Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

28. svibanj 2007.

Odziv diskretnog sustava na pobudu kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je kako je odziv mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, na svevremensku eksponencijalu Uz^n,

$$y(n) = H(z)Uz^n$$

pri čemu je

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

- za z, kao kompleksnu varijablu, $H(z)$ je kompleksna funkcija

z – transformacija

- sumaciju

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

  možemo interpretirati kao transformaciju vremenske funkcije, impulsnog odziva $h(n)$ diskretnog sustava, u kompleksnu funkciju $H(z)$
- ovako definiranu transformaciju nazivamo dvostrana ili bilateralna **z-transformacija**
- z – transformacija $H(z)$ predstavlja, dakle, alternativni prikaz vremenskog niza $h(n)$

z – transformacija

- za diskretni signal $x(n)$, definira se dvostrana z–transformacija

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- z–transformacija označuje se simbolički kao

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$$

ili još jednostavnije

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

z–transformacija – primjer 1

- neka je zadan vremenski diskretan signal, kao konačni niz, $x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 3, 2, 1\}, n \geq 0$
- slijedi kako je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{5} x(n) z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

odnosno

$$X(z) = \frac{z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^5}$$

- gornja sumacija konvergira, pa time $X(z)$ poprima konačne vrijednosti, za sve $z \in$ *Kompleksni* osim za $z = 0$
- primjer pokazuje kako je signalu $x(n)$, zadanom u vremenskoj domeni, pridružena njegov alternativni prikaz ("slika") $X(z)$, u z–domeni (frekvencijskoj domeni)

z–transformacija – primjer 1

- veza između

$$x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

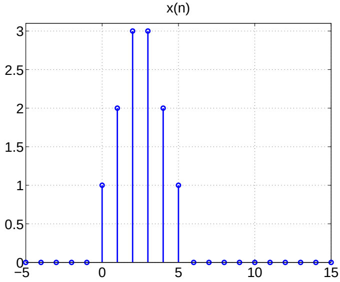
  i

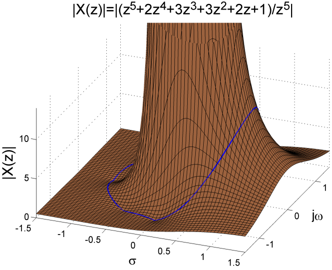
$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

  je očigledna:
  koeficijent uz z^{-n} je vrijednost signala u koraku n, drugim riječima, eksponent od z sadrži vremensku informaciju potrebnu da bi se identificirali uzorci signala
- usporedimo prikaz $x(n)$ u vremenskoj i frekvencijskoj domeni[1]

[1] prikazuje se samo $|X(z)|$

z – transformacija





- polovi i nule $X(z)$ su

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 0; \qquad & z_1 &= -1.0000 = e^{j\pi} \\
p_2 &= 0; \qquad & z_2 &= +j1.0000 = e^{j\frac{\pi}{2}} \\
p_3 &= 0; \qquad & z_3 &= -j1.0000 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \\
p_4 &= 0; \qquad & z_4 &= -0.5000 + j0.8660 = e^{j\frac{2\pi}{3}} \\
p_5 &= 0; \qquad & z_5 &= -0.5000 - j0.8660 = e^{-j\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

z–transformacija – primjer 2

- određuje se z–transformacija niza

$$x(n) = \alpha^n \mu(n)$$

- signal $x(n)$ čini beskonačni broj uzoraka

$$x(n) = \{\underline{1}, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\}$$

- iz definicije z–transformacije slijedi

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n}$$

$$X(z) = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \ldots$$

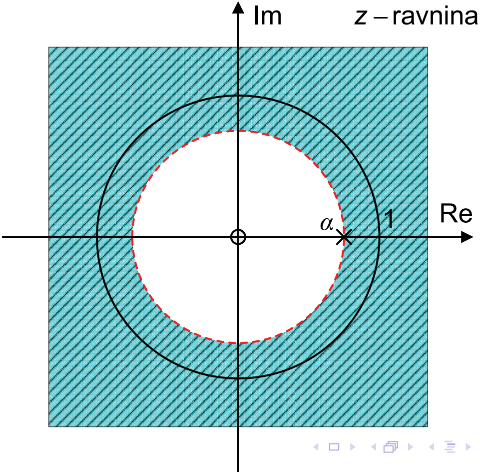
što je sukladno prije izrečenoj interpretaciji z–transformacije

z–transformacija – primjer 2

- u
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$
prepoznaje se geometrijski red
- da bi $X(z)$ konvergirao mora biti $|\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n| < \infty$ a to će biti za
$$|\alpha z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |\alpha|$$
- tada je
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}, \qquad \text{za } |z| > |\alpha|$$
- područje kompleksne ravnine, $|z| > |\alpha|$, za koje $X(z)$ konvergira, nazivamo područje konvergencije, $\mathcal{PK}$, z–transformacije

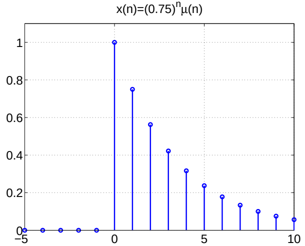
Područje konvergencije z–transformacije

- z–transformacija je racionalna funkcija
- z–transformacija niza $x(n) = \alpha^n \mu(n)$ ima jednu **nulu** u $z = 0$ i jedan **pol** u $z = \alpha$



z–transformacija – primjer 3

- određuje se z–transformacija niza
  $x(n) = \alpha^n \mu(n) = 0.75^n \mu(n)$



- z–transformacija je

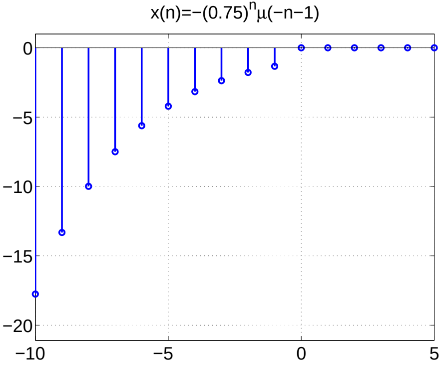
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.75 z^{-1})^n = \frac{z}{z - 0.75}$$

$$\text{za } |0.75 z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |0.75|$$

z–transformacija – primjer 4

- određuje se z–transformacija niza
  $x(n) = -\alpha^n \mu(-n-1) = -0.75^n \mu(-n-1)$

n	$x(n)$
-1	-1.3333
-2	-1.7778
-3	-2.3704
-4	-3.1605
-5	-4.2140
-6	-5.6187
-7	-7.4915
-8	-9.9887
-9	-13.3183
-10	-17.7577



z–transformacija – primjer 4

- z–transformacija je

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n \mu(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^n$$

ako je $|\alpha^{-1} z| < 1 \Leftrightarrow |z| < |\alpha|$
tada gornja suma konvergira i vrijedi:

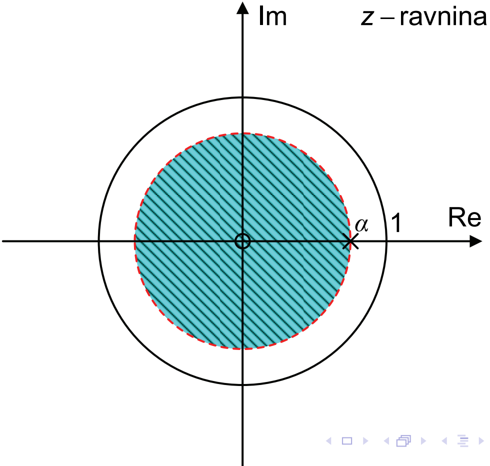
$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-\alpha^{-1} z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$$

za $|z| < |\alpha|$

z–transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

Područje konvergencije z–transformacije

- z–transformacija je racionalna funkcija
- z–transformacija niza $x(n) = -\alpha^n \mu(-n-1)$ ima jednu **nulu** u $z = 0$ i jedan **pol** u $z = \alpha$



Područje konvergencije z–transformacije

- usporedbom primjera 3 i primjera 4

$$\alpha^n \mu(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} \quad \text{za } |z| > |\alpha|$$

odnosno

$$-\alpha^n \mu(-n-1) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} \quad \text{za } |z| < |\alpha|$$

zaključujemo kako dva različita signala, jedan strogo kauzalni a drugi strogo nekauzalni, imaju identične izraze za z–transformaciju i kako se njihova razlika očituje samo u području konvergencije, $\mathcal{PK}$,

- područje konvergencije $\mathcal{PK}$, z–transformacije, je važna i nužna informacija i tek definirano $\mathcal{PK}$ daje jednoznačnu vezu između niza i njegove z–transformacije
- stoga, z–transformacija mora biti uvijek zadana s njezinim $\mathcal{PK}$

z–transformacija – primjer 5

- određuje se z–transformacija niza

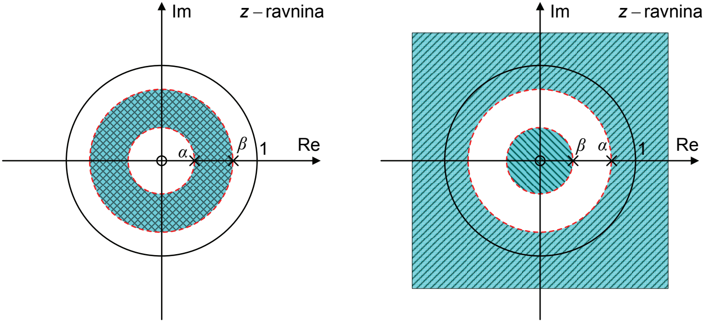
$$x(n) = \alpha^n \mu(n) + \beta^n \mu(-n-1)$$

- iz definicije z–transformacije slijedi

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^m$$

- prva suma konvergira za $|\alpha z^{-1}|$ ili $|z| > |\alpha|$
- druga suma konvergira za $|\beta^{-1} z| < 1$ ili $|z| < |\beta|$
- u određivanju konvergencije $X(z)$ postoje dva slučaja
  - $|\beta| < |\alpha|$ – ne postoji područje preklapanja područja konvergencije i ne postoji $X(z)$
  - $|\beta| > |\alpha|$ – postoji prsten u z–ravnini u kojem obje sume konvergiraju i on predstavlja područje konvergencije $X(z)$

z–transformacija – primjer 5



pa je z–transformacija niza $x(n) = \alpha^n \mu(n) + \beta^n \mu(-n-1)$

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{1}{1-\beta z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha} - \frac{z}{z-\beta}$$

uz područje konvergencije z–transformacije $|\alpha| < |z| < |\beta|$

z–transformacija kauzalnih nizova

- z–transformacija kauzalnih nizova je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad \forall z \in \mathcal{PK}(x)$$

gdje je područje konvergencije, $\mathcal{PK}(x) \subset Kompleksni$, definirano[2] [3] s

$$\mathcal{PK}(x) = \left\{ z = re^{j\omega} \in Kompleksni \middle| \sum_{n=0}^{\infty} |x(n) r^{-n}| < \infty \right\}$$

- ovako definirana $X(z)$ naziva se jednostrana z–transformacija

---

[2] apsolutna kovergencija sume garantira i konvergenciju $X(z)$

[3] iz $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n) z^{-n}|$ a uz, $z = re^{j\omega}$, za koji suma konvergira, vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)(re^{j\omega})^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n) r^{-n}||e^{-j\omega n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n) r^{-n}|$

z-transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

z–transformacija kauzalnih nizova

- jednostrana z– transformacija pokazuje se posebno pogodnom u postupcima rješavanja jednadžbi diferencija sa zadanim početnim uvjetima
- jednostrana z– transformacija limitirana je samo na kauzalne signale i sustave
- kako je u ovom predmetu većina pozornosti okrenuta kauzalnim signalima i sustavima u nastavku se razmatra uglavnom jednostrana z–transformacija
- sukladno većini literature pod nazivom z–transformacija podrazumijevati će se jednostrana z–transformacija, a u slučaju dvostrane transformacije to će biti posebno istaknuto

z–transformacija osnovnih nizova

$$\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1, \quad |z| > 0$$

$$\mathcal{Z}\{\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1},$$

za $|z| > 1$

$$\mathcal{Z}\{a^n \mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|$$

z–transformacija osnovnih nizova

$$\mathcal{Z}\{\cos(\omega_0 n)\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\omega_0 n)\mu(n) z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n} z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega_0 n} z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} + 1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1} - e^{-j\omega_0} z^{-1} + z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{\cos(\omega_0 n)\mu(n)\} = \frac{1 - z^{-1}\cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega_0) + z^{-2}} \qquad |z| > 1$$

Tablica osnovnih z–transformacija[4]

	$x(n)$	$X(z)$
1	$\delta(n)$	1
2	$\delta(n-m)$	z^{-k}
3	$\mu(n)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$n\mu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
5	$n^2\mu(n)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$n^3\mu(n)$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
7	$a^n\mu(n)$	$\frac{z}{z-a}$
8	$na^n\mu(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
9	$n^2a^n\mu(n)$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
10	$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{a^m m!}a^n\mu(n)$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$

[4] izvor:B.P. Lathi:Linear Systems and Signals str. 498

Tablica osnovnih z–transformacija[5]

	$x(n)$	$X(z)$
11	$\cos(\omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{z(z-\cos(\omega_0))}{z^2-2\cos(\omega_0)z+1}$
12	$\sin(\omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{\sin(\omega_0)z}{z^2-2\cos(\omega_0)z+1}$
13	$a^n\cos(\omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{z(z-a\cos(\omega_0))}{z^2-2a\cos(\omega_0)z+a^2}$
14	$a^n\sin(\omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{a\sin(\omega_0)z}{z^2-2a\cos(\omega_0)z+a^2}$

[5] izvor: A.V.Oppenheim, A. S. Willsky: Signals and Systems str. 655

z–transformacija – linearnost

neka je $w(n) = ax(n) \pm by(n)$
tada je z–transformacija od $w(n)$

$$W(z) = aX(z) + bY(z), \qquad \forall z \in \mathcal{PK}(w) \supseteq \mathcal{PK}(x) \cap \mathcal{PK}(y)$$

područje konvergencije od $W(z)$ mora uključiti područja konvergencije od $X(z)$ i $Y(z)$
linearnost z–transformacije proizlazi iz definicije

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [ax(n) \pm by(n)]z^{-n} =$$

$$= a\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \pm b\sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = aX(z) + bY(z)$$

z–transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

z–transformacija – pomak unaprijed za j–koraka

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je

$$\mathcal{Z}\{x(n+j)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+j)z^{-n} = \left| n+j=m \right| =$$

$$= \sum_{m=j}^{\infty} x(m)z^{-m+j} = z^j \sum_{m=j}^{\infty} x(m)z^{-m} =$$

$$= z^j \left[\underbrace{\sum_{m=j}^{\infty} x(m)z^{-m} + \sum_{m=0}^{j-1} x(m)z^{-m}}_{X(z)} - \sum_{m=0}^{j-1} x(m)z^{-m} \right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{x(n+j)\} = z^j \left[X(z) - \sum_{m=0}^{j-1} x(m)z^{-m} \right]$$

za $j=1$, $\quad \mathcal{Z}\{x(n+1)\} = zX(z) - zx(0)$

za $j=2$, $\quad \mathcal{Z}\{x(n+2)\} = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$

z–transformacija – kašnjenje za j–koraka

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je

$$\mathcal{Z}\{x(n-j)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-j)z^{-n} = \left| n-j=m \right| =$$

$$= \sum_{m=-j}^{\infty} x(m)z^{-m-j} = z^{-j}\sum_{m=-j}^{\infty} x(m)z^{-m} =$$

$$= z^{-j}\left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} + \sum_{m=-j}^{-1} x(m)z^{-m}\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{x(n-j)\} = z^{-j}\left[X(z) + \sum_{m=-j}^{-1} x(m)z^{-m}\right]$$

za $j=1$ i $j=2$ vrijedi

$$\mathcal{Z}\{x(n-1)\} = z^{-1}\left[X(z) + zx(-1)\right] = z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$\mathcal{Z}\{x(n-2)\} = z^{-2}\left[X(z) + zx(-1) + z^{2}x(-2)\right] =$$

$$= z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

z–transformacija – konvolucijska sumacija kauzalnih nizova

za $y(n) = h(n) * u(n)$, te $U(z) = \mathcal{Z}\{u(n)\}$ i $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}$, vrijedi[6]

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \mathcal{Z}\{y(n)\} = \mathcal{Z}\{u(n) * h(n)\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{\infty} u(j)h(n-j)z^{-n}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} u(j) \sum_{n=0}^{\infty} h(n-j)z^{-n} = \\
&= \left| n-j=m \right| = \sum_{j=0}^{\infty} u(j) \sum_{m=-j}^{\infty} h(m)z^{-(m+j)} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} u(j)z^{-j} \sum_{\underbrace{m=0}_{h(m)=0 \text{ za } m<0}}^{\infty} h(m)z^{-m} = U(z)H(z)
\end{aligned}
$$

$$
h(n) * u(n) \xleftrightarrow{z} H(z)U(z)
$$

[6] pribrajajući nule, konvolucijsku sumaciju kauzalnih nizova $\sum_{j=0}^{n} u(j)h(n-j)z^{-n}$ proširujemo u $\sum_{j=0}^{\infty} u(j)h(n-j)z^{-n}$ (potreba izvoda)

z–transformacija – množenje s a^n

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je z–transformacija niza $y(n) = a^n x(n)$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

slično za $y(n) = e^{j\omega_0 n} x(n)$ vrijedi

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{e^{j\omega_0}}\right)^{-n} = X\left(z e^{-j\omega_0}\right)$$

korištenjem gornjeg svojstva proizlazi i svojstvo **modulacije** za $y(n) = x(n) cos(\omega_0 n) = x(n) \frac{1}{2}[e^{-j\omega_0 n} + e^{j\omega_0 n}]$ slijedi

$$\mathcal{Z}\{x(n) cos(\omega_0 n)\} = \frac{1}{2}[X(z e^{j\omega_0}) + X(z e^{-j\omega_0})]$$

z-transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

z–transformacija – množenje s n

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je z–transformacija niza $y(n) = nx(n)$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{nx(n)\} = z \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \underbrace{nz^{-n-1}}_{-\frac{d}{dz}z^{-n}} = z \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(-\frac{d}{dz} z^{-n}\right) =$$

$$= -z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \right) = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

množenje s n^j

$$\mathcal{Z}\{n^j x(n)\} = \left(-z \frac{d}{dz} \right)^j X(z)$$

z–transformacija – početna vrijednost niza

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ početna vrijednost niza izračunava se iz

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

z–transformacija – konačna vrijednost niza

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ konačna vrijednost niza izračunava se iz

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z), \text{ ako postoji } x(\infty)$$

limes za $z \to 1$ ima smisla samo kada je točka $z = 1$ locirana unutar područja konvergencije $X(z)$

dokaz započinjemo z–transformacijom niza $[x(n) - x(n-1)]$

$$\mathcal{Z}\{x(n) - x(n-1)\} = X(z) - z^{-1}X(z) - x(-1) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}[x(n) - x(n-1)]z^{-n}$$

$$(1 - z^{-1})X(z) - x(-1) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n) - x(n-1)]z^{-n}$$

z–transformacija – konačna vrijednost niza

uzmimo limes za $z \to 1$

$$\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)]-x(-1) = \lim_{z\to 1}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)]z^{-n} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)]z^{-n} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}[x(0)-x(-1)+x(1)-x(0)+x(2)-x(1)+\ldots] =$$

$$= -x(-1) + \lim_{N\to\infty} x(N)$$

$$\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) = \lim_{N\to\infty} x(N)$$

Inverzna z–transformacija – integralom po zatvorenoj krivulji

z-transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

- inverzna z–transformacija je dana kao

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

  gdje je integral po zatvorenoj krivulji C koja zatvara ishodište i leži unutar područja konvergencije $X(z)$

- integral se izračunava primjenom Cauchy-evog teorema o reziduumima koji kazuje kako je integral, u pozitivnom smjeru duž zatvorene krivulje C, koja obuhvaća konačno izoliranih singularnih točaka (polova) jednak sumi residuuma u obuhvaćenim singularnim točkama, dakle,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{m=1} Res_m[X(z) z^{n-1}]$$

$$Res_m[X(z) z^{n-1}] = \lim_{z \to z_m} [X(z) z^{n-1} (z - z_m)]$$

Inverzna z–transformacija – integralom po zatvorenoj krivulji

- inverzna z–transformacija, integralom po zatvorenoj krivulji, navedena je ovdje zbog cjelovitosti izlaganja
- velika većina z-transformacija $X(s)$, razlomljene su racionalne funkcije za koje postoje jednostavni postupci inverzne z–transformacija i oni će biti razmotreni u nastavku

z–transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- pokazano je kako je z–transformacija niza $x(k)$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots$$

- ovaj red moguće je dobiti razvojem u McLaurento-ov red oko točke $z^{-1} = 0$ gdje su

$$x(n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n X(z^{-1})}{d(z^{-1})^n}\bigg|_{z^{-1}=0}$$

- kako je $X(z)$ razlomljena racionalna funkcija, isti je rezultat moguće postići jednostavnim dijeljenjem brojnika s nazivnikom
- ovo će biti ilustrirano narednim primjerom

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- prijenosna funkcija $H(z)$ predstavlja z–transformaciju impulsnog odziva $h(n)$, sukladno tomu impulsni odziv je inverzna z–transformacija prijenosne funkcije
- za zadanu prijenosnu funkciju nalazimo impulsni odziv

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}\right\}$$

- inverznu z–transformaciju provodimo dijeljenjem brojnika $H(z)$ s njezinim nazivnikom

$$\begin{array}{l}
(1+2z^{-1}) : (1-1.1314z^{-1}+0.64z^{-2}) = 1+3.1314z^{-1}+2.9028z^{-2}+\ldots \\
\underline{-1+1.1314z^{-1}-0.64z^{-2}} \\
\qquad +3.1314z^{-1}-0.64z^{-2} \\
\qquad \underline{-3.1314z^{-1}+3.5428z^{-2}-2.0041z^{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad +2.9028z^{-2}-2.0041z^{-3}
\end{array}$$

z–transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- pa je inverzna transformacija

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{1 + 3.1314z^{-1} + 2.9028z^{-2} + \dots\}$$

$$h(n) = 1 + 3.1314\delta(n-1) + 2.9028\delta(n-2) + \dots$$

- ovim postupkom određivanja inverzne z–transformacije, moguće je brzo i jednostavno odrediti nekoliko prvih uzoraka signala,
- iz poznatih uzoraka, teško je prepoznati kompaktni izraz za impulsni odziv

$$h(n) = 4.6444(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4} - 1.3538\right)\mu(n)$$

i on će biti određen postupkom rastava na parcijalne razlomke

z–transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(z)$ je razlomljena racionalna funkcija i možemo je prikazati kao

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)}$$

- inverznu z–transformaciju rastavom na parcijalne razlomke započinjemo definiranjem pomoćne funkcije

$$X_1(z) = \frac{X(z)}{z}$$

- funkcija $X_1(z)$ se rastavlja na parcijalne razlomke, pa za jednostruke polove slijedi

$$X_1(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \ldots + \frac{c_N}{z - p_N}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(z)$ je tada

$$X(z) = zX_1(z) = \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \ldots + \frac{c_N z}{z - p_N}$$

pri čemu se koeficijenti $c_i, i = 1, 2, \ldots, N$ određuju iz

$$c_i = \lim_{z \to p_i} \left\{ (z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right\}$$

- iz tablice z–transformacija prepoznaju se članovi $x(n)$

$$x(n) = [c_1 (p_1)^n + c_2 (p_2)^n + \ldots + c_N (p_N)^n] \mu(n)$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za višestruke polove $X(z)$ je

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{(z-p_1)^r(z-p_{r+1})\cdots(z-p_N)}$$

- pomoćna funkcija $X_1(z)$ se rastavlja na parcijalne razlomke oblika

$$X_1(z) = \frac{c_{11}}{z-p_1} + \frac{c_{12}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r}}{(z-p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{z-p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{z-p_{r+2}} + \ldots + \frac{c_N}{z-p_N}$$

$$c_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{z\to p_1} \left\{ \frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}}(z-p_1)^r \frac{X(z)}{z} \right\}$$

$$c_i = \lim_{z\to p_i} \left\{ (z-p_i)\frac{X(z)}{z} \right\}$$

z-transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za zadanu prijenosnu funkciju nalazimo impulsni odziv

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}\right\}$$

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}} = \frac{z^2+2z}{z^2-0.8\sqrt{2}z+0.64}$$

$$p_{1,2} = 0.5657 \pm j0.5657 = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

- inverznu z–transformaciju provodimo rastavom na parcijalne razlomke

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2}$$

z-transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz

$$c_1 = \lim_{z\to p_1}\left\{(z-p_1)\frac{H(z)}{z}\right\} = \lim_{z\to p_1}\left\{\cancel{(z-p_1)}\frac{z+2}{\cancel{(z-p_1)}(z-p_2)}\right\} =$$
$$= \frac{p_1+2}{p_1-p_2} = \frac{0.5657 + j0.5657 + 2}{0.5657 + j0.5657 - 0.5657 + j0.5657} =$$
$$= 0.5000 - j2.2678 = 2.3222e^{-j1.3538}$$

$$c_2 = \lim_{z\to p_2}\left\{(z-p_2)\frac{H(z)}{z}\right\} = \lim_{z\to p_2}\left\{\cancel{(z-p_2)}\frac{z+2}{(z-p_1)\cancel{(z-p_2)}}\right\} =$$
$$= \frac{p_2+2}{p_2-p_1} = \frac{0.5657 - j0.5657 + 2}{0.5657 - j0.5657 - 0.5657 - j0.5657} =$$
$$= 0.5000 + j2.2678 = 2.3222e^{j1.3538}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $H(z)$ pišemo kao

$$H(z) = \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2}$$

i inverzna z–transformacija je

$$\begin{aligned} h(n) &= c_1 (p_1)^n \mu(n) + c_2 (p_2)^n \mu(n) = \\ &= 2.3222 e^{-j1.3538} (0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}} + 2.3222 e^{j1.3538} (0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}} = \\ &= 4.6444 (0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4} n - 1.3538\right) \mu(n) \end{aligned}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- određuje se prijenosna funkcija mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, primjenom z–transformacije
- neka je sustav opisan jednadžbom diferencija

$$y(n)+a_1y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)=$$
$$=b_0u(n)+b_1u(n-1)+\ldots+b_{N-1}u(n-N+1)+b_Nu(n-N)$$

- z–transformacijom ove jednadžbe, uzimajući u obzir da je sustav miran, i koristeći svojstvo $\mathcal{Z}\{x(n-j)\}=z^{-j}X(z)$ slijedi

$$Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+\ldots+a_{N-1}z^{-N+1}Y(z)+a_Nz^{-N}Y(z)=$$
$$=b_0U(z)+b_1z^{-1}U(z)+\ldots+b_{N-1}z^{-N+1}U(z)+b_Nz^{-N}U(z)$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

$$[1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}] Y(z) =$$
$$= [b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}] U(z)$$

odnosno

$$Y(z) = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}}}_{H(z)} U(z)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}$$

pa, prijenosnu funkciju diskretnog sustava, $H(z)$, definiramo kao omjer z–transformacija odziva i pobude, uz početne uvjete jednake nuli

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(n)\}}{\mathcal{Z}\{u(n)\}}$$

z–transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

- primjenu z–transformacije u analizi linearnih sustava ilustriramo primjerom sustava opisanog jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- sustav je pobuđen s $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ a početni uvjeti su $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- z–transformacija jednadžbe je

$$Y(z) - 0.8\sqrt{2}\left[z^{-1}Y(z) + y(-1)\right] + \\ + 0.64\left[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\right] = U(z)$$

$$\left[1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}\right]Y(z) = \\ = U(z) + 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.64y(-1)z^{-1}$$

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

$$Y(z) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}}_{H(z)} U(z)}_{\text{odziv mirnog sustava}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.64y(-1)z^{-1}}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}}$$

množenjem brojnika i nazivnika sa z^2 i uvrštenjem zadanih početnih uvjeta $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} U(z) + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

z–transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

- z–transformacija zadane pobude $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ je (iz tablice z–transformacija)

$$U(z) = \frac{-0.2z\big(z - \cos(\frac{\pi}{8})\big)}{z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{8})z + 1}$$

pa je totalni odziv sustava na danu pobudu

$$Y(z) = \frac{-0.2z^3\big(z - \cos(\frac{\pi}{8})\big)}{(z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64)(z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{8})z + 1)} + \\ + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

$$Y(z) = \underbrace{\frac{-0.2z^3\left(z - \cos(\frac{\pi}{8})\right)}{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})(z - e^{j\frac{\pi}{8}})(z - e^{-j\frac{\pi}{8}})}}_{Y_m(z)} + \underbrace{\frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})}}_{Y_0(z)}$$

rastavom na parcijalne razlomke

$$Y(z) = \underbrace{\frac{c_1 z}{z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_2 z}{z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_3 z}{z - e^{j\frac{\pi}{8}}} + \frac{c_4 z}{z - e^{j\frac{\pi}{8}}}}_{Y_m(z)} + \underbrace{\frac{c_5 z}{z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_6 z}{z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}}}_{Y_0(z)}$$

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

- inverznom z–transformacijom će totalni odziv, u vremenskoj domeni, biti

$$y(n) = \left[c_1(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + c_3 e^{j\frac{\pi}{8}n} + c_4 e^{-j\frac{\pi}{8}n}\right]\mu(n) + \\ + \left[c_5(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_6(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]\mu(n)$$

- c_1, c_2, c_3 i c_4 određujemo iz $\frac{Y_m(z)}{z}$, a c_5 i c_6 iz $\frac{Y_0(z)}{z}$

$$c_1 = \lim_{z \to 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} \left\{ \cancel{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})} \frac{-0.2z^2(z - \cos(\frac{\pi}{8}))}{\cancel{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})}(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})(z - e^{j\frac{\pi}{8}})(z - e^{-j\frac{\pi}{8}})} \right\}$$

$$c_1 = 0.1858e^{j0.6757}$$

$$c_5 = \lim_{z \to 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} \left\{ \cancel{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})} \frac{-1.3028z + 1.28}{\cancel{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})}(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})} \right\} = 0.8091e^{-j2.5066}$$

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

$$c_1 = 0.1858e^{j0.6757}$$
$$c_2 = 0.1858e^{-j0.6757}$$
$$c_3 = 0.2452e^{-j3.0935} = -0.2452e^{j0.04809}$$
$$c_4 = 0.2452e^{j0.3.0935} = -0.2452e^{-j0.04809}$$
$$c_5 = 0.8091e^{-j2.5066}$$
$$c_6 = 0.8091e^{j2.5066}$$

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

$$y_m(n) = \Big[0.1858e^{j0.6757}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.1858e^{-j0.6757}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.2452e^{j0.04809}e^{j\frac{\pi}{8}n} - 0.2452e^{-j0.04809}e^{-j\frac{\pi}{8}n}\Big]\mu(n)$$

$$y_0(n) = \Big[0.8091e^{-j2.5066}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.8091e^{j2.5066}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}\Big]\mu(n)$$

$$y(n) = y_0(n) + y_m(n)$$

$$y(n) = \underbrace{1.6182 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5066)\mu(n)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} +$$

$$\underbrace{+0.3716 \cdot 0.8^n cos(\frac{\pi}{4}n + 0.6759)\mu(n) - 0.4904cos(\frac{\pi}{8}n + 0.04809)\mu(n)}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

- analiziran je odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- sustav je bio pobuđen s $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ a početni su uvjeti bili $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- učinimo li pomak u vremenu za dva koraka, supstitucijom $n = n + 2$, dobivamo jednadžbu diferencija oblika

$$y(n+2) - 0.8\sqrt{2}y(n+1) + 0.64y(n) = u(n+2) \qquad (1)$$

- ova jednadžba opisuje isti sustav i na zadanu pobudu $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$, daje isti odziv
- u izračunu odziva potrebno je poznavati početne uvjete $y(0)$ i $y(1)$, i njih je potrebno odrediti iz zadanih početnih uvjeta $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

- iz

$$y(n+2) - 0.8\sqrt{2}y(n+1) + 0.64y(n) = u(n+2)$$

za $n = -2$ slijedi,

$$y(0) - 0.8\sqrt{2}y(-1) + 0.64y(-2) = \underbrace{u(0)}_{-0.2} \Rightarrow y(0) = -1.5028$$

za $n = -1$ je

$$y(1) - 0.8\sqrt{2}y(0) + 0.64y(-1) = \underbrace{u(1)}_{-0.1848} \Rightarrow y(1) = -0.6050$$

z–transformacija
Definicija
Područje konvergencije z–transformacije
z–transformacija osnovnih nizova
Svojstva z–transformacije
Inverzna z–transformacija
z–transformacija u analizi linearnih sustava

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

- z–transformacija jednadžbe je

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - z0.8\sqrt{2}Y(z) + z0.8\sqrt{2}y(0) + \\ + 0.64Y(z) = z^2U(z) - z^2u(0) - zu(1)$$

$$\left[z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64\right]Y(z) = \\ = z^2U(z) - z^2u(0) - zu(1) + z^2y(0) + zy(1) - z0.8\sqrt{2}y(0)$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}U(z) + \\ + \frac{-z^2u(0) - zu(1) + z^2y(0) + zy(1) - z0.8\sqrt{2}y(0)}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

Primjena z–transformaciju u analizi linearnih sustava

- uvrštenjem izračunatih $y(0) = -1.5028$ i $y(1) = -0.6050$ slijedi

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} U(z) + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

što je identično prije izvedenoj z–transformaciji totalnog odziva