概率论与数理统计总结

刘阳

2019 年 6 月 5 日

目录

1 第一章 概率论的基本概念

1.1 随机试验

随机试验:
1. 可以在相同条件下重复地进行;
2. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确实验的所有可能结果;
3. 进行一次实验之前不能确定哪一个结果会出现.

1.2 样本空间、随机事件

1.2.1 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 **随机试验**.

样本空间的元素，即 E 的每个结果称为 **样本点**.

1.2.2 随机事件

试验 E 的样本空间 S 的子集称为 **随机事件**，简称 **事件**.

每次试验中，当且仅当这一子集的一个样本点出现称为 **事件发生**.

有一个样本点组成的单点集称为 **基本事件**.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，S 成为 **必然事件**.

空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，他在每次试验中都不发生，$\emptyset$ 称为 **不可能事件**.

1.2.3 事件间的关系与事件的运算

1. 若 $A \subset B$ ，则称事件 B 包含事件 A ，这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.
   若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，即 $A = B$ ，则称事件 A 与事件 B **相等**.
2. 事件 $A \cup B = \{x | x \in A\ x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的 **和事件**. 当且仅当 A, B 中至少一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生.
   类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 **和事件**；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

3. 事件 $A \cap B = \{x|x \in A\ x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的 **积事件**. 当且仅当 A, B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记作 AB .
   类似地，称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 **积事件**；称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

4. 事件 $A - B = \{x|x \in A\ x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的 **差事件**. 当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A - B$ 发生.

5. 若 $A \cap B = \emptyset$ 则称事件 A 与事件 B 是 **互不相容的**，或 **互斥的**. 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生. 基本事件也是两两互不相容的.

6. 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为 **逆事件**. 又称事件 A 与事件 B 互为 **对立事件**. 这指的是对每次试验而言, 事件 A, B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\bar{A}$. $\bar{A} = S - A$

交换律: $A \cup B = B \cup A$;
$A \cap B = B \cap A$.

结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

德摩根律: $A \bar{\cup} B = \bar{A} \cap \bar{B}$; $A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1.3 频率与概率

1.3.1 频率

在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 n_A 称为事件 A 发生的 **频数**. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的 **频率**，并记成 $f_n(A)$

性质:

1. $0 \le f_n(A) \le 1$;
2. $f_n(S) = 1$;
3. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则 $f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$.

1.3.2 概率

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$ ，称为事件 A 的 **概率**，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件:

1. **非负性:** 对于每一个事件 A ，有 $P(A) \geq 0$;
2. **规范性:** 对于必然事件 S ，有 $P(S) = 1$;
3. **可列可加性:** 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j = \emptyset$ ，$i \neq, i, j = 1, 2, \cdots$ ，有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$.

性质:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.
3. 设 A, B 是两个事件，若 $A \subset B$ ，则有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$; $P(B) \geq P(A)$.
4. 对于任一事件 A ，$P(A) \leq 1$.
5. 对于任意两事件 A, B 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

1.4 等可能概型（古典概型）

1. 试验的样本空间只包含有限个元素.
2. 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验称为 **等可能概型**. 它在概率论发展初期曾是主要的研究对象，所以也成为 **古典概型**.

设试验的样本空间为 $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 若 A 包含 k 个基本事件则有:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{e_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}}$$

超几何分布的概率公式:

$$p = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

1.5 条件概率

1.5.1 条件概率

设 A, B 是两个事件，且 $P(A) > 0$ ，称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生下事件 B 发生的 **条件概率**.

1.5.2 乘法定理

设 $P(A) > 0$ 则有 $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

1.5.3 全概率公式和贝叶斯公式

全概率公式: 设试验 E 的样本空间为 S ,A 为 E 的事件,$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，则:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

贝叶斯（ Bayes ）公式: 设试验 E 的样本空间为 S ，A 为 E 的事件,$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，则:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

1.6 独立性

设 A, B 两事件如果满足等式 $P(AB) = P(A)P(B)$ 则称事件 A, B **相互独立**，简称 A, B **独立**.

定理:
1. 设 A, B 是两事件, 且 $P(A) > 0$. 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A) = P(B)$. 反之亦然.
2. 若事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立: A 与 $\bar{B}$ ，$\bar{A}$ 与 B ，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$.

一般，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $n (n \geq 2)$ 个事件，如果对于其中任意 2 个，任意 3 个，$\cdots$ ，任意 n 个事件的积事件的概率，都等于各事件概率之积，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

推论: 1. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$ 相互独立，则其中任意 $k(2 \leq k \leq n)$ 个事件也是相互独立的.

2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$ 相互独立,则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们各自的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

2 第二章 随机变量及其分布

2.1 随机变量

2.2 离散型随机变量及其分布率

2.3 随机变量的分布函数

2.4 连续型随机变量及其概率密度

2.5 随机变量的函数的分布

3 第三章 多维随机变量及其分布

3.1 二维随机变量

3.2 边缘分布

3.3 条件分布

3.4 相互独立的随机变量

3.5 两个随机变量的函数的分布

4 第四章 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

4.2 方差

4.3 协方差及相关系数

4.4 矩、协方差矩阵

5 第五章 大数定律及中心极限定理

5.1 大数定律

5.2 中心极限定理

6 第六章 样本及抽样分布

6.1 随机样本

6.2 直方图和箱线图

6.3 抽样分布

7 第七章 参数估计