



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

27. svibnja 2010.



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom Uz^n

- pokazano je kako je $y(t) = H(s)Ue^{st}$, odziv linearnog vremenski stalnog kontinuiranog sustava na pobudu svezvremenskom eksponencijalom $u(t) = Ue^{st}$,
- razmotrimo odziv diskretnog sustava na svezvremensku eksponencijalu

$$u(n) = Uz^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

- odziv mirnog sustava određujemo konvolucijom pa je

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * u(n) = h(n) * Uz^n = U \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{n-m} = \\ &= Uz^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m}}_{H(z)} = H(z)Uz^n \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom

- prema tome, odziv mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, na sjevremensku eksponencijalu Uz^n , je

$$y(n) = H(z)Uz^n$$

gdje je¹

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m}$$

- za konkretnu kompleksnu frekvenciju pobude z , dakle kompleksan broj, $H(z)$ je također, u općem slučaju, kompleksan broj pa vrijedi
- za pobudu kompleksnom eksponencijalom odziv je istog oblika i rezultat je množenja pobude s konstantom
- kompleksnu eksponencijalu nazivamo karakterističnom ili vlastitom funkcijom sustava

¹Za $z \in \mathbb{C}$, $H(z)$ nazivamo prijenosnom funkcijom definiranom s preslikavanjem $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom $U(e^{j\Omega})^n$

- razmatra se slučaj odziva linearnog vremenski stalnog diskretnog sustava na svestremensku eksponencijalu frekvencije $z = e^{j\Omega}$, dakle,

$$u(n) = Uz^n = U \cdot (e^{j\Omega})^n, \quad U \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * u(n) = h(n) * U(e^{j\Omega})^n = \\ &= U \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\Omega(n-m)} = \\ &= U e^{j\Omega n} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega m}}_{H(e^{j\Omega})} = H(e^{j\Omega}) U e^{j\Omega n} \end{aligned}$$

- za $\Omega \in \mathbb{R}$, $H(e^{j\Omega})$ je kompleksna funkcija i naziva se frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega m}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

- očigledno je kako vrijedi veza frekvencijske karakteristike diskretnog sustava², $H(e^{j\Omega})$, i prijenosne funkcije $H(z)$

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

- za realni impulsni odziv $h(n)$ vrijedi

$$H(e^{j\Omega}) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cos(\Omega m)}_{\text{Re}[H(e^{j\Omega})]} - j \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \sin(\Omega m)}_{-\text{Im}[H(e^{j\Omega})]}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \text{Re}[H(e^{j\Omega})] + j\text{Im}[H(e^{j\Omega})]$$

- očigledno je kako je
 - $\text{Re}[H(e^{j\Omega})]$ parna funkcija od Ω a
 - $\text{Im}[H(e^{j\Omega})]$ neparna funkcija od Ω

²Frekvencijska karak. definirana je kao $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a prijenosna funkcija kao funkcija $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

- kako je $H(e^{j\Omega})$ kompleksna funkcija vrijedi

$$H(e^{j\Omega}) = \operatorname{Re}[H(e^{j\Omega})] + j\operatorname{Im}[H(e^{j\Omega})] = |H(e^{j\Omega})|e^{j\angle H(e^{j\Omega})}$$

pri čemu je amplitudna frekvencijska karakteristika,

$$|H(e^{j\Omega})| = \sqrt{(\operatorname{Re}[H(e^{j\Omega})])^2 + (\operatorname{Im}[H(e^{j\Omega})])^2},$$

a fazna frekvencijska karakteristika,

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}[H(e^{j\Omega})]}{\operatorname{Re}[H(e^{j\Omega})]}\right)$$

- iz parnosti $\operatorname{Re}[H(e^{j\Omega})]$ i neparnosti $\operatorname{Im}[H(e^{j\Omega})]$, slijedi kako je
 - $|H(e^{j\Omega})|$ parna funkcija od Ω i
 - $\angle H(e^{j\Omega})$ neparna funkcija od Ω



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

- iz parnosti i neparnosti realnog i imaginarnog dijela frekvencijske karakteristike slijedi $H(e^{-j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega})$
- iz

$$H(e^{j\Omega}) = \text{Re}[H(e^{j\Omega})] + j\text{Im}[H(e^{j\Omega})]$$

i

$$H(e^{-j\Omega}) = \text{Re}[H(e^{-j\Omega})] + j\text{Im}[H(e^{-j\Omega})]$$

uz parni $\text{Re}[H(e^{j\Omega})]$ i neparni $\text{Im}[H(e^{j\Omega})]$ slijedi

$$H(e^{-j\Omega}) = \text{Re}[H(e^{j\Omega})] - j\text{Im}[H(e^{j\Omega})] = H^*(e^{j\Omega})$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Periodičnost frekvencijske karakteristike diskretnog sustava

- frekvencijska karakteristika diskretnog sustava je periodična s periodom 2π

$$\begin{aligned} H(e^{j(\Omega+2\pi k)}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j(\Omega+2\pi k)m} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\Omega m} \underbrace{e^{-j2\pi km}}_1 = H(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Odziv diskretnog sustava na realnu sinusoidu

- pokazano je kako je za pobudu
 $u(n) = Uz^n = U \cdot (e^{j\Omega})^n$, $U \in \mathbb{R}^+$, odziv linearnog
diskretnog sustava

$$y(n) = Yz^n = (H(z)Uz^n)_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega})Ue^{j\Omega n}$$

- odziv na pobudu $u(n) = Uz^n = U(e^{-j\Omega})^n$, $U \in \mathbb{R}^+$, je

$$y(n) = Yz^n = (H(z)Uz^n)_{z=e^{-j\Omega}} = H(e^{-j\Omega})e^{-j\Omega n}$$

- iz ovoga zaključujemo o odzivu na svestremensku pobudu
 $u(n) = U\cos(\Omega n) = 0.5Ue^{j\Omega n} + 0.5Ue^{-j\Omega n}$

$$y(n) = 0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} + 0.5UH(e^{-j\Omega})e^{-j\Omega n}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Odziv diskretnog sustava na realnu sinusoidu

$$y(n) = 0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} + 0.5UH(e^{-j\Omega})e^{-j\Omega n}$$

- pišemo kao

$$y(n) = 0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} + (0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n})^*$$

odnosno

$$y(n) = 2\operatorname{Re}(0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}) = \operatorname{Re}(|H(e^{j\Omega})|Ue^{j\angle H(e^{j\Omega})}e^{j\Omega n})$$

i finalno

$$y(n) = |H(e^{j\Omega})|U \cos(\Omega n + \angle H(e^{j\Omega})), \quad -\infty < n < \infty$$

- zaključujemo kako je problem određivanja odziva sustava, u vremenskoj domeni, transformiran u frekvencijsku domenu i svodi se na određivanje vrijednosti $H(e^{j\Omega})$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- linearni, vremenski stalni, diskretan sustav N -tog reda, opisan je jednadžbom diferencija

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \dots + b_{N-1} u(n-N+1) + b_N u(n-N)$$

- jednadžbu zapisujemo pomoću operatora pomaka definiranog kao

za $n \in \mathbb{Z}$

$E^{-1} w(n) = w(n-1)$ – pomak za jedan korak

$E^{-K} w(n) = w(n-K)$ – pomak za K koraka

$$\underbrace{[1 + a_1 E^{-1} + \dots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}]}_{A(E)} y(n) = \underbrace{[b_0 + b_1 E^{-1} + \dots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}]}_{B(E)} u(n)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- dakle, skraćeni, operatorski zapis jednadžbe diferencija zapisujemo kao

$$A(E)y(n) = B(E)u(n)$$

gdje su $A(E)$ i $B(E)$ složeni operatori

$$A(E) = 1 + a_1 E^{-1} + \dots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}$$
$$B(E) = b_0 + b_1 E^{-1} + \dots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}$$

odnosno

$$y(n) = \left(\frac{B(E)}{A(E)} \right) u(n) \Rightarrow y(n) = H(E)u(n)$$

- složeni operator $H(E)$ pridružuje vremenskoj funkciji $y(n)$ funkciju $u(n)$ i predstavlja formalni, operatorski, zapis polazne jednadžbe diferencija



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- sustav pobuđujemo s vremenomskom kompleksnom eksponencijalom

$$n \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$u(n) = Uz^n$$

U – kompleksna amplituda pobude,

z – neka konkretna kompleksna frekvencija

- budući da pobuda starta u $-\infty$, za stabilni su sustav početni uvjeti, koji su eventualno postojali u $-\infty$, isticali, nema prijelaznog odziva, i totalno je rješenje jednako partikularnom rješenju jednadžbe diferencija
- totalni odziv je zato

$$y(n) = y_p(n) = Yz^n$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- kompleksnu amplitudu odziva Y određujemo iz polazne jednačbe metodom neodređenih koeficijenata pa, uvrštenjem u polaznu jednačbu, slijedi

$$\underbrace{(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N})}_{A(z)} Y z^n = \underbrace{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N})}_{B(z)} U z^n$$

- kompleksna je amplituda odziva Y

$$Y = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}}{\underbrace{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}}_{H(z)}} U = H(z) U$$

- amplituda partikularnog rješenja Y određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava, te konkretnom kompleksnom frekvencijom z



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prijenosna funkcija

- $H(z)$ je veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva Yz^n i kompleksne amplitude pobude Uz^n

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}} = \frac{Y}{U}$$

- za konkretnu frekvenciju z , $H(z)$ ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza

$$Y = H(z)U$$

- $H(z)$ možemo formalno zapisati iz složenog operatora $H(E)$, zamjenom operatora E^{-1} s kompleksnom frekvencijom z^{-1}



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prijenosna funkcija

- $H(z)$, za $z \in \mathbb{C}$, nazivamo prijenosna funkcija ili transfer funkcija diskretnog sustava i možemo je definirati kao

$$n \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$H(z) = \left. \frac{y_p(n)}{u(n)} \right|_{u(n)=Uz^n} = \frac{Yz^n}{Uz^n} = \frac{Y}{U}$$

- prijenosna ili transfer funkcija sustava $H(z)$ racionalna je funkcija koju možemo prikazati kao

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{j=0}^N b_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}}$$

odnosno

$$H(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} = \frac{\sum_{j=0}^N b_j z^{N-j}}{z^N + \sum_{j=1}^N a_j z^{N-j}}$$



Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju možemo pisati uz pomoć produkta korijenih faktora:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^N b_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} = b_0 \frac{\prod_{j=1}^N (1 - z_j z^{-1})}{\prod_{j=1}^N (1 - p_j z^{-1})}$$

odnosno u obliku

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^N b_j z^{N-j}}{z^N + \sum_{j=1}^N a_j z^{N-j}} = b_0 \frac{\prod_{j=1}^N (z - z_j)}{\prod_{j=1}^N (z - p_j)}$$

z_1, z_2, \dots, z_N su nule prijenosne funkcije

p_1, p_2, \dots, p_N su polovi³ prijenosne funkcije

³dolazi od engleske riječi tent-pole



Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju možemo pisati kao produkt i kvocijent vektora

$$H(z) = b_0 \frac{|z - z_1| e^{j\angle(z-z_1)} |z - z_2| e^{j\angle(z-z_2)} \dots |z - z_N| e^{j\angle(z-z_N)}}{|z - p_1| e^{j\angle(z-p_1)} |z - p_2| e^{j\angle(z-p_2)} \dots |z - p_N| e^{j\angle(z-p_N)}}$$

- prijenosnu funkciju $H(z)$ možemo pisati i kao

$$H(z) = |H(z)| e^{j\angle H(z)}$$

pri čemu su⁴

$$|H(z)| = |b_0| \frac{|z - z_1| |z - z_2| \dots |z - z_N|}{|z - p_1| |z - p_2| \dots |z - p_N|}$$

$$\begin{aligned} \angle H(z) &= \angle(b_0) + [\angle(z - z_1) + \angle(z - z_2) + \dots + \angle(z - z_N)] - \\ &\quad - [\angle(z - p_1) + \angle(z - p_2) + \dots + \angle(z - p_N)] \end{aligned}$$

⁴Za realne sustave je $b_0 \in \mathbb{R}$, pa je $\angle b_0 = 0$ za $b_0 > 0$, odnosno $\angle b_0 = \pi$ za $b_0 < 0$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prijenosna funkcija diskretnog sustava – primjer

- za, prije razmatrani, diskretni sustav, opisan jednadžbom diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

prijenosnu funkciju možemo formalno pisati zamjenjujući operator E^{-1} sa z^{-1} , pa slijedi

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prisilni odziv sustava

- totalni je odziv vremenski diskretnog sustava, na pobudu $u(n) = \cos(\Omega n) \cdot \mu(n)$, dan kao⁵

$$y(n) = \sum_{j=1}^N c_j q_j^n + y_p(n)$$

- pri čemu je prisilni odziv, uz danu pobudu,

$$y_p(n) = |H(e^{j\Omega})| \cos(\Omega n + \angle H(e^{j\Omega})), \quad n \geq 0$$

⁵ ovdje su pretpostavljene jednostruke karakteristične frekvencije



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- prije razmatrani diskretni sustav, opisan jednadžbom diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

sustav je pobuđen s

$$u(n) = -0.2\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \cdot \mu(n)$$

- za ovaj sustav određujemo, prisilni odziv, prijenosnu funkciju i frekvencijsku karakteristiku
- prisilni odziv, na pobudu $u(n) = U\cos(\Omega_0 n)$ je, kako je prije pokazano,

$$y_p(n) = |H(e^{j\Omega_0})| U \cos\left(\Omega_0 n + \angle H(e^{j\Omega_0})\right)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- iz jednadžbe diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

odnosno

$$(1 - 0.8\sqrt{2}E^{-1} + 0.64E^{-2})y(n) = u(n)$$

prije je već izvedena prijenosna funkcija

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

a frekvencijsku karakteristiku izračunavamo za $z = e^{j\Omega}$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\Omega} + 0.64e^{-j2\Omega}}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- za konkretnu frekvenciju pobude $\Omega_0 = \frac{\pi}{8}$ omjer kompleksne amplitude odziva i pobude je

$$H(e^{j\Omega_0}) = H(e^{j\frac{\pi}{8}}) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{8}} + 0.64e^{-j2\frac{\pi}{8}}}$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{8}}) = 2.4495 + j0.1178 = 2.4524e^{j0.0481}$$

- pa je partikularno rješenje

$$\begin{aligned} y_p(n) &= |H(e^{j\Omega_0})| U \cos\left(\Omega_0 n + \angle H(e^{j\Omega_0})\right) = \\ &= 2.4524(-0.2) \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right) = \\ &= -0.49048 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right) \quad n \geq 0 \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- prije je određen prisilni odziv diskretnog sustava, zadanog jednačbom diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n),$$

na pobudu $u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$

- pokazano je kako je partikularno rješenje jednačbe diferencija jednako prisilnom odzivu sustava
- ovdje će biti ponovljen postupak određivanja partikularnog rješenja u vremenskoj domeni, kako bi su ukazalo na jednostavnost netom prikazanog postupka određivanja partikularnog rješenja u frekvencijskoj domeni



Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- kako je pobuda $u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K_1\cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2\sin(\frac{\pi}{8}n)$$

- koeficijente K_1 i K_2 određujemo metodom neodređenog koeficijenta
- uvrštenjem $y_p(n)$ u polaznu jednadžbu slijedi

$$y_p(n) - 0.8\sqrt{2}y_p(n-1) + 0.64y_p(n-2) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n);$$

$$\begin{aligned} K_1\cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2\sin(\frac{\pi}{8}n) - 0.8\sqrt{2}K_1\cos[\frac{\pi}{8}(n-1)] - \\ - 0.8\sqrt{2}K_2\sin[\frac{\pi}{8}(n-1)] + 0.64K_1\cos[\frac{\pi}{8}(n-2)] + \\ + 0.64K_2\sin[\frac{\pi}{8}(n-2)] = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- primjenom trigonometrijskih transformacija slijedi

$$\begin{aligned} & K_1 \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + K_2 \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - \\ & - 0.8\sqrt{2}K_1 \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] - \\ & - 0.8\sqrt{2}K_2 \left[\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] + \\ & + 0.64K_1 \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] + \\ & + 0.64K_2 \left[\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = -0.2\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \end{aligned}$$

- razvrstavanjem slijedi

$$\begin{aligned} & \{ [1 - 0.8\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0.64\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)]K_1 + \\ & + [0.8\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - 0.64\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)]K_2 \} \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \\ & \{ -[0.8\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - 0.64\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)]K_1 + \\ & + [1 - 0.8\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0.64\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)]K_2 \} \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) = -0.2\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- usporedbom lijeve i desne strane pišemo

$$\begin{aligned} & [1 - 0.8\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{8}) + 0.64\cos(\frac{\pi}{4})]K_1 + \\ & \quad + [0.8\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}) - 0.64\sin(\frac{\pi}{4})]K_2 = -0.2 \\ & - [0.8\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}) - 0.64\sin(\frac{\pi}{4})]K_1 + \\ & \quad + [1 - 0.8\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{8}) + 0.64\cos(\frac{\pi}{4})]K_2 = 0 \end{aligned}$$

- rješenjem ovih jednadžbi izračunavamo K_1 i K_2

$$K_1 = -0.4899, \quad K_2 = 0.0236$$

- pa je partikularno rješenje

$$\begin{aligned} y_p(n) &= -0.4899\cos(\frac{\pi}{8}n) + 0.0236\sin(\frac{\pi}{8}n) = \\ &= -0.49048\cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481) \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- iz izračunatih $H(z)$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

i $H(e^{j\Omega})$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\Omega} + 0.64e^{-j2\Omega}} = \frac{e^{j2\Omega}}{e^{j2\Omega} - 0.8\sqrt{2}e^{j\Omega} + 0.64}$$

možemo crtati, kao i u slučaju kontinuiranih sustava, plohe koje prikazuju $|H(z)|$ i $\angle H(z)$, odnosno krivulje, $|H(e^{j\Omega})|$ i $\angle H(e^{j\Omega})$



Signali i sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

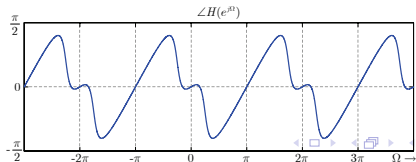
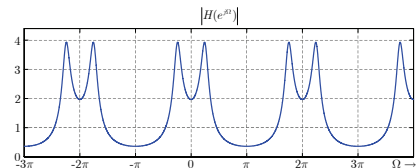
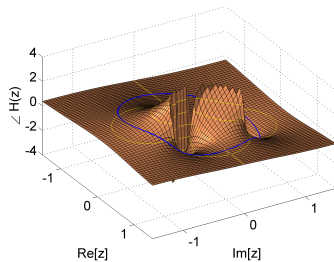
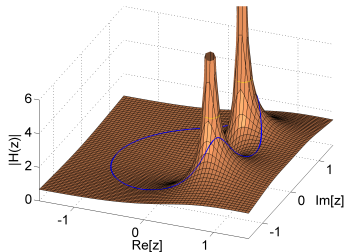
Frekvencijska karakteristika sustava

Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom

Prijenosna funkcija

Frekvencijska karakteristika vremenski diskretnih sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer





Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- frekvencijska karakteristika se može odrediti grafički iz

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{j=1}^N (z - z_j)}{\prod_{j=1}^N (z - p_j)},$$

praćenjem $|H(z)|$ i $\angle H(z)$ na jediničnoj kružnici, dakle, za $z = e^{j\Omega}$

$$|H(e^{j\Omega})| = |b_0| \frac{\prod_{j=1}^N |(e^{j\Omega} - z_j)|}{\prod_{j=1}^N |(e^{j\Omega} - p_j)|},$$

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \underbrace{\angle(b_0)}_{\substack{0 \text{ za } b_0 \geq 0 \\ \pi \text{ za } b_0 < 0}} + \sum_{j=1}^N \angle(e^{j\Omega} - z_j) - \sum_{j=1}^N \angle(e^{j\Omega} - p_j)$$

- svaki korijeni faktor prijenosne funkcije daje svoj individualni doprinos modulu (multiplikativno) i fazi (aditivno)



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

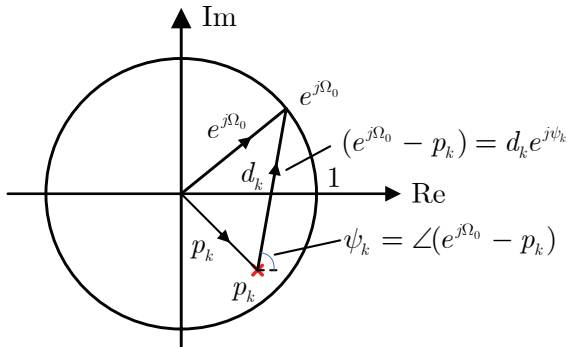
Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- svaki od članova $(e^{j\Omega} - z_j)$ ili $(e^{j\Omega} - p_j)$ možemo prikazati kao vektore u kompleksnoj ravnini



- napomena: višestruke nule ili višestruke polove označujemo oznakama \circ , odnosno \times , i uz njih upisujemo arapski broj koji označuje red njihove višestrukosti



Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j2\Omega}}{(e^{j\Omega} - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(e^{j\Omega} - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

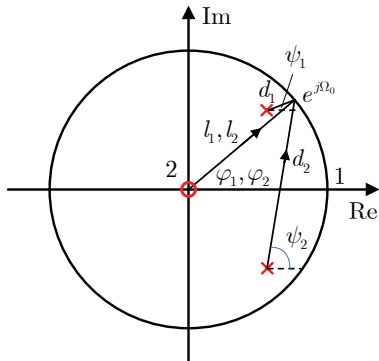
za konkretnu frekvenciju

$$z = e^{j\Omega_0},$$

i za $l_1 = l_2 = 1$,

$$|H(e^{j\Omega_0})| = \frac{l_1 l_2}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_1 d_2}$$

$$\angle H(e^{j\Omega_0}) = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_1 - \psi_2$$





Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom

Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- slijede primjeri koji ukazuju kako položaj polova i nula određuje frekvencijsku karakteristiku
- položaj polova i nula određen je sustavnim postupcima za projektiranje sustava
- prikazani su primjeri četiri tipa tzv. Butterworth-ovih filtara:
 - niskopropusni (NP)
 - visokopropusni (VP)
 - pojasna brana (PB)
 - pojasno propusni (PP)



Signali i sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

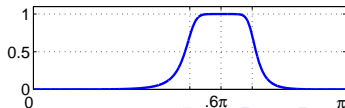
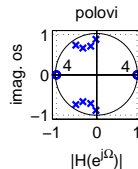
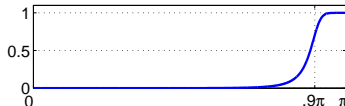
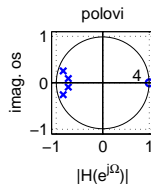
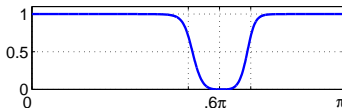
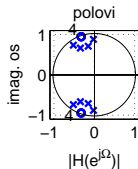
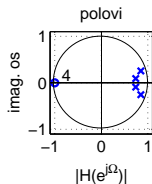
Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska karakteristika sustava

Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom
Prijenosna funkcija

Frekvencijska karakteristika vremenski diskretnih sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer





Signali i
sustavi

školska godina
2009/2010
Cjelina 13

Profesor
Branko Jeren

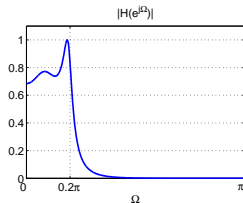
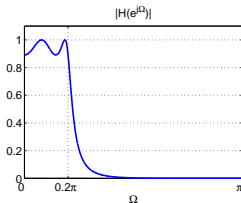
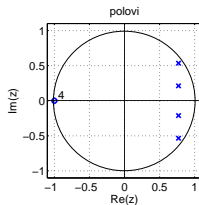
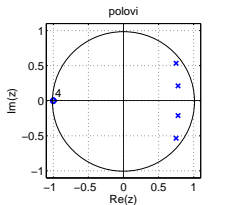
Frekvencijska
karakteristika
sustava

Odziv diskretnog
sustava na
pobudu
eksponencijalom
Prijenosna
funkcija

Frekvencijska
karakteristika
vremenski
diskretnih
sustava

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- slijedi primjer koji pokazuje kako mali pomak polova ima izravni utjecaj na frekvencijsku karakteristiku \Rightarrow potrebni sustavni postupci projektiranja



$$p_{1,2} = 0.7498 \pm j0.5348,$$

$$p_{3,4} = 0.7774 \pm j0.2120,$$

$$p'_{1,2} = 0.7700 \pm j0.5348$$

$$p'_{3,4} = 0.7774 \pm j0.2120$$