Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

VIII. tjedan

1. Signal $x(t) = \sin(8000\pi t) + 2\cos\left(24000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin(16000\pi t)$ otipkan je frekvencijom otipkavanja $f_s = 10kHz$. Odredite vremenski oblik signala nakon rekonstrukcije idealnim interpolatorom.

Rješenje:

Zadani signal je zapravo linearna kombinacija sinusoida, pa možemo svaku od njih promatrati posebno.

Prvi dio ima frekvenciju $f_1 = 4000Hz$, pa bi ga trebalo očitati s barem $2 \cdot f_1 = 8kHz$ da ne dođe do preklapanja spektra. Kako je zadana frekvencija očitavanja $f_s = 10kHz$ veća od *8kHz*, neće doći do preklapanja spektra. Nakon očitanja signala i rekonstrukcije dobiva se isti početni signal.

Drugi dio signala ima frekvenciju $f_2 = 12000Hz$. Trebali bi ga očitati sa barem $24kHz$, te će u promatranom slučaju doći do preklapanja spektra. Nakon očitavanja dobivamo:

$$x(n) = 2\cos\left(24000\pi n \cdot T_s + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(24000\pi n \cdot \frac{1}{10000} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2.4\pi n + \frac{\pi}{3}\right).$$

Dobiveni signal možemo pomaknuti za $2\pi n$ bilo koji broj puta da se ne promijeni

$$x(n) = 2\cos\left(2.4\pi n + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2.4\pi n + \frac{\pi}{3} + 2\pi nk\right).$$

Prilikom rekonstrukcije gledamo samo osnovni pojas za kojega je koeficijent uz *n* iz intervala $[-\pi, \pi]$:

$$-\pi < 2.4\pi + 2\pi k < \pi$$

$$-1 < 2.4 + 2k < 1$$

$$k > -1.7 \text{ i } k < -0.7$$

Kako je $k \in \mathbb{Z}$, jedini mogući izbor je $k = -1$. Signal je sada:

$$x(n) = 2\cos\left(0.4\pi n + \frac{\pi}{3}\right).$$

Rekonstruirani signal je

$$x(t) = 2\cos\left(0.4\pi \cdot \frac{t}{T_s} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(0.4\pi t f_s + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(4000\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Analogan postupak provodimo i za treći dio signala. Njegova frekvencija je $f_3 = 8000kHz$, te će i kod njega doći do preklapanja spektra. Očitavanjem izlazi:

$$x(n) = \sin(16000\pi n \cdot T_s) = \sin(1.6\pi n).$$

Dobiveni signal možemo pomaknuti za $2\pi n$ bilo koji broj puta:

$$x(n) = \sin(1.6\pi n) = \sin(1.6\pi n + 2\pi k n).$$

Prilikom rekonstrukcije gledamo samo osnovni pojas za kojega je koeficijent uz *n* iz intervala $[-\pi, \pi]$:

$$-\pi < 1.6\pi + 2\pi k < \pi$$

$$-1 < 1.6 + 2k < 1$$

$$k > -1.3 \text{ i } k < -0.3$$

Kako je $k \in \mathbb{Z}$, jedini mogući izbor je $k = -1$. Signal je sada:

$$x(n) = \sin(-0.4\pi n).$$

Rekonstruirani signal je

$$x(t) = \sin\left(-0.4\pi \cdot \frac{t}{T_s}\right) = \sin(-4000\pi t) = -\sin(4000\pi t).$$

Ukupni rekonstruirani signal je:

$$x(t) = \sin(8000\pi t) + 2\cos\left(4000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin(4000\pi t).$$

2. Odredite Diskretnu Fourierovu transformaciju u N-točaka sljedećih sekvenci signala:
   a. $x(n) = \delta(n)$;
   b. $x(n) = \delta(n - n_0),\ \ uz\ \ 0 < n_0 < N$.

Rješenje:

DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

a. Za jedinični impuls vrijedi:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k0} = 1, \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

b. Za pomaknuti jedinični impuls dobiva se:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

3. Odredite Diskretnu Fourierovu transformaciju u N-točaka signala
   a. $x(n) = \mu(n) - \mu(n-N)$;
   b. $x(n) = \mu(n) - \mu(n-n_0),\ \ 0 < n_0 < N$.

<u>Rješenje:</u>

DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Podsjetnik: $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$

a. Zadani signal ima amplitudu 1 na intervalu 0 do N-1:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} =$$

$$= \frac{1-(\cos 2\pi k - j\sin 2\pi k)}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1-1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = 0, \qquad k \neq 0$$

Za k=0 vrijedi:

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}0n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

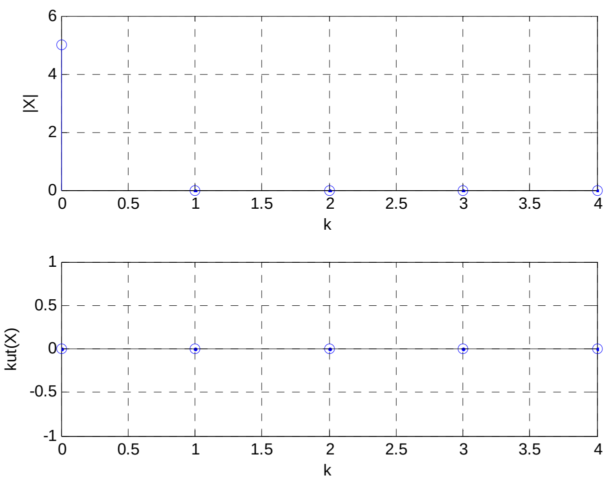
b. Ovaj signal ima amplitudu 1 na intervalu *0* do n_0*-1*, dok je od n_0 do *N* jednak nula. DFT se računa:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n_0-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0/2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}kn_0/2} - e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0/2}\right)}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k/2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k/2} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k/2}\right)}$$

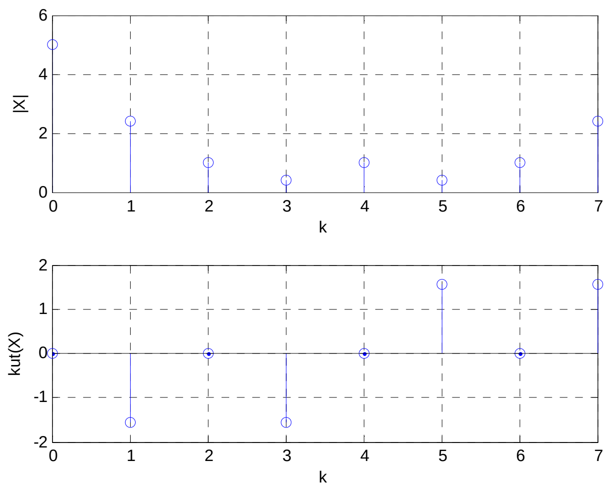
$$= e^{-j\frac{2\pi}{N}k\frac{(n_0-1)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}kn_0\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)}, \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

Za k=0 vrijedi:

$$X(0) = \sum_{n=0}^{n_0-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}0n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} 1 = n_0$$



a. zadatak



b. zadatak

4. Odredite Diskretnu Fourierovu transformaciju sljedećih signala duljine 4:
   a. $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right), \; n = 0, 1, 2, 3;$
   b. $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3.$

Rješenje:

DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

a. Duljina signala je *N=4*, pa je traženi spektar:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 0} + 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 1} - 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 2} + 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 3}$$

$$= 1 - 1 \cdot e^{-j\pi k} = 1 - (-1)^k, \quad k = 0,1,2,3.$$

Odnosno, koeficijenti spektra iznose:

$$x(0) = 0, \qquad x(1) = 2, \qquad x(2) = 0, \qquad x(3) = 2.$$

b. Duljina signala je *N=4*, pa je traženi spektar:

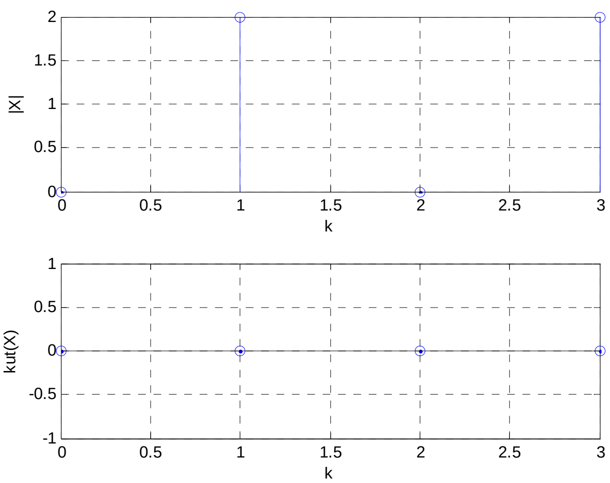
$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} =$$

$$= 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 1} + \frac{1}{4} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 2} + \frac{1}{8} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 3}, \quad k = 0,1,2,3.$$

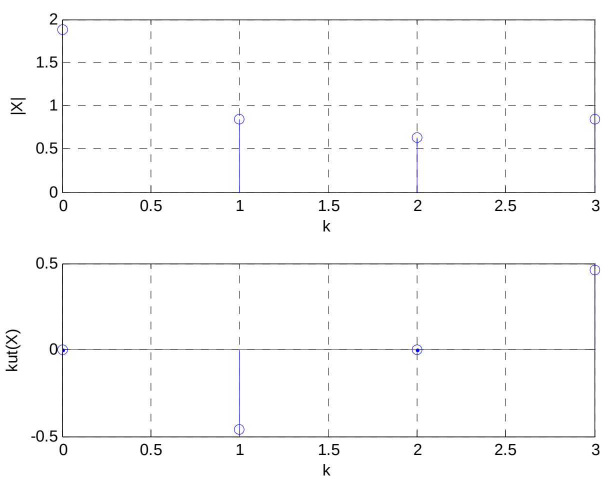
Uvrštavanjem mogućih *k*-va, koeficijenti spektra su:

$$X(0) = \frac{15}{8}, \qquad X(1) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8}j, \qquad X(2) = \frac{5}{8}, \qquad X(3) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}j$$

Napomena: u zadatku može biti zadan i niz impulsa (npr. $\{\underline{1}, 2, 3, -2\}$). U takvom slučaju podcrtani broj predstavlja uzorak u trenutku *n=0*. Postupak računanja DFT-a je analogan – uvrsti se u formulu i računa.



a. zadatak



b. zadatak

5. Odredite inverznu Diskretnu Fourierovu transformaciju spektra

$$X(k) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}e^{-j\frac{\pi}{2}k} - \frac{3}{4}e^{-j\pi k} - \frac{3}{8}e^{-j\frac{3\pi}{2}k},\ \ k = 0,1,2,3.$$

Rješenje:

DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Inverznu DFT diskretnog spektra računamo prema formuli:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Duljina niza zadanog spektra je *N=4*.

Zadani spektar prema tome možemo napisati kao:

$$X(k) = \frac{3}{4}e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 0} + \frac{3}{8}e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 1} - \frac{3}{4}e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 2} - \frac{3}{8}e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 3},\ \ k = 0,1,2,3.$$

Usporedbom s formulom za DFT možemo direktno očitati amplitude zadanog diskretnog niza (gdje je podcrtana amplituda impulsa u trenutku *n=0*):

$$x(n) = \{\underline{\frac{3}{4}}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}\}$$

Drugi način rješavanja je uvrštavanje zadanog spektra u formulu za inverznu DFT i računanje sume.

6. Promotrite konačno dugu kompleksnu eksponencijalu

$$x(n) = \begin{cases} e^{j\Omega_0 n}, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

a. Odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju $X(e^{j\Omega})$ ovog signala *x(n)*.

b. Odredite diskretnu Fourierovu transformaciju *X(k)* u *N* točaka ovog signala *x(n)*.

Rješenje:

a. Vremenski diskretna Fourierova transformacija se računa prema:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Uvrštavanjem zadanog signala imamo:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\Omega_0 n} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\Omega_0-\Omega)n} = \frac{1-e^{j(\Omega_0-\Omega)N}}{1-e^{j(\Omega_0-\Omega)}} =$$

$$= \frac{e^{j(\Omega_0-\Omega)N/2}\left(e^{-j(\Omega_0-\Omega)N/2} - e^{j(\Omega_0-\Omega)N/2}\right)}{e^{j(\Omega_0-\Omega)/2}\left(e^{-j(\Omega_0-\Omega)/2} - e^{j(\Omega_0-\Omega)/2}\right)} = e^{j(\Omega_0-\Omega)\frac{(N-1)}{2}} \frac{\sin\left((\Omega_0-\Omega)\frac{N}{2}\right)}{\sin\frac{\Omega_0-\Omega}{2}}$$

b. DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\Omega_0 n} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,n} = \frac{1-e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,N}}{1-e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)}}$$

$$= \frac{e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,N/2}\left(e^{-j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,N/2} - e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,N/2}\right)}{e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,/2}\left(e^{-j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,/2} - e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,/2}\right)}$$

$$= e^{j\left(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{(N-1)}{2}} \frac{\sin\left(\left(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right)}{\sin(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\cdot\frac{1}{2}}$$

Primijetite vezu DTFT-a i DFT-a:

$$X(k) = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}} = X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)$$

7. Signal $x_a(t)$ koji je ograničen na 10 kHz, otipkan je frekvencijom otipkavanja 20 kHz. Koliki je razmak između uzoraka spektra, ukoliko je napravljena diskretna Fourierova transformacija sa *N=1000* uzoraka?

Rješenje:

Signal $x_a(t)$ je otipkan s frekvencijom $F_s=20\ kHz$. Njegov spektar će se ponavljati svakih $F_s=20\ kHz$.

DFT je napravljena na *N=1000* uzoraka. Spektar ima također *N=1000* uzoraka.

Razmak između uzoraka je $\Delta f = \frac{F_s}{N} = \frac{20000}{1000} = 20Hz.$