Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

27. ožujak 2013.

Fourierove transformacije aperiodičnih i periodičnih signala

- Fourierovu transformaciju vremenski aperiodičnih signala provodimo pomoću parova jednadžbi označenih s *CTFT* odnosno *DTFT*, a spektar aperiodičnih signala je kontinuiran
- Fourierovu transformaciju vremenski periodičnih signala provodimo pomoću parova jednadžbi označenih s *CTFS* odnosno *DTFS*, a spektar periodičnih signala je diskretan
- razmatramo primjenu Fourierove transformacije u slučaju operacija između
    - periodičnih i aperiodičnih signala (razmatra se u ovoj cjelini)
    - vremenski diskretnih i vremenski kontinuiranih signala (razmatra se u Cjelini 7)

Fourierove transformacije aperiodičnih i periodičnih signala

- razmotrimo li *CTFT* sinusoidnog signala $f(t) = cos(\omega_0 t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$, lako zaključujemo da za ovaj signal ne postoji *CTFT* jer signal nije konačne energije
- međutim, *CTFT* vremenski omeđenog sinusoidnog signala, dakle aperiodičnog signala, $\forall t \in \mathbb{R}$,

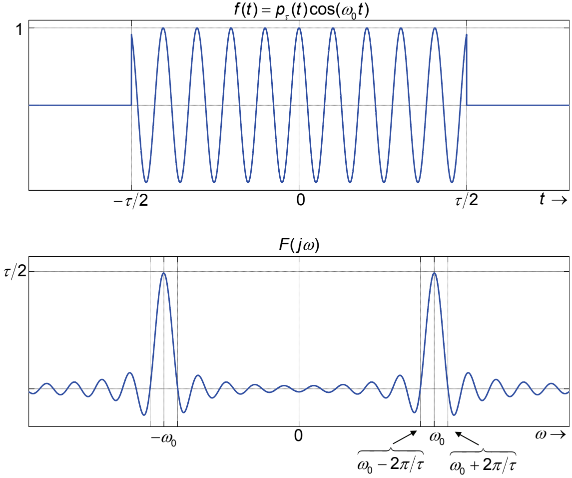
$$f(t) = p_\tau(t)\cos(\omega_0 t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt = \frac{\tau}{2} \frac{sin \frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}} + \frac{\tau}{2} \frac{sin \frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}}$$

Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala



- prepoznajemo kako za $\tau \to \infty$ spektar prelazi u Diracove funkcije na frekvencijama ω_0 i $-\omega_0$

Fourierova transformacija periodičnih signala

- već je pokazano kako je Fourierova transformacija Diracove funkcije konstanta, te kako je Fourierova transformacija konstante Diracova funkcija (svojstvo dualnosti)
- isto tako je pokazano kako je Fourierova transformacija pomaknute Diracove funkcije kompleksna eksponencijala
- može se zaključiti da će, primjenom svojstva dualnosti, pomaknuta Diracova funkcija, u frekvencijskom području, za inverznu transformaciju imati kompleksnu eksponencijalu u vremenskoj domeni
- razmotrimo signal $f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, čija je Fourierova transformacija Diracova funkcija, težine (intenziteta) 2π, na frekvenciji $k\omega_0$
- *ICTFT* ovog impulsa je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{jk\omega_0 t}$$

Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala

- Fourierova transformacija signala $e^{jk\omega_0 t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, je

$$e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

- zaključujemo kako će za proizvoljni periodični signal, prikazan Fourierovim redom,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

Fourierova transformacija biti, za $\forall \omega \in \mathbb{R}$, i $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$F(j\omega) = CTFT\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi F_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

dakle, niz Diracovih funkcija, intenziteta $2\pi F_k$, koji se pojavljuju na frekvencijama $k\omega_0$

Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala

- zaključno: Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala

$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad F(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi F_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

gdje su F_k koeficijenti Fourierovog reda periodičnog signala, a $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ osnovna frekvencija signala $f(t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$

Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala – primjer pravokutni signal

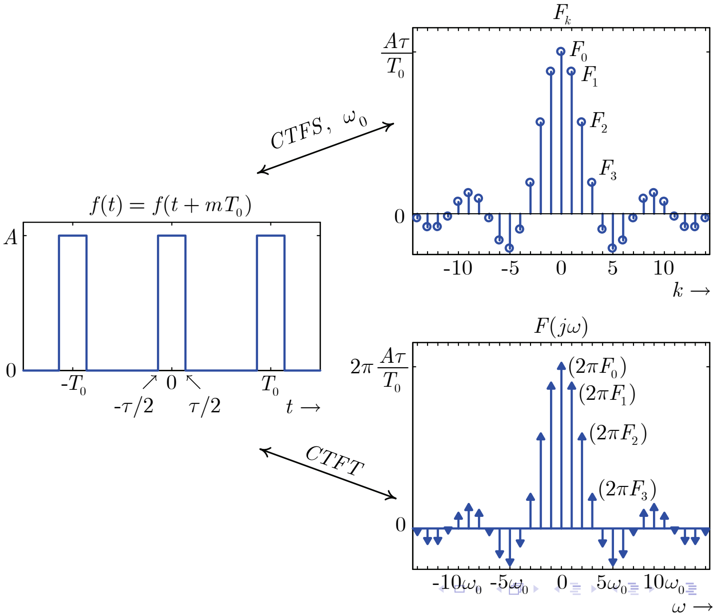
- određuje se *CTFT* periodičnog pravokutnog signala prikazanog na slici na narednoj prikaznici
- Fourierovi koeficijenti pri razvoju ovog signala u *CTFS* su prije izračunati

$$F_k = A\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}$$

pa je *CTFT* zadanog periodičnog vremenski kontinuiranog pravokutnog signala

$$\begin{aligned}
&\forall\omega \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\\
&F(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi F_k\delta(\omega - k\omega_0)\\
&\qquad = 2\pi\frac{A\tau}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}\delta(\omega - k\omega_0)
\end{aligned}$$

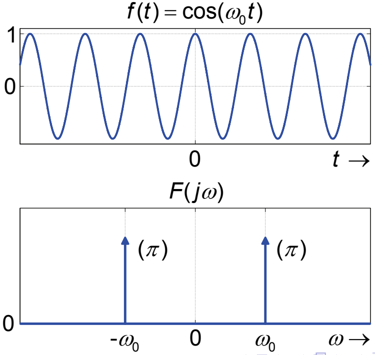
Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala – primjer pravokutni signal



Fourierova transformacija sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija svevremenskog sinusoidnog signala $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$CTFT\{\cos(\omega_0 t)\} = CTFT\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\} = $$
$$= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$



Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala – primjer sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija svevremenskog sinusoidnog signala $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$CTFT\{\sin(\omega_0 t)\} = CTFT\left\{\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}\right\} =$$
$$= -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

- općenito, za svevremenski sinusoidni signal, vrijedi

$$A\cos(\omega_0 t + \theta) \overset{CTFT}{\longleftrightarrow} \pi A e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0) + \pi A e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0)$$

Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

- određuje se Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad comb_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- kako se radi o periodičnom signalu, s periodom[1] T, moguće ga je prikazati pomoću Fourierovog reda

$$comb_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_s t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

- jer su Fourierovi koeficijenti

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

[1] Oznake T i $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ izabrane i prilagođene za kasniju uporabu

Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

- pa se prema izrazu za *CTFT* periodičnih signala, periode $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$,

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi F_k \delta(\omega - k\omega_s)$$

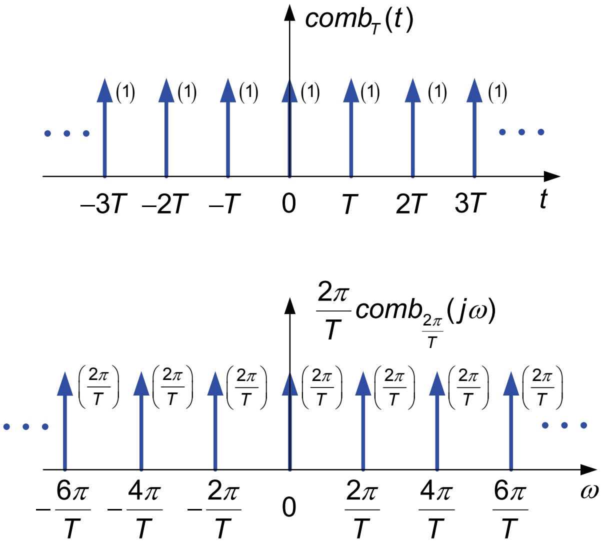
određuje Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$CTFT\{comb_T(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{1}{T} \delta(\omega - k\omega_s) =$$

$$= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) = \frac{2\pi}{T} comb_{\frac{2\pi}{T}}(j\omega)$$

Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija



Fourierova transformacija periodičnih vremenski diskretnih signala

- *DTFT* za periodičan vremenski diskretan eksponencijalni signal (izvod identičan vremenski kontinuiranom eksponencijalnom signalu, uočiti periodičnost spektra!) je

$$e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - m \cdot 2\pi)$$

- iz ove transformacije slijede i transformacije, za $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$1 = e^{j0n} \xleftrightarrow{DTFT} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m)$$

$$cos(\Omega_0 n) \xleftrightarrow{DTFT} \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi m) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$$

$$\sin(\Omega_0 n) \xleftrightarrow{DTFT} j\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi m) - j\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$$

Fourierova transformacija periodičnih vremenski diskretnih signala

- isto tako, iz *DTFS* za periodičan vremenski diskretan signal, periode N,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \qquad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\Omega_0 n},$$

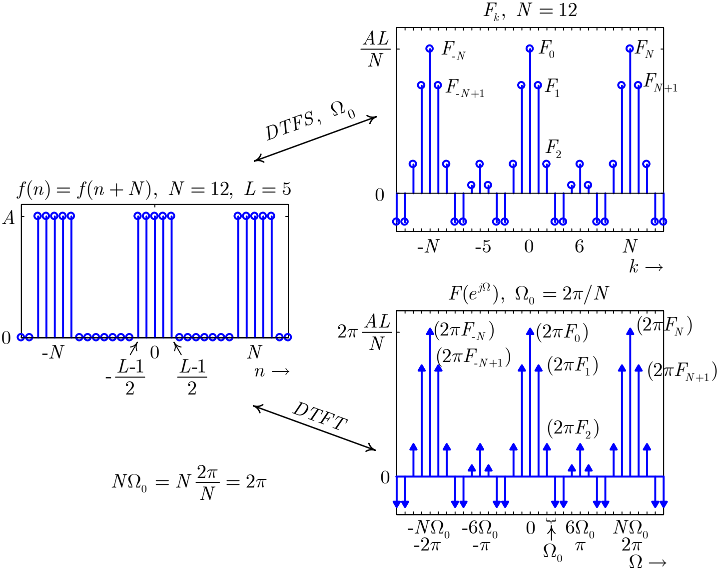
gdje su $F_k = F_{k+mN}$, koeficijenti *DTFS*, isto periode N, te korištenjem

$$e^{jk\Omega_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - m2\pi)$$

izražavamo *DTFT* proizvoljnog periodičnog vremenski diskretnog signala f kao

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\Omega_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} F(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala – primjer pravokutni signal



$$N\Omega_0 = N\frac{2\pi}{N} = 2\pi$$

Svojstva Fourierovih transformacija – linearnost

- sve četiri transformacije zadovoljavaju svojstvo linearnosti

$$
\begin{aligned}
af(t) + bg(t) &\xleftrightarrow{CTFT} aF(j\omega) + bG(j\omega) \\
a\tilde{f}(t) + b\tilde{g}(t) &\xleftrightarrow{CTFS;\ \omega_0} aF_k + bG_k \\
af(n) + bg(n) &\xleftrightarrow{DTFT} aF(e^{j\Omega}) + bG(e^{j\Omega}) \\
a\tilde{f}(n) + b\tilde{g}(n) &\xleftrightarrow{DTFS;\ \Omega_0} aF_k + bG_k
\end{aligned}
$$

pri čemu su periodični signali $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ jednake osnovne periode $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ odnosno $N = \frac{2\pi}{\Omega_0}$

- izvod za $DTFT$:

$$
DTFT\{af(n) + bg(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [af(n) + bg(n)]e^{-j\Omega n}
$$

$$
= a\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-j\Omega n} = aF(e^{j\Omega}) + bG(e^{j\Omega})
$$

Svojstva Fourierovih transformacija – simetričnost

- razmotrimo svojstvo simetričnosti za $CTFT$
- iz $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$ slijedi

$$F^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{j\omega t}\,dt \quad (1)$$

za realan signal $f(t)$ vrijedi $f(t) = f^*(t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$ pa je

$$F^*(j\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt}_{F(-j\omega)}$$

što upućuje na konjugiranu simetričnost kompleksnog signala spektra $F(j\omega)$

$$F^*(j\omega) = F(-j\omega)$$

Svojstva Fourierovih transformacija – simetričnost

- prije je pokazano da za konjugirano simetričan kompleksni signal vrijedi

$$Re\{F(j\omega)\} = Re\{F(-j\omega)\} \quad \text{i} \quad Im\{F(j\omega)\} = -Im\{F(-j\omega)\}$$

odnosno

$$|F(j\omega)| = |F(-j\omega)| \quad \text{i} \quad \angle F(j\omega) = -\angle F(-j\omega)$$

- zaključujemo da je amplitudni spektar realnog signala parna, a fazni spektar realnog signala neparna funkcija, te da je realni dio spektra realnog signala paran, a imaginarni dio spektra neparan signal (već u više navrata naglašavano)
- na sličan način pokazuju se svojstva simetričnosti za ostale Fourierove transformacije

Svojstva Fourierovih transformacija – simetričnost

- razmatra se spektar realnog i parnog vremenski kontinuiranog signala za koji zbog $f^*(t) = f(t)$ i $f(t) = f(-t)$ vrijedi

$$f^*(t) = f(-t)$$

uvrštenjem u jednadžbu (1)

$$\begin{aligned} F^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j(-\omega)t}\, dt = |\tau = -t| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau = F(j\omega) \end{aligned}$$

- gornja jednakost vrijedi samo kada je imaginarni dio $F(j\omega)$ jednak nuli, dakle kada je $F(j\omega)$ realan, što potvrđuje prije kazano da je spektar parnog realnog signala realan

Svojstva Fourierovih transformacija – simetričnost

- prethodna razmatranja svojstva simetričnosti spektra pri izračunu *CTFT* se mogu na sličan način proširiti na preostale Fourierove transformacije

transformacija	realni signal	parni realni signal
CTFT	$F^*(j\omega) = F(-j\omega)$	$F^*(j\omega) = F(j\omega)$
CTFS	$F_k^* = F_{-k}$	$F_k^* = F_k$
DTFT	$F^*(e^{j\Omega}) = F(e^{-j\Omega})$	$F^*(e^{j\Omega}) = F(e^{j\Omega})$
DTFS	$F_k^* = F_{-k}$	$F_k^* = F_k$
	spektar konjugirano simetričan	spektar realan

Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija aperiodičnih signala u vremenskoj domeni

- određujemo konvoluciju dva aperiodična vremenski diskretna signala $f(n)$ i $g(n)$, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, čiji su spektri $F(e^{j\Omega})$ i $G(e^{j\Omega})$, za $\forall \Omega \in \mathbb{R}$,

$$DTFT\{(f * g)(n)\} = DTFT\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m)\right\} =$$
$$= F(e^{j\Omega})G(e^{j\Omega})$$

izvod:

$$DTFT\{(f * g)(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m)\right]e^{-j\Omega n} =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n-m)e^{-j\Omega n}\right]$$

zamjenom $n - m = k$ slijedi

Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija aperiodičnih signala u vremenskoj domeni

- slijedi nastavak izvoda s prethodne prikaznice

$$
\begin{aligned}
DTFT\{(f*g)(n)\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-j\Omega(m+k)}\right] \\
&= \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{-j\Omega m}}_{F(e^{j\Omega})}\underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-j\Omega k}\right]}_{G(e^{j\Omega})} \\
&= F(e^{j\Omega})G(e^{j\Omega})
\end{aligned}
$$

- slično se pokazuje da za konvoluciju aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala vrijedi

$$
CTFT\{(f*g)(t)\} = F(j\omega)G(j\omega)
$$

Svojstvo konvolucije aperiodičnih signala u vremenskoj domeni – primjer

- pokazano je kako je DTFT pravokutnog signala,

$$p_L(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

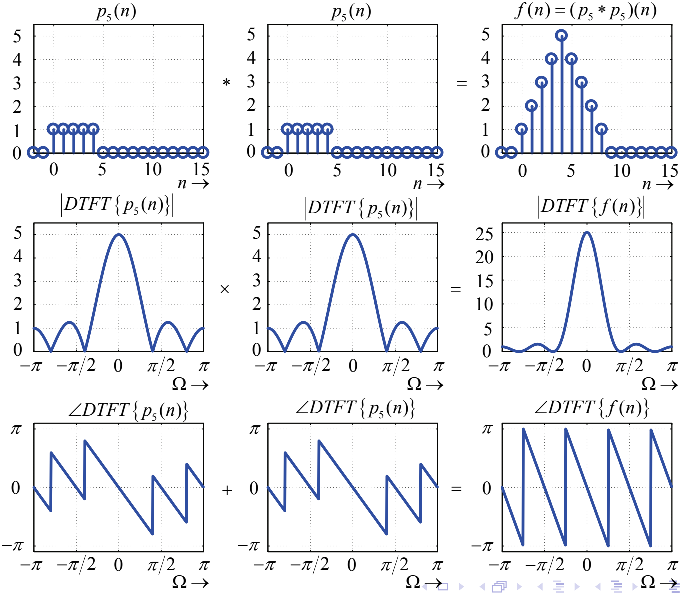
$$DTFT\{p_L(n)\} = \begin{cases} L, & \Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ e^{-j\frac{\Omega}{2}(L-1)} \frac{sin\left(\frac{\Omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}, & \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases}$$

$$DTFT\{(p_L * p_L)(n)\} = DTFT\{p_L(n)\} DTFT\{p_L(n)\}$$

$$DTFT\{(p_L * p_L)(n)\} = \begin{cases} L^2, & \Omega = 0, \pm 2\pi, \dots \\ \left[e^{-j\frac{\Omega}{2}(L-1)} \frac{sin\left(\frac{\Omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right]^2, & \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \dots \end{cases}$$

$$DTFT\{(p_5 * p_5)(n)\} = \begin{cases} 25, & \Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ e^{-j4\Omega} \frac{sin^2\left(\frac{5\Omega}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}, & \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases}$$

Svojstvo konvolucije aperiodičnih signala u vremenskoj domeni – primjer



Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija periodičnih signala u vremenskoj domeni

- za periodične vremenski diskretne signale f i g, osnovne periode N, definiramo periodičnu konvoluciju

$$(f \circledast g)(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)g(n-m)$$

- za periodične vremenski kontinuirane signale f i g, osnovne periode T_0, definiramo periodičnu konvoluciju

$$(f \circledast g)(t) = \int_0^{T_0} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

- pokazuje se da vrijedi (izvod za $DTFS$ u dodatku)

$$(f \circledast g)(n) \xleftrightarrow{DTFS;\ \Omega_0=\frac{2\pi}{N}} NF_k G_k$$

$$(f \circledast g)(t) \xleftrightarrow{CTFS;\ \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}} T_0 F_k G_k$$

Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija u vremenskoj domeni

- zaključujemo razmatranje svojstva konvolucije periodičnih signala u vremenskoj domeni sljedećom tablicom

$(f * g)(t)$	$\xleftrightarrow{CTFT}$	$F(j\omega)G(j\omega)$
$(f \circledast g)(t)$	$\xleftrightarrow{CTFS;\ \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}}$	$T_0 F_k G_k$
$(f * g)(n)$	$\xleftrightarrow{DTFT}$	$F(e^{j\Omega})G(e^{j\Omega})$
$(f \circledast g)(n)$	$\xleftrightarrow{DTFS;\ \Omega_0=\frac{2\pi}{N}}$	$N F_k G_k$

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – pomak u vremenskoj domeni

- za $F(e^{j\Omega}) = DTFT\{f(n)\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \Omega \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$DTFT\{f(n-m)\} = e^{-j\Omega m} F(e^{j\Omega})$$

izvod:

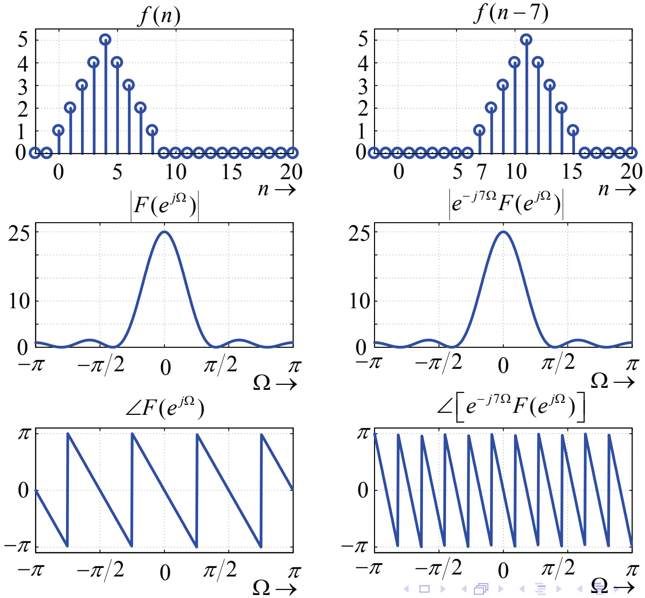
$$DTFT\{f(n-m)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-m) e^{-j\Omega n}$$

zamjenom $n - m = r$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(r) e^{-j\Omega(m+r)}$$

$$= e^{-j\Omega m} \underbrace{\sum_{r=-\infty}^{\infty} f(r) e^{-j\Omega r}}_{F(e^{j\Omega})} = e^{-j\Omega m} F(e^{j\Omega})$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – pomak u vremenskoj domeni



Svojstva Fourierovih transformacija – pomak u vremenskoj domeni

- na sličan način se pokazuje svojstvo pomaka u vremenskoj domeni ostalih Fourierovih transformacija

$$
\begin{array}{ccc}
\hline
f(t-t_1) & \xleftrightarrow{CTFT} & e^{-j\omega t_1} F(j\omega) \\
f(t-t_1) & \xleftrightarrow{CTFS;\ \omega_0} & e^{-jk\omega_0 t_1} F_k \\
f(n-m) & \xleftrightarrow{DTFT} & e^{-j\Omega m} F(e^{j\Omega}) \\
f(n-m) & \xleftrightarrow{DTFS;\ \Omega_0} & e^{-jk\Omega_0 m} F_k \\
\hline
\end{array}
$$

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – pomak u frekvencijskoj domeni

- za $F(e^{j\Omega}) = DTFT\{f(n)\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \Omega \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$DTFT\{e^{j\Omega_1 n} f(n)\} = F(e^{j(\Omega-\Omega_1)})$$

izvod:

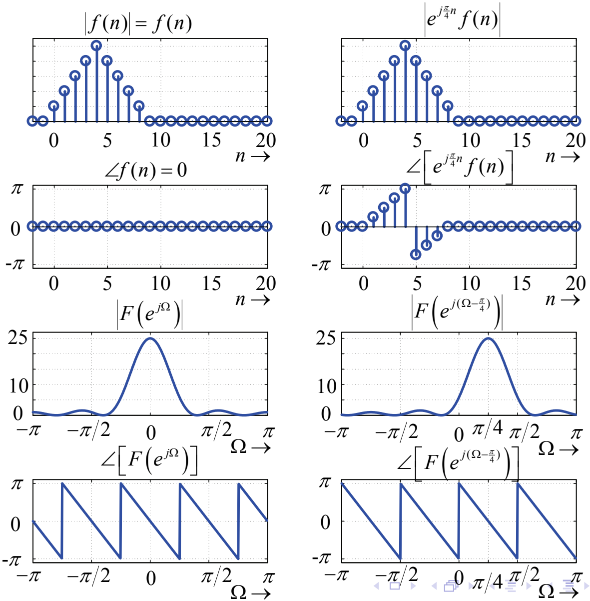
$$DTFT\{e^{j\Omega_1 n} f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_1 n} f(n) e^{-j\Omega n}$$

$$DTFT\{e^{j\Omega_1 n} f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j(\Omega-\Omega_1)n} = F(e^{j(\Omega-\Omega_1)})$$

primjer: $\Omega_1 = \frac{\pi}{4}$

$$DTFT\{e^{j\frac{\pi}{4}n} f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j(\Omega-\frac{\pi}{4})n} = F(e^{j(\Omega-\frac{\pi}{4})})$$

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – pomak u frekvencijskoj domeni



Svojstva Fourierovih transformacija – pomak u frekvencijskoj domeni

- na sličan način se pokazuje svojstvo pomaka u frekvencijskoj domeni ostalih Fourierovih transformacija

$e^{j\omega_1 t} f(t)$	$\xleftrightarrow{CTFT}$	$F(j(\omega - \omega_1))$
$e^{jk_1\omega_0 t} f(t)$	$\xleftrightarrow{CTFS;\, \omega_0}$	F_{k-k_1}
$e^{j\Omega_1 n} f(n)$	$\xleftrightarrow{DTFT}$	$F(e^{j(\Omega-\Omega_1)})$
$e^{jk_1\Omega_0 n} f(n)$	$\xleftrightarrow{DTFS;\, \Omega_0}$	F_{k-k_1}

Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija u frekvencijskoj domeni

- pokazuje se kako umnošku signala u vremenskoj domeni odgovara konvolucija njihovih spektara u frekvencijskoj domeni
- spektar vremenski diskretnih signala je periodičan pa se definira periodična konvolucija
- svojstvo konvolucije u frekvencijskoj domeni često se u literaturi naziva i svojstvo umnoška u vremenskoj domeni

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- uz $F(e^{j\Omega}) = DTFT\{f(n)\}$, i $G(e^{j\Omega}) = DTFT\{g(n)\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \Omega \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$f(n)g(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\psi})G(e^{j(\Omega-\psi)})\,d\psi = \frac{1}{2\pi}(F \circledast G)(e^{j\Omega})$$

izvod:

$$\begin{aligned}
DTFT\{f(n)g(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}[f(n)g(n)]e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\psi})e^{j\psi n}\,d\psi\right]g(n)e^{-j\Omega n} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\psi})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-j(\Omega-\psi)n}\right]d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\psi})G(e^{j(\Omega-\psi)})\,d\psi = \frac{1}{2\pi}(F \circledast G)(e^{j\Omega})
\end{aligned}$$

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- određuje se *DTFT* umnoška svevremenske vremenski diskretne sinusoide, $f(n) = \cos(\Omega_0 n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, i aperiodičnog vremenski diskretnog signala $g(n)$,
- Fourierova transformacija sinusoide je periodična i iznosi

$$F(e^{j\Omega}) = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi m) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$$

odnosno, za $m = 0$,

$$F(e^{j\Omega}) = \pi\delta(\Omega + \Omega_0) + \pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- pa je

$$
\begin{aligned}
&DTFT\{\cos(\Omega_0 n) g(n)\} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\pi\delta(\psi + \Omega_0) + \pi\delta(\psi - \Omega_0)] G(e^{j(\Omega-\psi)})\, d\psi \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\psi + \Omega_0) G(e^{j(\Omega-\psi)})\, d\psi + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\psi - \Omega_0) G(e^{j(\Omega-\psi)})\, d\psi \\
&= \frac{1}{2} G(e^{j(\Omega+\Omega_0)}) + \frac{1}{2} G(e^{j(\Omega-\Omega_0)})
\end{aligned}
$$

- množenje svevremenskog sinusoidalnog signala sa signalom g, možemo interpretirati kao modulaciju amplitude sinusoidalnog signala sa informacijom sadržanom u signalu g
- u komunikacijama se ovaj postupak naziva amplitudna modulacija

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- slijede dva primjera
  - umnožak sinusoidalnog signala $f(n) = cos(\frac{\pi}{4}n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, s pravokutnim signalom, $L = 16$,

$$g(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

  - umnožak[2] dva, vremenski omeđena sinusoidalna signala

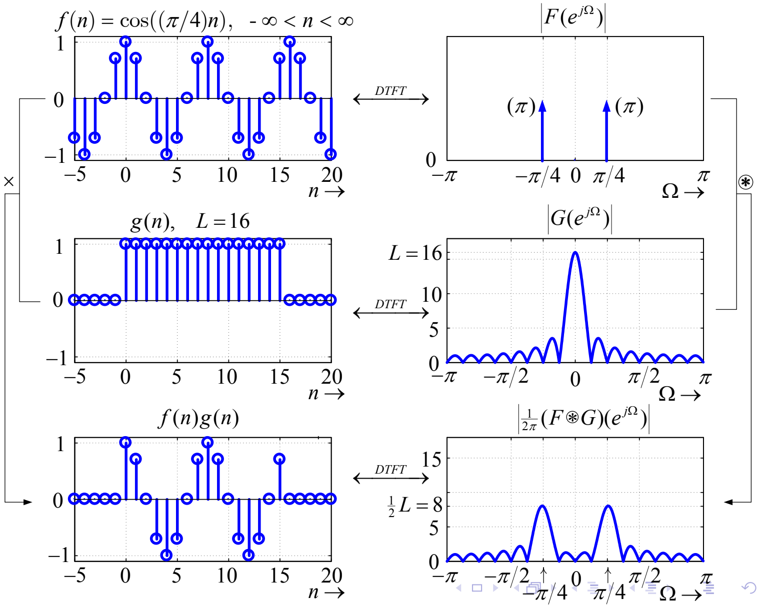
$$f(n) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4}n), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

i

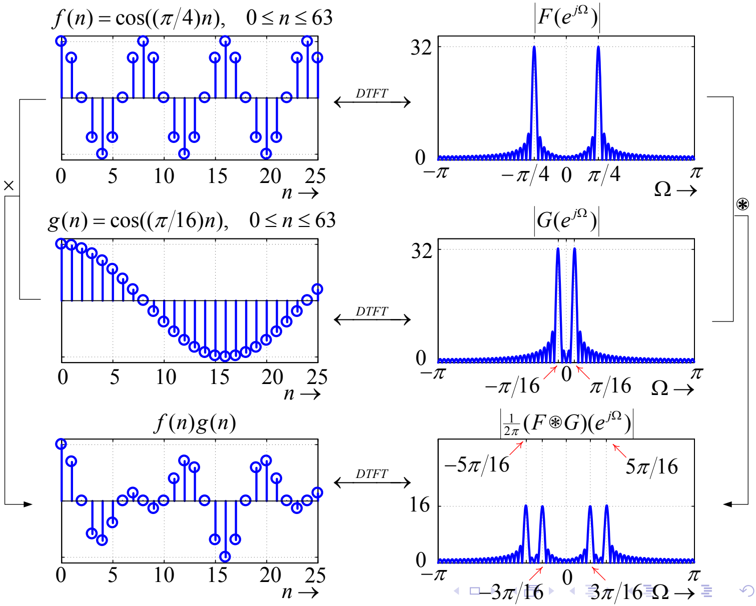
$$g(n) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{16}n), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

[2] podsjeta: $\cos(\frac{\pi}{4}n)\cos(\frac{\pi}{16}n) = \frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{16}n) + \frac{1}{2}\cos(\frac{5\pi}{16}n)$

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski kontinuiranih signala – konvolucija u frekvencijskoj domeni

- uz $F(j\omega) = CTFT\{f(t)\}$, i $G(j\omega) = CTFT\{g(t)\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$f(t)g(t) \xleftrightarrow{CTFT} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j(\omega-\Psi))G(j\Psi)\, d\Psi = \frac{1}{2\pi}(F*G)(j\omega)$$

- izvod ovog svojstva vrlo je sličan izvodu svojstva za periodičnu konvoluciju u frekvencijskoj domeni

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski kontinuiranih signala – konvolucija u frekvencijskoj domeni – primjer

- razmatramo umnožak svevremenskog sinusoidnog signala $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$, i aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala $g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, čiji je spektar $G(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- prije je izvedeno da je

$$F(j\omega) = CTFT\{\cos(\omega_0 t)\} = CTFT\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \\ = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

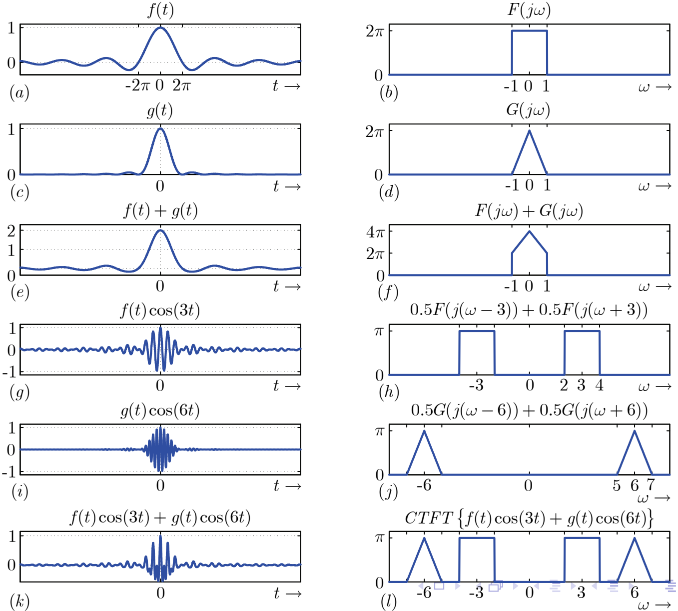
pa je

$$CTFT\{\cos(\omega_0 t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\psi)G(j(\omega-\psi))\,d\psi \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\pi\delta(\psi+\omega_0) + \pi\delta(\psi-\omega_0)]G(j(\omega-\psi))\,d\psi \\ = \frac{1}{2}G(j(\omega+\omega_0)) + \frac{1}{2}G(j(\omega-\omega_0))$$

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski kontinuiranih signala – modulacija

- umnožak $g(t)\cos(\omega_0 t)$ predstavlja amplitudnu modulaciju, pri čemu se: $\cos(\omega_0 t)$ naziva prijenosni signal, $g(t)$ modulacijski signal, a sam umnožak modulirani signal
- modulacijom se postiže pomak spektra modulacijskog signala čime se omogućuje prijenos više signala po istom prijenosnom mediju
- na narednoj prikaznici dana je načelna interpretacija prijenosa dva signala, f i g, sa spektrima F i G, po istom mediju
- grafovi (a-f) ukazuju da istovremenim prijenosom (zbroj signala) signali f i g interferiraju (miješaju se) i na prijemnoj strani ih je nemoguće razdvojiti
- grafovi (g-l) ilustriraju kako primjenom modulacije (pomakom spektra) razdvajamo njihove spektre čime čuvamo informaciju o svakom od signala

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski kontinuiranih signala – modulacija



Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija u frekvencijskoj domeni

- navodimo svojstvo konvolucije u frekvencijskoj domeni za sve četiri Fourierove transformacije

$$
\begin{array}{ccc}
f(t)g(t) & \xleftrightarrow{CTFT} & \frac{1}{2\pi}(F * G)(j\omega) \\
f(t)g(t) & \xleftrightarrow{CTFS;\ \omega_0=2\pi/T_0} & (F * G)_k \\
f(n)g(n) & \xleftrightarrow{DTFT} & \frac{1}{2\pi}(F \circledast G)(e^{j\Omega}) \\
f(n)g(n) & \xleftrightarrow{DTFS;\ \Omega_0=2\pi/N} & (F \circledast G)_k
\end{array}
$$

Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

- prije je, na primjeru, ilustrirano svojstvo dualnosti $CTFT$, a ovdje se ono izvodi
- pokazujemo da za $f(t) \xleftrightarrow{CTFT} F(j\omega)$ vrijedi svojstvo dualnosti

$$F(jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(-\omega) \quad \text{ili} \quad F(-jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(\omega)$$

- izvod ovog svojstva se temelji na sličnosti $CTFT$ transformacijskog para, pa višestrukim zamjenama varijabli dokazujemo ovo svojstvo
  izvod: iz

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

zamjenom $t = -\tau$, te množenjem obje strane s 2π, slijedi

$$2\pi f(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega\tau} \, d\omega$$

Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

uz zamjenu $\omega = t$ slijedi

$$2\pi f(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-jt\tau}\, dt$$

finalna zamjena $\tau = \omega$ vodi nas do

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t}\, dt = CTFT\{F(jt)\}$$

čime smo dokazali[3]

$$F(jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(-\omega)$$

slično se izvodi $F(-jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(\omega)$

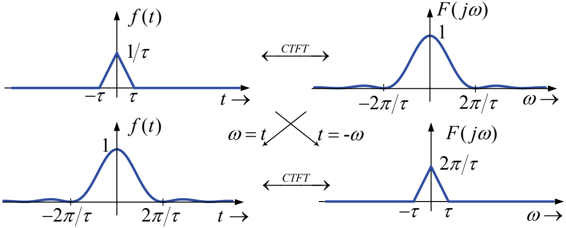
[3] iz definicije za $F(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$, analogijom slijedi da, za $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $F(jt) = F(t)$

Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

- svojstvo dualnosti vrijedi i za ostale Fourierove transformacije i izvodi su dani u dodatku

$CTFT$	$f(t) \xleftrightarrow{CTFT} F(j\omega)$	$F(jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(-\omega)$
$DTFS$	$f(n) \xleftrightarrow{DTFS;\, 2\pi/N} F_k$	$F_n \xleftrightarrow{DTFS;\, \Omega_0 = 2\pi/N} \frac{1}{N} f(-k)$
$DTFT$ $CTFS$	$f(n) \xleftrightarrow{DTFT} F(e^{j\Omega})$	$F(e^{jt}) \xleftrightarrow{CTFS;\, \omega_0 = 1} f(-k)$

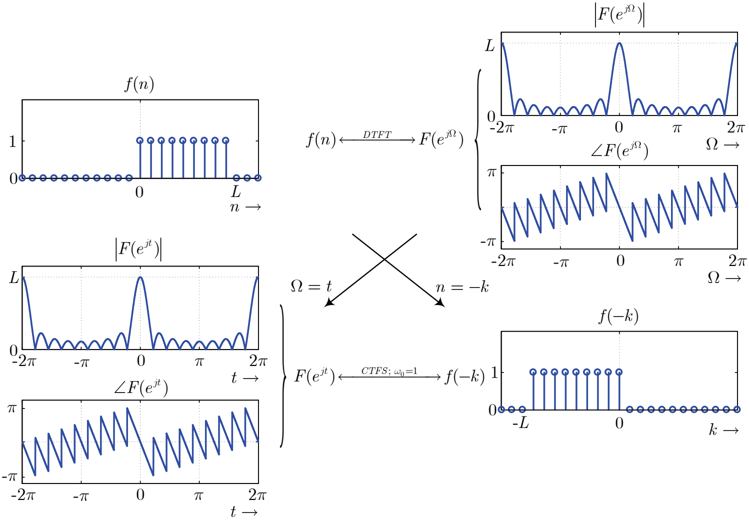
CTFT – svojstvo dualnosti – primjer



$$\underbrace{\left.\begin{array}{cc} \frac{1}{\tau^2}t+\frac{1}{\tau} & -\tau\le t<0 \\ -\frac{1}{\tau^2}t+\frac{1}{\tau} & 0\le t\le\tau \\ 0 & \text{inače} \end{array}\right\}}_{f(t)} \overset{CTFT}{\longleftrightarrow} \underbrace{\left[\frac{\sin\frac{\tau\omega}{2}}{\frac{\tau\omega}{2}}\right]^2}_{F(j\omega)}$$

$$\underbrace{\left[\frac{\sin\frac{\tau t}{2}}{\frac{\tau t}{2}}\right]^2}_{F(jt)} \overset{CTFT}{\longleftrightarrow} \underbrace{\left\{\begin{array}{cc} \frac{2\pi}{\tau^2}\omega+\frac{2\pi}{\tau} & -\tau\le\omega<0 \\ -\frac{2\pi}{\tau^2}\omega+\frac{2\pi}{\tau} & 0\le\omega\le\tau \\ 0 & \text{inače} \end{array}\right.}_{2\pi f(-\omega)=2\pi f(\omega)}$$

DTFT/CTFS – svojstvo dualnosti – primjer



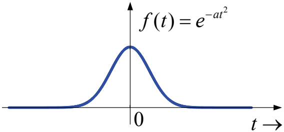
Fourierova transformacija – primjer Gaussov puls

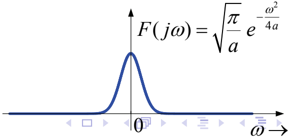
- pokazuje se kako je Fourierova transformacija aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala $f(t) = e^{-at^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, opet Gaussov puls

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2 + j\omega t)}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(\sqrt{a}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{a}})^2 + \frac{\omega^2}{4a}]}\, dt = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{a}})^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\, d\beta}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$





Spektar vrem. omeđenih i vrem. neomeđenih signala

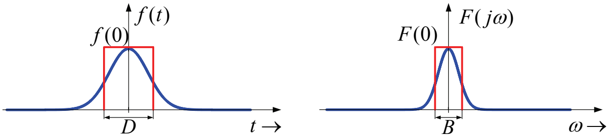
- iz prethodnih prikaznica zaključujemo:
  - signal neomeđen u vremenu može imati frekvencijski neomeđen spektar - primjer Gaussovog pulsa u obje domene
  - spektar vremenski omeđenog signala je frekvencijski neomeđen - primjer pravokutni ili trokutni puls
  - frekvencijski omeđeni spektar je spektar vremenski neomeđenog signala - primjer signala $sin(t)/t$, ili $sin^2(t)/t^2$
  - signal i njegov spektar ne mogu biti istovremeno omeđeni u obje domene

Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- u više je navrata pokazana bliska veza trajanja signala i odgovarajuće širine spektra signala
- tako u slučaju pravokutnog pulsa, spektar se "širi" kako se trajanje pulsa "skraćuje" (unatoč činjenici da je spektar pravokutnog pulsa frekvencijski neomeđen)
- isto tako, može se zaključiti kako je većina njegovog spektra ipak koncentrirana u nekom konačnom intervalu,
- taj interval možemo nazvati širina frekvencijskog pojasa spektra, i korisno je definirati odgovarajuću mjeru za trajanje signala, odnosno širinu frekvencijskog pojasa njegovog spektra

Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- postoji više načina definicije trajanja signala i širine frekvencijskog pojasa spektra signala a ovdje se navodi postupak koji nazivamo, prema engleskom, pravokutnik iste površine (Equal–Area Rectangle)
- razmatramo parni realan signal



- prema ovoj definiciji trajanje signala $f(t)$ je trajanje pravokutnog signala koji je iste površine i visine kao sam signal $f(t)$
- identično se definira širina frekvencijskog pojasa spektra signala

Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- uz

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt \quad \& \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

i uz

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt}_{F(0)} = Df(0) \quad \& \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, d\omega}_{2\pi f(0)} = BF(0)$$

slijedi

$$D = \frac{F(0)}{f(0)} \quad \& \quad B = 2\pi \frac{f(0)}{F(0)} \quad \Rightarrow \quad DB = 2\pi$$

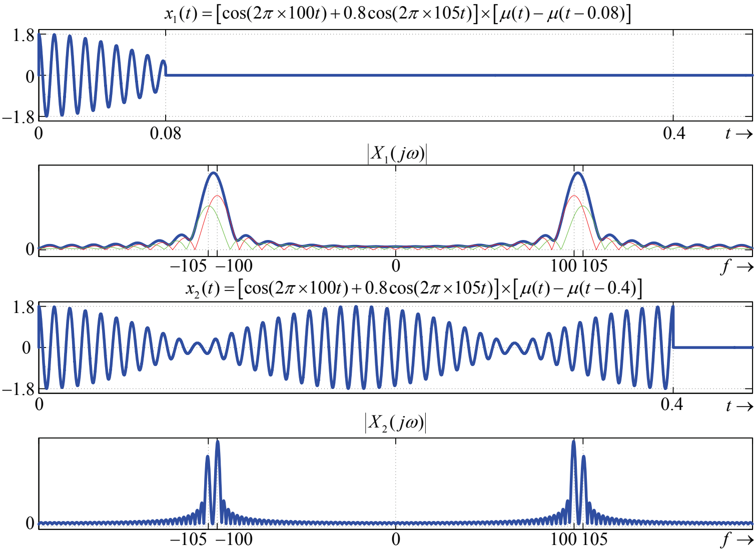
Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- očigledno su trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa njegovog spektra recipročni
- dakle, skraćivanje trajanja signala rezultira u širenju frekvencijskog pojasa spektra (i obrnuto)
- zaključujemo kako je umnožak

(trajanje signala) x (frekvencijski pojas spektra) = konstanta

- ova činjenica je od velike važnosti u nizu primjena, a posebno u komunikacijama
- naredni primjer ilustrira utjecaj trajanja signala na njegov spektar

Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala



DODATAK NAMJENJEN SAMOSTALNOM RADU STUDENATA

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – trokutni signal

- u razmatranju *DTFT* aperiodičnih signala pokazan je izračun spektra trokutnog signala
- ovdje se spektar ovog signala određuje na drugi način (izravni)
- određuje se Fourierova transformacija aperiodičnog niza zadanog kao[4]
  $x(n) = \{\dots 0, 0, \underline{1}, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, \dots\}$
  signal se može, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, prikazati i kao

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + \\ + 4\delta(n-5) + 3\delta(n-6) + 2\delta(n-7) + \delta(n-8)$$

[4] podcrtan nulti uzorak $x(0)$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – trokutni signal

- uzimajući u obzir Fourierovu transformaciju Kroneckerovog δ moguće je odrediti Fourierovu transformaciju signala x

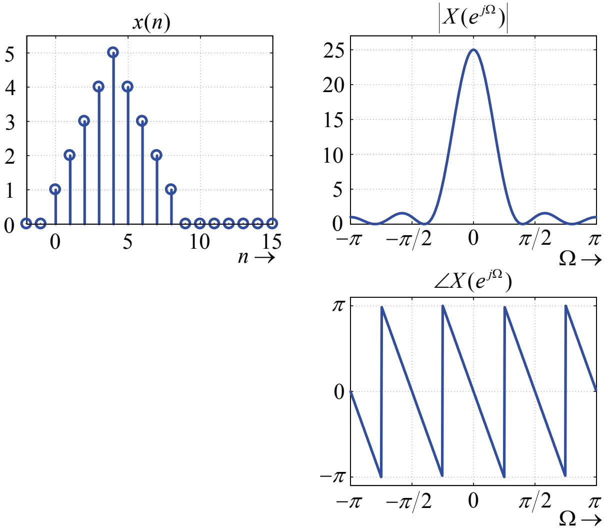
$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + \\ + 4\delta(n-5) + 3\delta(n-6) + 2\delta(n-7) + \delta(n-8)$$

Fourierova transformacija signala $x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ je

$$X(e^{j\Omega}) = 1 + 2e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + 4e^{-j3\Omega} + 5e^{-j4\Omega} + \\ + 4e^{-j5\Omega} + 3e^{-j6\Omega} + 2e^{-j7\Omega} + e^{-j8\Omega}$$

- može se zaključiti da je korištenje svojstva konvolucije pogodniji način izračuna spektra trokutnog signala
- na narednoj prikaznici prikazan je signal $x(n)$ te njegovi amplitudni i fazni spektar

Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – trokutni signal



Svojstvo konvolucije periodičnih signala u vremenskoj domeni

- izvod svojstva konvolucije periodičnih signala u vremenskoj domeni provodimo za vremenski diskretne signale

$$(f \circledast g)(n) \xleftrightarrow{DTFS;\,\Omega_0} NF_k G_k$$

- činjenicu da su f i g periodični, naglašavamo oznakom $\widetilde{f}$ i $\widetilde{g}$ (isto tako oznakom $DTFS$ koeficijenata $\widetilde{F}$ i $\widetilde{G}$)
- ovim izvodom se ujedno pojašnjava i definicija periodične konvolucije

Periodična konvolucija

- neka su $\tilde{f}(n)$ i $\tilde{g}(n)$ periodični signali čiji su DTFS

$$\tilde{F}_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{f}(m)e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \quad \text{i} \quad \tilde{G}_k = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{g}(q)e^{-jk\frac{2\pi}{N}q}$$

- želimo odrediti niz $\tilde{w}(n)$ čiji je DTFS jednak $N\tilde{F}_k\tilde{G}_k$

$$\tilde{W}_k = N\tilde{F}_k\tilde{G}_k = N\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{f}(m)e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}\cdot\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{g}(q)e^{-jk\frac{2\pi}{N}q}$$

$$\tilde{w}(n) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(N\tilde{F}_k\tilde{G}_k\right)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{f}(m)\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{g}(q)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{jk\frac{2\pi}{N}(n-m-q)}\right] \quad (2)$$

Periodična konvolucija

- promatramo $\tilde{g}(n)$ za $0 \leq n \leq N-1$ i dio jednadžbe (2)

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}(n-m-q)} = \begin{cases} 1, & \text{za } q = (n-m)+rN \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

za $\forall r \in \mathbb{Z}$

- pa (2) prelazi u jednadžbu koja podsjeća na linearnu konvoluciju i naziva se periodična konvolucija

$$\tilde{w}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}(m)\tilde{g}(n-m)$$

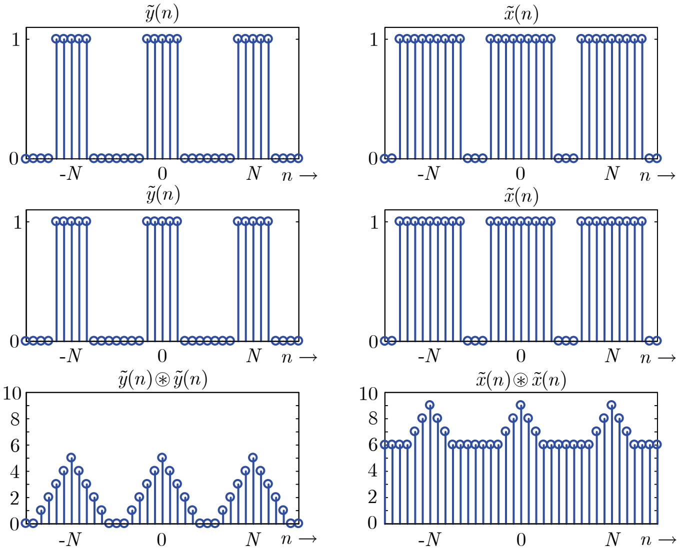
- periodična konvolucija dvaju periodičnih vremenski diskretnih signala, perioda N, rezultira u periodičnom[5] vremenski diskretnom signalu perioda N

[5]nizovi $\tilde{f}(m)$ i $\tilde{g}(n-m)$ su periodični po m s periodom N pa je i njihov umnožak periodičan

Periodična konvolucija

- na narednoj prikaznici su ilustrirane dvije periodične konvolucije različitih pravokutnih nizova
- može se učiti da periodična konvolucija signala $\widetilde{y} \circledast \widetilde{y}$ odgovara linearnoj konvoluciji ovih signala
- u slučaju periodične konvolucije signala $\widetilde{x} \circledast \widetilde{x}$ to nije slučaj i tu činjenicu treba uzeti u obzir
- zaključujemo: ako je trajanje linearne konvolucije jedne periode signala manje od periode periodičnog signala, tada su linearna i periodična konvolucija jednake

Periodična konvolucija – primjer



Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

- izvodimo svojstvo dualnosti za $DTFS$, dakle
  $F_n \xleftrightarrow{DTFS;\ \Omega_0=2\pi/N} \frac{1}{N} f(-k)$
- transformacijski par

$$F_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\Omega_0 n}$$

  je par vrlo sličnih jednadžbi i izvod ovog svojstva i ovdje, slično izvodu za $CTFT$, provodimo nizom zamjena
- započinjemo zamjenom $n = -k'$ pa slijedi

$$f(-k') = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{-jk\Omega_0 k'} = \left| \begin{array}{c} \text{zamjenom} \\ n = k \end{array} \right| = \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{-jn\Omega_0 k'}$$

Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

- i finalno, zamjenom $k = k'$, te umnoškom obje strane s $\frac{1}{N}$, slijedi

$$\frac{1}{N} f(-k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{-jn\Omega_0 k} = DTFS\{F_n\}$$

što znači da vrijedi

$$F_n \xleftrightarrow{DTFS;\, \Omega_0 = 2\pi/N} \frac{1}{N} f(-k)$$

čime je potvrđeno navedeno svojstvo dualnosti

Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost DTFT i CTFS

- uspoređuje se *CTFS* periodičnog vremenski kontinuiranog signala g

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k e^{jk\omega_0 t}$$

i *DTFT* aperiodičnog vremenski diskretnog signala f

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n}$$

- za periodu $T_0 = 2\pi$ signala g, dakle $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$ ustanovljujemo da Ω u *DTFT* odgovara t u *CTFS*, a n u *DTFT* odgovara $-k$ u CTFS

Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost DTFT i CTFS

- usporedbom

$$G(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-jkt\,dt} \quad \text{i} \quad f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega})e^{jn\Omega}$$

- ponovo zaključujemo da uloge Ω i n u *DTFT* odgovaraju ulogama t i $-k$ u *CTFS*, pa zato za

$$f(n) \xleftrightarrow{DTFT} F(e^{j\Omega})$$

vrijedi

$$F(e^{jt}) \xleftrightarrow{CTFS;\ \omega_0=1} f(-k)$$

Signali i sustavi
školska godina 2012/2013
Cjelina 6.

Profesor Branko Jeren

CTFT – vremensko skaliranje

- neka je $f(t) \xleftrightarrow{CTFT} F(j\omega)$, tada je

$$f(at) \xleftrightarrow{CTFT} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

izvod: za $a > 0$, uz $a = |a|$, i zamjenu $at = \tau$

$$CTFT\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{j\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

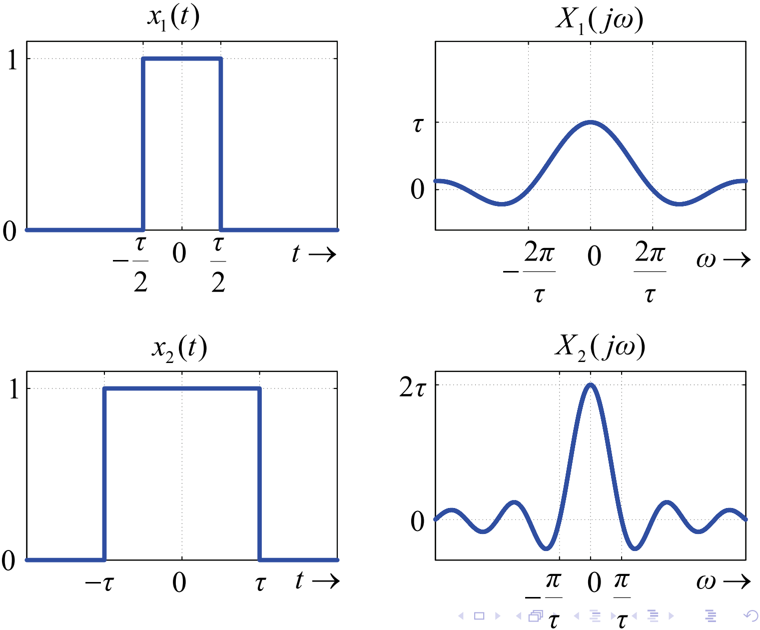
za $a < 0$ i zamjenu $at = \tau$

$$CTFT\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{-\frac{j\omega}{a}\tau} d\tau =$$

$$= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-\frac{j\omega}{a}\tau} d\tau = -\frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

- zaključuje se kako vremenska kompresija signala za faktor $a > 1$ rezultira u ekspanziji spektra za isti faktor
- ekspanzija $f(t)$, za $a < 1$, rezultira u kompresiji $F(j\omega)$

CTFT – vremensko skaliranje



Tablica parova osnovnih Fourierovih transformacija (CTFT)

Vrem. domena: $x(t)$	Frek. domena: $X(j\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$\mu(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\mu(t+\frac{\tau}{2})-\mu(t-\frac{\tau}{2})$	$\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$
$\omega_1\frac{\sin\frac{\omega_1 t}{2}}{\frac{\omega_1 t}{2}}$	$2\pi\left[\mu(\omega+\frac{\omega_1}{2})-\mu(\omega-\frac{\omega_1}{2})\right]$
$e^{-bt}\mu(t),\quad b>0$	$\frac{1}{b+j\omega}$
$A\cos(\omega_0 t+\phi)$	$\pi Ae^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0)+\pi Ae^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi X_k\delta(\omega-k\omega_0)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$

Neka svojstva Fourierove transformacije (CTFT)

Svojstvo	Vrem. domena: $x(t)$	Frek. domena: $X(j\omega)$
Linearnost	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$
Konjugiranost	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
V. inverzija	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Dualnost	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
Dualnost	$X(-jt)$	$2\pi x(\omega)$
V. skaliranje	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{j\omega}{a})$
V. pomak	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
Modulacija	$x(t)e^{j\omega t_0}$	$X(j(\omega-\omega_0))$
Modulacija	$x(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}X(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega+\omega_0))$
Derivacija	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$(j\omega)^k X(j\omega)$
Konvolucija	$(x_1 * x_2)(t)$	$X_1(j\omega)X_2(j\omega)$
Množenje	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

Tablica parova osnovnih Fourierovih transformacija (DTFT)

Vrem. domena: $x(n)$	Frek. domena: $X(e^{j\Omega})$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}$
$\mu(n)$	$\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi m)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$
1	$2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi m)$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi m)$
$\begin{cases}1, & 0\leq n\leq L-1\\ 0, & \text{za ostale } n\end{cases}$	$e^{-j\frac{\Omega}{2}(L-1)}\frac{sin\left(\frac{\Omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
$\alpha^n\mu(n), \quad \lvert\alpha\rvert<1$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$
$(n+1)\alpha^n\mu(n), \quad \lvert\alpha\rvert<1$	$\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2}$
$cos(\Omega_0 n)$	$\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi m)+$ $+\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi m)$
$\sin(\Omega_0 n)$	$j\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi m)-$ $-j\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi m)$

Neka svojstva Fourierove transformacije (DTFT)

Svojstvo	Vrem. domena: $x(n)$	Frek. domena: $X(e^{j\Omega})$
Linearnost	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\Omega}) + bX_2(e^{j\Omega})$
Konjugiranost	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\Omega})$
V. inverzija	$x(-n)$	$X(e^{-j\Omega})$
V. pomak	$x(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0} X(e^{j\Omega})$
F. pomak	$x(n) e^{j\Omega_0 n}$	$X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$
Modulacija	$x(n)\cos(\Omega_0 n)$	$\frac{1}{2} X(e^{j(\Omega+\Omega_0)}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$
Derivacija u frek.	$nx(n)$	$(j \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega})$
Konvolucija	$(x_1 * x_2)(n)$	$X_1(e^{j\Omega}) X_2(e^{j\Omega})$
Množenje	$x_1(n) x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi}) X_2(e^{j(\Omega-\psi)})\, d\psi$
Konjugirana simetrija za realne signale	$x(n)$ realan signal	$X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega})$ $Re\{X(e^{j\Omega})\} = Re\{X(e^{-j\Omega})\}$ $Im\{X(e^{j\Omega})\} = -Im\{X(e^{-j\Omega})\}$ $\lvert X(e^{j\Omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\Omega})\rvert$ $\angle X(e^{j\Omega}) = -\angle X(e^{-j\Omega})$
Simetrija za realne i parne signale	$x(n)$ realan i paran	$X(e^{j\Omega})$ realan i paran