Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

30. travanj 2007.

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- razmotrimo odziv sustava na svevremensku eksponencijalu

$$t \in Realni, \qquad s \in Kompleksni$$
$$u(t) = e^{st}$$

- odziv mirnog sustava određujemo konvolucijom pa je

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * u(t) = h(t) * e^{st} &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau &= \\ = e^{s(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{H(s)} & \end{aligned}$$

pa je

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

gdje je

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- za konkretnu kompleksnu frekvenciju pobude s, dakle kompleksni broj, $H(s)$ je također kompleksan broj, pa vrijedi:
- za pobudu kompleksnom eksponencijalom odziv je istog oblika i rezultat je množenja pobude s konstantom
- kompleksnu eksponencijalu nazivamo karakterističnom ili vlastitom funkcijom sustava
- budući sinusoidni signali mogu biti razmatrani kao eksponencijale $(cos(\Omega t) = 0.5e^{j\Omega t} + 0.5e^{-j\Omega t})$, svevremenske sinusoide su također vlastite ili karakteristične funkcije linearnih vremenski stalnih sustava (što je već i pokazano izračunavanjem odziva sustava II reda)

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- kontinuirani *SISO* sustav opisan je diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1} y} + \cdots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$

$$= b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1} u} + \cdots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t)$$

- podsjetimo se, kako uvođenjem operatora deriviranja D, koji predstavlja operaciju deriviranja d/dt, gornju jednadžbu zapisujemo kao

$$\underbrace{\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N\right)}_{A(D)} y(t) =$$

$$= \underbrace{\left(b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N\right)}_{B(D)} u(t) \quad (1)$$

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati i kao

$$y(t) = \left(\frac{B(D)}{A(D)}\right)u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = H(D)u(t)$$

- složeni operator $H(D)$ pridružuje vremenskoj funkciji $y(t)$ funkciju $u(t)$ i predstavlja formalni zapis diferencijalne jednadžbe (1)

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- sustav pobuđujemo kompleksnom eksponencijalom

$$u(t) = Ue^{st}, \qquad U = |U|e^{j\varphi}$$

U – kompleksna amplituda pobude,
$|U|$ – amplituda,
φ – faza
s – neka konkretna kompleksna frekvencija $s = \sigma + j\Omega$

- partikularno rješenje je oblika $y_p(t) = Ye^{st}$
- kompleksnu amplitudu odziva Y određujemo iz polazne jednadžbe metodom neodređenih koeficijenata pa slijedi

$$(s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N)Ye^{st} =$$
$$= (b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N)Ue^{st}$$

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- pa je kompleksna amplituda odziva Y

$$Y = \underbrace{\frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N}}_{H(s)} U = H(s)U$$

- amplituda partikularnog rješenja Y određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava, te konkretnom kompleksnom frekvencijom s

Prijenosna funkcija

- $H(s)$ je veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva Ye^{st} i kompleksne amplitude pobude Ue^{st}

$$H(s) = \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N} = \frac{Y}{U}$$

- za konkretnu frekvenciju s, H(s) ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza

$$Y = H(s)U$$

- $H(s)$ možemo formalno zapisati iz složenog operatora $H(D)$, zamjenom operatora D s kompleksnom frekvencijom s

Prijenosna funkcija

- $H(s)$, za $s \in Kompleksni$, nazivamo prijenosna funkcija ili transfer funkcija i možemo je definirati kao

$$t \in Realni, \qquad s \in Kompleksni$$
$$H(s) = \left.\frac{\text{izlazni signal}}{\text{ulazni signal}}\right|_{u(t)=e^{st}}$$

- transfer ili prijenosna funkcija sustava $H(s)$ racionalna je funkcija koju možemo prikazati kao

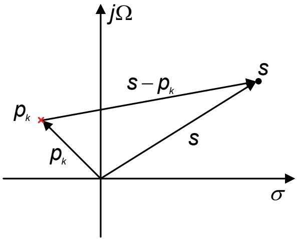
$$H(s) = K\frac{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}$$

K je konstanta
$s_1, s_2, \ldots, s_M$ su nule prijenosne funkcije
$p_1, p_2, \ldots, p_N$ su polovi[1] prijenosne funkcije

[1] dolazi od engleske riječi tent-pole

Prijenosna funkcija

- svaki od članova $(s - s_k)$ ili $(s - p_k)$ može biti predstavljen kao vektor u kompleksnoj s ravnini



- vektor $(s - p_k)$ je usmjeren od p_k do s i može biti prikazan u polarnom obliku

$$(s - p_k) = |s - p_k| e^{j\angle(s-p_k)}$$

Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju možemo pisati kao produkt i kvocijent vektora

$$H(s) = K\frac{|s-s_1|e^{j\angle(s-s_1)}|s-s_2|e^{j\angle(s-s_2)}\ldots|s-s_M|e^{j\angle(s-s_M)}}{|s-p_1|e^{j\angle(s-p_1)}|s-p_2|e^{j\angle(s-p_2)}\ldots|s-p_N|e^{j\angle(s-p_N)}}$$

- prijenosnu funkciju $H(s)$ možemo pisati i kao

$$H(s) = |H(s)|e^{j\angle H(s)}$$

pri čemu su

$$|H(s)| = |K|\frac{|s-s_1||s-s_2|\cdots|s-s_M|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_N|}$$

i

$$\angle H(s) = \angle K + [\angle(s-s_1) + \angle(s-s_2) + \cdots + \angle(s-s_M)] - \\ -[(\angle(s-p_1) + \angle(s-p_2) + \cdots + \angle(s-p_N))]$$

Primjer određivanja prijenosne funkcije

- za sustav opisan jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

pobuđen s

$$u(t) = Ue^{st}$$

partikularno rješenje je

$$y_p(t) = Ye^{st}$$

- kompleksna amplituda odziva je

$$Y = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16}U$$

Primjer određivanja prijenosne funkcije

- partikularno rješenje je

$$y_p(t) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16} U e^{st} = H(s) U e^{st}$$

- pa je prijenosna funkcija zadanog sustava

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16} = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

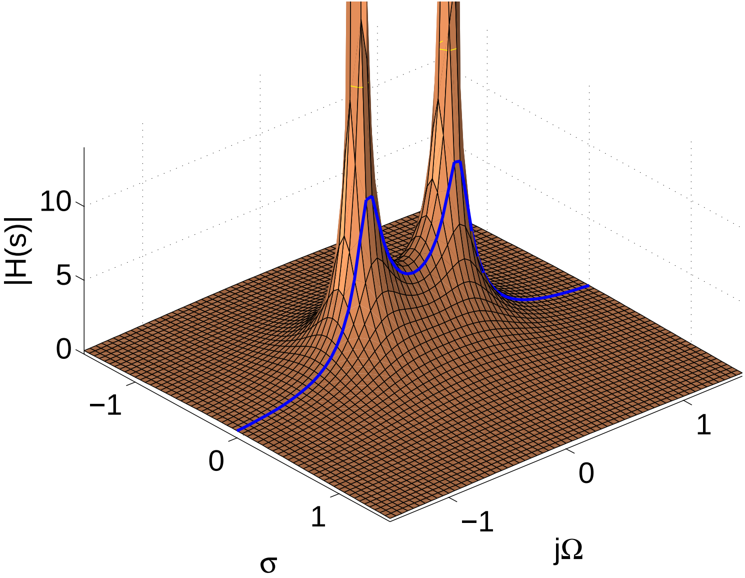
odnosno

$$H(s) = \frac{1}{[s - (-0.1 + j0.3873)][s - (-0.1 - j0.3873)]}$$

- $|H(s)|$ i $\angle H(s)$, izračunate iz diferencijalne jednadžbe, možemo prikazati i odgovarajućim plohama iznad kompleksne ravnine[2]

[2] plava krivulja označuje vrijednosti $H(s)$ za $s = \pm j\Omega$, odnosno, presjecište ploha s ravninom koju određuje imaginarna os

Primjer određivanja prijenosne funkcije

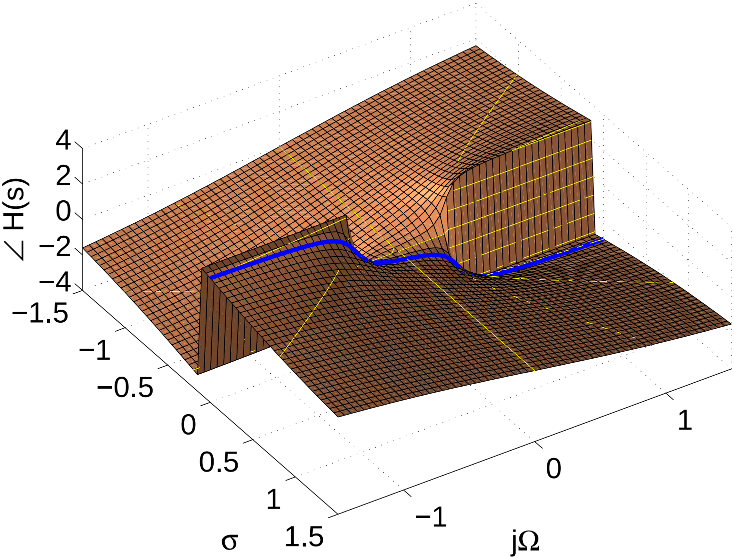


Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 15

Profesor Branko Jeren

Frekvencijska karakteristika sustava
Odziv sustava na pobudu eksponencijalom
Prijenosna funkcija
Frekvencijska karakteristika vremenski kontinuiranih sustava

Primjer određivanja prijenosne funkcije



Prisilni odziv sustava

- razmatraju se specijalni slučajevi kompleksne frekvencije pobude $s = 0$ i $s = j\Omega$
- za $s = 0$, pobuda je $u(t) = Ue^{st} = Ue^{0 \cdot t} = U$, dakle, konstanta amplitude U

$$H(s) = \left. \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N} \right|_{s=0} = \frac{b_N}{a_N}$$

- pa je prisilni odziv

$$y_p(t) = H(0)U$$

Prisilni odziv sustava

- za $s = j\Omega$, pobuda je harmonijski (sinusoidalni) signal konstantne amplitude

$$u(t) = Ue^{j\Omega t} = U[\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)], \text{ za } U \in Realni$$

- kompleksna amplituda prisilnog odziva je

$$Y = \frac{b_{N-M}(j\Omega)^M + b_{N-M+1}(j\Omega)^{M-1} + \cdots + b_{N-1}(j\Omega) + b_N}{(j\Omega)^N + a_1(j\Omega)^{N-1} + \cdots + a_{N-1}(j\Omega) + a_N} U$$

- pa je prisilni odziv

$$y_p(t) = H(j\Omega)Ue^{j\Omega t}$$

- $H(j\Omega)$ je frekvencijska karakteristika sustava

Prisilni odziv sustava

- za pobudu

$$u(t) = Ue^{-j\Omega t} = U[\cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t)], \text{ za } U \in Realni$$

- kompleksna amplituda prisilnog odziva je

$$Y = \frac{b_{N-M}(-j\Omega)^M + \cdots + b_{N-1}(-j\Omega) + b_N}{(-j\Omega)^N + a_1(-j\Omega)^{N-1} + \cdots + a_{N-1}(-j\Omega) + a_N} U$$

- pa je prisilni odziv

$$y_p(t) = H(-j\Omega)Ue^{-j\Omega t}$$

Prisilni odziv sustava

- za pobudu

$$u(t) = \frac{Ue^{j\Omega t} + Ue^{-j\Omega t}}{2} = U\cos(\Omega t), \qquad \text{za } U \in Realni$$

- prisilni odziv je

$$y_p(t) = \frac{H(j\Omega)Ue^{j\Omega t} + H(-j\Omega)Ue^{-j\Omega t}}{2},$$

$$y_p(t) = \frac{H(j\Omega)Ue^{j\Omega t}}{2} + \left(\frac{H(j\Omega)Ue^{j\Omega t}}{2}\right)^*,$$

$$y_p(t) = 2Re\left(\frac{H(j\Omega)Ue^{j\Omega t}}{2}\right) = Re\left(|H(j\Omega)|e^{j\angle H(j\Omega)}Ue^{j\Omega t}\right)$$

$$y_p(t) = U|H(j\Omega)|\cos(\Omega t + \angle H(j\Omega))$$

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

- frekvencijska karakteristika je kompleksna funkcija pa vrijedi

$$H(j\Omega) = Re[H(j\Omega)] + jIm[H(j\Omega)] = |H(j\Omega)|e^{j\angle H(j\Omega)}$$

pri čemu su

- amplitudna frekvencijska karakteristika

$$|H(j\Omega)| = \sqrt{(Re[H(j\Omega)])^2 + (Im[H(j\Omega)])^2}$$

- fazna frekvencijska karakteristika[3]

$$\angle H(j\Omega) = \arctan\left(\frac{Im[H(j\Omega)]}{Re[H(j\Omega)]}\right)$$

[3]zbog višeznačnosti *arctan* funkcije treba se računati *arctan* za sva četiri kvadranta. U MATLAB-u se u tu svrhu koristi funkcija *atan*2

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

- prijenosna funkcija sustava opisanog jednadžbom
  $\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$
  je

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16} = \frac{1}{(s + 0.1 - j0.387)(s + 0.1 + j0.387)}$$

- pa je frekvencijska karakteristika

$$H(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^2 + 0.2(j\Omega) + 0.16}$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega - 0.4e^{j0.3873})(j\Omega - 0.4e^{-j0.3873})}$$

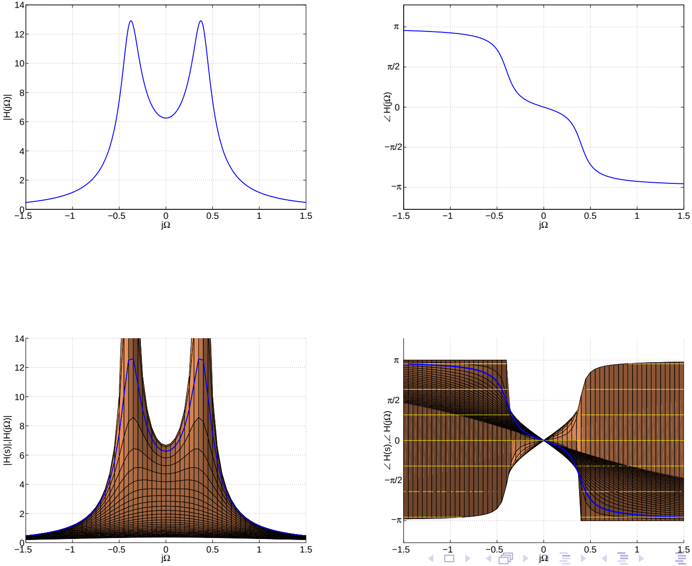
Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 15

Profesor Branko Jeren

Frekvencijska karakteristika sustava

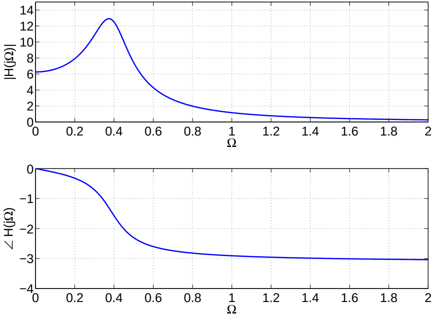
- Odziv sustava na pobudu eksponencijalom
- Prijenosna funkcija
- Frekvencijska karakteristika vremenski kontinuiranih sustava

Frekvencijska karakteristika



Frekvencijska karakteristika

Ω	$\lvert H(j\Omega)\rvert$	$\angle H(j\Omega)$
0.0	6.2500	0.0000
0.2	7.9057	-0.3218
0.4	12.5000	-1.5708
0.6	4.2875	-2.6012
0.8	1.9764	-2.8198
1.0	1.1581	-2.9078
1.2	0.7679	-2.9562
1.4	0.5490	-2.9873
1.6	0.4130	-3.0090
1.8	0.3225	-3.0252
2.0	0.2590	-3.0378



vidi Simulink primjer *Pred*15_*Primjer*7

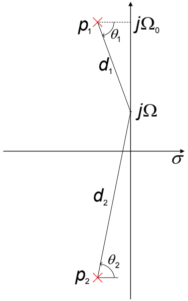
Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 15

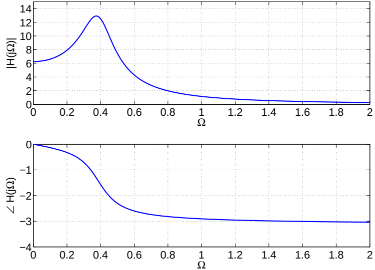
Profesor Branko Jeren

Frekvencijska karakteristika

- razmotrimo još jednom utjecaj polova na frekvencijsku karakteristiku

$$H(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega - p_1)(j\Omega - p_2)} = \frac{1}{(d_1 e^{j\theta_1})(d_2 e^{j\theta_2})} = \frac{1}{d_1 d_2} e^{-j(\theta_1+\theta_2)}$$





Frekvencijska karakteristika

- uvidom u frekvencijsku karakteristiku sustava, u prethodnom primjeru, zaključujemo da sustav ima filtarska svojstva tzv. niskopropusnog filtra
- sustav "propušta" sinusoidne pobude nižih frekvencija (recimo nižih od neke granične frekvencije Ω_c), a "guši" sinusoidne pobude viših frekvencija
- primjer jasno pokazuje kako položaj polova (kasnije se pokazuje i za položaj nula) određuje frekvencijsku karakteristiku sustava
- intuitivno zaključujemo kako, odgovarajućim razmještajem polova i nula, možemo projektirati sustav odgovarajuće frekvencijske karakteristike
- ovdje će se kroz nekoliko primjera, pogodnim razmještajem polova i nula, ilustrirati "projektiranje" sustava raznih filtarskih karakteristika[4]

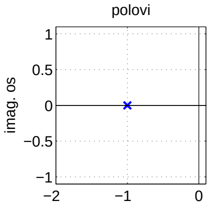
[4] sustavni postupci projektiranja sustava izučavaju se u drugim specijaliziranim predmetima

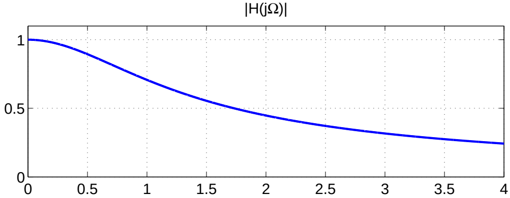
Frekvencijska karakteristika

- iz prethodnog primjera možemo zaključiti kako je maksimum $H(j\Omega)$, za $j\Omega$, točno nasuprot pola
- uzevši to u obzir "projektiramo" niskopropusni filtar prvog reda
- izabiremo pol na mjestu $p_1 = -1$
- maksimum $H(j\Omega)$ će biti na frekvenciji $j\Omega = 0$

Frekvencijska karakteristika – primjer sustava prvog reda

$$H(s) = \frac{1}{s - p_1} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow |H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 + 1}}$$





Frekvencijska karakteristika

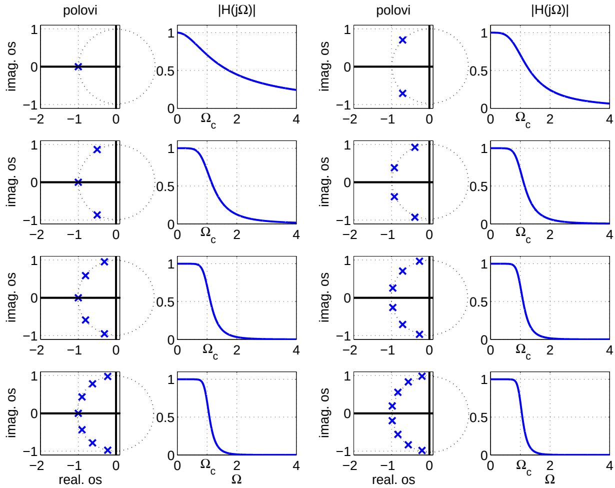
- sustav bolje formiranih filtarskih karakteristika može se postići postavljanjem "zida" polova nasuprot $j\Omega$ osi
- ovo će biti ilustrirano nizom primjera tzv. Butterworth-ovih[5] niskopropusnih filtara za koje vrijedi da su polovi jednoliko razmješteni na kružnici radijusa $\Omega_c = 1$, gdje je $\Omega_c = 1$ granična frekvencija filtra
- u projektiranju koristimo Matlab naredbu za projektiranje vremenski kontinuiranih Butterworth-ovih filtara

$$[num, den] = butter(n, \Omega_c, \text{`}low\text{`}, \text{`}s\text{`})$$

gdje su: n red sustava, Ω_c granična frekvencija, *num* izračunati brojnik, i *den* izračunati nazivnik prijenosne funkcije

[5] postupak projektiranja Butterworth-ovih filtara izučava se u specijaliziranim predmetima

Frekvencijska karakteristika



Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 15

Profesor Branko Jeren

Frekvencijska karakteristika

- ovdje je posebno napisana samo prijenosna funkcija, i vrijednosti polova, za Butterworth–ov filtar 5–tog reda

$$H(s) = \frac{1}{s^5 + 3.2361s^4 + 5.2361s^3 + 5.2361s^2 + 3.2361s + 1}$$

- a vrijednosti polova su

$$\begin{aligned}
p_1 = -0.3090 + j0.9511 &= e^{j1.8849} = e^{j\frac{3\pi}{5}} \\
p_2 = -0.8090 + j0.5877 &= e^{j2.5133} = e^{j\frac{4\pi}{5}} \\
p_3 = -1.0000 &= e^{j3.1416} = e^{j\frac{5\pi}{5}} = e^{j\pi} \\
p_4 = -0.8090 - j0.5877 &= e^{-j2.5133} = e^{-j\frac{4\pi}{5}} \\
p_5 = -0.3090 - j0.9511 &= e^{-j1.8849} = e^{-j\frac{3\pi}{5}}
\end{aligned}$$

Frekvencijska karakteristika – doprinos nula

- za prijenosnu funkciju sustava vrijedi

$$H(s)|_{s=s_j} = K\frac{(s-s_1)\cdots(s-s_M)}{(s-p_1)\cdots(s-p_N)} = 0, \quad j=1,\ldots,N$$

- ako prije razmatranom sustavu prvog reda, s polom $p_1 = -1$, dodamo "nulu" u $s_1 = 0$, rezultirajući sustav će postati visokopropusni filtar prvog reda s prijenosnom funkcijom

$$H(s) = \frac{s-s_1}{s-p_1} = \frac{s}{s+1}$$

- amplitudna frekvencijska karakteristika ovog sustava je

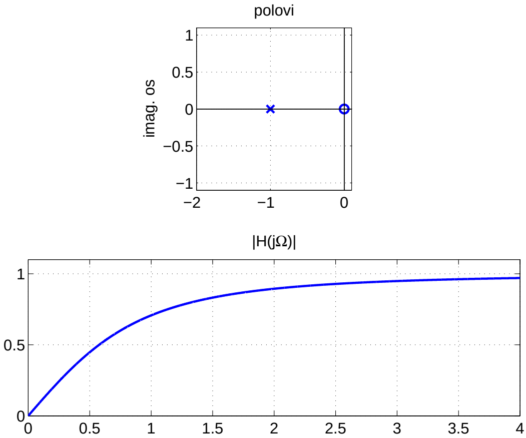
$$|H(j\Omega)| = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2+1}}$$

a fazna frekvencijska karakteristika je

$$\angle H(j\Omega) = \angle(j\Omega) - \angle(j\Omega+1)$$

Frekvencijska karakteristika – primjer sustava prvog reda

$$H(s) = \frac{s}{s+1} \Rightarrow |H(j\Omega)| = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2+1}}$$



Frekvencijska karakteristika – doprinos nula

- doprinos nule na ukupnu frekvencijsku karakteristiku visokopropusnog filtra možemo razmotriti na slijedeći način
- prijenosnu funkciju $H(s)$ možemo razložiti i kao

$$H(s) = \frac{s}{s+1} = \underbrace{s}_{H_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{H_2(s)} = |H_1(s)|e^{j\angle H_1(s)}|H_2(s)|e^{j\angle H_2(s)}$$

odnosno

$$H(s) = |H_1(s)| \cdot |H_2(s)|e^{j(\angle H_1(s)+\angle H_2(s))}$$

Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 15

Profesor Branko Jeren

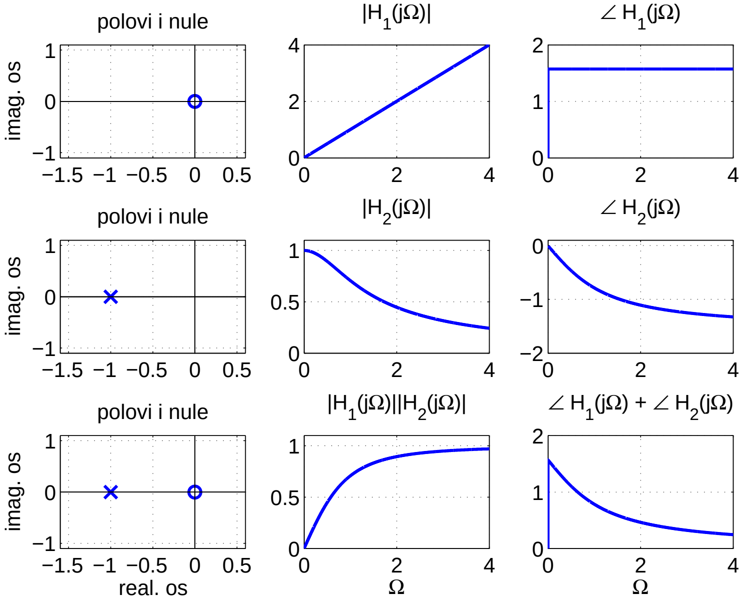
Frekvencijska karakteristika sustava

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

Prijenosna funkcija

Frekvencijska karakteristika vremenski kontinuiranih sustava

Frekvencijska karakteristika – doprinos nula



Frekvencijska karakteristika – pojasna brana

- ilustrira se projektiranje jednostavne pojasne brane čije su nule na frekvenciji $s = \pm j0.5$
- imajući u vidu prije dane primjere Butterworth-ovih filtara, za zaključiti je kako sustavi čiji su polovi na jediničnoj kružnici daju frekvencijsku karakteristiku koja je glatka u pojasu propuštanja
- zato i ovdje biramo polove čiji su polovi razmješteni na kružnici radijusa 0.5
- neka su, dakle, nule

$$s_{1,2} = \pm j0.5$$

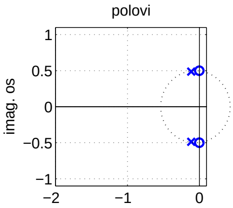
a polovi neka su

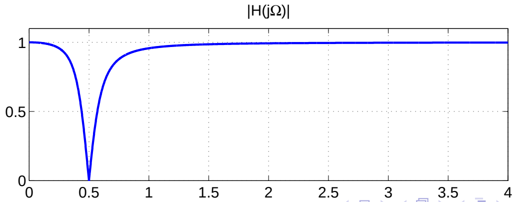
$$p_{1,2} = 0.5e^{\pm j1.8}$$

Frekvencijska karakteristika – pojasna brana

- za zadane polove i nule prijenosna funkcija je

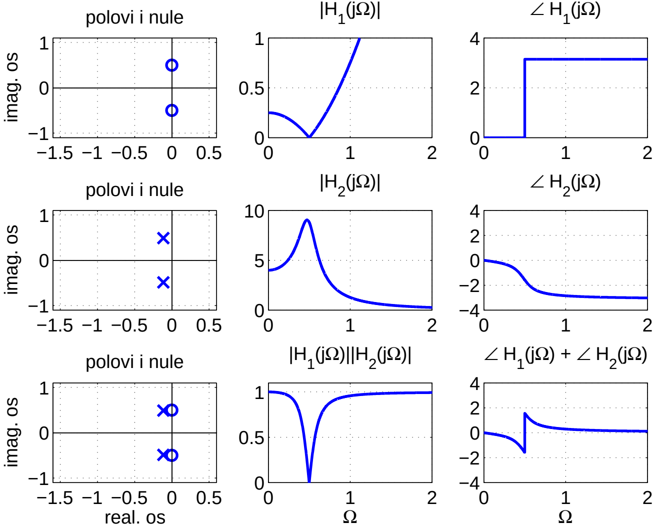
$$H(s) = \frac{s^2 + 0.25}{s^2 + 0.2272s + 0.25}$$





Frekvencijska karakteristika – pojasna brana

- i ovdje se može ilustrirati doprinos nula



Frekvencijska karakteristika – fazna frekvencijska karakteristika

- razmatra se frekvencijska karakteristika sustava

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1}$$

- frekvencijska karakteristika je kompleksna funkcija pa vrijedi

$$H(j\Omega) = Re[H(j\Omega)] + jIm[H(j\Omega)] = |H(j\Omega)|e^{j\angle H(j\Omega)}$$

Frekvencijska karakteristika – fazna frekvencijska karakteristika

- fazna frekvencijska karakteristika je

$$\angle H(j\Omega) = \arctan\left(\frac{Im[H(j\Omega)]}{Re[H(j\Omega)]}\right)$$

- kako je arkus funkcija višeznačna, u prikazu vrijednosti $\angle H(j\Omega)$, uzimaju se samo glavne vrijednosti faze u intevalu $-\pi$ i π (dakle faza modulo 2π)
- za primijetiti je kako ova funkcija sadrži, na nekim frekvencijama, diskontinuitete, u iznosu 2π
- pribrajanjem, ili oduzimanjem, cjelobrojnog višekratnika 2π, vrijednostima faze, na bilo kojoj frekvenciji, izvorna frekvencijska karakteristika se ne mijenja i moguće je prikazati $\angle H(j\Omega)$ u obliku tzv. nerazmotane faze (unwrapped phase)

Frekvencijska karakteristika – fazna frekvencijska karakteristika