SiS – Probni 2. MI – rješenja

by Shakan

1. zadatak

Ako je odziv LTI (linearnog vremenski nepromjenjivog) sustava $y[n]$ zadan kao $y[n] = u[n] * h[n]$, koliko bi tad iznosilo $u[n+1] * h[n+1]$?

a) $y[n-2]$

b) $y[n-1]$

c) $y[n]$

d) $y[n+1]$

e) $y[n+2]$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

U ovakvim će vam situacijama pomoći moja tablica s pravilima za konvoluciju s impulsom:

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$$

$$x(n) * (y(n) * z(n)) = (x(n) * y(n)) * z(n)$$

$$x(n) * (y(n) + z(n)) = x(n) * y(n) + x(n) * z(n)$$

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

$$x(n) * a\delta(n) = ax(n)$$

$$x(n - n_0) * \delta(n - n_1) = x(n - (n_0 + n_1))$$

$$z(n) = x(n) * y(n), x(n - n_x) * y(n - n_y) = z(n - (n_x + n_y))$$

Primjenimo predzadnju formulu:

$$y[n] = u[n] * h[n] = u[n]$$

$$u[n+1] * h[n+1] = u[n + (1+1)] = u[n+2] = y[n+2]$$

2. zadatak

Izraz $(\sin(t) * \delta(t+2))\delta(t-1)$ je jednak:

a) $\sin(3)\delta(t-1)$

b) $\sin(t+1)$

c) $\sin(t-1)$

d) $\sin(t)\delta(t-1)$

e) $\sin(t)\delta(t+1)$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Počinjemo od konvolucije, koja prema 6. pravilu tablice iz 1. zadatka iznosi:

$\sin(t) * \delta(t+2) = \sin(t+2)$

Time smo „požurili“ funkciju za 2, dakle, istodobno čitav graf funkcije pomakli za 2 ulijevo. No, sad funkciju $\sin(t+2)$ množimo s $\delta(t-1)$. Time zapravo „vadimo“ vrijednost funkcije $\sin(t+2)$ u trenutku $t=1$, koja iznosi $\sin(1+2) = \sin(3)$, te ju množimo s $\delta(t-1)$. Dakle, točan odgovor je $\sin(3)\delta(t-1)$.

3. zadatak

Zadana je pobuda $u(n) = 2(-1)^n$, a jedini korijeni karakterističnog polinoma diskretnog LTI sustava su -1 i -2. Partikularno rješenje $y_p(n)$ je:

a) $y_p(n) = n^{-2}(-1)^n$

b) $y_p(n) = n^{-1}(-1)^n$

c) $y_p(n) = n^2(-1)^n$

d) $y_p(n) = n^3(-1)^n$

e) $y_p(n) = ne^n$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Tablica za određivanje oblika partikularnog rješenja na osnovu funkcije pobude:

pobuda $(u(n))$	$y_p(n)$ za $q \neq 1$	$y_p(n)$ za $q = 1$
K	C	Cn^m
Kn	$C_1 n + C_0$	$n^m(C_1 n + C_2)$
$K_k n^k + ... + K_1 n + K_0$	$C_k n^k + ... + C_1 n + C_0$	$n^m(K_k n^k + ... + K_1 n + K_0)$
Kx^n	Cx^n (za $q \neq x$)	$Cn^m x^n$ (samo za $q = x$)

$m \rightarrow$ kratnost rješenja q

Iz ove tablice slijedi da bi oblik rješenja za $u(n) = 2(-1)^n$ trebao biti $y_p(n) = Cn(-1)^n$. Međutim, takvo rješenje nije ponuđeno, tako da je točan odgovor f).

4. zadatak

Zadana je jednadžba diferencija $y(n+2)+5y(n+1)+6y(n)=8u(n+1)+4u(n)$ uz $u(n)=(\frac{1}{2})^n$.

Partikularno rješenje $y_p(n)$ je:

a) $y_p(n)=\frac{32}{35}(-\frac{1}{4})^n$

b) $y_p(n)=\frac{16}{19}(\frac{1}{2})^n$

c) $y_p(n)=\frac{32}{35}(\frac{1}{2})^n$

d) $y_p(n)=\frac{32}{45}(\frac{1}{2})^n$

e) $y_p(n)=\frac{32}{45}(-\frac{1}{2})^n$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Najprije moramo odrediti korjene karakteristične jednadžbe kako bi utvrdili točan oblik partikularnog rješenja:

$$y(n+2)+5y(n+1)+6y(n)=8u(n+1)+4u(n)$$

$$q^2+5q+6=0$$

$$q_1=-2 \quad q_2=-3$$

Iz toga proizlazi da je partikularno rješenje, s obzirom na pobudu i korjene jednadžbe, oblika

$$u(n)=(\frac{1}{2})^n \Rightarrow y_p(n)=C(\frac{1}{2})^n.$$

Uvrštavamo $y_p(n)$ u jednadžbu kako bismo odredili konstantu:

$$C(\frac{1}{2})^{n+2}+5C(\frac{1}{2})^{n+1}+6C(\frac{1}{2})^n=8(\frac{1}{2})^{n+1}+4(\frac{1}{2})^n$$

$$\frac{1}{4}C+\frac{5}{2}C+6C=\frac{8}{2}+4$$

$$C=\frac{32}{35}$$

Konačno,

$$y_p(n)=\frac{32}{35}(\frac{1}{2})^n$$

5. zadatak

Neka je diferencijalna jednadžba oblika $3y''(t)+2y'(t)=3\sin(3t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Pretpostavljeno partikularno rješenje biti će oblika:

a) $\sin(t)$

b) $C\cos(2t)$

c) $t^3(3\sin(3t)+3\cos(3t))$

d) $3\sin(t+\frac{\pi}{2})$

e) $C_1\sin(3t)+C_2\cos(3t)$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Kratko i jasno, pravilo glasi da ako je pobuda oblika $K\sin(\omega t)$, partikularno rješenje ima oblik $C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t)$.

6. zadatak

Kontinuirani LTI sustav prvog reda zadan je diferencijalnom jednadžbom $y'(t) + 2y(t) = u(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Na ulaz sustava $y'(t) + 2y(t) = u(t)$ dovedena je pobuda $u(t) = 3e^{-2t}$. Vrijednost odziva sustava y(t) u trenutku t = 1 uz početni uvjet y(0) = 1 iznosi:

a) $-4e^{-2}$

b) $-2e^{-2}$

c) e^{-2}

d) $2e^{-2}$

e) $4e^{-2}$

f) Niˇsta od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Iz jednadžbe nalazimo karakterističnu jednadžbu:

$y'(t) + 2y(t) = u(t)$

$s + 2 = 0 \Rightarrow s = -2$

Kako je pobuda $u(t) = 3e^{-2t}$, zbog toga što je -2 jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe partikularno rješenje je oblika $y_p(t) = Kte^{-2t}$. Uvrštavamo ovo rješenje u polaznu jednadžbu te dobivamo:

$y'(t) + 2y(t) = u(t)$

$(Kte^{-2t})' + 2Kte^{-2t} = 3e^{-2t}$

$Ke^{-2t} - 2Kte^{-2t} + 2Kte^{-2t} = 3e^{-2t}$

$K = 3$

Iz toga slijedi da je $y_p(t) = 3te^{-2t}$, pa je ukupni odziv oblika

$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-2t} + 3te^{-2t}$

Određujemo konstantu preko početnog uvjeta $y(0) = 1$:

$y(0) = C + 0 = 1$

pa je ukupan odziv jednak:

$y(t) = e^{-2t} + 3te^{-2t}$

U trenutku $t = 1$, ukupni odziv iznosi:

$y(1) = e^{-2} + 3e^{-2} = 4e^{-2}$

7. zadatak

Zadan je kontinuirani LTI sustav. Ako je odziv na pobudu $u(t) = t\mu(t)$ jednak $y(t) = (2e^{-t} + te^{-t} - 2)\mu(t)$, nađite impulsni odziv sustava. Pretpostavite da su početni uvjeti jednaki nuli.

a) $te^{-t}\mu(t) - 2\delta(t)$

b) $te^{-t}\mu(t) - \delta(t)$

c) $e^{-t}\mu(t) - \delta(t)$

d) $t^2 e^{-t}\mu(t) - 2\delta(t)$

e) $te^{-t}\mu(t) + 2\delta(t)$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Kako je sustav linearan, bilo za koji linearni operator L vrijedi:

$$y(t) = S(u(t))$$

$$Ly(t) = LS(u(t)) = S(Lu(t))$$

Operatori deriviranja ($\frac{d}{dt}$) i integriranja($\int dt$) su linearni, tako da ih možemo iskoristiti za dobivanje impulsnog odziva na temelju spomenutog svojstva.

Ulaz je sustava, ako bolje pogledamo, zapravo jedinična rampa, $u(t) = t\mu(t)$, koja je, prema definiciji, dvaput integriran jedinični impuls $\delta(t)$, uz uvijet da su svi signali kauzalni. Prema tome, mi možemo iz odziva na jediničnu rampu dobiti impulsni odziv tako što dva puta deriviramo odziv na jediničnu rampu:

$$u(t) = t\mu(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) = \frac{d^2}{dt^2}t\mu(t) = \frac{d}{dt}(\mu(t) + \underbrace{t\delta(t)}_{0}) = \delta(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{d^2}{dt^2}S(u(t)) = S(\frac{d^2}{dt^2}u(t)) = S(\delta(t)) = h(t)$$

Sada dva puta deriviramo lijevu stranu:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left[(2e^{-t} + te^{-t} - 2)\mu(t)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[(-e^{-t} - te^{-t})\mu(t) + \underbrace{(2e^{-0} + 0 \cdot e^{-0} - 2)\delta(t)}_{0}\right] =$$

$$= te^{-t}\mu(t) + (-e^{-t} - te^{-t})\delta(t) =$$

$$= te^{-t}\mu(t) + (-e^{0} - 0e^{0})\delta(t) = te^{-t}\mu(t) - \delta(t) = h(t)$$

$$uputa: f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

8. zadatak

Zadan je kontinuiran LTI sustav $y'(t)+2y(t)=3u'(t)+2u(t)$. Ukoliko sustav pobudimo signalom $\mu(t)$ koliko iznosi početni uvjet $y(0^+)$ ako je vrijednost početnog uvjeta $y(0^-)=4$

a) $y(0^+)=0$

b) $y(0^+)=6$

c) $y(0^+)=7$

d) $y(0^+)=1$

e) $y(0^+)=y(0^-)=4$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Kako bismo mogli izračunati početni uvjet $y(0^+)$, potrebno je integrirati jednadžbu sustava u granicama od 0^- do *t* (pritome zamjenjujemo varijable $t=\tau$ kako bismo izbjegli zabunu prilikom integriranja):

$$y'(t)+2y(t)=3u'(t)+2u(t)\Big|\int_{0^-}^{t} d\tau$$

$$\int_{0^-}^{t} y'(\tau)d\tau+\int_{0^-}^{t} 2y(\tau)d\tau=\int_{0^-}^{t} 3u'(\tau)d\tau+\int_{0^-}^{t} 2u(\tau)d\tau$$

$$y(t)-y(0^-)+2\int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau=3(u(t)-u(0^-))+2\int_{0^-}^{t} u(\tau)d\tau$$

Ako uzmemo $t=0^+$, te uvrstimo $u(t)=\mu(t)$, dobivamo sljedeće:

$$y(0^+)-y(0^-)+\underbrace{2\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau}_{0}=3(\mu(0^+)-\underbrace{\mu(0^-)}_{0})+\underbrace{2\int_{0^-}^{0^+} \mu(\tau)d\tau}_{0}$$

$$y(0^+)-y(0^-)=3\underbrace{\mu(0^+)}_{1}=3$$

Iz toga konačno računamo:

$$y(0^+)=3+y(0^-)=3+4=7$$

9. zadatak

Kontinuirani sustav zadan je matricama $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$. Ukoliko sustav prevedemo u ulazno izlaznu formu koliki je koeficijent uz $y'(t)$?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4
f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:
LTI sustav drugog reda ima sljedeći oblik zapisa s varijablama stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

Ako uvrstimo zadane vrijednosti matrica, imamo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

Počinjemo tako da najprije izrazimo $y(t)$:

$$y(t) = 1 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 0 \cdot u(t) = x_1(t)$$

Iz toga nam direktno slijedi:

$$y'(t) = \dot{x}_1(t)$$

Sada izražavamo $\dot{x}_1(t)$, na osnovi gornje jednadžbe:

$$\dot{x}_1(t) = 0 \cdot x_1(t) + 1 \cdot x_2(t) + 0 \cdot u(t) = x_2(t)$$

Iz toga slijedi veza:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = y''(t)$$

Sada računamo $\dot{x}_2(t)$:

$$\dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 2x_2(t) + u(t)$$

Ovdje uvrštavamo:

$$y(t) = x_1(t)$$

$$y'(t) = x_2(t)$$

$$y''(t) = \dot{x}_2(t)$$

Te konačno:

$y''(t) = -3y(t) - 2y'(t) + u(t)$
$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = u(t)$
$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u(t)$
Traženi koeficijent uz $y'(t)$ je $a = a_1 = 2$.

Ovo može i na brži način:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

Ako uzmemo:
$T = a_{11} + a_{22}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

onda karakterističnu jednadžbu možemo pisati kao:
$s^2 - Ts + \Delta = 0$
iz čega se lagano vidi da vrijedi:
$a_1 = -T$
$a_2 = \Delta$
Prema tome, $a_1 = -T = -(0 + (-2)) = 2$.

10. zadatak
Zadan je diskretan LTI sustav trećeg reda opisan jednadžbom
$y(n+3)+5y(n+2)+11y(n+1)+6y(n)=u(n)$. Ako su početni uvjeti *y(0) = y(1) = y(2) = 0* odredite vrijednost odziva *y(n)* nepobudenog sustava u koraku *n = 100*?
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4
f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:
Jedna tipična caka: $u(n)=0$ i sva početna stanja također, što zapravo predstavlja mrtvi sustav, koji na izlazu daje uvijek $y(n)=0$. Onaj tko ne zna ovo bi se namučio da riješi ovaj sustav (3 stupnja!).

11. zadatak
Za linearni sustav opisan diferencijalnom jednadžbom $\ddot{y}(t)+a\dot{y}(t)+y(t)=u(t)$ odredite parametar *a* tako da sustav daje neprigušen odziv.
a) a = −2
b) a = −1
c) a = 0
d) a = 1
e) a = 2
f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:
Za sustav zapisan u obliku $\ddot{y}(t)+2\zeta\omega_n\dot{y}(t)+\omega_n^2y(t)=A\omega_n^2u(t)$ se kaže da daje neprigušen odziv ako je $\zeta=0$. Ako usporedimo dva zapisa, vidimo da vrijedi $a=2\zeta\omega_n$, iz čega slijedi da, ako sustav ima neprigušen odziv, vrijedi $a=2\cdot0\cdot\omega_n=0$.

12. zadatak

Odaberi točnu tvrdnju!

a) Kontinuirani LTI sustav kojeg smo pobudili harmonijskom pobudom frekvencije koja odgovara jednostrukoj vlastitoj
frekvenciji sustava koji pokazuje linearni porast amplitude titranja nužno ima polove u desnoj poluravnini.

b) Trajektorije u ravnini stanja nepobudenog stabilnog kontinuiranog LTI sustava uvijek teže k nuli kada t teži k beskonačnosti.

c) Trajektorija u ravnini stanja povezana s impulsnim odzivom stabilnog kontinuiranog LTI sustava 5 reda bez obzira na izbor varijabli stanja uvijek započinje u točci (1, 2, 3, 4, 5) i završava u nuli.

d) Kontinuirani LTI sustav n-tog reda koji ima strogo manje od n različitih polova si (karakterističnih frekvencija) je asimptotski stabilan ako je Re{si} = 0.

e) Impulsni odziv kontinuiranog LTI sustava opisanog u prostoru stanja dan je izrazom

$$h(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ Be^{Dt}+C\delta(t), & t\geq 0 \end{cases}.$$

f) Sve tvrdnje su točne!

13. zadatak

Diskretni LTI sustav drugog reda opisan je jednadžbom diferencija

$y(n)-\frac{5}{2}y(n-1)+y(n-2)=u(n)$. Ako je odziv nepobuđenog sustava $y(n)=2^{n}+2^{-n}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, odredite početna stanja $y(-2)$ i $y(-1)$ sustava.

a) $y(-2)=\frac{17}{4}, \quad y(-1)=\frac{10}{4}$

b) $y(-2)=\frac{8}{4}, \quad y(-1)=\frac{10}{4}$

c) $y(-2)=\frac{10}{4}, \quad y(-1)=\frac{17}{4}$

d) $y(-2)=\frac{10}{4}, \quad y(-1)=\frac{8}{4}$

e) $y(-2)=0, \quad y(-1)=0$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Ako imamo ponuđeno rješenje nepobuđenog sustava $y(n)=2^{n}+2^{-n}$ (uz $u(n)=0$, dakako), početna stanja ćemo dobiti uvrštavanjem $n=-1$ za $y(-1)$:

$$y(-1)=2^{1}+2^{-1}=\frac{5}{2}=\frac{10}{4},$$

te $n=-2$ za $y(-2)$:

$$y(-2)=2^{2}+2^{-2}=\frac{17}{4}.$$

Točan odgovor je, dakle, a).

14. zadatak

Nadite impulsni odziv sustava opisanog jednadžbom

a) $h(n) = \delta(n)$

b) $h(n) = \mu(n-1)$

c) $h(n) = \mu(n)$

d) $h(n) = \mu(n+1)$

e) $h(n) = \mu(n+m)$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Zadana nam je jednadžba sustava:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} u(m)$$

te pobuda, tj. impuls:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Impulsni odziv će prema tome biti jednak (kada uvrstimo vrijednost $\delta(m)$):

$$n < 0, \quad h(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m) = \underbrace{... + \delta(n-2) + \delta(n-1) + \delta(n)}_{0} = 0$$

$$n \geq 0, \quad h(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m) = \underbrace{... + \delta(-2) + \delta(-1)}_{0} + \underbrace{\delta(0)}_{1} + \underbrace{\delta(1) + \delta(2) + ... + \delta(n)}_{0} = 1$$

Iz dobivenih rezultata zaključujemo da impulsni odziv ima oblik:

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow h(n) = \mu(n)$$

15. zadatak

Zadan je diskretni sustav $y(n+2)-\frac{8}{5}y(n+1)+\frac{32}{25}y(n)=u(n)$. Odredite karakteristične frekvencije i ispitajte stabilnost sustava!

a) $q_1=\frac{4}{5}+j\frac{4}{5}\quad q_2=\frac{4}{5}-j\frac{4}{5}$, stabilan je

b) $q_1=-\frac{4}{5}+j\frac{4}{5}\quad q_2=-\frac{4}{5}-j\frac{4}{5}$, stabilan je

c) $q_1=\frac{4}{5}+j\frac{4}{5}\quad q_2=\frac{4}{5}-j\frac{4}{5}$, nestabilan je

d) $q_1=-\frac{4}{5}+j\frac{4}{5}\quad q_2=-\frac{4}{5}-j\frac{4}{5}$, nestabilan je

e) $q_1=-\frac{4}{5}+j\frac{4}{5}\quad q_2=-\frac{4}{5}-j\frac{4}{5}$, sustav je na granici stabilnosti

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Najprije odredimo karakterističnu jednadžbu:

$$y(n+2)-\frac{8}{5}y(n+1)+\frac{32}{25}y(n)=u(n)$$

$$q^2-\frac{8}{5}q+\frac{32}{25}=0$$

Karakteristične frekvencije su:

$$q_{1/2}=\frac{\frac{8}{5}\pm\sqrt{\frac{64}{25}-4\cdot\frac{32}{25}}}{2}=\frac{4}{5}\pm j\frac{4}{5}$$

Stabilnost ispitujemo tako što pronađemo $|q|$, tj. modul frekvencije. Ukoliko je on manji od 1, sustav je asimptotski stabilan, ukoliko je jednak jedan (a nije dvostruka frekvencija, tada je nestabilan), onda je granično stabilan, a ako je veći od 1, sustav je nestabilan. Računamo $|q|$:

$$|q|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{5}$$

Dobijamo da je

$|q|=\frac{4\sqrt{2}}{5}>1$, pa je sustav nestabilan.

16. zadatak

Sustav je zadan jednadžbom diferencija ay $ay(n)-2y(n-1)+3y(n-2)=u(n)-u(n-2)$. Odredite koeficijent a ako znate da sustav pobuđen signalom u(n) = {. . . , 2,–2, 2,–2, $\underline{2}$,–2, 2,–2, . . .} daje odziv y(n) = {. . . , 1, 1, 1, 1, $\underline{1}$, 1, 1, 1, . . .}. Podcrtani element je vrijednost u koraku $n=0$.

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

U jednadžbu $ay(n)-2y(n-1)+3y(n-2)=u(n)-u(n-2)$ uvrstimo vrijednosti ulaza i izlaza u trenutku $n=0$. Dobivamo sljedeće:

$ay(0)-2y(-1)+3y(-2)=u(0)-u(-2)$

$a-2+3=2-2$

$a=-1$

17. zadatak

Zadan je diskretni LTI sustav. Ako znate da odziv sustava na jedinični skok $\mu(n)$ iznosi $y(n) = n\mu(n)$ nađite impulsni odziv sustava!

a) $h(n) = \mu(n-2)$

b) $h(n) = \mu(n-1)$

c) $h(n) = \mu(n)$

d) $h(n) = \mu(n+1)$

e) $h(n) = \mu(n+2)$

f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Vrijedi:

$y(n) = S(\mu(n)) = n\mu(n)$

$\delta(n) = \mu(n) - \mu(n-1)$

Također, zbog linearnosti sustava vrijedi:

$h(n) = S(\delta(t)) = S(\mu(n) - \mu(n-1)) = S(\mu(n)) - S(\mu(n-1)) =$

$= y(n) - y(n-1) = n\mu(n) - (n-1)\mu(n-1) =$

$= n(\mu(n) - \mu(n-1)) + \mu(n-1) = \underbrace{n\delta(n)}_{0} + \mu(n-1) =$

$= \mu(n-1)$

18. zadatak

Zadan je sustav drugog reda $y''(t)+12y'(t)+4y(t)=3u(t)$. Odredite stupanj prigušenja i neprigušenu prirodnu frekvenciju!

a) $\zeta=6, \quad \omega_n=-2$

b) $\zeta=-3, \quad \omega_n=2$

c) $\zeta=6, \quad \omega_n=2$

d) $\zeta=3, \quad \omega_n=4$

e) $\zeta=3, \quad \omega_n=2$

f) Niˇsta od navedenoga!

Rješenje i objašnjenje:

Najprije iz jednadžbe odredimo koeficijente:

$$\left.\begin{array}{l} y''(t)+12y'(t)+4y(t)=3u(t) \\ y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=b_0u(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1=12 \\ a_2=4 \end{array}\right.$$

Zatim iz formula dobivamo stupanj prigušenja ζ i prirodnu frekvenciju ω_n:

$$a_2=\omega_n^2 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{a_2}=\sqrt{4}=2$$

$$a_1=2\zeta\omega_n \Rightarrow \zeta=\frac{a_1}{2\omega_n}=\frac{12}{2*2}=3$$

19. zadatak
Zadan je LTI sustav. Ukoliko konstante homogenog rješenja pronadete direktno iz početnih uvjeta našli ste:
a) mirni odziv sustava
b) odziv nepobudenog sustava
c) prirodni odziv sustava
d) prisilni odziv sustava
e) partikularno rješenje
f) Ništa od navedenog!

Rješenje i objašnjenje:
Iako se to da lako zapamtiti, objasnit ću još jednom, na primjeru LTI sustava 2. reda.
$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u(t)$
Ukoliko je sustav nepobuđen, vrijedi da je:
$b_0 = 0$
pa jednadžba sustava poprima oblik:
$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = 0$
što je zapravo homogena diferencijalna jednadžba, čije je rješenje jednako
$y(t) = y_h(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ stoga što ne postoji pobuda, dakle niti partikularno rješenje. To znači da se rješenje može dobiti izravnim određivanjem konstanti u homogenom rješenju pomoću zadanih početnih uvjeta.

20. zadatak

Odaberite asimptotski stabilan sustav!

a) $y''(t)+2y'(t)+20y(t)=u(t)$

b) $y''(t)+26y(t)=u(t)$

c) $y''(t)+y(t)=u(t)$

d) $y''(t)-2y'(t)+26y(t)=u(t)$

e) $y''(t)-2y'(t)-26y(t)=u(t)$

f) Ništa od navedenog!

Rješenje i objašnjenje:

Stabilnost sustava određuje realni dio rješenja karakretistične jednadžbe, $-\zeta\omega_n$. Ako je $-\zeta\omega_n$ pozitivan broj, sustav je nestabilan; ako je jednak nuli, sustav je granično stabilan; ako je manji od nule, sustav je asimptotski stabilan. Iznimka ovoga pravila je slučaja kada su rješenja dvostruka (slučaj kada je npr. $y''(t)+2y'(t)+y(t)=u(t)$, gdje je hom. rješenje oblika $y_h(t)=(C_1n+C_2)e^{st}$, pa amplituda raste linearno neovisno o karakterističnoj frekvenciji (zbog *n*).

Realni dio korjena računamo iz formule:

$$a_1=2\zeta\omega_n \Rightarrow -\zeta\omega_n=-\frac{a_1}{2}$$

gdje je a_1 koeficijent u zapisu:

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=b_0u(t)$$

Dakle, sustav je asimptotski stabilan ako vrijedi:

$$-\frac{a_1}{2}<0$$

$$a_1>0$$

Kao što se vidi, jedini ponuđeni odgovor koji zadovoljava ovaj uvjet je a).