院/系____ 年级____ 专业____ 姓名____ 学号____

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《 概率论与数理统计 A 》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．设 A,B 是任意两个概率不为零的互斥事件，则下列结论正确的是（　　）

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互斥　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容　(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　(D) $P(A-B)=P(A)$

2．设独立重复地进行某试验，已知第四次试验出现第二次成功的概率为 $\frac{3}{16}$，则每次试验成功的概率为（　　）

（A） $\frac{1}{2}$　（B） $\frac{1}{4}$　（C） $\frac{1}{8}$　（D） $\frac{1}{16}$

3．设某随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} A+B\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 则（　　）

(A) $A=1,B=1$　(B) $A=-1,B=-1$　(C) $A=1,B=-1$　(D) $A=-1,B=1$

4．设随机变量 $X\sim N(0,\sigma^2)$，则对任意实数 a，下列命题正确的是（　　）

（A） $P\{X<a\}=P\{X>a\}$　（B） $P\{X<a\}=1-P\{X<-a\}$

（C） $aX\sim N(0,a^2\sigma^2)$　（D） $X+a\sim N(a,\sigma^2+a^2)$

5．设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，则下列函数中必为某随机变量的密度函数的是（　　）

(A) $2f(x)$　(B) $f(2x)$　(C) $f(1-x)$　(D) $1-f(x)$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6．设 A， B 为随机事件，若 $P(A)=0.6$， $P(B)=0.4$， $P(A|B)=0.3$，则 $P(A|\overline{B})=$________

7．设十件产品中有两件次品，现依次从中不放回地任取两次，每次取一件，则两件产品中恰好有一件次品的概率是__________

8．设随机变量 ξ 服从 $(1,6)$ 上的均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率为_________

9．设随机变量 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$，则 X^2 的分布律 $X^2\sim$_______________

10．若二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

则 $P\{X>2Y\}=$__________

三、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

11．甲袋中有 3 个白球 2 个黑球，乙袋中有 4 个白球 4 个黑球，今从甲袋中任取 2 个球放入乙袋，再从乙袋中任取一个球，求该球是白球的概率。

12．一盒中有 5 个纪念章，编号为 1, 2, 3, 4, 5，在其中等可能地任取 3 个，用 X 表示取出的 3 个纪念章的最大号码，求随机变量 X 的分布律.

13．已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ A-x, & 1<x\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求：(1) 常数 A； (2) $P(-1<X<1)$.

14．某次高数期末考试成绩（百分制） X 近似服从正态分布 $X\sim N(72,\sigma^2)$，已知 96 分以上的占考生总数的 2.3%。试求考生的高数成绩在 60 分至 84 分之间的概率。
（ $\Phi(2)=0.977$， $\Phi(1)=0.841$ ）

15．设随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

X \\ Y	0	1	2
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	α	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

求：(1) α 的值； (2) X,Y 的边缘分布律； (3) $P(XY\neq 0)$

16．设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} kx^2y, & (x,y)\in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中 G 是由 $y=|x|$ 和 $y=1$ 围成的区域，

(1) 求 k 的值； (2) 求 Y 的边缘密度函数； (3) 求 $P\{Y<\frac{1}{2}\}$.

四、证明题（每小题 8 分，共 8 分）

17．设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布．证明：$Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

安徽大学 2021—2022 学年第 1 学期

《概率论与数理统计 A》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系__________ 年级__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答题勿超装订线　　装　订　线

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设随机事件 A、B 互斥，且 $P(A)>0,\ P(B)>0$，则下列式子中一定成立的是(　　).

A. $P(A|B)>0$　　B. $P(A|B)=P(A)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(A|B)=0$

2. 设 A、B、C 三个随机事件两两独立，则 A、B、C 相互独立的充要条件是(　　).

A． A 与 BC 独立　　B. AB 与 $A\cup C$ 独立

C. AB 与 AC 独立　　D. $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

3. 三人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为 $\frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3}$，则三人合作能将此密码破译出的概率为(　　).

A. 0.6　　B. 0.4　　C. 0.24　　D. 0.56

4. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 必是某一变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取(　　).

A. $a=\frac{2}{3},\ b=\frac{2}{3}$　　B. $a=\frac{3}{5},\ b=-\frac{2}{5}$　　C. $a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{1}{2}$　　D. $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$

5. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1.\end{cases}$ 则 $P(X=1)=$ (　　).

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}-e^{-1}$　　D. $1-e^{-1}$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 设随机事件 A、B 满足 $P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(A|B)=P(A|\bar{B})$，则 $P(A\bar{B})=$__________.

7. 设袋中装有 40 个白球，20 个黑球, 从中不放回地抽取两次, 每次取一个, 则第二次取到黑球的概率为__________.

8. 设随机变量 X 服从参数为 λ（$\lambda>0$ 为常数）的 Poisson 分布，满足 $P(X=2)=2P(X=1)$，则 $P(X=0)=$__________.

9. 设某电子元件使用寿命 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $P(1<X<2)=$__________.

10. 一实习生用同一台机器独立地制造了 3 个同种零件，已知第 i 个零件不合格的概率为

$p_i=\dfrac{1}{1+i},(i=1,2,3)$，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P(X=2)=$__________.

三、分析计算题（每题 10 分，合计 40 分）

11. 将3个球随机地投入4个盒子中，求下列事件的概率：

（1）任意3个盒子中各有1个球；

（2）任意1个盒子中有3个球.

12. 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=c\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$，$k=0,1,2,3$，求：

（1）c 的值；

（2）关于 t 的一元二次方程 $t^2+3t+X=0$ 有实根的概率.

13. 设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求：

（1）A 的值；

（2）X 落在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的概率.

14. 设某连续型随机变量 $X\sim N(3,4)$，

（1）求概率 $P(2\le X\le 4)$，（已知 $\Phi(0.25)=0.5987$，$\Phi(0.5)=0.6915$）；

（2）试确定常数 c 使得 $P(X\ge c)=P(X<c)$.

四、实际应用题（每题 10 分，合计 30 分）

15. 设电灯泡使用时数在1000小时以上的概率为0.2，假设现有3只灯泡在独立地使用，求：

（1）3只灯泡在使用了1000小时后全都坏了的概率；

（2）3只灯泡在使用了1000小时后最多只有一只坏了的概率.

16. 某发报台分别以 0.7 和 0.3 的概率发出信号 0 和 1，(例如：分别用低电频和高电频表示). 由于受随机干扰的影响，当发出信号 0 时，接收台不一定收到 0，而是以概率 0.8 和 0.2 收到信号 0 和 1. 同样地，当发报台发出信号 1 时，接收台以 0.9 和 0.1 的概率收到信号 1 和 0. 试求：

（1）接收台收到信号 0 的概率；

（2）当接收台收到信号 0 时，发报台确实是发出信号 0 的概率.

17. 设某种圆盘的直径服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 试求此种圆盘面积 S 的概率密度.

学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答题勿超装订线

安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《 概率论与数理统计 A 》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A,B 是两个随机事件，则 $P(A\cup\overline{B})=$（　　）.

(A) $1+P(A)-P(B)$　　(B) $1+P(B)-P(A)$

(C) $1+P(AB)-P(A)$　　(D) $1+P(AB)-P(B)$

2．某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p\ (0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为（　　）.

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$　　(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

3．设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$（　　）.

(A) 随 μ 的增大而增大　　(B) 随 σ 的增大而增大

(C) 与 μ 有关，与 σ 无关　　(D) 与 μ，σ 都无关

4．某公交站 149 路公交车从上午 6 点起，每隔 15 分钟有一班车通过，若某乘客到达该站的时刻在 8：00 到 9：00 时间段上服从均匀分布，则此人候车的时间少于 5 分钟的概率是（　　）.

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

5．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x\le 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，则 $P\left\{\frac{1}{2}\le X<\frac{3}{2}\right\}=$（　　）.

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{2}{3}$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．设 A,B 是随机事件，$P(A)=0.4$，$P(B|A)=0.5$，$P(A|B)=0.25$，则 $P(B)=$______.

7．设盒子中有 10 只球，其中 4 只红球，3 只白球，3 只黑球，现从中不放回地取三次，每次取一个，则三次所取的球颜色不同的概率为______.

8．若某随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ A\sin x, & 0\le x\le \pi/2 \\ 1, & x>\pi/2 \end{cases}$，则 $A=$______.

9．若离散型随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，则 $|X|$ 的分布律为______________.

10. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=1\}=2P\{X=2\}$，则 $P\{X=3\}=$____.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．甲袋中有 2 个白球 1 个黑球，乙袋中有 1 个白球 2 个黑球，今从甲袋中任取 1 个球放入乙袋，再从乙袋中任取一个球，求该球是白球的概率.

12．设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \frac{k}{4}(2-x), & 0<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，

(1) 求 k 的值；　　(2) 求 X 的分布函数.

13．设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布列为

X \ Y	-1	1
-1	0.4	0.1
1	a	b

已知 $P\{X+Y=0\}=0.3$，（1）求 a，b 的值；　（2）求 Y 的边缘分布列.

14．一工厂生产的某种元件的寿命 X（以小时计）服从正态分布 $N(160,\sigma^2)$，若 $P\{120<X\le 200\}=0.80$，求 σ 的值.（已知 $\Phi(1.282)=0.9$）

15．设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

(1) 求 X 的边缘密度 $f_X(x)$；　(2) 求概率 $P\{X+Y\le 1\}$.

16．假设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，

记 $U=\begin{cases} 0, X\le Y \\ 1, X>Y \end{cases}$，$V=\begin{cases} 0, X\le 2Y \\ 1, X>2Y \end{cases}$，求 (U,V) 的联合分布.

四、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

17．设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 内服从均匀分布，证明：$Y=-5\ln X$ 服从指数分布.

安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期中考试试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．（D）　2．（A）　3．（C）　4．（B）　5．（C）

二．填空题**（每小题 2 分，共 10 分）**

6．0.8　7．$\frac{16}{45}$　8．$\frac{4}{5}$　9．$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$　10．$\frac{7}{24}$

三．**计算题（每小题 12 分，共 72 分）**

11.【解】

设事件 A 表示“从乙袋中取出的是白球”，

B 表示“从甲袋中取出的两球中恰有 i 个白球”，$i=0,1,2$，

………………（3 分）

由全概率公式，

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\frac{4}{10}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\cdot\frac{5}{10}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{6}{10}=\frac{13}{25}$$

………………（12 分）

12.【解】从 5 个纪念章中任取 3 个，共有 $C_5^3=10$ 种取法，

$X=3$，只有一种取法 $(1,2,3)$，所以 $P(X=3)=\frac{1}{10}$；

$X=4$，有 $C_3^2=3$ 种取法，所以 $P(X=4)=\frac{3}{10}$；

$X=5$，有 $C_4^2=6$ 种取法，所以 $P(X=4)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，

………………（10 分）

故 X 的分布律为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

.

………………（12 分）

13.【解】(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^2(A-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+A-\frac{3}{2}=1$，

所以 $A=2$.

………………（6 分）

(2) $P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=0.5$.

………………（12 分）

14.【解】由 $X \sim N(72,\sigma^2)$，且 $P\{X \geq 96\}=0.023$，即

$$P\{\frac{X-72}{\sigma} \geq \frac{96-72}{\sigma}\}=P\{\frac{X-72}{\sigma} \geq \frac{24}{\sigma}\}=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.023,$$

于是得　$\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977$.

由 $\Phi(2)=0.977$ 知，$\frac{24}{\sigma}=2$，$\sigma=12$，即　$X \sim N(72,12^2)$，

………………（6 分）

所求概率为

$$P\{60 \leq X \leq 84\}=P\{\frac{60-72}{12} \leq \frac{X-72}{12} \leq \frac{84-72}{12}\}=P\{-1 \leq \frac{X-72}{12} \leq 1\}$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.841-1=0.682.$$

………………（12 分）

15.（1）由 $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\alpha+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=1$，得 $\alpha=\frac{1}{3}$

………………（3 分）

(2) X的边缘分布为：

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y的边缘分布为：

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

………………（9 分）

(3)　$P(XY \neq 0)=1-P(X=1,Y=0)-P(X=2,Y=0)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

………………（12 分）

16.【解】(1) 由规范性，

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-y}^{y} kx^2y\,\mathrm{d}x=\frac{2}{15}k=1，\Rightarrow\ k=\frac{15}{2};$$

………………（3 分）

(2)　$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\frac{15}{2}x^2y\,\mathrm{d}x=5y^4, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases};$$

………………（9 分）

(3) 记　$B=\{(x,y)\,|\,y<\frac{1}{2}\}$，

则　$$P\{Y<\frac{1}{2}\}=\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{B\cap G}\frac{15}{2}x^2y\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\frac{15}{2}x^2y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{32},$$

或解：$$P\{Y<\frac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}5y^4\,\mathrm{d}y=\frac{1}{32}.$$

………………（12 分）

四．证明题（**每小题 8 分，共 8 分**）

17．【证明】

X的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，

………………（2 分）

则 Y的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\le y\}=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}$，

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}=P(X\le 0)=0$；

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}=1$；

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}=P\{X\le -\frac{1}{2}\ln(1-y)\}=\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)}2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，

………………（6 分）

利用变限积分求导，得 $F_Y'(y)=2\mathrm{e}^{\ln(1-y)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-y}=1$，

于是 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，即 Y在 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

………………（8 分）

安徽大学 20<u>21</u> —20<u>22</u> 学年第<u>1</u>学期

《概率论与数理统计 A》期中考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D　　2. A　　3.A　　4. B　　5. C

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 0.2　　2. $\frac{1}{3}$　　3. e^{-4}　　4. $e^{-1}-e^{-2}$　　5. $\frac{11}{24}$

三、分析计算题（每题 10 分，合计 40 分）

11. 解：设 A=“任意3个盒子中各有1个球”，B=“任意1个盒子中有3个球”，

C=“任意1个盒子中有2个球，其他任意1个盒子中有1个球”，

则依题意得

（1）$P(A)=\frac{C_4^3 P_3^3}{4^3}=\frac{3}{8}$;

5 分

（2） $P(B)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}$.

10 分

12. 解：(1) 由

$$\sum_{k=0}^{3} P(X=k)=1,$$

得

$$c=\frac{8}{15}.$$

5 分

(2) 易见

$$P(\text{方程有实根})=P(\Delta\ge 0)=P\left(X\le\frac{9}{4}\right)=\frac{14}{15}.$$

10 分

13. 解：(1) 由

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1,$$

得

$$A=\frac{1}{2}.$$

5 分

(2) $P\left(X\text{落在区间}(0,\frac{\pi}{4})\right)=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\cos x dx=\frac{\sqrt{2}}{4}.$

10 分

14. 解:（1）由于

$$P(2\le X\le 4)=P\left(-0.5\le\frac{X-3}{2}\le 0.5\right)=\Phi(0.5)-\Phi(-0.5)=2\Phi(0.5)-1=0.383；\text{5 分}$$

（2）由正态分布的对称性易知，

$$c=3.$$ 10分

四、实际应用题（每题 10 分，共 30 分）

15. 解：设 A_i =“3 个灯泡在使用了1000小时以后恰有 i 个坏了”（$i=0,1,2,3$），则由二项分布知，

$$P(A_i)=C_3^i(0.8)^i(0.2)^{3-i},$$

(1) 由题意得，

P(3个灯泡在使用了1000小时以后全部坏了的概率) $=P(A_3)=0.512$； 5 分

(2) 由题意得，

P(3个灯泡在使用了1000小时以后最多只有一只坏了) $=P(A_0)+P(A_1)=0.104.$

10 分

16. 解: 设 A 表示”发出信号 0”, B 表示”接收到信号 0”

(1)由全概率公式有

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$$

$$=0.7\times 0.8+0.3\times 0.1=0.59\ ;$$ 5 分

(2)由贝叶斯公式有

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}=\frac{56}{59}.$$ 10 分

17. 解: 假设圆盘的直径为 X，则 $X\sim U(0,1)$，则 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3 分

又由于 $S=\dfrac{\pi X^2}{4}$，则易得 $S=\dfrac{\pi X^2}{4}$ 的密度函数为

$$f_S(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}, & 0<y<\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ 10 分

安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期中考试试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2．C　　3．D　　4．A　　5．B

二．填空题**（每小题 3 分，共 15 分）**

6．0.8　　7．$\dfrac{3}{10}$　　8．1　　9．$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　10．$\dfrac{1}{6}e^{-1}$

三．计算题（每小 10 分，共 60 分）

11．【解】设 $B=\{$从乙袋中取到的球是白球$\}$

$A=\{$从甲袋中任取一个球是白球$\}$

则 $P(B)=P(A)P(B\,|\,A)+P(\overline{A})P(B\,|\,\overline{A})=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$

………………（10 分）

12．【解】(1) $\int_0^2 \dfrac{k}{4}(2-x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}k=1 \;\Rightarrow\; k=2$

………………（4 分）

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x-\dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2, \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$

………………（10 分）

13．【解】（1）

$P\{X+Y=0\}=P\{X=-1，Y=1\}+P\{X=1，Y=-1\}=0.1+a=0.3$，得 $a=0.2$

另一方面，$a+b=0.5$，得 $b=0.3$

………………（5 分）

（2）$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$

………………（10 分）

14．【解】$X \sim N(160,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-160}{\sigma} \sim N(0,1)$

$P\{120<X\le 200\}=P\left\{\dfrac{120-160}{\sigma}<\dfrac{X-160}{\sigma}\le\dfrac{200-160}{\sigma}\right\}$

$=\Phi(\dfrac{40}{\sigma})-\Phi(\dfrac{-40}{\sigma})=2\Phi(\dfrac{40}{\sigma})-1$，依题意，$2\Phi(\dfrac{40}{\sigma})-1=0.8$，

即 $\Phi(\dfrac{40}{\sigma})=0.9=\Phi(1.282)$，故 $\dfrac{40}{\sigma}=1.282$，解得 $\sigma \doteq 31.2$

15．【解】(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$，

当 $x\le 0$ 时， $f_X(x)=0$；

当 $x>0$ 时， $f_X(x)=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$，

所以 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$.

………………（5 分）

(2) $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{1/2}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1+\frac{1}{\mathrm{e}}-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

………………（10 分）

16．【解】依题意，(X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in G\\ 0,(x,y)\notin G\end{cases}$

显然，$P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$，$P\{X>2Y\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$

$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$

$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0$

同理可求 $P\{U=1,V=0\}=\frac{1}{4}$，$P\{U=1,V=1\}=\frac{1}{2}$

故 (U,V) 的联合分布列为

U \ V	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

………………（10 分）

四．证明题（**每小题 10 分，共 10 分**）

17．【证明】 $f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-5\ln X\le y\}=P\left\{X\ge e^{-y/5}\right\}=1-P\left\{X<e^{-y/5}\right\}$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=1-e^{-y/5}$；

$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$，故 Y 服从参数为 $\frac{1}{5}$ 的指数分布.

………………（10 分）