



Signali i sustavi

Auditorne vježbe 2.

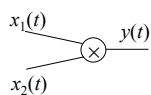


Zadatak 1. Što se događa ako se na multiplikator dovedu neharmonijski periodički signali?

- Takvi signali mogu se prikazati Fourierovim redom.
- Radi pojednostavljenja, pretpostavit ćemo da se oba signala mogu prikazati kosinusnim dijelom Fourierovog reda:
 - Neka su svi koeficijenti uz sinuse jednaki nuli,
 - tj. oba signala neka su parne funkcije.



Zadatak 1. nastavak



$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t,$$

$$x_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\Omega t.$$

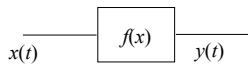
$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \cdot x_2(t) \\ &= \sum_n \sum_m \frac{a_n b_m}{2} [\cos(n\omega - m\Omega)t + \cos(n\omega + m\Omega)t] \end{aligned}$$

U izlaznom signalu miješanjem su nastale frekvencije:

$$\omega_{n,m} = |n\omega \pm m\Omega| \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$



Zadatak 2. Što se događa ako se na ulaz nelinearnog funkcijskog bloka dovede harmonijski signal



- $x(t) = a \cdot \cos \omega t$,
- $y = f(x)$, f - nelinearna funkcija po x .
- Nelinearnu funkciju $f(x)$ možemo razviti u Taylorov red oko nule:

$$f(x) = f(0) + f'(0)X + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot X^{(n)} + \dots$$



Zadatak 2. nastavak

$$y(t) = f(0) + f'(0) \cdot a \cos \alpha t + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot a^2 \cos^2 \alpha t + \dots$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \cdot a^k \cos^k \alpha t,$$

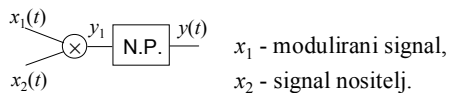
$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha), \quad \cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha).$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \cos k \alpha t.$$

$k\omega$ - harmonijske frekvencije, ω - osnovna frekv.



Zadatak 3. Potrebno je projektirati sustav za demodulaciju signala koristeći množiilo



$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cdot x_2 \\ &= [(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega t] \cos \omega t \\ &= 1/2 \cdot (1 + m \cos \omega_m t) + \\ &\quad + 1/2 \cdot \cos 2\omega t (1 + m \cos \omega_m t). \end{aligned}$$

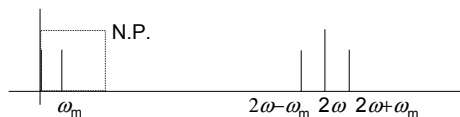
Nakon niskopropusnog filtra:

$$y(t) = 1/2 \cdot (1 + m \cos \omega_m t) \equiv a(t).$$

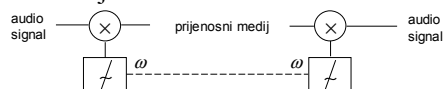


Zadatak 3. nastavak

- U frekvencijskoj domeni to izgleda ovako:



- Primjer komunikacije putem amplitudne modulacije:



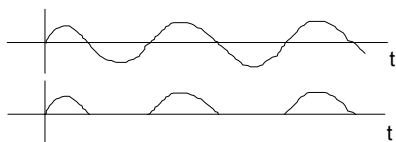


Zadatak 4. Potrebno je projektirati sustav za demodulaciju signala koristeći prag

- Prag

$x \rightarrow \left[\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right] \rightarrow y$

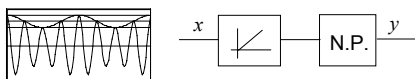
$$y = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & x \geq 0 \end{cases} \text{ ili } y = \max(0, x).$$





Zadatak 4. nastavak

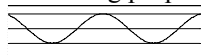
- $x(t) = (1 + m \cos(\omega_m t)) \cos(\omega t)$.



- Iza praga.

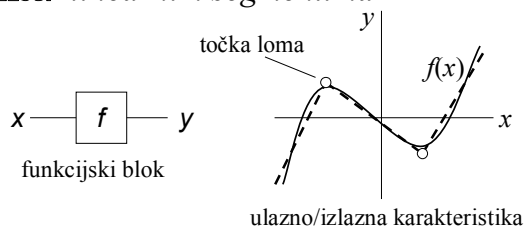


- Iza niskog propusta.





Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima



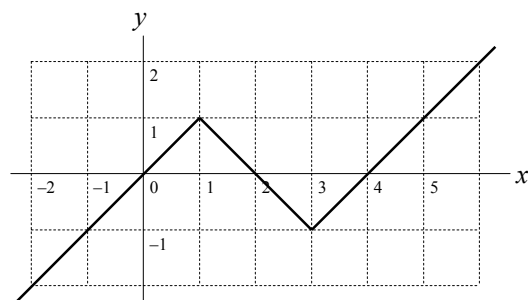
- ◆ Izlaz $y(t)$ u trenutku t ovisi samo o vrijednosti ulaznog signala $x(t)$ u trenutku t , dakle:

$$y(t) = f(x(t))$$

10



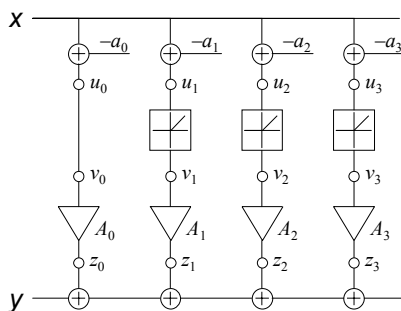
Zadatak 5. Realizirati sustav s ulazno- izlaznom karakteristikom prema slici



11



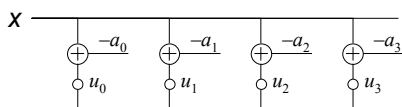
Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima



12



Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima

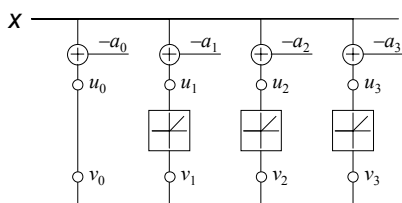


- Prema slici je: $u_0 = x - a_0$ $u_2 = x - a_2$
 $u_1 = x - a_1$ $u_3 = x - a_3$
- Neka je $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$.
- Tada je $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$.

13



Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima

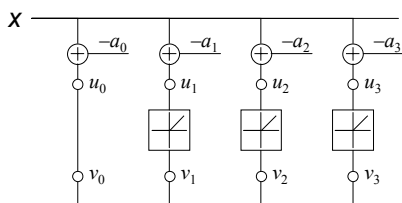


- Svaki blok prag uzrokuje lom ulazno/izlazne karakteristike. Lomovi su u točkama:
 $u_1 = 0$ $u_2 = 0$ $u_3 = 0$
 $x = a_1$ $x = a_2$ $x = a_3$

14



Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima



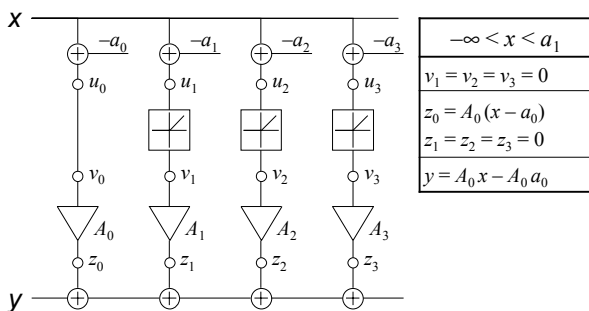
- Točke loma određuju linearne segmente:

$-\infty < x < a_1$	$a_1 \leq x < a_2$	$a_2 \leq x < a_3$	$a_3 \leq x < \infty$
$v_1 = v_2 = v_3 = 0$	$v_2 = v_3 = 0$	$v_3 = 0$	

15



Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima

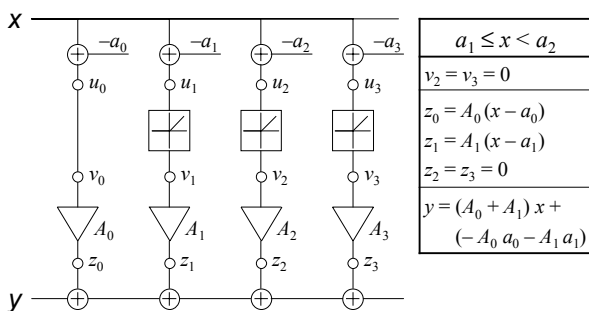


$-\infty < x < a_1$
$v_1 = v_2 = v_3 = 0$
$z_0 = A_0(x - a_0)$
$z_1 = z_2 = z_3 = 0$
$y = A_0 x - A_0 a_0$

16



Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima

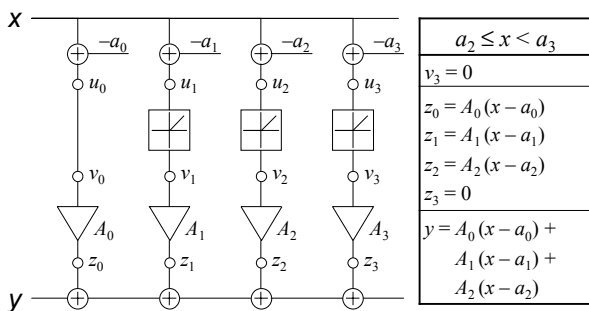


$a_1 \leq x < a_2$
$v_2 = v_3 = 0$
$z_0 = A_0(x - a_0)$
$z_1 = A_1(x - a_1)$
$z_2 = z_3 = 0$
$y = (A_0 + A_1)x + (-A_0 a_0 - A_1 a_1)$

17



Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima

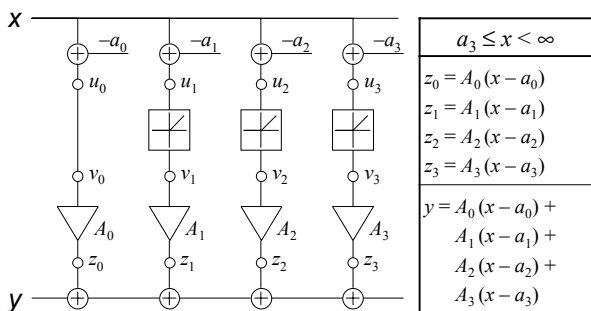


$a_2 \leq x < a_3$
$v_3 = 0$
$z_0 = A_0(x - a_0)$
$z_1 = A_1(x - a_1)$
$z_2 = A_2(x - a_2)$
$z_3 = 0$
$y = A_0(x - a_0) + A_1(x - a_1) + A_2(x - a_2)$

18



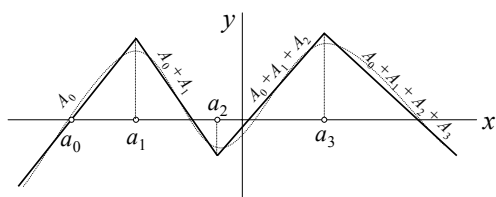
Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima



19

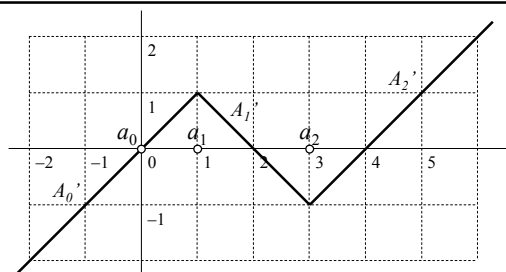


Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima



- a_1, a_2 i a_3 su točke loma (promjena nagiba).
- a_0 nije točka loma.

20

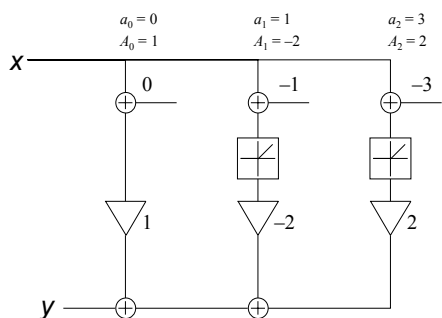


$a_0 = 0$	$A_0' = 1$	$A_0' = A_0$	$\Rightarrow A_0 = 1$
$a_1 = 1$	$A_1' = -1$	$A_1' = A_0 + A_1$	$\Rightarrow -1 = 1 + A_1 \Rightarrow A_1 = -2$
$a_2 = 3$	$A_2' = 1$	$A_2' = A_1' + A_2$	$\Rightarrow 1 = -1 + A_2 \Rightarrow A_2 = 2$

21



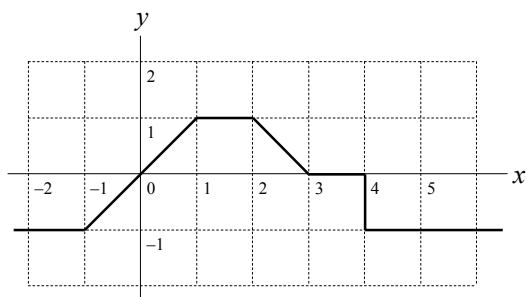
Zadatak 5. Konačno rješenje



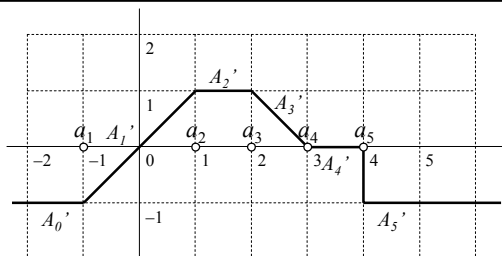
22



Zadatak 6. Realizirati sustav s ulazno-izlaznom karakteristikom prema slici



23

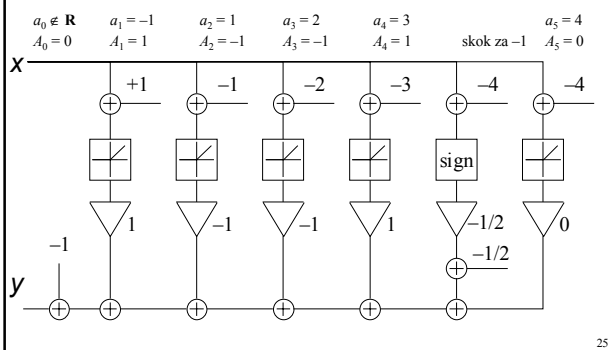


$a_0 \notin \mathbf{R}$	$A_0' = 0$	$A_0' = A_0$	$\Rightarrow A_0 = 0$
$a_1 = -1$	$A_1' = 1$	$A_1' = A_0 + A_1 \Rightarrow 1 = 0 + A_1$	$\Rightarrow A_1 = 1$
$a_2 = 1$	$A_2' = 0$	$A_2' = A_1' + A_2 \Rightarrow 0 = 1 + A_2$	$\Rightarrow A_2 = -1$
$a_3 = 2$	$A_3' = -1$	$A_3' = A_2' + A_3 \Rightarrow -1 = 0 + A_3$	$\Rightarrow A_3 = -1$
$a_4 = 3$	$A_4' = 0$	$A_4' = A_3' + A_4 \Rightarrow 0 = -1 + A_4$	$\Rightarrow A_4 = 1$
$a_5 = 4$	$A_5' = 0$	$A_5' = A_4' + A_5 \Rightarrow 0 = 0 + A_5$	$\Rightarrow A_5 = 0$

24



Zadatak 6. Konačno rješenje

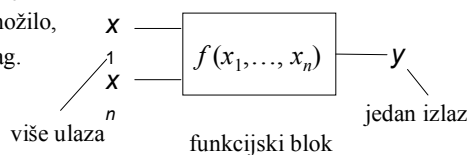




Bezmemorijski kontinuirani sustavi

- To su sustavi koji su realizirani od elemenata kao što su:

1. pojačalo,
2. zbrajalo,
3. množilo,
4. prag.





Pravila spajanja:

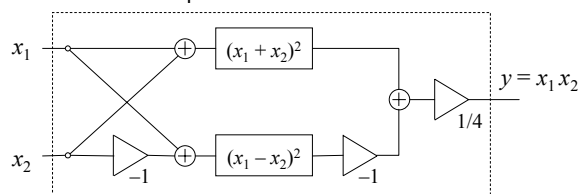
1. Nije dozvoljeno spajanje izlaza funkcijskih blokova.
2. Svaki ulaz u funkcijski blok mora biti spojen na izlaz nekog funkcijskog bloka ili predstavlja ulaz u cijeli sustav.
3. Izlaz samo jednog funkcijskog bloka je izlaz iz sustava.



Zadatak 7. Realizirati funkcijski blok za množenje

- Treba realizirati blok za množenje korištenjem bloka za kvadriranje (realiziran aproksimacijom U/I karakteristike).

$$x_1 x_2 = \frac{1}{4} ((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2)$$

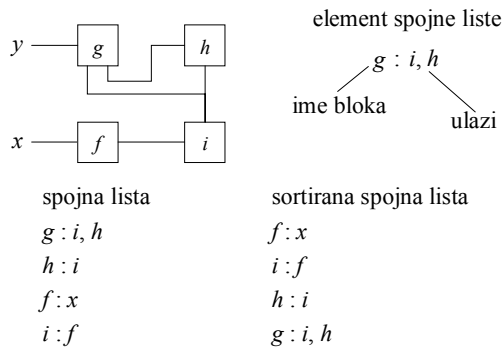


Podjela bezmemorijskih kontinuiranih sustava:

- EksPLICITNI sustavi su sustavi za koje se može napraviti *sortirana spojna lista*.
- IMPLICITNI sustavi su sustavi za koje se ne može napraviti *sortirana spojna lista* (sustavi s *povratnom vezom*).

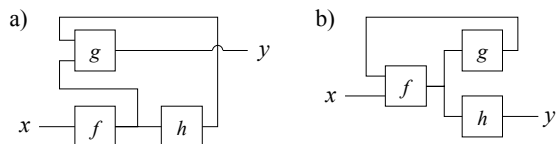


Zadatak 8. Za zadani sustav napisati i sortirati spojnu listu.



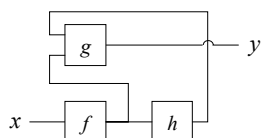


Zadatak 8. Za zadane sustave napisati i sortirati spojnu listu.





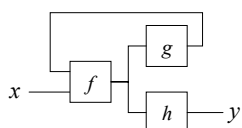
Zadatak 8a. Rješenje



spojna lista	sortirana spojna lista	Spojna lista se može sortirati te je zadani sustav eksplicitni sustav.
$g : f, h$	$f : x$	
$h : f$	$h : f$	
$f : x$	$g : f, h$	



Zadatak 8b. Rješenje

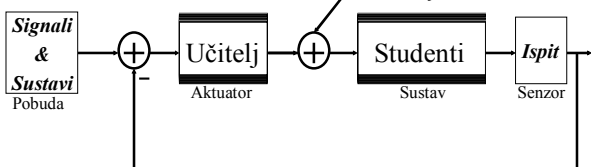


spojna lista	sortirana spojna lista	Spojna lista se ne može sortirati te je zadani sustav implicitni sustav.
$f : x, g$	ne postoji	
$g : f$		
$h : f$		



Što je nužno za uspješno učenje?

- Spojna lista:
Aktuator: Pobuda, Senzor
Sustav: Aktuator, Smetnja
Senzor: Sustav
- Sustav je implicitan.

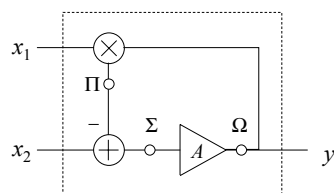


34



Zadatak 10. Treba realizirati sustav koji će kao izlaz dati kvocijent dvaju ulaza koristeći množilo, zbrajalo i pojačalo

- Neka su ulazi u sustav x_1 i x_2 i neka je traženi kvocijent $y = x_2 / x_1$.



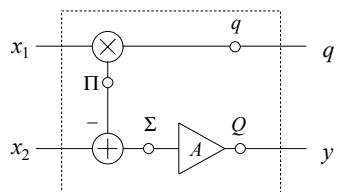
spojna lista
 $\Sigma : x_2, \Pi$
 $\Pi : x_1, \Omega$
 $\Omega : \Sigma$

Spojna lista se ne može sortirati te je sustav implicitan.



Zadatak 10. Prekidanje petlje

- Prekinimo petlju uvođenjem $q = Q$ umjesto Ω , gdje je q dodatni ulaz u sustav

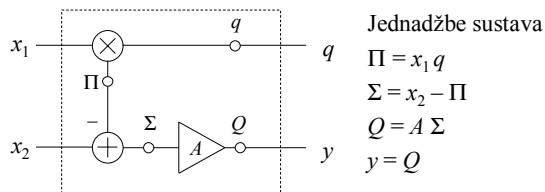


spojna lista
 $\Pi : x_1, q$
 $\Sigma : x_2, \Pi$
 $Q : \Sigma$
 $y : Q$

Spojna lista je sortirana lista pa je ovakav sustav eksplicitan.



Zadatak 10. Analiza sustava



- ◆ Nakon sređivanja dobivamo

$$y = A (x_2 - x_1 q) = f(q, x_1, x_2)$$

- ◆ Kako znamo da je $y = q = Q$, konačni izraz je

$$y = A (x_2 - x_1 y) = f(y, x_1, x_2)$$



Zadatak 10. Analiza sustava

- ◆ Podijelimo $y = f(y, x_1, x_2) = A (x_2 - x_1 y)$ s Ax_1 . Dobivamo

$$y = \frac{x_2}{x_1} - \frac{y}{Ax_1}$$

- ◆ Kada A teži k beskonačnosti ($A \rightarrow \infty$) dobivamo

$$y \rightarrow x_2 / x_1$$

- ◆ Kada je $x_1 = 0$ dobivamo

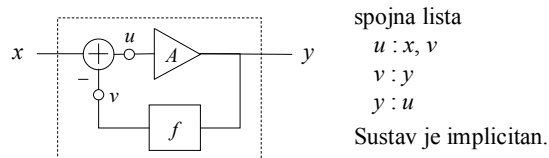
$$y = A (x_2 - x_1 y) = Ax_2$$

pa za $A \rightarrow \infty$ i $y \rightarrow \infty$. Kod stvarne realizacije za $x_1 = 0$ i za jako veliki A izlaz je ograničen naponom napajanja.

- ◆ Od množila smo dobili dijelilo, točnije, realizirali smo inverznu operaciju.



Zadatak 11. Realizirati sustav koji će omogućiti računanje inverzne funkcije



- ◆ Jednadžbe sustava su

$$u = x - v, \quad v = f(y), \quad y = A u$$

- ◆ Sređivanjem dobivamo

$$y = A (x - f(y))$$

što ne možemo izraziti kao eksplicitnu funkciju po x .



Zadatak 11. Analiza sustava

- ◆ No izraz $y = A(x - f(y))$ možemo izraziti kao eksplicitnu funkciju po varijabli y

$$x = f(y) + \frac{y}{A}$$

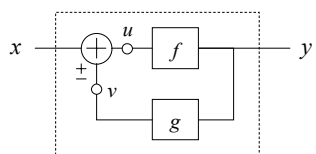
- ◆ Kada A teži k beskonačnosti ($A \rightarrow \infty$) dobivamo

$$x \rightarrow f(y) \quad \text{ili} \quad y \rightarrow f^{-1}(x)$$

- ◆ Prikazani sklop realizira inverznu funkciju funkcije f .



Sustav s povratnom vezom



jednadžbe sustava

$$u = x \pm v$$

$$v = g(y)$$

$$y = f(u)$$

+ za pozitivnu povratnu vezu

– za negativnu povratnu vezu

- ◆ Iz jednadžbi sustava slijedi izraz za x

$$x = f^{-1}(y) \mp g(y)$$

- ◆ Gornji izraz je inverzna prijenosna funkcija sustava.

41



Sustav s povratnom vezom

- ◆ Iz inverzne prijenosne funkcije $x = f^{-1}(y) \mp g(y)$ dobivamo

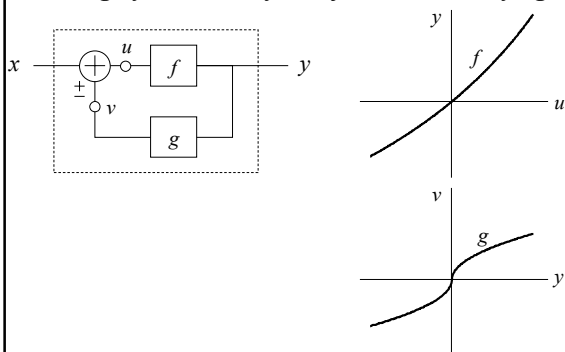
$$y = (f^{-1} \mp g)^{-1}(x) = F(x)$$

- ◆ Naravno, pretpostavka je da i f i F imaju inverzne funkcije. Grafički se F može pronaći i kada to nije slučaj, odnosno kada su f^{-1} i F^{-1} relacije.

42



Zadatak 12. Za sustav s povratnom vezom grafički odredi funkciju F iz zadanih f i g



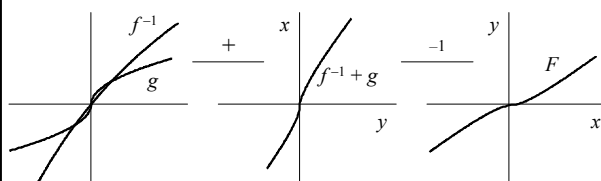
43



Zadatak 12. Negativna povratna veza

- ◆ Sustav s negativnom povratnom vezom imat će karakteristiku koja se dobije iz

$$x = f^{-1}(y) + g(y) = F^{-1}(y)$$



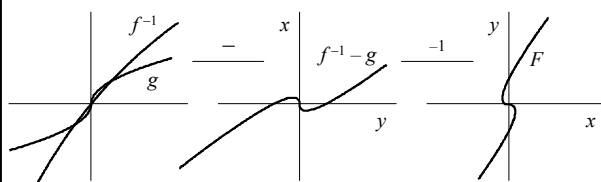
44



Zadatak 12. Pozitivna povratna veza

- ◆ Sustav s pozitivnom povratnom vezom imat će karakteristiku koja se dobije iz

$$x = f^{-1}(y) - g(y) = F^{-1}(y)$$

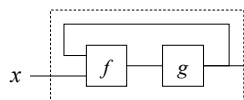


- ◆ U ovom slučaju rezultat nije funkcijski blok, već je relacijski blok.

45



Zadatak 13. Implicitni sustav zadan relacijama



Neka su funkcije f i g

$$f(u, v) = u + v$$

$$g(u) = u^2$$

- ◆ Jednadžba koja opisuje sustav je

$$y = g(f(x, y)) = (x + y)^2$$

- ◆ Sređivanjem dobivamo

$$y^2 + (2x - 1)y + x^2 = 0$$

- ◆ Realna rješenja dobivamo za diskriminantu $D \geq 0$

$$D = (2x - 1)^2 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \geq x$$

46

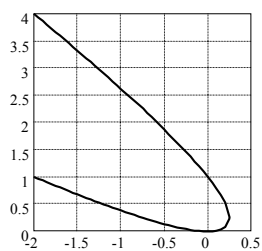


Zadatak 13. Implicitni sustav zadan relacijama

- ◆ Kada je ulaz $x \leq \frac{1}{4}$ dobivamo dva realna rješenja.

Na primjer za $x = 0,125$ dobivamo

$$y_1 = 0,998 \quad \text{i} \quad y_2 = -0,238$$



47
