Signali i sustavi

Auditorne vježbe 13.
Rješavanje jednadžbi diferencija
pomoću $\mathcal{Z}$ transformacije

Zadatak 1.

- Pomoću $\mathcal{Z}$ transformacije nađi rješenje jednadžbe diferencija

$$y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]=2u[n+1]-2u[n]$$

uz pobudu

$$u[n]=\begin{cases}0, & \text{za } n<0\\ n, & \text{za } n\geq 0\end{cases}$$

i uz zadane početne uvjete $y[-1]$ i $y[-2]$.

Zadatak 1. - prelazak u $\mathcal{Z}$ domenu

- Od interesa nam je samo odziv od koraka nula u kojem počinje pobuda.
- Prebacujemo jednadžbu u $\mathcal{Z}$ domenu:

$$y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]=2u[n+1]-2u[n] \quad \big/\mathcal{Z}$$

$$z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1]-3zY(z)+3zy[0]+2Y(z)=$$
$$=2zU(z)-2zu[0]-2U(z)$$

$$(z^2-3z+2)Y(z)-(z^2-3z)y[0]-zy[1]=$$
$$=(2z-2)U(z)-2zu[0]$$

3

Zadatak 1. - rješenje u $\mathcal{Z}$ domeni

- Rješenje jednadžbe u $\mathcal{Z}$ domeni je

$$Y(z)=\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)-\frac{2zu[0]}{z^2-3z+2}+\frac{(z^2-3z)y[0]+zy[1]}{z^2-3z+2}$$

- Odziv ovisi o pobudi $u[n]$ i o početnim stanjima $y[0]$ i $y[1]$ koji pak ovise o $y[-1]$ i $y[-2]$.
- Potrebno je odrediti $y[0]$ i $y[1]$ iz $y[-1]$ i $y[-2]$ korak po korak.

4

Zadatak 1. - rješenje u $\mathcal{Z}$ domeni

- Određujemo $y[0]$ i $y[1]$:

$$\begin{cases} y[0]-3y[-1]+2y[-2]=2u[-1]-2u[-2] \\ y[1]-3y[0]+2y[-1]=2u[0]-2u[-1] \end{cases}$$

- Pobuda $u[n]$ postoji samo za $n>0$ pa otpadaju članovi $u[-1]$ i $u[-2]$.

$$\begin{cases} y[0]=-2y[-2]+3y[-1] \\ y[1]=-2y[-1]+3y[0]+2u[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y[0]=-2y[-2]+3y[-1] \\ y[1]=7y[-1]-6y[-2]+2u[0] \end{cases}$$

5

Zadatak 1. - rješenje u $\mathcal{Z}$ domeni

- Sada je odziv u $\mathcal{Z}$ domeni

$$Y(z)=\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)-\frac{2zu[0]}{z^2-3z+2}$$
$$+\frac{(z^2-3z)(-2y[-2]+3y[-1])+z(7y[-1]-6y[-2]+2u[0])}{z^2-3z+2}$$

- Odnosno nakon sređivanja

$$Y(z)=\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)+\frac{(3z^3-2z)y[-1]-2z^2y[-2]}{z^2-3z+2}$$

6

Zadatak 1. - inverzna transformacija

- Odziv sustava određujemo inverznom $\mathcal{Z}$ transformacijom.
- Neka je $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$.

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)\right]$$

- $\mathcal{Z}$ transformaciju pobude $U(z)$ znamo iz tablice.

$$U(z) = \mathcal{Z}[ns[n]] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

- Tada je $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{2z-2}{z^2-3z+2}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}$$

7

Zadatak 1. - inverzna transformacija

- Rastav na parcijalne razlomke je:

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-1)^2(z-2)} = \alpha_0 + \alpha_1\frac{z}{z-1} + \alpha_2\frac{z^2}{(z-1)^2} + \alpha_3\frac{z}{z-2}$$

- Sada određujemo α_0, α_2 i α_3:

$$\alpha_0 = \left.\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right|_{z=0} = \frac{2\cdot 0}{(0-1)^2(0-2)} = 0$$

$$\alpha_2 = \left.\frac{(z-1)^2}{z^2}\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right|_{z=1} = \frac{2}{1(1-2)} = -2$$

$$\alpha_3 = \left.\frac{z-2}{z}\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right|_{z=2} = \frac{2}{(2-1)^2} = 2$$

8

Zadatak 1. - konačno rješenje

- Odredili smo $\alpha_0 = 0$, $\alpha_2 = -2$ i $\alpha_3 = 2$. Koeficijent α_1 određujemo iz $Y(z)$ za npr. $z = 3$:

$$Y(3) = \frac{2\cdot 3}{(3-1)^2(3-2)} = 0 + \alpha_1\frac{3}{3-1} - 2\frac{3^2}{(3-1)^2} + 2\frac{3}{3-2}$$

$$\frac{6}{4} = \alpha_1\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

- Konačno rješenje uz $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$ je

$$Y(z) = -2\frac{z^2}{(z-1)^2} + 2\frac{z}{z-2}$$

$$y[n] = -2(n+1)1^n + 2\cdot 2^n, \quad n \geq 0$$

9

Zadatak 2.

- Nađi rješenje u $\mathcal{Z}$ domeni jednadžbe diferencija iz prvog zadataka
  $$y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]=2u[n+1]-2u[n]$$
  ali uz supstituciju $n' = n + 2$. Pobuda je
  $$u[n]=\begin{cases}0, & \text{za } n<0\\ n, & \text{za } n\geq 0\end{cases}$$
  i uz zadane početne uvjete $y[-1]$ i $y[-2]$.

Zadatak 2. - prelazak u $\mathcal{Z}$ domenu

- Uvođenjem supstitucije $n' = n + 2$ jednadžba postaje
  $$y[n']-3y[n'-1]+2y[n'-2]=2u[n'-1]-2u[n'-2]$$
- Ovo je češći način pisanja jednadžbi diferencija jer se koristi operator kašnjenja.
- $\mathcal{Z}$ transformacijom jednadžbe dobivamo
  $$Y(z)-3z^{-1}Y(z)-3y[-1]+2z^{-2}Y(z)+2y[-2]+2z^{-1}y[-1]=$$
  $$=2z^{-1}U(z)+2u[-1]-2z^{-2}U(z)-2u[-2]-2z^{-1}u[-1]$$

Zadatak 2. - konačno rješenje

- Sređivanjem dobivamo
  $$(1-3z^{-1}+2z^{-2})Y(z)+(-3+2z^{-1})y[-1]+2y[-2]=$$
  $$=(2z^{-1}-2z^{-2})U(z)+(2-2z^{-1})u[-1]-2u[-2]$$
  odnosno
  $$Y(z)=\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)+\frac{(2z^2-2z)u[-1]-2z^2u[-2]}{z^2-3z+2}$$
  $$+\frac{(3z^2-2z)y[-1]-2z^2y[-2]}{z^2-3z+2}$$
- Dobili smo naravno “isti izraz” kao u prethodnom zadatku jer se radi o istom sustavu.

Zadatak 3.

- Odredi odziv diskretnog sustava zadanog jednadžbom diferencija
$$y[n] + y[n-2] = u[n]$$
na pobudu
$$u[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ 1, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}$$
i uz zadane početne uvjete $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$.

13

Zadatak 3. - prelazak u $\mathcal{Z}$ domenu

- Prebacujemo jednadžbu $y[n] + y[n-2] = s[n]$ u $\mathcal{Z}$ domenu ($y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$)
$$Y(z) + z^{-2}Y(z) = \frac{z}{z-1}$$
$$Y(z) = \frac{1}{1+z^{-2}}\frac{z}{z-1} = \frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}$$
- Rastav na parcijalne razlomke je
$$Y(z) = \alpha_0 + \alpha_1\frac{z}{z-1} + \alpha_2\frac{z}{z-j} + \alpha_3\frac{z}{z+j}$$

14

Zadatak 3. - određivanje koeficijenata

- Sada određujemo α_0, α_1, α_2 i α_3:

$$\alpha_0 = \left.\frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}\right|_{z=0} = 0$$
$$\alpha_1 = \left.\frac{z-1}{z}\frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}\right|_{z=1} = \frac{1^2}{(1-j)(1+j)} = \frac{1}{1-j+j+1} = \frac{1}{2}$$
$$\alpha_2 = \left.\frac{z-j}{z}\frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}\right|_{z=j} = \frac{j^2}{(j-1)2j} = \frac{-1}{2(-1-j)} = \frac{1-j}{4}$$
$$\alpha_3 = \left.\frac{z+j}{z}\frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}\right|_{z=-j} = \frac{(-j)^2}{(-j-1)(-2j)} = \frac{-1}{2(-1+j)} = \frac{1+j}{4}$$

15

Zadatak 3. - konačno rješenje

- Sada je

$$Y(z) = 0 + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1-j}{4}\frac{z}{z-j} + \frac{1+j}{4}\frac{z}{z+j}$$

- Što nakon inverzne transformacije postaje

$$y[n] = \frac{1}{2}1^n + \frac{1-j}{4}j^n + \frac{1+j}{4}(-j)^n$$

$$y[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2}) - \frac{j}{4}(e^{j\pi n/2} - e^{-j\pi n/2})$$

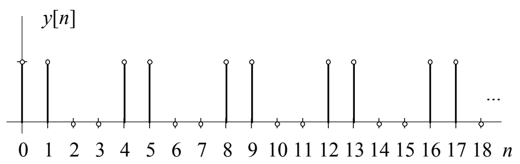
$$y[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \geq 0$$

16

Zadatak 3. - konačno rješenje

- Nacrtajmo još dobiveno rješenje

$$y[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \geq 0$$



17

Zadatak 4.

- Diskretni sustav opisan je jednadžbama

$$y_1[n] + y_2[n-1] = u_1[n-1] + 2u_2[n]$$

$$y_1[n-1] + y_2[n] = 2u_1[n] + u_2[n-1]$$

Neka su početna stanja jednaka nuli, $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$, i neka je pobuda

$$\mathbf{u}[n] = \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta[n] \\ s[n] \end{bmatrix}$$

18

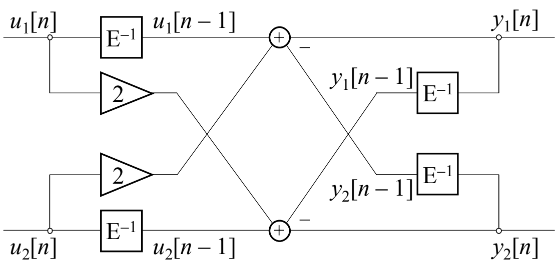
Zadatak 4. - nastavak

- Potrebno je
  1. Nacrtati model sustava.
  2. Odabrati varijable stanja te napisati jednadžbe sustava u matričnom obliku.
  3. Nacrtati model sustava prema jednadžbama stanja.
  4. Pronaći odziv sustava na zadanu pobudu.
  5. Odrediti transfer-matricu sustava.
  6. Odrediti impulsni odziv sustava.
  7. Transformirati sustav u kanonski oblik te nacrtati model.

19

Zadatak 4. - model sustava

$$y_1[n] = -y_2[n-1] + u_1[n-1] + 2u_2[n]$$
$$y_2[n] = -y_1[n-1] + 2u_1[n] + u_2[n-1]$$



20

Zadatak 4. - varijable stanja

- Želimo sustav

$$y_1[n] = -y_2[n-1] + u_1[n-1] + 2u_2[n]$$
$$y_2[n] = -y_1[n-1] + 2u_1[n] + u_2[n-1]$$

opisati varijablama stanja pomoću jednadžbi

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n]$$
$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n]$$

- Početne jednadžbe odgovaraju izlaznoj jednadžbi $\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n]$. Potrebno je odabrati takve varijable stanja koje eliminiraju $\mathbf{y}[n-1]$ i $\mathbf{u}[n-1]$.

$$x_1[n] = -y_2[n-1] + u_1[n-1]$$
$$x_2[n] = -y_1[n-1] + u_2[n-1]$$

21

Zadatak 4. - varijable stanja

- Izlazna jednadžba je tada

$$y_1[n] = \overbrace{-y_2[n-1]+u_1[n-1]}^{x_1[n]} + 2u_2[n]$$
$$y_2[n] = \underbrace{-y_1[n-1]+u_2[n-1]}_{x_2[n]} + 2u_1[n]$$

odnosno sređeno

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix}$$

- Potrebno je još odrediti jednadžbu stanja.

22

Zadatak 4. - varijable stanja

- Odabrali smo varijable stanja kao

$$x_1[n] = -y_2[n-1]+u_1[n-1]$$
$$x_2[n] = -y_1[n-1]+u_2[n-1]$$

- Zamijenimo n s $n+1$. Dobivamo

$$\begin{cases} x_1[n+1] = -y_2[n]+u_1[n] \\ x_2[n+1] = -y_1[n]+u_2[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2[n] = -x_1[n+1]+u_1[n] \\ y_1[n] = -x_2[n+1]+u_2[n] \end{cases}$$

- Ubacimo sada to u početne jednadžbe sustava

$-x_2[n+1]+u_2[n]$

$$y_1[n] = \overbrace{-y_2[n-1]+u_1[n-1]}^{x_1[n]} + 2u_2[n]$$
$$y_2[n] = \underbrace{-y_1[n-1]+u_2[n-1]}_{x_2[n]} + 2u_1[n]$$

$-x_1[n+1]+u_1[n]$

23

Zadatak 4. - varijable stanja

- Nakon sređivanja dobivamo

$$x_1[n+1] = -x_2[n]-u_1[n]$$
$$x_2[n+1] = -x_1[n]-u_2[n]$$

- Tada su jednadžbe stanja u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix}$$

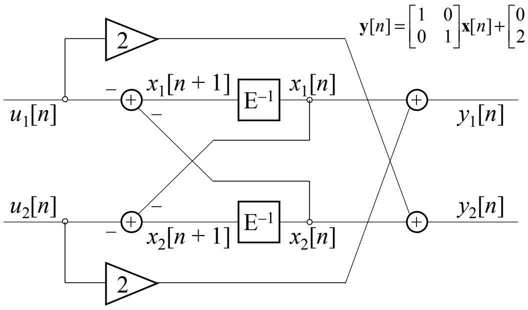
$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix}$$

24

Zadatak 4. - model sustava

$$\mathbf{x}[n+1]=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}[n]+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{u}[n]$$

$$\mathbf{y}[n]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}[n]+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\mathbf{u}[n]$$



Zadatak 4. - odziv sustava

- Odziv određujemo pomoću $\mathcal{Z}$ transformacije

$$\mathbf{x}[n+1]=\mathbf{A}\mathbf{x}[n]+\mathbf{B}\mathbf{u}[n]\quad /\mathcal{Z}$$

$$\mathbf{y}[n]=\mathbf{C}\mathbf{x}[n]+\mathbf{D}\mathbf{u}[n]\quad /\mathcal{Z}$$

- Jednadžbe u $\mathcal{Z}$ domeni su

$$z\mathbf{X}(z)-z\mathbf{x}[0]=\mathbf{A}\mathbf{X}(z)+\mathbf{B}\mathbf{U}(z)$$

$$\mathbf{Y}(z)=\mathbf{C}\mathbf{X}(z)+\mathbf{D}\mathbf{U}(z)$$

- Nakon sređivanja dobivamo odziv sustava

$$\mathbf{Y}(z)=\mathbf{C}\underbrace{z(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}}_{\text{fundamentalna matrica sustava } \mathbf{\Phi}(z)}\mathbf{x}[0]+\underbrace{\left(\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right)}_{\text{transfer-matrica sustava } \mathbf{H}(z)}\mathbf{U}(z)$$

Zadatak 4. - odziv sustava

- Da bi odredili odziv moramo prvo odrediti fundamentalnu matricu $\mathbf{\Phi}(z)$ i transfer-matricu $\mathbf{H}(z)$.
- No za ovaj zadatak su zadani početni uvjeti jednaki nuli, $\mathbf{x}[0]=0$, te nam ne treba $\mathbf{\Phi}(z)$.
- Potrebno je samo odrediti $\mathbf{H}(z)$.

$$\mathbf{H}(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

- Odredimo prvo $(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$.

Zadatak 4. - transfer-matrica sustava

- Računamo inverz $(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ prema
  $$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \operatorname{adj}(z\mathbf{I}-\mathbf{A}) \big/ \det(z\mathbf{I}-\mathbf{A})$$
- Odredimo prvo $z\mathbf{I}-\mathbf{A}$ pa $\det(z\mathbf{I}-\mathbf{A})$ te $\operatorname{adj}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})$.
  $$z\mathbf{I}-\mathbf{A} = z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}$$
  $$\det(z\mathbf{I}-\mathbf{A}) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$
  $$\operatorname{adj}(z\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$
- Konačno dobivamo
  $$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$

28

Zadatak 4. - transfer-matrica sustava

- Sada određujemo $\mathbf{H}(z)$
  $$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$
  $$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
  $$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} -z & 1 \\ 1 & -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
- Na kraju dobivamo transfer-matricu sustava $\mathbf{H}(z)$
  $$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} -z & 2z^2-1 \\ 2z^2-1 & -z \end{bmatrix}$$

29

Zadatak 4. - odziv sustava

- Sada možemo odrediti odziv sustava
  $$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{x}[0] + \mathbf{H}(z)\mathbf{U}(z)$$
- Početni uvjeti su $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$ dok je pobuda
  $$\mathbf{u}[n] = \begin{bmatrix} \delta[n] \\ s[n] \end{bmatrix}$$
- Odziv u $\mathcal{Z}$ domeni je
  $$\mathbf{Y}(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} -z & 2z^2-1 \\ 2z^2-1 & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix}$$

30

Zadatak 4. - odziv sustava

- Nakon sređivanja dobivamo

$$\mathbf{Y}(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\begin{bmatrix}2z^3-z^2\\2z^3-3z^2-z+1\end{bmatrix}$$

- Potrebno je odrediti dvije inverzne $\mathcal{Z}$ transformacije, i to od

$$Y_1(z)=\frac{2z^3-z^2}{(z-1)^2(z+1)}$$

$$Y_2(z)=\frac{2z^3-3z^2-z+1}{(z-1)^2(z+1)}$$

31

Zadatak 4. - odziv sustava $Y_1(z)$

- Rastav na parcijalne razlomke je

$$Y_1(z)=\frac{2z^3-z^2}{(z-1)^2(z+1)}=\alpha_0+\alpha_1\frac{z}{z-1}+\alpha_2\frac{z^2}{(z-1)^2}+\alpha_3\frac{z}{z+1}$$

- Određujemo α_0, α_2 i α_3

$$\alpha_0=\left.\frac{2z^3-z^2}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=0}=0$$

$$\alpha_2=\left.\frac{(z-1)^2}{z^2}\frac{2z^3-z^2}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=1}=\frac{2\cdot1-1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\alpha_3=\left.\frac{z+1}{z}\frac{2z^3-z^2}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=-1}=\frac{2(-1)^2-(-1)}{(-1-1)^2}=\frac{3}{4}$$

32

Zadatak 4. - odziv sustava $y_1[n]$

- Odredili smo $\alpha_0=0$, $\alpha_2=1/2$ i $\alpha_3=3/4$. Odredimo α_1 za $z=2$

$$Y_1(2)=\frac{2\cdot2^3-2^2}{(2-1)^2(2+1)}=\frac{12}{3}=0+\alpha_1\frac{2}{2-1}+\frac{1}{2}\frac{2^2}{(2-1)^2}+\frac{3}{4}\frac{2}{2+1}=2\alpha_1+\frac{5}{2}$$

- Sada je $\alpha_1=3/4$. Dobivamo $Y_1(z)$ i $y_1[n]$

$$Y_1(z)=\frac{3}{4}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-1)^2}+\frac{3}{4}\frac{z}{z+1}$$

$$y_1[n]=\frac{3}{4}1^n+\frac{1}{2}(n+1)1^n+\frac{3}{4}(-1)^n,\quad n\geq0$$

33

Zadatak 4. - odziv sustava $Y_2(z)$

- Rastav na parcijalne razlomke je

$$Y_2(z)=\frac{2z^3-3z^2-z+1}{(z-1)^2(z+1)}=\alpha_0+\alpha_1\frac{z}{z-1}+\alpha_2\frac{z^2}{(z-1)^2}+\alpha_3\frac{z}{z+1}$$

- Određujemo α_0, α_2 i α_3

$$\alpha_0=\left.\frac{2z^3-3z^2-z+1}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=0}=\frac{1}{1^2\cdot 1}=1$$

$$\alpha_2=\left.\frac{(z-1)^2}{z^2}\frac{2z^3-3z^2-z+1}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=1}=\frac{2\cdot 1^3-3\cdot 1^2-1+1}{1^2(1+1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\alpha_3=\left.\frac{z+1}{z}\frac{2z^3-3z^2-z+1}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=-1}=\frac{2(-1)^3-3(-1)^2-(-1)+1}{(-1)(-1-1)^2}=\frac{3}{4}$$

34

Zadatak 4. - odziv sustava $y_2[n]$

- Odredili smo $\alpha_0=1$, $\alpha_2=-1/2$ i $\alpha_3=3/4$. Odredimo α_1 za $z=2$

$$Y_2(2)=\frac{2\cdot 2^3-3\cdot 2^2-2+1}{(2-1)^2(2+1)}=\frac{3}{3}=1+\alpha_1\frac{2}{2-1}-\frac{1}{2}\frac{2^2}{(2-1)^2}+\frac{3}{4}\frac{2}{2+1}=2\alpha_1-\frac{1}{2}$$

- Sada je $\alpha_1=3/4$. Dobivamo $Y_2(z)$ i $y_2[n]$

$$Y_2(z)=1+\frac{3}{4}\frac{z}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-1)^2}+\frac{3}{4}\frac{z}{z+1}$$

$$y_2[n]=\delta[n]+\frac{3}{4}1^n-\frac{1}{2}(n+1)1^n+\frac{3}{4}(-1)^n,\quad n\ge 0$$

35

Zadatak 4. - ukupni odziv $\mathbf{y}[n]$

- Sada možemo napisati odziv sustava $\mathbf{y}[n]$

$$\mathbf{y}[n]=\begin{bmatrix}y_1[n]\\ y_2[n]\end{bmatrix},\quad n\ge 0$$

$$\mathbf{y}[n]=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}n+\frac{7}{4}\right)1^n+\frac{3}{4}(-1)^n\\ \delta[n]-\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)1^n+\frac{3}{4}(-1)^n\end{bmatrix},\quad n\ge 0$$

36

Zadatak 4. - impulsni odziv

- Impulsni odziv određujemo kao $\mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{H}(z)]$.

$$\mathbf{H}(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}\begin{bmatrix}-z & 2z^2-1\\ 2z^2-1 & -z\end{bmatrix}$$

- Potrebno je odrediti samo $\mathcal{Z}^{-1}[H_{11}(z)]$ i $\mathcal{Z}^{-1}[H_{12}(z)]$ jer je transfer-matrica $\mathbf{H}(z)$ simetrična matrica.

37

Zadatak 4. - impulsni odziv $H_{11}(z)$

- Rastav $H_{11}(z)$ na parcijalne razlomke je

$$H_{11}(z)=\frac{-z}{(z-1)(z+1)}=\alpha_0+\alpha_1\frac{z}{z-1}+\alpha_2\frac{z}{z+1}$$

- Određujemo α_0, α_1 i α_2

$$\alpha_0=\left.\frac{-z}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=0}=0$$

$$\alpha_1=\left.\frac{z-1}{z}\frac{-z}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\alpha_2=\left.\frac{z+1}{z}\frac{-z}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=-1}=\frac{-1}{(-1-1)}=\frac{1}{2}$$

38

Zadatak 4. - impulsni odziv $H_{12}(z)$

- Rastav $H_{11}(z)$ na parcijalne razlomke je

$$H_{11}(z)=\frac{2z^2-1}{(z-1)(z+1)}=\alpha_0+\alpha_1\frac{z}{z-1}+\alpha_2\frac{z}{z+1}$$

- Određujemo α_0, α_1 i α_2

$$\alpha_0=\left.\frac{2z^2-1}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=0}=\frac{-1}{1\cdot(-1)}=1$$

$$\alpha_1=\left.\frac{z-1}{z}\frac{2z^2-1}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=1}=\frac{2\cdot 1^2-1}{1\cdot(1+1)}=\frac{1}{2}$$

$$\alpha_2=\left.\frac{z+1}{z}\frac{2z^2-1}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=-1}=\frac{2\cdot(-1)^2-1}{(-1)(-1-1)}=\frac{1}{2}$$

39

Zadatak 4. - impulsni odziv $\mathbf{h}[n]$

- Sada je impulsni odziv $\mathbf{H}(z)$ i $\mathbf{h}[n]$

$$\mathbf{H}(z)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1} & 1+\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1} \\ 1+\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1} & -\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}[n]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}1^n+\frac{1}{2}(-1)^n & \delta[n]+\frac{1}{2}1^n+\frac{1}{2}(-1)^n \\ \delta[n]+\frac{1}{2}1^n+\frac{1}{2}(-1)^n & -\frac{1}{2}1^n+\frac{1}{2}(-1)^n \end{bmatrix}$$

40

Zadatak 4. - kanonski oblik

- Potrebno je pronaći matricu transformacije $\mathbf{T}$ koja ortogonalizira matricu sustava $\mathbf{A}$.
- Znamo da su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ različite i iznose $z_1 = 1$ i $z_2 = -1$. Matricu $\mathbf{T}$ u tom slučaju sastavljamo od redaka matrice $\mathrm{adj}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})$ za $z = z_1 = 1$ i $z = z_2 = -1$.

$$\mathrm{adj}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})=\mathrm{adj}\begin{bmatrix} z & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

41

Zadatak 4. - kanonski oblik

- Sada odredimo $\mathbf{T}^{-1}$ pa onda računamo matrice kanonskog oblika $\mathbf{A}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\mathbf{B}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{T}$ i $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}$.

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^*=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

42

Zadatak 4. - kanonski oblik

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{CT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sada su jednadžbe stanja u kanonskom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix}$$

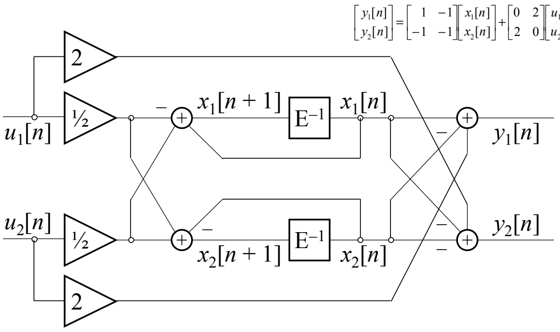
$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix}$$

43

Zadatak 4. - model sustava

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix}$$



44