Kontinuirani sustavi

Marko Gulin

7. lipnja 2009.

Sadržaj

1 Diferencijalne jednadžbe

Example 1. Za sustav zadan slikom potrebno je odrediti ulazno/izlaznu jednadžbu, te dobivenu diferencijalnu rješiti ako je zadano:

$$C = L = 1 \qquad R = 2$$

$$u_C\left(0^-\right) = 1 \qquad i_L\left(0^-\right) = 0$$

$$u_{ul}\left(t\right) = 4\mu\left(t\right)$$

Pišemo jednadžbu ravnoteže sustava

$$u_{ul} = u_L + u_R + u_C$$

$$u_{ul} = L\frac{di}{dt} + Ri + u_{iz}$$

Kako se u jednadžbi nebi smio naći nijedan vremenski promjenjivi signal osim ulaznog i izlaznog, dobivenu diferencijalnu jednadžbu biti će potrebno malo modificirati kako bi signal struje i prikazali preko ulaznog, odnosno izlaznog napona. Vrijedi

$$u_{iz} = u_C = \frac{1}{C}\int\limits_{0^+}^{\infty} i\left(\tau\right)d\tau \rightarrow i = Cu_{iz}'$$

odnosno

$$u_{ul} = LCu_{iz}'' + RCu_{iz}' + u_{iz}'$$

Nakon uvođenja standardnih oznaka za ulazni, odnosno izlazni signal, dobijemo konačni izgled diferencijalne jednadžbe koja opisuje sustav

$$LCy'' + RCy' + y = u \rightarrow y'' + 2y' + y = u$$

Dobivena diferencijalna jednadžba je drugog reda, te su nam za njeno rješavanja potrebna dva početna uvjeta

$$u_C\left(0^-\right) = u_{iz}\left(0^-\right) = y\left(0^-\right) = 1$$

$$i_L\left(0^-\right) = Cu_{iz}'\left(0^-\right) = Cy'\left(0^-\right) = 0 \rightarrow y'\left(0^-\right) = 0$$

Napomena: Postupak rješavanja diferencijalne jednadžbe biti će detaljno razrađen u narednim lekcijama. Ovaj primjer služi samo kako bi se upoznalo čitatelja što je sve potrebno za rješavanje jedne diferencijalne jednadžbe.

Opća homogena jednadžba. Za početak, tražimo opći homogeni oblik diferencijalne jednadžbe. Pretpostavljeni oblik je

$$y_h(t) = Ce^{st}$$

Pretpostavljeni homogeni oblik uvrštavamo u jednadžbu sustava, te tako dobivenu jednadžbu izjednačavamo s nulom.

$$y_h'' + 2y_h' + y_h = 0 \rightarrow Ce^{st} \underbrace{\left(s^2 + 2s + 1\right)}_{Karakt.\, jednadžba} = 0$$

Iz karakteristične jednadžbe sustava dobijemo karakteristične frekvencije

$$p = s^2 + 2s + 1 \rightarrow s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$s_1 = s_2 = -1$$

Prema dobivenim karakterističnim frekvencijama sustava zapisujemo opću homogenu jednadžbu

$$y_h(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-t}$$

Partikularna jednadžba. Za određivanje partikularne jednadžbe, prije svega potrebno je odrediti pretpostavljeni partikularni oblik. Pretpostavljeni partikularni oblik određuje se na temelju pobude koja djeluje na sustav, te na temelju karakterističnih frekvencija sustava. Za ovaj primjer, pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = K$$

Pretpostavljeni partikularni oblik uvrštavamo u jednadžbu sustava, koju ne izjednačavamo s nulom, već s pobudom koja djeluje na sustav.

$$y_p'' + y_p' + y_p = u \rightarrow 0 + 0 + K = 4$$

Konačno, partikularna jednadžba koja vrijedi za ovaj primjer je

$$y_p(t) = 4 \qquad t \geq 0$$

Početni uvjeti sustava. Za rješavanje totalnog odziva (ili bilo kojeg drugog: mirni, nepobuđeni, prirodni, prisilni i itd.) potrebno je poznavanje odgovarajućih početnih uvjeta sustava.

Početni uvjeti sustava koji će biti potrebni za daljnje rješavanje zadane diferencijalne jednadžbe dani su u nastavku

$$y\left(0^+\right) = 1 \qquad y'\left(0^+\right) = 0$$

Početni uvjeti koje ćemo uvrštavati u jednadžbu sustavu, za rješavanje totalnog odziva, moraju biti iz trenutaka kada djeluje pobuda, odnosno u našem slučaju riječ je o trenutku $t = 0^+$.

Totalni odziv. Totalni odziv sustava definiramo kao linearnu kombinaciju opće homogene jednadžbe te partikularne jednadžbe.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-t} + 4 \qquad t \geq 0$$

$$y'(t) = (C_2 - C_1 + -C_2 t)\, e^{-t} \qquad t \geq 0$$

Nepoznate koeficijente C_1 i C_2 odredit ćemo iz poznatih početnih uvjeta.

$$y\left(0^+\right) = C_1 + 4 = 1 \rightarrow C_1 = -3$$

$$y'\left(0^+\right) = C_2 - C_1 = 0 \rightarrow C_2 = -3$$

Konačno, totalni odziv sustava je

$$y(t) = (-3 - 3t)\, e^{-t} + 4 \qquad t \geq 0$$

U nastavku je detaljno objašnjen svaki korak rješavanja odziva sustava.

1.1 Homogena jednadžba

Bez obzira na sustav, pretpostavljeni homogeni oblik uvijek je isti

$$y_h(t) = Ce^{st} \tag{1.1}$$

Pretpostavljeni homogeni oblik uvrštavamo u jednadžbu sustava, te tako dobivenu jednadžbu izjednačavamo s nulom. Napr. ako je jednadžba sustava

$$y'' - 2y' + y = u$$

nakon uvrštavanja pretpostavljenog homogenog oblika dobijemo

$$y_h'' - 2y_h' + y_h = 0$$

$$Ce^{st} \underbrace{\left(s^2 - 2s + 1\right)}_{Karakt.\, jednadžba} = 0$$

Iz karakteristične jednadžbe sustava dobijemo karakteristične frekvencije sustava na temelju kojih zapisujemo opću homogenu jednadžbu. Napr. ako je karakteristična jednadžba sustava

$$p = s^2 - 2s + 1$$

tada su karakteristične frekvencije sustava

$$s^2 - 2s + 1 = 0 \rightarrow s_1 = s_2 = 1$$

Prema dobivenim karakterističnim frekvencijama sustava zapisujemo opću homogenu jednadžbu

$$y_h(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^t$$

Općenito, razlikujemo tri moguća slučaja za zapis opće homogene jednadžbe.

1.1.1 Sustav sa jednostrukim karakterističnim frekvencijama

$$s_1 = 2 \qquad s_2 = 4 \qquad s_3 = 6 \qquad s_4 = -4$$

Prema zadanim karakterističnim frekvencijama, opća homogena jednadžba je

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} + C_3 e^{6t} + C_4 e^{-4t}$$

Za zapis općeg homogenog rješenja sastavljenog od isključivo jednostrukih karakterističnih frekvencija vrijedi izraz

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{m} C_i e^{s_i t} \tag{1.2}$$

pri čemu je m red sustava.

1.1.2 Sustav sa višestrukim karakterističnim frekvencijama

$$s_1 = 2 \qquad s_2 = s_3 = 4 \qquad s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = -5$$

Prema zadanim karakterističnim frekvencijama, opća homogena jednadžba je

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t)\, e^{4t} + \left(C_4 + C_5 t + C_6 t^2 + C_7 t^3\right) e^{-5t}$$

Za zapis općeg homogenog rješenja sastavljenog od višestrukih karakterističnih frekvencija vrijedi izraz

$$y_h(t) = \sum_{j=0}^{q} C_{i+j} e^{s_i t} t^j \tag{1.3}$$

pri čemu q označava višestrukost korjena.

1.1.3 Sustav sa kompleksno konjugiranim karakterističnim frekvencijama

$$s_{1,2} = \sigma \pm \jmath\omega$$

Kada sustav posjeduje kompleksne karakteristične frekvencije, tada oni uvijek dolaze u kompleksno konjugiranim parovima, odnosno ako znamo da je jedna karakteristična frekvencija sustava

$$s_1 = \sigma + \jmath\omega$$

tada možemo zaključiti da sustav sigurno ima još jednu frekvenciju u

$$s_2 = \sigma - \jmath\omega$$

Za zadane karakteristične frekvencije sustava, imamo

$$y_h(t) = C_1 e^{(\sigma+\jmath\omega)t} + C_2 e^{(\sigma-\jmath\omega)t}$$

$$y_h(t) = e^{\sigma t}\left(C_1 e^{\jmath\omega t} + C_2 e^{-\jmath\omega t}\right)$$

Ako kompleksnu eksponencijalu raspišemo u linearnu kombinaciju kosinus i sinus funkcije dobijemo

$$y_h(t) = e^{\sigma t}\left(C_1 \cos(\omega t) + \jmath C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) - \jmath C_2 \sin(\omega t)\right)$$

odnosno

$$y_h(t) = e^{\sigma t}\left[\underbrace{(C_1 + C_2)}_{A}\cos(\omega t) + \underbrace{\jmath\,(C_1 - C_2)}_{B}\sin(\omega t)\right]$$

Konačno, kompleksno konjugirane karakteristične frekvencije zapisujemo u opću homogenu jednadžbu prema izrazu

$$y_h(t) = e^{\sigma t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] \tag{1.4}$$

Napr. za zadane karakteristične frekvencije sustava $s_{1,2} = 3 \pm 4\jmath$ opći homogeni oblik je

$$y_h(t) = e^{3t}\left[A\cos(4t) + B\sin(4t)\right]$$

1.2 Partikularna jednadžba

Za određivanje partikularnog rješenja, prije svega potrebno je odrediti pretpostavljeni partikularni oblik. Pretpostavljeni partikularni oblik određuje se na temelju pobude, te na temelju karakterističnih frekvencija sustava.

Pri određivanju partikularnog rješenja vrlo je važno imati na umu područje u kojem dobiveno partikularnog rješenje postoji. Kako je partikularno rješenje posljedica pobude koja djeluje na sustav, tada ono "živi" samo dok postoji zadana pobuda. Tablica pretpostavljenih partikularnih oblika dana je u nastavku.

Pobuda $u(t)$	Pretpostavljeni partikularni oblik $y_p(t)$
A (konstanta)	K
$Ae^{\xi t}$	$Ke^{\xi t}t^k$
t^M	$K_0 + K_1 t^1 + ... + K_M t^M$
$t^M e^{\xi t}$	$\left(K_0 + K_1 t^1 + ... + K_M t^M\right) e^{\xi t} t^k$
$A\cos(\Omega_0 t)$; $A\sin(\Omega_0 t)$	$K_1 \cos(\Omega_0 t) + K_2 \sin(\Omega_0 t)$

Tablica 1.1: Pretpostavljeni partikularni oblici

Koeficijent k predstavlja koliko se puta konstanta ξ pojavljuje kao karakteristična frekvencija sustava. U nastavku je dano nekoliko primjera određivanja pretpostavljenog partikularnog oblika. Broj koji stoji uz pojedinu stavku označava kojem retku tablice odgovara pojedini primjer.

- (1) Zadane su pobuda i karakteristične frekvencije sustava

  $$u(t) = 4\mu(t) \qquad s_1 = 2 \qquad s_2 = 3$$

  Pobuda je konstanta, pa je s obzirom na to pretpostavljeni partikularni oblik također konstanta

  $$y_p(t) = K \qquad t \geq 0$$

- (2) Zadane su pobuda i karakteristične frekvencije sustava

  $$u(t) = 2e^{-3t}\mu(t) \qquad s_1 = 2 \qquad s_2 = -3$$

  Pobuda je konstanta što množi eksponencijalu, s tim da se frekvencija eksponencijale $\xi = -3$ ne pojavljuje nijednom kao karakteristična frekvencija sustava, pa je s obzirom na to konstanta $k = 0$. Pretpostavljeni partikularni oblik je

  $$y_p(t) = Ke^{-3t}t^0 \rightarrow y_p(t) = Ke^{-3t} \qquad t \geq 0$$

- (2) Zadane su pobuda i karakteristične frekvencije sustava

$$u(t) = 2e^{-3t}\mu(t) \qquad s_1 = s_2 = -3 \qquad s_3 = 4$$

Pobuda je konstanta što množi eksponencijalu, s tim da se frekvencija eksponencijale $\xi = -3$ pojavljuje dva puta kao karakteristična frekvencija sustava, pa je s obzirom na to $k = 2$. Pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = Ke^{-3t}t^2 \qquad t \geq 0$$

- (3) Zadane su pobuda i karakteristične frekvencije sustava

$$u(t) = \left(t^3 + 1\right)\mu(t) \qquad s_1 = 2 \qquad s_2 = 5$$

Pobuda je polinom trećeg stupnja, pa je s obzirom na to pretpostavljeni partikularni oblik također polinom trećeg stupnja, odnosno

$$y_p(t) = K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 \qquad t \geq 0$$

- (4) Zadane su pobuda i karakteristične frekvencije sustava

$$u(t) = t^2 e^{4t}\mu(t) \qquad s_1 = s_2 = s_3 = 3 \qquad s_4 = 5$$

Pobuda je polinom drugog stupnja što množi kompleksnu eksponencijalu, s tim da se frekvencija kompleksne eksponencijale$\xi = 4$ ne pojavljuje nijednom kao karakteristična frekvencija sustava, pa je s obzirom na to konstanta $k = 0$. Pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = \left(K_0 + K_1 t + K_2 t^2\right)e^{4t}t^0$$
$$y_p(t) = \left(K_0 + K_1 t + K_2 t^2\right)e^{4t} \qquad t \geq 0$$

- (4) Zadane su pobuda i karakteristične frekvencije sustava

$$u(t) = t^2 e^{4t}\mu(t) \qquad s_1 = 5 \qquad s_2 = s_3 = s_4 = 4$$

Pobuda je polinom drugog stupnja što množi kompleksnu eksponencijalu, s tim da se frekvencija kompleksne eksponencijale$\xi = 4$ pojavljuje tri puta kao karakteristična frekvencija sustava, pa je s obzirom na to $k = 3$. Pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = \left(K_0 + K_1 t + K_2 t^2\right)e^{4t}t^3 \qquad t \geq 0$$

U prethodnim primjerima, čitatelj je mogao primjetiti da na kraju svakog pretpostavljenog partikularnog oblika piše područje djelovanja, odnosno $t \geq 0$.Razlog leži upravo u činjenici što pobuda, na temelju koje smo odredili pretpostavljeni oblik, postoji samo za trenutke $t \geq 0$.

Također, valja biti na posebnom oprezu kada je jedna od karakterističnih frekvencija sustava jednaka $s = 0$.

- (2) Zadane su pobuda i karakteristične frekvencije sustava

$$u(t) = 3\mu(t) \qquad s_1 = s_2 = 0 \qquad s_3 = 2$$

Potpuno bi pogrešan bio zaključak da je zadana pobuda samo konstanta, te da je pretpostavljeni partikularni oblik

$$y_p(t) = K \qquad t \geq 0$$

Naime, zadanu pobudu možemo zapisati na sljedeći način

$$u(t) = 3e^{0t}\mu(t)$$

Možemo primjetiti da zadana pobuda zapravo pripada 2. retku tablice pretpostavljenih partikularnih oblika, s tim da se frekvencija eksponencijale $\xi = 0$ dva puta pojavljuje kao karakteristična frekvencija sustava, pa je $k = 2$. Prema tome, pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = Ke^{0t}t^2 \rightarrow y_p(t) = Kt^2 \qquad t \geq 0$$

- (4) Zadane su pobuda i karakteristične frekvencije sustava

$$u(t) = t\mu(t) \qquad s_1 = 0 \qquad s_2 = 1$$

Potpuno bi pogrešan bio zaključak da je zadana pobuda samo polinom prvog stupnja, te da je pretpostavljeni partikularni oblik

$$y_p(t) = K_0 + K_1 t$$

Naime, zadanu pobudu možemo zapisati na sljedeći način

$$u(t) = te^{0t}\mu(t)$$

Možemo primjetiti da zadana pobuda zapravo pripada 4. retku tablice pretpostavljenih partikularnih oblika, s tim da se frekvencija eksponencijale $\xi = 0$ jednom pojavljuje kao karakteristična frekvencija sustava, pa je $k = 1$. Prema tome, pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = (K_0 + K_1 t)\, e^{0t} t^1$$

$$y_p(t) = (K_0 + K_1 t)\, t \qquad t \geq 0$$

1.3 Početni uvjeti sustava

Poznavanje početnih stanja sustava vrlo je važno za određivanje potpunog odziva sustava. Naime, za slučaj kada ne poznajemo početne uvjete sustave, nebi mogli odrediti nepoznate koeficijente općeg homogenog rješenja, pa bi odzivi tako bili u ovisnosti o konstantama C_1 i C_2. Za određivanje odziva sustava n-tog reda potrebno je poznavati n početnih uvjeta.

Uvjeti sustava uglavnom se zadaju za trenutke prije početka djelovanja pobude. Kako je za neke tipove odziva (napr. totalni, mirni) potrebno poznavanje uvjeta sustava nakon početka djelovanja pobude, odgovarajućim metodama potrebno je iz uvjeta prije početka djelovanja pobude izračunati uvjete nakon početka djelovanja pobude. Prvi korak za određivanje ovih uvjeta je zapisivanje opće diferencijalne jednadžbe sustava. U nastavku su zapisane opće diferencijalne jednadžbe sustava do trećeg reda.

$$(1) \qquad y' + a_1 y = b_0 u' + b_1 u$$

$$(2) \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 u'' + b_1 u' + b_2 u$$

$$(3) \qquad y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = b_0 u''' + b_1 u'' + b_2 u' + b_3 u$$

Zapis opće diferencijalne jednadžbe sustava n-tog reda dan je u nastavku

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i y^{(n-1-i)} = \sum_{i=0}^{n} b_i u^{(n-i)} \tag{1.5}$$

Nakon što zapišemo opću diferencijalnu jednadžbu, spremni smo za računanje početnih uvjeta. U nastavku su zapisani izrazi po kojem računamo početne uvjete.

$$\Delta y = b_0 u \left(0^+\right)$$

$$\Delta y^{(1)} + a_1 \Delta y = b_0 u^{(1)} \left(0^+\right) + b_1 u \left(0^+\right)$$

$$\Delta y^{(2)} + a_1 \Delta y^{(1)} + a_2 \Delta y = b_0 u^{(2)} \left(0^+\right) + b_1 u^{(1)} \left(0^+\right) + b_2 u \left(0^+\right)$$

gdje je $\Delta y^{(i)} = y^{(i)}\left(0^+\right) - y^{(i)}\left(0^-\right)$.

Općenito, zadnji početni uvjet sustava n-tog reda računamo po formuli

$$\Delta y^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-2} a_1 \Delta y^{(n-2-i)} = \sum_{i=0}^{n} b_i u^{(n-1)} \left(0^+\right) \tag{1.6}$$

1.4 Postupci određivanja odziva sustava

Razlikovat ćemo šest tipova odziva sustava:

1. Mirni odziv,
2. Nepobuđeni odziv,
3. Totalni odziv,
4. Prirodni odziv,
5. Prisilni odziv,
6. Impulsni odziv.

U nastavku su opisane metode određivanja svakog od navedenih odziva.

1.4.1 Mirni odziv sustava

Mirni odziv sustava $y_m(t)$ definiramo kao odziv sustava na određenu pobudu, pod pretpostavkom da je sustav prethodno mirovao, odnosno početni uvjeti su jednaki nuli. Mirni odziv zapisujemo kao linearnu kombinaciju opće homogene jednadžbe i partikularnog rješenja

$$y_m(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Nepoznate koeficijente općeg homogenog rješenja računamo iz uvjeta sustava nakon početka djelovanja pobude. Napr. ako pobuda počinje djelovati u trenutku $t = 0$, tada vrijedi

$$y^{(n-1)}\left(0^-\right) = ... = y^{(1)}\left(0^-\right) = y\left(0^-\right) = 0$$

Iz tih uvjeta, već opisanim postupkom dobijemo uvjete sustava u trenutku $t = 0^+$ te na temelju njih odredimo nepoznate koeficijente općeg homogenog rješenja.

1.4.2 Nepobuđeni odziv sustava

Nepobuđeni odziv sustava $y(t)$ definiramo kao odziv sustava na kojeg ne djeluje nikakva pobuda. Nepobuđeni odziv zapisujemo kao opću homogenu jednadžbu

$$y_n(t) = y_h(t)$$

Nepoznate koeficijente općeg homogenog rješenja računamo iz uvjeta sustava prije početka djelovanja pobude. Napr. ako pobude počinje djelovati u trenutku $t = 0$, tada nepoznate koeficijente računamo iz uvjeta u trenutku $t = 0^-$. Takvi uvjeti obično su poznati te ih nije potrebno dodatno računati.

1.4.3 Totalni odziv sustava

Totalni odziv sustava $y(t)$ definiramo kao odziv sustava na određenu pobudu, ali za razliku od mirnog odziva ne pretpostavljamo da je sustav prije početka djelovanja pobude mirovao, odnosno uvjete nakon početka djelovanja pobude računamo iz zadanih uvjeta prije početka djelovanja pobude. Totalni odziv zapisujemo kao linearnu kombinaciju opće homogene jednadžbe i partikularnog rješenja

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Totalni odziv također možemo dobiti kao linearnu kombinaciju mirnog i nepobuđenog odziva, odnosno

$$y(t) = y_m(t) + y_n(t)$$

1.4.4 Prirodni odziv sustava

Prirodni odziv sustava $y_{prir}(t)$ definiramo kao onaj dio totalnog odziva koji pripada općoj homogenoj jednadžbi. Prirodni odziv zapisujemo kao

$$y_{prir}(t) = y(t) - y_p(t)$$

Pri tome, vrlo je važno uočiti da prirodni odziv nije isto što i nepobuđeni odziv!

1.4.5 Prisilni odziv sustava

Prisilni odziv sustava $y_{pris}(t)$ definiramo kao odziv sustava koji je posljedica djelovanja pobude. Prisilni odziv zapisujemo kao

$$y_{pris}(t) = y_p(t)$$

Možemo uočiti da je prisilni odziv sustava zapravo partikularno rješenje.

1.4.6 Impulsni odziv

Impulsni odziv $h(t)$ je odziv sustava na impulsnu pobudu - $\delta(t)$. Za određivanje impulsnog odziva, potrebno je odrediti koeficijente općeg homogenog rješenja

$$h_A(t) = y_h(t)$$

Uvjeti iz kojih dobijemo nepoznate koeficijenti jednaki su nuli, osim onog u najvećoj derivaciji koji je jednak 1. Za sustav n-tog reda, uvjeti bi bili

$$h_A\left(0^+\right) = h_A^{(1)}\left(0^+\right) = ... = h_A^{(n-2)}\left(0^+\right) = 0 \qquad h_A^{(n-1)}\left(0^+\right) = 1$$

Nakon što odredimo $h_A(t)$ impulsni odziv određujemo prema sljedećoj relaciji

$$h(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{M} \left(b_{N-m} D^m\right) h_A(t), & t \geq 0 \qquad N > M \\ b_0 \delta(t) + \sum_{m=0}^{M} \left(b_{N-m} D^m\right) h_A(t) & t \geq 0 \qquad N = M \end{cases} \tag{1.7}$$

pri čemu je N red sustava, a M stupanj najveće derivacije pobude.

1.5 Riješeni zadaci za vježbu

Problem 2. Za LTI sustav opisan zadanom diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

pronađite totalni, te mirni i nepobuđeni odziv. Zadano je

$$y\left(0^-\right) = 2 \qquad y'\left(0^-\right) = 1 \qquad u(t) = 4\mu(t)$$

Opća homogena jednadžba sustava.

Pretpostavljeni homogeni oblik je

$$y_h(t) = Ce^{st}$$

Pretpostavljeni homogeni oblik uvrštavamo u jednadžbu sustava

$$y_h''(t) + 3y_h'(t) + 2y_h(t) = 0$$

$$Ce^{st}\left(s^2 + 3s + 2\right) = 0$$

Karakteristična jednadžba sustava je

$$p = s^2 + 3s + 2$$

Karakteristične frekvencije sustava su

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

$$s_1 = -1 \qquad s_2 = -2$$

Opća homogena jednadžba sustava je

$$y_h(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

Partikularno rješenje sustava.

Pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = K \qquad y_p'(t) = y_p''(t) = 0$$

Pretpostavljeni partikularni oblik uvrštavamo u jednadžbu sustava

$$y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = u(t)$$

$$0 + 0 + 2K = 4 \rightarrow K = 2$$

Partikularno rješenje sustava je

$$y_p(t) = 2 \qquad t \geq 0$$

Totalni odziv sustava.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$
$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 2$$
$$y'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$$

Nepoznate koeficijente općeg homogenog rješenja računamo iz uvjeta sustava nakon početka djelovanja pobude. Kako sustav kao ulaz nema derivaciju pobude, uvjeti u trenucima $t = 0^-$ i $t = 0^+$ su jednaki

$$y\left(0^+\right) = y\left(0^-\right) = 2 \qquad y'\left(0^+\right) = y'\left(0^-\right) = 1$$

Uvjete sustava uvrštavamo u izraz za totalni odziv

$$y\left(0^+\right) = C_1 + C_2 + 2 = 2 \rightarrow C_1 + C_2 = 0$$
$$y'\left(0^+\right) = -C_1 - 2C_2 = 1 \rightarrow C_1 + 2C_2 = -1$$

Nepoznati koeficijenti su

$$C_1 = 1 \qquad C_2 = -1$$

Konačno, totalni odziv sustava je

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + 2 \qquad t \geq 0$$

Mirni odziv sustava.

$$y_m(t) = y_h(t) + y_p(t)$$
$$y_m(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 2$$
$$y_m'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$$

Nepoznate koeficijente općeg homogenog rješenja računa iz uvjeta sustava nakon početka djelovanja pobude, ali pod pretpostavkom da je sustav prije početka djelovanja pobude mirovao, odnosno da mu je odziv prije početka djelovanja pobude jednak nuli. Kako smo već ranije zaključili da su u ovom konkretnom primjeru uvjeti u trenucima $t = 0^+$ i $t = 0^-$ jednaki, pišemo

$$y\left(0^+\right) = y\left(0^-\right) = 0 \qquad y'\left(0^+\right) = y'\left(0^-\right) = 0$$

Uvjete sustava uvrštavamo u izraz za mirni odziv

$$y_m\left(0^+\right) = C_1 + C_2 + 2 = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = -2$$
$$y_m'\left(0^+\right) = -C_1 - 2C_2 = 0 \rightarrow C_1 + 2C_2 = 0$$

Nepoznati koeficijenti su

$$C_1 = -4 \qquad C_2 = 2$$

Konačno, mirni odziv sustava je

$$y_m(t) = -4e^{-t} + 2e^{-2t} + 2 \qquad t \geq 0$$

Nepobuđeni odziv sustava.

$$y_n(t) = y_h(t)$$

$$y_n(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

$$y_n'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$$

Nepoznate koeficijente općeg homogenog rješenja iz uvjeta sustava prije početka djelovanja pobude.

$$y\left(0^-\right) = 2 \qquad y'\left(0^-\right) = 1$$

Uvjete sustava uvrštavamo u izraz za nepobuđeni odziv

$$y_n\left(0^-\right) = C_1 + C_2 = 2$$

$$y_n'\left(0^-\right) = -C_1 - 2C_2 = 1 \rightarrow C_1 + 2C_2 = -1$$

Nepoznati koeficijenti su

$$C_1 = 5 \qquad C_2 = -3$$

Konačno, nepobuđeni odziv sustava je

$$y_n(t) = 5e^{-t} - 3e^{-2t}$$

Problem 3. Za LTI sustav opisan zadanom diferencijalnom jednadžbom

$$y'''(t) - y'(t) = 2u(t)$$

pronađite totalni, te mirni i nepobuđeni odziv. Zadano je

$$y\left(0^-\right) = 4 \qquad y'\left(0^-\right) = 1 \qquad y''\left(0^-\right) = 3 \qquad u(t) = 3\mu(t)$$

Opća homogena jednadžba sustava.

Karakteristična jednadžba sustava je

$$p = s^3 - s$$

Karakteristične frekvencije sustava su

$$s^3 - s = 0$$

$$s_1 = 0 \qquad s_2 = 1 \qquad s_3 = -1$$

Opća homogena jednadžba sustava je

$$y_h(t) = C_1 + C_2 e^{t} + C_3 e^{-t}$$

Partikularno rješenje sustava.

Pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = Kt \qquad y_p'(t) = K \qquad y_p'''(t) = 0$$

Pretpostavljeni partikularni oblik uvrštavamo u jednadžbu sustava

$$y_p'''(t) - y_p'(t) = 2u(t)$$

$$0 - K = 6 \rightarrow K = -6$$

Partikularno rješenje sustava je

$$y_p(t) = -6t \qquad t \geq 0$$

Totalni odziv sustava.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$
$$y(t) = C_1 + C_2 e^{t} + C_3 e^{-t} - 6t$$
$$y'(t) = C_2 e^{t} - C_3 e^{-t} - 6$$
$$y''(t) = C_2 e^{t} + C_3 e^{-t}$$

Nepoznate koeficijente općeg homogenog rješenja računamo iz uvjeta sustava nakon početka djelovanja pobude. Kako sustav kao ulaz nema derivaciju pobude, uvjeti u trenucima $t = 0^-$ i $t = 0^+$ su jednaki

$$y\left(0^+\right) = y\left(0^-\right) = 4 \qquad y'\left(0^+\right) = y'\left(0^-\right) = 1 \qquad y''\left(0^+\right) = y''\left(0^-\right) = 3$$

Uvjete sustava uvrštavamo u izraz za totalni odziv

$$y\left(0^+\right) = C_1 + C_2 + C_3 = 4$$

$$y'\left(0^+\right) = C_2 - C_3 - 6 = 1 \rightarrow C_2 - C_3 = 7$$

$$y''\left(0^+\right) = C_2 + C_3 = 3$$

Nepoznati koeficijenti su

$$C_1 = 1 \qquad C_2 = 5 \qquad C_3 = -2$$

Konačno, totalni odziv sustava je

$$y(t) = 1 + 5e^{t} - 2e^{-t} - 6t \qquad t \geq 0$$

Mirni odziv sustava.

$$y_m(t) = y_h(t) + y_p(t)$$
$$y_m(t) = C_1 + C_2 e^{t} + C_3 e^{-t} - 6t$$
$$y'_m(t) = C_2 e^{t} - C_3 e^{-t} - 6$$
$$y''_m(t) = C_2 e^{t} + C_3 e^{-t}$$

Uvjeti sustava koje ćemo koristiti za određivanje nepoznatih koeficijenata homogenog rješenja jednaki su

$$y\left(0^{+}\right) = y\left(0^{-}\right) = 0 \qquad y'\left(0^{+}\right) = y'\left(0^{-}\right) = 0 \qquad y''\left(0^{+}\right) = y''\left(0^{-}\right) = 0$$

Uvjete sustava uvrštavamo u izraz za mirni odziv

$$y_m\left(0^{+}\right) = C_1 + C_2 + C_3 = 0$$
$$y'_m\left(0^{+}\right) = C_2 - C_3 - 6 = 0 \rightarrow C_2 - C_3 = 6$$
$$y''_m\left(0^{+}\right) = C_2 + C_3 = 0$$

Nepoznati koeficijenti su

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = 3 \qquad C_3 = -3$$

Konačno, mirni odziv sustava je

$$y_m(t) = 3e^{t} - 3e^{-t} - 6t \qquad t \geq 0$$

Nepobuđeni odziv sustava.

$$y_n(t) = y_h(t)$$
$$y_n(t) = C_1 + C_2 e^{t} + C_3 e^{-t}$$
$$y'_n(t) = C_2 e^{t} - C_3 e^{-t}$$
$$y''_n(t) = C_2 e^{t} + C_3 e^{-t}$$

Nepoznate koeficijente općeg homogenog rješenja računamo iz uvjeta sustava prije početka djelovanja pobude.

$$y\left(0^{-}\right) = 4 \qquad y'\left(0^{-}\right) = 1 \qquad y''\left(0^{-}\right) = 3$$

Uvjete sustava uvrštavamo u izraz za nepobuđeni odziv

$$y_n\left(0^{-}\right) = C_1 + C_2 + C_3 = 4$$
$$y'_n\left(0^{-}\right) = C_2 - C_3 = 1$$
$$y''_n\left(0^{-}\right) = C_2 + C_3 = 3$$

Nepoznati koeficijenti su

$$C_1 = 1 \qquad C_2 = 2 \qquad C_3 = 1$$

Konačno, nepobuđeni odziv sustava je

$$y_n(t) = 1 + 2e^t + 1e^{-t}$$

Problem 4. Za LTI sustav opisan zadanom diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) - y(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

pronađite totalni odziv. Zadano je

$$u_1 = 3e^{-2t}\mu(t) \qquad u_2 = 5\mu(t)$$

$$y\left(0^-\right) = 2 \qquad y'\left(0^-\right) = 1$$

Opća homogena jednadžba sustava.

Karakteristična jednadžba sustava je

$$p = s^2 - s$$

Karakteristične frekvencije sustava su

$$s^2 - s = 0$$

$$s_1 = 0 \qquad s_2 = 1$$

Opća homogena jednadžba sustava je

$$y_h(t) = C_1 + C_2 e^t$$

Odziv sustava na pobudu $u_1(t)$.

$$y''(t) - y(t) = u_1(t)$$

Pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = Ke^{-2t} \qquad y_p'(t) = -2Ke^{-2t}$$

$$y_p''(t) = 4Ke^{-2t}$$

Partikularno rješenje sustava je

$$y_p(t) = e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Izrazi za totalni odziv sustava su

$$y_1(t) = C_1 + C_2 e^t + e^{-2t}$$

$$y_1'(t) = C_2 e^t - 2e^{-2t}$$

Uvjeti sustava iz kojih ćemo dobiti nepoznate koeficijente su

$$y\left(0^+\right) = y\left(0^-\right) = 2 \qquad y'\left(0^+\right) = y'\left(0^-\right) = 1$$

Nepoznati koeficijenti su

$$C_1 = -2 \qquad C_2 = 3$$

Konačno, totalni odziv sustava na pobudu $u_1(t)$ je

$$y_1(t) = -2 + 3e^t + e^{-2t}$$

Odziv sustava na pobudu $u_2(t)$.

$$y''(t) - y(t) = -u_2(t)$$

Pretpostavljeni partikularni oblik je

$$y_p(t) = K \qquad y_p'(t) = y_p''(t) = 0$$

$$y_p''(t) - y_p(t) = -u_2(t)$$

Partikularno rješenje sustava je

$$y_p(t) = 5 \qquad t \geq 0$$

Izrazi za totalni odziv sustava su

$$y_2(t) = C_1 + C_2 e^t + 5$$

$$y_2'(t) = C_2 e^t$$

Uvjeti sustava iz kojih ćemo dobiti nepoznate koeficijente su

$$y\left(0^+\right) = y\left(0^-\right) = 2 \qquad y'\left(0^+\right) = y'\left(0^-\right) = 1$$

Nepoznati koeficijenti su

$$C_1 = -4 \qquad C_2 = 1$$

Konačno, totalni odziv sustava na pobudu $u_2(t)$ je

$$y_2(t) = e^t + 1 \qquad t \geq 0$$

Totalni odziv sustava na linearnu kombinaciju pobuda $u_1(t)$ i $u_2(t)$.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$
$$y(t) = 4e^{t} + e^{-2t} - 1 \qquad t \geq 0$$

Problem 5. Za LTI sustav opisan zadanom diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2u''(t) + u'(t) + u(t)$$

pronađite impulsni odziv.

Karakteristična jednadžba sustava je

$$p = s^2 + 2s + 1$$

Karakteristične frekvencije sustava su

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$
$$s_1 = s_2 = -1$$

Opća homogena jednadžba sustava je

$$y_h(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-t}$$

Prema tome, jednadžba $h_A(t)$ ima oblik

$$h_A(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-t}$$

Nepoznate koeficijente dobijemo iz uvjeta

$$h_A\left(0^+\right) = 0 \qquad h'_A\left(0^+\right) = 1$$

Konačno, jednadžba $h_A(t)$ je

$$h_A(t) = te^{-t}$$

Odredimo koeficijente opće diferencijalne jednadžbe. Opća diferencijalna jednadžba drugog reda ima oblik

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t)$$

Kada usporedimo opću diferencijalnu jednadžbu drugog reda sa diferencijalnom jednadžbom koja opisuje zadani sustav dobijemo

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = 1 \qquad b_0 = 2 \qquad b_1 = b_2 = 1 \qquad N = M = 2$$

Prema izrazu 1.7 impulsni odziv sustava je

$$h(t) = b_0 \delta(t) + \sum_{m=0}^{2} \left(b_{2-m} D^m\right) h_A(t)$$
$$h(t) = b_0 \delta(t) + \left(b_2 D^0 h_A(t) + b_1 D^1 h_A(t) + b_0 D^2 h_A(t)\right)$$
$$h(t) = 2\delta(t) + h_A(t) + h'_A(t) + 2h''_A(t)$$

Konačno, impulsni odziv sustava je

$$h(t) = 2\delta(t) - 3e^{-t} + 2te^{-t} \qquad t \geq 0$$

2 Laplaceova transformacija

Dvostranu Laplaceovu transformaciju definiramo kao

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt \tag{2.1}$$

pri čemu vremenski signal $x(t)$ i frekvencijska slika $X(s)$ čine transformacijski par.

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) \qquad x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

Example 6. Pronađimo Laplaceovu transformaciju signala

$$x(t) = e^{-\alpha t}\mu(t)$$

Laplaceova transformacija zadanog signala je

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}\mu(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

$$X(s) = \frac{1}{-(s+a)} e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-(s+a)} \left[\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t}}_{\to 0} - \underbrace{\lim_{t\to 0} e^{-(s+a)t}}_{\to 1} \right]$$

Konačno, transformacija je

$$x(t) = e^{-\alpha t}\mu(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} = X(s)$$

Međutim, možemo primjetiti kako transformacijski integral neće uvijek konvergirati. Naime, za slučaj kada je $(s+a) < 0$ Laplaceova transformacija je

$$X(s) = \infty$$

Prema tome, kažemo da izračunata Laplaceova transformacija ima smisla samo kada vrijedi uvjet

$$s + a > 0 \to s > -a$$

Navedeni uvjet naziva se područje kovergencije transformacije i jako je bitno ako radimo s dvostranom Laplaceovom transformacijom.

$$e^{-\alpha t}\mu(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad s > -a$$

Example 7. Pronađimo Laplaceovu transformaciju signala

$$x(t) = -e^{-\alpha t}\mu(-t)$$

Laplaceova transformacija zadanog signala je

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\alpha t}\mu(-t)\, e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{(-s-a)t} dt$$

$$X(s) = \frac{-1}{(-s-a)} e^{(-s-a)t}\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{(s+a)}\left[\underbrace{\lim_{t\to 0} e^{(-s-a)t}}_{\to 1} - \underbrace{\lim_{t\to -\infty} e^{(-s-a)t}}_{\to 0}\right]$$

Konačno, transformacija je

$$x(t) = -e^{-\alpha t}\mu(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} = X(s)$$

Međutim, možemo primjetiti kako transformacijski integral neće uvijek konvergirati. Naime, za slučaj kada je $(-s-a) < 0$ Laplaceova transformacija je

$$X(s) = \infty$$

Prema tome, kažemo da izračunata Laplaceova transformacija ima smisla samo kada vrijedi uvjet

$$(-s-a) > 0 \to s < -a$$

Navedeni uvjet naziva se područje kovergencije transformacije i jako je bitno ako imamo posla s dvostranom Laplaceovom transformacijom.

$$-e^{-\alpha t}\mu(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-a} \qquad s < -a$$

Example 8. Pronađite signal u vremenskom području čija je Laplaceova transformacija

$$X(s) = \frac{1}{s-a}$$

Postoje dva vremenska signala koji imaju zadanu Laplaceovu transformaciju

$$u(t) = e^{-\alpha t}\mu(t) \qquad u(t) = -e^{-\alpha t}\mu(-t)$$

Kojeg od ova dva signala uzeti kao rješenje, ovisi o području konvergencije koje u ovom primjeru nije zadano.

Kako se u realnim sustavima pojavljuju samo kauzalni signali, u nastavku ćemo koristiti jednostranu Laplaceovu transformaciju kako bi izbjegli daljnje korištenje područja konvergencije. Jednostranu Laplaceovu transformaciju definiramo kao

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt \tag{2.2}$$

Ubuduće, kada bude riječi o dvostranoj α-transformaciji to će biti posebno naglašeno, dok se za jednostrane transformacije to neće posebno naglašavati.

Tablica Laplaceove transformacije nekih uobičajnih signala dana je u nastavku.

Vremenski signal $x(t)$	Laplaceova transformacija $\mathcal{L}\{x(t)\}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$
$t\mu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^j\mu(t)$	$\frac{j!}{s^{j+1}}$
$e^{at}\mu(t)$	$\frac{1}{s-a}$
$te^{at}\mu(t)$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$t^je^{at}\mu(t)$	$\frac{j!}{(s-a)^{j+1}}$
$\cos(bt)\mu(t)$	$\frac{s}{s^2+b}$
$\sin(bt)\mu(t)$	$\frac{b}{s^2+b}$
$e^{-at}\cos(bt)\mu(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b}$
$e^{-at}\sin(bt)\mu(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b}$

Tablica 2.1: Laplaceova transformacija uobičajnih signala

2.1 Svojstva Laplaceove transformacije

U nastavku su navedena neka važnija svojstva α-transformacije koja ćemo koristiti.

2.1.1 Linearnost

Ako vrijede transformacijski parovi

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) \qquad y(t) \longleftrightarrow Y(s)$$

tada vrijedi

$$\mathcal{L}\{ax(t) \pm by(t)\} = aX(s) \pm bY(s) \tag{2.3}$$

Example 9. Pronađite Laplaceovu transformaciju zadanog signala

$$u(t) = 3e^{2t}\mu(t) + 5te^{3t}\mu(t)$$

Laplaceova transformacija je

$$\mathcal{L}\left\{3e^{2t}\mu(t) + 5t\mu(t)\right\} = 3\mathcal{L}\left\{e^{2t}\mu(t)\right\} + 5\mathcal{L}\left\{te^{3t}\mu(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{3e^{2t}\mu(t) + 5t\mu(t)\right\} = \frac{3}{s-2} + \frac{5}{(s-3)^2}$$

2.1.2 Pomak u vremenu

Ako vrijedi transformacijski par

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

tada vrijedi

$$\mathcal{L}(x(t-t_0)) = X(s)\,e^{-st_0} \tag{2.4}$$

Example 10. Pronađite Laplaceovu transformaciju zadanog signala

$$u(t) = e^{3(t-5)}\mu(t-5)$$

Laplaceova transformacija je

$$\mathcal{L}\left\{e^{3t}\mu(t)\right\} = \frac{1}{s-3}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{3(t-5)}\mu(t-5)\right\} = \frac{1}{s-3}e^{-5s}$$

2.1.3 Frekvencijski pomak

Ako vrijedi transformacijski par

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

tada vrijedi

$$\mathcal{L}\left(e^{at}x(t)\right) = X(s-a) \tag{2.5}$$

2.1.4 Vremenska kompresija

Ako vrijedi transformacijski par

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

tada vrijedi

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \tag{2.6}$$

2.1.5 Konvolucija u vremenu

Ako vrijede transformacijski parovi

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) \qquad y(t) \longleftrightarrow Y(s)$$

tada vrijedi

$$\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)Y(s) \tag{2.7}$$

Kažemo da konvoluciji u vremenskoj domeni odgovara množenje u frekvencijskoj domeni. Vrijedi i obrat, množenju u vremenskoj domeni odgovara konvolucija u frekvencijskoj.

2.1.6 Vremenska derivacija

Ako vrijedi transformacijski par

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

tada vrijedi

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = sX(s) - x\left(0^-\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = s^2X(s) - sx\left(0^-\right) - x'\left(0^-\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3}{dt^3}x(t)\right\} = s^3X(s) - s^2x\left(0^-\right) - sx'\left(0^-\right) - x''\left(0^-\right)$$

Općenito, Laplaceova transformacija i-te derivacije signala $x(t)$ je

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^i}{dt^i}x(t)\right\} = s^iX(s) - s^{i-1}x\left(0^-\right) - s^{i-2}x^{(1)}\left(0^-\right) - ... - x^{(i-1)}\left(0^-\right) \tag{2.8}$$

Example 11. Pronađimo Laplaceovu transformaciju druge derivacije pobudnog signala $\mathcal{L}(u''(t))$.

$$u(t) = 64\mu(t)$$

Prema relaciji (2.8) Laplaceova transformacija je

$$\mathcal{L}\left(u''(t)\right) = s^2 U(s) - su\left(0^-\right) - u'\left(0^-\right)$$

Kako je $t = 0^-$ trenutak prije početka djelovanja pobude, zaključujemo da vrijedi

$$u\left(0^-\right) = u'\left(0^-\right) = 0$$

Konačno, Laplaceova transformacija zadanog signala je

$$\mathcal{L}\left(u''(t)\right) = s^2 \frac{64}{s} = 64s$$

Example 12. Pronađimo Laplaceovu transformaciju druge derivacije izlaznog signala $\alpha(y''(t))$, ako su početni uvjeti

$$y\left(0^-\right) = 3 \qquad y'\left(0^-\right) = 5$$

Prema relaciji (2.8) Laplaceova transformacija zadanog signala je

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) = s^2 Y(s) - sy\left(0^-\right) - y'\left(0^-\right)$$

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) = s^2 Y(s) - 3s - 5$$

2.1.7 Integracija u vremenu

Ako vrijedi transformacijski par

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

tada vrijedi

$$\int_{0^-}^{t} x(t)\,dt \longleftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$

$$\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{t} x(t)\,dtdt \longleftrightarrow \frac{1}{s^2} X(s)$$

Općenito, Laplaceova transformacija i-te integracije signala $x(t)$ je

$$\underbrace{\int_{0^-}^{t} \dots \int_{0^-}^{t}}_{i} x(t)\,dt \dots dt \longleftrightarrow \frac{1}{s^i} X(s) \tag{2.9}$$

2.1.8 Frekvencijska derivacija

Ako vrijedi transformacijski par

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

tada vrijedi

$$\mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{d}{ds}X(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2 x(t)\right\} = \frac{d^2}{ds^2}X(s)$$

Općenito vrijedi

$$\mathcal{L}\left\{t^i x(t)\right\} = (-1)^i \frac{d^i}{ds^i}X(s) \qquad (2.10)$$

2.2 Inverzna Laplaceova transformacija

Inverzna Laplaceova transformacija postupak je određivanja vremenskog signala na temelju zadanog transformata. Postoji više metoda za određivanje traženog vremenskog signala, no u okviru ove zbirke držat ćemo se rastava na parcijalne razlomke.

Nužni uvjet da bi se razlomak mogao rastaviti na parcijalne razlomke je da stupanj brojnika bude strogo manji od stupnja nazivnika. Ako ovaj uvjet nije zadovoljen, potrebno je određenim metodama (npr. dijeljenjem polinoma) srušiti stupanj brojnika da on postane manji od stupnja nazivnika. U nastavku je dano nekoliko primjera rastava razlomaka na parcijalne razlomke.

2.3 Diferencijalne jednadžbe u frekvencijskoj domeni

3 Stabilnost sustava

4 Sustav u prostoru varijabli stanja

5 Analiza sustava prikazanih blokovskim dijagramom