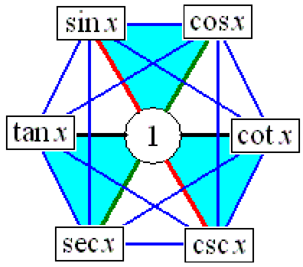
高等数学A（一）—— 公式梳理

一. 初等数学

1. 三角函数

(1) 相互联系



$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad \tan^2 x+1=\sec^2 x,\quad \cot^2 x+1=\csc^2 x.$$

$$\sin x\cdot\csc x=1,\quad \cos x\cdot\sec x=1,\quad \tan x\cdot\cot x=1.$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x,\quad \frac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$$

奇变偶不变, 符号看象限:

$$f(\frac{n}{2}\pi+\alpha)=\begin{cases}\pm f(\alpha) & n=0,\pm2,\pm4,\cdots\\ \pm cof(\alpha) & n=0,\pm1,\pm3,\cdots\end{cases}$$ 其中 “±” 号由角 $(\frac{n}{2}\pi+\alpha)$ 所处的象限确定.

(2) 和角公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

(3) 积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

(4) 和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(5) 降幂公式

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}.$$

(6) 半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\quad \cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

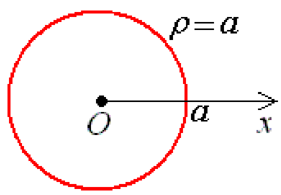
2. 复数

(1) 代数表示 $z=a+bi$

(2) 三角表示 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, 其中 $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$, $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$.

(3) 指数表示 $a+bi=re^{\mathrm{i}\theta}$ (欧拉公式: $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$).

3. 一些常见的曲线**（复杂曲线不用记、了解即可）**



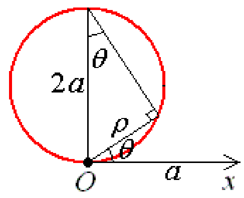
(1) 圆 $x^2+y^2=a^2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\end{cases}$

极坐标方程为 $\rho=a$ ($\theta\in[0,2\pi)$);

(2)　圆 $x^2+(y-a)^2=a^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a+a\sin t, \end{cases} (t\in[0,2\pi))$$

极坐标方程为 $\rho=2a\sin\theta\ (\theta\in[0,\pi))$；



$\rho=2a\sin\theta$

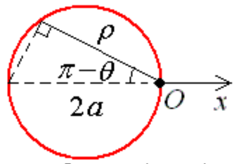
(3)　圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a+a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases} (t\in[0,2\pi))$$ 极坐标方程为 $\rho=2a\cos\theta\ \ (\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$；

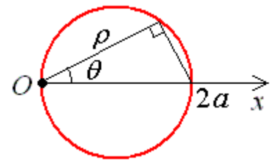
(4)　圆 $(x+a)^2+y^2=a^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=-a+a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases} (t\in[0,2\pi))$$

极坐标方程为 $\rho=-2a\cos\theta\ \ (\theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}))$；



$\rho=2a\cos(\pi-\theta)$
$=-2a\cos\theta$

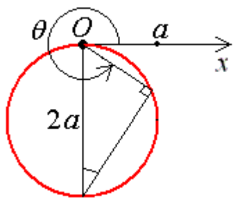


$\rho=2a\cos\theta$

(5)　圆 $x^2+(y+a)^2=a^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=-a+a\sin t, \end{cases} (t\in[0,2\pi))$$

极坐标方程为 $\rho=-2a\sin\theta\ \ (\theta\in[\pi,2\pi))$;

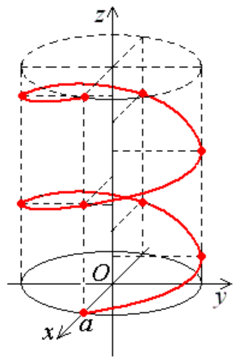


$\rho=2a\sin(2\pi-\theta)$
$=-2a\sin\theta$

(6)　椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为

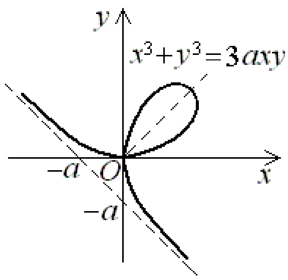
$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} (t\in[0,2\pi));$$

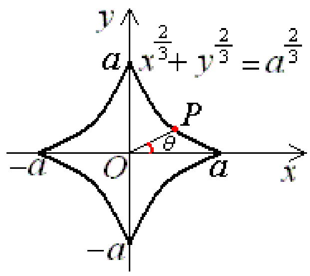
(7)　空间螺线 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, (t\in\mathbb{R}); \\ z=bt, \end{cases}$



(8)　笛卡儿叶线 $x^3+y^3=3axy$

的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$；



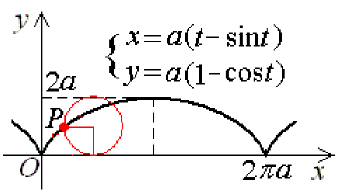


(9) 星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases};$$

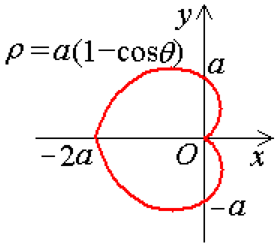
(10)　摆线(圆滚线)　$x=a\arcsin(1-\dfrac{y}{a})-\sqrt{2ay-y^2}$

的参数方程为 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$；



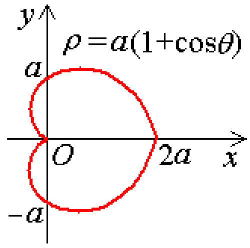
(11) 心形线 $x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$

的极坐标方程为 $\rho=a(1-\cos\theta)$;



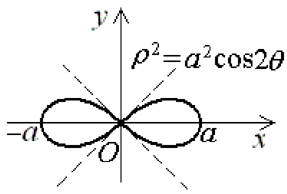
(12) 心形线 $x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$

的极坐标方程为 $\rho=a(1+\cos\theta)$;



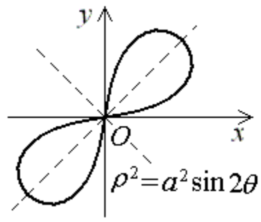
(13) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

的极坐标方程为 $\rho^2=a^2\cos2\theta$;



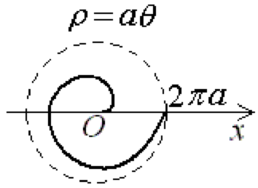
(14) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$

的极坐标方程为 $\rho^2=a^2\sin2\theta$;



(15) 阿基米德螺线 $\sqrt{x^2+y^2}=a\arctan\dfrac{y}{x}$

的极坐标方程为 $\rho=a\theta$



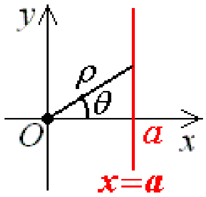
(16) 不经过原点的直线 $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq0)$

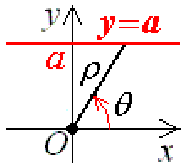
$\Rightarrow a\rho\cos\theta+b\rho\sin\theta+c=0$

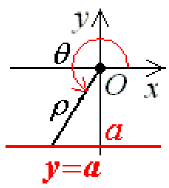
$\Rightarrow \rho=\dfrac{c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$.

例如: $x=a$ $(a>0)$

$$\Rightarrow \rho=\frac{a}{\cos\theta}\quad \theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});$$

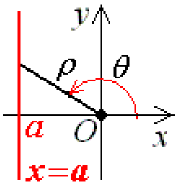






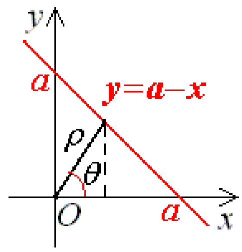
$x=a$ $(a<0)\Rightarrow\rho=\dfrac{a}{\cos\theta}$ $\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$;

$y=a$ $(a>0)\Rightarrow\rho=\dfrac{a}{\sin\theta}$ $\theta\in(0,\pi)$;



$y=a$ $(a<0)\Rightarrow\rho=\dfrac{a}{\sin\theta}$ $\theta\in(\pi,2\pi)$;

$y=x-a$ $(a>0)\Rightarrow\rho=\dfrac{a}{\cos\theta+\sin\theta}$ $\theta\in(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4})$.



二. 极限

1. $|q|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

3. 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=a\pm b;\qquad \lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n)(\lim_{n\to\infty}b_n)=ab;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\Big/\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{a}{b}\quad(b\neq0).$$

4. 设 $x_n=\dfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_ln^l}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m}$, 其中 $a_l\neq0$, $b_m\neq0$, $l\leqslant m$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}a_l/b_m & l=m\\ 0 & l<m\end{cases}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{p^2}+\cdots+\dfrac{n}{p^n})=\dfrac{p}{(p-1)^2}$, 其中 $p>1$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=[\lim\limits_{n\to\infty}f(x)][\lim\limits_{n\to\infty}g(x)]=AB$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Big/\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

8. 设 $y=f(u)$与 $u=g(x)$的复合函数 $f[g(x)]$在 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{N}(x_0)$ 内有定义.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, 且$\forall x\in\overset{\circ}{N}(x_0)$, 有 $g(x)\neq u_0$, 其中 x_0, u_0 为有限值.

则复合函数 $f[g(x)]$当 $x\to x_0$ 时也有极限, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

10. 常用的等价无穷小量:

$\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim x\ (x\to 0)$; $(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$

$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$ $(\mathrm{e}^x-1)\sim x\ (x\to 0)$

$(\sqrt[n]{1+x}-1)\sim\dfrac{x}{n}\ (x\to 0)$; $[(1+x)^\alpha-1]\sim\alpha x\ (x\to 0)$.

三. 导数与微分

1. 导数定义: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2. 函数四则运算的求导法则

$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$. $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

3. 反函数的求导法则

设定义在区间 I 上的严格单调连续函数 $x=f(y)$在点 y 处可导, 且 $f'(y)\neq 0$, 则其反函数 $y=f^{-1}(x)$在对应的点 x 处可导, 且 $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

4. 复合函数的求导法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导, 函数 $y=f(u)$在对应的点 $u=\varphi(x)$ 处可导, 则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处可导, 且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

5. 设函数 $y=f(x)$由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定. $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可导, 函数 $x=\varphi(t)$ 具有连续的严格单调的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 则 $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$. 函数 $y=f(x)$的导函数由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y'=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\end{cases}$ 确定.

6. 基本求导公式

(1) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$. (2) $(a^x)'=a^x\ln a$. (3) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$. (4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$. (5) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

(6) $(\sin x)'=\cos x$. (7) $(\cos x)'=-\sin x$. (8) $(\tan x)'=\sec^2 x$. (9) $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

(10) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$. (11) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$.

(12) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (13) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(14) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.　　(15) $(\text{arccot}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

7. 一些简单函数的高阶导数(n, k 为正整数)

(1) $(x^n)^{(k)} = \begin{cases} n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} & k<n, \\ n! & k=n, \\ 0 & k>n, \end{cases}$

(2) $(x^{-n})^{(k)} = (-1)^k n\cdot(n+1)\cdots(n+k-1)x^{-n-k}$,　　(3) $[(1+x)^{\alpha}]^{(k)} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$,

(4) $(a^x)^{(k)} = a^x(\ln^k a)$, 特别的, $(e^x)^{(k)} = e^x$,

(5) $(\ln x)^{(k)} = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}$,　　(6) $[\ln(1+x)]^{(k)} = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$,

(7) $(\sin x)^{(k)} = \sin(x+\dfrac{k\pi}{2})$,　　(8) $(\cos x)^{(k)} = \cos(x+\dfrac{k\pi}{2})$.

(9) $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

8. 微分四则运算法则: $\mathrm{d}(u\pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$, $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}(v\neq 0)$.

9. 微分复合运算法则(**一阶微分形式不变性**)

设函数 $y = f[g(x)]$由可微函数 $y = f(u)$与 $u = g(x)$复合而成, 则有 $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$,

另一方面, $\mathrm{d}y = \left(f[g(x)]\right)'\mathrm{d}x = f'(u)g'(x)\mathrm{d}x = f'(u)\mathrm{d}u$.

10. 拉格朗日中值定理:

设函数 $f(x)$满足下列条件: (1) $f(x)\in C_{[a,b]}$, (2) $f(x)$在(a, b)内可导.

则至少存在一点$\xi\in(a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

11. 柯西中值定理:

设函数 $f(x)$, $g(x)$满足下列条件:

(1) $f, g\in C_{[a,b]}$, (2) f, g 在(a, b)内可导, (3) $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a, b)$.

则至少存在一点$\xi\in(a, b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

12. 用中值定理证明的关键在于构造辅助函数.

① 使用罗尔中值定理或拉格朗日中值定理		
中值等式 $G(\xi)=0$	凑成导数等式 $F'(\xi)=0$	辅助函数 $F(x)$
$f'(\xi)+A\xi^k+B=0$	$[f(x)+\dfrac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx]'=0$	$f(x)+\dfrac{Ax^{k+1}}{k+1}+Bx$
$f(a)g'(\xi)-f'(\xi)g(a)-k=0$	$[f(a)g(x)-f(x)g(a)-kx]'=0$	$f(a)g(x)$ $-f(x)g(a)-kx$
$\sum_{i=0}^{n-1}a_i(n-i)\xi^{n-1-i}=0$	$[\sum_{i=0}^{n-1}a_i\xi^{n-i}]'=0$	$\sum_{i=0}^{n-1}a_i x^{n-i}$
$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$	$[f(x)g(x)]'=0$	$f(x)g(x)$
$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$	$[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]'=0$	$f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$
$\xi f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$[x^k f(x)]'=0$	$x^k f(x)$
$(\xi-1)f'(\xi)+kf(\xi)=0$	$[(x-1)^k f(x)]'=0$	$(x-1)^k f(x)$
$f'(\xi)g(1-\xi)-$ $kf(\xi)g'(1-\xi)=0$	$[g^k(1-x)f(x)]'=0$	$g^k(1-x)f(x)$

$f'(\xi)+Af(\xi)=0$	$[e^{Ax}f(x)]'=0$	$e^{Ax}f(x)$
$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$[e^{g(x)}f(x)]'=0$	$e^{g(x)}f(x)$
$\xi f'(\xi)-kf(\xi)=0$	$[f(x)/x^k]'=0$	$f(x)/x^k$
$f'(\xi)-kf(\xi)=0$	$[f(x)/e^{kx}]'=0$	$f(x)/e^{kx}$
$f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$	$[f(x)/g(x)]'=0$	$f(x)/g(x)$
$(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2=0$	$[x/(1+x^2)]'=0$	$x/(1+x^2)$
② 使用柯西中值定理		
中值等式 $G(\xi)=0$	凑成导数等式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$	辅助函数 $f(x), g(x)$
$(b-a)\varphi(\xi)-\xi\varphi(\xi)$ $-[b\varphi(a)-a\varphi(b)]=0$	$\dfrac{\varphi(b)/b-\varphi(a)/a}{1/b-1/a}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$	$f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}, g(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(b)-f(a)-\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}=0$	$\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{1/\xi}$	$g(x)=\ln x$
根据 $G(\xi)$的特点选取适当的初等函数作为 $f(x)$, $g(x)$, 如指数函数, 对数函数, 三角函数等.(从略)		

13. 洛必达法则

设函数 $f(x)$在区间$(x_0, x_0+\delta)(\delta>0)$内满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=0$, (2) f, g 在$(x_0, x_0+\delta)$内可导, 且$g'(x)\neq 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 为有限数或∞). 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

设函数 $f(x)$在区间$(x_0, x_0+\delta)(\delta>0)$内满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$, (2) f, g 在$(x_0, x_0+\delta)$内可导, 且$g'(x)\neq 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 为有限数或∞). 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

不可用洛必达法则的情形.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}$, (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$, (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

事实上, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$.

14. 带佩亚诺型余项的泰勒公式

设函数 $f(x)$在 x_0 处 n 阶可导, 则 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$.

15. 几个初等函数的麦克劳林公式

(1) $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$.

(2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$.

(3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$.

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$.

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

(6) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o\left((2x)^{2n}\right)\right]$

$$=x^2-\frac{x^4}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}}{n!(2n-1)!!}x^{2n}+o(x^{2n}).$$

(7) $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-x^2+\frac{x^4}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{2^{n-1}}{n!(2n-1)!!}x^{2n}+o(x^{2n})$.

16. 带拉格朗日型余项的泰勒公式

设函数 $f(x)\in C^{(n)}_{[a,b]}$，且 $f(x)\in C^{(n+1)}_{(a,b)}$，则 $\forall x,x_0\in[a,b]$，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$ 其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间.

17. 几个初等函数的带拉格朗日余项的麦克劳林公式

(1) $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ $(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1)$.

(2) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1)$.

(3) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ $(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1)$.

(4) $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{(n+1)}}$ $(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1)$.

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$ $(x\in\mathbf{R},\ 0<\theta<1)$.

18. 曲率

(1) 设曲线 C 在直角坐标系中的方程为 $y=y(x)$ 且 $y(x)$ 具有二阶导数. 则 $K=\left|\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}\right|$.

(2) 设曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，则 $K=\frac{|x_t'y_t''-x_t''y_t'|}{[(x_t')^2+(y_t')^2]^{3/2}}$.

四. 一元积分

1. 定积分的性质

(1) 若 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, $k_1, k_2\in\mathbf{R}$, 则 $\int_a^b[k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 若 f 在某区间 I 上可积, 则 f 在 I 的任一子区间上可积, 且 $\forall a, b, c\in I$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $\forall x\in[a, b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(4) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $\forall x\in[a, b]$, $f(x)\geqslant 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

(5) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

(6) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $\forall x\in[a, b]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$, 则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

(7) 若 $f\in C\,[a, b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a, b]$ 使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

2. 变上限积分所定义的函数的性质

设 $f(x)\in C[a, b]$, 则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 $[a, x]$ 上可导, 且 $\Phi'(x)=f(x)$.

3. 微积分基本定理

若 $f(x)\in C[a,b]$, $F(x)$为 $f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

4. 不定积分的性质

(1) $[\int f(x)\mathrm{d}x]'=f(x)$, $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)\mathrm{d}x$, $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$, $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$.

(2) 设 $f(x), g(x)$有原函数, $k_1, k_2\in\mathbf{R}$, 则$\int[k_1 f(x)+k_2 g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int f(x)\mathrm{d}x+k_2\int g(x)\mathrm{d}x$.

5. 基本积分表

(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$ (k 是常数).

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq-1)$

(3) $\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

(4) $\int\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\arctan x+C$.

(5) $\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$.

(6) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

(7) $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

(8) $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$.

(9) $\int\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$.

(10) $\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$.

(11) $\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$.

(12) $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$.

(13) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$.

(14) $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x=\mathrm{ch}x+C$.

(15) $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x=\mathrm{sh}x+C$.

(16) $\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$.

(17) $\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

(18) $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$.

(19) $\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$

(20) $\int\dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$.

(21) $\int\dfrac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$.

(22) $\int\dfrac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a-x}{a-x}\right|+C$.

(23) $\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$.

(24) $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C$.

(25) $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$.

(26) $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+C$.

(27) $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$.

6. 换元积分法

(1) 第一类换元积分法：设函数 $u=\varphi(x)$可微, $F(u)$为 $f(u)$的一个原函数. 则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C.$$

(2) 常见的凑微分法

① $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$ (a, b 为常数且 $a\neq0$)

② $x^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(n+1)a}\mathrm{d}(ax^{n+1}+b)$ (a, b 为常数且 $a\neq0, n\neq-1$)

③$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x)$,　　④$e^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(e^x)$,

⑤$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$,　⑥$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$,　⑦$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$,

⑧$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{(x+\sqrt{a^2+x^2})\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}(x+\sqrt{a^2+x^2})$,

⑨$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{(x+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}(x+\sqrt{x^2-a^2})$,

⑩$\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$.

(3) 第二类换元积分法：设函数 $f(x)$ 连续，函数 $x=\varphi(u)$有连续的导数，$\varphi'(u)\neq 0$，且 $\int f[\varphi(u)]\varphi'(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$. 则 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(u)]\varphi'(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C$.

(4) 常见的第二类换元法

①令 $\sqrt[n]{ax+b}=u$ (a, b 为常数且 $a\neq 0$)

②令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ (其中 $ac\neq 0$, b, d 不同时为零)

③令 $x=\frac{1}{u}$,

④令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

⑤令 $x=a\sin t$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos x$, $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，其中 $a>0$, $t\in[0, \pi/2]$.

⑥令 $x=a\sec t$，则 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan x$, $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，其中 $a>0$, $t\in(0, \pi/2)$.

⑦令 $x=a\tan t$，则 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec x$, $\mathrm{d}x=a\sec^2 x\mathrm{d}t$，其中 $a>0$, $t\in(0, \pi/2)$.

7. 分部积分法

(1) 不定积分的分部积分法

$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$

(2) 分部积分法中 $u(x)$, $v(x)$的常见选取方法

① $P(x)\sin x\mathrm{d}x=-P(x)\mathrm{d}(\cos x)$, $P(x)\cos x\mathrm{d}x=P(x)\mathrm{d}(\sin x)$.

② $P(x)e^x\mathrm{d}x=P(x)\mathrm{d}(e^x)$.

③ $P(x)\ln x\mathrm{d}x=\ln x\mathrm{d}(\int P(x)\mathrm{d}x)$.

④ $e^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cos(bx)\mathrm{d}(e^{ax})=\frac{1}{b}e^{ax}\mathrm{d}(\sin(bx))$,

$e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin(bx)\mathrm{d}(e^{ax})=-\frac{1}{b}e^{ax}\mathrm{d}(\cos(bx))$.

(3) 定积分的分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

8. 平面曲线的弧长

(1) 在直角坐标系中: $y=f(x)$, $x\in[a, b]$，其中 $f(x)\in C^{(1)}_{[a,b]}$, 取 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$,

则$\Delta s-\mathrm{d}s=o(\Delta x)$ ($\Delta x\to 0$)，于是 $s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$.

(2) 参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha, \beta]$，其中 $\varphi(t),\psi(t)\in C^{(1)}_{[\alpha,\beta]}$,

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,\ 于是\ s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

(3) 极坐标系中: $\rho=\rho(\theta),\ \theta\in[\alpha,\beta]$, 则 $\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$, $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$

9. 空间曲线的弧长

设空间曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$, 其中 $x(t),y(t),z(t)\in C^{(1)}_{[\alpha,\beta]}$, 则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

于是 L 的长度为 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$

10. 平面图形的面积

(1) 直角坐标系中

① $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$以及 $x=a, x=b$ 所围成的图形的面积(其中 $f(x)\ge g(x)$)

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

② $x=\varphi(y)$ 与 $x=\psi(y)$以及 $y=c, y=d$ 所围成的图形的面积(其中$\psi(y)\ge\varphi(y)$)

$$A=\int_c^d[\psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y.$$

(2) 极坐标系中

$\rho=a\theta,\ \theta\in[\alpha,\beta]$, $\mathrm{d}A=\dfrac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$, $A=\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$

11. 空间立体的体积

(1) 平行截面面积 $A(x)$已知的立体($a\le x\le b$): $\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$, $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$

(2) 旋转体的体积

① $y=f(x)$ ($x\in[a,b]$)绕 x 轴旋转一周(其中 $f(x)\ge0$), $A(x)=\pi f^2(x)$, 故$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

② $x=g(y)$ ($y\in[c,d]$)绕 y 轴旋转一周(其中 $g(y)\ge0$), $A(y)=\pi g^2(y)$, 故$V=\pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y.$

12. 广义积分

(1) 无穷区间上的广义积分

$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 称为 $f(x)$在$[a,+\infty)$和$(-\infty,b]$上的广义积分.

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$ 若极限存在，称其收敛；反之，则发散.

$\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx\ (a>0)$ 当$p>1$时，收敛；当$p\le1$时，发散.（结合牛-莱公式，求出原函数极限差来判断）

★ 比较判别法

若$0\le f(x)\le Kg(x)$, $K>0$, $A=\int_a^{+\infty}f(x)dx$, $B=\int_a^{+\infty}g(x)dx$, 则: B收敛$\Rightarrow A$收敛, A发散$\Rightarrow B$发散.

若$f(x),g(x)\ge0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, $A=\int_a^{+\infty}f(x)dx$, $B=\int_a^{+\infty}g(x)dx$, 则:

当$0<l<+\infty$时, A与B具有相同敛散性；当l=0时, B收敛$\Rightarrow A$收敛；当$l=+\infty$时, B发散$\Rightarrow A$发散.

(2) 无界函数的广义积分

$f(x)$在x_0任意去心邻域无界$\Rightarrow$称x_0为奇点. 若 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to b-}f(x)=\infty$

则称 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\eta\to+0}\int_{a+\eta}^b f(x)dx$ 或 $\lim\limits_{\eta\to+0}\int_a^{b-\eta}f(x)dx$ 分别为$f(x)$在$(a,b]$和$[a,b)$上的广义积分.

$\int_0^a\dfrac{1}{x^p}dx\ (a>0)$ 当$p<1$时，收敛；当$p\ge1$时，发散.（结合牛-莱公式，求出原函数极限差来判断）

五．常微分方程

1. 一阶可分离变量的微分方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$, 其中 $f(x)$, $g(y)$连续.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow G(y)=F(x)+C.$$

(其中 $g(y)\neq 0$, $G'(y)=\frac{1}{g(y)}$, $F'(x)=f(x)$, C 为任意常数)

2. 一阶线性微分方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$,其中 $p(x)$, $q(x)$连续.

(1) 对于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0$, 分离变量得: $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x$, $y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ (C 为任意常数).

(2) 对于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$, $y=C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 得 $y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$.

3. 可经变量代换化为已知类型的几类一阶微分方程

(1) 齐次方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$, 其中 $f(tx,ty)=f(x,y)$, $\forall t\neq 0$.

①将原方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$,

②令 $u=\frac{y}{x}$ 得 $y=ux$, 从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入原方程并整理得 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$,

③分离变量, 得 $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

④两边积分,

⑤以 $\frac{y}{x}$ 代替 u.

(2) 伯努里方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, 其中 $\alpha\neq 0,1$.

①两边同除以 y^{α} 得 $y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$,

②令 $z=y^{1-\alpha}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$,

③解上述关于 z 的一阶线性非齐次微分方程,

④ 以 $y^{1-\alpha}$ 代替 z.

4. 可降阶的高阶微分方程

(1) $y^{(n)}=f(x)$ 型

(2) 不显含未知函数 y 的方程: $y''=f(x,y')$.

令 $y'=z$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x,z)$. 若解之得 $z=\varphi(x,C_1)$, 则 $y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$.

(3) 不显含自变量 x 的方程: $y''=f(y,y')$.

改取 y 为自变量, 令 $z=y'=z(y)$, 则 $y''=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

于是原方程化为 $z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=f(y,z)$. 这是关于 $z(y)$的一阶微分方程, 若解之得:

$z=\varphi(y,C_1)$, 即 $\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)}$, 则 $x=\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}+C_2$.

5. 设 $a_1(x), a_2(x)\, f(x) \in C_I$，则$\forall x\in I$ 及任给的初始条件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$，初值问题

$$\begin{cases} y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x), \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1, \end{cases}$$

存在定义于区间 I 上的唯一解 $y = y(x)$.

6. 设 $y_1(x), y_2(x)$是线性齐次方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)\, y = 0$ 的两个解，$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$，则

(1) $y_1(x), y_2(x)$在区间 I 上线性相关 $\Leftrightarrow \exists x_0\in I$ 使它们的 Wronski 行列式 $W(x_0) = 0$.

(2) $y_1(x), y_2(x)$在区间 I 上线性无关$\Leftrightarrow\forall x\in I$，它们的 Wronski 行列式 $W(x) \neq 0$.

7. 线性齐次方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)\, y = 0$ 必存在两个线性无关的解.

8. 设 $y_1(x), y_2(x)$是线性齐次方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)\, y = 0$ 的两个线性无关的解，
则该线性齐次方程的解集 S 是 $y_1(x), y_2(x)$生成的一个二维线性空间

$$\{\bar{y}=c_1y_1+c_2y_2 \mid c_1,c_2\text{为任意常数}\}.$$

9. 设 $y^*(x)$是二阶线性非齐次方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)\, y = f(x)$ ①
的一个特解, $y_1(x), y_2(x)$是对应的齐次方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)\, y = 0$ ②
的两个线性无关的解，则 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y^*(x)$为非齐次方程①的通解.

10. 设 $y_i^*(x)$ 是方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)\, y = f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$的特解,
则 $y_1^*(x)+\cdots+y_n^*(x)$ 是方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)\, y = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$的特解.

11. 二阶线性常系数齐次方程的解法

(1) 特征方程 $ar^2+br+c = 0$ 有两个相异实根 r_1, r_2，则通解 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$.

(2) 特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2 = r$，则通解 $y=(c_1+c_2x)e^{rx}$.

(3) 特征方程有一对共轭复根 $r = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$，则通解 $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$.

12. 二阶线性常系数非齐次方程的解法

(1) 待定系数法求 $ay''+by'+cy = f(x)$ ($a\neq 0$, b, c 为常数)的特解.

① $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$.

若α不是 $ar^2+br+c = 0$ 的根，则令 $y^* = (b_0x^n + b_1x^{n-1} +\ldots+ b_{n-1}x + b_n)e^{\alpha x}$.
若α是 $ar^2+br+c =0$ 的单根，则令 $y^* = x(b_0x^n + b_1x^{n-1} +\ldots+ b_{n-1}x + b_n)e^{\alpha x}$.
若α是 $ar^2+br+c =0$ 的重根，则令 $y^* = x^2(b_0x^n + b_1x^{n-1} +\ldots+ b_{n-1}x + b_n)e^{\alpha x}$.
再代入原方程，通过比较系数确定 $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

② $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

先求 $ay''+by'+cy = P_n(x)e^{\alpha x}[\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x] = P_n(x)e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$ 的特解 Y^*.

则原方程的特解互取为 $y^*=\begin{cases} \mathrm{Re}Y^*, & f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \\ \mathrm{Im}Y^*, & f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$

(2) 常数变易法

13. n 阶 Euler 方程: $a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} +\ldots+ a_{n-1}xy' + a_ny = f(x)$ (其中 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 为常数).

14. 二阶 Euler 方程的解法.

令 $x = e^t$，则 $ax^2y'' + bxy' + cy = f(x)$化为 $a\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(b-a)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=f(e^t)$.

这是一个线性常系数微分方程，求出其通解后将 t 换为 $\ln x$ 即得原方程的解.