安徽大学 2019—2020 学年第二学期

《高等数学 A（二）》考试试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1．方程 $y'+\frac{y}{x}=a(\ln x)$ 是（　　　）．

(A)　一阶非齐次线性方程　　　(B)一阶齐次线性方程

(C)　齐次方程　　　(D) 可分离变量方程

2．设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，则在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$（　　　）.

（A）偏导数不存在　（B）偏导数存在且连续　（C）不可微　（D）可微

3. 若 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\int_L (x^2+y-z)ds=$（　　　）.

（A）$\frac{2\pi a^3}{3}$　（B）$\frac{\pi a^3}{3}$　（C）$2\pi a^3$　（D）πa^3

4．设 L 为曲线 $y=x^2$ 上从 A（1, 1）到 B（0, 0）的一段弧，则 $\int_L xdy=$（　）.

（A）$\int_0^1 2x^2dx$　(B) $\int_1^0 2x^2dx$　(C) $\int_0^1 xdy$　(D) $\int_0^1 \sqrt{y}dy$.

5．若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数一定收敛的是（　　　）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+a)(0\le a<1)$　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$　（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6．设向量 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, 则垂直于 $\vec{a}$ 且同时垂直于 y 轴的单位向量是 __________.

7．若 $z=\arcsin xy$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$____________.

8．已知 $I=\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$, 交换积分次序后 $I=$________________.

9．设 $\vec{F}(x,y,z)=\left\{e^x\sin y, 2xy^2+z, xzy^2\right\}$, 则 $div\vec{F}\Big|_{(1,0,1)}=$ ___________.

10． $f(x)=\pi x+x^2$ （ $-\pi<x<\pi$ ）的傅里叶级数展开式中系数 $b_3=$___________.

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

得 分	

11．求微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=3, y'\big|_{x=0}=1$ 的特解.

12．求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.

13．计算三重积分 $\iiint\limits_{V} z\,dv$，其中 $V:\dfrac{z^2}{4}\le x^2+y^2\le z^2, 0\le z\le 1$.

14．利用 Green 公式计算第二类曲线积分 $\int_L \left(e^x \sin y - my\right)dx + \left(e^x \cos y - m\right)dy$，其中 L 为从点 $B\left(b,0\right)$ 沿上半圆周 $y=\sqrt{\left(a-b\right)x-x^2}$ 到点 $A\left(a,0\right)$，其中 $a>b>0$.

15．计算第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

装 订 线

答题勿超装订线

16．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}$的收敛域及和函数．

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

得 分	

17．在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使该切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积最小，求切点坐标．

18．设球体$V: x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2$，球体内任一点的体密度为该点到原点距离的平方，求球体的重心位置.

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

得 分	

19．证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$是条件收敛.

安徽大学 2019—2020 学年第二学期

《高等数学 A（二）》（B 卷）参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．A；　**2**．D；　**3**．A；　**4**．B；　**5**．D

二．填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6．$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}-\vec{k}\right)$；　**7**．$\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$；　**8**．$\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f\left(x,y\right)dy$；　**9**．0；　**10**．$\frac{2\pi}{3}$.

三．计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11．解：由特征方程 $r^2+2r+5=0$，得两根 $r_1=-1+2i, r_2=-1-2i$.

故微分方程的通解为 $y=\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)e^{-x}$，两边对 x 求导，得 $y'=\left(\left(2c_2-c_1\right)\cos 2x-\left(c_2+2c_1\right)\sin 2x\right)e^{-x}$，由初始条件 $y\big|_{x=0}=3, y'\big|_{x=0}=1$，得 $c_1=3, c_2=2$，故所求特解为 $y=\left(3\cos 2x+2\sin 2x\right)e^{-x}$．　. . . . .　9 分

12．解：令

$F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-1-z, \vec{n}\Big|_{(2,1,4)}=\left\{2x,2y,-1\right\}\Big|_{(2,1,4)}=\left\{4,2,-1\right\}$

故切平面方程为 $4\left(x-2\right)+2\left(y-1\right)-\left(z-4\right)=0$，即 $4x+2y-z-6=0$

法线方程为 $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$　. . . . .　9 分

13.解: V 在 z 轴上的投影为 $\left[0,1\right]$，在此区间内任取一 z，作垂直 z 于轴的平面，

截得一圆环 $D_z:\frac{z^2}{4}\le x^2+y^2\le z^2$，且它的面积为 $\frac{3\pi}{4}z^2$，用截面法得

$$I=\iiint\limits_V zdxdydz=\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1\frac{3}{4}\pi z^3dz=\frac{3}{16}\pi\ =2\pi\int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr=\frac{16}{3}\pi\ .$$

. . . .　9 分

14. 解：添加直线 $\overline{AB}$，方向由 A 点到 B 点，于是 $\int_{L\cup\overline{AB}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy=-\iint\limits_D mdxdy=-\dfrac{m\pi}{8}(a-b)^2$，而

$\int_{\overline{AB}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy=0$

故 $\int_L\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy=-\dfrac{m\pi}{8}(a-b)^2$

………………… 9 分

15. 解：将 Σ 分为上半球面 $\Sigma_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和下半球面 $\Sigma_2: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$\Sigma$ 在 xoy 面的投影为 D_{xy}：$x^2+y^2\le a^2$，故 $\iint\limits_\Sigma zdxdy=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

………………… 9 分

16．解：

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，得收敛区间 $-1<x<1$．且当 $x=\pm1$ 时，级数均发散，

故收敛域为 $(-1,1)$.　………………… 4 分

令其和函数为 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$，

于是 $s(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，$(-1<x<1)$.

………………… 9 分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

17．解：过椭球面上第一卦限点 (x_0,y_0,z_0) 作切平面，切平面方程为：$\dfrac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\dfrac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$，得与三个坐标轴的交点为 $x=\dfrac{a^2}{x_0},y=\dfrac{b^2}{y_0},z=\dfrac{c^2}{z_0}$. 于是四面体体积为 $V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{a^2b^2c^2}{6}\cdot\dfrac{1}{x_0y_0z_0}$

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

解方程组 $\begin{cases} L_x=yz+\lambda\cdot\frac{2x}{a^2}=0 \\ L_y=zx+\lambda\cdot\frac{2y}{b^2}=0 \\ L_z=xy+\lambda\cdot\frac{2z}{c^2}=0 \\ L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$ ，得唯一驻点 $x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

故所求切点坐标 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

. . . . 10 分

18．解：球心坐标为 $(0,0,a)$，由于该球体的质量分布关于 z 轴对称，所以它的重心坐标位于 z 轴上，而密度函数为 $\rho(x,y)=x^2+y^2+z^2$，故 $\bar{x}=\bar{y}=0,\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz}{\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz}=\frac{5}{4}a.$ 从而球体的重心坐标为 $\left(0,0,\frac{5}{4}a\right)$

. . . . 10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

19．证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$，记 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=1,$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，得原级数非绝对收敛，

但

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}=0,u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2-(n+1)}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)<0$ ，

即 $u_{n+1}<u_n$.

故由莱布尼兹判别法，原级数收敛，且为条件收敛.

. . . . 6 分