UNIVERSIDAD FIDÉLITAS

MA-101 Cálculo Diferencial e Integral I

Elaborado: Prof. Edwin Villalobos Martínez

edwin.villalobosm@ufide.ac.cr

Contents

Contenidos **Página**

1 Límites y continuidad

1.1 Límites a partir de propiedades algebraicas

Para el cálculo de límites, se enuncian propiedades que enmarcan al álgebra de límites, de modo que se agilice y facilite el cálculo de los mismos a partir de criterio de funciones.

Propiedades de límites (álgebra en el cálculo de límites)

Sea f y g funciones definidas en un intervalo abierto que contiene a "$\boldsymbol{a}$", las cuales no están definidas en $x = a$ y sean c, k constantes reales ($c, k \in \mathbb{R}$). Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existen, entonces:

a) $\lim\limits_{x \to a} c = c$

b) $\lim\limits_{x \to a} [k \cdot f(x) \pm g(x)] = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

c) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}; \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

e) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$, $n \in \mathbb{N}$

f) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$. Si n es par se debe cumplir que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$

g) Si $f(x)$ es una función real de variable real bien definida en $x = a$; es decir, $\boldsymbol{a}$ pertenece al dominio real de f, entonces: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$

Notas:

- En primera instancia el cálculo de límites, se reduce a la aplicación de álgebra básica, que en una gran pare se reduce a la propiedad $\boldsymbol{e}$.
- Estas propiedades aplica también para límites laterales.

1.1.1 Ejemplo 1.1

Calcule cada uno de los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \to 3} 4$

   Solución

2. $\lim\limits_{x \to -2} \left(3x^2 + 2x\right)$

   Solución

3. $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 3)(5x - 9)$

   Solución

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

   Solución

Como hemos podido observar para obtener el valor del límite, se sustituye el valor al que x tiende y al realizar las operaciones correspondiente, se obtiene un resultado. Al sustituir x, se nos puede presentar dos resultados:

- Resultado determinado: un número ya sea entero, racional (fracción), decimal o bien infinito.
- Resultado Indeterminado: $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\#}{\pm\infty}$. A estas expresiones, las vamos a llamar **Formas Indeterminadas**.

1.2 Límites al infinito y Limites infinitos

Definición 1.4: Límites al infinito

Sea f una función definida en $]a,+\infty[$. Si f tiende un valor constante $L \in \mathbb{R}$ cuando la variable x va tomando valores cada vez más grandes, es decir, la variable x crece sin límites $(x \to \infty)$ se dice que f posee un límite en el infinito, se escribe: [a]

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

De manera análoga, cuando se da la tendencia de f a $L \in \mathbb{R}$, cuando la variable x va tomando valores cada vez más pequeños, es decir, la variable x decrece sin límites $(x \to -\infty)$, se escribe:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Nota: El concepto de límite al infinito tiene una relación con el concepto de recta asíntota horizontal a la función que se evalúa el límite.

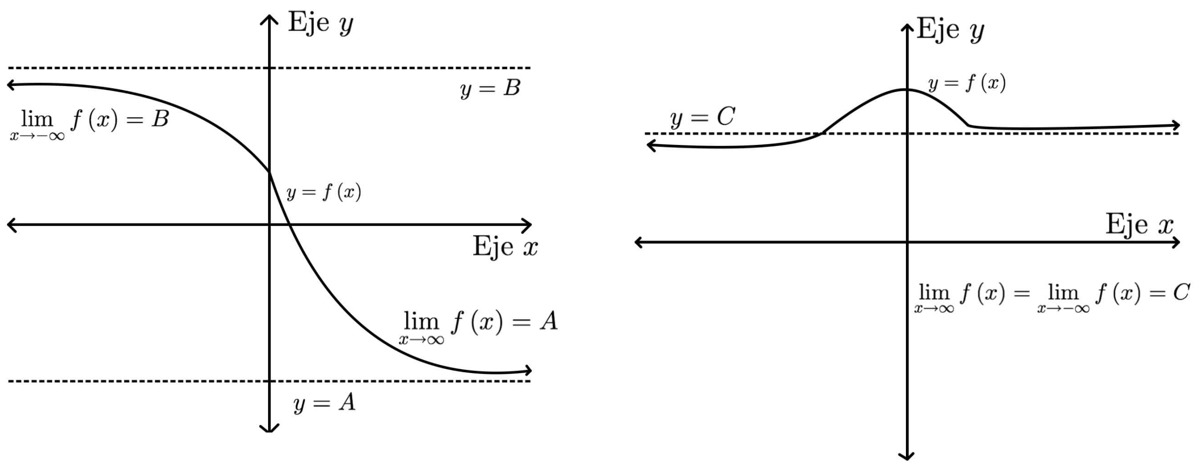
[a] El signo ∞ se usa para referirnos a $+\infty$

Definición 1.5: Recta Asíntota Horizontal

La recta $y = L$ es una **recta asíntota horizontal** a la gráfica de la función f si y sólo si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$

Es decir:, si L es el valor de convergencia de f en el infinito.

Nota: El símbolo $\pm\infty$ se utiliza de manera correcta, pues es válido para valores de x crecientes y también decrecientes.



Definición 1.6: Límites Infinitos

Si f es una función definida en un intervalo abierto que no contiene a "a", entonces si f crece sin límite cuando x toma valores suficientemente cercanos a "a", se dice que el limite de f es ∞ y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Razonando de forma análoga, si la función f decrece sin límite, donde x va tomando valores suficientemente cercanos a "a", se dice que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

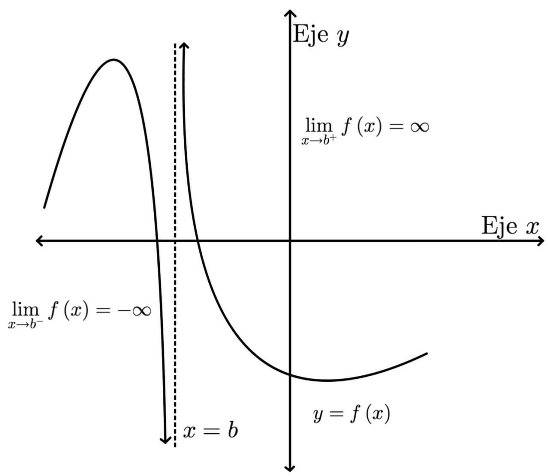
Notas: Estas definiciones son válidas para límites unilaterales.

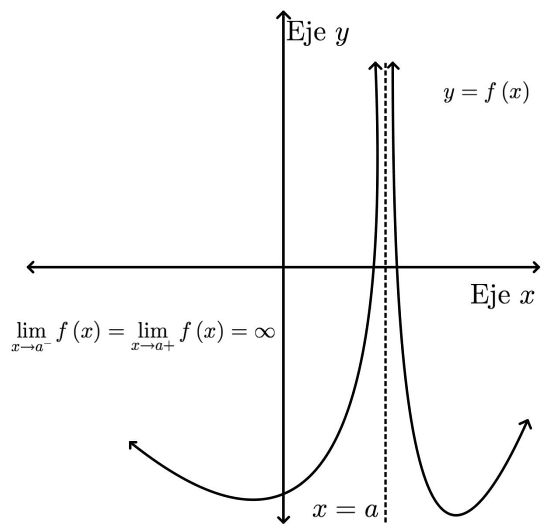
Definición 1.7: Recta Asíntota Vertical

La recta $x = a$ es una **recta asíntota vertical** a la gráfica de una función de criterio $y = f(x)$ si y sólo si cumple algunas de las condiciones (esto es válido para límites laterales):

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty; \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Esto se puede representar gráficamente, como se presenta a continuación





En la representación anterior, podemos observar dos situaciones donde se puede representar las rectas asíntotas verticales a la gráfica de la función con criterio $y = f(x)$. Es suficiente con que se obtenga un límite lateral infinito para determinar este tipo de rectas.

1.3 Formas Indeterminadas

Para el cálculo de límites, como mencionamos anteriormente, tenemos una posibilidad de *Resultados Indeterminados*, donde es importante estudiar las formas indeterminadas.

Formas Interminadas

$F.1$ Sea f una función racional, donde $f(x)$ se puede expresar de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y Q(x) son polinomios, además f no está definida en $x = a$. Si al evaluar por sustitución directa (propiedad e de las propiedades de límites) el limite de una función algebraica, se llega a la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$.

$F.2$ En el cálculo de límites al infinito, se debe considerar las formas indeterminadas $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (existen otras pero para este curso y funciones nos enfocaremos en esta).

$F.3$ Para los límites infinitos, consideramos lo siguiente:

Sea $a \in \mathbb{R}$, un valor tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

Es decir, para estos limites la forma indeterminada es $\dfrac{k}{0} \to \pm\infty$.

.

Para el cálculo de límites al infinito, debemos tomar en cuenta un trabajo algebraico, para ello vamos a considerar algunos teoremas y reglas generales que nos ayudarán para trabajar este tipo de límites.

Teorema 1.1

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k, k \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Teorema 1.2

Si $r > 0$ es un número real tal que x^r está definido, k es una constante real, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^r} = 0$$

Teorema 1.3**: Regla general para división de polinomios**

Sean $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ polinomios de grados m y n respectivamente entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_n} & \text{si} \quad m = n \\ \pm\infty & \text{si} \quad m > n \\ 0 & \text{si} \quad m < n \end{cases}$$

Dentro de los ejercicios, para la parte práctica, vamos a utilizar "reglas algebraicas" de $-\infty$ y ∞, cada una de ellas es un teorema formal

Álgebra de infinitos

Sean $k \in \mathbb{R}$, se cumple:

$(\pm\infty) + k = \pm\infty$

$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$

$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \infty$

$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$

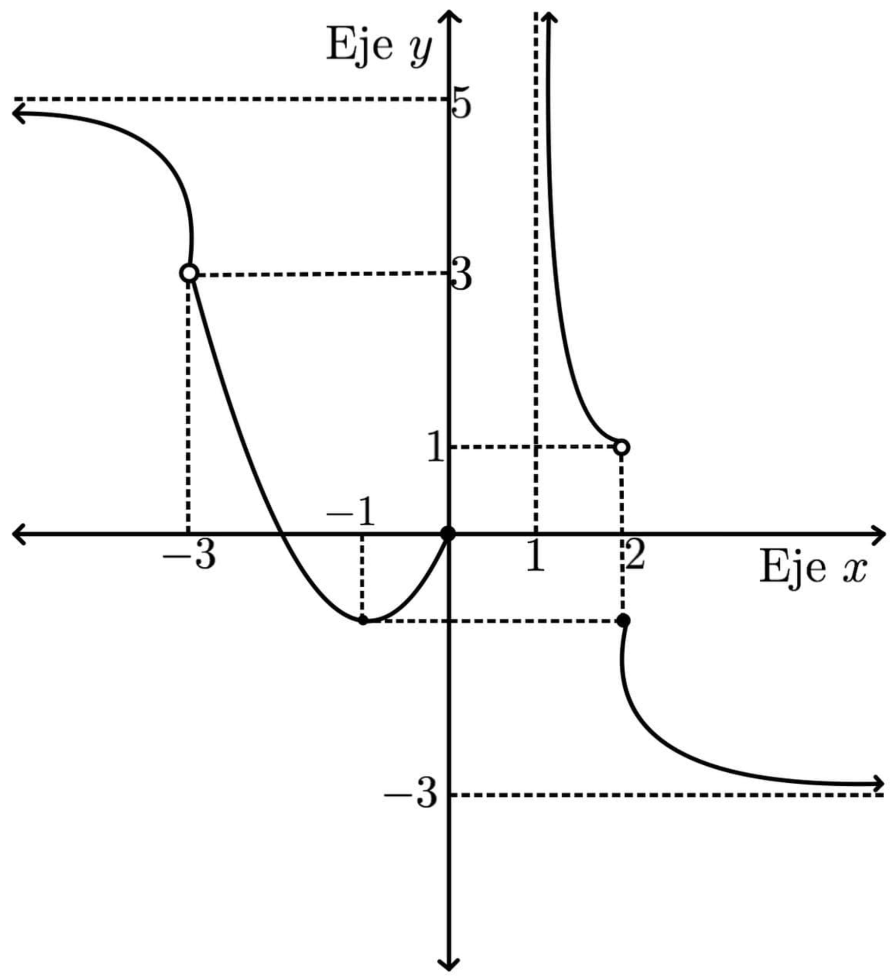
$$(\pm\infty) \cdot k = \begin{cases} \pm\infty & \text{si} \quad k > 0 \\ \mp\infty & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$(\pm\infty)^n = \begin{cases} \pm\infty & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ \infty & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

El estudio de las formas indeterminadas, además, del cálculo de límites con formas indeterminadas mediante trabajo algebraico será estudiado en la antología de semana 3, por lo cuál es necesario que usted como estudiante tenga presente los resultados de la presente antología. A continuación, estudiaremos ejemplos prácticos, donde se va explicar el cálculo de límites y rectas asíntotas, relacionando lo visto en la antología de semana 1 y la antología actual.

1.3.1 Ejemplo 1.2

Considere la gráfica de la función f que presenta en la siguiente figura



1. Calcule cada uno de los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =.$

   b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =.$

   c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =.$

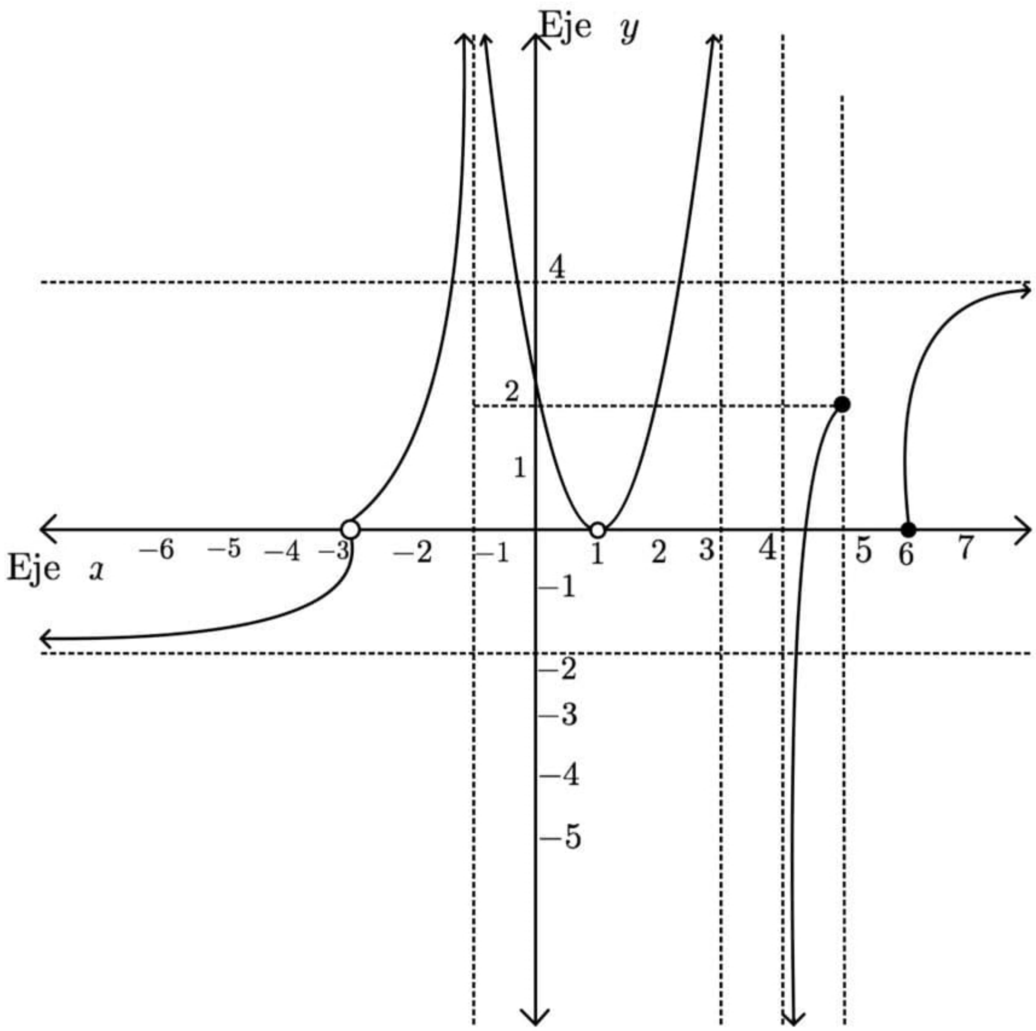
   d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =.$

2. La ecuación de una recta asíntota vertical a f es

3. Las ecuaciones de las rectas asíntotas horizontales a f son:

1.3.2 Ejemplo 1.3

Considere la gráfica de la función f que presenta en la siguiente figura



Calcule cada uno de los siguientes límites

a) $\lim_{x \to -3} f(x) =.$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =.$

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) =.$

d) $\lim_{x \to -1} f(x) =.$

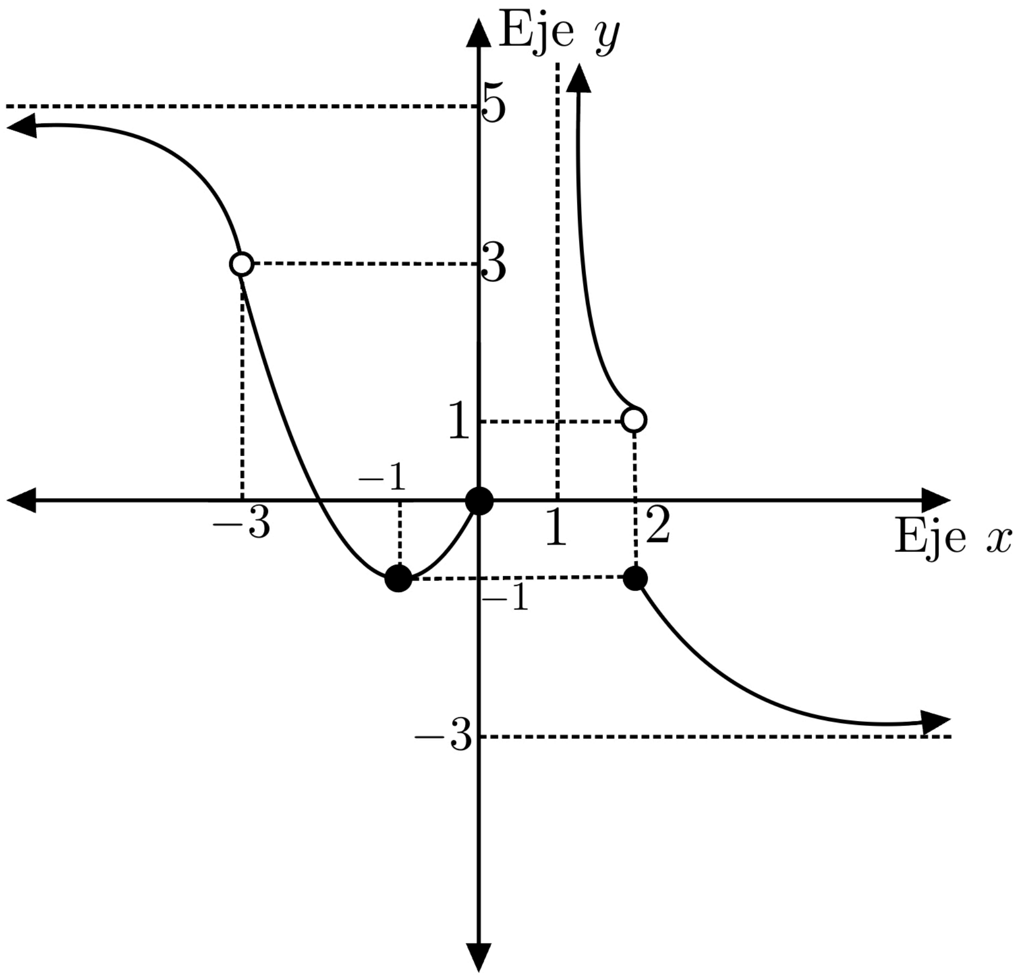
e) $\lim_{x \to 4^+} f(x) =.$

f) $\lim_{x \to 6^+} f(x) =.$

g) Las ecuaciones de todas las rectas asíntotas:

2 Práctica Complementaria

1. Considere la siguiente figura que corresponde a la gráfica de una función $y = f(x)$



De acuerdo con los datos suministrados anteriormente. determine lo que se le solicita.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

(c) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) =$

(d) La ecuación de una recta asíntota horizontal

(e) La ecuación de una recta asíntota vertical

2. Calcule si existen, cada uno de los siguientes límites. Si el límite presenta forma indeterminada, indique cuál es.

   (a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x-9}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+x-3}{\sqrt{x+1}}$

   (c) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$

   (d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$

   (e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+x^4-2}{(x^2+3x)^2}$

   (f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x+1}{3-2x}$