

Rotación de Faraday

Caradonna Antonio, 13-10223

Laboratorio avanzado de física II, Universidad Simón Bolívar, Sartenejas, Venezuela.

(junio, 2019)

En el presente experimento se comprobó la rotación del plano de polarización de un haz, proveniente de un láser He-Ne polarizado, que pasa a través de un tubo de cristal lleno de agua destilada que, a su vez, se encuentra dentro de una bobina a la que se le aplica una corriente. También, se calculó la constante de Verdet de distintas maneras y se compararon los resultados, obteniendo un valor de $C_v = 3.94 \pm 0.73 \text{ rad/T} \cdot m$ para el cálculo en DC y $C_v = 3.1 \pm 0.3 \text{ rad/T} \cdot m$ para el cálculo en AC.

I. INTRODUCCIÓN

La rotación de Faraday se basa en la rotación del plano de polarización de un haz de luz incidente, linealmente polarizado, que atraviesa un medio birrefringente mientras éste está expuesto a un campo magnético paralelo. Este efecto fue descubierto por Michael Faraday en 1845, combinando por primera vez la luz con el magnetismo.

Este efecto solo ocurre cuando el haz polarizado pasa a través de dieléctricos transparentes. Cuando se aplica un campo magnético sobre un dieléctrico, se produce la birrefringencia. Luego, para el tubo circular, se genera un índice de refracción diferente para los haces polarizados hacia la izquierda

y derecha, respectivamente. Como resultado, estos rayos de luz se propagan a una diferente velocidad a través del tubo de cristal y, cuando se combinan al final del recorrido, se genera un desfase entre ambos.

II. ROTACIÓN DE FARADAY

Un campo eléctrico que se propaga en la dirección del eje Z se puede escribir como:

$$\mathbf{E}(z, t) = \Re e[E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \mathbf{e}]$$

Donde $\omega = 2\pi\nu$, $k = 2\pi/\lambda$ y $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Luego, como las polarizaciones son en los ejes X e Y, llamamos

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_x \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_y$$

La luz linealmente polarizada puede escribirse como una superposición de luz circularmente polarizada en dirección izquierda y derecha. La polarización circular viene dada por:

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y \quad \mathbf{e}_L = \mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y$$

Sustituimos la polarización circular en la ecuación del campo eléctrico

$$\Re[\mathbf{E}_R] = E_0[\cos \omega t \mathbf{u}_x + \sin \omega t \mathbf{u}_y]$$

$$\Re[\mathbf{E}_L] = E_0[\cos \omega t \mathbf{u}_x - \sin \omega t \mathbf{u}_y]$$

Así, como se observa en la Figura 1, los campos rotan en el plano transversal al eje Z.

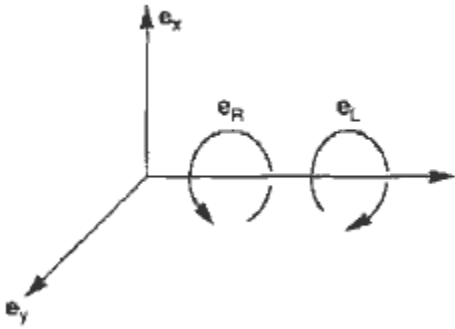


Figura 1: Propagación de polarizaciones izquierda y derecha a lo largo del eje Z.

Ahora, si escribimos

$$\mathbf{E}_x = E_0 \cos \omega t \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{E}_y = -E_0 \sin \omega t \mathbf{u}_y$$

Obtenemos los campos polarizados circularmente en función de la base canónica

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_x + i\mathbf{E}_y \quad \mathbf{E}_L = \mathbf{E}_x - i\mathbf{E}_y$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L) \quad \mathbf{E}_y = \frac{1}{2i}(\mathbf{E}_R - \mathbf{E}_L)$$

Luego, como se mencionó anteriormente, el haz de luz atraviesa un material birrefringente y, por lo tanto, como se aplica un campo magnético, hay un índice de refracción diferente para ambas polarizaciones circulares. Sabemos que la fase de cada componente se escribe como $(\omega t - kL)$ y ω es constante porque $v = c/n$ es constante. Entonces, si llamamos $\theta = kL$

$$\theta = kL = \frac{2\pi f}{c} nL$$

Donde se utilizó que $k = 2\pi/\lambda$ y $\lambda f = v$. Así, la polarización izquierda y derecha tendrán diferentes fases al recorrer el tubo de vidrio a pesar de haber entrado a él estando en fase.

De este modo, en el punto de salida del tubo, la luz habrá rotado a pesar de seguir linealmente polarizada.

$$\Phi = \frac{1}{2}(\theta_R - \theta_L) = \frac{\pi f}{c} L(n_R - n_L)$$

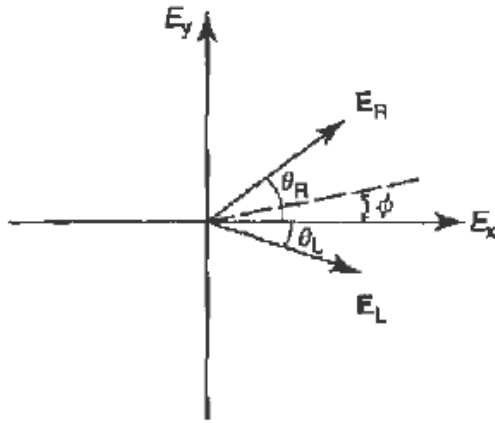


Figura 2: Rotación del plano de polarización lineal cuando la luz se propaga en una región donde sus componentes circulares se ven afectadas por una diferencia de fase.

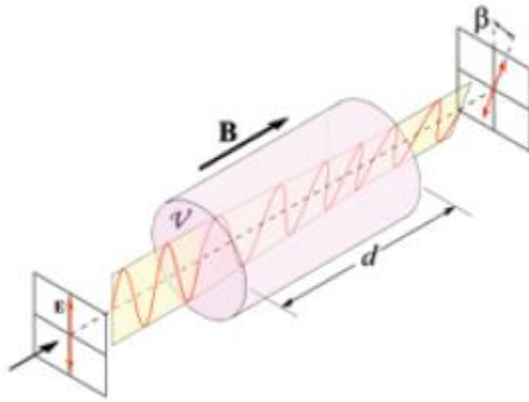


Figura 3: Rotación de Faraday. $\beta = \Phi$ y $d = L$.

Debido a la dependencia de los índices de refracción con el campo magnético externo aplicado, se puede escribir:

$$\Phi = C_v BL$$

Donde C_v es la constante de Verdet.

III. LEY DE MALUS

Como se observará en el montaje experimental, la luz emitida por el láser de He-Ne es finalmente recibida por un fotodiodo que traduce el haz en una intensidad dada por:

$$I(\Phi) = I_0 \cos^2 \Phi$$

La diferencia de potencial generada y proporcional a la intensidad es, entonces:

$$V(\Phi) = V_0 \cos^2 \Phi$$

Siendo la derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{dV(\Phi)}{dt} = \frac{dV}{d\Phi} \frac{d\Phi}{dt} = -V_0 \sin(2\Phi) \frac{d\Phi}{dt}$$

Si tomamos $\Phi = \Phi_0 + \Phi(t)$, considerando $\Phi(t)$ muy pequeño, entonces:

$$-V_0 \sin(2\Phi) \frac{d\Phi}{dt} \cong -V_0 \sin(2\Phi_0) \frac{d\Phi}{dt}$$

Se puede escoger Φ_0 convenientemente para que se cumpla la siguiente relación:

$$\frac{dV}{d\Phi} \cong -V_0 \sin(2\Phi_0) = -V_0 \rightarrow \left| \frac{dV}{d\Phi} \right| = V_0$$

Luego,

$$\Delta\Phi \frac{\Delta V}{\Delta\Phi} = \Delta V \rightarrow \Phi \frac{dV}{d\Phi} = V$$

IV. MONTAJE EXPERIMENTAL

Como se observa en la Figura 4, inicialmente el montaje experimental consta de un láser de He-Ne polarizado, un solenoide, un tubo de vidrio con agua destilada en su interior, un polarizador y un fotómetro.

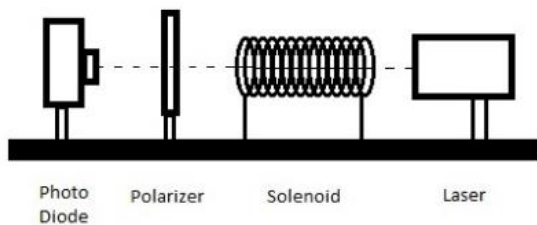


Figura 4: Esquema del montaje experimental para la rotación de Faraday.

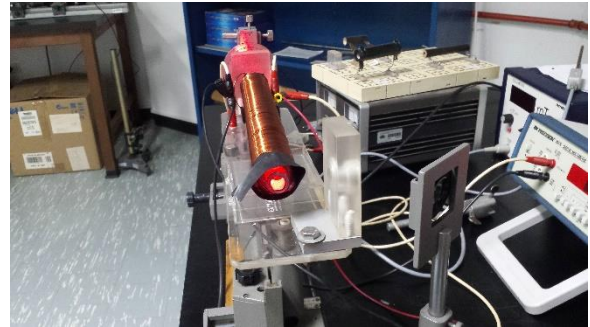


Figura 5: Montaje experimental realizado en el laboratorio.



V. LOCK-IN AMPLIFIER

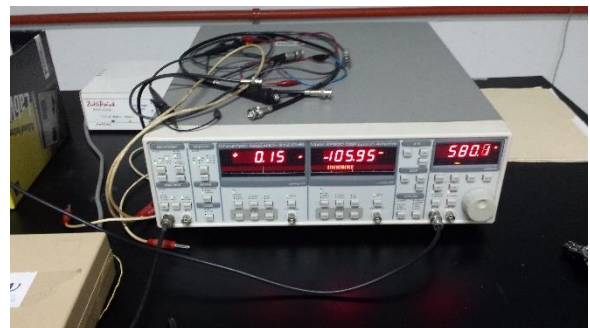


Figura 6: Amplificador sincrónico o Lock-in amplifier.

El amplificador sincrónico se utiliza para detectar y medir señales AC muy pequeñas con gran precisión, incluso en presencia de ruido muchas veces mayor a la señal que se

desea medir. Funciona por un método de detección sensible de fase, para resaltar la componente de la señal que se desea estudiar a una frecuencia y fase específica. De este modo, cualquier señal a otra frecuencia que no sea la de referencia se descarta.

Cuando a un experimento se le aplica una frecuencia AC a través de un generador de funciones, el amplificador sincrónico detecta dicha frecuencia y la usa como referencia. Si la señal utilizada para el experimento es

$$V_{sig} \sin(\omega_r t + \theta_{sig})$$

Entonces el amplificador genera su propia función seno

$$V_A \sin(\omega_A t + \theta_{ref})$$

Donde el subíndice A indica que se refiere al amplificador. Luego, se amplifica la señal y se multiplica por la señal de referencia y la salida sería:

$$V_{psd} = V_{sig} V_A \sin(\omega_r t + \theta_{sig}) \sin(\omega_A t + \theta_{ref})$$

$$V_{psd} = \frac{1}{2} V_{sig} V_A \cos[(\omega_r - \omega_A)t + \theta_{sig} - \theta_{ref}] - \frac{1}{2} V_{sig} V_A \cos[(\omega_r + \omega_A)t + \theta_{sig} + \theta_{ref}]$$

Esto es equivalente a dos señales AC con frecuencias $(\omega_r - \omega_A)$ y $(\omega_r + \omega_A)$ respectivamente.

Todos los amplificadores sincrónicos tienen al menos un filtro pasa baja. Si las señales se pasan por el filtro, no quedaría nada a menos que $\omega_r = \omega_A$. En ese caso, el resultado sería una señal DC.

$$V_{psd} = \frac{1}{2} V_{sig} V_A \cos(\theta_{sig} - \theta_{ref})$$

Por esta razón, es importante que $\omega_r = \omega_A$ y, además, que la fase entre las señales no cambie con el tiempo o de lo contrario la señal de salida no será DC.

Ahora se procede a describir las secciones del amplificador y su utilidad a la hora de hacer las mediciones.

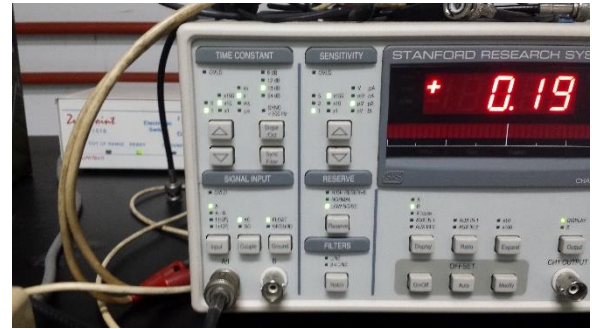


Figura 7: Secciones “signal input”, “reverse”, “filters”, “sensitivity”, “time constant” del amplificador.

Signal Input

El sensor de OVLD implica que el voltaje de entrada es mayor que 1.4Vpk y hay una sobrecarga.

La tecla [Input] sirve para escoger si la señal de entrada llega por una sola terminal o si llega por ambas (A y B) y se toma su diferencia entre el voltaje o la corriente. Es importante no aplicar más de 50V.

[Couple] Sirve para escoger el acoplamiento de entrada. En este caso es evidente que queremos usar un acoplamiento AC.

[Ground] Se escoge la protección que de las entradas A y B. En Floater está conectado a tierra por una resistencia de 10k Ω mientras que en Ground está conectado a tierra por una resistencia de 10 Ω .

Reserve

[Reserve] El tipo de reserva depende de la sensibilidad. Se puede escoger entre la máxima reserva disponible, la mínima o una entre ambas.

Sensitivity

Ajusta la sensibilidad y puede cambiar la dinámica de reserva.

Time Constant

Si hay ruido en la señal de entrada, habrá ruido en la señal de salida. Incrementando la constante de tiempo, el voltaje de salida se hace más consistente y confiable. Esto refleja

la suavidad y que tan lentamente responde el voltaje de salida. La constante de tiempo se puede fijar entre 10 μ s y 30s para frecuencias mayores de 200 Hz y hasta 30ks para frecuencias menores de 200 Hz. Una constante de tiempo baja implica una respuesta rápida a cambios en el voltaje de la señal de entrada, pero implica una lectura poco precisa e inestable. Por otro lado, una constante de tiempo por el orden de los segundos garantiza una lectura estable y confiable, pero puede tomar varias constantes de tiempo para mostrar un resultado que implique un cambio real en la señal de entrada.

Los dos monitores en la parte central del amplificador son los encargados de mostrar el voltaje de salida. El de la izquierda se coloca en R mientras que el de la derecha es irrelevante en este caso, ya que el valor de R es el que deseamos conocer.

$$X = V_{sig} \cos \theta$$

$$Y = V_{sig} \sin \theta$$

Entonces,

$$R = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}} = V_{sig}$$

Cabe destacar que el amplificador hace las mediciones de voltaje en RMS.

$$V = IR \rightarrow I = \frac{1}{R} V$$

VI. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El propósito principal de la práctica es el cálculo de la constante de Verdet. Para esto, se debe realizar una preparación previa.

Primero, se relaciona la corriente con el voltaje mediante la ley de Ohm para calcular la resistencia del solenoide.

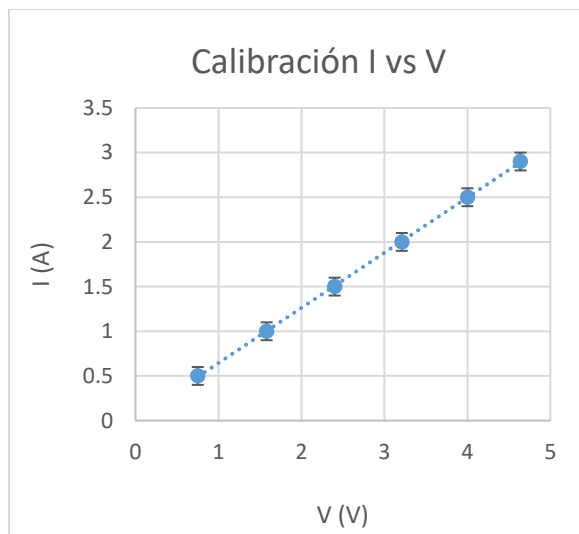


Gráfico 1: Relación entre la corriente y el voltaje.

	Valor	Error
Pendiente	0.6176A/V	0.007A/V
Pto. de Corte	0.0268A	0.0003A

Tabla 1: Ajuste de I vs V.

De la ley de Ohm,

$$R = (1.62 \pm 0.01)\Omega$$

Dada la falta de información sobre el solenoide es conveniente conocer la relación entre el campo magnético y la diferencia de potencial en el solenoide.

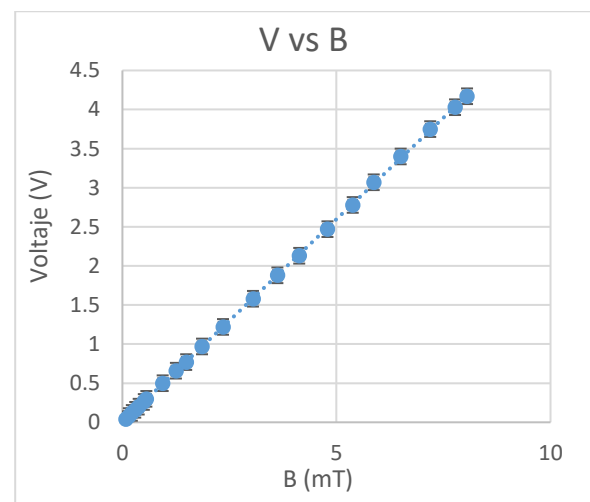


Gráfico 2: Relación entre el campo magnético y la diferencia de potencial.

	Valor	Error
Pendiente	0.519V/mT	0.004V/mT
Pto. de Corte	0.0028V	0.0005V

Tabla 2: Parámetros correspondientes al ajuste del Gráfico 2.

Sabemos que,

$$B = \frac{\mu_0 IN}{L} = \frac{\mu_0 N}{LR} V \rightarrow V = \frac{LR}{\mu_0 N} B$$

Donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} NA^{-2}$ es la permeabilidad magnética, $L = (0.3 \pm 0.01)m$ es la longitud del solenoide, N es el número de vueltas. Así,

$$m = \frac{LR}{\mu_0 N} \rightarrow N = \frac{LR}{\mu_0 m}$$

$$N = 745 \pm 33$$

Luego, se calculó la relación entre el campo magnético y la distancia a través del solenoide.

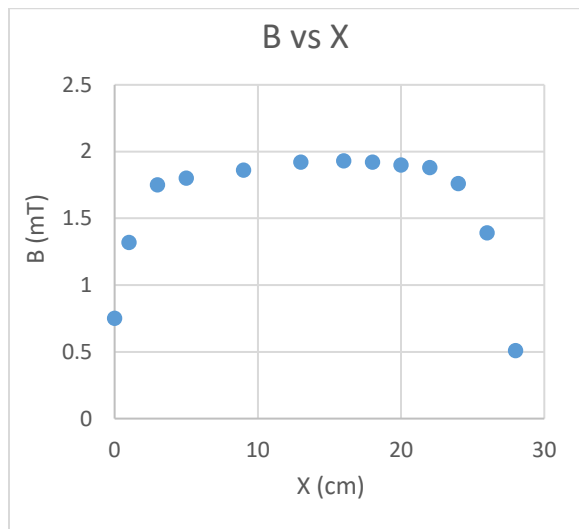


Gráfico 3: Relación entre el campo magnético y la longitud del solenoide para voltaje fijo de 1V.

Así, se observa que el campo magnético es aproximadamente constante en la parte central del solenoide, con un valor de $B = (1.9 \pm 0.3)mT$ para un voltaje de

$V = 1V$, mientras que en los extremos el campo decae rápidamente.

Luego, se procedió comprobar la ley de Malus.

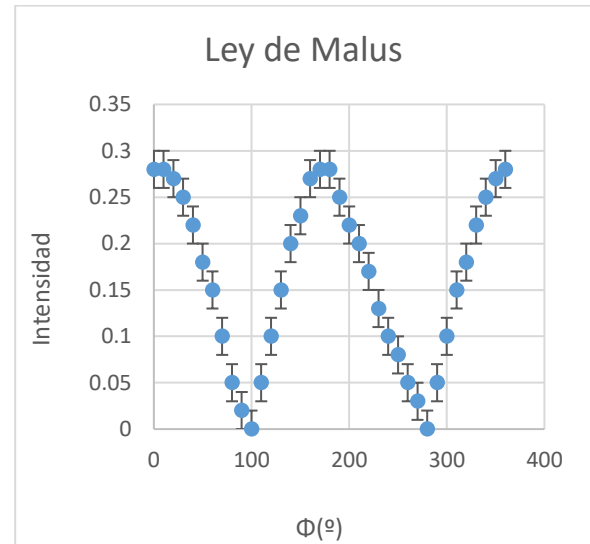


Gráfico 4: Ley de Malus.

Efectivamente, el comportamiento de la curva Intensidad vs Φ es un coseno al cuadrado.

Finalmente, se calcula la constante de Verdet por varios métodos y se comparan los resultados. Primero, se realizan dos curvas de la ley de Malus para un sistema sin un campo magnético aplicado y otro con un campo magnético, para finalmente observar la diferencia de fase y calcular la constante de Verdet.

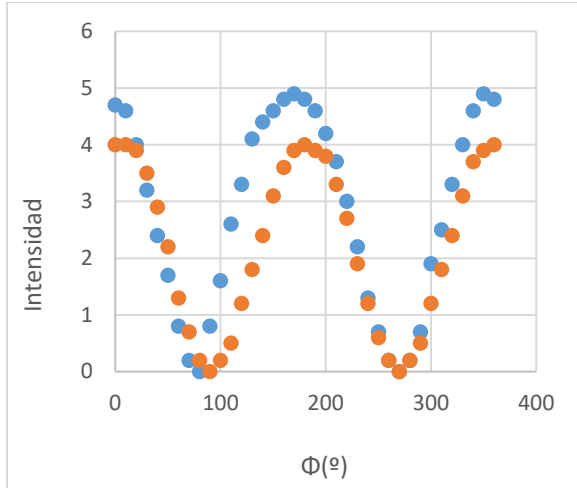


Gráfico 5: Diferencia de fase entre curvas de Ley de Malus.

De la gráfica 5, a la curva naranja se le aplicó un campo de $B = 6.35mT$ mientras que a la otra curva no se le aplicó un campo magnético. Se puede observar que genera un desfase entre ambas curvas. Directamente desde la gráfica se mide el desfase de $\Phi = 20^\circ \pm 2^\circ$. Este resultado puede estar relacionado con el nuevo ángulo de polarización de la luz cuando hay un campo magnético aplicado.

Luego, un método para calcular la constante de Verdet es dejando el ángulo de polarización fijo, pero cambiando la corriente que pasa a través del solenoide.

Para calcular la constante de Verdet en DC, se observó la intensidad de fotómetro cuando no hay una corriente aplicada a la bobina. Luego, se aplicó una corriente y se midió la desviación en la intensidad y la desviación angular. Así, de la ecuación

$$\Delta\Phi = C_v L \Delta B$$

Y de la relación entre el campo magnético y el voltaje aplicado, se obtiene directamente la constante de Verdet.

$$C_v = \frac{1}{L} \frac{\Delta\Phi}{\Delta B}$$

Este procedimiento se realizó para una corriente de $I = 2A$ y para otra de $I = 2.9A$.

I(A)	$\Delta\Phi(^{\circ})$	$C_v(\text{rad/Tm})$
2	0.5	4.66
2.9	0.5	3.21

Tabla 3: Cálculo de la constante de Verdet.

Así, la constante de Verdet promedio obtenida es:

$$C_v = 3.94 \pm 0.73 \text{ rad/T} \cdot m$$

Es un resultado que concuerda con los valores teóricos, a pesar de no ser exactamente igual.

Otro método para calcular la constante de Verdet es utilizando el amplificador sincrónico y la señal AC de un generador de señales. Para esto, se hacen unas pequeñas modificaciones al montaje experimental. Simplemente se conecta la salida del fotómetro a la señal de entrada del amplificador y se utiliza el generador de señales como nueva fuente. Así, lo que se debe hacer es graficar el voltaje de la bobina con respecto al voltaje del amplificador para distintas frecuencias.

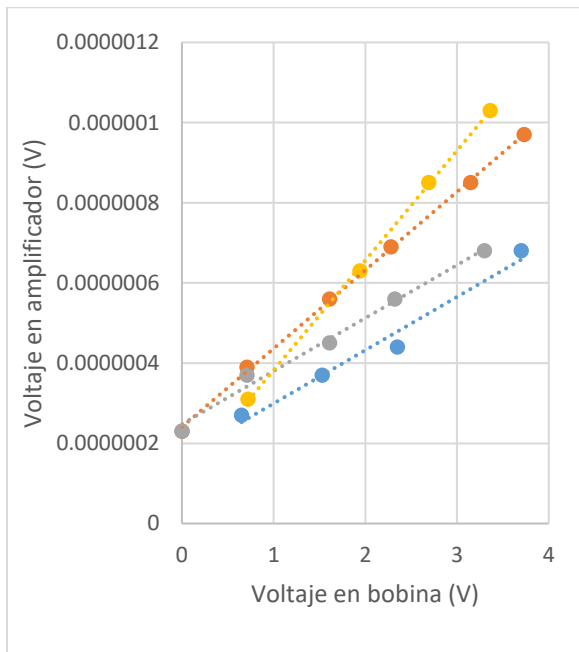


Gráfico 6: Relación entre voltajes de salida de la bobina y el amplificador para el cálculo de la constante de Verdet en AC.

	Freq	Pendiente	Pto de Corte
Azul	537Hz	1.00E-07	2.00E-07
Naranja	1012Hz	2.00E-07	2.00E-07
Gris	1512Hz	1.00E-07	2.00E-07
Amarillo	2146Hz	3.00E-07	1.00E-07

Tabla 4: Parámetros correspondientes al ajuste realizado a las rectas del gráfico 6.

Utilizando la ecuación del campo magnético para un solenoide y sustituyendo los valores conocidos es posible calcular la constante de Verdet. Así, se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 5.

	Cv (rad/Tm)
Azul	1.8 ± 0.2
Naranja	3.5 ± 0.3
Gris	1.8 ± 0.2
Amarillo	5.2 ± 0.3

Tabla 5: Constante de Verdet para distintas frecuencias con los colores indicando sus respectivas curvas en el gráfico 6.

Promediando obtenemos que, en AC, la constante de Verdet obtenida es:

$$C_v = 3.1 \pm 0.3 \text{ rad/T} \cdot m$$

Lo cuál es un valor mucho más preciso de la constante y tiene sentido, ya que se utilizó el amplificador sincrónico, que un aparato mucho más sofisticado y exacto.

VII. CONCLUSIONES

Fue posible conocer las características del solenoide mediante calibraciones del voltaje, la corriente y el campo magnético y, así, utilizar dichos datos para los cálculos de la constante de Verdet.

Además, se comprobó la ligera rotación del plano de polarización de un haz que atraviesa un medio birrefringente generado por la aplicación de un campo magnético a un solenoide con un tubo de vidrio lleno de agua destilada, por la cual pasa el haz que está polarizado linealmente.

Por otro lado, el objetivo principal del experimento fue calcular la constante de Verdet, sumado al entendimiento y utilización del amplificador sincrónico para cálculos más precisos. Efectivamente, el resultado de la constante de Verdet concuerda con lo esperado para ambos casos, DC y AC respectivamente, pero el resultado del cálculo AC fue más cercano al teórico.

El amplificador sincrónico es una herramienta de gran utilidad e importancia para mediciones precisas, de bajo voltaje o con ruido varias veces superior a la señal que desea estudiarse, ya que permite fijar una frecuencia y una fase de referencia y, de este

modo, amplifica solo dicha frecuencia, minimizando casi por completo el ruido.

VIII. REFERENCIAS

- [1] Adrian C. Melissinos, Jim Napolitano. *Experiments in Modern Physics*. 2da edición.
- [2] Kuperman, M. Sandá Seoane, R. *Efecto Faraday: determinación de la constante de Verdet*. Universidad de Buenos Aires. (2015).
- [3] Jared M, Maxson. *Using a Lock-in Amplifier*. Lehigh University. (2008).
- [4] Hecht, E. *Optics*. Editorial Addison Wesley. 4ta edición.
- [5] Vira, A. Liang, L. *Faraday Rotation measurement of the Verdet constant of SF-57 glass at 650 nm*. https://www.authorea.com/users/68267/articles/82302-faraday-rotation-measurement-of-the-verdet-constant-of-sf-57-glass-at-650-nm/show_article . Última visita 21/06/2019.
- [6] Manual *MODEL SR830 DSP Lock-in Amplifier*. Stanford Research Systems. (Revisado 10/2011)