Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

19. ožujka 2007.

Konvolucijska sumacija

- prije je pokazano da je konvolucijska sumacija definirana za $\forall n \in \mathit{Cjelobrojni}$ kao

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m)$$

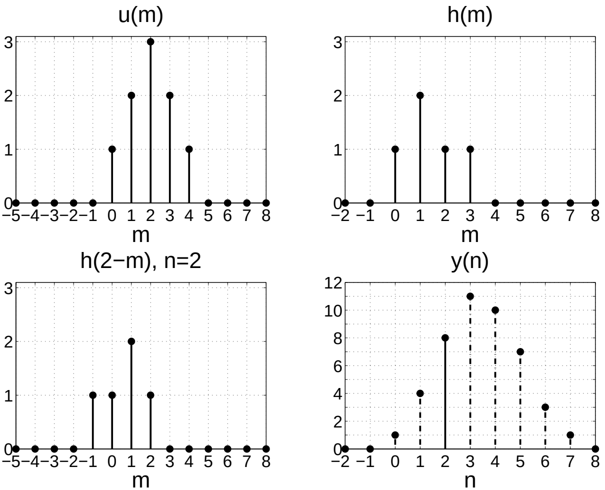
- za kauzalne $u(n)$ i $h(n)$ konvolucijska sumacija se reducira u

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m), \qquad n \geq 0$$

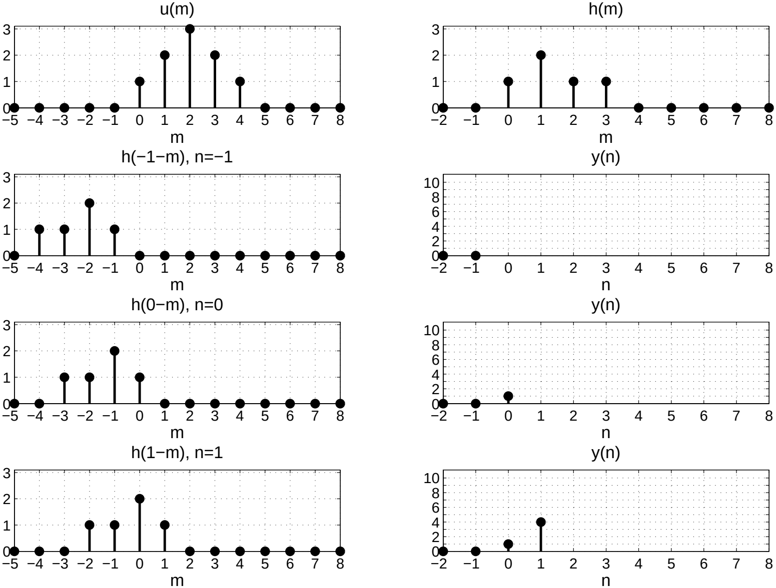
i predstavlja odziv mirnog linearnog vremenski stalnog sustava

Primjer konvolucijske sumacije

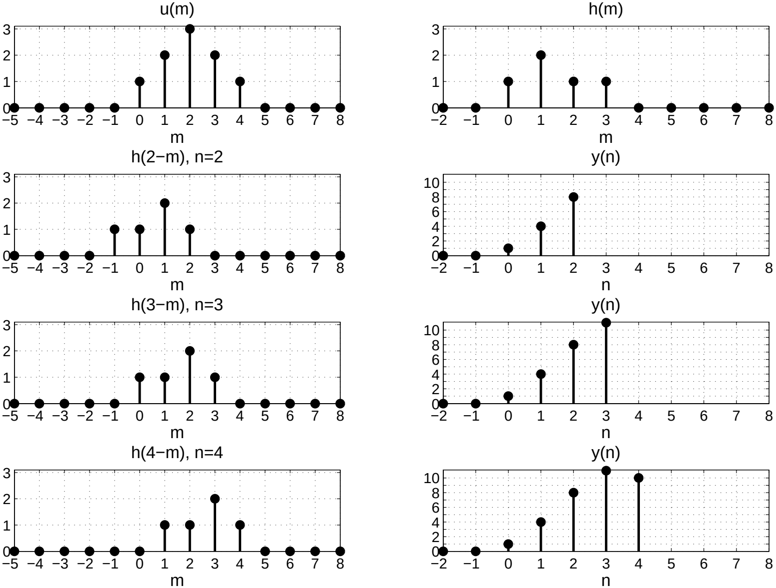
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m),$$
$$\text{za } n = 2 \Rightarrow y(2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(2-m)$$



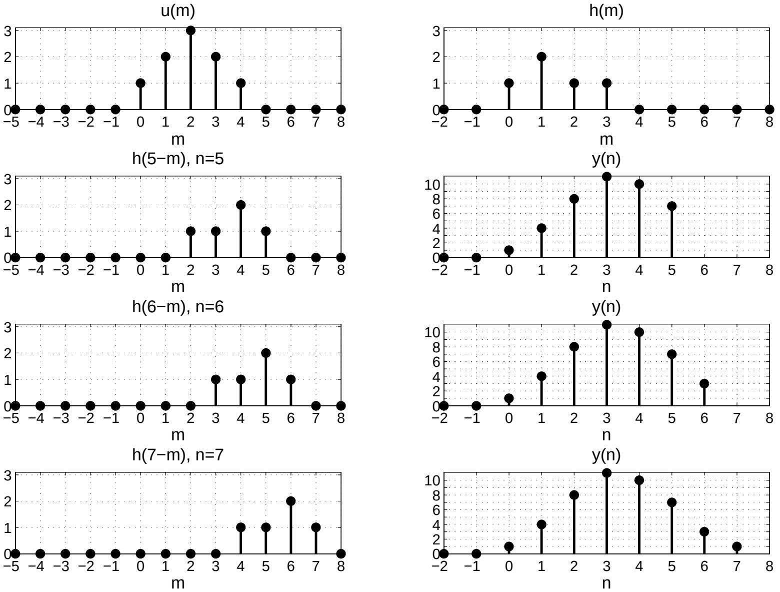
Primjer konvolucijske sumacije



Primjer konvolucijske sumacije



Primjer konvolucijske sumacije



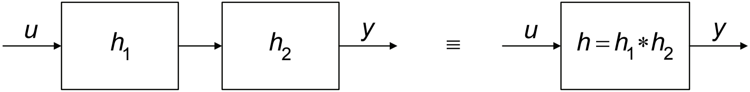
Svojstva konvolucijske sumacije – komutativnost i asocijativnost

- već je pokazano da vrijedi komutativnost

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m) \Leftrightarrow u*h = h*u$$

- svojstvo asocijativnosti

$$y(n) = ((u * h_1) * h_2)(n) = (u * \underbrace{(h_1 * h_2)}_{h})(n) = (u * h)(n)$$



Slika 5: Konvolucijska sumacija – asocijativnost

Svojstva konvolucijske sumacije – asocijativnost

- izvod svojstva asocijativnosti za linearni, vremenski stalni, diskretni sustav

$$y(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) h_1(j-m) \right] h_2(n-j) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_1(j-m) h_2(n-j) \right]$$

za $k = j - m \Rightarrow$

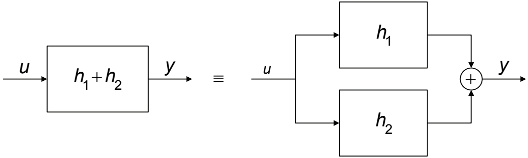
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \left[\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) h_2(n-m-k)}_{h(n-m)} \right]$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) h(n-m)$$

Svojstva konvolucijske sumacije – distributivnost

- svojstvo distributivnosti za linearni, vremenski stalni, diskretni sustav

$$y(n) = (u * (h_1 + h_2))(n) = (u * h_1)(n) + (u * h_2)(n)$$



Slika 6: Konvolucijska sumacija – distributivnost

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\left[h_1(n-m) + h_2(n-m)\right]$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h_1(n-m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h_2(n-m)$$

Konvolucija proizvoljnih signala

- dosadašnja razmatranja konvolucijske sumacije odnosila su se na jedan od mogućih opisa sustava
- konvolucijsku sumaciju možemo definirati i za proizvoljne signale, pa pišemo

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = (x_1 * x_2)(n)$$

- već prije izvedena svojstva konvolucijske sumacije vrijede i za proizvoljne signale:
  - komutativnost:
    $(x_1 * x_2)(n) = (x_2 * x_1)(n)$
  - distributivnost:
    $(x_1 * (x_2 + x_3))(n) = (x_1 * x_2)(n) + (x_1 * x_3)(n)$
  - asocijativnost:
    $(x_1 * (x_2 * x_3))(n) = ((x_1 * x_2) * x_3)(n)$

Svojstva konvolucijske sumacije – pomak

- za $y(n) = (x_1 * x_2)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$, te uz oznake $(D_p(x_1))(n) = x_1(n-p)$ i $(D_q(x_2))(n) = x_2(n-q)$, vrijedi svojstvo pomaka

$$(D_p(x_1) * D_q(x_2))(n) = y(n-p-q)$$

- izvod svojstva pomaka

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [D_p(x_1)(m)][D_q(x_2)(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m-p)x_2(n-m-q)$$

za $j = m - p$ slijedi

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_1(j)x_2(n-p-q-j) = y(n-p-q)$$

Svojstva konvolucijske sumacije – konvolucija s jediničnim impulsom

- konvolucija s jediničnim impulsom
  - za bilo koji signal $x(n)$, $n \in Cjelobrojni$, i jedinični impuls $\delta(n)$, $n \in Cjelobrojni$,

$$(x * \delta)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = x(n)$$

- duljina konvolucijske sumacije konačnih nizova
  - neka je L_1 duljina (broj elemenata) niza $x_1(n)$, a L_2 duljina niza $x_2(n)$
  - duljina $(x_1 * x_2)(n)$ je $L_1 + L_2 - 1$

dokaz slijedi iz: $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$

$0 \leq m \leq L_1 - 1$

$0 \leq n - m \leq L_2 - 1 \qquad | + m$

$m \leq n \leq L_2 - 1 + m \quad \Rightarrow$

$0 \leq m \leq n \leq L_2 - 1 + m \leq L_2 - 1 + L_1 - 1 \quad \Rightarrow$

$0 \leq n \leq L_1 + L_2 - 2$

pa je duljina konvolucije $L = L_1 + L_2 - 1$

Impulsni odziv linearnih kontinuiranih sustava 1

- odziv mirnog, $x(0) = 0$, sustava s jednim ulazom i jednim izlazom, *SISO* sustav, izveden je kao:

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni, \\ \forall t \in Realni_+$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad t \geq 0$$

Impulsni odziv linearnih kontinuiranih sustava 2

- pobudimo li mirni[1], $x(0^-)$, *SISO* sustav s jediničnim impulsom $u(t) = \delta(t)$ odziv je:

$$y(t) = \int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau + D\delta(t) \quad t \geq 0$$

odnosno

$$y(t) = h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad t \geq 0$$

- odziv mirnog sustava, $x(0^-) = 0$, na pobudu jediničnim impulsom $u(t) = \delta(t)$ nazivamo impulsni odziv i označavamo kao $h(t)$

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad t \geq 0$$

[1] ovdje se zbog preciznosti definira početno stanje u $t = 0^-$ jer pobuda djeluje već u $t = 0$ i stanje $x(0)$ već može biti promijenjeno

Konvolucijski integral

- odziv mirnog kontinuiranog sustava, na proizvoljnu pobudu,

$$y(t) = \int_0^t [\underbrace{Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)}_{h(t-\tau)}]u(\tau)d\tau \quad t \geq 0$$

možemo pisati i kao

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad t \geq 0$$

- ovo je konvolucijski integral i on u potpunosti opisuje mirni kontinuirani *SISO* sustav
- za miran *SISO* sustav i $h(t) = 0$ i $u(t) = 0$ za $t < 0$ konvolucijski integral možemo pisati i kao

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Konvolucijski integral

- u slučaju *MIMO* kontinuiranih sustava

$$H(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

  je matrica dimenzije $K \times M$ a njezin (i, j)-ti element je impulsni odziv i-tog izlaza na pobudu jediničnim impulsom na j-tom ulazu, uz $x(0^-) = 0$ i $u_j(n) = 0$ na svim ulazima osim na i-tom
- matricu $H(t)$ nazivamo matrica impulsnih odziva

Konvolucijski integral – svojstva

- konvolucijski integral možemo definirati i za proizvoljne signale, pa možemo pisati

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

  - komutativnost:
    $(x_1 * x_2)(t) = (x_2 * x_1)(t)$
  - distributivnost:
    $(x_1 * (x_2 + x_3))(t) = (x_1 * x_2)(t) + (x_1 * x_3)(t)$
  - asocijativnost:
    $(x_1 * (x_2 * x_3))(t) = ((x_1 * x_2) * x_3)(t)$
  - pomak:
    za $(D_{T_1}(x_1))(t) = x_1(t - T_1)$ i $(D_{T_2}(x_2))(t) = x_2(t - T_2)$
    $(D_{T_1}(x_1) * D_{T_2}(x_2))(t) = y(t - T_1 - T_2)$
  - konvolucija s impulsom
    $(x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$

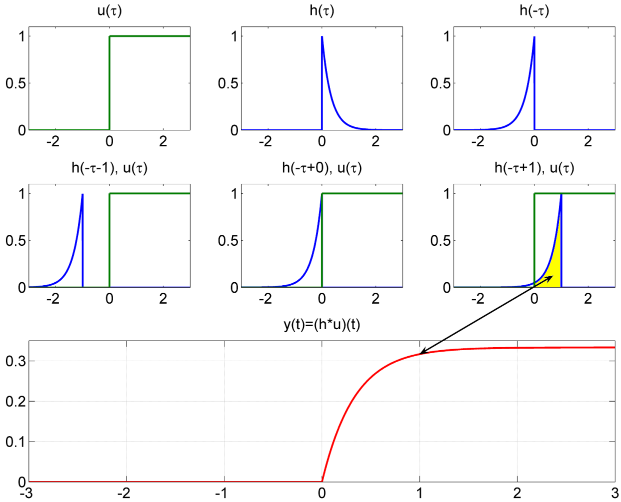
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 1.

- neka je zadan linearni, vremenski stalni, vremenski kontinuiran sustav, svojim impulsnim odzivom $h(t) = e^{-3t}\mu(t)$
- određuje se odziv na pobudu $u(t) = \mu(t)$
- odziv izračunavamo pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- sa slike 7 je vidljivo kako se $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ ne poklapaju za $t \leq 0$ pa slijedi da je $y(t) = 0$ za $t \leq 0$

Grafička interpretacija izračunavanja konvolucijskog integrala – Primjer 1.



Slika 7: Konvolucijski integral – primjer

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 1. nastavak

- za $t > 0$, postoji preklapanje $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$, pa je

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-3(t-\tau)}d\tau = e^{-3t}\int_{0}^{t} e^{3\tau}d\tau = \frac{1}{3}\left[1-e^{-3t}\right]$$

- grafička interpretacija postupka konvolucije dana je na slici 7, i treba uočiti kako trenutna vrijednost $y(t)$ odgovara površini preklapanja $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ (žuto na slici)
- tako je za $t = 1$

$$y(t) = \int_{0}^{1} e^{-3(1-\tau)}d\tau = \frac{1}{3}\left[1-e^{-3}\right] = 0.3167$$

Nekauzalni sustavi

- do sada su razmatrani memorijski (s konačnom i beskonačnom memorijom) kauzalni sustavi,

$$\forall t \in Realni \qquad y(t) = F(u_{(-\infty,t]})(t)$$

$$\forall t \in Realni \qquad y(t) = F(u_{(-t_0,t]})(t)$$

- drugim riječima, trenutni odziv sustava je bio posljedica trenutne i prošlih vrijednosti ulaznog signala
- ovdje se razmatra nekauzalan sustav – memorijsko-prediktivan – koji, u određivanju trenutne vrijednosti izlaza, uz prethodne vrijednosti, anticipira i buduće vrijednosti ulaznog signala

$$\forall t \in Realni \qquad y(t) = F(u_{(-\infty,\infty)})(t)$$

Nekauzalni sustavi – nastavak

- za nekauzalni sustav, odziv započinje prije nego je djelovala pobuda, dakle, sustav anticipira buduću pobudu (radi predikciju) [2]
- nekauzalni vremenski sustavi su često rezultat postupaka sinteze na temelju idealiziranih zahtjeva
- nekauzalni vremenski sustavi ne mogu biti realizirani u stvarnom vremenu
- nekauzalne sustave možemo koristiti u slučajevima kada je dozvoljeno kašnjenje ili kada su konačni signali pohranjeni (poznati u cijelom području definicije)

[2] vozač prati cestu i sukladno tomu regulira brzinu automobila, no, ako zna cestu unaprijed (ili ima čitača karte) i sukladno tome, prije nego i vidi zavoj ili zapreku, počne unaprijed smanjivati brzinu

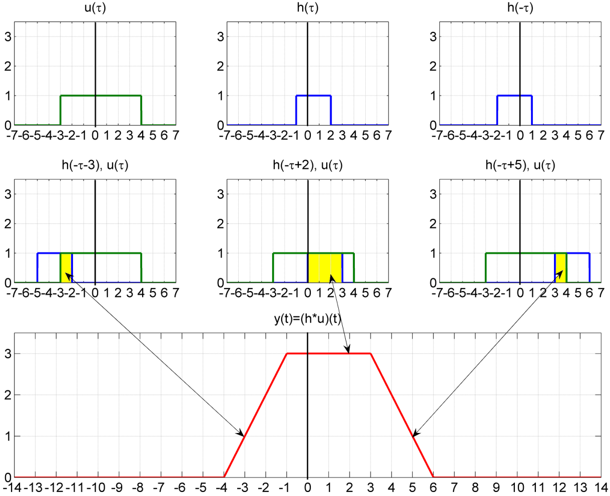
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2.

- neka je zadan linearni, vremenski stalni, vremenski kontinuiran sustav, svojim impulsnim odzivom $h(t) = \mu(t+1) - \mu(t-2)$
- određuje se odziv na pobudu $u(t) = \mu(t+3) - \mu(t-4)$
- odziv izračunavamo pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- grafička interpretacija dana je na slici 8
- sa slike 8 je vidljivo kako se $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ preklapaju u tri intervala
  - u intervalu $-4 \leq t \leq -1$, djelomično,
  - u intervalu $-1 \leq t \leq 3$, potpuno (cijeli $h(t-\tau)$ zahvaćen s $u(\tau) \neq 0$),
  - u intervalu $3 \leq t \leq 6$, djelomično,

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 1



Slika 8: Grafička interpretacija izračunavanja konvolucijskog integrala – Primjer 2.

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 2

- na slici 8 je ilustrirano kako vrijednosti $y(-3) = 1$, $y(2) = 1$ i $y(5) = 1$, odgovaraju površini produkata $u(\tau) * h(-3-\tau)$, $u(\tau) * h(2-\tau)$, odnosno, $u(\tau) * h(5-\tau)$
- evidentno je kako, zbog nekauzalnosti impulsnog odziva, odziv starta prije pobude
- odziv započinje za $t \geq -4$, trenutak kada se počinju preklapati $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$, i u intervalu $-4 \leq t \leq -1$ računa se iz

$$y(t) = \int_{-3}^{t+1} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-3}^{t+1} d\tau = t+4$$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 3

- u intervalu $-1 \leq t \leq 3$ odziv se računa iz

$$y(t) = \int_{t-2}^{t+1} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{t+1} d\tau = 3,$$

- te, u intervalu $3 \leq t \leq 6$,iz

$$y(t) = \int_{t-2}^{4} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{4} d\tau = 6 - t$$

- finalno, odziv sustava $h(t) = \mu(t+1) - \mu(t-2)$, na pobudu $u(t) = \mu(t+3) - \mu(t-4)$, je

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -4 \\ t+4, & -4 \leq t \leq -1 \\ 3, & -1 \leq t \leq 3 \\ 6-t, & 3 \leq t \leq 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

Odziv linearnih vremenski stalnih diskretnih sustava

- odziv linearnog, vremenski stalnog, diskretnog sustava opisanog s modelom s varijablama stanja je

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0) + Du(0), & n = 0 \\ CA^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}$$

- sukladno prije definiranom naglašavamo

$$y(n) = \underbrace{CA^n x(0)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava } u(n)=0} +$$

$$\underbrace{+\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n),}_{\text{odziv mirnog sustava } x(0)=0} \quad n > 0$$

ili

$$\textit{totalni odziv} = \textit{odziv nepob. sustava} + \textit{odziv mirnog sustava}$$

Odziv nepobuđenog linearnog vremenski stalnog diskretnog sustava

- komponenta ukupnog odziva, odziv nepobuđenog sustava, je interni odziv sustava na interne početne uvjete i potpuno je nezavisan od pobude, dakle, vanjskog svijeta
- matricu A^n, fundamentalnu matricu, tvore kompleksne ekponencijale čija je frekvencija određena isključivo parametrima sustava, pa se ove frekvencije nazivaju i vlastite ili karakteristične frekvencije ali i prirodne frekvencije
- odziv nepobuđenog *SISO* sustava biti će linearna kombinacija kompleksnih eksponencijala čija je amplituda ovisna o početnom stanju

Odziv mirnog linearnog vremenski stalnog diskretneg sustava

- u odzivu mirnog sustava, $\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bu(m) + Du(n)$, nalazi se matrica A^n ali i $u(n)$ pa će ovaj odziv tvoriti
  - komponenta koju čini kombinacija eksponencijala koje titraju vlastitim frekvencijama, te
  - komponenta koja je titranje frekvencijama pobude i predstavlja prisilni odziv sustava na pobudu
- sustav se odziva vlastitim frekvencijama, unatoč početnom stanju $x(0) = 0$, u prijelazu iz stanja $x(0) = 0$ u stanje koje diktira pobuda
- zato se totalni odziv sustava može zapisati i kao

$$totalni\ odziv = prirodni(prijelazni)\ odziv\ sustava + prisilni\ odziv$$

Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- razmatraju se diskretni sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom opisani s modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- sustave opisujemo jednadžbom diferencija

$$y(n+N)+a_1y(n+N-1)+\ldots+a_{N-1}y(n+1)+a_Ny(n)=$$
$$b_{N-M}u(n+M)+b_{N-M+1}u(n+M-1)+\ldots+b_{N-1}u(n+1)+b_Nu(n)$$

- za kauzalni sustav: $M \leq N$, jer u suprotnom bi odziv $y(n+N)$ u koraku $n+N$ ovisio o $u(n+M)$ koji je ulaz za kasniji korak $n+M$
- najopćenitije, za $M=N$, vrijedi

$$y(n+N)+a_1y(n+N-1)+\ldots+a_{N-1}y(n+1)+a_Ny(n)=$$
$$b_0u(n+N)+b_1u(n+N-1)+\ldots+b_{N-1}u(n+1)+b_Nu(n)$$

- supstitucijom n s $n-N$ dolazimo do alterantivnog zapisa jednadžbe diferencija u kojem koristimo operator za kašnjenje

Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) =$$
$$b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \ldots + b_{N-1} u(n-N+1) + b_N u(n-N)$$

- odnosno, sažeto pisano,

$$\sum_{j=0}^{N} a_j y(n-j) = \sum_{j=0}^{N} b_j u(n-j) \qquad a_0 = 1$$

  ili

$$y(n) + \sum_{j=1}^{N} a_j y(n-j) = \sum_{j=0}^{N} b_j u(n-j)$$

- vremenski stalan sustav
  - koeficijenti $\{a_j\}$ i $\{b_j\}$ konstante
- sustav promjenljiv po koraku
  - koeficijenti $\{a_j\}$ i $\{b_j\}$ funkcije koraka n

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- izravni način određivanja odziva diskretnog sustava je izračunavanje $y(n)$ iz

$$y(n) = -\sum_{j=1}^{N} a_j y(n-j) + \sum_{j=0}^{N} b_j u(n-j)$$

- kako bi se odredio odziv sustava $y(n)$, potreban je $2N+1$ podatak
  - N prethodnih vrijednosti izlaza $y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N)$
  - N prethodnih vrijednosti ulaza $u(n-1), u(n-2), \ldots, u(n-N)$, i
  - trenutna vrijednost ulaza $u(n)$
- u određivanju vrijednosti izlaza $y(0)$, treba poznavati početne uvjete, $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$, i $u(0)$ (zbog kauzalnosti su ostali $u(-n) = 0$)

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija – primjer

- primjer generiranja jeke (eho efekta) signala koja se može postići realizacijom jednadžbe diferencija

$$y(n) = u(n) + \alpha y(n-N), \qquad n \in \mathit{Cjelobrojni}$$

neka su $N = 4, \quad \alpha = 0.6 \quad , y(n) = 0$ za $n < 0, \quad$ i

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- jednadžba je, dakle,

$$y(n) = u(n) + 0.6y(n-4), \qquad n \in \mathit{Cjelobrojni}$$

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija – primjer

- jednadžbu $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$ rješavamo korak po korak

$$
\begin{array}{llll}
n=0 & y(0) = u(0) + 0.6y(-4) & = 1 + 0.6\cdot 0 & = 1 \\
n=1 & y(1) = u(1) + 0.6y(-3) & = 1 + 0.6\cdot 0 & = 1 \\
n=2 & y(2) = u(2) + 0.6y(-2) & = 0 + 0.6\cdot 0 & = 0 \\
n=3 & y(3) = u(3) + 0.6y(-1) & = 0 + 0.6\cdot 0 & = 0 \\
n=4 & y(4) = u(4) + 0.6y(0) & = 0 + 0.6\cdot 1 & = 0.6 \\
n=5 & y(5) = u(5) + 0.6y(1) & = 0 + 0.6\cdot 1 & = 0.6 \\
n=6 & y(6) = u(6) + 0.6y(2) & = 0 + 0.6\cdot 0 & = 0 \\
n=7 & y(7) = u(7) + 0.6y(3) & = 0 + 0.6\cdot 0 & = 0 \\
n=8 & y(8) = u(8) + 0.6y(4) & = 0 + 0.6\cdot 0.6 & = 0.36 \\
n=9 & y(9) = u(9) + 0.6y(5) & = 0 + 0.6\cdot 0.6 & = 0.36
\end{array}
$$

Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 9

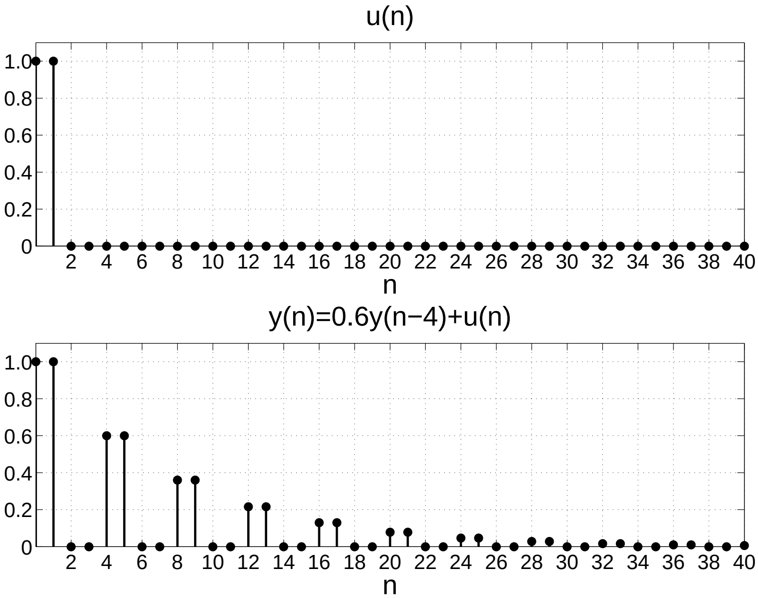
Profesor Branko Jeren

Impulsni odziv linearnih sustava

Odziv linearnih vremenski stalnih diskretnih sustava

kraj

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija – primjer



Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 9

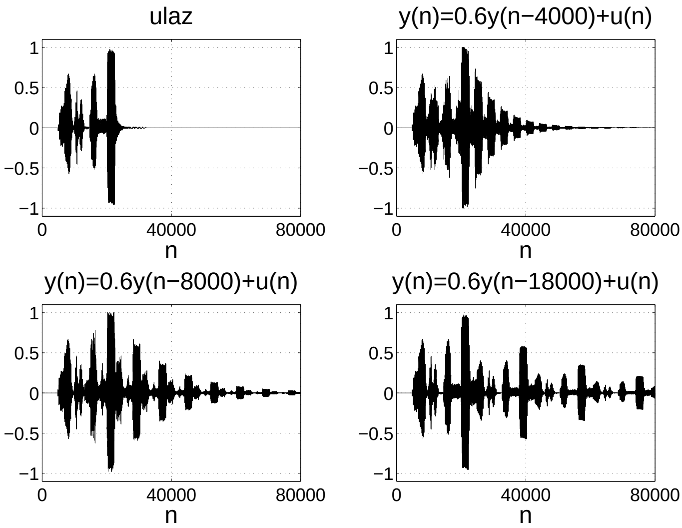
Profesor Branko Jeren

Impulsni odziv linearnih sustava

Odziv linearnih vremenski stalnih diskretnih sustava

kraj

Jeka govornog signala



Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- linearni, vremenski stalni, diskretan sustav opisan je jednadžbom diferencija

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \ldots + b_{N-1} u(n-N+1) + b_N u(n-N)$$

- jednadžbu zapisujemo pomoću operatora pomaka definiranog kao

za $n \in \mathit{Cjelobrojni}$

$E^{-1} w(n) = w(n-1)$ – pomak za jedan korak

$E^{-K} w(n) = w(n-K)$ – pomak za K koraka

$$[1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}] y(n) = \\ = [b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}] u(n)$$

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- operatorski zapis jednadžbe diferencija

$$
\begin{aligned}
&[1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}] y(n) = \\
&\quad = [b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}] u(n)
\end{aligned}
$$

skraćeno pišemo kao

$$
A(E^{-1}) y(n) = B(E^{-1}) u(n)
$$

gdje su $A(E^{-1})$ i $B(E^{-1})$ složeni operatori

$$
\begin{aligned}
A(E^{-1}) &= 1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N} \\
B(E^{-1}) &= b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}
\end{aligned}
$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- izračunavanje odziva diskretnog sustava započinjemo rješavanjem homogene jednadžbe diferencija

$$y_h(n)+a_1 y_h(n-1)+\ldots+a_{N-1} y_h(n-N+1)+a_N y_h(n-N)=0$$

odnosno

$$[1+a_1 E^{-1}+\ldots+a_{N-1} E^{-N+1}+a_N E^{-N}] y_h(n)=0$$

- jednadžba kazuje da je linearna kombinacija $y_h(n)$ i zakašnjelih $y_h(n)$ jednaka nuli za sve vrijednosti n
- ovo je moguće samo onda kada su $y_h(n)$ i svi zakašnjeli $y_h(n)$ istog oblika
- ovaj zahtjev ispunjava samo eksponencijalna funkcija q^n

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- budući da vrijedi

$$E^{-k}q^n = q^{n-k} = q^{-k}q^n$$

  q^{-k} je konstanta pa je pokazano kako je pomakom eksponencijale sačuvan njezin oblik

- to je razlog da odziv homogene jednadžbe diferencija mora biti oblika

$$y_h(n) = cq^n$$

- c i q izračunavamo iz homogene jednadžbe diferencija

$$cq^n + a_1 cq^{n-1} + \ldots + a_{N-1}cq^{n-N+1} + a_N cq^n q^{-N} = 0$$

$$\underbrace{(q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2}q^2 + a_{N-1}q + a_N)}_{0} cq^{n-N} = 0$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- za netrivijalno rješenje $cq^n \neq 0$ je

$$q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N = 0$$

- prema tome q ima N rješenja[3]
- homogena jednadžba ima isto N rješenja $c_1 q_1^n, c_2 q_2^n, \ldots, c_N q_N^n$ pa je rješenje homogene jednadžbe linearna kombinacija

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- konstante $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz
  - početnih uvjeta kada određujemo odziv nepobuđenog sustava
  - iz početnih uvjeta i totalnog rješenja kada određujemo totalni odziv

[3] prva pretpostavka da su rješenja realna i jednostruka

Karakteristični polinom, karakteristične frekvencije

- polinom $q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N$ nazivamo karakterističnim polinomom sustava
- jednadžbu $q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N = 0$ nazivamo karakterističnom jednadžbom sustava
- korijeni karakteristične jednadžbe $q_1, q_2, \ldots, q_N$ nazivaju se karakteristične vrijednosti ili karakteristične frekvencije ili vlastite frekvencije ili vlastite vrijednosti
- karakteristične frekvencije mogu biti realne ili kompleksne, jednostruke ili višestruke
- kompleksne karakteristične frekvencije dolaze u konjugiranim parovima što je posljedica realnosti koeficijenata karakterističnog polinoma
- vrijednosti tj. položaj karakterističnih frekvencija u kompleksnoj ravnini definira prijelazni odziv sustava kao i stabilnost sustava

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za višestruke karakteristične vrijednosti

- za karakteristični korijen q_1 višestrukosti m karakteristična jednadžba, u faktoriziranom obliku, je

$$(q - q_1)^m (q - q_{m+1})(q - q_{m+2}) \cdots (q - q_N)$$

- rješenje homogene jednadžbe je tada

$$\begin{aligned} y_h(n) = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \ldots + c_m n^{m-1}) q_1^n + \\ + c_{m+1} q_{m+1}^n + c_{m+2} q_{m+2}^n + \ldots + c_N q_N^n \end{aligned}$$

- korijen $q = 0$ se ne uzima u obzir jer on samo smanjuje red jednadžbe za jedan, odnosno za m u slučaju njegove višestrukosti

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave kompleksni korijeni dolaze u konjugirano kompleksnim parovima
- u određivanju homogenog rješenja jednadžbe diferencija konjugirane kompleksne korijene možemo koristiti na isti način kao i realne
- činjenica da su parovi kompleksnih korijena q i q^* konjugirani može biti iskorištena za alternativni prikaz
- tako je za,

$$q = |q|e^{j\beta} \quad \text{i} \quad q^* = |q|e^{-j\beta}$$

- rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q^n + c_2 (q_1^*)^n = c_1 |q|^n e^{j\beta n} + c_2 |q|^n e^{-j\beta n}$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave je $y_h(n)$ realna funkcija pa konstante c_1 i c_2 moraju biti konjugirane
- za

$$c_1 = \frac{c}{2}e^{j\theta} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{c}{2}e^{-j\theta}$$

- proizlazi

$$y_h(n) = \frac{c}{2}|q|^n[e^{j(\beta n+\theta)} + e^{-j(\beta n+\theta)}]$$

- odnosno, finalno,

$$y_h(n) = c|q|^n \cos(\beta n + \theta)$$

Odziv nepobuđenog diskretnog sustava

- za nepobuđeni sustav odziv $y_0(n)$ je jednak rješenju homogene jednadžbe diferencija $y_h(n)$
- tako je za jednostruke i realne vlastite frekvencije odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- koeficijente $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz N početnih uvjeta $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$

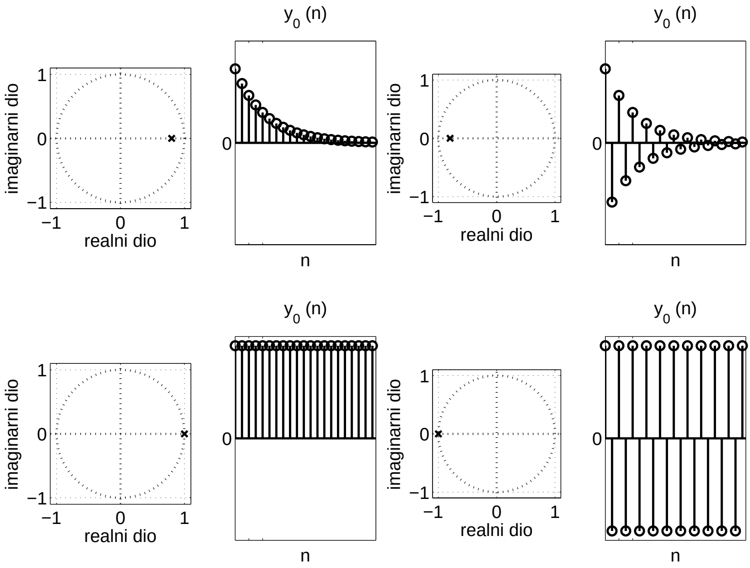
Odziv nepobuđenog diskretnog sustava

- nepobuđeni sustav titra eksponencijalama čije su frekvencije vlastite frekvencije sustava, pa je za pojedinu vlastitu frekvenciju q_1, komponenta nepobuđenog odziva q_1^n
- neka je u općem slučaju $q \in \mathit{Kompleksni}$ pa možemo pisati $q = |q|e^{j\beta}$, a kako je modul $|e^{j\beta} = 1|$ za svaki n, slijedi za:

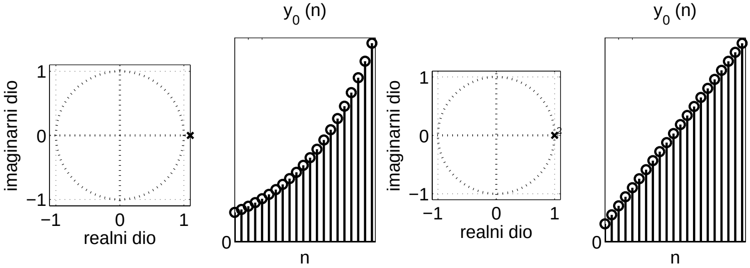
$$
\begin{array}{lll}
|q| < 1 & q^n \to 0 & \text{za } n \to \infty \\
|q| > 1 & q^n \to \infty & \text{za } n \to \infty \\
|q| = 1 & |q|^n = 1 & \text{za } \forall n
\end{array}
$$

- slijede primjeri koji ilustriraju odziv nepobuđenog sustava za razne vrijednosti q

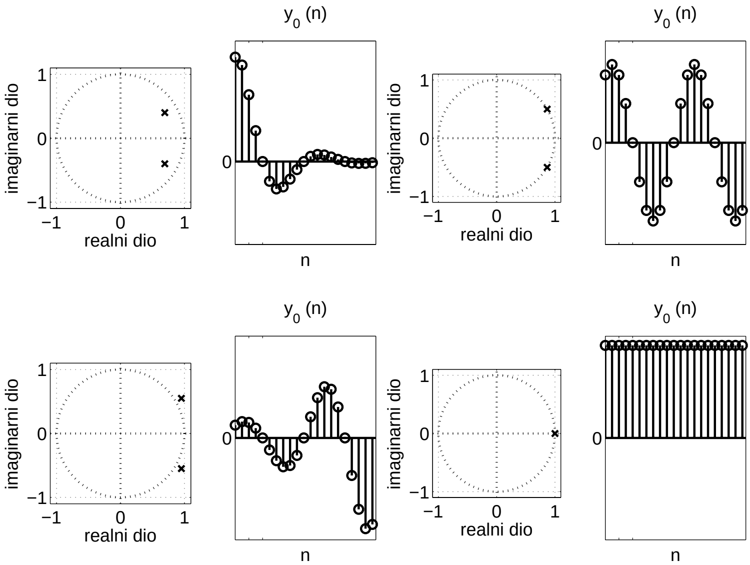
Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- nepobuđeni sustav zadan je jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = 0$$

- pretpostavimo rješenje oblika cq^n

$$cq^n - 0.8\sqrt{2}cq^{n-1} + 0.64cq^{n-2} = 0$$

$$cq^{n-2}(q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64) = 0$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64 = 0$$

Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- korijeni karakteristične jednadžbe su

$$q_{1,2} = 0.4\sqrt{2}(1 \pm j) = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

- konstante c_1 i c_2 određuju se iz početnih uvjeta $y(-2) = -1.5$ i $y(-1) = -2$ i

$$y_h(-1) = c_1 0.8^{-1} e^{j\frac{\pi}{4}(-1)} + c_2 0.8^{-1} e^{-j\frac{\pi}{4}(-1)} = -2$$
$$y_h(-2) = c_1 0.8^{-2} e^{j\frac{\pi}{4}(-2)} + c_2 0.8^{-2} e^{-j\frac{\pi}{4}(-2)} = -1.5$$

$$c_1 = -0.6514 - 0.48j = 0.8091e^{-j2.5065}$$
$$c_2 = -0.6514 + 0.48j = 0.8091e^{j2.5065}$$

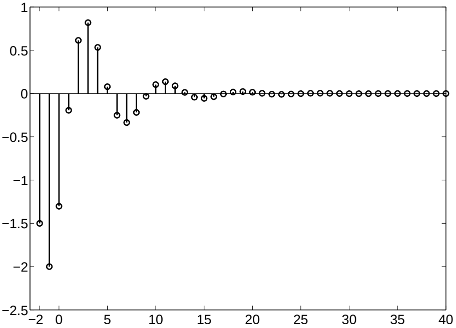
Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- rješenje nepobuđenog sustava je

$$y_0(n) = 0.8091e^{-j2.5065}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.8091e^{j2.5065}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$y_0(n) = 0.8091 \cdot 0.8^n[e^{j(\frac{\pi}{4}n-j2.5065)} + e^{-j(\frac{\pi}{4}n-j2.5065)}]$$

$$y_0(n) = 1.6183 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5065)$$



[kraj]

*