Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

2010.

Vremenski diskretni *SISO* sustavi—model s varijablama stanja

Opis sustava s varijablama stanja

- uvodi se opis sustava s varijablama stanja koji se temelji na ideji da sustav u svom djelovanju prolazi kroz niz promjena unutarnjih stanja
- u prikazu sustava modelom s varijablama stanja, kao početni trenutak definira se $n_0 = 0$, pa se sustav razmatra za sve $n \geq 0$
- model s varijablama stanja opisuje sustav proceduralno, definirajući kako ulazni signal djeluje na promjene stanja sustava i kako se generira izlazni signal

Vremenski diskretni sustav za usrednjavanje

- jednostavni sustav za usrednjavanje – moving average filter, MAF_{L+1} – definiran je kao

$$MAF_{L+1} : [\mathbb{Z} \to \mathbb{R}] \to [\mathbb{Z} \to \mathbb{R}]$$

gdje je za $\forall u \in [\mathbb{Z} \to \mathbb{R}], \quad y = MAF_{L+1}(u)$ dan s

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad y(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-m)$$

- ovaj sustav, za svaki n, daje srednju vrijednost trenutnog i prethodnih L vrijednosti ulaznog signala, dakle srednju vrijednost $L+1$ susjednih uzoraka ulaznog niza
- u određivanju odziva sustava, definiranog kao gore, potrebno je poznavanje L vrijednosti $u(-1)$, $u(-2)$, $\ldots$, $u(-L)$, a koji predstavljaju početne uvjete za ovaj sustav

Vremenski diskretni sustav za usrednjavanje – model s varijablama stanja

- razmotrimo sustav za usrednjavanje za $L = 3$, pa je

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} u(n-j) \qquad (1) \\ &= \frac{1}{4}u(n-1) + \frac{1}{4}u(n-2) + \frac{1}{4}u(n-3) + \frac{1}{4}u(n) \end{aligned}$$

- u izračunu odziva, u koraku n, potrebno je poznavati trenutnu vrijednost, te tri prethodne vrijednosti ulaznog niza: $u(n-1)$, $u(n-2)$ i $u(n-3)$
- sustav "pamti" $u(n-1)$, $u(n-2)$ i $u(n-3)$ i te tri vrijednosti definiramo kao "unutarnje" stanje sustava

Vremenski diskretni sustav za usrednjavanje – model s varijablama stanja

- očigledno je kako je stanje ovog sustava u koraku n, označimo ga kao $x(n)$, određeno s trojkom brojeva $u(n-1)$, $u(n-2)$, $u(n-3)$, odnosno s vektorom,

$$x(n) \in Stanja \subseteq \mathbb{R}^3, \quad x(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \end{bmatrix} \tag{2}$$

- ako promatramo odziv sustava za $n \geq 0$, tada je stanje za $n = 0$ početno stanje sustava

$$x(0) \in Stanja \subseteq \mathbb{R}^3, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ u(-3) \end{bmatrix}$$

- da bi odredili početno stanje sustava $x(0)$ moramo poznavati $u(-1)$, $u(-2)$, i $u(-3)$

Vremenski diskretni sustav za usrednjavanje – model s varijablama stanja

- uvidom u jednadžbe (1) i (2) zaključujemo kako je odziv sustava u koraku n funkcija stanja sustava u koraku n i vrijednosti ulaza u koraku n, dakle[1]

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \frac{1}{4}x_1(n) + \frac{1}{4}x_2(n) + \frac{1}{4}x_3(n) + \frac{1}{4}u(n) \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}}_{x(n)} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{D} u(n)
\end{aligned}
$$

- da bi odredili odziv sustava u koraku $n+1$ potrebno je poznavati $u(n+1)$ i $x(n+1)$

[1] Značenje matrica (vektora) C i D, odnosno A i B na narednoj prikaznici, objašnjava se kasnije

Vremenski diskretni sustav za usrednjavanje – model s varijablama stanja

- stanje u koraku $n+1$ je, iz jednadžbe (2), uz $x(n) \in Stanja \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n-1) \\ u(n-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(n) \\ x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\underbrace{x(n+1) = \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{bmatrix}}_{x(n+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}}_{x(n)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(n) \qquad (3)$$

- zaključujemo da je stanje u koraku $n+1$ funkcija stanja u koraku n i pobude u koraku n

Vremenski diskretni sustav za usrednjavanje – model s varijablama stanja

- zaključujemo kako vremenski diskretan sustav za usrednjavanje,

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad u(-1) = u(-2) = u(-3) = 0$$
$$y(n) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} u(n-j)$$

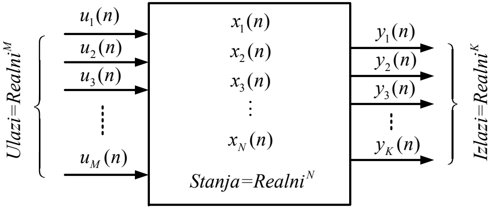
se u modelu s varijablama stanja, izabranima na način kao na prethodnim prikaznicama, definira kao

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad & x(0) = 0, \\ \forall x(n) \in \mathbb{R}^3, \quad & u(n) \in \mathbb{R}, \quad y(n) \in \mathbb{R} \\ x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) \quad & \text{jednadžba (narednog) stanja} \\ y(n) = Cx(n) + Du(n) \quad & \text{izlazna jednadžba} \end{aligned}$$

Vremenski diskretni *MIMO* sustavi—model s varijablama stanja

Model sustava s varijablama stanja – vremenski diskretni sustavi

- razmatramo model sustava s varijablama stanja za vremenski diskretne sustave N-tog reda[2], s više ulaza (M) i više izlaza (K),



- vrijednost signala u, u koraku $n \in \mathbb{N}_0$, označuje se M-torkom brojeva $u(n) = (u_1(n), u_2(n), \ldots, u_M(n))$
- skup *Ulazi* je beskonačni skup M-torki $u(n)$, a skup *Izlazi* je beskonačni skup K-torki $y(n)$, za $\forall n \in \mathbb{N}_0$

[2] Red sustava odgovara broju varijabli stanja

Model sustava s varijablama stanja – vremenski diskretni sustavi

- *varijable stanja* sustava x_1, x_2, ..., x_N predstavljaju minimalni broj varijabli sustava čije su početne vrijednosti, u koraku $n = 0$, dovoljne da se odredi odziv sustava za sve $n \geq 0$ kada je poznata pobuda za $n \geq 0$
- stanje sustava u koraku n, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, označavamo $x(n) \in Stanja = \mathbb{R}^N$, a skup *Stanja* je beskonačni skup N-torki

$$Stanja = \{x(0), x(1), \ldots, x(n), \ldots\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_N(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ \vdots \\ x_N(1) \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix}, \ldots \right\}$$

Model sustava s varijablama stanja – vremenski diskretni sustavi

- promjenu stanja $x(n)$, polazeći od $x(0)$, za $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $\forall x(n) \in Stanja \subseteq \mathbb{R}^N$ i $\forall u(n) \in Ulazi \subseteq \mathbb{R}^M$ određujemo iz jednadžbe stanja

$$x(n+1) = narednoStanje\left((x(n), u(n)\right) \tag{4}$$

  gdje je funkcija *narednoStanje* definirana kao

$$narednoStanje : Stanja \times Ulazi \to Stanja$$

- odziv sustava $y(n) \in Izlazi \subseteq \mathbb{R}^K$, polazeći od $x(0)$, za $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $\forall x(n) \in Stanja \subseteq \mathbb{R}^N$ i $\forall u(n) \in Ulazi \subseteq \mathbb{R}^M$ određujemo iz izlazne jednadžbe

$$y(n) = izlaz\left((x(n), u(n)\right) \tag{5}$$

  gdje je funkcija *izlaz* definirana kao

$$izlaz : Stanja \times Ulazi \to Izlazi$$

Model sustava s varijablama stanja – vremenski diskretni sustavi

- zaključujemo kako se sustav definira uređenom šestorkom

$$Sustav = (Stanja, Ulazi, Izlazi, narednoStanje, \\ izlaz, početnoStanje)$$

pri čemu se za

$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ x(0) = početnoStanje,$
$\forall x(n) \in Stanja \subseteq \mathbb{R}^N,$
$\forall u(n) \in Ulazi \subseteq \mathbb{R}^M,$
$\forall y(n) \in Izlazi \subseteq \mathbb{R}^K,$

odziv stanja i odziv sustava izračunavaju, korak po korak, iz

$$x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n))$$
$$y(n) = izlaz(x(n), u(n))$$

Model sustava s varijablama stanja – vremenski diskretni sustavi

- u nekim od prethodnih predmeta izučavani su konačni automati i pokazano je kako se oni definiraju kao

$$A =< S, I, O, \delta, \lambda >$$
$$\delta : S \times I \rightarrow S$$
$$\lambda : S \times I \rightarrow O$$

  gdje su S-skup stanja, I-skup ulaznih znakova, O-skup izlaznih znakova, δ-funkcija narednog stanja, i λ-izlazna funkcija

- usporedbom s definicijom modela s varijablama stanja, za vremenski diskretne sustave, zaključujemo kako su konačni automati tek jedan specijalan slučaj vremenski diskretnih sustava

Model s varijablama stanja—linearni vremenski stalni sustav

- za sustav kažemo da je linearan ako su njegove funkcije *narednoStanje* i *izlaz* linearne funkcije i ako je početno stanje $x(0) = 0$ (N-torka čiji su svi elementi jednaki nula)
- razmotrimo ponovo jednadžbu stanja za sustav s M ulaza, K izlaza, dimenzije N,

$$\forall n \in \mathbb{N}_0$$
$$x(n+1) = \mathit{narednoStanje}(x(n), u(n))$$

- za linearnu funkciju *narednoStanje* ovu jednadžbu možemo raspisati kao

$$\begin{array}{lllll}
x_1(n+1) = \alpha_{1,1}x_1(n) + \alpha_{1,2}x_2(n) + & \cdots & +\alpha_{1,N}x_N(n) + \alpha_{1,N+1}u_1(n) + & \cdots & +\alpha_{1,N+M}u_M(n) \\
x_2(n+1) = \alpha_{2,1}x_1(n) + \alpha_{2,2}x_2(n) + & \cdots & +\alpha_{2,N}x_N(n) + \alpha_{2,N+1}u_1(n) + & \cdots & +\alpha_{2,N+M}u_M(n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_N(n+1) = \alpha_{N,1}x_1(n) + \alpha_{N,2}x_2(n) + & \cdots & +\alpha_{N,N}x_N(n) + \alpha_{N,N+1}u_1(n) + & \cdots & +\alpha_{N,N+M}u_M(n)
\end{array}$$

Model s varijablama stanja—linearni vremenski stalni sustav

- prethodne jednadžbe pišemo sažetije, u matričnom zapisu,

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_N(n+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,N} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N,1} & \alpha_{N,2} & \dots & \alpha_{N,N} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1,N+1} & \dots & \alpha_{1,N+M} \\ \alpha_{2,N+1} & \dots & \alpha_{2,N+M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N,N+1} & \dots & \alpha_{N,N+M} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1(n) \\ \vdots \\ u_M(n) \end{bmatrix}$$

odnosno

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

Model s varijablama stanja—linearni vremenski stalni sustav

- za linearnu funkciju *narednoStanje* jednadžba stanja se može pisati kao

$$x(n+1) = \mathit{narednoStanje}(x(n), u(n)) = Ax(n) + Bu(n)$$

gdje su

$$\begin{array}{ll} x(n+1), & \text{vektor narednog stanja dimenzije } N \times 1 \\ x(n), & \text{vektor trenutnog stanja dimenzije } N \times 1 \\ u(n), & \text{vektor ulaza dimenzije } M \times 1 \\ A = [a_{i,j}], & \text{matrica dimenzije } N \times N \\ B = [b_{i,j}], & \text{matrica dimenzije } N \times M \end{array}$$

- na isti način, za linearnu funkciju *izlaz*, možemo pisati

$$y(n) = \mathit{izlaz}(x(n), u(n)) = Cx(n) + Du(n)$$

$$\begin{array}{lll} uz & C = [c_{i,j}], & \text{matrica dimenzije } K \times N \\ & D = [d_{i,j}], & \text{matrica dimenzije } K \times M \end{array}$$

Linearni vremenski diskretni sustavi–[A,B,C,D] prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je

$$\mathit{Stanja} \subseteq \mathbb{R}^N, \mathit{Ulazi} \subseteq \mathbb{R}^M, \mathit{Izlazi} \subseteq \mathbb{R}^K,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\ y(n) &= Cx(n) + Du(n) \end{aligned}$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno dimenzije K i dimenzije M, a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija
- matrice A, B, C, D možemo označiti kao[3]
  - A – matrica sustava (matrica dinamike sustava)
  - B – ulazna matrica
  - C – izlazna matrica
  - D – ulazno-izlazna matrica

[3] najčešće u literaturi ali ima i drugih imena

Vremenski diskretni sustav za usrednjavanje – model s varijablama stanja

- već je prije pokazan model s varijablama stanja za vremenski diskretan sustav za usrednjavanje, kao primjer sustava trećeg reda s jednim ulazom i jednim izlazom

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0^+, \quad x(0) = 0,$$

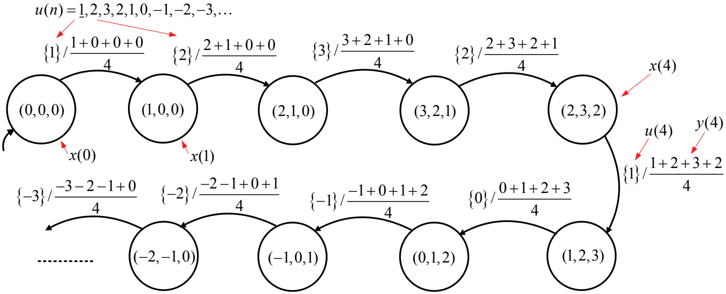
$$\forall x(n) \in \mathbb{R}^3, \quad u(n) \in \mathbb{R}, \quad y(n) \in \mathbb{R}$$

$$x(n+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{bmatrix}}_{x(n+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}}_{x(n)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(n)$$

$$y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}}_{x(n)} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{D} u(n)$$

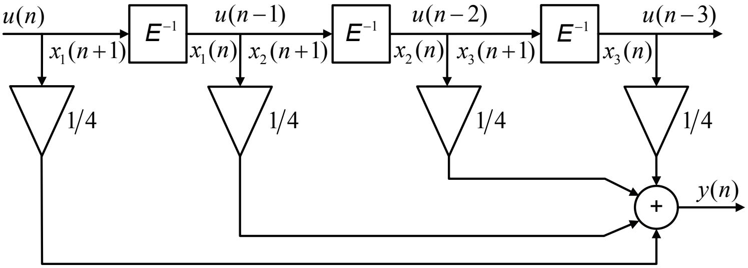
Vremenski diskretni sustav za usrednjavanje – model s varijablama stanja

- prikažimo nekoliko prvih koraka djelovanja ovog sustava pomoću dijagrama prijelaza stanja, uz definirano početno stanje $x(0) = (0, 0, 0)$, i ulazni niz dan kako na slici,



- kako postoji beskonačni broj stanja, pogodniji uvid u djelovanje ovog sustava moguć je preko blokovskog dijagrama

Vremenski diskretni sustav za usrednjavanje – model s varijablama stanja



- jednadžbe stanja (tri) i izlazna jednadžba su

$$
\begin{aligned}
\textit{narednoStanje} \quad & x_1(n+1) = u(n) \\
& x_2(n+1) = x_1(n) \\
& x_3(n+1) = x_2(n) \\
\textit{izlaz} \quad & y(n) = \frac{1}{4}x_1(n) + \frac{1}{4}x_2(n) + \frac{1}{4}x_3(n) + \frac{1}{4}u(n)
\end{aligned}
$$

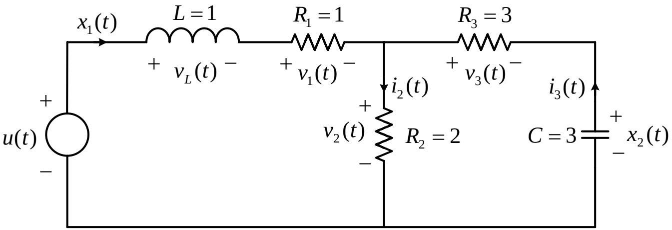
Vremenski kontinuirani sustavi—model s varijablama stanja

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 1

- i ovdje definiramo varijable stanja kao interne varijable sustava
- za poznate varijable stanja i poznate ulazne signale određen je bilo koji signal u sustavu, dakle i svi izlazi
- u Cjelini_1 je, na primjeru ljubavnog odnosa Romea i Julije[4] dan primjer modela sustava s varijablama stanja
- ovdje će na primjeru *RLC* mreže biti pokazano da se svi signali mreže mogu prikazati kao linearna kombinacija nezavisnih napona na kapacitetima i struja induktiviteta koje definiramo kao stanja mreže

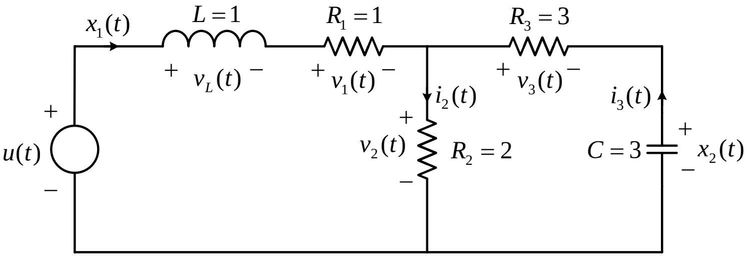
[4] Prikaznice 30–35

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 2



- sustav ima dva memorijska elementa, induktivitet i kapacitet, i drugog je reda
- definiraju se varijable stanja x_1 kao struja induktiviteta i x_2 kao napon na kapacitetu
- neka su poznate vrijednosti $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $u(t)$, za neki trenutak t, i tada možemo odrediti sve moguće signale mreže (napone i struje)
- neka su za neki t, vrijednosti trenutnih stanja $x_1 = 1$ i $x_2 = 17$, te trenutna vrijednost ulaza $u = 17$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 3



$$i_2 = x_1 + i_3$$

$$R_2 i_2 = x_2 - R_3 i_3 \quad \Rightarrow i_3 = \frac{x_2 - R_2 x_1}{R_2 + R_3} \quad \Rightarrow i_3 = 3$$

$$i_2 = x_1 + i_3 \quad \Rightarrow i_2 = \frac{R_3 x_1 + x_2}{R_2 + R_3} \quad \Rightarrow i_2 = 4$$

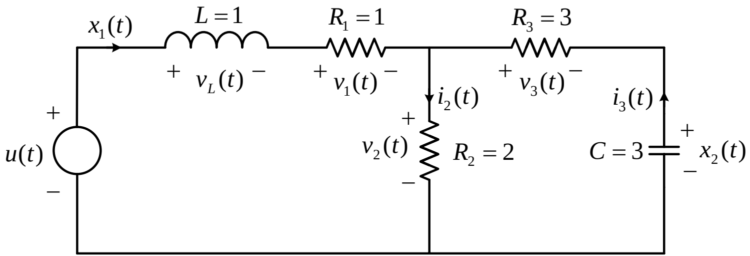
$$v_1 = R_1 x_1 \quad \Rightarrow v_1 = R_1 x_1 \quad \Rightarrow v_1 = 1$$

$$v_2 = R_2 i_2 \quad \Rightarrow v_2 = \frac{R_2(R_3 x_1 + x_2)}{R_2 + R_3} \quad \Rightarrow v_2 = 8$$

$$v_3 = R_3 i_3 \quad \Rightarrow v_3 = \frac{R_3(x_2 - R_2 x_1)}{R_2 + R_3} \quad \Rightarrow v_3 = 9$$

$$v_L = u - v_1 - v_2 \quad \Rightarrow v_L = u - R_1 x_1 - \frac{R_2(R_3 x_1 + x_2)}{R_2 + R_3} \quad \Rightarrow v_L = 8$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 4



$$\left.\begin{array}{l} i_2(t) = x_1(t) + i_3(t) \\ R_2 i_2(t) = x_2(t) - R_3 i_3(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i_3(t) = \frac{x_2(t) - R_2 x_1(t)}{R_2+R_3} \\ i_2(t) = \frac{R_3 x_1(t) + x_2(t)}{R_2+R_3} \end{array}\right.$$

iz

$$u(t) = L\frac{dx_1(t)}{dt} + R_1 x_1(t) + R_2 i_2(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3}{L(R_2+R_3)}x_1(t) - \frac{R_2}{L(R_2+R_3)}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 5

$$\text{iz} \quad C\frac{dx_2(t)}{dt} = -i_3(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{R_2}{C(R_2+R_3)}x_1(t) - \frac{1}{C(R_2+R_3)}x_2(t)$$

- pišemo jednadžbu stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3}{L(R_2+R_3)} & -\frac{R_2}{L(R_2+R_3)} \\ \frac{R_2}{C(R_2+R_3)} & -\frac{1}{C(R_2+R_3)} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

- odnosno

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Model s varijablama stanja za kontinuirane sustave 6

- neka sustav ima tri izlaza i neka su to struje sve tri grane: $y_1(t) = x_1(t)$, $y_2(t) = i_2(t)$ i $y_3(t) = i_3(t)$
- iz prije izračunatog slijedi

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{R_3}{R_2+R_3} & \frac{1}{R_2+R_3} \\ -\frac{R_2}{R_2+R_3} & \frac{1}{R_2+R_3} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

- odnosno

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Odziv linearnih vremenski stalnih kontinuiranih MIMO sustava

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- model s varijablama stanja, kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava, je

$$
\begin{aligned}
&Stanja = \mathbb{R}^N, Ulazi = \mathbb{R}^M, Izlazi = \mathbb{R}^K,\\
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(0^-) = pocetnoStanje
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno K i M, a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija
- odziv sustava određen je rješavanjem gornjih jednadžbi sustava

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- odziv sustava određujemo $\mathcal{L}$–transformacijom, pa transformacijom jednadžbe stanja

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

slijedi

$$sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s)$$
$$(sI - A)X(s) = x(0^-) + BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0^-) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

- matrica se $(sI - A)^{-1}$ označava kao $\Phi(s)$, i naziva matrica karakterističnih frekvencija

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

- pa je $\mathcal{L}$–transformacija odziva stanja $X(s)$

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- $\mathcal{L}$–transformacija izlazne jednadžbe

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

je

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

pa je uvrštavanjem izračunatog

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija totalnog odziva

$$Y(s) = C\Phi(s)x(0^-) + C\Phi(s)BU(s) + DU(s)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom izračunatih odziva

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

slijedi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}x(0^-) + \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)BU(s)\}$$

odnosno, uz oznaku $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$,

$$x(t) = \Phi(t)x(0^-) + \int_{0^-}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

a inverznom transformacijom

$$Y(s) = C\Phi(s)x(0^-) + C\Phi(s)BU(s) + DU(s)$$

$$y(t) = C\Phi(t)x(0^-) + \int_{0^-}^{t} C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica

- matrica karakterističnih frekvencija definirana je kao

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

i vrijedi

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)}$$

- elementi matrice karakterističnih frekvencija su razlomljene racionalne funkcije kompleksne frekvencije
    - brojnik polinom $(N-1)$-vog stupnja
    - nazivnik N-tog stupnja
- polinom det(sI-A) je karakterističan polinom sustava N–tog stupnja i njegovi korijeni su vlastite vrijednosti matrice A, odnosno, vlastite frekvencije sustava
- adjungirana matrica je transponirana matrica kofaktora

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica – primjer

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom matrice karakterističnih frekvencija određuje se fundamentalna matrica

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

- uz ovu oznaku fundamentalne matrice odziv stanja i odziv sustava pišemo kao

$$x(t) = e^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

odnosno

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0^-)}_{\substack{\text{odziv nepobuđenog} \\ \text{sustava, } u(t)=0}} + \underbrace{\int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\substack{\text{odziv mirnog} \\ \text{sustava, } x(0^-)=0}}$$

Primjer izračuna fundamentalne matrice

- neka je zadana matrica A sustava[5] kao

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

[5] Matrica A je iz primjera koji će malo kasnije biti detaljno razmatran

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica–primjer

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom matrice karakterističnih frekvencija određuje se fundamentalna matrica

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\Phi(s)\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix},$$

za $t \geq 0$

Prijenosna matrica

Prijenosna matrica

- $\mathcal{L}$–transformacija totalnog odziva sustava je

$$\begin{aligned} Y(s) &= C\Phi(s)x(0^-) + C\Phi(s)BU(s) + DU(s) = \\ &= C\Phi(s)x(0^-) + [C\Phi(s)B + D]U(s) \end{aligned}$$

za miran sustav $x(0^-) = 0$ pa je

$$Y(s) = [C\Phi(s)B + D]U(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- $H(s)$ je prijenosna ili transfer matrica čiji su elementi prijenosne funkcije između pojedinih izlaza i pojedinih ulaza
- dimenzija matrice $H(s)$ je $K \times M$, gdje je K broj izlaza a M broj ulaza u sustav

Prijenosna matrica–primjer

- određuje se prijenosna matrica $H(s)$ sustava zadanog s matricama

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- sustav je drugog reda i ima tri izlaza i dva ulaza pa je prijenosna matrica dimenzije 3×2

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+16s}{s^2+3s+2} & \frac{18s-6}{s^2+3s+2} \\ \frac{17s+2}{s^2+3s+2} & \frac{s^2+27s}{s^2+3s+2} \\ \frac{s^2+24s+8}{s^2+3s+2} & \frac{30s+6}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

element $H_{21}(s) = \frac{17s+2}{s^2+3s+2}$ predstavlja prijenosnu funkciju između drugog izlaza i prvog ulaza

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- za linearni vremenski kontinuirani sustav zadan matricama A, B, C, D odrediti prijenosnu funkciju, odziv stanja i odziv sustava
- sustav je pobuđen s $u(t) = e^{-3t}\mu(t)$ a početno stanje neka je $x(0^-) = [-3 \quad -1]^T$, a matrice A, B, C, D

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

- iz dimenzija matrica zaključuje se kako je sustav drugog reda te da ima jedan ulaz i jedan izlaz

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- prije nego pristupimo rješavanju zadanog primjera pokazujemo prijelaz u model ulaz-izlaz

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- iz $y(t) = x_1(t) \Rightarrow \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t)$, te uz $\ddot{y} = \dot{x}_2(t)$, slijedi diferencijalna jednadžba[6]

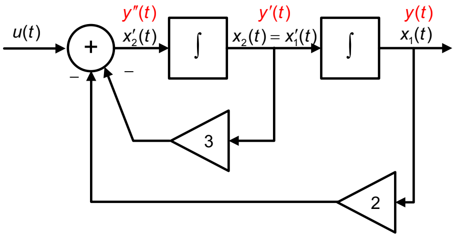
$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) = u(t), \quad y(0^-) = x_1(0^-), \quad \dot{y}(0^-) = x_2(0^-)$$

[6] Do istog modela ulaz-izlaz možemo doći iz diferencijalne jednadžbe ako izaberemo varijable stanja na isti način kao gore

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- iz danih jednadžbi stanja i izlazne jednadžbe crtamo blokovski dijagram

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$



- do istog blokovskog dijagrama dolazimo iz $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

- za zadanu matricu A, u prethodnom je primjeru već izračunata matrica karakterističnih frekvencija

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

- matricu $H(s)$ izračunavamo iz[7]

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\Phi(s)B$$

a odzive iz

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s)$$

[7] D=0

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

$$H(s) = C\Phi(s)B = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi_{12}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s+3} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-3s-10}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-s+6}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = CX(s) = [1 \quad 0]X(s) = X_1(s)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

odziv u vremenskoj domeni je

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\begin{array}{c} \frac{-7}{s+1} + \frac{4}{s+2} \\ \frac{7}{s+1} - \frac{8}{s+2} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \frac{0.5}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{0.5}{s+3} \\ \frac{-0.5}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{1.5}{s+3} \end{array}\right]\right\}$$

$$x(t) = \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -7e^{-t} + 4e^{-2t} \\ 7e^{-t} - 8e^{-2t} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \end{array}\right]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = x_1(t) =$$

$$= \underbrace{-7e^{-t} + 4e^{-2t}}_{y_0(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}}_{y_m(t)}$$

$$y(t) = -\frac{13}{2}e^{-t} + 3e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

Fundamentalna matrica i odziv nepobuđenog sustava–primjer

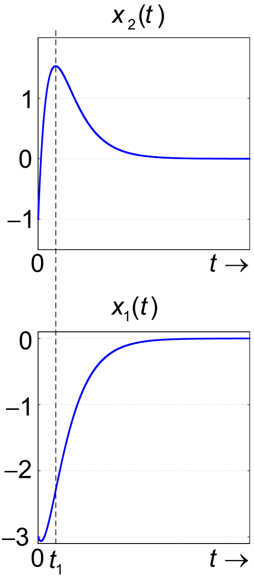
- odziv stanja nepobuđenog sustava $\dot{x} = Ax(t)$ dan je s $x(t) = \Phi(t)x(0^-)$ pa zaključujemo kako fundamentalna matrica određuje proces prijelaza sustava iz početnog stanja u stanje u trenutku t, te se naziva i prijelazna matrica (zato i engleski naziv state transition matrix)
- za dani primjer je

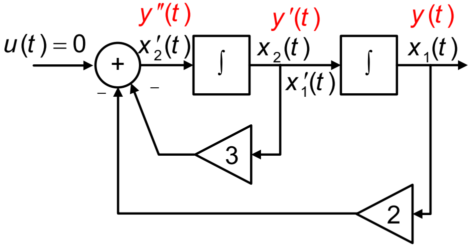
$$x(t) = \Phi(t)x(0^-) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

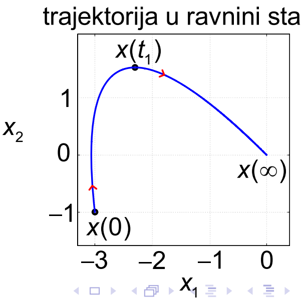
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7e^{-t} + 4e^{-2t} \\ 7e^{-t} - 8e^{-2t} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$$

- tijek promjene stanja sustava moguće je vizualizirati uvidom u trajektoriju u prostoru stanja
- za sustav drugog reda prostor stanja se svodi na ravninu stanja

Fundamentalna matrica i odziv nepobuđenog sustava–primjer







Odziv linearnih vremenski stalnih diskretnih MIMO sustava

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- *MIMO* vremenski diskretni sustav je definiran s,

$$Stanja = \mathbb{R}^N, Ulazi = \mathbb{R}^M, Izlazi = \mathbb{R}^K,$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, x(0) = pocetnoStanje$$

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- odziv sustava određujemo z–transformacijom, pa transformacijom jednadžbe stanja

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

slijedi

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

$$(zI - A)X(z) = zx(0) + BU(z)$$

$$X(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) + (zI - A)^{-1}BU(z)$$

- matrica se $z(zI - A)^{-1}$ označava kao $\Phi(z)$, i naziva matrica karakterističnih frekvencija

$$\Phi(z) = z(zI - A)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \Phi(n) = A^n = \mathcal{Z}^{-1}\{\Phi(z)\}$$

- dakle, matrica karakterističnih frekvencija je z–transformacija fundamentalne matrice

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- z–transformacija izlazne jednadžbe

$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

je

$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

pa je uvrštavanjem izračunatog

$$X(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) + (zI - A)^{-1}BU(z) = \\ = \Phi(z)x(0) + z^{-1}\Phi(z)BU(z)$$

z–transformacija totalnog odziva

$$Y(z) = Cz(zI - A)^{-1}x(0) + C(zI - A)^{-1}BU(z) + DU(z) = \\ = C\Phi(z)x(0) + Cz^{-1}\Phi(z)BU(z) + DU(z)$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- inverznom z–transformacijom izračunatih odziva

$$X(z) = \Phi(z)x(0) + z^{-1}\Phi(z)BU(z)$$

slijedi uz $\mathcal{Z}^{-1}\{\Phi(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{z(zI - A)^{-1}\} = \Phi(n) = A^n$

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m}Bu(m), \qquad n > 0$$

a inverznom transformacijom

$$Y(z) = Cz(zI-A)^{-1}x(0)+C(zI-A)^{-1}BU(z)+DU(z) =$$
$$= C\Phi(z)x(0) + Cz^{-1}\Phi(z)BU(z) + DU(z)$$

$$y(n) = CA^n x(0)+\left[\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bu(m)\right]+Du(n), \quad n > 0$$

Prijenosna matrica

- z–transformacija totalnog odziva sustava je

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= Cz(zI - A)^{-1}x(0) + C(zI - A)^{-1}BU(z) + DU(z) = \\
&= Cz(zI - A)^{-1}x(0) + [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z)
\end{aligned}
$$

za miran sustav $x(0) = 0$ pa je

$$Y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \Rightarrow$$

$$H(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]$$

- $H(z)$ je prijenosna ili transfer matrica čiji su elementi prijenosne funkcije između pojedinih izlaza i pojedinih ulaza
- dimenzija matrice $H(z)$ je $K \times M$, gdje je K broj izlaza a M broj ulaza u sustav

Samostalni rad studenta

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer1

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- za linearni vremenski kontinuirani sustav zadan matricama A, B, C, D odrediti fundamentalnu matricu, prijenosnu matricu (prijenosnu funkciju), odziv stanja i odziv sustava, te prikazati trajektoriju stanja za nepobuđeni i za pobuđeni sustav
- sustav je pobuđen s $u(t) = 0.64\mu(t)$ a početno stanje neka je $x(0^-) = [-3 \quad -1]^T$, a matrice A, B, C, D

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

- iz dimenzija matrica zaključuje se kako je sustav drugog reda te da ima jedan ulaz i jedan izlaz

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom matrice karakterističnih frekvencija određuje se fundamentalna matrica

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

- za zadanu matricu A slijedi matrica karakterističnih frekvencija

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -0.2 \end{bmatrix}\right\}^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.16 & s+0.2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{s(s+0.2)+0.16}\begin{bmatrix} s+0.2 & -0.16 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{T} =$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+0.2}{(s^2+0.2s+0.16)} & \frac{1}{(s^2+0.2s+0.16)} \\ \frac{-0.16}{(s^2+0.2s+0.16)} & \frac{s}{(s^2+0.2s+0.16)} \end{bmatrix}$$

Matrica karakterističnih frekvencija i fundamentalna matrica

- inverznom $\mathcal{L}$–transformacijom matrice karakterističnih frekvencija određuje se fundamentalna matrica

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\Phi(s)\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+0.2}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} & \frac{1}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \\ \frac{-0.16}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} & \frac{s}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{0.5+j0.1291}{s+0.1+j0.3873} + \frac{0.5-j0.1291}{s+0.1-j0.3873} & \frac{j1.291}{s+0.1+j0.3873} + \frac{-j1.291}{s+0.1-j0.3873} \\ \frac{-j0.2066}{s+0.1+j0.3873} + \frac{j0.2066}{s+0.1-j0.3873} & \frac{0.5-j0.1291}{s+0.1+j0.3873} + \frac{0.5+j0.1291}{s+0.1-j0.3873} \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-0.1t}\cos(0.3873t) + 0.2582e^{-0.1t}\sin(0.3873t) & 2.5820e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \\ -0.4131e^{-0.1t}\sin(0.3873t) & e^{-0.1t}\cos(0.3873t) - 0.2582e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0328e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 0.2527) & 2.5820e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \\ -0.4131e^{-0.1t}\sin(0.3873t) & 1.0328e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 0.2527) \end{bmatrix}$$

Odziv stanja nepobuđenog sustava

- odziv stanja nepobuđenog sustava računamo iz

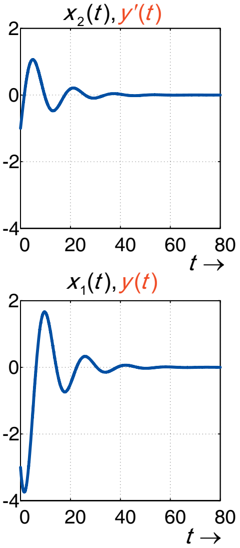
$$x(t) = \Phi(t)x(0^-) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\Phi_{11} - \Phi_{12} \\ -3\Phi_{21} - \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

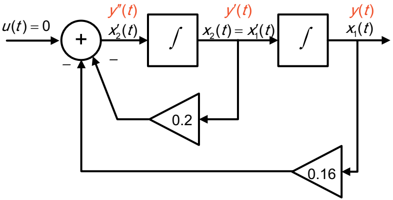
$$x(t) = \begin{bmatrix} -3[e^{-0.1t}\cos(0.3873t) + 0.2582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)] - 2.5820e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \\ -3[-0.4131e^{-0.1t}\sin(0.3873t)] - [e^{-0.1t}\cos(0.3873t) - 0.2582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)] \end{bmatrix}$$

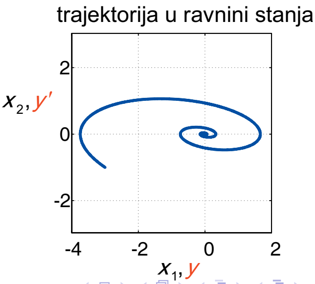
$$x(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-0.1t}\cos(0.3873t) - 3.3566e^{-0.1t}\sin(0.3873t) \\ 1.4975e^{-0.1t}\sin(0.3873t) - e^{-0.1t}\cos(0.3873t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 4.5019e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.3002) \\ 1.8007e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 2.1596) \end{bmatrix}$$

Odziv stanja nepobuđenog sustava







Prijenosna matrica – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

- matricu $H(s)$ izračunavamo iz[8]

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\Phi(s)B$$

$$H(s) = C\Phi(s)B = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi_{12}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.2s + 0.16)}$$

[8] D=0

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

odziv stanja računamo iz[9]

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s)$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BU(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{0.64}{s} =$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\Phi_{11} - \Phi_{12} \\ -3\Phi_{21} - \Phi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{12}\frac{0.64}{s} \\ \Phi_{22}\frac{0.64}{s} \end{bmatrix}$$

a odziv sustava iz

$$y(s) = CX(s) = [1 \quad 0]X(s) = X_1(s)$$

[9] D=0

Signali i sustavi
školska godina 2009/2010
Cjelina 16.

Profesor Branko Jeren

Opis sustava s varijablama stanja

Odziv sustava opisanih jednadžbama stanja

Samostalni rad studenta

Odziv linearnog kontinuiranog sustava–model s varijablama stanja

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz – primjer

odziv stanja u vremenskoj domeni je

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{-3s-1.6}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \\ \frac{-s+0.48}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \end{bmatrix}\right\} +$$

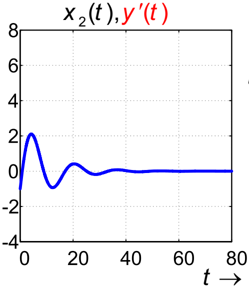
$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{0.64}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)s} \\ \frac{0.64}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \end{bmatrix}\right\} =$$

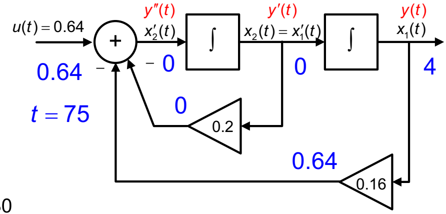
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{-3s^2-1.6s+0.64}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)s} \\ \frac{-s+1.12}{(s+0.1+j0.3873)(s+0.1-j0.3873)} \end{bmatrix}\right\}$$

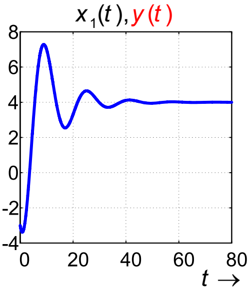
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{4.1312e^{-j2.5815}}{s+0.1+j0.3873} + \frac{4.1312e^{j2.5815}}{s+0.1-j0.3873} + \frac{4}{s} \\ \frac{1.6525e^{j1.8782}}{s+0.1+j0.3873} + \frac{1.6525e^{-j1.8782}}{s+0.1-j0.3873} \end{bmatrix}\right\}$$

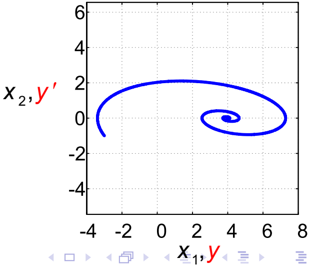
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.2624e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.5815) + 4 \\ 3.3049e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 1.8782) \end{bmatrix}$$

Odziv stanja pobuđenog sustava









Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer2

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz –primjer

- za linearni vremenski kontinuirani sustav zadan matricama A, B, C, D odrediti matricu karakterističnih frekvencija, odziv stanja sustava, te prikazati trajektoriju stanja za pobuđeni sustav
- sustav je pobuđen s $u(t) = 0.64\mu(t) + sin(t)\mu(t)$ a početno stanje neka je $x(0^-) = [-3 \quad -1]^T$, a matrice A, B, C, D

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

- potrebne izračune provodimo izravnom uporabom Matlaba i postupak je dan na narednoj prikaznici

Odziv stanja pobuđenog sustava

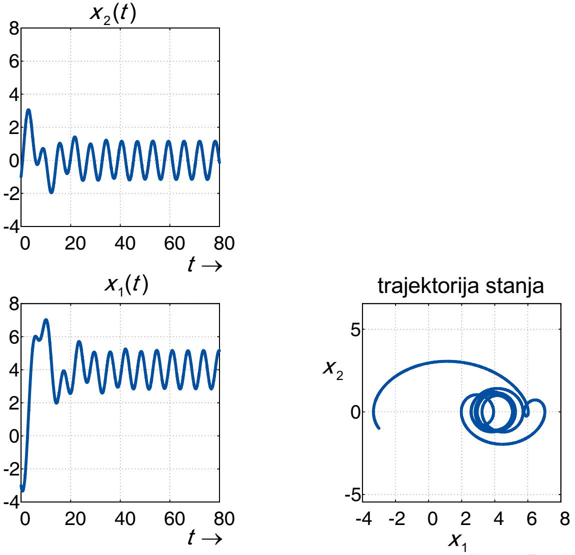
```
>> syms s
A=[0 1; -.16 -.2];
B=[0;1];
C=[1 0];
D=0;
U=1/(s^2+1)+.64/s;
x0=[-3;-1];
F=inv(s*eye(2)-A)          %izračun matrice karakterističnih frekvencija
X=F*x0+F*B*U               %izračun vektora odziva stanja u s području
x=simplify(ilaplace(X))    %izračun vektora odziva stanja inverznom L transformacijom

F =
[ 5*(5*s+1)/(25*s^2+5*s+4),       25/(25*s^2+5*s+4)]
[       -4/(25*s^2+5*s+4),      25*s/(25*s^2+5*s+4)]

X =
 -15*(5*s+1)/(25*s^2+5*s+4)-25/(25*s^2+5*s+4)+25*(1/(s^2+1)+16/25/s)/(25*s^2+5*s+4)
     12/(25*s^2+5*s+4)-25*s/(25*s^2+5*s+4)+25*(1/(s^2+1)+16/25/s)*s/(25*s^2+5*s+4)

x =
 -3137/466*exp(-1/10*t)*cos(1/10*15^(1/2)*t)-849/2330*15^(1/2)*exp(-1/10*t)*sin(1/10*15^(1/2)*t)+4-125/466*cos(t)-525/466*sin(t)
   8267/11650*15^(1/2)*exp(-1/10*t)*sin(1/10*15^(1/2)*t)+59/466*exp(-1/10*t)*cos(1/10*15^(1/2)*t)-525/466*cos(t)+125/466*sin(t)

x =
-6.7318exp(-0.1*t)*cos(0.3873*t) -1.4112*exp(-1/10*t)*sin(0.3873*t)+4-0.2682*cos(t) -1.1266*sin(t)
   2.7483*exp(-1/10*t)*sin(0.3873*t)+ 0.1266*exp(-1/10*t)*cos(0.3873*t) -1.1266*cos(t)+ 0.2682*sin(t)
```

x =

$$-6.7318e^{-0.1t}\cos(0.3873t) -1.4112e^{-0.1t}\sin(0.3873t)-0.2682\cos(t) -1.1266\sin(t)+4$$

$$2.7483e^{-0.1t}\sin(0.3873t)+ 0.1266e^{-0.1t}\cos(0.3873t) -1.1266\cos(t)+ 0.2682\sin(t)$$

Odziv stanja pobuđenog sustava



Izvod za odziv linearnog vremenski stalnog diskretnog sustava u vremenskoj domeni

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je, kako je pokazano,

$$Stanja = \mathbb{R}^N, Ulazi = \mathbb{R}^M, Izlazi = \mathbb{R}^K,$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\ y(n) &= Cx(n) + Du(n) \end{aligned}$$

- ovdje se izvodi opći izraz za odziv vremenski diskretnog sustava N-tog reda, s M ulaza i K izlaza
- želi se pokazati kako se odziv sustava formalno jednako određuje bez obzira na red sustava i broj ulaza i izlaza
- odziv sustava možemo riješiti korak po korak

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- neka je $x(0) = početnoStanje$

$$
\begin{aligned}
n = 0, \quad x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
n = 1, \quad x(2) &= Ax(1) + Bu(1) \\
&= A[Ax(0) + Bu(0)] + Bu(1) \\
&= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
n = 2, \quad x(3) &= Ax(2) + Bu(2) \\
&= A[A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)] + Bu(2) \\
&= A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)
\end{aligned}
$$

- možemo napisati odziv stanja za n-ti korak

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu(m), \qquad \forall n > 0$$

- odziv stanja se naziva i trajektorija stanja

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- za izračunati odziv stanja, slijedi iz,

$$y(n) = Cx(n) + Du(n),$$

i odziv sustava

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0) + Du(0), & n = 0 \\ CA^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}$$

- totalni odziv sustava moguće je interpretirati kao zbroj odziva nepobuđenog sustava $(u(n) = 0)$ i odziva mirnog sustava $(x(0) = 0)$

$$y(n) = \underbrace{CA^n x(0)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava, } u(n)=0} + \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n)}_{\text{odziv mirnog sustava, } x(0)=0}, \quad n > 0$$

Odziv linearnog diskretnog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- finalno, totalni odziv vremenski diskretnog sustava N-tog reda zadanog kao

$$Stanja = \mathbb{R}^N, Ulazi = \mathbb{R}^M, Izlazi = \mathbb{R}^K,$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\ y(n) &= Cx(n) + Du(n) \end{aligned}$$

je

$$y(n) = \begin{cases} Cx(0) + Du(0), & n = 0 \\ CA^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu(m) + Du(n), & n > 0 \end{cases}$$

- zaključno, bez obzira na red, broj ulaza i izlaza, odziv sustava zadanog s $[A, B, C, D]$ prikazom dan je uvijek gornjim izrazima

Izvod za odziv linearnog vremenski stalnog kontinuiranog sustava u vremenskoj domeni

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- model s varijablama stanja, kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava, je

$$
\begin{aligned}
&Stanja = \mathbb{R}^N, Ulazi = \mathbb{R}^M, Izlazi = \mathbb{R}^K, \\
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(0^-) = početnoStanje
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

- odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno K i M, a suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija
- odziv sustava određuje se rješavanjem jednadžbi sustava
- ovdje se definira početno stanje u $t = 0^-$, jer u slučaju pobude s $\delta(t)$ ona djeluje već u $t = 0$, i stanje u $x(0^+)$ može biti promijenjeno

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- prvo se rješava diferencijalna jednadžba

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- množenjem obje strane jednadžbe s matricom e^{-At}, s lijeva,

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)$$

- te prebacivanjem člana $e^{-At}Ax(t)$ na lijevo

$$\underbrace{e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t)}_{\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t))} = e^{-At}Bu(t)$$

- pa slijedi

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t)$$

Odziv linearnog kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- integriranjem obje strane u intervalu 0^- do t slijedi

$$\int_{0^-}^{t} \frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}x(\tau))d\tau = \int_{0^-}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- odnosno

$$e^{-At}x(t) - x(0^-) = \int_{0^-}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- množenjem obje strane s matricom e^{At}, s lijeva,

$$x(t) - e^{At}x(0^-) = e^{At}\int_{0^-}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- slijedi izraz za odziv stanja kontinuiranog sustava

$$x(t) = e^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- uvrsti li se izračunati odziv stanja u izlaznu jednadžbu

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- slijedi odziv sustava

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (6)$$

- odziv, (6), može biti prikazan i kao

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau$$

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- uočavaju se dvije komponente odziva sustava

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0^-)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava, } u(t)=0} + $$

$$+ \underbrace{\int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{odziv mirnog sustava, } x(0^-)=0}$$

Odziv linearnog vremenski kontinuiranog sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- finalno, totalni odziv vremenski kontinuiranog sustava N-tog reda zadanog kao

$$Stanja = \mathbb{R}^N, Ulazi = \mathbb{R}^M, Izlazi = \mathbb{R}^K,$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(0^-) = početnoStanje$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

je

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) + \int_{0^-}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{7}$$

- zaključno, bez obzira na red, broj ulaza i izlaza, odziv sustava zadanog s $[A, B, C, D]$ prikazom dan je uvijek gornjim izrazom