安徽大学 2013—2014 学年第二学期

《 高等数学 A(二)、B(二) 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号____________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系______ 年级______ 专业______ 姓名______ 学号______

答 题 勿 超 装 订 线

装 ------ 订 ------ 线

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1．已知 $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$________________.

2．过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1$ 及 $y-3z=2$ 都平行的直线为________________.

3．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sin(xy)-\arcsin(xy)}{x^3y^3}=$________________.

4．设向量场 $\mathbf{F}=xz^3\mathbf{i}-2x^2yz\mathbf{j}+2yz^4\mathbf{k}$，则 $\mathbf{F}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的旋度为________________.

5．设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+x, & -\pi<x<0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

则将 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数为________________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6．设直线 L 为 $\begin{cases}x+y+3z=0\\ x-y-z=0\end{cases}$，平面 π 为 $x-y-z+1=0$，则 L 与 π 的夹角为（　　）.

（A）0；　　（B）$\dfrac{\pi}{2}$；　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$；　　（D）$\dfrac{\pi}{4}$.

7. “函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全微分存在”是“$f(x,y)$在该点连续”的（　　　）条件.

（A）充分非必要；　　　　　　　　（B）必要非充分；

（C）充分必要；　　　　　　　　　（D）既非充分，也非必要.

8. 设$f(x,y)$为连续函数，则累次积分$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$交换积分次序后为（　　　）.

（A）$\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；

（B）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$；

（C）$\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$；

（D）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

9. 若p为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$是（　　）.

（A）$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散；　　（B）$p\le 1$时收敛，$p>1$时发散；

（C）$p>0$时收敛，$p\le 0$时发散；　　（D）$p\le 0$时收敛，$p>0$时发散.

10. 已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{n}x^n$，则其收敛域为（　　　）.

（A）$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$；　（B）$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；　（C）$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$；　（D）$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

得 分	

11. 设空间曲面Σ的方程为$e^z-z+xy=3$，求Σ在点$(2,1,0)$处的切平面与法线方程.

答题勿超装订线

装　订　线

12. 设 $z^3-3xyz=a^3$， 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13. 计算三重积分 $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, 其中 V 由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域.

14. 计算曲线积分 $\int_L [e^x\sin y-(x+y)]dx+(e^x\cos y-x)dy$, 其中 L 为从点 $(2,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 到点 $(0,0)$ 的弧.

15. 计算第一类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上 $z\geq 1$ 的部分.

16. 计算第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^2dydz+(y-1)^2dzdx+(z-1)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$（$z\leq 1$），方向取上侧.

17. 将 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 的和.

得 分	

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

18. 求函数 $z=x^2+y^2-3$ 在附加条件 $x-y+1=0$ 下的极值.

19．已知一条非均匀金属丝 L 的方程为 $L: x = a\cos t$， $y = a\sin t$， $z = bt$， $(0 \le t \le 2p)$. 它在点 (x, y, z) 处的线密度是 $r(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$，求该金属丝的质量.

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

得 分	

20. 设数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1 = 1$， $u_{n+1} = \cos u_n$， 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

安徽大学 2013—2014 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》（A 卷）

考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、8；　2、$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$（或写成$\begin{cases} x+2z-8=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases}$）；　3、$\dfrac{1}{2}$；

4、$\{-2,3,8\}$（或写成$-2\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k}$）；

5、$f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6、A；　7、B；　8、D；　9、C；　10、D.

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 解：令$F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$，则$F_x=y$，$F_y=x$，$F_z=e^z-1$.

故在$(2,1,0)$处曲面Σ的法向量为$\vec{n}=(F_x(2,1,0),F_y(2,1,0),F_z(2,1,0))=(1,2,0)$.

故在$(2,1,0)$处，曲面Σ的切平面方程为$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)+0\cdot(z-0)=0$，

即$x+2y-4=0$.

法线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2} \\ z=0 \end{cases}.\qquad（9 分）$$

12. 解：设$F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，则$F_x=-3yz$，$F_y=-3xz$，$F_z=3z^2-3xy$.

当$F_z\neq 0$时，有$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$；　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$；　（6 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2 - xy}\right)$$

$$= \frac{\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2 - xy) - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} = \frac{\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy}\right)(z^2 - xy) - yz\left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x\right)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$ （9 分）

13. 解: V 由两个曲面所围成,先求两曲面的交线,由 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$

得到 $x^2 + y^2 = 1$， $z = 1$.

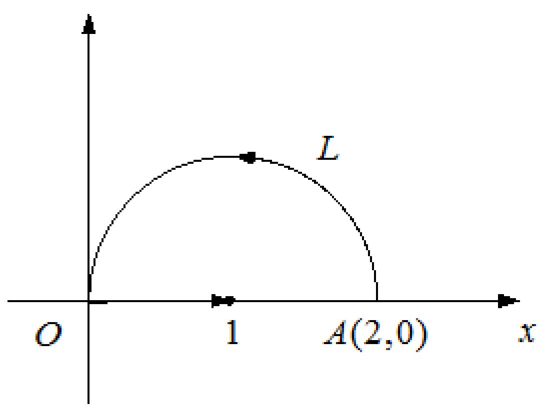
故 V 在 xOy 平面上的投影区域为 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

作柱面坐标变换 $x = r\cos q$ ， $y = r\sin q$ ， $z = z$ ，

则 V 可表示为 $V' = \{(r, q, z) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le q \le 2p, r^2 \le z \le \sqrt{2 - r^2}\}$.

故有 $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2p} dq \int_0^1 r dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z dz = 2p\int_0^1 r g \frac{1}{2}\left(2 - r^2 - r^4\right) dr = \frac{7p}{12}$. （9 分）

14. 解： 如图， L 为半圆周，方向为逆时针，现添加 $\overline{OA}$ 线段，这样 L 与 $\overline{OA}$ 刚好围成一个平面区域 D.



由 Green 公式有

$$\int_L [e^x \sin y - (x + y)]dx + (e^x \cos y - x)dy$$

$$=\left(\int_L+\int_{\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}\right)[e^x\sin y-(x+y)]dx+(e^x\cos y-x)dy$$

$$=\oint_{L+\overline{OA}}[e^x\sin y-(x+y)]dx+(e^x\cos y-x)dy-\int_{\overline{OA}}[e^x\sin y-(x+y)]dx+(e^x\cos y-x)dy$$

$$=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-(x+y))\right\}dxdy$$

$$-\int_0^2[e^x\sin 0-(x+0)]dx+(e^x\cos 0-x)d(0)$$

$$=0+\int_0^2 xdx=2\ .$$ （9 分）

15. 解： 在 Σ 上， $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ ， Σ 在 xOy 面上的投影区域为

$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$.

由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和 xOz 面均对称，故有 $\iint\limits_{\Sigma}xdS=0$ ， $\iint\limits_{\Sigma}ydS=0$.

故 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}zdS$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}}dxdy=6p\ .$$ （9 分）

16. 添加辅助曲面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\,|\,z=1\}$，方向取下侧，则在由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间

闭区域 Ω 上应用高斯公式，

原式

$$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^2dydz+(y-1)^2dzdx+(z-1)dxdy-\iint_{\Sigma_1}(x-1)^2dydz+(y-1)^2dzdx+(z-1)dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^2dydz+(y-1)^2dzdx+(z-1)dxdy$$

$$=-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial((x-1)^2)}{\partial x}+\frac{\partial((y-1)^2)}{\partial y}+\frac{\partial(z-1)}{\partial z}\right)dv$$

$$=-\iiint_{\Omega}[2(x+y)-3]dv$$

$$=-\int_0^{2p}dq\int_0^1dr\int_{r^2}^1[2(r\cos q+r\sin q)-3]rdz$$

$$=\frac{3}{2}p\ .$$ （9 分）

17. 解：

解法 1：因为$[(1+x)\ln(1+x)]'=\ln(1+x)+1=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$， $x\in(-1,1)$，

将上式两端从 0 到 x 逐项积分得到

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n-1)n}，\quad x\in(-1,1)，$$

显然，在 $x=1$ 处，上式右端的幂级数收敛，且函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 连续，故

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}，\quad x\in(-1,1].$$

取 $x=1$，有 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=2\ln 2-1$.　　　　（9 分）

解法 2：利用 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$， $x\in(-1,1]$，得到

$$(1+x)\ln(1+x)=\ln(1+x)+x\ln(1+x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n-1}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n-1}\right]x^n$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}，\quad x\in(-1,1].$$

取 $x=1$，有 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=2\ln 2-1$.　　　　（9 分）

四．应用题（每小题 6 分，共 12 分）

18.

解：构造拉格朗日函数

$$L(x,y,l)=x^2+y^2-3+l(x-y+1)$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+l=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y-l=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial l}=x-y+1=0\end{cases}$$

故得到

$x=-\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{2}$.

由几何意义知，$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 为 L 的极小值点，即为函数 $z=x^2+y^2-3$ 的极小值点，

对应的极小值为 $z|_{(-1/2,1/2)}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3=-\dfrac{5}{2}$.　　（6 分）

19.

解： 弧微分

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}dt$$

故金属丝的质量

$$M=\int_L(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2p}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt$$

$$=\left(2pa^2+\frac{8p^3b^2}{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}.$$　　（6 分）

五．证明题（每小题 5 分，共 5 分）

20.

证明： 反证法

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=0$， $\lim_{n\to\infty}\cos u_n=1$，

这与 $u_{n+1}=\cos u_n$ 矛盾，故假设不成立，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.　　（5 分）