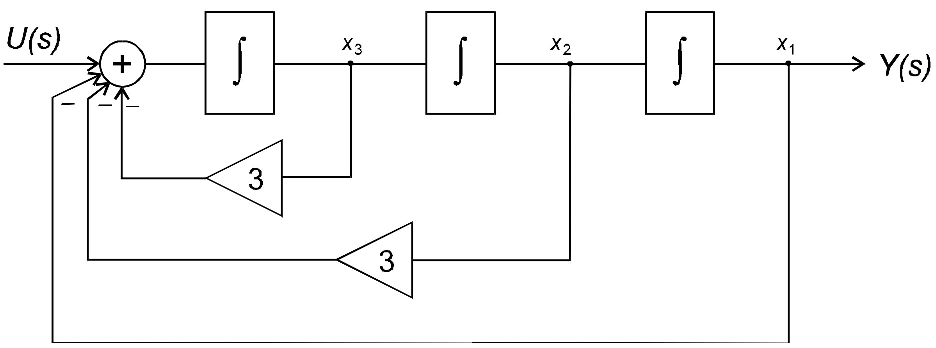
Signali i sustavi - Rješenja zadataka za vježbu (III. kolokvij)

1.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

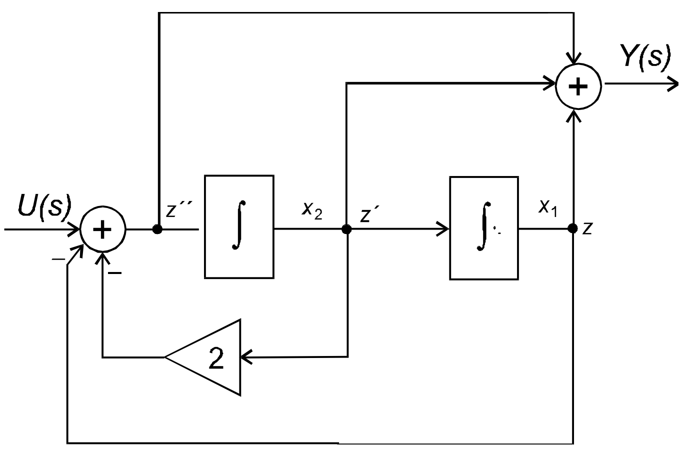
Dobivena matrica A je tipična za direktnu realizaciju: u zadnjem retku mogu biti elementi različiti od 0, do glavne dijagonale su jedinice, a svi ostali elementi su 0.



2.

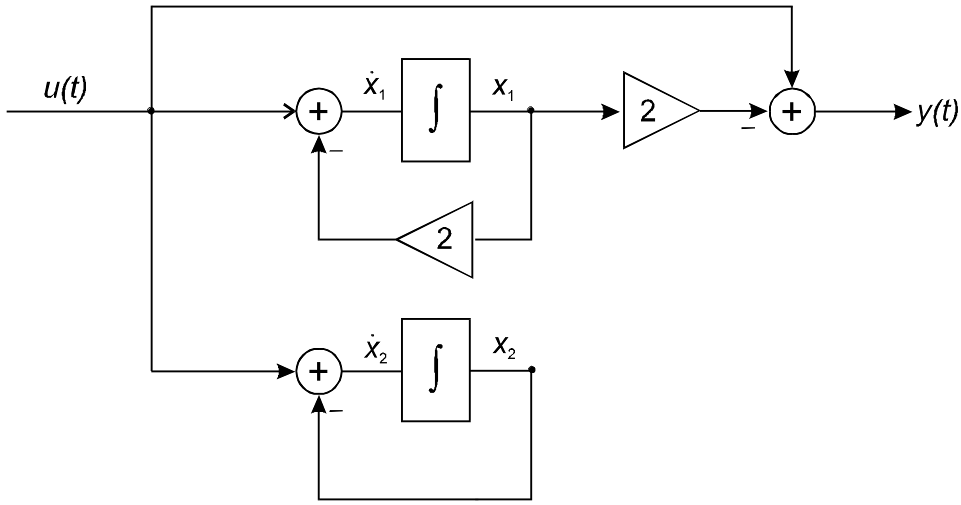
$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\ C=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}\ D=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

Dobivena matrica A je tipična za direktnu realizaciju: u zadnjem retku su elementi različiti od 0, do glavne dijagonale je jedinica, a sve ostalo su 0.



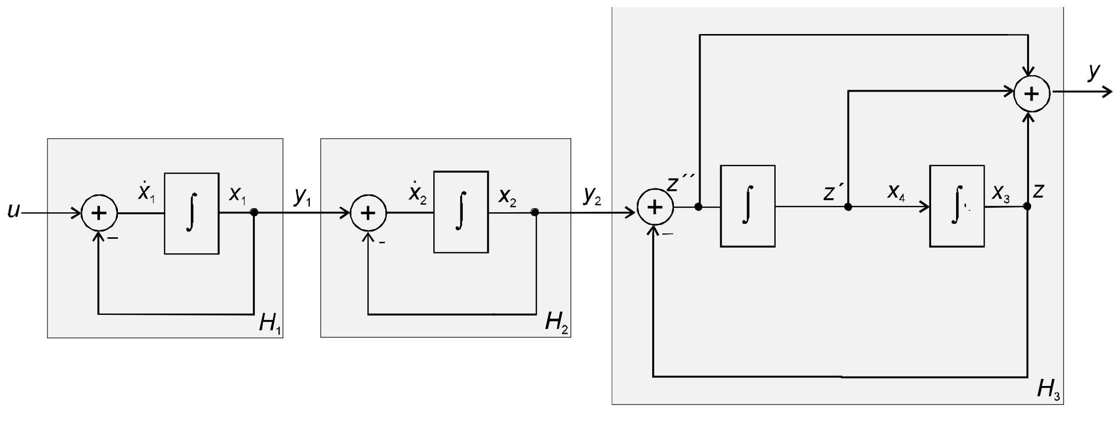
3.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$



4.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$



Pošto u trećoj sekciji imamo direktnu realizaciju, donja trokutasta matrica karakteristična za kaskadnu realizaciju je pokvarena (jedinica u predzadnjem retku).

5. Normalne varijable stanja:

$$H_1(s)=\frac{1}{s^3+5s^2+3s+1}$$

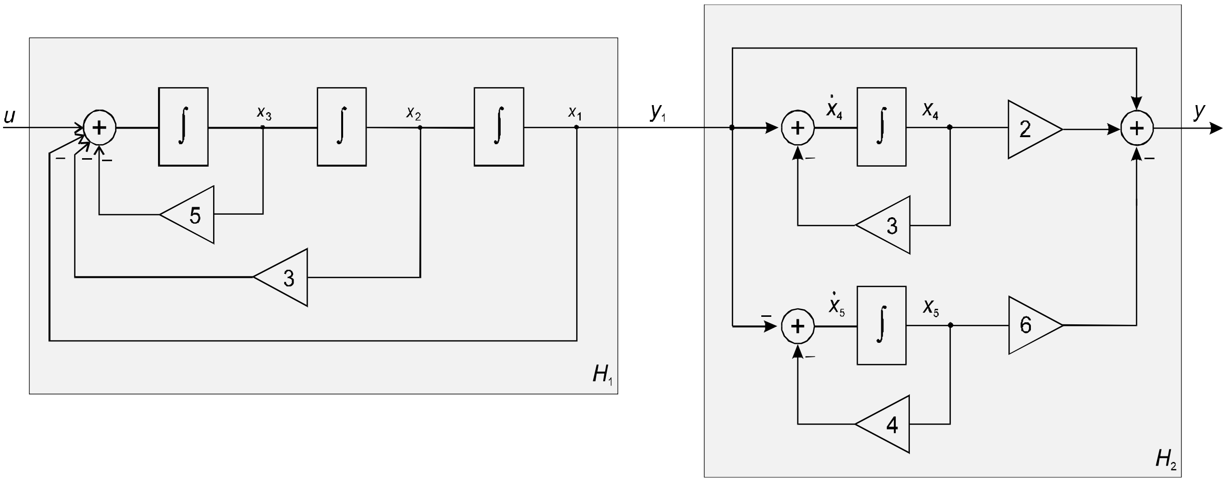
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\cdot u$$

$$y_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\cdot u$$

Kanonske varijable stanja:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\cdot y_1$$

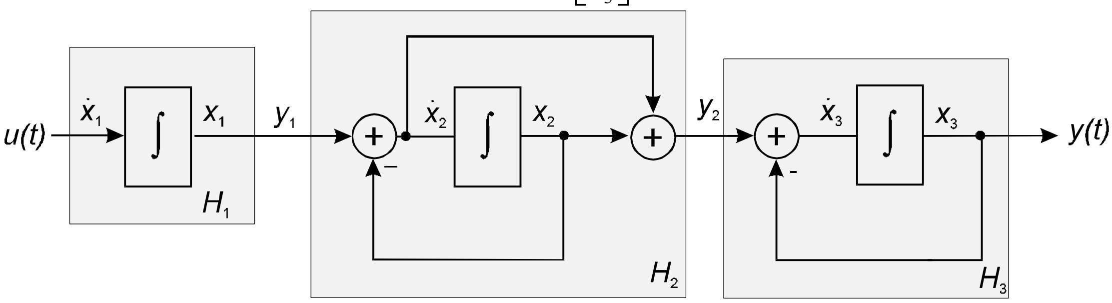
$$y(t)=\begin{bmatrix}2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\cdot y_1$$



6.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\cdot u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\cdot u$$



7. Matrice A^*, B^*, C^* i D^* paralelne realizacije:

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice A, B, C i D direktne realizacije:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Impulsni odziv sustava:

$$h(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - \delta(t) & \quad 4e^{t} + 3e^{-t} + \delta(t) \end{bmatrix}$$

9. Impulsni odziv sustava:

$$h(t) = \delta(t) + e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

Dif. jednadžba: $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u''(t) + 4u'(t) + 5u(t)$

10. Impulsni odziv sustava:

$$h(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-t} + 6e^{-2t} & \quad 2e^{-t} - e^{-2t} + \delta(t) \end{bmatrix}$$

11.

$$H(z) = \frac{z+2}{z^3} \qquad H_1(z) = \frac{z^2-1}{z^2}$$

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$$

12.

$$Y(z)=\frac{z^3-2}{z(z^2-1)} \qquad H_1(z)=\frac{2z-1}{z-1} \qquad H(z)=1$$

$$u[n]=2\delta[n-1]-\frac{1}{2}\cdot 1^n+\frac{3}{2}\cdot(-1)^n$$

13.

$$H(z)=1-z^{-1}+z^{-4}\cdot\frac{1}{1-z^{-3}}+2z^{-5}\cdot\frac{1}{1-z^{-3}}$$

$$y[n]=\delta[n]+0\cdot\delta[n-1]+0\cdot\delta[n-2]+0\cdot\delta[n-3]+1\cdot\delta[n-4]+3\cdot\delta[n-5]+\ldots$$

Prvih pet uzoraka:

$$y[n]=\{1,0,0,0,1\}$$

14. Jednadžbe stanja i izlazna jednadžba u matričnom obliku:

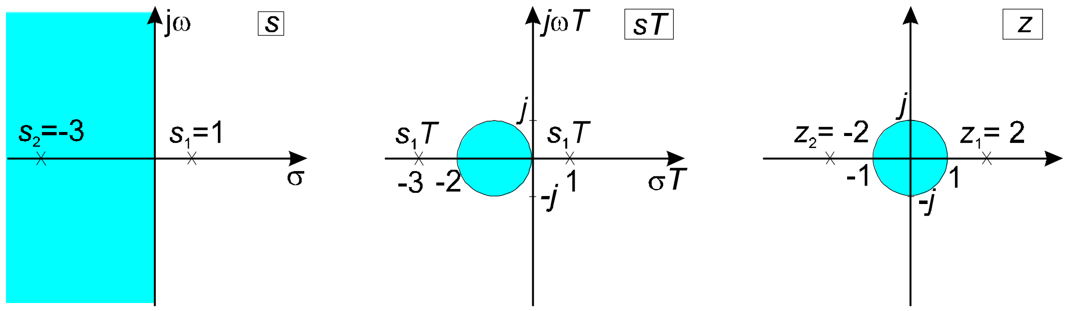
$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot u[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix} 20 & -20 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}+[0]\cdot u[n]$$

15. Impulsni odziv sustava:

$$h[n]=-\frac{1}{4}\delta[n]+\frac{1}{4}\cdot(2)^n-\frac{1}{4}\cdot(-2)^n$$

Stabilnost:



Kontinuirani sustav je *nestabilan* jer ima pol s_1 = 1 u desnoj poluravnini.
Polovi s_1T i s_2T su van područja stabilnosti Eulerova algoritma, pa će diskretni sustav biti *nestabilan*.

Diskretni sustav je *nestabilan* jer su polovi z_1 i z_2 van jedinične kružnice u Z-ravnini.

Za $T = 1/3$

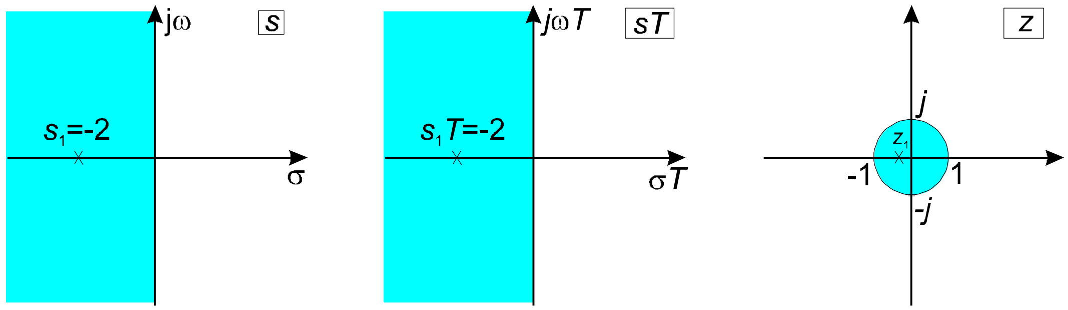
$$s_1 \cdot T = \frac{1}{3}$$
$$s_2 \cdot T = -1$$

$s_1 T$ nije upao u područje stabilnosti Eelerova algoritma, pa će diskretni sustav biti *nestabilan.*

16. Impulsni odziv sustava:

$$h[n] = 3\delta[n] - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Stabilnost:

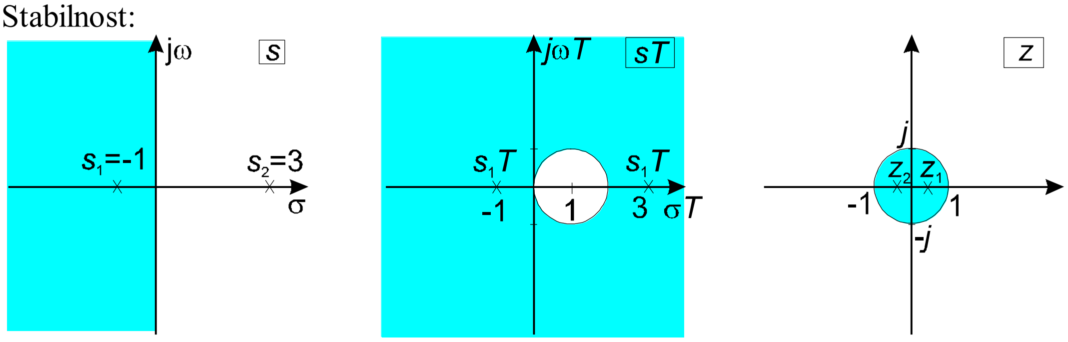


Kontinuirani sustav je *stabilan* jer se pol s_1 = -2 nalazi u lijevoj poluravnini.
Bilinearna transformacija preslika lijevu poluravninu u jediničnu kružnicu u Z-ravnini, pa će diskretni sustav biti *stabilan*.

17. Impulsni odziv sustava:

$$h[n] = -\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Stabilnost:



Kontinuirani sustav je *nestabilan* jer se pol s_2 = 3 nalazi u desnoj poluravnini.

Polovi s_1T i s_2T su unutar područja stabilnosti obrnutog Eulera, pa ćemo od nestabilnog kontinuiranog sustava dobiti *stabilni* diskretni sustav.
Potvrda onoga što smo ranije zaključili: Diskretni sustav je *stabilan* jer su polovi z_1 i z_2 unutar jedinične kružnice u Z-ravnini.

18. a)

$$H(z) = \frac{2z}{z - \frac{1}{e^T}}$$

b)

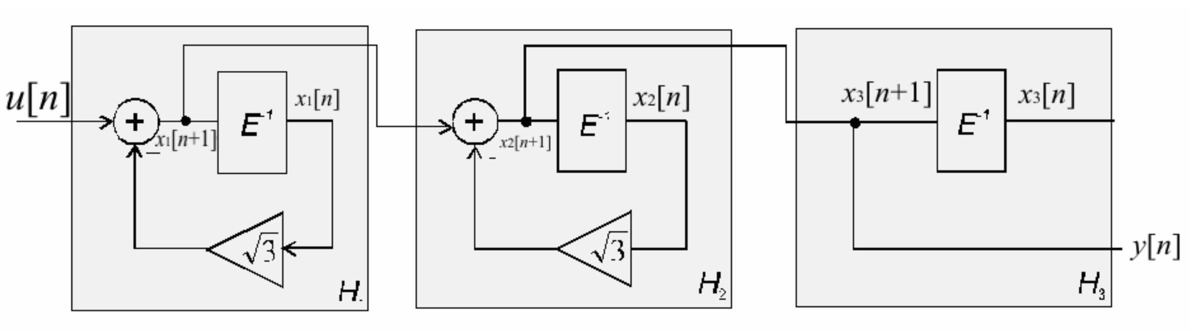
$$h[nT] = \frac{-2T}{2-T}\delta[n] + \frac{8T}{4-T^2}\cdot\left(\frac{2-T}{2+T}\right)^{nT}$$

19. Kaskadna realizacija:

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u[n]$$

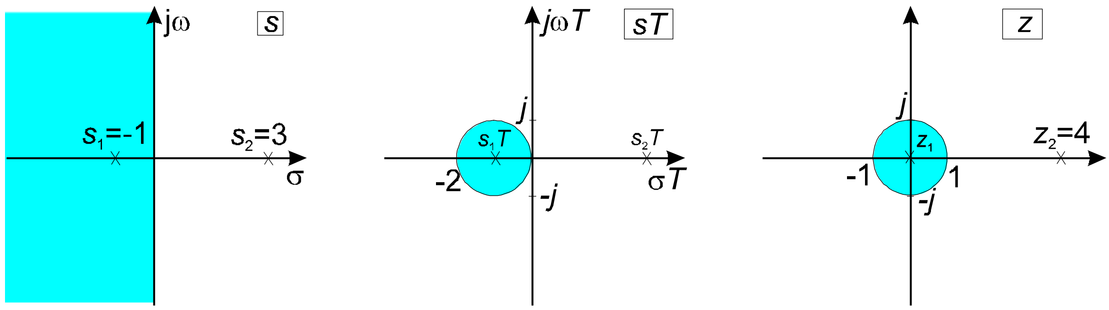
$$y[n] = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + [1] \cdot u[n]$$

Simulacijski blok-dijagram:



20.

$$H(z)=\frac{1}{z(z-4)}$$



Kontinuirani sustav je *nestabilan* jer se pol $s_2 = 3$ nalazi u desnoj poluravnini.

Pol s_2T nije u području stabilnosti Eulerova algoritma, pa će diskretni sustav biti *nestabilan*.

Potvrda onoga što smo ranije zaključili: Diskretni sustav nije *stabilan* jer se pol z_2 nalazi van jedinične kružnice u Z-ravnini.

Za $T = 1/3$

$$s_1 \cdot T = -1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$s_2 \cdot T = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

s_2T pada van područja stabilnosti Eulerova algoritma, pa će diskretni sustav biti *nestabilan.*