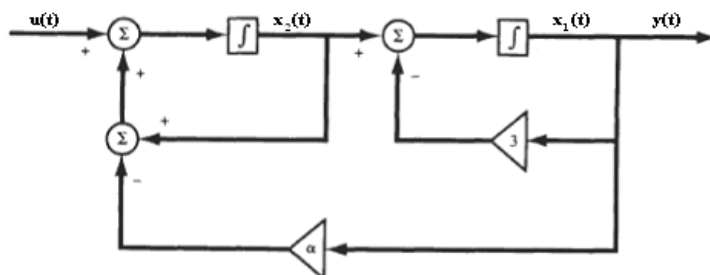


# Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

## X. tjedan

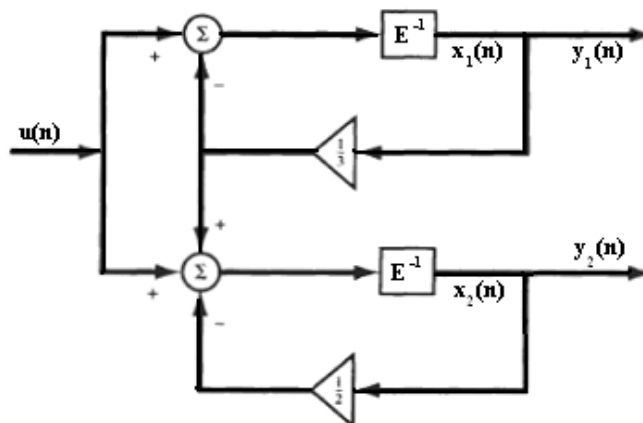
### VARIJABLE STANJA

1. Vremenski kontinuirani LTI sustav dan je Slikom 1. Nađite model s varijablama stanja  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  kako su odabrane na slici (matrice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ ).



Slika 1.

2. Zadan je vremenski diskretan LTI sustav prema slici 2. Nađite model s varijablama stanja ovog sustava (matrice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ ). Ulaz u sustav je  $u(n)$ , stanja su  $x_1(n)$  i  $x_2(n)$ , dok su izlazi  $y_1(n)$  i  $y_2(n)$ .



Slika 2.

3. Audio oscilator je sustav koji proizvodi sinusoidalni signal dane frekvencije  $\omega$ . Ovaj sustav je moguće prikazati pomoću modela s varijablama stanja:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D=0.$$

- a. Matematičkom indukcijom dokažite:  $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\omega & -\sin n\omega \\ \sin n\omega & \cos n\omega \end{bmatrix}$ .
- b. Nađite odziv stanja nepobuđenog sustava, te odziv nepobuđenog sustava, ako je početno stanje  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .
- c. Nađite impulsni odziv mirnog sustava.

4. Dana je matrica  $A$  vremenski diskretnog SISO LTI sustava  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , te vektor  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .  
Pretpostavite da je  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Nađite ulaznu sekvencu  $u(0)$ ,  $u(1)$  takve da je stanje u drugom koraku  $x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .
5. Dana je matrica  $A$  vremenski diskretnog SISO sustava  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Nađite  $A^n$ , te odziv stanja nepobuđenog sustava, ukoliko su početna stanja:
- $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
6. Zadan je LTI sustav opisan matricama  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \ 0]$  i  $D = [0]$ . Koliko iznosi odziv nepobuđenog sustava za  $n \geq 0$  uz početne uvjete  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ?
7. Zadan je LTI sustav opisan matricama  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \ 1]$  i  $D = [1]$ . Ukoliko su početni uvjeti  $x(0) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  pronađite prve dvije vrijednosti  $u(0)$  i  $u(1)$  ulaznog signala tako da se sustav u koraku dva nađe u stanju  $x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

## KONVOLUCIJA

8. Odziv diskretnog LTI sustava na jediničnu stepenicu je  $y(n) = (n+1)\mu(n)$ . Odredite impulsni odziv ovog sustava. Kolika je vrijednost impulsnog odziva u  $n=5$ ?
9. Zadan je vremenski diskretni LTI sustav impulsnim odzivom:

$$h(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$$

Nađite ulazno – izlaznu relaciju (jednadžbu diferencija) za ovaj sustav.

10. Nađite odziv diskretnog sustava na pobudu  $u(n) = \alpha^n \mu(n)$ , ako je poznat impulsni odziv sustava  $h(n) = \beta^n \mu(n)$ .

11. Dokažite svojstva konvolucije vremenski kontinuiranog sustava:

a.  $u(t) * \delta(t) = u(t)$

b.  $u(t) * \delta(t - t_0) = u(t - t_0)$

c.  $u(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$

d.  $u(t) * \mu(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} u(\tau) d\tau$

12. Nađite odziv kontinuiranog sustava na pobudu  $u(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 3 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$ , ako je impulsni odziv

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 2 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}.$$

13. Korištenjem konvolucijske sumacije odredite odziv diskretnog sustava zadanog impulsnim odzivom  $h(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n - 1) + 2\delta(n - 2) + \delta(n - 3)$ . Sustav je pobuđen s  $u(n) = \delta(n) + \delta(n - 1)$ .

14. Izračunajte izlaz  $y(t)$  za dani vremenski kontinuirani LTI sustav čiji su impulsni odziv  $h(t)$  i ulaz  $u(t)$  dani s

$$h(t) = e^{-at} \mu(t)$$

$$u(t) = e^{at} \mu(-t), \quad a > 0.$$

15. Zadan je diskretni signal  $f: Z \rightarrow R$  kao  $f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ . Promatramo signal  $q(n)$  koji je definiran kao konvolucija  $q(n) = f(n) * f(n)$ . Koliko iznosi  $q(3)$ ?