SiS – 2. MI 15.5.2009. – grupa A

1. x(n) = {<u>0</u>, 1, 0, 0, 0, -1}
k = 3
N = 6

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}$$

$$X_3 = \sum_{n=0}^{5} x(n) e^{-\frac{2\pi j3n}{6}} = \sum_{n=0}^{5} x(n) e^{-j\pi n}$$

$$e^{-j\pi n} = (-1)^n$$

$$X_3 = \sum_{n=0}^{5} x(n)(-1)^n = (-1)^0 x(0) + (-1)^1 x(1) + (-1)^2 x(2) + (-1)^3 x(3) + (-1)^4 x(4) + (-1)^5 x(5) = 0$$

2. X(k) = {<u>1</u>, -j, -1, j}
n = 1

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{2\pi jkn}{N}}$$

$$x(1) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} X(k) e^{\frac{2\pi jk}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} X(k) e^{\frac{jk\pi}{2}}$$

$$e^{\frac{jk\pi}{2}} = (-1)^k j$$

$$x(1) = \frac{1}{4} j(X(0)(-1)^0 + X(1)(-1)^1 + X(2)(-1)^2 + X(3)(-1)^3) = 0$$

3. $\omega_s = 2\omega_{max}, \ \omega = 0$

Ovako, kolega Wolfman ga je objasnio na lakši način, nešto da piše tako u slajdovima :D Ali nisam baš čitao slajdove pa sam išao na ovaj način. Iz slike sam očitao $X(j\omega)$, pretvorio ga u kontinuirani $x(t)$, otipkao ga, i onda našao DTFT :D I iz toga očitao.

Iz slike:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\omega_{max}}\omega, & \omega \in (-\omega_{max}, 0) \\ 1 - \frac{1}{\omega_{max}}\omega, & \omega \in (0, \omega_{max}) \\ 0, & inače \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\omega_{max}}^{0}(1+\frac{1}{\omega_{max}}\omega)e^{j\omega t}d\omega + \int_{0}^{\omega_{max}}(1-\frac{1}{\omega_{max}}\omega)e^{j\omega t}d\omega\right) = \cdots =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\sin(\omega_{max}t)}{t} - \frac{1}{\omega_{max}}\left(-\frac{2}{t^2}+\frac{2e^{j\omega_{max}t}}{t^2}\right)\right)$$

Iz $\omega_s = 2\omega_{max}$ dobijemo da je $f_s = \frac{\omega_{max}}{\pi} \to T_s = \frac{\pi}{\omega_{max}}$ pa kad očitamo signal x(t) dobijemo x(n):

$$x(n) = (nakon\ svih\ silnih\ uvrštavanja\ i\ kraćenja) = \frac{\omega_{max}}{n^2\pi^3}(1-(1-)^n)$$

I onda tražimo DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Obzirom da se traži za $\omega = 0$ dobijemo:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\omega_{max}}{\pi^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-(1-)^n}{n^2}$$

Kad je *n* paran nemamo ništa, kad je *n* = 2*k* + 1 imamo 2:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\omega_{max}}{\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{2\omega_{max}}{\pi^3}\frac{\pi^2}{4} = \frac{\omega_{max}}{2\pi}$$

Pa je $|X(e^{j\omega})| = \frac{\omega_{max}}{2\pi}$.

4. $x(t) = \sin(20\pi t) + \sin(70\pi t) + \sin(150\pi t)$

Obzirom da je frekvencija otipkavanja Fs = 100 Hz, ona mora biti veća od 2Fmax, gdje je Fmax najveća frekvencija u signalu. Za prvi sinus imamo F1 = 10 Hz, za drugi sinus F2 = 35 Hz, a za treći sinus F3 = 75 Hz. Najveća frekvencija Fmax = F3 = 75 Hz, što znači da treba biti Fs >= 2 Fmax = 150 Hz. Očito je da će samo ovaj treći sinus biti prigušen pa kad ga metnemo u filtar, van nam izađu samo one dvije sinusoide $\sin(20\pi t) + \sin(70\pi t)$.

5. Slajdovi

6. Zadani sustav sam po sebi nije vremenski stalan (A = lambda):

1) Prvo zakasnimo samo ulaz:

$$y_1(n) = \sin(An)\,x^2(n-N)$$

2) Onda zakasnimo sve:

$$y_2(n-N) = \sin(A(n-N))\,x^2(n-N)$$

Obzirom da $y_1(n)$ nije isto što i $y_2(n-N)$, sustav nije stalan. Biti će stalan jedino ako je $\sin(An) = 0$ što vrijedi kada je $A = (2k+1)\pi$.

7. Koji je sustav linearan? Linearnost kaže:

u(t) = alfa*u1(t) + beta*u2(t)

y(t) = S(u(t)) = S(alfa*u1(t) + beta*u2(t)) = alfa*S(u1(t)) + beta*S(u2(t)) = alfa*y1(t) + beta*y2(t)

Ovo će vrijediti samo za sustav y(t) = t*u(t). Dokažimo to:

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

$$y(t) = t[\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)] = t\alpha u_1(t) + t\beta u_2(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

8. Ispitat ćemo tri svojstva (u rješenjima su navedeni linearnost, vremenska promjenjivost i memorija):

1) Linearnost:

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

$$y(t) = \int_t^{\infty} (\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau))d\tau = \alpha \int_t^{\infty} u_1(\tau)d\tau + \beta \int_t^{\infty} u_2(\tau)d\tau = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

LINEARAN

2) Vrem. promjenjivost:
Prvo zakasnimo samo ulaz:

$$y_1(t) = \int_t^{\infty} u(\tau - T)d\tau = \begin{bmatrix} \tau - T = a \\ d\tau = da \\ granice: t - T\ do\ \infty \end{bmatrix} = \int_{t-T}^{\infty} u(a)da$$

*Znači, najprije smo zakasnili ulaz u(t – T), pa kad ga stavimo pod integral t postaje TAU.
Onda zakasnimo sve:

$$y_2(t - T) = \int_{t-T}^{\infty} u(\tau)d\tau$$

*Primijetite da kad zakasnimo „sve" da zakasnimo samo tamo gdje piše t! Unutar integrala je TAU pa to ne diramo.

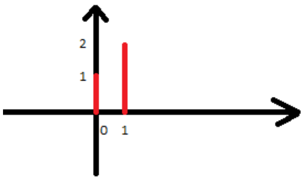
Vidimo da je $y_1(t) = y_2(t - T)$. VREMESNSKI STALAN/VREMENSKI NEPROMJENJIV

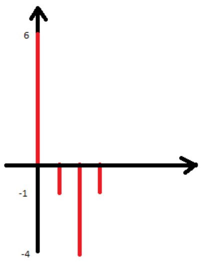
3) Memorijski: DA. Integral je ☺

Odgovor je: memorijski i vremenski nepromjenjiv.

9., 10. i 11. su matrice ☺

12. Signal x(n) = $\{\underline{1}, 2\}$ i y(n) = $\{\underline{6}, -1, -4, -1\}$ konvoluiraju. Kada nacrtate ta dva signala i pomičete signale jedan preko drugoga (to je ono grafičko objašnjenje konvolucije, imate na predavanjima), vidimo da će se u 5 koraka preklopit. S time da obrnete ili y, odnosno dobijete y(n – m), ili x, odnosno x(n – m).





Znači (uzeo sam da sam x obrnuo i pomicao ga preko y):
0) preklapaju se visina 1 od x i visina 6 od y
1) preklapaju se visina 1 od x i visina -1 od y, te visina 2 od x i visina 6 od y
2) preklapaju se visina 1 od x i visina – 4 od y, te visina 2 od x i visina – 1 od y
3) preklapaju se visina 1 od x i visina – 1 od y, te visina 2 od x te visina – 4 od y
4) preklapaju se visina 2 od x i visina -1 od y

Zapisano matematički:

$$(x * y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m) = \sum_{m=0}^{4} x(m)y(n-m) =$$

$$= x(0)y(n) + x(1)y(n-1) + x(2)y(n-2) + x(3)y(n-3) + x(4)y(n-4)$$

Obzirom da su x(2) = x(3) = x(4) = 0, dobijemo samo:

$$(x * y)(n) = x(0)y(n) + x(1)y(n-1)$$

0: $(x * y)(0) = x(0)y(0) + x(1)y(-1) = 6$
1: $(x * y)(1) = x(0)y(1) + x(1)y(0) = 11$
2: $(x * y)(2) = x(0)y(2) + x(1)y(1) = -6$
3: $(x * y)(3) = x(0)y(3) + x(1)y(2) = -9$
4: $(x * y)(4) = x(0)y(4) + x(1)y(3) = -2$

$$(x * y)(n) = \{6, 11, -6, -9, -2\}$$

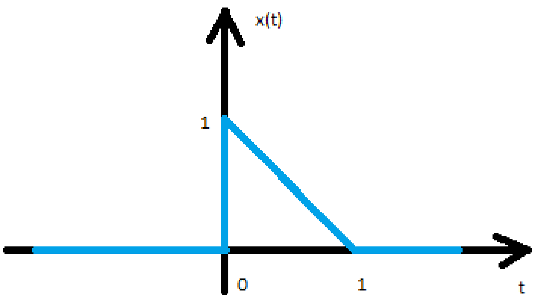
13. Ako imamo zadan impulsni odziv h(n), onda možemo odrediti odziv y(n) na bilo koju pobudu u(n) preko konvolucije:

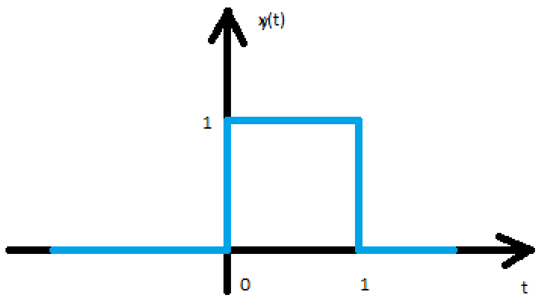
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^m \mu(m) 3^{n-m} \mu(n-m) = \left(\sum_{m=0}^{n} 2^m 3^{n-m}\right)\mu(n) =$$

$$= 3^n \left(\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^m\right)\mu(n) = 3^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1}\mu(n) = (3^{n+1} - 2^{n+1})\mu(n)$$

14. Konvolucija :D

Daklem, imamo zadana dva signala slikom.





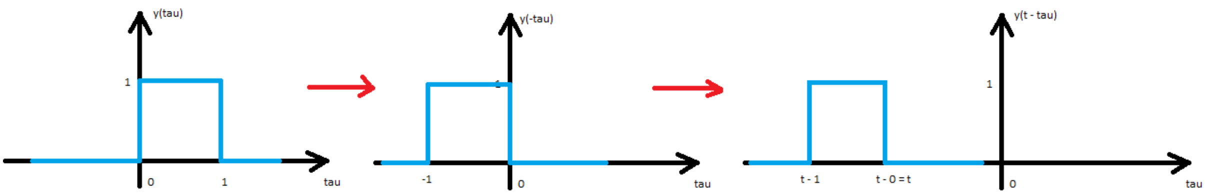
Daklem, obzirom da se konvolucija kontinuiranih signala definira kao:

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

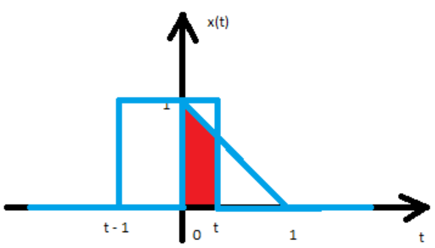
napravit ćemo sljedeće:
1. vidimo da se integrira po TAU! Od sad slike imaju TAU kao glavnu varijablu.
2. najprije signal y(t) zapišemo kao y(tau) (zbog ovog što smo naveli iznad), zatim ga obrnemo pa dobijemo y(-tau) i onda ga pomaknemo za neki t ulijevo pa dobijemo y(t – tau)
3. pomičemo y(t – tau) prema x(tau) (i kod x smo promijenili varijablu!), i tu imamo tri koraka:
 3.1. y(t – tau) ulazi u x(tau)
 3.2. y(t – tau) i x(tau) se preklapaju
 3.3. y(t – tau) izlazi iz x(tau)

Demonstrirajmo sve to ☺

1.



2. y(t – tau) ulazi u x(tau)



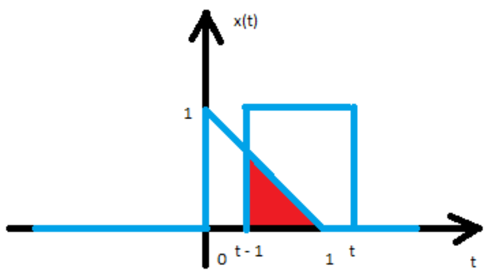
Dakle, morate paziti kada će signal y(t – tau) ulaziti u x(tau): granice integracije su od 0 do t, zato što je sa njima omeđena ova crvena površina. To vrijedi sve dok se t nalazi između 0 i 1, odnosno 0 < t < 1. Pa je konvolucijski integral jednak:

$$(x * y)(t) = \int_{0}^{t} (1 - \tau) \cdot 1 d\tau = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)(\mu(t) - \mu(t-1))$$

Visina signala y(t – tau) = 1, visina signala x(tau) = 1 – tau (to je ovaj kosi pravac). Pomnožili smo sve sa gate fukcijom zato da pokažemo da to vrijedi kada je 0 < t < 1.

3. y(t – tau) se preklapa sa x(tau)
Ovo vrijedi samo kada je t = 1, pa tu nije potrebno pisati nikakav integral. znači, t se ne nalazi između ničega.

4. y(t – tau) izlazi iz x(tau)



Dakle, morate paziti kada će signal y(t – tau) izlaziti u x(tau): granice integracije su od t - 1 do 1, zato što je sa njima omeđena ova crvena površina. To vrijedi sve dok se t - 1 nalazi između 0 i 1, odnosno 0 < t - 1 < 1, odnosno 1 < t < 2. Pa je konvolucijski integral jednak:

$$(x * y)(t) = \int_{t-1}^{1} (1 - \tau) \cdot 1 d\tau = \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 2\right)(\mu(t-1) - \mu(t-2))$$

Visina signala y(t – tau) = 1, visina signala x(tau) = 1 – tau (to je ovaj kosi pravac). Pomnožili smo sve sa gate fukcijom zato da pokažemo da to vrijedi kada je 1 < t < 2.

Konačno je to jednako:

$$(x * y)(t) = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)(\mu(t) - \mu(t-1)) + \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 2\right)(\mu(t-1) - \mu(t-2))$$

pa kada se to raspiše i zbroji:

$$(x * y)(t) = \mu(t)\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + \mu(t-1)(t^2 - 3t + 2) + \mu(t-2)\left(2t - 2 - \frac{t^2}{2}\right)$$

15.

$$(3n + 3) * \delta(2n - 4) = (3n + 3) * \delta\big(2(n - 2)\big) = 3(n - 2) + 3 = 3n - 6 + 3 = 3n - 3$$

16. Imamo zadanu jednadžbu diferencija za sustav, i pobudu. Prisilni odziv sustava je partikularno rješenje. Pobuda u(n) oblika $u(n) = (A_1 n + A_0)\mu(n)$, onda je partikularno rješenje $y_p(n) = (K_1 n + K_0)\mu(n)$ (pogledajte slideove!).

Dakle, to rješavamo na način da partikularno rješenje ubacimo u početnu ejdnadžbu diferencija koja je zadana, s time da umjesto pobude u(n) pišemo zadanu pobudu:

$$y(n) - 7y(n-1) + 10y(n-2) = u(n)$$

$$(K_1 n + K_0)\mu(n) \; - 7((K_1(n-1) + K_0)\mu(n)\,) + 10((K_1(n-2) + K_0)\mu(n)\,) = (4n+7)\mu(n)$$

Maknemo step i malo izmnožimo:

$$4K_1 n + 4K_0 - 13K_1 = 4n + 7$$

$$4K_1 = 4 \rightarrow K_1 = 1$$

$$4K_0 - 13K_1 = 7 \rightarrow 4K_0 - 13 = 7 \rightarrow K_0 = 5$$

Prisilni odziv je:

$$y_p(n) = (n+5)\mu(n)$$

17. Isti zadatak, sve isto, traži se prirodni odziv. To je homogeno rješenje.

$$y_h(n) = cq^n$$

Ubacimo u početnu jednadžbu, s time da je sada pobuda 0.

$$cq^n - 7cq^{n-1} + 10cq^{n-2} = 0$$

$$q^2 - 7q + 10 = 0 \rightarrow q_1 = 2, q_2 = 5$$

Partikularno rješenje smo već dobili u 16., pa imamo:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

$$y(n) = c_1 2^n + c_2 5^n + (n+5)\mu(n)$$

Iz početnih uvjeta odredimo konstante:

$$y(-1) = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{5} + (-1+5)\mu(-1) = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{5} = 0$$

$$y(-2) = \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{25} + (-2+5)\mu(-2) = \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{25} = \frac{8}{5}$$

$$c_2 = -\frac{80}{3}$$
$$c_1 = \frac{32}{3}$$

E sad, ovdje možemo odmah napsiati i **18.** zadatak, jerbo je rješenje za nepobuđeni sustav isto homogeno. ALI, kod njega neće biti step funkcije (baš zato ejr nije pobuđen s pobudom koja ima step u sebi – barem sam ja to tako shvatio, a i nema drugačijeg ponuđenog rješenja).

17. $\left(\frac{32}{3}2^n - \frac{80}{3}5^n\right)\mu(n)$

18. $\frac{32}{3}2^n - \frac{80}{3}5^n$

19. Miran je sustav → y(-2) = y(-1) = 0, iz čega je također h(-1) = 0 što će nam trebati. Trebamo odrediti impulsni odziv. Mislim da oni to zovu „iterativna metoda“ – kaj got!

Dakle, impulsni odziv, pa nam jednadžba diferencija postaje:

$$h(n) - 3h(n-1) = \delta(n) \to h(n) = 3h(n-1) + \delta(n)$$

$$h(0) = 3h(-1) + \delta(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = 3h(0) + \delta(1) = 3 \cdot 1 + 0 = 3$$

$$h(2) = 3h(1) + \delta(2) = 3 \cdot 3 + 0 = 9$$

$$h(3) = 3h(2) + \delta(3) = 3 \cdot 9 + 0 = 27$$

....zaključujemo da je opći oblik 3^n pa je:

$$h(n) = 3^n$$

20.
Ok znači, prvo treba rješiti sustav za n između 0 i 1000. Tu je općenito pobuda 1 → gate funkcija.
Najprije nađemo homogneno rješenje:

$$y_h(n) = cq^n$$

Ubacimo u početnu jednadžbu, s time da je pobuda 0.

$$cq^n - \frac{1}{2}cq^{n-1} = 0$$

$$q - \frac{1}{2} = 0 \to q = \frac{1}{2}$$

Homogeno je rješenje dakle

$$y_h(n) = c\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Zatim nađemo partikularno rješenje. Pobuda je konstanta pa je i partikualrno rješenje konstanta.

$$K - \frac{1}{2}K = 1 \to K = 2$$

Pa je rješenje:

$$y(n) = c\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

Iz početnog uvjeta y(-1) = 6 dobijemo c = 2.

$$y(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

Eeee sad, kad je n = 1000 došli smo do kraja i nadalje će pobuda biti 0 jer je kraj gate funkcije. Tu možemo izračunati početni uvjet za daljnje računanje:

$$y(1000) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} + 2$$

Računajući sada novo homogeno i partikularno rješenje, dobijemo K = 0 a homogeno ostaje isto kao i prije, to jest imamo:

$$y(n) = c\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Pa iz početnog uvjeta

$$y(1000) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} + 2$$

sada možemo dobiti konstantu

$$c = 2 + 2^{1001}$$

Odnosno imamo:

$$y(n) = (2 + 2^{1001})\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Za n = 2000 dobijemo:

$$y(2000) = (2 + 2^{1001})\left(\frac{1}{2}\right)^{2000} = 2^{-1999} + 2^{-999}$$