VREM DOMENA

a) DISKRETNI

→ PRONALAZAK POČ. UVJETA

→ treba prošetati početni uvjet do $y(0)$, $y(1)$ itd

→ za diferenciju n tog reda potrebni naći $n-1$ poč uvjeti

npr. za $y(n-2)$ → $n=2$

potrebni naći

$y(0)$ i $y(1)$ → $n-1=1$

→ za $y(n-3)$ → $n=3$

potrebni naći

$y(0), y(1)$ i $y(2)$ → $n-1=2$

→ računanje početnih iz dif jednadžbe

npr $y(n-2)+3y(n-1)+2y(n)=u(n)$

zadani poč uvjeti $y(-1)=1$ $y(-2)=0$

$$2y(n)=u(n)-y(n-2)-3y(n-1)$$

za $n=0$

$$y(0)=\frac{1}{2}\left(u(0)-y(-2)-3y(-1)\right)$$

za $n=1$

$$y(1)=\frac{1}{2}\left(u(1)-y(-1)-3y(0)\right)$$

b) KONTINUIRANI

→ PRONALAZAK POČ. UVJETA

→ iz formule sa šalabahtera

ovo potrebno znati jer su potrebne za računanje poč uvjeta dif jed 2 reda

$$\begin{cases} 1)\ y(0^+)-y(0^-)=b_0u(0^+) \\ 2)\ y'(0^+)-y'(0^-)+a_1\left(y(0^+)-y(0^-)\right)=b_0u'(0^+)+b_1u(0^+) \end{cases}$$

→ ova formula potrebna za računanje uvjeta za dif jed 3 reda ⇒ sigurno neće bit potrebna jer nisu ludi da daju dif jed 3 reda ?!

$$3)\ y''(0^+)-y''(0^-)+a_1\left(y'(0^+)-y'(0^-)\right)+a_2\left(y(0^+)-y(0^-)\right) = b_0u''(0^+)+b_1u'(0^+)+b_2u(0^+)$$

→ konstante $a_1, a_2, \dots a_n$ i $b_0, b_1 \dots b_n$ iz dif jed.

a_0 uz najveći derivaciju

b_0 uz najveću derivaciju

$$a_0y^N+a_1y^{N-1}+\dots+a_Ny=b_0u^N+b_1u^{N-1}+\dots b_Nu$$

PRIMJER

$$y''+3y'+4y=5u'+u$$

$a_0=1$ $a_1=3$ $a_2=4$ $b_1=5$ $b_2=1$

$b_0=0$ zato što je 0 uz najveću derivaciju pokraj u''

→ uvijek je potremno $n-1$ početnih uvjeta gdje je n red diferencije

→ ako je dif jed 2 reda potrebno je y_0 i y'_1

→ za 3 red y_0, y'_1 i y''_2 → $n-1$ poč uvjet

→ uvijek zadani $y(0^-), y'(0^-) \dots y^N(0^-)$

↳ pomoću gornjih formula treba naći $y(0^+), y'(0^+) \dots y^N(0^+)$

→ prvo se računa $y(0^+)$, pa uz pomoć $y(0^+)$ se računa $y'(0^+)$ itd

⇒ 2 načina računanja totalnog odziva

1 način | $y_{tot} = y_h + y_p$ → homogeno + partikularno

→ homogeno se još zove odziv prirodnog
→ partikularno se još zove odziv prisilnog

a) računanje partikularnog i uvrštavanje u poč. da se odredi konstanta

npr

$y(n-1) + y(n) = u(n)$

$u(n) = (0.5)^n$

$y_p(n) = K(0.5)^n$.

$K\cancel{(0.5)}^{n-1} + K\cancel{(0.5)^n} = \cancel{(0.5)}^n$

$K(0.5)^{-1} + K = 1$

⋮

$y'(t) + y(t) = u(t)$

$u(t) = e^{2t}$

$y_p(t) = Ke^{2t}$

$y_p'(t) = 2Ke^{2t}$

$2Ke^{2t} + Ke^{2t} = e^{2t}$

$2K + K = 1$

⋮

b) računanje homogenog ⇒ lijeva strana jednaka 0

npr

$y(n-1) + y(n) = 0$

$q + 1 = 0$

$q = -1$

$y_h(n) = C(-1)^n$

$y'(t) + y(t) = 0$

$s + 1 = 0$

$s = -1$

$y_h = Ce^{st}$

$y_h(t) = Ce^{-t}$

složeniji primjeri homogenog rješenja

A) $y(n-2) + 2y(n-1) + y(n) = 0$

$q^2 + 2q + 1 = 0$

$q_{1,2} = -1$

$y_h = C_1(-1)^n + C_2 n(-1)^n$ jer je dvostruko rj

↳ kolika je kratnost rješenja tolko n dodat

da je bilo trostruko rj. −1 onda je

$C_1(-1)^n + nC_2(-1)^n + n^2C_3(-1)^n$

B) $y(n-2) + 7y(n-1) + 6y(n) = 0$

$q^2 + 7q + 6 = 0$

$q_1 = -1 \quad q = -6$

$y_h = C_1(-1)^n + C_2(-6)^n$

C) $y(n-1) + y(n) = 0$ $\quad u(t) = (-1)^n$

homogeno $= C_1(-1)^n$

→ podudara se rj homogene s bazom pobude ⇒ partikularno još treba pomnožiti sa n

$y_p(n) = Kn(-1)^n$

→ slično kod kont samo se što se gleda koliki je s u e^{st} i on se treba podudarat sa rj homogene

KRAJ

$y_t = y_h + y_p$

→ uz pomoć izračunatih poč uvjeta odrediti konstante hom rješenja (poč uvjeti se uvrštavaju u $y_t = y_h + y_p$)

$y_t = y_h + y_p$ → TOTALNI ODZIV

y_h → PRIRODNI ODZIV

y_p → PRISILNI ODZIV

2. način $y_{tot} = y_0 + y_m$ → nepobuđeni + mirni sustav

a) nepobuđeni

→ izračuna se homogena

→ u nju se uvrštavaju početni uvjeti koji su ZADANI ne oni koje je potrebno izračunati

npr zadano $y(-1) = 1 \quad y(-2) = 5$

$y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$

$$\underbrace{\left.\begin{aligned} y(-1) &= C_1(-1)^{-1} + C_2(-2)^{-1} = 1 \\ y(-2) &= C_1(-1)^{-2} + C_2(-2)^{-2} = 5 \end{aligned}\right\}}_{\text{DOBIVENO RJEŠENJE}}$$

uvrštavaju se uvjeti zadani u zadatku

DOBIVENO RJEŠENJE je odziv nepobuđenog sustava

b) mirni → homogeno + partikularno uz poč. uvjete 0

→ prvo naći partikularno rješenje (objašnjeno u 1) načinu)

→ naći homogeno (objašnjeno u 1) načinu)

→ stavit da su poč uvjeti 0

→ ako je dif jed 2 reda onda su poč uvjeti

$y(-2) = 0 \quad y(-1) = 0$

→ za kont sustav

$y(0^-) = 0 \quad y'(0^-) = 0$

→ treba prošetat poč uvjet do $y(0)$ i $y(1)$ diskretni

→ kontinuirani izračunat formule da se dobije $y(0^+)$ i $y'(0^+)$ pomoću

→ uz pomoć izračunatih uvjet odrediti konstante iz

$$y_m = y_h + y_p$$

KRAJ !

$$\boxed{\begin{aligned} &y_t = y_0 + y_m \rightarrow \text{TOTALNI ODZIV} \\ &y_m \rightarrow \text{MIRNI ODZIV} \\ &y_0 \rightarrow \text{NEPOBUĐENI ODZIV} \end{aligned}}$$

→ totalni odziv prvog i drugog načina moraju biti jednaki !!!

IMPULSNI ODZIV KONTINUIRANO

→ primjer

$$y''(t) + 7y'(t) + 6y(t) = u'(t) + u(t)$$

→ gleda se <u>desna strana</u>

→ postoji prva derivacija i obična funk

→ odziv će biti oblika

$$h(t) = \underbrace{h_a'(t) + h_a(t)}_{u'(t) + u(t)}$$

} kako izgleda desna strana tako treba izgledat i odziv sustava

→ h_a je obična homogena jednadžba

$$\boxed{h_a(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-6t}}$$

→ početni uvjet ⇒ pošto je impuls onda on dolazi do najveće moguće derivacije od poč uvjeta, ostali su 0

→ dif jed je 2 reda znači poč uvjeti su $h_a(0^+)$ i $h_a'(0^+)$

$h_a(0^+) = 0$ $h_a'(0^+) = 1$

↳ <u>najveća derivacija pocetnih uvjeta</u>

→ odrede se konstante h_a uz pomoć početnih uvjeta $h_a(0^+)$, $h_a'(0^+)$ i $h_a(t)$ i $h_a'(t)$

→ odziv je $h(t) = h_a' + h_a$

POSEBAN SLUČAJ

→ ukoliko u dif jed n-tog reda postoji pobuda n-tog reda onda je u odziv potrebno staviti $\delta(t)$ pomnožen s konstantom uz pobudu n-tog reda

primjer

$$y''(t) + 7y'(t) + 6y(t) = \overset{\nearrow b_0 = 5}{5u''(t)} + u'(t) + u(t)$$

→ gleda se desna strana i određuje se odziv

$$h(t) = 5\delta(t) + \underbrace{5h''(t) + h'(t) + h(t)}_{5u''(t) + u'(t) + u(t)}$$

$b_0 = 5$

dodano zato što postoji pobuda n-tog reda

→ računanje ostatka je isto → treba odrediti $h_a''(t)$, $h_a'(t)$ i $h_a(t)$ i uvrstit u $h(t)$ i to je totalni odziv

IMPULSNI ODZIV DISKRETNOG (II način sa slajdova)

⇒ slično kao kontinuirani impulsni odziv

$$y(n-2) + 7y(n-1) + 6y(n) = u(n-1) + u(n)$$

⇒ gleda se desna strana

$$h(n) = \underbrace{h_a(n-1) + h_a(n)}_{\text{izgleda isto kao desna strana } u(n-1)+u(n)}$$

⇒ h_a je homogena jednadžba lijeve strane

$$h_a(n) = C_1(-1)^n + C_2(-6)^n$$

⇒ početni uvjeti su: $h_a(-1) = 0$; $h_a(0) = 1$

⇒ $h_a(0) = 1$ zbog toga što impuls dolazi u trenutku $n=0$

⇒ potrebno dodati još $h_a(-1)=0$ zbog toga što imamo dif jed 2 reda (da je bila dif jed 5 reda bi imali $h_a(0)=1$, $h_a(-1)=0$, $h_a(-2)=0$, $h_a(-3)=0$, $h_a(-4)=0$ tj samo $h_a(0)$ je 1, svi ostali su 0)

⇒ pomoću početnih uvjeta se nađu C_1 i C_2 te se $h_a(n)$ uvrsti u $h(n)$

$$h(n) = h_a(n-1) + h_a(n)$$

$$= C_1(-1)^{n-1} + C_2(-6)^{n-1} + C_1(-1)^n + C_2(-6)^n$$

SAŽETAK

PRIRODNI ⇒ HOMOGENA JEDNADŽBA (konstante homogene jednadžbe se određuju iz $y_{tot} = y_h + y_p$ uz promijenjene poč. uvjete)

PRISILNI ⇒ PARTIKULARNA JED. (konst. se dobivaju direktnim uvrštavanjem partikularnog rješenja u dif. jed.)

NEPOBUĐENI ⇒ HOMOGENA JEDNADŽBA UZ <u>ZADANE</u> POČETNE UVJETE (konstante homogene jed. se nalaze uvrštavanjem <u>ZADANIH</u> početnih uvjeta u homogenu jed.)

MIRNI ⇒ HOMOGENA + PARTIKULARNA UZ POČETNE UVJETE 0 (<u>obavezno</u> početne uvjete prilagoditi)