2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　　）

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则（　　）

(A) 当 $f'(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$

(C) 当 $f'(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$

（3）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则（　　）

(A) $M>N>K$　　(B) $M>K>N$　　(C) $K>M>N$　　(D) $K>N>M$

（5）下列矩阵中，与矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似的为（　　）

(A) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

（6）设 A、B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，(X,Y) 表示分块矩阵，则（　　）

(A) $r(A,AB)=r(A)$　　(B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　(D) $r(A,B)=r(A^T,B^T)$

（7）设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则 $p\{X0\}=$（　　）

(A) 0.2　　(B) 0.3　　(C) 0.4　　(D) 0.6

（8）已知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$，$S^*=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$，则（　　）

(A) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$　　(B) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$

(C) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n)$　　(D) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$

【答案】B

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9） $f(x)=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程为__________.

（10） $\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx=$__________.

（11）差分方程 $\Delta^2 y_x-y_x=5$ 的解为__________.

（12）已知　且 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$，$f(0)=2$，则 $f(1)=$__________.

（13）设 A 为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的向量组，若 $A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$，则 A 的实特征值为__________.

（14）已知事件 A,B,C 相互独立，且 $p(A)=p(B)=p(C)=\frac{1}{2}$，则 $p(AC|A\cup B)$__________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求不定积分 $\lim_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]=2$，求 a,b

（16）（本题满分 10 分）

求 $\iint_D x^2dxdy$， D 是由 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与 $y=\sqrt{3}x$， y 轴围成

（17）（本题满分 10 分）

一根绳长为 2m，截成三段，分别折成圆、正三角形、正方形，这三段分别为多长时所得的面积总和最小，并求该最小值

（18）（本题满分 10 分）

已知 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，求 a_n.

（19）（本题满分 10 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0,x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$.证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

（20）（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数.

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

（21）（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（1）求 a；

（2）求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P.

（22）（本题满分 11 分）

已知随机变量 X,Y 相互独立，且 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布，$Z=XY$

（1）求 $\mathrm{cov}(X,Z)$；

（2）求 Z 的分布律

（23）（本题满分 11 分）

已知总体 X 的密度函数为 $f(x,\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$，$-\infty<x<+\infty$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，σ 为大于 0 的参数，σ 的最大似然估计量为 σ

（1）求 σ；

（2）求 $E\sigma$，$D\sigma$

（答案待修正中，关注金程考研持续更新）