Signali i sustavi

Završni ispit (grupa A) – 19. lipnja 2013.

1. (9 bodova) Vremenski diskretan linearan, kauzalan i vremenski nepromjenjiv sustav opisan je diferencijskom jednadžbom

$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) = 4u(n).$$

a) **(2 boda)** Odredite prijenosnu funkciju sustava.

b) **(2 boda)** Ispitajte stabilnost sustava.

c) **(2 boda)** Odredite impulsni odziv sustava.

d) **(3 boda)** Pomoću konvolucijskog zbroja nađite odziv MIRNOG sustava na pobudu $u(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n)$.

2. (9 bodova) Vremenski kontinuirani kauzalan sustav opisan je diferencijalnom jednadžbom

$$y'(t) + 5y(t) = 10u(t).$$

a) **(1 bod)** Odredite prijenosnu funkciju sustava.

b) **(3 boda)** Izračunajte i skicirajte amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku zadanog sustava.

c) **(4 boda)** Odredite PRISILNI odziv zadanog sustava na pobudu $u(t) = 3\sqrt{2}\cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(5\sqrt{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$.

d) **(1 bod)** Komentirajte ponašanje TOTALNOG odziva zadanog sustava za $t \gg 0$ uz $y(0^-) = 0$.

3. (9 bodova) Vremenski diskretan linearan, kauzalan i vremenski nepromjenjiv sustav opisan je diferencijskom jednadžbom

$$8y(n) + 2y(n-1) - y(n-2) = 5u(n).$$

Neka je pobuda $u(n) = 3^{-n}\mu(n)$ i neka je $y(-1) = 3$ i $y(-2) = 9$.

a) **(2 boda)** Za zadani sustav odredite karakteristični polinom i karakterističnu jednadžbu te zatim izračunajte karakteristične vrijednosti.

b) **(2 boda)** Odredite odziv mirnog sustava.

c) **(2 boda)** Odredite odziv nepobuđenog sustava.

d) **(2 boda)** Odredite prisilni odziv sustava.

e) **(1 bod)** Odredite totalni odziv sustava.

4. (9 bodova) Vremenski kontinuirani kauzalan sustav opisan je diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 8y'(t) + 15y(t) = 2u''(t) + 4u'(t) + 2u(t).$$

a) **(4 boda)** Odredite impulsni odziv zadanog sustava postupkom u vremenskoj domeni.

b) **(3 boda)** Odredite impulsni odziv zadanog sustava korištenjem Laplaceove transformacije.

c) **(2 boda)** Pomoću konvolucijskog integrala odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(t) = e^{-t}\mu(t)$.

5. (9 bodova) Neka je impulsni odziv linearnog, kauzalnog i vremenski nepromjenjivog vremenski diskretnog sustava $h(n) = \{\underline{4}, -2, 4, -2, 4, -2, \ldots\}$ (slijed $4, -2$ se ponavlja unedogled).

a) **(1 bod)** Na temelju impulsnog odziva ispitajte stabilnost sustava.

b) **(6 bodova)** Nađite odziv sustava na kauzalnu pobudu $u(n) = \{\underline{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\}$ ako je poznato da je $y(-2) = y(-1) = 1$.

c) **(2 boda)** Odredite prisilni odziv sustava.

1

a) $$H(z) = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

b) $$1 - \frac{1}{4}z^{-1} = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4}, \quad |z| < 1$$

SUSTAV JE STABILAN

c) $$H(z) = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \circ\!\!-\!\!\bullet\; h(n) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n)$$

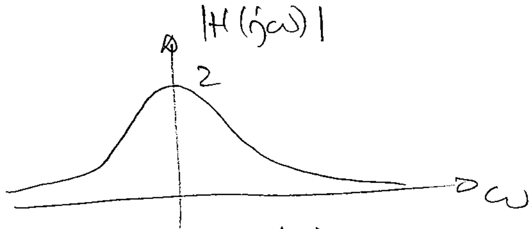
d) $$y_H(n) = h(n) * u(n) =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 4\left(\frac{1}{4}\right)^i \mu(i) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-i} \mu(n-i) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \sum_{i=0}^{n} 4\left(\frac{1}{4}\right)^n = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n (n+1), & n \geq 0 \end{cases}$$

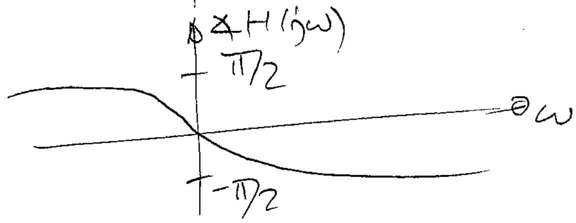
2. $y'(t) + 5y(t) = 10u(t)$

a) $H(s) = \frac{10}{s+5}$



b) $H(j\omega) = \frac{10}{j\omega+5}$

$|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{\omega^2+25}}$



$\measuredangle H(j\omega) = -\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{5}$

c) Prisilni odziv na $u(t) = 3\sqrt{2}\cos(5t+\frac{\pi}{3}) - 6\sin(5\sqrt{3}t+\frac{\pi}{4})$

$\omega = 5$ $\quad |H(j5)| = \frac{10}{\sqrt{25+25}} = \sqrt{2}$

$\measuredangle H(j5) = -\mathrm{arctg}\,\frac{5}{5} = -\pi/4$

$\omega = 5\sqrt{3}$ $\quad |H(j5\sqrt{3})| = \frac{10}{\sqrt{25+25\cdot 3}} = \frac{10}{10} = 1$

$\measuredangle H(j5\sqrt{3}) = -\mathrm{arctg}\,\frac{5\sqrt{3}}{5} = -\pi/3$

$y(t) = 6\cos(5t+\frac{\pi}{12}) - 6\sin(5\sqrt{3}t-\pi/12)$

d) ostane samo prisilni odziv

③ $8y(n)+2y(n-1)-y(n-2)=5u(n)$

$u(n)=3^{-n}\mu(n)$, $y(-1)=3$, $y(-2)=9$

a) KARAKTERISTIČNI POLINOM: $8+2q^{-1}-q^{-2}$

KARAKTERISTIČNA JEDNADŽBA: $8+2q^{-1}-q^{-2}=0$

$8+2q^{-1}-q^{-2}=(4-q^{-1})(2+q^{-1})=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q_1=\frac{1}{4}, \; q_2=-\frac{1}{2}$ KARAKTERISTIČNE VRIJEDNOSTI

b) Odziv mirnog sustava je odziv na zadanu pobudu $u(n)$ uz $y(-1)=y(-2)=0$.

$$H(z)=\frac{5}{8+2z^{-1}-z^{-2}}, \quad U(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{3}{3-z^{-1}}$$

$$Y_M(z)=H(z)\cdot U(z)=\frac{15}{(4-z^{-1})(2+z^{-1})(3-z^{-1})}=$$

$$=\frac{\frac{15}{(2+4)(3-4)}}{4-z^{-1}}+\frac{\frac{15}{(4+2)(3+2)}}{2+z^{-1}}+\frac{\frac{15}{(4-3)(2+3)}}{3-z^{-1}}=$$

$$=-\frac{15}{24}\,\frac{4}{4-z^{-1}}+\frac{15}{60}\,\frac{2}{2+z^{-1}}+\frac{15}{15}\cdot\frac{3}{3-z^{-1}} \multimap$$

$$\multimap\; y_{MIRNI}(n)=\left(-\frac{15}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{15}{60}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{15}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\cdot\mu(n)=$$

$$=\left(-\frac{5}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\mu(n)$$

c) $y_{NEPOBUĐENI}(n) = A\cdot \rho_1^n + B\cdot \rho_2^n = A\left(\frac{1}{4}\right)^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$\begin{cases} y(-1) = 3 = 4A - 2B \\ y(-2) = 9 = 16A + 4B \end{cases}$$

$$2\cdot 3 + 9 = (2\cdot 4 + 16)A \Rightarrow A = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$-4\cdot 3 + 9 = (2\cdot 4 + 4)\cdot B \Rightarrow B = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$y_{NEPOBUĐENI}(n) = \frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

e) Totalni odziv je zbroj odziva mirnog i nepobuđenog sustava:

$$y_{TOTALNI}(n) = y_{MIRNI}(n) + y_{NEPOBUĐENI}(n) =$$

$$= \left(\frac{5}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\mu(-n+1) + \left(\frac{1}{3}\right)^n \mu(n)$$

d) Prisilni odziv je dio totalnog odziva koji titra frekvencijom pobude. Kako je $u(n) = 3^{-n}\mu(n)$ vrijedi:

$$y_{PRISILNI}(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mu(n)$$

4.) $y''(t) + 8y'(t) + 15y(t) = 2u''(t) + 4u'(t) + 2u(t)$

a) $y'' + 8y' + 15y = \delta(t)$

$h_A(0^+) = \emptyset$

$h_A'(0^+) = 1$

$h_A'' + 8h_A' + 15h_A = \emptyset$

$s^2 + 8s + 15 = \emptyset$

$(s+3)(s+5) = \emptyset \Rightarrow s = -3, -5$

$h_A = C_1 \cdot e^{-3t} + C_2 \cdot e^{-5t}$

$h_A'(t) = -3C_1 \cdot e^{-3t} - 5C_2 \cdot e^{-5t}$

$h_A(t) = \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-3t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-5t}\right)\mu(t)$

$h_A(0^+) = C_1 + C_2 = \emptyset$

$C_2 = -C_1$

$h_A'(0^+) = -3C_1 - 5C_2 = 1$

$-3C_1 + 5C_2 = 1$

$2C_1 = 1$

$\cancel{C_1 = C_2}$

$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}$

$h(t) = 2\delta(t) + 2h_A'' + 4h_A' + 2h_A$

$= 2\delta(t) + 9 \cdot e^{-3t} - 25 \cdot e^{-5t} - 6 \cdot e^{-3t} + 10 \cdot e^{-5t} + e^{-3t} - e^{-5t}$

$h(t) = \left(2\delta(t) + 4 \cdot e^{-3t} - 16 \cdot e^{-5t}\right)\mu(t)$

$h_A' = -\frac{3}{2} \cdot e^{-3t} + \frac{5}{2} \cdot e^{-5t}$

$h_A'' = \frac{9}{2} \cdot e^{-3t} - \frac{25}{2} \cdot e^{-5t}$

4). b)

$$H(s) = \frac{2s^2+4s+2}{s^2+8s+15} = 2 + \frac{-12s-28}{(s+3)(s+5)}$$

$$2s^2+4s+2 : s^2+8s+15 = \boxed{2}$$
$$-2s^2 \mp 16s \mp 30$$
$$\boxed{-12s-28}$$

$$H(s) = 2 + \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+5}$$

$$A+B = -12$$
$$5A+3B = -28$$
$$-3A-3B = 36$$

$$\boxed{A = 4}$$
$$\boxed{B = -16}$$

$$H(s) = 2 + \frac{4}{s+3} + \frac{-16}{s+5}$$

$$h(t) = 2\delta(t) + 4 \cdot e^{-3t} - 16 \cdot e^{-5t}$$

4. e) $\cancel{u}(t) = e^{-t}\mu(t)$

$$u(t) = 2\delta(t) + 4\cdot e^{-3t}\mu(t) - 16\cdot e^{-5t}\mu(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau)\cdot u(t)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-(t-\tau)}\mu(t-\tau)\right]\cdot\left[2\delta(\tau) + 4\cdot e^{-3\tau}\mu(\tau) - 16\cdot e^{-5\tau}\mu(\tau)\right]d\tau$$

$\boxed{t > \emptyset}$

$$= \int_0^{t} e^{-t+\tau}\cdot 2\delta(\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{-t+\tau}\cdot 4\cdot e^{-3\tau}\,d\tau - 16\int_0^t e^{-t+\tau}\cdot e^{-5\tau}\,d\tau$$

$$= 2e^{-t} + 4\cdot\frac{e^{-t-2\tau}}{-2}\Bigg|_\emptyset^t - 16\cdot\frac{e^{-t-4\tau}}{-4}\Bigg|_\emptyset^t$$

$$= 2\cdot e^{-t} - 2\left[e^{-t-2t} - e^{-t}\right] + 4\left[e^{-t-4t} - e^{-t}\right]$$

$$= 4e^{-5t} - 2e^{-3t}, \quad t > \emptyset$$

$$= \underline{4e^{-5t}\mu(t) - 2\cdot e^{-3t}\mu(t)}$$

5A) $h(n) = \{\underline{4}, -2, 4, -2, \dots\}$

a) Sustav je na granici stabilnosti, jer $h(n)$ ne teži niti u ∞, niti u $\emptyset$, kada $n \to \infty$.

b) $u(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n)$

$y(-2) = y(-1) = 1$

- ODZIV MIRNOG SUSTAVA:

Primjetite da se $h(n)$ može zapisati kao

$h(n) = \mu(n) + 3 \cdot (-1)^n \mu(n) \Rightarrow$

$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} = \frac{z}{z-1} + 3\frac{z}{z+1} = \frac{2z(2z-1)}{z^2-1}$

Iz $u(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n) \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2z}{2z-1}}$

$\Rightarrow Y_m(z) = H(z) \cdot U(z) = \frac{4z^2}{z^2-1} = \frac{2z}{z-1} + \frac{2z}{z+1}$

$\Rightarrow Y_m(n) = \boxed{(2 \cdot 1^n + 2 \cdot (-1)^n)\mu(n)}$

- ODZIV NEPOBUĐENOG SUSTAVA:

Iz $H(z) = \boxed{\frac{4z^2 - 2z}{z^2 - 1}} = \frac{4 - 2z^{-1}}{1 - z^{-2}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{4 - 2z^{-1}}{1 - z^{-2}}$

$\Rightarrow \boxed{y(n) - y(n-2) = 4u(n) - 2u(n-1)}$; $u(n) = 0$, $y(-1) = y(-2)$;

$y_{np}(n) = 1^n \mu(n)$

$\Rightarrow$ UKUPNO: $y(n) = y_m(n) + y_{np}(n) = \boxed{(3 \cdot 1^n + 2(-1)^n)\mu(n)}$

c) PRISILNI ODZIV: $y_{pr} = \emptyset$ (u odzivu nema impulsa)

Signali i sustavi

Završni ispit (grupa B) – 19. lipnja 2013.

1. (9 bodova) Vremenski diskretan linearan, kauzalan i vremenski nepromjenjiv sustav opisan je diferencijskom jednadžbom

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 2u(n).$$

a) **(2 boda)** Odredite prijenosnu funkciju sustava.

b) **(2 boda)** Ispitajte stabilnost sustava.

c) **(2 boda)** Odredite impulsni odziv sustava.

d) **(3 boda)** Pomoću konvolucijskog zbroja nađite odziv MIRNOG sustava na pobudu $u(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n)$.

2. (9 bodova) Vremenski kontinuirani kauzalan sustav opisan je diferencijalnom jednadžbom

$$y'(t) + 7y(t) = 14u(t).$$

a) **(1 bod)** Odredite prijenosnu funkciju sustava.

b) **(3 boda)** Izračunajte i skicirajte amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku zadanog sustava.

c) **(4 boda)** Odredite PRISILNI odziv zadanog sustava na pobudu $u(t) = 3\sqrt{2}\cos\left(7t + \frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(7\sqrt{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$.

d) **(1 bod)** Komentirajte ponašanje TOTALNOG odziva zadanog sustava za $t \gg 0$ uz $y(0^-) = 0$.

3. (9 bodova) Vremenski diskretan linearan, kauzalan i vremenski nepromjenjiv sustav opisan je diferencijskom jednadžbom

$$8y(n) - 2y(n-1) - y(n-2) = 7u(n).$$

Neka je pobuda $u(n) = 3^{-n}\,\mu(n)$ i neka je $y(-1) = -3$ i $y(-2) = -9$.

a) **(2 boda)** Za zadani sustav odredite karakteristični polinom i karakterističnu jednadžbu te zatim izračunajte karakteristične vrijednosti.

b) **(2 boda)** Odredite odziv mirnog sustava.

c) **(2 boda)** Odredite odziv nepobuđenog sustava.

d) **(2 boda)** Odredite prisilni odziv sustava.

e) **(1 bod)** Odredite totalni odziv sustava.

4. (9 bodova) Vremenski kontinuirani kauzalan sustav opisan je diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 10y'(t) + 24y(t) = 2u''(t) + 5u'(t) + 2u(t).$$

a) **(4 boda)** Odredite impulsni odziv zadanog sustava postupkom u vremenskoj domeni.

b) **(3 boda)** Odredite impulsni odziv zadanog sustava korištenjem Laplaceove transformacije.

c) **(2 boda)** Pomoću konvolucijskog integrala odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(t) = e^{-t}\,\mu(t)$.

5. (9 bodova) Neka je impulsni odziv linearnog, kauzalnog i vremenski nepromjenjivog vremenski diskretnog sustava $h(n) = \{\underline{2}, -1, 2, -1, 2, -1, \ldots\}$ (sljed $2, -1$ se ponavlja unedogled).

a) **(1 bod)** Na temelju impulsnog odziva ispitajte stabilnost sustava.

b) **(6 bodova)** Nađite odziv sustava na kauzalnu pobudu $u(n) = \{\underline{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\}$ ako je poznato da je $y(-2) = y(-1) = 1$.

c) **(2 boda)** Odredite prisilni odziv sustava.

1

a) $H(z) = \dfrac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$

b) $1-\frac{1}{2}z^{-1}=0 \Rightarrow z=\frac{1}{2}, \quad |\frac{1}{2}|<1$

SUSTAV JE STABILAN

c) $H(z) = \dfrac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \circ\!\!-\!\!\bullet\; h(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n)$

d) $y_M(n) = h(n) * u(n) =$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^i \mu(i) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-i} \mu(n-i) =$$

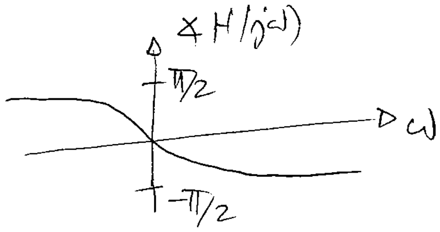
$$= \begin{cases} 0, & n<0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = \end{cases}$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(2^{n+1}-1\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

2.

$$y'(t) + 7y(t) = 14u(t)$$

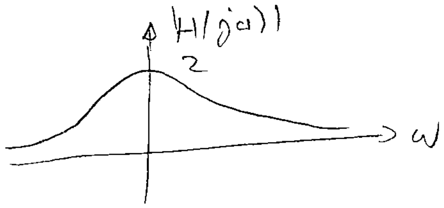
a) $H(s) = \frac{14}{s+7}$



b) $H(j\omega) = \frac{14}{j\omega+7}$

$\measuredangle H(j\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{7}$

$|H(j\omega)| = \frac{14}{\sqrt{49+\omega^2}}$



c) prisilni odziv na $u(t) = 3\sqrt{2}\cos\left(7t + \frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(7\sqrt{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$

$\omega = 7$ $\quad |H(j7)| = \frac{14}{\sqrt{49+49}} = \sqrt{2}$

$\measuredangle H(j7) = -\operatorname{arctg}\frac{7}{7} = -\pi/4$

$\omega = 7\sqrt{3}$ $\quad |H(j7\sqrt{3})| = \frac{14}{\sqrt{49 \cdot 3 + 49}} = 1$

$\measuredangle H(j7\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\frac{7\sqrt{3}}{7} = -\pi/3$

$$y(t) = 6\cos\left(7t + \frac{\pi}{12}\right) - 6\sin\left(7\sqrt{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$$

d) ostane samo prisilni odziv

(3) $8y(n) - 2y(n-1) - y(n-2) = 7u(n)$

$u(n) = 3^{-n}\mu(n)$, $y(-1) = -3$, $y(-2) = -9$

a) KARAKTERISTIČNI POLINOM: $8 - 2q^{-1} - q^{-2}$

KARAKTERISTIČNA JEDNADŽBA: $8 - 2q^{-1} - q^{-2} = 0$

$8 - 2q^{-1} - q^{-2} = (4 + q^{-1})(2 - q^{-1}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q_1 = -\frac{1}{4}, \; q_2 = \frac{1}{2}$ KARAKTERISTIČNE VRIJEDNOSTI

b) Odziv mirnog sustava je odziv za zadanu pobudu $u(n)$ uz $y(-1) = y(-2) = 0$.

$$H(z) = \frac{7}{8 - 2z^{-1} - z^{-2}}, \quad U(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{3}{3 - z^{-1}}$$

$$Y_M(z) = H(z) \cdot U(z) = \frac{21}{(4 + z^{-1})(2 - z^{-1})(3 - z^{-1})} =$$

$$= \frac{\frac{21}{(2+4)(3+4)}}{4 + z^{-1}} + \frac{\frac{21}{(4+2)(3-2)}}{2 - z^{-1}} + \frac{\frac{21}{(4+3)(2-3)}}{3 - z^{-1}} =$$

$$= \frac{21}{168} \cdot \frac{4}{4 + z^{-1}} + \frac{21}{12} \cdot \frac{2}{2 - z^{-1}} - \frac{21}{21} \frac{3}{3 - z^{-1}} \multimap$$

$$\multimap \; y_{MIRNI}(n) = \left(\frac{21}{168}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{21}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{21}{21}\left(\frac{1}{3}\right)^n \right)\mu(n) =$$

$$= \left(\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{21}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)\mu(n)$$

c) $y_{NEPOBUĐENI}(n) = A\cdot \rho_1^{\,n} + B\cdot \rho_2^{\,n} = A\left(-\frac{1}{4}\right)^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$\begin{cases} y(-1) = -3 = -4A + 2B \\ y(-2) = -9 = 16A + 4B \end{cases}$$

$$3\cdot 2 - 9 = (2\cdot 4 + 16)A \Rightarrow A = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}$$

$$-3\cdot 4 - 9 = (2\cdot 4 + 4)B \Rightarrow B = -\underline{21}$$

$$y_{NEPOBUĐENI}(n) = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{21}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

e) Totalni odziv je zbroj odziva mirnog i nepobuđenog sustava:

$$y_{TOTALNI}(n) = y_{MIRNI}(n) + y_{NEPOBUĐENI}(n) =$$

$$= \left(-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{21}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\mu(-n+1) - \left(\frac{1}{3}\right)^n\mu(n)$$

d) Prisilni odziv je dio totalnog odziva koji titra frekvencijom pobude. Kako je $u(n) = 3^{-n}\mu(n)$ vrijedi:

$$y_{PRISILNI}(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n\mu(n)$$

4 B

$y''(t)+10y'(t)+24y(t)=2u''(t)+5u'(t)+2u(t)$

a) $y''+10y'+24y=\delta(t)$

$h_A''+10h_A'+24h_A=0 \qquad h_A(0^+)=0 \quad h_A'(0^+)=1$

$s^2+10s+24=0 \Rightarrow (s+6)(s+4)=0 \Rightarrow s_1=-4 \quad s_2=-6$

$h_A=C_1e^{-4t}+C_2e^{-6t}$ / $h_A(0^+)=C_1+C_2=0$ / $C_1=\frac{1}{2}$

$h_A'=-4C_1e^{-4t}-6C_2e^{-6t}$ / $h_A'(0^+)=-4C_1-6C_2=1$ / $C_2=-\frac{1}{2}$

$h_A(t)=\frac{1}{2}e^{-4t}-\frac{1}{2}e^{-6t}$ / $h_A'(t)=-2e^{-4t}+3e^{-6t}$ / $h_A''(t)=8e^{-4t}-18e^{-6t}$

$h(t)=2\delta(t)+2h_A''(t)+5h_A'(t)+2h_A(t)=$

$=2\delta(t)+16e^{-4t}-36e^{-6t}-10e^{-4t}+15e^{-6t}+e^{-4t}-e^{-6t}=$

$=2\delta(t)+7e^{-4t}-22e^{-6t} \qquad t\geq 0$

b) $H(s)=\dfrac{2s^2+5s+2}{s^2+10s+24}=2+\dfrac{-15s-46}{(s+6)(s+4)}=2+\dfrac{A}{s+6}+\dfrac{B}{s+4}$

$A+B=-15$ / $A=-22$ / $H(s)=2+\dfrac{-22}{s+6}+\dfrac{7}{s+4}$

$4A+6B=-46$ / $B=7$

$h(t)=2\delta(t)+(7e^{-4t}-22e^{-6t})u(t)$

c) $y(t)=\int_{0^-}^{t}(2\delta(\tau)+7e^{-4\tau}-22e^{-6\tau})e^{-(t-\tau)}d\tau=$

$=2\int_{0^-}^{t}\delta(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau+7\int_0^t e^{-3\tau-t}d\tau-22\int_0^t e^{-5\tau-t}d\tau=$

$=2e^{-t}+7\frac{e^{-t}}{-3}e^{-3\tau}\Big|_0^t-22\frac{e^{-t}}{-5}e^{-5\tau}\Big|_0^t=$

$=2e^{-t}-\frac{7}{3}e^{-t}(e^{-3t}-1)+\frac{22}{5}e^{-t}(e^{-5t}-1)=$

$=2e^{-t}-\frac{7}{3}e^{-4t}+\frac{7}{3}e^{-t}+\frac{22}{5}e^{-6t}-\frac{22}{5}e^{-t}=$

$=-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{7}{3}e^{-4t}+\frac{22}{5}e^{-6t}$

(5B) $h(n) = \{\underline{2}, -1, 2, -1, \dots\}$.

a) Sustav je na granici stabilnosti, jer $h(n)$ nije niti ∞ niti $\emptyset$, kada $n \to \infty$.

b) $u(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n)$

$y(-2) = y(-1) = 1$

- ODZIV MIRNOG SUSTAVA:

Primijetite da se $h(n)$ može zapisati kao

$h(n) = \frac{1}{2}\mu(n) + \frac{3}{2}(-1)^n \mu(n)$. $\Rightarrow$

$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{z}{z+1} \Rightarrow$

$H(z) = \frac{2z^2 - z}{z^2 - 1} = \frac{z(2z-1)}{z^2-1}$

Iz $u(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} U(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{2z}{2z-1}$

$\Rightarrow Y_m(z) = H(z) \cdot U(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z+1)} = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1}$

$\Rightarrow y_m(n) = (1^n + (-1)^n)\mu(n)$.

- ODZIV NEPOBUĐENOG SUSTAVA:

Iz $H(z) = \frac{2z^2 - z}{z^2-1} = \frac{2 - z^{-1}}{1 - z^{-2}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2 - z^{-1}}{1 - z^{-2}} \Rightarrow$

$y(n) - y(n-2) = 2u(n) - u(n-1)$, $u(n) = 0$, $y(-1) = y(-2)$

$y_{np}(n) = 1^n \mu(n)$

- UKUPNO

$y(n) = (y_m + y_{np})(n) = (2 \cdot 1^n + (-1)^n)\mu(n)$

c) PRISILNI ODZIV: $y_{pr} = \emptyset$ (u odzivu nema impulsa)