安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《 高等数学 A（一）》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设有下列命题

① 数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 有界.

② 数列 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+l} = a$，其中 l 为某个确定的正整数.

③ 数列 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$.

④ 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

则以上命题中正确的个数是（　　）

（A）1　　（B）　2　　（C）　3　　（D）　4

2. 下列叙述正确的是（　　）

（A）如果 $f(x)$ 在 x_0 的任意去心领域内无界，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

（B）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则 $f(x)$ 在 x_0 的任意去心领域内无界.

（C）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

（D）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x^2}{x^3}, & x > 0, \\ g(x)\cdot \arcsin^2 x, & x \le 0. \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）极限不存在.　（B）极限存在，但不连续　（C）连续，但不可导　（D）可导

4. 设严格单调函数 $y = f(x)$ 有二阶连续导函数，其反函数为 $x = \varphi(y)$，且 $f(1) = 2$，$f'(1) = 2$，$f''(1) = 3$，则 $\varphi''(2) =$（　　）

（A）　$-\dfrac{3}{8}$　　（B）　$\dfrac{3}{8}$　　（C）　-3　　（D）　$\dfrac{1}{3}$

5.　下列各题计算过程中完全正确的是（　　）

（A）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)'}{n'} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

（C）$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在.

（B）$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{3x^2 - 2x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\pi \cos \pi x}{6x - 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\pi^2 \sin \pi x}{6} = 0$.

（D）$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \infty$.

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^3+1^2}+\dfrac{2n}{n^3+2^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right)=$____________.

7. 极坐标曲线 $r=e^{\theta}$ 在点 $(r,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处切线的直角坐标方程为____________.

8. 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$__________.

9. 设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$__________.

10. 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，则 $f'(t)=$_________.

三、分析计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 设 $a_0>0$， $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{9}{a_n}\right)$，（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

12. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x\left(\sqrt{1+\sin^2 x}-1\right)}$.

13. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$

14. 利用泰勒展开计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}$

15. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2=1$ 所确定，求 $y''(0)$.

16. 已知 $y=\varphi\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)$，其中 φ 可导，求 dy.

17. 设 $f(x)=(x-a)^n g(x)$，其中 $g(x)$ 在 a 的某邻域内有 $n-1$ 阶连续导函数，求 $f^{(n)}(a)$

四、综合分析题（每小题 10 分，共 10 分）

18. 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\dfrac{1}{1+x}}{e^{nx}+x^2}$ 的间断点，并判断它们的类型.

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$， a,b 为任意正数，证明：

（1）至少存在一点 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=\dfrac{a}{a+b}$；

（2）在 $(0,1)$ 内必存在 $\xi\neq\eta$，使得 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

安徽大学2020-2021高数A1期中试卷答案

一、选择题（每小题2分，共10分）

1. C　2. B　3. C　4. A　5. D

二、填空题（每小题2分，共10分）

6. $\frac{1}{2}$　**7.** $y=-x+e^{\frac{\pi}{2}}$　**8.** $-\frac{3}{2}$　**9.** $-\frac{1+t^2}{t^3}$　**10.** $(2t+1)e^{2t}$

三、计算题（每小题9分，共63分）

11、（1）【证明】因为$a_0>0$，由递推公式可知：$a_n>0$

而$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{9}{a_n}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{a_n\cdot\frac{9}{a_n}}=3$，所以$a_n$有下界为3；

又$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{a_n^2}\right)\leq\frac{1}{2}(1+1)=1\Rightarrow a_{n+1}\leq a_n$，所以$a_n$单调递减；

由单调有界必有极限可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.　　5分

（2）【解】令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，对$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{9}{a_n}\right)$两边取$n\to\infty$的极限，即得：

$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{9}{A}\right)\Rightarrow A=\pm3$　　所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$　　9分

12.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x\left(\sqrt{1+\sin^2x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x\cdot\frac{1}{2}\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{3}$　　9分

13.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2}=\frac{3}{2}$　　9分

14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^4+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right]}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{12}$　　9分

15.【解】在方程中令$x=0$可得$y(0)=0$；

将方程两边对x求导，得$e^yy'+6y+6xy'+2x=0$，　　（*）

将$x=0$和$y(0)=0$代入，有$y'(0)=0$；　　4分

将（*）式两边再对x求导，得

$$e^y\left(y'\right)^2+e^yy''+12y+6xy''+2=0,$$

将$x=0$，$y(0)=0$和$y'(0)=0$代入，有$y''(0)=-2$　　9分

16.【解】$dy=\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot d\left(\arctan\frac{1}{x}\right)=\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\varphi'\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$$ 9 分

17.【解】

$f^{(n-1)}(x)=C_{n-1}^0(x-a)^n g^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1}g^{(n-2)}(x)+\cdots+C_{n-1}^{n-1}n(n-1)\cdots 2(x-a)g(x)$

$=(x-a)^n g^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1}g^{(n-2)}(x)+\cdots+n!(x-a)g(x)$

$f^{(n-1)}(a)=0$

$f^{(n)}(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{n-1}(x)-f^{n-1}(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}n!g(x)=n!g(a)$ 9 分

四、综合分析题（每小题 10 分，共 10 分）

18. $f(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}, & x<0,\end{cases}$ 4 分

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}=\frac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\overset{-\frac{1}{x}=t}{=}\frac{\pi}{4}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，

则 $x=0$ 为第一类的可去间断点；

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}=-\frac{\pi}{2e}$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}=\frac{\pi}{2e}$，

则 $x=-1$ 为第二类的跳跃间断点. 10 分

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

19.【证明】

〖证明〗（1）（零点定理） 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{a}{a+b}$，

因为 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$F(0)=f(0)-\frac{a}{a+b}=-\frac{a}{a+b}<0$，

而 $F(1)=f(1)-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}>0$，由零点定理可得至少存在一点 $c\in(0,1)$，

使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=\frac{a}{a+b}$ 3 分

（2）拉格朗日中值定理

$f(x)$ 分别在 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{a}{(a+b)c}，\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-\frac{a}{a+b}}{1-c}=\frac{b}{(a+b)(1-c)}$$

其中 $0<\xi<c<\eta<1$

于是有 $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$. 7 分