

Министерство науки и высшего
образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Рыбинский государственный авиационный технический
университет имени П. А. Соловьева»

Кафедра математического и программного обеспечения электронных
вычислительных средств

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

по дисциплине

Исследование операций

на тему

«Целочисленное линейное программирование»

Вариант №5

Студент группы ИПБ_22 Сушков М

Руководитель Задорина Н.А.

Рыбинск 2024

1. Задание

Решить задачу целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ

5. Найти максимум функции $z = 5x_1 + 7x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 41 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ и целые} \end{cases}$$

2. Результаты вычислений в MathCad

$x1 := 0..8$ $x2 := 0..8$

$f(x1, x2) := 5 \cdot x1 + 7 \cdot x2$

ORIGIN := 1

```
R:=
  f←0
  for x1 ∈ 0..8
    for x2 ∈ 0..8
      if (2 x1+x2≤13)^(6 x1+9 x2≤41)
        s←5 x1+7 x2
        if s>f
          f←s
          K←[x1
              x2]
      else
        s←0
  K
```

$R = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$

$W := R \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

$W = 32.00$

3. Результаты вычислений по разработанным программам

Функция $z=5x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$

Ветвление от

Задача 0

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(6.3;0.3)=34.0 \text{ -----}>$$

Задача 0.1

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 6.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(6.0;0.6)=33.9$$

Ветвление от

Задача 0

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(6.3;0.3)=34.0 \text{ -----}>$$

Задача 0.2

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \geq 7.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение: нет

Ветвление от

Задача 0.1

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 6.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(6.0;0.6)=33.9 \text{ -----}>$$

Задача 0.1.1

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 6.0$$

$$0.0x_1 + 1.0x_2 \leq 0.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(6.0;0.0)=30.0$$

Ветвление от

Задача 0.1.2

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 6.0$$

$$0.0x_1 + 1.0x_2 \geq 1.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(5.3;1.0)=33.7 \text{ -----}>$$

Задача 0.1.2.1

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 6.0$$

$$0.0x_1 + 1.0x_2 \geq 1.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 5.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(5.0;1.2)=33.6$$

Ветвление от

Задача 0.1

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 6.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(6.0;0.6)=33.9 \text{ -----}>$$

Задача 0.1.2

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 6.0$$

$$0.0x_1 + 1.0x_2 \geq 1.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(5.3;1.0)=33.7$$

Ветвление от

Задача 0.1.2

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 6.0$$

$$0.0x_1 + 1.0x_2 \geq 1.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение:

$$z(5.3;1.0)=33.7 \text{ -----}>$$

Задача 0.1.2.2

$$2.0x_1 + 1.0x_2 \leq 13.0$$

$$6.0x_1 + 9.0x_2 \leq 41.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \leq 6.0$$

$$0.0x_1 + 1.0x_2 \geq 1.0$$

$$1.0x_1 + 0.0x_2 \geq 6.0$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Решение: нет

```

-----
Ветвление от
Задача 0.1.2.1
2.0x1 + 1.0x2 <= 13.0
6.0x1 + 9.0x2 <= 41.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 6.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 1.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 5.0
x1,x2 >=0 и целые
Решение:
z(5.0;1.2)=33.6 ----->
Задача 0.1.2.1.1
2.0x1 + 1.0x2 <= 13.0
6.0x1 + 9.0x2 <= 41.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 6.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 1.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 5.0
0.0x1 + 1.0x2 <= 1.0
x1,x2 >=0 и целые
Решение:
z(5.0;1.0)=32.0

```

```

Ветвление от
Задача 0.1.2.1
2.0x1 + 1.0x2 <= 13.0
6.0x1 + 9.0x2 <= 41.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 6.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 1.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 5.0
x1,x2 >=0 и целые
Решение:
z(5.0;1.2)=33.6 ----->
Задача 0.1.2.1.2
2.0x1 + 1.0x2 <= 13.0
6.0x1 + 9.0x2 <= 41.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 6.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 1.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 5.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 2.0
x1,x2 >=0 и целые
Решение:
z(3.8;2.0)=33.2
-----

```

Конец

```

Ветвление от
Задача 0.1.2.1.2.1.2.1.2.1
2.0x1 + 1.0x2 <= 13.0
6.0x1 + 9.0x2 <= 41.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 6.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 1.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 5.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 2.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 3.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 3.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 2.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 4.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 0.0
x1,x2 >=0 и целые
Решение:
z(0.0;4.6)=31.9 ----->
Задача 0.1.2.1.2.1.2.1.2.1.2
2.0x1 + 1.0x2 <= 13.0
6.0x1 + 9.0x2 <= 41.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 6.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 1.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 5.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 2.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 3.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 3.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 2.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 4.0
1.0x1 + 0.0x2 <= 0.0
0.0x1 + 1.0x2 >= 5.0
x1,x2 >=0 и целые
Решение: нет
Все целочисленные решения:
z(5.0;1.0)=32.0
z(2.0;3.0)=31.0
z(6.0;0.0)=30.0
z(3.0;2.0)=29.0
z(0.0;4.0)=28.0
Решение задачи:
z(5.0;1.0)=32.0

```

Все целочисленные решения:

```

z(5.0;1.0)=32.0
z(2.0;3.0)=31.0
z(6.0;0.0)=30.0
z(3.0;2.0)=29.0
z(0.0;4.0)=28.0
Решение задачи:
z(5.0;1.0)=32.0

```

Программный код

```
public class Solution {
    final double[] solution = new double[3];
    final int branchIndex;
    Solution(double x1, double x2, double z){
        solution[0]=x1;
        solution[1]=x2;
        solution[2]=z;
        if(Double.compare(solution[0]%2,0.0d)!=0 && Double.compare(solution[0]%2,1.d)!=0) branchIndex = 0;
        else
        if(Double.compare(solution[1]%2,0.0d)!=0 && Double.compare(solution[1]%2,1.d)!=0) branchIndex = 1;
        else
        if(Double.compare(solution[2]%2,0.0d)!=0 && Double.compare(solution[2]%2,1.d)!=0) branchIndex = 2;
        else branchIndex = -1;

    }
    public boolean isEnd(){
        return branchIndex == -1;
    }
    public void print(){
        System.out.printf("\nz(% .1f;% .1f)=% .1f", solution[0], solution[1], solution[2]);
    }
}

public class Task {
    private static LinearObjectiveFunction function;
    private Solution solutionObj;
    private RealPointValuePair solution;
    private Collection<LinearConstraint> constraints = new ArrayList<>();
    final String name;

    Task(LinearObjectiveFunction f, String name){
        function = f;
        this.name = name;
    }
    public Collection<LinearConstraint> getConstraints(){
        return constraints;
    }
    public void addConstraint(double[] coef, Relationship r, double value){
        constraints.add(new LinearConstraint(coef, r, value));
    }
    public void addConstraints(Collection<LinearConstraint> c){
        constraints.addAll(c);
    }

    public void solve(){
        try {
            solution = new SimplexSolver().optimize(function, constraints, GoalType.MAXIMIZE, true);
            solutionObj = new Solution(solution.getPoint()[0],
                                      solution.getPoint()[1],
                                      solution.getValue());
        } catch (Exception e) {

        }
    }
    public Solution getSolution(){
        return solutionObj;
    }
    public void print(){
        System.out.print("\nЗадача "+ name);
        constraints.forEach(c->{
            double[] data = c.getCoefficients().getData();
            Relationship r = c.getRelationship();
            double v = c.getValue();
            System.out.printf("\n% .1fx1 + % .1fx2 %s % .1f",data[0],data[1],r.toString(),v);
        });
        System.out.print("\nx1,x2 >=0 и целые");
        System.out.print("\nРешение: ");
        if(solutionObj!=null) solutionObj.print();
    }
}
```

```

        else System.out.print("нет");
    }
}

public class MaximizeSolver {
    final String pathToFile;
    private LinearObjectiveFunction f;
    private double[] function = new double[2];
    private double[][] system = new double[2][2];
    private int[] sign = new int[2];
    private double[] sysConstraints = new double[2];
    private List<Task> tasks = new ArrayList<>();
    private List<Solution> solutions = new ArrayList<>();

    MaximizeSolver(String file){
        pathToFile = file;
    }
    private void readFile(){
        try(Scanner scn = new Scanner(Path.of(pathToFile))) {
            for(int i=0; i<2; ++i)
                function[i] = scn.nextInt();
            for(int i=0; i<2; ++i){
                for(int j=0; j<2; ++j)
                    system[i][j] = scn.nextInt();
                sign[i]=scn.nextInt();
                sysConstraints[i] = scn.nextInt();
            }
        } catch( IOException e){}
    }

    private void prepare(){
        Relationship r=null;
        Collection<LinearConstraint> constraints = new ArrayList<>();
        for(int i=0; i<system.length; ++i){
            if (sign[i]==1)
                r = Relationship.LEQ;
            else if(sign[i]==2)
                r = Relationship.GEQ;
            constraints.add(new LinearConstraint(system[i], r, sysConstraints[i]));
        }
        Task t = new Task(f, "0");
        t.addConstraints(constraints);
        tasks.add(t);
        t.solve();
    }

    private boolean needBranch(){
        return !tasks.isEmpty();
    }
    private void branchAndBound(Task t){
        double[] newSystemLine;
        Solution s = t.getSolution();
        double value = (int) s.solution[s.branchIndex];

        if(t.getSolution().branchIndex==0) newSystemLine = new double[] {1,0};
        else newSystemLine = new double[] {0,1};
        tryBranch(t, newSystemLine, Relationship.LEQ, value, t.name+".1");
        tryBranch(t, newSystemLine, Relationship.GEQ, value+1, t.name+".2");
        tasks.remove(t);
    }
    private void tryBranch(Task branched, double[] coef, Relationship r, double value, String name){
        Task t1 = new Task(f, name);
        t1.addConstraints(branched.getConstraints());
        t1.addConstraint(coef, r, value);
        t1.solve();
        System.out.print("\n-----\nВетвление от");
        branched.print();
        System.out.print("\t---->\t");
        t1.print();
        Solution s1 = t1.getSolution();
    }
}

```

```

        if(s1!=null)
            if (s1.isEnd()) solutions.add(s1);
            else tasks.add(t1);
    }
    public void solve(){
        readFile();
        f = new LinearObjectiveFunction(function,0);
        System.out.printf("Функция z=%0fx1 + %0fx2 -> max", function[0], function[1]);
        prepare();
        while (needBranch()){
            branchAndBound(tasks.get(0));
        }
        analyze();
    }
    private void analyze(){
        solutions.sort((s1,s2)-> (int)(s2.solution[2]-s1.solution[2]));
        System.out.print("\nВсе целочисленные решения: ");
        solutions.forEach(s->s.print());
        System.out.print("\nРешение задачи:");
        solutions.get(0).print();
    }
}

```

4. Краткие выводы

В результате лабораторной работы решена ЗЦЛП методом ветвей и границ.