Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

21. travnja 2008.

Vremenski diskretni sustavi – model uzlaz-izlaz

- razmatraju se vremenski diskretni sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom, opisani s modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- vremenski diskretne sustave opisujemo jednadžbama diferencija

Vremenski diskretni sustavi – primjer

- razmatra se sustav za generiranja jeke (eho efekta) signala, koji se može opisati jednadžbom diferencija

$$y(n) = u(n) + \alpha y(n - N), \qquad n \in Cjelobrojni$$

neka su $N = 4$, $\alpha = 0.6$, $y(n) = 0$ za $n < 0$, i

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- jednadžba je, dakle,

$$y(n) = u(n) + 0.6y(n - 4), \qquad n \in Cjelobrojni$$

- odziv ovog sustava, za $n \in Cjelobrojni$, određuje se rješavanjem ove jednadžbe

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- jednadžbu $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$ rješavamo korak po korak
- iz jednadžbe je očigledno da za određivanje odziva, za $n \geq 0$, treba poznavati pobudu $u(n)$ za $n \geq 0$, i četiri prethodne vrijednosti odziva, $y(n-1)$, $y(n-2)$, $y(n-3)$, $y(n-4)$,
- odziv ovog sustava određujemo za $n \geq 0$, pa u izračunavanju $y(0)$ treba poznavati početne uvjete (interna stanja sustava) $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$, $y(-4)$,
- u ovom primjeru početni uvjeti neka su jednaki nuli

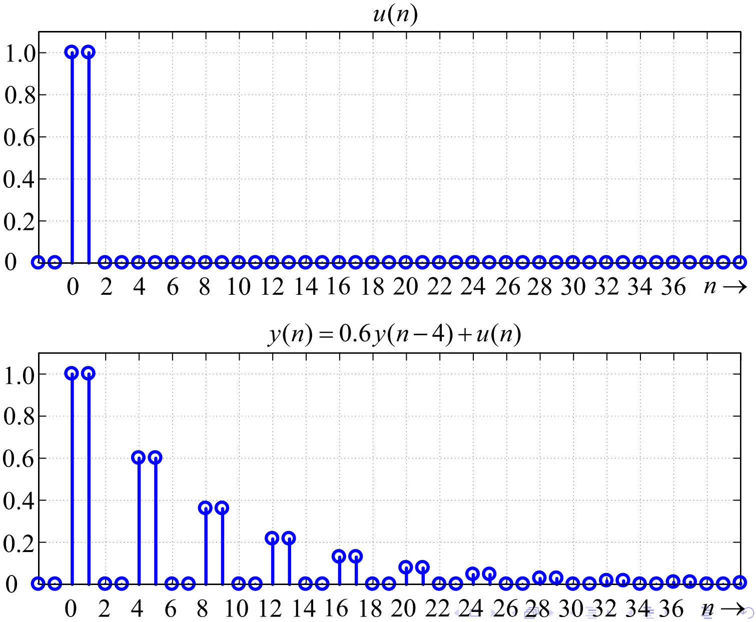
Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- jednadžbu $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$ rješavamo korak po korak, uz $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$ i

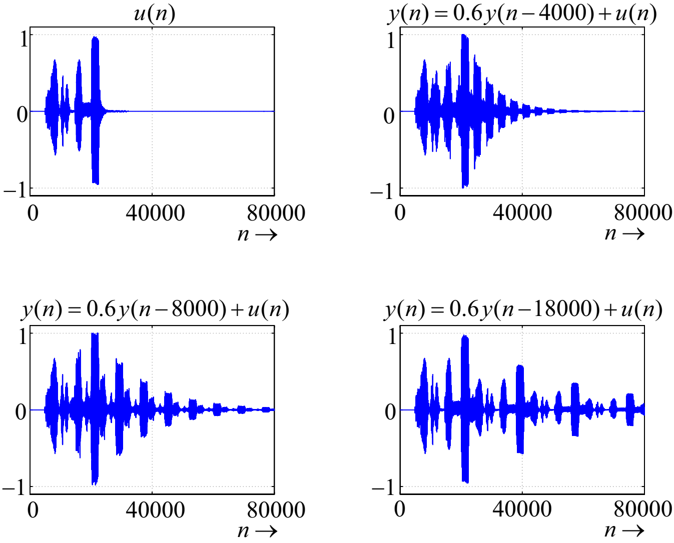
$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll}
n = 0 & y(0) = u(0) + 0.6y(-4) & = 1 + 0.6 \cdot 0 & = 1 \\
n = 1 & y(1) = u(1) + 0.6y(-3) & = 1 + 0.6 \cdot 0 & = 1 \\
n = 2 & y(2) = u(2) + 0.6y(-2) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 3 & y(3) = u(3) + 0.6y(-1) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 4 & y(4) = u(4) + 0.6y(0) & = 0 + 0.6 \cdot 1 & = 0.6 \\
n = 5 & y(5) = u(5) + 0.6y(1) & = 0 + 0.6 \cdot 1 & = 0.6 \\
n = 6 & y(6) = u(6) + 0.6y(2) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 7 & y(7) = u(7) + 0.6y(3) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 8 & y(8) = u(8) + 0.6y(4) & = 0 + 0.6 \cdot 0.6 & = 0.36 \\
n = 9 & y(9) = u(9) + 0.6y(5) & = 0 + 0.6 \cdot 0.6 & = 0.36
\end{array}$$

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija – primjer



Jeka govornog signala



Red sustava

- jednadžbu direfencija $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$, koja opisuje sustav za generaciju jeke, možemo pisati i kao

$$y(n)+0\cdot y(n-1)+0\cdot y(n-2)+0\cdot y(n-3)-0.6y(n-4) = u(n)$$

- dani sustav opisan je jednadžbom diferencija 4–tog reda
- red sustava odgovara redu jednadžbe diferencija
- vremenski diskretan sustav N–tog reda definiran je ulazno–izlaznom jednadžbom diferencija, za $N \geq M$,

$$y(n) = f(y(n-1), \ldots, y(n-N), u(n), u(n-1), \ldots, u(n-M), n)$$

- u najopćenitijem slučaju $N = M$

Linearan vremenski diskretan sustav N-tog reda

- linearan, vremenski stalan, vremenski diskretan sustav N–tog reda definiran je kao

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) =$$
$$= b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \ldots + b_{N-1} u(n-N+1) + b_N u(n-N)$$

  gdje su koeficijenti $\{a_j\}$ i $\{b_j\}$ realne konstante[1]

- gornju jednadžbu možemo zapisati i kao

$$\sum_{j=0}^{N} a_j y(n-j) = \sum_{j=0}^{N} b_j u(n-j), \quad \text{za } a_0 = 1, \quad \text{ili}$$

$$y(n) + \sum_{j=1}^{N} a_j y(n-j) = \sum_{j=0}^{N} b_j u(n-j)$$

[1] Ako je neki od koeficijenata funkcija vremena tada govorimo o vremenski varijantnom sustavu koje ne razmatramo u okviru ovog predmeta

Linearan vremenski diskretan sustav N-tog reda

- u literaturi se navodi i drugi oblik zapisa jedandžbe diferencija

$$y(n+N)+a_1 y(n+N-1)+\ldots+a_{N-1}y(n+1)+a_N y(n)=$$
$$=b_0 u(n+N)+b_1 u(n+N-1)+\ldots+b_{N-1}u(n+1)+b_N u(n)$$

- ovaj zapis se uglavnom koristi u matematičkoj literaturi i potupno je ekvivalentan s prije danim
- naime, supstitucijom $n=n'-N$, u gornjoj jedandžbi, dolazimo u polazni oblik jednadžbe diferencija za sustav N-tog reda
- ilustrirajmo tu ekvivalenciju na primjeru sustava drugog reda

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- razmatra se sustav drugog reda pobuđen s pobudom $u(n) = (0.5)^n \mu(n)$, dakle, pobuda započinje u $n = 0$
- razmotrimo tri jednadžbe diferencija koje opisuju isti sustav drugog reda

$$y(n+2) + 0.5y(n+1) + 0.06y(n) = u(n+1) \qquad (1)$$
$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = u(n-1) \qquad (2)$$
$$y(n+1) + 0.5y(n) + 0.06y(n-1) = u(n) \qquad (3)$$

- do jednadžbe 2 dolazimo pomakom jednadžbe 1 za dva koraka unazad, a do jednadžbe 3 pomakom za jedan korak unazad[2]
- sve tri jednadžbe daju identičan odziv ali samo onda ako su kroz njih korektno propagirani početni uvjeti

[2] Uočiti kako se i ovdje radi o jednadžbi diferencija drugog reda. I ovdje razlika najviše i najniže diferencije iznosi 2

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- za $n = 0$, jednadžba 1 prelazi u

$$y(2) + 0.5y(1) + 0.06y(0) = u(1)$$

  pa, uz poznati $u(1)$, $y(0)$ i $y(1)$ predstavljaju početne uvjete za izračun $y(2)$
- $y(0)$ i $y(1)$ su rezultat djelovanja pobude $u(n)$, za $n \geq 0$, i početnih uvjeta (internih stanja sustava) prije djelovanja pobude
- neka su $y(0) = 1$ i $y(1) = -1$
- slično
  - odziv sustava prema jednadžbi 2 je za $n \geq 0$ pa su potrebni početni uvjeti $y(-2)$ i $y(-1)$
  - odziv sustava prema jednadžbi 3 je za $n \geq 1$ pa su potrebni početni uvjeti $y(-1)$ i $y(0)$

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- neka su zadani početni uvjeti $y(0) = 1$ i $y(1) = -1$ koji se koriste u određivanju odziva prema jednadžbi 1

$$y(n+2) + 0.5y(n+1) + 0.06y(n) = u(n+1)$$

- početni uvjeti $y(-2)$ i $y(-1)$ potrebni u određivanju odziva prema jednadžbi 2 određuju se iz gornje jednadžbe za $n = -1$ i $n = -2$

za $n = -1$ i uz $y(0) = 1$ i $y(1) = -1$, slijedi

$$\underbrace{y(1)}_{-1} + 0.5\underbrace{y(0)}_{1} + 0.06y(-1) = \underbrace{u(0)}_{0.5^0=1} \Rightarrow y(-1) = 25$$

za $n = -2$ slijedi

$$\underbrace{y(0)}_{1} + 0.5\underbrace{y(-1)}_{25} + 0.06y(-2) = \underbrace{u(-1)}_{0} \Rightarrow y(-2) = -225$$

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- finalno, odziv sustava, na pobudu $u(n) = (0.5)^n \mu(n)$, bit će, uz dane početne uvjete, identičan za sve tri jednadžbe

$$y(n+2) + 0.5y(n+1) + 0.06y(n) = u(n+1),$$
$$y(1) = -1, \quad y(0) = 1$$

$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = u(n-1),$$
$$y(-1) = 25, \quad y(-2) = -225$$

$$y(n+1) + 0.5y(n) + 0.06y(n-1) = u(n),$$
$$y(0) = 1, \quad y(-1) = 25$$

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- ilustracija odziva, na pobudu $u(n) = (0.5)^n \mu(n)$, sustava opisanog jednadžbom, uz $y(-1) = 25$ i $y(-2) = -225$,

$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = u(n-1)$$

$$n = 0 \quad y(0) + 0.5\underbrace{y(-1)}_{25} + 0.06\underbrace{y(-2)}_{-225} = \underbrace{u(-1)}_{0} \Rightarrow y(0) = 1$$

$$n = 1 \quad y(1) + 0.5\underbrace{y(0)}_{1} + 0.06\underbrace{y(-1)}_{25} = \underbrace{u(0)}_{1} \Rightarrow y(1) = -1$$

$$n = 2 \quad y(2) + 0.5\underbrace{y(1)}_{-1} + 0.06\underbrace{y(0)}_{1} = \underbrace{u(1)}_{0.5} \Rightarrow y(2) = 0.94$$

$$n = 3 \quad y(3) + 0.5\underbrace{y(2)}_{0.94} + 0.06\underbrace{y(1)}_{-1} = \underbrace{u(2)}_{0.25} \Rightarrow y(3) = -0.16$$

$$n = 4 \quad y(4) + 0.5\underbrace{y(3)}_{-0.16} + 0.06\underbrace{y(2)}_{0.94} = \underbrace{u(3)}_{0.125} \Rightarrow y(4) = 0.1486$$

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- izravni način određivanja odziva diskretnog sustava N-tog reda je izračunavanje $y(n)$ iz

$$y(n) = -\sum_{j=1}^{N} a_j y(n-j) + \sum_{j=0}^{N} b_j u(n-j)$$

- kako bi se odredio odziv sustava $y(n)$, potreban je $2N+1$ podatak
  - N prethodnih vrijednosti izlaza $y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N)$
  - N prethodnih vrijednosti ulaza $u(n-1), u(n-2), \ldots, u(n-N)$, i
  - trenutna vrijednost ulaza $u(n)$
- u određivanju vrijednosti izlaza $y(0)$, treba poznavati početne uvjete, $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$, i $u(0)$ (zbog kauzalnosti su ostali $u(-n) = 0$)

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- linearni, vremenski stalni, diskretan sustav opisan je jednadžbom diferencija

$$y(n)+a_1y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)=$$
$$b_0u(n)+b_1u(n-1)+\ldots+b_{N-1}u(n-N+1)+b_Nu(n-N)$$

- jednadžbu zapisujemo pomoću operatora pomaka definiranog kao

za $n \in \mathit{Cjelobrojni}$

$E^{-1}w(n)=w(n-1)$ – pomak za jedan korak

$E^{-K}w(n)=w(n-K)$ – pomak za K koraka

$$[1+a_1E^{-1}+\ldots+a_{N-1}E^{-N+1}+a_NE^{-N}]y(n)=$$
$$=[b_0+b_1E^{-1}+\ldots+b_{N-1}E^{-N+1}+b_NE^{-N}]u(n)$$

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- operatorski zapis jednadžbe diferencija

$$
\begin{aligned}
&[1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}] y(n) = \\
&\quad = [b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}] u(n)
\end{aligned}
$$

skraćeno pišemo kao

$$A(E^{-1}) y(n) = B(E^{-1}) u(n)$$

gdje su $A(E^{-1})$ i $B(E^{-1})$ složeni operatori

$$
\begin{aligned}
A(E^{-1}) &= 1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N} \\
B(E^{-1}) &= b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}
\end{aligned}
$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- izračunavanje odziva diskretnog sustava započinjemo rješavanjem homogene jednadžbe diferencija

$$y_h(n)+a_1 y_h(n-1)+\ldots+a_{N-1} y_h(n-N+1)+a_N y_h(n-N)=0$$

odnosno

$$[1+a_1 E^{-1}+\ldots+a_{N-1} E^{-N+1}+a_N E^{-N}] y_h(n)=0$$

- jednadžba kazuje da je linearna kombinacija $y_h(n)$ i zakašnjelih $y_h(n)$ jednaka nuli za sve vrijednosti n
- ovo je moguće samo onda kada su $y_h(n)$ i svi zakašnjeli $y_h(n)$ istog oblika
- ovaj zahtjev ispunjava samo eksponencijalna funkcija q^n

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- budući da vrijedi

$$E^{-k}q^n = q^{n-k} = q^{-k}q^n$$

  q^{-k} je konstanta pa je pokazano kako je pomakom eksponencijale sačuvan njezin oblik

- to je razlog da odziv homogene jednadžbe diferencija mora biti oblika

$$y_h(n) = cq^n$$

- c i q izračunavamo iz homogene jednadžbe diferencija

$$cq^n + a_1 cq^{n-1} + \ldots + a_{N-1}cq^{n-N+1} + a_N cq^n q^{-N} = 0$$

$$\underbrace{\left(q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2}q^2 + a_{N-1}q + a_N\right)}_{0} cq^{n-N} = 0$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- za netrivijalno rješenje $cq^n \neq 0$ je

$$q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N = 0$$

- prema tome q ima N rješenja[3]
- homogena jednadžba ima isto N rješenja $c_1 q_1^n, c_2 q_2^n, \ldots, c_N q_N^n$ pa je rješenje homogene jednadžbe linearna kombinacija

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- konstante $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz
  - početnih uvjeta kada određujemo odziv nepobuđenog sustava
  - iz početnih uvjeta i totalnog rješenja kada određujemo totalni odziv

[3] prva pretpostavka da su rješenja realna i jednostruka

Karakteristični polinom, karakteristične frekvencije

- polinom $q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N$ nazivamo karakterističnim polinomom sustava
- jednadžbu $q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N = 0$ nazivamo karakterističnom jednadžbom sustava
- korijeni karakteristične jednadžbe $q_1, q_2, \ldots, q_N$ nazivaju se karakteristične vrijednosti ili karakteristične frekvencije ili vlastite frekvencije ili vlastite vrijednosti
- karakteristične frekvencije mogu biti realne ili kompleksne, jednostruke ili višestruke
- kompleksne karakteristične frekvencije dolaze u konjugiranim parovima što je posljedica realnosti koeficijenata karakterističnog polinoma
- vrijednosti tj. položaj karakterističnih frekvencija u kompleksnoj ravnini definira prijelazni odziv sustava kao i stabilnost sustava

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za višestruke karakteristične vrijednosti

- za karakteristični korijen q_1 višestrukosti m karakteristična jednadžba, u faktoriziranom obliku, je

$$(q-q_1)^m(q-q_{m+1})(q-q_{m+2})\cdots(q-q_N)$$

- rješenje homogene jednadžbe je tada

$$\begin{aligned} y_h(n) = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \ldots + c_m n^{m-1}) q_1^n + \\ + c_{m+1} q_{m+1}^n + c_{m+2} q_{m+2}^n + \ldots + c_N q_N^n \end{aligned}$$

- korijen $q=0$ se ne uzima u obzir jer on samo smanjuje red jednadžbe za jedan, odnosno za m u slučaju njegove višestrukosti

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave kompleksni korijeni dolaze u konjugirano kompleksnim parovima
- u određivanju homogenog rješenja jednadžbe diferencija konjugirane kompleksne korijene možemo koristiti na isti način kao i realne
- činjenica da su parovi kompleksnih korijena q i q^* konjugirani može biti iskorištena za alternativni prikaz
- tako je za,

$$q = |q|e^{j\beta} \quad \text{i} \quad q^* = |q|e^{-j\beta}$$

rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q^n + c_2 (q_1^*)^n = c_1 |q|^n e^{j\beta n} + c_2 |q|^n e^{-j\beta n}$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave je $y_h(n)$ realna funkcija pa konstante c_1 i c_2 moraju biti konjugirane
- za

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

proizlazi

$$y_h(n) = \frac{c}{2} |q|^n [e^{j(\beta n + \theta)} + e^{-j(\beta n + \theta)}]$$

odnosno, finalno,

$$y_h(n) = c|q|^n \cos(\beta n + \theta)$$

Odziv nepobuđenog diskretnog sustava

- za nepobuđeni sustav odziv $y_0(n)$ je jednak rješenju homogene jednadžbe diferencija $y_h(n)$
- tako je za jednostruke i realne vlastite frekvencije odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- koeficijente $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz N početnih uvjeta $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$

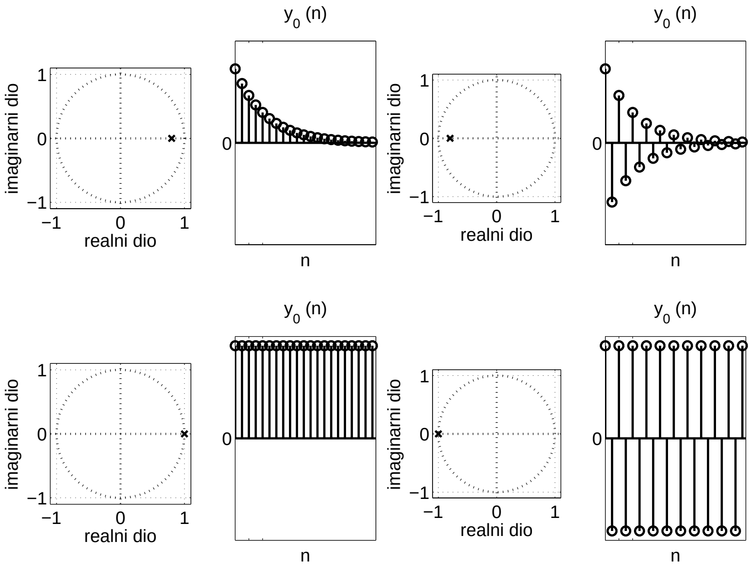
Odziv nepobuđenog diskretnog sustava

- nepobuđeni sustav titra eksponencijalama čije su frekvencije vlastite frekvencije sustava, pa je za pojedinu vlastitu frekvenciju q_1, komponenta nepobuđenog odziva q_1^n
- neka je u općem slučaju $q \in$ *Kompleksni* pa možemo pisati $q = |q|e^{j\beta}$, a kako je modul $|e^{j\beta}| = 1$ za svaki n, slijedi za:

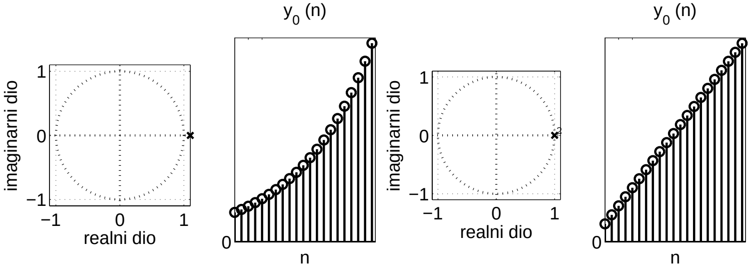
$$
\begin{array}{lll}
|q| < 1 & q^n \rightarrow 0 & \text{za } n \rightarrow \infty \\
|q| > 1 & q^n \rightarrow \infty & \text{za } n \rightarrow \infty \\
|q| = 1 & |q|^n = 1 & \text{za } \forall n
\end{array}
$$

- slijede primjeri koji ilustriraju odziv nepobuđenog sustava za razne vrijednosti q

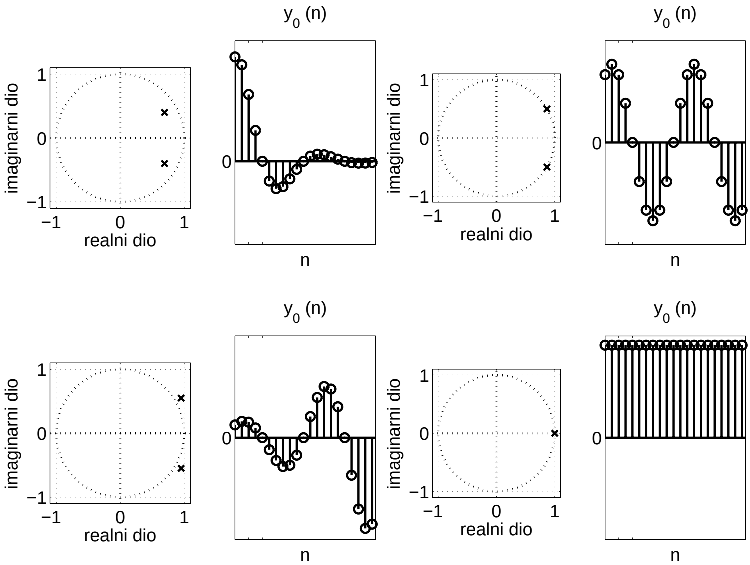
Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- nepobuđeni sustav zadan je jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = 0$$

- pretpostavimo rješenje oblika cq^n

$$cq^n - 0.8\sqrt{2}cq^{n-1} + 0.64cq^{n-2} = 0$$

$$cq^{n-2}(q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64) = 0$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64 = 0$$

Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- korijeni karakteristične jednadžbe su

$$q_{1,2} = 0.4\sqrt{2}(1 \pm j) = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

- konstante c_1 i c_2 određuju se iz početnih uvjeta $y(-2) = -1.5$ i $y(-1) = -2$ i

$$y_h(-1) = c_1 0.8^{-1} e^{j\frac{\pi}{4}(-1)} + c_2 0.8^{-1} e^{-j\frac{\pi}{4}(-1)} = -2$$
$$y_h(-2) = c_1 0.8^{-2} e^{j\frac{\pi}{4}(-2)} + c_2 0.8^{-2} e^{-j\frac{\pi}{4}(-2)} = -1.5$$

$$c_1 = -0.6514 - 0.48j = 0.8091e^{-j2.5065}$$
$$c_2 = -0.6514 + 0.48j = 0.8091e^{j2.5065}$$

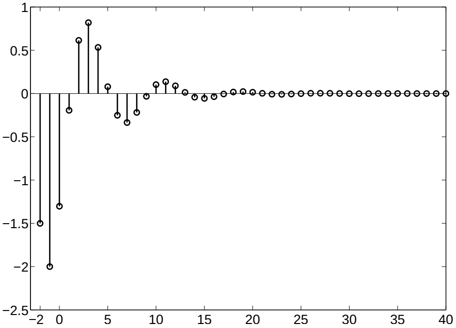
Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- rješenje nepobuđenog sustava je

$$y_0(n) = 0.8091 e^{-j2.5065} 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.8091 e^{j2.5065} 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$y_0(n) = 0.8091 \cdot 0.8^n [e^{j(\frac{\pi}{4}n - j2.5065)} + e^{-j(\frac{\pi}{4}n - j2.5065)}]$$

$$y_0(n) = 1.6183 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4} n - 2.5065)$$



Odziv linearnog vremenski diskretnog *SISO* sustava – $[A, B, C, D]$ prikaz

- totalni odziv vremenski diskretnog sustava N-tog reda, s jednim ulazom i jednim izlazom,

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni,$$
$$\forall n \in Cjelobrojni$$
$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

  mogući je interpretirati kao zbroj odziva nepobuđenog sustava $(u(n) = 0)$ i odziva mirnog sustava $(x(0) = 0)$

$$y(n) = \underbrace{CA^n x(0)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava, } u(n)=0} + \underbrace{+\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bu(m) + Du(n),}_{\text{odziv mirnog sustava, } x(0)=0} \quad n > 0$$

Odziv linearnog vremenski diskretnog *SISO* sustava

- dakle, totalni odziv vremenski diskretnog sustava N-tog reda, s jednim ulazom i jednim izlazom, interpretiramo kao

totalni odziv = odziv nepobuđenog sustava+odziv mirnog sustava

- za nepobuđeni vremenski diskretan sustav N-tog reda, opisan s jednadžbom diferencija N-tog reda, odziv $y_0(n)$ je jednak rješenju homogene jednadžbe diferencija $y_h(n)$
- tako je za jednostruke i realne vlastite frekvencije odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- koeficijente $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz N početnih uvjeta $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$

Odziv nepobuđenog linearnog vremenski stalnog diskretnog sustava

- usporedimo odziv nepobuđenog sustava (izračunatog iz modela ulaz-izlaz),

$$y_0(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n,$$

  s odzivom nepobuđenog sustava (izračunatog iz modela s varijablama stanja[4])

$$y_0(n) = CA^n x(0)$$

- zaključujemo kako CA^n predstavlja linearnu kombinaciju kompleksnih eksponencijala koje titraju isključivo s karakterističnim (vlastitim) frekvencijama sustava

[4] Kasnije će biti detaljno razmatran.

Odziv mirnog linearnog vremenski stalnog diskretneg sustava

- u odzivu mirnog sustava, $\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bu(m) + Du(n)$, nalazi se matrica A^n ali i $u(n)$ pa će ovaj odziv tvoriti
  - komponenta koju čini kombinacija eksponencijala koje titraju vlastitim frekvencijama, te
  - komponenta koja je titranje frekvencijama pobude i predstavlja prisilni odziv sustava na pobudu
- sustav se odziva vlastitim frekvencijama, unatoč početnom stanju $x(0) = 0$, u prijelazu iz stanja $x(0) = 0$ u stanje koje diktira pobuda
- zato se totalni odziv sustava može zapisati i kao

$$\textit{totalni odziv} = \textit{prirodni}(\textit{prijelazni})\ \textit{odziv sustava} + \textit{prisilni odziv}$$

Odziv pobuđenog sustava

- kako je kazano totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava, dakle,[5]

$$y(n) = \sum_{j=1}^{N} c_i q_i^n + \textit{odziv mirnog sustava}$$

- odziv mirnog sustava na bilo koju pobudu možemo odrediti
    - klasičnim rješavanjem jednadžbe diferencija
    - korištenjem konvolucijske sumacije

[5] ovdje je, radi jednostavnosti u prikazu odziva nepobuđenog sustava, pretpostavljen sustav s jednostrukim i realnim karakterističnim frekvencijama

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- za sustav opisan nehomogenom jednadžbom diferencija potrebno je odrediti i partikularno rješenje
- određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrange-ova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
    - primjena rezultira složenim sumacijama
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
    - veliki se broj pobuda može aproksimirati gore navedenim nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- za pobudu polinomom oblika

$$u(n) = A_0 + A_1 n + \ldots + A_M n^M$$

- partikularno je rješenje u obliku polinoma M-tog stupnja

$$y_p(n) = K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M$$

- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- slično vrijedi i za nizove

pobuda $u(n)$	partikularno rješenje $y_p(n)$
A (konstanta)	K
$Ar^n \quad r \neq q_i (i = 1, 2, \ldots, N)$	Kr^n
$Ar^n \quad r = q_i$	Knr^n
An^M	$K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M$
$r^n n^M$	$r^n(K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M)$
$Acos(\omega_0 n)$	$K_1 cos(\omega_0 n) + K_2 sin(\omega_0 n)$
$Asin(\omega_0 n)$	$K_1 cos(\omega_0 n) + K_2 sin(\omega_0 n)$

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- odredimo odziv sustava

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- na pobudu $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ te uz početne uvjete $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- prije je određen odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(n) = 1.6183 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5065)$$

- preostaje odrediti odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + y_p(n)$$

dakle, treba odrediti partikularno rješenje $y_p(n)$ te c_1 i c_2 za $y(-1) = 0$ i $y(-2) = 0$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- kako je pobuda $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K_1 cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\frac{\pi}{8}n)$$

- koeficijente K_1 i K_1 određujemo metodom neodređenog koeficijenta
- uvrštenjem $y_p(n)$ u polaznu jednadžbu slijedi

$$y_p(n) - 0.8\sqrt{2}y_p(n-1) + 0.64y_p(n-2) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n);$$

$$\begin{aligned} K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - 0.8\sqrt{2}K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] - \\ -0.8\sqrt{2}K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] + 0.64K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] + \\ +0.64K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n) \end{aligned}$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- primjenom trigonometrijskih transformacija slijedi

$$
\begin{aligned}
&K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - \\
&\quad -0.8\sqrt{2}K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] - \\
&\quad -0.8\sqrt{2}K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] + \\
&\quad +0.64K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] + \\
&\quad +0.64K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)
\end{aligned}
$$

- razvrstavanjem slijedi

$$
\begin{aligned}
&\{[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\
&\quad +[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}cos(\tfrac{\pi}{8}n) + \\
&\{-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\
&\quad +[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}sin(\tfrac{\pi}{8}n) = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)
\end{aligned}
$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- usporedbom lijeve i desne strane pišemo

$$[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\ +[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2 = -0.2$$

$$-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\ +[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2 = 0$$

- rješenjem ovih jednadžbi izračunavamo K_1 i K_2

$$K_1 = -0.4899, \qquad K_2 = 0.0236$$

- pa je partikularno rješenje

$$y_p(n) = -0.4899cos(\tfrac{\pi}{8}n) + 0.0236sin(\tfrac{\pi}{8}n) = \\ = -0.4905cos(\tfrac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- izračunavanje $y(0)$ i $y(1)$ potrebnih u izračunavanju c_1 i c_2 a uz $y(-1) = 0$ i $y(-2) = 0$

$$n = 0 \quad y(0) = 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.2cos(\tfrac{\pi}{8}0) = -0.2$$

$$n = 1 \quad y(1) = 0.8\sqrt{2}y(0) - 0.64y(-1) - 0.2cos(\tfrac{\pi}{8}1) = = -0.4111$$

- iz rješenja za odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4899cos(\frac{\pi}{8}n) + 0.0236sin(\frac{\pi}{8}n)$$

$n = 0$

$y(0) = c_1 + c_2 - 0.4899 = -0.2$

$n = 1$

$$y(1) = c_1 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + c_2 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} - 0.4899cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.0236sin(\tfrac{\pi}{8}) = = -0.4111$$

pa su konstante c_1 i c_2

$$c_1 = 1.4450 + j0.1162 = 0.1858e^{j0.6759}$$

$$c_2 = 1.4450 - j0.1162 = 0.1858e^{-j0.6759}$$

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- odziv mirnog sustava je

$$y_m(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4905 cos(\tfrac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

$$y_m(n) = 0.1858 e^{j0.6759} 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.1858 e^{-j0.6759} 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \\ -0.4905 cos(\tfrac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

- i konačno

$$y_m(n) = 0.3716(0.8)^n cos(\frac{\pi}{4}n + 0.6759) - 0.4905 cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija

- totalni odziv sustava je

$$y(n) = y_0(n) + y_m(n)$$

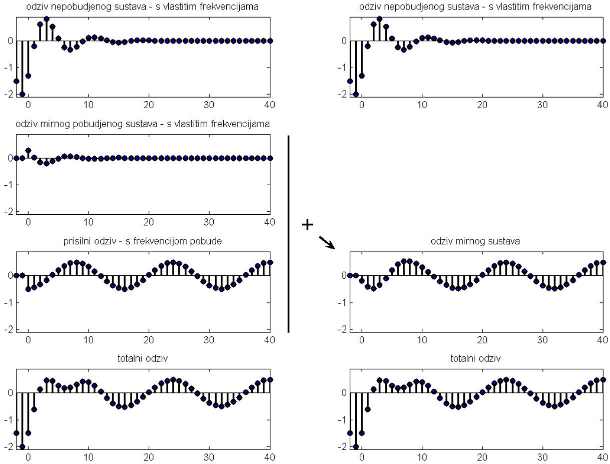
$$y(n) = \underbrace{1.6183 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5065)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} +$$

$$+ \underbrace{0.3716(0.8)^n cos(\frac{\pi}{4}n + 0.6759) - 0.4905 cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

$$y(n) = \underbrace{-0.4905 cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)}_{\text{prisilni odziv}} +$$

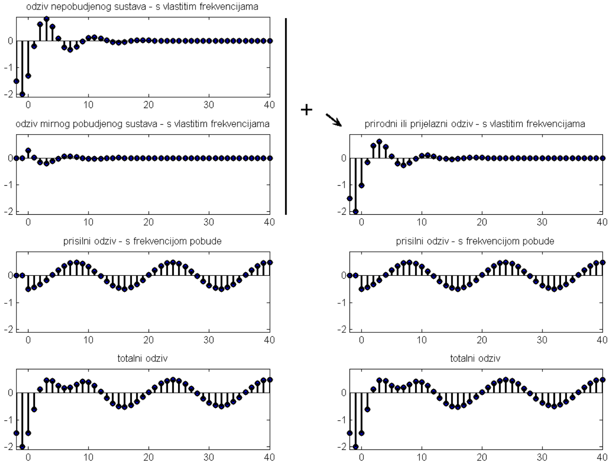
$$+ \underbrace{1.6183 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5065) + 0.3716(0.8)^n cos(\frac{\pi}{4}n + 0.6759)}_{\text{prirodni odziv}}$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija



Slika 2: Totalni odziv sustava na pobudu $-0.2cos(\frac{\pi}{8}n)$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija



Slika 3: Totalni odziv sustava na pobudu $-0.2cos(\frac{\pi}{8}n)$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- odredimo odziv sustava

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- na pobudu $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n)$ te uz početne uvjete $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- prije je određeno rješenje homogene jednadžbe ovog sustava

$$y_h(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

- pa je totalno rješenje

$$y(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + y_p(n)$$

- treba odrediti partikularno rješenje $y_p(n)$, te c_1 i c_2 za $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- kako je pobuda $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n)$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K_1 cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\frac{\pi}{8}n)$$

- partikularno rješenje je određeno prije

$$y_p(n) = -0.4905cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- izračunavanje $y(0)$ i $y(1)$ potrebnih u izračunavanju c_1 i c_2 a uz $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$

$$n = 0 \quad y(0) = 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.2cos(\tfrac{\pi}{8}0) = -1.5027$$
$$n = 1 \quad y(1) = 0.8\sqrt{2}y(0) - 0.64y(-1) - 0.2cos(\tfrac{\pi}{8}1) = -0.6049$$

- iz rješenja za odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4899cos(\frac{\pi}{8}n) + 0.0236sin(\frac{\pi}{8}n)$$

$$n = 0$$
$$y(0) = c_1 + c_2 - 0.4899 = -1.5027$$
$$n = 1$$
$$y(1) = c_1 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + c_2 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} - 0.4899cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.0236sin(\tfrac{\pi}{8}) = $$
$$= -0.6049$$

pa su konstante c_1 i c_2

$$c_1 = -0.5064 - j0.3638 = 0.6235e^{-j2.5186}$$
$$c_2 = -0.5064 + j0.3638 = 0.6235e^{j2.5186}$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- totalni odziv je

$$y(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4905 cos(\tfrac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

$$y(n) = 0.6235 e^{-j2.5186} 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.6235 e^{j2.5186} 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \\ -0.4905 cos(\tfrac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

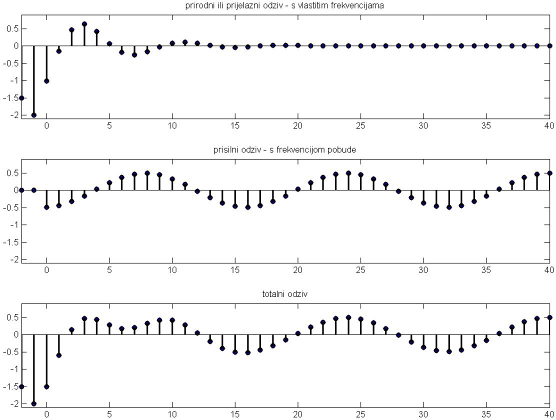
- i konačno

$$y(n) = 1.2471(0.8)^n cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5186) - 0.4905 cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 12.

Profesor Branko Jeren

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer



Slika 4: Totalni odziv sustava na pobudu $-0.2cos(\frac{\pi}{8}n)$

Određivanje impulsnog odziva

- pokazano je da odziv pobuđenog mirnog sustava možemo odrediti konvolucijskom sumacijom

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m)$$

- potrebno je odrediti impulsni odziv sustava, dakle totalni odziv sustava na pobudu $u(n) = \delta(n)$ uz početne uvjete jednake nuli

Određivanje impulsnog odziva

- za prije razmatrani sustav odredimo impulsni odziv $h(n)$
- sustav je bio zadan jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- impulsni odziv određujemo za miran sustav $y(-1) = h(-1) = 0$ i $y(-2) = h(-2) = 0$ i pobudu $u(n) = \delta(n)$ pa pišemo

$$h(n) - 0.8\sqrt{2}h(n-1) + 0.64h(n-2) = \delta(n)$$

- očigledno je da gornja jednadžba prelazi u homogenu jednadžbu za $n > 0$ i da se određivanje impulsnog odziva svodi na određivanje rješenja homogene jednadžbe za $n > 0$

Određivanje impulsnog odziva

- rješenje homogene jednadžbe ovog sustava, prije određeno, je

$$h(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} \qquad (4)$$

- vrijednost impulsnog odziva u $n = 0$ predstavlja jedan od početnih uvjeta za određivanje konstanti c_1 i c_2
- dakle, za $n = 0$, iz

$$h(0) - 0.8\sqrt{2}h(-1) + 0.64h(-2) = \delta(0) \quad \Rightarrow h(0) = 1$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz (4) za $n = -1$ i $n = 0$

$$\begin{aligned} n = -1, \quad h(-1) = 0 \quad &= c_1 0.8^{-1} e^{j\frac{-\pi}{4}} + c_2 0.8^{-1} e^{j\frac{\pi}{4}} \\ n = 0, \quad h(0) = 1 \quad &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1 = 0.7071 e^{-j0.7854}, \quad c_2 = 0.7071 e^{j0.7854}$$

Određivanje impulsnog odziva

- pa je impulsni odziv

$$h(n) = 0.7071e^{-j0.7854}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.7071e^{j0.7854}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

- odnosno

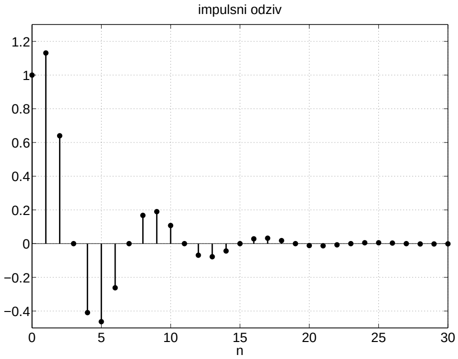
$$h(n) = 1.4142(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 0.7854\right), \quad n \geq 0$$

Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 12.

Profesor Branko Jeren

Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 1.0000\\
h(1) &= 1.1314\\
h(2) &= 0.6400\\
h(3) &= 0.0000\\
h(4) &= -0.4096\\
h(5) &= -0.4634\\
h(6) &= -0.2621\\
h(7) &= 0.0000\\
h(8) &= 0.1678\\
h(9) &= 0.1898\\
h(10) &= 0.1074\\
h(11) &= 0.0000\\
h(12) &= -0.0687\\
h(13) &= -0.0777\\
h(14) &= -0.0440\\
h(15) &= 0.0000
\end{aligned}
$$



Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- razmatraju se još dva primjera određivanja impulsnog odziva mirnih sustava opisanih jednadžbama diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n) + 2u(n-1)$$
$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n-4) + 2u(n-5)$$

- impulsni se odziv ovih sustava određuje na isti način kao u prethodnom primjeru
- u prvom slučaju impulsni se odziv nalazi kao rješenje homogene jednadžbe za $n > 1$, pa će nam tada $h(0)$ i $h(1)$ predstavljati početne uvjete za određivanje konstanti rješenja
- u drugom slučaju jednadžba postaje homogena za $n > 5$ i početni su uvjeti u određivanju konstanti $h(4)$ i $h(5)$

Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- iz

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n) + 2u(n-1)$$

za, $y(-1) = h(-1) = y(-2) = h(-2) = 0$ i $u(n) = \delta(n)$,

$$n = 0, \quad h(0) = 0.8\sqrt{2}h(-1) - 0.64h(-2) + \delta(0) + 2\delta(-1) = 1$$
$$n = 1, \quad h(1) = 0.8\sqrt{2}h(0) - 0.64h(-1) + \delta(1) + 2\delta(0) = 3.1314$$

- za $h(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$ izračunavamo c_1 i c_2

$$n = 0, \quad h(0) = 1 \qquad = c_1 + c_2$$
$$n = 1, \quad h(1) = 3.1314 \quad = c_1 0.8 e^{j\frac{\pi}{4}} + c_2 0.8 e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow c_1 = 2.3223 e^{-j1.3538}, \quad c_2 = 2.3223 e^{j1.3538}$$

- pa je impulsni odziv drugog sustava

$$h(n) = 2.3223 e^{-j1.3538} 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3223 e^{j1.3538} 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- izračunati impulsni odziv

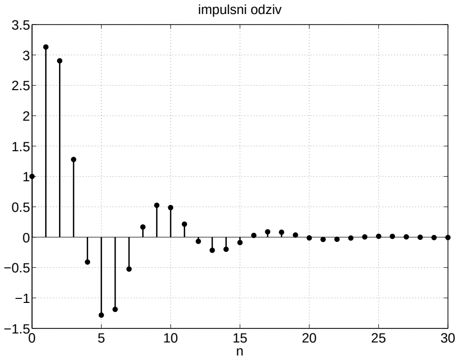
$$h(n) = 2.3223e^{-j1.3538}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3223e^{j1.3538}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

transformiramo u konačni oblik

$$h(n) = 4.6446(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right), \quad n \geq 0$$

Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 1.0000\\
h(1) &= 3.1314\\
h(2) &= 2.9028\\
h(3) &= 1.2801\\
h(4) &= -0.4096\\
h(5) &= -1.2826\\
h(6) &= -1.1890\\
h(7) &= -0.5243\\
h(8) &= 0.1678\\
h(9) &= 0.5254\\
h(10) &= 0.4870\\
h(11) &= 0.2148\\
h(12) &= -0.0687\\
h(13) &= -0.2152\\
h(14) &= -0.1995\\
h(15) &= -0.0880
\end{aligned}
$$



Signali i sustavi
školska godina 2007/2008
Cjelina 12.

Profesor Branko Jeren

Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- iz

$$y(n)-0.8\sqrt{2}y(n-1)+0.64y(n-2)=u(n-4)+2u(n-5),\ \ n\geq 4$$

za, $y(-1)=h(-1)=y(-2)=h(-2)=0$ i $u(n)=\delta(n)$,
izračunavamo $h(0)=h(1)=h(2)=h(3)=0$

$$\begin{aligned} n=4, \quad & h(4)=0.8\sqrt{2}h(3)-0.64h(2)+\delta(0)+2\delta(-1)=1 \\ n=5, \quad & h(5)=0.8\sqrt{2}h(4)-0.64h(3)+\delta(1)+2\delta(0)=3.1314 \end{aligned}$$

- za $h(n)=c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n}+c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$ izračunavamo c_1 i c_2

$$\begin{aligned} n=4, \quad h(4)=1 \qquad & = c_1 0.8^4 e^{j\frac{\pi}{4}4}+c_2 0.8^4 e^{-j\frac{\pi}{4}4} \\ n=5, \quad h(5)=3.1314 \quad & = c_1 0.8^5 e^{j\frac{\pi}{5}n}+c_2 0.8^5 e^{-j\frac{\pi}{4}5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1=5.6695e^{j1.7878}, \quad c_2=5.6695e^{-j1.7878}$$

Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

- pa je impulsni odziv trećeg sustava

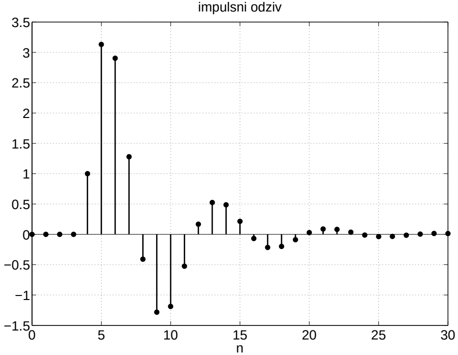
$$h(n) = 5.6695e^{j1.7878}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 5.6695e^{-j1.7878}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

- izračunati impulsni odziv transformiramo u konačni oblik

$$h(n) = 11.3389(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 1.7878\right), \quad n \geq 4$$

Primjeri određivanja impulsnog odziva diskretnog sustava

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 0.0000\\
h(1) &= 0.0000\\
h(2) &= 0.0000\\
h(3) &= 0.0000\\
h(4) &= 1.0000\\
h(5) &= 3.1314\\
h(6) &= 2.9028\\
h(7) &= 1.2801\\
h(8) &= -0.4096\\
h(9) &= -1.2826\\
h(10) &= -1.1890\\
h(11) &= -0.5243\\
h(12) &= 0.1678\\
h(13) &= 0.5254\\
h(14) &= 0.4870\\
h(15) &= 0.2148
\end{aligned}
$$



Odziv sustava za generiranje jeke

- treba naći odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n), \qquad n \in Cjelobrojni$$

- na pobudu

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- neka je sustav miran dakle
  $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$
- za $n > 1$, $u(n) = 0$ i gornja jednadžba postaje homogena

Odziv sustava za generiranje jeke

- dakle, problem rješavanja polazne jednadžbe

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n)$$

svodimo na problem rješavanja homogene jednadžbe

$$y(n) - 0.6y(n-4) = 0 \quad \text{za } n > 1$$

čiji su početni uvjeti tada

$$y_h(1) = y(1),\ y_h(0) = y(0),\ y_h(-1) = y(-1) \text{ i } y_h(-2) = y(-2)$$

- $y(1)$ i $y(0)$ određujemo iterativnim postupkom iz polazne jednadžbe uz primjenu zadane pobude, a $y(-1)$ i $y(-2)$ su zadani početni uvjeti

Odziv sustava za generiranje jeke

- za pretpostavljeno rješenje homogene jednadžbe $y_h(n) = cq^n$ iz

$$y(n) - 0.6y(n-4) = 0,$$

- slijedi

$$\begin{aligned} cq^n - 0.6cq^{n-4} &= 0 \\ cq^{n-4}(q^4 - 0.6) &= 0 \end{aligned}$$

- pa je karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$q^4 - 0.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_1 = & -0.8801 & \\ q_2 = & j0.8801 & = 0.8801e^{j\frac{\pi}{2}} \\ q_3 = & -j0.8801 & = 0.8801e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ q_4 = & 0.8801 & \end{cases}$$

Odziv sustava za generiranje jeke

- rješenje homogene jednadžbe je

$$y_h(n) = c_1(-0.8801)^n + c_2(j0.8801)^n + c_3(-j0.8801)^n + c_4(0.8801)^n$$

- rješenje vrijedi za $n > 1$ pa su početni uvjeti, potrebni u postupku određivanja c_1, c_2, c_3, c_4, vrijednosti $y_h(1), y_h(0), y_h(-1)$ i $y_h(-2)$
- $y_h(-1) = y(-1)$ i $y_h(-2) = y(-2)$ su zadani početni uvjeti, a $y_h(0) = y(0)$ i $y_h(1) = y(1)$ izračunavamo iterativnim postupkom iz nehomogene jednadžbe dakle za zadanu pobudu

Odziv sustava za generiranje jeke

- zadane su početne vrijednosti pa, je $y_h(-1) = y(-1) = 0$ i $y_h(-2) = y(-2) = 0$
- iz polazne jednadžbe slijedi za:

$$
\begin{array}{lll}
n = 0 & y(0) = u(0) + 0.6y(-4) = 1 & \Rightarrow y_h(0) = y(0) = 1 \\
n = 1 & y(1) = u(1) + 0.6y(-3) = 1 & \Rightarrow y_h(1) = y(1) = 1
\end{array}
$$

- pa iz

$$y_h(n) = c_1(-0.8801)^n + c_2(j0.8801)^n + c_3(-j0.8801)^n + c_4(0.8801)^n$$

- slijedi

$$
\begin{aligned}
y_h(1) &= c_1(-0.8801)^1 + c_2(j0.8801)^1 + c_3(-j0.8801)^1 + c_4(0.8801)^1 \\
y_h(0) &= c_1(-0.8801)^0 + c_2(j0.8801)^0 + c_3(-j0.8801)^0 + c_4(0.8801)^0 \\
y_h(-1) &= c_1(-0.8801)^{-1} + c_2(j0.8801)^{-1} + c_3(-j0.8801)^{-1} + c_4(0.8801)^{-1} \\
y_h(-2) &= c_1(-0.8801)^{-2} + c_2(j0.8801)^{-2} + c_3(-j0.8801)^{-2} + c_4(0.8801)^{-2}
\end{aligned}
$$

Odziv sustava za generiranje jeke

- izračunati su koeficijenti

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.0341 \\ c_2 &= 0.2500 - j0.2841 = 0.3784e^{-j0.8491} \\ c_3 &= 0.2500 + j0.2841 = 0.3784e^{j0.8491} \\ c_4 &= 0.5341 \end{aligned}$$

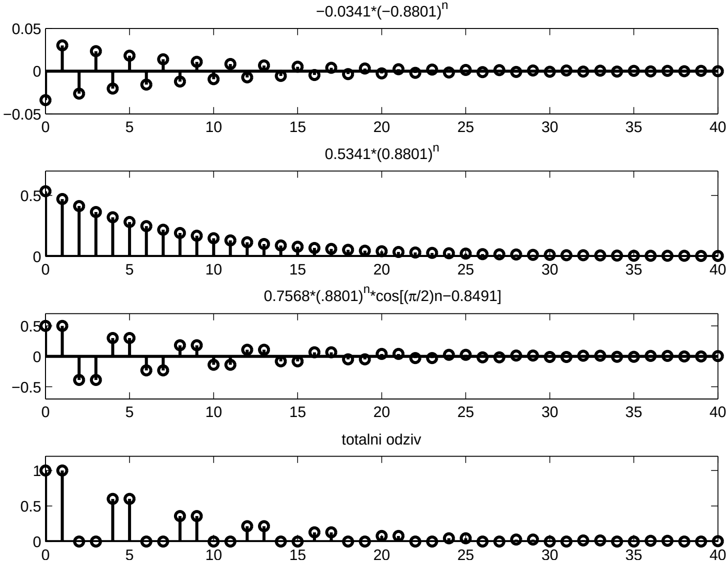
- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$\begin{aligned} y_h(n) = &-0.0341(-0.8801)^n + 0.3784e^{-j0.8491}0.8801^n e^{j\frac{\pi}{2}n} \\ &+0.3784e^{j0.8491}0.8801^n e^{-j\frac{\pi}{2}n} + 0.5341(0.8801)^n \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} y_h(n) = &-0.0341(-0.8801)^n + 0.5341(0.8801)^n \\ &+0.7568 \cdot 0.8801^n \cos(\tfrac{\pi}{2}n - 0.8491), \end{aligned}$$

Odziv sustava za generiranje jeke



Slika 5: Odziv sustava za generiranje jeke