Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

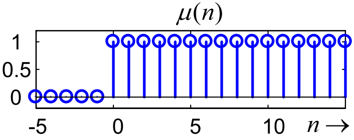
27. veljače 2008.

Vremenski jedinični skok – vremenska jedinična step funkcija

- vremenski diskretan jedinični skok μ definiran je kao:

$$\forall n \in \mathit{Cjelobrojni},$$

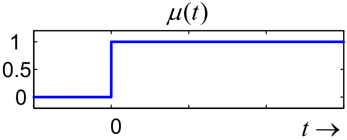
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



- vremenski kontinuiran jedinični skok μ definiran je kao:

$$\forall t \in \mathit{Realni},$$

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Jedinična kosina

- vremenski diskretna

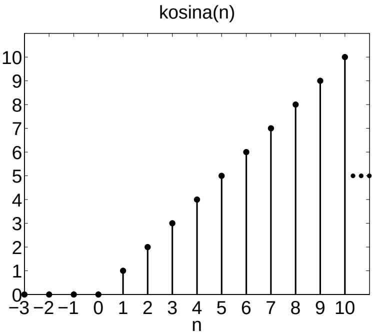
$\forall n \in Cjelobrojni,$

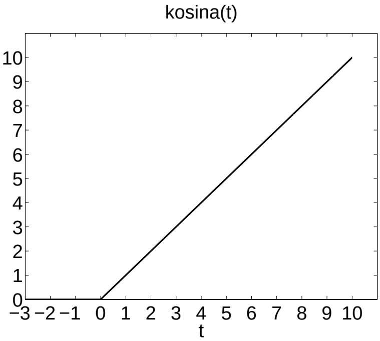
$$kosina(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

- vremenski kontinuirana

$\forall t \in Realni,$

$$kosina(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$





Veza jediničnog skoka i jedinične kosine

- veza vremenski diskretne jedinične kosine i jediničnog skoka je

$$\forall n \in Cjelobrojni,$$

$$kosina(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \mu(m-1)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{n-1} \mu(m)$$

- vremenski diskretan jedinični skok možemo definirati pomoću kosine kao diferenciju

$$\mu(n) = kosina(n+1) - kosina(n)$$

- vremenski kontinuiranu jediničnu kosinu definiramo s jediničnim skokom kao

$$\forall t \in Realni,$$

$$kosina(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(\tau) d\tau = t\mu(t)$$

- vremenski kontinuiran jedinični skok možemo definirati pomoću kosine kao

$$\mu(t) = \frac{d(kosina(t))}{dt}$$

Veza jediničnog skoka i jedinične kosine

- važno je uočiti analogiju
  - vremenski diskretan jedinični skok i vremenski diskretna jedinična kosina vezani su operacijama akumulacije i diferencije
  - vremenski kontinuiran jedinični skok i vremenski kontinuirana jedinična kosina vezani su operacijama integriranja i deriviranja
  - uočava se prije pokazane analogije
    - derivaciji vremenski kontinuiranog signala odgovara diferencija vremenski diskretnog signala
    - integraciji vremenski kontinuiranih signala odgovara operacija akumulacije za vremenski diskretne signale
    - derivacija i integracija signala suprotne su operacije, tako su i operacije diferencije i akumulacije suprotne operacije

Vremenski diskretan jedinični impuls – Kroneckerova delta funkcija

- vremenski diskretan jedinični impuls δ je vremenski diskretan signal definiran kao:

$$\forall n \in Cjelobrojni,$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

- za m koraka pomaknuti vremenski diskretan jedinični impuls definiran je kao

$$\forall n \in Cjelobrojni,$$

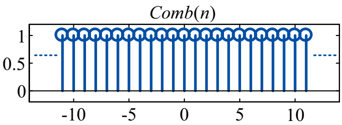
$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

gdje je $m \in Cjelobrojni$

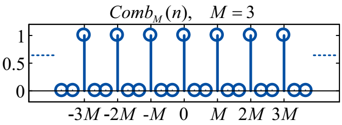
Niz vremenski diskretnih jediničnih impulsa

- definiraju se nizovi jediničnih impulsa označenih vremenski diskretnom funkcijom *comb* (prema engleskom nazivu ove funkcije – comb = češalj)

$\forall n \in Cjelobrojni$,
$m \in Cjelobrojni$,
$comb(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m)$



$\forall n \in Cjelobrojni$,
$m \in Cjelobrojni$, $\forall M \in Cjelobrojni$,
$comb_M(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-mM)$



Veza jediničnog skoka i jediničnog impulsa

- analogno vezi vremenski diskretnog jediničnog skoka i vremenski diskretne jedinične rampe, vremenski diskretan jedinični skok i vremenski diskretan jedinični impuls vezani su operacijama akumulacije i diferencije
- vremenski diskretan jedinični skok odgovara akumulaciji jediničnog impulsa

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \mu(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$$

- s druge strane, jedinični impuls odgovara prvoj diferenciji vremenski diskretnog jediničnog skoka

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \delta(n) = \mu(n) - \mu(n-1)$$

Jedinični skok – svojstvo otipkavanja

- analiziramo svojstvo otipkavanja vremenski diskretnog jediničnog impulsa
- pomnožimo li neki vremenski diskretan signal f s jediničnim impulsom $\delta(n-n_0)$, koji se javlja u n_0, dobijemo signal koji je impuls u n_0 čija je amplituda jednaka vrijednosti signala f u n_0
- kažemo kako jedinični impuls $\delta(n-n_0)$ "vadi" vrijednost, dakle, otipkava funkciju f u n_0

$$f(n)\delta(n-n_0) = f(n_0)\delta(n-n_0)$$

- drugi način iskaza svojstva otipkavanja jediničnog impulsa proizlazi sumacijom gornjeg izraza

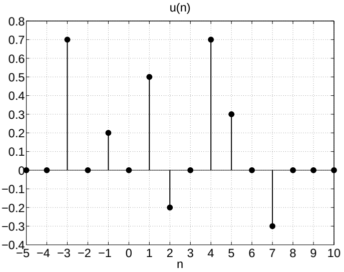
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(m-n_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n_0)\delta(m-n_0) = f(n_0)$$

Vremenski diskretan jedinični impuls – primjena2

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć niza vremenski diskretnih jediničnih impulsa što proizlazi iz:

$$u(n) = u(n) \cdot comb(n) = u(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m), \quad \forall n \in Cjelobrojni$$



$$u(n) = .7\delta(n+3) + .2\delta(n+1) + \\ +.5\delta(n-1) - .2\delta(n-2) + \\ +.7\delta(n-4) + .3\delta(n-5) - \\ -.3\delta(n-7)$$

Diracova delta funkcija – vremenski kontinuirani jedinični impuls

- definira se vremenski kontinuiran jedinični impuls ili Diracova delta funkcija
- zbog svojih svojstava ona se izdvaja iz skupa regularnih matematičkih funkcija i svrstava se u klasu tzv. distribucija ili singularnih funkcija
- teorija generaliziranih funkcija, koja objedinjuje singularne i regularne funkcije, razvijana je koncem devetnaestog i u prvoj polovici dvadesetog stoljeća, a prvenstveno zbog potreba izučavanja električnih krugova i nekih problema u fizici
- za potrebe ovog predmeta ovdje se uvodi vremenski kontinuirani jedinični impuls ne ulazeći u strogi matematički postupak

Diracova delta funkcija – vremenski kontinuirani jedinični impuls

- vremenski kontinuiran jedinični impuls δ, prvi je definirao P. A. M. Dirac kao

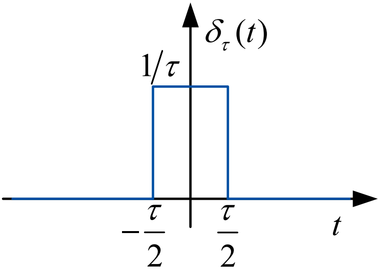
$$\forall t \in Realni,$$
$$\delta(t) = 0 \qquad \text{za } t \neq 0$$
$$\int_{\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- u čast Diracu vremenski kontinuiran jedinični impuls δ naziva se i Diracova delta funkcija

Diracova delta funkcija 1

- izvod za Diracovu delta funkciju započinje s definicijom pravokutnog impulsa površine jednake jedan

$$\forall t \in Realni,$$
$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & -\frac{\tau}{2} \le t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & t < -\frac{\tau}{2},\ t \ge \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

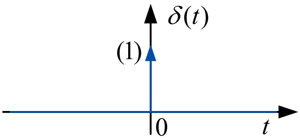


Diracova delta funkcija 2

- za $\tau \to 0$ pravokutni impuls δ_τ postaje sve uži i sve viši ali pri tome površina ostaje uvijek vrijednosti jedan
- za granični slučaj slijedi

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \delta_\tau(t)$$

- Diracovu delta funkciju prikazujemo kao na slici



- strelica u $t = 0$ ukazuje kako je površina impulsa koncentrirana u $t = 0$, a visina strelice i oznaka "1" označuje jediničnu površinu impulsa
- površina ispod impulsa se naziva "težina" ili njegov "intenzitet"

Umnožak Diracove delta funkcije i vremenski kontinuirane regularne funkcije

- razmatra se umnožak Diracove delta funkcije s nekom vremenski kontinuiranom regularnom funkcijom f koja je konačna i neprekinuta u $t = 0$
- kako je jedinični impuls različit od nule samo za $t = 0$, a vrijednost od f, u $t = 0$, je $f(0)$ pa slijedi

$$\forall t \in Realni, \quad f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \tag{1}$$

- dakle, umnožak vremenski kontinuirane funkcije f i δ rezultira s impulsom "intenziteta" ili "težine" $f(0)$ (što je vrijednost funkcije f na mjestu impulsa)
- isto tako, za funkciju koja je konačna i kontinuirana u $t = t_0$, vrijedi

$$\forall t \in Realni, \quad f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \tag{2}$$

Svojstvo otipkavanja Diracove delta funkcije

- iz jednadžbe (1) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \qquad (3)$$

- isto tako, iz jednadžbe (2), slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(t_0) \qquad (4)$$

- što znači da je površina produkta funkcije i impulsa δ jednaka vrijednosti funkcije u trenutku u kojem je definiran jedinični impuls
- može se također reći da Diracova delta funkcija "vadi" ili "otipkava" vrijednost podintegralne funkcije na mjestu na kojem je impuls definiran, dakle, funkciji f pridružuje broj $f(t_0)$

Diracova delta funkcija kao generalizirana funkcija

- Diracovu delta funkciju se ne može promatrati kao regularnu funkciju jer ona ima vrijednost nula za sve vrijednosti osim za vrijednost $t = 0$, a za taj t nije definirana
- zato Diracovu delta funkciju definiramo u smislu teorije distribucija ili generaliziranih funkcija
- generaliziranu funkciju, umjesto njezinih vrijednosti za sve vrijednosti domene, definiramo preko njezina djelovanja na druge, "testne" ("ispitne"), regularne funkcije
- definicija Diracove delta funkcija u smislu teorije distribucija je dana u jednadžbama (3) i (4) dakle:

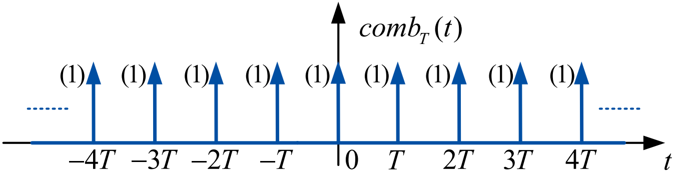
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = f(t_0) \tag{5}$$

Niz Diracovih delta funkcija

- niz Diracovih delta funkcija, označen kao funkcija $comb_T$ prema engleskom nazivu ove funkcije, definiran je kao

$$\forall t \in Realni,$$

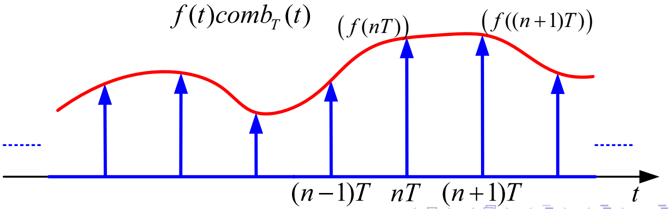
$$comb_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT), \; m \in Cjelobrojni, T \in Realni$$



Produkt niza Diracovih delta funkcija i vremenski kontinuiranog signala

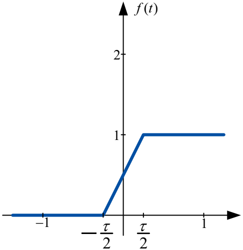
- produkt niza Diracovih delta funkcija, razmaknutih za T, i kontinuiranog signala f naziva se impulsno otipkavanje kontinuiranog signala ili impulsna modulacija
- rezultat množenja je niz δ funkcija intenziteta koji odgovaraju trenutnim vrijednostima funkcije f na mjestima $t = nT$ za $n \in Cjelobrojni$ i $\forall t \in Realni$

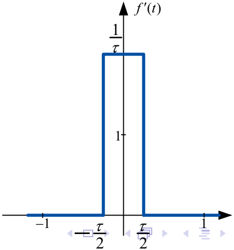
$$f_\delta(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$



Veza vremenski kontinuiranog jediničnog impulsa i vremenski kontinuiranog jediničnog skoka 1

- derivacija funkcije jediničnog skoka svuda je nula osim na mjestu diskontinuiteta u $t = 0$ gdje derivacija nije definirana
- uvodi se tzv. generalizirana derivacija i pokazuje se kako je Diracova δ funkcija generalizirana derivacija funkcije jediničnog skoka
- do ovog zaključka dolazi se sljedećim razmatranjem
- za funkciju f na slici prikazana je i njezina derivacija





Veza vremenski kontinuiranog jediničnog impulsa i vremenski kontinuiranog jediničnog skoka 2

- derivacija funkcije f definirana je za svaki t osim za $t = -\tau/2$ i $t = \tau/2$
- smanjivanjem τ funkcija f se u konačnici približava jediničnom skoku, a pravokutni impuls, površine jedan, koji predstavlja $df(t)/dt$, prelazi u jediničnu Diracovu δ funkciju
- ovako postignuta derivacija naziva se generalizirana derivacija, a jedinični impuls je generalizirana derivacija jediničnog skoka

$$\forall t \in Realni, \quad \delta(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}$$

- iz ovoga slijedi i

$$\forall t \in Realni, \quad \mu(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda) d\lambda$$

Generalizirana derivacija vremenski kontinuiranog jediničnog skoka μ

- generaliziranu derivaciju jediničnog skoka možemo odrediti parcijalnom integracijom[1] integrala

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mu'(t)f(t)dt &= \mu(t)f(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)f'(t)dt \\ &= f(\infty) - 0 - \int_{0}^{\infty} f'(t)dt \\ &= f(\infty) - f(t)|_{0}^{\infty} \\ &= f(0)\end{aligned}$$

- očigledno je kako μ' zadovoljava svojstvo otipkavanja Diracove delta funkcije δ pa vrijedi

$$\forall t \in Realni, \quad \frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t)$$

[1]podsjeta: iz $(uv)' = uv' + u'v$ integracijom obje strane slijedi $\int_a^b u'vdt = uv|_a^b - \int_a^b uv'dt$

Generalizirana derivacija funkcije s diskontinuitetom u $t = t_0$

- generalizirana derivacija funkcije g, s diskontinuitetom (prekinute) u $t = t_0$ definirana je kao

$$\forall t \in Realni,$$

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \frac{d}{dt}(g(t))_{t \neq t_0} + [g(t_0^+) - g(t_0^-)]\delta(t - t_0)$$

Primjer generalizirana derivacija funkcije g s diskontinuitetima

- neka je funkcija $g(t), \forall t \in Realni$, zadana s

$$
g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ -t+3 & 1 \leq t < 4 \\ 0.5(t-6) & 4 \leq t < 8 \\ 2 & 8 \leq t < 9 \\ -t+11 & 9 \leq t < 11 \\ 0 & 11 \geq t \end{cases}
$$

- odnosno

$$
\begin{aligned} g(t) = & (-t+3)[\mu(t-1) - \mu(t-4)] \\ & +0.5(t-6)[\mu(t-4) - \mu(t-8)] \\ & +2[\mu(t-8) - \mu(t-9)] \\ & +(-t+11)[\mu(t-9) - \mu(t-11)] \end{aligned}
$$

Primjer generalizirana derivacija funkcije g s diskontinuitetima

- dakle, za zadanu funkciju g

$$\begin{aligned} g(t) = (-t+3)[\mu(t-1) - \mu(t-4)] \\ +0.5(t-6)[\mu(t-4) - \mu(t-8)] \\ +2[\mu(t-8) - \mu(t-9)] \\ +(-t+11)[\mu(t-9) - \mu(t-11)] \end{aligned}$$

- generalizirana derivacija je

$$\begin{aligned} g'(t) = -1 \cdot [\mu(t-1) - \mu(t-4)] \\ +0.5[\mu(t-4) - \mu(t-8)] \\ -1 \cdot [\mu(t-9) - \mu(t-11)] \\ +[g(1^+) - g(1^-)]\delta(t-1) \\ +[g(8^+) - g(8^-)]\delta(t-8) \end{aligned}$$

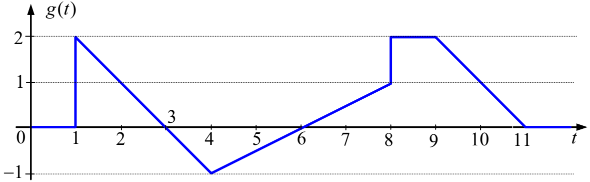
Generalizirana derivacija funkcije s diskontinuitetima

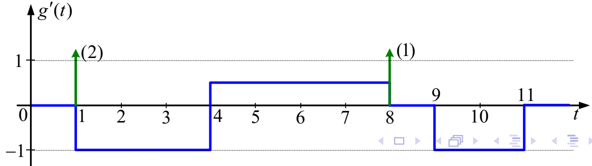
- za funkciju g

$$\begin{aligned} g(t) = {} & (-t+3)[\mu(t-1)-\mu(t-4)] \\ & +0.5(t-6)[\mu(t-4)-\mu(t-8)] \\ & +2[\mu(t-8)-\mu(t-9)] \\ & +(-t+11)[\mu(t-9)-\mu(t-11)] \end{aligned}$$

- generalizirana derivacija je

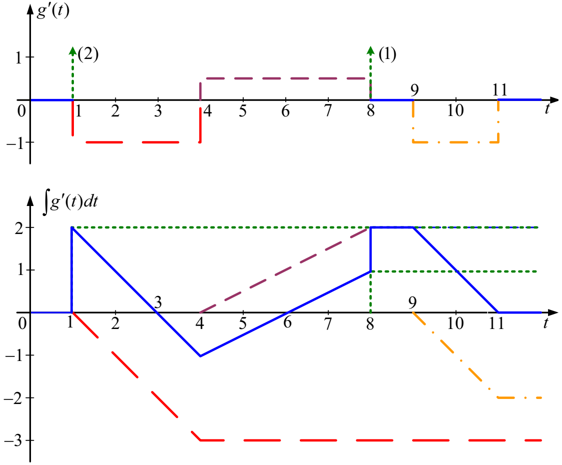
$$\begin{aligned} g'(t) = {} & -1\cdot[\mu(t-1)-\mu(t-4)] \\ & +0.5[\mu(t-4)-\mu(t-8)] \\ & -1\cdot[\mu(t-9)-\mu(t-11)] \\ & +[g(1^+)-g(1^-)]\delta(t-1) \\ & +[g(8^+)-g(8^-)]\delta(t-8) \end{aligned}$$





Generalizirana derivacija funkcije g s diskontinuitetom 2

- prikazana je generalizirana derivacija funkcije g' s diskontinuitetima te integral dobivene funkcije



Derivacija kontinuiranog jediničnog impulsa δ

- vremenski kontinuirani jedinični impuls δ definiran je, u smislu teorije distribucija, kao

$$\forall t \in Realni,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

- derivaciju kontinuirnog jediničnog impulsa δ' definiramo kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$$

- gornji je izraz izveden parcijalnom integracijom integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = \underbrace{f(t)\delta(t)|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt = -f'(0)$$

Derivacija kontinuiranog jediničnog impulsa δ

- dakle, iz

$$\forall t \in Realni,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$$

  prepoznajemo svojstvo otipkavanja, jer je očito kako derivacija Diracove delta funkcije otipkava derivaciju signala u $t = 0$ (uz negativni predznak)

- za N-tu derivaciju δ, potrebno je parcijalnu integraciju provesti N puta, i tada se dolazi do

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(N)}(t)dt = (-1)^N f^{(N)}(0)$$

Vremenski kontinuiran sinusoidni signal 1

- u uvodnim izlaganjima navedena je važnost sinusoidnog signala
- vremenski kontinuiran sinusoidni signal definiramo funkcijom

$f : Realni \rightarrow Realni$

$f(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta) = A\cos(\Omega_0 t + \theta) = A\cos(\frac{2\pi}{T_0} t + \theta)$

$F_0 = \frac{1}{T_0}, \qquad \Omega_0 = 2\pi F_0$

gdje su

A = realna amplituda sinusoidnog signala

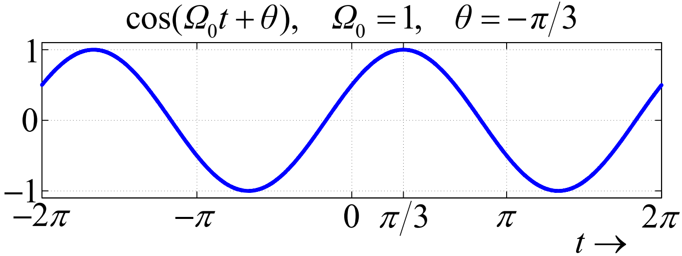
T_0 = realni osnovni period signala

F_0 = realna osnovna frekvencija signala, [Hz]

Ω_0 = realna kutna frekvencija signala, [rad/s]

θ = faza, [rad]

Vremenski kontinuiran sinusoidni signal 2



Slika 1: Vremenski kontinuiran sinusoidni signal

Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal 1

- kompleksna eksponencijalna funkcija odlikuje se nizom značajki koje mogu poslužiti u jednostavnijem i boljem razumijevanju pojava i postupaka kod realnih signala i sustava
- zato se definira vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

$$
\begin{aligned}
&f : Realni \rightarrow Kompleksni \\
&\lambda_0 = \sigma_0 + j\Omega_0 \in Kompleksni, \\
&C = Ae^{j\theta} \in Kompleksni, \quad A, \theta \in Realni \\
&f(t) = Ce^{\lambda_0 t} = Ae^{j\theta} e^{(\sigma_0 + j\Omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} e^{j(\Omega_0 t + \theta)}
\end{aligned}
$$

Vremenski kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal 2

- primjenom Eulerove relacije vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal prikazujemo i kao

$$f : Realni \rightarrow Kompleksni$$

$$f(t) = Ae^{\sigma_0 t}e^{j(\Omega_0 t+\theta)} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\Omega_0 t + \theta) + j\sin(\Omega_0 t + \theta)]$$

$$F_0 = \frac{1}{T_0}, \qquad \Omega_0 = 2\pi F_0$$

gdje su

A = realna amplituda kompleksnog eksponencijalnog signala
λ_0 = kompleksna frekvencija
T_0 = realni osnovni period sinusoidnog signala
F_0 = realna osnovna frekvencija sinusoidnog signala, [Hz]
Ω_0 = realna kutna frekvencija sinusoidnog signala, [rad/s]
σ_0 = prigušenje $\quad \theta$ = faza, [rad]

Primjer vremenski kontinuirane kompleksne eksponencijalne funkcije 1

- za $\lambda_0 = \sigma_0 + j\Omega_0$, i $\theta = 0$, kompleksna eksponencijala je

$$\forall t \in Realni$$
$$f(t) = Ae^{\lambda_0 t} = Ae^{(\sigma_0 + j\Omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\Omega_0 t) + j\sin(\Omega_0 t)]$$

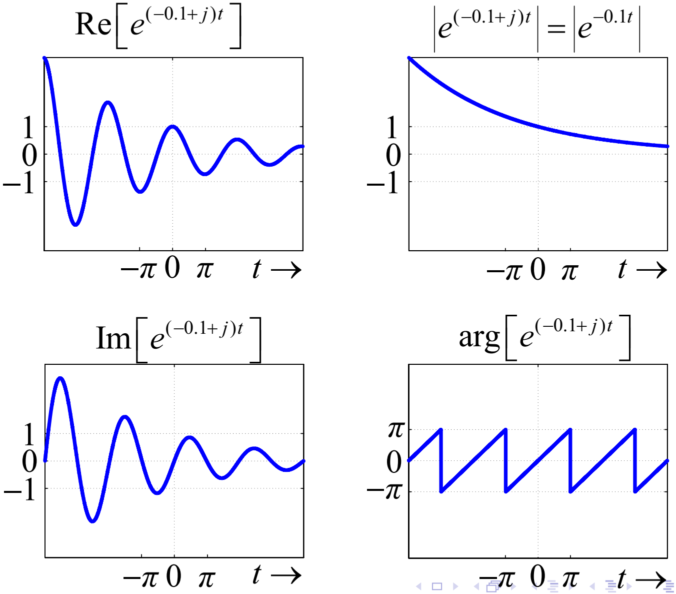
- neka je na primjer $\sigma_0 = -0.1$, $\Omega_0 = 1$ i $A = 1$ tada je

$$\forall t \in Realni$$
$$f(t) = e^{(-0.1+j)t} = e^{(-0.1t)}[\cos(t) + j\sin(t)]$$

- za danu kompleksnu eksponencijalu možemo prikazati realni i imaginarni dio, te modul i fazu[2]

[2] prikazuje se glavna vrijednost argumenta, dakle, u intervalu $-\pi < arg[e^{(-0.1+j)t}] \leq \pi$

Primjer vremenski kontinuirane kompleksne eksponencijalne funkcije 2



Primjena kompleksne eksponencijale $Ae^{\lambda_0 t}$ u prikazu nekih realnih funkcija 1

- za $\lambda_0 = \sigma_0 + j\Omega_0$, vremenski kontinuiranu kompleksnu eksponencijalu prikazujemo kao

$$Ae^{\lambda_0 t} = Ae^{(\sigma_0 + j\Omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\Omega_0 t) + j\sin(\Omega_0 t)]$$

- za $\lambda_0^* = \sigma_0 - j\Omega_0$, konjugirano od λ_0, vrijedi

$$Ae^{\lambda_0^* t} = Ae^{(\sigma_0 - j\Omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[cos(\Omega_0 t) - j\sin(\Omega_0 t)]$$

- pa dalje slijedi kako prigušenu realnu sinusoidu možemo prikazati uz pomoć kompleksnih eksponencijala

$$Ae^{\sigma_0 t}cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2}[Ae^{\lambda_0 t} + Ae^{\lambda_0^* t}]$$

Prikaz realnog sinusoidnog signala s kompleksnim eksponencijalnim signalom

- iz prije izvedenoga slijedi i drugi način prikaza realnih sinusoida:

$$A\cos(\Omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j\Omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j\Omega_0 t} = Re\{Ae^{j(\Omega_0 t + \theta)}\}$$

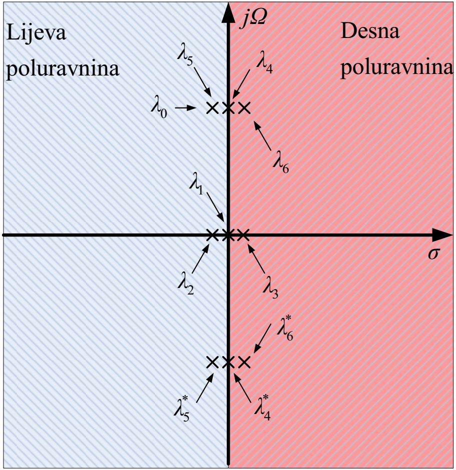
$$A\sin(\Omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2j}e^{j\theta}e^{j\Omega_0 t} - \frac{A}{2j}e^{-j\theta}e^{-j\Omega_0 t} = Im\{Ae^{j(\Omega_0 t + \theta)}\}$$

Primjena kompleksne eksponencijale $Ae^{\lambda_0 t}$ u prikazu nekih realnih funkcija 2

- kompleksna eksponencijala $Ae^{\lambda_0 t}$, za konkretnu kompleksnu frekvenciju $\lambda_0 = -0.1 + j$, i $A = 1$, prikazana je na prethodnoj slici
- pozicija kompleksnih frekvencija $s = \sigma \pm j\Omega$ u kompleksnoj ravnini određuje ponašanje $Ae^{\sigma t} cos(\Omega t)$
- kompleksnu ravninu podijelimo na četiri dijela:
  - imaginarna os $j\Omega$ za $\{s | \sigma = 0\}$
  - realna os σ za $\{s | \Omega = 0\}$
  - lijeva kompleksna poluravnina za $\{s | \sigma < 0\}$
  - desna kompleksna poluravnina za $\{s | \sigma > 0\}$

Primjena kompleksne eksponencijale $Ae^{\lambda_0 t}$ u prikazu nekih realnih funkcija 2

- razmatramo razne mogućnosti za $Ae^{\sigma t}cos(\Omega t)$

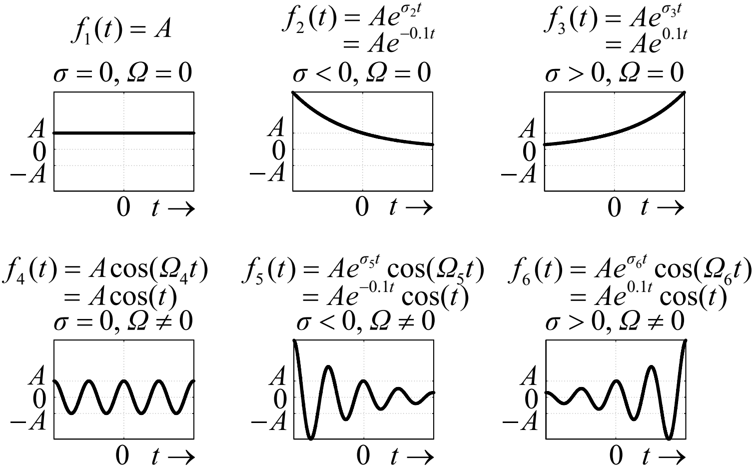


Slika 3: Kompleksna ravnina

Primjena kompleksne eksponencijale $Ae^{\lambda_0 t}$ u prikazu nekih realnih funkcija 3

- razmatramo šest signala $Ae^{\lambda_0 t}$ za: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.1$, $\lambda_3 = 0.1$, $\lambda_4 = \pm j$, $\lambda_5 = -0.1 \pm j$, $\lambda_6 = 0.1 \pm j$
- za λ na imaginarnoj $j\Omega$ osi, dakle, $\sigma = 0$
  - za $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ konstanta $f_1(t) = A$
  - za konjugirano kompleksne $\lambda_4 = j\Omega_4$ i $\lambda_4^* = -j\Omega_4 \Rightarrow$ $f_4(t) = A\cos(\Omega_4 t) = A\cos(t)$
- za λ na realnoj σ osi, dakle, $\Omega = 0$
  - $\lambda_2 = \sigma_2 \Rightarrow f_2(t) = Ae^{\sigma_2 t} = Ae^{-0.1t}$
  - $\lambda_3 = \sigma_3 \Rightarrow f_3(t) = Ae^{\sigma_3 t} = Ae^{0.1t}$
- za konjugirano kompleksne λ i λ^*
  - $\lambda_5 = \sigma_5 + j\Omega_5$ i $\lambda_5^* = \sigma_5 - j\Omega_5 \Rightarrow$ $f_5(t) = Ae^{\sigma_5 t}\cos(\Omega_5 t) = Ae^{-0.1t}\cos(t)$
  - odnosno, za $\lambda_6 = \sigma_6 + j\Omega_6$ i $\lambda_6^* = \sigma_6 - j\Omega_6 \Rightarrow$ $f_6(t) = Ae^{\sigma_6 t}\cos(\Omega_6 t) = Ae^{0.1t}\cos(t)$

Primjena kompleksne eksponencijale $Ae^{\lambda t}$ u prikazu nekih realnih funkcija 3



Slika 4: $Ae^{\sigma t}\cos(\Omega t)$

Vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal 1

- vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal (ili niz) prikazujemo funkcijom

$$\begin{aligned} &ExpD : Cjelobrojni \to Kompleksni \\ &ExpD(n) = C\alpha^n \\ &\text{gdje su } C, \alpha \in Kompleksni \end{aligned}$$

- za

$$C = Ae^{j\theta}, \quad A, \theta \in Realni, \quad A > 0$$

i

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}, \quad |\alpha|, \omega_0 \in Realni$$

vremenski diskretnu kompleksnu eksponencijalu možemo prikazati kao

$$ExpD(n) = Ae^{j\theta}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = A|\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \theta)}$$

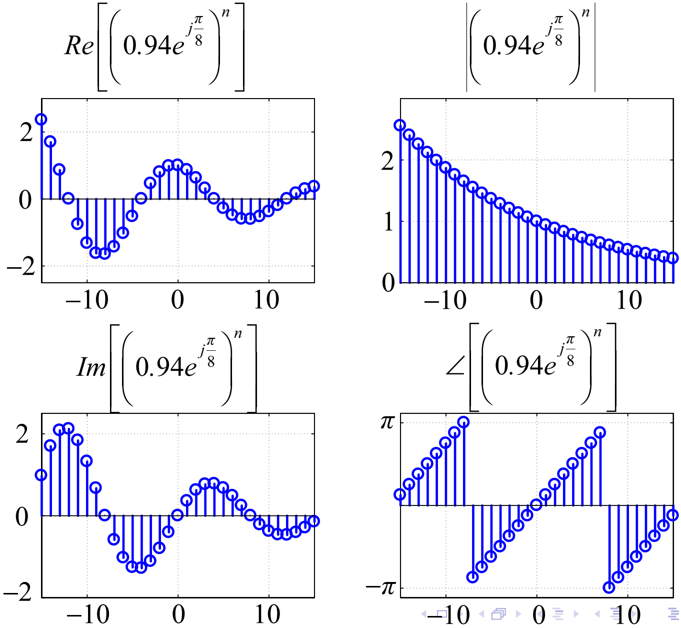
Kompleksni eksponencijalni niz 2

- primjenom Eulerove relacije slijedi

$$ExpD(n) = A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + jA|\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta)$$

- $|\alpha|$ i ω_0 definiraju ponašanje kompleksne eksponencijale
  - za $|\alpha| = 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi.
  - za $|\alpha| < 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi množeni s eksponencijalom koja se prigušuje te
  - za $|\alpha| > 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi množeni s eksponencijalom koja se raspiruje

Primjer eksponencijalnog niza



Eksponencijalni niz u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza 1

- za kompleksni niz

$$A\alpha^n = A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n) + jA|\alpha|^n \sin(\omega_0 n)$$

- je njegov konjugirano kompleksni

$$A(\alpha^*)^n = A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n) - jA|\alpha|^n \sin(\omega_0 n)$$

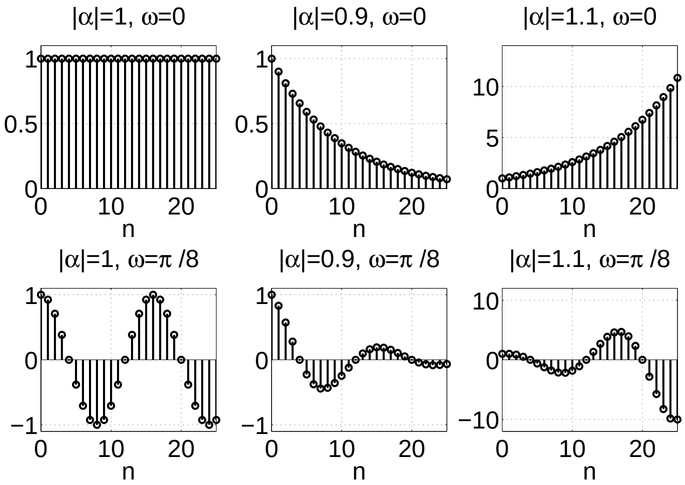
- pa vrijedi

$$A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}[A\alpha^n + A(\alpha^*)^n]$$

Eksponencijalni niz u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza 2

- analiziramo $A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n)$ za razne vrijednosti $|\alpha|$ i ω_0
- za $\omega_0 = 0$
  - $|\alpha = 1|$, $|\alpha| < 1$, $|\alpha| > 1$
- za $\omega_0 = \pm\frac{\pi}{8}$
  - $|\alpha = 1|$, $|\alpha| < 1$, $|\alpha| > 1$

Primjena kompleksne eksponencijale $C\alpha^n$ u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza 3



Slika 6: $A|\alpha|^n \cos(\omega_0 n)$

Sinusoidni signal 1

- neovisno o načinu nastajanja diskretna se sinusoida definira kao

$f : Cjelobrojni \to Realni$

$f(n) = A\cos(\omega_0 n + \theta) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) = A\cos(\frac{2\pi n}{N_0} + \theta)$

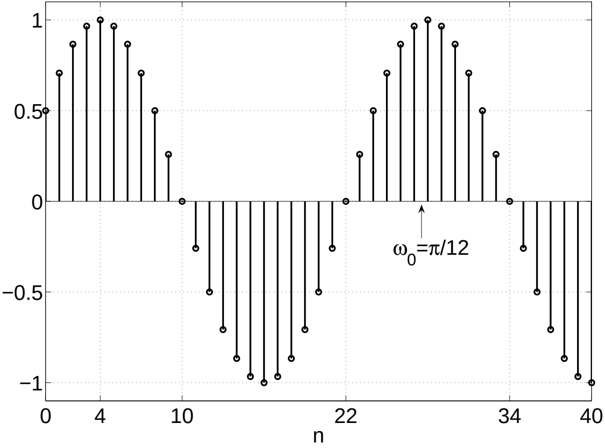
$f_0 = \frac{1}{N_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

gdje su $N_0 \in Cjelobrojni, A \in Realni$

- A je amplituda, ω_0 [radijana/uzorku] kutna frekvencija, a θ [radijana] faza signala
- N_0 je broj uzoraka jedne periode
- f_0 je dimenzije [perioda/uzorku] i predstavlja dio periode koji odgovara jednom uzorku

Primjer realnog sinusoidnog niza

- primjer sinusoidnog niza za $\omega_0 = \frac{\pi}{12} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{24}$, te $\theta = \frac{\pi}{3}$



Slika 7: $\cos(\frac{\pi}{12}n - \frac{\pi}{3})$

Periodičnost sinusoidnog niza

- niz $u(n) = \cos(\omega_0 n + \theta)$ je periodičan ako vrijedi

$$\cos[\omega_0(n + N) + \theta] = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

- izvodimo

$$\cos[\omega_0(n+N)+\theta] = \cos(\omega_0 n+\theta)\cos(\omega_0 N)-\sin(\omega_0 n+\theta)\sin(\omega_0 N)$$

- desna je strana jednaka $\cos(\omega_0 n + \theta)$ za

$$\cos(\omega_0 N) = 1, \quad \text{i} \quad \sin(\omega_0 N) = 0$$

- a to je za

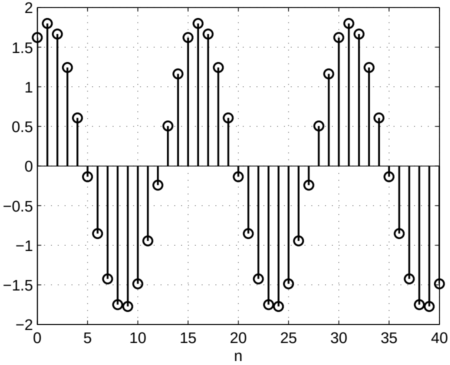
$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad \text{ili} \quad \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}, \quad \text{ili} \quad f_0 = \frac{k}{N}$$

gdje su $N, k \in$ *Cjelobrojni*

Primjer periodičnog sinusoidnog niza

- za niz $1.8\cos(\frac{2\pi}{15}n - \frac{\pi}{7})$ vrijedi

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{15} \text{ pa je } N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{2}{15}\pi} = 15 \text{ za } k = 1$$

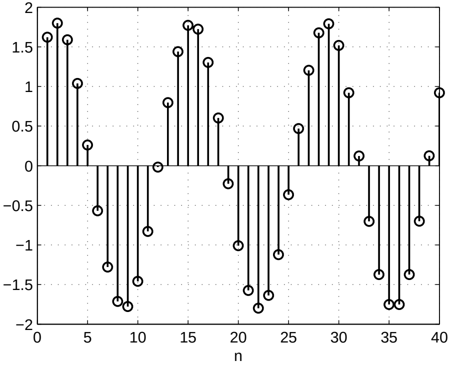


Slika 8: Periodični sinusoidni niz

Primjer neperiodičnog sinusoidnog niza

- za niz $1.8\cos(\frac{\sqrt{5}\pi}{15}n - \frac{\pi}{7})$ vrijedi

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{5}\pi}{15} \text{ pa je } N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{\sqrt{5}}{15}\pi} = \frac{30}{\sqrt{5}}k$$



Slika 9: Neperiodičan sinusoidni niz

Nejednoznačnost valnih oblika vremenski diskretne sinusoide

- valni oblici vremenski kontinuirane sinusoide $\cos(\Omega t)$ su jednoznačni za svaku realnu vrijednost Ω iz intervala 0 do ∞
- u slučaju vremenski diskretne sinusoide imamo drugačiju pojavu
- razmotrimo sinusoidne signale kutne frekvencije $\omega_0 + 2k\pi$, za $k \in Cjelobrojni$

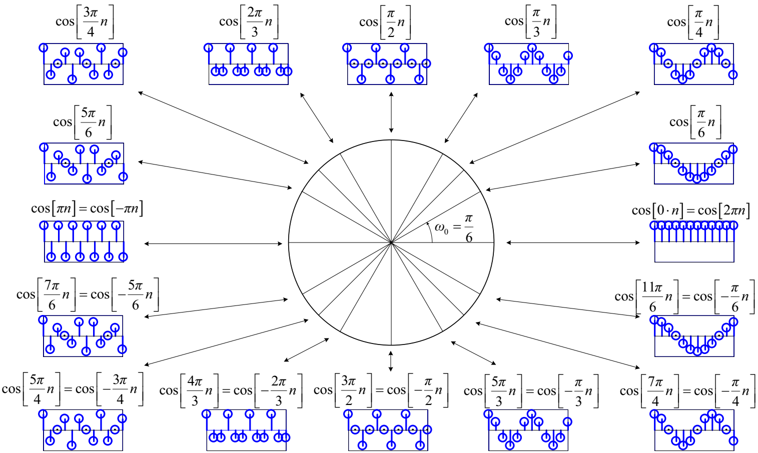
$$\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \theta) = \cos((\omega_0 n + \theta) + 2k\pi n) = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

- vidi se da su sinusoidni signali frekvencije $\omega_0 + 2k\pi$ identični signalu frekvencije ω_0
- slijedi zaključak kako je dovoljno razmatrati samo vremenski diskretne sinusoide čije su kutne frekvencije unutar intervala $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi$ odnosno $-\pi \leq \omega_0 \leq +\pi$

Još o periodičnosti vremenski diskretne sinusoide

- zbog upravo pokazane periodičnosti vremenski diskretne sinusoide jasno je da ne postoji kontinuirani porast broja oscilacija dodirnice kako raste ω_0
- na slici koja slijedi ilustrirano je kako s porastom ω_0 od 0 prema π raste broj oscilacija, a s porastom ω_0 od π prema 2π, smanjuje broj oscilacija
- prikazane su sinusoide $\cos(\omega_0 n)$ za $\omega_0 =$ $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$

Primjer realnog sinusoidnog niza

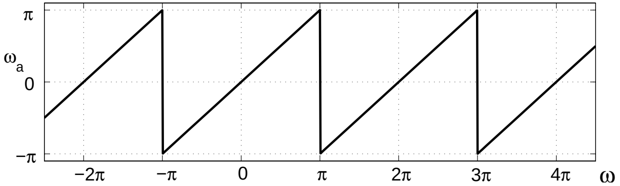


Slika 10: $\cos(\omega_0 n)$ za
$\omega_0 = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$

Još o nejednoznačnosti prikaza vremenski diskretne sinusoide

- prethodni primjer potvrđuje kako će vremenski diskretna sinusoida biti jednoznačnog valnog oblika samo za vrijednosti $\omega \in [-\pi, \pi]$, pa se ovaj interval naziva *osnovno frekvencijsko područje*
- bilo koja frekvencija ω bez obzira na njezinu visinu bit će identična nekoj frekvenciji ω_a u temeljnom području $(-\pi \leq \omega_a \leq \pi)$
- dakle možemo pisati

$$\omega_a = \omega - 2\pi k, \quad -\pi \leq \omega_a \leq \pi \text{ i } k \in \mathit{Cjelobrojni}$$



Još o nejednoznačnosti prikaza vremenski diskretne sinusoide 2

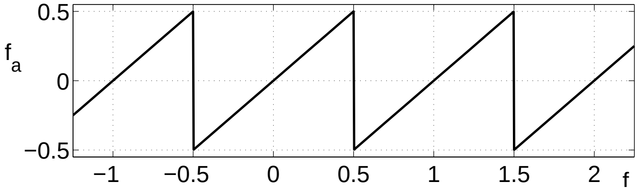
- slično se razmatranje može provesti i za prikaz sinusoide uz pomoć frekvencije f_0 koja predstavlja dio periode koja odgovara jednom uzorku
- pokazuje se da su sve sinusoide čije se frekvencije razlikuju za cjelobrojnu vrijednost identične (npr. za frekvencije 0.4, 1.4, 2.4,...)
- ovaj zaključak slijedi iz

$$\cos[(\omega_0 + 2k\pi)n + \theta] = \cos(\omega_0 n + \theta) \quad \text{za } \omega_0 = 2\pi f_0 \text{ vrijedi}$$
$$\cos[(2\pi f_0 + 2k\pi)n + \theta] = \cos[2\pi(f_0 + k)n + \theta)] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

- jednoznačno može biti prikazana vremenski diskretna sinusoida $\cos(2\pi f n + \theta)$ za vrijednosti f iz intervala $(-0.5 \leq f \leq 0.5)$

Veza f i f_a

- zaključujemo kako je svaka frekvencija f, bez obzira na njezin iznos, identična jednoj od frekvencija, f_a u osnovnom intervalu $(-0.5 \leq f_a \leq 0.5)$

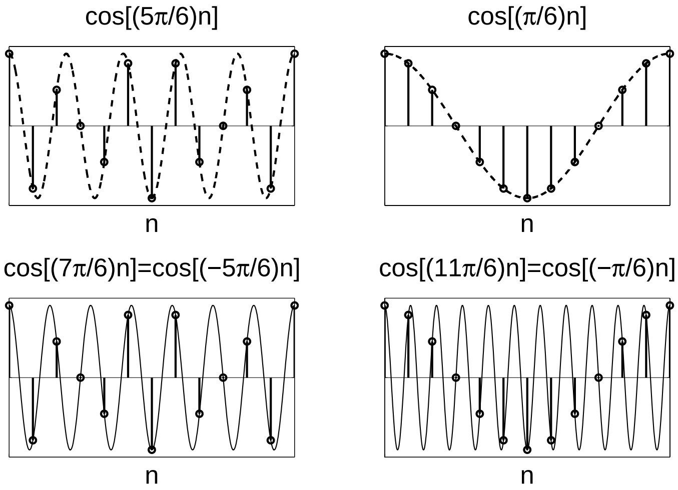


Slika 12: Odnos f i f_a

Frekvencijski alias 1

- prethodna razmatranja "sugeriraju" kako za diskretne signale ne postoje frekvencije iza $|\omega| = \pi$ ili $|f| = \frac{1}{2}$ i kako je najviša frekvencije $\omega = \pi (f = 0.5)$ i najniža 0
- treba naglasiti kako frekvencije više od ovdje navedenih postoje ali se one "predstavljaju" odgovarajućom frekvencijom unutar osnovnog područja frekvencija dakle one imaju svoj "alias"
- primjer sinusoidnih signala frekvencija unutar i izvan osnovnog frekvencijskog područja ilustrira pojavu koju nazivamo, prema engleskoj terminologiji, aliasing
- bit će pokazano kako signal $\cos(\frac{7\pi}{6})$ ima svoj "alias" u $\cos(\frac{5\pi}{6})$ odnosno $\cos(\frac{11\pi}{6})$ svoj "alias" u $\cos(\frac{\pi}{6})$

Frekvencijski alias 2



Slika 13: Aliasing

Otipkavanje vremenski kontinuiranih signala

- otipkavanjem vremenski kontinuiranog signala

$$u_a : Realni \rightarrow Realni,$$

u diskretnim trenucima vremena $t = nT$, nastaje vremenski diskretan signal

$$u : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$

dakle,

$$\forall t \in Realni \text{ i } \forall n \in Cjelobrojni,$$
$$u(n) = u_a(t)|_{t=nT} = u_a(nT)$$

Otipkavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala 1

- realna vremenski kontinuirana sinusoida definirana je kao

$$\forall t \in Realni,$$
$$u_a(t) = \cos(2\pi F t + \theta) = \cos(\Omega t + \theta)$$

gdje su F frekvencija signala [Hz] i Ω kutna frekvencija [rad/s]

- za $t = nT = \frac{n}{F_s} = \frac{2\pi n}{\Omega_s}$ i $\forall n \in Cjelobrojni$, slijedi

$$u(n) = u_a(nT) = \cos(2\pi F n T + \theta) = \cos(\Omega T n + \theta) =$$

$$= \cos(\frac{2\pi F}{F_s} n + \theta) = \cos(\frac{2\pi \Omega}{\Omega_s} n + \theta) = \cos(\omega n + \theta)$$

gdje su $F_s = 1/T$ frekvencija otipkavanja i $\Omega_s = 2\pi F_s$ kutna frekvencija otipkavanja

Otipkavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala 2

- dakle otipkani signal je

$$u(n) = \cos(\omega n + \theta), \qquad \forall n \in \mathit{Cjelobrojni}$$

  pri čemu je $\omega = \Omega T$ normalizirana kutna frekvencija (ili korak argumenta) [rad/uzorku] diskretnog signala $u(n)$
- kako Ω neograničen, to će i ω biti neograničen, pa je očigledno da se, pri otipkavanju vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala, može javiti aliasing (za $|\omega| > \pi$)
- ovdje će se razmotriti pod kojim uvjetima otipkavati vremenski kontinuirani sinusoidni signal da bi se izbjegla pojava aliasinga

Jednoznačno otipkavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- pri otipkavanju vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala kutne frekvencije $\Omega_0 = 2\pi F_0$ s frekvencijom otipkavanja $F_s = \frac{1}{T}$ nastaje vremenski diskretna sinusoida (sinusoidni niz) normalizirane kutne frekvencije

$$\omega_0 = \Omega_0 T = \Omega_0 \frac{1}{F_s} = \frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s}$$

aliasing se ne javlja za $\omega_0 \leq \pi$, pa iz $\frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s} \leq \pi$ slijedi

$$\Omega_s \geq 2\Omega_0 \quad \text{ili} \quad F_s \geq 2F_0$$

- zaključujemo: vremenski kontinuirana sinusoida će biti jednoznačno otipkana ako je frekvencija otipkavanja dvostruko veća od frekvencije otipkavane vremenski kontinuirane sinusoide
- ovaj zaključak je specijalni slučaj *teorema otipkavanja* koji će kasnije biti detaljno analiziran

Primjeri otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- otipkavaju se vremenski kontinuirane sinusoide frekvencija $F_1 = 4\,kHz$, $F_2 = 20\,kHz$, $F_3 = 28\,kHz$, $F_4 = 44\,kHz$, a frekvencija otipkavanja neka je $F_s = 48\,kHz$
- prethodni zaključak ukazuje da će otipkavanje treće i četvrte sinusoide rezultirati aliasingom, jer frekvencija otipkavanja nije dvostruko veća od frekvencije vremenski kontinuirane sinusoide
- ilustrirajmo postupak otipkavanja

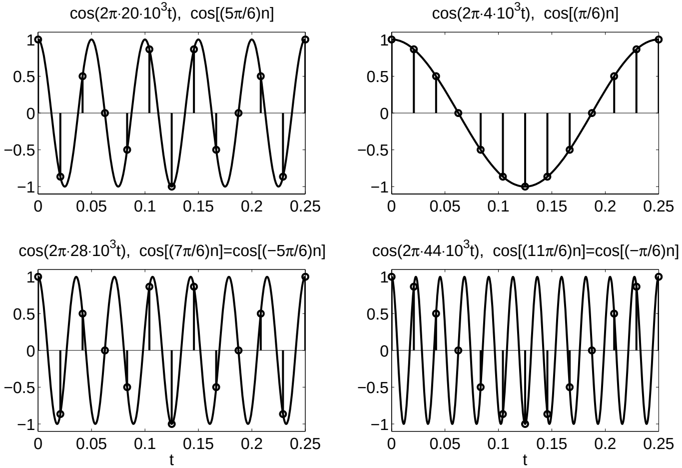
Postupak otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

$$
\begin{aligned}
&\forall t \in \mathit{Realni}, \\
&u_1(t) = \cos(2\pi F_1 t) = \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot t) \\
&u_2(t) = \cos(2\pi F_2 t) = \cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot t) \\
&u_3(t) = \cos(2\pi F_3 t) = \cos(2\pi \cdot 28 \cdot 10^3 \cdot t) \\
&u_4(t) = \cos(2\pi F_4 t) = \cos(2\pi \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot t)
\end{aligned}
$$

za $t = nT = \frac{n}{F_s} = \frac{n}{48 \cdot 10^3}$

$$
\begin{aligned}
&\forall n \in \mathit{Cjelobrojni}, \\
&u_1(n) = \cos(2\pi F_1 nT) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{4\cdot 10^3}{48\cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{\pi}{6} n) \\
&u_2(n) = \cos(2\pi F_2 nT) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{20\cdot 10^3}{48\cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{5\pi}{6} n) \\
&u_3(n) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{28\cdot 10^3}{48\cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{7\pi}{6} n) = \cos(-\tfrac{5\pi}{6} n) \\
&u_4(n) = \cos(2\pi \cdot \tfrac{44\cdot 10^3}{48\cdot 10^3} \cdot n) = \cos(\tfrac{11\pi}{6} n) = \cos(-\tfrac{\pi}{6} n)
\end{aligned}
$$

Otipkavanje vremenski kontinuiranih sinusoida



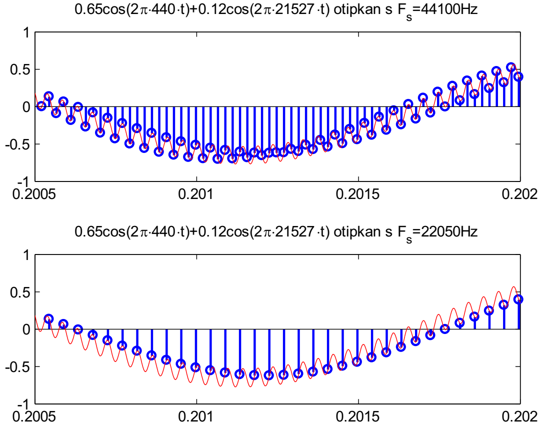
Slika 14: Aliasing kod otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

Primjer aliasinga kod audio signala1

- otipkava se vremenski kontinuiran signal $0.65\cos(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 0.12\cos(2\pi \cdot 21527 \cdot t)$ frekvencijom otipkavanja $F_s = 44100\,\text{Hz}$
- komponenta frekvencije $F = 21527\,\text{Hz}$ izvan je slušnog područja, pa je u reprodukciji čujna samo komponenta frekvencije $F = 440\,\text{Hz}$ (nota A)
- pri otipkavanju signala s frekvencijom $F_s = 22050\,\text{Hz}$ dolazi do pojave aliasinga i komponenta frekvencije $F = 21527\,\text{Hz}$ zrcali se u osnovno frekvencijsko područje kao sinusoida frekvencije $F = 21527 - 22050 = -523\,\text{Hz}$ (nota C)
- u reprodukciji se čuju komponenta frekvencije $F = 440\,\text{Hz}$, te komponenta frekvencije $F = 523\,\text{Hz}$ koja je nastala aliasingom komponente frekvencije $F = 21527\,\text{Hz}$ dakle signal $0.65\cos(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 0.12\cos(2\pi \cdot 523 \cdot t)$

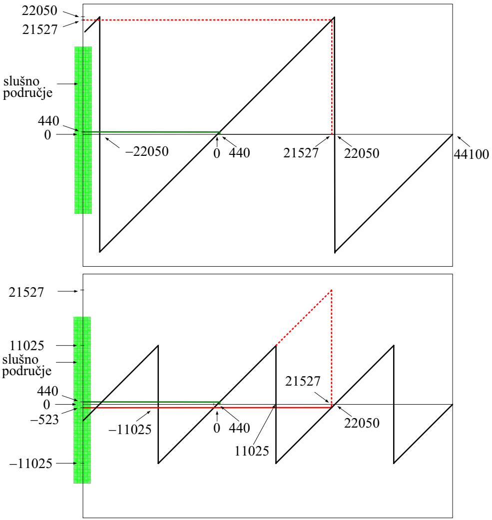
Aliasing kod audio signala 2

- prikazan je signal otipkan frekvencijom otipkavanja $F_s = 44100\,\mathrm{Hz}$ i frekvencijom otipkavanja $F_s = 22050\,\mathrm{Hz}$



Slika 15: Aliasing kod otipkavanja audio signala

Aliasing kod audio signala 3

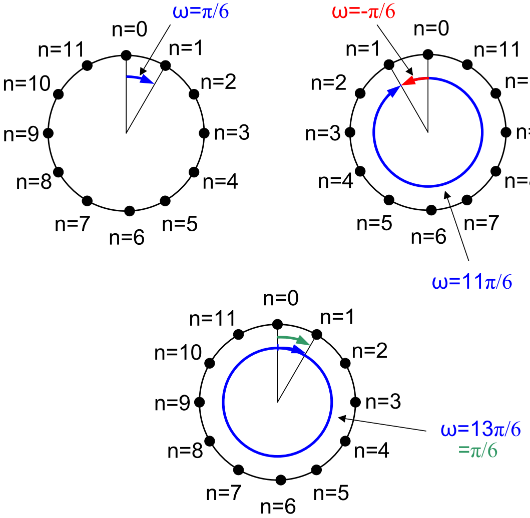


Slika 16: Aliasing kod otipkavanja audio signala

Još o aliasingu pri otipkavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

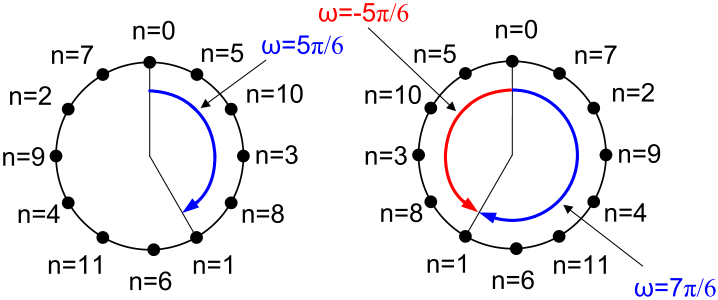
- u slučaju signala koji se sastoji od više vremenski kontinuiranih sinusoida otipkavanje treba biti dvostruko više frekvencije od najviše frekvencije među sinusoidnim komponentama signala
- u slučaju nemogućnosti promjene frekvencije otipkavanja (diskretizacije) može se pojaviti aliasing
- zanimljiv je primjer vrtnje kotača (npr. automobila Formule 1) na televizijskim ekranima gdje gledatelj, u relativno kratkom vremenu, tipično pri naglim promjenama brzine vrtnje kotača, stječe dojam da se kotač povremeno vrti naprijed, povremeno nazad, a ponekad kao i da stoji na mjestu
- efekt je posljedica pojave aliasinga i biti će ilustriran narednom slikom

Još o aliasingu pri otipkavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija



Slika 17: Aliasing kod otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

Još o aliasingu pri otipkavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija



Slika 18: Aliasing kod otipkavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala