e^{-2}$.

Za svako od navedenih područja konvergencije odredite impulsni odziv sustava. Za koji od navedenih slučajeva možemo tvrditi da je sustav kauzalan?

① IVA MALOVIĆ 0036421572

$$H(z) = \frac{(e^{-2} - e^{-1})z}{(z-e^{-2})(z-e^{-1})} = \frac{z}{z-e^{-2}} + \frac{-z}{z-e^{-1}}$$

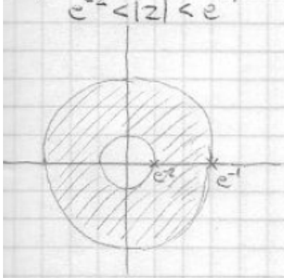
a) $|z| > e^{-1}$



Za ovaj slučaj sustav je kauzalan.

$h(n) = \left(e^{-2n} - e^{-n}\right)\mu(n)$

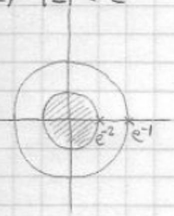
b) $e^{-2} < |z| < e^{-1}$



U ovom slučaju izraz $\frac{z}{z-e^{-2}}$ konvergira kauzalno a izraz $\frac{z}{z-e^{-1}}$ konvergira ako je antikauzalan

$h(n) = e^{-2n}\mu(n) + e^{-n}\mu(-n-1)$

c) $|z| < e^{-2}$



Ovdje su oba izraza antikauzalna

$h(n) = -e^{-2n}\mu(-n-1) + e^{-n}\mu(-n-1)$

2. Poznat je impulsni odziv LTI sustava u vremenskoj domeni $\{\ldots,0,\underline{2},1,0,-1,0,0,0,\ldots\}$. Nađite odziv sustava na pobudu $\{\ldots,0,\underline{0},1,2,1,0,0,\ldots\}$ koristeći:
   a. konvolucijsku sumaciju,
   b. z – transformaciju.

   (Podvučena vrijednost je amplituda impulsa u trenutku $n=0$.)

$$2.\quad h(n)=\{\ldots 0,\underline{2},1,0,-1,0,0\ldots\}$$

$$u(n)=\{\ldots 0,\underline{0},1,2,1,0,0\ldots\}$$

a) $y(n)=\sum_{m=0}^{n} u(m)\cdot h(n-m)$

$$y(0)=\sum_{0}^{0} u(m)\cdot h(-m)=u(0)\cdot h(0)=0$$

$$y(1)=\sum_{0}^{1} u(m)\cdot h(1-m)=u(0)\cdot h(1)+u(1)\cdot h(0)=0+2=2$$

$$y(2)=\sum_{0}^{2} u(m)\cdot h(2-m)=u(0)\cdot h(2)+u(1)\cdot h(1)+u(2)\cdot h(0)=1+4=5$$

$$y(3)=\sum_{0}^{3} u(m)\cdot h(3-m)=u(0)\cdot h(3)+u(1)\cdot h(2)+u(2)\cdot h(1)+u(3)\cdot h(0)=2+2=4$$

$$y(4)=\sum_{0}^{4} u(m)\cdot h(4-m)=\underbrace{u(0)\cdot h(4)}_{0}+u(1)\cdot h(3)+\underbrace{u(2)\cdot h(2)}_{0}+u(3)\cdot h(1)+\underbrace{u(4)\cdot h(0)}_{0}=-1+1=0$$

$$y(5)=\sum_{0}^{5} u(m)\cdot h(5-m)=\underbrace{u(0)\cdot h(5)}_{0}+\underbrace{u(1)\cdot h(4)}_{0}+u(2)\cdot h(3)+\underbrace{u(3)\cdot h(2)}_{0}+\underbrace{u(4)\cdot h(1)+u(5)\cdot h(0)}_{0}=-2$$

$$y(6)=\sum_{0}^{6} u(m)\cdot h(6-m)=\underbrace{u(0)\cdot h(6)}_{0}+\underbrace{u(1)\cdot h(5)}_{0}+\underbrace{u(2)\cdot h(4)}_{0}+u(3)\cdot h(3)+\underbrace{u(4)\cdot h(2)}_{0}+\underbrace{u(5)\cdot h(1)}_{0}+\underbrace{u(6)\cdot h(0)}_{0}=-1$$

$$y(7)=\sum_{0}^{7} u(m)\cdot h(7-m)=u(0)\cdot h(7)+u(1)\cdot h(6)+u(2)\cdot h(5)+u(3)\cdot h(4)+u(4)\cdot h(3)+u(5)\cdot h(2)+u(6)\cdot h(1)+u(7)\cdot h(0)=0$$

$$y(n)=\{\ldots 0,\underline{0},2,5,4,0,-2,-1,0,\ldots\}$$

b)

$$H(z)=\sum_{n=0}^{3} h(n)\cdot z^{-n}=h(0)+h(1)\cdot z^{-1}+h(2)\cdot z^{-2}+h(3)\cdot z^{-3}=2+z^{-1}-z^{-3}$$

$$U(z)=\sum_{n=0}^{3} u(n)\cdot z^{-n}=u(0)+u(1)\cdot z^{-1}+u(2)\cdot z^{-2}+u(3)z^{-3}=z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}$$

$$Y(z)=U(z)\cdot H(z)=(z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3})\cdot(2+z^{-1}-z^{-3})=$$

$$=2z^{-1}+4z^{-2}+2z^{-3}+z^{-2}+2z^{-3}+\cancel{z^{-4}}-\cancel{z^{-4}}-2z^{-5}-z^{-6}$$

$$=2z^{\overset{\text{kasni}}{-1}}+5z^{-2}+4z^{-3}-2z^{-5}-z^{-6}$$

$$y(n)=\{\ldots 0,\underline{0},2,5,4,0,-2,-1,0,\ldots\}$$

3. Sustav je zadan prijenosnom funkcijom:

$$H(z) = \frac{2z(3z-23)}{(25-6z+z^2)(z-1)^2} \text{ .}$$

Odredite:

a. razvojem u red (dijeljenje razlomaka) amplitudu elementa niza u koraku *n=3* uz impulsnu pobudu;
b. impulsni odziv sustava u vremenskoj domeni koristeći parcijalne razlomke.

a)

$$(6z^2-46z):(z^4-8z^3+38z^2-56z+25) = 6z^{-2}+2z^{-3}-212z^{-4} \ldots$$

$$\underline{-\ 6z^2+48z-228+336z^{-1}-150z^{-2}}$$

$$2z-228+336z^{-1}-150z^{-2}$$

$$\underline{-2z+16-76z^{-1}+112z^{-2}-50z^{-3}}$$

$$-212+260z^{-1}-38z^{-2}-50z^{-3}$$

$$\vdots$$

$$h(n) = 6\delta(n-2)+2\delta(n-3)-212\delta(n-4)+\ldots$$

$$h(n) = \{\ldots 0, \underline{0}, 0, 6, 2, -212, \ldots\}$$

Za *n=3* vrijednost impulsa je *2*.

b)

$$H(z)=\frac{6z^2-46z}{(z-1)^2(z-3+4j)(z-3-4j)} \qquad z_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-100}}{2}=3\pm4j$$

$$H(z)=\frac{\alpha_1 z}{z-1}+\frac{\alpha_2 z}{(z-1)^2}+\frac{\alpha_3 z}{z-3+4j}+\frac{\alpha_4 z}{z-3-4j}$$

$$\alpha_1=\lim_{z\to1}\left[\frac{d}{dz}\cancel{(z-1)^2}\cdot\frac{(6z-46)}{\cancel{(z-1)^2}(25-6z+z^2)}\right]=\lim_{z\to1}\left[\frac{6(25-6z+z^2)-(6z-46)(2z-6)}{(z^2-6z+25)^2}\right]=$$

$$=\frac{6\cdot20-(-40)\cdot(-4)}{20^2}=\frac{-40}{20^2}=\frac{-40}{400}=\frac{-1}{10}$$

$$\alpha_2=\lim_{z\to1}\left[\frac{6z-46}{25-6z+z^2}\right]=\frac{-40}{20}=-2$$

$$\alpha_3=\lim_{z\to3-4j}\left[\frac{\cancel{(z-3+4j)}(6z-46)}{(z-1)^2\cancel{(z-3+4j)}(z-3-4j)}\right]=\frac{18-24j-46}{(2-4j)^2(-8j)}=\frac{28+24j}{8j(4-16j-16)}=\frac{7+6j}{2j(-12-16j)}=$$

$$=\frac{7+6j}{-24j+32}=\frac{(7+6j)(32+24j)}{1024+576}=\frac{224+360j-144}{1600}=\frac{80+360j}{1600}=\frac{2+9j}{40}$$

$$\alpha_4=\lim_{z\to3+4j}\left[\frac{\cancel{(z-3-4j)}(6z-46)}{(z-1)^2(z-3+4j)\cancel{(z-3-4j)}}\right]=\frac{18+24j-46}{(2+4j)^2(8j)}=\frac{24j-28}{(4+16j-16)8j}=\frac{6j-7}{8j-32-32j}=$$

$$=\frac{7-6j}{24j+32}=\frac{168j-224+144+192j}{-576-1024}=\frac{360j-80}{-1600}=\frac{2-9j}{40}$$

$$H(z)=\frac{-1}{10}\cdot\frac{z}{z-1}-2\cdot\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{2+9j}{40}\cdot\frac{z}{z-3+4j}+\frac{2-9j}{40}\cdot\frac{z}{z-3-4j}$$

$$h(n)=\frac{1}{40}\left[-4-80n+(2+9j)(3-4j)^n+(2-9j)(3+4j)^n\right]\mu(n)$$

Kako zadani sustav posjeduje realne koeficijente, i rješenje bi bilo trebalo napisati sa istima:

$$\frac{1}{20}+\frac{9}{40}j=0.23e^{1..35j} \qquad 3+4j=5e^{0.927j}$$

$$\frac{1}{20}-\frac{9}{40}j=0.23e^{-1..35j} \qquad 3-4j=5e^{-0.927j}$$

$$h(n)=\left[-\frac{1}{10}-2n+0.23e^{1..35j}5^n e^{-0.927nj}+0.23e^{-1..35j}5^n e^{0.927nj}\right]\mu(n)=$$

$$=\left[-\frac{1}{10}-2n+0.23\cdot5^n\left[e^{(1..35-0.927n)j}+e^{-(-0.927n+1..35)j}\right]\right]\mu(n)=$$

$$=\left[-\frac{1}{10}-2n+0.46\cdot5^n\cos(0.927n-1.35)\right]\mu(n)$$

4. LTI sustav je zadan jednadžbom diferencija:

$$y(n+2) - y(n+1) = 4u(n+2) - 3u(n+1) + u(n)$$

Neka je pobuda $u(n) = \mu(n) + \mu(n-1)$, a početni uvjeti $y(-1) = 1, y(-2) = 1$.

   a. Nađite prijenosnu funkciju sustava.
   b. Nađite odziv mirnog sustava.
   c. Nađite odziv nepobuđenog sustava.

a) $H(z) = \dfrac{4z^2 - 3z + 1}{z^2 - z}$

b) Početni uvjeti:

$$u(0) = \mu(0) + \mu(-1) = 1$$

$$u(1) = \mu(1) + \mu(0) = 2$$

$$y(n+2) = 4u(n+2) - 3u(n+1) + u(n) + y(n+1)$$

b)

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z y(1) - zY(z) + zy(0) = 4 \cdot \left[z^2 U(z) - z^2 u(0) - z u(1)\right] - 3\left[zU(z) - z u(0)\right] + U(z)$$

$$y(0) = 4 + 1 = 5$$

$$y(1) = 8 - 3 + 5 = 10$$

$$z^2 Y(z) - 5z^2 - 10z - zY(z) + 5z = 4\left[z^2 U(z) - z^2 - 2z\right] - 3\left[zU(z) - z\right] + U(z)$$

$$Y(z)\left[z^2 - z\right] = U(z)\left[4z^2 - 3z + 1\right] - 4z^2 - 8z + 3z + 5z^2 + 10z - 5z$$

$$Y(z)\left[z^2 - z\right] = U(z)\left[4z^2 - 3z + 1\right] + z^2$$

$$Y(z) = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z^2 - z} U(z) + \frac{z^2}{z^2 - z}$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1} + z^{-1} \cdot \left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{z-1} + \frac{1}{z-1} = \frac{1+z}{z-1}$$

Odziv mirnog sustava

$$Y_m(z) = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z^2 - z} \cdot \frac{1+z}{z-1}$$

$$\frac{Y_m(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{(z-1)^2} = \frac{4z^3 + z^2 - 2z + 1}{z^2 (z-1)^2}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik:

$$Az^3 - 2Az^2 + Az + Bz^2 - 2Bz + B + Cz^3 - Cz^2 + Dz^2 = 4z^3 + z^2 - 2z + 1$$

Uspoređivanjem koeficijenata uz jednake potencije *z*, dobiva se:

A=0
B=1
C=4
D=4

$$Y_m(z) = \frac{1}{z} + \frac{4z}{z-1} + \frac{4z}{(z-1)^2},$$

odnosno u vremenskoj domeni:

$$y_m(n) = \delta(n-1) + 4\mu(n) + 4n\mu(n)$$

c) Nepobuđeni sustav

$$Y_0(z) = \frac{z^2}{z^2 - z} = \frac{z}{z-1}$$

$$y_0(n) = \mu(n)$$

5. LTI sustav je zadan jednadžbom diferencija:

$$y(n) - y(n-2) = u(n)$$

   a. Nađite prijenosnu funkciju sustava.
   b. Odredite početnu i konačnu vrijednost odziva na jediničnu stepenicu iz z-domene. Je li zadani sustav stabilan?
   c. Nađite odziv na jediničnu stepenicu $\mu(n)$, uz početne uvjete jednake nuli.

a) $H(z) = \frac{1}{1-z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-1}$

b) $u(n) = \mu(n)$

$U(z) = \frac{z}{z-1}$

$Y(z) = U(z)\,H(z) = \frac{z^3}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}$

$Y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) =$

$= \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1-z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}} = 1$

$\lim_{N\to\infty} y(N) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})\,Y(z) =$

$= \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{z^2}{z^2-1} = \infty$

Kako odziv na konačnu pobudu nije konačan, sustav nije stabilan. Promatrajući na drugačiji način – polove sustava, postoje dva pola koji su na rubu stabilnosti. Kako je frekvencija ulaznog signala jednaka vlastitoj frekvenciji sustava, sustav postaje nestabilan.

c) Odziv na jediničnu stepenicu:

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2}{z^2-1}\frac{z}{z-1} = \frac{z^3}{z^3 - z^2 - z + 1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

Nakon svođenja na zajednički nazivnik:

$$Az^2 - 2Az + A + Bz^2 - B + Cz + C = z^2$$

$$A = \frac{1}{4};\ B = \frac{3}{4};\ C = \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{z+1} + \frac{\frac{3}{4}z}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}z}{(z-1)^2}$$

Odnosno u vremenskoj domeni: $y(n) = \frac{1}{4}(-1)^n \mu(n) + \frac{3}{4}\mu(n) + \frac{1}{2}n\mu(n)$