Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

11. ožujka 2013.

U cjelini 3 razmatramo

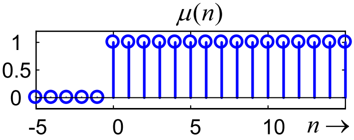
- osnovni signali
    - jedinični skok
    - jedinična kosina
    - jedinični impuls
    - sinusoidni signal
    - eksponencijalni signal
- očitavanje vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala

Vremenski jedinični skok – vremenska jedinična step funkcija

- vremenski diskretan jedinični skok μ definiran je kao:

$\forall n \in \mathbb{Z}$,

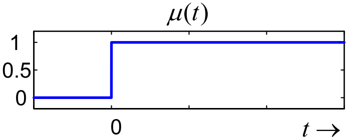
$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



- vremenski kontinuiran jedinični skok μ definiran je kao:

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



- u literaturi se koriste i druge definicije: $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0.5, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Jedinična kosina

- vremenski diskretna

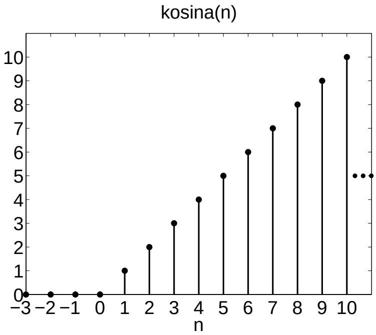
$\forall n \in \mathbb{Z}$,

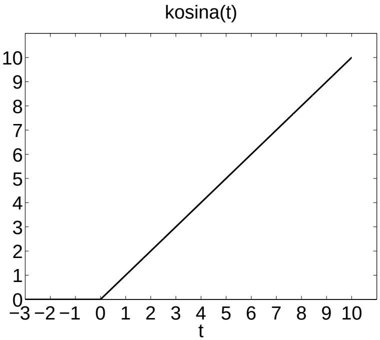
$$kosina(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- vremenski kontinuirana

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$kosina(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$





Veza jediničnog skoka i jedinične kosine

- veza vremenski diskretne jedinične kosine i jediničnog skoka je

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$kosina(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \mu(m-1) = \sum_{m=-\infty}^{n-1} \mu(m)$$

- vremenski diskretan jedinični skok možemo definirati pomoću kosine kao diferenciju

$$\mu(n) = kosina(n+1) - kosina(n)$$

- veza vremenski kontinuirane jedinične kosine i jediničnog skoka je

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$kosina(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(\tau) d\tau = t\mu(t)$$

- vremenski kontinuiran jedinični skok možemo definirati pomoću kosine kao

$$\mu(t) = \frac{d(kosina(t))}{dt}, \quad t \neq 0$$

Veza jediničnog skoka i jedinične kosine

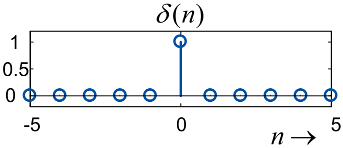
- važno je uočiti analogiju
  - vremenski diskretan jedinični skok i vremenski diskretna jedinična kosina vezani su operacijama akumulacije i diferencije
  - vremenski kontinuiran jedinični skok i vremenski kontinuirana jedinična kosina vezani su operacijama integriranja i deriviranja
  - uočava se prije pokazane analogije
    - derivaciji vremenski kontinuiranog signala odgovara diferencija vremenski diskretnog signala
    - integraciji vremenski kontinuiranih signala odgovara operacija akumulacije za vremenski diskretne signale
    - derivacija i integracija signala suprotne su operacije, tako su i operacije diferencije i akumulacije suprotne operacije

Vremenski diskretan jedinični impuls – Kroneckerova delta funkcija

- vremenski diskretan jedinični impuls δ je vremenski diskretan signal definiran kao:

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

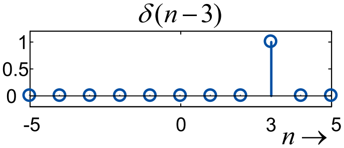


- za m koraka pomaknuti vremenski diskretan jedinični impuls definiran je kao

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

gdje je $m \in \mathbb{Z}$

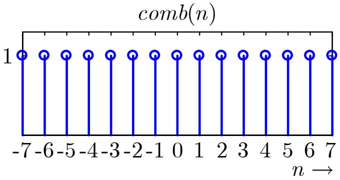


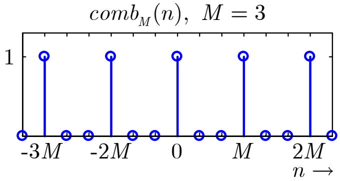
Niz vremenski diskretnih jediničnih impulsa

- definiraju se nizovi jediničnih impulsa označenih vremenski diskretnom funkcijom *comb* (prema engleskom nazivu ove funkcije – comb = češalj)

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$
$$m \in \mathbb{Z},$$
$$comb(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$
$$m \in \mathbb{Z},\ \forall M \in \mathbb{N},$$
$$comb_M(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-mM)$$





Veza jediničnog skoka i jediničnog impulsa

- analogno vezi vremenski diskretnog jediničnog skoka i vremenski diskretne jedinične rampe, vremenski diskretan jedinični skok i vremenski diskretan jedinični impuls vezani su operacijama akumulacije i diferencije
- vremenski diskretan jedinični skok odgovara akumulaciji jediničnog impulsa

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mu(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$$

- s druge strane, jedinični impuls odgovara prvoj diferenciji vremenski diskretnog jediničnog skoka

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \delta(n) = \mu(n) - \mu(n-1)$$

Jedinični impuls – svojstvo očitavanja

- analiziramo svojstvo očitavanja vremenski diskretnog jediničnog impulsa
- pomnožimo li neki vremenski diskretan signal f s jediničnim impulsom $\delta(n-n_0)$, koji se javlja u n_0, dobijemo signal koji je impuls u n_0 čija je amplituda jednaka vrijednosti signala f u n_0
- kažemo kako jedinični impuls $\delta(n-n_0)$ "vadi" vrijednost, dakle, očitava funkciju f u n_0

$$f(n)\delta(n-n_0) = f(n_0)\delta(n-n_0)$$

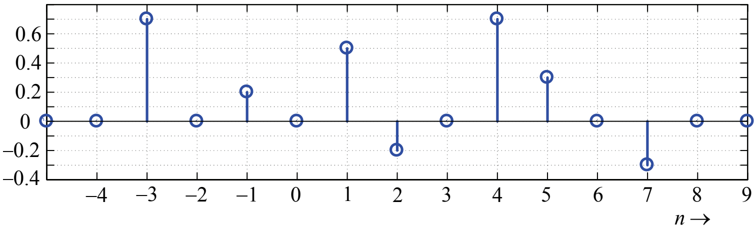
- drugi način iskaza svojstva očitavanja jediničnog impulsa proizlazi iz zbroja

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(m-n_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n_0)\delta(m-n_0) = f(n_0)$$

Vremenski diskretan jedinični impuls – primjena

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć niza vremenski diskretnih jediničnih impulsa što proizlazi iz:

$$u(n) = u(n) \cdot comb(n) = u(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$$



$$u(n) = 0.7\delta(n+3) + 0.2\delta(n+1) + 0.5\delta(n-1) -$$
$$- 0.2\delta(n-2) + 0.7\delta(n-4) + 0.3\delta(n-5) - 0.3\delta(n-7)$$

Diracova delta funkcija – vremenski kontinuirani jedinični impuls

- definira se vremenski kontinuiran jedinični impuls ili Diracova delta funkcija
- zbog svojih svojstava ona se izdvaja iz skupa uobičajenih matematičkih funkcija i svrstava se u klasu tzv. distribucija ili generaliziranih funkcija
- teorija generaliziranih funkcija razvijana je koncem devetnaestog i u prvoj polovici dvadesetog stoljeća, a prvenstveno zbog potreba izučavanja električnih krugova i nekih problema u fizici
- za potrebe ovog predmeta ovdje se uvodi vremenski kontinuirani jedinični impuls ne ulazeći u strogi matematički postupak

Diracova delta funkcija – vremenski kontinuirani jedinični impuls

- vremenski kontinuiran jedinični impuls δ, prvi je definirao P. A. M. Dirac kao

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{R}, \\ &\delta(t) = 0 \qquad \text{za } t \neq 0 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{aligned}$$

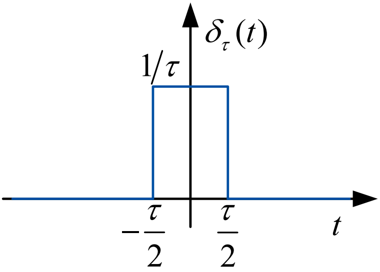
- u čast Diracu vremenski kontinuiran jedinični impuls δ naziva se i Diracova delta funkcija
- Diracova delta funkcija je parna funkcija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \delta(t) = \delta(-t)$$

Diracova delta funkcija

- izvod za Diracovu delta funkciju započinje s definicijom pravokutnog impulsa površine jednake jedan

$$\forall t \in \mathbb{R},$$
$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & t < -\frac{\tau}{2},\ t \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

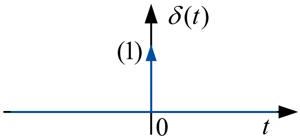


Diracova delta funkcija

- za $\tau \to 0$ pravokutni impuls δ_τ postaje sve uži i sve viši ali pri tome površina ostaje uvijek vrijednosti jedan
- za granični slučaj slijedi

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \delta_\tau(t)$$

- Diracovu delta funkciju prikazujemo kao na slici



- strelica u $t = 0$ ukazuje kako je površina impulsa koncentrirana u $t = 0$, a visina strelice i oznaka "1" označuje jediničnu površinu impulsa
- površina ispod impulsa se naziva "težina" ili njegov "intenzitet"

Umnožak Diracove delta funkcije i vremenski kontinuirane funkcije

- razmatra se umnožak Diracove delta funkcije s nekom vremenski kontinuiranom funkcijom f koja je konačna i neprekinuta u $t = 0$
- kako je jedinični impuls različit od nule samo za $t = 0$, a vrijednost od f u $t = 0$ je $f(0)$, pa slijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \tag{1}$$

- dakle, umnožak vremenski kontinuirane funkcije f i δ rezultira s impulsom "intenziteta" ili "težine" $f(0)$ (što je vrijednost funkcije f na mjestu impulsa)
- isto tako, za funkciju koja je konačna i kontinuirana u $t = t_0$, vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \tag{2}$$

Svojstvo očitavanja Diracove delta funkcije

- iz jednadžbe (1) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \tag{3}$$

- isto tako, iz jednadžbe (2), slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(t_0) \tag{4}$$

- što znači da je površina produkta funkcije i impulsa δ jednaka vrijednosti funkcije u trenutku u kojem je definiran jedinični impuls
- može se također reći da Diracova delta funkcija "vadi" ili "očitava" vrijednost podintegralne funkcije na mjestu na kojem je impuls definiran, dakle, funkciji f pridružuje broj $f(t_0)$

Diracova delta funkcija kao generalizirana funkcija

- Diracovu delta funkciju se ne može promatrati kao uobičajenu funkciju jer ona ima vrijednost nula za sve vrijednosti osim za vrijednost $t = 0$, a za taj t nije definirana
- zato Diracovu delta funkciju definiramo u smislu teorije distribucija ili generaliziranih funkcija
- generaliziranu funkciju, umjesto njezinih vrijednosti za sve vrijednosti domene, definiramo preko njezina djelovanja na druge, "testne" ("ispitne"), funkcije
- definicija Diracove delta funkcija u smislu teorije distribucija je dana u jednadžbama (3) i (4) dakle:

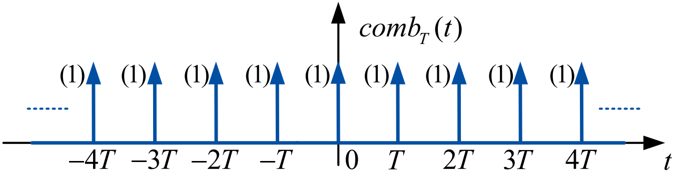
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = f(t_0) \qquad (5)$$

Niz Diracovih delta funkcija

- niz Diracovih delta funkcija, označen kao funkcija $comb_T$ prema engleskom nazivu ove funkcije, definiran je kao

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

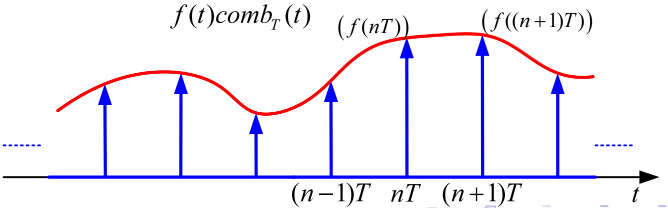
$$comb_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT), \; m \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}$$



Produkt niza Diracovih delta funkcija i vremenski kontinuiranog signala

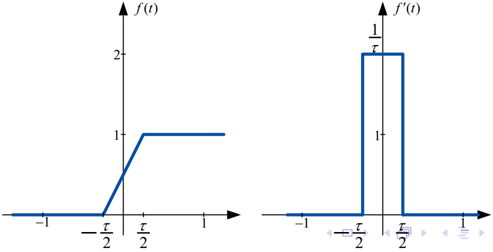
- produkt niza Diracovih delta funkcija, razmaknutih za T, i kontinuiranog signala f naziva se impulsno očitavanje kontinuiranog signala ili impulsna modulacija
- rezultat množenja je niz δ funkcija intenziteta koji odgovaraju trenutnim vrijednostima funkcije f na mjestima $t = nT$ za $n \in \mathbb{Z}$ i $T \in \mathbb{R}$

$$f_\delta(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$



Veza vremenski kontinuiranog jediničnog impulsa i vremenski kontinuiranog jediničnog skoka

- derivacija funkcije jediničnog skoka svuda je nula osim na mjestu diskontinuiteta u $t = 0$ gdje derivacija nije definirana
- uvodi se tzv. generalizirana derivacija i pokazuje se kako je Diracova δ funkcija generalizirana derivacija funkcije jediničnog skoka
- do ovog zaključka dolazi se sljedećim razmatranjem
- za funkciju f na slici prikazana je i njezina derivacija



Veza vremenski kontinuiranog jediničnog impulsa i vremenski kontinuiranog jediničnog skoka

- derivacija funkcije f definirana je za svaki t osim za $t = -\tau/2$ i $t = \tau/2$
- smanjivanjem τ funkcija f se u konačnici približava jediničnom skoku, a pravokutni impuls, površine jedan, koji predstavlja $df(t)/dt$, prelazi u jediničnu Diracovu δ funkciju
- ovako postignuta derivacija naziva se generalizirana derivacija, a jedinični impuls je generalizirana derivacija jediničnog skoka

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}$$

- iz ovoga slijedi i

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda) d\lambda$$

Generalizirana derivacija vremenski kontinuiranog jediničnog skoka μ

- generaliziranu derivaciju jediničnog skoka možemo odrediti parcijalnom integracijom[1] integrala

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mu'(t) f(t) dt &= \mu(t) f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t) f'(t) dt \\ &= f(\infty) - 0 - \int_{0}^{\infty} f'(t) dt \\ &= f(\infty) - f(t)\Big|_{0}^{\infty} = f(0)\end{aligned}$$

- očigledno je kako μ' zadovoljava svojstvo očitavanja Diracove delta funkcije δ, pa smo pokazali da vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t)$$

[1] podsjeta: iz $(uv)' = uv' + u'v$ integracijom obje strane slijedi $\int_a^b u'v dt = uv|_a^b - \int_a^b uv' dt$

Generalizirana derivacija funkcije s diskontinuitetom u $t = t_0$

- generalizirana derivacija funkcije g, s diskontinuitetom (prekinute) u $t = t_0$ definirana je kao

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \frac{d}{dt}(g(t))_{t \neq t_0} + [g(t_0^+) - g(t_0^-)]\delta(t - t_0)$$

Primjer generalizirana derivacija funkcije g s diskontinuitetima

- neka je funkcija $g(t), \forall t \in \mathbb{R}$, zadana s

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ -t+3, & 1 \leq t < 4 \\ 0.5(t-6), & 4 \leq t < 8 \\ 2, & 8 \leq t < 9 \\ -t+11, & 9 \leq t < 11 \\ 0, & t \geq 11 \end{cases}$$

- odnosno

$$\begin{aligned} g(t) = & (-t+3)[\mu(t-1)-\mu(t-4)]+ \\ & +0.5(t-6)[\mu(t-4)-\mu(t-8)]+ \\ & +2[\mu(t-8)-\mu(t-9)]+ \\ & +(-t+11)[\mu(t-9)-\mu(t-11)] \end{aligned}$$

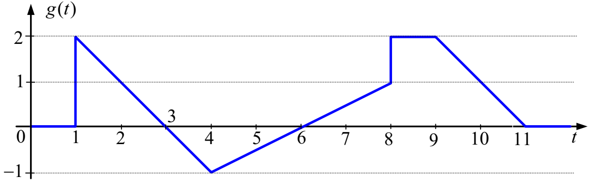
Generalizirana derivacija funkcije s diskontinuitetima

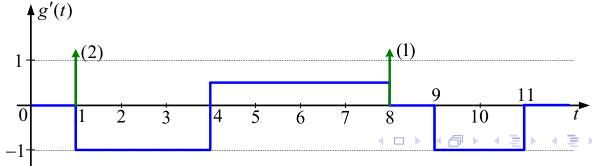
- za funkciju g

$$\begin{aligned} g(t) = {} & (-t+3)[\mu(t-1)-\mu(t-4)] \\ & +0.5(t-6)[\mu(t-4)-\mu(t-8)] \\ & +2[\mu(t-8)-\mu(t-9)] \\ & +(-t+11)[\mu(t-9)-\mu(t-11)] \end{aligned}$$

- generalizirana derivacija je

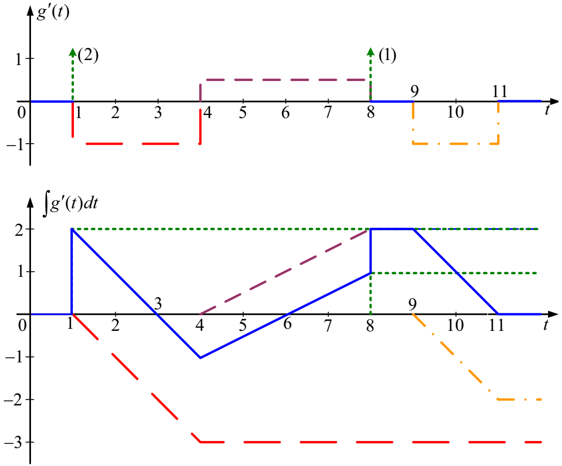
$$\begin{aligned} g'(t) = {} & -1\cdot[\mu(t-1)-\mu(t-4)] \\ & +0.5[\mu(t-4)-\mu(t-8)] \\ & -1\cdot[\mu(t-9)-\mu(t-11)] \\ & +[g(1^+)-g(1^-)]\delta(t-1) \\ & +[g(8^+)-g(8^-)]\delta(t-8) \end{aligned}$$





Generalizirana derivacija funkcije g s diskontinuitetom

- izračunava se integral funkcije g' iz prethodnog primjera



Derivacija kontinuiranog jediničnog impulsa δ

- vremenski kontinuirani jedinični impuls δ definiran je, u smislu teorije distribucija, kao

$$\forall t \in \mathbb{R},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

- derivaciju kontinuiranog jediničnog impulsa δ' definiramo kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$$

- gornji je izraz izveden parcijalnom integracijom integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = \underbrace{f(t)\delta(t)|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt = -f'(0)$$

Derivacija kontinuiranog jediničnog impulsa δ

- dakle, iz

$$\forall t \in \mathbb{R},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$$

prepoznajemo svojstvo očitavanja, jer je očito kako derivacija Diracove delta funkcije očitava derivaciju signala u $t = 0$ (uz negativni predznak)

- za N-tu derivaciju δ, potrebno je parcijalnu integraciju provesti N puta, i tada se dolazi do

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(N)}(t)dt = (-1)^N f^{(N)}(0)$$

Konvolucija signala i Diracove delta funkcije

- konvoluciju dvaju signala f i g definiramo s konvolucijskim integralom

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

- razmatramo konvoluciju signala f i Diracove delta funkcije

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau = f(t) \Rightarrow$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau \tag{6}$$

- vrijedi da konvolucija signala f sa zakašnjelim Diracovim jediničnim impulsom $(D_{t1}(\delta))(t) = \delta(t - t_1)$ rezultira u kašnjenju signala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (D_{t1}(\delta) * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1) f(t-\tau)\, d\tau = f(t-t_1)$$

Razlaganje signala pomoću Diracove delta funkcije

- izraz (6) ukazuje da svaki vremenski kontinuiran signal možemo razložiti pomoću Diracovih delta funkcija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

- podsjećamo kako svaki vremenski diskretni signal možemo razložiti pomoću Kroneckerovih delta funkcija

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m)$$

Vremenski kontinuiran sinusoidni signal

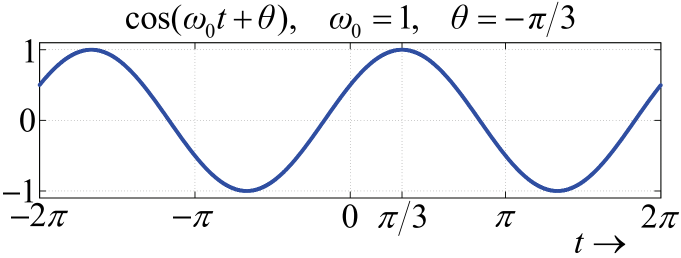
- u uvodnim izlaganjima navedena je važnost sinusoidnog signala
- vremenski kontinuiran sinusoidni signal definiramo funkcijom

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) = A\cos(\omega_0 t + \theta) = A\cos(\frac{2\pi}{T_0} t + \theta)$$
$$f_0 = \frac{1}{T_0}, \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

gdje su

A = realna amplituda sinusoidnog signala
T_0 = realna osnovna perioda signala
f_0 = realna osnovna frekvencija signala, [Hz]
ω_0 = realna kutna (kružna) frekvencija (kutna brzina) signala,
θ = faza, [rad]

Vremenski kontinuiran sinusoidni signal



Slika 1: Vremenski kontinuiran sinusoidni signal

Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- kompleksna eksponencijalna funkcija odlikuje se nizom značajki koje mogu poslužiti u jednostavnijem i boljem razumijevanju pojava i postupaka kod realnih signala i sustava
- zato se definira vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal[2]

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\
&s_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \in \mathbb{C}, \\
&C = Ae^{j\theta} \in \mathbb{C}, \quad A, \theta \in \mathbb{R} \\
&f(t) = Ce^{s_0 t} = Ae^{j\theta} e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} e^{j(\omega_0 t + \theta)}
\end{aligned}
$$

[2]Kompleksnu eksponencijalu moguće je definirati i kao

$$f(t) = Ce^{s_0 t} = C\left(e^{s_0}\right)^t = C\gamma^t.$$

Pokazuje da je u analizi vremenski kontinuiranih signala i sustava povoljnije koristiti oblik $Ce^{s_0 t}$, i u nastavku koristimo taj oblik.

Vremenski kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal

- primjenom Eulerove relacije vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal prikazujemo i kao

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(t) = Ae^{\sigma_0 t} e^{j(\omega_0 t + \theta)} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\omega_0 t + \theta) + j \sin(\omega_0 t + \theta)]$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}, \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

gdje su

A = realna amplituda kompleksnog eksponencijalnog signala

s_0 = kompleksna frekvencija

T_0 = realna osnovna perioda sinusoidnog signala

f_0 = realna osnovna frekvencija sinusoidnog signala, [Hz]

ω_0 = realna kutna (kružna) frekvencija sinusoidnog signala, [rad

σ_0 = prigušenje

θ = faza, [rad]

Primjer vremenski kontinuirane kompleksne eksponencijalne funkcije

- za $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, i $\theta = 0$, kompleksna eksponencijala je

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = Ae^{s_0 t} = Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)]$$

- neka je na primjer $\sigma_0 = -0.1$, $\omega_0 = 1$ i $A = 1$ tada je

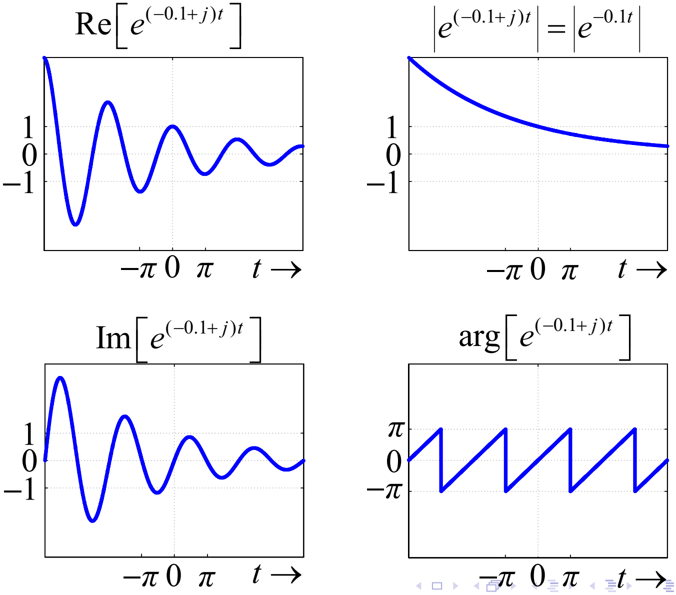
$$\forall t \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = e^{(-0.1+j)t} = e^{(-0.1t)}[\cos(t) + j\sin(t)]$$

- za danu kompleksnu eksponencijalu možemo prikazati realni i imaginarni dio, te modul i fazu[3]

[3] prikazuje se glavna vrijednost argumenta, dakle, u intervalu $-\pi < arg[e^{(-0.1+j)t}] \leq \pi$

Primjer vremenski kontinuirane kompleksne eksponencijalne funkcije



Primjena kompleksne eksponencijale $Ae^{s_0 t}$ u prikazu nekih realnih funkcija

- za $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, vremenski kontinuiranu kompleksnu eksponencijalu prikazujemo kao

$$Ae^{s_0 t} = Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)]$$

- za $s_0^* = \sigma_0 - j\omega_0$, konjugirano od s_0, vrijedi

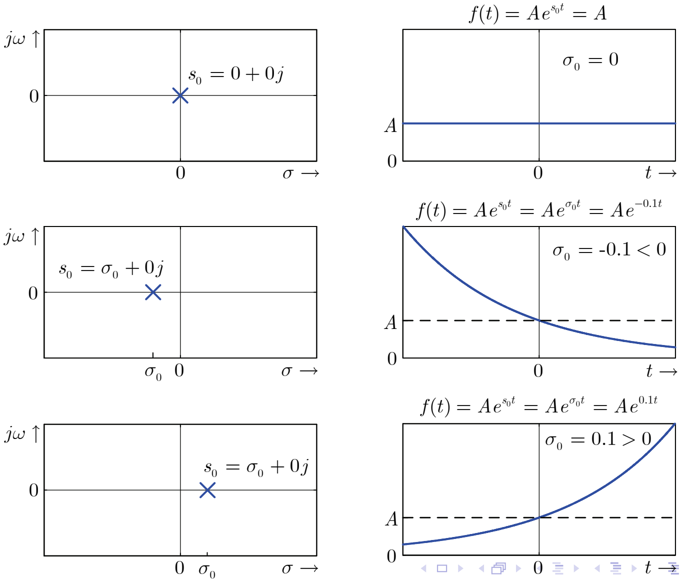
$$Ae^{s_0^* t} = Ae^{(\sigma_0 - j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\omega_0 t) - j\sin(\omega_0 t)]$$

- pa dalje slijedi kako prigušenu realnu sinusoidu možemo prikazati uz pomoć kompleksnih eksponencijala

$$Ae^{\sigma_0 t}cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}[Ae^{s_0 t} + Ae^{s_0^* t}]$$

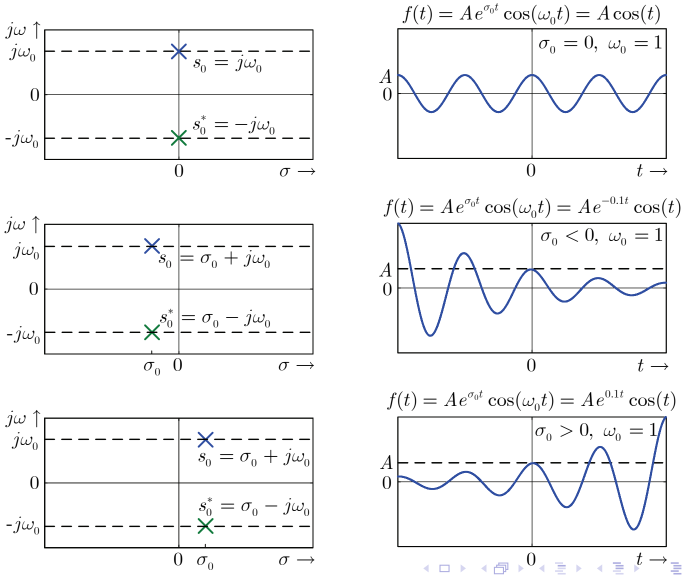
Primjena kompleksne eksponencijale Ae^{st}

Prikazuju se $Ae^{\sigma_0 t}cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}[Ae^{s_0 t} + Ae^{s_0^* t}]$ za razne σ_0 i ω_0



Primjena kompleksne eksponencijale Ae^{st}

Prikazuju se $Ae^{\sigma_0 t}cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}[Ae^{s_0 t} + Ae^{s_0^* t}]$ za razne σ_0 i ω_0



Vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal

- vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal može nastati očitavanjem vremenski kontinuiranog kompleksnog eksponencijalnog signala
- iz $f_a(t) = Ce^{(\sigma_0 + j\omega_0)t}$, slijedi za $t = nT$

$$f(n) = f_a(nT) = f_a(t)|_{t=nT}$$

odnosno

$$f(n) = Ce^{(\sigma_0 + j\omega_0)Tn} = C\left(e^{\sigma_0 T} e^{j\omega_0 T}\right)^n = Cq^n = C|q|^n e^{j\Omega_0 n}$$

gdje su

$$q = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)T}, \quad |q| = e^{\sigma_0 T}, \quad \Omega_0 = \omega_0 T$$

Vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal

- neovisno o načinu nastajanja, vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal (ili niz) prikazujemo funkcijom

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$
$$f(n) = Cq^n$$
$$\text{gdje su } C, q \in \mathbb{C}$$

- za

$$C = Ae^{j\theta}, \quad A, \theta \in \mathbb{R}, \quad A > 0$$

i

$$q = |q|e^{j\Omega_0}, \quad |q|, \Omega_0 \in \mathbb{R}$$

vremenski diskretnu kompleksnu eksponencijalu možemo prikazati kao

$$f(n) = Ae^{j\theta}|q|^n e^{j\Omega_0 n} = A|q|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta)}$$

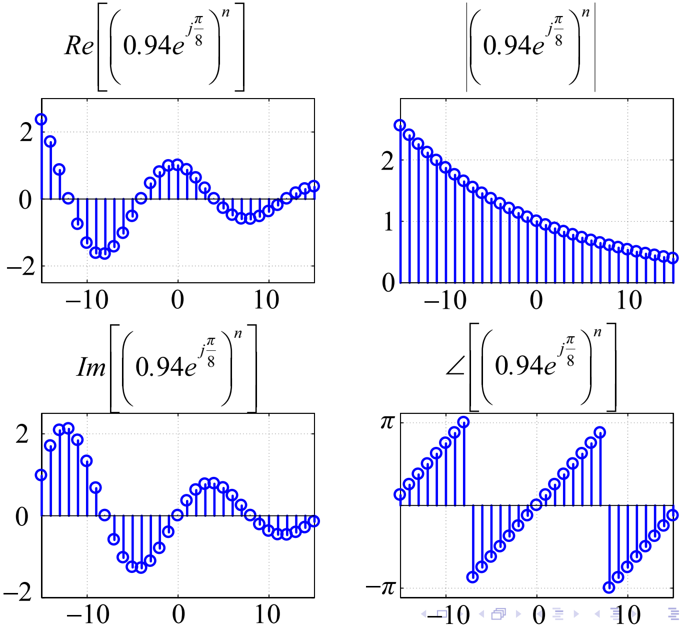
Kompleksni eksponencijalni niz

- primjenom Eulerove relacije slijedi

$$f(n) = A|q|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + jA|q|^n \sin(\Omega_0 n + \theta)$$

- $|q|$ i Ω_0 definiraju ponašanje kompleksne eksponencijale
  - za $|q| = 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi.
  - za $|q| < 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi množeni s eksponencijalom koja se prigušuje te
  - za $|q| > 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi množeni s eksponencijalom koja se raspiruje

Primjer eksponencijalnog niza



Eksponencijalni niz u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza

- za kompleksni niz

$$Aq^n = A|q|^n \cos(\Omega_0 n) + jA|q|^n \sin(\Omega_0 n)$$

- je njegov konjugirano kompleksni

$$A(q^*)^n = A|q|^n \cos(\Omega_0 n) - jA|q|^n \sin(\Omega_0 n)$$

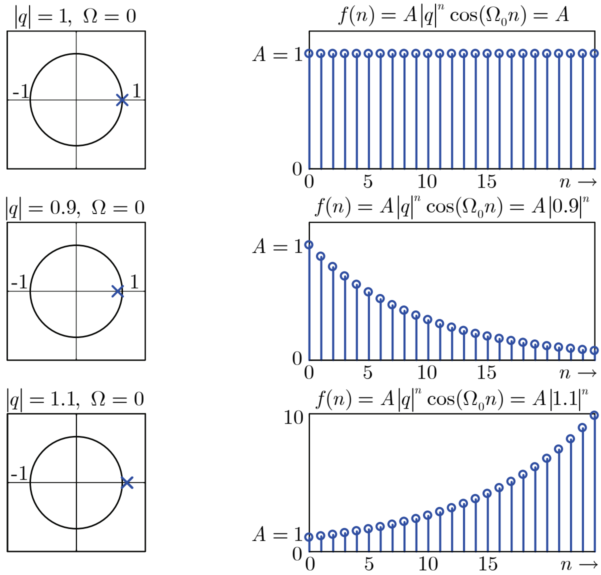
- pa vrijedi

$$A|q|^n \cos(\Omega_0 n) = \frac{1}{2}[Aq^n + A(q^*)^n]$$

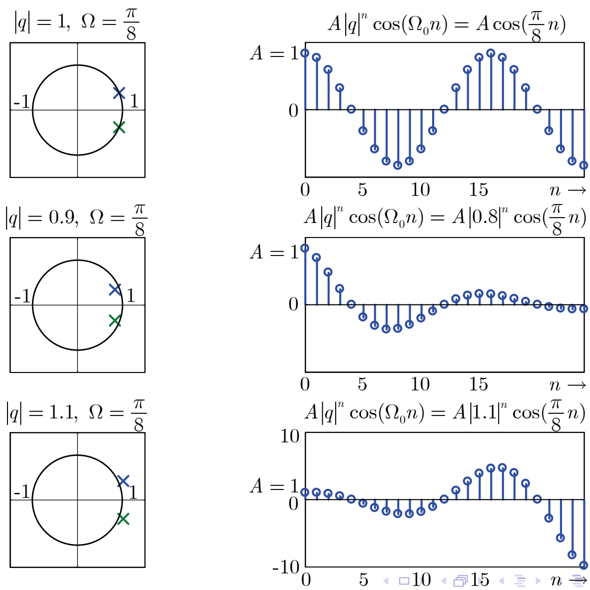
Eksponencijalni niz u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza

- analiziramo $A|q|^n \cos(\Omega_0 n)$ za razne vrijednosti $|q|$ i Ω_0
- za $\Omega_0 = 0$
  - $|q| = 1$, $|q| < 1$, $|q| > 1$
- za $\Omega_0 = \pm\frac{\pi}{8}$
  - $|q| = 1$, $|q| < 1$, $|q| > 1$

Primjena kompleksne eksponencijale Aq^n u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza



Primjena kompleksne eksponencijale Aq^n u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza



Sinusoidni signal

- neovisno o načinu nastajanja vremenski diskretna se sinusoida definira kao

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$f(n) = A\cos(\Omega_0 n + \theta) = A\cos(2\pi F_0 n + \theta) = A\cos(\frac{2\pi n}{N} + \theta)$

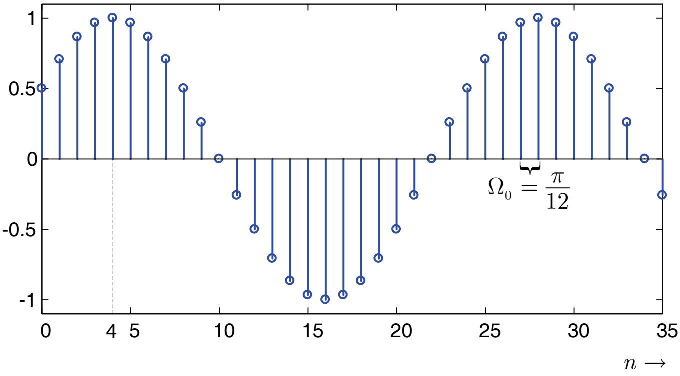
$F_0 = \frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$

gdje su $\quad N \in \mathbb{Z}, A \in \mathbb{R}$

- A je amplituda,
- Ω_0 [radijana/uzorku] je normalizirana kutna frekvencija (korak argumenta),
- θ [radijana] je faza signala,
- N je broj uzoraka jedne periode,
- F_0 je dimenzije [perioda/uzorku] i predstavlja dio periode koji odgovara jednom uzorku

Primjer realnog sinusoidnog niza

- primjer sinusoidnog niza za $\Omega_0 = \frac{\pi}{12} \Rightarrow F_0 = \frac{1}{24}$, te $\theta = -\frac{\pi}{3}$



Slika 4: $\cos(\frac{\pi}{12}n - \frac{\pi}{3})$

Periodičnost sinusoidnog niza

- niz $u(n) = \cos(\Omega_0 n + \theta)$ je periodičan ako vrijedi

$$\cos[\Omega_0(n+N)+\theta] = \cos(\Omega_0 n + \theta)$$

- izvodimo

$$\cos[\Omega_0(n+N)+\theta] = \cos(\Omega_0 n+\theta)\cos(\Omega_0 N) - \sin(\Omega_0 n+\theta)\sin(\Omega_0 N)$$

desna je strana jednaka $\cos(\Omega_0 n + \theta)$ za

$$\cos(\Omega_0 N) = 1, \quad \text{i} \quad \sin(\Omega_0 N) = 0$$

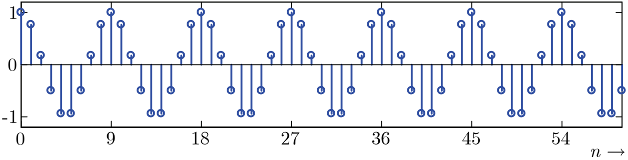
a to je, uz $N \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{Z}$, samo za

$$\Omega_0 N = 2\pi k, \quad \text{ili} \quad \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}, \quad \text{ili} \quad F_0 = \frac{k}{N}.$$

Dakle, vremenski diskretan signal je periodičan samo kada su $\frac{\Omega_0}{2\pi}$, odnosno F_0, racionalani brojevi

Primjer periodičnog i neperiodičnog sinusoidnog niza

$\cos\frac{2\pi}{9}n$

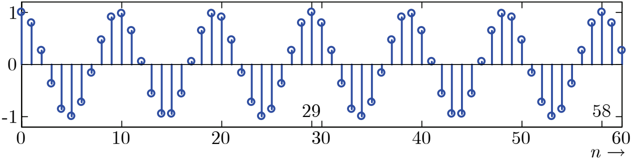


$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{9}$$

$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0}k = 9k$$

$$\text{za } k = 1 \ \Rightarrow N = 9$$

$\cos\frac{6\pi}{29}n$

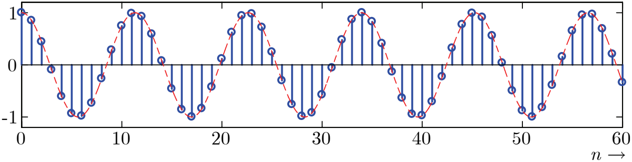


$$\Omega_0 = \frac{6\pi}{29}$$

$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0}k = \frac{29}{3}k$$

$$\text{za } k = 3 \ \Rightarrow N = 29$$

$\cos\frac{5}{9}n$



$$\Omega_0 = \frac{5}{9}$$

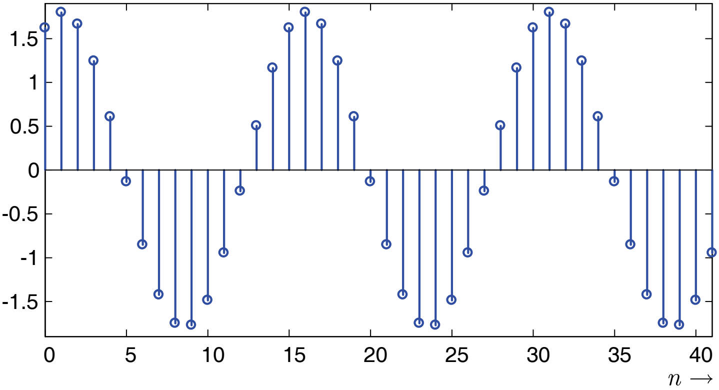
$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0}k = \frac{18\pi}{5}k$$

$$\text{za } k \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow N \notin \mathbb{N}$$

Primjer periodičnog sinusoidnog niza

- za niz $1.8\cos(\frac{2\pi}{15}n - \frac{\pi}{7})$ vrijedi

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{15} \text{ pa je } N = \frac{2\pi k}{\Omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{2}{15}\pi} = 15 \text{ za } k = 1$$

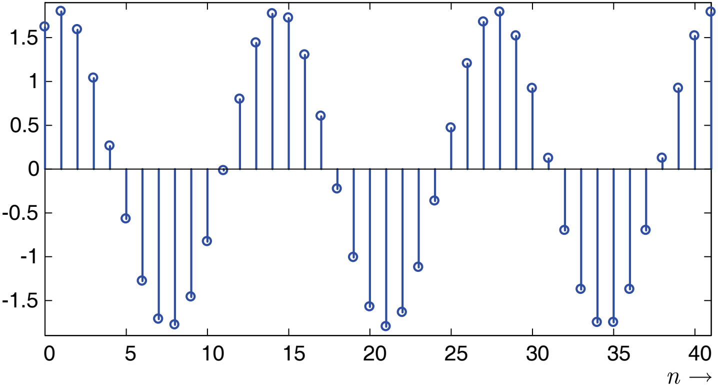


Slika 5: Periodični sinusoidni niz

Primjer neperiodičnog sinusoidnog niza

- za niz $1.8\cos(\frac{\sqrt{5}\pi}{15}n - \frac{\pi}{7})$ vrijedi

$$\Omega_0 = \frac{\sqrt{5}\pi}{15} \text{ pa je } N = \frac{2\pi k}{\Omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{\sqrt{5}}{15}\pi} = \frac{30}{\sqrt{5}}k$$



Slika 6: Neperiodičan sinusoidni niz

Nejednoznačnost valnih oblika vremenski diskretne sinusoide

- valni oblici vremenski kontinuirane sinusoide $\cos(\omega t)$ su jednoznačni za svaku realnu vrijednost ω iz intervala 0 do ∞
- u slučaju vremenski diskretne sinusoide imamo drugačiju pojavu
- razmotrimo sinusoidne signale kutne frekvencije $\Omega_0 + 2k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$

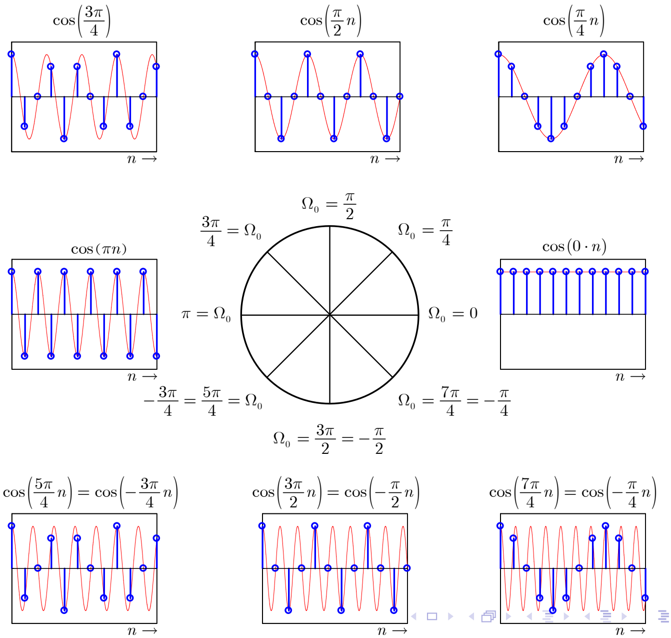
$$\cos((\Omega_0 + 2k\pi)n + \theta) = \cos((\Omega_0 n + \theta) + 2k\pi n) = \cos(\Omega_0 n + \theta)$$

- vidi se da su sinusoidni signali frekvencije $\Omega_0 + 2k\pi$ identični signalu frekvencije Ω_0
- zaključujemo kako je dovoljno razmatrati samo vremenski diskretne sinusoide čije su kutne frekvencije unutar intervala $0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$ odnosno $-\pi \leq \Omega_0 \leq +\pi$

Još o periodičnosti vremenski diskretne sinusoide

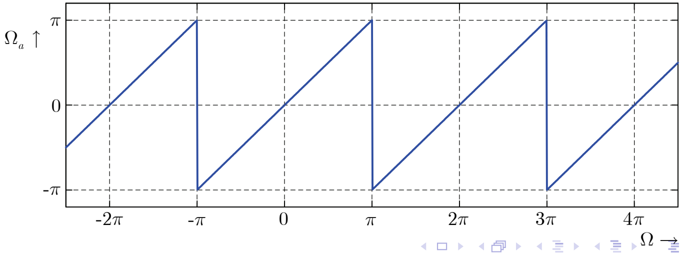
- zbog upravo pokazane periodičnosti vremenski diskretne sinusoide jasno je da ne postoji kontinuirani porast broja oscilacija ovojnice kako raste Ω_0
- na slici koja slijedi ilustrirano je kako s porastom Ω_0 od 0 prema π raste broj oscilacija, a s porastom Ω_0 od π prema 2π, smanjuje broj oscilacija
- prikazane su sinusoide $\cos(\Omega_0 n)$ za $\Omega_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$

Primjer realnog sinusoidnog niza



Još o nejednoznačnosti prikaza vremenski diskretne sinusoide

- prethodni primjer potvrđuje kako će vremenski diskretna sinusoida biti jednoznačnog valnog oblika samo za vrijednosti $\Omega \in [-\pi, \pi]$, pa se ovaj interval naziva *osnovno frekvencijsko područje*
- bilo koja frekvencija Ω bez obzira na njezinu visinu bit će identična nekoj frekvenciji Ω_a u temeljnom području $(-\pi \leq \Omega_a \leq \pi)$
- dakle, $\quad \Omega_a = \Omega - 2\pi k, \quad -\pi \leq \Omega_a \leq \pi$ i $k \in \mathbb{Z}$



Još o nejednoznačnosti prikaza vremenski diskretne sinusoide

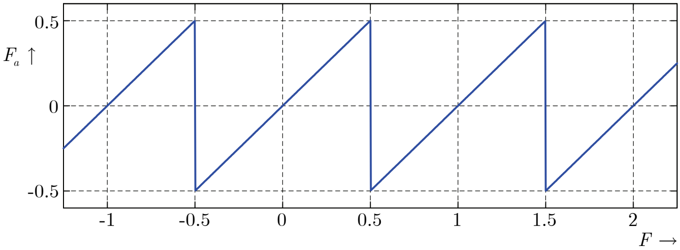
- slično se razmatranje može provesti i za prikaz sinusoide uz pomoć frekvencije F_0 koja predstavlja dio periode koja odgovara jednom uzorku
- pokazuje se da su sve sinusoide čije se frekvencije razlikuju za cjelobrojnu vrijednost identične (npr. za frekvencije 0.4, 1.4, 2.4,. . .)
- ovaj zaključak slijedi iz

$$\cos[(\Omega_0 + 2k\pi)n + \theta] = \cos(\Omega_0 n + \theta) \quad \text{za } \Omega_0 = 2\pi F_0 \text{ vrijedi}$$
$$\cos[(2\pi F_0 + 2k\pi)n + \theta] = \cos[2\pi(F_0 + k)n + \theta)] = \cos(2\pi F_0 n + \theta)$$

- jednoznačno može biti prikazana vremenski diskretna sinusoida $\cos(2\pi Fn + \theta)$ za vrijednosti F iz intervala $(-0.5 \leq F \leq 0.5)$

Veza F i F_a

- zaključujemo kako je svaka frekvencija F, bez obzira na njezin iznos, identična jednoj od frekvencija, F_a u osnovnom intervalu $(-0.5 \leq F_a \leq 0.5)$



Slika 7: Odnos F i F_a

Frekvencijski alias

- prethodna razmatranja "sugeriraju" kako za diskretne signale ne postoje frekvencije iza $|\Omega| = \pi$ ili $|F| = \frac{1}{2}$ i kako je najviša frekvencije $\Omega = \pi$ ($F = 0.5$) i najniža 0
- treba naglasiti kako frekvencije više od ovdje navedenih postoje ali se one "predstavljaju" odgovarajućom frekvencijom unutar osnovnog područja frekvencija dakle one imaju svoj "alias"
- primjer sinusoidnih signala frekvencija unutar i izvan osnovnog frekvencijskog područja ilustrira pojavu koju nazivamo, prema engleskoj terminologiji, aliasing
- pokazano je kako signal $\cos(\frac{5\pi}{4}n)$ ima svoj "alias" u $\cos(-\frac{3\pi}{4}n)$, signal ili $\cos(\frac{7\pi}{4}n)$ u $\cos(-\frac{\pi}{4}n)$

Frekvencijski alias

- zbog

$$\cos(-\Omega_0 n + \theta) = \cos[-(-\Omega_0 n + \theta)] = \cos(\Omega_0 n - \theta)$$

  zaključujemo da frekvencijsko područje $-\pi$ do 0 je identično frekvencijama u području 0 do π ali uz inverziju faze.

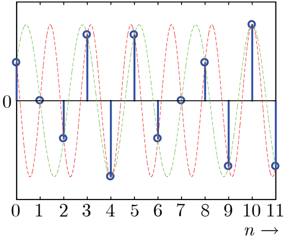
- nadalje zaključujemo da je “opažajna” frekvencija vremenski diskretne sinusoide bilo koje frekvencije jednaka nekoj frekvenciji iz područja 0 do π
- ovdje pokazujemo je

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}n - \frac{\pi}{3}\right)$$

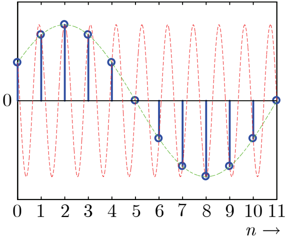
$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}n - \frac{\pi}{3}\right)$$

Frekvencijski alias

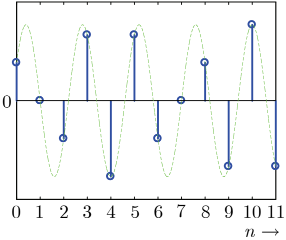
$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}n+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}n+\frac{\pi}{3}\right)$$



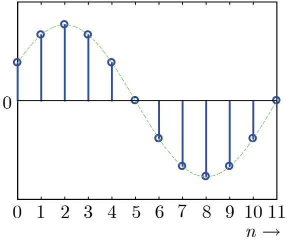
$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}n+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{3}\right)$$



$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}n-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}n+\frac{\pi}{3}\right)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{6}n-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{3}\right)$$



Očitavanje vremenski kontinuiranih signala

- očitavanjem vremenski kontinuiranog signala

$$u_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

u diskretnim trenucima vremena $t = nT$, nastaje vremenski diskretan signal

$$u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

dakle,

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ i } \forall n \in \mathbb{Z},$$
$$u(n) = u_a(t)|_{t=nT} = u_a(nT)$$

Očitavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- realna vremenski kontinuirana sinusoida definirana je kao

$$\forall t \in \mathbb{R},$$
$$u_a(t) = \cos(2\pi f t + \theta) = \cos(\omega t + \theta)$$

gdje su f frekvencija signala [Hz] i ω kutna frekvencija [rad/s]

- za $t = nT = \frac{n}{f_s} = \frac{2\pi n}{\omega_s}$ i $\forall n \in \mathbb{Z}$, slijedi

$$u(n) = u_a(nT) = \cos(2\pi f nT + \theta) = \cos(\omega T n + \theta) =$$

$$= \cos(\frac{2\pi f}{f_s} n + \theta) = \cos(\frac{2\pi\omega}{\omega_s} n + \theta) = \cos(\Omega n + \theta)$$

gdje su $f_s = 1/T$ frekvencija očitavanja i $\omega_s = 2\pi f_s$ kutna frekvencija očitavanja

Očitavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- dakle očitani signal je

$$u(n) = \cos(\Omega n + \theta), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

  pri čemu je $\Omega = \omega T$ normalizirana kutna frekvencija (ili korak argumenta) [rad/uzorku] diskretnog signala $u(n)$
- kako je ω neograničen, to će i Ω biti neograničen, pa je očigledno da se, pri očitavanju vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala, može javiti aliasing (za $|\Omega| > \pi$)
- ovdje će se razmotriti pod kojim uvjetima očitavati vremenski kontinuirani sinusoidni signal da bi se izbjegla pojava aliasinga

Jednoznačno očitavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- pri očitavanju vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala kutne frekvencije $\omega_0 = 2\pi f_0$ s frekvencijom očitavanja $f_s = \frac{1}{T}$ nastaje vremenski diskretna sinusoida (sinusoidni niz) normalizirane kutne frekvencije

$$\Omega_0 = \omega_0 T = \omega_0 \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi\omega_0}{\omega_s}$$

aliasing se ne javlja za $\Omega_0 \leq \pi$, pa iz $\frac{2\pi\omega_0}{\omega_s} \leq \pi$ slijedi

$$\omega_s \geq 2\omega_0 \quad \text{ili} \quad f_s \geq 2f_0$$

- zaključujemo: vremenski kontinuirana sinusoida će biti jednoznačno očitana ako je frekvencija očitavanja dvostruko veća od frekvencije očitavane vremenski kontinuirane sinusoide
- ovaj zaključak je specijalni slučaj *teorema očitavanja* (sampling theorem) koji će kasnije biti detaljno analiziran

Primjeri očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- očitavaju se vremenski kontinuirane sinusoide frekvencija $f_1 = 4\,kHz$, $f_2 = 20\,kHz$, $f_3 = 28\,kHz$, $f_4 = 44\,kHz$, a frekvencija očitavanja neka je $f_s = 48\,kHz$
- prethodni zaključak ukazuje da će očitavanje treće i četvrte sinusoide rezultirati aliasingom, jer frekvencija očitavanja nije dvostruko veća od frekvencije vremenski kontinuirane sinusoide
- ilustrirajmo postupak očitavanja

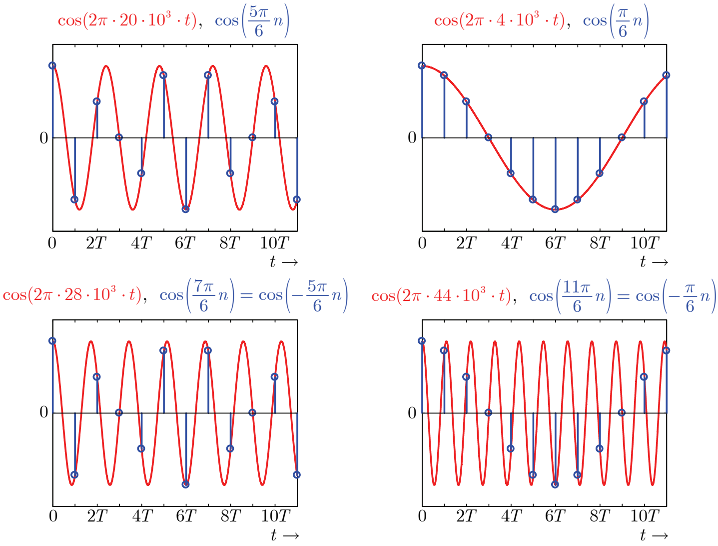
Postupak očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

$$
\begin{aligned}
&\forall t \in \mathbb{R}, \\
&u_1(t) = \cos(2\pi f_1 t) = \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot t) \\
&u_2(t) = \cos(2\pi f_2 t) = \cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot t) \\
&u_3(t) = \cos(2\pi f_3 t) = \cos(2\pi \cdot 28 \cdot 10^3 \cdot t) \\
&u_4(t) = \cos(2\pi f_4 t) = \cos(2\pi \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot t)
\end{aligned}
$$

za $t = nT = \frac{n}{f_s} = \frac{n}{48 \cdot 10^3}$

$$
\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{Z}, \\
&u_1(n) = \cos(2\pi f_1 nT) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{4 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{\pi}{6} n) \\
&u_2(n) = \cos(2\pi f_2 nT) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{20 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{5\pi}{6} n) \\
&u_3(n) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{28 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{7\pi}{6} n) = \cos(-\tfrac{5\pi}{6} n) \\
&u_4(n) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{44 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{11\pi}{6} n) = \cos(-\tfrac{\pi}{6} n)
\end{aligned}
$$

Očitavanje vremenski kontinuiranih sinusoida



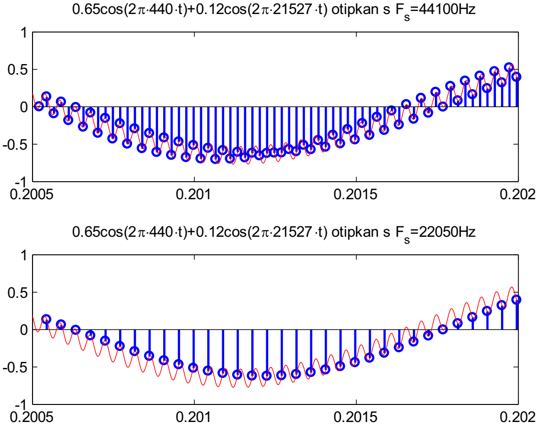
Slika 9: Aliasing kod očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala za $T = \frac{1}{48000} = 20.83\dot{3} \cdot 10^{-6}\ s$

Primjer aliasinga kod audio signala

- očitava se vremenski kontinuiran signal $0.65\cos(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 0.12\cos(2\pi \cdot 21527 \cdot t)$ frekvencijom očitavanja $f_s = 44100\,\mathrm{Hz}$
- komponenta frekvencije $f = 21527\,\mathrm{Hz}$ izvan je slušnog područja, pa je u reprodukciji čujna samo komponenta frekvencije $f = 440\,\mathrm{Hz}$ (nota A)
- pri očitavanju signala s frekvencijom $f_s = 22050\,\mathrm{Hz}$ dolazi do pojave aliasinga i komponenta frekvencije $f = 21527\,\mathrm{Hz}$ zrcali se u osnovno frekvencijsko područje kao sinusoida frekvencije $f = 21527 - 22050 = -523\,\mathrm{Hz}$ (nota C)
- u reprodukciji se čuju komponenta frekvencije $f = 440\,\mathrm{Hz}$, te komponenta frekvencije $f = 523\,\mathrm{Hz}$ koja je nastala aliasingom komponente frekvencije $f = 21527\,\mathrm{Hz}$ dakle signal $0.65\cos(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 0.12\cos(2\pi \cdot 523 \cdot t)$

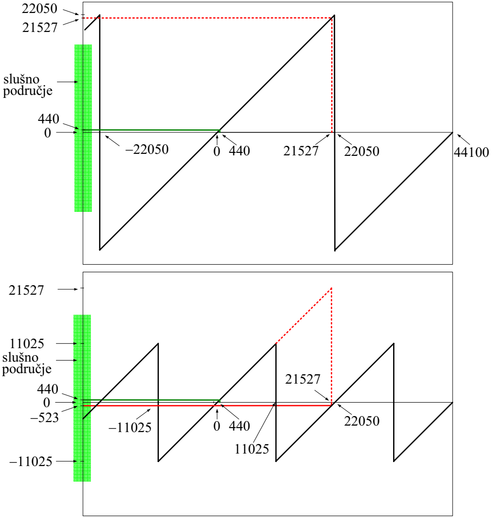
Aliasing kod audio signala

- prikazan je signal očitan frekvencijom očitavanja $f_s = 44100\,\text{Hz}$ i frekvencijom očitavanja $f_s = 22050\,\text{Hz}$



Slika 10: Aliasing kod očitavanja audio signala

Aliasing kod audio signala



Slika 11: Aliasing kod očitavanja audio signala

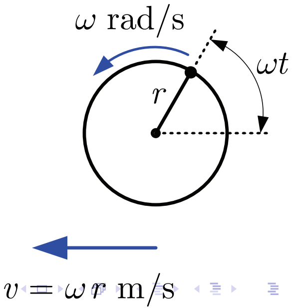
Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- u slučaju signala koji se sastoji od više vremenski kontinuiranih sinusoida očitavanje treba biti dvostruko više frekvencije od najviše frekvencije među sinusoidnim komponentama signala
- u slučaju nemogućnosti promjene frekvencije očitavanja (diskretizacije) može se pojaviti aliasing
- zanimljiv je primjer vrtnje kotača (npr. automobila Formule 1) na televizijskim ekranima gdje gledatelj često stječe dojam da se kotač povremeno vrti naprijed, povremeno nazad, a ponekad kao i da stoji na mjestu
- efekt je posljedica pojave aliasinga i biti će ilustriran narednim primjerom

Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

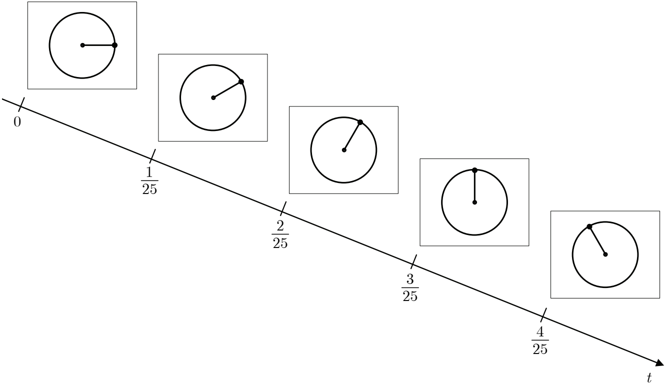
- promatra se vrtnja kotača na televizijskom ekranu (PAL sustav), što znači da se snimljena scena reproducira s taktom od 25 mirnih slika u sekundi (dakle video signal je očitan svakih $T = 1/25\,\mathrm{s}$)
- kotač se okreće kutnom frekvencijom ω rad/s, u smjeru suprotnom smjeru kazaljke na satu, čemu odgovara linearni pomak osovine kotača s desne strane ekrana u lijevo

- kutnoj frekvenciji, kotača radijusa r, odgovara linearna brzina osovine, $v = \omega r$ m/s
- rotaciju kotača pratimo preko kutnog položaja markera označenog kao na slici



Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- na ekranu se reproducira niz mirnih slika svakih $T = \frac{1}{25}$ što odgovara postupku očitavanja snimljene scene u istom taktu



Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- da bi matematički opisali poziciju markera na obodu kotača, središte kotača možemo interpretirati kao ishodište kompleksne ravnine
- u nekom trenutku t pozicija markera čini kut ωt s realnom osi kompleksne ravnine, i poziciju markera možemo opisati kompleksnom eksponencijalom $re^{j\omega t}$
- pozicija markera, kako je vidimo na ekranu, predstavlja očitavanje ove kompleksne eksponencijale, dakle $re^{jn\omega T} = re^{j\Omega n}$, gdje $\Omega = \omega T$ predstavlja kut za koji se zakrene marker od jedne do druge slike
- kako se radi o očitavanju kompleksne eksponencijale, jasno je da za sve $\Omega < \pi$ ne dolazi do pojave aliasinga
- za sve $\Omega > \pi$ javlja se aliasing i, ovisno o iznosu brzine rotacije kotača, gledatelj stječe dojam da se kotač okreće ili u smjeru, ili suprotno smjeru gibanja, odnosno da miruje (iako je vidljiv linearni pomak osovine kotača)

Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- zakretu kotača, radijusa $r = 0.31\,\mathrm{m}$, za $\Omega = \frac{\pi}{6}$, odgovara kutna frekvencija $13.09\,\mathrm{rad/s}$, te linearna brzina osovine od $v = 14.61\,\mathrm{km/h}$, što proizlazi iz

$$\Omega = \omega T = \omega \cdot \frac{1}{25} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \omega = 25 \cdot \frac{\pi}{6}$$

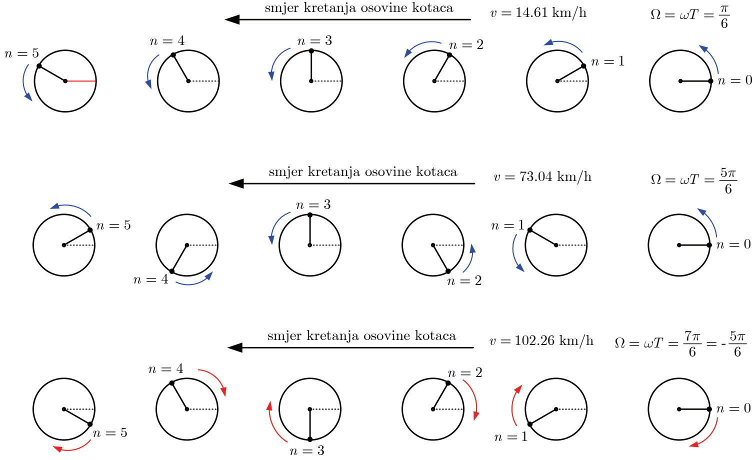
pa iz $v = \omega r$ slijedi

$$v = 25 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot r = 4.06\,\mathrm{m/s} = 14.61\,\mathrm{km/h}$$

- zakretu za $\Omega = \frac{5\pi}{6}$ odgovara kutna frekvencija $65.45\,\mathrm{rad/s}$, te linearna brzina od $v = 73.04\,\mathrm{km/h}$
- zakretu za $\Omega = \frac{7\pi}{6}$ odgovara kutna frekvencija $91.63\,\mathrm{rad/s}$, a $v = 102.26\,\mathrm{km/h}$
- aliasing nastaje pri brzinama $v > 87.65\ \mathrm{km/h}$, jer za

$$\Omega > \pi \Rightarrow v > \frac{1}{T} \cdot \Omega \cdot r = 25\pi \cdot 0.31 = 24.35\,\mathrm{m/s} = 87.65\,\mathrm{km/h}$$

Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija



Slika 12: Aliasing kod očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

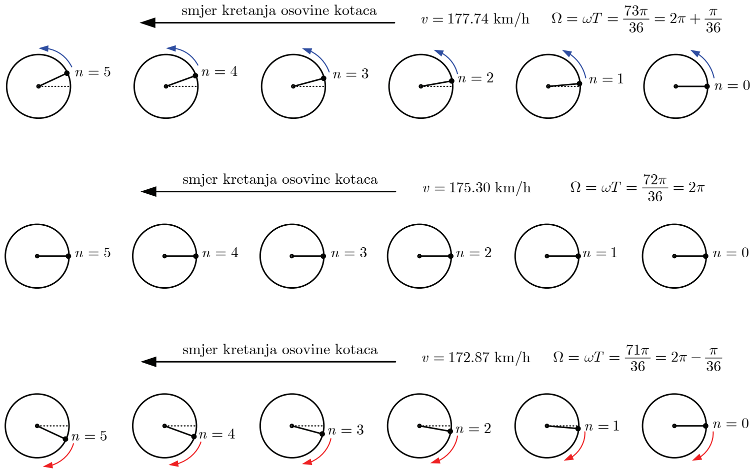
- promatramo efekt aliasinga za još veće brzine vrtnje kotača (brzine vozila)
- za brzinu vozila $v = 175.30\,\mathrm{km/h}$, odnosno $v = 48.69\,\mathrm{m/s}$, kutna frekvencija je

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{48.69}{0.31} = 157.08\,rad/s \quad \Rightarrow$$

$$\Omega = \omega T = 157.08 \cdot \frac{1}{25} = 6.2832 = 2\pi$$

  zaključujemo, između dvije slike marker kotača se zakrene za 2π, dakle cijeli okret, i gledatelj stječe dojam da kotač stoji jer marker miruje
- za brzine $v = 177.74\,\mathrm{km/h}$ i $v = 172.87\,\mathrm{km/h}$, također postoji aliasing jer su $\Omega = \frac{73\pi}{36} = 2\pi + \frac{\pi}{36}$ odnosno $\Omega = \frac{71\pi}{36} = 2\pi - \frac{\pi}{36}$, pa gledatelj opaža vrlo sporo okretanje kotača u smjeru, ili suprotno smjeru, gibanja

Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija



Slika 13: Aliasing kod očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala