【练习题 1 参考解答】

1．$\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{5x^3+4x-3}{x(10x^2+7)}+\frac{1}{x}\sin x]=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

2．当 $x\to 0$ 时 $x-\sin x$ 与 kx^3 为等价无穷小，则 $k=$ $\underline{\frac{1}{6}}$.

3．函数 $y=x\ln x$ 的单增区间为 $\underline{[\frac{1}{e},+\infty)}$.

4．设 $y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$ ，则 $y'=\underline{\frac{1}{4}\sqrt{\cot\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}}$.

5．$f(x)=3x^3-6x^2+x-1$ 在区间 $(0,1)$ 内满足拉格朗日定理结论的 $\xi=\underline{\frac{1}{3}}$.

6．设方程 $x+\ln(x+y)=y^2$ 确定 y 是 x 的函数 $y=y(x)$，则 $\frac{dy}{dx}=\underline{\frac{x+y-2xy+1}{2y^2-1}}$.

二、（本题满分 18 分，每小题 3 分）选择填空题

【 D 】1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{2x}-1}=$

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) 0 . (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1 .

【 B 】2. 曲线 $y=\frac{\sin x}{x(x-1)}$ 的垂直渐近线方程为

(A) $x=0$. (B) $x=1$. (C) $x=0$ 和 $x=1$. (D) 不存在.

【 C 】3．已知 $f(x)$ 可导，$y=\sin f(x)$，则 $y'=$

(A) $\cos f(x)$. (B) $-\cos f(x)$. (C) $\cos f(x)\cdot f'(x)$. (D) $-\cos f(x)\cdot f'(x)$.

【 D 】4．曲线 $y=1-\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 点处的切线方程为

(A) $x-y=0$. (B) $x-y+1=0$. (C) $x+y-1=0$. (D) $x-y-1=0$.

【 C 】5．函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式为

(A) $f(x)=1+x+x^2+o(x^2)$. (B) $f(x)=x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

(C) $f(x)=x+x^2+o(x^2)$.　　　　　　　　(D) $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

【 A 】6．设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处可导，则 $f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处取得极值的

(A) 必要条件.　　　(B) 充分条件.　　　(C) 充要条件.　　　(D) 无关条件.

三、（本题满分 30 分）求解下列各题：

1.（本小题 7 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2xe^x-\sin x-x}{x\sin x}$.

［解］因为当 $x\to0$ 时 $\sin x\sim x$，所以有

原式

$$=\lim_{x\to0}\frac{2xe^x-\sin x-x}{x^2}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to0}\frac{2(x+1)e^x-\cos x-1}{2x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to0}\frac{2(x+2)e^x+\sin x}{2}=2.$$

2．（本小题 8 分）设 $\varphi(x)=ax^4+bx^3+cx^2+d$，已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x^2}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{\varphi(x)}{x^3+1}-x+1]=\dfrac{1}{2}$，求常数 a, b, c, d 的值.

［解］由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^4+bx^3+cx^2+d}{x^2}=1$，知 $c=1$，$d=0$，即

$\varphi(x)=ax^4+bx^3+x^2$.

又由 $\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{\varphi(x)}{x^3+1}-x+1]=\dfrac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a-1)x^4+(b+1)x^3+x^2-x+1}{x^3+1}=\dfrac{1}{2}$,

得 $a-1=0$，$b+1=1/2$，解得 $a=1$，$b=-1/2$.

综上所述，故有 $a=1$，$b=-1/2$，$c=1$，$d=0$.

3.（本小题 8 分）设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\arctan e^t\\ y=\ln(1+e^{2t})\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

［解］$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}{\frac{e^t}{1+e^{2t}}}=2e^t$. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(2e^t)=\dfrac{d}{dt}(2e^t)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{2e^t}{\frac{e^t}{1+e^{2t}}}=2(1+e^{2t})$.

4.（本小题 7 分）已知函数 $f(x)=(3x^3-1)^2(x-1)$，求 $f'(1)$ 及 $f^{(7)}(x)$.

［解］$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(3x^3-1)^2(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(3x^3-1)^2=4$．

因为$f(x)$为7次多项式，所以有$f^{(7)}(x)=9\times7!$．

四．（**本小题 12 分**）求函数$f(x)=xe^{-2x}$的单调区间与极值、凹凸区间与拐点．

［解］$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$．

令$f'(x)=(1-2x)e^{-2x}=0$，解得$x=\dfrac{1}{2}$；再令$f''(x)=4(x-1)e^{-2x}=0$，解得$x=1$．

因为当$x<\dfrac{1}{2}$时$f'(x)>0$；当$x>\dfrac{1}{2}$时$f'(x)<0$；所以$f(x)$在$(-\infty,\dfrac{1}{2})$上单增；在$[\dfrac{1}{2},+\infty)$上单减；

又因为当$x<1$时$f''(x)<0$；当$x>1$时$f''(x)>0$；所以$y=f(x)$在在$(-\infty,1)$上凸；在$[1,+\infty)$上凹；

故函数在$x=\dfrac{1}{2}$处取得极大值$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2e}$；在$x=1$处获得拐点$(1,e^{-2})$．

五、（**本题满分 10 分**）设$f(x)=\begin{cases}3x^2+1, & x\le1;\\ ax+b, & x>1\end{cases}$在$x=1$处连续且可导，试确定$a$与$b$的值．

［解］$f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}(3x^2+1)=4$；$f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$．

因为$f(x)$在$x=1$处连续，所以有$f(1-0)=f(1+0)=f(1)$，即$a+b=4$ ①

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3x^2+1-4}{x-1}=6$；且由①，有

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-4}{x-1}\lim_{x\to1^+}\frac{ax-a}{x-1}=a.$$

因为$f(x)$在$x=1$处可导，所以有$f'_-(1)=f'_+(1)$，即$a=6$．代入①，得$b=-2$．

六、（**本题满分 12 分**）设曲线L方程为$y=ax^2+(1-a)x+1$．（1）求曲线L在$x=1$点处的曲率；（2）求曲线L在$x=1$点处的切线T的方程；（3）要使T与两坐标轴所围成的三角形面积最小，试问a应取何值（设$a>-1$）？

［解］（1）因为$y'=2ax+(1-a)$，$y''=2a$，所以$y'|_{x=1}=a+1$，$y''|_{x=1}=2a$．从而所求曲率为

$$K=\frac{|2a|}{[1+(a+1)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

（2）$x=1$对应曲线L上的点为$(1,2)$．因为$y'=2ax+(1-a)$，所以$y'|_{x=1}=a+1$，从而所求切线T的方程为

$$y-2=(a+1)(x-1).$$

（3）切线T在x轴上的截距为$x_1=1-\dfrac{2}{a+1}$，在y轴上的截距为$y_1=1-a$．从而切线T与两坐标轴所围成的三角形面积

$$A=\frac{1}{2}|x_1y_1|=\frac{1}{2}\left|(1-\frac{2}{a+1})(1-a)\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{(a-1)^2}{a+1}\right|.$$

因为$a>-1$，所以有$A=\dfrac{1}{2}\dfrac{(a-1)^2}{a+1}$．

令$\dfrac{dA}{da}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2(a-1)(a+1)-(a-1)^2}{(a+1)^2}=\dfrac{a^2+2a-3}{2(a+1)^2}=\dfrac{(a+3)(a-1)}{2(a+1)^2}=0$，解得$a_1=-3$（舍去）；$a_1=1$,又

$$\frac{d^2A}{da^2}=\frac{1}{2}\frac{2(a+1)(a+1)^2-2(a+1)(a^2+2a-3)}{(a+1)^4}=\frac{4}{(a+1)^3}.$$

因为$\dfrac{d^2A}{da^2}\Big|_{a=1}=\dfrac{1}{2}>0$，所以$A$在$a=1$处取得最小值（单峰函数）．即当$a=1$时切线$T$与两坐标轴所围成的三角形面积最小．