Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 11

Profesor Branko Jeren



# Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

11. travnja 2007.

# Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- razmatraju se vremenski kontinuirani sustavi, s jednim ulazom i jednim izlazom, opisani s modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- sustavi se obično opisuju jednom diferencijalnom jednadžbom višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu

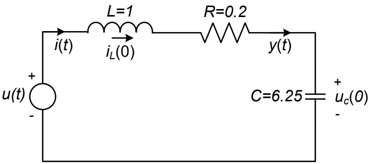
$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$

$$= b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \quad (1)$$

- izlaznu varijablu označujemo (u okviru ovog predmeta) kao $y(t)$ a ulaznu varijablu kao $u(t)$
- slijede dva primjera za jedan jednostavni električni $RLC$ krug za koji će biti izvedene diferencijalne jednadžbe za različito izabrane izlazne varijable

# Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 1

- razmatra se RLC krug na slici (1)




Slika 1: RLC krug

- označimo kao ulaznu varijablu $u(t)$, izlazna varijabla neka je $y(t) = i(t)$, a odziv sustava određujemo za $t \geq 0$
- spremnici energije su induktivitet $L$ i kapacitet $C$ i neka su njihova početna stanja, $i_L(0) = 0$, i $u_c(0) = 3$
- za vremenski stalne i linearne komponente kruga vrijedi

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u_c(0) = u(t)$$

# Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 1

- deriviranjem obje strane, te dijeljenjem s $L$ obje strane, slijedi

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L}\frac{du}{dt}$$

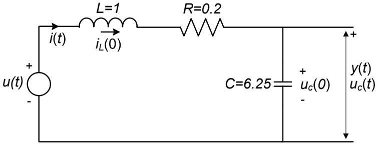
- diferencijalnu jednadžbu kruga pišemo uz pomoć uobičajenih oznaka za izlaznu varijablu $y(t)$ i ulaznu varijablu $u(t)$
- za zadane vrijednosti elemenata, i za $y(t) = i(t)$, diferencijalna jednadžba kruga je

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 0.2\frac{dy}{dt} + 0.16 y(t) = \frac{du}{dt}$$

- za rješenje jednadžbe potrebno je, iz $i_L(0)$ i $u_c(0)$, odrediti $y(0)$ i $y'(0)$

# Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 2

- razmatra se RLC krug na slici (2)




Slika 2: RLC krug

- označimo kao ulaznu varijablu $u(t)$, neka je izlazna varijabla $y(t) = u_c(t)$, a odziv sustava određujemo za $t \geq 0$
- neka su početna stanja, $i_L(0) = 0$, i $u_c(0) = 3$
- za vremenski stalne i linearne komponente kruga vrijedi

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = u(t) \qquad (2)$$

# Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 2

- kako za struju u petlji vrijedi

$$i(t) = i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}$$

- uvrštenjem u (2), te dijeljenjem obje strane s $LC$, slijedi

$$\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

- za zadane vrijednosti elemenata, i za $y(t) = u_c(t)$ diferencijalna jednadžba kruga je (za $y(t)$ kao izlaznu, a $u(t)$ kao ulaznu varijablu)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.2\frac{dy}{dt} + 0.16y = 0.16u(t)$$

- za rješenje jednadžbe potrebno je, iz $i_L(0)$ i $u_c(0)$, odrediti $y(0)$ i $y'(0)$

# Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjeri 1 i 2

- treba uočiti kako su, iako se radi o istom $RLC$ krugu, izvedene dvije različite diferencijalne jednadžbe
- to je razumljivo, jer u primjeru 1 izlazna varijabla $y(t) = i(t)$ predstavlja struju petlje, a u primjeru 2 izlazna varijabla $y(t) = u_C(t)$ predstavlja napon na kapacitetu $C$
- za realni fizikalni sustav, $RLC$ krug, napisane su diferencijalne jednadžbe za čije je rješavanje potrebno odrediti početne uvjete $y(0)$ i $y'(0)$ iz poznavanja početnih vrijednosti spremnika energije (početnih stanja) fizikalnog sustava $i_L(0)$ i $u_C(0)$
- jasno je da će za primjer 1, $y(0)$ biti jednak $i_L(0)$, a u primjeru 2 je $y(0)$ jednak $u_C(0)$
- postupak određivanja početnih uvjeta biti će obrazložen nešto kasnije

# Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- nastavljamo razmatranje vremenski kontinuiranih sustava s jednim ulazom i jednim izlazom, opisanih s modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- sustavi su općenito opisani s više simultanih diferencijalnih jednadžbi
- više se simultanih diferencijalnih jednadžbi obično svodi na jednu jednadžbu višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) = \\ = b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \tag{3}$$

- za linearne, vremenski stalne sustave, koeficijenti $a_i$ i $b_i$ su konstante

# Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- za realne fizikalne sustave je $N \geq M$, pa jednadžbu (3), u najopćenitijem slučaju, pišemo kao

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^N u}{dt^N} + b_1 \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \quad (4)$$

- uvođenjem operatora deriviranja $D$, koji predstavlja operaciju deriviranja $d/dt$, jednadžbu (4) zapisujemo kao

$$\underbrace{\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N\right)}_{A(D)} y(t) =$$

$$= \underbrace{\left(b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N\right)}_{B(D)} u(t) \quad (5)$$

## Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- korištenjem složenih operatora

$$A(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N$$
$$B(D) = b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N$$

jednadžbu (4) zapisujemo kao

$$A(D)y(t) = B(D)u(t) \tag{6}$$

- odziv sustava na zadanu pobudu određuje se rješavanjem jednadžbe (4), odnosno (6)
- određuju se rješenje homogene jednadžbe i partikularno rješenje

# Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- rješenje homogene jednadžbe, $y_h(t)$, je rješenje

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_h(t) = 0$$

- jednadžba pokazuje kako je linearna kombinacija $y_h(t)$ i njezinih $N$ derivacija jednaka nuli za sve vrijednosti $t$
- ovo je moguće samo onda kada su $y_h(t)$, i svih $N$ njezinih derivacija, istog oblika
- ovaj zahtjev ispunjava kompleksna eksponencijalna funkcija $e^{st}, s \in Kompleksni$, jer vrijedi

$$D^k e^{st} = \frac{d^k}{dt^k} e^{st} = s^k e^{st}$$

# Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- rješenje homogene jednadžbe pretpostavljamo u obliku

$$y_h(t) = ce^{st}$$

- uvrštenjem u jednadžbu

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_h(t) = 0$$

- slijedi

$$c(s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N) e^{st} = 0$$

- za netrivijalno rješenje jednadžbe, $y_h(t) = ce^{st} \neq 0$, mora biti

$$s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$$

## Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- jednadžba

$$s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1}s + a_N = 0$$

  ima $N$ rješenja

- homogena jednadžba ima isto $N$ rješenja $c_1 e^{s_1 t}, c_2 e^{s_2 t}, \ldots, c_N e^{s_N t}$ pa je rješenje homogene jednadžbe linearna kombinacija[1]

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

[1] uz pretpostavku da su rješenja realna i jednostruka

# Karakteristični polinom, karakteristične frekvencije

- polinom $s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1}s + a_N$ nazivamo karakterističnim polinomom sustava
- jednadžbu $s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1}s + a_N = 0$ nazivamo karakterističnom jednadžbom sustava
- korijeni karakteristične jednadžbe $s_1, s_2, \ldots, s_N$ nazivaju se karakteristične vrijednosti ili karakteristične frekvencije ili vlastite frekvencije ili vlastite vrijednosti
- karakteristične frekvencije mogu biti realne ili kompleksne, jednostruke ili višestruke
- kompleksne karakteristične frekvencije dolaze u konjugiranim parovima što je posljedica realnih koeficijenata karakterističnog polinoma

## Rješenje homogene jednadžbe diferencija za višestruke karakteristične vrijednosti

- za karakteristični korijen $s_1$ višestrukosti $m$ karakteristična jednadžba, u faktoriziranom obliku, je

$$(s - s_1)^m (s - s_{m+1})(s - s_{m+2}) \cdots (s - s_N) = 0$$

- rješenje homogene jednadžbe je tada

$$y_h(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots + c_m t^{m-1}) e^{s_1 t} + \\ + c_{m+1} e^{s_{m+1} t} + c_{m+2} e^{s_{m+2} t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

## Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave kompleksni korijeni dolaze u konjugirano kompleksnim parovima
- u određivanju homogenog rješenja jednadžbe diferencija konjugirane kompleksne korijene možemo koristiti na isti način kao i realne
- činjenica da su parovi kompleksnih korijena $s$ i $s^*$ konjugirani može biti iskorištena za alternativni prikaz
- tako je za,

$$s = \alpha + j\beta \quad \text{i} \quad s^* = \alpha - j\beta$$

- rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(t) = c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t}$$

# Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave je $y_h(t)$ realna funkcija, pa konstante $c_1$ i $c_2$ moraju biti konjugirane

$$c_1 = \frac{c}{2}e^{j\theta} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{c}{2}e^{-j\theta}$$

- što rezultira u

$$y_h(t) = \frac{c}{2}e^{j\theta}e^{(\alpha+j\beta)t} + \frac{c}{2}e^{-j\theta}e^{(\alpha-j\beta)t} = \frac{c}{2}e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta)} + e^{-j(\beta t+\theta)}\right]$$

- odnosno, finalno,

$$y_h(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$$

# Određivanje konstanti u rješenju homogene diferencijalne jednadžbe

- nepoznate konstante $c_1, c_2, \ldots, c_N$, u rješenju homogene diferencijalne jednadžbe, određujemo iz
  - početnih uvjeta kada određujemo odziv nepobuđenog sustava
  - iz početnih uvjeta i totalnog rješenja kada određujemo totalni odziv
- početni uvjeti nose informaciju o $y(t)$ i njezinih $N-1$ derivacija u početnom trenutku, najčešće je to, $t = 0$
- za fizikalne sustave, početne uvjete treba odrediti iz odgovarajućih početnih stanja sustava

# Početni uvjeti

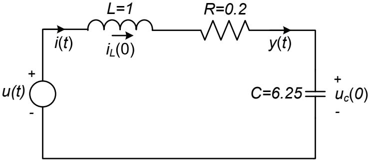
- potrebno je detaljnije razmotriti ulogu početnih uvjeta u određivanju odziva sustava
- preciziraju se početni uvjeti neposredno prije $t = 0$, tj. neposredno prije djelovanja pobude, kao početni uvjeti u $t = 0^-$, te početni uvjeti neposredno nakon početka djelovanja pobude, kao početni uvjeti u $t = 0^+$
- očigledno je da se, ovisno o svojstvima sustava, i karakteru pobude, početni uvjeti u $t = 0^-$ i u $t = 0^+$ mogu razlikovati
- za slučaj nepobuđenog sustava[2] početni su uvjeti za $t = 0^-$ i $t = 0^+$ identični dakle vrijedi

$$y_0(0^-) = y_0(0^+); \quad y_0'(0^-) = y_0'(0^+); \quad y_0''(0^-) = y_0''(0^+); \quad \dots$$

[2] odziv nepobuđenog sustava označavamo kao $y_0(t)$

# Primjer određivanja početnih uvjeta 1

- za prije razmotren RLC krug, na slici (3)



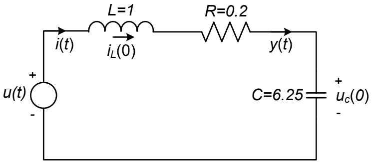

Slika 3: RLC krug

- diferencijalna jednadžba koja opisuje ovaj krug je

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.2\frac{dy}{dt} + 0.16y(t) = \frac{du}{dt}$$

- odrediti početne uvjete, $y(0)$ i $y'(0)$, potrebne u izračunu odziva na pobudu $u(t) = \mu(t)$ i uz početna stanja, $i_L(0) = i(0) = 0$, i $u_c(0) = 3$

# Primjer određivanja početnih uvjeta 2



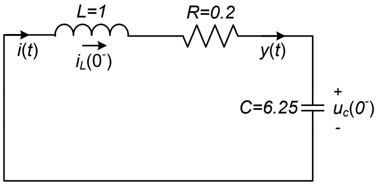

Slika 4: RLC krug

- u cilju određivanja $y'(0)$, koristimo jednadžbu Kirchhoffovog zakona napona za petlju

$$L\frac{dy}{dt} + Ry(t) + u_C(t) = u(t)$$

# Primjer određivanja početnih uvjeta 3

- prvo određujemo početne uvjete za slučaj nepobuđenog sustava
- $y_0(0)$ i $y_0'(0)$ određujemo iz $i_L(0) = 0$ i $u_c(0) = 3$
- za nepobuđeni sustav vrijedi $y_0(0^-) = y_0(0^+) = y(0)$ i $y_0'(0^-) = y_0'(0^+) = y_0'(0)$
- sa slike je očigledno da je $y_0(0) = i(0) = i_L(0) = 0$
- potrebno je odrediti $y_0'(0)$




- vrijedi

$$\underbrace{L}_{1}\frac{dy_0}{dt}+\underbrace{R}_{0.2}y_0(t)+u_C(t)=0$$

za $t = 0$

$$y_0'(0) + 0.2\underbrace{y_0(0)}_{0} + \underbrace{u_C(0)}_{3} = 0$$

$$y_0'(0) = -3$$

## Primjer određivanja početnih uvjeta 4

- određuju se i početni uvjeti u $t = 0^-$ i $t = 0^+$, za slučaj određivanja odziva pobuđenog sustava, za $t \geq 0$
- uspoređuju se $y(0^-)$ i $y'(0^-)$ s $y(0^+)$ i $y'(0^+)$
- njihova se usporedba provodi uvidom u jednadžbu petlje

$$\underbrace{L}_{1}\frac{dy}{dt} + \underbrace{R}_{0.2}y(t) + u_C(t) = u(t)$$

za $t = 0^-$ i $t = 0^+$

$$y'(0^-) + 0.2y(0^-) + u_C(0^-) = 0$$
$$y'(0^+) + 0.2y(0^+) + u_C(0^+) = u(0^+) = \mu(0^+) = 1$$

## Primjer određivanja početnih uvjeta 5

- kako se struja induktiviteta i napon na kapacitetu ne mogu promijeniti[3] u intervalu od $t = 0^-$ i $t = 0^+$ vrijedi $y(0^-) = y(0^+) = 0$ i $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 3$
- uvrštenjem ovih vrijednosti u prethodne dvije jednadžbe slijedi
$$y(0^-) = 0, \qquad y'(0^-) = -3$$
odnosno
$$y(0^+) = 0, \qquad y'(0^+) = -2$$
- dani primjer ukazuje na potreban postupak u definiranju i određivanju početnih uvjeta
- u nastavku se razmatra postupak određivanja početnih uvjeta u $t = 0^+$ za opći sustav drugog odnosno $N$–tog reda

[3] osim u slučaju impulsne pobude, a taj će slučaj biti kasnije diskutiran

# Određivanja početnih uvjeta – opći sustav drugog reda

- sustav je opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t) \quad (7)$$

- neka je pobuda kauzalna pa vrijedi $u^{(i)}(0^-) = 0$ i neka pobuda ne sadrži Diracov jedinični impuls[4]
- neka su poznati $y^{(i)}(0^-) \neq 0$, a treba odrediti $y(0^+)$ i $y'(0^+)$
- integriramo jednadžbu (7) u intervalu $t = 0^-$ i $t$

$$y'(t) - y'(0^-) + a_1 y(t) - a_1 y(0^-) + a_2 \int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau =$$

$$= b_0 u'(t) + b_1 u(t) + b_2 \int_{0^-}^{t} u(\tau)d\tau \quad (8)$$

[4]slučaj kada pobuda sadrži Diracov impuls biti će razmatran kod određivanja impulsnog odziva

## Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- još jednom integracijom, jednadžbe (8), slijedi

$$\int_{0^-}^{t} y'(\tau)d\tau - y'(0^-)\int_{0^-}^{t} d\tau + a_1\int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau - a_1 y(0^-)\int_{0^-}^{t} d\tau +$$

$$+a_2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda)d\lambda d\tau = b_0\int_{0^-}^{t} u'(\tau)d\tau + b_1\int_{0^-}^{t} u(\tau)d\tau +$$

$$+b_2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} u(\lambda)d\lambda d\tau$$

## Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- za $t = 0^+$ slijedi

$$y(0^+) - y(0^-) - y'(0^-)\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} d\tau}_{0} + a_1\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau}_{0} - a_1 y(0^-)\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} d\tau}_{0}$$

$$+a_2\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda)d\lambda d\tau}_{0} = b_0 u(0^+) + b_1\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} u(\tau)d\tau}_{0} +$$

$$+b_2\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} u(\lambda)d\lambda d\tau}_{0} \quad \Rightarrow$$

$$y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+) \tag{9}$$

- rješenje jednadžbe (9) daje $y(0^+)$

## Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- iz jednadžbe (8),

$$y'(t) - y'(0^-) + a_1 y(t) - a_1 y(0^-) + a_2 \int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau =$$

$$= b_0 u'(t) + b_1 u(t) + b_2 \int_{0^-}^{t} u(\tau)d\tau$$

za $t = 0^+$ slijedi

$$y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+) \quad (10)$$

- rješenje jednadžbe (10), uz u (9) izračunat $y(0^+)$, daje $y'(0^+)$

# Određivanja početnih uvjeta – opći sustav $N$–tog reda

- za sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$
\begin{aligned}
y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \ldots + a_{N-1} y' + a_N y(t) = \\
= b_0 u^{(N)} + b_1 u^{(N-1)} + \ldots + b_{N-1} u' + b_N u(t)
\end{aligned}
$$

- potrebno je odrediti $y(0^+), y'(0^+), y''(0^+), \ldots, y^{(N-1)}(0^+)$
- istim postupkom, dakle višestrukim integriranjem, kao u slučaju sustava drugog reda, nalazimo $N$ jednadžbi iz kojih određujemo tražene $y(0^+), y'(0^+), y''(0^+), \ldots, y^{(N-1)}(0^+)$

$$
\begin{aligned}
& y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+) \\
& y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+) \\
& y''(0^+) - y''(0^-) + a_1 y'(0^+) - a_1 y'(0^-) + a_2 y(0^+) - a_2 y(0^-) \\
& \qquad = b_0 u''(0^+) + b_1 u'(0^+) + b_2 u(0^+) \\
& \qquad \vdots \\
& y^{(N-1)}(0^+) - y^{(N-1)}(0^-) + a_1 y^{(N-2)}(0^+) - a_1 y^{(N-2)}(0^-) + \ldots \\
& \qquad \ldots + a_{N-2} y'(0^+) - a_{N-2} y'(0^-) + a_{N-1} y(0^+) - a_{N-1} y(0^-) = \\
& \qquad = b_0 u^{(N-1)}(0^+) + b_1 u^{(N-2)}(0^+) + \ldots + b_{N-2} u'(0^+) + b_{N-1} u(0^+)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

## Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava

- za nepobuđeni je sustav, odziv $y_0(t)$ jednak rješenju homogene jednadžbe diferencija $y_h(t)$
- tako je za jednostruke vlastite frekvencije odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

- koeficijente $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz $N$ početnih uvjeta $y(0^-), y'(0^-), \ldots, y^{(N-1)}(0^-)$

# Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- razmatra se primjer vremenski kontinuiranog sustava opisanog s diferencijalnom jednadžbom

$$y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t) \quad (12)$$

- neka je sustav pobuđen pobudom $u(t) = 0.128\mu(t)$ i neka su $y(0^-) = -3$, $y'(0^-) = -1$ i $y''(0^-) = 0$
- prvo određujemo odziv nepobuđenog sustava i određujemo rješenje homogene jednadžbe

$$(D^3 + 0.4D^2 + 0.2D + 0.032)y_h = 0$$

- pa su karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$s^3+0.4s^2+0.2s+0.032 = 0 \quad \Rightarrow s_{1,2} = -0.1\pm j0.3873, s_3 = -0.2$$

# Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- odziv nepobuđenog sustava jednak je rješenju homogene jednadžbe za zadane početne uvjete $y(0^-)$, $y'(0^-)$ i $y''(0^-)$
- odziv nepobuđenog sustava je

$$y_0(t) = c_{01}e^{s_1 t} + c_{02}e^{s_2 t} + c_{03}e^{s_3 t} =$$
$$= c_{01}e^{(-0.1+j0.3873)t} + c_{02}e^{(-0.1-j0.3873)t} + c_{03}e^{-0.2t}$$

- konstante $c_{01}$, $c_{02}$ i $c_{03}$ određujemo iz početnih vrijednosti $y(0^-) = -3$, $y'(0^-) = -1$ i $y''(0^-) = 0$, pa iz

$$\begin{aligned} y_0(t) &= c_{01}e^{s_1 t} + c_{02}e^{s_2 t} + c_{03}e^{s_3 t} \\ y_0'(t) &= s_1 c_{01}e^{s_1 t} + s_2 c_{02}e^{s_2 t} + s_3 c_{03}e^{s_3 t} \\ y_0''(t) &= s_1^2 c_{01}e^{s_1 t} + s_2^2 c_{02}e^{s_2 t} + s_3^2 c_{03}e^{s_3 t} \end{aligned}$$

# Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

slijedi za $t = 0^-$

$$\left.\begin{aligned} -3 &= c_{01} + c_{02} + c_{03} \\ -1 &= s_1 c_{01} + s_2 c_{02} + s_3 c_{03} \\ 0 &= s_1^2 c_{01} + s_2^2 c_{02} + s_3^2 c_{03} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} c_{01} &= 0.625 + j2.227 = 2.313 e^{j1.2972} \\ c_{02} &= 0.625 - j2.227 = 2.313 e^{-j1.2972} \\ c_{03} &= -4.25 \end{aligned}$$

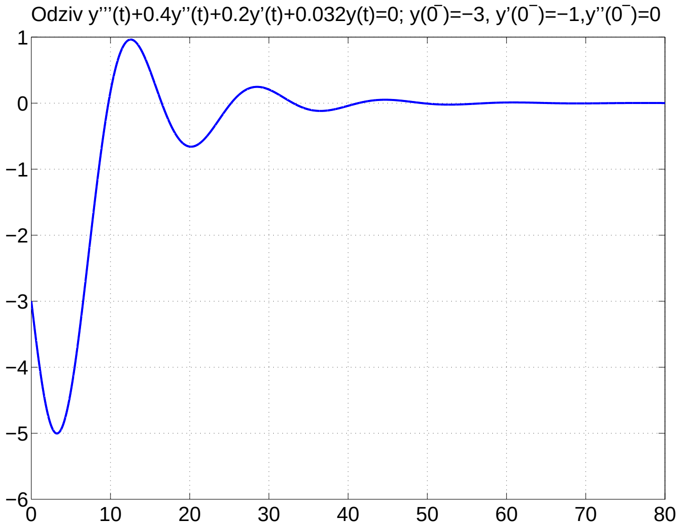
- odziv nepobuđenog sustava je

$$y(t) = 2.313 e^{j1.2972} e^{-0.1t} e^{j0.3873t} + 2.313 e^{-j1.2972} e^{-0.1t} e^{-j0.3873t} - 4.25 e^{-0.2t} \tag{13}$$

odnosno

$$y(t) = 4.626 e^{-0.1t} \cos(0.3873t + 1.2972) - 4.25 e^{-0.2t} \tag{14}$$

# Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer




Slika 5: Odziv nepobuđenog sustava – primjer

## Odziv nepobuđenog kontinuiranog sustava

- nepobuđeni sustav titra eksponencijalama čije su frekvencije vlastite frekvencije sustava, pa je za pojedinu vlastitu frekvenciju $s_i$, komponenta nepobuđenog odziva $e^{s_i t}$
- neka je u općem slučaju $s \in Kompleksni$, pri čemu dolazi u konjugirano kompleksnim parovima, pa je komponenta odziva nepobuđenog sustava oblika $e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t}$
- za različite $\alpha$, slijedi:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha < 0 & e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to 0 & \text{za } t \to \infty \\
\alpha > 0 & e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to \infty & \text{za } t \to \infty \\
\alpha = 0 & |e^{\pm j\beta t}| = 1 & \text{za } \forall t
\end{array}
$$

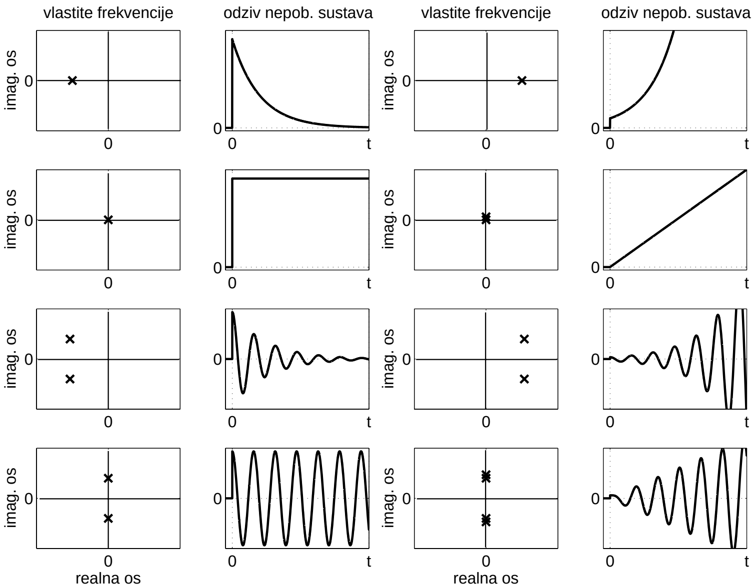
## Odziv nepobuđenog kontinuiranog sustava

- za sustav s višestrukim vlastitim frekvencijama, $s = \alpha \pm j\beta$, višestrukosti $m$, nepobuđeni sustav titra eksponencijalama oblika $t^i e^{st}, i = 1, 2, \ldots, m-1$
- za različite $\alpha = Re\{s\}$, slijedi:

$$\begin{array}{lll} \alpha < 0 & t^i e^{st} \to 0 & \text{za } t \to \infty \\ \alpha \geq 0 & t^i e^{st} \to \infty & \text{za } t \to \infty \end{array}$$

- slijede primjeri koji ilustriraju odziv nepobuđenog sustava za razne vrijednosti $s$

# Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava i vlastite frekvencije



## Stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- za miran i nepobuđen vremenski stalni linearni sustav svi su $y(t)$, $y'(t), \ldots$ jednaki nuli i kažemo da se sustav nalazi u ravnotežnom stanju jednakom nuli
- pod stabilnošću sustava podrazumijevamo njegovo svojstvo da se nakon prestanka djelovanja pobude vraća u ravnotežno stanje u kojem ostaje neodređno dugo
- dakle, nakon prestanka djelovanja pobude, stanje sustava u kojem se on tog trenutka nalazi, predstavlja početno stanje, različito od nule, koje definira početne uvjete $y(0)$, $y'(0), \ldots$ različite od nule
- stabilni sustavi se iz tih početnih uvjeta vraćaju u ravnotežno stanje

# Stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- poznavanje odziva nepobuđenog sustava ukazuje na unutarnju stabilnost vremenski kontinuiranog linearnog sustava, pa vrijedi definicija
- vremenski kontinuirani nepobuđeni sustav je stabilan ako je njegov odziv omeđen, dakle,

$$|y_0(t)| < M = konst. < \infty, \forall t \in Realni \qquad (15)$$

- sustavi za koje vrijedi (15) nazivaju se i marginalno (rubno) stabilni
- sustav je asimptotski stabilan ako vrijedi (15) i ako

$$\lim_{t \to \infty} \{y_0(t)\} \to 0 \qquad (16)$$

- sustavi koji nisu ni asimptotski ni rubno stabilni su nestabilni sustavi, za njih vrijedi

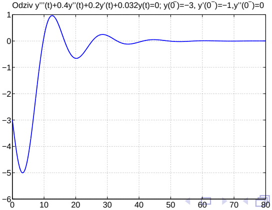
$$\lim_{t \to \infty} \{y_0(t)\} \to \infty \qquad (17)$$

# Unutarnja stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- o unutarnjoj stabilnosti sustava zaključuje se iz vrijednosti karakterističnih ili vlastitih frekvencija
- kauzalni kontinuirani linearni vremenski stalni sustav, s jednostrukim karakterističnim frekvencijama, je
  - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
  - stabilan (marginalno stabilan) ako je $Re\{s_i\} \leq 0, \forall i$
  - nestabilan ako postoji karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} > 0$
- kauzalni kontinuirani linearni vremenski stalni sustav, s višestrukim karakterističnim frekvencijama, je
  - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
  - marginalno stabilan ako je za sve višestruke karakteristične frekvencije $Re\{s_i\} < 0$, i za sve različite karakteristične frekvencije $Re\{s_i\} \leq 0$
  - nestabilan ako postoji karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} > 0$, ili postoji višestruka karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} \geq 0$

# Odziv nepobuđenog, asimptotski stabilnog sustava

- za stabilni nepobuđeni sustav, odziv je posljedica postojanja početnih uvjeta, različitih od nula, dakle, posljedica nesklada početnog stanja i ravnotežog stanja
- drugim rječima sustav se u prijelazu (prevladavanju nesklada) iz početnog stanja u ravnotežno stanje odziva titranjem s vlastitim frekvencijama
- ilustrirajmo ovu činjenicu već prije određenim odzivom nepobuđenog sustava
  $y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = 0$, uz
  $y(0^-) = -3$, $y'(0^-) = -1$ i $y''(0^-) = 0$



# [kraj]