Sveučilište u Zagrebu

Nastavnici na predmetu

Analiza uspješnosti na prvom međuispitu iz Signala i sustava

FER, Zagreb, travanj 2007.

1. zadatak: PARNOST I NEPARNOST SIGNALA

1. Zadan je signal $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x(t) = (-1)^{j|t|}$. Odredite neparnu komponentu signala.

   a) 0 b) $(-1)^{j|t|}$ c) $\frac{1}{2}\left((-1)^{jt} - (-1)^{-jt}\right)$ d) $\frac{1}{2}\left((-1)^{jt} + (-1)^{-jt}\right)$ e) $(-1)^{jt}$ f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: A

Signal je paran ako je f(t)=f(-t). Ispitivanjem vidimo da je zadani signal paran te je neparna komponenta nula.

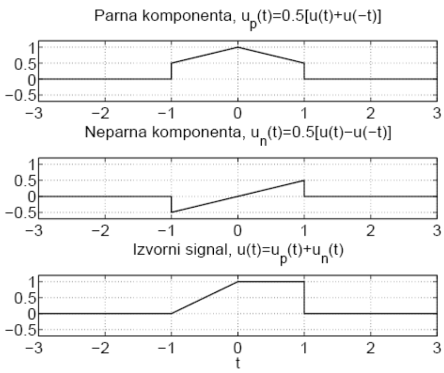
Statistika 1. međuispita:

62% je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

1. Predavanja: 3. predavanje: prikaznice 56.

- signal može biti prikazan zbrojem parne i neparne komponente[2] $u(t) = u_p(t) + u_n(t)$



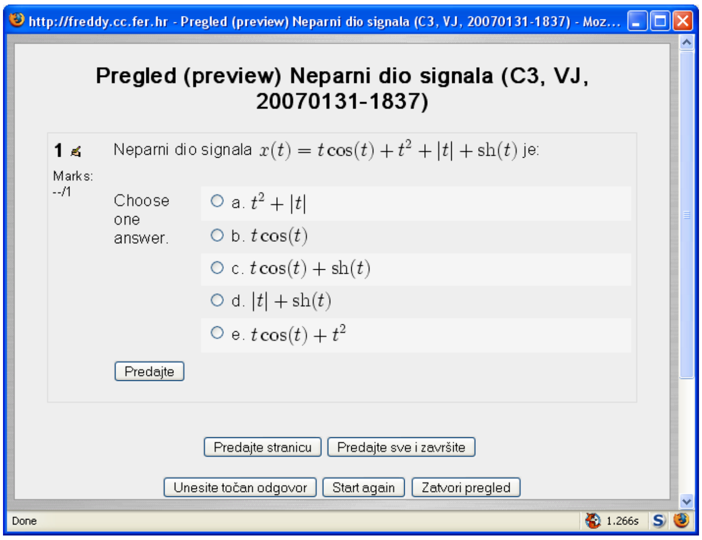
Slika 22: Signal kao zbroj parne i neparne komponente

2. Zadaci za aktivnost, 1. tjedan: zadatak 7.

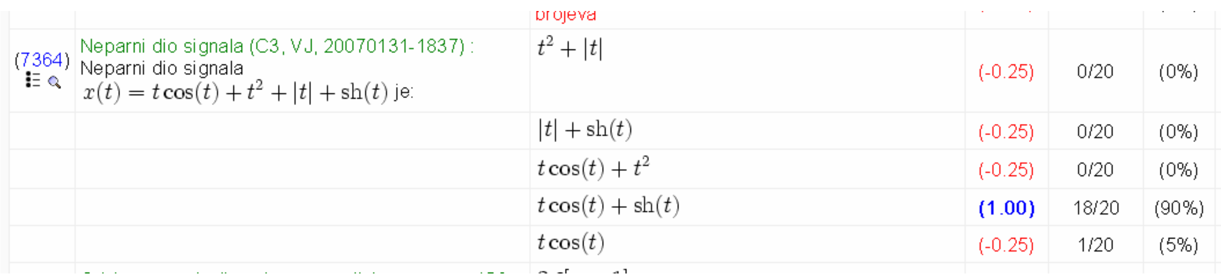
7. Nađite parni i neparni dio sljedećih diskretnih signala

$$a)\ x(n) = e^{j(\Omega_0 n + \frac{\pi}{2})},$$
$$b)\ x(n) = \delta(n).$$

3. Domaće zadaće



Postotak uspješnosti:



		brojeva			
(7364)	Neparni dio signala (C3, VJ, 20070131-1837) : Neparni dio signala $x(t) = t\cos(t) + t^2 + \lvert t\rvert + \mathrm{sh}(t)$ je:	$t^2 + \lvert t\rvert$	(-0.25)	0/20	(0%)
		$\lvert t\rvert + \mathrm{sh}(t)$	(-0.25)	0/20	(0%)
		$t\cos(t) + t^2$	(-0.25)	0/20	(0%)
		$t\cos(t) + \mathrm{sh}(t)$	(1.00)	18/20	(90%)
		$t\cos(t)$	(-0.25)	1/20	(5%)

2. zadatak: SNAGA SIGNALA

2. Zadan je kontinuirani signal $x(t) = e^{j2\pi t}\sin(t + \pi/3)$. Izračunajte njegovu snagu.

a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2 e) $+\infty$ f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: B

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|e^{j2\pi}\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right|^2 dt$$

$$\left|e^{j2\pi}\right| = \left|\cos 2\pi t + j\sin 2\pi t\right| = \sqrt{\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t} = 1$$

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin^2\left(t+\frac{\pi}{3}\right)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1-\cos 2\cdot\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}{2}dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin 2\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sin T = \frac{1}{2}$$

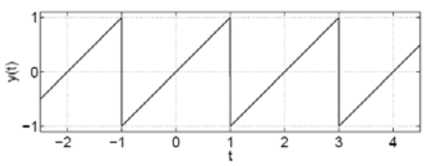
Statistika 1. međuispita:

22% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

1. Predavanja: 3. predavanje: prikaznice 13.

Primjer izračuna totalne srednje snage signala



- periodični signal nije vremenski omeđen i njegova totalna energija je beskonačna i odgovarajuća je mjera signala srednja snaga signala njegova totalna srednja snaga P_∞
- postupak izračuna se može pojednostaviti jer se radi o periodičnom signalu pa je dovoljno računati srednju snagu jednog perioda

$$P_y = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{3}$$

2. Zadaci za aktivnost, 1. tjedan: zadatak 7.

7. Izračunajte snagu sljedećih signala
   a. $x(n)=\mu(n)$,
   b. $x(n)=2e^{j3n}$.

3. Laboratorijske vježbe

a) Kreirajte simboličke izraze za signale:

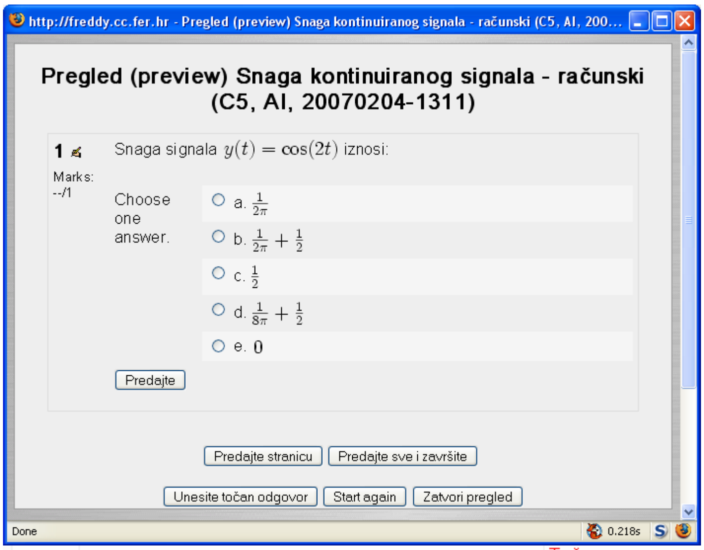
1. $x_1(t)=\cos\frac{\pi t}{5}$

2. $x_2(t)=\sin\frac{\pi t}{5}$

b) Koristeći naredbu `ezplot` nacrtajte dva perioda oba signala.

c) (PRIPREMA) Izračunajte analitički energiju i snagu signala.

4. Domaće zadaće



		Točno	(0.00)	9/24	(38%)
(7286)	Snaga kontinuiranog signala - računski (C5, AI, 20070204-1311) : Snaga signala $y(t)=\cos(2t)$ iznosi:	0	(-0.25)	1/19	(5%)
		$\frac{1}{2\pi}$	(-0.25)	3/19	(16%)
		$\frac{1}{2}$	**(1.00)**	14/19	(74%)
		$\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2}$	(-0.25)	0/19	(0%)
		$\frac{1}{8\pi}+\frac{1}{2}$	(-0.25)	0/19	(0%)

3. zadatak: ENERGIJA SIGNALA

3. Zadan je signal $x(n) = n\big(\mu(n) - \mu(n-4)\big)$. Energija tog signala je:

a) 5   b) 14   c) 30   d) 55   e) 91   f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: 14

Zadani signal je …,0,0,0,<u>0</u>,1,2,3,0,0,0,0,0,… Energija je zbroj kvadrata uzoraka, dakle 1*1+2*2+3*3=14.

Statistika 1. međuispita:

19,5% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

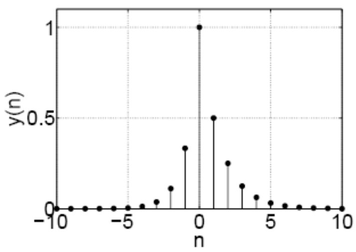
1. Predavanja: 3. predavanje: prikaznice 17.

Primjer izračuna energije vremenski diskretnog signala

- razmotrimo vremenski diskretan signal

$$u : \mathit{Cjelobrojni} \rightarrow \mathit{Realni}$$

$$y(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases}$$



- energija signala je

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{35}{24}$$

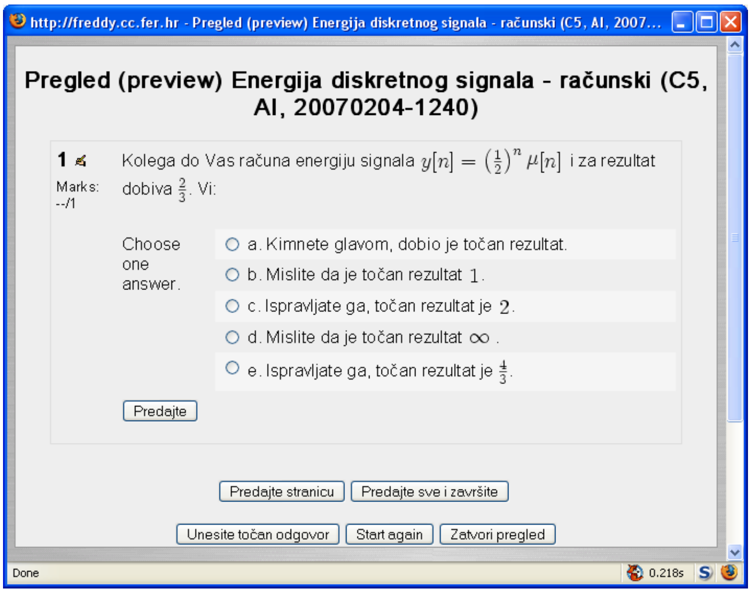
2. Zadaci za aktivnost, 2. tjedan: zadatak 6.

6. Izračunajte energiju sljedećih signala
   a. $x(t)=e^{-at}\mu(t),\ a>0,$
   b. $x(t)=t\mu(t),$

3. Zadaci za vježbu, 5. tjedan: zadatak 4.

Pronađite energiju diskretnog signala $x(n)=(-0.5)^n\mu(n)$

4. Domaće zadaće



http://freddy.cc.fer.hr - Pregled (preview) Energija diskretnog signala - računski (C5, AI, 2007...

Pregled (preview) Energija diskretnog signala - računski (C5, AI, 20070204-1240)

1 Marks: --/1

Kolega do Vas računa energiju signala $y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\mu[n]$ i za rezultat dobiva $\frac{2}{3}$. Vi:

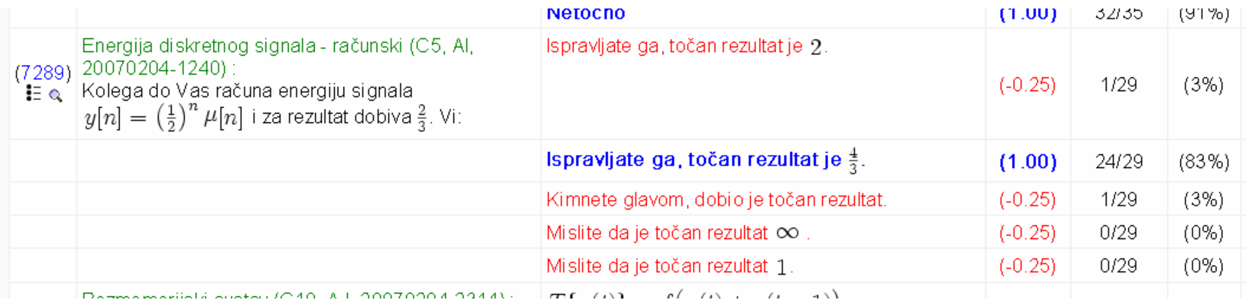
Choose one answer.
- a. Kimnete glavom, dobio je točan rezultat.
- b. Mislite da je točan rezultat 1.
- c. Ispravljate ga, točan rezultat je 2.
- d. Mislite da je točan rezultat ∞.
- e. Ispravljate ga, točan rezultat je $\frac{4}{3}$.

Predajte

Predajte stranicu | Predajte sve i završite

Unesite točan odgovor | Start again | Zatvori pregled

Done 0.218s



		Netočno	(1.00)	32/35	(91%)
(7289)	Energija diskretnog signala - računski (C5, AI, 20070204-1240) : Kolega do Vas računa energiju signala $y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\mu[n]$ i za rezultat dobiva $\frac{2}{3}$. Vi:	Ispravljate ga, točan rezultat je 2.	(-0.25)	1/29	(3%)
		Ispravljate ga, točan rezultat je $\frac{4}{3}$.	**(1.00)**	24/29	(83%)
		Kimnete glavom, dobio je točan rezultat.	(-0.25)	1/29	(3%)
		Mislite da je točan rezultat ∞.	(-0.25)	0/29	(0%)
		Mislite da je točan rezultat 1.	(-0.25)	0/29	(0%)

4. zadatak: PERIODIČNOST SIGNALA

4. Zadan je diskretan signal $x(n) = \cos(n/3 + 1)$. Je li signal periodičan i koliki mu je temeljni period?

a) Signal nije periodičan! b) Periodičan je, 6. c) Periodičan je, $2\pi/3$. d) Periodičan je, 6π.
e) Periodičan je, period je bilo koji cijeli broj. f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: A

4. $x(n) = \cos(\frac{n}{3} + 1)$

$x(n+N) = \cos(\frac{n+N}{3} + 1) = \cos(\frac{n}{3} + 1 + \frac{N}{3})$ A

$\frac{N}{3} = 2k\pi$

$N = 6k\pi \notin \mathbb{N}$ nije period

Statistika 1. međuispita:

19,5% studenata je točno riješilo zadatak.

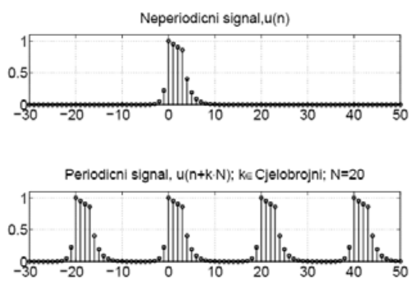
Obrazloženje:

1. Predavanja: 3. predavanje: prikaznice 56.

Periodični i neperiodični vremenski diskretni signali

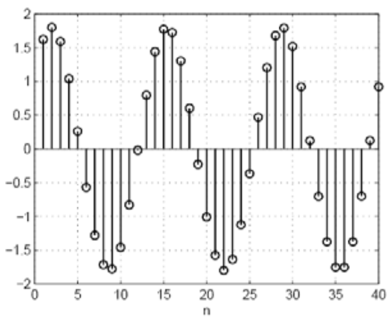
- periodičan vremenski diskretan signal, periode N, definiran je kao

u : Cjelobrojni $\to$ Realni,
$\forall n \in$ Cjelobrojni, $u(n) = u(n + kN)$
gdje su $N \in$ Cjelobrojni, $k \in$ Cjelobrojni



- za niz $1.8\cos(\frac{\sqrt{5}\pi}{15}n - \frac{\pi}{7})$ vrijedi

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{5}\pi}{15} \text{ pa je } N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{\sqrt{5}}{15}\pi} = \frac{30}{\sqrt{5}}k$$



Slika 8: Neperiodičan sinusoidni niz

2. Zadaci za aktivnost, 2. tjedan: zadatak 3.

3. Dokažite da je kompleksni eksponencijalni signal $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$ periodičan samo ako je $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ racionalan broj.

3. Zadaci za vježbu, 5. tjedan: zadatak 4.

Neka je $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal. Neka je $x(n)$ diskretni eksponencijalni signal dobiven iz kontinuiranog signala $x(t)$ uniformnim otipkavanjem s periodom T_S. Je li dobiveni diskretni signal uvijek periodičan? Ako nije, pod kojim uvjetima je?

4. Laboratorijska vježba

a) (PRIPREMA) Ispitajte koji od zadanih signala su periodični te koji im je temeljni period:

1. $f_1(n) = \cos^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)$
2. $f_2(n) = n\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$
3. $f_3(n) = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$

5. zadatak: PERIODIČNOST SIGNALA

5. Zadan je diskretan signal $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Definiramo novi signal $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n-kp)$, pri čemu je $p \in \mathbb{Z}$. Kada je signal $f(n)$ periodičan? Izaberite najopćenitiji uvjet od ponuđenih uz pretpostavku da suma uvijek konvergira:

a) Za svaki diskretni signal g. b) Za svaki diskretni periodički signal g. c) Za svaki diskretni harmonijski signal g.
d) Za konstantne diskretne signale g. e) Ne postoji takav g da bi f bio periodičan. f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: A

Uvjet za periodičnost jest da jednadžba f(n)=f(n+N) ima rješenje po N u skupu cijelih brojeva što očito vrijedi za svaki zadani signal f(n) i može se provjeriti uvrštavanjem u sumu.

Statistika 1. međuispita:

7,25% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

1. Predavanja: 3. predavanje: prikaznica 3.

Periodični i neperiodični vremenski diskretni signali

- periodičan vremenski diskretan signal, periode N, definiran je kao

$$u : Cjelobrojni \to Realni,$$
$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad u(n) = u(n + kN)$$
gdje su $N \in Cjelobrojni, k \in Cjelobrojni$

6. zadatak: SVOJSTVA SUSTAVA

6. Zadan je kontinuiran sustav $S : [\mathbb{R} \to \mathbb{R}] \to [\mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}]$. Veza između ulaza i izlaza sustava dana je izrazom

$$y(t) = \begin{cases} -1, & u(t) < 0 \\ 0, & u(t) = 0 \\ 1, & u(t) > 0 \end{cases}.$$

koji vrijedi $\forall t \in \mathbb{R}$. Izaberi točnu izjavu:

a) Sustav je linearan i vremenski nepromjenjiv! **b)** Sustav je linearan i bezmemorijski!
c) Sustav je nelinearan i vremenski promjenjiv! **d)** Sustav je nelinearan i memorijski!
e) Sustav je vremenski nepromjenjiv i bezmemorijski! **f)** Ništa od navedenoga.

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: E

Sustav je očito nelinearan jer nije ni homogen (npr. odziv na 1 je 1, a odziv na 2 je opet 1). Sustav je vremenski nepromjenjiv. Sustav nema memoriju jer je y(t+T)=f(u(t+T)).

Statistika 1. međuispita:

37,5% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

1. Predavanja: 3. predavanje: prikaznice 56.

Vremenski stalni sustavi – primjer

- pokazuje se kako sustav za ekspanziju vremenski diskretnog signala nije vremenski stalan

$$y(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- odziv ovog sustava $y_1(n)$ za ulaz $u_1(n) = u(n - M)$ je

$$y_1(n) = \begin{cases} u_1(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

$$y_1(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L} - M) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- s druge strane je

$$y(n - M) = \begin{cases} u(\frac{n-M}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- sustav nije vremenski stalan jer je $y_1(n) \neq y(n - M)$

Linearni sustavi – primjer 2

- pokazuje se kako je sustav opisan jednadžbom diferencija

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b(m)u(n - m)$$

linearan sustav

$$\begin{aligned} y(n) &= \textstyle\sum_{m=0}^{M} b(m)u(n - m) \\ &= \textstyle\sum_{m=0}^{M} b(m)[\alpha u_1(n - m) + \beta u_2(n - m)] \\ &= \alpha \textstyle\sum_{m=0}^{M} b(m)u_1(n - m) + \beta \textstyle\sum_{m=0}^{M} b(m)u_2(n - m) \\ &= \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) \end{aligned}$$

2. Zadaci za aktivnost, 1. tjedan: zadatak 5.

5. Odredi je li zadani diskretan sustav vremenski promjenjiv, linearan i memorijski.

$$y(n) = 2^{u(n)}.$$

3. Zadaci za vježbu, 3. tjedan: dodatni zadaci.

Provjerite jesu li zadani sustavi linearni i vremenski nepromjenjivi.

1. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$
2. $y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau)d\tau$
3. $y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(3n+2)$
4. $y(t) = \frac{u(t)}{1+u(t-1)}$

4. Laboratorijska vježba

a) (PRIPREMA) Navedite definicije:

1. linearnog sustava,
2. vremenski nepromjenjivog sustava, i
3. memorijskog sustava.

b) (PRIPREMA) Za svaki od navedenih sustava odredite je li sustav linearan, vremenski nepromjenjiv ili memorijski? $y(t)$ je izlaz, a $u(t)$ je ulaz sustava.

1. $y(t) = u^2(t)$
2. $y(t) = tu(t) + 2$
3. $y(t) = u(t-2)$

7. zadatak: ODZIV SUSTAVA NA STEP POBUDU

7. Zadan je sustav $y(n) = (1-\alpha)\sum_{m=0}^{n} \alpha^m u(n-m)$, pri čemu dani izraz vrijedi samo za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\alpha \in (0,1)$. Koliko iznosi izlaz sustava u beskonačnosti ako na ulaz sustava dovedemo diskretnu jediničnu stepenicu?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: A

Potrebno je bilo znati sumu geometrijskog reda. Uvrštavanjem jedinične stepenice dobivamo sumu konvergentnog geometrijskog reda koja daje $\frac{1}{1-\alpha}$. Množenjem s (1-α) dobivamo 1.

Statistika 1. međuispita:

19,75% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

1. Suma geometrijskog reda se radila na matematikama koje su preduvjet za upis predmeta Signali i sustavi.

2. Zadaci za aktivnost, 3. tjedan: zadatak 8.

8. Odziv na jedinični skok, $u(t) = \mu(t)$, linearnog vremenski nepromjenjivog sustava glasi $y(t) = \left(1-e^{-2t}\right)\mu(t)$. Nađite odziv ovog sustava na ulaz $u(t) = 4\mu(t) - 4\mu(t-1)$.

8. zadatak: ISPITIVANJE SVOJSTAVA SUSTAVA

8. Zadan je diskretan sustav $y(n) = e^{j2\pi n}u(n)$. Koja je od ponuđenih tvrdnji točna:

a) Sustav je linearan i vremenski nepromjenjiv. **b)** Sustav je nelinearan i vremenski nepromjenjiv.
c) Sustav je linearan i vremenski promjenjiv. **d)** Sustav je nelinearan i vremenski promjenjiv.
e) Sustav je linearan i memorijski. **f)** Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: A
POTREBNA ZNANJA: Definicija linearnosti, definicija vremenske promjenjivosti, definicija memorijskih sustava.

Trebalo je ispitati linearnost, vremensku promjenjivost i memoriju. Sustav je linearan jer je homogen i aditivan (što je jasno jer množimo ulaz s eksponencijalnom funkcijom koja ne ovisi o ulazu). Sustav nema memorije jer izlaz ovisi y(n) samo o trenutnoj vrijednosti ulaza u(n). Sustav nije vremenski promjenjiv jer je zadana eksponencijala s kojom množimo signal uvijek 1 zato što je n iz skupa cijelih brojeva. Drugim riječima zadan je sustav y(n)=u(n)!!!!!!

Statistika 1. međuispita:

14,25% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

Linearnost sustava, vremenska nepromjenjivost sustava, kauzalnost i posjedovanje memorije su **osnovna** svojstva sustava te bi zadaci o tome trebali biti eliminacijski, odnosno student ne bi smio dobiti prolaznu ocjenu ako ne zna ispitati ta svojstva.

1. Predavanja:

5. predavanje (linearnost)

- uz oznake na slici sustav će biti linearan ako vrijedi

$$y_1 = S(u_1), \qquad y_2 = S(u_2)$$
$$S(\alpha u_1) = \alpha S(u_1) = \alpha y_1, \qquad S(\beta u_2) = \beta S(u_2) = \beta y_2$$
$$S(\alpha u_1) + S(\beta u_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$$

i finalno

$$S(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha S(u_1) + \beta S(u_2)$$

principip superpozicije

5. predavanje (vremenska nepromjenjivost)

Vremenski stalni sustavi 2

- diskretni sustav S vremenski je stalan (vremenski invarijantan) ako vrijedi

$$\forall u, n, M \qquad S(D_M(u))(n) = D_M(S(u))(n)$$

5. predavanje (memorija)

- bezmemorijski sustav ima svojstvo da odziv sustava ovisi samo o trenutnoj vrijednosti ulaznog signala, a ne o njihovim prethodnim vrijednostima i možemo pisati:

$$\forall t \in Realni \qquad y(t) = f(u(t))$$

ili

$$\forall n \in Cjelobrojni \qquad y(n) = f(u(n))$$

2. Zadaci za aktivnost, 3. tjedan:

Zadaci 5. i 6. (rješenja su na WWW stranicama predmeta)

5. Odredi je li zadani diskretan sustav vremenski promjenjiv, linearan i memorijski.
$$y(n) = 2^{u(n)}.$$

6. Odredi je li zadani kontinuirani sustav vremenski promjenjiv, linearan i memorijski.
$$y(t) = u(t^2).$$

3. Zadaci za vježbu, 3. tjedan:

Zadatak 2. i dodatni zadaci (rješenja su na WWW stranicama predmeta)

2. Odredite je li zadani diskretan sustav vremenski nepromjenjiv, linearan:
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k)}{n-k}.$$

DODATNI ZADACI

Provjerite jesu li zadani sustavi linearni i vremenski nepromjenjivi.

1. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$
2. $y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau) d\tau$
3. $y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(3n+2)$
4. $y(t) = \frac{u(t)}{1+u(t-1)}$

4. Laboratorijske vježbe – Svaki student je na laboratorijskim vježbama dobio tri sustava za koja je trebao za pripremu ispitati linearnost, vremensku promjenjivost i je li sustav memorijski ili ne. Zatim se na vježbama simulacijom potvrđivalo ili opovrgavalo pojedino svojstvo. Prilikom ispitivanja na vježbama smo također studentima s krivim pripremama objašnjavali kako se ispituje pojedino svojstvo.

a) (PRIPREMA) Navedite definicije:
1. linearnog sustava,
2. vremenski nepromjenjivog sustava, i
3. memorijskog sustava.

b) (PRIPREMA) Za svaki od navedenih sustava odredite je li sustav linearan, vremenski nepromjenjiv ili memorijski? $y(t)$ je izlaz, a $u(t)$ je ulaz sustava.
1. $y(t) = u^2(t)$
2. $y(t) = tu(t) + 2$
3. $y(t) = u(t-2)$

5. Tomislav Petković, Branko Jeren i ostali: Zbirka riješenih zadataka iz signala i sustava: Primjer 3.1, 3.2, 3.3.

6. Linearnost kao svojstvo se radila i na Matematikama koje su preduvjet za upis predmeta Signali i sustavi.

9. zadatak: ODZIVI LTI SUSTAVA

9. Odziv diskretnog LTI sustava na jediničnu stepenicu $\mu(n)$ je $y(n) = (n+1)\mu(n)$. Ukoliko s $h(n)$ označimo odziv sustava na Kroneckerov δ-impuls izračunajte koliko iznosi $\sum_{m=-\infty}^{n} h(m)$.

a) $(n-2)\mu(n)$ **b)** $(n-1)\mu(n)$ **c)** $n\mu(n)$ **d)** $(n+1)\mu(n)$ **e)** $(n+2)\mu(n)$ **f)** Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: d)
POTREBNA ZNANJA: Osnovni signali, linearnost i vremenska nepromjenjivost sustava.

OČEKIVANO RJEŠENJE:
Zadan je odziv sustava na jediničnu stepenicu, a traži se suma h(n) gdje je h(n) odziv na Kroneckerov delta impuls. Primijetimo prvo da se Kroneckerov delta impuls može prikazati kao razlika dvije jedinične stepenice, δ(n)=μ(n)-μ(n-1). Prema tome je i h(n)=y(n)-y(n-1) zbog linearnosti. Uvrštavanjem slijedi h(n)= μ(n)+ nδ(n). Suma do m od h(m) je sumi jedinične stepenice koja je jednaka jediničnoj rampi, dakle (n+1)μ(n). Ovo je duži način rješavanja.

ELEGANTNIJE RJEŠENE:
Zadatak se može riješiti i jednostavnije – kako se radi o LTI sustavu možemo jediničnu stepenicu napisati kao linearnu kombinaciju pomaknutih delta impulsa. Primjenom linearnosti se vidi da je tražena suma h(m) po m upravo zadani odziv na jediničnu stepenicu!

Statistika 1. međuispita:

20,0% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

Zadatak ispituje znaju li studenti primijeniti svojstva linearnosti i vremenske nepromjenjivosti tako da iz poznavanja odziva na neki signal odrede odziv na drugi signal uz uočavanje da se prvi signal može predstaviti kao linearna kombinacija vremenski pomaknutog drugog signala.

1. Predavanja:
Predavanje 4. – jedinična stepenica, rampa i impuls

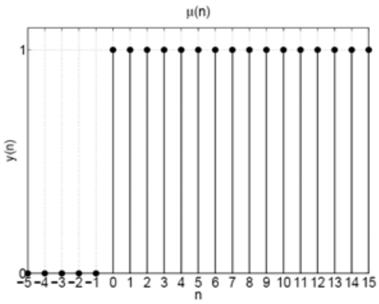
Vremenski diskretan jedinični impuls – Kroneckerova delta funkcija

- vremenski diskretan jedinični impuls je vremenski diskretan signal definiran kao:

$$\delta : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

- vremenski diskretan jedinični skok definiran je kao:

$$\mu : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Jedinična kosina

- vremenski diskretna

$$kosina : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$
$$kosina(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$kosina : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$
$$kosina(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \mu(m-1) = \sum_{m=-\infty}^{n-1} \mu(m)$$

2. Zadaci za aktivnost i vježbu

Zadatak 8 iz zadataka za aktivnost u 3. tjednu:

8. Odziv na jedinični skok, $u(t) = \mu(t)$, linearnog vremenski nepromjenjivog sustava glasi $y(t) = \left(1 - e^{-2t}\right)\mu(t)$. Nađite odziv ovog sustava na ulaz $u(t) = 4\mu(t) - 4\mu(t-1)$.

3. Laboratorijske vježbe

Zadatak 3.2-4 objašnjava svojstva linearnih vremenski nepromjenjivih sustava.

10. zadatak: LINEARNOST, ODZIV SUSTAVA I LINEARNA KOMBINACIJA

10. Zadan je diskretan linearan sustav S. Ako su poznati odzivi sustava $y_k(n)$ na pobudu $u_k(n) = \delta(n-k)$ za sve $k \in \mathbb{Z}$ na koje sve ulazne signale možemo odrediti odziv sustava? Izaberite najopćenitiji uvjet od ponuđenih!

a) Na proizvoljne diskretne signale. b) Na proizvoljne periodične diskretne signale.
c) Na proizvoljne harmonijske diskretne signale. d) Na proizvoljne konstantne diskretne signale.
e) Na nikakve. f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: A
POTREBNA ZNANJA: Što je linearan sustav i što je linearna kombinacija signala.

Uočimo da se svaki diskretni signal može prikazati kao linearna kombinacija pomaknutih Kroneckerovih delta impulsa. Kako je pitanje možemo li odrediti odziv linearnog sustava na svaki diskretni signal ako znamo odzive na pomaknute Kroneckerove impulse odgovor je da možemo, i to za svaki proizvoljni diskretni signal.

Statistika 1. međuispita:

41,0% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

Studenti su morali povezati stečena znanja i uočiti da su i na predavanjima i u zadacima za aktivnost i na laboratorijskim vježbama prikazivali signale kao linearnu kombinaciju nekih osnovnih signala.

1. predavanja:
Predavanje 4. – prikaz signala

Vremenski diskretan jedinični impuls – primjena2

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć niza vremenski diskretnih jediničnih impulsa što proizlazi iz:

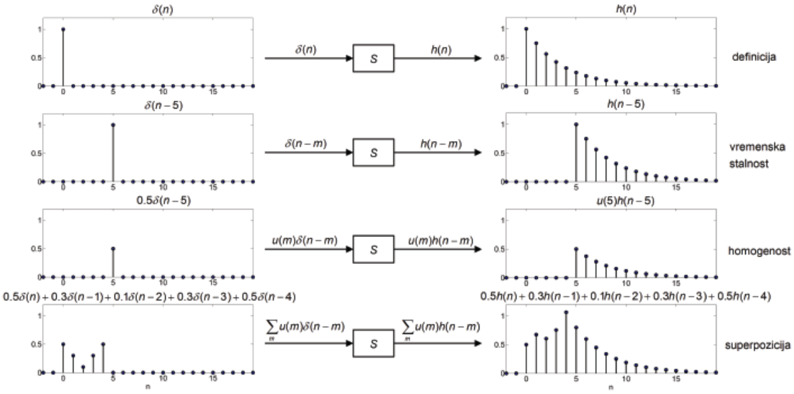
$$u(n) = u(n) \cdot comb(n) = u(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$$

$$\begin{aligned} u(n) = {} & .7\delta(n+3) + .2\delta(n+1) + \\ & + .5\delta(n-1) - .2\delta(n-2) + \\ & + .7\delta(n-4) + .3\delta(n-5) - \\ & - .3\delta(n-7) \end{aligned}$$

Predavanje 8. prikaznica 50.

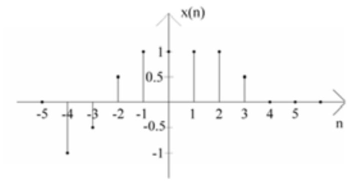
Odziv sustava na niz impulsa



Slika 8: Konvolucijska sumacija *SISO* sustava

2. Zadaci za aktivnost – prikaz signala, tjedan 3.

2. Zadan je diskretni signal *x(n)* prikazan slikom 1.



Slika 1. Diskretan signal

a. Zapišite ovaj signal pomoću vremenski diskretnih jediničnih impulsa.
b. Odredite *x(6-2n)* grafički i dobiveno rješenje prikažite pomoću sume vremenski pomaknutih diskretnih jediničnih skokova.

11. zadatak: LINEARNOST, ODZIV SUSTAVA I LINEARNA KOMBINACIJA

11. Odaberite linearan vremenski nepromjenjiv sustav:

a) $y(t) = u^2(t)$ b) $y(t) = tu(t) + 2$ c) $y(t) = u(t-2)$ d) $y(t) = \sin(\frac{\pi}{2}u(t))$ e) $y(t) = 2$
f) Takav nije ponuđen!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: C
POTREBNA ZNANJA: Vidi zadatak 8.

Sustavi pod a), b), d) i e) su očito nelinearni (prvi zbog kvadrata, a ostali zato jer nulu ne preslikavaju u nulu). Preostaje sustav c). Vremensku nepromjenjivost nije bilo ni potrebno ispitivati jer smo već na osnovi linearnosti eliminirali 5 odgovora.

Statistika 1. međuispita:

69,75% studenata je točno riješilo zadatak.

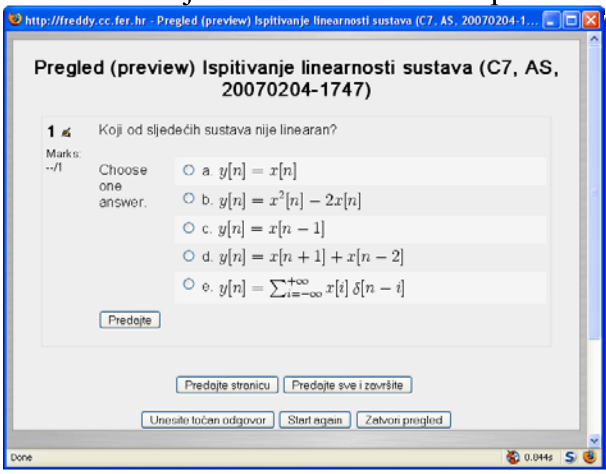
Obrazloženje:

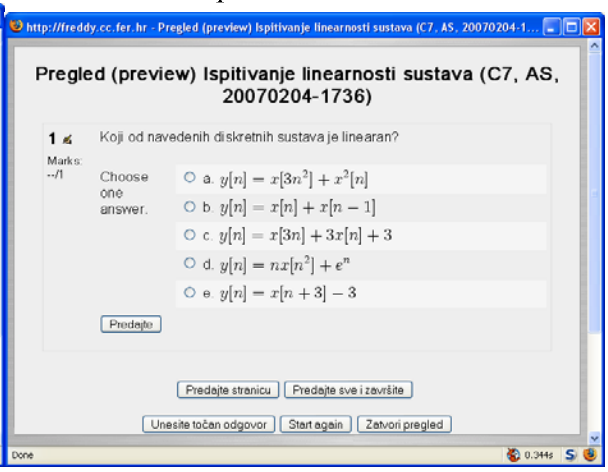
Ovaj zadatak je skoro pa ponovljena priprema za laboratorijske vježbe koju je **SVAKI STUDENT TREBAO SAMOSTALNO IZRADITI**. Svaki student je trebao za prva tri sustava ispitati linearnost, memorijsku promjenjivost i memoriju. Četvrti sustav se također nalazi u uputama za laboratorijske vježbe, dok peti sustav svaki signal preslikava u konstantu te se za njega lagano ispitaju svi uvjeti.

Za potrebna znanja iz predavanja te za zadane zadatke za vježbu i domaće zadaće vidi zadatak 8.

Dodatno: Domaće zadaće

Zadataka u kojima se odabire između ponuđenih 5 sustava ima preko 20. Odabrana su samo dva.

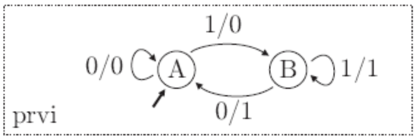


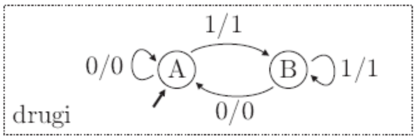


12. zadatak: KONAČNI AUTOMATI

12. Dva automata su zadana slikom. Koja je izjava točna?

a) Prvi je memorijski sustav, a drugi nije. **b)** Prvi nije memorijski sustav, a drugi je.
c) Oba su memorijski sustavi. **d)** Oba nisu memorijski sustavi.
e) Na osnovi danih informacija ne možemo zaključiti jesu li memorijski.
f) Ništa od navedenoga!





Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: A
POTREBNA ZNANJA: Vidi zadatak 8.

Drugi automat prema slici kao odziv na 0 uvijek daje 0, a kao odziv na jedinicu uvijek daje jedinicu. Prema tome radi se običnom funkcijskom preslikavanju ulaza na izlaz te drugi automat nije memorijski sustav.
Prvi automat pak može na pobudu 0 dati bilo 0 bilo 1 što ovisi o prethodnom stanju. Moguće je dakle konstruirati dva signala za koja automat u nekom budućem koraku n za isti ulazni simbol daje različite izlazne simbole. Prema tome prvi automat je memorijski.

Statistika 1. međuispita:

42,25% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

Na laboratorijskim vježbama su studenti morali dokazati ili opovrgnuti posjedovanje memorije za neki sustav. U ovom zadatku su zadana dva jednostavna automata na koja je trebalo primijeniti dana znanja.

1. Predavanja:

Peto predavanje (memorija sustava):

- bezmemorijski sustav ima svojstvo da odziv sustava ovisi samo o trenutnoj vrijednosti ulaznog signala, a ne o njihovim prethodnim vrijednostima i možemo pisati:

$$\forall t \in Realni \qquad y(t) = f(u(t))$$

ili

$$\forall n \in Cjelobrojni \qquad y(n) = f(u(n))$$

Šesto predavanje opisuje rad automata. Opis dijagrama je dan u predavanju šest:

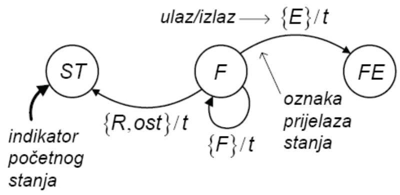
1.2. Dijagram prijelaza stanja

Dijagram prijelaza stanja 1

- kako bi se kreirao dijagram prijelaza stanja automata, kraće, dijagram stanja, prvo se ucrtaju krugovi koji predstavljaju moguća stanja

Dijagram prijelaza stanja 2

- za svaku kombinaciju ulaza i stanja ucrtava se strelica (lûk) od trenutnog stanja u naredno stanje



Slika 3: Dijagram stanja–prijelaz stanja

	F	E	R	ost
F	(F,t)	(FE,t)	(ST,t)	(ST,t)

2. Zadaci za vježbu i aktivnost

Zadaci za aktivnost i vježbu u 4. tjednu nastave sadrže dovoljnu količinu zadataka u većem dijelu kojih se traži sinteza automata. Kako je analiza koja se traži u ovom zadatku značajno lakši problem studenti ne bi smjeli imati veći problema sa zadatkom.

3. Laboratorijske vježbe

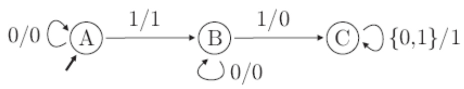
e) Za treći sustav iz b) dijela zadatka konstruirajte model sustava u MATLAB-u ili Simulinku i provjerite (dokažite ili opovrgnite) vašu tvrdnju o tome ima li sustav memoriju.

Slično kao i u prethodnim zadacima možete promatrati odziv na dva signala. U ovom slučaju dva odabrana signala moraju biti različita osim u jednom trenutku t. Promatranjem odziva sustava možete zaključiti je li sustav memorijski ili ne.

13. zadatak: KONAČNI AUTOMAT

13. Konačni automat zadan je slikom. Na ulaz automata doveden je signal $u(n) = 0^k 1^m q^n$, gdje q može biti bilo 0 bilo 1. Oznaka 0^k znači da se znamenka 0 ponavlja k puta, dakle na ulaz automata dovodimo redom k nula, m jedinica te n nula ili jedinica. Kojeg je oblika izlaz iz sustava?

a) $0^k 10^{m+n-1}$ b) $0^k 10^{m+n}$ c) $0^k 10^{m+n+1}$ d) $0^k 10^{m+n+2}$ e) $0^k 10^{m+n-2}$ f) Ništa od navedenoga!



Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: F
POTREBNA ZNANJA: Konačni automati.

Da bi izbjegli zamaranje studenata s graničnim slučajevima (m, n, k $\in \{0,1\}$), svim grupama je na samom ispitu rečeno da analiziraju slučaj za m, n, k>1. U tom slučaju evidentno automat dođe u stanje C te na svom izlazu (kao zadnju znamenku) sigurno daje 1. Broj jedinica koje automat daje na izlazu ovisi o n i m. No, to nas niti ne interesira, pošto svi ponuđeni odgovori (a, b, c, d, e) na posljednjem mjestu imaju nule. Dakle, točan odgovor je f.

Statistika 1. međuispita:

63,25% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

Možda nešto neuobičajeniji zapis čini zadatak težim nego što je, no zapis je objašnjen u tekstu zadatka, a i studenti su mogli pitati (a i pitali su) kako se tumači notacija.

1. Predavanja:
Šesto predavanje daje opis kako se automat zadaje dijagramom:

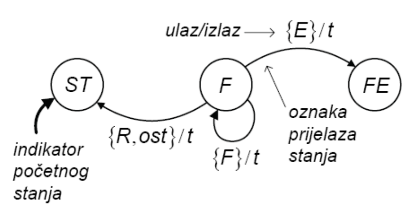
1.2. Dijagram prijelaza stanja

Dijagram prijelaza stanja 1

- kako bi se kreirao dijagram prijelaza stanja automata, kraće, dijagram stanja, prvo se ucrtaju krugovi koji predstavljaju moguća stanja

Dijagram prijelaza stanja 2

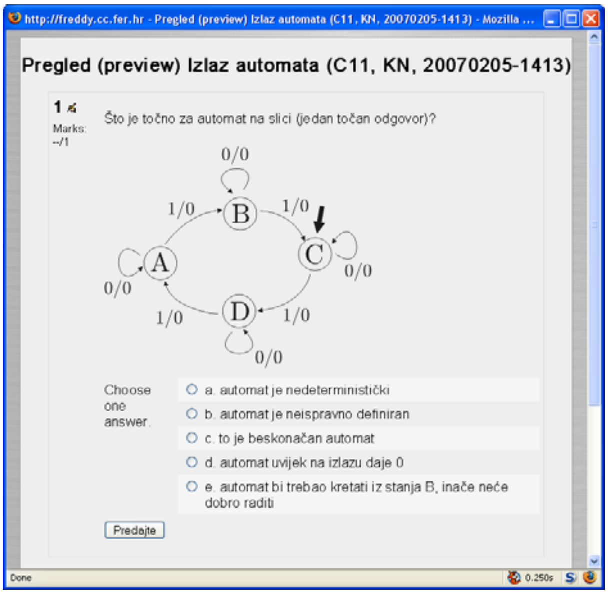
- za svaku kombinaciju ulaza i stanja ucrtava se strelica (lûk) od trenutnog stanja u naredno stanje

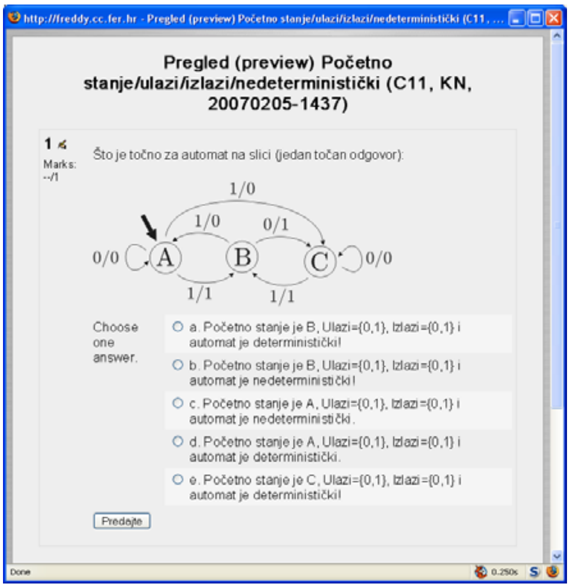


Slika 3: Dijagram stanja–prijelaz stanja

	F	E	R	ost
F	(F,t)	(FE,t)	(ST,t)	(ST,t)

2. Domaće zadaće (slični zadaci)





14. zadatak: DEFINICIJA DKA PREKO UREĐENE PETORKE

14. Uređena petorka koja u potpunosti opisuje automat sastoji se od:

a) ulaza, izlaza, funkcije prijelaza, početnog stanja, konačnog stanja b) ulaza, izlaza, stanja, početnog stanja, konačnog stanja c) ulaza i izlaza d) ulaza, izlaza, početnog stanja, funkcije prijelaza e) ulaza, izlaza, stanja, funkcije prijelaza, konačnog stanja f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

14. F

Statistika 1. međuispita:

63,25% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

1. Predavanja: 6. predavanje: prikaznice 15-18.

- pokazano je da je u opisu automata potrebno definirati skup stanja, početno stanje, skupove ulaznih i izlaznih znakova, te funkciju prijelaza između stanja
- automati se stoga definiraju uređenom petorkom
  - automat se definira uređenom petorkom

$$Automat = (Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, pocetnoStanje)$$

pri čemu su
Stanja - skup mogućih vrijednosti stanja
Ulazi - ulazni skup znakova ili ulazni alfabet
Izlazi - izlazni skup znakova ili izlazni alfabet
$pocetnoStanje \in Stanja$ - početno stanje
$FunkcijaPrijelaza : Stanja \times Ulazi \to Stanja \times Izlazi$

  - funkcija prijelaza, za aktualno stanje i ulazni znak, definira naredno stanje i izlazni znak

2. Tomislav Petković, Branko Jeren i ostali: Zbirka riješenih zadataka iz signala i sustava: Primjer 12.1

3. Domaća zadaća: 2. domaća zadaća

(7408) Uređena petorka (C11, KN, 20070205-1449) :

Uređena petorka koja u potpunosti opisuje automat sastoji se od (jedan točan odgovor):

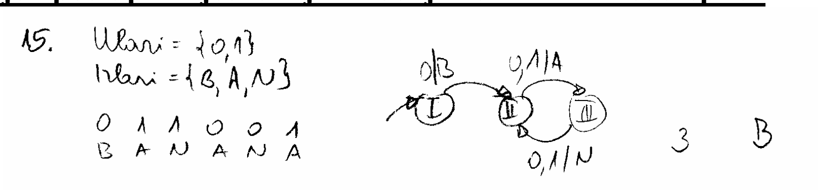
ulaza i izlaza	(-0.25)	0/89	(0%)
ulaza, izlaza, stanja, početnog stanja, konačnog stanja	(-0.25)	0/89	(0%)
ulaza, izlaza, stanja, funkcije prijelaza, konačnog stanja	(-0.25)	0/89	(0%)
ulaza, izlaza, stanja, početnog stanja, funkcije prijelaza	**(1.00)**	89/89	(100%)
ulaza, izlaza, funkcije prijelaza, početnog stanja, konačnog stanja	(-0.25)	0/89	(0%)

15. zadatak: ODZIV SUSTAVA I ODZIV STANJA SUSTAVA

15. Zadan je konačan deterministički automat za koji je *Ulazi* $= \{0, 1\}$ i *Izlazi* $= \{B, A, N\}$. Tom automatu na ulaz dovodimo niz $0, 1, 1, 0, 0, 1$. Koji je minimalan broj stanja koje taj automat mora imati da bi na izlazu mogao dati niz B, A, N, A, N, A?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:



Statistika 1. međuispita:

36,5% studenata je točno riješilo ovaj zadatak.

Obrazloženje:

1. Domaća zadaća: 2. domaća zadaća

Q#	Tekst pitanja	Tekst odgovora	partial credit	R. Counts	R.%	% Cor Facilit
(7144)	Potreban broj stanja (C12, ZB, 20070205-1538) : Zadan je konačan deterministički automat kojemu su ulazni simboli iz skupa {0, 1}, a izlazni iz skupa {A, B}. Tom automatu na ulaz dovodimo niz 0, 1, 0, 1. Koji je minimalan broj stanja koje taj automat mora imati da bi na izlazu mogao dati niz A, B, B, A?	1	(-0.25)	0/85	(0%)	84 %
		2	**(1.00)**	74/85	(87%)	
		3	(-0.25)	5/85	(6%)	
		5	(-0.25)	1/85	(1%)	
		4	(-0.25)	4/85	(5%)	
(7145)	Potreban broj stanja (C12, ZB, 20070205-1539) : Zadan je konačan deterministički automat kojemu su ulazni simboli iz skupa {0, 1}, a izlazni iz skupa {A, B}. Tom se automatu na ulaz dovodi niz 0, 0, 0, 0. Koji je minimalan broj stanja koje taj automat mora imati da bi na izlazu mogao dati niz A, A, B, B?	1	(-0.25)	0/79	(0%)	70 %
		2	(-0.25)	2/79	(3%)	
		4	(-0.25)	13/79	(16%)	
		5	(-0.25)	3/79	(4%)	
		3	**(1.00)**	60/79	(76%)	

2. Zadaci za vježbu i aktivnost

Zadaci za aktivnost i vježbu u 4. tjednu nastave sadrže dovoljnu količinu zadataka u većem dijelu kojih se traži sinteza automata. U ovom zadatku je potrebno napraviti sintezu automata te prebrojati koliko stanja imamo.

16. zadatak: IMPULSNI ODZIV SUSTAVA

16. Odziv diskretnog LTI sustava na jediničnu stepenicu je $y(n) = (n+1)\,\mu(n)$, pri čemu je $\mu(n)$ jedinična stepenica. Vrijednost impulsnog odziva u koraku 5 iznosi:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 6 e) 7 f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

TOČAN ODGOVOR: A

16. $y(n) = (n+1)\mu(n) \leftarrow \mu(n)$

$h(n) \leftarrow \delta(n) = \mu(n) - \mu(n-1)$

$h(n) = y(n) - y(n-1)$

$= (n+1)\mu(n) - n\mu(n-1)$

$h(5) = 6\cdot\mu(5) - 5\mu(4) = 1$

A

Drugi način rješavanja ovog zadatka zahtijevao je od studenata da prepoznaju u odzivu sustava konvoluciju dvije jedinične stepenice $y(n) = (n+1)\mu(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu(m)\mu(n-m)$. Ukoliko su to uvidjeli odgovor na ovo pitanje direktno slijedi.

Statistika 1. međuispita:

8,25% studenata je točno riješilo zadatak.

Obrazloženje:

Zadatak ispituje znaju li studenti primijeniti svojstva linearnosti i vremenske nepromjenjivosti tako da iz poznavanja odziva na neki signal odrede odziv na drugi signal uz uočavanje da se prvi signal može predstaviti kao linearna kombinacija vremenski pomaknutog drugog signala.

1. zadaci za aktivnost i vježbu

Zadatak 8 iz zadataka za aktivnost u 3. tjednu:

8. Odziv na jedinični skok, $u(t) = \mu(t)$, linearnog vremenski nepromjenjivog sustava glasi $y(t) = \left(1 - e^{-2t}\right)\mu(t)$. Nađite odziv ovog sustava na ulaz $u(t) = 4\mu(t) - 4\mu(t-1)$.

2. Laboratorijske vježbe

Zadatak 3.2-4 objašnjava svojstva linearnih vremenski nepromjenjivih sustava.

17. zadatak: KONVOLUCIJA DISKRETNIH SIGNALA

17. Zadan je diskretni signal $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ kao $f(n)=\begin{cases}1, & \text{za } n=0,1,2\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$. Promatramo signal $q(n)$ koji je definiran kao konvolucija $q(n)=f(n)*f(n)$. Koliko iznosi $q(3)$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

17. $f(n)=\begin{cases}1, & n=0,1,2\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$

C

$q(n)=f(n)*f(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)f(n-k)$

$q(3)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)f(3-k)=f(0)f(3)+f(1)f(2)+f(2)f(1)+f(3)f(0)+f(4)f(-1)+\dots$

$=1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 0=2$

Statistika 1. međuispita:

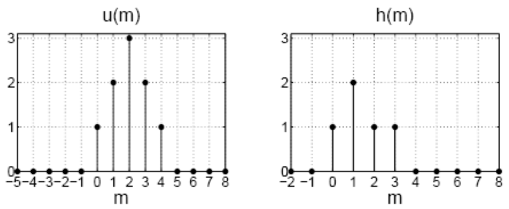
33,75% studenata je točno riješilo ovaj zadatak.

Obrazloženje:

1. Predavanja: 9. predavanje: prikaznice 3-6.

Primjer konvolucijske sumacije

$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m)$,
za $n=2 \Rightarrow y(2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(2-m)$

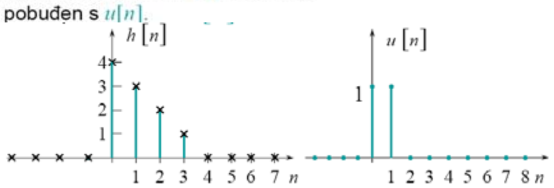


2. Zadaci za aktivnost, 5. tjedan: zadaci 5. i 6.

6. Nađite odziv diskretnog sustava na pobudu $u(n)=\alpha^n\mu(n)$, ako je poznat impulsni odziv sustava $h(n)=\beta^n\mu(n)$.

3. Zadaci za vježbu, 5. tjedan: zadatak 4.

Korištenjem konvolucijske sumacije odrediti odziv diskretnog sustava zadanog impulsnim odzivom $h[n]$. Sustav je pobuđen s $u[n]$.



impulsni odziv pobuda

4. Tomislav Petković, Branko Jeren i ostali: Zbirka riješenih zadataka iz signala i sustava: Primjer 13.10, polovica primjera 13.13.

18. zadatak: ODZIV SUSTAVA

18. Zadan je LTI sustav opisan matricama $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$. Koliko iznosi odziv nepobuđenog sustava za $n \geq 0$ uz početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$? Uputa: raspišite $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$ i računajte $A \cdot A$, $A \cdot A \cdot A$ itd.

a) $1+n$ b) $2+n$ c) 0 d) 1 e) n f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

18.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0) & n = 0 \\ CA^n x(0) & n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1+n$$

D

Statistika 1. međuispita:

44,0% studenata je točno riješilo ovaj zadatak.

Obrazloženje:

1. Predavanja: 8. predavanje: prikaznice 22-30.

nepobuđenog sustava, $u(n) = 0$

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0), & n = 0 \\ CA^n x(0), & n > 0 \end{cases}$$

2. Zadaci za aktivnost, 5. tjedan: zadatak 3.

3. Audio oscilator je sustav koji proizvodi sinusoidalni signal dane frekvencije ω. Ovaj sustav je moguće prikazati pomoću modela s varijablama stanja:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D=0.$$

a. Matematičkom indukcijom dokažite: $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\omega & -\sin n\omega \\ \sin n\omega & \cos n\omega \end{bmatrix}$.

b. Nađite odziv stanja nepobuđenog sustava, te odziv nepobuđenog sustava, ako je početno stanje $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c. Nađite impulsni odziv mirnog sustava.

3. Zadaci za vježbu, 5. tjedan: zadatak 3.

3. Dana je matrica A vremenski diskretnog SISO sustava $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nađite A^n, te odziv stanja nepobuđenog sustava, ukoliko su početna stanja:

a. $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c. $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Kako je vidljivo, zadatak je **IDENTIČAN** unaprijed riješenom primjeru!

19. zadatak: ODZIV SUSTAVA I ODZIV STANJA SUSTAVA

19. Zadan je LTI sustav opisan matricama **A**, **B**, **C** i **D**. Koliko iznosi odziv sustava?

a) $\mathbf{y}(n) = \mathbf{CA}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{Du}(n) + \sum_{m=0}^{n-1}\mathbf{CA}^{n-1-m}\mathbf{Bu}(m)$ b) $\mathbf{y}(n) = \mathbf{CA}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{m=0}^{n-1}\mathbf{CA}^{n-1-m}\mathbf{Bu}(m)$
c) $\mathbf{y}(n) = \mathbf{Du}(n) + \sum_{m=0}^{n-1}\mathbf{CA}^{n-1-m}\mathbf{Bu}(m)$ d) $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{m=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-m}\mathbf{Bu}(m)$
e) $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{Du}(n) + \sum_{m=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-m}\mathbf{Bu}(m)$ f) Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

19. ODZIV SUSTAVA A

Statistika 1. međuispita:

44,5% studenata je točno riješilo ovaj zadatak.

Obrazloženje:

1. Predavanja: 8. predavanje: prikaznice 22-30.

odziv stanja i odziv sustava su

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu(m), \qquad n > 0$$

$$y(0) = Cx(0) + Du(0)$$

$$y(n) = CA^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), \qquad n > 0$$

2. Zadaci za aktivnost, 5. tjedan: zadatak 3.

3. Audio oscilator je sustav koji proizvodi sinusoidalni signal dane frekvencije ω. Ovaj sustav je moguće prikazati pomoću modela s varijablama stanja:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D=0.$$

a. Matematičkom indukcijom dokažite: $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\omega & -\sin n\omega \\ \sin n\omega & \cos n\omega \end{bmatrix}$.

b. Nađite odziv stanja nepobuđenog sustava, te odziv nepobuđenog sustava, ako je početno stanje $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c. Nađite impulsni odziv mirnog sustava.

3. Zadaci za vježbu, 5. tjedan: zadatak 3.

3. Dana je matrica A vremenski diskretnog SISO sustava $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nađite A^n, te odziv stanja nepobuđenog sustava, ukoliko su početna stanja:

a. $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c. $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

20. zadatak: ODZIV SUSTAVA I ODZIV STANJA SUSTAVA

20. Zadan je LTI sustav opisan matricama $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$. Ukoliko su početni uvjeti $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ pronađite prve dvije vrijednosti $u(0)$ i $u(1)$ ulaznog signala tako da se sustav u koraku dva nađe u stanju $\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

a) $u(0) = -x_1 - 2x_2$, $u(1) = x_1 + x_2$ **b)** $u(0) = -2x_1 - 2x_2$, $u(1) = 0$ **c)** $u(0) = -x_1$, $u(1) = -x_2$
d) $u(0) = -2x_1$, $u(1) = -4x_2$ **e)** $u(0) = -2x_1 - x_2$, $u(1) = -x_1 - x_2$ **f)** Ništa od navedenoga!

Rješenje i postupak rješavanja za ovaj zadatak na međuispitu:

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

E

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A^2 x(0) + ABu(0) + IBu(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(1) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + u(0) \\ x_1 + x_2 + u(1) \end{bmatrix}$$

$u(0) = -2x_1 - x_2$
$u(1) = -x_1 - x_2$

Statistika 1. međuispita:

34,0% studenata je točno riješilo ovaj zadatak.

Obrazloženje:

1. Predavanja: 8. predavanje: prikaznice 22-30.

- možemo napisati odziv stanja za n-ti korak

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} B u(m), \qquad \forall n > 0$$

2. Zadaci za aktivnost, 5. tjedan: zadatak 4.

4. Dana je matrica A vremenski diskretnog SISO LTI sustava $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, te vektor $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pretpostavite da je $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Nađite ulaznu sekvencu *u(0), u(1)* takve da je stanje u drugom koraku $x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.