Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

25. ožujka 2013.

Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- već je prije pokazano kako svaki vremenski diskretan signal možemo prikazati kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m), \tag{1}$$

a vremenski kontinuirani signal kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

- periodičan vremenski kontinuiran signal, periode $2\pi/\omega_0$, razlažemo (F. red) na zbroj kompleksnih eksponencijala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

gdje su F_k, za $\forall k \in \mathbb{Z}$ koeficijenti Fourierovog reda

Razlaganje aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala pomoću kompleksnih eksponencijalnih signala

- aperiodičan vremenski kontinuiran signal možemo razložiti pomoću kompleksnih eksponencijalnih signala[1] kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega \tag{3}$$

gdje je $F(j\omega)$, spektar signala $f(t)$, dan s

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt \tag{4}$$

[1] Ovdje nema ograničenja kojom periodičnost signala diktira korištenje eksponencijala frekvencija vezanih uz osnovnu periodu, pa je moguće razlaganje u linearnu kombinaciju kompleksnih eksponencijala s kontinuumom frekvencija što je prikazano gornjim integralom. Sukladno toj interpretaciji, $F(j\omega)(d\omega/2\pi)$ prepoznajemo kao "amplitude" svake od eksponencijala u linearnoj kombinaciji. Vidi dodatak.

Fourierova transformacija vremenski kontinuiranih signala

- jednadžbe (4) i (3) predstavljaju transformacijski par pri čemu se definiraju kao
  - Fourierova transformacija (eng. Continuous-Time Fourier transform – *CTFT*)

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

  - inverzna Fourierova transformacija (eng. Inverse Continuous-Time Fourier transform – *ICTFT*)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- koriste se i oznake[2]

$$F(j\omega) = CTFT\{f(t)\}, \quad \text{ili} \quad f(t) \xleftrightarrow{CTFT} F(j\omega)$$

[2] u uobičajenoj komunikaciji koristi se oznaka FT, dakle jednostavno Fourierova transformacija, te oznaka $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$

Fourierova transformacija vremenski kontinuiranih signala

- Fourierovom transformacijom vremenski kontinuiranom aperiodičnom signalu, definiranom u vremenskoj domeni, pridružuje se frekvencijski kontinuiran aperiodičan signal, definiran u frekvencijskoj domeni

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- inverznom Fourierovom transformacijom frekvencijski kontinuiranom aperiodičnom signalu (spektru), definiranom u frekvencijskoj domeni, pridružuje se vremenski kontinuiran aperiodičan signal, definiran u vremenskoj domeni

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Fourierova transformacija – drugi način zapisa

- transformacijski par, za neki aperiodični signal $y(t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t}\, dt, \quad y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \tag{5}$$

zamjenom $\omega = 2\pi f$, izražavamo kao

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t}\, dt, \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi f t}\, df \tag{6}$$

- jednadžbe (6) se pretežno koriste u komunikacijama i obradbi slike, a jednadžbe (5) u analizi i sintezi sustava, automatici, elektronici.
- u ovom predmetu koristimo zapis (5)

Konvergencija Fourierove transformacije

- slično kao kod Fourierovog reda, i ovdje postoje dvije klase signala za koje Fourierova transformacija konvergira

1. signali konačne totalne energije za koje vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < +\infty$$

2. signali koji zadovoljavaju Dirichletove uvjete

   (a) signal f je apsolutno integrabilan

   $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$$

   (b) signal f ima konačni broj maksimuma i minimuma, u bilo kojem konačnom intervalu vremena

   (c) ima konačni broj diskontinuiteta, u bilo kojem konačnom intervalu vremena, pri čemu svaki od diskontinuiteta mora biti konačan

   (d) na mjestu diskontinuiteta, $(f(t_d^+) \neq f(t_d^-))$, signal konvergira prema $\frac{(f(t_d^+)+f(t_d^-))}{2}$

Fourierova transformacija vremenski kontinuiranih signala

- rezultat $CTFT$,

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

  naziva se i Fourierov spektar ili jednostavno spektar signala $f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

- F je kompleksna funkcija realne varijable[3] ω i pišemo

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\angle F(j\omega)}$$

  gdje su $|F(j\omega)|$ amplitudni spektar, a $\angle F(j\omega)$ fazni spektar

[3] naizgled zbunjuje oznaka $F(j\omega)$, a ne $F(\omega)$, no to je samo stvar konvencije jer se želi istaknuti kako je funkcija definirana na imaginarnoj osi (sve su frekvencije kompleksnih eksponencijala na $j\omega$ osi). Smisao konvencije postaje jasan kasnije, pri usporedbi Fourierove i Laplaceove transformacije

Fourierova transformacija – Parsevalova jednakost

energija aperiodičnog kontinuiranog signala[4] $f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, čija je Fourierova transformacija $F(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, je

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt, \quad \text{za } |f(t)|^2 = f(t) f^*(t) \Rightarrow$$

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) e^{-j\omega t} \, d\omega \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \, d\omega$$

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \, d\omega$$

što je Parsevalova jednakost za aperiodične vremenski kontinuirane signale konačne energije, i izražava princip očuvanja energije u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

[4] $f(t)$ i $f^*(t)$ su konjugirano kompleksni

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa

- *CTFT* pravokutnog pulsa

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

je

$$CTFT\{p_\tau(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}\, dt = \tau \frac{sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega}$$

- spektar je realna funkcija, kao posljedica parnosti signala p_τ (kasnije se detaljno objašnjava)
- razmotrimo spektar pomaknutog pravokutnog pulsa

$$g(t) = p_\tau(t - \frac{\tau}{2}) = \begin{cases} 1 & \text{za } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\tau} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \underbrace{\tau \frac{\sin\frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega}}_{\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}} e^{-j\frac{\tau}{2}\omega}$$

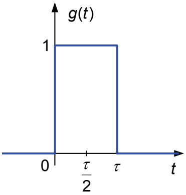
pa su amplitudni i fazni spektar

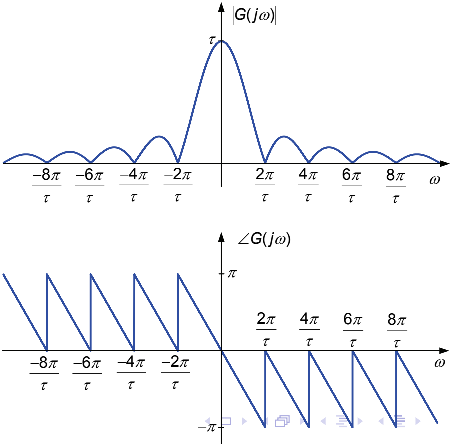
$$|G(j\omega)| = \begin{cases} \tau, & \omega = 0 \\ \tau \left| \frac{\sin\frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} \right|, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\angle G(j\omega) = \underbrace{\angle \frac{\sin\frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega}}_{\angle\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}} - \frac{\tau}{2}\omega$$

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa

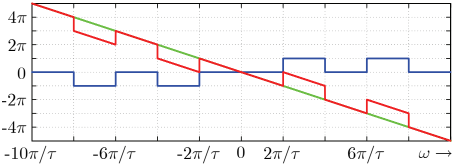
$$|G(j\omega)| = \begin{cases} \tau, & \omega = 0, \\ \tau \left| \dfrac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} \right|, & \text{inače}, \end{cases} \quad \angle G(j\omega) = \angle \frac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} - \frac{\tau}{2}\omega$$

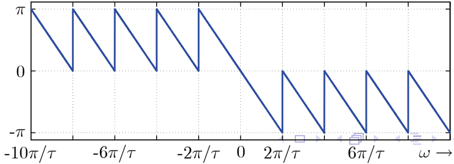




Fourierova transformacija pravokutnog pulsa – pomak

- interpretira se faza pomaknutog pravokutnog pulsa
- plavo je faza nepomaknutog (parnog) pravokutnog pulsa, $\angle\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}$, zeleno je doprinos fazi zbog pomaka signala u vremenskoj domeni $-\frac{\tau}{2}\omega$, a crveno je ukupna faza
- na donjoj slici prikazuju se samo glavne vrijednosti faze u intervalu $-\pi$ i π (dakle faza modulo 2π), i to je u literaturi uobičajeni način prikaza faze





Fourierova transformacija pravokutnog pulsa – svojstvo dualnosti

- očigledna je sličnost izraza za Fourierovu i inverznu Fourierovu transformaciju, pa je, znajući da je Fourierova transformacija pravokutnog pulsa sinc funkcija, za očekivati da će inverzna transformacija spektra koji je oblika pravokutnog pulsa rezultirati vremenskom funkcijom oblika sinc
- Fourierova transformacija parnog pravokutnog pulsa $p_\tau(t)$ je

$$\mathcal{F}\{p_\tau(t)\} = G_1(j\omega) = \tau \frac{sin\frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} = \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right)$$

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa – svojstvo dualnosti

- inverzna F. transformacija signala čiji je spektar pravokutni signal $G_2(j\omega) = 2\pi p_\tau(-\omega) = 2\pi p_\tau(\omega)$ je

$$g_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_2(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{2\pi}{2\pi}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j\omega t}\,d\omega$$
$$= \tau\frac{\sin\frac{\tau}{2}t}{\frac{\tau}{2}t} = \tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau t}{2\pi}\right)$$

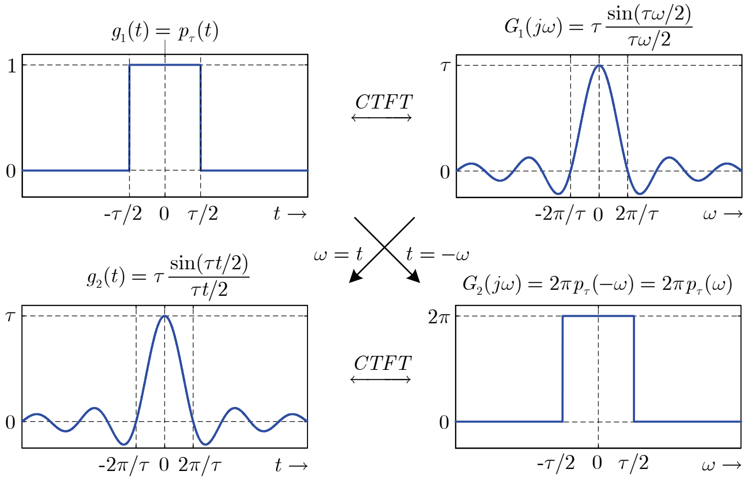
- ovo je svojstvo dualnosti i kasnije se pokazuje da za

$$f(t) \xleftrightarrow{CTFT} F(j\omega)$$

vrijedi

$$F(jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(-\omega)$$

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa – svojstvo dualnosti



- možemo zaključiti da je duljina trajanja signala obrnuto proporcionalna širini spektra tog signala (o tome kasnije)

Generalizirana Fourierova transformacija

- Fourierova transformacija nije konvergentna, u smislu regularnih funkcija, za neke vrlo uobičajene funkcije,
- kao primjer razmotrimo Fourierovu transformaciju funkcije $f(t) = A,\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt$$

- gornji integral ne konvergira[5] i mogli bi zaključiti da za dani signal ne postoji Fourierova transformacija
- ovdje se pokazuje da je, unatoč tome, moguća njihova Fourierova transformacija, uvođenjem generaliziranih funkcija, tj. Diracove funkcije u frekvencijskoj domeni i vremenskoj domeni

[5] Signal je svevremenski i nije konačne energije, pa nije zadovoljeno da vrijedi $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < +\infty$

Fourierova transformacija jediničnog impulsa

- *CTFT* jediničnog impulsa[6] $\delta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, je

$$CTFT\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

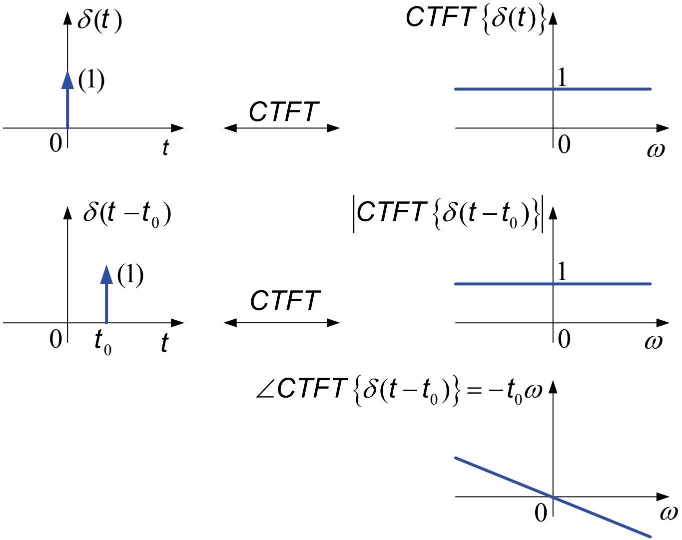
- *CTFT* pomaknutog jediničnog impulsa $\delta(t - t_0)$ je

$$CTFT\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega t_0}$$

- očigledno je da pomak jediničnog impulsa $\delta(t)$ ne mijenja amplitudu Fourierove transformacije, ali mijenja fazu $\angle\{CTFT\{\delta(t)\}\}$ koja, za $t_0 > 0$, pada linearno
- gradijent faze odgovara iznosu pomaka jediničnog impulsa, za t_0, u vremenskoj domeni

[6] Diracova delta funkcija ne zadovoljava Dirichletove uvjete, jer je diskontinuitet u nuli beskonačnog iznosa. Zato transformaciju ovog signala razmatramo kao generaliziranu Fourierovu transformaciju

Fourierova transformacija jediničnog impulsa



Fourierova transformacija konstante

- pokazano je kako je $CTFT\{\delta(t)\} = 1$, dakle,

$$\delta(t) \xleftrightarrow{CTFT} 1$$

- određuje se inverzna Fourierova transformacija $F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$, $\forall\omega \in \mathbb{R}$,

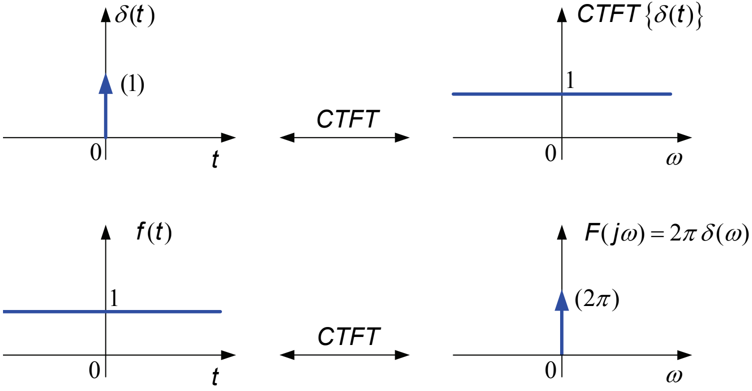
$$\begin{aligned} f(t) = ICTFT\{2\pi\delta(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega = 1 \end{aligned}$$

pa zaključujemo

$$1 \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi\delta(\omega)$$

- ovaj primjer također ukazuje na svojstvo dualnosti Fourierove transformacije

Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti



- usporedimo li ove F. transformacije s transformacijom pravokutnog pulsa $p_\tau(t)$, možemo gornje signale interpretirati kao granične slučajeve za $\tau \to 0$, odnosno $\tau \to \infty$

Predahnimo

- podsjetimo se da je spektar periodičnog vremenski kontinuiranog signala **diskretan** (zbog periodičnosti signala u vremenskoj domeni) i **aperiodičan**
- iz prethodnih primjera vezanih za određivanje spektra aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala možemo uočiti da je spektar aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala **kontinuiran** i **aperiodičan**
- zaključujemo da:
  - periodičnosti i kontinuiranosti signala u vremenskoj domeni odgovara diskretnost i aperiodičnost signala u frekvencijskoj domeni
  - diskretnosti i aperiodičnosti signala u frekvencijskoj domeni odgovara periodičnost i kontinuiranost u vremenskoj domeni
  - aperiodičnosti i kontinuiranosti signala u vremenskoj domeni odgovara kontinuiranost i aperiodičnost signala u frekvencijskoj domeni (CTFT i ICTFT)

Signal kao linearna kombinacija kompleksnih eksponencijala

- pokazano je kako periodični vremenski kontinuiran signal možemo razložiti kao linearnu kombinaciju kompleksnih eksponencijala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

  pri čemu je F_k, $\forall k \in \mathbb{Z}$, spektar signala f, dakle diskretna funkcija od k

- isto tako, pokazno je da aperiodičan vremenski kontinuiran signal možemo razložiti kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

  pri čemu je $F(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, spektar signala f, i kontinuirana je funkcija od ω

Fourierov red periodičnih vremenski diskretnih signala

- periodičan vremenski diskretni signal $f(n) = f(n+N)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, možemo također prikazati kao linearnu kombinaciju harmonijski vezanih vremenski diskretnih eksponencijala, dakle Fourierovim redom

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\Omega_0 n}$$

pri čemu su $N \in \mathbb{Z}$ osnovna perioda, a $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ osnovna frekvencija signala f

- za razliku od Fourierovog reda za vremenski kontinuirane signale ovdje je, zbog periodičnosti vremenski diskretne kompleksne eskponencijale, dovoljno samo N različitih harmonijski vezanih kompleksnih eksponencijala, jer je

$$e^{j(k+N)\Omega_0 n} = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{j2\pi n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\Omega_0 n}$$

Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala

- zato definiramo

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \tag{7}$$

  kao Fourierov red za vremenski diskretan periodični signal ili, prema engleskoj terminologiji Discrete–Time Fourier series – DTFS
- koeficijente Fourierovog reda, izvod sličan izvodu za kontinuirane signale i dan je u dodatku, izračunavamo iz

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \tag{8}$$

Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala

- iz izraza za koeficijente Fourierovog reda

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},$$

  zaključujemo kako koeficijenti Fourierovog reda F_k omogućuju prikaz $f(n)$ u frekvencijskoj domeni, tako da $F_k = |F_k| e^{j\angle F_k}$ predstavljaju amplitudu i fazu vezanu uz frekvencijske komponente $e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{j\Omega_k n}$, gdje je $\Omega_k = k\frac{2\pi}{N}$
- spektar diskretnog signala je periodičan što vrijedi i za F_k koji je periodičan s osnovnim periodom N

$$F_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = F_k$$

Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala

- Parsevalova jednakost za periodične diskretne signale

$$P_f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|f(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|F_k|^2$$

izvod: razmatra se srednja snaga vremenski diskretnog periodičnog signala periode N

$$\begin{aligned}
P_f &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|f(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(n)f^*(n) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(n)\left(\sum_{n=0}^{N-1}F_k^* e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}F_k^* \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\right]}_{F_k} = \sum_{n=0}^{N-1}F_k^* F_k = \sum_{k=0}^{N-1}|F_k|^2
\end{aligned}$$

Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala

- jednadžba

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},$$

  kazuje kako se periodičnom vremenski diskretnom signalu, definiranom u vremenskoj domeni, pridružuje frekvencijski diskretan periodičan signal (spektar), definiran u frekvencijskoj domeni

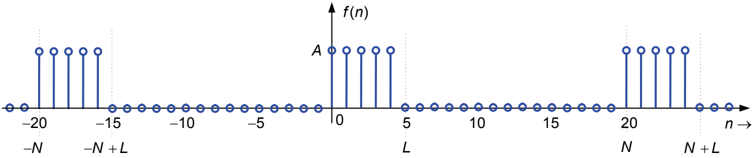
- jednadžba

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n},$$

  kazuje kako se frekvencijski diskretnom periodičnom signalu (spektru), definiranom u frekvencijskoj domeni, pridružuje vremenski diskretan periodičan signal, definiran u vremenskoj domeni

Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala – primjer

- određuje se Fourierov red periodičnog vremenski diskretnog pravokutnog signala zadanog kao

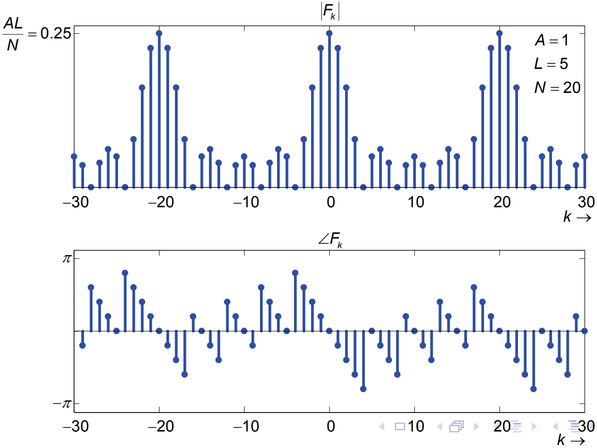


$$F_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-jk\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$= \begin{cases} \frac{AL}{N} & k=0 \\ \frac{A}{N}\frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}L}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} & k=1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala – primjer

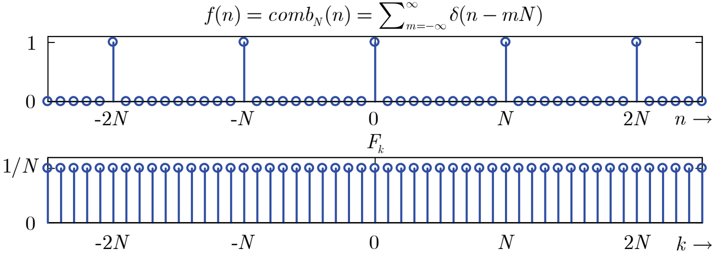
$$F_k = \begin{cases} \frac{AL}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{A}{N} \frac{sin\left(k \frac{\pi}{N} L\right)}{sin\left(k \frac{\pi}{N}\right)} e^{-jk\frac{\pi}{N}(L-1)} & \text{inače} \end{cases}$$



Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala – primjer

- određuje se Fourierov red periodičnog vremenski diskretnog signala[7]
  $f(n) = comb_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN)$, za $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}$$



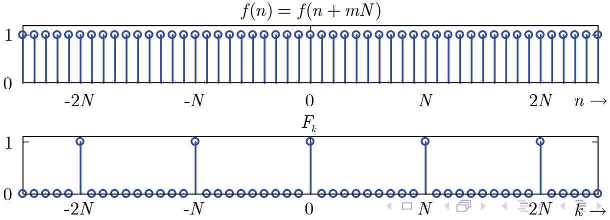
[7] Pravokutni periodičan signal iz prethodnog primjere za $L = 1$, $A = 1$.

Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala – primjer

- određuje se Fourierov red periodičnog vremenski diskretnog signala $f(n) = f(n + mN) = 1$,

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1 & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \frac{1}{N} \frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = 0 & \text{inače} \end{cases}$$



Predahnimo još jednom

- razmotrili smo osnovne informacije o spektru periodičnog vremenski diskretnog signala i možemo prepoznati
- spektar periodičnog vremenski diskretnog signala je
  - diskretan – zato što je signal periodičan u vremenskoj domeni
  - periodičan – zato što je signal u vremenskoj domeni diskretan
- zaključujemo da:
  - periodičnosti u jednoj domeni odgovara diskretnost u drugoj domeni
  - diskretnosti u jednoj domeni odgovara periodičnost u drugoj domeni

Razlaganje aperiodičnog vremenski diskretnog signala pomoću kompleksnih eksponencijalnih signala

- aperiodičan vremenski diskretan signal možemo razložiti pomoću kompleksnih eksponencijalnih signala kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} \, d\Omega \tag{9}$$

gdje je $F(e^{j\Omega})$, spektar signala f dan s

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n} \tag{10}$$

- vremenski diskretna kompleksna eksponencijala jednoznačno je određena za $-\pi < \Omega \leq \pi$ pa se u razlaganju aperiodičnog vremenski diskretnog signala uzima kontinuum frekvencija iz tog intervala[8]

---

[8] Frekvencije kompleksnih eksponencijala leže na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravnini pa zato, umjesto $F(\Omega)$, po konvenciji koristimo oznaku $F(e^{j\Omega})$.

Fourierova transformacija aperiodičnih vremenski diskretnih signala

- jednadžbe (10) i (9) predstavljaju transformacijski par za aperiodične vremenski diskretne signale
  - Fourierova transformacija (eng. Discrete-Time Fourier transform – *DTFT*)

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n}$$

  - inverzna Fourierova transformacija (eng. Inverse Discrete-Time Fourier transform – *IDTFT*)

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} \, d\Omega$$

- koriste se i oznake

$$F(e^{j\Omega}) = DTFT\{f(n)\}, \quad \text{ili} \quad f(n) \xleftrightarrow{DTFT} F(e^{j\Omega})$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- $F(e^{j\Omega}) = |F(e^{j\Omega})| e^{j\angle F(e^{j\Omega})}$, kao i u slučaju kontinuiranih signala, nazivamo spektrom signala $f(n)$, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, pri čemu su

$$
\begin{array}{ll}
|F(e^{j\Omega})| & \text{amplitudni spektar} \\
\angle F(e^{j\Omega}) & \text{fazni spektar}
\end{array}
$$

- važno je uočiti kako je spektar aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala definiran za $\omega \in (-\infty, \infty)$, a spektar aperiodičnog vremenski diskretnog signala je iz područja $(-\pi, \pi)$ ili, ekvivalentno, $(0, 2\pi)$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- osim što je spektar $F(e^{j\Omega})$ kontinuiran, zbog aperiodičnosti signala u vremenskoj domeni, on je i periodičan, s periodom 2π, jer je

$$F(e^{j(\Omega+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j(\Omega+2\pi k)n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n}e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n} = F(e^{j\Omega})$$

- ovo svojstvo je izravna posljedica činjenice da je frekvencijsko područje bilo kojeg diskretnog signala omeđeno na $(-\pi, \pi)$ ili, $(0, 2\pi)$ i da je svaka frekvencija izvan ovog intervala ekvivalentna odgovarajućoj frekvenciji unutar intervala

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- DTFT,

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n}, \qquad \Omega \in \mathbb{R}$$

konvergira ako je diskretan signal apsolutno zbrojiv

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty,$$

ili ako je signal konačne energije, dakle,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- *DTFT* vremenski diskretnom aperiodičnom signalu, definiranom u vremenskoj domeni, pridružuje frekvencijski kontinuiran periodičan signal, definiran u frekvencijskoj domeni
- *IDTFT* frekvencijski kontinuiranom periodičnom signalu (spektru), definiranom u frekvencijskoj domeni, pridružuje vremenski diskretan aperiodičan signal, definiran u vremenskoj domeni

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- Parsevalova jednakost za aperiodične diskretne signale konačne energije je

$$E_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega$$

izvod: energija aperiodičnog diskretnog signala $f(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, je

$$E_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2$$

uz $|f(n)|^2 = f(n) f^*(n)$ slijedi:

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

$$E_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) f^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(e^{j\Omega}) e^{-j\Omega n} \, d\Omega \right]$$

zamjenom redoslijeda integracije i zbrajanja

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(e^{j\Omega}) \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n} \right]}_{F(e^{j\Omega})} d\Omega$$

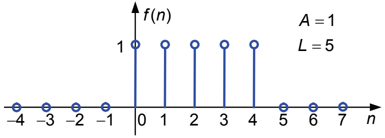
$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(e^{j\Omega}) F(e^{j\Omega}) \, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega$$

pa vrijedi: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – pravokutni signal

- određuje se Fourierova transformacija aperiodičnog pravokutnog pulsa zadanog kao

$$f(n) = \begin{cases} A, & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases}$$



$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\Omega n} = A\frac{1-e^{-j\Omega L}}{1-e^{-j\Omega}} =$$

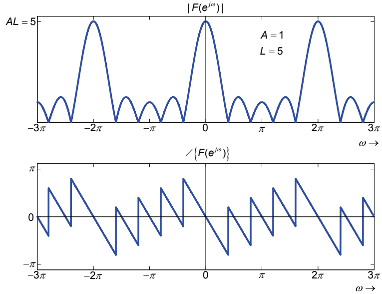
$$= A\frac{sin\left(\frac{\Omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j\frac{\Omega}{2}(L-1)}$$

- pa su amplitudni (paran jer je signal realan) i fazni spektar (neparan jer je signal realan) kontinuirani i periodični

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – pravokutni signal

$$|F(e^{j\Omega})| = \begin{cases} |A|L & \Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ |A|\left|\frac{sin\left(\frac{\Omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right| & \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases}$$

$$\angle\{F(e^{j\Omega})\} = \angle A - \frac{\Omega}{2}(L-1) + \angle \frac{sin\left(\frac{\Omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$



napomena[9]

[9] faza realne veličine je nula ako je veličina pozitivna a π kada je veličina negativna.

Fourierova transformacija Kroneckerovog δ

- Fourierova transformacija vremenski diskretnog jediničnog impulsa δ je

$$DTFT\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\Omega n} = 1$$

- Fourierova transformacija vremenski pomaknutog Kroneckerovog delta $\delta(n - n_0)$ je

$$DTFT\{\delta(n - n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_0) e^{-j\Omega n} = e^{-jn_0\Omega}$$

Fourierova transformacija konstante

- određuje se inverzna Fourierova transformacija $F(e^{j\Omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2\pi m)$, $\forall\Omega \in \mathbb{R}$,

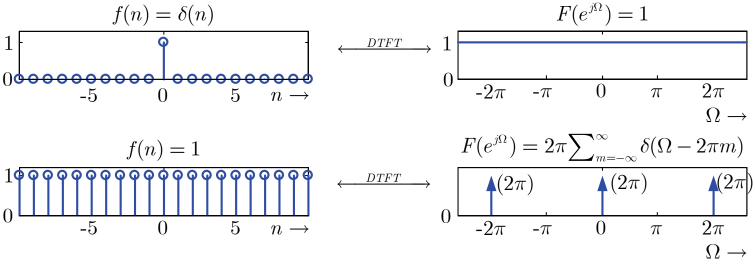
$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega})e^{-j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega)e^{-j\Omega n}\, d\Omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega)e^{-j\Omega n}\, d\Omega = 1
\end{aligned}
$$

  pa zaključujemo

$$1 \xleftrightarrow{DTFT} 2\pi\delta(\Omega)$$

- i ovi primjeri ukazuju na obrnutu proporcionalnost duljine trajanja signala i širine spektra
- isto tako pokazali smo da, iako signal $f(n) = 1$, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, ne konvergira jer nije kvadratno zbrojiv, možemo odrediti njegovu transformaciju korištenjem generalizirane Fourierove transformacije
- tu činjenicu koristimo u nizu drugih primjera

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – Kroneckerov delta i konstanta

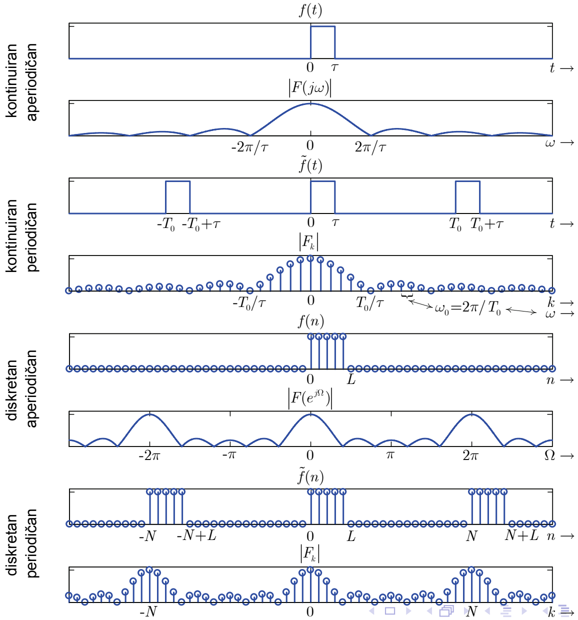


Fourierove transformacije[10]

vremen. domena	aperiodičan (t), (n)	periodičan (t), (n)	
kontinuiran (t)	*CTFT* $F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$	*CTFS* $F_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ $f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$ $f(t)$ periode T_0, $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$	aperiodičan (ω) (k)
diskretan (n)	*DTFT* $F(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n}$ $f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$ $F(e^{j\Omega})$ periode 2π	*DTFS* $F_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ $f(n)=\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ $f(n), F_k$ periode N, $\Omega_0=\frac{2\pi}{N}$	periodičan (Ω) (k)
	kontinuiran (ω), (Ω)	diskretan (k)	frekven. domena

[10] Fourierova transformacija je zajedničko ime sve četiri transformacije. Jasno je da u slučaju vremenski periodičnih signala transformaciju provodimo pomoću Fourierovog reda (CTFS ili DTFS).

Fourierove transformacije



DODATAK – SAMOSTALNI RAD STUDENATA

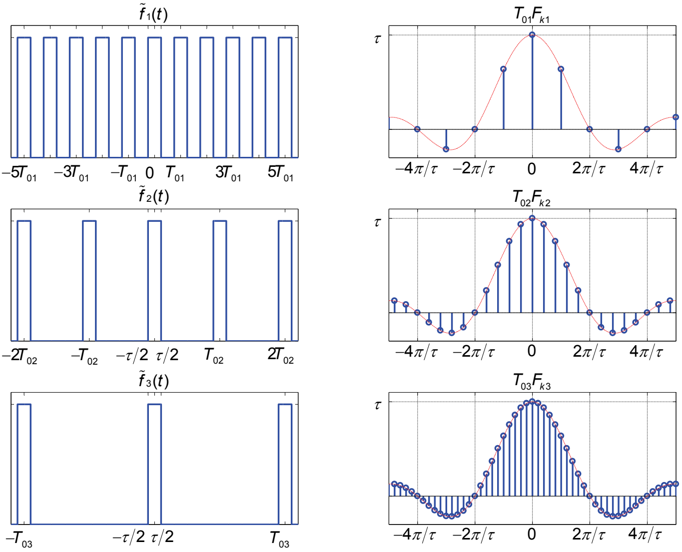
Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- pokazano je kako je spektar periodičnog signala diskretan
- dan je primjer parnog periodičnog pravokutnog signala čiji je spektar

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad F_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}$$

  gdje je T_0 perioda, a τ širina pravokutnog pulsa
- razmatra se spektar tri pravokutna signala, za tri vrijednosti periode T_{01}; $T_{02} = 2.5T_{01}$ i $T_{03} = 2T_{02} = 5T_{01}$, uz fiksirani τ
- na slici koja slijedi prikazuju se normalizirani amplitudni spektri $T_{01}F_{k1}$, $T_{02}F_{k2}$ i $T_{03}F_{k3}$ (normaliziranjem se zadržava ista amplituda, τ, sva tri normalizirana spektra)

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala



Slika 1: Periodični signali $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ i normalizirani spektri $T_{01}F_{k1}$, $T_{02}F_{k2}$, $T_{03}F_{k3}$

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- periodični pravokutni signal[11] $\tilde{f} \in KontPeriod_{T_0}$ možemo interpretirati kao signal koji je nastao periodičnim ponavljanjem aperiodičnog pravokutnog pulsa $f \in KontSignali$ trajanja τ
- normalizirani koeficijenti spektra $T_0 F_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, mogu se interpretirati kao uzorci sinc funkcije koji čine linijski spektar signala $\tilde{f}$
- očigledno je kako s povećanjem osnovne periode spektar periodičnog signala $\tilde{f}$ postaje gušći i gušći no ovojnica ostaje nepromijenjena

[11] oznakom $\tilde{f}$ želi se, zbog potrebe izvoda koji slijedi, naglasiti periodičnost signala

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- intuitivno zaključujemo kako za $T_0 \to \infty$ linijski spektar postaje kontinuirana funkcija frekvencije ω identična ovojnici
- naime, kako se normalizirani koeficijenti spektra $T_0 F_k$ izračunavaju iz

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad T_0 F_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

za očekivati je onda kako se vremenski kontinuirana ovojnica izračunava iz[12]

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt \qquad (11)$$

[12] gdje simbol $\triangleq$ označava "jednako po definiciji"

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- dakle, za pravokutni signal,

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}\, dt = \tau \frac{sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega}$$

- pa koeficijente Fourierovog reda možemo prikazati kao očitke $F(j\omega)$ jer vrijedi

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}} = \frac{1}{T_0} F(jk\omega_0)$$

- općenito, periodični signal $\tilde{f}$ prikazujemo Fourierovim redom oblika

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} F(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- odnosno, uz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

- za $T_0 \to \infty$, dakle kad periodični signal prelazi u aperiodičan, možemo interpretirati
  - $\omega_0 \to d\omega$ – osnovna frekvencija postaje neizmjerno malom veličinom
  - $k\omega_0 \to \omega$ – harmonijske frekvencije postaju tako bliske da prelaze u kontinuum
  - suma teži k integralu
  - $\tilde{f}(t) \to f(t)$ – periodični signal prelazi u aperiodičan
  - pa gornji izraz prelazi u

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega \qquad (12)$$

Fourierova transformacija aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala

- jednadžba (11) predstavlja Fourierovu transformaciju ili spektar signala f, a (12) inverznu Fourierovu transformaciju koja omogućuje određivanje signala f iz njegova spektra
- dakle, jednadžbe (11) i (12) predstavljaju transformacijski par
  - Fourierova transformacija

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

  - inverzna Fourierova transformacija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

- koriste se i oznake

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \qquad \text{ili} \qquad f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(j\omega)$$

Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

- Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale $f(t) = e^{-bt}\mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, i $b \in \mathbb{R}$, je

$$\forall \omega \in \mathbb{R},$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt}\mu(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-j\omega t}\,dt =$$
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(b+j\omega)t}\,dt = -\frac{1}{b+j\omega}\left[e^{-(b+j\omega)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}$$

integral konvergira[13] samo za $b > 0$, pa je

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \frac{1}{b+j\omega}$$

[13] Prvi Dirichletov uvjet $\int_0^\infty \left|e^{-bt}\right|\,dt = \int_0^\infty e^{-bt}\,dt = -\frac{1}{b}e^{-bt}\Big|_0^\infty$, a ovaj izraz je konačan samo za $b > 0$

Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

- iz

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

slijedi

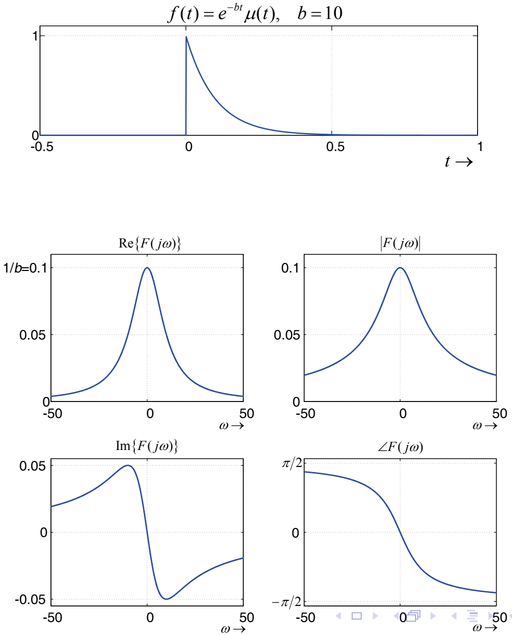
$$Re\{F(j\omega)\} = \frac{b}{b^2+\omega^2}, \qquad Im\{F(j\omega)\} = -\frac{\omega}{b^2+\omega^2}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2+\omega^2}}, \qquad \angle F(j\omega) = -\arctan\frac{\omega}{b}$$

- na narednoj prikaznici dani su realni i imaginarni dio spektra te, amplitudni i fazni spektar[14]
- uočiti parnost realnog i amplitudnog spektra i neparnost imaginarnog i faznog spektra (signal f je realan)

[14] spektar je aperiodičan i neomeđen, a na slikama je prikazan dio spektra

Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale



Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

- primjer Fourierove transformacije kauzalne eksponencijale $f(t) = e^{-bt}\mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, i $b \in \mathbb{R}$, ukazuje na sljedeću važnu činjenicu
- pokazano je da Fourierov integral, za ovaj signal, postoji samo za $b > 0$
- za $b = 0$, gornja se kauzalna eksponencijala transformira u $f(t) = \mu(t)$
- zaključujemo kako za jedinični skok, $\mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ne postoji Fourierova transformacija
- pokazuje se da za jedinični skok, i još neke druge signale, definiramo generaliziranu Fourierovu transformaciju

Fourierova transformacija jediničnog skoka

- pokazano je kako kauzalna eksponencijala, $e^{-bt}\mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ima Fourierovu transformaciju za $b > 0$
- jedinični skok možemo interpretirati kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu(t) = \lim_{b \to 0} e^{-bt}\mu(t)$$

korištenjem izraza za F. transformaciju kauzalne eksponencijale možemo pisati

$$\mathcal{F}\{\mu(t)\} = \lim_{b \to 0} \mathcal{F}\{e^{-bt}\mu(t)\} = \lim_{b \to 0} \frac{1}{b + j\omega} =$$

$$= \lim_{b \to 0} \left[\frac{b}{b^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{b^2 + \omega^2} \right] =$$

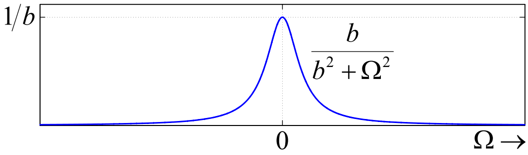
$$= \lim_{b \to 0} \left[\frac{b}{b^2 + \omega^2} \right] + \frac{1}{j\omega}$$

Fourierova transformacija jediničnog skoka

- član $\lim_{b\to 0}\left[\frac{b}{b^2+\omega^2}\right]$ ima svojstvo da je površina ispod njegove krivulje jednaka π, neovisno o vrijednosti b,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b}{b^2+\omega^2}\,d\omega=\arctan\frac{\omega}{b}\bigg|_{-\infty}^{\infty}=\pi$$

uvidom u graf funkcije zaključujemo kako, za $b\to 0$, funkcija prelazi u Diracov δ, intenziteta π, u $\omega=0$



pa uz $\lim_{b\to 0}\left[\frac{b}{b^2+\omega^2}\right]=\pi\delta(\omega)\Rightarrow$

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \mathcal{F}\{\mu(t)\}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

DTFS – izračun koeficijenata

- izračunavaju se koeficijenti F_k u

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- u izračunu se koristi formula za zbroj prvih N članova geometrijskog reda

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} N, & q = 1 \\ \frac{1-q^N}{1-q}, & q \neq 1, \end{cases}$$

i, uz primjenu ove formule, zbroj

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jm\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N, & m = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{13}$$

DTFS – izračun koeficijenata

- izračun započinjemo množenjem obje strane

$$f(n)=\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

s eksponencijalom $e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}$, te zbrajanjem umnožaka od $n=0$ do $n=N-1$, pa je

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} F_k \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}n}}_{A}=\left| A=\begin{cases} N, & k-m=0,\\ 0, & \text{inače,}\end{cases}\right|=NF_m \Rightarrow$$

$$F_m=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jm\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{odnosno} \quad F_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- kako je spektar periodičan, izraz za DTFT predstavlja Fourierov red[15], a $f(n)$ koeficijente tog Fourierovog reda

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n}, \qquad \Omega \in \mathbb{R}$$

- koeficijente Fourierovog reda, dakle $f(n)$, određujemo sličnim izvodom kao i prije u slučaju Fourierovog reda periodičnih kontinuiranih signala,
- množenjem obje strane s $e^{j\Omega m}$, i integracijom preko intervala $(-\pi, \pi)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega})e^{j\Omega m}\, d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n} \right] e^{j\Omega m}\, d\Omega$$

[15] ovaj puta u frekvencijskoj domeni

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega m}\, d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n} \right] e^{j\Omega m}\, d\Omega$$

- desna strana se preuređuje i izračunava:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(m-n)}\, d\Omega = \begin{cases} 2\pi f(m) & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

pa je konačno:

$$f(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega m}\, d\Omega$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- zaključno, par za Fourierovu transformaciju aperiodičnih vremenski diskretnih signala je

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n} \tag{14}$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{15}$$

- izraz za Fourierovu transformaciju vremenski diskretnih aperiodičnih signala (DTFT) konvergira za

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty,$$

ili za,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$$