



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

12. ožujka 2007.



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007

Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Ekvivalencija automata

- dva različita automata mogu biti ekvivalentna na način da za isti ulazni niz generiraju isti izlazni niz
- definiraju se dvije relacije ekvivalencije
 - simulacija
 - bisimulacija
- kažemo da automat A simulira automat B , ako je za bilo koji ulazni niz svaki izlazni niz automata B također mogući izlazni niz automata A
- kažemo da A bisimulira B ako A simulira B i B simulira A



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Relacije simulacije automata 1

- simulacijske relacije povezuju skupove dvaju automata
- one su skup uređenih parova koji uparuju stanja automata A s “ekvivalentnim” stanjem automata B



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Relacije simulacije automata 2

- kažemo kako A simulira B ako postoji simulacijska relacija $X \subset Stanja_B \times Stanja_A$ takva da

1. $(pocetStanje_B, pocetStanje_A) \in X$, i
2. $\forall u(n) \in Ulazi, \quad \forall (x_B(n), x_A(n)) \in X$, i
 $\forall (x_B(n+1), y_B(n)) \in mogucaFunkcijaPrijelaza(x_B(n), u(n))$,
 $\exists (x_A(n+1), y_A(n)) \in mogucaFunkcijaPrijelaza(x_A(n), u(n))$,
takav da
 $(x_B(n+1), x_A(n+1)) \in X$ i $y_A(n) = y_B(n)$

- riječima kazano, A simulira B , kada postoji takav skup parova stanja da bilo koji ulaz $u(n)$ prevodi oba automata iz ekvivalentnih stanja $(x_B(n), x_A(n))$ u ekvivalentna stanja $(x_B(n+1), x_A(n+1))$ generirajući pri tome iste izlaze $y_B(n) = y_A(n)$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Relacije simulacije automata 3

- ako A simulira B tada A ima sva *Ponašanja* koja ima i B , a možda i više

$$A \text{ simulira } B \Rightarrow \text{Ponašanja}_B \subset \text{Ponašanja}_A$$

- ako A simulira B tada svako *Ponašanja* koje je nemoguće za A je također nemoguće za B , dakle,

$$(u, y) \notin \text{Ponašanja}_A \Rightarrow (u, y) \notin \text{Ponašanja}_B$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

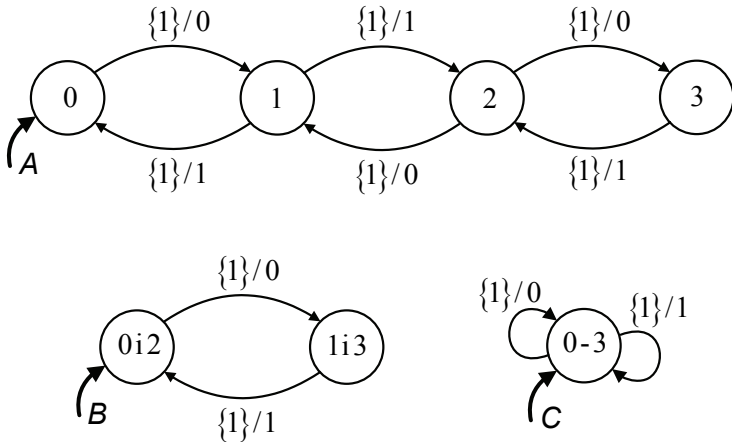
Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Simulacije automata – primjer

- razmatraju se tri automata A , B , C



Slika 1: Primjer simulacije automata



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

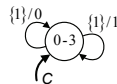
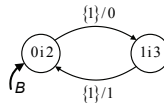
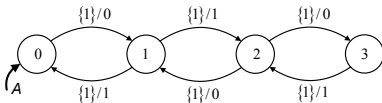
Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Simulacije automata – primjer



- C simulira A i B
- B simulira A ali i A simulira B
- B može pratiti svaku promjenu stanja (ponašanje) A ali i A, koji je nedeterministički u dva stanja, može, na dva načina, pratiti svaku promjenu stanja B
- dakle, simulacijske relacije nisu jednoznačne



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor

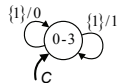
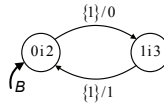
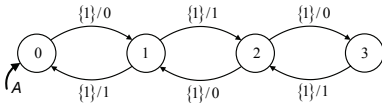
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Simulacije automata – primjer



- ako automat A uvijek izabere povratak iz stanja 1 u stanje 0 relacija simulacije je

$$X_{B,A} = \{(0i2, 0), (1i3, 1)\}$$

- ako automat A uvijek izabere povratak iz stanja 2 u stanje 1 relacija simulacije je

$$X_{B,A} = \{(0i2, 0), (1i3, 1), (0i2, 2)\}$$

- inače

$$X_{B,A} = \{(0i2, 0), (1i3, 1), (0i2, 2), (1i3, 3)\}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata

Slaganje automata u slogove automata

- razmatramo slaganje automata u složenije strukture – slogove automata
- razmatramo slaganje automata u kaskadu i povratnu vezu
- zajedničko djelovanje svih automata sloga je sinkrono
- kod sinkronih slogova svaki se od automata odziva **simultano** i **trenutno**, dakle, odziv složenog automata se sastoji od skupa istovremenih reakcija svake od komponenti sustava, a izlazni znak se pojavljuje sinkrono s pojavom ulaznog znaka
- ovako građene slogove automata nazivamo sinkrono/reaktivni automati



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

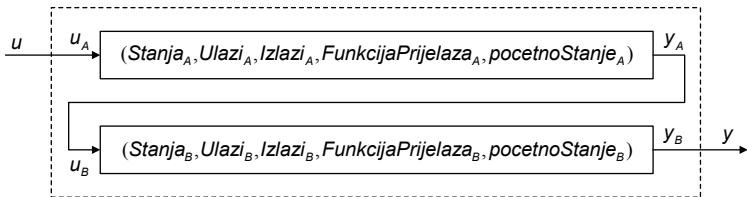
Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata

Kaskada automata



- oba automata djeluju istodobno (oba u koraku n)
- oba automata imaju svoja vlastita stanja, ulaze i izlaze
- izlaz automata A je ulaz u automat B
- djelovanje ulaza u_A propagira istovremeno kroz kaskadu za svaki korak – sinkronost



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

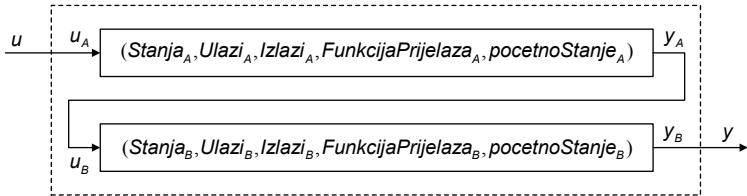
Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata

Kaskada automata–definicija



- definira se 5-torka za složeni automat (kaskadu)

$$\begin{aligned} Stanja &= Stanja_A \times Stanja_B & Ulazi &= Ulazi_A \\ pocetnoStanje &= (pocetnoStanje_A, pocetnoStanje_B) & Izlazi &= Izlazi_B \end{aligned}$$

$$(x_A(n+1), x_B(n+1), y(n)) = FunkcijaPrijelaza(x_A(n), x_B(n), u(n))$$

gdje su

$$(x_A(n+1), y_A(n)) = FunkcijaPrijelaza_A(x_A(n), u(n))$$

$$(x_B(n+1), y(n)) = FunkcijaPrijelaza_B(x_B(n), y_A(n))$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

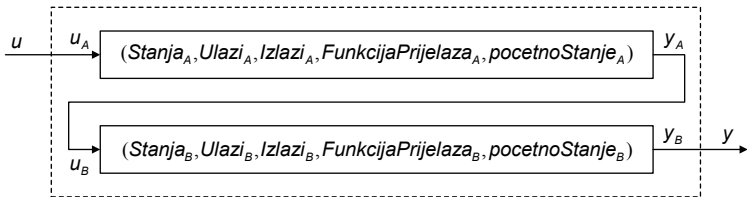
Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata

Kaskada automata–definicija



- važno je uočiti da se “interni” izlaz $y_A(n)$ koristi kao “interni” ulaz $u_B(n)$ u automat B
- da bi kaskadni spoj bio valjan mora biti

$$Izlazi_A \subset Ulazi_B$$



Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor

Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata

Kaskada automata – primjer

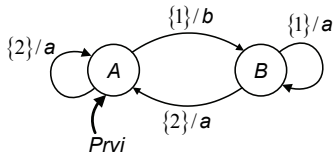
- zadani su automati *Prvi* i *Drugi* koje spajamo u kaskadu tako da je izlaz iz automata *Prvi* ulaz u automat *Drugi*

$Stanja_{Prvi} = \{A, B\}$

$Ulazi_{Prvi} = \{1, 2, odsutan\}$

$Izlazi_{Prvi} = \{a, b, odsutan\}$

$pocetnoStanje_{Prvi} = A$

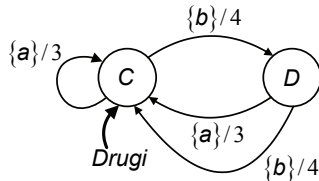


$Stanja_{Drugi} = \{C, D\}$

$Ulazi_{Drugi} = \{a, b, odsutan\}$

$Izlazi_{Drugi} = \{3, 4, odsutan\}$

$pocetnoStanje_{Drugi} = C$





Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata

Kaskada automata – primjer

- za dva automata spojena u kaskadu može se nacrtati jedinstveni dijagram stanja, a postupak je kako slijedi:
 - 1 nacrtaj krugove za svako stanje u $Stanja_{Prvi} \times Stanja_{Drugi}$
 - 2 za svako stanje razmotri svaki mogući ulaz u automat $Prvi$
 - a) odredi odgovarajuće naredno stanje automata $Prvi$
 - b) odredi izlaz automata $Prvi$ koji tvori ulaz u automat $Drugi$
 - c) odredi odgovarajuće naredno stanje automata $Drugi$
 - d) odredi izlaz automata $Drugi$
 - e) ucrtaj prijelaznu strelicu u $(x_{Prvi}(n+1), x_{Drugi}(n+1))$
 - f) označi prijelaznu strelicu s ulazom u automat $Prvi$ i izlazom iz automata $Drugi$



Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

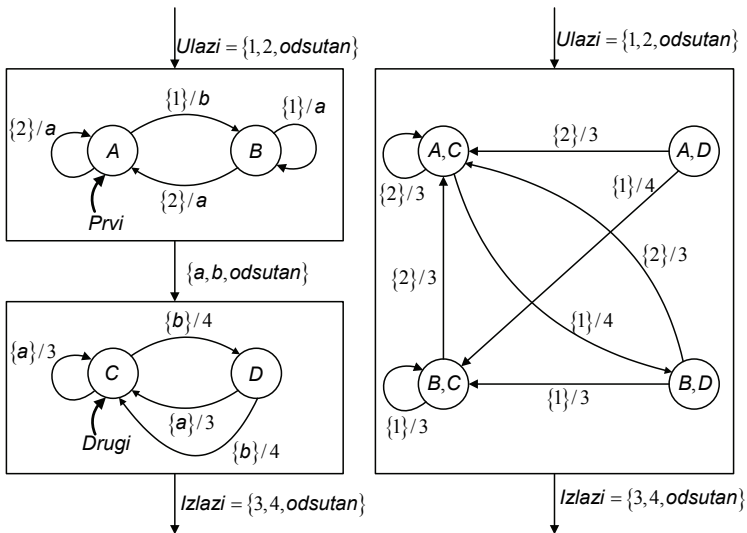
Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata

Kaskada automata – primjer



Slika 2: Kaskada automata – primjer



Kaskada automata – primjer

Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

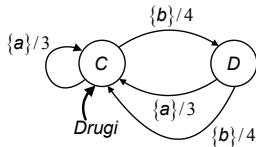
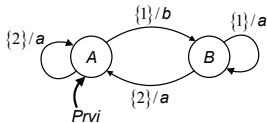
Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata



| | $(narednoStanje_{Prvi}, izlaz_{Prvi})$ | | |
|---|--|----------|----------------|
| | 1 | 2 | odsutan |
| A | (B, b) | (A, a) | $(A, odsutan)$ |
| B | (B, a) | (A, a) | $(B, odsutan)$ |

| | $(narednoStanje_{Drugi}, izlaz_{Drugi})$ | | |
|---|--|----------|----------------|
| | a | b | odsutan |
| C | $(C, 3)$ | $(D, 4)$ | $(C, odsutan)$ |
| D | $(C, 3)$ | $(C, 4)$ | $(D, odsutan)$ |

| | $(narednoStanje, izlaz)$ | | |
|----------|--------------------------|---------------|---------------------|
| | 1 | 2 | odsutan |
| (A, C) | $((B, D), 4)$ | $((A, C), 3)$ | $((A, C), odsutan)$ |
| (A, D) | $((B, C), 4)$ | $((A, C), 3)$ | $((A, D), odsutan)$ |
| (B, C) | $((B, C), 3)$ | $((A, C), 3)$ | $((B, C), odsutan)$ |
| (B, D) | $((B, C), 3)$ | $((A, C), 3)$ | $((B, D), odsutan)$ |



Kaskada automata – primjer

Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

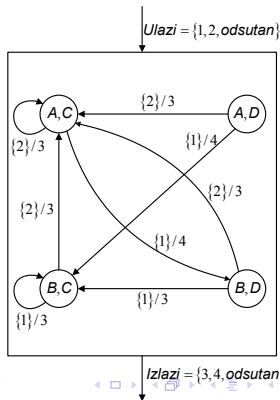
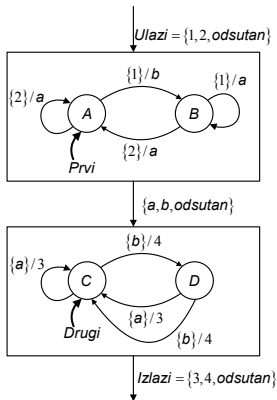
Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata

| | (narednoStanje, izlaz) | | |
|----------|------------------------|---------------|---------------------|
| | 1 | 2 | odsutan |
| (A, C) | $((B, D), 4)$ | $((A, C), 3)$ | $((A, C), odsutan)$ |
| (A, D) | $((B, C), 4)$ | $((A, C), 3)$ | $((A, D), odsutan)$ |
| (B, C) | $((B, C), 3)$ | $((A, C), 3)$ | $((B, C), odsutan)$ |
| (B, D) | $((B, C), 3)$ | $((A, C), 3)$ | $((B, D), odsutan)$ |





Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Kaskada
automata

Povratna veza
automata

Kaskada automata – primjer

- iz prethodne tablice ili iz dijagrama stanja je vidljivo kako stanje (A, D) nije upravljivo ili dostupno iz početnog stanja
- stanje se naziva neupravljivim ili nedostupnim ako se nekim nizom ulaznih znakova početno stanje ne može prevesti u to stanje



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem
Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza 1

- razmatramo slaganje sinkronih modela automata u povratnu vezu
- elementarni spoj automata u povratnoj vezi je spoj u kojem je izlaz iz automata ujedno i ulaz u isti automat
- kod sinkronih automata izlazni znak je istodoban s ulaznim znakom, pa će izlazni znak automata u povratnoj vezi ovisiti o ulaznom znaku koji opet ovisi o svom vlastitom izlaznom znaku
- ovaj spoj nije uvijek ostvariv i razmatraju se “dobro” i “loše” formirani automati



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

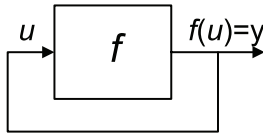
Povratna veza

Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem
Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza 2

- problem definicije “dobro” i “loše” formiranih sinkronih automata sličan je problemu povratne veze kod bezmemorijskih sustava
- ovdje se razmatra bezmemorijski sustav spojen u povratnu vezu kao na slici



Slika 4: Povratna veza bezmemorijskog sustava

- za koji vrijedi

$$y = f(u) \quad \& \quad u = y \quad \Rightarrow \quad u = f(u)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza

Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza 3

- analiziraju se tri slučaja:

① neka je $f_1(u) = 0.5u^2 + 0.5$

tada iz $u = f(u)$

slijedi da postoji rješenje samo za $u = 1$

② za $f_2(u) = 0.5u^2 - 0.5$

iz $u = f(u)$

proizlazi kako postoje dva rješenja $u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$

③ a za $f_3(u) = 0.5u^2 + 1$

ne postoje realna rješenja i povratna veza je moguća samo

za $u_{1,2} = 1 \pm j$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

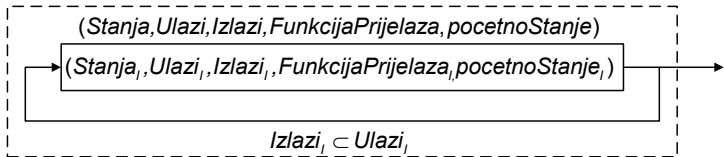
Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem
Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza automata bez ulaza 1



Slika 5: Povratna veza automata bez ulaza

- razmatramo spoj u kojem je izlaz automata I spojen na njegov ulaz
- želimo odrediti složeni automat, automat bez ulaza, označen petorkom
 $(Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, pocetnoStanje)$
- on se ne uklapa u do sada definirani model automata koji pretpostavlja postojanje ulaza na koje automat djeluje (reagira)



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

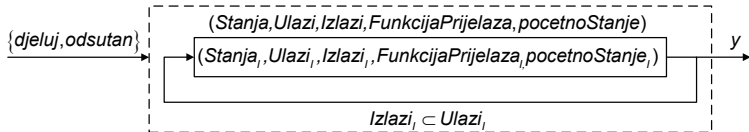
Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem
Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza automata bez ulaza 2

- uvodi se nadomjesni ulazni znak, *djeluj*, pa je ulazni alfabet

$$Ulazi = \{djeluj, odsutan\}$$



Slika 6: Povratna veza automata bez ulaza

- ulazni znak *djeluj* interpretiramo kao nalog unutarnjem automatu za djelovanje



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem
Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza automata bez ulaza 3

- zadatak je naći $y(n)$ koji je ujedno i ulazni znak
- za $x(n) \in Stanja_I$ i $y(n) \in Izlazi_I$

$$(x(n+1), y(n)) = FunkcijaPrijelaza_I(x(n), y(n))$$

- pogodno je funkciju *FunkcijaPrijelaza* razložiti u dvije funkcije
 - funkciju narednog stanja

$$narednoStanje_I : Stanja_I \times Ulazi_I \rightarrow Stanja_I$$

- i izlaznu funkciju

$$izlazi_I : Stanja_I \times Ulazi_I \rightarrow Izlazi_I$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza automata bez ulaza 4

- pa za automat vrijede jednačbe

$$y(n) = \text{izlaz}_I(x(n), y(n))$$

$$x(n+1) = \text{narednoStanje}_I(x(n), y(n))$$

- u izlaznoj jednačbi poznato je $x(n)$, pa je izlazna jednačba oblika $y = f(y)$ i nema bezuvjetno jedinstveno rješenje
- suglasno tomu definiraju se “dobro” i “loše” formirani automati
 - automat je dobro formiran ako za svako dostupno stanje $x(n) \in \text{Stanja}_I$ postoji izlazni znak $y(n)$ koji je rješenje izlazne jednačbe
 - inače je automat “loše” formiran



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza - “dobro” formirani automati

- za dobro-formirani automat vrijedi

$$\text{Stanja} = \text{Stanja}_I$$

$$\text{Ulazi} = \{\text{djeluj}, \text{odsutan}\}$$

$$\text{Izlazi} = \text{Izlazi}_I$$

$$\text{pocetnoStanje} = \text{pocetnoStanje}_I$$

$$\text{FunkcijaPrijelaza}(x(n), u(n)) =$$

$$= \begin{cases} \text{FunkcijaPrijelaza}_I(x(n), y(n)), \\ \text{gdje je } y(n) \text{ jedinstveno rješenje} & \text{za } u(n) = \text{djeluj} \\ (x(n), y(n)), & \text{za } u(n) = \text{odsutan} \end{cases}$$



Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i simulacija automata

Slaganje automata

Povratna veza automata

Povratna veza
Povratna veza automata bez ulaza

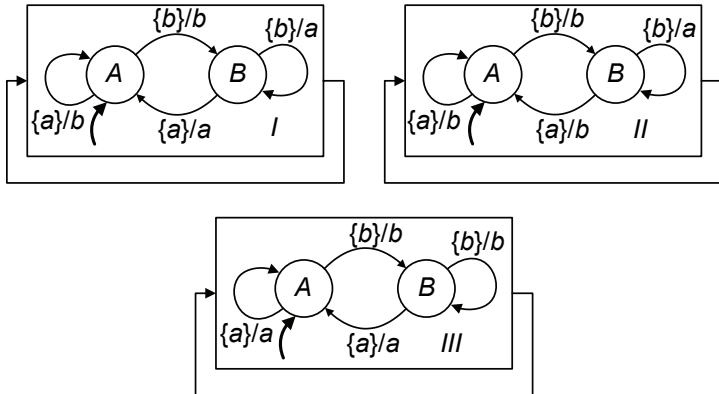
Dobro i loše formirani automati

Automati za koje je izlaz određen stanjem

Povratna veza—automati s ulazom

Primjeri dobro i loše formiranih automata

- automati I, II i III primjeri su slaganja automata u povratnu vezu



Slika 7: Primjeri dobro i loše formiranih automata



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

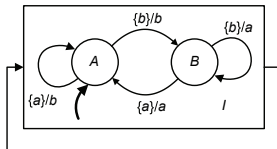
Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Primjer dobro formiranog automata 1



Slika 8: Primjer dobro formiranog automata

- automat je opisan s

$$\text{Stanja} = \text{Stanja}_I = \{A, B\}$$

$$\text{Ulazi} = \{\text{djeluj}, \text{odsutan}\}$$

$$\text{Izlazi} = \text{Izlazi}_I = \{a, b, \text{odsutan}\}$$

$$\text{pocetnoStanje} = \text{pocetnoStanje}_I = x(0) = A$$

slijede jednačbe

$$y(n) = \text{izlaz}(x(n), u(n)) = \text{izlaz}_I(x(n), y(n))$$

$$x(n+1) = \text{narednoStanje}(x(n), u(n)) = \text{narednoStanje}_I(x(n), y(n))$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

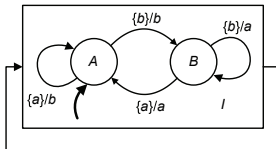
Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Primjer dobro formiranog automata 2



Slika 9: Primjer dobro formiranog automata

$$pocetnoStanje = pocetnoStanje_I = x(0) = A$$

za $n = 0, 1, 2, \dots$ slijede jednađžbe

$$\begin{aligned} y(0) &= izlaz(x(0), u(0)) = izlaz_I(x(0), y(0)) = \\ &= izlaz_I(A, b) = b \Rightarrow \text{jedinstveno } y(0) = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(1) &= narednoStanje(x(0), u(0)) = narednoStanje_I(x(0), y(0)) = \\ &= narednoStanje_I(A, b) = B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1) &= izlaz(x(1), u(1)) = izlaz_I(x(1), y(1)) = \\ &= izlaz_I(B, a) = a \Rightarrow \text{jedinstveno } y(1) = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(2) &= narednoStanje(x(1), u(1)) = narednoStanje_I(x(1), y(1)) = \\ &= narednoStanje_I(B, a) = A \end{aligned}$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

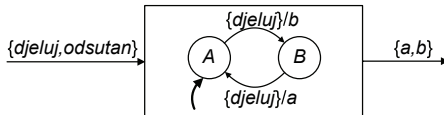
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem
Povratna
veza—automati
s ulazom

Primjer dobro formiranog automata 3

- primjer dobro formiranog automata s povratnom vezom mijenja svoja stanja na svaki znak *djeluj*

| | |
|-------------|--|
| ulazni niz | (<i>djeluj</i> , <i>djeluj</i> , <i>djeluj</i> , <i>djeluj</i> , <i>djeluj</i> , ...) |
| stanja | (<i>A</i> , <i>B</i> , <i>A</i> , <i>B</i> , <i>A</i> , ...) |
| izlazni niz | (<i>b</i> , <i>a</i> , <i>b</i> , <i>a</i> , <i>b</i> , ...) |

- tako formirani automat je



Slika 10: Primjer dobro formiranog automata s povratnom vezom



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

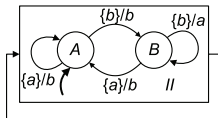
Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Primjer loše formiranog automata 1



Slika 11: Primjer loše formiranog automata

- automat je opisan s

$$\text{Stanja} = \text{Stanja}_{II} = \{A, B\}$$

$$\text{Ulazi} = \{\text{djeluj}, \text{odsutan}\}$$

$$\text{Izlazi} = \text{Izlazi}_{II} = \{a, b, \text{odsutan}\}$$

$$\text{pocetnoStanje} = \text{pocetnoStanje}_{II} = x(0) = A$$

slijede jednadžbe

$$y(n) = \text{izlaz}(x(n), u(n)) = \text{izlaz}_{II}(x(n), y(n))$$

$$x(n+1) = \text{narednoStanje}(x(n), u(n)) = \text{narednoStanje}_{II}(x(n), y(n))$$



Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

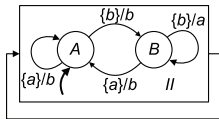
Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Primjer loše formiranog automata 2



Slika 12: Primjer loše formiranog automata

$pocetnoStanje = pocetnoStanje_{II} = x(0) = A$

za $n = 0, 1, 2, \dots$ slijede jednađžbe

$y(0) = izlaz(x(0), u(0)) = izlaz_{II}(x(0), y(0)) =$

$= izlaz_{II}(A, b) = b \Rightarrow$ jedinstveno $y(0) = b$

$x(1) = narednoStanje(x(0), u(0)) = narednoStanje_{II}(x(0), y(0)) =$

$= narednoStanje_{II}(A, b) = B$

$y(1) = izlaz(x(1), u(1)) = izlaz_{II}(B, y(1))$

- ne postoji rješenje jednađžbe $izlaz_{II}(B, y(1)) = y(1)$ i ovako formiran automat je “loše” formiran automat



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

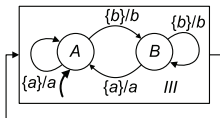
Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Primjer loše formiranog automata 3



Slika 13: Primjer loše formiranog automata

- automat je opisan s

$Stanja = Stanja_{III} = \{A, B\}$

$Ulazi = \{djeluj, odsutan\}$

$Izlazi = Izlazi_{III} = \{a, b, odsutan\}$

$pocetnoStanje = pocetnoStanje_{III} = x(0) = A$

slijede jednadžbe

$y(n) = izlaz(x(n), u(n)) = izlaz_{III}(x(n), y(n))$

$x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n)) = narednoStanje_{III}(x(n), y(n))$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

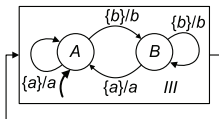
Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Primjer loše formiranog automata 4



Slika 14: Primjer loše formiranog automata

$pocetnoStanje = pocetnoStanje_{III} = x(0) = A$

za $n = 0, 1, 2, \dots$ slijede jednađžbe

$$\begin{aligned} y(0) &= izlaz(x(0), u(0)) = izlaz_{III}(x(0), y(0)) = \\ &= izlaz_{III}(A, b) = b \Rightarrow y_1(0) = b \end{aligned}$$

ali i izlazna jednađžba

$$izlaz_{III}(A, a) = a \Rightarrow y_2(0) = a$$

- pa postoji dva rješenja jednađžbe $izlaz_{III}(A, y(0)) = y(0)$ i ovako formiran automat je također “loše” formiran automat



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

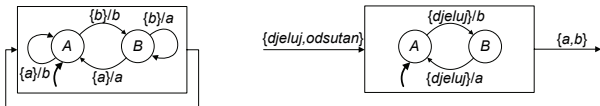
Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Automati za koje je izlaz određen stanjem 1



Slika 15: Automat-izlaz određen stanjem

- primjer dobro formiranog automata je i primjer automata za koji vrijedi da je izlaz određen stanjem
- vrijedi, $y(n) = b$ za $x(n) = A$ i $y(n) = a$ za $x(n) = B$
- kažemo da je za automat I izlaz određen stanjem, ako za svako dostupno stanje $x(n) \in Stanja_I$ postoji jedinstveni izlazni znak $y(n) = d$, koji ne ovisi o bilo kojem ulaznom znaku $u(n) \neq odsutan$, dakle

$$izlaz_I(x(n), u(n)) = d$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Automati za koje je izlaz određen stanjem 2

- za automate za koje je izlaz određen stanjem, automat koji nastaje spajanjem izlaza na ulaz definiramo kao:

$$Stanja = Stanja_I$$

$$Ulazi = \{djeluj, odsutan\}$$

$$Izlazi = Izlazi_I$$

$$pocetnoStanje = pocetnoStanje_I$$

$$FunkcijaPrijelaza(x(n), u(n)) =$$

$$= \begin{cases} FunkcijaPrijelaza_I(x(n), d), & \text{za } u(n) = djeluj \\ \text{gdje je } d \text{ jedinstveni izlazni znak u stanju } x(n) \\ (x(n), y(n)), & \text{za } u(n) = odsutan \end{cases}$$



Signali i sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

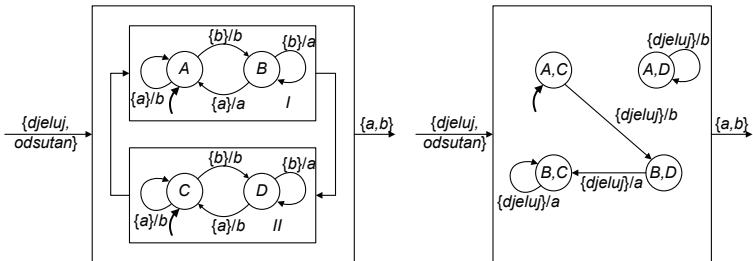
Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Automati za koje je izlaz određen stanjem 3

- ako se automat s izlazom određenim stanjem kombinira s bilo kojim drugim automatom u spoj s povratnom vezom rezultirajući spoj može biti (ne uvijek) dobro—formiran
- primjer: kombinacija automata I i II iz prethodnih primjera
- automat I ima izlaz određen stanjem, a automat II ne
- ukupna kombinacija je dobro-formirana



Slika 16: Automat-izlaz određen stanjem



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza—automati s ulazom 2

- ulazi i izlazi automata I su oblika

$$Ulazi_I = Ulazi_{I_1} \times Ulazi_{I_2}$$

$$Izlazi_I = Izlazi_{I_1} \times Izlazi_{I_2}$$

- izlazna funkcija od I je

$$izlaz_I : Stanja_I \times Ulazi_I \rightarrow Izlazi_I$$

- odnosno

$$izlaz_I = (izlaz_{I_1}, izlaz_{I_2})$$

gdje

$$izlaz_{I_1} : Stanja_I \times Ulazi_I \rightarrow Izlazi_{I_1}$$

$$izlaz_{I_2} : Stanja_I \times Ulazi_I \rightarrow Izlazi_{I_2}$$

daju izlazni znak na prvom odnosno drugom izlazu



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza—automati s ulazom 3

- neka su za automat I u n -tom koraku $x(n) \in Stanja_I$ i trenutni vanjski znak $u_1(n) \in Ulazi_{I1}$
- treba odrediti “nepoznati” izlazni znak

$$(y_1(n), y_2(n)) \in Izlazi_I$$

tako da vrijedi

$$izlazi_I(x(n), (u_1(n), y_2(n))) = (y_1(n), y_2(n))$$

- znak $y_2(n)$ se pojavljuje na obje strane, jer je drugi ulaz $u_2(n)$ u automat jednak $y_2(n)$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza—automati s ulazom 4

- izlaznu jednadžbu možemo pisati

$$izlaz_{I1}(x(n), (u_1(n), y_2(n))) = y_1(n)$$

$$izlaz_{I2}(x(n), (u_1(n), y_2(n))) = y_2(n)$$

u ovim jednadžbama $x(n)$ i $u_1(n)$ su poznati, a $y_1(n)$ i $y_2(n)$ su nepoznati

- druga jednadžba ukazuje da će jedinstveno rješenje biti moguće samo za **dobro—formirane** automate



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

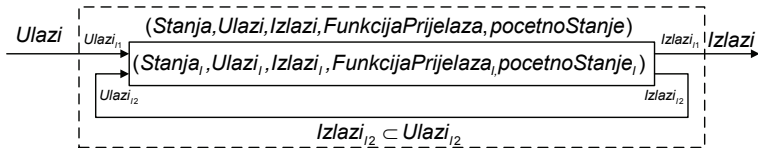
Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
odreden stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza—automati s ulazom 5



- razmatrani (prikazani) automat, definiramo kao

$$Stanja = Stanja_1$$

$$Ulazi = Ulazi_{i1}$$

$$Izlazi = Izlazi_{i1}$$

$$pocetnoStanje = pocetnoStanje_1$$

$$FunkcijaPrijelaza(x(n), u(n)) = (narednoStanje(x(n), u(n)), izlaz(x(n), u(n)))$$

$$narednoStanje(x(n), u(n)) = narednoStanje_1(x(n), (u(n), y_2(n))); \text{ i}$$

$$izlaz(x(n), u(n)) = izlaz_{i1}(x(n), (u(n), y_2(n))),$$

gdje je $y_2(n)$ jedinstveno rješenje jednadžbe

$$izlaz_{i2}(x(n), (u_1(n), y_2(n))) = y_2(n)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

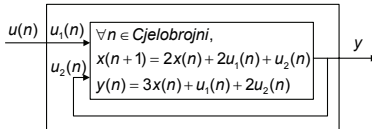
Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza—automati s ulazom—primjer



Slika 18: Automat s ulazom—primjer

- automat I ima dva ulaza i jedan izlaz pri čemu su

$$Ulazi_I = \text{Realni} \times \text{Realni}, \quad Izlazi_I = \text{Realni}, \quad Stanja_I = \text{Realni}$$

- automat ima beskonačni ulazni i izlazni alfabet i beskonačno mnogo stanja
- u n -tom koraku par ulaznih znakova je $(u_1(n), u_2(n))$, trenutno i naredno stanje su $x(n)$ i $x(n+1)$, a $y(n)$ je izlazni znak



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza—automati s ulazom—primjer

- funkcija prijelaza je

$$\begin{aligned}(x(n+1), y(n)) &= \text{FunkcijaPrijelaza}_I(x(n), (u_1(n), u_2(n))) = \\ &= ((2x(n) + 2u_1(n) + u_2(n)), (3x(n) + u_1(n) + 2u_2(n)))\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}x(n+1) &= \text{narednoStanje}_I(x(n), (u_1(n), u_2(n))) \\ &= 2x(n) + 2u_1(n) + u_2(n) \\ y(n) &= \text{izlaz}_I(x(n), (u_1(n), u_2(n))) \\ &= 3x(n) + u_1(n) + 2u_2(n)\end{aligned}$$

- povratna veza povezuje izlaz i drugi ulaz automata I ,
dakle, $u_2(n) = y(n)$, pa je

$$\text{izlaz}_I(x(n), (u_1(n), y(n))) = y(n)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati

Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza—automati s ulazom—primjer

- kako je $u_1(n) = u(n)$, vrijedi

$$\begin{aligned} \text{izlaz}_I(x(n), (u_1(n), u_2(n))) &= \text{izlaz}_I(x(n), (u(n), y(n))) = y(n) \\ 3x(n) + u_1(n) + 2u_2(n) &= 3x(n) + u(n) + 2y(n) = y(n) \Rightarrow \\ y(n) &= -3x(n) - u(n) \end{aligned}$$

- pa je izlazna jednačba

$$y(n) = -3x(n) - u(n)$$

- narednoStanje je tada

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \text{narednoStanje}_I(x(n), (u_1(n), u_2(n))) \\ &= 2x(n) + 2u_1(n) + u_2(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 2x(n) + 2u(n) + y(n) \\ &= 2x(n) + 2u(n) - 3x(n) - u(n) \end{aligned}$$

$$x(n+1) = -x(n) + u(n)$$



Signali i
sustavi

školska godina
2006/2007
Predavanje 7

Profesor
Branko Jeren

Ekvivalencija i
simulacija
automata

Slaganje
automata

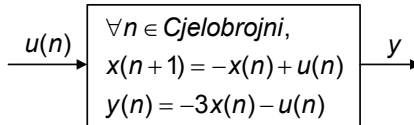
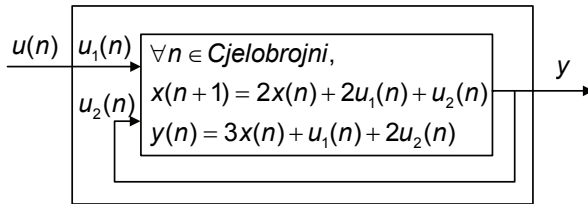
Povratna veza
automata

Povratna veza
Povratna veza
automata bez
ulaza

Dobro i loše
formirani
automati
Automati za
koje je izlaz
određen stanjem

Povratna
veza—automati
s ulazom

Povratna veza—automati s ulazom—primjer



Slika 19: Automat s ulazom—primjer