Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

14. ožujka 2007.

Automati s beskonačnim brojem stanja

- nastavljamo razmatranje automata čiji su ulazni i izlazni alfabet te vrijednosti stanja, numerički znakovi, dakle brojevi, pa ih stoga nazivamo automati s beskonačnim brojem stanja
- neka je korak n, u kojem razmatramo sustav, definiran kao trenutak vremena nT, gdje je T razmak između koraka
- vremenski diskretne sustave, s više ulaza i više izlaza, definiramo kao automate s beskonačnim brojem stanja

$$Stanja = Realni^N$$
$$Ulazi = Realni^M$$
$$Izlazi = Realni^K$$

Slika 1: Sustav kao automat s M ulaza i N izlaza

Diskretni sustav kao beskonačni automat

- vremenski diskretan sustav definiramo kao automat, dakle, s petorkom

$$S = (Stanja, Ulazi, Izlazi, PrijelaznaFunkcija, pocetnoStanje)$$

za koji neka su:

$$\begin{aligned}
&Stanja = Realni^N \\
&Ulazi = Realni^M \\
&Izlazni = Realni^K \\
&pocetnoStanje \in Realni^N \\
&FunkcijaPrijelaza : Realni^N \times Realni^M \rightarrow Realni^N \times Realni^K
\end{aligned}$$

- za ulaznu M-torku i N-torku koja predstavlja trenutno stanje *FunkcijaPrijelaza* definira N-torku koja predstavlja naredno stanje, te K-torku koja predstavlja trenutni izlaz

Diskretni sustav opisan s varijablama stanja

- *FunkcijaPrijelaza* se razlaže na funkciju

$$narednoStanje : Realni^N \times Realni^M \rightarrow Realni^N$$

i

$$izlaz : Realni^N \times Realni^M \rightarrow Realni^K$$

tako da vrijedi

$$\forall x \in Realni^N, \quad \forall u \in Realni^M,$$
$$FunkcijaPrijelaza(x, u) = (narednoStanje(x, u), izlaz(x, u))$$

Jednadžbe stanja diskretnog sustava

- funkcije *narednoStanje* i *izlaz* omogućavaju izračunavanje narednog stanja i trenutnog izlaza na temelju poznavanja trenutnog stanja i ulaza
- to znači da je za ulazni niz $u(0), u(1), \ldots$ M-torki iz $Realni^M$ moguće izračunati odziv stanja $x(1), x(2), \ldots$ N-torki iz $Realni^N$, kao i odziv sustava $y(0), y(1), \ldots$ K-torki iz $Realni^K$
- dakle

$$
\begin{aligned}
&\forall n \in \mathit{Cjelobrojni},\ n \geq 0, \\
&x(0) = \mathit{pocetnoStanje} \\
&x(n+1) = \mathit{narednoStanje}(x(n), u(n)), && \text{jednadžba stanja} \\
&y(n) = \mathit{izlaz}(x(n), u(n)), && \text{izlazna jednadžba}
\end{aligned}
$$

- sustav je potpuno opisan s jednadžbom stanja i izlaznom jednadžbm i ovaj model sustava zovemo model s varijablama stanja

Model s varijablama stanja

- funkcije *narednoStanje* i *izlaz* određuju je li sustav
  - linearan i vremenski stalan
  - linearan i vremenski promjenljiv
  - nelinearan i vremenski stalan
  - nelinearan i vremenski promjenljiv
- u nastavku analiziramo linearne vremenski stalne sustave

Model s varijablama stanja—linearni vremenski stalni sustav 1

- za sustav kažemo da je linearan ako su njegove funkcije *narednoStanje* i *izlaz* linearne funkcije i ako je početno stanje $x(0) = 0$ ($N-$torka čiji su svi emlementi jednaki nula)
- razmotrimo ponovo jednadžbu stanja za sustav s M ulaza i K izlaza i dimenzije N

$$\forall n \in Cjelobrojni_+$$
$$x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n))$$

- za linearnu funkciju *narednoStanje* ovu jednadžbu možemo raspisati kao

$$\begin{array}{lllll}
x_1(n+1) = \alpha_{1,1}x_1(n) + \alpha_{1,2}x_2(n)+ & \dots & +\alpha_{1,N}x_N(n) + \alpha_{1,N+1}u_1(n)+ & \dots & +\alpha_{1,N+M}u_M(n) \\
x_2(n+1) = \alpha_{2,1}x_1(n) + \alpha_{2,2}x_2(n)+ & \dots & +\alpha_{2,N}x_N(n) + \alpha_{2,N+1}u_1(n)+ & \dots & +\alpha_{2,N+M}u_M(n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_N(n+1) = \alpha_{N,1}x_1(n) + \alpha_{N,2}x_2(n)+ & \dots & +\alpha_{N,N}x_N(n) + \alpha_{N,N+1}u_1(n)+ & \dots & +\alpha_{N,N+M}u_M(n)
\end{array}$$

Model s varijablama stanja—linearni vremenski stalni sustav 2

- prethodne jednadžbe pišemo sažetije, u matričnom zapisu,

$$
\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,N} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N,1} & \alpha_{N,2} & \dots & \alpha_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \alpha_{1,N+1} & \dots & \alpha_{1,N+M} \\ \alpha_{2,N+1} & \dots & \alpha_{2,N+M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N,N+1} & \dots & \alpha_{N,N+M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n) \\ \vdots \\ u_M(n) \end{bmatrix}
$$

odnosno

$$
x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)
$$

Model s varijablama stanja—linearni vremenski stalni sustav 3

- za linearnu funkciju *narednoStanje* jednadžba stanja se može pisati kao

$$x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n)) = Ax(n) + Bu(n)$$

gdje su

$x(n+1)$,	vektor narednog stanja dimenzije $N \times 1$
$x(n)$,	vektor trenutnog stanja dimenzije $N \times 1$
$u(n)$,	vektor ulaza dimenzije $M \times 1$
$A = [a_{i,j}]$,	matrica dimenzije $N \times N$
$B = [b_{i,j}]$,	matrica dimenzije $N \times M$

- na isti način, za linearnu funkciju *izlaz*, možemo pisati

$$y(n) = izlaz(x(n), u(n)) = Cx(n) + Du(n)$$

uz $C = [c_{i,j}]$, matrica dimenzije $K \times N$
$D = [d_{i,j}]$, matrica dimenzije $K \times M$

Linearni vremenski diskretni sustavi–[A,B,C,D] prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$
  $\forall n \in Cjelobrojni_+$

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno dimenzije K i dimenzije M a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija

Linearni vremenski diskretni sustavi–[A,B,C,D] prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$
  $\forall n \in Cjelobrojni_+$

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

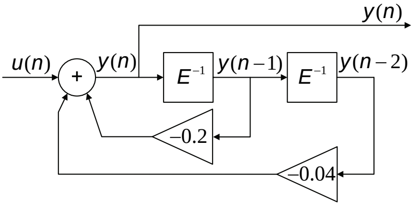
- matrice A, B, C, D možemo označiti kao[1]
  - A – matrica sustava (matrica dinamike sustava)
  - B – ulazna matrica
  - C – izlazna matrica
  - D – ulazno-izlazna matrica
- u slučaju vremenski promjenljivih sustava matrice A, B, C, D sadrže elemente koji su vremenske funkcije

[1] najčešće u literaturi ali ima i drugih imena

[A,B,C,D] prikaz linearnih vremenski diskretnih sustava – primjer

- u drugom predavanju dan je primjer diskretnog sustava koji modelira izračun potrebnog broja knjiga u sveučilišnoj skriptarnici
- sustav je bio matematički modeliran jednadžbom diferencija

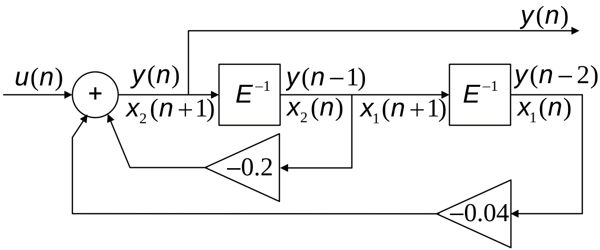
$$y(n) + 0.2y(n-1) + 0.04y(n-2) = u(n)$$



Slika 2: Blok dijagram vremenski diskretnog sustava – primjer

[A,B,C,D] prikaz linearnih vremenski diskretnih sustava – primjer

- s $y(n)$ je označen broj knjiga koje treba naručiti, $y(n-1)$ i $y(n-2)$ je broj knjiga naručen prije godinu, odnosno dvije godine dana, a $u(n)$ je broj upisanih studenata
- opravdano je za varijable stanja izabrati $x_1(n) = y(n-2)$ i $x_2(n) = y(n-1)$



Slika 3: Izbor varijabli stanja – primjer

[A,B,C,D] prikaz linearnih vremenski diskretnih sustava – primjer

- iz $y(n-2) = x_1(n)$ i $y(n-1) = x_2(n)$, odnosno blokovskog dijagrama, slijede izlazna i jednadžbe stanja

$$\left.\begin{array}{l} x_1(n) = y(n-2) \\ x_2(n) = y(n-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(n) = -0.04x_1(n) - 0.2x_2(n) + u(n) \\ x_1(n+1) = x_2(n) \\ x_2(n+1) = y(n) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} x_1(n+1) = x_2(n) \\ x_2(n+1) = -0.04x_1(n) - 0.2x_2(n) + u(n) \\ y(n) = -0.04x_1(n) - 0.2x_2(n) + u(n) \end{array}$$

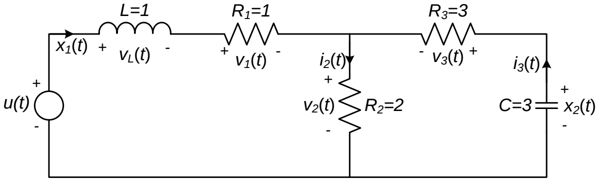
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix}}_{x(n+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.04 & -0.2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}}_{x(n)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(n)$$

$$y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.04 & -0.2 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}}_{x(n)} + \underbrace{1}_{D} \cdot u(n)$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 1

- i ovdje definiramo varijable stanja kao interne varijable sustava
- za poznate varijable stanja i poznate ulazne signale određen je bilo koji signal u sustavu dakle i svi izlazi
- na primjeru *RLC* mreže biti će pokazano da se svi signali mreže mogu prikazati kao linearna kombinacija nezavisnih napona na kapacitetima i struja induktiviteta koje definiramo kao stanja mreže

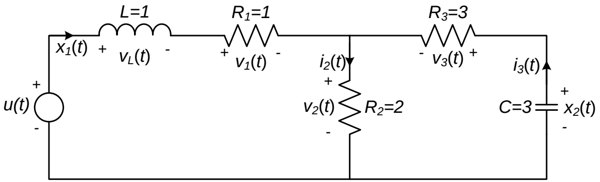
Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 2



Slika 4: Primjer RLC mreže

- definiraju se varijable stanja $x_1(t)$ kao struja induktiviteta i $x_2(t)$ kao napon na kapacitetu
- neka su poznate vrijednosti $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $u(t)$, za neki trenutak t, i tada možemo odrediti sve moguće signale mreže (napone i struje)
- neka su za neki t vrijednosti trenutnih stanja $x_1 = 1$ i $x_2 = 17$, te trenutna vrijednost ulaza $u = 17$

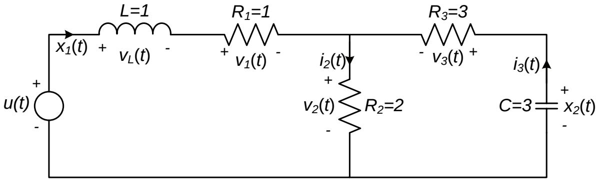
Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 3



Slika 5: Primjer RLC mreže

$$
\begin{aligned}
& i_2 = x_1 + i_3 \\
& R_2 i_2 = x_2 - R_3 i_3 && \Rightarrow i_3 = \frac{x_2 - R_2 x_1}{R_2 + R_3} && \Rightarrow i_3 = 3 \\
& i_2 = x_1 + i_3 && \Rightarrow i_2 = \frac{R_3 x_1 + x_2}{R_2 + R_3} && \Rightarrow i_2 = 4 \\
& v_1 = R_1 x_1 && \Rightarrow v_1 = R_1 x_1 && \Rightarrow v_1 = 1 \\
& v_2 = R_2 i_2 && \Rightarrow v_2 = \frac{R_2(R_3 x_1 + x_2)}{R_2 + R_3} && \Rightarrow v_2 = 8 \\
& v_3 = R_3 i_3 && \Rightarrow v_3 = \frac{R_3(x_2 - R_2 x_1)}{R_2 + R_3} && \Rightarrow v_3 = 9 \\
& v_L = u - v_1 - v_2 && \Rightarrow v_L = u - R_1 x_1 - \frac{R_2(R_3 x_1 + x_2)}{R_2 + R_3} && \Rightarrow v_L = 8
\end{aligned}
$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 4



Slika 6: Primjer RLC mreže

$$\left.\begin{array}{l} i_2(t) = x_1(t) + i_3(t) \\ R_2 i_2(t) = x_2(t) - R_3 i_3(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i_3(t) = \frac{x_2(t) - R_2 x_1(t)}{R_2 + R_3} \\ i_2(t) = \frac{R_3 x_1(t) + x_2(t)}{R_2 + R_3} \end{array}\right.$$

iz

$$u(t) = L\frac{dx_1(t)}{dt} + R_1 x_1(t) + R_2 i_2(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{L(R_2 + R_3)} x_1(t) - \frac{R_2}{L(R_2 + R_3)} x_2(t) + \frac{1}{L} u(t)$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 5

$$\text{iz} \quad C\frac{dx_2(t)}{dt} = -i_3(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{R_2}{C(R_2+R_3)}x_1(t) - \frac{1}{C(R_2+R_3)}x_2(t)$$

- pišemo jednadžbu stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3}{L(R_2+R_3)} & -\frac{R_2}{L(R_2+R_3)} \\ \frac{R_2}{C(R_2+R_3)} & -\frac{1}{C(R_2+R_3)} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

- odnosno

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 6

- neka sustav ima tri izlaza i neka su to struje sve tri grane: $y_1(t) = x_1(t)$, $y_2(t) = i_2(t)$ i $y_3(t) = i_3(t)$
- iz prije izračunatog slijedi

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{R_3}{R_2+R_3} & \frac{1}{R_2+R_3} \\ -\frac{R_2}{R_2+R_3} & \frac{1}{R_2+R_3} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

- odnosno

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Linearni vremenski kontinuirani sustavi—[A,B,C,D] prikaz

- model s varijablama stanja kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava je

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$
  $\forall t \in Realni$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(n) = Cx(t) + Du(t)$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno K i M, a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je, kako je pokazano,

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$
  $\forall n \in Cjelobrojni$

$$
\begin{aligned}
x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\
y(n) &= Cx(n) + Du(n)
\end{aligned}
$$

- odziv sustava možemo rješiti korak po korak

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- neka je $x(0) = pocetnoStanje$

$$
\begin{aligned}
n = 0, \quad x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
n = 1, \quad x(2) &= Ax(1) + Bu(1) \\
&= A[Ax(0) + Bu(0)] + Bu(1) \\
&= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
n = 2, \quad x(3) &= Ax(2) + Bu(2) \\
&= A[A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)] + Bu(2) \\
&= A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)
\end{aligned}
$$

- možemo napisati odziv stanja za n-ti korak

$$
x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu(m), \qquad \forall n > 0
$$

- odziv stanja se naziva i trajektorija stanja

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- za izračunati odziv stanja, slijedi iz,

$$y(n) = Cx(n) + Du(n),$$

- i odziv sustava

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0) + Du(0), & n = 0 \\ CA^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}$$

- totalni odziv sustava moguće je interpretirati kao zbroj odziva nepobuđenog sustava ($u(n) = 0$) i odziva mirnog sustava ($x(0) = 0$)

$$y(n) = \underbrace{CA^n x(0)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava, } u(n)=0} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n),}_{\text{odziv mirnog sustava, } x(0)=0} \quad n > 0$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- dokažimo, indukcijom, kako je izraz za odziv stanja korektno određen, i kako on daje korektnu vrijednost i za $n+1$ korak

uvrštenjem

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} B u(m)$$

u

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

slijedi

$$x(n+1) = A[A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} B u(m)] + Bu(n)$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

$$x(n+1) = A^{n+1}x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-m}Bu(m) + Bu(n)$$

$$x(n+1) = A^{n+1}x(0) + \sum_{m=0}^{n} A^{n-m}Bu(m)$$

- što predstavlja izraz na desnoj strani odziva stanja izračunat za $n+1$, pa je indukcijom pokazano kako je korektno određen izraz za odziv stanja i kako vrijedi za $\forall n > 0$

$$x(n) = A^{n}x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m}Bu(m)$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- finalno, za *MIMO* diskretni sustav zadan s

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$
  $\forall n \in Cjelobrojni, x(0) = pocetnoStanje$

  $$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
  $$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

  odziv stanja i odziv sustava su

  $$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu(m), \qquad n > 0$$

  $$y(0) = Cx(0) + Du(0)$$

  $$y(n) = CA^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), \qquad n > 0$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- za sustav s jednim ulazom i jednim izlazom (*SISO*) vrijedi

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni,$
  $\forall n \in Cjelobrojni$

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

- B postaje vektor dimenzije $[N \times 1]$, C postaje vektor dimenzije $[1 \times N]$, a D skalar

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- definiraju se i razmatraju četiri slučaja
  - odziv stanja mirnog sustava, $x(0) = 0$

$$x(n) = \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu(m), \qquad n > 0$$

  - odziv stanja nepobuđenog sustava, $u(n) = 0$

$$x(n) = A^n x(0), \qquad n > 0$$

  - odziv mirnog sustava, $x(0) = 0$

$$y(n) = \begin{cases} Du(0), & n = 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}$$

  - odziv stanja nepobuđenog sustava, $u(n) = 0$

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0), & n = 0 \\ CA^n x(0), & n > 0 \end{cases}$$

Fundamentalna matrica

- odziv stanja nepobuđenog sustava, $u(n) = 0$, je

$$x(n) = A^n x(0), \qquad n > 0$$

- u slučaju nepobuđenog sustava matrica A^n prevodi sustav iz početnog stanja u stanje u koraku n
- matricu A^n nazivamo prijelazna matrica (state transition matrix) ili fundamentalna matrica i označavamo je $\Phi(n)$, dakle,

$$\Phi(n) = A^n, \qquad n > 0$$

- način izračuna fundamentalne matrice biti će kasnije razmatran

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- model s varijablama stanja, kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava, je

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$$
$$\forall t \in Realni, \quad x(t_0) = pocetnoStanje$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno K i M, a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija
- odziv sustava određuje se rješavanjem jednadžbi sustava

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- prvo se rješava diferencijalna jednadžba

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- množenjem obje strane jednadžbe s matricom e^{-At}, s lijeva,

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)$$

- te prebacivanjem člana $e^{-At}Ax(t)$ na lijevo

$$\underbrace{e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t)}_{\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t))} = e^{-At}Bu(t)$$

- pa slijedi

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- integriranjem obje strane u intervalu t_0 do t slijedi

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}x(\tau))d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- odnosno

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- množenjem obje strane s matricom e^{At}, s lijeva,

$$x(t) - e^{At}e^{-At_0}x(t_0) = e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- slijedi izraz za odziv stanja kontinuiranog sustava

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- uvrsti li se izračunati odziv stanja u izlaznu jednadžbu

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- slijedi odziv sustava

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

- ili

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- za $t_0 = 0$ odziv stanja je

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- a odziv sustava

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- i ovdje se definiraju i razmatraju četiri slučaja
  - odziv stanja mirnog sustava, $x(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

  - odziv stanja nepobuđenog sustava, $u(t) = 0$

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

  - odziv mirnog sustava, $x(0) = 0$

$$y(t) = \int_0^t [Ce^{A(t-\tau)} B + D\delta(t-\tau)] u(\tau) d\tau$$

  - odziv nepobuđenog sustava, $u(t) = 0$

$$y(t) = Ce^{At} x(0)$$

Fundamentalna matrica kontinuiranih sustava

- odziv stanja nepobuđenog sustava, $u(t) = 0$, je

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

- u slučaju nepobuđenog sustava matrica e^{At} prevodi sustav iz početnog stanja u stanje u trenutku t
- matricu e^{At} nazivamo prijelazna (state transition matrix) ili fundamentalna matrica i označavamo je $\Phi(t)$

Impulsni odziv linearnih diskretnih sustava 1

- odziv mirnog, $x(0) = 0$, sustava s jednim ulazom i jednim izlazom, *SISO* sustav, izveden je kao:

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni,$$
$$\forall n \in Cjelobrojni$$

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\ y(n) &= Cx(n) + Du(n) \end{aligned}$$

$$y(n) = \begin{cases} Du(0), & n = 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}$$

Impulsni odziv linearnih diskretnih sustava 2

- pobudimo li, mirni, *SISO* sustav s jediničnim impulsom $u(n) = \delta(n)$ odziv je:

$$y(n) = \begin{cases} D\delta(0), & n = 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}B\delta(m) + D\delta(n), & n > 0 \end{cases}$$

odnosno

$$y(n) = h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n > 0 \end{cases}$$

- odziv mirnog sustava, $x(0) = 0$, na pobudu jediničnim impulsom $u(n) = \delta(n)$ nazivamo impulsni odziv i označavamo kao $h(n)$

Konvolucijska sumacija 1

- za ovako određeni impulsni odziv, $h(0) = D$ i $h(n) = CA^{n-1}B$, izraz za odziv mirnog sustava transformiramo u oblik

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bu(m) + Du(n), \quad n \geq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n-1} h(n-m)u(m) + Du(n), \quad n \geq 0$$

i finalno

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)u(m), \quad n \geq 0$$

- linearni mirni sustav, $x(n) = 0$, potpuno je opisan svojim impulsnim odzivom $h(n)$
- dakle, poznavanjem $h(n)$, moguće je odrediti odziv linearnog sustava na bilo koju pobudu

Konvolucijska sumacija 2

- *MIMO* sustav je zadan s

  $$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K, \forall n \in Cjelobrojni$$

  $$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\ y(n) &= Cx(n) + Du(n) \end{aligned}$$

  i pobuđen jediničnim impulsom na svakom od M ulaza, $u(n) = \delta(n)$
- odziv ovako pobuđenog, mirnog, *MIMO* sustava izračunava se na isti način kao u slučaju *SISO* sustava pa možemo pisati

$$y(n) = H(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n > 0 \end{cases}$$

Konvolucijska sumacija 3

- $H(n)$ je matrica dimenzije $[K \times M]$,

$$H(n) = \begin{bmatrix} h_{11}(n) & h_{12}(n) & \dots & h_{1M}(n) \\ h_{21}(n) & h_{22}(n) & \dots & h_{2M}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{K1}(n) & h_{K2}(n) & \dots & h_{KM}(n) \end{bmatrix}$$

- $h_{ij}(n)$ je impulsni odziv i-tog izlaza na pobudu na j-tom ulazu, uz $x = 0$ i $u_j(n) = 0$ na svim ulazima osim na i-tom
- matricu $H(n)$ zovemo matrica impulsnog odziva
- konvolucijska sumacija za *MIMO* sustav je

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} H(n-m)u(m), \quad n \geq 0$$

Konvolucijska sumacija 4

- za miran *SISO* sustav definiran svojim impulsnim odzivom i

$$u(n) = 0, \quad \forall n < 0$$
$$h(n) = 0, \quad \forall n < 0$$

konvolucijska sumacija je

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m), \quad n \in Cjelobrojni$$

- supstitucijom $k = n - m$ slijedi alternativni prikaz

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k), \quad n \in Cjelobrojni$$

- pa vrijedi

$$y = h * u = u * h \quad \text{odnosno} \quad y(n) = (h*u)(n) = (u*h)(n)$$

Konvolucijska sumacija 5

- ovdje se izvodi izraz za konvolucijsku sumaciju *SISO* sustava na manje formalan način
- pokazuje se kako se odziv vremenski stalnog linearnog sustava može promatrati kao linearna kombinacija impulsnih odziva
- pobudni signal se može prikazati kao niz impulsa pa će onda odziv linearnog sustava biti linearna kombinacija impulsnih odziva na svaki od ovih impulsa

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- neka je vremenski diskretan sustav zadan s jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.75y(n-1) = u(n)$$

- ovaj sustav možemo prikazati s modelom s varijablama stanja
- izaberemo $x(n) = y(n-1)$ pa su jednadžba stanja i izlazna jednadžba

$$x(n+1) = \underbrace{0.75}_{A} x(n) + \underbrace{1}_{B} \cdot u(n)$$

$$y(n) = \underbrace{0.75}_{C} x(n) + \underbrace{1}_{D} u(n)$$

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- prije je pokazano da je impulsni odziv mirnog sustava, $x(0) = 0$, dakle odziv na $u(n) = \delta(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n > 0 \end{cases}$$

za $A = 0.75, B = 1, C = 0.75, D = 1$

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 0.75 \cdot 0.75^{n-1} \cdot 1 = 0.75^n, & n > 0 \end{cases}$$

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

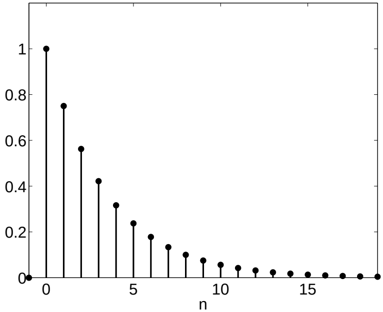
- do istog rezultata smo mogli doći i izravnim rješavanjem polazne jednadžbe za $y(-1) = 0$ i $u(n) = \delta(n)$, bilo kojom metodom
- ovdje ćemo to učiniti metodom izračunavanja korak po korak

$$y(n) = 0.75y(n-1) + \delta(n)$$
$$h(n) = 0.75h(n-1) + \delta(n)$$

za n=0,1,2,...

$$\begin{aligned}
h(0) &= 0.75y(-1) + 1 = 1 \\
h(1) &= 0.75h(0) + 0 = 0.75 \cdot 1 = 0.75 \\
h(2) &= 0.75h(1) + 0 = 0.75 \cdot 0.75 = 0.75^2 \\
h(3) &= 0.75h(2) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^2 = 0.75^3 \\
h(4) &= 0.75h(3) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^3 = 0.75^4 \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
h(n) &= 0.75h(n-1) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^{n-1} = 0.75^n
\end{aligned}$$

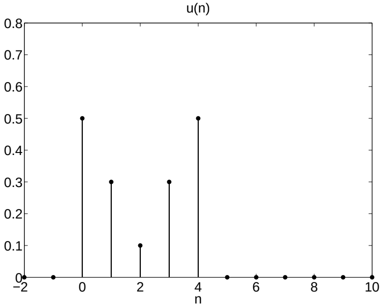
Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava



Slika 7: Impulsni odziv sustava $y(n) - 0.75y(n-1) = u(n)$

Diskretni signal kao suma jediničnih impulsa

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa

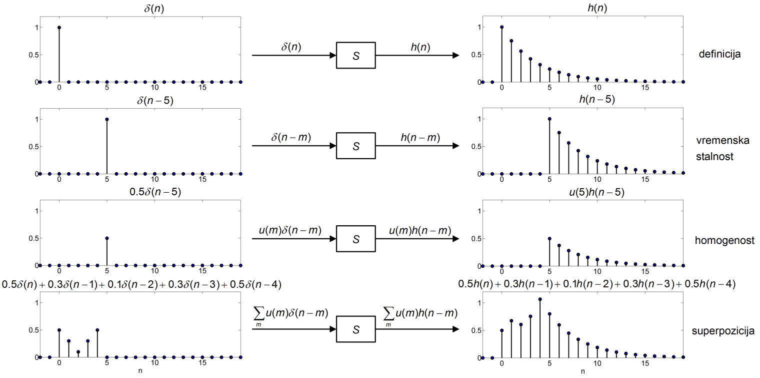


- uz definiciju za pomak jediničnog impulsa možemo pisati

$$u(n) = .5\delta(n) + .3\delta(n-1) + .1\delta(n-2) + .3\delta(n-3) + .5\delta(n-4)$$

- razmotrimo odziv linearnog, vremenski stalnog, diskretnog sustava na niz impulsa

Odziv sustava na niz impulsa



Slika 8: Konvolucijska sumacija *SISO* sustava

Konvolucijska sumacija

- diskretni signal možemo prikazati kao zbroj niza impulsa

$$u = \ldots + u(-1)\delta(n+1) + u(0)\delta(n) + u(1)\delta(n-1) + \\ + u(2)\delta(n-2) + u(3)\delta(n-3) \ldots \Rightarrow \\ u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$$

- odziv sustava na jednični impuls $\delta(n)$ je $h(n)$, pa za linearni sustav vrijedi svojstvo homogenosti

$$u(m)\delta(n-m) \rightarrow u(m)h(n-m)$$

- odziv na pobudu nizom u je

$$y = \ldots + u(-1)h(n+1) + u(0)h(n) + u(1)h(n-1) + \\ + u(2)h(n-2) + u(3)h(n-3) \ldots \Rightarrow$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m)$$

[kraj]