1. Odredi je li zadani diskretan sustav vremenski promjenjiv, linearan i memorijski.

$$y(n) = 2^{u(n)}.$$

RJEŠENJE:

– NIJE MEMORIJSKI, KORISTI SAMO $u(n)$

– $2^{\alpha u_1(n)+\beta u_2(n)} = 2^{\alpha u_1(n)} \cdot 2^{\beta u_2(n)} =$

$= \left(2^{u_1(n)}\right)^{\alpha} \cdot \left(2^{u_2(n)}\right)^{\beta}$ → NIJE LINEARNO

(NIJE OBLIKA $\alpha y_1 + \beta y_2$)

– $u_1(n) = u(n-M)$

$y_1(n) = 2^{u_1(n)} = 2^{u(n-M)}$

$y(n-M) = 2^{u(n-M)}$ ⇒ $y_1(n) = y(n-M)$

↓

NIJE VREMENSKI PROMJENJIV

2. Odredi je li zadani kontinuirani sustav vremenski promjenjiv, linearan i memorijski.

$$y(t) = u(t^2).$$

RJEŠENJE:

• vremenska promjenjivost:

$u_1(t) = u(t-T)$

$y_1(t) = u_1(t^2) = u(t^2-T)$

$y_2(t) = y(t-T) = u((t-T)^2) = u(t^2-2tT+T^2)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1(t) \neq y_2(t)$ (u općem slučaju) $\Rightarrow$ signal je vremenski promjenjiv

• linearnost:

$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$

$y_1(t) = u_1(t^2)$

$y_2(t) = u_2(t^2)$

$y(t) = u(t^2) = \alpha u_1(t^2) + \beta u_2(t^2) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(\alpha u_1 + \beta u_2) \doteq \alpha S(u_1) + \beta S(u_2) \Rightarrow$ signal je linearan

Budući je za izlaz u trenutku t potrebno znati ulaz u trenutku t^2 što je ili budućnost ($t \in \mathbb{R} \setminus \langle 0,1 \rangle$) ili prošlost ($t \in \langle 0,1 \rangle$) sustav je memorijski

3. Odredite je li zadani diskretan sustav vremenski nepromjenjiv, linearan:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k)}{n-k}.$$

RJEŠENJE:

– VREMENSKA NEPROMJENJIVOST

neka je $y_1(n) = S\left(u(n-N)\right) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k-N)}{n-k}$

s druge strane $y(n-N) = \sum_{k=-\infty}^{n-N} \frac{u(k)}{n-N-k} \underbrace{=}_{k=m-N} \sum_{m=-\infty}^{n} \frac{u(m-N)}{n-m} = y_1(n)$

JEDNAKO

VREMENSKI NEPROMJENJIVO

– LINEARNOST

neka je $y_1(n) = S\left(u_1(n)\right) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_1(k)}{n-k}$

$y_2(n) = S\left(u_2(n)\right) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_2(k)}{n-k}$

za $u(n) = a u_1(n) + b u_2(n)$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{a u_1(n) + b u_2(n)}{n-k} = a \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_1(n)}{n-k}} + b \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_2(n)}{n-k}}$$

$$= a \; y_1(n) + b \; y_2(n)$$

SUSTAV JE LINEARAN.

4. Odredite je li zadani kontinuirani sustav vremenski nepromjenjiv, linearan i memorijski:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) u(t-\tau) d\tau .$$

RJEŠENJE:

– VREMENSKA NEPROMJENJIVOST

neka je $y_1(t) = S\left(u(t-T)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau)\, u(t-T-\tau) d\tau$

s druge strane $y(t-T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau)\, u(t-T-\tau) d\tau$

$$y_1(t) = y(t-T)$$

SUSTAV JE VREMENSKI NEPROMJENJIV

– LINEARNOST

neka je $y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau)\, u_1(t-\tau) d\tau$

$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau)\, u_2(t-\tau) d\tau$

definiramo $u(t) = a u_1(t) + b u_2(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) \left[a u_1(t-\tau) + b u_2(t-\tau) \right] d\tau$$

$$= \underbrace{a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau)\, u_1(t-\tau) d\tau}_{y_1(t)} + \underbrace{b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau)\, u_2(t-\tau) d\tau}_{y_2(t)}$$

$$= a\, y_1(t) + b\, y_2(t)$$

SUSTAV JE LINEARAN

– MEMORIJA

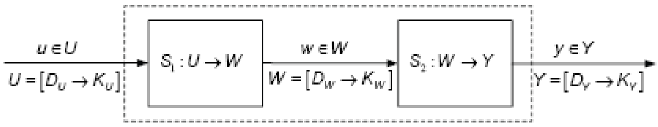
sustav može biti zapisan kao $y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\tau} u(t-\tau) d\tau$

sustav IMA MEMORIJU jer proračun $y(t)$ uzima u obzir sve buduće vrijednosti ulaza.

5. Promatraju se dva sustava S_1 i S_2 spojena u kaskadni spoj. Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite. Ukoliko nisu istinite navedite primjer koji to potvrđuje.

   a. Ako su oba sustava S_1 i S_2 linearna, vremenski nepromjenjiva, hoće li i njihov kaskadni spoj biti linearan i vremenski nepromjenjiv?
   b. Ako su oba sustava S_1 i S_2 nelinearna, je li i njihov kaskadni spoj nužno nelinearan?
   c. Ako su oba sustava S_1 i S_2 vremenski promjenjiva, je li i njihov kaskadni spoj nužno vremenski promjenjiv?

Rješenje:



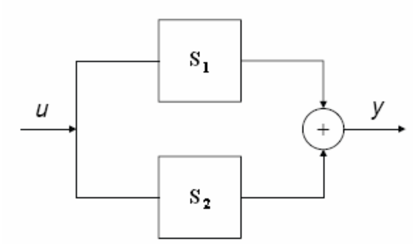
a. Linearnost:
   Ako je ulaz u prvi sustav S_1: $au_1(n)+bu_2(n)$, izlaz iz njega je $aw_1(n)+bw_2(n)$, uzevši u obzir svojstvo linearnosti. Ovaj izlaz je automatski ulaz u sljedeći sustav S_2. Uzevši u obzir da je i taj sustav linearan, izlaz je: $ay_1(n)+by_2(n)$. Znači, ako je svaki podsustav linearan, i njihov kaskadni spoj je linearan.

   Vremenska nepromjenjivost:
   Ako je $u(n-n_0)$ ulaz u vremenski nepromjenjiv sustav S_1, izlaz će biti $w(n-n_0)$. Odziv vremenski nepromjenjivog sustava S_2 na ovaj ulaz će biti $y(n-n_0)$. Znači, ako je svaki podsustav vremenski nepromjenjiv, i njihov kaskadni spoj će biti vremenski nepromjenjiv.

b. Ako su S_1 i S_2 nelinearni sustavi nije nužno da će i njihov kaskadni spoj biti nelinearan, nelinearnost drugog sustava može poništiti nelinearnost prvog. Dovoljno je pokazati primjer:
   $$w(n) = S_1\{u(n)\} = e^{u(n)}$$
   $$y(n) = S_2\{w(n)\} = \log(w(n))$$
   Svaki od sustava je nelinearan, ali njihova kaskada je linearna:
   $$y(n) = S_2(S_1(u(n))) = \log(e^{u(n)}) = u(n)\,.$$

c. Ako su S_1 i S_2 vremenski promjenjivi sustavi nije nužno da će i njihov kaskadni spoj biti vremenski promjenjiv. Dovoljno je pokazati primjer koji to potvrđuje:
   $$w(n) = u(n)e^{jn\omega_0}$$
   $$y(n) = w(n)e^{-jn\omega_0}$$
   Oba sustava su vremenski promjenjiva, ali njihov kaskadni spoj nije:
   $$y(n) = S_2(S_1(u(n))) = u(n)e^{jn\omega_0}e^{-jn\omega_0} = u(n)\,.$$

6. Promatraju se dva diskretna sustava S_1 i S_2 spojena u paralelnu vezu (slika 2.). Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite, te obrazložite svoj odgovor.



Slika 2. Paralelni spoj dva diskretna sustava

a. Ako su oba sustava S_1 i S_2 linearna i vremenski nepromjenjiva, hoće li i njihov paralelan spoj biti linearan i vremenski nepromjenjiv?
b. Ako su oba sustava S_1 i S_2 nelinearna, je li i njihov paralelni spoj nužno nelinearan?
c. Ako su oba sustava S_1 i S_2 vremenski promjenjiva, je li i njihov paralelni spoj nužno vremenski promjenjiv?

RJEŠENJE:

a)

$$y(n) = f(u(n)) = f_1(u(n)) + f_2(u(n))$$

$$= f_1(\alpha u_1(n) + \beta u_2(n)) + f_2(\alpha u_1(n) + \beta u_2(n)) =$$

(linearnost)

$$= \alpha f_1(u_1(n)) + \beta f_1(u_2(n)) + \alpha f_2(u_1(n)) + \beta f_2(u_2(n))$$

$$= \alpha [f_1(u_1(n)) + f_2(u_1(n))] + \beta [f_1(u_2(n)) + f_2(u_2(n))]$$

$$= \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$ spoj je linearan

$$u_1(n) = u(n-M)$$

$$y_1(n) = f(u_1(n)) = f_1(u_1(n)) + f_2(u_1(n)) = f_1(u(n-M)) + f_2(u(n-M)) = y(n-M)$$

spoj je vremenski nepromjenjiv

b) Nije nužno: prva funkcija može biti npr. $f_1(u(n)) = u(n) + 2^n$

a druga $f_2(u(n)) = u(n) - 2^n$

Njihov zbroj je $f(u(n)) = 2u(n)$, dakle linearna funkcija

c) Nije nužno: uzmimo primjer

$$f_1(u(n)) = n\,u(n)$$

$$f_2(u(n)) = -(n-1)\,u(n)$$

$f(u(n)) = f_1 + f_2 = u(n)$, što je vremenski nepromjenjiv sustav

7. Zadan je diskretan sustav *A* s jednim ulazom i jednim izlazom (SISO). Ukoliko na ulaz ovog sustava dođe signal $x_1(n)$, pripadajući izlaz poprima vrijednost $y_1(n)$, a ako je na ulazu $x_2(n)$ izlaz je $y_2(n)$:

$$x_1(n) = (-1)^n \;\rightarrow\; y_1(n) = 1,\ \text{za svaki } n,$$

$$x_2(n) = (-1)^{n+1} \rightarrow\; y_2(n) = 1,\ \text{za svaki } n.$$

Zadan je i diskretan SISO sustav *B*. Ukoliko na taj sustav dođu signali na ulaz $x_3(n)$ i $x_4(n)$, pripadajući izlazi $y_3(n)$ i $y_4(n)$ dani su s:

$$x_3(n) = (-1)^n \;\rightarrow\; y_3(n) = 1,\quad \text{za svaki } n,$$

$$x_4(n) = (-1)^{n+1} \rightarrow\; y_4(n) = -1,\ \text{za svaki } n.$$

Odredite mogu li sustavi *A* i *B* biti linearni i vremenski nepromjenjivi.

Rješenje:

a) A NE MOŽE biti linearan.

$x_2(n) = -x_1(n)$ ali $y_2(n) \neq -y_1(n)$

svojstvo homogenosti linearnih sustava NIJE zadovoljeno.

b) A MOŽE biti vremenski nepromjenjiv.

$x_2(n) = x_1(n-n_0)$ za svaki neparan n_0

$\Downarrow$

$y_2(n) = y_1(n-n_0)$

c) B MOŽE biti linearan

$x_2(n) = -x_1(n) \longrightarrow y_2(n) = -y_1(n)$

svojstvo homogenosti linearnih sustava JE zadovoljeno

d) B NE MOŽE biti vremenski nepromjenjiv.

$x_2(n) = x_1(n-1) \rightarrow$ ali $\rightarrow y_2(n) \neq y_1(n-1)$

8. Odziv na jedinični skok, $u(t) = \mu(t)$, linearnog vremenski nepromjenjivog sustava glasi $y(t) = \left(1 - e^{-2t}\right)\mu(t)$. Nađite odziv ovog sustava na ulaz $u(t) = 4\mu(t) - 4\mu(t-1)$.

RJEŠENJE:

$$u(t) = \mu(t)$$

$$y(t) = (1 - e^{-2t})\,\mu(t) = S(\mu)(t)$$

$$\varepsilon(t) = \mu(t-1)$$

zbog linearnosti — zbog vremenske nepromjenjivosti

$$y_2(t) = S(4\mu - 4\varepsilon) = 4S(\mu) - 4S(\varepsilon) = 4y(t) - 4y(t-1) =$$

$$= 4(1 - e^{-2t})\,\mu(t) - 4(1 - e^{-2t+2})\,\mu(t-1) =$$

$$= 4\left[\mu(t) - \mu(t-1) - e^{-2t}\left(\mu(t) - e^{2}\mu(t-1)\right)\right]$$

DODATNI ZADACI

Provjerite jesu li zadani sustavi linearni i vremenski nepromjenjivi.

1. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$
2. $y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau)d\tau$
3. $y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(3n+2)$
4. $y(t) = \frac{u(t)}{1+u(t-1)}$

RJEŠENJA:

1. linearno, vremenski nepromjenjivo
2. linearno, vremenski promjenjivo
3. linearno, vremenski promjenjivo
4. nelinearno, vremenski nepromjenjivo, ima memoriju