学号______________ 姓名______________ 专业______________ 年级______________ 院/系______________

答题勿超装订线

装--------------------订--------------------线

安徽大学 2015—2016 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》考试试卷（A 卷）

（闭卷　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题　号	一	二	三	四	五	总 分
得　分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1．已知 $|\vec{a}|=10$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=12$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$______________.

2．已知 ΔABC 的三个顶点分别是 $A(1,1,1), B(2,3,4), C(4,1,2)$，则过点 A 的中线方程是

__________________.

3．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=$________________.

4．已知函数 $f(x,y)=x^y$，$x>0, y>0$，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=$____________.

5．设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的定义为：

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases},$$

则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=\pi$ 收敛于____________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6．下列方程表示的直线中，与直线 $L:\begin{cases}x+y+z=1\\ x-y-2z=1\end{cases}$ 平行的是（　　）.

(A) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{-2}$；　　(B) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{-2}$；

(C) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{2}$；　　(D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{2}$.

7. 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，$P_0(x_0,y_0)\in D$ 是其驻点，则点 P_0 是（　　）.

(A) 函数 $f(x,y)$ 的极值点；　　(B) 函数 $f(x_0,y)$ 的极值点；

(C) 函数 $f(x_0,y)$ 的驻点；　　(D) 函数 $f(x,y)$ 在条件 $j(x,y)=0$ 下的极值点.

8. 设 V 为空间上有界闭区域，已知函数 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续且大于 0，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\iiint\limits_V f(x,y,z)dV}=$（　　）.

(A) 1；　　(B) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$；

(C) $\max\limits_V\{f(x,y,z)\}$；　　(D) $\min\limits_V\{f(x,y,z)\}$.

9. 若 $u_n>0, u_{n+1}<u_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a>0$，则下列级数一定收敛的是（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$；　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+u_n}\right)^n$；

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$；　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$.

10. 设 $f=x^2+y^2+z^2$，则 grad f 的散度 **div**(grad f)=（　　）.

(A) 6;　　(B) $2x+2y+2z$；　　(C) $(2x,2y,2z)$；　　(D) (2,2,2).

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

得 分	

11. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

12．设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，其中 y 是由方程 $x=y+j(y)$ 确定的二次可微函数，计算 $\dfrac{d^2z}{dx^2}$.

13.计算二重积分 $\iint\limits_D \left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right| dxdy$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 所围成的区域.

14.选择常数 a,b，使得 $(2ax^3y^3-3y^2+5)dx+(3x^4y^2-2bxy-4)dy$ 是一个 ¡^{2} 上二元可微函数 $U(x,y)$ 的全微分，并求函数 $U(x,y)$ 的表达式.

15.计算第一曲面积分$\iint\limits_{S} x^2 dS$，其中S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围成区域的整个边界曲面.

16.计算第二曲面积分$\iint\limits_{S} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$S$ 为上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的上侧.

17．将函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

线

答 题 勿 超 装 订 线

订

得 分	

四、应用题 （每小题 6 分，共 12 分）

18．求函数 $z=x^2y\left(4-x-y\right)$ 在 $x=0, y=0$ 及 $x+y=6$ 围成的区域上的最大值及最小值.

装

19. 已知分段光滑金属丝 L 为 $x^2+y^2=1$， $y=x$，及 x 轴在第一象限所围成的边界，在其上点 (x,y) 处的线密度是 $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，求该金属丝的质量.

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

得 分	

20. 已知数列 $\{u_n\}$ 满足：$0<u_{n+1}<u_n$ 且 $u_n+u_{n+1}=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,\mathbf{L}$.

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛.

安徽大学 2015—2016 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》考试试卷（A 卷）

参考答案及评分标准

一．填空题（每空 2 分，共 10 分）

1．16；　2．$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$；　3．0；　4．$\left(y\ln x+1\right)x^{y-1}$；　5．$\dfrac{p^2}{2}$

二．选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6．（D）；　7．（C）；　8．（A）；　9．（B）；　10．（A）

三．计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11.解：两边对 x 求导有 $\begin{cases}2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}-3=0\\ 2-3\dfrac{dy}{dx}+5\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$ **KK**3 分

解得 $\overset{\mathbf{r}}{T}_M=\left(16,9,-1\right)$， **KK**5 分

切线：$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$， **KK**7 分

法平面 ： $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$，即 $16x+9y-z-24=0$． **KK**9 分

12.解：对方程 $x=y+j\left(y\right)$ 两边关于 x 求导，有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+j'\left(y\right)}$， **KK**3 分

进一步有 $\dfrac{dz}{dx}=f_1'+f_2'\text{g}\dfrac{1}{1+j'(y)}$， **KK**5 分

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f_{11}''+f_{12}''\frac{dy}{dx}+\left(f_{21}''+f_{22}''\text{g}\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{1+j'\left(y\right)}+f_2'\frac{-j''\left(y\right)}{\left(1+j'\left(y\right)\right)^2}\text{g}\frac{dy}{dx}$$

$$=f_{11}''+\frac{2f_{12}''}{1+j'\left(y\right)}+\frac{f_{22}''}{\left(1+j'\left(y\right)\right)^2}-\frac{f_2'\cdot j''\left(y\right)}{\left(1+j'\left(y\right)\right)^3}$$ **KK**9 分

13.解：计算 $I=\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|dxdy=\iint\limits_{D_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+\iint\limits_{D_2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy$，

其中 $D_1=\left\{x^2+y^2\le 1\right\}, D_2=\left\{1\le x^2+y^2\le 4\right\}$. **KK**6 分

所以有 $I=\int_0^{2p}dq\int_0^1\left(1-r\right)rdr+\int_0^{2p}dq\int_1^2\left(r-1\right)rdr=2p$. **KK**9 分

14.解：依题意有

$\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^4y^2-2bxy-4\right)=12x^3y^2-2by=\frac{\partial}{\partial y}\left(2ax^3y^3-3y^2+5\right)=6ax^3y^2-6y$，所以

$a=2,b=3$. **KK**6 分

这样有 $U\left(x,y\right)=x^4y^3-3xy^2+5x-4y+c$，其中 c 为任意常数. **KK**9 分

15.解：由可加性知 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dS+\iint\limits_{\Sigma_2}x^2dS=I_1+I_2$， **KK**3 分

计算

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dS=\iint\limits_{D}x^2\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\iint\limits_{D}x^2\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\frac{\sqrt{2}p}{4}\text{；}$$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_2}x^2dS=\iint\limits_{D}x^2\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_{D}x^2dxdy=\frac{p}{4}\ .$$

所以，有 $I=\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{p}{4}$. **KK**9 分

16.解：加适当圆面 S_1： $z=0\left(x^2+y^2\le R^2\right)$ 的下侧，这样与它构成封闭曲面，其方向构成正侧，利用高斯公式有

$$\iint\limits_{S(\text{上侧})}xdydz+ydzdx+zdxdy+\iint\limits_{S_1(\text{下侧})}xdydz+ydzdx+zdxdy=I+I_1$$

KK7 分

$$=\iiint\limits_{V}3dxdydz=2pR^3$$

而 $I_1=\iint\limits_{S_1}0dxdy=0$.所以有 $I=2pR^3$. **KK**9 分

17. 解：计算

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\left(x-2\right)+4}+\frac{1}{\left(x-2\right)+1}$$ **KK**5 分

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{x-2}{4}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(x-2\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+1\right)(x-2)^n, \qquad |x-2|<1$$.**KK**9 分

四.应用题 （每小题 6 分，共 12 分）

18.解：$z=x^2y(4-x-y)$ 在 $\bar{D}$ 上连续，所以有最大值和最小值.首先在 D 内求驻点.计算 $\begin{cases} z'_x = xy(8-3x-2y)=0 \\ z'_y = x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$，解得唯一驻点 $P_1(2,1)$. **KK**3 分

其次在 ∂D 上计算驻点，在 $x=0$ 或 $y=0$ 上均有 $z=0$；在 $x+y=6$ 上，构造拉格朗日函数 $F(x,y,l)=x^2y(4-x-y)+l(x+y-6)$，计算驻点，有

$$\begin{cases} F'_x = xy(8-3x-2y)+l=0 \\ F'_y = x^2(4-x-2y)+l=0 \\ F'_l = x+y-6=0 \end{cases}$$ ，解得 $x=0,4$.

所以有 $M=\max\{z(2,1),z(0,6),z(4,2)\}=4,$

$m=\min\{z(2,1),z(0,6),z(4,2)\}=-64$. **KK**6 分

19.解：依题意有，

$$m=\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}ds+\int_{L_2}\sqrt{x^2+y^2}ds+\int_{L_3}\sqrt{x^2+y^2}ds=m_1+m_2+m_3$$

其中 $L_1,L_2,$和L_3 的参数方程分别为

$$L_1:\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}, x\in[0,1]; L_2:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, t\in\left[0,\frac{p}{4}\right]; L_3:\begin{cases} x=x \\ y=x \end{cases}, x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$ **KK**4 分

所以 $m_1=\int_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$, ,

$$m_2=\int_{L_2}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{L_2}ds=\frac{p}{4},$$

$$m_3=\int_{L_3}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2}x\text{g}\sqrt{2}dx=\frac{1}{2},$$

故 $m=1+\frac{p}{4}$. **KK**6 分

五.证明题（每小题 5 分，共 5 分）

20.证明：依题意，有 $\frac{1}{2n} < u_n < \frac{1}{n}$， **KK**4 分

易知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛. **KK**5 分