

# Linear Algebra Knowledge Points Collection

俞奕成

2022 年 11 月 5 日

Introduction: This article aims to arrange the knowledge points of the Linear Algebra Course for learners in order to improve their understanding and boost the efficiency.

# 目录

<b>第一部分 矩阵</b>	<b>5</b>
<b>第一章 矩阵基本概念</b>	<b>7</b>
1.1 同型矩阵 . . . . .	7
1.2 相等矩阵 . . . . .	7
1.3 主对角线与主对角元 . . . . .	7
1.4 常用矩阵 . . . . .	8
<b>第二章 矩阵的运算</b>	<b>9</b>
2.1 矩阵的线性运算 . . . . .	9
2.1.1 定义 . . . . .	9
2.1.2 性质 . . . . .	9
2.2 矩阵乘法 . . . . .	9
2.2.1 定义 . . . . .	9
2.2.2 性质 . . . . .	10
2.2.3 可换矩阵 . . . . .	10
2.3 方阵的幂 . . . . .	10
2.5 矩阵的转置 . . . . .	11
2.7 方阵的迹 . . . . .	11
<b>第三章 可逆矩阵</b>	<b>13</b>
<b>第四章 分块矩阵</b>	<b>15</b>
<b>第五章 矩阵的初等行变换</b>	<b>17</b>
5.1 初等行变换 . . . . .	17
5.2 阶梯形矩阵 . . . . .	17

<b>第二部分 线性方程组</b>	<b>19</b>
<b>第六章 数域</b>	<b>21</b>
<b>第七章 线性方程组的基本概念</b>	<b>23</b>
7.1 线性方程组定义 . . . . .	23
7.2 解集的定义 . . . . .	23
7.3 同解方程组 . . . . .	23
<b>第八章 解的判别与求法</b>	<b>25</b>
8.1 线性方程组的消元法 . . . . .	25
8.2 高斯消元法 . . . . .	25
8.2.1 定理：解的不变性 . . . . .	25
8.2.2 定理：线性方程组解的判别 . . . . .	25
8.2.3 推论：齐次线性方程组解的判别 . . . . .	25
8.2.4 解题方法：非齐次方程组的求解 . . . . .	26
8.2.5 解题方法：齐次方程组的求解 . . . . .	26
<b>第三部分 行列式</b>	<b>27</b>
<b>第九章 行列式的定义</b>	<b>29</b>
9.1 二阶，三阶行列式 . . . . .	29
9.2 $n$ 阶行列式 . . . . .	30

# 第一部分

## 矩阵



# 第一章 矩阵基本概念

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A为m行n列的矩阵， $a_{ij}$ 为第i行j列的元素

## 1.1 同型矩阵

矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$   $B = (b_{ij})_{s \times t}$ ,

如果 $m = s, n = t$ , 则矩阵A和B为同型矩阵。

直观：形状相同

## 1.2 相等矩阵

矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$   $B = (b_{ij})_{s \times t}$ ,

若同型，且 $a_{ij} = b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

则A, B为相等矩阵。

直观：形状相同，且每个位置的元素对应相等

## 1.3 主对角线与主对角元

**主对角线** 在n阶方阵A中，从(1,1)位置到(n,n)位置的直线称为方程的主对角线

**主对角元** 主对角线上的元素

## 1.4 常用矩阵

**零矩阵** 元素全为0的矩阵称为零矩阵，记为 $\mathbf{0}_{m \times n}$ 或 $\mathbf{0}$

**行（列）矩阵** 仅有一行（列）的矩阵

**行（列）向量** 定义同行（列）矩阵

**方阵** 行数和列数相同的矩阵

**对角矩阵** 除了主对角线上的元素外，其他元素都是0的矩阵，简称为对角阵，记为 $\mathbf{A} = \mathbf{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

**单位矩阵** 主对角元全为1的对角矩阵。记为 $\mathbf{E}$ 或者 $\mathbf{I}$

**数量矩阵** 主对角元全部相等的对角矩阵。记为 $k\mathbf{E}$ 或者 $k\mathbf{E}_n$

**上（下）三角矩阵** 主对角线下方（上方）的元素全为0的方阵

**对称矩阵** In matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$   
直观：关于主对角线对称

**反对称矩阵** In matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ ,  $a_{ij} = -a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$   
直观：主对角线上下两块对应位置上的元素互为相反数



## 第二章 矩阵的运算

### 2.1 矩阵的线性运算

#### 2.1.1 定义

**数乘** 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 称  $(ka_{ij})_{m \times n}$  为矩阵  $A$  与数  $k$  的数量乘积, 简称数乘, 记为  $kA$

**负矩阵** 特别地, 将  $(-1)A$  记为  $-A$ , 称为  $A$  的负矩阵

**加法** 设矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  与  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , // 称  $m \times n$  矩阵  $C = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$

**减法** 称  $A + (-B)$  为矩阵  $A$  与  $B$  的差, 记为  $A - B$

#### 2.1.2 性质

该部分运算性质与数的运算完全相同, 不再赘述

### 2.2 矩阵乘法

#### 2.2.1 定义

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times s}$ ,  $C = (c_{ij})_{m \times s}$ , 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, s,$$

称矩阵  $C$  为矩阵  $A$  与矩阵  $B$  的乘积, 记为  $C = AB$

### 2.2.2 性质

1.  $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{0}_{n \times s} = \mathbf{A}_{m \times s}$ ,  $\mathbf{0}_{s \times m} \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{0}_{s \times n}$
2.  $\mathbf{E}_m \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}$ ,  $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{E}_n = \mathbf{A}_{m \times n}$
3.  $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$  (乘法结合律)
4.  $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$
5.  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$  (左分配律),  $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$  (右分配律)

### 2.2.3 可换矩阵

**定义 2.2.1** 两个矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , 如果  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , 那么称矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  相乘可换, 简称  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  可换.

一些推论

1. 若  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  相乘可换, 则  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  必是同阶方阵
2. 单位矩阵和与之同阶的方阵相乘可换
3. 数量矩阵和与之同阶的方阵相乘可换
4. 同阶对角矩阵相乘可换

## 2.3 方阵的幂

**定义 2.3.1** 设  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶方阵,  $k$  为正整数,

$k$  个  $\mathbf{A}$  相乘称为  $\mathbf{A}$  的  $k$  次幂, 记为  $\mathbf{A}^k$ , 即  $\mathbf{A}^k = \overbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}^{k \text{ 个 } \mathbf{A}}$   
规定  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$

**性质 2.4** 设  $\mathbf{A}$  为方阵,  $k, l$  为非负整数, 则

$$\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}, (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}$$

**定义 2.4.1** 方阵的多项式

设  $\mathbf{A}$  是方阵,  $\mathbf{E}$  为与  $\mathbf{A}$  同阶的单位矩阵

称  $f(\mathbf{A}) = a_m \mathbf{A}^m + a_{m-1} \mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_0 \mathbf{E}$  是由  $f(x)$  决定的方阵  $\mathbf{A}$  的多项式

## 2.5 矩阵的转置

**定义 2.5.1** 设数域 $F$ 上的矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ , 称 $n \times m$ 的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $A$ 的转置矩阵, 记为 $\mathbf{A}^T$

**性质 2.6** 转置矩阵的运算性质

1.  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2.  $(\mathbf{B} + \mathbf{C})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$
3.  $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$
4.  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$   $(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_m)^T = \mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_{m-1}^T \cdots \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T$
5. 若 $\mathbf{A}$ 为方阵, 则 $(\mathbf{A}^m)^T = (\mathbf{A}^T)^m, m$ 为正整数
6.  $\mathbf{A}$ 为对称矩阵 $\Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}$ 为反对称矩阵 $\Leftrightarrow \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$

## 2.7 方阵的迹

**定义 2.7.1** 设数域 $F$ 上的方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ , 称 $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 为方阵 $A$ 的迹, 记

为 $tr(\mathbf{A})$ , 即 $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

**性质 2.8** 1.  $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$

$$2. tr(k\mathbf{A}) = ktr(\mathbf{A})$$

$$3. tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$$

$$4. tr(\mathbf{A}^T) = tr(\mathbf{A})$$



## 第三章 可逆矩阵



## 第四章 分块矩阵





## 第五章 矩阵的初等行变换

### 5.1 初等行变换

**定义 5.1.1** 矩阵的下面三种行为，称之为矩阵的初等行变换（行变换）：

1. 交换矩阵的 $i, j$ 两行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$
2. 矩阵的第 $i$ 行非零常数 $k$ 倍，记为 $kr_i$
3. 矩阵的第 $i$ 行的常数 $k$ 倍加到第 $j$ 行，记为 $r_j + kr_i$  (顺序不可反)

### 5.2 阶梯形矩阵

**定义 5.2.1** 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵，简称阶梯形矩阵：

1. 零行（元素全为零的行）排在所有非零行的下方
2. 每个非零行的第一个（从左至右）非零元（称为主元）的列标号，从上到下，严格递增

**定义 5.2.2** 一个阶梯形矩阵若满足下面两条性质，称之为（行）简化阶梯形（或行最简形）矩阵基本概念

1. 主元均为1
2. 主元所在列的其他元素全为零

**定理 5.3** 任何一个矩阵都可以经过初等行变换化为阶梯形矩阵或者简化阶梯形矩阵



## 第二部分

### 线性方程组



## 第六章 数域

1. 设 $F$ 为一个数集，如果 $F$ 中任意两个数做某种运算的结果仍属于 $F$ ，称数集 $F$ 对这种运算封闭
2. 设 $F$ 是包含0和1的数集，若 $F$ 对四则运算封闭，则称 $F$ 为一个数域，记为 $F$



## 第七章 线性方程组的基本概念

### 7.1 线性方程组定义

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为一个 $m$ 个方程 $n$ 个未知量的线性方程组，简记为 $m \times n$ 的线性方程组或线性系统。其中 $a_{ij} \in F, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 为未知变量， $a_{ij}$ 表示第 $i$ 个方程中的第 $j$ 个未知量 $x_j$ 前面的系数， $b_i$ 为第 $i$ 个方程的常数项。

### 7.2 解集的定义

若存在一组数  $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$  满足方程组的每个方程，则称 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$  为方程组的一组解或者一个解，记为 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ .方程组的全体解所构成的集合称为该方程组的解集。

### 7.3 同解方程组

如果两个方程组的解集相同，则称这两个方程组为同解方程组或者两个方程组同解。





## 第八章 解的判别与求法

### 8.1 线性方程组的消元法

直接对方程组进行消元等操作，此处不再赘述

### 8.2 高斯消元法

线性方程组对应的增广矩阵 $\tilde{A}$ 通过初等行变换化为一个（简化）阶梯形矩阵，通过（简化）阶梯形矩阵求解线性方程组的方式，称为线性方程组的高斯消元法。

#### 8.2.1 定理：解的不变性

线性方程组的高斯消元法得到的新方程组与原方程组同解

#### 8.2.2 定理：线性方程组解的判别

$m \times n$ 的线性方程组，其增广矩阵化为阶梯形矩阵有 $r$ 个非零行，其中对应于方程组的系数矩阵部分有 $s$ 个非零行.则线性方程组有解的充分必要条件为 $s = r$ 且

1.  $s = r = n$ ，原方程组有唯一解
2.  $s = r < n$ ，原方程组有无穷多解
3.  $s < r$ ，原方程组无解

#### 8.2.3 推论：齐次线性方程组解的判别

$m \times n$ 的齐次线性方程组，其系数矩阵的阶梯形的非零行数为 $s$ ，则

1. 齐次线性方程组唯一零解的充分必要条件为 $s = n$

2. 其次线性方程组有无穷多解, 即有非零解的充分必要条件为  $s < n$
3. 如果  $m < n$ , 则齐次线性方程组必有非零解

### 8.2.4 解题方法: 非齐次方程组的求解

1. 将增广矩阵初等行变换到阶梯形
2. 判断解的情况
3.
  - 有解时, 进一步做初等行变换到简化阶梯形
  - 若有唯一解, 则直接写出
  - 若有无穷多解, 写出简化阶梯形对应的方程组, 从而确定自由未知量, 写出所有解 (称为一般解)。

### 8.2.5 解题方法: 齐次方程组的求解

1. 将系数矩阵初等行变换到阶梯形
2. 判断解的情况
3.
  - 若有只有零解, 则直接写出
  - 若有非零解, 写出简化阶梯形对应的方程组, 从而确定自由未知量, 写出所有解 (称为一般解)。

## 第三部分

### 行列式



## 第九章 行列式的定义

### 9.1 二阶，三阶行列式

**定义 9.1.1 二阶行列式**

设2阶方阵 $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ ，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为2阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式,记为 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$

$a_{ij}$ 为该行列式的元素

通常用字母 $D$ 来表示行列式

**定义 9.1.2 三阶行列式**

设3阶方阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ ，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

为3阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式,可记为 $|a_{ij}|_3$ 或 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$

其中的二阶行列式为依次划去 $a_{1j}(j = 1, 2, 3)$ 所在的行(第1行)和列(第 $j$ 列),剩下的元素按原来的位置不动得到的行列式

## 9.2 n阶行列式

### 定义 9.2.1 余子式和代数余子式

设 $n$ 阶方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

划去 $a_{ij}$ 所在的行（第 $i$ 行）和列（第 $j$ 列），剩下的元素按原来的相对位置不动构成 $n-1$ 阶方阵，它的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记为元素 $a_{ij}$ 的余子式，记为 $\mathbf{M}_{ij}$

称 $(-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，记为 $\mathbf{A}_{ij}$ ，即 $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}$

### 定义 9.2.2 n阶行列式

设 $n$ 阶方阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 $n$ 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式记为 $|a_{ij}|_n$ ，或 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$

当 $n=1$ 时， $|\mathbf{A}| = |a_{11}| = a_{11}$

当 $n \geq 2$ 时， $|\mathbf{A}| = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \cdots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}\mathbf{A}_{1k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k}a_{1k}\mathbf{M}_{1k}$

其中 $\mathbf{A}_{1k}$ 为 $a_{1k}$ 的代数余子式， $\mathbf{M}_{1k}$ 为 $a_{1k}$ 的余子式

### 定义 9.2.3 使用列的等价定义

$$|\mathbf{A}| = |a_{ij}|_n = \sum_{i=1}^n a_{i1}\mathbf{A}_{i1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}a_{i1}\mathbf{M}_{i1}$$