Signali i sustavi

Zadaci za vježbu – 8. tjedan

T. Petković, B. Jeren i ostali: Zbirka riješenih zadataka iz signala i sustava:

5. poglavlje. Linearne diferencijalne jednadžbe, str. 42. -55.
   - Primjeri 5.1. – 5.7.
   - Zadaci 5.1. – 5.10.

13. poglavlje. Linearne jednadžbe diferencija, str 142. – 159.
   - Primjeri 13.1. – 13.13.
   - Zadaci 13.1. – 13.4.

1. Naći impulsni odziv kauzalnog, LTI vremenski diskretnog sustava:

$$y(n) - \frac{1}{2} y(n-2) = 2u(n) - u(n-2)\,.$$

Rješenje:
Impulsni odziv *h(n)* je jednostavno naći metodom korak po korak, počevši od zadane jednadžbe: $h(n) = \frac{1}{2} h(n-2) + 2\delta(n) - \delta(n-2)$, uz početne uvjete *h(-2)=0* i *h(-1)=0*

$$h(0) = \frac{1}{2} h(-2) + 2\delta(0) - \delta(-2) = 2\delta(0) = 2$$

$$h(1) = \frac{1}{2} h(-1) + 2\delta(1) - \delta(-1) = 0$$

$$h(2) = \frac{1}{2} h(0) + 2\delta(2) - \delta(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$$

$$h(3) = \frac{1}{2} h(1) + 2\delta(3) - \delta(1) = 0$$

$$\vdots$$

Stoga je $h(n) = 2\delta(n)$.

2. Nađite odziv vremenski diskretnog sustava

$$y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mu(n)\,.$$

Rješenje: $y(n) = 6\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]\mu(n)$

3. Zadan je vremenski kontinuirani sustav

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = u(t),$$

gdje je *u(t)* ulaz, *y(t)* izlaz, a *a* konstanta. Početni uvjet $y(0^-)=0$.

a) Naći impulsni odziv zadanog sustava.
b) Naći odziv na jedinični skok, bez korištenja poznatog impulsnog odziva
c) Naći odziv na jedinični skok, uz poznati impulsni odziv iz a) dijela zadatka.
d) Naći odziv na impuls, uz poznati odziv na jedinični skok iz b) dijela zadatka.

Rješenje:

a) Za početak je potrebno odrediti koeficijent $b_0=0$, te redove $N=1$ i $M=0$. Rješava se prvi podsustav:

$$h_A'(t) + ah_A(t) = \delta(t),$$

odnosno homogena jednadžba

$$h_A'(t) + ah_A(t) = 0,$$

uz početni uvjet $h_A(0^+) = 1$ (izvod početnih uvjeta – vidi predavanje).

Rješenje ove jednadžbe je $h_A(t) = Ce^{-at}$.

Konstanta *C* se dobiva iz početnog uvjeta i iznosi: $h_A(0^+) = Ce^{-at} = C = 1$.

Pa je $h_A(t) = e^{-at}$.

Kako je $b_0=0$ i $M=0$ automatski proizlazi da je ukupni impulsni odziv zadanog sustava

$$h(t) = e^{-at}\mu(t).$$

b) Potrebno je riješiti jednadžbu $y_\mu'(t) + ay_\mu(t) = \mu(t)$.

Na temelju 11. predavanja, prikaznica 19.-29. određuje se početni uvjet $y(0^+)=0$.
Prvo se rješava homogena jednadžba:

$$y_{\mu h}'(t) + ay_{\mu h}(t) = 0 \rightarrow s+a=0 \rightarrow s=-a \rightarrow y_{\mu h} = Ce^{-at}.$$

Partikularno rješenje se pretpostavi iz dane pobude:

$$y_{\mu p}(t) = K\mu(t) \rightarrow aK=1 \rightarrow K = \frac{1}{a}.$$

Totalni odziv: $y_\mu = y_{\mu h} + y_{\mu p} = \left(Ce^{-at} + \frac{1}{a}\right)\mu(t)$.

Konstanta *C* dolazi iz početnih uvjeta: $y_\mu(0^+) = C + \frac{1}{a} = 0 \rightarrow C = -\frac{1}{a}$.

Odziv na jediničnu stepenicu iznosi: $y_\mu(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)\mu(t)$.

c) Drugi način određivanja odziva ne jediničnu stepenicu je pomoću konvolucijskog integrala.

$$y_\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-a\tau}\mu(\tau)\right]u(t-\tau)d\tau =$$

$$= \left[\int_0^t e^{-a\tau} d\tau\right]\mu(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)\mu(t)$$

Vidljivo je da je isto rješenje kao u *b)* dijelu zadatka.

d) Ako je poznat odziv na step, vrlo lako je naći odziv na impuls, jer je poznata relacija da je impuls derivacija stepa, pa je prema tome, i impulsni odziv derivacija odziva na step.

$$h(t) = y_\mu{}'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)\mu(t)\right] =$$

$$= e^{-at}\mu(t) + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mu'(t) = e^{-at}\mu(t) + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\delta(t)$$

Svojstvo delta impulsa je da „izvlači“ vrijednost funkcije u nuli, pa slijedi:

$$h(t) = e^{-at}\mu(t) + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\delta(t) = e^{-at}\mu(t) + \frac{1}{a}(1-1)\delta(t) = e^{-at}\mu(t)$$

što je identično a) dijelu zadatka.

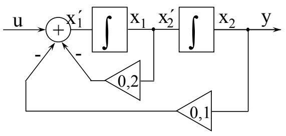
4. Naći impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava: $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t) + \frac{du(t)}{dt}$.

Rješenje: $h(t) = -e^{-2t}\mu(t) + \delta(t)$.

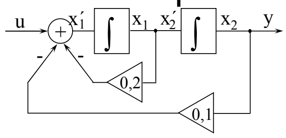
Zadatak 1.

- Kontinuirani sustav zadan je modelom na slici. Odredite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje ovaj sustav i izračunajte odziv na pobudu:

$$u(t) = U\cos(\omega_1 t)$$



Parametri pobude?



- $y = x_2$
- $x_2' = x_1$
- $x_1' = u - 0{,}2\, x_1 - 0{,}1\, x_2$
- $x_2'' = x_1'$
- $x_2'' = u - 0{,}2\, x_1 - 0{,}1\, x_2$
- $x_2'' = u - 0{,}2\, x_2' - 0{,}1\, x_2$
- $x_2'' + 0{,}2\, x_2' + 0{,}1\, x_2 = u$
- $y'' + 0{,}2\, y' + 0{,}1\, y = u$
- Početni uvjeti neka su:
  - $y(0) = -10$, $y'(0) = -5$.
- Parametri pobude neka su:
  - $U = 3$, $\omega_1 = 1{,}8$.

Odziv sustava?

- A) Totalno ili ukupno rješenje:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t).$$

- Ukupno rješenje je suma rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja - to važi za sve linearne jednadžbe.
- A.1.) Homogena jednadžba:

$$y'' + 0{,}2\, y' + 0{,}1\, y = 0.$$

- Pretpostavimo rješenje oblika:

$$y_H(t) = A\, e^{st}.$$

Rješavamo homogenu ...

- Uvrstimo pretpostavljeno rješenje u jednažbu:
- $s^2 A\, e^{st} + 0{,}2\, s\, A\, e^{st} + 0{,}1\, A\, e^{st} = 0.$

  Pokratimo sa Ae^{st} (možemo, jer $Ae^{st} \neq 0$).
- $s^2 + 0{,}2\, s + 0{,}1 = 0$

  se naziva karakteristična jednadžba sustava.
- Korijeni karakteristične jednadžbe su:

$$s_{1,2} = \frac{-0{,}2 \pm \sqrt{0{,}2^2 - 4 \cdot 0{,}1}}{2} = -0{,}1 \pm 0{,}3\, j\ ,$$

Rješavamo homogenu ...

- pa je rješenje homogene:
- $y_H(t) = A_1\, e^{(-0{,}1+0{,}3\, j)t} + A_2\, e^{(-0{,}1-0{,}3\, j)t}$

  $= e^{-0{,}1\, t}(A_1\, e^{0{,}3\, j\, t} + A_2\, e^{-0{,}3\, j\, t})$

  $= e^{-0{,}1\, t}(A_1 \cos 0{,}3\, t + A_1 j \sin 0{,}3\, t +$

  $A_2 \cos 0{,}3\, t - A_2 j \sin 0{,}3\, t).$
- Uvedemo nove kompleksne konstante:
- $y_H(t) = e^{-0{,}1\, t}(C_1 \cos 0{,}3\, t + C_2 \sin 0{,}3\, t)$
- gdje su $C_1 = A_1 + A_2$ i $C_2 = j\,(A_1 - A_2)$.

Određivanje homogenog rješenja

jednostruka realna vlastita frekvencija s	$y_h(t) = C_1 e^{st}$
k-struka realna vlastita frekvencija s	$y_h(t) = e^{st}\,(C_1 + tC_2 + \ldots + t^{k-1}C_k)$
konjugirano-kompleksni par oblika $s = \alpha \pm j\beta$	$y_h(t) = e^{\alpha t}\,(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$
k-struki konjugirano-kompleksni par oblika $s = \alpha \pm j\beta$	$y_h(t) =$ $e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,(A_1 + tA_2 + \ldots + t^{k-1}A_k) +$ $e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,(B_1 + tB_2 + \ldots + t^{k-1}B_k)$

6

Partikularno rješenje ...

- Partikularno rješenje ima oblik pobude:
- $y_P(t) = Y\ cos\ (\omega_1 t + \varphi)$.
- Trebaju nam još i derivacije:
- $y_P'(t) = -\ \omega_1 Y\ sin\ (\omega_1 t + \varphi)$,
- $y_P''(t) = -\ \omega_1^2\ Y\ cos\ (\omega_1 t + \varphi)$.
- Sve to uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu
- $y'' + 0{,}2\ y' + 0{,}1\ y = u$,
- $-\ \omega_1^2\ Y\ cos\ (\omega_1 t + \varphi) - 0{,}2\ \omega_1 Y\ sin\ (\omega_1 t + \varphi)$
  $+ 0{,}1\ Y\ cos\ (\omega_1 t + \varphi) = U\ cos\ \omega_1 t$.

Partikularno rješenje ...

- Prisjetimo se trigonometrijskih jednadžbi:
- $cos\ (\omega_1\ t + \varphi) = cos\ \omega_1\ t \times cos\ \varphi - sin\ \omega_1\ t \times sin\ \varphi$,
- $sin\ (\omega_1\ t + \varphi) = sin\ \omega_1\ t \times cos\ \varphi + cos\ \omega_1\ t \times sin\ \varphi$.
- Nakon uvrštenja i grupiranja, naša diferencijalna jednadžba postaje:
- $Y\ [-\omega_1^2\ cos\ \varphi - 0{,}2\ \omega_1\ sin\ \varphi + 0{,}1\ cos\ \varphi\ ]\ cos\ \omega_1 t$
  $+ Y\ [\omega_1^2\ sin\ \varphi - 0{,}2\ \omega_1\ cos\ \varphi - 0{,}1\ sin\ \varphi\ ]\ sin\ \omega_1 t$
  $= U\ cos\ \omega_1 t$.

Partikularno rješenje ...

Metoda jednakih koeficijenata daje:

- $Y\ [-\omega_1^2\ cos\ \varphi - 0{,}2\ \omega_1\ sin\ \varphi + 0{,}1\ cos\ \varphi] = U$,
- $Y\ [\omega_1^2\ sin\ \varphi - 0{,}2\ \omega_1\ cos\ \varphi - 0{,}1\ sin\ \varphi] = 0.\ \ (Y \neq 0)$
- $\Rightarrow (\omega_1^2 - 0{,}1)\ sin\ \varphi = 0{,}2\ \omega_1\ cos\ \varphi$

$$tg\varphi = \frac{0{,}2\omega_1}{\omega_1^2 - 0{,}1}$$

$$\varphi = arctg\frac{0{,}2\omega_1}{\omega_1^2 - 0{,}1}$$, a iz gornje jednadžbe slijedi:

$$Y = \frac{U}{(0{,}1 - \omega_1^2)\cos\varphi - 0{,}2\omega_1 \sin\varphi}$$

Partikularno rješenje ...

- Ako uvrstimo konkretne brojke, imamo:
- $U = 3,\ \omega_1 = 1{,}8$
  $\varphi = 0{,}114151267$
- $Y = -0{,}949196$
- $y_p = -0{,}949196\ cos\ (1{,}8t + 0{,}114151267)$
  $-cos\ x = cos\ (x - \pi)$
- $y_p = 0{,}949196\ cos\ (1{,}8t - 3{,}027441387)$

Određivanje partikularnog rješenja

pobuda je Ae^{at}, a nije korijen karakteristične jednadžbe	$y_p(t) = C_1 e^{at}$
pobuda je Ae^{at}, a je k-struki korijen karakteristične jednadžbe	$y_p(t) = C_1 t^k e^{at}$
pobuda je polinom k-tog stupnja	$y_p(t) = t^k C_k + t^{k-1} C_{k-1} + \ldots + C_0$
pobuda je $A\sin(\omega t)$ i $j\omega$ nije korijen karakteristične jednadžbe	$y_p(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$
pobuda je $A\sin(\omega t)$ i $j\omega$ je k-struki korijen karakteristične jednadžbe	$y_p(t) = t^k(C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))$

11

Konstante?

- $y(0) = -10$, početni uvjeti
- $y'(0) = -5$

Konačno rješenje:

- $y(0) = -10$
- $y'(0) = -5$

C_1 i $C_2 \rightarrow$ dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

- $y(t) = C_1 \ldots + C_2 \ldots$
- $y'(t) = C_1 \ldots + C_2 \ldots$, $t = 0$
- $C_1 = -9{,}057$, $C_2 = -20{,}33$.
- $y(t) = (-9{,}057 \cos 0{,}3t - 20{,}33 \sin 0{,}3t)\, e^{-0{,}1t}$
  $+ 0{,}949 \cos (1{,}8t - 3{,}02744)$.

B1 - Odziv nepobuđenog sustava

- $y_1(t) = ?$
- $y_1'' + 0{,}2y_1' + 0{,}1y_1 = 0$,
  - $y_1(0) = -10$,
  - $y_1'(0) = -5$,
- $y_1 = y_H = (A_1 \cos 0{,}3t + A_2 \sin 0{,}3t)e^{-0{,}1t}$.

Iz početnih uvjeta slijedi:

- $A_1 = -10$,
- $A_2 = -20$,

- $y_1 = (-10\cos 0{,}3t - 20\sin 0{,}3t)e^{-0{,}1t}$. vlastiti odziv uslijed početnih uvjeta

B2 - Odziv pobuđenog mrtvog sustava

- $y_2'' + 0{,}2y_2' + 0{,}1y_2 = u$,
  - o $y_2(0) = 0$,
  - o $y_2'(0) = 0$,
- $y_2(t) = (B_1 \cos 0{,}3t + B_2 \sin 0{,}3t)\, e^{-0{,}1t} +$
  $+ 0{,}949196 \cos (1{,}8t - 3{,}02744)$.

$y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 0$ $\rightarrow$ $B_1 = 0{,}943018$, $B_2 = -0{,}33436$

B2 - Odziv pobuđenog mrtvog sustava

- $y_2(t) = (0{,}943018 \cos 0{,}3t - 0{,}33436 \sin 0{,}3t)\, e^{-0{,}1t}$
  vlastito titranje uslijed pobude
  $+ 0{,}949196 \cos (1{,}8t - 3{,}02744)$
  stacionarno stanje

- o $y = y_1 + y_2$ Ukupni odziv

Amplitude vlastitog titranja određene su neskladom početnog i stacionarnog stanja!