IZVOD ODZIVA NEPOBUĐENOG SUSTAVA II REDA ZA SUSTAV OPISAN MODELOM SA VARIJABLAMA STANJA

(PREDAVANJE 13, SLIDE 5-10
SLIDE 17-20)

Odziv neposvudenog sustava II reda za model sa varijablama stanja

Sustav je opisan: / za slučaj SISO /

$$[\dot{X}] = \underset{N\times N}{[A]} \cdot [X] + \underset{N\times 1}{[B]} \cdot [u]$$

$$[y] = \underset{1\times N}{[c]} [X] + \underset{1\times 1}{[D]} \cdot [u]$$

Neka je $N=2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [c_{11} \;\; c_{12}] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [d_{11}] \cdot u$$

Odredimo odziv neposvudenog sustava $y_0(t)$ na početna stanja varijabli stanja $x_1(t)\big|_{t=0^-}$, $x_2(t)\big|_{t=0^-}$, koja ćemo označiti sa $x_1(0^-)$, $x_2(0^-)$

Obzirom da je $u(t)=\emptyset \;\forall t$ matrice B i D ne utječu na odziv sustava $y_0(t)$, pa imamo:

$$[\dot{x}] = [A] \cdot [x] \quad , \quad y = [c] \cdot [x]$$

Prije smo pokazali da se odziv stanja neposvudenog sustava može odrediti korištenjem fundamentalne matrice e^{At}, dakle u obliku:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} \leftarrow \underset{\substack{N\times 1 \\ \text{vektor} \\ \text{stanja}}}{[X(t)]} = \underset{\substack{N\times N \\ \uparrow \text{ fundamentalna matrica}}}{[e^{At}]} \cdot \underset{N\times 1}{[X(0^-)]} \leftarrow \text{vektor poč. stanja} = \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \\ \vdots \\ x_N(0^-) \end{bmatrix}$$

Čim odredimo $x(t)$, odziv nepobuđenog sustava $y_0(t)$ se nalazi običnim matričnim množenjem retka C i stupca stanja X

$$y_0(t) = \begin{bmatrix} & C & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ x(t) \\ \\ \end{bmatrix}$$

Pokušajmo odziv stanja $x(t)$ odrediti rješavanjem sustava od dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda u varijablama $x_1(t)$, $x_2(t)$.

$$\dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

Oblik $x_1(t)$ i $x_2(t)$ koji istovremeno zadovoljava ove jednadžbe jest $x_1(t) = K_1 e^{st}$ i $x_2 = K_2 e^{st}$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$K_1 \cdot s \cdot e^{st} = a_{11} K_1 e^{st} + a_{12} K_2 e^{st}$$
$$K_2 s e^{st} = a_{21} K_1 e^{st} + a_{22} K_2 e^{st}$$

odnosno

$$e^{st} \cdot (K_1 s) = e^{st} \cdot (a_{11} K_1 + a_{12} K_2)$$
$$e^{st} (K_2 s) = e^{st} (a_{21} K_1 + a_{22} K_2)$$

Za netrivijalno rješenje pretpostavljamo da je $e^{st} \neq 0$, pa se obje gornje jednadžbe mogu podijeliti sa e^{st}.

$$K_1 s = a_{11} K_1 + a_{12} K_2$$
$$K_2 s = a_{21} K_1 + a_{22} K_2$$

Iz ove dvije jednadžbe, mogli bi odrediti koeficijente k_1 i k_2 što vodi na sljedeći matrični oblik: (3)

$$\begin{bmatrix} (a_{11}-s) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}-s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

Ako želimo rješenje k_1, k_2 koje nije jednako trivijalnom rješenju $k_1=\emptyset$, $k_2=\emptyset$ tada je očito iz gornje matrične jednadžbe da determinanta matrice mora biti jednaka nuli

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-s \end{bmatrix} = \emptyset$$

što vodi na karakterističnu jednadžbu:

$$(a_{11}-s)\cdot(a_{22}-s) - a_{21}\cdot a_{12} = \emptyset, \quad \text{odnosno}$$

$$a_{11}\cdot a_{22} - s(a_{11}+a_{22}) + s^2 - a_{21}\cdot a_{12} = \emptyset$$

$$s^2 - s(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}) = \emptyset$$

Ako se sjetimo da matrica A glasi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, tada prepoznajemo da je član uz s jednak tragu matrice A (suma dijagonalnih elemenata), dok je član uz $s^{(0)}$, tj konstantni član jednak determinanti matrice A

$$T = tr(A) = a_{11} + a_{22}$$

$$\Delta = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Dakle dobivamo jednadžbu:

$$s^2 - Ts + \Delta = \emptyset$$

Odavde dobivamo karakteristične frekvencije sustava opisanog matricom A:

$$s_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}$$

Sada i za jednu i drugu varijablu stanja moramo pretpostaviti da titra sa obje karakteristične frekvencije s_1 i s_2:

$$x_1 = k_{11} e^{s_1 t} + k_{12} e^{s_2 t}$$
$$x_2 = k_{21} e^{s_1 t} + k_{22} e^{s_2 t}$$

Radi određivanja k_{11}, k_{12}, k_{21} i k_{22} koristimo zadane početne uvjete $x_1(0^-)$ i $x_2(0^-)$ kao i sustav diferencijalnih jednadžbi. Uvrštenje pretpostavljenog rješenja u sustav jednadžbi daje:

$$\dot{x}_1 = k_{11} s_1 e^{s_1 t} + k_{12} s_2 e^{s_2 t} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$
$$= a_{11}\left(k_{11} e^{s_1 t} + k_{12} e^{s_2 t}\right) + a_{12}\left(k_{21} e^{s_1 t} + k_{22} e^{s_2 t}\right)$$

Analogno za $\dot{x}_2$

Ove dvije jednadžbe vrijede za $\forall t$, pa dakle vrijede i za $t = \emptyset^-$, što uvrštenjem daje:

(I) $k_{11} s_1 + k_{12} s_2 = a_{11}(k_{11} + k_{12}) + a_{12}(k_{21} + k_{22})$, odnosno za x_2 ..

(II) $k_{21} s_1 + k_{22} s_2 = a_{21}(k_{11} + k_{12}) + a_{22}(k_{21} + k_{22})$

Varijable x_1 i x_2 moraju za $t=0^-$ biti jednake (5)

$x_1(0^-)$ odnosno $x_2(0^-)$

III $\quad x_1(0^-) = \left(K_{11} \cdot e^{s_1 t} + K_{12} e^{s_2 t}\right)\Big|_{t=0^-} = (K_{11} + K_{12})$

IV $\quad x_2(0^-) = \left(K_{21} e^{s_1 t} + K_{22} e^{s_2 t}\right)\Big|_{t=0^-} = (K_{21} + K_{22})$

Korištenjem III i IV jednadžbe I i II se mogu napisati u obliku:

$$\text{I} \quad K_{11} s_1 + K_{12} s_2 = a_{11} x_1(0^-) + a_{12} x_2(0^-)$$

$$\text{II} \quad K_{21} s_1 + K_{22} s_2 = a_{21} x_1(0^-) + a_{22} x_2(0^-)$$

Iz I i III možemo odrediti K_{11} i K_{12}:

$$K_{11} = x_1(0^-) - K_{12}$$

$$(x_1(0^-) - K_{12}) s_1 + K_{12} s_2 = a_{11} x_1(0^-) + a_{12} x_2(0^-)$$

$$K_{12}(s_2 - s_1) = a_{11} x_1(0^-) - s_1 x_1(0^-) + a_{12} x_2(0^-)$$

$$K_{12} = \frac{(a_{11} - s_1)\, x_1(0^-) + a_{12} x_2(0^-)}{s_2 - s_1} =$$

$$= \frac{(s_1 - a_{11})\, x_1(0^-) - a_{12} x_2(0^-)}{s_1 - s_2}$$

Odnosno:

$$K_{11} = x_1(0^-) - K_{12} = \frac{((\cancel{s_1} - s_2) - (\cancel{s_1} - a_{11}))\, x_1(0^-) + a_{12} x_2(0^-)}{s_1 - s_2}$$

$$= \frac{(a_{11} - s_2)\, x_1(0^-) + a_{12} x_2(0^-)}{s_1 - s_2}$$

Analogno, riješimo iz II i IV K_{21} i K_{22} kao: (6)

$$K_{21} = \frac{a_{21} x_1(0^-) + (a_{22} - s_2) x_2(0^-)}{s_1 - s_2}$$

$$K_{22} = \frac{-a_{21} x_1(0^-) + (s_1 - a_{22}) x_2(0^-)}{s_1 - s_2}$$

Uvrštavanjem određenih koeficijenata u izraze za x_1 & x_2 dobivamo:

$$x_1(t) = \frac{(a_{11} - s_2) x_1(0^-) + a_{12} x_2(0^-)}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_1 t} + \frac{-(a_{11} - s_1) x_1(0^-) - a_{12} x_2(0^-)}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_2 t}$$

$$x_2(t) = \frac{a_{21} x_1(0^-) + (a_{22} - s_2) x_2(0^-)}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_1 t} + \frac{-a_{21} x_1(0^-) + (s_1 - a_{22}) x_2(0^-)}{s_1 - s_2} \cdot e^{s_2 t}$$

Želimo ove dvije jednadžbe prikazati u obliku

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{At} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix}$$

Prepoznajemo da su članovi (elementi) matrice e^{At}:

$$\Phi = e^{At} = \frac{1}{s_1 - s_2} \begin{bmatrix} (a_{11} - s_2) e^{s_1 t} - (a_{11} - s_1) e^{s_2 t} & a_{12} \cdot e^{s_1 t} - a_{12} e^{s_2 t} \\ a_{21} e^{s_1 t} - a_{21} e^{s_2 t} & (a_{22} - s_2) e^{s_1 t} + (s_1 - a_{22}) e^{s_2 t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

Elementi fundamentalne matrice su funkcije vremena oblika

$$(\quad) e^{s_1 t} + (\quad) e^{s_2 t}$$

dakle svi sadrže titranja sa svim vlastitim frekvencijama sustava, s_1 & s_2

konačno odziv sustava $y_0(t)$ nalazimo kao

$$y_0(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix}$$

Množenjem prva dva člana:

$$y_0(t) = \begin{bmatrix} c_{11}\Phi_{11} + c_{12}\Phi_{21} & c_{11}\cdot\Phi_{12} + c_{12}\cdot\Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix}$$

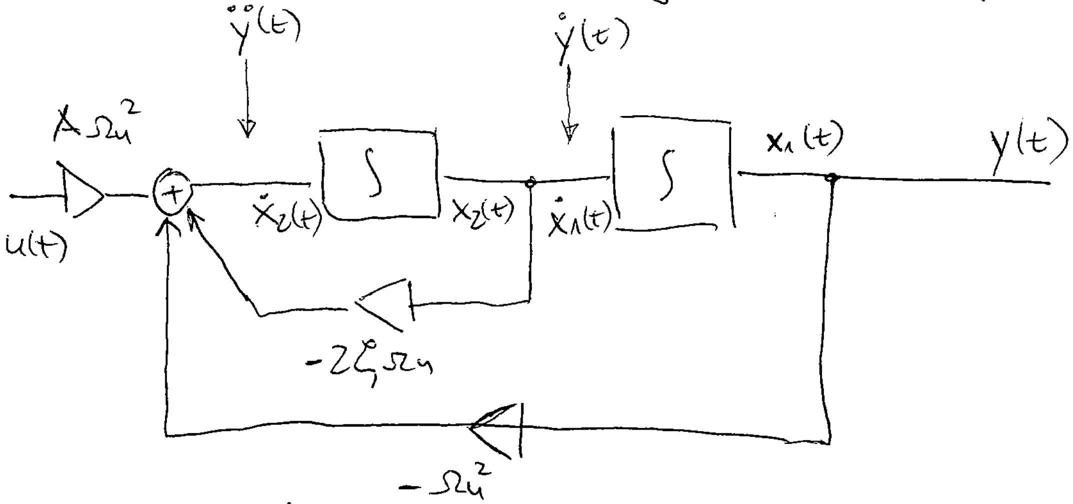
Odnosno u skalarnom prikazu:

$$y_0(t) = (c_{11}\Phi_{11} + c_{12}\Phi_{21})\,x_1(0^-) + (c_{11}\Phi_{12} + c_{12}\cdot\Phi_{22})\,x_2(0^-)$$

Primjenimo ove općenite izraze na sustav drugog reda opisan diferencijalnom jednadžbom:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = (A\Omega_n^2)\cdot u(t)$$

Blok dijagram ovog sustava je



$\left.\begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix}\right\}$ varijable stanja ... izlazi integratora

Pišemo jednadžbe:

$$y(t) = x_1(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = A\Omega_n^2 u(t) - 2\zeta\Omega_n \cdot x_2(t) - \Omega_n^2 \cdot x_1(t)$$

Jednadžbe prevodimo u oblik A, B, C, D za sustav opisan pomoću varijabli stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_n^2 & -2\zeta\Omega_n \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ A\Omega_n^2 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u(t)$$

Odnosno izlazna jednadžba:

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} \cdot u(t)$$

Koristimo izvedene izraze za karakterističnu jednadžbu sustava 2. reda:

$$s^2 - Ts + \Delta = 0$$

$$T = tr(A) = a_{11} + a_{22} = 0 - 2\zeta\Omega_n = -2\zeta\Omega_n$$

$$\Delta = det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 - (-\Omega_n^2) = \Omega_n^2$$

Dakle karakteristična jednadžba glasi:

$$s^2 + 2\zeta\Omega_n \cdot s + \Omega_n^2 = 0$$

Tražimo korijene karakt. jednadžbe:

$$s_{12} = \frac{-\cancel{2}\zeta\Omega_n \pm \sqrt{\cancel{4}\zeta^2\Omega_n^2 - \cancel{4}\Omega_n^2}}{\cancel{2}}$$

$$= -\zeta\Omega_n \pm \Omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

ili zamjenom redoslijeda

$$s_{12} = -\zeta\Omega_n \pm j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Označimo $\zeta\Omega_n = \alpha$

$$\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \beta$$

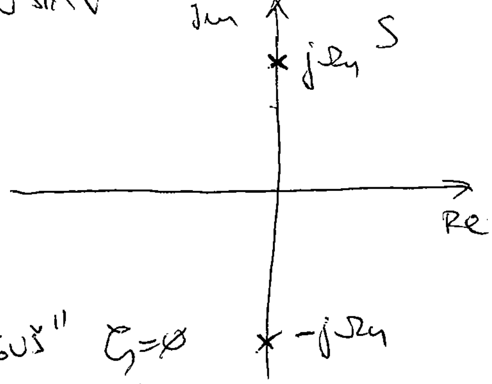
Pa korijene pišemo kao:

$$s_1 = -\alpha + j\beta$$
$$s_2 = -\alpha - j\beta$$

Promatrajmo pozicije korijena ovisno o faktoru ζ, kojeg nazivamo "faktor prigušenja"

1. Slučaj $\zeta = 0$ ... "NEPRIGUŠENI SUSTAV"

$$s_{12} = -0\cdot\Omega_n \pm j\Omega_n\cdot\sqrt{1-0}$$
$$= \pm j\Omega_n$$

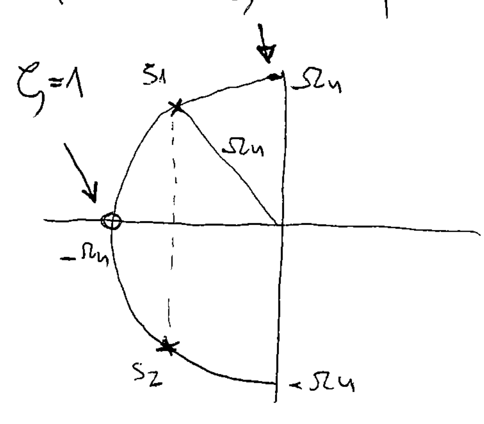


2. Slučaj $\zeta > 0$, ali $\zeta < 1$ "PODKRIT. PRIGUŠ"

$$s_{12} = -\zeta\Omega_n \pm j\Omega_n\underbrace{\sqrt{1-\zeta^2}}_{Re}$$

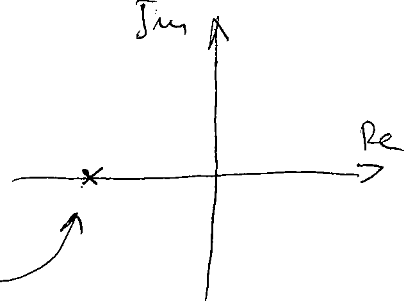
$$|s_{1,2}| = \sqrt{\cancel{\zeta^2\Omega_n^2} + \Omega_n^2(1-\cancel{\zeta^2})}$$

$$= \Omega_n$$



3. slučaj $\zeta = 1$ "KRITIČNO PRIGUŠEN"

$$s_1 = s_2 = -\zeta\Omega_n \pm j\Omega_n\sqrt{1-1}$$
$$= -\Omega_n$$

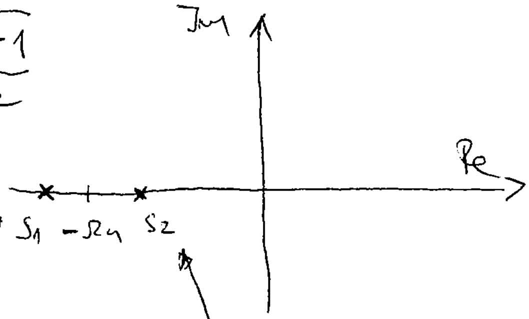


dvostruka karakteristična vrijednost u $s = -\Omega_n$

4. slučaj $\zeta > 1$ "NAD-KRITIČNO PRIGUŠEN"

$$s_{1,2} = -\zeta\Omega_n \pm j\Omega_n \underbrace{\sqrt{1-\zeta^2}}_{Re=\emptyset,\ j\underbrace{\sqrt{\zeta^2-1}}_{Re}}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\Omega_n \pm j\Omega_n \cdot j\sqrt{\zeta^2-1}$$
$$= \underbrace{-\zeta\Omega_n \mp \Omega_n\cdot\sqrt{\zeta^2-1}}$$



dva realna različita korijena

$$s_1 = -\Omega_n\left(\overbrace{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}}^{>1}\right) \qquad s_1 < -\Omega_n$$
$$s_2 = -\Omega_n\left(\underbrace{\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}}_{<1}\right) \qquad s_2 > -\Omega_n$$

5. slučaj $\zeta < \emptyset$ "NESTABILNI SUSTAV"

$$s_{1,2} = \underbrace{-\zeta\Omega_n}_{-\alpha} \pm j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$