对凸包和半平面交问题的研究

尹玉文东 蔡越同 李灏冬 张钰晨

指导教师：苏虹宇

2022.01.21

研究背景

- 信息技术的普及，算法竞赛的推广
- 在算法竞赛方面，缺乏系统化资料
- 计算几何：基于平面向量相关运算
- 解析几何：基于笛卡尔坐标系的解析计算
- 计算机的运算精度问题，选用计算几何

有关说明

- 只关注平面问题
- 向量 $\Leftrightarrow$ 坐标
- 叉积：只关注模长和方向，不关注坐标

浮点数相关函数

- 避免浮点数运算的精度问题
- 判断一个浮点数的正负
- 比较两个浮点数的大小

直线类

- 利用向量类，通过两点坐标构造直线
- 判断两直线是否平行
- 求两直线交点

向量类

- 解决二维向量的相关运算问题

- 向量的加法、减法、数乘、点积、叉积
- 求向量的模长
- 求两向量之间的夹角
- 对一组向量极角排序或字典序排序

极角

任取一个顶点 O 作为极点，作射线 OX，称为极轴。

平面上一点 p 的极角，即为向量 $\overrightarrow{Op}$ 与极轴 OX 的夹角。

一般地，取 x 轴作为极轴，以逆时针方向为正。

极角排序

- 利用 atan2(double y, double x) 函数
- 函数返回值为 (x, y) 与 x 轴的极角
- 弧度制

```
bool cmp(Point a, Point b) {
    if(atan2(a.y, a.x) - atan2(b.y, b.x) == 0)
        return a.x < b.x;
    return atan2(a.y, a.x) < atan2(b.y, b.x);
}
```

交点坐标表示： $\vec{P} = \overrightarrow{A_s} + t \cdot \overrightarrow{A_s A_t}, \quad t = \dfrac{\overrightarrow{B_s B_t} \times \overrightarrow{B_s A_s}}{\overrightarrow{B_s B_t} \times \overrightarrow{A_s A_t}}$

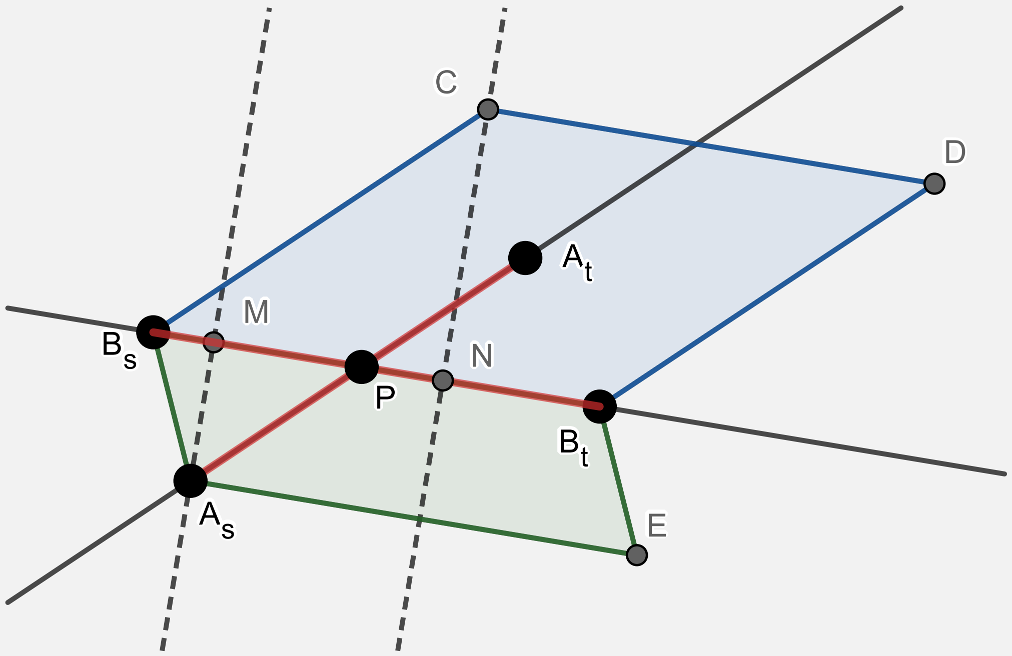
只需要利用向量的相关运算

避免了坐标运算（运算精度）

叉积的几何意义

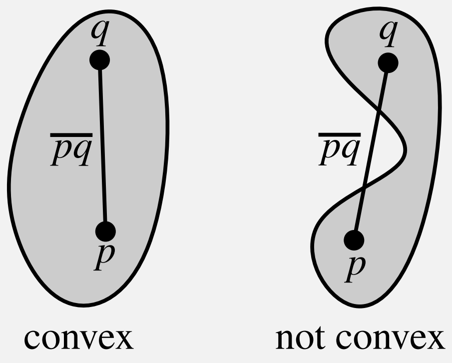
相似三角形

证明见结题报告



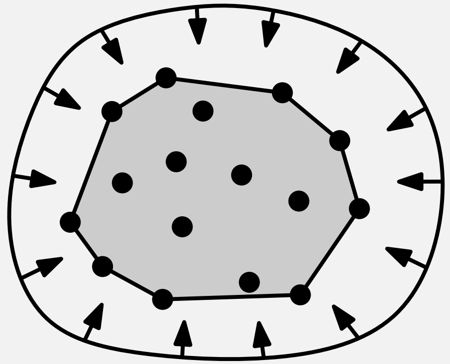
凸集

一个子集 S 被称为凸的，当且仅当对于任意两点 $p,q \in S$，线段 $\overline{pq}$ 都完全属于 S。



凸包

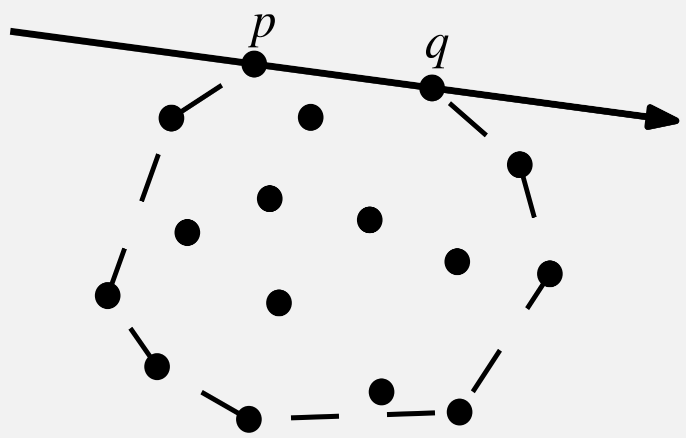
集合 S 的凸包 $\mathcal{CH}(S)$，是包含 S 的最小凸集，也就是包含 S 的所有凸集的交。



图片来源：Berg M，Kreveld M，Overmars M H . Computational Geometry: Algorithms and Applications[M]. 2008.

算法原理：若线段 $\overline{pq}$ 在凸包上，则点集 P 中的点均位于直线 $\overline{pq}$ 的同一侧

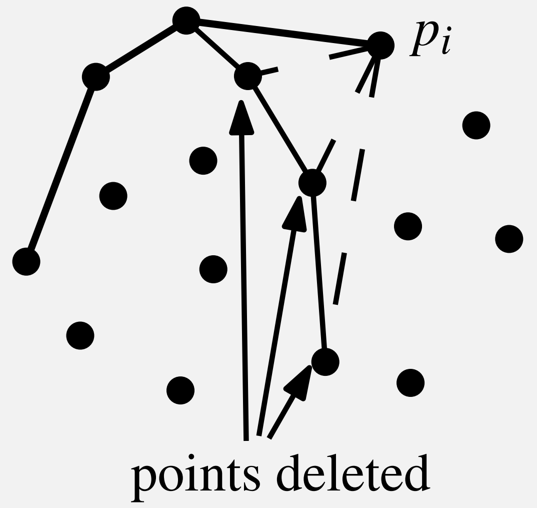
- 钦定 $p \to q$ 按顺时针方向，则有更强的限制
- 点 t 在 $\overrightarrow{pq}$ 右侧 $\Leftrightarrow \overrightarrow{pt} \times \overrightarrow{pq} > 0$。
- 枚举有序点对 $(p, q) \in P \times P$，若点集 P 中的点都在有向线段 $\overrightarrow{pq}$ 的右侧，则 $\overline{pq}$ 是 $\mathcal{CH}(P)$ 中的一条边。
- 判断方向用叉积
- 时间复杂度为 $O(n^3)$，n 为点数。



图片来源：Berg M，Kreveld M，Overmars M H . Computational Geometry: Algorithms and Applications[M]. 2008.

算法原理：若以顺(逆)时针方向遍历线段，线段的斜率具有单调性

- 把点集按**字典序**排序。第一个点和末尾的点，一定在凸包上。
- 升序枚举求出下凸壳，求上凸壳同理。
- 用单调栈维护**斜率单调性**。
- 若 P 与 S_1 构成的新线段是顺时针旋转的，则弹出栈顶，直到新线段满足单调性为止。
- 时间复杂度为 $O(n\log n)$，瓶颈在排序部分。



图片来源：Berg M，Kreveld M，Overmars M H . Computational Geometry: Algorithms and Applications[M]. 2008.

覆盖点集的最小凸多边形周长

- 求凸包
- 把凸包按逆时针排序

$$l = \sum_{i=1}^{n} \left|\overrightarrow{p_i p_{i+1}}\right| + \left|\overrightarrow{p_1 p_n}\right|$$

覆盖点集的最小凸多边形面积

- 求凸包
- 三角剖分

$$s = \sum_{i=2}^{n-1} \text{Area}\,(p_1, p_i, p_i + 1) = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{|(p_i - p_1) \times (p_{i+1} - p_1)|}{2}$$

动态维护凸包

- 加入一个顶点并更新凸包
- 查询一个坐标是否位于凸包内部
- **附件二：动态维护凸包的C++语言实现**，利用了 `std::set`

包围盒问题

- 广泛应用于与游戏物理引擎的制作中
- 以最小包围盒代替游戏中的不规则元素
- 使图形拟合更准确
- 更简单地对游戏元素进行操作
- 提高游戏运行效率

碰撞检测及避免

- 广泛应用于3D游戏中
- 通过三维凸包找到人物轮廓
- 使人物在场景中的移动合理
- 精确、稳定
- 简化运算过程

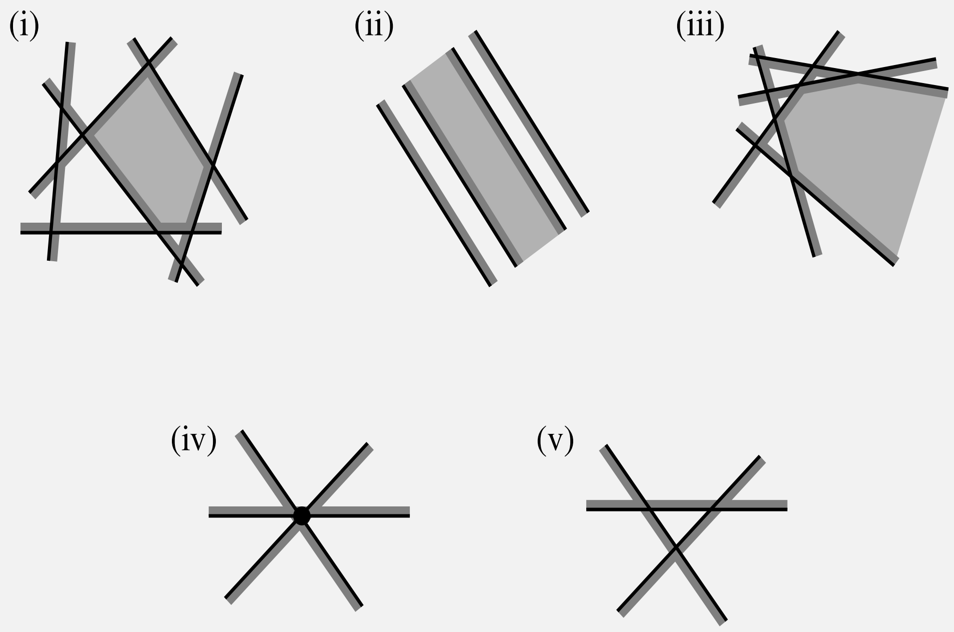
半平面

- 半平面是一条直线和直线的一侧
- 半平面是一个点集

半平面交

- 半平面交是多个半平面的交集，是一个点集
- 在代数意义下，是若干个线性约束条件：

$$a_i x + b_i y \le c_i$$



用灰色阴影表示直线所代表的半平面

图片来源：Berg M，Kreveld M，Overmars M H . Computational Geometry: Algorithms and Applications[M]. 2008.

S&I 算法流程

- 把半平面按照极角序排序。
- 对每个半平面，执行一次增量过程。
- 数据结构选用：双端队列。
- 每次根据需要弹出双端队列的头部或尾部元素。
- 弹出的条件与求凸包时类似（Andrew算法）。
- 若无需排序，时间复杂度是线性的。

```
bool Halfplane_intersection(int n, Line *hp, Point *p) {
    if(n < 3) return false;
    sort(hp, hp + n, cmp2);
    Halfplane_unique(n, hp);
    st = 0; ed = 1;
    que[0] = 0; que[1] = 1;
    if(parallel(hp[0], hp[1])) return false;
    Calc_intersection(hp[0], hp[1], p[1]);
    for(int i = 2; i < n; i++) {
        while(st < ed &&
              sgn((hp[i].t - hp[i].s) * (p[ed] - hp[i].s)) < 0)
            ed--;
        while(st < ed &&
              sgn((hp[i].t - hp[i].s) * (p[st + 1] - hp[i].s)) < 0)
            st++;
        que[++ed] = i;
        assert(ed ≥ 1);
        if(parallel(hp[i], hp[que[ed - 1]])) return false;
        Calc_intersection(hp[i], hp[que[ed - 1]], p[ed]);
    }
    while(st < ed &&
          sgn((hp[que[st]].t - hp[que[st]].s)*(p[ed] - hp[que[st]].s)) < 0)
        ed--;
    while(st < ed &&
          sgn((hp[que[ed]].t - hp[que[ed]].s)*(p[st + 1] - hp[que[ed]].s)) < 0)
        st++;
    if(st + 1 ≥ ed) return false;
    return true;
}
```

赛车问题

- 赛车比赛：若一辆车在比赛过程中存在一个时刻处于第一位上，即可获奖。
- 简化：无限长的直线赛道，匀速行驶。
- 若求每两条直线的交点？耗时费力。
- 由 x-t 图像，取直线的左侧半平面，与 x 轴以上，y 轴以右，求半平面交。

光的传播问题

- 问题：给定若干障碍物，并规定光的传播方向，求哪些障碍物是可见的。
- 障碍物是直线，从上向下看。
- 把直线表示为 $y \leq kx + b$ 的形式。
- 转化为半平面交问题，利用凸性求解。

总结与展望

创新

- 生活中的应用
- 算法思路整理
- 算法竞赛中的典例

不足

- 计算几何库有待完善
- 研究具有局限性

致谢 Thanks

感谢苏虹宇老师、张敏老师。

感谢年级与学校对研究性学习的支持。