学号＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿＿＿＿＿ 院/系＿＿＿＿＿＿＿＿

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（B 卷）

（闭卷　时间 120 分钟）

考场登记表序号＿＿＿＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五	总　分
得　分						
阅卷人						

一、填空题（每空 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 若极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=2$，则 $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ ＿＿＿＿＿＿＿＿；
2. 积分 $\int \sin xe^{2\cos x}dx=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿；
3. $y=e^{2(x-1)}+x$ 在 $x=1$ 在所对应点的切线方程为 ＿＿＿＿＿＿＿＿；
4. 若对定积分 $\int_0^a f(a-2x)dx$ 作换元 $a-2x=u$，则该定积分化为＿＿＿＿＿＿＿＿；
5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-2x}-1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ＿＿＿＿；

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为（　　　）。

（A） $\sin x+1$　　（B） $\sin x+x$

（C） $1+\cos x$　　（D） $x-\sin x$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续但不可导，则下列在 $x=1$ 处可导的函数是（　）。

(A) $f(x)(x+1)$　　(B) $f(x)x^2$

(C) $f(x^2)$　　(D) $(x^2-1)f(x)$

8. 下列广义积分收敛的是（　　　）。

(A) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx$　　(B) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$

(C) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx$　　(D) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

9.. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的偶函数, $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$，则原函数 $F(x)$（　　）。

(A)　均为奇函数;　　　　　　(B)　　均为偶函数;

(C)中只一个奇函数;　　　　　(D) 既非奇函数也非偶函数.

10. 下列函数中在区间 $[0,3]$ 上不满足拉格朗日定理条件的是（　　）。

(A) $2x^2+x+1$　　　　　　(B) $\cos(1+x)$

(C) $\frac{x^2}{(1-x^2)}$　　　　　　(D) $\ln(1+x)$

得分	

三、计算题（每题 8 分，共 40 分）

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} t\ln t dt}{x^4}$。

12. $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$。

13. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$，求 $\int x f'(x)dx$。

14.判定反常积分$\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln x-1}{x^{2}}dx$的收敛性，如果收敛，求出其值。

15. 可导函数$f(x)$满足等式$\int_{0}^{2x}\mathrm{tf}(\frac{\mathrm{t}}{2})\mathrm{dt}=\mathrm{f}(\mathrm{x})-2$，求函数$f(x)$。

四、证明题（每小题 8 分，共 24 分）

得 分	

16．若 $0 \le x \le 1$，证明不等式：$\sin \pi x \le \dfrac{\pi^2}{2} x(1-x)$。

17．设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续，在 $(-2,2)$ 上可导，且 $f(-2)=0. f(0)=2, f(2)=0$。证明：曲线段 $y=f(x),(-2 \le x \le 2)$ 上至少有一点的切线平行于 $x-2y+6=0$。

18．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减，证明：对 $\forall x \in [0,1]$，有

$$\int_0^x f(t)dt \ge x\int_0^1 f(t)dt$$ 。

五、解答题（每小题 8 分共 16 分）

得 分	

19．设 $f(x)=\begin{cases} a+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ b, & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}, & x<0 \end{cases}$，试问

（1）a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续？

（2）当 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导?

20. 一只容器由 $y=x^2\ (0\le x\le 2)$ 绕 y 轴旋转而成.

(1)如果容器内的水量是容器容量的 $\dfrac{1}{4}$，求容器内水面的高度；

(2)如果要将题(1)中这部分水吸尽，求外力需要作的功。

安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A(一)》期末考试试卷（B 卷）参考答案及评分标准

一、填空题（每空 2 分，共 10 分）

1. -1；2. $-\frac{1}{2}e^{2\cos x}+C$；3. $y=3x-1$；4. $\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f(u)du$；5. -2；

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6.D；7.D；8.C；9.C；10.C。

三、计算题（每题 8 分，共 40 分）

11．解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x\ln\cos x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{4x^2}$ （ 4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x 8x}=-\frac{1}{8}$。 （ 8 分）

12．解：原式$=\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}dx$。

$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|dx$ （ 4 分）

$=\sqrt{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx)$

$=\sqrt{2}(\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi})=2\sqrt{2}$。 （ 8 分）

13．解：$\because f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$

$\therefore f(x)=\left((1+\sin x)\ln x\right)'=\cos x\ln x+\frac{1+\sin x}{x}$

再由分部积分公式 （ 4 分）

$\int x f'(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$

$=x\cos x\ln x+1+\sin x-(1+\sin x)\ln x+C$。 （ 8 分）

14. 解：原式$=\lim\limits_{A\to\infty}\int_e^A \frac{\ln x-1}{x^2}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int_e^A(1-\ln x)d\frac{1}{x}$ （ 4 分）

$=\lim\limits_{A\to\infty}(1-\ln x)\frac{1}{x}+\lim\limits_{A\to+\infty}\int_e^A\frac{1}{x^2}dx$

$=\lim\limits_{A\to+\infty}-\frac{1}{x}\Big|_e^A=e^{-1}$。

因此广义积分收敛，收敛于e^{-1} （ 8 分）

15. 解：方程两端同时对x求导：

$4xf(x)=f^{'}(x)$

解此一阶微分方程得：$f(x)=Ce^{2x^2}$ （ 4 分）

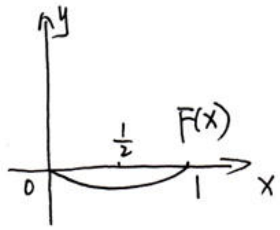
再将$x=0$代入积分方程得：$f(0)=2$

再代入$f(x)=Ce^{2x^2}$由此求得：$C=2$

因此：函数$f(x)=2e^{2x^2}$。 （ 8 分）

四、证明题（每小题 8 分，共 24 分）

16. 证明. 令 $F(x)=\sin\pi x-\frac{\pi^2}{2}x(1-x)$. $x\in[0,1]$.

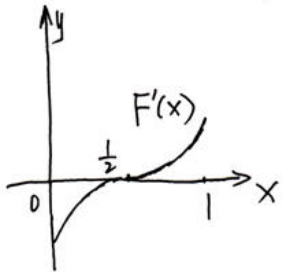


$F'(x)=\pi\cos\pi x-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2 x$

观察可知, $F'(x)$ 有零点 $\frac{1}{2}$, 即 $F'(\frac{1}{2})=0$

而 $F''(x)=-\pi^2\sin\pi x+\pi^2$

$=\pi^2(1-\sin\pi x)\geq 0 \Rightarrow F'(x)$ 单调增加.



当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时, $F'(x)\leq F'(\frac{1}{2})=0$

$\Rightarrow F(x)$ 单调减少 $\Rightarrow F(x)\leq F(0)=0$;

当 $x\in[\frac{1}{2},1]$ 时, $F'(x)\geq F'(\frac{1}{2})=0$

$\Rightarrow F(x)$ 单调增加 $\Rightarrow F(x)\leq F(1)=0$.

综上所述, 当 $x\in[0,1]$ 时, $F(x)\leq 0$, 即 $\sin\pi x\leq\frac{\pi^2}{2}x(1-x)$

17．证明：$F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$ （ 2 分）

$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续，在 $(-2,2)$ 上可导；

$\therefore F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续，在 $(-2,2)$ 上可导。

又 $\because f(-2)=0.f(0)=2,f(2)=0$。

$\therefore F(-2)=f(-2)-\frac{1}{2}(-2)=1$；$F(0)=f(0)-\frac{1}{2}x=2$

$F(2)=f(2)-\frac{1}{2}x=-1<0$ （ 4 分）

由连续函数的性质得：$\exists\xi_1\in(0,2)$，使 $F(\xi_1)=F(-2)=1$。 （ 6 分）

再由罗尔中值定理：可得 $\exists\xi\in(-2,\xi_1)$，使 $F'(\xi)=0$，即：$f'(\xi)=\frac{1}{2}$。

因此曲线段 $y=f(x),(-2\le x\le 2)$ 上至少有一点 $(\xi,f(\xi))$ 的切线平行于 $x-2y+6=0$。（8 分）

18. 证明：$\int_0^x f(t)dt-x\int_0^1 f(t)dt=\int_0^x f(t)dt-x(\int_0^x f(t)dt+\int_x^1 f(t)dt)$

$=(1-x)\int_0^x f(t)dt-x\int_x^1 f(t)dt$ （4 分）

再由函数的单调递减性及积分中值定理知：$\exists\xi_1\in(0,x),\exists\xi_2\in(x,1)$ 使得：

原式 $=x(1-x)f(\xi_1)-x(1-x)f(\xi_2)\ \ge x(1-x)(f(\xi_1)-f(\xi_2))\ge 0$ （8 分）

五、解答题（每小题 8 分共 16 分）

19．解：（1）由题意知，$x\ne 0$ 时，函数 $f(x)$ 是连续函数； （1 分）

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，当且仅当 $\lim\limits_{x\to 0^+}(a+e^{-\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{e^x-1}=b$，

由此解得：$a=1,b=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续。

（4 分）

（2）$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+e^{-\frac{1}{x}}-1}{x}=0$ （5 分）

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{e^x-1}-1}{x}=-\frac{1}{2}$ （6 分）

$f(0^+)\ne f(0^-)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。 （8 分）

20.解：(1) 设容器内水面的高度为 h 由题意知：

$\int_0^h \pi(\sqrt{y})^2dy=\frac{1}{4}\int_0^4\pi(\sqrt{y})^2dy$

$\pi\frac{h^2}{2}=2\pi$ 解得：$h=2$。 （4 分）

（2）由题意知：$w=\int_0^2\rho g(2-y)\pi(\sqrt{y})^2dy=\frac{4}{3}\rho g\pi$

如果要将题(1)中这部分水吸尽，外力需要作的功为 $\frac{4}{3}\rho g\pi$。 （8 分）