院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2021—2022 学年第二学期

《高等数学 A（二)》期末试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1．若曲线 $\begin{cases} x=t^2 \\ y=2t \\ z=t^3 \end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线与平面 $x+ay-2z=1$ 平行，则常数 $a=$ (　　　　).

(A) -2　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2．已知 $f(0,0)=0$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处(　　　　).

（A）连续，但偏导数不存在　　（B）不连续，但偏导数存在

（C）连续，偏导数存在，但是不可微　　（D）连续、偏导数存在，且可微

3．设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$ 交换积分次序后为(　　　　).

(A) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)dx$　　(D) $\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx$

4．设 L 为半圆 $x^2+y^2=r^2, x\geq 0$，则 $\int_L (x^2+y^2)ds=$ (　　　　).

（A）πr^3　　（B）$2\pi r^3$　　（C）πr^2　　（D）$2\pi r^2$

5．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列级数一定收敛的是(　　　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2022u_n)$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2022+u_n)$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2022}{u_n}$

得 分	

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 函数 $z=x^2y+2xy$ 在点 $(1,1)$ 处的最大方向导数为______________.

7. 函数 $z=e^{xy}$ 在 $(2,1)$ 处的全微分 $dz=$____________________.

8. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 6x^2 dS=$________________.

9. $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内关于 x 的幂级数展开式为________________.

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi\le x\le 0,\\ 1+x^2,0<x\le\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在

$x=0$ 处收敛于____________.

得 分	

三、解答题（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

12. 求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$ 的极值.

13. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$， Ω 是由旋转抛物面 $2z=x^2+y^2$ 以及平面 $z=2$ 所包围的立体部分.

14. 计算曲线积分 $I=\oint_L(-2xy-y^2)dx-(2xy+x^2-3x)dy$，其中 L 是由 $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ 为顶点的正方形的正向边界线.

15. 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(xdydz+ydzdx+zdxdy\right)$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的内侧.

16. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n$的收敛域及和函数$s(x)$.

四、证明题（本题 10 分）

得 分	

17. 证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}\sin\frac{\pi n}{4}$绝对收敛.

2021-2022 第二学期高等数学 A(二)试卷 B 参考答案

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. C． 2. D． 3. C． 4. A． 5. B．

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

6. 5． **7.** e^2dx+2e^2dy． **8.** 8π． **9.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$． **10. 0.**

三、计算题（每题 10 共 60）

11. 解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，则

$$F_x'=2x，\quad F_z'=2z-4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_{y'}}=\frac{x}{2-z}.$$

再一次对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\cdot\frac{x}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

12. 解：令 $\begin{cases} f_x'=3x^2-8x+2y=0 \\ f_y'=2x-2y=0 \end{cases}$，解得驻点为 $(0,0),\quad (2,2)$.

又 $f_{xx}''=6x-8$，$f_{xy}''=2$，$f_{yy}''=-2$，依次代入驻点，有

在驻点 $(0,0)$ 处，$A=f_{xx}''(0,0)=-8, B=f_{xy}''(0,0)=2, C=f_{yy}''(0,0)=-2$，

$B^2-AC=-12<0$，且 $A<0$，故 $(0,0)$ 是极大值点，且极大值为 $f(0,0)=1$.

在驻点 $(2,2)$ 处，$A=f_{xx}''(2,2)=4, B=f_{xy}''(2,2)=2, C=f_{yy}''(2,2)=-2$，

$B^2-AC=12>0$，故 $(2,2)$ 不是极值点；

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极大值，且极大值为 $f(0,0)=1$.

13. 解：$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}r^2 rdz$

$$=2\pi\int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

$$=\frac{16\pi}{3}$$

14 解： 这里 $P=-2xy-y^2$， $Q=-2xy-x^2+3x$

其在整个平面上具连续偏导，又

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x-2y+3$$

故由格林公式知

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D 3dxdy=3$$

15 解：

$I=\oiint_{\Sigma}\left(xdydz+ydzdx+zdxdy\right)$，记 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$。由高斯公式

$$I=-\iiint_{\Omega}(1+1+1)dv$$

$$=-\iiint_{\Omega}3dv$$

$$=-3\times\frac{4}{3}\pi$$

$$=-4\pi$$

16 解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3n+4}{3n+1}\right|=1$，所以收敛半径为 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=\pm1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)x^n\ne 0$，所以原级数均发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}3(n+1)x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=3(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'-2\frac{1}{1-x}=3(\frac{x}{1-x})'-\frac{2}{1-x}=\frac{3}{(1-x)^2}-\frac{2}{1-x}=\frac{1+2x}{(1-x)^2}，\quad x\in(-1,1).$$

四、证明题（本题 10）

17 证明： $\because\left|\frac{n^2}{3^n}\sin\frac{\pi n}{4}\right|\le\frac{n^2}{3^n}$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{n^2}=\frac{1}{3}<1$ $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 收敛，

由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^2}{3^n}\sin\frac{\pi n}{4}\right|$ 收敛，故原级数绝对收敛.