4^{ta} tarea del curso de Física Computacional

"Raíces de ecuaciones y ecuaciones diferenciales ordinarias"

Prof. Ramón Darias

Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

25 de noviembre de 2019

La siguiente tarea consta de 5 preguntas las cuales deben ser resueltas completamente y entregadas una semana después de su asignación. La entrega extemporánea de esta tarea no está permitida.

Para la entrega de la misma, es obligatorio que usted abra un subdirectorio con el nombre **"Tarea_4"**, dentro de su directorio principal en DropBox, luego, dentro de este subdirectorio, colocará los archivos fuentes correspondientes a las respuestas planteadas. Cada programa desarrollado debe estar depurado y bien documentado y cada pregunta respondida debe estar acompañada de su correspondiente gráfica. Recuerden que las gráficas deben cumplir todos los criterios de elaboración de gráficos.

Parte I: Raíces de ecuaciones.

1. Utilice el método de ***Bisección*** para aproximar la raíz quinta de 2 con tres cifras decimales exactas.

2. Hallar la menor raíz positiva con su error de la ecuación $e^{-x^2} - cos(x) = 0$ con una tolerancia de 10^{-5}, utilizando el método de ***Regula Falsi*** y muestre en pantalla el error cometido en cada iteración.

3. Dada la ecuación no lineal:

$$8x - cos(x) - 2x^2 = 0.$$

   a) Haga una representación gráfica para averiguar el número de soluciones (raíces) y aplique el método incremental para obtener una estimación inicial de las mismas.

b) Resuelva la ecuación utilizando los métodos de ***Bisección*** y ***Newton***, con una tolerancia de 10^{-5}.

c) Transforme la ecuación en una de la forma $x = g(x)$, para que la solución converja con un número de iteraciones similar al obtenido con el método de *Newton*. Aplique para esto, el método de ***Punto Fijo***.

Parte II: Ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. ***Oscilaciones de un cuerpo esférico en el seno de un líquido viscoso.***

   Una esfera de densidad ρ y radio R está acoplada a un resorte de masa despreciable, longitud L y constante elástica k. El sistema se cuelga verticalmente de un soporte fijo como se muestra en la Fig. 1. La esfera es introducida posteriormente en un recipiente que contiene un líquido de viscosidad η y se hace oscilar comprimiendo el resorte inicialmente una distancia y_0.

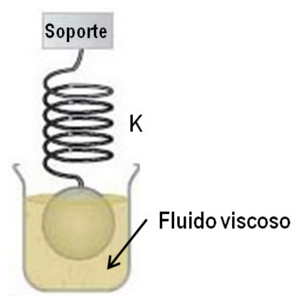

Figura 1: Esfera maciza oscilando en un fluido viscoso

a) Considerando que las oscilaciones de la esfera dentro del fluido son pequeñas y que el fluido está en reposo, escriba la ecuación de movimiento para la esfera, tomando la fuerza de fricción de arrastre del fluido como: $\vec{F}_\gamma = -\gamma(\vec{v}_e - \vec{v}_f)$, donde el coeficiente de fricción de arrastre γ, se puede aproximar a través de la relación de Stokes $\gamma = 6\pi\eta R$, para cuerpos esféricos pequeños sumergidos en líquidos viscosos en el regimen de número de Reynold pequeño ($R_e < 1$).

b) Resuelva analíticamente la ecuación de movimiento.

c) Haga una escogencia de parámetros que le permitan escribir la ecuación de movimiento en forma adimensional. Construya una tabla con los valores no adimensionalizados y adimensionalizados de los parámetros, utilizando la información del apartado (d). Señale en la tabla los valores de los posibles tiempos y longitudes características del sistema, así como el paso de tiempo que utilizará para integrar la ecuación de movimiento.

d) Resuelva numéricamente la ecuación de movimiento tomando $k = 5000\, kg/s^2$, $\eta = 0{,}391\, kg/ms$ (aceite mineral), $\rho = 11{,}35\, g/cm^3$ (plomo), $L = 10\, cm$, $R = 2\, cm$, $y_0 = 3\, cm$ e $\dot{y} = 0\, m/s$. Utilice para esto el Método de ***Euler-Cromer*** y grafique la solución tomando un tiempo suficientemente largo para que la esfera se detenga.

e) Grafique la energía mecánica y el trabajo hecho por la fuerza de fricción viscosa en función del tiempo y muestre que suma de estas dos cantidades es prácticamente cero.

f) Cambie la viscosidad a $\eta = 0{,}00105\, kg/ms$ (agua) y grafique la solución nuevamente.

g) Compare las soluciones obtenidas en los apartados (c) y (d) con la solución analítica.

2. ***Rebote de una pelota***

Una pelota de masa m y radio R es disparada con una velocidad inicial pequeña $\vec{v} = v_x\, \hat{x}$ en dirección horizontal desde una altura inicial $y = y_0$, tal que rebota múltiples veces de forma especular sobre la superficie $y = 0$ hasta detenerse. En cada impacto con la superficie, la pelota pierde energía, la cual se puede cuantificar para cada rebote utilizando la regla de colisión de Newton: $\vec{v}\,'_p - \vec{v}\,'_s = -e_n(\vec{v}_p - \vec{v}_s)$, donde e_n es el coeficiente de restitución que caracteriza la perdida de energía durante la colisión con la superficie.

a) Simule el rebote de una pelota de masa $m = 200\, g$, $e_n = 0{,}75$ considerando el valor de la gravedad local como $g = 9{,}77\, m/s^2$. Para esto utilice el método de ***Verlet***. Grafique la trayectoria de la pelota en el plano $(x - y)$, usted debería obtener algo similar a lo que se muestra en la Fig. 2.

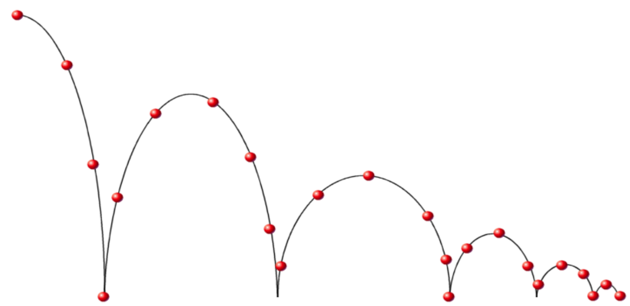

Figura 2: Rebote múltiple de una pelota inelástica

b) Cambie el valor del coeficiente de restitución e_n, tomando valores dentro el intervalo $[0{,}1-1{,}0]$, en pasos de 0,1 y grafique las trayectorias en una misma hoja.

c) Adicione en su simulación el efecto del aire sobre una pelota de radio $R = 20\,cm$. Por ejemplo, considere un flujo de aire en la dirección horizontal, tal que, la velocidad del aire sea $\vec{v}_a = v_a\,m/s\,\hat{x}$, tomando diversos valores para v_a inclusive negativos (movimiento del aire en contra del movimiento de la pelota). Para esto, utilice nuevamente la relación de Stokes y escriba correctamente la fuerza de arrastre que ejerce el aire sobre la pelota para cada caso. Grafique las distintas trayectorias que se obtienen cambiando el valor de v_a.