一、填空题（将正确的答案填在横线上）（每小题 4 分，总计 20 分）

1、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2^5+3^5+\cdots+n^5}{n^6}\right)=$________.

2、已知 $f(x)=\int_0^{\ln x}\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}dt$，则 $\int_1^{\sqrt{3}}f'(x)dx=$__________.

3、定积分 $\int_{-1}^{1}\left[x^{2019}\cos(2019x)+\dfrac{x^2}{1+x^2}\right]dx=$______________.

4、已知 $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}+b, & x>0 \\ 3, & x=0 \\ \dfrac{x^3+3x-a}{2x^2+1} & x<0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$__________，$b=$____________.

5、星形线 $\Gamma:\begin{cases} x=4\cos^3\theta \\ y=4\sin^3\theta \end{cases}$ 上，相应于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 点处切线方程为：_________.

二、基本计算题（每小题 7 分，总计 35 分）

1、计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2、设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $ye^{\sin x}+x\ln(1+y^2)=1$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

3、设 $y=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}-2\arctan x+(\cos x)^2\cdot e^{\tan x}$，求 y'.

4、计算不定积分 $\int\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}+x^2}\right)dx$.

5、计算定积分 $\int_0^1(x\arctan x)dx$.

三、综合计算题（本题 8 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^t-1)dt}{x^2\sin^2 x}$.

四、解答下列各题（每小题 10 分，总计 30 分）

1、求函数 $y=x^4-2x^3-36x^2+120$ 的图形的凹凸区间和拐点.

2、设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=4x^3+\dfrac{1}{10}\int_0^2 f(x)dx$，求 $f(x)$.

3、设直线 $x=-1$，$x=1$ 与抛物线 $y=4-x^2$ 以及 x 轴围成平面图形 D.

（1）、求平面图形 D 的面积 A；

（2）、求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

五、证明题：（本题 7 分）

已知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上连续，且以 T 为周期，而且在 $\left[0,\ T\right]$ 上连续可微，并设 $G(x)=\int_{x}^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$ 且 $G(0)=T\cdot f(T)$，试证明：

（1）、对任意的 $a\in\left(-\infty,+\infty\right)$，总有 $\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t$ 成立；

（2）、至少存在一点 $\xi\in\left(0,\ T\right)$，使 $f'\left(\xi\right)=0$.

一. 1. 原式 $= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5}{n^5}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^5 = \int_0^1 x^5dx = \frac{1}{6}x^6\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$

2. $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

3. $\left.\begin{array}{ll} f(x) = x^{2019}\cos(2019x) & \text{为奇函数} \\ g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} & \text{为偶函数}\end{array}\right\} \Rightarrow$ 原式 $= 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = 2\left(x-\arctan x\right)\Big|_0^1$

$= 2-\frac{\pi}{2}$

4. $\begin{cases} f(0^+) = \lim_{x\to0^+}(e^{x^2}+b) = 1+b \\ f(0^-) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{x^3+3x-a}{2x^2+1}\right) = -a\end{cases}$ $\quad f(0^+) = f(0^-) = f(0) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2\end{cases}$

5. $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, $x=y=\sqrt{2}$.

$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{d\theta} = 12\cos^2\theta(-\sin\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = 12\sin^2\theta\cos\theta\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\tan\theta \Rightarrow k_{切} = \frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -1$

故切线方程为 $y-\sqrt{2} = -(x-\sqrt{2})$, 即: $y=-x+2\sqrt{2}$

二. 1. 原式 $= \lim_{x\to0} e^{\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{3x+1}{1+x^2}\right)} = e^{\lim_{x\to0}\frac{\ln(3x+1)-\ln(1+x^2)}{\sin x}}$

$\xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}} e^{\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{3x+1}-\frac{2x}{1+x^2}}{\cos x}} = e^{\frac{3-0}{1}} = e^3$

2. $ye^{\sin x}+x\ln(1+y^2) = 1$. 代入 $x=0 \Rightarrow y=1$

求导: $y'e^{\sin x}+ye^{\sin x}\cdot\cos x+\ln(1+y^2)+\frac{x}{1+y^2}\cdot2y\cdot y' = 0$

$\Rightarrow y' = -\frac{ye^{\sin x}\cdot\cos x+\ln(1+y^2)}{e^{\sin x}+\frac{2xy}{1+y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = y'\Big|_{x=0} = -\frac{1+\ln2}{1+0} = -1-\ln2$

3. $y = \frac{\ln(1+x^2)}{x}-2\arctan x+\cos^2x\cdot e^{\tan x}$

$y' = \frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot x-\ln(1+x^2)}{x^2}-\frac{2}{1+x^2}+2\cos x(-\sin x)e^{\tan x}+\cos^2x\cdot e^{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}$

$= -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}+(1-\sin2x)e^{\tan x}$

4. 设 $\sqrt{x}=t$, 由于 $x\neq0$, 所以 $t>0$. $x=t^2$, $dx=2tdt$

$t^3+1>0$, 故不用加绝对值

$\int\frac{x}{\sqrt{x}+x^2}dx = \int\frac{t^2}{t+t^4}\cdot2tdt = \frac{2}{3}\int\frac{3t^2dt}{1+t^3} = \frac{2}{3}\int\frac{d(t^3+1)}{t^3+1} = \frac{2}{3}\ln(t^3+1)+C = \frac{2}{3}\ln(x^{\frac{3}{2}}+1)+C$

5. $\int_0^1 x\arctan dx = \frac{1}{2}\int_0^1\arctan x\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1x^2\frac{dx}{1+x^2}$

$= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-\arctan x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

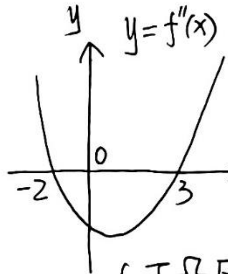
三. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^t-1)dt}{x^2\sin^2x} \xlongequal[\text{等价替换}]{\text{无穷小量}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^t-1)dt}{x^4} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{x^2}-1)2x}{4x^3}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x^2} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}\text{型}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2xe^{x^2}}{4x} = \dfrac{1}{2}$

四. 1. 设 $y=f(x)=x^4-2x^3-36x^2+120$

$f'(x)=4x^3-6x^2-72x$

$f''(x)=12x^2-12x-72=12(x+2)(x-3)$



当 $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$ 时, $f''(x)>0$, $f(x)$ 下凸;
当 $x\in(-2,3)$ 时, $f''(x)<0$, $f(x)$ 上凸。 $\Rightarrow$ $\begin{cases}\text{下凸区间: }(-\infty,-2)、(3,+\infty)\\ \text{上凸区间: }(-2,3)\end{cases}$

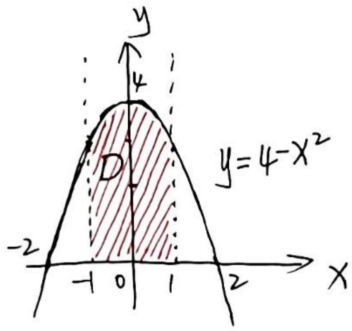
由于 $f''(x)$ 在 $x=-2$ 和 3 处的左右邻域异号 $\Rightarrow$ 此二点均为拐点.

$f(-2)=8$、$f(3)=-177$, $\Rightarrow$ 拐点坐标为: $(-2,8)$ 和 $(3,-177)$

2. 注意到: $\int_0^2 f(x)dx$ 并不是变上限积分, 而是一个定积分常数. 故设 $\frac{1}{10}\int_0^2 f(x)dx=C$.

则 $f(x)=4x^3+C \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx=(x^4+Cx)\Big|_0^2=16+2C$

由此, $\dfrac{16+2C}{10}=C \Rightarrow C=2$, 即 $f(x)=4x^3+2$.



3. (1) $A=\int_{-1}^{1}(4-x^2)dx \xlongequal[\text{偶函数性质}]{\text{运用有限对称区间}} 2\int_0^1(4-x^2)dx$

$=2\left(4x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\dfrac{22}{3}$

(2). $V=\int_{-1}^{1}\pi(4-x^2)^2dx \xlongequal{\text{偶函数}} 2\int_0^1\pi(x^4-8x^2+16)dx$

$=2\pi\left(\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{8}{3}x^3+16x\right)\Big|_0^1=\dfrac{406}{15}\pi$ 或 $(27\frac{1}{15})\pi$

五. (1). $G(x)=\int_x^{x+T}f(t)dt$, $\Rightarrow G'(x)=f(x+T)\cdot(x+T)'-f(x)\cdot x'=f(x+T)-f(x)$

由于 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 故有 $f(x+T)-f(x)\equiv0$.

$\Rightarrow G'(x)\equiv0$, $\Rightarrow G(x)\equiv C=G(0)=T\cdot f(T)$.

故对任意 $a\in(-\infty,+\infty)$, 总有 $G(a)=G(0)$, 即: $\int_a^{a+T}f(t)dt=\int_0^T f(t)dt$

(2) 由于 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上连续, 在 $(0,T)$ 上可微, 且 $f(0)=f(T)$.

根据罗尔中值定理, 至少存在一点 $\xi\in(0,T)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 得证。