Flipping game under the perspective of Linear Algebra

寻找变化中的不变量

俞奕成

2022 年 11 月 15 日

目录

第一部分 Introduction

1 开端：2阶翻棋游戏的具体描述

问题的开始是一个简单的二阶翻棋游戏：

初始状况：

在2×2的棋盘上，随机放置着一些棋子，这些棋子一面是黑色，一面是白色，向上面的颜色完全随机

允许对这些棋子进行如下操作：

每次选中一列或者一行棋子，将这一列或者一行棋子全部翻转。

游戏要求的最终结果：

如果有可能，在进行若干次操作之后，棋盘上的棋子变为全部黑色向上或全部白色向上。

游戏的解法：

一系列允许的操作，使得初始情况经过这些操作后变为最终结果

注意：

并不是所有棋盘都有可能达到最终要求，部分初始状况在操作后是不可能达到最终要求的

2 问题的提出

对于这个翻棋游戏，不难提出如下问题:

1. 有没有方法，在给出任意一种棋盘的初始状况后，快速的判断出该棋盘是否有可能达到要求的结果（向上面全黑或全白）？

2. 有没有方法，对于给出的任意一种棋盘的初始状况，如果有可能达到要求结果，都能找出一种能该游戏的解法？

3 过程和问题的抽象化

棋盘，黑棋子，白棋子显然不利于我们以线性代数的方式来思考问题。所以，我们应该借助线性代数的概念将问题抽象化：
定义棋盘为一个2×2的矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

定义：白棋子为1，黑棋子为-1
由此可知，矩阵的初始情况的所有元素都是随机的1和-1
例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

允许的操作也可以对应到矩阵的变换：将某一行（列）的元素全部乘以1或者-1
不难发现这个操作就是矩阵的一种初等行（列）变换
游戏的要求——最终变为全黑或者全白，也可以对应到元素全为-1或者元素全为1的矩阵，即

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{全黑}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{全白})$$

4　具体问题的扩展

只要将翻棋游戏的定义中2×2棋盘改为$n \times n$棋盘，而其他定义不变，翻棋游戏的规则就可以很容易地扩展到$n \times n$的棋盘上。
两个问题在$n \times n$棋盘的情况下仍然存在并且可以讨论。

5　抽象定义的扩展

只需将2×2的矩阵扩展为$n \times n$的矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

游戏要求的最终结果也进行对应扩展：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

其余定义不变，即可将抽象定义扩展到$n \times n$

第二部分　初始简单情况的规律与分析

先从2×2的情况开始分析，由于这种情况很简单，初始情况只有$2^4 = 16$种，我们不妨把每种情况都枚举一下，并进行分类：
分类为可以转化的：$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots$
和不能转化的：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
能转化的矩阵自然可以直接给出方法，而不能给出的矩阵需要进行证明，下面给出一种简易的证明：
每一次操作改变的元素都是偶数个，故不会改变矩阵内所有元素的乘积，初始状况所有元素乘积是-1的矩阵无论经过多少次变化，乘积仍然是-1，而不难发现最后全黑或者全白的话，所有元素的乘积是1，故这些矩阵不可能变为全黑或者全白
我们可以发现以上的证明过程已经给出了一种判断2×2矩阵是否可以达到最终结果的特征：即

1. 若所有元素乘积为1，则可以转化

2. 若所有元素乘积为-1，则不能转化

对这些矩阵的特点进行分析,不难发现另外一些可以用于判断的特征:
设初始矩阵为A,发现

1. 能够转化的矩阵均有行列式为0（$det(A) = 0$）

2. 而不能转化的矩阵均有行列式不为0（$det(A) \neq 0$）

由于2×2的情况全部都枚举出来了，所以上面那些检验标准的正确性都可以直接验证。

第三部分　使用线性代数的方式分析该问题

6　很多2阶标准并不适用于高阶情况

接下来我们要考虑$n \times n$的情况了。
首先可以尝试将前面提出的2阶情况下的两种判断标准直接扩展到高阶。
但是可以发现直接使用元素乘积判断显然是不可行的，因为一次操作会改变奇数个元素
而直接使用行列式判断也不可行，因为可以举出反例：
例如三阶行列式 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 并不能化为需要的最终结果，但是它的行列式却是0
可见前面的两个适用于2阶的标准并不适用于高阶的一般情况。

7　引入更多线性代数的概念和思考方式

前面的第二种采用行列式的思考方式虽然不能直接扩展，但尝试将它推广很容易让我们联想到线性代数中的一个概念——矩阵的秩。这样做有两个好处：

1. 我们允许的操作是初等行（列）变换，这个过程中矩阵的秩具有不变性，对分析有利

2. 2阶情况下，对非零矩阵（这边的初始情况当然不可能是零矩阵）而言，行列式等于0与秩为1是等价的，猜想这可能是更好的推广方式。

第四部分　一般化情况的分析与思考

8　判断标准:矩阵的秩为1

前面已经提到了猜想，秩为1是很有可能是一个正确的判断方法。我们可以列举几个高阶情况，发现这个标准都是正确的。由于变换（操作）过程中矩阵的秩不变，我们希望寻找变化中的不变，这样易于解决问题。因此对于不变的最终结果——全黑或者全白矩阵进行分析，我们发现这两个矩阵的秩可能等于1。下面给出简易证明：

9 寻找更直观的判断方式

但是，当矩阵的阶数很高的时候，想要快速的求出一个没有规律的矩阵的秩，或者得知它的秩是否是1是相当复杂而耗时的。于是我们考虑换个角度，引入线性代数中和矩阵十分相关的概念——向量组。

10 找出一般化解答方法

第五部分 该类问题一般解法的实现与分析

11 回顾解决翻棋游戏的过程：对线性代数中不变量的思考

12 关于其他学科及生活中不变量的思考