Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

18. ožujka 2013.

Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- već je prije pokazano kako svaki vremenski diskretan signal možemo prikazati kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m), \tag{1}$$

a vremenski kontinuirani signal kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

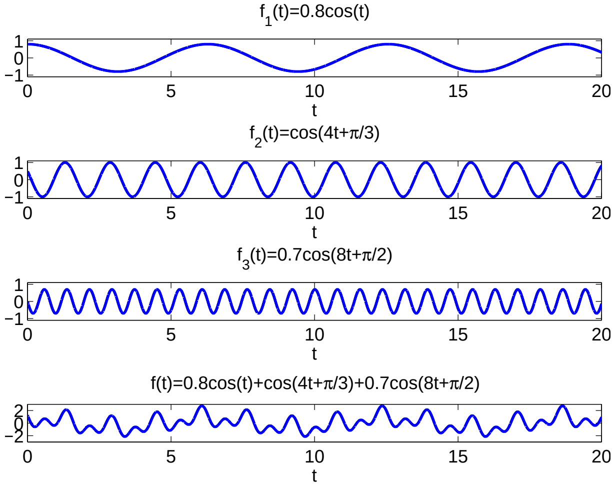
- postavlja se pitanje možemo li signale aproksimirati kao linearnu kombinaciju i drugih osnovnih signala

$$\forall t \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}, \quad f(t) \approx \hat{f}(t) = \sum_k c_k \psi_k(t), \text{ odnosno}$$

$$\forall n \in \mathcal{D} \subset \mathbb{Z}, \quad f(n) \approx \hat{f}(n) = \sum_k c_k \psi_k(n)$$

Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- linearna kombinacija sinusoidnih signala, čije su frekvencije cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije $2\pi/T_0$, generira periodični signal periode T_0



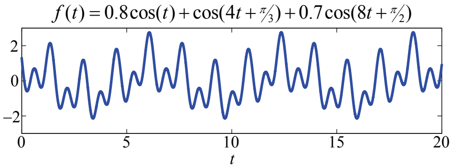
Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- na slici je prikazan zbroj sinusoida

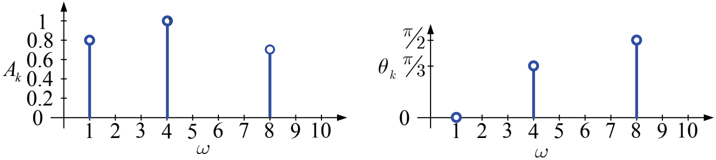
$$\forall t \in \mathbb{R},$$
$$f(t) = 0.8\cos(t) + \cos(4t + \frac{\pi}{3}) + 0.7\cos(8t + \frac{\pi}{2})$$

- signal f je zadan u vremenskoj domeni (funkcija vremena)
- signal f je periodičan, i nastao je linearnom kombinacijom vremenski kontinuiranih sinusoida $A_k\cos(\omega_k t + \theta_k)$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- ovo sugerira kako svaki periodični signal možemo razložiti (dekomponirati) na sinusoidne komponente $A_k\cos(\omega_k t + \theta_k)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, i $A_k \in \mathbb{R}_+$, koje ga sačinjavaju
- zaključujemo kako periodični signal može biti potpuno definiran frekvencijama ω_k, amplitudama A_k, i fazama θ_k sinusoidnih komponenti koje ga sačinjavaju

Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala



- periodičan signal f razlažemo na sinusoide frekvencija $\omega_1 = \omega_0 = 1$, $\omega_2 = 4\omega_0 = 4$, $\omega_3 = 8\omega_0 = 8$, čije su amplitude $A_1 = 0.8$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0.7$, i faze $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$



Slika 1: Amplitudni i fazni spektar

Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- na prethodnoj slici prikazani su amplitudni i fazni spektar
- amplitudni spektar prikazuje amplitude sinusoidnih komponenti signala kao funkciju frekvencije ω
- fazni spektar predstavlja prikaz faze θ_k, u radijanima, kao funkciju frekvencije ω
- spektar signala potpuno opisuje signal i govorimo o prikazu signala u frekvencijskoj domeni ili u frekvencijskom području

Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- razmatrani signal, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = 0.8\cos(t) + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.7\cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right),$$

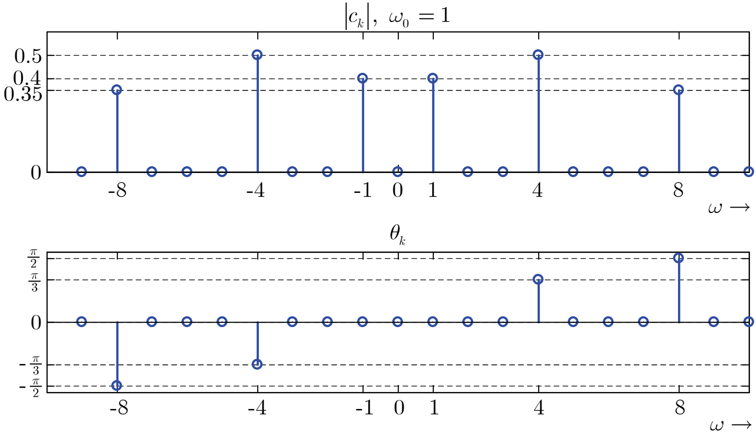
Eulerovom formulom, $cos(\omega_0 t) = 0.5(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$, transformiramo u

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.4e^{jt} + 0.4e^{-jt} + 0.5e^{j(4t+\frac{\pi}{3})} + 0.5e^{-j(4t+\frac{\pi}{3})} \\ &+ 0.35e^{j(8t+\frac{\pi}{2})} + 0.35e^{-j(8t+\frac{\pi}{2})} \\ &= 0.4e^{jt} + 0.4e^{-jt} + 0.5e^{j4t}e^{j\frac{\pi}{3}} + 0.5e^{-j4t}e^{-j\frac{\pi}{3}} \\ &+ 0.35e^{j8t}e^{j\frac{\pi}{2}} + 0.35e^{-j8t}e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

i prepoznajemo da možemo zapisati u obliku

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| e^{j\theta_k} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala



Slika 2: Amplitudni i fazni spektar

Komentar: Postojanje spektra za negativne frekvencije (frekvencija je broj ponavljanja po sekundi, pa se očekuje da je pozitivan broj) je samo posljedica prikaza $cos(\omega_0 t) = 0.5(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$.

Fourierov red periodičnih vremenski kontinuiranih signala

- prikaz periodičnog signala[1], $f \in KontPeriod_{T_0}$, linearnom kombinacijom harmonijski vezanih kompleksnih eksponencijala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

  naziva se Fourierov red (engl. Continuous-time Fourier series – CTFS)

- $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ određuje osnovnu periodu, a koeficijenti reda, F_k, valni oblik periodičnog signala f
- dva člana reda, za $k = \pm 1$, zajednički se nazivaju osnovne komponente, ili prve harmonijske komponente
- članovi sa $k = \pm 2$ druge harmonijske komponente, itd.

[1] realnog ili kompleksnog

Koeficijenti Fourierovog reda

- da bi neki periodični vremenski kontinuirani signal prikazali uz pomoć Fourierovog reda potrebno je odrediti koeficijente reda F_k (nazivaju se i spektralni koeficijenti signala f)
- način izračuna koeficijenata $\{F_k\}$ dan je na dodatnim prikaznicama za ovo predavanje
- ovdje navodimo da koeficijente Fourierovog reda izračunavamo kao

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- koeficijenti Fourierovog reda su kompleksni[2] dakle, $F_k \in \mathbb{C}$

[2] Kasnije se pokazuje da su za parne, vremenski kontinuirane, periodične signale koeficijenti Fourierovog reda realni

Konvergencija Fourierovog reda

- pitamo se konvergira li, i pod kojim uvjetima, signal

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

  prema signalu $f(t)$?

- pokazuje se da za kvadratno integrabilan periodičan signal (konačne energije u jednoj periodi)

$$\int_0^{T_0} |f(t)|^2 \, dt < \infty,$$

  vrijedi konvergencija u smislu minimuma integrala kvadrata pogreške

$$\int_0^{T_0} \left| f(t) - \sum_{k=-K}^{K} F_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt \to 0 \quad \text{za} \quad K \to \infty$$

Konvergencija Fourierovog reda

- navodimo i drugi kriterij konvergencije Fourierovih redova
- konvergencija, po točkama, signala $f_K(t)$ prema $f(t)$, je garantirana za sve vrijednosti od t, osim na mjestima mogućih diskontinuiteta, ako su zadovoljeni Dirichletovi uvjeti
- periodični signal, $\forall f \in KontPeriod_{T_0}$, zadovoljava Dirichletove uvjete
  (a) ako je apsolutno integrabilan u bilo kojoj periodi
  $$\int_{T_0} |f(t)| dt < \infty$$
  (b) ako ima konačni broj maksimuma i minimuma u bilo kojoj periodi
  (c) ako ima konačni broj diskontinuiteta u bilo kojoj periodi
- na mjestu diskontinuiteta, $(f(t_d^+) \neq f(t_d^-))$, signal konvergira prema $\frac{(f(t_d^+)+f(t_d^-))}{2}$

Fourierov red

- za periodični signal $f \in KontPeriod_{T_0}$, koji zadovoljava uvjete konvergencije,[3] vrijedi par jednadžbi

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{3}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \tag{4}$$

- jednadžba (3) naziva se jednadžba Fourierove analize (često i harmonijska analiza periodičnog signala)
- jednadžba (4) naziva se jednadžba Fourierove sinteze (često i harmonijska sinteza periodičnog signala)
- par jednadžbi (3) i (4) označavamo kao *CTFS* prikaz periodičnih vremenski kontinuiranih signala

[3] Svi periodični signali od praktičnog interesa zadovoljavaju prije navedene uvjete konvergencije Fourierovog reda

Fourierov red vremenski kontinuiranih signala

- niz vrijednosti F_k, $\forall k \in \mathbb{Z}$, možemo interpretirati kao diskretni signal čija je nezavisna varijabla iz skupa diskretnih vrijednosti frekvencija $k\omega_0$
- diskretni signal F_k predstavlja prikaz, u frekvencijskoj domeni, periodičnog vremenski kontinuiranog signala f
- kažemo da smo, jednadžbom Fourierove analize, signal iz vremenske domene transformirali u signal u frekvencijskoj domeni

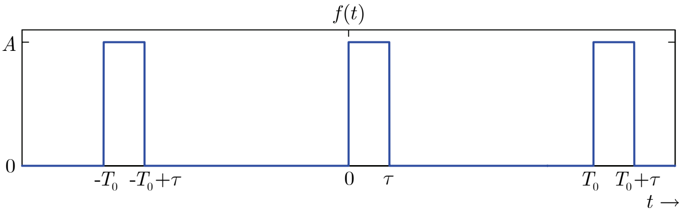
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- jednadžbom Fourierove sinteze, signal iz frekvencijske domene transformiramo u signal u vremenskoj domeni

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda za signal na slici



- signal je periodičan s osnovnom periodom T_0
- signal možemo interpretirati kao periodično ponavljanje pravokutnog pulsa amplitude A i širine τ

Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda
  za $k = 0$, određuje se F_0 (koji inače predstavlja srednju vrijednost (istosmjernu komponentu) signala $f(t)$)

$$F_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{\tau} dt = \frac{A\tau}{T_0}$$

za $k \neq 0$

$$F_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{\tau} e^{-jk\omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{A}{T_0}\left.\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{(-jk\omega_0)}\right|_0^{\tau} = \frac{A}{k\omega_0 T_0}\,\frac{1 - e^{-jk\omega_0\tau}}{j}$$

$$= \frac{2A\tau}{T_0 k\omega_0\tau}\,\frac{e^{\frac{jk\omega_0\tau}{2}} - e^{-\frac{jk\omega_0\tau}{2}}}{2j}e^{-\frac{jk\omega_0\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T_0}\,\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}e^{-\frac{jk\omega_0\tau}{2}}$$

za $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Linijski spektar

- koeficijenti Fourierovog reda poprimaju kompleksne vrijednosti i skup $\{F_k\}|_{k=-\infty}^{\infty}$ može biti grafički prikazan odvojenim grafovima njihove amplitude i faze
- kombinacija oba grafa $F_k = |F_k|e^{j\angle F_k}$ naziva se linijski spektar signala $f(t)$

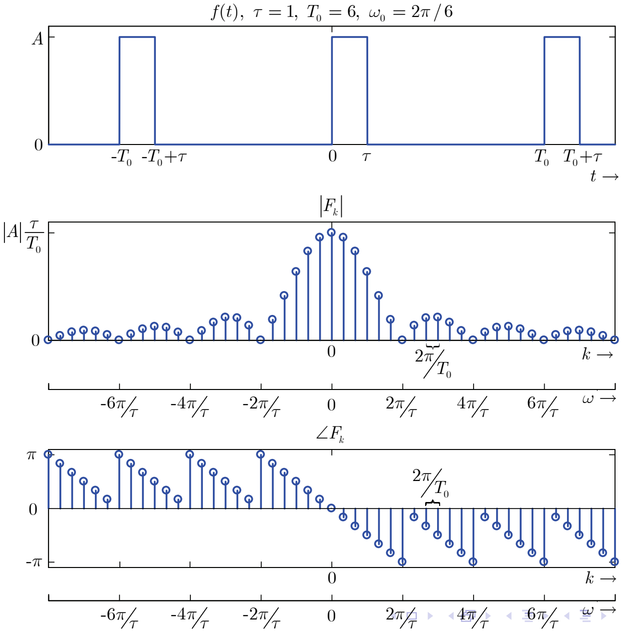
$$|F_k| = \begin{cases} \left|\frac{A\tau}{T_0}\right|, & k = 0 \\ \left|\frac{A\tau}{T_0}\right| \left|\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}\right|, & k = \pm1, \pm2\ldots, \end{cases}$$

$$\angle F_k = \angle A + \angle\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} - k\frac{\omega_0\tau}{2}$$

- $|F_k|$ predstavlja amplitudni spektar,
- $\angle F_k$ je fazni[4] spektar periodičnog signala

[4] faza realne veličine je nula ako je veličina pozitivna a π, ili $-\pi$, kada je veličina negativna

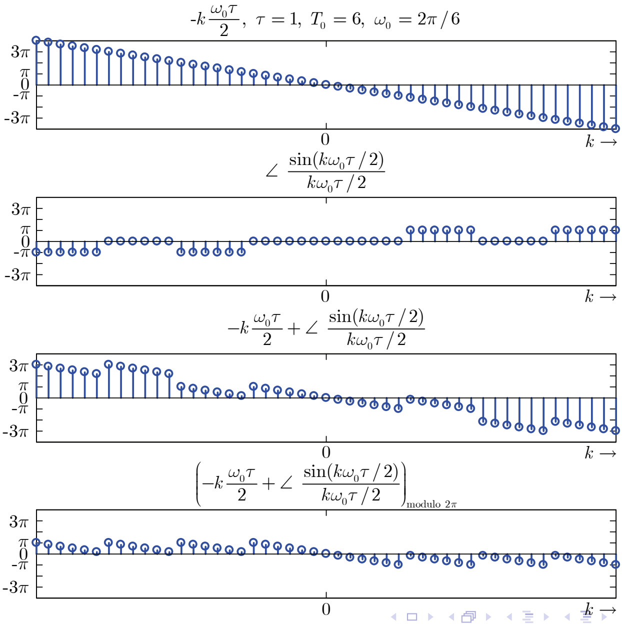
Linijski spektar – primjer



Spektar vremenski kontinuiranog pravokutnog periodičnog signala

- uvidom u graf spektra zaključujemo
  - spektar periodičnog signala je diskretan, a frekvencijski razmak između uzoraka spektra je $\omega_0 = 2\pi / T_0$
  - amplitudni spektar je parna funkcija, a fazni spektar neparna funkcija (obrazlaže se kasnije, a vrijedi za sve signale koji su u vremenskoj domeni realne funkcije)
  - ovojnica amplitudnog spektra pravokutnog periodičnog signala je oblika $\left|\frac{\sin(w)}{w}\right|$
  - širina pravokutnog signala (τ) i širina glavne latice $(4\pi/\tau)$ su obrnuto proporcionalne
  - prikazane su samo glavne vrijednosti faze, što znači da se faza izračunava modulo 2π i prikazuje samo u intervalu $[-\pi, \pi]$
  - ovaj način prikaza faze je uobičajen u literaturi, i interpretiran je na narednoj prikaznici

O načinu prikaza faznog spektra



Signali i sustavi
školska godina 2012/2013
Cjelina 4.

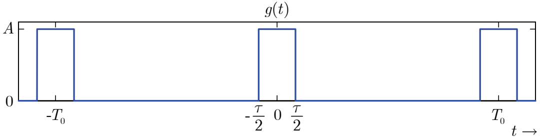
Profesor Branko Jeren

Frekvencijska analiza periodičnih vremenski kontinuiranih signala
Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala
Fourierov red

DODATAK

Spektar vremenski kontinuiranog pravokutnog periodičnog signala

- za periodičan signal prikazan slikom



- koeficijenti Fourierovog reda se određuju na isti način kao u prethodnom primjeru

$$G_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t)\,dt = \frac{A}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = \frac{A\tau}{T_0},$$

za $k = 0,$

$$G_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{A\tau}{T_0}\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}$$

za $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Linijski spektar

- za parnu funkciju $g(t)$, koeficijenti Fourierovog reda su realni (potvrđuje se dokazom nešto kasnije)
- izračunati su koeficijenti Fourierovog reda parnog pravokutnog periodičnog signala

$$G_k = A\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}$$

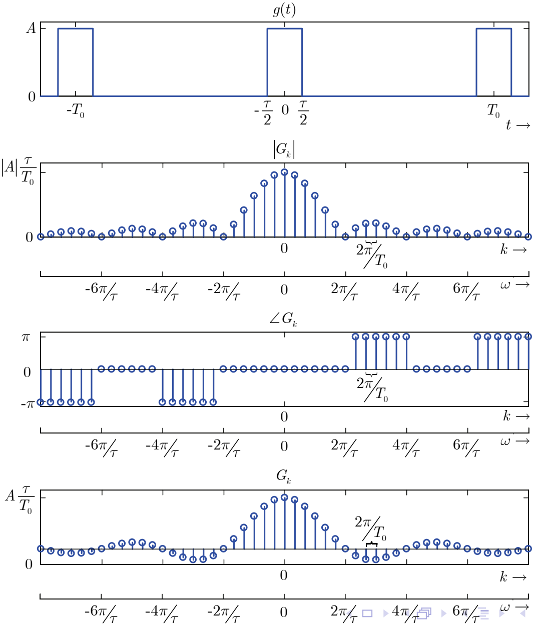
- za primijetiti je kako je njihova ovojnica oblika[5]

$$\mathrm{sinc}(w) = \frac{\sin(\pi w)}{\pi w}$$

- koeficijenti $\{G_k\}$ su realni i možemo ih prikazati i samo jednim grafom

[5] $\mathrm{sinc}(0) = 1$

Linijski spektar – primjer



Spektar vremenski kontinuiranog pravokutnog periodičnog signala

- izračunati spektri

$$|G_k| = \left|\frac{A\tau}{T_0}\right| \left|\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}\right|, \qquad \angle G_k = \angle A + \angle\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}$$

$$|F_k| = \left|\frac{A\tau}{T_0}\right| \left|\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}\right|, \qquad \angle F_k = \angle A + \angle\frac{\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} - k\frac{\omega_0\tau}{2}$$

su spektri pravokutnih signala $g(t)$ i $f(t) = g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ za $\forall t \in \mathbb{R}$

- zaključujemo kako kašnjenje signala za $\frac{\tau}{2}$ rezultira u linearnom faznom pomaku spektra za $-\frac{k\omega_0\tau}{2}$, dok amplitudni spektar ostaje nepromijenjen

Spektar vremenski kontinuiranog pravokutnog periodičnog signala

- interpretirajmo prethodni zaključak
- neka $g(t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$, sintetiziraju njegove Fourierove komponente koje su sinusoide odgovarajuće amplitude i faze (vidi dodatak)
- signal $f(t) = g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ čine iste sinusoidalne komponente koje su **sve pomaknute** za $\frac{\tau}{2}$
- vremensko kašnjenje $\frac{\tau}{2}$ svake sinusoide $\cos(k\omega_0 t)$ rezultira u njezinom faznom kašnjenju za $\frac{k\omega_0\tau}{2}$

$$\cos\left[k\omega_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = \cos\left(k\omega_0 t - \frac{k\omega_0\tau}{2}\right)$$

- $\frac{k\omega_0\tau}{2}$ je linearna funkcija od k, što znači da više harmonijske komponente doživljavaju proporcionalno viši fazni pomak da bi se postiglo jednako vremensko kašnjenje svih harmonijskih komponenti

Parsevalova relacija

- periodični kontinuirani signal $f(t)$ ima beskonačnu energiju ali konačnu srednju snagu koja je dana s

$$P_f = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |f(t)|^2 dt$$

- uz $|f(t)|^2 = f(t)f^*(t)$ možemo pisati[6]

$$P_f = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^* e^{-jk\omega_0 t}\right) dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^* \left(\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{-jk\omega_0 t}\, dt}_{F_k}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2$$

- ova se jednakost naziva Parsevalova relacija

[6] $f^*(t)$ označava konjugirano kompleksnu vrijednost od $f(t)$

Parsevalova relacija

- ilustrirajmo fizikalno značenje Parsevalove relacije

$$P_f = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2$$

- neka se $f(t)$ sastoji samo od jedne kompleksne eksponencijale

$$f(t) = F_k e^{jk\omega_0 t}$$

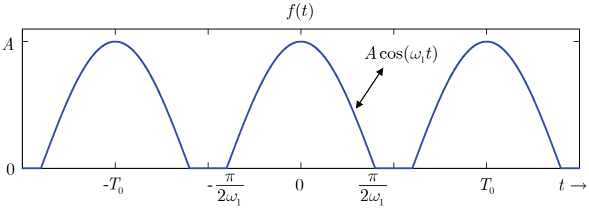
- u tom slučaju svi su koeficijenti Fourierovog reda, osim F_k, jednaki nuli, i sukladno tomu srednja snaga signala je

$$P_f = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |F_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |F_k|^2 dt = |F_k|^2$$

- očigledno je kako $|F_k|^2$ predstavlja srednju snagu k–te harmoničke komponente signala
- ukupna srednja snaga periodičnog signala je, prema tome, zbroj srednjih snaga svih harmonika

Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda periodičnog signala na slici ($A = 1$, $\omega_1 = 1$, a $T_0 = \frac{5\pi}{4}$)



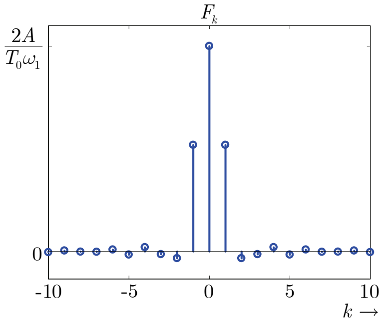
- koeficijenti Fourierovog reda su (vidi dodatak)

$$F_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} A\cos(\omega_1 t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{2A\omega_1}{T_0(\omega_1^2 - k^2\omega_0^2)}\cos\left(\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}k\right), \quad \text{za } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fourierov red – primjer

- spektar signala dan je na slici

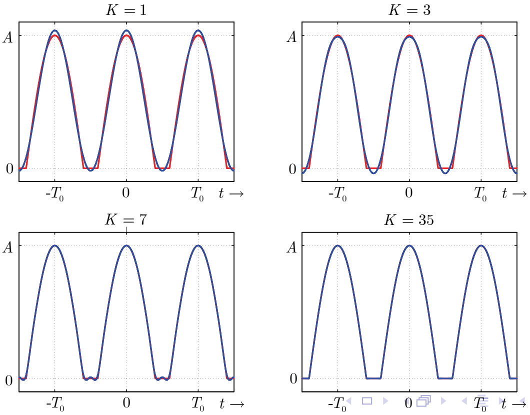


- inverznom transformacijom možemo, iz spektra, odrediti izvorni signal f u vremenskoj domeni
- postupak sinteze ilustriramo izračunom Fourierovog reda za konačni broj harmonika čime se aproksimira izvorni signal

Fourierov red – primjer

- razmatra se Fourierov red za konačni broj harmonika, $K = 1, 3, 7, 35$

$$f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} F_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-K}^{K} \frac{2A\omega_1}{T_0(\omega_1^2 - k^2\omega_0^2)} \cos\left(\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}k\right) e^{jk\omega_0 t}$$



Fourierov red – primjer

- pokazano je kako za dani primjer vremenski neprekinutog signala vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \approx f_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

- iz primjera je evidentno kako za $K \to \infty$, ili dovoljno velik K, možemo postići perfektnu aproksimaciju signala f
- razmotrimo aproksimaciju, po odsječcima neprekinutog, signala koji ima konačni broj diskontinuiteta u periodi
- razmatra se periodični pravokutni signal i pokazuje kako se pri Fourierovoj sintezi dobiva signal s valovitostima na mjestu prekida
- ta pojava se naziva Gibbsova pojava

Gibbsova pojava

- razmatra se graf Fourierovog reda parnog periodičnog pravokutnog signala za konačni broj harmonika
- prije su izračunati koeficijenti Fourierovog reda

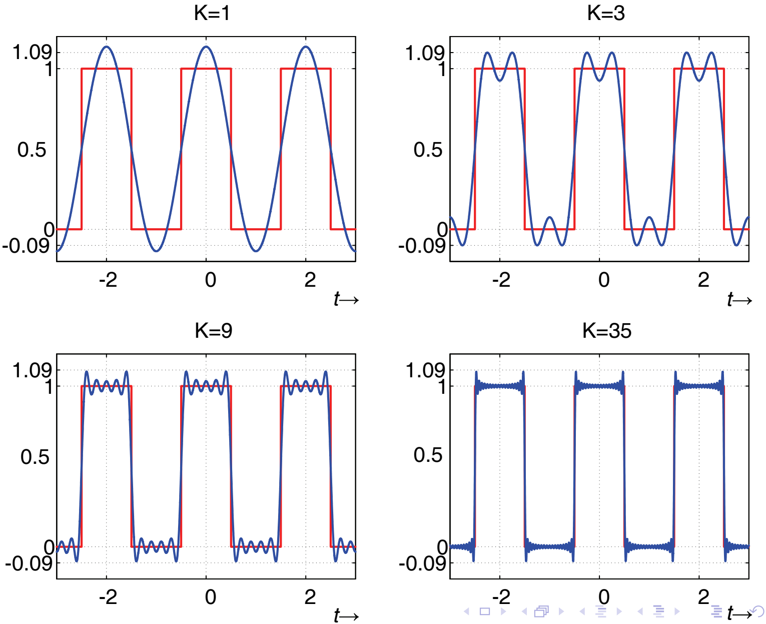
$$F_0 = \frac{\tau}{T_0}, \quad F_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} \quad \text{za } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

pa je Fourierov red za konačni broj harmonika

$$f_K(t) = \frac{\tau}{T_0} + \sum_{\substack{k=-K \\ k\neq 0}}^{K} \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} e^{jk\omega_0 t}$$

- na narednoj prikaznici su prikazani grafovi Fourierovog reda za $K = 1, 3, 9, 35$ uz $T_0 = 2$ i $\tau = 1$

Gibbsova pojava



Gibbsova pojava

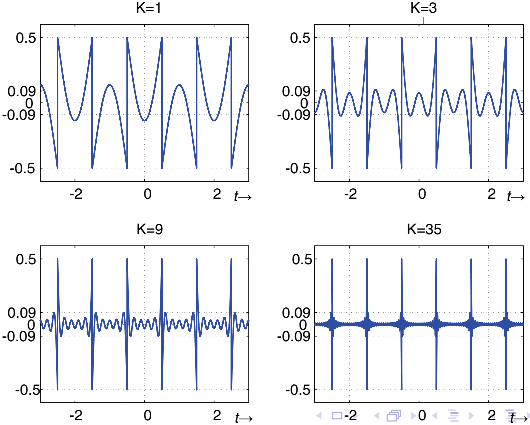
- primjer pokazuje kako u blizini diskontinuiteta postoji *nadvišenje* odnosno *valovitost* čiji se iznos, s povećanjem K, ne smanjuje
- ova se pojava naziva Gibbsova pojava
- vidljivo je kako je, za $K \to \infty$, *iznos* prvog nadvišenja konstantan, 9 % veličine diskontinuiteta, ali se *širina* valovitosti približava nuli
- za $\forall t$, osim na mjestu diskontinuiteta, vrijednost signala prikazanog Fourierovim redom, za $K \to \infty$, približava se vrijednosti originalnog signala
- na mjestu diskontinuiteta, $(f(t_d^+) \neq f(t_d^-))$,

$$f_K(t_d) \text{ za, } K \to \infty, \text{ konvergira prema } \frac{(f(t_d^+) + f(t_d^-))}{2}$$

Gibbsova pojava

- definiramo grešku aproksimacije kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_K(t) = f(t) - \sum_{k=-K}^{K} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

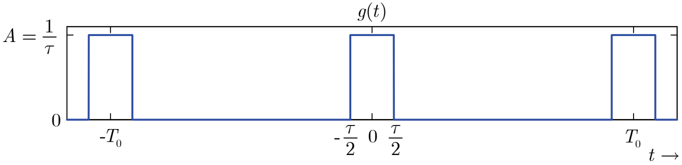


Gibbsova pojava

- ako promotrimo energiju signala greške $\int_{T_0} |e_K(t)|^2\, dt$, unutar jedne periode, zaključujemo sa slike da za $K \to \infty$ ona postaje nula
- ovaj zaključak proizlazi iz činjenice da su iznosi valovitosti konstantne a njihove širine teže k nuli
- dakle, razlika između $f(t)$, $\forall t$, i njegova prikaza Fourierovim redom ima energiju nula
- zaključujemo kako izvorni signal i njegov prikaz Fourierovim redom imaju potpuno jednaku energiju signala u bilo kojoj periodi, pa stoga imaju jednako djelovanje na bilo koji realni sustav

Veza širine pravokutnog pulsa i širine glavne latice spektra

- za paran periodičan pravokutni signal



određujemo spektar za $0 < \tau < T_0$, za $\tau = T_0$ i za $\tau = 0$

- za $0 < \tau < T_0$ koeficijenti Fourierovog reda su (prije izračunato)

$$G_0 = \frac{A\tau}{T_0} = \frac{\frac{1}{\tau}\tau}{T_0} = \frac{1}{T_0}, \qquad \text{za } k = 0,$$

$$G_k = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}} = \frac{1}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}}, \qquad \text{za } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Veza širine pravokutnog pulsa i širine glavne latice spektra

- za $\tau = T_0$, signal $g(t) = g(t + mT_0) = \frac{1}{T_0}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, a koeficijenti Fourierovog reda su, uz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$,

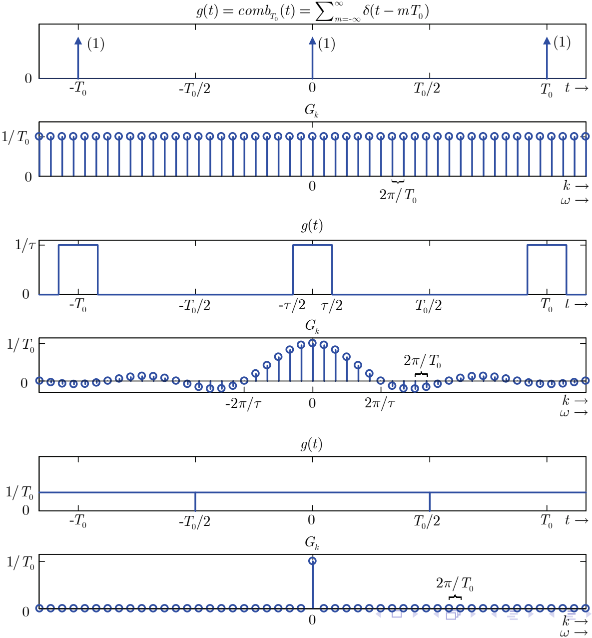
$$G_0 = \frac{A\tau}{T_0} = \frac{1}{T_0}, \qquad \text{za } k = 0,$$

$$G_k = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} = \frac{1}{T_0} \frac{\sin k\pi}{k\pi} = 0, \qquad \text{za } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- za $\tau = 0$, pravokutni puls prelazi u Diracovu delta funkciju, pa je $g(t) = comb_{T_0}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0)$, a koeficijenti Fourierovog reda su, za $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$G_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}$$

Veza širine pravokutnog pulsa i širine glavne latice spektra



DODATAK – SAMOSTALNI RAD STUDENATA

Koeficijenti Fourierovog reda

- da bi neki periodični vremenski kontinuirani signal prikazali uz pomoć Fourierovog reda potrebno je odrediti koeficijente reda F_k
- izračunavanje koeficijenata $\{F_k\}$ započinje množenjem, s obje strane,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

s $e^{-jm\omega_0 t}$, za $m \in \mathbb{Z}$

- slijedi integriranje s obje strane, preko jedne periode, dakle, 0 do T_0, ili općenitije od t_0 do $t_0 + T_0$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)e^{-j\omega_0 mt}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-jm\omega_0 t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \right) dt \tag{5}$$

- desnu stranu transformiramo u

Koeficijenti Fourierovog reda

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t}\, dt}_{Int} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \left[\frac{e^{j(k-m)\omega_0 t}}{j(k-m)\omega_0} \right]_{t_0}^{t_0+T_0}$$

- brojnik izraza u pravokutnim zagradama jednak je na obje granice, pa je za regularni nazivnik ($k \neq m$) integral jednak nuli
- s druge strane, za $k = m$, integral *Int* iznosi

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = t \Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = T_0$$

pa se (5) reducira u

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-jm\omega_0 t}\, dt = F_m T_0 \Rightarrow$$

Koeficijenti Fourierovog reda

- slijedi izraz za koeficijente Fourierovog reda

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad F_m = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-jm\omega_0 t}\, dt$$

- budući je t_0 proizvoljan, integral može biti izračunat preko bilo kojeg intervala duljine T_0 pa je konačno, uz zamjenu $k = m$, izraz za izračun koeficijenata Fourierovog reda

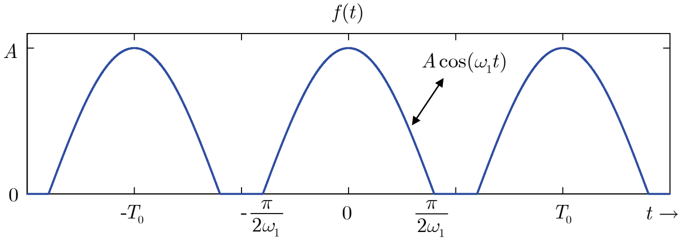
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

- koeficijenti Fourierovog reda, F_k, nazivaju se i spektralni koeficijenti signala f
- koeficijenti Fourierovog reda su kompleksni[7] dakle, $F_k \in \mathbb{C}$

[7] Kasnije se pokazuje da su za parne, vremenski kontinuirane, periodične signale koeficijenti Fourierovog reda realni

Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda periodičnog signala na slici ($A = 1$, $\omega_1 = 1$, a $T_0 = \frac{5\pi}{4}$)



- koeficijenti Fourierovog reda su

$$F_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} A\cos(\omega_1 t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

Fourierov red – primjer

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{A}{T_0}\int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} \frac{e^{j\omega_1 t}+e^{-j\omega_1 t}}{2} e^{-jk\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{A}{2T_0}\left[\int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} e^{j(\omega_1-k\omega_0)t}\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} e^{-j(\omega_1+k\omega_0)t}\,dt\right] \\
&= \frac{A}{2T_0}\frac{1}{j(\omega_1-k\omega_0)}\left[e^{j(\omega_1-k\omega_0)\frac{\pi}{2\omega_1}} - e^{-j(\omega_1-k\omega_0)\frac{\pi}{2\omega_1}}\right] \\
&+ \frac{A}{2T_0}\frac{1}{-j(\omega_1+k\omega_0)}\left[e^{-j(\omega_1+k\omega_0)\frac{\pi}{2\omega_1}} - e^{j(\omega_1+k\omega_0)\frac{\pi}{2\omega_1}}\right] \\
&= \frac{A}{2T_0}\frac{1}{j(\omega_1-k\omega_0)}\left[\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j} e^{-jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} - \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} e^{jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}}\right] \\
&+ \frac{A}{2T_0}\frac{1}{-j(\omega_1+k\omega_0)}\left[\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} e^{-jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} - \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j} e^{jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}}\right]
\end{aligned}
$$

Fourierov red – primjer

$$
\begin{aligned}
F_k &= \frac{A}{2T_0}\frac{1}{\omega_1 - k\omega_0}\left[e^{jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} + e^{-jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}}\right] \\
&+ \frac{A}{2T_0}\frac{1}{\omega_1 + k\omega_0}\left[e^{jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} + e^{-jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}}\right] \\
&= \frac{A}{T_0}\cos\left(k\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}\right)\left[\frac{1}{\omega_1 - k\omega_0} + \frac{1}{\omega_1 + k\omega_0}\right] \\
&= \frac{2A\omega_1}{T_0\left(\omega_1^2 - k^2\omega_0^2\right)}\cos\left(k\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}\right)
\end{aligned}
$$

za $A = 1$, $\omega_1 = 1$, i $T_0 = \frac{5\pi}{4}$ je

$$
F_k = \frac{2A\omega_1}{T_0\left(\omega_1^2 - k^2\omega_0^2\right)}\cos\left(\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}k\right) = \frac{40}{\pi(25 - 64k^2)}\cos\left(\frac{4\pi}{5}k\right)
$$

Fourierov red – kompaktni trigonometrijski oblik

- do sada smo razmatrali Fourierov red definiran kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t}$$

- pokazano je kako za realan periodičan signal vrijedi

$$|F_k| = |F_{-k}| \quad \text{i} \quad \angle F_k = -\angle F_{-k}$$

pa izraz za Fourierov red možemo transformirati u

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} |F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t}$$

$$= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |F_{-k}| e^{j\angle F_{-k}} e^{-jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t}$$

Fourierov red – kompaktni trigonometrijski oblik

$$
\begin{aligned}
f(t) &= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t} + |F_k| e^{-j\angle F_k} e^{-jk\omega_0 t} \right] \\
&= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|F_k| e^{j(k\omega_0 t + \angle F_k)} + |F_k| e^{-j(k\omega_0 t + \angle F_k)} \right] \\
&= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|F_k| \frac{e^{j(k\omega_0 t + \angle F_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \angle F_k)}}{2} \\
&= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|F_k| \cos(k\omega_0 t + \angle F_k)
\end{aligned}
$$

- što je Fourierov red u kompaktnom trigonometrijskom obliku

$$
f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)
$$