SiS – 2. MI 25.5.2008. – grupa A

1. i 2. neka netko nadopiše, mozak mi puca u pola 5 ujutro :D

3. DTFS – to je bilo u 1. MI :D

4. Isto 1. MI...

5. x(n) = {<u>0</u>, 1, 0, 0}
k = 3

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}$$

$$X_3 = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-\frac{2\pi j3n}{4}} = \sum_{n=0}^{5} x(n) e^{-\frac{j3\pi n}{2}}$$

$$X_3 = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-\frac{j3\pi n}{2}} = e^0 x(0) + e^{-\frac{j3\pi}{2}} x(1) + e^{-j3\pi} x(2) + e^{-\frac{j9\pi}{2}} x(3) = e^{-\frac{j3\pi}{2}} x(1) = j$$

6.
DFT:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2\pi jkn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} e^{-\frac{2\pi jkn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\left(\omega_0 - \frac{2\pi k}{N}\right)}$$

DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(\omega_0 - \omega)}$$

Usporedimo i vidimo da vrijedi:

$$X_k = X(e^{j\omega}) \text{ kada je } \omega = \frac{2\pi k}{N}$$

7. A ovo je pod c), definicija linearnosti.

8.
LTI → vremenski stalan. Ako pomaknemo ulaz za neki M (ovdje je to 2008), pomakne se i izlaz pa dobijemo $\big(1-(t-2008)\big)\mu(t-2008) = (2008-(t-1))\mu(t-2008)$. Obzirom i da je sustav linearan, dobit ćemo za zadanu pobudu:

$$y(t) = (1-t)\mu(t) - (2008-(t-1))\mu(t-2008)$$

$$y(t) = (1-t)\mu(t) - (1-t)\mu(t-2008) - 2008\mu(t-2008)$$

$$y(t) = (1-t)\big(\mu(t) - \mu(t-2008)\big) - 2008\mu(t-2008)$$

Obzirom da je $\mu(t) - \mu(t-2008)$ gate funkcija, njena vrijednost je uvijek 1 za 0 <= t < 2008. Vrijednost od $\mu(t)$ je 0 za t < 0 i 1 za t >=0. Vrijednost od $\mu(t-2008)$ je 0 za t < 2008, odnosno 1 za t >= 2008. Iz svega toga možemo zapisati:

$$y(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1 - t, 0 \leq t < 2008 \\ -2008, inače \end{cases}$$

9. Definišn :D pod a) je rješenje ;)

10.

1) Linearnost:

$$u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} u(k) = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\alpha u_1(k) + \beta u_2(k)\right) = \alpha \sum_{k=-\infty}^{n} u_1(k) + \beta \sum_{k=-\infty}^{n} u_2(k) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

LINEARAN

2) Vrem. promjenjivost:

Prvo zakasnimo samo ulaz:

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} u(k-N) = \begin{bmatrix} k - N = a \\ -\infty = a(dolje) \\ n - N = a(gore) \end{bmatrix} = \sum_{a=-\infty}^{n-N} u(a)$$

$$y_2(n-N) = \sum_{k=-\infty}^{n-N} u(k)$$

Vidimo da je $y_1(n) = y_2(n-N)$. VREMESNSKI STALAN/VREMENSKI NEPROMJENJIV

3) Memorijski: DA. Suma i tak to...

Odgovor: linearan i vremenski nepromjenjiv

11.

1) Linearnost:

$$u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha u_1(k) + \beta u_2(k)\right) = \alpha \sum_{k=0}^{n} u_1(k) + \beta \sum_{k=0}^{n} u_2(k) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

LINEARAN

2) Vrem. promjenjivost:

Prvo zakasnimo samo ulaz:

$$y_1(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k-N) = \begin{bmatrix} k - N = a \\ -N = a(dolje) \\ n - N = a(gore) \end{bmatrix} = \sum_{a=-N}^{n-N} u(a)$$

$$y_2(n-N) = \sum_{k=0}^{n-N} u(k)$$

Vidimo da je $y_1(n) \neq y_2(n-N)$. VREMESNSKI NESTALAN/VREMENSKI PROMJENJIV

3) Memorijski: DA. Suma i tak to...

Odgovor: linearan i vremenski promjenjiv

12. i **13.** matrice

14. Ako znamo impulsni odziv, možemo za bilo koju pobudu u(n) nađi odziv y(n) preko konvolucije:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m) = \sum_{m=0}^{2} h(m)u(n-m) = h(0)u(n-0) + h(1)u(n-1) + h(2)u(n-2)$$

Obzirom da je zadatkom zadano h(0) = 1, h(2) = 2 i h(inače) = 0, dobijemo:

$$y(n) = u(n) + 2u(n-2)$$

15. Ako znamo impulsni odziv, bla bla... Kao i u zadatku prije, samo što sad imamo kontinuiranost :D

$$y(t) = (h * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Daklem, ovo su 2 pravokutna impulsa zadana (nacrtate iz onoga što su zadali) i radite prema primjeru iz postupaka za 2009. godinu, ista je šema. Kada signal u(t) zrcalimo i pomaknemo za t dobijemo signal u(t – tau), gdje je donja stranica pravokutnika t – 2, a gornja t – 1. I sad, kada „ulazimo“ u signal h(tau) vidimo da će graince integracije biti od 0 do t – 1, kada se t – 1 nalazi između 0 i 1, odnosno 1 < t < 2. Visine signala su 1 za oba.

$$y(t) = \int_{0}^{t-1} d\tau = t - 1$$

odnosno da naglasimo na kojem intevalu to vrijedi dodajemo gate funkciju:

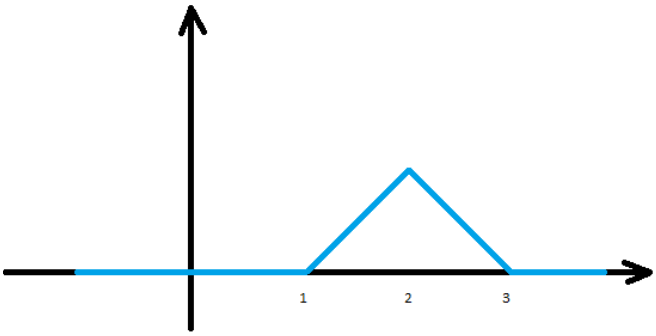
$$y(t) = (t-1)\big(\mu(t-1) - \mu(t-2)\big)$$

Kada se preklope to vrijedi samo za t=2 pa tu nema integrala. I konačno, kada signal u(t-tau) izlazi iz h(tau), granice za integral će biti od t – 2 do 1, kada se t – 2 nalazi između 0 i 1, odnosno, 2 < t < 3.

$$y(t) = \int_{t-1}^{1} d\tau = (3-t)\big(\mu(t-2) - \mu(t-3)\big)$$

odnosno da naglasimo na kojem intevalu to vrijedi smo dodali gate funkciju.

Nacrtamo li to, dobijemo sljedeću sliku:



Našeg rješenja nema među ponuđenima, ali idemo vidjeti što se tu da napraviti. Kao prvo, vidimo da se t nalazi između 1 i 3, čime automatski možemo eliminirati odgovore a) i e). Nadalje, moramo vidjeti koje od rješenja zadovoljava neke karakteristične točke našeg grafa, (1,0), (2,1) i (3,0). To jedino odgovara za rješenje d).

$$y(t) = \begin{cases} 1 - |t-2|, 1 < t < 3 \\ 0, inače \end{cases}$$

16.

$$y(t) * \delta(t+2) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\delta(t+2-\tau)d\tau = y(t+2)$$

$$x(t) * \delta(t-1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-1-\tau)d\tau = x(t-1)$$

$$y(t+2) * \delta(t-1) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau+2)\delta(t-1-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau+2)\delta\big(t+1-(\tau+2)\big)d\tau = y(t+1)$$

$$\big(x(t) + y(t) * \delta(t+2)\big) * \delta(t-1) = x(t-1) + y(t+1)$$

17.

$$y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 4u(n)$$

$$u(n) = (1-3n)\mu(n)$$

Homogeno rj.:

$$y_h(n) = cq^n$$

$$cq^n - 6cq^{n-1} + 8cq^{n-2} = 0$$

$$q^2 - 6q + 8 = 0 \rightarrow q_1 = 2, q_2 = 4$$

$$y_h(n) = c_1 2^n + c_2 4^n$$

Partikularno rj.:

Pobuda oblika An + B, partikularno oblika K1n + Ko

$$K_1n + K_0 - 6K_1(n-1) - 6K_0 + 8K_1(n-2) + 8K_0 = 4(1-3n)$$

Rješavanjem se dobije $K_1 = -4$ i $K_0 = -12$, pa je:

$$y_p(n) = (-4n - 12)\mu(n)$$

Opće rješenje:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = c_1 2^n + c_2 4^n + (-4n - 12)\mu(n)$$

Za miran sustav početni uvjeti y(-2) = y(-1) = 0. Tražimo $y_m(0)$ i $y_m(1)$ (iz početne jednadžbe diferencija):

$$y_m(0) = 6y(-1) - 8y(-2) + 4(1-0)\mu(0) = 0 - 0 + 4 = 4$$

$$y_m(1) = 6y(0) - 8y(-1) + 4(1-3)\mu(1) = 24 - 0 - 8 = 16$$

Tražimo konstante:

za n = 0 → $y_m(0) = c_1 + c_2 - 12 = 4 \to c_1 + c_2 = 16$

za n = 1 → $y_m(1) = 2c_1 + 4c_2 - 16 = 16 \to 2c_1 + 4c_2 = 32$

iz toga je $c_1 = 16$ a $c_2 = 0$

$$y_m(n) = (16 \cdot 2^n - 4n - 12)\mu(n)$$

18. Prisilni odziv sustava je partikularno rješenje. Već smo ga našli iznad. (Ista je jednadžba.

$$y_p(n) = (-4n - 12)\mu(n)$$

19.
Nepobuđeni sustav je homogeno rješenje a konstante određujemo iz početnih uvjeta y(-1) = 2 i y(-2) = 1:

$$y_h(n) = c_1 2^n + c_2 4^n$$

$$y_h(-1) = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} = 2$$

$$y_h(-2) = \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{16} = 1$$

Dobijemo $c_2 = 0$ i $c_1 = 4$.

$$y_h(n) = 4 \cdot 2^n \mu(n)$$

20.

totalni odziv = odziv nepobuđenog + odziv mirnog sustava

$$y(t) = (4 \cdot 2^n + 16 \cdot 2^n - 4n - 12)\mu(n) = (20 \cdot 2^n - 4n - 12)\mu(n)$$