Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

6. svibnja 2013.

Impulsni odziv vremenski diskretnog sustava

Impulsni odziv vremenski diskretnog sustava

- odziv linearnog, vremenski stalnog (LTI), vremenski diskretnog sustava,

$$S : [\mathbb{Z} \to \mathbb{R}] \to [\mathbb{Z} \to \mathbb{R}],$$

na pobudu u, definiran je kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = S(u)(n)$$

- odziv ovog sustava na jedinični impuls δ, Kroneckerovu δ funkciju, uz uvjet da je sustav bio miran prije dovođenja pobude, nazivamo impulsnim odzivom sustava i označavamo kao $h = S(\delta)$, dakle

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad h(n) = S(\delta)(n)$$

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- vremenski diskretan sustav zadan je jednadžbom diferencija

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) - 0.75y(n-1) = u(n)$$

- sustav je miran, dakle vrijedi $y(-1) = 0$, i određujemo impulsni odziv sustava, dakle odziv na pobudu $u(n) = \delta(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$
- ovdje ćemo to učiniti metodom izračunavanja korak po korak

$$\begin{aligned} &y(n) = 0.75y(n-1) + u(n) \\ &\text{za } u(n) = \delta(n) \Rightarrow \\ &h(n) = 0.75h(n-1) + \delta(n) \end{aligned}$$

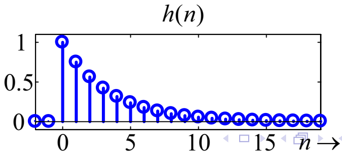
- dovoljno je promatrati odziv za $n \geq 0$, jer pobuda djeluje za $n \geq 0$

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- dakle, za $h(-1) = y(-1) = 0$, i za $n = 0, 1, 2, \ldots$ slijedi

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 0.75h(-1) + 1 = 1\\
h(1) &= 0.75h(0) + 0 = 0.75 \cdot 1 = 0.75\\
h(2) &= 0.75h(1) + 0 = 0.75 \cdot 0.75 = 0.75^2\\
h(3) &= 0.75h(2) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^2 = 0.75^3\\
h(4) &= 0.75h(3) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^3 = 0.75^4\\
\cdots &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
h(n) &= 0.75h(n-1) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^{n-1} = 0.75^n
\end{aligned}
$$

- zaključujemo kako je impulsni odziv zadanog sustava,
  $\forall n \geq 0, \quad h(n) = 0.75^n,$
  beskonačnog trajanja i asimptotski se približava k nuli

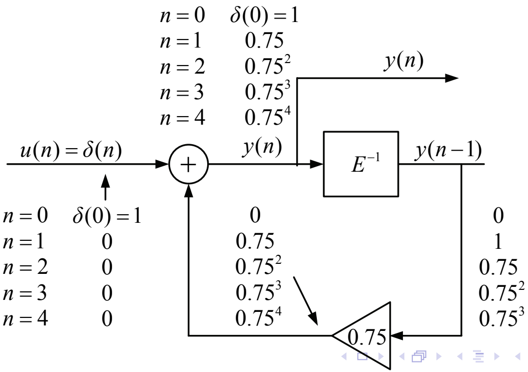


Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- razmatrani vremenski diskretan sustav

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) - 0.75y(n-1) = u(n)$$

prikazujemo blokovskim dijagramom i analiziramo odziv na jedinični impuls δ uz $y(-1) = 0$, dakle za miran sustav

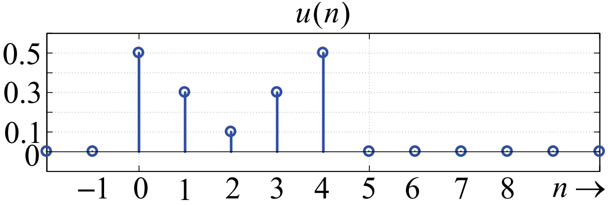


Odziv sustava na niz impulsa

Diskretni signal kao zbroj jediničnih impulsa

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć niza vremenski diskretnih jediničnih impulsa što proizlazi iz:

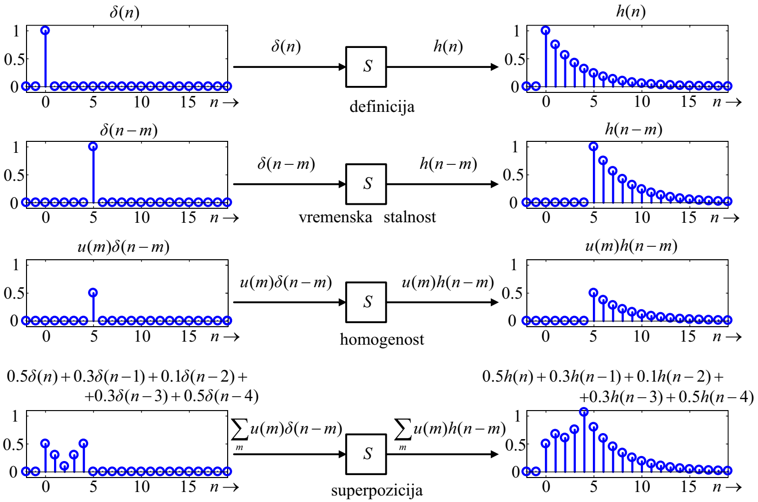
$$u(n) = u(n) \cdot comb(n) = u(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$$



$$u(n) = .5\delta(n) + .3\delta(n-1) + .1\delta(n-2) + .3\delta(n-3) + .5\delta(n-4)$$

- razmotrimo odziv linearnog, vremenski stalnog, diskretnog sustava na pobudu prikazanu kao niz impulsa

Odziv sustava na niz impulsa



Slika 1: Konvolucijski zbroj *SISO* sustava

Konvolucijski zbroj

Konvolucijski zbroj

- pobuda sustava prikazana je kao zbroj niza impulsa

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{Z} \\
&u(n) = \ldots + u(-1)\delta(n+1) + u(0)\delta(n) + u(1)\delta(n-1) + \\
&\qquad + u(2)\delta(n-2) + u(3)\delta(n-3) \ldots \Rightarrow \\
&u(n) = \textstyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)
\end{aligned}$$

- za linearni sustav vrijedi svojstvo homogenosti

$$u(m)\delta(n-m) \rightarrow u(m)h(n-m)$$

- pa je odziv na pobudu prikazanu nizom impulsa

$$\begin{aligned}
y(n) = \ldots &+ u(-1)h(n+1) + u(0)h(n) + u(1)h(n-1) + \\
&+ u(2)h(n-2) + u(3)h(n-3) \ldots \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) \tag{1}$$

Konvolucijski zbroj

- izvedeni izraz predstavlja konvoluciju nizova u i h

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) = (u * h)(n)$$

i zato ga nazivamo **konvolucijski zbroj** (suma)

- supstitucijom $k = n - m$ slijedi alternativni prikaz

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k),$$

pa za konvoluciju vrijedi svojstvo komutativnosti

$$y = h * u = u * h$$

odnosno

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = (h * u)(n) = (u * h)(n)$$

Konvolucijski zbroj kauzalnih nizova

- konvolucijski zbroj, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, možemo raspisati kao

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} u(m)h(n-m) + \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} u(m)h(n-m)$$

- za kauzalne $u(n)$ i $h(n)$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} \underbrace{u(m)}_{=0} h(n-m) + \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} u(m) \underbrace{h(n-m)}_{=0}$$

konvolucijski zbroj se reducira u[1]

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{n} h(m)u(n-m), \qquad n \geq 0$$

što je odziv linearnog vremenski stalnog kauzalnog sustava

[1] Uz svojstvo komutativnosti dana su oba izraza za konvoluciju

IIR sustavi - primjer

IIR sustavi

- iz $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m)$ zaključujemo da je, uz poznavanje impulsnog odziva sustava h, moguće odrediti odziv na bilo koju pobudu
- sustavi s beskonačnim trajanjem impulsnog odziva nazivaju se IIR (Infinite Impulse Response) sustavi
- primjer IIR sustava je prije razmatrani vremenski diskretni sustav

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) - 0.75y(n-1) = u(n)$$

čiji je impulsni odziv

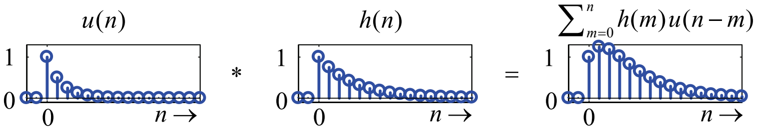
$$h(n) = \begin{cases} 0.75^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- ilustrira se odziv ovog sustava na pobudu $u(n) = 0.5^n \mu(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

IIR sustav – primjer

- oba niza, h i u, su kauzalna, pa je konvolucijski zbroj

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{m=0}^{n} h(m)u(n-m), \qquad n \geq 0 \\
&= \sum_{m=0}^{n} 0.75^m 0.5^{n-m} = 0.5^n \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{0.75}{0.5}\right)^m = \\
&= 0.5^n \frac{\left(\frac{0.75}{0.5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{0.75}{0.5} - 1} = 4\left[0.75^{n+1} - 0.5^{n+1}\right], \qquad n \geq 0
\end{aligned}
$$



FIR sustavi - primjer

FIR sustavi

- sustavi za koje je impulsni odziv konačne duljine, $M+1$, nazivaju se sustavi s konačnim impulsnim odzivom ili FIR (Finite Impulse Response) sustavi:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=0}^{M} h(m)u(n-m)$$

- sustav za usrednjavanje je primjer FIR sustava

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{m=0}^{M} u(n-m) = \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{M+1} u(n-m),$$

pri čemu je njegov impulsni odziv

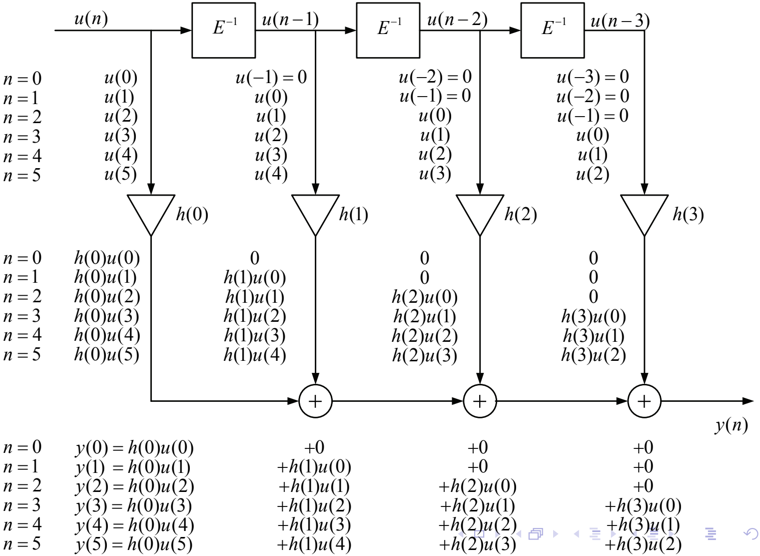
$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{M+1}, & 0 \le n \le M; \\ 0, & n < 0 \text{ i } n > M \end{cases}$$

FIR sustav – blokovski dijagram

- na naredne dvije prikaznice su blokovski dijagrami koji predstavljaju realizaciju FIR sustava za koji je $M = 3$
- blokovski dijagram je izveden izravno iz jednadžbe za konvolucijski zbroj i radi se o dva ekvivalentna prikaza istog sustava
- na slikama je prikazano napredovanje signala (njegovih očitaka) kroz sustav, te svi međurezultati svih operacija koje se u modelu sustava događaju tijekom određivanja odziva u pojedinom koraku
- važno je uočiti ulogu koju početni uvjeti (različiti od nule) imaju na odziv sustava
- evidentno je zašto se pri definiciji impulsnog odziva naglašava da je to odziv na jedinični impuls za slučaj mirnog sustava (početni uvjeti jednaki nuli)

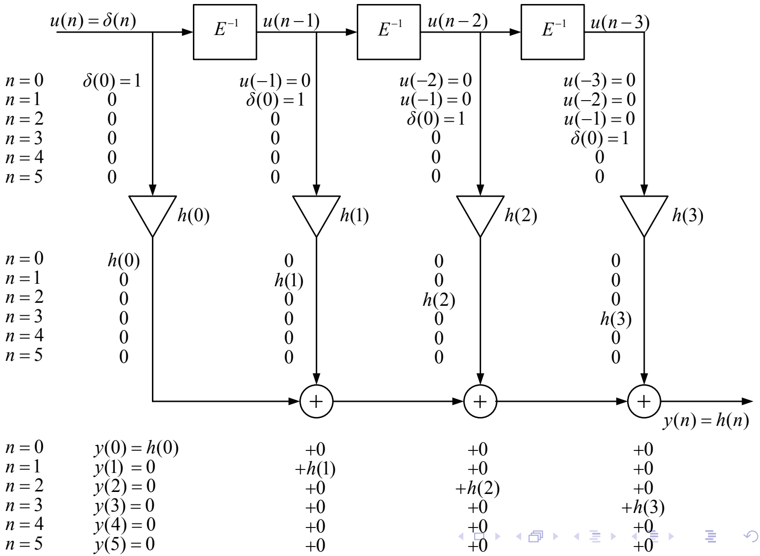
FIR sustav – blokovski dijagram

iz $y(n) = \sum_{m=0}^{3} h(m)u(n-m) =$
$h(0)u(n) + h(1)u(n-1) + h(2)u(n-2) + h(3)u(n-3)$



Impulsni odziv FIR sustava – blokovski dijagram

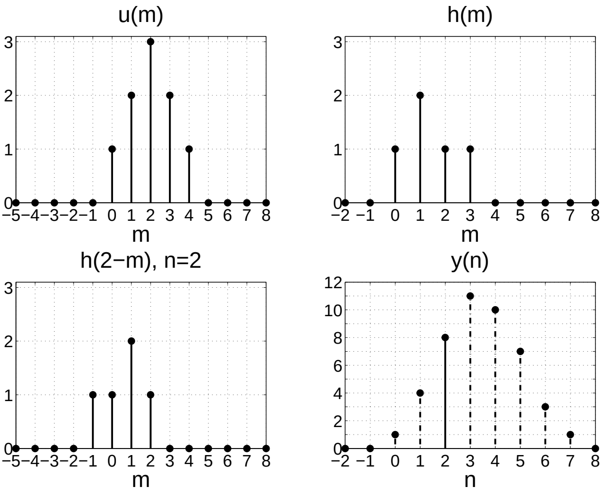
iz $y(n) = \sum_{m=0}^{3} h(m)\delta(n-m) = h(n) =$
$h(0)\delta(n) + h(1)\delta(n-1) + h(2)\delta(n-2) + h(3)\delta(n-3)$



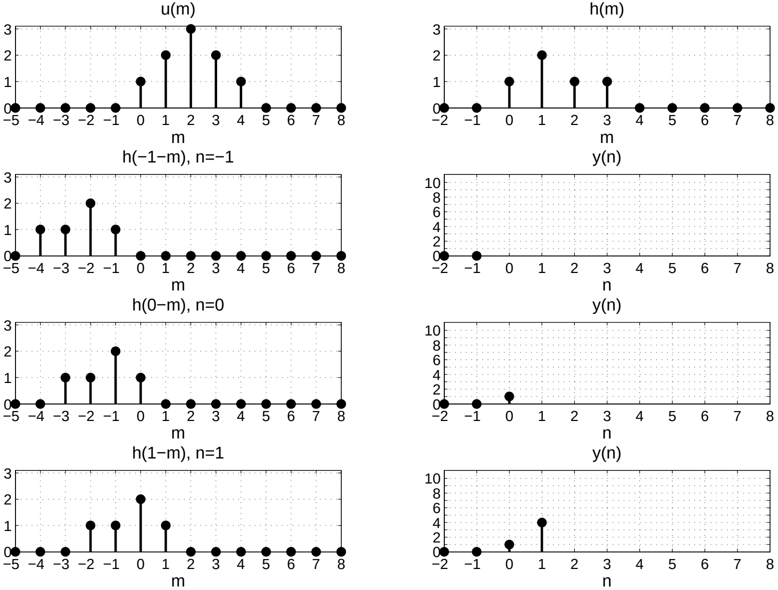
Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja

Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja

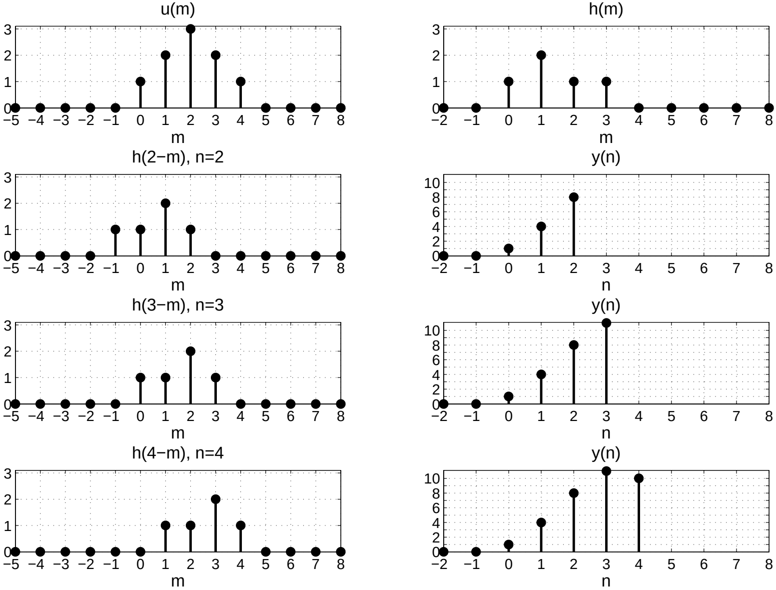
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m),$$
$$\text{za } n = 2 \Rightarrow y(2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(2-m)$$



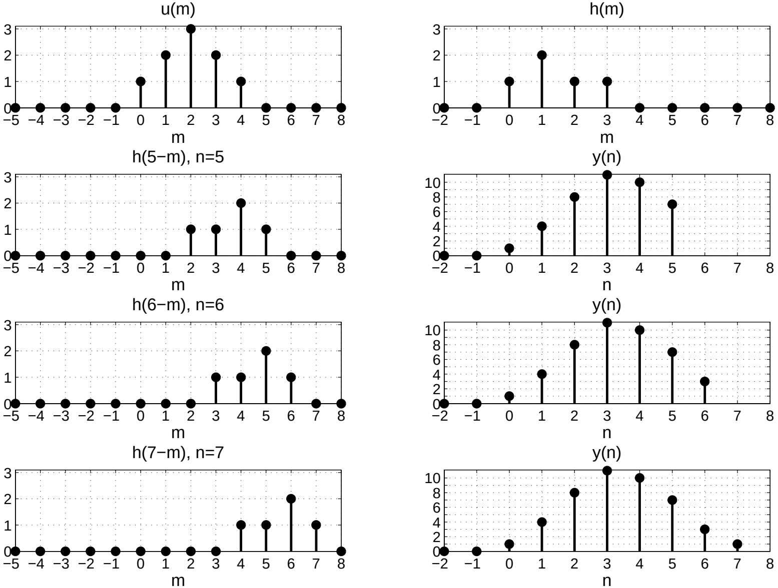
Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja



Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja



Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja



Svojstva konvolucijskog zbroja

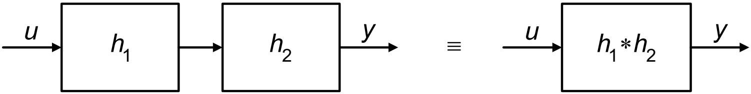
Svojstva konvolucijskog zbroja – komutativnost i asocijativnost

- već je pokazano da vrijedi komutativnost

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m) \Leftrightarrow u*h = h*u$$

- svojstvo asocijativnosti

$$y(n) = ((u * h_1) * h_2)(n) = (u * \underbrace{(h_1 * h_2)}_{h})(n) = (u * h)(n)$$



Slika 6: Konvolucijski zbroj – asocijativnost

Svojstva konvolucijskog zbroja – asocijativnost

- izvod svojstva asocijativnosti za linearni, vremenski stalni, diskretni sustav

$$y(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) h_1(j-m) \right] h_2(n-j) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_1(j-m) h_2(n-j) \right]$$

za $k = j - m \Rightarrow$

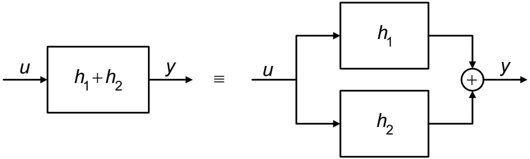
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) h_2(n-m-k) \right]}_{h(n-m)}$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) h(n-m)$$

Svojstva konvolucijskog zbroja – distributivnost

- svojstvo distributivnosti za linearni, vremenski stalni, diskretni sustav

$$y(n) = (u * (h_1 + h_2))(n) = (u * h_1)(n) + (u * h_2)(n)$$



Slika 7: Konvolucijski zbroj – distributivnost

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\Big[h_1(n-m) + h_2(n-m)\Big]$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h_1(n-m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h_2(n-m)$$

Konvolucija proizvoljnih signala

- dosadašnja razmatranja konvolucijskog zbroja odnosila su se na jedan od mogućih opisa LTI sustava
- konvolucijski zbroj možemo definirati i za proizvoljne signale, pa pišemo

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = (x_1 * x_2)(n)$$

- već prije izvedena svojstva konvolucijskog zbroja vrijede i za proizvoljne signale:
  - komutativnost:
    $(x_1 * x_2)(n) = (x_2 * x_1)(n)$
  - distributivnost:
    $(x_1 * (x_2 + x_3))(n) = (x_1 * x_2)(n) + (x_1 * x_3)(n)$
  - asocijativnost:
    $(x_1 * (x_2 * x_3))(n) = ((x_1 * x_2) * x_3)(n)$

Svojstva konvolucijskog zbroja – pomak

- za $y(n) = (x_1 * x_2)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$, te uz oznake $(E^{-p}(x_1))(n) = x_1(n-p)$ i $(E^{-q}(x_2))(n) = x_2(n-q)$, vrijedi svojstvo pomaka

$$(E^{-p}(x_1) * E^{-q}(x_2))(n) = y(n-p-q)$$

- izvod svojstva pomaka

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [E^{-p}(x_1)(m)][E^{-q}(x_2)(n-m)]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m-p)x_2(n-m-q)$$

za $j = m - p$ slijedi

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_1(j)x_2(n-p-q-j) = y(n-p-q)$$

Svojstva konvolucijskog zbroja – konvolucija s jediničnim impulsom, duljina konvolucijskog zbroja

- konvolucija s jediničnim impulsom
  - za bilo koji signal $x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, i jedinični impuls $\delta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$,

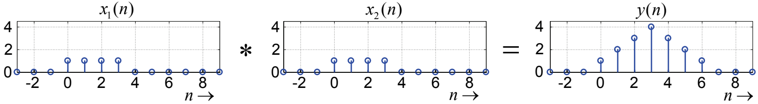
$$(x * \delta)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = x(n)$$

- duljina konvolucijskog zbroja konačnih nizova
  - neka je L_1 duljina (broj elemenata) niza $x_1(n)$, a L_2 duljina niza $x_2(n)$
  - duljina $(x_1 * x_2)(n)$ je $L_1 + L_2 - 1$

dokaz slijedi iz: $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$
$0 \leq m \leq L_1 - 1$
$0 \leq n - m \leq L_2 - 1 \qquad | + m$
$m \leq n \leq L_2 - 1 + m \quad \Rightarrow$
$0 \leq m \leq n \leq L_2 - 1 + m \leq L_2 - 1 + L_1 - 1 \quad \Rightarrow$
$0 \leq n \leq L_1 + L_2 - 2$
pa je duljina konvolucije $L = L_1 + L_2 - 1$

Konvolucijski zbroj – primjer

- u Cjelini 3 dan je primjer konvolucije dva pravokutna signala



- signali x_1 i x_2 definirani su kao

$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3; \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3; \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- duljine nizova $x_1(n)$ i $x_2(n)$ su $L_1 = L_2 = 4$, pa je duljina niza koji je rezultat njihove konvolucije, $(x_1 * x_2)(n)$, jednaka $L_1 + L_2 - 1 = 7$
- očigledno da je dovoljno računanje konvolucije za $0 \leq n \leq 6$

Konvolucijski zbroj – primjer

- konvoluciju $(x_1 * x_2)(n)$, uzimajući u obzir da se radi o kauzalnim nizovima, određujemo iz

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} x_1(m)x_2(n-m), \qquad n \geq 0,$$

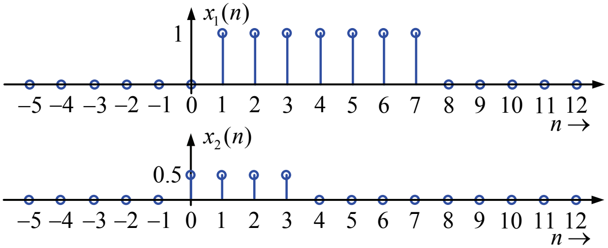
$$\begin{aligned}
y(0) &= x_1(0)x_2(0) &&= 1 \\
y(1) &= x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) &&= 2 \\
y(2) &= x_1(0)x_2(2) + x_1(1)x_2(1) + x_1(2)x_2(0) &&= 3 \\
y(3) &= x_1(0)x_2(3) + x_1(1)x_2(2) + x_1(2)x_2(1) + x_1(3)x_2(0) &&= 4 \\
y(4) &= x_1(1)x_2(3) + x_1(2)x_2(2) + x_1(3)x_2(1) &&= 3 \\
y(5) &= x_1(2)x_2(3) + x_1(3)x_2(2) &&= 2 \\
y(6) &= x_1(3)x_2(3) &&= 1
\end{aligned}$$

Konvolucijski zbroj – izračun

Konvolucijski zbroj – izračun

- izračunava se konvolucijski zbroj signala x_1 i x_2 definiranih kao

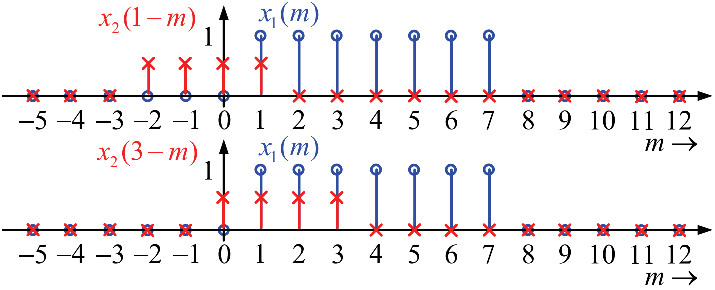
$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 7; \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad x_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq n \leq 3; \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



konvoluciju izračunavamo iz $y(n) = \sum_{m=0}^{n} x_1(m)x_2(n-m)$

Konvolucijski zbroj – izračun

- djelomično preklapanje $x_1(m)$ i $x_2(n-m)$ započinje za $n=1$ i završava za $n=3$

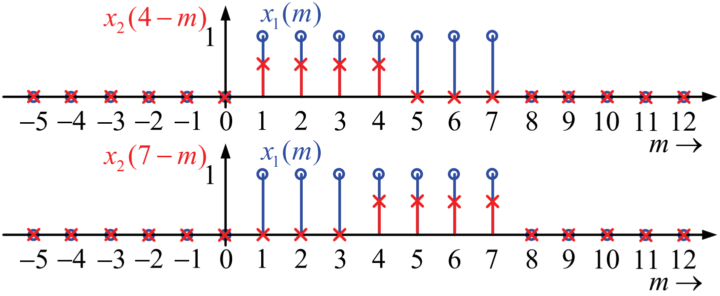


pa su, za interval $1 \leq n \leq 3$, donja granica zbrajanja $m=1$ i gornja $m=n$, pa vrijedi

$$y(n)=\sum_{m=1}^{n} x_1(m)x_2(n-m)=\sum_{m=1}^{n} 1\cdot\frac{1}{2}=(n-1+1)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n$$

Konvolucijski zbroj – izračun

- potpuno preklapanje $x_1(m)$ i $x_2(n-m)$ započinje za $n=4$ i završava za $n=7$

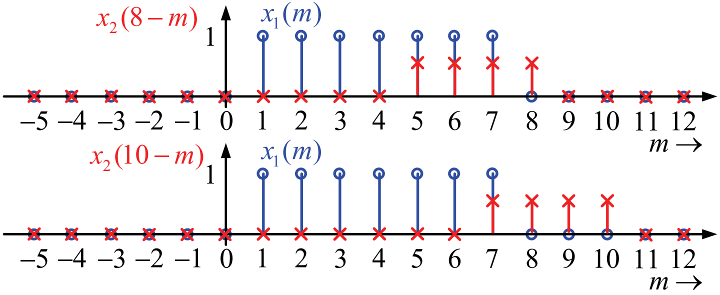


pa su, za interval $4 \leq n \leq 7$, gornja granica zbrajanja $m=n$ i donja $m=n-3$, pa vrijedi

$$y(n)=\sum_{m=n-3}^{n} x_1(m)x_2(n-m)=\sum_{m=n-3}^{n} 1\cdot\frac{1}{2}=(n-(n-3)+1)\frac{1}{2}=2$$

Konvolucijski zbroj – izračun

- ponovno djelomično preklapanje $x_1(m)$ i $x_2(n-m)$ započinje za $n = 8$ i završava za $n = 10$



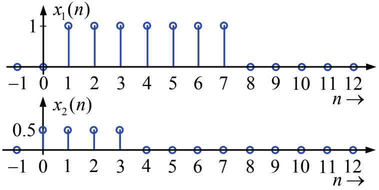
pa su, za interval $8 \leq n \leq 10$, gornja granica zbrajanja $m = 7$ i donja $m = n - 3$, pa vrijedi

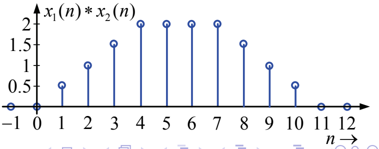
$$y(n) = \sum_{m=n-3}^{7} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=n-3}^{7} 1 \cdot \frac{1}{2} = (11-n)\frac{1}{2}$$

Konvolucijski zbroj – izračun

- preklapanje $x_1(m)$ i $x_2(n-m)$ ne postoji za $n < 1$ i $n \geq 11$ i tada je $y(n) = 0$
- finalno, rezultat konvolucije signala x_1 i x_2 je

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n < 1; \\ \frac{1}{2}n, & 1 \leq n \leq 3, \\ 2, & 4 \leq n \leq 7, \\ (11-n)\frac{1}{2}, & 8 \leq n \leq 10, \\ 0, & n \geq 11; \end{cases}$$





Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava

- odziv linearnog, vremenski stalnog (LTI), vremenski kontinuiranog sustava,

$$S : [\mathbb{R} \to \mathbb{R}] \to [\mathbb{R} \to \mathbb{R}],$$

  na pobudu u, definiran je kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = S(u)(t)$$

- odziv ovog sustava na jedinični impuls δ, Diracovu δ funkciju, uz uvjet da je sustav bio miran prije dovođenja pobude, nazivamo impulsnim odzivom sustava i označavamo kao $h = S(\delta)$, dakle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = S(\delta)(t)$$

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- odziv integratora

$$\int : [\mathbb{R} \to \mathbb{R}] \to [\mathbb{R} \to \mathbb{R}],$$

na pobudu u, definiran je kao

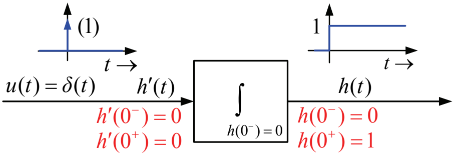
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = y(0^-) + \int_{0^-}^{t} u(\tau)\, d\tau,$$

- odziv ovog sustava na jedinični impuls δ (Diracovu δ funkciju), uz uvjet da je sustav bio miran, $h(0^-) = y(0^-) = 0$, prije dovođenja pobude, nazivamo impulsnim odzivom sustava i označavamo

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \int_{0^-}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \mu(t)$$

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- blokovski dijagram integratora je



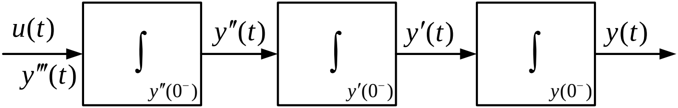
- očigledno je kako će, zbog djelovanja Diracove funkcije u $t = 0$, početni uvjet u $h(0^+)$ biti različit od $h(0^-)$

$$h(0^+) = \underbrace{h(0^-)}_{=0} + \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)\, d\tau = \mu(0^+) = 1$$

- na slici je ta činjenica naglašena oznakama crvenom bojom

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- razmatra se impulsni odziv sustava koji je nastao kao kaskada triju integratora



$$y(t) = y(0^-) + \int_{0^-}^{t} \left[y'(0^-) + \int_{0^-}^{\tau} \left[y''(0^-) + \int_{0^-}^{\lambda} u(\vartheta)\, d\vartheta \right] d\lambda \right] d\tau$$

za miran sustav,
$h(0^-) = y(0^-) = 0,$
$h'(0^-) = y'(0^-) = 0,$
$h''(0^-) = y''(0^-) = 0,$
određujemo impulsni odziv iz

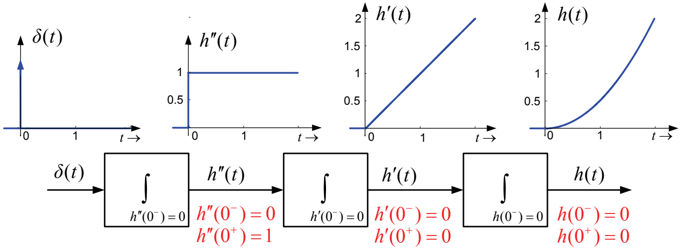
$$h(t) = \int_{0^-}^{t} \left[\int_{0^-}^{\tau} \left[\int_{0^-}^{\lambda} \delta(\vartheta)\, d\vartheta \right] d\lambda \right] d\tau = \frac{t^2}{2}\mu(t)$$

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- uzimajući u obzir poznate činjenice, $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$,

$$\int_{0^-}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \mu(t), \quad \int_{0^-}^{t} \mu(\tau)\, d\tau = t\mu(t), \quad \int_{0^-}^{t} \tau\, d\tau = \frac{t^2}{2}\mu(t),$$

i uvidom u blokovski dijagram



zaključujemo kako se, djelovanjem Diracove funkcije u $t = 0$, mijenja samo početni uvjet prvog integratora u kaskadi, dok su početni uvjeti ostalih nepromijenjeni (vidi vrijednosti gornjih integrala za gornju granicu 0^+)

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- vremenski kontinuiran sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

- sustav je miran, dakle vrijedi $y(0^-) = 0$, i određujemo impulsni odziv sustava, dakle odziv na pobudu $u(t) = \delta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- transformirajmo gornju jednadžbu

$$\begin{aligned} &y'(t) = -2y(t) + u(t) \\ &\text{a za } u(t) = \delta(t) \Rightarrow \\ &h'(t) = -2h(t) + \delta(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- impulsni odziv određujemo rješavanjem diferencijalne jednadžbe

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = -2h(t) + \delta(t)$$

- za $t < 0$ impulsni odziv je $h(t) = 0$, a za $t > 0$ jednadžba prelazi u homogenu diferencijalnu jednadžbu

$$h'(t) = -2h(t),$$

- jednostavnim zaključivanjem[2] određujemo njezino rješenje kao

$$h(t) = Ce^{-2t}, \quad \forall t > 0$$

koje očigledno zadovoljava gornju jednadžbu

[2] Postupke za rješavanje diferencijalnih jednadžbi analiziramo kasnije

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- postavlja se pitanje što je s impulsnim odzivom u $t = 0$
- diferencijalna jednadžba mora biti zadovoljena za $\forall t$, pa i za $t = 0$, a do zaključka o vrijednosti $h(0^+)$ dolazimo integriranjem njezine obje strane od $t = 0^-$ do $t = 0^+$

$$\int_{0^-}^{0^+} h'(t)\,dt = -2\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} h(t)\,dt}_{=0} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt}_{1}$$

$$h(0^+) - \underbrace{h(0^-)}_{=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad h(0^+) = 1$$

- napomena: da bi bila zadovoljena jednadžba
  $h'(t) = -2h(t) + \delta(t)$
  evidentno je da $h'(t)$ sadrži impuls u $t = 0$, dakle $h(t)$ sadrži tek konačni skok, i zato vrijedi $\int_{0^-}^{0^+} h(t)\,dt = 0$

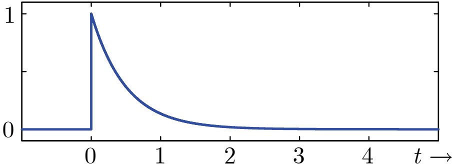
Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- iz $h(0^+) = 1$ određujemo konstantu C, dakle iz $h(t) = Ce^{-2t}$ slijedi, za $t = 0^+$,

$$h(0^+) = 1 = C$$

pa je impulsni odziv danog sustava[3]

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = e^{-2t}\mu(t)$$



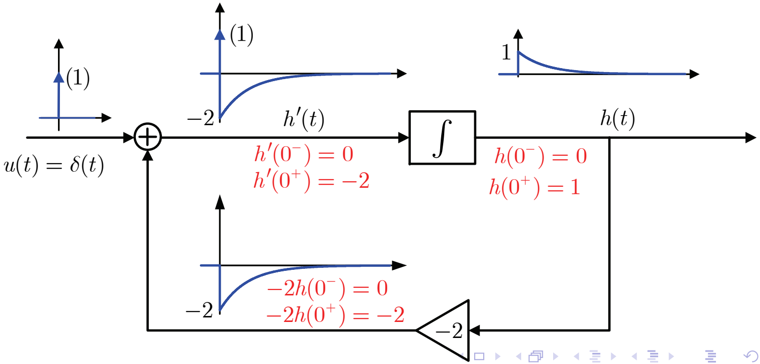
[3] uvrštenjem rješenja u jednadžbu $h'(t) + 2h(t) = \delta(t) \Rightarrow$
$e^{-2t}\delta(t) - 2e^{-2t}\mu(t) + 2e^{-2t}\mu(t) =$
$= e^{-2t}\delta(t) = e^{0}\delta(t) = \delta(t)$ čime je dokazana valjanost rješenja

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- uvidom u blokovski dijagram koji realizira jednadžbu sustava također zaključujemo o odzivu na pobudu jediničnim impulsom, dakle iz

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = -2h(t) + \delta(t)$$

crtamo



Konvolucijski integral

Izvod konvolucijskog integrala

- konvoluciju dvaju signala f i g definiramo s konvolucijskim integralom

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

- razmatramo konvoluciju signala u i Diracove delta funkcije

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (u * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau = u(t), \quad (3)$$

- pa zaključujemo kako ulazni signal možemo pisati kao[4]

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

[4] Usporediti s $u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$ za vremenski diskretne signale

Konvolucijski integral

- linearan vremenski stalan kontinuiran sustav definiran je kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = S(u)(t) \tag{4}$$

a njegov impulsni odziv

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = S(\delta)(t) \tag{5}$$

pa je iz (4), i uz (5), $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = S\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\underbrace{S\{\delta(t-\tau)\}}_{\substack{h(t-\tau)\\ \text{vrem. stalnost!}}}\, d\tau$$

- dakle, uz poznate h i u, odziv vremenski kontinuiranog sustava određujemo pomoću **konvolucijskog integrala**

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = (u * h)(t)$$

Konvolucijski integral – svojstva[5]

- u Cjelini 2 je pokazano da konvolucijski integral možemo definirati i za proizvoljne signale, pa možemo pisati

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\, d\tau$$

  - komutativnost:
    $(x_1 * x_2)(t) = (x_2 * x_1)(t)$
  - distributivnost:
    $(x_1 * (x_2 + x_3))(t) = (x_1 * x_2)(t) + (x_1 * x_3)(t)$
  - asocijativnost:
    $(x_1 * (x_2 * x_3))(t) = ((x_1 * x_2) * x_3)(t)$
  - pomak:
    za $(E_{T_1}^{-1}(x_1))(t) = x_1(t - T_1)$ i $(E_{T_2}^{-1}(x_2))(t) = x_2(t - T_2)$
    $(E_{T_1}^{-1}(x_1) * E_{T_2}^{-1}(x_2))(t) = y(t - T_1 - T_2)$
  - konvolucija s impulsom
    $(x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$

[5] Izvode se na sličan način kao i za konvolucijski zbroj pa je ovdje njihov izvod izostavljen

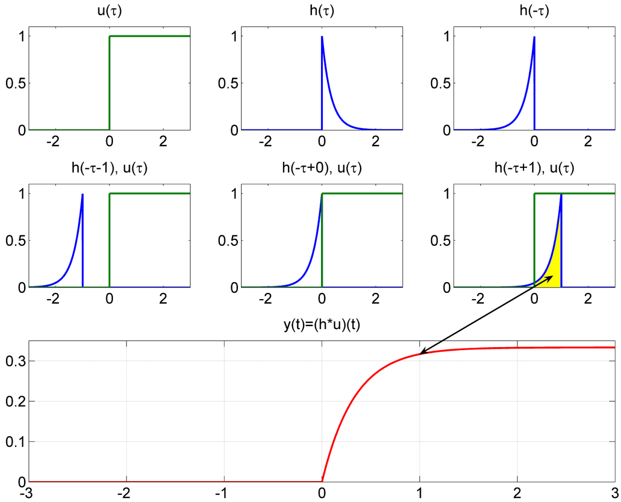
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 1.

- neka je zadan linearni, vremenski stalni, vremenski kontinuiran sustav, svojim impulsnim odzivom $h(t) = e^{-3t}\mu(t)$
- određuje se odziv na pobudu $u(t) = \mu(t)$
- odziv izračunavamo pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

- sa slike 8 je vidljivo kako se $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ ne poklapaju za $t \leq 0$ pa slijedi da je $y(t) = 0$ za $t \leq 0$

Grafička interpretacija izračunavanja konvolucijskog integrala – Primjer 1.



Slika 8: Konvolucijski integral – primjer

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 1. nastavak

- za $t > 0$, postoji preklapanje $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$, pa je

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-3(t-\tau)}\, d\tau = e^{-3t}\int_{0}^{t} e^{3\tau}\, d\tau = \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3t}\right]$$

- grafička interpretacija postupka konvolucije dana je na slici 8, i treba uočiti kako trenutna vrijednost $y(t)$ odgovara površini preklapanja $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ (žuto na slici)
- tako je za $t = 1$

$$y(t) = \int_{0}^{1} e^{-3(1-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3}\right] = 0.3167$$

Nekauzalni sustavi

- za nekauzalni sustav, odziv započinje prije nego je djelovala pobuda, dakle, sustav anticipira buduću pobudu (radi predikciju)
- nekauzalni vremenski sustavi su često rezultat postupaka sinteze na temelju idealiziranih zahtjeva
- nekauzalni vremenski sustavi ne mogu biti realizirani u stvarnom vremenu
- nekauzalne sustave možemo koristiti u slučajevima kada je dozvoljeno kašnjenje ili kada su konačni signali pohranjeni (poznati u cijelom području definicije)
- ovdje se demonstrira odziv nekauzalnog sustava konvolucijskim integralom

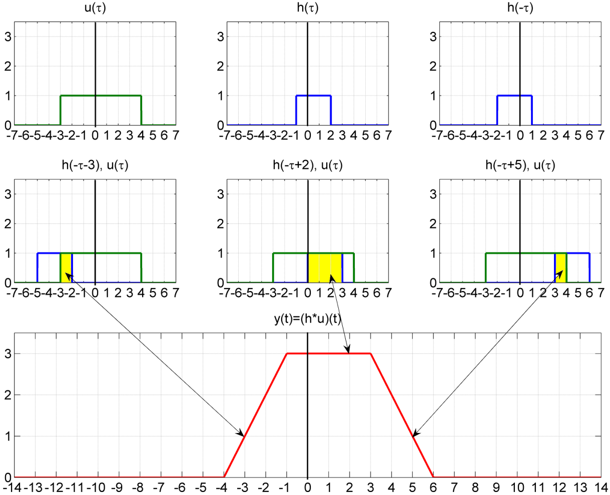
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2.

- neka je zadan linearni, vremenski stalni, vremenski kontinuiran sustav, svojim impulsnim odzivom $h(t) = \mu(t+1) - \mu(t-2)$
- određuje se odziv na pobudu $u(t) = \mu(t+3) - \mu(t-4)$
- odziv izračunavamo pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

- grafička interpretacija dana je na slici 9
- sa slike 9 je vidljivo kako se $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ preklapaju u tri intervala
  - u intervalu $-4 \leq t \leq -1$, djelomično,
  - u intervalu $-1 \leq t \leq 3$, potpuno (cijeli $h(t-\tau)$ zahvaćen s $u(\tau) \neq 0$),
  - u intervalu $3 \leq t \leq 6$, djelomično,

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 1



Slika 9: Grafička interpretacija izračunavanja konvolucijskog integrala – Primjer 2.

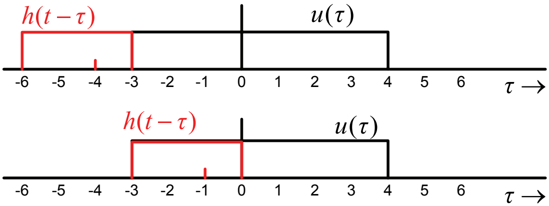
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 2

- na slici 9 je ilustrirano kako vrijednosti $y(-3) = 1$, $y(2) = 3$ i $y(5) = 1$, odgovaraju površini produkata $u(\tau) * h(-3-\tau)$, $u(\tau) * h(2-\tau)$, odnosno, $u(\tau) * h(5-\tau)$
- evidentno je kako, zbog nekauzalnosti impulsnog odziva, odziv starta prije pobude
- odziv započinje za $t \geq -4$, trenutak kada se počinju preklapati $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$, i u intervalu $-4 \leq t \leq -1$ računa se iz

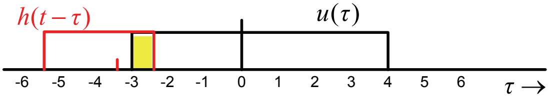
$$y(t) = \int_{-3}^{t+1} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-3}^{t+1} d\tau = t+4$$

- obrazložimo gornju i donju granicu

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 3

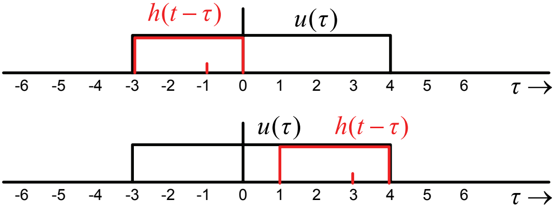


djelomično preklapanje počinje za $t=-4$, a završava za $t=-1$

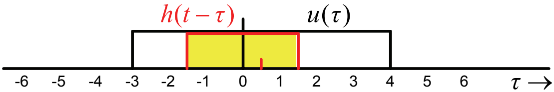


granica integracija za interval $-4 \le t \le -1$ su: donja je -3; gornja je $t+1$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 4



potpuno preklapanje počinje za $t=-1$, a završava za $t=3$

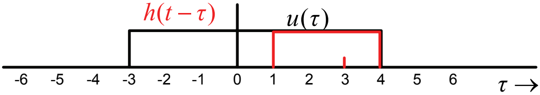


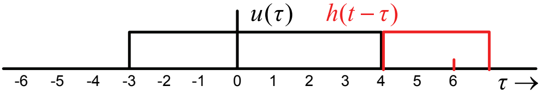
granica integracija za interval $-1 \leq t \leq 3$ su: donja je $t-2$; gornja je $t+1$

- u intervalu $-1 \leq t \leq 3$ odziv se računa iz

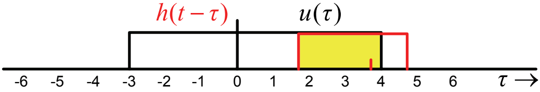
$$y(t) = \int_{t-2}^{t+1} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-2}^{t+1} d\tau = 3,$$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 5





djelomično preklapanje počinje za $t=3$, a završava za $t=6$



granica integracija za interval $3 \leq t \leq 6$ su: donja je $t-2$; gornja je 4

- u intervalu $3 \leq t \leq 6$,iz

$$y(t) = \int_{t-2}^{4} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-2}^{4} d\tau = 6 - t$$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 6

- finalno, odziv sustava $h(t) = \mu(t+1) - \mu(t-2)$, na pobudu $u(t) = \mu(t+3) - \mu(t-4)$, je

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -4 \\ t+4, & -4 \leq t \leq -1 \\ 3, & -1 \leq t \leq 3 \\ 6-t, & 3 \leq t \leq 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$