Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

19. svibnja 2008.

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

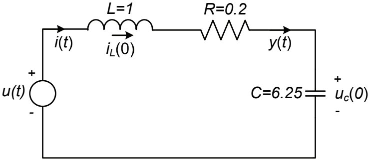
- razmatraju se vremenski kontinuirani sustavi, s jednim ulazom i jednim izlazom, opisani s modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- sustavi se obično opisuju jednom diferencijalnom jednadžbom višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) = \\ = b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \tag{1}$$

- izlaznu varijablu označujemo (u okviru ovog predmeta) kao $y(t)$ a ulaznu varijablu kao $u(t)$
- slijede dva primjera za jedan jednostavni električni RLC krug za koji će biti izvedene diferencijalne jednadžbe za različito izabrane izlazne varijable

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 1

- razmatra se RLC krug na slici (1)



Slika 1: RLC krug

- označimo kao ulaznu varijablu $u(t)$, izlazna varijabla neka je $y(t) = i(t)$, a odziv sustava određujemo za $t \geq 0$
- spremnici energije su induktivitet L i kapacitet C i neka su njihova početna stanja, $i_L(0) = 0$, i $u_c(0) = 3$
- za vremenski stalne i linearne komponente kruga vrijedi

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u_c(0) = u(t)$$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 1

- deriviranjem obje strane, te dijeljenjem s L obje strane, slijedi

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L}\frac{du}{dt}$$

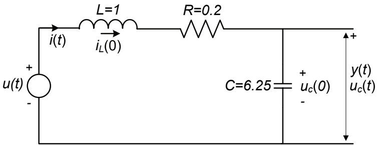
- diferencijalnu jednadžbu kruga pišemo uz pomoć uobičajenih oznaka za izlaznu varijablu $y(t)$ i ulaznu varijablu $u(t)$
- za zadane vrijednosti elemenata, i za $y(t) = i(t)$, diferencijalna jednadžba kruga je

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.2\frac{dy(t)}{dt} + 0.16y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

- za rješenje jednadžbe potrebno je poznavati $y(0)$ i $y'(0)$, a njih određujemo iz $i_L(0)$ i $u_c(0)$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 2

- razmatra se RLC krug na slici (2)



Slika 2: RLC krug

- označimo kao ulaznu varijablu $u(t)$, neka je izlazna varijabla $y(t) = u_c(t)$, a odziv sustava određujemo za $t \geq 0$
- neka su početna stanja, $i_L(0) = 0$, i $u_c(0) = 3$
- za vremenski stalne i linearne komponente kruga vrijedi

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = u(t) \qquad (2)$$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 2

- kako za struju u petlji vrijedi

$$i(t) = i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}$$

- uvrštenjem u (2), te dijeljenjem obje strane s LC, slijedi

$$\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

- za zadane vrijednosti elemenata, i za $y(t) = u_c(t)$ diferencijalna jednadžba kruga je (za $y(t)$ kao izlaznu, a $u(t)$ kao ulaznu varijablu)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 0.2\frac{dy(t)}{dt} + 0.16y(t) = 0.16u(t) \qquad (3)$$

- za rješenje jednadžbe potrebno je poznavati $y(0)$ i $y'(0)$, a njih određujemo iz $i_L(0)$ i $u_c(0)$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjeri 1 i 2

- treba uočiti kako su, iako se radi o istom RLC krugu, izvedene dvije različite diferencijalne jednadžbe
- to je razumljivo, jer u primjeru 1 izlazna varijabla $y(t) = i(t)$ predstavlja struju petlje, a u primjeru 2 izlazna varijabla $y(t) = u_C(t)$ predstavlja napon na kapacitetu C
- za realni fizikalni sustav, RLC krug, napisane su diferencijalne jednadžbe za čije je rješavanje potrebno odrediti početne uvjete $y(0)$ i $y'(0)$ iz poznavanja početnih vrijednosti spremnika energije (početnih stanja) fizikalnog sustava $i_L(0)$ i $u_C(0)$
- jasno je da će za primjer 1, $y(0)$ biti jednak $i_L(0)$, a u primjeru 2 je $y(0)$ jednak $u_C(0)$
- postupak određivanja početnih uvjeta biti će obrazložen nešto kasnije

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- nastavljamo razmatranje vremenski kontinuiranih sustava s jednim ulazom i jednim izlazom, opisanih s modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- sustavi su općenito opisani s više simultanih diferencijalnih jednadžbi
- više se simultanih diferencijalnih jednadžbi obično svodi na jednu jednadžbu višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu

$$\begin{aligned}\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) = \\ = b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t)\end{aligned} \tag{4}$$

- za linearne, vremenski stalne sustave, koeficijenti a_i i b_i su konstante

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- za realne fizikalne sustave je $N \geq M$, pa jednadžbu (4), u najopćenitijem slučaju $N = M$, pišemo kao

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^N u}{dt^N} + b_1 \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \quad (5)$$

- uvođenjem operatora deriviranja D, koji predstavlja operaciju deriviranja d/dt, jednadžbu (5) zapisujemo kao

$$\underbrace{\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N\right)}_{A(D)} y(t) =$$

$$= \underbrace{\left(b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N\right)}_{B(D)} u(t) \quad (6)$$

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- korištenjem složenih operatora

$$A(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N$$
$$B(D) = b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N$$

jednadžbu (5) zapisujemo kao

$$A(D)y(t) = B(D)u(t) \tag{7}$$

- odziv sustava na zadanu pobudu određuje se rješavanjem jednadžbe (5), odnosno (7)
- određuju se rješenje homogene jednadžbe i partikularno rješenje

Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- rješenje homogene jednadžbe $y_h(t)$, je rješenje jednadžbe

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_h(t) = 0$$

- jednadžba pokazuje kako je linearna kombinacija $y_h(t)$ i njezinih N derivacija jednaka nuli za sve vrijednosti t
- ovo je moguće samo onda kada su $y_h(t)$, i svih N njezinih derivacija, istog oblika
- ovaj zahtjev ispunjava kompleksna eksponencijalna funkcija $e^{st}, s \in Kompleksni$, jer vrijedi

$$D^k e^{st} = \frac{d^k}{dt^k} e^{st} = s^k e^{st}$$

Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- rješenje homogene jednadžbe pretpostavljamo u obliku

$$y_h(t) = ce^{st}$$

- uvrštenjem u jednadžbu

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_h(t) = 0$$

- slijedi

$$(s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N) ce^{st} = 0$$

- za netrivijalno rješenje jednadžbe, $y_h(t) = ce^{st} \neq 0$, mora biti

$$s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- jednadžba

$$s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$$

  ima N rješenja

- homogena jednadžba ima isto N rješenja $c_1 e^{s_1 t}, c_2 e^{s_2 t}, \ldots, c_N e^{s_N t}$ pa je rješenje homogene jednadžbe linearna kombinacija[1]

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

[1] uz pretpostavku da su rješenja realna i jednostruka

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Karakteristični polinom, karakteristične frekvencije

- polinom $s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N$ nazivamo karakterističnim polinomom sustava
- jednadžbu $s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$ nazivamo karakterističnom jednadžbom sustava
- korijeni karakteristične jednadžbe $s_1, s_2, \ldots, s_N$ nazivaju se karakteristične vrijednosti, ili karakteristične frekvencije, ili vlastite frekvencije, ili vlastite vrijednosti
- karakteristične frekvencije mogu biti realne ili kompleksne, te jednostruke ili višestruke
- kompleksne karakteristične frekvencije dolaze u konjugiranim parovima što je posljedica realnih koeficijenata karakterističnog polinoma

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za višestruke karakteristične vrijednosti

- za karakteristični korijen s_1 višestrukosti m, karakteristična jednadžba, u faktoriziranom obliku, je

$$(s - s_1)^m (s - s_{m+1})(s - s_{m+2}) \cdots (s - s_N) = 0$$

- rješenje homogene jednadžbe je tada

$$\begin{aligned} y_h(t) = {} & (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots + c_m t^{m-1}) e^{s_1 t} + \\ & + c_{m+1} e^{s_{m+1} t} + c_{m+2} e^{s_{m+2} t} + \ldots + c_N e^{s_N t} \end{aligned}$$

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave kompleksni korijeni dolaze u konjugirano kompleksnim parovima
- u određivanju homogenog rješenja diferencijalne jednadžbe, konjugirane kompleksne korijene možemo koristiti na isti način kao i realne
- činjenica da su parovi kompleksnih korijena s i s^* konjugirani može biti iskorištena za alternativni prikaz
- tako je za,

$$s = \alpha + j\beta \quad \text{i} \quad s^* = \alpha - j\beta$$

- rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(t) = c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t}$$

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave je $y_h(t)$ realna funkcija, pa konstante c_1 i c_2 moraju biti konjugirane

$$c_1 = \frac{c}{2}e^{j\theta} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{c}{2}e^{-j\theta}$$

- što rezultira u

$$y_h(t) = \frac{c}{2}e^{j\theta}e^{(\alpha+j\beta)t} + \frac{c}{2}e^{-j\theta}e^{(\alpha-j\beta)t} = \frac{c}{2}e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta)} + e^{-j(\beta t+\theta)}\right]$$

- odnosno, finalno,

$$y_h(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Određivanje konstanti u rješenju homogene diferencijalne jednadžbe

- nepoznate konstante $c_1, c_2, \ldots, c_N$, u rješenju homogene diferencijalne jednadžbe, određujemo iz
  - početnih uvjeta kada određujemo odziv nepobuđenog sustava
  - iz početnih uvjeta i totalnog rješenja kada određujemo totalni odziv
- početni uvjeti nose informaciju o $y(t)$ i njezinih $N-1$ derivacija u početnom trenutku, najčešće je to, $t=0$
- za fizikalne sustave, početne uvjete treba odrediti iz odgovarajućih početnih stanja sustava

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Početni uvjeti

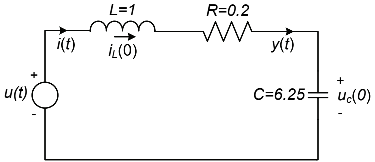
- potrebno je detaljnije razmotriti ulogu početnih uvjeta u određivanju odziva sustava
- preciziraju se početni uvjeti neposredno prije $t = 0$, tj. neposredno prije djelovanja pobude, kao početni uvjeti u $t = 0^-$, te početni uvjeti neposredno nakon početka djelovanja pobude, kao početni uvjeti u $t = 0^+$
- očigledno je da se, ovisno o svojstvima sustava, i karakteru pobude, početni uvjeti u $t = 0^-$ i u $t = 0^+$ mogu razlikovati
- za slučaj nepobuđenog sustava[2] početni su uvjeti za $t = 0^-$ i $t = 0^+$ identični dakle vrijedi

$$y_0(0^-) = y_0(0^+); \quad y_0'(0^-) = y_0'(0^+); \quad y_0''(0^-) = y_0''(0^+); \quad \dots$$

[2] odziv nepobuđenog sustava označavamo kao $y_0(t)$

Primjer određivanja početnih uvjeta 1

- za prije razmotren RLC krug, na slici (3)



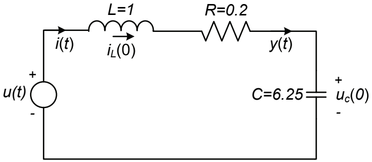
Slika 3: RLC krug

- diferencijalna jednadžba koja opisuje ovaj krug, za $y(t) = i(t)$, je

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 0.2\frac{dy(t)}{dt} + 0.16y(t) = \frac{du}{dt}$$

- treba odrediti početne uvjete, $y(0)$ i $y'(0)$, potrebne u izračunu odziva na pobudu $u(t) = \mu(t)$ i uz početna stanja, $i_L(0) = i(0) = 0$, i $u_c(0) = 3$

Primjer određivanja početnih uvjeta 2



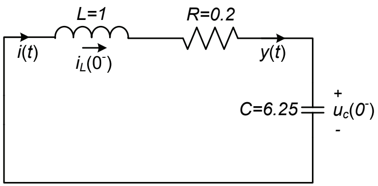
Slika 4: RLC krug

- u cilju određivanja $y'(0)$, koristimo jednadžbu Kirchhoffovog zakona napona za petlju

$$L\frac{dy(t)}{dt} + Ry(t) + u_C(t) = u(t)$$

Primjer određivanja početnih uvjeta 3

- prvo određujemo početne uvjete za slučaj nepobuđenog sustava
- $y_0(0)$ i $y_0'(0)$ određujemo iz $i_L(0) = 0$ i $u_c(0) = 3$
- za nepobuđeni sustav vrijedi $y_0(0^-) = y_0(0^+) = y(0)$ i $y_0'(0^-) = y_0'(0^+) = y_0'(0)$
- sa slike je očigledno da je $y_0(0) = i(0) = i_L(0) = 0$
- potrebno je odrediti $y_0'(0)$



- vrijedi

$$\underbrace{L}_{1}\frac{dy_0(t)}{dt} + \underbrace{R}_{0.2}y_0(t) + u_C(t) = 0$$

za $t = 0$

$$y_0'(0) + 0.2\underbrace{y_0(0)}_{0} + \underbrace{u_C(0)}_{3} = 0$$

$$y_0'(0) = -3$$

Primjer određivanja početnih uvjeta 4

- određuju se i početni uvjeti u $t = 0^-$ i $t = 0^+$, za slučaj određivanja odziva pobuđenog sustava, za $t \geq 0$
- uspoređuju se $y(0^-)$ i $y'(0^-)$ s $y(0^+)$ i $y'(0^+)$
- njihova se usporedba provodi uvidom u jednadžbu petlje

$$\underbrace{L}_{1}\frac{dy(t)}{dt} + \underbrace{R}_{0.2}y(t) + u_C(t) = u(t)$$

za $t = 0^-$ i $t = 0^+$

$$y'(0^-) + 0.2y(0^-) + u_C(0^-) = u(0^-) = \mu(0^-) = 0$$
$$y'(0^+) + 0.2y(0^+) + u_C(0^+) = u(0^+) = \mu(0^+) = 1$$

Primjer određivanja početnih uvjeta 5

- kako se struja induktiviteta i napon na kapacitetu ne mogu promijeniti[3] u intervalu od $t = 0^-$ do $t = 0^+$ vrijedi $y(0^-) = y(0^+) = 0$ i $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 3$
- uvrštenjem ovih vrijednosti u prethodne dvije jednadžbe slijedi

$$y(0^-) = 0, \qquad y'(0^-) = -3$$

odnosno

$$y(0^+) = 0, \qquad y'(0^+) = -2$$

- dani primjer ukazuje na potreban postupak u definiranju i određivanju početnih uvjeta
- u nastavku se razmatra postupak određivanja početnih uvjeta u $t = 0^+$ za opći sustav drugog reda te, na kraju, za sustav N–tog reda

[3] osim u slučaju impulsne pobude, a taj će slučaj biti kasnije diskutiran

Određivanja početnih uvjeta – opći sustav drugog reda

- sustav je opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t) \quad (8)$$

- neka je pobuda kauzalna pa vrijedi $u^{(i)}(0^-) = 0$ i neka pobuda ne sadrži Diracov jedinični impuls[4]
- neka su poznati $y^{(i)}(0^-) \neq 0$, a treba odrediti $y(0^+)$ i $y'(0^+)$
- integriramo jednadžbu (8) u intervalu $t = 0^-$ do t

$$y'(t) - y'(0^-) + a_1 y(t) - a_1 y(0^-) + a_2 \int_{0^-}^{t} y(\tau) d\tau =$$

$$= b_0 u'(t) + b_1 u(t) + b_2 \int_{0^-}^{t} u(\tau) d\tau \quad (9)$$

[4] slučaj kada pobuda sadrži Diracov impuls biti će razmatran kod određivanja impulsnog odziva

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- još jednom integracijom, jednadžbe (9), slijedi

$$
\begin{aligned}
&\int_{0^-}^{t} y'(\tau)d\tau - y'(0^-)\int_{0^-}^{t} d\tau + a_1\int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau - a_1 y(0^-)\int_{0^-}^{t} d\tau + \\
&+a_2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda)d\lambda d\tau = b_0\int_{0^-}^{t} u'(\tau)d\tau + b_1\int_{0^-}^{t} u(\tau)d\tau + \\
&\qquad\qquad +b_2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} u(\lambda)d\lambda d\tau
\end{aligned}
$$

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz

Homogena diferencijalna jednadžba

Početni uvjeti

Odziv nepobuđenog sustava

Odziv pobuđenog sustava

Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala

Impulsni odziv

Samostalni

Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- za $t = 0^+$ slijedi

$$y(0^+) - y(0^-) - y'(0^-) \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} d\tau}_{0} + a_1 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} y(\tau) d\tau}_{0} - a_1 y(0^-) \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} d\tau}_{0}$$

$$+ a_2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} y(\lambda) d\lambda d\tau}_{0} = b_0 u(0^+) + b_1 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} u(\tau) d\tau}_{0} +$$

$$+ b_2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} u(\lambda) d\lambda d\tau}_{0} \quad \Rightarrow$$

$$y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+) \tag{10}$$

- rješenje jednadžbe (10) daje $y(0^+)$

Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- iz jednadžbe (9),

$$y'(t) - y'(0^-) + a_1 y(t) - a_1 y(0^-) + a_2 \int_{0^-}^{t} y(\tau) d\tau =$$

$$= b_0 u'(t) + b_1 u(t) + b_2 \int_{0^-}^{t} u(\tau) d\tau$$

za $t = 0^+$ slijedi

$$y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+) \tag{11}$$

- rješenje jednadžbe (11), uz u (10) izračunat $y(0^+)$, daje $y'(0^+)$

Određivanja početnih uvjeta – opći sustav N–tog reda

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 13.

Profesor Branko Jeren

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava
Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

- za sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$
\begin{aligned}
y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \ldots + a_{N-1} y' + a_N y(t) = \\
= b_0 u^{(N)} + b_1 u^{(N-1)} + \ldots + b_{N-1} u' + b_N u(t)
\end{aligned}
$$

- potrebno je odrediti $y(0^+), y'(0^+), y''(0^+), \ldots, y^{(N-1)}(0^+)$
- istim postupkom, dakle višestrukim integriranjem, kao u slučaju sustava drugog reda, nalazimo N jednadžbi iz kojih određujemo tražene $y(0^+), y'(0^+), y''(0^+), \ldots, y^{(N-1)}(0^+)$

$$
\begin{aligned}
& y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+) \\
& y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+) \\
& y''(0^+) - y''(0^-) + a_1 y'(0^+) - a_1 y'(0^-) + a_2 y(0^+) - a_2 y(0^-) \\
& \qquad = b_0 u''(0^+) + b_1 u'(0^+) + b_2 u(0^+) \\
& \qquad \vdots \\
& y^{(N-1)}(0^+) - y^{(N-1)}(0^-) + a_1 y^{(N-2)}(0^+) - a_1 y^{(N-2)}(0^-) + \ldots \\
& \qquad \ldots + a_{N-2} y'(0^+) - a_{N-2} y'(0^-) + a_{N-1} y(0^+) - a_{N-1} y(0^-) = \\
& \qquad = b_0 u^{(N-1)}(0^+) + b_1 u^{(N-2)}(0^+) + \ldots + b_{N-2} u'(0^+) + b_{N-1} u(0^+)
\end{aligned} \tag{12}
$$

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava

- za nepobuđeni je sustav, odziv $y_0(t)$ jednak rješenju homogene diferencijalne jednadžbe $y_h(t)$
- tako je za jednostruke vlastite frekvencije odziv nepobuđenog sustava, za sve t,

$$y_0(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_N e^{s_N t}, \quad t \geq 0$$

- koeficijente $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz N početnih uvjeta $y(0^-), y'(0^-), \ldots, y^{(N-1)}(0^-)$

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- razmatra se primjer vremenski kontinuiranog sustava opisanog s diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t), \quad t \geq 0 \tag{13}$$

- neka je sustav pobuđen pobudom $u(t) = 0.64\mu(t)$ i neka su $y(0^-) = -3$ i $\dot{y}(0^-) = -1$
- prvo određujemo odziv nepobuđenog sustava i određujemo rješenje homogene jednadžbe

$$(D^2 + 0.2D + 0.16)y_h = 0$$

- pa su karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$s^2 + 0.2s + 0.16 = 0 \qquad \Rightarrow s_{1,2} = -0.1 \pm j0.3873$$

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- odziv nepobuđenog sustava jednak je rješenju homogene jednadžbe za zadane početne uvjete $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$
- odziv nepobuđenog sustava je, za $t \geq 0$,

$$y_0(t) = c_{01}e^{s_1 t} + c_{02}e^{s_2 t} = c_{01}e^{(-0.1+j0.3873)t} + c_{02}e^{(-0.1-j0.3873)t}$$

- konstante c_{01} i c_{02} određujemo iz početnih vrijednosti $y(0^-) = -3$ i $\dot{y}(0^-) = -1$, pa iz

$$\begin{aligned} y_0(t) &= c_{01}e^{s_1 t} + c_{02}e^{s_2 t} \\ \dot{y}_0(t) &= s_1 c_{01}e^{s_1 t} + s_2 c_{02}e^{s_2 t} \end{aligned}$$

slijedi za $t = 0^-$

$$\left.\begin{aligned} -3 &= c_{01} + c_{02} \\ -1 &= s_1 c_{01} + s_2 c_{02} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_{01} &= -1.5 + j1.6783 = 2.2509e^{j2.3002} \\ c_{02} &= -1.5 - j1.6783 = 2.2509e^{-j2.3002} \end{aligned}\right.$$

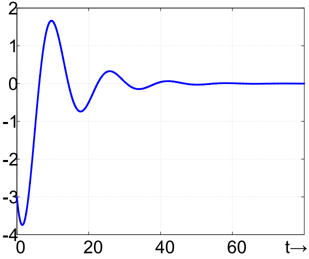
Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- odziv nepobuđenog sustava je, za $t \geq 0$,

$$y_0(t) = 2.2509e^{j2.3002}e^{-0.1t}e^{j0.3873t} + 2.2509e^{-j2.3002}e^{-0.1t}e^{-j0.3873t} \tag{14}$$

odnosno

$$y_0(t) = 4.5018e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.3002), \quad t \geq 0 \tag{15}$$



Slika 5: Odziv nepobuđenog sustava – primjer

Odziv nepobuđenog kontinuiranog sustava

- nepobuđeni sustav titra eksponencijalama čije su frekvencije vlastite frekvencije sustava, pa je za pojedinu vlastitu frekvenciju s_i, komponenta nepobuđenog odziva $e^{s_i t}$
- neka je u općem slučaju $s \in Kompleksni$, pri čemu dolazi u konjugirano kompleksnim parovima, pa je komponenta odziva nepobuđenog sustava oblika $e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t}$
- za različite α, slijedi:

$$\begin{array}{lll} \alpha < 0 & e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to 0 & \text{za } t \to \infty \\ \alpha > 0 & e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to \infty & \text{za } t \to \infty \\ \alpha = 0 & |e^{\pm j\beta t}| = 1 & \text{za } \forall t \end{array}$$

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

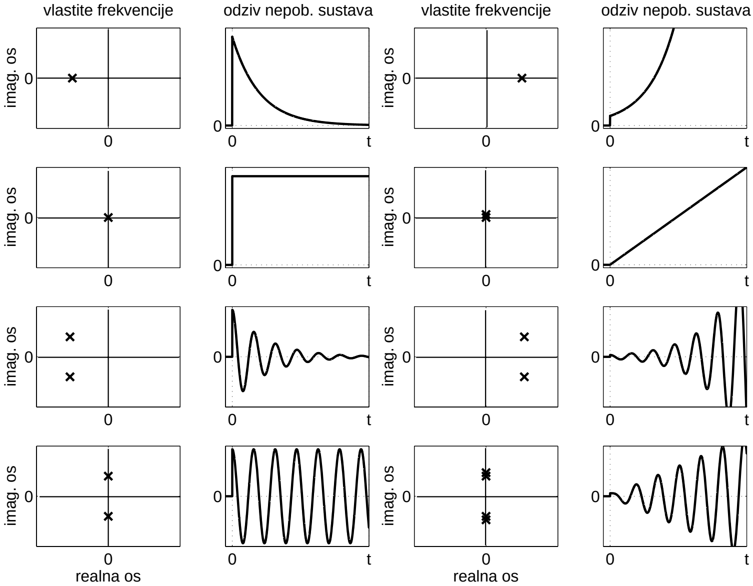
Odziv nepobuđenog kontinuiranog sustava

- za sustav s višestrukim vlastitim frekvencijama, $s = \alpha \pm j\beta$, višestrukosti m, nepobuđeni sustav titra eksponencijalama oblika $t^i e^{st}, i = 1, 2, \ldots, m-1$
- za različite $\alpha = Re\{s\}$, slijedi:

$$\begin{array}{lll} \alpha < 0 & t^i e^{st} \to 0 & \text{za } t \to \infty \\ \alpha \geq 0 & t^i e^{st} \to \infty & \text{za } t \to \infty \end{array}$$

- slijede primjeri koji ilustriraju odziv nepobuđenog sustava za razne vrijednosti s

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava i vlastite frekvencije



Stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- za miran i nepobuđen vremenski stalni linearni sustav svi su $y(t)$, $y'(t), \ldots$ jednaki nuli i kažemo da se sustav nalazi u ravnotežnom stanju jednakom nuli
- pod stabilnošću sustava podrazumijevamo njegovo svojstvo da se nakon prestanka djelovanja pobude vraća u ravnotežno stanje u kojem ostaje neodređeno dugo
- dakle, nakon prestanka djelovanja pobude, stanje sustava u kojem se on tog trenutka nalazi, predstavlja početno stanje, različito od nule, koje definira početne uvjete $y(0)$, $y'(0), \ldots$ različite od nule
- stabilni sustavi se iz tih početnih uvjeta vraćaju u ravnotežno stanje jedanko nuli

Stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- poznavanje odziva nepobuđenog sustava ukazuje na unutarnju stabilnost vremenski kontinuiranog linearnog sustava, pa vrijedi definicija
- vremenski kontinuirani nepobuđeni sustav je stabilan ako je njegov odziv omeđen, dakle,

$$|y_0(t)| < M = konst. < \infty, \forall t \in Realni \tag{16}$$

- sustavi za koje vrijedi (16) nazivaju se i marginalno (rubno) stabilni
- sustav je asimptotski stabilan ako vrijedi (16) i ako

$$\lim_{t \to \infty} \{y_0(t)\} \to 0 \tag{17}$$

- sustavi koji nisu ni asimptotski ni rubno stabilni su nestabilni sustavi, za njih vrijedi

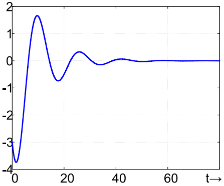
$$\lim_{t \to \infty} \{y_0(t)\} \to \infty \tag{18}$$

Unutarnja stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- o unutarnjoj stabilnosti sustava zaključuje se iz vrijednosti karakterističnih ili vlastitih frekvencija
- kauzalni kontinuirani linearni vremenski stalni sustav, s jednostrukim karakterističnim frekvencijama, je
  - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
  - stabilan (marginalno stabilan) ako je $Re\{s_i\} \leq 0, \forall i$
  - nestabilan ako postoji karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} > 0$
- kauzalni kontinuirani linearni vremenski stalni sustav, s višestrukim karakterističnim frekvencijama, je
  - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
  - marginalno stabilan ako je za sve višestruke karakteristične frekvencije $Re\{s_i\} < 0$, i za sve različite karakteristične frekvencije $Re\{s_i\} \leq 0$
  - nestabilan ako postoji karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} > 0$, ili postoji višestruka karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} \geq 0$

Odziv nepobuđenog asimptotski stabilnog sustava

- za stabilni nepobuđeni sustav, odziv je posljedica postojanja početnih uvjeta, različitih od nule, dakle, posljedica nesklada početnog stanja i ravnotežnog stanja
- drugim riječima sustav se u prijelazu (prevladavanju nesklada) iz početnog stanja u ravnotežno stanje odziva titranjem s vlastitim frekvencijama
- ilustrirajmo ovu činjenicu već prije određenim odzivom nepobuđenog sustava $\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = 0$, uz $y(0^-) = -3$ i $\dot{y}(0^-) = -1$



Slika 7: Odziv nepobuđenog sustava – primjer

Odziv pobuđenog sustava

- kako je kazano, totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava, dakle,[5]

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{0i} e^{s_i t} + odziv\ mirnog\ sustava, \quad t \geq 0$$

- odziv mirnog sustava, $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = y^{(N-1)}(0^-) = 0$, na bilo koju pobudu možemo odrediti
  - klasičnim rješavanjem diferencijalne jednadžbe
  - korištenjem konvolucijskog integrala

[5] ovdje je, radi jednostavnosti u prikazu odziva nepobuđenog sustava, pretpostavljen sustav s jednostrukim i realnim karakterističnim frekvencijama

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe

- za sustav opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom potrebno je odrediti i partikularno rješenje
- određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrange-ova metoda varijacije parametara
  - Metoda neodređenog koeficijenta
- metoda je neodređenih koeficijenata ograničena samo na diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, te na funkcije koje se mogu svesti na polinome i eksponencijalne funkcije
- veliki broj pobuda se prikazuje polinomima i eksponencijalnim funkcijama i to je razlog široke uporabe ove metode

Određivanje partikularnog rješenja metodom neodređenih koeficijenata

- za pobudu polinomom oblika

$$u(t) = A_0 + A_1 t + \ldots + A_M t^M$$

- partikularno je rješenje u obliku polinoma M-tog stupnja

$$y_p(t) = K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M$$

- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

Određivanje partikularnog rješenja metodom neodređenih koeficijenata

- slično vrijedi i za pobude

pobuda $u(t)$	partikularno rješenje $y_p(t)$
A (konstanta)	K
$Ae^{\zeta t} \quad \zeta \neq s_i (i = 1, 2, \ldots, N)$	$Ke^{\zeta t}$
$Ae^{\zeta t} \quad \zeta = s_i$	$Kte^{\zeta t}$
At^M	$K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M$
$e^{\zeta t} t^M$	$e^{\zeta t}(K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M)$
$Acos(\Omega_0 t)$	$K_1 cos(\Omega_0 t) + K_2 sin(\Omega_0 t)$
$Asin(\Omega_0 t)$	$K_1 cos(\Omega_0 t) + K_2 sin(\Omega_0 t)$
$Acos(\Omega_0 t + \theta)$	$Kcos(\Omega_0 t + \theta)$

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- nastavlja se razmatranje sustava opisanog s diferencijalnom jednadžbom[6]

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t), \quad t \geq 0 \tag{19}$$

- neka je sustav pobuđen pobudom $u(t) = 0.64\mu(t)$ i, budući ovdje razmatramo odziv mirnog sustava, početni uvjeti su $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$
- rješenje homogene jednadžbe je određeno kao

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = c_1 e^{(-0.1+j0.3873)t} + c_2 e^{(-0.1-j0.3873)t}$$

- potrebno je odrediti partikularno rješenje

[6] Ovo nije primjer sustava opisanog jednadžbom 3. S namjerom je učinjena razlika u desnoj strani jednadžbe.

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- kako je pobuda konstantna i partikularno rješenje pretpostavljamo kao konstantu $y_p(t) = A$
- uvrštenjem u polaznu jednadžbu, i za $\ddot{y}_p(t) = \dot{y}_p(t) = 0$ slijedi

$$0.16A = 0.64 \quad \Rightarrow \quad A = 4 \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = 4$$

- odziv mirnog sustava je

$$y_m(t) = c_{m1} e^{(-0.1+j0.3873)t} + c_{m2} e^{(-0.1-j0.3873)t} + 4$$

- konstante se c_{m1} i c_{m2} određuju iz početnih uvjeta $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$
- iz jednadžbi (10) i (11), uz $b_0 = b_1 = 0$, za ovaj primjer, slijedi

$$y(0^+) = y(0^-) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = 0$$

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- iz

$$y_m(t) = c_{m1}e^{s_1 t} + c_{m2}e^{s_2 t} + 4$$
$$\dot{y}_m(t) = s_1 c_{m1}e^{s_1 t} + s_2 c_{m2}e^{s_2 t}$$

slijedi za $t = 0^+$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = c_{m1} + c_{m2} + 4 \\ 0 = s_1 c_{m1} + s_2 c_{m2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_{m1} = -2 + j0.5164 = 2.0656e^{j2.8889} \\ c_{m2} = -2 - j0.5164 = 2.0656e^{-j2.8889} \end{array}\right.$$

- konačno, odziv mirnog sustava je

$$y_m(t) = 2.0656e^{j2.8889}e^{-0.1t}e^{j0.3873t} +$$
$$+2.0656e^{-j2.8889}e^{-0.1t}e^{-j0.3873t} + 4, \quad t \geq 0$$
$$y_m(t) = 4.1312e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.8889) + 4, \quad t \geq 0$$

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava
Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

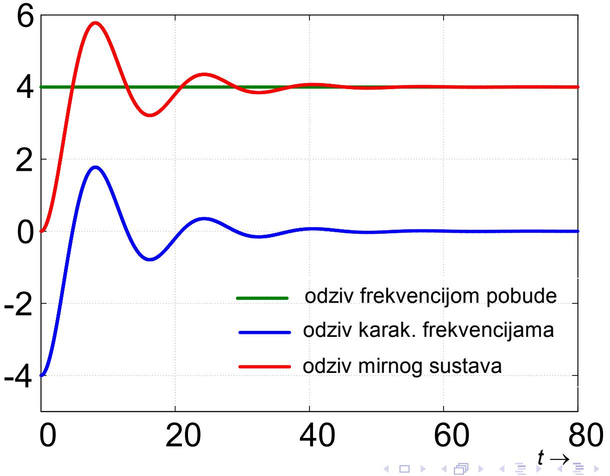
Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- odziv mirnog sustava čini titranje s vlastitim frekvencijama i titranje s frekvencijom pobude
- titranje s vlastitim frekvencijama postoji unatoč činjenici da je sustav bio miran, $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$, a posljedica je nesklada početnih uvjeta i stacionarnog[7] stanja u koje pobuda prevodi sustav
- sustav taj nesklad prevladava odzivom s vlastitim frekvencijama

[7] za pobude konstantne amplitude, kao i za periodične pobude, partikularno rješenje je istog oblika i često se zove stacionarno stanje

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- odziv, mirnog sustava,
$$y_m(t) = 4.1312e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.8889) + 4, \quad t \geq 0$$



Totalni odziv sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

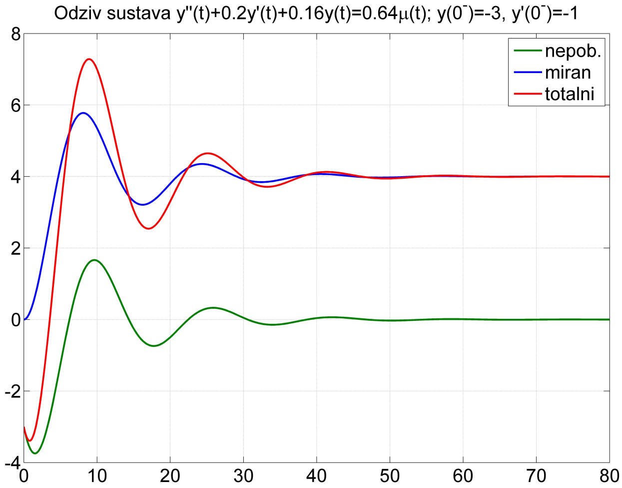
$$\begin{aligned} y(t) = {} & (-1.5 + j1.6783)e^{-0.1t+j0.3873t} + (-1.5 - j1.6783)e^{-0.1t-j0.3873t} + \\ & (-2.0 + j0.5164)e^{-0.1t+j0.3873t} + (-2.0 - j0.5164)e^{-0.1t-j0.3873t} + \\ & +4, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = {} & (-3.5 + j2.1947)e^{-0.1t+j0.3873t} + (-3.5 - j2.1947)e^{-0.1t-j0.3873t} + \\ & +4, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = {} & 4.5018e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.3002) + \\ & +4.1313e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.8889) + 4, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$y(t) = 8.2624e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.5815) + 4, \quad t \geq 0$$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava



Slika 9: Odziv vremenski kontinuiranog sustava

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- totalni odziv sustava moguće je odrediti klasičnim postupkom rješavanja nehomogene diferencijalne jednadžbe
- rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe je

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- već su prije određeni, rješenje homogene jednadžbe $y_h(t)$, i partikularno rješenje $y_p(t)$, pa je rješenje nehomogene jednadžbe

$$y(t) = c_1 e^{-0.1t + j0.3873t} + c_2 e^{-0.1t - j0.3873t} + 4, \quad t \geq 0$$

- konstante se c_1 i c_2 određuju iz početnih uvjeta $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$
- iz jednadžbi (10) i (11), uz $b_0 = b_1 = 0$,slijedi

$$y(0^+) = y(0^-) = -3 \quad \text{i} \quad \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = -1$$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- iz

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + 4 \\ \dot{y}(t) &= s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t} \end{aligned}$$

slijedi za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} -3 &= c_1 + c_2 + 4 \\ -1 &= s_1 c_1 + s_2 c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_1 &= -3.5000 + j2.1947 = 4.1312 e^{j2.5815} \\ c_2 &= -3.5000 - j2.1947 = 4.1312 e^{-j2.5815} \end{aligned}\right.$$

- konačno, totalni odziv je

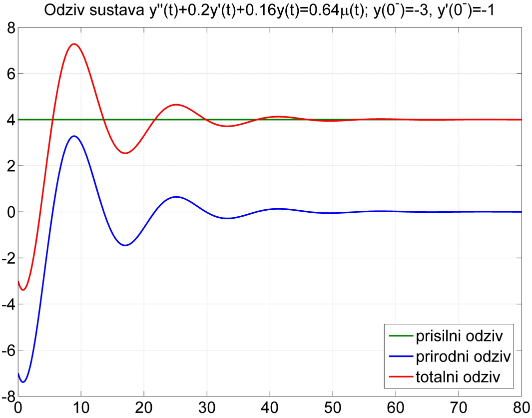
$$\begin{aligned} y(t) = 4.1312 e^{j2.5815} e^{-0.1t} e^{j0.3873t} + \\ +4.1312 e^{-j2.5815} e^{-0.1t} e^{-j0.3873t} + 4, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$y(t) = 8.2624 e^{-0.1t} \cos(0.3873t + 2.5815) + 4, \quad t \geq 0$$

- što je identičan odziv kao i u slučaju kada je odziv sustava razmatran kao zbroj odziva nepobuđenog i mirnog sustava

Prirodni i prisilni odziv sustava

- u totalnom odzivu prepoznaju se dvije komponente
  - prirodni ili prijelazni odziv – titra s karakterističnim frekvencijama i postoji zbog nesklada početnog i stacionarnog stanja
  - prisilni odziv – titra s frekvencijom pobude



Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala

- totalni odziv se može prikazati kao zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

- odziv nepobuđenog sustava jednak je rješenju homogene jednadžbe čije se konstante određuju iz zadanih početnih uvjeta u $t = 0^-$
- odziv mirnog sustava, dakle sustava, čiji su svi početni uvjeti jednaki nuli za $t = 0^-$, možemo izračunati i kao

$$y_m(t) = u(t) * h(t) = \int_{0^-}^{t} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

- potrebno je izračunati impulsni odziv

Impulsni odziv

- linearni, vremenski stalni, kontinuirani sustav opisan je diferencijalnom jednadžbom ($N \geq M$)

$$\underbrace{(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1}D + a_N)}_{A(D)} y(t) =$$

$$= \underbrace{(b_{N-M}D^M + b_{N-M+1}D^{M-1} + \ldots + b_{N-1}D + b_N)}_{B(D)} u(t) \tag{20}$$

odnosno

$$A(D)y(t) = B(D)u(t)$$

- impulsni odziv $y(t) = h(t)$, sustava (20), je odziv sustava na pobudu $u(t) = \delta(t)$, u $t = 0$, za sve početne uvjete $h(0^-) = h'(0^-) = h''(0^-) = \ldots = h^{(N-1)}(0^-) = 0$

Impulsni odziv

- za $u(t) = \delta(t)$, sustav (20) možemo, za $t \geq 0^+$, razmatrati kao nepobuđeni sustav, a odziv tog sustava tretirati kao posljedicu početnih uvjeta u $t = 0^+$ koji su nastali djelovanjem impulsne pobude u $t = 0$
- sustav je, za $t \geq 0^+$, opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom

  $$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h(t) = 0 \Leftrightarrow A(D) h(t) = 0$$

  za čije je rješenje potrebno odrediti početne uvjete $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$
- impulsni odziv će za $t \geq 0^+$ biti oblika[8]

$$h(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}, \qquad t \geq 0^+$$

[8] ovdje su pretpostavljene jednostruke karakteristične frekvencije

Impulsni odziv

- postavlja se pitanje što se događa s impulsnim odzivom u $t = 0$, dakle, u trenutku djelovanja pobude $u(t) = \delta(t)$,
- u trenutku $t = 0$, jedino što se može pojaviti je impuls[9], pa je kompletni impulsni odziv $h(t)$

$$h(t) = A_0\delta(t) + \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t),$$

- odredimo A_0
- impulsni odziv je odziv sustava (20) za pobudu $u(t) = \delta(t)$, pa vrijedi

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1}D + a_N)h(t) =$$
$$= (b_{N-M}D^M + b_{N-M+1}D^{M-1} + \ldots + b_{N-1}D + b_N)\delta(t) \quad (21)$$

[9] vidi sliku (12)

Impulsni odziv

- uvrštenjem $h(t) = A_0\delta(t) + \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t)$ u prethodnu jednadžbu (21) i usporedbom koeficijenata uz odgovarajuće impulsne članove na obje strane proizlazi[10]

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0 && \text{za } N = M \\ A_0 &= 0 && \text{za } N > M \end{aligned}$$

- impulsni odziv $h(t)$ je prema tome

$$h(t) = \begin{cases} b_0\delta(t) + \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t) & \text{za } N = M \\ \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t) & \text{za } N > M \end{cases}$$

- potrebno je odrediti $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$ kako bi se izračunalo N konstanti c_j,

[10] N puta deriviranjem $h(t)$, javlja se član $A_0\delta^{(N)}$, pa se očekuje da i na desnoj strani bude član s $\delta^{(N)}$ a takav će postojati samo kada je $N = M$. Ova činjenica evidentna je i na slici (12)

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Impulsni odziv

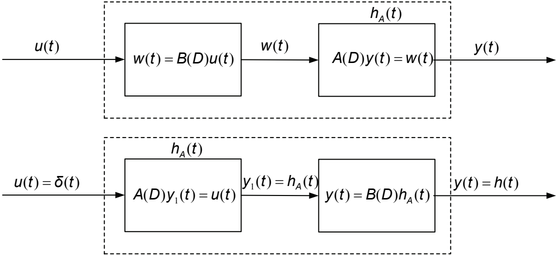
- izračun početnih uvjeta $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$ često je nespretan i kompliciran
- pristupa se jednostavnijem postupku određivanja impulsnog odziva koji se temelji na svojstvu linearnosti i vremenske stalnosti, odnosno, komutativnosti linearnih sustava

Impulsni odziv

- linearni, vremenski stalni, kontinuirani sustav,

$$A(D)y(t) = \underbrace{B(D)u(t)}_{w(t)}$$

možemo razložiti na dva podsustava od kojih svaki realizira jednu stranu diferencijalne jednadžbe



Slika 11: Diferencijalni sustav kao kaskada dva podsustava

Impulsni odziv

- donji dio slike 11, temelji se na svojstvu komutativnosti linearnih sustava, i sugerira mogući postupak za određivanje impulsnog odziva sustava
- prvo se određuje impulsni odziv prvog podsustava

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h_A(t) = \delta(t) \quad (22)$$

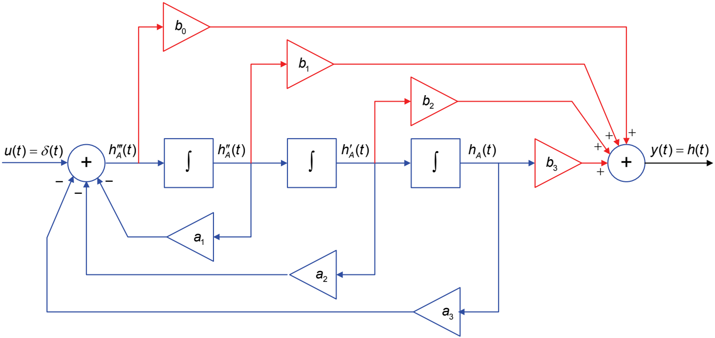
i zatim, odziv drugog podsustava, koji predstavlja ukupni impulsni odziv

$$h(t) = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) h_A(t) \quad (23)$$

- ilustrirajmo ovaj postupak na primjeru kontinuiranog sustava 3. reda uz $N = M = 3$

Impulsni odziv

- realizaciju jednadžbe,
  $(D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3) h_A(t) = \delta(t)$,
  prikazuje donji dio blokovskog dijagrama
- gornji dio blokovskog dijagrama prikazuje realizaciju
  $h(t) = (b_0 D^3 + b_1 D^2 + b_2 D + b_3) h_A(t)$



Slika 12: Blokovski dijagram kontinuiranog sustava 3. reda

Impulsni odziv

- jednadžbu (22) rješavamo za $t \geq 0$ i za $h_A(0^-) = h'_A(0^-) = h''_A(0^-) = \ldots = h_A^{(N-1)}(0^-) = 0$
- za $t \geq 0^+$ jednadžba prelazi u homogenu jednadžbu pa je potrebno odrediti $h_A^{(i)}(0^+), i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$
- ponovo razmotrimo jednadžbu

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h_A(t) = \delta(t)$$

- samo najviša derivacija $h_A(t)$ može sadržavati impuls jer kad bi bilo koja niža derivacija sadržavala impuls onda bi se u izrazu na desnoj strani javljale derivacije jediničnog impulsa (a njih nema pa vrijedi naša tvrdnja)
- zato su preostali članovi na lijevoj strani integrali impulsa: jedinična stepenica, kosina, ...
- ovo pak znači kako $h_A^{(N-1)}(t)$, ima konačni diskontinuitet, a funkcije $h_A^{(N-2)}(t), \ldots, h'_A(t), h_A(t)$ su glatke funkcije

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Impulsni odziv

- za $h_A(t), h'_A(t), \ldots, h_A^{(N-1)}(t)$ vrijedi

$$h_A^{(j-1)}(0^+) = \int_{0^-}^{0^+} h_A^{(j)}(\tau) d\tau = 0, \qquad j = 1, \ldots, N-1$$

- i ovaj izraz određuje prvih $N-1$ početnih uvjeta za $h_A(t)$
- integriranjem, od $t = 0^-$ do $t = 0^+$, jednadžbe (22) slijedi

$$\int_{0^-}^{0^+} (D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h_A(\tau) d\tau = \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau) d\tau$$

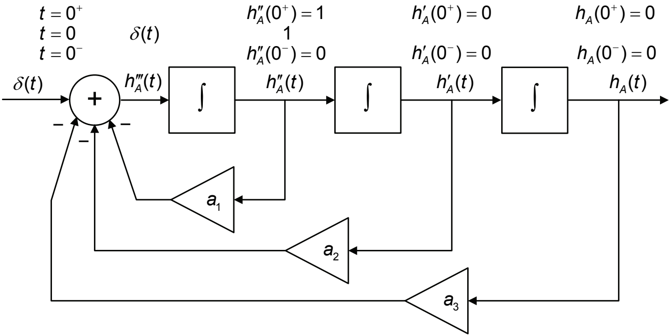
$$D^{N-1} h_A(0^+) + a_1 \underbrace{D^{N-2} h_A(0^+)}_{0} + \ldots + a_{N-1} \underbrace{h_A(0^+)}_{0} = 1$$

$$D^{N-1} h_A(0^+) = 1$$

što predstavlja N–ti početni uvjet

Impulsni odziv

- postupak određivanja početnih uvjeta u $t = 0^+$ ilustriramo blokovskim dijagramom (donji dio slike (12)) sustava trećeg reda



Slika 13: Određivanje početnih uvjeta u izračunu impulsnog odziva

Samostalni rad studenta

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava

Model ulaz–izlaz
Homogena diferencijalna jednadžba
Početni uvjeti
Odziv nepobuđenog sustava
Odziv pobuđenog sustava
Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala
Impulsni odziv

Samostalni

Impulsni odziv

- zaključno, N početnih uvjeta su $h_A(0^+) = h'_A(0^+) = h''_A(0^+) = \ldots = h_A^{(N-2)}(0^+) = 0$ i $h_A^{(N-1)}(0^+) = 1$
- njihovim poznavanjem određuje se rješenje jednadžbe

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h_A(t) = \delta(t) \quad (24)$$

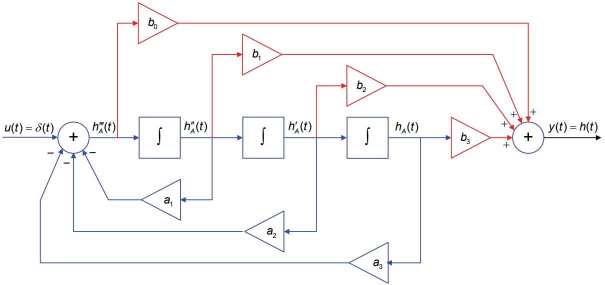
a impulsni odziv zadanog sustava iz jednadžbe

$$h(t) = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) h_A(t) =$$
$$= \sum_{m=0}^{M} (b_{N-m} D^m) h_A(t) \quad (25)$$

- posebnu pozornost treba posvetiti slučaju kada je $N = M$, dakle, kada je $b_0 \neq 0$, jer se tada jednadžba 25 malo modificira

Impulsni odziv

- razmotrimo li primjer sustava trećeg reda za koji je $N = M$



- $h_A(t)$ je rješenje homogene jednadžbe 24 za $t \geq 0^+$
- za $t = 0$ je, vidi sliku, $h(t) = b_0\delta(t)$, pa je potpuni izraz za izračun $h(t)$

$$h(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{M}(b_{N-m}D^m)h_A(t), & t \geq 0, \quad N > M \\ b_0\delta(t) + \sum_{m=0}^{M}(b_{N-m}D^m)h_A(t), & t \geq 0, \quad N = M \end{cases} \tag{26}$$

Impulsni odziv – primjer 1

- određuje se impulsni odziv sustava

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u''(t) + u'(t) + u(t)$$

- impulsni odziv, $h(t)$, je odziv sustava na $u(t) = \delta(t)$ uz $h(0^-) = h'(0^-) = 0$
- impulsni odziv zadovoljava početnu jednadžbu

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = \delta''(t) + \delta'(t) + \delta(t)$$

- kako je $N = M = 2$ i $b_0 = b_1 = b_2 = 1$ slijedi iz jednadžbe (26)

$$h(t) = \delta(t) + h''_A(t) + h'_A(t) + h_A(t)$$

gdje je $h_A(t)$ rješenje jednadžbe

$$h''_A(t)+2h'_A(t)+h_A(t) = \delta(t), \qquad h_A(0^+) = 0, \quad h'_A(0^+) = 1$$

Impulsni odziv – primjer 1

- karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije su

$$s^2 + 2s + 1 = 0, \qquad s_1 = s_2 = -1$$

- pa je $h_A(t)$

$$h_A(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz početnih vrijednosti $h_A(0^+) = 0$ i $h'_A(0^+) = 1$, pa iz

$$h_A(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t}$$
$$h'_A(t) = s_1 c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_1 t} + s_1 c_2 t e^{s_1 t}$$

za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 \\ 1 &= s_1 c_1 + c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

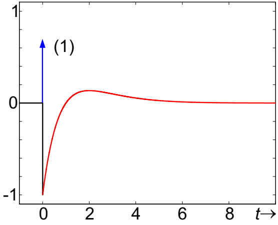
Impulsni odziv – primjer 1

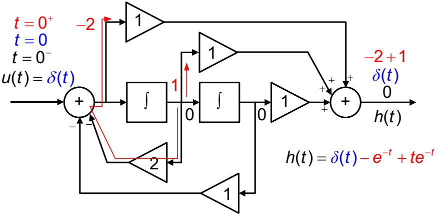
- rješenje za $h_A(t)$ je

$$h_A(t) = te^{-t}$$

- impulsni odziv sustava je, iz

$$\begin{aligned} h(t) &= \delta(t) + h_A''(t) + h_A'(t) + h_A(t) = \\ &= \delta(t) + (-e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}) + (e^{-t} - te^{-t}) + te^{-t} \\ &= \delta(t) - e^{-t} + te^{-t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$





Samostalni rad studenata

- slijedi niz primjera koje su priređeni kao dodatak predavanom gradivu
- preporuča se studentima da prouče ove dodatne materijale

Zadatak 1

- određuje se impulsni odziv sustava

$$y''(t) + 0.2y'(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

- impulsni odziv, $h(t)$, je odziv sustava na $u(t) = \delta(t)$ uz $h(0^-) = h'(0^-) = 0$
- za $t \geq 0^+$ odziv sustava je jednak rješenju homogene jednadžbe a kako je $b_0 = b_1 = 0$ slijedi da je $h(t) = h_A(t)$, pa je impulsni odziv

$$h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

- konstante se c_1 i c_2 određuju iz $h(0^+)$ i $h'(0^+)$
- sukladno prije pokazanom vrijedi $h(0^+) = 0$ i $h'(0^+) = 1$

Zadatak 1

- za zadani su sustav karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$s^2 + 0.2s + 0.16 = 0 \quad \Rightarrow s_{1,2} = -0.1 \pm j0.3873,$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz početnih vrijednosti $h(0^+) = 0$ i $h'(0^+) = 1$, pa iz

$$\begin{aligned} h(t) &= c_{01} e^{s_1 t} + c_{02} e^{s_2 t} \\ h'(t) &= s_1 c_{01} e^{s_1 t} + s_2 c_{02} e^{s_2 t} \end{aligned}$$

za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= s_1 c_1 + s_2 c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= -j1.2910 = 1.2910 e^{-j1.5708} \\ c_2 &= +j1.2910 = 1.2910 e^{j1.5708} \end{aligned}$$

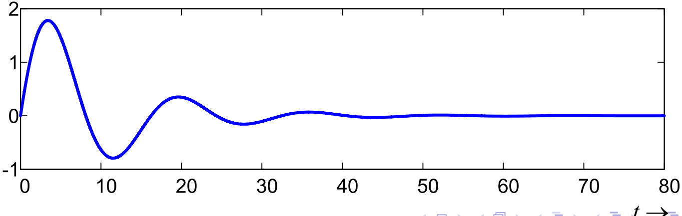
Zadatak 1

- impulsni odziv sustava je

$$h(t) = 1.2910e^{-j1.5708}e^{-0.1t}e^{j0.3873t} + \\ + 1.2910e^{j1.5708}e^{-0.1t}e^{-j0.3873t}$$

odnosno

$$h(t) = 2.582e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 1.5708) = \\ = 2.582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)$$



Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- u uvodnom predavanju pokazano je kako su modeli sustava ovjesa automobila, glazbene vilice ili R-L-C električke mreže, dani diferencijalnom jednadžbom oblika

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_2 u(t)$$

- odnosno

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$$

gdje su ζ – stupanj prigušenja, Ω_n – neprigušena prirodna frekvencija i A konstanta

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- sustav pobuđujemo jediničnim impulsom pa je jednadžba

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2\delta(t)$$

- za $t > 0$ jednadžba postaje homogena jednadžba pa je za $t > 0$ odziv sustava na jedinični impuls jednak rješenju homogene jednadžbe
- vlastite se frekvencije izračunavaju iz karakteristične jednadžbe

$$s^2 + 2\zeta\Omega_n s + \Omega_n^2 = 0$$

i iznose

$$s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ i } s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

pa je homogeno rješenje

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad t > 0$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- zadani početni uvjeti $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ trebaju biti definirani neposredno prije djelovanja pobude koja u ovom slučaju djeluje u $t = 0$ i
- konstante c_1 i c_2 određujemo za $t = 0^+$ pa je potrebno odrediti $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$ uzimajući u obzir $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ i djelovanje pobude
- početne uvjete $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$ formalno nalazimo sljedećim postupkom

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- integriramo dva puta polaznu diferencijalnu jednadžbu[11]

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2\delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{t} \ddot{y}(\tau)d\tau + 2\zeta\Omega_n \int_{0^-}^{t} \dot{y}(\tau)d\tau + \Omega_n^2 \int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau = A\Omega_n^2 \int_{0^-}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{27}$$

$$\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} \ddot{y}(\lambda)d\lambda d\tau + 2\zeta\Omega_n \int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} \dot{y}(\lambda)d\lambda d\tau +$$

$$+ \Omega_n^2 \int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda)d\lambda d\tau = A\Omega_n^2 \int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} \delta(\lambda)d\lambda d\tau \tag{28}$$

[11] jednadžba je oblika $y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_2 u(t)$, pa zbog činjenice da je $b_0 = 0$ u odzivu $y(t)$ se ne može pojaviti $\delta(t)$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $t = 0^+$ jednadžba (27) prelazi u

$$\dot{y}(0^+) - \dot{y}(0^-) + 2\zeta\Omega_n[y(0^+) - y(0^-)] + \Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau}_{=0} =$$

$$= A\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau}_{=1} \qquad (29)$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $t = 0^+$ jednadžba (28) prelazi u

$$y(0^+) - y(0^-) + 2\zeta\Omega_n \underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} \dot{y}(\lambda) d\lambda d\tau}_{=0} +$$

$$+\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda) d\lambda d\tau}_{=0} = A\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} \delta(\lambda) d\lambda d\tau}_{=0} \qquad (30)$$

- slijedi

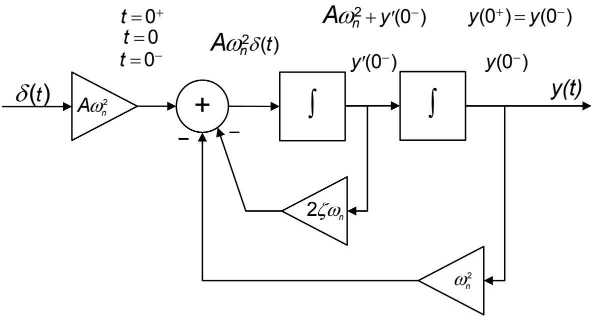
$$y(0^+) = y(0^-)$$

- a iz ovoga i iz jednadžbe (29) slijedi

$$\dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- do istog zaključka možemo doći uvidom u blok dijagram



Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- iz

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad t > 0$$

za $t = 0^+$

$$\begin{aligned} y(0^+) &= c_1 + c_2 = y(0^-) \\ \dot{y}(0^+) &= s_1 c_1 + s_2 c_2 = \dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2 \end{aligned}$$

- izračunavamo

$$c_1 = \frac{y(0^-)s_2 - (\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2)}{s_2 - s_1}$$

$$c_2 = \frac{(\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1}$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- odziv sustava II reda, s početnim uvjetima $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$, pobuđenog s jediničnim impulsom je

$$y_{imp}(t) = \frac{y(0^-)s_2 - (\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2)}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \\ + \frac{(\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

- za $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$ odziv na impuls zove se impulsni odziv i označava $h(t)$

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 13.

Profesor Branko Jeren

Samostalni rad studenta
Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih sustava
Samostalni rad studenata
Zadaci
Utjecaj karakterističnih frekvencija na totalni odziv

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ i $s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{-j2\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} +$$

$$+\frac{A\Omega_n^2}{-j2\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}$$

- odnosno

$$h(t) = \frac{\Omega_n A}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\Omega_n t} \sin[(\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t], \quad t \geq 0$$

Impulsni odziv – primjer

- određuje se impulsni odziv sustava (prije dani Zadatak 1)

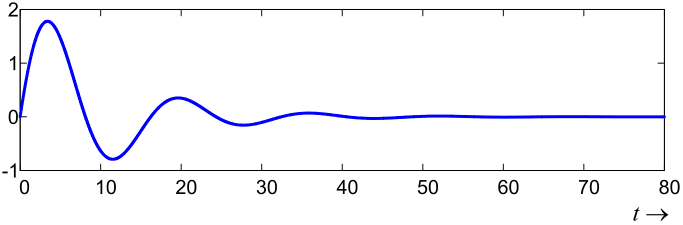
$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = 6.25 \cdot 0.16u(t)$$

$$\zeta = 0.25, \quad \Omega_n = 0.4, \quad A = 6.25$$

- iz prethodnog izraza za $h(t)$ slijedi

$$h(t) = 2.582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)$$

što je rezultat identičan onom iz zadatka 1



Zadatak 2

- određuje se odziv vremenski kontinuiranog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

na pobudu

$$u(t) = 0.64 + \sin(t)$$

i uz zadane početne uvjete $y(0^-) = -3$ i $\dot{y}(0^-) = -1$

- iz karakteristične jednadžbe

$$s^2 + 0.2s + 0.16 = 0$$

karakteristične frekvencije su

$$s_1 = -0.1 + j0.3873 \text{ i } s_2 = -0.1 - j0.3873$$

Zadatak 2

- partikularno rješenje je oblika

$$y_p(t) = K_1 + K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t)$$

a određuju se

$$\dot{y}_p(t) = K_2 \cos(t) - K_3 \sin(t)$$
$$\ddot{y}_p(t) = -K_2 \sin(t) - K_3 \cos(t)$$

- partikularno rješenje mora zadovoljiti polaznu jednadžbu

$$- K_2 \sin(t) - K_3 \cos(t) + 0.2K_2 \cos(t) - 0.2K_3 \sin(t) + \\ + 0.16K_1 + 0.16K_2 \sin(t) + 0.16K_3 \cos(t) = 0.64 + sin(t)$$

$$0.16K_1 + (-0.84K_2 - 0.2K_3) \sin(t) + \\ + (0.2K_2 - 0.84K_3) \cos(t) = 0.64 + sin(t)$$

Zadatak 2

- koeficijente K_1, K_2, K_3 određujemo metodom neodređenih koeficijenata, pa iz

$$0.16K_1 = 0.64 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 4$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= -0.84K_2 - 0.2K_3 \\ 0 &= 0.2K_2 - 0.84K_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_2 &= -1.1266 \\ K_3 &= -0.2682 \end{aligned}$$

- totalno rješenje je, za $t \geq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + y_p(t) = \\ &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + K_1 + K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t) \end{aligned}$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$
- kako je za zadanu jednadžbu $b_0 = b_1 = 0$ i $b_2 = 1$ slijedi, iz jednadžbi (10) i (11),

$$y(0^+) = y(0^-) = -3 \text{ i } \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = -1$$

Zadatak 2

- iz

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + K_1 + K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t)$$
$$\dot{y}(t) = s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t} + K_2 \cos(t) - K_3 \sin(t)$$

za $t = 0^+$

$$\left.\begin{array}{l} -3 = c_1 + c_2 + K_1 + K_3 \\ -1 = s_1 c_1 + s_2 c_2 + K_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = -3 - K_1 - K_3 \\ s_1 c_1 + s_2 c_2 = -1 - K_2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = -3 - 4 + 0.2682 \\ (-0.1 + j0.3873) c_1 + (-0.1 - j0.3873) c_2 = -1 + 1.1266 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$c_1 = -3.3659 + j0.7056 = 3.4391 e^{j2.9349}$$
$$c_2 = -3.3659 - j0.7056 = 3.4391 e^{-j2.9349}$$

Zadatak 2

- totalno rješenje je

$$y(t) = 3.4391 e^{j2.9349} e^{-0.1t} e^{j0.3873t} + \\ + 3.4391 e^{-j2.9349} e^{-0.1t} e^{-j0.3873t} + \\ + 4 - 1.1266 \sin(t) - 0.2682 \cos(t), \quad t \geq 0$$

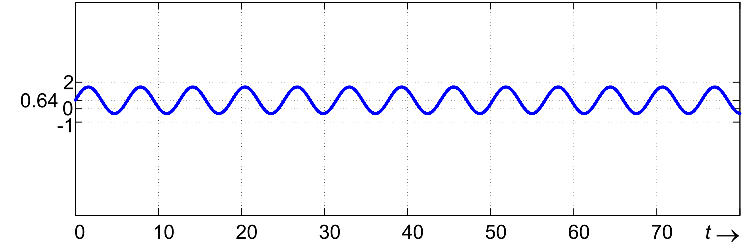
$$y(t) = \underbrace{6.8782 e^{-0.1t} \cos(0.3873t + 2.9349)}_{\text{prijelazni odziv – vlastitim frekvencijama}} + \\ + \underbrace{4 + 1.1581 \cos(t + 1.8045)}_{\text{prisilni odziv – frekvencijom pobude}}, \quad t \geq 0$$

provjera za $t = 0$

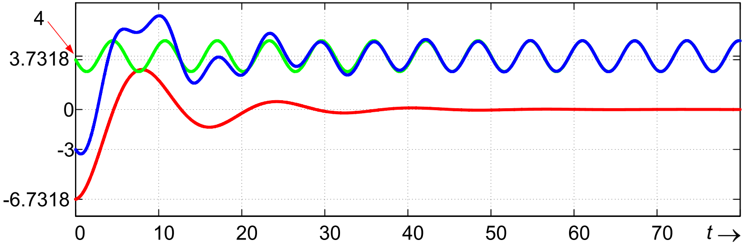
$$y(0) = 6.8782 \cos(2.9349) + 4 + 1.1581 \cos(1.8045) = \\ = -6.7318 + 4 - 0.2682 = -3$$

Zadatak 2

$$u(t) = 0.64 + \sin(t)$$



$$y(t) = 6.8782\cos(0.3873t + 2.9349) + 4 + 1.1581\cos(t + 1.8045)$$



Utjecaj karakterističnih frekvencija na totalni odziv

- uvidom u izraz za totalni odziv stabilnog sustava evidentno je kako prirodni odziv trne s vremenom i pogrešan bi bio zaključak kako time sasvim prestaje utjecaj vlastitih frekvencija na totalni odziv
- treba podsjetiti kako je partikularno rješenje izračunavano metodom neodređenog koeficijenata i kako je u određivanju koeficijenata partikularnog rješenja korištena cjelokupna diferencijalna jednadžba pa su time, posredno, i karakteristične frekvencije utjecale na partikularno rješenje
- utjecaj karakterističnih frekvencija u totalnom odzivu moguće je ilustrirati sljedećim razmatranjem

Utjecaj karakterističnih frekvencija na totalni odziv

- razmotrimo sustav prvog reda, čiji je impulsni odziv $h(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t)$, pobuđen s $u(t) = e^{\zeta t}\mu(t)$
- odziv kauzalnog mirnog sustava je

$$y(t) = h(t) * u(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t) * e^{\zeta t}\mu(t)$$

$$y(t) = \int_0^t Ae^{s_1(t-\tau)}e^{\zeta\tau}d\tau = Ae^{s_1 t}\int_0^t e^{(\zeta-s_1)\tau}d\tau$$

$$y(t) = \frac{A}{\zeta - s_1}\left[e^{\zeta t} - e^{s_1 t}\right] \qquad (31)$$

- očigledno je kako je za pobude čija je frekvencija bliža karakterističnoj frekvenciji veća amplituda odziva
- ovaj zaključak se jednostavno proširuje na sustave N–tog reda jer je impulsni odziv linearna kombinacija N eksponencijala koje titraju karakterističnim frekvencijama

Rezonancija

- jednadžba (31) potiče da se razmotri slučaj kada je frekvencija pobude identična jednoj od karakterističnih frekvencija sustava
- i ovdje se razmatranje započinje za sustav prvog reda čiji je impulsni odziv $h(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t)$
- sustav se pobuđuje eksponencijalom neznatno različite frekvencije od karakteristične frekvencije $u(t) = e^{(s_1-\epsilon)t}\mu(t)$
- odziv ovog sustava, opet korištenjem konvolucijskog integrala, je

$$y(t) = \frac{A}{\epsilon}\left[e^{s_1 t} - e^{(s_1-\epsilon)t}\right] = Ae^{s_1 t}\left(\frac{1-e^{-\epsilon t}}{\epsilon}\right)$$

Rezonancija

- očigledno je kako se u

$$y(t) = Ae^{s_1 t}\left(\frac{1 - e^{-\epsilon t}}{\epsilon}\right),$$

  za $\epsilon \longrightarrow 0$, i brojnik i nazivnik približuju nuli
- primjenom L'Hôpital-ovog pravila slijedi

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} y(t) = Ate^{s_1 t}$$

- odziv sadrži faktor t i za $t \rightarrow \infty$ amplituda odziva bi[12] također težila prema ∞
- ova pojava se naziva rezonancijom i za opaziti je da je to kumulativni, a ne trenutni, proces koji se razvija s t

[12] koristi se kondicional jer za s_1 u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine se to neće dogoditi

Rezonancija

- za s_1 u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine, rezonancija postoji, ali se ne stigne razviti jer se eksponencijala prigušuje brže od linearnog porasta t
- za s_1 na imaginarnoj osi, ili u desnoj poluravnini kompleksne ravnine, pojava rezonancije je očigledna
- kasnije će biti detaljno razmotrena rezonancija sustava drugog reda, čije su vlastite frekvencije $s_{1,2} = j\Omega_1$, a koji je pobuđen sinusoidalnim signalom iste frekvencije Ω_1
- ovdje se daje samo odziv tog sustava

Rezonancija

- pojavu rezonancije analiziramo na primjeru kontinuiranog sustava II reda i to preko njegova odziva
- odziv mirnog sustava možemo izračunati pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- prije je izveden izraz za impulsni odziv sustava drugog reda

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

Rezonancija

- pojavu rezonancije ilustriramo na primjeru sustava[13]

$$\ddot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$$

- vlastite frekvencije sustava su $s_1 = j\Omega_n$ i $s_2 = -j\Omega_n$ pa je impulsni odziv

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} = \Omega_n A \frac{e^{j\Omega_n t} - e^{-j\Omega_n t}}{2j}$$

- pobuđen sinusnim signalom frekvencije identične vlastitoj frekvenciji sustava

$$u(t) = \sin(\Omega_n t) = \frac{e^{j\Omega_n t} - e^{-j\Omega_n t}}{2j}$$

[13] pretpostavljamo $\zeta = 0$ u jednadžbi $\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$

Rezonancija

- odziv mirnog kauzalnog sustava uz pobudu zadanu za $t \geq 0$ izračunavamo konvolucijom

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \\
&= \int_0^t \frac{\Omega_n A}{2j}[e^{j\Omega_n\tau} - e^{-j\Omega_n\tau}]\frac{1}{2j}[e^{j\Omega_n(t-\tau)} - e^{-j\Omega_n(t-\tau)}]d\tau = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\int_0^t [e^{j\Omega_n t} - e^{j\Omega_n t}e^{-j2\Omega_n\tau} - e^{-j\Omega_n t}e^{j2\Omega_n\tau} + e^{-j\Omega_n t}]d\tau = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\{e^{j\Omega_n t}\int_0^t d\tau - e^{j\Omega_n t}\int_0^t e^{-j2\Omega_n\tau}d\tau - \\
&\qquad - e^{-j\Omega_n t}\int_0^t e^{j2\Omega_n\tau}d\tau + e^{-j\Omega_n t}\int_0^t d\tau\} = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\{t(e^{j\Omega_n t} + e^{-j\Omega_n t}) + \frac{e^{-j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} - \frac{e^{j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} - \frac{e^{j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} + \frac{e^{-j\Omega_n t}}{j2\Omega_n}\} =
\end{aligned}
$$

$$
y(t) = -\frac{\Omega_n A}{2}t\cos(\Omega_n t) + \frac{A}{2}\sin(\Omega_n t), \qquad t \geq 0
$$

- rezonancija je prema tome kumulativna pojava i ona se razvija proporcionalno s t

Odziv pri rezonanciji

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- intuitivno se može zaključiti kako sustavi trebaju neko vrijeme kako bi potpuno reagirali na neku pobudu i to vrijeme možemo nazvati vrijeme odziva ili vremenska konstanta sustava
- ako razmotrimo impulsni odziv sustava možemo zaključiti da, iako je pobuda $\delta(t)$ trenutna (trajanja nula), impulsni odziv je trajanja[14] T_h, dakle sustav treba neko vrijeme da potpuno odgovori na pobudu
- ovu činjenicu možemo ilustrirati sljedećim primjerom

[14] strogo govoreći impulsni odziv je beskonačnog trajanja jer se kompleksne eksponencijale asimptotski približavaju nuli za $t \rightarrow \infty$, no nakon nekog vremena vrijednosti impulsnog odziva su zanemarive pa ga možemo smatrati konačnim

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- usporedimo impulsne odzive sljedeća dva sustava, te njihove odzive na jedinični skok
- diferencijalna jednadžba, karakteristične frekvencije i impulsni odziv prvog sustava su

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t)\\
&s_1 = -0.1000 + j0.3873 = 0.4e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.1000 - j0.3873 = 0.4e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.2000\\
&h_1(t) = 6.455e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 2.8889) + 6.25e^{-0.2t}
\end{aligned}
$$

- isto za drugi sustav

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.2y''(t) + 0.05y'(t) + 0.004y(t) = 0.25u(t)\\
&s_1 = -0.0500 + j0.1936 = 0.2e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.0500 - j0.1936 = 0.2e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.1000\\
&h_2(t) = 6.455e^{-0.05t}\cos(0.1936t - 2.8889) + 6.25e^{-0.1t}
\end{aligned}
$$

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

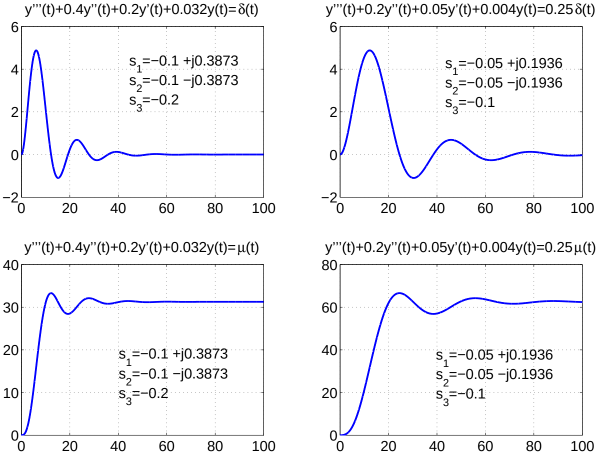
- usporedimo odzive na jedinični skok za iste sustave
- diferencijalna jednadžba,karakteristične frekvencije i odziv na jedinični skok prvog sustava su

$$
\begin{aligned}
& y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t) \\
& s_1 = -0.1000 + j0.3873 = 0.4e^{j1.8235} \\
& s_2 = -0.1000 - j0.3873 = 0.4e^{-j1.8235} \\
& s_3 = -0.2000 \\
& y_{\mu 1}(t) = -16.1374e^{-0.1t}\sin(0.3873t) - 31.25e^{-0.2t} + 31.25
\end{aligned}
$$

- isto za drugi sustav

$$
\begin{aligned}
& y'''(t) + 0.2y''(t) + 0.05y'(t) + 0.004y(t) = 0.25u(t) \\
& s_1 = -0.0500 + j0.1936 = 0.2e^{j1.8235} \\
& s_2 = -0.0500 - j0.1936 = 0.2e^{-j1.8235} \\
& s_3 = -0.1000 \\
& y_{\mu 2}(t) = -32.2749e^{-0.05t}\sin(0.1936t) - 62.5e^{-0.1t} + 62.5
\end{aligned}
$$

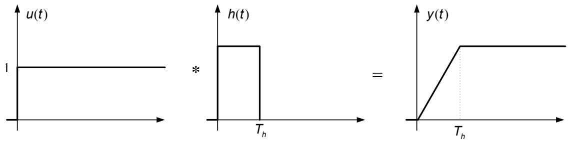
Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta



Slika 15: Impulsni odziv i odziv na jedinični skok

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- očigledno je da je vrijeme odziva sustava ovisno o vrijednostima (položaju) karakterističnih frekvencija
- očigledno je, također, kako je za "širi" impulsni odziv vrijeme odziva veće
- ovo možemo dodatno pojasniti još jednostavnijim primjerom
- neka je impulsni odziv, pravokutni impuls trajanja T_h, i neka je sustav pobuđen jediničnim skokom
- odziv sustava će biti jednak njihovoj konvoluciji



Slika 16: Vrijeme odziva