Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

V. tjedan

1. Izračunajte Fourierov red vremenski diskretnog signala

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$

   Odredite snagu signala.

<u>Rješenje:</u>

Osnovni period signala je $N_0 = 24$, prema tome $\Omega_0 = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.

Primjenom Eulerove formule

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{j\pi}{3}n} + e^{-\frac{j\pi}{3}n}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{\frac{j\pi}{4}n} - e^{-\frac{j\pi}{4}n}\right) = \\ &= \frac{1}{2}e^{-j4\Omega_0 n} + j\frac{1}{2}e^{-j3\Omega_0 n} - j\frac{1}{2}e^{j3\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j4\Omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2}e^{j\cdot 20\cdot\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\cdot 21\cdot\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\cdot 3\cdot\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j\cdot 4\cdot\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Prema tome $X_3 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}, X_4 = \frac{1}{2}, X_{20} = \frac{1}{2}, X_{21} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Dobiveni spektar je diskretan i periodičan. Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku.

Snaga signala je

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} |X_k|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

2. Izračunajte vremenski diskretan Fourierov red periodičnog diskretnog signala, čija je jedna perioda definirana na sljedeći način:

$$x(n) = \begin{cases} n, & |n| \leq 3 \\ 0, & n \in \{4,5\} \end{cases}.$$

Izračunajte snagu signala.

Rješenje:

Period zadanog signala je *N=9*.

Vremenski diskretan Fourierov red se računa prema formuli

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}.$$

Za ovaj slučaj raspisujemo:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{8} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{9}n} \\ &= \frac{1}{9}(0 + 1\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 1} + 2\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 2} + 3\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 3} + 0\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 4} \\ &+0\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 5} - 3\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 6} - 2\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 7} - 1\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 8}) \end{aligned}$$

Raspisujući sinuse i kosinuse, te koristeći svojstva:

$$\cos\left(k\frac{2\pi}{9}\right) = \cos\left(k\frac{16\pi}{9}\right), \cos\left(k\frac{4\pi}{9}\right) = \cos\left(k\frac{14\pi}{9}\right), \cos\left(k\frac{6\pi}{9}\right) = \cos\left(k\frac{12\pi}{9}\right),$$

$$\sin\left(k\frac{2\pi}{9}\right) = -\sin\left(k\frac{16\pi}{9}\right), \sin\left(k\frac{4\pi}{9}\right) = -\sin\left(k\frac{14\pi}{9}\right) \text{ i } \sin\left(k\frac{6\pi}{9}\right) = -\sin\left(k\frac{12\pi}{9}\right),$$

dolazi se do rješenja:

$$X_k = -\frac{2j}{9}\left(\sin\left(\frac{2\pi k}{9}\right) + 2\sin\left(\frac{4\pi k}{9}\right) + 3\sin\left(\frac{6\pi k}{9}\right)\right).$$

Dobiveni spektar je diskretan i periodičan.

Njegovu snagu možemo naći u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni koristeći Parsevalovu jednakost:

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2.$$

U ovom slučaju lakše je računati u vremenskoj domeni:

$$P = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{8}|x(n)|^2 = \frac{1}{9}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2) = \frac{28}{9}.$$

3. Zadan je periodički vremenski kontinuiran signal
$$x(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\cos(500\pi t).$$
Ako se dani signal očita s frekvencijom očitavanja $F_s = 1kHz$, nađite koeficijente Fourierovog reda dobivenog diskretnog signala. Odredite mu snagu.

Rješenje:

Ako je frekvencija očitavanja $F_s = 1kHz$, vrijeme očitavanja je onda $T_s = \frac{1}{F_s} = 10^{-3}s$.

Očitani signal tada glasi:

$$x(nT_s) = 2\cos(200\pi nT_s) + 3\cos(500\pi nT_s) = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = x(n).$$

Ovako dobiveni signal je diskretan i periodičan. Period prvog dijela je $\frac{\pi}{5}N_1 = 2k\pi \rightarrow N_1 = 10$, a drugog dijela $\frac{\pi}{2}N_2 = 2k\pi \rightarrow N_2 = 4$. Najmanji zajednički višekratnik i ukupni period zadanog signala je $N = 20$. Zato se signal može napisati u obliku

$$x(n) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{20}\cdot 2n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{20}\cdot 5n\right) = \frac{2}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 2n} + e^{-j\frac{2\pi}{20}\cdot 2n}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 5n} + e^{-j\frac{2\pi}{20}\cdot 5n}\right).$$

Koristeći svojstvo $e^{-j\frac{2\pi}{20}\cdot 2n} = e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 18n}$ i $e^{-j\frac{2\pi}{20}\cdot 5n} = e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 15n}$ (podsjetnik: pogledajte kutove u kompleksnoj ravnini), signal možemo raspisati:

$$x(n) = e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 2n} + e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 18n} + \frac{3}{2}e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 5n} + \frac{3}{2}e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 15n}.$$

Formule za vremenski diskretan Fourierov red glase:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot kn}$$
$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot kn}.$$

Gledajući gornji signal i formule, vidimo da je potrebno samo očitati koeficijente iz signala:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{19} X_k e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot kn}$$

Tako dobivamo:

$$k = 2 \rightarrow X_2 = 1$$
$$k = 18 \rightarrow X_{18} = 1$$
$$k = 5 \rightarrow X_5 = \frac{3}{2}$$
$$k = 15 \rightarrow X_{15} = \frac{3}{2}$$

Za sve ostale *k* vrijednost Vremenski diskretnog Fourierovog reda je nula.

Dobiveni spektar je diskretan periodičan.

Snaga signala je $P = \sum_{n=0}^{N-1}|X_k|^2 = (1)^2 + (1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}.$

4. Nađite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju diskretnog signala

$$x(n) = \begin{cases} n, & |n| \leq 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Izračunajte energiju signala.

Rješenje:

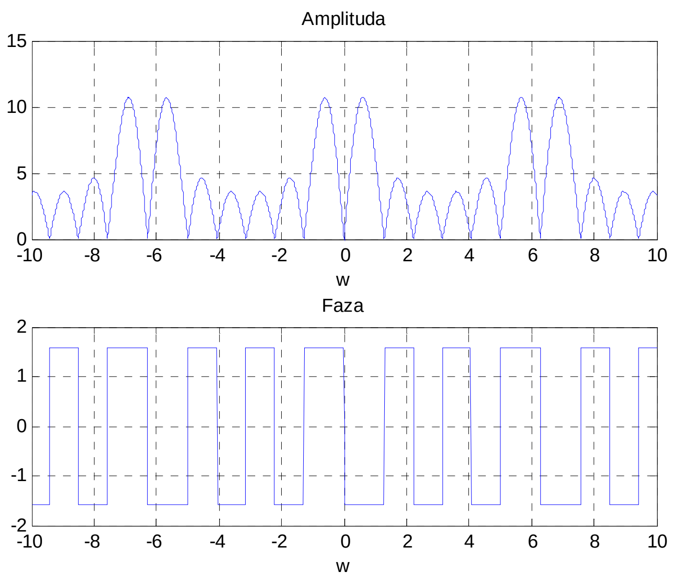
Zadani signal je diskretan aperiodičan. Njegov spektar će biti periodičan kontinuiran, a računa se prema formulama za vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega \mathrm{n}}.$$

Spektar zadanog signala dobivamo uvrštavanjem u formulu:

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega \mathrm{n}} &= -3e^{j\Omega \cdot 3} - 2e^{j\Omega \cdot 2} - e^{j\Omega \cdot 1} + 0 \cdot e^{j\Omega \cdot 0} + e^{-j\Omega \cdot 1} + 2e^{-j\Omega \cdot 2} + 3e^{-j\Omega \cdot 3} \\ &= 3\big(-\cos(3\Omega) - \mathrm{j}\sin(3\Omega) + \cos(3\Omega) - \mathrm{j}\sin(3\Omega)\big) \\ &\quad + 2\big(-\cos(2\Omega) - \mathrm{j}\sin(2\Omega) + \cos(2\Omega) - \mathrm{j}\sin(2\Omega)\big) \\ &\quad + 1\big(-\cos(\Omega) - \mathrm{j}\sin(\Omega) + \cos(\Omega) - \mathrm{j}\sin(\Omega)\big) \\ &= -2\mathrm{j}(3\sin 3\Omega + 2\sin 2\Omega + \sin\Omega\,) \end{aligned}$$



Totalna energija je dana preko Parsevalove relacije:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega.$$

U vremenskoj domeni ona iznosi

$$\begin{aligned} E = \cdots |0|^2 + |-3|^2 + |-2|^2 + |-1|^2 + 0^2 + |1|^2 \\ + |2|^2 + |3|^2 + 0 + \cdots = 28. \end{aligned}$$

U frekvencijskoj domeni totalna energija iznosi

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |-2\mathrm{j}(3\sin 3\Omega + 2\sin 2\Omega + \sin\Omega\,)|^2 d\Omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3\sin 3\Omega + 2\sin 2\Omega + \sin\Omega\,)^2 d\Omega = 28 \end{aligned}$$

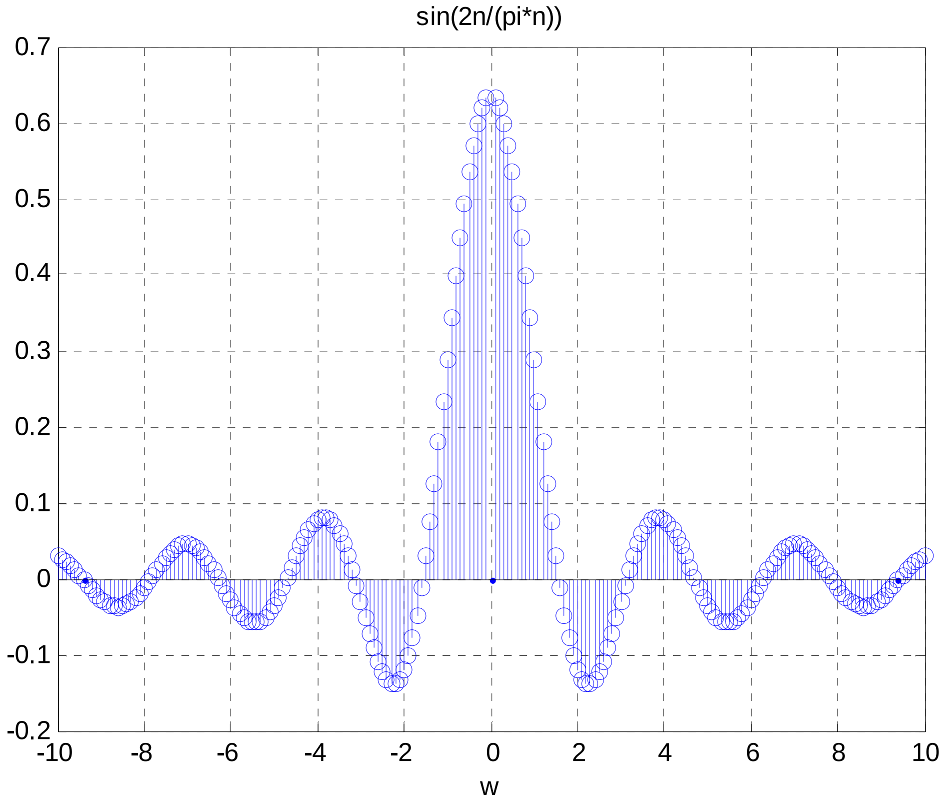
5. Zadan je spektar signala $X(e^{j\Omega})$. Nađite signal $x(n)$, te odredite energiju ovog signala.

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \mathrm{w} \\ 0, w < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

Rješenje:

S obzirom da je zadan Fourierov spektar, za izračun signala u vremenskoj domeni, koristimo inverznu Fourierovu transformaciju:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w} 1\cdot e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\Omega n}}{jn}\Bigg|_{-w}^{w} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{jwn} - e^{-jwn}}{jn} = \frac{\sin wn}{\pi n}.$$



Energija ovog signala se lakše nalazi u frekvencijskoj domeni:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w} 1^2 d\Omega = \frac{w}{\pi}.$$