安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《 高等数学 A（一）》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设数列 $\{x_n\}$，下列命题**不正确**的是（　）

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$ 存在

2. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　）

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界，但不是无穷小　　(D) 无界，但不是无穷大

3. 设 $f(x)=\begin{cases}(x-1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & x\neq\pm1,\\ 0, & x=\pm1,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$（　）

(A) 在 $x=-1$ 处连续，在 $x=1$ 处间断　　(B) 在 $x=-1$ 处间断，在 $x=1$ 处连续

(C) 在 $x=-1$，在 $x=1$ 处都连续　　(D) 在 $x=-1$，在 $x=1$ 处都间断

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列**错误**的是（　）

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

5. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为（　）

(A) $[f(x)]^{2n}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$　　(C) $n![f(x)]^{n+1}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\right)^{\frac{1}{n}}=$ ________.

k

7. 已知当 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $\ln(\cos x)$ 是等价的无穷小，则 $a=$ ______.

8. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\lambda[x]\right)$ 存在，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则

$\lambda=$________.

9. 已知 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2020)$，则 $f'(1)=$________.

10. 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{tx}$，则 $d\,f(t)=$__________.

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 已知 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{a_n\}$ 极限存在，并求此极限值.

12. 数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n=\dfrac{1}{2n^2+1}+\dfrac{2}{2n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

13. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x^2)}$.

14. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

15. 已知 $f'(x)=ae^x$（$a>0$ 且为常数），求反函数的二阶导数.

16. 设 $y=y(x)$ 是由 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，求 $y''(0)$ 的值.

17. 求曲线 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 上与直线 $8x+y=1$ 垂直的切线方程.

四、分析题（每小题 10 分，共 10 分）

18. 确定常数 a，b，使得 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, & x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 点处可导.

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

19. 设函数 $u(x)$，$v(x)$ 均可导，利用**导数定义**证明

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《 高等数学 A（一）》期中考试试卷大题答案详解

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11.【解】先证数列为有界数列。

$a_1=\sqrt{2}<2$，$a_2=\sqrt{2+a_1}<\sqrt{2+2}=2$，假设 $a_n<2$，则 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}<2$，

则数列 $\{a_n\}$ 有上界；

再证数列为单调递增数列。

$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\dfrac{2+a_n-a_n^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n}=-\dfrac{(a_n-2)(a_n+1)}{\sqrt{2+a_n}+a_n}>0$，得 $a_{n+1}>a_n$，

则数列 $\{a_n\}$ 单调递增；

由单调有界必有极限，可知 $\{a_n\}$ 极限存在； 7 分

求极限。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，对 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 两边取极限，有 $A=\sqrt{2+A}$，解得 $A=2$ 或 $A=-1$（舍去），则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$. 9 分

12. 【解】 $\dfrac{n(n+1)}{2(2n^2+n)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2n^2+n}\le x_n\le\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2n^2+1}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n^2+1)}$ 7 分

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(2n^2+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(2n^2+1)}=\dfrac{1}{4}$，由夹边定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$ 9 分

13.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{2x^3}=\frac{1}{4}$$

9 分

14.【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=4$ 可知，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=4$，则 $x\to0$ 时，$f(x)\sim2x^2$； 5 分

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$$

9 分

15.【解】 设 $y=f(x)$，则

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)},$$ 4分

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left[\frac{dx}{dy}\right]}{dy}=\frac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^3}=-\frac{ae^x}{(ae^x)^3}=-\frac{1}{a^2e^{2x}}.$$

9分

16.【解】在方程中令$x=0$可得$y(0)=0$；

将方程两边对x求导，得$y+xy'+y'e^y=1$，　　　　　(*)

将$x=0$和$y(0)=0$代入，有$y'(0)=1$；　　　　5分

将（*）式两边再对x求导，得

$$2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0,$$

将$x=0$，$y(0)=0$和$y'(0)=1$代入，有$y''(0)=-3$　　　　9分

17.【解】因为$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\frac{1}{2(1+t)^2}$，　　　　4分

令$\frac{1}{2(1+t)^2}=\frac{1}{8}$，得$t=1$和$t=-3$（舍去）；　　　　6分

当$t=1$时，$x=3$，$y=\ln 2$，故所求切线方程为：

$y-\ln 2=\frac{1}{8}(x-3)$，即$y=\frac{1}{8}x-\frac{3}{8}+\ln 2$.　　　　9分

四、分析题（每小题10分，共10分）

18.【解】$f(x)$在$x=1$点处可导必连续，则

$\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+ax+b)=1+a+b=f(1)=1$，即$a+b=0$；　　　　4分

又$f(x)$在$x=1$点处可导，则$f'_-(1)=f'_+(1)$，而

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1+a)=2+a$$

得$-1=2+a$.

得$a=-3$，$b=3$. 9分

五、证明题（每小题7分，共7分） 10分

19.【证明】

$$[u(x)v(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$ 4分

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$ 7分

一、

1. C 2. D 3. B 4. D 5 C

二、6. $\max\{a_1, a_2, \cdots a_k\}$

7. 1

8. 1

9. $-2019!$

10. $e^t(1+t)dt$