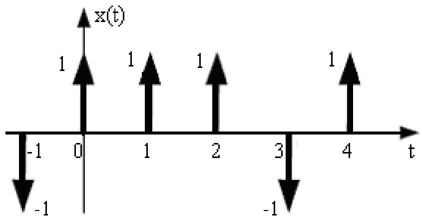
Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

IV. tjedan

1. Kontinuirani signal *x(t)* (Slika 1.) periodičan je s periodom *T=4 s*. Prikažite ovaj signal Fourierovim redom, te odredite koeficijente tog reda.



Slika 1.

Rješenje:

Koeficijenti Fourierovog reda se računaju prema formuli

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Za zadani slučaj, uvrštavamo u formulu:

$$X_k = \frac{1}{4}\int_{-0.5}^{3.5} x(t)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-0.5}^{0.5}\delta(t)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt + \int_{0.5}^{1.5}\delta(t-1)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt + \int_{1.5}^{2.5}\delta(t-2)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt - \int_{2.5}^{3.5}\delta(t-3)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 0} + e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 1} + e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 2} - e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 3}\right)$$

Pojednostavimo:

$$e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 0} = 1$$

$$e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^k = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^k = (-j)^k$$

$$e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 2} = \left(e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 2}\right)^k = (\cos(\pi) - j\cdot\sin(\pi))^k = (-1)^k$$

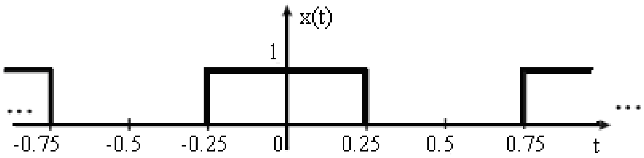
$$e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 3} = \left(e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 3}\right)^k = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^k = j^k$$

Pa je traženi Fourierov red:

$$X_k = \frac{1}{4}\left(1 + (-j)^k + (-1)^k - j^k\right).$$

Dodatak: Skicirajte amplitudni i fazni spektar.

2. Slikom 2. dan je periodičan kontinuirani signal *x(t)*. Odredite srednju snagu ovog signala (u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni), te aproksimirajte signal Fourierovim redom.



Slika 2.

<u>Rješenje:</u>

Koeficijenti Fourierovog reda računaju se prema formuli

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt.$$

Period zadanog signala je $T_0 = 1$, pa je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$. Koeficijente možemo računati na intervalu *(-0.5,0.5)*. Uvrštavamo u formulu:

$$X_k = \int_{-0.5}^{0.5} x(t)e^{-jk2\pi t}dt$$

Gledajući sliku, vidljivo je da signal na intervalu *(-0.5, -0.25)* i *(0.25, 0.5)* ima vrijednost nulu, dok mu je između tih intervala vrijednost jedan. Integral se sada može napisati u obliku:

$$X_k = \int_{-0.25}^{0.25} e^{-jk2\pi t}dt = \frac{e^{-jk2\pi t}}{-jk2\pi}\Bigg|_{-0.25}^{0.25} = \frac{1}{-jk2\pi}\left(e^{-\frac{jk\pi}{2}} - e^{+\frac{jk\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\pi}{2}}.$$

Poseban slučaj je za $k = 0$, za koji Fourierov koeficijent iznosi $X_0 = \int_{-0.25}^{0.25} dt = \frac{1}{2}$.

Kako je zadani signal bio parna funkcija, dobiveni Fourierovi koeficijenti su realni.

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i periodičan, pa je njegov spektar diskretan (vidljivo po X_k).

Srednja ukupna snaga u vremenskoj domeni iznosi:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \int_{-0.25}^{0.25} dt = \frac{1}{2}.$$

Srednja ukupna snaga u frekvencijskoj domeni iznosi:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} |X_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2$$

$$= \frac{1}{4} + 2\left(\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + 0 + \left(\frac{-1}{3\pi}\right)^2 + 0 + \left(\frac{1}{5\pi}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Vidljivo je da su snaga dobivena u vremenskoj domeni i ona dobivena u frekvencijskoj jednake.

3. Odredite rastav u Fourierov red signala

$$x(t) = 10\cos(50\pi t) + 5\sin(100\pi t) + \sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

te skicirajte dobiveni amplitudni i fazni spektar. Ako signal otipkamo s periodom otipkavanja $T_s = 0.02$ je li došlo do preklapanja spektra?

Rješenje:

Zadani signal je periodičan. Njegov period je najmanji zajednički višekratnik perioda svakog pojedinog dijela signala. Ti periodi su:

$$10\cos(50\pi t) \rightarrow 50\pi = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow T_1 = \frac{1}{25}s$$

$$5\sin(100\pi t) \rightarrow 100\pi = \frac{2\pi}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{1}{50}s$$

$$\sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow 150\pi = \frac{2\pi}{T_3} \rightarrow T_3 = \frac{1}{75}s$$

$$\cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 200\pi = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow T_4 = \frac{1}{100}s$$

Ukupni period je $T_0 = \frac{1}{25}s$. Ostali periodi tada iznose $T_2 = \frac{T_0}{2}$, $T_3 = \frac{T_0}{3}$, $T_4 = \frac{T_0}{4}$.

Osnovna kružna frekvencija pri razvoju ovog signala u red je prema tome $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 50\pi$ rad/s. Frekvencijske komponente signala su onda $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = 2\omega_0$, $\omega_3 = 3\omega_0$ i $\omega_4 = 4\omega_0$.

Koristeći poznate veze sinusoida i kompleksne eksponencijale

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\cdot\sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\cdot\sin(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

možemo rastaviti zadane sinuse i kosinuse:

$$10\cos(50\pi t) = 10\cos(1\cdot\omega_0 t) = \frac{10}{2}\left(e^{j\cdot 1\cdot\omega_0 t} + e^{-j\cdot 1\cdot\omega_0 t}\right) = 5e^{j\cdot 1\cdot\omega_0 t} + 5e^{-j\cdot 1\cdot\omega_0 t}$$

$$5\sin(100\pi t) = 5\sin(2\cdot\omega_0 t) = \frac{5}{2j}\left(e^{j\cdot 2\cdot\omega_0 t} - e^{-j\cdot 2\cdot\omega_0 t}\right) = \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\cdot 2\cdot\omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\cdot 2\cdot\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\cdot\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\cdot\left(3\cdot\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)} - e^{-j\cdot\left(3\cdot\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{2\pi}{3}}e^{j\cdot 3\cdot\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{2\pi}{3}}e^{-j\cdot 3\cdot\omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\cdot 3\cdot\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-j\cdot 3\cdot\omega_0 t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(4\cdot\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\cdot\left(4\cdot\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\cdot\left(4\cdot\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\cdot 4\cdot\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\cdot 4\cdot\omega_0 t}\end{aligned}$$

Zadani signal je zbroj:

$$x(t) = 5e^{j\cdot 1\cdot \omega_0 t} + 5e^{-j\cdot 1\cdot \omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\cdot 2\cdot \omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\cdot 2\cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\cdot 3\cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-j\cdot 3\cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\cdot 4\cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\cdot 4\cdot \omega_0 t}$$

Usporedbom sa formulom za Fourierov red

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j\omega_0 k t}$$

direktno možemo očitati vrijednosti Fourierovih koeficijenata:

$$k = -1 \rightarrow X_{-1} = 5 \qquad k = 1 \rightarrow X_1 = 5$$

$$k = -2 \rightarrow X_{-2} = \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad k = 2 \rightarrow X_2 = \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$k = -3 \rightarrow X_{-3} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad k = 3 \rightarrow X_3 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$k = -4 \rightarrow X_{-4} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \qquad k = 4 \rightarrow X_4 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Za sve ostale *k* koeficijenti su nula.

Zadani signal je bio kontinuiran i periodičan. Dobiveni spektar je aperiodičan i diskretan.

Dodatak: pokušajte ove koeficijente izračunati uvrštavanjem u formulu $X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$. Nacrtajte amplitudni i fazni spektar.

Period očitavanja je $T_p = 0.02s$. Frekvencija očitavanja je $f_s = \frac{1}{0.02} = 50Hz$. Da ne bi došlo do preklapanja spektra, frekvencija očitavanja mora biti barem dvostruko veća od najveće frekvencije signala. Zadani signal se sastoji od frekvencija $25Hz, 50Hz, 75Hz, 100Hz$. Najveća od njih je *100Hz*. Da ne bi bilo preklapanja spektra, frekvencija očitavanja bi morala biti barem *200Hz*. Kako je zadana frekvencija očitavanja *50Hz* dolazi do preklapanja spektra.

4. Izračunajte Fourierove koeficijente vremenski kontinuiranog signala

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4k).$$

Rješenje:

Zadani signal je kontinuirani signal koji je za sve *t* jednak nuli, osim za *t=4k* kada je jednak beskonačno. Pri tome je *k* cijeli broj. Iz toga slijedi da je ovaj signal periodičan, te da mu je period $T_0 = 4$. Jedan period možemo promatrati npr. na intervalu *(-1,3)*.

Da bi izračunali njegov Fourierov red moramo uvrstiti u formulu:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

$$X_k = \frac{1}{4} \int_{-1}^{3} \delta(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt = \frac{1}{4} e^{-jk\frac{\pi}{2}0} = \frac{1}{4}.$$

Pa je spektar jednak $\frac{1}{4}$ za svaki *k*. Dobiveni spektar je diskretan.

5. Nađite Fourierove transformacije, te amplitudne, fazne, realne i imaginarne spektre sljedećih signala:
   a. $x(t) = e^{-t}\mu(t)$,
   b. $x(t) = e^{t}\mu(-t)$,
   c. $x(t) = e^{-|t|}$.

   Odredite energiju zadanih signala u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni. U kakvom su odnosu ove dvije energije?

Rješenje:

Fourierova transformacija dana je izrazima

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}dt.$$

a. Signal $x(t) = e^{-t}\mu(t)$ je kauzalan, što znači da je prije *t=0* nula. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt = \left.\frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(1+j\omega)}\right|_0^\infty = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}.$$

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i aperiodičan, pa je njegov spektar kontinuiran (vidljivo po ω).

Amplitudni spektar je $|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$

Fazni spektar je $\measuredangle X(j\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\frac{-\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1}{1+\omega^2}} = \mathrm{arctg}(-\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega)$

Realni spektar $\mathrm{Re}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{1+\omega^2}$

Imaginarni spektar $\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} = -\frac{\omega}{1+\omega^2}$

Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|e^{-t}\mu(t)|^2dt = \int_{0}^{\infty}e^{-2t}dt = \left.\frac{e^{-2t}}{-2}\right|_0^\infty = \frac{1}{2}$$

Energija iz frekvencijske domene

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1-j\omega}{1+\omega^2}\right|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\right)^2d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega = \frac{1}{2\pi}\mathrm{arctg}(\omega)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}.$$

b. Signal $x(t) = e^{t}\mu(-t)$ je antikauzalan, što znači da je poslije *t=0* nula. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-j\omega t}dt = \left.\frac{e^{(-j\omega+1)t}}{1-j\omega}\right|_{-\infty}^0 = \frac{1}{1-j\omega} = \frac{1+j\omega}{1+\omega^2}.$$

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i aperiodičan, pa je njegov spektar kontinuiran (vidljivo po ω).

Amplitudni spektar je $|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$

Fazni spektar je $\measuredangle X(j\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1}{1+\omega^2}} = \operatorname{arctg}(\omega)$

Realni spektar $\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{1+\omega^2}$

Imaginarni spektar $\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = \frac{\omega}{1+\omega^2}$

Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^t \mu(-t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt = \left.\frac{e^{2t}}{2}\right|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}$$

Energija iz frekvencijske domene

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1+j\omega}{1+\omega^2}\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\right)^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(\omega)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}.$$

c. Signal $x(t) = e^{-|t|}$ je nekauzalan, realan i paran. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^t e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \left.\frac{e^{(-j\omega+1)t}}{1-j\omega}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(1+j\omega)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i aperiodičan, pa je njegov spektar kontinuiran (vidljivo po ω).

Amplitudni spektar je $|X(j\omega)| = \frac{2}{1+\omega^2}$

Fazni spektar je $\measuredangle X(j\omega) = \operatorname{arctg}\frac{0}{\frac{2}{1+\omega^2}} = 0$

Realni spektar $\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = \frac{2}{1+\omega^2}$

Imaginarni spektar $\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = 0$

Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|t|}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \left.\frac{e^{2t}}{2}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-2t}}{-2}\right|_{-\infty}^{0} = 1$$

Energija iz frekvencijske domene

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2}{1+\omega^2}\right|^2 d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\left.\left(\frac{\omega}{2(1+\omega^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\omega)\right)\right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

Energija ovog signala je zbroj energija signala iz a. i b. dijela zadatka. Isto vrijedi i za signale.

Napomena: formule za česte integrale nalaze se u službenom šalabahteru.

Dodatak: skicirajte amplitudne, fazne, realne i imaginarne spektre.

6. Zadan je signal $x(t) = e^{2t}\mu(-t)$.
   a. Nađite Fourierovu transformaciju zadanog signala.
   b. Nacrtajte amplitudni i fazni spektar.
   c. Odredite energiju signala u vremenskoj domeni.
   d. Odredite energiju signala u frekvencijskoj domeni korištenjem Parsevalove jednakosti.

Rješenje:

a. Signal $x(t) = e^{2t}\mu(-t)$ je antikauzalan, što znači da je poslije *t=0* nula. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-j\omega t}dt = \frac{e^{(-j\omega+2)t}}{2-j\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2-j\omega} = \frac{2+j\omega}{4+\omega^2}.$$

b. Amplitudni spektar je $|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{2^2+\omega^2}{(4+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$

Fazni spektar je $\measuredangle X(j\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{4+\omega^2}}{\frac{2}{4+\omega^2}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

c. Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|e^{2t}\mu(-t)|^2dt = \int_{-\infty}^{0}e^{4t}dt = \frac{e^{4t}}{4}\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}$$

d. Energija iz frekvencijske domene

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2+j\omega}{4+\omega^2}\right|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}\right)^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4+\omega^2}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{4\pi}\cdot\pi = \frac{1}{4}.$$

7. Nađite Fourierovu transformaciju sgn funkcije $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$.

Rješenje:

Zadani signal možemo napisati u obliku $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} = -1 + 2\mu(t)$.

Fourierovu transformaciju je najlakše odrediti očitavanjem iz tablica Fourierovih transformacija (službeni šalabahter):

$$1 \to 2\pi\delta(\omega)$$

$$\mu(t) \to \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Kako vrijedi svojstvo linearnosti, CTFT zadanog signala je:

$$X(j\omega) = -2\pi\delta(\omega) + 2\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) = \frac{2}{j\omega} = -\frac{2j}{\omega}.$$

Druga metoda: koristite pravilo deriviranja CTFT.

8. Nađite Fourierovu transformaciju signala $\mathrm{x(t)} = \begin{cases} 1, & -\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

Rješenje:

Fourierova transformacija se računa iz izraza

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Direktnim uvrštavanjem slijedi:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} e^{-j\omega t}dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-\frac{j\omega 5}{2}} - e^{\frac{j\omega 3}{2}}\right) \\ &= \frac{e^{-\frac{j\omega}{2}}}{-j\omega}\left(e^{-\frac{j\omega 4}{2}} - e^{\frac{j\omega 4}{2}}\right) \\ &= e^{-\frac{j\omega}{2}}\frac{2\sin(2\omega)}{\omega} \end{aligned}$$

9. Objasnite koju Fourierovu transformaciju smijete koristiti za analizu signala $\mathrm{x(t)} = 220\sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Izračunajte amplitudni i fazni spektar signala $\mathrm{x(t)}$ korištenjem odabrane transformacije. Odredite snagu ovog signala.

Rješenje:

Zadan je kontinuirani periodičan signal. Spektar će mu biti diskretan aperiodičan. Zato moramo koristiti vremenski kontinuiran Fourierov red – CTFS.

Period zadanog signala je $50\pi T_p = 2k\pi \rightarrow T_p = \frac{1}{25}s$.

Signal se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}\mathrm{x(t)} &= 220\sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{220}{2j}\left(e^{j\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)} - e^{-j\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)}\right)\\ &= 110e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{2\pi}{1/25}t} - e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{2\pi}{1/25}t}\right).\end{aligned}$$

Traženi koeficijenti su

$$X_1 = 110e^{-j\frac{\pi}{6}}, \qquad X_{-1} = 110e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Amplitudni spektar je svugdje nula osim u uzorcima:

$$|X_1| = 110, \qquad |X_{-1}| = 110$$

Fazni spektar je svugdje nula osim u uzorcima:

$$\angle X_1 = -\frac{\pi}{6}, \qquad \angle X_{-1} = \frac{\pi}{6}$$

Snaga signala se računa prema:

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = 110^2 + 110^2 = 24200.$$