Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

II. tjedan

Periodičnost signala

1. Koji su od sljedećih kontinuiranih signala periodički? Za one koji jesu, izračunajte temeljni (osnovni) period.
   a. $\cos^2(t)$,
   b. $\cos(2\pi t)\mu(t)$,
   c. $e^{j\pi t}$,
   d. $\cos(t^2)$,
   e. $e^{j\omega_0 t}$.

2. Jesu li sljedeći diskretni signali periodički? Ako jesu, izračunajte osnovni period.
   a. $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$,
   b. $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$,
   c. $\cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$.

Energija signala

3. Izračunajte totalnu energiju sljedećih kontinuiranih signala:
   a. $x(t) = e^{-at}\mu(t),\ a > 0$,
   b. $x(t) = t\mu(t)$.

4. Nađite totalnu energiju sljedećih diskretnih signala:
   a. $x(n) = (-0.5)^n \mu(n)$,
   b. $x(n) = n\big(\mu(n) - \mu(n-5)\big)$.

Snaga signala

5. Izračunajte totalnu snagu kontinuiranog signala

$$x(t) = e^{j2\pi t} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

6. Nađite totalnu snagu diskretnih signala:
   a. $x(n) = \mu(n)$,
   b. $x(n) = 2e^{j3n}$.

Produkt signala

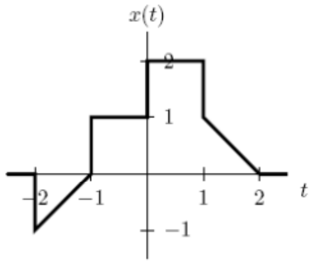
7. Dani su signali *x(t)* i *y(t)*. Skicirajte produkt ova dva signala na intervalu $t \in [-2,2]$.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{u slučaju ako je } \sin(4\pi t) \geq 0, \\ -1, & \text{u slučaju ako je } \sin(4\pi t) < 0, \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} t, & \text{u slučaju ako je } \sin(\pi t) \geq 0, \\ -t, & \text{u slučaju ako je } \sin(\pi t) < 0. \end{cases}$$

Pomak, inverzija, ekspanzija signala, kauzalnost

8. Zadan je kontinuirani signal prikazan slikom.



Odredite:

a. $2x(3-\frac{t}{2})+1$,

b. $x(t-1)\left[\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)\right]$.

c. Da li je zadani signal *x(t)* kauzalan, antikauzalan ili nekauzalan?

Parnost signala

9. Nađite parni i neparni dio sljedećih kontinuiranih signala:

a. $x(t) = 2t^2 - 3t + 6$,

b. $x(t) = \dfrac{2-t}{1+t}$.

10. Nađite parni i neparni dio diskretnog signala $x(n) = \delta(n)$.

11. Dokažite da je produkt dva parna (dva neparna) signala paran signal, a produkt parnog i neparnog signala neparan signal.

Napomena:

Vremenski diskretan jedinični skok μ definiran je kao

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \mu(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Vremenski kontinuiran jedinični skok μ definiran je kao

$$\forall t \in Realni, \quad \mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Vremenski diskretan jedinični impuls δ definiran je kao

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Vremenski kontinuiran jedinični impuls δ definiran je kao

$$\forall t \in Realni, \quad \begin{cases} \delta(t) = 0 \ \text{ za } t \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \end{cases}$$

1. Koji su od sljedećih kontinuiranih signala periodički? Za one koji jesu, izračunajte temeljni period.
    a. $\cos^2(t)$,
    b. $\cos(2\pi t)\mu(t)$,
    c. $e^{j\pi t}$,
    d. $\cos(t^2)$,
    e. $e^{j\omega_0 t}$.

Rješenje:

Kontinuirani signal je periodičan ako za njega vrijedi $x(t) = x(t+T)$, gdje je T period, uz $\forall t \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R}_+$.

a. Za $\cos^2(t)$ vrijedi trigonometrijska relacija
$$x(t) = \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} = x_1(t) + x_2(t).$$
Prvi dio signala $x_1(t) = \frac{1}{2}$ je konstanta koja se kontinuirano ponavlja.
Za drugi dio signala tražimo period prema definiciji
$$x(t+T) = \cos\big(2(t+T)\big) = \cos(2t+2T) = \cos 2t \cos 2T - \sin 2t \sin 2T,$$
što mora biti jednako $x(t) = \cos 2t$. Prema tome mora biti $\cos 2T = 1, \sin 2T = 0$. Rješenja ovih jednadžbi su $2T = 2k\pi, k\epsilon\mathbb{N}$, pa je period ovog dijela zadanog signala $T = k\pi$. Osnovni period se dobije za minimalni *k*, tj. *k=1*, pa je $T = \pi$.
Ukupno period zadanog signala je $T = \pi$.

b. $x(t) = \cos(2\pi t)\,\mu(t)$. Kako je $\mu(t)$ funkcija koja je definirana kao nula za $t < 0$ i jedan za $t \geq 0$, umnožak stepa i kosinusa će biti nula prije nule i kosinus poslije nule. Da bi funkcija bila periodična mora se ponavljati u obje strane vremena. Kako to ovdje nije slučaj, zadani signal nije periodičan.

c. $x(t) = e^{j\pi t}$. Period ćemo tražiti prema definiciji.
$$x(t+T) = e^{j\pi(t+T)} = e^{j\pi t}e^{j\pi T},$$
što mora biti jednako $x(t) = e^{j\pi t}$. Iz toga izlazi da $e^{j\pi T} = 1$.
U trigonometrijskom obliku ovo je $\cos \pi T + j \sin \pi T = 1$. Rješenje ove jednadžbe daje $\pi T = 2k\pi, T = 2k$.
Osnovni period je zato *T=2*.

d. $x(t) = \cos(t^2)$. Ponovno krećemo prema definiciji:
$$x(t+T) = \cos((t+T)^2) = \cos(t^2 + 2tT + T^2) = x(t) = \cos(t^2)$$
Rješavanjem ove jednadžbe izlazi $2tT + T^2 = 2k\pi$, tj. $\frac{2tT+T^2}{2\pi} = k, k\epsilon\mathbb{N}$. Kako period mora biti konstantan realan broj, nije moguće takvoga naći da zadovoljava ovu jednadžbu. Ova funkcija nije periodična.

e. $x(t) = e^{j\omega_0 t}$. Krećemo slično kao u c. dijelu zadatka
$$x(t+T) = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t} = x(t),$$
odnosno $e^{j\omega_0 T} = 1$. Ovo je zadovoljeno za:
➔ $\omega_0 = 0$ (tada će biti $x(t) = 1$, pa je funkcija periodična za svaki $T \in \mathbb{R}_+$),
➔ $\omega_0 \neq 0$, kada je $\omega_0 T = 2k\pi$, pa je period $T = \frac{2k\pi}{\omega_0}$. Temeljni period je tada $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

2. Jesu li sljedeći diskretni signali periodički? Ako jesu, izračunajte temeljni period.
   a. $\cos\left(\pi n+\frac{\pi}{4}\right)$,
   b. $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$,
   c. $\cos\left(\frac{n}{3}+1\right)$.

Rješenje:
Diskretan signal je periodičan ako za njega vrijedi $x(n) = x(n+N)$, gdje je N period, uz $\forall n \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}$.

a. $x(n) = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$. Traženje perioda krenut ćemo prema definiciji:

$$x(n+N) = \cos\left(\pi(n+N) + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4} + \pi N\right)$$
$$= \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi N) - \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)\sin(\pi N)$$

što mora biti jednako $x(n) = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$. Da bi to bilo jednako mora vrijediti $\cos(\pi N) = 1$ i $\sin(\pi N) = 0$. Rješenje ovih jednadžbi je $\pi N = 2k\pi \rightarrow N = 2k$.
Temeljni period je *N=2*.

b. $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$. Prema definiciji umjesto *n* pišemo *n+N*:

$$x(n+N) = \cos\left(\frac{\pi(n+N)^2}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8} + \frac{2\pi n N}{8} + \frac{\pi N^2}{8}\right)$$

Kako bi ovo bilo periodično mora biti $\frac{2\pi n N + \pi N^2}{8} = 2k\pi$, odnosno $\frac{N}{8}\left(n + \frac{N}{2}\right) = k$. Kako *k* mora biti prirodan broj, a isto tako i *n* i *N*, sa lijeve strane ne smije biti razlomaka. Najmanji *N* za koji ćemo pokratiti razlomke je *N=8*, te je to i osnovni period zadanog signala.

c. $x(n) = \cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$. Traženje perioda krenut ćemo prema definiciji:

$$x(n+N) = \cos\left(\frac{1}{3}(n+N) + 1\right) = \cos\left(\frac{n}{3} + 1 + \frac{N}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)\cos\left(\frac{N}{3}\right) - \sin\left(\frac{n}{3} + 1\right)\sin\left(\frac{N}{3}\right)$$

što mora biti jednako $x(n) = \cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$. Da bi to bilo jednako mora vrijediti $\cos\left(\frac{N}{3}\right) = 1$ i $\sin\left(\frac{N}{3}\right) = 0$. Rješenje ovih jednadžbi je $\frac{N}{3} = 2k\pi \rightarrow N = 6k\pi$. Kako je *k* prirodni broj, *N* će uvijek biti realan. Kod diskretnih signala period ne smije biti realan (već samo prirodan broj), ova funkcija NIJE periodička.

NAPOMENA: U zadatku naravno ne mora uvijek biti zadan kosinus, mogu biti i druge funkcije, postupak je analogan.

3. Izračunajte energiju sljedećih kontinuiranih signala:
   a. $x(t) = e^{-at}\mu(t),\ a > 0$,
   b. $x(t) = t\mu(t)$.

Rješenje:

Totalna energija kontinuiranih signala računa se prema formuli $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$.

a. Uvrštavanjem u formulu imamo $E = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-at}\mu(t)|^2 dt$, $a>0$. Kada neki signal množimo sa stepom, signal se mijenja tako da prije nule ima vrijednost nula, dok od nule na dalje ima svoju pravu vrijednost. Integral za signal koji je nula je isto tako nula, pa se integral za energiju može pojednostaviti:

$$E = \int_{0}^{\infty} |e^{-at}|^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2at} dt = \left.\frac{e^{-2at}}{-2a}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

b. I u ovom primjeru je slično kao i u a. zadatku. Prema definiciji

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t\mu(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{0}^{\infty} = \infty$$

4. Nađite energiju sljedećih diskretnih signala:
   a. $x(n) = (-0.5)^n \mu(n)$,
   b. $x(n) = n\big(\mu(n) - \mu(n-5)\big)$.

Rješenje:

Totalna energija diskretnih signala računa se prema formuli $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$, $n \epsilon \mathbb{Z}$.

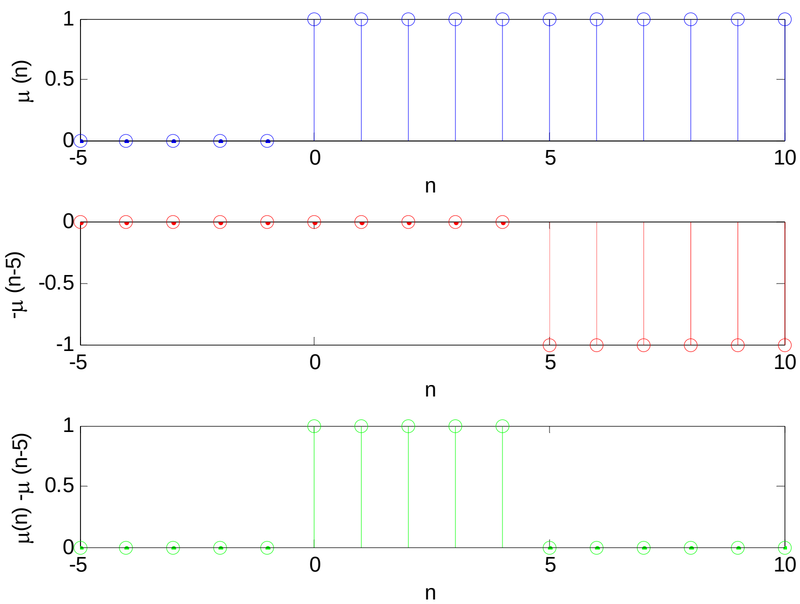
a. Uvrštavanjem u formulu imamo $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-0.5)^n \mu(n)|^2$. Kada neki signal množimo sa stepom signal se mijenja tako da prije nule ima vrijednost nula, dok od nule na dalje ima svoju pravu vrijednost. Suma za signal koji je nula je isto tako nula, pa se suma za energiju može pojednostaviti:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-0.5)^n \mu(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-0.5)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n$$

Ovako dobiveni red je geometrijski sa beskonačno članova. Njegova suma računa se prema $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Tražena energija je $E = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3}$.

b. Prije računanja energije promotrimo kako izgleda razlika jediničnih stepenica. Iz slike je vidljivo da je razlika ove dvije stepenice uvijek nula osim za *n=0, 1, 2, 3* i *4*. Pa se energija traži prema

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n(\mu(n) - \mu(n-5))|^2 = \sum_{n=0}^{4} n^2 = 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$



5. Izračunajte snagu kontinuiranog signala

$$x(t) = e^{j2\pi t}\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Rješenje:

Totalna snaga kontinuiranih signala računa se prema formuli

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| e^{j2\pi t}\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\right|^2 dt = \qquad \left|e^{j2\pi t}\right| = \left|\cos 2\pi t + j\sin 2\pi t\right| =$$

$$= \sqrt{\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t} = 1$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2\left(t + \frac{\pi}{3}\right) dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 - \cos 2\left(t + \frac{\pi}{3}\right)}{2} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos 2\left(t + \frac{\pi}{3}\right) dt \right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} + \frac{1}{4}\sin T \right] = \frac{1}{2}$$

6. Nađite snage diskretnih signala:

   a. $x(n) = \mu(n)$,

   b. $x(n) = 2e^{j3n}$.

Rješenje:

Totalna snaga diskretnih signala računa se prema formuli

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2, n\epsilon\mathbb{Z}$$

a. Uvrštavanjem u formulu imamo

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\mu(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(N+1) = \frac{1}{2}$$

b. Zadani signal je kompleksni pa na njega utječe apsolutna vrijednost

$$|x(n)| = \left|2e^{j3n}\right| = 2|\cos 3n + j\sin 3n| = 2\sqrt{\cos^2 3n + \sin^2 3n} = 2$$

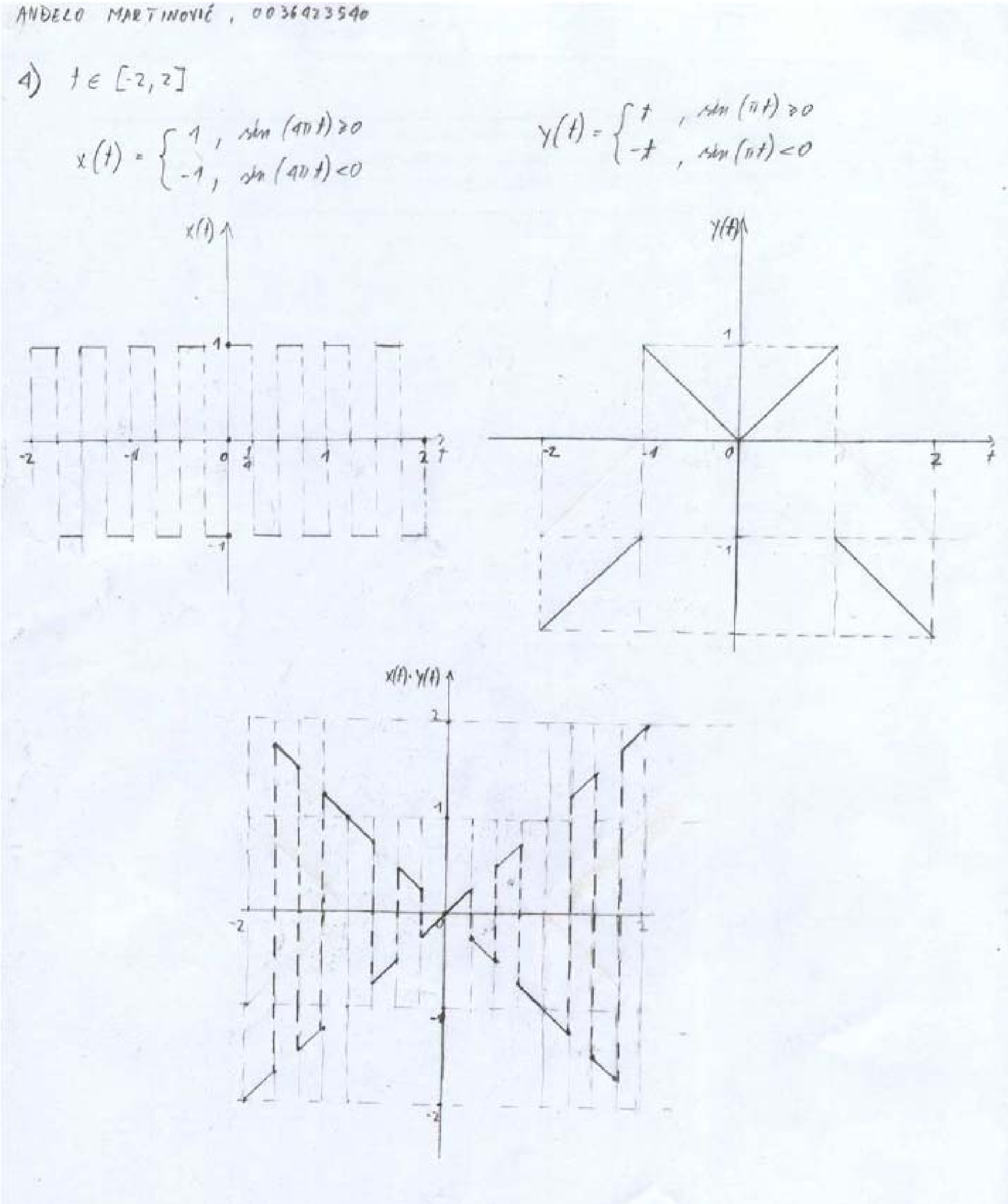
Snaga je sada

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 2^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(2N+1)\cdot 2^2 = 4$$

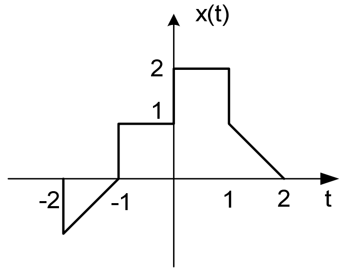
7. Dani su signali *x(t)* i *y(t)*. Skicirajte produkt ova dva signala na intervalu $t \in [-2,2]$.

$$x(t)=\begin{cases}1, & \sin(4\pi t)\geq 0,\\ -1, & \sin(4\pi t)<0.\end{cases} \qquad y(t)=\begin{cases}t, & \sin(\pi t)\geq 0,\\ -t, & \sin(\pi t)<0.\end{cases}$$

<u>Rješenje:</u>



8. Zadan je kontinuirani signal prikazan slikom.



Odredite:

c. $2x(3-\frac{t}{2})+1$,

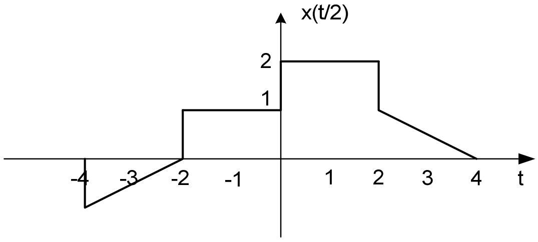
d. $x(t-1)\left[\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)\right]$.

e. Da li je zadani signal *x(t)* kauzalan, antikauzalan ili nekauzalan?

Rješenje:

a) Kako bi našli rješenje, zadani signal je potrebno vremenski ekspandirati, invertirati i vremenski pomaknuti, te zatim promijeniti amplitudu i pomaknuti po ordinati.

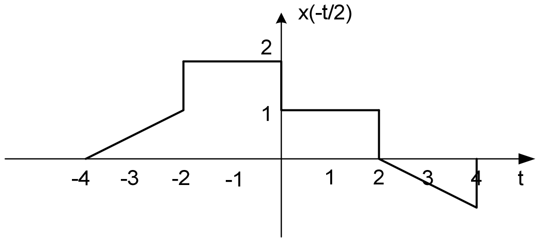
1. Ekspanzija signala $x\left(\frac{t}{2}\right)$:



signal se proširuje dva puta

Ovaj signal je nekauzalan.

2. Vremenska inverzija $x\left(-\frac{t}{2}\right)$:

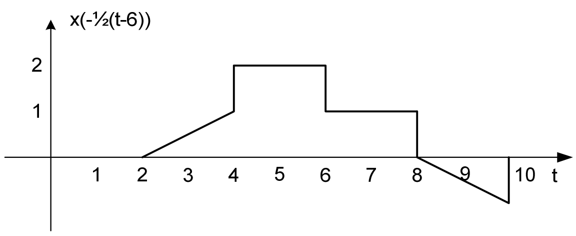


signal se zrcali oko ordinate

Ovaj signal je nekauzalan.

3. Vremenski pomak

$$x\left(3-\frac{t}{2}\right)=x\left(-\frac{1}{2}(t-6)\right)$$

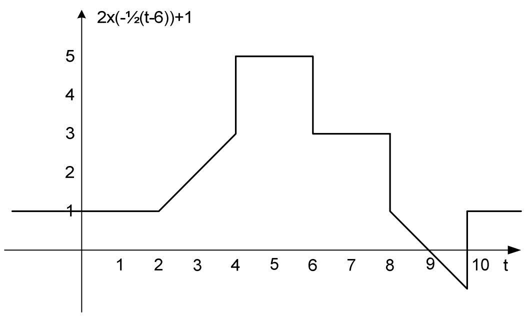


signal se pomiče za šest koraka u desno

Ovaj signal je kauzalan.

4. Množenje amplitude s 2 i dodavanje 1:

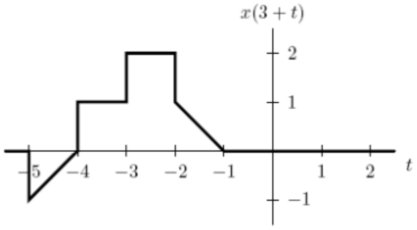
$$2x\left(-\frac{1}{2}(t-6)\right)+1$$



Ovaj signal je svevremenski.

Ili drugom metodom:

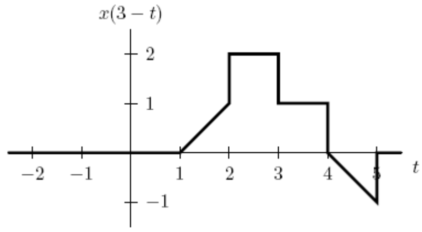
1. Vremenski pomak *x(3+t)*:



signal se pomiče za 3 koraka ulijevo

Ovaj signal je antikauzalan.

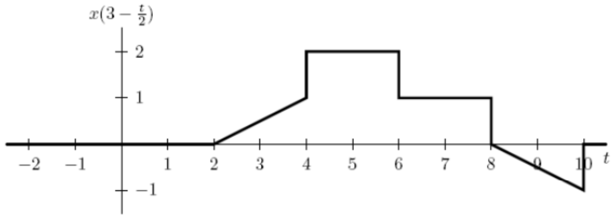
2. Vremenska inverzija *x(3-t)*:



signal se zrcali oko ordinate

Ovaj signal je kauzalan.

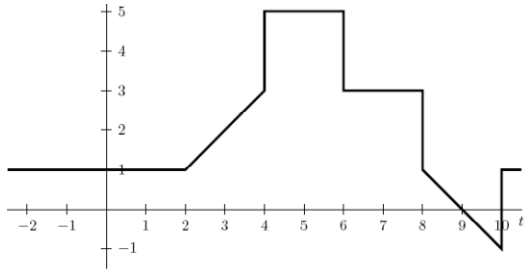
3. Ekspanzija *x(3-t/2)*:



signal se proširuje dva puta

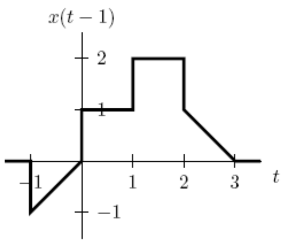
Ovaj signal je kauzalan.

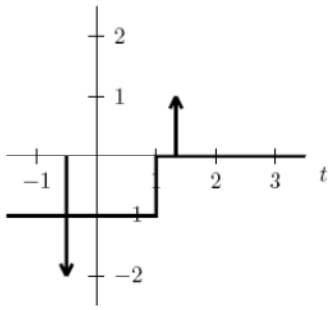
4. Množenje amplitude s 2 i dodavanje 1: $2x(3-\frac{t}{2})+1$



Ovaj signal je svevremenski.

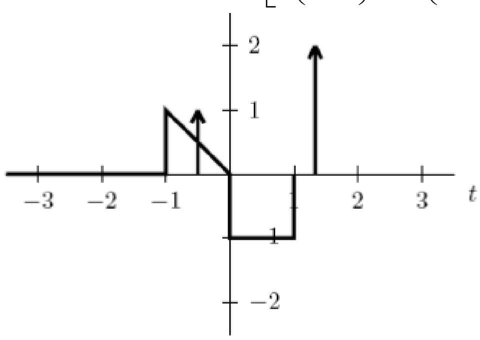
b) Traženi signal je umnožak 2 signala. Prvi signal je *x(t-1)* dobiven vremenskim pomakom zadanog *x(t)*. Ovakav signal je nekauzalan.





Drugi signal je zbroj 2 vremenski pomaknuta impulsa i vremenski pomaknute inverzne step funkcije $\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)$.

Ako se pomnože ova dva signala dobije se $x(t-1)\left[\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)\right]$:



Svi prikazani signali u b) dijelu zadatka su nekauzalni.

c) Početno zadani signal *x(t)* je nekauzalan signal.

9. Nađite parni i neparni dio sljedećih kontinuiranih signala:
   a. $x(t) = 2t^2 - 3t + 6$,
   b. $x(t) = \frac{2-t}{1+t}$.

Rješenje:

Svaki signal se može napisati kao zbroj parne i neparne komponente $x(t) = x_p(t) + x_n(t)$.
Za parni signal vrijedi $x_p(-t) = x_p(t)$.
Za neparni signal vrijedi $x_n(-t) = -x_n(t)$.
Parna komponenta se može izračunati prema $x_p(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$.
Neparna komponenta se može izračunati prema $x_n(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$.

a. Za zadani signal vrijedi $x(-t) = 2t^2 + 3t + 6$. Slijedi da je parna komponenta $x_p(t) = 2t^2 + 6$, a neparna $x_n(t) = -3t$.

b. Zadan je signal $x(t) = \frac{2-t}{1+t}$. Njegov vremenski inverz je $x(-t) = \frac{2+t}{1-t}$. I za ovaj signal parnu i neparnu komponentu tražimo preko formula:

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-t}{1+t} + \frac{2+t}{1-t}\right) = \frac{2t^2+4}{2(1-t^2)} = \frac{t^2+2}{1-t^2}$$
$$x_{pn}(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-t}{1+t} - \frac{2+t}{1-t}\right) = \frac{-6t}{2(1-t^2)} = \frac{-3t}{1-t^2}$$

10. Nađite parni i neparni dio sljedećeg diskretnog signala $x(n) = \delta(n)$.

Rješenje:

Svaki signal se može napisati kao zbroj parne i neparne komponente $x(n) = x_p(n) + x_n(n)$.
Za parni signal vrijedi $x_p(-n) = x_p(n)$.
Za neparni signal vrijedi $x_n(-n) = -x_n(n)$.
Parna komponenta se može izračunati prema $x_p(n) = \frac{1}{2}\big(x(n) + x(-n)\big)$.
Neparna komponenta se može izračunati prema $x_n(n) = \frac{1}{2}\big(x(n) - x(-n)\big)$.

Diskretna *δ(n)* funkcija je svugdje nula, osim u *t=0* kada ima vrijednost 1.
δ(-n) će također svugdje biti nula, osim u *t=0* kada će biti *1*, tj. *δ(-n)= δ(n).*
Prema tome ovaj signal je paran.

11. Dokažite da je produkt dva parna (dva neparna) signala paran signal, a produkt parnog i neparnog signala neparan signal.

Rješenje:

Svaki signal se može napisati kao zbroj parne i neparne komponente $x(t) = x_p(t) + x_n(t)$.
Za parni signal vrijedi $x_p(-t) = x_p(t)$.
Za neparni signal vrijedi $x_n(-t) = -x_n(t)$.
Parna komponenta se može izračunati prema $x_p(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$.
Neparna komponenta se može izračunati prema $x_n(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$.

Neka je $x(t) = x_1(t)x_2(t)$.

a. Ako su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ parni signali vrijedit će
$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

b. Ako su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ neparni signali vrijedit će
$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = (-x_1(t))\big(-x_2(t)\big) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

c. Ako je $x_1(t)$ paran i $x_2(t)$ neparan signal vrijedit će
$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)(-x_2(t)) = -x_1(t)x_2(t) = -x(t)$$