Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

21. travnja 2008.

Impulsni odziv linearnih diskretnih sustava 1

- odziv vremenski diskretnog sustava s jednim ulazom i jednim izlazom, *SISO* sustav,

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni,$
  $\forall n \in Cjelobrojni$

$$
\begin{aligned}
x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\
y(n) &= Cx(n) + Du(n)
\end{aligned}
$$

je

$$
y(n) = \begin{cases} Cx(0) + Du(0), & n = 0 \\ CA^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}
$$

odnosno, za miran sustav $x(0) = 0$,

$$
y(n) = \begin{cases} Du(0), & n = 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}
$$

Impulsni odziv linearnih diskretnih sustava 2

- pobudimo li, mirni, *SISO* sustav s jediničnim impulsom $u(n) = \delta(n)$ odziv je:

$$y(n) = \begin{cases} D\delta(0), & n = 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}B\delta(m) + D\delta(n), & n > 0 \end{cases}$$

odnosno, uz oznaku $h(n) = y(n)$,

$$h(n) = \begin{cases} D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n > 0 \end{cases}$$

odnosno

$$h(n) = CA^{n-1}B\mu(n-1) + D\delta(n), \quad n \geq 0$$

- odziv mirnog sustava, $x(0) = 0$, na pobudu jediničnim impulsom $u(n) = \delta(n)$ nazivamo impulsni odziv i označavamo kao $h(n)$

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- neka je vremenski diskretan sustav zadan s jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.75y(n-1) = u(n)$$

- ovaj sustav možemo prikazati s modelom s varijablama stanja
- sustav je prvog reda i potrebna je samo jedna varijabla stanja
- izaberemo $x(n) = y(n-1)$ pa su jednadžba stanja i izlazna jednadžba

$$x(n+1) = \underbrace{0.75}_{A} x(n) + \underbrace{1}_{B} \cdot u(n)$$

$$y(n) = \underbrace{0.75}_{C} x(n) + \underbrace{1}_{D} u(n)$$

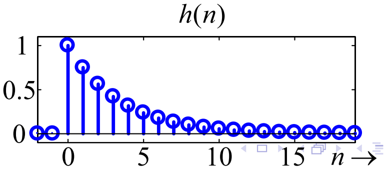
Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- prije je pokazano da je impulsni odziv mirnog sustava, $x(0) = 0$, dakle odziv na $u(n) = \delta(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n > 0 \end{cases}$$

za $A = 0.75, B = 1, C = 0.75, D = 1$

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 0.75 \cdot 0.75^{n-1} \cdot 1 = 0.75^n, & n > 0 \end{cases}$$



Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- do istog rezultata smo mogli doći i izravnim rješavanjem polazne jednadžbe za $y(-1) = h(-1) = 0$ i $u(n) = \delta(n)$, bilo kojom metodom
- ovdje ćemo to učiniti metodom izračunavanja korak po korak

$$
\begin{aligned}
y(n) &= 0.75y(n-1) + \delta(n) \\
h(n) &= 0.75h(n-1) + \delta(n)
\end{aligned}
$$

za n=0,1,2,...

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 0.75h(-1) + 1 = 1 \\
h(1) &= 0.75h(0) + 0 = 0.75 \cdot 1 = 0.75 \\
h(2) &= 0.75h(1) + 0 = 0.75 \cdot 0.75 = 0.75^2 \\
h(3) &= 0.75h(2) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^2 = 0.75^3 \\
h(4) &= 0.75h(3) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^3 = 0.75^4 \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
h(n) &= 0.75h(n-1) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^{n-1} = 0.75^n
\end{aligned}
$$

Konvolucijska sumacija 1

- za

$$h(n) = \begin{cases} D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n > 0 \end{cases}$$

odnosno

$$h(n) = CA^{n-1}B\mu(n-1) + D\delta(n), \quad n \geq 0$$

odziv mirnog *SISO* sustava transformira se u

$$y(n) = \begin{cases} Du(0), & n = 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} CA^{n-1-m}Bu(m)\mu(n-1) + Du(n), \quad n \geq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\left[CA^{n-1-m}B\mu(n-1) + \delta(n-m)D\right]}_{h(n-m)} u(m), \quad n \geq 0$$

Konvolucijska sumacija 2

- pa je, finalno,

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)u(m), \quad n \geq 0$$

- linearni mirni sustav, $x(n) = 0$, potpuno je opisan svojim impulsnim odzivom $h(n)$
- dakle, poznavanjem $h(n)$, moguće je odrediti odziv mirnog linearnog sustava na bilo koju pobudu

Konvolucijska sumacija 3

- za miran *SISO* sustav definiran svojim impulsnim odzivom i

$$
\begin{aligned}
u(n) &= 0, \quad \forall n < 0 \\
h(n) &= 0, \quad \forall n < 0
\end{aligned}
$$

konvolucijska sumacija je

$$
y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m), \quad n \in Cjelobrojni
$$

- supstitucijom $k = n - m$ slijedi alternativni prikaz

$$
y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k), \quad n \in Cjelobrojni
$$

- pa vrijedi

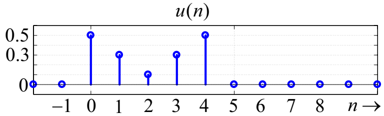
$$
y = h * u = u * h \quad \text{odnosno} \quad y(n) = (h*u)(n) = (u*h)(n)
$$

Konvolucijska sumacija 4

- ovdje se izvodi izraz za konvolucijsku sumaciju *SISO* linearnog sustava i na drugi način
- pokazuje se kako se odziv vremenski stalnog linearnog sustava može promatrati kao linearna kombinacija impulsnih odziva
- pobudni signal se može prikazati kao niz impulsa pa će onda odziv linearnog sustava biti linearna kombinacija impulsnih odziva na svaki od ovih impulsa

Diskretni signal kao suma jediničnih impulsa

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa

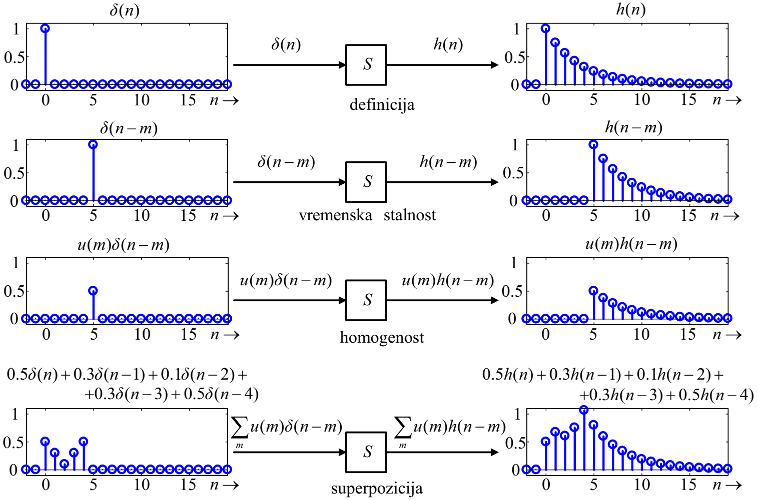


- uz definiciju za pomak jediničnog impulsa možemo pisati

$$u(n) = .5\delta(n) + .3\delta(n-1) + .1\delta(n-2) + .3\delta(n-3) + .5\delta(n-4)$$

- razmotrimo odziv linearnog, vremenski stalnog, diskretnog sustava na niz impulsa

Odziv sustava na niz impulsa



Slika 1: Konvolucijska sumacija *SISO* sustava

Konvolucijska sumacija

- diskretni signal možemo prikazati kao zbroj niza impulsa

$$u = \ldots + u(-1)\delta(n+1) + u(0)\delta(n) + u(1)\delta(n-1) +$$
$$+ u(2)\delta(n-2) + u(3)\delta(n-3) \ldots \Rightarrow$$
$$u = \textstyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$$

- odziv sustava na jednični impuls $\delta(n)$ je $h(n)$, pa za linearni sustav vrijedi svojstvo homogenosti

$$u(m)\delta(n-m) \rightarrow u(m)h(n-m)$$

- odziv na pobudu nizom u je

$$y = \ldots + u(-1)h(n+1) + u(0)h(n) + u(1)h(n-1) +$$
$$+ u(2)h(n-2) + u(3)h(n-3) \ldots \Rightarrow$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m)$$

Konvolucijska sumacija

- prije je pokazano da je konvolucijska sumacija definirana za $\forall n \in \mathit{Cjelobrojni}$ kao

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m)$$

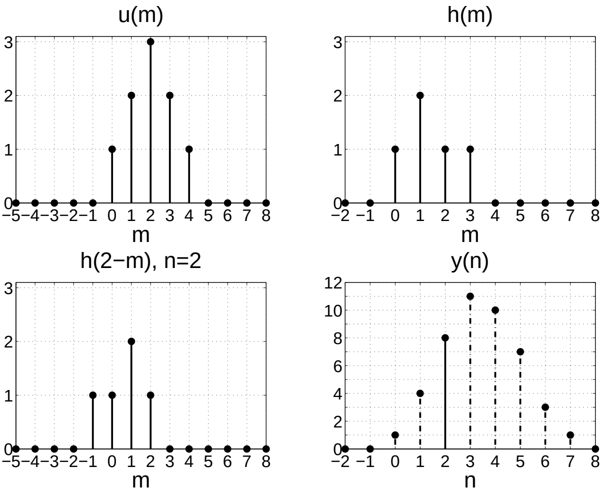
- za kauzalne $u(n)$ i $h(n)$ konvolucijska sumacija se reducira u

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m), \qquad n \geq 0$$

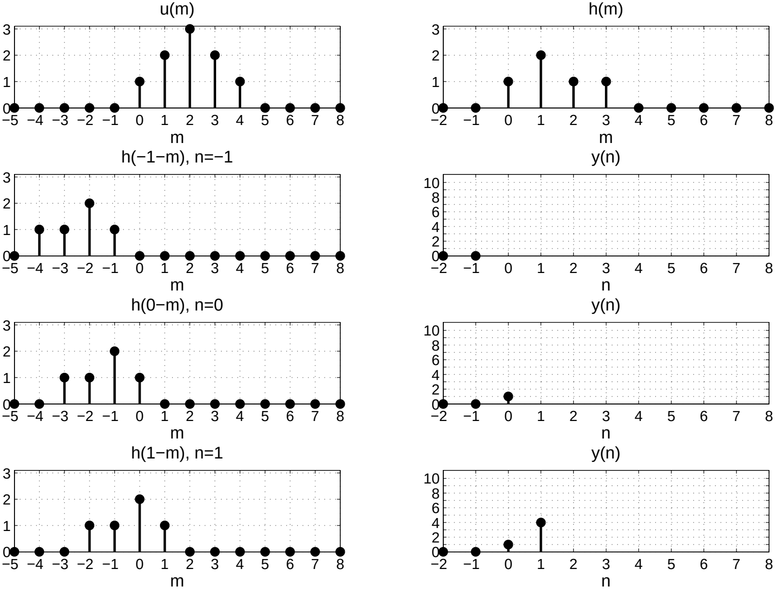
  i predstavlja odziv mirnog linearnog vremenski stalnog sustava

Primjer konvolucijske sumacije

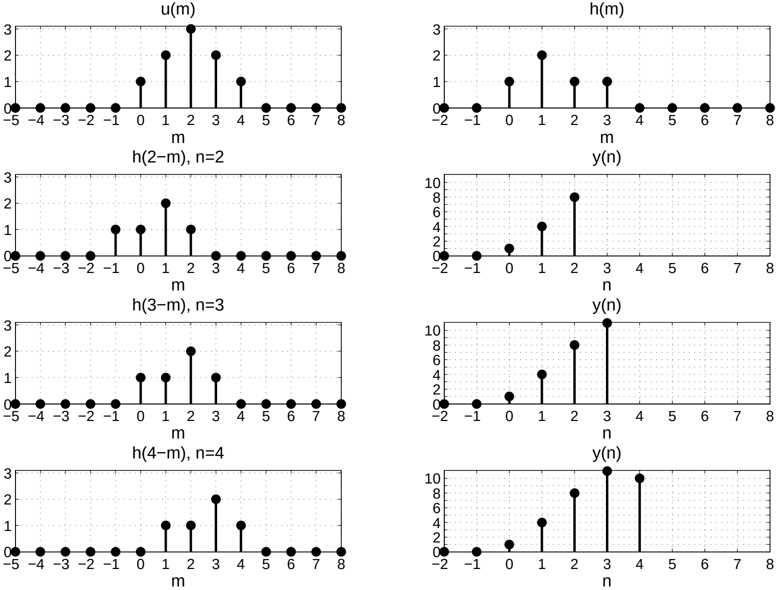
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m),$$
$$\text{za } n = 2 \Rightarrow y(2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(2-m)$$



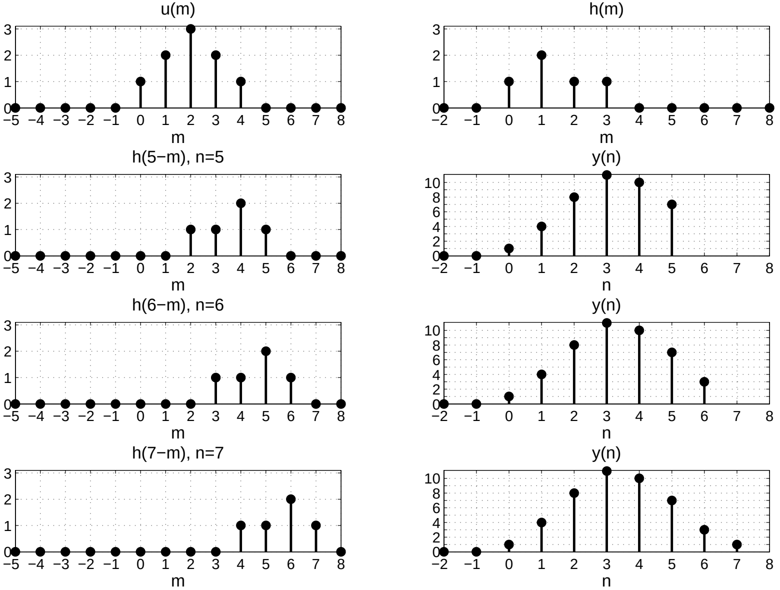
Primjer konvolucijske sumacije



Primjer konvolucijske sumacije



Primjer konvolucijske sumacije



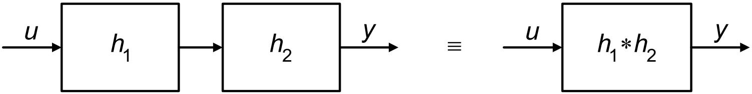
Svojstva konvolucijske sumacije – komutativnost i asocijativnost

- već je pokazano da vrijedi komutativnost

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)u(n-m)\Leftrightarrow u*h=h*u$$

- svojstvo asocijativnosti

$$y(n)=((u*h_1)*h_2)(n)=(u*(\underbrace{h_1*h_2}_{h}))(n)=(u*h)(n)$$



Slika 6: Konvolucijska sumacija – asocijativnost

Svojstva konvolucijske sumacije – asocijativnost

- izvod svojstva asocijativnosti za linearni, vremenski stalni, diskretni sustav

$$y(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) h_1(j-m) \right] h_2(n-j) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_1(j-m) h_2(n-j) \right]$$

za $k = j - m \Rightarrow$

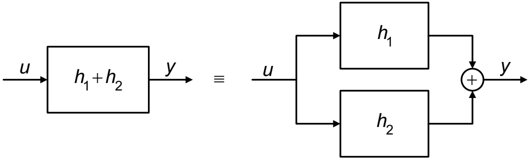
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) h_2(n-m-k) \right]}_{h(n-m)}$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) h(n-m)$$

Svojstva konvolucijske sumacije – distributivnost

- svojstvo distributivnosti za linearni, vremenski stalni, diskretni sustav

$$y(n) = (u * (h_1 + h_2))(n) = (u * h_1)(n) + (u * h_2)(n)$$



Slika 7: Konvolucijska sumacija – distributivnost

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\Big[h_1(n-m) + h_2(n-m)\Big]$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h_1(n-m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h_2(n-m)$$

Konvolucija proizvoljnih signala

- dosadašnja razmatranja konvolucijske sumacije odnosila su se na jedan od mogućih opisa sustava
- konvolucijsku sumaciju možemo definirati i za proizvoljne signale, pa pišemo

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = (x_1 * x_2)(n)$$

- već prije izvedena svojstva konvolucijske sumacije vrijede i za proizvoljne signale:
  - komutativnost:
    $(x_1 * x_2)(n) = (x_2 * x_1)(n)$
  - distributivnost:
    $(x_1 * (x_2 + x_3))(n) = (x_1 * x_2)(n) + (x_1 * x_3)(n)$
  - asocijativnost:
    $(x_1 * (x_2 * x_3))(n) = ((x_1 * x_2) * x_3)(n)$

Svojstva konvolucijske sumacije – pomak

- za $y(n) = (x_1 * x_2)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$, te uz oznake $(D_p(x_1))(n) = x_1(n-p)$ i $(D_q(x_2))(n) = x_2(n-q)$, vrijedi svojstvo pomaka

$$(D_p(x_1) * D_q(x_2))(n) = y(n-p-q)$$

- izvod svojstva pomaka

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [D_p(x_1)(m)][D_q(x_2)(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m-p)x_2(n-m-q)$$

za $j = m - p$ slijedi

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_1(j)x_2(n-p-q-j) = y(n-p-q)$$

Svojstva konvolucijske sumacije – konvolucija s jediničnim impulsom, duljina konvolucijske sumacije

- konvolucija s jediničnim impulsom
  - za bilo koji signal $x(n)$, $n \in Cjelobrojni$, i jedinični impuls $\delta(n)$, $n \in Cjelobrojni$,

$$(x * \delta)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = x(n)$$

- duljina konvolucijske sumacije konačnih nizova
  - neka je L_1 duljina (broj elemenata) niza $x_1(n)$, a L_2 duljina niza $x_2(n)$
  - duljina $(x_1 * x_2)(n)$ je $L_1 + L_2 - 1$

dokaz slijedi iz: $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$

$0 \leq m \leq L_1 - 1$

$0 \leq n - m \leq L_2 - 1 \qquad | + m$

$m \leq n \leq L_2 - 1 + m \quad \Rightarrow$

$0 \leq m \leq n \leq L_2 - 1 + m \leq L_2 - 1 + L_1 - 1 \quad \Rightarrow$

$0 \leq n \leq L_1 + L_2 - 2$

pa je duljina konvolucije $L = L_1 + L_2 - 1$

Impulsni odziv linearnih kontinuiranih sustava 1

- odziv mirnog, $x(0^-) = 0$, sustava s jednim ulazom i jednim izlazom, *SISO* sustav, izveden je kao:

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni,$
  $\forall t \in Realni_+$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = \int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau + Du(t) \quad t \geq 0$$

Impulsni odziv linearnih kontinuiranih sustava 2

- pobudimo li mirni, $x(0^-)$, *SISO* sustav s jediničnim impulsom $u(t) = \delta(t)$ odziv je:

$$y(t) = \int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)\,d\tau + D\delta(t) \quad t \geq 0$$

odnosno

$$y(t) = h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad t \geq 0$$

- odziv mirnog sustava, $x(0^-) = 0$, na pobudu jediničnim impulsom $u(t) = \delta(t)$ nazivamo impulsni odziv i označavamo kao $h(t)$

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad t \geq 0$$

Konvolucijski integral

- odziv mirnog kontinuiranog sustava, na proizvoljnu pobudu,

$$y(t) = \int_{0^-}^{t} [\underbrace{Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)}_{h(t-\tau)}]u(\tau)\,d\tau \quad t \geq 0$$

možemo pisati i kao

$$y(t) = \int_{0^-}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \quad t \geq 0$$

- ovo je konvolucijski integral i on u potpunosti opisuje mirni kontinuirani *SISO* sustav
- za miran *SISO* sustav i $h(t) = 0$ i $u(t) = 0$ za $t < 0$ konvolucijski integral možemo pisati i kao

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

Konvolucijski integral – svojstva

- konvolucijski integral možemo definirati i za proizvoljne signale, pa možemo pisati

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\, d\tau$$

  - komutativnost:
    $(x_1 * x_2)(t) = (x_2 * x_1)(t)$
  - distributivnost:
    $(x_1 * (x_2 + x_3))(t) = (x_1 * x_2)(t) + (x_1 * x_3)(t)$
  - asocijativnost:
    $(x_1 * (x_2 * x_3))(t) = ((x_1 * x_2) * x_3)(t)$
  - pomak:
    za $(D_{T_1}(x_1))(t) = x_1(t - T_1)$ i $(D_{T_2}(x_2))(t) = x_2(t - T_2)$
    $(D_{T_1}(x_1) * D_{T_2}(x_2))(t) = y(t - T_1 - T_2)$
  - konvolucija s impulsom
    $(x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)\, d\tau = x(t)$

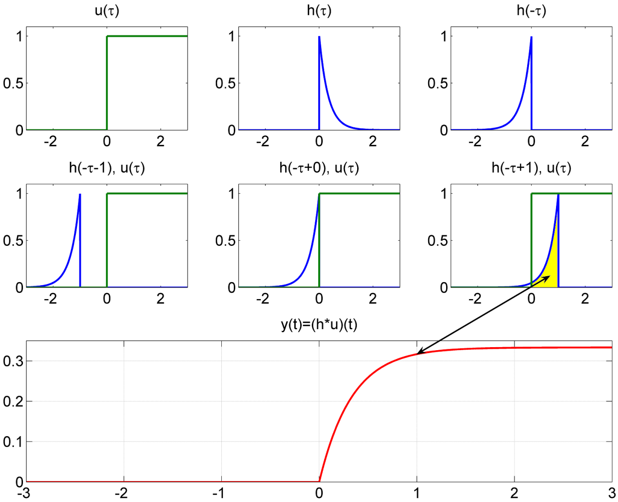
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 1.

- neka je zadan linearni, vremenski stalni, vremenski kontinuiran sustav, svojim impulsnim odzivom $h(t) = e^{-3t}\mu(t)$
- određuje se odziv na pobudu $u(t) = \mu(t)$
- odziv izračunavamo pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

- sa slike 8 je vidljivo kako se $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ ne poklapaju za $t \leq 0$ pa slijedi da je $y(t) = 0$ za $t \leq 0$

Grafička interpretacija izračunavanja konvolucijskog integrala – Primjer 1.



Slika 8: Konvolucijski integral – primjer

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 1. nastavak

- za $t > 0$, postoji preklapanje $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$, pa je

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-3(t-\tau)}\, d\tau = e^{-3t}\int_{0}^{t} e^{3\tau}\, d\tau = \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3t}\right]$$

- grafička interpretacija postupka konvolucije dana je na slici 8, i treba uočiti kako trenutna vrijednost $y(t)$ odgovara površini preklapanja $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ (žuto na slici)
- tako je za $t = 1$

$$y(t) = \int_{0}^{1} e^{-3(1-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3}\right] = 0.3167$$

Nekauzalni sustavi

- za nekauzalni sustav, odziv započinje prije nego je djelovala pobuda, dakle, sustav anticipira buduću pobudu (radi predikciju)
- nekauzalni vremenski sustavi su često rezultat postupaka sinteze na temelju idealiziranih zahtjeva
- nekauzalni vremenski sustavi ne mogu biti realizirani u stvarnom vremenu
- nekauzalne sustave možemo koristiti u slučajevima kada je dozvoljeno kašnjenje ili kada su konačni signali pohranjeni (poznati u cijelom području definicije)
- ovdje se demonstrira odziv nekauzalnog sustava konvolucijskim integralom

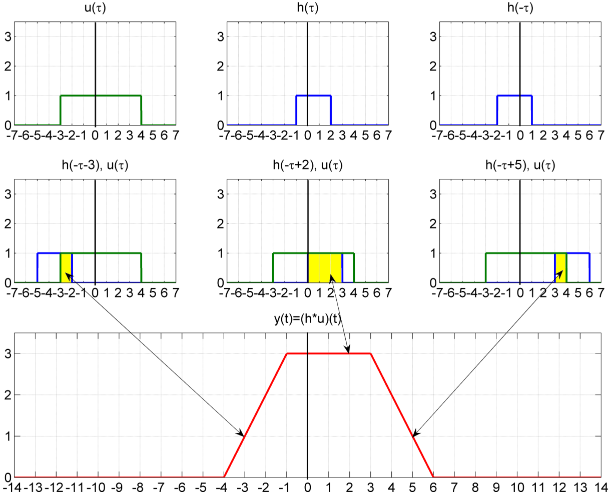
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2.

- neka je zadan linearni, vremenski stalni, vremenski kontinuiran sustav, svojim impulsnim odzivom $h(t) = \mu(t+1) - \mu(t-2)$
- određuje se odziv na pobudu $u(t) = \mu(t+3) - \mu(t-4)$
- odziv izračunavamo pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

- grafička interpretacija dana je na slici 9
- sa slike 9 je vidljivo kako se $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ preklapaju u tri intervala
  - u intervalu $-4 \leq t \leq -1$, djelomično,
  - u intervalu $-1 \leq t \leq 3$, potpuno (cijeli $h(t-\tau)$ zahvaćen s $u(\tau) \neq 0$),
  - u intervalu $3 \leq t \leq 6$, djelomično,

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 1



Slika 9: Grafička interpretacija izračunavanja konvolucijskog integrala – Primjer 2.

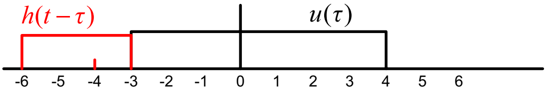
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 2

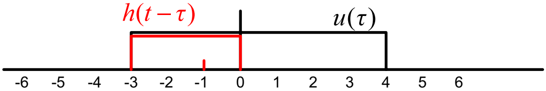
- na slici 9 je ilustrirano kako vrijednosti $y(-3) = 1$, $y(2) = 3$ i $y(5) = 1$, odgovaraju površini produkata $u(\tau) * h(-3-\tau)$, $u(\tau) * h(2-\tau)$, odnosno, $u(\tau) * h(5-\tau)$
- evidentno je kako, zbog nekauzalnosti impulsnog odziva, odziv starta prije pobude
- odziv započinje za $t \geq -4$, trenutak kada se počinju preklapati $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$, i u intervalu $-4 \leq t \leq -1$ računa se iz

$$y(t) = \int_{-3}^{t+1} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-3}^{t+1} d\tau = t+4$$

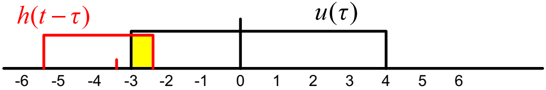
- obrazložimo gornju i donju granicu

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 3



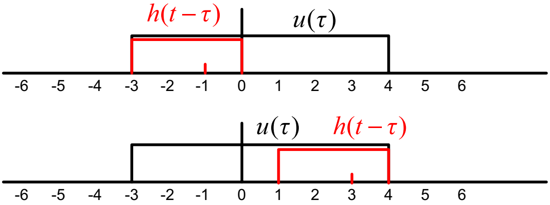


djelomično preklapanje počinje za $t=-4$, a završava za $t=-1$

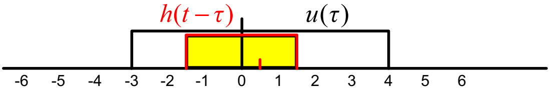


granica integracija za interval $-4 \le t \le -1$ su: donja je -3; gornja je $t+1$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 4



potpuno preklapanje počinje za $t=-1$, a završava za $t=3$

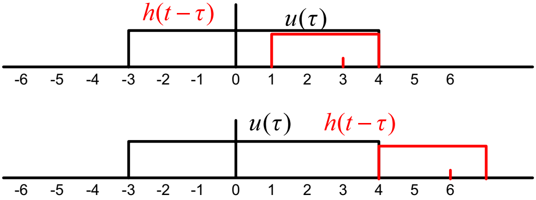


granica integracija za interval $-1 \leq t \leq 3$ su: donja je $t-2$; gornja je $t+1$

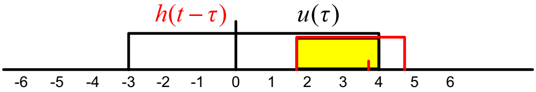
- u intervalu $-1 \leq t \leq 3$ odziv se računa iz

$$y(t)=\int_{t-2}^{t+1} u(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{t-2}^{t+1} d\tau=3,$$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 5



djelomično preklapanje počinje za $t = 3$, a završava za $t = 6$



granica integracija za interval $3 \le t \le 6$ su: donja je $t-2$; gornja je 4

- u intervalu $3 \leq t \leq 6$,iz

$$y(t) = \int_{t-2}^{4} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-2}^{4} d\tau = 6 - t$$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 6

- finalno, odziv sustava $h(t) = \mu(t+1) - \mu(t-2)$, na pobudu $u(t) = \mu(t+3) - \mu(t-4)$, je

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -4 \\ t+4, & -4 \leq t \leq -1 \\ 3, & -1 \leq t \leq 3 \\ 6-t, & 3 \leq t \leq 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

Odziv sustava konvolucijom

- zaključno, odziv linearnih, mirnih, vremenski diskretnih, odnosno vremenski kontinuiranih, *SISO* sustava moguće je, uz poznati impulsni odziv, odrediti konvolucijom

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)u(m), \quad n \in Cjelobrojni_{+}$$

$$y(t) = \int_{0^-}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau, \quad t \in Realni_{+}$$

- za sustave prikazane s modelom s varijablama stanja, $[A, B, C, D]$ prikaz, izvedeno je

$$h(n) = \begin{cases} D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n > 0 \end{cases}, \quad n \in Cjelobrojni_{+}$$

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \quad t \in Realni_{+}$$

- određivanje impulsnog odziva za model ulaz–izlaz pokazuje se kasnije