(1.) Područje stabilnosti vremenski diskretnog sustava opisanog linearnom diferencijskom jednadžbom sa stalnim koeficijentima određujemo iz položaja polova koji se moraju nalaziti unutar jedinične kružnice z-kompleksne ravnine da bi sustav bio stabilan. Stoga za polove g_i mora vrijediti, da bi sustav bio stabilan: ($g=|g|e^{j\beta}$, $|e^{j\beta}|=1$, $g\in\mathbb{C}$)

1. $|g|<1$ $\quad g^n \to 0$ za $n\to\infty$
2. $|g|=1$ $\quad |g|^n=1$ za $\forall n$

Sustav je nestabilan:
3. $|g|>1$ $\quad g^n\to\infty$ za $n\to\infty$ i ako vrijedi $|g|=1$ za višestruke polove

što mora vrijediti za sve g_i, $\forall i$ s tim da 2. vrijedi samo za jednostruke polove.

a) $H(z)=\dfrac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}$, iz $8y(n)-2y(n-1)-y(n-2)=u(n)$ slijedi $a_0=8$, $a_1=-2$, $a_2=-1$ i $b_0=1$

pa je prijenosna funkcija $H(z)=\dfrac{1}{8-2\cdot z^{-1}-z^{-2}}=\dfrac{z^2}{8z^2-2z-1}$

b) Nule prijenosne funkcije: $z^2=0 \to z_{N1}=0 \quad z_{N2}=0$

Polovi: $8z^2-2z-1=0$, $z=\dfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{16} \to z_{P1}=-\dfrac{1}{4} \quad z_{P2}=\dfrac{1}{2}$

c) $u(n)=\delta(n) \to 8y(n)-2y(n-1)-y(n-2)=\delta(n)$, $y(n)=h(n)$

$8h(n)-2\cdot h(n-1)-h(n-2)=0$, $n\geq 1$, $h(n)=c\cdot g^n$

$(8\cdot g^2-2g-1)\cdot c\cdot g^{n-2}=0 \to 8\cdot g^2-2g-1=0 \to g_1=-\frac{1}{4}, g_2=\frac{1}{2}$

$h(n)=C_1\cdot(-\frac{1}{4})^n+C_2\cdot(\frac{1}{2})^n$

mirni sustav za impuls: $y(-1)=h(-1)=0$; $y(-2)=h(-2)=0$ slijedi:

$8\cdot y(0)-2\cdot y(-1)-y(-2)=1 \to y(0)=h(0)=\frac{1}{8}$

$8\cdot y(1)-2\cdot y(0)-y(-1)=0 \to y(1)=h(1)=\frac{1}{32}$

što se uvrsti u homogenu jednadžbu

$$\left.\begin{aligned} h(0)&=C_1\cdot(-\tfrac{1}{4})^0+C_2\cdot(\tfrac{1}{2})^0 \to C_1+C_2=\tfrac{1}{8}\\ h(1)&=C_1\cdot(-\tfrac{1}{4})^1+C_2\cdot(\tfrac{1}{2})^1 \to -\tfrac{1}{4}C_1+\tfrac{1}{2}C_2=\tfrac{1}{32}\end{aligned}\right\} \begin{aligned} C_1&=\tfrac{1}{12}\\ C_2&=\tfrac{1}{24}\end{aligned}$$

što daje impulsni odziv:

$$h(n)=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \; n\geq 0$$

OKRENI!

d) $u(n)=\mu(n)$, mirni sustav $y(-1)=0$ $y(-2)=0$

odziv: $y(n)=y_h(n)+y_p(n)$

y_h: $8g^2-2g-1=0 \rightarrow g_1=-\frac{1}{4}$ $g_2=\frac{1}{2}$

zbog $y_h(n)=C\cdot g^n$ u $\underbrace{(8g^2-2g-1)}_{0}C\cdot g^{n-2}=0$

pa je $y_h(n)=C_1\cdot(-\frac{1}{4})^n+C_2\cdot(\frac{1}{2})^n$

y_p: zbog $u(n)=1$, $n>0$ pretpostavljamo $y_p(n)=K$

slijedi: $y(n)=C_1\cdot(-\frac{1}{4})^n+C_2\cdot(\frac{1}{2})^n+K$

određujem $y(0)$, $y(1)$ i $y(2)$ uz pomoć $y(-1)=0$, $y(-2)=0$:

za $n=0^+$: $8\cdot y(0)-2\cdot y(-1)-y(-2)=1 \rightarrow y(0)=\frac{1}{8}$

za $n=1$: $8\cdot y(1)-2\cdot y(0)-y(-1)=1 \rightarrow y(1)=\frac{5}{32}$

za $n=2$: $8\cdot y(2)-2\cdot y(1)-y(0)=1 \rightarrow y(2)=\frac{23}{128}$

Računam C_1, C_2 i K iz prethodnog:

$n=0$: $\frac{1}{8}=C_1+C_2+K$ $/\cdot 8$

$n=1$: $\frac{5}{32}=-\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2+K$ $/\cdot 32$

$n=2$: $\frac{23}{128}=\frac{1}{16}C_1+\frac{1}{4}C_2+K$ $/\cdot 128$

$8C_1+8C_2+8K=1$

$-8C_1+16C_2+32K=5$

$8C_1+32C_2+128K=23$

$24C_2+40K=6$

$48C_2+160K=28$

slijedi:

$K=\frac{1}{5}$ $C_2=-\frac{1}{12}$

pa slijedi i C_1:

$C_1=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{5} \rightarrow C_1=\frac{1}{120}$

Iz izračunatih koeficijenata slijedi odziv na step funkciju:

$$y(n)=\frac{1}{120}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n-\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{5}$$

e) KOD:

```
B=[1 0 0];
A=[8 -2 -1];
S=tf(B,A,1)
```

Rješenje se poklapa za dani kod:

Transfer function:

$$\frac{z^2}{8z^2-2z-1}$$

Sampling time (seconds): 1

NASTAVAK NA IDUĆEM PAPIRU!

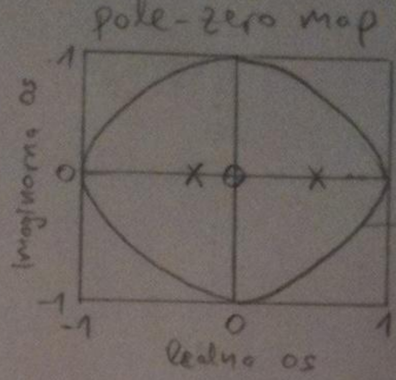
(1.) NASTAVAK!

f) Pomoću prethodno dobivene H(z) iz e) podzatka koja je u varijabli s:

KOD:

pzmap(s)

za kod dobivam:



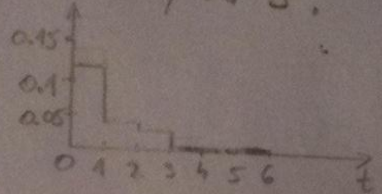
Polovi su unutar jedinične kružnice pa je sustav stabilan.

g) Prijenosna funkcija je u varijabli s:

KOD:

impulse(s)

daje



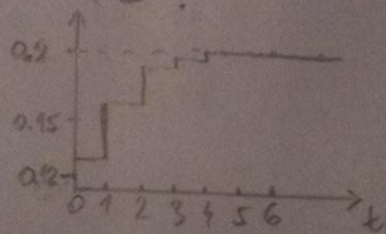
što se poklapa s analitičkim rješenjem.

h) Prijenosna funkcija je u s:

KOD:

step(s)

daje



što se poklapa s analitički rješenjem.

-Pretpostavljeno partikularno rješenje diferencijske jednadžbe sa stalnim koeficijentima za pobudu svevremenskom eksponencijalom $u(n)=z^n$, $z \in C$ je dano u obliku $y_p(n) = H(z)\cdot U z^n = Y \cdot z^n$ što se dobije iz $y(n)=h(n)*u(n)= h(n)*Uz^n = H(z)\cdot U \cdot z^n$.

Kada se vrijednost konstante z poklopi s polom sustava odnosno karakterističnom frekvencijom sustava partikularno rješenje koje sadrži H(z) oblika $H(z)=K\cdot\frac{(z-z_{01})(z-z_{02})\dots}{(z-z_{p1})(z-z_{p2})\dots}$ pošto H(z) teži u beskonačno, također će i $y(p)=H(z)\cdot z^n$ težiti u beskonačno. Takvu pojavu nazivamo rezonancija.

OKRENI!

i) za pobudu $u(n) = 2^{-n}\mu(n)$ odziv sustava je:

$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$ gdje je homogeno rješenje isto kao u podzadatku d) odnosno:

$y_h(n) = c_1 \cdot (-\frac{1}{4})^n + c_2 (\frac{1}{2})^n$ → iz d) podzadatka

partikularno: $y_p(n) = K \cdot n \cdot z^n$ jer je $z = \frac{1}{2} = q_2$

slijedi: $y(n) = c_1 \cdot (-\frac{1}{4})^n + c_2 (\frac{1}{2})^n + K \cdot n \cdot (\frac{1}{2})^n$

sustav je miran: $y(-1) = y(-2) = 0$ određuje se $y(0), y(1), y(2)$

za $n = 0^+$: $8 \cdot y(0) - 2 \cdot y(-1) - y(-2) = 1$ → $y(0) = \frac{1}{8}$

za $n = 1$: $8 \cdot y(1) - 2 \cdot y(0) - y(-1) = \frac{1}{2}$ → $y(1) = \frac{3}{32}$

za $n = 2$: $8 \cdot y(2) - 2 \cdot y(1) - y(0) = \frac{1}{4}$ → $y(2) = \frac{9}{128}$

Računam K uvrštavanjem $y_p(n)$ u početnu jednadžbu

$8 \cdot K \cdot n \cdot (\frac{1}{2})^n - 2 \cdot K \cdot (n-1) \cdot (\frac{1}{2})^n \cdot (\frac{1}{2})^{-1} - K \cdot (n-2) \cdot (\frac{1}{2})^n \cdot (\frac{1}{2})^{-2} = (\frac{1}{2})^n \quad / : (\frac{1}{2})^n$

$8Kn - 4Kn + 4K - 4Kn + 8K = 1$

$12K = 1 \rightarrow K = \frac{1}{12}$

Računam c_1 i c_2 pomoću $y(0)$ i $y(1)$ te $y(n)$:

$n=0$: $\frac{1}{8} = c_1 + c_2 \quad / \cdot 8 \quad 8c_1 + 8c_2 = 1 \quad / \cdot 3$

$n=1$: $\frac{3}{32} = -\frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{24} \quad / \cdot 96 \quad -24c_1 + 48c_2 = 5$ $\}+$ → $72c_2 = 8$

$c_2 = \frac{1}{9}$

slijedi: $c_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \rightarrow c_1 = \frac{1}{72}$

Iz izračunatih c_1, c_2 i K slijedi odziv:

$$y(n) = \frac{1}{72} \cdot (-\frac{1}{4})^n + \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{12} n (\frac{1}{2})^n$$

j) KOD:

```
n= 0:1:100;
u= 2.^(-n);
y= filter(B,A,u);
stem(n,y)
```

S tim da su varijable B i A već u workspace-u.

Rješenja dana grafom se poklapaju s analitičkim rješenjem.

(2.) a) Formula je: $y(n) = 1.05\,(y(n-1) + u(n))$

U formuli varijable predstavljaju:

1. n – broj godina, 2. $u(n)$ – uplata svake godine $u(n) = 15000$,
3. $y(n)$ – iznos na računu nakon n godina
4. $y(n-1)$ – iznos na računu za prethodnu godinu od n-te godine

Formulu dobijemo ovako:

mi na početku svake godine ulažemo 15000, pa je na računu iznos od prošle + novi ulog $\quad 1 \cdot (y(n-1) + 15000)$

$+$

kamata od 5% se obračuna na iznos od cijele godine, koju na kraju godine gledamo kao prethodnu godinu $\quad \frac{5}{100} \cdot (y(n-1) + 15000)$

$=$

Iznos na kraju godine $\quad y(n) = 1.05\,(y(n-1) + 15000)$

b) $y(n) - 1.05 \cdot y(n-1) = 1.05 \cdot u(n)$

Prijenosna funkcija je $H(z) = \frac{1.05}{1 - 1.05 \cdot z^{-1}} = \frac{1.05\,z}{z - 1.05}$

Pol je iz $z - 1.05 = 0 \Rightarrow z = 1.05$ odnosno $|z| > 1$, pol je izvan jedinične kružnice pa je sustav nestabilan.

Stabilnost sustava ovisi o kamatnoj stopi direktno jer se polovi određuju iz $z = 1 + \frac{p}{100}$ gdje je p kamatna stopa, pa pošto $|z| \sim p$ stabilnost ovisi o p.

Sustav je asimptotski stabilan za sve vrijednosti $|z| < 1$ što bi u ovom slučaju značilo za kamatne stope koje su manje od 0, $p < 0\%$, odnosno negativne.

Sustav je nestabilan za sve kamatne stope $p > 0$ jer $z = 1 + \frac{p}{100}$ za $p > 0$ daje $|z| > 1$ što je izvan jedinične kružnice pa je sustav nestabilan.

OKRENI!

c) $y(n) - 1.05\, y(n-1) = 15750$

homogeno: $y(n) - 1.05\, y(n-1) = 0 \rightarrow y_h(n) = C_1 g^n$

$$(g - 1.05) \cdot C_1 g^{n-1} = 0 \rightarrow g - 1.05 = 0 \rightarrow g = 1.05$$

Pa je $y_h(n) = C_1 \cdot 1.05^n$

partikularno: $y_p(n) = K$ da ubacim u početnu:

$$K - 1.05 K = 15750 \rightarrow K = -315000$$

rješenje je oblika: $y(n) = C_1 \cdot 1.05^n - 315000$

zbog početnog ulaganja imam $y(0) = 15000$

što ću iskoristi za izračun C_1:

$$15000 = C_1 - 315000 \rightarrow C_1 = 330000$$

pa je rješenje za slučaj ulaganja na račun:

$$y(n) = 330000 \cdot 1.05^n - 315000$$

Sad slijedi trošenje pa imamo $y_1(0) = y(30)$ odnosno početno od druge je krajnje od prve.

homogeno je isto: $y_{1h}(n) = C_1' \cdot 1.05^n$

partikularno također: $y_{1p}(n) = K'$

U formulu $y_1(n) - 1.05 \cdot y_1(n-1) = -15750$ uvrstim $y_{1p}(n)$:

$$K' - 1.05 \cdot K' = -15750 \rightarrow K' = 315000$$

Konstantu C_1' dobijemo iz $y_1(n) = C_1' \cdot 1.05^n + 315000$ i $y(30) = y_1(0)$

$y_1(0) = y(30) = 1111241$

$$1111241 = C_1' + 315000 \rightarrow C_1' = 796241$$

pa je rješenje za slučaj trošenja sa računa:

$$y_1(n) = 796241 \cdot 1.05^n + 315000$$

što divergira.

NASTAVAK na idućem papiru!

(2.) NASTAVAK!

c) NASTAVAK! Dobiveno je $y_1(n) = 796241 \cdot 1.05^n + 315000$ što znači da ako godišnje skidamo 15000 sa računa, nakon 30 godina štednje, možemo skidati zauvijek, a da ne potrošimo novac, jer je 5% kamate na prethodno stanje veće od iznosa koji trošimo.

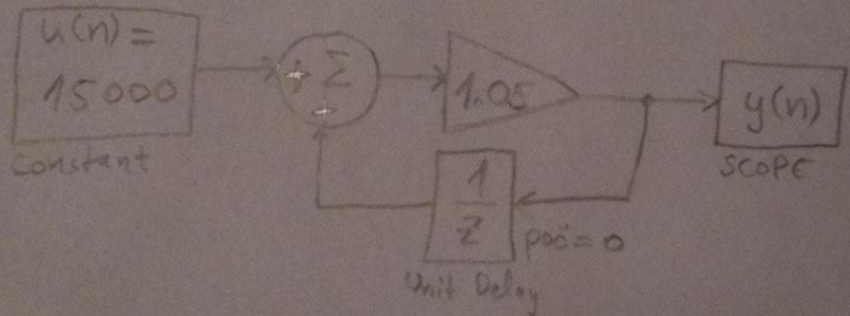
Najveći iznos koji mjesečno možemo skidati sa računa:

$y_1(n) = y_1(n-1)$ uvrstim u $y_1(n) - 1.05 \cdot y_1(n-1) = X(n)$, a vrijedi $y_1(n) = 796241 \cdot 1.05^n + 315000$

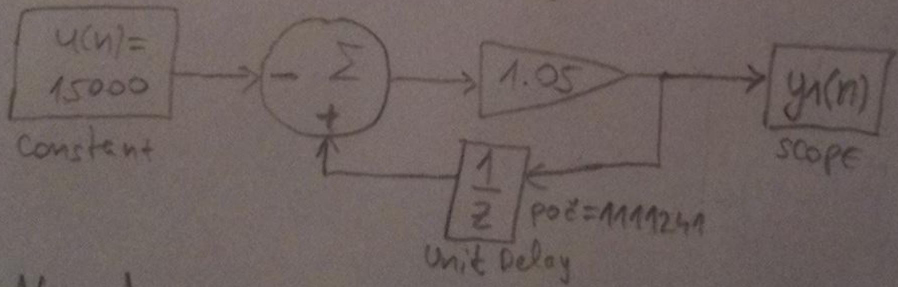
Dobije se $X(n) = y_1(n)(1-1.05) = (796241 \cdot 1.05^n + 31500) \cdot (1-1.05)$. Uzmem dovoljno velik n: $n=100$, u $X(n)$ je koliko je ukupno skinuto, što znači da se godišnje max. skida $u(n) = \frac{X(n)}{n}$, $u(n) = -52369$, za $n=100$

Ključno svojstvo za tačno ponašanje je njegova nestabilnost, odnosno odziv sustava nije ograničen.

d)



Dijagram za ulaganje

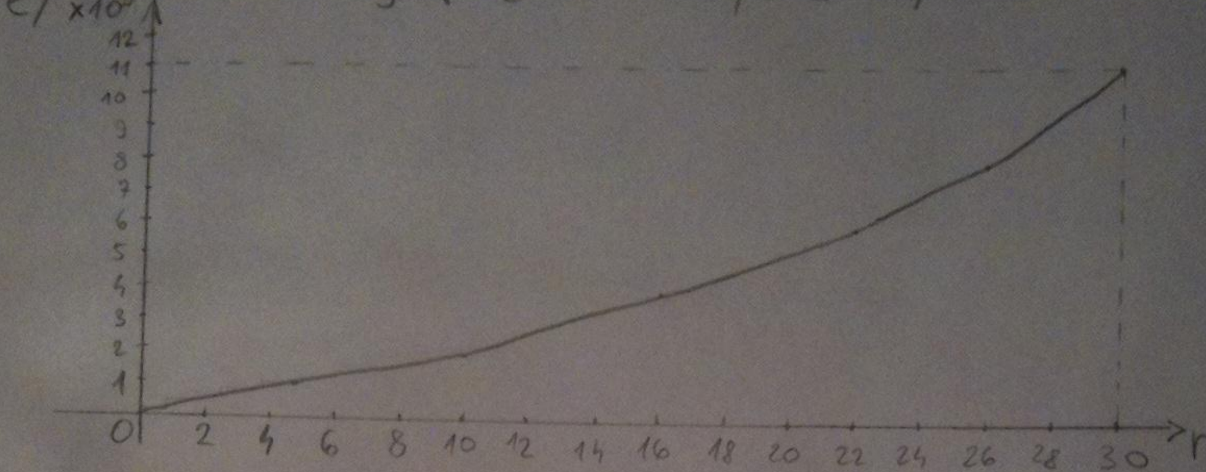


Dijagram za trošenje, minus je kod uloga u(n)

Na drugom dijagramu se jedinica za kašnjenje postavi na početnu vrijednost koja odgovara $y(30)$ nakon 30 god. štednje odnosno 1111241.

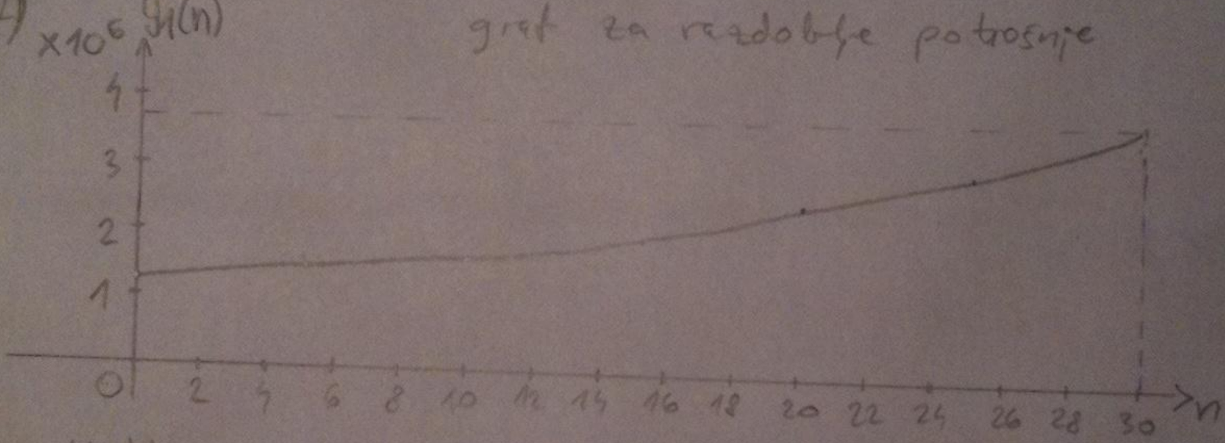
OKRENI!

e) graf za razdoblje štednje



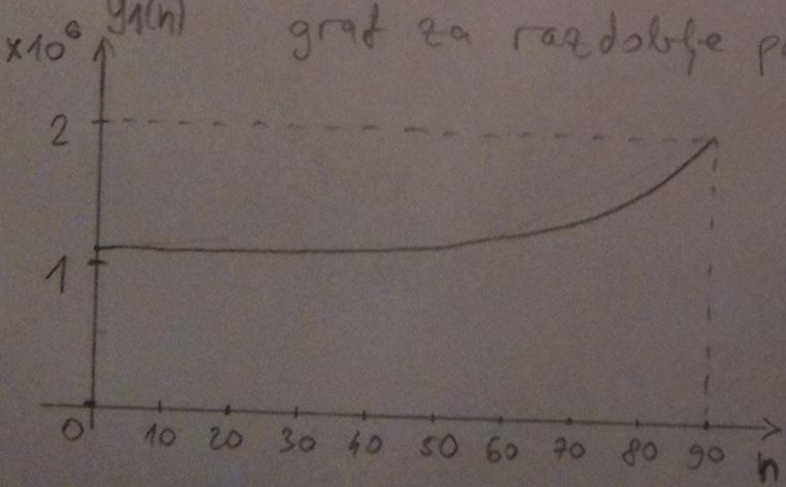
- Graf je stepeničast, nacrtao sam krivulju radi lakšeg prikaza
- Iz grafa je vidljivo da je odziv neograničen, a sustav je nestabilan.

f) graf za razdoblje potrošnje



- Vidljivo je da ako godišnje skidamo 15000, nećemo nikad potrošiti sve s računa

graf za razdoblje potrošnje kada godišnje



skidamo 52369 sa računa. Vidljivo je da se iznos neće mijenjati bar 50 godina. Do još finije brojke možemo doći tako da povećavamo godišnju potrošnju, što nas dovede do iznosa od 52916 i to je zadnji iznos kojeg možemo skidati sa računa godišnje i tako unedogled.

3.) Unutrašnju stabilnost sustava prema položaju polova za vremenski kontinuiran sustav koji je kauzalan sa stalnim koeficijentima ispitujemo na sljedeći način: (s_i je pol)

1. za jednostruke karakteristične frekvencije:
   - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
   - stabilan (marginalno) ako je $Re\{s_i\} \leq 0, \forall i$
   - nestabilan ako je $Re\{s_i\} > 0$
2. za višestruke karakteristične frekvencije:
   - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
   - marginalno stabilan ako je za sve višestruke $Re\{s_i\} < 0$, i za sve različite $Re\{s_i\} \leq 0$
   - nestabilan ako je $Re\{s_i\} > 0$ ili višestruka $Re\{s_i\} \geq 0$

gdje je s_i iz $c \cdot e^{s_i t}$, s_i je rješenje karakterističnog polinoma.

a) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = u(t)$ slijedi: $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 5,$
$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1$

Prijenosna funkcija je:

$$H(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} \ldots + a_n} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}$$

b) Nule određujem iz: $b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_m = 0$ odnosno iz: $0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 1 = 0$ slijedi $1 = 0$ pa su $s_{N1} = 0$, $s_{N2} = 0$ nule.

Polove određujem iz: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots a_n = 0$ odnosno iz: $s^2 + 4s + 5 = 0$ slijedi $s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = -2 \pm j$ pa su polovi $s_1 = -2 + j$, $s_2 = -2 - j$.

c) Pobuda je $u(t) = \delta(t)$ pa je odziv $y(t) = h(t)$ uz sve početne uvjete $h(0^-) = h'(0^-) = 0$, a kako su b_0 i b_1 također nula, $b_0 = 0$, $b_1 = 0$ slijedi:

$h''(t) + 4h'(t) + 5h(t) = \delta(t)$, odnosno za $h(t) = h_A(t)$ uz $h_A(0^+) = 0$, $h'_A(0^+) = 1$

OKRENI!

$h_A(t)$ je rješenje od $h_A''(t) + 4h'_A(t) + 5h_A(t) = \delta(t)$

c) NASTAVAK!

slijedi da $h_A(t)$ je u obliku: $h_A(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$
gdje su s_1 i s_2 rješenja homogene jednadžbe:

$(s^2 + 4s + 5) \cdot h_A(t) = 0$, a $h_A(t) \neq 0$ pa slijedi

$s^2 + 4s + 5 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} \rightarrow S_1 = -2 + j$

$S_2 = -2 - j$

odziv prelazi u:

$h_A(t) = C_1 \cdot e^{(-2+j)t} + C_2 e^{(-2-j)t}$

Sad iz $h_A(0^+) = 0$ i $h_A'(0^+) = 1$ računam C_1 i C_2:

za $h_A(0^+)$: $C_1 + C_2 = 0$ $\quad C_1 = -C_2$

za $h_A'(0^+)$: $s_1 C_1 + s_2 C_2 = 1$ $\quad (-2+j) C_1 + (-2-j) C_2 = 1$ $\rightarrow$

$\rightarrow (-2+j)(-C_2) + (-2-j) C_2 = 1$

$2C_2 - jC_2 - 2C_2 - jC_2 = 1 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{2j} \rightarrow C_2 = \frac{1}{2}j$

uz C_2, slijedi iz $C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}j$

Iz izračunatog slijedi odziv $h(t) = h_A(t)$:

$h(t) = -\frac{1}{2}j \, e^{(-2+j)t} + \frac{1}{2}j e^{(-2-j)t}$

d) Pobuda je $u(n) = \mu(n)$, budući da je sustav miran imamo: $y(0^-) = 0$ i $y'(0^-) = 0$. Rješenje je: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Rješenje homogene jednadžbe je kao u c) dijelu:

$y_h(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t} + C_2 \cdot e^{s_2 t}$, a partikularno $y_p(t) = K$,

slijedi $y(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t} + C_2 \cdot e^{s_2 t} + K$, a $S_1 = -2+j$, $S_2 = -2-j$

Partikularno određujem iz $y_p''(t) + 4y_p'(t) + 5y_p(t) = 1$ i $y_p'' = y_p' = 0$

slijedi: $5 \cdot K = 1 \rightarrow K = \frac{1}{5}$

konstante C_1 i C_2 određujem iz početnih uvjeta $y(0^+)$ i $y'(0^+)$

uz $b_0 = b_1 = 0$ slijedi:

$y(0^+) = y(0^-) = 0$ i $y'(0^+) = y'(0^-) = 0$

NASTAVAK NA IDUĆEM PAPIRU!

3.) NASTAVAK!

d) **NASTAVAK!** Iz $y(0^+)=0$ i $y'(0^+)=0$, te za $y(t)$:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{(-2+j)t} + C_2 e^{(-2-j)t} + \frac{1}{5}$$

$$y'(t) = C_1(-2+j)\,e^{(-2+j)t} + C_2(-2-j)\,e^{(-2-j)t}$$

za $y(0^+)$: $C_1 + C_2 + \frac{1}{5} = 0$ → $C_1 = -\frac{1}{5} - C_2$

za $y'(0^+)$: $C_1(-2+j) + C_2(-2-j) = 0$ → $-2C_1 + jC_1 - 2C_2 - jC_2 = 0$

$$\rightarrow -2\cdot\left(-\frac{1}{5} - C_2\right) + j\left(-\frac{1}{5} - C_2\right) - 2C_2 - jC_2 = 0$$

$$\frac{2}{5} + 2C_2 - \frac{1}{5}j - jC_2 - 2C_2 - jC_2 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{10} - \frac{1}{5}j$$

Uz C_2, slijedi iz $C_1 + C_2 = -\frac{1}{5}$ → $C_1 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}j$

Pa slijedi mirni odziv na pobudu stepenice:

$$y(t) = \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{5}j\right)\cdot e^{(-2+j)t} + \left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{5}j\right)\cdot e^{(-2-j)t} + \frac{1}{5}$$

e) **KOD:**

```
B=[0 0 1];
A=[1 4 5];
S=tf(B,A)
```

Rezultat:

transfer function:

$$\frac{1}{s^2+4s+5}$$

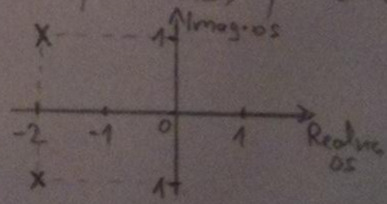
Što se poklapa sa analitičkim rješenjem.

f) **KOD:**

```
pzmap(S)
```

Prijenosna funkcija $H(s)$ je u varijabli S.

Rezultat:



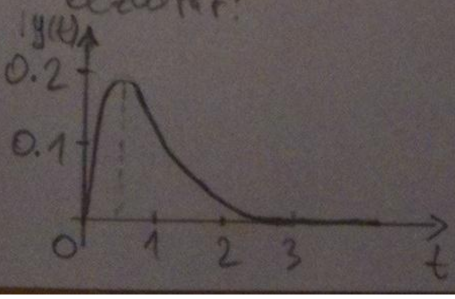
Poklapa se s analitičkim rješenjem.

g) **KOD:**

```
impulse(S)
```

Prijenosna funkcija je u varijabli S.

Rezultat:



Što se poklapa s grafom analitičkog rješenja.

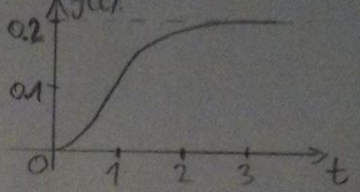
OKRENI!

h) <u>KOD:</u>

step(s)

Prijenosna funkcija je u s.

Rezultat:



što se poklapa sa grafom analitičkog rješenja

- Za svevremensku eksponencijalnu pobudu $u(t)=e^{st}$ gdje je s kompleksna konstanta pretpostavljeno partikularno rješenje je oblika $y_p(t)=Y\cdot e^{st}$ gdje je $Y=H(s)\cdot U$ odnosno u ovom slučaju $U=1$ pa je $Y=H(s)$, a partikularno je $y_p(t)=Y\cdot e^{st}=H(s)\cdot e^{st}$
Kada se vrijednost konstante s poklopi s polom sustava tada $H(s)\to\infty$ pa partikularno rješenje $y_p(t)\to\infty$ teži beskon. Tu pojavu nazivamo rezonacija.

i) Pobuda je $u(t)=e^{-2t}\cdot\cos(t)\cdot\mu(t)$, što možemo preoblikovati: $\cos(t)=\frac{1}{2}(e^{jt}+e^{-jt})$ slijedi $u(t)=\frac{1}{2}e^{(-2+j)t}+\frac{1}{2}e^{(-2-j)t}$, za $t\geq 0$
Diferencijalna jednadžba je: $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=u(t)$ čije je rješenje $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$, gdje je homogeno rješenje identično onom iz podzadatka c) odnosno $y_h(t)=C_1\cdot e^{(-2+j)t}+C_2\cdot e^{(-2-j)t}$, a partikularno je oblika $y_p(t)=y_{p1}(t)+y_{p2}(t)$ gdje su $y_{p1}(t)=K_1 t\cdot e^{(-2+j)t}$ i $y_{p2}(t)=K_2\cdot t\cdot e^{(-2-j)t}$ jer su $-2+j$ te $-2-j$ rješenja homogene jednadžbe, slijedi:

$$y_p(t)=K_1\cdot t\cdot e^{(-2+j)t}+K_2\cdot t\cdot e^{(-2-j)t}=y_{p1}(t)+y_{p2}(t)$$

$$y_p'(t)=K_1\cdot e^{(-2+j)t}\cdot(-2t+1+jt)+K_2\cdot e^{(-2-j)t}\cdot(-2t+1-jt)=y_{p1}'(t)+y_{p2}'(t)$$

$$y_p''(t)=K_1\cdot e^{(-2+j)t}\cdot(3t-4+2j-4jt)+K_2\cdot e^{(-2-j)t}\cdot(3t-4-2j+4jt)=y_{p1}''+y_{p2}''$$

Sad se posebno ubacuju $y_{p1}, y_{p1}', y_{p1}''$ te zatim $y_{p2}, y_{p2}', y_{p2}''$ u dif. jedn.: $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=u(t)$

NASTAVAK NA IDUĆEM PAPIRU!

(3.) NASTAVAK!

i) NASTAVAK!

Izračunavam K_1:

$$5K_1 \cdot t + 4K_1(-2t+1+jt) + K_1(3t-4+2j-4jt) = \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l}\text{pokratio sam prije} \\ e^{(-2+j)t} \text{ na obje strane}\end{array}\right)$$

Iz čega slijedi $K_1 = -\frac{1}{4}j$

Izračunavam K_2:

$$5 \cdot K_2 t + 4 \cdot K_2(-2t+1-jt) + K_2(3t-4-2j+4jt) = \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l}\text{pokraćeno je} \\ e^{(-2-j)t} \text{ sa obje strane}\end{array}\right)$$

Iz čega slijedi: $K_2 = \frac{1}{4}j$

Pa je partikularno rješenje: $y_p(t) = -\frac{1}{4}jte^{(-2+j)t} + \frac{1}{4}jte^{(-2-j)t}$

Konstante C_1 i C_2 dobit ćemo iz početnih uvjeta koji za mirni sustav glase: $y(0^-) = y'(0^-) = 0$, a kako su $b_0 = b_1 = 0$ slijede $y(0^+) = y'(0^+) = 0$, te iz $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ slijedi:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{(-2+j)t} + C_2 \cdot e^{(-2-j)t} - \frac{1}{4}jte^{(-2+j)t} + \frac{1}{4}jte^{(-2-j)t}$$

$$y'(t) = C_1(-2+j)e^{(-2+j)t} + C_2(-2-j)e^{(-2-j)t} + \left(\frac{1}{4}j + t\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}j\right)\right)e^{(-2-j)t} + \left(-\frac{1}{4}j + t\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}j\right)\right)e^{(-2+j)t}$$

Te se uvrštavanjem $t = 0^+$ u ove dvije jednadžbe dobije:

$C_1 = 0$ i $C_2 = 0$

Sad imamo konačno rješenje odziva:

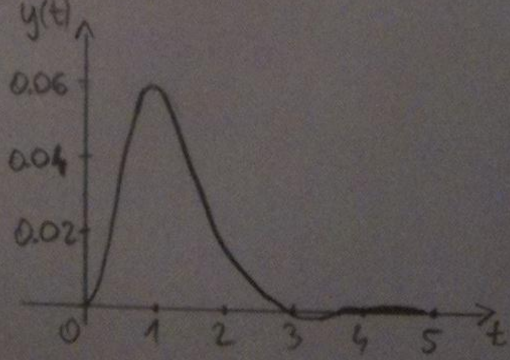
$$y(t) = -\frac{1}{4}jte^{(-2+j)t} + \frac{1}{4}jte^{(-2-j)t}$$

j) KOD:

U varijabli S je sustav (prijenosna funkcija).

```
t=0:0.001:10;
u=exp(-2*t).*cos(t);
y=lsim(S,u,t)
plot(t,y)
```

Rezultat:



Rješenje se poklapa sa grafom analitičkog rješenja.

(4.) Diferencijalna jednadžba : $y'(t) + 100 \cdot y(t) = u'(t)$

Pošto je prirodni odziv nestao računam prisilni odziv od $-\infty$ do 0 preko frekvencijske karakteristike :

$H(s) = \frac{s}{s+100}$ uz $\omega = 1$ i $s = j\omega = j$ slijedi :

$y(t) = |H(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \angle H(j\omega))$ gdje je

$H(j\omega) = H(j) = \frac{j}{j+100} = 0.00999 \cdot e^{j1.561}$ odnosno

$|H(j\omega)| = 0.00999 \approx 0.01$, $\angle H(j\omega) = 1.561$ rad

pa slijedi $\underline{y(t) = 0.01 \cdot \sin(t + 1.561) \ , t < 0}$

Pošto je $b_0 = 1$ računam $y(0^+)$ uz $y(0^-) = 0.01$

$y(0^+) = y(0^-) + 1 = 1 + 0.01 = 1.01$

Slijedi jednadžba za $t > 0$ uz $u'(t) = (1)' = 0$:

$y'(t) + 100\, y(t) = 0$, te je $y_h(t) = C \cdot e^{st}$

Rješenje homogene jednadžbe je $s + 100 = 0 \rightarrow s = -100$

Pa je rješenje dif. jedn. za $t > 0$:

$y(t) = C \cdot e^{-100t}$

Konstantu C računamo iz $y(0^+) = 1.01$:

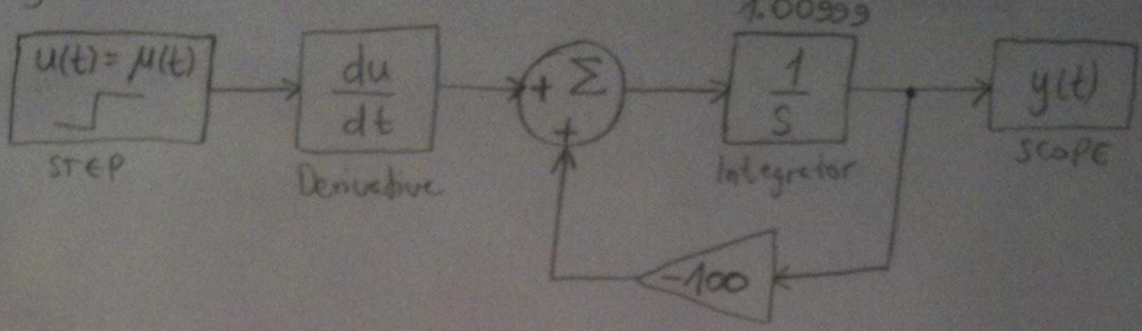
$1.01 = C \cdot e^{-100 \cdot 0}$ slijedi $C = 1.01$

Konačno rješenje za $t > 0$:

$\underline{y(t) = 1.01 \cdot e^{-100t} \ , t > 0}$

OKRENI!

Dijagram iz Simulinka:



b)