Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

travanj 2007.

Odziv sustava II reda na skok

- sustav pobuđujemo skokom, $u(t) = U\mu(t)$, pa je jednadžba

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 U\mu(t)$$

- totalno rješenje je zbroj rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja
- prije su izračunate vlastite frekvencije, $s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ i $s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, pa je homogeno rješenje

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

- partikularno rješenje pretpostavljamo kao, $y_p(t) = K$, pa uvrštenjem u polaznu diferencijalnu jednadžbu, slijedi

$$\Omega_n^2 K = A\Omega_n^2 U \quad \Rightarrow \quad K = AU \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = AU$$

Odziv sustava II reda na skok

- totalno rješenje za odziv na skok je

$$y_{sk}(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + AU$$

- zadani početni uvjeti $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ trebaju biti definirani neposredno prije djelovanja pobude, koja u ovom slučaju djeluje u $t = 0$, a
- konstante c_1 i c_2 određujemo za $t = 0^+$, pa je potrebno odrediti $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$, uzimajući u obzir $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ i djelovanje pobude
- početne uvjete $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$ možemo naći formalno, dva puta integrirajući polaznu jednadžbu, ili uvidom u blok dijagram
- ovdje su $y(0^+) = y(0^-)$ i $\dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-)$

Odziv sustava II reda na skok

- iz

$$y_{sk}(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + AU$$

  i

$$\dot{y}_{sk}(t) = s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t}$$

  slijedi za $t = 0^+$

$$y(0^+) = y(0^-) = c_1 + c_2 + AU$$
$$\dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = s_1 c_1 + s_2 c_2$$

- pa su

$$c_1 = \frac{(y(0^-) - AU)s_2 - \dot{y}(0^-)}{s_2 - s_1}$$

$$c_2 = \frac{\dot{y}(0^-) - (y(0^-) - AU)s_1}{s_2 - s_1}$$

Odziv sustava II reda na skok

- odziv na pobudu skokom $u(t) = U\mu(t)$ je finalno

$$y_{sk}(t) = \frac{(y(0^-) - AU)s_2 - \dot{y}(0^-)}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} +$$

$$+ \frac{\dot{y}(0^-) - (y(0^-) - AU)s_1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} + AU$$

- za mirni sustav, $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$, je odziv na jedinični skok $U = 1$

$$y_\mu(t) = \frac{-As_2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{As_1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} + A$$

- lako je provjeriti kako je

$$h(t) = \dot{y}_\mu(t)$$

Odziv sustava II reda na jedinični skok – primjer

- razmotrimo odziv na pobudu jediničnim skokom, $u(t) = \mu(t)$, za sustav

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

- usporedimo li s izvornom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t) \Rightarrow$$

$\zeta = 0.25$, $\Omega_n = 0.4$, $A = 6.25$, te uz karakteristične frekvencije, $s_1 = -0.1 + j0.3873$ i $s_1 = -0.1 - j0.3873$, uvršteno u

$$y_\mu(t) = \frac{-As_2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{As_1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} + A$$

slijedi

$$y_\mu(t) = 6.455e^{-0.1t} cos(0.3873t + 2.8889) + 6.25;$$

Usporedba odziva sustava II reda na jedinični skok i impulsnog odziva

- odziv sustava II reda na jedinični skok

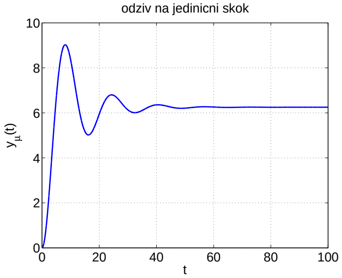
$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

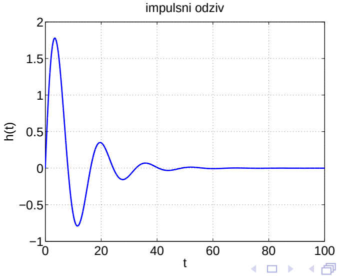
Signali i sustavi školska godina 2006/2007 Predavanje 14

Profesor Branko Jeren

Kontinuirani sustav II reda

Odziv sustava II reda na jedinični skok





Odziv pobuđenog sustava II reda

- sustav pobuđujemo pobudom $u(t) = U_1\mu(t) + U_2 sin(\Omega_0 t)$ pa je jednadžba

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2(U_1\mu(t) + U_2\sin(\Omega_0 t))$$

- totalno rješenje je zbroj rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja
- prije su izračunate vlastite frekvencije $s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ i $s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ i homogeno rješenje je

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

- partikularno rješenje pretpostavljamo kao

$$y_p(t) = K_1 + K_2\cos(\Omega_0 t) + K_3\sin(\Omega_0 t)$$

Odziv pobuđenog sustava II reda

- uvrštenjem pretpostavljenog rješenja u diferencijalnu jednadžbu, primjenom metode neodređenih koeficijenata, nalazimo konstante

$$K_1 = AU_1$$

$$K_2 = \frac{-2\zeta\Omega_n^3\Omega_0 AU_2}{(\Omega_n^2 - \Omega_0^2)^2 - 4\zeta^2\Omega_n^2\Omega_0^2}$$

$$K_3 = \frac{\Omega_n^2 AU_2(\Omega_n^2 - \Omega_0^2)}{(\Omega_n^2 - \Omega_0^2)^2 - 4\zeta^2\Omega_n^2\Omega_0^2}$$

- partikularno rješenje je

$$y_p(t) = AU_1 + K_2\cos(\Omega_0 t) + K_3\sin(\Omega_0 t)$$

$$y_p(t) = AU_1 + \frac{K_2}{\cos[\arctan(-\frac{K3}{K2})]}\cos[\Omega_0 t + \arctan(-\frac{K3}{K2})]$$

Odziv pobuđenog sustava II reda

- totalno rješenje je

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + AU_1 + K_2 \cos(\Omega_0 t) + K_3 \sin(\Omega_0 t)$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz početnih uvjeta
- i ovdje su $y(0^+) = y(0^-)$ i $\dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-)$ pa iz gornje jednadžbe i

$$\dot{y}(t) = s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t} - K_2 \Omega_0 \sin(\Omega_0 t) + K_3 \Omega_0 \cos(\Omega_0 t)$$

- slijedi za $t = 0^+$

$$y(0^+) = y(0^-) = c_1 + c_2 + AU_1 + K_2$$

$$\dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = s_1 c_1 + s_2 c_2 + K_3 \Omega_0$$

Odziv pobuđenog sustava II reda

- konstante c_1 i c_2 su

$$c_1 = \frac{(y(0^-) - AU_1 - K_2)s_2 - (\dot{y}(0^-) - \Omega_0 K_3)}{s_2 - s_1}$$

$$c_2 = \frac{(\dot{y}(0^-) - \Omega_0 K_3) - (y(0^-) - AU_1 - K_2)s_1}{s_2 - s_1}$$

- uz prije izračunate $K_1 = AU_1$,

$$K_2 = \frac{-2\zeta\Omega_n^3\Omega_0 AU_2}{(\Omega_n^2 - \Omega_0^2)^2 - 4\zeta^2\Omega_n^2\Omega_0^2} \text{ i } K_3 = \frac{\Omega_n^2 AU_2(\Omega_n^2 - \Omega_0^2)}{(\Omega_n^2 - \Omega_0^2)^2 - 4\zeta^2\Omega_n^2\Omega_0^2}$$

slijedi totalni odziv[1]

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + AU_1 + K_2\cos(\Omega_0 t) + K_3\sin(\Omega_0 t)$$

[1] uočiti kako na konstante c_1 i c_2 utječe i U_2, posredno, preko K_2 i K_3

Odziv pobuđenog sustava II reda – primjer

- razmotrimo odziv na pobudu[2], $u(t) = 0.64\mu(t) + sin(t)$, uz $y(0^-) = -3, \dot{y}(0^-) = -1$, za sustav

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

- usporedimo li s izvornom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t) \Rightarrow$$

$\zeta = 0.25, \quad \Omega_n = 0.4, A = 6.25$
karakteristične frekvencije su,
$s_1 = -0.1 + j0.3873$ i $s_2 = -0.1 - j0.3873$,

- iz zadane pobude

$u(t) = U_1\mu(t) + U_2 sin(\Omega_0 t) = 0.64\mu(t) + sin(t) \Rightarrow$
$U_1 = 0.64, U_2 = 1, \Omega_0 = 1$

[2] ovdje će se u određivanju odziva koristiti netom izvedeni izrazi, inače, u normalnom postupku izravno se računa zadana jednadžba

Odziv pobuđenog sustava II reda – primjer

- izračunavamo

$$K_1 = AU_1 = 4$$

$$K_2 = \frac{-2\zeta\Omega_n^3\Omega_0 AU_2}{(\Omega_n^2 - \Omega_0^2)^2 - 4\zeta^2\Omega_n^2\Omega_0^2} = -0.3005$$

$$K_3 = \frac{\Omega_n^2 AU_2(\Omega_n^2 - \Omega_0^2)}{(\Omega_n^2 - \Omega_0^2)^2 - 4\zeta^2\Omega_n^2\Omega_0^2} = -1.262$$

- partikularno rješenje je

$$y_p(t) = AU_1 + \frac{K_2}{\cos[\arctan(-\frac{K3}{K2})]}\cos[\Omega_0 t + \arctan(-\frac{K3}{K2})]$$

$$y_p(t) = 4 - 1.2973\cos(t - 1.3371)$$

Odziv pobuđenog sustava II reda – primjer

- izračunavamo

$$c_1 = \frac{(y(0^-) - AU_1 - K_2)s_2 - (\dot{y}(0^-) - \Omega_0 K_3)}{s_2 - s_1} = 3.3909e^{j2.9857}$$

$$c_2 = \frac{(\dot{y}(0^-) - \Omega_0 K_3) - (y(0^-) - AU_1 - K_2)s_1}{s_2 - s_1} = 3.3909e^{-j2.9857}$$

- pa je totalno rješenje

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + y_p(t)$$

odnosno

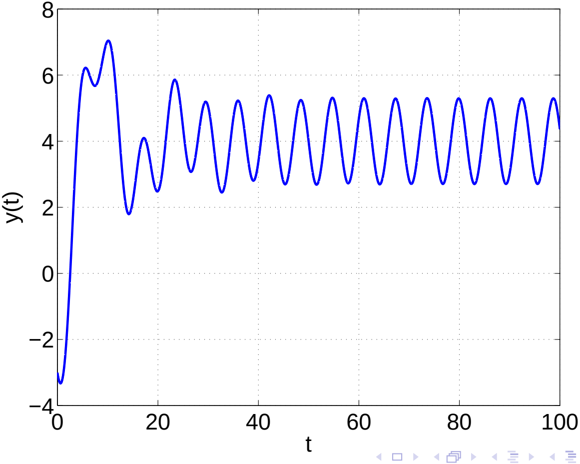
$$y(t) = 6.7818e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.9857) +$$

$$+4 - 1.2973\cos(t - 1.3371)$$

Odziv pobuđenog sustava II reda – primjer

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = 0.64\mu(t) + \sin(t)$$

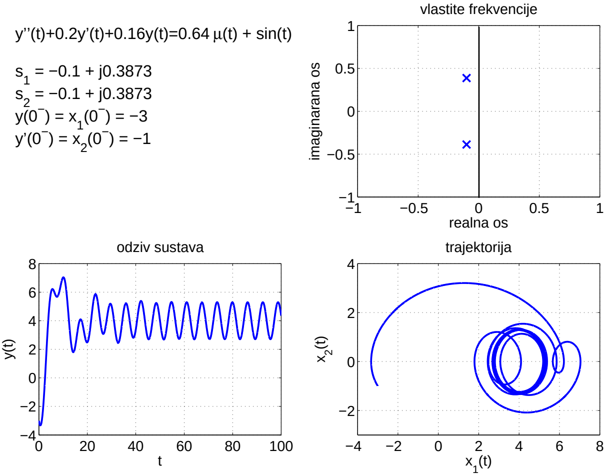
$$y(0^-) = -3, \quad \dot{y}(0^-) = -1$$



Odziv pobuđenog sustava II reda

$$y''(t)+0.2y'(t)+0.16y(t)=0.64\,\mu(t) + \sin(t)$$

$$s_1 = -0.1 + j0.3873$$
$$s_2 = -0.1 + j0.3873$$
$$y(0^-) = x_1(0^-) = -3$$
$$y'(0^-) = x_2(0^-) = -1$$



Rezonancija

- pojavu rezonancije analiziramo na primjeru kontinuiranog sustava II reda i to preko njegova odziva
- odziv mirnog sustava možemo izračunati pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- prije je izveden izraz za impulsni odziv sustava drugog reda

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

Rezonancija

- pojavu rezonancije ilustrirali smo MATLAB primjerom za sustav

$$\ddot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$$

- vlastite frekvencije sustava su $s_1 = j\Omega_n$ i $s_2 = -j\Omega_n$ pa je impulsni odziv

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} = \Omega_n A \frac{e^{j\Omega_n t} - e^{-j\Omega_n t}}{2j}$$

- pobuđen sinusnim signalom frekvencije identične vlastitoj frekvenciji sustava

$$u(t) = \sin(\Omega_n t) = \frac{e^{j\Omega_n t} - e^{-j\Omega_n t}}{2j}$$

Rezonancija

- odziv mirnog kauzalnog sustava uz pobudu zadanu za $t \geq 0$ izračunavamo konvolucijom

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \\
&= \int_0^t \frac{\Omega_n A}{2j}[e^{j\Omega_n \tau} - e^{-j\Omega_n \tau}]\frac{1}{2j}[e^{j\Omega_n(t-\tau)} - e^{-j\Omega_n(t-\tau)}]d\tau = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\int_0^t [e^{j\Omega_n t} - e^{j\Omega_n t}e^{-j2\Omega_n \tau} - e^{-j\Omega_n t}e^{j2\Omega_n \tau} + e^{-j\Omega_n t}]d\tau = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\{e^{j\Omega_n t}\int_0^t d\tau - e^{j\Omega_n t}\int_0^t e^{-j2\Omega_n \tau}d\tau - \\
&\qquad - e^{-j\Omega_n t}\int_0^t e^{j2\Omega_n \tau}d\tau + e^{-j\Omega_n t}\int_0^t d\tau\} = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\{t(e^{j\Omega_n t} + e^{-j\Omega_n t}) + \frac{e^{-j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} - \frac{e^{j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} - \frac{e^{j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} + \frac{e^{-j\Omega_n t}}{j2\Omega_n}\} =
\end{aligned}
$$

$$
y(t) = -\frac{\Omega_n A}{2} t\cos(\Omega_n t) + \frac{A}{2}\sin(\Omega_n t), \qquad t \geq 0
$$

- rezonancija je prema tome kumulativna pojava i ona se razvija proporcionalno s t

Odziv pri rezonanciji