Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

25. veljače 2008.

Zbrajanje signala

- neka su zadani signali

$$u_1 : \mathit{Područje Definicije} \rightarrow \mathit{Područje Vrijednosti}$$
$$u_2 : \mathit{Područje Definicije} \rightarrow \mathit{Područje Vrijednosti}$$

tada je njihov zbroj $y_z = u_1 + u_2$

$$y_z : \mathit{Područje Definicije} \rightarrow \mathit{Područje Vrijednosti}$$

definiran kao

$$\forall w \in \mathit{Područje Definicije}, \qquad y_z(w) = u_1(w) + u_2(w)$$

- zbrajanje dvaju signala je bezmemorijska operacija jer zbroju dvaju signala za neki $w \in \mathit{Područje Definicije}$ odgovara zbrajanje njihovih vrijednosti za taj isti w

Množenje signala

- neka su zadani signali

$$u_1 : PodručjeDefinicije \rightarrow PodručjeVrijednosti$$
$$u_2 : PodručjeDefinicije \rightarrow PodručjeVrijednosti$$

  tada je njihov umnožak $y_p = u_1 \cdot u_2$

$$y_p : PodručjeDefinicije \rightarrow PodručjeVrijednosti$$

  definiran kao

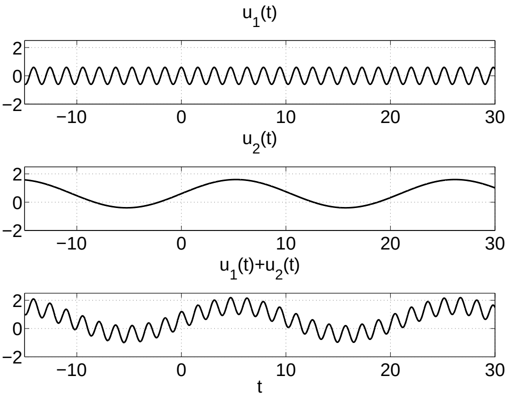
$$\forall w \in PodručjeDefinicije, \qquad y_p(w) = u_1(w) \cdot u_2(w)$$

- množenje dvaju signala je također bezmemorijska operacija

Primjer zbrajanja vremenski kontinuiranih signala

- zbroj zadanih signala prikazan je slikom 1

$$u_1 : Realni \rightarrow Realni, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_1(t) = 0.6 cos(4t)$$
$$u_2 : Realni \rightarrow Realni, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_2(t) = sin(0.3t) + 0.6$$

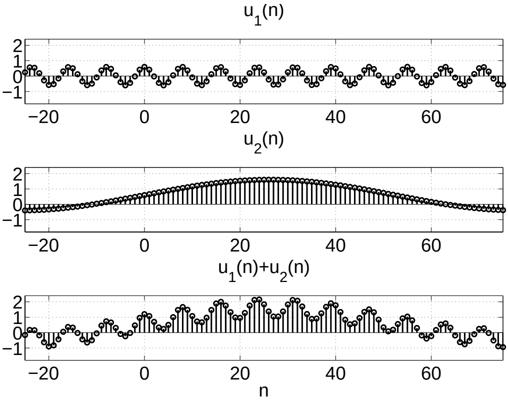


Slika 1: Zbroj vremenski kontinuiranih signala

Primjer zbrajanja vremenski diskretnih signala

- zbroj zadanih signala prikazan je slikom 2

$$u_1 : Cjelobrojni \rightarrow Realni, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_1(n) = 0.6sin(0.8n)$$
$$u_2 : Cjelobrojni \rightarrow Realni, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_2(n) = sin(0.06n) + 0.6$$

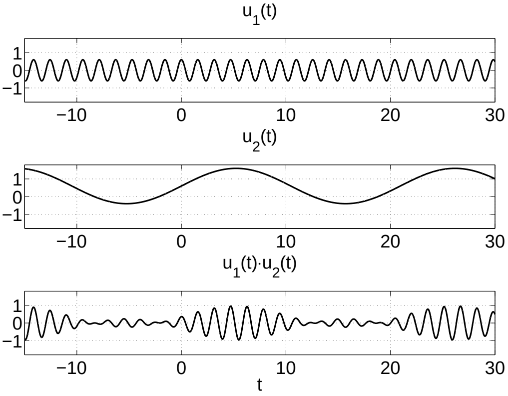


Slika 2: Zbroj vremenski diskretnih signala

Primjer množenja vremenski kontinuiranih signala

- umnožak zadanih signala prikazan je slikom 3

$$u_1 : Realni \rightarrow Realni, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_1(t) = 0.6cos(4t)$$
$$u_2 : Realni \rightarrow Realni, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_2(t) = sin(0.3t) + 0.6$$

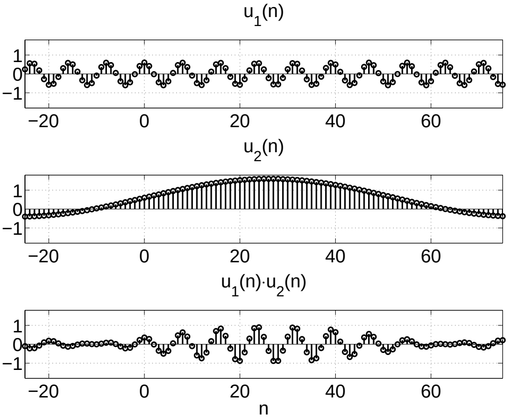


Slika 3: Umnožak vremenski kontinuiranih signala

Primjer množenja vremenski diskretnih signala

- umnožak zadanih signala prikazan je slikom 4

$$u_1 : \mathit{Cjelobrojni} \rightarrow \mathit{Realni}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_1(n) = 0.6 sin(0.8n)$$
$$u_2 : \mathit{Cjelobrojni} \rightarrow \mathit{Realni}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_2(n) = sin(0.06n) + 0.6$$



Slika 4: Umnožak vremenski diskretnih signala

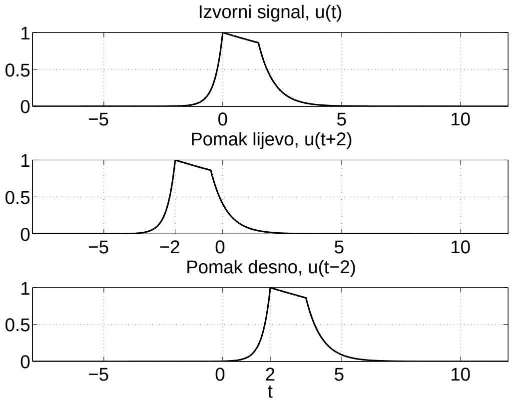
Vremenski pomak vremenski kontinuiranog signala

- pomak je po nezavisnoj varijabli, a ona je vrlo često vrijeme, pa koristimo uobičajeni termin *vremenski* pomak
  - za vremenski kontinuiran signal definiran je vremenski pomak

$$u : Realni \to Realni, \quad y : Realni \to Realni$$
$$\forall t \in Realni, \quad y(t) = u(t - \tau) \quad \text{za} \quad \tau \in Realni$$

Primjer pomaka vremenski kontinuiranog signala

- primjer pomaka vremenski kontinuiranog signala za $\tau = 0$, $\tau = -2$, $\tau = 2$ (Sl.5)



Slika 5: Pomak vremenski kontinuiranog signala

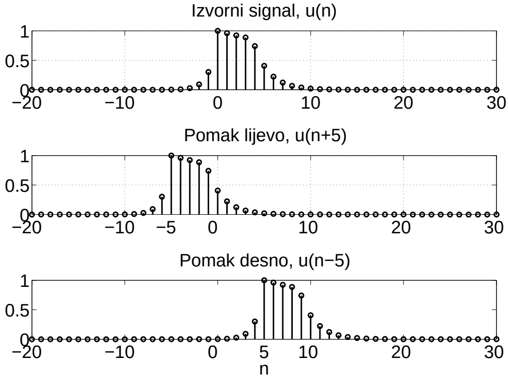
Vremenski pomak vremenski diskretnog signala

- slično prethodnom pokazujemo
  - za vremenski diskretni signal definiran je vremenski pomak

$$u : Cjelobrojni \rightarrow Realni, \quad y : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$
$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad y(n) = u(n - N) \quad \text{za} \quad N \in Cjelobrojni$$

Primjer pomaka vremenski diskretnog signala

- primjer pomaka vremenski diskretnog signala za $N = 0$, $N = -5$, $N = 5$ (Sl.6)



Slika 6: Pomak vremenski diskretnog signala

Derivacija vremenski kontinuiranog signala

- derivacija vremenski kontinuiranog signala[1] definirana je kao derivacija funkcije koja opisuje signal
- derivacija funkcije $f : Realni \rightarrow Realni$ je nova funkcija $f' : Realni \rightarrow Realni$
- oznake za derivaciju funkcije f su i $\dot{f}, Df, f'(t), Df(t), \frac{df(t)}{dt}$
- derivacija funkcije f definirana je kao:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

- derivacija predstavlja mjeru promjene i preko nje se određuju područja u kojima funkcija raste ili pada
- iz definicije derivacije vidljivo je da je ona memorijska operacija

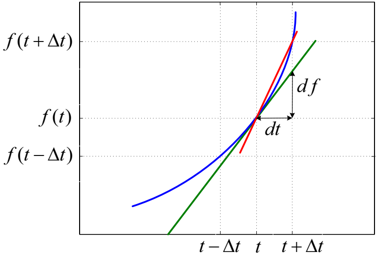
[1] Derivaciju, po odsječcima neprekinutih, vremenski kontinuiranih signala razmatramo nešto kasnije

Geometrijska interpretacija derivacije

- na slici 7 je geometrijska interpretacija definicije derivacije funkcije

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \text{ ili } f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t) - f(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

- derivacija u točki t odgovara koeficijentu smjera tangente u toj točki



Slika 7: Geometrijska interpretacija derivacije

Diferencijal

- diferencijal nezavisne varijable t je njezin prirast i on se definira kao $dt = \Delta t$
- diferencijal funkcije definiramo kao prirast koji dobiva tangenta u danoj točki t što je linearna aproksimacija prirasta funkcije u okolini točke t

$$df(t) = f'(t)dt$$

- dakle, za malo Δt, vrijedi

$$df(t) \approx f(t + \Delta t) - f(t)$$

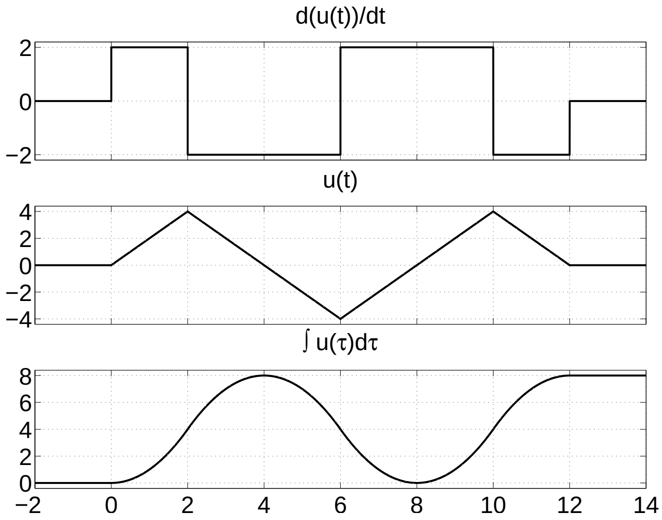
Integral vremenski kontinuiranog signala

- integral vremenski kontinuiranog signala definiran je kao integral funkcije koja opisuje signal
- integral funkcije $f : Realni \rightarrow Realni$ je nova funkcija $y : Realni \rightarrow Realni$ definirana kao:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

- integracija je također memorijska operacija
- geometrijska interpretacija određenog integrala kazuje kako integral $\int_a^b f(\tau) d\tau$ predstavlja površinu ispod krivulje $f(t)$ za interval $t \in [a, b]$

Primjer derivacije i integracije signala



Slika 8: Derivacija i integracija vremenski kontinuiranog signala

Uzlazna i silazna diferencija vremenski diskretnih signala

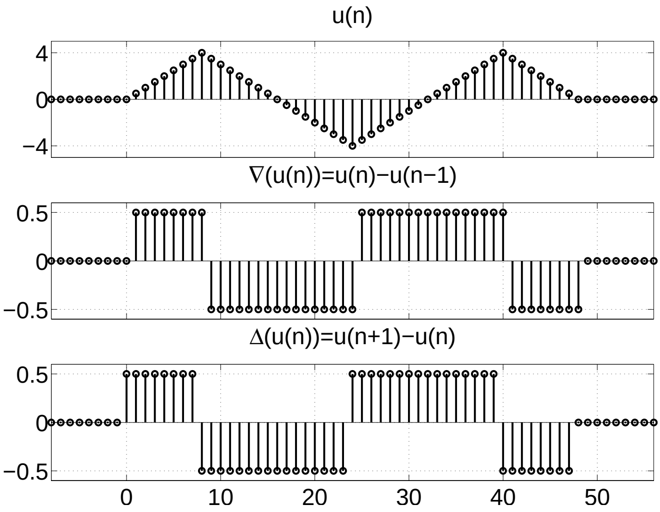
- definiraju se uzlazna diferencija

$$\Delta u(n) = u(n+1) - u(n)$$

- i silazna diferencija

$$\nabla u(n) = u(n) - u(n-1)$$

Primjer ulazne i silazne diferencije



Slika 9: Primjer silazne i uzlazne diferencije

Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- ako pretpostavimo da je vremenski diskretan signal ekvivalentan diskretnim vrijednostima vremenski kontinuiranog signala (otipkavanje) možemo ustanoviti da diferencija daje uzorke koji aproksimiraju uzorke derivacije vremenski kontinuiranog signala
- promatramo vremenski diskretan signal čije su vrijednosti

$$u(n) = u_a(t)|_{t=nT}$$

- označimo s $y_a(t)$ derivaciju signala $u_a(t)$

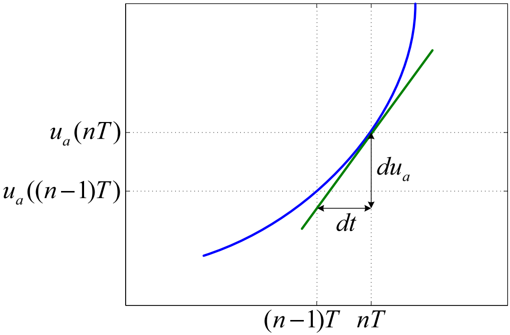
$$y_a(t) = \frac{d}{dt} u_a(t)$$

i neka je

$$y_a(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt} u_a(t)|_{t=nT}$$

Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- sa slike za izvod derivacije zaključujemo



Slika 10: Definicija derivacije

$$y_a(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt}u_a(t)|_{t=nT} = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\{u_a(nT)-u_a((n-1)T)\}$$

Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- dakle iz

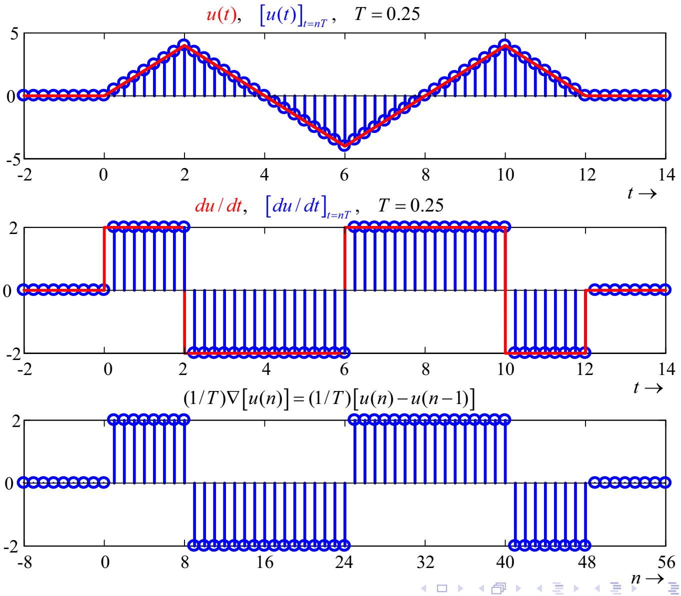
$$y_a(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt}u_a(t)|_{t=nT} = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\{u_a(nT)-u_a((n-1)T)\},$$

uz $y(n) = y_a(nT)$, zaključujemo

$$y(n) = \frac{1}{T}\{u(n) - u(n-1)\} = \frac{1}{T}\nabla(u(n))$$

- dobiveni izraz se naziva jednadžba diferencija koja opisuje vremenski diskretni sustav koji nazivamo digitalni diferencijator
- dobivenim algoritmom numerički aproksimiramo derivaciju vremenski kontinuiranog signala
- postupak je aproksimativan i točnost izračuna ovisi o T i o kontinuiranom signalu $u(t)$

Numerička aproksimacija derivacije vremenski kontinuiranog signala



Diferencija i akumulacija vremenski diskretnih signala

- pokazano je kako derivaciji vremenski kontinuiranog signala odgovara diferencija vremenski diskretnog signala
- integraciji za vremenski kontinuirane signale odgovara operacija akumulacije za vremenski diskretne signale
- kako su derivacija i integracija signala suprotne operacije tako su i operacije diferencije i akumulacije suprotne operacije

Akumulacija vremenski diskretnih signala

- izvod za operaciju akumulacije započinje s postupkom diferencije
- neka je $u(n)$ silazna diferencija vremenski diskretnog signala $y(n)$, dakle,

$$\forall n \in \mathit{Cjelobrojni}_{+}$$
$$u(n) = y(n) - y(n-1)$$

tada za $n = 0, 1, 2, \ldots, n$ vrijedi

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = y(0) - y(-1) \\ u(1) = y(1) - y(0) \\ u(2) = y(2) - y(1) \\ \vdots \\ u(n-1) = y(n-1) - y(n-2) \\ u(n) = y(n) - y(n-1) \end{array}\right\} + \quad \Rightarrow$$

Akumulacija vremenski diskretnih signala

$$\sum_{m=0}^{n} u(m) = y(n) - y(-1)$$

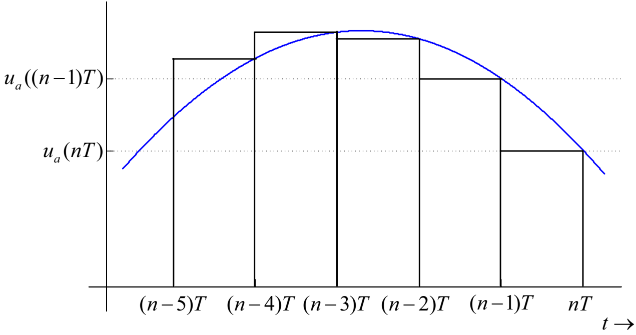
- i finalno

$$y(n) = y(-1) + \sum_{m=0}^{n} u(m)$$

- operacija akumulacije je također memorijska operacija
- potrebno je poznavanje $y(-1)$ i naravno svih $u(m)$, za $m = 0, 1, \ldots, n$ kako bi se moglo odrediti rezultat akumulacije za bilo koji n

Numerička integracija – veza integracije i akumulacije

- određeni integral signala, $u_a(t), t \in Realni$, geometrijski interpretiramo kao površinu ispod funkcije signala



Slika 12: Geometrijska interpretacija integracije

Numerička integracija – veza integracije i akumulacije

- operaciju integracije vremenski kontinuiranog signala

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau) d\tau$$

možemo, za $t = nT$, sukladno prethodnoj slici, izraziti kao:

$$y_a(nT) = \lim_{T \to 0} \sum_{m=-\infty}^{n} T u_a(mT)$$

- uz uobičajene oznake $u_a(mT) = u(m)$ i $y_a(nT) = y(n)$, i dovoljno mali T, $y(n)$ aproksimira integral $y_a(t)$

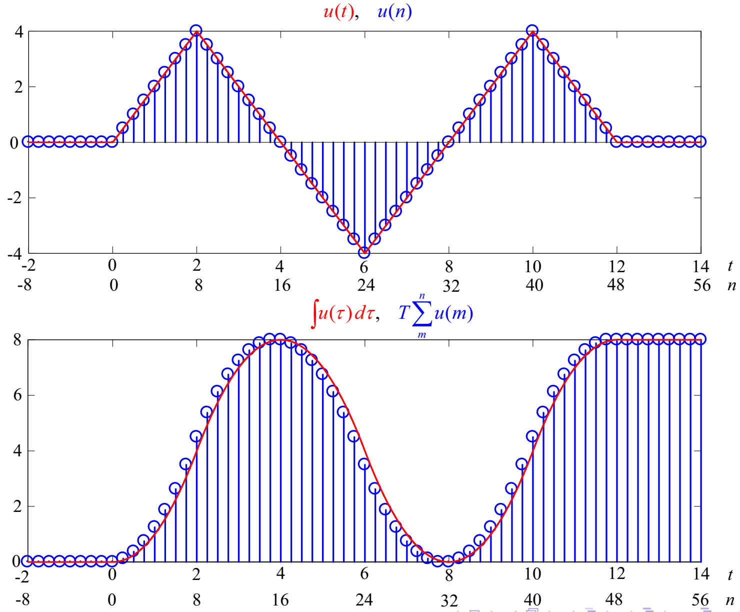
$$y(n) = T \sum_{m=-\infty}^{n} u(m)$$

- zaključujemo, postupku integracije vremenski kontinuiranog signala odgovara postupak akumulacije vremenski diskretnog signala

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 3.

Profesor Branko Jeren

Integracija i akumulacija signala – primjer



Vremenska ekspanzija i kompresija vremenski kontinuiranog signala

- ekspanzija i kompresija signala po nezavisnoj varijabli naziva se vremensko skaliranje signala
    - za vremenski kontinuirani signal definirana je vremenska kompresija kao

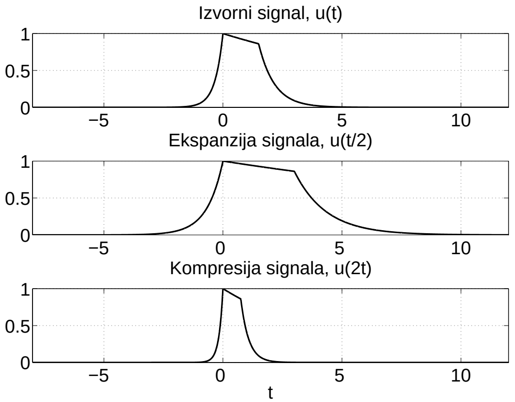
$$u : Realni \rightarrow Realni, \quad y : Realni \rightarrow Realni$$
$$\forall t \in Realni, \quad y(t) = u(bt) \quad \text{za} \quad b > 1$$

    - a vremenska ekspanzija kao

$$u : Realni \rightarrow Realni, \quad y : Realni \rightarrow Realni$$
$$\forall t \in Realni, \quad y(t) = u(\tfrac{t}{b}) \quad \text{za} \quad b > 1$$

Primjer ekspanzije i kompresije vremenski kontinuiranog signala

- primjer ekspanzije i kompresije vremenski kontinuiranog signala za faktor $b = 2$ (Sl.14)



Slika 14: Vremenska ekspanzija i kompresija vremenski kontinuiranog signala za faktor 2

Vremenska kompresija vremenski diskretnog signala

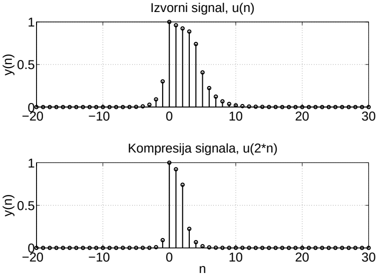
- vremenskom kompresijom vremenski kontinuiranih signala oni se "ubrzavaju" bez gubitka informacije, a pokazuje se kako kod vremenski diskretnih signala to nije uvijek slučaj
- za diskretni signal definirana je vremenska kompresija kao

$$u : Cjelobrojni \rightarrow Realni, \quad y : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$
$$\forall n \in Cjelobrojni, M \in Cjelobrojni, M > 1$$
$$y(n) = u(Mn)$$

- vrijednosti $u(Mn)$ za $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ su $u(0), u(M), u(2M), u(3M), \ldots$ što znači da $u(Mn)$ izdvaja svaki M-ti uzorak od $u(n)$, a ostale međuuzorke briše, pa se ovaj postupak naziva decimacija u vremenu
- ako je vremenski diskretni signal nastao otipkavanjem vremenski kontinuiranog signala postupak kompresije ima za rezultat redukciju takta otipkavanja za faktor M pa se postupak tada naziva i *podotipkavanje*

Primjer kompresije vremenski diskretnog signala

- primjer kompresije – decimacije – vremenski diskretnog signala za faktor $M = 2$ (Sl.15)



Slika 15: Vremenska kompresija vremenski diskretnog signala za faktor 2

- vidljiv je gubitak uzoraka što znači gubitak informacije
- ako je signal $u(n)$ bio rezultat pretipkavanja nekog vremenski kontinuiranog signala, postupkom decimacije se nužno ne gubi informacija o izvornom $u(t)$

Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala 1

- vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala vezana je uz postupak interpolacije i provodi su u dva koraka
- prvo se $u(n)$ ekspandira za cjelobrojni faktor L kako bi se dobio ekspandirani $u_e(n)$

$$y(n) = u_e(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

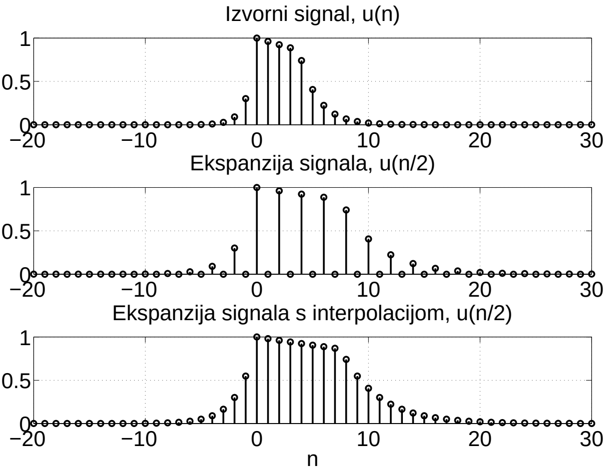
- postupak ilustriramo na primjeru ekspanzije $u(n)$ za faktor 2 ($L = 2$) i ekspandirani signal je tada $u_e(n)$
- za n neparan, $n/2$ nije cijeli broj i $u(\frac{n}{2})$ nije definiran za neparne vrijednosti
- zato, za neparne n, definiramo $u_e(n) = 0$, dakle, $u_e(1) = u_e(3) = u_e(5) = \ldots = 0$

Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala 2

- ekspandirani signal $u_e(n)$ čuva sve uzorke $u(n)$
- odgovarajućim postupkom interpolacije, zamjenom uzoraka vrijednosti nula s uzorcima čija je vrijednost slična vrijednosti susjednih uzoraka, moguće je postići interpolirani ekspandirani vremenski diskretni signal kao na slici
- u postupku interpolacije koriste se interpolacijski filtri, no oni se kasnije razmatraju
- interpolirane su vrijednosti izračunate iz postojećih podataka pa postupak interpolacije ne donosi nove informacije o signalu

Primjer ekspanzije vremenski diskretnog signala

- primjer ekspanzije–interpolacije–vremenski diskretnog signala za faktor $L = 2$



Slika 16: Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala

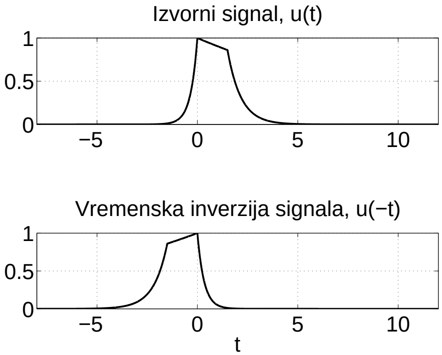
Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 3.

Profesor Branko Jeren

Vremenska inverzija vremenski kontinuiranog signala

- za vremenski kontinuirani signal definirana je vremenska inverzija kao

$$u : Realni \rightarrow Realni, \quad y : Realni \rightarrow Realni$$
$$\forall t \in Realni, \quad y(t) = u(-t)$$

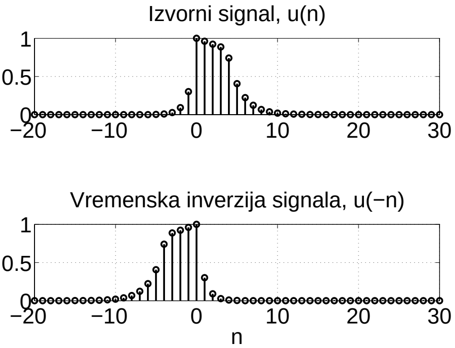


Slika 17: Vremenska inverzija vremenski kontinuiranog signala

Vremenska inverzija vremenski diskretnog signala

- za vremenski diskretni signal definirana je vremenska inverzija kao

$$u : Cjelobrojni \to Realni, \quad y : Cjelobrojni \to Realni$$
$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad y(n) = u(-n)$$



Slika 18: Vremenska inverzija vremenski diskretnog signala

Parne i neparne funkcije

- realne funkcije u, odnosno v, su parne funkcije ako vrijedi

$$
\begin{aligned}
& u : Realni \longrightarrow Realni, \\
& \forall t \in Realni, \quad u(t) = u(-t) \\
& \text{ili} \\
& v : Cjelobrojni \longrightarrow Realni, \\
& \forall n \in Cjelobrojni, \quad v(n) = v(-n)
\end{aligned}
$$

- realne funkcije u, odnosno v, su neparne funkcije ako vrijedi

$$
\begin{aligned}
& u : Realni \longrightarrow Realni, \\
& \forall t \in Realni, \quad u(t) = -u(-t) \\
& \text{ili} \\
& v : Cjelobrojni \longrightarrow Realni, \\
& \forall n \in Cjelobrojni, \quad v(n) = -v(-n)
\end{aligned}
$$

Parna i neparna komponenta signala

- svaki realni signal u može biti prikazan kao suma njegove parne i neparne komponente

$$u : Realni \to Realni,$$
$$\forall t \in Realni, \quad u(t) = u_p(t) + u_n(t)$$

budući da vrijedi

$$u(-t) = u_p(-t) + u_n(-t) = u_p(t) - u_n(t)$$

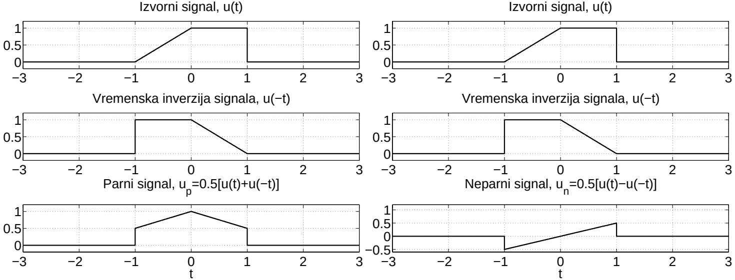
slijede, zbrajanjem i oduzimanjem gornjih jednadžbi, njegove parna i neparna komponenta

$$u_p(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u(-t)]$$

i

$$u_n(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u(-t)]$$

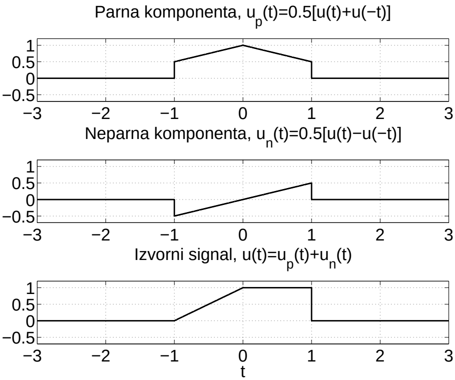
Parna i neparna komponenta signala



Slika 19: Parna i neparna komponenta signala

Signal kao zbroj parne i neparne komponente

- signal može biti prikazan zbrojem parne i neparne komponente[2] $u(t) = u_p(t) + u_n(t)$



Slika 20: Signal kao zbroj parne i neparne komponente

[2] isto vrijedi i za vremenski diskretne signale

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- kompleksni signali u, odnosno v, su konjugirano simetrični signali ako vrijedi

$$
\begin{aligned}
& u : \mathit{Realni} \rightarrow \mathit{Kompleksni}, \\
& \forall t \in \mathit{Realni}, \quad u(t) = u^*(-t) \\
& \text{odnosno} \\
& v : \mathit{Cjelobrojni} \rightarrow \mathit{Kompleksni}, \\
& \forall n \in \mathit{Cjelobrojni}, \quad v(n) = v^*(-n)
\end{aligned}
$$

- kompleksni signali u, odnosno v, su konjugirano antisimetrični signali ako vrijedi

$$
\begin{aligned}
& u : \mathit{Realni} \rightarrow \mathit{Kompleksni}, \\
& \forall t \in \mathit{Realni}, \quad u(t) = -u^*(-t) \\
& \text{odnosno} \\
& u : \mathit{Cjelobrojni} \rightarrow \mathit{Kompleksni}, \\
& \forall n \in \mathit{Cjelobrojni}, \quad v(n) = -v^*(-n)
\end{aligned}
$$

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- kompleksni signal u možemo prikazati kao zbroj njegove konjugirano simetrične u_{ks} i njegove konjugirano antisimetrične komponente u_{ka}
- za vremenski kontinuiran kompleksni signal vrijedi

$$
\begin{aligned}
&u : Realni \rightarrow Kompleksni,\\
&\forall t \in Realni,\\
&u(t) = u_{ks}(t) + u_{ka}(t)\\
&u_{ks}(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u^*(-t)]\\
&u_{ka}(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u^*(-t)]
\end{aligned}
$$

odnosno, za vremenski diskretni kompleksni signal,

$$
\begin{aligned}
&u : Cjelobrojni \rightarrow Kompleksni,\\
&\forall n \in Cjelobrojni,\\
&u(n) = u_{ks}(n) + u_{ka}(n)\\
&u_{ks}(n) = \frac{1}{2}[u(n) + u^*(-n)]\\
&u_{ka}(n) = \frac{1}{2}[u(n) - u^*(-n)]
\end{aligned}
$$

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- za konjugirano simetrični kompleksni signal u, vrijedi $u(t) = u^*(-t)$, pa iz

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= Re\{u(t)\} + jIm\{u(t)\} \\ u^*(-t) &= Re\{u(-t)\} - jIm\{u(-t)\} \end{aligned}\right\} =$$

  slijedi

$$\begin{aligned} Re\{u(t)\} &= Re\{u(-t)\} \\ Im\{u(t)\} &= -Im\{u(-t)\} \end{aligned}$$

  dakle, realni dio konjugirano simetričnog kompleksnog signala je parna funkcija a imaginarni dio je neparna funkcija

- iz gornjeg zaključka je evidentno kako se konjugirana simetričnost realnih signala svodi na parnost signala, a konjugirana antisimetričnost realnih signala svodi na neparnost signala