



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

Z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

02. lipnja 2008.



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergenije
z-transformacije
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Odziv diskretnog sustava na pobudu kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je kako je odziv mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, na svevremensku eksponencijalu Uz^n ,

$$y(n) = H(z)Uz^n$$

pri čemu je

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

- za z , kao kompleksnu varijablu, $H(z)$ je kompleksna funkcija



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergenције
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z – transformacija

- sumaciju

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

možemo interpretirati kao transformaciju vremenske funkcije, impulsnog odziva $h(n)$ diskretnog sustava, u kompleksnu funkciju $H(z)$

- ovako definiranu transformaciju nazivamo dvostrana ili bilateralna **z-transformacija**
- z – transformacija $H(z)$ predstavlja, dakle, alternativni prikaz vremenskog niza $h(n)$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergenције
z-transformacije
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z – transformacija

- za diskretni signal $x(n)$, definira se dvostrana z–transformacija

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- z–transformacija označuje se simbolički kao

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$$

ili još jednostavnije

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – primjer 1

- neka je zadan vremenski diskretan signal, kao konačni niz,
 $x(n) = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}, n \geq 0$
- slijedi kako je

$$X(z) = \sum_{n=0}^5 x(n)z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

odnosno

$$X(z) = \frac{z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^5}$$

- gornja sumacija konvergira, pa time $X(z)$ poprima konačne vrijednosti, za sve $z \in \text{Kompleksni}$ osim za $z = 0$
- primjer pokazuje kako je signalu $x(n)$, zadanom u vremenskoj domeni, pridružena njegov alternativni prikaz (“slika”) $X(z)$, u z-domeni (frekvencijskoj domeni)



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – primjer 1

- veza između

$$x(n) = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

i

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

je očigledna:

koeficijent uz z^{-n} je vrijednost signala u koraku n , drugim riječima, eksponent od z sadrži vremensku informaciju potrebnu da bi se identificirali uzorci signala

- usporedimo prikaz $x(n)$ u vremenskoj i frekvencijskoj domeni¹

¹prikazuje se samo $|X(z)|$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

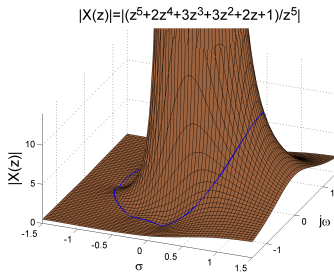
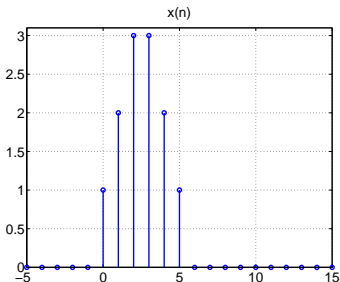
Područje
konvergencije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z – transformacija



- polovi i nule $X(z)$ su

$$\begin{aligned} p_1 &= 0; & z_1 &= -1.0000 = e^{j\pi} \\ p_2 &= 0; & z_2 &= +j1.0000 = e^{j\frac{\pi}{2}} \\ p_3 &= 0; & z_3 &= -j1.0000 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ p_4 &= 0; & z_4 &= -0.5000 + j0.8660 = e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ p_5 &= 0; & z_5 &= -0.5000 - j0.8660 = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – primjer 2

- određuje se z-transformacija niza

$$x(n) = \alpha^n \mu(n)$$

- signal $x(n)$ čini beskonačni broj uzoraka

$$x(n) = \{\underline{1}, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\}$$

- iz definicije z-transformacije slijedi

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n}$$

$$X(z) = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \dots$$

što je sukladno prije izrečenoj interpretaciji z-transformacije



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – primjer 2

- u

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

prepoznaje se geometrijski red

- da bi $X(z)$ konvergirao mora biti $|\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n| < \infty$ a
to će biti za

$$|\alpha z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |\alpha|$$

- tada je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}, \quad \text{za } |z| > |\alpha|$$

- područje kompleksne ravnine, $|z| > |\alpha|$, za koje $X(z)$
konvergira, nazivamo područje konvergencije, \mathcal{PK} ,
z-transformacije



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije

z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

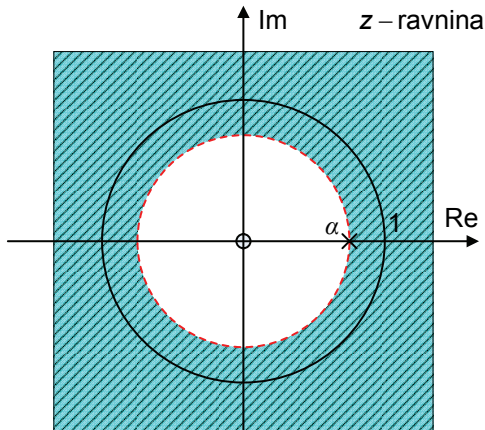
Inverzna
z-transformacija

z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Područje konvergencije z-transformacije

- z-transformacija je racionalna funkcija
- z-transformacija niza $x(n) = \alpha^n \mu(n)$ ima jednu **nulu** u $z = 0$ i jedan **pol** u $z = \alpha$





Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije

z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija

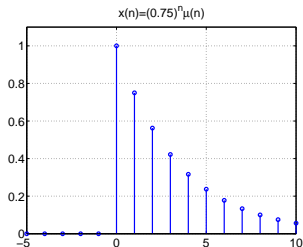
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – primjer 3

- određuje se z-transformacija niza

$$x(n) = \alpha^n \mu(n) = 0.75^n \mu(n)$$



- z-transformacija je

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.75 z^{-1})^n = \frac{z}{z - 0.75}$$

$$\text{za } |0.75 z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |0.75|$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije

z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija

z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

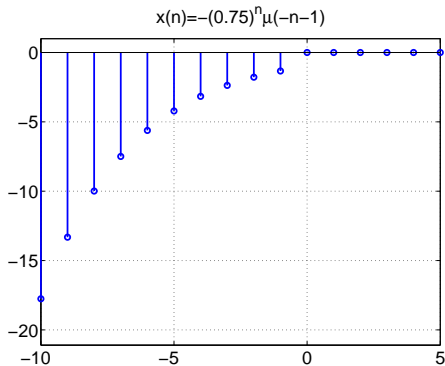
Samostalni
rad studenta

z-transformacija – primjer 4

- određuje se z-transformacija niza

$$x(n) = -\alpha^n \mu(-n-1) = -0.75^n \mu(-n-1)$$

n	$x(n)$
≥ 0	0
-1	-1.3333
-2	-1.7778
-3	-2.3704
-4	-3.1605
-5	-4.2140
-6	-5.6187
-7	-7.4915
-8	-9.9887
-9	-13.3183
-10	-17.7577





Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije

z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija

z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – primjer 4

- z-transformacija je

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n \mu(-n-1) z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} = \\&= - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^n\end{aligned}$$

ako je $|\alpha^{-1}z| < 1 \Leftrightarrow |z| < |\alpha|$
tada gornja suma konvergira i vrijedi:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - \alpha^{-1}z} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

za $|z| < |\alpha|$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije

z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

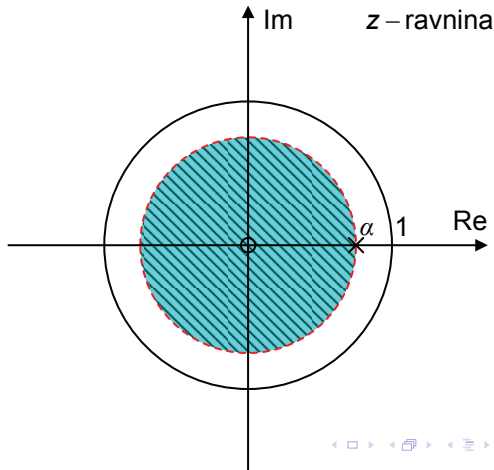
Inverzna
z-transformacija

z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Područje konvergencije z-transformacije

- z-transformacija je racionalna funkcija
- z-transformacija niza $x(n) = -\alpha^n \mu(-n-1)$ ima jednu **nulu** u $z = 0$ i jedan **pol** u $z = \alpha$





Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje

konvergencije
z-transformacije

z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija

z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Područje konvergencije z–transformacije

- usporedbom primjera 3 i primjera 4

$$\alpha^n \mu(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z - \alpha} \quad \text{za } |z| > |\alpha|$$

odnosno

$$-\alpha^n \mu(-n - 1) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z - \alpha} \quad \text{za } |z| < |\alpha|$$

zaključujemo kako dva različita signala, jedan strogo kauzalni a drugi strogo nekauzalni, imaju identične izraze za z–transformaciju i kako se njihova razlika očituje samo u području konvergencije, \mathcal{PK} ,

- područje konvergencije \mathcal{PK} , z–transformacije, je važna i nužna informacija i tek definirano \mathcal{PK} daje jednoznačnu vezu između niza i njegove z–transformacije
- stoga, z–transformacija mora biti uvijek zadana s njezinim \mathcal{PK}



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor

Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – primjer 5

- određuje se z-transformacija niza

$$x(n) = \alpha^n \mu(n) + \beta^n \mu(-n - 1)$$

- iz definicije z-transformacije slijedi

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^m$$

- prva suma konvergira za $|\alpha z^{-1}| < 1$ ili $|z| > |\alpha|$
- druga suma konvergira za $|\beta^{-1} z| < 1$ ili $|z| < |\beta|$
- u određivanju konvergencije $X(z)$ postoje dva slučaja
 - $|\beta| < |\alpha|$ – ne postoji područje preklapanja područja konvergencije i ne postoji $X(z)$
 - $|\beta| > |\alpha|$ – postoji prsten u z-ravnini u kojem obje sume konvergiraju i on predstavlja područje konvergencije $X(z)$



z–transformacija – primjer 5

Signali i sustavi

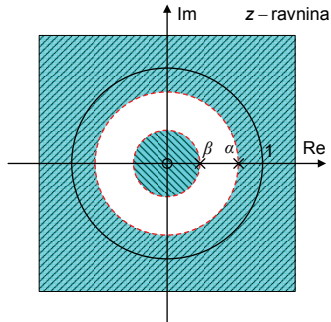
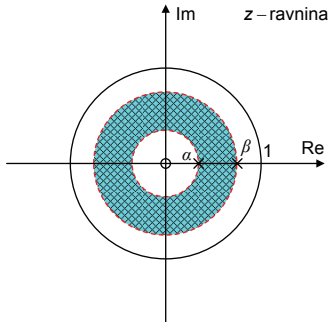
školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z–
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z–transformacije
z–transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z–transformacije
Inverzna
z–transformacija
z–transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta



pa je z–transformacija niza $x(n) = \alpha^n \mu(n) + \beta^n \mu(-n-1)$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} - \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha} - \frac{z}{z - \beta}$$

uz područje konvergencije z–transformacije $|\alpha| < |z| < |\beta|$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija kauzalnih nizova

- z-transformacija kauzalnih nizova definirana je kao

$$X : \mathcal{PK}(x) \rightarrow \text{Kompleksni}$$

$$\forall z \in \mathcal{PK}(x), \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

gdje je područje konvergencije, $\mathcal{PK}(x) \subset \text{Kompleksni}$,
definirano^{2 3} s

$$\mathcal{PK}(x) = \left\{ z = re^{j\omega} \in \text{Kompleksni} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \right\}$$

- ovako definirana $X(z)$ naziva se jednostrana
z-transformacija

²apsolutna kovergencija sume garantira i konvergenciju $X(z)$

³iz $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z^{-n}|$ a uz, $z = re^{j\omega}$, za koji suma konvergira, vrijedi
 $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)(re^{j\omega})^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| |e^{-j\omega n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z–transformacija kauzalnih nizova

- jednostrana z– transformacija pokazuje se posebno pogodnom u postupcima rješavanja jednadžbi diferencija sa zadanim početnim uvjetima
- jednostrana z– transformacija limitirana je samo na kauzalne signale i sustave
- kako je u ovom predmetu većina pozornosti okrenuta kauzalnim signalima i sustavima u nastavku se razmatra uglavnom jednostrana z–transformacija
- sukladno većini literature pod nazivom z–transformacija podrazumijevati će se jednostrana z–transformacija, a u slučaju dvostrane transformacije to će biti posebno istaknuto



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija osnovnih nizova

$$\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1, \quad |z| > 0$$

$$\mathcal{Z}\{\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1},$$

$$\text{za } |z| > 1$$

$$\mathcal{Z}\{a^n \mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija osnovnih nizova

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\cos(\omega_0 n)\mu(n)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\omega_0 n)\mu(n)z^{-n} = \\&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n} z^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega_0 n} z^{-n} = \\&= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} = \\&= \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} + 1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1} - e^{-j\omega_0} z^{-1} + z^{-2}} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}\{\cos(\omega_0 n)\mu(n)\} = \frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}} \quad |z| > 1$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Tablica osnovnih z-transformacija⁴

	$x(n)$	$X(z)$
1	$\delta(n)$	1
2	$\delta(n - m)$	z^{-m}
3	$\mu(n)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$n\mu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
5	$n^2\mu(n)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$n^3\mu(n)$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
7	$a^n\mu(n)$	$\frac{z}{z-a}$
8	$na^n\mu(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
9	$n^2a^n\mu(n)$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
10	$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{a^m m!} a^n \mu(n)$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$

⁴izvor:B.P. Lathi:Linear Systems and Signals, str. 498



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Tablica osnovnih z-transformacija⁵

	$x(n)$	$X(z)$
11	$\cos(\omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{z(z - \cos(\omega_0))}{z^2 - 2\cos(\omega_0)z + 1}$
12	$\sin(\omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{\sin(\omega_0)z}{z^2 - 2\cos(\omega_0)z + 1}$
13	$a^n \cos(\omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{z(z - a\cos(\omega_0))}{z^2 - 2a\cos(\omega_0)z + a^2}$
14	$a^n \sin(\omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{a\sin(\omega_0)z}{z^2 - 2a\cos(\omega_0)z + a^2}$

⁵izvor: A.V.Oppenheim, A. S. Willsky: Signals and Systems str. 655



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – linearnost

neka je $w(n) = ax(n) \pm by(n)$

tada je z-transformacija od $w(n)$

$$W(z) = aX(z) + bY(z), \quad \forall z \in \mathcal{PK}(w) \text{ sadrži } \mathcal{PK}(x) \cap \mathcal{PK}(y)$$

područje konvergencije od $W(z)$ mora uključiti područja
konvergencije od $X(z)$ i $Y(z)$

linearnost z-transformacije proizlazi iz definicije

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} w(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [ax(n) \pm by(n)]z^{-n} = \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \pm b \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = aX(z) \pm bY(z) \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – pomak unaprijed za j-koraka

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je, uz $j > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x(n+j)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+j)z^{-n} = \left| n+j=m \right| = \\ &= \sum_{m=j}^{\infty} x(m)z^{-m+j} = z^j \sum_{m=j}^{\infty} x(m)z^{-m} = \\ &= z^j \left[\underbrace{\sum_{m=j}^{\infty} x(m)z^{-m} + \sum_{m=0}^{j-1} x(m)z^{-m}}_{X(z)} - \sum_{m=0}^{j-1} x(m)z^{-m} \right] \Rightarrow \\ \mathcal{Z}\{x(n+j)\} &= z^j \left[X(z) - \sum_{m=0}^{j-1} x(m)z^{-m} \right]\end{aligned}$$

$$\text{za } j=1, \quad \mathcal{Z}\{x(n+1)\} = zX(z) - zx(0)$$

$$\text{za } j=2, \quad \mathcal{Z}\{x(n+2)\} = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – kašnjenje za j-koraka

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je, uz $j > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x(n-j)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-j)z^{-n} = \left| n-j=m \right| = \\ &= \sum_{m=-j}^{\infty} x(m)z^{-m-j} = z^{-j} \sum_{m=-j}^{\infty} x(m)z^{-m} = \\ &= z^{-j} \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} + \sum_{m=-j}^{-1} x(m)z^{-m} \right] \Rightarrow \\ \mathcal{Z}\{x(n-j)\} &= z^{-j} \left[X(z) + \sum_{m=-j}^{-1} x(m)z^{-m} \right]\end{aligned}$$

za $j = 1$ i $j = 2$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x(n-1)\} &= z^{-1} [X(z) + zx(-1)] = z^{-1}X(z) + x(-1) \\ \mathcal{Z}\{x(n-2)\} &= z^{-2} [X(z) + zx(-1) + z^2x(-2)] = \\ &= z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)\end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje
konvergencije
z-transformacije
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – konvolucijska sumacija kauzalnih nizova
za $y(n) = h(n) * u(n)$, te $U(z) = \mathcal{Z}\{u(n)\}$ i $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}$,
vrijedi⁶

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}\{y(n)\} = \mathcal{Z}\{u(n) * h(n)\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} u(j)h(n-j) \right] z^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} u(j) \sum_{n=0}^{\infty} h(n-j)z^{-n} = \\ &= \left| n-j=m \right| = \sum_{j=0}^{\infty} u(j) \sum_{m=-j}^{\infty} h(m)z^{-(m+j)} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} u(j)z^{-j} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} h(m)z^{-m}}_{h(m)=0 \text{ za } m<0} = U(z)H(z) \end{aligned}$$

$$h(n) * u(n) \xrightarrow{z} H(z)U(z)$$

⁶pribrajajući nule, konvolucijsku sumaciju kauzalnih nizova
 $\sum_{j=0}^n u(j)h(n-j)z^{-n}$ proširujemo u $\sum_{j=0}^{\infty} u(j)h(n-j)z^{-n}$ (potreba izvoda)



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – množenje s a^n

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je z-transformacija niza
 $y(n) = a^n x(n)$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

slično za $y(n) = e^{j\omega_0 n} x(n)$ vrijedi

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{e^{j\omega_0}}\right)^{-n} = X\left(ze^{-j\omega_0}\right)$$

korištenjem gornjeg svojstva proizlazi i svojstvo **modulacije**
za $y(n) = x(n) \cos(\omega_0 n) = x(n) \frac{1}{2} [e^{-j\omega_0 n} + e^{j\omega_0 n}]$ slijedi

$$\mathcal{Z}\{x(n) \cos(\omega_0 n)\} = \frac{1}{2} [X(ze^{j\omega_0}) + X(ze^{-j\omega_0})]$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje

konvergencije
z-transformacije
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna

z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – množenje s n

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je z-transformacija niza
 $y(n) = nx(n)$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{nx(n)\} = z \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \underbrace{nz^{-n-1}}_{-\frac{d}{dz}z^{-n}} = z \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(-\frac{d}{dz}z^{-n}\right) =$$

$$= -z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \right) = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

množenje s n^j

$$\mathcal{Z}\{n^j x(n)\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^j X(z)$$



Signalni i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – početna vrijednost niza

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ početna vrijednost niza izračunava se iz

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – konačna vrijednost niza

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ konačna vrijednost niza izračunava se iz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z), \text{ ako postoji } x(\infty)$$

limes za $z \rightarrow 1$ ima smisla samo kada je točka $z = 1$ locirana unutar područja konvergencije $X(z)$

dokaz započinjemo z-transformacijom niza $[x(n) - x(n-1)]$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(n) - x(n-1)\} &= X(z) - z^{-1}X(z) - x(-1) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [x(n) - x(n-1)]z^{-n} \end{aligned}$$

$$(1 - z^{-1})X(z) - x(-1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n) - x(n-1)]z^{-n}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

z-transformacija – konačna vrijednost niza

uzmimo limes za $z \rightarrow 1$

$$\lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)] - x(-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n) - x(n-1)]z^{-n} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^N [x(n) - x(n-1)]z^{-n} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n) - x(n-1)] =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow \infty} [x(0) - x(-1) + x(1) - x(0) + x(2) - x(1) + \dots] = \\ &= -x(-1) + \lim_{N \rightarrow \infty} x(N) \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} x(N)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – integralom po zatvorenoj krivulji

- inverzna z-transformacija je dana kao

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

gdje je integral po zatvorenoj krivulji C koja zatvara ishodište i leži unutar područja konvergencije $X(z)$

- integral se izračunava primjenom Cauchy-evog teorema o reziduumima koji kazuje kako je integral, u pozitivnom smjeru duž zatvorene krivulje C , koja obuhvaća konačno izoliranih singularnih točaka (polova) jednak sumi residuuma u obuhvaćenim singularnim točkama, dakle,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{m=1} \text{Res}_m[X(z) z^{n-1}]$$

$$\text{Res}_m[X(z) z^{n-1}] = \lim_{z \rightarrow z_m} [X(z) z^{n-1} (z - z_m)]$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z–transformacija – drugi postupci

- inverzna z–transformacija, integralom po zatvorenoj krivulji, navedena je ovdje zbog cjelovitosti izlaganja
- u nastavku su daju dva jednostavna postupka inverzne z–transformacije koji ne traže dublje poznavanje teorije funkcije kompleksne varijable
- prvo se razmatra inverzna z–transformacija postupkom razvoja u red
- pokazano je kako je z–transformacija kauzalnog niza $x(n)$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots$$

- pa je inverzna z–transformacija

$$x(n) = x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) + \dots$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – razvojem u red

- kad je $X(z)$ razlomljena racionalna funkcija, koeficijente prethodnog reda možemo dobiti jednostavnim dijeljenjem brojnika s nazivnikom
- ovo će biti ilustrirano narednim primjerom
- pokazano je da je $X(z) = \mathcal{Z}\{(0.75)^n \mu(n)\} = \frac{1}{1-0.75z^{-1}}$
- razvoj u red za $X(z)$ postizemo dijeljenjem brojnika s nazivnikom

$$\begin{array}{r}
 (1 + 0 \cdot z^{-1}) : (1 - 0.75z^{-1}) = 1 + 0.75z^{-1} + (0.75)^2 z^{-2} + (0.75)^3 z^{-3} + \dots \\
 \underline{\pm 1 \mp 0.75z^{-1}} \\
 0.75z^{-1} \\
 \underline{\pm 0.75z^{-1} \mp (0.75)^2 z^{-2}} \\
 (0.75)^2 z^{-2} \\
 \underline{\pm (0.75)^2 z^{-2} \mp (0.75)^3 z^{-3}} \\
 (0.75)^3 z^{-3}
 \end{array}$$

pa prepoznamo

$$x(n) = \delta(n) + 0.75\delta(n-1) + (0.75)^2\delta(n-2) + (0.75)^3\delta(n-3) + \dots = (0.75)^n \mu(n)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- prijenosna funkcija $H(z)$ predstavlja z–transformaciju impulsnog odziva $h(n)$, sukladno tomu impulsni odziv je inverzna z–transformacija prijenosne funkcije
- za zadanu prijenosnu funkciju nalazimo impulsni odziv

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}\right\}$$

- inverznu z–transformaciju provodimo dijeljenjem brojnika $H(z)$ s njezinim nazivnikom

$$\begin{array}{r} (1 + 2z^{-1}) : (1 - 1.1314z^{-1} + 0.64z^{-2}) = 1 + 3.1314z^{-1} + 2.9028z^{-2} + \dots \\ \underline{-1 + 1.1314z^{-1} - 0.64z^{-2}} \\ + 3.1314z^{-1} - 0.64z^{-2} \\ \underline{-3.1314z^{-1} + 3.5428z^{-2} - 2.0041z^{-3}} \\ + 2.9028z^{-2} - 2.0041z^{-3} \end{array}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- pa je inverzna transformacija

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{1 + 3.1314z^{-1} + 2.9028z^{-2} + \dots\}$$

$$h(n) = \delta(n) + 3.1314\delta(n-1) + 2.9028\delta(n-2) + \dots$$

- ovim postupkom određivanja inverzne z–transformacije, moguće je brzo i jednostavno odrediti nekoliko prvih uzoraka signala,
- međutim ovdje je, iz poznatih uzoraka, teško prepoznati kompaktni izraz za impulsni odziv

$$h(n) = 4.6444(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right)\mu(n)$$

i on će biti određen postupkom rastava na parcijalne razlomke



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenције
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- metoda inverzne z–transformacije rastavom na parcijalne razlomke temelji se na prikazu funkcije $X(z)$ kao

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \dots + \alpha_K X_K(z)$$

gdje su $X_1(z), X_2(z), \dots, X_K(z)$ izrazi čije su inverzne transformacije $x_1(n), x_2(n), \dots, x_K(n)$ dane u tablici osnovnih z-transformacija

- ako je moguća takva dekompozicija tada se, korištenjem linearnosti, određuje inverzna transformacija $X(z)$ kao

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \dots + \alpha_K x_K(n)$$



Signali i sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(z)$ je razlomljena racionalna funkcija i možemo je prikazati kao

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

- za $N > M$ radi se o pravoj razlomljenoj racionalnoj funkciji koju je moguće rastaviti na parcijalne razlomke
- u slučaju $M \geq N$, $X(z)$ je neprava razlomljena racionalna funkcija, pa je prije rastave na parcijalne razlomke potrebno, dijeljenjem brojnika i nazivnika, $X(z)$ dovesti u oblik

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{M-N} z^{-(M-N)} + \underbrace{\frac{B_1(z)}{A(z)}}_{\text{prava razlomljena racionalna funkcija}}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor

Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – primjer

- neka je z-transformacija kauzalnog niza $x(n)$, neprava razlomljena racionalna funkcija $X(z)$

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.06z^{-2}}$$

- u ovom primjeru je $M > N$ pa je, prije rastava na parcijalne razlomke, potrebno modificirati $X(z)$ na sumu polinoma i prave funkcije
- to se postiže dijeljenjem polinoma u brojniku s polinomom u nazivniku⁷
- dakle iz
 $(4z^{-3} + 3z^{-2} + 2z^{-1} + 1) : (-0.06z^{-2} - 0.2z^{-1} + 1)$ slijedi

$$X(z) = -66.6667z^{-1} + 61.1111 + \frac{-60.1111 + 74.7777z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.06z^{-2}}$$

⁷u obrnutom poretku kako bi eliminirali članove z^{-2} i z^{-3}



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – primjer

- $X(z)$ je priređen za rastav na parcijalne razlomke

$$X(z) = 61.1111 - 66.6667z^{-1} + \underbrace{\frac{-60.1111 + 74.7777z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.06z^{-2}}}_{\text{prava funkcija}}$$

- rastavom na parcijalne razlomke, što se pokazuje na narednim prikaznicama, slijedi

$$X(z) = 61.1111 - 66.6667z^{-1} + \frac{113.4889}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{-173.6}{1 + 0.2z^{-1}}$$

pa je, uvidom u tablice, inverzna z-transformacija

$$x(n) = 61.1111\delta(n) - 66.6667\delta(n-1) + \\ + 113.4889(0.3)^n\mu(n) - 173.6(-0.2)^n\mu(n)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – primjer

- provjeru dobivenog rezultata možemo učiniti postupkom dijeljenjem brojnika i nazivnika $X(z)$, dakle,

$$(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}) : (1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2}) = \\ = 1 + 2.1z^{-1} + 3.27z^{-2} + 4.453z^{-3} + 0.6415z^{-4} + \dots$$

pa je inverzna transformacija

$$x(n) = \delta(n) + 2.1\delta(n-1) + 3.27\delta(n-2) + \\ + 4.453\delta(n-3) + 0.6415\delta(n-4) + \dots$$

$$\text{dok } x(n) = 61.1111\delta(n) - 66.6667\delta(n-1) + \\ + 113.4889(0.3)^n\mu(n) - 173.6(-0.2)^n\mu(n)$$

za $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ daje uzorke $1, 2.1, 3.27, 4.453, 0.6415, \dots$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- neka je $X(z)$ prava razlomljena racionalna funkcija

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

gdje je $N > M$

- postupak rastava na parcijalne razlomke pojednostavljujemo množenjem brojnika i nazivnika sa z^N , što rezultira u

$$X(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- ovako transformiranu $X(z)$ možemo prikazati kao

$$X(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{B_1(z)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)}$$

- inverznu z–transformaciju rastavom na parcijalne razlomke započinjemo definiranjem pomoćne funkcije

$$X_1(z) = \frac{X(z)}{z}$$

- funkcija $X_1(z)$ se rastavlja na parcijalne razlomke, pa za jednostruke polove slijedi

$$X_1(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_N}{z - p_N}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(z)$ je tada

$$X(z) = zX_1(z) = \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{c_N z}{z - p_N}$$

pri čemu se koeficijenti $c_i, i = 1, 2, \dots, N$ određuju iz

$$c_i = \lim_{z \rightarrow p_i} \left\{ (z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right\}$$

- iz tablice z-transformacija prepoznaju se članovi $x(n)$

$$x(n) = [c_1(p_1)^n + c_2(p_2)^n + \dots + c_N(p_N)^n] \mu(n)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za višestruke polove $X(z)$ je

$$X(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{B_1(z)}{(z - p_1)^r (z - p_{r+1}) \cdots (z - p_N)}$$

- pomoćna funkcija $X_1(z)$ se rastavlja na parcijalne razlomke oblika

$$X_1(z) = \frac{c_{11}}{z - p_1} + \frac{c_{12}}{(z - p_1)^2} + \dots + \frac{c_{1r}}{(z - p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{z - p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{z - p_{r+2}} + \dots + \frac{c_N}{z - p_N}$$

$$c_{1j} = \frac{1}{(r - j)!} \lim_{z \rightarrow p_1} \left\{ \frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} (z - p_1)^r \frac{X(z)}{z} \right\} \quad (1)$$

$$c_i = \lim_{z \rightarrow p_i} \left\{ (z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right\} \quad (2)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za zadanu prijenosnu funkciju nalazimo impulsni odziv

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}\right\}$$

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

$$p_{1,2} = 0.5657 \pm j0.5657 = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

- inverznu z–transformaciju provodimo rastavom na parcijalne razlomke

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija

z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z-transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{z \rightarrow p_1} \left\{ (z - p_1) \frac{H(z)}{z} \right\} = \lim_{z \rightarrow p_1} \left\{ \cancel{(z - p_1)} \frac{z + 2}{\cancel{(z - p_1)}(z - p_2)} \right\} = \\ &= \frac{p_1 + 2}{p_1 - p_2} = \frac{0.5657 + j0.5657 + 2}{0.5657 + j0.5657 - 0.5657 + j0.5657} = \\ &= 0.5000 - j2.2678 = 2.3222e^{-j1.3538} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \lim_{z \rightarrow p_2} \left\{ (z - p_2) \frac{H(z)}{z} \right\} = \lim_{z \rightarrow p_2} \left\{ \cancel{(z - p_2)} \frac{z + 2}{(z - p_1)\cancel{(z - p_2)}} \right\} = \\ &= \frac{p_2 + 2}{p_2 - p_1} = \frac{0.5657 - j0.5657 + 2}{0.5657 - j0.5657 - 0.5657 - j0.5657} = \\ &= 0.5000 + j2.2678 = 2.3222e^{j1.3538} \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z-transformacije

Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $H(z)$ pišemo kao

$$H(z) = \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2}$$

i inverzna z–transformacija je

$$\begin{aligned} h(n) &= c_1 (p_1)^n \mu(n) + c_2 (p_2)^n \mu(n) = \\ &= 2.3222 e^{-j1.3538} (0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3222 e^{j1.3538} (0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} = \\ &= 4.6444 (0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right) \mu(n) \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- određuje se prijenosna funkcija mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, primjenom z–transformacije
- neka je sustav opisan jednadžbom diferencija

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = \\ = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \dots + b_{M-1} u(n-M+1) + b_M u(n-M)$$

- z–transformacijom ove jednadžbe, uzimajući u obzir da je sustav miran, i koristeći svojstvo $\mathcal{Z}\{x(n-j)\} = z^{-j}X(z)$ slijedi

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} Y(z) + a_N z^{-N} Y(z) = \\ = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)} U(z) + b_M z^{-M} U(z)$$



Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

Signali i sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor

Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje

konvergenije

z–transformacije

z–transformacija
osnovnih nizova

Svojstva

z–transformacije

Inverzna

z–transformacija

z–transformacija

u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

$$\begin{aligned} [1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}] Y(z) &= \\ = [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}] U(z) \end{aligned}$$

odnosno

$$Y(z) = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}}}_{H(z)} U(z)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_M}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}$$

pa, prijenosnu funkciju diskretnog sustava, $H(z)$, definiramo kao omjer z–transformacija odziva i pobude, uz početne uvjete jednake nuli

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(n)\}}{\mathcal{Z}\{u(n)\}}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- primjenu z–transformacije u analizi linearnih sustava ilustriramo primjerom sustava opisanog jednačbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- sustav je pobuđen s $u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ a početni uvjeti su $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- z–transformacija jednačbe je

$$Y(z) - 0.8\sqrt{2}[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 0.64[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = U(z)$$

$$\begin{aligned}[1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}]Y(z) &= \\ &= U(z) + 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.64y(-1)z^{-1}\end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z-transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(z) = \underbrace{\frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}}_{\text{odziv mirnog sustava}} U(z) + \underbrace{\frac{0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.64y(-1)z^{-1}}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}}$$

množenjem brojnika i nazivnika sa z^2 i uvrštenjem zadanih početnih uvjeta $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} U(z) + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- z–transformacija zadane pobude

$u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ je (iz tablice z–transformacija)

$$U(z) = \frac{-0.2z(z - \cos(\frac{\pi}{8}))}{z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{8})z + 1}$$

pa je totalni odziv sustava na danu pobudu

$$Y(z) = \frac{-0.2z^3(z - \cos(\frac{\pi}{8}))}{(z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64)(z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{8})z + 1)} + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$



Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenције
z–transformacije
z–transformacija
osnovnih nizova

Svojstva
z–transformacije
Inverzna
z–transformacija

z–transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

$$Y(z) = \underbrace{\frac{-0.2z^3(z - \cos(\frac{\pi}{8}))}{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})(z - e^{j\frac{\pi}{8}})(z - e^{-j\frac{\pi}{8}})}}_{Y_m(z)} + \underbrace{\frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})}}_{Y_0(z)}$$

rastavom na parcijalne razlomke

$$Y(z) = \underbrace{\frac{c_1 z}{z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_2 z}{z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_3 z}{z - e^{j\frac{\pi}{8}}} + \frac{c_4 z}{z - e^{-j\frac{\pi}{8}}}}_{Y_m(z)} + \underbrace{\frac{c_5 z}{z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_6 z}{z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}}}_{Y_0(z)}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- inverznom z–transformacijom će totalni odziv, u vremenskoj domeni, biti

$$y(n) = [c_1(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + c_3 e^{j\frac{\pi}{8}n} + c_4 e^{-j\frac{\pi}{8}n}] \mu(n) + [c_5(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_6(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}] \mu(n)$$

- c_1, c_2, c_3 i c_4 određujemo iz $\frac{Y_m(z)}{z}$, a c_5 i c_6 iz $\frac{Y_0(z)}{z}$

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} \left\{ \cancel{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})} \frac{-0.2z^2(z - \cos(\frac{\pi}{8}))}{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})(z - e^{j\frac{\pi}{8}})(z - e^{-j\frac{\pi}{8}})} \right\}$$

$$c_1 = 0.1858e^{j0.6757}$$

$$c_5 = \lim_{z \rightarrow 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} \left\{ \cancel{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})} \frac{-1.3028z + 1.28}{(z - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})} \right\} = 0.8091e^{-j2.5066}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor

Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija

Područje

konvergencije
z-transformacije

z-transformacija
osnovnih nizova

Svojstva

z-transformacije

Inverzna

z-transformacija

z-transformacija

u analizi

linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$c_1 = 0.1858e^{j0.6757}$$

$$c_2 = 0.1858e^{-j0.6757}$$

$$c_3 = 0.2452e^{-j3.0935} = -0.2452e^{j0.04809}$$

$$c_4 = 0.2452e^{j0.3.0935} = -0.2452e^{-j0.04809}$$

$$c_5 = 0.8091e^{-j2.5066}$$

$$c_6 = 0.8091e^{j2.5066}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$y_m(n) = [0.1858e^{j0.6757}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.1858e^{-j0.6757}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.2452e^{j0.04809}e^{j\frac{\pi}{8}n} - 0.2452e^{-j0.04809}e^{-j\frac{\pi}{8}n}] \mu(n)$$

$$y_0(n) = [0.8091e^{-j2.5066}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.8091e^{j2.5066}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}] \mu(n)$$

$$y(n) = y_0(n) + y_m(n)$$

$$y(n) = \underbrace{1.6182 \cdot 0.8^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 2.5066\right)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} \mu(n) +$$

$$\underbrace{+ 0.3716 \cdot 0.8^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 0.6759\right) \mu(n) - 0.4904 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.04809\right) \mu(n)}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- analiziran je odziv diskretnog sustava opisanog jednačbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- sustav je bio pobuđen s $u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ a početni su uvjeti bili $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- učinimo li pomak u vremenu za dva koraka, supstitucijom $n = n + 2$, dobivamo jednačbu diferencija oblika

$$y(n+2) - 0.8\sqrt{2}y(n+1) + 0.64y(n) = u(n+2) \quad (3)$$

- ova jednačba opisuje isti sustav i na zadanu pobudu $u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$, daje isti odziv
- u izračunu odziva potrebno je poznavati početne uvjete $y(0)$ i $y(1)$, i njih je potrebno odrediti iz zadanih početnih uvjeta $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergenije
z-transformacije
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- iz

$$y(n+2) - 0.8\sqrt{2}y(n+1) + 0.64y(n) = u(n+2)$$

za $n = -2$ slijedi,

$$y(0) - 0.8\sqrt{2}y(-1) + 0.64y(-2) = \underbrace{u(0)}_{-0.2} \Rightarrow y(0) = -1.5028$$

za $n = -1$ je

$$y(1) - 0.8\sqrt{2}y(0) + 0.64y(-1) = \underbrace{u(1)}_{-0.1848} \Rightarrow y(1) = -0.6050$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
z-transformacija
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- z–transformacija jednadžbe je

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) - z0.8\sqrt{2}Y(z) + z0.8\sqrt{2}y(0) + 0.64 Y(z) = z^2 U(z) - z^2 u(0) - zu(1)$$

$$\begin{aligned} [z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64] Y(z) &= \\ &= z^2 U(z) - z^2 u(0) - zu(1) + z^2 y(0) + zy(1) - z0.8\sqrt{2}y(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} U(z) + \\ &+ \frac{-z^2 u(0) - zu(1) + z^2 y(0) + zy(1) - z0.8\sqrt{2}y(0)}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Definicija
Područje
konvergencije
z-transformacije
osnovnih nizova
Svojstva
z-transformacije
Inverzna
z-transformacija
z-transformacija
u analizi
linearnih sustava

Samostalni
rad studenta

Primjena z-transformacije u analizi linearnih sustava

- uvrštenjem izračunatih $y(0) = -1.5028$ i $y(1) = -0.6050$ slijedi

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} U(z) + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

što je identično prije izvedenoj z-transformaciji totalnog odziva



Primjeri primjene z-transformacije u analizi linearnih sustava

- izračunava se odziv sustava za generiranje jeke opisanog jednadžbom

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n), \quad n \in \text{Cjelobrojni}$$

- na pobudu

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- neka je sustav miran dakle

$$y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Primjeri
primjene
z-transformacije
u analizi
linearnih sustava
Primjer inverzne
z-transformacije

Primjeri primjene z-transformacije u analizi linearnih sustava

- podsjetimo se da je z-transformacija

$$\mathcal{Z}\{y(n-j)\} = z^{-j} \left[Y(z) + \sum_{m=-j}^{-1} y(m)z^{-m} \right]$$

- kako su $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$ i $j = 4$ slijedi

$$\mathcal{Z}\{y(n-4)\} = z^{-4} Y(z)$$

- iz $u(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$ slijedi

$$U(z) = 1 + z^{-1}$$

- z-transformacija zadane jednadžbe diferencija je

$$Y(z) - 0.6z^{-4} Y(z) = U(z)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Primjeri
primjene
z-transformacije
u analizi
linearnih sustava
Primjer inverzne
z-transformacije

Primjeri primjene z-transformacije u analizi linearnih sustava

- pa je

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 0.6z^{-4}} U(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.6z^{-4}} = \frac{z^4 + z^3}{z^4 - 0.6}$$

- rastavljamo na parcijalne razlomke funkciju

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3 + z^2}{z^4 - 0.6}$$

- korijeni⁸ polinoma u nazivniku su

$$p_1 = -0.8801, p_2 = -j0.8801, p_3 = +j0.8801, p_4 = 0.8801$$

⁸Korištenjem Matlab naredbe – roots([1 0 0 0 -0.6])



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Primjeri
primjene
z-transformacije
u analizi
linearnih sustava
Primjer inverzne
z-transformacije

Primjeri primjene z-transformacije u analizi linearnih sustava

- rastav na parcijalne razlomke je

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z^3 + z^2}{z^4 - 0.6} = \\ &= \frac{z^3 + z^2}{(z + 0.8801)(z - j0.8801)(z + j0.8801)(z - 0.8801)} = \\ &= \frac{c_1}{z + 0.8801} + \frac{c_2}{z + j0.8801} + \frac{c_3}{z - j0.8801} + \frac{c_4}{z - 0.8801}\end{aligned}$$

određujemo konstante

$$c_1 = \left\{ \frac{z^3 + z^2}{(z + 0.8801)(z^2 + 0.8801^2)(z - 0.8801)} \right\}_{z=-0.8801} = -0.0341$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Primjeri
primjene
z-transformacije
u analizi
linearnih sustava
Primjer inverzne
z-transformacije

Primjeri primjene z-transformacije u analizi linearnih sustava

$$c_2 = \left\{ \cancel{(z + j0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z + j0.8801)}(z^2 - 0.8801^2)(z - j0.8801)} \right\}_{z = -j0.8801} =$$

$$= 0.2500 + j0.2841 = 0.3784e^{j0.8491}$$

$$c_3 = \left\{ \cancel{(z - j0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z - j0.8801)}(z^2 - 0.8801^2)(z + j0.8801)} \right\}_{z = j0.8801} =$$

$$= 0.2500 - j0.2841 = 0.3784e^{-j0.8491}$$

$$c_4 = \left\{ \cancel{(z - 0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z - 0.8801)}(z^2 + 0.8801^2)(z + 0.8801)} \right\}_{z = 0.8801} =$$

$$= 0.5341$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Primjeri
primjene
z-transformacije
u analizi
linearnih sustava
Primjer inverzne
z-transformacije

Primjeri primjene z-transformacije u analizi linearnih sustava

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \frac{c_1 z}{z + 0.8801} + \frac{c_2 z}{z + j0.8801} + \frac{c_3 z}{z - j0.8801} + \frac{c_4 z}{z - 0.8801} = \\
 &= \frac{-0.0341z}{z + 0.8801} + \frac{0.3784e^{j0.8491}z}{z + j0.8801} + \\
 &\quad + \frac{0.3784e^{-j0.8491}z}{z - j0.8801} + \frac{0.5341z}{z - 0.8801}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(n) &= -0.0341(-0.8801)^n + 0.3784e^{j0.8491}(-j0.8801)^n + \\
 &\quad + 0.3784e^{-j0.8491}(j0.8801)^n + 0.5341(0.8801)^n \quad n \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(n) &= -0.0341(-0.8801)^n + 0.3784e^{j0.8491}0.8801^n e^{-j\frac{\pi}{2}n} + \\
 &\quad + 0.3784e^{-j0.8491}0.8801^n e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0.5341(0.8801)^n \quad n \geq 0 \\
 &= -0.0341(-0.8801)^n + 0.5341(0.8801)^n +
 \end{aligned}$$

$$+ 0.7568(0.8801)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n - 0.8491\right) \quad n \geq 0$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Primjeri
primjene
z-transformacije
u analizi
linearnih sustava
Primjer inverzne
z-transformacije

Primjer inverzne z-transformacije

- određuje se inverzna z-transformacija kauzalnog signala $x(n)$

$$X(z) = \frac{-1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}{(1 + 0.25z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})^2} = \frac{-z^3 + 0.5z^2 + 0.25z}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2} = \frac{c_1}{z + 0.25} + \frac{c_{21}}{z + 0.5} + \frac{c_{22}}{(z + 0.5)^2}$$

koeficijent c_1 možemo odrediti pomoću izraza (2)

$$c_1 = \left\{ \cancel{(z + 0.25)} \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{\cancel{(z + 0.25)}(z + 0.5)^2} \right\}_{z=-0.25} = 1$$

a koeficijente c_{21} i c_{22} iz (1), uz $r = 2$ i za $j = 1, 2$,

$$c_{2j} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{z \rightarrow -0.5} \left\{ \frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} (z + 0.5)^r \frac{X(z)}{z} \right\}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Primjeri
primjene
z-transformacije
u analizi
linearnih sustava
Primjer inverzne
z-transformacije

Primjer inverzne z-transformacije

$$c_{22} = \left\{ \cancel{(z+0.5)^2} \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{\cancel{(z+0.5)^2}(z+0.25)} \right\}_{z=-0.5} = 1$$

$$\begin{aligned} c_{21} &= \left\{ \frac{d}{dz} \cancel{(z+0.5)^2} \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{\cancel{(z+0.5)^2}(z+0.25)} \right\}_{z=-0.5} = \\ &= \left\{ \frac{(-2z + 0.5)(z + 0.25) - (-z^2 + 0.5z + 0.25)}{(z + 0.25)^2} \right\}_{z=-0.5} = -2 \end{aligned}$$

- pokazuje se i drugi način određivanja koeficijenta c_1 , c_{21} i c_{22}
- koeficijente c_1 , c_{21} i c_{22} zamjenjujemo s A , B i C (radi bolje preglednosti jednačaba)



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Primjeri
primjene
z-transformacije
u analizi
linearnih sustava
Primjer inverzne
z-transformacije

Primjer inverzne z-transformacije

$$\begin{aligned}\frac{X(z)}{z} &= \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2} = \frac{A}{z + 0.25} + \frac{B}{z + 0.5} + \frac{C}{(z + 0.5)^2} \\ &= \frac{A(z + 0.5)^2 + B(z + 0.25)(z + 0.5) + C(z + 0.25)}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2} = \\ &= \frac{(A + B)z^2 + (A + 0.75B + C)z + (0.25A + 0.125B + 0.25C)}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2}\end{aligned}$$

pa izjednačavanjem lijeve i desne strane slijedi

$$A + B = -1$$

$$A + 0.75B + C = 0.5$$

$$0.25A + 0.125B + 0.25C = 0.25$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 16.

Profesor
Branko Jeren

z-
transformacija

Samostalni
rad studenta

Primjeri
primjene
z-transformacije
u analizi
linearnih sustava
Primjer inverzne
z-transformacije

Primjer inverzne z-transformacije

- rješenja prethodnih jednadžbi su $A = 1$, $B = -2$ i $C = 1$, pa je rastav na parcijalne razlomke

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z + 0.25} + \frac{-2}{z + 0.5} + \frac{1}{(z + 0.5)^2} \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{z}{z + 0.25} + \frac{-2z}{z + 0.5} + \frac{z}{(z + 0.5)^2}$$

- podsjetimo se da je

$$\mathcal{Z}\{a^n \mu(n)\} = \frac{z}{z - a} \text{ i } \mathcal{Z}\{na^n \mu(n)\} = \frac{az}{(z - a)^2}$$

$$X(z) = \frac{z}{z - (-0.25)} + -2 \frac{z}{z - (-0.5)} - 2 \frac{(-0.5)z}{(z - (-0.5))^2}$$

pa je inverzna transformacija

$$x(n) = (-0.25)^n \mu(n) - 2(-0.5)^n \mu(n) - 2n(-0.5)^n \mu(n)$$