2108 陈宇凡

1. Z Transform

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

先给出最经典的也是最重要的 Z 变换：

$$Z\{a^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$ROC: |az^{-1}| < 1 \qquad |z| > |a|$$

$$Z\{-a^n u[-n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u[-n-1]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} -a^n z^n = -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^n - 1\right) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$ROC: |a^{-1}z| < 1 \quad |a| > |z|$$

也就是说，根据 ROC 的变换其实我们可以得到两种不同的形式，那么下面以一个张老师上课给的题为例子，实操一次，看看究竟是怎么回事：
考虑我们有一个信号,Z 域上表征为

$$H(z) = \frac{\left[1-\frac{1}{3}z^{-1}\right]}{\left\{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})\right\}}$$

求离散时域上的$h[n]$

Step1:先对$H(z)$做分解，分解为分式加和的最简形式

$$H(z) = \frac{z^2-\frac{1}{3}z}{\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)\right\}}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{\left[z-\frac{1}{3}\right]}{\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)\right\}} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-2}$$

经过解待定系数方程可以得到：

$$A = -\frac{1}{9} \quad B = \frac{10}{9}$$

$$H(z) = \frac{-\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\left(\frac{10}{9}\right)}{1-2z^{-1}}$$

Step2:根据 ROC 对频域进行还原，得到时域表达
需要分类讨论 ROC：
如果 ROC 为$|z| > 2$，那么说明两个都是右边序列：

$$h[n] = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{10}{9}(2)^n u[n]$$

如果 ROC 为$|z| < \frac{1}{2}$，那么说明两个都是左边序列：

$$h[n]=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]-\frac{10}{9}2^n u[-n-1]$$

如果 ROC 为$\frac{1}{2}<|z|<2$，那么说明有一个是左边序列，一个是右边序列：

$$h[n]=-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{10}{9}2^n u[-n-1]$$

当然可能会给 ROC，那就会比较简单。也可能用别的问法来给出提示，一般是使用“稳定”、“因果”这些很关键的性质。

因果意味着$h[n]=h[n]u[n]$那么就会有：

$$Z\{h[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}h[n]z^{-n}$$

如果有收敛的 Z 变换结果（上面的 Z 变换结果都是取了极限之后的结果，属于是收敛的结果）那么就一定会有 ROC 形如：

$$|z|>R_{ROC}$$

稳定在这门课里一般意味着 BIBO 稳定，即 Boundary input Boundary output，有界输入有界输出。数学上等价于信号绝对可和：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|\text{收敛}$$

如果信号稳定，那么一定会有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|\geq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]$$

即取$|z|=1$时一定会有：

$|z|=1$被包含在了 ROC 之内即 Unit Circle 和 ROC 有交点

所以针对信号稳定和信号因果，我们给出例题的答案：

$$\begin{cases}\text{稳定}:\mathrm{h[n]}=-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{10}{9}2^n u[-n-1] & ROC:\frac{1}{2}<|z|<2\\ \text{因果}:\mathrm{h[n]}=-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{10}{9}(2)^n u[n] & ROC:|z|>2\end{cases}$$

再给出 Z 变换重要的性质：

$$-z\frac{d\{X(z)\}}{dz}=-z\frac{d\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}\right\}}{dz}=Z\{-nx[n]\}$$

2. DTFT(Discrete Time Fourier Transform):

$$DTFT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

线性性质:

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence	Fourier Transform
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n-n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

此处线性性质部分比较重要的是:

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{d\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right]}{d\omega} = -j\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]e^{-j\omega n} = -jDTFT\{nx[n]\}$$

从而会有:

$$DTFT\{nx[n]\} = j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

卷积性质:

6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Parseval's theorem:

8. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

9. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

此处卷积性质比较重要的部分是:

$$DTFT\{x[n] * y[n]\} = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

$$DTFT\{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

对称性质（对应 Oppenheimer Hilbert 变换章节）

我们考虑离散时域上的实序列$h[n]$,所以会有$h[n] = h^*[n]$

$$DTFT\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n} = H(e^{j\omega}) = Re\{H(e^{j\omega})\} + jIm\{H(e^{j\omega})\}$$

$$= |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$是偶函数　$\theta(\omega)$是奇函数

$$Re\{H(e^{j\omega})\} = |H(e^{j\omega})|\cos(\theta(\omega)) \qquad jIm\{H(e^{j\omega})\} = j|H(e^{j\omega})|\sin(\theta(\omega))$$

考虑做出$h[n]$的偶部和奇部：

$$h_{even}[n] = \frac{\{h[n] + h^*[-n]\}}{2} = \frac{\{h[n] + h[-n]\}}{2}$$

$$h_{odd}[n] = \frac{\{h[n] - h^*[-n]\}}{2} = \frac{\{h[n] - h[-n]\}}{2}$$

$$DTFT\{h^*[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^*[-n]e^{-j\omega n} = \left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[-n]e^{-j\omega(-n)}\right\}^* = \{H(e^{j\omega})\}^*$$

$$= \{|H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}\}^* = |H(e^{j\omega})|e^{-j\theta(\omega)}$$

从而：

$$DTFT\{h_{even}[n]\} = |H(e^{j\omega})|\left\{\frac{e^{j\theta(\omega)} + e^{-j\theta(\omega)}}{2}\right\} = Re\{H(e^{j\omega})\}$$

$$DTFT\{h_{odd}[n]\} = |H(e^{j\omega})|\left\{\frac{e^{j\theta(\omega)} - e^{-j\theta(\omega)}}{2}\right\} = Im\{H(e^{j\omega})\}$$

如果离散时域上序列$h[n]$是因果信号，那么会有：

$$h[n] = h[n]u[n]$$

我们还是可以分偶部和奇部：

$$h_{even}[n] = \frac{\{h[n] + h^*[-n]\}}{2}$$

$$h_{odd}[n] = \frac{\{h[n] - h^*[-n]\}}{2}$$

$$\begin{cases} h[n]\text{是实信号：偶部}h_{even}[n]\text{对应频域实部，奇部}h_{odd}[n]\text{对应频域虚部　模是偶函数，相角是奇函数} \\ h[n]\text{是因果信号：知道了 }x[0]\text{以及偶部奇部有一个就可以推出另外两个(Hilbert 变换)} \end{cases}$$

如果$h[n]$又是实信号，又是因果信号，就会有：

一定会有恒等式：

$$h[n] = 2h_{even}[n]u[n] - x[0]\delta[n] = 2h_{odd}[n]u[n] + x[0]\delta[n]$$

$$DTFT\{h_{even}[n]\} = Re\{H(e^{j\omega})\} \qquad DTFT\{h_{odd}[n]\} = Im\{H(e^{j\omega})\}$$

个人观点，对称性这块只需要记住两点：

1.实信号的时域偶部对应频域实部，时域奇部对应频域虚部；实信号的模是偶函数，相角是奇函数。

2.实因果信号可以表示为上方给出的恒等式，知道$x_{even}[n]$其实就全都知道了，因为$x_e[n] = \frac{\{x[n]+x[-n]\}}{2}$ $x_e[0] = x[0]$从而知道$x_{even}[n]$其实也知道了$x[0]$从而所有都已知。

3. Discrete Convolution

Linear Convolution:

已知有两个离散时间序列$x_1[n]$ $x_2[n]$对这两个序列做线性卷积

Situation 1:如果这两个序列的长度都是无限的，直接使用定义即可：

Example of situation 1:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-10]$$

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u[n-k-10]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-10} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n-10} \left(\frac{1}{2}\right)^k (3)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n-10} \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

Situation 2:如果这两个序列的长度都不是无限的，这个时候两种做法都可以：

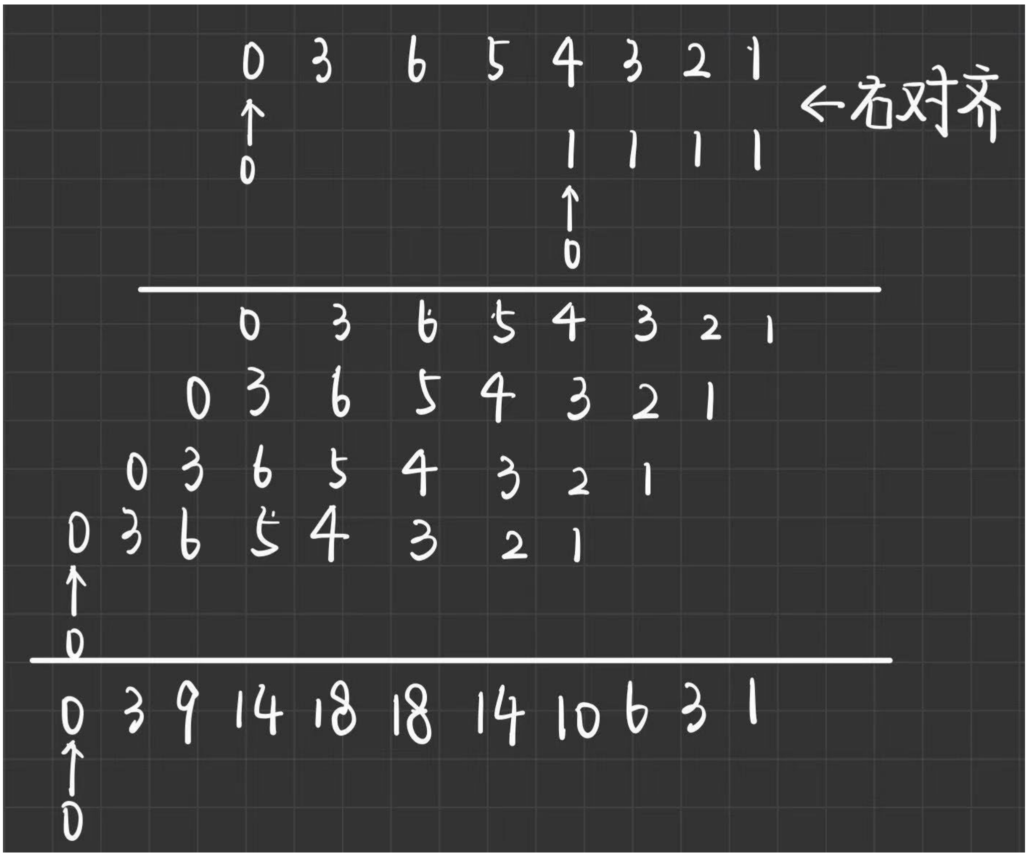
要么列竖式直接右对齐，然后做乘法计算。注意好 n=0 的点位，然后得到结果；

要么对一个序列进行翻转，另一个序列不动，而后移动进行了翻转的序列，做多次计算。

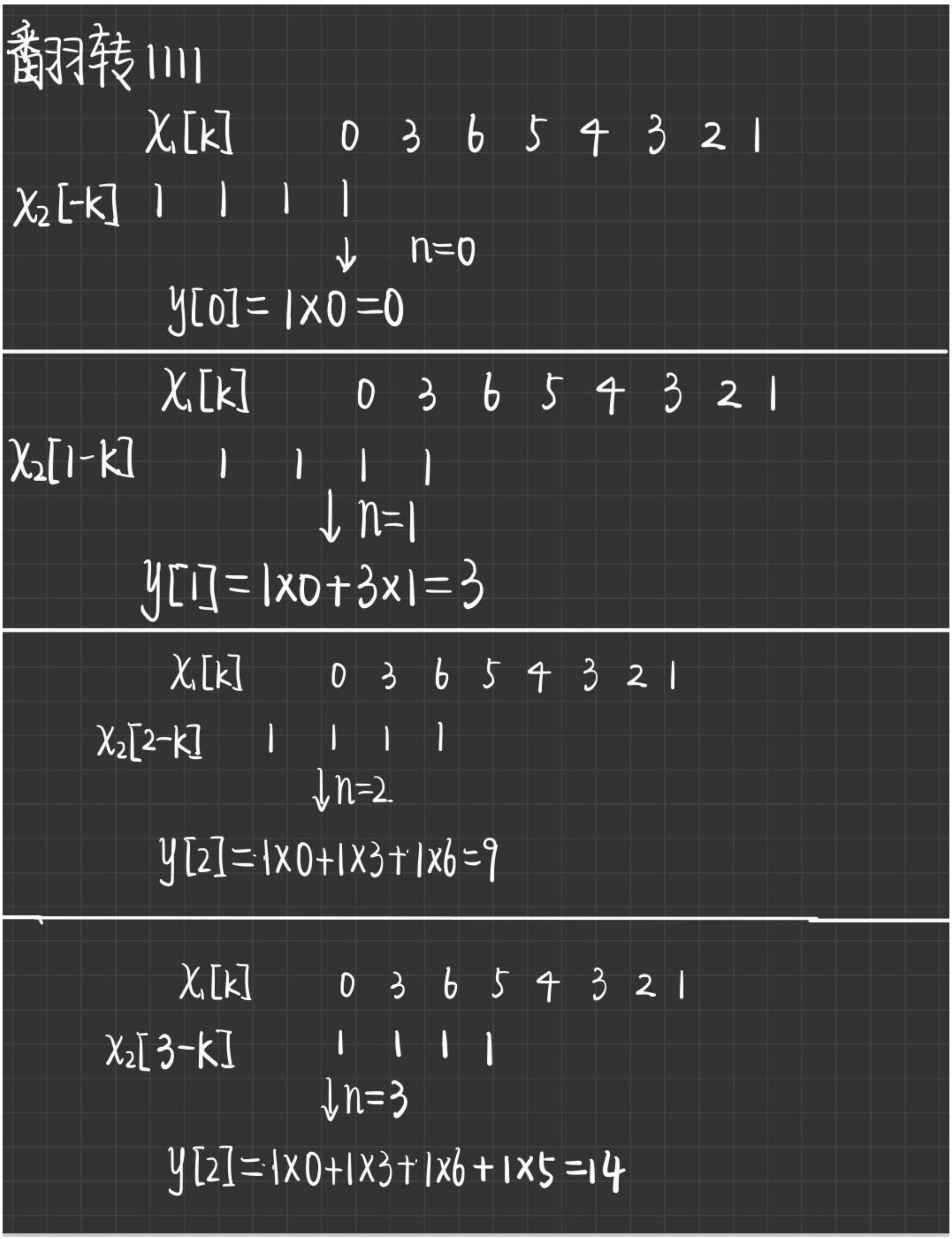
Example of situation 2:

[1 1 1 1] 与 [0 3 6 5 4 3 2 1] 的线性卷积

法 1:



法 2:



只给出了部分过程，剩下的过程同理。

Situation 3：一个序列是无限长的，另一个序列是有限长的

不妨假定无限长序列为$x_1[n]$，给出有限长序列$x_2[n]$

$$[1\ 1\ 1\ 1]$$

那么$x_2[n]$可以拆分为$x_2[n] = 1 * \delta[n] + 1 * \delta[n-1] + 1 * \delta[n-2] + 1 * \delta[n-3]$

$$x_2[n] * x_1[n] = \{1 * \delta[n] + 1 * \delta[n-1] + 1 * \delta[n-2] + 1 * \delta[n-3]\} * x_1[n]$$

根据$\delta[n-n_d]*x[n]=x[n-n_d]$有:

$$x_2[n]*x_1[n]=x_1[n]+x_1[n-1]+x_1[n-2]+x_1[n-3]$$

张老师的要求是，只到这一步表示即可以结束了。

Circle Convolution

已知有两个离散时域序列$x_1[n]$ $x_2[n]$

给出它们做圆卷积的操作步骤

$$x_1[n]\overset{L}{\otimes}x_2[n]=y[n]$$

做 L 点的圆卷积，这个时候分为下面的步骤:

Step1:直接先做线性卷积求$t[n]=x_1[n]*x_2[n]$,显然$t[n]$是一个有限长的离散时域序列

Step2:再将$t[n]$做周期延拓：$\tilde{t}[n]=t[(n)_L]$

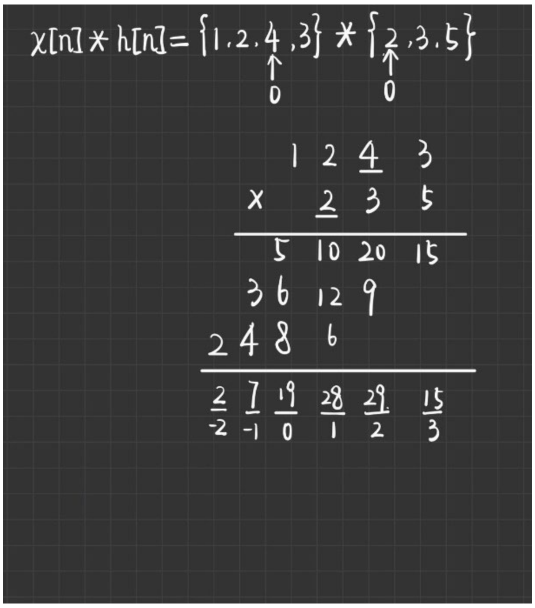
Example:

例题:

设线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入序列 $x(n)$ 如下，求它们的 4 点圆周卷积、 5 点圆周卷积和 7 点圆周卷积

$$x(n)=\{1,2,\underline{4},3\}$$
$$h(n)=\{\underline{2},3,5\}$$

Step1:先求线性卷积:



如果是做 4 点圆周卷积:

$$\tilde{t}[n]=\{19,28,31,22\}\text{循环}$$

如果是做 5 点圆周卷积:

$$\tilde{t}[n]=\{19,28,29,17,7\}\text{循环}$$

如果是做 7 点圆周卷积:

$$\tilde{t}[n] = \{19,28,29,15,0,2,7\}\text{循环}$$

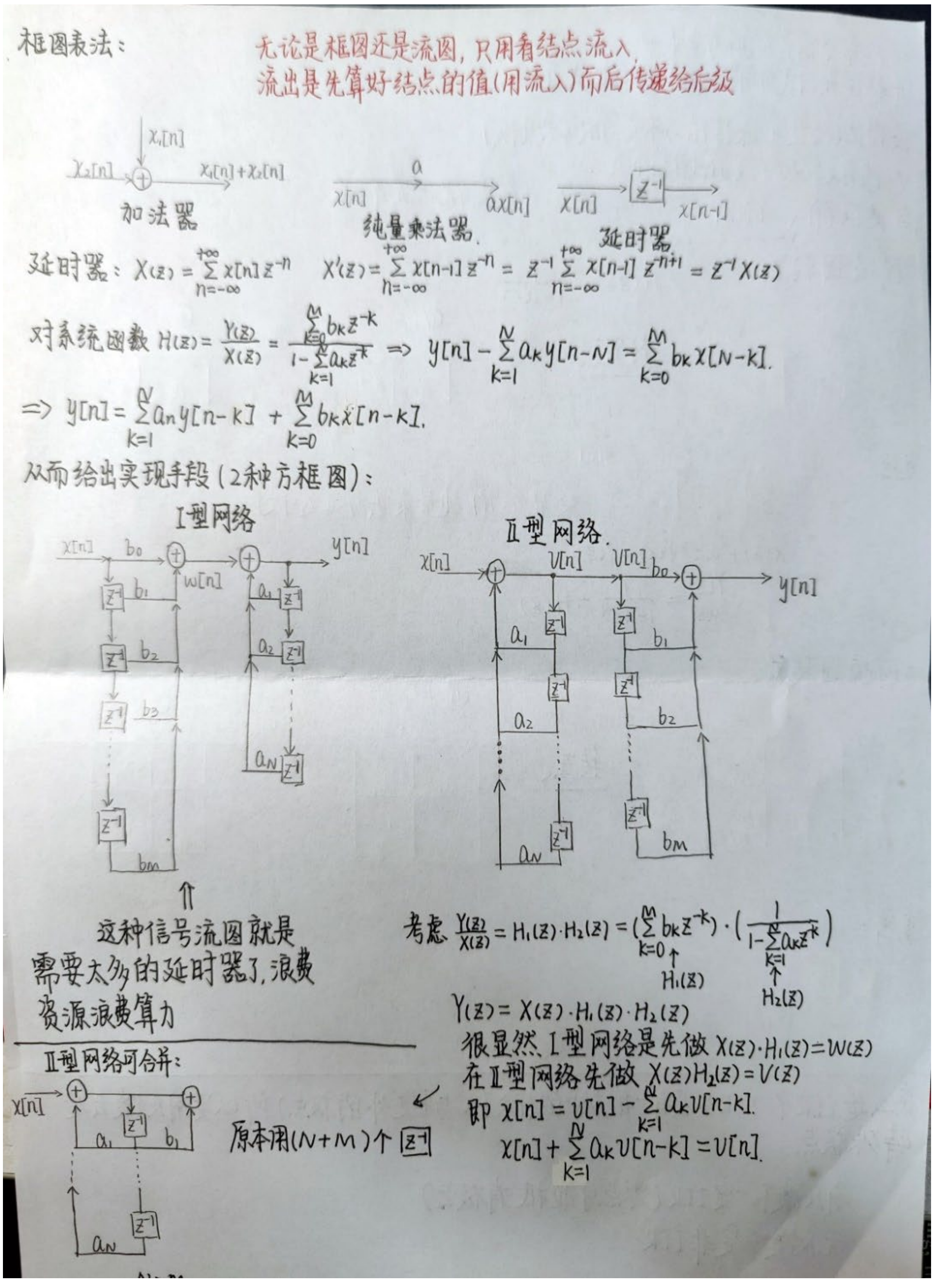
上面三个情况之中，19 都对应着这个循环序列的 n=0 点

循环卷积还与 DFT 有关,考虑 L 点 DFT

$$DFT\left\{x_1[n] \overset{L}{\otimes} x_2[n]\right\} = DFT\{x_1[n]\}\, DFT\{x_2[n]\} = X_1(k)X_2(k)$$

4.信号流图和信号框图以及格型滤波器

这一部分因为我很早就已经启动复习计划了，所以完成了手写版本的工作，在这里直接给出手写版本的图片，并且在这里主要针对例子进行分析。



框图表法：

无论是框图还是流图，只用看结点流入，
流出是先算好结点的值(用流入)而后传递给后级

延时器：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$　$X'(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-1]z^{-n} = z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-1]z^{-n+1} = z^{-1}X(z)$

对系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \Rightarrow y[n]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-N] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[N-k].$

$\Rightarrow y[n]=\sum_{k=1}^{N} a_n y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$

从而给出实现手段(2种方框图)：

I型网络

II型网络.

这种信号流图就是
需要太多的延时器了,浪费
资源浪费算力

考虑 $\dfrac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z)\cdot H_2(z) = \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}_{H_1(z)}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\dfrac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}}_{H_2(z)}\Big)$

$Y(z) = X(z)\cdot H_1(z)\cdot H_2(z)$

很显然 I 型网络是先做 $X(z)\cdot H_1(z) = W(z)$

在 II 型网络先做 $X(z)H_2(z) = V(z)$

即 $x[n] = v[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k v[n-k].$

$x[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k v[n-k] = v[n].$

II 型网络可合并：

原本用(N+M)个 $\boxed{z^{-1}}$

级联型是因式分解为连乘型。
并联型是因式分解多项式作多项式加法。

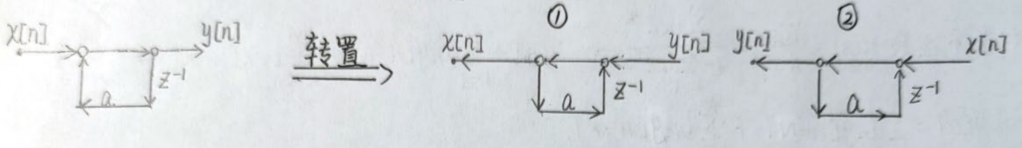
流图做转置（保持$H(z)$不变，做等效互换）

① 所有支路反向，支路增益不变
② 更换输入、输出。

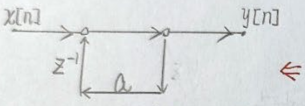
⟹ 2步走就一定不错。

一阶流图转置：

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$



重画：

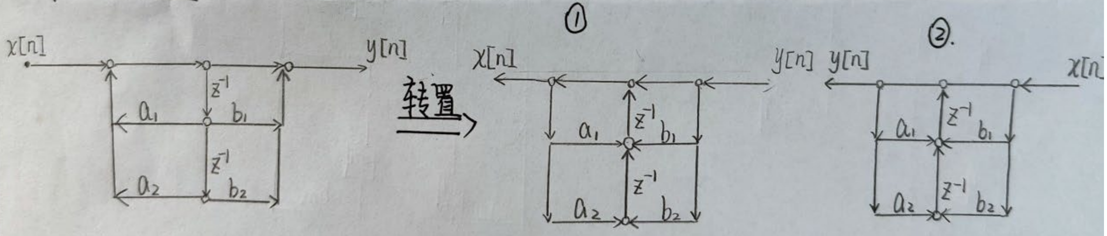


⇐ 显然的，纯量乘法与延迟可交换

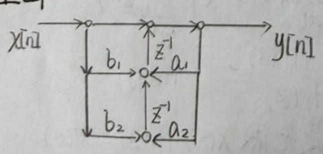
$$X(z)+az^{-1}Y(z)=Y(z).$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}}=H(z)$$

二阶流图转置：



重画：



怎么造IIR？FIR是没有一般极点的（除了∞与0之外的极点）所以要用反馈去造特殊极点。

有反馈不一定IIR（零点可能抵消极点）
无反馈一定非IIR.

其实流图部分和系统框图部分还是不难的，主要对我们的要求是给我们系统函数后，我们可以根据系统函数画出信号流图和框图；给出信号流图和框图后我们可以给出系统函数。下面举例子，操作一下。

都用 Oppenheimer 在书上给的例题:

考虑一 LTI 系统,其系统函数为

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.9z^{-2}}$$

下面,根据这个系统函数给出信号流图以及系统框图:

系统框图部分

$$H(z)=\frac{(1+2z^{-1})}{1-1.5z^{-1}+0.9z^{-2}}$$

$$H_1(z)=1+2z^{-1}$$

$$H_2(z)=\frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.9z^{-2}}$$

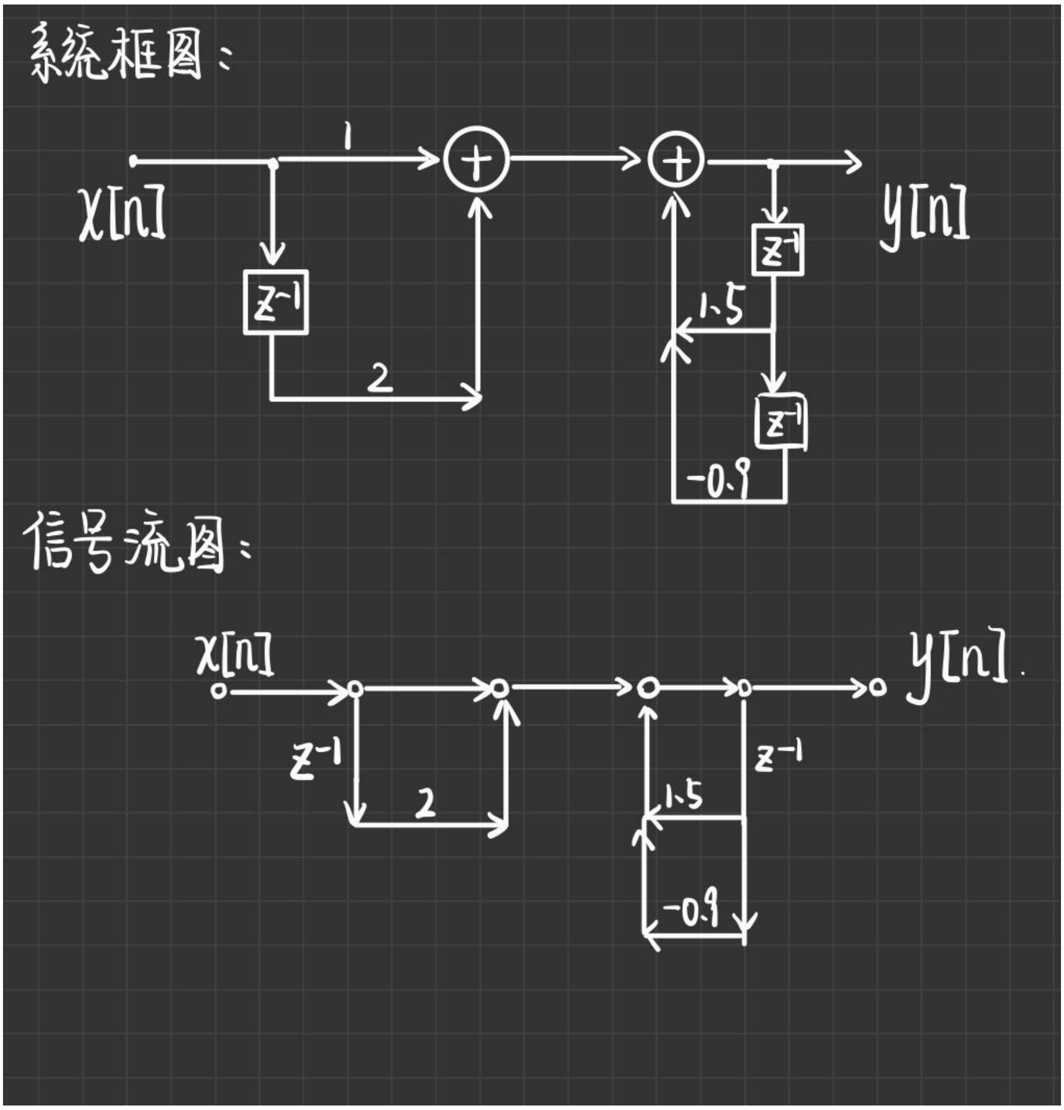
给入$x[n]$即给入$X(z)$会有两种路径,分别也对应两种不同种类的系统框图或者流图

路径 1:

$$W(z)=X(z)H_1(z)$$

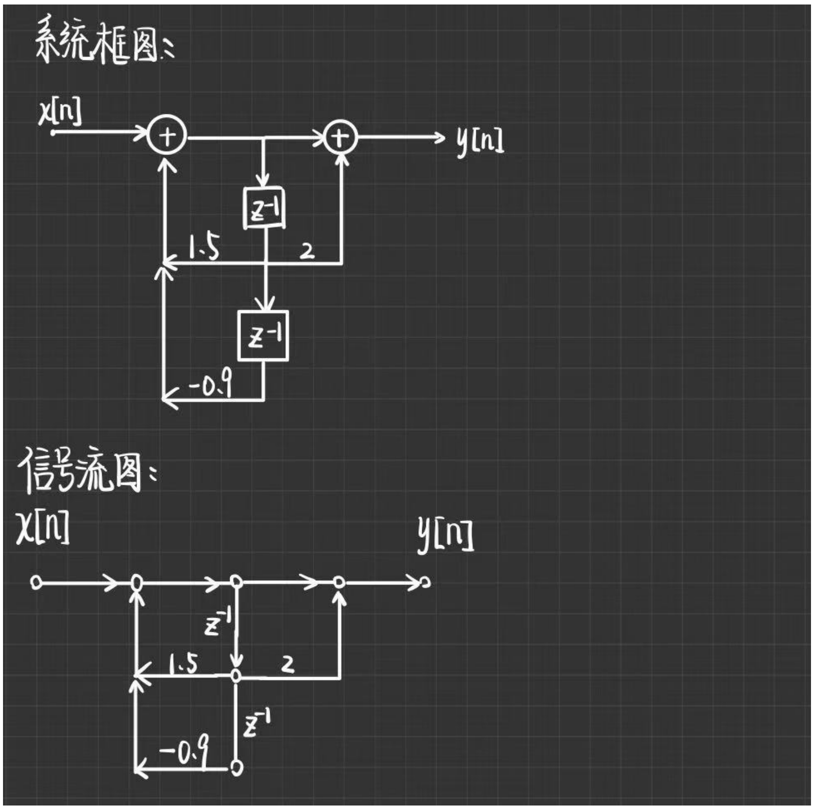
$$Y(z)=W(z)H_2(z)$$

给出这个路径下的流图和系统框图:



路径 2：

$$V(z) = X(z)H_2(z)$$
$$Y(z) = V(z)H_1(z)$$



路径 1 是 I 型实现方式，路径 2 是 II 型实现方式，显然路径 2 要优于路径 1，减少了运算资源的调度。

这部分信号流图和系统框图都是比较简单的部分，比较主要的是 Lattice 格型滤波器的计算，下面将搬运考试会用到的必要公式并且给出实例说明怎么用。

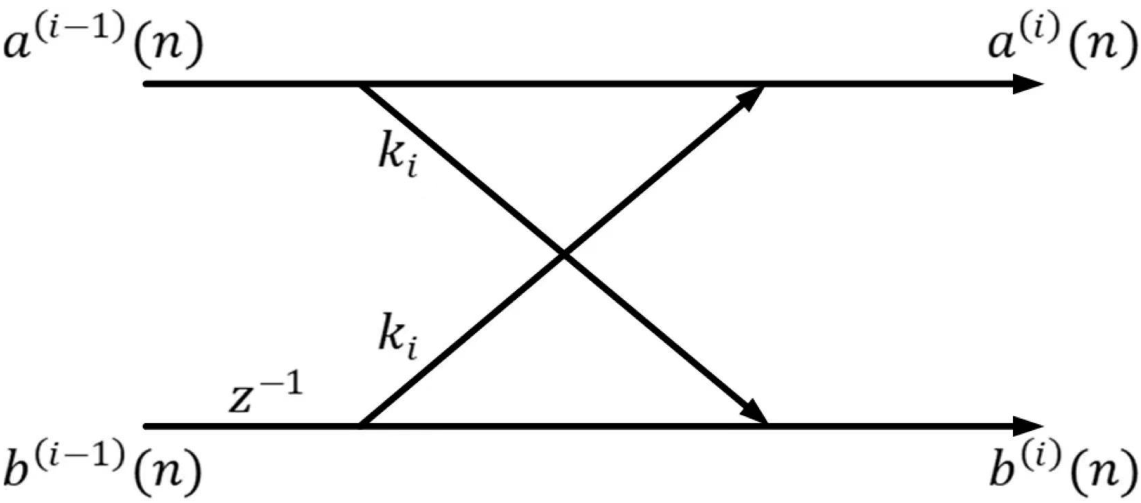


图 1: Lattice 基础架构

上图是格型滤波器（Lattice）的最基本结构，是一个前馈结构，即$a^{i-1}(n)$　$b^{i-1}(n)$向后传输，得到$a^{i}(n)$　$b^{i}(n)$

这个里面比较让人关注的问题是，如果我们在$a^{0}(n)$　$b^{0}(n)$输入$\delta[n]$那么后续得到的系统冲激响应是如何的?
假定这个系统是 M 级系统，即输入的是$a^{0}(n)$　$b^{0}(n)$得到的系统输出为$a^{M}(n)$　$b^{M}(n)$

每经过一个前馈系统就需要延迟一次，先然后频域上这样的式子:

$$A^{(i)}(z)=A^{(i-1)}(z)+k_i z^{-1}B^{(i-1)}(z)$$
$$B^{(i)}(z)=k_i A^{(i-1)}(z)+z^{-1}B^{(i-1)}(z)$$

其中值得注意的是，因为我们输入的是$\delta[n]$而且每过一个前馈的系统需要延迟一次，也仅仅只是延迟一次。所以后面我们得到的每一级的响应函数都会时域上的有限长序列。例如如果我们得到$a^{(M)}(n)$那么这个信号的序列长度就是$0\sim M$即$(M+1)$长度。

$$Z\{a^{(M)}(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{(M)}(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{M}a^{(M)}(n)z^{-n}$$

以上就是对 Lattice 最最基本的认知

那么张老师还给出了推导部分，我们定义$\alpha_m^{(i)}=\begin{cases}a^{i}(m) & 0\le m\le i\\ 0 & otherwise\end{cases}$

$\alpha_m^{(i)}$和k_i可以互相推导，下面给出需要记的式子

如果我们得到了k_i的信息可以推导$\alpha_m^{(i)}$:

$$\alpha_m^{(i)}=\begin{cases}1 & m=0\\ \alpha_m^{i-1}+k_i\alpha_{i-m}^{i-1} & 0<m<i\\ k_i & m=i\end{cases}$$

举个简单的例子:

$$\alpha_0^{(0)}=0$$

$$\begin{cases}\alpha_0^{(1)}=0\\ \alpha_1^{(1)}=k_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_0^{(2)}=0\\ \alpha_1^{(2)}=\alpha_1^{(1)}+k_2\alpha_1^{(1)}=(1+k_2)k_1\\ \alpha_2^{(2)}=k_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_0^{(3)}=0\\ \alpha_1^{(3)}=\alpha_1^{(2)}+k_3\alpha_2^{(2)}=(1+k_2)k_1+k_3k_2\\ \alpha_2^{(3)}=\alpha_2^{(2)}+k_3\alpha_1^{(2)}=k_2+k_3k_1(1+k_2)\\ \alpha_3^{(3)}=k_3\end{cases}$$

下面的递推就更复杂了（因为显然项数更多了，可以交给计算机完成），就不予以推导了，但是显然，这个递推是比较简单的。

我们如果有$\alpha_m^{(i)}$的信息，可以反推k_i

$$k_{i-1} = \alpha_{i-1}^{(i-1)}$$

考虑已知递推关系：

$$\alpha_m^{(i)} = \alpha_m^{(i-1)} + k_i \alpha_{i-m}^{(i-1)}$$

于是可以将做代换，将上面式子中$i-m$和m下角标做交换：

$$\alpha_{i-m}^{(i)} = \alpha_{i-m}^{(i-1)} + k_i \alpha_m^{(i-1)}$$

$$\alpha_m^{(i-1)} = \alpha_m^{(i)} - k_i \alpha_{i-m}^{(i-1)}$$

于是有：

$$\alpha_{i-m}^{(i)} = \alpha_{i-m}^{(i-1)} + k_i \alpha_m^{(i)} - k_i^2 \alpha_{i-m}^{(i-1)}$$

令$m = 1$

$$\alpha_{i-1}^{(i)} = \alpha_{i-1}^{(i-1)} + k_i \alpha_1^{(i)} - k_i^2 \alpha_{i-1}^{(i-1)}$$

$$k_{i-1} = \alpha_{i-1}^{(i-1)} = \frac{\alpha_{i-1}^{(i)} - k_i \alpha_1^{(i)}}{1 - k_i^2}$$

下面给个例题,也是 Oppenheimer 书上关于格型滤波器的习题：

6.29 （a）对于图 P6.29 所示的 FIR 格型滤波器，确定关联输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 的系统函数 $H(z)$。

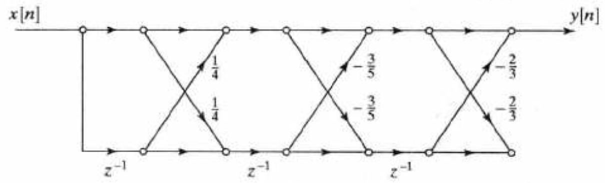


图 P6.29

$$k_1 = \frac{1}{4} \quad k_2 = -\frac{3}{5} \quad k_3 = -\frac{2}{3}$$

因为要求系统函数，所以输入给为$x[n] = \delta[n]$

输入为$a^{(0)}(n) = x[n] = \delta[n] \quad b^{(0)}(n) = x[n] = \delta[n] \quad y[n] = a^{(3)}(n)$

系统的阶数为 3 阶，即经过了 3 次延时处理，那么$y[n]$是长度为 4 的离散时域序列。

定义$a_m^{(i)} = a^{(i)}(m)$

所以我们已知 k，可以着手使用递推式去求取脉冲响应

$$a_0^{(0)} = 1$$

$$\begin{cases} a_0^{(1)} = 1 \\ a_1^{(1)} = k_1 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0^{(2)} = 1 \\ a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + k_2 a_1^{(1)} = k_1(1+k_2) = \dfrac{1}{10} \\ a_2^{(2)} = k_2 = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0^{(3)} = 1 \\ a_1^{(3)} = a_1^{(2)} + k_3 a_2^{(2)} = \dfrac{1}{10} + \left(-\dfrac{2}{3}\right) * \left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{1}{2} \\ a_2^{(3)} = a_2^{(2)} + k_3 a_1^{(2)} = -\dfrac{3}{5} + \left(-\dfrac{2}{3}\right) * \dfrac{1}{10} = -\dfrac{2}{3} \\ a_3^{(3)} = k_3 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$H(z) = Y(z) = Z\{y[n]\} = Z\{a^{(3)}(n)\} = \sum_{n=0}^{3} \{a^{(3)}(n)\} z^{-n} = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{2}{3} z^{-2} - \frac{2}{3} z^{-3}$$

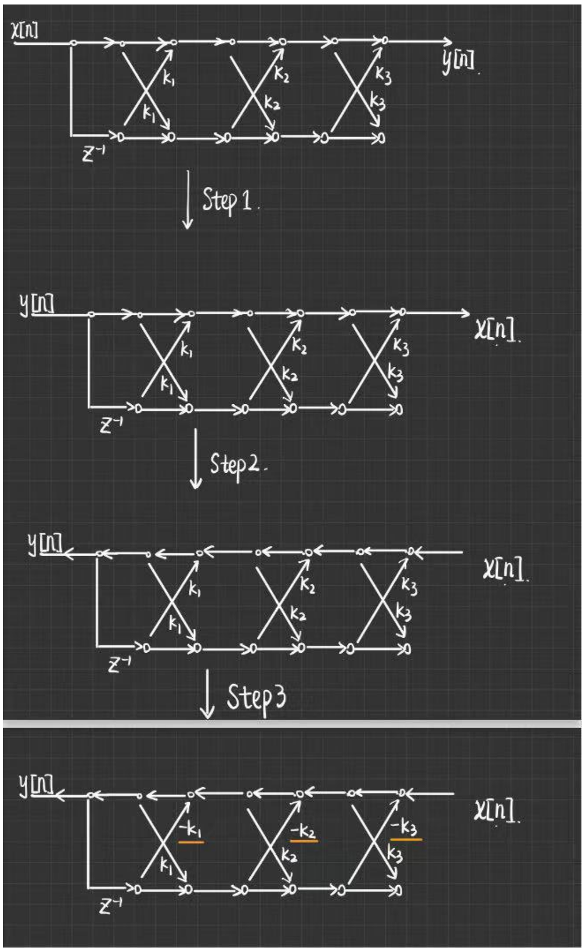
它有可能让我们求上面得到的系统的逆系统：

画出全极点系统$\frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{2}{3}z^{-2}-\frac{2}{3}z^{-3}}$这个地方就不再是前馈形式了，这么搞就一定是反馈的形式了，也不难画，做的事情是很机械的操作：

Step1：交换输入输出，原来的$y[n]$位置现在放$x[n]$，原来的$x[n]$位置现在放$y[n]$

Step2：主干线段上箭头反向

Step3：所有指向主干线段上节点的线段对应的 k 取相反数



（还差一个已知冲激响应倒推 k 的例子，在作业里面有，后续补档，现在没时间了）

张老师说了，这里不会考高阶形式，最多只会考到二阶 Lattice 网络，所以我们不妨给个例子：$H(z) = 1 + 5z^{-1} + 3z^{-2}$，使用 Lattice 这个 LTI 系统的冲激响应反推各级反射系数。

显然这是一个 2 阶系统（考试到这个程度就到头了）

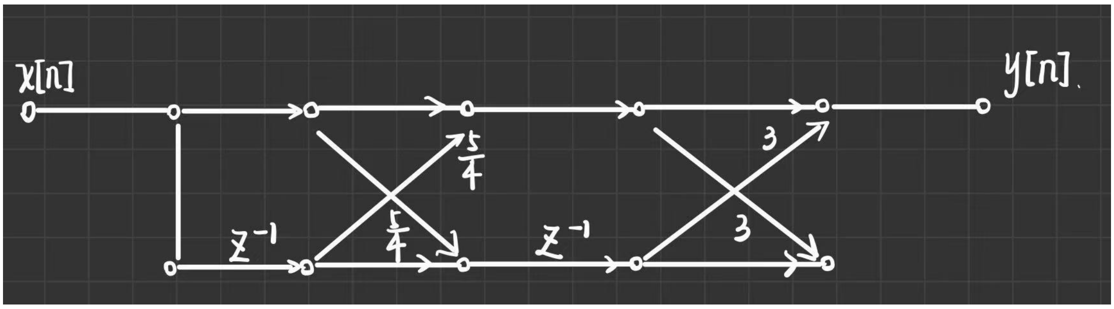
$$k_{i-1} = \alpha_{i-1}^{(i-1)} = \frac{\alpha_{i-1}^{(i)} - k_i \alpha_1^{(i)}}{1 - k_i^2}$$

$$\alpha_m^{(i)} = \alpha_m^{i-1} + k_i \alpha_{i-m}^{(i-1)}$$

$$\begin{cases} \alpha_0^{(2)} = 1 \\ \alpha_1^{(2)} = 5 \\ \alpha_2^{(2)} = 3 = k_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0^{(1)} = 1 \\ \alpha_1^{(1)} = \dfrac{5}{4} = k_1 \end{cases}$$

$$\alpha_0^{(0)} = 1$$



Oppenheimer 有点变态了，有个题 6 阶，算的笔尖冒烟都没算对

5. Multi—rate

张老师在习题课上讲的，这里我们不考复杂的，只考虑最基本的情形，也就是上下采样率是 2 的情形。（Polyphase 那种东西也不考，所以掌握最基本的保证能够尽可能不做错就 OK）

张老师在习题课上给出的是使用 DFT 去处理有限长的离散时域样本，那么这里我们先给出使用 DTFT 去处理无限时域上的样本，不仅可以回顾这部分到底是怎么进行推导的，也能更好地辅助我们理解 DFT 版本。

考虑上升 2 点的升采样

时域上的动作是插值补 0：

$$x[n] \to x'[n]$$

$$x'[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n|2 \text{ 即 } \mathrm{n} = -2,0,2,4,6,8 \ldots\ldots \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

那么做 DTFT 有：

$$DTFT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$DTFT\{x'[n]\ \} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x'[n]e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x'[2m]e^{-j\omega(2m)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j\omega(2m)} = X\left(e^{j(2\omega)}\right)$$

即，我们在时域上做了 2 点升采样，插值采样插值补零后，得到的结果为：

$$DTFT\{x'[2n]\} = X\left(e^{j(2\omega)}\right)$$

考虑下降 2 点的降采样

时域上的动作是舍弃掉一部分数值，只选取部分数值参与计算：

$$x[n] \to x'[n]$$

$$x'[n] = x[2n]$$

不妨假定离散时域信号$x[n]$是使用采样率T_d对于时域信号进行采样得到的。

即满足采样等式：$x[n] = x_c(nT_d)$

那么$x'[n] = x[2n]$等价于使用两倍采样周期进行采样：

$$x'[n] = x_c\left(n(2T_d)\right)$$

$$FT\{x_c(t)\} = X_c(j\Omega)$$

那么会有：

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_d}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} - \frac{2\pi}{T_d}k\right)\right)$$

$$X'\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2T_d}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\frac{\omega}{2T_d} - \frac{2\pi}{2T_d}k\right)\right)$$

考虑 k 的取值，k 无非是奇数和偶数交替出现，那么其实余数就两种情况，不妨对 k 做分解，一定会有：

$$k = 2r + i \qquad r \in (-\infty, +\infty) \qquad i \in [0,1]$$

$$X'\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1} \frac{1}{T_d}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi i}{2T_d} - \frac{2\pi}{T_d}r\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1} X\left(e^{\frac{\omega - 2\pi i}{2}}\right)$$

那么下面推导一下张老师在习题课上给出的 DFT 版本到底是怎么一回事
首先必须事先声明，张老师上课主要是以给出 hint 为主，所以表法和结论可能并不是很严谨，我们需要做的事就是完善。
其实张老师上课给出的推导是 IDFT，并不是 DFT，那么这里我们用 DFT 进行推导，因为 IDFT 和 DFT 形式高度类似。

考虑上升 2 点的升采样
时域上的动作是插值补 0：

$$x[n] \to x'[n]$$

$$x'[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n|2 \text{ 即 } \mathrm{n} = -2,0,2,4,6,8 \ldots\ldots \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$DFT\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X(k)$$

$$DFT\{x'[n]\} = \sum_{n=0}^{2N-1} x'[n]e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} = \sum_{\substack{n=even \\ n\in[0,2N-1]}} x\left[\frac{n}{2}\right]e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} = \sum_{\substack{n=even \\ n\in[0,2N-1]}} x\left[\frac{n}{2}\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}k\frac{n}{2}} \xrightarrow{m=\frac{n}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

$$X'(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X(k)$$

即我们纵使是对有限长序列进行升采样构造出了一个插值 0 的两倍长度序列，最后得到的 DFT 仍然是原来序列的 DFT，这一点上面已经严格推导相等了。

考虑下降 2 点的降采样
时域上的动作是舍弃掉一部分数值，只选取部分数值参与计算：

$$x[n] \to x'[n]$$
$$x'[n] = x[2n]$$

那么原有的长度为 N 的序列，经过降 2 点采样后变成了$\frac{N}{2}$长度序列（此处我们假定 N 是偶数，当然如果 N 是奇数，那么其实会变成$\frac{N-1}{2}$长度序列）

$$DFT\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$
$$DFT\{x'[n]\} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x'[n]e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}kn}$$

张老师课上其实主要想给出这里两个表法方面的 hint，感谢徐亦周同学提醒我这里可以这么表述，我的表述是硬解，形式上很不漂亮。

Hint：$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x'[n]e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}kn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2n)} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\frac{1+(-1)^n}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

张老师给出的第一个提示其实是这个意思，纵使我降采样之后的 DFT 是一个$\frac{N}{2}$点的 DFT，其实我们仍然可以使用原有序列的 DFT 去表述出来，可以尝试操作一下，这个地方确实是这样，$\frac{1+(-1)^n}{2}$这个系数是控制奇偶性的系数。但是他把 hint 记成了在结果之中去了，这不对。
那么就会有：

$$DFT\{x'[k]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1+(-1)^n}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1+(-1)^n}{2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

张老师给出的第二个提示是这个意思:

其实$(-1)^n$看起来不好处理，但是可以用周期性干掉。

$$(-1)^n = \left(e^{-j\pi}\right)^n = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n}$$

所以其实会有:

$$\frac{1+(-1)^n}{2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{N}{2})n}$$

$$= \frac{1}{2} X(k) + \frac{1}{2} X\left(k + \frac{N}{2}\right) = \frac{\left[X(k) + X\left(k + \frac{N}{2}\right)\right]}{2}$$

总结一下就是，如果我们只关注于升 2 采样以及降 2 采样那么会有:

$$\begin{cases} \text{升 2 采样}: DFT\{x'[n]\} = DFT\{x[n]\} = X(k) \\ \text{降 2 采样}: DFT\{x'[k]\} = \dfrac{\left[X(k) + X\left(k + \frac{N}{2}\right)\right]}{2} \end{cases}$$

6.DFT(Discrete Fourier Transform)

按照习题课的说法来看的话，这部分的考法主要集中在 sampling（采样）

Sampling and the real interval（采样以及对应的实际频率间隔）
两点比较重要的事实：
1、完成连续信号到离散信号的获取，其实是在频域上做周期延拓，并且拉伸 or 压缩坐标轴，即坐标轴上刻度也存在变化。DTFT 是对 FT 的周期延拓，并且需要改变刻度。
2、DFT 其实是对 DTFT 的采样

对第一点的解释：
我们考虑有一个连续时域信号$x_c(t)$，如果使用T_s采样周期对它进行采样，得到离散时域信号$x[n]=x_c(nT_s)$,那么其实我们可以得到离散时域信号 DTFT 和连续时域信号 FT 的关系：

$$FT\{x_c(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x_c(t)e^{-j\Omega t}\,dt=X_c(j\Omega)$$

$$DTFT\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=X\left(e^{j\omega}\right)$$

DTFT 和 FT 的关系，是通过采样周期来建立起来的：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_s}-\frac{2\pi}{T_s}k\right)\right)$$

$X\left(e^{j\omega}\right)$是个周期性信号，显然我们需要$X_c(j\Omega)$是 bandlimit 的，必须带限，不然 DTFT 混叠到没法看了。即$X_c(j\Omega)$需要满足下面条件,如果不满足这样的条件，混叠到姥姥家了：

$$X_c(j\Omega)\equiv 0 \qquad |\Omega|\geq\frac{\pi}{T_s}$$

那么其实会有：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T_s}X_c\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$$

对于第二点的解释：

$$DFT\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DFT 其实等价于对 DTFT 在频率上做一个 N 点采样，采样间隔是$\Delta\omega=\frac{2\pi}{N}$，这个是 DTFT 对应的频率$\omega$
其实真实频率是 FT 对应的频率：Ω
有关系：

$$\Omega T_s=\omega$$

那么这个采样间隔对应的实际频率间隔是：

$$\Delta\Omega=\frac{\Delta\omega}{T_s}=\frac{2\pi}{NT_s}=\frac{2\pi f_s}{N}$$

我们的间隔是$\Delta\Omega=\frac{2\pi f_s}{N}$，我采样点数又是 N，最后的总频率带宽为：$B=0\sim N\Delta\Omega=2\pi f_s$

间频率变量和连续时间频率变量之间的关系是 $\omega=\Omega T$，所在 DFT 的频率对应于连续时间频率

$$\Omega_k=\frac{2\pi k}{NT} \tag{10.5}$$

Oppenheimer 给出的形式是这样的，其实就是：

$$\Omega_k=k(\Delta\Omega)=\frac{2\pi k}{NT_s}$$

这部分内容不难，抓住连续时域的频域上可以映射到离散时域的频域上，并且映射关系是：

$$\Omega T_s=\omega$$

并且知道 DTFT 的 N 点采样就是 DFT，就可以解决问题。

下面来看看 spectrum analysis 里对窗函数的分析

张老师习题课说了，我们要用就用矩形窗，闭卷考试只会考察矩形窗，那么有备无患，纵使矩形窗很简单，这里也需要严谨地做一次推导。仍然是使用 Oppenheimer 书上给的矩形窗：

考虑一个在离散时域上的有限长度窗函数$w[n]$，窗函数$w[n]$的长度为L，即$n\in[0,L-1]$,并且幅值大小都是 1，我们使用它去完成截断。即对一个无限长或者特别长不好一次性处理的信号$x[n]$,我们可以造截断函数

$$x_{break}[n]=x[n]w[n].$$

根据频域卷积定理我们会有：

$$DTFT\{x_{break}[n]\}=DTFT\{x[n]w[n]\}=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*W(e^{j\omega})$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

给出$W(e^{j\omega})$就好：

$$W(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{L-1}w[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{L-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-\frac{j\omega L}{2}}}{e^{-\frac{j\omega}{2}}}\frac{\sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}=e^{-\frac{j\omega(L-1)}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

这个表述好就好在，它是线性相位的，也就是可以很明显看到，模和相角是完全分开的，我们无论是在作业里还是在课本里，见到的 DFT 结果图，也就是对 DTFT 做频率上的采样，纵坐标都是模值，下面我将给出作业里的一个图：

如果不精确，那么你得出的频率估计最大可能误差是多少？

(d) 假设对于所选窗函数 $w_1[n]$ 和 $w_2[n]$，已知 32 点 DFT $X_u[k]$ 的准确值。简要说明计算 Ω_0 准确值的过程。

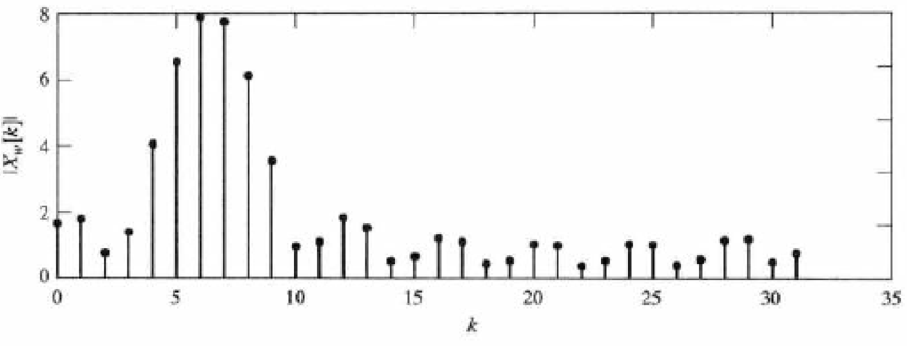
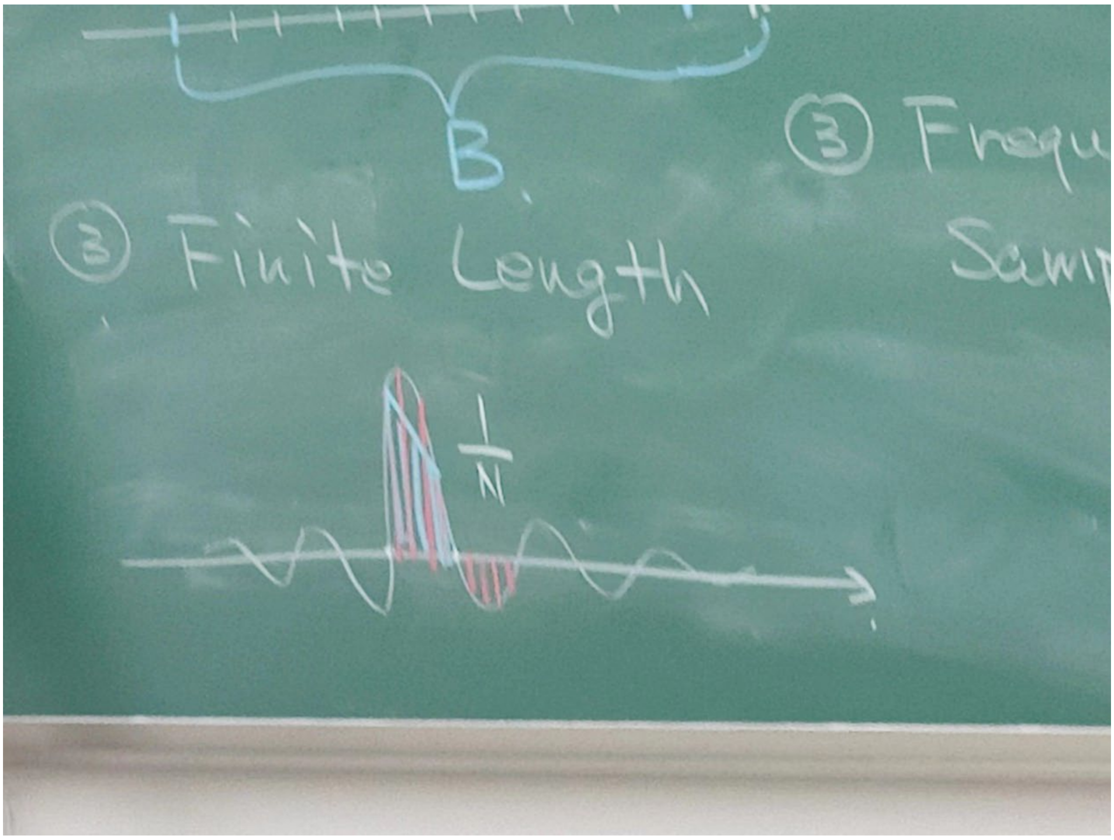


图 P10.24-3

我们实际关注的其实是窗函数的模值。并且 DFT 类似于在频域上对 DTFT 做频率的采样，所以上图很明显可以看出来，不同频率点位处 DFT 采样拿到的模值$|W(k)| = \left|W\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)\right|$

最后我们来聊聊我关于 DFT 是 DTFT 频域采样（Sampling on Frequency Domain）这件事带来的误差怎么看:
其实在作业里面我们做到过类似问题，详细题号是 Oppenheimer 书 10.24 题，是个相当好的题。
这个事情也不需要太数学，“测度”啥的没必要提。很明显的一件事就是我去一条线上取一个点，这个点我取到的概率是 0，也就是无穷多数据里面捞一个数据，显然不可能，数学上这件事就不太可能发生。所以我们只要做了 DFT，难免就会存在有问题。



张老师给出方案是，线性插值预测中间数据。如果我们控制采样率f_s不变，也控制 DFT 点数 N（其实也是 DFT 相对于 DFT 的采样点数）不变，那么我们上面提到的$\Delta\Omega = \frac{2\pi f_s}{N}$ $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$
其实都是不变的，可能正好我们在尖峰处采集不到，把尖峰这个重要信息漏过去了，张老师给出的图的意思其实是线性插值。在正好可能漏掉尖峰的那个点和它相邻的那个点之间连线求中点。（其实我觉得没啥卵用，看看 10.24 那个题的意思，看看误差我们是怎么估计的，掌握能掌握的，就有分了。）感谢蔡宦超同学对我的提醒，这里补档一下明天可能的考法——单频预测。
Oppenheimer 在 10.2 章讲过“正弦信号的 DFT 分析”，正弦信号或者说三角信号可能确实是很好的载体去体现窗函数的性质。

考虑我们有一个离散时域信号$x[n] = cos[\omega_0 n]$
显然会有:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}$$

考虑使用 Rectangle 窗函数$w[n]$（只会考矩形窗）对$x[n]$进行截断处理，窗函数的长度为 L 即$n \in [0, L-1]$

$$W\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega\frac{L}{2}}}{e^{-j\omega\frac{1}{2}}} \frac{2jsin\left(\omega\frac{L}{2}\right)}{2jsin\left(\omega\frac{1}{2}\right)}$$

$$= e^{-j\omega(L-1)} \frac{sin\left(\omega\frac{L}{2}\right)}{sin\left(\omega\frac{1}{2}\right)}$$

时域上使用$w[n]$去对$x[n]$做截断即:

$$v[n] = w[n]x[n]$$

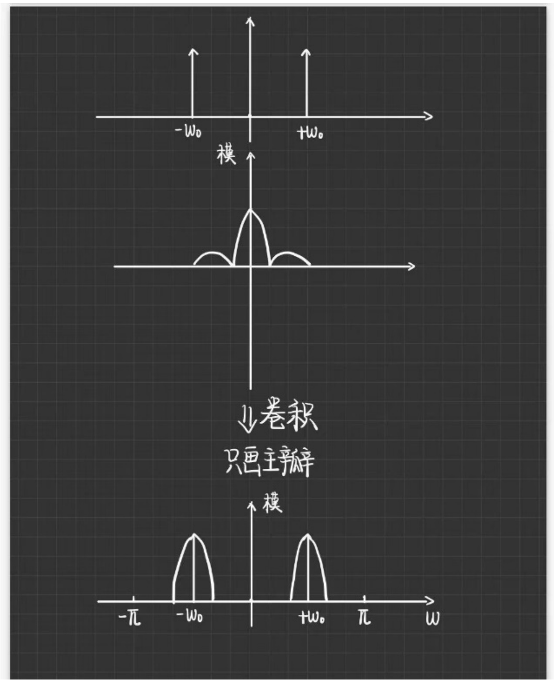
频域上会有:

$$V\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\, W\left(e^{j\omega}\right) * X\left(e^{j\omega}\right)$$

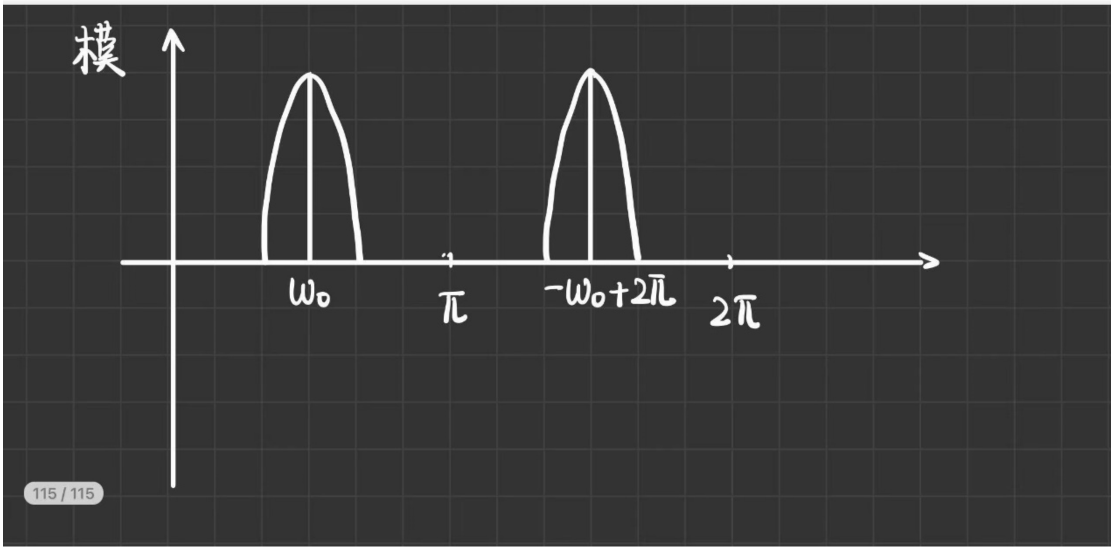
因为我们给的$x[n]$是很特殊的，频域上是两个冲激函数，从而会有:

$$V\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}W\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{1}{2}W\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)$$

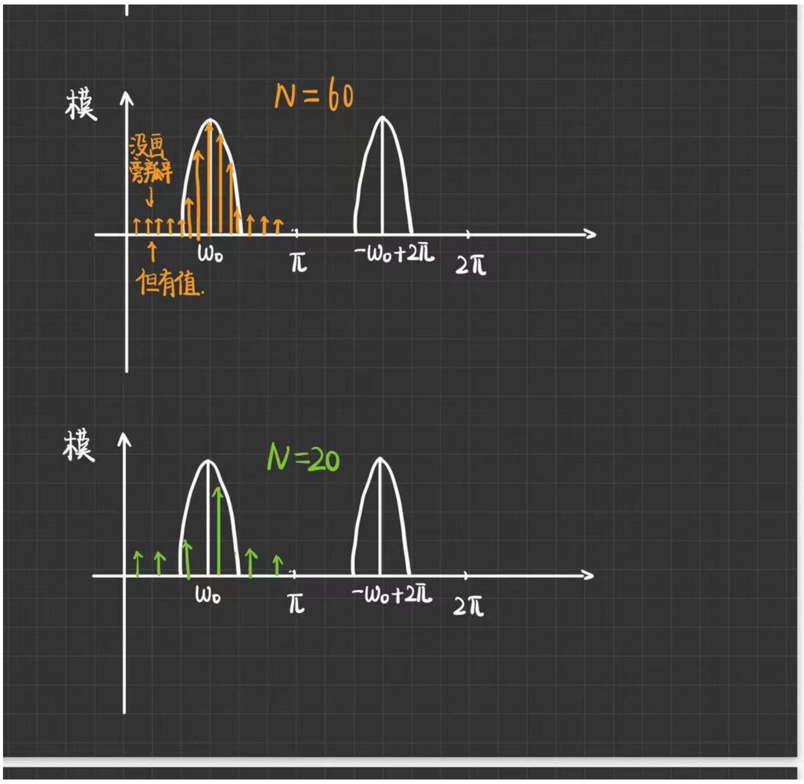
等价于在频域上是在做频移（频率搬移，在频率轴上做平移，主瓣对应的峰值到冲激函数对应的频率上去）
示意图如下:



到目前为止还是 DTFT, 我们还没有做 DFT 操作。真正让人感兴趣, 现实生活里可以操作的。其实是 DFT，如果我们选择做 N 点 DFT，也就是对 DTFT 在频率上做 N 点采样。DFT 习惯的视角是$0 \sim 2\pi$上采样（因为很显然有$\frac{2\pi}{N}k$是在$[0,2\pi]$上的）,这显然是没有问题，因为 DTFT 是具有周期性的，我们切换一下视角:

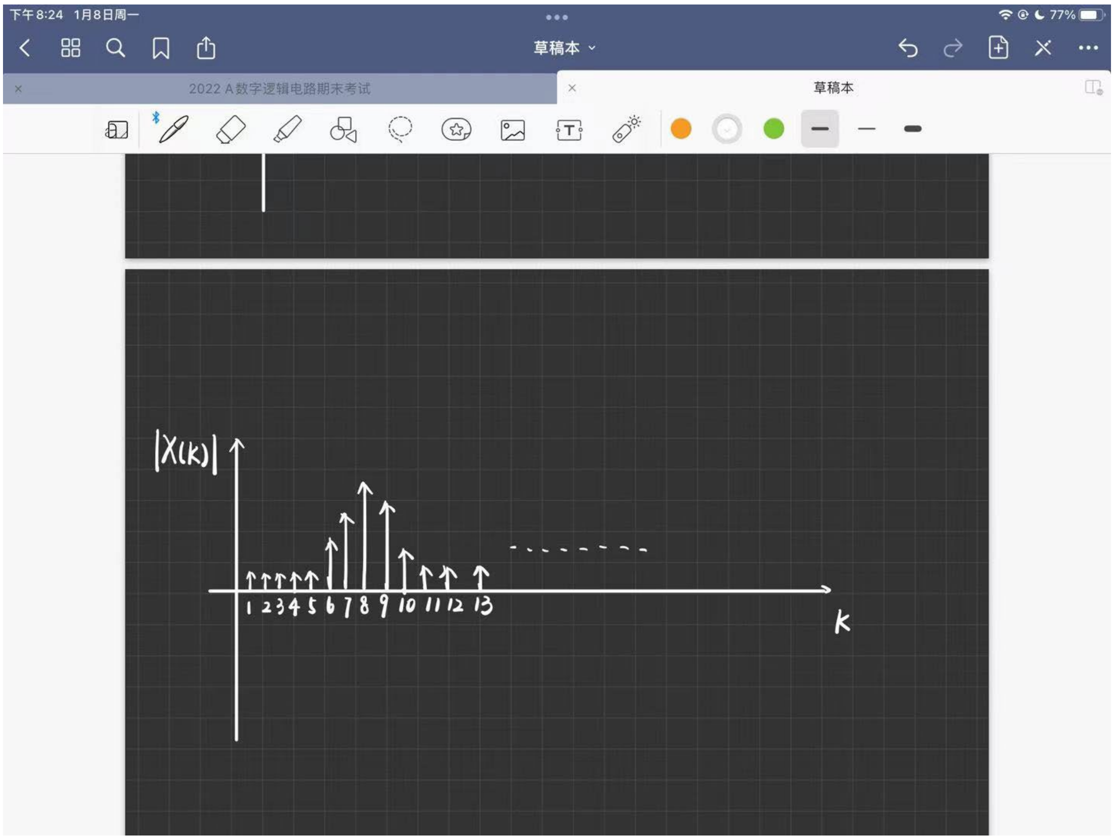


视角转变好了之后，我们开始进行对频率进行采样，也就是 DTFT 向 DFT 变换的动作：



分别给出了$N=60$(橙色)和$N=20$(绿色)的 DTFT 向 DFT 变化的情形，明显可以看到$N=20$的情形效果差于$N=60$。这是很自然的，因为我调高采样的点数N那么获取到的原有波形的有效信息自然会大，采样间隔变小，采样也看起来变密了。

但是其实呈现在我们面前的不会是这样的图，而是这样给出的：



给到我们的会是 DFT 的情形，这也和我在正式文档里说的，10.24 题目的 d 是一样的情形，我也贴一下那个题的 d 小题：

如果不精确，那么你得出的频率估计最大可能误差是多少？

(d) 假设对于所选窗函数 $w_1[n]$ 和 $w_2[n]$，已知 32 点 DFT $X_w[k]$ 的准确值。简要说明计算 Ω_0 准确值的过程。

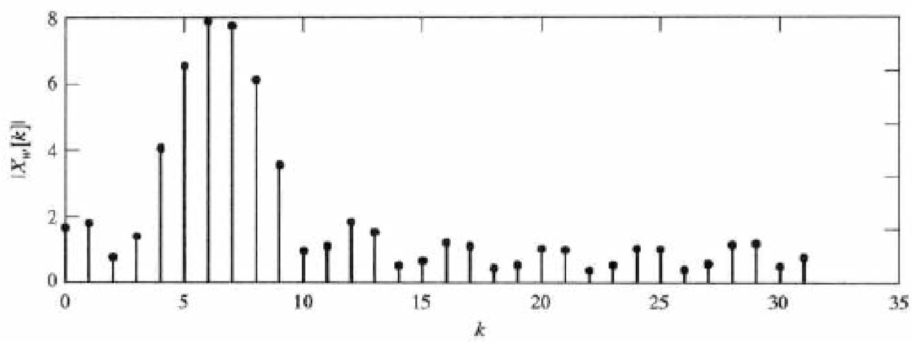


图 P10. 24-3

利用$\frac{2\pi}{N}k=\omega_k$这个式子，我们可以预估单频信号的频率ω_0以及大致给出我们预测的误差。

以上面我手绘的那张图为例，很明显我们可以预测$\omega_0=\frac{2\pi}{N}*8=\frac{2\pi}{60}*8=\frac{4}{15}\pi$，但是这样预测也是存在误差的，因为很明显可以看到，8 点左右的 7 和 9 点，9 点想对 7 点更高，这就说明左右显然不对称。那么 8 点显然不会是中心频率，中心频率可能会落在 8 和 9 中间（因为 9 更高），并且会更加靠近 8，也就是不会过 8 和 9 的中点。那么误差最大值可以得出：

$$error_{max} = 0.5 * \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{60}$$

就到这里吧，也预祝大家都考试顺利！好好回家过年，新年快乐！