

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

III. tjedan

1. Neka je $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal. Neka je $x(n)$ diskretni eksponencijalni signal dobiven iz kontinuiranog signala $x(t)$ uniformnim otipkavanjem s periodom T_s . Je li dobiveni diskretni signal uvijek periodičan? Ako nije, pod kojim uvjetima je?
2. Zadan je diskretni signal $x(n) = \cos(an + 1)$. Kakav mora biti a da bi signal bio periodičan?
3. Zadan je diskretni signal $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Definiramo novi signal $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ na sljedeći način: $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n - kp)$, pri čemu je $p \in \mathbb{N}$. Dokažite da je signal f periodičan za svaki diskretni signal g za koji zadana suma konvergira.
4. Zadan je diskretni signal $x(n) = n(\mu(n) - \mu(n - 2008))$. Izračunajte energiju signala.
5. Izračunajte sljedeće integrale

a. $\int_0^{\infty} \delta(t - 2)t^2 dt$

b. $\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t - 1)\delta(t) \cos t dt$

6. Pronađite i skicirajte generaliziranu derivaciju signala

$$g(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

7. Izračunajte generaliziranu derivaciju signala:

a. $g(t) = t(\mu(t) - \mu(t - 1)) + (3 - t)(\mu(t - 2) - \mu(t - 3))$

b. $g(t) = (3 - t)(\mu(t) - \mu(t - 1)) + (3 - t)(\mu(t - 2) - \mu(t - 3))$

8. Neka su funkcije $u \in L^2(I)$ i $g \in L^2(I)$ (kvadratno integrabilne) takve da je $\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx$ za svaku funkciju $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Tada kažemo da je u slabo derivabilna i da je g njena slaba derivacija, pri čemu je $C_0^\infty(I)$ skup svih beskonačno derivabilnih funkcija na intervalu I , čija je vrijednost na krajevima intervala jednaka nuli. Koristeći spomenutu činjenicu dokažite da je $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ za $-1 \leq x \leq 1$ slabo derivabilna te da je njena slaba derivacija Heavisideova step funkcija $\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

9. Pretpostavite da želite uživo, preko Interneta slušati prijenos nekog koncerta. Pri tome Internet ne koristite za nikakav drugi prijenos podataka. Neka je za predstavljanje svakog audio uzorka potrebno 16 bita.
- a. Nalazite se kod kuće i spojeni ste s modemom, 56 kbps (kilobita u sekundi), na Internet. Kojom maksimalnom frekvencijom uzorkovanja može biti diskretiziran audio signal koji slušate?
 - b. Koja je frekvencija u pitanju ako se nalazite na 100 Mbps LAN-u?
10. Zadan je diskretan signal $x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$. Nađite dva različita kontinuirana signala koja otipkavanjem daju ovaj diskretan signal. Frekvencija otipkavanja neka je $f_s = 10\text{kHz}$.