Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

X. tjedan

1. Odredite je li zadani diskretan sustav vremenski stalan, linearan, memorijski, kauzalan i BIBO stabilan. Možete li mu naći inverzni sustav?

$$y(n) = 2^{u(n)}.$$

__Rješenje:__

Kako $y(n)$ ovisi samo o $u(n)$ sustav nije **memorijski**. Iz istog razloga je i **kauzalan**.

Vremensku promjenjivost provjeravamo tako da prvo zakasnimo ulazni signal za neki M

$$u_1(n) = u(n-M),$$

te taj signal propustimo kroz sustav. Na izlazu iz sustava će biti

$$y_1(n) = 2^{u_1(n)} = 2^{u(n-M)}.$$

S druge strane, kada bi ulazni signal propustili kroz sustav dobili bi

$$y(n) = 2^{u(n)}.$$

Ako sada taj izlaz zakasnimo za onaj isti M, dobit ćemo

$$y(n-M) = 2^{u(n-M)}.$$

Kako su $y_1(n) = y(n-M)$ ovaj sustav je vremenski stalan.

Linearnost se provjerava tako da se na ulaz sustava dovedu dva različita ulazna signala $u_1(n)$ i $u_2(n)$ pomnožena sa različitim konstantama (homogenost), te zbrojena (aditivnost)

$$u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n).$$

Na izlazu iz sustava će biti $y(n) = 2^{\alpha u_1(n)+\beta u_2(n)}$.

S druge strane ako je na ulazu u sustav $u_1(n)$ na izlazu će biti $y_1(n) = 2^{u_1(n)}$, a ako je na ulazu $u_2(n)$ na izlazu će biti $y_2(n) = 2^{u_2(n)}$. Ovi izlazi pomnoženi sa konstantama i zbrojeni daju $y(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) = \alpha \cdot 2^{u_1(n)} + \beta \cdot 2^{u_2(n)}$.

Kako ova dva izlaza nisu jednaka, sustav nije linearan.

Sustav je **BIBO stabilan** ako na ograničenu pobudu daje ograničeni odziv. Zadani sustav je BIBO stabilan.

Inverz sustava: $y(n) = \log_2 u(n)$.

2. Odredite je li zadani kontinuirani sustav vremenski stalan, linearan, memorijski i kauzalan.

$$y(t) = u(t^2).$$

<u>**Rješenje:**</u>

Memorija: sustav u nekom trenutku *t* ovisi o onome što je na ulazu u trenutku t^2, pa je prema tome sustav memorijski.

Kauzalnost: Kako sustav ovisi i o onome što će se dogoditi u budućnosti, sustav nije kauzalan.

Vremensku promjenjivost provjeravamo tako da prvo zakasnimo ulazni signal za neki *M*

$$u_1(t) = u(t - M),$$

te taj signal propustimo kroz sustav. Na izlazu iz sustava će biti

$$y_1(t) = u_1(t^2) = u(t^2 - M).$$

S druge strane, kada bi ulazni signal propustili kroz sustav dobili bi

$$y(t) = u(t^2).$$

Ako sada taj izlaz zakasnimo za onaj isti *M*, dobit ćemo

$$y(t - M) = u((t - M)^2) = u(t^2 - 2tM + M^2).$$

Kako je $y_1(t) \neq y(t - M)$ ovaj sustav je vremenski promjenjiv.

Linearnost se provjerava tako da se na ulaz sustava dovedu dva različita ulazna signala $u_1(t)$ i $u_2(t)$ pomnožena sa različitim konstantama (homogenost), te zbrojena (aditivnost)

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t).$$

Na izlazu iz sustava će biti $y(t) = \alpha u_1(t^2) + \beta u_2(t^2)$.

S druge strane ako je na ulazu u sustav $u_1(t)$ na izlazu će biti $y_1(t) = u_1(t^2)$, a ako je na ulazu $u_2(t)$ na izlazu će biti $y_2(t) = u_2(t^2)$. Ovi izlazi pomnoženi sa konstantama i zbrojeni daju $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha u_1(t^2) + \beta u_2(t^2)$.

Kako su ova dva izlaza jednaka, sustav je linearan.

3. Odredite je li zadani diskretan sustav vremenski stalan, linearan, memorijski i kauzalan.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k)}{n-k} \,.$$

<u>Rješenje:</u>

Raspišimo zadani sustav

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k)}{n-k} = \cdots + \frac{u(-1)}{n+1} + \frac{u(0)}{n} + \frac{u(1)}{n-1} + \cdots + \frac{u(n-1)}{1} + \frac{u(n)}{0}.$$

Memorija: sustav u nekom trenutku *n* ovisi o onome što je na ulazu u svim trenutcima prije toga, pa je prema tome sustav memorijski.

Kauzalnost: Kako sustav ovisi samo o onome što se dogodilo u prošlosti (i sadašnjosti), sustav je kauzalan.

Vremensku promjenjivost provjeravamo tako da prvo zakasnimo ulazni signal za neki *M*

$$u_1(n) = u(n-M),$$

te taj signal propustimo kroz sustav. Na izlazu iz sustava će biti

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k-M)}{n-k} = \left| \begin{array}{c} k-M=a \\ \text{za } k=-\infty \rightarrow a=-\infty \\ \text{za } k=n \rightarrow a=n-M \end{array} \right| = \sum_{a=-\infty}^{n-M} \frac{u(a)}{n-a-M}.$$

S druge strane, kada bi ulazni signal propustili kroz sustav dobili bi

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k)}{n-k}.$$

Ako sada taj izlaz zakasnimo za onaj isti *M*, dobit ćemo

$$y(n-M) = \sum_{k=-\infty}^{n-M} \frac{u(k)}{n-M-k}.$$

Kako je $y_1(n) = y(n-M)$ (razlika samo po imenu varijable po kojoj sumiramo) ovaj sustav je vremenski stalan.

Linearnost se provjerava tako da se na ulaz sustava dovedu dva različita ulazna signala $u_1(n)$ i $u_2(n)$ pomnožena sa različitim konstantama (homogenost), te zbrojena (aditivnost)

$$u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n).$$

Na izlazu iz sustava će biti

$$\begin{aligned} y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{\alpha u_1(k) + \beta u_2(k)}{n-k} &= \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{\alpha u_1(k)}{n-k} + \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{\beta u_2(k)}{n-k} \\ &= \alpha \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_1(k)}{n-k} + \beta \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_2(k)}{n-k} \end{aligned}$$

S druge strane ako je na ulazu u sustav $u_1(n)$ na izlazu će biti $y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_1(k)}{n-k}$, a ako je na ulazu $u_2(n)$ na izlazu će biti $y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_2(k)}{n-k}$. Ovi izlazi pomnoženi sa konstantama i zbrojeni daju

$$y(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) = \alpha \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_1(k)}{n-k} + \beta \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_2(k)}{n-k}.$$

Kako su ova dva izlaza jednaka, sustav je linearan.

4. Odredite je li zadani kontinuirani sustav vremenski stalan, linearan, memorijski i kauzalan.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mu(-\tau) u(t-\tau) d\tau \,.$$

Rješenje:

Memorija: zadani sustav možemo napisati u obliku

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} u(t-\tau) d\tau.$$

Vidi se da sustav u nekom trenutku *t* ovisi o onome što je na ulazu u budućim trenucima, pa je prema tome sustav memorijski.

Kauzalnost: Kako sustav ovisi o onome što će se dogoditi u budućnosti, sustav nije kauzalan.

Vremensku promjenjivost provjeravamo tako da prvo zakasnimo ulazni signal za neki *M*

$$u_1(t) = u(t-M),$$

te taj signal propustimo kroz sustav. Na izlazu iz sustava će biti

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mu(-\tau) u_1(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mu(-\tau) u(t-\tau-M) d\tau \,.$$

S druge strane, kada bi ulazni signal propustili kroz sustav dobili bi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mu(-\tau) u(t-\tau) d\tau \,.$$

Ako sada taj izlaz zakasnimo za onaj isti *M*, dobit ćemo

$$y(t-M) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \mu(-\tau) u(t-M-\tau) d\tau \,.$$

Kako je $y_1(t) = y(t-M)$ ovaj sustav je vremenski stalan.

Linearnost se provjerava tako da se na ulaz sustava dovedu dva različita ulazna signala $u_1(t)$ i $u_2(t)$ pomnožena sa različitim konstantama (homogenost), te zbrojena (aditivnost)

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t).$$

Na izlazu iz sustava će biti

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)\big(\alpha u_1(t-\tau) + \beta u_2(t-\tau)\big)d\tau$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_1(t-\tau)d\tau \; + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_2(t-\tau)d\tau \,.$$

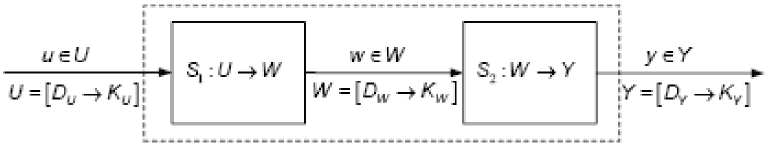
S druge strane ako je na ulazu u sustav $u_1(t)$ na izlazu će biti $y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_1(t-\tau)d\tau$, a ako je na ulazu $u_2(t)$ na izlazu će biti $y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_2(t-\tau)d\tau$. Ovi izlazi pomnoženi sa konstantama i zbrojeni daju

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_1(t-\tau)d\tau \; + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_2(t-\tau)d\tau \,.$$

Kako su ova dva izlaza jednaka, sustav je linearan.

5. Promatraju se dva diskretna sustava S_1 i S_2 spojena u kaskadni spoj. Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite. Ukoliko nisu istinite navedite primjer koji to potvrđuje.
   a. Ako su oba sustava S_1 i S_2 linearna, vremenski stalna, hoće li i njihov kaskadni spoj biti linearan i vremenski stalan?
   b. Ako su oba sustava S_1 i S_2 nelinearna, je li i njihov kaskadni spoj nužno nelinearan?
   c. Ako su oba sustava S_1 i S_2 vremenski promjenjiva, je li i njihov kaskadni spoj nužno vremenski promjenjiv?

Rješenje:



a. **Linearnost:** Ako je ulaz u prvi sustav S_1: $u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$, izlaz iz njega je $w(n) = \alpha w_1(n) + \beta w_2(n)$, uzevši u obzir svojstvo linearnosti. Ovaj izlaz je automatski ulaz u sljedeći sustav S_2. Uzevši u obzir da je i taj sustav linearan, izlaz je: $y(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$. Znači, ako je svaki podsustav linearan, i njihov kaskadni spoj je linearan.

   Vremenska stalnost: Ako je $u(n-M)$ ulaz u vremenski nepromjenjiv sustav S_1, izlaz će biti $w(n-M)$. Odziv vremenski nepromjenjivog sustava S_2 na ovaj ulaz će biti $y(n-M)$. Znači, ako je svaki podsustav vremenski nepromjenjiv, i njihov kaskadni spoj će biti vremenski nepromjenjiv.

b. Ako su S_1 i S_2 nelinearni sustavi nije nužno da će i njihov kaskadni spoj biti nelinearan, nelinearnost drugog sustava može poništiti nelinearnost prvog. Dovoljno je pokazati primjer:

$$w(n) = e^{u(n)}$$

$$y(n) = \ln\big(w(n)\big)$$

   Svaki od sustava je nelinearan, ali njihova kaskada je linearna:

$$y(n) = \ln\big(e^{u(n)}\big) = u(n).$$

c. Ako su S_1 i S_2 vremenski promjenjivi sustavi nije nužno da će i njihov kaskadni spoj biti vremenski promjenjiv. Dovoljno je pokazati primjer koji to potvrđuje:

$$w(n) = u(n)e^{jn\omega_0}$$

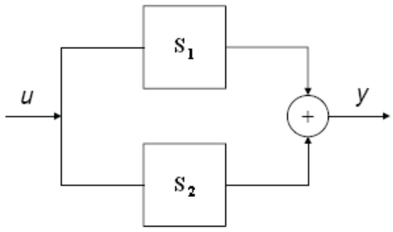
$$y(n) = w(n)e^{-jn\omega_0}$$

   Oba sustava su vremenski promjenjiva, ali njihov kaskadni spoj nije:

$$y(n) = u(n)e^{jn\omega_0} \cdot e^{-jn\omega_0} = u(n)$$

6. Promatraju se dva kontinuirana sustava S_1 i S_2 spojena u paralelu. Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite, te obrazložite svoj odgovor. Ukoliko nisu istinite navedite primjer koji to potvrđuje.
   a. Ako su oba sustava S_1 i S_2 linearna i vremenski stalna, hoće li i njihov paralelan spoj biti linearan i vremenski stalan?
   b. Ako su oba sustava S_1 i S_2 nelinearna, je li i njihov paralelni spoj nužno nelinearan?
   c. Ako su oba sustava S_1 i S_2 vremenski promjenjiva, je li i njihov paralelni spoj nužno vremenski promjenjiv?

<u>Rješenje:</u>



a. **<u>Linearnost</u>**: Ako je ulaz u paralelu sustava $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$, taj isti ulaz ulazi u svaki od podsustava. Na njihovim izlazima su $w_1(t) = \alpha w_{11}(t) + \beta w_{12}(t)$ i $w_2(t) = \alpha w_{21}(t) + \beta w_{22}(t)$. Izlaz iz cijelog sustava je zbroj

$$\begin{aligned} y(t) = w_1(t) + w_2(t) &= \alpha w_{11}(t) + \beta w_{12}(t) + \alpha w_{21}(t) + \beta w_{22}(t) \\ &= \alpha\big(w_{11}(t) + w_{21}(t)\big) + \beta\big(w_{12}(t) + w_{22}(t)\big). \end{aligned}$$

S druge strane, ako u svaki od sustava uđe $u_1(t)$ ($w_{11}(t)$ izlaz prvoga, $w_{21}(t)$ izlaz drugoga) i $u_2(t)$ ($w_{12}(t)$ izlaz prvoga, $w_{22}(t)$ izlaz drugoga), te se izlazi pomnože s konstantama i zbroje dobit ćemo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha w_{11}(t) + \beta w_{12}(t) + \alpha w_{21}(t) + \beta w_{22}(t) \\ &= \alpha\big(w_{11}(t) + w_{21}(t)\big) + \beta\big(w_{12}(t) + w_{22}(t)\big). \end{aligned}$$

Kako su ova dva izraza jednaka, paralela linearnih sustava je linearan sustav.

Vremenska nepromjenjivost: Ako je $u(t - M)$ ulaz u vremenski stalan sustav S_1, izlaz će biti $w_1(t - M)$, a ako je to ulaz u vremenski stalan sustav S_2, izlaz će biti $w_2(t - M)$. Izlaz iz paralele je $y_1(t) = w_1(t - M) + w_2(t - M)$. U drugom slučaju imamo na ulazu $u(t)$, a na izlazu iz svakog podsustava $w_1(t)$ i $w_2(t)$. Zakašnjeli izlazi su $w_1(t - M)$ i $w_2(t - M)$. Ukupni izlaz iz sustava je $w_1(t - M) + w_2(t - M)$. Kako su ova dva izlaza jednaka, sustav je vremenski stalan.

Znači, ako je svaki podsustav vremenski nepromjenjiv, i njihov kaskadni spoj će biti vremenski nepromjenjiv.

b. Ako su S_1 i S_2 nelinearni sustavi nije nužno da će i njihov paralelni spoj biti nelinearan, nelinearnost drugog sustava može poništiti nelinearnost prvog. Dovoljno je pokazati primjer:

$$w_1(t) = u(t) + 2^t$$

$$w_2(t) = u(t) - 2^t$$

Svaki od sustava je nelinearan, ali njihova paralela je linearna:

$$y(t) = w_1(t) + w_2(t) = 2u(t).$$

c. Ako su S_1 i S_2 vremenski promjenjivi sustavi nije nužno da će i njihov paralelni spoj biti vremenski promjenjiv. Dovoljno je pokazati primjer koji to potvrđuje:

$$w_1(t) = tu(t)$$

$$w_2(t) = (1 - t)u(t)$$

Oba sustava su vremenski promjenjiva, ali njihov paralelni spoj nije:

$$y(t) = w_1(t) + w_2(t) = u(t).$$

7. Zadan je diskretan sustav *A* s jednim ulazom i jednim izlazom (SISO). Ukoliko na ulaz ovog sustava dođe signal $u_1(n)$, pripadajući izlaz poprima vrijednost $y_1(n)$, a ako je na ulazu $u_2(n)$, izlaz je $y_2(n)$:

$$u_1(n) = (-1)^n \to y_1(n) = 1, \text{za svaki } n,$$

$$u_2(n) = (-1)^{n+1} \to y_2(n) = 1, \text{za svaki } n.$$

Zadan je i diskretan SISO sustav *B*. Ukoliko na taj sustav dođu signali na ulaz $u_3(n)$ i $u_4(n)$, pripadajući izlazi $y_3(n)$ i $y_4(n)$ dani su s:

$$u_3(n) = (-1)^n \to y_3(n) = 1, \text{za svaki } n,$$

$$u_4(n) = (-1)^{n+1} \to y_4(n) = -1, \text{za svaki } n.$$

Odredite mogu li sustavi *A* i *B* biti linearni i vremenski stalni.

<u>Rješenje:</u>

Linearnost diskretnog sustava A: iz zadanih ulaza je vidljivo da vrijedi $u_2(n) = -u_1(n)$. Ako je sustav linearan, isto mora vrijediti i za izlaze. No ovdje je $y_1(n) = y_2(n) = 1$, pa je sustav nelinearan. (svojstvo homogenosti)

Vremenska stalnost diskretnog sustava A: sustav A može biti vremenski stalan jer vrijedi $u_2(n) = -u_1(n) = u_1(n - n_0)$, za svaki neparan n_0. Tada je $y_2(n) = y_1(n - n_0) = 1$.

Linearnost diskretnog sustava B: iz zadanih ulaza je vidljivo da vrijedi $u_4(n) = -u_3(n)$. Ako je sustav linearan, isto mora vrijediti i za izlaze. Ovdje je $y_4(n) = -y_3(n) = -1$, pa je sustav linearan. (svojstvo homogenosti)

Vremenska stalnost diskretnog sustava B: sustav B ne može biti vremenski stalan jer vrijedi $u_4(n) = u_3(n - n_0)$ i $y_4(n) \neq y_3(n - n_0)$.

8. Odziv na jedinični skok, $u(t)=\mu(t)$, linearnog vremenski stalnog sustava glasi $y(t)=\left(1-e^{-2t}\right)\mu(t)$. Nađite odziv ovog sustava na ulaz $u(t)=4\mu(t)-4\mu(t-1)$.

Rješenje:

Zadani sustav je vremenski stalan, pa ako pomaknemo ulaz za neki *M* (ovdje je to za *1*: $\mu(t-1)$), pomaknut će se i izlaz $\left(1-e^{-2(t-1)}\right)\mu(t-1)$.

Kako je zadani sustav linearan, vrijedi homogenost, pa odziv na $4\mu(t)$ iznosi $4(1-e^{-2t})\mu(t)$, a odziv na $4\mu(t-1)$ iznosi $4\left(1-e^{-2(t-1)}\right)\mu(t-1)$.

Zbog linearnosti (aditivnosti) vrijedi da je za ulaz $u(t)=4\mu(t)-4\mu(t-1)$ izlaz

$$y(t)=4(1-e^{-2t})\mu(t)-4\left(1-e^{-2(t-1)}\right)\mu(t-1).$$

DODATNI ZADACI

Provjerite jesu li zadani sustavi linearni, vremenski stalni, memorijski i kauzalni.

1. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$
2. $y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau)d\tau$
3. $y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(3n+2)$
4. $y(t) = \frac{u(t)}{1+u(t-1)}$

Provjerite jesu li zadani sustavi linearni, vremenski stalni, memorijski i kauzalni. Ukoliko im možete naći inverzni sustav, nađite ga.

5. $y(t) = u^2(t)$
6. $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} u(k)$
7. $y(n) = n \cdot u(n)$

Rješenja:

1. linearno, vremenski stalno, ima memoriju, kauzalno
2. linearno, vremenski promjenjivo, ima memoriju, kauzalno
3. linearno, vremenski promjenjivo, ima memoriju, nekauzalno
4. nelinearno, vremenski stalno, ima memoriju, kauzalno
5. nelinearno, vremenski stalno, bez memorije, kauzalno, nema inverz
6. linearno, vremenski stalno, ima memoriju, kauzalno, inverz: $u(n) = y(n) - y(n-1)$
7. linearno, vremenski promjenjivo, bez memorije, kauzalno, nema inverz