



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Jeka

# Signali i sustavi

Profesor  
Branko Jeren

21. ožujka 2007.



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Odziv pobuđenog sustava

- kako je kazano totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava, dakle,<sup>1</sup>

$$y(n) = \sum_{j=1}^N c_j q_j^n + \text{odziv mirnog sustava}$$

- odziv mirnog sustava na bilo koju pobudu možemo odrediti
  - klasičnim rješavanjem jednadžbe diferencija
  - korištenjem konvolucijske sumacije

---

<sup>1</sup>ovdje je, radi jednostavnosti u prikazu odziva nepobuđenog sustava, pretpostavljen sustav s jednostrukim i realnim karakterističnim frekvencijama



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobudnog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- za sustav opisan nehomogenom jednadžbom diferencija potrebno je odrediti i partikularno rješenje
- određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrange-ova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
    - primjena rezultira složenim sumacijama
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
    - veliki se broj pobuda može aproksimirati gore navedenim nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- za pobudu polinomom oblika

$$u(n) = A_0 + A_1 n + \dots + A_M n^M$$

- partikularno je rješenje u obliku polinoma  $M$ -tog stupnja

$$y_p(n) = K_0 + K_1 n + \dots + K_M n^M$$

- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku potpunog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- slično vrijedi i za nizove

pobuda $u(n)$	partikularno rješenje $y_p(n)$
$A$ (konstanta)	$K$
$Ar^n \quad r \neq q_i (i = 1, 2, \dots, N)$	$Kr^n$
$Ar^n \quad r = q_i$	$Knr^n$
$An^M$	$K_0 + K_1n + \dots + K_Mn^M$
$r^n n^M$	$r^n(K_0 + K_1n + \dots + K_Mn^M)$
$A\cos(\omega_0n)$	$K_1\cos(\omega_0n) + K_2\sin(\omega_0n)$
$A\sin(\omega_0n)$	$K_1\cos(\omega_0n) + K_2\sin(\omega_0n)$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Odziv mirnog sustava rješenjem jednačbe diferencija

- odredimo odziv sustava

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- na pobudu  $u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$  te uz početne uvjete  $y(-1) = -2$  i  $y(-2) = -1.5$
- prije je određen odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(n) = 1.6183 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5065)$$

- preostaje odrediti odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + y_p(n)$$

dakle, treba odrediti partikularno rješenje  $y_p(n)$  te  $c_1$  i  $c_2$  za  $y(-1) = 0$  i  $y(-2) = 0$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- kako je pobuda  $u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$  partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K_1\cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2\sin(\frac{\pi}{8}n)$$

- koeficijente  $K_1$  i  $K_2$  određujemo metodom neodređenog koeficijenta
- uvrštenjem  $y_p(n)$  u polaznu jednadžbu slijedi

$$y_p(n) - 0.8\sqrt{2}y_p(n-1) + 0.64y_p(n-2) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n);$$

$$\begin{aligned} K_1\cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2\sin(\frac{\pi}{8}n) - 0.8\sqrt{2}K_1\cos[\frac{\pi}{8}(n-1)] - \\ - 0.8\sqrt{2}K_2\sin[\frac{\pi}{8}(n-1)] + 0.64K_1\cos[\frac{\pi}{8}(n-2)] + \\ + 0.64K_2\sin[\frac{\pi}{8}(n-2)] = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n) \end{aligned}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- primjenom trigonometrijskih transformacija slijedi

$$\begin{aligned} & K_1 \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + K_2 \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - \\ & - 0.8\sqrt{2}K_1 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] - \\ & - 0.8\sqrt{2}K_2 \left[ \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] + \\ & + 0.64K_1 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] + \\ & + 0.64K_2 \left[ \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = -0.2\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \end{aligned}$$

- razvrstavanjem slijedi

$$\begin{aligned} & \{ [1 - 0.8\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0.64\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)]K_1 + \\ & + [0.8\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - 0.64\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)]K_2 \} \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \\ & \{ -[0.8\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - 0.64\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)]K_1 + \\ & + [1 - 0.8\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0.64\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)]K_2 \} \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) = -0.2\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \end{aligned}$$





Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- usporedbom lijeve i desne strane pišemo

$$\begin{aligned} & [1 - 0.8\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{8}) + 0.64\cos(\frac{\pi}{4})]K_1 + \\ & \quad + [0.8\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}) - 0.64\sin(\frac{\pi}{4})]K_2 = -0.2 \\ & - [0.8\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}) - 0.64\sin(\frac{\pi}{4})]K_1 + \\ & \quad + [1 - 0.8\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{8}) + 0.64\cos(\frac{\pi}{4})]K_2 = 0 \end{aligned}$$

- rješenjem ovih jednadžbi izračunavamo  $K_1$  i  $K_2$

$$K_1 = -0.4899, \quad K_2 = 0.0236$$

- pa je partikularno rješenje

$$\begin{aligned} y_p(n) &= -0.4899\cos(\frac{\pi}{8}n) + 0.0236\sin(\frac{\pi}{8}n) = \\ &= -0.4905\cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481) \end{aligned}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Odziv mirnog sustava rješenjem jednačbe diferencija

- izračunavanje  $y(0)$  i  $y(1)$  potrebnih u izračunavanju  $c_1$  i  $c_2$  a uz  $y(-1) = 0$  i  $y(-2) = 0$

$$n = 0 \quad y(0) = 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.2\cos\left(\frac{\pi}{8}0\right) = -0.2$$

$$n = 1 \quad y(1) = 0.8\sqrt{2}y(0) - 0.64y(-1) - 0.2\cos\left(\frac{\pi}{8}1\right) = -0.4111$$

- iz rješenja za odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4899\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + 0.0236\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)$$

$$n = 0$$

$$y(0) = c_1 + c_2 - 0.4899 = -0.2$$

$$n = 1$$

$$y(1) = c_1 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + c_2 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} - 0.4899\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0.0236\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.4111$$

pa su konstante  $c_1$  i  $c_2$

$$c_1 = 1.4450 + j0.1162 = 0.1858e^{j0.6759}$$

$$c_2 = 1.4450 - j0.1162 = 0.1858e^{-j0.6759}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- odziv mirnog sustava je

$$y_m(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4905 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right)$$

$$y_m(n) = 0.1858 e^{j0.6759} 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.1858 e^{-j0.6759} 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \\ - 0.4905 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right)$$

- i konačno

$$y_m(n) = 0.3716(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 0.6759\right) - 0.4905 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right)$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- totalni odziv sustava je

$$y(n) = y_0(n) + y_m(n)$$

$$y(n) = \underbrace{1.6183 \cdot 0.8^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 2.5065\right)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} + \underbrace{0.3716(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 0.6759\right) - 0.4905 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right)}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

$$y(n) = \underbrace{-0.4905 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right)}_{\text{prisilni odziv}} + \underbrace{1.6183 \cdot 0.8^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 2.5065\right) + 0.3716(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 0.6759\right)}_{\text{prirodni odziv}}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

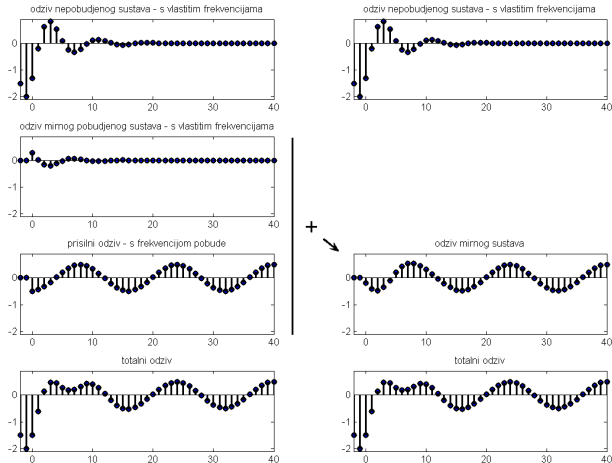
Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

# Totalni odziv sustava rješenjem jednačbe diferencija



Slika 1: Totalni odziv sustava na pobudu  $-0.2\cos(\frac{\pi}{8}n)$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

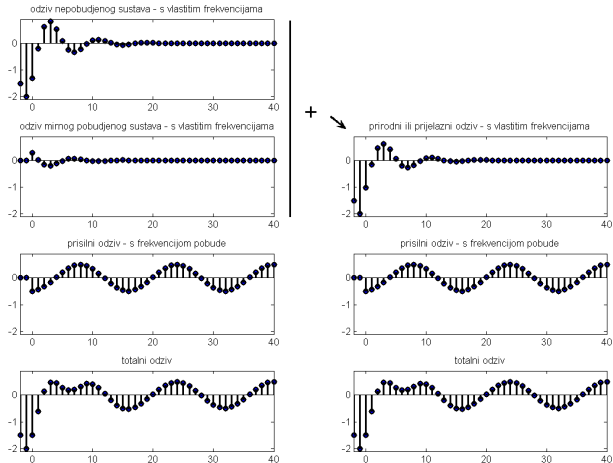
Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

# Totalni odziv sustava rješenjem jednačbe diferencija



Slika 2: Totalni odziv sustava na pobudu  $-0.2\cos(\frac{\pi}{8}n)$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- odredimo odziv sustava

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- na pobudu  $u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n)$  te uz početne uvjete  $y(-1) = -2$  i  $y(-2) = -1.5$
- prije je određeno rješenje homogene jednadžbe ovog sustava

$$y_h(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

- pa je totalno rješenje

$$y(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + y_p(n)$$

- treba odrediti partikularno rješenje  $y_p(n)$ , te  $c_1$  i  $c_2$  za  $y(-1) = -2$  i  $y(-2) = -1.5$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- kako je pobuda  $u(n) = -0.2\cos(\frac{\pi}{8}n)$  partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K_1\cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2\sin(\frac{\pi}{8}n)$$

- partikularno rješenje je određeno prije

$$y_p(n) = -0.4905\cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)$$





Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

# Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- izračunavanje  $y(0)$  i  $y(1)$  potrebnih u izračunavanju  $c_1$  i  $c_2$  a uz  $y(-1) = -2$  i  $y(-2) = -1.5$

$$n = 0 \quad y(0) = 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.2\cos\left(\frac{\pi}{8}0\right) = -1.5027$$

$$n = 1 \quad y(1) = 0.8\sqrt{2}y(0) - 0.64y(-1) - 0.2\cos\left(\frac{\pi}{8}1\right) = -0.6049$$

- iz totalnog rješenja

$$y(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4899\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + 0.0236\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)$$

$$n = 0$$

$$y(0) = c_1 + c_2 - 0.4899 = -1.5027$$

$$n = 1$$

$$y(1) = c_1 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + c_2 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} - 0.4899\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0.0236\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.6049$$

pa su konstante  $c_1$  i  $c_2$

$$c_1 = -0.5064 - j0.3638 = 0.6235e^{-j2.5186}$$

$$c_2 = -0.5064 + j0.3638 = 0.6235e^{j2.5186}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- totalni odziv je

$$y(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4905 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right)$$

$$y(n) = 0.6235 e^{-j2.5186} 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.6235 e^{j2.5186} 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \\ - 0.4905 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right)$$

- i konačno

$$y(n) = 1.2471(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 2.5186\right) - 0.4905 \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right)$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

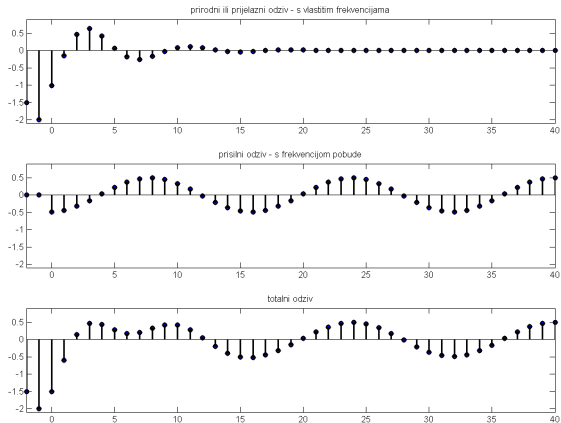
Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobudenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

# Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer



Slika 3: Totalni odziv sustava na pobudu  $-0.2\cos(\frac{\pi}{8}n)$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Određivanje impulsnog odziva

- pokazano je da odziv pobuđenog mirnog sustava možemo odrediti konvolucijskom sumacijom

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m)$$

- potrebno je odrediti impulsni odziv sustava, dakle totalni odziv sustava na pobudu  $u(n) = \delta(n)$  uz početne uvjete jednake nuli



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Određivanje impulsnog odziva

- za prije razmatrani sustav odredimo impulsni odziv  $h(n)$
- sustav je bio zadan jednačbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- impulsni odziv određujemo za miran sustav  
 $y(-1) = h(-1) = 0$  i  $y(-2) = h(-2) = 0$  i pobudu  
 $u(n) = \delta(n)$  pa pišemo

$$h(n) - 0.8\sqrt{2}h(n-1) + 0.64h(n-2) = \delta(n)$$

- očigledno je da gornja jednačba prelazi u homogenu jednačbu za  $n > 0$  i da se određivanje impulsnog odziva svodi na određivanje rješenja homogene jednačbe za  $n > 0$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Određivanje impulsnog odziva

- rješenje homogene jednadžbe ovog sustava, prije određeno, je

$$h(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} \quad (1)$$

- vrijednost impulsnog odziva u  $n = 0$  predstavlja jedan od rubnih uvjeta za određivanje konstanti  $c_1$  i  $c_2$
- dakle, za  $n = 0$ , iz

$$h(0) - 0.8\sqrt{2}h(-1) + 0.64h(-2) = \delta(0) \Rightarrow h(0) = 1$$

- konstante  $c_1$  i  $c_2$  određujemo iz (1) za  $n = -1$  i  $n = 0$

$$\begin{aligned} n = -1, \quad h(-1) = 0 &= c_1 0.8^{-1} e^{j\frac{-\pi}{4}} + c_2 0.8^{-1} e^{j\frac{\pi}{4}} \\ n = 0, \quad h(0) = 1 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1 = 0.7071 e^{-j0.7854}, \quad c_2 = 0.7071 e^{j0.7854}$$



## Određivanje impulsnog odziva

- pa je impulsni odziv

$$h(n) = 0.7071e^{-j0.7854}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.7071e^{j0.7854}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

- odnosno

$$h(n) = 1.4142(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 0.7854\right), \quad n \geq 0$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

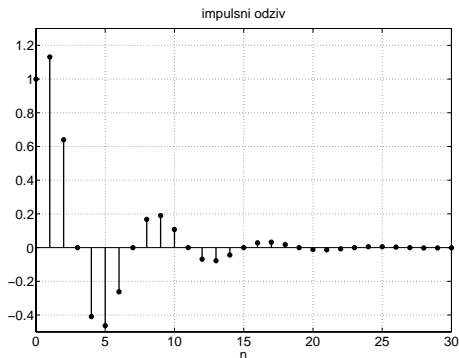
Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

$h(0) =$	1.0000
$h(1) =$	1.1314
$h(2) =$	0.6400
$h(3) =$	0.0000
$h(4) =$	-0.4096
$h(5) =$	-0.4634
$h(6) =$	-0.2621
$h(7) =$	0.0000
$h(8) =$	0.1678
$h(9) =$	0.1898
$h(10) =$	0.1074
$h(11) =$	0.0000
$h(12) =$	-0.0687
$h(13) =$	-0.0777
$h(14) =$	-0.0440
$h(15) =$	0.0000







## Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- razmatraju se još dva primjera određivanja impulsnog odziva mirnih sustava opisanih jednačbama diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n) + 2u(n-1)$$

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n-4) + 2u(n-5)$$

- impulsni se odziv ovih sustava određuje na isti način kao u prethodnom primjeru (lijeva strana, pa zato i karakteristična jednačba, su iste)
- u prvom slučaju impulsni se odziv nalazi kao rješenje homogene jednačbe za  $n > 1$ , pa će nam tada  $h(0)$  i  $h(1)$  predstavljati rubne uvjete za određivanje konstanti rješenja
- u drugom slučaju jednačba postaje homogena za  $n > 5$  i rubni su uvjeti u određivanju konstanti  $h(4)$  i  $h(5)$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- iz

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n) + 2u(n-1)$$

$$\text{za, } y(-1) = h(-1) = y(-2) = h(-2) = 0 \text{ i } u(n) = \delta(n),$$

$$n = 0, \quad h(0) = 0.8\sqrt{2}h(-1) - 0.64h(-2) + \delta(0) + 2\delta(-1) = 1$$

$$n = 1, \quad h(1) = 0.8\sqrt{2}h(0) - 0.64h(-1) + \delta(1) + 2\delta(0) = 3.1314$$

- za  $h(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$  izračunavamo  $c_1$  i  $c_2$

$$n = 0, \quad h(0) = 1 = c_1 + c_2$$

$$n = 1, \quad h(1) = 3.1314 = c_1 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + c_2 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow c_1 = 2.3223e^{-j1.3538}, \quad c_2 = 2.3223e^{j1.3538}$$

- pa je impulsni odziv drugog sustava

$$h(n) = 2.3223e^{-j1.3538}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3223e^{j1.3538}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- izračunati impulsni odziv

$$h(n) = 2.3223e^{-j1.3538}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3223e^{j1.3538}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

transformiramo u konačni oblik

$$h(n) = 4.6446(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right), \quad n \geq 0$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

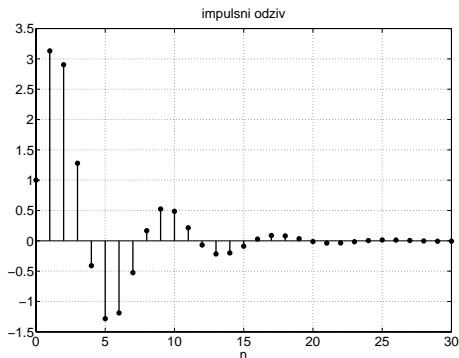
Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

$h(0) =$	1.0000
$h(1) =$	3.1314
$h(2) =$	2.9028
$h(3) =$	1.2801
$h(4) =$	-0.4096
$h(5) =$	-1.2826
$h(6) =$	-1.1890
$h(7) =$	-0.5243
$h(8) =$	0.1678
$h(9) =$	0.5254
$h(10) =$	0.4870
$h(11) =$	0.2148
$h(12) =$	-0.0687
$h(13) =$	-0.2152
$h(14) =$	-0.1995
$h(15) =$	-0.0880





Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- iz

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n-4) + 2u(n-5), \quad n \geq 4$$

za,  $y(-1) = h(-1) = y(-2) = h(-2) = 0$  i  $u(n) = \delta(n)$ ,  
izračunavamo  $h(0) = h(1) = h(2) = h(3) = 0$

$$n = 4, \quad h(4) = 0.8\sqrt{2}h(3) - 0.64h(2) + \delta(0) + 2\delta(-1) = 1$$

$$n = 5, \quad h(5) = 0.8\sqrt{2}h(4) - 0.64h(3) + \delta(1) + 2\delta(0) = 3.1314$$

- za  $h(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$  izračunavamo  $c_1$  i  $c_2$

$$n = 4, \quad h(4) = 1 \quad = c_1 0.8^4 e^{j\frac{\pi}{4}4} + c_2 0.8^4 e^{-j\frac{\pi}{4}4}$$

$$n = 5, \quad h(5) = 3.1314 \quad = c_1 0.8^5 e^{j\frac{\pi}{4}5} + c_2 0.8^5 e^{-j\frac{\pi}{4}5}$$

$$\Rightarrow c_1 = 5.6695e^{j1.7878}, \quad c_2 = 5.6695e^{-j1.7878}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

## Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- pa je impulsni odziv trećeg sustava

$$h(n) = 5.6695e^{j1.7878}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 5.6695e^{-j1.7878}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

- izračunati impulsni odziv transformiramo u konačni oblik

$$h(n) = 11.3389(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 1.7878\right), \quad n \geq 4$$



# Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

Signali i sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

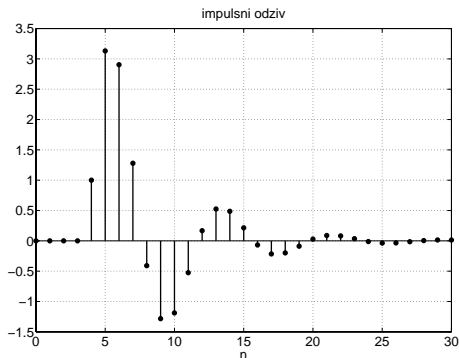
Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Odziv  
pobuđenog  
sustava  
Određivanje  
impulsnog  
odziva

Jeka

$h(0) =$	0.0000
$h(1) =$	0.0000
$h(2) =$	0.0000
$h(3) =$	0.0000
$h(4) =$	1.0000
$h(5) =$	3.1314
$h(6) =$	2.9028
$h(7) =$	1.2801
$h(8) =$	-0.4096
$h(9) =$	-1.2826
$h(10) =$	-1.1890
$h(11) =$	-0.5243
$h(12) =$	0.1678
$h(13) =$	0.5254
$h(14) =$	0.4870
$h(15) =$	0.2148





## Odziv sustava za generiranje jeke

- treba naći odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n), \quad n \in \text{Cjelobrojni}$$

- na pobudu

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- neka je sustav miran dakle

$$y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$$

- za  $n > 1$ ,  $u(n) = 0$  i gornja jednadžba postaje homogena





Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Jeka

## Odziv sustava za generiranje jeke

- dakle, problem rješavanja polazne jednadžbe

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n)$$

svodimo na problem rješavanja homogene jednadžbe

$$y(n) - 0.6y(n-4) = 0 \quad \text{za } n > 1$$

čiji su rubni uvjeti tada

$$y_h(1) = y(1), \quad y_h(0) = y(0), \quad y_h(-1) = y(-1) \text{ i } y_h(-2) = y(-2)$$

- $y(1)$  i  $y(0)$  određujemo iterativnim postupkom iz polazne jednadžbe uz primjenu zadane pobude, a  $y(-1)$  i  $y(-2)$  su zadani početni uvjeti



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Jeka

## Odziv sustava za generiranje jeka

- za pretpostavljeno rješenje homogene jednadžbe  
 $y_h(n) = cq^n$  iz

$$y(n) - 0.6y(n-4) = 0,$$

- slijedi

$$\begin{aligned}cq^n - 0.6cq^{n-4} &= 0 \\cq^{n-4}(q^4 - 0.6) &= 0\end{aligned}$$

- pa je karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$q^4 - 0.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_1 = -0.8801 \\ q_2 = j0.8801 = 0.8801e^{j\frac{\pi}{2}} \\ q_3 = -j0.8801 = 0.8801e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ q_4 = 0.8801 \end{cases}$$



## Odziv sustava za generiranje jeke

- rješenje homogene jednadžbe je

$$y_h(n) = c_1(-0.8801)^n + c_2(j0.8801)^n + c_3(-j0.8801)^n + c_4(0.8801)^n$$

- rješenje vrijedi za  $n > 1$  pa su rubni uvjeti, potrebni u postupku određivanja  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , vrijednosti  $y_h(1), y_h(0), y_h(-1)$  i  $y_h(-2)$
- $y_h(-1) = y(-1)$  i  $y_h(-2) = y(-2)$  su zadani početni uvjeti, a  $y_h(0) = y(0)$  i  $y_h(1) = y(1)$  izračunavamo iterativnim postupkom iz nehomogene jednadžbe dakle za zadanu pobudu



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Jeka

## Odziv sustava za generiranje jeka

- zadane su početne vrijednosti pa, je  
 $y_h(-1) = y(-1) = 0$  i  $y_h(-2) = y(-2) = 0$
- iz polazne jednadžbe slijedi za:

$$n = 0 \quad y(0) = u(0) + 0.6y(-4) = 1 \Rightarrow y_h(0) = y(0) = 1$$

$$n = 1 \quad y(1) = u(1) + 0.6y(-3) = 1 \Rightarrow y_h(1) = y(1) = 1$$

- pa iz

$$y_h(n) = c_1(-0.8801)^n + c_2(j0.8801)^n + c_3(-j0.8801)^n + c_4(0.8801)^n$$

- slijedi

$$y_h(1) = c_1(-0.8801)^1 + c_2(j0.8801)^1 + c_3(-j0.8801)^1 + c_4(0.8801)^1$$

$$y_h(0) = c_1(-0.8801)^0 + c_2(j0.8801)^0 + c_3(-j0.8801)^0 + c_4(0.8801)^0$$

$$y_h(-1) = c_1(-0.8801)^{-1} + c_2(j0.8801)^{-1} + c_3(-j0.8801)^{-1} + c_4(0.8801)^{-1}$$

$$y_h(-2) = c_1(-0.8801)^{-2} + c_2(j0.8801)^{-2} + c_3(-j0.8801)^{-2} + c_4(0.8801)^{-2}$$



Signali i  
sustavi

školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Jeka

## Odziv sustava za generiranje jeka

- izračunati su koeficijenti

$$c_1 = -0.0341$$

$$c_2 = 0.2500 - j0.2841 = 0.3784e^{-j0.8491}$$

$$c_3 = 0.2500 + j0.2841 = 0.3784e^{j0.8491}$$

$$c_4 = 0.5341$$

- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = -0.0341(-0.8801)^n + 0.3784e^{-j0.8491}0.8801^ne^{j\frac{\pi}{2}n} \\ + 0.3784e^{j0.8491}0.8801^ne^{-j\frac{\pi}{2}n} + 0.5341(0.8801)^n$$

odnosno

$$y_h(n) = -0.0341(-0.8801)^n + 0.5341(0.8801)^n \\ + 0.7568 \cdot 0.8801^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n - 0.8491\right),$$



Signali i  
sustavi

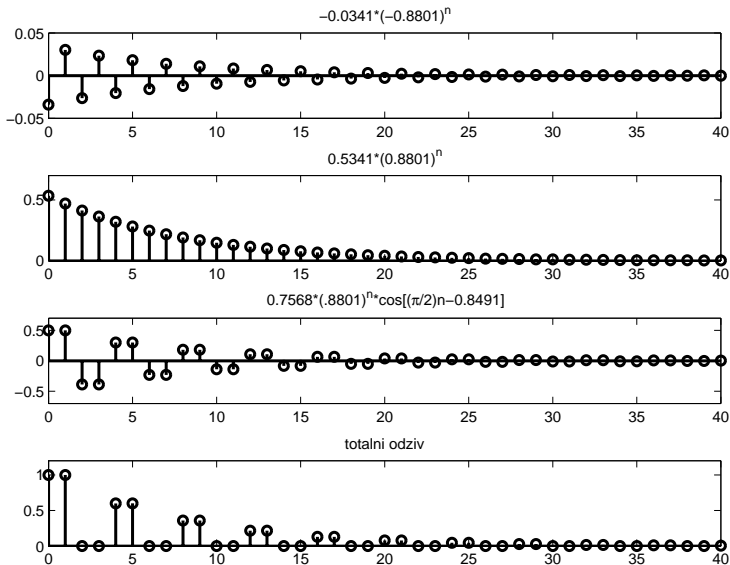
školska godina  
2006/2007  
Predavanje 10

Profesor  
Branko Jeren

Odziv  
linearnih  
vremenski  
stalnih  
diskretnih  
sustava

Jeka

## Odziv sustava za generiranje jeka



Slika 4: Odziv sustava za generiranje jeka