$\mathcal{Z}$-transformacija

Napomena: Prije konzumiranja ovog PDF-a otvorite 6. stranicu službenog šalabahtera.

Za rješavanje bi trebalo slijediti sljedeći algoritam:

(1) Zapisati jednadžbu koristeći $\mathcal{Z}$-transformaciju. Kao primjer će nam poslužiti sustav drugog reda opisan jednadžbom

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2)$$

Napravimo transformacije:

$$y(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(z)$$
$$y(n-1) \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{-1}Y(z) + y(-1)$$
$$y(n-2) \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)$$
$$u(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(z)$$
$$u(n-1) \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{-1}U(z) + u(-1)$$
$$u(n-2) \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{-2}U(z) + z^{-1}u(-1) + u(-2)$$

Jednadžba sada glasi:

$$Y(z) + a_1\left[z^{-1}Y(z) + y(-1)\right] + a_2\left(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\right) =$$
$$= b_0 U(z) + b_1\left[z^{-1}U(z) + u(-1)\right] + b_2\left(z^{-2}U(z) + z^{-1}u(-1) + u(-2)\right)$$

odnosno

$$Y(z) = H(z)\,U(z) + X(z)$$

gdje je

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

$$X\left(z\right)=\frac{b_1u\left(-1\right)+b_2z^{-1}u\left(-1\right)+b_2u\left(-2\right)-a_1y\left(-1\right)-a_2z^{-1}y\left(-1\right)-a_2y\left(-2\right)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

Obično imamo kauzalnu pobudu, pa je $u\left(-1\right)=u\left(-2\right)=0$. Iz toga slijedi:

$$X\left(z\right)=-\frac{a_1y\left(-1\right)+a_2z^{-1}y\left(-1\right)+a_2y\left(-2\right)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

odnosno

$$X\left(z\right)=-\frac{\left[a_1y\left(-1\right)+a_2y\left(-2\right)\right]z^2+a_2y\left(-1\right)z}{z^2+a_1z+a_2}$$

(2) $H\left(z\right)$ predstavlja prijenosnu funkciju sustava. Vraćanjem u diskretnu domenu iz nje dobijemo IMPULSNI ODZIV.

(3) Vraćanjem $H\left(z\right)U\left(z\right)$ u diskretnu domenu dobijemo MIRNI ODZIV.

(4) Vraćanjem $X\left(z\right)$ u diskretnu domenu dobijemo NEPOBUĐENI ODZIV.

(5) Zbrajanjem mirnog i nepobuđenog odziva dobijemo TOTALNI ODZIV. Iz tog odziva se lako očitaju PRIRODNI i PRISILNI ODZIV.

Zadatak 1.

Zadan je diskretan LTI sustav opisan jednadžbom diferencija

$$y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = u(n)$$

Ukoliko su pobuda i početni uvjeti

$$u(n) = 5\mu(n)$$

$$y(-2) = 0, \;\; y(-1) = 1$$

odredite sve odzive ovog sustava!

Rješenje:

(1) Zapisati jednadžbu koristeći $\mathcal{Z}$-transformaciju:

$$y(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(z)$$

$$y(n-1) \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{-1}Y(z) + y(-1) = z^{-1}Y(z) + 1$$

$$y(n-2) \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2) = z^{-2}Y(z) + z^{-1}$$

$$u(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(z)$$

Jednadžba glasi:

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) - 2 + z^{-2}Y(z) + z^{-1} = U(z)$$

odnosno

$$Y(z)\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right) = U(z) - z^{-1} + 2$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}U(z) + \frac{2 - z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}U(z) + \frac{2z^2 - z}{(z-1)^2}$$

$$Y(z) = H(z)U(z) + X(z)$$

(2) $H(z)$ predstavlja prijenosnu funkciju sustava. Vraćanjem u diskretnu domenu iz nje dobijemo IMPULSNI ODZIV. Postupak je sljedeći:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2}$$

Iz ovoga se dobije $A = 1$ i $B = 1$, pa imamo:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$H(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2}$$

Pogledamo u tablicu transformacija na šalabahteru, pa slijedi da je IMPULSNI ODZIV

$$h(n) = (1+n)\,\mu(n)$$

(3) Vraćanjem $H(z)\,U(z)$ u diskretnu domenu dobijemo MIRNI ODZIV.

Obzirom da je pobuda $u(n) = 5\mu(n)$, onda je $U(z) = 5\frac{z}{z-1}$, pa slijedi

$$H(z)\,U(z) = \frac{5z^3}{(z-1)^2}$$

$$\frac{H(z)\,U(z)}{z} = \frac{5z^2}{(z-1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)^3}$$

Iz ovoga se dobije $A = 5$, $B = 10$ i $C = 5$ pa imamo:

$$\frac{H(z)\,U(z)}{z} = \frac{5}{z-1} + \frac{10}{(z-1)^2} + \frac{5}{(z-1)^3}$$

$$H(z)\,U(z) = \frac{5z}{z-1} + \frac{10z}{(z-1)^2} + \frac{5z}{(z-1)^3}$$

Pogledamo u tablicu transformacija pa je MIRNI ODZIV

$$y_{MIRNI}(n) = \left(5 + 10n + 5\frac{n(n-1)}{2}\right)\mu(n)$$

$$y_{MIRNI}(n) = \left(5 + 7.5n + 2.5n^2\right)\mu(n)$$

(4) Vraćanjem $X(z)$ u diskretnu domenu dobijemo NEPOBUĐENI ODZIV.

$$X(z) = \frac{2z^2 - z}{(z-1)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z-1}{(z-1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2}$$

Iz ovoga se dobije $A = 2$ i $B = 1$ pa imamo:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2}$$

NEPOBUĐENI ODZIV je

$$y_{NEPOB}(n) = (2+n)\,\mu(n)$$

(5) Zbrajanjem mirnog i nepobuđenog odziva dobijemo TOTALNI ODZIV. Iz tog odziva se lako očitaju PRIRODNI i PRISILNI ODZIV.

$$y_{TOT}(n) = y_{MIRNI}(n) + y_{NEPOB}(n) = \left(7 + 8.5n + 2.5n^2\right)\mu(n)$$

Obzirom da imamo dvostruki pol $z_{p1,2} = 1$ a pobuda nam je oblika $5 \cdot 1^n$, onda bi partikularno rješenje glasilo $y_p(n) = Kn^2$. Usporedbom sa totalnim odzivom, vidimo da je onda PRISILNI ODZIV

$$y_{PRIS}(n) = 2.5n^2\mu(n)$$

a PRIRODNI ODZIV

$$y_{PRIR}(n) = (7 + 8.5n)\mu(n)$$