Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

09. lipnja 2008.

Odziv diskretnog sustava na pobudu kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je kako je odziv mirnog, linearnog, vremenski stalnog kontinuiranog sustava, na svevremensku eksponencijalu e^{st},

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

pri čemu je

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

- za s, kao kompleksnu varijablu, $H(s)$ je kompleksna funkcija

Laplaceova transformacija

- integral
$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$
možemo interpretirati kao transformaciju vremenske funkcije, impulsnog odziva $h(t)$ kontinuiranog sustava, u kompleksnu funkciju $H(s)$
- ovako definiranu transformaciju nazivamo dvostrana ili bilateralna **Laplaceova transformacija** – $\mathcal{L}$–transformacija
- Laplaceova transformacija $H(s)$ predstavlja, dakle, alternativni prikaz kontinuiranog vremenskog signala $h(t)$

$\mathcal{L}$–transformacija

- za vremenski kontinuirani signal $x(t)$, definira se dvostrana $\mathcal{L}$–transformacija

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- $\mathcal{L}$–transformacija označuje se simbolički kao

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

ili još jednostavnije

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – primjer 1

- određuje se $\mathcal{L}$–transformacija signala

$$x(t) = e^{-at}\mu(t), a \in Realni$$

- iz definicije $\mathcal{L}$–transformacije slijedi

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\mu(t)e^{-st}dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{s+a}, \qquad \text{za } Re(s+a) > 0$$

- gornji uvjet je posljedica ponašanja $e^{-(s+a)t}$ za $t \to \infty$

$\mathcal{L}$–transformacija – primjer 1

- iz

$$e^{-(s+a)t} = e^{-[Re(s+a)+jIm(s+a)]t} = e^{-[Re(s+a)]t}e^{-j[Im(s+a)]t}$$

a kako je $\left|e^{-j[Im(s+a)]t}\right| = 1$, neovisno o vrijednosti $[Im(s+a)]t$, slijedi

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & Re(s+a) > 0 \\ \infty & Re(s+a) < 0 \end{cases}$$

pa vrijedi ispred izvedeno

$$X(s) = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+a}, \qquad \text{za } Re(s+a) > 0$$

- integral koji definira $X(s)$ postoji samo za vrijednosti $Re(s) > -a$ pa se područje vrijednosti $Re(s) > -a$ naziva područjem konvergencije $X(s)$

$\mathcal{L}$–transformacija – primjer 2

- određuje se $\mathcal{L}$–transformacija signala

$$x(t) = -e^{-at}\mu(-t), a \in Realni$$

- iz definicije $\mathcal{L}$–transformacije slijedi

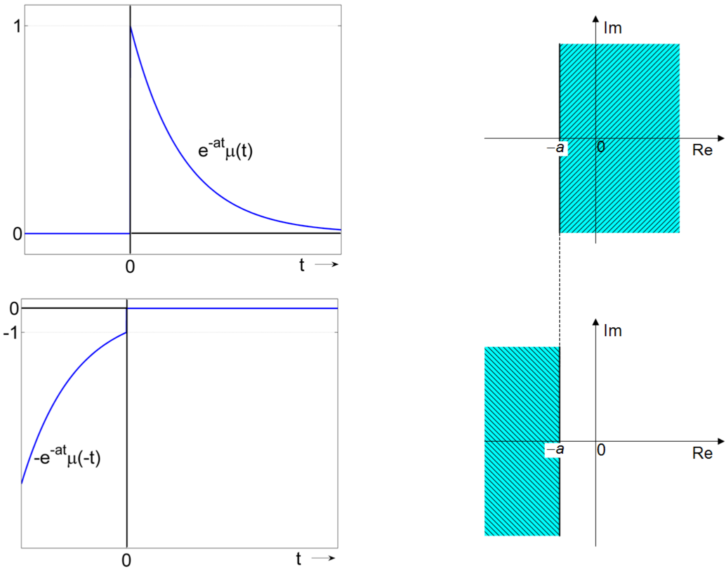
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}\mu(-t)e^{-st}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{-at}e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt = +\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$= \frac{1}{s+a}, \qquad \text{za } Re(s+a) < 0$$

- pa je područje konvergencije, $\mathcal{PK}$, $\mathcal{L}$–transformacije $X(s)$, područje $Re(s) < -a$

$\mathcal{L}$–transformacija – primjer 2



$\mathcal{L}$–transformacija – područje konvergencije

- usporedbom primjera 1 i primjera 2

$$e^{-at}\mu(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \qquad Re(s) > -a$$

odnosno

$$-e^{-at}\mu(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \qquad Re(s) < -a$$

zaključujemo kako dva različita signala, jedan kauzalan a drugi antikauzalan, imaju identične izraze za $\mathcal{L}$–transformaciju i kako se njihova razlika očituje samo u području konvergencije, $\mathcal{PK}$,

- područje konvergencije $\mathcal{PK}$, $\mathcal{L}$–transformacije, je važna i nužna informacija i tek definirano $\mathcal{PK}$ daje jednoznačnu vezu između signala i njegove $\mathcal{L}$–transformacije
- stoga, $\mathcal{L}$–transformacija mora biti uvijek zadana s njezinim $\mathcal{PK}$

Jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija

- dvostrana $\mathcal{L}$–transformacija kauzalnih signala $x(t)\mu(t)$ je

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mu(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

donja granica 0^- omogućuje uključivanje impulsa koji se mogu javiti u trenutku $t = 0$

- $\mathcal{L}$–transformacija definirana kao

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

naziva se jednostrana ili unilateralna $\mathcal{L}$–transformacija

Jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija – egzistencija

- kompleksnu variablu s, u $\mathcal{L}$–transformaciji, možemo prikazati kao $s = \sigma + j\Omega$ pa je

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} \left[x(t)e^{-\sigma t}\right]e^{-j\Omega t}\, dt$$

- kako je $|e^{-j\Omega t}| = 1$ gornji integral konvergira ako je zadovoljeno

$$\int_{0^-}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|\, dt < \infty \tag{1}$$

- iz gornjeg izraza zaključujemo da $\mathcal{L}$–transformacija postoji za sve signale koji ne rastu brže od nekog eksponencijalnog signala ce^{at}, a to su svi signali od praktičnog i teorijskog interesa
- dakle, ako za neke c i a vrijedi $|x(t)| \leq ce^{at}$, tada je za sve $\sigma = Re\{s\} > a$ zadovoljena relacija (1)

Jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija

- jednostrana $\mathcal{L}$– transformacija pokazuje se posebno pogodnom u postupcima rješavanja diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetima
- jednostrana $\mathcal{L}$– transformacija limitirana je samo na kauzalne signale i sustave
- kako je u ovom predmetu većina pozornosti okrenuta kauzalnim signalima i sustavima, u nastavku se razmatra uglavnom jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija
- sukladno većini literature pod nazivom $\mathcal{L}$–transformacija podrazumijevati će se jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija, a u slučaju dvostrane transformacije to će biti posebno istaknuto
- isto tako, zbog jednoznačnosti $\mathcal{L}$–transformacije, nepotrebno je, u slučaju kauzalnih signala $x(t)\mu(t)$, eksplicitno navoditi područje konvergencije (osim u slučaju mogućih dvojbenosti u interpretaciji)

$\mathcal{L}$–transformacija osnovnih signala

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1,$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}, \qquad t_0 > 0$$

$$\mathcal{L}\{\mu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \mu(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s},$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\mu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}\mu(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s+a}, \qquad \text{(prije izvedeno)}$$

odnosno

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t}\mu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{j\omega_0 t}\mu(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s - j\omega_0}$$

$\mathcal{L}$–transformacija osnovnih signala

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

ova $\mathcal{L}$–transformacija slijedi iz[1]

$$\cos(\omega_0 t)\mu(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right]\mu(t)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega_0}\mu(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega_0}\mu(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right] = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

[1] Koristi se svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije koje se pokazuje nešto kasnije

Tablica osnovnih $\mathcal{L}$–transformacija [2]

	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
3	$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$
4	$t\mu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5	$t^j\mu(t)$	$\frac{j!}{s^{j+1}}$
6	$e^{\lambda t}\mu(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$
7	$te^{\lambda t}\mu(t)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^2}$
8	$t^j e^{\lambda t}\mu(t)$	$\frac{j!}{(s-\lambda)^{j+1}}$
9	$\cos(bt)\mu(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
10	$\sin(bt)\mu(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$

[2] izvor: B.P. Lathi: Linear Systems and Signals str. 344

Tablica osnovnih $\mathcal{L}$–transformacija [3]

	$x(t)$	$X(s)$
11	$e^{-at}\cos(bt)\mu(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
12	$e^{-at}\sin(bt)\mu(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
13	$re^{-at}\cos(bt+\theta)\mu(t)$	$\frac{(r\cos\theta)s+(ar\cos\theta-br\sin\theta)}{s^2+2as+(a^2+b^2)}$
ili		
13[a]	$re^{-at}\cos(bt+\theta)\mu(t)$	$\frac{0.5re^{j\theta}}{s+a-jb}+\frac{0.5re^{-j\theta}}{s+a+jb}$

[3] izvor:B.P. Lathi: Linear Systems and Signals str. 344

$\mathcal{L}$–transformacija – linearnost

neka je $w(t) = ax(t) \pm by(t)$
tada je $\mathcal{L}$–transformacija od $w(t)$

$$W(s) = aX(s) \pm bY(s)$$

linearnost $\mathcal{L}$–transformacije proizlazi iz definicije

$$W(s) = \int_{0^-}^{\infty} w(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} [ax(t) \pm by(t)]e^{-st}dt =$$

$$= a\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \pm b\int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = aX(s) \pm bY(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenski pomak

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\mu(t)\}$ tada je, za $t_0 \geq 0$

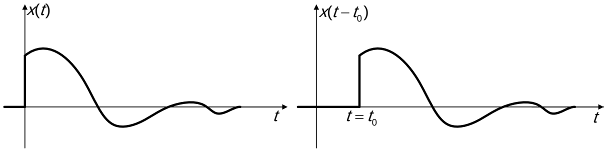
$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\mu(t-t_0)\} = e^{-st_0}X(s)$$

izvod:

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\mu(t-t_0)\} = \int_0^\infty x(t-t_0)\mu(t-t_0)e^{-st}dt =$$

za $t - t_0 = \tau$

$$= \int_{-t_0}^\infty x(\tau)\mu(\tau)e^{-s(t_0+\tau)}d\tau = e^{-st_0}\int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-st_0}X(s)$$



$\mathcal{L}$–transformacija – primjer uporabe svojstva vremenski pomak

određuje se $\mathcal{L}$–transformacija pravokutnog impulsa definiranog za $0 < a < b$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } a \le t < b \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

što se može zapisati i kao razlika dva pomaknuta jedinična skoka

$$x(t) = \mu(t-a) - \mu(t-b)$$

$\mathcal{L}$–transformacija je tada

$$X(s) = \mathcal{L}\{\mu(t-a) - \mu(t-b)\} = e^{-as}\frac{1}{s} - e^{-bs}\frac{1}{s} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$

$\mathcal{L}$–transformacija – frekvencijski pomak

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\{x(t)e^{s_0 t}\} = X(s - s_0)$$

što je dualno prije izvedenom svojstvu vremenskog pomaka

izvod:

$$\mathcal{L}\{x(t)e^{s_0 t}\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{s_0 t}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-(s-s_0)t}dt = \\ = X(s - s_0)$$

primjer: za

$$\sin(bt)\mu(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{b}{s^2 + b^2}$$

primjenom svojstva frekvencijskog pomaka slijedi, za $s_0 = -a$,

$$e^{-at}\sin(bt)\mu(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$$

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenska kompresija

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je, za[4] $a > 0$

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

izvod:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(at) e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} x(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

- zaključuje se kako vremenska kompresija signala za faktor a rezultira u ekspanziji signala u frekvencijskoj domeni za isti faktor
- ekspanzija $x(t)$ rezultira u kompresiji $X(s)$

[4] $a > 0$ osigurava kauzalnost

$\mathcal{L}$–transformacija – konvolucija u vremenu

neka su $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\mu(t)\}$ i $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\mu(t)\}$ tada je,

$$\mathcal{L}\{[x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)]\} = X_1(s)X_2(s)$$

izvod: konvolucija vremenskih signala je

$$[x_1(t)\mu(t)]*[x_2(t)\mu(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}[x_1(\tau)\mu(\tau)][x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)]d\tau$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)[x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)]d\tau$$

pa je $\mathcal{L}$–transformacija

$$\mathcal{L}\{[x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)]\} =$$
$$= \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)[x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)]d\tau\right]e^{-st}dt =$$

$\mathcal{L}$–transformacija – konvolucija u vremenu

zamjenom redoslijeda integracije

$$\mathcal{L}\{[x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)]\} =$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{0^-}^{\infty} x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)e^{-st}dt\right]d\tau$$

zamjenom $t - \tau = \lambda$

$$= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{-\tau}^{\infty} x_2(\lambda)\mu(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)}d\lambda\right]d\tau =$$

zbog $\mu(\lambda) = 0$ za $\lambda < 0$

$$= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau}\left[\underbrace{\int_{0^-}^{\infty} x_2(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda}_{X_2(s)}\right]d\tau = X_2(s)\underbrace{\int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{X_1(s)} =$$

$$= X_2(s)X_1(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenska derivacija

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-)$$

višestrukom primjenom ovog svojstva slijedi

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0^-) - x^{(1)}(0^-)$$

odnosno

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^jx(t)}{dt^j}\right\} = s^jX(s) - s^{j-1}x(0^-) - s^{j-2}x^{(1)}(0^-) - \ldots - x^{(j-1)}(0^-) =$$

$$= s^jX(s) - \sum_{m=1}^{j} s^{j-m}x^{(m-1)}(0^-)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenska derivacija

izvod

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

integral se rješava parcijalnom integracijom

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

neka su

$$u(t) = e^{-st} \quad \text{i} \quad dv = \frac{dx(t)}{dt} dt$$

vrijedi

$$u(t) = e^{-st} \quad \Rightarrow \quad du = -se^{-st} dt$$

$$dv = \frac{dx(t)}{dt} dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = x(t)$$

tada je,

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenska derivacija

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \\
&= uv\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} v\ du = \\
&= e^{-st}x(t)\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s)e^{-st}\ dt \\
&= \underbrace{\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}x(t)\right]}_{=0} - x(0^-) + sX(s) = sX(s) - x(0^-)
\end{aligned}
$$

- već je pokazano kako $\mathcal{L}$–transformacija konvergira za signale koji ne rastu brže od nekog eksponencijalnog signala ce^{at}, dakle, za signale za koje vrijedi $|x(t)| \leq ce^{at}$
- tada za sve s za koje je $\sigma = Re\{s\} > a$ vrijedi $\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}x(t)\right] = 0$

$\mathcal{L}$–transformacija – integracija u vremenu

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\left\{ \int_{0^-}^{t} x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} X(s)$$

izvod se temelji na korištenju svojstva konvolucije

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau) d\tau = \int_{0^-}^{t} x(\tau)\mu(t-\tau) d\tau = x(t) * \mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – frekvencijska derivacija

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\{-tx(t)\} = \frac{d}{ds}(X(s)) \Leftrightarrow \mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{d}{ds}(X(s))$$

izvod

$$\frac{d}{ds}(X(s)) = \frac{d}{ds}\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt =$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{ds}[x(t)e^{-st}]dt = \int_{0^-}^{\infty}[-tx(t)]e^{-st}dt = \mathcal{L}\{-tx(t)\}$$

općenito vrijedi

$$\frac{d^j}{ds^j}(X(s)) = \int_{0^-}^{\infty}[(-t)^j x(t)]e^{-st}dt = \mathcal{L}\{(-t)^j x(t)\}$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(s)$ je razlomljena racionalna funkcija i možemo je prikazati kao

$$X(s) = \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N}$$

odnosno kao omjer polinoma M–tog i N–tog reda

$$X(s) = \frac{P_M(s)}{P_N(s)}$$

- za $N > M$ radi se o pravoj razlomljenoj racionalnoj funkciji koju je moguće rastaviti na parcijalne razlomke

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- u slučaju $M \geq N$, $X(s)$ je neprava razlomljena racionalna funkcija, pa je prije rastave na parcijalne razlomke potrebno, dijeljenjem brojnika i nazivnika, $X(s)$ dovesti u oblik

$$X(s) = P_{M-N}(s) + \frac{P_R(s)}{P_N(s)}, \quad \text{gdje je } R \leq N - 1$$

- primjer za $X(s) = \frac{s^3}{s^2+2s+1}$ dijeljenjem brojnika s nazivnikom slijedi

$$X(s) = \frac{s^3}{s^2 + 2s + 1} = s - 2 + \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- pravu razlomljenu racionalnu funkciju, za slučaj jednostrukih polova,

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_N)}$$

rastavljamo na parcijalne razlomke

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \ldots + \frac{c_N}{s - p_N},$$

$$c_i = \lim_{s \to p_i} \Big\{ (s - p_i) X(s) \Big\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

iz čega slijedi inverzna $\mathcal{L}$–transformacija

$$x(t) = [c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \ldots + c_N e^{p_N t}]\mu(t)$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za slučaj višestrukih polova,

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-p_1)^r(s-p_{r+1})\cdots(s-p_N)}$$

rastavljamo na parcijalne razlomke

$$X(s) = \frac{c_{11}}{s-p_1} + \frac{c_{12}}{(s-p_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r}}{(s-p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{s-p_{r+2}} + \ldots + \frac{c_N}{s-p_N}$$

$$c_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{s \to p_1} \left\{ \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} \Big[(s-p_1)^r X(s) \Big] \right\}, \quad j = r, r-1, \ldots, 2, 1$$

$$c_i = \lim_{s \to p_i} \Big\{ (s-p_i) X(s) \Big\}, \qquad i = r+1, r+2, \ldots, N$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- inverzna $\mathcal{L}$–transformacija

$$X(s) = \frac{c_{11}}{s-p_1} + \frac{c_{12}}{(s-p_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r}}{(s-p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{s-p_{r+2}} + \ldots + \frac{c_N}{s-p_N}$$

kako je

$$e^{\lambda t}\mu(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-\lambda} \qquad \text{i} \qquad t^j e^{\lambda t}\mu(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{j!}{(s-\lambda)^{j+1}}$$

$$x(t) = \Big[c_{11}e^{p_1 t} + c_{12}te^{p_1 t} + c_{13}\frac{1}{2!}t^2 e^{p_1 t} + \ldots + c_{1r}\frac{1}{(r-1)!}t^{(r-1)}e^{p_1 t} + \\ + c_{r+1}e^{p_{r+1}t} + c_{r+2}e^{p_{r+2}t} + \ldots + c_N e^{p_N t}\Big]\mu(t)$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- inverzna transformacija

$$X(s) = \frac{s+3}{s(s+1)^2} = \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s}$$

- konstante c_{11}, c_{12} i c_3 iz

$$c_{11} = \frac{1}{1!} \lim_{s\to -1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\cancel{(s+1)^2} \frac{s+3}{s\cancel{(s+1)^2}} \right] \right\} =$$

$$= \lim_{s\to -1} \left\{ \frac{s-(s+3)}{s^2} \right\} = -3$$

$$c_{12} = \frac{1}{0!} \lim_{s\to -1} \left\{ \cancel{(s+1)^2} \frac{s+3}{s\cancel{(s+1)^2}} \right\} = -2$$

$$c_3 = \lim_{s\to 0} \left\{ \cancel{s} \frac{s+3}{\cancel{s}(s+1)^2} \right\} = 3$$

$$x(t) = -3e^{-t}\mu(t) - 2te^{-t}\mu(t) + 3\mu(t)$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- rastav na parcijalne razlomke moguće je učiniti i metodom neodređenih koeficijenata

$$X(s) = \frac{s+3}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s}$$

- množenjem obje strane s nazivnikom lijeve strane izlazi

$$\begin{aligned} s+3 &= As(s+1) + Bs + C(s+1)^2 = \\ &= (A+C)s^2 + (A+B+2C)s + C \end{aligned}$$

- usporedbom koeficijenata jednako visokih potencija lijevo i desno slijedi sustav linearnih jednačaba

$$\left.\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B + 2C &= 1 \\ C &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = -3, B = -2, C = 3$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- inverzna transformacija

$$X(s) = \frac{s^2+s+2}{s^3+s^2+s+1} = \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s-j)(s+j)} = \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s^2+1)}$$

- rastav je moguće učiniti kao rastav razlomljene racionalne funkcije za jednostruke polove
- dva su pola konjugirano kompleksni i prepoznaje se da će inverzna transformacija rezultirati u sinusoidnom signalu, pa stoga, rastav možemo učiniti i na ovaj način

$$X(s) = \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- metodom neodređenih koeficijenata određujemo A, B, C,

$$s^2 + s + 2 = As^2 + A + Bs^2 + Bs + Cs + C =$$
$$= (A + B)s^2 + (B + C)s + (A + C)$$

- usporedbom koeficijenata jednako visokih potencija lijevo i desno slijedi sustav linearnih jednačaba

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ B + C &= 1 \\ A + C &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 1, B = 0, C = 1$$

$$X(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)(s^2 + 1)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$x(t) = e^{-t}\mu(t) + sin(t)\mu(t)$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- određuje se prijenosna funkcija mirnog, linearnog, vremenski kontinuiranog sustava, primjenom $\mathcal{L}$–transformacije
- neka je sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$
$$= b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \cdots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t)$$

- $\mathcal{L}$–transformacijom ove jednadžbe, uzimajući u obzir da je sustav miran, i koristeći svojstvo $\mathcal{L}\{\frac{d^j y}{dt^j}\} = s^j X(s)$ slijedi

$$(s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1} s + a_N) Y(s) =$$
$$= (b_{N-M} s^M + b_{N-M+1} s^{M-1} + \cdots + b_{N-1} s + b_N) U(s)$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- pa je

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N}}_{H(s)} U(s)$$

$$H(s) = \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

pa, prijenosnu funkciju vremenski kontinuiranog sustava, $H(s)$, definiramo kao omjer $\mathcal{L}$–transformacija odziva i pobude, uz početne uvjete jednake nuli

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

- primjenu $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava ilustriramo primjerom sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 0.2y'(t) + 0.16y(t) = u(t) \tag{2}$$

- neka je sustav pobuđen pobudom $u(t) = 0.64\mu(t)$ i neka su $y(0^-) = -3$ i $y'(0^-) = -1$
- $\mathcal{L}$–transformacija jednadžbe je

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + \\ + 0.2sY(s) - 0.2y(0^-) + 0.16Y(s) = U(s)$$

$$\left[s^2 + 0.2s + 0.16\right] Y(s) = U(s) + \\ + sy(0^-) + y'(0^-) + 0.2y(0^-)$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(s) = \underbrace{\frac{sy(0^-) + y'(0^-) + 0.2y(0^-)}{s^2 + 0.2s + 0.16}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava} \ - \ Y_0(s)} +$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16}}_{H(s)} U(s)}_{\text{odziv mirnog sustava} \ - \ Y_m(s)}$$

uz $\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{0.64\mu(t)\} = \frac{0.64}{s} = U(s)$ i zadane početne uvjete $y(0^-) = -3$ i $y'(0^-) = -1$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-3s - 1.6}{s^2 + 0.2s + 0.16}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{0.64}{s^3 + 0.2s^2 + 0.16s}}_{Y_m(s)}$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(s) = \underbrace{\frac{c_1}{s+0.1-j0.3873} + \frac{c_2}{s+0.1+j0.3873}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{c_3}{s+0.1-j0.3873} + \frac{c_4}{s+0.1+j0.3873} + \frac{c_5}{s}}_{Y_m(s)}$$

c_1, c_2 određujemo iz $Y_0(s)$, a c_3, c_4, c_5 iz $Y_m(s)$

$$c_1 = \Big[(s+0.1-j0.3873)Y_0(s)\Big]_{s=-0.1+j0.3873} = -1.5000 + j1.6783$$
$$c_2 = \Big[(s+0.1+j0.3873)Y_0(s)\Big]_{s=-0.1-j0.3873} = -1.5000 - j1.6783$$

$$c_3 = \Big[(s+0.1-j0.3873)Y_m(s)\Big]_{s=-0.1+j0.3873} = -2.0000 + j0.5164$$
$$c_4 = \Big[(s+0.1+j0.3873)Y_m(s)\Big]_{s=-0.1-j0.3873} = -2.0000 - j0.5164$$
$$c_5 = \Big[sY_m(s)\Big]_{s=0} = 4$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-1.5000 + j1.6783}{s + 0.1 - j0.3873} + \frac{-1.5000 - j1.6783}{s + 0.1 + j0.3873}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{-2.0000 + j0.5164}{s + 0.1 - j0.3873} + \frac{-2.0000 - j0.5164}{s + 0.1 + j0.3873} + \frac{4}{s}}_{Y_m(s)}$$

$$y(t) = [(-1.5 + j1.6783)e^{-0.1t + j0.3873t} + (-1.5 - j1.6783)e^{-0.1t - j0.3873t} + (-2.0 + j0.5164)e^{-0.1t + j0.3873t} + (-2.0 - j0.5164)e^{-0.1t - j0.3873t} + 4]\mu(t)$$

$$y(t) = [(-3.5 + j2.1947)e^{-0.1t + j0.3873t} + (-3.5 - j2.1947)e^{-0.1t - j0.3873t} + 4]\mu(t)$$

$$y(t) = 4.5018e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.3002) + 4.1313e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.8889) + 4, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = 8.2624e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.5815) + 4, \quad t \geq 0$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

- primjenom $\mathcal{L}$–transformacije odrediti impulsni odziv sustava, $u(t) = \delta(t)$, opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u''(t) + u'(t) + u(t) \qquad (3)$$

- $\mathcal{L}$–transformacija jednadžbe je, uz $y(0^-) = y'(0^-) = 0$,

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = s^2 U(s) + sU(s) + U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1}}_{H(s)} U(s)$$

- kako je $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$, pa je

$$Y(s) = H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

- inverzna $\mathcal{L}$–transformacija je traženi impulsni odziv
- kako je $H(s)$ neprava razlomljena racionalna funkcija, dijeljenjem brojnika s nazivnikom, slijedi

$$H(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+2s+1} = 1 - \frac{s}{s^2+2s+1}$$

- rastavom na parcijalne razlomke

$$\frac{s}{s^2+2s+1} = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} = \frac{As+A+B}{(s+1)^2}$$

- metodom neodređenih koeficijenata slijedi

$$\left.\begin{array}{lll} A & & =1 \\ A & +B & =0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=1, B=-1$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right\} = \delta(t) - e^{-t}\mu(t) + te^{-t}\mu(t)$$