安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末试卷（A 卷）

（闭卷，时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则常数 a 满足（　　）

A． $a=1$　　B． $a=0$　　C． a 为无穷大　　D． 无法确定

2. $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt,\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$,当$x\to 0,\alpha(x)$是$\beta(x)$的（　　）

A. 高阶无穷小量　　B. 低阶无穷小量

C. 等价无穷小量　　D. 同阶但非等价的无穷小量

3. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 有（　　）条渐近线

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导函数,且 $f(0)=f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则存在 $\delta>0$，有（　　）

A. $\int_0^{\delta} f(x)dx>0$　　B. $\int_{-\delta} f(x)dx<0$

C. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx=0$　　D. $\int_0^{\delta} f(x)dx>0$ 且 $\int_{-\delta}^{0} f(x)dx<0$

5. 下列广义积分中，发散的是（ ）

A. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}dx$　　B. $\int_0^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}dx$　　C. $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^3}dx$　　D. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(2021^n+2022^n+2023^n)^{\frac{1}{n}}=$____________________.

7. 已知 $y=x^x(x>0)$，则微分 $dy=$________________________.

8. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\cos x}{x}$，则 $\int xf'(x)dx=$____________________.

9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x^{2023}\sin^2 x}{1+x^2}+\cos^2 x\right)dx\ =$_______________.

10. 对数螺线 $r=e^{\theta}$ 从点 $(r,\theta)=(1,0)$ 到点 $(r,\theta)=(e^{2\pi},2\pi)$ 的弧长为__________________.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\dfrac{n}{n^2+3^2}\dots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

12. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

13. 计算不定积分 $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

14. 求一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\cos^2\dfrac{y}{x}$ 满足 $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$ 的特解.

15. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 在区间 $\left[0,+\infty\right)$ 上的最大值和最小值.

16. 过原点作曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线，设此曲线、切线及 x 轴所围成的平面图形为 A，计算图形 A 的面积，并求平面图形 A 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上可导，且 $2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=f(1)$，证明：在 $\left(0,1\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上可导，$\delta>0$，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 点二阶可导，且 $f''(x_0)\neq 0$，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的泰勒公式为 $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h,\ 0<\theta(h)<1, h\in(-\delta,\delta)$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\dfrac{1}{2}$.

安徽大学 2022—2023 学第一学期

《高等数学 A(一)》期末A卷答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、D　　3、C　　4、A　　5、A

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 2023

7. $x^x(\ln x+1)dx$

8. $-\dfrac{x\sin x+2\cos x}{x}+C$

9. $\dfrac{\pi}{2}$

10. $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$

三、计算题（共 60 分，每题 10 分）

11. 解：由定积分定义可知

$$\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

12. 解

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x}{x}-1\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$$

13 解：（严格条件下应将$x>0$、$x<0$分类讨论）

$x = \sec t$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int \cos t dt$$

$$= \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

14 解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} = u, x\frac{du}{dx} + u = u + \cos^2 u$$

$$\tan u = \ln|x| + c$$

$$\because y(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \tan\frac{y}{x} = \ln|x| + 1$$

15 解：

$f'(x) = 2x(2-x^2)e^{-x^2} = 0$，

$0 < x < \sqrt{2}$ 时，$f'(x) > 0$；$x > \sqrt{2}$ 时，$f'(x) < 0$

所以，$x = \sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内的极大值点

$f\left(\sqrt{2}\right) = \int_0^2 (2-t)e^{-t} dt = -(2-t)e^{-t}\big|_0^2 - \int_0^2 e^{-t} dt = 1 + e^{-2}$，

$f(0) = 0$，$f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} (2-t)e^{-t} dt = 1$

经过比较，得 $f(x)$ 的最大值是 $f\left(\sqrt{2}\right) = 1 + e^{-2}$，最小值是 $f(0) = 0$

16 解：

$y=\sqrt{x-1}$

切点（$x_0,\sqrt{x_0-1}$)

$y-\sqrt{x_0-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$

$\because x=0,y=0$

$\therefore x_0=2,y_0=1$

$\therefore$ 切线方程为$y=\dfrac{x}{2}$

$S=\int_0^1(1+y^2-2y)dy=\dfrac{1}{3}$

$V=\pi\int_0^1(\ (1+y^2)^2-(2y)^2)dy=\dfrac{8}{15}\pi$

四、证明题（共 10 分，每小题 5 分）

17 解：令

$F(x)=xf(x)$

$F(1)=f(1)=2\dfrac{1}{2}\eta f(\eta)$(积分中值定理，$\eta\in$（0, 1））

$=F(\eta)$

$\therefore$由罗尔中值定理可知，$\exists\xi\in$（η, 1），$\mathrm{F}'(\xi)=0$

$\therefore f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

18 解

$(1)f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h,\ \ 0<\theta(h)<1,h\in(-\delta,\delta)$

$(2)f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+\dfrac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)$

$(1)-(2):$

$f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h-f'(x_0)\cdot h=\dfrac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)$

$\dfrac{f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h-f'(x_0)\cdot h}{h^2}=\dfrac{1}{2}f''(x_0)+\dfrac{o(h^2)}{h^2}$

$\lim\limits_{h\to0}\theta(h)\dfrac{f'(x_0+h\cdot\theta(h))\cdot h-f'(x_0)\cdot h}{h^2\theta(h)}=\lim\limits_{h\to0}(\dfrac{1}{2}f''(x_0)+\dfrac{o(h^2)}{h^2})$

$\lim\limits_{h\to0}\theta(h)\bullet f''(x_0)=\dfrac{1}{2}f''(x_0)$

$\because f''(x_0)\neq0$

$\lim\limits_{h\to0}\theta(h)=\dfrac{1}{2}$