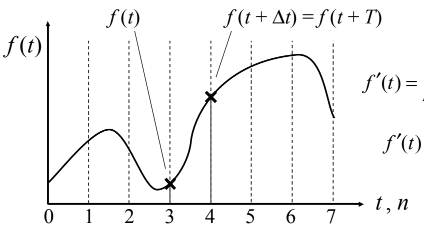
Signali i sustavi

Auditorne vježbe 14.

Prijelaz s kontinuiranih na diskretne sustave

Aproksimacija derivacije

- Kontinuirani sustav se općenito može prikazati pomoću diferencijalnih jednadžbi.
- Za prijelaz na odgovarajući diskretni sustav možemo aproksimirati derivaciju.



$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$f'(t) \approx \frac{f(t+T) - f(t)}{T}$$

Aproksimacija derivacije

- Uz odabrani T prvu derivaciju aproksimiramo kao

$$f'(nT) \approx \frac{f[n+1] - f[n]}{T} = \frac{\mathrm{E}\big[f[n]\big] - f[n]}{T}$$

- Za m-tu derivaciju aproksimacija je

$$f^{(m)}(nT) \approx \frac{1}{T^m}\left(\mathrm{E}-1\right)^m \big[f[n]\big]$$

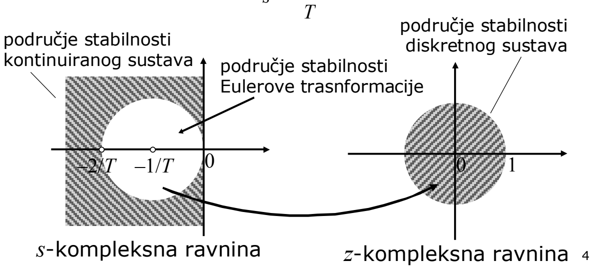
- Ova aproksimacija zove se Eulerova aproksimacija.
- Odgovarajuće preslikavanje u domeni tranformacija ($\mathcal{L}$ i $\mathcal{Z}$ transformacija) uvodimo kao

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}\big[f'(t)\big] &= sF(s) \\ \mathcal{Z}\left[\frac{f[n+1]-f[n]}{T}\right] &= \frac{z-1}{T}F(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow s \mapsto \frac{z-1}{T}$$

Eulerova transformacija

- Veza između kontinuiranog i diskretnog sustava je preslikavanje iz s-ravnine z-ravninu

$$s = \frac{z-1}{T}$$



4

Zadatak 1.

- Pomoću Eulerove transformacije uz $T = 1$ odredi diskretni sustav koji odgovara stabilnom kontinuiranom sustavu

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

Ispitaj da li je diskretni sustav stabilan. Odredi za koje vrijednosti T dobivamo stabilan, a za koje nestabilan diskretni sustav.

5

Zadatak 1.

- Odgovarajući diskretni sustav je

$$H(z) = \frac{1}{(z-1)/T + 3} = \frac{T}{z + 3T - 1}$$

- Za period otipkavanja $T = 1$ dobivamo

$$H(z) = \frac{1}{z+2}$$

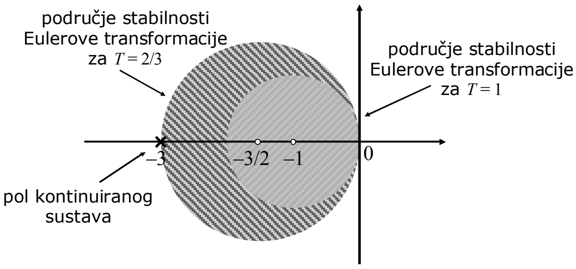
- Ovaj sustav ima jedan pol $z_1 = -2$ koji je izvan jedinične kružnice te je diskretni sustav nestabilan.
- Za stabilan diskretan sustav potreban je period otipkavanja T takav da je $|z| < 1$

$$|z| = |1 - 3T| < 1 \Rightarrow T < 2/3$$

6

Zadatak 1.

- Pogledajmo kako to izgleda u s-ravnini

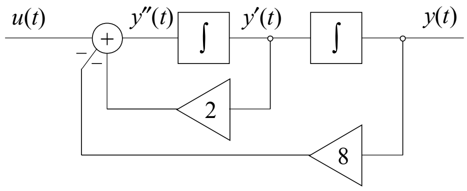


s-kompleksna ravnina

7

Zadatak 2.

- Za kontinuirani sustav zadan slikom pronaći odgovarajući diskretni sustav koristeći Eulerovu transformaciju uz $T = 1$. Ispitati stabilnost kontinuiranog i diskretnog sustava. Nacrtati dobiveni diskretni sustav.



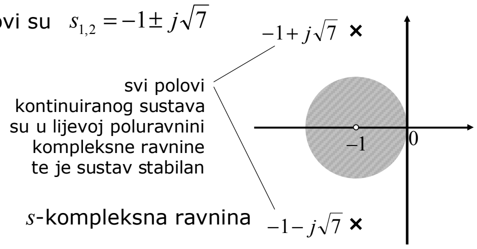
8

Zadatak 2. - stabilnost KS

- Prijenosnu funkciju kontinuiranog sustava određujemo prema slici

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 8}$$

- Polovi su $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{7}$



s-kompleksna ravnina

9

Zadatak 2. - Eulerova transformacija

- Odredimo sada diskretni sustav uz $T = 1$.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 8} \qquad s = \frac{z-1}{T} = z - 1$$

$$H(z) = \frac{1}{(z-1)^2 + 2(z-1) + 8}$$

$$= \frac{1}{z^2 - 2z + 1 + 2z - 2 + 8}$$

$$= \frac{1}{z^2 + 7} = \frac{1}{(z - j\sqrt{7})(z + j\sqrt{7})}$$

10

Zadatak 2. - stabilnost DS

- Dobiveni diskretni sustav je

$$H(z) = \frac{1}{(z - j\sqrt{7})(z + j\sqrt{7})}$$

$$z_{1,2} = \pm j\sqrt{7}$$

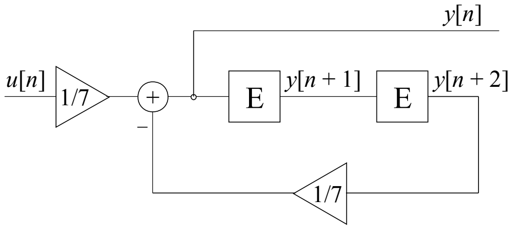
- Polovi diskretnog sustava su izvan jednične kružnice te je sustav nestabilan.
- Razlog tome je što je odabran takav period uzorkovanja T za koji su polovi kontinuiranog sustava izvan područja stabilnosti Eulerove transformacije.

11

Zadatak 2. - diskretni sustav

- Nacrtajmo još dobiveni diskretni sustav.

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + 7} \Rightarrow y[n+2] + 7y[n] = u[n]$$



12

Obrnuta Eulerova transformacija

- Kod Eulerove transformacije smo koristili operator E. Zamijenimo li ga s operatorom E^{-1} dobivamo obrnutu Eulerovu transformaciju (*Backward Euler*).

$$f'(nT) \approx \frac{f[n]-f[n-1]}{T} = \frac{f[n]-\mathrm{E}^{-1}\big[f[n]\big]}{T}$$

- Odgovarajuće preslikavanje u domeni tranformacija ($\mathcal{L}$ i $\mathcal{Z}$ transformacija) uvodimo kao

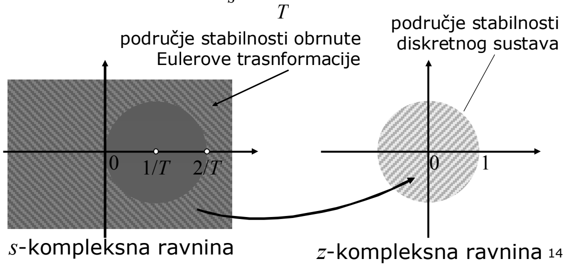
$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}\big[f'(t)\big] &= sF(s) \\ \mathcal{Z}\left[\frac{f[n]-f[n-1]}{T}\right] &= \frac{1-z^{-1}}{T}F(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow s \mapsto \frac{1-z^{-1}}{T}$$

13

Obrnuta Eulerova transformacija

- Veza između kontinuiranog i diskretnog sustava je preslikavanje iz s-ravnine z-ravninu

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$



14

Zadatak 3.

- Korištenjem obrnute Eulerove transformacije odrediti prijenosnu funkciju odgovarajućeg diskretnog sustava za zadani kontinuirani sustav

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

uz $T = 1$. Zadatak riješiti na dva načina:

1. izravno pomoću definicije obrnute Eulerove transformacije,
2. preslikavanjem između domena $\mathcal{L}$ i $\mathcal{Z}$ transformacija.

15

Zadatak 3.

- Po definiciji obrnute Eulerove transformacije je

$$y'(nT) \mapsto \frac{y[n] - \mathrm{E}^{-1}[y[n]]}{T} = y[n] - \mathrm{E}^{-1}[y[n]]$$

$$y''(nT) \mapsto \frac{1}{T^2}(1-\mathrm{E}^{-1})^2[y[n]] = y[n] - 2\,\mathrm{E}^{-1}[y[n]] + \mathrm{E}^{-2}[y[n]]$$

- Gornje izraze uvrštavamo u zadanu diferencijalnu jednadžbu

$$y''(nT) - 3y'(nT) + 2y(nT) = u(nT)$$

$$y[n] - 2\,\mathrm{E}^{-1}[y[n]] + \mathrm{E}^{-2}[y[n]] + 3\left(y[n] - \mathrm{E}^{-1}[y[n]]\right) + 2y[n] = u[n]$$

$$6y[n] - 5y[n-1] + y[n-2] = u[n]$$

16

Zadatak 3.

- Još preostaje na temelju jednadžbe odrediti $H(z)$ diskretnog sustava

$$6y[n] - 5y[n-1] + y[n-2] = u[n]$$

- Prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$H(z) = \frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2}{6z^2 - 5z + 1}$$

17

Zadatak 3.

- Na temelju jednadžbe

  $$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

  odredimo prijenosnu funkciju sustava

  $$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

- Vršimo zamjenu $s = (1 - z^{-1})/T = 1 - z^{-1}$

$$H(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2 + 3(1-z^{-1}) + 2} = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2} + 5 - 3z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2}{6z^2 - 5z + 1}$$

18

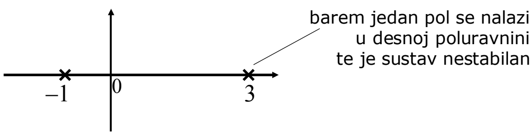
Zadatak 4.

- Zadan je kontinuirani sustav
$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = u(t)$$
Odrediti odgovarajući diskretni sustav korištenjem obrnute Eulerove transformacije uz $T = 1$. Odrediti impulsni odziv diskretnog sustava. Ispitati stabilnost oba sustava.

19

Zadatak 4. - stabilnost KS

- Iz jednadžbe sustava
$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = u(t)$$
odredimo prijenosnu funkciju sustava
$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 2s - 3} = \frac{1}{(s+1)(s-3)}$$
- Polovi su $s_1 = -1$ i $s_2 = 3$ te je sustav nestabilan.



s-kompleksna ravnina

20

Zadatak 4.

- Izvršimo sada transformaciju uz $T = 1$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 2s - 3} \qquad s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = 1 - z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2 - 2(1 - z^{-1}) - 3}$$
$$= \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2} - 5 + 2z^{-1}} = \frac{1}{z^{-2} - 4}$$
$$= \frac{z^2}{1 - 4z^2} = -\frac{1}{4}\frac{z^2}{(z - 1/2)(z + 1/2)}$$

21

Zadatak 4. - impulsni odziv

- Rastav na parcijalne razlomke je:

$$H(z) = -\frac{1}{4}\frac{z^2}{(z-1/2)(z+1/2)} = \alpha_0 + \alpha_1\frac{z}{z-1/2} + \alpha_2\frac{z}{z+1/2}$$

- Očito je $\alpha_0 = 0$. Određujemo α_1 i α_2:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{4}\frac{z-1/2}{z}\frac{z^2}{(z-1/2)(z+1/2)}\bigg|_{z=1/2} = -\frac{1}{8}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4}\frac{z+1/2}{z}\frac{z^2}{(z-1/2)(z+1/2)}\bigg|_{z=-1/2} = -\frac{1}{8}$$

- Impulsni odziv sustava je

$$h[n] = -\frac{1}{8}2^{-n} - \frac{1}{8}(-2)^{-n}, \quad n \geq 0$$

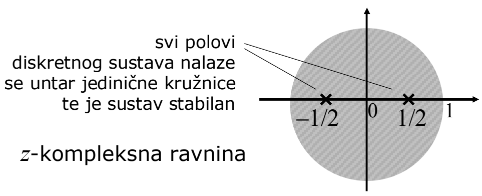
22

Zadatak 4. - stabilnost DS

- Dobiveni diskretni sustav je

$$H(z) = -\frac{1}{4}\frac{z^2}{(z-1/2)(z+1/2)}$$

- Polovi diskretnog sustava su $z_1 = 1/2$ i $z_2 = -1/2$ te je sustav stabilan.

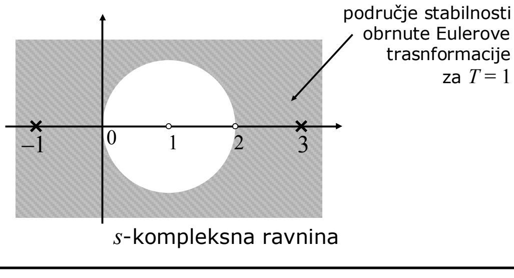


z-kompleksna ravnina

23

Zadatak 4. - stabilnost DS

- Sustav je stabilan jer se za zadani $T = 1$ svi polovi kontinuiranog sustava nalaze unutar područja stabilnosti obrnute Eulerove transformacije.



s-kompleksna ravnina

24

Bilinearna transformacija

- Bilinearna transformacija definirana je kao

$$f'(nT) \approx \frac{2}{T}\frac{f[n+1]-f[n]}{f[n+1]+f[n]} = \frac{2}{T}\frac{\mathrm{E}\left[f[n]\right]-f[n]}{\mathrm{E}\left[f[n]\right]+f[n]}$$

$$f^{(m)}(nT) \approx \frac{2}{T}\left(\frac{\mathrm{E}-1}{\mathrm{E}+1}\right)^{m}\left[f[n]\right]$$

- Odgovarajuće preslikavanje u domeni tranformacija ($\mathcal{L}$ i $\mathcal{Z}$ transformacija) uvodimo kao

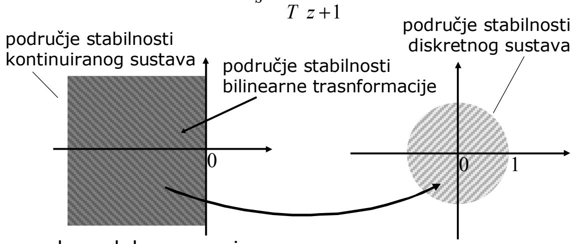
$$s \mapsto \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

25

Bilinearna transformacija

- Veza između kontinuiranog i diskretnog sustava je preslikavanje iz s-ravnine z-ravninu

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$



s-kompleksna ravnina

z-kompleksna ravnina

26

Metoda jednakih impulsnih odziva

- Metoda jednakih impulsnih odziva temelji se na ideji da impulsni odziv diskretnog sustava bude jednak otipkanom impulsnom odzivu kontinuiranog sustava. Dakle:

$h(t)$ otipkamo s periodom T
(zamjena t s nT)

dobijemo impulsni odziv
$h[n]$ diskretnog sustava

27

Zadatak 5.

- Zadan je kontinuirani sustav s prijenosnom funkcijom

$$H(s)=\frac{2}{s+1}$$

Odrediti

1. impulsni odziv diskretnog sustava dobivenog bilinearnom transformacijom uz $T=1$,
2. prijenosnu funkciju diskretnog sustava koji ima jednaki impulsni odziv kao zadani kontinuirani sustav u točkama $t=nT$.

28

Zadatak 5. - bilinearna transformacija

- Odredimo prvo transfer funkciju diskretnog sustava pomoću bilinearne transformacije

$$H(s)=\frac{2}{s+1} \qquad s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}=2\frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z)=\frac{2}{2\frac{z-1}{z+1}+1}=\frac{2z+2}{2z-2+z+1}=\frac{2z+2}{3z-1}$$

- Za određivanje impulsnog odziva potrebno je rastaviti $H(z)$ na parcijalne razlomke

$$H(z)=\frac{2z+2}{3z-1}=\frac{8z-6z+2}{3z-1}=\frac{8z}{3z-1}+\frac{-2(3z-1)}{3z-1}=-2+\frac{8}{3}\frac{z}{z-1/3}$$

29

Zadatak 5. - bilinearna transformacija

- Dobili smo prijenosnu funkciju sustava

$$H(z)=\frac{2z+2}{3z-1}=-2+\frac{8}{3}\frac{z}{z-1/3}$$

- Impulsni odziv sustava je

$$h[n]=-2\delta[n]+\frac{8}{3}3^{-n}$$

30

Zadatak 5. - jednaki impulsni odziv

- Odredimo sada diskretni sustav metodom jednakog impulsnog odziva
- Prvo određujemo impulsni odziv kontinuiranog sustava inverznom $\mathcal{L}$ transformacijom

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] = 2e^{-t}$$

- Impulsni odziv diskretnog sustava je

$$h[n] = h(nT) = 2e^{-nT} = 2\left(e^{-T}\right)^{n}$$

- Prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$H(z) = \mathcal{Z}\left[h[n]\right] = \mathcal{Z}\left[2e^{-nT}\right] = 2\frac{z}{z-e^{-T}}$$

31