

# Control de Sincronización de un Robot Móvil Diferencial

César Obed Cortés Aviles, América Morales Díaz, Alejandro Rodríguez Angeles\*

CINVESTAV del I.P.N unidad Saltillo, Grupo de Robótica y Manufactura Avanzada

Carr. Saltillo-Monterrey Km. 13.5 en Ramos Arizpe Coah. C.P 5900

\* Departamento de ingeniería eléctrica CINVESTAV del I.P.N

oca182@gmail.com

Tel.: +52 844 4 38 9600 ext. 9659

**Resumen**—En este artículo se propone un control de sincronización para un robot móvil diferencial. El objetivo del control de sincronización es controlar la posición de cada rueda de acuerdo a la trayectoria deseada del robot móvil diferencial. De esta manera se garantiza que el robot móvil siga la trayectoria deseada con la orientación apropiada. El controlador se basa en retroalimentación de posición y velocidad angular de las ruedas con una superficie deslizante con acción integral en el error de sincronización, el controlador solamente requiere la medición de la posición angular de las ruedas.

## I. INTRODUCCIÓN

La robótica móvil resulta ser un tema de mucho campo de investigación. Los robots móviles son una parte importante cercana en la creación de un sistema con autonomía, capaz de procesar la información de su entorno y establecer un comportamiento similar al del ser humano y tiene una gran variedad de aplicaciones como: exploración planetaria, misiones de búsqueda, inspección y vigilancia, rescate de persona, limpieza de desechos peligrosos, asistencia médica, ocio y entretenimiento, investigación, agricultura, entre otras. Se puede definir a un robot móvil como un sistema electromecánico capaz de desplazarse de un punto a otro en un determinado espacio de trabajo.

Los robots móviles son sistemas muy versátiles y que pueden ejecutar una tarea con gran destreza (Sun, Dong y Tso, 2002). Cuando existen múltiples robots estos pueden trabajar de forma sincrónica. La sincronización puede ser definida como la mutua conformidad de procesos o sistemas con respecto al tiempo. La conformidad puede ser caracterizada por la aparición de ciertas relaciones de funcionales de los procesos (Rodríguez-Angeles, 2002). Desde el punto de vista de control, la sincronización presenta una herramienta interesante que permite la búsqueda de funcionales para la interconexión de procesos simultáneos, con lo cual se genera un comportamiento sincrónico, además de que se garantice la estabilidad de los sistemas interconectados.

El esquema de sincronización da la maniobrabilidad y la destreza que no pueden ser alcanzados por un único sistema. En la práctica, hay dos esquemas básicos de sincronización, esquema de coordinación y esquemas de cooperación (Rodríguez-Angeles, 2002).

El problema de control en los robots móviles diferenciales es que estos sistemas poseen tres grados de libertad de movimiento  $[x(t); y(t); \theta(t)]$ , por lo que son sistemas subactuados y que presentan deriva, por lo tanto, el sistema no puede ser estabilizado vía diferenciable o estado continuo de retroalimentación (Nijmeijer y Rodríguez-Angeles, 2006).

El control de sincronización puede ser aplicado para resolver el problema de seguimiento de trayectorias de estos sistemas, al considerar que el ángulo de inicio es afectado por la diferencia del error entre las coordenadas de las dos ruedas motrices, regulando de manera sincrónica las coordenadas de las ruedas e incluyendo la restricción no-holonómica.

El controlador propuesto se basa en una combinación de retroalimentación de la posición y velocidad angular de las ruedas motrices con un modo deslizante de segundo orden, a pesar de que existan errores en el modelo se garantiza que los errores de seguimiento y de sincronización convergen a cero asintóticamente.

Este artículo está organizado de la siguiente forma, en la sección 2 se introduce el modelo cinemático del robot móvil diferencial y la dinámica de este. La sección 3 presenta la construcción del control de sincronización, en la sección 4 se presentan los resultados del sistema vía simulaciones, por último en la sección 5 se presentan algunas conclusiones y las perspectivas de trabajo a futuro.

## II. MODELO DEL ROBOT MÓVIL DIFERENCIAL

La posición y orientación de un robot móvil en el plano pueden describirse por sus coordenadas  $(x, y)$  con respecto a un referencial fijo y el ángulo  $\theta$  que el robot forma con

respecto a  $X$  como se muestra en la figura 1. Este sistema presenta las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \theta \\ \dot{y} &= u \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\quad (1)$$

Donde  $x$  representa la posición a lo largo del eje  $X$ ,  $y$  representa la posición a lo largo del eje  $Y$  y  $\theta$  representa la orientación del eje longitudinal del robot móvil respecto al eje  $X$ . De manera ideal, la velocidad lineal  $u$  y la velocidad angular  $\omega$  pueden considerarse como variables de control (1).

La restricción no-holónoma de desplazamiento sobre las ruedas es:

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (2)$$

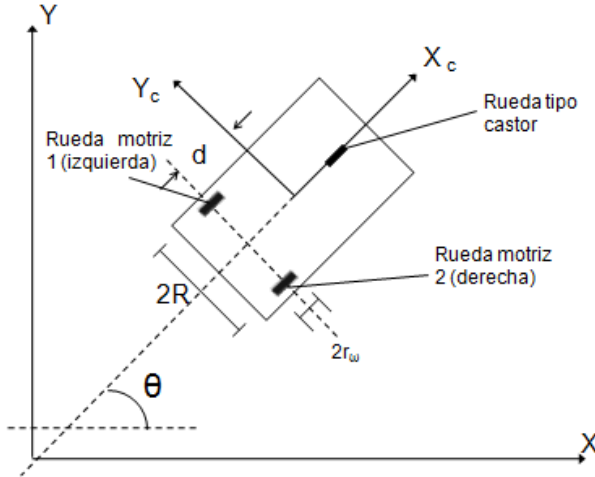


Figura 1. Localización en el plano cartesiano

En el espacio cartesiano el modelo cinemático del robot móvil diferencial está dado por la ecuación (1). Sin embargo, el control de sincronización que se propone se basa en el espacio del ángulo de la rueda. Considerando  $\phi_1$  y  $\phi_2$  como el desplazamiento angular de la rueda derecha y la izquierda respectivamente y las velocidades lineales denotadas por  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  respectivamente, la velocidad angular del robot móvil diferencial  $\dot{\theta}(t)$  es dada por:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v_2(t) - v_1(t)}{2R} = \frac{r_w}{2R}(\dot{\phi}_2(t) - \dot{\phi}_1(t)) \quad (3)$$

Donde  $2R$  denota la distancia entre las dos ruedas motrices y  $r_w$  es el radio de las ruedas motrices se asume que

estas son idénticas. De la ecuación (3) el ángulo de inicio del robot móvil esta dado por:

$$\theta(t) = \int_0^t \dot{\theta}(\omega) d\omega = \theta_c + \frac{r_w}{2R}(\phi_2(t) - \phi_1(t)) \quad (4)$$

donde  $\theta_c$  es la constante de integración, que depende de la condición inicial de las ruedas del robot móvil diferencial. La dinámica del ángulo de desplazamiento  $\phi_i(t)$  para  $i = 1, 2$  de las ruedas esta dado por:

$$H_i(\phi_i)\ddot{\phi}_i + C_i(\phi_i, \dot{\phi}_i)\dot{\phi}_i + F_i(\phi_i, \dot{\phi}_i) = \tau_i \quad (5)$$

Donde  $H_i(\phi_i)$  y  $C_i(\phi_i, \dot{\phi}_i)$  denota la inercia y los términos de no linealidades fuerzas centrífugas respectivamente,  $F_i(\phi_i, \dot{\phi}_i)$  denota las fuerzas debido a fricción y  $\tau_i$  son los torques de entrada.

### III. CONTROL DE SINCRONIZACIÓN

Sea  $q_d(t) = [x_{cd}(t); y_{cd}(t); \theta_d(t)]$  la configuración deseada del robot móvil, se mapea como:

$q_d(t) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \begin{bmatrix} \phi_{d1}(t) \\ \phi_{d2}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , este mapeo se define de manera única. Sin embargo esto no implica que se llegue a la configuración cinemática deseada. Lo anterior representa el problema de deriva en el seguimiento de trayectorias del robot móvil, sobre todo cuando se basa en mediciones de odometría.

Acerca del problema, éste puede ser resuelto por consideración del control de sincronización de las dos ruedas. El objetivo del control de sincronización es de regular el ángulo de la posición de las dos ruedas  $\phi_1, \phi_2$  a sus valores deseados  $\phi_{d1}, \phi_{d2}$  y la diferencia del error de seguimiento entre la trayectoria de cada rueda a la deseada, deben ser cero.

En la figura 2. se pueden ver las dos ruedas motrices del robot en una trayectoria deseada en el instante de tiempo  $t$ . El desplazamiento angular de las ruedas es denotado por,  $\phi_{d1}$  y  $\phi_{d2}$ , y el desplazamiento angular actual  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Definimos el error de desplazamiento o de seguimiento:

$$e_i(t) = \phi_i(t) - \phi_{di}(t) \quad (6)$$

Tal que el error de desplazamiento lineal de las ruedas es  $r_w e_i(t)$ . Note que  $R_{ca}(t)$  y  $R_{cd}(t)$  en la figura 2 denotan los radios de curvatura en el centro del robot, cuando se encuentra en su posición actual y la deseada respectivamente.

**Hipótesis 1.** Considerando la trayectoria deseada en este caso de estudio, la trayectoria debe ser suave y continua, y el radio de curvatura no varía significativamente de manera que:

acoplamiento:

$$c_1(t) = \frac{R_c}{R_c(t) \pm R} \quad c_2(t) = \frac{R_c}{R_c(t) \mp R} \quad (9)$$

Usando la ecuación (8) se define el error de sincronización ( $\epsilon$ ) entre las dos ruedas:

$$\epsilon(t) = c_1(t)e_1 + c_2(t)e_2 \quad (10)$$

En el caso especial de la línea recta,  $R_c = \infty$  entonces  $c_1 = 1$  y  $c_2 = -1$ .

Haciendo que el error de sincronización  $\epsilon(t) \rightarrow 0$ , es equivalente a mantener la relación cinemática (7) y además es tratado como un objetivo de control adicional causando que el error de seguimiento  $e_i(t) \rightarrow 0$ , lo cual implica que  $\phi_i \rightarrow \phi_{di}$ .

De esto se deduce que bajo el enfoque de sincronización el objetivo del control en el espacio cartesiano esta dado:

$$\Delta q(t) = [x_c - x_{dc}, \quad y_c - y_{dc}, \quad \theta - \theta_d] \rightarrow 0 \quad (11)$$

Se convierte en el objetivo de control en el espacio de rueda:

$$[e_1(t) \quad e_2(t) \quad \epsilon(t)] \rightarrow 0 \quad (12)$$

La convergencia de los errores en el espacio de rueda y bajo la premisa de que  $e_i(0), \epsilon(0) = 0$ , garantiza el seguimiento de la trayectoria cinemática (11).

Por lo tanto las propiedades de convergencia del sistema en lazo cerrado, dependerán del desempeño del controlador y la configuración inicial del robot, así la convergencia local y estabilidad pueden ser obtenidas.

*Observación 2.* El objetivo de emplear la ecuación (12) es evitar la restricción no-holónoma en el diseño del control, y por lo tanto es posible diseñar un controlador con retroalimentación continua para así lograr el seguimiento de una trayectoria deseada.

*Observación 3.* Cuando el radio de curvatura varía a lo largo de la trayectoria se presenta un error de cálculo al obtener  $c_i(t)$  dada por la ecuación (10). Esto se debe a la diferencia entre  $R_{ca}(t)$  y  $R_{cd}(t)$ . Este cálculo afecta evidentemente el desempeño del movimiento del robot a medida que cambia el radio de curvatura a lo largo de la trayectoria deseada. Reducir el cálculo de los errores  $e_1(t)$  y  $e_2(t)$  es la estrategia de control de sincronización propuesta debe de garantizar una convergencia de  $e_i(t) \rightarrow 0$ .

En esta sección se propone un control que complementa el objetivo de sincronización para el robot móvil diferencial, en la cual se toman las siguientes hipótesis.

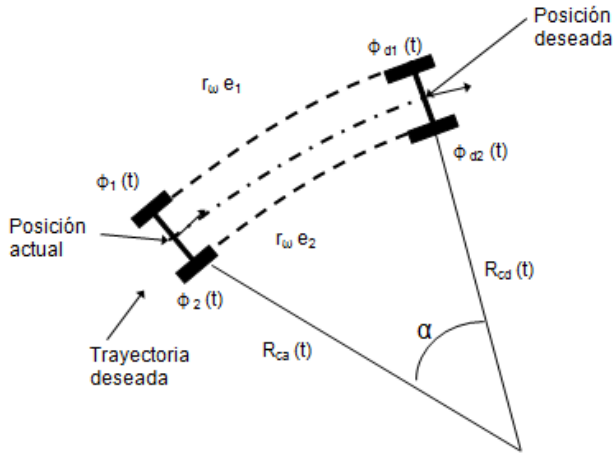


Figura 2. Ruedas motrices en la trayectoria deseada

- La diferencia de los radios de curvatura  $R_{ca}(t)$  y  $R_{cd}(t)$  es suficientemente pequeño para ser despreciado, por decir:  
 $R_{ca}(t) \approx R_{cd}(t) = R_c(t)$
- El radio de curvatura  $R_c(t)$  es tal que  $R_c(t) > R$  y al menos dos veces diferenciable.

Para una trayectoria circular, la Hipótesis 1, el radio de curvatura se mantiene constante. Cuando el radio de curvatura varía a lo largo de la trayectoria, la Hipótesis 1, se mantiene si  $e_1(t)$  y  $e_2$  son suficientemente pequeñas. La línea como trayectoria deseada es tratada como caso especial, en el que el radio de curvatura es infinitamente grande (Nijmeijer y Rodríguez-Angeles, 2006).

Se puede ver en la figura 2 que cuando el robot sigue una trayectoria deseada, éste debe cumplir una relación cinemática, la cual está dada por:

$$\frac{r_\omega e_1(t)}{R_c(t) \pm R} = \frac{r_\omega e_2(t)}{R_c(t) \mp R} = \infty \quad (7)$$

Bajo la condición de que el error inicial de la configuración del robot es cero se tiene que con la ecuación (7) se asegura que el robot mantiene la ruta deseada, la cual se puede re escribir como:

$$c_1(t)e_1(t) + c_2(t)e_2(t) = 0 \quad (8)$$

Donde  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  denotan a los parámetros de

**Hipótesis 4.** Solamente son medidas las posiciones angulares de las ruedas motrices del robot móvil diferencial.

**Hipótesis 5.** Los efectos de fricción en las ruedas motrices son despreciados:

$$F_i(\phi, \dot{\phi}) = 0, i = 1, 2 \quad (13)$$

**Hipótesis 6.** La trayectoria deseada  $q_d(t)$  es suave, continua y por lo menos dos veces diferenciable.

**Hipótesis 7.** Los errores de seguimiento  $e_1 = \phi_i - \phi_{di}$  y el error del ángulo de partida  $\theta - \theta_d$  en  $t = 0$  son cercanos a cero.

La hipótesis 7 implica que el robot móvil diferencial está cerca de la trayectoria deseada y con la orientación aproximada adecuada, como condición inicial. Se garantiza la convergencia de la posición cartesiana del robot móvil a su trayectoria deseada, al mismo tiempo que las coordenadas de rueda y el ángulo de partida convergen a sus valores deseados (Nijmeijer y Rodríguez-Angeles, 2006).

El controlador usado para las ruedas motrices en este caso es un PD con un modo deslizante. Con esté control se garantiza que el error de seguimiento converja asintóticamente a cero y también si existen errores en el modelo compensarlos mediante la superficie deslizante diseñada. Para esté caso de estudio la ley de control que se emplea es,  $\tau_i = \tau_{i1} + \tau_{i2}$ , donde:

$$\tau_{i1} = H_i(\phi_i)\ddot{\phi}_{ri} + C_i(\phi_i, \dot{\phi}_i)\dot{\phi}_{ri} - K_{d,i}\dot{s}_i - K_{p,i}s_i \quad (14)$$

$\tau_{i1}$  es un control con retroalimentación de los errores de sincronización de la posición y velocidad angular de las ruedas motrices del robot móvil diferencial.  $\tau_{i2}$  contiene un modo deslizante está retroalimentada de los errores de seguimiento y sincronización.

$$\tau_{i2} = -\mu \text{sat}\left(\frac{S_{ri}}{\eta}\right) \quad (15)$$

Definiendo la superficie deslizante, con la cual se hace que los errores de sincronización y de seguimiento converjan de forma asintótica a cero.

$$S_{ri} = K_0 e_i(t) + K_1 s_i + \epsilon \quad (16)$$

Donde  $K_{d,i}$ ,  $K_{p,i}$  y  $\mu$  son ganancias positivas,  $K_0$ ,  $K_1$  son ganancias que se eligen de forma que el polinomio  $\lambda^2 + K_1\lambda + K_0$  sea Hurwitz, esto garantiza, que la superficie deslizante  $S_{ri} \rightarrow 0$  por lo tanto los errores de seguimiento y de sincronización converjen asintóticamente a cero (Seshagiri, S. y H. K. Khalil, 2002).

Mientras  $s_i$  y  $\dot{s}_i$  son errores de sincronización que se definen a continuación:

$$s_i = \phi_i - \phi_{ri}, \quad \dot{s}_i = \dot{\phi}_i - \dot{\phi}_{ri} \quad (17)$$

y  $\ddot{\phi}_{r,i}$ ,  $\dot{\phi}_{ri}$  y  $\ddot{\phi}_{ri}$ , son variables de referencia nominal basadas en las trayectorias deseadas  $\phi_{d,i}$ :

$$\phi_{ri} = \phi_{di} + \beta_i \int_0^t \epsilon(\omega) d\omega \quad (18)$$

$$\dot{\phi}_{ri} = \dot{\phi}_{di} + \beta_i \epsilon, \quad \ddot{\phi}_{ri} = \ddot{\phi}_{di} + \beta_i \dot{\epsilon} \quad (19)$$

La ecuación (18)  $\phi_{ri}$  da la trayectoria deseada para  $\phi_i$ , por lo tanto está a cargo de la convergencia de posición angular y su valor deseado. El segundo término es una retroalimentación del error de sincronización, esto regula el ángulo de inicio e induce el comportamiento síncrono entre las ruedas motrices del robot móvil diferencial. Hay que tener en cuenta la definición del error de sincronización  $s_i$  y el de la referencia nominal  $\phi_{ri}$  porque implican los errores de seguimiento  $e_i = \phi_i - \phi_{di}$  y el de sincronización  $\epsilon$ . Por lo tanto, los errores pueden ser penalizados a favor de una convergencia de  $e_i$  o pequeños errores en el ángulo de inicio para obtener una mejor convergencia de  $\epsilon$ .

Para evitar problemas de oscilaciones en la función  $\text{sgn}$  por presencia de dinámicas de alta frecuencia que no están modeladas, lo más común es remplazar el termino de la función  $\text{sgn}(S_{ri})$  por una aproximación continua definida por  $\text{sat}(\frac{S_{ri}}{\eta})$ , que es la función de saturación estándar y se define por:

$$y = \frac{S_{ri}}{\eta} \quad (20)$$

$$\text{sat}(y) = \begin{cases} y(S_{ri}), & y(S_{ri}) \leq 1. \\ \text{sgn}(S_{ri}), & y(S_{ri}) > 1. \end{cases}$$

A pesar de que la función de saturación puede eliminar oscilaciones, tiene el inconveniente de causar un error en estado estacionario diferente de cero, por lo que se asigna una ganancia  $\eta \rightarrow 0$  y de está manera tener errores pequeños en estado estacionario.

#### IV. SIMULACIONES

Para efectos de simulación se conciderará un robot móvil diferencial que opera a bajas velocidades, por lo que las fuerzas de fricción y fuerzas centrífugas pueden ser despreciadas. Por lo que la dinámica de las ruedas motrices está dada por:

$$H_i \ddot{\phi}_i = \tau_i \quad (21)$$

Los parámetros del robot móvil diferencial son, el radio de la rueda  $r_w = 0,04[m]$ , la separación entre las dos ruedas motrices  $2R = 0,29[m]$  y los valores de las inercias son  $H_1 = 0,50$  y  $H_2 = 0,52$  en  $[Kg - m^2]$ . Las ganancias  $K_{d,i}$ ,  $K_{p,i}$  y  $\beta_i$  se eligieron de forma similar (Nijmeijer

y Rodríguez-Angeles, 2006). Los valores de la ganancias se muestran en la tabla, en valor de la ganancia para la función de saturación  $\eta = 0,01$ .

TABLA I  
VALORES DE LAS GANANCIAS PROPUESTAS

$K_p =$	1000	$K_d =$	100
$K_0 =$	30	$K_1 =$	10
$\beta =$	500	$\mu =$	0,1

El robot móvil diferencial esta comandado a moverse a lo largo una trayectoria circular con un radio de  $R_c = 2,0[m]$ . La trayectoria circular está dada en ángulos de posición deseados por:

$$\phi_{d1}(t) = (0,3571t^2 - 0,0119t^3) \frac{R_c + R}{R} \quad (22)$$

$$\phi_{d2}(t) = (0,3571t^2 - 0,0119t^3) \frac{R_c - R}{R} \quad (23)$$

Las condiciones iniciales de posición de las ruedas son:  $\phi_1 = 0,2$  y  $\phi_2 = 0,1[rad]$  las condiciones iniciales del error son las mismas que las de posición de las ruedas. Por tanto el error de sincronización en un inicio es de  $\epsilon = 0,0786[rad]$ , para la trayectoria circular el parámetro de acoplamiento  $c_i(t)$  es constate.

En la figura 3 se muestra el de error de seguimiento del ángulo de rueda  $e_i = \phi_i - \phi_{di}$ , así como también el error de sincronización  $\epsilon = c_1 e_1 + c_2 e_2$ . Y se observa que ambos convergen a cero, por lo que el objetivo de control que consiste en que el robot móvil siga una trayectoria deseada y esté es alcanzado.

En la figura 4 se muestra la superficie deslizante  $S_{ri}$ , se puede observar que no presenta oscilaciones y que se estabiliza en 0,7 segundos, haciendo que los errores de seguimiento y de sincronización convergen rapidamente. En figura 5 se observa el torque que demandado en cada rueda motriz. Para compensar las inercias del robot móvil hay un sobre tiro al inicio de  $1,9N$  hasta  $-0,65N$ .

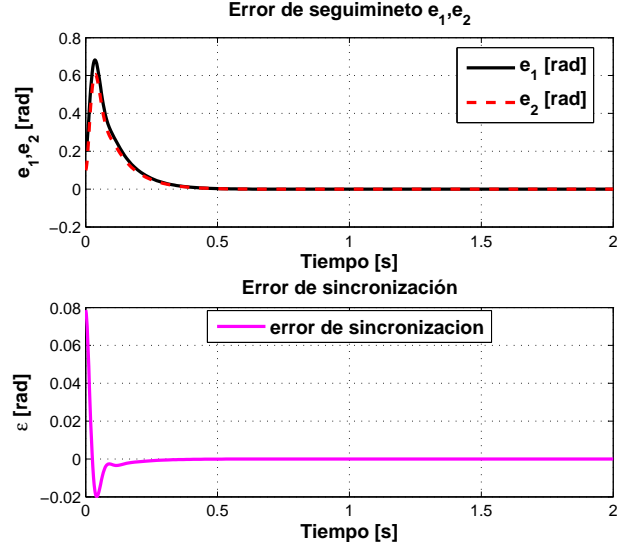


Figura 3. Error de seguimiento de las ruedas motrices  $e_1$  es la línea solida y  $e_2$  la línea punteada, Error de sincronización  $\epsilon$

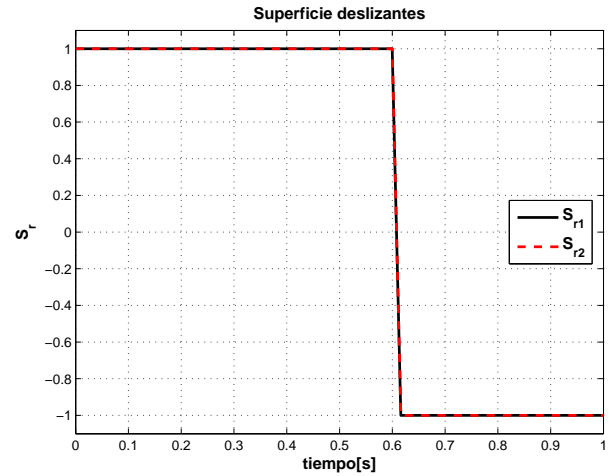


Figura 4. Superficie deslizante  $S_{r1}$  línea solida,  $S_{r2}$  línea punteada

## V. CONCLUSIONES

Una estrategia de control de sincronización para un robot móvil diferencial se ha propuesto y probado. Considerando que la configuración inicial del robot es cero, la estrategia de control de sincronización garantiza estabilización y seguimiento de las ruedas motrices a una trayectoria deseada. Las simulaciones demuestran la eficacia del enfoque propuesto. La ventaja del diseño de este control es evitar la restricción no holonómica involucrada, y así proponer un controlador de retroalimentación continua para estabilizar al robot móvil. Y de esta manera resolver el problema de deriva. El prototipo ya está construido, actualmente el proyecto se encuentra en la etapa final, para realizar los experimentos y reportar los resultados obtenidos a la hora de implementar los algoritmos de control de sincronización.

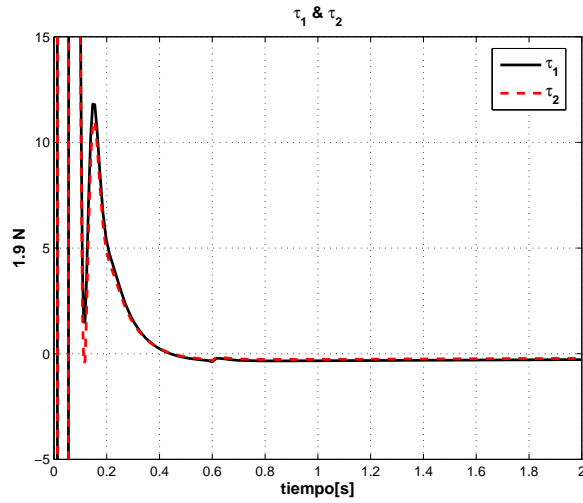


Figura 5. Torques  $\tau_1$  es la línea solida y  $\tau_2$  línea punteada

#### REFERENCIAS

- Nijmeijer, H. y A. Rodríguez-Angeles (2006). Control Synchronization of Differential Mobile Robots. *Springer*.
- Sun, D., H.N. Dong y S.K. Tso (2002). Tracking Stabilization of Differential Mobile Robots Using Adaptive Synchronized Control, *International Conference on Robotics Automation*, Washington, DC.
- Seshagiri, S. y H. K. Khalil (2002). Robust output feedback regulation of minimum-phase nonlinear systems using conditional integrators, *automatica*.
- A. Rodríguez-Angeles (2002). Synchronization of Mechanical Systems Ph.D. Thesis, *Technische Universiteit Eindhoven*.