Reporte PDEs: Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Antonio Reyes Montaño

03/05/2021

1. Introducción

En las actividades 10, 11 y 12 se analizaron diferentes ecuaciones diferenciales parciales de las cuales se buscó una solución numérica utilizando el método de diferencias finitas el cual es bastante útil y práctico en estos casos. Para la actividad 10 se buscó resolver casos para la ecuación de calor; para la actividad 11 se resolvieron casos para la ecuación de onda; por último, en la actividad 12 se resolvieron casos para la ecuación de Poisson. Para resolver estos problemas se consideraron las condiciones de frontera de tipo Dirichlet, y las de tipo Neumann.

2. Familias de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales son ecuaciones en las que se definen relaciones entre varias derivadas parciales de una función de múltiples variables. Usualmente es bastante complicado o imposible el poder definir soluciones explícitas a este tipo de ecuaciones, pero existen diferentes métodos de aproximaciones numéricas para resolverlos. Existen además diferentes tipos de estas ecuaciones como lo son las parabólicas, las hiperbólicas, y las elípticas, las cuales son ecuaciones lineales de segundo orden y tienen la forma: $Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy} = 0$. De estos coeficientes podemos saber la clasificación de la ecuación.

2.1. Ecuaciones Parabólicas

Para las ecuaciones parabólicas tenemos que $B^2 - AC = 0$. Un ejemplo de estas ecuaciones es la ecuación de calor, la cual sirve como análoga para otras ecuaciones del mismo tipo. Las soluciones se suavizan al incrementar la variable transformada de tiempo.

2.2. Ecuaciones Hiperbólicas

Para las ecuaciones hiperbólicas tenemos que $B^2 - AC > 0$. Un ejempo de ecuaciones hiperbólicas es la ecuación de onda. Estas ecuaciones retienen cualquier descontinuidad de funciones o derivadas de los datos iniciales. Utilizando estas ecuaciones se pueden hacer aproximaciones del movimiento de un fluido a velocidades supersónicas.

2.3. Ecuaciones Elípticas

Para las ecuaciones elípticas tenemos que $B^2 - AC < 0$. Las soluciones de estas ecuaciones dependen de lo que permitan los coeficientes dentro de la región donde se definen las soluciones y la ecuación. Un ejemplo de esto es la ecuación de Laplace, cuyas soluciones dentro del dominio donde están definidas son analíticas, pero las soluciones pueden tener valores a la frontera que no son suaves.

3. Condiciones a la frontera

Las condiciones a la frontera nos dan restricciones para un problema, lo cual nos permite resolverlo. Estas condiciones pueden aplicarse en ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales también. Existen diferentes tipos de condiciones a la frontera, como Dirichlet, Neumann, y Robin.

3.1. Dirichlet

Las condiciones a la frontera de Dirichlet son las que asignan un valor en la frontera para la variable dependiente. Por ejemplo, si tenemos una ecuación como $\frac{du}{dx} + u = 0$, condiciones del tipo Dirichlet serían algo como lo siguiente: $y(a) = A$ y $y(b) = B$.

3.2. Neumann

Las condiciones a la frontera de Neumann, se asigna un valor conocido a la derivada de la variable dependiente en las diferentes fronteras. Por ejemplo, tendríamos condiciones como las siguientes: $y'(a) = \alpha$ y $y'(b) = \beta$.

3.3. Robin

Las condiciones a la frontera de Robin son una combinación de las de tipo Dirichlet y las de tipo Neumann en todas las partes de la frontera. Por ejemplo, este tipo de condiciones tendrían una forma como la siguiente: $\chi_1 y(a) + \chi_2 y'(a) = A_\alpha$ y $\chi_1 y(b) + \chi_2 y'(b) = B_\beta$

4. Método de diferencias finitas

Los métodos de diferencias finitas son diferentes técnicas que sirven para resolver ecuaciones diferenciales al aproximar derivadas con diferencias finitas. Para esto se discretiza tanto el dominio espacial como el temporal, y se separan en un número finito de pasos. El valor de la solución en cada punto discreto se aproxima resolviendo ecuaciones algebráicas que contienen diferencias finitas de puntos adyacentes. Estos métodos convierten las PDEs (o las ODEs) en un sistema de ecuaciones lineales que se resuelven con álgebra matricial.

El método de diferencias finitas utiliza la expansión de Taylor para aproximar las derivadas. Teniendo el valor que toma la función al evaluar en un punto específico, entonces:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \tfrac{h}{1!} f'(x_0) + O(h^2)$$

$$f'(x_0) \approx \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + O(h^2)$$

donde $O(h^2)$ denota términos de orden superior. Con esto se puede utilizar el método de diferencias finitas hacie enfrente (ya que utiliza el punto que sigue). Por otro lado, el método de diferencias finitas hacia atrás se obtiene similarmente, y tenemos que la derivada es:

$$f'(x_0) \approx \tfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} + O(h^2)$$

Al promediar las dos ecuaciones obtenidas se puede obtener la diferencia finita centrada de orden superior

$$f'(x_0) \approx \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} + O(h^2)$$

Con esta tercera ecuación podemos aproximar la segunda derivada del siguiente modo:

$$f''(x_0) \approx \tfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} + O(h^2)$$

Al sustituir las diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás, obtenemos:

$$f''(x_0) \approx \tfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} + O(h^3)$$

Esta ecuación nos relaciona tres puntos diferentes.

5. Solución de la ecuación de calor

La ecuación de calor es una ecuación diferencial parcial cuyas soluciones a veces se conocen como funciones calóricas. La teoría desarrollada para esta ecuación fue acuñada por Joseph Fourier en 1822 para modelar como una cantidad como el calor se difunde a través de una región. Es también la ecuación diferencial parcial prototipo, lo cual la convierte en un tema de amplio estudio ya que da entrada a un análisis más profundo de las ecuaciones diferenciales parciales.

La ecuación de calor toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$$

donde κ es el coeficiente de difusividad En una sola dimensión tenemos que la ecuación es de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Para obtener la solución de la ecuaciónd de calor primero reescribimos la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \kappa\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$$

Tenemos que para un punto (jh,t), la ecuación será de la forma $u(jh,t) = u_j(t)$:

$$\frac{du_j(t)}{dt} \approx \kappa\frac{u_{j+1}(t)-2u_j(t)+u_{j-1}(t)}{h^2}$$

Ahora necesitamos una condición inicial en un t_0 y las condiciones a la frontera, las cuales pueden ser de Dirichlet o de Neumann.

Si tenemos condiciones tipo Dirichlet, entonces serían de la forma $u_0 = c_1$, $u_N = c_2$. Si las condiciones son tipo Neumann, entonces serán de la forma: $\frac{du_0}{dx} = 0$ o $\frac{du_N}{dx} = 0$.

Además, definimos como aproximar la derivada en la frontera. Para esto consideramos lo siguiente:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{N+1}-u_{N-1}}{2h} = 0$$

$$u_{N+1} = u_{N-1}$$

De esto obtenemos la siguiente ecuación para completar el algoritmo:

$$\frac{du_N(t)}{dt} = \kappa\frac{2u_{N-1}(t)-2u_N(t)}{h^2}$$

Actividad 10:

`https://github.com/TonyReyesM/Fisica-Computacional/tree/master/Actividad%2010`

6. Solución de la ecuación de onda

La ecuación de onda es una ecuación diferencial parcial que describe ondas de diferentes tipos. Ésta toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + f(x,y,z,t)$$

La velocidad de propagación es denotada por c, mientras que u puede ser la presión en una onda sonora, por ejemplo. Pero para el caso de una sola dimensión tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Para resolver un problema de este tipo necesitamos 2 condiciones iniciales y dos condiciones de frontera, además del valor de c.

Reescribimos la ecuación de onda considerando h como un incremento en el espacio, y ¨k como un incremento en el tiempo:

$$\frac{u(x,t+k)-2u(x,t)+u(x,t+k)}{k^2} = c^2\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$$

En esta ecuación tenemos 5 puntos relacionados. Uno está un paso adelante en el tiempo, otro un paso atrás, uno un paso adelante en el espacio, otro un paso atrás en el espacio, y otro en el punto dado por x y t. Ahora cambiamos la notación:

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{k^2} = c^2\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}$$

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + C^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Tenemos que $C = \frac{ck}{h}$ (constante de Courant).

Ahora reemplazamos la condición inicial por diferencias finitas centradas de segundo orden:

$$\frac{\partial u_j^0}{\partial t} = \frac{u_j^1-u_j^{-1}}{2k} = 0$$

$$u_j^1 = u_k^{-1}$$

De esto obtenemos dos niveles de valores para $u(x,t)$ para calcular los valores de u_j^{n+1}:

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

Actividad 11:

https://github.com/TonyReyesM/Fisica-Computacional/tree/master/Actividad%2011

7. Solución de la ecuación de Poisson

La Ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial elíptica, la cual es de la forma:

$$-\nabla^2 u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

Para dos dimensiones tenemos

$$-\nabla^2 u(x,y) = f(x,y)$$

Esta ecuación se utiliza ampliamente en física teórica, por ejemplo, para encontrar el potencial causado por una carga eléctrica o la distribución de densidad de masa. Es una generalización de la ecuación de Laplace.

Aplicando las ecuaciones para segundas derivadas aproximadas por diferencias finitas considerando que ahora tenemos coordenadas espaciales , tenemos:

$$\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} + \frac{u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}}{k^2} \approx -f_n^m$$

Consideramos una malla de valores para x y y, cuyos espaciamientos están dados por k, h, y son iguales. Tenemos de esto un stencil computacional de 5 puntos. Cuando consideramos los valores que hay en la malla, podemos obtener un sistema de ecuaciones lineales descrito por:

$$AU = F$$

Tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} B & -I & 0 & 0 & ... & 0 \\ -I & B & -I & 0 & ... & 0 \\ & & ... & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & -I & B \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & ... & 0 \\ & & ... & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Tenemos que las matrices son ambas de tamaño $(M-2) \times (M-2)$, donde M es el número de puntos utilizados.

Por otro lado, el vector F está compuesto de los valores de la función $u(x,y)$ y las condiciones a la frontera de ésta. Con estas matrices podemos resolver los problemas de la ecuación de Poisson.
Actividad 12:

`https://github.com/TonyReyesM/Fisica-Computacional/tree/master/Actividad%2012`

8. Resumen y conclusiones

La actividad se concentró en resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales parciales que además se ramificaron en diferentes casos. Se empleó el método de diferencias finitas para poder resolver numéricamente los problemas debido a que las soluciones no son analíticas. Estas actividades fueron bastante interesantes y muestran el poder de la programación para resolver problemas bastante complejos con gran facilidad. En mi opinión estas fueron las actividades más complejas de comprender pero también de las más interesantes y que muestran un uso bastante práctico como lo han hecho las actividades anteriores.

9. Bibliografía

`https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation#Classification` http://www.multiphysics.us/BC.html#:~:text=The%20Dirichlet%2C%20Neumann%2C%20and%20Robin,conditions%20exist%20in%20the%20others.

https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method

https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation

https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation

https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson%27s_equation