Zadaci za vježbu – 3. tjedan

1) Neka je $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal. Neka je $x(n)$ diskretni eksponencijalni signal dobiven iz kontinuiranog signala $x(t)$ uniformnim otipkavanjem s periodom T_s. Je li dobiveni diskretni signal uvijek periodičan? Ako nije, pod kojim uvjetima je?

2) Zadan je diskretan signal $x(n) = \cos(an+1)$. Kakav mora biti a da bi signal bio periodičan?

3) Zadan je diskretan signal $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Definiramo novi signal $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-kp)$, pri čemu je $p \in \mathbb{N}$. Dokažite da je signal f periodičan za svaki diskretan signal g za koji zadana suma konvergira.

4) Zadan je diskretan signal $x(n) = n\left(\mu(n) - \mu(n-2008)\right)$. Izračunajte energiju signala.

5) Izračunajte sljedeće integrale
   a. $\int_0^{\infty} \delta(t-2)t^2 dt$
   b. $\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t-1)\delta(t)\cos t dt$

6) Pronađite i skicirajte generaliziranu derivaciju signala

$$g(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ -1, t < 0. \end{cases}$$

7) Izračunajte generaliziranu derivaciju signala:
   a. $g(t) = t\left(\mu(t) - \mu(t-1)\right) + (3-t)\left(\mu(t-2) - \mu(t-3)\right)$
   b. $g(t) = \left(3-t\right)\left(\mu(t) - \mu(t-1)\right) + (3-t)\left(\mu(t-2) - \mu(t-3)\right)$

8) Neka su funkcije $u \in L^2(I)$ i $g \in L^2(I)$ (kvadratno integrabilne) takve da je $\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx$ za svaku funkciju $\varphi \in C_0^{\infty}(I)$. Tada kažemo da je u slabo derivabilna i da je g njena slaba derivacija, pri čemu je $C_0^{\infty}(I)$ skup svih beskonačno derivabilnih funkcija na intervalu I, čija je vrijednost na krajevima intervala jednaka nuli. Koristeći spomenutu činjenicu dokažite da je $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ za $-1 \leq x \leq 1$ slabo derivabilna te da je njena slaba derivacija Hevisideova step funkcija $\mu(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$.