



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

20. veljače 2008.



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Signali kao funkcije

- funkcija

$$f : W \rightarrow Y,$$

definira pravilo pridruživanja, po kojem se svakom elementu w u skupu W pridružuje vrijednost (element) $y = f(w)$, u skupu Y

- skup W se naziva područje definicije, ili domena, funkcije f , i označava kao *PodručjeDefinicije*(f)
- područje vrijednosti, označimo ga punim imenom *PodručjeVrijednosti*(f) $\subseteq Y$, je skup svih vrijednosti $f(w)$ odnosno

$$\text{PodručjeVrijednosti}(f) = \{f(w) \in Y \mid w \in W\}.$$

- treba naglasiti kako, za razliku od f , $f(w)$ predstavlja konkretnu vrijednost funkcije f za neki $w \in \text{PodručjeDefinicije}(f)$.



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Signali kao funkcije

- na primjeru signala glazbe u trajanju 10.68 sekundi ilustrirano je da ovaj signal možemo predstaviti funkcijom

Glazba : *Vrijeme* \rightarrow *Tlak* *Vrijeme* = $[0, 10.68] \subset \text{Realni}$

- signal *Glazba* definiran je
 - područjem definicije, označenom kao skup *Vrijeme*, koji predstavlja vremenski interval $[0, 10.68] \subset \text{Realni}$
 - područjem vrijednosti, ovdje označenom kao *Tlak*, skupom koji se sastoji od mogućih vrijednosti tlaka i
 - zbog karaktera signala funkciju *Glazba* ne možemo prikazati deklarativnim matematičkim izrazom, pa se koristimo grafom ili tablicom
- ovdje su korištena “duga” imena za funkciju i varijable jer u ovom konkretnom slučaju imaju konkretne interpretacije
- korištenje “dugih” imena korisno je jer, kao i u programiranju, donosi bolju preglednost i garantira nedvosmislenost



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Signali kao funkcije

- općenito signal je definiran funkcijom

$$f : W \rightarrow Y$$

$\forall w \in PodručjeDefinicije(f), f(w) \in PodručjeVrijednosti(f)$
 $f(w) = \text{izraz po } w.$

- iskaz “izraz po w ” može biti dan matematičkim izrazom, grafom funkcije f , tablicom, ili procedurom koja definira način pridruživanja.
- pod grafom funkcije f podrazumijevamo skup $Graf(f) \subseteq W \times Y$ definiran kao

$$Graf(f) = \{(w, y) | w \in W \text{ i } y = f(w)\}$$

- signal f je omeđen ako postoji broj M takav da je $|f(w)| \leq M$ za svaki $w \in W$
- signal je neomeđen ako nije omeđen



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Signali kao funkcije

- za većinu signala *PodručjeDefinicije* je skup koji predstavlja vrijeme ili prostor (jedno ili višedimenzionalan)
- niz događaja, ili niz simbola, možemo također zvati signalom i tada *PodručjeDefinicije* predstavlja položaj simbola ili događaja neovisno o fizikalnoj notaciji vremena ili prostorne pozicije
- signali za koje je *PodručjeDefinicije* skup koji predstavlja interval vremena nazivaju se *vremenski signali*



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Višedimenzionalni signali

- višedimenzionalni signali definirani funkcijama s više nezavisnih varijabli

$$\begin{aligned} f &: W_1 \times W_2 \times \dots \times W_N \rightarrow Y \\ \forall (w_1, w_2, \dots, w_N) &\in W_1 \times W_2 \times \dots \times W_N \\ y &= f(w_1, w_2, \dots, w_N) \in Y. \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Višedimenzionalni signali

Primjer:

- primjer dvodimenzionalnog signala je crnobijela fotografija

FotoCrbobijela : $VertikalnaOs \times HorizontalnaOs \rightarrow Intenzitet$,

gdje je $Intenzitet = [crno, bijelo]$ mjeran u odgovarajućoj skali i predstavlja svjetlinu (razinu sivila)

- dakle, dvije nezavisne varijable su dvije prostorne varijable, a vrijednost funkcije predstavlja razinu svjetline u pojedinoj točki fotografije



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Višedimenzionalni signali

- Crnobijela fotografija na slici, dimenzija je 55 mm po vertikalnoj osi i 60 mm po horizontalnoj osi, i definiramo je kao dvodimenzionalni signal *Leica*

$$Leica : [0, 55] \times [0, 60] \rightarrow [0, I_{max}]$$

$$\forall (y, x) \in [0, 55] \times [0, 60], \quad I = Leica(y, x) \in [0, I_{max}],$$

gdje je I_{max} maksimalna vrijednost svjetline (0 je crno, a I_{max} je bijelo).





Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Slika u boji 1

- sliku u boji razmatramo kao višekanalni (višekomponentni) signal
- reflektirano svjetlo se definira preko RGB (*red, green, blue*) vrijednosti pa je:

$$Slika_u_Boji : VertikalnaOs \times HorizontalnaOs \rightarrow Intenzitet^3,$$

- bilo kojoj točki (y, x) domene odgovara trojka $(I_r, I_g, I_b) \in Intenzitet^3$ pa su RGB vrijednosti pridružene signalu *Slika_u_Boji*

$$(I_r, I_g, I_b) = Slika_u_Boji(y, x)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

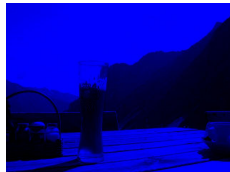
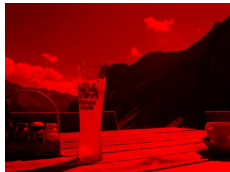
Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Slika u boji 2

- dakle, slika u boji je signal koji se sastoji od tri 2D signala koji predstavljaju tri osnovne boje: crveno (r), zeleno (g) i plavo (b)
- tri komponente slike u boji prikazane su ovim primjerom:





Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

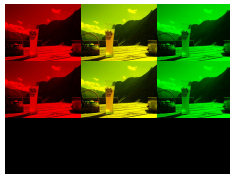
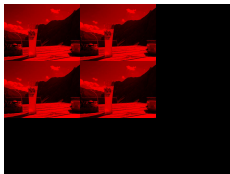
Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Slika u boji 3

- potpuna slika u boji dobiva se kombinacijom prethodne tri slike:





Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Slika u boji 4

- uvećana finalna kombinacija





Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Realni i kompleksni signali

- ovisno o svojstvima skupova *PodručjeDefinicije* i *PodručjeVrijednosti* klasificiramo signale na
 - realne ¹ signale za koje su

$$\text{PodručjeDefinicije} \subseteq \text{Realni}$$

$$\text{PodručjeVrijednosti} \subseteq \text{Realni}$$

- kompleksne signale realne nezavisne varijable za koje su

$$\text{PodručjeDefinicije} \subseteq \text{Realni}$$

$$\text{PodručjeVrijednosti} \subseteq \text{Kompleksni}$$

- kompleksne signale kompleksne nezavisne varijable za koje
su

$$\text{PodručjeDefinicije} \subseteq \text{Kompleksni}$$

$$\text{PodručjeVrijednosti} \subseteq \text{Kompleksni}$$

¹Da bi signal bio realan *PodručjeDefinicije* i *PodručjeVrijednosti* mogu biti i podskupovi skupa *Cjelobrojni*.



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Realni signal

- Signal² *KvadratniKorijen*, opisan funkcijom kvadratni korijen, može biti definiran kao realni signal samo za područje definicije iz intervala $[0, +\infty)$. Dakle,

$$\begin{aligned} & \textit{KvadratniKorijen} : \textit{Realni}_+ \rightarrow \textit{Realni}_+ \\ & \forall w \in [0, +\infty), \quad \textit{KvadratniKorijen}(w) = \sqrt{w}. \end{aligned}$$

- ovdje je dana deklarativna definicija funkcije
- deklarativnom definicijom samo su definirana svojstva funkcije bez objašnjenja kako realizirati funkciju
- imperativna definicija daje postupak (proceduru) kako pridružiti elemente područja definicije i područja vrijednosti
- imperativna definicija često predstavlja tek aproksimaciju deklarativno definirane funkcije

²Napomenimo kako razlikujemo funkcije *KvadratniKorijen* i
– *KvadratniKorijen*



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Izračunavanje kvadratnog korijena 1

- problem riješili stari Babilonci
- razvili iterativni postupak za izračunavanje koristeći operacije zbrajanja i dijeljenja
- neka je n redni broj iteracije
- neka je $y(0)$ početna, aproksimativna, vrijednost u izračunu \sqrt{w}
- ako vrijedi $[y(0)]^2 < w$ tada je sigurno³

$$y(0) < \sqrt{w} \quad \text{i} \quad \sqrt{w} < \frac{w}{y(0)}$$

- pa srednja vrijednost tih dvaju brojeva daje još bolju aproksimaciju

$$y(1) = \frac{1}{2} \left[y(0) + \frac{w}{y(0)} \right]$$

³Sličnim razmatranjima dolazi se do istog zaključka za $[y(0)]^2 > w$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Izračunavanje kvadratnog korijena 2

- cijeli iterativni postupak za izračun $\sqrt{12.3456789}$, na primjer, možemo prikazati uz pomoć jednadžbe

$$y(n) = \frac{1}{2} \left[y(n-1) + \frac{w}{y(n-1)} \right] \quad \text{za} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

- rješavanjem jednadžbe za npr. $y(0) = 2$, korak po korak, dobivamo rješenje za $\sqrt{12.3456789}$ već nakon nekoliko iteracija

n	u	aproximacija \sqrt{u}
0	12.3456789	2.000000000000000
1	12.3456789	4.08641972500000
2	12.3456789	3.55378387726301
3	12.3456789	3.51386854249693
4	12.3456789	3.51364183595822
5	12.3456789	3.51364182864446
6	12.3456789	3.51364182864446
7	12.3456789	3.51364182864446



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable

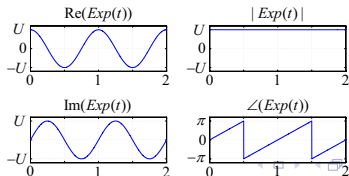
- signal definiran kao kompleksna eksponencijala realne varijable $Exp(t) = Ue^{j2\pi t}$, zadana u intervalu $t \in [0, 2] \subset Realni$, i uz $U \in Realni$, je

$$Exp : Realni \rightarrow Kompleksni$$

$$\forall t \in [0, 2] \subset Realni, \quad U \in Realni$$

$$Exp(t) = Ue^{j2\pi t} = U \cos(2\pi t) + jU \sin(2\pi t).$$

- područje vrijednosti kompleksne eksponencijale je iz skupa *Kompleksni* pa je pri grafičkom prikazu potrebno crtati dva grafa, za realni i imaginarni dio funkcije Exp , ili modul i argument (prikazujemo glavnu vrijednost)





Signali i sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Primjer kompleksnog signala kompleksne nezavisne varijable

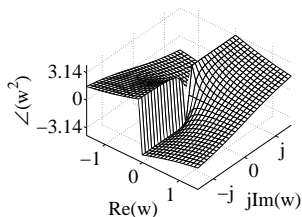
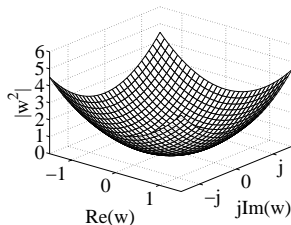
- Kompleksni signal je definiran kompleksnom kvadratnom funkcijom $Kvadrat(w) = w^2$, kompleksne varijable $w = Re(w) + jIm(w)$, zadanom kao

$Kvadrat : Kompleksni \rightarrow Kompleksni$

$\forall w = Re(w) + jIm(w) \in Kompleksni,$

$\forall Re(w) \in [-1.5, 1.5] \subset Realni, \forall Im(w) \in [-1.5, 1.5] \subset Realni,$

$Kvadrat(w) = w^2.$



Slika 1: Grafovi kompleksne funkcije $Kvadrat(w) = w^2$



Signali i sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

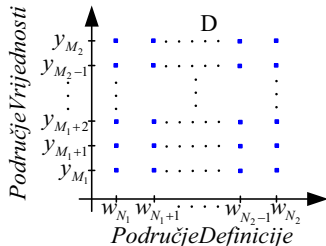
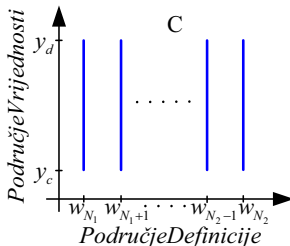
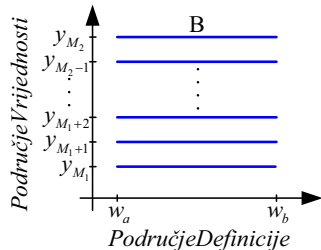
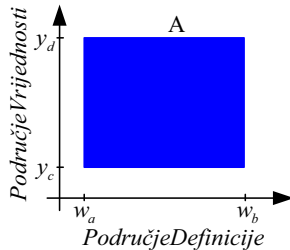
Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije



Slika 2: Kartezijevi produkti skupova

$\text{Područje Definicije} \times \text{Područje Vrijednosti}$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

- signali za koje je

$$\text{PodručjeDefinicije} = [w_a, w_b] \subset \text{Realni}$$

nazivamo po nezavisnoj varijabli kontinuirani signali
(Sl.2-A i Sl.2-B)

- najčešće je nezavisna varijabla vrijeme, pa zato uobičajeni naziv – vremenski kontinuirani signali
- signali za koje je

$$\text{PodručjeDefinicije} =$$

$$= \{w_n \mid N_1 \leq n \leq N_2; n, N_1, N_2 \in \text{Cjelobrojni}; \}$$

su po nezavisnoj varijabli diskretni signali (Sl.2-C i Sl.2-D)

- za nezavisnu varijablu vrijeme, govorimo o vremenski diskretnim signalima



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

- signale za koje je $PodručjeDefinicije = [w_a, w_b] \subset Realni$ i $PodručjeVrijednosti = [y_c, y_d] \subset Realni$ nazivamo analogni signali (Sl.2-A)
- signale za koje je

$PodručjeVrijednosti =$

$$= \{y_q \mid M_1 \leq q \leq M_2; q, M_1, M_2 \in Cjelobrojni; \},$$

nazivamo amplitudno kvantizirani signali (Sl.2-B i Sl.2-D)

- vremenski diskretne signale koji su i amplitudno kvantizirani nazivamo digitalni signali⁴ (Sl.2-D)



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

Primjer: vremenski kontinuiran signal – analogni signal

- u grupi je 83 studenta i za njih definiramo razne signale (funkcije)
- neka je signal ŠumStudenata , šum (buka) koji studenti generiraju tijekom školskog sata (45 minuta)

$$\begin{aligned}\text{ŠumStudenata} : \text{Vrijeme} &\rightarrow \text{NivoŠuma}, \\ \text{Vrijeme} = [0, 45] &\subset \text{Realni}, \text{NivoŠuma} \subset \text{Realni}\end{aligned}$$

Primjer: vremenski kontinuiran signal – kvantiziran

- tijekom predavanja studenti ulaze i izlaze iz predavaonice
- neka je signal $\text{BrojStudenataUPredavaoni}$ trenutni broj studenata u predavaonici tijekom predavanja

$$\begin{aligned}\text{BrojStudenataUPredavaoni} : \text{Vrijeme} &\rightarrow \text{BrojStudenata}, \\ \text{Vrijeme} = [0, 45] &\subset \text{Realni}, \\ \text{BrojStudenata} &= \{0, 1, \dots, 83\} \subset \text{Prirodni}\end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

Primjer: po nezavisnoj varijabli diskretan signal

- studenti rješavaju neki zadatak i svaki od njih treba neko vrijeme rješavanja
- signal (funkcija) *VrijemeRješavanjaZadatka*, pridružuje vrijeme rješavanja svakom od studenata

$$\begin{aligned} & \textit{VrijemeRješavanjaZadatka} : \textit{Studenti} \rightarrow \textit{Vrijeme}, \\ & \textit{Studenti} = \{\textit{Alić}, \textit{Barec}, \dots, \textit{Zorko}, \textit{Zrno}\}, \\ & \textit{Vrijeme} \subset \textit{Realni}_+ \end{aligned}$$

Primjer: signal diskretan po nezavisnoj varijabli i kvantiziran po amplitudi

- signal *BrojStudenataPoRedovima*,
$$\begin{aligned} & \textit{BrojStudenataPoRedovima} : \textit{Redovi} \rightarrow \textit{BrojStudenata}, \\ & \textit{Redovi} = \{1, 2, \dots, 14\} \subset \textit{Prirodni} \\ & \textit{BrojStudenata} = \{0, 1, \dots, 83\} \subset \textit{Prirodni} \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

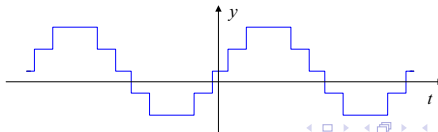
Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

- za vremenski kontinuirani signal y kažemo da je prekinut – diskontinuiran – u nekoj točki t_1 ako vrijedi $y(t_1^-) \neq y(t_1^+)$, pri čemu su $t_1 - t_1^-$ i $t_1^+ - t_1$ neizmjereno mali pozitivni brojevi
- signal y je neprekinut u nekoj točki t_1 ako vrijedi $y(t_1^-) = y(t_1^+)$
- ako je signal neprekinut za sve vrijednosti područja definicije, osim za prebrojivi skup točaka prekida, nazivamo ga po odsječcima neprekinutim
- treba naglasiti kako po odsječcima neprekinute signale klasificiramo kao vremenski kontinuirane signale





Signali i sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija amplitude

- analogni signal digitaliziramo postupkom kvantizacije po amplitudi te diskretizacijom po nezavisnoj varijabli
- kvantizacija je postupak pretvorbe kontinuuma (beskonačno mnogo) vrijednosti signala (amplituda) u konačni broj vrijednosti
- na slici 4 je prikazana jednolika raspodjela mogućih vrijednosti⁵, gdje je Q korak kvantizacije. Područje definicije kvantiziranih signala je konačni skup diskretnih vrijednosti

$$\{nQ \mid n \in \text{Cjelobrojni}, Q \in \text{Realni} \text{ i } nQ \in [y_c, y_d] \subset \text{Realni}\}$$

- kvantizacijom se fiksira konačan broj jednoliko razmaknutih vrijednosti i svaka vrijednost iz područja vrijednosti se pridruži najbližoj od njih (zaokruživanje)

⁵nejednoliku kvantizaciju signala po amplitudi ovdje ne razmatramo



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija amplitude

- diskretizaciju signala po nezavisnoj varijabli provodimo postupkom otipkavanja
- na Sl.4 je prikazana jednolika diskretizacija po nezavisnoj varijabli ⁶, gdje je T korak diskretizacije
- vremenski diskretan signal y_s nastaje otipkavanjem kontinuiranog signala $y : Realni \rightarrow Realni$

$$y_s : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad y_s(n) = y(nT)$$

⁶nejednoliku kvantizaciju signala po nezavisnoj varijabli ovdje ne razmatramo



Signali i sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

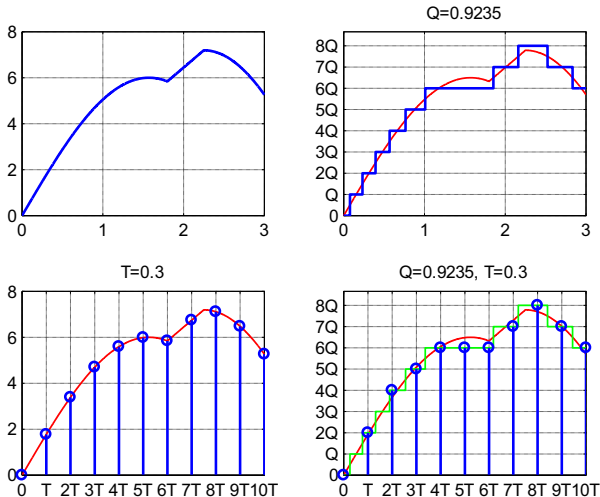
Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija amplitude



Slika 4: Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija amplitude



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija amplitude

$DiskretnaVertikalnaOs = \{1, 2, \dots, 450\}$;
 $DiskretnaHorizontalnaOs = \{1, 2, \dots, 500\}$;
 $Cjelobrojni_8 = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$

$DiskretnaVertikalnaOs = \{1, 2, \dots, 45\}$;
 $DiskretnaHorizontalnaOs = \{1, 2, \dots, 50\}$;
 $Cjelobrojni_8 = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$



- slika se može zamisliti kao matrica čiji elementi predstavljaju svjetlinu slike u toj točki
- slikovni elementi (picture element, pixel, pel)



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Vremenski kontinuirani i vremenski diskretni signali

- u najvećem broju primjena susrećemo se sa signalima koji su vremenske funkcije
- zato u ovom predmetu pod terminom signal podrazumijevamo (gotovo isključivo) vremenski signal
- jednaku pozornost dajemo vremenski diskretnim i vremenski kontinuiranim signalima⁷, pa ih studiramo paralelno (ili neposredno jedne iza drugih)
- isto tako, pod terminima diskretni signal, ili kontinuirani signal, podrazumijeva se da govorimo o signalima čija je nezavisna varijabla diskretna, odnosno, kontinuirana
- efekte kvantizacije zavisne varijable (amplitude) ne razmatramo u ovom predmetu
- vremenski diskretan signal predstavlja niz brojeva, pa se vremenski diskretni signali često nazivaju nizovi

⁷Isto vrijedi i za sustave



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Svevremenski i kauzalni signali

- signale $u_1(t)$ i $u_2(n)$ definirane kao:

$$u_1 : \textit{Realni} \rightarrow \textit{Realni}$$

$$u_2 : \textit{Cjelobrojni} \rightarrow \textit{Realni}$$

- nazivamo *svevremenskim*⁸ signalima jer je $u_1(t)$ definiran za $-\infty \leq t \leq \infty$, a $u_2(n)$ $-\infty \leq n \leq \infty$
- kauzalni*⁹ su signali $u_1(t)$ i $u_2(n)$ definirani kao:

$$u_1(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad u_2(n) = \begin{cases} u_2(n) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

⁸svevremenske signale nije moguće generirati u praksi ali zbog svojih svojstava imaju važnu ulogu u studiju signala i sustava

⁹kauzalnost signala vezana je uz pojam kauzalnosti sustava što će biti razmatrano kasnije



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Antikauzalni i nekauzalni signali

- *antikauzalni* su signali $u_1(t)$ i $u_2(n)$ definirani kao:

$$u_1(t) = \begin{cases} u_1(t), & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad u_2(n) = \begin{cases} u_2(n) & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$$

- *nekauzalni* signali $u_1(t)$ i $u_2(n)$, započinju prije $t = 0$, odnosno $n = 0$ i definirani su za

$$t_1 \leq t \leq t_2, \text{ uz } -\infty \leq t_1 < 0 \text{ i } 0 < t_2 \leq \infty$$

odnosno

$$N_1 \leq n \leq N_2, \text{ uz } -\infty \leq N_1 < 0 \text{ i } 0 < N_2 \leq \infty$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

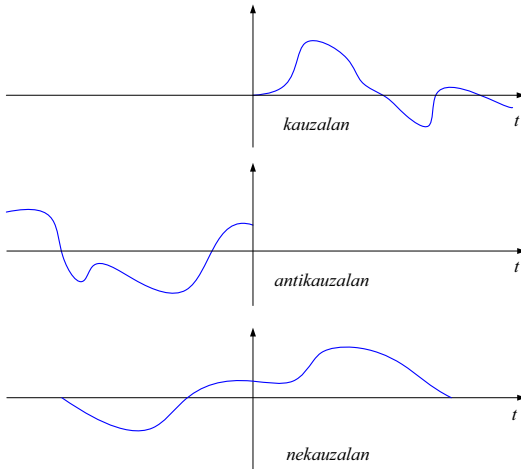
Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Kauzalni, antikauzalni i nekauzalni signal



Slika 5: Primjeri kauzalnog, antikauzalnog, i nekauzalnog vremenski kontinuiranog signala



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

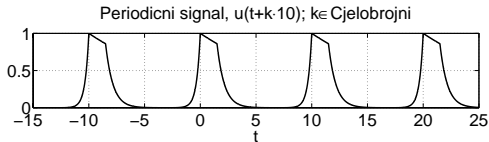
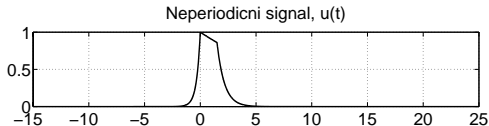
Periodični i neperiodični vremenski kontinuirani signali

- periodični signali su prikazani periodičnim funkcijama
 - periodičan vremenski kontinuiran signal, periode T_0 , definiran je kao

$$u : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni},$$

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad u(t) = u(t + kT_0)$$

gdje je konstanta $T_0 \in \text{Realni}_+$, a $k \in \text{Cjelobrojni}$



Slika 6: Periodični vremenski kontinuiran signal



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

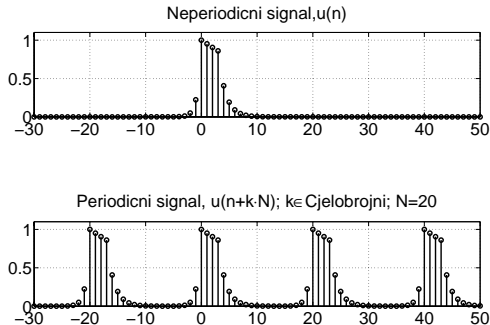
Periodični i neperiodični vremenski diskretni signali

- periodičan vremenski diskretan signal, periode N , definiran je kao

$u : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni},$

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad u(n) = u(n + kN)$$

gdje su $N \in \text{Cjelobrojni}_+, k \in \text{Cjelobrojni}$



Slika 7: Periodični vremenski diskretni signal



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor

Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Važna svojstva periodičnih signala

- iz definicije slijedi
 - periodični signali su svezremenski signali
 - vremenskim pomakom periodičnog signala za jednu periodu (ili njezine višekratnike) signal ostaje nepromijenjen
- periodični signal može nastati periodičnim produženjem neperiodičnog signala trajanja T_0 odnosno N



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor

Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

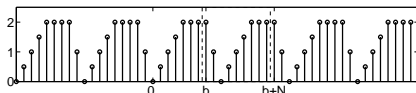
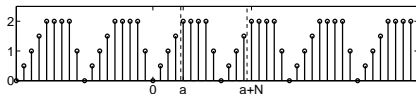
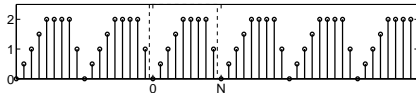
Energija i snaga
signala

Važna svojstva periodičnih signala

- za periodične vremenski diskretne signale vrijedi

$$\sum_{n=a}^{a+N} u(n) = \sum_{n=b}^{b+N} u(n) = \sum_{n=\langle N \rangle} u(n)$$

gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$ cjelobrojni a oznaka $\sum_{n=\langle N \rangle}$ predstavlja zbroj preko bilo kojeg područja sumacije duljine N , gdje je N temeljna perioda





Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

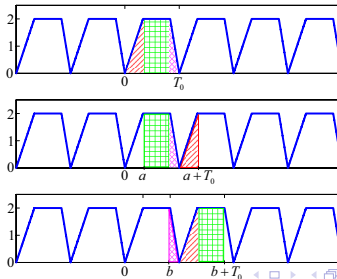
Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Važna svojstva periodičnih signala

- sličan zaključak vrijedi za periodične vremenski kontinuirane signale
- površina ispod funkcije $u(t)$ periodičnog signala, osnovnog perioda T_0 , jednaka je za bilo koji interval trajanja T_0 dakle

$$\int_a^{a+T_0} u(t) dt = \int_b^{b+T_0} u(t) dt = \int_{T_0} u(t) dt$$





Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor

Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Klasifikacija signala – notacija

- klasifikaciju prema svojstvima nezavisne varijable zaokružujemo definicijom četiri skupa signala

① $KontSignali = [Realni \rightarrow Kompleksni]$.

Ovaj skup signala uključuje vremenski kontinuirane signale ali njihovo područje definicije može biti interpretirano i kao prostor, ili frekvencija, ili nešto treće. Očigledno je kako su u ovaj skup signala uključeni i signali čije je područje vrijednosti iz skupa *Realni*.

② $DisktSignali = [Cjelobrojni \rightarrow Kompleksni]$.

Ovaj skup signala uključuje vremenski diskretne signale, ali i one čije područje definicije nije nužno interpretirano kao vrijeme.

③ $KontPeriod_p \subset KontSignali$.

Ovaj skup signala čine svi kontinuirani signali periodični s periodom $p \in Realni$

④ $KontDiskt_p \subset DisktSignali$.

Ovaj skup signala čine svi diskretni signali periodični s periodom $p \in Cjelobrojni$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Energija i snaga signala 1

- uobičajeno je tvorevine karakterizirati odgovarajućom mjerom ili veličinom, dakle, jednim brojem, kako bi naznačili dimenzije, snagu, cijenu ili neku drugu značajku
- želimo li npr. biti precizniji u izričaju kako je neki čovjek krupan potrebno je definirati i odgovarajuću mjeru
 - samo visina ili samo opseg pojasa nisu dostatni
 - mjera koja odgovara volumenu sigurno je prihvatljivija
 - u pojednostavljenom modelu izračuna volumena čovjeka, visine H , modeliramo ga s valjkom promjenljiva radijusa pa volumen računamo kao

$$V = \pi \int_0^H r^2(h) dh$$

- cilj je naći odgovarajuću mjeru, izraženu s jednim brojem, i za signale



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Energija i snaga signala 2

- prva ideja za mjeru signala, npr. površina ispod funkcije koja opisuje signal, uzima u obzir interval u kojem je definirana nezavisna varijabla, kao i sve vrijednosti zavisne varijable, no nedostatak ove mjere je u mogućem poništavanju pozitivnih i negativnih područja ispod funkcije, te može dati krivu informaciju o veličini signala
- jedan od načina uklanjanja ovog nedostatka je definiranje mjere kao površine signala ispod kvadrata funkcije signala
- razmotrimo signal struje $i(t)$ koji prolazi kroz otpor R i koji ima jasno fizikalno značenje
- energija koja se u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$ disipira kao toplina na otporu R kroz koji teče struja $i(t)$ dana je s

$$E_{[t_1, t_2]} = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Energija signala i srednja snaga vremenski kontinuiranog signala

- analogno kazanom, za signal $f(t)$, definiran u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$, dakle, signal trajanja $L = t_2 - t_1$, označujemo **energiju vremenski kontinuiranog signala** kao¹⁰

$$E_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

- srednja snaga vremenski kontinuiranog signala $f(t)$, definiranog u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$, je

$$P_{[t_1, t_2]} = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

¹⁰ova definicija vrijedi i za kompleksne signale pa se stoga uzima modul (apsolutna vrijednost) signala



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor

Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima

područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Totalna energija signala i srednja snaga vremenski kontinuiranog signala

- totalna energija i totalna srednja snaga vremenski kontinuiranog signala, definiranog za $t \in \text{Realni}$, su

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Srednja snaga periodičnog vremenski kontinuiranog signala

- srednja vrijednost bilo koje periodične funkcije je jednaka srednjoj vrijednosti za bilo koji period
- kako je kvadrat periodične funkcije također periodična funkcija, tada je srednja snaga periodičnog¹¹ vremenski kontinuiranog signala $\tilde{y}(t)$

$$P_{\tilde{y}} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |\tilde{y}(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{y}(t)|^2 dt$$

¹¹ \sim je grafički znak tilda. Riječ dolazi iz španjolskog i označuje ponavljanje. Zato, kad god želimo naglasiti periodičnost signala y , pišemo \tilde{y}



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

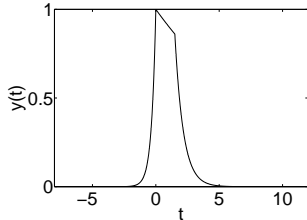
Energija i snaga
signala

Primjer izračuna energije signala

- zadan je signal

$y : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}$

$$y(t) = \begin{cases} e^{3t} & -6 \leq t < 0 \\ e^{-0.1t} & 0 \leq t < 1.5 \\ 0.86e^{-1.5(t-1.5)} & 1.5 \leq t < 10 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$



- totalna energija E_{∞} ovog signala je

$$\begin{aligned} E_{\infty} &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \\ &= \int_{-6}^0 e^{6t} dt + \int_0^{1.5} e^{-0.2t} dt + \int_{1.5}^{10} 0.86^2 e^{-3(t-1.5)} dt \\ &= 0.1667 + 1.2959 + 0.247 = 1.7091 \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

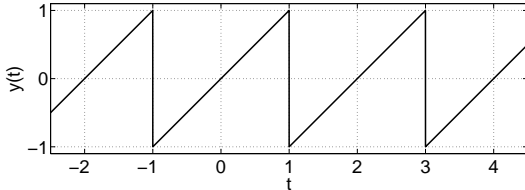
Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Primjer izračuna totalne srednje snage signala



- periodični signal nije vremenski omeđen i njegova totalna energija je beskonačna i odgovarajuća je mjera signala njegova snaga
- postupak izračuna se može pojednostaviti jer se radi o periodičnom signalu pa je dovoljno računati srednju snagu jednog perioda

$$P_y = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Energija i srednja snaga vremenski diskretnog signala

- energija vremenski diskretnog signala (niza) $y(n)$, definiranog u intervalu $[n_1, n_2]$, je

$$E_{[n_1, n_2]} = \sum_{n=n_1}^{n_2} |y(n)|^2$$

- srednja snaga vremenski diskretnog signala $y(n)$, definiranog u intervalu $[n_1, n_2]$, je

$$P_{[n_1, n_2]} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |y(n)|^2$$



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor

Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Totalna energija i srednja snaga vremenski diskretnog signala

- totalna energija E_{∞} niza $y(n)$, $n \in \text{Cjelobrojni}$, definira se kao:

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

- niz beskonačna trajanja, s konačnim vrijednostima uzoraka, može imati konačnu ili beskonačnu totalnu energiju
- niz konačnog trajanja, s konačnim vrijednostima uzoraka, ima konačnu energiju
- totalna srednja snaga P_{∞} neperiodičnog niza definira se kao:

$$P_{\infty} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M |y(n)|^2$$

- srednja snaga niza beskonačne duljine može biti konačna ili beskonačna



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Srednja snaga periodičnog vremenski diskretnog signala

- srednja snaga periodičnog niza perioda N je:

$$P_{\tilde{y}} = \frac{1}{N} \sum_{n=b}^{b+N-1} |\tilde{y}(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |\tilde{y}(n)|^2$$

gdje je $b \in \text{Cjelobrojni}$ a oznaka $\sum_{n=\langle N \rangle}$ predstavlja zbroj preko bilo kojeg područja sumacije duljine N gdje je N temeljna perioda



Signali i
sustavi

školska godina
2007/2008
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signali kao
funkcije

Višedimenzionalni
signali

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Periodični i
neperiodični
signali

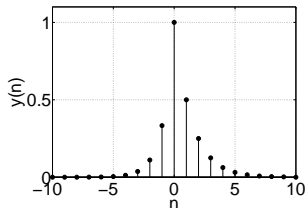
Energija i snaga
signala

Primjer izračuna energije vremenski diskretnog signala

- razmotrimo vremenski diskretnan signal

$u : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni}$

$$y(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases}$$



- energija signala je

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

$$\begin{aligned} E_{\infty} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} - 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{35}{24} \end{aligned}$$