5 Simulation d'un système dynamique

Exercice 5.1 *Simulation d'un pendule*

On considère un pendule décrit par l'équation différentielle suivante :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta - \mu\dot{\theta} + u,$$

où θ représente l'angle du pendule. On prendra $m = 1kg$, $\mu = 0.1$, $g = 9.81ms^{-2}$ et $\ell = 2m$. On initialise le pendule à l'instant $t = 0$ avec $\theta = 1\text{rad}$ et $\dot{\theta} = 0$ rad.s^{-1}. Puis, on lâche le pendule. Ecrire un programme qui détermine l'angle du pendule à l'instant $t = 1s$. Le programme devra utiliser une méthode d'Euler et une méthode de Runge Kutta à l'ordre 2 :

— Méthode d'Euler :

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, u_n)$$

— RK2 :

$$x_{n+1} = x_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}f(x_n, u_n), u_n\right)$$

On souhaite :

— visualiser l'évolution du pendule

— enregistrer l'état du pendule

— visualiser a posteriori les courbes en fonction du temps

Pour cela voici les étapes à suivre :

1. créer une fonction qui représente l'équation d'évolution du système ;
2. initialiser les conditions initiales de la simulation ;
3. créer une boucle qui donne une solution avec la méthode d'Euler qui affiche la position du pendule et qui stocke le résultat pour un post traitement ;
4. afficher la trajectoire dans le plan de phase.
5. refaire le même travail mais avec la méthode de Runge Kutta à l'ordre 2 (RK2).
6. faire une étude de sensibilité à l'amortissement μ en allant jusqu'à $\mu = 0$. Que pensez-vous des 2 méthodes ?

Exercice 5.2 *Système de Van der Pol*

On considère le système décrit par l'équation différentielle suivante : :

$$\ddot{y} + \left(y^2 - 1\right)\dot{y} + y = 0.$$

On choisit pour vecteur d'état $\mathbf{x} = (y \quad \dot{y})^{\mathrm{T}}$.

1. Donner les équations d'état du système.
2. Trouver un point d'équilibre.
3. Linéariser le système autour du point d'équilibre.
4. Calculer avec la fonction `eig` les valeurs propres de la matrice d'évolution et en déduire la stabilité du système.
5. On initialise le système en $\mathbf{x}_0 = (0.1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$. Simuler le système dynamique, dessiner la trajectoire $\mathbf{x}(t)$ du système en fonction du temps.
6. Comparer la trajectoire obtenue avec celle du système linéarisé.

Rappel : la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(y_n + \frac{h}{2} f\left(y_n\right)\right)$$

Exercice 5.3 *Conduite automatique d'une voiture : contexte et construction d'un simulateur*

Dans ce TD, nous allons traiter le cas d'une voiture qui roule sur une route inconnue et qui doit suivre un repère le long d'une route comme indiqué sur la figure 16. On considère que cette voiture est équipée des capteurs suivants :

— d'un télémètre mesurant la distance latérale d entre le milieu de l'essieu arrière de la voiture et le bord de la route (voir figure),

— d'un capteur de vitesse qui mesure la vitesse v des roues avant,

— d'un capteur d'angle qui mesure l'angle δ du volant (pour simplifier, nous allons supposer que δ correspond aussi à l'angle que forment les roues avant avec l'axe de la voiture).

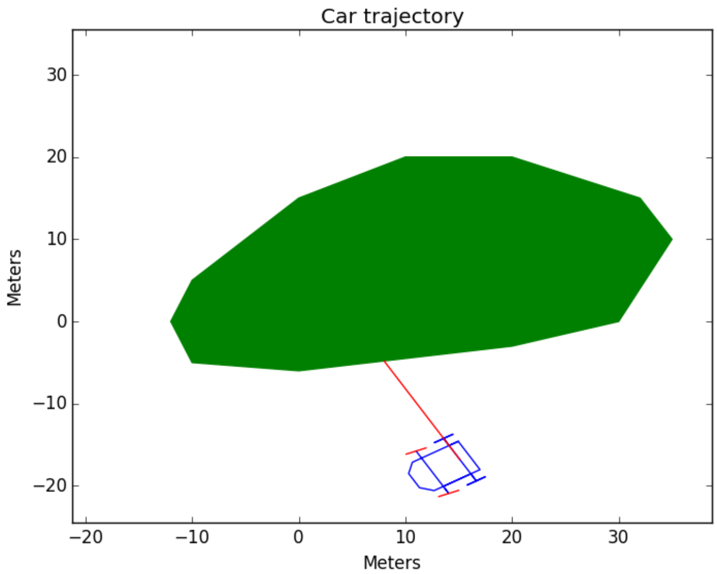

FIGURE 10 – voiture se déplaçant autour d'un polygone

On souhaite que la voiture se déplace à vitesse constante le long de la route dont la forme n'est pas connue a priori. De plus, les variables de position et d'orientation de la voiture ne sont pas mesurées (c'est-à-dire qu'on ne dispose ni de boussole, ni de GPS). Ce qui nous intéresse lorsque nous conduisons une voiture, c'est la position relative de la voiture par rapport à la route. Le monde vu par le régulateur est évoqué par la figure 17. Dans ce monde, la voiture se déplace latéralement, comme sur un jeu vidéo, et le bord de la route reste fixe.

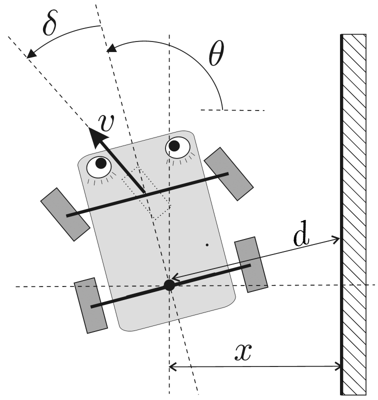

Figure 11 – Robot se déplaçant le long d'une route

Afin de concevoir le modèle pour notre régulateur, intéressons nous à la position relative de la voiture par rapport au bord de la route. Nous allons pour cela supposer que notre voiture roule à une distance $\bar{x}$ du bord.

1. Trouver les équations d'état qui permettent de simuler la voiture comme sur la figure16. avec $L = 3m$. Ici (x, y) représentent les coordonnées du centre de la voiture, θ son cap.
2. Faire évoluer votre voiture sans régulation en utilisant une méthode d'Euler ou de RK2. On pourra prendre une durée de simulation de 40 secondes et un pas d'intégration de 0.05.