



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

10. lipnja 2010.



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija

Područje
konvergenije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Odziv vremenski kontinuiranog sustava na pobudu kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je kako je odziv mirnog, linearnog, vremenski stalnog kontinuiranog sustava, na svestremensku eksponencijalu e^{st} ,

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

pri čemu je

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

- za $s \in \mathbb{C}$, $H(s)$ je kompleksna funkcija



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Laplaceova transformacija

- integral

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

možemo interpretirati kao transformaciju vremenske funkcije, impulsnog odziva $h(t)$ kontinuiranog sustava, u kompleksnu funkciju $H(s)$

- ovako definiranu transformaciju nazivamo dvostrana ili bilateralna **Laplaceova transformacija** – \mathcal{L} -transformacija
- Laplaceova transformacija $H(s)$ predstavlja alternativni prikaz kontinuiranog vremenskog signala $h(t)$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Dvostrana \mathcal{L} -transformacija



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija

Područje
konvergenije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija

- za vremenski kontinuirani signal $x(t)$, definira se dvostrana \mathcal{L} -transformacija

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- \mathcal{L} -transformacija označava se simbolički kao

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

ili još jednostavnije

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala
Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – primjer 1

- određuje se \mathcal{L} -transformacija signala

$$x(t) = e^{-at}\mu(t), a \in \mathbb{R}$$

- iz definicije \mathcal{L} -transformacije slijedi

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\mu(t)e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{s+a}, \quad \text{za } \operatorname{Re}(s+a) > 0 \end{aligned}$$

- gornji uvjet je posljedica ponašanja $e^{-(s+a)t}$ za $t \rightarrow \infty$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – primjer 1

- iz

$$e^{-(s+a)t} = e^{-[Re(s+a)+jIm(s+a)]t} = e^{-[Re(s+a)]t} e^{-j[Im(s+a)]t}$$

a kako je $|e^{-j[Im(s+a)]t}| = 1$, neovisno o vrijednosti $[Im(s+a)]t$, slijedi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & Re(s+a) > 0 \\ \infty & Re(s+a) < 0 \end{cases}$$

pa vrijedi ispred izvedeno

$$X(s) = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s+a}, \quad \text{za } Re(s+a) > 0$$

- integral koji definira $X(s)$ postoji samo za vrijednosti $Re(s) > -a$ pa se područje vrijednosti $Re(s) > -a$ naziva područjem konvergenije $X(s)$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala
Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – primjer 2

- određuje se \mathcal{L} -transformacija signala

$$x(t) = -e^{-at}\mu(-t), a \in \mathbb{R}$$

- iz definicije \mathcal{L} -transformacije slijedi

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}\mu(-t)e^{-st} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{-at}e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt = + \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{s+a}, \quad \text{za } \operatorname{Re}(s+a) < 0 \end{aligned}$$

- pa je područje konvergencije, \mathcal{PK} , \mathcal{L} -transformacije $X(s)$, područje $\operatorname{Re}(s) < -a$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija

Područje
konvergenije
z-transformacije

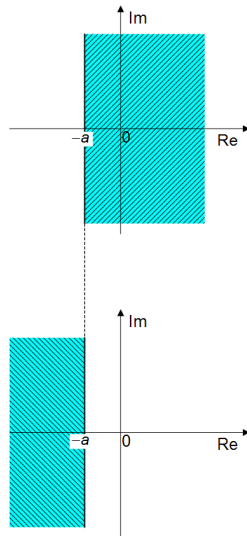
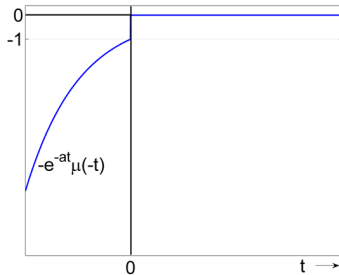
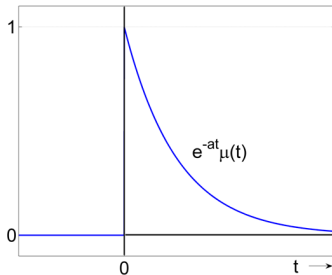
\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – primjer 2





Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala
Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – područje konvergencije

- usporedbom primjera 1 i primjera 2

$$e^{-at}\mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > -a$$

odnosno

$$-e^{-at}\mu(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) < -a$$

zaključujemo kako dva različita signala, jedan kauzalan a drugi antikauzalan, imaju identične izraze za \mathcal{L} -transformaciju i kako se njihova razlika očituje samo u području konvergencije, \mathcal{PK} ,

- područje konvergencije \mathcal{PK} , \mathcal{L} -transformacije, je važna i nužna informacija i tek definirano \mathcal{PK} daje jednoznačnu vezu između signala i njegove \mathcal{L} -transformacije
- stoga, \mathcal{L} -transformacija mora biti uvijek zadana s njezinim \mathcal{PK}



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija

Područje
konvergenције
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Jednostrana \mathcal{L} -transformacija



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Jednostrana \mathcal{L} -transformacija

- dvostrana \mathcal{L} -transformacija kauzalnih signala $x(t)\mu(t)$ je

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mu(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

donja granica 0^- omogućuje uključivanje impulsa koji se mogu javiti u trenutku $t = 0$

- \mathcal{L} -transformacija definirana kao

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

naziva se jednostrana ili unilateralna \mathcal{L} -transformacija



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Jednostrana \mathcal{L} -transformacija – egzistencija

- kompleksnu varijablu s , u \mathcal{L} -transformaciji, možemo prikazati kao $s = \sigma + j\omega$ pa je

$$X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

- kako je $|e^{-j\omega t}| = 1$ gornji integral konvergira ako je zadovoljeno

$$\int_{0-}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (1)$$

- iz gornjeg izraza zaključujemo da \mathcal{L} -transformacija postoji za sve signale koji ne rastu brže od nekog eksponencijalnog signala ce^{at} , a to su svi signali od praktičnog i teorijskog interesa
- dakle, ako za neke c i a vrijedi $|x(t)| \leq ce^{at}$, tada je za sve $\sigma = \text{Re}\{s\} > a$ zadovoljena relacija (1)



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Jednostrana \mathcal{L} -transformacija

- jednostrana \mathcal{L} - transformacija pokazuje se posebno pogodnom u postupcima rješavanja diferencijalnih jednačbi sa zadanim početnim uvjetima
- jednostrana \mathcal{L} - transformacija ograničena je samo na kauzalne signale i sustave
- kako je u ovom predmetu većina pozornosti okrenuta kauzalnim signalima i sustavima, u nastavku se razmatra uglavnom jednostrana \mathcal{L} -transformacija
- sukladno većini literature pod nazivom \mathcal{L} -transformacija podrazumijevati će se jednostrana \mathcal{L} -transformacija, a u slučaju dvostrane transformacije to će biti posebno istaknuto
- isto tako, zbog jednoznačnosti \mathcal{L} -transformacije, nepotrebno je, u slučaju kauzalnih signala $x(t)\mu(t)$, eksplicitno navoditi područje konvergencije (osim u slučaju mogućih dvojbenosti u interpretaciji)



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergenције
z-transformacije

**\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala**

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija osnovnih signala



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija osnovnih signala

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1,$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}, \quad t_0 > 0$$

$$\mathcal{L}\{\mu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \mu(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s},$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \mu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at} \mu(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s + a}, \quad (\text{prije izvedeno})$$

odnosno

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t} \mu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{j\omega_0 t} \mu(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s - j\omega_0}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija osnovnih signala

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

ova \mathcal{L} -transformacija slijedi iz¹

$$\cos(\omega_0 t)\mu(t) = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]\mu(t)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t}\mu(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega_0 t}\mu(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

¹Koristi se svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije koje se pokazuje nešto kasnije



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Tablica osnovnih \mathcal{L} -transformacija ²

	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}
3	$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$
4	$t\mu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5	$t^j\mu(t)$	$\frac{j!}{s^{j+1}}$
6	$e^{\lambda t}\mu(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$
7	$te^{\lambda t}\mu(t)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^2}$
8	$t^je^{\lambda t}\mu(t)$	$\frac{j!}{(s-\lambda)^{j+1}}$
9	$\cos(bt)\mu(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
10	$\sin(bt)\mu(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$

²izvor: B.P. Lathi: Linear Systems and Signals str. 344



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Tablica osnovnih \mathcal{L} -transformacija ³

	$x(t)$	$X(s)$
11	$e^{-at} \cos(bt) \mu(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
12	$e^{-at} \sin(bt) \mu(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
13	$re^{-at} \cos(bt + \theta) \mu(t)$	$\frac{(r \cos \theta)s + (ar \cos \theta - br \sin \theta)}{s^2 + 2as + (a^2 + b^2)}$
<i>ili</i>		
13 ^a	$re^{-at} \cos(bt + \theta) \mu(t)$	$\frac{0.5re^{j\theta}}{s+a-jb} + \frac{0.5re^{-j\theta}}{s+a+jb}$

³izvor: B.P. Lathi: Linear Systems and Signals str. 344



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

**Svojstva \mathcal{L} -
transformacije**

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Osnovna svojstva \mathcal{L} -transformacije



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – linearnost

neka je $w(t) = ax(t) \pm by(t)$

tada je \mathcal{L} -transformacija od $w(t)$

$$W(s) = aX(s) \pm bY(s)$$

linearnost \mathcal{L} -transformacije proizlazi iz definicije

$$\begin{aligned} W(s) &= \int_{0^-}^{\infty} w(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} [ax(t) \pm by(t)]e^{-st} dt = \\ &= a \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \pm b \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st} dt = aX(s) \pm bY(s) \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – vremenski pomak

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\mu(t)\}$ tada je, za $t_0 \geq 0$

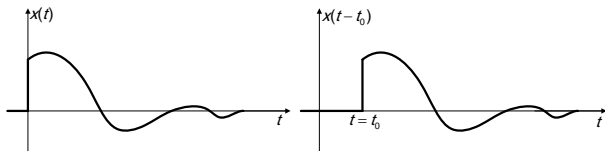
$$\mathcal{L}\{x(t - t_0)\mu(t - t_0)\} = e^{-st_0}X(s)$$

izvod:

$$\mathcal{L}\{x(t - t_0)\mu(t - t_0)\} = \int_0^\infty x(t - t_0)\mu(t - t_0)e^{-st} dt =$$

za $t - t_0 = \tau$

$$= \int_{-t_0}^\infty x(\tau)\mu(\tau)e^{-s(t_0+\tau)} d\tau = e^{-st_0} \int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0}X(s)$$





Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – primjer uporabe svojstva vremenski pomak

određuje se \mathcal{L} -transformacija pravokutnog impulsa definiranog za $0 < a < b$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } a \leq t < b \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

što se može zapisati i kao razlika dva pomaknuta jedinična skoka

$$x(t) = \mu(t - a) - \mu(t - b)$$

\mathcal{L} -transformacija je tada

$$X(s) = \mathcal{L}\{\mu(t - a) - \mu(t - b)\} = e^{-as} \frac{1}{s} - e^{-bs} \frac{1}{s} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – frekvencijski pomak

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\{x(t)e^{s_0 t}\} = X(s - s_0)$$

što je dualno prije izvedenom svojstvu vremenskog pomaka izvod:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)e^{s_0 t}\} &= \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{s_0 t} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-(s-s_0)t} dt = \\ &= X(s - s_0)\end{aligned}$$

primjer: za

$$\sin(bt)\mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{b}{s^2 + b^2}$$

primjenom svojstva frekvencijskog pomaka slijedi, za $s_0 = -a$,

$$e^{-at} \sin(bt)\mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – vremenska kompresija/ekspanzija

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je, za⁴ $a > 0$

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

izvod:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{0-}^{\infty} x(at)e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_{0-}^{\infty} x(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

- zaključuje se kako vremenska kompresija signala za faktor a rezultira u ekspanziji signala u frekvencijskoj domeni za isti faktor
- ekspanzija $x(t)$ rezultira u kompresiji $X(s)$

⁴ $a > 0$ osigurava kauzalnost



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergenције
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – konvolucija u vremenu

neka su $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\mu(t)\}$ i $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\mu(t)\}$ tada je,

$$\mathcal{L}\{[x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)]\} = X_1(s)X_2(s)$$

izvod: konvolucija vremenskih signala je

$$\begin{aligned} [x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(\tau)\mu(\tau)][x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)] d\tau \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)[x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)] d\tau \end{aligned}$$

pa je \mathcal{L} -transformacija

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{[x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)]\} &= \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)[x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)] d\tau \right] e^{-st} dt = \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – konvolucija u vremenu zamjenom redoslijeda integracije

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{[x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)]\} &= \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{0^-}^{\infty} x_2(t - \tau)\mu(t - \tau)e^{-st} dt \right] d\tau\end{aligned}$$

zamjenom $t - \tau = \lambda$

$$= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\tau}^{\infty} x_2(\lambda)\mu(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)} d\lambda \right] d\tau =$$

zbog $\mu(\lambda) = 0$ za $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}&= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau} \underbrace{\left[\int_{0^-}^{\infty} x_2(\lambda)e^{-s\lambda} d\lambda \right]}_{X_2(s)} d\tau = X_2(s) \underbrace{\int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau} d\tau}_{X_1(s)} \\ &= X_2(s)X_1(s)\end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – vremenska derivacija

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-)$$

višestrukom primjenom ovog svojstva slijedi

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0^-) - x^{(1)}(0^-)$$

odnosno

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^jx(t)}{dt^j}\right\} = s^jX(s) - s^{j-1}x(0^-) - s^{j-2}x^{(1)}(0^-) - \dots - x^{(j-1)}(0^-) =$$

$$= s^jX(s) - \sum_{m=1}^j s^{j-m}x^{(m-1)}(0^-)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – vremenska derivacija

izvod

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

integral se rješava parcijalnom integracijom

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

neka su

$$u(t) = e^{-st} \quad \text{i} \quad dv = \frac{dx(t)}{dt} dt$$

vrijedi

$$u(t) = e^{-st} \quad \Rightarrow \quad du = -se^{-st} dt$$

$$dv = \frac{dx(t)}{dt} dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = x(t)$$

tada je,



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – vremenska derivacija

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \\ &= uv \Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} v du = \\ &= e^{-st} x(t) \Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s)e^{-st} dt \\ &= \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-st} x(t)]}_{=0} - x(0^-) + sX(s) = sX(s) - x(0^-)\end{aligned}$$

- već je pokazano kako \mathcal{L} -transformacija konvergira za signale koji ne rastu brže od nekog eksponencijalnog signala ce^{at} , dakle, za signale za koje vrijedi $|x(t)| \leq ce^{at}$
- tada za sve s za koje je $\sigma = \text{Re}\{s\} > a$ vrijedi $\lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-st} x(t)] = 0$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – integracija u vremenu

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s)$$

izvod se temelji na korištenju svojstva konvolucije

$$x(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mu(t - \tau) d\tau = \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$$

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau = x(t) * \mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}X(s)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

\mathcal{L} -transformacija – frekvencijska derivacija

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\{-tx(t)\} = \frac{d}{ds}(X(s)) \Leftrightarrow \mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{d}{ds}(X(s))$$

izvod

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(X(s)) &= \frac{d}{ds} \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \\ &= \int_{0-}^{\infty} \frac{d}{ds} [x(t)e^{-st}] dt = \int_{0-}^{\infty} [-tx(t)]e^{-st} dt = \mathcal{L}\{-tx(t)\} \end{aligned}$$

općenito vrijedi

$$\frac{d^j}{ds^j}(X(s)) = \int_{0-}^{\infty} [(-t)^j x(t)]e^{-st} dt = \mathcal{L}\{(-t)^j x(t)\}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergenције
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

**Inverzna \mathcal{L} -
transformacija**

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Inverzna \mathcal{L} -transformacija



Inverzna \mathcal{L} -transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(s)$ je razlomljena racionalna funkcija i možemo je prikazati kao

$$X(s) = \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \dots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1s^{N-1} + \dots + a_{N-1}s + a_N}$$

odnosno kao omjer polinoma M -tog i N -tog reda

$$X(s) = \frac{P_M(s)}{P_N(s)}$$

- za $N > M$ radi se o pravoj razlomljenoj racionalnoj funkciji koju je moguće rastaviti na parcijalne razlomke



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergentije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Inverzna \mathcal{L} -transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- u slučaju $M \geq N$, $X(s)$ je nepravna razlomljena racionalna funkcija, pa je prije rastave na parcijalne razlomke potrebno, dijeljenjem brojnika i nazivnika, $X(s)$ dovesti u oblik

$$X(s) = P_{M-N}(s) + \frac{P_R(s)}{P_N(s)}, \quad \text{gdje je } R \leq N - 1$$

- primjer za $X(s) = \frac{s^3}{s^2+2s+1}$ dijeljenjem brojnika s nazivnikom slijedi

$$X(s) = \frac{s^3}{s^2 + 2s + 1} = s - 2 + \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Inverzna \mathcal{L} -transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- pravu razlomljenu racionalnu funkciju, za slučaj jednostrukih polova,

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_N)}$$

rastavljamo na parcijalne razlomke

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_N}{s - p_N},$$

$$c_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ (s - p_i) X(s) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

iz čega slijedi inverzna \mathcal{L} -transformacija

$$x(t) = [c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_N e^{p_N t}] \mu(t)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
L-
transformacija
osnovnih signala
Svojstva L-
transformacije
Inverzna L-
transformacija
L-
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Inverzna \mathcal{L} -transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za slučaj višestrukih polova,

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s - p_1)^r (s - p_{r+1}) \cdots (s - p_N)}$$

rastavljamo na parcijalne razlomke

$$X(s) = \frac{c_{11}}{s - p_1} + \frac{c_{12}}{(s - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1r}}{(s - p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{s - p_{r+2}} + \cdots + \frac{c_N}{s - p_N}$$

$$c_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{s \rightarrow p_1} \left\{ \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} \left[(s - p_1)^r X(s) \right] \right\}, \quad j = r, r-1, \dots, 2, 1$$

$$c_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ (s - p_i) X(s) \right\}, \quad i = r+1, r+2, \dots, N$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Inverzna \mathcal{L} -transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- inverzna \mathcal{L} -transformacija

$$X(s) = \frac{c_{11}}{s - p_1} + \frac{c_{12}}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{c_{1r}}{(s - p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{s - p_{r+2}} + \dots + \frac{c_N}{s - p_N}$$

kako je

$$e^{\lambda t} \mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \lambda} \quad \text{i} \quad t^j e^{\lambda t} \mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{j!}{(s - \lambda)^{j+1}}$$

$$x(t) = \left[c_{11} e^{p_1 t} + c_{12} t e^{p_1 t} + c_{13} \frac{1}{2!} t^2 e^{p_1 t} + \dots + c_{1r} \frac{1}{(r-1)!} t^{(r-1)} e^{p_1 t} + \right. \\ \left. + c_{r+1} e^{p_{r+1} t} + c_{r+2} e^{p_{r+2} t} + \dots + c_N e^{p_N t} \right] \mu(t)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Inverzna \mathcal{L} -transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- inverzna transformacija

$$X(s) = \frac{s+3}{s(s+1)^2} = \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s}$$

- konstante c_{11} , c_{12} i c_3 iz

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow -1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\cancel{(s+1)^2} \frac{s+3}{s \cancel{(s+1)^2}} \right] \right\} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \left\{ \frac{s - (s+3)}{s^2} \right\} = -3 \end{aligned}$$

$$c_{12} = \frac{1}{0!} \lim_{s \rightarrow -1} \left\{ \cancel{(s+1)^2} \frac{s+3}{s \cancel{(s+1)^2}} \right\} = -2$$

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \cancel{s} \frac{s+3}{\cancel{s}(s+1)^2} \right\} = 3$$

$$x(t) = -3e^{-t}\mu(t) - 2te^{-t}\mu(t) + 3\mu(t)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Inverzna \mathcal{L} -transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- rastav na parcijalne razlomke moguće je učiniti i metodom neodređenih koeficijenata

$$X(s) = \frac{s+3}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s}$$

- množenjem obje strane s nazivnikom lijeve strane izlazi

$$\begin{aligned} s+3 &= As(s+1) + Bs + C(s+1)^2 = \\ &= (A+C)s^2 + (A+B+2C)s + C \end{aligned}$$

- usporedbom koeficijenata jednako visokih potencija lijevo i desno slijedi sustav linearnih jednačaba

$$\left. \begin{aligned} A+C &= 0 \\ A+B+2C &= 1 \\ C &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -3, B = -2, C = 3$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala
Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Inverzna \mathcal{L} -transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- inverzna transformacija

$$X(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)(s - j)(s + j)} = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)(s^2 + 1)}$$

- rastav je moguće učiniti kao rastav razlomljene racionalne funkcije za jednostruke polove
- dva su pola konjugirano kompleksni i prepoznaje se da će inverzna transformacija rezultirati u sinusoidnom signalu, pa stoga, rastav možemo učiniti i na ovaj način

$$X(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)(s^2 + 1)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Inverzna \mathcal{L} -transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- metodom neodređenih koeficijenata određujemo A, B, C ,

$$\begin{aligned}s^2 + s + 2 &= As^2 + A + Bs^2 + Bs + Cs + C = \\ &= (A + B)s^2 + (B + C)s + (A + C)\end{aligned}$$

- usporedbom koeficijenata jednako visokih potencija lijevo i desno slijedi sustav linearnih jednačaba

$$\left. \begin{aligned}A + B &= 1 \\ B + C &= 1 \\ A + C &= 2\end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 1, B = 0, C = 1$$

$$X(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)(s^2 + 1)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$x(t) = e^{-t}\mu(t) + \sin(t)\mu(t)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Primjena \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala
Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Primjena \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- određuje se prijenosna funkcija mirnog, linearnog, vremenski kontinuiranog sustava, primjenom \mathcal{L} -transformacije
- neka je sustav opisan diferencijalnom jednačžbom

$$\begin{aligned} \frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) = \\ = b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \cdots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \end{aligned}$$

- \mathcal{L} -transformacijom ove jednačžbe, uzimajući u obzir da je sustav miran, i koristeći svojstvo $\mathcal{L}\{\frac{d^j y}{dt^j}\} = s^j X(s)$ slijedi

$$\begin{aligned} (s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1} s + a_N) Y(s) = \\ = (b_{N-M} s^M + b_{N-M+1} s^{M-1} + \cdots + b_{N-1} s + b_N) U(s) \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala
Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Primjena \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- pa je

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \dots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1s^{N-1} + \dots + a_{N-1}s + a_N}}_{H(s)} U(s)$$

$$H(s) = \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \dots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1s^{N-1} + \dots + a_{N-1}s + a_N} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

pa, prijenosnu funkciju vremenski kontinuiranog sustava, $H(s)$,
definiramo kao omjer \mathcal{L} -transformacija odziva i pobude, uz
početne uvjete jednake nuli

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Primjena \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava

- primjenu \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava ilustriramo primjerom sustava opisanog diferencijalnom jednačžbom

$$y''(t) + 0.2y'(t) + 0.16y(t) = u(t) \quad (2)$$

- neka je sustav pobuđen pobudom $u(t) = 0.64\mu(t)$ i neka su $y(0^-) = -3$ i $y'(0^-) = -1$
- \mathcal{L} -transformacija jednačžbe je

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 0.2sY(s) - 0.2y(0^-) + 0.16Y(s) = U(s)$$

$$[s^2 + 0.2s + 0.16] Y(s) = U(s) + sy(0^-) + y'(0^-) + 0.2y(0^-)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Primjena \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(s) = \underbrace{\frac{sy(0^-) + y'(0^-) + 0.2y(0^-)}{s^2 + 0.2s + 0.16}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava} - Y_0(s)} + \underbrace{\frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16} U(s)}_{\text{odziv mirnog sustava} - Y_m(s)}$$

uz $\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{0.64\mu(t)\} = \frac{0.64}{s} = U(s)$ i zadane početne uvjete $y(0^-) = -3$ i $y'(0^-) = -1$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-3s - 1.6}{s^2 + 0.2s + 0.16}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{0.64}{s^3 + 0.2s^2 + 0.16s}}_{Y_m(s)}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala
Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Primjena \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(s) = \underbrace{\frac{c_1}{s + 0.1 - j0.3873} + \frac{c_2}{s + 0.1 + j0.3873}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{c_3}{s + 0.1 - j0.3873} + \frac{c_4}{s + 0.1 + j0.3873} + \frac{c_5}{s}}_{Y_m(s)}$$

c_1, c_2 određujemo iz $Y_0(s)$, a c_3, c_4, c_5 iz $Y_m(s)$

$$c_1 = [(s + 0.1 - j0.3873) Y_0(s)]_{s=-0.1+j0.3873} = -1.5000 + j1.6783$$

$$c_2 = [(s + 0.1 + j0.3873) Y_0(s)]_{s=-0.1-j0.3873} = -1.5000 - j1.6783$$

$$c_3 = [(s + 0.1 - j0.3873) Y_m(s)]_{s=-0.1+j0.3873} = -2.0000 + j0.5164$$

$$c_4 = [(s + 0.1 + j0.3873) Y_m(s)]_{s=-0.1-j0.3873} = -2.0000 - j0.5164$$

$$c_5 = [s Y_m(s)]_{s=0} = 4$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala
Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Primjena \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-1.5000 + j1.6783}{s + 0.1 - j0.3873} + \frac{-1.5000 - j1.6783}{s + 0.1 + j0.3873}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{-2.0000 + j0.5164}{s + 0.1 - j0.3873} + \frac{-2.0000 - j0.5164}{s + 0.1 + j0.3873} + \frac{4}{s}}_{Y_m(s)}$$

$$y(t) = [(-1.5 + j1.6783)e^{-0.1t+j0.3873t} + (-1.5 - j1.6783)e^{-0.1t-j0.3873t} + (-2.0 + j0.5164)e^{-0.1t+j0.3873t} + (-2.0 - j0.5164)e^{-0.1t-j0.3873t} - 4]\mu(t)$$

$$y(t) = [(-3.5 + j2.1947)e^{-0.1t+j0.3873t} + (-3.5 - j2.1947)e^{-0.1t-j0.3873t} - 4]\mu(t)$$

$$y(t) = 4.5018e^{-0.1t} \cos(0.3873t + 2.3002) + 4.1313e^{-0.1t} \cos(0.3873t + 2.8889) + 4, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = 8.2624e^{-0.1t} \cos(0.3873t + 2.5815) + 4, \quad t \geq 0$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije

\mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala

Svojstva \mathcal{L} -
transformacije

Inverzna \mathcal{L} -
transformacija

\mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Primjena \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava

- primjenom \mathcal{L} -transformacije odrediti impulsni odziv sustava, $u(t) = \delta(t)$, opisanog diferencijalnom jednačinom

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u''(t) + u'(t) + u(t) \quad (3)$$

- \mathcal{L} -transformacija jednačine je, uz $y(0^-) = y'(0^-) = 0$,

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = s^2 U(s) + sU(s) + U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1}}_{H(s)} U(s)$$

- kako je $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$, pa je

$$Y(s) = H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 15.

Profesor
Branko Jeren

Laplaceova
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
 \mathcal{L} -
transformacija
osnovnih signala
Svojstva \mathcal{L} -
transformacije
Inverzna \mathcal{L} -
transformacija
 \mathcal{L} -
transformacija u
analizi linearnih
sustava

Primjena \mathcal{L} -transformacije u analizi linearnih sustava

- inverzna \mathcal{L} -transformacija je traženi impulsni odziv
- kako je $H(s)$ neprava razlomljena racionalna funkcija, dijeljenjem brojnika s nazivnikom, slijedi

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1} = 1 - \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$$

- rastavom na parcijalne razlomke

$$\frac{s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s}{(s + 1)^2} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{(s + 1)^2} = \frac{As + A + B}{(s + 1)^2}$$

- metodom neodređenih koeficijenata slijedi

$$\left. \begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ A + B & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 1, B = -1$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2} \right\} = \delta(t) - e^{-t} \mu(t) + t e^{-t} \mu(t)$$