院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学 2018—2019 学年第二学期

《 高等数学 A（二）》考试试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 直线 $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 与平面 $2x+y-z-3=0$ 的夹角是________________.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x)^{\frac{1}{x(1+xy)}}=$________________ .

3. 交换 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_0^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$ 积分次序为________________.

4. 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点沿任意方向的方向导数为______________ .

5. 已知 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $(-\pi,\pi]$ 上 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases},$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于____________.

得 分	

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L（　　）.

A. 平行于 π　　B. 在 π 上　　C. 垂直于 π　　D. 与 π 斜交

7. 设 $f\left(x,y\right)$ 为连续函数，且 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le t^2\right\}$，则 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=$（　）

A　$f\left(0,0\right)$　　B　$-f\left(0,0\right)$　　C　$f'\left(0,0\right)$　　D　不存在

8. 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,则函数 z 在点 $\left(0,0\right)$ 处（　　）.

A 不连续　　　　B 连续，但偏导数不存在

C 连续且偏导数都存在，但不可微　D 可微

9. 常数 $a>0$，则第一类曲面积分 $\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} x^2dS=$（　）.

A　$\dfrac{4}{3}\pi a^4$　　B　$\dfrac{4}{3}\pi a^2$　　C　$4\pi a^4$　　D　$4\pi a^2$

10. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin na}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$（$a$ 为常数）（　　）.

A 绝对收敛　　B 条件收敛　　C 发散　　D 收敛性与 a 有关

得 分	

三、计算题（每小题 6 分，共 60 分）

11. 求曲面 $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$ 上点 $(1,2,-1)$ 处的切平面和法线方程.

12. 设 $z=f(xy,x^2+y^2)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数.

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

13. 计算曲线积分 $\int_L \dfrac{\left(xe^x+5y^3x^2+x-4\right)dx-\left(3x^5+\sin y\right)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为从点 $A\left(-1,0\right)$ 沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 到点 $B\left(1,0\right)$ 一段弧.

14. 计算曲面积分 $\iint\limits_S \left(x^3+az^2\right)dydz+\left(y^3+ax^2\right)dzdx+\left(z^3+ay^2\right)dxdy$ ，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

15. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

16. 将 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

四、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

得 分	

17. 已知一条非均匀金属丝 L 放置于平面 xOy 上，刚好为抛物线 $y=x^2$ 对应于 $0\le x\le 1$ 的那一段，且它在点 (x,y) 处的线密度为 $\rho(x,y)=x$，求该金属丝的质量 .

18. 求二元函数$z = f(x,y) = x^2 y(4-x-y)$在直线$x+y=6$，$x$轴和$y$轴所围成的区域D上的最大值和最小值

得 分	

五、证明题（每小题6分，共6分）

19. 已知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

安徽大学 2018—2019 学年第二学期

《高等数学 A（二）》考试试卷（B 卷）

考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、 $\dfrac{\pi}{6}$　　2、 e　　3、 $\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$　　4、 1　　5、 $-\dfrac{\pi}{2}$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6、 C　　7、 A　　8、 C　　9、A　　10、 C

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11、【解】令 $F(x,y,z)=x^2yz+3y^2-2xz^2+8z$ ，则曲面在 $(1,2,-1)$ 处的法向量为

$$\vec{n}\Big|_{(1,2,-1)}=(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_{(1,2,-1)}=(-6,11,14)$$ 6 分

所求切平面方程为

$$-6(x-1)+11(y-2)+14(z+1)=0\text{，即 }6x-11y-14z+2=0$$

所求法线方程为

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{14}$$ 10 分

12、【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1+2xf_2$ 5 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1+y[xf_{11}+2yf_{12}]+2x[xf_{21}+2yf_{22}]=f_1+xy[f_{11}+4f_{22}]+2(x^2+y^2)f_{12}$$ 10 分

13、【解】原式 $=\int_L\left(xe^x+5y^3x^2+x-4\right)dx-\left(3x^5+\sin y\right)dy$

添加 $\overrightarrow{BA}:y=0$ ， $x:1\to -1$ ；

则 $\int_L=\oint_{L+\overrightarrow{BA}}-\int_{\overrightarrow{BA}}$ ；

利用格林公式可得

$$\oint_{L+\overrightarrow{BA}}=-\iint_D(-15x^4-15x^2y^2)dxdy=15\iint_D(x^4+x^2y^2)dxdy$$

$$=15\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1(r^4\cos^4\theta+r^4\cos^2\theta\sin^2\theta)\cdot rdr=15\int_0^{\pi}(\cos^4\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta)\cdot\frac{1}{6}d\theta$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos^4\theta+\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)\right]d\theta=\frac{5}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{5\pi}{4}\text{；}$$ 7 分

$\int_{\overrightarrow{BA}}=\int_1^{-1}(xe^x+x-4)dx=-2e^{-1}+8$ ； 9 分

原式$=\dfrac{5\pi}{4}-8+2e^{-1}$ 10 分

14、【解】添加 $S_1: z=0$，方向向下，

则 $$\iint\limits_{S}=\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1};$$

$$\oiint\limits_{S+S_1}=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\,dV=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dV$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{6\pi}{5}a^5;$$ 6 分

$$\iint\limits_{S_1}\overset{\text{垂直性}}{=}\iint\limits_{S_1}(z^3+ay^2)\,dxdy=\iint\limits_{S_1}ay^2\,dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}ay^2\,dxdy \qquad D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$$

$$=-a\iint\limits_{D_{xy}}y^2\,dxdy=-a\cdot\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy=-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\cdot r^2dr=-\frac{\pi}{4}a^5;$$ 9 分

原式$=\dfrac{6\pi}{5}a^5+\dfrac{\pi}{4}a^5=\dfrac{29}{20}\pi a^5$ 10 分

15、【解】$\because l=\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1,\therefore$ 收敛半径为$R=\dfrac{1}{l}=1,$

当$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ $\because\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$ $\quad\therefore$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$发散

当$x=-1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$ 也发散,

则级数的收敛域为(-1, 1).

设和函数为：$s(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$

两边由0到x积分，

得:$\int\limits_0^x s(t)\mathrm{d}t=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=x(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)=\dfrac{x}{1-x}$

两边对x求导，即得$s(x)$,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_0^x s(t)\mathrm{d}t=(\dfrac{1}{1-x}-1)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$\therefore s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$

8 分

取$x=\frac{1}{2}$,则有：　$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4;\therefore \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$　　10 分

16、【解】$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{4+(x-1)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{4}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)\cdot(x-1)^n\ ;$$　　8 分

又$\begin{cases}\left|-\frac{x-1}{2}\right|<1\Rightarrow |x-1|<2\\ \left|-\frac{x-1}{4}\right|<1\Rightarrow |x-1|<4\end{cases}\Rightarrow |x-1|<2$；

则 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)\cdot(x-1)^n\qquad (|x-1|<2)$.　　10 分

四、综合题（每小题 7 分，共 14 分）

17、【解】由质量公式得

$$M=\int_L \rho(x,y)ds$$
$$=\int_L xds=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx$$
$$=\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

18、【解】先求出函数在 D 上的所有驻点和偏导数不存在的点,解方程得：

$$\begin{cases}f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0\\ f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$$

得到区域 D 内的唯一驻点(2, 1)，且 $f(2,1)=4$

再求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最值.

在边界 x=0 和 y=0 上 $f(x,y)$ =0

在边界 x+y=6 上，即 y=6－x，于是 $f(x,y)=-2x^2(6-x)$

有 $f_x=4x(x-6)+2x^2=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=4 \Rightarrow y=6-x|_{x=4}=2,\ f(4,2)=-64$

比较后得到 $f(2,1)=4$ 为最大值， $f(4,2)=-64$ 为最小值.　　　　　　　　　　　7 分

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

19、【证明】正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$，即 $\exists M>0, \forall n$，有 $|u_n|\le M$，

又级数为正项级数，可知 $u_n\le M$，从而可得 $u_n^2\le Mu_n$，再由正项级数的比较判别

费可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　6 分