

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

XIII. tjedan

Diferencijalne jednačbe

1. Zadan je sustav $\frac{dy}{dt} + 5y + 2 = u(t)$, $y(0)=0$. Je li sustav linearan? Ako je obrazložite zašto je, a ako nije objasnite zašto nije! Zašto nam je važno je li sustav linearan, tj. što nam to znači u traženju odziva sustava na neku pobudu?

2. Zadan je kontinuirani sustav

$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) + 39y(t) = u''(t) + 2u(t).$$

Ispitajte da li je ovaj sustav stabilan.

3. Kontinuirani sustav prvog reda zadan je diferencijalnom jednačbom $y'(t) + y(t) = u'(t) + 2u(t)$. Na ulaz sustava dovedena je pobuda $u(t) = 3\mu(t)$. Nađite odziv sustava ukoliko su početni uvjeti:

- $y(0^-) = 9$,
- $y(0^+) = 9$.

4. Kontinuirani sustav opisan je diferencijalnom jednačbom čije je homogeno rješenje

$$y_h(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{5}{3}e^{2t}.$$

Sustav nema nula (u diferencijalnoj jednačbi ne postoje derivacije ulaza). Odredite tu diferencijalnu jednačbu. Odredite ukupan i odziv mirnog sustava ako se sustav pobudi s $u(t) = \frac{5}{2}e^{2t}$, $t \geq 0$. Odredite početna stanja. Ispitajte stabilnost sustava.

5. Riješite diferencijalnu jednačbu

$$y'(t) + 2y(t) = u(t),$$

ako je ulaz $u(t) = A \cos(\omega_0 t) \mu(t)$, pri čemu je A realna konstanta i uzimajući da su početni uvjeti jednaki nula. Bez dodatnog računanja odredite rješenje ove jednačbe ako je ulaz

$$u(t) = B \cos(\omega_0(t-1)) \mu(t-1).$$

6. Na ulaz sustava $-\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$ dovedemo signal $u(t) = \mu(-t)$. Kako će izgledati izlaz iz sustava u slučaju:

- $y(0^+) = 0$,
- $y(0^+) = 1$.

7. Kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednačbom

$$y'(t) + 2y(t) = u'(t) + u(t).$$

Provjerite, bez rješavanja zadane diferencijalne jednačbe, je li impulsni odziv ovog sustava $h(t) = -e^{-2t} \mu(t) + \delta(t)$.

8. Zadan je kontinuiran sustav $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t)$, $y(0^+) = 0$, $y'(0^+) = 0$. Nađite odziv sustava na sljedeće pobude:

- $u(t) = t\mu(t)$,
- $u(t) = \mu(t)$,
- $u(t) = \delta(t)$,
- $u(t) = t\mu(t) + \mu(t) + \delta(t)$.

9. Zadan je vremenski kontinuirani sustav

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = u(t)$$

gdje je $u(t)$ ulaz, $y(t)$ izlaz, a a konstanta. Početni uvjet je $y(0^-) = 0$.

- Naći impulsni odziv zadanog sustava.
- Naći odziv na jedinični skok, bez korištenja poznatog impulsnog odziva.
- Naći odziv na jedinični skok, uz poznati impulsni odziv iz a. dijela zadatka.
- Naći odziv na impuls, uz poznati odziv na jedinični skok iz b. dijela zadatka.

10. Naći impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t) + \frac{du(t)}{dt}.$$

11. Kauzalni LTI kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednačinom:

$$y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = u'(t) + 4u(t).$$

Nađite impulsni odziv ovog sustava.

12. Zadan je odziv na step LTI sustava $y(t) = \cos(\omega_0 t) \mu(t)$. Nađite impulsni odziv sustava. Kakve početne uvjete pri tome podrazumijevate? Možete li generalizirati rezultat?

13. Zadan je integrator. Ulaz i izlaz integratora vezani su relacijom

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau.$$

- Nađite impulsni odziv sustava,
- Ispitajte stabilnost sustava.

14. Veza između ulaza i izlaza sustava dana je izrazom:

$$y(t) = \int_0^1 u(t-h) dh, \forall t \in \mathbb{R}$$

Odredite:

- Impulsni odziv sustava
- Odziv sustava na pobudu $u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

15. Zadan je kontinuirani sustav $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t)$. Odredite odziv sustava u vremenskoj domeni ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = (12t + 16)\mu(t)$ te ako su početni uvjeti $y(0^-) = 3$, $y'(0^-) = -8$. Odredite prirodni i prisilni odziv, te odziv mirnog i nepobuđenog sustava. Odredite impulsni odziv sustava. Komentirajte stabilnost sustava.

16. Zadan je kontinuirani sustav $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u(t)$. Odredite odziv mirnog sustava u vremenskoj domeni ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = (4 + \cos(4t))\mu(t)$. Nađite impulsni odziv sustava. Komentirajte stabilnost sustava.

Dodatni zadaci:

T. Petković, B. Jeren i ostali: Zbirka riješenih zadataka iz signala i sustava, 5. poglavlje. Linearne diferencijalne jednačbe, str. 42. -55.

Primjeri 5.1. – 5.6, Zadaci 5.1. – 5.10.