Flipping game under the perspective of Linear Algebra
寻找变化中的不变量

俞奕成

2022 年 11 月 3 日

目录

第一部分 Introduction

1 开端：2阶翻棋游戏的具体描述

问题的开始是一个简单的二阶翻棋游戏：

初始状况：

在2×2的棋盘上，随机放置着一些棋子，这些棋子一面是黑色，一面是白色，向上面的颜色完全随机

允许对这些棋子进行如下操作：

每次选中一列或者一行棋子，将这一列或者一行棋子全部翻转。

游戏要求的最终结果：

如果有可能，在进行若干次操作之后，棋盘上的棋子变为全部黑色向上或全部白色向上。

游戏的解法：

一系列允许的操作，使得初始情况经过这些操作后变为最终结果

注意：

并不是所有棋盘都有可能达到最终要求，部分初始状况在操作后是不可能达到最终要求的

2 问题的提出

对于这个翻棋游戏，不难提出如下问题:

1. 有没有方法，在给出任意一种棋盘的初始状况后，快速的判断出该棋盘是否有可能达到要求的结果（向上面全黑或全白）？

2. 有没有方法，对于给出的任意一种棋盘的初始状况，如果有可能达到要求结果，都能找出一种能该游戏的解法？

3 过程和问题的抽象化

棋盘，黑棋子，白棋子显然不利于我们以线性代数的方式来思考问题。所以，我们应该借助线性代数的概念将问题抽象化：

定义棋盘为一个2×2的矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

定义：白棋子为1，黑棋子为-1
允许的操作也可以对应到矩阵的变换：将某一行（列）的元素全部乘以1或者-1
不难发现这个操作就是矩阵的一种初等行（列）变换
游戏的要求——最终变为全黑或者全白，也可以对应到元素全为-1或者元素全为1的矩阵，即

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{全黑}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{全白})$$

4 具体问题的扩展

只要将翻棋游戏的定义中2×2棋盘改为$n \times n$棋盘，而其他定义不变，翻棋游戏的规则就可以很容易地扩展到$n \times n$的棋盘上。
两个问题在$n \times n$棋盘的情况下仍然存在并且可以讨论。

5 抽象定义的扩展

只需将2×2的矩阵扩展为$n \times n$的矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

游戏要求的最终结果也进行对应扩展：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

其余定义不变，即可将抽象定义扩展到$n \times n$

第二部分 初始简单情况的规律与分析

先从

第三部分　使用线性代数的方式分析该问题

第四部分　一般化情况的分析与思考

第五部分　该类问题一般解法的实现与分析