

## Problem 1 DIY 手工 (diy)

**题目大意：**给定一个整数  $N$ ，要求找出  $N$  的三个因子  $L$ ， $W$  和  $H$ ，使得  $L+W+H$  恰好等于  $N$ ，且使得  $L*W*H$  尽可能大。

第一种方法：打表。因为  $N$  最大只有  $10^6$ ，可以在考试时枚举每一个可能的  $N$ ，找出  $N$  的所有因子，然后两两枚举得到  $L$  和  $W$ ，再计算  $H=N-L-W$ ，判断  $H$  是否整除  $N$ ，若整除，则用  $L*W*H$  更新答案，保存到表里。

第二种方法：找规律。打表后不难发现规律。具体规律与第三种方法雷同，见下文。

第三种方法：因为  $L$ ， $W$  和  $H$  均是  $N$  的因子，且  $L+W+H=N$ ，左右同时除以  $N$  后发现， $L$ ， $W$  和  $H$  之间的比例只能是  $1=1/2+1/3+1/6=1/3+1/3+1/3=1/2+1/4+1/4$  这三种情况之一。显然，若符合第一种情况，则  $N$  是 6 的倍数，也即  $N$  必定是 3 的倍数，但第二种情况的三个数的乘积要更大，所以第一种情况可以不做考虑。于是乎，我们只需要判断  $N$  是否 3 的倍数，若是，答案为  $(N/3)^3$ ；若不是，则判断  $N$  是否 4 的倍数，若是，答案为  $(N/2)*(N/4)^2$ ；否则无解。

## Problem 2 魔塔 (tower)

**题目大意：**给定勇士和  $N$  个怪物的  $k$  个属性值，若勇士的  $k$  个属性值都大于等于某个怪物的相应属性值，则勇士可以把这个怪物干掉。干掉后勇士的属性值会有所增长。问勇士最多能干掉多少个怪物。

第一种方法：暴力。每个回合都把  $N$  个怪物都扫一遍，若勇士打得过某个怪物，就直接把它干掉，否则跳过。一个回合下来，勇士的属性值有所增长，再重新从头扫一遍，循环往复。直到某个回合，发现已经没有怪物可打，属性值也没法再增长，则停下来。时间复杂度为  $O(N^2*K)$ 。

第二种方法：堆。建立  $K$  个小根堆，先把所有怪物按第一属性为关键字放入第一个堆。然后每轮操作均从第一个堆开始，检查堆顶元素对应的第一属性值是否比勇士对应属性值小，若是则弹出放入第二个以第二属性值为关键字的小根堆；同样的检查第二个堆的堆顶元素对应的第二属性值是否比勇士对应属性值小，若是则弹出放入第三个以第三属性值为关键字的小根堆；……直到第  $K$  个堆，若弹出第  $K$  个堆，说明该怪物的  $K$  个属性值都小于等于勇士的属性值，通过打败该怪物来更新勇士的属性值。每个怪物最多入堆出堆  $K$  次，所以时间复杂度为  $O(KN\log N)$ 。

## Problem 3 趣味运动会 (sport)

**题目大意：**给你  $N$  个点的图，一开始图中没有边，然后有  $M$  个操作，每次操作都给图中加一条本来不存在的边，或者删去一条已有的边。每次修改后，要求输出恰好匹配  $1, 2, \dots, N/2$  对点的方案数。

**50 分做法：**枚举。因为  $N \leq 6$ ，最多只有三个匹配，也即三条边，只选一条边的方案数为边的个数，然后因为最多只有 15 条边，我们可以两两枚举边，统计选两条边的方案数；同时，因为只有六个点，选了两条边后，可能存在的第三条边  $(u, v)$  是确定的，但需要判断一下该边是否存在，若存在就累加一下答案。

**100 分做法：**状压 DP。用  $f[i][S]$  表示前  $i$  个操作都考虑上以后，已匹配的顶点状态为  $S$  的方案数。于是，加入一条新的边后，所有方案可以分为两类，第一类是包含新加的边，第二类是不包含新加的边。两类方案的方案数分别为  $f[i-1][S - (1 \ll u) - (1 \ll v)]$  和  $f[i-1][S]$ ，

$$f[i][S] = f[i-1][S] + f[i-1][S - (1 \ll u) - (1 \ll v)]$$

至于删边，就是把加边逆过来，

$$f[i][S] = f[i-1][S] - f[i-1][S - (1 \ll u) - (1 \ll v)]$$

时间复杂度为  $O(M \cdot 2^{(N/2)})$ 。

更多咨询：北京文博老师 337708923