Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

09. lipnja 2008.

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- model s varijablama stanja, kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava, je

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$$
$$\forall t \in Realni, \quad x(0^-) = pocetnoStanje$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno K i M, a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija
- odziv sustava određen je rješavanjem gornjih jednadžbi sustava

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- prije je određen odziv sustava, rješavanjem jednadžbe stanja i izlazne jednadžbe u vremenskoj domeni

odziv stanja je

$$x(t) = e^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau =$$
$$= \Phi(t)x(0^-) + \int_{0^-}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

a odziv sustava

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) =$$
$$= C\Phi(t)x(0^-) + \int_{0^-}^{t} C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

gdje je $\Phi(t) = e^{At}$ prijelazna ili fundamentalna matrica sustava

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- odziv sustava moguće je odrediti i $\mathcal{L}$–transformacijom, pa transformacijom jednadžbe stanja

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

slijedi

$$sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0^-) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0^-) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

- matrica se $(sI - A)^{-1}$ označava kao $\Phi(s)$, i naziva matrica karakterističnih frekvencija

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

- pa je $\mathcal{L}$–transformacija odziva stanja $X(s)$

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- $\mathcal{L}$–transformacija izlazne jednadžbe

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

je

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

pa je uvrštavanjem izračunatog

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija totalnog odziva

$$Y(s) = C\Phi(s)x(0^-) + C\Phi(s)BU(s) + DU(s)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom izračunatih odziva

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

slijedi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}x(0^-) + \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)BU(s)\}$$

odnosno

$$x(t) = \Phi(t)x(0^-) + \int_{0^-}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

a inverznom transformacijom

$$Y(s) = C\Phi(s)x(0^-) + C\Phi(s)BU(s) + DU(s) =$$

$$y(t) = C\Phi(t)x(0^-) + \int_{0^-}^{t} C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica

- matrica karakterističnih frekvencija definirana je kao

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

i vrijedi

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)}$$

- elementi matrice karakterističnih frekvencija su razlomljene racionalne funkcije kompleksne frekvencije
    - brojnik polinom $(N - 1)$-vog stupnja
    - nazivnik N-tog stupnja
- polinom det(sI-A) je karakterističan polinom sustava N–tog stupnja i njegovi korijeni su vlastite vrijednosti matrice A, odnosno, vlastite frekvencije sustava
- adjungirana matrica je transponirana matrica kofaktora

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica – primjer

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom matrice karakterističnih frekvencija određuje se fundamentalna matrica

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

- neka je zadana matrica A sustava[1] kao

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right\}^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

[1] Matrica A je iz primjera koji će malo kasnije biti detaljno razmatran

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica–primjer

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom matrice karakterističnih frekvencija određuje se fundamentalna matrica

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\Phi(s)\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix},$$

za $t \geq 0$

Prijenosna matrica

- $\mathcal{L}$–transformacija totalnog odziva sustava je

$$
\begin{aligned}
Y(s) = C\Phi(s)x(0^-) + C\Phi(s)BU(s) + DU(s) = \\
= C\Phi(s)x(0^-) + [C\Phi(s)B + D]U(s)
\end{aligned}
$$

za miran sustav $x(0^-) = 0$ pa je

$$
Y(s) = [C\Phi(s)B + D]U(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)
$$

$$
H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D
$$

- $H(s)$ je prijenosna ili transfer matrica čiji su elementi prijenosne funkcije između pojedinih izlaza i pojedinih ulaza
- dimenzija matrice $H(s)$ je $K \times M$, gdje je K broj izlaza a M broj ulaza u sustav

Prijenosna matrica–primjer

- određuje se prijenosna matrica $H(s)$ sustava zadanog s matricama

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- sustav je drugog reda i ima tri izlaza i dva ulaza pa je prijenosna matrica dimenzije 3×2

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+16s}{s^2+3s+2} & \frac{18s-6}{s^2+3s+2} \\ \frac{17s+2}{s^2+3s+2} & \frac{s^2+27s}{s^2+3s+2} \\ \frac{s^2+24s+8}{s^2+3s+2} & \frac{30s+6}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

element $H_{21}(s) = \frac{17s+2}{s^2+3s+2}$ predstavlja prijenosnu funkciju između drugog izlaza i prvog ulaza

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- za linearni vremenski kontinuirani sustav zadan matricama A, B, C, D odrediti prijenosnu funkciju, odziv stanja i odziv sustava
- sustav je pobuđen s $u(t) = e^{-3t}\mu(t)$ a početno stanje neka je $x(0^-) = [-3 \quad -1]^T$, a matrice A, B, C, D

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

- iz dimenzija matrica zaključuje se kako je sustav drugog reda te da ima jedan ulaz i jedan izlaz

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- prije nego pristupimo rješavanju zadanog primjera pokazujemo prijelaz u model ulaz-izlaz

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- iz $y(t) = x_1(t) \Rightarrow \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t)$, te uz $\ddot{y} = \dot{x}_2(t)$, slijedi diferencijalna jednadžba[2]

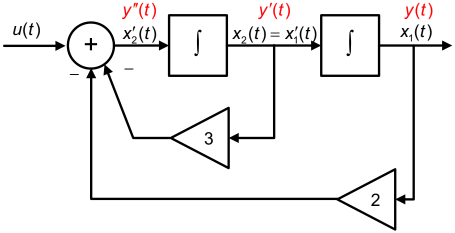
$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) = u(t), \quad y(0^-) = x_1(0^-), \quad \dot{y}(0^-) = x_2(0^-)$$

[2]Do istog modela ulaz-izlaz možemo doći iz diferencijalne jednadžbe ako izaberemo varijable stanja na isti način kao gore

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- iz danih jednadžbi stanja i izlazne jednadžbe crtamo blokovski dijagram

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\
\dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)\\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}
$$



- do istog blokovskog dijagrama dolazimo iz $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

- za zadanu matricu A, u prethodnom je primjeru već izračunata matrica karakterističnih frekvencija

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

- matricu $H(s)$ izračunavamo iz[3]

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\Phi(s)B$$

a odzive iz

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s)$$

[3] D=0

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

$$H(s) = C\Phi(s)B = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi_{12}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s+3} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-3s-10}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-s+6}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$y(s) = CX(s) = [1 \quad 0]X(s) = X_1(s)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

odziv u vremenskoj domeni je

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\begin{array}{c} \frac{-7}{s+1} + \frac{4}{s+2} \\ \frac{7}{s+1} - \frac{8}{s+2} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \frac{0.5}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{0.5}{s+3} \\ \frac{-0.5}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{1.5}{s+3} \end{array}\right]\right\}$$

$$x(t) = \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -7e^{-t} + 4e^{-2t} \\ 7e^{-t} - 8e^{-2t} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \end{array}\right]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = x_1(t) =$$
$$= \underbrace{-7e^{-t} + 4e^{-2t}}_{y_0(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}}_{y_m(t)}$$

$$y(t) = -\frac{13}{2}e^{-t} + 3e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

Fundamentalna matrica i odziv nepobuđenog sustava–primjer

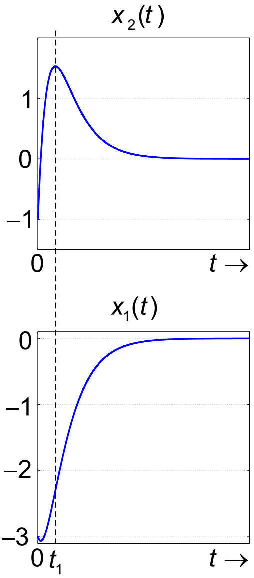
- odziv stanja nepobuđenog sustava $\dot{x} = Ax(t)$ dan je s $x(t) = \Phi(t)x(0^-)$ pa zaključujemo kako fundamentalna matrica određuje proces prijelaza sustava iz početnog stanja u stanje u trenutku t, te se naziva i prijelazna matrica (zato i engleski naziv state transition matrix)
- za dani primjer je

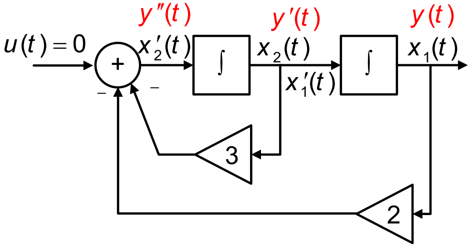
$$x(t) = \Phi(t)x(0^-) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

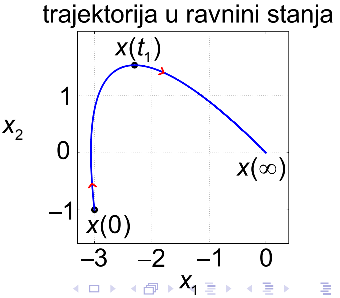
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7e^{-t} + 4e^{-2t} \\ 7e^{-t} - 8e^{-2t} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

- tijek promjene stanja sustava moguće je vizualizirati uvidom u trajektoriju u prostoru stanja
- za sustav drugog reda prostor stanja se svodi na ravninu stanja

Fundamentalna matrica i odziv nepobuđenog sustava–primjer







Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- prije su, za *MIMO* diskretni sustav zadan s,

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$$
$$\forall n \in Cjelobrojni, x(0) = pocetnoStanje$$

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

izvedeni odziv stanja i odziv sustava

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu(m), \qquad n > 0$$

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0) + Du(0) & n = 0 \\ CA^n x(0) + \left[\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m)\right] + Du(n) & n > 0 \end{cases}$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- odziv sustava moguće je odrediti i z–transformacijom, pa transformacijom jednadžbe stanja

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

slijedi

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

$$(zI - A)X(z) = zx(0) + BU(z)$$

$$X(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) + (zI - A)^{-1}BU(z)$$

- matrica se $z(zI - A)^{-1}$ označava kao $\Phi(z)$, i naziva matrica karakterističnih frekvencija

$$\Phi(z) = z(zI - A)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \Phi(n) = A^n = \mathcal{Z}^{-1}\{\Phi(z)\}$$

- dakle, matrica karakterističnih frekvencija je z–transformacija fundamentalne matrice

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- z–transformacija izlazne jednadžbe

$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

je

$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

pa je uvrštavanjem izračunatog

$$X(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) + (zI - A)^{-1}BU(z) =$$
$$= \Phi(z)x(0) + z^{-1}\Phi(z)BU(z)$$

z–transformacija totalnog odziva

$$Y(z) = Cz(zI-A)^{-1}x(0)+C(zI-A)^{-1}BU(z)+DU(z) =$$
$$= C\Phi(z)x(0) + Cz^{-1}\Phi(z)BU(z) + DU(z)$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- inverznom z–transformacijom izračunatih odziva

$$X(z) = \Phi(z)x(0) + z^{-1}\Phi(z)BU(z)$$

slijedi uz $\mathcal{Z}^{-1}\{\Phi(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{z(zI - A)^{-1}\} = \Phi(n) = A^n$

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m}Bu(m), \qquad n > 0$$

a inverznom transformacijom

$$\begin{aligned} Y(z) &= Cz(zI-A)^{-1}x(0)+C(zI-A)^{-1}BU(z)+DU(z) = \\ &= C\Phi(z)x(0) + Cz^{-1}\Phi(z)BU(z) + DU(z) \end{aligned}$$

$$y(n) = CA^n x(0)+\left[\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bu(m)\right]+Du(n), \quad n > 0$$

Prijenosna matrica

- z–transformacija totalnog odziva sustava je

$$Y(z) = Cz(zI - A)^{-1}x(0) + C(zI - A)^{-1}BU(z) + DU(z) =$$
$$= Cz(zI - A)^{-1}x(0) + [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z)$$

za miran sustav $x(0) = 0$ pa je

$$Y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \Rightarrow$$

$$H(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]$$

- $H(z)$ je prijenosna ili transfer matrica čiji su elementi prijenosne funkcije između pojedinih izlaza i pojedinih ulaza
- dimenzija matrice $H(z)$ je $K \times M$, gdje je K broj izlaza a M broj ulaza u sustav

Samostalni rad studenta

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- za linearni vremenski kontinuirani sustav zadan matricama A, B, C, D odrediti fundamentalnu matricu, prijenosnu matricu (prijenosnu funkciju), odziv stanja i odziv sustava, te prikazati trajektoriju stanja za nepobuđeni i za pobuđeni sustav
- sustav je pobuđen s $u(t) = 0.64\mu(t)$ a početno stanje neka je $x(0^-) = [-3 \quad -1]^T$, a matrice A, B, C, D

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

- iz dimenzija matrica zaključuje se kako je sustav drugog reda te da ima jedan ulaz i jedan izlaz

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom matrice karakterističnih frekvencija određuje se fundamentalna matrica

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

- za zadanu matricu A slijedi matrica karakterističnih frekvencija

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -0.2 \end{bmatrix}\right\}^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.16 & s+0.2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{s(s+0.2)+0.16}\begin{bmatrix} s+0.2 & -0.16 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{T} =$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+0.2}{(s^2+0.2s+0.16)} & \frac{1}{(s^2+0.2s+0.16)} \\ \frac{-0.16}{(s^2+0.2s+0.16)} & \frac{s}{(s^2+0.2s+0.16)} \end{bmatrix}$$

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom matrice karakterističnih frekvencija određuje se fundamentalna matrica

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\Phi(s)\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+0.2}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} & \frac{1}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \\ \frac{-0.16}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} & \frac{s}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{0.5+j0.1291}{s+0.1+j0.3873} + \frac{0.5-j0.1291}{s+0.1-j0.3873} & \frac{j1.291}{s+0.1+j0.3873} + \frac{-j1.291}{s+0.1-j0.3873} \\ \frac{-j0.2066}{s+0.1+j0.3873} + \frac{j0.2066}{s+0.1-j0.3873} & \frac{0.5-j0.1291}{s+0.1+j0.3873} + \frac{0.5+j0.1291}{s+0.1-j0.3873} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-0.1t}\cos(0.3873t) + 0.2582e^{-0.1t}\sin(0.3873t) & 2.5820e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \\ -0.4131e^{-0.1t}\sin(0.3873t) & e^{-0.1t}\cos(0.3873t) - 0.2582e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0328e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 0.2527) & 2.5820e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \\ -0.4131e^{-0.1t}\sin(0.3873t) & 1.0328e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 0.2527) \end{bmatrix}$$

Odziv stanja nepobuđenog sustava

- odziv stanja nepobuđenog sustava računamo iz

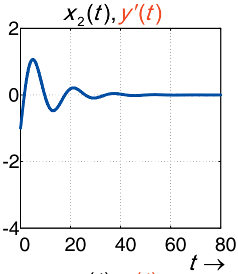
$$x(t) = \Phi(t)x(0^-) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\Phi_{11} - \Phi_{12} \\ -3\Phi_{21} - \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

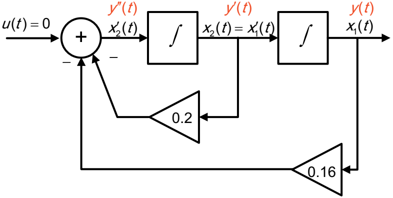
$$x(t) = \begin{bmatrix} -3[e^{-0.1t}\cos(0.3873t) + 0.2582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)] - 2.5820e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \\ -3[-0.4131e^{-0.1t}\sin(0.3873t)] - [e^{-0.1t}\cos(0.3873t) - 0.2582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)] \end{bmatrix}$$

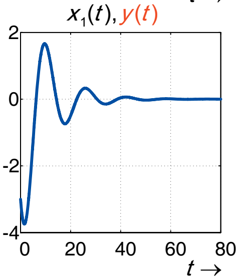
$$x(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-0.1t}\cos(0.3873t) - 3.3566e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \\ 1.4975e^{-0.1t}\sin(0.3873t) - e^{-0.1t}\cos(0.3873t) \end{bmatrix}$$

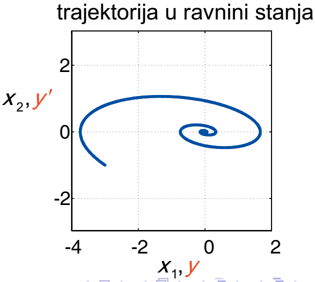
$$x(t) = \begin{bmatrix} 4.5019e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.3002) \\ 1.8007e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 2.1596) \end{bmatrix}$$

Odziv stanja nepobuđenog sustava









Prijenosna matrica – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

- matricu $H(s)$ izračunavamo iz[4]

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\Phi(s)B$$

$$H(s) = C\Phi(s)B = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi_{12}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.2s + 0.16)}$$

[4] D=0

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

odziv stanja računamo iz[5]

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{0.64}{s} =$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\Phi_{11} - \Phi_{12} \\ -3\Phi_{21} - \Phi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{12}\frac{0.64}{s} \\ \Phi_{22}\frac{0.64}{s} \end{bmatrix}$$

a odziv sustava iz

$$y(s) = CX(s) = [1 \quad 0]X(s) = X_1(s)$$

[5] D=0

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

odziv stanja u vremenskoj domeni je

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{-3s-1.6}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \\ \frac{-s+0.48}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \end{bmatrix}\right\} +$$

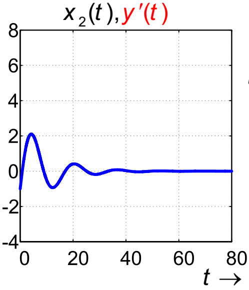
$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{0.64}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)s} \\ \frac{0.64}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \end{bmatrix}\right\} =$$

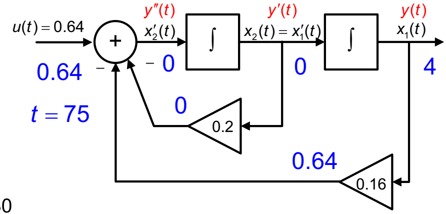
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{-3s^2-1.6s+0.64}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)s} \\ \frac{-s+1.12}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \end{bmatrix}\right\}$$

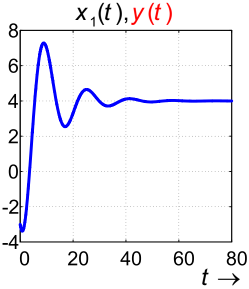
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{4.1312e^{-j2.5815}}{s+0.1+j0.3873} + \frac{4.1312e^{j2.5815}}{s+0.1-j0.3873} + \frac{4}{s} \\ \frac{1.6525e^{j1.8782}}{s+0.1+j0.3873} + \frac{1.6525e^{-j1.8782}}{s+0.1-j0.3873} \end{bmatrix}\right\}$$

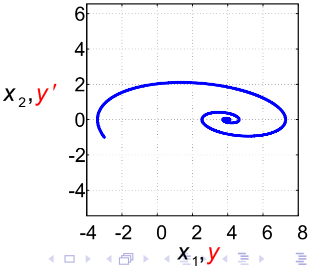
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.2624e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.5815) + 4 \\ 3.3049e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 1.8782) \end{bmatrix}$$

Odziv stanja pobuđenog sustava









Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- za linearni vremenski kontinuirani sustav zadan matricama A, B, C, D odrediti matricu karakterističnih frekvencija, odziv stanja sustava, te prikazati trajektoriju stanja za za pobuđeni sustav
- sustav je pobuđen s $u(t) = 0.64\mu(t) + sin(t)\mu(t)$ a početno stanje neka je $x(0^-) = [-3 \quad -1]^T$, a matrice A, B, C, D

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

- potrebne izračune provodimo izravnom uporabom Matlaba i postupak je dan na narednoj prikaznici

Odziv stanja pobuđenog sustava

```
>> syms s
A=[0 1; -.16 -.2];
B=[0;1];
C=[1 0];
D=0;
U=1/(s^2+1)+.64/s;
x0=[-3;-1];
F=inv(s*eye(2)-A)           %izračun matrice karakterističnih frekvencija
X=F*x0+F*B*U                %izračun vektora odziva stanja u s području
x=simplify(ilaplace(X))     %izračun vektora odziva stanja inverznom L transformacijom

F =
[ 5*(5*s+1)/(25*s^2+5*s+4),       25/(25*s^2+5*s+4)]
[       -4/(25*s^2+5*s+4),      25*s/(25*s^2+5*s+4)]

X =
 -15*(5*s+1)/(25*s^2+5*s+4)-25/(25*s^2+5*s+4)+25*(1/(s^2+1)+16/25/s)/(25*s^2+5*s+4)
     12/(25*s^2+5*s+4)-25*s/(25*s^2+5*s+4)+25*(1/(s^2+1)+16/25/s)*s/(25*s^2+5*s+4)

x =
 -3137/466*exp(-1/10*t)*cos(1/10*15^(1/2)*t)-849/2330*15^(1/2)*exp(-1/10*t)*sin(1/10*15^(1/2)*t)+4-125/466*cos(t)-525/466*sin(t)
   8267/11650*15^(1/2)*exp(-1/10*t)*sin(1/10*15^(1/2)*t)+59/466*exp(-1/10*t)*cos(1/10*15^(1/2)*t)-525/466*cos(t)+125/466*sin(t)

x =
-6.7318exp(-0.1*t)*cos(0.3873*t) -1.4112*exp(-1/10*t)*sin(0.3873*t)+4-0.2682*cos(t) -1.1266*sin(t)
   2.7483*exp(-1/10*t)*sin(0.3873*t)+ 0.1266*exp(-1/10*t)*cos(0.3873*t) -1.1266*cos(t)+ 0.2682*sin(t)

x =
```

$$-6.7318e^{-0.1t}\cos(0.3873t) -1.4112e^{-0.1t}\sin(0.3873t)-0.2682\cos(t) -1.1266\sin(t)+4$$

$$2.7483e^{-0.1t}\sin(0.3873t)+ 0.1266e^{-0.1t}\cos(0.3873t) -1.1266\cos(t)+ 0.2682\sin(t)$$

Odziv stanja pobuđenog sustava