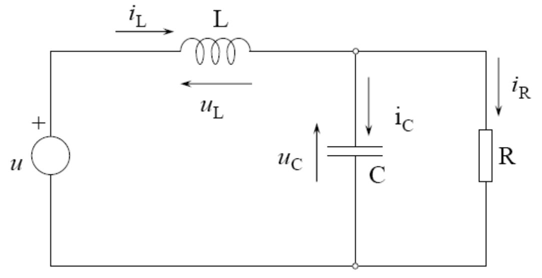
MODEL S VARIJABLAMA STANJA

Tomislav Petković, Branko Jeren i ostali: Zbirka riješenih zadataka iz signala i sustava, Poglavlje 6.1. Primjeri 6.1, 6.2; Zadaci 6.1, 6.2, 6.3

1.

Napisati jednadžbe stanja i izlazne jednadžbe za električnu mrežu prikazanu slikom. ***u*** je ulaz u sustav, a i_R izlaz iz sustava.

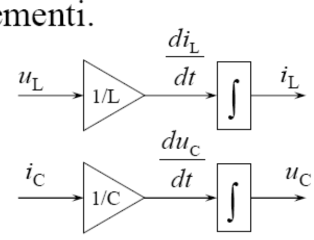


Rješenje:

L i C su memorijski elementi.

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L}$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$$



Varijable stanja električne mreže su i_L, u_C.

Za jednadžbe stanja treba naći $\frac{di_L}{dt} = \cdots, \frac{du_C}{dt} = \cdots$

Zadana električna mreža je linearna.

Koristit će se teorem superpozicije.

Doprinos pojedinog "aktivnog" elementa mreže određuje se tako da se "isključe" sve preostale "aktivne" komponente.

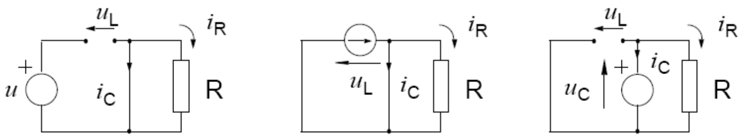
"Isključiti", to znači:

C, $u \rightarrow$ kratko spojiti,
L, $i \rightarrow$ odspojiti,

gdje su u, $i \rightarrow$ nezavisni naponski ili strujni izvori.

Ukupni odziv jednak je sumi doprinosa pojedinih aktivnih elemenata.

Slučaj	A	B	C
Uključen	u	L	C
Isključen	L, C	u, C	u, L



A B C

$$
\begin{array}{lllll}
 & & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\
u_L = \mathrm{L}\, di_L/dt = & & u & +\ 0 \cdot i_L & -\ u_C \\
i_C = \mathrm{C}\, du_C/dt = & & 0 \cdot u & +\ i_L & -\ 1/\mathrm{R}\, u_C \\
i_R = & & 0 \cdot u & +\ 0 \cdot i_L & +\ 1/\mathrm{R}\, u_C
\end{array}
$$

Ako podijelimo jednadžbe s L, odnosno C dobijemo:

$$
\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{\mathrm{L}} u - \frac{1}{\mathrm{L}} u_C ,
$$

$$
\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}} i_L - \frac{1}{\mathrm{RC}} u_C ,
$$

što su željene jednadžbe stanja, uz već poznatu izlaznu jednadžbu:

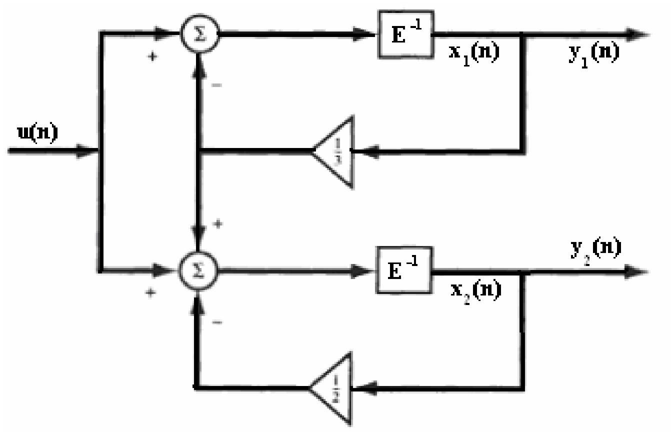
$$
i_R = \frac{1}{\mathrm{R}} u_C .
$$

U matričnom obliku, to izgleda ovako:

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{di_L}{dt} \\ \dfrac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\mathrm{L}} \\ \dfrac{1}{\mathrm{C}} & -\dfrac{1}{\mathrm{RC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{L}} \\ 0 \end{bmatrix} u ,
$$

$$
i_R = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\mathrm{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + 0 \cdot u .
$$

2. Zadan je vremenski diskretan LTI sustav prema slici 1. Nađite model s varijablama stanja ovog sustava (matrice *A, B,C* i *D*). Ulaz u sustav je $u(n)$, stanja su $x_1(n)$ i $x_2(n)$, dok su izlazi $y_1(n)$ i $y_2(n)$.



__Rješenje:__

Na ulazu elementa za kašnjenje: $x_1(n+1)$, odnosno $x_2(n+1)$.
Izrazimo te varijable pomoću vrijednosti koje ulaze u sumator:

$$x_1(n+1) = +u(n) - \frac{1}{3}x_1(n)$$

$$x_2(n+1) = +u(n) + \frac{1}{3}x_1(n) - \frac{1}{2}x_2(n)$$

Izlazi iz sustava:

$$y_1(n)=x_1(n)$$
$$y_2(n)=x_2(n)$$

Ukoliko ove jednadžbe zapišemo u matričnom obliku, dobivamo:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(n)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(n)$$

Prema tome, matrice glase:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = 0\,.$$

3. Dana je matrica A vremenski diskretnog SISO sustava $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Nađite A^n, te odziv stanja nepobuđenog sustava, ukoliko su početna stanja:

a. $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

b. $x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

c. $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

Rješenje:

Lako je uočiti pravilo:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow A^3=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow A^4=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow A^n=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Dokaz da je ovo stvarno istina je jednostavan preko matematičke indukcije.

Baza: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Korak: $A^k=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Pretpostavka: $A^{n+1}=\begin{bmatrix}1 & n+1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Izvod: $A^{n+1}=A\cdot A^n=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & n+1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, čime je ovo dokazano.

Odziv stanja nepobuđenog sustava nalazi se iz $x(n)=A^n x(0), \quad n>0$, uz *u(n)=0.*

a. $x(n)=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

b. $x(n)=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\ 1\end{bmatrix}$

c. $x(n)=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n+1\\ 1\end{bmatrix}$

KONVOLUCIJA
Tomislav Petković, Branko Jeren i ostali: Zbirka riješenih zadataka iz signala i sustava: Primjer 13.10, polovica primjera 13.13.

4.

Konvolucijska sumacija

Omogućuje nam određivanje odziva na bilo kakvu pobudu kada je poznat odziv na δ niz.

Za vremenski nepromjenjiv sustav vrijedi

$$y[n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[n-i]$$

odnosno

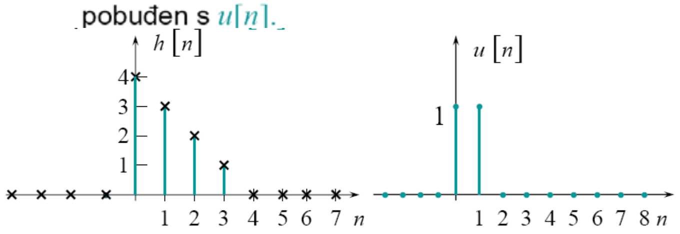
$$y[n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]u[n-i]$$

U slučaju da radimo s kauzalnim sustavima i promatramo odziv za pobudu zadanu za $n \geq 0$, gornje relacije prelaze u:

$$y[n]=\sum_{i=0}^{n} u[i]h[n-i]$$

$$y[n]=\sum_{i=0}^{n} h[i]u[n-i]$$

Korištenjem konvolucijske sumacije odrediti odziv diskretnog sustava zadanog impulsnim odzivom $h[n]$. Sustav je pobuđen s $u[n]$.



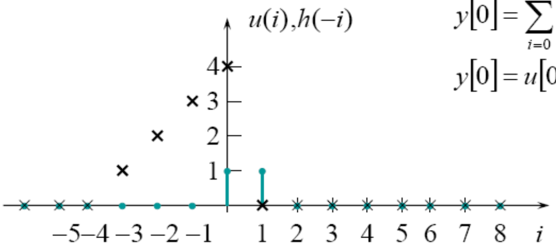
impulsni odziv pobuda

Rješenje:

Rješenje ćemo grafički interpretirati iz :

$$y[n]=\sum_{i=0}^{n} u(i)h(n-i).$$

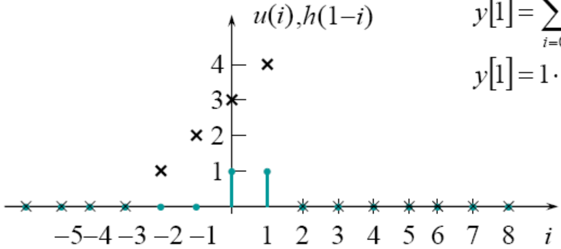
Za $n=0$



$$y[0]=\sum_{i=0}^{0} u(i)h(-i),$$

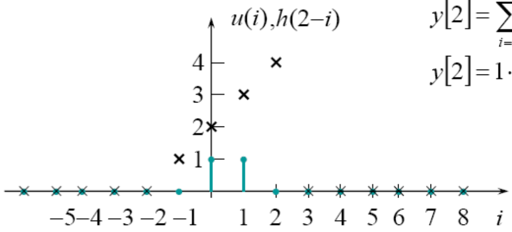
$$y[0]=u[0]h[0]=1\cdot 4=4.$$

Za $n = 1$



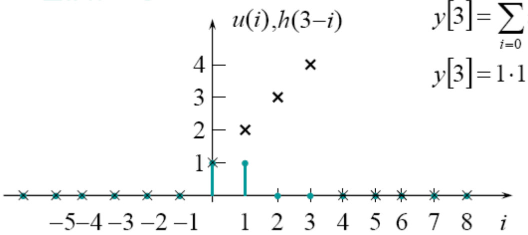
$$y[1] = \sum_{i=0}^{1} u(i)h(1-i),$$
$$y[1] = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 7.$$

Za $n = 2$



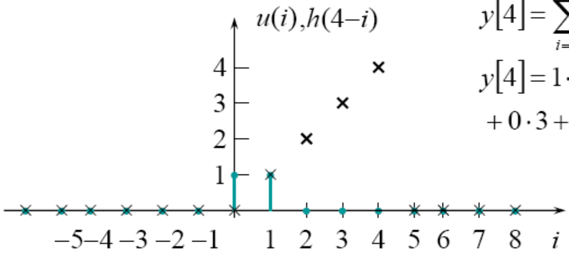
$$y[2] = \sum_{i=0}^{2} u(i)h(2-i),$$
$$y[2] = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 5.$$

Za $n = 3$



$$y[3] = \sum_{i=0}^{3} u(i)h(3-i),$$
$$y[3] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 3.$$

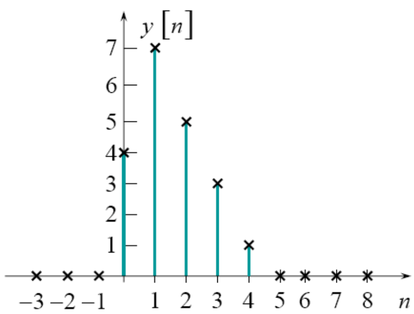
Za $n = 4$



$$y[4] = \sum_{i=0}^{4} u(i)h(4-i),$$
$$y[4] = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 1.$$

Dalje je $y[5], y[6] \ldots = 0$.

Pa je odziv



5. Izračunajte izlaz *y(t)* za dani vremenski kontinuirani LTI sustav čiji su impulsni odziv *h(t)* i ulaz *u(t)* dani s

$$h(t) = e^{-at}\mu(t)$$
$$u(t) = e^{at}\mu(-t),\ \ a > 0\,.$$

<u>Rješenje:</u>

Kako bi se pronašao odziv sustava, mora se upotrijebiti konvolucija:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau\,.$$

Zadani ulaz *u(τ)* dan je na slici, kao i *h(t- τ)* za dva slučaja *t<0* i *t>0*. Sa slika je vidljivo da se za *t<0*, *u(τ)* i *h(t- τ)* preklapaju u području $\tau = -\infty$ do $\tau = t$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{a\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau = e^{-at}\int_{-\infty}^{t} e^{2a\tau}d\tau = \frac{1}{2a}e^{at}\,.$$

Za *t>0* slike se preklapaju u području $\tau = -\infty$ do $\tau = 0$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{a\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau = e^{-.at}\int_{-\infty}^{0} e^{2a\tau}d\tau = \frac{1}{2a}e^{-at}\,.$$

Kombinirajući ova dva odziva, ukupni odziv može biti zapisan:

$$y(t) = \frac{1}{2a}e^{-a|t|},\ \ a > 0\,.$$