Signali i sustavi

Auditorne vježbe 10.
$\mathcal{Z}$ transformacija i
inverzna $\mathcal{Z}$ transformacija

$\mathcal{Z}$ transformacija

- $\mathcal{Z}$ transformacija niza brojeva $f[n]$ za koje vrijedi $f[n] = 0$ za $n < 0$ definira se kao:

$$Z\left[f[n]\right] = F\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \cdot z^{-n}.$$

- Postupkom $\mathcal{Z}$ transformacije transformira se niz brojeva u funkciju kompleksne varijable z.
- Vrijednost $F(z)$ može biti konačna ili beskonačna.

$\mathcal{Z}$ transformacija – definicije

- Skup vrijednosti od z u z-ravnini za koje je $F(z)$ konačno naziva se područje konvergencije.
- Skup vrijednosti od z u z-ravnini za koje je $F(z)$ beskonačno naziva se područje divergencije.

$\mathcal{Z}$ transformacija osnovnih signala

Kroneckerov delta	$\sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] \cdot z^{-n} = z^{-0} = 1$
Pomaknuti Kroneckerov delta	$\sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-m] \cdot z^{-n} = z^{-m}$
Jedinična stepenica	$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
Diskretna eksponencijala	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

Zadatak 1.

- Odredi $\mathcal{Z}$ transformaciju niza

$$f[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ \sin(an), & \text{za } n \geq 0 \end{cases}$$

- Funkciju $f[n]$ možemo zapisati i kao

$$f[n] = \sin(an)\, s[n]$$

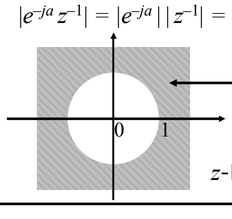
- Tada je

$$\mathcal{Z}\left[f[n]\right] = \mathcal{Z}\left[\sin(an) s[n]\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(an) s[n] z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(an) z^{-n}$$

Zadatak 1. - područje konvergencije

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(an) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{j2}\left(e^{jan} - e^{-jan}\right) z^{-n}$$
$$= \tfrac{1}{j2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{jan} z^{-n} - \tfrac{1}{j2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-jan} z^{-n}$$
$$= \tfrac{1}{j2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{ja} z^{-1}\right)^n - \tfrac{1}{j2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-ja} z^{-1}\right)^n$$

- Sume konvergiraju za $|e^{ja} z^{-1}| = |e^{ja}|\,|z^{-1}| = |z^{-1}| < 1$ i $|e^{-ja} z^{-1}| = |e^{-ja}|\,|z^{-1}| = |z^{-1}| < 1$, tj. za $|z| > 1$.



područje konvergencije

z-kompleksna ravnina

6

Zadatak 1. - konačno rješenje

- Za $|z| > 1$ je

$$\mathcal{Z}[f[n]] = \tfrac{1}{j2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{ja}z^{-1}\right)^n - \tfrac{1}{j2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-ja}z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{j2}\frac{1}{1-e^{ja}z^{-1}} - \frac{1}{j2}\frac{1}{1-e^{-ja}z^{-1}} = \frac{1}{j2}\frac{1-e^{-ja}z^{-1}-1+e^{ja}z^{-1}}{1-e^{ja}z^{-1}-e^{-ja}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \frac{z^{-1}\sin(a)}{1-2z^{-1}\cos(a)+z^{-2}} = \frac{z\sin(a)}{z^2-2z\cos(a)+1}$$

- Dakle

$$\mathcal{Z}[\sin(an)] = \frac{z\sin(a)}{z^2-2z\cos(a)+1}, \quad |z|>1$$

7

Svojstva $\mathcal{Z}$ transformacije

Množenje eksponencijalom	$a^n f[n] \to F\left(\frac{z}{a}\right)$
Derivacija slike	$nf[n] \to -z\frac{dF(z)}{dz}$
Pomak	$f[n+m] \to z^m F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f[i]z^{m-i}$ $f[n-m] \to z^{-m}F(z) + \sum_{i=0}^{m-1} f[i-m]z^{-i}$
Konvolucija	$\sum_{i=0}^{n} f[i]g[n-i] \to F(z)G(z)$

Inverzna $\mathcal{Z}$ transformacija

- $\mathcal{Z}$ transformacija definirana je kao:

$$\mathcal{Z}[f[n]] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n]z^{-n} = F(z)$$

- Inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju koristimo pri određivanju niza $f[n]$ čiju $\mathcal{Z}$ transformaciju $F(z)$ poznajemo.
- Pišemo

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = f[n]$$

Inverzna $\mathcal{Z}$ transformacija

- Najvažnije su racionalne funkcije $F(z)$ oblika
$$F(z) = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \ldots + b_0}{a_l z^l + a_{l-1} z^{l-1} + \ldots + a_0}$$
- Izravno prepoznavanje niza $f[n]$ nije praktično.
- Koristi se rastav $F(z)$ na parcijalne razlomke (slično kao za inverznu Laplaceovu transformaciju).
- Prvo odredimo polove $F(z)$ pa onda odredimo rastav. Svaki parcijalni razlomak je $\mathcal{Z}$ transformacija nekog elementarnog niza, a traženi niz $f[n]$ je linearna kombinacija (zbroj) tih elementarnih nizova.

Inverzna $\mathcal{Z}$ transformacija

- Neka su stupanj brojnika i nazivnika jednaki te neka su svi polovi međusobno različiti i različiti od nule. Tada je rastav:

$$F(z) = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \ldots + b_0}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_0} = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \ldots + b_0}{a_k (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_k)}$$

$$F(z) = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \ldots + b_0}{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_k)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z - z_1} + \ldots + \alpha_k \frac{z}{z - z_k}$$

razlika u rastavu za $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{L}$ transformaciju

- Elementarni nizovi koje trebamo su:

$$\mathcal{Z}^{-1}[\alpha] = \delta[n] \qquad \mathcal{Z}^{-1}\left[\alpha \frac{z}{z - z_1}\right] = \alpha z_1^n$$

11

Inverzna $\mathcal{Z}$ transformacija

- Za polove međusobno različite i različite od nule je:

$$F(z) = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \ldots + b_0}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_0} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z - z_1} + \ldots + \alpha_k \frac{z}{z - z_k}$$

- Koeficijente u rastavu određujemo na slijedeći način:

$$\alpha_0 = F(z)\big|_{z=0} = \frac{b_0}{a_0}$$

$$\alpha_i = \frac{z - z_i}{z} F(z)\bigg|_{z=z_i} = \frac{z - z_i}{z} \frac{b_k z^k + \ldots + b_0}{(z - z_1)\ldots(z - z_i)\ldots(z - z_k)}\bigg|_{z=z_i}$$

12

Zadatak 2.

- Odredi niz $f[n]$ čija je $\mathcal{Z}$ transformacija

$$\mathcal{Z}[f[n]] = F(z) = \frac{z(z-a\cos(b))}{z^2-2az\cos(b)+a^2}$$

- Funckija $F(z)$ ima dva pola. Ako su polovi međusobno različiti očekujemo rastav oblika

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-z_1} + \alpha_2 \frac{z}{z-z_2}$$

13

Zadatak 2. - polovi

- Polovi su

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{2a\cos(b) \pm \sqrt{4a^2\cos^2(b)-4a^2}}{2} \\ &= a\cos(b) \pm ja\sin(b) \\ &= ae^{\pm jb} \end{aligned}$$

- Rastav je

$$F(z) = \frac{z(z-a\cos(b))}{z^2-2az\cos(b)+a^2} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-ae^{jb}} + \alpha_2 \frac{z}{z-ae^{-jb}}$$

- Preostaje odrediti koeficijente α_0, α_1 i α_2.

14

Zadatak 2. - koeficijenti

- Odredimo koeficijente α_0, α_1 i α_2:

$$\alpha_0 = F(z)\big|_{z=0} = \frac{0(0-a\cos(b))}{0^2-2a0\cos(b)+a^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{z-ae^{jb}}{z} F(z)\bigg|_{z=ae^{jb}} = \frac{z-ae^{jb}}{z} \frac{z(z-a\cos(b))}{(z-ae^{jb})(z-ae^{-jb})}\bigg|_{z=ae^{jb}} \\ &= \frac{ae^{jb}-a\cos(b)}{ae^{jb}-ae^{-jb}} = \frac{e^{jb}-\frac{1}{2}(e^{jb}+e^{-jb})}{e^{jb}-e^{-jb}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{z-ae^{-jb}}{z} F(z)\bigg|_{z=ae^{-jb}} = \frac{z-ae^{-jb}}{z} \frac{z(z-a\cos(b))}{(z-ae^{jb})(z-ae^{-jb})}\bigg|_{z=ae^{-jb}} \\ &= \frac{ae^{-jb}-a\cos(b)}{ae^{-jb}-ae^{jb}} = \frac{e^{-jb}-\frac{1}{2}(e^{jb}+e^{-jb})}{e^{-jb}-e^{jb}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

15

Zadatak 2. - konačno rješenje

- Uvrstimo $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1/2$ i $\alpha_2 = 1/2$:

$$F(z) = \frac{z(z - a\cos(b))}{z^2 - 2az\cos(b) + a^2} = 0 + \frac{1}{2}\frac{z}{z - ae^{jb}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z - ae^{-jb}}$$

- Sada odredimo traženi niz

$$f[n] = \frac{1}{2}\left(ae^{jb}\right)^n + \frac{1}{2}\left(ae^{-jb}\right)^n = a^n\cos(bn), \quad n \geq 0$$

16

Slučaj višestrukih polova

- Za slučaj višestrukih polova funkcije $F(z)$ različitih od nule rastav je nešto drugačijeg oblika.
- Neka je samo jedan od k polova različitih od nule višestrukosti m i neka to bude baš z_1. Tada je:

$$F(z) = \frac{b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \ldots + b_0}{a_k z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \ldots + a_0} = \frac{b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \ldots + b_0}{a_k(z - z_1)^m (z - z_2)\ldots(z - z_{k-m+1})}$$

$$F(z) = \alpha_0 + \underbrace{\frac{\alpha_1 z}{z - z_1} + \frac{\alpha_2 z^2}{(z - z_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_m z^m}{(z - z_1)^m}}_{\text{pol višestrukosti } m \text{ uzrokuje pojavljivanje članova } z/(z-z_1) \text{ s višim potencijama}} + \underbrace{\frac{\alpha_{m+1} z}{z - z_2} + \ldots + \frac{\alpha_k z}{z - z_{k-m+1}}}_{\text{ostatak rastava (jednostruki polovi)}}$$

17

Slučaj višestrukih polova

- Ovisno o kratnosti pola dio u rastavu na parcijalne razlomke je sljedeći:

jednostruki pol z_1 različit od nule	$\alpha\frac{z}{z - z_1}$
m-struki pol z_1 različit od nule	$\alpha_1\frac{z}{z - z_1} + \alpha_2\frac{z^2}{(z - z_1)^2} + \ldots + \alpha_m\frac{z^m}{(z - z_1)^m}$

- No da bi odredili inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju za slučaj višestrukih polova potrebno je poznavati

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\alpha\frac{z^m}{(z - z_1)^m}\right] = ?$$

18

Zadatak 3.

- Odredi inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^m}{(z-a)^m}\right]$$

ako je poznato da je

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right]=a^n$$

koristeći poznatu relaciju za trasformaciju konvolucije

$$\mathcal{Z}[(f*g)[n]]=F(z)G(z)$$

19

Zadatak 3.

- Odredimo prvo inverzne transformacije za $m=2$ i $m=3$:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-a)^2}\right]=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\frac{z}{z-a}\right]=a^n*a^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a^i a^{n-i}=a^n\sum_{i=0}^{n}1=(n+1)a^n$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^3}{(z-a)^3}\right]=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\frac{z^2}{(z-a)^2}\right]=a^n*(n+1)a^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a^i(n+1-i)a^{n-i}=a^n\sum_{i=0}^{n}(n+1-i)$$

$$=a^n\left((n+1)^2-\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n$$

20

Zadatak 3.

- Na sličan način može se dobiti opći izraz

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^m}{(z-a)^m}\right]=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}a^n$$

Dokazati za vježbu!

21

Slučaj višestrukih polova - koeficijenti

$$F(z)=\alpha_0+\underbrace{\frac{\alpha_1 z}{z-z_1}+\frac{\alpha_2 z^2}{(z-z_1)^2}+\ldots+\frac{\alpha_m z^m}{(z-z_1)^m}}_{\text{pol višestrukosti } m}+\frac{\alpha_{m+1}z}{z-z_2}+\ldots+\frac{\alpha_k z}{z-z_{k-m+1}}$$

- Koeficijente u rastavu određujemo na slijedeći način:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 &= F(z)\big|_{z=0}=\frac{b_0}{a_0}\\ \alpha_{m+i} &= \frac{z-z_i}{z}F(z)\Big|_{z=z_i}\end{aligned}\right\}$$ za jednostruke polove koeficijente α jednostavno određujemo prema ovim izrazima

$$\alpha_m=\frac{(z-z_1)^m}{z^m}F(z)\Big|_{z=z_1}$$ za pol višestrukosti m možemo jednostavno odrediti samo koeficijent α uz potenciju m

22

Slučaj višestrukih polova - koeficijenti

$$F(z)=\alpha_0+\underbrace{\frac{\alpha_1 z}{z-z_1}+\frac{\alpha_2 z^2}{(z-z_1)^2}+\ldots+\frac{\alpha_m z^m}{(z-z_1)^m}}_{\text{pol višestrukosti } m}+\frac{\alpha_{m+1}z}{z-z_2}+\ldots+\frac{\alpha_k z}{z-z_{k-m+1}}$$

- Sada je još potrebno odrediti preostale koeficijente za pol višestrukosti m.
- Gornji rastav vrijedi za svaki z, pa tako i za neke odabrane z_i. Odaberemo neke z_i **različite od nule i polova** $F(z)$ te iz dobivenih jednadžbi odredimo preostale koeficijente. Potrebno je $m-1$ jednadžbi.

$$F(z_i)=\alpha_0+\frac{\alpha_1 z_i}{z_i-z_1}+\ldots+\frac{\alpha_{m-1}z_i^{m-1}}{(z_i-z_1)^2}+\frac{\alpha_m z_i^m}{(z_i-z_1)^m}+\ldots+\frac{\alpha_k z_i}{z_i-z_{k-m+1}}$$

23

Zadatak 4.

- Odredi inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^3+2z^2+z+1}{z^3-z^2-8z+12}\right]$$

- Potrebno je odrediti rastav na parcijalne razlomke. Prvo tražimo polove:

$$z^3-z^2-8z+12=0$$

$$(z-2)^2(z+3)=0$$

- Imamo jedan dvostruki pol $z_{1,2}=2$ i jedan jednostruki pol $z_3=-3$.

24

Zadatak 4. - računanje koeficijenata

- Uz polove $z_{1,2} = 2$ i $z_3 = -3$ rastav je:

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-2} + \alpha_2 \frac{z^2}{(z-2)^2} + \alpha_3 \frac{z}{z+3}$$

- Određujemo α_0, α_2 i α_3:

$$\alpha_0 = F(z)\big|_{z=0} = \frac{0^3 + 2\cdot 0^2 + 0 + 1}{0^3 - 0^2 - 8\cdot 0 + 12} = \frac{1}{12}$$

$$\alpha_2 = \frac{(z-2)^2}{z^2} \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{(z-2)^2(z+3)}\bigg|_{z=2} = \frac{2^3 + 2\cdot 2^2 + 2 + 1}{2^2(2+3)} = \frac{19}{20}$$

$$\alpha_3 = \frac{z+3}{z} \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{(z-2)^2(z+3)}\bigg|_{z=-3} = \frac{-27 + 18 - 3 + 1}{-3(-3-2)^2} = \frac{11}{75}$$

25

Zadatak 4. - računanje koeficijenata

- Odredili smo $\alpha_0 = 1/12$, $\alpha_2 = 19/20$ i $\alpha_3 = 11/75$. Potrebno je još odrediti α_1. Odaberemo neki z različit od nule i polova $z_{1,2} = 2$ i $z_3 = -3$, npr. $z = 1$:

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-2} + \alpha_2 \frac{z^2}{(z-2)^2} + \alpha_3 \frac{z}{z+3}$$

$$F(1) = \frac{1^3 + 2\cdot 1^2 + 1 + 1}{1^3 - 1^2 - 8\cdot 1 + 12} = \frac{1}{12} + \alpha_1 \frac{1}{1-2} + \frac{19}{20}\frac{1^2}{(1-2)^2} + \frac{11}{75}\frac{1}{1+3}$$

$$\frac{5}{4} = \alpha_1 + \frac{321}{300} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{9}{50}$$

26

Zadatak 4. - konačno rješenje

- Odredili smo $\alpha_0 = 1/12$, $\alpha_1 = -9/50$, $\alpha_2 = 19/20$ i $\alpha_3 = 11/75$. Rastav na parcijalne razlomke je:

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12} = \frac{1}{12} - \frac{9}{50}\frac{z}{z-2} + \frac{19}{20}\frac{z^2}{(z-2)^2} + \frac{11}{75}\frac{z}{z+3}$$

- Inverzna $\mathcal{Z}$ transformacija je:

$$f[n] = \frac{1}{12}\delta[n] - \frac{9}{50}2^n + \frac{19}{20}(n+1)2^n + \frac{11}{75}(-3)^n, \quad n \geq 0$$

odnosno grupirano

$$f[n] = \frac{1}{12}\delta[n] + \left(\frac{19}{20}n + \frac{77}{100}\right)2^n + \frac{11}{75}(-3)^n, \quad n \geq 0$$

27

Zadatak 5.

- Odredi inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2(z-1)}\right]$$

- Opet je potrebno je odrediti rastav na parcijalne razlomke. Imamo jedan dvostruki pol $z_{1,2} = 0$ i jedan jednostruki pol $z_3 = 1$.
- Zbog pola u nuli ne možemo jednostavno odrediti koeficijent α_0 u rastavu $F(z)$.

28

Zadatak 5. - pol u nuli

- Uz polove $z_{1,2} = 0$ i $z_3 = 1$ rastav je:

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{z} + \alpha_2 \frac{1}{z^2} + \alpha_3 \frac{z}{z-1}$$

- Zbog pola u nuli ne možemo odrediti α_0:

$$\alpha_0 = F(z)\big|_{z=0} = \left.\frac{z+1}{z^2(z-1)}\right|_{z=0}$$ Izraz ima singularitet u nuli!

- Možemo odrediti samo α_2 i α_3:

$$\alpha_2 = z^2 F(z)\big|_{z=0} = z^2 \left.\frac{z+1}{z^2(z-1)}\right|_{z=0} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

$$\alpha_3 = \left.\frac{z-1}{z}F(z)\right|_{z=1} = \left.\frac{z-1}{z}\frac{z+1}{z^2(z-1)}\right|_{z=1} = \frac{1+1}{1\cdot 1^2} = 2$$

29

Zadatak 5. - koeficijenti

- Odredili samo $\alpha_2 = -1$ i $\alpha_3 = 2$. Sada određujemo α_0 i α_1 odabiranjem dvije vrijednosti z (različite od polova i nule). Odaberimo $z = -1$ i $z = 2$:

$$\begin{cases} F(-1) = \dfrac{-1+1}{(-1)^2(-1-1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \dfrac{1}{-1} - \dfrac{1}{(-1)^2} + 2\dfrac{-1}{-1-1} \\ F(2) = \dfrac{2+1}{2^2(2-1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2} + 2\dfrac{2}{2-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_0 - \alpha_1 \\ -3 = \alpha_0 + \alpha_1 \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = -2$$

30

Zadatak 5. - konačno rješenje

- Odredili samo $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$ i $\alpha_3 = 2$. Rastav na parcijalne razlomke je:

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)} = -2 - 2\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + 2\frac{z}{z-1}$$

- Inverzna $\mathcal{Z}$ transformacija je:

$$f[n] = -2\delta[n] - 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 2\cdot 1^n, \quad n \geq 0$$

31

Rastav na parcijalne razlomke

- Svaki pol doprinosi rastavu prema tablici:

jednostruki pol z_1 različit od nule	$\alpha \frac{z}{z-z_1}$
m-struki pol z_1 različit od nule	$\alpha_1 \frac{z}{z-z_1} + \alpha_2 \frac{z^2}{(z-z_1)^2} + \ldots + \alpha_m \frac{z^m}{(z-z_1)^m}$
jednostruki pol jednak nuli	$\alpha \frac{1}{z}$
m-struki pol jednak nuli	$\alpha_1 \frac{1}{z} + \alpha_2 \frac{1}{z^2} + \ldots + \alpha_m \frac{1}{z^m}$

32

Rastav na parcijalne razlomke

- Koeficijente rastava određujemo prema tablici:

jednostruki pol z_1 različit od nule	$\alpha = \frac{z-z_1}{z} F(z)\Big\|_{z=z_1}$
m-struki pol z_1 različit od nule	$\alpha_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dw^{m-i}} \left(\frac{(z-z_1)^m}{z^m} F(z) \Big\|_{z = \frac{z_1}{1-w}} \right) \Big\|_{w=0}$
jednostruki pol jednak nuli	$\alpha = zF(z)\big\|_{z=0}$
m-struki pol jednak nuli	$\alpha_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} \left(z^m F(z) \right) \Big\|_{z=0}$

33

Zadatak 6.

- Pomoću $\mathcal{Z}$ transformacije nađi rješenje jednadžbe diferencija
  $$y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]=2u[n+1]-2u[n]$$
  uz pobudu
  $$u[n]=\begin{cases}0, & \text{za } n<0\\ n, & \text{za } n\geq 0\end{cases}$$
  i uz zadane početne uvjete $y[-1]$ i $y[-2]$.

Zadatak 6. - prelazak u $\mathcal{Z}$ domenu

- Od interesa nam je samo odziv od koraka nula u kojem počinje pobuda.
- Prebacujemo jednadžbu u $\mathcal{Z}$ domenu:

$$y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]=2u[n+1]-2u[n] \quad \Big/\mathcal{Z}$$

$$z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1]-3zY(z)+3zy[0]+2Y(z)=$$
$$=2zU(z)-2zu[0]-2U(z)$$

$$(z^2-3z+2)Y(z)-(z^2-3z)y[0]-zy[1]=$$
$$=(2z-2)U(z)-2zu[0]$$

35

Zadatak 6. - rješenje u $\mathcal{Z}$ domeni

- Rješenje jednadžbe u $\mathcal{Z}$ domeni je

$$Y(z)=\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)-\frac{2zu[0]}{z^2-3z+2}+\frac{(z^2-3z)y[0]+zy[1]}{z^2-3z+2}$$

- Odziv ovisi o pobudi $u[n]$ i o početnim stanjima $y[0]$ i $y[1]$ koji pak ovise o $y[-1]$ i $y[-2]$.
- Potrebno je odrediti $y[0]$ i $y[1]$ iz $y[-1]$ i $y[-2]$ korak po korak.

36

Zadatak 6. - rješenje u $\mathcal{Z}$ domeni

- Određujemo $y[0]$ i $y[1]$:

$$\begin{cases} y[0]-3y[-1]+2y[-2]=2u[-1]-2u[-2] \\ y[1]-3y[0]+2y[-1]=2u[0]-2u[-1] \end{cases}$$

- Pobuda $u[n]$ postoji samo za $n>0$ pa otpadaju članovi $u[-1]$ i $u[-2]$.

$$\begin{cases} y[0]=-2y[-2]+3y[-1] \\ y[1]=-2y[-1]+3y[0]+2u[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y[0]=-2y[-2]+3y[-1] \\ y[1]=7y[-1]-6y[-2]+2u[0] \end{cases}$$

37

Zadatak 6. - rješenje u $\mathcal{Z}$ domeni

- Sada je odziv u $\mathcal{Z}$ domeni

$$Y(z)=\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)-\frac{2zu[0]}{z^2-3z+2}$$
$$+\frac{(z^2-3z)(-2y[-2]+3y[-1])+z(7y[-1]-6y[-2]+2u[0])}{z^2-3z+2}$$

- Odnosno nakon sređivanja

$$Y(z)=\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)+\frac{(3z^3-2z)y[-1]-2z^2y[-2]}{z^2-3z+2}$$

38

Zadatak 6. - inverzna transformacija

- Odziv sustava određujemo inverznom $\mathcal{Z}$ transformacijom.
- Neka je $y[-1]=0$ i $y[-2]=0$.

$$y[n]=\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)\right]$$

- $\mathcal{Z}$ transformaciju pobude $U(z)$ znamo iz tablice.

$$U(z)=\mathcal{Z}[ns[n]]=\frac{z}{(z-1)^2}$$

- Tada je $Y(z)$

$$Y(z)=\frac{2z-2}{z^2-3z+2}\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}$$

39

Zadatak 6. - inverzna transformacija

- Rastav na parcijalne razlomke je:

$$Y(z)=\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}=\alpha_0+\alpha_1\frac{z}{z-1}+\alpha_2\frac{z^2}{(z-1)^2}+\alpha_3\frac{z}{z-2}$$

- Sada određujemo α_0, α_2 i α_3:

$$\alpha_0=\left.\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right|_{z=0}=\frac{2\cdot 0}{(0-1)^2(0-2)}=0$$

$$\alpha_2=\left.\frac{(z-1)^2}{z^2}\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right|_{z=1}=\frac{2}{1(1-2)}=-2$$

$$\alpha_3=\left.\frac{z-2}{z}\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right|_{z=2}=\frac{2}{(2-1)^2}=2$$

40

Zadatak 6. - konačno rješenje

- Odredili smo $\alpha_0=0$, $\alpha_2=-2$ i $\alpha_3=2$. Koeficijent α_1 određujemo iz $Y(z)$ za npr. $z=3$:

$$Y(3)=\frac{2\cdot 3}{(3-1)^2(3-2)}=0+\alpha_1\frac{3}{3-1}-2\frac{3^2}{(3-1)^2}+2\frac{3}{3-2}$$

$$\frac{6}{4}=\alpha_1\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\Rightarrow\alpha_1=0$$

- Konačno rješenje uz $y[-1]=0$ i $y[-2]=0$ je

$$Y(z)=-2\frac{z^2}{(z-1)^2}+2\frac{z}{z-2}$$

$$y[n]=-2(n+1)1^n+2\cdot 2^n,\quad n\geq 0$$

41