Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

XI. tjedan

Konvolucija

1. Odziv diskretnog LTI sustava na jediničnu stepenicu je $y(n)=(n+1)\mu(n)$. Odredite impulsni odziv ovog sustava. Kolika je vrijednost impulsnog odziva u $n=5$?

Rješenje:

Impuls se može prikazati kao razlika dvije jedinične stepenice $\delta(n) = \mu(n) - \mu(n-1)$.

Ako je $u(n) = \mu(n)$, odziv je $y(n) = (n+1)\mu(n)$.

Kako je sustav LTI (linearan vremenski nepromjenjiv), a pobuda je impuls, a samim time i razlika dvije jedinične stepenice, odziv će biti:

$$h(n) = y(n) - y(n-1)$$

$$h(n) = (n+1)\mu(n) - \big((n-1)+1\big)\mu(n-1) = (n+1)\mu(n) - n\mu(n-1).$$

Odziv u trenutku $n = 5$ iznosi $h(5) = 6\mu(5) - 5\mu(4) = 1$

2. Zadan je vremenski diskretan LTI sustav impulsnim odzivom:

$$h(n) = \begin{cases} 1, n = 0,1, \\ 0, \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Nađite ulazno – izlaznu relaciju (jednadžbu diferencija) za ovaj sustav.

Rješenje:

Poznat je impulsni odziv vremenski diskretnog LTI sustava $h(n) = \begin{cases} 1, n = 0,1, \\ 0, \quad \text{inače.} \end{cases}$ Odziv sustava $y(n)$ na proizvodnu pobudu $u(n)$ može se dobiti konvolucijom $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m)$. Kada se ova suma raspiše:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m)$$
$$= \cdots + h(-1)u(n+1) + h(0)u(n) + h(1)u(n-1) + h(2)u(n-2) + \cdots$$

Kako je impulsni odziv različit od nule jedino za *n=0, 1*, odziv iznosi

$$y(n) = h(0)u(n) + h(1)u(n-1) = 1 \cdot u(n) + 1 \cdot u(n-1)$$

$$y(n) = u(n) + u(n-1),$$

a to je jednadžba diferencija za zadani sustav.

3. Nađite odziv diskretnog sustava na pobudu $u(n)=\alpha^n\mu(n)$, ako je poznat impulsni odziv sustava $h(n)=\beta^n\mu(n)$.

<u>Rješenje:</u>

Odziv na proizvoljnu pobudu *u(n)* iz poznatog impulsnog odziva *h(n)* može se dobiti korištenjem konvolucijske sumacije:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m)$$

Uvrštavanjem zadane pobude i impulsnog odziva dobivamo:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta^{n-m}\mu(n-m)\alpha^m\mu(m) = \sum_{m=0}^{n} \beta^{n-m}\alpha^m = \beta^n \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m = \beta^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}}$$
$$= \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}.$$

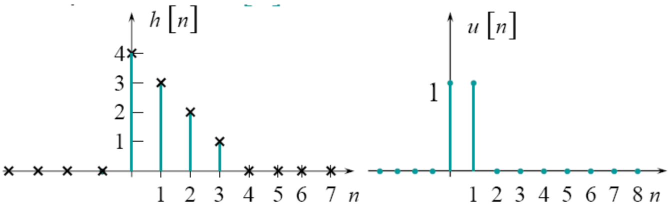
U slučaju da je $\alpha = \beta$ imamo

$$y(n) = \beta^n \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\beta}{\beta}\right)^m = \beta^n \sum_{m=0}^{n} 1 = (n+1)\beta^n.$$

4. Korištenjem konvolucijske sumacije odredite odziv diskretnog sustava zadanog impulsnim odzivom $h(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$. Sustav je pobuđen s $u(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$.

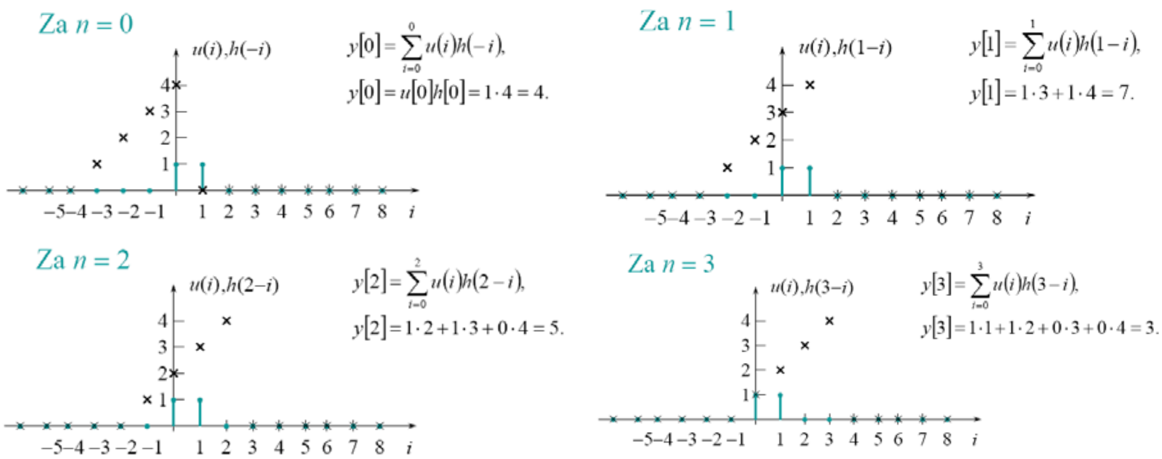
<u>Rješenje:</u>

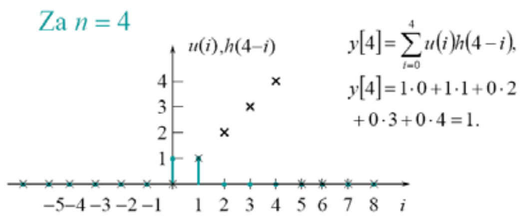
Zadani impulsni odziv i pobudu sustava možemo prikazati grafički:



impulsni odziv   pobuda

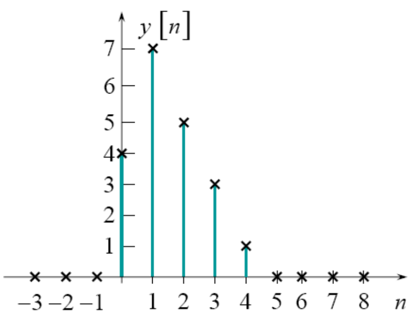
Traženu konvoluciju ćemo isto tako interpretirati grafički iz: $y(n) = \sum_{i=0}^{n} u(i)h(n-i)$.





Dalje je *y(5)=y(6)=...=0.*

Pa je odziv:



5. Zadan je diskretni signal $f: Z \to R$ kao $f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0,1,2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Promatramo signal *q(n)* koji je definiran kao konvolucija *q(n)=f(n)*f(n)*. Koliko iznosi *q(3)*?

Rješenje:

Zadan je signal $f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0,1,2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Konvolucija njega sa samim sobom je

$$q(n) = f(n) * f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)f(n-m).$$

U trenutku *n=3* iznosi

$$\begin{aligned} q(3) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)f(3-m) \\ &= \cdots + f(-1)f(4) + f(0)f(3) + f(1)f(2) + f(2)f(1) + f(3)f(0) \\ &+ f(4)f(-1) + \cdots = 1\cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

6. Dokažite svojstva konvolucije vremenski kontinuiranog sustava:
   a. $u(t) * \delta(t) = u(t)$
   b. $u(t) * \delta(t-t_0) = u(t-t_0)$
   c. $u(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$
   d. $u(t) * \mu(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} u(\tau)d\tau$

Rješenje:

a. Uvrštavanjem u konvolucijski integral slijedi

$$u(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = u(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = u(t)\cdot 1 = u(t)$$

b. Uvrštavanjem u konvolucijski integral slijedi

$$\begin{aligned} u(t) * \delta(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau = u(t-t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0-\tau)d\tau \\ &= u(t-t_0)\cdot 1 = u(t-t_0) \end{aligned}$$

c. Uvrštavanjem u konvolucijski integral slijedi

$$u(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\mu(t-\tau)d\tau = \left| \mu(t-\tau) = \begin{cases} 0, \tau > t \\ 1, \tau \le t \end{cases} \right| = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

d. Uvrštavanjem u konvolucijski integral slijedi

$$\begin{aligned} u(t) * \mu(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\mu(t-t_0-\tau)d\tau = \left| \mu(t-t_0-\tau) = \begin{cases} 0, \tau > t-t_0 \\ 1, \tau \le t-t_0 \end{cases} \right| \\ &= \int_{-\infty}^{t-t_0} u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

7. Nađite odziv kontinuiranog sustava na pobudu $u(t) = \begin{cases} 1, 0 < t \leq 3, \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}$, ako je impulsni odziv $h(t) = \begin{cases} 1, 0 < t \leq 2, \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}$.

<u>Rješenje:</u>

Zadani ulazni signal možemo prikazati kao razliku jediničnih stepenica $u(t) = \mu(t) - \mu(t-3)$. Isto vrijedi i za impulsni odziv $h(t) = \mu(t) - \mu(t-2)$.

Uvrštavanjem u konvolucijski integral

$$
\begin{aligned}
y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\mu(\tau) - \mu(\tau-3)\big)\big(\mu(t-\tau) - \mu(t-2-\tau)\big)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau-3)\mu(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t-2-\tau)d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau-3)\mu(t-2-\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

Pogledajmo svaki od integrala umnoška pomaknutih jediničnih stepenica:

$$\mu(\tau)\mu(t-\tau) = \begin{cases} 1, 0 \leq \tau \leq t \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}, \text{uz } t > 0 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t-\tau)d\tau = \mu(t)\int_{0}^{t} d\tau$$

$$\mu(\tau-3)\mu(t-\tau) = \begin{cases} 1, 3 \leq \tau \leq t \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}, \text{uz } t > 3 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau-3)\mu(t-\tau)d\tau = \mu(t-3)\int_{3}^{t} d\tau$$

$$\mu(\tau)\mu(t-2-\tau) = \begin{cases} 1, 0 \leq \tau \leq t-2 \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}, \text{uz } t > 2 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t-2-\tau)d\tau = \mu(t-2)\int_{0}^{t-2} d\tau$$

$$
\begin{aligned}
\mu(\tau-3)\mu(t-2-\tau) = \begin{cases} 1, 3 \leq \tau \leq t-2 \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}, \text{uz } t > 5 \rightarrow &\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau-3)\mu(t-2-\tau)d\tau \\
&= \mu(t-5)\int_{3}^{t-2} d\tau
\end{aligned}
$$

Zbrajanjem i oduzimanjem ovih integrala dobiva se odziv sustava:

$$
\begin{aligned}
y(t) = \mu(t)\int_{0}^{t} d\tau - \mu(t-3)\int_{3}^{t} d\tau - \mu(t-2)\int_{0}^{t-2} d\tau + \mu(t-5)\int_{3}^{t-2} d\tau \\
= \mu(t)(t-0) - \mu(t-3)(t-3) - \mu(t-2)(t-2-0) + \mu(t-5)(t-2-3) \\
= t\mu(t) - (t-2)\mu(t-2) - (t-3)\mu(t-3) + (t-5)\mu(t-5).
\end{aligned}
$$

Komentar: nađite odziv ovog sustava koristeći grafičku metodu objašnjenu na predavanjima.

8. Izračunajte izlaz *y(t)* za dani vremenski kontinuirani LTI sustav čiji su impulsni odziv *h(t)* i ulaz *u(t)* dani s

$$h(t) = e^{-a\,t}\mu(t)$$

$$u(t) = e^{a\,t}\mu(-t),\ \ a > 0\,.$$

<u>Rješenje:</u>

Kako bi se pronašao odziv sustava, mora se upotrijebiti konvolucija:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau\,.$$

Zadani ulaz *u(τ)* dan je na slici, kao i *h(t- τ)* za dva slučaja *t<0* i *t>0*. Sa slika je vidljivo da se za *t<0*, *u(τ)* i *h(t- τ)* preklapaju u području $\tau = -\infty$ do $\tau = t$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{a\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau = e^{-at}\int_{-\infty}^{t} e^{2a\tau}d\tau = \frac{1}{2a}e^{at}\,.$$

Za *t>0* slike se preklapaju u području $\tau = -\infty$ do $\tau = 0$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{a\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau = e^{-.at}\int_{-\infty}^{0} e^{2a\tau}d\tau = \frac{1}{2a}e^{-at}\,.$$

Kombinirajući ova dva odziva, ukupni odziv može biti zapisan:

$$y(t) = \frac{1}{2a}e^{-a|t|},\ \ a > 0\,.$$