Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

18. travnja 2007.

Vremenski kontinuirani sustav II reda

- detaljno se razmatra opći vremenski kontinuirani sustav II reda
- paralelno se analiziraju model ulaz-izlaz i model s varijablama stanja
- model ulaz-izlaz

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_2 u(t)$$

- model s varijablama stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + du(t)$$

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model ulaz-izlaz

- rješavamo homogenu jednadžbu

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2y(t) = 0$$

- karakteristična jednadžba je

$$s^2 + a_1s + a_2 = 0$$

- vlastite frekvencije[1] neka su s_1 i s_2 a rješenje homogene jednadžbe je

$$y_h(t) = c_1e^{s_1t} + c_2e^{s_2t}$$

- odziv nepobuđenog sustava, $y_0(t)$, jednak je rješenju homogene diferencijalne jednadžbe, i nalazimo ga određivanjem c_1 i c_2 za zadane $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$

[1] razmatramo jednostruke, dakle, različite

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model ulaz-izlaz

- iz

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad \text{i} \\
\dot{y}_0(t) &= s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t}
\end{aligned}
$$

- slijedi za $t = 0^-$

$$
\left.
\begin{aligned}
y_0(0^-) &= y(0^-) = c_1 + c_2 \\
\dot{y}_0(0^-) &= \dot{y}(0^-) = s_1 c_1 + s_2 c_2
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow
\left\{
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{y(0^-)s_2 - \dot{y}(0^-)}{s_2 - s_1} \\
c_2 &= \frac{\dot{y}(0^-) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1}
\end{aligned}
\right.
$$

- pa je odziv nepobuđenog sustava II reda

$$
y_0(t) = \frac{y(0^-)s_2 - \dot{y}(0^-)}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{\dot{y}(0^-) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}
$$

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model s varijablama stanja

- rješavamo jednadžbe

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- prije je izvedeno da su odziv stanja i odziv nepobuđenog sustava

$$x(t) = e^{At} x(0^-)$$
$$y_0(t) = C e^{At} x(0^-)$$

- postupak određivanja fundamentalne matrice e^{At} detaljno se studira kasnije, a ovdje odziv stanja, i odziv sustava, nalazimo rješavanjem homogenih jednadžbi stanja

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model s varijablama stanja

- pretpostavljena rješenja homogenih jednadžbi $x_1(t) = K_1 e^{st}$ i $x_2(t) = K_2 e^{st}$ uvrštavamo u polazne jednadžbe, pa iz

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{aligned}$$

- slijedi

$$\begin{aligned} sK_1 e^{st} &= a_{11}K_1 e^{st} + a_{12}K_2 e^{st} \\ sK_2 e^{st} &= a_{21}K_1 e^{st} + a_{22}K_2 e^{st} \end{aligned}$$

- za netrivijalno rješenje mora biti $e^{st} \neq 0$, pa slijede karakteristične jednadžbe

$$\begin{aligned} (a_{11} - s)K_1 + a_{12}K_2 &= 0 \\ a_{21}K_1 + (a_{22} - s)K_2 &= 0 \end{aligned}$$

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model s varijablama stanja

- da bi sustav karakterističnih jednadžbi dao rješenja, za K_1 i K_2 različite od nule, mora determinanta sustava biti jednaka nuli,

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - s) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - s) \end{vmatrix} = 0$$

- što daje karakterističnu jednadžbu

$$s^2 - Ts + \Delta = 0$$

gdje su T, trag matrice A, a Δ, determinanta matrice A,

$$T = a_{11} + a_{22}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model s varijablama stanja

- neka su vlastite frekvencije s_1 i s_2, pa je rješenje homogenih jednadžbi stanja

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= K_{11}e^{s_1 t} + K_{12}e^{s_2 t} \\
x_2(t) &= K_{21}e^{s_1 t} + K_{22}e^{s_2 t}
\end{aligned}
$$

- konstante $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ određujemo iz početnih stanja $x_1(0^-)$ i $x_2(0^-)$ iz

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= K_{11}e^{s_1 t} + K_{12}e^{s_2 t} \\
\dot{x}_1(t) &= s_1 K_{11}e^{s_1 t} + s_2 K_{12}e^{s_2 t} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\
x_2(t) &= K_{21}e^{s_1 t} + K_{22}e^{s_2 t} \\
\dot{x}_2(t) &= s_1 K_{21}e^{s_1 t} + s_2 K_{22}e^{s_2 t} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)
\end{aligned}
$$

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model s varijablama stanja

- za $t = 0^-$ slijedi

$$\begin{aligned}
K_{11} + K_{12} &= x_1(0^-) \\
s_1 K_{11} + s_2 K_{12} &= a_{11} x_1(0^-) + a_{12} x_2(0^-) \\
K_{21} + K_{22} &= x_2(0^-) \\
s_1 K_{21} + s_2 K_{22} &= a_{21} x_1(0^-) + a_{22} x_2(0^-)
\end{aligned}$$

- pa su

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{(a_{11}-s_2)x_1(0^-)+a_{12}x_2(0^-)}{s_1-s_2} \\
K_{12} &= \frac{(s_1-a_{11})x_1(0^-)-a_{12}x_2(0^-)}{s_1-s_2} \\
K_{21} &= \frac{a_{21}x_1(0^-)+(a_{22}-s_2)x_2(0^-)}{s_1-s_2} \\
K_{22} &= \frac{-a_{21}x_1(0^-)+(s_1-a_{22})x_2(0^-)}{s_1-s_2}
\end{aligned}$$

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model s varijablama stanja

- odziv stanja nepobuđenog sustava II reda je

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{(a_{11}-s_2)x_1(0^-)+a_{12}x_2(0^-)}{s_1-s_2}e^{s_1 t} + \frac{(s_1-a_{11})x_1(0^-)-a_{12}x_2(0^-)}{s_1-s_2}e^{s_2 t}\\
x_2(t) &= \frac{a_{21}x_1(0^-)+(a_{22}-s_2)x_2(0^-)}{s_1-s_2}e^{s_1 t} + \frac{-a_{21}x_1(0^-)+(s_1-a_{22})x_2(0^-)}{s_1-s_2}e^{s_2 t}
\end{aligned}
$$

- razvrstavanjem po $x_1(0^-)$ i $x_2(0^-)$ dolazimo do rješenja oblika $x(t) = e^{At}x(0^-)$

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \left(\tfrac{a_{11}-s_2}{s_1-s_2}e^{s_1 t} + \tfrac{s_1-a_{11}}{s_1-s_2}e^{s_2 t}\right)x_1(0^-) + \left(\tfrac{a_{12}}{s_1-s_2}e^{s_1 t} - \tfrac{a_{12}}{s_1-s_2}e^{s_2 t}\right)x_2(0^-)\\
x_2(t) &= \left(\tfrac{a_{21}}{s_1-s_2}e^{s_1 t} - \tfrac{a_{21}}{s_1-s_2}e^{s_2 t}\right)x_1(0^-) + \left(\tfrac{a_{22}-s_2}{s_1-s_2}e^{s_1 t} + \tfrac{s_1-a_{22}}{s_1-s_2}e^{s_2 t}\right)x_2(0^-)
\end{aligned}
$$

- pa se prepoznaje fundamentalna matrica kao

$$
e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}-s_2}{s_1-s_2}e^{s_1 t} + \frac{s_1-a_{11}}{s_1-s_2}e^{s_2 t} & \frac{a_{12}}{s_1-s_2}e^{s_1 t} - \frac{a_{12}}{s_1-s_2}e^{s_2 t}\\ \frac{a_{21}}{s_1-s_2}e^{s_1 t} - \frac{a_{21}}{s_1-s_2}e^{s_2 t} & \frac{a_{22}-s_2}{s_1-s_2}e^{s_1 t} + \frac{s_1-a_{22}}{s_1-s_2}e^{s_2 t} \end{bmatrix}
$$

- odziv nepobuđenog sustava je

$$
y_0(t) = Ce^{At}x(0^-)
$$

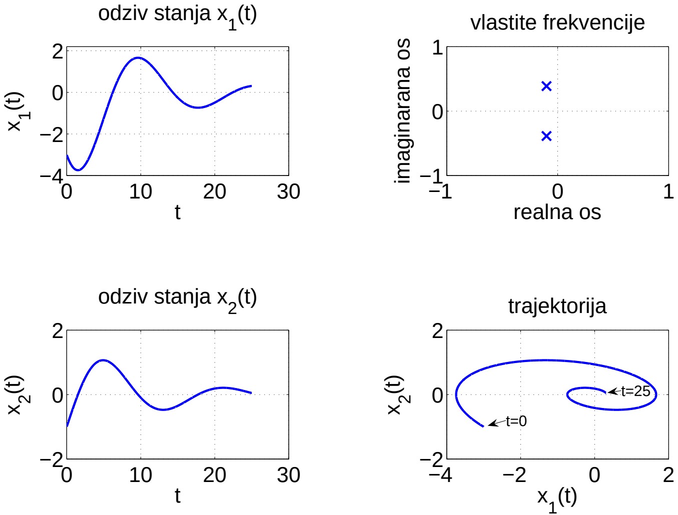
Odziv nepobuđenog sustava II reda – trajektorija stanja

- odziv stanja nepobuđenog sustava $x(t) = e^{At}x(0^-)$ pokazuje kako sustav prelazi, iz početnog stanja $x(0^-)$, u stanje $x(t)$ u trenutku t
- poznavanje stanja sustava, u bilo kojem trenutku t, određeno je poznavanjem x_1 i x_2
- promjenu stanja sustava II reda možemo pratiti kao trajektoriju stanja u ravnini stanja
- trajektorija stanja predstavlja parametarski zadanu funkciju

$$T = \{(x_1, x_2) | x_1 = \varphi(t), x_2 = \psi(t), t \in Realni_+\}$$

- trajektorija stanja je, dakle, skup točaka koje opisuje vrh vektora stanja
- slijedi primjer sustava za koji su izračunati odzivi stanja $x_1(t)$ i $x_2(t)$
- prikazani su odzivi stanja te trajektorija u ravnini stanja

Odziv nepobuđenog sustava II reda – trajektorija stanja



Odziv nepobuđenog sustava II reda – model ulaz-izlaz

- u uvodnom predavanju pokazano je kako su modeli sustava ovjesa automobila, glazbene vilice ili R-L-C električke mreže, dani diferencijalnom jednadžbom oblika

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_2 u(t)$$

- odnosno

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$$

gdje su ζ – stupanj prigušenja, Ω_n – neprigušena prirodna frekvencija i A konstanta

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model ulaz-izlaz

- odziv nepobuđenog sustava nalazimo rješavanjem homogene jednadžbe

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = 0$$

- karakteristična jednadžba je

$$s^2 + 2\zeta\Omega_n s + \Omega_n^2 = 0$$

- vlastite frekvencije s_1 i s_2 su

$$s_{1,2} = -\zeta\Omega_n \pm \Omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- ovisno o koeficijentu ζ, dakle, stupnju prigušenja, vlastite frekvencije mogu biti jednostruke ili dvostruke, te realne ili konjugirano kompleksne

Odziv nepobuđenog sustava II reda – model ulaz-izlaz

- $\zeta > 1$ – nadkritično prigušen nepobuđeni sustav II reda
  - vlastite frekvencije su realne, negativne, i različite

$$s_1 = -\zeta\Omega_n + \Omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad s_2 = -\zeta\Omega_n - \Omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- $\zeta = 1$ – kritično prigušen nepobuđeni sustav II reda
  - vlastita frekvencije je realna, negativna, i dvostruka

$$s_1 = s_2 = -\zeta\Omega_n$$

- $\zeta < 1$ – podkritično prigušen nepobuđeni sustav II reda
  - vlastite frekvencije su konjugirano kompleksne

$$s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}, \quad s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

- $\zeta = 0$ – neprigušen nepobuđeni sustav II reda
  - vlastite frekvencije su konjugirano kompleksne

$$s_1 = j\Omega_n, \quad s_2 = -j\Omega_n$$

Odziv nepobuđenog sustava II reda

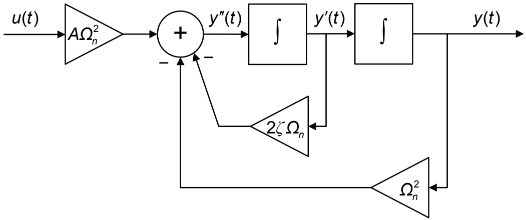
- prije diskusije mogućih odziva nepobuđenog sustava II reda, za razne vrijednosti ζ, učinimo, odgovarajućim izborom varijabli stanja, prijelaz u model s varijablama stanja
- diskusiju tada provodimo, paralelno, za oba modela

Odziv nepobuđenog sustava II reda

- sustav II reda, zadan s modelom ulaz-izlaz,

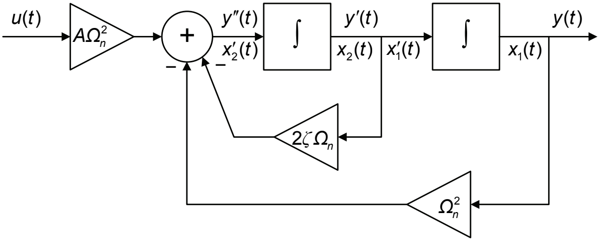
$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$$

- prikazujemo blokovskim dijagramom



- izlaze iz integratora, dakle, memorijskih elemenata, označavamo kao varijable stanja $x_1(t)$ i $x_2(t)$

Prijelaz iz modela ulaz-izlaz u model s varijablama stanja



- izabiremo[2] $x_1(t) = y(t)$ i $x_2(t) = \dot{y}(t)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\Omega_n^2 x_1(t) - 2\zeta\Omega_n x_2(t) + A\Omega_n^2 u(t)\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

[2] jedan od mogućih izbora

Prijelaz iz modela ulaz-izlaz u model s varijablama stanja

- pisano matrično slijedi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_n^2 & -2\zeta\Omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A\Omega_n^2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

- vrijedi

$$T = a_{11} + a_{22} = -2\zeta\Omega_n$$
$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Omega_n^2$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$s^2 - Ts + \Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 2\zeta\Omega_n s + \Omega_n^2 = 0$$

- zaključujemo kako, bez obzira na izabrani model, uvijek dolazimo do iste karakteristične jednadžbe i istih karakterističnih frekvencija

Trajektorija u ravnini stanja

- ovdje se (aproksimativno) određuje jedna od mogućih trajektorija u ravnini stanja
- razmatra se sustav čije su vlastite frekvencije konjugirano kompleksne
- radi bolje preglednosti u pisanju tijekom izvoda, označimo konjugirano kompleksne vlastite frekvencije kao

$$s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\alpha + j\beta$$
$$s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\alpha - j\beta$$

- iz istih razloga neka je $x_1(0^-) \neq 0$ i $x_2(0^-) = 0$
- prije je izveden izraz za odziv stanja $x_1(t)$ općeg sustava II reda koji uz $x_2(0^-) = 0$ prelazi u

$$x_1(t) = \frac{-s_2 x_1(0^-)}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{s_1 x_1(0^-)}{s_1 - s_2} e^{s_2 t}$$

Trajektorija u ravnini stanja

- za $s_1 = -\alpha + j\beta$ i $s_2 = -\alpha - j\beta$ slijedi

$$x_1(t) = \frac{(\alpha + j\beta)x_1(0^-)}{j2\beta} e^{(-\alpha + j\beta)t} + \frac{(-\alpha + j\beta)x_1(0^-)}{j2\beta} e^{(-\alpha - j\beta)t}$$

i

$$x_1(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t) + \cos(\beta t)\right] x_1(0^-)$$

- kako je $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ slijedi

$$x_2(t) = -\frac{\alpha^2}{\beta} e^{-\alpha t}\sin(\beta t) x_1(0^-) - \beta e^{-\alpha t}\sin(\beta t) x_1(0^-)$$

- odlučimo se dalje razmatrati sustave za koje vrijedi[3] $\frac{\alpha}{\beta} << 1$

---

[3]sustavi čije su vlastite frekvencije blizu $j\Omega$ osi. Ovdje, ionako, određujemo tek jednu od mogućih trajektorija pa je ovo ograničenje prihvatljivo

Trajektorija u ravnini stanja

- aproksimativni izrazi za odziv stanja su tada

$$x_1(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)x_1(0^-)$$

$$x_2(t) = -\beta e^{-\alpha t}\sin(\beta t)x_1(0^-)$$

- iz

$$\cos(\beta t) = \frac{x_1(t)}{e^{-\alpha t}x_1(0^-)} \quad \text{i} \quad \sin(\beta t) = \frac{x_2(t)}{-\beta e^{-\alpha t}x_1(0^-)}$$

- slijedi

$$\left(\frac{x_1(t)}{e^{-\alpha t}x_1(0^-)}\right)^2 + \left(\frac{x_2(t)}{-\beta e^{-\alpha t}x_1(0^-)}\right)^2 = 1$$

Trajektorija u ravnini stanja

- i finalno

$$\left(\frac{x_1(t)}{e^{-\zeta\Omega_n t}x_1(0^-)}\right)^2+\left(\frac{x_2(t)}{-\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}e^{-\zeta\Omega_n t}x_1(0^-)}\right)^2=1$$

- zaključujemo da je za sustav čije su vlastite frekvencije konjugirano kompleksne, trajektorija u ravnini stanja jedna spirala
- za druge parametre sustava trajektorija stanja poprima druge oblike i biti će ilustrirani nizom primjera koji slijede

Trajektorija u ravnini stanja

- razmatra se trajektorija za nepobuđeni sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = 0$$

- ili jednadžbama stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- kako je $2\zeta\Omega_n = 0.2$ i $\Omega_n^2 = 0.16$ slijedi

$$\zeta = 0.25 \qquad \text{i} \qquad \Omega_n = 0.4$$

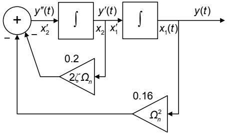
- neka su $y(0^-) = x_1(0^-) \neq 0$ i $\dot{y}(0^-) = x_2(0^-) = 0$

Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 13

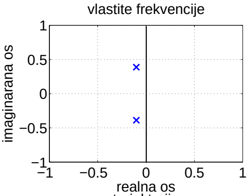
Profesor Branko Jeren

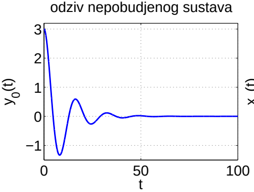
Kontinuirani sustav II reda

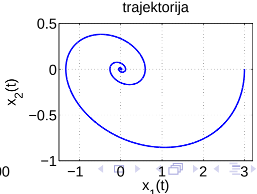
Trajektorija u ravnini stanja



$\zeta = 0.25$
$\Omega_n = 0.4$
$s_1 = -0.1 + j0.3873$
$s_2 = -0.1 + j0.3873$
$y(0^-) = x_1(0^-) = 3$
$y'(0^-) = x_2(0^-) = 0$







Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava

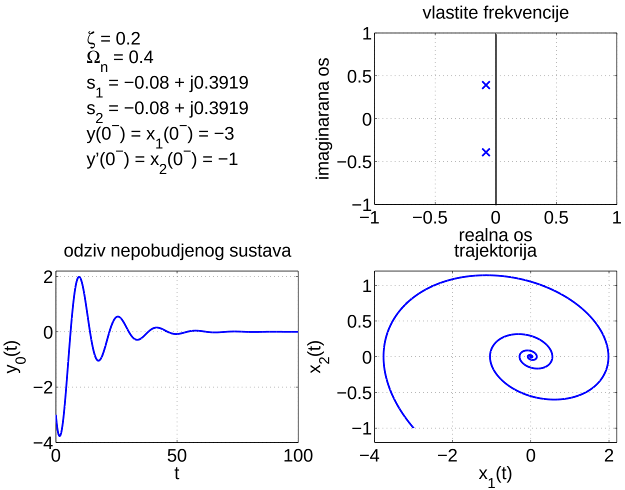
- slijedi prikaz odziva sustava i prikaz trajektorije u ravnini stanja za gore zadani sustav
- neka su $y(0^-) = x_1(0^-) = -3$ i $\dot{y}(0^-) = x_2(0^-) = -1$
- variramo $\zeta = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0; 1.2; 1.4; 0.0; -0.1$

Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 13

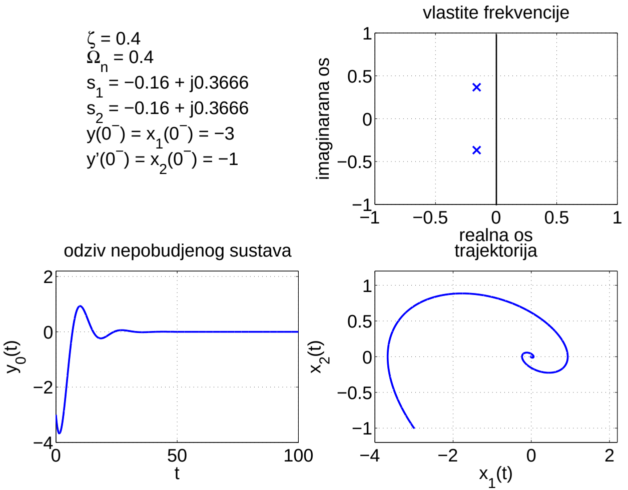
Profesor
Branko Jeren

Kontinuirani sustav II reda

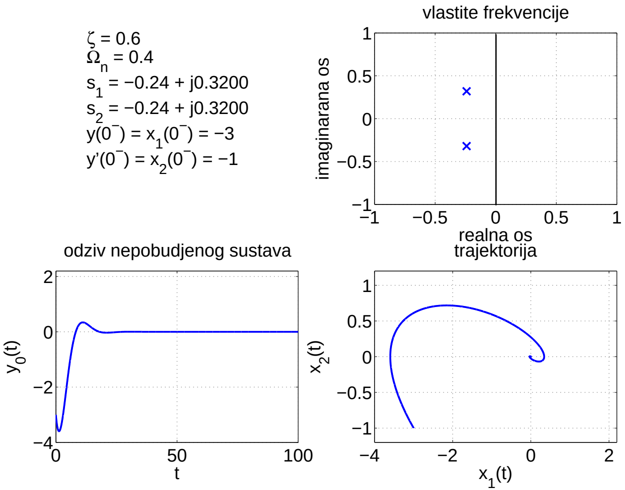
Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava



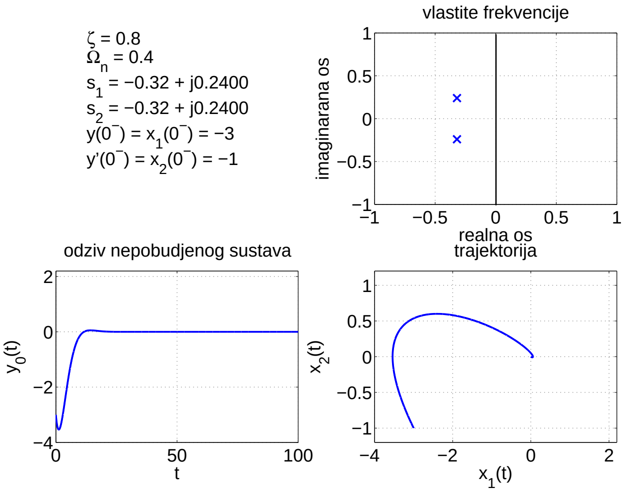
Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava



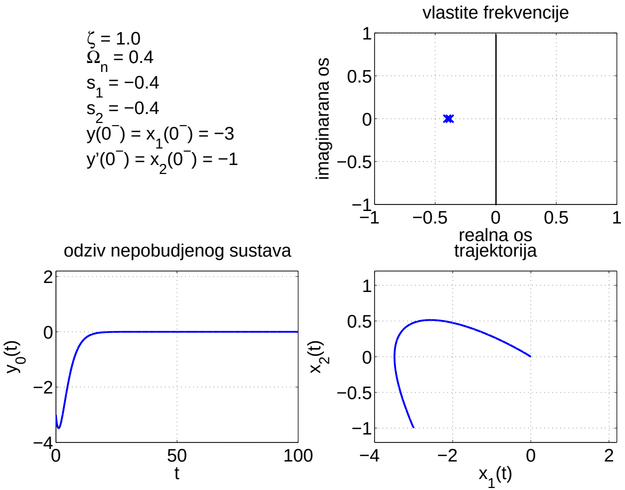
Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava



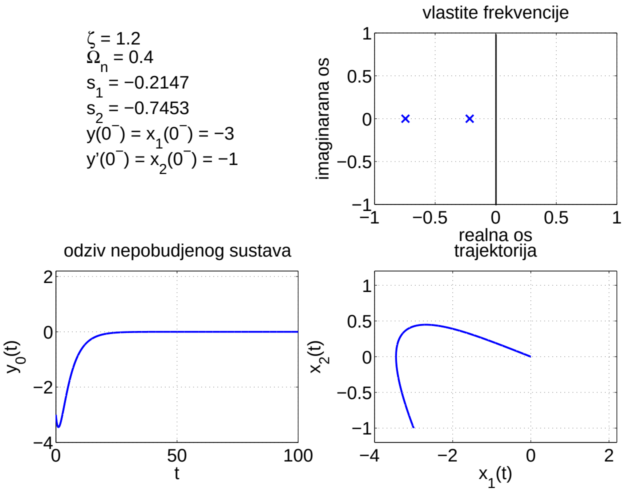
Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava



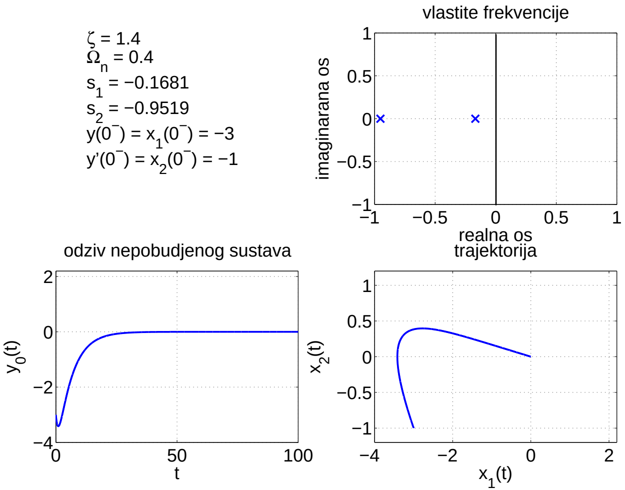
Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava



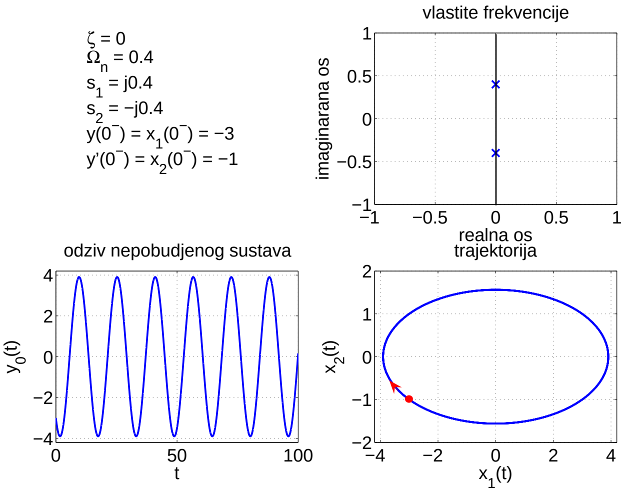
Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava



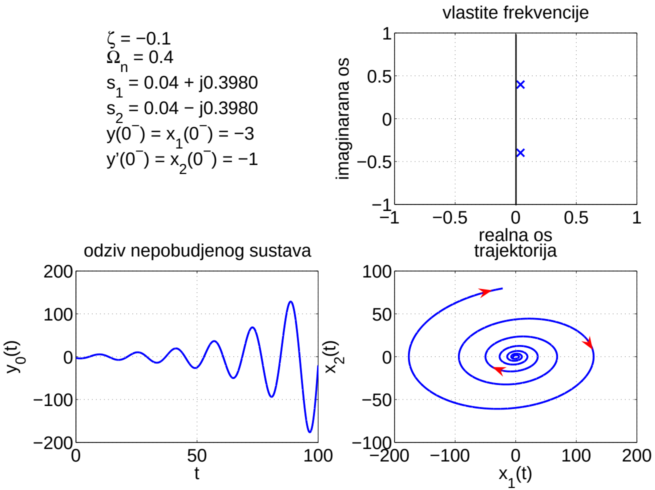
Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava



Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava



Odziv sustava i trajektorija u ravnini stanja nepobuđenog sustava



Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- sustav pobuđujemo jediničnim impulsom pa je jednadžba

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2\delta(t)$$

- za $t > 0$ jednadžba postaje homogena jednadžba pa je za $t > 0$ odziv sustava na jedinični impuls jednak rješenju homogene jednadžbe
- prije su izračunate vlastite frekvencije $s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ i $s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ i homogeno rješenje je

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad t > 0$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- zadani početni uvjeti $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ trebaju biti definirani neposredno prije djelovanja pobude koja u ovom slučaju djeluje u $t = 0$ i
- konstante c_1 i c_2 određujemo za $t = 0^+$ pa je potrebno odrediti $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$ uzimajući u obzir $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ i djelovanje pobude
- početne uvjete $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$ formalno nalazimo sljedećim postupkom

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- integriramo dva puta polaznu diferencijalnu jednadžbu

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2\delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{t}\ddot{y}(\tau)d\tau + 2\zeta\Omega_n\int_{0^-}^{t}\dot{y}(\tau)d\tau + \Omega_n^2\int_{0^-}^{t}y(\tau)d\tau = A\Omega_n^2\int_{0^-}^{t}\delta(\tau)d\tau \tag{1}$$

$$\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau}\ddot{y}(\lambda)d\lambda d\tau + 2\zeta\Omega_n\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau}\dot{y}(\lambda)d\lambda d\tau +$$

$$+\,\Omega_n^2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau}y(\lambda)d\lambda d\tau = A\Omega_n^2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau}\delta(\lambda)d\lambda d\tau \tag{2}$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $t = 0^+$ jednadžba (1) prelazi u

$$\dot{y}(0^+) - \dot{y}(0^-) + 2\zeta\Omega_n[y(0^+) - y(0^-)] + \Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau}_{=0} =$$

$$= A\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau}_{=1} \qquad (3)$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $t = 0^+$ jednadžba (2) prelazi u

$$y(0^+) - y(0^-) + 2\zeta\Omega_n \underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} \dot{y}(\lambda)d\lambda d\tau}_{=0} +$$

$$+\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda)d\lambda d\tau}_{=0} = A\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\int_{0^-}^{\tau} \delta(\lambda)d\lambda d\tau}_{=0} \qquad (4)$$

- slijedi

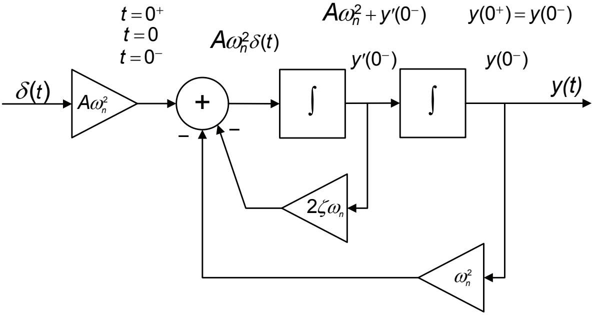
$$y(0^+) = y(0^-)$$

- a iz ovoga i iz jednadžbe (3) slijedi

$$\dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- do istog zaključka možemo doći uvidom u blok dijagram



Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- iz

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad t > 0$$

za $t = 0^+$

$$\begin{aligned} y(0^+) &= c_1 + c_2 = y(0^-) \\ \dot{y}(0^+) &= s_1 c_1 + s_2 c_2 = \dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2 \end{aligned}$$

- izračunavamo

$$c_1 = \frac{y(0^-)s_2 - (\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2)}{s_2 - s_1}$$

$$c_2 = \frac{(\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1}$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- odziv sustava II reda, s početnim uvjetima $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$, pobuđenog s jediničnim impulsom je

$$y_{imp}(t) = \frac{y(0^-)s_2 - (\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2)}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} +$$

$$+ \frac{(\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

- za $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$ odziv na impuls zove se impulsni odziv i označava $h(t)$

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ i $s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{-j2\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + \\ + \frac{A\Omega_n^2}{-j2\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}$$

- odnosno

$$h(t) = \frac{\Omega_n A}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\Omega_n t} \sin[(\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t], \quad t \geq 0$$

Impulsni odziv – primjer

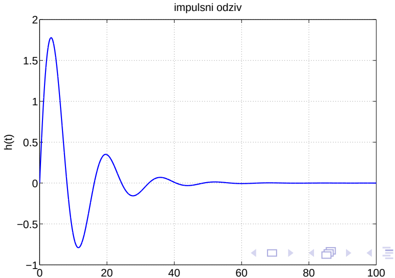
- određuje se impulsni odziv sustava

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = 6.25 \cdot 0.16u(t)$$

$$\zeta = 0.25, \quad \Omega_n = 0.4, \quad A = 6.25$$

- iz prethodnog izraza za $h(t)$ slijedi

$$h(t) = 2.582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)$$



Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja

- slijedi prikaz impulsnog odziva sustava i prikaz trajektorije[4] u ravnini stanja za sustav zadan s diferencijalnom jednadžbom

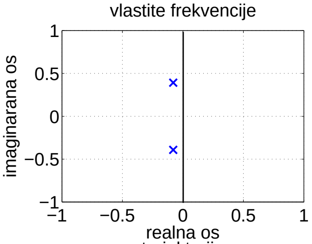
$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$$

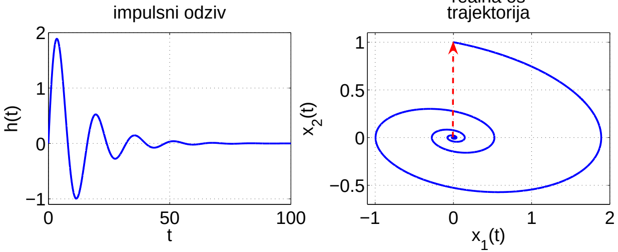
- neka su $A = 6.25$ i $\Omega_n = 0.4$
- variramo $\zeta = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0; 1.2; 1.4; 0.0; -0.1$

[4] trajektorija stanja sada prikazuje promjenu stanja pobuđenog sustava

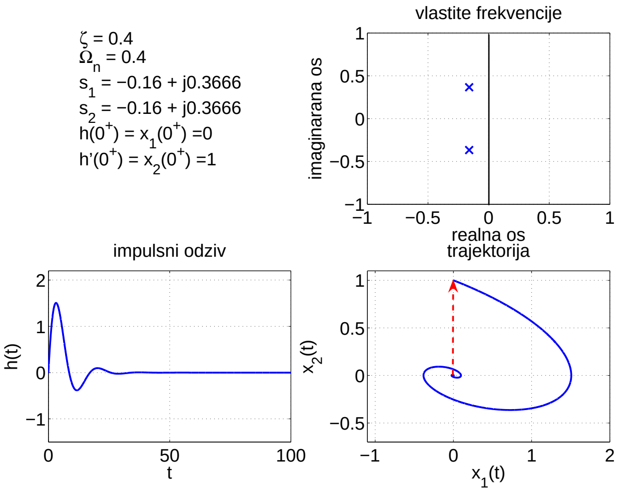
Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja

$\zeta = 0.2$
$\Omega_n = 0.4$
$s_1 = -0.08 + j0.3919$
$s_2 = -0.08 + j0.3919$
$h(0^+) = x_1(0^+) = 0$
$h'(0^+) = x_2(0^+) = 1$

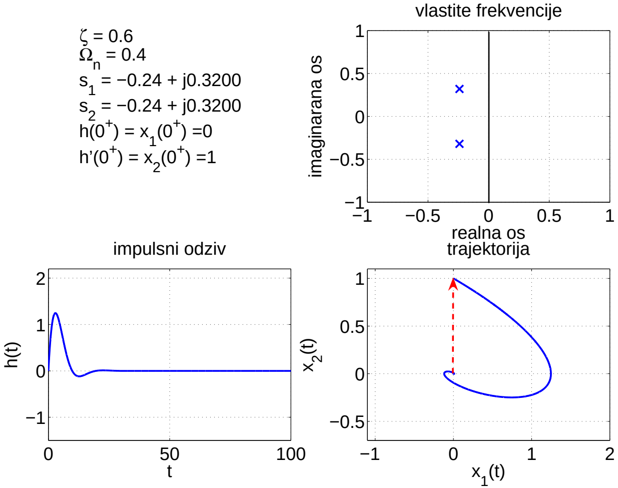




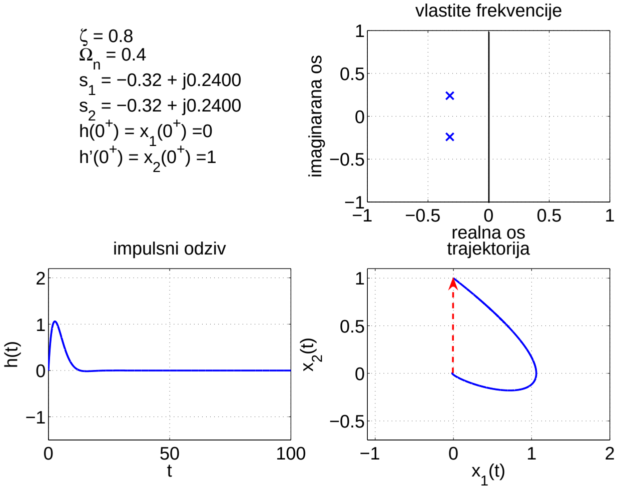
Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja



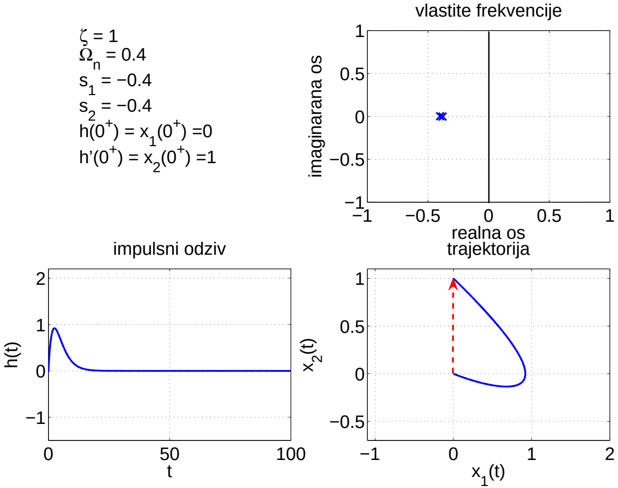
Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja



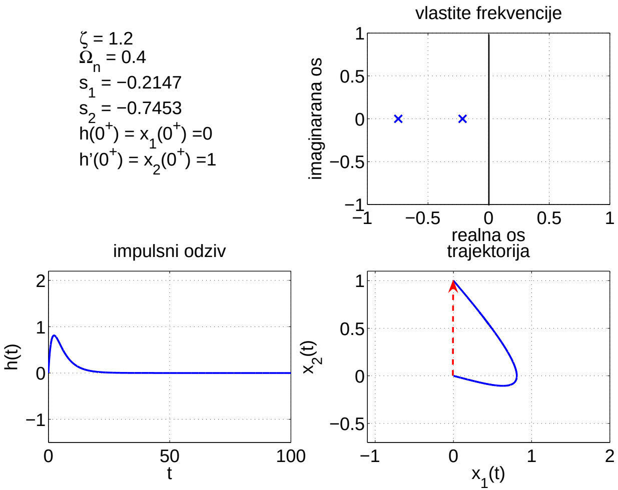
Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja



Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja



Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja

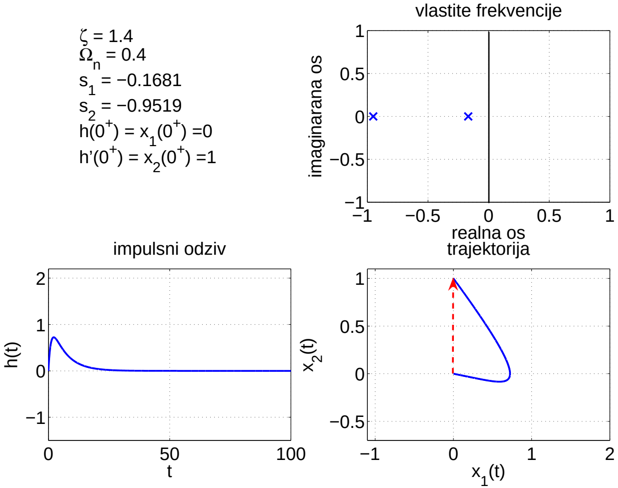


Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 13

Profesor
Branko Jeren

Kontinuirani sustav II reda

Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja

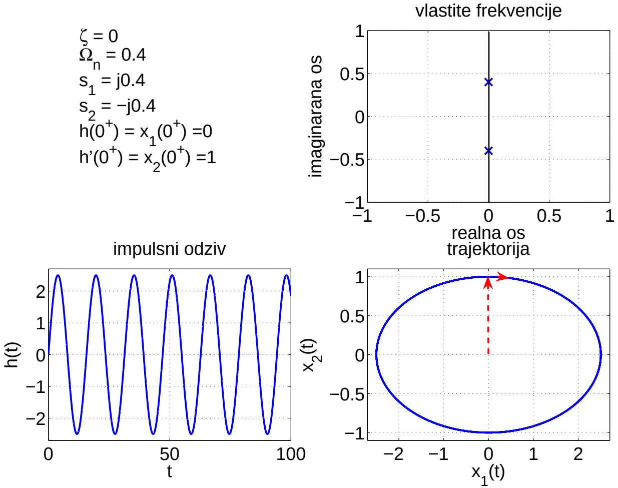


Signali i sustavi
školska godina 2006/2007
Predavanje 13

Profesor Branko Jeren

Kontinuirani sustav II reda

Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja



Impulsni odziv sustava i trajektorija stanja