Signali i sustavi

Zadaci za vježbu – 8. tjedan

Jednadžbe diferencija

- Koriste se u opisu diskretnog sustava modelom s ulazno-izlaznim varijablama.
- Određivanje odziva sustava svodi se na problem rješavanja jednadžbi diferencija.
- Načine rješavanja jednadžbi diferencija ilustrirat ćemo primjerima.

2

Klasični način rješavanja

- Rješenje nehomogenih linearnih jednadžbi diferencija općenito se dobiva kao zbroj:

1. rješenja homogene jednadžbe $y_h[n]$ kojeg određuje struktura jednadžbe te
2. partikularnog rješenja $y_p[n]$ kojeg određuje funkcija pobude.

3

Zadatak 1.

- Riješi homogenu jednadžbu diferencija

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{2}y[n-2]=0$$

uz početne uvjete $y[-1]=1$ i $y[-2]=2$.

- Jednadžbu zadovoljava funkcija $y[n]=q^n$.
- Uvrštavanjem $y[n]=q^n$ u zadanu jednadžbu dobivamo karakterističnu jednadžbu

$$q^n-\frac{1}{2}q^{n-1}-\frac{1}{2}q^{n-2}=0$$

4

Zadatak 1. - karakteristična jednadžba

- Sređivanjem dobivamo:

$$q^{n-2}\left(q^2-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}\right)=0$$

- Trivijalno rješenje je $q=0$, dok netrivijalno rješenje traži:

$$q^2-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}=0$$

$$q_{1,2}=\frac{-(-\frac{1}{2})\pm\sqrt{(-\frac{1}{2})^2-4(-\frac{1}{2})}}{2}$$

5

Zadatak 1. - karakteristična jednadžba

- Netrivijalna rješenja karakteristične jednadžbe nazivaju se vlastite frekvencije.

$$q_{1,2}=\frac{-(-\frac{1}{2})\pm\sqrt{(-\frac{1}{2})^2-4(-\frac{1}{2})}}{2}\Rightarrow q_1=1,\ q_2=-\frac{1}{2}$$

- Jednadžbu zadovoljavaju nizovi $(q_1)^n$, $(q_2)^n$.
- Rješenje homogene jednadžbe diferencija za različite q_1 i q_2 dobivamo u obliku:

$$y_h[n]=C_1q_1^n+C_2q_2^n=C_11^n+C_2(-\tfrac{1}{2})^n$$

6

Zadatak 1. - određivanje konstanti

- Konstante C_1 i C_2 se određuju na temelju poznavanja početnih uvjeta $y[-1]$ i $y[-2]$.
- Početni uvjeti su $y[-1] = 1$ i $y[-2] = 2$. Tada vrijedi:

$$\begin{cases} y_h[-2] = 2 = C_1 1^{-2} + C_2(-\tfrac{1}{2})^{-2} \\ y_h[-1] = 1 = C_1 1^{-1} + C_2(-\tfrac{1}{2})^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + 4C_2 \\ 1 = C_1 - 2C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{4}{3}, C_2 = \frac{1}{6}$$

Zadatak 1. - konačno rješenje

- Opće rješenje jednadžbe

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = 0$$

je

$$y[n] = C_1 1^n + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

- Uz početne uvjete $y[-1] = 1$ i $y[-2] = 2$ rješenje je

$$y[n] = \frac{4}{3}(1)^n + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

Zadatak 2.

- Nađi opće rješenje homogene jednadžbe diferencija

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-2] - \frac{1}{4}y[n-3] = 0$$

- Karakteristična jednadžba je

$$q^n - \frac{3}{4}q^{n-2} - \frac{1}{4}q^{n-3} = 0$$

odnosno

$$q^{n-3}\left(q^3 - \frac{3}{4}q - \frac{1}{4}\right) = 0$$

Zadatak 2. - karakteristična jednadžba

- Karakteristična jednadžba je trećeg reda. Sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} q^3 - \tfrac{3}{4}q - \tfrac{1}{4} &= q\left(q^2 - \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{2}\left(q + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \left(q + \tfrac{1}{2}\right)\left(q^2 - \tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \left(q + \tfrac{1}{2}\right)\left(q + \tfrac{1}{2}\right)(q + 1) \end{aligned}$$

- Tada su vlastite frekvencije sustava

$$q_1 = -\frac{1}{2}, \quad q_2 = -\frac{1}{2}, \quad q_3 = 1$$

Zadatak 2. - karakteristična jednadžba

- Ovdje se radi o višestrukoj vlastitoj vrijednosti (dvostrukoj), pa je homogeno rješenje oblika:

$$\begin{aligned} y_h[n] &= C_1 q_1^n + C_2 n q_2^n + C_3 q_3^n \\ &= (C_1 + C_2 n)q_1^n + C_3 q_3^n \\ &= (C_1 + C_2 n)(-\tfrac{1}{2})^n + C_3 1^n \end{aligned}$$

Zadatak 3.

- Nađi opće rješenje homogene jednadžbe diferencija

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 0$$

- Karakteristična jednadžba je

$$q^n - \frac{1}{2}q^{n-1} + \frac{1}{4}q^{n-2} = 0$$

odnosno

$$q^{n-2}\left(q^2 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Zadatak 3. - karakteristična jednadžba

- Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivamo rješenja

$$q_{1,2} = \frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- Rješenja možemo napisati preko modula i argumenta kao

$$q_1 = \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{j\pi/3}$$

$$q_2 = \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}$$

13

Zadatak 3. - opće rješenje

- Opće rješenje je prema tome

$$y_h[n] = C_1\left(\tfrac{1}{2}e^{j\pi/3}\right)^n + C_2\left(\tfrac{1}{2}e^{-j\pi/3}\right)^n$$
$$= (\tfrac{1}{2})^n\left(C_1 e^{j\pi n/3} + C_2 e^{-j\pi n/3}\right)$$

- Eksponencijalne funkcije možemo napisati i pomoću funkcija $\sin[n]$ i $\cos[n]$:

$$y_h[n] = (\tfrac{1}{2})^n\left(C_1 e^{j\pi n/3} + C_2 e^{-j\pi n/3}\right)$$
$$= (\tfrac{1}{2})^n\left(C_1 \cos\tfrac{\pi n}{3} + jC_1 \sin\tfrac{\pi n}{3} + C_2 \cos\tfrac{\pi n}{3} - jC_2 \sin\tfrac{\pi n}{3}\right)$$
$$= (\tfrac{1}{2})^n\left((C_1 + C_2)\cos(\tfrac{\pi n}{3}) + j(C_1 - C_2)\sin(\tfrac{\pi n}{3})\right)$$

14

Zadatak 3. - konačno rješenje

- Uvodimo nove konstante A i B

$$A = C_1 + C_2$$
$$B = j(C_1 - C_2)$$

- Konačno rješenje je tada

$$y[n] = (\tfrac{1}{2})^n \underbrace{\left(A\cos(\tfrac{\pi n}{3}) + B\sin(\tfrac{\pi n}{3})\right)}_{\text{faza vlastite frekvencije}}$$

modul vlastite frekvencije

15

Određivanje homogenog rješenja

jednostruka realna vlastita frekvencija q	$y_h[n] = C_1 q^n$
k-struka realna vlastita frekvencija q	$y_h[n] = q^n\,(C_1 + nC_2 + \ldots + n^{k-1}C_k)$
konjugirano-kompleksni par kuta $\pm\phi$ i modula q	$y_h[n] = q^n\,(A\cos(\phi) + B\sin(\phi))$
k-struki konjugirano-kompleksni par kuta $\pm\phi$ i modula q	$y_h[n] =$ $q^n\cos(\phi)\,(A_1 + nA_2 + \ldots + n^{k-1}A_k) +$ $q^n\sin(\phi)\,(B_1 + nB_2 + \ldots + n^{k-1}B_k)$

16

Određivanje partikularnog rješenja

- Najveći broj pobuda zanimljivih za analizu diskretnih sustava dade se predstaviti ili aproksimirati nizovima oblika polinoma ili kompleksne eksponencijale.
- To je razlog da se metoda neodređenih koeficijenata koristi u analizi sustava (zbog njene jednostavnosti).

17

Zadatak 4.

- Riješi jednadžbu diferencija

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = x[n]$$

uz pobudu

$$x[n] = \begin{cases} n(-1)^n & \text{za } n \geq 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

te uz početne uvjete

$$y[-1] = 0 \text{ i } y[-2] = 1$$

18

Zadatak 4. - homogena jednadžba

- Potrebno je riješiti nehomogenu jednadžbu
  $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = n(-1)^n$, za $n \geq 0$
- Kada rješavamo nehomogenu jednadžbu prvo rješavamo odgovarajuću homogenu jednadžbu, a onda metodom neodređenih koeficijenata tražimo partikularno rješenje.
- Odgovarajuća homogena jednadžba je
  $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 0$, za $n \geq 0$

19

Zadatak 4. - homogena jednadžba

- Karakteristična jednadžba jednadžbe
  $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 0$, za $n \geq 0$
  je
  $q^{n-2}(q^2 + 2q + 1) = 0$
- Vlastite frekvencije su
  $q_1 = -1$ i $q_2 = -1$
- Homogeno rješenje je oblika
  $y_h[n] = (C_1 + nC_2)(-1)^n$

20

Zadatak 4. - partikularno rješenje

- Određivanje partikularnog rješenja:
  1. Pobuda je složena i predstavlja umnožak polinoma prvog reda i eksponencijalnog niza.
  2. Za pobudu polinomom n-tog reda partikularno rješenje će biti polinom n-tog reda.
  3. Za eksponencijalnu pobudu partikularno rješenje ima oblik kompleksne eksponencijale.
- Za našu pobudu $x[n] = n(-1)^n$ za $n \geq 0$ partikularno rješenje bi izgledalo ovako:
  $$y_p[n] = (An + B)(-1)^n$$

21

Zadatak 4. - partikularno rješenje

- Partikularno rješenje je oblika
  $y_p[n] = (An + B)(-1)^n$
- No budući da je frekvencija kompleksne eksponencijale jednaka vlastitoj frekvenciji sustava koja je usto i dvostruka, partikularno rješenje treba pomnožiti sa nizom n^k gdje je k-stupanj višestrukosti vlastite frekvencije.
- Partikularno rješenje stoga postaje
  $y_p[n] = n^2(An + B)(-1)^n$

22

Zadatak 4. - partikularno rješenje

- Uvrštenjem partikularnog rješenja u nehomogenu jednadžbu i primjenom metode neodređenih koeficijenata određujemo konstante A i B.
- Prvo odredimo $y_p[n]$, $y_p[n-1]$ i $y_p[n-2]$.

$$y_p[n] = n^2(An + B)(-1)^n$$
$$= (An^3 + Bn^2)(-1)^n$$
$$y_p[n-1] = (n-1)^2(A(n-1) + B)(-1)^{n-1}$$
$$= (-An^3 + 3An^2 - 3An + A - Bn^2 + 2Bn - B)(-1)^n$$
$$y_p[n-2] = (n-2)^2(A(n-2) + B)(-1)^{n-2}$$
$$= (An^3 - 6An^2 + 12An - 8A + Bn^2 - 4Bn + 4B)(-1)^n$$

23

Zadatak 4. - partikularno rješenje

- Uvrstimo $y_p[n]$, $y_p[n-1]$ i $y_p[n-2]$ u jednadžbu:

$$\begin{array}{llllllllll}
 & (An^3 & & & & +Bn^2 & & &)(-1)^n \\
+2 & (-An^3 & +3An^2 & -3An & +A & -Bn^2 & +2Bn & -B &)(-1)^n \\
+ & (An^3 & -6An^2 & +12An & -8A & +Bn^2 & -4Bn & +4B &)(-1)^n \\
= & (& & n & & & & &)(-1)^n
\end{array}$$

- Grupiranjem uz pojedine potencije od n dobivamo:

uz n^3: $A - 2A + A = 0 \qquad = 0$
uz n^2: $6A - 6A + B - 2B + B = 0 \qquad = 0$
uz n^1: $-6A + 12A + 4B - 4B = 6A \qquad = 1$
uz n^0: $2A - 8A - 2B + 4B = -6A + 2B \qquad = 0$

24

Zadatak 4. - partikularno rješenje

- Sada odredimo koeficijente A i B.

$$6A = 1$$
$$-6A + 2B = 0$$

- Iz gornjih jednadžbi je $A = 1/6$ i $B = 1/2$.
- Partikularno rješenje je

$$y_p[n] = \left(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2\right)(-1)^n, \quad n \geq 0$$

25

Zadatak 4. - ukupno rješenje

- Ukupno rješenje je zbroj homogenog i partikularnog rješenja:

$$y[n] = (C_1 + nC_2)(-1)^n + \left(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2\right)(-1)^n, \quad n \geq 0$$

- Sada je iz zadanih početnih uvjeta $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 1$ potrebno odrediti C_1 i C_2.
- **Rješenje je ispravno samo za** $n \geq 0$, te nije moguće izravno koristiti $y[-1]$ i $y[-2]$.
- Moramo izračunati $y[0]$ i $y[1]$ da bi odredili C_1 i C_2.

26

Zadatak 4. - ukupno rješenje

- Računamo $y[0]$ i $y[1]$ iz $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 1$ prema $y[n] = n(-1)^n - 2y[n-1] - y[n-2]$:

$$y[0] = 0 \cdot (-1)^0 - 2 \cdot 0 - 1 = -1$$
$$y[1] = 1 \cdot (-1)^1 - 2 \cdot (-1) - 0 = 1$$

- Sada određujemo C_1 i C_2:

$$y[0] = (C_1 + 0C_2)(-1)^0 + \left(\frac{1}{6}0^3 + \frac{1}{2}0^2\right)(-1)^0$$

$$y[1] = (C_1 + 1C_2)(-1)^1 + \left(\frac{1}{6}1^3 + \frac{1}{2}1^2\right)(-1)^1$$

27

Zadatak 4. - konačno rješenje

- Dobivamo $C_1 = -1$ i $C_2 = -2/3$.
- Opće rješenje jednadžbe je

$$y[n] = (C_1 + nC_2)(-1)^n + \left(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2\right)(-1)^n, \quad n \geq 0$$

- Rješenje uz zadane početne uvjete $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 1$ je

$$y[n] = \left(-1 - \frac{2}{3}n\right)(-1)^n + \left(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2\right)(-1)^n, \quad n \geq 0$$

28

Zadatak 5.

- Riješi jednadžbu

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = x[n]$$

uz supstituciju $n - 2 = n'$. Dakle potrebno je riješiti jednadžbu

$$y[n'+2] + 2y[n'+1] + y[n'] = x[n'+2]$$

uz pobudu

$$x[n] = \begin{cases} n(-1)^n & \text{za } n \geq 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

29

Zadatak 5.

- Karakteristična jednadžba je

$$q^{n'}(q^2 + 2q + 1) = 0$$

- Rješenja $q_1 = q_2 = -1$ znamo iz prethodnog zadatka.
- Nehomogena jednadžba je

$$y[n'+2] + 2y[n'+1] + y[n'] = x[n'+2]$$

odnosno

$$y[n'+2] + 2y[n'+1] + y[n'] = (n'+2)(-1)^{n'}$$

- Partikularno rješenje je oblika

$$y_p[n'] = n'^2 (Cn' + D)(-1)^{n'}$$

30

Zadatak 5. - partikularno rješenje

- Uvrštenjem partikularnog rješenja u nehomogenu jednadžbu i primjenom metode neodređenih koeficijenata određujemo konstante C i D.
- Prvo odredimo $y_p[n']$, $y_p[n'+1]$ i $y_p[n'+2]$.

$y_p[n'] \quad = n'^2\,(Cn' + D)\,(-1)^{n'}$

$= (Cn'^3 + Dn'^2)\,(-1)^{n'}$

$y_p[n'+1] = (n'+1)^2\,(C(n'+1) + D)\,(-1)^{n'+1}$

$= (-Cn'^3 - 3Cn'^2 - 3An' - C - Dn'^2 - 2Dn' - D)\,(-1)^{n'}$

$y_p[n'+2] = (n'+2)^2\,(C(n'+2) + D)\,(-1)^{n'+2}$

$= (Cn'^3 + 6Cn'^2 + 12Cn' + 8C + Dn'^2 + 4Dn' + 4D)\,(-1)^{n'}$

31

Zadatak 5. - partikularno rješenje

- Uvrstimo $y_p[n']$, $y_p[n'+1]$ i $y_p[n'+2]$ u jednadžbu:

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & (Cn'^3 & & & & +Dn'^2 & & &) & (-1)^{n'} \\
+2 & (-Cn'^3 & -3Cn'^2 & -3Cn' & -C & -Dn'^2 & -2Dn' & -D &) & (-1)^{n'} \\
+ & (Cn'^3 & +6Cn'^2 & +12Cn' & +8C & +Dn'^2 & +4Dn' & +4D &) & (-1)^{n'} \\
= & (& & n' & & & & +2 &) & (-1)^{n'}
\end{array}
$$

- Grupiranjem uz pojedine potencije od n' dobivamo:

uz n'^3: $C - 2C + C = 0 \qquad = 0$

uz n'^2: $-6C + 6C + D - 2D + D = 0 \qquad = 0$

uz n'^1: $-6C + 12C + 4D - 4D = 6C \qquad = 1$

uz n'^0: $-2C + 8C - 2D + 4D = 6C + 2D \qquad = 2$

32

Zadatak 5. - partikularno rješenje

- Sada odredimo koeficijente C i D.

$$6C = 1$$
$$6C + 2D = 2$$

- Iz gornjih jednadžbi je $C = 1/6$ i $D = 1/2$.
- Partikularno rješenje je

$$y_p[n'] = \left(\frac{1}{6}n'^3 + \frac{1}{2}n'^2\right)(-1)^{n'}, \quad n' \geq -2$$

33

Zadatak 5. - konačno rješenje

- Ukupno rješenje sada jednostavno odredimo kao zbroj homogenog i partikularnog rješenja:

$$y[n'] = \left(C_1 + n'C_2\right)(-1)^{n'} + \left(\frac{1}{6}n'^3 + \frac{1}{2}n'^2\right)(-1)^{n'}, \quad n' \geq -2$$

34

Zadatak 5. - komentar

- Uočavamo da jednadžbe

  $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = x[n]$

  $y[n'+2] + 2y[n'+1] + y[n'] = x[n'+2]$

  imaju identično opće rješenje, tj. ekvivalentne su.
- Prva se realizira pomoću elemenata za jedinično kašnjenje (E^{-1}), druga pomoću elemenata za predikciju (E)!

35

Zadatak 6. - Fibonaccijevi brojevi

- Fibonaccijevi brojevi $\{c_n\}$ definirani su rekurzivno

  $c_0 = 1, \;\; c_1 = 1, \;\; c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \;\; n \geq 2$

  što možemo promatrati kao jednadžbu diferencija. Riješi tu jednadžbu
  1. metodom korak-po-korak
  2. klasičnim načinom

36

Zadatak 6. - metoda korak-po-korak

- Računamo svaki novi član c_n na temelju dva prethodna prema $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$, $n \geq 2$. Dobivamo
  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$
- Obično se implementira na računalu.

```
long int fibbonaci(int n) {
      int i, c1, c2, cn;
      cn = 1; c1 = 1; c2 = 1;
      for(i = 3; i <= n; i++) {
            cn = c1 + c2;
            c1 = c2;
            c2 = cn;
      } /* for */

      return( cn );
} /* fibbonaci */
```


Zadatak 6. - klasičan način

- Rješavamo jednadžbu
  $$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$
- Karakteristična jednadžba je
  $$q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$$
  odnosno nakon sređivanja
  $$q^{n-2}(q^2 - q - 1) = 0$$
- Korijeni su
  $$q_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
- Rješenje je oblika
  $$c_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Zadatak 6. - klasičan način

- Konstante C_1 i C_2 određujemo iz početnih uvjeta $c_0 = 1$ i $c_1 = 1$.
  $$c_0 = 1 = C_1 \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + C_2 \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 = C_1 + C_2$$
  $$c_1 = 1 = C_1 \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 = C_1 \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}$$
- Dobivamo C_1, C_2 i konačno rješenje
  $$C_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad C_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{5}} \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}$$
  $$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad n \geq 0$$

Zadatak 7.

- Bakterije se razmnožavaju prema ovoj shemi: svaka živi dva sata i svaki sat daje jednu novu bakteriju (dakle, samo dvije tijekom života). Koliko je živo potomstvo jedne bakterije nakon 24 sata, nakon 48 sati i općenito nakon *n* sati od pojave prve bakterije?

Zadatak 7. - rješenje

- Označimo sa b_n traženi broj
- Evidentno vrijedi $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$
- Za $n \geq 3$, $b_n - b_{n-2}$ predstavlja broj bakterija koje žive kao potomstvo bakterija živih nakon *n-1* sati, a tih je s druge strane b_{n-1}
- $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$
- Radi se o istoj jednadžbi diferencija kao i u prošlom zadatku (Fibonaccijevi brojevi), ali su početne vrijednosti pomaknute za dva mjesta unaprijed.
- $b_n = c_{n+2}$
- Specijalno; $b_{24} = c_{26} = 175683$, te $b_{48} = c_{50} \approx 6$ bilijuna