Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

II. tjedan

Periodičnost signala

1. Koji su od sljedećih kontinuiranih signala periodički? Za one koji jesu, izračunajte temeljni period.
   a. $\cos^2(t)$,
   b. $\cos(2\pi t)\mu(t)$,
   c. $e^{j\pi t}$,
   d. $\cos(t^2)$,
   e. $e^{j\omega_0 t}$.

2. Jesu li sljedeći diskretni signali periodički? Ako jesu, izračunajte temeljni period.
   a. $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$,
   b. $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$,
   c. $\cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$.

Energija signala

3. Izračunajte energiju sljedećih kontinuiranih signala:
   a. $x(t) = e^{-at}\mu(t),\ a > 0$,
   b. $x(t) = t\mu(t)$.

4. Nađite energiju sljedećih diskretnih signala:
   a. $x(n) = (-0.5)^n \mu(n)$,
   b. $x(n) = n\big(\mu(n) - \mu(n-5)\big)$.

Snaga signala

5. Izračunajte snagu kontinuiranog signala

$$x(t) = e^{j2\pi t} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

6. Nađite snage diskretnih signala:
   a. $x(n) = \mu(n)$,
   b. $x(n) = 2e^{j3n}$.

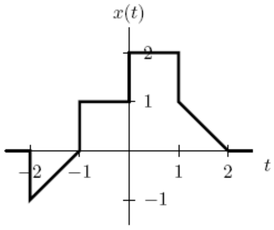
Produkt signala

7. Dani su signali *x(t)* i *y(t)*. Skicirajte produkt ova dva signala na intervalu $t \in [-2,2]$.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \sin(4\pi t) \geq 0, \\ -1, & \sin(4\pi t) < 0. \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} t, & \sin(\pi t) \geq 0, \\ -t, & \sin(\pi t) < 0. \end{cases}$$

Pomak, inverzija, ekspanzija signala, kauzalnost

8. Zadan je kontinuirani signal prikazan slikom.



Odredite:

a. $2x(3-\frac{t}{2})+1$,

b. $x(t-1)\left[\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)\right]$.

c. Da li je zadani signal *x(t)* kauzalan, antikauzalan ili nekauzalan?

Parnost signala

9. Nađite parni i neparni dio sljedećih kontinuiranih signala:

a. $x(t)=2t^2-3t+6$,

b. $x(t)=\frac{2-t}{1+t}$.

10. Nađite parni i neparni dio sljedećeg diskretnog signala:

a. $x(n)=\delta(n)$.

11. Dokažite da je produkt dva parna (dva neparna) signala paran signal, a produkt parnog i neparnog signala neparan signal.

Napomena:

Vremenski diskretan jedinični skok μ definiran je kao

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \mu(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0,\\ 0, & n<0.\end{cases}$$

Vremenski kontinuiran jedinični skok μ definiran je kao

$$\forall t \in Realni, \quad \mu(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Vremenski diskretan jedinični impuls δ definiran je kao

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \mu(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

Vremenski kontinuiran jedinični impuls δ definiran je kao

$$\forall t \in Realni, \quad \begin{cases}\delta(t)=0 \ \text{za} \ t\neq 0,\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1.\end{cases}$$

1. Koji su od sljedećih kontinuiranih signala periodički? Za one koji jesu, izračunajte temeljni period.
   a. $\cos^2(t)$,
   b. $\cos(2\pi t)\mu(t)$,
   c. $e^{j\pi t}$,
   d. $\cos(t^2)$,
   e. $e^{j\omega_0 t}$.

STJEPAN MAJIĆ
0036355418

① a) $\cos^2(t)$

Vrijedi trigonometrijska relacija $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Stoga,

$x(t) = \cos^2(t) = \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} = x_1(t) + x_2(t)$

$x_1(t) = \frac{1}{2}$ ima slobodno izabrani period

$x_2(t) = \frac{\cos 2t}{2}$ ima period (općenito) $T = \frac{2\pi}{\omega}$. U ovom slučaju

$\omega = 2$ pa vrijedi $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ODGOVOR: $\cos^2(t)$ je periodički signal s periodom $T = \pi$

b) $\cos(2\pi t)\mu(t)$

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$

$\cos(2\pi t)\mu(t)$ za $t<0$ signal ima vrijednost nula (ϕ),

a za $t>0$ $\cos(2\pi t)$. Signal NIJE periodički.

STJEPAN ?AJIĆ
0036355348

① c) $e^{j\pi t}$

$x(t+T) = e^{j\pi(t+T)}$; za periodične signale vrijedi $x(t) = x(t+T)$

pa slijedi $e^{j\pi(t+T)} = e^{j(\pi t + 2k\pi)} \Rightarrow \pi \cdot T = 2\pi k$ (za $k=1$)

$\boxed{T=2}$

ODGOVOR: $e^{j\pi t}$ je periodički signal s periodom $T=2$.

d) $\cos(t^2)$

$x(t+T) = \cos((t+T)^2) = \cos(t^2 + 2tT + T^2)$

Da bi $\cos(t^2)$ bio periodičan signal mora vrijediti

$$2tT + T^2 = 2\pi k \Rightarrow \frac{T(2t+T)}{2\pi} = k \quad , k \in \mathbb{N}$$

Ne postoji konstantna vrijednost T koja bi dala za k prirodan broj pa $\cos(t^2)$ nije periodična funkcija.

e)

R: Signal je periodičan ako $x(t+T) = x(t)$

$$\Rightarrow e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow$$

$$e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow e^{j\omega_0 T} = 1$$

- za $\omega_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 1$ - periodičan za $\forall T$.

- za $\omega_0 \neq 0 \Rightarrow \omega_0 T = 2\pi m, \; m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$T = m \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$\Rightarrow$ Temeljni period T_0 je najmanji $T \Rightarrow$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

2. Jesu li sljedeći diskretni signali periodički? Ako jesu, izračunajte temeljni period.

   a. $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$,

   b. $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$,

   c. $\cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$.

STJEPAN DAJIĆ
0036355418

2 a) $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$

$x(n+N) = \cos\left(\pi(n+N) + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi n + \pi N + \frac{\pi}{4}\right)$

$x(n) = x(n+N)$ je u slučaju kada je $\pi N = 2\pi k$ tj. $N = 2k$,

znači period je $N_0 = 2$.

ODGOVOR: $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$ je periodički signal s periodom 2.

b) $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$

$x(n+N) = \cos\left(\frac{\pi}{8}(n+N)^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n^2 + \frac{2\pi}{8}nN + \frac{\pi}{8}N^2\right) =$

$= \cos\left(\frac{\pi n^2}{8} + \frac{\pi}{8}(2nN + N^2)\right)$

Kako bi signal bio periodičan moramo pronaći N za koji vrijedi $\frac{\pi}{8}(2nN + N^2) = 2\pi k \Rightarrow \frac{N}{16}(N + 2n) = k$

Navedena jednakost je zadovoljena za $N_0 = 8$.
Stoga je signal periodičan s periodom 8.

c)

$x(n) = \cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$

$x(n+N) = \cos\left(\frac{n+N}{3} + 1\right) = \cos\left(\frac{n}{3} + 1 + \frac{N}{3}\right)$

$\frac{N}{3} = 2k\pi$

$N = 6k\pi \notin \mathbb{N}$ nije period

3. Izračunajte energiju sljedećih kontinuiranih signala:
    a. $x(t) = e^{-at}\mu(t),\ a > 0$,
    b. $x(t) = t\mu(t)$.

a) $x(t) = e^{-at}\mu(t),\ a>0$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$$

b) $x(t) = t\mu(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |t\mu(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\infty} = \infty$$

4. Nađite energiju sljedećih diskretnih signala:
    a. $x(n) = (-0.5)^n \mu(n)$,
    b. $x(n) = n\big(\mu(n) - \mu(n-5)\big)$.

a)

R:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3} < \infty$$

$\Rightarrow$ signal $x(n)$ je signal energije, tj. energija dobro karakterizira dani signal.

b)

$x(n) = n(\mu(n) - \mu(n-5))$

$$E = \sum_{n=0}^{4} n^2 = 0+1+4+9+16 = 30$$

5. Izračunajte snagu kontinuiranog signala

$$x(t) = e^{j2\pi t} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| e^{j2\pi t} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \right|^2 dt =$$

$$\left|e^{j2\pi t}\right| = \left|\cos 2\pi t + j\sin 2\pi t\right| = \sqrt{\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t} = 1$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2\left(t + \frac{\pi}{3}\right) dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 - \cos 2\left(t + \frac{\pi}{3}\right)}{2} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} dt + \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos 2\left(t + \frac{\pi}{3}\right) dt \right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} + \frac{1}{4} \sin T \right] = \frac{1}{2}$$

6. Nađite snage diskretnih signala:
   a. $x(n) = \mu(n)$,
   b. $x(n) = 2e^{j3n}$.

a) $x(n) = \mu(n)$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1^2 =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot (N+1) = \lim_{N\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{N}}{2 + \frac{1}{N}} = \frac{1}{2}$$

b) $x(n) = 2e^{j3n}$

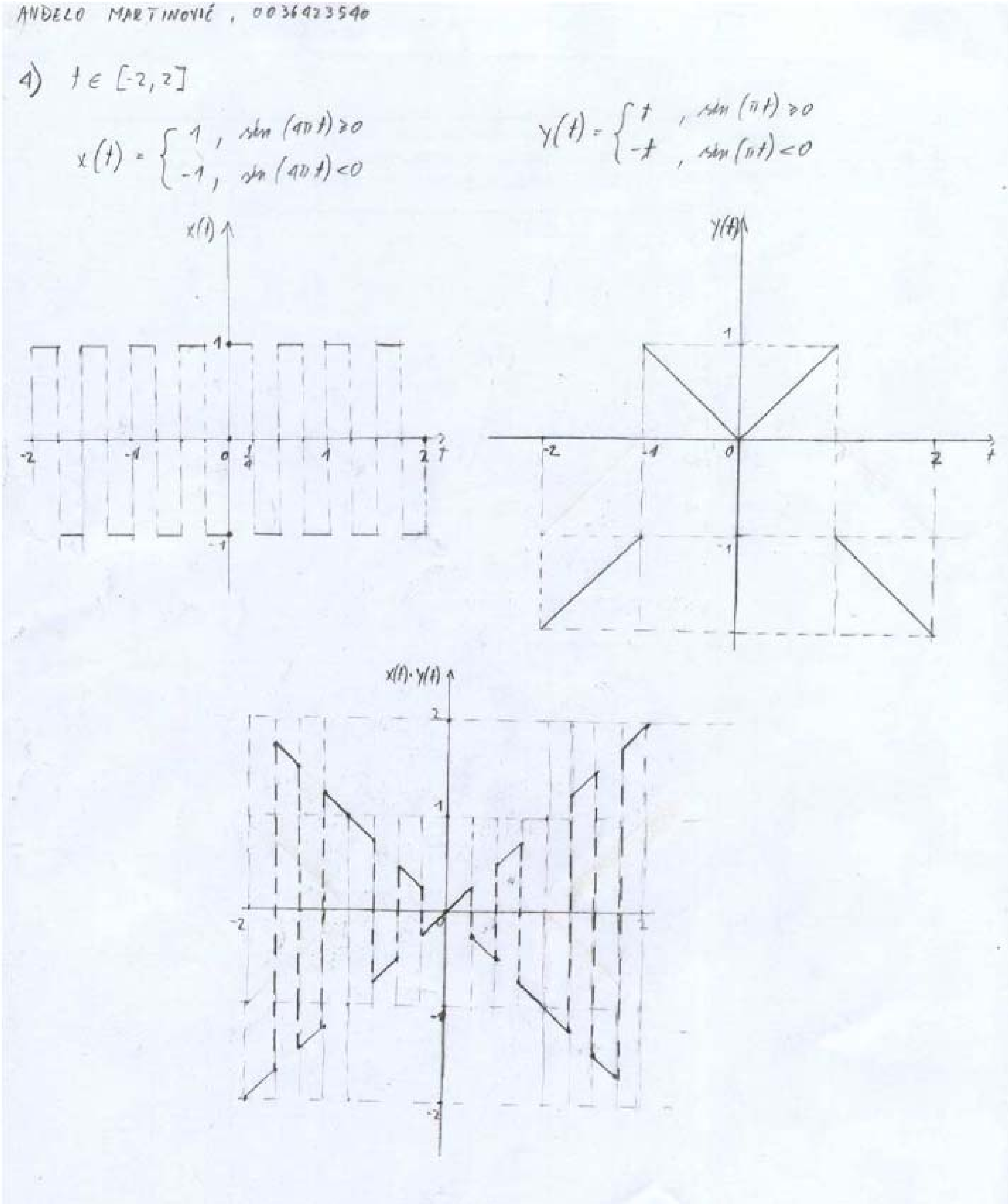
$$|x(n)| = |2e^{j3n}| = 2|e^{j3n}| = 2 \cdot 1 = 2$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 2^2 =$$

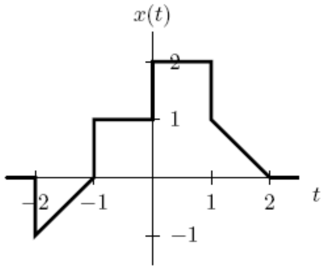
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot 2^2 \cdot (2N+1) = 4 \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{N}}{2 + \frac{1}{N}} = 4 \cdot 1 = 4$$

7. Dani su signali *x(t)* i *y(t)*. Skicirajte produkt ova dva signala na intervalu $t \in [-2,2]$.

$$x(t)=\begin{cases}1, & \sin(4\pi t)\geq 0,\\ -1, & \sin(4\pi t)<0.\end{cases} \qquad y(t)=\begin{cases}t, & \sin(\pi t)\geq 0,\\ -t, & \sin(\pi t)<0.\end{cases}$$



8. Zadan je kontinuirani signal prikazan slikom.



Odredite:

a. $2x(3-\frac{t}{2})+1$,

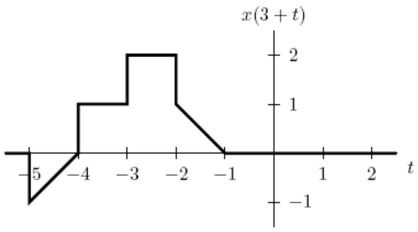
b. $x(t-1)\left[\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)\right]$.

c. Da li je zadani signal *x(t)* kauzalan, antikauzalan ili nekauzalan?

Rješenje:

a) Kako bi našli rješenje, zadani signal je potrebno vremenski pomaknuti, invertirati i komprimirati, te zatim promijeniti amplitudu i pomaknuti po ordinati.

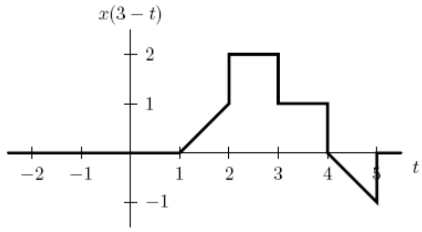
1. Vremenski pomak *x(3+t)*:



signal se pomiče za 3 koraka ulijevo

Ovaj signal je antikauzalan.

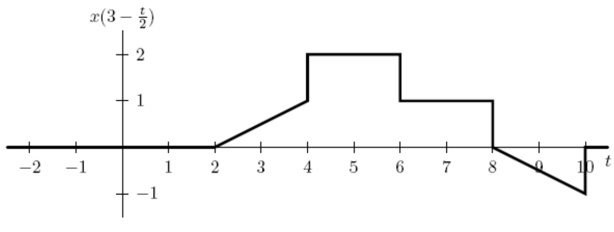
2. Vremenska inverzija *x(3-t)*:



signal se zrcali oko ordinate

Ovaj signal je kauzalan.

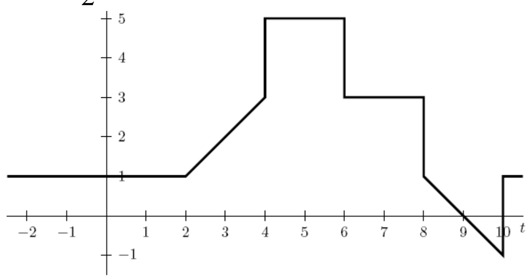
3. Ekspanzija *x(3-t/2)*:



signal se proširuje dva puta

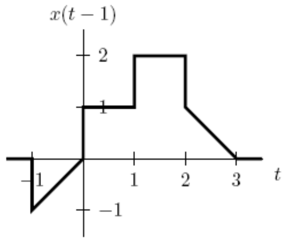
Ovaj signal je kauzalan.

4. Množenje amplitude s 2 i dodavanje 1: $2x(3-\frac{t}{2})+1$

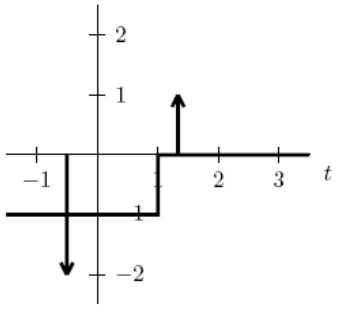


Ovaj signal je nekauzalan.

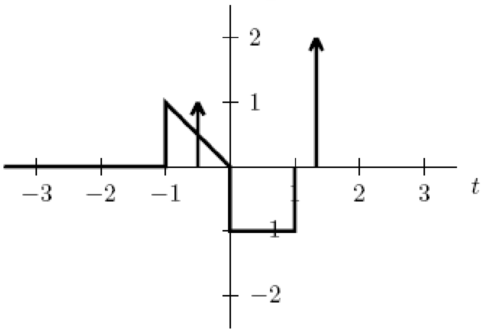
b) Traženi signal je umnožak 2 signala. Prvi signal je *x(t-1)* dobiven vremenskim pomakom zadanog *x(t)*:



Drugi signal je zbroj 2 vremenski pomaknuta impulsa i vremenski pomaknute inverzne step funkcije $\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)$:



Ako se pomnože ova dva signala dobije se $x(t-1)\left[\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)\right]$:



Svi prikazani signali u b) dijelu zadatka su nekauzalni.

c) Početno zadani signal *x(t)* je nekauzalan signal.

9. Nađite parni i neparni dio sljedećih kontinuiranih signala:

   a. $x(t) = 2t^2 - 3t + 6$,

   b. $x(t) = \dfrac{2-t}{1+t}$.

a) $x(t) = 2t^2 - 3t + 6$

očito je $x_p(t) = 2t^2 + 6$, a $x_n(t) = -3t$

b) $x(t) = \dfrac{2-t}{1+t}$

za parni dio vrijedi: $x_p(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$

za neparni — " — : $x_n(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$

$$x_p(t) = \frac{\frac{2-t}{1+t}^{(1-t} + \frac{2+t}{1-t}^{(1+t}}{2} = \frac{2 - \cancel{t} - \cancel{2t} + t^2 + 2 + \cancel{t} + \cancel{2t} + t^2}{2(1-t^2)} = \frac{t^2+4}{2-2t^2}$$

$$x_n(t) = \frac{\frac{2-t}{1+t} - \frac{2+t}{1-t}}{2} = \frac{\cancel{2} - t - 2t + \cancel{t^2} - \cancel{2} - t - 2t - \cancel{t^2}}{2(1-t^2)} = -\frac{3t}{1-t^2}$$

10. Nađite parni i neparni dio sljedećeg diskretnog signala:

   a. $x(n) = \delta(n)$.

Rješenje:

Diskretna $\delta(n)$ funkcija je svugdje nula, osim u $t=0$ kada ima vrijednost 1. $\delta(-n)$ će također svugdje biti nula, osim u $t=0$ kada će biti 1, tj. $\delta(-n) = \delta(n)$. Prema tome ovaj signal je paran.

11. Dokažite da je produkt dva parna (dva neparna) signala paran signal, a produkt parnog i neparnog signala neparan signal.

R: Neka je $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$

a) x_1, x_2 - parni

$$x(-t) = x_1(-t) \cdot x_2(-t) = x_1(t) \cdot x_2(t) = x(t)$$

b) x_1, x_2 - neparni

$$x(-t) = x_1(-t) \cdot x_2(-t) = -x_1(t)[-x_2(t)] = x_1 \cdot x_2 = x(t)$$

c) x_1 - paran, x_2 - neparan.

$$x(-t) = x_1(-t)\, x_2(-t) = x_1(t) \cdot [-x_2(t)] = -x_1(t)\, x_2(t) = -x(t).$$

Q.E.D.