Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

05. ožujak 2008.

Konvolucija vremenski kontinuiranih signala

- neka su $x, y \in [Realni \rightarrow Realni]$ dva vremenski kontinuirana signala,
- konvolucija, označimo je funkcijom *Konvolucija*, pridružuje im novi vremenski kontinuirani signal z, dakle,

$$Konvolucija : [Realni \rightarrow Realni] \times [Realni \rightarrow Realni] \rightarrow \\ \rightarrow [Realni \rightarrow Realni]$$

$$z = Konvolucija(x, y) = x * y$$

- konvoluciju definiramo s konvolucijskim integralom

$$\forall t \in Realni, \quad z(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau)\, d\tau$$

Konvolucija vremenski kontinuiranih signala – komutativnost

- vrijedi svojstvo komutativnosti konvolucije

$$(x * y)(t) = (y * x)(t)$$

  što proizlazi iz konvolucijskog integrala, zamjenom varijabli $t - \vartheta = \tau$

$$\forall t \in Realni, \quad (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\vartheta) y(\vartheta)\, d\vartheta = (y * x)(t)$$

- vrijedi i svojstvo linearnosti konvolucije, dakle, uz $a_1, a_2 \in Realni$

$$x * (a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 (x * y_1) + a_2 (x * y_2)$$

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 5.

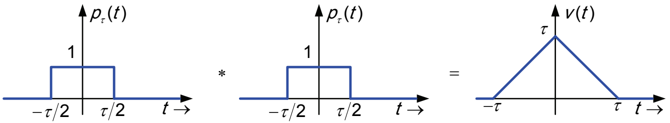
Profesor Branko Jeren

Konvolucija signala

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

Konvolucija vremenski kontinuiranih signala – primjer

- određuje se konvolucija signala p_τ i p_τ zadanih slikom
- na istoj slici dan je i rezultat konvolucije[1] $v = p_\tau * p_\tau$



[1] Studente se upućuje da samostalno pokušaju odrediti konvoluciju korištenjem konvolucijskog integrala. Detaljna diskusija biti će provedena kasnije, tijekom semestra.

Konvolucija vremenski diskretnih signala

- neka su $x, y \in [Cjelobrojni \rightarrow Realni]$ dva vremenski diskretna signala,
- konvolucija diskretnih signala x i y je diskretni signal, označen kao $x * y$, definiran konvolucijskom sumacijom

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad (x * y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$

Konvolucija vremenski diskretnih signala – komutativnost

- vrijedi svojstvo komutativnosti konvolucije

$$(x * y)(n) = (y * x)(n)$$

što proizlazi iz konvolucijske sumacije, zamjenom varijabli $n - m = j$

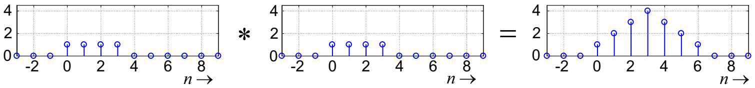
$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad (x * y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m) = $$
$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(n-j)y(j) = (y * x)(n)$$

- vrijedi i svojstvo linearnosti konvolucije, dakle, uz $a_1, a_2 \in Realni$

$$x * (a_1y_1 + a_2y_2) = a_1(x * y_1) + a_2(x * y_2)$$

Konvolucija vremenski diskretnih signala – primjer

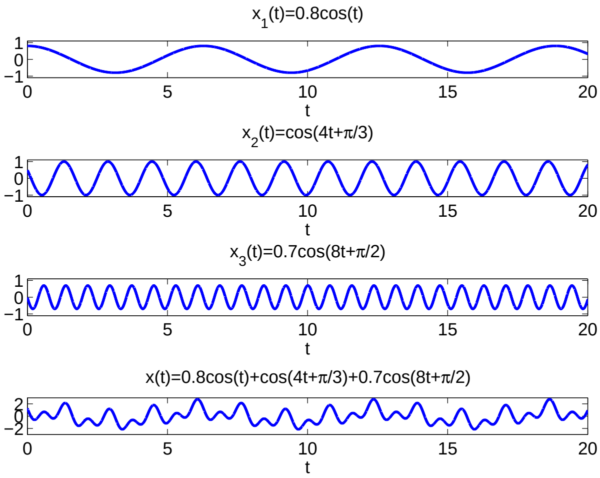
- određuje se konvolucija signala zadanih slikom
- na istoj slici dan je i rezultat konvolucije[2]



[2]Studente se upućuje da samostalno pokušaju odrediti konvoluciju korištenjem konvolucijske sumacije. Detaljna diskusija biti će provedena kasnije, tijekom semestra.

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- linearna kombinacija sinusoidnih signala, čije su frekvencije cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije $2\pi/T_0$, generira periodični signal periode T_0



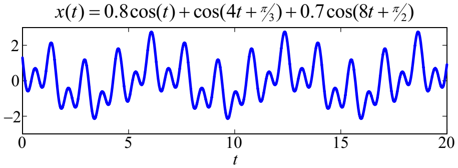
Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- na slici je prikazan zbroj sinusoida

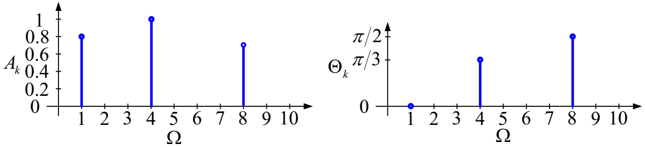
$$\forall t \in \mathit{Realni},$$
$$x(t) = 0.8\cos(t) + \cos(4t + \frac{\pi}{3}) + 0.7\cos(8t + \frac{\pi}{2})$$

- signal x je zadan u vremenskoj domeni (funkcija vremena)
- signal x je periodičan, i nastao je linearnom kombinacijom vremenski kontinuiranih sinusoida $A_k \cos(\Omega_k t + \Theta_k)$, $\forall t \in \mathit{Realni}$
- ovo sugerira kako svaki periodični signal možemo razložiti (dekomponirati) na sinusoidne komponente $A_k \cos(\Omega_k t + \Theta_k)$, $\forall t \in \mathit{Realni}$, i $A_k \in \mathit{Realni}_+$, koje ga sačinjavaju
- zaključujemo kako periodični signal može biti potpuno definiran frekvencijama Ω_k, amplitudama A_k, i fazama Θ_k sinusoidnih komponenti koje ga sačinjavaju

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala



- periodičan signal x razlažemo na sinusoide frekvencija $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = 4$, $\Omega_3 = 8$, čije su amplitude $A_1 = 0.8$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0.7$, i faze $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = \frac{\pi}{3}$, $\Theta_3 = \frac{\pi}{2}$



Slika 1: Amplitudni i fazni spektar

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- na prethodnoj slici prikazani su amplitudni i fazni spektar
- amplitudni spektar prikazuje amplitude sinusoidnih komponenti signala kao funkciju frekvencije Ω
- fazni spektar predstavlja prikaz faze Θ_k, u radijanima, kao funkciju frekvencije Ω
- spektar signala potpuno opisuje signal i govorimo o prikazu signala u frekvencijskoj domeni ili u frekvencijskom području

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- linearna kombinacija harmonijski vezanih, $\Omega_k = k\Omega_0$, vremenski kontinuiranih kompleksnih eksponencijala također generira periodičan kontinuirani signal x

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

koji je periodičan s periodom

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

pri čemu se signal $e^{jk\Omega_0 t}$ naziva k–tom harmonijskom komponentom ili k-tim harmonikom signala x

- to upućuje kako linearna kombinacija kompleksnih eksponencijala može poslužiti u prikazu realnih i kompleksnih periodičnih kontinuiranih signala i dalje razmatramo upravo taj prikaz

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

- prikaz periodičnog signala[3], $x \in KontPeriod_{T_0}$, linearnom kombinacijom harmonijski vezanih kompleksnih eksponencijala

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

naziva se Fourierov red

- $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ određuje osnovnu periodu, a koeficijenti reda, X_k, valni oblik periodičnog signala x
- dva člana reda, za $k = \pm 1$, zajednički se nazivaju osnovne komponente, ili prve harmonijske komponente
- članovi sa $k = \pm 2$ druge harmonijske komponente, itd.

[3] realnog ili kompleksnog

Koeficijenti Fourierovog reda

- da bi neki periodični vremenski kontinuirani signal prikazali uz pomoć Fourierovog reda potrebno je odrediti koeficijente reda X_k
- izračunavanje koeficijenata $\{X_k\}$ započinje množenjem, s obje strane,

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

s $e^{-jm\Omega_0 t}$, za $m \in$ Cjelobrojni

- slijedi integriranje s obje strane, preko jednog perioda, dakle, 0 do T_0, ili općenitije od t_0 do $t_0 + T_0$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j\Omega_0 m t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-jm\Omega_0 t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t} \right) dt \tag{1}$$

- desnu stranu transformiramo u

Koeficijenti Fourierovog reda

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\Omega_0 t} dt}_{Int} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \left[\frac{e^{j(k-m)\Omega_0 t}}{j(k-m)\Omega_0} \right]_{t_0}^{t_0+T_0}$$

- brojnik izraza u pravokutnim zagradama jednak je na obje granice, pa je za regularni nazivnik ($k \neq m$) integral jednak nuli
- s druge strane, za $k = m$, integral *Int* iznosi

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\Omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = t \Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = T_0$$

pa se (1) reducira u

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jm\Omega_0 t} dt = X_m T_0 \Rightarrow$$

Koeficijenti Fourierovog reda

- slijedi izraz za koeficijente Fourierovog reda

$$\forall m \in Cjelobrojni, \quad X_m = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jm\Omega_0 t} dt$$

- budući je t_0 proizvoljan, integral može biti izračunat preko bilo kojeg intervala duljine T_0 pa je konačno, uz zamjenu $k = m$, izraz za izračun koeficijenata Fourierovog reda

$$\forall k \in Cjelobrojni, \quad X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

- koeficijenti Fourierovog reda, X_k, nazivaju se i spektralni koeficijenti signala x
- koeficijenti Fourierovog reda su kompleksni[4] dakle, $X_k \in Kompleksni$

[4] Kasnije se pokazuje da su za parne, vremenski kontinuirane, periodične signale koeficijenti Fourierovog reda realni

Konvergencija Fourierovog reda

- postoje dvije klase periodičnih signala za koje postoji konvergentan Fourierov red
  1. periodični signali, $\forall x \in KontPeriod_{T_0}$, konačne energije u jednom periodu (konačne ukupne srednje snage) za koje vrijedi
  $$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$
  2. periodični signali, $\forall x \in KontPeriod_{T_0}$, koji zadovoljavaju Dirichletove uvjete
     (a) signal x je apsolutno integrabilan u bilo kojem periodu
     $$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$
     (b) signal x ima konačni broj maksimuma i minimuma u bilo kojem periodu
     (c) ima konačni broj diskontinuiteta u bilo kojem periodu
- svi periodični signali od praktičnog interesa zadovoljavaju gornje uvjete

Fourierov red

- za periodični signal $x \in KontPeriod_{T_0}$, koji zadovoljava uvjete konvergencije, vrijedi par jednadžbi

$$\forall k \in Cjelobrojni, \quad X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \qquad (2)$$

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t} \qquad (3)$$

- jednadžba (2) naziva se jednadžba Fourierove analize (često i harmonijska analiza periodičnog signala)
- jednadžba (3) naziva se jednadžba Fourierove sinteze (često i harmonijska sinteza periodičnog signala)

Fourierov red vremenski kontinuiranih signala

- niz vrijednosti X_k, $\forall k \in \mathit{Cjelobrojni}$, možemo interpretirati kao diskretni signal[5] čija je nezavisna varijabla frekvencija
- diskretni signal X_k predstavlja prikaz, u frekvencijskoj domeni, periodičnog vremenski kontinuiranog signala x
- kažemo da smo, jednadžbom Fourierove sinteze, signal iz vremenske domene transformirali u signal u frekvencijskoj domeni
- transformacije ovog tipa nazivamo Fourierovim transformacijama
- Fourierovu transformaciju vremenski periodičnog signala provodimo, kako je pokazano, pomoću Fourierovog reda vremenski kontinuiranih signala
- ovu transformaciju označujemo, prema engleskom, kao *CTFS* (Continuous–Time Fourier Series)

[5] Razmak između uzoraka $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala Fourierovim redom

- jednadžba Fourierove analize definira kako periodičnom signalu u vremenskoj domeni pridružiti signal u frekvencijskoj domeni (spektar)
- to pridruživanje možemo definirati na slijedeći način

$$CTFS : KontPeriod_{T_0} \rightarrow DisktSignali$$

$$\forall k \in Cjelobrojni, \quad X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t}\, dt$$

za $\forall x \in KontPeriod_{T_0}$ i $\forall X \in DisktSignali$

Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala Fourierovim redom

- jednadžba Fourierove sinteze definira kako diskretnom signalu u frekvencijskoj domeni (spektru) pridružiti signal u vremenskoj domeni
- to pridruživanje možemo interpretirati kao inverziju Fourierove transformacije, označimo je *ICTFS*, i definirajmo kao

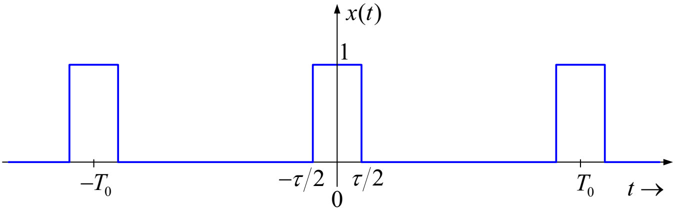
$$ICTFS : DisktSignali \to KontPeriod_{T_0}$$

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

za $\forall x \in KontPeriod_{T_0}$ i $\forall X \in DisktSignali$

Fourierov red – primjer

- određuje se Fourierova transformacija periodičnog signala danog na slici, dakle, određuju se njegovi koeficijenti Fourierovog reda



- signal je periodičan s osnovnim periodom T_0
- signal je paran i vrijedi $x(t) = x(-t)$, $\forall t \in Realni$
- signal možemo interpretirati kao periodično ponavljanje pravokutnog impulsa amplitude 1 i širine τ

Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda
  za $k = 0$, X_0 inače predstavlja srednju vrijednost (istosmjernu komponentu) signala $x(t)$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = \frac{\tau}{T_0}$$

za $k \neq 0$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jk\Omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-jk\Omega_0 t}}{(-jk\Omega_0)}\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{k\Omega_0 T_0}\frac{e^{\frac{jk\Omega_0\tau}{2}} - e^{\frac{-jk\Omega_0\tau}{2}}}{j} =$$

$$= \frac{2\tau}{T_0 k\Omega_0\tau}\frac{e^{\frac{jk\Omega_0\tau}{2}} - e^{\frac{-jk\Omega_0\tau}{2}}}{2j} = \frac{\tau}{T_0}\frac{\sin\frac{k\Omega_0\tau}{2}}{\frac{k\Omega_0\tau}{2}} \quad \text{za } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Linijski spektar

- općenito, koeficijenti Fourierovog reda poprimaju kompleksne vrijednosti i skup $\{X_k\}|_{k=-\infty}^{\infty}$ može biti grafički prikazan odvojenim grafovima njihove amplitude i faze
- kombinacija oba grafa $X_k = |X_k|e^{j\angle X_k}$ naziva se linijski spektar signala $x(t)$
- $|X_k|$ predstavlja amplitudni spektar,
- $\angle X_k$ je fazni spektar periodičnog signala

Linijski spektar

- za parnu funkciju $x(t)$, koeficijenti Fourierovog reda su realni[6]
- u tom slučaju obično se crta samo jedan graf, $\{X_k\}$, s pozitivnim i negativnim vrijednostima X_k
- izračunati su koeficijenti Fourierovog reda pravokutnog periodičnog signala

$$X_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\Omega_0\tau}{2}}{\frac{k\Omega_0\tau}{2}}$$

- za primijetiti je kako je njihova dodirnica oblika[7]

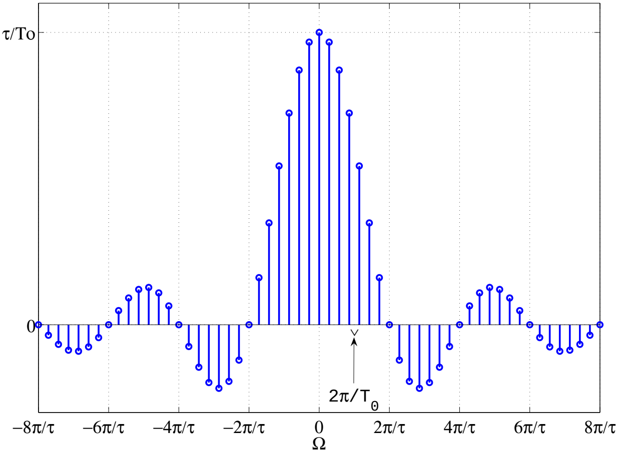
$$sinc(w) = \frac{sin(w)}{w}$$

- koeficijenti su realni i prikazujemo ih jednim grafom

[6] pokazuje se kasnije

[7] sinc(0)=1

Linijski spektar – primjer



Parsevalova relacija

- periodični kontinuirani signal $x(t)$ ima beskonačnu energiju ali konačnu srednju snagu koja je dana s

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

- uz $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$ možemo pisati[8]

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* e^{-jk\Omega_0 t} \right) dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* \left(\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

- ova se jednakost naziva Parsevalova relacija

[8] $x^*(t)$ označava konjugirano kompleksnu vrijednost od $x(t)$

Parsevalova relacija

- ilustrirajmo fizikalno značenje Parsevalove relacije

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

- neka se $x(t)$ sastoji samo od jedne kompleksne eksponencijale

$$x(t) = X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

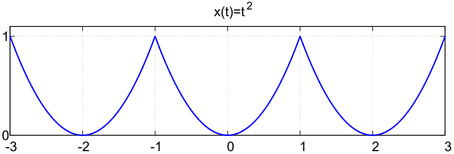
- u tom slučaju svi su koeficijenti Fourierovog reda, osim X_k, jednaki nuli, i sukladno tomu srednja snaga signala je

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |X_k e^{jk\Omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |X_k|^2 dt = |X_k|^2$$

- očigledno je kako $|X_k|^2$ predstavlja srednju snagu k–te harmoničke komponente signala
- ukupna srednja snaga periodičnog signala je, prema tome, suma srednjih snaga svih harmonika

Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda periodičnog signala na slici



- koeficijenti Fourierovog reda su

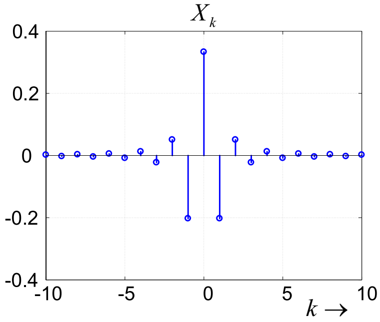
$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{2(-1)^k}{\pi^2 k^2}$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fourierov red – primjer

- spektar signala dan je na slici

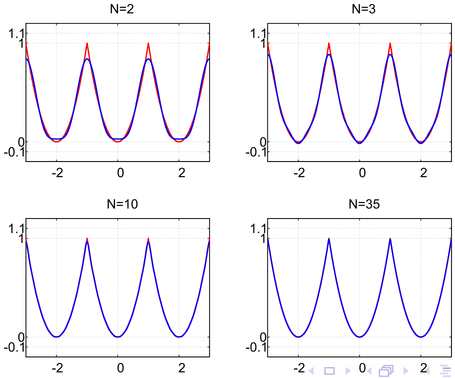


- inverznom transformacijom možemo, iz spektra, odrediti izvorni signal x u vremenskoj domeni
- postupak sinteze ilustriramo izračunom Fourierovog reda za konačni broj harmonika čime se aproksimira izvorni signal

Fourierov red – primjer

- razmatra se Fourierov red za konačni broj harmonika, $N = 2, 3, 10, 35$

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{jk\Omega_0 t} = \frac{1}{3} + \sum_{\substack{k=-N \\ k\neq 0}}^{N} \frac{2(-1)^k}{\pi^2 k^2} e^{jk\Omega_0 t}$$



Fourierov red – primjer

- pokazano je kako za dani primjer vremenski neprekinutog signala vrijedi

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) \approx x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

- iz primjera je evidentno kako za $N \to \infty$, ili dovoljno velik N, možemo postići perfektnu aproksimaciju signala x
- razmotrimo aproksimaciju, po odsječcima neprekinutog, signala koji ima konačni broj diskontinuiteta u periodi
- razmatra se periodični pravokutni signal i pokazuje kako se pri Fourierovoj sintezi dobiva signal s valovitostima na mjestu prekida
- ta pojava se naziva Gibbsova pojava

Gibbsova pojava

- razmatra se graf Fourirovog reda periodičnog pravokutnog signala za konačni broj harmonika
- prije su izračunati koeficijenti Fourierovog reda

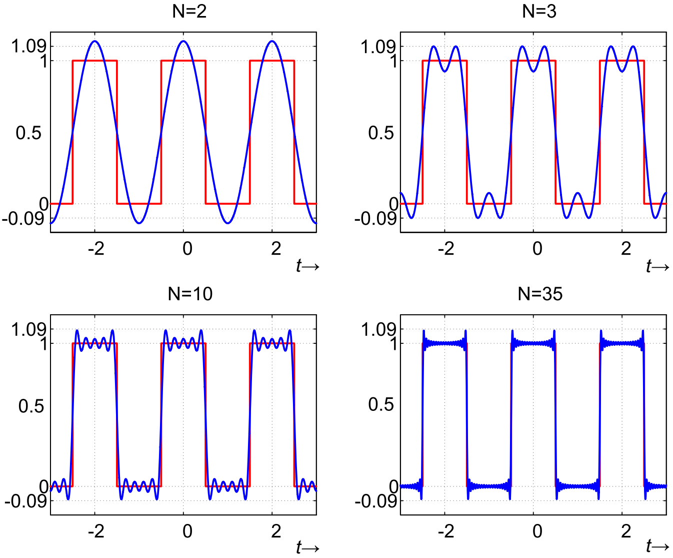
$$X_0 = \frac{\tau}{T_0}, \quad X_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\Omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\Omega_0 \tau}{2}} \quad \text{za } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

pa je Fourierov red za konačni broj harmonika

$$x_N(t) = \frac{\tau}{T_0} + \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^{N} \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\Omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\Omega_0 \tau}{2}} e^{jk\Omega_0 t}$$

- na narednoj prikaznici su prikazani grafovi Fourierovog reda za $N = 2, 3, 10, 35$ uz $T_0 = 2$ i $\tau = 1$

Gibbsova pojava



Slika 2: Gibbsova pojava

Gibbsova pojava

- primjer pokazuje kako u blizini diskontinuiteta postoji *nadvišenje* odnosno *valovitost* čiji se iznos, s povećanjem N, ne smanjuje
- ova se pojava naziva Gibbsova pojava
- vidljivo je kako je, za $N \to \infty$, *iznos* prvog nadvišenja konstantan, 9 % veličine diskontinuiteta, ali se *širina* valovitosti približava prema nuli
- za $\forall t$, osim na mjestu diskontinuiteta, vrijednost signala prikazanog Fourierovim redom, za $N \to \infty$, približava se vrijednosti originalnog signala
- na mjestu diskontinuiteta, $(x(t_d^+) \neq x(t_d^-))$,

$$x_N(t_d) \text{ za, } N \to \infty, \text{ konvergira prema } \frac{(x(t_d^+) + x(t_d^-))}{2}$$

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 5.

Profesor Branko Jeren

Konvolucija signala

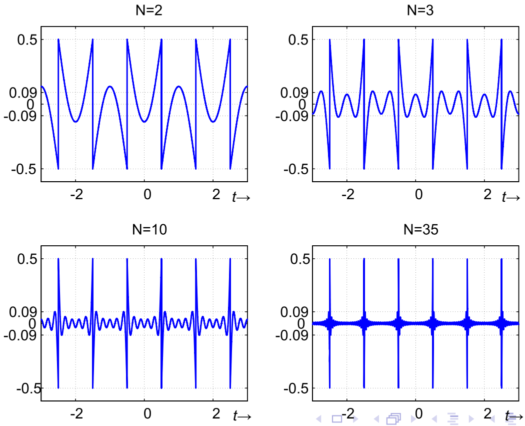
Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

Fourierov red

Gibbsova pojava

- definiramo grešku aproksimacije kao

$$\forall t \in Realni, \quad e_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$



Gibbsova pojava

- ako promotrimo energiju signala greške $\int_{T_0} |e_N(t)|^2 \, dt$, unutar jedne periode, zaključujemo sa slike da za $N \to \infty$ ona postaje nula
- ovaj zaključak proizlazi iz činjenice da su iznosi valovitiosti konstantne a njihove širine teže k nuli
- dakle, razlika između $x(t)$, $\forall t$, i njegova prikaza Fourierovim redom ima energiju nula
- zaključujemo kako izvorni signal i njegov prikaz Fourierovim redom imaju potpuno jednaku energiju signala u bilo kojem periodu, pa stoga imaju jednako djelovanje na bilo koji realni sustav