Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

15. travnja 2013.

Mikrofon kao sustav

- u uvodnom predavanju je pokazano kako mikrofon – pa i svaki drugi sustav – možemo prikazati blokom

- pobuda mikrofona su zvučni signali i mogući pobudni signal neka je definiran kao:

$$NekiZvuk : Vrijeme \to Tlak$$

$$Vrijeme \subset \mathbb{R} \text{ i } Tlak \subset \mathbb{R}$$

- odziv mikrofona su električni signali i neka je odziv na pobudu *NekiZvuk* označen i definiran kao:

$$NekiMikIzlaz : Vrijeme \to Napon$$

$$Vrijeme \subset \mathbb{R} \text{ i } Napon \subset \mathbb{R}$$

Prostor signala, prostor funkcija

- skup svih zvučnih signala koji predstavljaju ulazne signale u mikrofon nazivamo prostor zvučnih signala i pišemo

$$ZvučniSignali = [Vrijeme \to Tlak]$$

slično se definira prostor signala

$$MikrofonskiIzlazi = [Vrijeme \to Napon]$$

- u općem slučaju vrijedi:
  - neka je signal $u : A \to B$
  - neka je definiran skup svih funkcija čija je domena A i kodomena B,

$$U = [A \to B] = \{\, u | \mathcal{D} = A \text{ i } \mathcal{K} = B \,\}$$
$$= \{\text{skup svih funkcija čija je domena} = \text{A, i kodomena} = \text{B}\,\}.$$

ovaj skup, s odabranim skupom skalara (iz $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$), nazivamo signalnim, ili funkcijskim, prostorom

Sustavi kao funkcije

- sustav S je funkcija i transformira ulazni signal u, u izlazni signal y, pa je

$$y = S(u)$$

- sustav S je dakle funkcija koja preslikava prostor signala u prostor signala

$$S : [D_u \to K_u] \to [D_y \to K_y]$$

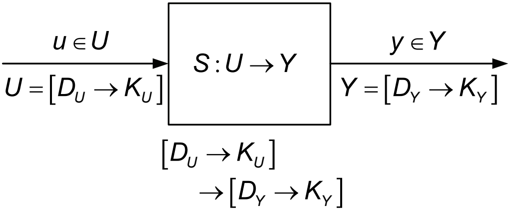
- sustav S je sveukupnost ul./izl. parova (u, y)

$$S = \{(u, y) | u \in U, y \in Y\}$$

- u je element prostora ulaznih signala a y je element prostora izlaznih signala, pa u zovemo i ulaznom a y izlaznom varijablom sustava
- ovako definirani model sustava naziva se **model ulaz–izlaz**

Sustavi kao funkcije

- sustave opisujemo blokovskim dijagramima



- sustavi su funkcije čije su domene i kodomene prostori signala
- sustav S transformira cjelokupni signal u, u cjelokupni signal y
- nadalje, ako je $w \in D_Y$ tada je

$$y(w) = S(u)(w) \in K_Y$$

Vremenski kontinuirani i vremenski diskretni sustavi

- vezano uz prije definirane klase signala *KontSignali* i *DisktSignali* definiraju se
  - klasa vremenski kontinuiranih sustava [1]

$$KontSustavi : KontSignali \to KontSignali$$

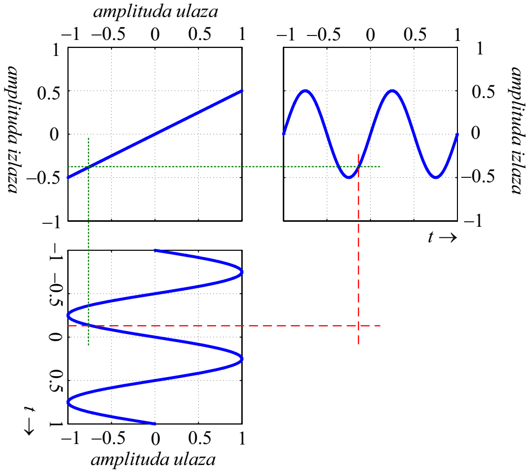
  - i klasa vremenski diskretnih sustava

$$DisktSustavi : DisktSignali \to DisktSignali$$

[1] Nezavisna varijabla nije nužno vrijeme. Korektniji bi bio naziv - po nezavisnoj varijabli kontinuirani sustavi. U ovom predmetu ostajemo kod tradicionalnog imena.

Primjer vremenski kontinuiranog sustava

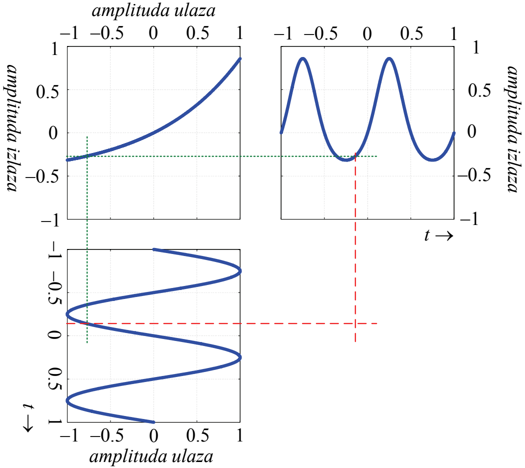
- pokazan je odziv linearnog, bezmemorijskog[2], kontinuiranog sustava, $y(t) = 0.5u(t)$, na pobudu sinusnim signalom



[2]Objašnjava se kasnije

Primjer vremenski kontinuiranog sustava

- pokazan je odziv nelinearnog, bezmemorijskog[3], kontinuiranog sustava, $y(t) = 0.5e^{u(t)} - 0.5$, na pobudu sinusnim signalom



[3] Objašnjava se kasnije

Primjer vremenski diskretnog sustava

- pokazuje se odziv sustava za usrednjavanje, definiranog linearnim vremenski diskretnim sustavom,

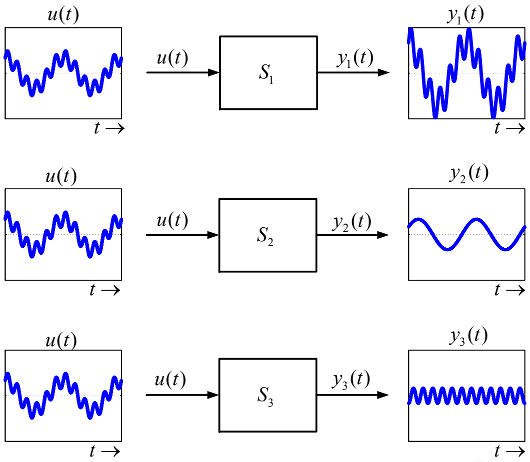
$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u(n-m) = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} u(n-m), \qquad \text{za } L = 3,$$

na pobudu vremenski diskretnim signalom kao na slici[4]

[4] radi bolje interpretacije postupka usrednjavanja, u crvenoj boji je, linearnom aproksimacijom, ulazni vremenski diskretan signal prikazan i kao vremenski kontinuiran

Ponašanje sustava određuje funkcija sustava – primjer

- dan je primjer tri različita sustava pobuđena istom pobudom i na slici su prikazana tri moguća različita odziva ovisna o tri različite funkcije sustava



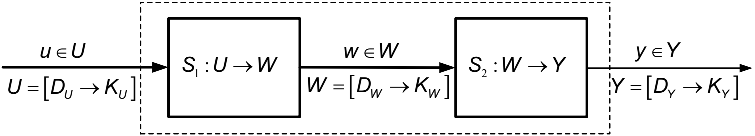
Povezivanje sustava

- spajanjem sustava grade se složeniji sustavi
- na primjeru audio sustava pokazano je, u uvodnom predavanju, da je on složen od tri sustava spojenih u kaskadu

- kaskadni, paralelni, te spoj sustava u povratnu vezu, omogućuju bilo koju kombinaciju povezivanja sustava

Kaskadni spoj sustava

- razmotrimo opis dvaju sustava u kaskadnom spoju



- funkcija S opisuje sustav koji je nastao spajanjem, u kaskadu, sustava S_1 i S_2
- uz oznake signala i oznake prostora signala na slici vrijedi

$$w = S_1(u) \quad \text{i} \quad y = S_2(w) \quad \Rightarrow y = S_2(S_1(u)) = S(u)$$

- zaključujemo kako je funkcija nastalog sustava S kompozicija funkcija S_1 i S_2

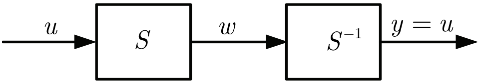
$$\forall u \in U, y = S(u) = S_2(S_1(u)) \Leftrightarrow S = S_2 \circ S_1$$

Kaskadni spoj inverznih sustava

- kompozicija funkcija nije komutativna (osim u specijalnim slučajevima)

$$S_1 \circ S_2 \neq S_2 \circ S_1$$

- ako za funkciju sustava S postoji inverzna funkcija S^{-1} tada je sustav opisan funkcijom S^{-1} inverzni sustav sustava S
- kaskadni spoj sustava i njemu inverznog sustava



rezultira u

$$\forall u \in U, \quad y = S^{-1}(S(u)) = (S^{-1} \circ S)(u) = i_U(u) = u$$

gdje je i_U identiteta, odnosno funkcija definirana kao $i_U : U \to U$.

Kaskadni spoj inverznih sustava – primjer

- za sustav S zadan kao $w = S(u) = 2u + 1$, za $u \in U$, gdje je U prostor ulaznih signala u S, određuje se inverzni sustav, te kaskadni spoj ovih sustava
- iz

$$w = S(u) = 2u + 1 \quad \Rightarrow \quad y = S^{-1}(w) = \frac{w-1}{2},$$

pa je

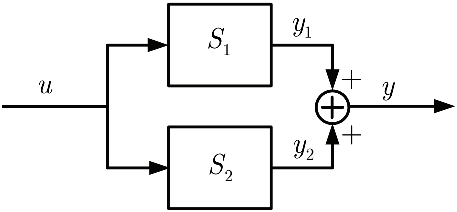
$$\begin{aligned} y = (S^{-1} \circ S)(u) = S^{-1}(S(u)) = S^{-1}(w) = S^{-1}(2u+1) \\ = \frac{(2u+1)-1}{2} = u, \end{aligned}$$

ali i

$$y = (S \circ S^{-1})(u) = S(S^{-1}(u)) = S\left(\frac{u-1}{2}\right) = 2\frac{u-1}{2} + 1 = u$$

Paralelna veza podsustava

- paralelna veza podsustava prikazana je blokovskim dijagramom

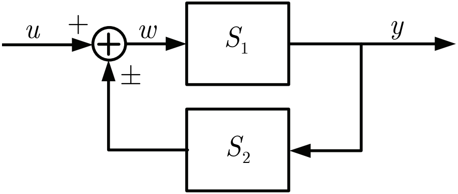


- slijede jednadžbe

$$y_1 = S_1(u), \quad y_2 = S_2(u) \Rightarrow y = S_1(u) + S_2(u)$$

Povratna veza podsustava

- povratna veza podsustava prikazana je blokovskim dijagramom

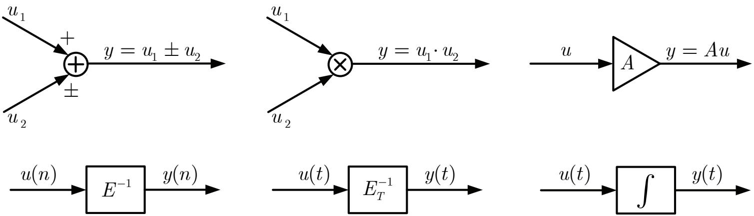


- za ovaj spoj vrijede jednadžbe

$$
\begin{aligned}
w &= u \pm S_2(y) \\
y &= S_1(w) = S_1(u \pm S_2(y)) \quad \Rightarrow \quad y = S_1(u \pm S_2(y))
\end{aligned}
$$

Osnovni blokovi

- u prikazu sustava blokovskim dijagramima koristi se skup osnovnih blokova:
    - zbrajalo s dva ili više ulaza,
    - množilo,
    - množilo s konstantom,
    - element za jedinično kašnjenje,
    - element za kašnjenje, i
    - integrator



$y(n) = u(n-1)$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

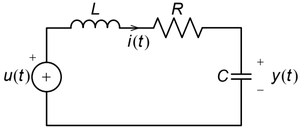
$y(t) = u(t-T)$

$\forall t \in \mathbb{R},\ T \in \mathbb{R}_+$

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\, d\lambda$

Blokovski dijagram s osnovnim blokovima – primjer

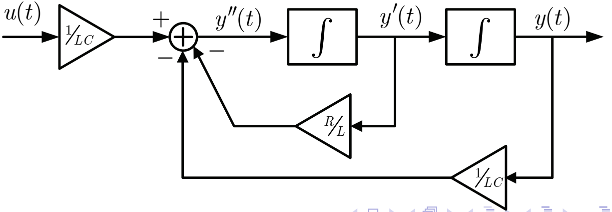
- u prvoj cjelini dan je primjer RLC električnog kruga



- diferencijalna jednadžba ovog kruga je

$$y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

a blokovski dijagram



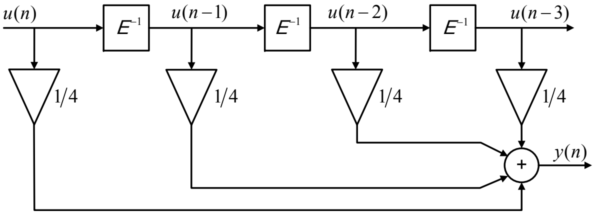
Blokovski dijagram s osnovnim blokovima – primjer

- sustav za usrednjavanje definiran na prikaznici 9,

$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u(n-m) = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} u(n-m), \qquad \text{za } L = 3,$$

$$y(n) = \frac{1}{4}u(n) + \frac{1}{4}u(n-1) + \frac{1}{4}u(n-2) + \frac{1}{4}u(n-3)$$

a blokovski dijagram



Bezmemorijski sustavi

- bezmemorijski sustav ima svojstvo da odziv sustava ovisi samo o trenutnoj vrijednosti ulaznog signala, a ne o njihovim prethodnim ili budućim vrijednostima, i možemo pisati:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = S(u)(t)$$

ili

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y(n) = S(u)(n)$$

- primjer bezmemorijskog sustava bio je primjer sa slike na prikaznici 7, definiran kao

$$y(t) = \frac{1}{2}u(t), \quad \forall t \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

Memorijski sustavi

- kauzalni[5] sustavi s beskonačnom[6] memorijom definirani su kao

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = S(u_{(-\infty,t]})(t)$$

ili

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y(n) = S(u_{(-\infty,n]})(n)$$

- oznaka $u_{(-\infty,t]}$ kazuje kako je u određivanju odziva y, u trenutku t, potrebno poznavati ulazni signal, ne samo u trenutku t, već i na cijelom intervalu $(-\infty, t]$
- ovako definirani sustavi nazivaju se memorijskim sustavima jer trenutnu vrijednost y(t) odziva određuju sve vrijednosti ulaznog signala iz intervala $(-\infty, t]$, dakle, cijela njegova "prošlost"

[5] objašnjava se nešto kasnije

[6] sustavi s konačnom memorijom (memorije T sekundi, odnosno N koraka, uz $T > 0$ i $N > 0$) definirani su kao $y(t) = S(u_{[t-T,t]})(t)$ odnosno $y(n) = S(u_{[n-N,n]})(n)$, uz $T > 0$ i $N > 0$

Memorijski sustavi

- vladanje sustava uglavnom pratimo na konačnom vremenskom intervalu $[t_0, t]$, ili $[n_0, n]$, koji nazivamo interval promatranja
- dakle, zanima nas odsječak odziva $y_{[t_0,t]}$ ili $y_{[n_0,n]}$ kao posljedica odsječka pobude $u_{[t_0,t]}$ ili $u_{[n_0,n]}$
- za sustave opisane jednadžbama diferencija, ili sustave opisane s diferencijalnim jednadžbama, rezultat pobude iz intervala $(-\infty, n_0)$ ili $(-\infty, t_0)$ može se uzeti u obzir jednim ili više brojeva α_i pa su $y(n) = S(\alpha_i, u_{[n_0,n]})(n)$ odnosno $y(t) = S(\alpha_i, u_{[t_0,t]})(t)$
- α_i sadrže informaciju o prošlosti sustava i nazivamo ih početnim uvjetima sustava
- odziv sustava za koji su svi[7] $\alpha_i = 0$, ovisan je samo o pobudi za $n_0 \geq 0$, odnosno $t_0 \geq 0$, i naziva se odziv **mirnog** sustava (engl. zero state response)

[7] ne postoji početna energija u sustavu, pa su svi početni uvjeti jednaki nuli

Primjeri memorijskih sustava

- u trećoj su cjelini razmotrene operacije integracije vremenski kontinuiranog signala i numeričke integracije ovih signala postupkom akumulacije
- ove operacije možemo realizirati sustavima koje nazivamo integrator, odnosno akumulator, a koji ovdje predstavljaju primjere memorijskih sustava
- integrator je definiran kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$$

- a akumulator kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} u(m)$$

Primjeri memorijskih sustava

- redovito poznajemo signale pobude u od nekog trenutka t_0, i odziv sustava možemo pratiti u intervalu $[t_0, t]$
- sukladno tome integrator je potrebno definirati kao

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

- u $y(t_0)$ je sadržana sva "povijest" integratora i predstavlja stanje sustava prije dovođenja poznate pobude u trenutku t_0
- zaključujemo da je, za određivanje odziva sustava u intervalu $[t_0, t]$, dovoljno poznavanje stanja sustava (početno stanje) $y(t_0)$, te sve vrijednosti pobude $u_{[t_0,t]}$
- treba napomenuti da je nevažno znati kakva je pobuda djelovala prije t_0, i što je izazvalo izlaz $y(t_0)$, jer, u $y(t_0)$ je sadržana sva "povijest" integratora (sustava) i to je dovoljan podatak u određivanju odziva od t_0 na dalje

Primjeri memorijskih sustava

- sustav za usrednjavanje definiran na prikaznici 9,

$$y(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-m),$$

  je memorijski sustav
- određujemo li odziv sustava za $n \geq n_0 = 0$, dakle za $n \in \mathbb{Z}_0^+$ potrebno je, osim pobude iz intervala $[0, n]$, poznavati i $u(-1)$, $u(-2)$, $\ldots$, $u(-L)$
- u $u(-1)$, $u(-2)$, $\ldots$, $u(-L)$ je sadržana sva "povijest" sustava za usrednjavanje i oni predstavljaju početne uvjete odnosno, zajedničkim imenom, početno stanje sustava
- u ilustraciji ovog sustava na prikaznici 9, pretpostavljeno je da je $u(-1) = u(-2) = u(-3) = 0$, i prikazan je odziv mirnog sustava

Nekauzalni sustavi

- do sada su razmatrani memorijski kauzalni sustavi,

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = S(u_{(-\infty,t]})(t)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y(n) = S(u_{(-\infty,n]})(n)$$

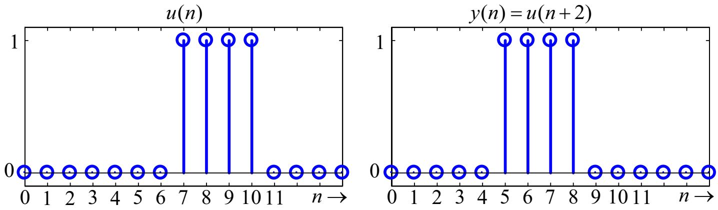
- drugim riječima, trenutni odziv sustava je bio posljedica trenutne i prošlih vrijednosti ulaznog signala
- ovdje se razmatraju nekauzalni sustavi – memorijsko-prediktivni – koji, u određivanju trenutne vrijednosti izlaza, uz prethodne vrijednosti, anticipiraju i buduće vrijednosti ulaznog signala

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ i } t < t_1 < \infty, \qquad y(t) = S(u_{(-\infty,t_1)})(t)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ i } n < n_1 < \infty, \qquad y(n) = S(u_{(-\infty,n_1)})(n)$$

Nekauzalni sustavi

- odziv nekauzalnog sustava započinje prije nego je djelovala pobuda ⇒ nekauzalni vremenski sustavi ne mogu biti realizirani u stvarnom vremenu
  - tako npr., za nekauzalni sustav zadan s jednadžbom $y(n) = u(n+2)$, odziv bi se trebao pojaviti dva koraka prije pojave pobude, što je za realne sustave, koji nemaju prediktivna svojstva, nemoguće
  - dan je prikazan odziva ovog nekauzalnog sustava na zadanu pobudu (odziv je moguće odrediti jer znamo cijelu pobudu unaprijed)



Nekauzalni sustavi

- nekauzalni vremenski sustavi su često rezultat postupaka sinteze na temelju idealiziranih zahtjeva
- nekauzalne sustave možemo koristiti u slučajevima kada je dozvoljeno kašnjenje ili kada su konačni signali prethodno pohranjeni (poznati u cijelom području definicije) i kasnije obrađivani izvan stvarnog vremena (pohranjeni signali glazbe, geofizički podaci, itd.)
- ponovimo još jednom, kako odziv nekauzalnog sustava započinje prije nego je djelovala pobuda, dakle, sustav anticipira buduću pobudu (radi predikciju)
- ilustrirajmo tu činjenicu jednim mogućim primjerom:
  - vozač prati cestu i sukladno tomu regulira brzinu automobila
  - ako zna cestu unaprijed (ili ima čitača karte) on prije nego i vidi zavoj, ili poznatu zapreku, počne unaprijed smanjivati brzinu

Vremenski stalni sustavi

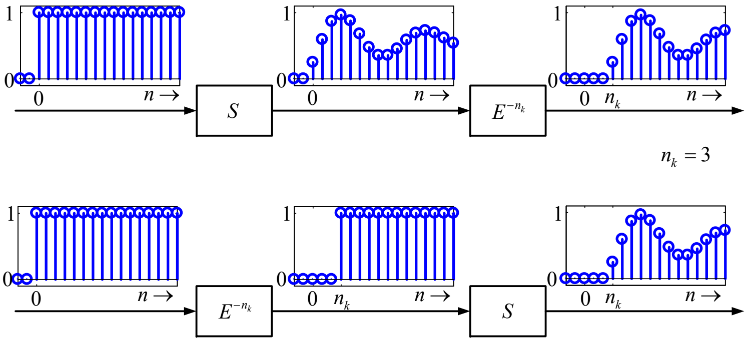
- u definiciji vremenski stalnog sustava koristi se sustav za kašnjenje[8]
- neka je E^{-n_k} vremenski diskretan sustav za kašnjenje ulaznog signala za n_k koraka
- odziv toga sustava $y(n) = E^{-n_k}(u)(n)$ definiran je kao

$$\forall n, n_k \in \mathbb{Z}, \qquad y(n) = u(n - n_k)$$

- vremenski stalni (invarijantni) sustavi su sustavi koji ne mijenjaju parametre tijekom vremena
- dakle, sustav S je vremenski stalan, ako za bilo koju pobudu $u(n)$ daje odziv $y(n)$, a za zakašnjeli ulaz $E^{-n_k}(u)(n)$ daje zakašnjeli odziv $E^{-n_k}(y)(n)$
- ovo se svojstvo ilustrira grafički

[8] Ovdje se razmatraju vremenski diskretni sustavi. Ista rasprava vrijedi i za vremenski kontinuirane sustave

Vremenski stalni sustavi



- diskretni sustav S vremenski je stalan (vremenski invarijantan) ako vrijedi[9]

$$\forall n, n_k \in \mathbb{Z} \text{ i } \forall u \qquad S(E^{-n_k}(u))(n) = E^{-n_k}(S(u))(n)$$

[9] analogno, za vremenski kontinuirani sustav, vrijedi
$\forall t, t_k \in \mathbb{R}$ i $\forall u \qquad S(E_{t_k}^{-1}(u))(t) = E_{t_k}^{-1}(S(u))(t)$

Vremenski stalni sustavi – primjer

- pokazuje se kako sustav za ekspanziju vremenski diskretnog signala nije vremenski stalan

$$y(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases} \tag{1}$$

- odziv ovog sustava $y_1(n)$ za ulaz $u_1(n) = u(n - n_k)$ je

$$y_1(n) = \begin{cases} u_1(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

$$y_1(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L} - n_k) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- s druge strane je, zamjenom n s $n - n_k$ u (1),

$$y(n - n_k) = \begin{cases} u(\frac{n-n_k}{L}) & n = n_k, n_k \pm L, n_k \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- sustav nije vremenski stalan jer je $y_1(n) \neq y(n - n_k)$

Vremenski stalni sustavi – primjer

- sustav za usrednjavanje je vremenski stalan sustav

$$y(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-m)$$

- odziv ovog sustava $y_1(n)$ za ulaz $u_1(n) = u(n-n_k)$ je

$$y_1(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u_1(n-m) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-n_k-m)$$

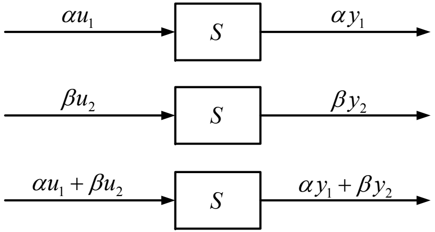
- s druge strane je

$$y(n-n_k) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-n_k-m)$$

- sustav je vremenski stalan jer je $y_1(n) = y(n-n_k)$

Linearni sustavi

- na slici je grafička interpretacija linearnosti sustava



- uz oznake na slici sustav će biti linearan ako, za $\forall \alpha$ i $\forall \beta$, vrijedi

$$y_1 = S(u_1), \quad y_2 = S(u_2)$$

$S(\alpha u_1) = \alpha S(u_1) = \alpha y_1,\ S(\beta u_2) = \beta S(u_2) = \beta y_2,$ homogenost

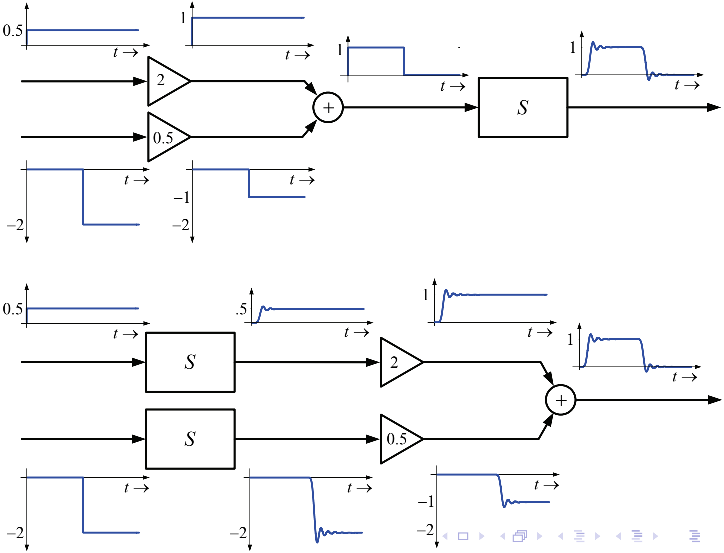
$S(\alpha u_1) + S(\beta u_2) = \alpha y_1 + \beta y_2,$ aditivnost

i finalno gornje jednadžbe mogu biti sažete u jedan izraz

$S(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha S(u_1) + \beta S(u_2),$ što je svojstvo superpozicije

Linearni sustavi – ilustracija svojstva superpozicije

- ilustriramo $S(2u_1 + 0.5u_2) = 2S(u_1) + 0.5S(u_2)$



Linearni sustavi

- linearne sustave obilježava i važno svojstvo po kojem je za ulaz jednak nula i izlaz jednak nula, pa se to svojstvo obično naziva ulaz-nula, izlaz-nula
- ovo svojstvo proizlazi izravno iz svojstva homogenosti odnosno superpozicije, za $\alpha = \beta = 0$, dakle iz

$$y = S(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha S(u_1) + \beta S(u_2), \quad \text{za } \alpha = \beta = 0 \quad \Rightarrow$$
$$y = S(0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2) = S(0) = 0 \cdot S(u_1) + 0 \cdot S(u_2) = 0$$

- ovo svojstvo je očigledno nuždan uvjet, ali ne i dovoljan, za dokaz linearnosti sustava
- treba uvijek imati u vidu kako, za realne (fizikalne) sustave, svojstvo superpozicije vrijedi samo za ograničeno područje vrijednosti konstanti α i β

Linearni sustavi – primjer

- pokazuje se linearnost sustava za usrednjavanje, opisanog s jednadžbom diferencija

$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u(n-m),$$

uz $u(-1) = u(-2) = \ldots = u(-L+1) = u(-L) = 0$.
Za
$y_1(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u_1(n-m)$,
$y_2(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u_2(n-m)$ i
$u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$, slijedi

$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L}[\alpha u_1(n-m) + \beta u_2(n-m)] =$$

$$= \alpha\frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u_1(n-m) + \beta\frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u_2(n-m) =$$

$$= \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

Linearni sustavi – primjer

- pokazuje se linearnost integratora dakle sustava opisanog s

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau$$

pokazuje se da, za

$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$,
$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\, d\tau$,
$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)\, d\tau$

vrijedi

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} [\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau)]\, d\tau = \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\, d\tau + \beta \int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)\, d\tau = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned}$$

dakle, sustav je linearan

Linearni sustavi – primjer

- ispituje se linearnost integratora dakle sustava opisanog s

$$\forall t \in [t_0, t] \subset \mathbb{R}, \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau$$

za

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t),$$
$$y_1(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_1(\tau)\, d\tau,$$
$$y_2(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_2(\tau)\, d\tau$$

vrijedi

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} [\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau)]\, d\tau =$$
$$= y(t_0) + \alpha \int_{t_0}^{t} u_1(\tau)\, d\tau + \beta \int_{t_0}^{t} u_2(\tau)\, d\tau \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

- slično – neočekivano – bi se pokazalo da sustav opisan s jednadžbom $y(n) = au(n) + b$, također nije linearan

Linearni sustavi – primjer

- razmotrimo još jednom integrator zadan kao

$$\forall t \in [t_0, t] \subset \mathbb{R}, \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau$$

- odziv ovog, i svakog drugog sustava, možemo razložiti na dvije komponente:
    - komponentu odziva koja je posljedica početnog stanja sustava i ne ovisi o pobudi – odziv nepobuđenog sustava i,
    - komponentu odziva koji je posljedica isključivo pobude i ne ovisi o početnim uvjetima – odziv mirnog sustava
- odziv možemo razložiti kao

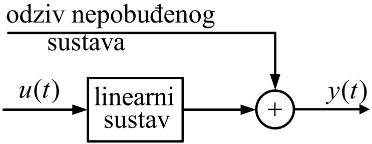
$$y(t) = \underbrace{y(t_0)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

Linearni sustavi – primjer

- uvidom u

$$y(t) = \underbrace{y(t_0)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

očigledno je da dio koji predstavlja odziv mirnog sustava predstavlja odziv linearnog sustava pa strukturu ovog sustava možemo prikazati kao



- sustavi kod kojih je cjelokupni odziv superpozicija odziva linearnog sustava i odziva nepobuđenog sustava nazivaju se inkrementalno linearni sustavi

Signali i sustavi
školska godina 2012/2013
Cjelina 8.

Profesor Branko Jeren

Stabilni i nestabilni sustavi

- u drugoj cjelini je pokazano kako je signal f omeđen ako postoji konačan broj $M_f < \infty$ takav da je $|f(w)| \leq M_f$ za $\forall w \in PodručjeDefinicije(f)$
- sustav je BIBO stabilan (engl. Bounded Input Bounded Output) ako je za svaki omeđeni ulaz njegov odziv također omeđen
- dakle za stabilan vremenski kontinuiran sustav vrijedi

$$|u(t)| \leq M_u < \infty \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leq M_y < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

a za stabilan vremenski diskretan sustav vrijedi

$$|u(n)| \leq M_u < \infty \quad \Rightarrow \quad |y(n)| \leq M_y < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

- ovo je definicija tzv. vanjske stabilnosti sustava (definirane pomoću ulaza i izlaza)
- o unutarnjoj stabilnosti sustava biti će govora kasnije

Stabilni i nestabilni sustavi – primjeri

- inkrementalno linearan sustav,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = 7u(t) + 6,$$

je za, $|u(t)| \leq M_u < \infty$, BIBO stabilan jer vrijedi

$$y(t) \leq 7M_u + 6 = M_y, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- ispituje se BIBO stabilnost diskretnog sustava, $y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u(n-m)$.

$$\text{Za } |u(n)| \leq M_u, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$$

$$|y(n)| \leq \frac{1}{L+1}(L+1)M_u, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

pa je ovaj sustav BIBO stabilan

Stabilni i nestabilni sustavi – primjeri

- integrator je definiran kao sustav s:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau,$$

- pobudimo li integrator s jediničnim skokom $u(t) = \mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, odziv će biti

$$y(t) = t\mu(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0. \end{cases}$$

- očigledno je kako odziv $y(t)$ nije omeđen i integrator nije BIBO stabilan sustav