

# Filtraje Óptico y Transformada de Fourier de Imágenes

Caradonna Antonio, 13-10223

*Laboratorio avanzado de física II, Universidad Simón Bolívar, Sartenejas, Venezuela.*

(marzo, 2019)

En este experimento se utiliza la teoría de las transformadas de Fourier para filtrar patrones repetitivos en distintas imágenes. Para ello, se realiza un montaje utilizando un expansor de haz formado por un arreglo de lentes divergentes, convergentes y, de ese modo, amplificar y colimar el haz generado originalmente por un láser de He-Ne.

## I. INTRODUCCIÓN

En muchas áreas de la física y la ingeniería a veces es necesario e importante contar con técnicas de filtraje. Por ejemplo, los ecualizadores; éstos modifican el volumen del contenido en frecuencias de la señal que procesan. Para ello, modifican las amplitudes de sus coeficientes de Fourier, lo que se traduce en diferentes volúmenes para cada señal. ¿Cómo es esto posible? Virtualmente, todo puede expresarse como una onda debido al postulado de de Broglie, es decir, ir del dominio del tiempo al dominio de las frecuencias. La transformada de Fourier es una herramienta única y poderosa para observar estas ondas.

Todas las ondas, sin importar qué sea lo que se esté observando en el universo, se pueden descomponer como la suma de funciones sinusoidales de distintas frecuencias. De este modo, las transformadas de

Fourier son una herramienta matemática de vital importancia para la ingeniería y la ciencia.

Por otro lado, para un mejor entendimiento del filtraje óptico, es fundamental entender el fenómeno físico de difracción de la luz, así como la aproximación de campo cercano y lejano, mejor conocidas como difracción de Fresnel y Fraunhofer, respectivamente.

## II. DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER

Como se mencionó anteriormente, la difracción de la luz es el fenómeno físico en el que se basa el filtraje óptico. Ésta podría definirse como cualquier desviación de la luz de su trayectoria rectilínea que no sea debido a una reflexión o refracción. Por esto, se usa para describir la propagación del campo óptico desde cierta entrada hasta un plano de salida o de observación.

La propagación de la luz a través de lentes es una parte fundamental de la formación de imágenes y una de las herramientas más útiles para entenderla es el principio de Huygens, que dice que cada punto del frente de onda puede ser visto como una fuente secundaria de ondas esféricas de la misma frecuencia, como se observa en la Figura 1.

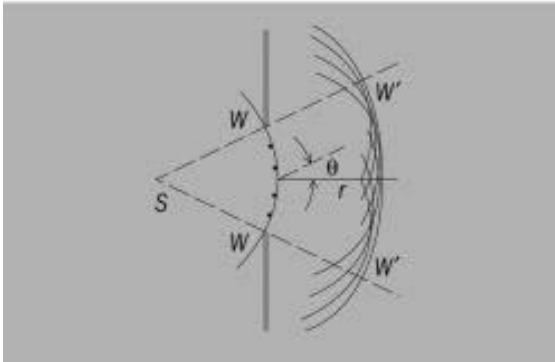


Figura 1: Principio de Huygens.

Luego, la teoría de difracción se cumple para los siguientes casos:

- La abertura es grande en comparación a la longitud de onda de los rayos de luz, mejor conocido como difracción de Fresnel o aproximación de campo cercano.
- La difracción es medida a una distancia muy grande de la abertura, mejor conocido como difracción de Fraunhofer o aproximación de campo lejano.

Según el libro *Optics* de Eugene Hecht, una regla para saber cuando se está en este caso es:

$$R > \frac{a^2}{\lambda}$$

Donde  $R$  es la distancia del objeto a la pantalla,  $a$  es el ancho de la abertura y  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación incidente.

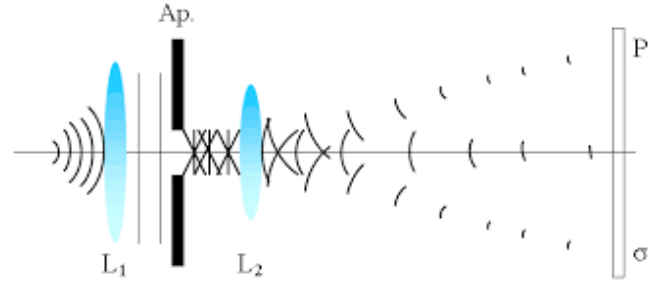


Figura 2: Representación gráfica de la difracción de Fraunhofer.

### III. TRANSFORMADA DE FOURIER

En una dimensión, si una función  $f(x)$  se comporta razonablemente bien, se puede descomponer en una superposición de funciones senos y cosenos o, su equivalente imaginario, que serían funciones exponenciales imaginarias de varias frecuencias espaciales.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} A(k) \cos kx dk + \int_0^{\infty} B(k) \sin kx dk \right]$$

Donde,

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos kx' dx'$$

$$B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \sin kx' dx'$$

Con  $x'$  una variable cualquiera para llevar a cabo la integración. Luego,  $f(x)$  se puede escribir de una forma más general como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{ikx'} dx' \right] e^{-ikx} dk$$

Así, se puede escribir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

y

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Como la transformada y anti transformada de Fourier, respectivamente. Luego, en dos dimensiones,

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$F(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

En la figura 3 se observan algunas funciones con sus respectivas transformadas de Fourier.

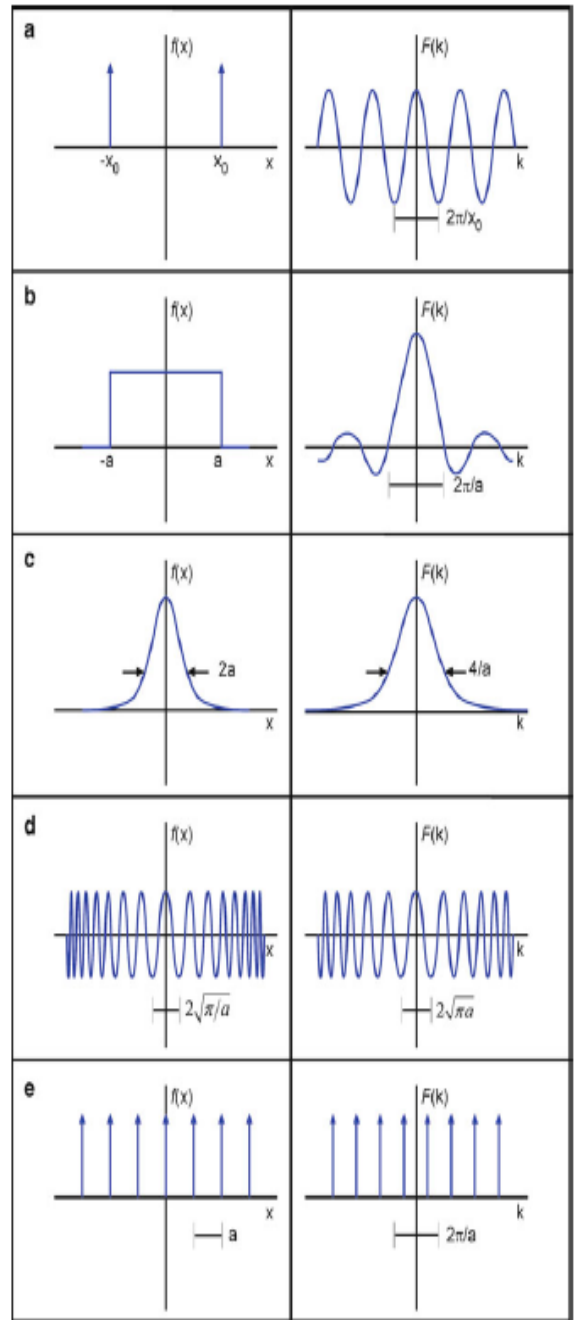


Figura 3: 1ra columna representa distintas funciones mientras que la segunda columna son sus respectivas transformadas de Fourier.

Por otro lado, en las figuras 4, 5 y 6 se puede observar lo que se obtiene visualmente al hacer pasar un haz de luz del laser de He-Ne a través de rendijas circular, cuadrada, simple y doble, respectivamente.

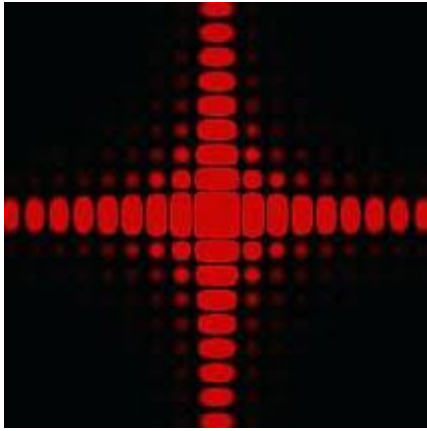


Figura 4: Patrón de difracción de una abertura cuadrada.

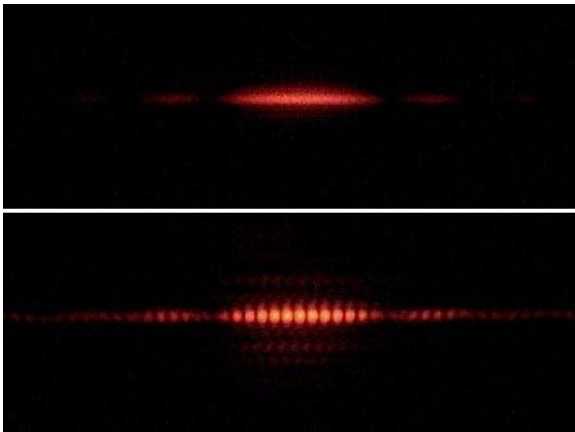


Figura 5: Arriba se observa el patrón de difracción de una rendija simple y abajo el de una rendija doble.

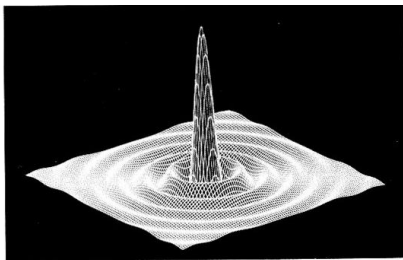
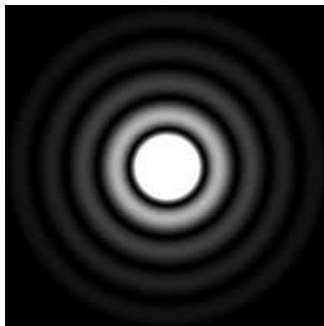


Figura 6: Patrón de difracción de una abertura circular.

## IV. MONTAJE EXPERIMENTAL

El montaje para este experimento se observa en la Figura 7. Consta de un Laser de He-Ne, seguido de un expansor de haz formado por dos lentes divergentes y una lente convergente. Luego, se coloca la imagen seguida de otro espejo convergente, que permite hallar la transformada de Fourier en su punto focal. Más adelante, se encuentra una serie de rendijas circulares ajustable, de distintos tamaños, que se usan para realizar el filtraje de la imagen. Para finalizar, se colocó otra lente convergente y la cámara.



Figura 7: Montaje experimental para realizar filtraje óptico.

El expansor de haz utilizado es del tipo galileano, esto es, una lente divergente seguida de una lente convergente. Sin embargo, se usaron dos lentes divergentes antes de la lente convergente para

incrementar aún más el tamaño del haz y así, cubrir una mayor área de la imagen a filtrar.

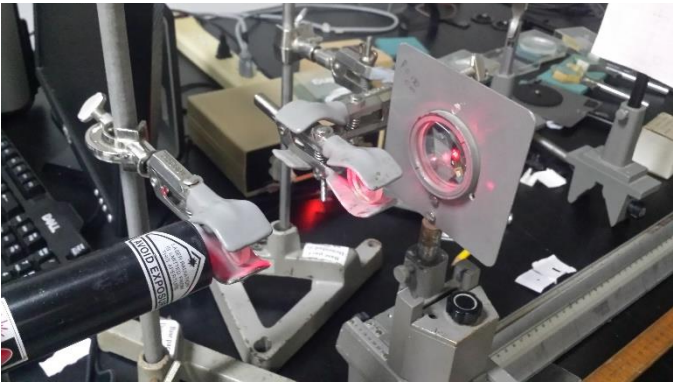


Figura 8: Expansor de haz utilizado en el experimento.

Para el expansor de haz, las distancias entre las lentes se encuentran en la tabla 1.

Lentes	Distancia (cm)
1r Divergente	$3 \pm 1$
2do Divergente	$7.5 \pm 1$
Convergente	$18.5 \pm 1$

Tabla 1: Distancias entre las lentes que forman el expansor de haz medidas desde la salida del láser de He-Ne.

Luego, la tabla 2 muestra las distancias de todos los componentes, por orden, utilizados para realizar el filtraje óptico.

	Distancia (cm)
1r Divergente	$3 \pm 1$
2do Divergente	$7.5 \pm 1$
1r Convergente	$18.5 \pm 1$
Objeto	$34 \pm 1$
2do Convergente	$46 \pm 1$
Filtro	$54 \pm 1$
3r Convergente	$59.7 \pm 1$
Cámara	$62 \pm 1$

Tabla 2: Distancias de las componentes utilizadas para el filtraje óptico medidas desde la salida del láser de He-Ne.

Luego, el proceso completo también se observa en la Figura 9, con sus respectivas distancias entre cada componente consecutiva del experimento.

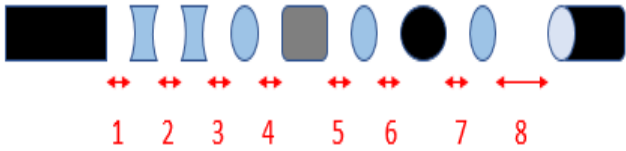


Figura 9: Esquema de componentes utilizadas para realizar filtraje óptico.

Separación	Distancia (cm)
1	$3 \pm 1$
2	$4.5 \pm 1$
3	$11 \pm 1$
4	$15.5 \pm 1$
5	$12.5 \pm 1$
6	$7.5 \pm 1$
7	$5.7 \pm 1$
8	$3 \pm 1$

Tabla 3: Distancias de las respectivas separaciones que se observan en la Figura 9.

Finalmente, el proceso es el siguiente:

- I. El haz de luz se expande y colima.
- II. Pasa a través de la imagen que se desea filtrar.
- III. En el foco de la siguiente lente convergente o, también llamado plano de Fourier se forma la transformada de Fourier.
- IV. Ahí, la imagen transformada pasa por el filtro.
- V. Al pasar por la siguiente lente convergente, se forma la anti transformada de Fourier y, se observa nuevamente la imagen inicial pero filtrada.
- VI. Dicha imagen llega a la cámara y es observada en la computadora a través de un software de National Instruments.

## V. RESULTADOS

Antes de empezar con el filtraje, se buscó comprobar que efectivamente se podían encontrar los patrones de difracción conocidos como los de una rendija simple, doble, circular y cuadrada. En las figuras siguientes se observan dichos resultados utilizando el montaje experimental descrito anteriormente, a excepción del filtro, la 3ra lente convergente y la cámara.

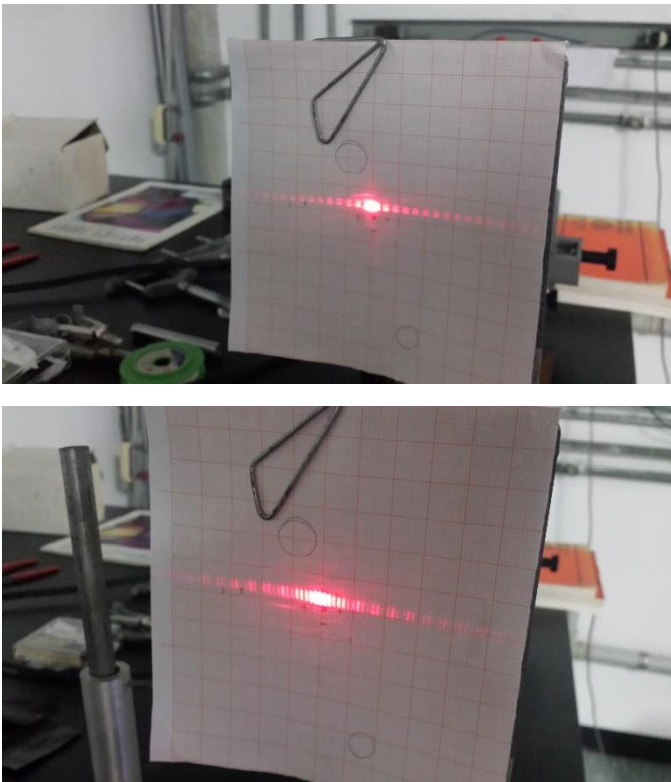


Figura 10: Arriba se observa el patrón de difracción para una rendija simple. Abajo se observa el patrón de difracción para una rendija doble.

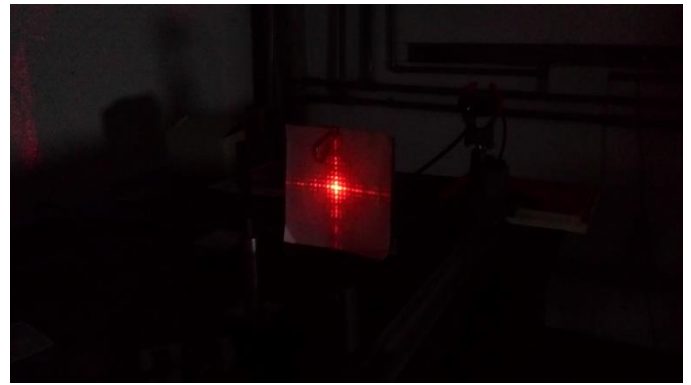


Figura 11: Patrón de difracción para una rendija cuadrada.

Una vez se agrega la cámara, en la figura 12 se observa el patrón de difracción para una rendija circular.

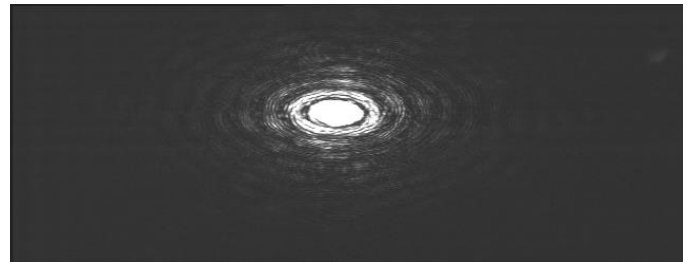


Figura 12: Patrón de difracción para una rendija circular.

Se estudia nuevamente la rendija cuadrada y se obtiene lo siguiente:

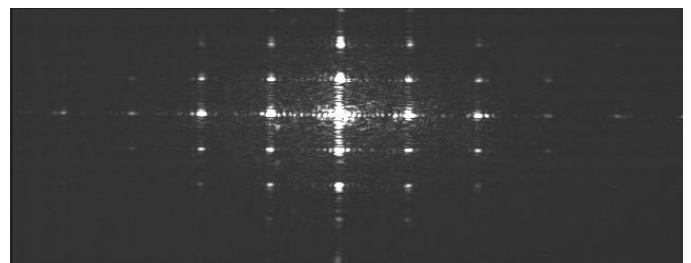


Figura 13: Transformada de Fourier para una rendija cuadrada vista a través de la cámara.



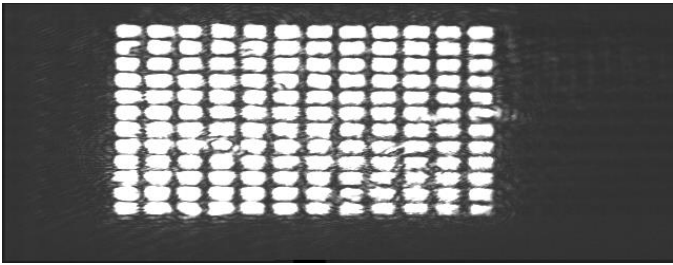


Figura 14: Anti transformada de Fourier para una rendija cuadriculada vista a través de la cámara.

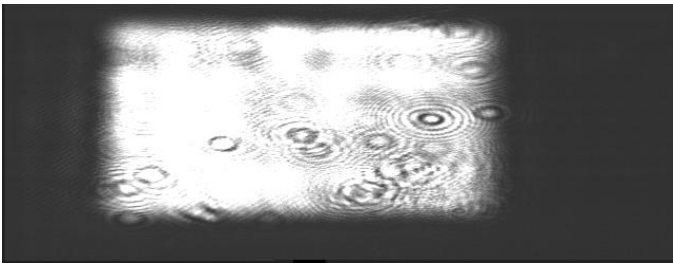


Figura 15: Anti Transformada de Fourier para una rendija cuadriculada que pasa por un filtro circular.

Se repitió este proceso para una red hexagonal.

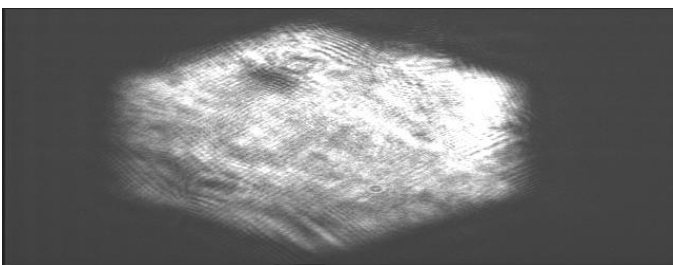
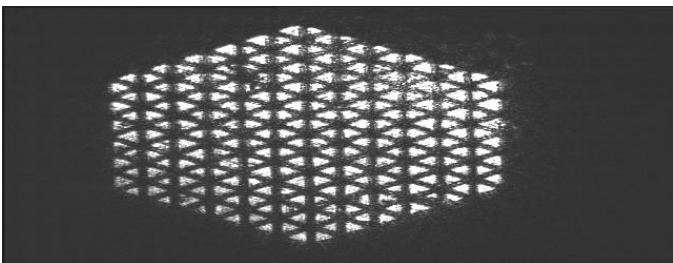
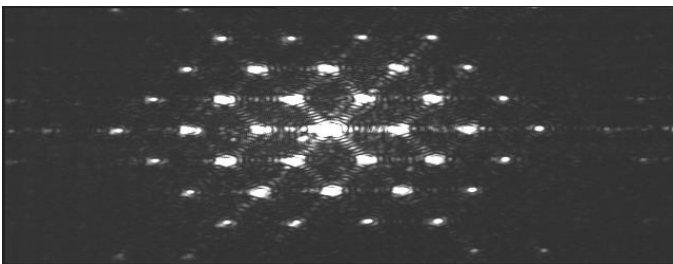


Figura 16: Proceso de filtraje para una red hexagonal.

Luego, se utilizaron imágenes más complejas con patrones repetitivos para filtrar. La primera y más visual, un satélite. Primero, se utilizó el filtro circular que se observa en la figura 17 para ver cómo cambia la imagen a medida que se pasa por rendijas circulares más pequeñas.



Figura 17: Filtro utilizado durante el experimento de filtraje óptico.

El objeto que contiene la imagen del satélite se observa en la figura 18.



Figura 18: Objeto con imagen de satélite.



Figura 19: Anti transformada de satélite sin patrón repetitivo o filtro.

Veamos, primero, el efecto de los distintos filtros circulares de la figura 17 cuando se hace pasar a través de ellos la imagen de la figura 18.

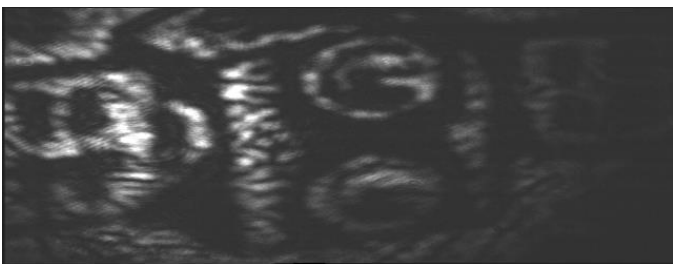
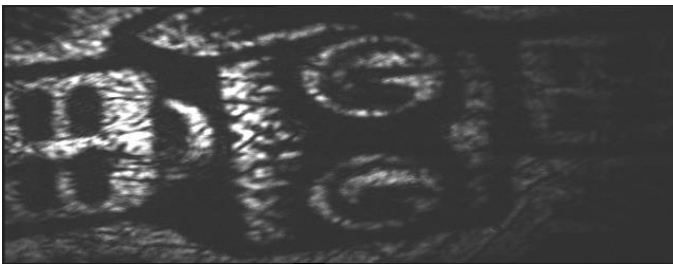
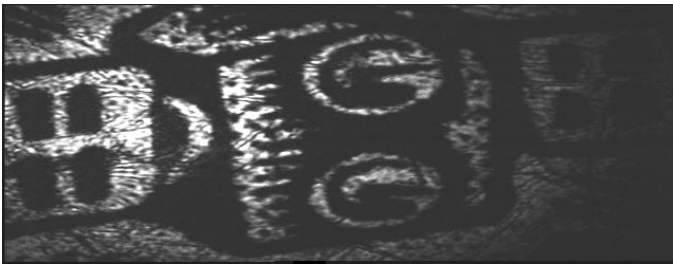


Figura 20: Imagen de satélite a través de filtros de distinto diámetro. De arriba abajo, mayor diámetro respectivamente.

Ahora, se coloca una red que representa un patrón repetitivo sobre la imagen del satélite, como se observa en la figura 21, para aplicar el filtraje óptico.

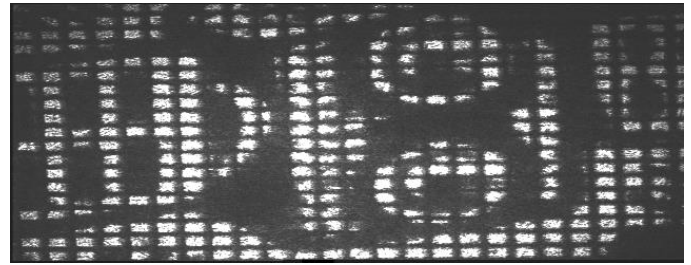


Figura 21: Imagen de satélite más patrón repetitivo.

Finalmente, se filtra la figura 21 y se obtiene lo que se observa en la figura 22.

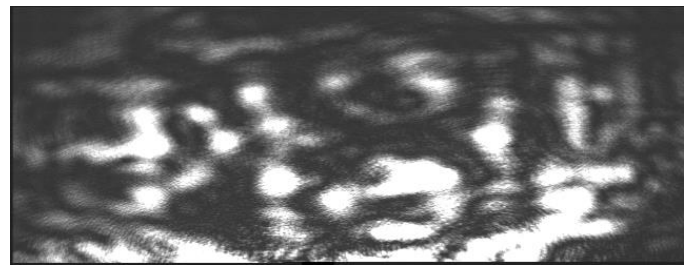


Figura 22: Filtraje óptico de figura 21.

La siguiente imagen utilizada se observa en la figura 23. En este caso, la imagen ya viene con un patrón repetitivo. Así, en la figura 24 se observa como se va filtrando la imagen a medida que el diámetro de la rendija circular se hace más pequeño.



Figura 23: Imagen de frutas utilizadas para filtraje óptico mostrado en la figura 24.



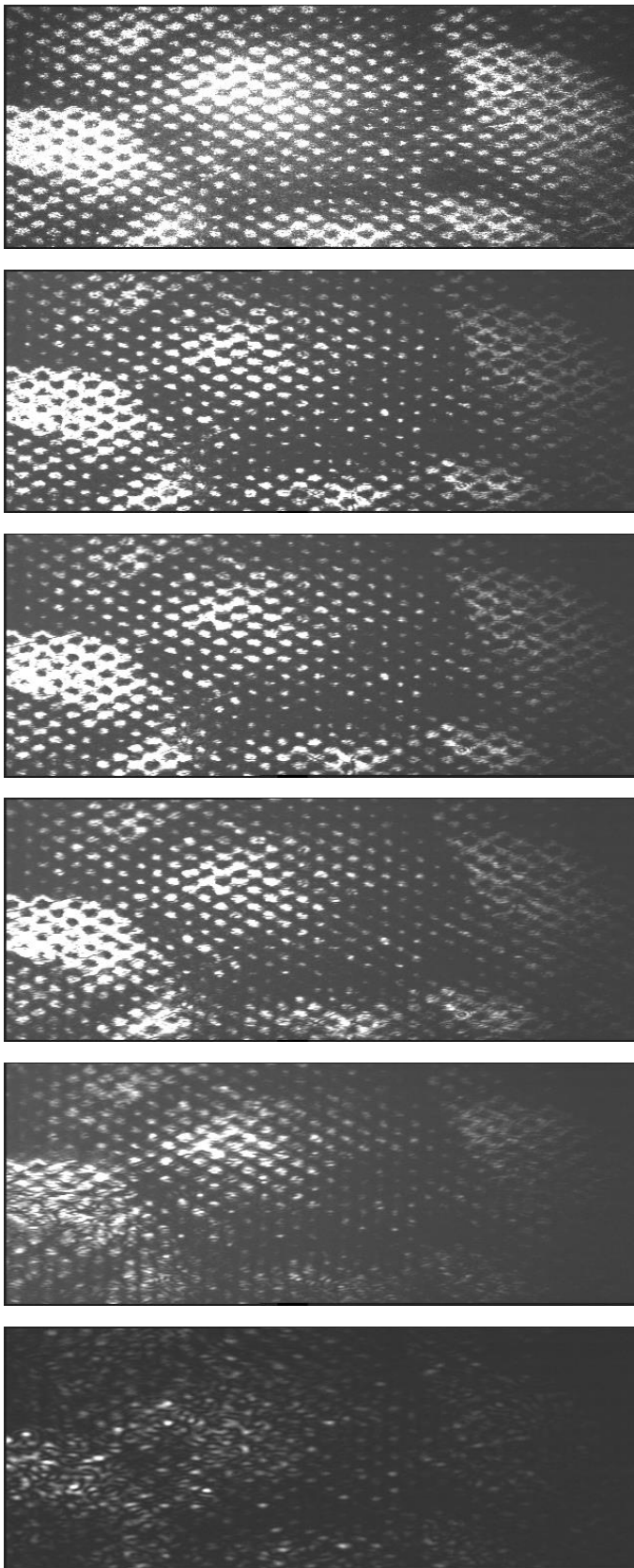
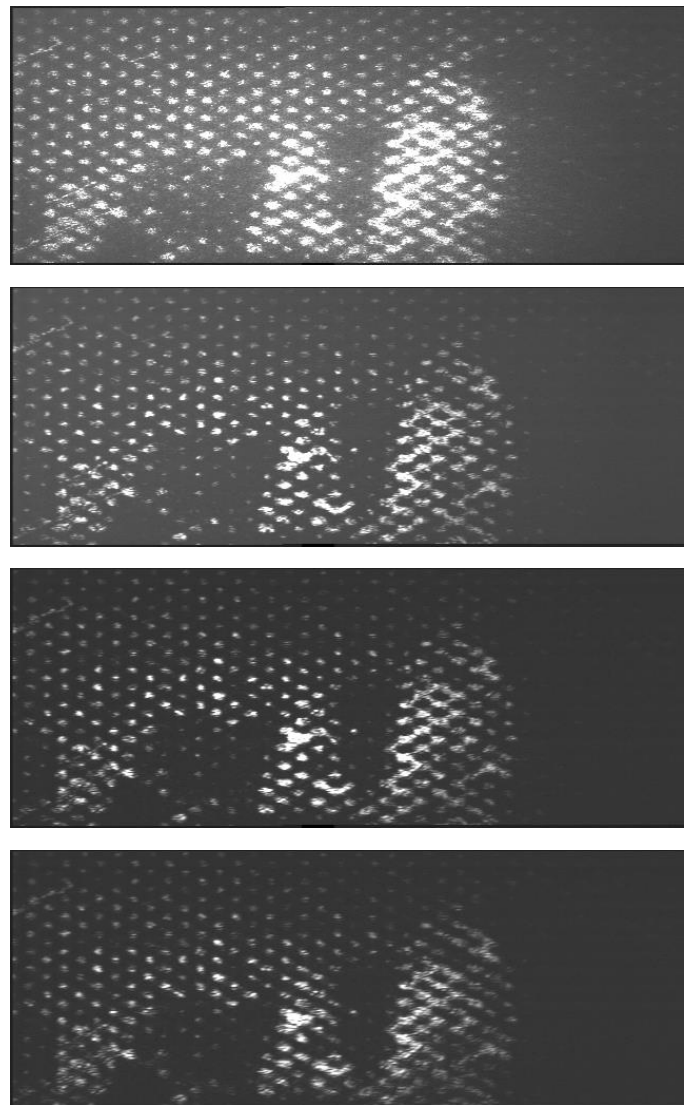


Figura 24: Filtraje óptico de imagen mostrada en diapositiva de figura 23.

En las figuras 25 y 26 se observa la tercera imagen utilizada. En este caso, la diapositiva muestra una montaña.



Figura 25: Diapositiva con imagen de una montaña.



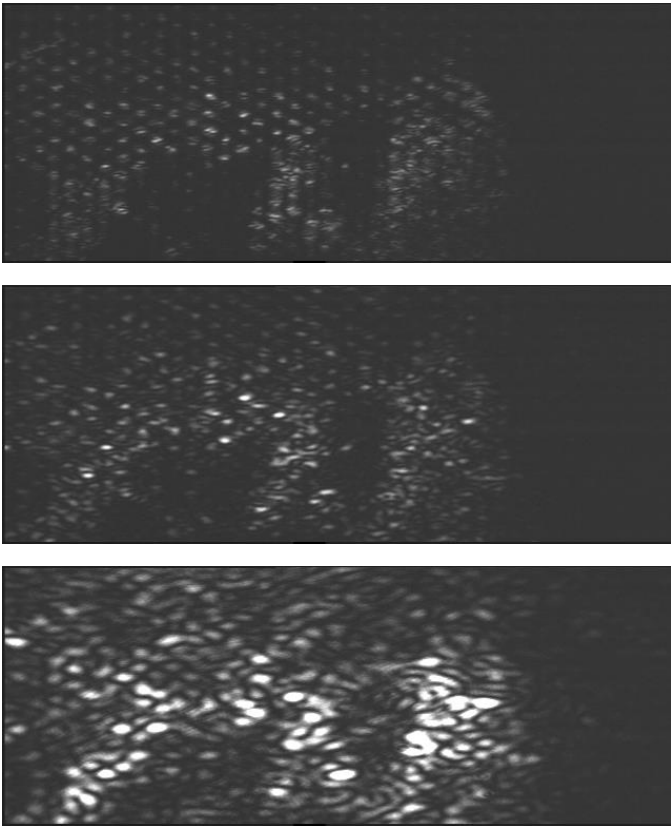
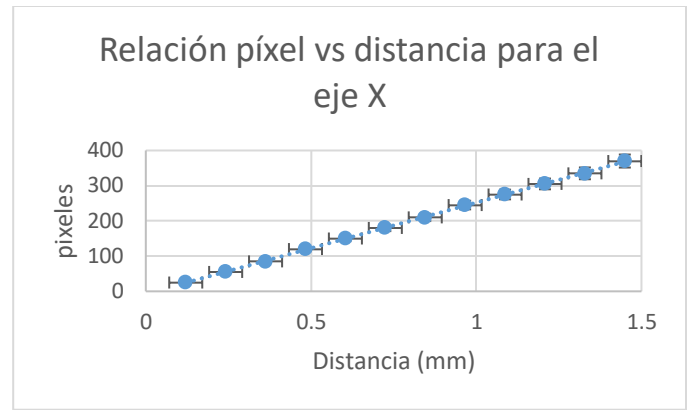


Figura 26: Filtraje óptico de imagen mostrada en diapositiva de figura 25.

Para finalizar, se calculó la relación píxel-distancia. Es decir, la relación entre el tamaño de diferentes rendijas y su representación en píxeles en el software de la computadora, National Instruments. Para esto, se midió con un vernier el ancho de las rendijas y, luego, con la anti transformada de Fourier que llega a la cámara y, por lo tanto, al software, se observó cuantos píxeles son equivalentes a dicho ancho.

En el gráfico 1 se observa que el comportamiento es una recta creciente y en la tabla 4 se encuentran los datos del ajuste lineal. Luego, se procede a calcular la constante



Gráfica 1: Relación píxel distancia para el ancho de la rendija, es decir, el eje X.

	Valor	Error
<b>Pto. de corte</b>	-7.05	$\pm 3$
<b>Pendiente</b>	125.45	$\pm 5$

Tabla 4: Datos del ajuste lineal realizado a la gráfica de relación píxel distancia.

Luego, dividiendo entre el número de franjas, se encuentra que la frecuencia espacial para la red de difracción es

$$k_x = (10.4 \pm 0.9) \text{ mm}^{-1}$$

## VI. CONCLUSIONES

Para empezar, con el montaje realizado se logró comprobar las predicciones matemáticas hechas por la teoría de Fourier y la aproximación de campo lejano o difracción de Fraunhofer, ya que se logró reproducir con exactitud las transformadas y anti

transformadas de rendijas con geometrías conocidas como lo son la rendija simple, doble, circular y cuadrada. Más aún, con la imagen del satélite se logró realizar con éxito el filtraje óptico de la red de difracción que se observa sobre dicha imagen en la figura 21. Así, lo que se entiende es que, donde se produce la transformada de Fourier, es decir, en el foco del segundo lente convergente se coloca uno de los filtros circulares y, de este modo, la información repetitiva es menos intensa y no pasa por la rendija circular. Como es evidente, también se pierde parte de la información del satélite, pero queda lo suficiente para lograr distinguirlo. En los otros dos casos no se logró observar el filtraje con tanta claridad, pero sí se distingue la imagen inicial.

Por otro lado, la finalidad de utilizar dos lentes divergentes en el expansor de haz es incrementar el área de efecto del haz de luz y, así, este pueda abarcar una mayor superficie de las imágenes utilizadas.

## **VII. REFERENCIAS**

[1] Hecht, E. *Optics*. 4th edition.

[2] F.A. Jenkins & H.E. White. *Fundamentals of Optics*. McGraw-Hill 1957.