Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

15. svibnja 2013.

Samostalni rad studenata – diferencijalna jednadžba električnog kruga

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- razmatraju se vremenski kontinuirani sustavi, s jednim ulazom i jednim izlazom, opisani modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- sustavi se obično opisuju jednom diferencijalnom jednadžbom višeg reda koja veže jednu izlaznu[1] i jednu ulaznu varijablu, $\forall t \in \mathbb{R}$,

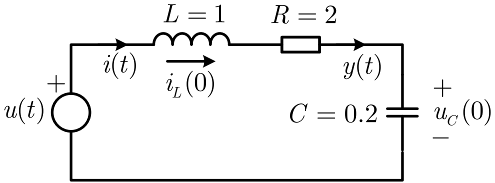
$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$
$$= b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \quad (1)$$

- slijede dva primjera za jedan jednostavni električni *RLC* krug za koji će biti izvedene diferencijalne jednadžbe za različito izabrane izlazne varijable

[1] U okviru ovog predmeta koristimo u kao oznaku za ulaznu, a y kao oznaku za izlaznu varijablu

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 1

- razmatra se RLC krug na slici



- označimo kao ulaznu varijablu u, izlazna varijabla neka je $y = i$, a odziv sustava određujemo za $t \geq 0$
- spremnici energije su induktivitet L i kapacitet C i neka su njihova početna stanja, $i_L(0) = 0$, i $u_c(0) = 2$
- za vremenski stalne i linearne komponente kruga vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u_c(0) = u(t)$$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 1

- deriviranjem obje strane, te dijeljenjem, s obje strane, s L, slijedi

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L}\frac{du}{dt}$$

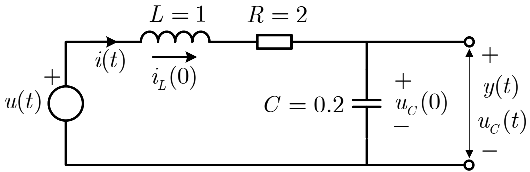
- diferencijalnu jednadžbu kruga pišemo uz pomoć uobičajenih oznaka za izlaznu varijablu y i ulaznu varijablu u
- za zadane vrijednosti elemenata, i za $y = i$, diferencijalna jednadžba kruga je

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

- za rješenje jednadžbe potrebno je poznavati $y(0)$ i $y'(0)$, a njih određujemo iz $i_L(0)$ i $u_c(0)$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 2

- razmatra se RLC krug na slici



- označimo kao ulaznu varijablu u, neka je izlazna varijabla $y = u_c$, a odziv sustava određujemo za $t \geq 0$
- neka su početna stanja, $i_L(0) = 0$, i $u_c(0) = 2$
- za vremenski stalne i linearne komponente kruga vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = u(t) \qquad (2)$$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 2

- kako za struju u petlji vrijedi

$$i(t) = i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}$$

- uvrštenjem u (2), te dijeljenjem obje strane s LC, slijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad \frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

- za zadane vrijednosti elemenata, i za $y = u_c$ diferencijalna jednadžba kruga je (za y kao izlaznu, a u kao ulaznu varijablu), $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 5u(t) \tag{3}$$

- za rješenje jednadžbe potrebno je poznavati $y(0)$ i $y'(0)$, a njih određujemo iz $i_L(0)$ i $u_c(0)$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjeri 1 i 2

- treba uočiti kako su, iako se radi o istom RLC krugu, izvedene dvije različite diferencijalne jednadžbe
- to je razumljivo, jer u primjeru 1 izlazna varijabla $y = i$ predstavlja struju petlje, a u primjeru 2 izlazna varijabla $y = u_C$ predstavlja napon na kapacitetu C
- za realni fizikalni sustav, RLC krug, napisane su diferencijalne jednadžbe za čije je rješavanje potrebno odrediti početne uvjete $y(0)$ i $y'(0)$ iz poznavanja početnih vrijednosti spremnika energije (početnih stanja) fizikalnog sustava $i_L(0)$ i $u_C(0)$
- jasno je da će za primjer 1, $y(0)$ biti jednak $i_L(0)$, a u primjeru 2 je $y(0)$ jednak $u_C(0)$
- postupak određivanja početnih uvjeta biti će obrazložen nešto kasnije

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- nastavljamo razmatranje vremenski kontinuiranih sustava s jednim ulazom i jednim izlazom, opisanih modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- sustavi su općenito opisani s više simultanih diferencijalnih jednadžbi
- više se simultanih diferencijalnih jednadžbi obično svodi na jednu jednadžbu višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$
$$= b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \quad (4)$$

- za linearne, vremenski stalne sustave, koeficijenti a_i i b_i su konstante

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- za realne fizikalne sustave je $M \leq N$, pa jednadžbu (4), u najopćenitijem slučaju $M = N$, pišemo kao

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t)$$
$$= b_0 \frac{d^N u}{dt^N} + b_1 \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \quad (5)$$

- uvođenjem operatora deriviranja D, koji predstavlja operaciju deriviranja d/dt, jednadžbu (5) zapisujemo kao

$$\underbrace{\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N\right)}_{A(D)} y(t) =$$
$$= \underbrace{\left(b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N\right)}_{B(D)} u(t) \quad (6)$$

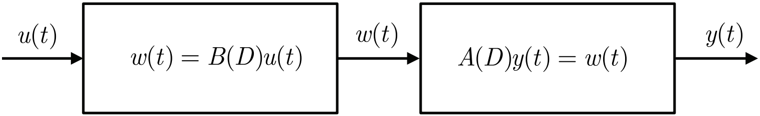
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A(D)y(t) = B(D)u(t) \quad (7)$$

Blokovski dijagram diferencijalne jednadžbe

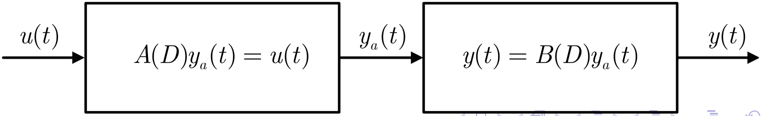
- diferencijalnu jednadžbu $A(D)y(t) = B(D)u(t)$ možemo razložiti na dvije jednadžbe

$$w(t) = B(D)u(t) \quad \text{i} \quad A(D)y(t) = w(t)$$

što možemo prikazati blokovskim dijagramom



- zamjena redosljeda LTI podsustava daje

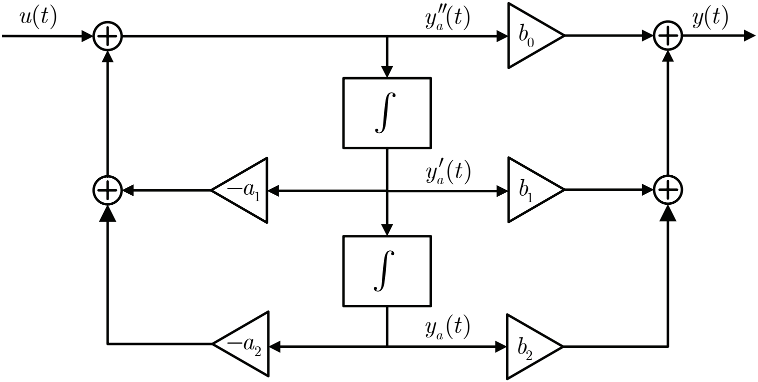


Blokovski dijagram diferencijalne jednadžbe

- za $N = M = 2$ je

$$A(D)y_a(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad y_a''(t) + a_1 y_a'(t) + a_2 y_a(t) = u(t)$$

$$y(t) = B(D)y_a(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = b_0 y_a''(t) + b_1 y_a'(t) + b_2 y_a(t)$$



blokovski dijagram predstavlja direktnu realizaciju II za vremenski kontinuirani sustav

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- odziv sustava na zadanu pobudu određuje se rješavanjem jednadžbe (5),

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t)$$
$$= b_0 \frac{d^N u}{dt^N} + b_1 \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t)$$

odnosno (7)

$$A(D)y(t) = B(D)u(t)$$

- totalni odziv sustava moguće je odrediti klasičnim postupkom rješavanja nehomogene diferencijalne jednadžbe
- rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe je

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- rješenje homogene jednadžbe y_h, je rješenje jednadžbe

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_h(t) = 0$$

- jednadžba pokazuje kako je linearna kombinacija y_h i njezinih N derivacija jednaka nuli za sve vrijednosti t
- ovo je moguće samo onda kada su y_h, i svih N njezinih derivacija, istog oblika
- ovaj zahtjev ispunjava kompleksna eksponencijalna funkcija $e^{st}, s \in \mathbb{C}$, jer vrijedi

$$D^k e^{st} = \frac{d^k}{dt^k} e^{st} = s^k e^{st}$$

Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- rješenje homogene jednadžbe pretpostavljamo u obliku

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = ce^{st}$$

- uvrštenjem u jednadžbu

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_h(t) = 0$$

- slijedi

$$(s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N) ce^{st} = 0$$

- za netrivijalno rješenje jednadžbe, $y_h(t) = ce^{st} \neq 0$, mora biti

$$s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- jednadžba

$$s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$$

  ima N rješenja

- homogena jednadžba ima isto N rješenja, $c_1 e^{s_1 t}$, $c_2 e^{s_2 t}$, $\ldots$,$c_N e^{s_N t}$, pa je rješenje homogene jednadžbe linearna kombinacija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

Karakteristični polinom, karakteristične frekvencije

- polinom $s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1}s + a_N$ nazivamo karakterističnim polinomom sustava
- jednadžbu $s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1}s + a_N = 0$ nazivamo karakterističnom jednadžbom sustava
- korijeni karakteristične jednadžbe $s_1, s_2, \ldots, s_N$ nazivaju se karakteristične vrijednosti, ili karakteristične frekvencije, ili vlastite frekvencije, ili vlastite vrijednosti
- karakteristične frekvencije mogu biti realne ili kompleksne, te jednostruke ili višestruke
- kompleksne karakteristične frekvencije dolaze u konjugiranim parovima što je posljedica realnih koeficijenata karakterističnog polinoma

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za višestruke karakteristične vrijednosti

- za karakteristični korijen s_1, višestrukosti m, karakteristična jednadžba, u faktoriziranom obliku, je

$$(s - s_1)^m (s - s_{m+1})(s - s_{m+2}) \cdots (s - s_N) = 0$$

- rješenje homogene jednadžbe je tada

$$\forall t \in \mathbb{R},$$
$$y_h(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots + c_m t^{m-1}) e^{s_1 t} + \\ + c_{m+1} e^{s_{m+1} t} + c_{m+2} e^{s_{m+2} t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave kompleksni korijeni dolaze u konjugirano kompleksnim parovima
- u određivanju homogenog rješenja diferencijalne jednadžbe, konjugirane kompleksne korijene možemo koristiti na isti način kao i realne
- činjenica da su parovi kompleksnih korijena s i s^* konjugirani može biti iskorištena za alternativni prikaz
- tako je za,

$$s = \alpha + j\beta \quad \text{i} \quad s^* = \alpha - j\beta$$

- rješenje homogene jednadžbe

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t}$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave je y_h realna funkcija, pa konstante c_1 i c_2 moraju biti konjugirane

$$c_1 = \frac{c}{2}e^{j\theta} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{c}{2}e^{-j\theta}$$

- što rezultira u

$$y_h(t) = \frac{c}{2}e^{j\theta}e^{(\alpha+j\beta)t} + \frac{c}{2}e^{-j\theta}e^{(\alpha-j\beta)t} = \frac{c}{2}e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta)} + e^{-j(\beta t+\theta)}\right]$$

- odnosno, finalno,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

Određivanje konstanti u rješenju homogene diferencijalne jednadžbe

- nepoznate konstante $c_1, c_2, \ldots, c_N$, u rješenju homogene diferencijalne jednadžbe, određujemo iz
  - početnih uvjeta kada određujemo odziv nepobuđenog sustava
  - iz početnih uvjeta i totalnog rješenja kada određujemo totalni odziv
- početni uvjeti nose informaciju o y i njezinih $N-1$ derivacija u početnom trenutku, najčešće je to, $t = 0$
- za fizikalne sustave, početne uvjete treba odrediti iz odgovarajućih početnih stanja sustava

Početni uvjeti

Početni uvjeti

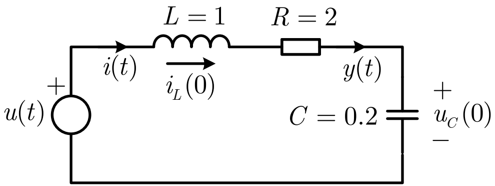
- potrebno je detaljnije razmotriti ulogu početnih uvjeta u određivanju odziva sustava
- preciziraju se početni uvjeti neposredno prije $t = 0$, tj. neposredno prije djelovanja pobude, kao početni uvjeti u $t = 0^-$, te početni uvjeti neposredno nakon početka djelovanja pobude, kao početni uvjeti u $t = 0^+$
- za očekivati je da se, ovisno o svojstvima sustava i karakteru pobude, početni uvjeti u $t = 0^-$ i u $t = 0^+$ mogu razlikovati
- za slučaj nepobuđenog sustava[2] početni su uvjeti za $t = 0^-$ i $t = 0^+$ identični dakle vrijedi

$$y_0(0^-) = y_0(0^+); \quad y_0'(0^-) = y_0'(0^+); \quad y_0''(0^-) = y_0''(0^+); \quad \ldots$$

[2] odziv nepobuđenog sustava označavamo kao $y_0(t)$

Primjer određivanja početnih uvjeta 1

- za prije razmotren RLC krug, na slici

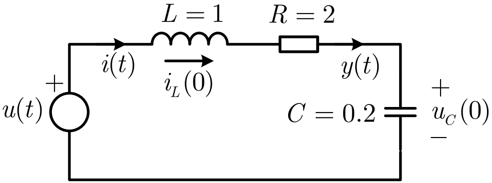


- diferencijalna jednadžba koja opisuje ovaj krug, za $y = i$, je

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du}{dt}$$

- treba odrediti početne uvjete, $y(0)$ i $y'(0)$, potrebne u izračunu odziva na pobudu jediničnim skokom, $u = \mu$, i uz početna stanja, $i_L(0) = i(0) = 0$, i $u_c(0) = 2$

Primjer određivanja početnih uvjeta 2

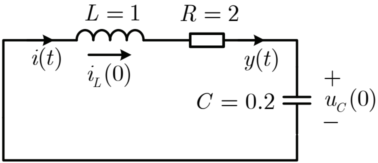


- u cilju određivanja $y'(0)$, koristimo jednadžbu Kirchhoffovog zakona napona za petlju

$$L\frac{dy(t)}{dt} + Ry(t) + u_C(t) = u(t)$$

Primjer određivanja početnih uvjeta 3

- prvo određujemo početne uvjete za slučaj nepobuđenog sustava
- $y_0(0)$ i $y_0'(0)$ određujemo iz $i_L(0) = 0$ i $u_c(0) = 2$
- za nepobuđeni sustav vrijedi $y_0(0^-) = y_0(0^+) = y(0)$ i $y_0'(0^-) = y_0'(0^+) = y_0'(0)$
- sa slike je očigledno da je $y_0(0) = i(0) = i_L(0) = 0$
- potrebno je odrediti $y_0'(0)$



- vrijedi

$$\underbrace{L}_{1}\frac{dy_0(t)}{dt} + \underbrace{R}_{2}y_0(t) + u_C(t) = 0$$

za $t = 0$

$$y_0'(0) + 2\underbrace{y_0(0)}_{0} + \underbrace{u_C(0)}_{2} = 0$$

$$y_0'(0) = -2$$

Primjer određivanja početnih uvjeta 4

- određuju se i početni uvjeti u $t = 0^-$ i $t = 0^+$, za slučaj određivanja odziva pobuđenog sustava, za $t \geq 0$
- uspoređuju se $y(0^-)$ i $y'(0^-)$ s $y(0^+)$ i $y'(0^+)$
- njihova se usporedba provodi uvidom u jednadžbu petlje

$$\underbrace{L}_{1} \frac{dy(t)}{dt} + \underbrace{R}_{2} y(t) + u_C(t) = u(t)$$

za $t = 0^-$ i $t = 0^+$

$$y'(0^-) + 2y(0^-) + u_C(0^-) = u(0^-) = \mu(0^-) = 0$$
$$y'(0^+) + 2y(0^+) + u_C(0^+) = u(0^+) = \mu(0^+) = 1$$

Primjer određivanja početnih uvjeta 5

- kako se struja induktiviteta i napon na kapacitetu ne mogu promijeniti[3] u intervalu od $t = 0^-$ do $t = 0^+$ vrijedi $y(0^-) = y(0^+) = 0$ i $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 2$
- uvrštenjem ovih vrijednosti u prethodne dvije jednadžbe slijedi

$$y(0^-) = 0, \qquad y'(0^-) = -2$$

odnosno

$$y(0^+) = 0, \qquad y'(0^+) = -1$$

- dani primjer ukazuje na potreban postupak u definiranju i određivanju početnih uvjeta
- u nastavku se razmatra postupak određivanja početnih uvjeta u $t = 0^+$ za opći sustav drugog reda te, na kraju, za sustav N–tog reda

[3] osim u slučaju impulsne pobude, a taj će slučaj biti kasnije diskutiran

Određivanja početnih uvjeta – opći sustav drugog reda

- sustav je opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t) \quad (8)$$

- neka je pobuda kauzalna pa vrijedi $u^{(i)}(0^-) = 0$ i neka pobuda ne sadrži Diracov jedinični impuls[4]
- neka su poznati $y^{(i)}(0^-) \neq 0$, a treba odrediti $y(0^+)$ i $y'(0^+)$
- integriramo jednadžbu (8) u intervalu $t = 0^-$ do t

$$y'(t) - y'(0^-) + a_1 y(t) - a_1 y(0^-) + a_2 \int_{0^-}^{t} y(\tau) d\tau =$$

$$= b_0 u'(t) + b_1 u(t) + b_2 \int_{0^-}^{t} u(\tau) d\tau \quad (9)$$

[4] slučaj kada pobuda sadrži Diracov impuls biti će razmatran kod određivanj impulsnog odziva

Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- još jednom integracijom, jednadžbe (9), slijedi

$$\int_{0^-}^{t} y'(\tau)d\tau - y'(0^-)\int_{0^-}^{t} d\tau + a_1\int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau - a_1 y(0^-)\int_{0^-}^{t} d\tau +$$

$$+a_2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda)d\lambda d\tau = b_0\int_{0^-}^{t} u'(\tau)d\tau + b_1\int_{0^-}^{t} u(\tau)d\tau +$$

$$+b_2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} u(\lambda)d\lambda d\tau$$

Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- za $t = 0^+$ slijedi

$$y(0^+)-y(0^-)-y'(0^-)\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} d\tau}_{0}+a_1\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau}_{0}-a_1y(0^-)\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} d\tau}_{0}$$

$$+a_2\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda)d\lambda d\tau}_{0} = b_0u(0^+) + b_1\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} u(\tau)d\tau}_{0} +$$

$$+b_2\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} u(\lambda)d\lambda d\tau}_{0} \quad \Rightarrow$$

$$y(0^+) - y(0^-) = b_0u(0^+) \tag{10}$$

- rješenje jednadžbe (10) daje $y(0^+)$

Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- iz jednadžbe (9),

$$y'(t) - y'(0^-) + a_1 y(t) - a_1 y(0^-) + a_2 \int_{0^-}^{t} y(\tau) d\tau =$$

$$= b_0 u'(t) + b_1 u(t) + b_2 \int_{0^-}^{t} u(\tau) d\tau$$

za $t = 0^+$ slijedi

$$y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+) \tag{11}$$

- rješenje jednadžbe (11), uz u (10) izračunat $y(0^+)$, daje $y'(0^+)$

Određivanja početnih uvjeta – opći sustav N–tog reda

- za sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$
\begin{aligned}
y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \ldots + a_{N-1} y' + a_N y(t) = \\
= b_0 u^{(N)} + b_1 u^{(N-1)} + \ldots + b_{N-1} u' + b_N u(t)
\end{aligned}
$$

- potrebno je odrediti $y(0^+), y'(0^+), y''(0^+), \ldots, y^{(N-1)}(0^+)$
- istim postupkom, dakle višestrukim integriranjem, kao u slučaju sustava drugog reda, nalazimo N jednadžbi iz kojih određujemo tražene $y(0^+), y'(0^+), y''(0^+), \ldots, y^{(N-1)}(0^+)$

$$
\begin{aligned}
& y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+) \\
& y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+) \\
& y''(0^+) - y''(0^-) + a_1 y'(0^+) - a_1 y'(0^-) + a_2 y(0^+) - a_2 y(0^-) \\
& \qquad = b_0 u''(0^+) + b_1 u'(0^+) + b_2 u(0^+) \\
& \qquad \vdots \\
& y^{(N-1)}(0^+) - y^{(N-1)}(0^-) + a_1 y^{(N-2)}(0^+) - a_1 y^{(N-2)}(0^-) + \ldots \\
& \qquad \ldots + a_{N-2} y'(0^+) - a_{N-2} y'(0^-) + a_{N-1} y(0^+) - a_{N-1} y(0^-) = \\
& \qquad = b_0 u^{(N-1)}(0^+) + b_1 u^{(N-2)}(0^+) + \ldots + b_{N-2} u'(0^+) + b_{N-1} u(0^+)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Partikularno rješenje

Partikularno rješenje

- za sustav opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom potrebno je odrediti i partikularno rješenje
- određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrange-ova metoda varijacije parametara
  - Metoda neodređenog koeficijenta
- metoda neodređenih koeficijenata je ograničena samo na diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, te na funkcije koje se mogu svesti na polinome i eksponencijalne funkcije
- veliki broj pobuda se prikazuje polinomima i eksponencijalnim funkcijama i to je razlog široke uporabe ove metode

Određivanje partikularnog rješenja metodom neodređenih koeficijenata

- za pobudu polinomom oblika

$$u(t) = A_0 + A_1 t + \ldots + A_M t^M$$

- partikularno je rješenje u obliku polinoma M-tog stupnja

$$y_p(t) = K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M$$

- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

Određivanje partikularnog rješenja metodom neodređenih koeficijenata

- slično vrijedi i za pobude

pobuda $u(t)$	partikularno rješenje $y_p(t)$
A (konstanta)	K
$Ae^{\zeta t}, \quad \zeta \neq s_i (i = 1, 2, \ldots, N)$	$Ke^{\zeta t}$
$Ae^{\zeta t}, \quad \zeta = s_i$	$Kte^{\zeta t}$
At^M	$K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M$
$e^{\zeta t} t^M$	$e^{\zeta t}(K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M)$
$Acos(\Omega_0 t)$	$K_1 cos(\Omega_0 t) + K_2 sin(\Omega_0 t)$
$Asin(\Omega_0 t)$	$K_1 cos(\Omega_0 t) + K_2 sin(\Omega_0 t)$
$Acos(\Omega_0 t + \theta)$	$Kcos(\Omega_0 t + \theta)$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- razmatra se primjer vremenski kontinuiranog sustava opisanog s diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = u(t) \tag{13}$$

- neka je sustav pobuđen pobudom $u(t) = 5\mu(t)$ i neka su $y(0^-) = -1$ i $\dot{y}(0^-) = -1$
- prvo određujemo rješenje homogene jednadžbe

$$(D^2 + 2D + 5)y_h = 0$$

- pa su karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$s^2 + 2s + 5 = 0 \qquad \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j2$$

- a rješenje homogene jednadžbe je

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = c_1 e^{(-1+j2)t} + c_2 e^{(-1-j2)t}$$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- kako je pobuda konstantna i partikularno rješenje pretpostavljamo kao konstantu $y_p(t) = K$
- uvrštenjem u polaznu jednadžbu, i za $\ddot{y}_p(t) = \dot{y}_p(t) = 0$ slijedi

$$5K = 5 \quad \Rightarrow \quad K = 1 \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = 1$$

- totalni odziv $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$$y(t) = c_1 e^{(-1+j2)t} + c_2 e^{(-1-j2)t} + 1$$

- konstante se c_1 i c_2 određuju iz početnih uvjeta $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$
- iz jednadžbi (10) i (11), uz $b_0 = b_1 = 0$, za ovaj primjer, slijedi

$$y(0^+) = y(0^-) = -1 \quad \text{i} \quad \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = -1$$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- iz

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + 1$$
$$\dot{y}(t) = s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t}$$

slijedi za $t = 0^+$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = c_1 + c_2 + 1 \\ -1 = s_1 c_1 + s_2 c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -1 + j0.75 \\ c_2 = -1 - j0.75 \end{array}\right.$$

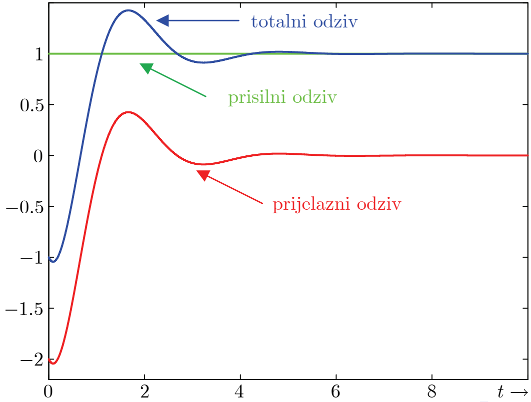
- konačno, totalni odziv je

$$\begin{aligned} y(t) &= (-1 + j0.75)e^{(-1+j2)t} + (-1 - j0.75)e^{(-1-j2)t} + 1 \\ &= -e^{-t}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right) + j0.75e^{-t}\left(e^{j2t} - e^{-j2t}\right) + 1 \end{aligned}$$

$$y(t) = \underbrace{-2e^{-t}\cos(2t) - 1.5e^{-t}\sin(2t)}_{\substack{\text{prirodni ili} \\ \text{prijelazni odziv} \\ \text{(vlastite frekvencije)}}} + \underbrace{1,}_{\substack{\text{prisilni} \\ \text{odziv} \\ \text{(frekvencija pobude)}}} \qquad t \geq 0 \qquad (14)$$

Prirodni i prisilni odziv sustava

- u totalnom odzivu prepoznaju se dvije komponente
  - prirodni ili prijelazni odziv – titra s karakterističnim frekvencijama i postoji zbog nesklada početnog i stacionarnog stanja
  - prisilni odziv – titra s frekvencijom pobude



Odziv linearnog vremenski diskretnog sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i odziva mirnog sustava

- u interpretaciji inkrementalno linearnih sustava u Cjelini 8 pokazano je da se odziv sustava može interpretirati kao

totalni odziv = odziv nepobuđenog sustava+odziv mirnog sustava

odnosno

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

- odziv nepobuđenog sustava, $y_0(t)$, je komponenta totalnog odziva koja je posljedica samo djelovanja početnih uvjeta (uz pobudu jednaku nula)
- odziv mirnog sustava, $y_m(t)$, je komponenta odziva koja je posljedica djelovanja pobude uz početne uvjete jednake nuli

Odziv linearnog vremenski kontinuiranog *SISO* sustava

- za nepobuđeni vremenski kontinuiran sustav N-tog reda, opisan s diferencijalnom jednadžbom N-tog reda, odziv $y_0(t)$ je jednak rješenju homogene diferencijalne jednadžbe $y_h(t)$, pa je

$$y_0(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

- koeficijente $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz N početnih uvjeta $y(0^-), y'(0^-), \ldots, y^{(N-1)}(0^-)$

Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije

Odziv nepobuđenog kontinuiranog sustava

- nepobuđeni sustav titra eksponencijalama čije su frekvencije vlastite frekvencije sustava, pa je za pojedinu vlastitu frekvenciju s_i, komponenta nepobuđenog odziva $e^{s_i t}$
- neka je u općem slučaju $s \in \mathbb{C}$, pri čemu dolazi u konjugirano kompleksnim parovima, pa je komponenta odziva nepobuđenog sustava oblika $e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t}$
- za različite α, slijedi:

$$\begin{array}{lll} \alpha < 0 & e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to 0 & \text{za } t \to \infty \\ \alpha > 0 & e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to \infty & \text{za } t \to \infty \\ \alpha = 0 & \left| e^{\pm j\beta t} \right| = 1 & \text{za } \forall t \end{array}$$

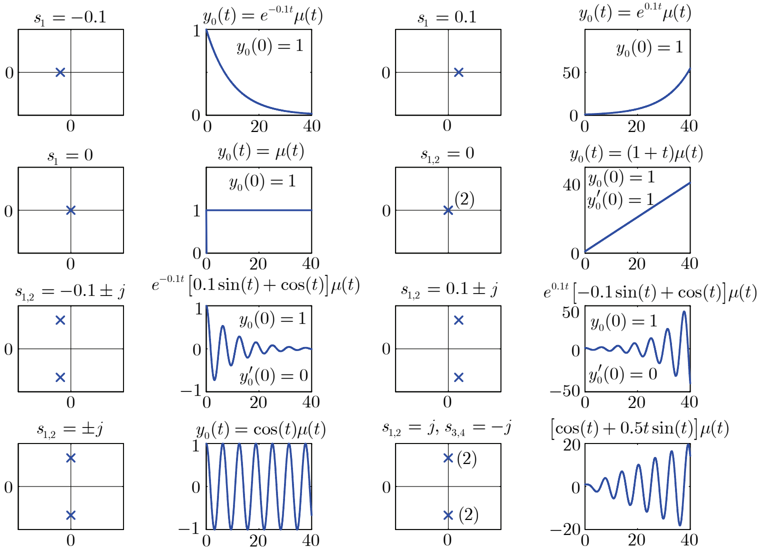
Odziv nepobuđenog kontinuiranog sustava

- za sustav s višestrukim vlastitim frekvencijama, $s = \alpha \pm j\beta$, višestrukosti m, nepobuđeni sustav titra eksponencijalama oblika $t^i e^{st}, i = 1, 2, \ldots, m-1$
- za različite $\alpha = Re\{s\}$, slijedi:

$$\begin{array}{lll} \alpha < 0 & t^i e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to 0 & \text{za } t \to \infty \\ \alpha \geq 0 & t^i e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to \infty & \text{za } t \to \infty \end{array}$$

- slijede primjeri koji ilustriraju odziv nepobuđenog sustava za razne vrijednosti s

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava i vlastite frekvencije



Stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- za miran i nepobuđen vremenski stalni linearni sustav svi su $y(t)$, $y'(t), \ldots$ jednaki nuli i kažemo da se sustav nalazi u ravnotežnom stanju jednakom nuli
- pod stabilnošću sustava podrazumijevamo njegovo svojstvo da se nakon prestanka djelovanja pobude vraća u ravnotežno stanje u kojem ostaje neodređeno dugo
- dakle, nakon prestanka djelovanja pobude, stanje sustava u kojem se on tog trenutka nalazi, predstavlja početno stanje, različito od nule, koje definira početne uvjete $y(0)$, $y'(0), \ldots$ različite od nule
- stabilni sustavi se iz tih početnih uvjeta vraćaju u ravnotežno stanje jednako nuli

Stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- poznavanje odziva nepobuđenog sustava ukazuje na unutarnju stabilnost vremenski kontinuiranog linearnog sustava, pa vrijedi definicija
- vremenski kontinuirani nepobuđeni sustav je stabilan ako je njegov odziv omeđen, dakle,

$$|y_0(t)| < M = konst. < \infty, \forall t \in \mathbb{R} \tag{15}$$

- sustavi za koje vrijedi (15) nazivaju se i marginalno (rubno) stabilni
- sustav je asimptotski stabilan ako vrijedi (15) i ako

$$\lim_{t\to\infty}\{y_0(t)\} \to 0 \tag{16}$$

- sustavi koji nisu ni asimptotski ni rubno stabilni su nestabilni sustavi, za njih vrijedi

$$\lim_{t\to\infty}\{y_0(t)\} \to \infty \tag{17}$$

Unutarnja stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- o unutarnjoj stabilnosti sustava zaključuje se iz vrijednosti karakterističnih ili vlastitih frekvencija
- kauzalni kontinuirani linearni vremenski stalni sustav, s jednostrukim karakterističnim frekvencijama, je
  - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
  - stabilan (marginalno stabilan) ako je $Re\{s_i\} \leq 0, \forall i$
  - nestabilan ako postoji karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} > 0$
- kauzalni kontinuirani linearni vremenski stalni sustav, s višestrukim karakterističnim frekvencijama, je
  - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
  - marginalno stabilan ako je za sve višestruke karakteristične frekvencije $Re\{s_i\} < 0$, i za sve različite karakteristične frekvencije $Re\{s_i\} \leq 0$
  - nestabilan ako postoji karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} > 0$, ili postoji višestruka karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} \geq 0$

Odziv nepobuđenog asimptotski stabilnog sustava

- za stabilni nepobuđeni sustav, odziv je posljedica postojanja početnih uvjeta, različitih od nule, dakle, posljedica nesklada početnog stanja i ravnotežnog stanja
- drugim riječima sustav se u prijelazu (prevladavanju nesklada) iz početnog stanja u ravnotežno stanje odziva titranjem s vlastitim frekvencijama
- ilustrirajmo ovu činjenicu na primjeru već prije korištenog sustava opisanog s

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = 0$$

uz $y(0^-) = -1$ i $\dot{y}(0^-) = -1$

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- razmatra se nepobuđeni vremenski kontinuiran sustav čija je diferencijalna jednadžba

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = 0 \tag{18}$$

  a početni uvjeti su $y(0^-) = -1$ i $\dot{y}(0^-) = -1$
- odziv nepobuđenog sustava jednak je rješenju homogene diferencijalne jednadžbe za zadane početne uvjete $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$
- rješenje gornje homogene diferencijalne jednadžbe već je prije određeno, pa je odziv nepobuđenog sustava, za $t \geq 0$,

$$y_0(t) = c_{01}e^{s_1 t} + c_{02}e^{s_2 t} = c_{01}e^{(-1+j2)t} + c_{02}e^{(-1-j2)t}$$

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- konstante c_{01} i c_{02} određujemo iz početnih vrijednosti $y(0^-) = -1$ i $\dot{y}(0^-) = -1$, pa iz

$$\begin{aligned} y_0(t) &= c_{01} e^{s_1 t} + c_{02} e^{s_2 t} \\ \dot{y}_0(t) &= s_1 c_{01} e^{s_1 t} + s_2 c_{02} e^{s_2 t} \end{aligned}$$

slijedi za $t = 0^-$

$$\begin{aligned} -1 &= c_{01} + c_{02} \\ -1 &= s_1 c_{01} + s_2 c_{02} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -1 &= c_{01} + c_{02} \\ -1 &= (-1 + j2) c_{01} + (-1 - j2) c_{02} \end{aligned}$$

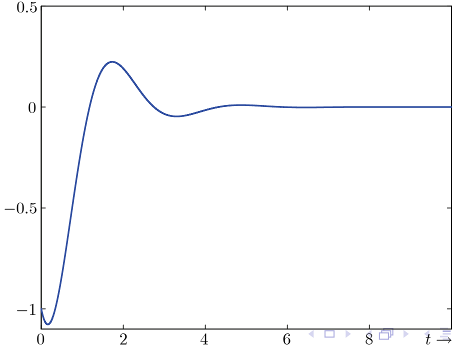
pa su

$$\begin{aligned} c_{01} &= -0.5 + j0.5 \\ c_{02} &= -0.5 - j0.5 \end{aligned}$$

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- odziv nepobuđenog sustava je, za $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} y_0(t) &= (-0.5 + j0.5)e^{(-1+j2)t} + (-0.5 - j0.5)e^{(-1-j2)t} \\ &= -0.5e^{-t}(e^{j2t} + e^{-j2t}) - j0.5e^{-t}(e^{j2t} - e^{-j2t}) \\ &= -e^{-t}cos(2t) - e^{-t}sin(2t), \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$



Odziv mirnog sustava

Odziv pobuđenog sustava

- kako je kazano, totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava,

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{0i} e^{s_i t} + odziv\ mirnog\ sustava, \quad t \geq 0$$

- odziv mirnog sustava, $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = y^{(N-1)}(0^-) = 0$, na bilo koju pobudu možemo odrediti
  - klasičnim rješavanjem diferencijalne jednadžbe
  - korištenjem konvolucijskog integrala

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- nastavlja se razmatranje sustava opisanog s diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = u(t) \tag{20}$$

  i sustav je pobuđen pobudom $u(t) = 5\mu(t)$ ali, budući ovdje razmatramo odziv mirnog sustava, početni uvjeti su $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$
- odziv ovog mirnog sustava rješavamo klasičnim postupkom izračunavajući rješenje homogene jednadžbe i partikularno rješenje
- rješenje homogene jednadžbe je prije određeno kao

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = c_1 e^{(-1+j2)t} + c_2 e^{(-1-j2t)},$$

  a partikularno rješenje kao: $\quad y_p = 1$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- odziv mirnog sustava je zato

$$y_m(t) = c_{m1}e^{(-1+j2)t} + c_{m2}e^{(-1-j2)t} + 1$$

- konstante c_{m1} i c_{m2} se određuju iz početnih uvjeta $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$
- iz jednadžbi (10) i (11), uz $b_0 = b_1 = 0$, za ovaj primjer, slijedi

$$y(0^+) = y(0^-) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = 0$$

- iz

$$\begin{aligned} y_m(t) &= c_{m1}e^{s_1 t} + c_{m2}e^{s_2 t} + 1 \\ \dot{y}_m(t) &= s_1 c_{m1}e^{s_1 t} + s_2 c_{m2}e^{s_2 t} \end{aligned}$$

slijedi za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_{m1} + c_{m2} + 1 \\ 0 &= s_1 c_{m1} + s_2 c_{m2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_{m1} &= -0.5 + j0.25 \\ c_{m2} &= -0.5 + j0.25 \end{aligned}\right.$$

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- konačno, odziv mirnog sustava je

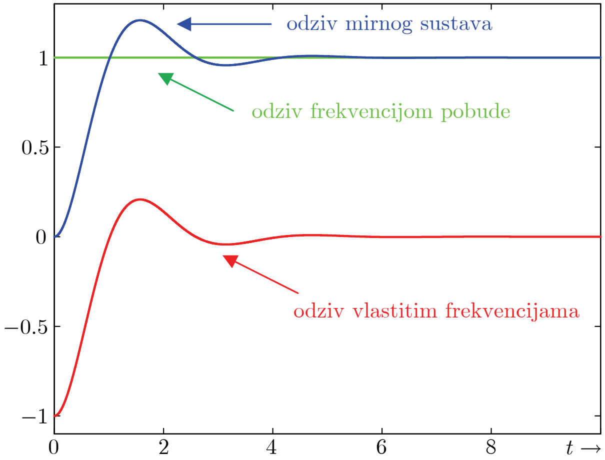
$$\begin{aligned} y_m(t) &= (-0.5 + j0.25)e^{(-1+j2)t} + (-0.5 - j0.25)e^{(-1-j2)t} + 1 \\ &= -0.5e^{-t}(e^{j2t} + e^{-j2t}) - j0.25e^{-t}(e^{j2t} - e^{-j2t}) + 1 \\ &= -e^{-t}cos(2t) - 0.5e^{-t}sin(2t) + 1, \qquad t \geq 0 \qquad (21) \end{aligned}$$

- odziv mirnog sustava čini titranje s vlastitim frekvencijama i titranje s frekvencijom pobude
- titranje s vlastitim frekvencijama postoji unatoč činjenici da je sustav bio miran, $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$, a posljedica je nesklada početnih uvjeta i stacionarnog[5] stanja u koje pobuda prevodi sustav

[5] za pobude konstantne amplitude, kao i za periodične pobude, partikularno rješenje je istog oblika i često se zove stacionarno stanje

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- odziv, mirnog sustava,
  $y_m(t) = -e^{-t}cos(2t) - 0.5e^{-t}sin(2t) + 1 \quad \forall t \geq 0$



Totalni odziv sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- uz prije izračunati odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(t) = -e^{-t}cos(2t) - e^{-t}sin(2t) \quad \forall t \geq 0$$

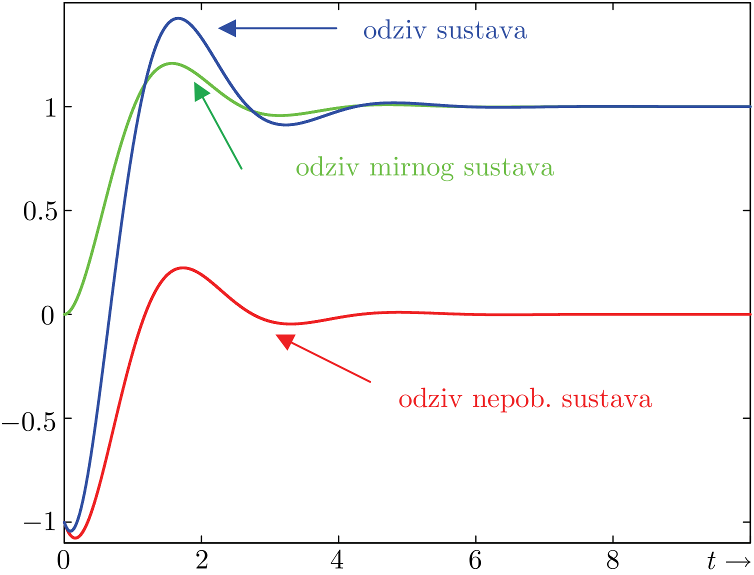
totalni odziv[6] je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= [-e^{-t}cos(2t) - e^{-t}sin(2t)] \\ &\quad + [-e^{-t}cos(2t) - 0.5e^{-t}sin(2t) + 1] \\ &= -2e^{-t}cos(2t) - 1.5e^{-t}sin(2t) + 1, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

[6] Rezultira u identičnom izrazu kao i u izrazu 14, izračunatom klasičnim postupkom

Odziv vremenski kontinuiranog sustava



Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala

- totalni odziv se može prikazati kao zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

- odziv nepobuđenog sustava jednak je rješenju homogene jednadžbe čije se konstante određuju iz zadanih početnih uvjeta u $t = 0^-$
- odziv mirnog sustava, dakle sustava čiji su svi početni uvjeti jednaki nuli za $t = 0^-$, možemo izračunati i kao

$$y_m(t) = u(t) * h(t) = \int_{0^-}^{t} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

- problem izračuna konvolucijskog integrala detaljno je razmatran u Cjelini 9, a ovdje razmatramo način izračuna impulsnog odziva vremenski kontinuiranih sustava

Izračun impulsnog odziva

Impulsni odziv

- ovdje se detaljno razmatra problem izračunavanja impulsnog odziva za linearne vremenski stalne kontinuirane sustave opisane diferencijalnom jednadžbom ($N \geq M$)

$$\underbrace{\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N\right)}_{A(D)} y(t) =$$
$$= \underbrace{\left(b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N\right)}_{B(D)} u(t) \tag{22}$$

odnosno

$$A(D)y(t) = B(D)u(t)$$

- impulsni odziv $y(t) = h(t)$, sustava (22), je odziv sustava na pobudu $u(t) = \delta(t)$, u $t = 0$, za sve početne uvjete $h(0^-) = h'(0^-) = h''(0^-) = \ldots = h^{(N-1)}(0^-) = 0$

Impulsni odziv

- za $u(t) = \delta(t)$, sustav (22) možemo, za $t \geq 0^+$, razmatrati kao nepobuđeni sustav, a odziv tog sustava tretirati kao posljedicu početnih uvjeta u $t = 0^+$ koji su nastali djelovanjem impulsne pobude u $t = 0$
- sustav je, za $t \geq 0^+$, opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom

  $$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h(t) = 0 \Leftrightarrow A(D)h(t) = 0$$

  za čije je rješenje potrebno odrediti početne uvjete $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$
- impulsni odziv će za $t \geq 0^+$ biti oblika[7]

$$h(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}, \qquad t \geq 0^+$$

[7] ovdje su pretpostavljene jednostruke karakteristične frekvencije

Impulsni odziv

- postavlja se pitanje što se događa s impulsnim odzivom u $t = 0$, dakle, u trenutku djelovanja pobude $u(t) = \delta(t)$,
- u trenutku $t = 0$, jedino što se može pojaviti je impuls[8], pa je kompletni impulsni odziv $h(t)$

$$h(t) = A_0\delta(t) + \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t),$$

- odredimo A_0
- impulsni odziv je odziv sustava (22) za pobudu $u(t) = \delta(t)$, pa vrijedi

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N)h(t) =$$
$$= (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N)\delta(t) \tag{23}$$

[8] vidi naredni blokovski dijagram

Impulsni odziv

- uvrštenjem $h(t) = A_0\delta(t) + \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t)$ u prethodnu jednadžbu (23) i usporedbom koeficijenata uz odgovarajuće impulsne članove na obje strane proizlazi[9]

$$
\begin{aligned}
A_0 &= b_0 \qquad && \text{za } N = M \\
A_0 &= 0 \qquad && \text{za } N > M
\end{aligned}
$$

- impulsni odziv $h(t)$ je prema tome

$$
h(t) = \begin{cases} b_0\delta(t) + \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t) & \text{za } N = M \\ \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t) & \text{za } N > M \end{cases}
$$

- potrebno je odrediti $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$ kako bi se izračunalo N konstanti c_j,

[9] N puta deriviranjem $h(t)$, javlja se član $A_0\delta^{(N)}$, pa se očekuje da i na desno strani bude član s $\delta^{(N)}$ a takav će postojati samo kada je $N = M$. Ova činjenic evidentna je i na blokovskom dijagramu

Impulsni odziv

- izračun početnih uvjeta $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$ često je nespretan i kompliciran
- pristupa se jednostavnijem postupku određivanja impulsnog odziva koji se temelji na prikazu sustava direktnom realizacijom II pri čemu diferencijalnu jednadžbu $A(D)y(t) = B(D)u(t)$ razlažemo na dvije jednadžbe (razlaganje razmatramo na primjeru sustava za koji je $N = M$)

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_a(t) = u(t)$$

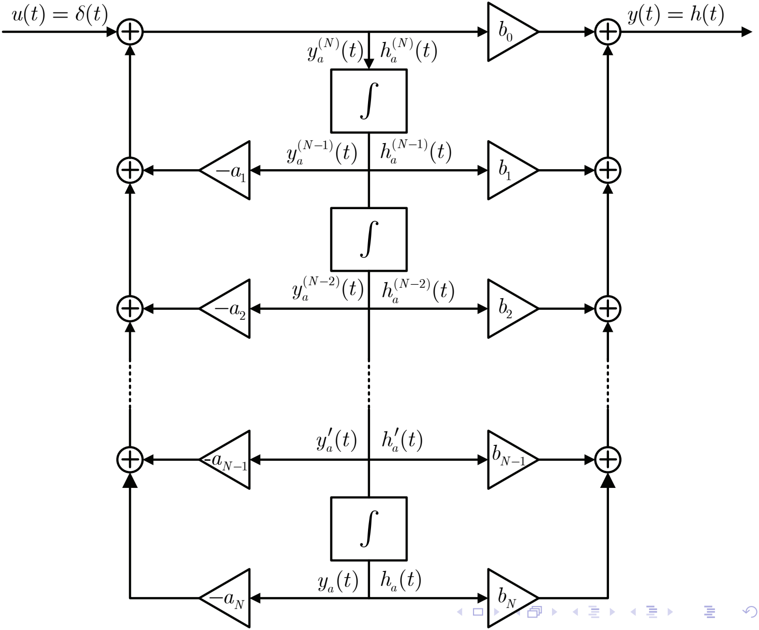
$$y(t) = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) y_a(t)$$

odnosno

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h_a(t) = \delta(t) \tag{24}$$

$$h(t) = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) h_a(t) \tag{25}$$

Impulsni odziv



Impulsni odziv

- impulsni odziv izračunavamo u dva koraka, prvo jednadžbu (24), a zatim (25)
- jednadžba (24)

$$h_a^{(N)}(t) + a_1 h_a^{(N-1)}(t) + a_2 h_a^{(N-2)}(t) + \ldots \\ + a_{N-1} h_a'(t) + a_N h_a(t) = \delta(t)$$

- za $t > 0$ jednadžba postaje homogena i konstante c_m njezinog rješenja

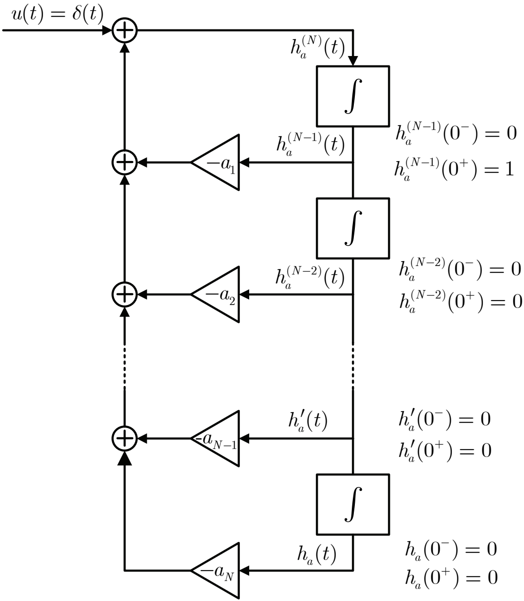
$$h_a(t) = \sum_{m=1}^{N} c_m e^{s_m t}, \quad t > 0$$

određujemo pomoću $h_a^{(N-1)}(0^+)$, $h_a^{(N-2)}(0^+)$, $\ldots$, $h_a'(0^+)$, i $h_a(0^+)$

Impulsni odziv

- određivanje početnih uvjeta $h_a^{(N-1)}(0^+)$, $h_a^{(N-2)}(0^+)$, $\ldots$, $h_a'(0^+)$, i $h_a(0^+)$ možemo provesti izravnim uvidom u blokovski dijagram (prethodni i naredni)
- sustav je miran pa su $h_a^{(N-1)}(0^-) = h_a^{(N-2)}(0^-) = \ldots = h_a'(0^-) = h_a(0^-)$
- dovođenjem $\delta(t)$ na ulaz sustava ovaj impuls prolazi izravno na izlaz $y(t) = h(t)$ (ako je $b_0 \neq 0$) i trenutno mijenja samo izlaz iz prvog integratora, pa je zato $h_a^{(N-1)}(0^+) = 1$
- izlazi ostalih integratora se u $t = 0^+$ ne mijenjanju pa su svi
$$h_a^{(m)}(0^+) = h_a^{(m)}(0^-) = 0, \qquad \forall m \leq N-2$$

Impulsni odziv



Impulsni odziv

- poznavanjem $h_a^{(N-1)}(0^+)$, $h_a^{(N-2)}(0^+)$, ..., $h'_a(0^+)$, i $h_a(0^+)$ određujemo sve konstante u

$$h_a(t) = \sum_{m=1}^{N} c_m e^{s_m t}, \quad t > 0$$

- impulsni odziv cjelokupnog sustava izračunavamo iz jednadžbe (25)

$$h(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{M}(b_{N-m}D^m)h_A(t), & t \geq 0, \quad M < N \\ b_0\delta(t) + \sum_{m=0}^{M}(b_{N-m}D^m)h_A(t), & t \geq 0, \quad M = N \end{cases} \tag{26}$$

Izračun impulsnog odziva - primjer

Impulsni odziv – primjer 1

- određuje se impulsni odziv sustava

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u''(t) + u'(t) + u(t)$$

- impulsni odziv, $h(t)$, je odziv sustava na $u(t) = \delta(t)$ uz $h(0^-) = h'(0^-) = 0$
- impulsni odziv zadovoljava početnu jednadžbu

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = \delta''(t) + \delta'(t) + \delta(t)$$

- kako je $N = M = 2$ i $b_0 = 1$ slijedi iz jednadžbe (26)

$$h(t) = \delta(t) + h_A''(t) + h_A'(t) + h_A(t)$$

gdje je $h_A(t)$ rješenje jednadžbe

$$h_A''(t)+2h_A'(t)+h_A(t) = \delta(t), \qquad h_A(0^+) = 0, \quad h_A'(0^+) = 1$$

Signali i sustavi
školska godina 2012/2013
Cjelina 11.

Profesor Branko Jeren

Impulsni odziv – primjer 1

- karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije su

$$s^2 + 2s + 1 = 0, \qquad s_1 = s_2 = -1$$

- pa je $h_A(t)$

$$h_A(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz početnih vrijednosti $h_A(0^+) = 0$ i $h'_A(0^+) = 1$, pa iz

$$\begin{aligned} h_A(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} \\ h'_A(t) &= s_1 c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_1 t} + s_1 c_2 t e^{s_1 t} \end{aligned}$$

za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 \\ 1 &= s_1 c_1 + c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

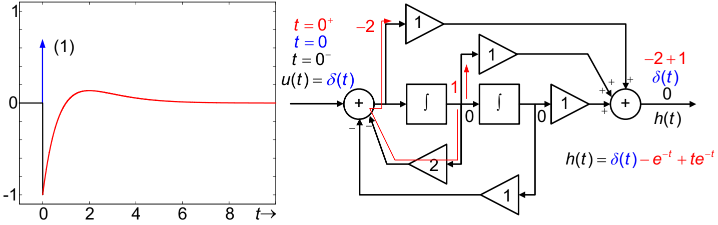
Impulsni odziv – primjer 1

- rješenje za $h_A(t)$ je

$$h_A(t) = te^{-t}$$

- impulsni odziv sustava je, iz

$$\begin{aligned} h(t) &= \delta(t) + h_A''(t) + h_A'(t) + h_A(t) = \\ &= \delta(t) + (-e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}) + (e^{-t} - te^{-t}) + te^{-t} \\ &= \delta(t) - e^{-t} + te^{-t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$



Samostalni rad studenata

Samostalni rad studenata

- slijedi niz primjera koje su priređeni kao dodatak predavanom gradivu
- preporuča se studentima da prouče ove dodatne materijale

Zadatak 1

- određuje se impulsni odziv sustava

$$y''(t) + 0.2y'(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

- impulsni odziv, $h(t)$, je odziv sustava na $u(t) = \delta(t)$ uz $h(0^-) = h'(0^-) = 0$
- za $t \geq 0^+$ odziv sustava je jednak rješenju homogene jednadžbe a kako je $b_0 = b_1 = 0$ slijedi da je $h(t) = h_A(t)$, pa je impulsni odziv

$$h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

- konstante se c_1 i c_2 određuju iz $h(0^+)$ i $h'(0^+)$
- sukladno prije pokazanom vrijedi $h(0^+) = 0$ i $h'(0^+) = 1$

Zadatak 1

- za zadani su sustav karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$s^2 + 0.2s + 0.16 = 0 \quad \Rightarrow s_{1,2} = -0.1 \pm j0.3873,$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz početnih vrijednosti $h(0^+) = 0$ i $h'(0^+) = 1$, pa iz

$$\begin{aligned} h(t) &= c_{01} e^{s_1 t} + c_{02} e^{s_2 t} \\ h'(t) &= s_1 c_{01} e^{s_1 t} + s_2 c_{02} e^{s_2 t} \end{aligned}$$

za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= s_1 c_1 + s_2 c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= -j1.2910 = 1.2910 e^{-j1.5708} \\ c_2 &= +j1.2910 = 1.2910 e^{j1.5708} \end{aligned}$$

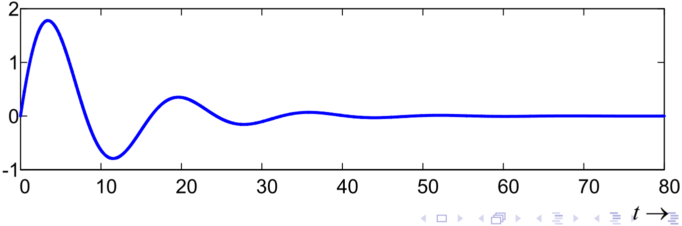
Zadatak 1

- impulsni odziv sustava je

$$h(t) = 1.2910e^{-j1.5708}e^{-0.1t}e^{j0.3873t} + \\ + 1.2910e^{j1.5708}e^{-0.1t}e^{-j0.3873t}$$

odnosno

$$h(t) = 2.582e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 1.5708) = \\ = 2.582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)$$



Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- u uvodnom predavanju pokazano je kako su modeli sustava ovjesa automobila, glazbene vilice ili R-L-C električke mreže, dani diferencijalnom jednadžbom oblika

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_2 u(t)$$

- odnosno

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$$

gdje su ζ – stupanj prigušenja, Ω_n – neprigušena prirodna frekvencija i A konstanta

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- sustav pobuđujemo jediničnim impulsom pa je jednadžba

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2\delta(t)$$

- za $t > 0$ jednadžba postaje homogena jednadžba pa je za $t > 0$ odziv sustava na jedinični impuls jednak rješenju homogene jednadžbe
- vlastite se frekvencije izračunavaju iz karakteristične jednadžbe

$$s^2 + 2\zeta\Omega_n s + \Omega_n^2 = 0$$

i iznose

$$s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ i } s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

pa je homogeno rješenje

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad t > 0$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- zadani početni uvjeti $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ trebaju biti definirani neposredno prije djelovanja pobude koja u ovom slučaju djeluje u $t = 0$ i
- konstante c_1 i c_2 određujemo za $t = 0^+$ pa je potrebno odrediti $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$ uzimajući u obzir $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ i djelovanje pobude
- početne uvjete $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$ formalno nalazimo sljedećim postupkom

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- integriramo dva puta polaznu diferencijalnu jednadžbu[10]

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2\delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{t}\ddot{y}(\tau)d\tau + 2\zeta\Omega_n\int_{0^-}^{t}\dot{y}(\tau)d\tau + \Omega_n^2\int_{0^-}^{t}y(\tau)d\tau = A\Omega_n^2\int_{0^-}^{t}\delta(\tau)d\tau \tag{27}$$

$$\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau}\ddot{y}(\lambda)d\lambda d\tau + 2\zeta\Omega_n\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau}\dot{y}(\lambda)d\lambda d\tau +$$

$$+\Omega_n^2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau}y(\lambda)d\lambda d\tau = A\Omega_n^2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau}\delta(\lambda)d\lambda d\tau \tag{28}$$

[10] jednadžba je oblika $y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_2 u(t)$, pa zbog činjenice d je $b_0 = 0$ u odzivu $y(t)$ se ne može pojaviti $\delta(t)$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $t = 0^+$ jednadžba (27) prelazi u

$$\dot{y}(0^+) - \dot{y}(0^-) + 2\zeta\Omega_n[y(0^+) - y(0^-)] + \Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau}_{=0} =$$

$$= A\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau}_{=1} \tag{29}$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $t = 0^+$ jednadžba (28) prelazi u

$$y(0^+) - y(0^-) + 2\zeta\Omega_n \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} \dot{y}(\lambda) d\lambda d\tau}_{=0} +$$

$$+\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} y(\lambda) d\lambda d\tau}_{=0} = A\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} \delta(\lambda) d\lambda d\tau}_{=0} \qquad (30)$$

- slijedi

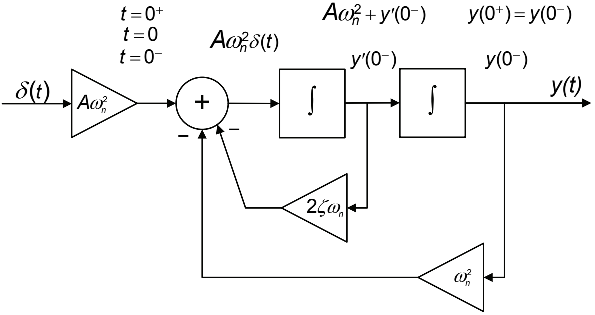
$$y(0^+) = y(0^-)$$

- a iz ovoga i iz jednadžbe (29) slijedi

$$\dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- do istog zaključka možemo doći uvidom u blok dijagram



Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- iz

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad t > 0$$

za $t = 0^+$

$$\begin{aligned} y(0^+) &= c_1 + c_2 = y(0^-) \\ \dot{y}(0^+) &= s_1 c_1 + s_2 c_2 = \dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2 \end{aligned}$$

- izračunavamo

$$c_1 = \frac{y(0^-)s_2 - (\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2)}{s_2 - s_1}$$

$$c_2 = \frac{(\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1}$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- odziv sustava II reda, s početnim uvjetima $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$, pobuđenog s jediničnim impulsom je

$$y_{imp}(t) = \frac{y(0^-)s_2 - (\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2)}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \\ + \frac{(\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

- za $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$ odziv na impuls zove se impulsni odziv i označava $h(t)$

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ i $s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{-j2\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} +$$

$$+ \frac{A\Omega_n^2}{-j2\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}$$

- odnosno

$$h(t) = \frac{\Omega_n A}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\Omega_n t} \sin[(\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t], \quad t \geq 0$$

Impulsni odziv – primjer

- određuje se impulsni odziv sustava (prije dani Zadatak 1)

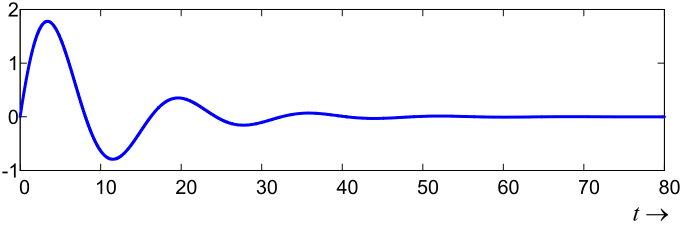
$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = 6.25 \cdot 0.16u(t)$$

$$\zeta = 0.25, \quad \Omega_n = 0.4, \quad A = 6.25$$

- iz prethodnog izraza za $h(t)$ slijedi

$$h(t) = 2.582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)$$

što je rezultat identičan onom iz zadatka 1



Zadatak 2

- određuje se odziv vremenski kontinuiranog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

  na pobudu

$$u(t) = 0.64 + \sin(t)$$

  i uz zadane početne uvjete $y(0^-) = -3$ i $\dot{y}(0^-) = -1$

- iz karakteristične jednadžbe

$$s^2 + 0.2s + 0.16 = 0$$

  karakteristične frekvencije su

$$s_1 = -0.1 + j0.3873 \text{ i } s_2 = -0.1 - j0.3873$$

Zadatak 2

- partikularno rješenje je oblika

$$y_p(t) = K_1 + K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t)$$

a određuju se

$$\dot{y}_p(t) = K_2 \cos(t) - K_3 \sin(t)$$
$$\ddot{y}_p(t) = -K_2 \sin(t) - K_3 \cos(t)$$

- partikularno rješenje mora zadovoljiti polaznu jednadžbu

$$- K_2 \sin(t) - K_3 \cos(t) + 0.2K_2 \cos(t) - 0.2K_3 \sin(t) + \\ + 0.16K_1 + 0.16K_2 \sin(t) + 0.16K_3 \cos(t) = 0.64 + sin(t)$$

$$0.16K_1 + (-0.84K_2 - 0.2K_3) \sin(t) + \\ + (0.2K_2 - 0.84K_3) \cos(t) = 0.64 + sin(t)$$

Zadatak 2

- koeficijente K_1, K_2, K_3 određujemo metodom neodređenih koeficijenata, pa iz

$$0.16K_1 = 0.64 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -0.84K_2 - 0.2K_3 \\ 0 = 0.2K_2 - 0.84K_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} K_2 = -1.1266 \\ K_3 = -0.2682 \end{array}$$

- totalno rješenje je, za $t \geq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + y_p(t) = \\ &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + K_1 + K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t) \end{aligned}$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$
- kako je za zadanu jednadžbu $b_0 = b_1 = 0$ i $b_2 = 1$ slijedi, iz jednadžbi (10) i (11),

$$y(0^+) = y(0^-) = -3 \text{ i } \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = -1$$

Zadatak 2

- iz

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + K_1 + K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t)$$
$$\dot{y}(t) = s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t} + K_2 \cos(t) - K_3 \sin(t)$$

za $t = 0^+$

$$\left.\begin{array}{l} -3 = c_1 + c_2 + K_1 + K_3 \\ -1 = s_1 c_1 + s_2 c_2 + K_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = -3 - K_1 - K_3 \\ s_1 c_1 + s_2 c_2 = -1 - K_2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = -3 - 4 + 0.2682 \\ (-0.1 + j0.3873)c_1 + (-0.1 - j0.3873)c_2 = -1 + 1.1266 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$c_1 = -3.3659 + j0.7056 = 3.4391 e^{j2.9349}$$
$$c_2 = -3.3659 - j0.7056 = 3.4391 e^{-j2.9349}$$

Zadatak 2

- totalno rješenje je

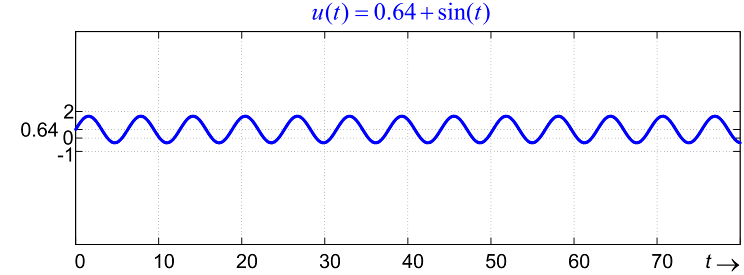
$$
\begin{aligned}
y(t) = 3.4391 e^{j2.9349} e^{-0.1t} e^{j0.3873t} + \\
+ 3.4391 e^{-j2.9349} e^{-0.1t} e^{-j0.3873t} + \\
+ 4 - 1.1266 \sin(t) - 0.2682 \cos(t), \quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

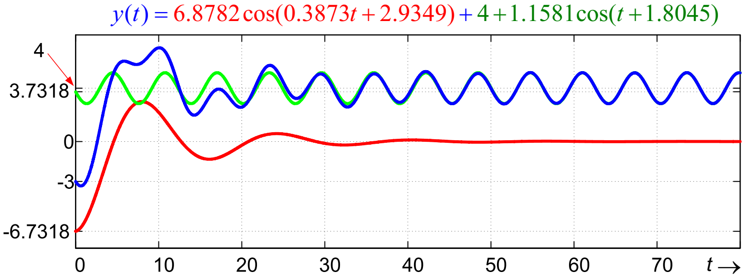
$$
\begin{aligned}
y(t) = \underbrace{6.8782 e^{-0.1t} \cos(0.3873t + 2.9349)}_{\text{prijelazni odziv – vlastitim frekvencijama}} + \\
+ \underbrace{4 + 1.1581 \cos(t + 1.8045)}_{\text{prisilni odziv – frekvencijom pobude}}, \quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

provjera za $t = 0$

$$
\begin{aligned}
y(0) = 6.8782 \cos(2.9349) + 4 + 1.1581 \cos(1.8045) = \\
= -6.7318 + 4 - 0.2682 = -3
\end{aligned}
$$

Zadatak 2


$u(t) = 0.64 + \sin(t)$
2
0.64
0
-1
0
10
20
30
40
50
60
70
$t \rightarrow$


$y(t) = 6.8782\cos(0.3873t + 2.9349) + 4 + 1.1581\cos(t + 1.8045)$
4
3.7318
0
-3
-6.7318
0
10
20
30
40
50
60
70
$t \rightarrow$

Utjecaj karakterističnih frekvencija na totalni odziv

- uvidom u izraz za totalni odziv stabilnog sustava evidentno je kako prirodni odziv trne s vremenom i pogrešan bi bio zaključak kako time sasvim prestaje utjecaj vlastitih frekvencija na totalni odziv
- treba podsjetiti kako je partikularno rješenje izračunavano metodom neodređenog koeficijenata i kako je u određivanju koeficijenata partikularnog rješenja korištena cjelokupna diferencijalna jednadžba pa su time, posredno, i karakteristične frekvencije utjecale na partikularno rješenje
- utjecaj karakterističnih frekvencija u totalnom odzivu moguće je ilustrirati sljedećim razmatranjem

Utjecaj karakterističnih frekvencija na totalni odziv

- razmotrimo sustav prvog reda, čiji je impulsni odziv $h(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t)$, pobuđen s $u(t) = e^{\zeta t}\mu(t)$
- odziv kauzalnog mirnog sustava je

$$y(t) = h(t) * u(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t) * e^{\zeta t}\mu(t)$$

$$y(t) = \int_0^t Ae^{s_1(t-\tau)}e^{\zeta\tau}d\tau = Ae^{s_1 t}\int_0^t e^{(\zeta - s_1)\tau}d\tau$$

$$y(t) = \frac{A}{\zeta - s_1}\left[e^{\zeta t} - e^{s_1 t}\right] \tag{31}$$

- očigledno je kako je za pobude čija je frekvencija bliža karakterističnoj frekvenciji veća amplituda odziva
- ovaj zaključak se jednostavno proširuje na sustave N–tog reda jer je impulsni odziv linearna kombinacija N eksponencijala koje titraju karakterističnim frekvencijama

Rezonancija

- jednadžba (31) potiče da se razmotri slučaj kada je frekvencija pobude identična jednoj od karakterističnih frekvencija sustava
- i ovdje se razmatranje započinje za sustav prvog reda čiji je impulsni odziv $h(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t)$
- sustav se pobuđuje eksponencijalom neznatno različite frekvencije od karakteristične frekvencije $u(t) = e^{(s_1-\epsilon)t}\mu(t)$
- odziv ovog sustava, opet korištenjem konvolucijskog integrala, je

$$y(t) = \frac{A}{\epsilon}\left[e^{s_1 t} - e^{(s_1-\epsilon)t}\right] = Ae^{s_1 t}\left(\frac{1-e^{-\epsilon t}}{\epsilon}\right)$$

Rezonancija

- očigledno je kako se u

$$y(t) = Ae^{s_1 t}\left(\frac{1 - e^{-\epsilon t}}{\epsilon}\right),$$

  za $\epsilon \to 0$, i brojnik i nazivnik približuju nuli
- primjenom L'Hôpital-ovog pravila slijedi

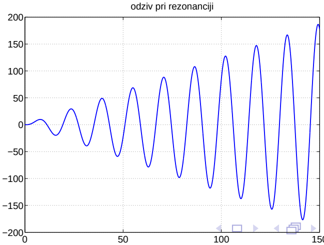
$$\lim_{\epsilon \to 0} y(t) = Ate^{s_1 t}$$

- odziv sadrži faktor t i za $t \to \infty$ amplituda odziva bi[11] također težila prema ∞
- ova pojava se naziva rezonancijom i za opaziti je da je to kumulativni, a ne trenutni, proces koji se razvija s t

[11] koristi se kondicional jer za s_1 u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine se to neće dogoditi

Rezonancija

- za s_1 u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine, rezonancija postoji, ali se ne stigne razviti jer se eksponencijala prigušuje brže od linearnog porasta t
- za s_1 na imaginarnoj osi, ili u desnoj poluravnini kompleksne ravnine, pojava rezonancije je očigledna
- kasnije će biti detaljno razmotrena rezonancija sustava drugog reda, čije su vlastite frekvencije $s_{1,2} = j\Omega_1$, a koji je pobuđen sinusoidalnim signalom iste frekvencije Ω_1
- ovdje se daje samo odziv tog sustava



Rezonancija

- pojavu rezonancije analiziramo na primjeru kontinuiranog sustava II reda i to preko njegova odziva
- odziv mirnog sustava možemo izračunati pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- prije je izveden izraz za impulsni odziv sustava drugog reda

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

Rezonancija

- pojavu rezonancije ilustriramo na primjeru sustava[12]

$$\ddot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$$

- vlastite frekvencije sustava su $s_1 = j\Omega_n$ i $s_2 = -j\Omega_n$ pa je impulsni odziv

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} = \Omega_n A \frac{e^{j\Omega_n t} - e^{-j\Omega_n t}}{2j}$$

- pobuđen sinusnim signalom frekvencije identične vlastitoj frekvenciji sustava

$$u(t) = \sin(\Omega_n t) = \frac{e^{j\Omega_n t} - e^{-j\Omega_n t}}{2j}$$

[12] pretpostavljamo $\zeta = 0$ u jednadžbi $\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n \dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$

Rezonancija

- odziv mirnog kauzalnog sustava uz pobudu zadanu za $t \geq 0$ izračunavamo konvolucijom

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \\
&= \int_0^t \frac{\Omega_n A}{2j}[e^{j\Omega_n\tau} - e^{-j\Omega_n\tau}]\frac{1}{2j}[e^{j\Omega_n(t-\tau)} - e^{-j\Omega_n(t-\tau)}]d\tau = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\int_0^t [e^{j\Omega_n t} - e^{j\Omega_n t}e^{-j2\Omega_n\tau} - e^{-j\Omega_n t}e^{j2\Omega_n\tau} + e^{-j\Omega_n t}]d\tau = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\{e^{j\Omega_n t}\int_0^t d\tau - e^{j\Omega_n t}\int_0^t e^{-j2\Omega_n\tau}d\tau - \\
&\qquad -e^{-j\Omega_n t}\int_0^t e^{j2\Omega_n\tau}d\tau + e^{-j\Omega_n t}\int_0^t d\tau\} = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\{t(e^{j\Omega_n t} + e^{-j\Omega_n t}) + \frac{e^{-j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} - \frac{e^{j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} - \frac{e^{j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} + \frac{e^{-j\Omega_n t}}{j2\Omega_n}\} =
\end{aligned}
$$

$$
y(t) = -\frac{\Omega_n A}{2} t\cos(\Omega_n t) + \frac{A}{2}\sin(\Omega_n t), \qquad t \geq 0
$$

- rezonancija je prema tome kumulativna pojava i ona se razvija proporcionalno s t

Odziv pri rezonanciji

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- intuitivno se može zaključiti kako sustavi trebaju neko vrijeme kako bi potpuno reagirali na neku pobudu i to vrijeme možemo nazvati vrijeme odziva ili vremenska konstanta sustava
- ako razmotrimo impulsni odziv sustava možemo zaključiti da, iako je pobuda $\delta(t)$ trenutna (trajanja nula), impulsni odziv je trajanja[13] T_h, dakle sustav treba neko vrijeme da potpuno odgovori na pobudu
- ovu činjenicu možemo ilustrirati sljedećim primjerom

[13] strogo govoreći impulsni odziv je beskonačnog trajanja jer se kompleksne eksponencijale asimptotski približavaju nuli za $t \to \infty$, no nakon nekog vremen vrijednosti impulsnog odziva su zanemarive pa ga možemo smatrati konačnim

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- usporedimo impulsne odzive sljedeća dva sustava, te njihove odzive na jedinični skok
- diferencijalna jednadžba, karakteristične frekvencije i impulsni odziv prvog sustava su

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t)\\
&s_1 = -0.1000 + j0.3873 = 0.4e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.1000 - j0.3873 = 0.4e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.2000\\
&h_1(t) = 6.455e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 2.8889) + 6.25e^{-0.2t}
\end{aligned}
$$

- isto za drugi sustav

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.2y''(t) + 0.05y'(t) + 0.004y(t) = 0.25u(t)\\
&s_1 = -0.0500 + j0.1936 = 0.2e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.0500 - j0.1936 = 0.2e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.1000\\
&h_2(t) = 6.455e^{-0.05t}\cos(0.1936t - 2.8889) + 6.25e^{-0.1t}
\end{aligned}
$$

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

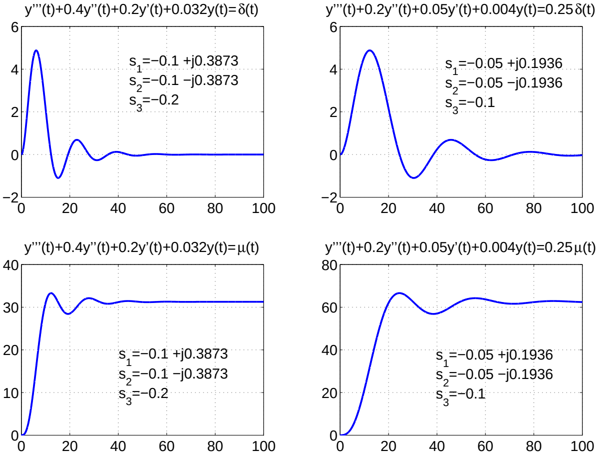
- usporedimo odzive na jedinični skok za iste sustave
- diferencijalna jednadžba, karakteristične frekvencije i odziv na jedinični skok prvog sustava su

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t)\\
&s_1 = -0.1000 + j0.3873 = 0.4e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.1000 - j0.3873 = 0.4e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.2000\\
&y_{\mu 1}(t) = -16.1374e^{-0.1t}\sin(0.3873t) - 31.25e^{-0.2t} + 31.25
\end{aligned}
$$

- isto za drugi sustav

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.2y''(t) + 0.05y'(t) + 0.004y(t) = 0.25u(t)\\
&s_1 = -0.0500 + j0.1936 = 0.2e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.0500 - j0.1936 = 0.2e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.1000\\
&y_{\mu 2}(t) = -32.2749e^{-0.05t}\sin(0.1936t) - 62.5e^{-0.1t} + 62.5
\end{aligned}
$$

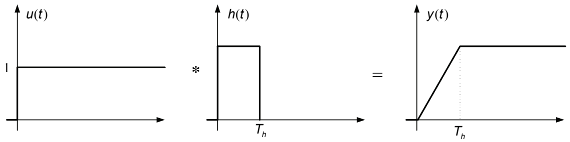
Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta



Slika 3: Impulsni odziv i odziv na jedinični skok

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- očigledno je da je vrijeme odziva sustava ovisno o vrijednostima (položaju) karakterističnih frekvencija
- očigledno je, također, kako je za "širi" impulsni odziv vrijeme odziva veće
- ovo možemo dodatno pojasniti još jednostavnijim primjerom
- neka je impulsni odziv, pravokutni impuls trajanja T_h, i neka je sustav pobuđen jediničnim skokom
- odziv sustava će biti jednak njihovoj konvoluciji



Slika 4: Vrijeme odziva