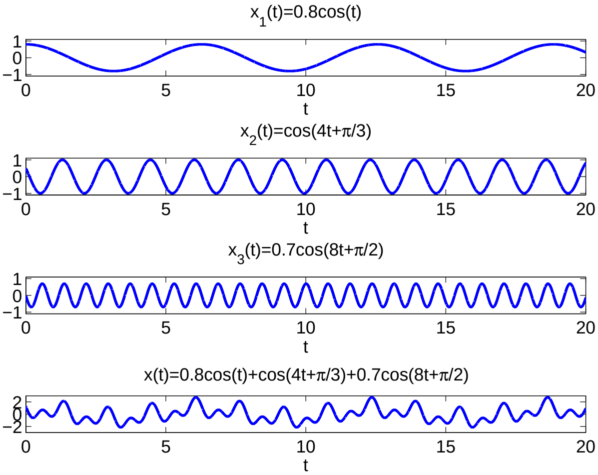
Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

06. lipanj 2007.

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- linearna kombinacija sinusoidnih signala generira periodični signal



Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

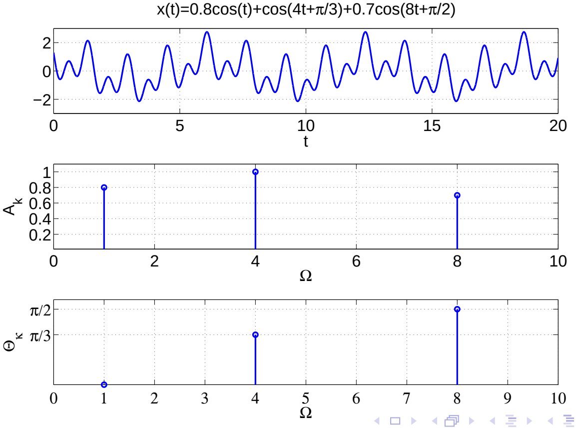
- na slici je prikazan zbroj sinusoida $x_1(t) = 0.8\cos(t), x_2(t) = \cos(4t + \frac{\pi}{3})$, i $x_3(t) = 0.7\cos(8t + \frac{\pi}{2})$,

$$x(t) = 0.8\cos(t) + \cos(4t + \frac{\pi}{3}) + 0.7\cos(8t + \frac{\pi}{2})$$

- signal $x(t)$ je periodičan, i nastao je linearnom kombinacijom sinusoida $A_k\cos(\Omega_k t + \Theta_k)$, pa može biti karakteriziran frekvencijama, Ω_k, amplitudama, A_k, i fazama Θ_k sinusoidnih komponenti koje ga sačinjavaju
- u konkretnom primjeru periodičan signal, $x(t)$, karakteriziran je frekvencijama, $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = 4, \Omega_3 = 8$, amplitudama, $A_1 = 0.8, A_2 = 1, A_3 = 0.7$, i fazama $\Theta_1 = 0, \Theta_2 = \frac{\pi}{3}, \Theta_3 = \frac{\pi}{2}$ sinusoidnih komponenti koje ga sačinjavaju

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- signal $x(t)$ možemo grafički predstaviti prikazom njegove funkcije u vremenskoj domeni ali i, sukladno kazanom, prikazom A_k i Θ_k u ovisnosti o frekvenciji $\Omega(rad/s)$



Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- na slici su dani vremenski prikaz $x(t)$, amplitudni spektar, te fazni spektar
- amplitudni spektar prikazuje amplitude (njihove apsolutne vrijednosti) različitih frekvencijskih komponenti koje čine signal
- fazni spektar predstavlja prikaz faze Θ_k, u radijanima, u ovisnosti o frekvenciji
- linearnom kombinacijom kompleksnih signala također se generira periodičan signal i dalje razmatramo upravo taj prikaz

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- linearna kombinacije harmonijski vezanih, vremenski kontinuiranih, kompleksnih eksponencijala generira kontinuirani signal $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

  koji je periodičan s periodom

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

  pri čemu se signal $e^{jk\Omega_0 t}$ naziva k–tom harmonijskom komponentom ili k-tim harmonikom signala $x(t)$
- to upućuje kako linearna kombinacija kompleksnih eksponencijala može poslužiti u prikazu realnih i kompleksnih periodičnih kontinuiranih signala

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- prikaz periodičkog signala $x(t)$ linearnom kombinacijom harmonijski vezanih kompleksnih eksponencijala

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

naziva se Fourierov red

- $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ određuje osnovnu periodu, a koeficijenti reda valni oblik signala $x(t)$

Fourierov red

- da bi neki periodični vremenski kontinuirani signal prikazali uz pomoć Fourierovog reda potrebno je odrediti koeficijente reda X_k
- izračunavanje koeficijenata $\{X_k\}$ započinje množenjem, s obje strane,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

s $e^{-jm\Omega_0 t}$, za $m \in$ Cjelobrojni

- slijedi integriranje s obje strane, preko jednog perioda, dakle, 0 do T_0, ili općenitije od t_0 do $t_0 + T_0$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j\Omega_0 m t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-jm\Omega_0 t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t} \right) dt \tag{1}$$

- desnu stranu transformiramo u

Fourierov red

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\Omega_0 t} dt}_{Int} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \left[\frac{e^{j(k-m)\Omega_0 t}}{j(k-m)\Omega_0} \right]_{t_0}^{t_0+T_0}$$

- brojnik izraza u pravokutnim zagradama jednak je na obje granice, pa je za regularni nazivnik ($k \neq m$) integral jednak nuli
- s druge strane, za $k = m$, integral *Int* iznosi

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\Omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = t \Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = T_0$$

pa se (1) reducira u

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jm\Omega_0 t} dt = X_m T_0 \Rightarrow$$

Fourierov red

- slijedi izraz za koeficijente Fourierovog reda

$$X_m = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jm\Omega_0 t} dt$$

- budući je t_0 proizvoljan, integral može biti izračunat preko bilo kojeg intervala duljine T_0 pa je konačno, uz zamjenu $k = m$, izraz za izračun koeficijenata Fourierovog reda

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

Konvergencija Fourierovog reda

- postoje dvije klase periodičnih signala za koje postoji konvergentan Fourierov red
  1. periodični signali konačne energije u jednom periodu (konačne ukupne srednje snage) za koje vrijedi

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$

  2. periodični signali koji zadovoljavaju Dirichletove uvjete
     (a) signal $x(t)$ je apsolutno integrabilan u bilo kojem periodu

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

     (b) signal $x(t)$ ima konačni broj maksimuma i minimuma u bilo kojem periodu
     (c) ima konačni broj diskontinuiteta u bilo kojem periodu
- svi periodični signali od praktičnog interesa zadovoljavaju gornje uvjete

Konvergencija Fourierovog reda

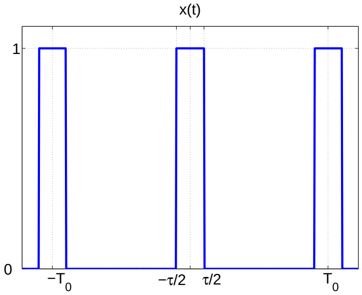
- za periodični signal $x(t)$, koji zadovoljava uvjete konvergencije, vrijedi par

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda za periodični signal dan na slici



- signal je periodičan s osnovnim periodom T_0
- signal je paran i vrijedi $x(t) = x(-t)$
- signal možemo interpretirati kao periodično ponavljanje pravokutnog impulsa amplitude 1 i širine τ

Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda
  za $k = 0$, X_0 inače predstavlja srednju vrijednost (istosmjernu komponentu) signala $x(t)$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = \frac{\tau}{T_0}$$

za $k \neq 0$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jk\Omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-jk\Omega_0 t}}{(-jk\Omega_0)}\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{k\Omega_0 T_0}\frac{e^{\frac{jk\Omega_0\tau}{2}} - e^{\frac{-jk\Omega_0\tau}{2}}}{j} =$$

$$= \frac{2\tau}{T_0 k\Omega_0\tau}\frac{e^{\frac{jk\Omega_0\tau}{2}} - e^{\frac{-jk\Omega_0\tau}{2}}}{2j} = \frac{\tau}{T_0}\frac{\sin\frac{k\Omega_0\tau}{2}}{\frac{k\Omega_0\tau}{2}} \quad \text{za } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Linijski spektar

- općenito, koeficijenti Fourierovog reda poprimaju kompleksne vrijednosti i skup $\{X_k\}|_{k=-\infty}^{\infty}$ može biti grafički prikazan odvojenim grafovima njihove amplitude i faze
- kombinacija oba grafa $X_k(j\Omega_k) = |X_k(jk\Omega_0)|e^{j\angle X_k(jk\Omega_0)}$ naziva se linijski spektar signala $x(t)$
- $|X_k(jk\Omega_0)|$ predstavlja amplitudni spektar,
- $\angle X_k(jk\Omega_0)$ je fazni spektar periodičnog signala

Linijski spektar

- za parnu funkciju $x(t)$, koeficijenti Fourierovog reda su realni[1]
- u tom slučaju obično se crta samo jedan graf, $\{X_k\}$, s pozitivnim i negativnim vrijednostima X_k
- izračunati su koeficijenti Fourierovog reda pravokutnog periodičnog signala

$$X_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\Omega_0\tau}{2}}{\frac{k\Omega_0\tau}{2}}$$

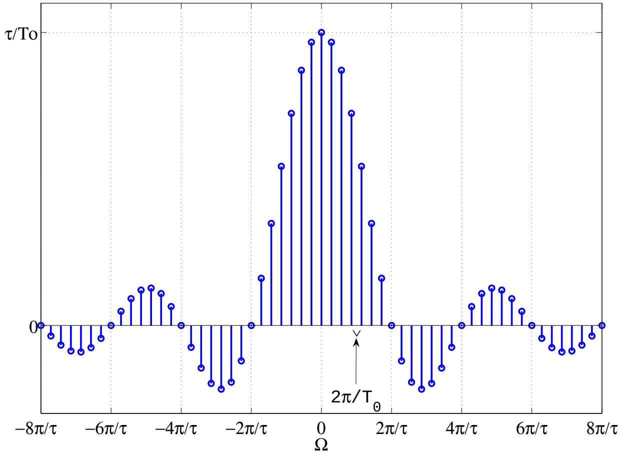
- za primijetiti je kako je njihova dodirnica oblika[2]

$$sinc(w) = \frac{sin(w)}{w}$$

- koeficijenti su realni i prikazujemo ih jednim grafom

[1] pokazuje se kasnije
[2] sinc(0)=1

Linijski spektar – primjer



Parsevalova relacija

- periodični kontinuirani signal $x(t)$ ima beskonačnu energiju ali konačnu srednju snagu koja je dana s

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

- uz $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$ možemo pisati

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* e^{-jk\Omega_0 t}\right) dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* \left(\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

- ova se jednakost naziva Parsevalova relacija

Parsevalova relacija

- ilustrirajmo fizikalno značenje Parsevalove relacije

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

- neka se $x(t)$ sastoji samo od jedne kompleksne eksponencijale

$$x(t) = X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

- u tom slučaju svi su koeficijenti Fourierovog reda, osim X_k, jednaki nuli, i sukladno tomu srednja snaga signala je

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |X_k e^{jk\Omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |X_k|^2 dt = |X_k|^2$$

- očigledno je kako $|X_k|^2$ predstavlja srednju snagu k–te harmoničke komponente signala
- ukupna srednja snaga periodičkog signala je, prema tome, suma srednjih snaga svih harmonika

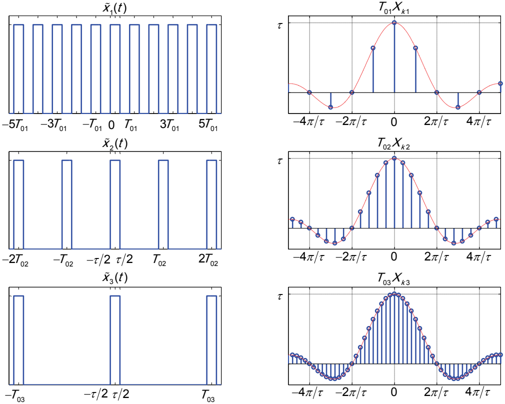
Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- pokazano je kako je spektar periodičnog signala diskretan
- dan je primjer parnog periodičnog pravokutnog signala čiji je spektar

$$X_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\Omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\Omega_0 \tau}{2}}$$

  gdje je T_0 perioda, a τ širina pravokutnog impulsa
- razmatra se spektar tri pravokutna signala, za tri vrijednosti periode T_{01}; $T_{02} = 2.5T_{01}$ i $T_{03} = 2T_{02} = 5T_{01}$, uz fiksirani τ
- na slici koja slijedi prikazuju se normalizirani amplitudni spektri $T_{01}X_{k1}$, $T_{02}X_{k2}$ i $T_{03}X_{k3}$ (normaliziranjem se zadržava ista amplituda, τ, sva tri normalizirana spektra)

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala



Slika 1: Periodični signali $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \tilde{x}_3(t)$ i normalizirani spektri $T_{01}X_{k1}$, $T_{02}X_{k2}$, $T_{03}X_{k3}$

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- periodični pravokutni signal[3] $\tilde{x}(t)$ možemo interpretirati kao signal koji je nastao periodičnim ponavljanjem aperiodičnog pravokutnog impulsa $x(t)$ trajanja τ
- normalizirani koeficijenti spektra $T_0 X_k$ mogu se interpretirati kao uzorci sinc funkcije koji čine linijski spektar signala $\tilde{x}(t)$
- očigledno je kako s povećanjem osnovne periode spektar periodičnog signala $\tilde{x}(t)$ postaje gušći i gušći no dodirnica ostaje nepromijenjena
- intuitivno zaključujemo kako za $T_0 \to \infty$ linijski spektar postaje kontinuirana funkcija frekvencije Ω identična dodirnici koju bi mogli izračunati iz

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

[3] oznakom $\tilde{x}(t)$ želi se, zbog potrebe izvoda koji slijedi, naglasiti periodičnost signala

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- naime, kako se normalizirani koeficijenti spektra T_0X_k izračunavaju iz

$$T_0X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

za očekivati je onda kako se vremenski kontinuirana dodirnica izračunava iz

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \qquad (2)$$

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- dakle,

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\Omega t}dt = \tau \frac{sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}$$

- pa koeficijente Fourierovog reda možemo prikazati kao uzorke $X(j\Omega)$ jer vrijedi

$$X_k = \frac{\tau}{T_0}\frac{\sin\frac{k\Omega_0\tau}{2}}{\frac{k\Omega_0\tau}{2}} = \frac{1}{T_0}X(jk\Omega_0)$$

- općenito, periodični signal $\tilde{x}(t)$ prikazujemo Fourierovim redom oblika

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- odnosno, uz $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$,

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \Omega_0$$

- za $T_0 \to \infty$, dakle kad periodični signal prelazi u aperiodičan, možemo interpretirati
  - $\Omega_0 \to d\Omega$ – osnovna frekvencija postaje neizmjerno malom veličinom
  - $k\Omega_0 \to \Omega$ – harmonijske frekvencije postaju tako bliske da prelaze u kontinuum
  - sumacija teži k integralu
  - $\tilde{x}(t) \to x(t)$ – periodični signal prelazi u aperiodičan
  - pa gornji izraz prelazi u

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \qquad (3)$$

Fourierova transformacija

- jednadžba (2) predstavlja Fourierovu transformaciju ili spektar signala $x(t)$, a (3) inverznu Fourierovu transformaciju koja omogućuje određivanje signala $x(t)$ iz njegova spektra
- dakle, jednadžbe (2) i (3) predstavljaju transformacijski par
  - Fourierova transformacija

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

  - inverzna Fourierova transformacija

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- koriste se i oznake

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \qquad \text{ili} \qquad x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega)$$

Konvergencija Fourierove transformacije

- slično kao kod Fourierovog reda, i ovdje postoje dvije klase signala za koje Fourierova transformacija konvergira
  1. signali konačne totalne energije za koje vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

  2. signali koji zadovoljavaju Dirichletove uvjete
     (a) signal $x(t)$ je apsolutno integrabilan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

     (b) signal $x(t)$ ima konačni broj maksimuma i minimuma, u bilo kojem konačnom intervalu vremena
     (c) ima konačni broj diskontinuiteta, u bilo kojem konačnom intervalu vremena, pri čemu svaki od diskontinuiteta mora biti konačan

Veza Fourierove i Laplaceove transformacije

- usporedimo izraze za Fourierovu i dvostranu Laplaceovu transformaciju

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \qquad \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- očigledno je kako je Fourierova transformacija vremenskog signala jednaka Laplaceovoj transformaciji na imaginarnoj osi [4], $s = j\Omega$, kompleksne ravnine
- pa, u slučaju da područje konvergencije $\mathcal{L}$–transformacije sadrži imaginarnu os $s = j\Omega$, vrijedi

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{s=j\Omega}$$

- može se zaključiti kako, zbog sličnosti, za Fourierovu transformaciju vrijede slična svojstva kao i kod $\mathcal{L}$–transformacije (neka od njih daju se kroz primjere)

[4] usporedi vezu prijenosne funkcije $H(s)$ i frekvencijske karak. $H(j\Omega)$

Fourierova transformacija

- rezultat Fourierove transformacije, $X(j\Omega)$,

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

  naziva se i Fourierov spektar ili jednostavno spektar signala $x(t)$
- $X(j\Omega)$ je kompleksna funkcija realne varijable[5] Ω i pišemo

$$X(j\Omega) = |X(j\Omega)|e^{j\angle X(j\Omega)}$$

  gdje su $|X(j\Omega)|$ amplitudni spektar a,
  $\angle X(j\Omega)$ fazni spektar

[5] naizgled zbunjuje oznaka $X(j\Omega)$, a ne $X(\Omega)$, no to je samo stvar konvencije jer se želi istaknuti kako je funkcija definirana na imaginarnoj osi. Smisao konvencije je vidljiv i kod usporedbe s $\mathcal{L}$-transformacijom

Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Cjelina 20

Profesor Branko Jeren

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

Fourierov red

Fourierova transformacija

Fourierova transformacija – Parsevalova jednakost

energija aperiodičnog kontinuiranog signala $x(t)$, čija je Fourierova transformacija $X(j\Omega)$, je

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \quad \text{za } |x(t)|^2 = x(t)x^*(t) \Rightarrow$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega)e^{-j\Omega t}d\Omega\right]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega)d\Omega\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

je Parsevalova jednakost za aperiodične vremenski kontinuirane signale konačne energije, i izražava princip očuvanja energije u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

Fourierova transformacija jediničnog impulsa

- $\mathcal{F}$–transformacija jediničnog impulsa $\delta(t)$ je

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = 1$$

- $\mathcal{F}$–transformacija pomaknutog jediničnog impulsa $\delta(t - t_0)$ je

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\Omega t_0}$$

- očigledno je da pomak jediničnog impulsa $\delta(t)$ ne mijenja amplitudu Fourierove transformacije, ali mijenja fazu $\angle\{\mathcal{F}\{\delta(t)\}\}$ koja, za $t_0 > 0$, pada linearno
- gradijent faze odgovara iznosu pomaka jediničnog impulsa, za t_0, u vremenskoj domeni
- slijedi slika koja ilustrira oba primjera

Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Cjelina 20

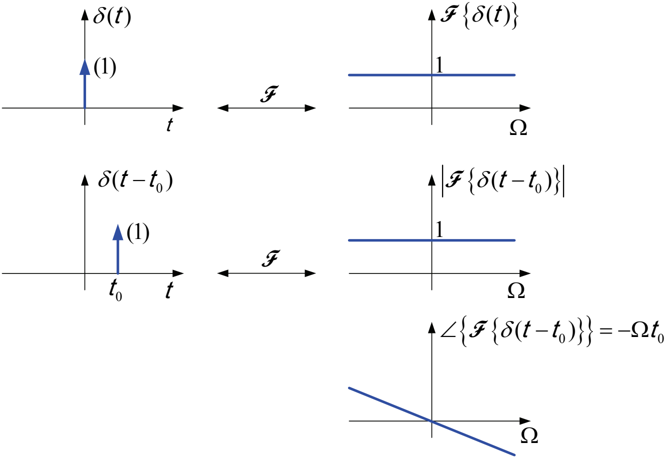
Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

Fourierov red

Fourierova transformacija

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala



Fourierova transformacija pravokutnog impulsa

- $\mathcal{F}$–transformacija pravokutnog impulsa

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } -\frac{\tau}{2} \le t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

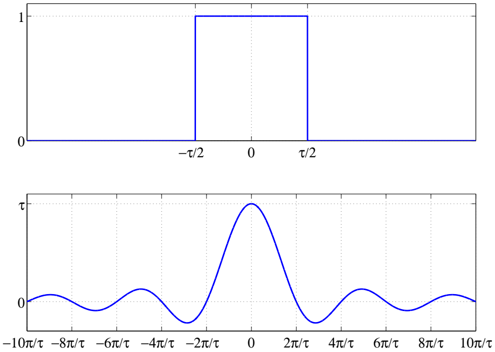
je

$$\mathcal{F}\{p_\tau(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\Omega t} dt = \tau \frac{sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}$$

- spektar je realna funkcija, što je posljedica parnosti signala $p_\tau(t)$, i prikazujemo ga jednim grafom

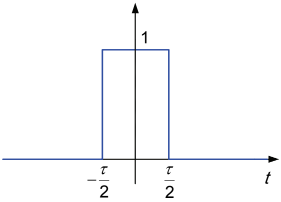
Fourierova transformacija pravokutnog impulsa

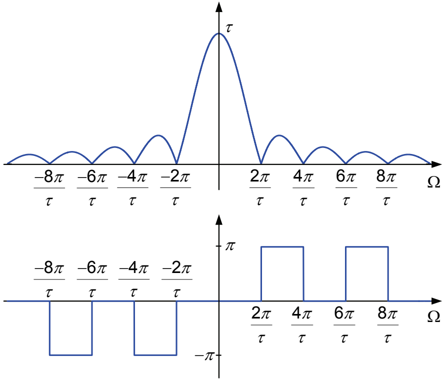
- prikazuju se pravokutni impuls i njegov realni spektar



Fourierova transformacija pravokutnog impulsa

- prikazuju se pravokutni impuls i amplitudni i fazni spektar
- s obzirom da je spektar realan, faza je nula za nenegativne vrijednosti spektra, a $+\pi$ ili $-\pi$, za negativne vrijednosti spektra





Simetrije kod Fourierove transformacije

- u trećoj cjelini predavanja, razmatrana je parnost i neparnost signala te, konjugirana simetričnost kompleksnih signala, a ovdje će oni biti korišteni u izvodu nekih svojstva simetrije kod Fourierove transformacije
- razmotrimo Fourierovu transformaciju realnog signala

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$X(-j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\Omega t} dt$$

$$X^*(-j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = X(j\Omega)$$

- zaključujemo kako realni signali imaju konjugirano simetričan spektar

Simetrije kod Fourierove transformacije

- konjugirana simetričnost spektra, realnog vremenskog signala, rezultira u parnosti i neparnosti slijedećih komponenti spektra

$$
\begin{aligned}
X(j\Omega) &= X^*(-j\Omega) && \\
Re\{X(j\Omega)\} &= Re\{X(-j\Omega)\} && \text{realni dio spektra paran} \\
Im\{X(j\Omega)\} &= -Im\{X(-j\Omega)\} && \text{imaginarni dio spektra neparan} \\
|X(j\Omega)| &= |X(-j\Omega)| && \text{amplitudni spektar paran} \\
\angle\{X(j\Omega)\} &= -\angle\{X(-j\Omega)\} && \text{fazni spektar neparan}
\end{aligned}
$$

Simetrije kod Fourierove transformacije

- razmotrimo Fourierovu transformaciju parnog signala
- za realan i paran signal $x(t) = x(-t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$, vrijedi $\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[\mathcal{F}\{x(t)\} + \mathcal{F}\{x(-t)\}]$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\Omega t}dt$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} + \mathcal{F}\{x(-t)\} = 2\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\Omega t)dt$$

- pa je za realan, i paran, signal $x(t)$ Fourierova transformacija realna i parna

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\Omega t)dt$$

Fourierova transformacija – svojstvo vremenskog pomaka

- Fourierova transformacija signala $x(t) = p_\tau(t - \frac{\tau}{2})$, dakle,

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

je

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-0}^{\tau} e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\frac{\Omega\tau}{2}} \underbrace{\tau \frac{\sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}}_{\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}}$$

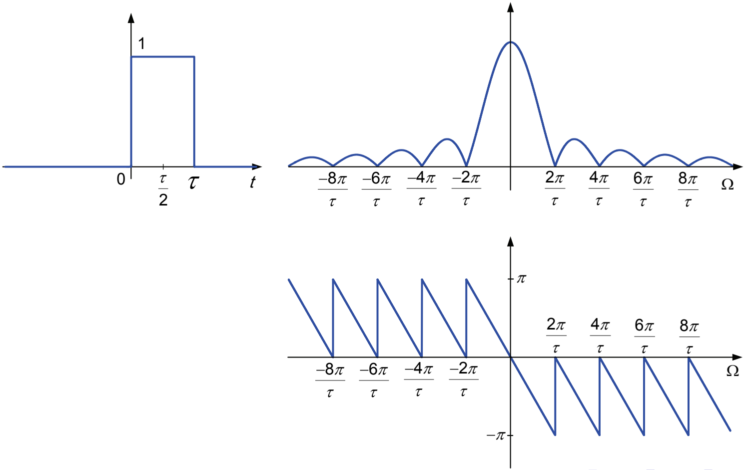
- očito da se radi o svojstvu pomaka Fourierove transformacije jer vrijedi

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega) = |X(j\Omega)| e^{j[\angle X(j\Omega) - j\Omega t_0]}$$

- pomak signala u vremenskoj domeni rezultira u linearnom faznom pomaku njegove transformacije

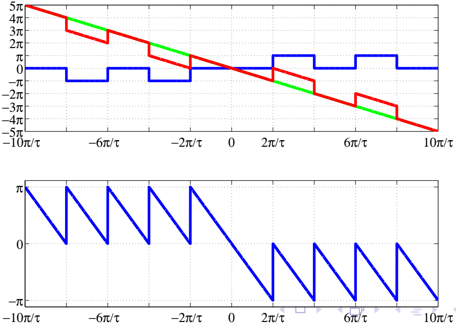
Fourierova transformacija pravokutnog impulsa – neparnog

- prikazuju se pomaknuti pravokutni impuls (signal nije više paran) i njegov spektar



Fourierova transformacija pravokutnog impulsa – neparnog

- interpretira se faza pomaknutog pravokutnog impulsa
- plavo je faza nepomaknutog (parnog) pravokutnog impulsa, $\angle\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}$, zeleno je doprinos fazi zbog pomaka signala u vremenskoj domeni $-\frac{\Omega\tau}{2}$, a crveno je ukupna faza
- na donjoj slici prikazuju se samo glavne vrijednosti faze u intevalu $-\pi$ i π (dakle faza modulo 2π), i to je u literaturi uobičajeni način prikaza faze



Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti

- očigledna je sličnost izraza za Fourierovu i inverznu Fourierovu transformaciju
- za očekivati je, ako je npr. Fourierova transformacija pravokutnog impulsa sinc funkcija, da će inverzna transformacija spektra koji je oblika pravokutnog impulsa dati vremensku funkciju oblika sinc
- ovo svojstvo Fourierove transformacije naziva se svojstvo dualnosti
- može se pokazati da ako je

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega)$$

vrijedi[6]

$$X(jt) = X(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi x(-\Omega)$$

[6] za $t \in Realni$ vrijedi $X(jt) = X(t)$

Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti – izvod

za potrebe izvoda

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad \text{pišemo} \quad X(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\nu t} dt$$

zamjenom $t = -\Omega$ slijedi

$$X(j\nu) = -\int_{\Omega=+\infty}^{\Omega=-\infty} x(-\Omega) e^{-j\nu(-\Omega)} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=-\infty}^{\Omega=\infty} 2\pi x(-\Omega) e^{j\nu\Omega} d\Omega$$

zamjenom $\nu = t$ slijedi

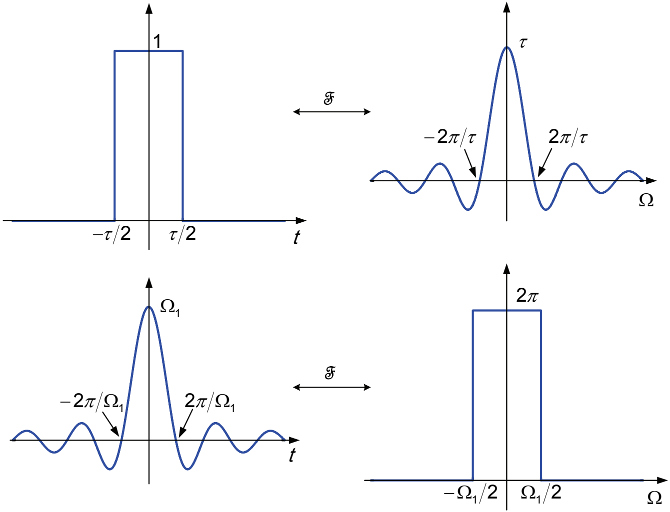
$$X(jt) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$X(jt) = X(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi x(-\Omega)$$

sličnim izvodom (zamjenama $t = \Omega$ i $\nu = -t$)

$$X(-jt) = X(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi x(\Omega)$$

Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti



Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti

- pokazano je kako je $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$, dakle,

$$\delta(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1$$

- određuje se inverzna Fourierova transformacija $\delta(\Omega)$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi}$$

pa je

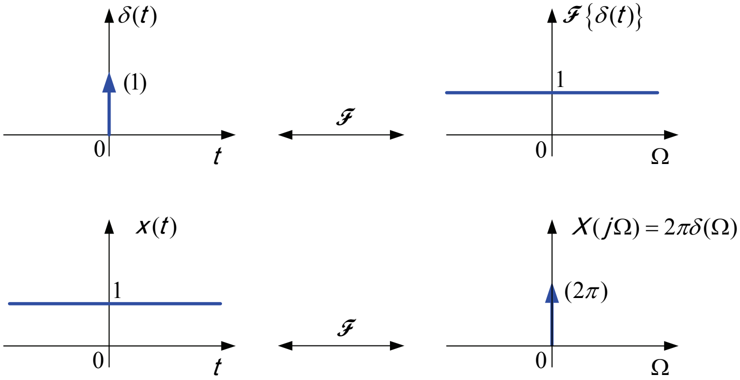
$$\frac{1}{2\pi} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \delta(\Omega)$$

odnosno

$$1 \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega)$$

- do istog rezultata bilo je moguće doći izravnom uporabom svojstva dualnosti

Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti



$\mathcal{F}$–transformacija – vremensko skaliranje

- neka je $X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, tada je

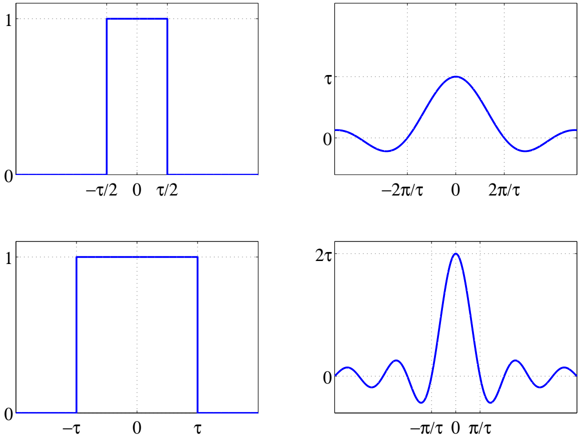
$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\Omega}{a}\right)$$

izvod:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\Omega t} dt =$$
$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-\frac{j\Omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{j\Omega}{a}\right)$$

- izvod je proveden za $a > 0$, sličan je izvod za $a < 0$ čime se dokazuje gornje svojstvo
- zaključuje se kako vremenska kompresija signala za faktor $a > 1$ rezultira u ekspanziji spektra za isti faktor
- ekspanzija $x(t)$, za $a < 1$, rezultira u kompresiji $X(j\Omega)$

Fourierova transformacija – vremensko skaliranje



Fourierova transformacija periodičnih signala

- Fourierova transformacija nije konvergentna, u smislu regularnih funkcija, za neke vrlo uobičajene funkcije
- ovdje se pokazuje da je, unatoč tome, moguća njihova Fourierova transformacija, uvođenjem singularnih funkcija, tj. Diracove funkcije u frekvencijskoj domeni
- ilustrirajmo to na primjeru kompleksne eksponencijale

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t}$$

- uvrštenjem u transformacijski integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\Omega_0 - \Omega)t} dt$$

evidentno je kako on ne konvergira za $\Omega = \Omega_0$

Fourierova transformacija periodičnih signala

- već je pokazano kako je Fourierova transformacija Diracove funkcije konstanta, te kako je Fourierova transformacija konstante Diracova funkcija (svojstvo dualnosti)
- isto tako je pokazano kako je Fourierova transformacija pomaknute Diracove funkcije kompleksna eksponencijala
- može se zaključiti da će, primjenom svojstva dualnosti, pomaknuta Diracova funkcija, u frekvencijskom području, za inverznu transformaciju imati kompleksnu eksponencijalu u vremenskoj domeni
- razmotrimo signal $x(t)$ čija je Fourierova transformacija Diracova funkcija, površine (intenziteta) 2π, na frekvenciji $k\Omega_0$
- inverzna $\mathcal{F}$–transformacija ovog impulsa je

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0) e^{j\Omega t} d\Omega = e^{jk\Omega_0 t}$$

Fourierova transformacija periodičnih signala

- Fourierova transformacija signala $e^{jk\Omega_0 t}$ je

$$e^{jk\Omega_0 t} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

- zaključujemo kako je Fourierova transformacija, proizvoljnih periodičnih signala, koje prikazujemo Fourierovim redom,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

oblika

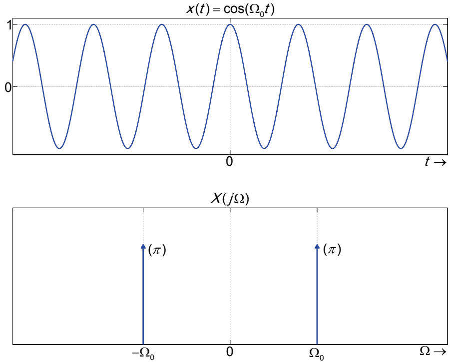
$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

- Fourierova transformacija periodičnog signala, čiji su koeficijenti Fourierovog reda X_k, je niz Diracovih funkcija, intenziteta $2\pi X_k$, koji se pojavljuju na frekvencijama $k\Omega_0$

Fourierova transformacija sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija svevremenskog sinusoidnog signala $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$

$$\mathcal{F}\{\cos(\Omega_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}\right\} =$$
$$= \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$$



Fourierova transformacija sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija svevremenskog sinusoidnog signala $x(t) = \sin(\Omega_0 t)$

$$\mathcal{F}\{\sin(\Omega_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2j}e^{j\Omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\Omega_0 t}\right\} = \\ = -j\pi\delta(\Omega - \Omega_0) + j\pi\delta(\Omega + \Omega_0)$$

- općenito, za svevremenski sinusoidni signal vrijedi

$$A\cos(\Omega_0 t + \Theta) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi A e^{j\Theta}\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi A e^{-j\Theta}\delta(\Omega + \Omega_0)$$

Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

- određuje se Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

$$comb_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s), \quad n \in Cjelobrojni$$

- kako se radi o periodičnom signalu, s periodom T_s, moguće ga je prikazati pomoću Fourierovog reda

$$comb_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_s t} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}, \quad \Omega_s = \frac{1}{T_s}$$

- jer su Fourierovi koeficijenti

$$X_k = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

- pa se prema izrazu za $\mathcal{F}$–transformaciju periodičnih signala, perioda T_s,

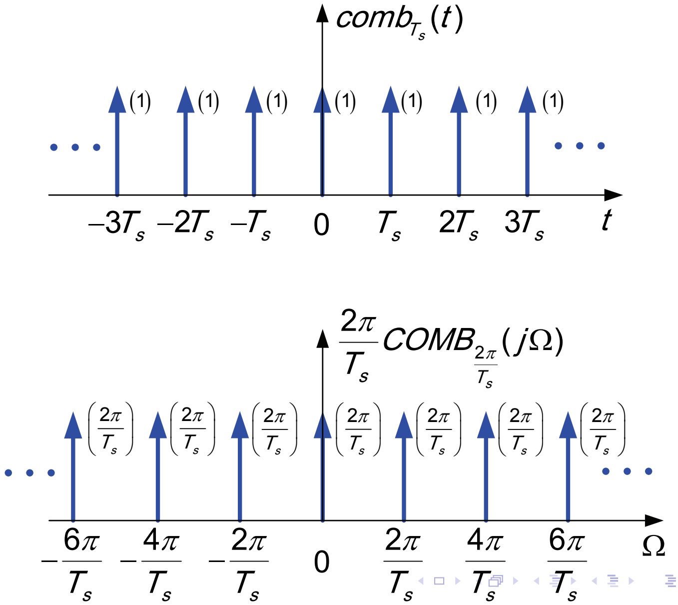
$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

određuje Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcije

$$\mathcal{F}\{comb_{T_s}(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{1}{T_s} \delta(\Omega - k\Omega_s) =$$

$$= \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T_s}) = \frac{2\pi}{T_s} COMB_{\frac{2\pi}{T_s}}(j\Omega)$$

Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija



Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala

$$x(t) = p_\tau(t)\cos(\Omega_0 t) = \begin{cases} \cos(\Omega_0 t) & -\frac{\tau}{2} \le t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

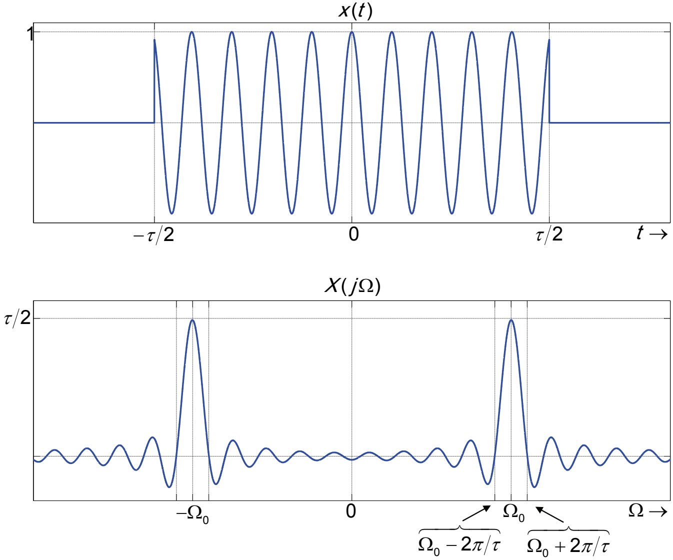
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos(\Omega_0 t) e^{-j\Omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \left(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right) e^{-j\Omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j(\Omega-\Omega_0)t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j(\Omega+\Omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{\tau}{2}\frac{sin\frac{(\Omega-\Omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\Omega-\Omega_0)\tau}{2}} + \frac{\tau}{2}\frac{sin\frac{(\Omega+\Omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\Omega+\Omega_0)\tau}{2}}$$

Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala



Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala

- do istog rezultata moguće je bilo doći primjenom svojstva frekvencijskog pomaka
- za $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega)$ vrijedi

$$x(t)e^{j\Omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\Omega - \Omega_0)$$

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\Omega + \Omega_0)$$

- nadalje za produkt (što je zapravo amplitudna modulacija)

$$x(t)\cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2}[x(t)e^{j\Omega_0 t} + x(t)e^{-j\Omega_0 t}]$$

vrijedi

$$x(t)\cos(\Omega_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[X(j(\Omega - \Omega_0)) + X(j(\Omega + \Omega_0))]$$

- za $x(t) = p_\tau(t)$ slijedi prije izvedeni izraz za spektar omeđenog sinusoidalnog signala

Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala

- razmotrimo i treći način izračuna spektra omeđenog sinusoidnog signala
- primjenjuje se svojstvo konvolucije u frekvencijskoj domeni[7]

$$x_1(t)x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)$$

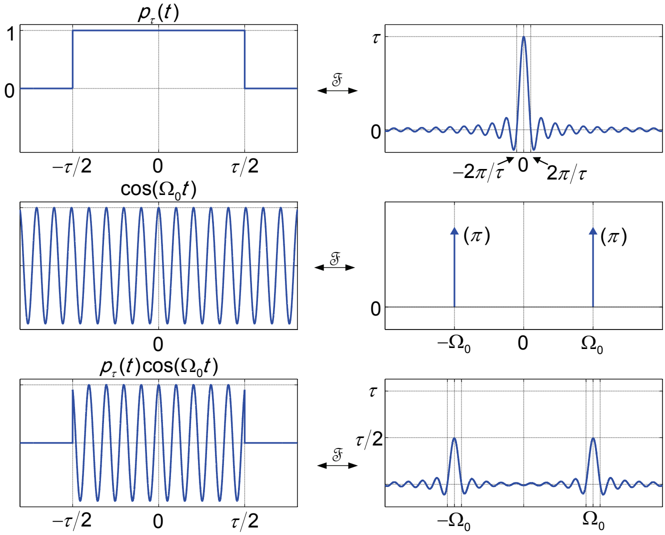
$$x_1(t)x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j(\Omega - \Psi)) X_2(j\Psi) d\Psi$$

- u prethodnom slučaju, omeđenog sinusoidalnog signala $x_1(t) = p_\tau(t)$ a $x_2(t) = \cos(\Omega_0 t)$ i njegov spektar možemo interpretirati i kao frekvencijsku konvoluciju spektra pravokutnog signala $p_\tau(t)$ i signala $\cos(\Omega_0 t)$

---

[7] izvod počinje od $\mathcal{F}^{-1}\{X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)\}$ i sličan je izvodu za vremensku konvoluciju Laplaceove transforamacije

Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala

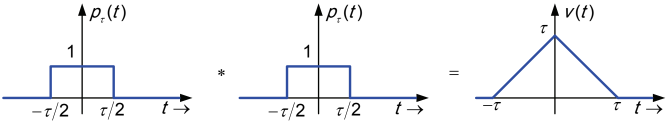


Fourierova transformacija – konvolucija u vremenskoj domeni

- za Fourierovu transformaciju konvolucije, u vremenskoj domeni, vrijedi, slično kao i kod Laplaceove transformacije,

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

- ovo svojstvo ilustriramo na primjeru Fourierove transformacije trokutastog signala $v(t) = (\tau - |t|)p_{2\tau}(t)$
- ovaj signal moguće je prikazati kao rezultat konvolucije $p_\tau(t) * p_\tau(t)$



- pa, prepoznajemo kako se $\mathcal{F}$–transformacija signala $v(t)$ svodi na produkt signala $p_\tau(t)$

Fourierova transformacija – konvolucija u vremenskoj domeni

$$v(t) = p_\tau(t) * p_\tau(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \left[\tau \frac{sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}\right]\left[\tau \frac{sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}\right] = \tau^2 \left[\frac{sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}\right]^2$$