Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

10. ožujak 2008.

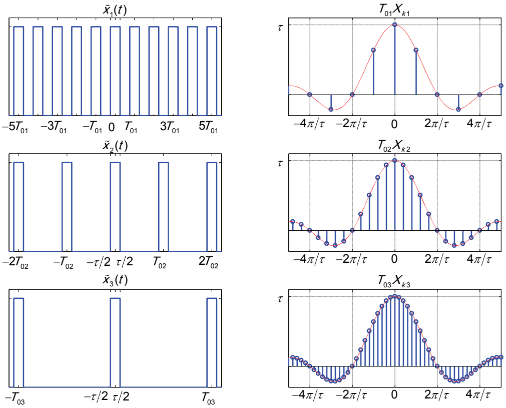
Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- pokazano je kako je spektar periodičnog signala diskretan
- dan je primjer parnog periodičnog pravokutnog signala čiji je spektar

$$\forall k \in \mathit{Cjelobrojni} \quad X_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\Omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\Omega_0 \tau}{2}}$$

  gdje je T_0 perioda, a τ širina pravokutnog impulsa
- razmatra se spektar tri pravokutna signala, za tri vrijednosti periode T_{01}; $T_{02} = 2.5T_{01}$ i $T_{03} = 2T_{02} = 5T_{01}$, uz fiksirani τ
- na slici koja slijedi prikazuju se normalizirani amplitudni spektri $T_{01}X_{k1}$, $T_{02}X_{k2}$ i $T_{03}X_{k3}$ (normaliziranjem se zadržava ista amplituda, τ, sva tri normalizirana spektra)

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala



Slika 1: Periodični signali $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ i normalizirani spektri $T_{01}X_{k1}$, $T_{02}X_{k2}$, $T_{03}X_{k3}$

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- periodični pravokutni signal[1] $\tilde{x} \in KontPeriod_{T_0}$ možemo interpretirati kao signal koji je nastao periodičnim ponavljanjem aperiodičnog pravokutnog impulsa $x \in KontSignali$ trajanja τ
- normalizirani koeficijenti spektra $T_0 X_k$, $\forall k \in Cjelobrojni$, mogu se interpretirati kao uzorci sinc funkcije koji čine linijski spektar signala $\tilde{x}$
- očigledno je kako s povećanjem osnovne periode spektar periodičnog signala $\tilde{x}$ postaje gušći i gušći no dodirnica ostaje nepromijenjena

[1] oznakom $\tilde{x}$ želi se, zbog potrebe izvoda koji slijedi, naglasiti periodičnost signala

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- intuitivno zaključujemo kako za $T_0 \to \infty$ linijski spektar postaje kontinuirana funkcija frekvencije Ω identična dodirnici
- naime, kako se normalizirani koeficijenti spektra $T_0 X_k$ izračunavaju iz

$$\forall k \in Cjelobrojni, \quad T_0 X_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

za očekivati je onda kako se vremenski kontinuirana dodirnica izračunava iz

$$\forall \Omega \in Realni, \quad X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \qquad (1)$$

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- dakle,

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\Omega t}dt=\tau\frac{sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}$$

- pa koeficijente Fourierovog reda možemo prikazati kao uzorke $X(j\Omega)$ jer vrijedi

$$\forall k\in Cjelobrojni,\quad X_k=\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin\frac{k\Omega_0\tau}{2}}{\frac{k\Omega_0\tau}{2}}=\frac{1}{T_0}X(jk\Omega_0)$$

- općenito, periodični signal $\tilde{x}$ prikazujemo Fourierovim redom oblika

$$\forall t\in Realni,\quad \tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- odnosno, uz $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$,

$$\forall t \in Realni, \quad \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \Omega_0$$

- za $T_0 \to \infty$, dakle kad periodični signal prelazi u aperiodičan, možemo interpretirati
  - $\Omega_0 \to d\Omega$ – osnovna frekvencija postaje neizmjerno malom veličinom
  - $k\Omega_0 \to \Omega$ – harmonijske frekvencije postaju tako bliske da prelaze u kontinuum
  - sumacija teži k integralu
  - $\tilde{x}(t) \to x(t)$ – periodični signal prelazi u aperiodičan
  - pa gornji izraz prelazi u

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \qquad (2)$$

Fourierova transformacija

- jednadžba (1) predstavlja Fourierovu transformaciju ili spektar signala x, a (2) inverznu Fourierovu transformaciju koja omogućuje određivanje signala x iz njegova spektra
- dakle, jednadžbe (1) i (2) predstavljaju transformacijski par
  - Fourierova transformacija

$$\forall \Omega \in Realni, \quad X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

  - inverzna Fourierova transformacija

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- koriste se i oznake

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \qquad \text{ili} \qquad x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$$

Fourierova transformacija

- Fourierovom transformacijom vremenski kontinuiranom aperiodičnom signalu, definiranom u vremenskoj domeni, pridružuje se frekvencijski kontinuiran aperiodičan signal, definiran u frekvencijskoj domeni
- to pridruživanje označujemo kao[2] $CTFT$, prema engleskom Continuous-time Fourier transform, i definiramo kao

$$CTFT : KontSignali \to KontSignali$$
$$\forall \Omega \in Realni, \quad X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

za $\forall x \in KontSignali$ i $\forall X \in KontSignali$

[2] u uobičajenoj komunikaciji koristi se oznaka FT, dakle, jednostavno Fourierova transformacija

Inverzna Fourierova transformacija

- inverznom Fourierovom transformacijom frekvencijski kontinuiranom aperiodičnom signalu (spektru), definiranom u frekvencijskoj domeni, pridružuje se vremenski kontinuiran aperiodičan signal, definiran u vremenskoj domeni
- to pridruživanje označujemo *ICTFT*, prema engleskom Inverse Contionous-time Fourier transform, i definiramo kao

$$ICTFT : KontSignali \rightarrow KontSignali$$

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

za $\forall X \in KontSignali$ i $\forall x \in KontSignali$

Konvergencija Fourierove transformacije

- slično kao kod Fourierovog reda, i ovdje postoje dvije klase signala za koje Fourierova transformacija konvergira
  1. signali konačne totalne energije za koje vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

  2. signali koji zadovoljavaju Dirichletove uvjete
     (a) signal x je apsolutno integrabilan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

     (b) signal x ima konačni broj maksimuma i minimuma, u bilo kojem konačnom intervalu vremena
     (c) ima konačni broj diskontinuiteta, u bilo kojem konačnom intervalu vremena, pri čemu svaki od diskontinuiteta mora biti konačan

Veza Fourierove i Laplaceove transformacije

- usporedimo izraze za Fourierovu i dvostranu Laplaceovu transformaciju,[3] za $\forall t \in Realni$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \qquad \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- očigledno je kako je Fourierova transformacija vremenskog signala jednaka Laplaceovoj transformaciji na imaginarnoj osi $s = j\Omega$, kompleksne ravnine
- pa, u slučaju da područje konvergencije $\mathcal{L}$–transformacije sadrži imaginarnu os $s = j\Omega$, vrijedi, $\forall t \in Realni$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{s=j\Omega}$$

[3] Detaljnije o dvostranoj Laplaceovoj transformaciji kasnije tijekom semestra

Fourierova transformacija

- rezultat Fourierove transformacije, $X(j\Omega)$,

$$\forall \Omega \in Realni, \quad X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

  naziva se i Fourierov spektar ili jednostavno spektar signala $x(t)$, $\forall t \in Realni$
- X je kompleksna funkcija realne varijable[4] Ω i pišemo

$$\forall \Omega \in Realni, \quad X(j\Omega) = |X(j\Omega)| e^{j\angle X(j\Omega)}$$

  gdje su $|X(j\Omega)|$ amplitudni spektar a, $\angle X(j\Omega)$ fazni spektar

[4] naizgled zbunjuje oznaka $X(j\Omega)$, a ne $X(\Omega)$, no to je samo stvar konvencije jer se želi istaknuti kako je funkcija definirana na imaginarnoj osi. Smisao konvencije je vidljiv i kod usporedbe s $\mathcal{L}$-transformacijom

Fourierova transformacija – Parsevalova jednakost

energija aperiodičnog kontinuiranog signala[5] $x(t)$, $\forall t \in Realni$, čija je Fourierova transformacija $X(j\Omega)$, $\forall \Omega \in Realni$, je

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \quad \text{za } |x(t)|^2 = x(t)x^*(t) \Rightarrow$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \right] d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

je Parsevalova jednakost za aperiodične vremenski kontinuirane signale konačne energije, i izražava princip očuvanja energije u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

[5] $x(t)$ i $x^*(t)$ su konjugirano kompleksni

Fourierova transformacija pravokutnog impulsa

- $\mathcal{F}$–transformacija pravokutnog impulsa

$$\forall t \in Realni, \quad p_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

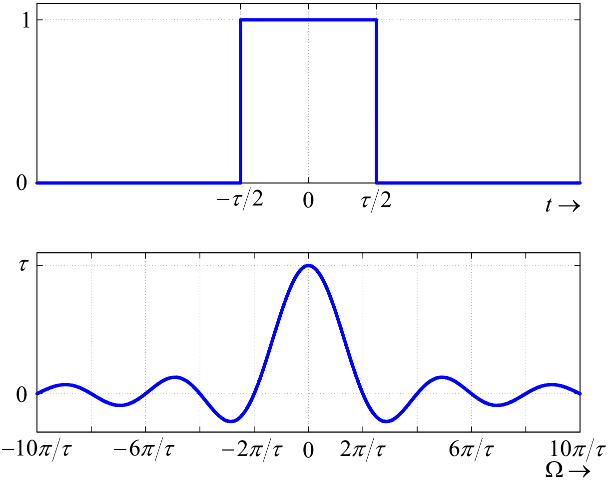
je

$$\mathcal{F}\{p_\tau(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\Omega t} dt = \tau \frac{sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}$$

- spektar je realna funkcija, što je posljedica parnosti signala p_τ, i prikazujemo ga jednim grafom

Fourierova transformacija pravokutnog impulsa

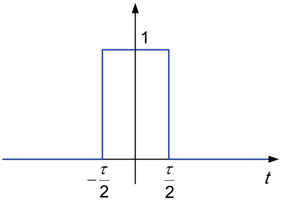
- prikazuju se pravokutni impuls i njegov realni spektar[6]

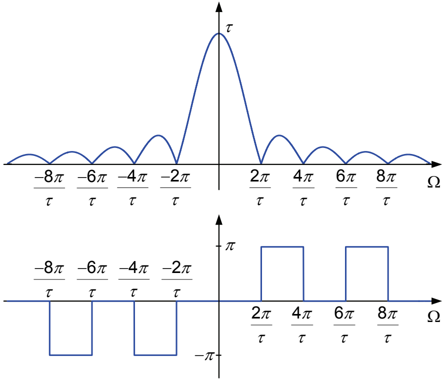


[6] spektar je frekvencijski neomeđen i ovdje je prikazan samo dio spektra

Fourierova transformacija pravokutnog impulsa

- prikazuju se pravokutni impuls i amplitudni i fazni spektar
- s obzirom da je spektar realan, faza je nula za nenegativne vrijednosti spektra, a $+\pi$ ili $-\pi$, za negativne vrijednosti spektra





Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

- Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale $x(t) = e^{-bt}\mu(t)$, $\forall t \in Realni$, i $b \in Realni$, je

$$\forall \Omega \in Realni,$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt}\mu(t)e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-j\Omega t}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(b+j\Omega)t}\, dt = -\frac{1}{b+j\Omega}\left[e^{-(b+j\Omega)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}$$

integral konvergira[7] samo za $b > 0$, pa je

$$\forall \Omega \in Realni, \quad X(j\Omega) = \frac{1}{b+j\Omega}$$

[7] Prvi Dirichletov uvjet $\int_0^\infty |e^{-bt}|\, dt = \int_0^\infty e^{-bt}\, dt = -\frac{1}{b}e^{-bt}\Big|_0^\infty$, a ovaj izraz je konačan samo za $b > 0$

Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

- iz

$$\forall\Omega \in Realni, \quad X(j\Omega) = \frac{1}{b + j\Omega}$$

slijedi

$$Re\{X(j\Omega)\} = \frac{b}{b^2 + \Omega^2}, \qquad Im\{X(j\Omega)\} = -\frac{\Omega}{b^2 + \Omega^2}$$

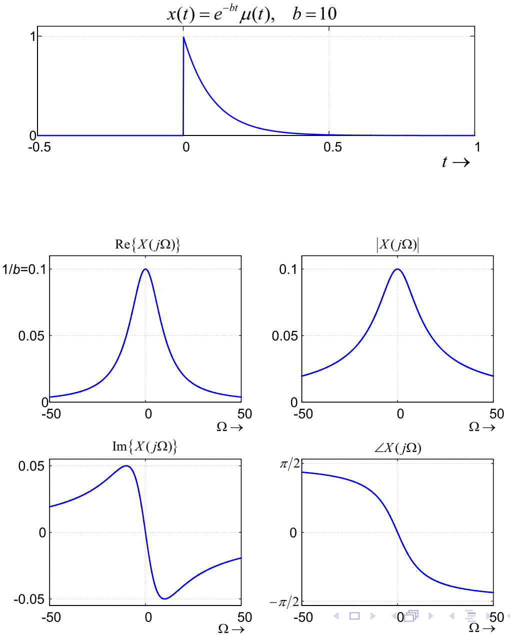
odnosno

$$|X(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \Omega^2}}, \qquad \angle X(j\Omega) = -\arctan\frac{\Omega}{b}$$

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 6.

Profesor Branko Jeren

Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale



Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

- primjer Fourierove transformacije kauzalne eksponencijale $x(t) = e^{-bt}\mu(t)$, $\forall t \in Realni$, i $b \in Realni$, ukazuje na sljedeću važnu činjenicu
- pokazano je da Fourierov integral, za ovaj signal, postoji samo za $b > 0$
- za $b = 0$, gornja se kauzalna eksponencijala transformira u $x(t) = \mu(t)$
- zaključujemo kako za jedinični skok, $\mu(t)$, $\forall t \in Realni$, ne postoji Fourierova transformacija
- kasnije se pokazuje da za jedinični skok, i još neke druge signale, definiramo generaliziranu Fourierovu transformaciju

Simetrije kod Fourierove transformacije

- u trećoj cjelini predavanja, razmatrana je parnost i neparnost signala te, konjugirana simetričnost kompleksnih signala, a ovdje će oni biti korišteni u izvodu nekih svojstva simetrije kod Fourierove transformacije
- razmotrimo Fourierovu transformaciju realnog signala

$$\forall \Omega \in Realni \quad X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$X(-j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\Omega t}dt$$

$$X^*(-j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = X(j\Omega)$$

- zaključujemo kako realni signali[8] imaju konjugirano simetričan spektar

[8] x^* je konjugirano kompleksan signalu x, a za realne signale vrijedi $x^* = x$

Simetrije kod Fourierove transformacije

- konjugirana simetričnost spektra, realnog vremenskog signala, rezultira u parnosti i neparnosti sljedećih komponenti spektra, $\forall\Omega \in Realni$, pa za

$$X(j\Omega) = Re\{X(j\Omega)\} + jIm\{X(j\Omega)\} = |X(j\Omega)|e^{j\angle\{X(j\Omega)\}}$$

$$X^*(-j\Omega) = Re\{X(-j\Omega)\} - jIm\{X(-j\Omega)\} = |X(-j\Omega)|e^{-j\angle\{X(-j\Omega)\}}$$

iz $X(j\Omega) = X^*(-j\Omega)$ slijedi

$$\begin{aligned}
Re\{X(j\Omega)\} &= Re\{X(-j\Omega)\} && \text{realni dio spektra paran}\\
Im\{X(j\Omega)\} &= -Im\{X(-j\Omega)\} && \text{imaginarni dio spektra neparan}\\
|X(j\Omega)| &= |X(-j\Omega)| && \text{amplitudni spektar paran}\\
\angle\{X(j\Omega)\} &= -\angle\{X(-j\Omega)\} && \text{fazni spektar neparan}
\end{aligned}$$

Simetrije kod Fourierove transformacije

- razmotrimo Fourierovu transformaciju parnog signala
- za realan i paran signal $x(t) = x(-t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$, vrijedi $\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[\mathcal{F}\{x(t)\} + \mathcal{F}\{x(-t)\}]$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\Omega t}dt$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} + \mathcal{F}\{x(-t)\} = 2\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\Omega t)dt$$

- pa je za realan, i paran, signal $x(t)$ Fourierova transformacija realna i parna (vidi primjer spektra pravokutnog impulsa)

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\Omega t)dt$$

Fourierova transformacija – svojstvo vremenskog pomaka

- Fourierova transformacija signala $x(t) = p_\tau(t - \frac{\tau}{2})$, dakle,

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases} \quad \text{je}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_0^{\tau} e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\frac{\Omega\tau}{2}} \underbrace{\tau \frac{\sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}}_{\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}}$$

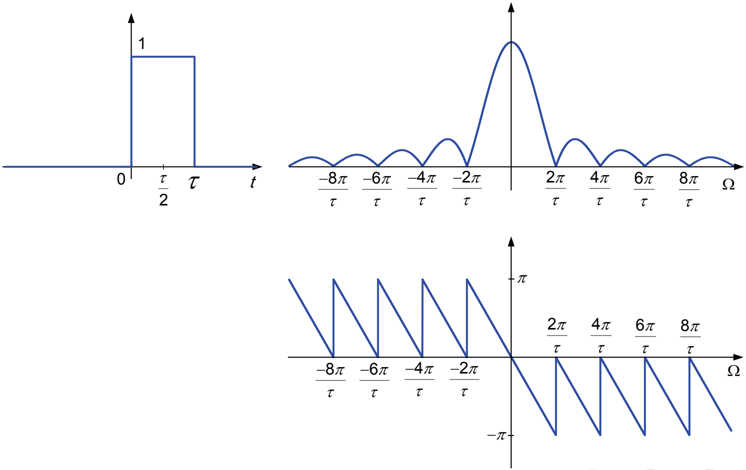
- Fourierovu transformaciju pomaknutog pravokutnog impulsa možemo poopćiti, i definirati kao svojstvo pomaka Fourierove transformacije,

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega) = |X(j\Omega)| e^{j[\angle X(j\Omega) - \Omega t_0]}$$

- pomak signala u vremenskoj domeni rezultira u linearnom faznom pomaku njegove transformacije

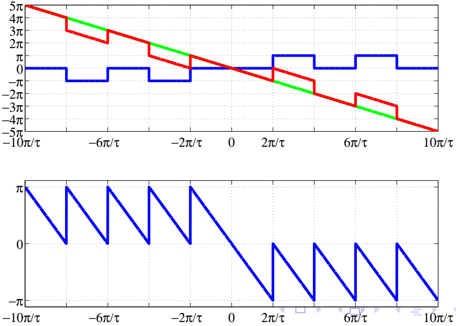
Fourierova transformacija pravokutnog impulsa – neparnog

- prikazuju se pomaknuti pravokutni impuls (signal nije više paran) i njegov spektar



Fourierova transformacija pravokutnog impulsa – neparnog

- interpretira se faza pomaknutog pravokutnog impulsa
- plavo je faza nepomaknutog (parnog) pravokutnog impulsa, $\angle\mathcal{F}\{p_\tau(t)\}$, zeleno je doprinos fazi zbog pomaka signala u vremenskoj domeni $-\frac{\Omega\tau}{2}$, a crveno je ukupna faza
- na donjoj slici prikazuju se samo glavne vrijednosti faze u intervalu $-\pi$ i π (dakle faza modulo 2π), i to je u literaturi uobičajeni način prikaza faze



Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti

- očigledna je sličnost izraza za Fourierovu i inverznu Fourierovu transformaciju
- za očekivati je, ako je npr. Fourierova transformacija pravokutnog impulsa sinc funkcija, da će inverzna transformacija spektra koji je oblika pravokutnog impulsa dati vremensku funkciju oblika sinc
- ovo svojstvo Fourierove transformacije naziva se svojstvo dualnosti
- može se pokazati da ako je

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega)$$

vrijedi[9]

$$X(jt) = X(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi x(-\Omega)$$

[9] za $t \in Realni$ vrijedi $X(jt) = X(t)$

Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti – izvod

za potrebe izvoda

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad \text{pišemo} \quad X(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\nu t} dt$$

zamjenom $t = -\Omega$ slijedi

$$X(j\nu) = -\int_{\Omega=+\infty}^{\Omega=-\infty} x(-\Omega) e^{-j\nu(-\Omega)} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=-\infty}^{\Omega=\infty} 2\pi x(-\Omega) e^{j\nu\Omega} d\Omega$$

zamjenom $\nu = t$ slijedi

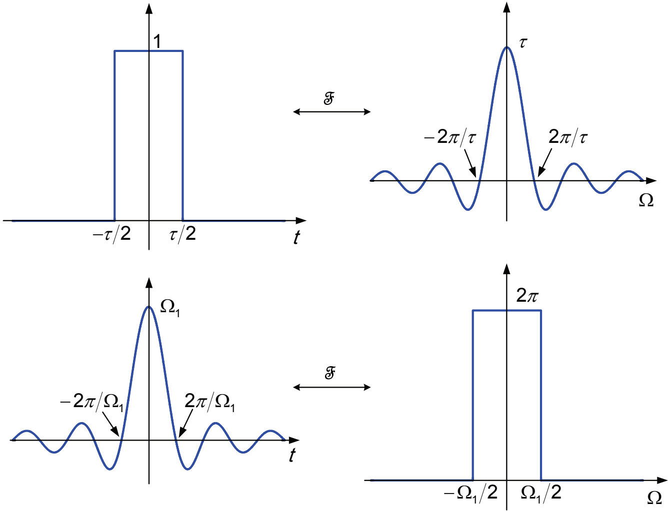
$$X(jt) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$X(jt) = X(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi x(-\Omega)$$

sličnim izvodom (zamjenama $t = \Omega$ i $\nu = -t$)

$$X(-jt) = X(-t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi x(\Omega)$$

Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti



$\mathcal{F}$–transformacija – vremensko skaliranje

- neka je $X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\Omega}{a}\right)$$

izvod: za $a > 0$ i zamjenu $at = \tau$

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-\frac{j\Omega}{a}\tau}d\tau = \frac{1}{a}X\left(\frac{j\Omega}{a}\right)$$

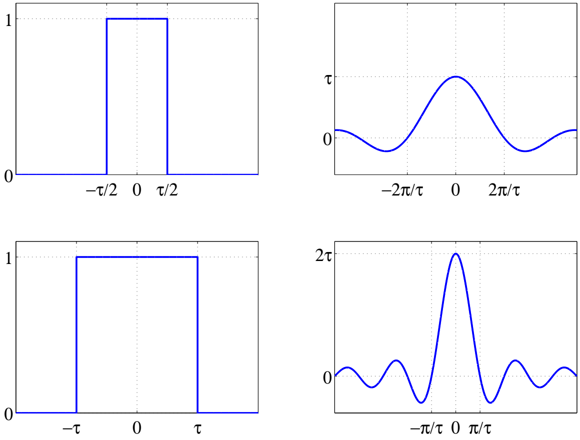
za $a < 0$ i zamjenu $at = \tau$

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{-\frac{j\Omega}{a}\tau}d\tau =$$

$$= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-\frac{j\Omega}{a}\tau}d\tau = -\frac{1}{a}X\left(\frac{j\Omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\Omega}{a}\right)$$

- zaključuje se kako vremenska kompresija signala za faktor $a > 1$ rezultira u ekspanziji spektra za isti faktor
- ekspanzija $x(t)$, za $a < 1$, rezultira u kompresiji $X(j\Omega)$

Fourierova transformacija – vremensko skaliranje



Fourierova transformacija – konvolucija u vremenskoj domeni

- za Fourierovu transformaciju konvolucije u vremenskoj domeni, vrijedi, $\forall t \in Realni$ i $\forall \Omega \in Realni$

$$(x_1 * x_2)(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

izvod:

$$\text{iz } \forall t \in Realni, \quad (x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)\, d\tau,$$

$$\mathcal{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)\, d\tau \right] e^{-j\Omega t}\, dt$$

zamjenom redoslijeda integracije

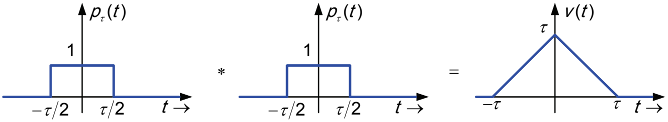
$$\mathcal{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)e^{-j\Omega t}\, dt}_{X_1(j\Omega)e^{-j\Omega\tau}} \right] x_2(\tau)\, d\tau$$

Fourierova transformacija – konvolucija u vremenskoj domeni

- pa je

$$\mathcal{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} = X_1(j\Omega)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau}_{X_2(j\Omega)} = X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$$

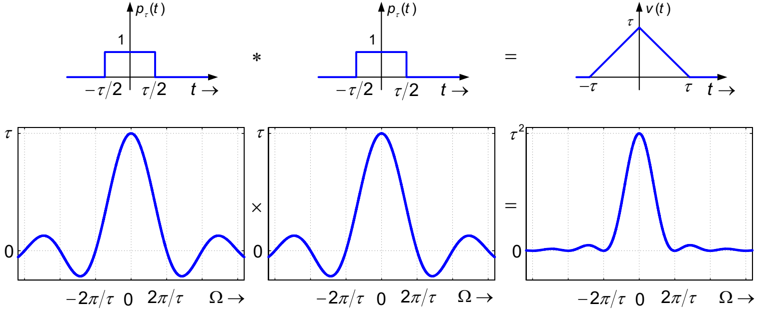
- ovo svojstvo ilustriramo na primjeru Fourierove transformacije trokutastog signala $v(t) = (\tau - |t|)p_{2\tau}(t)$
- ovaj signal moguće je prikazati kao rezultat konvolucije $(p_\tau * p_\tau)(t)$



- pa, prepoznajemo kako se $\mathcal{F}$–transformacija signala v, svodi na produkt spektara signala p_τ

Fourierova transformacija – konvolucija u vremenskoj domeni

$$v(t) = (p_\tau * p_\tau)(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \left[\tau \frac{\sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}\right] \left[\tau \frac{\sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}\right] = \tau^2 \left[\frac{\sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}\right]^2$$



Fourierova transformacija – konvolucija u frekvencijskoj domeni

- Fourierova transformacija, produkta signala u vremenskoj domeni, je $\forall t \in Realni$ i $\forall \Omega \in Realni$

$$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j(\Omega - \Psi))X_2(j\Psi)\, d\Psi$$

izvod:

$$\mathcal{F}\{(x_1(t)x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j\Omega t}\, dt$$

supstitucijom inverzne transformacije za $x_2(t)$

$$\mathcal{F}\{(x_1(t)x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\left[\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\Psi)e^{j\Psi t}\, d\Psi}_{x_2(t)}\right]e^{-j\Omega t}\, dt$$

Fourierova transformacija – konvolucija u frekvencijskoj domeni

zamjenom redoslijeda integracije

$$\mathcal{F}\{(x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\Psi)\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j(\Omega-\Psi)t}\,dt}_{X_1(j(\Omega-\Psi))}\right]d\Psi$$

$$\mathcal{F}\{(x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\Psi)X_1(j(\Omega-\Psi))\,d\Psi =$$
$$= \frac{1}{2\pi}X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)$$

- konvolucija u frekvencijskoj domeni biti će ilustrirana nakon nekoliko prikaznica

Generalizirana Fourierova transformacija

- Fourierova transformacija nije konvergentna, u smislu regularnih funkcija, za neke vrlo uobičajene funkcije,
- prije je to pokazano za jedinični skok
- ovdje se pokazuje da je, unatoč tome, moguća njihova Fourierova transformacija, uvođenjem singularnih funkcija, tj. Diracove funkcije u frekvencijskoj domeni i vremenskoj domeni

Fourierova transformacija jediničnog impulsa

- $\mathcal{F}$–transformacija jediničnog impulsa $\delta(t)$, $\forall t \in Realni$, je

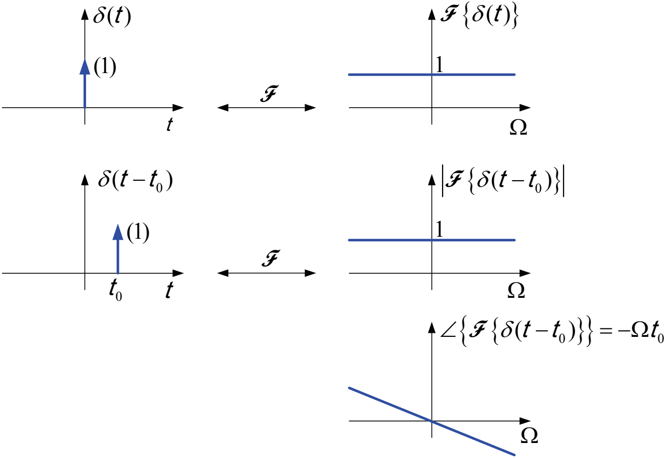
$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = 1$$

- $\mathcal{F}$–transformacija pomaknutog jediničnog impulsa $\delta(t - t_0)$ je

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\Omega t_0}$$

- očigledno je da pomak jediničnog impulsa $\delta(t)$ ne mijenja amplitudu Fourierove transformacije, ali mijenja fazu $\angle\{\mathcal{F}\{\delta(t)\}\}$ koja, za $t_0 > 0$, pada linearno
- gradijent faze odgovara iznosu pomaka jediničnog impulsa, za t_0, u vremenskoj domeni
- slijedi slika koja ilustrira oba primjera

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala



Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti

- pokazano je kako je $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$, dakle,

$$\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1$$

- određuje se inverzna Fourierova transformacija jediničnog impulsa zadanog u frekvencijskoj domeni, dakle, $\delta(\Omega)$, $\forall \Omega \in \mathit{Realni}$,

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi}$$

pa je

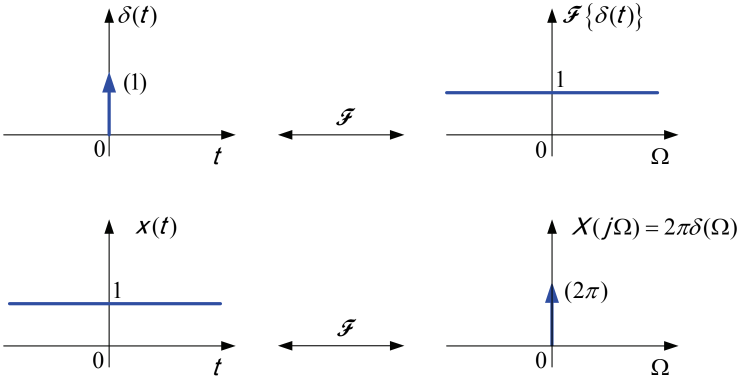
$$\frac{1}{2\pi} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \delta(\Omega)$$

odnosno

$$1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega)$$

- do istog rezultata bilo je moguće doći izravnom uporabom svojstva dualnosti

Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti



Fourierova transformacija jediničnog skoka

- pokazano je kako kauzalna eksponencijala, $e^{-bt}\mu(t)$, $\forall t \in Realni$, ima Fourierovu transformaciju za $b > 0$
- jedinični skok možemo interpretirati kao

$$\forall t \in Realni, \quad \mu(t) = \lim_{b \to 0} e^{-bt}\mu(t)$$

korištenjem izraza za F. transformaciju kauzalne eksponencijale možemo pisati

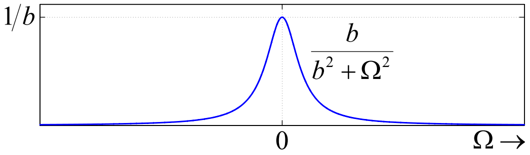
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mu(t)\} &= \lim_{b \to 0} \mathcal{F}\{e^{-bt}\mu(t)\} = \lim_{b \to 0} \frac{1}{b + j\Omega} = \\ &= \lim_{b \to 0} \left[\frac{b}{b^2 + \Omega^2} - j\frac{\Omega}{b^2 + \Omega^2}\right] = \\ &= \lim_{b \to 0} \left[\frac{b}{b^2 + \Omega^2}\right] + \frac{1}{j\Omega}\end{aligned}$$

Fourierova transformacija jediničnog skoka

- član $\lim_{b\to 0}\left[\frac{b}{b^2+\Omega^2}\right]$ ima svojstvo da je površina ispod njegove krivulje jednaka π, neovisno o vrijednosti b,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b}{b^2+\Omega^2}\,d\Omega = \arctan\frac{\Omega}{b}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

uvidom u graf funkcije zaključujemo kako, za $b\to 0$, funkcija prelazi u Diracov δ intenziteta π u $\Omega=0$



pa uz $\lim_{b\to 0}\left[\frac{b}{b^2+\Omega^2}\right] = \pi\delta(\Omega) \Rightarrow$

$$\forall t \in Realni,\quad \mathcal{F}\{\mu(t)\} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

Fourierova transformacija periodičnih signala

- određuje se Fourierova transformacija kompleksne eksponencijale

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = e^{j\Omega_0 t}$$

- uvrštenjem u transformacijski integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\Omega_0 - \Omega)t} dt$$

evidentno je kako on ne konvergira za $\Omega = \Omega_0$

Fourierova transformacija periodičnih signala

- već je pokazano kako je Fourierova transformacija Diracove funkcije konstanta, te kako je Fourierova transformacija konstante Diracova funkcija (svojstvo dualnosti)
- isto tako je pokazano kako je Fourierova transformacija pomaknute Diracove funkcije kompleksna eksponencijala
- može se zaključiti da će, primjenom svojstva dualnosti, pomaknuta Diracova funkcija, u frekvencijskom području, za inverznu transformaciju imati kompleksnu eksponencijalu u vremenskoj domeni
- razmotrimo signal $x(t)$, $\forall t \in \mathit{Realni}$, čija je Fourierova transformacija Diracova funkcija, površine (intenziteta) 2π, na frekvenciji $k\Omega_0$
- inverzna $\mathcal{F}$–transformacija ovog impulsa je

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)e^{j\Omega t}d\Omega = e^{jk\Omega_0 t}$$

Fourierova transformacija periodičnih signala

- Fourierova transformacija signala $e^{jk\Omega_0 t}$, $\forall t \in Realni$, je

$$e^{jk\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

- zaključujemo kako će za proizvoljni periodični signal, prikazan Fourierovim redom,

$$\forall t \in Realni, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$$

Fourierova transformacija biti, za $\forall \Omega \in Realni$, i $\forall k \in Cjelobrojni$,

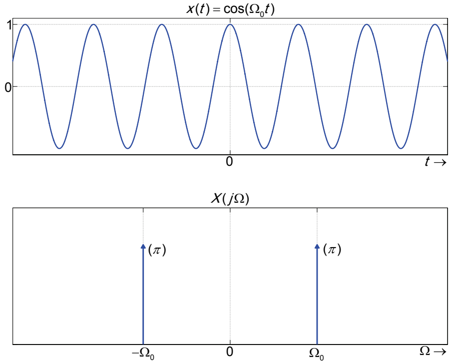
$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

dakle, niz Diracovih funkcija, intenziteta $2\pi X_k$, koji se pojavljuju na frekvencijama $k\Omega_0$

Fourierova transformacija sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija svevremenskog sinusoidnog signala $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$, $\forall t \in Realni$,

$$\mathcal{F}\{\cos(\Omega_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}\right\} =$$
$$= \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$$



Fourierova transformacija sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija svevremenskog sinusoidnog signala $x(t) = \sin(\Omega_0 t)$, $\forall t \in Realni$,

$$\mathcal{F}\{\sin(\Omega_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2j}e^{j\Omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\Omega_0 t}\right\} =$$
$$= -j\pi\delta(\Omega - \Omega_0) + j\pi\delta(\Omega + \Omega_0)$$

- općenito, za svevremenski sinusoidni signal, vrijedi

$$A\cos(\Omega_0 t + \Theta) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi A e^{j\Theta}\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi A e^{-j\Theta}\delta(\Omega + \Omega_0)$$

Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

- određuje se Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

$$\forall t \in Realni, \quad comb_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- kako se radi o periodičnom signalu, s periodom T, moguće ga je prikazati pomoću Fourierovog reda

$$comb_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_s t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}, \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

- jer su Fourierovi koeficijenti

$$\forall k \in Cjelobrojni, \quad X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

- pa se prema izrazu za $\mathcal{F}$–transformaciju periodičnih signala, perioda $T = \frac{2\pi}{\Omega_s}$,

$$\forall \Omega \in Realni, \quad X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

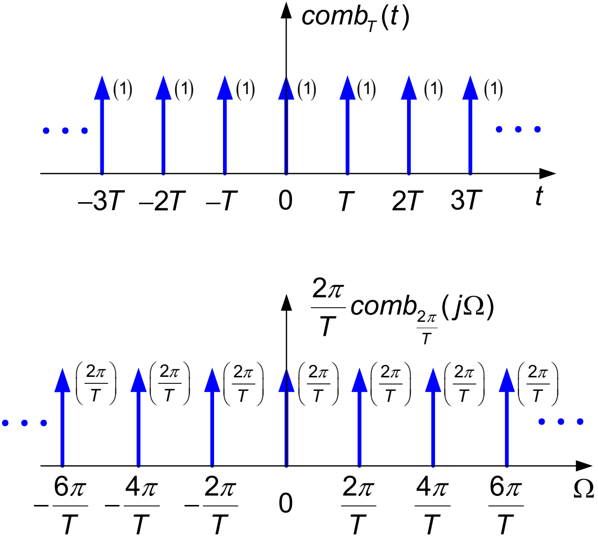
određuje Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcije

$$\forall t \in Realni,$$

$$\mathcal{F}\{comb_T(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{1}{T} \delta(\Omega - k\Omega_s) =$$

$$= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T}) = \frac{2\pi}{T} comb_{\frac{2\pi}{T}}(j\Omega)$$

Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija



Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala, $\forall t \in Realni$,

$$x(t) = p_\tau(t)\cos(\Omega_0 t) = \begin{cases} \cos(\Omega_0 t) & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

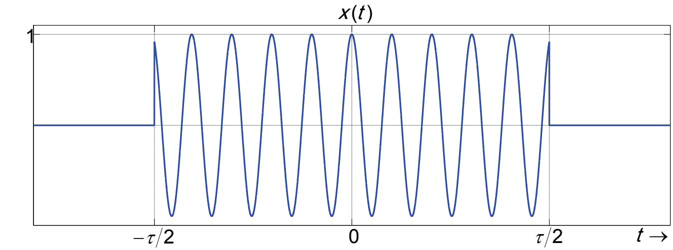
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos(\Omega_0 t)e^{-j\Omega t}dt =$$

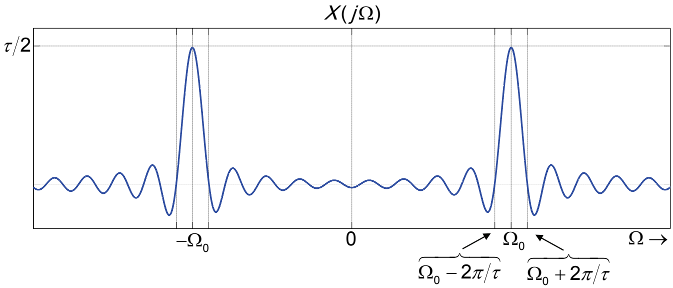
$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \left(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right)e^{-j\Omega t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j(\Omega-\Omega_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j(\Omega+\Omega_0)t}dt =$$

$$= \frac{\tau}{2}\frac{sin\frac{(\Omega-\Omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\Omega-\Omega_0)\tau}{2}} + \frac{\tau}{2}\frac{sin\frac{(\Omega+\Omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\Omega+\Omega_0)\tau}{2}}$$

Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala





Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala

- do istog rezultata moguće je bilo doći primjenom svojstva frekvencijskog pomaka
- za $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$ vrijedi

$$x(t)e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\Omega - \Omega_0))$$

$$x(t)e^{-j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\Omega + \Omega_0))$$

- nadalje za produkt (što je zapravo amplitudna modulacija)

$$x(t)\cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2}[x(t)e^{j\Omega_0 t} + x(t)e^{-j\Omega_0 t}]$$

vrijedi

$$x(t)\cos(\Omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}[X(j(\Omega - \Omega_0)) + X(j(\Omega + \Omega_0))]$$

- za $x(t) = p_\tau(t)$ slijedi prije izvedeni izraz za spektar omeđenog sinusoidalnog signala

Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala

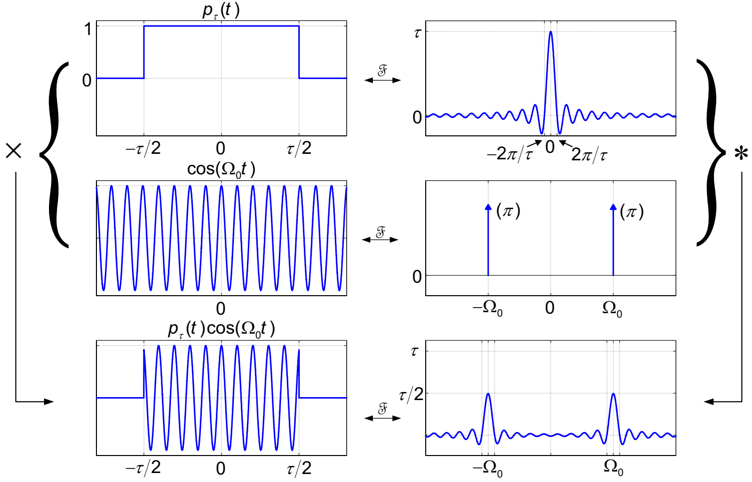
- razmotrimo i treći način izračuna spektra omeđenog sinusoidnog signala
- primjenjuje se svojstvo konvolucije u frekvencijskoj domeni[10]

$$x_1(t)x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j(\Omega-\Psi))X_2(j\Psi)d\Psi$$

- u prethodnom slučaju, omeđenog sinusoidalnog signala $x_1(t) = p_\tau(t)$ a $x_2(t) = \cos(\Omega_0 t)$ i njegov spektar možemo interpretirati i kao frekvencijsku konvoluciju spektra pravokutnog signala $p_\tau(t)$ i signala $\cos(\Omega_0 t)$

[10] izvod dan ranije

Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala



Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 6.

Profesor Branko Jeren

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

Fourierov red

Fourierova transformacija

Tablica parova osnovnih Fourierovih transformacija

Vrem. domena: $x(t)$	Frek. domena: $X(j\Omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}$
$\mu(t)$	$\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}$
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$
$\mu(t+\frac{\tau}{2})-\mu(t-\frac{\tau}{2})$	$\tau\frac{sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}$
$\Omega_1\frac{sin\frac{\Omega_1 t}{2}}{\frac{\Omega_1 t}{2}}$	$2\pi\left[\mu(\Omega+\frac{\Omega_1}{2})-\mu(\Omega-\frac{\Omega_1}{2})\right]$
$e^{-bt}\mu(t), \quad b>0$	$\frac{1}{b+j\Omega}$
$A\cos(\Omega_0 t+\phi)$	$\pi Ae^{j\phi}\delta(\Omega-\Omega_0)+\pi Ae^{-j\phi}\delta(\Omega+\Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi\delta(\Omega-\Omega_0)+\pi\delta(\Omega+\Omega_0)$
$\sin(\Omega_0 t)$	$-j\pi\delta(\Omega-\Omega_0)+j\pi\delta(\Omega+\Omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\Omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi X_k\delta(\Omega-k\Omega_0)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\frac{2\pi}{T})$

Neka svojstva Fourierove transformacije

Svojstvo	Vrem. domena: $x(t)$	Frek. domena: $X(j\Omega)$
Linearnost	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$
Konjugiranost	$x^*(t)$	$X^*(-j\Omega)$
V. inverzija	$x(-t)$	$X(-j\Omega)$
Dualnost	$X(jt)$	$2\pi x(-\Omega)$
Dualnost	$X(-jt)$	$2\pi x(\Omega)$
V. skaliranje	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{j\Omega}{a})$
V. pomak	$x(t-t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}X(j\Omega)$
Modulacija	$x(t)e^{j\Omega t_0}$	$X(j(\Omega-\Omega_0))$
Modulacija	$x(t)\cos(\Omega_0 t)$	$\frac{1}{2}X(j(\Omega-\Omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\Omega+\Omega_0))$
Derivacija	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$(j\Omega)^k X(j\Omega)$
Konvolucija	$(x_1 * x_2)(t)$	$X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$
Množenje	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)$