



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

26. veljače 2007.



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

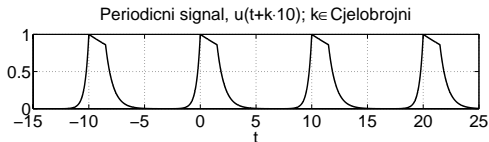
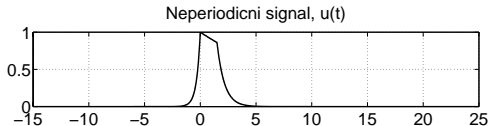
Periodični i neperiodični vremenski kontinuirani signali

- periodični signali su prikazani periodičnim funkcijama
- periodičan vremenski kontinuiran signal, periode T_0 , definiran je kao

$$u : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni},$$

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad u(t) = u(t + kT_0)$$

gdje su $T_0 \in \text{Realni}, k \in \text{Cjelobrojni}$



Slika 1: Periodični vremenski kontinuiran signal



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

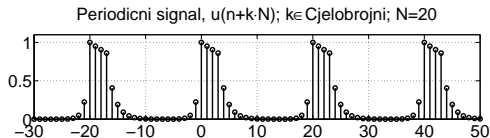
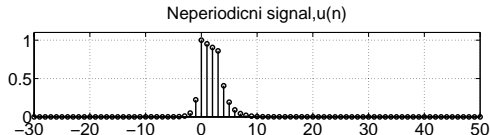
Periodični i neperiodični vremenski diskretni signali

- periodičan vremenski diskretni signal, periode N , definiran je kao

$u : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni},$

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad u(n) = u(n + kN)$$

gdje su $N \in \text{Cjelobrojni}, k \in \text{Cjelobrojni}$



Slika 2: Periodični vremenski diskretni signal



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Važna svojstva periodičnih signala

- iz definicije slijedi
 - periodični signali su svezremenski signali
 - vremenskim pomakom periodičnog signala za jednu periodu (ili njezine višekratnike) signal ostaje nepromijenjen
- periodični signal može nastati periodičnim produženjem neperiodičnog signala trajanja T_0 odnosno N



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

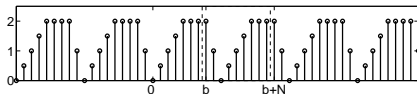
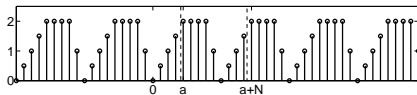
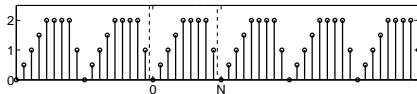
Neke operacije
nad signalima

Važna svojstva periodičnih signala

- za periodične vremenski diskretne signale vrijedi

$$\sum_{n=a}^{a+N} u(n) = \sum_{n=b}^{b+N} u(n) = \sum_{n=\langle N \rangle} u(n)$$

gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$ cjelobrojni a oznaka $\sum_{n=\langle N \rangle}$ predstavlja zbroj preko bilo kojeg područja sumacije duljine N gdje je N temeljna perioda





Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

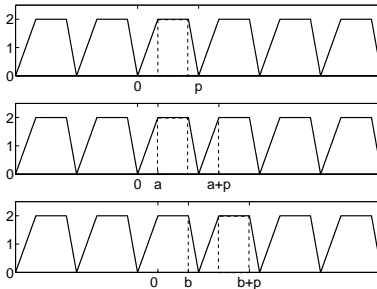
Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Važna svojstva periodičnih signala

- sličan zaključak vrijedi za periodične vremenski kontinuirane signale
- površina ispod funkcije $u(t)$ periodičnog signala, osnovnog perioda T_0 , jednaka je za bilo koji interval trajanja T_0 dakle

$$\int_a^{a+T_0} u(t) dt = \int_b^{b+T_0} u(t) dt = \int_{T_0} u(t) dt$$





Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Energija i snaga signala 1

- uobičajeno je tvorevine karakterizirati odgovarajućom mjerom ili veličinom, dakle, jednim brojem, kako bi naznačili dimenzije, snagu, cijenu ili neku drugu značajku
- želimo li npr. biti precizniji u izričaju kako je neki čovjek krupan potrebno je definirati i odgovarajuću mjeru
 - samo visina ili samo opseg pojasa nisu dostatni
 - mjera koja odgovara volumenu sigurno je prihvatljivija
 - u pojednostavljenom modelu izračuna volumena čovjeka, visine H , modeliramo ga s valjkom promjenljiva radijusa pa volumen računamo kao

$$V = \pi \int_0^H r^2(h) dh$$

- cilj je naći odgovarajuću mjeru, izraženu s jednim brojem, i za signale



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Energija i snaga signala 2

- prva ideja za mjeru signala, npr. površina ispod funkcije koja opisuje signal, uzima u obzir interval u kojem je definirana nezavisna varijabla, kao i sve vrijednosti zavisne varijable, no nedostatak ove mjere je u mogućem poništavanju pozitivnih i negativnih područja ispod funkcije, te može dati krivu informaciju o veličini signala
- jedan od načina uklanjanja ovog nedostatka je definiranje mjere kao površine signala ispod kvadrata funkcije signala
- razmotrimo signal struje $i(t)$ koji prolazi kroz otpor R i koji ima jasno fizikalno značenje
- energija koja se u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$ disipira kao toplina na otporu R kroz koji teče struja $i(t)$ dana je s

$$E_{[t_1, t_2]} = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$$



Energija signala i srednja snaga vremenski kontinuiranog signala

- analogno kazanom, za signal $f(t)$, definiran u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$, dakle, signal trajanja $L = t_2 - t_1$, označujemo **energiju vremenski kontinuiranog signala** kao¹

$$E_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

- srednja snaga vremenski kontinuiranog signala $f(t)$, definiranog u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$, je

$$P_{[t_1, t_2]} = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

¹ova definicija vrijedi i za kompleksne signale pa se stoga uzima modul (apsolutna vrijednost) signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Totalna energija signala i srednja snaga vremenski kontinuiranog signala

- totalna energija i totalna srednja snaga vremenski kontinuiranog signala, definiranog za $t \in \text{Realni}$, su

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Srednja snaga periodičnog vremenski kontinuiranog signala

- srednja vrijednost bilo koje periodične funkcije je jednaka srednjoj vrijednosti za bilo koji period
- kako je kvadrat periodične funkcije također periodična funkcija, tada je srednja snaga periodičnog vremenski kontinuiranog signala $\tilde{y}(t)$

$$P_{\tilde{y}} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |\tilde{y}(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{y}(t)|^2 dt$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

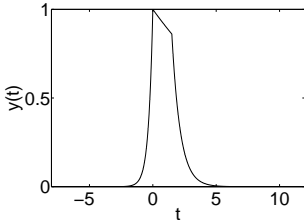
Neke operacije
nad signalima

Primjer izračuna energije signala

- zadan je signal

$y : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}$

$$y(t) = \begin{cases} e^{3t}, & -6 < t \leq 0 \\ e^{-0.1t}, & 0 < t \leq 1.5 \\ 0.86e^{-1.5(t-1.5)}, & 1.5 < t \leq 10 \end{cases}$$



- totalna energija E_{∞} ovog signala je

$$\begin{aligned} E_{\infty} &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \\ &= \int_{-6}^0 e^{6t} dt + \int_0^{1.5} e^{-0.2t} dt + \int_{1.5}^{10} 0.86^2 e^{-3(t-1.5)} dt \\ &= 0.1667 + 1.2959 + 0.247 = 1.7091 \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

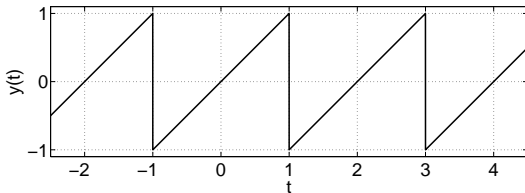
Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Primjer izračuna totalne srednje snage signala



- periodični signal nije vremenski omeđen i njegova totalna energija je beskonačna i odgovarajuća je mjera signala srednja snaga signala njegova totalna srednja snaga P_∞
- postupak izračuna se može pojednostaviti jer se radi o periodičnom signalu pa je dovoljno računati srednju snagu jednog perioda

$$P_y = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Energija i srednja snaga vremenski diskretnog signala

- energija vremenski diskretnog signala (niza) $y(n)$, definiranog u intervalu $[n_1, n_2]$, je

$$E_{[n_1, n_2]} = \sum_{n=n_1}^{n_2} |y(n)|^2$$

- srednja snaga vremenski diskretnog signala $y(n)$, definiranog u intervalu $[n_1, n_2]$, je

$$P_{[n_1, n_2]} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |y(n)|^2$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Totalna energija i srednja snaga vremenski diskretnog signala

- totalna energija E_{∞} niza $y(n)$, $n \in \text{Cjelobrojni}$, definira se kao:

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

- niz beskonačna trajanja, s konačnim vrijednostima uzoraka, može imati konačnu ili beskonačnu totalnu energiju
- niz konačnog trajanja, s konačnim vrijednostima uzoraka, ima konačnu energiju
- totalna srednja snaga P_{∞} neperiodičnog niza definira se kao:

$$P_{\infty} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M |y(n)|^2$$

- srednja snaga niza beskonačne duljine može biti konačna ili beskonačna



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Srednja snaga periodičnog vremenski diskretnog signala

- srednja snaga periodičnog niza perioda N je:

$$P_{\tilde{y}} = \frac{1}{N} \sum_{n=b}^{b+N-1} |\tilde{y}(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |\tilde{y}(n)|^2$$

gdje je $b \in \mathbb{Z}$ cjelobrojni a oznaka $\sum_{n=\langle N \rangle}$ predstavlja zbroj preko bilo kojeg područja sumacije duljine N gdje je N temeljna perioda



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Periodični i
neperiodični
signali

Energija i snaga
signala

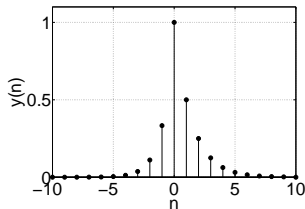
Neke operacije
nad signalima

Primjer izračuna energije vremenski diskretnog signala

- razmotrimo vremenski diskretan signal

$u : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni}$

$$y(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases}$$



- energija signala je

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

$$\begin{aligned} E_{\infty} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} - 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{35}{24} \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Zbrajanje signala

- neka su zadani signali

$$u_1 : Domena \rightarrow Kodomena$$

$$u_2 : Domena \rightarrow Kodomena$$

tada je njihov zbroj $y_z = u_1 + u_2$

$$y_z : Domena \rightarrow Kodomena$$

definiran kao

$$\forall nv \in Domena, \quad y_z(nv) = u_1(nv) + u_2(nv)$$

- zbrajanje dvaju signala je bezmemorijska operacija jer zbroju dvaju signala odgovara zbrajanje njihovih vrijednosti za svaki element *Domene*



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Množenje signala

- neka su zadani signali

$$u_1 : Domena \rightarrow Kodomena$$

$$u_2 : Domena \rightarrow Kodomena$$

tada je njihov umnožak $y_z = u_1 \cdot u_2$

$$y_u : Domena \rightarrow Kodomena$$

definiran kao

$$\forall nv \in Domena, \quad y_z(nv) = u_1(nv) \cdot u_2(nv)$$

- množenje dvaju signala je bezmemorijska operacija jer umnošku dvaju signala odgovara množenje njihovih vrijednosti za svaki element *Domene*



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

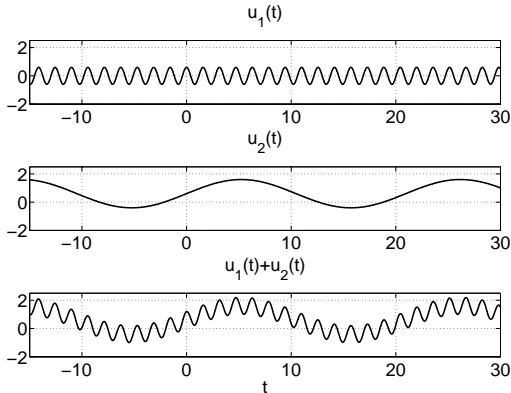
Vremenska
inverzija signala

Primjer zbrajanja vremenski kontinuiranih signala

- zbroj zadanih signala prikazan je slikom 3

$$u_1 : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_1(t) = 0.6\cos(4t)$$

$$u_2 : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_2(t) = \sin(0.3t) + 0.6$$



Slika 3: Zbroj vremenski kontinuiranih signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

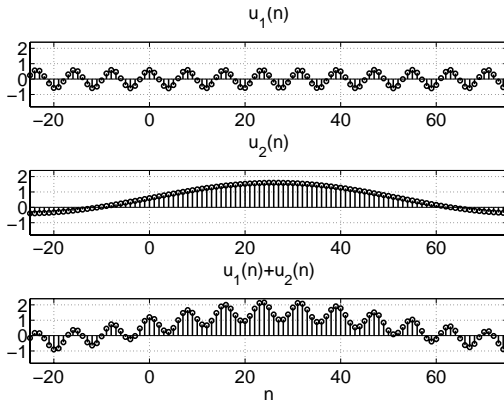
Vremenska
inverzija signala

Primjer zbrajanja vremenski diskretnih signala

- zbroj zadanih signala prikazan je slikom 4

$$u_1 : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_1(n) = 0.6 \sin(0.8n)$$

$$u_2 : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_2(n) = \sin(0.06n) + 0.6$$



Slika 4: Zbroj vremenski diskretnih signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

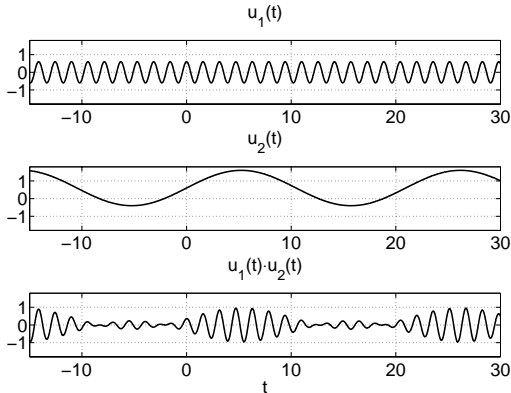
Vremenska
inverzija signala

Primjer množenja vremenski kontinuiranih signala

- umnožak zadanih signala prikazan je slikom 5

$$u_1 : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_1(t) = 0.6 \cos(4t)$$

$$u_2 : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_2(t) = \sin(0.3t) + 0.6$$



Slika 5: Umnožak vremenski kontinuiranih signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

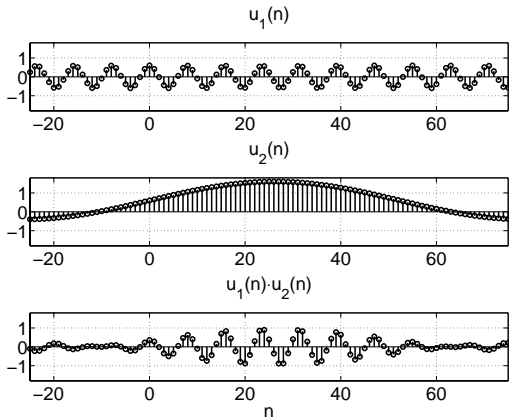
Vremenska
inverzija signala

Primjer množenja vremenski diskretnih signala

- umnožak zadanih signala prikazan je slikom 6

$$u_1 : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_1(n) = 0.6 \sin(0.8n)$$

$$u_2 : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_2(n) = \sin(0.06n) + 0.6$$



Slika 6: Umnožak vremenski diskretnih signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Vremenski pomak vremenski kontinuiranog signala

- pomak je po nezavisnoj varijabli, a ona je vrlo često vrijeme, pa koristimo uobičajeni termin *vremenski* pomak
 - za vremenski kontinuiran signal definiran je vremenski pomak

$$u : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}, \quad y : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni} \\ \forall t \in \text{Realni}, \quad y(t) = u(t - \tau) \quad \text{za} \quad \tau \in \text{Realni}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

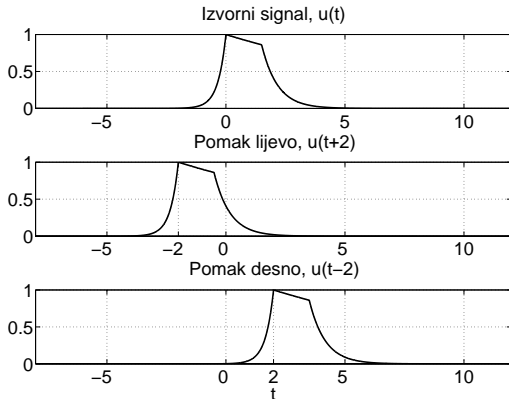
Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Primjer pomaka vremenski kontinuiranog signala

- primjer pomaka vremenski kontinuiranog signala za $\tau = 0$, $\tau = -2$, $\tau = 2$ (Sl.7)



Slika 7: Pomak vremenski kontinuiranog signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Vremenski pomak vremenski diskretnog signala

- slično prethodnom pokazujemo
- za vremenski diskretni signal definiran je vremenski pomak

$$u : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni}, \quad y : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni} \\ \forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad y(n) = u(n - N) \quad \text{za} \quad N \in \text{Cjelobrojni}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

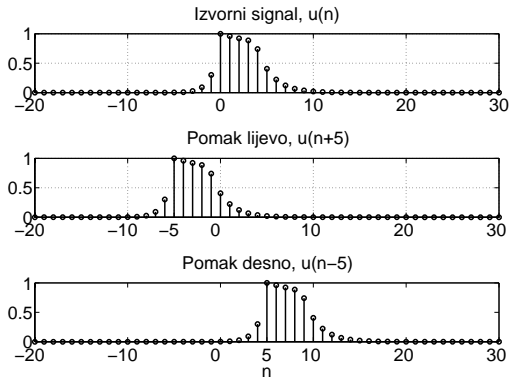
Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Primjer pomaka vremenski diskretnog signala

- primjer pomaka vremenski diskretnog signala za $N = 0$, $N = -5$, $N = 5$ (Sl.8)



Slika 8: Pomak vremenski diskretnog signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Derivacija vremenski kontinuiranog signala

- derivacija vremenski kontinuiranog signala definirana je kao derivacija funkcije koja opisuje signal
- derivacija funkcije $f : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}$ je nova funkcija $f' : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}$
- oznake za derivaciju funkcije f su i \dot{f} , Df , $f'(t)$, $Df(t)$, $\frac{df(t)}{dt}$
- derivacija funkcije f definirana je kao:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

- derivacija predstavlja mjeru promjene i preko nje se određuju područja u kojima funkcija raste ili pada
- iz definicije derivacije vidljivo je da je ona memorijska operacija



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

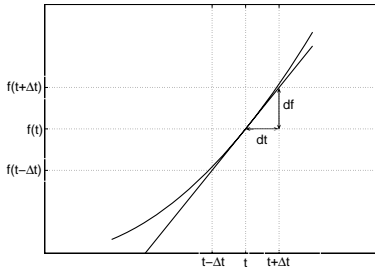
Vremenska
inverzija signala

Geometrijska interpretacija derivacije

- na slici 9 je geometrijska interpretacija definicije derivacije funkcije

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \text{ ili } f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

- derivacija u točki t odgovara koeficijentu smjera tangente u toj točki



Slika 9: Geometrijska interpretacija derivacije



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala
Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Diferencijal

- diferencijal nezavisne varijable t je njezin prirast i on se definira kao $dt = \Delta t$
- diferencijal funkcije definiramo kao prirast koji dobiva tangenta u danoj točki t što je linearna aproksimacija prirasta funkcije u okolini točke t

$$df(t) = f'(t)dt$$

- dakle, za malo Δt , vrijedi

$$df(t) \approx f(t + \Delta t) - f(t)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Integral vremenski kontinuiranog signala

- integral vremenski kontinuiranog signala definiran je kao integral funkcije koja opisuje signal
- integral funkcije $f : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}$ je nova funkcija $y : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}$ definirana kao:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

- integracija je također memorijska operacija
- geometrijska interpretacija određenog integrala kazuje kako integral $\int_a^b f(\tau) d\tau$ predstavlja površinu ispod krivulje $f(t)$ za interval $t \in [a, b]$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

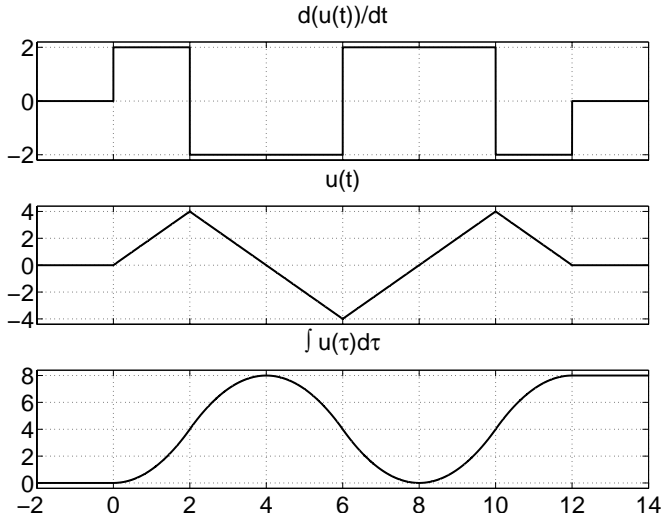
Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Primjer derivacije i integracije signala



Slika 10: Derivacija i integracija vremenski kontinuiranog signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Uzlazna i silazna diferencija vremenski diskretnih signala

- definiraju se uzlazna diferencija

$$\Delta u(t) = u(n+1) - u(n)$$

- i silazna diferencija

$$\nabla u(t) = u(n) - u(n-1)$$

- ako pretpostavimo da je vremenski diskretan signal ekvivalentan diskretnim vrijednostima vremenski kontinuiranog signala (otipkavanje) možemo ustanoviti da diferencija daje rezultat koji izgleda kao uzorci derivacije vremenski kontinuiranog signala



Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

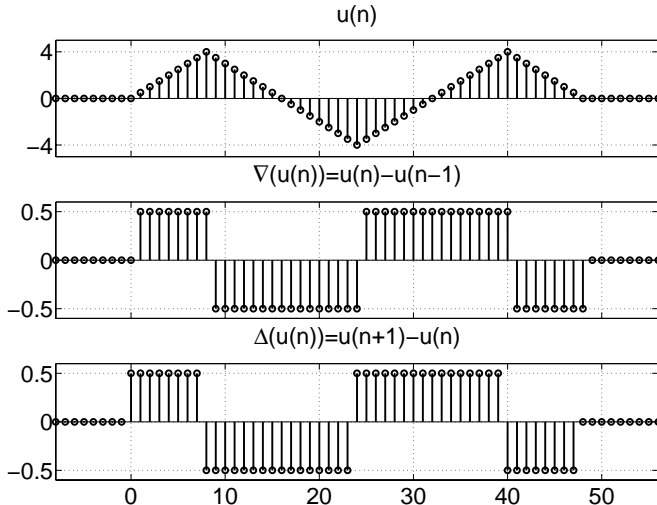
Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Primjer ulazne i silazne diferencije



Slika 11: Primjer silazne i uzlazne diferencije



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- prije je kazano kako diferencija signala čiji su uzorci jednaki diskretnim vrijednostima vremenski kontinuiranog signala daje rezultat koji izgleda kao uzorci derivacije vremenski kontinuiranog signala
- promatramo vremenski diskretan signal čije su vrijednosti

$$u(n) = u(t)|_{t=nT}$$

- označimo s $y(t)$ derivaciju signala $u(t)$

$$y(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

i neka je

$$y(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt}u(t)|_{t=nT}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

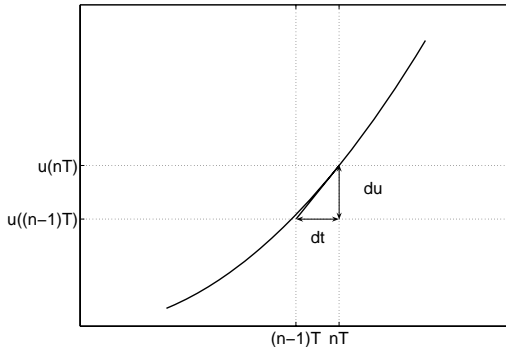
Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- sa slike za izvod derivacije zaključujemo



Slika 12: Definicija derivacije

$$y(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt} u(t)|_{t=nT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \{u(nT) - u[(n-1)T]\}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- dakle iz

$$y(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt}u(t)|_{t=nT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \{u(nT) - u[(n-1)T]\}$$

zaključujemo

$$y(n) = \frac{1}{T} \{u(n) - u[(n-1)]\} = \frac{1}{T} \nabla(u(n))$$

- dobiveni izraz se naziva jednačba diferencija koja opisuje vremenski diskretni sustav koji nazivamo digitalni diferencijator
- dobivenim algoritmom numerički aproksimiramo derivaciju vremenski kontinuiranog signala
- postupak je aproksimativan i točnost izračuna ovisi o T i o kontinuiranom signalu $u(t)$



Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

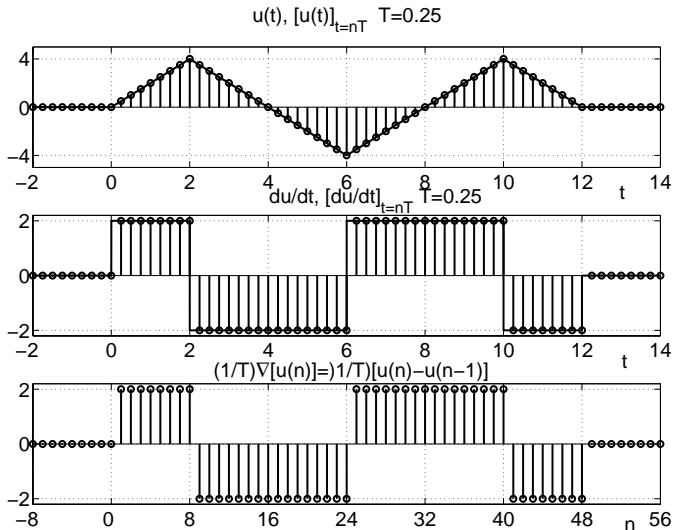
Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Numerička aproksimacija derivacije vremenski kontinuiranog signala



Slika 13: Numerička aproksimacija derivacije vremenski kontinuiranog signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Diferencijacija i akumulacija vremenski diskretnih signala

- pokazano je kako derivaciji vremenski kontinuiranog signala odgovara diferencijacija vremenski diskretnog signala
- integraciji za vremenski kontinuirane signale odgovara operacija akumulacije za vremenski diskretne signale
- kako su derivacija i integracija signala suprotne operacije tako su i operacije diferencijacije i akumulacije suprotne operacije



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Akumulacija vremenski diskretnih signala

- izvod za operaciju akumulacije započinje s postupkom diferencije
- neka je $u(n)$ silazna diferencija vremenski diskretnog signala $y(n)$, dakle,

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{+} \\ u(n) = y(n) - y(n-1)$$

tada za $n = 0, 1, 2, \dots, n$ vrijedi

$$\left. \begin{array}{l} u(0) = y(0) - y(-1) \\ u(1) = y(1) - y(0) \\ u(2) = y(2) - y(1) \\ \vdots \\ u(n-1) = y(n-1) - y(n-2) \\ u(n) = y(n) - y(n-1) \end{array} \right\} + \Rightarrow$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Akumulacija vremenski diskretnih signala

$$\sum_{m=0}^n u(m) = y(n) - y(-1)$$

- i finalno

$$y(n) = y(-1) + \sum_{m=0}^n u(m)$$

- operacija akumulacije je također memorijska operacija
- potrebno je poznavanje $y(-1)$ i naravno svih $u(m)$, za $m = 0, 1, \dots, n$ kako bi se moglo odrediti rezultat akumulacije za bilo koji n



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

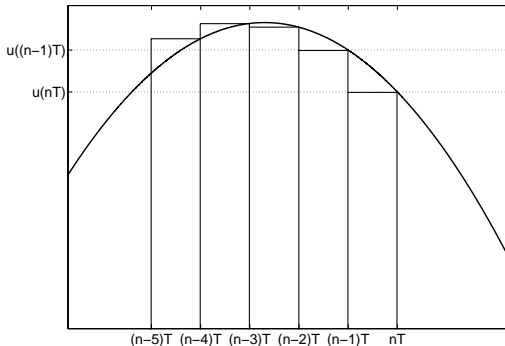
Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Numerička integracija – veza integracije i akumulacije

- određeni integral signala $u(t)$, $t \in \text{Real}_{n+}$ geometrijski interpretiramo kao površinu ispod funkcije signala



Slika 14: Geometrijska interpretacija integracije



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Numerička integracija – veza integracije i akumulacije

- operaciju integracije vremenski kontinuiranog signala

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

možemo, za $t = nT$, sukladno prethodnoj slici, izraziti kao:

$$y(nT) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^n T u(mT)$$

- uz uobičajene oznake $u(mT) = u(m)$ i $y(nT) = y(n)$, i dovoljno mali T , $y(n)$ aproksimira integral $y(t)$

$$y(n) = T \sum_{m=-\infty}^n u(m)$$

- zaključujemo, postupku integracije vremenski kontinuiranog signala odgovara postupak akumulacije vremenski diskretnog signala



Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

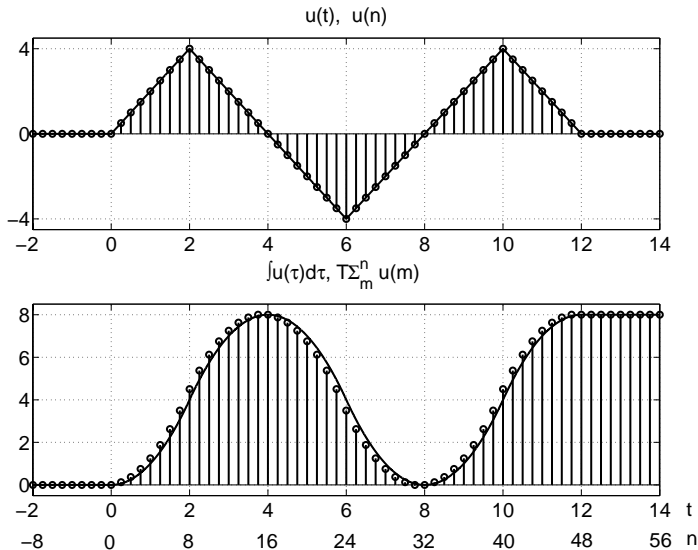
Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Integracija i akumulacija signala – primjer



Slika 15: Integracija i akumulacija signala – primjer



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Vremenska ekspanzija i kompresija vremenski kontinuiranog signala

- ekspanzija i kompresija signala po nezavisnoj varijabli naziva se vremensko skaliranje signala
 - za vremenski kontinuirani signal definirana je vremenska kompresija kao

$$u : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}, \quad y : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni} \\ \forall t \in \text{Realni}, \quad y(t) = u(bt) \quad \text{za} \quad b > 1$$

- a vremenska ekspanzija kao

$$u : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}, \quad y : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni} \\ \forall t \in \text{Cjelobrojni}, \quad y(t) = u\left(\frac{t}{b}\right) \quad \text{za} \quad b > 1$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

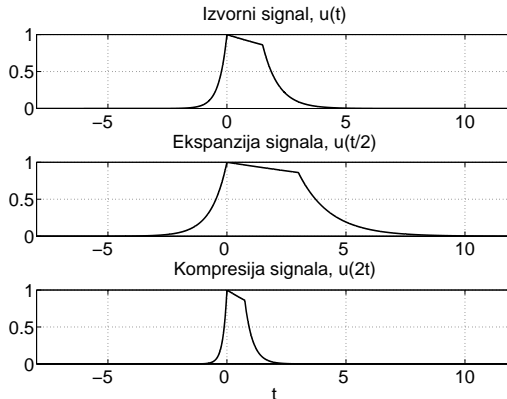
Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Primjer ekspanzije i kompresije vremenski kontinuiranog signala

- primjer ekspanzije i kompresije vremenski kontinuiranog signala za faktor $b = 2$ (Sl.16)



Slika 16: Vremenska ekspanzija i kompresija vremenski kontinuiranog signala za faktor 2



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Vremenska kompresija vremenski diskretnog signala

- vremenskom kompresijom vremenski kontinuiranih signala oni se “ubrzavaju” bez gubitka informacije kod vremenski disretnih signala to nije uvijek slučaj
- za diskretni signal definirana je vremenska kompresija kao

$$u : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni}, \quad y : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni} \\ \forall n \in \text{Cjelobrojni}, M \in \text{Cjelobrojni}, M > 1 \\ y(n) = u(Mn)$$

- vrijednosti $u(Mn)$ za $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ su $u(0), u(M), u(2M), u(3M), \dots$ što znači da $u(Mn)$ izdvaja svaki M -ti uzorak od $u(n)$, a ostale međuzorke briše, pa se ovaj postupak naziva decimacija u vremenu
- ako je vremenski diskretni signal nastao otipkavanjem vremenski kontinuiranog signala postupak kompresije ima za rezultat redukciju takta otipkavanja za faktor M pa se postupak tada naziva i *podotipkavanje*



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

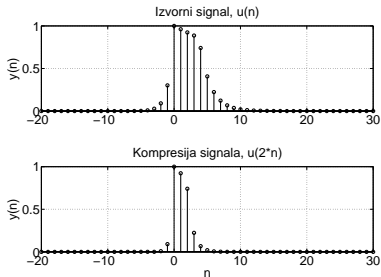
Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Primjer kompresije vremenski diskretnog signala

- primjer kompresije–decimacije–vremenski diskretnog signala za faktor $M = 2$ (Sl.16)



Slika 17: Vremenska kompresija vremenski diskretnog signala za faktor 2

- vidljiv je gubitak uzoraka što znači gubitak informacije
- ako je signal $u(n)$ bio rezultat pretipkavanja nekog vremenski kontinuiranog signala, postupkom decimacije se nužno ne gubi informacija o izvornom $u(t)$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala 1

- vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala vezana je uz postupak interpolacije i provodi su u dva koraka
- prvo se $u(n)$ ekspandira za cjelobrojni faktor L kako bi se dobio ekspandirani $u_e(n)$

$$y(n) = u_e(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- postupak ilustriramo na primjeru ekspanzije $u(n)$ za faktor 2 ($L = 2$) i ekspandirani signal je tada $u_e(n)$
- za n neparan, $n/2$ nije cijeli broj i $u(\frac{n}{2})$ nije definiran za neparne vrijednosti
- zato, za neparne n , definiramo $u_e(n) = 0$, dakle,
 $u_e(1) = u_e(3) = u_e(5) = \dots = 0$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala 2

- ekspanzirani signal $u_e(n)$ čuva sve uzorke $u(n)$
- odgovarajućim postupkom interpolacije, zamjenom uzoraka vrijednosti nula s uzorcima čija je vrijednost slična vrijednosti susjednih uzoraka, moguće je postići interpolirani ekspanzirani vremenski diskretni signal kao na slici
- u postupku interpolacije koriste se interpolacijski filtri, no oni se kasnije razmatraju
- interpolirane su vrijednosti izračunate iz postojećih podataka pa postupak interpolacije ne donosi nove informacije o signalu



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

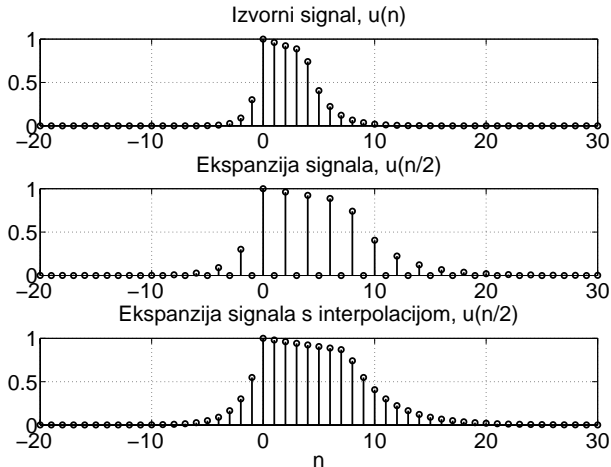
Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Primjer ekspanzije vremenski diskretnog signala

- primjer ekspanzije–interpolacije–vremenski diskretnog signala za faktor $L = 2$



Slika 18: Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

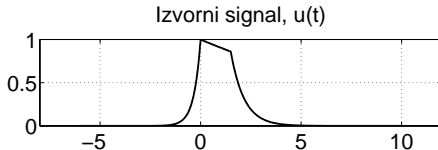
Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Vremenska inverzija vremenski kontinuiranog signala

- za vremenski kontinuirani signal definirana je vremenska inverzija kao

$$u : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}, \quad y : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni} \\ \forall t \in \text{Realni}, \quad y(t) = u(-t)$$



Slika 19: Vremenska inverzija vremenski kontinuiranog signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

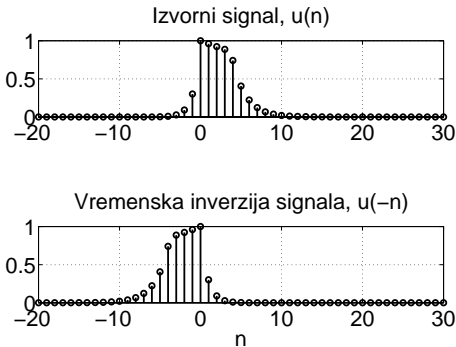
Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Vremenska inverzija vremenski diskretnog signala

- za vremenski diskretni signal definirana je vremenska inverzija kao

$$u : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni}, \quad y : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni} \\ \forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad y(n) = u(-n)$$



Slika 20: Vremenska inverzija vremenski diskretnog signala



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Parne i neparne funkcije

- realne funkcije $u_p(t)$ odnosno $u_p(n)$ su parne funkcije ako vrijedi

$$u : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni},$$

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad u_p(t) = u_p(-t)$$

ili

$$u : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni},$$

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad u_p(n) = u_p(-n)$$

- realne funkcije $u_n(t)$ odnosno $u_n(n)$ su neparne funkcije ako vrijedi

$$u : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni},$$

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad u_n(t) = -u_n(-t)$$

ili

$$u : \text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Realni},$$

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad u_n(n) = -u_n(-n)$$



Parna i neparna komponenta signala

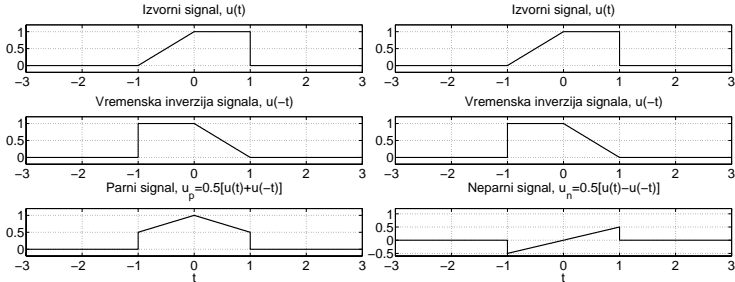
- svaki realni signal $u(t)$ može biti prikazan kao suma njegove parne i neparne komponente

$$u : \text{Realni} \rightarrow \text{Realni},$$

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad u(t) = u_p(t) + u_n(t)$$

$$\text{parna komponenta:} \quad u_p(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u(-t)]$$

$$\text{neparna komponenta:} \quad u_n(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u(-t)]$$



Slika 21: Parna i neparna komponenta signala



Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor

Branko Jeren

Klasifikacija signala

Neke operacije nad signalima

Zbrajanje i množenje signala

Vremenski pomak signala

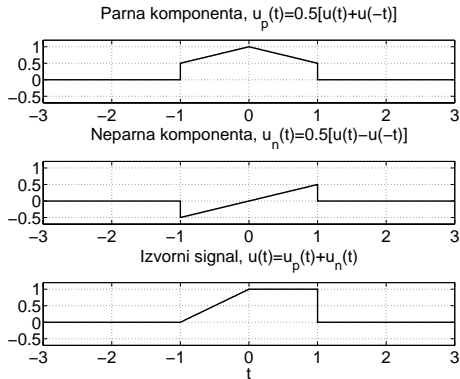
Memorijske operacije nad signalima

Vremenska ekspanzija i kompresija

Vremenska inverzija signala

Signal kao zbroj parne i neparne komponente

- signal može biti prikazan zbrojem parne i neparne komponente² $u(t) = u_p(t) + u_n(t)$



Slika 22: Signal kao zbroj parne i neparne komponente

²isto vrijedi i za vremenski diskretne signale



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- kompleksni signal $u(t)$ je konjugirano simetričan ako vrijedi

$$u : \textit{Realni} \rightarrow \textit{Kompleksni}, \\ \forall t \in \textit{Realni}, \quad u(t) = u^*(-t)$$

- konjugirana simetričnost kompleksnih signala analogna je parnosti (simetričnosti) realnih signala
- zaista ako bi definirali konjugiranu simetričnost za realni signal (imaginarni dio jednak je nuli) definicija bi se svela na definiciju parnosti signala
- kompleksni signal $u(t)$ je konjugirano antisimetričan ako vrijedi

$$u : \textit{Realni} \rightarrow \textit{Kompleksni}, \\ \forall t \in \textit{Realni}, \quad u(t) = -u^*(-t)$$

- sukladno prije kazanom definicija antisimetričnosti za realni signal vodi na definiciju njegove neparnosti



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 3

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Zbrajanje i
množenje signala

Vremenski
pomak signala

Memorijske
operacije nad
signalima

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Vremenska
inverzija signala

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- prije je pokazano kako realni signal možemo prikazati kao zbroj njegove parne i neparne komponente
- analogno tome kompleksni signal $u(t)$ možemo prikazati kao zbroj njegove konjugirano simetrične $u_{ks}(t)$ i njegove konjugirano antisimetrične komponente $u_{ka}(t)$

$$u : \textit{Realni} \rightarrow \textit{Kompleksni},$$

$$\forall t \in \textit{Realni},$$

$$u(t) = u_{ks}(t) + u_{ka}(t)$$

$$u_{ks}(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u^*(-t)]$$

$$u_{ka}(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u^*(-t)]$$