# Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

27. svibnja 2013.

# Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom $Uz^n$

- pokazano je kako je $y(t) = H(s)Ue^{st}$, odziv linearnog vremenski stalnog kontinuiranog sustava na pobudu svevremenskom eksponencijalom $u(t) = Ue^{st}$,
- razmotrimo odziv diskretnog sustava na svevremensku eksponencijalu

$$u(n) = Uz^n, \ n \in \mathbb{Z}, \ z \in \mathbb{C},$$

- odziv mirnog sustava određujemo konvolucijom pa je

$$y(n) = h(n) * u(n) = h(n) * Uz^n = U \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{n-m} =$$

$$= Uz^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m}}_{H(z)} = H(z)Uz^n$$

# Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom

- prema tome, odziv mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, na svevremensku eksponencijalu $Uz^n$, je

$$y(n) = H(z)Uz^n$$

gdje je[1]

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m}$$

- za konkretnu kompleksnu frekvenciju pobude $z$, dakle kompleksan broj, $H(z)$ je također, u općem slučaju, kompleksan broj pa vrijedi
- za pobudu kompleksnom eksponencijalom odziv je istog oblika i rezultat je množenja pobude s konstantom
- kompleksnu eksponencijalu nazivamo karakterističnom ili vlastitom funkcijom sustava

[1] Za $z \in \mathbb{C}$, $H(z)$ nazivamo prijenosnom funkcijom definiranom s preslikavanjem $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

# Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom $U(e^{j\Omega})^n$

- razmatra se slučaj odziva linearnog vremenski stalnog diskretnog sustava na svevremensku eksponencijalu frekvencije $z = e^{j\Omega}$, dakle,

$$u(n) = Uz^n = U \cdot (e^{j\Omega})^n, \quad U \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * u(n) = h(n) * U(e^{j\Omega})^n = \\ &= U \textstyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\Omega(n-m)} = \\ &= Ue^{j\Omega n} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega m}}_{H(e^{j\Omega})} = H(e^{j\Omega}) U e^{j\Omega n} \end{aligned}$$

- za $\Omega \in \mathbb{R}$, $H(e^{j\Omega})$ je kompleksna funkcija i naziva se frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega m}$$

# Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

- očigledno je kako vrijedi veza frekvencijske karakteristike diskretnog sustava[2], $H(e^{j\Omega})$, i prijenosne funkcije $H(z)$

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

- za realni impulsni odziv $h(n)$ vrijedi

$$H(e^{j\Omega}) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\cos(\Omega m)}_{Re[H(e^{j\Omega})]} - j \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\sin(\Omega m)}_{-Im[H(e^{j\Omega})]}$$

$$H(e^{j\Omega}) = Re[H(e^{j\Omega})] + jIm[H(e^{j\Omega})]$$

- očigledno je kako je
  - $Re[H(e^{j\Omega})]$ parna funkcija od $\Omega$ a
  - $Im[H(e^{j\Omega})]$ neparna funkcija od $\Omega$

[2] Frekvencijska karak. definirana je kao $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, a prijenosna funkcija kao funkcija $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

# Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

- kako je $H(e^{j\Omega})$ kompleksna funkcija vrijedi

$$H(e^{j\Omega}) = Re[H(e^{j\Omega})] + jIm[H(e^{j\Omega})] = |H(e^{j\Omega})|e^{j\angle H(e^{j\Omega})}$$

pri čemu je amplitudna frekvencijska karakteristika,

$$|H(e^{j\Omega})| = \sqrt{(Re[H(e^{j\Omega})])^2 + (Im[H(e^{j\Omega})])^2},$$

a fazna frekvencijska karakteristika,

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \arctan\left(\frac{Im[H(e^{j\Omega})]}{Re[H(e^{j\Omega})]}\right)$$

- iz parnosti $Re[H(e^{j\Omega})]$ i neparnosti $Im[H(e^{j\Omega})]$, slijedi kako je
  - $|H(e^{j\Omega})|$ parna funkcija od $\Omega$ i
  - $\angle H(e^{j\Omega})$ neparna funkcija od $\Omega$

## Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

- iz parnosti i neparnosti realnog i imaginarnog dijela frekvencijske karakteristike slijedi $H(e^{-j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega})$
- iz

$$H(e^{j\Omega}) = Re[H(e^{j\Omega})] + jIm[H(e^{j\Omega})]$$

i

$$H(e^{-j\Omega}) = Re[H(e^{-j\Omega})] + jIm[H(e^{-j\Omega})]$$

uz parni $Re[H(e^{j\Omega})]$ i neparni $Im[H(e^{j\Omega})]$ slijedi

$$H(e^{-j\Omega}) = Re[H(e^{j\Omega})] - jIm[H(e^{j\Omega})] = H^*(e^{j\Omega})$$

## Periodičnost frekvencijske karakteristike diskretnog sustava

- frekvencijska karakteristika diskretnog sustava je periodična s periodom $2\pi$

$$H(e^{j(\Omega+2\pi k)}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j(\Omega+2\pi k)m} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega m} \underbrace{e^{-j2\pi km}}_{1} = H(e^{j\Omega})$$

# Odziv diskretnog sustava na realnu sinusoidu

- pokazano je kako je za pobudu $u(n) = Uz^n = U \cdot (e^{j\Omega})^n, U \in \mathbb{R}^+$, odziv linearnog diskretnog sustava

$$y(n) = Yz^n = (H(z)Uz^n)_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega})Ue^{j\Omega n}$$

- odziv na pobudu $u(n) = Uz^n = U(e^{-j\Omega})^n, U \in \mathbb{R}^+$, je

$$y(n) = Yz^n = (H(z)Uz^n)_{z=e^{-j\Omega}} = H(e^{-j\Omega})Ue^{-j\Omega n}$$

- iz ovoga zaključujemo o odzivu na svevremensku pobudu $u(n) = Ucos(\Omega n) = 0.5Ue^{j\Omega n} + 0.5Ue^{-j\Omega n}$

$$y(n) = 0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} + 0.5UH(e^{-j\Omega})e^{-j\Omega n}$$

# Odziv diskretnog sustava na realnu sinusoidu

$$y(n) = 0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} + 0.5UH(e^{-j\Omega})e^{-j\Omega n}$$

- pišemo kao
$$y(n) = 0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} + \left(0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\right)^*$$

  odnosno

$$y(n) = 2Re\left(0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\right) = Re\left(|H(e^{j\Omega})|Ue^{j\angle H(e^{j\Omega})}e^{j\Omega n}\right)$$

  i finalno

$$y(n) = |H(e^{j\Omega})|U\cos\left(\Omega n + \angle H(e^{j\Omega})\right), \quad -\infty < n < \infty$$

- zaključujemo kako je problem određivanja odziva sustava, u vremenskoj domeni, transformiran u frekvencijsku domenu i svodi se na određivanje vrijednosti $H(e^{j\Omega})$

# Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- linearni, vremenski stalni, diskretan sustav $N$–tog reda, opisan je jednadžbom diferencija

$$y(n)+a_1y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)=$$
$$=b_0u(n)+b_1u(n-1)+\ldots+b_{N-1}u(n-N+1)+b_Nu(n-N)$$

- jednadžbu zapisujemo pomoću operatora pomaka definiranog kao

za $n \in \mathbb{Z}$

$E^{-1}w(n)=w(n-1)$ – pomak za jedan korak

$E^{-K}w(n)=w(n-K)$ – pomak za $K$ koraka

$$\underbrace{\left[1+a_1E^{-1}+\ldots+a_{N-1}E^{-N+1}+a_NE^{-N}\right]}_{A(E)}y(n)=$$
$$=\underbrace{\left[b_0+b_1E^{-1}+\ldots+b_{N-1}E^{-N+1}+b_NE^{-N}\right]}_{B(E)}u(n)$$

# Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- dakle, skraćeni, operatorski zapis jednadžbe diferencija zapisujemo kao

$$A(E)y(n) = B(E)u(n)$$

gdje su $A(E)$ i $B(E)$ složeni operatori

$$A(E) = 1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}$$
$$B(E) = b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}$$

odnosno

$$y(n) = \left(\frac{B(E)}{A(E)}\right) u(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = H(E)u(n)$$

- složeni operator $H(E)$ pridružuje vremenskoj funkciji $y(n)$ funkciju $u(n)$ i predstavlja formalni, operatorski, zapis polazne jednadžbe diferencija

## Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- sustav pobuđujemo svevremenskom kompleksnom eksponencijalom

$$n \in \mathbb{Z}, \qquad z \in \mathbb{C}$$
$$u(n) = Uz^n$$

$U$ – kompleksna amplituda pobude,
$z$ – neka konkretna kompleksna frekvencija

- budući da pobuda starta u $-\infty$, za stabilni su sustav početni uvjeti, koji su eventualno postojali u $-\infty$, istitrali, nema prijelaznog odziva, i totalno je rješenje jednako partikularnom rješenju jednadžbe diferencija
- totalni odziv je zato

$$y(n) = y_p(n) = Yz^n$$

# Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- kompleksnu amplitudu odziva $Y$ određujemo iz polazne jednadžbe metodom neodređenih koeficijenata pa, uvrštenjem u polaznu jednadžbu, slijedi

$$\underbrace{\left(1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}\right)}_{A(z)} Y z^n =$$
$$= \underbrace{\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}\right)}_{B(z)} U z^n$$

- kompleksna je amplituda odziva $Y$

$$Y = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}}}_{H(z)} U = H(z) U$$

- amplituda partikularnog rješenja $Y$ određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava, te konkretnom kompleksnom frekvencijom $z$

# Prijenosna funkcija

- $H(z)$ je veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva $Yz^n$ i kompleksne amplitude pobude $Uz^n$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}} = \frac{Y}{U}$$

- za konkretnu frekvenciju $z$, $H(z)$ ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza

$$Y = H(z)U$$

- $H(z)$ možemo formalno zapisati iz složenog operatora $H(E)$, zamjenom operatora $E^{-1}$ s kompleksnom frekvencijom $z^{-1}$

# Prijenosna funkcija

- $H(z)$, za $z \in \mathbb{C}$, nazivamo prijenosna funkcija ili transfer funkcija diskretnog sustava i možemo je definirati kao

$$n \in \mathbb{Z}, \qquad z \in \mathbb{C}$$
$$H(z) = \left.\frac{y_p(n)}{u(n)}\right|_{u(n)=Uz^n} = \frac{Yz^n}{Uz^n} = \frac{Y}{U}$$

- prijenosna ili transfer funkcija sustava $H(z)$ racionalna je funkcija koju možemo prikazati kao

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^{N} a_j z^{-j}}$$

odnosno

$$H(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N} = \frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{N-j}}{z^N + \sum_{j=1}^{N} a_j z^{N-j}}$$

## Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju možemo pisati uz pomoć produkta korijenih faktora:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^{N} a_j z^{-j}} = b_0 \frac{\prod_{j=1}^{N}(1 - z_j z^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1 - p_j z^{-1})}$$

odnosno u obliku

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{N-j}}{z^n + \sum_{j=1}^{N} a_j z^{N-j}} = b_0 \frac{\prod_{j=1}^{N}(z - z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z - p_j)}$$

$z_1, z_2, \ldots, z_N$ su nule prijenosne funkcije
$p_1, p_2, \ldots, p_N$ su polovi[3] prijenosne funkcije

[3] dolazi od engleske riječi tent-pole

# Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju možemo pisati kao produkt i kvocijent vektora

$$H(z) = b_0 \frac{|z - z_1| e^{j\angle(z-z_1)} |z - z_2| e^{j\angle(z-z_2)} \ldots |z - z_N| e^{j\angle(z-z_N)}}{|z - p_1| e^{j\angle(z-p_1)} |z - p_2| e^{j\angle(z-p_2)} \ldots |z - p_N| e^{j\angle(z-p_N)}}$$

- prijenosnu funkciju $H(z)$ možemo pisati i kao

$$H(z) = |H(z)| e^{j\angle H(z)}$$

pri čemu su[4]

$$|H(z)| = |b_0| \frac{|z - z_1||z - z_2| \cdots |z - z_N|}{|z - p_1||z - p_2| \cdots |z - p_N|}$$

$$\angle H(z) = \angle(b_0) + [\angle(z - z_1) + \angle(z - z_2) + \cdots + \angle(z - z_N)] - \\ - [\angle(z - p_1) + \angle(z - p_2) + \cdots + \angle(z - p_N)]$$

[4] Za realne sustave je $b_0 \in \mathbb{R}$, pa je $\angle b_0 = 0$ za $b_0 \geq 0$, odnosno $\angle b_0 = \pi$ za $b_0 < 0$

## Prijenosna funkcija diskretnog sustava – primjer

- za prije razmatrani diskretni sustav, opisan jednadžbom diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

prijenosnu funkciju možemo formalno pisati zamjenjujući operator $E^{-1}$ sa $z^{-1}$, pa slijedi

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

## Prisilni odziv sustava

- totalni je odziv vremenski diskretnog sustava, na pobudu $u(n) = cos(\Omega n) \cdot \mu(n)$, dan kao[5]

$$y(n) = \sum_{j=1}^{N} c_i q_i^n + y_p(n)$$

- pri čemu je prisilni odziv, uz danu pobudu,

$$y_p(n) = |H(e^{j\Omega})| \cos\left(\Omega n + \angle H(e^{j\Omega})\right), \qquad n \geq 0$$

[5] ovdje su pretpostavljene jednostruke karakteristične frekvencije

# Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- prije razmatrani diskretni sustav, opisan jednadžbom diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

  sustav je pobuđen s

$$u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$$

- za ovaj sustav određujemo, prisilni odziv, prijenosnu funkciju i frekvencijsku karakteristiku
- prisilni odziv, na pobudu $u(n) = Ucos(\Omega_0 n)$ je, kako je prije pokazano,

$$y_p(n) = |H(e^{j\Omega_0})| U \cos\left(\Omega_0 n + \angle H(e^{j\Omega_0})\right)$$

# Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- iz jednadžbe diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

odnosno

$$(1 - 0.8\sqrt{2}E^{-1} + 0.64E^{-2})y(n) = u(n)$$

prije je već izvedena prijenosna funkcija

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

a frekvencijsku karakteristiku izračunavamo za $z = e^{j\Omega}$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\Omega} + 0.64e^{-j2\Omega}}$$

## Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- za konkretnu frekvenciju pobude $\Omega_0 = \frac{\pi}{8}$ omjer kompleksne amplitude odziva i pobude je

$$H(e^{j\Omega_0}) = H(e^{j\frac{\pi}{8}}) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{8}} + 0.64e^{-j2\frac{\pi}{8}}}$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{8}}) = 2.4495 + j0.1178 = 2.4524e^{j0.0481}$$

- pa je partikularno rješenje

$$y_p(n) = |H(e^{j\Omega_0})|U\cos\left(\Omega_0 n + \angle H(e^{j\Omega_0})\right) =$$

$$= 2.4524(-0.2)\cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right) =$$

$$= -0.49048\cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right) \qquad n \geq 0$$

## Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- prije je određen prisilni odziv diskretnog sustava, zadanog jednadžbom diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n),$$

na pobudu $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$

- pokazano je kako je partikularno rješenje jednadžbe diferencija jednako prisilnom odzivu sustava
- ovdje će biti ponovljen postupak određivanja partikularnog rješenja u vremenskoj domeni, kako bi se ukazalo na jednostavnost netom prikazanog postupka određivanja partikularnog rješenja u frekvencijskoj domeni

## Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- kako je pobuda $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K_1 cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\frac{\pi}{8}n)$$

- koeficijente $K_1$ i $K_2$ određujemo metodom neodređenog koeficijenta
- uvrštenjem $y_p(n)$ u polaznu jednadžbu slijedi

$$y_p(n) - 0.8\sqrt{2}y_p(n-1) + 0.64y_p(n-2) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n);$$

$$\begin{aligned} K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - 0.8\sqrt{2}K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] - \\ -0.8\sqrt{2}K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] + 0.64K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] + \\ +0.64K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n) \end{aligned}$$

# Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- primjenom trigonometrijskih transformacija slijedi

$$
\begin{aligned}
&K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - \\
&\quad -0.8\sqrt{2}K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] - \\
&\quad -0.8\sqrt{2}K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] + \\
&\quad +0.64K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] + \\
&\quad +0.64K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)
\end{aligned}
$$

- razvrstavanjem slijedi

$$
\begin{aligned}
&\{[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\
&\quad +[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}cos(\tfrac{\pi}{8}n) + \\
&\{-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\
&\quad +[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}sin(\tfrac{\pi}{8}n) = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)
\end{aligned}
$$

## Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- usporedbom lijeve i desne strane pišemo

$$
\begin{aligned}
&[1-0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8})+0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1+\\
&\qquad +[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8})-0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2=-0.2\\
&-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8})-0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1+\\
&\qquad +[1-0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8})+0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2=0
\end{aligned}
$$

- rješenjem ovih jednadžbi izračunavamo $K_1$ i $K_2$

$$K_1=-0.4899, \qquad K_2=0.0236$$

- pa je partikularno rješenje

$$
\begin{aligned}
y_p(n)&=-0.4899cos(\tfrac{\pi}{8}n)+0.0236sin(\tfrac{\pi}{8}n)=\\
&=-0.49048cos(\tfrac{\pi}{8}n+0.0481)
\end{aligned}
$$

## Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- iz izračunatih $H(z)$

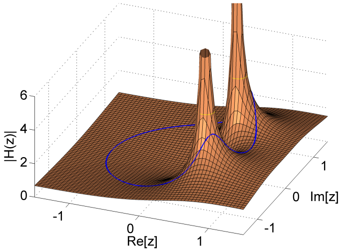
$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

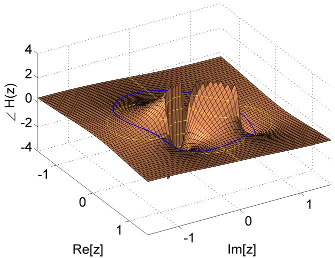
i $H(e^{j\Omega})$

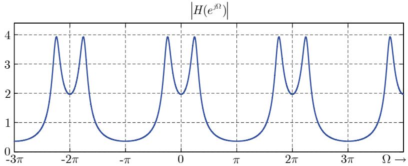
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\Omega} + 0.64e^{-j2\Omega}} = \frac{e^{j2\Omega}}{e^{j2\Omega} - 0.8\sqrt{2}e^{j\Omega} + 0.64}$$

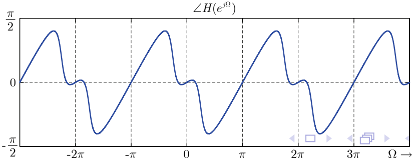
možemo crtati, kao i u slučaju kontinuiranih sustava, plohe koje prikazuju $|H(z)|$ i $\angle H(z)$, odnosno krivulje, $|H(e^{j\Omega})|$ i $\angle H(e^{j\Omega})$

# Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer



Signali i sustavi
školska godina 2012/2013
Cjelina 13.

Profesor Branko Jeren



# Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- frekvencijska karakteristika se može odrediti grafički iz

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{j=1}^{N}(z - z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z - p_j)},$$

praćenjem $|H(z)|$ i $\angle H(z)$ na jediničnoj kružnici, dakle, za $z = e^{j\Omega}$

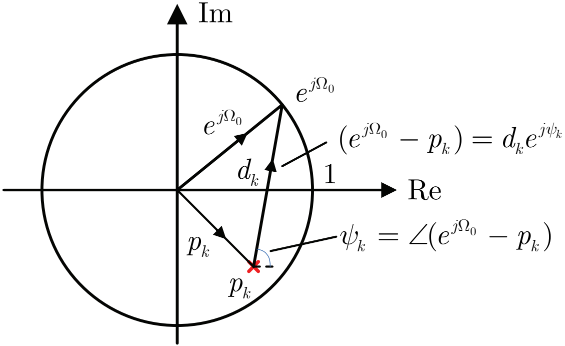
$$|H(e^{j\Omega})| = |b_0| \frac{\prod_{j=1}^{N} |(e^{j\Omega} - z_j)|}{\prod_{j=1}^{N} |(e^{j\Omega} - p_j)|},$$

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \underbrace{\angle(b_0)}_{\substack{0 \text{ za } b_0 \geq 0 \\ \pi \text{ za } b_0 < 0}} + \sum_{j=1}^{N} \angle\left(e^{j\Omega} - z_j\right) - \sum_{j=1}^{N} \angle\left(e^{j\Omega} - p_j\right)$$

- svaki korijeni faktor prijenosne funkcije daje svoj individualni doprinos modulu (multiplikativno) i fazi (aditivno)

# Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- svaki od članova $\left(e^{j\Omega} - z_j\right)$ ili $\left(e^{j\Omega} - p_j\right)$ možemo prikazati kao vektore u kompleksnoj ravnini




- napomena: višestruke nule ili višestruke polove označujemo oznakama $\circ$, odnosno $\times$, i uz njih upisujemo arapski broj koji označuje red njihove višestrukosti

# Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

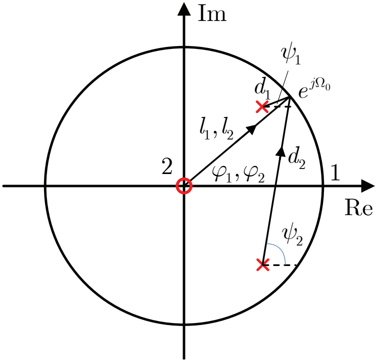
$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} = \frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j2\Omega}}{(e^{j\Omega} - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(e^{j\Omega} - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

za konkretnu frekvenciju
$z = e^{j\Omega_0}$,
i za $l_1 = l_2 = 1$,

$$|H(e^{j\Omega_0})| = \frac{l_1 l_2}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_1 d_2}$$

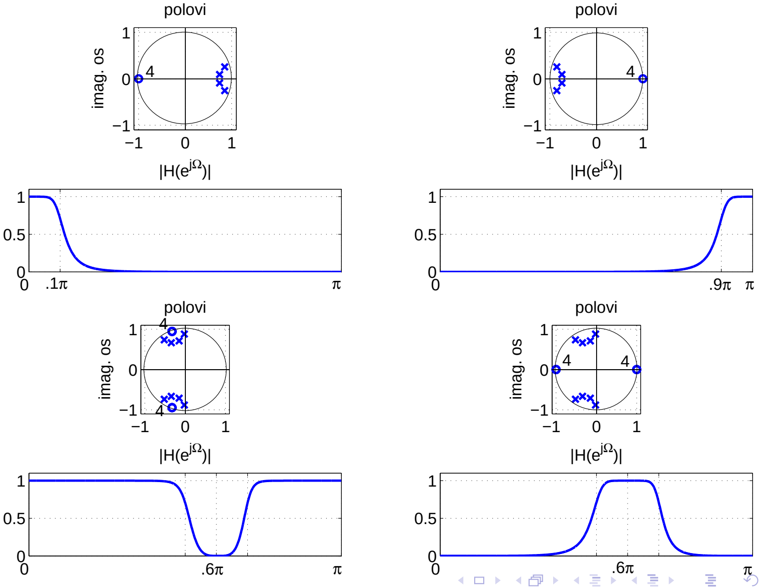
$$\angle H(e^{j\Omega_0}) = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_1 - \psi_2$$



## Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

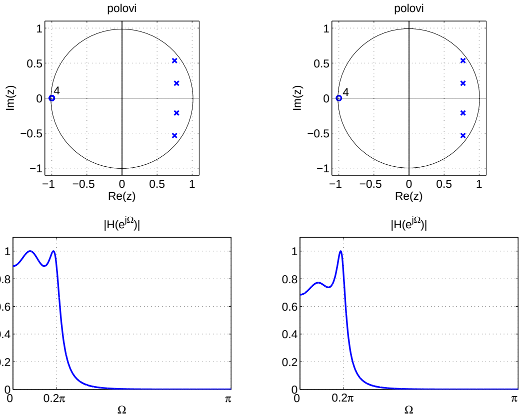
- slijede primjeri koji ukazuju kako položaj polova i nula određuje frekvencijsku karakteristiku
- položaj polova i nula određen je sustavnim postupcima za projektiranje sustava
- prikazani su primjeri četiri tipa tzv. Butterworth-ovih filtara:
  - niskopropusni (NP)
  - visokopropusni (VP)
  - pojasna brana (PB)
  - pojasno propusni (PP)

# Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer



# Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- slijedi primjer koji pokazuje kako mali pomak polova ima izravni utjecaj na frekvencijsku karakteristiku ⇒ potrebni sustavni postupci projektiranja




$$p_{1,2} = 0.7498 \pm j0.5348, \qquad p'_{1,2} = 0.7700 \pm j0.5348$$
$$p_{3,4} = 0.7774 \pm j0.2120, \qquad p'_{3,4} = 0.7774 \pm j0.2120$$