Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

11. lipanj 2007.

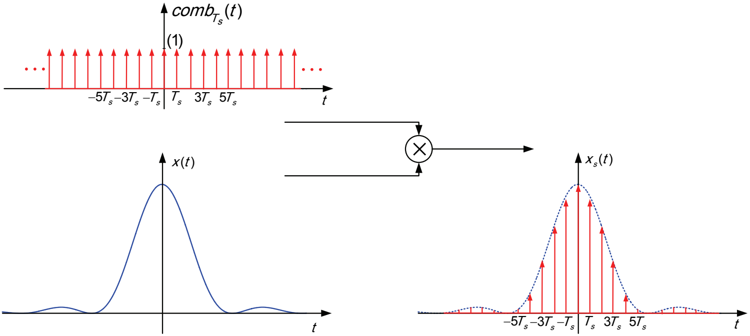
Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala

- aperiodični diskretni signal možemo generirati iz kontinuiranog aperiodičnog signala postupkom otipkavanja
- pokazuje se da je postupak otipkavanja ekvivalentan amplitudnoj modulaciji periodičnog niza impulsa
- signal $x(t)$, koji se otipkava, množi se s nizom Diracovih δ impulsa kako bi se generirao novi signal $x_s(t)$

$$x_s(t) = x(t) comb_{T_s}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

- postupak uzimanja uzoraka ili otipkavanja vremenski kontinuiranog signala možemo interpretirati kao pridruživanje, funkciji $x(t)$, niza impulsa čiji je intenzitet proporcionalan njezinim vrijednostima na mjestu impulsa

Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala



Spektar otipkanog signala

- određuje se spektar signala $x_s(t)$
- prije je pokazano kako periodični niz Diracovih δ impulsa možemo prikazati Fourierovim redom

$$comb_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}, \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

pa $x_s(t)$ prelazi u

$$x_s(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) = x(t)\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t} =$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jk\Omega_s t}$$

Spektar otipkanog signala

- primjenom svojstva frekvencijskog pomaka, množenje s $e^{jk\Omega_s t}$ u vremenskoj domeni rezultira u frekvencijskom pomaku,

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$

- do istog rezultata dolazi se primjenom svojstva množenja u vremenskoj domeni tj. konvolucije u frekvencijskoj domeni
- prije je pokazano kako je

$$\mathcal{F}\{comb_{T_s}(t)\} = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T_s})$$

Spektar otipkanog signala

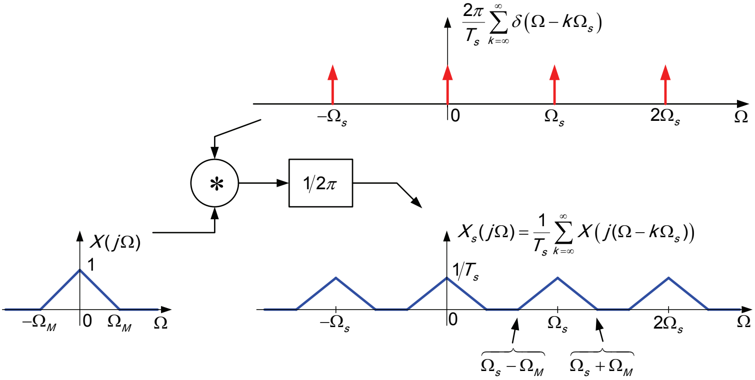
- pa je Fourierova transformacija produkta $x_s(t) = x(t) comb_{T_s}(t)$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T_s}) =$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\frac{2\pi}{T_s})) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$

- zaključuje se kako Fourierova transformacija niza Diracovih δ impulsa, moduliranog s $x(t)$, je periodični kontinuirani spektar koji je nastao periodičnim ponavljanjem $X(j\Omega)$
- slijedi prikaz postupka određivanja spektra, korištenjem svojstva množenja u vremenskoj domeni

Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala



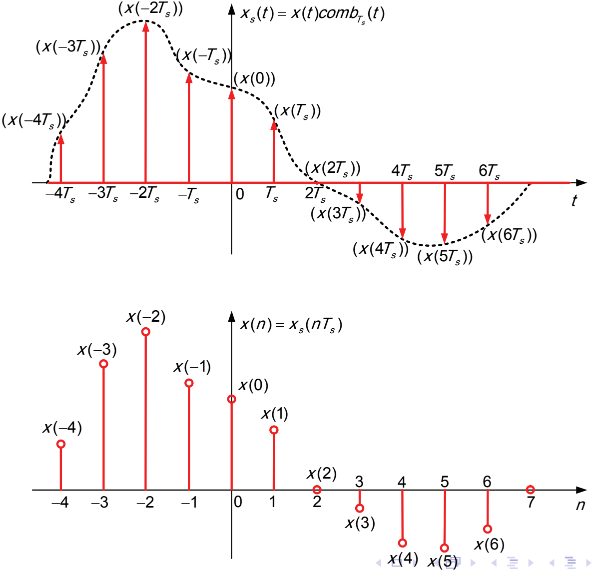
Spektar otipkanog signala

- razmotrimo još jednom postupak "otipkavanja" postupkom modulacije niza Diracovih δ impulsa s vremenski kontinuiranim signalom $x(t)$

$$x_s(t) = x(t)comb_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

- rezultirajući $x_s(t)$ je niz δ impulsa čiji su intenziteti (površine) jednake vrijednostima $x(t)$ u trenucima $t_n = nT_s$
- ako izdvojimo vrijednosti ovih impulsa i složimo ih u niz nastaje vremenski diskretan niz uzoraka $x(n) = x(nT_s)$
- zato možemo kazati kako signal $x_s(t)$ predstavlja rezultat otipkavanja vremenski kontinuiranog signala $x(t)$

Otipkavanje vremenski kontinuiranog signala



Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

- pokazano je kako je spektar otipkanog signala periodičan
- isto tako, pokazana je veza otipkanog vremenski kontinuiranog signala i diskretnog signala, $x(n) = x(nT_s)$, pa se zaključuje kako je spektar periodičan i jasno je da je, ali sada spektar, moguće prikazati s Fourierovim redom
- prije je pokazana veza frekvencijske karakteristike i impulsnog odziva diskretnog sustava

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m}$$

- pokazano, je nadalje, kako je frekvencijska karakteristika periodična s periodom 2π

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- iz svega kazanog možemo, za bilo koji diskretni signal[1] $x(n)$, definirati Fourierovu transformaciju, vremenski diskretnih aperiodičnih signala, koja se prema engleskom nazivu naziva i DTFT – discrete–time Fourier transform

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}, \qquad \omega \in Realni$$

- zaključujemo kako je spektar
  - **kontinuiran** zbog aperiodičnosti signala u vremenskoj domeni
  - **periodičan** s periodom 2π jer je signal diskretan u vremenskoj domeni

[1] za signale x i frekvencije ω za koje suma konvergira, što je za gotovo sve praktične primjene, pa problem konveregencije ovdje ne razmatramo

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- kako je spektar periodičan, izraz za DTFT predstavlja Fourierov red, a $x(n)$ koeficijente tog Fourierovog reda

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \qquad \omega \in Realni$$

- koeficijente Fourierovog reda, dakle $x(n)$, određujemo, sličnim izvodom kao i prije u slučaju Fourierovog reda periodičnih kontinuiranih signala, iz

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega n})e^{j\omega n}d\omega$$

što predstavlja inverznu DTFT, dakle, inverznu Fourierovu transformaciju aperiodičnih diskretnih signala

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- zaključno, par za Fourierovu transformaciju aperiodičnih vremenski diskretnih signala je

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega n})e^{j\omega n}d\omega$$

- Parsevalova jednakost za aperiodične diskretne signale konačne energije je[2]

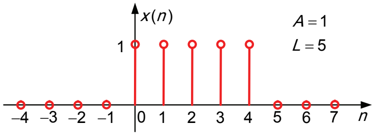
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

[2] izvod sličan kao i u prijašnjim slučajevima

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – primjer

- određuje se Fourierova transformacija aperiodičnog pravokutnog impulsa zadanog kao

$$x(n) = \begin{cases} A, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases}$$



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n} = A \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} =$$

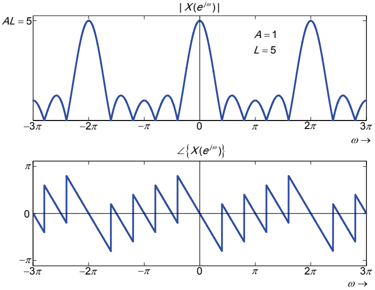
$$= A e^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)} \frac{sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

- pa su amplitudni (paran jer je signal realan) i fazni spektar (neparan jer je signal realan) kontinuirani i periodični

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – primjer

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} |A|L & \omega = 0 \\ |A|\left|\frac{sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right| & \text{inače} \end{cases}$$

$$\angle\{X(e^{j\omega})\} = \angle A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \\ + \angle\frac{sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- pokazano je kako je Fourierov red za vremenski kontinuiran periodičan signal $x(t)$, perioda T_0,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

- signal $x(t)$ je prikazan beskonačnim brojem frekvencijskih komponenti i njegov je spektar diskretan, pri čemu je razmak između susjednih komponenti $\frac{2\pi}{T_0}$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- s druge strane, povezujući kazano za periodične i diskretne signale, vrijedi
  - DISKRETAN periodični signal $x(n) = x(n+N)$ ima PERIODIČAN spektar (zbog diskretnosti signala u vremenskoj domeni) koji se ponavlja svakih $2\pi \Rightarrow$ područje frekvencija je $(-\pi, \pi)$ ili $(0, 2\pi)$
  - diskretni PERIODIČAN signal $x(n) = x(n+N)$ ima DISKRETAN spektar (zbog periodičnosti signala u vremenskoj domeni) pri čemu je razmak između susjednih frekvencijskih kompnonenti $\frac{2\pi}{N}$ radijana $\Rightarrow$ Fourierov red za periodični diskretni signal sadržava najviše N frekvencijskih komponenti
- dakle, za diskretni periodični signal $x(n) = x(n+N)$, perioda N, Fourierov red sadrži N harmonički vezanih kompleksnih eksponencijalnih funkcija

$$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- iz svega kazanog slijedi

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

  što je Fourierov red za vremenski diskretan periodični signal ili, prema engleskoj terminologiji DTFS – discrete–time Fourier series

- koeficijente Fourierovog reda, izvod sličan izvodu za kontinuirane signale, izračunavamo iz

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- iz izraza za koeficijente Fourierovog reda

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

  zaključujemo kako koeficijenti Fourierovog reda X_k omogućuju prikaz $x(n)$ u frekvencijskoj domeni, tako da X_k predstavljaju amplitudu i fazu vezanu uz frekvencijske komponente $e^{jk\frac{2\pi}{N}} = e^{j\omega_k n}$ gdje je $\omega_k = k\frac{2\pi}{N}$
- spektar diskretnog signala je periodičan što vrijedi i za X_k koji je periodičan s osnovnim periodom N

$$X_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = X_k$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- slijedi važno svojstvo periodičnosti X_k
- spektar diskretnog signala je periodičan što vrijedi i za X_k koji je periodičan s osnovnim periodom N

$$X_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = X_k$$

pa zaključujemo:

- spektar periodičnog diskretnog signala $x(n)$, osnovnog perioda N, je periodičan niz s periodom N, što znači da bilo kojih N susjednih uzoraka signala ili njegova spektra su dovoljni za potpuni opis signala u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni

Fourierova transformacija vremenski diskretnih periodičnih signala

- zaključno, par za Fourierovu transformaciju periodičnih vremenski diskretnih signala je

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

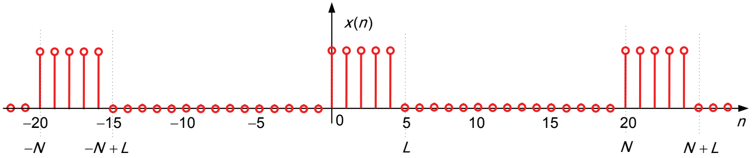
- Parsevalova jedankost za periodične diskretne signale[3]

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

[3]izvod sličan kao i u prijašnjim slučajevima

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – primjer

- određuje se Fourierova transformacija periodičnog pravokutnog impulsa zadanog kao

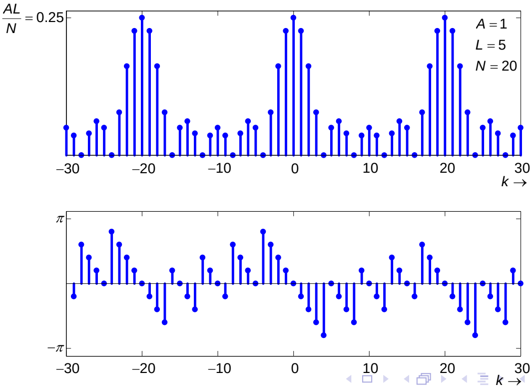


$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} A e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$= \begin{cases} \frac{AL}{N} & k = 0 \\ \frac{A}{N}\frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}L}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} & k = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases}$$

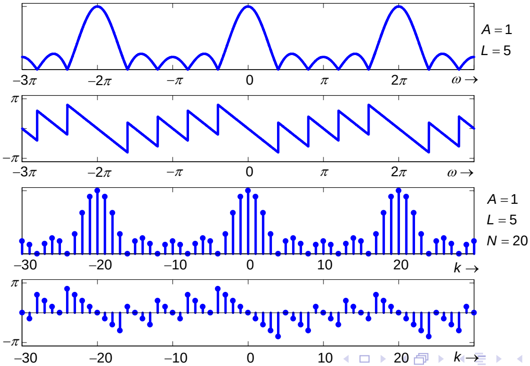
Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – primjer

$$X_k = \begin{cases} \frac{AL}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \frac{A}{N} e^{-jk\frac{\pi}{N}(L-1)} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{N}L\right)}{\sin\left(k\frac{\pi}{N}\right)} & \text{inače} \end{cases}$$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala – primjer

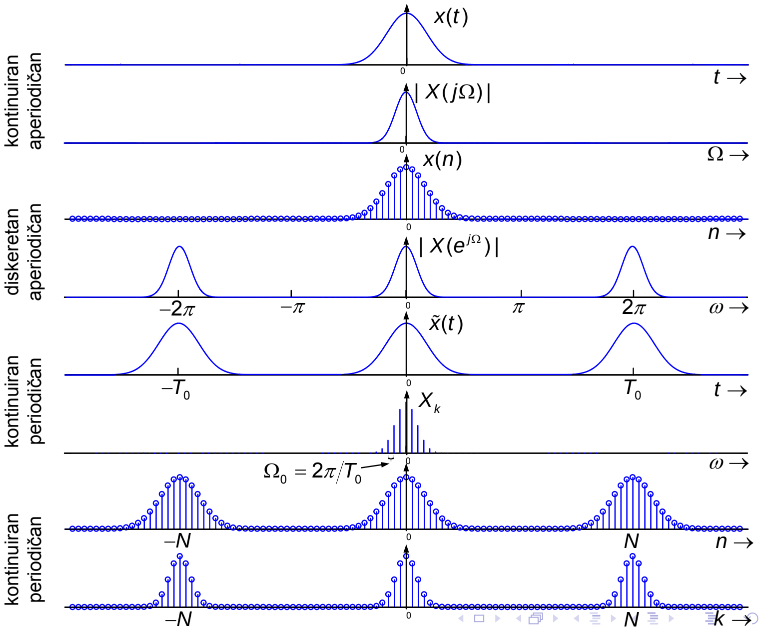
- uspoređuju se spektri vremenski diskretnih aperiodičnih i periodičnih signala
- može se uočiti kako je $X_k = \frac{1}{N} X(k\frac{2\pi}{N})$, dakle, spektar periodičnog signala možemo promatrati kao frekvencijski otipkani spektar aperiodičnog signala



Fourierove transformacije

	aperiodičan	periodičan
kontinuirani	$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$ $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$	$X_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$ $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\Omega_0 t}$
diskretni	$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ $x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

Fourierove transformacije



Digitalna obradba kontinuiranih signala

- digitalna obradba vremenski kontinuiranih signala sastoji se od tri osnovna koraka
  - pretvorba vremenski kontinuiranog signala u vremenski diskretan signal
  - obradba vremenski diskretnog signala
  - pretvorba obrađenog diskretnog signala u vremenski kontinuiran signal
- ovdje se pokazuje pod kojim uvjetima treba diskretizirati vremenski kontinuirani signal kako bi se mogao obrađivati kao vremenski diskretan signal
- također se pokazuje mogućnost rekonstrukcije vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- pokazano je kako se otipkavanjem kontinuiranog signala $x(t)$ čiji je spektar $X(j\Omega)$, dobiva signal $x_s(t)$ čiji je spektar periodičan i vrijedi

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\frac{2\pi}{T_s})) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))$$

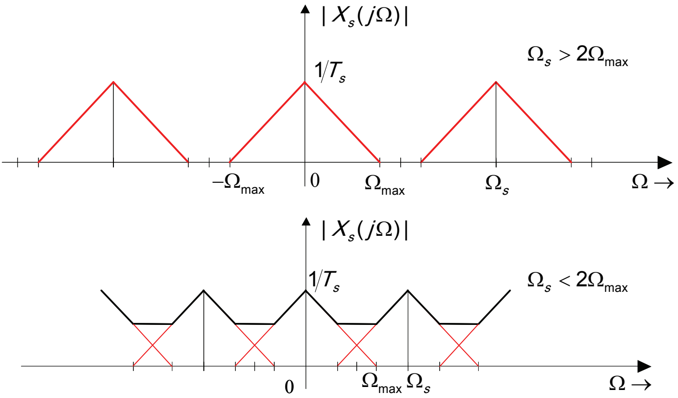
  dakle, spektar otipkanog signala $X_s(j\Omega)$ je periodično ponavljani spektar $X(j\Omega)$ kontinuiranog signala

- pretpostavimo da je spektar $X(j\Omega)$ frekvencijski ograničen

$$X(j\Omega) = 0 \text{ za } |\Omega| > \Omega_{max}$$

- različite frekvencije tipkanja signala $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ mogu u spektru $X_s(j\Omega)$ izazvati različite rezultate zavisno od toga je li $\Omega_s - \Omega_{max} > \Omega_{max} \Rightarrow \Omega_s > 2\Omega_{max}$ ili $\Omega_s - \Omega_{max} < \Omega_{max} \Rightarrow \Omega_s < 2\Omega_{max}$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala – aliasing



- za frekvenciju otipkavanja $\Omega_s < 2\Omega_{max}$, na donjoj slici, javlja se preklapanje ponavljajućih sekcija spektra, i ta se pojava naziva, prema engleskoj terminologiji, aliasing

Shannonov teorem otipkavanja

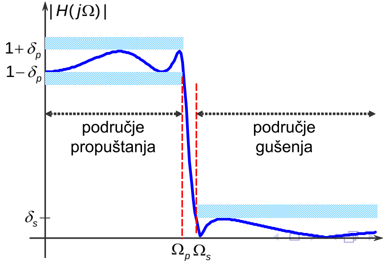
- vremenski diskretni signal smatramo ekvivalentim kontinuiranom ako je moguće rekonstruirati izvorni signal $x(t)$ iz otipkanog $x_s(t)$, odnosno, ako se iz spektra $X_s(j\Omega)$ može dobiti originalni $X(j\Omega)$
- postupak rekonstrukcije pretpostavlja izdvajanje osnovne sekcije spektra filtriranjem a to će biti moguće samo ako je spektar $X(j\Omega)$ ograničen na Ω_{max} te ako je frekvencija otipkavanja $\Omega_s > 2\Omega_{max}$
- gore kazano predstavlja Shannonov teorem i možemo ga precizno iskazati kao:[4]

> Vremenski kontinuirani signal $x(t)$, s frekvencijama ne većim od F_{max}, može biti egzaktno rekonstruiran iz svojih uzoraka $x(n) = x(nT_s)$, ako je otipkavanje provedeno s frekvencijom $F_s = \frac{1}{T_s}$ koja je veća od $2F_{max}$

[4] teorem je iskazan, kao što je uobičajeno, frekvencijom u Hz uzimajući u obzir $\Omega = 2\pi F$

Antialiasing filtri

- aliasing koji se javlja pri otipkavanju frekvencijski neomeđenog signala, izbjegava se filtriranjem kontinuiranog signala tzv. antialiasing filtrom
- antialiasing filtri su niskopropusni analogni filtri koji propuštaju komponente spektra frekvencija nižih od pola frekvencije otipkavanja, dok više guše
- koriste se realni filtri koji imaju konačnu širinu prijelaznog pojasa frekvencijske karakteristike i konačno gušenje u pojasu gušenja



Antialiasing filtri

- zbog konačne širine prijelaznog područja realnih antialiasing filtara potrebno je signal otipkavati nešto većom frekvencijom od dvostruke maksimalne frekvencije signala
- kod digitalne obradbe glazbenih signala, čije frekvencijsko područje širine 20kHz osigurava visoko vjernu reprodukciju, frekvencija otipkavanja (kod CD npr.) je 44.1 kHz što je dakle nešto više od dvostruke maksimalne frekvencije