Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

16. travnja 2008.

Opis sustava s varijablama stanja

- sustav transformira ulazne signale, iz skupa *UlazniSignali*, u izlazne signale, iz skupa *IzlazniSignali*, i definiran je funkcijom

$$F : UlazniSignali \rightarrow IzlazniSignali$$

- uvodi se opis sustava s varijablama stanja koji se temelji na ideji da sustav u svom djelovanju prolazi kroz niz promjena stanja
- model s varijablama stanja opisuje sustav proceduralno, definirajući kako ulazni signal djeluje na promjene stanja sustava i kako se generira izlazni signal
- model s varijablama stanja je zato imperativni opis sustava

Konačni automati

- prvo se razmatra model s varijablama stanja za sustave s konačnim (i relativno malim) brojem stanja
- razmatraju se konačni automati
- konačni automati su sustavi čiji ulazni i izlazni signali predstavljaju tijek događaja i oblika su

$$NizDogadjaja : Prirodni_0 \rightarrow Znakovi$$

gdje su $Prirodni_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, a $Znakovi$ proizvoljan konačan skup

- neka je $u \in UlazniSignali$ ulazni signal, tada se pojedini znak u signalu označava kao $u(n)$ za $n \in Prirodni_0$
- domena ovih signala definira redoslijed (ne nužno diskretno ili kontinuirano vrijeme)
- dakle, elementi domene samo definiraju da se neki događaj dogodio prije nekog drugog (ne označavajući koliko je vremena proteklo između događaja)

Pretražnik

- definiramo sustav, nazovimo ga *Pretražnik*, koji u nizu binarnih znakova pronalazi pojavu niza znakova "000"
- za vrijeme pretrage sustav se javlja s porukom "tražim" (skraćeno t), a u slučaju nađenog niza porukom "pronašao" (p)
- neka je niz koji pretražujemo: "01000011..."

Pretražnik model ulaz–izlaz

Slika 1: Pretražnik

$$
\begin{aligned}
u \in UlazniSignali &= [Prirodni_0 \to \{0,1\}] \\
y \in IzlazniSignali &= [Prirodni_0 \to \{t,p\}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Pretražnik(u)(n) &= p, \text{ ako } (u(n-2), u(n-1), u(n)) = (0,0,0) \\
&= t, \text{ inače}
\end{aligned}
$$

$$
Pretražnik((0,1,0,0,0,0,1,1,\ldots)) = (t,t,t,t,p,p,t,t,\ldots)
$$

Opis načina djelovanja Pretražnika

- sustav pri generiranju izlaznih znakova uzima u obzir trenutnu vrijednost ulaznog signala (trenutni ulazni znak) i trenutno stanje koje nosi informaciju o broju prethodnih pojava ulaznog znaka "0"
- dakle, sustav *Pretražnik* mora sadržavati memorijski element koji "pamti" informaciju o broju pojava uzastopnih znakova "0", pri čemu su moguća sljedeća stanja *Pretražnika* :
  - "PS" – početno stanje (ili prethodni znak je bio "1")
  - "PN" – prethodni znak je bio "0"
  - "DN" – pojavila su se dva uzastopna znaka "0"
- riječima bi djelovanje sustava *Pretražnik* mogli opisati nizom procedura navedenih na sljedećoj prikaznici

Opis načina djelovanja Pretražnika

1. ako je stanje "PS" i ako je
   a. ulazni znak "1", sustav ostaje u stanju "PS", generira izlazni znak "t", i ponavlja proceduru 1
   b. ulazni znak "0", sustav "pamti" pojavu prvog znaka "0" (u mogućem nizu od tri uzastopna) kao stanje "PN", generira izlazni znak "t", i nastavlja s procedurom 2
2. ako je stanje "PN" i ako je
   a. ulazni znak "1", sustav prepoznaje da se nisu pojavila dva uzastopna znaka "0", tu činjenicu "pamti" kao povrat u stanje "PS", generira izlazni znak "t', te ponavlja proceduru 1
   b. ulazni znak "0", sustav prepoznaje da su se pojavila dva uzastopna znaka "0", što "pamti" kao stanje "DN", generira izlazni znak "t" i nastavlja s procedurom 3
3. ako je stanje "DN" i ako je
   a. ulazni znak "1", sustav prepoznaje da se nisu pojavila tri uzastopna znaka "0", tu činjenicu "pamti" kao povrat u stanje "PS", generira izlazni znak "t', te ponavlja proceduru 1
   b. ulazni znak "0", sustav prepoznaje da su se pojavila tri uzastopna znaka "0" i generira izlazni znak "p", sustav ostaje u stanju "DN" te ponavlja proceduru 3

Opis sustava s varijablama stanja 1

- prepoznajemo kako prethodni opis predstavlja imperativni opis sustava
- sustav u svom djelovanju prolazi kroz niz promjena "unutarnjih" stanja
- iz opisa je vidljivo kako stanje sustava "predstavlja", sažimlje, povijest sustava i u određivanju odziva sustava potrebno je poznavati samo
  - aktualno stanje
  - aktualni ulazni znak
- ovaj način opisa sustava, neovisno radi li se o opisu dijela sklopovlja ili pak opisu dijela računalnog programa, omogućava bolju analizu od drugih neformalnih opisa

Sustavi s konačnim brojem stanja

- primjer pretražnika je primjer sustava s konačnim brojem stanja
- diskretni sustavi s konačnim brojem stanja nazivaju se i **konačni automati**
- u literaturi na engleskom jeziku češći je termin: **Finite State Machines (FSM)**
- sustavi s konačnim brojem stanja (ne prevelikim), i s konačnim, i ne prevelikim, brojem ulaznih i izlaznih znakova pregledno se prikazuju s tablicama prijelaza stanja
- konačni automati pregledno se prikazuju i dijagramima prijelaza stanja

Opis sustava s varijablama stanja 2

- općenito automat (sustav) možemo opisati, uz pomoć njegovih stanja, sljedećim postupkom

1. razmatra se ulazni znak $u(n)$
2. sustav generira izlazni znak $y(n)$, uračunavajući znak $u(n)$ i aktualno stanje $x(n)$
3. na temelju znaka $u(n)$ i aktualnog stanja $x(n)$ sustav izračunava novo stanje $x(n+1)$
4. sustav se vraća na točku 1. postupka i uzima u razmatranje znak $u(n+1)$

- akcija u točki 3. postupka naziva se prijelaz stanja, ažuriranje ili engleski update

Pretražnik model s varijablama stanja

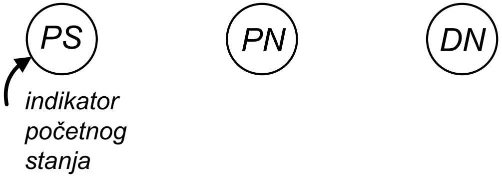
- djelovanje sustava *Pretražnik* pregledno, i precizno, se može opisati tablicom koja prikazuje prijelaz iz jednog u drugo stanje u ovisnosti o mogućim ulaznim znakovima

	0	1
PS	(PN, t)	(PS, t)
PN	(DN, t)	(PS, t)
DN	(DN, p)	(PS, t)

- gdje su $0, 1$ ulazni znakovi
- znakovi t i p su izlazni znakovi
- PS, PN, DN predstavljaju stanja pri pojavi ulaznih znakova
- par, npr., (DN, t) predstavlja naredno stanje i aktualni izlaz (uz aktualno stanje PN i aktualni ulazni znak “0”)

Dijagram prijelaza stanja 1

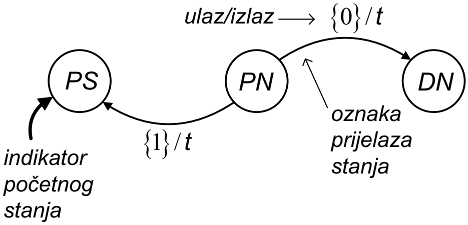
- kako bi se kreirao dijagram prijelaza stanja automata, kraće dijagram stanja, prvo se ucrtaju krugovi koji predstavljaju moguća stanja



Slika 2: Dijagram stanja–stanja

Dijagram prijelaza stanja 2

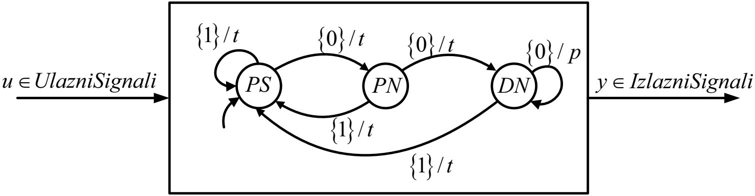
- za svaku kombinaciju ulaza i stanja ucrtava se strelica (lûk) od trenutnog stanja u naredno stanje



Slika 3: Dijagram stanja–prijelaz stanja

	0	1
PN	(DN, t)	(PS, t)

Dijagram stanja za Pretraznik 1



Slika 4: Dijagram stanja za Pretraznik

$$u = (\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1, \ldots)$$

$$x = (PS, PN, PS, PN, DN, DN, DN, PS, \ldots)$$

$$y = (\ t,\ t,\ t,\ t,\ p,\ p,\ t,\ t, \ldots)$$

Slika 5: Ulazni niz, odziv stanja, i odziv Pretraznika

Opis automata skupovima i funkcijama 1

- opis automata skupovima i funkcijama je neophodan u realizaciji automata sklopovljem ili programski
- pokazano je da je u opisu automata potrebno definirati skup stanja, početno stanje, skupove ulaznih i izlaznih znakova, te funkciju prijelaza između stanja
- automati se stoga definiraju uređenom petorkom

Opis automata skupovima i funkcijama 2

- automat se definira uređenom petorkom

$$Automat = (Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, početnoStanje)$$

pri čemu su
Stanja - skup mogućih stanja
Ulazi - ulazni skup znakova ili ulazni alfabet
Izlazi - izlazni skup znakova ili izlazni alfabet
$početnoStanje \in Stanja$ - početno stanje
$FunkcijaPrijelaza : Stanja \times Ulazi \to Stanja \times Izlazi$

- *FunkcijaPrijelaza*, za aktualno stanje i ulazni znak, definira naredno stanje i izlazni znak

Opis automata skupovima i funkcijama 3

- *Ulazi* i *Izlazi* su skupovi mogućih ulaznih odnosno izlaznih znakova
- skup *UlazniSignali* čine svi beskonačni nizovi ulaznih znakova

$$UlazniSignali = [Prirodni_0 \to Ulazi]$$

- pojedini znak u signalu $u \in UlazniSignali$ označuje se kao $u(n), \forall n \in Prirodni_0$, pri čemu n nužno ne predstavlja trenutak u vremenu već korak (poziciju) u nizu
- cijeli ulazni signal je niz

$$(u(0), u(1), u(2), \ldots, u(n), \ldots)$$

- skup *IzlazniSignali* čine svi beskonačni nizovi izlaznih znakova

$$IzlazniSignali = [Prirodni_0 \to Izlazi]$$

Opis automata skupovima i funkcijama 4

- automat opisan petorkom

$$Automat = (Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, početnoStanje)$$

- definira funkciju

$$F : UlazniSignali \to IzlazniSignali$$

dakle

$$\forall u \in UlazniSignali \Rightarrow y = F(u)$$

- ali i definira postupak za izračunavanje ove funkcije za određeni ulazni signal

Opis automata skupovima i funkcijama 5

- niz stanja u pojedinim koracima, odziv stanja, $(x(0), x(1), x(2), \ldots)$ i izlazni signal y se konstruiraju, korak po korak, kako slijedi:

$$\begin{aligned} x(0) &= početnoStanje \\ (x(n+1), y(n)) &= FunkcijaPrijelaza(x(n), u(n)) \end{aligned}$$

- svaki gornji izračun $x(n)$ odnosno $y(n)$[1] naziva se odziv stanja, odnosno odziv sustava

[1] ovdje se razmatraju tzv. Mealyevi automati za koje je karakteristično da izlazni znak ovisi o ulaznom znaku i znaku stanja. Definiraju se i Mooreovi automati kod kojih je izlaz samo funkcija trenutnog stanja

Opis automata skupovima i funkcijama 6

- uobičajeno se *FunkcijaPrijelaza* razlaže na dvije funkcije, funkciju narednog stanja, *narednoStanje*, te izlaznu funkciju,[2] *izlaz*,
- za

$$\begin{aligned} &narednoStanje : Stanja \times Ulazi \to Stanja \\ &izlaz : Stanja \times Ulazi \to Izlazi \\ &x(0) = početnoStanje \end{aligned}$$

- definiramo jednadžbu stanja

$$x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n))$$

- odnosno izlaznu jednadžbu

$$y(n) = izlaz(x(n), u(n))$$

[2] U literaturi, posvećenoj isključivo automatima, uobičajene su oznake $A =< I, O, S, \delta, \lambda >$, za automat, $\delta : S \times I \to S$, za funkciju narednog stanja, te $\lambda : S \times I \to O$, za izlaznu funkciju

Opis automata skupovima i funkcijama 7

- automat *Pretražnik* potpuno je definiran kao

$$
\begin{aligned}
&Pretražnik = (Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, početnoStanje)\\
&Stanja = \{PS, PN, DN\}\\
&Ulazi = \{0, 1\}\\
&Izlazi = \{t, p\}\\
&početnoStanje = PS\\
&FunkcijaPrijelaza : Stanja \times Ulazi \to Stanja \times Izlazi
\end{aligned}
$$

- za $u(n) \in Ulazi$, $x(n) \in Stanja$, i $y(n) \in Izlazi$, vrijedi

$$(x(n+1), y(n)) = FunkcijaPrijelaza(x(n), u(n))$$

- *FunkcijaPrijelaza* za *Pretražnik* dana je dijagramom prijelaza stanja na prikaznici 14, odnosno tablicom na prikaznici 11

Sustav za usrednjavanje kao automat

- jednostavni sustav za usrednjavanje – moving average filter, MAF_N – definiran je kao

$$MAF_N : [Prirodni_0 \to Realni] \to [Prirodni_0 \to Realni]$$

gdje je za $\forall u \in [Prirodni_0 \to Realni], \quad MAF_N(u) = y$ dan s

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad y(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(n-j)$$

- ovaj sustav, za svaki n, daje srednju vrijednost zadnjih N vrijednosti ulaznog signala
- jednadžba diferencija je deklarativna definicija sustava
- imperativna definicija predstavlja postupak za izračunavanje izlaznog signala za zadani ulazni signal, što je upravo pokazano kod automata

Sustav za usrednjavanje kao automat

- neka je $N = 4$, pa vrijedi

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad y(n) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} u(n-j)$$

- u izračunu odziva, u koraku n, potrebno je poznavati trenutnu vrijednost, te tri prethodne vrijednosti ulaznog niza
- razmotrimo ovaj sustav kao automat

$$MAF_4 = (Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, početnoStanje)$$

pri čemu su skupovi *Ulazi*, *Izlazi*, i *Stanja*, definirani kao

$$Ulazi = Realni$$
$$Izlazi = Realni$$
$$Stanja = Realni^3$$

Sustav za usrednjavanje kao automat

- razmotrimo što je sa skupom *Stanja*
- stanje ovog sustava, u koraku n, predstavljaju tri broja, $u(n-1)$, $u(n-2)$, i $u(n-3)$, pa je trenutno stanje prikazano s trojkom brojeva i zato
- skup *Stanja* je beskonačni skup uređenih trojki

$$Stanja = Realni^3$$

- zaključno, stanje sustava $x(n)$, u koraku n, definirano je s tri varijable stanja, x_1, x_2, i x_3

$$\forall n \in Cjelobrojni \quad x(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n))$$

gdje su, za ovaj sustav,

$$x_1(n) = u(n-1), x_2(n) = u(n-2), x_3(n) = u(n-3)$$

Sustav za usrednjavanje kao automat

- jednadžbe koje opisuju sustav za usrednjavanje kao automat su

$$x(0) = početnoStanje, \quad x(n) \in Realni^3, \quad u(n), y(n) \in Realni$$
$$(x(n+1), y(n)) = FunkcijaPrijelaza(x(n), u(n))$$

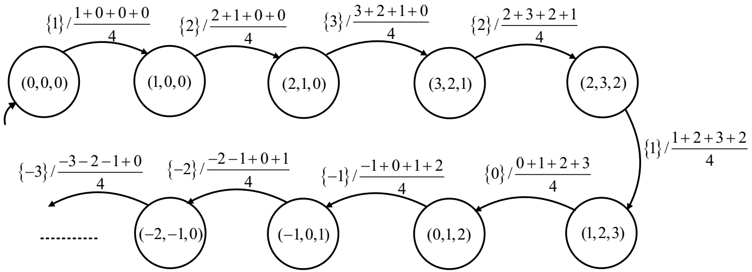
odnosno

$$\begin{aligned}
&x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0)),\\
&(x_1(n+1), x_2(n+1), x_3(n+1), u(n)) =\\
&\qquad = FunkcijaPrijelaza(x_1(n), x_2(n), x_3(n), u(n)) \quad \Rightarrow\\
&x_1(n+1) = u(n)\\
&x_2(n+1) = x_1(n)\\
&x_3(n+1) = x_2(n)\\
&y(n) = \frac{1}{4}x_1(n) + \frac{1}{4}x_2(n) + \frac{1}{4}x_3(n) + \frac{1}{4}u(n)
\end{aligned}$$

Sustav za usrednjavanje kao automat

- prikažimo nekoliko prvih koraka djelovanja ovog sustava pomoću dijagrama prijelaza stanja, uz definirano početno stanje $x(0) = (0, 0, 0)$, i ulazni niz dan kako na slici,

$u(n) = 1, 2, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots$

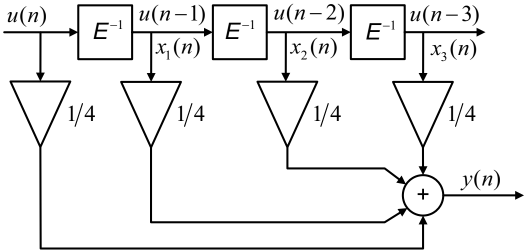


- kako postoji beskonačni broj stanja, pogodniji uvid u djelovanje ovog sustava moguć je preko blokovskog dijagrama

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 10.

Profesor Branko Jeren

Sustav za usrednjavanje kao automat



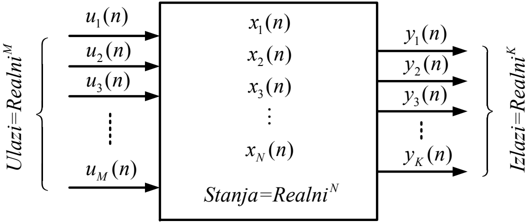
- jednadžbe stanja (tri) i izlazna jednadžba su

$$\begin{aligned} \textit{narednoStanje} \quad x_1(n+1) &= u(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) \\ x_3(n+1) &= x_2(n) \end{aligned}$$

$$\textit{izlaz} \quad y(n) = \frac{1}{4}x_1(n) + \frac{1}{4}x_2(n) + \frac{1}{4}x_3(n) + \frac{1}{4}u(n)$$

Vremenski diskretni sustavi kao automati

- neka je korak n, u kojem razmatramo sustav, definiran kao trenutak vremena nT, gdje je T razmak između koraka
- vremenski diskretne sustave N-tog reda[3], s više ulaza i više izlaza, definiramo kao automate



Slika 6: Sustav N-tog reda s M ulaza i K izlaza

[3] Red sustava definiramo kasnije. Za sada kažimo da red sustava odgovara broju varijabli stanja

Vremenski diskretni sustavi kao automati

- vremenski diskretan sustav definiramo kao automat, dakle, s petorkom

$$S = (Stanja, Ulazi, Izlazi, PrijelaznaFunkcija, početnoStanje)$$

za koji neka su:

$$Stanja = Realni^N$$
$$Ulazi = Realni^M$$
$$Izlazi = Realni^K$$
$$početnoStanje \in Realni^N$$
$$FunkcijaPrijelaza : Realni^N \times Realni^M \to Realni^N \times Realni^K$$

- za ulaznu M-torku, i N-torku koja predstavlja trenutno stanje, *FunkcijaPrijelaza* definira N-torku koja predstavlja naredno stanje, te K-torku koja predstavlja trenutni izlaz

Diskretni sustav opisan s varijablama stanja

- *FunkcijaPrijelaza* se razlaže na funkciju

$$naredno Stanje : Realni^N \times Realni^M \to Realni^N$$

i

$$izlaz : Realni^N \times Realni^M \to Realni^K$$

tako da vrijedi

$$\forall x \in Realni^N, \quad \forall u \in Realni^M,$$
$$FunkcijaPrijelaza(x, u) = (naredno Stanje(x, u), izlaz(x, u))$$

Jednadžbe stanja diskretnog sustava

- funkcije *narednoStanje* i *izlaz* omogućavaju izračunavanje narednog stanja i trenutnog izlaza na temelju poznavanja trenutnog stanja i ulaza
- to znači da je za ulazni niz $u(0), u(1), \ldots$ M-torki iz $Realni^M$ moguće izračunati odziv stanja $x(1), x(2), \ldots$ N-torki iz $Realni^N$, kao i odziv sustava $y(0), y(1), \ldots$ K-torki iz $Realni^K$
- dakle

$$\begin{aligned}
&\forall n \in Cjelobrojni,\ n \geq 0, \\
&x(0) = početnoStanje \\
&x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n)), && \text{jednadžba stanja} \\
&y(n) = izlaz(x(n), u(n)), && \text{izlazna jednadžba}
\end{aligned}$$

- sustav je potpuno opisan s jednadžbom stanja i izlaznom jednadžbom i ovaj model sustava zovemo model s varijablama stanja

Model s varijablama stanja

- funkcije *narednoStanje* i *izlaz* određuju je li sustav
  - linearan i vremenski stalan
  - linearan i vremenski promjenljiv
  - nelinearan i vremenski stalan
  - nelinearan i vremenski promjenljiv
- u nastavku analiziramo linearne vremenski stalne sustave

Model s varijablama stanja—linearni vremenski stalni sustav 1

- za sustav kažemo da je linearan ako su njegove funkcije *narednoStanje* i *izlaz* linearne funkcije i ako je početno stanje $x(0) = 0$ ($N-$torka čiji su svi elementi jednaki nula)
- razmotrimo ponovo jednadžbu stanja za sustav s M ulaza i K izlaza i dimenzije N

$$\forall n \in Cjelobrojni_+$$
$$x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n))$$

- za linearnu funkciju *narednoStanje* ovu jednadžbu možemo raspisati kao

$$\begin{array}{lllll}
x_1(n+1) = \alpha_{1,1}x_1(n) + \alpha_{1,2}x_2(n)+ & \cdots & +\alpha_{1,N}x_N(n) + \alpha_{1,N+1}u_1(n)+ & \cdots & +\alpha_{1,N+M}u_M(n) \\
x_2(n+1) = \alpha_{2,1}x_1(n) + \alpha_{2,2}x_2(n)+ & \cdots & +\alpha_{2,N}x_N(n) + \alpha_{2,N+1}u_1(n)+ & \cdots & +\alpha_{2,N+M}u_M(n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_N(n+1) = \alpha_{N,1}x_1(n) + \alpha_{N,2}x_2(n)+ & \cdots & +\alpha_{N,N}x_N(n) + \alpha_{N,N+1}u_1(n)+ & \cdots & +\alpha_{N,N+M}u_M(n)
\end{array}$$

Model s varijablama stanja—linearni vremenski stalni sustav 2

- prethodne jednadžbe pišemo sažetije, u matričnom zapisu,

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,N} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N,1} & \alpha_{N,2} & \dots & \alpha_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{1,N+1} & \dots & \alpha_{1,N+M} \\ \alpha_{2,N+1} & \dots & \alpha_{2,N+M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N,N+1} & \dots & \alpha_{N,N+M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n) \\ \vdots \\ u_M(n) \end{bmatrix}$$

odnosno

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

Model s varijablama stanja—linearni vremenski stalni sustav 3

- za linearnu funkciju *narednoStanje* jednadžba stanja se može pisati kao

$$x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n)) = Ax(n) + Bu(n)$$

gdje su

$$\begin{array}{ll} x(n+1), & \text{vektor narednog stanja dimenzije } N \times 1 \\ x(n), & \text{vektor trenutnog stanja dimenzije } N \times 1 \\ u(n), & \text{vektor ulaza dimenzije } M \times 1 \\ A = [a_{i,j}], & \text{matrica dimenzije } N \times N \\ B = [b_{i,j}], & \text{matrica dimenzije } N \times M \end{array}$$

- na isti način, za linearnu funkciju *izlaz*, možemo pisati

$$y(n) = izlaz(x(n), u(n)) = Cx(n) + Du(n)$$

$$\begin{array}{lll} uz & C = [c_{i,j}], & \text{matrica dimenzije } K \times N \\ & D = [d_{i,j}], & \text{matrica dimenzije } K \times M \end{array}$$

Linearni vremenski diskretni sustavi–[A,B,C,D] prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$
  $\forall n \in Cjelobrojni_+$

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno dimenzije K i dimenzije M, a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija
- matrice A, B, C, D možemo označiti kao[4]
  - A – matrica sustava (matrica dinamike sustava)
  - B – ulazna matrica
  - C – izlazna matrica
  - D – ulazno-izlazna matrica

[4] najčešće u literaturi ali ima i drugih imena

Linearni vremenski diskretni sustavi–[A,B,C,D] prikaz

- jednadžbe stanja (tri) i izlazna jednadžba za prije dani primjer sustava za uređnjavanje – MAF_4 su

$$
\begin{aligned}
x_1(n+1) &= u(n)\\
x_2(n+1) &= x_1(n)\\
x_3(n+1) &= x_2(n)\\
y(n) &= \frac{1}{4}x_1(n) + \frac{1}{4}x_2(n) + \frac{1}{4}x_3(n) + \frac{1}{4}u(n)
\end{aligned}
$$

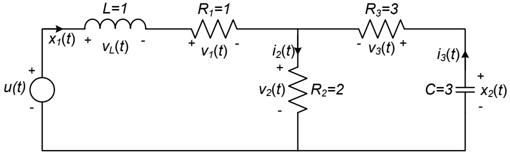
$$
\begin{bmatrix} x_1(n+1)\\ x_2(n+1)\\ x_3(n+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(n)\\ x_2(n)\\ x_3(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(n)
$$

$$
y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(n)\\ x_2(n)\\ x_3(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{D} u(n)
$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 1

- i ovdje definiramo varijable stanja kao interne varijable sustava
- za poznate varijable stanja i poznate ulazne signale određen je bilo koji signal u sustavu, dakle i svi izlazi
- na primjeru *RLC* mreže biti će pokazano da se svi signali mreže mogu prikazati kao linearna kombinacija nezavisnih napona na kapacitetima i struja induktiviteta koje definiramo kao stanja mreže

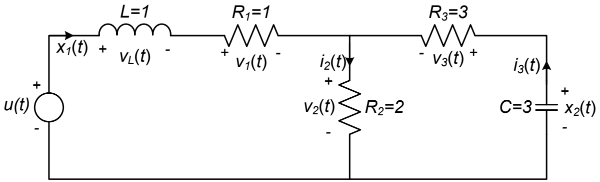
Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 2



Slika 7: Primjer RLC mreže

- sustav ima dva memorijska elementa, induktivitet i kapacitet, i drugog je reda
- definiraju se varijable stanja $x_1(t)$ kao struja induktiviteta i $x_2(t)$ kao napon na kapacitetu
- neka su poznate vrijednosti $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $u(t)$, za neki trenutak t, i tada možemo odrediti sve moguće signale mreže (napone i struje)
- neka su za neki t, vrijednosti trenutnih stanja $x_1 = 1$ i $x_2 = 17$, te trenutna vrijednost ulaza $u = 17$

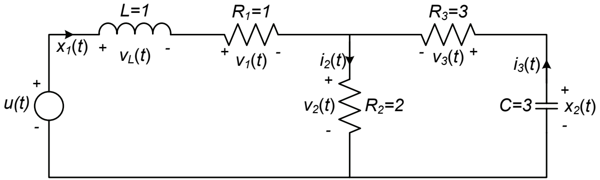
Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 3



Slika 8: Primjer RLC mreže

$$
\begin{array}{llll}
i_2 = x_1 + i_3 & & & \\
R_2 i_2 = x_2 - R_3 i_3 & \Rightarrow i_3 = \frac{x_2 - R_2 x_1}{R_2+R_3} & & \Rightarrow i_3 = 3 \\
i_2 = x_1 + i_3 & \Rightarrow i_2 = \frac{R_3 x_1 + x_2}{R_2+R_3} & & \Rightarrow i_2 = 4 \\
v_1 = R_1 x_1 & \Rightarrow v_1 = R_1 x_1 & & \Rightarrow v_1 = 1 \\
v_2 = R_2 i_2 & \Rightarrow v_2 = \frac{R_2(R_3 x_1 + x_2)}{R_2+R_3} & & \Rightarrow v_2 = 8 \\
v_3 = R_3 i_3 & \Rightarrow v_3 = \frac{R_3(x_2 - R_2 x_1)}{R_2+R_3} & & \Rightarrow v_3 = 9 \\
v_L = u - v_1 - v_2 & \Rightarrow v_L = u - R_1 x_1 - \frac{R_2(R_3 x_1 + x_2)}{R_2+R_3} & & \Rightarrow v_L = 8
\end{array}
$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 4



Slika 9: Primjer RLC mreže

$$\left.\begin{array}{l} i_2(t) = x_1(t) + i_3(t) \\ R_2 i_2(t) = x_2(t) - R_3 i_3(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i_3(t) = \frac{x_2(t) - R_2 x_1(t)}{R_2 + R_3} \\ i_2(t) = \frac{R_3 x_1(t) + x_2(t)}{R_2 + R_3} \end{array}\right.$$

iz

$$u(t) = L\frac{dx_1(t)}{dt} + R_1 x_1(t) + R_2 i_2(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{L(R_2 + R_3)} x_1(t) - \frac{R_2}{L(R_2 + R_3)} x_2(t) + \frac{1}{L} u(t)$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 5

$$\text{iz} \quad C\frac{dx_2(t)}{dt} = -i_3(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{R_2}{C(R_2+R_3)}x_1(t) - \frac{1}{C(R_2+R_3)}x_2(t)$$

- pišemo jednadžbu stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3}{L(R_2+R_3)} & -\frac{R_2}{L(R_2+R_3)} \\ \frac{R_2}{C(R_2+R_3)} & -\frac{1}{C(R_2+R_3)} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

- odnosno

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 6

- neka sustav ima tri izlaza i neka su to struje sve tri grane: $y_1(t) = x_1(t)$, $y_2(t) = i_2(t)$ i $y_3(t) = i_3(t)$
- iz prije izračunatog slijedi

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{R_3}{R_2+R_3} & \frac{1}{R_2+R_3} \\ -\frac{R_2}{R_2+R_3} & \frac{1}{R_2+R_3} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

- odnosno

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Linearni vremenski kontinuirani sustavi—[A,B,C,D] prikaz

- model s varijablama stanja kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava je

  $Stanja = Realni^N$, $Ulazi = Realni^M$, $Izlazi = Realni^K$, $\forall t \in Realni$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(n) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N, odnosno K i M, a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je, kako je pokazano,

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$
  $\forall n \in Cjelobrojni$

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

- ovdje se izvodi opći izraz za odziv vremenski diskretnog sustava N-tog reda, s M ulaza i K izlaza
- želi se pokazati kako se odziv sustava formalno jednako određuje bez obzira na red sustava i broj ulaza i izlaza
- odziv sustava možemo riješiti korak po korak

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- neka je $x(0) = početnoStanje$

$$
\begin{aligned}
n = 0, \quad x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
n = 1, \quad x(2) &= Ax(1) + Bu(1) \\
&= A[Ax(0) + Bu(0)] + Bu(1) \\
&= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
n = 2, \quad x(3) &= Ax(2) + Bu(2) \\
&= A[A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)] + Bu(2) \\
&= A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)
\end{aligned}
$$

- možemo napisati odziv stanja za n-ti korak

$$
x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu(m), \qquad \forall n > 0
$$

- odziv stanja se naziva i trajektorija stanja

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- za izračunati odziv stanja, slijedi iz,

$$y(n) = Cx(n) + Du(n),$$

i odziv sustava

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0) + Du(0), & n = 0 \\ CA^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}$$

- totalni odziv sustava moguće je interpretirati kao zbroj odziva nepobuđenog sustava $(u(n) = 0)$ i odziva mirnog sustava $(x(0) = 0)$

$$y(n) = \underbrace{CA^n x(0)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava, } u(n)=0} + \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n)}_{\text{odziv mirnog sustava, } x(0)=0}, \quad n > 0$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- finalno, totalni odziv vremenski diskretnog sustava N-tog reda zadanog kao

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K, \forall n \in Cjelobrojni$$

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\ y(n) &= Cx(n) + Du(n) \end{aligned}$$

je

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0) + Du(0), & n = 0 \\ CA^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}$$

- zaključno, bez obzira na red, broj ulaza i izlaza, odziv sustava zadanog s $[A, B, C, D]$ prikazom dan je uvijek gornjim izrazima
- detalji se diskutiraju kasnije tijekom semestra

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- model s varijablama stanja, kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava, je

  $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$
  $\forall t \in Realni, \quad x(0^-) = početnoStanje$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno K i M, a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija
- odziv sustava određuje se rješavanjem jednadžbi sustava
- ovdje se definira početno stanje u $t = 0^-$, jer u slučaju pobude s $\delta(t)$ ona djeluje već u $t = 0$, i stanje u $x(0^+)$ može biti promijenjeno

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- prvo se rješava diferencijalna jednadžba

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- množenjem obje strane jednadžbe s matricom e^{-At}, s lijeva,

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)$$

- te prebacivanjem člana $e^{-At}Ax(t)$ na lijevo

$$\underbrace{e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t)}_{\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t))} = e^{-At}Bu(t)$$

- pa slijedi

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- integriranjem obje strane u intervalu 0^- do t slijedi

$$\int_{0^-}^{t} \frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}x(\tau))d\tau = \int_{0^-}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- odnosno

$$e^{-At}x(t) - x(0^-) = \int_{0^-}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- množenjem obje strane s matricom e^{At}, s lijeva,

$$x(t) - e^{At}x(0^-) = e^{At}\int_{0^-}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- slijedi izraz za odziv stanja kontinuiranog sustava

$$x(t) = e^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- uvrsti li se izračunati odziv stanja u izlaznu jednadžbu

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- slijedi odziv sustava

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (1)$$

- odziv, (2), može biti prikazan i kao

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau$$

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- uočavaju se dvije komponente odziva sustava

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0^-)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava, } u(t)=0} + \underbrace{\int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{odziv mirnog sustava, } x(0^-)=0}$$

Odziv linearnog vremenski kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- finalno, totalni odziv vremenski kontinuiranog sustava N-tog reda zadanog kao

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K,$$
$$\forall t \in Realni, \quad x(0^-) = početnoStanje$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

je

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \qquad (2)$$

- zaključno, bez obzira na red, broj ulaza i izlaza, odziv sustava zadanog s $[A, B, C, D]$ prikazom dan je uvijek gornjim izrazom
- detalji se diskutiraju kasnije tijekom semestra