Primjer rješavanja vremenski kontinuiranih sustava opisanih modelom sa varijablama stanja, primjenom Laplaceove transformacije.

Zadan je kauzalan vremenski kontinuiran LTI sustav drugog reda sa vremenski stalnim koeficijentima i jednostrukim korijenima, opisan diferencijalnom jednadžbom:

y'' + a1*y' + a2*y = b0*u'' + b1*u' + b2*u

odnosno ekvivalentnim opisom pomoću modela sa varijablama stanja, tj. pomoću matrica A, B,C D i vektora početnog stanja x(0-):

```
A=[  0   1  ]   B=[ 0 ]   C=[b2-b0a2, b1-b0a1 ]   D=[b0]   x(0-)=[ x1(0-) ]
  [ -a2 –a1 ]     [ 1 ]                                          [ x2(0-) ]
```

Sustav je pobuđen općenitim pobudnim signalom u(t).

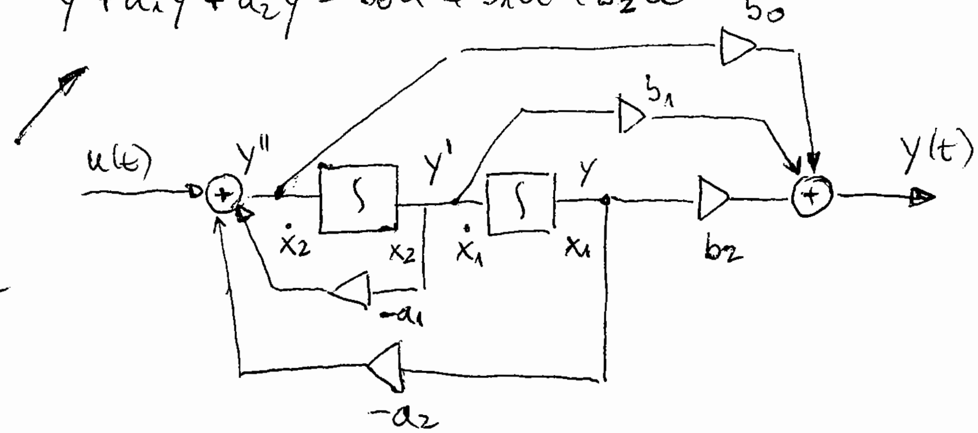
Potrebno je:

a) pokazati kako se od diferencijalne jednadžbe dolazi do modela s varijablama stanja,
b) matričnu jednadžbu stanja x'=Ax+Bu, iz vremenske domene prebaciti u s-domenu primjenom Laplaceove trasformacije,
c) izvesti općenit izraz za odziv stanja u s-domeni X(s), kao i zasebno njegovih dijelova X0(s) (nepobuđen sustav) i Xm(s) (miran sustav),
d) odrediti X0(s) za konkretni primjer sustava,
e) odrediti matricu karakterističnih frekvencija FI(s),
f) odrediti karakteristični polinom, A(s),
g) odrediti polove sustava p1, p2,
h) inverznom L-transformacijom odrediti fundamentalnu matricu FI(t),
i) inverznom L-transformacijom odrediti pripadne vektore stanja u vremenskoj domeni: x(t), x0(t) i xm(t),
j) prebaciti izlaznu jednadžbu sustava y=Cx+Du u s-domenu, primjenom L-transformacije,
k) izvesti općenite izraze za odziv sustava Y(s), odnosno zasebno njegovih dijelova Y0(s) i Ym(s) (nepobuđen i miran sustav),
l) odrediti Y0(s) i y0(t) za promatrani sustav, korištenjem rješenja iz d) i i),
m) izvesti općenit izraz za transfer matricu H(s), i odrediti je za ovaj primjer,
n) usporediti dobiveni H(s) sa prijenosnom funkcijom sustava opisanog polaznom diferencijalnom jednadžbom (U-I modelom).

Vrem. kont. kauzalni LTI sustav opisan je modelom sa varijablama stanja: A, B, C, D: ②

$$y''+a_1y'+a_2y = b_0u''+b_1u'+b_2u$$

Ulazno izlazni model



$$\underbrace{\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= u(t) - a_2x_1 - a_1x_2\end{aligned}}$$

$$y = b_2x_1 + b_1x_2 + b_0(u(t) - a_2x_1 - a_1x_2)$$

Zapišimo jedn. u matričnom obliku:

$$\underbrace{y = x_1(b_2-b_0a_2)+x_2(b_1-b_0a_1) + b_0u(t)}$$

model sa varijablama stanja

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\emptyset & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}\emptyset\\ 1\end{bmatrix}}_{B}\cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix}b_2-b_0a_2 & b_1-b_0a_1\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{[b_0]}_{D}\cdot u$$

$$\dot{X} = AX + B\cdot u$$
$$y = CX + Du$$

Prebacimo jednadžbe u s-domenu pomoću $\mathcal{L}$ transf.

$$\dot{x}_1 = x_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} sX_1(s) - x_1(0^-) = X_2(s)$$

$$\dot{x}_2 = u(t) - a_2x_1 - a_1x_2 \longrightarrow sX_2(s) - x_2(0^-) = U(s) - a_2X_1(s) - a_1X_2(s)$$

$$sX_1(s) - X_2(s) = x_1(0^-)$$
$$sX_2(s) + a_2X_1(s) + a_1X_2(s) = U(s) + x_2(0^-)$$

$$(sX_1(s) + \emptyset\cdot X_1(s)) + (-1)\cdot X_2(s) = x_1(0^-) + \emptyset\cdot U(s)$$
$$a_2\cdot X_1(s) + (sX_2(s) + a_1X_2(s)) = x_2(0^-) + 1\cdot U(s)$$

U lijevoj strani jednadžbe prepoznajemo dva dijela:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}}_{s\cdot I}\cdot\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\emptyset & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1(0^-)\\ x_2(0^-)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\emptyset\\ 1\end{bmatrix}\cdot U(s)$$

$s\cdot I$ – jedinična matrica

$X(s)$ – vektor stanja u s-domeni

Matrica A

vektor početnog stanja

Matrica B

Vektor pobude koji je skalar za sustav sa 1 ulazom

Zapisano skraćeno:

$$sI\cdot X(s) - A\cdot X(s) = x(0^-) + B\cdot U(s)$$

$$(sI - A)\,X(s) = X(0^-) + B\cdot U(s)$$

Nas interesira rješenje za vektor stanja $X(s)$ koji se može odrediti iz gornjeg sustava linearnih jednadžbi. Matrica sustava jednadžbi je $(sI-A)$, dimenzije $N\times N$ gdje je N broj stanja sustava (2×2 u našem primjeru).

$X(s)$ nalazimo množenjem matrične jednadžbe sa inverznom matricom $(sI-A)^{-1}$ sa lijeve strane:

$$(sI-A)^{-1}\cdot / \;(sI-A)X(s) = x(0^-) + B\,U(s)$$

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x(0^-) + (sI-A)^{-1}\cdot B\cdot U(s)$$

Matrica $(sI-A)^{-1}$ ima i posebnu oznaku i naziv:

$$\Phi(s) = (sI-A)^{-1} \;\ldots$$ matrica karakterističnih frekvencija

VAŽNO !... $\Phi(s)$ odgovara $\mathcal{L}$ transformaciji fundament. matrice $\Phi(t) = e^{At}$

Nađimo $\Phi(s)$ za sustav u primjeru:

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s & -1\\ +a_2 & s+a_1\end{bmatrix}$$ ... koju treba invertirati

Za matrice dimenzije 2×2 inverzija matrice se može napraviti po slijedećem pravilu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Pravilo:

Elementi na glavnoj dijagonali zamjene mjesta, dok preostali elementi promjene predznak.

Za naku matricu dobivamo:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} \cdot \begin{bmatrix} s+a_1 & 1 \\ -a_2 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s \cdot (s + a_1) - (a_2 \cdot (-1)) = s^2 + a_1 s + a_2$$

Prepoznajemo da smo kao determinantu matrice $sI - A$ dobili karakteristični polinom $A(s)$ U-I modela:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 u'' + b_1 u' + b_2 u$$

za mirni sustav

$$\underbrace{(s^2 + a_1 s + a_2)}_{A(s)} Y(s) = \underbrace{(b_0 s^2 + b_1 s + b_2)}_{B(s)} U(s)$$

VAŽNO:

$$A(s)\,Y(s) = B(s) \cdot U(s)$$

Ovo nije slučajno ... karakteristični polinom MIMO sustava opisanog modelom sa varijab. stanja nalazimo upravo kao determinantu $(sI - A)$

$$A(s) = \underbrace{\det(sI - A)}_{} = \emptyset$$

polinom

matrica MIMO sustava

$$s^2 + a_1 s + a_2 = \emptyset$$

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

polovi MIMO sustava.

Dakle matricu karakterističnih frekvencija dobivamo kao: (za primjer drugog reda)

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2+a_1s+a_2} \cdot \begin{bmatrix} s+a_1 & 1 \\ -a_2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Nađimo fundamentalnu matricu $\Phi(t) = e^{At}$

$$\Phi(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \Phi(t)$$

Primjetimo da svaki od 4 člana možemo prikazati općim oblikom:

$$\Phi_{i,j} = \frac{e_{i,j} \cdot s + f_{i,j}}{s^2+a_1s+a_2}$$

što odgovara $\mathcal{L}$ transformaciji prigušene (ili raspirujuće) kosinusoide pod uvjetom da su polovi konjugirano kompleksni:

$$\Phi_{i,j}(t) = r_{i,j} \cdot e^{-at} \cdot \cos(bt + \Theta_{i,j})\, u(t)$$

Moduli titranja $r_{i,j}$ i početne faze $\Theta_{i,j}$ ovise o koeficijentima $e_{i,j}$, $f_{i,j}$ člana $\Phi_{i,j}(s)$, dok su koeficijent a (koji određuje prigušenje) i koeficijent b koji određuje frekvenciju određeni sa nazivnikom $A(s)$:

$$A(s) = s^2+a_1s+a_2 \implies a = \frac{a_1}{2} \qquad b = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$$

Da bi frekvencija "b" bila realni broj mora biti zadovoljeno:

$$a_2 - \frac{a_1^2}{4} > \varnothing$$

$$A(s) = \varnothing \qquad s^2+a_1s+a_2 = \varnothing$$

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = \frac{-a_1}{2} \pm j\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$$

$$a_2 - \frac{a_1^2}{4} > 0$$

uvjet da polovi budu konjugirano kompleksni je upravo jednak gornjem !

Koeficijente $r_{i,j}$ & $\Theta_{i,j}$ nalazimo pomoću slijedećih izraza:

$$r_{i,j} = \frac{2\sqrt{e_{i,j}^2 \cdot a_2 - a_1 e_{i,j} f_{i,j} + f_{i,j}^2}}{\sqrt{4a_2 - a_1^2}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)e_{i,j}^2 - 2a\, e_{i,j} f_{i,j} + f_{i,j}^2}}{b}$$

$$\Theta = \operatorname{atan2}\left(\frac{a_1 e_{i,j} - 2f_{i,j}}{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}, e_{i,j}\right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{a \cdot e_{i,j} - f_{i,j}}{b}, e_{i,j}\right)$$

Za primjer drugog reda:

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= 2a \\ a_2 &= b^2 + a^2 \end{aligned}}$$

$$[e_{i,j}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [f_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ -a_2 & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$r_{1,1} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2) - 2a \cdot 1 \cdot a_1 + a_1^2}}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2 - \cancel{4a^2} + \cancel{4a^2}}}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$$

$$r_{1,2} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2) \cdot \emptyset - 2a \cdot \emptyset \cdot 1 + 1^2}}{b} = \frac{1}{b}$$

$$r_{2,1} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2) \cdot \emptyset - 2a \cdot \emptyset(-a_2) + a_2^2}}{b} = \frac{a^2+b^2}{b}$$

$$r_{2,2} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2) \cdot 1 - 2a \cdot 1 \cdot \emptyset + \emptyset^2}}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

amplituda titranja

Nađimo i početne faze:

$$\Theta_{1,1} = \operatorname{atan2}\left(\frac{a \cdot 1 - \overset{2a}{a_1}}{b}, 1\right) = \operatorname{atan2}\left(-\frac{a}{b}, 1\right)$$

$$\Theta_{1,2} = \operatorname{atan2}\left(\frac{a \cdot \emptyset - 1}{b}, \emptyset\right) = \operatorname{atan2}\left(-\frac{1}{b}, \emptyset\right)$$

$$\Theta_{2,1} = \operatorname{atan2}\left(\frac{a \cdot \emptyset + a_2}{b}, \emptyset\right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{a^2 + b^2}{b}, \emptyset\right)$$

$$\Theta_{2,2} = \operatorname{atan2}\left(\frac{a \cdot 1 - \emptyset}{b}, 1\right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{a}{b}, 1\right)$$

Konačno, formiramo fundamentalnu matricu:

$$\Phi(t) = \frac{e^{-at}}{b} \cdot \mu(t) \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(bt + \mathrm{atan2}\left(-\frac{a}{b}, 1\right)\right) & \cos\left(bt + \mathrm{atan2}\left(-\frac{1}{b}, 0\right)\right) \\ (a^2+b^2)\cdot\cos\left(bt + \mathrm{atan2}\left(\frac{a^2+b^2}{b}, \emptyset\right)\right) & \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\left(bt + \mathrm{atan2}\left(\frac{a}{b}, 1\right)\right) \end{bmatrix}$$

gdje $a = \frac{a_1}{2}$ $b = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$, a polovi sustava su

$$\underline{s_{1,2} = -a \pm jb}$$

VAŽNO: Uoči da matrica $\Phi(s)$ & $\Phi(t)$ ovise samo o lijevoj strani diferencijalne jednadžbe, tj. samo o karakterističnom polinomu $A(s) = s^2 + a_1 s + a_2$, dok <u>ne ovisi</u> o $B(s)$ γ, tj. o brojniku U-I modela.

Vratimo se na rješenje za vektor stanja $X(s)$:

$$X(s) = \underbrace{\Phi(s)\cdot x(0^-)}_{\substack{\text{odziv stanja} \\ \text{nepobuđenog sustava} \\ \text{u s-domeni}}} + \underbrace{\Phi(s)\cdot B \cdot U(s)}_{\substack{\text{odziv stanja} \\ \text{mirnog sustava} \\ \text{u s-domeni}}}$$

$X_0(s)$ $\qquad$ $X_m(s)$

Sjetimo se osmog predavanja, slide 30-34 gdje smo pokazali za odziv stanja u vremenskoj domeni ima slijedeći oblik:

$$x(t) = e^{At}\cdot x(0^-) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

odnosno $\Phi(t) = e^{At}$

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t)\cdot x(0^-)}_{\substack{\text{odziv stanja} \\ \text{nepobuđenog sustava} \\ \text{u vremenskoj dom}}} + \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau}_{\substack{\text{odziv stanja} \\ \text{mirnog sustava} \\ \text{u vrem. domeni}}}$$

$x_0(t)$ $\qquad$ $x_m(t)$

$$x_0(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_0(s) \qquad x_m(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_m(s)$$

8

$$X_0(s) = \Phi(s) \cdot X(0^-)$$

matrica karakter. frekvencija gdje je svaki član funkcija od s

vektor početnog stanja .. niz konstanti

Za sustav 2. reda

$$X_0(s) = \begin{bmatrix} X_{01}(s) \\ X_{02}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1(0^-) \cdot \Phi_{11}(s) + x_2(0^-)\,\Phi_{12}(s) \\ x_1(0^-) \cdot \Phi_{21}(s) + x_2(0^-)\,\Phi_{22}(s) \end{bmatrix}$$

težinska suma funkcija od s

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

vektor stanja u vrem. domeni

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} X_{01}(t) \\ X_{02}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0^-)\,\Phi_{11}(t) + x_2(0^-)\,\Phi_{1,2}(t) \\ x_1(0^-)\,\Phi_{2,1}(t) + x_2(0^-)\,\Phi_{2,2}(t) \end{bmatrix}$$

težinska suma vremenskih funkcija

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{1,2}(t) \\ \Phi_{2,1}(t) & \Phi_{2,2}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} =$$

$$= \Phi(t) \cdot X(0^-) = e^{At} \cdot X(0^-)$$

fundamentalna matrica

vektor početnog stanja (niz konstanti)

$$\boxed{X_0(s) = \Phi(s) \cdot X(0^-)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{X_0(t) = \Phi(t) \cdot X(0^-)}$$

VAŽNO

$$X_m(s) = \Phi(s) \cdot B \cdot U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \cancel{\Phi(t) \cdot B \cdot U(t)}$$

umnožak funkcija u s-domeni

nego:

$$X_m(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) B u(\tau)\, d\tau$$

konvolucijski integral u vrem. domeni

00.A.503.A.90

Sada kada imamo odziv stanja $X(s)$ možemo odrediti i konačni odziv MIMO sustava: 9

Izlazna jednadžba sustava glasi:

$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s)$$

pa uvrštavanjem $X(s) = \Phi(s) X(0^-) + \Phi(s) B \cdot U(s)$ slijedi:

$$\begin{aligned} Y(s) &= C\Phi(s)X(0^-) + C\Phi(s)BU(s) + D\cdot U(s) \\ &= C\Phi(s)X(0^-) + (C\Phi(s)B + D)U(s) \\ &= \underbrace{Y_0(s)}_{\text{Odziv nepobuđenog sustava na početna stanja}} + \underbrace{Y_m(s)}_{\text{Odziv mirnog sustava}} \end{aligned}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1} \qquad\qquad \Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$Y(t) = Y_0(t) + Y_m(t)$$

Za općenit MIMO sustav sa više izlaza, $[Y_0(t)]$ i $[Y_m(t)]$ su vektori.

Sjetimo se da se odziv mirnog sustava nalazi kao umnožak prijenosne funkcije $H(s)$ i pobude $U(s)$

$$Y_m(s) = H(s) \cdot U(s)$$

Dakle čitamo da za MIMO sustav, $H(s)$ glasi:

$$H(s) = C\Phi(s)B + D$$ ← transfer matrica ili prijenosna matrica

a predstavlja matricu prijenosnih funkcija koje povezuju i-ti izlaz (indeks retka) sa j-tim ulazom (indeks stupca)

$$Y_m(s) = \begin{bmatrix} Y_{m1}(s) \\ Y_{m2}(s) \\ \vdots \\ Y_{mK}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{1,1}(s) & H_{1,2}(s) & \dots & H_{1,M}(s) \\ H_{2,1}(s) & H_{2,2}(s) & \dots & H_{2,M}(s) \\ \vdots & & & \\ H_{K,1}(s) & H_{K,2}(s) & \dots & H_{K,M}(s) \end{bmatrix}}_{H(s)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_M(s) \end{bmatrix}}_{U(s)}$$

Vratimo se na primjer drugog reda. Matrice B, C i D glase:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} b_2 - b_0 a_2 & b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$$

Potražimo odziv nepobuđenog sustava $Y_0(s)$

$$Y_0(s) = C \cdot X_0(s) = C \cdot \Phi(s) \cdot x(0^-) =$$

$$\begin{bmatrix} b_2 - b_0 a_2 & b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{A(s)} \cdot \begin{bmatrix} s + a_1 & 1 \\ -a_2 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{A(s)} \begin{bmatrix} b_2 - b_0 a_2 & b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+a_1) x_1(0^-) + x_2(0^-) \\ -a_2 x_1(0^-) + s x_2(0^-) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{A(s)} \Big[(b_2 - b_0 a_2)(s + a_1) x_1(0^-) - (b_1 - b_0 a_1) a_2 x_1(0^-) + (b_2 - b_0 a_2) x_2(0^-) + s (b_1 - b_0 a_1) x_2(0^-) \Big] =$$

$$x_1(0^-) \cdot \frac{(b_2 - b_0 a_2) s + (a_1 b_2 - \cancel{b_0 a_1 a_2} - b_1 a_2 + \cancel{b_0 a_1 a_2})}{A(s)} +$$

$$x_2(0^-) \cdot \frac{(b_1 - b_0 a_1) s + (b_2 - b_0 a_2)}{A(s)} =$$

$$Y_0(s) = \frac{1}{A(s)} \Big[x_1(0^-) \cdot \big((b_2 - b_0 a_2) s + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \big) + x_2(0^-) \cdot \big((b_1 - b_0 a_1) s + (b_2 - b_0 a_2) \big)$$

Opet smo dobili dva člana općeg oblika $\dfrac{es + f}{s^2 + a_1 s + a_2}$, koji se vraćaju u vremensku domenu na isti način.

Potražimo konačno i prijenosnu matricu $H(s)$

$$H(s) = C \Phi(s) B + D =$$

$$= \frac{1}{A(s)} \cdot \begin{bmatrix} [b_2 - b_0 a_2] & [b_1 - b_0 a_1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s + a_1 & 1 \\ -a_2 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{A(s)} \cdot \begin{bmatrix} [b_2 - b_0 a_2] & [b_1 - b_0 a_1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{(b_2 - \cancel{b_0 a_2}) + s(b_1 - \cancel{b_0 a_1}) + b_0(s^2 + \cancel{a_1 s} + \cancel{a_2})}{A(s)}$$

$$H(s) = \left[\frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} \right]$$

matrica dimenzije 1x1 jer primjer ima 1 ulaz i 1 izlaz (SISO)

Primijetimo da smo dobili prijenosnu funkciju koja odgovara polaznoj diferencijalnoj jednadžbi, tj. U-I modelu.

$$Y_m(s) = H(s) \cdot U(s) = (C\,\Phi(s)\,B + D)\,U(s)$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$Y_m(t) = \int_0^t H(t-\tau)\,U(\tau)\,d\tau = \int_0^t C\,\Phi(t-\tau)\,B\,U(\tau)\,d\tau + D \cdot U(t)$$

$\mathcal{L}^{-1}$ $C\,\Phi(s)\,B\,U(s)$ $\qquad$ $\mathcal{L}^{-1}$ $D \cdot U(s)$

Inverzna $\mathcal{L}$ transformacija odziva mirnog sustava

vektor odziva

matrica impulsnih odziva

konvolucijski integral