1. Homogeno rješenje diferencijalne jednadžbe

Zadatak je zadan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t)+a_1 y'(t)+a_2 y(t)=b_0 u''(t)+b_1 u'(t)+b_2 u(t) \quad ,$$

početnim uvjetima $y(0^-)$ i $y'(0^-)$ i pobudom $u(t)$.
Uz $y''(t)$ inače stoji a_0 , no uvijek vrijedi $a_0=1$. Također često vrijedi $b_0=0$.

Homogeno se rješenje traži na slijedeći način.
Prvo zanemarimo pobudu, tj. postavimo sustav jednak nuli.

$$y''(t)+a_1 y'(t)+a_2 y(t)=0$$

Idući korak je riješavanje kvadratne jednadžbe koja se dobije pisanjem $s^n=y^{(n)}$ pa imamo

$$s_2+a_1 s+a_2=0$$
$$s_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4\cdot a_2}}{2}$$

Kada smo našli realne ili kompleksne brojeve s_1 i s_2 pišemo homogeno rješenje.

$$y_h=C_1 e^{s_1 t}+C_2 e^{s_2 t}$$

Ako vrijedi $s_1=s_2$ pišemo slijedeće:

$$y_h=C_1 e^{st}+C_2 t\, e^{st}$$

Konstante C_1 i C_2 za sada ostaju nepoznanice.

<u>Primjer 1:</u>

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=u'(t)+2u(t)$$

$$s^2+4s+3=0$$
$$s_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm2}{2}$$
$$s_1=-1 \quad , \quad s_2=-3$$

$$y_h=C_1 e^{-t}+C_2 e^{-3t}$$

<u>Primjer 2:</u>

$$y''(t)-4y'(t)+4y(t)=2u'(t)+u(t)$$

$$s^2-4s+4=0$$
$$s_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm0}{2}$$
$$s_1=s_2=2$$

$$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$$

2. Partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe

Zadatak je zadan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t) \quad ,$$

početnim uvjetima $y(0^-)$ i $y'(0^-)$ i pobudom $u(t)$.

Partikularno rješenje postavljamo ovisno o zadanoj pobudi po slijedećoj tablici.

$u(t)$	$y_p(t)$
$A(konst.)$	K
$Ar^t, r \neq s_i$	Kr^t
$Ar^t, r = s_i$	Ktr^t
At^m	$K_0 + tK_1 + \ldots + t^m K_m$
$r^t t^m$	$r^t (K_0 + tK_1 + \ldots + t^m K_m)$
$A\cos(\omega_0 t)$	$K_0 \cos(\omega_0 t) + K_1 \sin(\omega_0 t)$
$A\sin(\omega_0 t)$	$K_0 \cos(\omega_0 t) + K_1 \sin(\omega_0 t)$

Nakon toga partikularno rješenje uvrštavamo u zadanu diferencijalnu jednadžbu da nađemo nepoznanice.

$$y_p''(t) + a_1 y_p'(t) + a_2 y_p(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t)$$

Jednadžba koju se dobije se uvijek lako može riješiti (jer je namještena) iako na početku izgleda složeno. Kada smo našli konstante* pišemo partikularno rješenje y_p bez nepoznanica te ga množimo s $\mu(t)$ ako je pobuda kauzalna (tj. ako vrijedi $u(t) = \mu(t) f(t)$). U zadacima je pobuda uvijek** kauzalna pa se partikularno rješenje uvijek množi s $\mu(t)$.
Radi se o tome da je prirodni odziv (homogeno rješenje) svevremenski (jer sustav postoji uvijek), a prisilni odziv (partikularno rješenje) postoji samo onda kada postoji pobuda.

*Ako je partikularno rješenje neko koje ima više od jedne konstante rješavanje se komplicira. To nikad neće biti zadano. Drugim riječima samo su prva tri retka gornje tablice relevantna.

**Postoje zadaci u Laplaceovoj domeni gdje pobuda nije kauzalna; odziv će istitrati (jer je sustav stabilan) te se gledaju samo promjene u trenutku $t=0$ i dodaju se postojećem odzivu (jer je sustav linearan - aditivnost).

<u>Primjer 1:</u>

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = u'(t) + 2u(t)$$
$$u(t) = \mu(t)$$

$$y_p = K$$
$$0 + 0 + 3K = 0 + 2$$
$$K = \frac{2}{3}$$

$$y_p = \frac{2}{3}\mu(t)$$

Primjer 2:

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2u'(t) + u(t)$$
$$u(t) = 2\cdot 3^t \mu(t) \quad , \quad s_i \neq 3$$

$$y_p = K\cdot 3^t$$
$$3^t \ln^2 3\, K - 4\cdot 3^t \ln 3\, K + 4\cdot 3^t K = 4\cdot 3^t \ln 3 + 2\cdot 3^t$$
$$K \ln^2 3 - 4K \ln 3 + 4K = 4\ln 3 + 2$$
$$K = \frac{4\ln 3 + 2}{\ln^2 3 - 4\ln 3 + 4}$$

$$y_p = \frac{4\ln 3 + 2}{\ln^2 3 - 4\ln 3 + 4} 3^t \mu(t)$$

3. Totalni odziv kontinuiranog sustava u vremenskoj domeni

Totalni odziv je zbroj prirodnog (homogeno rješenje) i prisilnog (partikularno rješenje) odziva. U zadatku su također zadani početni uvjeti $y(0^-)$ i $y'(0^-)$ potrebni za računanje konstanti C_1 i C_2 iz homogenog (dakle i totalnog) rješenja. To su stanja sustava u trenutku prije nule. Za računanje konstanti će nam zapravo trebati $y(0^+)$ i $y'(0^+)$, dakle stanja u trenutku poslije nule. Koristimo zadane konstante a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 i b_2 za pronalaženje $y(0^+)$ i $y'(0^+)$ u slijedećim jednadžbama:

$$\Delta y = b_0 u(0^+) \quad \text{i}$$
$$\Delta y' + a_1 \Delta y = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+) \quad ,$$
$$t.d.\, \Delta y^{(i)} = y^{(i)}(0^+) - y^{(i)}(0^-)$$

Kada znamo $y(0^+)$ i $y'(0^+)$ to uvrštavamo u totalno rješenje, tj. derivirano totalno rješenje za trenutak $t = 0^+$ i rješavamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice za C_1 i C_2 .
Kada izračunamo konstante C_1 i C_2 zapisujemo rješenje $y = y_h + y_p$ bez nepoznanica.

Pogledajmo zadatak iz prvog primjera 1. i 2. poglavlja:

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = u'(t) + 2u(t)$$
$$u(t) = \mu(t) \quad , \quad y(0^-) = 1 \quad , \quad y'(0^-) = 2$$

Dobili smo rješenja:

$$y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} \quad \text{i} \quad y_p = \frac{2}{3}\mu(t) \quad ,$$

dakle totalni odziv je

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + \frac{2}{3}\mu(t) \quad .$$

Izračunajmo sada početne uvjete nakon nule; $y(0^+)$ i $y'(0^+)$.

$$y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+) = 0$$

$$\Rightarrow y(0^+) = y(0^-) = 1$$

$$y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+)$$
$$\Rightarrow y'(0^+) = b_1 u(0^+) + y'(0^-) = 1 + 2 = 3$$

Primjetimo da je derivacija pobude jednaka nuli iako je pobuda $\mu(t)$. To je zato što koristimo pobudu u trenutku nakon nule, a nakon nule nema nikakvih skokova; jedini skok step funkcije je u nuli, nakon nule je vrijednost funkcije 1. S obzirom da je pobuda ~uvijek kauzalna ovdje ćemo uvijek koristiti derivaciju bez stepa, tj. derivaciju nakon nule. Drugim riječima tu pišemo normalnu derivaciju pobude s tim da u pobudi zanemarimo član $\mu(t)$.
Sada imamo $y(0^+) = 1$ i $y'(0^+) = 3$, idemo dalje.
Treba nam derivacija totalnog odziva (nakon nule, dakle $\mu(t) = 1$):

$$y' = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t} \quad .$$

Sada računamo konstante C_1 i C_2:

$$y(0^+) = C_1 + C_2 + \frac{2}{3} = 1$$
$$y'(0^+) = -C_1 - 3C_2 = 3$$
$$\Rightarrow C_1 = -3 - 3C_2$$
$$\Rightarrow -3 - 2C_2 = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow C_2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow C_1 = 2$$
$$\Rightarrow y = 2e^{-t} - \frac{5}{3} e^{-3t} + \frac{2}{3} \mu(t)$$

Totalni odziv je, dakle, zbroj prirodnog i prisilnog odziva.
Postoje još dvije važne vrste odziva: mirni i nepobuđeni. Računaju se na sličan način, te njihov zbroj također daje totalni odziv.
Mirni se odziv dobije kao totalan odziv sustava u kojemu su početni uvjeti jednaki nuli, tj. $y(0^-) = y'(0^-) = 0$. Sve ostalo se radi na isti način, uključujući računanje početnih uvjeta $y(0^+)$ i $y'(0^+)$.
Nepobuđeni se odziv dobije kao totalan odziv sustava bez pobude, tj. $u(t) = 0$ i $b_0 = b_1 = b_2 = 0$.
Također zbog toga pri računanju početnih uvjeta uvijek vrijedi $y(0^+) = y(0^-)$ i $y'(0^+) = y'(0^-)$.
Pogledajmo primjer računanja totalnog odziva pomoću mirnog i nepobuđenog odziva, isti primjer kao maloprije.

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = u'(t) + 2u(t)$$
$$u(t) = \mu(t) \quad , \quad y(0^-) = 1 \quad , \quad y'(0^-) = 2$$

Prvo računamo mirni odziv (svejedno je, naravno), tako da su početni uvjeti (u 0^-) jednaki nuli.
Homogeno i partikularno rješenje računamo isto kao i ranije, tako da imamo $y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$ i $y_p = \frac{2}{3} \mu(t)$. Totalni mirni odziv je $y_m = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + \frac{2}{3} \mu(t)$.
Računamo nove početne uvjete u 0^+:

$$y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+) = 0$$
$$\Rightarrow y(0^+) = 0$$

$$y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+)$$
$$\Rightarrow y'(0^+) - 0 + 0 - 0 = 0 + b_1 u(0^+)$$
$$\Rightarrow y'(0^+) = 1$$

Trebat ćemo derivaciju totalnog mirnog odziva koja je kao i prije: $y_m' = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t}$.
Računamo C_1 i C_2 :

$$y(0^+) = C_1 + C_2 + \frac{2}{3} = 0$$
$$y'(0^+) = -C_1 - 3C_2 = 1$$
$$\Rightarrow C_1 = -1 - 3C_2$$
$$\Rightarrow -1 - 2C_2 = -\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{6} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow y_m = -\frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-3t} + \frac{2}{3} \mu(t)$$

Dobili smo mirni odziv, sada računamo nepobuđeni.

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = u'(t) + 2u(t)$$

Rekli smo: u nepobuđenom odzivu nema pobude, tako da vrijedi:

$$y(0^-) = y(0^+) = 1 \quad , \quad y'(0^-) = y'(0^+) = 2$$

Partikularnog rješenja nema jer nema pobude, dakle $y_h = y_{nep} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$.
Računamo C_1 i C_2 :

$$y(0^+) = C_1 + C_2 = 1$$
$$y'(0^+) = -C_1 - 3C_2 = 2$$
$$\Rightarrow C_1 = -2 - 3C_2$$
$$\Rightarrow -2 - 2C_2 = 1$$
$$\Rightarrow C_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow y_{nep} = \frac{5}{2} e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-3t}$$

Zbrojimo li mirni i nepobuđeni odziv dobit ćemo totalni odziv od početka:

$$y = y_m + y_{nep} = -\frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-3t} + \frac{2}{3} \mu(t) + \frac{5}{2} e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-3t}$$
$$y = 2e^{-t} - \frac{5}{3} e^{-3t} + \frac{2}{3} \mu(t)$$