



IEL – protokol k projektu

Tony, Pham
xphamt00

20. prosince 2020

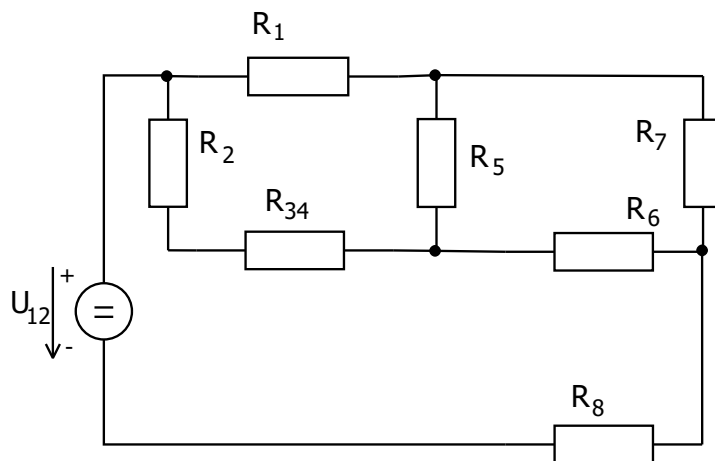
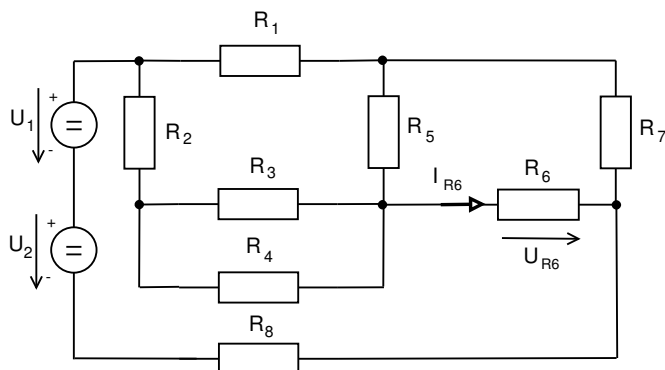
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	8
3	Příklad 3	11
4	Příklad 4	14
5	Příklad 5	15
6	Shrnutí výsledků	18

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

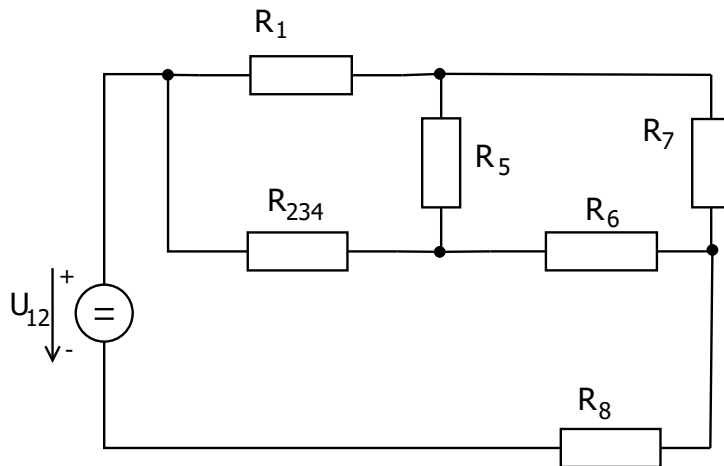
sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
H	135	80	680	600	260	310	575	870	355	265



Obrázek 1: R_3 a R_4 jsou zapojeny paralelně a zdroje U_1 a U_2 sériově

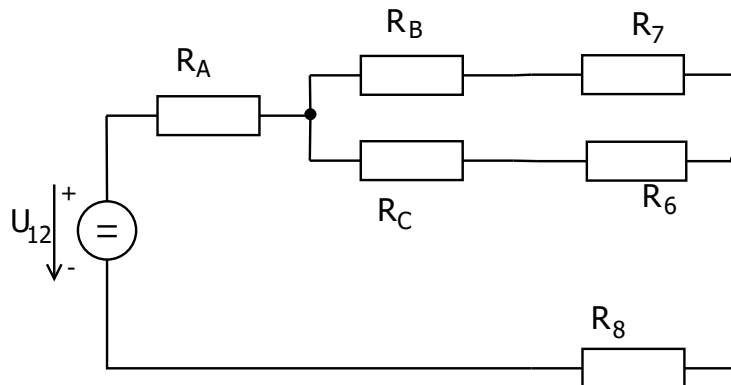
$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{260 \cdot 310}{260 + 310} \doteq 141.4035 \Omega$$

$$U_{12} = U_1 + U_2 = 135 + 80 = 215 \text{ V}$$



Obrázek 2: R_2 a R_{34} jsou zapojeny sériově

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 600 + 140.4035 = 740.4035\Omega$$

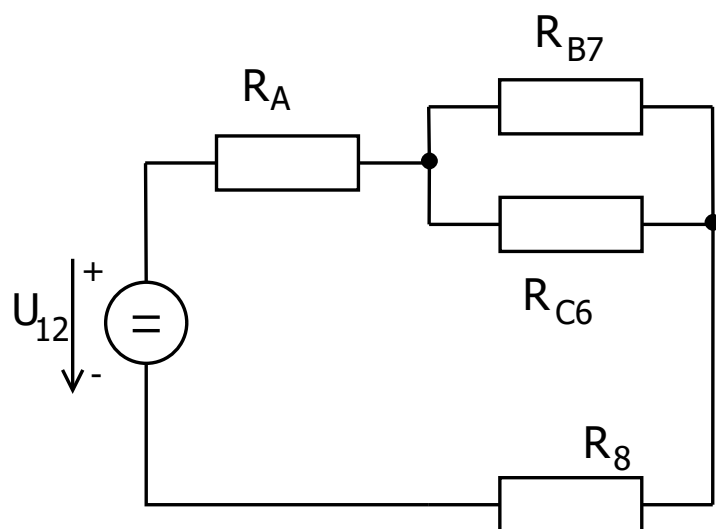


Obrázek 3: transfigurace - trojúhelník

$$R_A = \frac{R_1 R_{234}}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{680 \cdot 740.4035}{680 + 740.4035 + 575} = 252.3171\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{680 \cdot 575}{680 + 740.4035 + 575} = 195.9503\Omega$$

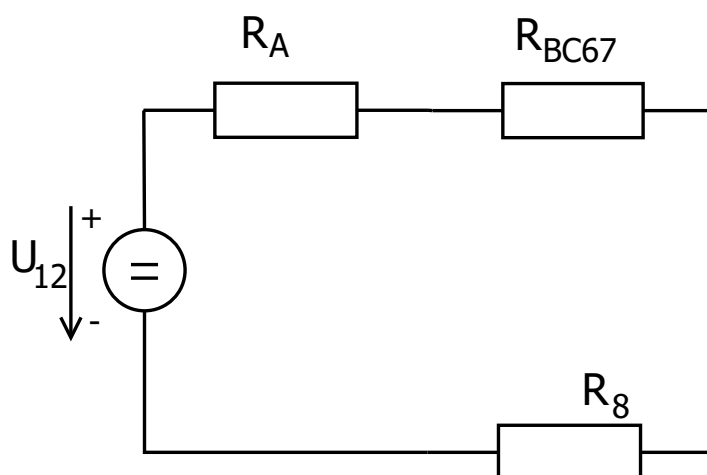
$$R_C = \frac{R_5 R_{234}}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{575 \cdot 740.4035}{680 + 740.4035 + 575} = 213.3564\Omega$$



Obrázek 4: R_B a R_7 jsou zapojeny sériově stejně jako R_C a R_6

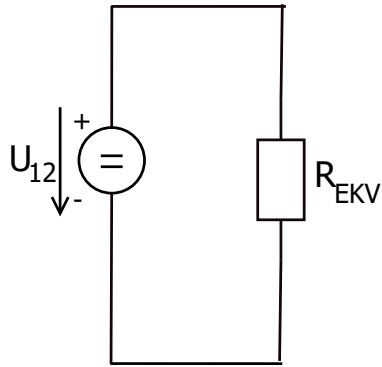
$$R_{B7} = R_B + R_7 = 195.9503 + 355 = 550.9503\Omega$$

$$R_{C6} = R_C + R_6 = 213.3564 + 870 = 1083.3564\Omega$$



Obrázek 5: R_{B7} a R_{C6} jsou zapojeny paralelně

$$R_{BC67} = \frac{R_{B7}R_{C6}}{R_{B7} + R_{C6}} = \frac{550.9503 \cdot 1083.3564}{550.9503 + 1083.3564} = 365.2163\Omega$$



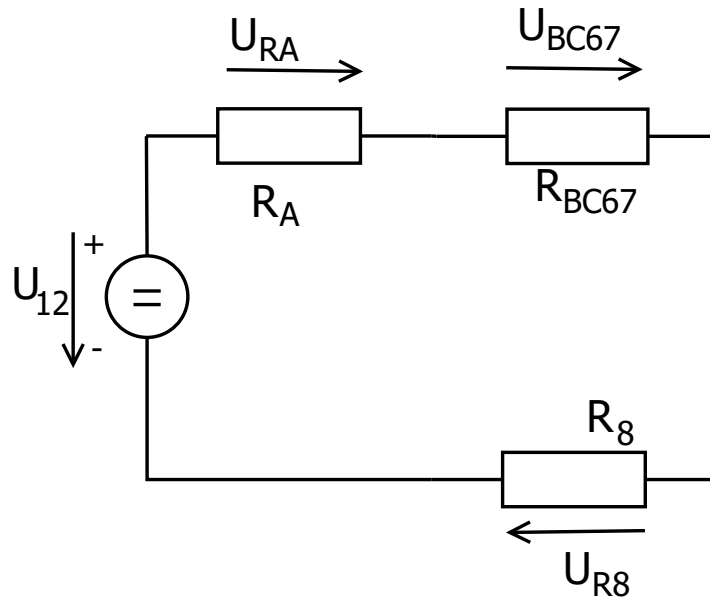
Obrázek 6: R_A a R_{BC67} a R_8 jsou zapojeny sériově - získáváme R_{EKV}

$$R_{EKV} = R_A + R_{BC67} + R_8 = 252.3171 + 365.2163 + 265 = 882.5334\Omega$$

Celkový proud I :

$$I = \frac{U_{12}}{R_{EKV}} = \frac{215}{882.5334} \doteq 0.2436\text{A}$$

Začneme zpětně počítat napětí a proudy, až dojdeme k U_{R_6} a I_{R_6} :

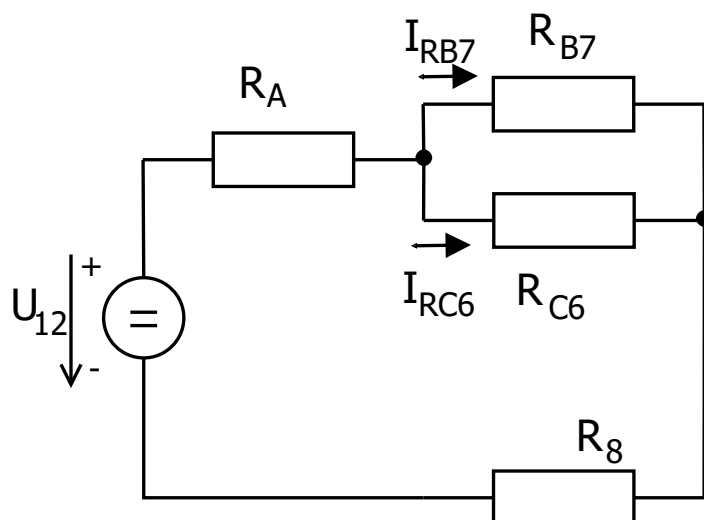


Obrázek 7: Spočítáme si napětí na jednotlivých odporech

$$\begin{aligned}
U_{R_A} &= IR_A = 0.2436 \cdot 252.3171 \doteq 61.4644\text{V} \\
U_{R_{BC67}} &= IR_{BC67} = 0.2436 \cdot 365.2163 \doteq 88.9667\text{V} \\
U_{R_8} &= IR_8 = 0.2436 \cdot 265 = 64.554\text{V}
\end{aligned}$$

Provedeme kontrolu pomocí II. Kirchhoffova zákona.

$$U_{R_A} + U_{R_{BC67}} + U_{R_8} - U_{12} = 0$$

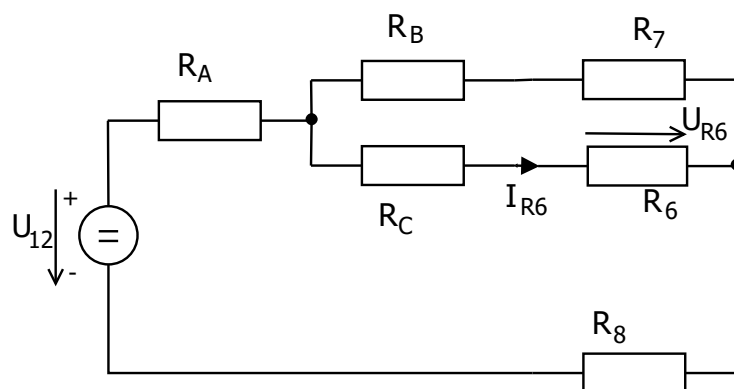


Obrázek 8: Spočítáme si proud ve větvích s R_{B7} a R_{C6}

$$\begin{aligned}
I_{R_{B7}} &= \frac{U_{R_{BC67}}}{R_{B7}} = \frac{88.9667}{550.9503} \doteq 0.1615\text{A} \\
I_{R_{C6}} &= \frac{U_{R_{BC67}}}{R_{C6}} = \frac{88.9667}{1083.3564} \doteq 0.0821\text{A}
\end{aligned}$$

Provedeme kontrolu pomocí I. Kirchhoffova zákona.

$$I_{R_{B7}} + I_{R_{C6}} - I = 0$$



Obrázek 9: Spočítáme si napětí a proud u R_6

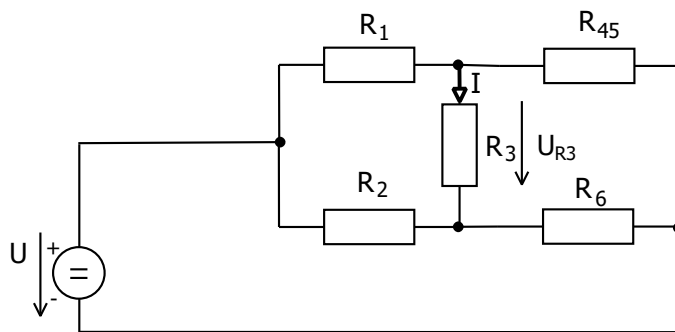
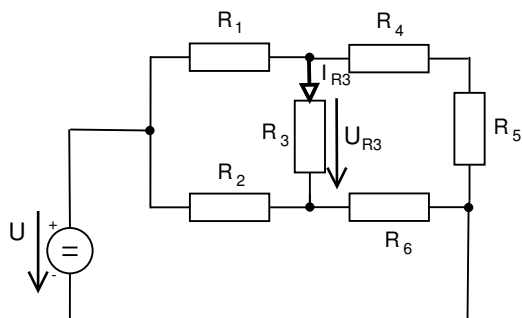
$$I_{R_{C6}} = I_{R_6} = 0.0821\text{A}$$

$$U_{R_6} = I_{R_6} R_6 = 0.0821 \cdot 870 = 71.427\text{V}$$

Příklad 2

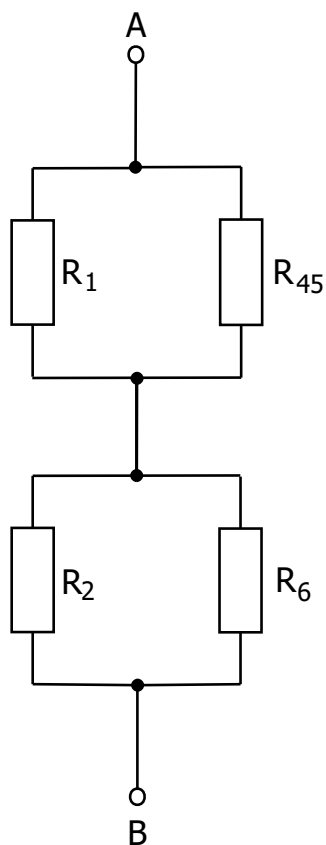
Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
H	220	190	360	580	205	560	180



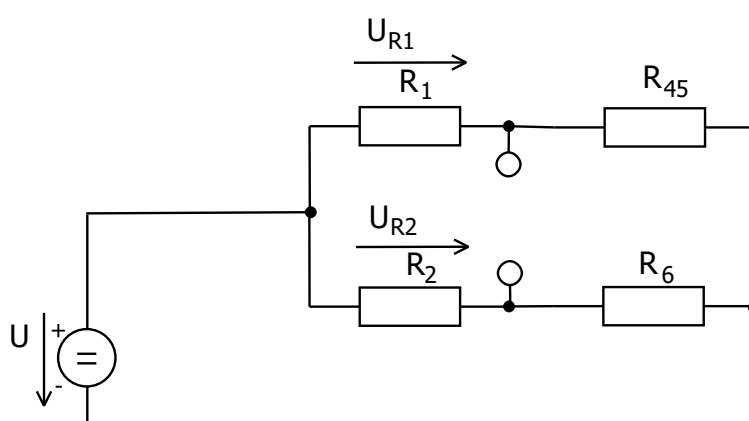
Obrázek 10: R_4 a R_5 si můžeme zapojit do série

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 205 + 560 = 765\Omega$$



Obrázek 11: Uděláme zdroj nahrazený zkratem

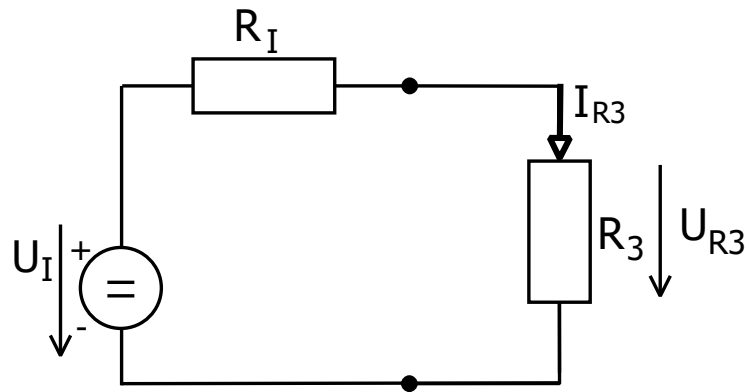
$$R_I = \frac{R_1 \cdot R_{45}}{R_1 + R_{45}} + \frac{R_2 \cdot R_6}{R_2 + R_6} = \frac{190 \cdot 765}{190 + 765} + \frac{360 \cdot 180}{360 + 180} \doteq 272.199\Omega$$



Obrázek 12: Obvod bez R_3

$$U_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R_{45}} \cdot U_0 = \frac{190}{190 + 765} \cdot 220 \doteq 43.76963V$$

$$U_{R2} = \frac{R_2}{R_2 + R_6} \cdot U_0 = \frac{360}{360 + 180} \cdot 220 \doteq 146.66667V$$



Obrázek 13: Schéma náhradního obvodu

$$U_i = U_{R2} - U_{R1} = 146.66667 - 43.76963 \doteq 102.89704V$$

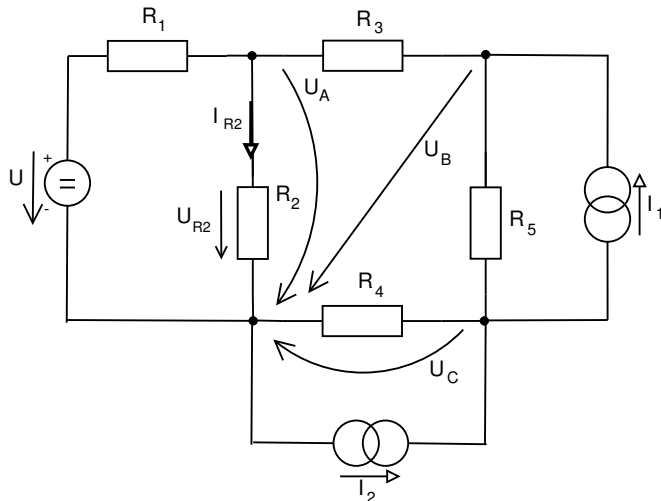
$$I_{R3} = \frac{U_i}{R_I + R_3} = \frac{102.89704}{272.199 + 580} \doteq 0.1207A$$

$$U_{R3} = R_3 \cdot I_{R3} = 580 \cdot 0.1207 \doteq 70.006V$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
A	120	0.9	0.7	53	49	65	39	32



Dle metody uzlových napětí si sestavím rovnice proudů (II. Kirchhoffův zákon) a to podle uzlů A, B, C

$$\begin{aligned}
 A : I_{R1} + I_B - I_{R2} &= 0 \\
 B : I_1 - I_{R3} - I_{R5} &= 0 \\
 C : I_2 - I_1 - I_{R4} + I_{R5} &= 0
 \end{aligned}$$

Proudy pro jednotlivé rezistory s napětími U_A, U_B, U_C :

$$\begin{aligned}
 I_{R1} &= \frac{U - U_A}{R_1} \\
 I_{R2} &= \frac{U_A}{R_2} \\
 I_{R3} &= \frac{U_B - U_A}{R_3} \\
 I_{R4} &= \frac{U_C}{R_4} \\
 I_{R5} &= \frac{U_B - U_C}{R_5}
 \end{aligned}$$

Ted' mohu dosadit do všech tří rovnic všechny známé hodnoty a vyjádřit si neznámá napětí:

$$\begin{aligned} A : \frac{120 - U_A}{53} + \frac{U_B - U_A}{65} - \frac{U_A}{49} &= 0 \\ B : 0.9 - \frac{U_B - U_A}{65} - \frac{U_B - U_C}{32} &= 0 \\ C : 0.7 - 0.9 - \frac{U_C}{39} + \frac{U_B - U_C}{32} &= 0 \end{aligned}$$

Nejprve si rovnici mírně upravím - vyjádřím si zlomky:

$$\begin{aligned} -\frac{U_A}{53} + \frac{U_B}{65} - \frac{U_A}{65} - \frac{U_A}{49} &= -\frac{120}{53} \\ \frac{U_A}{65} - \frac{U_B}{65} - \frac{U_B}{32} + \frac{U_C}{32} &= -0.9 \\ \frac{U_B}{32} - \frac{U_C}{32} - \frac{U_C}{39} &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -U_A \cdot \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{65} + \frac{1}{49}\right) + U_B \cdot \frac{1}{65} &= -\frac{120}{53} \\ U_A \cdot \frac{1}{65} - U_B \cdot \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{65}\right) + U_C \cdot \frac{1}{32} &= -0.9 \\ U_B \cdot \frac{1}{32} - U_C \cdot \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{39}\right) &= 0.2 \end{aligned}$$

Ted' si všechno převedu do matice (sloupce = neznámé, poslední sloupec je číslo za rovnítkem), řádky vynásobím tak, abych se zbavil zlomků a vypočítám U_A , U_B , U_C převedením na jednotkovou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -9227 & 2597 & 0 & -382200 \\ 32 & -97 & 65 & -1872 \\ 0 & 39 & -71 & 249.6 \end{array} \right)$$

Po úpravách na jednotkovou matici dostanu tento tvar matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 57.4031 \\ 0 & 1 & 0 & 56.7803 \\ 0 & 0 & 1 & 27.6737 \end{array} \right)$$

Výsledné hodnoty napětí jsou následovné:

$$U_A = 57.4031V$$

$$U_B = 56.7803V$$

$$U_C = 27.6737V$$

Vypočítám si U_{R2} , a potom dopočítám proud I_{R2} - vše dle vzorce, který jsem si vyjádřil hned nazačátku příkladu:

$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{U_A}{R_2} \Rightarrow U_{R2} = U_A$$

$$U_{R2} = 57.4031V$$

$$I_{R2} = \frac{57.4031}{49} = 1,1715A$$

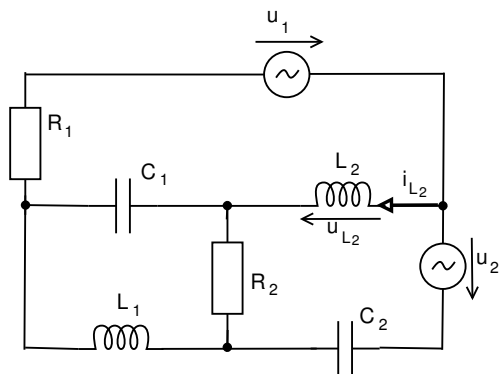
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
H	65	60	10	10	160	75	155	70	95

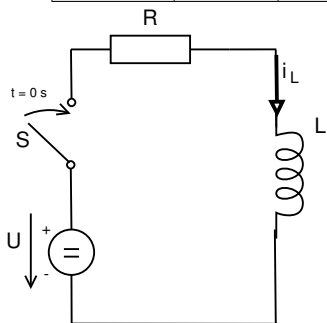


Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0[\text{s}]$ sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
H	18	50	40	5



Vyjádríme si všechny vztahy v obvodu:

$$i_L = \frac{u_R}{R} \quad i = i_L = i_R$$

$$u_R + u_L - U = 0$$

$$u'_L = \frac{u_L}{L}$$

Zavedeme si počáteční podmínku:

$$i'_L(0) = 5A$$

Nyní využijeme vyjádřené vztahy:

$$Ri_L + Li'_L = U$$

$$i'_L = \frac{1}{L} \cdot (U - Ri_L)$$

Očekávané řešení:

$$i_L(t) = K(t) \cdot e^{\lambda t}$$

Řešíme charakteristické rovnice ($i'_L = \lambda$, $i_L = 1$):

$$R + L\lambda = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{4}{5}$$

Dosadíme λ do očekávaného řešení:

$$i_L(t) = K(t) \cdot e^{\lambda t}$$

$$i_L(t) = K(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Provedeme derivace získané rovnice:

$$i_L'(t) = K'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + K(t) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Dosadíme rovnice do námi sestavené diferenciální rovnice:

$$Ri_L + Li_L' = U$$

$$R \cdot K(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + L \cdot \left(K'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + K(t) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right) = U$$

$$R \cdot K(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + L \cdot K'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + L \cdot K(t) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = U$$

$$R \cdot K(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + L \cdot K'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - R \cdot K(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = U$$

$$L \cdot K'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = U$$

$$K'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{L}$$

$$K'(t) = \frac{U}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Rovnici $K'(t)$ zintegrujeme abychom zjistili $K(t)$:

$$K(t) = \int \frac{U}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} dt$$

$$K(t) = \frac{U \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}{-\frac{R}{L}} + k$$

Dosadíme $K(t)$ do očekávaného řešení:

$$i_L(t) = \left(\frac{U \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}{-\frac{R}{L}} + k\right) \cdot e^{\lambda t}$$

$$i_L(t) = \frac{U}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad (1)$$

Dále dosadíme počáteční podmínku $i_L(0) = 5A$:

$$11 = \frac{U}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$11 = \frac{U}{R} + k$$

$$k = 5 - \frac{U}{R}$$

Dosadíme k do rovnice (1):

$$i_L(t) = \frac{U}{R} + k \cdot e^{-\frac{R}{L}t} i_L(t) = \frac{U}{R} + \left(5 - \frac{U}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

Dosadíme hodnoty:

$$i_L(t) = \frac{18}{40} + \left(5 - \frac{18}{40}\right)e^{-\frac{40}{50}t}$$

Hledaná rovnice tedy je:

$$i_L(t) = \frac{9}{20} + \frac{91}{20}e^{-\frac{4}{5}t}$$

a)

$$t = 0s : \quad i_L(0) = \frac{U}{R} + 5 - \frac{U}{R} = 5$$

b) Dosadíme i_L a i'_L do diferenciální rovnice prvního řádu a upravíme:

$$Ri_L + Li'_L = Ui_L(t) = \frac{U}{R} + \left(5 - \frac{U}{R}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i'_L(t) = -\left(5 - \frac{U}{R}\right) \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$R \cdot \left[\frac{U}{R} + \left(5 - \frac{U}{R}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right] + L \cdot \left[-\left(5 - \frac{U}{R}\right) \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right] = U$$

$$U + R \cdot \left(5 - \frac{U}{R}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - R \cdot \left(5 - \frac{U}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} = U$$

$$U = U$$

$$0 = 0$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	H	$U_{R6} = 71.427V$ $I_{R6} = 0.0821A$
2	H	$U_{R3} = 70.006V$ $I_{R3} = 0.1207A$
3	A	$U_{R2} = 55.8656V$ $I_{R2} = 1.1401A$
4	H	$ U_{L2} =$ $\varphi_{L2} =$
5	H	$i_L = \frac{9}{20} + \frac{91}{20}e^{-\frac{4}{5}t}$