Sadržaj

1. Diferencijske jednadžbe

1.1. Tipovi sustava

Imamo dva tipa sustava:

- **Nepobuđeni** ($u(n) = 0 \rightarrow$ rješavamo samo homogenu)
- **Pobuđeni** ($u(n) \neq 0 \rightarrow$ rješavamo homogenu pa partikularnu)

NAPOMENA 1: Ako vam kažu odredite odziv sustava u 5. (petom) koraku, onda to riješavate uvrštavanjem. Uz to, ponekad je lakše i cijeli sustav riješiti uvrštavanjem.

NAPOMENA 2:

- Totalni odziv = odziv mirnog + odziv nepobuđenog sustava
  ali i također
  Totalni odziv = prisilni odziv + prirodni odziv
- Odziv nepobuđenog sustava se dobije iz homogene jednadžbe uz zadane početne uvjete.
- Odziv mirnog sustava je zbroj partikularnog rješenja i rješenja homogene jednadžbe, a pripadne konstante c1, c2 itd. određujemo uz početne uvjete jednake nuli.
- Rješenje homogene jednadžbe je prirodni odziv sustava.
- Partikularno rješenje je prisilni odziv sustava.
- Pogledajte: http://www.rasip.fer.hr/predmet/sis2?@=g23o#news_11484

NAPOMENA 3: Tutorial ne uključuje rješavanje preko odziva mirnog i nepobuđenog sustava (to pogledajte u scanu sa massovnih).

1.2. Nepobuđeni sustav

Uzmimo primjer:

$$y[n+2] - y[n+1] - 6y[n] = 0$$
$$y[0] = 1$$
$$y[1] = 0$$

Rješenje sustava je rješenje homogene (jer je sustav nepobuđen).

Uvodimo zamjenu:

$$y[n] = Cq^n$$
$$C, q \neq 0$$

Imamo:

$$Cq^{(n+2)} - Cq^{(n+1)} - 6Cq^n = 0$$

$$q^{(n+2)} - q^{(n+1)} - 6 \cdot q^n = 0$$

Izvlačimo q na najmanju potenciju:

$$q^n \left(q^2 - q - 6\right) = 0$$

$$q^2 - q - 6 = 0$$

To je **karakteristična jednadžba** (vidi dio *Vrste rješenja karakteristične jednadžbe*).
NAPOMENA: Možete dobiti n različiti rješenja (za karakterističnu jednadžbu stupnja n), neka rješenja više kratnosti (dvostruka ili trostruka rješenja), kompleksno konjugirana rješenja. Svaki tip rješenja ima poseban zapis (vidi *Određivanje karakteristične jednadžbe*).
Za gore navedenu jednadžbu $q^2 - q - 6 = 0$ rješenja su:

$$q_1 = -2$$

$$q_2 = 3$$

Pa je rješenje homogene:

$$y[n] = c_1(q_1)^n + c_2(q_2)^n$$

$$y[n] = c_1(-2)^n + c_2(3)^n$$

Uvrstimo početne uvjete i izračunajmo koeficijente c_1 i c_2 (ako početni uvjeti **nisu** zadani rješenje ostavljamo u ovom obliku - $y[n] = c_1(-2)^n + c_2(3)^n$).

$$n = 0 \Rightarrow y[0] = c_1(-2)^0 + c_2(3)^0$$

$$1 = c_1 + c_2$$

$$n = 1 \Rightarrow y[1] = c_1(-2)^1 + c_2(3)^1$$

$$0 = -2c_1 + 3c_2$$

To je sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice i rješenja su:

$$c_1 = \frac{3}{5}$$

$$c_2 = \frac{2}{5}$$

Rješenje homogene je:

$$y[n] = \frac{3}{5}(-2)^n + \frac{2}{5}(3)^n$$

A to je ujedno i rješenje (nepobuđenog) sustava.

1.2.1. Vrste rješenja karakteristične jednadžbe

- **Mogu sva rješenja biti različita**
- **Možemo imati dvostruka ili trostruka rješenja**
- **Kompleksno konjugirana**

Sva rješenja su različita

Rješavamo po postupku kojim smo rješavali prošli primjer.

Imamo višestruka rješenja

PRIMJER 1. Recimo da imamo homogenu jednadžbu s karakterističnim polinomom stupnja 3 s rješenjima:

$$q_1 = q_2 = 4$$

$$q_3 = 5$$

Rješenje homogene je:

$$y_h[n] = c_1(q_1)^n + c_2 n(q_1)^n + c_3(q_3)^n$$

PRIMJER 2.
Da smo imali homogenu jednadžbu:

$$y[n+3] - 6y[n+2] + 12y[n] - 8 = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

$$(x-2)^3 = 0$$

Rješenja karakteristične jednadžbe su:

$$q_1 = q_2 = q_3 = 2$$

Rješenje homogene je:

$$y_h[n] = c_1(q_1)^n + c_2 n(q_1)^n + c_3 n^2(q_1)^n$$

Itd.

Imamo kompleksno konjugirana rješenja

Uzmimo primjer homogene jednadžbe:

$$y[n+3] - 13y[n+2] + 59y[n] - 87 = 0$$

$$x^3 - 13^2 + 59x - 87 = 0$$

Rješenja su:

$$q_1 = 5 + 2j$$

$$q_2 = 5 - 2j$$

$$q_3 = 3$$

(**NAPOMENA:** kompleksna riješenja uvijek dolaze u paru kompleksno-konjugiranih brojeva!)
Imamo:

$$y_h[n] = c_1(q_1)^n + c_2(q_2)^n + c_3(q_3)^n$$

Prebacimo kompleksna rješenja u eksponencijalni zapis. Postupak:

$$q_1 = a + jb$$

$$q_2 = a - jb$$

$$q_1 = \left| \begin{array}{c} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi = \arctan\frac{b}{a} \end{array} \right| = re^{j\varphi}, \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$q_2 = q_1^* = re^{-j\varphi}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= c_1(q_1)^n + c_2(q_2)^n = c_1(re^{j\varphi})^n + c_2(re^{-j\varphi})^n \\ &= r^n\left(c_1 e^{j\varphi n} + c_2 e^{-j\varphi n}\right) = r^n\left(c_1 e^{j\varphi n} + c_2 e^{-j\varphi n}\right) \\ &= r^n\left(c_1\left(\cos(\varphi n) + j\sin(\varphi n)\right) + c_2\left(\cos(\varphi n) - j\sin(\varphi n)\right)\right) \\ &= r^n\left((c_1 + c_2)\cos(\varphi n) + j\,(c_1 - c_2)\sin(\varphi n)\right) = \left| \begin{array}{c} A = c_1 + c_2 \\ B = j(c_1 - c_2) \end{array} \right| \\ &= r^n\left(A\cos(\varphi n) + B\sin(\varphi n)\right) \end{aligned}$$

U našem primjeru:

$$y_h[n] = \sqrt{29}^n \left(A\cos(21.8014n) + B\sin(21.8014n)\right) + c_3(3)^n$$

Pri tome su A, B i c_3 koeficijenti koje treba odrediti iz početnih uvjeta.

Ako imate problema sa kompleksnim brojevima, **tutorial**:
http://materijali.fer2.net/file.988.aspx Ako netko ima problema sa trigonometrijskom kružnicom:
http://zd-mioc.hr/doc/trigonometrijska_kruznica.pdf

1.2.2. Određivanje karakteristične jednadžbe

Na par primjera (zanemario sam konstante uz q_n):
1)

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 5y[n] = 0$$
$$q^{(n+2)} + 3q^{(n+1)} + 5q^n = 0$$
$$q^n\left(q^2 + 3q + 5\right) = 0$$
$$q^2 + 3q + 5 = 0$$

2)

$$y[n+2] - 10y[n] = 0$$
$$q^{(n+2)} - 10q^n = 0$$
$$q^n\left(q^2 - 10\right) = 0$$
$$q^2 - 10 = 0$$

3)

$$y[n-2] + 5y[n-1] + 44y[n] = 0$$
$$q^{(n-2)} + 5q^{(n-1)} + 44q^n = 0$$
$$q^{(n-2)}\left(1 + 5q + 44q^2\right) = 0$$
$$1 + 5q + 44q^2 = 0$$

4)

$$y[n-1] + y[n] + 12y[n+1] = 0$$
$$q^{(n-1)} + q^n + 12q^{(n+1)} = 0$$
$$q^{(n-1)}\left(1 + q + 12q^2\right) = 0$$
$$1 + q + 12q^2 = 0$$

1.3. Pobuđeni sustav

Uzmimo primjer (primjer je sličan gornjem, samo smo dodali pobudu ($u(n)$, a to je neka funkcija od n)):

$$y[n+2] - y[n+1] - 6y[n] = u[n]$$
$$y[0] = 1$$
$$y[1] = 0$$
$$u[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Rješenje sustava je ZBROJ *homogene i partikularne.*

1.3.1. Homogena

Umjesto u(n) stavimo 0 i imamo:

$$y[n+2] - y[n+1] - 6y[n] = 0$$

To riješimo po gornjem postupku. Rješenje homogene je: $y_h[n] = c_1(-2)^n + c_2(3)^n$

NAPOMENA: NE uvrštavamo početne uvjete u rješenje homogene!

1.3.2. Partikularna

Rješenje partikularne ovisi o obliku funkcije u(n), pa ga očitamo iz tablice.
Tablica (cjelina 12, slide 41.):

pobuda $u(n)$	partikularno rješenje $y_p(n)$
A (konstanta)	K
Ar^n, $r \neq q_i (i = 1, 2, \ldots, N)$	Kr^n
Ar^n, $r = q_i$	Knr^n
An^M	$K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M$
$r^n n^M$	$r^n \left(K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M\right)$
$A\cos(\omega_0 n)$	$K_1 \cos(\omega_0 n) + K_2 \sin(\omega_0 n)$
$A\sin(\omega_0 n)$	$K_1 \cos(\omega_0 n) + K_2 \sin(\omega_0 n)$

Funkcija pobude je:

$$u(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

To je oblik:

$$u(n) = Ar^n$$

Iz tablice čitamo partikularno rješenje:

$$y_p[n] = Kr^n$$

NAPOMENA: Da je *r* jednak nekom od rješenja rješenja karakterističnog polinoma homogene jednadžbe, oblik bi bio: Knr^n.
Uvrstimo y_p u početnu jednadžbu:

$$K\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+2)} - K\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)} - 6K\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Sve podjelimo sa $\frac{1}{2}^n$:

$$\frac{1}{4}K - \frac{1}{2} - 6K = 4$$

$$K = -\frac{16}{25}$$

Imamo:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

$$y[n] = c_1(-2)^n + c_2(3)^n - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{2}^n$$

Uvrstimo početne uvjete, te dobijemo:

$$1 = c_1 + c_2 - \frac{16}{25}$$

$$0 = -2c_1 + 3c_2 - \frac{16}{50}$$

Riješimo sustav:

$$c_1 = \frac{191}{175}$$

$$c_2 = \frac{18}{35}$$

Konačno rješenje je:

$$y[n] = \frac{191}{175}(-2)^n + \frac{18}{35}(3)^n - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{2}^n$$

Gotovo :)