安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中试卷

（闭卷，时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答题勿超装订线

装 订 线

一、 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设数列$\{x_n\}$有下列命题：

①$\{x_n\}$有界$\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$收敛　　②$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$

③$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+2023} = a$　　④$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2} = a$

则以上命题**正确**的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 当$x \to 0$时， $f(x) = \dfrac{1}{x^3}\sin\dfrac{1}{x}$是(　　)

A. 无穷小　　B. 无穷大　　C. 有界但不是无穷小　　D . 无界但不是无穷大

3. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{x+1} - ax - b) = 0$，其中$a,b$为常数，则（）

A. $a=1, b=1$　　B. $a=1, b=-1$　　C. $b=1, a=-1$　　D. $b=-1, a=-1$

4. 若函数$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{2}{x}$,则$x=0$是其(　)

A. 连续点　　B. 无穷间断点

C. 跳跃间断点　　D. 可去间断点

5. 设函数$f(x)$在 $x=0$处连续，则下列命题**错误**的是（ ）

A. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则$f(0)=0$　　B. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则$f(0)=0$

C. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则$f(x)$在$x=0$可导　D. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，则$f(x)$在$x=0$可导

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2022}{n+2021}\right)^n=$________________

7. 当 $x\to 0$ 时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{5}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________________

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则 $f'(0)=$________________

9. 设 $y(x)=x(x+1)(x+2)...(x+2023)$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=-1}=$ ____________

10. 极坐标曲线 $r=e^{\theta}$ 在点 $(r,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为______________

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\dfrac{3}{n^2+n+3}...+\dfrac{n}{n^2+n+n})$

12. 设 $a>0,\sigma>0,a_1=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{\sigma}{a}),a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{\sigma}{a_n}),n=1,2,...$，讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性，若收敛求出其极限

13. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln(1+\tan^2 x)}$

14. 设 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的连续性，若有间断点则判别其类型

15. 设 $y=y(x)$ 是由 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，计算 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$

16. 已知 $f(x)$ 有任意阶导数，且 $f'(x)=(f(x))^3$，当 n 为正整数时，计算 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 f 是定义在 R 上的函数，且对任何 $x_1,x_2\in R$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，若 $f'(0)=1$，证明对任何 $x\in R$，都有 $f'(x)=f(x)$

18. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：存在 $\xi\in[a,b)$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{b-a}{2})$

安徽大学 2022—2023 学第一学期

《高等数学 A 一》答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、D　　3、B　　4、D　　5、D

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. e

7. $-\frac{5}{2}$

8. 2

9. $\left(-2022!\right)dx$

10. $y=-x+e^{\frac{\pi}{2}}$

三、计算题（共 60 分，每题 10 分）

11. 解：由夹逼准则

$$\frac{1+2+...+n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}...+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+...+n}{n^2+n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}...+\frac{n}{n^2+n+n})=\frac{1}{2}$$

12. 解

$$a>0,\sigma>0,a_1=\frac{1}{2}(a+\frac{\sigma}{a})\ge\sqrt{a\frac{\sigma}{a}}=\sqrt{\sigma}$$

$$,a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})\ge\sqrt{a_n\frac{\sigma}{a_n}}=\sqrt{\sigma},n=1,2,...$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})-a_n=\frac{1}{2a_n}(\sigma-{a_n}^2)\le 0$$

单调减少有下界，所以收敛，设为 a, 对于递推式两边同时取极限，

$$a=\frac{1}{2}(a+\frac{\sigma}{a})$$

$$a=\sqrt{\sigma}$$

（由极限保号性将负值舍去）

13 解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln(1+\tan^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x+\sin x}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}(2\frac{\sin x}{x}+\cos x)=\frac{1}{4}(2\cdot 1+1)=\frac{3}{4}.$$

14 解：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0 & x=-1\\ 1+x & -1<x<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

$x=1$ 是跳跃间断点，$f(x)$在$x\neq 1$的区域内是连续的

15 解：利用隐函数求导

$xy+e^y=x+1$

$y+xy'+e^y y'=1$

$x=0, y=0, y'(0)=1$

$y'+xy''+y'+e^y(y')^2+e^y y''=0$

$y''(0)=-3$

16 解

$f'(x)=(f(x))^3$

$f''(x)=3(f(x))^2 f'(x)=3(f(x))^5$

$f'''(x)=3\bullet 5(f(x))^4 f'(x)=3\bullet 5(f(x))^7$

$f^{(4)}(x)=3\bullet 5\bullet 7(f(x))^6 f'(x)=3\bullet 5\bullet 7(f(x))^9$

....

$f^{(n)}(x)=(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1(f(x))^{2n+1}=(2n-1)!!(f(x))^{2n+1}$

必须要用数学归纳法证明

四、证明题（共 10 分，每小题 5 分）

17 解

$$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)$$
$$f(x)(1-f(0))=0$$
$$f(0)=1,\ f(x)=0(\text{舍去})$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(f(\Delta x)-1)}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)$$
$$=f(x)$$

18 解

构造辅助函数 $F(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)$,

$F(x)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 上连续，且

$F(a)=f(a)-f\left(a+\dfrac{b-a}{2}\right)=f(a)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，$F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-f(b)$；

分两种情况讨论：

若 $f(a)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq 0$，

$F(a)$ 与 $F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ 异号，

$\xi\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)\subset[a,b]$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{b-a}{2}\right)$.

否则，$\xi=a$ 或 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$

综上所述，命题得证