

Signali i sustavi – zadaci za vježbu

II – tjedan

1. Dokažite da je produkt dva parna (dva neparna) signala paran signal, a produkt parnog i neparnog signala neparan signal

R: Neka je $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$

a) x_1, x_2 - parni

$$x(-t) = x_1(-t) \cdot x_2(-t) = x_1(t) \cdot x_2(t) = x(t)$$

b) x_1, x_2 - neparni

$$x(-t) = x_1(-t) \cdot x_2(-t) = -x_1(t) \cdot [-x_2(t)] = x_1 \cdot x_2 = x(t)$$

c) x_1 - paran, x_2 - neparan.

$$x(-t) = x_1(-t) \cdot x_2(-t) = x_1(t) \cdot [-x_2(t)] = -x_1(t) \cdot x_2(t) = -x(t)$$

Q.E.D.

2. Pokažite da je kompleksni eksponencijalni signal $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ periodičan, te da je njegov temeljni period $2\pi/\omega_0$.

R: signal je periodičan ako $x(t+T) = x(t)$

$$\Rightarrow e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow$$

$$e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow e^{j\omega_0 T} = 1$$

- za $\omega_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 1$ - periodičan za $\forall T$.

- za $\omega_0 \neq 0 \Rightarrow \omega_0 T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$T = n \frac{2\pi}{\omega_0}$$

\Rightarrow Temeljni period T_0 je najmanji $T \Rightarrow$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

3. Neka je $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal. Neka je $x(n)$ diskretni eksponencijalni signal dobiven iz kontinuiranog signala $x(t)$ uniformnim otipkavanjem s periodom T_s . Je li dobiveni diskretni signal uvijek periodičan? Ako nije, pod kojim uvjetima je?

R: Otiskavanjem kontinuiranog signala dobivamo

$$x(n) = x(nT_s) = e^{j\omega_0 n T_s}$$

Ako je $x(n)$ periodičan s temeljnim periodom N_0 , tada vrijedi $x(n) = x(n + N_0)$

$$\Rightarrow e^{j\omega_0 (n + N_0) T_s} = e^{j\omega_0 n T_s} \Rightarrow e^{j\omega_0 N_0 T_s} = 1$$

$$\Rightarrow \omega_0 N_0 T_s = \frac{2\pi}{T_0} N_0 T_s = m 2\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N_0} \in \mathbb{Q}.$$

$\Rightarrow x(n)$ je periodičan, ako je omjer $\frac{T_s}{T_0}$ (perioda otipkavanja i temeljnog perioda signala $x(t)$) racionalan broj.

4. Pronađite energiju diskretnog signala $x(n)=(-0.5)^n \mu(n)$

R:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3} < \infty$$

\Rightarrow signal $x(n)$ je signal energije, tj. energija dobro karakterizira dati signal.

5. Pronađite i skicirajte prvu derivaciju signala $x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ -1, t < 0. \end{cases}$

R! $x(t) = \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \Rightarrow$

$$x'(t) = u'(t) - u'(-t) =$$

$$\Rightarrow x'(t) = \delta(t) - [-\delta(t)] = 2\delta(t)$$

