Signali i sustavi – Zadaci za aktivnost – Tjedan 10.

Akademska školska godina 2006./2007.

1) Zadan je sustav $\dfrac{dy}{dt} + 5y + 2 = u(t)$, $y(0)$=0 Je li sustav linearan? Ako je obrazložite zašto je, a ako nije objasnite zašto nije! Zašto nam je važno je li sustav linearan, tj. što nam to znači u traženju odziva sustava na neku pobudu?

2) Zadan je odziv na step LTI sustava $y(t) = \cos(\omega_0 t)\,\mu(t)$. Nađite impulsni odziv sustava. Kakve početne uvjete pri tome podrazumijevate? Možete li generalizirati rezultat?

3) Zadan je integrator. Ulaz i izlaz integratora vezani su relacijom

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau$$

a) Nađite impulsni odziv sustava,
b) Ispitajte stabilnost sustava.

4) Ako na ulaz sustava $-\dfrac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$ dovedemo signal $u(t)=\mu(-t)$. Kako će izgledati izlaz iz sustava u slučaju:
a) $y(0)=0$,
b) $y(0)=1$.

5) Zadan je kontinuiran sustav $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Nađite odziv sustava na sljedeće pobude:
a) $u(t) = t\mu(t)$,
b) $u(t) = \mu(t)$,
c) $u(t) = \delta(t)$.
d) $u(t) = t\mu(t)+\mu(t)+\delta(t)$,

6) Veza između ulaza i izlaza sustava dana je izrazom:

$$y(t) = \int_{0}^{1} u(t-h)\,dh, \forall t \in R$$

Odredite:
a) Impulsni odziv sustava
b) Odziv sustava na pobudu $\mathrm{u(t)} = \sin(\frac{\pi}{2}t), \forall t \in R$

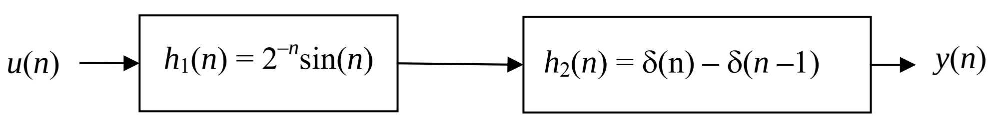
7) Kontinuirani sustav prvog reda zadan je diferencijalnom jednadžbom:

$$y' + y = u' + 2u.$$

Na ulaz sustava dovedena je pobuda $u(t)=3\mu(t)$. Nađite odziv sustava ukoliko su početni uvjeti
a) $y(0^-) = 9$
b) $y(0^+) = 9$

8) Odredite metodom konvolucijske sumacije odziv $y(n)$ sustava prikazanog slikom, ako je zadano:

$$u(n) = \mu(n),\ h_1(n) = 2^{-n}\sin(n),\ h_2(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$



① $\frac{dy}{dt} + 5y + 2 = u(t)$, $y(0) = 0$

→ Sustav je očigledno nelinearan.
Ako na ulaz dovedemo linearnu kombin. dva signala, na izlazu to očigledno nećemo dobiti → razlog je $\underline{2}$.

→ Ako je sustav linearan (specijalno i vremenski nepromjenjiv → LTI), tada što god napravili ulaznom signalu (linearne transformacije) → to moramo napraviti i izlazu. tj.
Ako je S LTI te

$y_1 = S\{u_1\}$, tada ako je

$u_2 = T\{u_1\}$, T - također LTI, onda vrijedi da je

$$\underline{y_2 = T\{y_1\}}$$ → tj. ako znamo

odziv na u_1, i ako znamo da u_2 možemo dobiti iz u_1 → linearnim transformacijama tada y_2 možemo dobiti iz y_1.

—1—

2) Koristimo svojstvo iz prethodnog zadatka

$$y(t) = \cos\omega_0(t)\mu(t) = T\{\mu(t)\}$$

$$T\{\delta(t)\} = ?$$

S obzirom da je sustav linearan, te s obzirom da je $\delta(t) = \frac{d}{dt}(\mu(t)) \rightarrow$

$$T\{\delta(t)\} = \frac{d}{dt}\left(\cos\omega_0 t)\mu(t)\right) =$$

$$= -\omega_0 \sin\omega_0 t\,\mu(t) + \delta(t)$$

3) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau \rightarrow$

a) $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \mu(t)$

b) stabilnost sustava $\rightarrow$ dva uvjeta.

i) $\rightarrow$ impulsni odziv u beskonačnosti teži u $1 \neq 0 \rightarrow$ marginalna stabilnost.

ii) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau \,/\frac{d}{dt} \rightarrow y' = u$

$\rightarrow$ vlastite frekvencije $s = 0 \rightarrow$ marg. stab.

4) $\frac{dy}{dt} - y(t) = -\mu(-t)$

a) $y(0) = 0$

$y_h = ce^t$

$t \in (0, \infty)$

$t \in (-\infty, 0) \rightarrow y_p = 1 \rightarrow$

tražimo $t \in (-\infty, 0]$

$y_p = ce^t + 1 \rightarrow$

$y_p = (ce^t + 1)\mu(-t) \rightarrow$ opće $\underline{t \in \mathbb{R}}$.

$y_p' - y_p = -\mu(-t) \rightarrow$

$\cancel{ce^t \mu(-t)} - (c+1)\delta(t) - (\cancel{ce^t+1)\mu(-t)} = -\mu(-t)$

$\underline{c = -1}$

$\rightarrow y_p = (1 - e^t)\mu(-t) \quad \underline{t \in \mathbb{R}}$.

$\rightarrow \underline{y_h = ce^t}$

$y = ce^t + (1 - e^t)\mu(-t)$

$\downarrow y(0) = 0$

$c = 0$

a) $\rightarrow y = (1 - e^t)\mu(-t)$

b) $y(0) = 1 \rightarrow y = e^t + (1 - e^t)\mu(-t)$

5) $y'' + 2y' + y = u \;,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0$

a) $u(t) = t\mu(t)$

k. jednadžba $\rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$(\lambda + 1)^2 = 0 \rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = -1}$$

$$y_h = (C_1 + C_2 t) e^{-t}$$

$$y_p = A + Bt \rightarrow$$

$$2B + A + Bt = t \rightarrow \underline{B = 1}$$

$$\underline{A = -2}$$

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + t - 2$$

$+ \quad y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 0 \longrightarrow$

$$y = (te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2)\mu(t)$$

b) s obzirom da je $\mu(t) = \frac{d}{dt}\left[t\mu(t)\right]$

$$\rightarrow y_b = y_a' = (-e^{-t} - te^{-t} + 1)\mu(t)$$

c) $\rightarrow$ Analogno $y_c = y_b' = te^{-t}\mu(t)$

d) $\rightarrow$ lin. komb. $\rightarrow (e^{-t} + te^{-t} + t - 1)\mu(t)$

6) $y(t) = \int_0^1 u(t-h)\,dh \,, \forall t \in R$

a) impulsni odziv $\longrightarrow$

$$h(t) = \int_0^1 \delta(t-h)\,dh \,, \quad t-h=k, \; dh=-dk$$

$$h(t) = -\int_t^{t-1} \delta(k)\,dk = \int_{t-1}^{t} \delta(k)\,dk =$$

$$= \int_0^t \delta(k)\,dk - \int_0^{t-1} \delta(k)\,dk =$$

$$= \mu(t) - \mu(t-1)$$

b) $u(t) = \sin\frac{\pi}{2}t$

$$y = \int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}(t-h)\,dh = \quad \Big| \; \frac{\pi}{2}(t-h) = k, \; dh = -\frac{2}{\pi}dk$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}t}^{\frac{\pi}{2}(t-1)} \sin k\,dk = +\frac{2}{\pi}\cos k \Big|_{\frac{\pi}{2}t}^{\frac{\pi}{2}(t-1)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}t - \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}t - \sin\frac{\pi}{2}t\right]$$

7) $y' + y = u' + 2u$.

$u(t) = 3\mu(t)$, $\underline{y(0)}$

a) $y(0^-) = 9$, b) $y(0^+) = 9$.

$y_h = ce^{-t}$

$t \in (0, \infty) \rightarrow y_p = k \rightarrow$

$k = 6 \rightarrow$

$y_p = (ce^{-t} + 6)\mu(t)$, $\underline{t \in \mathbb{R}}$.

$\rightarrow$ $-\cancel{ce^{-t}\mu(t)} + (c+6)\delta(t) +$

$+ \cancel{(ce^{-t} + 6)}\mu(t) = 3\delta(t) \cancel{+6\mu(t)}$

$\rightarrow \underline{c = -3}$

$\rightarrow y = ce^{-t} + (6 - 3e^{-t})\mu(t)$

a) $y(0^-) = c + 0 = 9 \rightarrow (\underline{\mu(0^-) = 0})$

$c = 9$

$y = 9e^{-t} + (6 - 3e^{-t})\mu(t)$ $\underline{\cancel{t \in \mathbb{R}}}$

$\rightarrow y = (6 + 6e^{-t})\mu(t)$ $\underline{t \in (0, \infty)}$.

7b)

$$y = ce^{-t} + (6-3e^{-t})\mu(t)$$

$$y(0^+) = 9 \qquad (\mu(0^+) = 9)$$

$$y(0^+) = C + 3 = 9 \rightarrow \underline{c = 6}.$$

$$y = 6e^{-t} + (6-3e^{-t})\mu(t), \ \underline{t \in \mathbb{R}}.$$

$$y = (6+3e^{-t})\mu(t), \ \underline{t \in (0,\infty)}.$$

8) $u(n) = \mu(n)$, $h_1 = 2^{-n}\sin n$, $h_2 = \delta(n) - \delta(n-1)$

$$y(n) = u(n) * h_1(n) * h_2(n)$$

$$= \underbrace{(u(n) * h_2(n))}_{\delta(n)} * h_1(n)$$

$$= \delta(n) * h_1(n) = h_1(n) \Rightarrow$$

$$y(n) = 2^{-n}\sin n, \ \underline{n \geq 0}.$$