# Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

## III. tjedan

1. Neka je $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal. Neka je $x(n)$ diskretni eksponencijalni signal dobiven iz kontinuiranog signala $x(t)$ uniformnim očitavanjem s periodom $T_s$. Je li dobiveni diskretni signal uvijek periodičan? Ako nije, pod kojim uvjetima je?

**Rješenje:**

Očitavanjem kontinuiranog signala dobivamo:

$$x(n) = x(nT_s) = e^{j\omega_0 n T_s}$$

Ako je *x(n)* periodičan s temeljnim periodom *N* tada vrijedi

$$x(n) = x(n+N)$$

U ovom slučaju je to:

$$x(n+N) = e^{j\omega_0 (n+N)T_s} = e^{j\omega_0 n T_s} \cdot e^{j\omega_0 N \cdot T_s} = e^{j\omega_0 n T_s} = x(n)$$

Slijedi da je $e^{j\omega_0 N T_s} = 1$.

Ovo se najlakše riješi rastavljanjem na sinuse i kosinuse

$$e^{j\omega_0 N T_s} = \cos(\omega_0 N T_s) + j \cdot \sin(\omega_0 N T_s) = 1$$

Pa mora biti $\cos(\omega_0 N T_s) = 1$ i $\sin(\omega_0 N T_s) = 0$, a to će biti za

$$\omega_0 N T_s = 2k\pi \rightarrow N = \frac{2k\pi}{\omega_0 T_s}.$$

Kako *N* mora biti prirodan broj, treba promotriti u kojim će se to uvjetima dogoditi. Temeljni period signala je $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Kada se to uvrsti u izraz za period:

$$N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{T_0} T_s} = \frac{kT_0}{T_s}.$$

Kako *k* može biti bilo koji cijeli broj, omjer $\frac{T_0}{T_s}$ mora biti racionalan, da bi period *N* bio cijeli broj.

*x(n)* je periodičan, ako je omjer $\frac{T_0}{T_s}$ (period otipkavanja i temeljnog perioda signala *x(t)*)racionalan broj.

2. Zadan je diskretan signal $x(n) = \cos(an + 1)$. Kakav mora biti $a$ da bi signal bio periodičan?

**<u>Rješenje:</u>**

Da bi signal bio periodičan mora vrijediti:

$$\cos(an + 1) = \cos(a(n + N) + 1) = \cos(an + 1 + aN)\text{, uz } N, k, n \in \mathbb{Z}$$

Dakle mora biti $aN = 2k\pi$.

Odnosno izraz $N = \frac{2k\pi}{a}$ mora biti prirodan.

Iz gornjeg, evidentno slijedi da $a$ mora biti racionalni višekratnik broja $\pi$, tj.

$$a = \frac{m}{l}\pi\text{, gdje su } m, l \in \mathbb{Z}$$

U tom slučaju

$$N = \frac{2k\pi}{\frac{m}{l}\pi} = \frac{2kl}{m}.$$

Očito za svaki izbor *m* i *l*, postoji takav *k* da je gornji izraz prirodan broj!

3. Zadan je diskretan signal $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Definiramo novi signal $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-kp)$, pri čemu je $p \in \mathbb{N}$. Dokažite da je signal $f$ periodičan za svaki diskretan signal $g$ za koji zadana suma konvergira.

**Rješenje:**

Zadani signali $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ i $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ su diskretni signali. Da bi diskretan signal *f* bio periodičan mora vrijediti

$$f(n+N) = f(n),$$

$$f(n+N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n+N-kp).$$

Možemo izabrati takav $N \in \mathbb{N}$, kojeg možemo napisati kao umnožak $N = m \cdot p$, gdje su $m, p \in \mathbb{N}$. Zadani signal tada glasi:

$$f(n+N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n+mp-kp)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\big(n-p(k-m)\big)$$

$$= \begin{vmatrix} t = k-m \\ k = +\infty \to t = +\infty \\ k = -\infty \to t = -\infty \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} g(n-pt) = f(n)$$

Pa je zadani signal *f(n)* periodičan.

4. Zadan je diskretan signal $x(n) = n\left(\mu(n) - \mu(n-2008)\right)$. Izračunajte energiju signala.

**<u>Rješenje:</u>**

Energija diskretnog signala definirana je na sljedeći način:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 , n\epsilon\mathbb{Z}$$

U našem slučaju

$$E = \sum_{n=0}^{2007} n^2 = 2696779140$$

Pri tome smo koristili sljedeću relaciju

$$\sum_{n=0}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Napomena: još neke česte formule za konačne sume možete naći u službenom šalabahteru.

5. Izračunajte sljedeće integrale

   a. $\int_0^\infty \delta(t-2)t^2 dt$
   b. $\int_{-\infty}^\infty \mu(t-1)\delta(t)\cos t \cdot dt$

**<u>Rješenje:</u>**

Diracova delta funkcija definirana je $\forall t \in \mathbb{R}$ i iznosi $\delta(t) = 0$ za $t \neq 0$. Površina ispod impulsa iznosi $\int_{-\infty}^\infty \delta(t)dt = 1$. Množenjem sa nekom funkcijom dobiva se

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0).$$

Za ovu funkciju se može reći da „vadi“ vrijednost podintegralne funkcije na mjestu na kojem je impuls definiran:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = f(t_0).$$

a. Traži se $\int_0^\infty \delta(t-2)t^2 dt$. Usporedbom sa prethodnom formulom izlazi da je $t_0 = 2$, a $f(t) = t^2$. Zato ovaj integral iznosi

$$\int_0^\infty \delta(t-2)t^2 dt = t_0^2 = 4.$$

b. Postupak je sličan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t-1)\delta(t)\cos t \cdot dt = \mu(t_0-1)\cos t_0 \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = |\text{uz } t_0 = 0| = \mu(0-1)\cos 0 = 0.$$

6. Pronađite i skicirajte generaliziranu derivaciju signala

$$g(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ -1, t < 0. \end{cases}$$

**Rješenje:**

Zadani signal se može napisati i u obliku sa step funkcijom: $g(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0 \end{cases} = -1 + 2\mu(t)$.

Ovako zapisani signal se jednostavno može derivirati uzme li se u obzir da je derivacija step funkcije impuls $\left(\frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t)\right)$:

$$g'(t) = \left(-1 + 2\mu(t)\right)' = 2\mu'(t) = 2\delta(t).$$

7. Izračunajte generaliziranu derivaciju signala:

   a. $g(t)=t\left(\mu(t)-\mu(t-1)\right)+(3-t)\left(\mu(t-2)-\mu(t-3)\right)$

   b. $g(t)=\left(3-t\right)\left(\mu(t)-\mu(t-1)\right)+(3-t)\left(\mu(t-2)-\mu(t-3)\right)$

**Rješenje:**

a. $\mu(t)-\mu(t-1)-\delta(t-1)-\left[\mu(t-2)-\mu(t-3)\right]+\delta(t-2)$

b. $-\left[\mu(t)-\mu(t-1)\right]+3\delta(t)-2\delta(t-1)-\left[\mu(t-2)-\mu(t-3)\right]+\delta(t-2)$

Za vježbu, zgodno je nacrtati signale i iz slike pokušati skicirati oblik derivacije signala. Nakon toga računom provjeriti dobiveni rezultat!

8. Neka su funkcije $u \in L^2(I)$ i $g \in L^2(I)$ (kvadratno integrabilne) takve da je $\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx$ za svaku funkciju $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Tada kažemo da je *u* slabo derivabilna i da je *g* njena slaba derivacija, pri čemu je $C_0^\infty(I)$ skup svih beskonačno derivabilnih funkcija na intervalu *I*, čija je vrijednost na krajevima intervala jednaka nuli. Koristeći spomenutu činjenicu dokažite da je $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ za $-1 \leq x \leq 1$ slabo derivabilna te da je njena slaba derivacija Heavisideova step funkcija $\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

**Rješenje:**

Izračunat ćemo oba integrala te ih usporediti.

Na lijevoj strani imamo (koristi se formula za parcijalnu integraciju):

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(|x| + x\right)\varphi'(x)dx = \int_0^1 x\varphi'(x)dx = x\varphi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx$$

Pri tome smo koristili činjenicu navedenu u zadatku $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$.

Na desno strani imamo

$$-\int_{-1}^{1} \mu(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx$$

S obzirom da su integrali jednaki za $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, zaključujemo da je step funkcija generalizirana derivacija polazne funkcije!

9. Pretpostavite da želite uživo, preko Interneta slušati prijenos nekog koncerta. Pri tome Internet ne koristite za nikakav drugi prijenos podataka. Neka je za predstavljanje svakog audio uzorka potrebno 16 bita.

    a. Nalazite se kod kuće i spojeni ste s modemom, 56 kbps (kilobita u sekundi), na Internet. Kojom maksimalnom frekvencijom uzorkovanja može biti diskretiziran audio signal koji slušate?

    b. Koja je frekvencija u pitanju ako se nalazite na 100 Mbps LAN-u?

**Rješenje:**

a. Brzina modema je $v_1 = 56\ kbps = 56\ 000\ bps = 56\ 000\ bit/s$

   Za jedan uzorak treba 16 bitova → $N = 16\ bit$.

   Maksimalnu frekvenciju ćemo dobiti tako da podijelimo brzinu prijenosa sa količinom podataka po jednom uzorku:

$$f = \frac{v_1}{N} = \frac{56\ 000\,\frac{bit}{s}}{16\ bit} = 3\ 500\ Hz = 3.5\ kHz.$$

b. Ako se nalazimo na LAN-u, postupak računanja je analogan. Brzina prijenosa je $v_2 = 100\ Mbps = 100\ 000\ 000\ bps = 100\ 000\ 000\ bit/s$.

   Za jedan uzorak treba 16 bitova → $N = 16\ bit$.

   Maksimalnu frekvenciju ćemo dobiti tako da podijelimo brzinu prijenosa sa količinom podataka po jednom uzorku:

$$f = \frac{v_2}{N} = \frac{100\ 000\ 000\,\frac{bit}{s}}{16\ bit} = 6.25\ MHz.$$

10. Zadan je diskretan signal $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$. Nađite dva različita kontinuirana signala koja otipkavanjem daju ovaj diskretan signal. Frekvencija otipkavanja neka je $f_s=10kHz$.

**Rješenje:**

Zadan je diskretan signal $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$.

Njega smo mogli dobiti iz nekog kontinuiranog signala $x(t) = \cos(\omega t)$ otipkavanjem

$$x(nT_s) = \cos(\omega n T_s).$$

Period otipkavanja je $T_s=\frac{1}{f_s}=10000^{-1}s$.

Da bi otipkani signal i zadani diskretni signal bili jednaki mora vrijediti:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)=\cos(\omega nT_s),$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{2\pi f}{f_s}n\right).$$

$$\frac{n\pi}{8}=2\pi n\frac{f}{f_s}$$

$$f=\frac{f_s}{16}=\frac{10000}{16}=625Hz.$$

Početni kontinuirani signal je prema tome bio $x(t)=\cos(2\pi\cdot 625t)=\cos(1250\pi t)$.

Primijetite da za neki cijeli broj *k* vrijedi i (zbog periodičnosti cos):

$$\cos\left(2\pi\frac{f}{f_s}n\right)=\cos\left(2\pi\frac{f+kf_s}{f_s}n\right).$$

Tako možemo izabrati i frekvenciju $f=625+10000=10625Hz$ kontinuiranog signala koji će nakon otipkavanja imati jednak diskretan signal.

Drugi kontinuirani signal koji otipkavanjem daje početni diskretni je i npr.

$$x(t)=\cos(2\pi\cdot 10625t)=\cos(21250\pi t).$$

Ovo nisu jedini signali koji su rješenje zadatka. Nađite još neki.