Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Svojstva signala i Fourierove transformacije

Prva laboratorijska vježba iz Signala i sustava (FER-2)

Tomislav Petković, Ana Sović, Zvonko Kostanjčar

1. Uvod

Laboratorijske vježbe iz Signala i sustava zamišljene su da vas približe problematici analize i simulacije sustava. Sve vježbe se izvode na računalu u programskom sustavu MATLAB. Osim što posjeduje mogućnost izvođenja raznih matematičkih operacija MATLAB sadrži i modul Simulink koji je vizualni alat za brzo i jednostavno simuliranje raznih sustava. S MATLAB-om i Simulinkom ste se upoznali na LiV-u MATLAB.

Svrha prve laboratorijske vježbe je pojasniti vam odabrane dijelove gradiva s predavanja te upoznati vas s upotrebno MATLAB-a kao alata za rješavanje zadataka iz područja reprezentacije, svojstava i frekvencijske analize signala. Od vas se očekuje da ćete nakon ove vježbe moći uz pomoć MATLAB-a konstruirati različite oblike kontinuiranih i diskretnih signala, da ćete moći izračunati Fourierovu transformaciju te nacrtati spektar signala.

Vježbu možete izraditi samostalno kod kuće, samostalno u fakultetskim laboratorijima koji su otvoreni za studentski rad ili uz pomoć nastavnika/demonstratora u terminima koji će biti rezervirani po potrebi. Obzirom da se termini rezerviraju po potrebi studenti koji žele raditi pojedinu vježbu uz pomoć nastavnika/demonstratora moraju se za to prijaviti putem Ferka.

Ukoliko ste se prijavili za izvođenje vježbi uz pomoć nastavnika/demonstratora obavezni ste doći u termin u koji ste raspoređeni. U tome terminu imat ćete svu pomoć i podršku pri izradi vježbe što će rezultirati lakšim i bržim svladavanjem gradiva, boljim razumijevanjem, te će vam se pružiti mogućnost postavljanja pitanja i dobivanja odgovora u najkraćem roku. U slučaju spriječenosti molimo vas da nas pravovremeno o tome obavijestite e-poštom.

Bez obzira na način kojeg ste odabrali za izradu vježbe (samostalno ili uz pomoć nastavnika/demonstratora) po završetku vježbe potrebno je predati rukom pisani izvještaj s vježbe. Izvještaj se ne boduje, već se ili **prihvaća** ili **odbija**. Student kojemu je izvještaj odbijen može još **jednom** predati popravni izvještaj. **U slučaju odbijanja popravnog izvještaja student pada predmet.**

2. Priprema

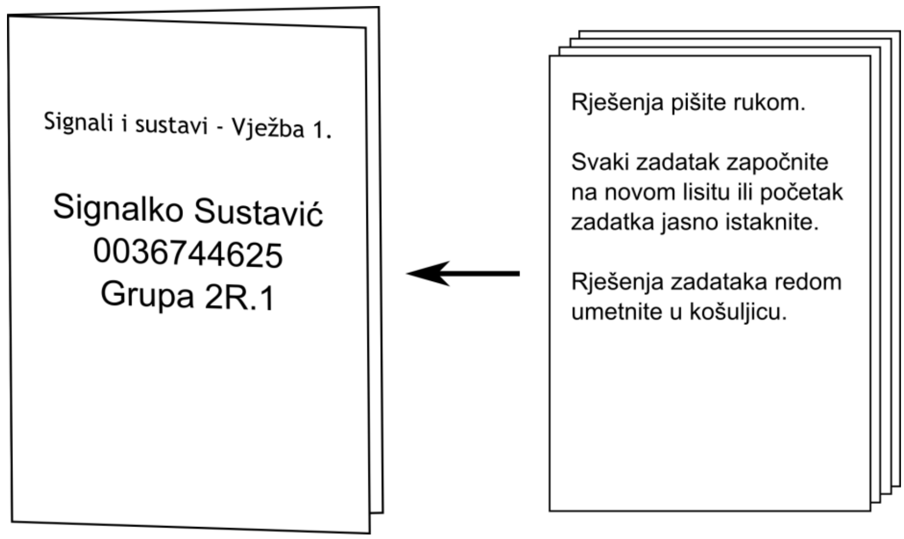
Prije svake vježbe potrebno se pripremiti za vježbu tako da ponovite teoriju s predavanja vezanu uz gradivo vježbe. Za prvu vježbu prisjetite se svega što ste naučili o svojstvima signala i Fourierovim transformacijama.

Ako niste upoznati s programskim sustavom MATLAB prisjetite se kako se pišu m-funkcije te kako se koristi Simulink (vježbe 2. i 4. sa LiV-a MATLAB). Kao podsjetnik vam osim materijala korištenih na LiV-u MATLAB može poslužiti i priručnik Kratke upute za korištenje MATLAB-a koji je dostupan na stranicama predmeta.

Upute su dostupne putem internetskih stranica http://www.fer.unizg.hr/predmet/sis2/laboratorij.
Molimo da primjedbe i uočene pogreške šaljete e-poštom na adrese tomislav.petkovic.jr@fer.hr ili ana.sovic@fer.hr.

3. Izvještaj s vježbe

Izvještaj s vježbe se piše rukom. U zaglavlje svakog papira kojeg ćete koristiti napišite vaše ime i prezime, matični broj (JMBAG) i grupu. Po završetku vježbe sve papire s rješenjima zadataka stavite redom u jednu košuljicu (sredina A4 bilježnice ili presavijeni A3 papir). Na prednjoj strani košuljice napišite redom velikim tiskanim slovima ime predmeta i redni broj vježbe, ime i prezime, matični broj (JMBAG) i grupu kako je prikazano na slici 1. Molimo vas da izvještaje ne stavljate u dodatne fascikle ili plastificirane folije.



Slika 1. Izvještaj s vježbe

Prva vježba se sastoji od 12 zadataka. Svaki zadatak je podijeljen u podzadatke u kojima je napisano što morate napraviti. U izvještaju ne navodite rješenje svakog zadatka i podzadatka već samo ono što je navedeno uz oznaku (IZVJEŠTAJ) koja se nalazi uvijek na lijevoj margini.

Početak rješenja svakog zadatka i podzadatka jasno označite tako da uz lijevi rub papira napišete i zaokružite broj zadatka i podzadatka. Također preporučamo da svaki zadatak započnete rješavati na novom listu.

Ako se od vas zahtijeva da skicirajte ili nacrtate signal onda svaka skica mora sadržavati jasno označene koordinatne osi i označene karakteristične dijelove signala: minimume, maksimume, prolaske kroz nulu i točke prekida. Signale koji su diskretni po nezavisnoj varijabli za koje više od 5 uzoraka ima vrijednost različitu od nule skicirajte kao da su kontinuirani te zatim preko nacrtanog kontinuiranog signala točkama označite kako su uzorci raspoređeni oko karakterističnih točaka signala (minimumi, maksimumi, prolasci kroz nulu). Peteljkasti prikaz diskretnog signala koristite samo ako signal sadrži 5 ili manje uzoraka.

Ako se od vas zahtijeva da napišete naredbu, prepišete rezultat neke naredbe ili prepišete kod m-skripte u izvještaju napišite što se traži u neizmijenjenom obliku.

U računskim zadacima od vas se može tražiti da konačno rješenje istaknete. U tom slučaju konačno rješenje ističete tako da ga zaokružite, podcrtate ili napišete drugom bojom.

Molimo vas da pišete uredno jer izvještaj možemo pregledati i prihvatiti samo ako ga možemo pročitati.

3.1. Svojstva signala

Prvi dio prve laboratorijske vježbe se bavi svojstvima signala.

15 minuta[1] **Zadatak 1. Periodičnost vremenski kontinuiranog signala**

U ovom zadatku razmatramo signale $x_1(t) = 2$, $x_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ i $x_3(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t^2\right)$ pri čemu je T pozitivan realan broj.

(IZVJEŠTAJ) Napišite definiciju periodičnosti vremenski kontinuiranog signala.

a) Ispitajte koji od zadanih signala su periodični. Za periodične signale odredite njihov temeljni period.

(IZVJEŠTAJ) Napišite potpuni postupak ispitivanja periodičnosti i određivanja temeljnog perioda za sva tri zadana signala. Konačna rješenja istaknite.

b) Nacrtajte zadana tri signala na intervalu $t \in [0,30]$. Neka je $T = 5$. Možete li temeljem dobivene slike ispitati je li signal periodičan ili nije? Objasnite!

Za crtanje kontinuiranog signala definiranog pomoću simboličkog izraza koristite naredbu `ezplot`[2]:

```
» syms t                          % definiramo simboličku varijablu t
» ezplot(sin(t),[-pi pi])         % crtamo kontinuirani signal sin(t) na intervalu
```

c) U ovom podzadatku razmatramo signal $x_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ za dvije različite vrijednosti parametra T. Neka je $f_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)$ i $f_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right)$. Ukoliko pomnožimo ta dva signala hoće li dobiveni signal $f_1(t)f_2(t)$ biti periodičan? Ako hoće odredite njegov temeljni period, a ako neće objasnite zašto!

25 minuta **Zadatak 2. Periodičnost vremenski diskretnog signala**

U ovom zadatku razmatramo signale $x_1(n) = 2$, $x_2(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ i $x_3(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n^2\right)$ pri čemu je N pozitivan cijeli broj.

(IZVJEŠTAJ) Napišite definiciju periodičnosti vremenski diskretnog signala.

a) Ispitajte koji od zadanih signala su periodični. Za periodične signale odredite njihov temeljni period. Konačna rješenja istaknite.

(IZVJEŠTAJ) Napišite potpuni postupak ispitivanja periodičnosti i određivanja temeljnog perioda za sva tri zadana signala.

b) Nacrtajte zadana tri signala na intervalu $n \in [0,30]$. Neka je $N = 5$. Možete li temeljem dobivene slike ispitati je li signal periodičan ili nije? Objasnite!

Za crtanje diskretnog signala koristite naredbu `stem`:

```
» n = [0:1:30];                   % korak n ide od 0 do 30 s razmakom 1
» stem(n,sin(n))                  % crtamo 31 uzorak diskretnog signala
```

(IZVJEŠTAJ) Napišite kod kojeg ste koristili za crtanje signala $x_3(n)$. Odgovorite na pitanje iz b) podzadatka i napišite objašnjenje. Sliku signala $x_3(n)$ nije potrebno precrtavati osim ako vam treba za objašnjenje.

---

[1] Istaknuto vrijeme u minutama je okvirno i odnosni se na pripremljenog studenta koji zna teorijsko gradivo vježbe jer je pažljivo slušao predavanja te koji dobro vlada MATLAB-om.
[2] Značajno ograničenje naredbe jest da ne zna nacrtati Diracovu delta distribuciju te je iste potrebno ručno dodati na sliku.

c) U ovom podzadatku razmatramo signal $x_2(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ za dvije različite vrijednosti parametra N. Neka je $f_1(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N_1}n\right)$ i $f_2(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N_2}n\right)$. Ukoliko pomnožimo ta dva signala hoće li dobiveni signal $f_1(n)f_2(n)$ biti periodičan? Ako hoće odredite njegov temeljni period, a ako neće objasnite zašto!

(IZVJEŠTAJ) Napišite potpuni postupak ispitivanja periodičnosti i određivanja temeljnog perioda za podzadatak c).

d) Nacrtajte umnožak signala iz podzadatka c) na intervalu $n \in [0,30]$. Neka je $N_1 = 5$ i $N_2 = 7$. Možete li temeljem dobivene slike ispitati je li umnožak periodičan ili nije? Objasnite!

Kada množite signale član po član morate dodati točku prije operatora množenja. Dakle:

```
» n = [0:1:10];                          % definiramo korak n
» x2 = sin(pi*n); x3=cos(pi*n.^2);       % signali x2 i x3
» y = x2 .* x3                           % ovo je umnožak signala
```

15 minuta Zadatak 3. Višeznačnost diskretnog harmonijskog signala

U ovom zadatku razmatramo signale oblika $x_k(n) = \sin(\omega_k n)$ pri čemu je k pozitivan cijeli broj i $\omega_k = 2\pi k/5$.

a) Koristeći naredbu `stem` nacrtajte četiri signala $x_k(n)$ za k iz skupa $\{1,2,4,6\}$ na intervalu $n \in [0,9]$.

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte grafove sva četiri signala iz podzadatka a), i to svakog zasebno i sva četiri na zajedničkoj slici. Iako signali imaju više od 5 uzoraka koristite peteljkasti prikaz.

b) Koliko različitih signala ste nacrtali?

c) Koji signali su jednaki? Objasnite!

(IZVJEŠTAJ) Napišite odgovore na pitanja iz podzadataka b) i c).

45 minuta Zadatak 4. Energija i snaga signala

U ovom zadatku razmatramo signale $x_1(\mathrm{t}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ i $x_2(n) = \sin\left(\frac{\pi}{7}n\right)$.

(IZVJEŠTAJ) Napišite definiciju energije i definiciju snage vremenski kontinuiranog signala.

(IZVJEŠTAJ) Napišite definiciju energije i definiciju snage vremenski diskretnog signala.

a) Izračunajte analitički energiju na jednom periodu, totalnu energiju i totalnu snagu oba signala.

(IZVJEŠTAJ) Napišite potpuni postupak računanja totalne energije i totalne snage s konačnim rješenjem za oba zadana signala. Konačna rješenja jasno istaknite.

b) U MATLAB-u kreirajte simbolički izraz za signal $x_1(t)$ i m-funkciju za signal $x_2(n)$.

c) Koristeći naredbe `ezplot` i `stem` te izraze iz prethodnog podzadatka nacrtajte dva perioda oba signala.

d) Definirajte simbolički izraz `E1` i m-funkciju `E2` koji definiraju energiju na intervalu $[-a, a]$ zadanih signala jedan i dva respektivno. Pri tome je naravno parametar a pozitivan realan broj za vremenski kontinuirani signal i pozitivan cijeli broj za vremenski diskretni signal. Za simbolički izraz `E1` parametar a je simbolička varijabla, dok je za m-funkciju `E2` ulazna varijabla.

Za vremenski kontinuirani signal energija je definirana kao integral kvadrata signala, pri čemu prema uvjetu zadatka integriramo samo na intervalu $[-a, a]$:

```
» syms t a                               % t i a su simboličke varijable
```

```
» E1=int(cos(pi*t/5)*cos(pi*t/5),t,-a,a)      % E1 je energija

E1 =

(5*cos(1/5*a*pi)*sin(1/5*a*pi)+a*pi)/pi
```

Za vremenski kontinuirani signal integral zamjenjujemo sa sumom od $-a$ do a.

(IZVJEŠTAJ) Prepišite dobiveni simbolički izraz E1 iz d) podzadatka. Prepišite kod m-funkcije iz b) podzadatka koja definira signal $x_2(n)$ te zatim prepišite kod m-funkcije E2 iz d) podzadatka koja definira energiju vremenski diskretnog signala $x_2(n)$.

e) Korištenjem izraza E1 i m-funkcije E2 izračunajte energiju signala na jednom periodu. Koja je veza dobivene energije i izračunate snage iz podzadatka a)? Poklapa li se dobiveni rezultat s rezultatom podzadatka a)?

Koristite naredbu subs za uvrštavanje vrijednosti u simbolički izraz:

```
» subs(E1, a, 4)                               % u izrazu E1 mijenjamo a sa 4

ans =

    3.2432
```

f) Korištenjem izraza E1 i m-funkcije E2 nacrtajte kako se energija zadanih signala mijenja ovisno o parametru a. Za sliku uzmite da je a iz intervala $[0,30]$. Kako se energija mijenja s povećanjem parametra a? Što očekujete kada $a \to \infty$?

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte oba grafa ovisnosti energije o trajanju intervala i napišite odgovore na postavljena pitanja iz podzadatka f).

g) Definirajte simbolički izraz P1 i m-funkciju P2 koji definiraju snagu na intervalu $[-a, a]$ zadanih signala (iskoristite rezultat d) podzadatka i vezu energije i snage). Pri tome je naravno parametar a pozitivan realan broj za vremenski kontinuirani signal i pozitivan cijeli broj za vremenski diskretni signal.

h) Korištenjem izraza P1 i m-funkcije P2 nacrtajte kako se snaga zadanih signala mijenja ovisno o parametru a. Za skicu uzmite da je a iz intervala $[\frac{1}{80}, 80]$ za vremenski kontinuirani signal i iz intervala $[1,80]$ za vremenski diskretni signal. Kako se snaga mijenja s povećanjem parametra a? Što očekujete kada $a \to \infty$?

(IZVJEŠTAJ) Uredno skicirajte oba grafa ovisnosti snage o trajanju intervala i napišite odgovore na postavljena pitanja iz podzadatka h).

3.2. Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

Drugi dio prve laboratorijske vježbe bavi se Fourierovim transformacijama vremenski kontinuiranih signala. Razlikujemo dvije Fourierove transformacije, vremenski kontinuirani Fourierov red i vremenski kontinuiranu Fourierovu transformaciju.

Vremenski kontinuiran Fourierov red (CTFS, od eng. *Continuous Time Fourier Series*, kraće Fourierov red) koristi se za analizu **periodičkih** vremenski kontinuiranih signala. Pomoću Fourierovog reda periodičan signal konačne snage opisujemo s prebrojivo mnogo spektralnih koeficijenata koje zovemo harmonici.

Vremenski kontinuirana Fourierova transformacija (CTFT, od eng. *Continuous Time Fourier Transformation*, kraće Fourierov integral) koristi se za analizu **aperiodičkih** vremenski kontinuiranih signala. Pomoću Fourierovog integrala aperiodičan signal konačne energije opisujemo s neprebrojivo mnogo eksponencijalnih funkcija.

15 minuta **Zadatak 5. Vremenski kontinuiran Fourierov red (CTFS)**

U ovom zadatku razmatramo signal $x(t) = 110\sin(120\pi t) + 50\cos\left(360\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite izraze Fourierove analize i sinteze za vremenski kontinuiran Fourierov red (CTFS). U izrazima jasno označite signal, spektar, period signala, nezavisnu varijablu signala (vrijeme) i nezavisnu varijablu spektra (red harmonika).

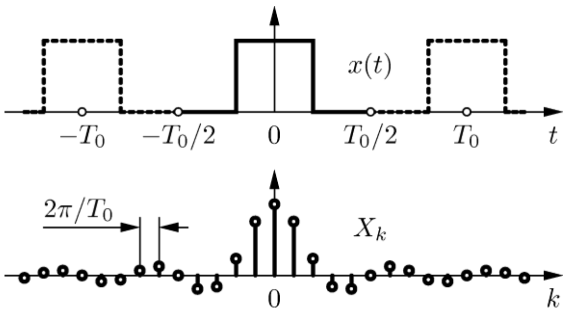
a) Rastavite u Fourierov red zadani signal $x(t)$. Neka period T_0 bude jednak dvostrukom temeljnom periodu zadanog signala.

(IZVJEŠTAJ) Napišite potpuni postupak rastavljanja zadanog signala u Fourierov red. Konačno rješenje istaknite.

b) Korištenjem MATLAB-a rastavite zadani signal u Fourierov red. Neka period za računanje Fourierovog reda bude jednak dvostrukom temeljnom periodu. Poklapa li se rješenje s rezultatom podzadatka a)?

Za određivanje Fourierovog reda u MATLAB-u koristimo definicijski izraz jer ne postoji naredba za računanje Fourierovogog reda. Za simboličko računanje koristimo Symbolic Toolbox, npr. spektar periodički ponavljanih pravokutnih impulsa perioda T_0 (slika 2.) računamo kako slijedi:

```
» syms t T0 k <ENT>                           % potrebne varijable
» int(1*exp(-2*pi*j/T0*t*k),-T0/4,T0/4)/T0 <ENT> % integracija po definiciji

ans =

1/2*i*(exp(-1/2*i*pi*k)-exp(1/2*i*pi*k))/pi/k

» pretty(simplify(ans)) <ENT>                 % uljepšavanje rezultata ☺

                                sin(1/2 pi k)
                                -------------
                                    pi k
```



Slika 2. Vremenski kontinuiran Fourierov red niza pravokutnih impulsa

(IZVJEŠTAJ) Prepišite bez izmjena naredbe koje ste koristili i konačan rezultat rastava u Fourierov red iz podzadatka b) kako ga je izračunao MATLAB.

c) Pomoću naredbe `stem` nacrtajte amplitudni i fazni spektar signala iz a) dijela zadatka.

Crtanje simboličkih funkcija po diskretnoj varijabli zahtijeva pisanje skripte:

```
» X1<ENT>                        % neka X1 sadrži spektar signala x1 po k

X1 =

-220*(-1+exp(i*pi*k)^2)/pi/exp(i*pi*k)^2/(k^2-4)


» A=zeros(51,1);                 % 51 koeficijent reda ćemo spremiti u A
```

```
» for n=-25:25
A(n+26)=subs(limit(X1,k,n));          % moramo računati limes za svaki k koji nas
end                                   % zanima zbog mogućeg dijeljenja s 0
» stem([-25:25],abs(A))               % crtamo amplitudu
» stem([-25:25],angle(A))             % crtamo fazu
```

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte amplitudni i fazni spektar koje ste nacrtali u podzadatku c).

25 minuta Zadatak 6. Spektralna gustoća snage (CTFS)

Promatramo li umjesto spektra X_k kvadrat njegove apsolutne vrijednosti $|X_k|^2$ tada kažemo da promatramo spektralnu gustoću snage[3] jer za odabrani k veličina $|X_k|^2$ predstavlja srednju snagu k-te harmoničke komponente signala.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite Parsevalovu relaciju za vremenski kontinuiran Fourierov red (CTFS). U izrazu jasno označite signal, spektar, period signala, nezavisnu varijablu signala (vrijeme) i nezavisnu varijablu spektra (red harmonika).

a) Rastavite u Fourierov red niz pravokutnih impulsa jedinične amplitude trajanja T koji se ponavljaju svakih T_0 pri čemu je $T_0 > T > 0$ (slika 2.).

(IZVJEŠTAJ) Napišite potpuni postupak rastavljanja signala iz podzadatka a) u Fourierov red. Konačno rješenje istaknite.

b) Korištenjem MATLAB-a odredite Fourierov red signala iz a) podzadatka. Neka T i T_0 budu simboličke varijable. Poklapa li se rješenje s rezultatom podzadatka a)?

(IZVJEŠTAJ) Prepišite bez izmjena konačan rezultat rastava u Fourierov red iz podzadatka b) kako ga je izračunao MATLAB.

c) Nacrtajte amplitudni i fazni spektar te spektralnu gustoću snage za signal iz podzadatka a) uz $T = 2$ i $T_0 = 20$ te uz $T = 2$ i $T_0 = 3$. Neka je za sve slike $k \in [-100,100]$.

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte sve slike dobivene u podzadatku c). Nije potrebno precrtavati svih 201 komponentu već je dovoljno naznačiti oblik spektra kao da se radi o kontinuiranoj funkciji te jasno označiti širinu i visinu glavne latice i prvih bočnih latica za amplitudne, odnosno točke lomova za fazne spektre.

d) Korištenjem Parsevalove relacije odredite snagu signala P_m kojeg smo dobili ako signal iz podzadatka a) uz $T = 2$ i $T_0 = 20$ aproksimiramo s prvih m spektralnih komponenti (dakle, s harmonicima od $-m$ do m). Označimo s P_0 snagu signala iz podzadatka a). Nacrtajte kako razlika snaga $P_0 - P_m$ ovisi o broju komponenti za $m \in [1,100]$. Što možete reći o razlici snaga kada $m \to \infty$?

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte dobivenu ovisnost snage o broju spektralnih komponenti. Napišite odgovore na pitanja iz podzadatka d).

e) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Označimo s $x(t)$ signal iz podzadatka a) te s $x_m(t)$ signal kojeg smo dobili ako $x(t)$ aproksimiramo s prvih m spektralnih komponenti (dakle, s harmonicima od $-m$ do m). Što možete reći o razlici amplituda signala i aproksimacije $x(t) - x_m(t)$ kada $m \to \infty$?

20 minuta Zadatak 7. Vremenski kontinuirana Fourierova transformacija (CTFT)

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite izraze Fourierove analize i sinteze za vremenski kontinuiranu Fourierovu transformaciju (CTFT). U izrazima jasno označite signal, spektar, nezavisnu varijablu signala (vrijeme) i nezavisnu varijablu spektra (kružnu frekvenciju).

a) Izračunajte vremenski kontinuiranu Fourierovu transformaciju simetričnog pravokutnog impulsa jedinične amplitude i trajanja $T = 2$ (slika 3.).

[3] Umjesto spektralna gustoća snage koristiti se i izraz gustoća spektra snage, a ponekad čak i samo spektar snage (iako zadnji izraz nije potpuno precizan).

(IZVJEŠTAJ) Napišite potpuni postupak računanja transformacije zadanog signala iz podzadatka a). Konačno rješenje istaknite.

b) Korištenjem MATLAB-a odredite vremenski kontinuiranu Fourierovu transformaciju signala iz podzadatka a).

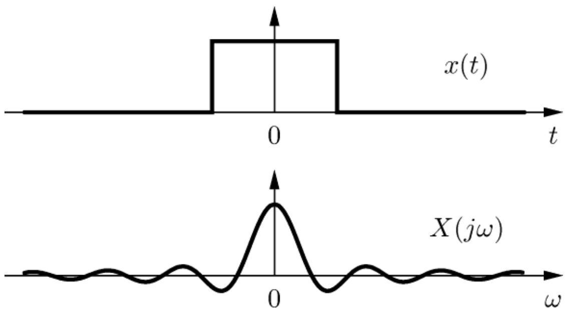
Za računanje Fourierove transformacije u MATLAB-u možete koristiti funkciju `fourier` (ili alternativno računati izravno definicijske izraze), npr. transformaciju signala sa slike 3. računamo kao:

```
» syms t
» X=fourier(heaviside(t+1/2)-heaviside(t-1/2)) <ENT>

ans =
exp(-i*w)*(pi*Dirac(w)-i/w)-exp(i*w)*(pi*Dirac(w)-i/w)

» X=simplify(X) <ENT>

ans =
2*sin(w/2)/w

» ezplot(abs(X),[-30,30]) <ENT>                      % amplituda
» ezplot(atan(imag(X)/real(X)),[-30,30]) <ENT>       % faza
```

(IZVJEŠTAJ) Prepišite bez izmjena konačan rezultat rastava u Fourierov red iz podzadatka b) kako ga je izračunao MATLAB.

c) Korištenjem MATLAB-a nacrtajte amplitudni i fazni spektar transformacije dobivene u podzadatku b). Usporedite dobiveni spektar sa spektrom signala iz zadatka 6.c). U čemu je razlika?

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte spektar iz podzadatka c) te napišite odgovor na postavljeno pitanje.



Slika 3. Vremenski kontinuirana Fourierova transformacija pravokutnog impulsa

10 minuta **Zadatak 8. Generalizirana Fourierova transformacija (CTFT)**

U ovom zadatku razmatramo periodični signal $x(t) = 110\sin(120\pi t) + 50\cos\left(360\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ iz zadatka 5.

(IZVJEŠTAJ) Napišite Dirichletove uvjete (nužni, ali ne i dovoljni uvjeti) za postojanje vremenski kontinuirane Fourierove transformacije nekog signala.

a) Zadovoljava li promatrani signal Dirichletove uvjete?

b) Korištenjem MATLAB-a odredite vremenski kontinuiranu Fourierovu transformaciju zadanog signala.

(IZVJEŠTAJ) Prepišite bez izmjena naredbe koje ste koristili za računanje transformacije u podzadatku b). Zatim napišite konačnu transformaciju kako ju je izračunao MATLAB.

c) Usporedite dobiveni spektar sa spektrom signala iz zadatka 5.c). U čemu je razlika?

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte spektar iz podzadatka b) te napišite odgovor na postavljeno pitanje.

20 minuta **Zadatak 9. Spektralna gustoća energije (CTFT)**

Promatramo li umjesto spektra $X(\omega)$ kvadrat njegove apsolutne vrijednosti $|X(\omega)|^2$ kažemo da promatramo spektralnu gustoću energije.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite Parsevalovu relaciju za vremenski kontinuiranu Fourierovu transformaciju (CTFT). U izrazu jasno označite signal, spektar, nezavisnu varijablu signala (vrijeme) i nezavisnu varijablu spektra (kružna frekvencija).

a) Koristeći MATLAB odredite i nacrtajte spektralnu gustoću energije pravokutnog impulsa jedinične amplitude i trajanja $T = 2$ iz zadatka 7.a).

(IZVJEŠTAJ) Prepišite bez izmjena izraz za spektralnu gustoću kojeg je izračunao MATLAB u podzadatku a). Skicirajte tu spektralnu gustoću.

b) Korištenjem Parsevalove relacije odredite snagu signala P_{ω_0} kojeg smo dobili ako signal iz podzadatka 7.a) aproksimiramo samo sa spektralnim komponentama od $-\omega_0$ do ω_0. Označimo s P_0 snagu signala iz podzadatka 7.a). Nacrtajte kako razlika snaga $P_0 - P_{\omega_0}$ ovisi o širini spektralnog intervala za $\omega_0 \in [1,50]$. Što možete reći o razlici snaga kada $\omega_0 \to \infty$?

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte dobivenu ovisnost snage o širini spektralnog intervala. Napišite odgovore na pitanja iz podzadatka b).

c) (ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE) Označimo s $x(t)$ signal iz podzadatka 7.a) te s $x_{\omega_0}(t)$ signal kojeg smo dobili ako $x(t)$ aproksimiramo samo sa spektralnim komponentama od $-\omega_0$ do ω_0. Što možete reći o razlici amplituda signala i aproksimacije $x(t) - x_{\omega_0}(t)$ kada $\omega_0 \to \infty$?

3.3. Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala

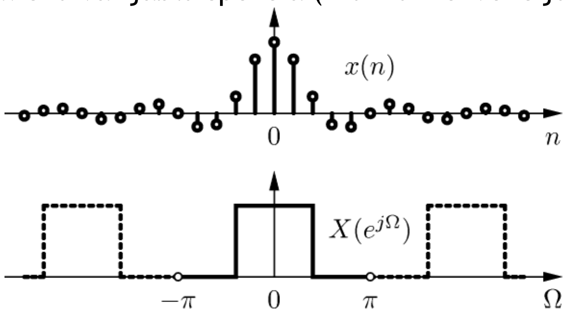
Treći dio prve laboratorijske vježbe bavi se Fourierovim transformacijama vremenski diskretnih signala. Razlikujemo dvije Fourierove transformacije, vremenski diskretnu Fourierovu trasnformaciju i vremenski diskretan Fourierov red.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (DTFT, od eng. *Discrete Time Fourier Transformation*) se koristi za analizu **aperiodičkih** vremenski kontinuiranih signala. Pomoću Fourierovog integrala aperiodičan signal konačne energije opisujemo s neprebrojivo mnogo eksponencijalnih funkcija. Primjer rastava jednog niza beskonačnog trajanja prikazan je na slici 4. Primijetite da je spektar periodična kontinuirana funkcija frekvencije.

Vremenski diskretan Fourierov red (DTFS, od eng. *Discrete Time Fourier Series*) se koristi za analizu **periodičkih** vremenski diskretnih signala. Pomoću Fourierovog reda periodičan signal konačne snage opisujemo s konačnim brojem spektralnih koeficijenata koje zovemo harmonici. Vremenski diskretan Fourierov red je usko povezan s diskretnom Fourierovom transformacijom (DFT, od eng. *Discrete Fourier Transform*). Obje transformacije, DTFS i DFT, su gotovo jednake i razlikuju se samo u neznatno drugačijem odabiru normalizacijskih koeficijenata. Kada računamo DFT ili DTFS na računalu koristimo algoritam **brze Fourierove transformacije** (FFT, od eng. *Fast Fourier Transform*) kojim se efikasno računa DFT uz korištenje principa podijeli-pa-vladaj.

20 minuta Zadatak 10. Vremenski diskretna Fourierova transformacija (DTFT)

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite izraze Fourierove analize i sinteze za vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT). U izrazima jasno označite signal, spektar, nezavisnu varijablu signala (vrijeme) i nezavisnu varijablu spektra (kružnu frekvenciju).



Slika 4. Vremenski diskretna Fourierova transformacija

Prilikom obrade i analize signala na računalu najčešće radimo sa signalima konačnog trajanja [4] te nam numeričko računanje konačne sume eksponencijalnih funkcija, a time i DTFT-a ne predstavlja osobit problem. Za numeričko računanje i crtanje spektra vremenski diskretnog signala konačnog trajanja u MATLAB-u možemo koristiti funkciju `freqz` koja računa vrijednosti DTFT-a u zadanim vrijednostima kružne frekvencije:

```
» w = [-pi:0.01:pi]; <ENT>        % definiramo vrijednosti kružne frekvencije
» x = [1 2 3 4 3 2 1]; <ENT>      % definiramo signal
» X = freqz(x, 1, w); <ENT>       % računamo uzorke spektra
» plot(w,abs(X)); <ENT>           % crtamo amplitudni spektar
» plot(w,angle(X)); <ENT>         % crtamo fazni spektar
```

Korištenjem naredbe `freqz` na jednostavan način možemo odrediti samo spektar niza kojemu prvi član uvijek započinje u nuli. Želimo li odrediti spektar niza konačnog trajanja kojemu prvi član nije u koraku $n = 0$ moramo se poslužiti svojstvom pomaka. Prema svojstvu pomaka ako niz pomaknemo za n_0 uzoraka spektar moramo pomnožiti s eksponecijalnom funkcijom $e^{-j\Omega n_0}$, odnosno vrijedi

$$x(n - n_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(e^{j\Omega})e^{-j\Omega n_0}.$$

Prema svojstvu pomaka možemo koristiti funkciju `freqz` za numeričko računanje uzoraka spektra samo rezultat moramo pomnožiti s $e^{-j\Omega n_0}$:

```
» n = [1 1 1 1 1 1 1]; <ENT>      % definiramo konačni niz brojeva (signal)
» [H, w] = freqz(n,1); <ENT>      % računamo uzorke spektra
» H = H .* exp(-j*w*5); <ENT>     % primijenjujemo svojstvo pomaku
» plot(w, abs(H)) <ENT>           % crtamo amplitudni spektar
» plot(w, phase(H)) <ENT>         % crtamo fazni spektar
```

Naredbi `freqz` možete zadati niz frekvencija na kojima se računa vrijednost karakteristike. Sve frekvencijske karakteristike odredite na intervalu $[-5\pi, 5\pi]$.

a) Analitički izračunajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju te odredite izraze za amplitudni i fazni spektar vremenski diskretnog signala konačnog trajanja $x(n) = \{\dots,0,0,0,\underline{1},1,1,1,0,0,0,0,\dots\}$ koji ima $N = 4$ uzorka različita od nule. Podcrtani uzorak odgovara koraku $n = 0$.

(IZVJEŠTAJ) Napišite potpuni postupak računanja transformacije te amplitudnog i faznog spektra zadanog signala iz podzadatka a). Konačna rješenja istaknite.

[4] Signal konačnog trajanja je signal koji se razlikuje od nule u konačnog mnogo trenutaka.

b) Koristeći MATLAB nacrtajte amplitudni i fazni dio spektra signala iz a) dijela zadatka.

(IZVJEŠTAJ) Prepišite bez izmjena naredbe koje ste koristili za crtanje. Zatim skicirajte slike koje je nacrtao MATLAB.

c) Razmatramo vremenski diskretni signal konačnog trajanja koji započevši od koraka $n = 0$ sadrži N jedinica. Nacrtajte amplitudni i fazni spektar tog signala za $N = 8$ i za $N = 15$.

d) Kako se mijenja amplitudni, a kako fazni dio spektra signala iz c) podzadatka ako mijenjamo parametar N (trajanje signala)? Prvi uzorak različit od nule je uvijek u koraku $n = 0$.

e) Kako se mijenja amplitudni, a kako fazni dio spektra signala iz c) podzadatka ako mijenjamo korak u kojem signal započinje? Neka svaki od pomaknutih signala ima uvijek točno N uzoraka različitih od nule.

(IZVJEŠTAJ) Napišite odgovore na pitanja iz podzadataka d) i e).

5 minuta

Zadatak 11. Spektralna gustoća energije (DTFT)

Promatramo li umjesto spektra $X(e^{j\Omega})$ kvadrat njegove apsolutne vrijednosti $\left|X(e^{j\Omega})\right|^2$ kažemo da promatramo spektralnu gustoću energije.

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite Parsevalovu relaciju za vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT). U izrazu jasno označite signal, spektar, nezavisnu varijablu signala (vrijeme) i nezavisnu varijablu spektra (kružna frekvencija).

a) Odredite i nacrtajte spektralnu gustoću energije signala iz zadatka 10.a).

(IZVJEŠTAJ) Prepišite bez izmjena naredbe koje ste koristili za crtanje spektralne gustoće snage. Zatim skicirajte sliku koju je nacrtao MATLAB.

10 minuta

Zadatak 12. Vremenski diskretan Fourierov red (DTFS)

(IZVJEŠTAJ) Uredno napišite izraze Fourierove analize i sinteze za vremenski diskretan Fourierov red (DTFS). U izrazima jasno označite signal, spektar, nezavisnu varijablu signala (vrijeme) i nezavisnu varijablu spektra (red harmonika).

Kako u izrazima za DTFS utjecaj na transformaciju ima samo konačan broj očitaka unutar jednog perioda jer ostale uzorke znamo zbog periodičnosti (vidi sliku 5.) sama transformacija je izuzetno pogodna za računalne primjene. Za obradu signala na računalu tipično raspolažemo s N snimljenih očitaka otipkanih nekom frekvencijom očitavanja f_S i pripadnim periodom očitavanja T_S. Pretpostavimo li da je tih N snimljenih očitaka upravo jedan period periodičkog signala možemo izračunati DTFS. Ako se striktno ograničimo samo na jedan period tada se transformacija uobičajeno naziva diskretna Fourierova transformacija ili DFT i određena je izrazima

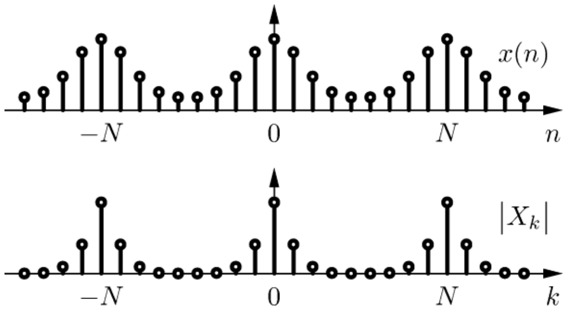
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j \frac{nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk},\ 0 \le k < N$$

$$x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{2\pi j \frac{nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk},\ 0 \le n < N$$

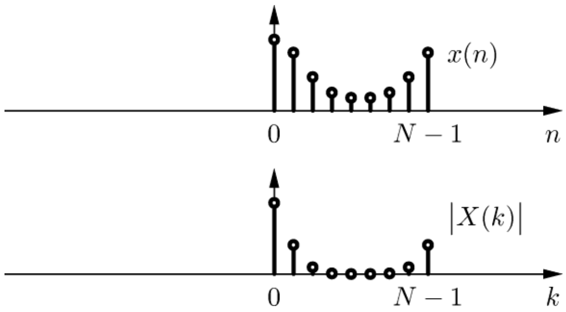
pri čemu smo s $W_N^{nk} = e^{-2\pi j \frac{nk}{N}}$ označili kompleksnu eksponencijalu. Uvijek kada je poznat broj uzoraka N on se piše kao indeks naziva transformacije pa govorimo o DFT_N transformaciji. Primjer DFT_9 transformacije za $N = 9$ je prikazan na slici 6.

Bez obzira koristimo li DTFS ili DFT koeficijenti transformacije $X(k)$ su funkcija indeksa harmonika k. Zbog olakšavanja analize poželjno je uspostaviti vezu između indeksa k i stvarne frekvencije u Hz. Promatrani signal je snimljen u N točaka frekvencijom očitavanja f_S. Uzorak spektra s indeksom k odgovara stvarnoj frekvenciji od

$$\frac{k}{N} f_S \text{ Hz.}$$



Slika 5. Vremenski diskretan Fourierov red



Slika 6. Diskretna Fourierova transformacija

Za računanje diskretne Fourierove transformacije u MATLAB-u koristimo funkciju `fft` koja implementira postupak brze Fourierove transformacije i efikasno računa DFT:

```
» t = [1:0.01:10]; <ENT>        % definiramo vektor vremenskih trenutaka
» x = sin(2*pi*3*t); <ENT>      % očitavamo sinus frekvencije 3 frekvencijom 100
» X = fft(x); <ENT>             % računamo DFT
» A = abs(X); <ENT>             % računamo amplitudni spektar
» N = length(X); <ENT>          % broj uzoraka je N
» w = ([1:N]-1)/N*100; <ENT>    % računamo vektor stvarnih frekvencija
» plot(w, A) <ENT>              % crtamo spektar
```

a) Koristeći MATLAB očitajte počevši od trenutka nula $N = 8000$ uzoraka vremenski kontinuiranog signala $x_1(t) = \sin(2\pi 700 t)$ uz frekvenciju očitavanja $f_S = 8\,\text{kHz}$.

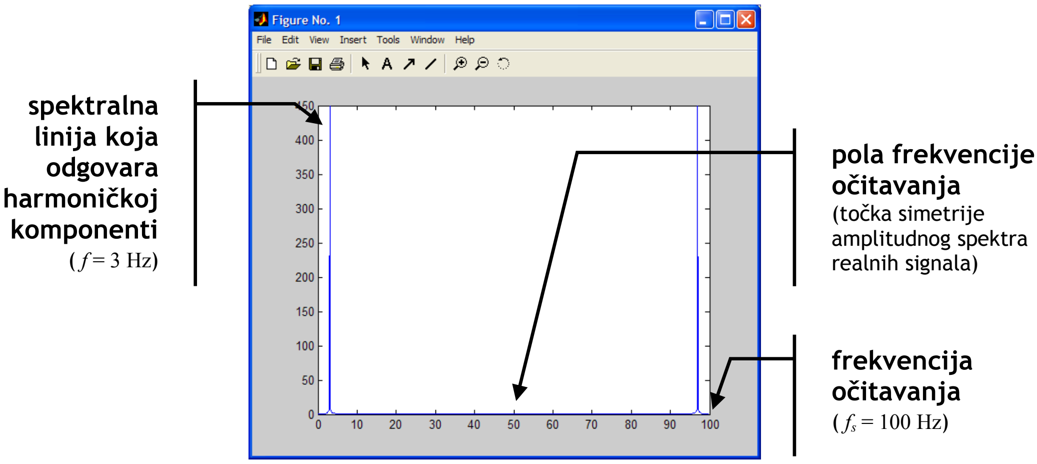
b) Korištenjem naredbe `fft` odredite DFT$_{8000}$ očitanog signala $x_1(nT_S)$ te nacrtajte amplitudni spektar.

(IZVJEŠTAJ) Prepišite bez izmjena naredbe koje ste koristili za računanje i crtanje amplitudnog spektra. Skicirajte amplitudni spektar očitanog signala $x_1(nT_S)$.

c) Koristeći MATLAB očitajte počevši od trenutka nula $N = 8000$ uzoraka vremenski kontinuiranog signala $x_1(t) = \sin(2\pi 705 t)$ uz frekvenciju očitavanja $f_S = 8\,\text{kHz}$.

d) Korištenjem naredbe `fft` odredite DFT$_{8000}$ očitanog signala $x_2(nT_S)$ te nacrtajte amplitudni spektar.

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte amplitudni spektar očitanog signala $x_2(nT_S)$.



Slika 7. DFT sinusnog signala frekvencije $f = 3\ \mathrm{Hz}$ očitan frekvencijom $f_S = 100\ \mathrm{Hz}$ uz $N = 901$ uzoraka

e) Razmatramo vremenski diskretni signal koji odgovara zbroju očitanih signala $x_1(nT_S) + x_2(nT_S)$ (superpozicija). Korištenjem MATLAB-a nacrtajte taj signal u vremenskoj domeni. Zatim izračunajte i skicirajte amplitudni spektar tog signala.

f) U kakvom je odnosu spektar iz e) podzadatka i spektri iz b) i d) podzadatka?

(IZVJEŠTAJ) Skicirajte amplitudni spektar iz podzadatka e) i odgovorite na pitanje iz podzadatka f).

g) Ako vaše računalo ima zvučnike preslušajte sve očitane signale[5]. Kako se izgled signala u vremenskoj domeni poklapa s onim što čujete? Kako se nacrtani spektri poklapaju s onim što čujete?

4. Literatura

1. John R. Buck, Michael M. Daniel, Andrew C. Singer, *Computer Explorations in Signals and Systems using Matlab*, 2nd edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
2. H. Babić, *Signali i sustavi (zavodska skripta)*, FER, Zagreb 1996., http://sis.zesoi.fer.hr/predavanja/pdf/sis_2001_skripta.pdf
3. Edward A. Lee, Pravin Varaiya, *Structure and Interpretation of Signals and Systems*, Addison Wesley, 2003.
4. T. Petković, Z. Kostanjčar, M. Budišić, B. Jeren, *Upute za laboratorijske vježbe iz Signala i sustava*, FER, Zagreb, svibanj 2006. http://sis.zesoi.fer.hr/laboratorij/pdf/upute_za_vjezbe_20060509.pdf
5. T. Petković, *Kratke upute za korištenje MATLAB-a*, FER, Zagreb, travanj 2005. http://www.fer.hr/_download/repository/matlab_upute.pdf
6. MATLAB Technical Documentation, The MathWorks, http://www.mathworks.com/help/techdoc/
7. Simulink Technical Documentation, The MathWorks, http://www.mathworks.com/help/toolbox/simulink/
8. Signal Processing Toolbox Technical Documentation, The MathWorks, http://www.mathworks.com/help/toolbox/signal/

[5] Signal možete preslušati korištenjem naredbe `soundsc`. Ako imate uzorke spremljene u vektoru x otipkane frekvencijom `fs` naredba je `soundsc(x, fs)`.