Signali i sustavi

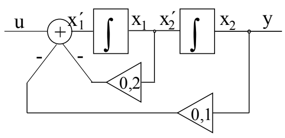
Auditorne vježbe 8.

Kontinuirani sustavi

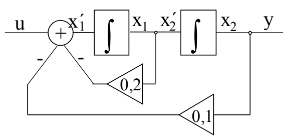
Zadatak 1.

- Kontinuirani sustav zadan je modelom na slici. Odredite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje ovaj sustav i izračunajte odziv na pobudu:

$$u(t) = U\cos(\omega_1 t)$$



Parametri pobude?



- $y = x_2$
- $x_2' = x_1$
- $x_1' = u - 0{,}2\, x_1 - 0{,}1\, x_2$
- $x_2'' = x_1'$
- $x_2'' = u - 0{,}2\, x_1 - 0{,}1\, x_2$
- $x_2'' = u - 0{,}2\, x_2' - 0{,}1\, x_2$
- $x_2'' + 0{,}2\, x_2' + 0{,}1\, x_2 = u$
- $y'' + 0{,}2\, y' + 0{,}1\, y = u$
- Početni uvjeti neka su:
  - $y(0) = -10$, $y'(0) = -5$.
- Parametri pobude neka su:
  - $U = 3$, $\omega_1 = 1{,}8$.

Odziv sustava?

- A) Totalno ili ukupno rješenje:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t).$$

- Ukupno rješenje je suma rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja - to važi za sve linearne jednadžbe.
- A.1.) Homogena jednadžba:

$$y'' + 0{,}2\, y' + 0{,}1\, y = 0.$$

- Pretpostavimo rješenje oblika:

$$y_H(t) = A\, e^{st}.$$

Rješavamo homogenu ...

- Uvrstimo pretpostavljeno rješenje u jednažbu:
- $s^2 A\, e^{st} + 0{,}2\, s\, A\, e^{st} + 0{,}1\, A\, e^{st} = 0.$

  Pokratimo sa Ae^{st} (možemo, jer $Ae^{st} \neq 0$).
- $s^2 + 0{,}2\, s + 0{,}1 = 0$

  se naziva karakteristična jednadžba sustava.
- Korijeni karakteristične jednadžbe su:

$$s_{1,2} = \frac{-0{,}2 \pm \sqrt{0{,}2^2 - 4 \cdot 0{,}1}}{2} = -0{,}1 \pm 0{,}3j\ ,$$

Rješavamo homogenu ...

- pa je rješenje homogene:
- $y_H(t) = A_1\, e^{(-0{,}1+0{,}3j)t} + A_2\, e^{(-0{,}1-0{,}3j)t}$
- $\quad = e^{-0{,}1\, t}\,(A_1\, e^{0{,}3j\, t} + A_2\, e^{-0{,}3j\, t})$
- $\quad = e^{-0{,}1\, t}\,(A_1 \cos 0{,}3\, t + A_1 j \sin 0{,}3\, t +$
- $\qquad A_2 \cos 0{,}3\, t - A_2 j \sin 0{,}3\, t).$
- Uvedemo nove kompleksne konstante:
- $y_H(t) = e^{-0{,}1\, t}\,(C_1 \cos 0{,}3\, t + C_2 \sin 0{,}3\, t)$
- gdje su $C_1 = A_1 + A_2$ i $C_2 = j\,(A_1 - A_2)$.

Određivanje homogenog rješenja

jednostruka realna vlastita frekvencija s	$y_h(t) = C_1 e^{st}$
k-struka realna vlastita frekvencija s	$y_h(t) = e^{st}(C_1 + tC_2 + \ldots + t^{k-1}C_k)$
konjugirano-kompleksni par oblika $s = \alpha \pm j\beta$	$y_h(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$
k-struki konjugirano-kompleksni par oblika $s = \alpha \pm j\beta$	$y_h(t) =$ $e^{\alpha t}\cos(\beta t)(A_1 + tA_2 + \ldots + t^{k-1}A_k) +$ $e^{\alpha t}\sin(\beta t)(B_1 + tB_2 + \ldots + t^{k-1}B_k)$

7

Partikularno rješenje ...

- Partikularno rješenje ima oblik pobude:
- $y_P(t) = Y\,cos\,(\omega_1 t + \varphi)$.
- Trebaju nam još i derivacije:
- $y_P'(t) = -\,\omega_1 Y\,sin\,(\omega_1 t + \varphi)$,
- $y_P''(t) = -\,\omega_1^2\,Y\,cos\,(\omega_1 t + \varphi)$.
- Sve to uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu
- $y'' + 0{,}2\,y' + 0{,}1\,y = u$,
- $-\,\omega_1^2\,Y\,cos\,(\omega_1 t + \varphi) - 0{,}2\,\omega_1 Y\,sin\,(\omega_1 t + \varphi)$
- $\qquad + 0{,}1\,Y\,cos\,(\omega_1 t + \varphi) = U\,cos\,\omega_1 t$.

Partikularno rješenje ...

- Prisjetimo se trigonometrijskih jednadžbi:
- $cos\,(\omega_1\,t + \varphi) = cos\,\omega_1\,t \times cos\,\varphi - sin\,\omega_1\,t \times sin\,\varphi$,
- $sin\,(\omega_1\,t + \varphi) = sin\,\omega_1\,t \times cos\,\varphi + cos\,\omega_1\,t \times sin\,\varphi$.
- Nakon uvrštenja i grupiranja, naša diferencijalna jednadžba postaje:
- $Y\,[-\omega_1^2\,cos\,\varphi - 0{,}2\,\omega_1\,sin\,\varphi + 0{,}1\,cos\,\varphi\,]\,cos\,\omega_1 t$
- $\quad + Y\,[\omega_1^2\,sin\,\varphi - 0{,}2\,\omega_1\,cos\,\varphi - 0{,}1\,sin\,\varphi\,]\,sin\,\omega_1 t$
- $\qquad = U\,cos\,\omega_1 t$.

Partikularno rješenje ...

Metoda jednakih koeficijenata daje:

- Y [$-\omega_1^2$ *cos* φ - 0,2 ω_1 *sin* φ + 0,1 *cos* φ] = U,
- Y [ω_1^2 *sin* φ - 0,2 ω_1 *cos* φ - 0,1 *sin* φ] = 0. (Y≠0)
- => (ω_1^2 - 0,1) *sin* φ = 0,2 ω_1 *cos* φ

$$tg\varphi = \frac{0{,}2\omega_1}{\omega_1^2 - 0{,}1}$$

$$\varphi = arctg\frac{0{,}2\omega_1}{\omega_1^2 - 0{,}1}$$, a iz gornje jednadžbe slijedi:

$$Y = \frac{U}{(0{,}1 - \omega_1^2)\cos\varphi - 0{,}2\omega_1\sin\varphi}$$

Partikularno rješenje ...

- Ako uvrstimo konkretne brojke, imamo:
- U = 3, ω_1 = 1,8
  φ = 0,114151267
- Y = -0,949196
- y_p = -0,949196 *cos* (1,8t + 0,114151267)
  - -*cos* x = *cos* (x - π)
- y_p = 0,949196 *cos* (1,8t - 3,027441387)

Određivanje partikularnog rješenja

pobuda je Ae^{at}, a nije korijen karakteristične jednadžbe	$y_p(t) = C_1 e^{at}$
pobuda je Ae^{at}, a je k-struki korijen karakteristične jednadžbe	$y_p(t) = C_1 t^k e^{at}$
pobuda je polinom k-tog stupnja	$y_p(t) = t^k C_k + t^{k-1} C_{k-1} + \ldots + C_0$
pobuda je $A\sin(\omega t)$ i $j\omega$ nije korijen karakteristične jednadžbe	$y_p(t) = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$
pobuda je $A\sin(\omega t)$ i $j\omega$ je k-struki korijen karakteristične jednadžbe	$y_p(t) = t^k\left(C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)\right)$

12

Partikularno rješenje na drugi način...

Specijalni slučaj: pobuda je harmonička, omogućava upotrebu fazora.

- $u = U\, cos\omega_1 t$

  $= Re[Ue^{j\omega_1 t}] = Re[Ue^{s_1 t}]$,
- gdje je $s_1 = j\omega_1$. Pripremimo y_p i derivacije:
- $y_p = Ye^{s_1 t}$,
- $y_p' = s_1 \times Ye^{s_1 t}$,
- $y_p'' = s_1^2 \times Ye^{s_1 t}$.

Važna interpretacija rješenja!!!

- $s_1^2 \times Ye^{s_1 t} + 0{,}2 s_1 \times Ye^{s_1 t} + 0{,}1 Ye^{s_1 t} = Ue^{s_1 t} \quad /{:}e^{s_1 t}$
- $Y[s_1^2 + 0{,}2 s_1 + 0{,}1] = U$

$$\frac{Y}{U} = H(s_1) = \frac{1}{s_1^2 + 0{,}2 s_1 + 0{,}1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0{,}2 s + 0{,}1} \qquad s = j\omega$$

- $H(j\omega) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{\text{amplituda}} \cdot e^{\overbrace{j\varphi(\omega)}^{}}_{\text{faza}}$ Prijenosna funkcija

Partikularno rješenje na drugi način, nastavak...

$$H(s_1) = H(j\omega_1) = \frac{1}{(j\omega_1)^2 + 0{,}2 j\omega_1 + 0{,}1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(0{,}1 - \omega_1^2)^2 + 0{,}04\omega_1^2}} e^{-jarctg\frac{0{,}2\omega_1}{0{,}1-\omega_1^2}}$$

- $|H(j\omega_1)| = 0{,}316398667$
- $\varphi = -3{,}02744$

... i konačno ...

- $y_p = \mathrm{Re}\,[H(j\omega_1) \times Ue^{j\omega_1 t}]$
  $= \mathrm{Re}\,[|H(j\omega_1)| \times e^{j\varphi} \times Ue^{j\omega_1 t}]$
  $= |H(j\omega_1)| \times U \times \cos(\omega_1 t + \varphi)$
  $= 0{,}949196 \cos(1{,}8t - 3{,}02744)$

Totalno (ukupno) rješenje sustava:

- $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$
  $y(t) = (C_1 \cos 0{,}3t + C_2 \sin 0{,}3t)\, e^{-0{,}1t} +$
  $0{,}949196 \cos(1{,}8t - 3{,}02744)$

Konstante?

- $y(0) = -10$, početni uvjeti
- $y'(0) = -5$

Konačno rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = -10 \\ y'(0) = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1, C_2$$

dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

- $y(t) = C_1 \ldots + C_2 \ldots$
- $y'(t) = C_1 \ldots + C_2 \ldots$, $t = 0$
- $C_1 = -9{,}057$, $C_2 = -20{,}33$.
- $y(t) = (-9{,}057 \cos 0{,}3t - 20{,}33 \sin 0{,}3t)\, e^{-0{,}1t}$
  $+ 0{,}949 \cos(1{,}8t - 3{,}02744)$.

B1 - Odziv nepobuđenog sustava

- $y_1(t) = ?$
- $y_1'' + 0,2y_1' + 0,1y_1 = 0,$
  - $y_1(0) = -10,$
  - $y_1'(0) = -5,$
- $y_1 = y_H = (A_1 \cos 0,3t + A_2 \sin 0,3t)e^{-0,1t}.$

Iz početnih uvjeta slijedi:

  - $A_1 = -10,$
  - $A_2 = -20,$
- $y_1 = (-10\cos 0,3t - 20\sin 0,3t)e^{-0,1t}.$

vlastiti odziv uslijed početnih uvjeta

B2 - Odziv pobuđenog mrtvog sustava

- $y_2'' + 0,2y_2' + 0,1y_2 = u,$
  - $y_2(0) = 0,$
  - $y_2'(0) = 0,$
- $y_2(t) = (B_1 \cos 0,3t + B_2 \sin 0,3t)\, e^{-0,1t} +$
  $+\, 0,949196 \cos(1,8t - 3,02744).$

$$\left.\begin{array}{l} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B_1 = 0,943018 \\ B_2 = -0,33436 \end{array}$$

B2 - Odziv pobuđenog mrtvog sustava

- $y_2(t) = (0,943018 \cos 0,3t - 0,33436 \sin 0,3t)\, e^{-0,1t}$

vlastito titranje uslijed pobude

$+\, 0,949196 \cos(1,8t - 3,02744)$

stacionarno stanje

- $y = y_1 + y_2$ Ukupni odziv

Amplitude vlastitog titranja određene su neskladom početnog i stacionarnog stanja!

Zadatak 2.

- Metodom varijacije parametara riješi diferencijalnu jednadžbu
  $$y''(t) - 4y(t) = u(t)$$
  uz pobudu
  $$u(t) = \frac{2}{e^{2t} + 1}$$

22

Zadatak 2. homogena jednadžba

- Pripadna homogena jednadžba je
  $$y''(t) - 4y(t) = 0$$
- Karakteristična jednadžba je
  $$s^2 - 4 = 0$$
- Opće rješenje homogene jednadžbe je
  $$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$$
- Za metodu varijacije konstante rješenje nehomogene pretpostavljamo u obliku
  $$y(t) = C_1(t)\, e^{-2t} + C_2(t)\, e^{2t}$$

23

Zadatak 2. varijacija parametara

- Opće rješenje je oblika $y = C_1 f_1 + \ldots + C_m f_m$
- Kako je potrebno m uvjeta da bi odredili funkcije $C_1 \ldots C_m$ tražimo da vrijedi

$$\begin{array}{ccccccccc}
f_1 C_1' & + & f_2 C_2' & + & \ldots & + & f_m C_m' & = & 0 \\
f_1^{(1)} C_1' & + & f_2^{(1)} C_2' & + & \ldots & + & f_m^{(1)} C_m' & = & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
f_1^{(m-2)} C_1' & + & f_2^{(m-2)} C_2' & + & \ldots & + & f_m^{(m-2)} C_m' & = & 0 \\
f_1^{(m-1)} C_1' & + & f_2^{(m-1)} C_2' & + & \ldots & + & f_m^{(m-1)} C_m' & = & u(t)
\end{array}$$

24

Zadatak 2. varijacija parametara

- Dobivamo sustav s nepoznanicama C_1' i C_2'

$$e^{-2t}C_1'(t)+e^{2t}C_2'(t)=0$$

$$-2e^{-2t}C_1'(t)+2e^{2t}C_2'(t)=\frac{2}{e^{2t}+1}$$

- Rješenja ovog sustava su

$$C_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{2t}\\ \frac{2}{e^{2t}+1} & 2e^{2t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-2t} & e^{2t}\\ -2e^{-2t} & 2e^{2t}\end{vmatrix}}=-\frac{e^{2t}}{2e^{2t}+2}$$

25

Zadatak 2. varijacija parametara

$$C_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix}e^{2t} & 0\\ -2e^{-2t} & \frac{2}{e^{2t}+1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-2t} & e^{2t}\\ -2e^{-2t} & 2e^{2t}\end{vmatrix}}=\frac{e^{-2t}}{2e^{2t}+2}$$

- Očito je

$$C_1(t)=\int\frac{e^{2t}}{2e^{2t}+2}dt \quad \text{i} \quad C_2(t)=\int\frac{e^{-2t}}{2e^{2t}+2}dt$$

26

Zadatak 2. varijacija parametara

- Pomoću tablica određujemo $C_1(t)$ i $C_2(t)$

$$C_1(t)=\int\frac{e^{2t}}{2e^{2t}+2}dt=\frac{1}{4}\ln\left(2+2e^{2t}\right)+A$$

$$C_2(t)=\int\frac{e^{-2t}}{2e^{2t}+2}dt=\int\frac{e^{-2t}}{2e^{2t}+2}\frac{de^{2t}}{2e^{2t}}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(e^{2t}+1\right)e^{4t}}de^{2t}$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}\ln\left(2+2e^{-2t}\right)+B$$

27

Zadatak 2. konačno rješenje

- Rješenje jednadžbe je sada

$$y(t)=\left(-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}\ln\left(2+2e^{-2t}\right)+B\right)e^{2t}+$$
$$\left(\frac{1}{4}\ln\left(2+2e^{2t}\right)+A\right)e^{-2t}$$

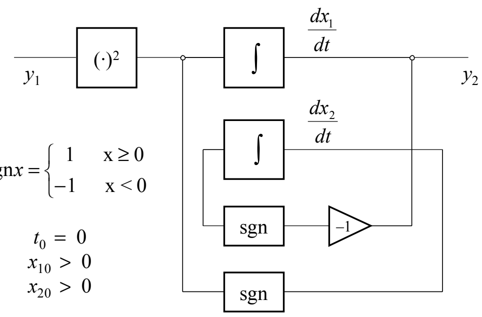
- Nakon sređivanja dobivamo

$$y(t)=Ae^{-2t}+Be^{2t}$$
$$+\frac{1}{4}\left(e^{-2t}\ln\left(2+2e^{2t}\right)+e^{2t}\ln\left(2+2e^{-2t}\right)-1\right)$$

28

Zadatak 3.

Za sustav na slici naći trajektoriju u ravnini stanja, te vremenske promjene varijabli stanja i izlaznih varijabli.



$$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$t_0 = 0$
$x_{10} > 0$
$x_{20} > 0$

Rješenje:

$$y_1=\left[\int_0^t y_2(\tau)d\tau+x_{10}\right]^2,$$

$$y_2=-sign\left[\int_0^t sign\left(\int_0^\tau y_2(\lambda)d\lambda+x_{10}\right)d\tau+x_{20}\right].$$

- Bez sumnje, složena zadaća za analitičko rješavanje!

Jednadžbe stanja:

$$\frac{dx_1}{dt}=-\mathrm{sgn}x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt}=\mathrm{sgn}\,x_1.$$

Izlazne jednadžbe:

$$y_1=x_1^2,$$
$$y_2=-\mathrm{sgn}x_2.$$

- Problem je jednostavnije riješiti pomoću varijabli stanja (izabrati x_1 i x_2).

Problem ćemo riješiti geometrijski u ravnini stanja!

x_2

$$\frac{dx_1}{dt}=-1, \frac{dx_2}{dt}=-1 \qquad \frac{dx_1}{dt}=-1, \frac{dx_2}{dt}=1$$

x_1

$$\frac{dx_1}{dt}=1, \frac{dx_2}{dt}=-1 \qquad \frac{dx_1}{dt}=1, \frac{dx_2}{dt}=1$$

- Kako $\frac{dx_1}{dt}$ i $\frac{dx_2}{dt}$ poprimaju jednu od dvije vrijednosti $\{-1,1\}$, slijedi:

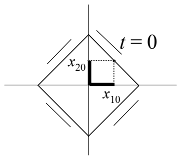
2. i 4. kvadrant $\frac{dx_2}{dx_1}=1.$

1. i 3. kvadrant $\frac{dx_2}{dx_1}=-1.$

$$\frac{dx_1}{dt}=-1, \frac{dx_2}{dt}=1 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1}=-1.$$

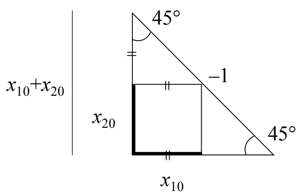
- Ovu činjenicu ćemo iskoristiti u crtanju trajektorije varijabli stanja
- Ograničimo se na 1. kvadrant ($x_{10}, x_{20} > 0$)
- Dakle, trajektorija je pravac!

Kako će se mijenjati stanje?

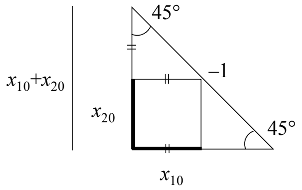


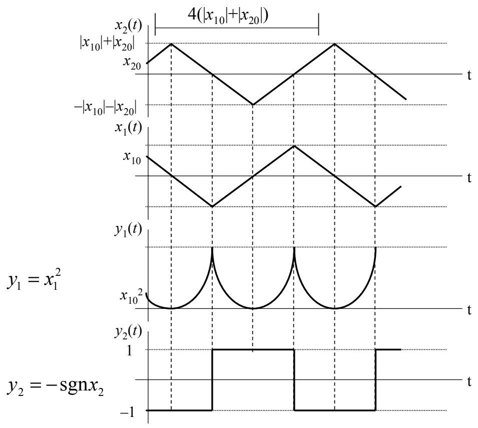
Imamo periodičko kruženje!

- Nacrtajmo još jednom prvi kvadrant.
  - Nagib pravca je -1, to znači 45°.
  - Onda su označene dužine jednake (na slici ||) !!
  - Nadalje, očigledno je:



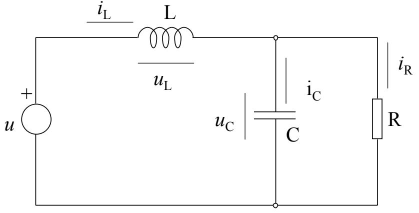
- Iz slike zaključujemo da x_1 i x_2 imaju svoj maksimum koji je $|x_{10}| + |x_{20}|$, dok je minimum $-|x_{10}| - |x_{20}|$.
- Nadalje, kada jedna varijabla stanja postiže maksimum (minimum) druga prolazi kroz nulu.
- Oba stanja se mijenjaju po periodičnim funkcijama perioda $4(|x_{10}| + |x_{20}|)$ – *što će biti jasnije iz narednih slika*.





Zadatak 4.

Napisati jednadžbe stanja i izlazne jednadžbe za električnu mrežu prikazanu slikom. ***u*** je ulaz u sustav, a $\boldsymbol{i_R}$ izlaz iz sustava.

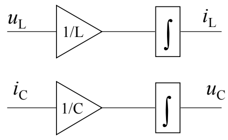


Odabir varijabli stanja (sustavi s memorijskim elementima)

- **L** i **C** su memorijski elementi.

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L}$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$$

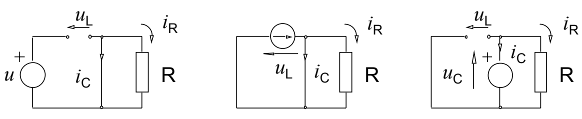


- Varijable stanja električne mreže su i_L, u_C.
- Za jednadžbe stanja treba naći

Način rješavanja

- Zadana električna mreža je linearna.
- Koristit će se teorem superpozicije.
- Doprinos pojedinog "aktivnog" elementa mreže određuje se tako da se "isključe" sve preostale "aktivne" komponente.
- "Isključiti", to znači:
  C, $u \rightarrow$ kratko spojiti,
  L, $i \rightarrow$ odspojiti,
- gdje su u, $i \rightarrow$ nezavisni naponski ili strujni izvori.
- Ukupni odziv jednak je sumi doprinosa pojedinih aktivnih elemenata.

Slučaj	A	B	C
Uključen	u	L	C
Isključen	L, C	u, C	u, L



A B C

$$\begin{array}{lllll} & & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ u_L = & L\,di_L/dt = & u & +\ 0\cdot i_L & -\ u_C \\ i_C = & C\,du_C/dt = & 0\cdot u & +\ i_L & -\ 1/R\,u_C \\ i_R = & & 0\cdot u & +\ 0\cdot i_L & +\ 1/R\,u_C \end{array}$$

- Ako podijelimo jednadžbe s L, odnosno C dobijemo:

$$\frac{di_{\mathrm{L}}}{dt} = \frac{1}{\mathrm{L}}u - \frac{1}{\mathrm{L}}u_{\mathrm{C}},$$

$$\frac{du_{\mathrm{C}}}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}}i_{\mathrm{L}} - \frac{1}{\mathrm{RC}}u_{\mathrm{C}},$$

- što su željene jednadžbe stanja, uz već poznatu izlaznu jednadžbu:

$$i_{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{R}}u_{\mathrm{C}}.$$

- U matričnom obliku, to izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_{\mathrm{L}}}{dt} \\ \dfrac{du_{\mathrm{C}}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\mathrm{L}} \\ \dfrac{1}{\mathrm{C}} & -\dfrac{1}{\mathrm{RC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\mathrm{L}} \\ u_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{L}} \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$i_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\mathrm{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\mathrm{L}} \\ u_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} + 0 \cdot u.$$