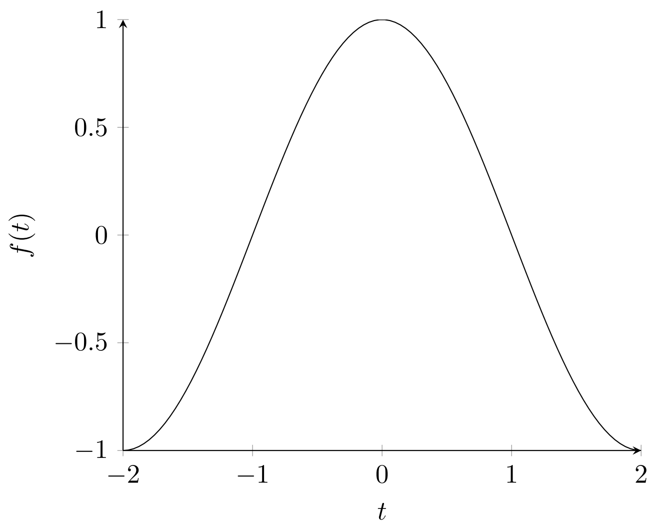
SIS Ljetni Ispitni Rok 2017

aperture

July 2017

1. Zadan je vremenski kontinuirani $f(t) = cos(\frac{\pi}{2}t)[\mu(t+2) - \mu(t-2)]$.
   (a) Odredi CTFT zadanog signala, te skicirajte amplitudni spektar.
   (b) Izračunaj energiju postupkom u vremenskoj domeni.
   (c) Očitajte signal $f(t)$ periodom očitavanja $T_s = 0.5$, te izračunajte energiju signala.

   Rješenje:



   (a) tražimo CTFT

$$X(j\omega) = \int_{-2}^{+2} cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-2}^{+2} \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}tj} + e^{-\frac{\pi}{2}tj}) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{+2} \left[e^{tj\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)} + e^{-tj\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)}\right] dt$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{tj\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}}{j\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}\Bigg|_{-2}^{+2} + \frac{e^{-tj\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)}}{-j\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)}\Bigg|_{-2}^{+2}\right]$$

samo malo drugačije raspoređujemo stvari i pišemo:

$$X(j\omega) = \frac{sin(\pi - 2\omega)}{\frac{\pi}{2} - \omega} + \frac{sin(\pi + 2\omega)}{\frac{\pi}{2} + \omega}$$

$$X(j\omega) = 2sinc(\pi - 2\omega) + 2sinc(\pi + 2\omega)$$

Wolfram skica spektra

(b) energija u vremenskoj domeni računa se preko $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt$

$$E = \int_{-2}^{+2} cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt$$

$$E = \frac{1}{2}\int_{-2}^{+2} \left[1 + cos(\pi t)\right] dt$$

$$E = 2 + 0 = 2$$

(c) očitavamo signal pa onda računamo energiju, ista formula.

$$f(t) = cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\left[\mu(t+2) - \mu(t-2)\right]\Big|_{t=nT_s}$$

$$f(n) = cos\left(\frac{\pi}{4}n)[\mu(0.5n+2\right) - \mu(0.5-n)]$$

$$f(n) = cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\left[\mu(n+4) - \mu(n-4)\right]$$

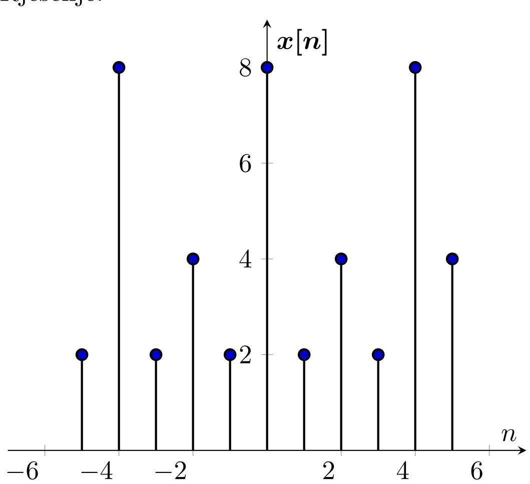
$$E = \sum_{n=-4}^{+4} cos^2\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$E = 2\left[cos^2\left(\frac{\pi}{4}4\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{4}3\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{4}2\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{4}1\right)\right] + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

2. Zadan je vremenski diskretan periodični signal $f(n) = \{....., 8, 2, 4, 2, \underline{8}, 2, 4, 2, 8, 2, 4, 2, ...\}$.
   (a) Odredi koeficijente F_k vremenski diskretnog Fourierovog reda (DTFS) zadanog signala.
   (b) Definirajte DTFS i izvedite Parsevalovu relaciju za DTFS.
   (c) Odredite diskretnu Fourierovu transformaciju zadanog signala u 4 točke DFT_4 jedne periode zadanog signala.
   (d) Odredite vremenski signal $g(n)$ čiji je spektar jednak $G_k = F_{k-2}$ (spektar G_k je dobiven pomakom spektra F_k za 2 mjesta unaprijed.

   Rješenje:



(a) prvo određujemo period signala iz definicije periodičnosti odnosno $f(n) = f(n+N)$ gdje je N period. Očito je da je $N = 4$. Dalje uvršavamo u formulu za DTFS i dobivamo.

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x(n) \cdot e^{-2\pi jk \frac{n}{N}}$$

uvrštavamo $x(n)$

$$X_k = \frac{1}{4} \left(8e^0 + 2e^{-\frac{\pi}{2}jk} + 4e + 2e^{\frac{3\pi}{2}jk} \right)$$

$$X_k = \frac{1}{4} \left(8 + 4(-1)^k + 4cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right)$$

konačno rješenje je

$$X_k = 2 + (-1)^k + cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

(b) slajdovi...

(c) formula za DFT_4 je ista kao i formula za DTFS samo nema $\frac{1}{4}$ pa odmah možemo pisati

$$X(k) = 8 + 4(-1)^k + 4cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

uvrštavanjem za $k = 0, 1, 2, 3$ dobivamo DFT_4

$$X(0) = 16$$
$$X(1) = 4$$
$$X(2) = 0$$
$$X(3) = 4$$

(d) za pomak koristimo formulu za pomak u donjoj domeni iz formula. Nakon uvrštavanja rezultat glasi

$$g(n) = f(n)e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

3. Vremenski diskretan kauzalan sustav zadan je jednadžbom diferencija

$$y(n) - \tfrac{3}{8}y(n-1) + \tfrac{2}{3}y(n-2) = 2u(n-2)$$

Ako su početni uvjeti $y(-2) = 4256$, $y(-1) = 392$ i pobuda $u(n) = [\frac{3}{2}(-\frac{1}{4})^n - \frac{21}{16}]\mu(n)$ odredite postupkom u vremenskoj domeni:

(a) Odziv mirnog sustava.

(b) Odziv nepobuđenog sustava.

(c) Totalni odziv sustava.

Rješenje:

(a) Određujemo odziv mirnog sustava. Odziv mirnog sustava znači da tražimo i homogeno i partikularno rješenje ali kad računamo konstante računamo kao da prije nego što je pobuda u sustavu vlada stacionarno stanje.

Prvo odredimo homogeno rješenje:

$$q^2 - \frac{3}{8}q + \frac{2}{3} = 0$$

pošto nam je lakše raditi u eksponencijalnom obliku koristimo njega pa pišemo rješenja gornje jednadžbe:

$$q_1 = 0.8168e^{1.34j}$$
$$q_2 = 0.8168e^{-1.34j}$$

to zapisujemo kao:

$$y_h(n) = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$$
$$y_h(n) = r^n \left[C_1 cos(1.34n) + jC_1 sin(1.34n) + C_2 cos(1.34n) - C_2 j sin(1.34n)\right]$$
$$y_h(n) = r^n \left[(C_1 + C_2) cos(1.34n) + (C_1 - C_2) j sin(1.34n)\right]$$
$$y_h(n) = r^n \left[A cos(1.34n) + B sin(1.34n)\right]$$

Dalje tražimo partikularno rješenje, pošto je pobuda oblika $u(n) = [\frac{3}{2}(-\frac{1}{4})^n - \frac{21}{16}]\mu(n)$ pretpostavljeni oblik partikularnog rješenje je $y_p(n) = K_0(-\frac{1}{4})^n - K_1$. Uvrštavamo y_p u početnu jednadžbu:

$$K_0\left(-\frac{1}{4}\right)^n - K_1 - \frac{3}{8}\left[K_0(-\frac{1}{4})^{n-1} - K_1\right] + \frac{2}{3}\left[K_0(-\frac{1}{4})^{n-2} - K_1\right] = 3 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} - \frac{21}{8}$$
$$K_0\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^1 + \frac{2}{3}\right] + K_1\left[\frac{3}{8} - \frac{2}{3} - 1\right] = 3 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} - \frac{21}{8}$$

uvrštavamo $n = 2$

$$K_0\frac{79}{96} - K_1\frac{31}{24} = \frac{3}{8}$$

ubrštavamo $n = 3$

$$K_0\frac{79}{384} + K_1\frac{31}{24} = \frac{27}{8}$$

dobivamo $K_0 = \frac{288}{79}$ i $K_1 = \frac{63}{31}$, pa partikularno rješenje pišemo kao:

$$y_p(n) = \frac{288}{79}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{63}{31}$$

totalno rješenje nam je onda:

$$y(n) = r^n \left[A cos(1.34n) + B sin(1.34n)\right] + \frac{288}{79}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{63}{31}$$

sad kad imamo i homogeno i partikularno možemo tražiti mirni odziv. P.U. su 0 pa lako možemo naći $y(2)$ i $y(3)$.

$$y(n) = 2u(n-2) + \frac{3}{8}y(n-1) - \frac{2}{3}y(n-2)$$
$$y(2) = \frac{3}{8}$$
$$y(3) = -\frac{207}{64}$$

kad imamo početne uvijete možemo tražiti koeficijente A i B iz totalnog rješenja. Nakon uvrštavanja za $n = 2$ odnosno $n = 3$ dobivamo:

$$3.26 = -0.895A + 0.445B$$

$$2.1 = 0.64A + 0.769B$$

Uvrštavanjem u casio dobivamo da su koeficijenti $A = -1.616$ i $B = 4.075$.
pa pišemo da je mirni odziv:

$$y_{mirni}(n) = 0.8168^n \left[-1.616cos(1.34n) + 4.075sin(1.34n)\right] + \frac{288}{79}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{63}{31}$$

za $n \geq 2$

(b) tražimo nepobuđeni odziv. Ovdje nam samo treba homogeno rješenje i dosta tipkanja u digitron jer nam trebaju početni uvjeti u $n = 2$ i $n = 3$.

$$y(0) = \frac{3}{8}y(-1) - \frac{2}{3}y(-2) = -\frac{8071}{3}$$
$$y(1) = \frac{3}{8}y(0) - \frac{2}{3}y(-1) = -1270.208$$
$$y(2) = \frac{3}{8}y(1) - \frac{2}{3}y(0) = 1317.226$$
$$y(3) = \frac{3}{8}y(2) - \frac{2}{3}y(1) = 1340.765$$

to sve uvrštavamo u homogeno rješenje i dobivamo sustav:

$$-0.895A + 0.445B = 1974.37$$
$$0.64A - 0.769B = 2460.398$$

dobivamo rješenja $A = -2685.529$ i $B = -964.45$
pa pišemo da nam je nepobuđeni odziv jednak:

$$Y_{nepobu}(n) = 0.8168^n \left[-2685.529cos(1.34n) - 964.45sin(1.34n)\right]$$

(c) Zadnje što tražimo je totalni odziv koji je jednostavno zbroj mirnog i nepobuđenog odziva:

$$y_{totalni}(n) = 0.8168^n \left[-2687.145cos(1.34n) - 960.375sin(1.34n)\right] + \frac{288}{79}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{63}{31}$$

za $n \geq 2$

4. Zadan je vremenski kontinuirani sustav $y''(t) + 2(a+1)y'(t) + 4ay(t) = (a+1)u'(t) + 4au(t), a \in IR$
   (a) Odredite impulsni odziv sustava koristeći L-transformaciju. Za koje $a \in IR$ je sustav stabilan?
   (b) Uz pretpostavku da je sustav stabilan, u ovisnosti o parametru a odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(t) = \mu(t)$ pomoću konvolucijskog integrala.
   (c) Odredite prisilni odziv sustava na svevremensku pobudu $u(t) = cos(3t) + 3sin(3t)$, ako je $a = 1$.

Rješenje:

(a) tražimo impulsni odziv i ispitujemo stabilnost

$$s^2Y(s) + 2s(a+1)Y(s) + 4aY(s) = s(a+1)U(s) + 4aU(s)$$
$$Y(s)][s^2 + 2(a+1)s + 4a] = U(s)[s(a+1) + 4a]$$
$$Y(s) = \frac{s(a+1) + 4a}{s^2 + 2(a+1)s + 4a}$$

$$H(s) = \frac{s(a+1)+4a}{s^2+2(a+1)s+4a}$$

Tražimo polove prijenosne funkcije $H(s)$:

$$s^2 + 2(a+1)s + 4a = 0$$
$$s_{1,2} = \frac{-2(a+1) \pm \sqrt{(4(a+1)^2 - 16a}}{2}$$
$$s_{1,2} = \frac{-2(a+1) \pm \sqrt{4(a-1)^2}}{2}$$
$$s_{1,2} = -(a+1) \pm (a-1)$$
$$s_1 = -2$$
$$s_2 = -2a$$

da bi bila ispunjena stabilnost oba pola moraju biti s lijeve strane koordinatonog sustava odnosno $-2a < 0$ što nakon množenja ispada da je sustav stabilan za svaki $a > 0$.
dalje tražimo impulsni odziv u ovisnosti o parametru a

$$H(s) = \frac{s(a+1)+4a}{(s+2a)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+2a}$$
$$A(s+2a) + B(s+2) = s(a+1) + 4a$$
$$A + B = a + 1$$
$$2Aa + 2B = 4B$$
$$B = 2a - Aa$$

uvrštavanjem dobivamo: $A = 1$ i $B = a$

$$H(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{a}{s+2a}$$
$$h(t) = [e^{-2t} + ae^{-2at}]\mu(t)$$

(b) određujemo odziv pomoću konvolucijskog integrala na $u(t) = \mu(t)$ pritom koristimo rezultat $h(t) = [e^{-2t} + ae^{-2at}]\mu(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2\tau} + ae^{-2a\tau})\mu(\tau)\mu(t-\tau)d\tau$$
$$y(t) = \int_{0}^{t} (e^{-2\tau} + ae^{-2a\tau})d\tau$$
$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-2\tau}d\tau + a\int_{0}^{t} e^{-2a\tau}d\tau$$
$$y(t) = \frac{e^{-2\tau}}{-2}\Big|_0^t + a\frac{e^{-2a\tau}}{-2a}\Big|_0^t$$
$$y(t) = (1 - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2at})\mu(t)$$

(c) Određivanje prisilnog odziva na pobudu $u(t) = cos(3t) + 3sin(3t)$ pri čemu je $a = 1$.

$$H(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+4}$$

$$H(j\omega) = \frac{2j\omega+4}{-\omega^2+4j\omega+4}$$

razvrstavamo

$$H(j\omega) = \frac{4+2j\omega}{4-\omega^2+4j\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{16+4\omega^2}}{\sqrt{(4-\omega^2)^2+16\omega^2}}$$

uvrštavamo $\omega = 3$

$$|H(3j)| = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

dalje tražimo faznu karakteristiku

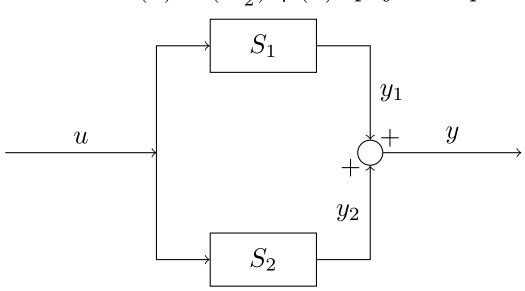
$$\underline{/H}(j\omega) = arctg\left(\frac{2\omega}{4}\right) - arctg\left(\frac{4\omega}{4-\omega^2}\right)$$

uvrštavamo i dobivamo $\underline{/H}(3j) = -56.31°$ ako primjetite prvi izraz fazne karakteriske iznosi $56.31°$, a drugi član iznosi $-67.38°$, ali -67 stupnjeva nam ne odgovara jer nam je imaginarna komponenta kompleksnog pozitivna, iz tog razloga radimo korekciju $\pm 180°$.

to sve pobacamo u forumulu koja je na predavanjima i dobivamo:

$$y(t) = \frac{2\sqrt{13}}{13}cos(3t-56.31°) + \frac{6\sqrt{13}}{13}sin(3t-56.31°)$$

5. Vremenski diskretni kauzalni LTI sustavi zadani su prijenosnom funkcijom $H_1(z) = \frac{z}{z^2-\frac{1}{4}}$ i impulsnim odzivom $h_2(n) = (-\frac{1}{2})^n\mu(n)$ spojeni su prema slici.



(a) Izračunajte odziv mirnog sustava $y(n)$ na pobudu $u(n) = \mu(n)$ pomoću Z transformacije.

(b) Odredite prirodni i prisilni odziv sustava na pobudu $u(n) = \mu(n)$.

Rješenje:

(a) Određujemo odziv mirnog sustava u Z domeni. Znamo da je odziv mirnog sustava $Y(z) = H(z)U(Z)$. Oba impulsna odziva zato želimo imati u Z domeni, pa transformiramo $h_2(t)$ u $H_2(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$. Isto tako znamo da ako su sustavu u paraleli, izlaz je zbroj pojedinih sustava, pa možemo pisati $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$.

$$H(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}$$

$$H(z) = \frac{z(z+\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}$$
$$H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

sad kad imamo $H(z)$, znamo transformirati $u(n) = \mu(n)$ jer piše u formulama [1] sve što trebamo je pobacati sve u formulu za $Y(z)$ i na kraju transformirati natrag u $y(t)$.

$$Y(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{z-1}$$
$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-1}$$
$$z = Az - A + Bz - \frac{1}{2}B$$
$$A + B = 1$$
$$-A - \frac{1}{2}B = 0$$

i dobivamo $A = -1$ i $B = 2$.

$$Y(z) = -\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + 2\frac{z}{z-1}$$
$$y(n) = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right]\mu(n)$$

(b) Određujemo prisilni i prirodni odziv, drugim riječima tražimo totalno rješenje postupkom u vremenskoj domeni. Iz H(z) možemo odrediti sustav, pošto je LTI, P.U. su jednaki 0.

$$H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

naš sustav je:

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = u(n)$$

određujemo rješenje homogene jednadžbe: ono je očito

$$q_1 = \frac{1}{2}$$

nadalje tražimo partikularno rješenje, pošto je pobuda $\mu(n)$ a pol nije jednak 1, pretpostavljamo $y_p(n) = K$ uvrštavamo $y_p(n)$ u gornju jedandžbu:

$$K - \frac{1}{2}K = 1$$
$$K = 2$$

pošto znamo koliki je K znamo i koliko nam je partikularno rješenje koje je ujedno i prisilni odziv pa pišemo:

$$y_{prisilno}(n) = 2$$

sada pišemo

$$y_{totalno}(n) = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

[1] $U(z) = \frac{z}{z-1}$

konstatnu C_1 određujemo iz P.U. koji su 0 jer je sustav LTI :-) u $y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=u(n)$ uvrštavamo $n=0$, dobivamo $y(0)=1$.

$$y(0)=C_1+2=1$$

na kraju imamo totalno rješenje:

$$y_{totalno}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$$