Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Diferencijske i diferencijalne jednadžbe

Treća laboratorijska vježba iz Signala i sustava (FER-2)

Tomislav Petković, Ana Sović, Zvonko Kostanjčar

1. Uvod

Svrha treće laboratorijske vježbe je pojasniti odabrane dijelove gradiva te upoznati vas s upotrebom MATLAB-a i Simulika kao alata za rješavanje linearnih diferencijskih i diferencijalnih jednadžbi sa stalnim koeficijentima. Od vas se očekuje da ćete nakon ove vježbe moći uz pomoć MATLAB-a izraditi simulacijske modele sustava temeljem zadane diferencijske ili diferencijalne jednadžbe.

Vježbu možete izraditi samostalno kod kuće, samostalno u fakultetskim laboratorijima koji su otvoreni za studentski rad ili uz pomoć nastavnika/demonstratora u terminima koji će biti rezervirani po potrebi. Obzirom da se termini rezerviraju po potrebi studenti koji žele raditi pojedinu vježbu uz pomoć nastavnika/demonstratora moraju se za to prijaviti putem Ferka.

Ukoliko ste se prijavili za izvođenje vježbi uz pomoć nastavnika/demonstratora obavezni ste doći u termin u koji ste raspoređeni. U tome terminu imat ćete svu pomoć i podršku pri izradi vježbe što će rezultirati lakšim i bržim svladavanjem gradiva, boljim razumijevanjem, te će vam se pružiti mogućnost postavljanja pitanja i dobivanja odgovora u najkraćem roku. U slučaju spriječenosti molimo vas da nas pravovremeno o tome obavijestite e-poštom.

Bez obzira na način kojeg ste odabrali za izradu vježbe (samostalno ili uz pomoć nastavnika/demonstratora) po završetku vježbe potrebno je predati rukom pisani izvještaj s vježbe. Izvještaj se ne boduje, već se ili **prihvaća** ili **odbija**. Student kojemu je izvještaj odbijen može još **jednom** predati popravni izvještaj. **U slučaju odbijanja popravnog izvještaja student pada predmet.**

2. Priprema

Prije svake vježbe potrebno se pripremiti za vježbu tako da ponovite teoriju s predavanja vezanu uz gradivo vježbe. Za drugu vježbu prisjetite se svega što ste naučili o diferencijskim i diferencijalnim jednadžbama.

Ako niste upoznati sa Simulinkom prisjetite se kako se isti koristi (vježba 4. sa LiV-a MATLAB). Kao podsjetnik vam osim materijala korištenih na LiV-u MATLAB može poslužiti i priručnik Kratke upute za korištenje MATLAB-a koji je dostupan na stranicama predmeta.

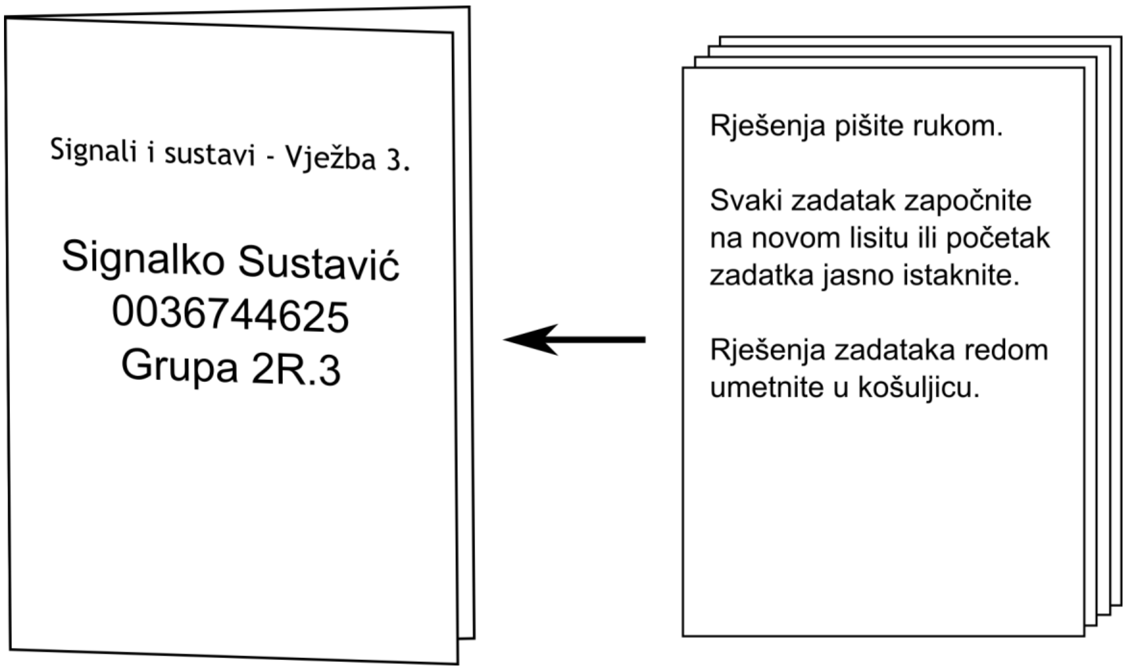
3. Izvještaj s vježbe

Izvještaj s vježbe se piše rukom. U zaglavlje svakog papira kojeg ćete koristiti napišite vaše ime i prezime, matični broj (JMBAG) i grupu. Po završetku vježbe sve papire s rješenjima zadataka redom stavite u košuljicu (sredina A4 bilježnice ili presavijeni A3 papir). Na prednjoj strani košuljice napišite redom velikim tiskanim slovima ime predmeta i redni broj vježbe, ime i prezime, matični broj (JMBAG) i grupu kako je prikazano na slici 1. Molimo vas da izvještaje ne stavljate u dodatne fascikle ili

Upute su dostupne putem internetskih stranica http://www.fer.unizg.hr/predmet/sis2/laboratorij.
Molimo da primjedbe i uočene pogreške šaljete e-poštom na adrese tomislav.petkovic.jr@fer.hr ili ana.sovic@fer.hr.

plastificirane folije.

Treća vježba se sastoji od šest zadataka od koji su zadnja dva za studente koji žele znati više. Svaki zadatak je podijeljen u podzadatke u kojima je napisano što morate napraviti. U izvještaju ne navodite rješenje svakog zadatka i podzadatka već samo ono što je navedeno uz oznaku (IZVJEŠTAJ) koja se nalazi uvijek na lijevoj margini.



Slika 1. Izvještaj s vježbe

Početak rješenja svakog zadatka i podzadatka jasno označite tako da uz lijevi rub papira napišete i zaokružite broj zadatka i podzadatka. Također preporučamo da svaki zadatak započnete rješavati na novom listu.

Ako se od vas zahtijeva da skicirajte ili nacrtate signal onda svaka skica mora sadržavati jasno označene koordinatne osi i označene karakteristične dijelove signala: minimume, maksimume, prolaske kroz nulu i točke prekida. Signale koji su diskretni po nezavisnoj varijabli za koje više od 5 uzoraka ima vrijednost različitu od nule skicirajte kao da su kontinuirani te zatim preko nacrtanog kontinuiranog signala točkama označite kako su uzorci raspoređeni oko karakterističnih točaka signala (minimumi, maksimumi, prolasci kroz nulu). Peteljkasti prikaz diskretnog signala koristite samo ako signal sadrži 5 ili manje uzoraka.

Ako se od vas zahtijeva da napišete naredbu, prepišete rezultat neke naredbe ili prepišete kod m-skripte u izvještaju napišite što se traži u neizmijenjenom obliku.

Ako se od vas zahtijeva da nacrtate simulacijski blokovski dijagram istog je potrebno precrtati. Prilikom precrtavanja je unutar svakog bloka potrebno označiti njegovu funkciju. Unutar bloka za integriranje ili sumiranje uz oznaku bloka obavezno upisujete korištenu početnu vrijednost. Unutar bloka za pojačanje signala (trokut) dovoljno je upisati vrijednost pojačanja. Nije potrebno prepisivati imena blokova koja se u Simulinku nalaze ispod blokova.

U računskim zadacima od vas se može tražiti da konačno rješenje istaknete. U tom slučaju konačno rješenje ističete tako da ga zaokružite, podcrtate ili napišete drugom bojom.

Molimo vas da pišete uredno jer izvještaj možemo pregledati i prihvatiti samo ako ga možemo pročitati.

3.1. Vremenski diskretni sustavi i linearne diferencijske jednadžbe sa stalnim koeficijentima

Prvi dio treće laboratorijske vježbe bavi se vremenski diskretnim sustavima koje opisujemo pomoću diferencijskih jednadžbi sa stalnim koeficijentima. Kroz ovaj dio vježbe ćemo naučiti kako se MATLAB i Simulink koriste za rješavanje linearnih diferencijskih jednadžbi sa stalnim koeficijentima.

Vremenski diskretni, linearan, vremenski stalan i kauzalan sustav možemo opisati linearnom diferencijskom jednadžbom sa stalnim koeficijentima

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \cdots + b_M u(n-M)$$

kojoj je pridružena prijenosna funkcija

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}.$$

Ponašanje takvog sustava u potpunosti je karakterizirano njegovim nulama i polovima. Nule sustava su korijeni jednadžbe

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M} = 0,$$

odnosno radi se o nulama prijenosne funkcije $H(z)$. Slično, polovi sustava su korijeni karakteristične jednadžbe

$$a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N} = 0,$$

odnosno radi se o polovima prijenosne funkcije $H(z)$.

Ako su svi koeficijenti a_i osim jednog (tipično a_0) jednaki nuli govorimo o sustavu s impulsnim odzivom konačnog trajanja ili FIR sustavu (od eng. *finite impulse response*).

Ako su barem dva od svih koeficijenata a_i različita od nule govorimo o sustavu s impulsnim odzivom beskonačnog trajanja ili IIR sustavu (od eng. *infinite impulse response*).

Pokažimo sada na primjeru kako koristimo MATLAB za analizu vremenski diskretnog kauzalnog sustava drugog reda opisanog diferencijskom jednadžbom

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2).$$

Neka dodatno bude $a_0 = 1$, $a_1 = -0{,}98$, $a_2 = 0{,}91$, $b_0 = 1$ i $b_1 = b_2 = 0$. Naredbe kojima analiziramo promatrani sustav su `tf` za definiciju sustava, `impulse` i `step` za određivanje impulsnog odziva i odziva na jediničnu stepenicu mirnog sustava, `pzmap` za crtanje polova i nula te naredba `filter` za određivanje odziva mirnog sustava na proizvoljnu pobudu:

```
» B = [1 0 0];                      % definiramo koeficijente brojnika
» A = [1 -0.98 0.91];               % definiramo koeficijente nazivnika
» S = tf(B, A, 1)                   % definiramo sustav opisan jednadžbom
                                    % y(n) - 0.98y(n -1) + 0.91y(n-2) = u(n)
Transfer function:                  % treći argument je vrijeme uzorkovanja
        z^2                         % i moramo ga zadati jer se u protivnom
-------------------                 % podrazumijeva vremenski kontinuirani sustav
z^2 - 0.98 z + 0.91

Sampling time: 1
» impulse(S);                       % crtamo impulsni odziv mirnog sustava
» step(S);                          % crtamo odziv na jedinični skok
» pzmap(S);                         % crtamo položaj polova i nula
» n = 0:1:150;
» u = cos(pi/12*n);                 % definiramo pobudu
» y = filter(B, A, u);              % računamo odziv mirnog sustava na pobudu
» stem(n, y);                       % crtamo odziv
```

Naredba `filter` služi isključivo za određivanje impulsnog odziva mirnog sustava, odnosno za računanje konvolucije. Osim naredbe `filter` za računanje konvolucije kauzalnih signala konačnog trajanja uobičajeno se koristi naredba conv. Pokažimo kako se ista koristi za računanje odziva sustava za kojeg je $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_0 = b_2 = 1$ i $b_1 = -2$, odnosno sustava čiji impulsni odziv $h(n) = \{\underline{1}, -2, 1\}$ je konačnog trajanja:

```
» h = [1 -2 1];                    % definiramo impulsni odziv sustava
» n = 0:1:150;
» u = cos(pi/12*n);                % definiramo pobudu konačnog trajanja
» y = conv(h, u);                  % računamo odziv mirnog sustava na pobudu
» stem(n, y);                      % crtamo odziv
```

Od interesa je još i frekvencijska karakteristika sustava koju možemo nacrtati korištenjem naredbe freqz. Navedena naredba će nacrtati frekvencijsku karakteristiku za svaku prijenosnu funkciju bez obzira na stabilnost sustava, odnosno provesti će formalnu zamjenu varijable z s $e^{j\Omega}$ i nacrtati rezultat:

```
» B = [1 0 0];                     % definiramo koeficijente brojnika
» A = [6 5 1];                     % definiramo koeficijente nazivnika
» roots(A)                         % računamo korijene nazivnika
                                   % sustav je ASIMPTOTSKI stabilan
ans =

   -0.5000
   -0.3333

» figure, freqz(B, A);             % crtamo frekvencijsku karakteristiku
» A = [1 5 6];
» roots(A)                         % računamo korijene nazivnika
                                   % sustav je NESTABILAN
ans =

   -3.0000
   -2.0000

» figure, freqz(B, A);             % crtamo frekvencijsku karakteristiku?!?
```

U drugom slučaju za prijenosnu funkciju $H(z) = \frac{1}{1+5z^{-1}+6z^{-2}}$ nacrtana frekvencijska karakteristika odgovara antikauzalnom asimptotski stabilnom vremenski diskretnom sustavu pridruženom toj prijenosnoj funkciji.

Želimo li analizirati kauzalne vremenski diskretne sustave uz zadane početne uvjete koristimo Simulink. U Simulinku je potrebno nacrtati simulacijski blokovski dijagram kako bi mogli analizirati sustav. Razmotrimo prvo kako bi izgledao simulacijski blokovski dijagram vremenski diskretnog kauzalnog sustava drugog reda opisanog diferencijskom jednadžbom

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2).$$

Ne smanjujući općenitost pretpostavimo da je prvi koeficijent $a_0 = 1$. Uvedemo li novi signal $w(n)$ možemo polaznu jednadžbu rastaviti na dvije jednostavnije,

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = w(n)$$

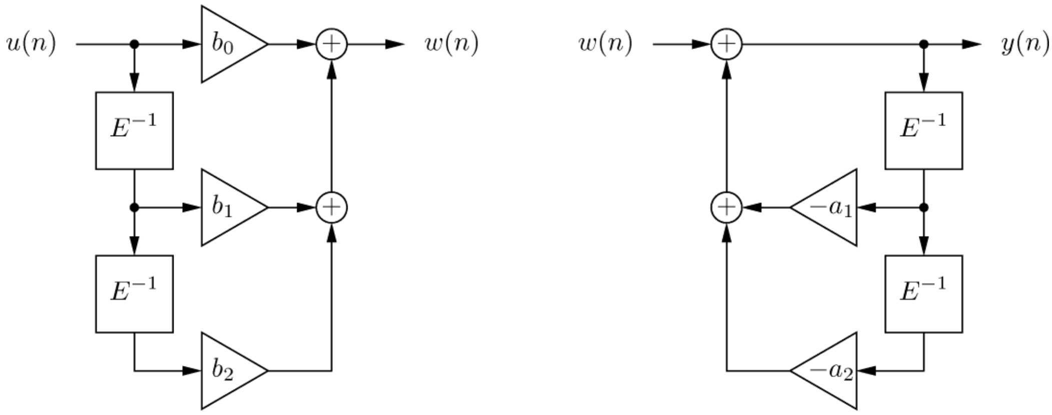
i

$$w(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2),$$

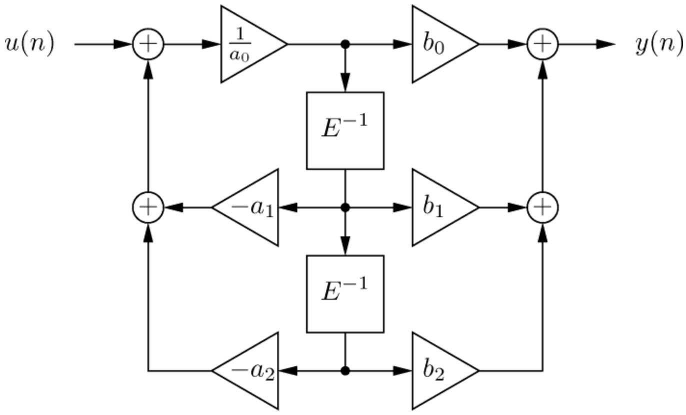
za koje su simulacijski blokovski dijagrami prikazani na slici 2. Spajanjem simulacijskih blokovskih dijagrama sa slike 2. u kaskadu dobivamo simulacijski blokovski dijagram traženog sustava. Obzirom da za linearne vremenski stalne sustave redoslijed sustava u kaskadnom spoju ne mijenja sustav[1] obično se dva podsustava sa slike 2. spajaju obrnutim redoslijedom kako bi dobili efikasniju strukturu s manjim brojem elemenata za kašnjenje koja je prikazana na slici 3. Takav simulacijski blokovski dijagram se naziva direktna II realizacija.

[1] Svojstvo proizlazi iz svojstva komutativnosti konvolucije.

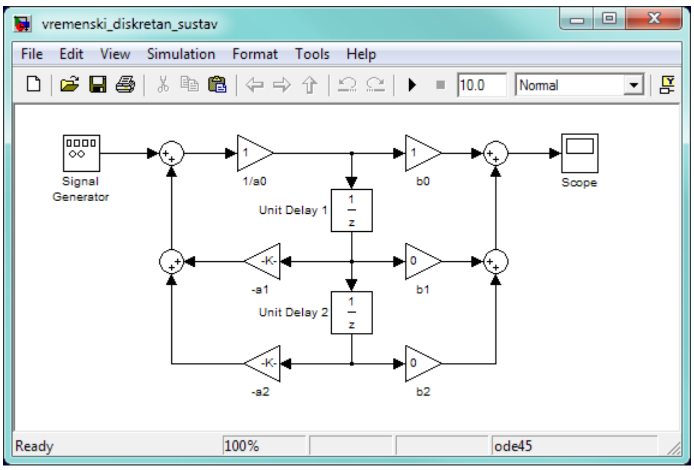
Želimo li analizirati vremenski diskretan sustav korištenjem Simulinka dovoljno je nacrtati direktnu II realizaciju sa slike 3. kako je prikazano na slici 4.



Slika 2. Sastavni elementi vremenski diskretnog sustava drugog reda



Slika 3. Simulacijski blokovski dijagram vremenski diskretnog sustava drugog reda



Slika 4. Simulacijski blokovski dijagram u Simulinku

60 minuta[2] **Zadatak 1. Kauzalan vremenski diskretni sustav drugog reda**

U ovom zadatku promatramo vremenski diskretan kauzalan sustav opisan diferencijskom jednadžbom sa stalnim koeficijentima $8y(n) - 2y(n-1) - y(n-2) = u(n)$.

Promatrani sustav ćemo analizirati analitički i uz korištenje MATLAB-a.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite kriterije kako prema položaju polova vremenski diskretnog sustava opisanog linearnom diferencijskom jednadžbom sa stalnim koeficijentima ispitujemo UNUTRAŠNJU stabilnost sustava.

a) Analitički odredite prijenosnu funkciju sustava.

b) Analitički odredite polove i nule prijenosne funkcije sustava te ispitajte unutrašnju stabilnost sustava.

c) Analitički odredite impulsni odziv sustava.

d) Analitički odredite odziv mirnog sustava na jediničnu stepenicu.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite postupke koje ste koristili u podzadatcima a)-d).

e) Pomoću MATLAB-a odredite prijenosnu funkciju sustava.

f) Pomoću MATLAB-a odredite položaj polova i nula sustava te ispitajte unutrašnju stabilnost sustava.

g) Pomoću MATLAB-a ili Simulinka odredite impulsni odziv sustava.

h) Pomoću MATLAB-a ili Simulinka odredite odziv mirnog sustava na jediničnu stepenicu.

(IZVJEŠTAJ) Napišite naredbe i skicirajte simulacijske blokovske dijagrame koje ste koristili. Nije potrebno precrtavati slike ili rezultate no svakako provjerite poklapaju li se rješenja s analitičkim rješenjima iz prva četiri podzadatka.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite kako izgleda pretpostavljeno partikularno rješenje diferencijske jednadžbe sa stalnim koeficijentima za svevremensku eksponencijalnu pobudu $u(n) = z^n$ gdje je z kompleksna konstanta. Što se događa s partikularnim rješenjem kada se vrijednost konstante z poklopi s polom sustava? Kako nazivamo tu pojavu?

i) Analitički odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(n) = 2^{-n}\mu(n)$.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite postupak za podzadatak i).

j) Pomoću MATLAB-a ili Simulinka odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(n) = 2^{-n}\mu(n)$.

(IZVJEŠTAJ) Napišite naredbe koje ste koristili ili skicirajte simulacijski blokovski dijagram kojega ste koristili. Nije potrebno precrtavati slike ili rezultate no svakako provjerite poklapaju li se rješenja s analitičkim rješenjem iz podzadatka i).

k) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Vremenski diskretni sustavi drugog reda obzirom na unutrašnju stabilnost mogu biti asimptotski stabilni, marginalno stabilni i nestabilni. Također, obzirom na vrstu polova oba pola mogu biti čisto realna, mogu biti konjugirano-kompleksni par, no može se raditi i o sustavu koji ima dvostruki čisto realni pol. Ponovite ovaj zadatak za navedene sustave i pobude koji pokrivaju sve kombinacije od interesa:

1. $6y(n) - 5y(n-1) + y(n-2) = u(n)$, $u(n) = 3^{-n}\mu(n)$
2. $4y(n) - 4y(n-1) + 2y(n-2) = u(n)$, $u(n) = \sqrt{2}^{-n}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\mu(n)$
3. $y(n) + y(n-2) = u(n)$, $u(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\mu(n)$

[2] Istaknuto vrijeme u minutama je okvirno i odnosni se na pripremljenog studenta koji zna teorijsko gradivo vježbe jer je pažljivo slušao predavanja te koji dobro vlada MATLAB-om.

4. $y(n) - y(n-2) = u(n),\ u(n) = \mu(n)$
5. $y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = u(n),\ u(n) = 2^n \mu(n)$
6. $2y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = u(n),\ u(n) = \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\mu(n)$
7. $y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = u(n),\ u(n) = \mu(n)$
8. $y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = u(n),\ u(n) = 2^n \mu(n)$
9. $4y(n) - 4y(n-1) + y(n-2) = u(n),\ u(n) = 2^{-n} \mu(n)$

45 minuta

Zadatak 2. Kamatni račun

Tijekom svog radnog vijeka morate štedjeti kako sebi osigurali mirovinu. Pretpostavimo da štedite u periodu od 30 godina uz stalnu kamatnu stopu od 5% tako da svake godine uplaćujete na štedni račun točno 15000 kuna. Nakon 30 godina štednje započinjete trošiti ušteđeno tako da bez polaganja novih sredstava na račun s njega svake godine podižete točno 15000 kuna sve dok ima sredstava na računu. Naravno, bez obzira što više ne uplaćujete uvijek dok ima sredstava na računu na kraju svake godine vam banka pripisuje kamatu.

U opisanoj situaciji zanima nas stanje vašeg bankovnog računa na kraju svake godine. Zatim nas posebno zanima koliko ćemo imati na računu nakon 30 godina štednje te koliko dugo ćemo po završetku štednje moći podizati točno 15000 kuna s računa. Naposljetku, zanima nas postoji li iznos kojeg možemo godišnje podizati s računa tako da ga nikada ne iscrpimo!

Opisanu situaciju možemo modelirati pomoću vremenski diskretnog kauzalnog sustava čiji ulaz je vaš godišnji polog[3] na račun i čiji izlaz je godišnje stanje na bankovnom računu. Kamatna stopa je parametar sustava. Prirodni odabir vrijednosti trajanja jednog koraka jest razdoblje od jedne godine.

a) Odredite diferencijsku jednadžbu kojom modeliramo zadanu situaciju.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite dobivenu diferencijsku jednadžbu te napišite značenje svake varijable u vašem modelu.

b) Ispitajte unutrašnju stabilnost jednadžbe iz podzadatka a). Kako ta stabilnost ovisi o kamatnoj stopi? Za koje vrijednosti kamatne[4] stope je sustav ASIMPTOTSKI stabilan u smislu unutrašnje stabilnosti? Za koje vrijednosti kamatne stope je sustav NESTABILAN u smislu unutrašnje stabilnosti?

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite odgovore na sva pitanja iz podzadatka b).

c) Analitički riješite diferencijsku jednadžbu iz podzadatka a) tako da pobuda odgovara opisanom stanju od 30 godina ulaganja nakon kojeg slijedi trošenje. Koliko dugo možemo podizati novce s računa? Koji je najveći iznos kojeg možemo podizati unedogled nakon 30 godina štednje? Koje svojstvo je ključno za takvo ponašanje sustava? Objasnite!

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite postupak rješavanja. Također napišite odgovore na sva pitanja iz podzadatka c). Uputa: riješite prvo jednadžbu za slučaj ulaganja sredstava na račun, zatim konačno stanje uzmite kao početno stanje nove jednadžbe koja opisuje situaciju povlačenja sredstava s računa.

d) U Simulinku nacrtajte simulacijski blokovski dijagram koji modelira opisanu situaciju.

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte simulacijski blokovski dijagram.

---

[3] Polog je pozitivan za uplatu na štedni račun i negativan za isplatu sa štednog računa.
[4] Pretpostavite da su dozvoljene sve vrijednosti kamatne stope, pa čak i one besmislene koje vam niti jedna banka neće ponuditi.

e) Provedite simulaciju za prvih 30 godina štednje te nacrtajte izlaz iz sustava (iznos na vašem računu) koji ste dobili simulacijom. Zatim provedite simulaciju za sljedeće godine trošenja.

f) Simulacijom provjerite vaše odgovore iz podzadatka c).

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte rezultate simulacije koji potvrđuju vaše odgovore iz prva tri podzadatka.

3.2. Vremenski kontinuirani sustavi i diferencijalne jednadžbe sa stalnim koeficijentima

Drugi dio treće laboratorijske vježbe bavi se vremenski kontinuiranim sustavima koje opisujemo pomoću diferencijalnih jednadžbi sa stalnim koeficijentima. Kroz ovaj dio vježbe ćemo naučiti kako se MATLAB i Simulink koriste za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi sa stalnim koeficijentima.

Vremenski kontinuiran, linearan, vremenski stalan i kauzalan sustav možemo opisati linearnom diferencijalnom jednadžbom sa stalnim koeficijentima

$$a_0 y^{(N)}(t) + a_1 y^{(N-1)}(t) + \cdots + a_N y(t) = b_0 u^{(M)}(t) + b_1 u^{(M-1)}(t) + \cdots + b_M u(t)$$

kojoj je pridružena prijenosna funkcija

$$H(s) = \frac{b_0 s^M + b_1 s^{M-1} + \cdots + b_M}{a_0 s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_N}.$$

Pri tome mora biti $N \geq M$ jer u protivnom zadani sustav nije kauzalan[5]. Ponašanje takvog sustava u potpunosti je karakterizirano njegovim nulama i polovima. Nule sustava su korijeni jednadžbe

$$b_0 s^M + b_1 s^{M-1} + \cdots + b_M = 0,$$

odnosno radi se o nulama prijenosne funkcije $H(s)$. Slično, polovi sustava su korijeni karakteristične jednadžbe

$$a_0 s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_N = 0,$$

odnosno radi se o polovima prijenosne funkcije $H(s)$.

Pokažimo sada na primjeru kako koristimo MATLAB za analizu vremenski kontinuiranog kauzalnog sustava drugog reda opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t).$$

Neka dodatno bude $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b_0 = b_1 = 0$ i $b_2 = 1$. Naredbe kojima analiziramo promatrani sustav su `tf` za definiciju sustava, `impulse` i `step` za određivanje impulsnog odziva i odziva na jediničnu stepenicu mirnog sustava, `pzmap` za crtanje polova i nula te naredbu `lsim` za određivanje odziva sustava na proizvoljnu pobudu:

```
» B = [0 0 1];                    % definiramo koeficijente brojnika
» A = [1 2 3];                    % definiramo koeficijente nazivnika
» S = tf(B, A)                    % definiramo sustav

Transfer function:
      1
-------------
s^2 + 2 s + 3

» impulse(S);                     % crtamo impulsni odziv mirnog sustava
» step(S);                        % crtamo odziv na jedinični skok
» pzmap(S);                       % crtamo položaj polova i nula
» t = 0:0.001:10;
```

[5] Prema tome kod vremenski kontinuiranih kauzalnih sustava opisanih linearnim diferencijalnim jednadžbama sa stalnim koeficijentima svi sustavi od interesa će imati beskonačni impulsni odziv (IIR).

```
» u = t > 0.5;                        % definiramo pobudu kao skok u 0.5
» y = lsim(S, u, t);                  % računamo odziv mirnog sustava na pobudu
» plot(t, y);                         % crtamo odziv
```

Od interesa je još i frekvencijska karakteristika sustava koju možemo nacrtati korištenjem naredbe `freqs`. Navedena naredba će nacrtati frekvencijsku karakteristiku za svaku prijenosnu funkciju bez obzira na stabilnost sustava, odnosno provesti će formalnu zamjenu varijable s s $j\omega$ i nacrtati rezultat:

```
» B = [0 0 1];                        % definiramo koeficijente brojnika
» A = [1 2 3];                        % definiramo koeficijente nazivnika
» roots(A)                            % računamo korijene nazivnika
                                      % sustav je ASIMPTOTSKI stabilan
ans =

  -1.0000 + 1.4142i
  -1.0000 - 1.4142i

» figure, freqs(B, A);                % crtamo frekvencijsku karakteristiku
» A = [1 -2 3];
» roots(A)                            % računamo korijene nazivnika
                                      % sustav je NESTABILAN
ans =

   1.0000 + 1.4142i
   1.0000 - 1.4142i

» figure, freqs(B, A);                % crtamo frekvencijsku karakteristiku?!?
```

U slučaju prijenosne funkcije $H(s) = \frac{1}{s^2-2s+3}$ nacrtana frekvencijska karakteristika odgovara antikauzalnom asimptotski stabilnom vremenski kontinuiranom sustavu, odnosno nacrtana frekvencijska karakteristika je CTFT transformacija impulsnog odziva $h_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^t \sin\left(\sqrt{2}t\right) \mu(-t)$, a ne impulsnog odziva $h_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \sin\left(\sqrt{2}t\right) \mu(t)$ (i $h_1(t)$ i $h_2(t)$ su rješenja diferencijalne jednadžbe $y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = \delta(t)$).

Želimo li analizirati kauzalne vremenski kontinuirane sustave uz zadane početne uvjete možemo opet koristiti naredbu `lsim` ili možemo koristiti Simulink. U Simulinku je potrebno nacrtati simulacijski blokovski dijagram kako bi mogli analizirati sustav. Razmotrimo prvo kako bi izgledao simulacijski blokovski dijagram vremenski kontinuiranog kauzalnog sustava drugog reda opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t).$$

Ne smanjujući općenitost pretpostavimo da je vodeći koeficijent $a_0 = 1$. Uvedemo li novi signal $w(t)$ možemo polaznu jednadžbu rastaviti na dvije jednostavnije,

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = w(t)$$

i

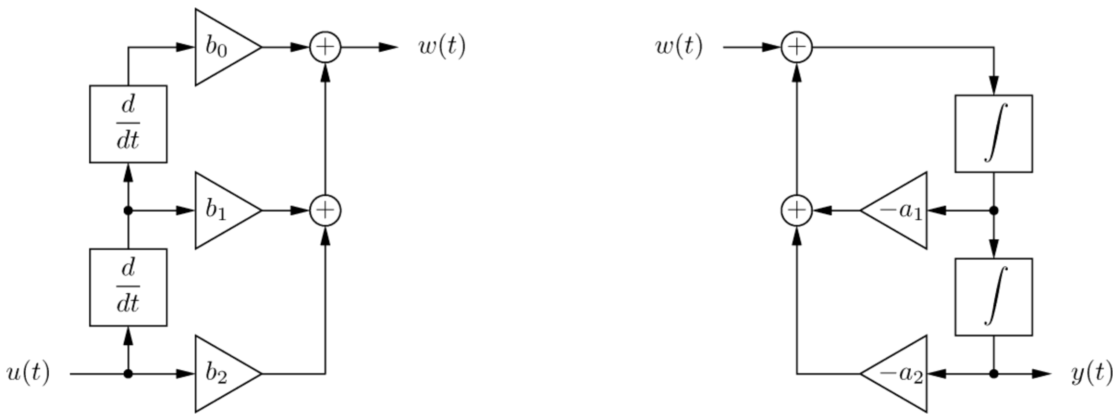
$$w(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t),$$

za koje su simulacijski blokovski dijagrami prikazani na slici 5.

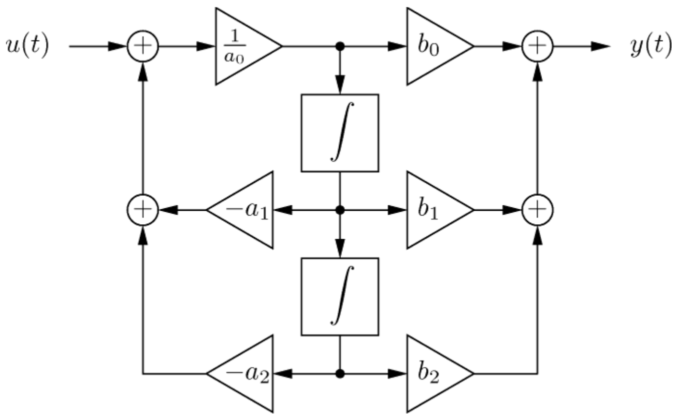
Spajanjem simulacijskih blokovskih dijagrama sa slike 5. u kaskadu dobivamo simulacijski blokovski dijagram traženog sustava. Obzirom da za linearne vremenski stalne sustave redoslijed sustava u kaskadnom spoju ne mijenja sustav[6] obično se dva podsustava sa slike 5. spajaju obrnutim redoslijedom kako bi dobili strukturu u kojoj izravno možemo poništiti slijedne operacije deriviranja i integriranja. Tim postupkom smo dobili simulacijski blokovski dijagram prikazan na slici 6. koji sadrži samo intergratore. Takav simulacijski blokovski dijagram naziva se direktna II realizacija.

Želimo li analizirati vremenski kontinuiran sustav korištenjem Simulinka dovoljno je nacrtati direktnu II realizaciju sa slike 6. kako je prikazano na slici 7.

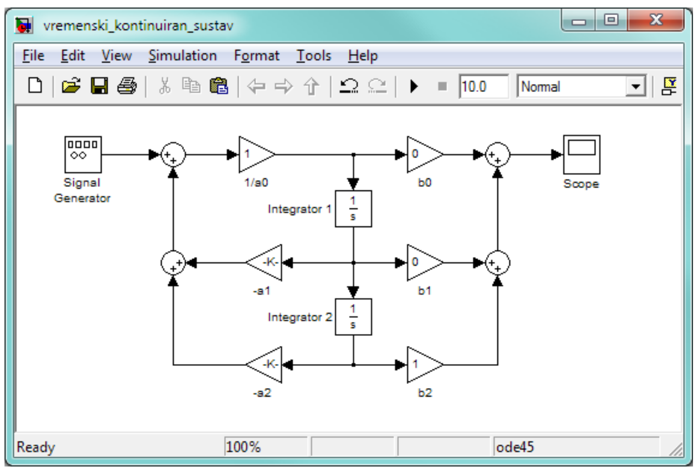
[6] To svojstvo proizlazi iz svojstva komutativnosti konvolucije.



Slika 5. Sastavni elementi vremenski kontinuiranog sustava drugog reda



Slika 6. Simulacijski blokovski dijagram vremenski kontinuiranog sustava drugog reda



Slika 7. Simulacijski blokovski dijagram u Simulinku

60 minuta Zadatak 3. Kauzalan vremenski kontinuirani sustav drugog reda

U ovom zadatku promatramo vremenski kontinuirani kauzalan sustav opisan diferencijalnom jednadžbom sa stalnim koeficijentima $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = u(t)$. Promatrani sustav ćemo analizirati analitički i uz korištenje MATLAB-a.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite kriterije kako prema položaju polova vremenski kontinuiranog sustava opisanog linearnom diferencijalnom jednadžbom sa stalnim koeficijentima ispitujemo UNUTRAŠNJU stabilnost sustava.

a) Analitički odredite prijenosnu funkciju sustava.

b) Analitički odredite polove i nule prijenosne funkcije sustava te ispitajte unutrašnju stabilnost sustava.

c) Analitički odredite impulsni odziv sustava.

d) Analitički odredite odziv mirnog sustava na jediničnu stepenicu.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite postupke koje ste koristili u podzadatcima a)-d).

e) Pomoću MATLAB-a odredite prijenosnu funkciju sustava.

f) Pomoću MATLAB-a odredite položaj polova i nula sustava te ispitajte unutrašnju stabilnost sustava.

g) Pomoću MATLAB-a ili Simulinka[7] odredite impulsni odziv sustava.

h) Pomoću MATLAB-a ili Simulinka odredite odziv mirnog sustava na jediničnu stepenicu.

(IZVJEŠTAJ) Napišite naredbe i skicirajte simulacijske blokovske dijagrame koje ste koristili. Nije potrebno precrtavati slike ili rezultate no svakako provjerite poklapaju li se rješenja s analitičkim rješenjima iz prva četiri podzadatka.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite kako izgleda pretpostavljeno partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe sa stalnim koeficijentima za svevremensku eksponencijalnu pobudu $u(t) = e^{st}$ gdje je s kompleksna konstanta. Što se događa s partikularnim rješenjem kada se vrijednost konstante s poklopi s polom sustava? Kako nazivamo tu pojavu?

i) Analitički odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(t) = e^{-2t}\cos(t)\mu(t)$.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite postupak za podzadatak i).

j) Pomoću MATLAB-a ili Simulinka odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(t) = e^{-2t}\cos(t)\mu(t)$.

(IZVJEŠTAJ) Napišite naredbe koje ste koristili ili skicirajte simulacijski blokovski dijagram kojeg ste koristili. Nije potrebno precrtavati slike ili rezultate no svakako provjerite poklapaju li se rješenja s analitičkim rješenjima iz podzadatka i).

k) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Vremenski kontinuirani sustavi drugog reda obzirom na unutrašnju stabilnost mogu biti asimptotski stabilni, marginalno stabilni i nestabilni. Također, obzirom na vrstu polova oba pola mogu biti čisto realna, mogu biti konjugirano-kompleksni par, i mogu biti jednaka tako da sustav ima dvostruki čisto realni pol. Ponovite ovaj zadatak za navedene sustave i pobude koji pokrivaju sve kombinacije od interesa:

1. $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t),\ u(t) = e^{-3t}\mu(t)$
2. $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = u(t),\ u(t) = e^{-3t}\cos(t)\mu(t)$
3. $y''(t) + y(t) = u(t),\ u(t) = \cos(t)\mu(t)$
4. $y'(t) = u(t),\ u(t) = \mu(t)$
5. $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = u(t),\ u(t) = e^{2t}\mu(t)$
6. $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = u(t),\ u(t) = e^{2t}\cos(t)\mu(t)$

---

[7] U Simulinku ne postoji izvor signala koji daje Diracovu distribuciju $\delta(t)$. Primijetite da je ipak moguće pobuditi sustav signalom koji je blizak $\delta(t)$ jer je tada odziv dobiven simulacijom blizak impulsnom odzivu sustava. Jedna mogućnost jest pravokutni puls jedinične površine što kraćeg trajanja.

7. $y''(t) = u(t),\ u(t) = \mu(t)$
8. $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = u(t),\ u(t) = e^{-2t}\mu(t)$
9. $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = u(t),\ u(t) = e^{2t}\mu(t)$

35 minuta

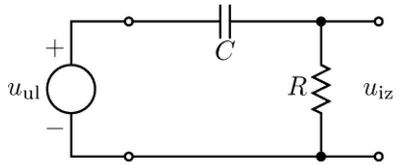
Zadatak 4. Početni uvjeti prije i poslije prekida pobude

U ovom zadatku promatramo vremenski kontinuirani kauzalan sustav koji opisuje CR krug prikazan na slici 8. Krug se sastoji od serijski spojenog otpora $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ i kapaciteta $C = 10\,\mu\mathrm{F}$. Ulaz u sustav je napon izvora $u_{\mathrm{ul}}(t)$ dok je izlaz napon na otporu $u_{\mathrm{iz}}(t)$. Diferencijalna jednadžba koja opisuje zadani krug jest

$$\frac{d}{dt}u_{\mathrm{iz}}(t) + \frac{1}{RC}u_{\mathrm{iz}}(t) = \frac{d}{dt}u_{\mathrm{ul}}(t).$$

Neka je pobuda takva da ima prekid u nuli,

$$u(t) = \begin{cases} \sin(t), & -\infty < t < 0 \\ 1, & 0 \le t < +\infty \end{cases}.$$



Slika 8. CR krug

a) Riješite diferencijalnu jednadžbu uz zadanu pobudu.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite postupak za podzadatak a). Uputa: za miran sustav će uz pobudu $u(t) = \sin(t)$ do trenutka $t = 0^-$ kada je pobuda prekinuta prirodni dio odziva potpuno nestati. Stoga je potrebno odrediti početne uvjete u $t = 0^-$ iz stacionarnog odziva na harmonijsku pobudu. Zatim se iz nađenih početnih uvjeta odrede početni uvjeti u $t = 0^+$.

b) Korištenjem Simulinka odredite odziv sustava za $t > 0$ uz uvrštavanje početnih uvjeta koje ste dobili u podzadatku a). Morate li u blokove upisati početne uvjete za $t = 0^-$ ili $t = 0^+$? Za koje početne uvjete se simulacija poklapa s analitičkim rješenjem?

c) Korištenjem Simulinka simulirajte sustav za $t > 0$ no neka početni uvjeti budu jednaki nuli i neka pobuda bude

$$u(t) = \begin{cases} \sin(t), & -\infty < t < 34\pi \\ 1, & 34\pi \le t < +\infty \end{cases}.$$

Možete li dobiveni rezultat simulacije usporediti s rezultatima iz podzadatka a)? Poklapa li se stanje u $t = (34\pi)^-$ sa stanjem u $t = 0^-$ iz podzadatka a)? Objasnite!

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte korišteni simulacijski blokovski dijagram. Zatim uredno skicirajte dobivene odzive za b) i c) podzadatak. Na skicama označite vrijednosti signala u trenutcima prekida pobude. Napišite odgovore na postavljena pitanja iz b) i c) podzadataka.

25 minuta

Zadatak 5. Početni uvjeti i putanja u prostoru stanja

Svaki memorijski element u simulacijskom blokovskom dijagramu je povezan s jednom varijablom stanja. U slučaju vremenski kontinuiranog sustava opisanog linearnom diferencijalnom jednadžbom sa stalnim koeficijentima to su integratori. Za direktnu II realizaciju sustava drugog reda opisanog jednadžbom

$$y''(t) + 2\zeta\Omega y'(t) + \Omega^2 y(t) = A\Omega^2 u(t)$$

tipično za varijable stanja $x_1(t)$ i $x_2(t)$ biramo izlaz sustava i njegovu derivaciju tako da vrijedi $x_1(t) = y(t)$ i $x_2(t) = y'(t)$.

a) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Koristeći Simulink snimite odzive $y(t)$ i putanje u prostoru stanja $x_1 \times x_2$ (ravnina) vremenski kontinuiranog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom $y''(t) + 2\zeta\Omega y'(t) + \Omega^2 y(t) = A\Omega^2 u(t)$ za $\Omega = 4$ i $A = \Omega^{-2}$. Neka sustav nema pobude i neka su početna stanja $y'(0) = -2$ i $y(0) = 2$. Simulaciju provedite za pet vrijednosti parametra ζ: $\zeta_1 = -0{,}125$, $\zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = -0{,}25$, $\zeta_4 = 1$ i $\zeta_5 = -2.5$.

b) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Povežite odzive iz a) podzadatka s unutrašnjom stabilnošću sustava. U koju točku u prostoru (ravnini) stanja teži trajektorija asimptotski stabilnog sustava, u koju marginalno stabilnog i u koju nestabilnog sustava?

c) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Što će se dogoditi s putanjama u prostoru stanja za sustave iz a) podzadatka ako na ulaz dovedemo jediničnu stepenicu? Simulacijom potvrdite ili opovrgnite vaš odgovor!

d) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Što će se dogoditi s putanjama u prostoru stanja za sustave iz a) podzadatka ako na ulaz dovedemo harmonijsku pobudu? Što će se dogoditi ako je pobuda upravo vlastite frekvencije sustava? Simulacijom potvrdite ili opovrgnite vaš odgovor!

20 minuta

Zadatak 6. Snimanje frekvencijske karakteristike

Vremenski kontinuiran, stabilan, linearan i vremenski stalan sustav možemo karakterizirati frekvencijskom karakteristikom $H(j\omega)$ koja odgovara vremenski kontinuiranoj Fourierovoj transformaciji (CTFT) impulsnog odziva sustava $h(t)$, odnosno

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Frekvencijska karakteristika $H(j\omega)$ vremenski kontinuiranih sustava opisanih linearnim diferencijalnim jednadžbama s realnim koeficijentima je konjugirano simetrična te se uobičajeno crta samo za pozitivne vrijednosti frekvencija[8].

Korištenjem frekvencijske karakteristike možemo odmah odrediti odziv mirnog sustava na svevremensku harmonijsku pobudu oblika $u(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, odnosno možemo odrediti odziv na bilo koju linearnu kombinaciju eksponencijalnih funkcija konačne energije $u(t) = \sum_i e^{j\omega_i t}$. Za harmonijsku pobudu $u(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ iz frekvencijske karakteristike $H(j\omega)$ očitavamo pojačanje i fazni pomak za zadanu frekvenciju ω_0 te odziv sustava računamo kao

$$y(t) = |H(j\omega)| A\cos(\omega_0 t + \varphi + \arg(H(j\omega))).$$

Prema navedenom izrazu uočavamo da simulacijom odziva sustava na harmonijsku pobudu te očitavanjem promjene amplitude i faze možemo snimiti frekvencijsku karakteristiku točku po točku.

a) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Analitički odredite frekvencijske karakteristike sustava drugog reda iz zadatka 5. za parametre $\zeta_1 = -0{,}125$, $\zeta_2 = -0{,}25$ i $\zeta_3 = 1$. Neka je $\Omega = 4$ i $A = \Omega^{-2}$.

b) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Korištenjem MATLAB-a odredite frekvencijske karakteristike sustava iz podzadatka a).

c) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Odaberite neki harmonijski signal. Za oba sustava iz podzadatka a) uz pomoć frekvencijske karakteristike koju ste odredili u a) dijelu zadatka odredite odziv sustava na odabrani signal u stacionarnom stanju.

d) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Korištenjem Simulinka simulacijom potvrdite (ili opovrgnite) vaše rezultate iz podzadatka c).

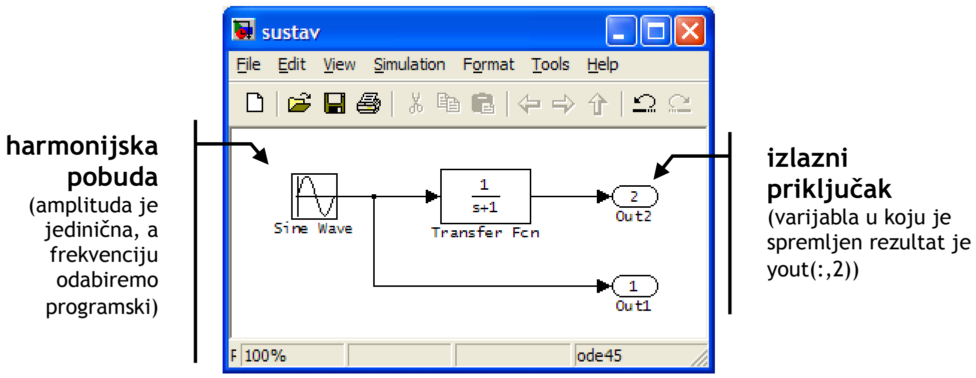
c) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE, POGOTOVO ZA STUDENTE ELEKTROTEHNIKE) Korištenjem Simulinka snimite frekvencijsku karakteristiku stabilnog sustava iz podzadatka a) točku-po-točku!

---

[8] Amplitudna frekvencijska karakteristika je parna. Fazna frekvencijska karakteristika je neparna.

Amplitudna frekvencijska karakteristika je prikaz pojačanja sustava u ovisnosti o frekvenciji harmonijske pobude. Fazna frekvencijska karakteristika je pak povezana s vremenom koje je potrebno za prolaz harmonijske pobude kroz sustav. Postupak simuliranog mjerenja amplitudne i fazne frekvencijske karakteristike moguće je automatizirati pomoću jednostavne skripte.

Prije pisanja skripte potrebno je sastaviti odgovarajući simulacijski blokovski dijagram sustava čiju karakteristiku snimamo. Na ulaz sustava se spaja blok koji daje harmonijsku pobudu (npr. `Sources→Sine Wave`). Sada nakon simulacije za svaku odabranu frekvenciju i ulaz i izlaz moramo vratiti u radni prostor kako bi mogli odrediti pojačanje i fazni pomak. Najjednostavniji način dobivanja tih signala u radnom prostoru je dodavanje izlaznih priključaka (`Sinks→Out1`). Sastavljeni model je prikazan na slici 9.



Slika 9. Simulacijski blokovski dijagram

Postavimo li frekvenciju u bloku `Sine Wave` na neku neodređenu vrijednost `w` koju definiramo u radnom prostoru korištenjem naredbe `sim` možemo pozivati simulaciju te zatim analizirati dobivene rezultate:

```
» w = 2; <ENT>                         % definiramo frekvenciju pobude
» sim('sustav') <ENT>                  % pokrećemo simulaciju modela 'sustav'
» whos <ENT>                           % rezultati simulacije su u varijabli yout
  Name        Size                       Bytes  Class

  tout     1000x1                         8000  double array
  w           1x1                            8  double array
  yout     1000x2                        16000  double array

Grand total is 3001 elements using 24008 bytes

» plot(tout,yout) <ENT>                % crtamo ih
```

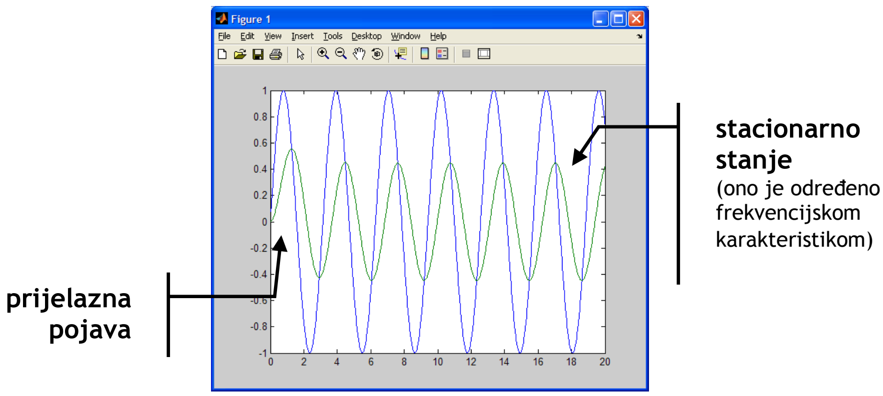
Po završetku simulacije u radnom prostoru dobivamo dvije nove varijable - `tout` i `yout`. U varijabli `tout` su spremljeni vremenski trenutci, dok se u varijabli `yout` nalaze vrijednosti izlaznih signala. Pri tom je `yout(:,1)` ulazni signal, a `yout(:,2)` izlazni signal jer smo tako postavili priključnice. Na slici 10. su prikazani dobiveni signali za sustav $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$ pri frekvenciji $\omega = 2$. Na slici jasno vidimo prijelaznu pojavu te stacionarno stanje. Određivanjem odnosa amplituda te vremenskog razmaka između prolazaka kroz nulu možemo odrediti pojačanje i fazni pomak.

Kako će računalo izmjeriti amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku? Znamo kolika je frekvencija pobude (varijabla `w`) pa iz vremenskih trenutaka spremljenih u varijablu `tout` možemo odabrati samo jedan period signala, i to onaj s kraja snimljenog signala koji sigurno odgovara stacionarnom stanju sustava. Amplitudnu karakteristiku određujemo kao omjer maksimalnih vrijednosti ulaznog i izlaznog signala[9]. Faznu karakteristiku određujemo iz udaljenosti prolazaka kroz nulu (ili udaljenosti maksimuma, ili pak udaljenosti minimuma). Prisjetite se da vrijeme jednog perioda signala odgovara kutu od 2π, a vremenski razmak između istih točaka na ulaznom i izlaznom signalu faznom pomaku. Množenjem očitanog vremensko razmaka s varijablom w odmah dobivamo fazni pomak.

Sada je samo potrebno napisati skriptu koja mijenja frekvencije te računa pojačanje i fazni pomak. Pseudokod potrebne skripte je:

```
ws = linspace(w1, w2);            % možete korisiti i logaritamsku skalu
for i = 1 : length(ws)
   w = ws(i);                     % postavljamo frekvenciju
   sim('model');                  % pokrećemo simulaciju
   n = length(tout);
   T = 2*pi/w;
   j = find(tout>tout(n)-T);      % odabiremo zadnji period
   A(i) = ...                     % računanje amplitude iz yout(j,2)
   phi(i) = ...                   % računanje faznog pomaka iz yout i tout
end
plot(ws, A);                      % crtamo amplitudnu karakteristiku
```

Da bi rezultati bili ispravni morate još podesiti parametre simulacije tako da simulacija traje značajno dulje od perioda najsporije pobude i od vremenske konstante pola najbližeg ishodištu kompleksne ravnine.



Slika 10. Rezultat simulacije

4. Literatura

1. John R. Buck, Michael M. Daniel, Andrew C. Singer, *Computer Explorations in Signals and Systems using Matlab*, 2nd edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
2. H. Babić, *Signali i sustavi (zavodska skripta)*, FER, Zagreb 1996., http://sis.zesoi.fer.hr/predavanja/pdf/sis_2001_skripta.pdf
3. Edward A. Lee, Pravin Varaiya, *Structure and Interpretation of Signals and Systems*, Addison Wesley, 2003.
4. T. Petković, Z. Kostanjčar, M. Budišić, B. Jeren, *Upute za laboratorijske vježbe iz Signala i sustava*, FER, Zagreb, svibanj 2006. http://sis.zesoi.fer.hr/laboratorij/pdf/upute_za_vjezbe_20060509.pdf

[9] Primijetite da ako odaberemo jediničnu amplitudu ulaza omjer nije potrebno računati, već je dovoljno samo očitati amplitudu izlaznog signala.

5. T. Petković, *Kratke upute za korištenje MATLAB-a*, FER, Zagreb, travanj 2005. http://www.fer.hr/_download/repository/matlab_upute.pdf
6. MATLAB Technical Documentation, The MathWorks, http://www.mathworks.com/help/techdoc/
7. Simulink Technical Documentation, The MathWorks, http://www.mathworks.com/help/toolbox/simulink/
8. Signal Processing Toolbox Technical Documentation, The MathWorks, http://www.mathworks.com/help/toolbox/signal/