Signali i sustavi – zadaci za bodove iz aktivnosti

II tjedan

1. Koji su od sljedećih kontinuiranih signala periodički? Za one koji jesu, izračunajte temeljni period.
   $a)\ \cos^2(t),$
   $b)\ \cos(2\pi t)\mu(t),$
   $c)\ e^{j\pi t},$
   $d)\ \cos(t^2).$

2. Jesu li sljedeći diskretni signali periodički? Ako jesu, izračunajte temeljni period.
   $a)\ \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right),$
   $b)\ \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right).$

3. Dokažite da je kompleksni eksponencijalni signal $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$ periodičan samo ako je $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ racionalan broj.

4. Neka su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ periodički signali s temeljnim periodima T_1 i T_2 . Pod kojim uvjetima je suma signala $x(t)= x_1(t)+ x_2(t)$ periodička? Koji je temeljni period sume?

5. Za proizvoljan kontinuiran signal snaga se definira na sljedeći način:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt .$$

   Dokažite tvrdnju: U slučaju da je signal $x(t)$ periodičan signal s temeljnim periodom T_0 vrijedi $P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 \, dt$.

6. Izračunajte energiju sljedećih signala
   a. $x(t)=e^{-at}\mu(t),\ a>0,$
   b. $x(t)=t\mu(t),$

7. Izračunajte snagu sljedećih signala
   a. $x(n)=\mu(n)$,
   b. $x(n)=2e^{j3n}$.

8*. Neka su funkcije $u \in L^2(I)$ i $g \in L^2(I)$ takve da je $\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx$ za svaku funkciju $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Tada kažemo da je *u* slabo derivabilna i da je *g* njena slaba derivacija, pri čemu je $C_0^\infty(I)$ skup svih beskonačno derivabilnih funkcija na intervalu *I*, čija je vrijednost na krajevima intervala jednaka nuli. Koristeći spomenutu činjenicu dokažite da je $u(x)=\frac{1}{2}(|x|+x)$ za $-1 \le x \le 1$ slabo derivabilna te da je njena slaba derivacija Hevisideova step funkcija $\mu(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

STJEPAN MAJIĆ
0036355418

1. a) $\cos^2(t)$

Vrijedi trigonometrijska relacija $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Stoga,

$$x(t) = \cos^2(t) = \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} = x_1(t) + x_2(t)$$

$x_1(t) = \frac{1}{2}$ ima slobodno izabrani period

$x_2(t) = \frac{\cos 2t}{2}$ ima period (općenito) $T = \frac{2\pi}{\omega}$. U ovom slučaju

$\omega = 2$ pa vrijedi $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ODGOVOR: $\cos^2(t)$ je periodički signal s periodom $T = \pi$

b) $\cos(2\pi t)\mu(t)$

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 &, t<0 \\ 1 &, t>0 \end{cases}$$

$\cos(2\pi t)\mu(t)$ za $t<0$ signal ima vrijednost nula ($\emptyset$),

a za $t>0$ $\cos(2\pi t)$. Signal NIJE periodički.

STJEPAN PAJIĆ
0036355548

① c) $e^{j\pi t}$

$x(t+T) = e^{j\pi(t+T)}$; za periodične signale vrijedi $x(t) = x(t+T)$

pa slijedi $e^{j\pi(t+T)} = e^{j(\pi t + 2k\pi)} \Rightarrow \pi \cdot T = 2\pi k$ (za $k=1$)

$\boxed{T=2}$

ODGOVOR: $e^{j\pi t}$ je periodički signal s periodom $T=2$.

d) $\cos(t^2)$

$x(t+T) = \cos((t+T)^2) = \cos(t^2 + 2tT + T^2)$

Da bi $\cos(t^2)$ bio periodičan signal mora vrijediti

$$2tT + T^2 = 2\pi k \Rightarrow \frac{T(2t+T)}{2\pi} = k \quad , k \in N$$

Ne postoji konstantna vrijednost T koja bi dala za k prirodan broj pa $\cos(t^2)$ nije periodična funkcija.

STJEPAN MAJIĆ
0036355418

② a) $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$

$$x(n+N) = \cos\left(\pi(n+N) + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi n + \pi N + \frac{\pi}{4}\right)$$

$x(n) = x(n+N)$ je u slučaju kada je $\pi N = 2\pi k$ tj. $N = 2k$,

Znači period je $N_0 = 2$.

ODGOVOR: $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$ je periodički signal s periodom 2.

b) $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$

$$x(n+N) = \cos\left(\frac{\pi}{8}(n+N)^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n^2 + \frac{2\pi}{8}nN + \frac{\pi}{8}N^2\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi n^2}{8} + \frac{\pi}{8}\left(2nN + N^2\right)\right)$$

Kako bi signal bio periodičan moramo pronaći N za koji vrijedi $\frac{\pi}{8}(2nN + N^2) = 2\pi k \Rightarrow \frac{N}{16}(N + 2n) = k$

Navedena jednakost je zadovoljena za $N_0 = 8$.
Stoga je signal periodičan s periodom 8.

STJEPAN MAJIĆ
0036355418

3 $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$

- $x(n)$ će biti periodički kompleksni eksponencijalni signal ukoliko vrijedi :

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n} \Rightarrow e^{j\Omega_0 N} = 1$$

$$\Omega_0 N = k \cdot 2\pi \quad , k = \text{pozitivan cijeli broj}$$

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{n} \rightarrow \text{racionalan broj}$$

ZAKLJUČAK: $x(n)$ je periodički signal samo ako je $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ racionalan broj.

STJEPAN MAJIĆ
0036355418

(5)

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Uzmemo li T na način da $T = kT_0$ gdje s T_0 označavamo osnovni period možemo pisati da je ukupna snaga jednaka k puta snaga na jednoj periodi, odnosno

$$P = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{kT_0} k \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \right) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt$$

čime je tvrdnja DOKAZANA.

(4) Pošto su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ periodički signali, vrijedi:

$$x_1(t) = x_1(t + T_1) = x_1(t + mT_1) \qquad n, m = \text{pozitivni cijeli broj}$$

$$x_2(t) = x_2(t + T_2) = x_2(t + nT_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_1(t + mT_1) + x_2(t + nT_2)$$

Kako bi $x(t)$ bio periodički signal mora vrijediti:

$$x(t+T) = x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t + mT_1) + x_2(t + nT_2)$$

$$mT_1 = nT_2 = T$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m} \quad ; \quad \frac{n}{m} = \text{racionalan broj}$$

ZAKLJUČAK: Zbroj dva periodička signala je periodički signal samo ako je omjer pripadnih perioda signala racionalan broj. Osnovni period signala koji je dobiven zbrojem dva periodička signala tada je jednak najmanjem zajedničkom višekratniku od T_1 i T_2 i definiran je relacijom

$$mT_1 = nT_2 = T$$

STJEPAN MAJIĆ
0036355418

6

a) $x(t) = e^{-at}\mu(t),\ a>0$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$$

b) $x(t) = t\,\mu(t)$

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T/2} t^2 dt = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{t=\frac{T}{2}} \right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{T^3}{24} = \infty$$

7

a) $x(n) = \mu(n)$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1^2 =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot (N+1) = \lim_{N\to\infty} \frac{1+\frac{1}{N}}{2+\frac{1}{N}} = \frac{1}{2}$$

b) $x(n) = 2e^{j3n}$

$$|x(n)| = |2e^{j3n}| = 2|e^{j3n}| = 2\cdot 1 = 2$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 2^2 =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot 2^2 \cdot (2N+1) = 4\cdot \lim_{N\to\infty} \frac{2+\frac{1}{N}}{2+\frac{1}{N}} = 4\cdot 1 = 4$$

8.

$$u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(|x|+x)\,\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -x\cdot\varphi'(x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x\,\varphi(x)dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,\varphi'(x)\,dx$$

$$\int_{A}^{B} x\,\varphi'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \varphi'(x)dx & v = \varphi(x) \end{matrix} \right| = x\cdot\varphi(x)\Big|_A^B - \int_A^B \varphi(x)dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(|x|+x)\,\varphi'(x)\,dx = -\frac{1}{2}\left(\varphi(-1) - \int_{-1}^{0}\varphi(x)dx\right) + \frac{1}{2}\left(\varphi(1) - \int_{0}^{1}\varphi(x)dx\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\varphi(1) + \varphi(-1) - \int_{-1}^{1}\varphi(x)\,dx\right) =$$

Vrijednost funkcije na krajevima intervala -1 i 1 je $\emptyset$, pa su $\varphi(1), \varphi(-1) = \emptyset$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\varphi(x)dx} - \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\varphi(x)dx - \cancel{\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\varphi(x)dx} - \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\varphi(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{1}\varphi(x)\,dx$$

$$g(x) = \mu(x)$$

$$-\int_{-1}^{1} g(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{-1}^{1}\mu(x)\,\varphi(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{1}\varphi(x)\,dx$$

Dokazali smo da je

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(|x|+x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{1}\mu(x)\,\varphi(x)\,dx$$

za $\varphi \in C_0^{\infty}(I)$