安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装　订　线

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 下列说法正确的是（　　）.

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 都不存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ 必不存在；

B. 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在， $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))$ 必不存在；

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在， $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ 必不存在；

D. 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在， $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))$ 必不存在.

2. 下列关于函数 $y = xe^{\frac{2}{x}}+1$ 的渐近线说法正确的是（　　）.

A. 有水平渐近线 $y=1$；　　B. 有垂直渐近线 $x=0$；

C. 有两条斜渐近线；　　D. 无垂直渐近线.

3. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$， $f'''(x_0)>0$，则（　　）.

A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值；　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；　　D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

4. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的奇函数, $F'(x)=f(x)$，则 $F(x)$ 必（　　）.

A. 均为奇函数；　　B. 均为偶函数；

C. 只有一个奇函数；　　D. 既非奇函数也非偶函数.

5. 下列广义积分中，收敛的是（　　）.

A. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$；　　B. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

C. $\int_0^{2}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$；　　D. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+n}+n}{n+2}=$ ______________.

7. 设方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 确定 y 是 x 的函数, 则 $\mathrm{d}y=$ ____________.

8. $y=\mathrm{e}^x\sin x$ 的 10 阶导数为______________.

9. 已知 $f'(x)=x^3\mathrm{e}^x$ 且 $f(1)=0$, 则 $f(x)=$ ____________.

10. 光滑曲线由极坐标 $r=r(\theta)\quad(\theta\in[\alpha,\beta])$ 表示, 其弧长计算公式 $s=$ _____________.

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

得 分	

11．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^n$.

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

答题勿超装订线

装 订 线

13．设 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$，求导数 y'.

14．计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{4}-1}$.

15．计算 $\int_{0}^{1}\ln^{2}x\mathrm{d}x$.

16. 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^4\sin x+4\cos^4 x)\mathrm{d}x$.

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

17. 求曲线$\begin{cases} x=2\mathrm{e}^{t}, \\ y=\mathrm{e}^{-t}, \end{cases}$在$t=0$相应的点处的切线方程和法线方程.

18. 求由曲线 $y = x^3 - 6x$ 与直线 $y = 2x$ 所围成的平面图形的面积.

线

答 题 勿 超 装 订 线

订

装

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

得 分	

19. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$.证明 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试题（B 卷）

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. C　　2. B　　3. D　　4. B　　5. B

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 4　　7. $-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　8. $2^5\mathrm{e}^x\cos x$

9. $(x^3-3x^2+6x-6)\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}$　　10. $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. 解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2+n}\right)^{-(2+n)\cdot\frac{n}{-(2+n)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-(2+n)}}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{-(2+n)}=-1$，　　……………………7 分

所以所求极限为 e^{-1}.　　……………………9 分

12. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)x^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)x^3\cos x}=\frac{1}{4}.$$　　9 分

13. 解：对 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 两边取对数，有

$$\ln y=x\ln(1+\frac{1}{x}).$$　　……………… 3 分

对等式两边关于 x 求导，则有 $\dfrac{y'}{y}=\ln(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{1}{x+1}$，

从而 $y'=\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. ………………… 9 分

14. 解：原式 $=\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$ ……………………4 分

$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$. ……………………9 分

15. 解：原式 $=x\ln^2 x\Big|_0^1-2\int_0^1\ln x dx$ ………………… 4 分

$=x\ln^2 x\Big|_0^1-2x\ln x\Big|_0^1+\int_0^1 2dx=2$. ……………………9 分

16. 解：原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^4\sin x dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4 x dx$ ………………… 3 分

$=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4 x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4 x dx=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$. ………………… 9 分

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 解：因为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-e^{-t}}{2e^{t}}=-\frac{1}{2e^{2t}}$，所以 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=-\frac{1}{2}$.

$t=0$ 对应的点为 $(2,1)$，

所以曲线在点 $(2,1)$ 处的切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x+2y-4=0$.…… 6 分

从而法线方程为 $y-1=2(x-2)$，即 $2x-y-3=0$. ………………… 8 分

18. 解：令 $x^3-6x=2x$，解得 $x=\pm2\sqrt{2},0$. …………………3 分

故所求面积为 $S=\int_{-2\sqrt{2}}^{0}(x^3-6x-2x)dx+\int_0^{2\sqrt{2}}(2x-x^3+6x)dx=32$. ………… 8 分

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

19. **证明：**因为 $F'(x)=\dfrac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2}=\dfrac{\int_0^x (x-t)f(x)f(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2}\geq 0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. ………………… 10 分