5. a) https://yutsumura.com/how-to-find-a-formula-of-the-power-of-a-matrix/

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ or 3

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

let $x=1$, then $y=1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x-y \\ -x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

let $x=1$, then $y=-1$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

invertible matrix $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$S^{-1} = \frac{1}{-1-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3^{100} \\ 1 & -3^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+3^{100} & 1-3^{100} \\ 1-3^{100} & 1+3^{100} \end{bmatrix}$$

b) 1) $X^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$

$X^T \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$(X^T \cdot X)^{-1} = \frac{1}{4-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$(X^T \cdot X)^{-1} X^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$

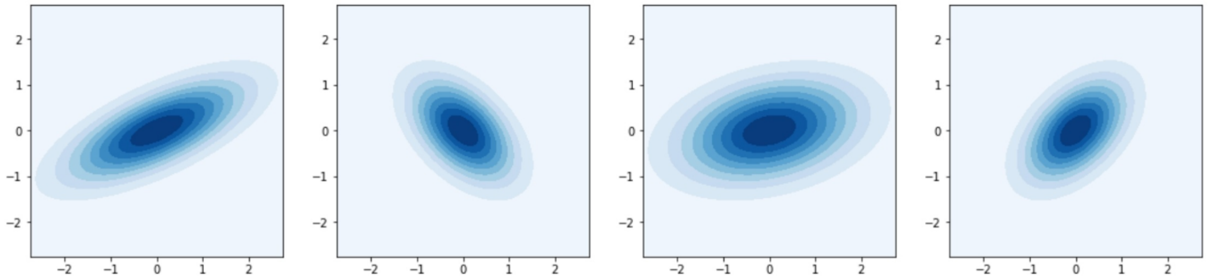
2) From a): $X^T X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
(X^T X)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$(X^T \cdot X)^{-1} X^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$

3)
$$
\begin{aligned}
(X^T X)^{-1} X^T &= (V \Sigma U^T U \Sigma V^T)^{-1} V \Sigma U^T \\
&= (V \Sigma \Sigma V^T)^{-1} V \Sigma U^T \\
&= ((V^T)^{-1} \Sigma^{-1} \Sigma^{-1} V^{-1}) V \Sigma U^T \\
&= (V^T)^{-1} \Sigma^{-1} U^T \\
&= V \Sigma^{-1} U^T \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

c)



(a) (b) (c) (d)

Σ_3 Σ_2 Σ_4 Σ_1

d) $d_M(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^T S^{-1} (\vec{a}-\vec{b})}$

$= \sqrt{(3, -4) \cdot S^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}$