- Kauzalni sustavi s beskonačnom memorijom definirani su kao:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = S(u_{\langle -\infty, t]})(t) \quad \text{ili} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad y(n) = S(u_{\langle -\infty, n]})(n).$$

Sustavi s konačnom memorijom (memorije T sekundi, odnosno N koraka, uz $T > 0$ i $N > 0$) definirani su kao $y(t) = S(u_{[t-T, t]})(t)$, odnosno $y(n) = S(u_{[n-N, n]})(n)$, uz $T > 0$ i $N > 0$

- Sustav je kauzalan ako mu vrijednost izlaza ovisi o vrijednosti ulaza u sadašnjosti (bezmemorijski) ili u prošlosti (memorijski).

a) ispitivanje memorije:

1) $S_1[u(t)] = 5 \cdot u(t)$

npr. za $t = 0$, $y(t) = 5 \cdot u(t)$

$y(0) = 5 \cdot u(0)$

- kako za svaki t vrijednost izlaza ovisi o vrijednosti ulaza u sadašnjosti, sustav je bezmemorijski.

2) $S_2[u(t)] = 2 \cdot u(t-2)$

$y(t) = 2 \cdot u(t-2)$

npr. za $t = 0$, $y(0) = 2 \cdot u(-2)$

- kako za svaki t vrijednost izlaza ovisi o vrijednosti ulaza u sadašnjosti, sustav je <u>bezmemorijski</u>.

2) $S_2[u(t)] = 2 \cdot u(t-2)$

$y(t) = 2 \cdot u(t-2)$

- npr. za $t=0$, $y(0) = 2 \cdot u(-2)$

- za svaki t vrijednost izlaza ovisi o prošlosti (trenutak za 2 manji od t), pa je sustav <u>memorijski</u>.

3) $S_3[u(n)] = u(n-2)$

$y(n) = u(n-2)$

- npr. za $n=0$, $y(0) = u(-2)$, vrijednost izlaza u trenutku n ovisi o prošlosti (trenutak $n-2$), pa je sustav <u>memorijski</u>.

4) $S_4[u(n)] = u(n+2)$

$y(n) = u(n+2)$

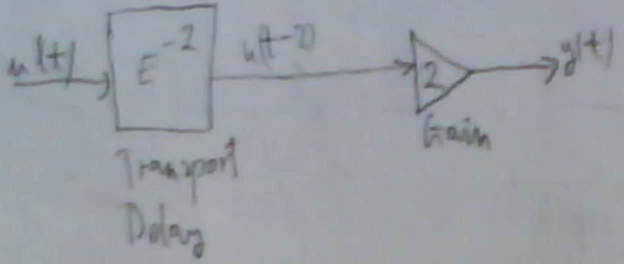
- npr. za $n=0$, $y(0) = u(2)$, vrijednost izlaza u trenutku n ovisi o budućnosti (trenutak $n+2$), pa je sustav <u>memorijski</u>.

b) Bezmemorijski sustav je sigurno kauzalan, dok memorijski sustav mora ovisiti o prošlosti da bi bio kauzalan. Prema tome, S_1 <u>je kauzalan</u>, S_2 je <u>kauzalan</u>, S_3 je <u>kauzalan</u>, a S_4 <u>nije kauzalan</u>.

c) S_2 blokovski dijagram

$$S_2[u(t)] = 2 \cdot u(t-2)$$

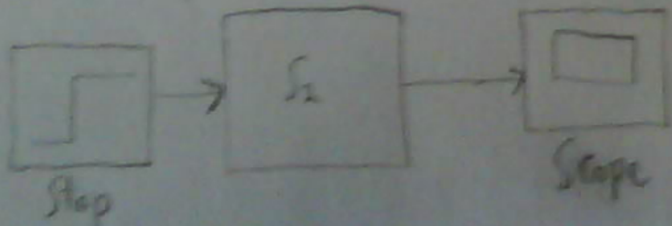
$$y(t) = 2 \cdot u(t-2)$$



d) - Pomoću računala se može ispitati ima li sustav memoriju tako da dovedemo nekoliko različitih pobuda i za svaku promatramo da li se sustav ponaša u skladu s očekivanjima (u ovom slučaju treba ovisiti o prošlosti).

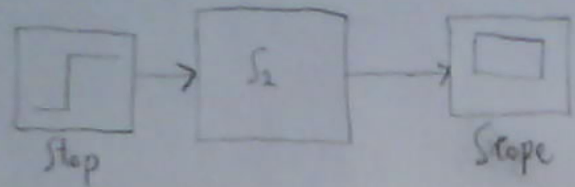
- Ako bi htjeli ispitati je li sustav bezmemorijski, to na računalu ne bi mogli učiniti jer za bezmemorijski sustav vrijedi da ovisi samo o sadašnjosti za svaku moguću pobudu, a mogućih pobuda je beskonačno mnogo. Na računalu možemo samo dokazati da sustav nije bezmemorijski, tj. da je memorijski tako da nađemo pobudu za koju odziv sustava ovisi o prošlosti ili o budućnosti.

1) pobuda - step

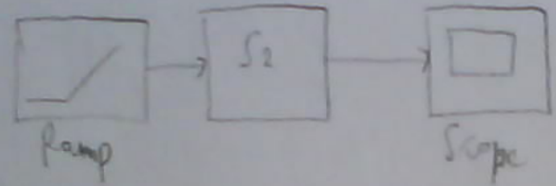


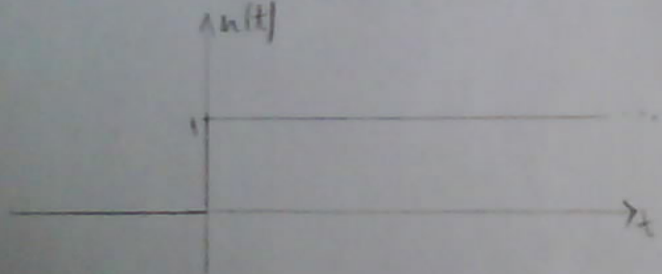
bezmemorijski sustav vidi da ovisi samo o sadašnjosti za svaku moguću pobudu, a mogućih pobuda je beskonačno mnogo. Na simulaciji možemo samo dokazati da sustav nije bezmemorijski, tj. da je memorijski tako da nađemo pobudu za koju odziv sustava ovisi o prošlosti ili o budućnosti.

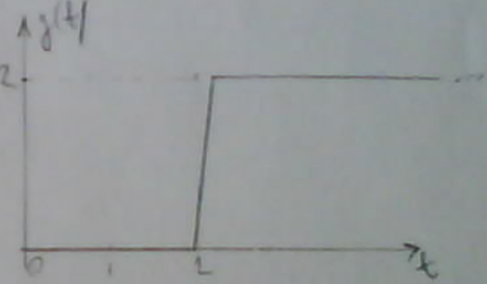
1) pobuda: step

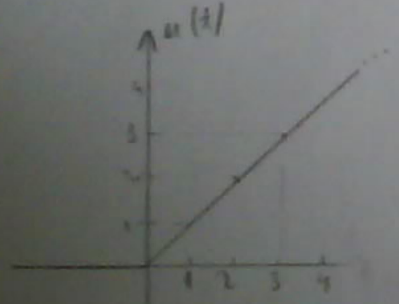


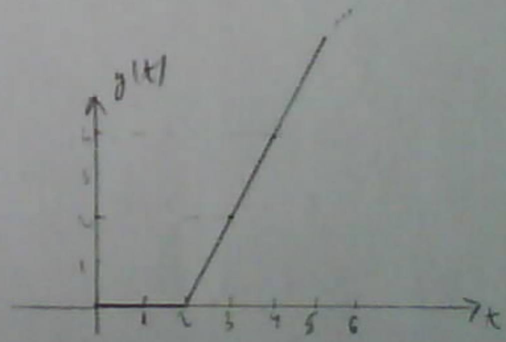
2) pobuda: rampa











Vidi se da sustav ima memoriju, npr. kod pobude $u(t)=\mu(t)$, izlaz ovisi o onome što je za 2 trenutka prije bilo na ulazu, pa sustav tek u trenutku $t=2$ postiže vrijednost različitu od nule. Ako je pobuda rampa, može se uočiti ista stvar.

- Sustav je vremenski stalan ako za bilo koju pobudu $u(n)$ (diskretni) ili $u(t)$ (kontinuirani) daje odziv $y(n)$, odnosno $y(t)$, a za zakašnjeli ulaz $E^{-n_0}(u)(n)$, tj. $E^{-t_0}(u)(t)$ daje zakašnjeli odziv $E^{-n_0}(y)(n)$, odnosno $E^{-t_0}(y)(t)$. Vremenski stalni sustavi ne mijenjaju parametre tijekom vremena.

a) $S_1[u(t)] = 5 \cdot u(t)$

$y(t) = 5 \cdot u(t)$

$S_1[u(t-T)] = 5 \cdot u(t-T)$

$y(t-T) = 5 \cdot u(t-T)$

$S_1[u(t-T)] = y(t-T)$, pa je $\underline{S_1 \text{ stalan}}$

$S_2[u(t)] = \sin(t) \cdot u(t)$

$S_2[u(t-T)] = \sin(t) \cdot u(t-T)$

$y(t) = \sin(t) \cdot u(t)$

$y(t-T) = \sin(t-T) \cdot u(t-T)$

$y(t-T) \neq S_2[u(t-T)]$, pa je $\underline{S_2 \text{ promjenjiv}}$

$S_3[u(n)] = (-1)^n \cdot u(n)$

$y(t-T) = \sin(t-T) \cdot u(t-T)$

$S_3 \,[u(n)] = (-1)^n \cdot u(n)$

$S_3 \,[u(n-N)] = (-1)^n \cdot u(n-N)$

$y(n) = (-1)^n \cdot u(n)$

$y(n-N) = (-1)^{n-N} \cdot u(n-N)$

$y(n-N) \stackrel{?}{=} S_3 \,[u(n-N)]$

$(-1)^{n-N} \cdot \cancel{u(n-N)} \stackrel{?}{=} (-1)^n \cdot \cancel{u(n-N)}$

$(-1)^{-N} = 1$

- kako gornja jednakost ne vrijedi za neparne N-ove, sustav S_3 je promjenjiv.

$S_4 \,[u(n)] = e^{j\pi n} \cdot u(n)$

$S_4 \,[u(n-N)] = e^{j\pi n} \cdot u(n-N)$

$y(n) = e^{j\pi n} \cdot u(n)$

$y(n-N) = e^{j\pi \cdot (n-N)} \cdot u(n-N)$

$y(n-N) \stackrel{?}{=} S_4 \,[u(n-N)]$

$e^{j\pi(n-N)} \cdot \cancel{u(n-N)} \stackrel{?}{=} e^{j\pi n} \cdot \cancel{u(n-N)}$

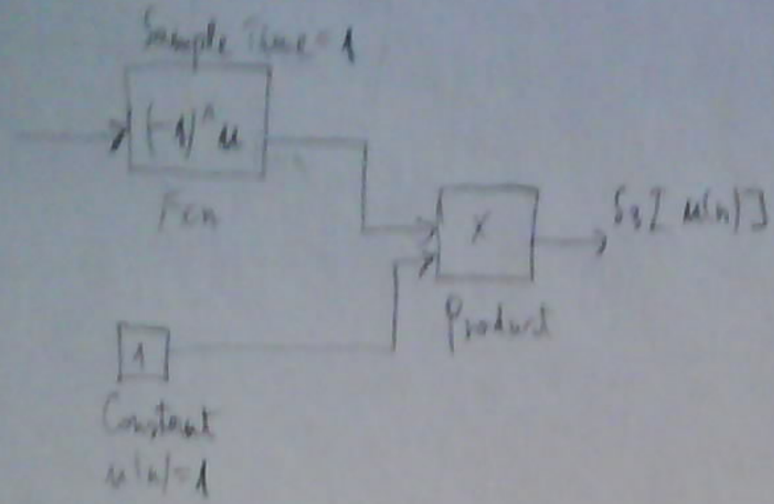
$e^{-j\pi \cdot N} = 1$

$\cos(-N\pi) + j \cdot \underbrace{\sin(-N \cdot \pi)}_{0} = 1$

$\cos(N \cdot \pi) = 1$

- gornja jednakost ne vrijedi za neparne N-ove, pa je sustav S_4 promjenjiv.

b)



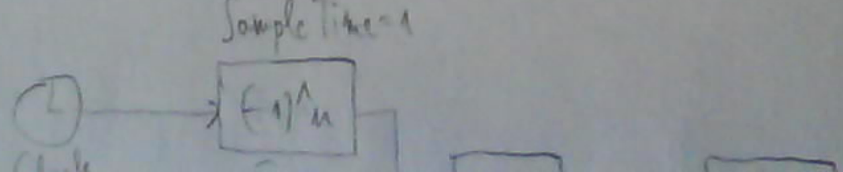
c) – Pomoću računala, vremensku stalnost možemo ispitati tako da zakasnimo pobudu i gledamo što ćemo dobiti na izlazu, a nakon toga zakasniti samo izlaz iz sustava. Ako izlazi u oba slučaja nisu jednaki, sustav je promjenjiv.

– Ako želimo pomoću računala ispitati je li sustav stalan, to ne možemo učiniti jer bi morali dokazati svojstvo stalnosti za beskonačni broj pobuda, što je nemoguće. Pomoću računala možemo samo dokazati da sustav nije stalan tako da nađemo pobudu za koju svojstvo stalnosti ne vrijedi.

– Ispitivanje stalnosti:

$u(n) = \mu(n)$

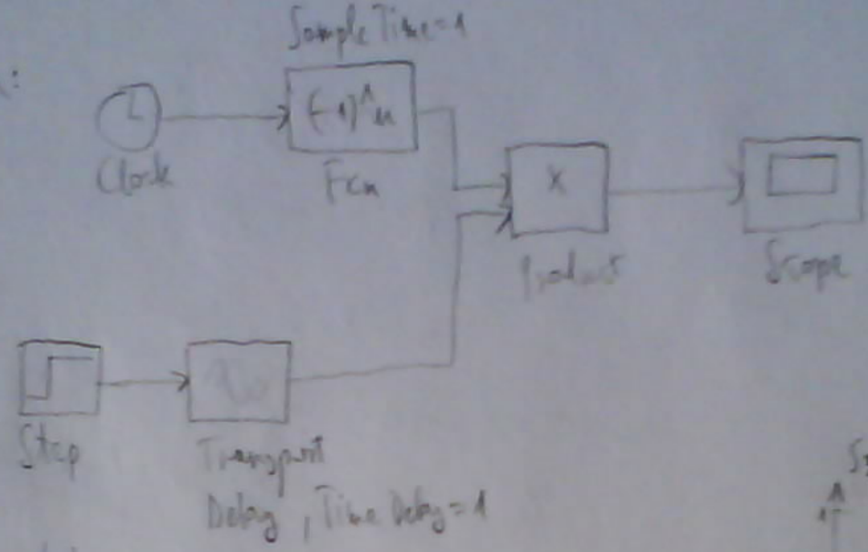
– kašnjenje samo ulaza:

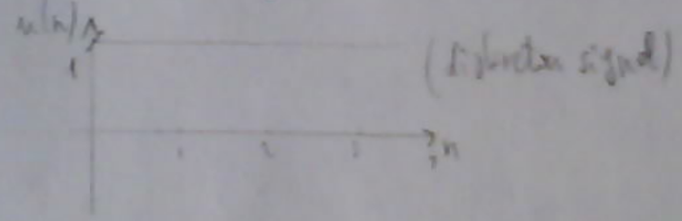


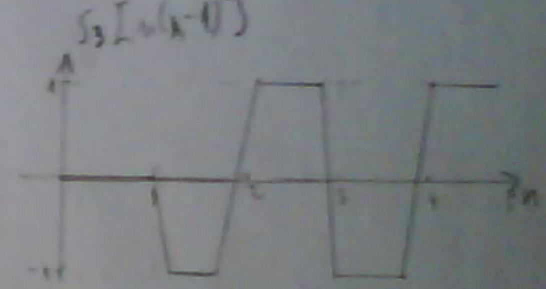
- Ispitivanje stalnosti:

$u(n) = \mu(n)$

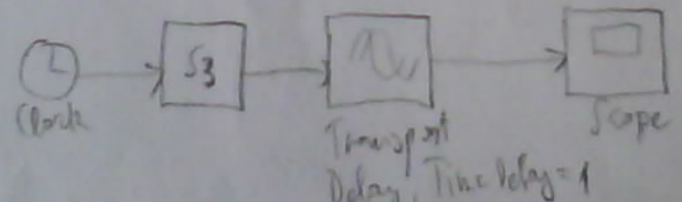
- kašnjenje samo ulaza:

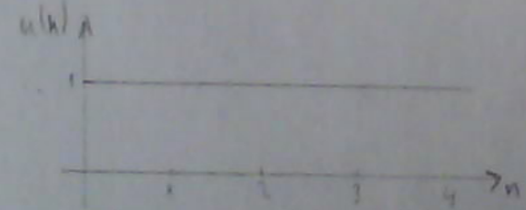


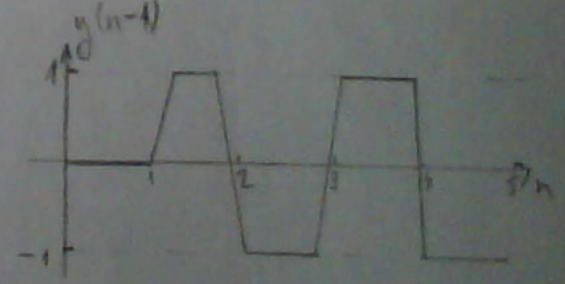




- kašnjenje izlaza:

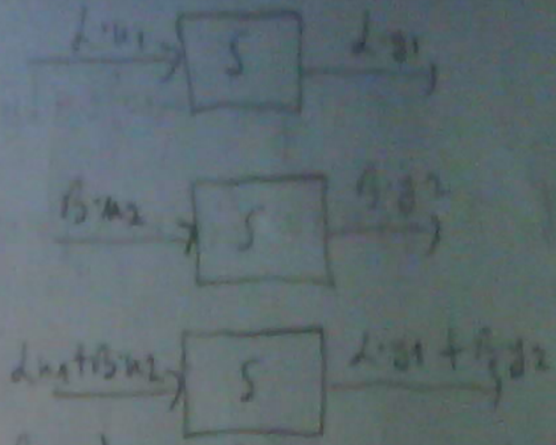






Kako odzivi u oba slučaja nisu jednaki, sustav je promjenjiv.

- Uz ovakve oznake na slikama, sustav će biti linearan ako za $\forall \alpha$ i $\forall \beta$ vrijedi: $y_1 = S(u_1)$, $y_2 = S(u_2)$



- homogenost: $S(\alpha \cdot u_1) = \alpha \cdot S(u_1) = \alpha \cdot y_1$, $S(\beta u_2) = \beta \cdot S(u_2) = \beta y_2$

i aditivnost: $S(\alpha \cdot u_1) + S(\beta \cdot u_2) = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2$.

- Da bi sustav bio linearan, mora biti homogen i aditivan: $S(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) = \alpha \cdot S(u_1) + \beta \cdot S(u_2)$

a) $S_1[u(t)] = 5 \cdot u(t)$; $y(t) = 5 \cdot u(t)$

$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$

$y_1(t) = 5 \cdot u_1(t)$; $y_2(t) = 5 \cdot u_2(t)$

$y(t) = 5 \cdot (\alpha \cdot u_1(t) + \beta \cdot u_2(t)) = \alpha \cdot 5 \cdot u_1(t) + \beta \cdot 5 \cdot u_2(t) = \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t)$ ✓ $\Rightarrow S_1$ je

$S_2[u(t)] = t \cdot u(t) + 3$; $y(t) = t \cdot u(t) + 3$

$u(t) = \alpha \cdot u_1(t) + \beta \cdot u_2(t)$

$y_1(t) = t \cdot u_1(t) + 3$, $y_2(t) = t \cdot u_2(t) + 3$

$y(t) = t \cdot (\alpha \cdot u_1(t) + \beta \cdot u_2(t)) + 3 = \alpha \cdot t \cdot u_1(t) + \beta \cdot t \cdot u_2(t) + 3 =$

$= \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) - 3\alpha - 3\beta + 3 \neq \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) \Rightarrow S_2$ nije linearan.

$y_1(t) = t \cdot u_1(t) + 3$, $y_2(t) = t \cdot u_2(t) + 3$

$y(t) = t \cdot (\alpha \cdot u_1(t) + \beta \cdot u_2(t)) + 3 = \alpha \cdot t \cdot u_1(t) + \beta \cdot t \cdot u_2(t) + 3 =$

$= \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) - 3\alpha - 3\beta + 3 \neq \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) \Rightarrow S_2$ nije linearan.

$S_3[u(n)] = u(n) + 2 \cdot u(n-1)$; $y(n) = u(n) + 2 \cdot u(n-1)$

$u(n) = \alpha \cdot u_1(n) + \beta \cdot u_2(n)$, $u(n-1) = \alpha \cdot u_1(n-1) + \beta \cdot u_2(n-1)$

$y_1(n) = u_1(n) + 2 \cdot u_1(n-1)$, $y_2(n) = u_2(n) + 2 \cdot u_2(n-1)$

$y(n) = \alpha \cdot u_1(n) + \beta \cdot u_2(n) + 2\alpha \cdot u_1(n-1) + 2 \cdot \beta\, u_2(n-2) =$

$= \alpha \cdot (u_1(n) + 2u_1(n-1)) + \beta \cdot (u_2(n) + 2u_2(n-2)) =$

$= \alpha \cdot y_1(n) + \beta \cdot y_2(n) \Rightarrow S_3$ je linearan

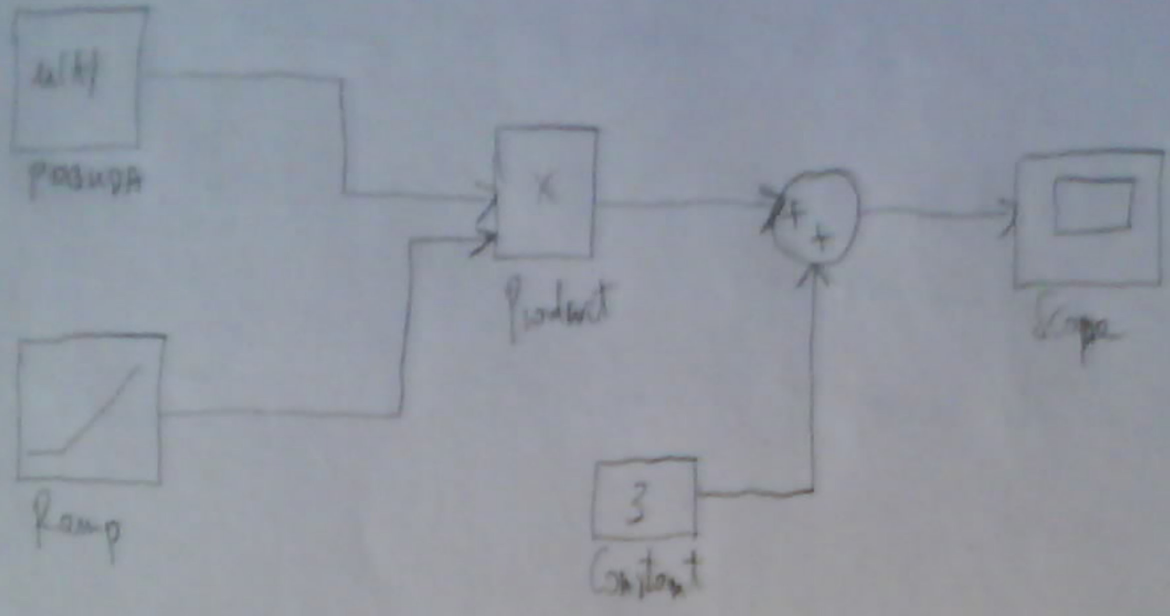
$S_4[u(n)] = e^{u(n)}$; $y(n) = e^{u(n)}$

$u(n) = \alpha \cdot u_1(n) + \beta \cdot u_2(n)$

$y_1(n) = e^{u_1(n)}$, $y_2(n) = e^{u_2(n)}$

$y(n) = e^{\alpha \cdot u_1(n) + \beta \cdot u_2(n)} = e^{\alpha \cdot u_1(n)} \cdot e^{\beta \cdot u_2(n)} = (e^{u_1(n)})^{\alpha} \cdot (e^{u_2(n)})^{\beta} =$

$= y_1^{\alpha}(n) \cdot y_2^{\alpha}(n) \neq \alpha \cdot y_1(n) + \beta \cdot y_2(n) \Rightarrow S_4$ nije linearan b)



c) Linearnost na računalu možemo ispitati tako da neke dvije pobude $u_1(t)$ i $u_2(t)$ pomnožimo s konstantama, u_1 s α, u_2 s β i zatim zbrojimo takve pobude. Zatim te pobude propustimo kroz sustav i dobijemo neki izlaz. Nakon toga, uzmemo pobude u_1 i u_2 (nisu pomnožene s konstantama) i propustimo ih kroz sustav svaku posebno, te izlaz y_1 (od pobude u_1) pomnožimo s α, a izlaz y_2 (od pobude u_2) pomnožimo s β. Zatim zbrojimo ta dva izlaza i usporedimo sa prvim slučajem; ako su izlazi jednaki, sustav je linearan.

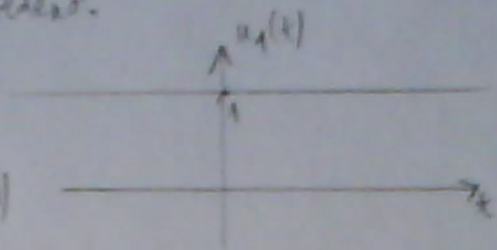
- Pomoću računala možemo samo dokazati da je sustav nelinearan, ako nađemo neke dvije pobude za koje ne vrijedi gore navedeno.

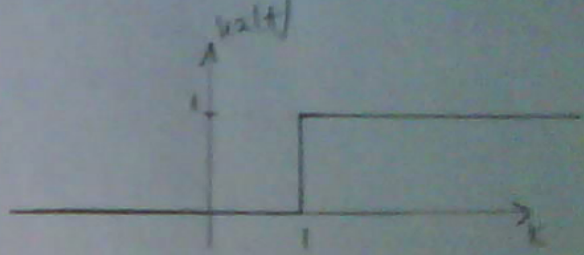
$u_1(t)$ $u_2(t)$

s α, a izlaz y_2 (od pobude u_2) pomnožen...

Sa prvim slučajem: ako su izlazi jednaki, sustav je linearan.

- Pomoću računala možemo samo dokazati da je sustav nelinearan, ako nađemo neke druge pobude za koje ne vrijedi gore navedeno.

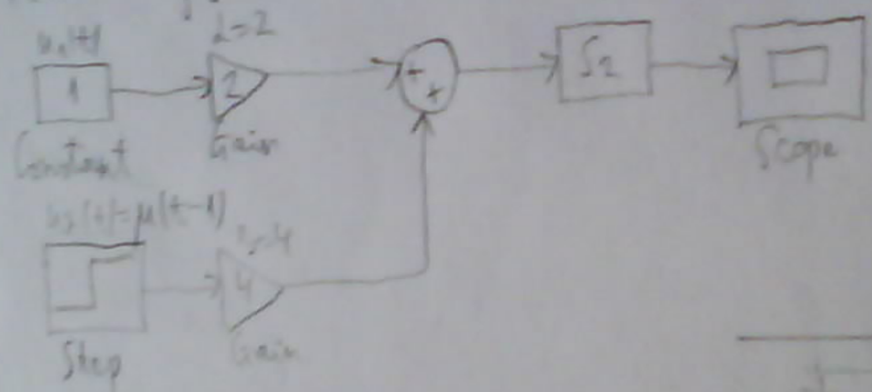


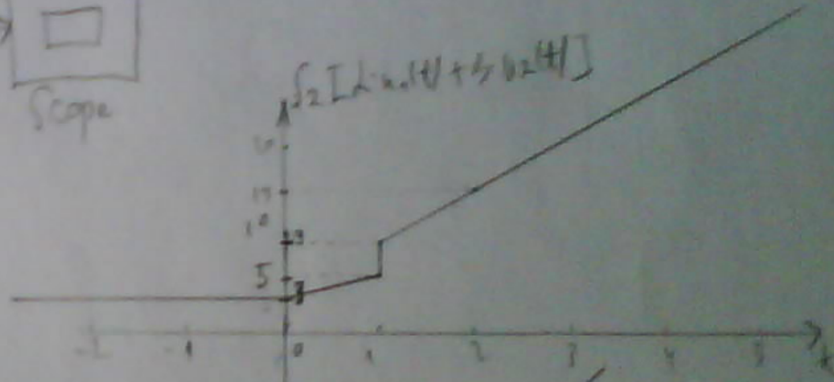


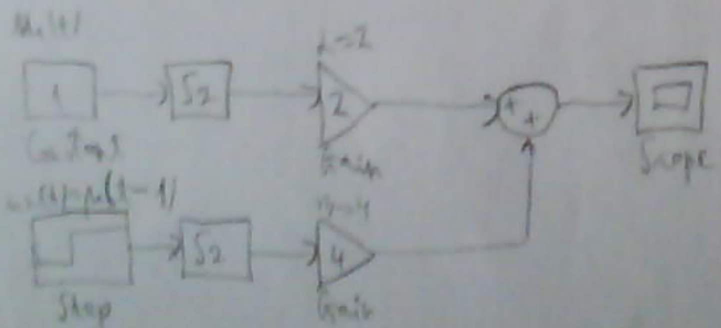
$\alpha=2,\ \beta=4$

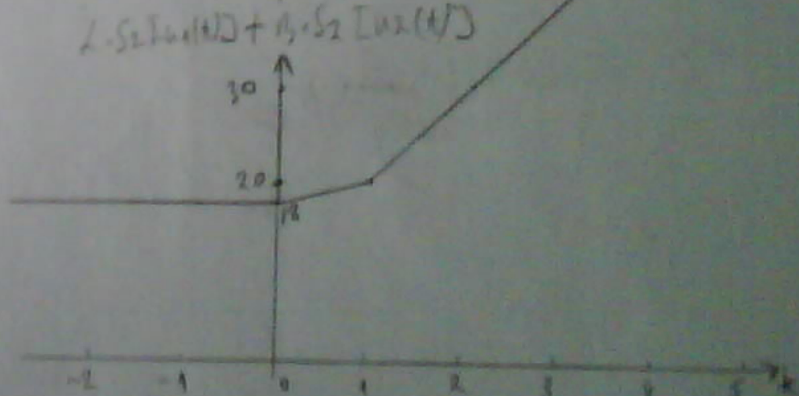
$u_1(t)=1,\ u_2(t)=\mu(t-1)$

Blokovski dijagrami:









Dobiveni signali na izlazima nisu posve jednaki zbog nesavršenosti simulacije, no po obliku tih grafova (koji su slični) se može zaključiti da je sustav linearan.

a) <u>LTI</u>

$u_1(t) = \mu(t) - \mu(t-1) + \mu(t-3) - \mu(t-4)$; $y_1(t) = (-t+3)\cdot(\mu(t) - \mu(t-4))$

$u_2(t) = \mu(t+5) - \mu(t+4) - \mu(t+2) + \mu(t+1) - 2\mu(t-1) + 2\mu(t-2)$; $\underline{y_2(t) = ?}$

$$u_2(t) = u_1(t+5) - 2\cdot u_1(t+2) =$$

$$= \mu(t+5) - \mu(t+4) + \mu(t+2) - \mu(t+1) - 2\mu(t+2) + 2\mu(t+1) - 2\mu(t-1) + 2\mu(t-2) =$$

$$= \mu(t+5) - \mu(t+4) - \mu(t+2) + \mu(t+1) - 2\mu(t-1) + 2\mu(t-2)$$

$$S[u_2(t)] = y_2(t) = S[u_1(t+5) - 2\cdot u_1(t+2)] = S[u_1(t+5)] - 2\cdot S[u_1(t+2)] =$$

$$= y_1(t+5) - 2\cdot y_1(t+2) = (-(t+5)+3)\cdot(\mu(t+5) - \mu(t+5-4))$$

$$-2\cdot(-(t+2)+3)\cdot(\mu(t+2) - \mu(t-4+2)) =$$

$$= (-t-2)\cdot(\mu(t+5) - \mu(t+1)) + (2t-2)\cdot(\mu(t+2) - \mu(t-2))$$

b) U MATLAB-u se koriste sljedeće naredbe:

```
syms t
y1 = (-t+3)*(heaviside(t) - heaviside(t-4))
```

- kako je odziv $y_2(t) = y_1(t+5) - 2\cdot y_1(t+2)$, pomoću naredbe subs možemo dobiti odziv $y_2(t)$.

```
y2 = subs(y1, t, t+5) - 2*subs(y1, t, t+2)
```

Sustav je BIBO stabilan ako za ograničenu pobudu daje ograničeni odziv. Kratica BIBO znači Bounded Input Bounded Output.

a) $S_1[u(t)] = \begin{cases} \int_{0^-}^{t} u(t)\, e^{-2t}\, dt, & 0<t \\ 0, & t<0 \end{cases}$

- neka je pobuda $u(t) = \mu(t)$

$$S_1[\mu(t)] = \int_{0^-}^{t} \mu(\tau)\cdot e^{-2\tau}\, d\tau = \mu(t)\cdot \int_{0^-}^{t} e^{-2\tau}\, d\tau = \mu(t)\cdot \frac{e^{-2\tau}}{-2}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{\mu(t)}{2}\cdot\left(e^{-2t}-1\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-2t}\right)\mu(t)$$

$$S_1[u(t)] = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right), & t\geq 0 \end{cases}$$

- kako je $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-2t}\right) = \frac{1}{2}$, odziv na ograničenu pobudu je ograničen, pa je sustav S_1 BIBO stabilan.

$S_2[u(t)] = \int_{0^-}^{t} u(t)\, dt$, $t\geq 0$, inače 0

$u(t) = \mu(t)$

$$S_2[\mu(t)] = \int_{0^-}^{t} \mu(\tau)\, d\tau = \mu(t)\cdot\int_{0}^{t} d\tau = \mu(t)\cdot t$$

- kako je $\lim_{t \to \infty} \frac{n}{2} ... / \frac{}{2}$

sustav S_1 BIBO stabilan.

$S_2[u(t)] = \int_0^t u(t)\,dt$, $t \geq 0$, inače 0

$u(t) = \mu(t)$

$S_2[\mu(t)] = \int_0^t \mu(\tau)\,d\tau = \mu(t) \cdot \int_0^t d\tau = \mu(t) \cdot t$

$S_2[\mu(t)] = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$

- kako je $\lim_{t \to \infty} t = \infty$, odziv na ograničenu pobudu nije ograničen i sustav nije BIBO stabilan

$S_3[u(n)] = \sum_{k=0}^{n} u(k) \cdot 2^k$, $n \geq 0$, inače 0

$u(n) = \mu(n)$

$S_3[\mu(n)] = \sum_{k=0}^{n} \mu(k) \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

$S_3[\mu(n)] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2^{n+1} - 1, & n \geq 0 \end{cases}$

- vidi se da ako n teži u beskonačno, i odziv sustava teži u beskonačno (nije omeđen), pa sustav S_3 nije BIBO stabilan.

$$S_4[x(n)] = \sum_{k=0}^{n} x(k)\cdot 2^{-k} \quad , n \geq 0 \quad , \text{inače } 0$$

$x(n) = \mu(n)$

$$S_4[\mu(n)] = \sum_{k=0}^{n} \mu(k)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_4[\mu(n)] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right), & n \geq 0 \end{cases}$$

– Za proizvoljno veliki n, odziv sustava je ograničen (teži u 2), pa je S_4 BIBO stabilan.

b) $S_2[x(t)] = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \longrightarrow S_2[x(t)]$$

Integrator

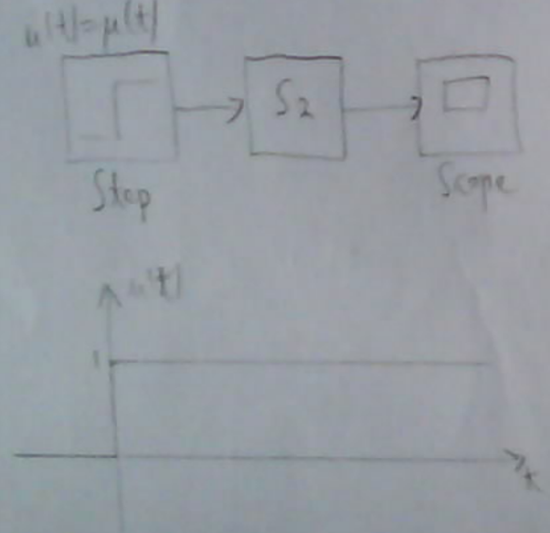
c) – Pomoću primjera, može se vidjeti da je sustav BIBO nestabilan ako sustav na neku ograničenu pobudu ima neograničen odziv (potrebno je pronaći u bilo kojem vremenskom intervalu).

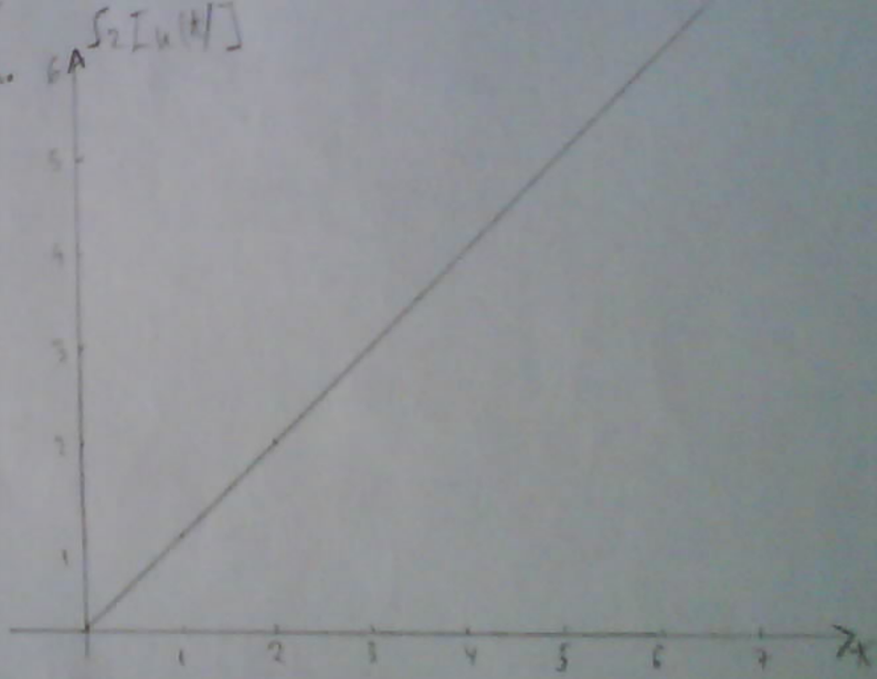
BIBO

Integrator

c) – Pomoću crteža, može se vidjeti da je sustav BIBO nestabilan ako sustav na neku ograničenu pobudu ima neograničen odziv (potrebno je promatrati u što većem vremenskom intervalu).

– Ako želimo ispitati je li sustav BIBO stabilan, to ne možemo utvrditi pomoću crteža jer sustav za svaku moguću ograničenu pobudu (kojih ima beskonačno) mora biti BIBO stabilan. Na crtežu možemo samo utvrditi da sustav nije BIBO stabilan tako da nađemo pobudu za koju ne vrijedi svojstvo BIBO stabilnosti.





– Iz odziva sustava je vidljivo da taj odziv nije ograničen, pa sustav nije BIBO stabilan.