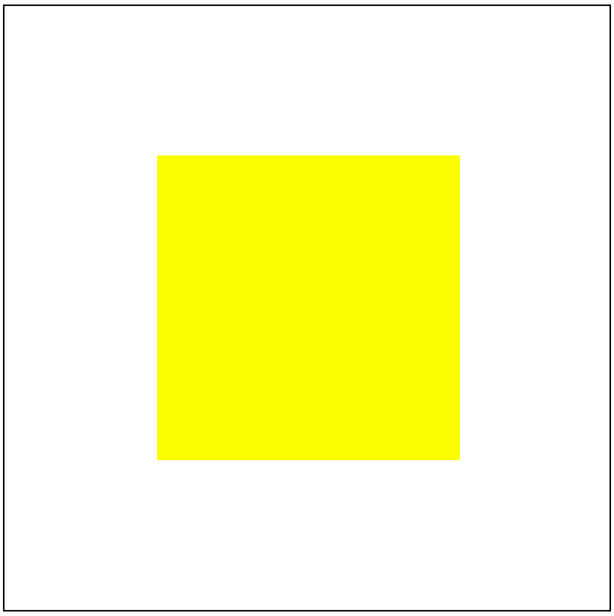
Signali i sustavi – zadaci za vježbu

I – tjedan

1. Slika koja se sastoji od žutog kvadrata stranice 8cm u centru slike i kvadratne bijele pozadine stranice 12cm naziva se *alber*. Izrazite *alber* kao funkciju, tj. odredite domenu, kodomenu, te funkcijsko pridruživanje.



Slika 1. Alber

2. Dani su konačni skupovi *X i Y*.
   a. Ako je $X = \{a, b, c\}$ i $Y = \{0, 1\}$, potrebno je pronaći i ispisati sve funkcije s X u Y, odnosno pronaći sve elemente skupa $[X \to Y]$.
   b. Ako je $\mathrm{card}(X) = m$, te $\mathrm{card}(Y) = n$, koliko je $\mathrm{card}([X \to Y])$? Pri tome je $\mathrm{card}(X)$ kardinalni broj skupa X.

3. Na drugoj godini omiljenog Vam Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu ima točno *m* studentica i *n* studenata. Na koliko se različitih načina mogu spojiti studentice i studenti (studentice biraju ☺) tako da svaki student bude najviše s jednom studenticom? Što možete reći o takvoj funkciji pridruživanja? Što možete reći o slučaju da svaki student bude barem s jednom studenticom?

4. Dani su signali $x(t)$ i $y(t)$. Potrebno je skicirati produkt ova dva signala na intervalu $t \in [-2, 2]$.

$$x(t) = \begin{cases} 1, \sin(4\pi t) \geq 0, \\ -1, \sin(4\pi t) < 0. \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} t, \sin(\pi t) \geq 0, \\ -t, \sin(\pi t) < 0. \end{cases}$$

5. Može li se svaki signal rastaviti na parni i neparni dio? Ako da, dokažite to, a ako ne obrazložite zašto ne!

6. Nađite parni i neparni dio sljedećih kontinuiranih signala

$$a)\ x(t) = 2t^2 - 3t + 6,$$

$$b)\ x(t) = \frac{2-t}{1+t}.$$

7. Nađite parni i neparni dio sljedećih diskretnih signala

$$a)\ x(n) = e^{j(\Omega_0 n + \frac{\pi}{2})},$$

$$b)\ x(n) = \delta(n).$$

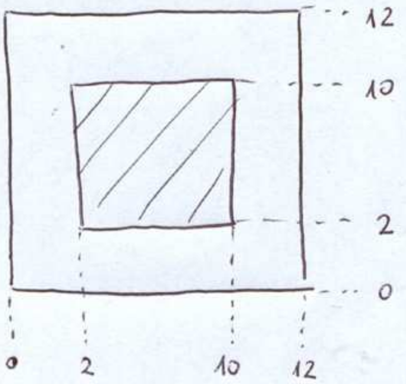
8. Neka je x proizvoljan signal, x_p njegov parni dio, a x_n njegov neparni dio. Dokažite

   a. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p{}^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_n{}^2(t)dt$, ako je x kontinuiran signal,

   b. $\sum_{-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_p{}^2(n) + \sum_{-\infty}^{\infty} x_n{}^2(n)$, ako je x diskretan signal.

SANJA ŠAIN
0036419135

1.



$\mathcal{D} : [0,12] \times [0,12]$

$\mathcal{K}$: INTENZITET ^{3}

$$\text{alber}(x,y) = \begin{cases} (255,255,0), & x \in [2,10] ; y \in [2,10] \\ (255,255,255), & \text{inače} \end{cases}$$

$I_{max} = 255$

SANJA ŠAIN
0036419135

2.

a) $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$

$[X \to Y] = ?$

b) $\text{card}(X) = m$,

$\text{card}(Y) = n$

$\text{card}([X \to Y]) = ?$

a) $[X \to Y]$:

$\{(a\ 0), (b, 0), (c\ 0)\}$, $\{(a \to 1), (b \to 0), (c \to 0)\}$,

$\{(a \to 0), (b \to 0), (c \to 1)\}$, $\{(a \to 1), (b \to 0), (c \to 1)\}$,

$\{(a \to 0), (b \to 1), (c \to 0)\}$, $\{(a \to 1), (b \to 1), (c \to 0)\}$,

$\{(a \to 0, (b \to 1), (c \to 1)\}$, $\{(a \to 1), (b \to 1), (c \to 1)\}$

b) $\text{card}([X \to Y]) = n^m$

(u konkretnom slučaju, $\text{card}([X \to Y]) = n^m = 2^3 = 8$)

Gordan Kreković, 0036419481

3.

a)

$$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Budući da svaka studentica bira jednog studenta, prva to može učiniti na *n* načina, druga na *n*-1 (jer je jedan već preotet) i tako dalje.

Takva funkcija pridruživanja je injekcija. Pri tome je uzeto da je skup studentica domena, a skup studenata kodomena. Svaki student je izabran ne više od jednom, tako da je riječ o injekciji.

b)

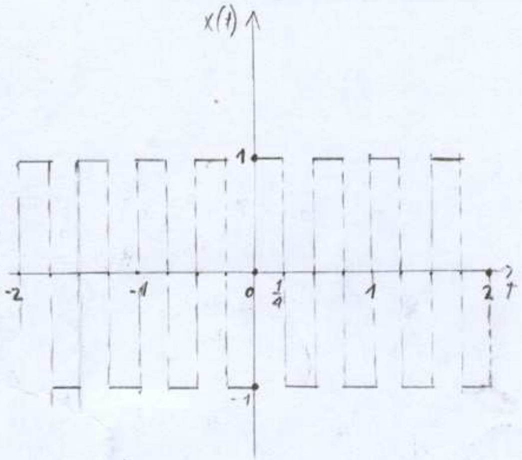
Radi se o surjekciji jer je domena ujedno i slika funkcija, odnosno svi elementi su pogođeni, svi studenti izabrani.

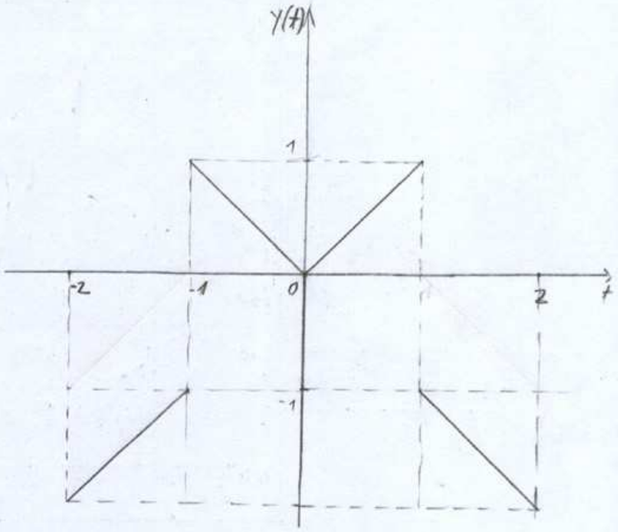
ANĐELO MARTINOVIĆ , 0036423540

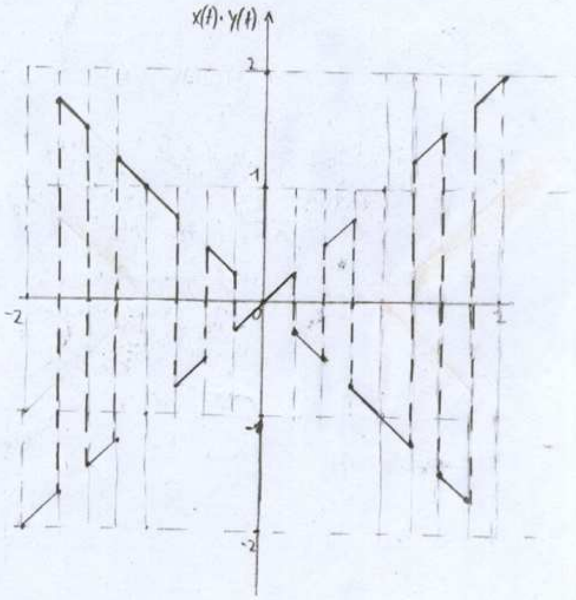
4) $t \in [-2, 2]$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \sin(4\pi t) \geq 0 \\ -1, & \sin(4\pi t) < 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} t, & \sin(\pi t) \geq 0 \\ -t, & \sin(\pi t) < 0 \end{cases}$$







SANJA ŠAIN, 0036419135

5. uzmimo da je signal opisan funkcijom $f(x)$

$$f(x) = f(x) + f(-x) - f(-x) =$$

$$= \frac{f(x) + f(x) + f(-x) - f(-x)}{2} =$$

$$= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = g(x) + h(x)$$

- za prvi pribrojnik vrijedi da je $g(x) = g(-x)$, znači $g(x)$ je parna funkcija

- za drugi pribrojnik vrijedi da je $h(-x) = -h(x)$, znači $h(x)$ je neparna funkcija

Očito svaku $f(x)$ možemo rastaviti na zbroj parne i neparne funkcije. ∎

SANJA ŠAIN
0036419135

6

a) $x(t) = 2t^2 - 3t + 6$

očito je $x_p(t) = 2t^2 + 6$, a $x_u(t) = -3t$

b) $x(t) = \dfrac{2-t}{1+t}$

za parni dio vrijedi: $x_p(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$

za neparni —"— : $x_n(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$

(dokaz u 5. zad.)

$$x_p(t) = \frac{\frac{2-t}{1+t}^{(1-t} + \frac{2+t}{1-t}^{(1+t}}{2} = \frac{2-\cancel{t}-\cancel{2t}+t^2+2+\cancel{t}+\cancel{2t}+t^2}{2(1-t^2)} = \frac{t^2+4}{2-2t^2}$$

$$x_u(t) = \frac{\frac{2-t}{1+t} - \frac{2+t}{1-t}}{2} = \frac{\cancel{2}-t-2t+\cancel{t^2}-\cancel{2}-t-2t-\cancel{t^2}}{2(1-t^2)} = -\frac{3t}{1-t^2}$$

Davor Sutic
0036419109
Grupa 2R1

7.

a)

$$e^{j(\omega*n+\pi/2)} = \cos(\omega*n+\pi/2) + j*\sin(\omega*n+\pi/2) =$$
$$-\sin(\omega*n) + j*\cos(\omega*n)$$

Kosinusni dio je paran, a sinusni neparan.

b) Ovo je diskretna Dirac delta funkcija koja samo u 0 iznosi 1, inace 0. Funkcija je parna.

Gordan Kreković, 0036419481

8.

a) $x(t) = x_m(t) + x_p(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x_m(t) + x_p(t))^2\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_m^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t)\,dt + \underbrace{2\int_{-\infty}^{\infty} (x_m x_p)(t)\,dt}_{0} \Rightarrow *$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_m(t)\cdot x_p(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x_m(t)\,x_p(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} x_m(t)\,x_p(t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} x_m(-t)\,x_p(-t)\,dt + \int_{0}^{\infty} x_m(t)\,x_p(t)\,dt =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} x_m(t)\,x_p(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} x_m(t)\,x_p(t)\,dt = 0$$

$$* \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_m^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t)\,dt$$

b) $$\sum_{-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} (x_p(n) + x_m(n))^2 =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x_p^2(n) + \sum_{-\infty}^{\infty} x_m^2(n) + 2\sum_{-\infty}^{\infty} x_p(n)\cdot x_m(n) \Rightarrow *$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x_p(n)\,x_m(n) = \sum_{-\infty}^{0} x_p(n)\,x_m(n) + \sum_{0}^{\infty} x_p(n)\,x_m(n) =$$

$$= -\sum_{0}^{\infty} x_p(n)\,x_m(n) + \sum_{0}^{\infty} x_p(n)\,x_m(n) = 0$$

jer je $x_p(-n) = +x_p(n)$
$x_m(-n) = -x_m(n)$

$$* \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_p^2(n) + \sum_{-\infty}^{\infty} x_m^2(n)$$