Zadatak (1.)

a) Signal je stanje ili proces koji prenosi neku informaciju.

Kod funkcije u1.m

```
function y = u1(t)
for i = 1 : numel(t)
  y(i) = 0 ;
  if ( t(i)<=1  &&  t(i)>=0)
     y(i) = 1 ;
  end
  if ( 3<= t(i)) & (t(i)<=4)
     y(i) = 1 ;
  end
end
```

Kod funkcije u2.m

```
function y = u2(t)
for i = 1 : numel(t)
  y(i) = 0;
  if ( t(i)<=-4  &&  t(i)>=-5)
    y(i) = 1;
  end
  if ( t(i)<=-1  &&  t(i)>=-2)
    y(i) = -1 ;
  end
  if ( t(i)<=2  &&  t(i)>=1)
    y(i) = -2
  end
end
```

Kod funkcije y1.m

```
function y = y1(t)
for i = 1 : numel(t)
  y(i) = 0 ;
  if ( t(i) <=4  &&  t(i)>=0)
   y (i) = - t(i) + 3 ;
  end
end
```

b) Sustav je cjelina sastavljena od međusobno vezanih objekata gdje svojstva objekata i njihova interakcija određuju vladanje i svojstva cjeline.

I) $u_1(t) = \mu(t) - \mu(t-1) + \mu(t-3) - \mu(t-4)$

$$\int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t}\mu(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t}\mu(\tau-1)d\tau + \int_{-\infty}^{t}\mu(\tau-3)d\tau - \int_{-\infty}^{t}\mu(\tau-4)d\tau$$

$$= \mu(t)\int_{0}^{t}d\tau - \mu(t-1)\int_{1}^{t}d\tau + \mu(t-3)\int_{3}^{t}d\tau - \mu(t-4)\int_{4}^{t}d\tau$$

$$= t\mu(t) - (t-1)\mu(t-1) + (t-3)\mu(t-3) - (t-4)\mu(t-4)$$

II) $u_2(t) = \mu(t+5) - \mu(t+4) - \mu(t+2) + \mu(t+1) - 2\mu(t-1) + 2\mu(t-2)$

$$\int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)\,d\tau = \mu(t+5)\int_{-5}^{t}d\tau - \mu(t+4)\int_{-4}^{t}d\tau + \mu(t+1)\int_{-1}^{t}d\tau - 2\mu(t-1)\int_{1}^{t}d\tau + 2\mu(t-2)\int_{2}^{t}d\tau$$

$$= (t+5)\mu(t+5) - (t+4)\mu(t+4) + (t+1)\mu(t+1) - 2(t-1)\mu(t-1) + 2(t-2)\mu(t-2)$$

III) $y_1(t) = (-t+3)(\mu(t) - \mu(t-4))$

$$\int_{-\infty}^{t} y_1(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t}(-\tau+3)\mu(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t}(\tau-3)\mu(\tau-4)d\tau$$

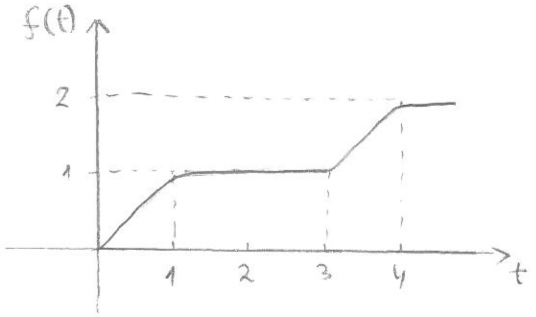
$$= \int_{0}^{t}(-\tau+3)d\tau + \int_{4}^{t}(\tau-3)d\tau$$

$$= -\frac{t^2}{2} + 3t + \frac{t^2}{2} - 3t - \frac{4^2}{2} + 3\cdot 4$$

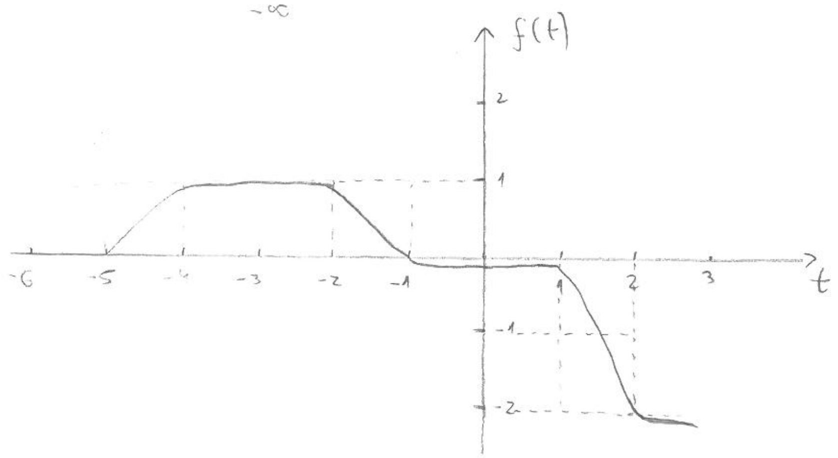
$$= 4 \qquad , \text{ za } \quad t>4$$

Zadatak (1) - nastavak

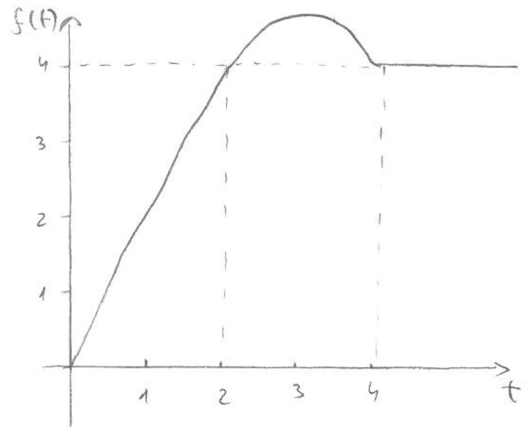
c) I) $f(t) = \int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\,d\tau$



II) $f(t) = \int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)\,d\tau$



III) $f(t) = \int_{-\infty}^{t} y_1(\tau)\,d\tau$



Izračunati integrali su točni. Integrali dobiveni Simulinkom su neprecizni.

Zadatak 2.

Memorijski sustavi (s beskonačnom memorijom) definirani su kao:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = S(u_{(-\infty, t]})(t)$$

ili $$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y(n) = S(u_{(-\infty, n)})(n)$$

Kod takvih sustava trenutnu vrijednost $y(t)$ odziva određuju vrijednosti ulaznog signala iz intervala $(-\infty, t]$ (ne ovisi samo o trenutnoj vrijednosti)

Kauzalni sustavi su definirani prethodno navedenim izrazom.
Kod takvih sustava nije moguće odrediti buduće vrijednosti signala (odziv nikad ne započinje prije djelovanja pobude)

a) → 1. $S_1[u(t)] = 5u(t)$

Odziv ovisi samo o trenutnoj vrijednosti pobude pa sustav nije memorijski.

npr. $t=5$, $S_1[u(5)] = 5u(5)$

→ 2. $S_2[u(t)] = 2u(t-2)$

npr. $t=5$, $S_2[u(5)] = 2u(3)$

Za dobivanje ovog odziva potrebno je poznavati "prošlost" ulaznog signala ($u(3)$). Sustav je memorijski.

→ 3. $S_3[u(n)] = u(n-2)$

npr. $n=5$, $S_3[u(5)] = u(3)$

Kao i u prethodnom primjeru, sustav ne ovisi samo o trenutnoj vrijednosti. Sustav je memorijski.

→ 4. $S_4[u(n)] = u(n+2)$

U ovom slučaju, odziv ovisi o budućoj vrijednosti pobude (dakle, opet ne ovisi o trenutnoj vrijednosti). Sustav je memorijski.

→

b) $\longrightarrow$ 1. $S_1[u(t)] = 5u(t)$

Odziv započinje kad i pobuda. Sustav je kauzalan.

$\longrightarrow$ 2. $S_2[u(t)] = 2u(t-2)$

Pobuda započinje prije odziva (a ne poslije), pa je sustav opet kauzalan.

$\longrightarrow$ 3. $S_3[u(n)] = u(n-2)$

Kao i u prethodnom primjeru, nije moguće odrediti buduće vrijednosti signala. Sustav je kauzalan.

$\longrightarrow$ 4. $S_4[u(n)] = u(n+2)$

npr.

Odziv počinje prije djelovanja pobude. Sustav je nekauzalan.

c)

Zadatak 3.

Vremenski stalni sustavi su sustavi koji ne mijenjaju parametre tijekom vremena.

Sustav S je vremenski stalan ako za bilo koju pobudu $u(n)$ daje odziv $y(n)$, a za zakašnjeli ulaz $E^{-n_k}(u)(n)$ daje zakašnjeli odziv $E^{-n_k}(y)(n)$.

a)

→ 1. $S_1[u(t)] = 5u(t)$

Neka je $u(t)$ pobuda, a $y(t)$ odziv sustava : $y(t) = 5u(t)$

Ako pobuda kasni za neki M, tada vrijedi : $u_1(t) = u(t-M)$

Tada je odziv : $y_1(t) = 5u_1(t) = 5u(t-M)$

Ako odziv kasni : $y(t-M) = 5u(t-M)$

$y_1(t) = y(t-M)$ Sustav je vremenski stalan jer ne mijenja parametre tijekom vremena.

→ 2. $S_2[u(t)] = \sin(t)u(t)$

$y(t) = \sin(t)u(t)$

za $u_1(t) = u(t-M)$, odziv je $y_1(t) = \sin(t)u(t-M)$

$y(t-M) = \sin(t-M)u(t-M)$

$y_1(t)$ i $y(t-M)$ nisu isti za svaki M, pa je sustav vremenski promjenjiv

→ 3. $S_3[u(n)] = (-1)^n u(n)$

$y(n) = (-1)^n u(n)$

$u_1(n) = u(n-M) \longrightarrow y_1(n) = (-1)^n u(n-M)$

$y(n-M) = (-1)^{n-M} u(n-M)$

$y_1(n)$ i $y(n-M)$ nisu isti za svaki M, pa je sustav vremenski promjenjiv

→

$\longrightarrow$ 4. $S_4[u(n)] = e^{j\pi n} u(n)$

$y(n) = e^{j\pi n} u(n)$

$u_1(n) = u(n-M) \longrightarrow y_1(n) = e^{j\pi n} u(n-M)$

$y(n-M) = e^{j\pi(n-M)} u(n-M)$

$y_1(n)$ i $y(n)$ nisu isti za svaki M, pa je sustav vremenski promjenjiv

Zadatak 4.

Linearni sustavi su sustavi kod kojih vrijede svojstva: homogenost, aditivnost i superpozicija.

Grafički prikaz:

$$\xrightarrow{\alpha u_1} \boxed{S} \xrightarrow{\alpha y_1}$$

$$\xrightarrow{\beta u_2} \boxed{S} \xrightarrow{\beta y_2}$$

$$\xrightarrow{\alpha u_1 + \beta u_2} \boxed{S} \xrightarrow{\alpha y_1 + \beta y_2}$$

Sustav će biti linearan ako za $\forall \alpha$ i $\forall \beta$ vrijedi:

$y_1 = S(u_1)$, $y_2 = S(u_2)$

Homogenost: $S(\alpha u_1) = \alpha S(u_1) = \alpha y_1$

$S(\beta u_2) = \beta S(u_2) = \beta y_2$

Aditivnost: $S(\alpha u_1) + S(\beta u_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$

Superpozicija: $S(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha S(u_1) + \beta S(u_2)$

a)

$\longrightarrow$ 1. $S_1[u(t)] = 5u(t)$

$y(t) = 5u(t)$

za pobudu $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$

dobivamo odziv $y(t) = 5\alpha u_1(t) + 5\beta u_2(t)$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= 5u_1(t) \\ y_2(t) &= 5u_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y_{12}(t) &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \\ y_{12}(t) &= 5\alpha u_1(t) + 5\beta u_2(t) \end{aligned}$$

$y_{12}(t)$ i prethodno dobiveni odziv $y(t)$ su jednaki:

$y_{12}(t) = y(t)$

Sustav je linearan.

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$ 2. $S_2[u(t)] = t\,u(t) + 3$

$y(t) = t\,u(t) + 3$

za pobudu $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$

odziv je $\underline{y(t) = t\alpha u_1(t) + t\beta u_2(t) + 3}$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= t u_1(t) + 3 \\ y_2(t) &= t u_2(t) + 3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y_{12}(t) &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \\ \underline{y_{12}(t)} &\underline{= t\alpha u_1(t) + 3\alpha + t\beta u_2(t) + 3\beta} \end{aligned}$$

$y(t) \neq y_{12}(t)$ Sustav nije linearan.

$\longrightarrow$ 3. $S_3[u(n)] = u(n) + 2u(n-1)$

$y(n) = u(n) + 2u(n-1)$

za pobudu $u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$

odziv je $y(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n) + 2\alpha u_1(n-1) + 2\beta u_2(n-1)$

$\underline{y(n) = \alpha\left[u_1(n) + 2u_1(n-1)\right] + \beta\left[u_2(n) + 2u_2(n-1)\right]}$

$$\left.\begin{aligned} y_1(n) &= u_1(n) + 2u_1(n-1) \\ y_2(n) &= u_2(n) + 2u_2(n-1) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y_{12}(n) &= \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) \\ \underline{y_{12}(n)} &\underline{= \alpha\left[u_1(n) + 2u_1(n-1)\right] + \beta\left[u_2(n) + 2u_2(n-1)\right]} \end{aligned}$$

$y(n) = y_{12}(n)$ Sustav je linearan.

$\longrightarrow$ 4. $S_4[u(n)] = e^{u(n)}$

za pobudu $u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$

odziv je $y(n) = e^{\alpha u_1(n) + \beta u_2(n)}$

$\underline{y(n) = e^{\alpha u_1(n)} \cdot e^{\beta u_2(n)}}$

$$\left.\begin{aligned} y_1(n) &= e^{u_1(n)} \\ y_2(n) &= e^{u_2(n)} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y_{12}(n) &= \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) \\ \underline{y_{12}(n)} &\underline{= \alpha e^{u_1(n)} + \beta e^{u_2(n)}} \end{aligned}$$

$y(n) \neq y_{12}(n)$ Sustav nije linearan

Zadatak 5.

a) $u_1(t) = \mu(t) - \mu(t-1) + \mu(t-3) - \mu(t-4)$

$y_1(t) = (-t+3)(\mu(t) - \mu(t-4))$

$u_2(t) = \mu(t+5) - \mu(t+4) - \mu(t+2) + \mu(t+1) - 2\mu(t-1) + 2\mu(t-2)$

$y_2(t) = ?$

$u_2(t) = \mu(t+5) - \mu(t+4) + \mu(t+2) - \mu(t+1) - 2\mu(t+2) + 2\mu(t+1) - 2\mu(t-1) + 2\mu(t-2)$

$u_2(t) = u_1(t+5) - 2u_1(t+2)$

LTI sustav $\rightarrow$ pošto je sustav linearan i vremenski stalan :

$$y_2(t) = y_1(t+5) - 2y_1(t+2)$$

$$= (-t-5+3)(\mu(t+5) - \mu(t+5-4)) - 2(-t-2+3)(\mu(t+2) - \mu(t+2-4))$$

$$y_2(t) = (-t-2)(\mu(t+5) - \mu(t+1)) - 2(-t+1)(\mu(t+2) - \mu(t-2))$$

Zadatak 6.

Sustav je BIBO stabilan (engl. Bounded Input Bounded Output) ako je za svaki omeđeni ulaz njegov odziv također omeđen.

Za stabilan vremenski kontinuiran sustav vrijedi:

$$|u(t)| \leq M_u < \infty \implies |y(t)| \leq M_y < \infty \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

Za stabilan vremenski diskretan sustav vrijedi

$$|u(n)| \leq M_u < \infty \implies |y(n)| \leq M_y < \infty \quad , \forall n \in \mathbb{Z}$$

a)

→ 1. $S_1[u(t)] = \int_0^t u(t)e^{-2t}dt$

$$y(t) = \int_0^t u(t)e^{-2t}dt$$

pobudimo li sustav omeđenom pobudom $u(t) = \mu(t)$, vrijedi:

$$y(t) = \int_0^t \mu(t)e^{-2t}dt = \int_0^t e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^t = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

Sustav je BIBO stabilan jer i za $t \to \infty$, odziv je omeđen $\left(y(\infty) = \frac{1}{2}\right)$

→ 2. $S_2[u(t)] = \int_0^t u(t)dt$

sustav pobuđujemo s $u(t) = \mu(t)$

$$y(t) = \int_0^t \mu(t)dt = \int_0^t dt = t$$

Sustav nije BIBO stabilan jer odziv nije omeđen.

→ 3. $S_3[u(n)] = \sum_{k=0}^{n} u(k)\cdot 2^k$

ako je $u(n) = \mu(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} \mu(k)\cdot 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

Sustav nije BIBO stabilan jer za $n \to \infty$ daje beskonačan odziv. Nije omeđen.

→

$\longrightarrow$ 4. $S_4[u(n)] = \sum_{k=0}^{n} u(k) \cdot 2^{-k}$

ako je $u(n) = \mu(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} \mu(k) \cdot 2^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{-\frac{1}{2}}\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\cancel{-\frac{1}{2}}}$$

$$y(n) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Kada $n \to \infty$, odziv $y(n) = 2$ odnosno odziv je omeđen.

Sustav je BIBO stabilan.