Cálculo Diferencial e Integral I
Departamento de Matemática
Coordinación

Emanuelle Parra Rodríguez
`emanuelle.parra@ufide.ac.cr`
Coordinador de curso

Límites y continuidad de funciones

Contenidos

1. Noción intuitiva de límite

Considere la función f con criterio

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

La cual no está directamente definida en $x = 1$.
Observe el comportamiento de f para valores de x próximos (alrededor) a 1:

valores por derecha ($x > 1$)	$f(x)$
1.5	2.5
1.4	2.4
1.3	2.3
1.2	2.2
1.1	2.1
1.05	2.05
1.001	2.001
$\vdots$	$\vdots$

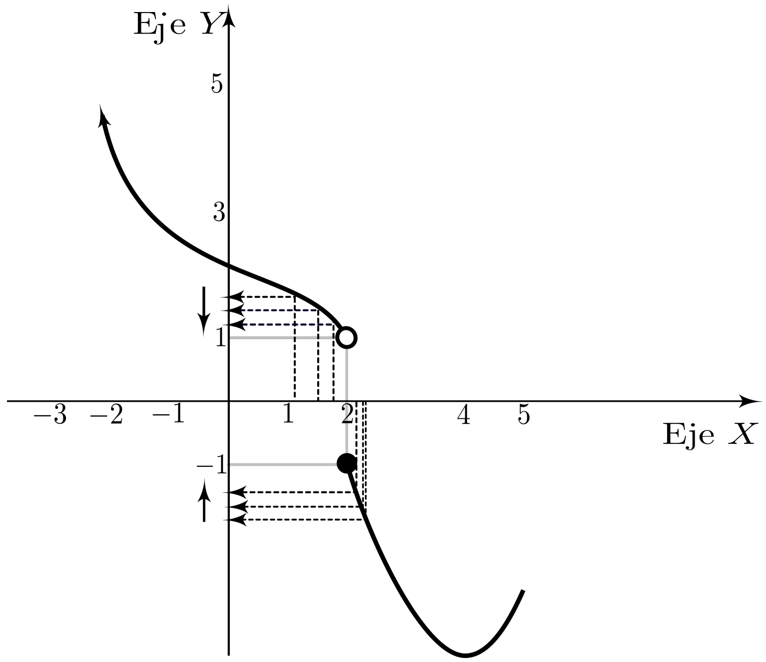
valores por izquierda ($x < 1$)	$f(x)$
0.5	1.5
0.6	1.6
0.7	1.7
0.8	1.8
0.9	1.9
0.95	1.95
0.999	1.999
$\vdots$	$\vdots$

Observe que el valor de $f(x)$ se aproxima a 2 conforme x se toma cada vez más cercano a 1.
Este comportamiento hace referencia a la noción de límite, se dice que *el límite de f cuando x tiene a* 1*, es* 2 y se denota

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Se debe detacar que esta notación se utiliza únicamente en el caso de que f se aproxime a un solo valor real ($f(x) \to 2$) conforme x se acerca por ambos sentidos (izquierda y derecha) al valor en estudio ($x = 1$)

Un análisis similar se puede realizar en la siguiente figura que corresponde a la gráfica de f.



Se puede apreciar que al tomar valores de x cercanos a 2 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 1(observar en el eje y); mientras que si se toman valores de x cercanos a 2 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a -1. Lo cual indica que alrededor de $x = 2$, f no se está aproximando a un solo valor, de modo que no se satisface la existencia del límite. Más adelante se enuncia un teorema que asegura que, en caso de existir, el límite debe ser único.

1.1. Conceptos preliminares

Definición 1.1: Definición intuitiva de límite

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a, donde puede que f no esté definida en $x = a$. Se define *el límite de $f(x)$ cuando x tiende a* "a" como el número real L (si existe), si $f(x)$ se aproxima tanto como se quiere a L cuando x se toma suficientemente cercano a a (sin tomar $x = a$). En tal caso se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si el límite de una función existe (es un número real) diremos que ésta converge. En caso contrario, diremos que la función diverge.

1.1.1. Límites unilaterales

Es posible dar dos definiciones diferidas del límite, a partir de tendencias unilaterales. Tal y como se vio en el ejemplo introductorio, el análisis de la función se realiza por separado, en dos direcciones: por izquierda y por derecha.

Definición 1.2: Límite lateral izquierdo

Se escribe $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ y se dice que el *límite lateral izquierdo* de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual L, si los valores de $f(x)$ se aproximan arbitrariamente a L tomando a x suficientemente cercano a "a", con $x < a$ (por izquierda)

Definición 1.3: Límite lateral derecho

Se escribe $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ y se dice que el *límite lateral derecho* de $f(x)$ cuanto x tiende a "a" es igual a L, si los valores de $f(x)$ se aproximan arbitrariamente a L, tomando x suficientemente cercano a "a", con $x > a$ (por derecha).

Los límites unilaterales guardan una fuerte relación con el límite global que se dio en la definición 2.1, la cual se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.1: Teorema de existencia y unicidad del límite

Sea f una función definida en un intervalo abierto, que puede no estar definida en $x = a$, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Es decir, el límite de una función $f(x)$ alrededor de un punto $x = a$ existe y es igual a L, siempre y cuando los límites laterales existan y sean iguales a L. En caso contrario, se dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe.

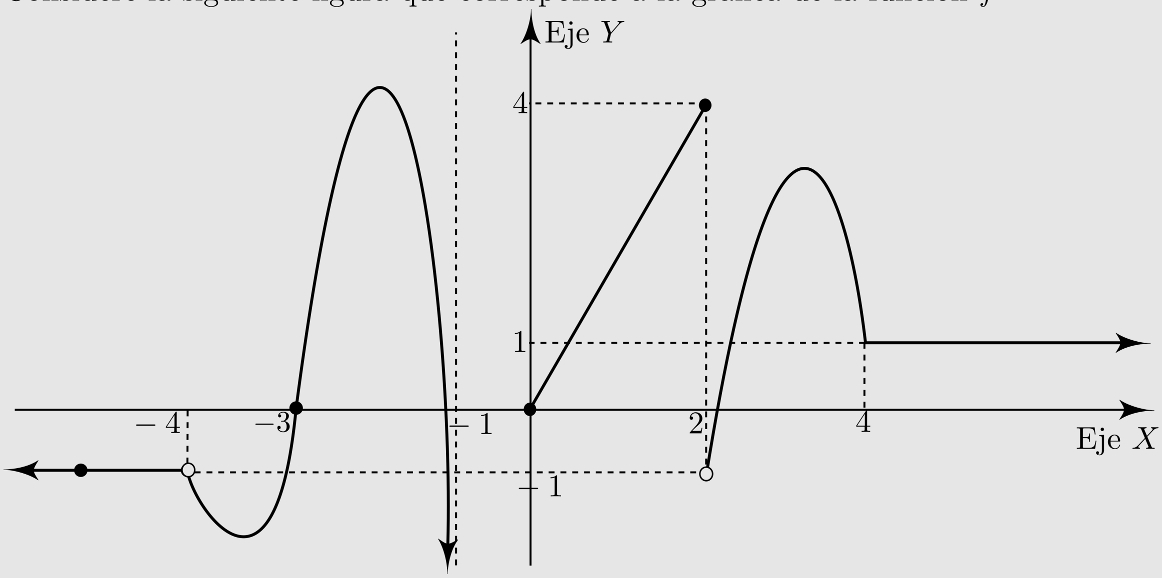
Observación: En caso de existir, el límite de una función es único.

2. Cálculo de límites en un punto

2.1. Cálculo de límites a partir de una gráfica

Ejemplo 2.1

Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de la función f



1. De acuerdo con los datos suministrados calcule (si existen) los siguientes límites. En caso de que un límite no exista, indíquelo y justifique.

   a) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$

   b) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$

   c) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

   d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

   e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

   f) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

   g) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

2. Determine un valor numérico de a de modo que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

3. Determine un valor numérico de b de modo que $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = -1$

4. Calcule el valor numérico de

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) - \lim_{x \to -3} f(x) \left(\frac{\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)}{\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)} \right)$$

1. De acuerdo a la información, tenemos:

   a) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = -1$

   b) $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = -1$ (observe que los límites laterales son iguales a -1)

   c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

   d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$

   e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$

   f) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 1$ (aunque el valor 5 no se representa en el eje X, se sabe que se encuentra en un sector donde f es constante e igual 1)

   g) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe, ya que de los incisos anteriores se evidencia que los límites unilaterales son distintos.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ si $a = -3$. Note que en este caso es necesario que los límites unilaterales sean iguales a 0.

3. Para que $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = -1$ podemos elegir entre $b = 2$ o $b = -4$, ya que en ambos se cumple la condición.

4. Se sustituyen los valores determinados:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) - \lim_{x\to -3} f(x) \left(\frac{\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)} \right) = 4 - 0 \left(\frac{-1}{-1} \right) = 4$$

2.2. Límites a partir de propiedades algebraicas

A continuanción se enuncian las propiedades que enmarcan al álgebra de límites, de modo que se facilite el cálculo de los mismos a partir de criterios de funciones.

Propiedades de límites (álgebra en el cálculo de límites)

Sean f y g funciones definidas en un intervalo abierto que contiene a "a", las cuales puede que no estén definidas en $x = a$ y sea c una constante real ($c \in \mathbb{R}$). Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, entonces:

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x) \pm g(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}; \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \lim_{x\to a} f(x)^n$ con $n \in \mathbb{N}$
6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$; si n es par se supone $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$
7. Si $f(x)$ es una función real de variable real bien definida en $x = a$; es decir, a pertenece al dominio real de f, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

En primera instancia el cálculo de límites se reduce a la apliacación de un álgebra básica, que en la mayoría de casos se reduce a la propiedad 7.

2.2.1. Cálculo de límites por sustitución directa

Ejemplo 2.2

Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x+2}$$

Observe que $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ está bien definida en $x = 2$, de modo que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{2^2+1}{2+2} = \frac{5}{4}$$

Ejemplo 2.3

Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{5+x}-\cos(\pi x)}{x^2-3}$$

$g(x) = \dfrac{\sqrt{5+x}-\cos(\pi x)}{x^2-3}$ está definida en $x=-2$, de modo que

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{5+x}-\cos(\pi x)}{x^2-3} = \frac{\sqrt{5+-2}-\cos(\pi\cdot -2)}{(-2)^2-3} = \sqrt{3}-1$$

Cabe destacar que las funciones trigonométricas deben ser evaluadas en radianes.

Ejemplo 2.4

Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 1} (4e^x - \ln x)$$

Dado que $4e^1 - \ln 1$ está definido en $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 1} (4e^x - \ln x) = 4e^1 - \ln 1 = 4e$$

2.2.2. Cálculo de límites unilaterales

Ejemplo 2.5

Considere la siguiente función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x > -3 \\ 4 & \text{si} \quad x = -3 \\ 2x+16 & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$

De acuerdo con los datos de la función anterior, calcule si existe $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$. Justifique.

Para evaluar $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$, note que f está definida a trozos que varían alrededor $x=-3$. De este modo, debemos determinar los límites unilaterales y verificar si estos son iguales. Veamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3^-} f(x) &= \lim_{x\to -3^-} (2x+16) = 2(-3)+16 = 10 \\ \lim_{x\to -3^+} f(x) &= \lim_{x\to -3^+} \left(x^2+1\right) = (-3)^2+1 = 10 \end{aligned}$$

En conclusión

$$\lim_{x\to -3} f(x) = 10$$

En este ejercicio no se utilizó $f(-3) = 4$ ya que el límite se evalúa alrededor de 3, no puntualmente en 3.

Ejemplo 2.6

Considere la siguiente función definida a trozos.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{22}{5} & \text{si} \quad x > 7 \\ \dfrac{2x+8}{5} & \text{si} \quad 7 > x \geq 3 \\ \tan(x-3) & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

De acuerdo con los datos de la función anterior, hallar si existe $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 7} g(x)$. Justifique cada afirmación.

Observe que g cambia de criterio alrededor de $x = 3$ y $x = 7$, de modo que se deben evaluar los límites unilaterales:

caso de $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} g(x) &= \lim_{x\to 3^-} \tan(x-3) = \tan(3-3) = 0 \\ \lim_{x\to 3^+} g(x) &= \lim_{x\to 3^+} \frac{2x+8}{5} = \frac{2(3)+8}{5} = \frac{14}{5} \end{aligned}$$

En conclusión, $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ no existe.

caso de $\lim\limits_{x\to 7} g(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 7^-} g(x) &= \lim_{x\to 7^-} \frac{2x+8}{5} = \frac{2(7)+8}{5} = \frac{22}{5} \\ \lim_{x\to 7^+} g(x) &= \lim_{x\to 7^+} \frac{22}{5} = \frac{22}{5} \longrightarrow \text{ el límite de una constante es la constante} \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\lim\limits_{x\to 7} g(x) = \dfrac{22}{5}$.

Ejemplo 2.7

Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3kx}{x+5} & \text{si} \quad x < 2 \\ \\ 3 + 5x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Hallar el valor del parámetro k para que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ exista.

Para hallar el valor de k debemos emplear el teorema de existencia y unicidad del límite; es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) \text{ existe} \quad & \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \\ & \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{3kx}{x+5} = \lim_{x \to 2^+} (3 + 5x) \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{3k\,(2)}{(2)+5} = 3 + 5\,(2) \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{6k}{7} = 13 \\ & \Leftrightarrow \quad k = \frac{13\,(7)}{6} = \frac{91}{6} \end{aligned}$$

2.2.3. Cálculo de límites por simplificación algebraica

En algunos casos, al evaluar por sustitución directa el límite de una función algebraica, se llega a la forma indeterminada 0/0. Es posible calcular este tipo de límites mediante la obtención de una función equivalente a la original, salvo en el valor que genera la forma indeterminada.

Ejemplo 2.8

Calcule (si existe) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2+4x-3}{8x^3-6x^2+x}$

Observe que el límite conduce a la forma indeterminada 0/0 de modo que no se puede evaluar por sustitución directa. Si empleamos factorización en el numerador y denominador de la función evaluada se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2+4x-3}{8x^3-6x^2+x} &= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(2x+3)\cancel{(2x-1)}}{x(4x-1)\cancel{(2x-1)}} \\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(2x+3)}{x(4x-1)} \text{ (este límite es equivalente, pero no indeterminado)} \\
&= 8 \text{ (se aplica sustitución directa)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.9

Calcule (si existe)$\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

El límite conduce a la forma 0/0. Si aplicamos racionalización, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} &= \lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{(x-7)(x+7)} \cdot \frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{2^2-\sqrt{x-3}^2}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{4-(x-3)}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{-\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} \\
&= -\frac{1}{56}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.10

Calcule (si existe) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-x^3-2}{x^4-x^3-x+1}$

Dada la forma indeterminada 0/0:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{3x-x^3-2}{x^4-x^3-x+1} &= \lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)\cancel{(x-1)^2}}{(x+x^2+1)\cancel{(x-1)^2}}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{(x+x^2+1)}\\
&= -1
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.11

Calcule (si existe) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

Verificamos que el límite conduce la forma indeterminada 0/0.
Empleando racionalización:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{\sqrt[3]{x}-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\,(1)+1^2}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\,(1)+1^2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}^3-1^3}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\cancel{(x-1)}}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{1}\\
&= 12
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.12

Calcule (si existe) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x-6}{2-|1-x|}$

En este caso $\dfrac{2x-6}{2-|1-x|} \longrightarrow \dfrac{0}{0}$ cuando $x \longrightarrow 3$, de modo que se deben aplicar técnicas de simplificación algebraica; sin embargo, es necesario definir el valor absoluto presente:

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } 1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x \\ -(1-x) & \text{si } 1-x < 0 \Rightarrow 1 < x \end{cases}$$

Podemos representar la información en una recta numérica, donde se destaque la forma del valor absoluto alrededor de 3:

$$\begin{array}{ccccc} & |1-x| = 1-x & \boxed{|1-x| = -(1-x)} & & \boxed{|1-x| = -(1-x)} \\ \hline -\infty & 1 & & \longrightarrow 3 \longleftarrow & +\infty \end{array}$$

Note que $|1-x| = -(1-x)$ alrededor de 3, de modo que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} \frac{2x-6}{2-|1-x|} &= \lim_{x \to 3} \frac{2x-6}{2--(1-x)} \longrightarrow \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{2x-6}{2+1-x} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{3-x} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{-2\cancel{(3-x)}}{\cancel{(3-x)}} \\ &= \lim_{x \to 3} -2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.13

Calcule (si existe) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{|x+1|}{2x^2-|3x+1|}$

En este ejemplo la evaluación directa conduce a $0/0$ y tenemos dos términos en valor absoluto. Lo primero es definir estos valores absolutos:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si } x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

$$|3x+1| = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } 3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1/3 \\ -(3x+1) & \text{si } 3x+1 < 0 \Rightarrow x < -1/3 \end{cases}$$

Si ordenamos la información en una recta numérica, obtenemos:

$|3x+1| = -(3x+1)$ $|x+1| = -(x+1)$	$\boxed{\begin{array}{c}|3x+1| = -(3x+1)\\ |x+1| = x+1\end{array}}$	$|3x+1| = 3x+1$ $|x+1| = x+1$
$-\infty$ $-1 \longleftarrow$		$-1/3$ $+\infty$

Así:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1|}{2x^2-|3x+1|} &= \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{2x^2--(3x+1)} \\
&= \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{2x^2+3x+1} \\
&= \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{(x+1)(2x+1)} \\
&= \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{2x+1} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.14

Calcule (si existe) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{|x-2|}$

El límite conduce a la forma 0/0. Si definimos el valor absoluto, obtenemos:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x-2 < 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

Gráficamente:

$$\begin{array}{ccccc} & \boxed{|x-2| = -(x-2)} & & \boxed{|x-2| = x-2} & \\ \hline -\infty & & \longrightarrow 2 \longleftarrow & & +\infty \end{array}$$

Es necesario dividir el desarrollo de este límite en límites unilaterales, dado que alrededor de 2, $|x-2|$ cambia de expresión.
Veamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-8}{|x-2|} &= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-8}{-(x-2)} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(2x+x^2+4)}{-\cancel{(x-2)}} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{2x+x^2+4}{-1} \\ &= -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3-8}{|x-2|} &= \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3-8}{(x-2)} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(2x+x^2+4)}{\cancel{(x-2)}} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{2x+x^2+4}{1} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Se concluye que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{|x-2|}$ no existe

2.3. Cálculo de límites trigonométricos indeterminados

Si trabajamos límites de funciones trigonométricas el proceso de evaluación es similar al aplicado hasta este momento: se evalúa directamente (sustitución directa) siempre y cuando no se indefina la función de interés en el valor de tendencia, o bien, se simplifica el criterio de esta función por medio de factorización, racionalización, o aplicación de identidades trigonométricas básicas.
Se deben considerar algunos límites elmentales, tales como:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{x} = k$, con k constante
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(kx)}{x} = k$, con k constante
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(kx)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(kx)-1}{x} = 0$, con k constante

Ejemplo 2.15

Calcule el límite que se le presenta.$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sec x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$

Sabemos que $\dfrac{\sec x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$ está bien definida en $x = \pi$, de modo que

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sec x}{\operatorname{sen}^2 x + 1} = \frac{\sec \pi}{\operatorname{sen}^2 \pi + 1} = -1$$

Cabe destacar que $\sec \pi = \dfrac{1}{\cos \pi} = -1$

Ejemplo 2.16

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$$

Este límite conduce a la forma $0/0$, de modo que debemos simplificar la función.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} \rightarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\
&= \lim_{x \to 0} (1 + \cos x) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Otra alternativa: racionalizando

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \rightarrow \text{conjugado de } 1-\cos x \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x\,(1+\cos x)}{1^2-\cos^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x\,(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} (1+\cos x) = 2
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.17

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x(\cos x+1)}$$

Tenemos la forma indeterminada $0/0$. Considere:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x(\cos x+1)} &= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos^2 x)}{x(\cos x+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}{x\cancel{(\cos x+1)}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{(1-\cos x)}{x} \\
&= 2(0) = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.18

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

Podemos trabajar la forma indeterminada de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} &= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x} \longrightarrow \text{Factor común}\\
&= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x} \cdot \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \to \text{Racionalización}\\
&= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)}\\
&= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos x}\,(1+\operatorname{sen} x)} \to \text{identidad}\\
&= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen} x}\\
&= \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.19

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \sec^2 x}{\tan x}$$

Dada la indeterminación 0/0, se pueden emplear identidades trigonométricas que permitan simplificar la función:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \sec^2 x}{\tan x} &= \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\\
&= \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}\\
&= \lim_{x\to\pi} \frac{1}{\cos x}\\
&= -1
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.20

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}{x}$$

Se evidencia la forma indeterminada 0/0. Si empleamos la identidad

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)(0)+(1)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{x} \longrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)}{x} \rightarrow \text{ sabemos que } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(kx)}{x} = 0, \text{ para } k\in\mathbb{R} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.21

Calcule el límite que se le presenta.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} 3x}{\tan 2x}$$

En este caso se da la forma 0/0, de modo que debemos simplificar la función dada. Para esto, considere las propiedades elementales:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{x} &= k, \text{con } k \text{ constante} \qquad (*)\\
\lim_{x\to 0} \frac{\tan(kx)}{x} &= k, \text{con } k \text{ constante} \qquad (**)
\end{aligned}$$

Podemos construir estas funciones en el límite que estamos evaluando, por medio de manipulación algebraica:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} 3x}{\tan 2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} 3x \cdot \frac{x}{x}}{\tan 2x \cdot \frac{x}{x}}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right)\cdot x}{\left(\frac{\tan 2x}{x}\right)\cdot x} \to \text{Propiedad } a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a}{c}\cdot b\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right)}{\left(\frac{\tan 2x}{x}\right)} \to \text{simplifico a } x\\
&= \frac{2\,(3)}{2} \longrightarrow \text{ aplico } (*) \text{ y } (**)\\
&= 3
\end{aligned}$$

2.4. Cálculo de límites mediante cambio de variable (sustitución)

En algunas ocasiones el cálculo de límites de funciones resulta más sencillo mediante una sustitución adecuada, que permite obtener un límite en una nueva variable equivalente al original, el cual posibilita el uso de técnicas más simples para su cálculo.
La ley del cambio de variable establece que:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) \underset{\substack{u=g(x)\\ x\to a \Rightarrow u\to g(a)}}{=} \lim_{u\to g(a)} f(u)$$

Es muy común emplear esta técnica en la simplificación de límites que presentan radicales con subradicales repetidos.

Ejemplo 2.22

Calcule el siguiente límite por medio del método de sustitución.

$$\lim_{x\to 0} \frac{8-\sqrt{64+x}}{\sqrt[3]{64+x}-4}$$

El cálculo conduce a la forma $0/0$, de modo que no podemos aplicar una sustitución directa. Usualmente se trabajan las expresiones radicales con igual subradical por medio de un cambio de variable que permita extraer las raíces presentes.
Note que en el ejercicio se presentan raíces de índice 2 y 3, de modo que podemos considerar el cambio de variable

$$u^6 = 64 + x \longrightarrow 6 \text{ es el mínimo común múltiplo de 2 y 3 } (\text{m.c.m}(2,3)=6)$$

En este cambio de variable $x \to 0 \Rightarrow u^6 \to 64+0 \Rightarrow u \longrightarrow \sqrt[6]{64} = 2$ Así:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{8-\sqrt{64+x}}{\sqrt[3]{64+x}-4} &= \lim_{u\to 2} \frac{8-\sqrt{u^6}}{\sqrt[3]{u^6}-4} \\
&= \lim_{u\to 2} \frac{8-u^3}{u^2-4} \\
&= \lim_{u\to 2} \frac{(2-u)\left(2u+u^2+4\right)}{(u-2)(u+2)} \\
&= \lim_{u\to 2} \frac{-(u-2)\left(2u+u^2+4\right)}{(u-2)(u+2)} \\
&= \lim_{u\to 2} \frac{-\left(2u+u^2+4\right)}{(u+2)} \\
&= -3
\end{aligned}$$

Observe que en este ejemplo se pudo aplicar racionalización; sin embargo, el desarrollo se vuelve más extenso.

Ejemplo 2.23

Calcule el siguiente límite por medio del método de sustitución

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2\sqrt[4]{x-1}-3}$$

Note que el límite conduce a 0/0. Considerando el cambio de variable

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{u^4 = x-1}_{\text{m.c.m}(2,4)=4} & \Rightarrow & u^4+1 = x \\ x & \longrightarrow & 2 \Rightarrow u^4 \longrightarrow 2-1 \Rightarrow u \longrightarrow \sqrt[4]{2-1} = 1 \end{array}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2\sqrt[4]{x-1}-3} &= \lim_{u\to 1} \frac{u^4+1-2}{\sqrt{u^4}+2\sqrt[4]{u^4}-3} \\ &= \lim_{u\to 1} \frac{u^4-1}{u^2+2u-3} \\ &= \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)(u+1)(u^2+1)}{(u+3)(u-1)} \\ &= \lim_{u\to 1} \frac{(u+1)(u^2+1)}{u+3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.24

Calcule el siguiente límite por medio del método de sustitución

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{-1+x}-1}{\sqrt[4]{x-1}-1}$$

La forma 0/0 puede ser simplificada por cambio de variable, note que ambos radicales poseen el mismo subradical. Tomando

$$\begin{array}{rcl} u^{12} & = & x-1 \text{ se cumple que m.c.m}(3,4)=12 \\ x & \longrightarrow & 2 \Rightarrow u^{12} \longrightarrow 2-1 \Rightarrow u \longrightarrow \sqrt[12]{2-1}=1 \end{array}$$

se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{-1+x}-1}{\sqrt[4]{x-1}-1} & = & \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{u^{12}}-1}{\sqrt[4]{u^{12}}-1} \\ & = & \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3-1} \\ & = & \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{(u-1)(u+1)(u^2+1)}{(u-1)(u+u^2+1)} \\ & = & \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{(u+1)(u^2+1)}{(u+u^2+1)} \\ & = & \dfrac{4}{3} \end{array}$$

2.5. Práctica complementaria

2.5.1. Ejercicios propuestos

1. Calcule, si existen, cada uno de los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x-9} = 0$

   b) $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{2+4\tan x} = \pi$

   c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+x-3}{\sqrt{x+1}} = -3$

   d) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{x+7}{x+3}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{8}$

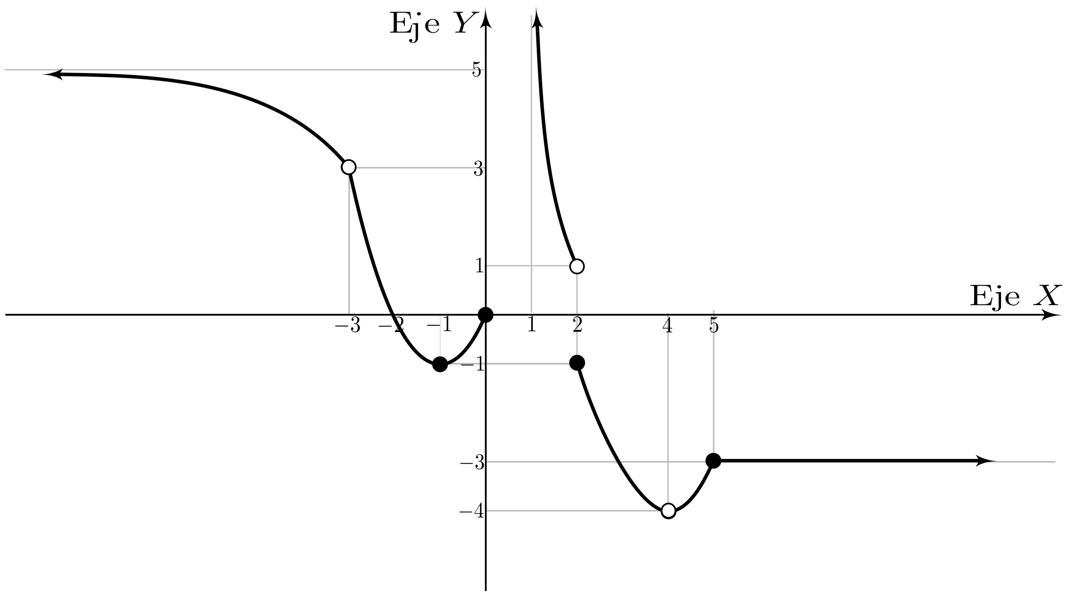
   e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x \cos x}{3+\arctan x} = \dfrac{1}{3}$

   f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1+|1-x|}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$

   g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+|x|}{5} = 0$

   h) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{|4-x|\cdot|4+x|+1}{(4-x^2)\sqrt{5-|x-1|}} = -\dfrac{1}{24}\sqrt{2}$

2. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de la función f.



De acuerdo a los datos de la figura, determine:

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

h) Un valor de a tal que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -3$

i) Un valor de a tal que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -4$

Respuestas:

a. 3

b. no existe

c. 3

d. 1

e. -1

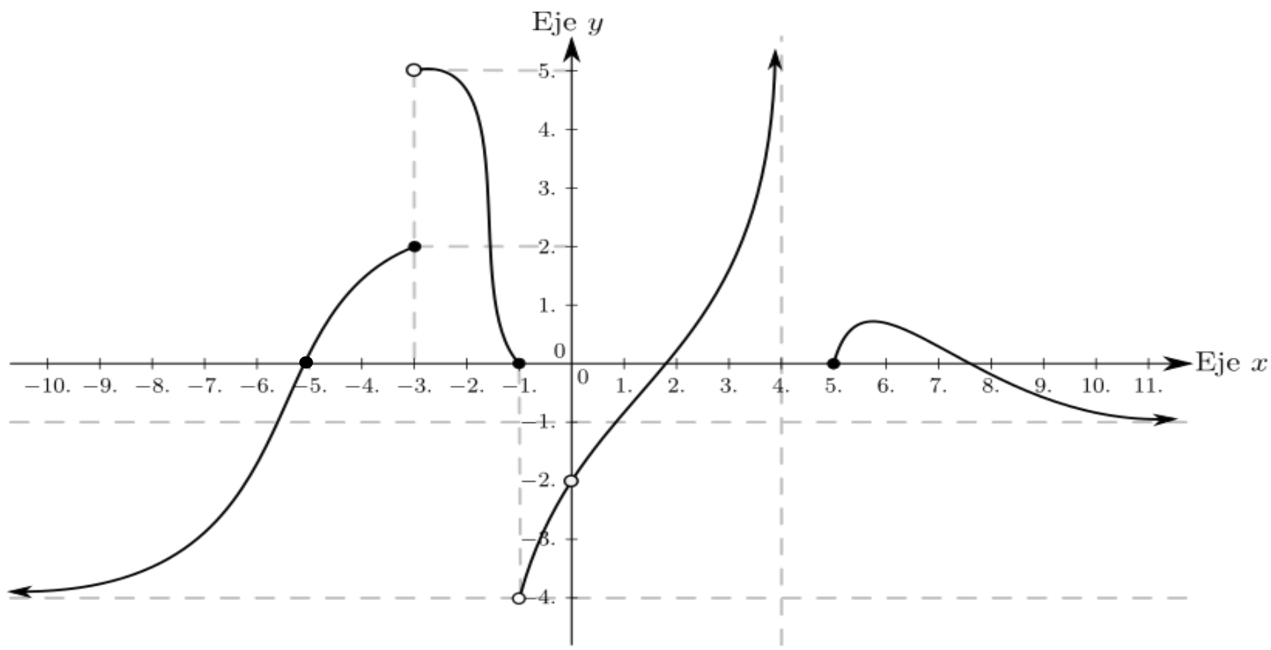
f. 3

g. 0

h. cualquier valor mayor o igual a 5

i. 4

3. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función con criterio $y = f(x)$.



3.1 De acuerdo con los datos suministrados anteriormente calcule (si existen) los siguientes límites. En caso de que un límite no exista, indíquelo.

a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

3.2 Determine el valor numérico de a de modo que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 5$

3.3 Determine el valor numérico de b de modo que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$

Respuestas:

3.1)

a) 2

b) 0

c) no existe

d) -4

e) no existe

f) -2

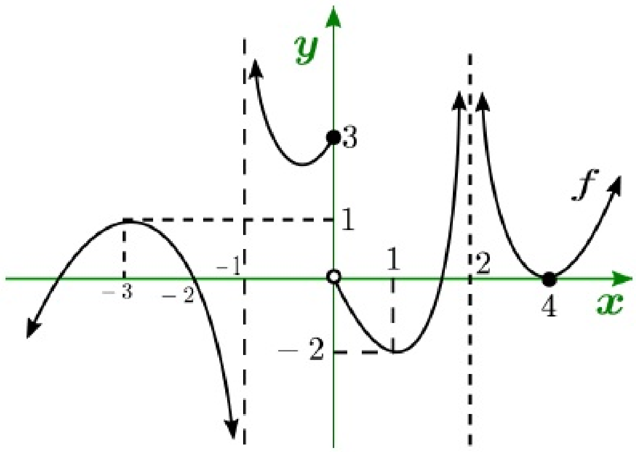
g) 0

h) no existe

3.2) -3

3.3) -5

4. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función $y = f(x)$.



De acuerdo con los datos suministrados anteriormente calcule, si existen, los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

g) Determine el valor de a que satisface que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -2$

Respuestas:

a) 1

b) 0

c) 0

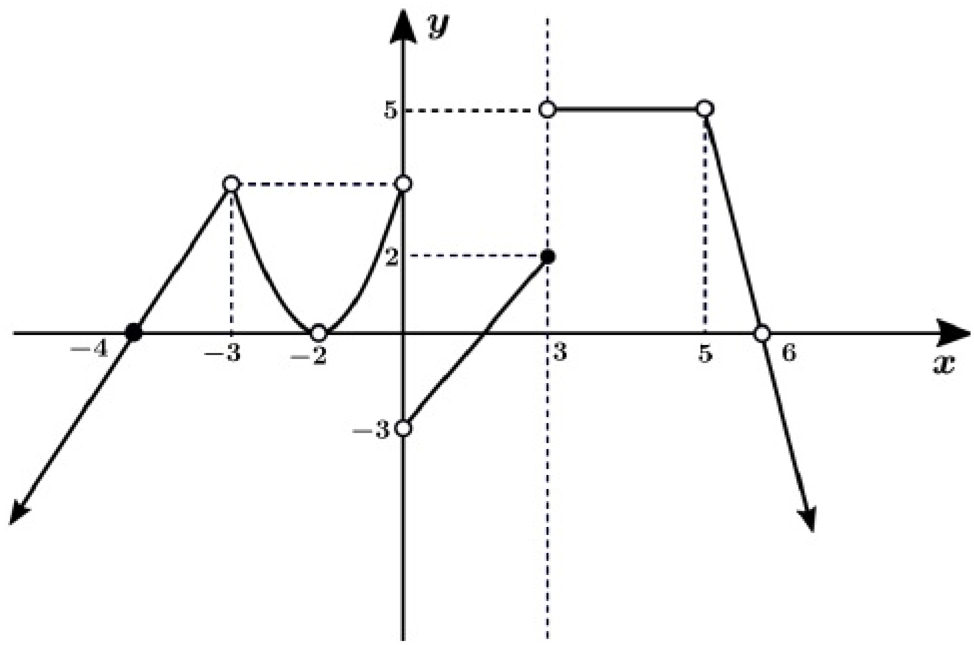
d) 0

e) no existe

f) no existe

g) 1

5. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función $y = f(x)$



De acuerdo con los datos suministrados anteriormente calcule, si existen, los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ *e*) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ *g*) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ *d*) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$ *f*) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ *h*) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$

i) Determine el valor de b tal que $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = -3$

Respuestas:

a) 0	d) 5	g) 0
b) 2	e) 5	h) 0
c) 5	f) 5	i) 0

6. Considere la siguiente función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{x+4}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentre, si existe, el valor numérico de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Respuesta: el valor del límite es 2.

7. Considere la función g definida de la siguiente manera.

$$g(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen} x - \sec 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 3x + x - 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{x+1}}{x^2 - 1} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Determine (si existen):

a) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$

f) $\lim\limits_{x \to -\pi} g(x)$

Respuestas

a) -1

b) 3

c) -0.18...

d) no existe

e) -0.073...

f) -1

8. Considere la siguiente función a trozos y el parámetro real u.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - 1 & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{u+4}{x+1} & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

Determine el valor de u de modo que:

a) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \sqrt{2} - 1$.

Respuestas

a) $u = -5$

b) $-3 - \sqrt{2}$

9. Considere la siguiente función definida a trozos.

$$f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \\ x+1 & \text{si} \quad 1<x\leq 3 \end{cases}$$

De acuerdo con los datos de la función anterior, calcule si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Respuesta: el límite es 2

10. Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x)=\begin{cases} kx-3 & \text{si} \quad x>1 \\ \\ 6k-x & \text{si} \quad x\leq 1 \end{cases}$$

Hallar el valor del parámetro k para que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ exista.

Respuesta: $k=-2/5$

11. Considere la función $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ cuyo criterio está dado por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ 1-5x & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Calcule el límite, si existe, de f alrededor de $x=0$.

Respuesta: el límite es 1.

12. Aplique procedimientos algebraicos y las propiedades vistas para calcular cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{3-\sqrt{8-x}}=\dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}=12$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16}=\dfrac{1}{48}$

d) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=12$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}=\dfrac{3}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2-\sqrt[3]{16-x}}{\sqrt{12-x}-2}=-\dfrac{1}{3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\dfrac{3}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\dfrac{1}{2}$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=4$

j) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=-\dfrac{1}{56}$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2+|x-1|}{|2x-2|}\to$ No existe

l) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}{x^2-16}=\dfrac{3}{4}$

m) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=1$

n) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt[4]{x-1}-1}=\dfrac{4}{3}$

ñ) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x)}{\operatorname{sen}(x)} = 2$

o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$

p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} 2x}{x + \operatorname{sen} 3x} = -\dfrac{1}{4}$

q) $\lim_{x\to \pi/2} (\csc x + \cos x) = 1$

r) $\lim_{x\to 0} x \tan \dfrac{\pi x + \pi}{2} = -\dfrac{2}{\pi}$

s) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - 2\cos(x + \pi/3)}{3x} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

t) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt[4]{x-1} - 1} = \dfrac{4}{3}$

u) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 9x} = 3$

3. Límites infinitos y límites al infinito

3.1. Límites finitos al infinito y recta asíntota horizontal

Definición 3.1: Límites al infinito

Sea f una función definida en $]a, +\infty[$. Si f tiende a un valor constante $L \in \mathbb{R}$ cuando la variable x crece sin límite ($x \to \infty$) se dice que f posee un límite en el infinito, se escribe:[a]

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Análogamente, si se da la tendencia de f a $L \in \mathbb{R}$, cuando x decrece sin límite ($x \to -\infty$) se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

[a] Utilizaremos el signo ∞ cuando nos referimos a $+\infty$, para efectos prácticos.

Este concepto de límite tiene una correspondencia con el concepto de recta asíntota horizontal a la función que se evalúa en el límite. A continuación se da la definición formal.

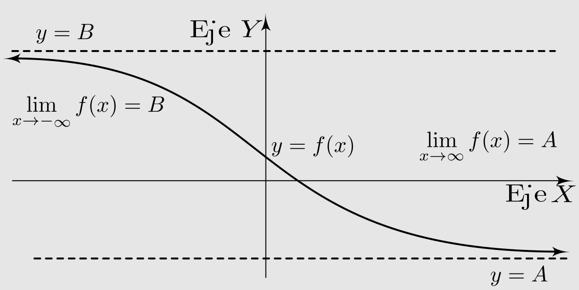
Definición 3.2: Recta asíntota horizontal

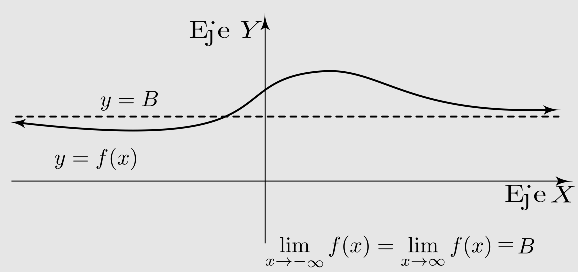
Se dice que la recta $y = L$ es una recta **asíntota horizontal** a la gráfica de la función f si y sólo si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

. Es decir, si L es el valor de convergencia de f en el infinito.

Nota: El símbolo $\pm\infty$ denota que la definición es válida, tanto para valores de x crecientes, como para valores de x decrecientes. Esta situación se ilustra en la siguiente figura.





3.1.1. Cálculo de límites al infinito por trabajo algebraico

A continuación se enuncian algunos teoremas que serán de gran utilidad en el cálculo de límites al infinito

Teorema 3.1

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}-\{0\}$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Teorema 3.2

Si $r > 0$ es un número real tal que x^r está definido y k es una constante, entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^r} = 0$$

Teorema 3.3: Regla general para división de polinomios

Sean $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ polinomios de grados m y n respectivamente, entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_n} & \text{si } m = n \\ \pm\infty & \text{si } m > n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$$

Para efectos prácticos se pueden utilizar algunas "reglas algebraicas" de $-\infty$ y ∞, entendiendo que cada una de ellas se refiere a un teorema formal.

Álgebra de infinitos

Sea $k \in \mathbb{R}$. Se satisfacen:

$$\begin{array}{l} (\pm\infty) + k = \pm\infty \\ (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty \\ (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \infty \\ (\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty \\ (\pm\infty)\cdot k = \begin{cases} \pm\infty \text{ si } k > 0 \\ \mp\infty \text{ si } k < 0 \end{cases} \\ (\pm\infty)^n = \begin{cases} \pm\infty \text{ si } n \text{ es impar} \\ \infty \text{ si } n \text{ es par} \end{cases} \end{array}$$

En cálculo de límites al infinito debemos considerar las formas indeterminadas $0/0$, $\pm\infty/\pm\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$,$(\infty)+(-\infty)$, 0^0, $(\pm\infty)^0$y 1^∞ las cuales implican un trabajo algebraico que, en la mayoría de los casos, conduce a un límite que se puede calcular por medio de los teoremas anteriores.

Ejemplo 3.1

Calcule

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^2 - x)$$

Si $x \to -\infty$, se tiene que $4x^2 - x \to 4\,(-\infty)\,^2 - (-\infty) \to 4\,(\infty) + \infty \to \infty$, de modo que

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^2 - x) = \infty$$

Esto quiere decir que la función diverge a ∞.

Ejemplo 3.2

Calcule

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+1}{10x^3-3x^2+1}$$

Observe que el grado del numerador y denominador de la función evaluada es 3, de modo que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+1}{10x^3-3x^2+1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3.3

Calcule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{x^2-2x+5}$$

En este caso el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, de modo que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{x^2-2x+5} = 0$$

Ejemplo 3.4

Calcule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x-2}$$

Podemos emplear una factorización inducida y construir términos del tipo $1/x^n, n > 0$, para simplificar la fracción:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x-2} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} \longrightarrow \text{propiedad: } \begin{array}{c} n \text{ es par} \Rightarrow \sqrt[n]{x^n}=|x| \\ n \text{ es impar} \Rightarrow \sqrt[n]{x^n}=x \end{array}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} \longrightarrow \text{propiedad: } \begin{array}{c} x\longrightarrow\infty \Rightarrow |x|=x \\ x\to-\infty \Rightarrow |x|=-x \end{array}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1\cdot\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}{1-\dfrac{2}{x}}\\
&= \frac{-1\cdot\sqrt{1+0}}{1-0}\\
&= -1
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5

Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt[4]{x^4+x}+x}$$

Empleando un procedimiento semejante al del ejemplo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt[4]{x^4+x}+x} \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}}{\sqrt[4]{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+x} \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^3}}+x} \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}}{x\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^3}}+x} \text{ (recuerde que si } x\to-\infty,\ |x|=-x) \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^3}}+1\right)} \\
= &\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^3}}+1} \\
= &\ 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.6

Calcule

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$$

Una alternativa para simplificar este tipo de límites es emplear racionalización.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) \\
= & \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)} \\
= & \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} \\
= & \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x} \\
= & \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x} \\
= & \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x} \\
= & \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x} \\
= & \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} \\
= & \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} \\
= & \frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.7

Calcule
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$$

Aplicando un procedimiento análogo al anterior:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\\
=&\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-7x+3}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-7x+3}}\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2}{\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-7x+3}}\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2}{\sqrt{x^2\left(1-2/x+1/x^2\right)}+\sqrt{x^2\left(1-7/x+3/x^2\right)}}\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2}{|x|\sqrt{1-2/x+1/x^2}+|x|\sqrt{1-7/x+3/x^2}}\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2}{-x\sqrt{1-2/x+1/x^2}-x\sqrt{1-7/x+3/x^2}}\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-2/x\right)}{x\left(-\sqrt{1-2/x+1/x^2}-\sqrt{1-7/x+3/x^2}\right)}\\
=&\lim_{x\to-\infty}\frac{5-2/x}{-\sqrt{1-2/x+1/x^2}-\sqrt{1-7/x+3/x^2}}\\
=&\frac{5-0}{-\sqrt{1-0+0}-\sqrt{1-0+0}}=\frac{-5}{2}
\end{aligned}$$

3.2. Límites infinitos y recta asíntota vertical

Definición 3.3: Límite infinito

Si f es una función definida en un intervalo abierto que no contiene a "a", entonces si f crece sin límite cuando x toma valores suficientemente cercanos a "a", se dice que el límite de f es ∞ y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

De manera similar, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que los valores de f decrecen sin límite, tomando a x suficientemente cercano a "a". Esto se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Estas definiciones son válidas para límites unilaterales.

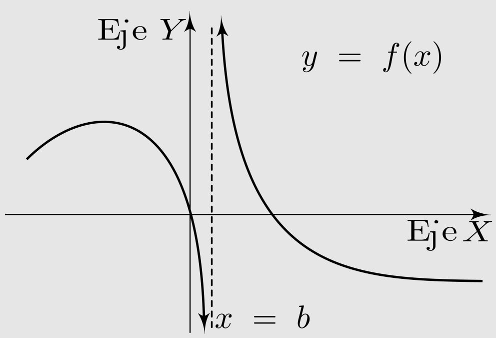
Al igual que los límites al infinito, los límites infinitos guardan una relación con las rectas asíntotas a la gráfica de la función.

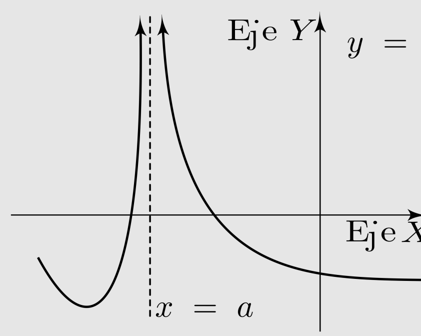
Definición 3.4: Recta asíntota vertical

Se dice que la recta $x = a$ es una asíntota vertical a la gráfica de la función de ecuación $y = f(x)$ si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones (válida también para límites unilaterales):

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad ; \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Considere la siguiente la siguiente situación gráfica.





$$\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to b^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

En la gráfica anterior se pueden observar dos situaciones donde se establecen las rectas asíntotas verticales a la gráfica de la curva de ecuación $y = f(x)$. Basta con que se obtenga un límite lateral infinito para determinar este tipo de rectas.

3.2.1. Cálculo de límites infinitos

Se enuncia un teorema que posibilita el cálculo de muchos límites del tipo infinito.

Teorema 3.4

Sea $a \in \mathbb{R}$, un valor tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

Ejemplo 3.8

Evalúe el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2+5x}{x^2-25}$$

Note que $\lim\limits_{x\to 5} (x^2+5x) = 50$ y $\lim\limits_{x\to 5} (x^2-25) = 0$ de modo que el límite original conduce a la forma $50/0$; es decir, el límite original diverge a infinito.
En este caso se puede determinar el tipo de infinito en cada lateral al evaluar valores que se aproximen alrededor de 5:

$$\underbrace{\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2+5x}{x^2-25}}_{\text{Podemos evaluar 4.9999}} = -\infty$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2+5x}{x^2-25}}_{\text{Podemos evaluar 5.0001}} = \infty$$

Ejemplo 3.9

Evalúe el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^4-2}{\left(x^2+3x\right)^2}$$

Por el mismo razonamiento del ejemplo anterior y, dado que cuando $x \longrightarrow 0$

$$\frac{x^2+x^4-2}{\left(x^2+3x\right)^2} \longrightarrow \frac{-2}{0}$$

debemos evaluar los límites laterales para determinar el tipo de divergencia presente.

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x^4-2}{\left(x^2+3x\right)^2}}_{\text{Podemos evaluar -0.0001}} = -\infty$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x^4-2}{\left(x^2+3x\right)^2}}_{\text{Podemos evaluar 0.0001}} = -\infty$$

Es decir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^4-2}{\left(x^2+3x\right)^2} = -\infty$$

Nota: Las siguientes indeterminaciones por lo general son muy útiles para calcular límites infinitos o al infinito:

$$\frac{k}{0} \to \pm\infty \quad ; \quad \frac{k}{\pm\infty} \to 0$$

Ejemplo 3.10: Determinación de la recta asíntota vertical y horizontal

Determine las ecuaciones de las rectas asíntotas verticales y horizontales a la función que tienen por criterio:

$$g(x) = \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x-1}$$

<u>Asíntotas horizontales</u>
Se determinan por medio de límites al infinito:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} g(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4\left(1+1/x^4\right)}}{x\left(1-1/x\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt[4]{1+1/x^4}}{x\left(1-1/x\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x\sqrt[4]{1+1/x^4}}{x\left(1-1/x\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm\sqrt[4]{1+1/x^4}}{\left(1-1/x\right)} \\
&= \frac{\pm\sqrt[4]{1+0}}{(1-0)} \\
&= \pm 1
\end{aligned}$$

Dada la semejanza de los cálculos, se realizaron de forma simultánea. En este caso se concluye que $y=1$ y $y=-1$ son asíntotas horizontales.

<u>Asíntotas verticales</u>

Evaluamos estas asíntotas en los valores donde la función tienda a la forma $k/0$, con k constante. Es decir, en los valores que anulen el denominador de la fracción:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

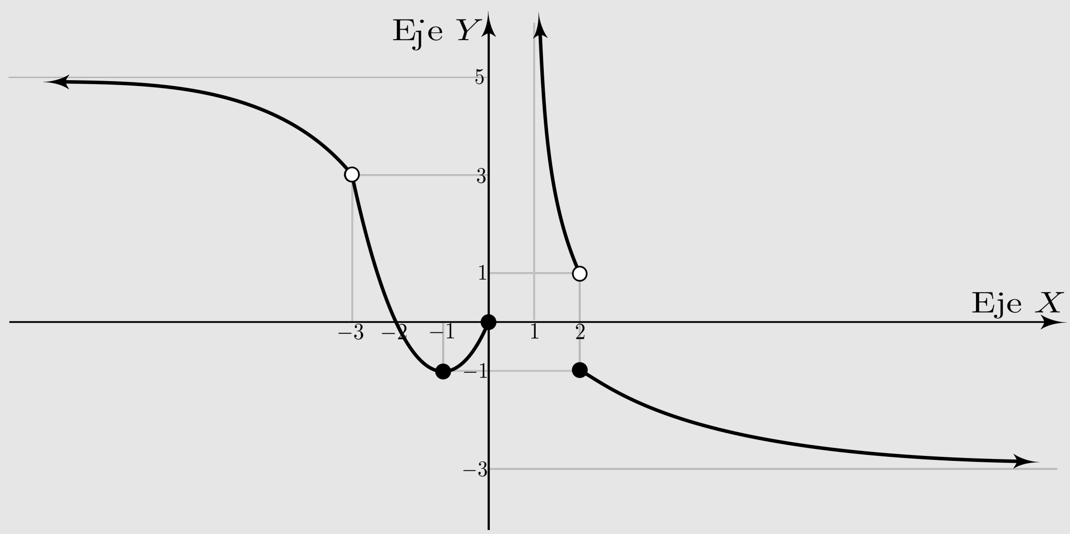
Al calcular dicho límite obtenemos

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x-1} = \pm\infty$$

de modo que $x = 1$ corresponde la asíntota vertical a la curva que describe g.

Ejemplo 3.11

Considere la gráfica de la función f que se presenta en la siguiente figura.



1. Se puede notar que:

   a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ *b*) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ *c*) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 5$ *d*) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -3$

2. La ecuación de una recta asíntota horizontal a f es $y = -3$.

3. La ecuación de una recta asíntota vertical a f es $x = 1$.

3.3. Práctica complementaria

3.3.1. Ejercicios propuestos

1. Calcular, si existen, cada uno de los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+1)^2}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2}$

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(5-3x^3)(x-1)}{x^5-4x^4+7x} = 0$

   c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x+1}{3-2x} = -\dfrac{5}{2}$

   d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5\sqrt[3]{x+1}}{3-2x} = 0$

   e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0$

   f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right) = -\dfrac{5}{2}$

   g) $\lim\limits_{x\to3/2} \dfrac{5x+1}{3-2x}$ no definido en $\mathbb{R}$

   h) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^4-3x^2-2x}$ no definido en $\mathbb{R}$

   i) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{(2x-1)(x+6)}{(x-2)(x+1)} = \infty$

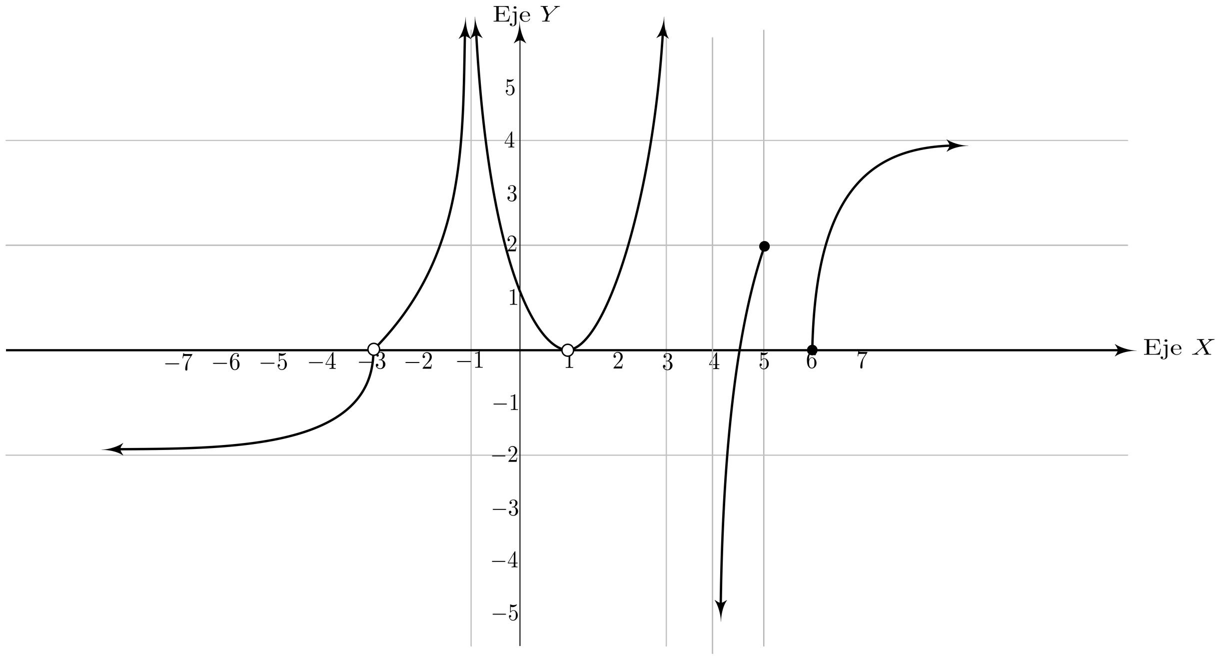
2. Determine la ecuación de las rectas asíntotas verticales y horizontales que presenta cada función.

   a) $f(x) = \dfrac{x+6}{x-2}$ *b)* $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x-1}$ *c)* $h(x) = \dfrac{x+6}{x^2-4}$

   Respuestas:

   a) vertical: $x=2$; horizontal: $y=1$
   b) vertical: $x=1$; horizontales: $y=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$
   c) verticales: $x=2, x=-2$; horizontal: $y=0$

3. Considere la figura que representa la gráfica de la función f.



Considerando esta información determine lo que se le solicita en cada caso.

a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x)$

i) Las ecuaciones de todas las rectas asíntotas a la función f.

Respuestas:

a) 0

b) -2

c) 4

d) ∞

e) 0

f) $-\infty$

g) 2

h) 0

i) $y = -2, y = 4, x = -1, x = 3, x = 4$

4. Continuidad de funciones

4.1. Estudio de continuidad

Definición 4.1: Continuidad alrededor de un punto

Decimos que una función f es continua alrededor de $x = a$ si y solo si se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones.

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

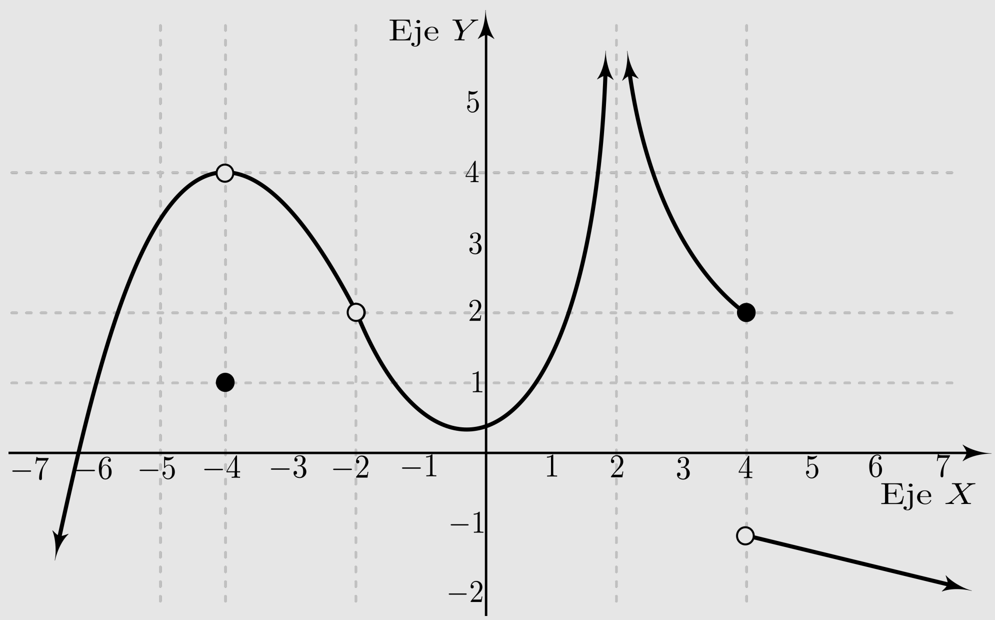
Nota: Si una función f no es continua en un punto $x = a$, entonces se dice que es **discontinua** en dicho punto y las discontinuidades presentes en f se pueden clasificar.

Tipos de discontinuidades

Se dice que una función f presenta una discontinuidad:

- **Evitable:** si en $x = a$ se puede "redefinir" f como una función continua.
- **Inevitable:** si la dicontinuidad presente no es evitable; es decir, no es posible redefinir f en $x = a$ como función continua.

Esta situación se ilustra en la siguiente figura que representa la gráfica de una función f.

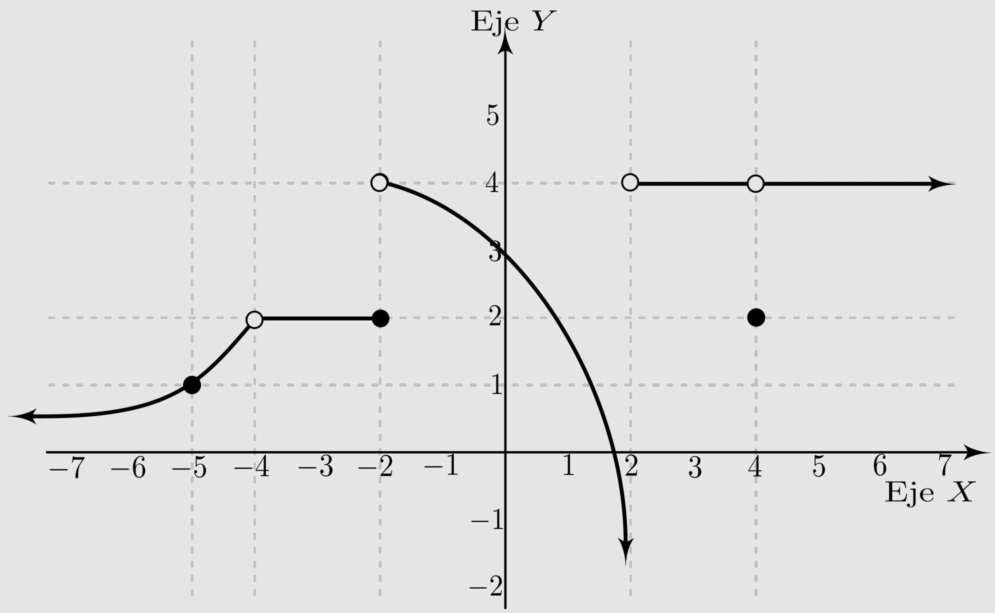


Observe que f presenta discontinuidades en $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 4$. En este caso las discontinuidades son de distinta naturaleza; en $x = -4$ y $x = -2$ la discontinuidad es evitable, basta considerar la imagen en cada punto igual al límite correspondiente. En $x = 2$ y $x = 4$ los límites de la función no existen, de modo que no es posible redefinir la función para crear una función continua.

4.1.1. Análisis de continuidad de forma gráfica

Ejemplo 4.1: Discontinuidades a partir de una gráfica

Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función $y = f(x)$



indique si f es continua en $x = -5$, $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 4$. De no ser continua indique qué tipo de discontinuidad posee, y de ser posible redefina la función para que sea continua.

<u>En $x = -5$</u>
Note que

$$\lim_{x \to -5} f(x) = f(-5) = 1$$

de modo que f es continua en $x = -5$
<u>En $x = -4$</u>
Note que no existe $f(-4)$ pero

$$\lim_{x \to -4} f(x) = 2$$

de modo que f es discontinua evitable en este valor.
<u>En $x = -2$</u>
$f(-2) = 2$ pero no existe

$$\lim_{x \to -2} f(x)$$

de modo que f es discontinua inevitable en este valor.
<u>En $x = 2$</u>
No existe la imagen ni $\lim_{x \to 2} f(x)$, de modo que f es discontinua inevitable en $x = 2$.
<u>En $x = 4$</u>
Note que $f(4) = 2$ y

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 4$$

así, f es discontinua evitable en $x = 4$.

Para redefinir la función como una función continua en su dominio, se puede considerar

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq -4,-2,2,4 \\ 2 & \text{si } x=-4 \\ 4 & \text{si } x=4 \end{cases}$$

4.1.2. Evaluación de continuidad para funciones con criterio dado

En algunos casos el análisis de continuidad de una función se da a partir de los valores que no están contenidos en el dominio real. Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 4.2

Estudiar la continuidad de las siguiente función en todo $\mathbb{R}$. En caso de discontinuidades, indicar el tipo y, de ser necesario, redefina la función para corregirla.

$$f(t)=\frac{2t^2+t-10}{t^2-4}$$

Observemos que esta función tiene por dominio real $D=\mathbb{R}-\{-2,2\}$, de modo que está bien definida y es continua para todo t que no sea -2 o 2. Analicemos el tipo de discontinuidad que se está generando en estos valores.

<u>En $t=-2$</u>

$f(-2)$ no existe y

$$\lim_{t\to-2} f(t)=\lim_{t\to-2}\frac{2t^2+t-10}{t^2-4}\text{: no definido}$$

Es decir, f es discontinua inevitable en $t=-2$

<u>En $t=2$</u>

$f(2)$ no existe y

$$\begin{aligned}\lim_{t\to2} f(t) &= \lim_{t\to2}\frac{2t^2+t-10}{t^2-4}\\ &= \lim_{t\to2}\frac{(2t+5)(t-2)}{(t-2)(t+2)}\\ &= \lim_{t\to2}\frac{2t+5}{t+2}\\ &= \frac{9}{4}\end{aligned}$$

De modo que f es discontinua evitable en $t=2$.

Redefina a f como

$$F(t)=\begin{cases} f(t) & \text{si } t\neq -2,2 \\ 9/4 & \text{si } t=2 \end{cases}$$

F es continua en su dominio.

Ejemplo 4.3

Estudiar la continuidad de las siguiente función en todo $\mathbb{R}$. En caso de discontinuidades, indicar el tipo y, de ser necesario, redefina la función para corregirla.

$$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

g es continua para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, ya que este es su dominio real. Observe que $g(1)$ no existe y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} g(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} (x+1)\left(x^2+1\right) \\
&= 4
\end{aligned}$$

En conclusión, g es discontinua evitable en 1; para redefinirla, basta considerar

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 4.4

Considere la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2x^2 - 2}{x - 1} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4x + 3 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Analice la continuidad de f en los puntos $x = 1$ y $x = 3$, si se presenta discontinuidad clasifíquela y redefina la función en caso de ser necesario para que sea continua.

Se pueden hacer los casos por separado:
<u>Cuando $x = 1$</u>
$f(1) = 3(1) + 1 = 4$, además

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3x+1) = 4$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} 2(x+1) = 4
\end{aligned}$$

De modo que $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ y así, f es continua en $x = 1$

Cuando $x = 3$

$f(3) = \dfrac{2\,(3)^2 - 2}{(3) - 1} = 8$ y tenemos los límites unilaterales

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 8 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} (4x + 3) = 15 \end{aligned}$$

En ese caso no existe $\lim_{x\to 3} f(x)$, por lo que f es discontinua inevitable en $x = 3$

Ejemplo 4.5

Hallar los valores de k de modo que f sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{si } x \leq 4 \\ kx - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Sabemos que f está compuesta por funciones lineales que son continuas en $\mathbb{R}$; sin embargo, en $x = 4$ hay un cambio de criterio, por lo que debemos analizar este valor de modo que haya continuidad.

Teóricamente f es continua en $x = 4$ si

$$f(4) = \lim_{x\to 4} f(x)$$

En este caso $f(4) = 3\,(4) + 7 = 19$ y

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 4^-} (3x + 7) = \lim_{x\to 4^+} (kx - 1)$$

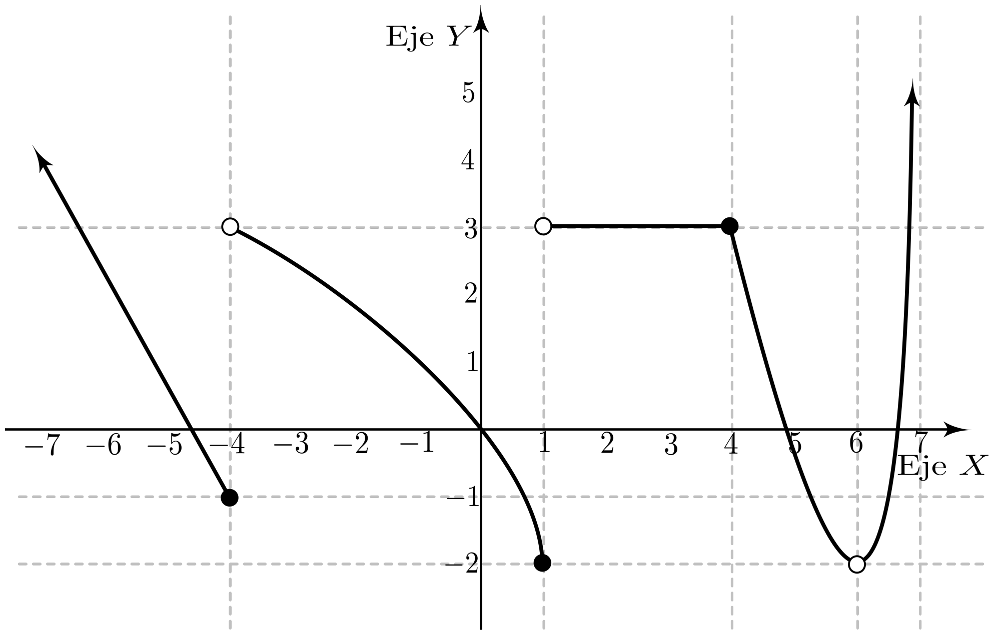
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 3\,(4) + 7 = k\,(4) - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 19 = 4k - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 5 \end{aligned}$$

Dicho valor de k satisface la condición de continuidad.

4.2. Práctica complementaria

4.2.1. Ejercicios propuestos

1. Considere la figura que corresponde a la gráfica de f.



Según esta información:

a) Estudie la continuidad de la función en $x = -4$, $x = 1$, $x = 4$ y en $x = 6$. Redefina en caso de que se presenten discontinuidades evitables.

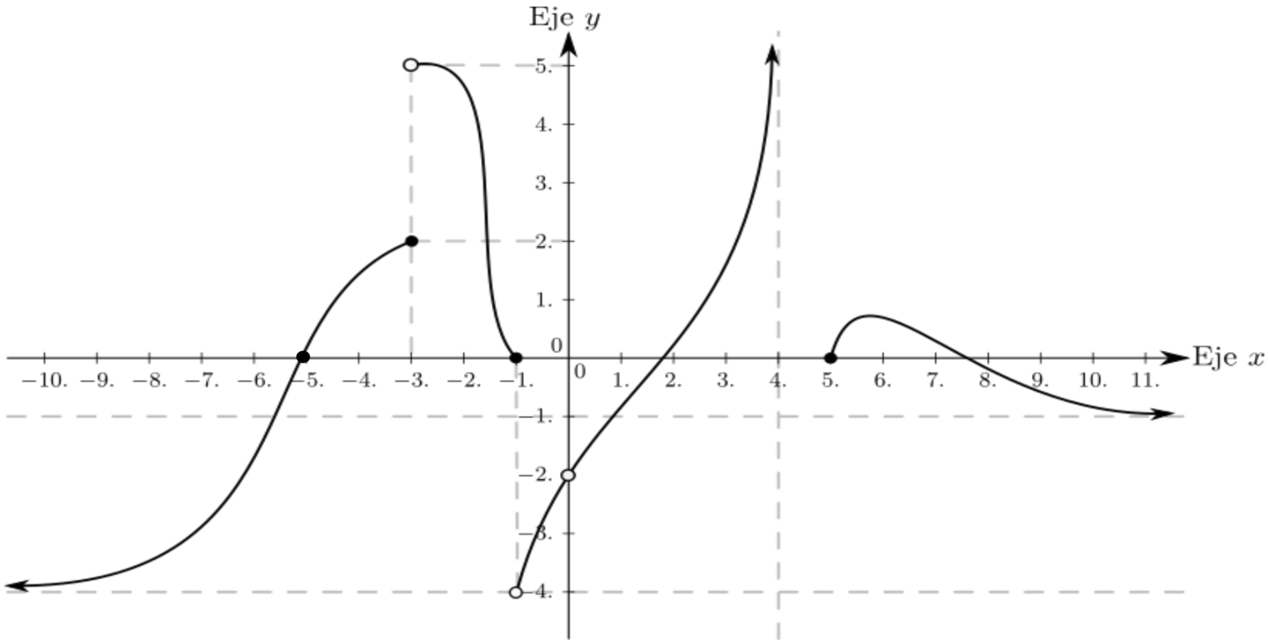
Respuestas

En $x = -4$ y $x = 1$ la función es discontinua inevitable; en $x = 4$ es continua; y en $x = 6$ es discontinua inevitable. En $x = 6$ se puede redefinir la función con el criterio

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq -4, 1, 6 \\ -2 \text{ si } x = 6 \end{cases}$$

Esta función es continua en su dominio.

2. Considere la siguiente figura que representa la gráfica de f



a) determine cada uno de Los siguientes límites

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ 2) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ 3) $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ 4) $\lim_{x \to -3} f(x)$

b) Determine un valor de x donde f presenta una discontinuidad de tipo inevitable.

c) Estudie la continuidad de f en $x = 0$. Redefina en caso de ser necesario para obtener una función continua.

Respuestas

a) Se determinan:

1) -4 2) 1 3) ∞ 4) no existe

b) en $x = -3,\ x = -1,\ x = 4$ o bien en $x = 5$.

c) la función es discontinua evitable en $x = 0$. Basta considerar

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ -2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

para obtener una función continua en $x = 0$.

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$. En caso de discontinuidades, indicar el tipo y, de ser necesario, redefina la función para corregirlas.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 + x}$

b) $g(x) = \dfrac{3 \cdot \text{sen}4x}{\text{sen}3x}$ con $x \in [0, \pi/4]$

c) $f(x) = \dfrac{8 - x^3}{9 - (x^2 + 5)}$

Respuestas:

a) La función es discontinua inevitable en $x = 0$. Para los valores $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ la función es continua.

b) La función es discontinua evitable en $x = 0$. Si se considera $g(x)$ cuando $x \neq 0$ y $g(x) = 4$ cuando $x = 0$, se tiene una función continua en el dominio indicado.

c) En $x = 2$ la función es discontinua evitable; en $x = -2$, es discontinua inevitable; y en el resto de valores de x, es continua. Se puede preservar $f(x)$ para $x \neq 2, -2$ y tomar $f(x) = 3$ cuando $x = 2$ para obtener una función continua en su dominio.

4. Evaluar la continuidad de cada función en el punto indicado. En caso de discontinuidades, indicar el tipo y, de ser necesario, redefina la función para corregirlas.

a) $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$; en $x = 2$

b) $g(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \\ x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$; en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \neq -2 \end{cases}$; en $x = -2$

Respuestas:

a) La función es discontinua inevitable en $x = 2$.

b) La función es discontinua evitable en $x = 1$. Se puede redefinir para obtener una función continua en este valor si se considera

$$G(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \neq 1 \\ 2 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

c) La función es continua en $x = -2$.

5. Encuentre el valor numérico de la constante k para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)k & \text{si } x = 1 \\ \\ \dfrac{\sqrt{x} - 1}{1 - \sqrt{2 - x}} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Sea continua en $x = 1$.

Respuesta: $k = 1/2$

6. Considere la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+m & \text{si } 0 < x \leq n \\ x+7 & \text{si } x > n \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros m y n, de forma que la función f sea continua en $x=0$ y $x=n$

Respuesta: $m=1$ y n puede tomar los valores de 3 o -2.

7. Hallar los valores de c y k de modo que f sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ cx+k & \text{si } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

Respuesta: $c=-3,\ k=4$