Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

5. ožujka 2007.

Otipkavanje vremenski kontinuiranih signala

- otipkavanjem vremenski kontinuiranog signala
  $u_a : Realni \rightarrow Realni$
  u diskretnim trenucima vremena $t = nT$,
  nastaje vremenski diskretan signal
  $u : Cjelobrojni \rightarrow Realni$
  dakle, za

$$\forall t \in Realni, u_a(t)$$

otipkavanjem slijedi

$$\forall n \in Cjelobrojni, u(n) = u_a(t)|_{t=nT} = u_a(nT)$$

Otipkavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala 1

- realna vremenski kontinuirana sinusoida definirana je kao

$$u_a : Realni \rightarrow Realni$$
$$u_a(t) = \cos(2\pi F t + \theta) = \cos(\Omega t + \theta)$$

gdje su F frekvencija signala [Hz] i Ω kutna frekvencija [rad/s]

- za $t = nT = \frac{n}{F_s} = \frac{2\pi n}{\Omega_s}$ i $\forall n \in Cjelobrojni$ slijedi

$$u(n) = u_a(nT) = \cos(2\pi F n T + \theta) = \cos(\Omega T n + \theta) =$$

$$= \cos(\frac{2\pi F}{F_s} n + \theta) = \cos(\frac{2\pi \Omega}{\Omega_s} n + \theta) = \cos(\omega n + \theta)$$

gdje su $F_s = 1/T$ frekvencija otipkavanja i $\Omega_s = 2\pi F_s$ kutna frekvencija otipkavanja

Otipkavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala 2

- dakle otipkani signal je

$$u(n) = \cos(\omega n + \theta), \qquad \forall n \in \mathit{Cjelobrojni}$$

  pri čemu je $\omega = \Omega T$ normalizirana kutna frekvencija (ili korak argumenta) [rad/uzorku] diskretnog signala $u(n)$
- kako Ω neograničen, to će i ω biti neograničen, pa je očigledno da se, pri otipkavanju vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala, može javiti aliasing (za $|\omega| > \pi$)
- ovdje će se razmotriti pod kojim uvjetima otipkavati vremenski kontinuirani signal da bi se izbjegla pojava aliasinga

Jednoznačno otipkavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- pri otipkavanju vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala kutne frekvencije $\Omega_0 = 2\pi F_0$ s frekvencijom otipkavanja $F_s = \frac{1}{T}$ nastaje vremenski diskretna sinusoida (sinusoidni niz) normalizirane kutne frekvencije

$$\omega_0 = \Omega_0 T = \Omega_0 \frac{1}{F_s} = \frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s}$$

aliasing se ne javlja za $\omega_0 \leq \pi$, pa iz $\frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s} \leq \pi$ slijedi

$$\Omega_s \geq 2\Omega_0 \quad \text{ili} \quad F_s \geq 2F_0$$

- zaključujemo: vremenski kontinuirana sinusoida će biti jednoznačno otipkana ako je frekvencija otipkavanja dvostruko veća od frekvencije otipkavane vremenski kontinuirane sinusoide
- ovaj zaključak je specijalni slučaj *teorema otipkavanja* koji će kasnije biti detaljno analiziran

Primjeri otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- otipkavaju se vremenski kontinuirane sinusoide frekvencija $F_1 = 4\,kHz$, $F_2 = 20\,kHz$, $F_3 = 28\,kHz$, $F_4 = 44\,kHz$, a frekvencija otipkavanja neka je $F_s = 48\,kHz$
- prethodni zaključak ukazuje da će otipkavanje treće i četvrte sinusoide rezultirati aliasingom, jer frekvencija otipkavanja nije dvostruko veća od frekvencije vremenski kontinuirane sinusoide
- ilustrirajmo postupak otipkavanja

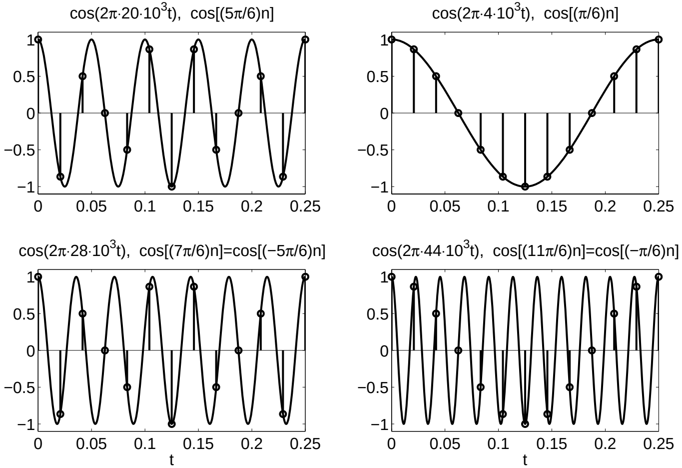
Postupak otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= \cos(2\pi F_1 t) = \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot t) \\
u_2(t) &= \cos(2\pi F_2 t) = \cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot t) \\
u_3(t) &= \cos(2\pi F_3 t) = \cos(2\pi \cdot 28 \cdot 10^3 \cdot t) \\
u_4(t) &= \cos(2\pi F_4 t) = \cos(2\pi \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot t)
\end{aligned}
$$

za $t = nT = \frac{n}{F_s} = \frac{n}{48 \cdot 10^3}$

$$
\begin{aligned}
u_1(n) &= \cos(2\pi F_1 nT) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{4 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{\pi}{6} n) \\
u_2(n) &= \cos(2\pi F_2 nT) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{20 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{5\pi}{6} n) \\
u_3(n) &= \cos(2\pi \cdot \tfrac{28 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{7\pi}{6} n) = \cos(-\tfrac{5\pi}{6} n) \\
u_4(n) &= \cos(2\pi \cdot \tfrac{44 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{11\pi}{6} n) = \cos(-\tfrac{\pi}{6} n)
\end{aligned}
$$

Otipkavanje vremenski kontinuiranih sinusoida



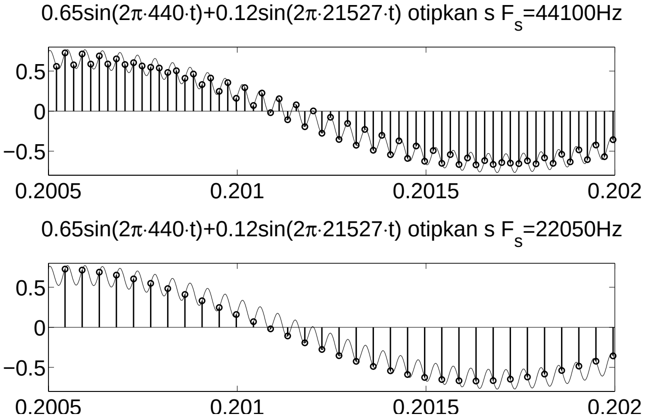
Slika 1: Aliasing kod otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

Primjer aliasinga kod audio signala1

- otipkava se vremenski kontinuiran signal $0.65 sin(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 0.12 sin(2\pi \cdot 21527 \cdot t)$ frekvencijom otipkavanja $F_s = 44100\,\text{Hz}$
- komponenta frekvencije $F = 21527\,\text{Hz}$ izvan je slušnog područja, pa je u reprodukciji čujna samo komponenta frekvencije $F = 440\,\text{Hz}$ (nota A)
- pri otipkavanju signala s frekvencijom $F_s = 22050\,\text{Hz}$ dolazi do pojave aliasinga i komponenta frekvencije $F = 21527\,\text{Hz}$ zrcali se u osnovno frekvencijsko područje kao sinusoida frekvencije $F = 22050 - 21527 = 523\,\text{Hz}$ (nota C)
- u reprodukciji se čuju komponenta frekvencije $F = 440\,\text{Hz}$, te komponenta frekvencije $F = 523\,\text{Hz}$ koja je nastala aliasingom komponente frekvencije $F = 21527\,\text{Hz}$

Aliasing kod audio signala 2

- prikazan je signal otipkan frekvencijom otipkavanja $F_s = 44100\,\mathrm{Hz}$ i frekvencijom otipkavanja $F_s = 22050\,\mathrm{Hz}$

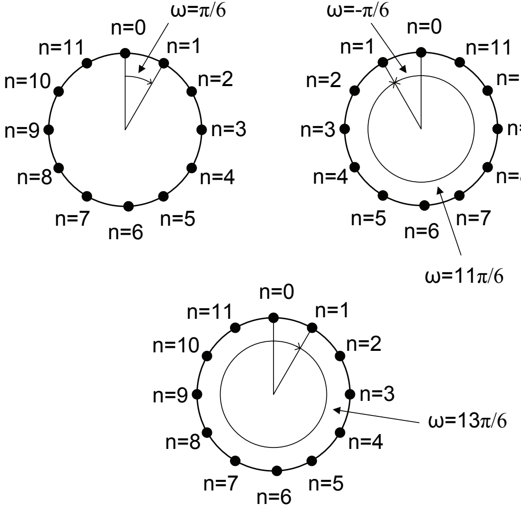


Slika 2: Aliasing kod otipkavanja audio signala

Još o aliasingu pri otipkavanju vremenski kontinuiranih sinusoida 1

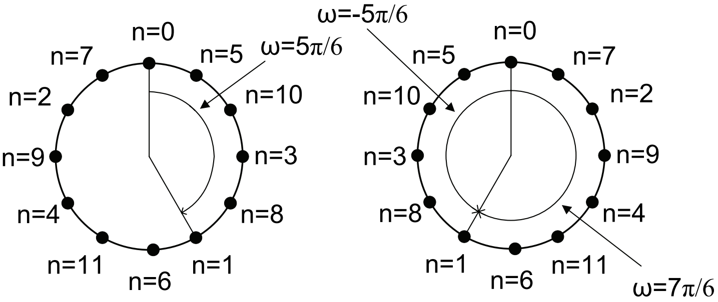
- u slučaju signala koji se sastoji od više vremenski kontinuiranih sinusoida otipkavanje treba biti dvostruko više frekvencije od najviše frekvencije među sinusoidnim komponentama signala
- u slučaju nemogućnosti promjene frekvencije otipkavanja (diskretizacije) alliasing se može pojaviti
- zanimljiv je primjer vrtnje kotača (npr. automobila Formule 1) na televizijskim ekranima gdje gledatelj, u relativno kratkom vremenu, tipično pri naglim promjenama brzine vrtnje kotača, stječe dojam da se kotač povremeno vrti naprijed, povremeno nazad, a ponekad kao i da stoji na mjestu
- efekt je posljedica pojave aliasinga i biti će ilustriran narednom slikom

Još o aliasingu pri otipkavanju vremenski kontinuiranih sinusoida 2



Slika 3: Aliasing kod otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

Još o aliasingu pri otipkavanju vremenski kontinuiranih sinusoida 3

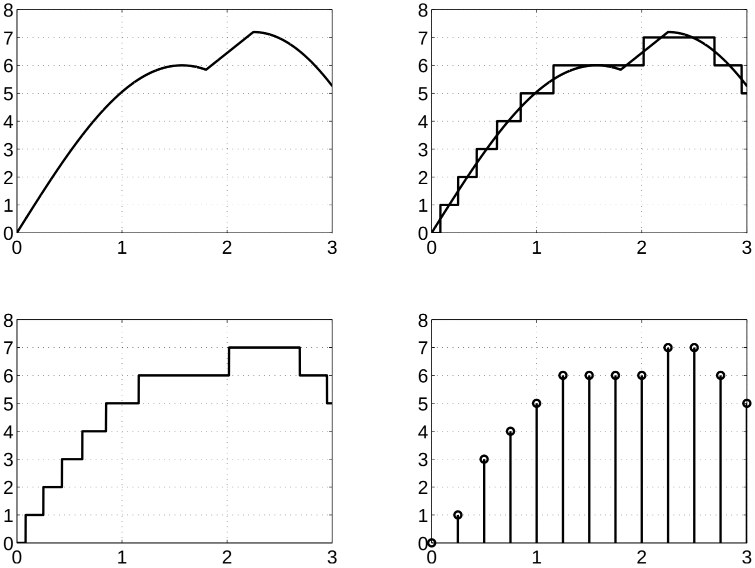


Slika 4: Aliasing kod otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

Kvantizirani signali – signali diskretne amplitude

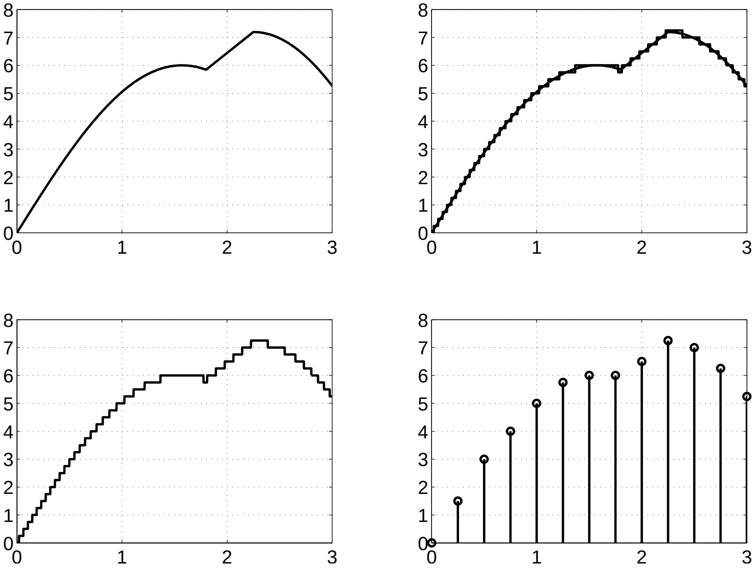
- signali diskretne amplitude su signali za koje je $Kodomena \subset Cjelobrojni$
- u postupku digitalizacije analognih signala, A/D pretvorbom, potrebno je uz otipkavanje signala izvršiti i njegovu kvantizaciju po amplitudi
- u primjerima koji slijede područje vrijednosti nekvantiziranog signala neka je iz intervala $[0, 7.193] \subset Realni$, a promatraju se kvantizirani signali za kvantizacijski interval
  - $Q = 1 \Rightarrow$ trenutna vrijednost kvantiziranog signala poprima neku od 8 mogućih cjelobrojnih vrijednosti
  - $Q = 0.25 \Rightarrow$ trenutna vrijednost kvantiziranog signala poprima neku od 29 mogućih cjelobrojnih vrijednosti
- slijede primjeri kvantizacije, zaokruživanjem, signala za dane kvantizacijske intervale (kvante amplitude)
- na slikama su prikazani nekvantizirani signal, postupak kvantizacije, kvantizirani signal i otipkani kvantizirani signal

Kvantizirani signali – signali diskretne amplitude



Slika 5: Postupak kvantizacije signala po amplitudi, $Q = 1$

Kvantizirani signali – signali diskretne amplitude



Slika 6: Postupak kvantizacije signala po amplitudi, $Q = 0.25$

Mikrofon kao sustav 1

- u uvodnom predavanju pokazano kako mikrofon – i svaki drugi sustav – možemo prikazati blokom kao na sl. 7

Slika 7: Mikrofon prikazan blokom

- pobuda mikrofona su signali definirani kao:

$$Zvuk : Vrijeme \to Tlak$$

$$Vrijeme \subset Realni \text{ i}$$
$$Tlak \subset Realni$$

- odziv mikrofona su signali definirani kao

$$MikIzlazi : Vrijeme \to Napon$$

$$Vrijeme \subset Realni \text{ i}$$
$$Napon \subset Realni$$

Klasa signala, prostor signala, prostor funkcija 1

- skup svih zvučnih signala koji predstavljaju ulazne signale u mikrofon nazivamo klasa ili prostor zvučnih signala i pišemo
$$ZvucniSignali = [Vrijeme \to Tlak]$$
- u općem slučaju vrijedi:
- neka je signal $u : D \to K$
- skup U svih signala u naziva se klasom ili prostorom signala ili prostorom funkcija
- pišemo:
$$U = [D \to K] = \{u | u : D \to K\}$$
i čitamo "Klasa signala U, što možemo pisati i kao $[D \to K]$, je skup svih signala u takvih da $u : D \to K$"

Sustavi kao funkcije 1

- sustav S je funkcija[1] i transformira ulazni signal, u, u izlazni signal, y, pa je

$$y = S(u)$$

- sustav S je dakle funkcija koja preslikava prostor signala u prostor signala

$$S : [D_u \rightarrow K_u] \rightarrow [D_y \rightarrow K_y]$$

- sustav S je sveukupnost ul./izl. parova (u, y)

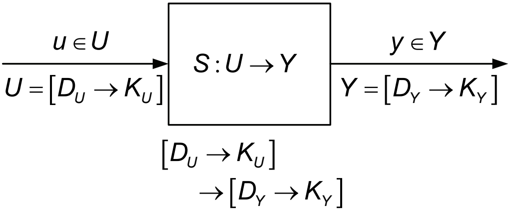
$$S = \{(u, y) | u \in U, y \in Y\}$$

- ovako definirani model sustava naziva se **model ulaz–izlaz**

[1] može biti i relacija

Sustavi kao funkcije 2

- sustave opisujemo blokovskim dijagramima



- sustavi su funkcije čije su domene i kodomene prostori signala
- tako, ako je, $u \in [D_u \to K_u]$ i $y = S(u)$ tada je $y \in [D_y \to K_y]$

Kontinuirani sustavi

- klasa sustava koji su opisani funkcijom

$$KontSustavi : KontSignali \to KontSignali$$

- KontSignali je skup vremenski kontinuiranih signala koji ovisno o konkretnom sustavu mogu biti

$$\begin{aligned} &KontSignali = [Vrijeme \to Realni] \quad \text{ili} \\ &KontSignali = [Vrijeme \to Kompleksni] \\ &\text{uz } Vrijeme = Realni \\ &\text{ili } Vrijeme = Realni_+ \end{aligned}$$

Diskretni sustavi

- klasa sustava koji su opisani funkcijom

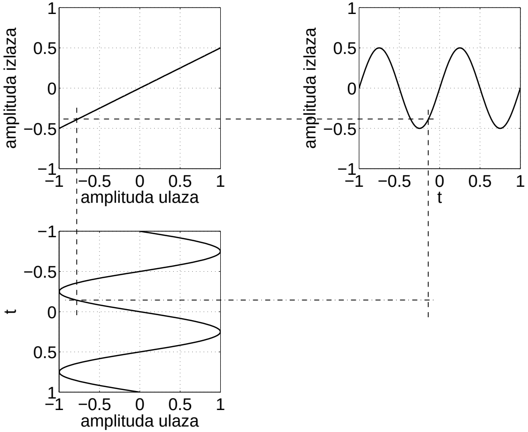
$$DiskrSustavi : DiskrSignali \to DiskrSignali$$

- dakle vremenski diskretni sustavi djeluju s klasama diskretnih signala koji mogu biti

$$\begin{aligned} DiskrSignali &= [Cjelobrojni \to Realni] \quad \text{ili} \\ DiskrSignali &= [Cjelobrojni \to Kompleksni] \quad \text{ili} \\ DiskrSignali &= [Prirodni_0 \to Realni] \quad \text{ili} \\ DiskrSignali &= [Prirodni_0 \to Kompleksni] \end{aligned}$$

Primjer kontinuiranog sustava

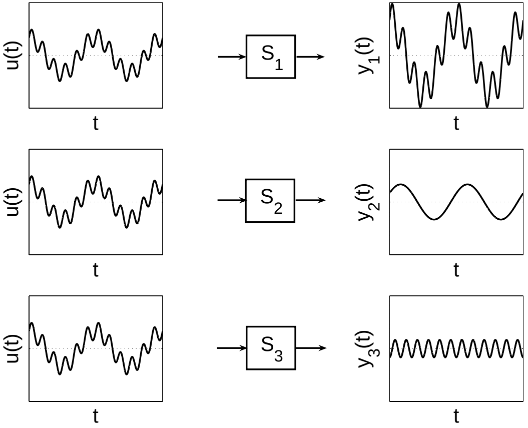
- na sl.8 je pokazan odziv kontinuiranog sustava $y(t) = \frac{1}{2}u(t)$ na pobudu sinusnim signalom



Slika 8: Primjer kontinuiranog sustava

Ponašanje sustava određuje funkcija sustava – primjer

- dan je primjer tri različita sustava pobuđena istom pobudom i na slici su prikazana tri moguća različita odziva ovisna o funkciji sustava

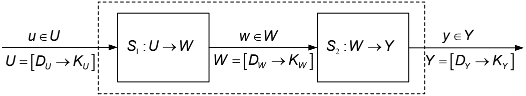


Povezivanje sustava

- spajanjem sustava grade se složeniji sustavi
- na primjeru audio sustava pokazano je da je on složen od tri sustava spojenih u kaskadu
- kaskadni, paralelni, te spoj sustava u povratnu vezu omogućuju bilo koju kombinaciju povezivanja sustava

Kaskada sustava

- razmotrimo opis dvaju sustava u kaskadnom



- funkcija S opisuje sustav koji je nastao spajanjem, u kaskadu, sustava S_1 i S_2
- uz oznake signala i oznake klasa funkcija na slici vrijedi

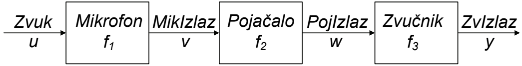
$$w = S_1(u) \quad \text{i} \quad y = S_2(w) \quad \Rightarrow y = S_2(S_1(u)) = S(u)$$

- zaključujemo kako je funkcija nastalog sustava S kompozicija funkcija S_1 i S_2

$$\forall u \in U, y = S(u) = S_2(S_1(u)) \Leftrightarrow S = S_2 \circ S_1$$

Primjer audio sustava 1

- prije je opisan audio sustav svojim blokovskim dijagramom
- audio sustav je primjer sustava čiji su podsustavi spojeni u kaskadu



- na blokovskom dijagramu su dvostruke oznake (radi preglednosti–duže, radi jednostavnosti–kraće)

Mikrofon kao sustav 2

- već je pokazano kako mikrofon definiramo kao sustav
- signal $Zvuk : Vrijeme \rightarrow Tlak$ je mogući ulazni signal u sustav *Mikrofon* i predstavlja element klase signala, označimo ga *ZvucniSignali*

$$ZvucniSignali = [Vrijeme \rightarrow Tlak]$$

- mikrofon pretvara signal *Zvuk* u električni signal, na blokovskom dijagramu označen $MikIzlaz : Vrijeme \rightarrow Napon$, koji je element klase signala

$$MikrofonskiIzlazi = [Vrijeme \rightarrow Napon]$$

- pa se sustav mikrofon može definirati kao:

$$Mikrofon : ZvucniSignali \rightarrow MikrofonskiIzlazi$$

Pojačalo i zvučnik kao sustav

- prostor signala *MikrofonskiIzlazi* je u primjeru audio sustava prostor ulaznih signala u sustav pojačalo, a prostor izlaznih signala pojačala neka je označen kao $PojacaniSignali = [Vrijeme \to Napon]$, pa sustav *Pojacalo* možemo opisati funkcijom

$$Pojacalo : MikrofonskiIzlazi \to PojacaniSignali$$

- klasu izlaznih signala iz zvučnika označimo kao $IzlaziZvucnika = [Vrijeme \to Tlak]$ i sustav *Zvucnik* definiran je kao

$$Zvucnik : PojacaniSignali \to IzlaziZvucnika$$

Audio sustav kao funkcija 1

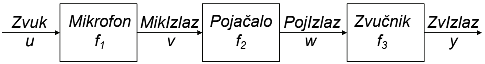
- opisom svakog podsustava odgovarajućim funkcijama moguće je definirati funkciju koja opisuje audio sustav kao cjelinu
- neka je funkcija koja opisuje audio sustav

$$AudioSustav : ZvucniSignali \rightarrow IzlaziZvucnika$$

pri čemu je klasa ulaznih signala
$ZvucniSignali = [Vrijeme \rightarrow Tlak]$,
a klasa izlaznih signala
$IzlaziZvucnika = [Vrijeme \rightarrow Tlak]$

Audio sustav kao funkcija 2

- za audio sustav s oznakama kao na slici možemo napisati jednadžbe



$$
\begin{aligned}
\mathit{MikIzlaz} &= \mathit{Mikrofon}(\mathit{Zvuk}) \\
\mathit{PojIzlaz} &= \mathit{Pojacalo}(\mathit{MikIzlaz}) \\
\mathit{ZvIzlaz} &= \mathit{Zvucnik}(\mathit{PojIzlaz}) \\
\mathit{ZvIzlaz} &= \mathit{Zvucnik}(\mathit{Pojacalo}(\mathit{Mikrofon}(\mathit{Zvuk})))
\end{aligned}
$$

pa je

$$\mathit{AudioSustav} = \mathit{Zvucnik} \circ \mathit{Pojacalo} \circ \mathit{Mikrofon}$$

- za skraćene oznake signala i podsustava pišemo

$$v = f_1(u), w = f_2(v), y = f_3(w) \Rightarrow y = f_3(f_2(f_1(u)))$$

Primjer kaskadne veza podsustava 1

- prijeđeni put automobila, u nekom vremenu, ovisi o pritisku na akcelerator (papučicu gasa)
- poznate su veze akceleracije, brzine i prijeđenog puta

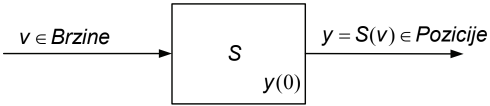
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \qquad \text{i} \qquad v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

- veze akceleracije, brzine i prijeđenog puta možemo prikazati i preko integrala pa je tada

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(\tau)d\tau \qquad \text{i} \qquad y(t) = y(0) + \int_0^t v(\lambda)d\lambda$$

Primjer kaskadne veza podsustava 2

- svaki od integrala realizirajmo pomoću podsustava koji realiziraju postupak integracije, dakle, integratora



$$Brzine = [[0, 50] \to Realni], \quad Pozicije = [[0, 50] \to Realni]$$

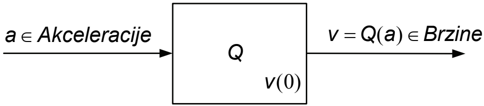
- pa podsustav S možemo definirati kao

$$\forall v \in Brzine, \forall t \in [0, 50]$$

$$S(v)(t) = y(t) = y(0) + \int_0^t v(\lambda) d\lambda$$

Primjer kaskadne veza podsustava 3

- isto tako za odrediti ovisnost brzine o akceleraciji slijedi



$$Akceleracije = [[0,50] \to Realni], \quad Brzine = [[0,50] \to Realni]$$

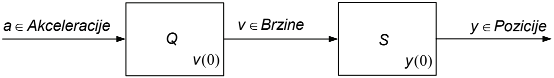
- pa podsustav Q možemo definirati kao

$$\forall a \in Akceleracije, \forall t \in [0,50]$$

$$Q(a)(t) = v(t) = v(0) + \int_0^t a(\tau) d\tau$$

Primjer kaskadne veza podsustava 4

- vezu prijeđenog puta (pozicije) i akceleracije prikazujemo kaskadnim spojem opisanih podsustava



$$S \circ Q : Akceleracije \to Pozicije$$
$$S \circ Q : [[0,50] \to Realni] \to [[0,50] \to Realni]$$

- pa sustav $S \circ Q$ možemo definirati kao

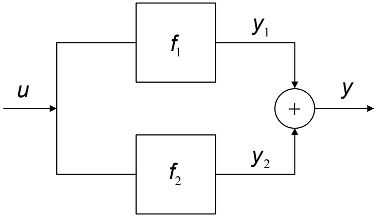
$$\forall a \in Akceleracije, \forall t \in [0,50]$$

$$(S \circ Q)(a)(t) = S(Q(a))(t) = y(t) = y(0) + \int_0^t v(\lambda) d\lambda =$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \left[v(0) + \int_0^\lambda a(\tau) d\tau \right] d\lambda$$

Paralelna veza podsustava

- paralelna veza podsustava prikazana je blokovskim dijagramom

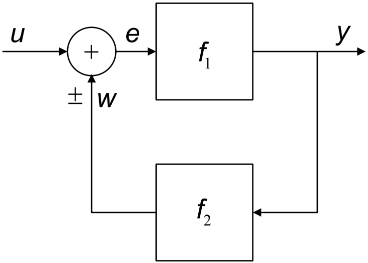


- slijede jednadžbe

$$y_1 = f_1(u), \quad y_2 = f_2(u) \Rightarrow y = f_1(u) + f_2(u)$$

Povratna veza podsustava

- primjer spoja podsustava u povratnoj vezi dan je na primjeru sustava za regulaciju kućne temperature
- povratna veza podsustava prikazana je blokovskim dijagramom



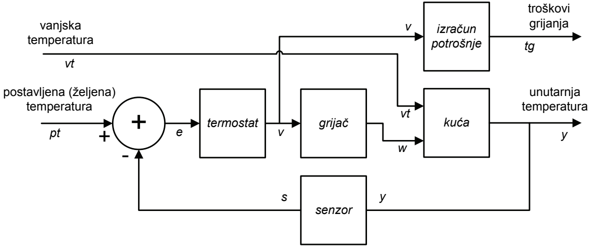
- za ovaj spoj vrijede jednadžbe

$$
\begin{aligned}
e &= u \pm w \\
w &= f_2(y) \Rightarrow e = u \pm f_2(y) \\
y &= f_1(e) \Rightarrow y = f_1(u \pm f_2(y))
\end{aligned}
$$

Primjer "složenog" sustava

- sustav koji čine na razne načine spojeni podsustavi ilustriramo jednim od demonstracijskih primjera za programski sustav MATLAB - sustavom regulacije kućne temperature
- pretpostavljeno je zagrijavanje kuće električnim grijačem određene snage koji upuhuje topli zrak
- predviđena je mogućnost postavljanja željene temperature, te dozvoljeno odstupanje od te temperature do $1\,^\circ\mathrm{C}$
- dakle, ako temperatura padne za $1\,^\circ\mathrm{C}$ ispod postavljene vrijednosti termostat uključuje grijač,
- ako temperatura naraste za $1\,^\circ\mathrm{C}$ iznad postavljene vrijednosti termostat isključuje grijač
- sustav uključuje i izračun potrošene energije

Sustav regulacije temperature kuće 1



- za ovaj spoj vrijede jednadžbe

$$
\begin{aligned}
e &= zbrajalo(pt, s) & tg &= izracun\_potrosnje(v) \\
v &= termostat(e) & y &= kuca(vt, w) \\
w &= grijac(v) & s &= senzor(y)
\end{aligned}
$$

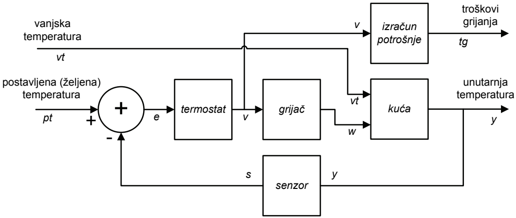
$$
\begin{aligned}
tg &= izracun\_potrosnje(v) \\
y &= kuca(vt, grijac(termostat(zbrajalo(pt, senzor(y)))))
\end{aligned}
$$

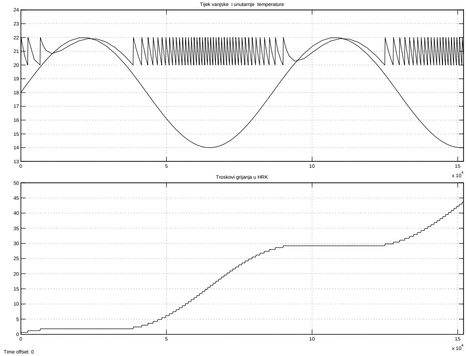
Sustav regulacije temperature kuće 2

- kako bi mogli odrediti odziv, tj. rješenje prethodne jednadžbe, potrebno je napisati matematičke modele za svaki od podsustava
- najsloženiji je termodinamički model kuće
- on uzima u obzir cijeli niz faktora poput:
  - geometriju kuće: dužinu, širinu, visinu, nagib krova, broj prozora, visinu i širinu prozora,
  - izolacijska svojstva: zidova, prozora
  - masu zraka u zadanom volumenu
  - vanjsku i unutarnju temperaturu itd.
- vrlo pojednostavljeni model, korišten u MATLAB demonstracijskom primjeru[2] svodi se na diferencijalni sustav prvog reda i njegovo djelovanje će biti razumljivo uvidom u odziv simulacije cijelog sustava

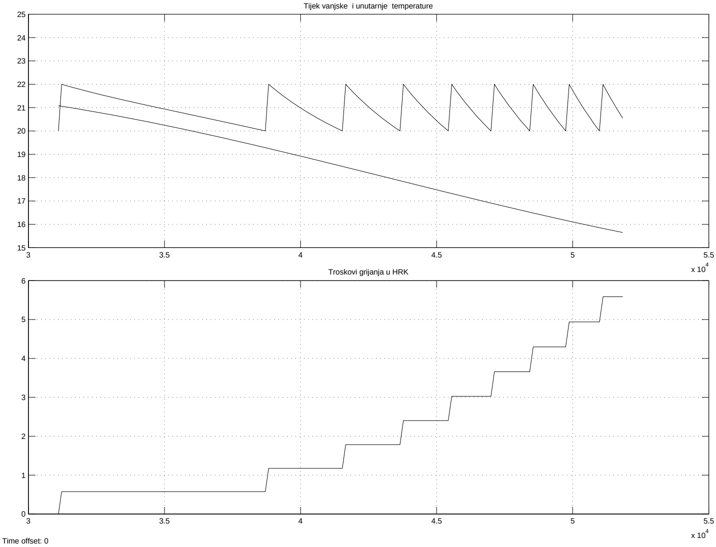
[2] zainteresirani više mogu pronaći u MATLAB → Help→Demos→ Simulink→ General→Thermodynamic Model of a House

Sustav regulacije temperature kuće 3

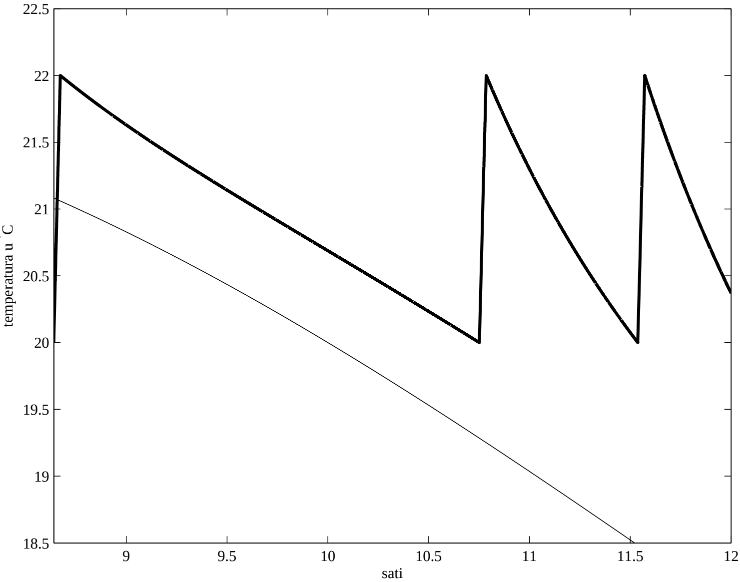




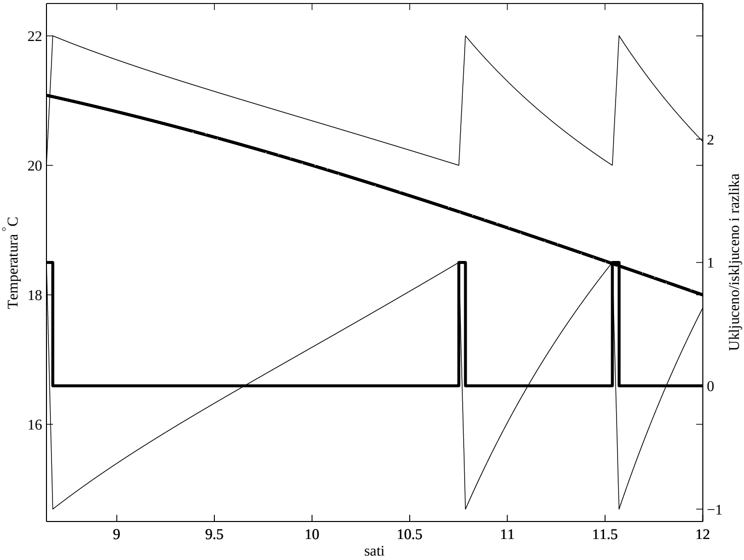
Sustav regulacije temperature kuće 4



Sustav regulacije temperature kuće 5



Sustav regulacije temperature kuće 6



Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 5

Profesor Branko Jeren

Otipkavanje vremenski kontinuirane sinusoide

Sustavi kao funkcije

Linearni vremenski stalni sustavi

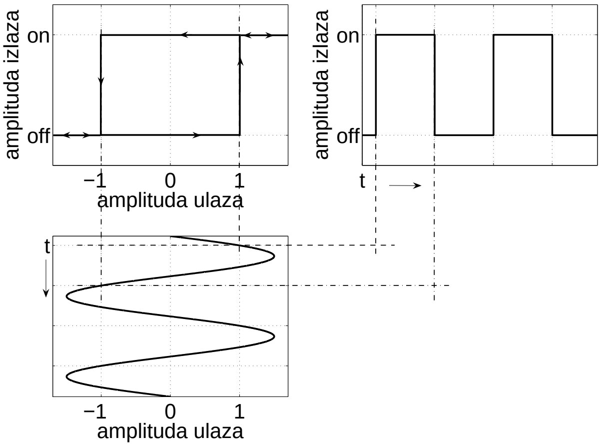
Sustav regulacije temperature kuće 7

- termostat, u zajednici sa zbrajalom, predstavlja regulator sustava koji regulira unutarnju temperaturu kuće unutar $\pm 1\,^{\circ}\mathrm{C}$ oko postavljene temperature
- kad amplituda ulaznog signala u termostat postane veća od 1 on na izlazu generira logičku jedinicu koja predstavlja signal uključivanja grijača
- za amplitudu ulaznog signala u termostat manju od -1 termostat generira na svom izlazu logičku nulu što će biti signal isključivanja grijača
- termostat predstavlja komparator s histerezom i njegov matematički model je:

$$v(t) = \mathit{termostat}(e)(t) = \begin{cases} \mathit{on} & \text{za } e(t) \geq 1 \\ \mathit{off} & \text{za } e(t) \leq -1 \\ \text{zadržava} & \\ \text{prethodno} & \\ \text{stanje} & \text{za } -1 < e(t) < 1 \end{cases}$$

Karakteristika komparatora s histerezom

- na slici je ulazno izlazna karakteristika komparatora s histerezom i njegov odziv na sinusnu pobudu



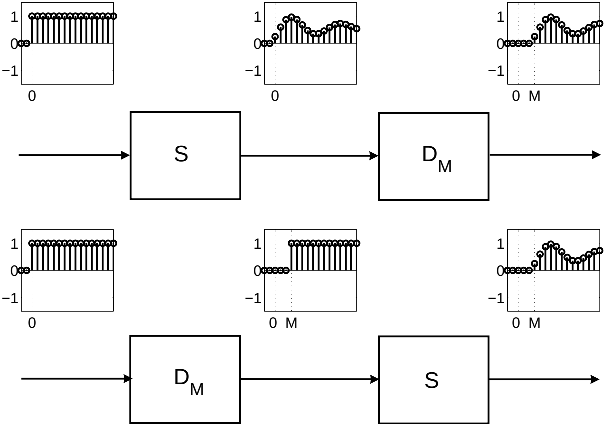
Vremenski stalni sustavi 1

- u definiciji vremenski stalnog sustava koristi se sustav za kašnjenje
- neka je D_M vremenski diskretan sustav za kašnjenje ulaznog signala za M koraka
- odziv toga sustava $y(n) = D_M(u)(n)$ definiran je kao

$$\forall n, M \in \mathit{Cjelobrojni}, \qquad y(n) = u(n - M)$$

- vremenski stalni (invarijantni) sustavi su sustavi koji ne mijenjaju parametre tijekom vremena
- dakle, sustav S je vremenski stalan, ako za bilo koju pobudu $u(n)$ daje odziv $y(n)$, a za zakašnjeli ulaz $D_M(u)(n)$ daje zakašnjeli odziv $D_M(y)(n)$
- ovo se svojstvo ilustrira grafički

Vremenski stalni sustavi 2



- diskretni sustav S vremenski je stalan (vremenski invarijantan) ako vrijedi

$$\forall u, n, M \qquad S(D_M(u))(n) = D_M(S(u))(n)$$

Vremenski stalni sustavi – primjer

- pokazuje se kako sustav za ekspanziju vremenski diskretnog signala nije vremenski stalan

$$y(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- odziv ovog sustava $y_1(n)$ za ulaz $u_1(n) = u(n - M)$ je

$$y_1(n) = \begin{cases} u_1(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

$$y_1(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L} - M) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

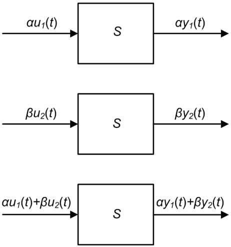
- s druge strane je

$$y(n - M) = \begin{cases} u(\frac{n-M}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- sustav nije vremenski stalan jer je $y_1(n) \neq y(n - M)$

Linearni sustavi

- na slici je grafička interpretacija linearnosti sustava



- uz oznake na slici sustav će biti linearan ako vrijedi

$$y_1 = S(u_1), \qquad y_2 = S(u_2)$$
$$S(\alpha u_1) = \alpha S(u_1) = \alpha y_1, \qquad S(\beta u_2) = \beta S(u_2) = \beta y_2$$
$$S(\alpha u_1) + S(\beta u_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$$

i finalno

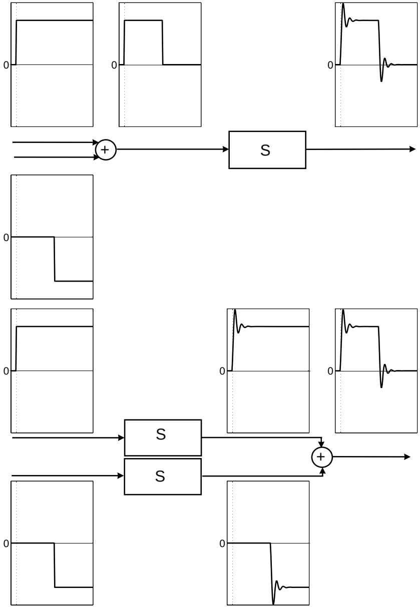
$$S(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha S(u_1) + \beta S(u_2)$$

princip superpozicije

Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 5

Profesor Branko Jeren

Linearni sustavi – primjer 1



Linearni sustavi – primjer 2

- pokazuje se kako je sustav opisan jednadžbom diferencija

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b(m)u(n-m)$$

linearan sustav

$$\begin{aligned} y(n) &= \textstyle\sum_{m=0}^{M} b(m)u(n-m) \\ &= \textstyle\sum_{m=0}^{M} b(m)[\alpha u_1(n-m) + \beta u_2(n-m)] \\ &= \alpha \textstyle\sum_{m=0}^{M} b(m)u_1(n-m) + \beta \textstyle\sum_{m=0}^{M} b(m)u_2(n-m) \\ &= \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) \end{aligned}$$

Bezmemorijski sustavi

- bezmemorijski sustav ima svojstvo da odziv sustava ovisi samo o trenutnoj vrijednosti ulaznog signala, a ne o njihovim prethodnim vrijednostima i možemo pisati:

$$\forall t \in Realni \qquad y(t) = f(u(t))$$

ili

$$\forall n \in Cjelobrojni \qquad y(n) = f(u(n))$$

- primjer bezmemorijskog sustava bio je primjer sustava za izračunavanje kvadratnog korijena deklarativno definiranog s funkcijom $y = \sqrt{u}$

Memorijski sustavi

- memorijski kauzalni sustav s beskonačnom memorijom definiran je s

$$\forall t \in Realni \qquad y(t) = F(u_{(-\infty,t]})(t)$$

ili

$$\forall n \in Cjelobrojni \qquad y(n) = F(u_{(-\infty,n]})(n)$$

- vladanje sustava uglavnom pratimo na konačnom vremenskom intervalu $(t_0, t]$ ili $(n_0, n]$, koji nazivamo interval promatranja
- zanima nas, dakle, odsječak odziva $y_{(t_0,t]}$ ili $y_{(n_0,n]}$ kao posljedica odsječka pobude $u_{(t_0,t]}$ ili $u_{(n_0,n]}$
- za sustave opisane jednadžbama diferencija ili sustave opisane s diferencijalnim jednadžbama rezultat pobude iz intervala $(-\infty, n_0]$ ili $(-\infty, t_0]$ može se uzeti u obzir jednim ili više brojeva α_i pa su $y(n) = F(\alpha_i, u_{(n_0,n]})(n)$ odnosno $y(t) = F(\alpha_i, u_{(t_0,t]})(t)$

Primjeri memorijskih sustava

- primjer memorijskog sustava s konačnom memorijom bio je razmatran kod analize imperativne realizacije sustava za kvadratni korijen
- tamo je pokazano da kvadratni korijen možemo efikasno izračunati realizacijom sustava opisanog jednadžbom diferencija

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1) + \frac{u}{y(n-1)}\right] \qquad \text{za} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

- primjer kontinuiranog memorijskog sustava

$$\forall t \in Realni \qquad y(t) = \frac{1}{M}\int_{t-M}^{t} u(\tau)d\tau$$

ili uz zamjenu varijabli

$$y(t) = \frac{1}{M}\int_{0}^{M} u(t-\tau)d\tau$$