Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

16. travnja 2007.

Odziv pobuđenog sustava

- kako je kazano, totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava, dakle,[1]

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{pi} e^{s_i t} + \textit{odziv mirnog sustava}$$

- odziv mirnog sustava,
  $y(0^-) = y'(0^-) = \ldots = y^{(N-1)}(0^-) = 0$,
  na bilo koju pobudu, možemo odrediti
  - klasičnim rješavanjem diferencijalne jednadžbe
  - korištenjem konvolucijskog integrala

[1] ovdje je, radi jednostavnosti u prikazu odziva nepobuđenog sustava, pretpostavljen sustav s jednostrukim karakterističnim frekvencijama

Odziv mirnog sustava rješenjem diferencijalne jednadžbe

- za sustav opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom potrebno je odrediti i partikularno rješenje
- određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrange-ova metoda varijacije parametara
  - Metoda neodređenog koeficijenta
- metoda je neodređenih koeficijenata ograničena samo na diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, te na funkcije koje se mogu svesti na polinome i eksponencijalne funkcije
- veliki broj pobuda se prikazuje polinomima i eksponencijalnim funkcijama i to je razlog široke uporabe ove metode

Određivanje partikularnog rješenja metodom neodređenih koeficijenata

- za pobudu polinomom oblika

$$u(t) = A_0 + A_1 t + \ldots + A_M t^M$$

- partikularno je rješenje u obliku polinoma M-tog stupnja

$$y_p(t) = K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M$$

- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

Određivanje partikularnog rješenja metodom neodređenih koeficijenata

- slično vrijedi i za pobude

pobuda $u(t)$	partikularno rješenje $y_p(t)$
A (konstanta)	K
$Ae^{\zeta t} \quad \zeta \neq s_i (i = 1, 2, \ldots, N)$	$Ke^{\zeta t}$
$Ae^{\zeta t} \quad \zeta = s_i$	$Kte^{\zeta t}$
At^M	$K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M$
$e^{\zeta t} t^M$	$e^{\zeta t}(K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M)$
$Acos(\Omega_0 t)$	$K_1 cos(\Omega_0 t) + K_2 sin(\Omega_0 t)$
$Asin(\Omega_0 t)$	$K_1 cos(\Omega_0 t) + K_2 sin(\Omega_0 t)$
$Acos(\Omega_0 t + \theta)$	$Kcos(\Omega_0 t + \theta)$

Odziv mirnog sustava rješenjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- nastavlja se razmatranje sustava opisanog s diferencijalnom jednadžbom

$$y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t) \qquad (1)$$

- neka je sustav pobuđen pobudom $u(t) = 0.128\mu(t)$ i, budući ovdje razmatramo odziv mirnog sustava, neka su $y(0^-) = 0$, $y'(0^-)$ i $y''(0^-) = 0$
- rješenje homogene jednadžbe je određeno kao

$$\begin{aligned} y_h(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + c_3 e^{s_3 t} = \\ &= c_1 e^{(-0.1+j0.3873)t} + c_2 e^{(-0.1-j0.3873)t} + c_3 e^{-0.2t} \end{aligned}$$

- potrebno je odrediti partikularno rješenje

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- kako je pobuda konstantna i partikularno rješenje pretpostavljamo kao konstantu $y_p(t) = A$
- uvrštenjem u polaznu jednadžbu, i za $y_p'''(t) = y_p''(t) = y_p'(t) = 0$ slijedi

$$0.032A = 0.128 \quad \Rightarrow \quad A = 4 \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = 4$$

- odziv mirnog sustava je,

$$y_m(t) = c_{m1}e^{(-0.1+j0.3873)t} + c_{m2}e^{(-0.1-j0.3873)t} + c_{m3}e^{-0.2t} + 4,$$

- konstante se c_{m1}, c_{m2} i c_{m3} određuju iz početnih uvjeta $y(0^+)$, $y'(0^+)$ i $y''(0^+)$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- iz prije izvedenih jednadžbi za određivanje početnih uvjeta u $t = 0^+$

$$
\begin{aligned}
&y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+)\\
&y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+)\\
&y''(0^+) - y''(0^-) + a_1 y'(0^+) - a_1 y'(0^-) + a_2 y(0^+) - a_2 y(0^-) =\\
&\qquad = b_0 u''(0^+) + b_1 u'(0^+) + b_2 u(0^+)
\end{aligned} \tag{2}
$$

uz $b_0 = b_1 = b_2 = 0$, za ovaj primjer, slijedi

$$
y(0^+) = y(0^-) = 0, y'(0^+) = y'(0^-) = 0, \text{ i } y''(0^+) = y''(0^-) = 0
$$

Odziv mirnog sustava rješenjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- iz

$$
\begin{aligned}
y_m(t) &= c_{m1}e^{s_1 t} + c_{m2}e^{s_2 t} + c_{m3}e^{s_3 t} + 4 \\
y_m'(t) &= s_1 c_{m1}e^{s_1 t} + s_2 c_{m2}e^{s_2 t} + s_3 c_{m3}e^{s_3 t} \\
y_m''(t) &= s_1^2 c_{m1}e^{s_1 t} + s_2^2 c_{m2}e^{s_2 t} + s_3^2 c_{m3}e^{s_3 t}
\end{aligned}
$$

slijedi za $t = 0^+$

$$
\left.
\begin{aligned}
0 &= c_{m1} + c_{m2} + c_{m3} + 4 \\
0 &= s_1 c_{m1} + s_2 c_{m2} + s_3 c_{m3} \\
0 &= s_1^2 c_{m1} + s_2^2 c_{m2} + s_3^2 c_{m3}
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow
\left\{
\begin{aligned}
c_{m1} &= j1.0328 = 1.0328e^{j1.5708} \\
c_{m2} &= -j1.0328 = 1.0328e^{-j1.5708} \\
c_{m3} &= -4
\end{aligned}
\right.
$$

- konačno, odziv mirnog sustava je

$$
\begin{aligned}
y_m(t) = 1.0328e^{j1.5708}e^{-0.1t}e^{j0.3873t} + \\
+1.0328e^{-j1.5708}e^{-0.1t}e^{-j0.3873t} - 4e^{-0.2t} + 4
\end{aligned}
$$

$$
y_m(t) = 2.0656e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 1.5708) - 4e^{-0.2t} + 4, \quad t \geq 0
$$

Odziv mirnog sustava rješenjem diferencijalne jednadžbe – primjer

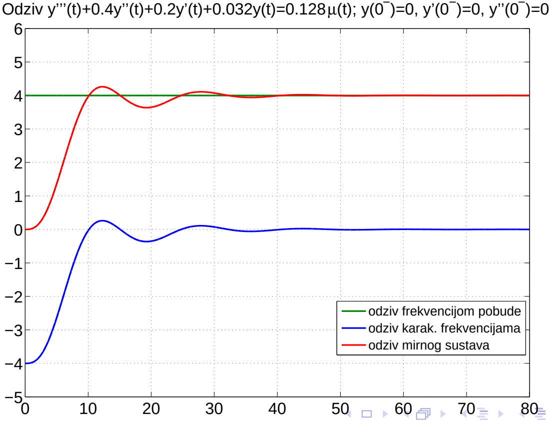
- odziv mirnog sustava čini titranje s vlastitim frekvencijama i titranje s frekvencijom pobude
- titranje s vlastitim frekvencijama postoji unatoč činjenici da je sustav bio miran, $y(0^-) = 0$, $y'(0^-) = 0$ i $y''(0^-) = 0$, a posljedica je nesklada početnih uvjeta i stacionarnog[2] stanja u koje pobuda prevodi sustav
- sustav taj nesklad prevladava odzivom s vlastitim frekvencijama

[2] za pobude konstantne amplitude

Odziv mirnog sustava rješenjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- odziv, mirnog sustava,

$$y_m(t) = 2.0656e^{-0.1t}\cos(0.3873t+1.5708)-4e^{-0.2t}+4, \quad t \geq 0$$



Totalni odziv sustava rješenjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

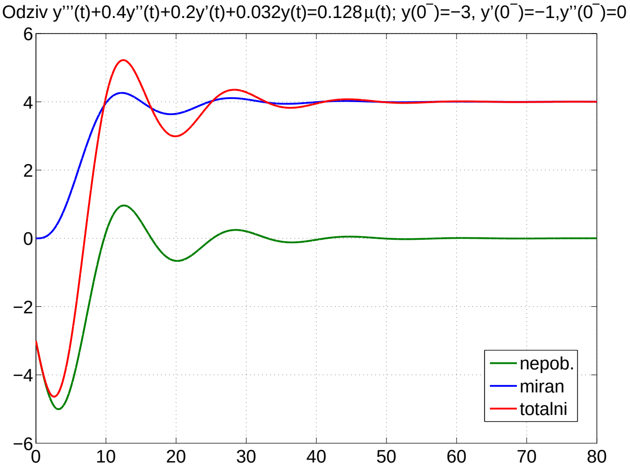
$$\begin{aligned} y(t) = {} & (0.6250 + j2.2270)e^{-0.1t+j0.3873t} + (0.6250 - j2.2270)e^{-0.1t-j0.3873t} + \\ & -4.25e^{-0.2t} + \\ & +(0.0000 + j1.0328)e^{-0.1t+j0.3873t} + (0.0000 - j1.0328)e^{-0.1t-j0.3873t} - \\ & -4.00e^{-0.2t} + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = {} & (0.6250 + j3.2598)e^{-0.1t+j0.3873t} + (0.6250 - j3.2598)e^{-0.1t-j0.3873t} - \\ & -8.25e^{-0.2t} + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = {} & 4.626e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 1.2972) - 4.25e^{-0.2t} + \\ & 2.0656e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 1.5708) - 4e^{-0.2t} + 4 \end{aligned}$$

$$y(t) = 6.6382e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 1.3814) - 8.25e^{-0.2t} + 4, \quad t \geq 0$$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava



Slika 2: Odziv vremenski kontinuiranog sustava

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- totalni odziv sustava moguće je odrediti i klasičnim postupkom rješavanja nehomogene diferencijalne jednadžbe
- rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe je

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- već su prije određeni, rješenje homogene jednadžbe $y_h(t)$, i partikularno rješenje $y_p(t)$, pa je rješenje nehomogene jednadžbe

$$y(t) = c_1 e^{-0.1t+j0.3873t} + c_2 e^{-0.1t-j0.3873t} + c_3 e^{-0.2t} + 4$$

- konstante se c_1, c_2 i c_3 određuju iz početnih uvjeta $y(0^+)$, $y'(0^+)$ i $y''(0^+)$
- iz jednadžbe (2), uz $b_0 = b_1 = b_2 = 0$,slijedi

$$y(0^+) = y(0^-) = -3, y'(0^+) = y'(0^-) = -1, \text{ i } y''(0^+) = y''(0^-) = 0$$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- iz

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + c_3 e^{s_3 t} + 4 \\ y'(t) &= s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t} + s_3 c_3 e^{s_3 t} \\ y''(t) &= s_1^2 c_1 e^{s_1 t} + s_2^2 c_2 e^{s_2 t} + s_3^2 c_3 e^{s_3 t} \end{aligned}$$

slijedi za $t = 0^+$

$$\begin{aligned} -3 &= c_1 + c_2 + c_3 + 4 \\ -1 &= s_1 c_1 + s_2 c_2 + s_3 c_3 \\ 0 &= s_1^2 c_1 + s_2^2 c_2 + s_3^2 c_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= 0.6250 + j3.2598 = 3.3191 e^{j1.3814} \\ c_2 &= 0.6250 - j3.2598 = 3.3191 e^{-j1.3814} \\ c_3 &= -8.2500 \end{aligned}$$

- konačno, totalni odziv je

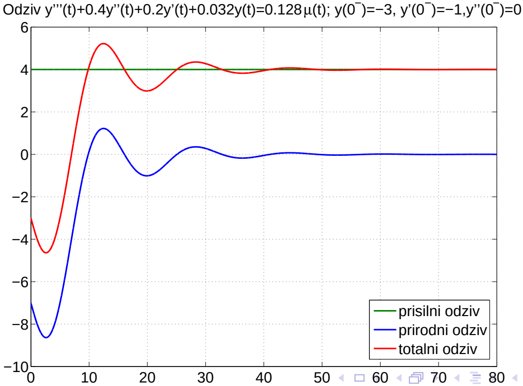
$$\begin{aligned} y(t) = 3.3191 e^{j1.3814} e^{-0.1t} e^{j0.3873t} + \\ +3.3191 e^{-j1.3814} e^{-0.1t} e^{-j0.3873t} - 8.25 e^{-0.2t} + 4 \end{aligned}$$

$$y(t) = 6.6382 e^{-0.1t} \cos(0.3873t + 1.3814) - 8.25 e^{-0.2t} + 4, \quad t \geq 0$$

- što je identičan odziv kao i u slučaju kada je odziv sustava razmatran kao zbroj odziva nepobuđenog i mirnog sustava

Prirodni i prisilni odziv sustava

- u totalnom odzivu prepoznaju se dvije komponente
  - prirodni ili prijelazni odziv – titra s karakterističnim frekvencijama i postoji zbog nesklada početnog i stacionarnog stanja
  - prisilni odziv – titra s frekvencijom pobude



Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala

- totalni odziv se može prikazati kao zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

- odziv nepobuđenog sustava jednak je rješenju homogene jednadžbe čije se konstante određuju iz zadanih početnih uvjeta u $t = 0^-$
- odziv mirnog sustava, dakle sustava, čiji su svi početni uvjeti jednaki nuli za $t = 0^-$, možemo izračunati i kao

$$y_m(t) = u(t) * h(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- potrebno je izračunati impulsni odziv

Impulsni odziv

- linearni, vremenski stalni, kontinuirani sustav opisan je diferencijalnom jednadžbom $(N \geq M)$

$$\underbrace{(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N)}_{A(D)} y(t) =$$

$$= \underbrace{(b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N)}_{B(D)} u(t) \tag{3}$$

odnosno

$$A(D)y(t) = B(D)u(t)$$

- impulsni odziv $y(t) = h(t)$, sustava (3), je odziv sustava na pobudu $u(t) = \delta(t)$, u $t = 0$, za sve početne uvjete $h(0^-) = h'(0^-) = h''(0^-) = \ldots = h^{(N-1)}(0^-) = 0$

Impulsni odziv

- za $u(t) = \delta(t)$, sustav (3) možemo, za $t \geq 0^+$, razmatrati kao nepobuđeni sustav, a odziv tog sustava tretirati kao posljedicu početnih uvjeta u $t = 0^+$ koji su nastali djelovanjem impulsne pobude u $t = 0$
- sustav je, za $t \geq 0^+$, opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h(t) = 0 \Leftrightarrow A(D) h(t) = 0$$

za čije je rješenje potrebno odrediti početne uvjete $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$

- impulsni odziv će za $t \geq 0^+$ biti oblika[3]

$$h(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}, \qquad t \geq 0^+$$

[3] ovdje su pretpostavljene jednostruke karakteristične frekvencije

Impulsni odziv

- postavlja se pitanje što se događa s impulsnim odzivom u $t = 0$, dakle, u trenutku djelovanja pobude $u(t) = \delta(t)$,
- u trenutku $t = 0$, jedino što se može pojaviti je impuls[4], pa je kompletni impulsni odziv $h(t)$

$$h(t) = A_0\delta(t) + \sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}, \qquad t \geq 0$$

- odredimo A_0
- impulsni odziv je odziv sustava (3) za pobudu $u(t) = \delta(t)$, pa vrijedi

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1}D + a_N)h(t) =$$

$$= (b_{N-M}D^M + b_{N-M+1}D^{M-1} + \ldots + b_{N-1}D + b_N)\delta(t) \tag{4}$$

[4] vidi sliku (5)

Impulsni odziv

- uvrštenjem $h(t) = A_0\delta(t) + \sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}$ u prethodnu jednadžbu (4) i usporedbom koeficijenata uz odgovarajuće impulsne članove na obje strane proizlazi[5]

$$
\begin{aligned}
A_0 &= b_0 \qquad && \text{za } N = M \\
A_0 &= 0 \qquad && \text{za } N > M
\end{aligned}
$$

- impulsni odziv $h(t)$ je prema tome

$$
h(t) = \begin{cases} b_0\delta(t) + \sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t} & \text{za } N = M \\ \sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t} & \text{za } N > M \end{cases}
$$

- potrebno je odrediti $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$ kako bi se izračunalo N konstanti c_j,

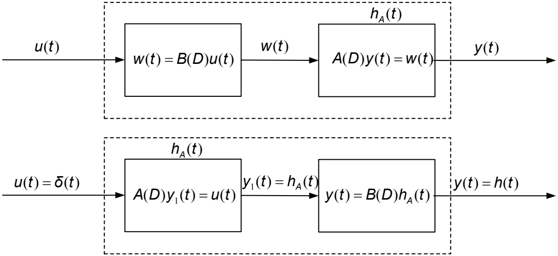
[5] N puta deriviranjem $h(t)$, javlja se član $A_0\delta^{(N)}$, pa se očekuje da i na desnoj strani bude član s $\delta^{(N)}$ a takav će postojati samo kada je $N = M$. Ova činjenica evidentna je i na slici (5)

Impulsni odziv

- linearni, vremenski stalni, kontinuirani sustav,

$$A(D)y(t) = \underbrace{B(D)u(t)}_{w(t)}$$

možemo razložiti na dva podsustava od kojih svaki realizira jednu stranu diferencijalne jednadžbe



Slika 4: Diferencijalni sustav kao kaskada dva podsustava

Impulsni odziv

- donji dio slike 4, temelji se na svojstvu komutativnosti linearnih sustava, i sugerira mogući postupak za određivanje impulsnog odziva sustava
- prvo se određuje impulsni odziv prvog podsustava

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h_A(t) = \delta(t) \tag{5}$$

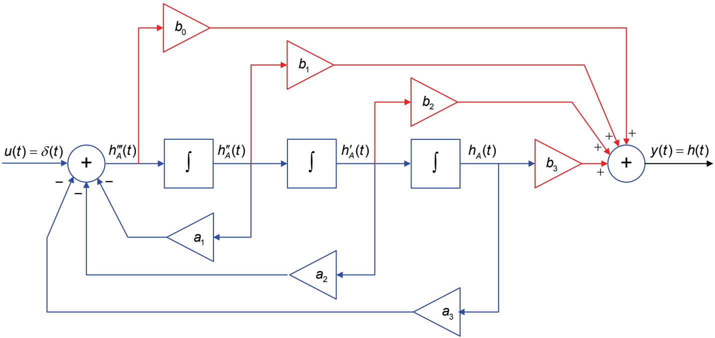
i zatim, odziv drugog podsustava, koji predstavlja ukupni impulsni odziv

$$h(t) = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) h_A(t) \tag{6}$$

- ilustrirajmo ovaj postupak na primjeru kontinuiranog sustava 3. reda uz $N = M = 3$

Impulsni odziv

- realizaciju jednadžbe,
  $(D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3) h_A(t) = \delta(t)$,
  prikazuje donji dio blokovskog dijagrama
- gornji dio blokovskog dijagrama prikazuje realizaciju
  $h(t) = (b_0 D^3 + b_1 D^2 + b_2 D + b_3) h_A(t)$



Slika 5: Blokovski dijagram kontinuiranog sustava 3. reda

Impulsni odziv

- jednadžbu (5) rješavamo za $t \geq 0$ i za $h_A(0^-) = h'_A(0^-) = h''_A(0^-) = \ldots = h_A^{(N-1)}(0^-) = 0$
- za $t \geq 0^+$ jednadžba prelazi u homogenu jednadžbu pa je potrebno odrediti $h_A^{(i)}(0^+), i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$
- ponovo razmotrimo jednadžbu

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h_A(t) = \delta(t)$$

- samo najviša derivacija $h_A(t)$ može sadržavati impuls jer kad bi bilo koja niža derivacija sadržavala impuls onda bi se u izrazu na lijevoj strani javljale derivacije jediničnog impulsa (a njih nema pa vrijedi naša tvrdnja)
- zato su preostali članovi na lijevoj strani integrali impulsa: jedinična stepenica, kosina, ...
- ovo pak znači kako $h_A^{(N-1)}(t)$, ima konačni diskontinuitet, a funkcije $h_A^{(N-2)}(t), \ldots, h'_A(t), h_A(t)$ su glatke funkcije

Impulsni odziv

- za $h_A(t), h'_A(t), \ldots, h_A^{(N-1)}(t)$ vrijedi

$$h_A^{(j-1)}(0^+) = \int_{0^-}^{0^+} h_A^{(j)}(\tau)d\tau = 0, \qquad j = 1, \ldots, N-1$$

- i ovaj izraz određuje prvih $N-1$ početnih uvjeta za $h_A(t)$
- integriranjem, od $t = 0^-$ do $t = 0^+$, jednadžbe (5) slijedi

$$\int_{0^-}^{0^+} (D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1}D + a_N)h_A(\tau)d\tau = \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau$$

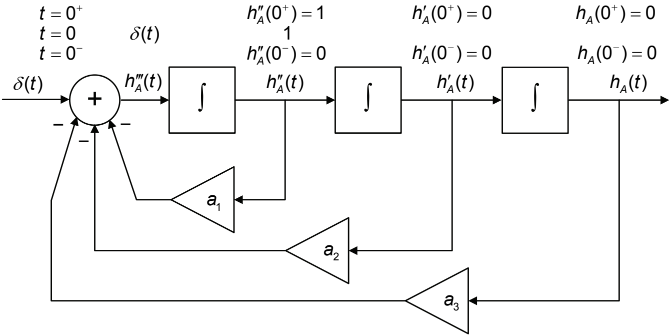
$$D^{N-1}h_A(0^+) + a_1 \underbrace{D^{N-2}h_A(0^+)}_{0} + \ldots + a_{N-1} \underbrace{h_A(0^+)}_{0} = 1$$

$$D^{N-1}h_A(0^+) = 1$$

što predstavlja N–ti početni uvjet

Impulsni odziv

- postupak određivanja početnih uvjeta u $t = 0^+$ ilustriramo blokovskim dijagramom (donji dio slike (5)) sustava trećeg reda



Slika 6: Određivanje početnih uvjeta u izračunu impulsnog odziva

Impulsni odziv

- zaključno, N početnih uvjeta su $h(0^+) = h'(0^+) = h''(0^+) = \ldots = h^{(N-2)}(0^+) = 0$ i $h^{(N-1)}(0^+) = 1$
- njihovim poznavanjem određuje se rješenje jednadžbe

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h_A(t) = \delta(t)$$

a iz jednadžbe

$$h(t) = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) h_A(t)$$

impulsni odziv zadanog sustava

Impulsni odziv – primjer 1

- određuje se impulsni odziv sustava

$$y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t)$$

- impulsni odziv, $h(t)$, je odziv sustava na $u(t) = \delta(t)$ uz $h(0^-) = h'(0^-) = h''(0^-) = 0$
- za $t \geq 0^+$ odziv sustava je jednak rješenju homogene jednadžbe a kako je $b_0 = 0$ slijedi da je impulsni odziv

$$h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + c_3 e^{s_3 t}$$

- konstante se c_1, c_2 i c_3 određuju iz $h(0^+), h'(0^+)$ i $h''(0^+)$
- sukladno prije pokazanom vrijedi $h(0^+) = h'(0^+) = 0$ i $h''(0^+) = 1$

Impulsni odziv – primjer 1

- za zadani su sustav karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$s^3+0.4s^2+0.2s+0.032=0 \quad \Rightarrow s_{1,2}=-0.1\pm j0.3873, s_3=-0.2$$

- konstante c_1, c_2 i c_3 određujemo iz početnih vrijednosti $h(0^+)=0$, $h'(0^+)=0$ i $h''(0^+)=1$, pa iz

$$\begin{aligned} h(t) &= c_{01}e^{s_1 t}+c_{02}e^{s_2 t}+c_{03}e^{s_3 t} \\ h'(t) &= s_1 c_{01}e^{s_1 t}+s_2 c_{02}e^{s_2 t}+s_3 c_{03}e^{s_3 t} \\ h''(t) &= s_1^2 c_{01}e^{s_1 t}+s_2^2 c_{02}e^{s_2 t}+s_3^2 c_{03}e^{s_3 t} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1+c_2+c_3 \\ 0 &= s_1c_1+s_2c_2+s_3c_3 \\ 1 &= s_1^2c_1+s_2^2c_2+s_3^2c_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= -3.1250-j0.8069=3.2275e^{-j2.8889} \\ c_2 &= -3.1250+j0.8069=3.2275e^{j2.8889} \\ c_3 &= 6.2500 \end{aligned}$$

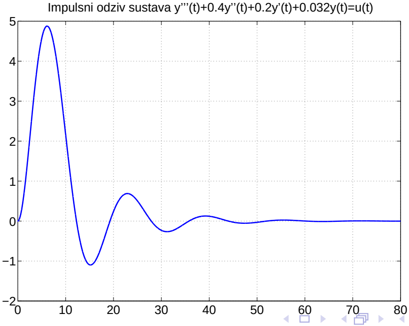
Impulsni odziv – primjer 1

- impulsni odziv sustava je

$$y(t) = 3.2275e^{-j2.8889}e^{-0.1t}e^{j0.3873t} + 3.2275e^{j2.8889}e^{-0.1t}e^{-j0.3873t} + 6.25e^{-0.2t} \tag{7}$$

odnosno

$$y(t) = 6.455e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 2.8889) + 6.25e^{-0.2t} \tag{8}$$



Impulsni odziv – primjer 2

- određuje se impulsni odziv sustava

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u''(t) + u'(t) + u(t)$$

- impulsni odziv, $h(t)$, je odziv sustava na $u(t) = \delta(t)$ uz $h(0^-) = h'(0^-) = 0$
- impulsni odziv zadovoljava početnu jednadžbu

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = \delta''(t) + \delta'(t) + \delta(t)$$

- kako je $N = M = 2$ i $b_0 = b_1 = b_2 = 1$ slijedi iz jednadžbe (6)

$$h(t) = \delta(t) + h_A''(t) + h_A'(t) + h_A(t)$$

gdje je $h_A(t)$ rješenje jednadžbe

$$h_A''(t)+2h_A'(t)+h_A(t) = \delta(t), \qquad h_A(0^+) = 0, \quad h_A'(0^+) = 1$$

Impulsni odziv – primjer 2

- karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije su

$$s^2 + 2s + 1 = 0, \qquad s_1 = s_2 = -1$$

- pa je $h_A(t)$

$$h_A(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz početnih vrijednosti $h_A(0^+) = 0$ i $h'_A(0^+) = 1$, pa iz

$$\begin{aligned} h_A(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} \\ h'_A(t) &= s_1 c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_1 t} + s_1 c_2 t e^{s_1 t} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 \\ 1 &= s_1 c_1 + c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Impulsni odziv – primjer 2

- rješenje za $h_A(t)$ je

$$h_A(t) = te^{-t}$$

- impulsni odziv sustava je, iz

$$\begin{aligned} h(t) &= \delta(t) + h_A''(t) + h_A'(t) + h_A(t) = \\ &= \delta(t) + (-e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}) + (e^{-t} - te^{-t}) + te^{-t} \\ &= \delta(t) - e^{-t} + te^{-t}, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

Utjecaj karakterističnih frekvencija na totalni odziv

- uvidom u izraz za totalni odziv stabilnog sustava evidentno je kako prirodni odziv trne s vremenom i pogrešan bi bio zaključak kako time sasvim prestaje utjecaj vlastitih frekvencija na totalni odziv
- treba podsjetiti kako je partikularno rješenje izračunavano metodom neodređenog koeficijenata i kako je u određivanju koeficijenata partikularnog rješenja korištena cjelokupna diferencijalna jednadžba pa su time, posredno, i karakteristične frekvencije utjecale na partikularno rješenje
- utjecaj karakterističnih frekvencija u totalnom odzivu moguće je ilustrirati sljedećim razmatranjem

Utjecaj karakterističnih frekvencija na totalni odziv

- razmotrimo sustav prvog reda, čiji je impulsni odziv $h(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t)$, pobuđen s $u(t) = e^{\zeta t}\mu(t)$
- odziv kauzalnog mirnog sustava je

$$y(t) = h(t) * u(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t) * e^{\zeta t}\mu(t)$$

$$y(t) = \int_0^t Ae^{s_1(t-\tau)}e^{\zeta\tau}d\tau = Ae^{s_1 t}\int_0^t e^{(\zeta - s_1)\tau}d\tau$$

$$y(t) = \frac{A}{\zeta - s_1}\left[e^{\zeta t} - e^{s_1 t}\right] \quad (9)$$

- očigledno je kako je za pobude čija je frekvencija bliža karakterističnoj frekvenciji veća amplituda odziva
- ovaj zaključak se jednostavno proširuje na sustave N–tog reda jer je impulsni odziv linearna kombinacija N eksponencijala koje titraju karakterističnim frekvencijama

Rezonancija

- jednadžba (9) potiče da se razmotri slučaj kada je frekvencija pobude identična jednoj od karakterističnih frekvencija sustava
- i ovdje se razmatranje započinje za sustav prvog reda čiji je impulsni odziv $h(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t)$
- sustav se pobuđuje eksponencijalom neznatno različite frekvencije od karakteristične frekvencije $u(t) = e^{(s_1-\epsilon)t}\mu(t)$
- odziv ovog sustava, opet korištenjem konvolucijske sumacije, je

$$y(t) = \frac{A}{\epsilon}\left[e^{s_1 t} - e^{(s_1-\epsilon)t}\right] = Ae^{s_1 t}\left(\frac{1-e^{-\epsilon t}}{\epsilon}\right)$$

Rezonancija

- očigledno je kako se u

$$y(t) = Ae^{s_1 t}\left(\frac{1-e^{-\epsilon t}}{\epsilon}\right),$$

  za $\epsilon \longrightarrow 0$, i brojnik i nazivnik približuju nuli
- primjenom L'Hôpital-ovog pravila slijedi

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} y(t) = Ate^{s_1 t}$$

- odziv sadrži faktor t i za $t \rightarrow \infty$ amplituda odziva bi[6] također težila prema ∞
- ova pojava se naziva rezonancijom i za opaziti je da je to kumulativni, a ne trenutni, proces koji se razvija s t

[6] koristi se kondicional jer za s_1 u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine se to neće dogoditi

Rezonancija

- za s_1 u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine, rezonancija postoji, ali se ne stigne razviti jer se eksponencijala prigušuje brže od linearnog porasta t
- za s_1 na imaginarnoj osi, ili u desnoj poluravnini kompleksne ravnine, pojava rezonancije je očigledna
- kasnije će biti detaljno razmotrena rezonancija sustava drugog reda, čije su vlastite frekvencije $s_{1,2} = j\Omega_1$, a koji je pobuđen sinusoidalnim signalom iste frekvencije Ω_1
- ovdje se daje samo odziv tog sustava

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- intuitivno se može zaključiti kako sustavi trebaju neko vrijeme kako bi potpuno reagirali na neku pobudu i to vrijeme možemo nazvati vrijeme odziva ili vremenska konstanta sustava
- ako razmotrimo impulsni odziv sustava možemo zaključiti da, iako je pobuda $\delta(t)$ trenutna (trajanja nula), impulsni odziv je trajanja[7] T_h, dakle sustav treba neko vrijeme da potpuno odgovori na pobudu
- ovu činjenicu možemo ilustrirati sljedećim primjerom

[7] strogo govoreći impulsni odziv je beskonačnog trajanja jer se kompleksne eksponencijale asimptotski približavaju nuli za $t \longrightarrow \infty$, no nakon nekog vremena vrijednosti impulsnog odziva su zanemarive pa ga možemo smatrati konačnim

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- usporedimo impulsne odzive sljedeća dva sustava, te njihove odzive na jedinični skok
- diferencijalna jednadžba, karakteristične frekvencije i impulsni odziv prvog sustava su

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t) \\
&s_1 = -0.1000 + j0.3873 = 0.4e^{j1.8235} \\
&s_2 = -0.1000 - j0.3873 = 0.4e^{-j1.8235} \\
&s_3 = -0.2000 \\
&h_1(t) = 6.455e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 2.8889) + 6.25e^{-0.2t}
\end{aligned}
$$

- isto za drugi sustav

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.2y''(t) + 0.05y'(t) + 0.004y(t) = 0.25u(t) \\
&s_1 = -0.0500 + j0.1936 = 0.2e^{j1.8235} \\
&s_2 = -0.0500 - j0.1936 = 0.2e^{-j1.8235} \\
&s_3 = -0.1000 \\
&h_2(t) = 6.455e^{-0.05t}\cos(0.1936t - 2.8889) + 6.25e^{-0.1t}
\end{aligned}
$$

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

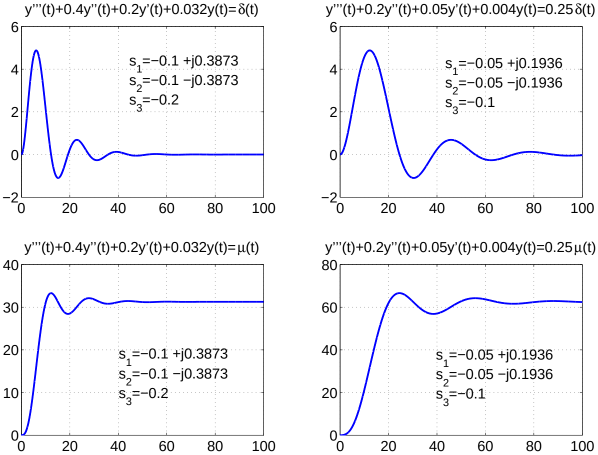
- usporedimo odzive na jedinični skok za iste sustave
- diferencijalna jednadžba,karakteristične frekvencije i odziv na jedinični skok prvog sustava su

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t)\\
&s_1 = -0.1000 + j0.3873 = 0.4e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.1000 - j0.3873 = 0.4e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.2000\\
&y_{\mu 1}(t) = -16.1374e^{-0.1t}\sin(0.3873t) - 31.25e^{-0.2t} + 31.25
\end{aligned}
$$

- isto za drugi sustav

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.2y''(t) + 0.05y'(t) + 0.004y(t) = 0.25u(t)\\
&s_1 = -0.0500 + j0.1936 = 0.2e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.0500 - j0.1936 = 0.2e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.1000\\
&y_{\mu 2}(t) = -32.2749e^{-0.05t}\sin(0.1936t) - 62.5e^{-0.1t} + 62.5
\end{aligned}
$$

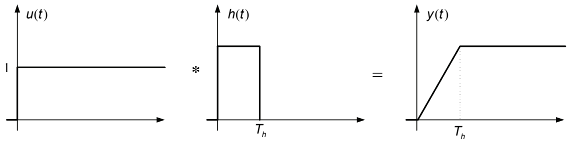
Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta



Slika 9: Impulsni odziv i odziv na jedinični skok

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- očigledno je da je vrijeme odziva sustava ovisno o vrijednostima (položaju) karakterističnih frekvencija
- očigledno je, također, kako je za "širi" impulsni odziv vrijeme odziva veće
- ovo možemo dodatno pojasniti još jednostavnijim primjerom
- neka je impulsni odziv, pravokutni impuls trajanja T_h, i neka je sustav pobuđen jediničnim skokom
- odziv sustava će biti jednak njihovoj konvoluciji



Slika 10: Vrijeme odziva

[kraj]