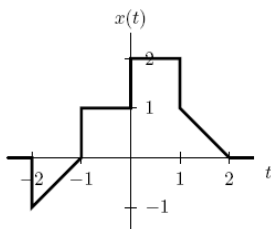


Signali i sustavi

Zadaci za vježbu

III. tjedan

1. Zadan je kontinuirani signal prikazan slikom.



Odredite:

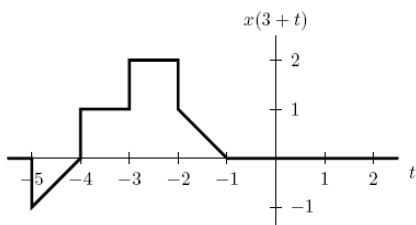
a. $2x(3 - \frac{t}{2}) + 1,$

b. $x(t-1) \left[\delta\left(t - \frac{4}{3}\right) - 2\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \mu(1-t) \right].$

Rješenje:

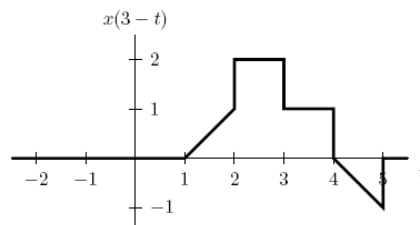
a) Kako bi našli rješenje, zadani signal je potrebno vremenski pomaknuti, invertirati i komprimirati, te zatim promijeniti amplitudu i pomaknuti po ordinati.

1. Vremenski pomak $x(3+t)$:



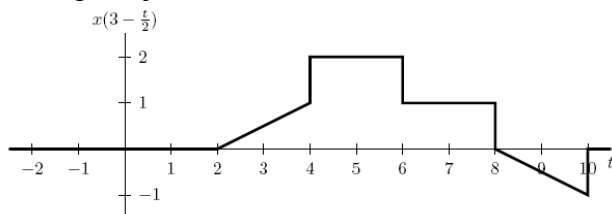
signal se pomiče za 3 koraka ulijevo

2. Vremenska inverzija $x(3-t)$:



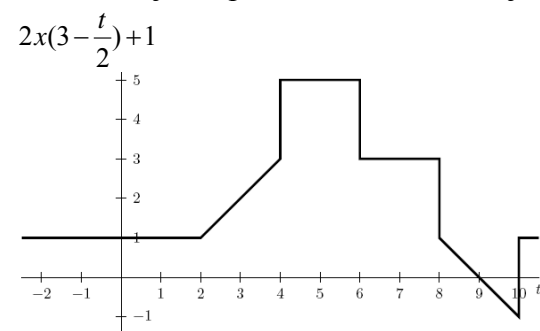
signal se zrcali oko ordinate

3. Ekspanzija $x(3-t/2)$:

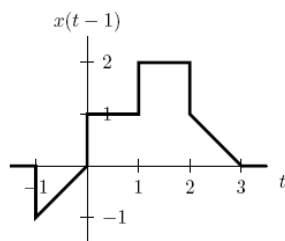


signal se proširuje dva puta

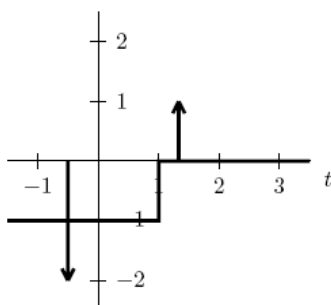
4. Množenje amplitude s 2 i dodavanje 1:



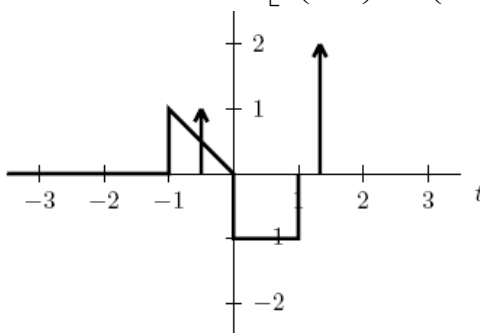
b) Traženi signal je umnožak 2 signala. Prvi signal je $x(t-1)$ dobiven vremenskim pomakom zadanog $x(t)$:



Drugi signal je zbroj 2 vremenski pomaknuta impulsa i vremenski pomaknute inverzne step funkcije $\delta\left(t - \frac{4}{3}\right) - 2\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \mu(1-t)$:



Ako se pomnože ova dva signala dobije se $x(t-1)\left[\delta\left(t - \frac{4}{3}\right) - 2\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \mu(1-t)\right]$:



2. Odredite je li zadani diskretan sustav vremenski nepromjenjiv, linearan:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n \frac{u(k)}{n-k}.$$

RJEŠENJE:

- VREMENSKA NEPROMJENJIVOST

$$\text{neka je } y_1(n) = S(u(n-N)) = \sum_{k=-\infty}^n \frac{u(k-N)}{n-k}$$

$$\text{○ druge strane } y(n-N) = \sum_{k=-\infty}^{n-N} \frac{u(k)}{n-N-k} = \sum_{m=-\infty}^n \frac{u(m-N)}{n-m} = y_1(n)$$

JEDNAKO

VREMENSKI NEPROMJENJIVO

- LINEARNOST

$$\text{neka je } y_1(n) = S(u_1(n)) = \sum_{k=-\infty}^n \frac{u_1(k)}{n-k}$$

$$y_2(n) = S(u_2(n)) = \sum_{k=-\infty}^n \frac{u_2(k)}{n-k}$$

$$\text{za } u(n) = a u_1(n) + b u_2(n)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^n \frac{a u_1(k) + b u_2(k)}{n-k} = a \sum_{k=-\infty}^n \frac{u_1(k)}{n-k} + b \sum_{k=-\infty}^n \frac{u_2(k)}{n-k} \\ &= a y_1(n) + b y_2(n) \end{aligned}$$

SUSTAV JE LINEARAN.

3. Odredite je li zadani kontinuirani sustav vremenski nepromjenjiv, linearan i memorijski:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) u(t-\tau) d\tau.$$

RJEŠENJE:

- VREMENSKA NEPROMJENJIVOST

neka je $y_1(t) = S(u(t-T)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) u(t-T-\tau) d\tau$

iz druge strane $y(t-T) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) u(t-T-\tau) d\tau$

$$y_1(t) = y(t-T)$$

SUSTAV JE VREMENSKI NEPROMJENJIV

- LINEARNOST

neka je $y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) u_1(t-\tau) d\tau$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) u_2(t-\tau) d\tau$$

definiramo $u(t) = a u_1(t) + b u_2(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) [a u_1(t-\tau) + b u_2(t-\tau)] d\tau \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) u_1(t-\tau) d\tau + b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \mu(-\tau) u_2(t-\tau) d\tau \\ &= a y_1(t) + b y_2(t) \end{aligned}$$

SUSTAV JE LINEARAN

- MEMORIJA

sustav može biti zapisan kao $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(t-\tau) d\tau$

sustav IMA MEMORIJU jer moramo $y(t)$ znati u obzir sve buduće vrijednosti ulaza.

4. Zadan je diskretan sustav A s jednim ulazom i jednim izlazom (SISO). Ukoliko na ulaz ovog sustava dođe signal $x_1(n)$, pripadajući izlaz poprima vrijednost $y_1(n)$, a ako je na ulazu $x_2(n)$ izlaz je $y_2(n)$:

$$x_1(n) = (-1)^n \rightarrow y_1(n) = 1, \text{ za svaki } n,$$

$$x_2(n) = (-1)^{n+1} \rightarrow y_2(n) = 1, \text{ za svaki } n.$$

Zadan je i diskretan SISO sustav B . Ukoliko na taj sustav dođu signali na ulaz $x_3(n)$ i $x_4(n)$, pripadajući izlazi $y_3(n)$ i $y_4(n)$ dani su s:

$$x_3(n) = (-1)^n \rightarrow y_3(n) = 1, \text{ za svaki } n,$$

$$x_4(n) = (-1)^{n+1} \rightarrow y_4(n) = -1, \text{ za svaki } n.$$

Odredite mogu li sustavi A i B biti linearni i vremenski nepromjenjivi.

Rješenje:

a) A NE MOŽE biti linearan.

$$x_2(n) = -x_1(n) \quad \text{ali} \quad y_2(n) \neq -y_1(n)$$

ovaj test homogenosti linearnih sustava NIJE zadovoljen.

b) A MOŽE biti vremenski nepromjenjiv.

$$x_2(n) = x_1(n - n_0) \quad \text{za neki neparan } n_0$$

↓

$$y_2(n) = y_1(n - n_0)$$

c) B MOŽE biti linearan

$$x_2(n) = -x_1(n) \rightarrow y_2(n) = -y_1(n)$$

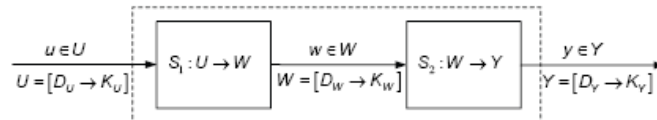
ovaj test homogenosti linearnih sustava JE zadovoljen

d) B NE MOŽE biti vremenski nepromjenjiv.

$$x_2(n) = x_1(n - 1) \rightarrow \text{ali} \rightarrow y_2(n) \neq y_1(n - 1)$$

5. Promatraju se dva sustava S_1 i S_2 spojena u kaskadni spoj. Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite. Ukoliko nisu istinite navedite primjer koji to potvrđuje.
- Ako su oba sustava S_1 i S_2 linearna, vremenski nepromjenjiva, hoće li i njihov kaskadni spoj biti linearan i vremenski nepromjenjiv?
 - Ako su oba sustava S_1 i S_2 nelinearna, je li i njihov kaskadni spoj nužno nelinearan?
 - Ako su oba sustava S_1 i S_2 vremenski promjenjiva, je li i njihov kaskadni spoj nužno vremenski promjenjiv?

Rješenje:



- a. Linearnost:

Ako je ulaz u prvi sustav S_1 : $au_1(n) + bu_2(n)$, izlaz iz njega je $aw_1(n) + bw_2(n)$, uzevši u obzir svojstvo linearnosti. Ovaj izlaz je automatski ulaz u sljedeći sustav S_2 . Uzevši u obzir da je i taj sustav linearan, izlaz je: $ay_1(n) + by_2(n)$. Znači, ako je svaki podsustav linearan, i njihov kaskadni spoj je linearan.

Vremenska nepromjenjivost:

Ako je $u(n-n_0)$ ulaz u vremenski nepromjenjiv sustav S_1 , izlaz će biti $w(n-n_0)$. Odziv vremenski nepromjenjivog sustava S_2 na ovaj ulaz će biti $y(n-n_0)$. Znači, ako je svaki podsustav vremenski nepromjenjiv, i njihov kaskadni spoj će biti vremenski nepromjenjiv.

- b. Ako su S_1 i S_2 nelinearni sustavi nije nužno da će i njihov kaskadni spoj biti nelinearan, nelinearnost drugog sustava može poništiti nelinearnost prvog. Dovoljno je pokazati primjer:

$$w(n) = S_1\{u(n)\} = e^{u(n)}$$

$$y(n) = S_2\{w(n)\} = \log(w(n))$$

Svaki od sustava je nelinearan, ali njihova kaskada je linearna:

$$y(n) = S_2(S_1(u(n))) = \log(e^{u(n)}) = u(n).$$

- c. Ako su S_1 i S_2 vremenski promjenjivi sustavi nije nužno da će i njihov kaskadni spoj biti vremenski promjenjiv. Dovoljno je pokazati primjer koji to potvrđuje:

$$w(n) = u(n)e^{jn\omega_0}$$

$$y(n) = w(n)e^{-jn\omega_0}$$

Oba sustava su vremenski promjenjiva, ali njihov kaskadni spoj nije:

$$y(n) = S_2(S_1(u(n))) = u(n)e^{jn\omega_0}e^{-jn\omega_0} = u(n).$$

DODATNI ZADACI

Provjerite jesu li zadani sustavi linearni i vremenski nepromjenjivi.

$$1. \ y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

$$2. \ y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$3. \ y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(3n+2)$$

$$4. \ y(t) = \frac{u(t)}{1+u(t-1)}$$

RJEŠENJA:

1. linearno, vremenski nepromjenjivo
2. linearno, vremenski promjenjivo
3. linearno, vremenski promjenjivo
4. nelinearno, vremenski nepromjenjivo, ima memoriju