Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

3. travnja 2013.

Digitalna obradba kontinuiranih signala

- digitalna obradba vremenski kontinuiranih signala sastoji se od tri osnovna koraka
    - pretvorba vremenski kontinuiranog signala u vremenski diskretan signal – očitavanje signala
    - obradba vremenski diskretnog signala
    - pretvorba obrađenog vremenski diskretnog signala u vremenski kontinuiran signal – rekonstrukcija signala
- ovdje se pokazuje pod kojim uvjetima treba diskretizirati vremenski kontinuirani signal kako bi se mogao obrađivati kao vremenski diskretan signal
- također se pokazuje mogućnost rekonstrukcije vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

Očitavanje vremenski kontinuiranog signala

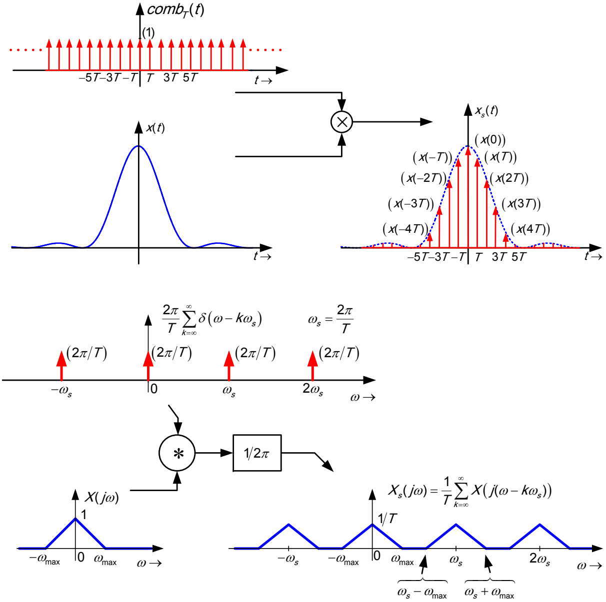
Očitavanje vremenski kontinuiranog signala

- aperiodični vremenski diskretan signal možemo generirati očitavanjem vremenski kontinuiranog aperiodičnog signala
- pokazuje se da je postupak očitavanja ekvivalentan amplitudnoj modulaciji periodičnog niza impulsa
- očitavani signal $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, množi se s nizom Diracovih δ impulsa kako bi se generirao novi signal $x_s(t)$

$$x_s(t) = x(t) comb_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

- očitavanje, ili vremensku diskretizaciju, vremenski kontinuiranog signala možemo interpretirati kao pridruživanje, funkciji x, niza impulsa čiji je intenzitet proporcionalan njezinim vrijednostima na mjestu impulsa

Očitavanje vremenski kontinuiranog signala



Spektar očitanog signala

- određuje se spektar signala $x_s(t) = x(t)comb_T(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
- umnošku signala u vremenskoj domeni odgovara konvolucija njihovih spektara (svojstvo konvolucije), a za $\forall w \in \mathbb{R}$, vrijedi $\delta(w - w_1) * f(w) = f(w - w_1)$, vidi sis12_Cj03 prikaznica 30, pa uz prije izvedeno

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad CTFT\{comb_T(t)\} = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

slijedi $CTFT\{x_s(t)\} = X_s(j\omega)$

$$X_s(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) * \frac{1}{2\pi}X(j\omega) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T})) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega - k\omega_s))$$

Vremenska diskretizacija očitavanjem kontinuiranog signala

- zaključujemo kako se očitavanjem kontinuiranog signala $x(t)$ čiji je spektar $X(j\omega)$, dobiva signal $x_s(t)$ čiji je spektar periodičan i vrijedi

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T})) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

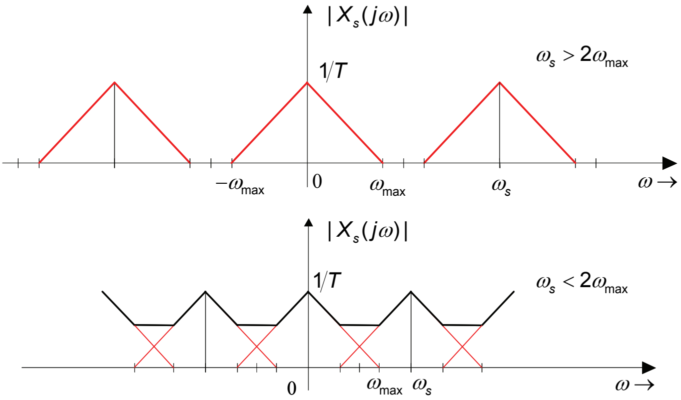
  dakle, spektar očitanog signala $X_s(j\omega)$ je periodično ponavljani spektar $X(j\omega)$ kontinuiranog signala

- pretpostavimo da je spektar $X(j\omega)$ frekvencijski ograničen

$$X(j\omega) = 0 \text{ za } |\omega| > \omega_{max}$$

- različite frekvencije očitavanja signala $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ mogu u spektru $X_s(j\omega)$ izazvati različite rezultate zavisno od toga je li $\omega_s - \omega_{max} > \omega_{max} \Rightarrow \omega_s > 2\omega_{max}$ ili $\omega_s - \omega_{max} < \omega_{max} \Rightarrow \omega_s < 2\omega_{max}$

Vremenska diskretizacija očitavanjem kontinuiranog signala



- za frekvenciju očitavanja $\omega_s < 2\omega_{max}$, na donjoj slici, javlja se preklapanje ponavljajućih sekcija spektra, i ta se pojava naziva, prema engleskoj terminologiji, aliasing

Shannonov teorem očitavanja

- vremenski diskretni signal smatramo ekvivalentnim kontinuiranom ako je moguće rekonstruirati izvorni signal $x(t)$, iz očitanog $x_s(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, odnosno, ako se iz spektra $X_s(j\omega)$ može dobiti originalni $X(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- postupak rekonstrukcije pretpostavlja izdvajanje osnovne sekcije spektra filtriranjem a to će biti moguće samo ako je spektar $X(j\omega)$ ograničen na ω_{max} te ako je frekvencija očitavanja $\omega_s > 2\omega_{max}$
- gore kazano predstavlja Shannonov teorem i možemo ga precizno iskazati kao:[1]

> Vremenski kontinuirani signal $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, s frekvencijama ne većim od f_{max}, može biti egzaktno rekonstruiran iz svojih očitaka $x(n) \triangleq x(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, ako je očitavanje provedeno s frekvencijom $f_s = \frac{1}{T}$ koja je veća od $2f_{max}$

[1] teorem je iskazan, kao što je uobičajeno, frekvencijom u Hz uzimajući u obzir $\omega = 2\pi f$

Primjer očitavanja aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala

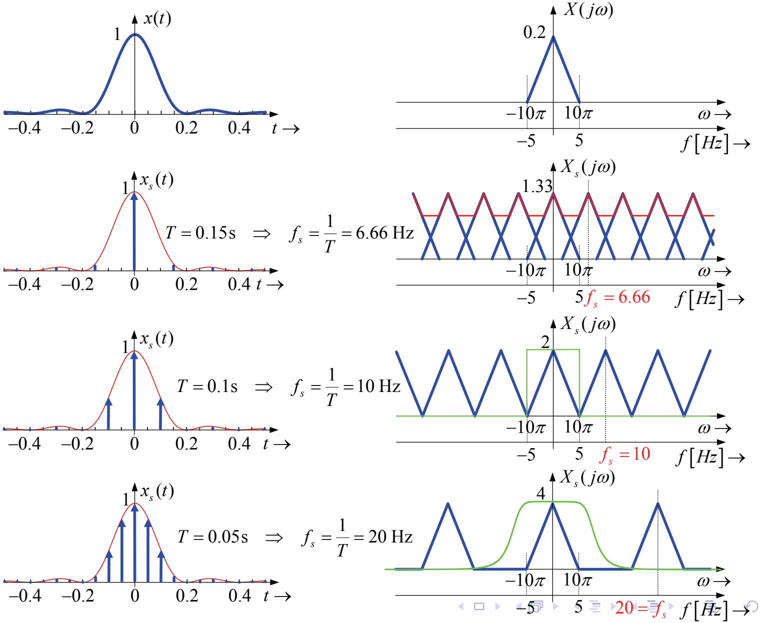
- očitava se signal (slika na narednoj prikaznici)

$$x(t) = \left[\frac{\sin \frac{\tau t}{2}}{\frac{\tau t}{2}} \right]^2$$

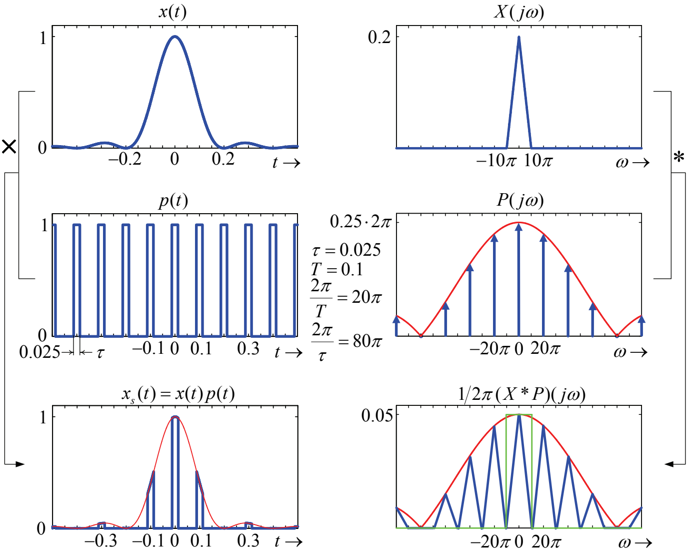
uz $\tau = 10\pi$ i $T = 0.15; 0.1; 0.05;$

- minimalna frekvencija očitavanja za koju je moguća rekonstrukcija signala x iz njegovih očitaka x_s naziva se Nyquistova frekvencija
- za ovaj primjer Nyquistova frekvencija iznosi 10 Hz
- očitavanje s $T = 0.15\,$s, što znači s frekvencijom očitavanja $f_s = 6.66\,$Hz, je slučaj podočitavanja i dolazi do pojave frekvencijskog aliasinga
- slučaj očitavanja s $T = 0.05$ s, dakle $f_s = 20$, predstavlja tzv. nadočitavanje i omogućuje rekonstrukciju signala primjenom realnih filtara

Očitavanje vremenski kontinuiranog signala



Primjer očitavanja pravokutnim pulsevima



korištenjem idealnog filtra moguća potpuna rekonstrukcija kontinuiranog signala

Primjer očitavanja pravokutnim impulsima

$$P(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T});$$ vidi sis12_Cj06 prikaznice 6-9

$$P_k = \frac{\tau}{T} \frac{\sin \frac{k\pi\tau}{T}}{\frac{k\pi\tau}{T}} = 0.25 \frac{\sin(0.25k\pi)}{0.25k\pi}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)p(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \Psi))P(j\Psi)\, d\Psi$$

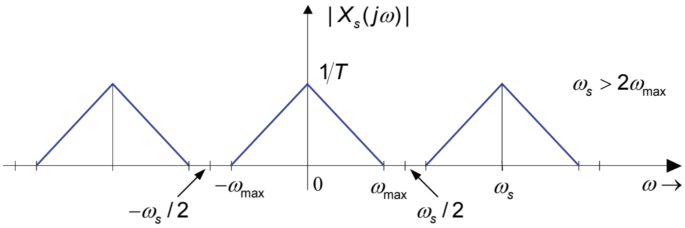
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \Psi)) \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \delta(\Psi - k\frac{2\pi}{T}) \right] d\Psi$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \Psi))\delta(\Psi - k\frac{2\pi}{T})\, d\Psi \right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T})) = .25 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 0.25k\pi}{0.25k\pi} X(j(\omega - 20\pi k))$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

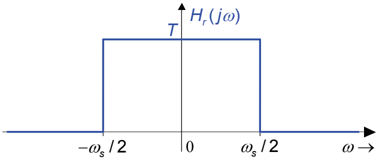


- obnavljanje ili rekonstrukciju vremenski kontinuiranog signala, iz vremenski diskretnog, postižemo izdvajanjem osnovne sekcije spektra $X_s(j\omega)$
- potrebno je filtrirati $X_s(j\omega)$ s tzv. rekonstrukcijskim filtrom frekvencijske karakteristike $H_r(j\omega)$,

$$X_c(j\omega) = X_s(j\omega)H_r(j\omega)$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

- pretpostavimo kako je $H_r(j\omega)$ idealan filtar čija je frekvencijska karakteristika dana na slici



$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

a impulsni odziv[2]

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2} = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

[2] Impulsni odziv se definira kao odziv sustava na jedinični impuls, i detaljno razmatra kasnije. Ovdje kažimo kako se impulsni odziv može odrediti kao inverzna Fourierova transformacija frekvencijske karakteristike filtra

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

- neka je frekvencija očitavanja $\omega_s > 2\omega_{max}$, takva da unutar pojasa ponavljanja $(-\omega_s/2, \omega_s/2)$ nema preklapanja sekcija spektra, pa je tada

$$X_c(j\omega) = X(j\omega) = X_s(j\omega)H_r(j\omega)$$

- podsjetimo se da je

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \xleftrightarrow{CTFT} X_s(j\omega),$$

da umnošku u frekvencijskoj domeni odgovara konvolucija u vremenskoj domeni, te da, $\forall t \in \mathbb{R}$, vrijedi[3]

$$f(t) * \delta(t - t_1) = f(t - t_1)$$

[3] Vidi sis12_Cj03 prikaznica 29

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

- zaključujemo:

$$X(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega) \xleftrightarrow{CTFT}$$

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

pa je

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

što znači da je kontinuirani signal $x(t)$ rekonstruiran iz očitaka signala $x(nT)$ interpolacijom s funkcijom

$$\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

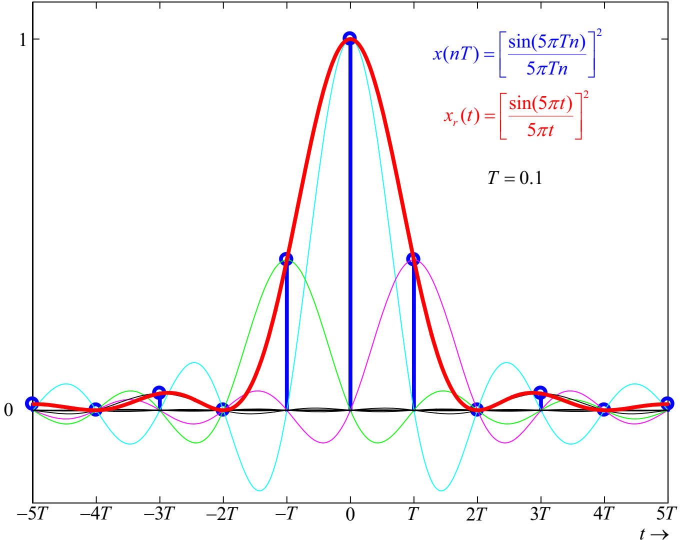
- možemo zaključiti kako je vremenski kontinuirani signal $x(t)$, koji ima frekvencijski omeđen spektar tj. $X(j\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_s/2$, jednoznačno određen trenutnim vrijednostima u jednoliko raspoređenim trenutcima $t_n = nT = n\frac{2\pi}{\omega_s}$
- interpolacijska funkcija predstavlja impulsni odziv idealnog filtra[4]

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

- idealni filtar ima nekauzalan impulsni odziv (odziv na impuls počinje prije nego se impuls pojavio) i prema tome je neostvariv

[4] Ponavljamo: impulsni se odziv definira kao odziv na jedinični impuls, i detaljno razmatra kasnije. Ovdje kažimo kako se impulsni odziv može odrediti kao inverzna Fourierova transformacija frekvencijske karakteristike filtra

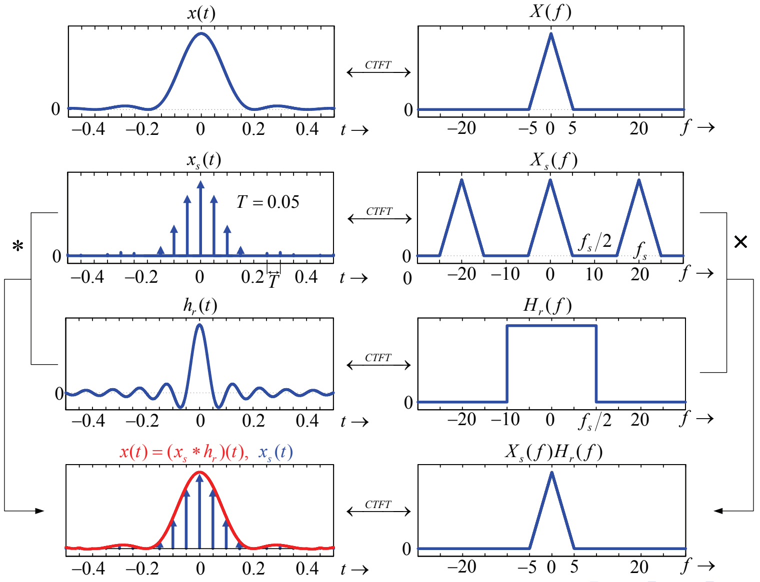
Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – idealnim filtrom

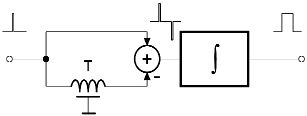
- postupku filtracije odgovara umnožak spektra signala i frekvencijske karakteristike rekonstrukcijskog filtra u frekvencijskoj domeni
- u vremenskoj domeni tome odgovara konvolucija očitanog signala i impulsnog odziva filtra
- naredna prikaznica je ilustracija obnavljanja ili rekonstrukcije vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – idealnim filtrom
- graf u donjem lijevom kutu prikaznice pokazuje rekonstruirani signal (crveno)

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – idealnim filtrom

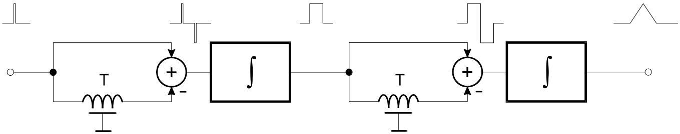


Interpolatori nultog i prvog reda

- interpolatori nultog i prvog reda mogu se jednostavno realizirati realnim sustavima
- interpolator nultog reda dan je blokovskim dijagramom



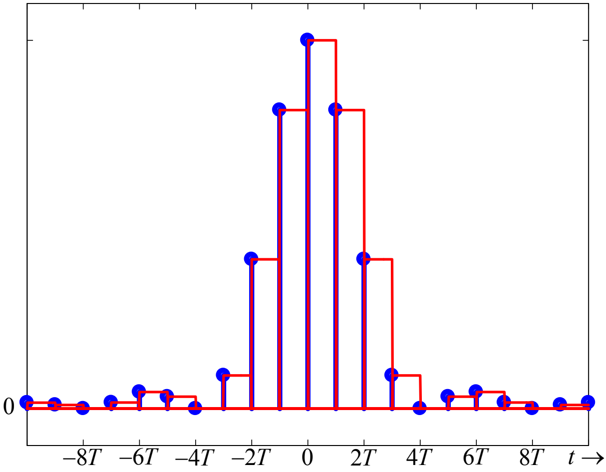
a interpolator prvog reda blokovskim dijagramom



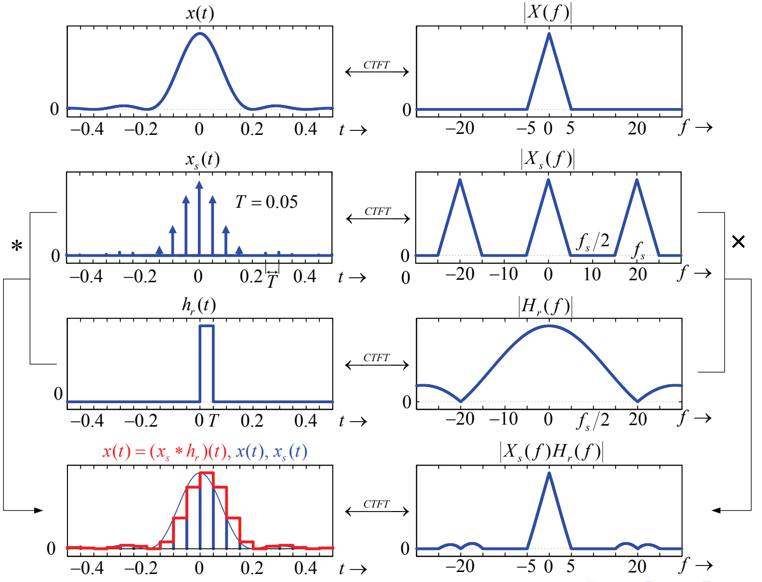
- njihova primjena ilustrirana ja na naredne tri prikaznice

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – interpolator nultog reda

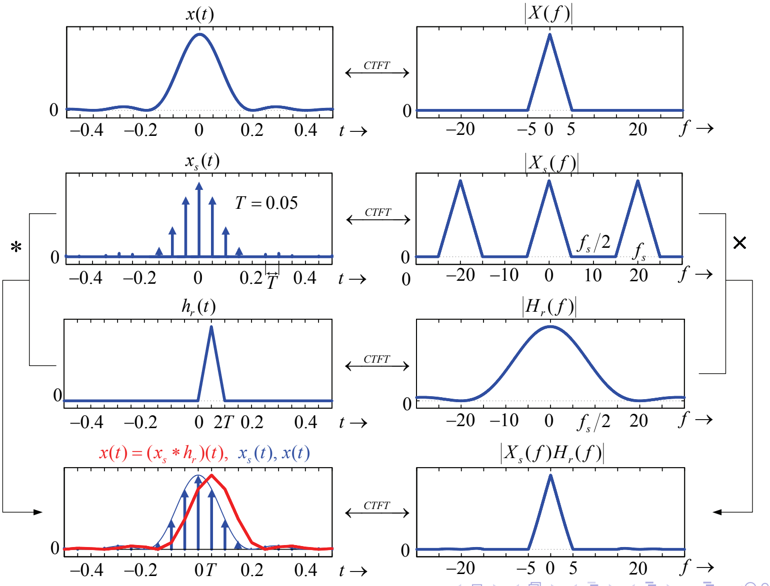
- interpolacija vremenski diskretnog signala interpolatorom nultog reda dana je na slici



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – interpolator nultog reda



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – interpolator prvog reda



Anitaliasing filtar

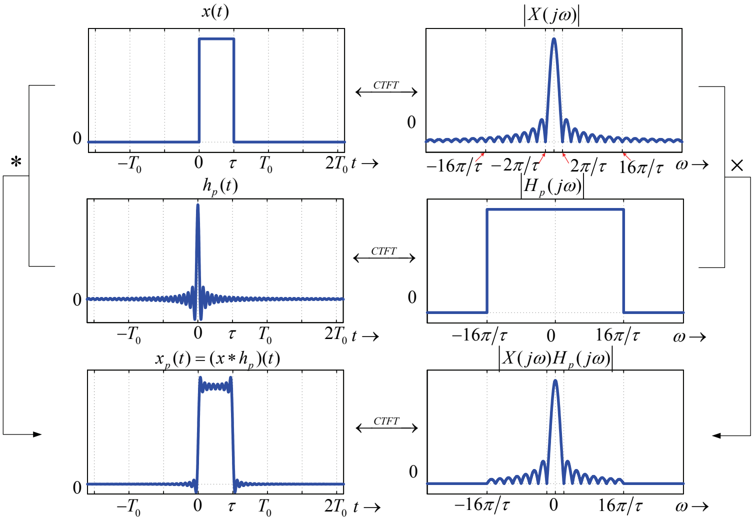
Očitavanje vremenski kontinuiranih signala frekvencijski neomeđenog spektra

- u praksi, mnogi signali nisu frekvencijski omeđeni
- očitavanjem takvih signala pojavljuje se aliasing i time pojava greške kod rekonstrukcije očitanog signala
- da bi se ta greška smanjila potrebno je, prije očitavanja, takve signale frekvencijski omeđiti
- ovo je moguće korištenjem tzv. analognih predfiltara[5] koje obično nazivamo antialiasing filtri
- postupak omeđenja spektra ilustriran je narednim prikaznicama

[5] Analogni predfiltar – filtracija analognog signala prije postupka očitavanja

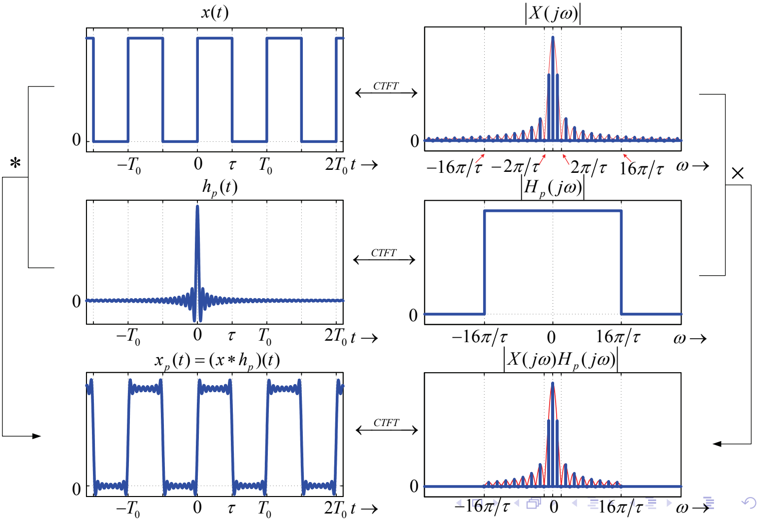
Idealni antialiasing filtar

- pokazuje se omeđenje spektra - analogna predfiltracija idealnim analognim predfiltrom



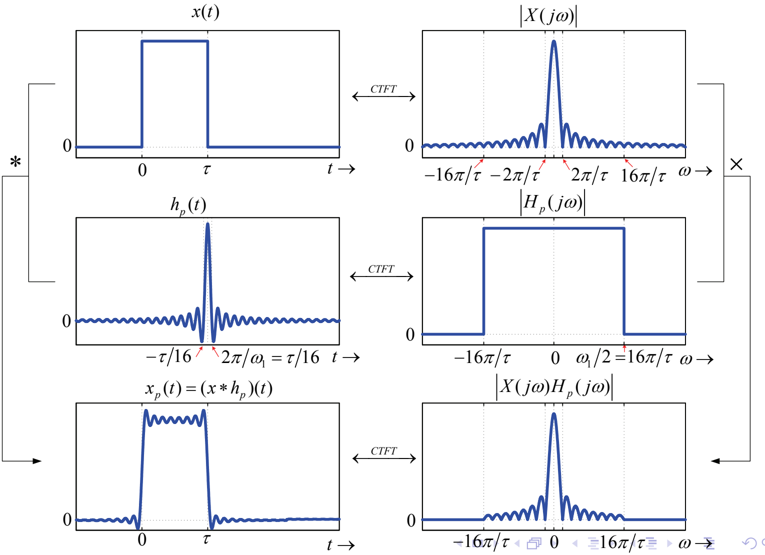
Idealni antialiasing filtar

- analogna predfiltracija, periodičnog signala, idealnim analognim predfiltrom (Gibbsova pojava – pravokutni otvor)



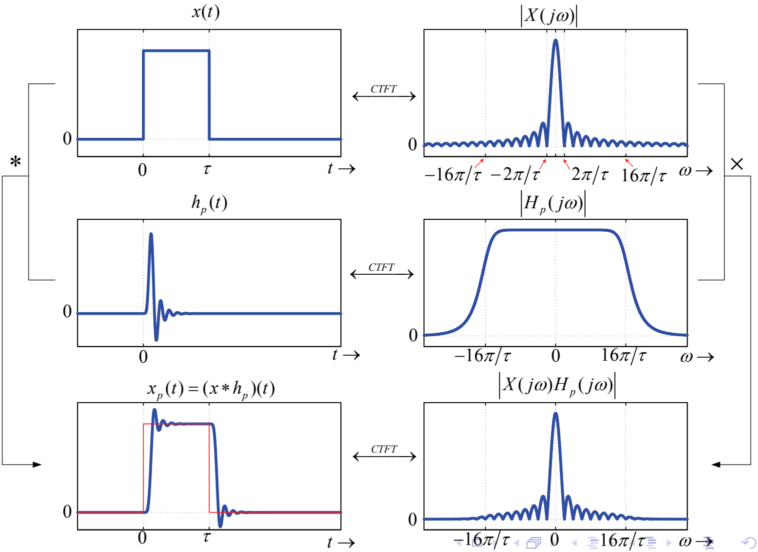
Idealni antialiasing filtar

- razmotrimo još jednom primjenu idealnog antialiasing filtra na aperiodičan vremenski kontinuiran pravokutni impuls



Realni antialiasing filtar

- idealni antialiasing filtar ima nekauzalan impulsni odziv i kao antialiasnig filtre koristimo realne filtre

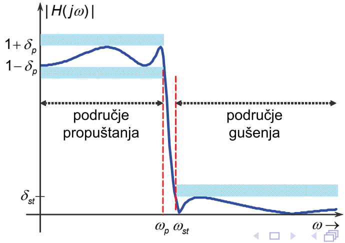


Signali i sustavi
školska godina 2012/2013
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Antialiasing filtri

- aliasing koji se javlja pri očitavanju frekvencijski neomeđenog signala, izbjegava se filtriranjem kontinuiranog signala tzv. antialiasing filtrom
- antialiasing filtri su niskopropusni analogni filtri koji propuštaju komponente spektra frekvencija nižih od pola frekvencije očitavanja, dok više guše
- koriste se realni filtri koji imaju konačnu širinu prijelaznog pojasa frekvencijske karakteristike i konačno gušenje u pojasu gušenja

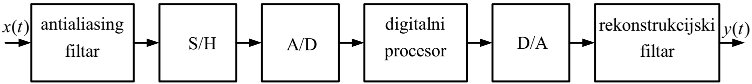


Antialiasing filtri

- zbog konačne širine prijelaznog područja realnih antialiasing filtara potrebno je signal očitavati nešto većom frekvencijom od dvostruke maksimalne frekvencije signala
- kod digitalne obradbe glazbenih signala, čije frekvencijsko područje širine 20kHz osigurava visoko vjernu reprodukciju, frekvencija očitavanja (kod CD npr.) je 44.1 kHz što je dakle nešto više od dvostruke maksimalne frekvencije

Digitalna obradba vremenski kontinuiranog signala

- lanac sklopova potrebnih za digitalnu obradbu vremenski kontinuiranih signala prikazan je blok dijagramom[6]



[6] S/H – sample-and-hold sklop; A/D – digitalno analogni pretvornik; D/A – digitalno analogni pretvornik

Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala

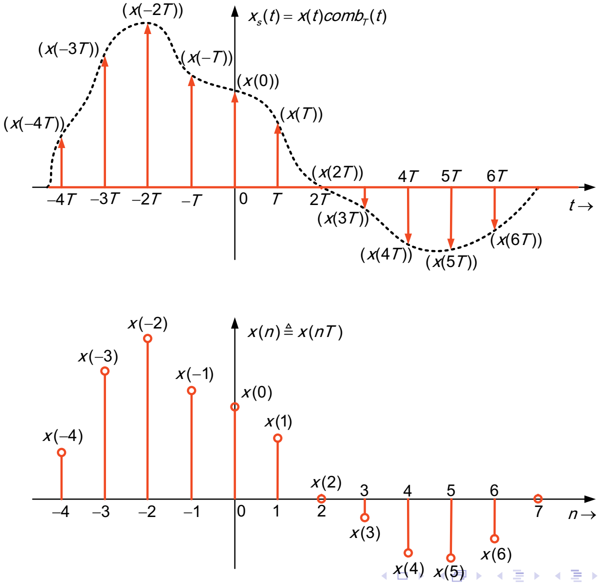
Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala

- razmotrimo još jednom postupak "očitavanja" postupkom modulacije niza Diracovih δ impulsa s vremenski kontinuiranim signalom $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$x_s(t) = x(t) comb_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

- rezultirajući $x_s(t)$ je niz δ impulsa čiji su intenziteti (površine) jednaki vrijednostima x u trenucima $t_n = nT$
- ako izdvojimo intenzitete ovih impulsa i složimo ih u niz, nastaje vremenski diskretan niz uzoraka $x(n) \triangleq x(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,
- zato možemo kazati kako signal $x_s(t)$ predstavlja rezultat očitavanja vremenski kontinuiranog signala $x(t)$

Nastanak diskretnog signala očitavanjem vremenski kontinuiranog signala



Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala

- usporedimo spektre ovih signala
- Fourierova transformacija signala

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT),$$

uz $CTFT\{\delta(t-nT)\} = e^{-j\omega nT}$, je[7]

$$CTFT\{x_s(t)\} = X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jnT\omega}$$

[7] opet prepoznajemo kako je $X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\frac{2\pi}{\omega_s}\omega}$ periodičan s $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, jer vrijedi
$X_s(j(\omega+\omega_s)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\frac{2\pi}{\omega_s}(\omega+\omega_s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\frac{2\pi}{\omega_s}\omega} = X_s(j\omega$

Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala

- uz $x(n) \triangleq x(nT)$, gdje s $\triangleq$ označavamo jednako po definiciji, i uz[8] $\Omega = \omega T$, Fourierovu transformaciju aperiodičnog diskretnog signala možemo izraziti kao

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jnT\omega} \triangleq \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Omega}}_{DTFT\{x(n)\}} = X(e^{j\Omega})$$

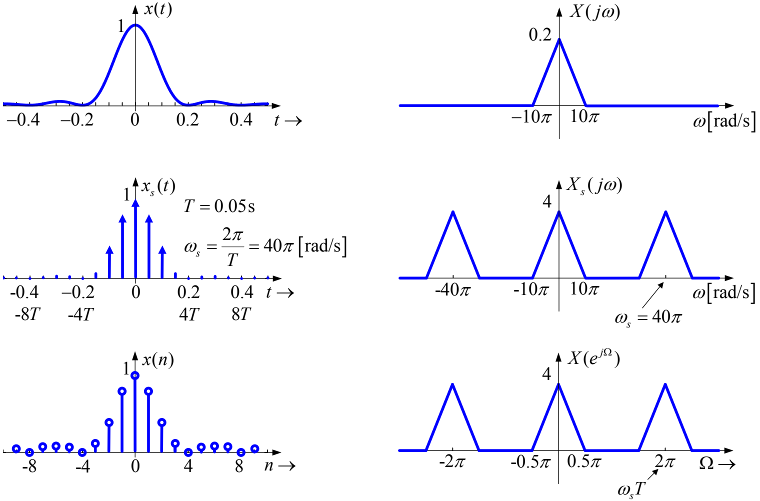
- spektar $X_s(j\omega)$ je periodičan s periodom ω_s pa će uz,

$$\omega_s T = \omega_s \frac{2\pi}{\omega_s} = 2\pi,$$

spektar $X(e^{j\Omega})$ biti, kao što je to prije pokazano, periodičan s periodom 2π

[8] pokazano kod postupka očitavanja sinusoide

Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala



Diskretizacija kontinuiranoga spektra

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- spektar aperiodičnih kontinuiranih signala je kontinuiran
- spektar aperiodičnih diskretnih signala također je kontinuiran i još k tome i periodičan
- ovdje se razmatra postupak očitavanja spektra tj. diskretizacija u frekvencijskoj domeni
- postupak koji ćemo ovdje primijeniti identičan je postupku primijenjenom kod očitavanja vremenski kontinuiranih signala

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- diskretizaciju kontinuiranog spektra možemo interpretirati kao

$$X_d(j\omega) = X(j\omega) comb_{\omega_o}(j\omega) = X(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_o)$$

- podsjetimo se da, uz $\omega_o = \frac{2\pi}{T_p}$, vrijedi[9]

$$comb_{T_p}(t) \xleftrightarrow{CTFT} \frac{2\pi}{T_p} comb_{\frac{2\pi}{T_p}}(j\omega) = \omega_o comb_{\omega_o}(j\omega)$$

odnosno

$$\frac{1}{\omega_o} comb_{T_p}(t) \xleftrightarrow{CTFT} comb_{\omega_o}(j\omega)$$

[9] vidi sis12_Cj06 prikaznice 13-14

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- umnošku u frekvencijskoj domeni odgovara konvolucija u vremenskoj domeni, pa za $X_d(j\omega) = X(j\omega) comb_{\omega_o}(j\omega)$ vrijedi

$$x_d(t) = x(t) * \frac{1}{\omega_o} comb_{T_p}(t) = x(t) * \frac{1}{\omega_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_p)$$

podsjećajući se da vrijedi $f(t) * \delta(t - t_1) = f(t - t_1)$, zaključujemo da je

$$x_d(t) = \frac{1}{\omega_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_p)$$

dakle, očitavanje kontinuiranog spektra $X(j\omega)$, signala $x(t)$, rezultira u njegovom periodičnom ponavljanju svakih $T_p = \frac{2\pi}{\omega_o} \Rightarrow$ moguć aliasing u vremenskoj domeni

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- $x_d(t)$ je periodična funkcija
- rekonstrukciju kontinuiranog spektra realizira se izdvajanjem samo osnovne sekcije od $x_d(t)$ što se postiže množenjem $x_d(t)$ s idealnim pravokutnim otvorom u vremenskoj domeni

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0 & |t| \leq T_p/2 \\ 0 & |t| > T_p/2 \end{cases}$$

pa je

$$W(j\omega) = \omega_o T_p \frac{\sin \frac{T_p \omega}{2}}{\frac{T_p \omega}{2}} = 2\pi \frac{\sin \frac{T_p \omega}{2}}{\frac{T_p \omega}{2}}$$

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- umnošku signala u vremenskoj domeni odgovara konvolucija spektara u frekvencijskoj domeni

$$x(t) = w(t)x_d(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} W(j\omega) * X_d(j\omega)$$

pa je uz $X_d(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_o)\delta(\omega - k\omega_o)$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{\sin \frac{T_p\omega}{2}}{\frac{T_p\omega}{2}} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_o)\delta(\omega - k\omega_o)$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_o) \frac{\sin \frac{T_p(\omega - k\omega_o)}{2}}{\frac{T_p(\omega - k\omega_o)}{2}}$$

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- zaključujemo da je spektar $X(j\omega)$, izražen uz pomoć $X(jk\omega_o)$,

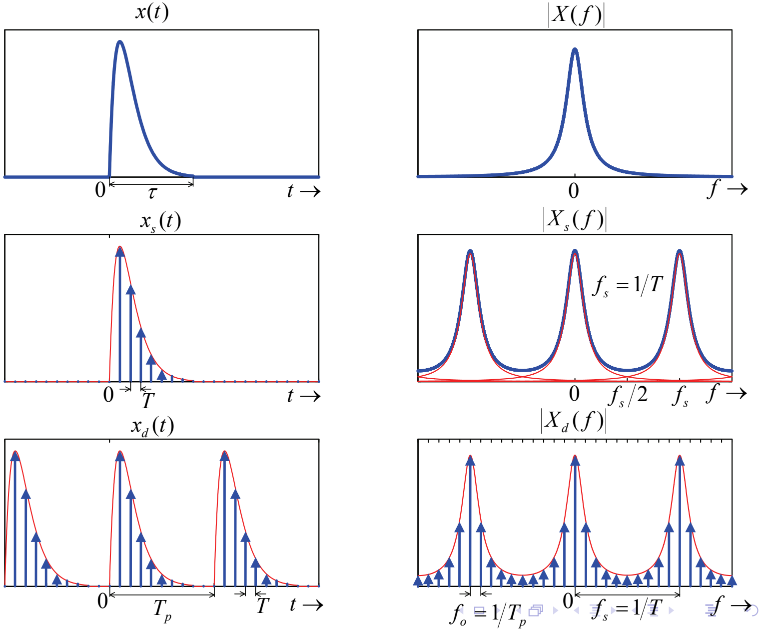
$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_o) \frac{\sin(\pi(\omega - k\omega_o)/\omega_o)}{\pi(\omega - k\omega_o)/\omega_o}$$

dakle, jednoznačno je određen iz njegovih očitaka $X(jk\omega_o)$ interpolacijom s funkcijom

$$\frac{\sin(\pi\omega/\omega_o)}{\pi\omega/\omega_o}$$

Zaključak: kontinuirani spektar signala koji ima omeđeno trajanje, $x(t) = 0$ za $|t| > T_p/2$, jednoznačno je određen svojim očitcima na jednoliko raspoređenim frekvencijama $\omega_k = k\omega_o = 2\pi k/T_p$

Numeričko izračunavanje Fourierove transformacije



Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- za veliku većinu signala nije moguće definirati matematički izraz, pa tako nije moguće primijeniti do sada izvedene transformacije
- zato se pristupa numeričkom određivanju spektra i uvodi se diskretna Fourierova transformacija – *DFT*
- signal i njegov spektar treba predstaviti njihovim očitcima, odnosno očitati, što znači da će se očitani signal i njegov spektar periodički produžiti
- spektar aperiodičnog očitanog signala je kontinuiran i periodičan s periodom 2π

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

- kako je spektar periodičan, dovoljno je pri očitavanju spektra uzeti samo N očitaka iz osnovnog perioda, pri čemu će razmak između očitaka biti $2\pi/N$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- očitavanjem $X(e^{j\Omega})$, na frekvencijama $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$, slijedi

$$k = 0, 1, \ldots, N-1; \quad X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

zbroj se transformira u beskonačni broj zbrojeva od N članova

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \ldots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} +$$
$$+ \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \ldots =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=mN}^{mN+N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- zamjenom indeksa n u unutarnjem zbroju s $n - mN$ i zamjenom redoslijeda zbrajanja slijedi:

$$k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - mN) \right]}_{\tilde{x}(n)} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- signal $\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - mN)$ dobiven je periodičnim ponavljanjem $x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, i periodičan je s periodom N, te može biti prikazan s Fourierovim redom ($DTFS$)

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

- koeficijenti ovog Fourierovog reda su

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

ako se usporede X_k i $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$, za $k = 0, 1, \ldots, N-1$, zaključuje se da vrijedi

$$X_k = \frac{1}{N}X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- uvodimo oznaku $X(k)$ za očitke diskretnog spektra, gdje je $X(k) \triangleq X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$, pa je očitani spektar

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (1)$$

- očitavanjem spektra aperiodičnog diskretnog signala može doći do pojave aliasinga u vremenskoj domeni
- za aperiodične diskretne signale x, duljine L, pri čemu je $L \leq N$, nema aliasinga i vrijedi da je:

$$x(n) = \tilde{x}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

iz svega slijedi:

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- za aperiodičan diskretni signal $x(n)$, duljine L ($x(n) = 0$ za $n < 0$ i $n \geq L$) vrijedi par diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (2)$$

inverzna diskretna Fourierova transformacija – *IDFT*

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (3)$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT* - primjer

- za aperiodičan diskretni signal $x(n) = \{\underline{2}, 1, 3, 1\}$, duljine 4 $(x(n) = 0$ za $n < 0$ i $n \geq 4)$ određujemo diskretnu Fourierovu transformaciju – *DFT*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{\pi}{2}kn} = \sum_{n=0}^{3} x(n)(-j)^{kn},$$
$$k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 7$$
$$X(1) = x(0) + x(1)(-j) + x(2)(-j)^2 + x(3)(-j)^3$$
$$= 2 - j - 3 + j = -1$$
$$X(2) = x(0) + x(1)(-j)^2 + x(2)(-j)^4 + x(3)(-j)^6$$
$$= 2 - 1 + 3 - 1 = 3$$
$$X(3) = x(0) + x(1)(-j)^3 + x(2)(-j)^6 + x(3)(-j)^9$$
$$= 2 + j - 3 - j = -1$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT* - primjer

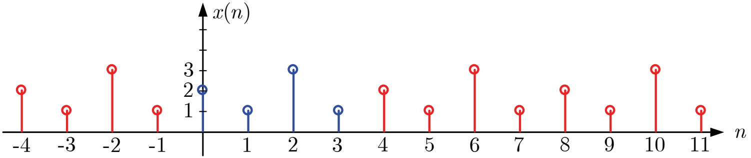
- za izračunati spektar signala $X(k) = \{\underline{7}, -1, 3, -1\}$ određujemo inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju – *IDFT*

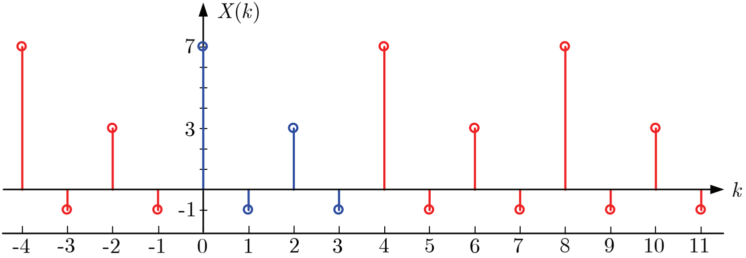
$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)e^{j\frac{\pi}{2}kn} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)(j)^{kn},$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\begin{aligned}
x(0) &= 0.25[X(0) + X(1) + X(2) + X(3)] = 2\\
x(1) &= 0.25[X(0) + X(1)(j) + X(2)(j)^2 + X(3)(j)^3]\\
&= 0.25[7 - j - 3 + j] = 1\\
x(2) &= 0.25[X(0) + X(1)(j)^2 + X(2)(j)^4 + X(3)(j)^6]\\
&= 0.25[7 + 1 + 3 + 1] = 3\\
x(3) &= X(0) + X(1)(j)^3 + X(2)(j)^6 + X(3)(j)^9]\\
&= 0.25[7 + j - 3 - j] = 1
\end{aligned}$$

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT* - primjer





Dimenzionalnost signala

- očitavanje signala u vremenskoj domeni $\Rightarrow$ ponavljanje spektra s ω_s (aliasing u frekvencijskoj domeni – FD)
- očitavanje signala u frekvencijskoj domeni $\Rightarrow$ ponavljanje signala u vremenskoj domeni s T_p (aliasing u vremenskoj domeni – VD)
- relativna greška u FD i VD može biti ocijenjena energijom signala i spektra izvan izabranog trajanja signala T_p, odnosno frekvencijskog pojasa ω_s, prema ukupnoj energiji

$$\underbrace{\varepsilon_{FD} = \frac{2\int_{\omega_s/2}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}{2\int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}}_{\text{relativna greška u FD}} \qquad \underbrace{\varepsilon_{VD} = \frac{2\int_{T_p/2}^{\infty} |x(t)|^2 dt}{2\int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt}}_{\text{relativna greška u VD}}$$

- greške se mogu ocijeniti poznavanjem brzine opadanja signala i spektra za $|t| > T_p/2$ odnosno $|\omega| > \omega_s/2$

Dimenzionalnost signala

- uz specificiranu dozvoljenu grešku aliasinga u FD i VD dobivamo T_p i f_s - trajanje i širinu pojasa signala
- potreban broj očitaka u VD

$$N_T T = T_p = N_T \frac{2\pi}{\omega_s} \Rightarrow N_T = \frac{T_p \omega_s}{2\pi} = T_p f_s$$

- potreban broj očitaka u FD

$$N_{\omega_o} \omega_o = \omega_s = N_{\omega_o} \frac{2\pi}{Tp} \Rightarrow N_{\omega_o} = \frac{T_p \omega_s}{2\pi} = T_p f_s$$

pa je dimenzija signala

$$N_{\omega_o} = N_T = \frac{T_p \omega_s}{2\pi} = T_p f_s$$

Dimenzionalnost signala – primjer

- želimo numerički odrediti spektar signala očitanog s $f_s = 44100\,\mathrm{Hz}$, s rezolucijom $f_o = 10\,\mathrm{Hz}$,
- za traženu rezoluciju trajanje signala mora biti minimalno

$$T_p = \frac{1}{f_o} = 0.1\,\mathrm{s}$$

pa je potrebni broj očitaka

$$N = T_p f_s = 0.1 x 44100 = 4410$$