Signali i sustavi – Zadaci za aktivnost – Tjedan 8.

Akademska školska godina 2006./2007.

1. Zadan je diskretan signal $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Definiramo novi signal $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - kp)$, pri čemu je $p \in \mathbb{N}$. Dokažite da je signal $f(n)$ periodičan za svaki diskretan $g(n)$ za koji zadana suma konvergira!

2. Zadan je diskretan signal $x(n) = \cos(an + 1)$, gdje je $a = \frac{1}{3}$. Je li signal periodičan i koliki mu je temeljni period? Kakav mora biti $a \in \mathbb{R}$ da signal bude periodičan?

3. Odziv diskretnog LTI sustava na jediničnu stepenicu $\mu(n)$ je $y(n) = (n + a)\,\mu(n)$, gdje je $a \in \mathbb{Z}$. Ukoliko s $h(n)$ označimo odziv sustava na Kroneckerov δ-impuls izračunajte koliko iznosi $\sum_{m=-\infty}^{n} h(m)$.

4. Za svaku od navedenih tvrdnji odredite je li istinita ili nije. Ako je tvrdnja istinita obrazložite zašto mislite da je istinita, a ako nije obrazložite zašto ne!

a) Ne postoji deterministički automat s dva stanja i $Ulazi = Izlazi = \{0, 1\}$ koji može detektirati niz $1, 1, 1$.

b) Ako se na ulaz determinističkog automata s n stanja dovede stalan signal $u(n) = \{\underline{0}, 0, 0, 0, \ldots\}$ izlaz automata nakon nekog vremena neće nužno postati periodičan.

c) Ako deterministički automat B simulira automat A s relacijom simulacije $S_{AB} \subset Stanja_A \times Stanja_B$ tada automat A simulira B s relacijom simulacije $S_{BA} = \{(S_B, S_A) | (S_A, S_B) \in S_{AB}\}$.

d) Ukoliko automat B_1 simulira automat A_1 te automat B_2 simulira A_2, tada kaskada automata B_2 i B_1 simulira kaskadu A_2 i A_1.

e) Gledajući ulazno-izlazno, svaki deterministički automat s n stanja se ne mora nužno ponašati kao memorijski sustav.

5. Zadan je sustav

$$y(n + 1) + 2y(n) = u(n),$$

gdje je $y(0) = 2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Je li sustav linearan? Obrazložite odgovor!

6. Zadan je sustav

$$y(n + 2) - y(n + 1) - y(n) = 0$$

s početnim uvjetima $y(0) = 0$ i $y(1) = 1$. Pronađite odziv sustava! Napišite prvih pet članova dobivenog odziva. Prepoznajete li dobiveni niz? Ako da, objasnite koji je to niz.

7. Zadan je sustav

$$y(n + 3) - y(n) = 0$$

uz početne uvjete $y(0) = y(1) = 0$ i $y(2) = 1$. Pronađite odziv sustava! Jesu li svi članovi dobivenog niza cijeli brojevi?

8. Nađite barem jedan sustav čiji je nepobuđeni odziv:

a) $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $y(3) = 1$

b) $y(n) = 3^n + 5^n + 7$

GORAN RADANOVIĆ 0036419588

(1)

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$; $\forall n$:

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - kp) \quad , p \in \mathbb{N}$$

$N \in \mathbb{N}$

$$f(n+N) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n+N-kp)$$

za $N = m \cdot p$, $m \in \mathbb{N}$:

$$f(n+N) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - p \cdot (k-m)) = \left| \begin{array}{l} t = k-m \\ k = +\infty \Rightarrow t = +\infty \\ k = -\infty \Rightarrow t = -\infty \end{array} \right|$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} g(n - t\,p) = f(n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \; \big(f(n+N) = f(n) \big) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ signal $f(n)$ je periodičan

GORAN RADANOVIĆ 0036419588

2

$x(n) = \cos(an+1)$, $a = \frac{1}{3}$

za periodički signal vrijedi : $\exists N \in \mathbb{N} \quad x(n) = x(n+N)$

$\cos(an+1) = \cos(a(N+n)+1)$

$\cancel{an} + \cancel{1} = \cancel{an} + aN + \cancel{1} + 2k\pi , \; k \in \mathbb{Z}$

$N = \frac{2k\pi}{a} , \; k \in \mathbb{Z} , \; N \in \mathbb{N}$

za $a = \frac{1}{3}$ $\quad N = 6\pi k \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ signal nije periodičan

da bi signal bio periodičan a mora biti

oblika : $\boxed{a = q \cdot \pi \; , \; q \in \mathbb{Q}}$, $q = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

tada vrijedi $N = \frac{2k}{q} = \frac{2k}{\frac{m}{n}} = \frac{2nk}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ za koji je $N \in \mathbb{N}$

GORAN RADANOVIĆ 0036419588

3.

$$y(n) = (n+a)\,\mu(n) \quad \text{za} \quad u(n) = \mu(n) \qquad (*)$$

$$\mu(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k)$$

$$y(n) = S(\mu)(n) = S\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k)\right) =$$

zbog linearnosti

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} S(\delta)(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(n-k)$$

zbog vremenske nepromjenjivosti

$$= \left| \begin{array}{l} t = n-k \\ k=0 \Rightarrow t=n \\ k=+\infty \Rightarrow t=-\infty \end{array} \right| = \sum_{t=n}^{-\infty} h(t) =$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{n} h(t) \overset{\text{zbog } (*)}{=} (n+a)\,\mu(n)$$

GORAN RADANOVIĆ 0036419588

4.

a) Tvrdnja je istinita. Naime, mi moramo pamtiti pojavu dvije uzastopne jedinice (tj. pamtiti je li su li se pojavile 0, 1 ili 2 uzastopne jedinice), a za to su nam potrebna barem tri stanja

b) Tvrdnja nije istinita. Kako je det. automat konačan on će nakon nekog vremena (zbog istog ulaza) počet ponavljati jedan dio prijelaza (dijagram prijelaza ima zatvorenu petlju), pa će se time i izlazi ponavljati.

c) Tvrdnja je istinita. Kako B simulira A, tada za svako stanje iz A postoji ekvivalentno iz B. Stanja za iste ulaze prelaze u par novih ekvivalentnih stanja i pri tome daju iste izlaze. Kako su automati deterministički (za jedan ulaz prelaze u jedno stanje, a ne skup stanja) tada nužno i A simulira B

4 nastavak:

c) s relacijom simulacije $S_{BA} = \{ (s_B, s_A) \mid (s_A, s_B) \in S_{AB} \}$

d) Tvrdnja nije istinita. Kako je $Ponašanje_{A1} \subset Ponašanje_{B1}$

i $Ponašanje_{A2} \subset Ponašanje_{B2}$ tada je sigurno i

$Ponašanje_{A2A1} \subset Ponašanje_{B2B1}$.

e) Tvrdnja je istinita. Dovoljno je promatrati automat

čiji je izlazni znak jednak ulaznome. Tada

je $y(n) = u(n)$ i sustav nije memorijski.

GORAN RADANOVIĆ 0036419588

(5)

$y(n+1) + 2y(n) = u(n) \iff y(n) + 2y(n-1) = u(n-1) \quad (*)$

$y(0) = 2, \; n \in \mathbb{N}$

Neka je: $u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$

$- \; y_1(n+1) + 2y_1(n) = u_1(n)$

$y_2(n+1) + 2y_2(n) = u_2(n)$

sustav je linearan ako vrijedi:

$\forall n \quad y(n) = S(u)(n) = \alpha S(u_1)(n) + \beta S(u_2)(n) \quad (**)$

---

za $n = 1$ (stavljajući u $(*)$):

$y(1) + 2y(0) = u(0)$

$y(1) = u(1-1) - 4 = \alpha u_1(0) + \beta u_2(0) - 4 \neq$

$\neq \alpha(u_1(0) - 4) + \beta(u_2(0) - 4) = \alpha y_1(1) + \beta y_2(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ne vrijedi $(**)$ $\Rightarrow$ sustav nije linearan

(6) GORAN ZADANOVIĆ 0036419588

$$y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0 \quad , y(0) = 0 , \; y(1) = 1$$

$$y(n) = c\, q^n$$

$$c\, q^{n-2}\left(q^2 - q - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2 \\ y(1) &= C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - C_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{5}\, C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$$

$y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$, $y(3) = 2$, $y(4) = 3$, $y(5) = 5$

$y(6) = 8$, $y(7) =$

→ Ovo je Fibonaccijev niz $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

uz uvjet da je $F(0) = 0$ i $F(1) = 1$

GORAN RADANOVIĆ 0036419588

7.

$y(n+3) - y(n) = 0 \qquad y(0) = y(1) = 0 \;,\; y(2) = 1$

$y(n) = c\, q^n$

$c\, q^{n-3}(q^3 - 1) = 0 \Rightarrow q^3 - 1 = 0$

$(q-1)(q^2 + q + 1) = 0 \Rightarrow q_1 = 1$

$q_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2} \Rightarrow \quad q_2 = e^{\frac{2\pi}{3}j}$ (*)

$q_3 = e^{-\frac{2\pi}{3}j}$

zbog (*) rješenje oblika:

$y(n) = C_1 \cdot 1^n + C_2 1^n \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + C_3\, 1^n \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \;,\; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$ (1)

$y(1) = C_1 + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + C_3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$ (2)

$y(2) = C_1 + C_2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + C_3 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1$ (3)

$(2)+(3): \quad 2C_1 - C_2 = 1$

$(1): \quad C_1 = -C_2$

$\Rightarrow -3C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}$

$C_1 = \frac{1}{3}$

$(3)-(2) \quad -\sqrt{3}\, C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\boxed{y(n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)}$$

7 nastavak:

Članovi niza su cijeli brojevi. Vrijedi da je $y(n+3) = y(n)$, i prva 3 člana su cijeli brojevi, pa se rekurzivnim postupkom zaključuje da su članovi niza cijeli brojevi.

GORAN RADANOVIĆ 0036419588

(8.)

a) sustav opisan jednadžbom diferencija:

$$y(n) - 2y(n-1) - 3y(n-2) = u(n)$$

uz početne uvjete:

$$y(-1) = 3$$

$$y(-2) = 2$$

b)

$$y(n) = 3^n + 5^n + 7 = 3^n + 5^n + 7 \cdot 1^n$$

rješenja karakteristične jednadžbe: $q_1 = 1$ $q_2 = 3$ $q_3 = 5$

$$y(n) = C \cdot q^n$$

$$C \cdot q^{n-3} (q-1) \cdot (q-3) \cdot (q-5) = 0$$

$$C q^{n-3} (q^2 - 4q + 3)(q-5) = 0$$

$$\underbrace{C q^{n-3} (q^3 - 9q^2 + 23q - 15) = 0}$$

$$\downarrow$$

hom. jed.:

$$y(n) - 9y(n-1) + 23y(n-2) - 15y(n-3) = 0$$

8) nastavak:

→ početni uvjeti:

$$y(0) = 1 + 1 + 7 = 9$$

$$y(1) = 3 + 5 + 7 = 15$$

$$y(2) = 9 + 25 + 7 = 41$$

primjer sustava

$$y(n) - 9y(n-1) + 23y(n-2) - 15y(n-3) = u(n)$$

uz početne uvjete:

$$y(0) = 9$$

$$y(1) = 15$$

$$y(2) = 41$$