GRUPA A

Signali i sustavi

Završni ispit – 26. lipnja 2007.

1. Kontinuirani kauzalan LTI sustav opisan diferencijalnom jednadžbom $y'(t) + 4y(t) = 2u'(t) + u(t)$ pobuđen je signalom $u(t) = 2\,\mu(t)$. Početni uvjet je $y(0^-) = 1$.

a) Izračunajte koliki je početni uvjet u $t = 0^+$!

b) Odredite odziv sustava na zadanu pobudu rješavanjem jednadžbe u vremenskoj domeni.

c) Odredite odziv sustava na zadanu pobudu korištenjem Laplaceove transformacije.

d) Odredite prijenosnu funkciju sustava. Je li sustav stabilan?

2. Diskretan kauzalan LTI sustav opisan je jednadžbom $4y(n) + 4y(n-1) + y(n-2) = u(n)$. Sustav je pobuđen signalom $u(n) = 5\,\mu(n)$. Početni uvjeti su jednaki nuli.

a) Odredite impulsni odziv sustava i prijenosnu funkciju sustava.

b) Je li sustav stabilan?

c) Odredite odziv sustava na zadanu pobudu korištenjem $\mathcal{Z}$ transformacije.

3. Prijenosna funkcija kontinuiranog LTI sustava je

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Odredite matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ paralelne realizacije.

4. Odredite rastav u Fourierov red signala

$$x(t) = 10\cos(50\pi t) + 5\sin(100\pi t) + \sin(150\pi t + 2\pi/3) + \cos(200\pi t + \pi/4)$$

te skicirajte dobiveni amplitudni i fazni spektar. Ako signal $x(t)$ otipkamo s periodom otipkavanja $T_s = 0{,}02$ je li došlo do preklapanja spektra?

5. Prijenosna funkcija nekog diskretnog LTI sustava je $H(z) = \dfrac{1}{4 - z^{-1}}$, no nije poznato područje konvergencije prijenosne funkcije.

a) Koliko ima različitih mogućih područja konvergencije?

b) Za svako od područja konvergencije odredite impulsni odziv sustava.

c) Nacrtajte amplitudnu i faznu karakteristiku sustava čije područje konvergencije obuhvaća beskonačnost.

GRUPA B

Signali i sustavi

Završni ispit – 26. lipnja 2007.

1. Kontinuirani kauzalan LTI sustav opisan diferencijalnom jednadžbom $y'(t) + 4y(t) = 2u'(t) + u(t)$ pobuđen je signalom $u(t) = \mu(t)$. Početni uvjet je $y(0^-) = 2$.

a) Izračunajte koliki je početni uvjet u $t = 0^+$!

b) Odredite odziv sustava na zadanu pobudu rješavanjem jednadžbe u vremenskoj domeni.

c) Odredite odziv sustava na zadanu pobudu korištenjem Laplaceove transformacije.

d) Odredite prijenosnu funkciju sustava. Je li sustav stabilan?

2. Diskretan kauzalan LTI sustav opisan je jednadžbom $4y(n) - 4y(n-1) + y(n-2) = u(n)$. Sustav je pobuđen signalom $u(n) = 5\,\mu(n)$. Početni uvjeti su jednaki nuli.

a) Odredite impulsni odziv sustava i prijenosnu funkciju sustava.

b) Je li sustav stabilan?

c) Odredite odziv sustava na zadanu pobudu korištenjem $\mathcal{Z}$ transformacije.

3. Prijenosna funkcija kontinuiranog LTI sustava je

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Odredite matrice **A**, **B**, **C** i **D** paralelne realizacije.

4. Odredite rastav u Fourierov red signala

$$x(t) = 10\cos(50\pi t) + 5\sin(100\pi t) + \sin(150\pi t + 2\pi/3) + \cos(200\pi t + \pi/4)$$

te skicirajte dobiveni amplitudni i fazni spektar. Ako signal $x(t)$ otipkamo s periodom otipkavanja $T_s = 0{,}01$ je li došlo do preklapanja spektra?

5. Prijenosna funkcija nekog diskretnog LTI sustava je $H(z) = \dfrac{1}{4 + z^{-1}}$, no nije poznato područje konvergencije prijenosne funkcije.

a) Koliko ima različitih mogućih područja konvergencije?

b) Za svako od područja konvergencije odredite impulsni odziv sustava.

c) Nacrtajte amplitudnu i faznu karakteristiku sustava čije područje konvergencije obuhvaća beskonačnost.

ZADATAK 1 $\qquad y'(t)+4y(t)=2u'(t)+u(t)$ $\qquad$ 1

$$u(t)=A\cdot\mu(t) \qquad y(0^-)=y_0$$

Ovisno o grupi $\boxed{\begin{matrix}A=2\\ y_{\bar{0}}=1\end{matrix}}$ ili $\boxed{\begin{matrix}A=1\\ y_{\bar{0}}=2\end{matrix}}$

U nastavku će rješenje biti određeno za općenit A i y_0

a) Odredite poč. uvj. $y(t)$ za $t=0^+$

... prema šalabahteru:

$$\Delta y = y(0^+)-y(0^-) = b_0 u(0^+)$$

koliko iznosi b_0 ?

$$y'(t)+a_1 y(t) = b_0 u'(t) + b_1 u(t)$$

$$\Rightarrow a_1=4 \quad \boxed{b_0=2} \quad b_1=1$$

Dakle

$$y(0^+) = y(0^-)+\Delta y$$
$$= y(0^-)+b_0 u(0^+)$$
$$= y_{\bar{0}}+2\cdot A$$

pobuda je

$u(t)=A\cdot\mu(t)$

$\underline{u(0^+)=A}$

za $A=2$, $y_{\bar{0}}=1$ imamo $y(0^+)=1+4=5$

za $A=1$, $y_{\bar{0}}=2$ ... $y(0^+)=2+2=4$

u nastavku ovaj poč uvjet biti će označen sa y_{0^+}

b) pronađimo odziv rješavanjem dif. jednadžbe u vremenskoj domeni:

Pronađimo prvo partikularno rješenje $y_p(t)$

Obzirom da je sve-vremenska pobuda oblika konstante A, sve-vremensko partikularno rješenje pretpostavljamo u istom obliku (2)

$$y_p(t) = K$$

uvrštavanjem u dif. jed. dobivamo:

$$y_p'(t) + 4y_p(t) = 2\cdot(A)' + A$$

$$4K = A \Rightarrow K = \frac{A}{4}$$

za grupu sa $A=2$ ... $K = \frac{1}{2}$

— II — sa $A=1$ ... $K = 1/4$

kauzalno partikularno rješenje je dakle:

$$y_p(t) = K\cdot\mu(t)$$

Nađimo sada totalno rj.

$$y_{tot}(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Da odredimo $y_h(t)$ potrebno je odrediti polove homogen.

$y_h(t) = C_1\cdot e^{s_1 t}$ ... uvrštavanjem u dif. jed.

$$C_1 s_1\cdot e^{s_1 t} + 4C_1\cdot e^{s_1 t} = \emptyset$$

$$C_1\cdot e^{s_1 t}\underbrace{(s_1+4)}_{\text{karakteristični polinom}} = \emptyset$$

$s_1 = -4$ ← pol sustava

$$y_h(t) = C_1\cdot e^{-4t}$$

sve-vremensko homogeno rj.

(3)

Konstantu homogenog rj. c_1 nalazimo iz poč uvjeta u $t=0^+$

sve-vremensko rj.

$$y_{tot_{sv}}(t) = c_1 \cdot e^{-4t} + K$$

odnosno kauzalno rj.

$$y_{tot}(t) = c_1 \cdot e^{-4t} \cdot \mu(t) + K \cdot \mu(t)$$

Poznato je da $y_{tot}(0^+) = y_{0^+}$

Odredimo dakle c_1

$$c_1 \cdot \underbrace{e^{-4 \cdot 0^+}}_{1} \cdot \underbrace{\mu(0^+)}_{1} + K \cdot \underbrace{\mu(0^+)}_{1} = y_{0^+}$$

$$c_1 + K = y_0^+$$

$$c_1 = y_{0^+} - K$$

$$= y_{0^-} + 2A - \frac{A}{4}$$

$$= y_{0^-} + \frac{7}{4} A$$

za grupu $A=2,\ y_{0^-}=1 \Rightarrow c_1 = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$

—״— $A=1,\ y_{0^-}=2 \Rightarrow c_1 = 2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$

Dakle kauzalno totalno rješenje je:

$$y_{tot} = \left(\frac{9}{2} e^{-4t} + \frac{1}{2}\right) \cdot \mu(t)$$ za grupu $A=2,\ y_{0^-}=1$

$$y_{tot} = \left(\frac{15}{4} \cdot e^{-4t} + \frac{1}{4}\right) \cdot \mu(t)$$ —״— $A=1\ \ y_{0^-}=2$

4

a) Sada određujemo odziv pomoću $\mathcal{L}$ transformacije

$$y'(t) + 4y(t) = 2u'(t) + u(t) \quad \Big\downarrow \mathcal{L} \qquad u(0^-) = \emptyset$$

$$s\,Y(s) - y(0^-) + 4Y(s) = 2sU(s) - 2u(0^-) + U(s)$$

$$(s+4)Y(s) = (2s+1)\,U(s) + y(0^-)$$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s+4}U(s) + \frac{y(0^-)}{s+4}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(s)\cdot U(s)}_{Y_m(s)} + Y_0(s)$$

$Y_m(s)$ ← odziv mirnog sustava

$Y_0(s)$ ← odziv nepobuđenog sustava na poč. stanje

⇒ Pretpostavljamo da prijenosna funkcija $H(s)$ glasi

$$H(s) = \frac{2s+1}{s+4} \quad \ldots \text{ što se traži u d)}$$

Promatrimo sada $U(s)$?

Prema tablici: $A\mu(t) \overset{\mathcal{L}}{\frown} \frac{A}{s}$

Dakle

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s+4}\cdot\frac{A}{s} + \frac{y_{0^-}}{s+4}$$

$$= \frac{A(2s+1) + y_{0^-}\cdot s}{s(s+4)} = \frac{s(2A + y_{0^-}) + A}{s(s+4)}$$

Radi određivanja inv. $\mathcal{L}$ transformacije moramo $Y(s)$ rastaviti u parc. razlomke:

(polovi u nazivniku su jednostruki ...)

5

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+4} \quad /\cdot \text{naz}$$

$$s\left(2A + y_{0^-}\right) + A = c_1(s+4) + c_2 \cdot s$$

$$= s\underbrace{(c_1 + c_2)} + \underbrace{c_1 \cdot 4}$$

$$c_1 + c_2 = (2A + y_{0^-}) \qquad c_1 \cdot 4 = A$$

$$c_1 = \frac{A}{4}$$

$$c_2 = 2A + y_{0^-} - c_1$$

$$= 2A - \frac{A}{4} + y_{0^-}$$

$$= \frac{7}{4}A + y_{0^-}$$

$$Y(s) = \frac{A/4}{s} + \frac{\frac{7}{4}A + y_{0^-}}{s+4}$$

Inverznu $\mathcal{L}$ transf. radimo po tablici:

$$y(t) = \frac{A}{4}\cdot\mu(t) + \left(\frac{7}{4}A + y_{0^-}\right)\cdot e^{-4t}\cdot\mu(t)$$

što je naravno potpuno jednako rješenju određenom u vrem. domeni

za grupu $A=2,\ y_{0^-}=1 \ldots\ y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\cdot e^{-4t}\right)\mu(t)$

—"— $A=1\ \ y_{0^-}=2 \ldots\ y(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{15}{4}\cdot e^{-4t}\right)\mu(t)$

d) konačno, obzirom da smo $H(s)$ već pronašli

$$H(s) = \frac{2s+1}{s+4}$$

i obzirom da je zadano da se radi o kauzalnom sustavu područje stabilnosti je lijeva poluravnina $\sigma < 0$

$\uparrow\ \sigma = \mathrm{Re}(s_1)$

⑥

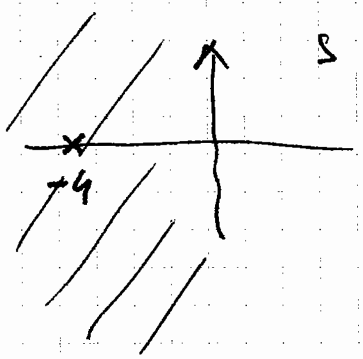
Nađimo pol sustava s_1 ?

karakteristični polinom $A(s)$ jednak je nazivniku $H(s)$

$$A(s) = s+4 = 0$$

$$\Longrightarrow s_1 = -4$$

$$Re(s_1) = -4 < 0$$



sustav je stabilan ✓

(za obje grupe)

ZADATAK

2. $4y(n) \pm 4y(n-1) + y(n-2) = u(n)$ $\qquad u(n) = 5\mu(n)$ $\qquad$ 7

$\uparrow$ ovisno o grupi

a) Kreiemo od $H(z)$. Obzirom da se radi o mirnom sustavu $H(z)$ pišemo direktno iz jedn. dif.

$$4Y(z) \pm 4Y(z)\cdot z^{-1} + Y(z)\cdot z^{-2} = U(z)$$

$$Y(z)\left(4 \pm z^{-1}4 + z^{-2}\right) = U(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{4 \pm 4z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{A(z)}$$

Radi određivanja rastava u parc. razlomke moramo odrediti polove sustava

$$A(z) = \emptyset \Rightarrow 4 \pm 4z^{-1} + z^{-2} = \emptyset$$

$$z_{1,2} = \frac{\mp 4 \pm \sqrt{16-16}}{2\cdot 4} = \frac{\mp 4}{2\cdot 4} = \mp\frac{1}{2}$$

za grupu sa + ... $z_1 = z_2 = -1/2$

— " — $\quad$ − ... $z_1 = z_2 = 1/2$ $\Big\}$ Dvostruki korijen !

$$H(z) = \frac{1}{4\left(1 \pm z^{-1} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - z_1 z^{-1}\right)\left(1 - z_2 z^{-1}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \left(\mp\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 \pm \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}z^2}{\left(z \pm \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$H_1(z) = H(z)\cdot z^{-1} = \frac{\frac{1}{4}z}{\left(z \pm \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{C_{11}}{z \pm \frac{1}{2}} + \frac{C_{12}}{\left(z \pm \frac{1}{2}\right)^2} \quad / \cdot \text{naz}$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{4}z &= C_{11}\left(z \pm \tfrac{1}{2}\right) + C_{12} \\ \tfrac{1}{4}z &= C_{11}z + \left(C_{12} \pm \tfrac{1}{2}C_{11}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_{11} &= \tfrac{1}{4} \\ C_{12} &= \mp\tfrac{1}{2}C_{11} \\ &= \mp\tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

8

$$H(z) = z\cdot H_1(z) = c_{11}\cdot\frac{z}{z\pm\frac{1}{2}} + c_{12}\cdot\frac{z}{(z\pm\frac{1}{2})^2}$$

Određujemo $h[n]$ inverznom $\mathcal{Z}$ transformacijom $H(z)$

U tablici čitamo slijedeće parove:

$$\frac{az}{(z-a)^2} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} n\cdot a^n\mu(n) \qquad \frac{z}{z-a} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} a^n\cdot\mu(n)$$

$$H(z) = c_{11}\cdot\frac{z}{z\pm\frac{1}{2}} + c_{12}\,\frac{(\mp\frac{1}{2})\cdot(\mp 2)\, z}{(z\pm\frac{1}{2})^2}$$

$$= c_{11}\,\frac{z}{z\pm\frac{1}{2}} \mp 2c_{12}\cdot\frac{\mp\frac{1}{2}z}{(z-(\mp\frac{1}{2}))^2}$$

$$h[n] = c_{11}\cdot(\mp\tfrac{1}{2})^n\mu(n) \mp 2c_{12}\cdot n\cdot(\mp\tfrac{1}{2})^n\cdot\mu(n)$$

$$= (c_{11}\mp 2c_{12}n)(\mp\tfrac{1}{2})^n\cdot\mu(n)$$

Uvrstimo određene koef. c_{11}, c_{12}

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{4} \mp 2(\mp\tfrac{1}{8})n\right)(\mp\tfrac{1}{2})^n\mu(n)$$

$$= \tfrac{1}{4}(1+n)(\mp\tfrac{1}{2})^n\mu(n)$$

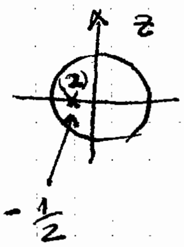
b) stabilnost ?

$$|z_i| < 1 \quad \forall i$$

za grupu sa (+) $\quad z_1 = z_2 = -\frac{1}{2}$

$|z_1| = |z_2| = \frac{1}{2} < 1$

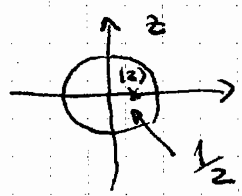
$\Rightarrow$ stabilan



za grupu sa (-) $\quad z_1 = z_2 = \frac{1}{2}$

$|z_1| = |z_2| = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ stabilan



(9)

c) Odziv na $u(n) = 5 \cdot \mu(n)$

Kako se radi o mirnom sustavu:

$$y_{tot}[n] = y_m[n],$$

a $y_m[n]$ možemo odrediti inv. Z transf. $Y_m(z)$

$$Y_m(z) = H(z) \cdot U(z)$$

Po tablici $U(z)$ nalazimo kao:

$$\mathcal{Z}\{5\mu(n)\} = \frac{5z}{z-1}$$

$$Y_m(z) = \frac{\frac{1}{4}z^2}{(z \pm \frac{1}{2})^2} \cdot \frac{5z}{z-1} = \frac{\frac{5}{4}z^3}{(z \pm \frac{1}{2})^2(z-1)}$$

Radi određivanja $y_m[n]$ moramo $Y_m(z)$ rastaviti u parc. razlomke:

$$Y_{m1}(z) = Y_m(z) \cdot z^{-1} = \frac{\frac{5}{4}z^2}{(z \pm \frac{1}{2})^2(z-1)} = \frac{C_{11}}{z \pm \frac{1}{2}} + \frac{C_{12}}{(z \pm \frac{1}{2})^2} + \frac{C_2}{z-1} \Big/ \text{naz}$$

$$\frac{5}{4}z^2 = C_{11}\left(z \pm \frac{1}{2}\right)\cdot(z-1) + C_{12}(z-1) + C_2\left(z \pm \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{5}{4}z^2 = C_{11}\left(z^2 - z \pm \frac{1}{2}z \mp \frac{1}{2}\right) + C_{12}(z-1) + C_2\left(z^2 \pm z + \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{5}{4}z^2 = z^2(C_{11}+C_2) + z\left(-C_{11} \pm \frac{1}{2}C_{11} + C_{12} \pm C_2\right) + \left(\mp\frac{1}{2}C_{11} - C_{12} + \frac{1}{4}C_2\right)$$

Radi nalaženja rješenja koje je zajedničko za obje grupe uvedimo α

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{za grupu sa } (+) \\ -1 & \text{-- " --} \quad (-) \end{cases}$$

$$\frac{5}{4}z^2 = z^2\underbrace{(C_{11}+C_2)}_{=5/4} + z\underbrace{\left(\left(\frac{1}{2}\alpha - 1\right)C_{11} + C_{12} + \alpha C_2\right)}_{=\emptyset} + \underbrace{\left(-\alpha\frac{1}{2}C_{11} - C_{12} + \frac{1}{4}C_2\right)}_{=\emptyset}$$

JEDN. I　　　　JEDN. II　　　　JEDN. III

Zbrajanjem jedn. II i III eliminira se c_{12} (10)

$$\begin{aligned} &\text{II}+\text{III} \;\dots\; & -c_{11} + c_2\left(\tfrac{1}{4}+\alpha\right) &= \phi \\ &\text{I} \;\dots\; & c_{11} + c_2 &= \tfrac{5}{4} \end{aligned} \Big\rangle +$$

$$c_2\left(\frac{5}{4}+\alpha\right) = \frac{5}{4} \qquad c_2 = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}+\alpha} = \frac{5}{5+4\alpha}$$

Iz jedn. I

$$c_{11} = \frac{5}{4} - c_2 = \frac{5}{4} - \frac{5}{5+4\alpha} = \frac{25+20\alpha-20}{20+16\alpha}$$

$$c_{11} = \frac{5+20\alpha}{20+16\alpha}$$

Iz jedn. III

$$c_{12} = \frac{1}{4}c_2 - \frac{\alpha}{2}c_{11} = \frac{5}{20+16\alpha} - \frac{\frac{\alpha}{2}\cdot 5 + \frac{20}{2}\alpha^2}{20+16\alpha}$$

$$c_{12} = \frac{5\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-10}{20+16\alpha}$$

Nadimo sada rješenje za oba slučaja $\alpha=1$, $\alpha=-1$

$\alpha = 1$	$\alpha = -1$
$c_2 = \frac{5}{5+4} = \frac{5}{9}$	$c_2 = \frac{5}{5-4} = 5$
$c_{11} = \frac{5+20}{20+16} = \frac{25}{36}$	$c_{11} = \frac{5-20}{20-16} = \frac{-15}{4}$
$c_{12} = \frac{\frac{5}{2}-10}{36} = \frac{-15}{72}$	$c_{12} = \frac{\frac{15}{2}-10}{20-16} = \frac{-5}{8}$

$$Y_m(z) = z\cdot Y_{m1} = c_{11}\cdot\frac{z}{z\pm\frac{1}{2}} + c_{12}(\mp 2)\frac{\left(\mp\frac{1}{2}\right)z}{\left(z-\left(\mp\frac{1}{2}\right)\right)^2} + c_2\frac{z}{z-1}$$

$$y_m(n) = c_{11}\left(\mp\frac{1}{2}\right)^n\cdot\mu(n) \mp 2c_{12}\cdot n\cdot\left(\mp\frac{1}{2}\right)^n\mu(n) + c_2\cdot\mu(n)$$

$$= \left[\left(c_{11}\mp 2c_{12}\cdot n\right)\left(\mp\frac{1}{2}\right)^n + c_2\right]\mu(n)$$

Za slučaj sa (+), tj $\alpha = 1$ imamo: (11)

$$y_m(n) = \left[\left(\frac{25}{36} - 2 \cdot \left(\frac{-15}{72} \right) \cdot n \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{5}{9} \right] \mu(n)$$

$$= \frac{5}{9} \left[\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} n \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 1 \right] \mu(n)$$

$$= \frac{5}{36} \left[(3n+5) \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 4 \right] \mu(n)$$

Za slučaj sa (−), $\alpha = -1$ imamo:

$$y_m(n) = \left[\left(-\frac{15}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{5}{8} \right) \cdot n \right) \left(\frac{1}{2} \right)^n + 5 \right] \mu(n)$$

$$= \left[5 - \frac{5}{4} (n+3) \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] \cdot \mu(n)$$

$$= 5 \cdot \left[1 - \frac{n+3}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] \cdot \mu(n)$$

$$= 5 \cdot \left[1 - (n+3) \left(\frac{1}{2} \right)^{n+2} \right] \mu(n)$$

$$= 5 \cdot \left[1 - (n+3) \cdot 2^{-(n+2)} \right] \mu(n) \qquad (-)$$

Analogno možemo srediti i gornji slučaj $\alpha = 1$

$$y_m(n) = \frac{5}{9} \left[(3n+5)(-2)^{-(n+2)} + 1 \right] \mu(n) \qquad (+)$$

3. zadatak: (12)

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

Za paralelnu realizaciju moramo $H(s)$ rastaviti u parcijalne razlomke. Iz nazivnika je očito da sustav ima tri jednostruka realna pola, pa paralelna realizacija ima članove prvog reda (nema potrebe za uparivanjem konj. kompl. parova)

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_3}{s-3} + c_0$$

$$c_1 = \lim_{s\to 1}\left(H(s)\cdot(s-1)\right) = \left.\frac{s^2+3s+2}{(s-2)(s-3)}\right|_{s=1} = \frac{1+3+2}{(-1)(-2)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$c_2 = \lim_{s\to 2}\left(H(s)\cdot(s-2)\right) = \left.\frac{s^2+3s+2}{(s-1)(s-3)}\right|_{s=2} = \frac{4+6+2}{1\cdot(-1)} = \frac{12}{-1} = -12$$

$$c_3 = \lim_{s\to 3}\left(H(s)\cdot(s-3)\right) = \left.\frac{s^2+3s+2}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=3} = \frac{9+9+2}{2\cdot 1} = 10$$

$c_0 = \emptyset$ jer je red brojnika manji od reda nazivnika !

Provjera:

$$H(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{12}{s-2} + \frac{10}{s-3} = \frac{3(s-2)(s-3)-12(s-1)(s-3)+10(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

$$= \frac{3(s^2-5s+6)-12(s^2-4s+3)+10(s^2-3s+2)}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{s^2(3-12+10)+s(-15+48-30)+(18-36+20)}{naz}$$

$$= \frac{s^2(1)+s(3)+(2)}{naz} \quad \text{OK}$$

Alternativno neki studenti su mogli umjesto limesa koef. odrediti pomoću sustava jednadžbi:

$$s^2+3s+2 = c_1(s^2-5s+6)+c_2(s^2-4s+3)+c_3(s^2-3s+2)$$

$$= s^2\underbrace{(c_1+c_2+c_3)}_{==1} + s\underbrace{(-5c_1-4c_2-3c_3)}_{==3} + \underbrace{(6c_1+3c_2+2c_3)}_{==2}$$

00.A.503.A.0

13

Dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\ 5c_1 + 4c_2 + 3c_3 &= -3 \\ 6c_1 + 3c_2 + 2c_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$c_1 = 1 - c_2 - c_3 = 1 + 12 - 10 = 3$$

$$\boxed{c_1 = 3}$$

$$\begin{aligned} 5 - 5c_2 - 5c_3 + 4c_2 + 3c_3 &= -3 \\ 6 - 6c_2 - 6c_3 + 3c_2 + 2c_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -c_2 - 2c_3 &= -8 \\ -3c_2 - 4c_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$c_2 + 2c_3 = 8 \qquad c_2 = 8 - 2c_3 = 8 - 20 = -12$$

$$\boxed{c_2 = -12}$$

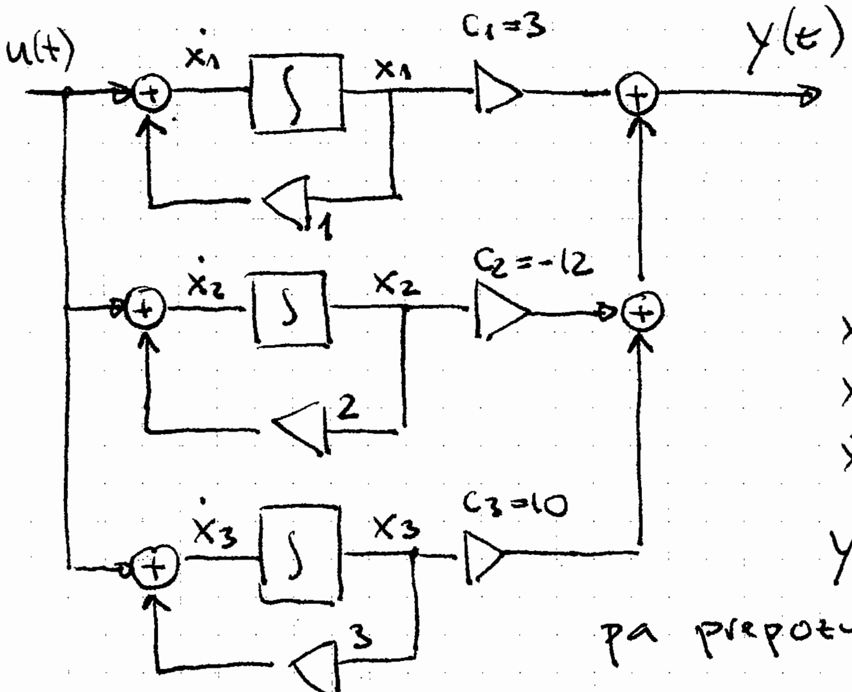
$$3c_2 + 4c_3 = 4$$

$$24 - 6c_3 + 4c_3 = 4$$

$$-2c_3 = -20$$

$$\boxed{c_3 = 10}$$

Paralelna realizacija sustava ima slijedeći oblik:



Izlaze integratora odabiremo kao varijable stanja x_1, x_2 i x_3. Iz strukture čitamo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 \cdot x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= 2 \cdot x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= 3x_3 + u \end{aligned}$$

$$y = 3x_1 - 12x_2 + 10x_3 + \emptyset \cdot u,$$

pa prepoznajemo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -12 & 10 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{[\emptyset]}_{D} \cdot u$$

00.A.503.A.90

14

Konačno rješenje je:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad C=[3\ -12\ 10]\quad D=[\varnothing]$$

Za drugu grupu prijenosna funkcija je:

$$H(s)=\frac{s^2-3s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

⇒ polovi su realni i jednostruki, red brojnika je opet niži od reda nazivnika .... dakle imamo tri paralelne sekcije prvog reda bez direktne veze ulaza i izlaza

$$H(s)=\frac{C_1}{s+1}+\frac{C_2}{s+2}+\frac{C_3}{s+3}$$

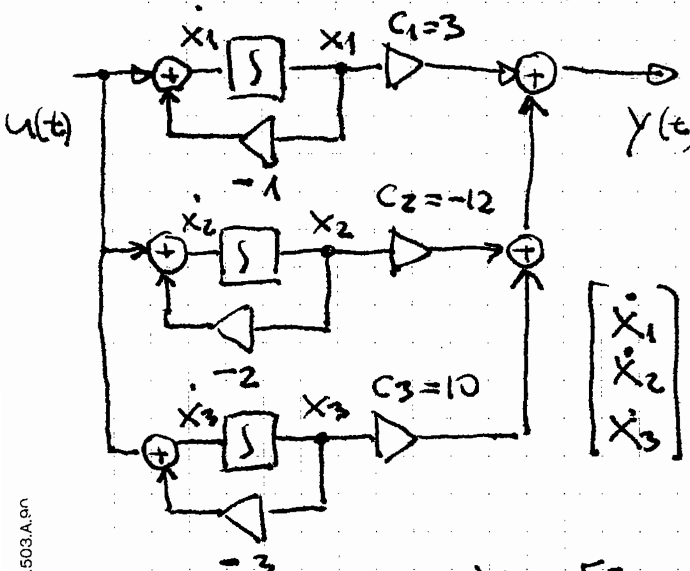
$$C_1=\lim_{s\to-1}\{(s+1)H(s)\}=$$

$$=\left.\frac{s^2-3s+2}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1}=\frac{1+3+2}{1\cdot 2}=\frac{6}{2}=\underline{3}$$

$$C_2=\lim_{s\to-2}\{(s+2)H(s)\}=\frac{s^2-3s+2}{(s+1)(s+3)}=\frac{4+\ 6+2}{(-1)\cdot(1)}=\underline{-12}$$

$$C_3=\lim_{s\to-3}\{(s+3)H(s)\}=\frac{s^2-3s+2}{(s+1)(s+2)}=\frac{9+9+2}{(-2)(-1)}=\frac{20}{2}=\underline{10}$$

Dakle $H(s)=\dfrac{3}{s+1}-\dfrac{12}{s+2}+\dfrac{10}{s+3}$



$$\dot{x}_1=-x_1+u$$
$$\dot{x}_2=-2x_2+u$$
$$\dot{x}_3=-3x_3+u$$

$$y=3x_1-12x_2+10x_3$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{B}\cdot u$$

$$y=\underbrace{[3\ -12\ 10]}_{C}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\underbrace{[\varnothing]}_{D}\cdot u$$

4. ZADATAK (15)

$$\left.\begin{aligned} x(t) = {} & 10\cos(50\pi t) \\ & + 5\sin(100\pi t) \\ & + \sin(150\pi t + 2\pi/3) \\ & + \cos(200\pi t + \pi/4) \end{aligned}\right\} \text{FR ?}$$

Moramo odrediti period ovog signala T_0

Frekvencije njegovih komponenti su:

$\omega_1 = 50\pi$ rad/s $\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25}$ [s]

$\omega_2 = 100\pi$ rad/s $\Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{1}{50}$ [s]

$\omega_3 = 150\pi$ rad/s $\Rightarrow T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{1}{75}$ [s]

$\omega_4 = 200\pi$ rad/s $\Rightarrow T_4 = \frac{2\pi}{\omega_4} = \frac{1}{100}$ [s]

Zajednički period ovih signala T_0, jednak je periodu najsporije komponente T_1 jer.

$$T_1 = T_0 = \frac{1}{25}\,[s]$$

$$T_2 = \frac{T_0}{2}, \quad T_3 = \frac{T_0}{3} \quad T_4 = \frac{T_0}{4}$$

Dakle, osnovni period T_0 pri razvoju ovog signala jednak je $T_0 = \frac{1}{25}$ [s], a osnovna kružna frekvencija je $\frac{2\pi}{T_0} = \Omega_0 = 50\pi$ rad/s

Frekvencije komponenata signala su stoga:

$$\omega_1 = 1\cdot\Omega_0, \quad \omega_2 = 2\Omega_0, \quad \omega_3 = 3\Omega_0, \quad \omega_4 = 4\Omega_0$$

Odredimo sada koeficijente razvoja u FR

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{jk\Omega_0 t}, \text{ gdje:}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{-jk\Omega_0 t}\,dt$$

Koef. X_k uopće nije potrebno određivati korištenjem formalnog izraza, jer je očito da svaka komponenta signala generira jedan par kompl. exponencijala.

Ako cos raspišemo kao sumu exp. imamo:

$$10\cdot\cos(50\pi t) = 10\cdot\cos(\omega_1 t) = 10\cdot\cos(1\cdot\Omega_0 t)$$
$$= \frac{10}{2}\left(e^{j1\cdot\Omega_0 t} + e^{-j1\cdot\Omega_0 t}\right)$$
$$= \left(\frac{10}{2}\cdot e^{j\cdot\emptyset}\right)\cdot e^{j1\cdot\Omega_0 t} + \left(\frac{10}{2}\cdot e^{j\emptyset}\right)\cdot e^{-j1\cdot\Omega_0 t}$$
$$= X_1\cdot e^{j1\cdot\Omega_0 t} + X_{-1}\cdot e^{-j1\cdot\Omega_0 t}$$

Prepoznajemo da prva komponenta signala se u razvoju u FR vidi na koeficijentima X_1 i X_{-1} koji iznose $X_1 = 5\cdot e^{j\emptyset}$ $X_{-1} = X_1^* = 5\cdot e^{j\emptyset}$

Analogno radimo i za preostale 3 komponente signala:

2. komp.

$$5\cdot\sin(100\pi t) = 5\cdot\sin(\omega_2 t) = 5\cdot\sin(2\cdot\Omega_0 t)$$
$$= 5\cdot\cos\left(2\Omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(e^{j(2\Omega_0 t - \pi/2)} + e^{-j(2\Omega_0 t - \pi/2)}\right)$$
$$= \left(\frac{5}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\cdot e^{j2\Omega_0 t} + \left(\frac{5}{2}\, e^{j\frac{\pi}{2}}\right) e^{-j2\Omega_0 t}$$
$$= X_2\cdot e^{j2\Omega_0 t} + X_{-2}\cdot e^{-j2\Omega_0 t}$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{5}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad X_{-2} = X_2^* = \frac{5}{2}\cdot e^{j\pi/2}$$

3 komp:

$$\sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\omega_3 t + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\Omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(3\Omega_0 t - \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\Omega_0 t + \frac{-3+4}{6}\pi\right) = \cos\left(3\Omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{j(3\Omega_0 t + \pi/6)} + e^{-j(3\Omega_0 t + \pi/6)}\right) = \frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{6}}\cdot e^{j3\Omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{-j3\Omega_0 t}$$
$$= X_3\, e^{j3\Omega_0 t} + X_{-3}\, e^{-j3\Omega_0 t} \Rightarrow X_3 = \frac{1}{2}\cdot e^{j\pi/6},\ X_{-3} = X_3^* = \frac{1}{2}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

Konačno i zadnja komponenta:

$$\cos(200\pi t + \pi/4) = \cos(\omega_4 t + \pi/4) = \cos(4\Omega_0 t + \pi/4)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[e^{j(4\Omega_0 t+\pi/4)} + e^{-j(4\Omega_0 t+\pi/4)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^{j\pi/4}\cdot e^{j4\Omega_0 t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-j\pi/4}\cdot e^{-j4\Omega_0 t}$$

$$= X_4\cdot e^{j4\Omega_0 t} + X_{-4}\cdot e^{-j4\Omega_0 t}$$

$$\Rightarrow X_4 = \tfrac{1}{2}e^{j\pi/4} \qquad X_{-4} = X_4^* = \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$$

Zaključujemo FR se sastoji od 8 članova za $|k| \in [1,2,3,4]$, dok su svi ostali koef. X_k jednaki $\emptyset$

$$X_k = \begin{cases} 5\cdot e^{j0} \text{ za } k=1, & 5\cdot e^{j\emptyset} \text{ za } k=-1 \\ 5/2\cdot e^{-j\pi/2} \text{ za } k=2 & 5/2\cdot e^{j\pi/2} \text{ za } k=-2 \\ 1/2\cdot e^{j\pi/6} \text{ za } k=3 & 1/2\cdot e^{-j\pi/6} \text{ za } k=-3 \\ 1/2\cdot e^{j\pi/4} \text{ za } k=4 & 1/2\cdot e^{-j\pi/4} \text{ za } k=-4 \\ \emptyset \text{ za sve ostale } k & \end{cases}$$

Ovo se može zapisati i pomoću Kroneckerovog deltla impulsa kao:

$$\begin{aligned} X_k = {} & 5\cdot e^{j\emptyset}\cdot\delta[k-1] + 5\cdot e^{j\emptyset}\,\delta[k+1] + \\ & \tfrac{5}{2}\cdot e^{-j\pi/2}\cdot\delta[k-2] + \tfrac{5}{2}\, e^{j\pi/2}\,\delta[k+2] + \\ & \tfrac{1}{2}\cdot e^{j\pi/6}\,\delta[k-3] + \tfrac{1}{2}\cdot e^{-j\pi/6}\,\delta[k+3] + \\ & \tfrac{1}{2}\cdot e^{j\pi/4}\,\delta[k-4] + \tfrac{1}{2}\cdot e^{-j\pi/4}\,\delta[k+4] \end{aligned}$$

Koeficijente X_k smo odredili „prepoznavanjem" koeficijenata uz članove razvoja u FR. Pokažimo da smo do istog rezultata mogli doći i primjenom direktnog izraza za X_k, ...
za ilustraciju uzmimo samo prvu komponentu

$$x_1(t)=10\cdot\cos(50\pi t)=5\cdot e^{j\Omega_0 t}+5\cdot e^{-j\Omega_0 t}$$

Ovaj signal $x_1(t)$ bi dao:

$$X_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x_1(t)\cdot e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left[5\cdot e^{j\Omega_0 t}+5\cdot e^{-j\Omega_0 t}\right]\cdot e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}5\cdot e^{j(1-k)\Omega_0 t}dt+\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}5\cdot e^{-j(1+k)\Omega_0 t}dt$$

$$=\frac{5}{T_0}\cdot\frac{1}{j(1-k)\Omega_0}\cdot\underbrace{e^{j(1-k)\Omega_0 t}\Big|_0^{T_0}}+\frac{5}{T_0}\frac{1}{-j(1+k)\Omega_0}\cdot e^{-j(1+k)\Omega_0 t}\Big|_0^{T_0}$$

za $k\neq 1$ ovaj integral je jednak nuli jer:

$$e^{j(1-k)\Omega_0 T_0}-e^{j0}=$$

$$e^{j2\pi(1-k)}-1=$$

$1-1=0$, jer $1-k\in\mathbb{Z}$, a nazivnik $j(1-k)\Omega_0$ je $\neq 0$

Specijalno za $k=1$ integral ima slijedeći oblik:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}5\cdot e^{j0\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}5\,dt=5$$

Zaključujemo da je prvi član jednak 5 za $k=1$, a jednak nuli za sve ostale k

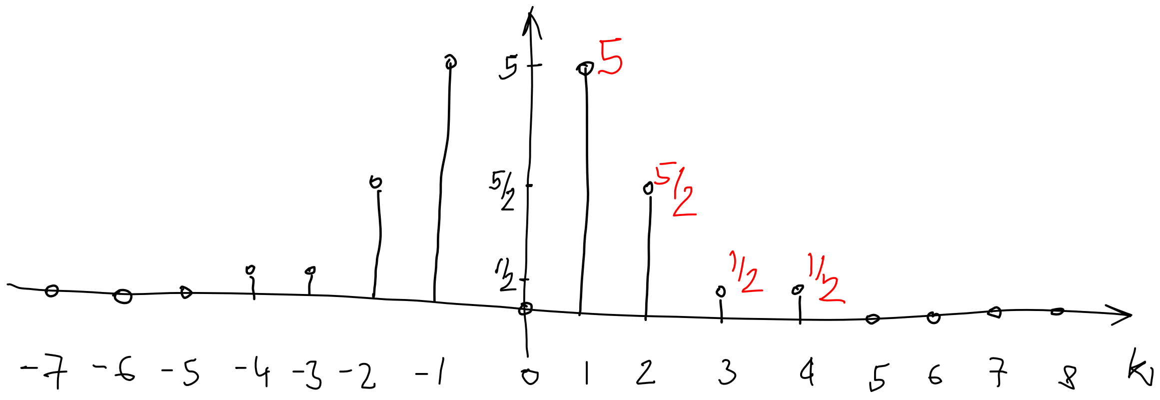
Po analogiji ovaj integral je jednak 5 za $k=-1$, a jednak nuli za sve ostale k

Vidimo da prva komponenta signala $x_1(t)$ ima u razvoju u FR dvije komponente X_1 i X_{-1}, a koeficijenti iznose $X_1=5$, $X_{-1}=5$, tj.

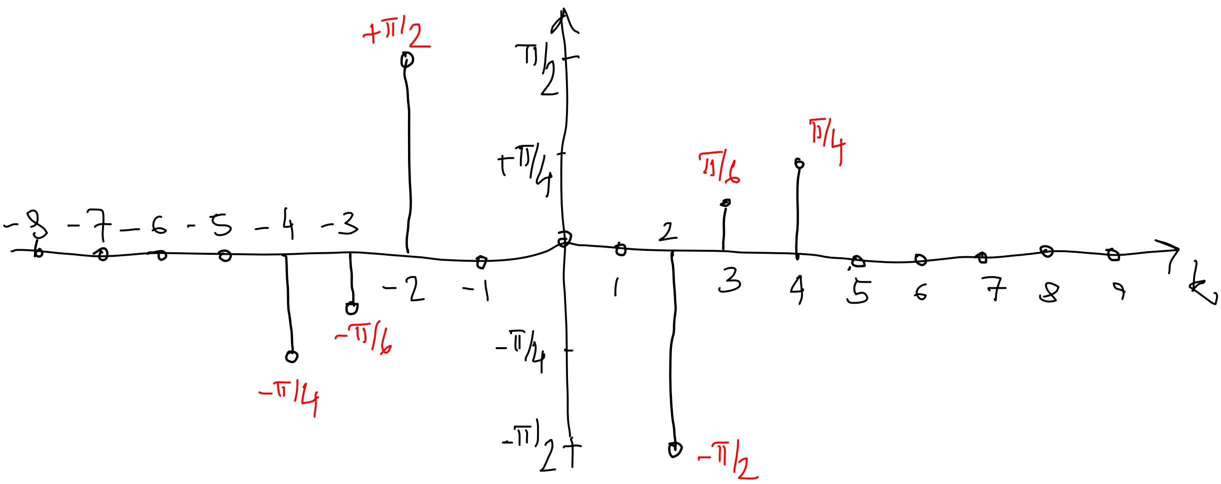
$$X_k=5\cdot\delta[k-1]+5\cdot\delta[k+1]$$

Slično možemo napraviti za preostale 3 komp. signala.

AMPLITUDNI SPEKTAR $|X(k)|$



FAZNI SPEKTAR $\measuredangle X(k)$



Da prilikom otipkavanja ne dođe do pojave preklapanja spektra frekvencija otipkavanja f_s mora biti barem 2puta viša od najviše frekvencije signala f_{max}

U našem primjeru $f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} = \frac{\omega_4}{2\pi} =$

$= \frac{200\pi}{2\pi} = 100\,Hz$ .... frekvencija 4. komponente

$f_s > 2 \cdot f_{max} = 2 \cdot 100 = 200\,Hz$ ... da nema preklapanja

U jednoj grupi $f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{0.02} = 50\,Hz$

U drugoj grupi $f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{0.01} = 100\,Hz$

Vidimo da je za obje grupe $f_s < 2 \cdot f_{max}$ pa zaključujemo da dolazi do pojave preklapanja spektra, jer je frekvencija otipkavanja nedovoljno visoka.

ZADATAK 5.

$$H(z) = \frac{1}{4+\alpha z^{-1}}$$

$\alpha = 1$ ... za jednu grupu

$\alpha = -1$ za drugu.

a) Sjetimo se .... kod dvostrane z-transformacije ulazni sustav je mogao biti kauzalan ili anti-kauzalan, pa da za oba slučaja dobijemo jednaku prijenosnu funkciju ali komplementarno područje konvergencije

Razmotrimo prvo kauzalni slučaj ....
kauzalni impulsni odziv $h(n)$ dobivamo običnom jednostranom inverznom z-transf.

Iz tablice čitamo par:

$$\frac{K}{1-z_1 z^{-1}} \Rightarrow K \cdot z_1^n \cdot \mu(n)$$

za naš primjer

$$k = \frac{1}{4}, \quad z_1 = -\frac{\alpha}{4}$$ pol sustava

$$H(z) = \frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{\alpha}{4}\right)z^{-1}} \quad h[n] = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^n \cdot \mu(n)$$

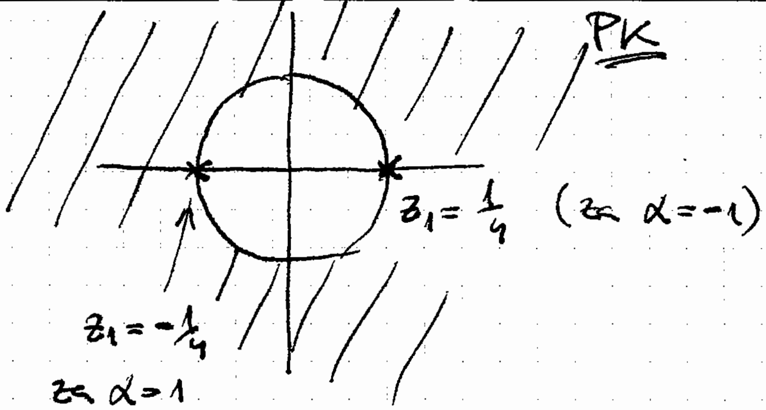
Ovisno o grupi $z_1 = -\frac{1}{4}$ (za $\alpha=1$)

$z_1 = \frac{1}{4}$ (za $\alpha=-1$)

Za kauzalni sustav područje konvergencije je

$$|z| > |z_1| = \frac{1}{4}$$

Dakle za obje grupe područje konvergencije kauzalnog sustava je $|z| > \frac{1}{4}$



Druga mogućnost je da sustav ima anti-kauzalni impulsni odziv oblika:

$$h(n) = -(z_1)^n \cdot \mu(-n-1)$$

jer dvostrana Z-transf. ovakvog anti-kauzalnog imp. odziva daje isti (zadani) oblik $H(z)$

Pokažimo to:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -(z_1)^n \cdot \underbrace{\mu(-n-1)}_{=0 \text{ za } n \geq 0} z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{z_1}{z}\right)^n = -\underbrace{\sum_{n'=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^{n'}}_{\text{geom. red.}} = -\frac{q}{1-q}\Bigg|_{q=\frac{z}{z_1}}$$

$|q| < 1$ ... uvjet na konvergenciju geom. reda.

$$H(z) = -\frac{\frac{z}{z_1}}{1 - \frac{z}{z_1}} \cdot \frac{\left(-\frac{z_1}{z}\right)}{\left(-\frac{z_1}{z}\right)}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z_1 z^{-1}}$$

U našem primjeru još imamo i konstantni član $K = \frac{1}{4}$, pa dalje imamo anti-kauzalni par

$$\frac{\frac{1}{4}}{1 - z_1 z^{-1}} \overset{Z}{\longleftrightarrow} -\frac{1}{4}(z_1)^n \cdot \mu(-n-1)$$

Z ← dvostrana Z-transf.

z_1 ovisi o grupi

za grupu sa $\alpha = 1$ $z_1 = -1/4$ pa imp. odziv glasi:

$$h_{ac}(n) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot \mu(-n-1)$$

anti-kauzalni

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot \mu(-n-1)$$

Odnosno za grupu sa $\alpha = -1$ $z_1 = \frac{1}{4}$, ...

$$h_{ac}(n) = \frac{-1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \mu(-n-1)$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot \mu(-n-1)$$

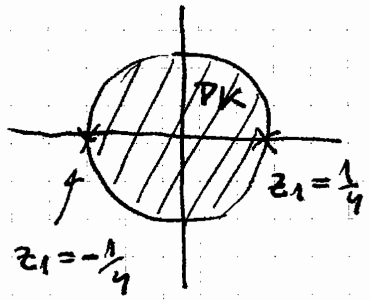
Područje konvergencije za anti-kauzalni slučaj ... pokazali smo:

$$|q| = \left|\frac{z}{z_1}\right| = \frac{|z|}{|z_1|} < 1$$

$$\Rightarrow |z| < |z_1| = \frac{1}{4}$$

Dakle neovisno o grupi PK za anti-kauzalni slučaj je:

$$|z| < \frac{1}{4}$$



c) Odrediti: $H(e^{j\omega})$ za sustav čije PK uključuje beskonačnost ... očito daje to slučaj za kauzalni imp. odziv.

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{4 + \alpha \cdot e^{-j\omega}} =$$

$$\frac{1}{4 + \alpha\cos\omega - j\alpha\sin\omega}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\sqrt{(4+\alpha\cos\omega)^2 + \alpha^2\sin^2\omega}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{16 + 8\alpha\cos\omega + \underbrace{\alpha^2\cos^2\omega + \alpha^2\sin^2\omega}_{\alpha^2 = 1}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17 + 8\alpha\cos\omega}}$$

... ovisno o grupi $\alpha = 1$ ili $\alpha = -1$

Odredimo $\left|H(e^{j\omega})\right|$ u nekoliko karakt. točaka

$\alpha = 1$

$$\left|H(e^{j0})\right|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{17+8}} = \frac{1}{5}$$

$$\left|H(e^{j\pi})\right|_{\omega=\pi} = \frac{1}{\sqrt{17-8}} = \frac{1}{3}$$

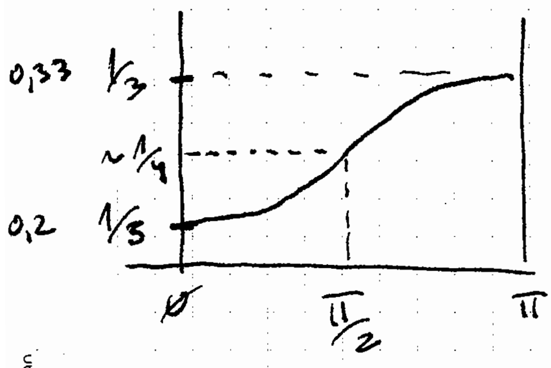
$$\left|H(e^{j\pi/2})\right|_{\omega=\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{17+\emptyset}} \cong \frac{1}{4}$$

$\alpha = -1$

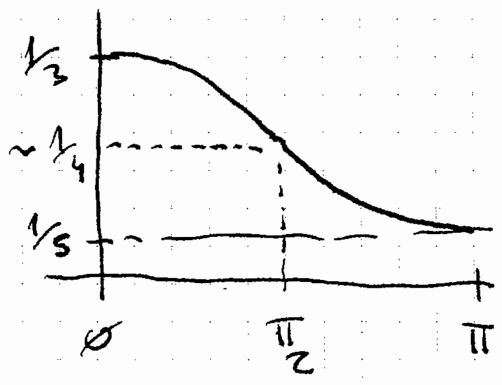
$$\left|H(e^{j\emptyset})\right| = \frac{1}{3}$$

$$\left|H(e^{j\pi})\right| = \frac{1}{5}$$

$$\left|H(e^{j\pi/2})\right| \cong \frac{1}{4}$$



$\alpha = 1$



$\alpha = -1$

Slično nalazimo i fazno-frekvencijsku karak.

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \sphericalangle \frac{1}{(4+\alpha\cos\omega) - j\alpha\sin\omega}$$

$$= -\sphericalangle\left((4+\alpha\cos\omega) - j\alpha\sin\omega\right)$$

$$= -\operatorname{atan}_2(\mathrm{Im}, \mathrm{Re})$$

$$= -\operatorname{atan}_2(-\alpha\sin\omega,\ 4+\alpha\cos\omega)$$

$$= \operatorname{atan}_2(\alpha\sin\omega,\ 4+\alpha\cos\omega)$$

Za par karakterističnih frekvencija $(\omega = \emptyset, \frac{\pi}{2}, \pi)$

$\alpha = 1$

$$\sphericalangle H(e^{j\emptyset}) = \operatorname{atan}_2(\sin\emptyset,\ 4+\cos\emptyset) = \operatorname{atan}_2(\emptyset, 5) = \emptyset$$

$$\sphericalangle H(e^{j\pi}) = \operatorname{atan}_2(\sin\pi,\ 4+\cos\pi) = \operatorname{atan}_2(\emptyset, 3) = \emptyset$$

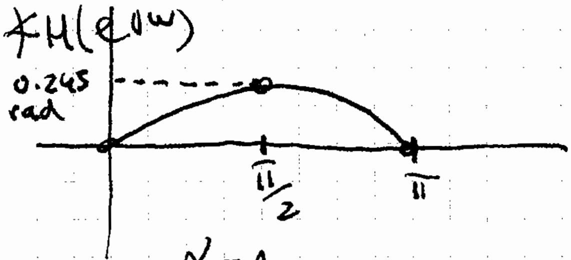
$$\sphericalangle H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \operatorname{atan}_2(\sin\tfrac{\pi}{2},\ 4+\cos\tfrac{\pi}{2}) = \operatorname{atan}_2(1, 4) = 0.245 \text{ rad}$$

$\alpha = -1$

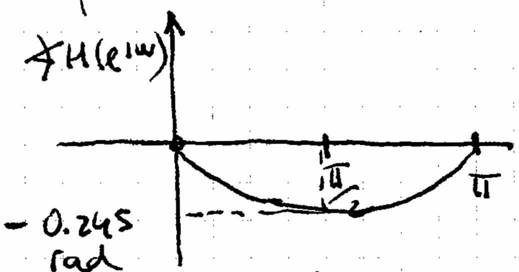
$$\sphericalangle H(e^{j\emptyset}) = \operatorname{atan}_2(-\sin\emptyset,\ 4-\cos\emptyset) = \operatorname{atan}_2(\emptyset, 3) = \emptyset$$

$$\sphericalangle H(e^{j\pi}) = \operatorname{atan}_2(-\sin\pi,\ 4-\cos\pi) = \operatorname{atan}_2(\emptyset, 5) = \emptyset$$

$$\sphericalangle H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \operatorname{atan}_2(-\sin\tfrac{\pi}{2},\ 4-\cos\tfrac{\pi}{2}) = \operatorname{atan}_2(-1, 4) = -0.245 \text{ rad}$$



$\alpha = 1$



$\alpha = -1$