

Linear Algebra Knowledge Points Collection

俞奕成

2022 年 11 月 10 日

Introduction: This article aims to arrange the knowledge points of the Linear Algebra Course for learners in order to improve their understanding and boost the efficiency.

目录

第一部分 矩阵	7
第一章 矩阵基本概念	9
1.1 同型矩阵	9
1.2 相等矩阵	9
1.3 主对角线与主对角元	9
1.4 常用矩阵	10
第二章 矩阵的运算	11
2.1 矩阵的线性运算	11
2.1.1 定义	11
2.1.2 性质	11
2.2 矩阵乘法	11
2.2.1 定义	11
2.2.2 性质	12
2.2.3 可换矩阵	12
2.3 方阵的幂	12
2.4 矩阵的转置	13
2.5 方阵的迹	13
第三章 可逆矩阵	15
3.1 定义	15
3.2 方阵可逆的条件	15
3.3 可逆矩阵的运算性质	16
3.4 可逆矩阵求法	16
3.4.1 初等变换法求逆矩阵	16

第四章	分块矩阵	17
4.1	定义	17
4.2	分块矩阵的运算方法	17
4.2.1	加减法	17
4.2.2	乘法	17
4.2.3	分块矩阵的转置	17
4.2.4	分块(反)对角矩阵	18
第五章	矩阵的初等行变换	19
5.1	初等行(列)变换	19
5.2	矩阵相抵	19
5.3	阶梯形矩阵	20
5.4	初等矩阵	20
5.5	一些应用和基本方法	21
5.6	分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵	21
第六章	矩阵的秩	23
6.1	定义	23
6.2	性质	23
6.3	矩阵的秩的不变性	24
6.4	与标准型和可逆矩阵的关系	24
第二部分	线性方程组	25
第七章	数域	27
第八章	线性方程组的基本概念	29
8.1	线性方程组定义	29
8.2	解集的定义	29
8.3	同解方程组	29
第九章	解的判别与求法	31
9.1	线性方程组的消元法	31
9.2	高斯消元法	31
9.2.1	定理: 解的不变性	31

目录	5
----	---

9.2.2 定理：线性方程组解的判别	31
9.2.3 推论：齐次线性方程组解的判别	32
9.2.4 解题方法：非齐次方程组的求解	32
9.2.5 解题方法：齐次方程组的求解	32
9.3 线性方程组解的判别与矩阵的秩	32

第三部分 行列式	35
-----------------	-----------

第十章 行列式的定义	37
-------------------	-----------

10.1 二阶，三阶行列式	37
10.2 n 阶行列式	38
10.3 行列式的各种展开方法	39
10.4 行列式的性质	39
10.5 行列式的行（列）变换	39

第一部分

矩阵

第一章 矩阵基本概念

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A为m行n列的矩阵， a_{ij} 为第i行j列的元素

1.1 同型矩阵

矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ $B = (b_{ij})_{s \times t}$,

如果 $m = s, n = t$, 则矩阵A和B为同型矩阵。

直观：形状相同

1.2 相等矩阵

矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ $B = (b_{ij})_{s \times t}$,

若同型，且 $a_{ij} = b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

则A, B为相等矩阵。

直观：形状相同，且每个位置的元素对应相等

1.3 主对角线与主对角元

主对角线 在n阶方阵A中，从(1,1)位置到(n,n)位置的直线称为方程的主对角线

主对角元 主对角线上的元素

1.4 常用矩阵

零矩阵 元素全为0的矩阵称为零矩阵，记为 $\mathbf{0}_{m \times n}$ 或 $\mathbf{0}$

行（列）矩阵 仅有一行（列）的矩阵

行（列）向量 定义同行（列）矩阵

方阵 行数和列数相同的矩阵

对角矩阵 除了主对角线上的元素外，其他元素都是0的矩阵，简称为对角阵，记为 $\mathbf{A} = \mathbf{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

单位矩阵 主对角元全为1的对角矩阵。记为 \mathbf{E} 或者 \mathbf{I}

数量矩阵 主对角元全部相等的对角矩阵。记为 $k\mathbf{E}$ 或者 $k\mathbf{E}_n$

上（下）三角矩阵 主对角线下方（上方）的元素全为0的方阵

对称矩阵 In matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$
直观：关于主对角线对称

反对称矩阵 In matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$, $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$
直观：主对角线上下两块对应位置上的元素互为相反数

第二章 矩阵的运算

2.1 矩阵的线性运算

2.1.1 定义

数乘 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 称 $(ka_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 与数 k 的数量乘积, 简称数乘, 记为 kA

负矩阵 特别地, 将 $(-1)A$ 记为 $-A$, 称为 A 的负矩阵

加法 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m \times n}$, // 称 $m \times n$ 矩阵 $C = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$

减法 称 $A + (-B)$ 为矩阵 A 与 B 的差, 记为 $A - B$

2.1.2 性质

该部分运算性质与数的运算完全相同, 不再赘述

2.2 矩阵乘法

2.2.1 定义

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times s}$, $C = (c_{ij})_{m \times s}$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, s,$$

称矩阵 C 为矩阵 A 与矩阵 B 的乘积, 记为 $C = AB$

2.2.2 性质

1. $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{0}_{n \times s} = \mathbf{A}_{m \times s}$, $\mathbf{0}_{s \times m} \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{0}_{s \times n}$
2. $\mathbf{E}_m \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}$, $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{E}_n = \mathbf{A}_{m \times n}$
3. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (乘法结合律)
4. $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$
5. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (左分配律), $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$ (右分配律)

2.2.3 可换矩阵

定义 2.2.4 两个矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} , 如果 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 那么称矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} 相乘可换, 简称 \mathbf{A} , \mathbf{B} 可换.

一些推论

1. 若 \mathbf{A} , \mathbf{B} 相乘可换, 则 \mathbf{A} , \mathbf{B} 必是同阶方阵
2. 单位矩阵和与之同阶的方阵相乘可换
3. 数量矩阵和与之同阶的方阵相乘可换
4. 同阶对角矩阵相乘可换

2.3 方阵的幂

定义 2.3.1 设 \mathbf{A} 是 n 阶方阵, k 为正整数,

k 个 \mathbf{A} 相乘称为 \mathbf{A} 的 k 次幂, 记为 \mathbf{A}^k , 即 $\mathbf{A}^k = \overbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}^{k \text{ 个 } \mathbf{A}}$
规定 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$

性质 2.3.2 设 \mathbf{A} 为方阵, k, l 为非负整数, 则

$$\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}, (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}$$

定义 2.3.3 方阵的多项式

设 \mathbf{A} 是方阵, \mathbf{E} 为与 \mathbf{A} 同阶的单位矩阵

称 $f(\mathbf{A}) = a_m \mathbf{A}^m + a_{m-1} \mathbf{A}^{m-1} + \dots + a_0 \mathbf{E}$ 是由 $f(x)$ 决定的方阵 \mathbf{A} 的多项式

2.4 矩阵的转置

定义 2.4.1 设数域 F 上的矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, 称 $n \times m$ 的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 A 的转置矩阵, 记为 \mathbf{A}^T

性质 2.4.2 转置矩阵的运算性质

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{B} + \mathbf{C})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$
3. $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$
4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ $(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_m)^T = \mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_{m-1}^T \cdots \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T$
5. 若 \mathbf{A} 为方阵, 则 $(\mathbf{A}^m)^T = (\mathbf{A}^T)^m$, m 为正整数
6. \mathbf{A} 为对称矩阵 $\Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, \mathbf{A} 为反对称矩阵 $\Leftrightarrow \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$

2.5 方阵的迹

定义 2.5.1 设数域 F 上的方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, 称 $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 为方阵 A 的迹, 记

为 $tr(\mathbf{A})$, 即 $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

性质 2.5.2 1. $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$

$$2. tr(k\mathbf{A}) = ktr(\mathbf{A})$$

$$3. tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$$

$$4. tr(\mathbf{A}^T) = tr(\mathbf{A})$$

第三章 可逆矩阵

3.1 定义

定义 3.1.1 设 n 阶方阵 \mathbf{A} ，若存在 n 阶方阵 \mathbf{B} ，使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ ，则称矩阵 \mathbf{A} 可逆， \mathbf{B} 是 \mathbf{A} 的逆矩阵，记作 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ 。如果不存在这样的 \mathbf{B} ，则称矩阵 \mathbf{A} 不可逆。

3.2 方阵可逆的条件

定理 3.2.1 如果 n 阶方阵 \mathbf{A} 可逆，则其逆矩阵唯一。

定义 3.2.2 设 n 阶方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ ， \mathbf{A}_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式 $i, j = 1, 2, \dots, n$ ，称矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵，记为 \mathbf{A}^* （即代数余子式转置排列得到的矩阵）

定理 3.2.3 设 n 阶方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则 $\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$

定理 3.2.4 n 阶方阵 \mathbf{A} 可逆的充分必要条件为 $|\mathbf{A}| \neq 0$ ，且此时

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$$

推论 设 \mathbf{A} 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 \mathbf{B} ，使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ （或 $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$ ），则 \mathbf{A} 可逆且 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

3.3 可逆矩阵的运算性质

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均为 n 阶可逆矩阵, k 为非零常数, 则

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $k\mathbf{A}$ 可逆, 且 $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$
3. \mathbf{AB} 可逆, 且 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
 $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$
4. 若 \mathbf{A}^m 可逆, $(\mathbf{A}^m)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^m$
5. 若 \mathbf{A}^T 可逆, $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
6. $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$

3.4 可逆矩阵求法

3.4.1 初等变换法求逆矩阵

见第21页 第5.5.1节

第四章 分块矩阵

4.1 定义

定义 4.1.1 把矩阵 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 用若干条横线和竖线，分成若干小矩阵，每个小矩阵称为 \mathbf{A} 的一个子块，以这些子块为元素的形式上的矩阵称为 \mathbf{A} 称为 A 的分块矩阵

4.2 分块矩阵的运算方法

4.2.1 加减法

与矩阵定义相同，但操作的两个矩阵必须同型并且采用相同的分块法（即每一组对应的分块都应该同型）

4.2.2 乘法

1. \mathbf{A} 的列分块法必须与 \mathbf{B} 的行分块法相同

2. 操作方法与矩阵乘法类似： $\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^s \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj}$

4.2.3 分块矩阵的转置

设分块矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1t} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \dots & \mathbf{A}_{st} \end{pmatrix}$

$$\text{则 } \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T & \cdots & \mathbf{A}_{t1}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T & \cdots & \mathbf{A}_{t2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1s}^T & \mathbf{A}_{2s}^T & \cdots & \mathbf{A}_{ts}^T \end{pmatrix}$$

4.2.4 分块（反）对角矩阵

形如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_s \end{pmatrix}$$

记为 $\mathbf{A} = \mathbf{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_s)$ ，称为分块对角矩阵

如果 \mathbf{A}_i 可逆，则 \mathbf{A} 可逆，有

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_s^{-1} \end{pmatrix}$$

形如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & & & \mathbf{A}_1 \\ & & \mathbf{A}_2 & \\ & \ddots & & \\ \mathbf{A}_s & & & \end{pmatrix}$$

称为反对角矩阵，

如果 \mathbf{A}_i 可逆，则 \mathbf{A} 可逆，有

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \mathbf{A}_s^{-1} \\ & & \mathbf{A}_2^{-1} & \\ & \mathbf{A}_1^{-1} & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

第五章 矩阵的初等行变换

5.1 初等行（列）变换

定义 5.1.1 矩阵的下面三种行为，称之为矩阵的初等行变换（行变换）：

1. 交换矩阵的 i, j 两行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$
2. 矩阵的第 i 行非零常数 k 倍，记为 kr_i
3. 矩阵的第 i 行的常数 k 倍加到第 j 行，记为 $r_j + kr_i$ （顺序不可反）

定义 5.1.2 矩阵 \mathbf{A}^T 的行变换，称之为矩阵 \mathbf{A} 的初等列变换（列变换）：

1. 交换矩阵的 i, j 两列，记为 $c_i \leftrightarrow c_j$
2. 矩阵的第 i 列非零常数 k 倍，记为 kc_i
3. 矩阵的第 i 列的常数 k 倍加到第 j 列，记为 $c_j + kc_i$ （顺序不可反）

5.2 矩阵相抵

定义 5.2.1 矩阵 \mathbf{A} 经有限次初等变换得到矩阵 \mathbf{B} 则称矩阵 \mathbf{A} 与矩阵 \mathbf{B} 相抵，记为 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$

性质 5.2.2 显然，矩阵相抵有以下性质：

1. 反身性： $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}$
2. 对称性：若 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ ，则 $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}$
3. 传递性： $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \cong \mathbf{C}$ ，则 $\mathbf{A} \cong \mathbf{C}$

5.3 阶梯形矩阵

定义 5.3.1 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵，简称阶梯形矩阵：

1. 零行（元素全为零的行）排在所有非零行的下方
2. 每个非零行的第一个（从左至右）非零元（称为主元）的列标号，从上到下，严格递增

定义 5.3.2 一个阶梯形矩阵若满足下面两条性质，称之为（行）简化阶梯形（或行最简形）矩阵基本概念

1. 主元均为1
2. 主元所在列的其他元素全为零

定理 5.3.3 任何一个矩阵都可以经过初等行变换化为阶梯形矩阵或者简化阶梯形矩阵

5.4 初等矩阵

定义 5.4.1 单位矩阵经过一次初等变换以后得到的矩阵

1. $\mathbf{E} \xrightarrow[r_i \leftrightarrow r_j]{c_i \leftrightarrow c_j} \mathbf{E}(i, j)$
2. $\mathbf{E} \xrightarrow[kr_i]{kc_i} \mathbf{E}(i(k))$
3. $\mathbf{E} \xrightarrow[r_j + kr_i]{c_i + kc_j} \mathbf{E}(i, j(k))$

定理 5.4.2 初等矩阵与初等变换的关系：行左列右

设 \mathbf{A} 是一个 $m \times n$ ，对 \mathbf{A} 进行一次初等行变换相当于在 \mathbf{A} 的左边乘一个相应类型的 m 阶初等矩阵；对 \mathbf{A} 进行一次初等列变换相当于在 \mathbf{A} 的右边乘以一个相应类型的 n 阶矩阵

推论 初等矩阵都是可逆矩阵，且有

1. $\mathbf{E}(i, j)^{-1} = \mathbf{E}(i, j)$
2. $\mathbf{E}(i(k))^{-1} = \mathbf{E}(i(\frac{1}{k}))$

$$3. \mathbf{E}(j, i(k))^{-1} = \mathbf{E}(j, i(-k))$$

定理 5.4.3 对任意的 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} , 存在一系列 m 阶初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_s$ 及 n 阶初等矩阵 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_t$ 使得

$$\mathbf{P}_s \dots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

为标准形, 其中 \mathbf{E}_r 为 r 阶单位矩阵, r 是 \mathbf{A} 的行阶梯形中非零行的行数

5.5 一些应用和基本方法

基本方法 5.5.1 求逆矩阵的初等变换法

构造矩阵: $(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) \xrightarrow{r} (\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1})$

基本方法 5.5.2 使用初等变换法求解矩阵方程

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})_{n \times (n+m)} \xrightarrow{r} (\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

similarly

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{X}^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{B}^T$$

$$(\mathbf{A}^T \mid \mathbf{B}^T)_{n \times (n+m)} \xrightarrow{r} (\mathbf{E} \mid (\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{B}^T)$$

5.6 分块矩阵的初等变换与分块初等矩阵

定义 5.6.1 分块初等矩阵 均为矩阵的初等变换和初等矩阵定义的扩展

定义 5.6.2 对分块矩阵作一次初等行(列)变换, 相当于用相应的分块初等矩阵左(右)乘此分块矩阵。

注意: 要遵循分块矩阵的乘法中对于两个相乘矩阵的分块法的要求

具体见17页4.2.2节

第六章 矩阵的秩

6.1 定义

定义 6.1.1 子式

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 的矩阵, 在 \mathbf{A} 中任取 k 行 k 列($k \leq \min\{m, n\}$), 位于这些行列交叉处的元素按原来的相对位置构成的 k 阶方阵的行列式, 称为矩阵 \mathbf{A} 的 k 级(阶)子式

定义 6.1.2 矩阵的秩

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 的矩阵, 在 \mathbf{A} 中若存在一个 r 阶子式不等于零, 而所有的 $r+1$ 阶子式都等于零(如果存在的话), 称 r 为矩阵的秩, 记为 $r(\mathbf{A})$ 。规定零矩阵的秩为零

6.2 性质

性质 6.2.1 设矩阵 $\mathbf{A}_{m \times n}$, 则

1. 矩阵 \mathbf{A} 的秩是唯一的
2. $0 \leq r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$
3. 设 \mathbf{A}_1 是 \mathbf{A} 的一个部分矩阵, 则 $r(\mathbf{A}_1) \leq r(\mathbf{A})$
4. 若 \mathbf{A} 中存在 r 阶子式不为零, 则 $r(\mathbf{A}) \geq r$; 若 \mathbf{A} 中所有 r 阶子式全为零, 则 $r(\mathbf{A}) < r$
5. $r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$
6. $r(k\mathbf{A}) = \begin{cases} r(\mathbf{A}), & k \neq 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$

7. 阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数

8. 可逆矩阵的秩等于它的阶数

6.3 矩阵的秩的不变性

定理 6.3.1 初等变换不改变矩阵的秩

6.4 与标准型和可逆矩阵的关系

定理 6.4.1 对任意的 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} , 存在一系列 m 阶初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_s$ 及 n 阶初等矩阵 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_t$ 使得 $\mathbf{P}_s \dots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A}$ 为简化阶梯形矩阵; 且

$$\mathbf{P}_s \dots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

为标准形, 其中 $r = r(\mathbf{A})$, 且标准形唯一。

一系列重要推论

1. 任意矩阵 $\mathbf{A}_{m \times n}$, 存在一系列 m 阶可逆矩阵 \mathbf{P} 和 n 阶可逆矩阵 \mathbf{Q} , 使得

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n}, r = r(\mathbf{A})$$

2. n 阶矩阵 \mathbf{A} 可逆的充分必要条件为 \mathbf{A} 的标准形为 n 阶单位矩阵 \mathbf{E}_n

3. n 阶矩阵 \mathbf{A} 可逆的充分必要条件为 $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_k$, 其中 $\mathbf{P}_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 为初等矩阵

4. 若 \mathbf{A}_n 可逆, 则 \mathbf{A} 可只经过行变换化为单位矩阵.

5. 矩阵 $\mathbf{A}_{m \times n}, \mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_n$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵, 则

$$r(\mathbf{P} \mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \mathbf{Q}) = r(\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q})$$

6. 矩阵 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 与 $\mathbf{B}_{m \times n}$ 相抵的充分必要条件为

$$\exists \text{ 可逆矩阵 } \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \text{ s.t. } \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{B}$$

定理 6.4.2 矩阵的秩与线性方程组解的判别

见第 32 页 第 9.3 节

第二部分

线性方程组

第七章 数域

1. 设 F 为一个数集，如果 F 中任意两个数做某种运算的结果仍属于 F ，称数集 F 对这种运算封闭
2. 设 F 是包含0和1的数集，若 F 对四则运算封闭，则称 F 为一个数域，记为 F

第八章 线性方程组的基本概念

8.1 线性方程组定义

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为一个 m 个方程 n 个未知量的线性方程组，简记为 $m \times n$ 的线性方程组或线性系统。其中 $a_{ij} \in F, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 为未知变量， a_{ij} 表示第 i 个方程中的第 j 个未知量 x_j 前面的系数， b_i 为第 i 个方程的常数项。

8.2 解集的定义

若存在一组数 $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ 满足方程组的每个方程，则称 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ 为方程组的一组解或者一个解，记为 (c_1, c_2, \dots, c_n) 。方程组的全体解所构成的集合称为该方程组的解集。

8.3 同解方程组

如果两个方程组的解集相同，则称这两个方程组为同解方程组或者两个方程组同解。

第九章 解的判别与求法

9.1 线性方程组的消元法

直接对方程组进行消元等操作，此处不再赘述

9.2 高斯消元法

线性方程组对应的增广矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 通过初等行变换化为一个（简化）阶梯形矩阵，通过（简化）阶梯形矩阵求解线性方程组的方式，称为线性方程组的高斯消元法。

9.2.1 定理：解的不变性

线性方程组的高斯消元法得到的新方程组与原方程组同解

9.2.2 定理：线性方程组解的判别

$m \times n$ 的线性方程组，其增广矩阵化为阶梯形矩阵有 r 个非零行，期中对应于方程组的系数矩阵部分有 s 个非零行.则线性方程组有解的充分必要条件为 $s = r$ 且

1. $s = r = n$ ，原方程组有唯一解
2. $s = r < n$ ，原方程组有无穷多解
3. $s < r$ ，原方程组无解

9.2.3 推论：齐次线性方程组解的判别

$m \times n$ 的齐次线性方程组，其系数矩阵的阶梯形的非零行数为 s ，则

1. 齐次线性方程组唯一零解的充分必要条件为 $s = n$
2. 齐次线性方程组有无穷多解，即有非零解的充分必要条件为 $s < n$
3. 如果 $m < n$ ，则齐次线性方程组必有非零解

9.2.4 解题方法：非齐次方程组的求解

1. 将增广矩阵初等行变换到阶梯形
2. 判断解的情况
3.
 - 有解时，进一步做初等行变换到简化阶梯形
 - 若有唯一解，则直接写出
 - 若有无穷多解，写出简化阶梯形对应的方程组，从而确定自由未知量，写出所有解（称为一般解）。

9.2.5 解题方法：齐次方程组的求解

1. 将系数矩阵初等行变换到阶梯形
2. 判断解的情况
3.
 - 若有只有零解，则直接写出
 - 若有非零解，写出简化阶梯形对应的方程组，从而确定自由未知量，写出所有解（称为一般解）。

9.3 线性方程组解的判别与矩阵的秩

定理 9.3.1 设 A 是 $m \times n$ 的矩阵，线性方程组 $Ax = b$ 经初等行变换得到的新方程组 $A_1x = b_1$ 与原方程组同解

定理 9.3.2 $m \times n$ 的线性方程组 $Ax = b$ ，增广矩阵为 $\tilde{A} = (A \quad b)$ 则线性方程组有解的充分必要条件为线性方程组的系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩，即 $r(A) = r(\tilde{A})$ ，且

1. $r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}}) = n$, 原方程组有唯一解;
2. $r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}}) < n$, 原方程组有无穷多解;
3. $r(\mathbf{A}) < r(\tilde{\mathbf{A}})$, 原方程组无解;

定理 9.3.3 $m \times n$ 的线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, 则

1. 齐次线性方程组有唯一零解的充分必要条件为 $r(\mathbf{A}) = n$;
2. 齐次线性方程组有无穷多解, 即有非零解的充分必要条件为 $r(\mathbf{A}) < n$
3. 如果 $m < n$, 则齐次线性方程组必有非零解;
4. 当 $m = n$ 时, 齐次线性方程组有唯一零解的充分必要条件为 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 有非零解的充分必要条件为 $|\mathbf{A}| = 0$

第三部分

行列式

第十章 行列式的定义

10.1 二阶，三阶行列式

定义 10.1.1 二阶行列式

设2阶方阵 $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ ，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为2阶方阵 \mathbf{A} 的行列式,记为 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$

a_{ij} 为该行列式的元素

通常用字母 D 来表示行列式

定义 10.1.2 三阶行列式

设3阶方阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ ，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

为3阶方阵 \mathbf{A} 的行列式,可记为 $|a_{ij}|_3$ 或 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$

其中的二阶行列式为依次划去 $a_{1j}(j = 1, 2, 3)$ 所在的行(第1行)和列(第 j 列),剩下的元素按原来的位置不动得到的行列式

10.2 n阶行列式

定义 10.2.1 余子式和代数余子式

设 n 阶方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

划去 a_{ij} 所在的行（第 i 行）和列（第 j 列），剩下的元素按原来的相对位置不动构成 $n-1$ 阶方阵，它的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记为元素 a_{ij} 的余子式，记为 \mathbf{M}_{ij}

称 $(-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 \mathbf{A}_{ij} ，即 $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}$

定义 10.2.2 n阶行列式

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶方阵 \mathbf{A} 的行列式记为 $|a_{ij}|_n$ ，或 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$

当 $n=1$ 时， $|\mathbf{A}| = |a_{11}| = a_{11}$

当 $n \geq 2$ 时， $|\mathbf{A}| = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}\mathbf{A}_{1k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k}a_{1k}\mathbf{M}_{1k}$

其中 \mathbf{A}_{1k} 为 a_{1k} 的代数余子式， \mathbf{M}_{1k} 为 a_{1k} 的余子式

10.3 行列式的各种展开方法

定义 10.3.1 使用行的定义

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{1k} \mathbf{A}_{1k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} \mathbf{M}_{1k}$$

定义 10.3.2 使用列的等价定义

$$|\mathbf{A}| = |a_{ij}|_n = \sum_{i=1}^n a_{i1} \mathbf{A}_{i1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \mathbf{M}_{i1}$$

性质 10.3.3 设方阵 $(a_{ij})_{n \times n}$, 则 $|\mathbf{A}|$ 等于 A 中任一行的所有元素与它们各自的代数余子式乘积之和, 即

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \mathbf{A}_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \mathbf{M}_{ik}, i = 1, 2, \dots, n$$

推论 设方阵 $(a_{ij})_{n \times n}$, 则 \mathbf{A} 的第 i 行所有元素与第 $j \neq i$ 行对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$a_{i1} \mathbf{A}_{j1} + a_{i2} \mathbf{A}_{j2} + \dots + a_{in} \mathbf{A}_{jn} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \mathbf{A}_{jk} = 0 (i \neq j)$$

10.4 行列式的性质

性质 10.4.1 \mathbf{A} 是方阵, \mathbf{A}^T 是其转置矩阵, 则 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$

性质 10.4.2 行列式中某行的所有元素都是两个元素的和, 则此行列式可以分解为两个行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_1 & \dots & a_{in} + b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 10.4.3 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为同阶方阵, 则 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$

10.5 行列式的行(列)变换

性质 10.5.1 交换一个方阵的某两行, 则它的行列式的值改变符号。

推论 如果一个方阵有两行对应元素相同, 则其行列式的值为 0

性质 10.5.2 方阵 \mathbf{A} 的某一行的所有元素乘以 k , 即 $\mathbf{A} \xrightarrow{kr_i} \mathbf{B}$, 则 $|\mathbf{B}| = k|\mathbf{A}|$

推论 1 行列式中若某行有公因子, 可以提到行列式外面

推论 2 行列式中若某两行对应成比例, 则此行列式的值为 0

推论 3 行列式中有某行的元素全为 0 , 则此行列式的值为 0

性质 10.5.3 方阵 \mathbf{A} 的某行 k 倍加到另一行, 得到方阵 \mathbf{B} , $\mathbf{A} \xrightarrow{r_j+kr_i} \mathbf{B}$, 则 $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$