安徽大学 2013—2014 学年第二学期

《 高等数学 A(二)、B(二) 》考试试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系______ 年级______ 专业______ 姓名______ 学号______

答 题 勿 超 装 订 线

题　号	一	二	三	四	五	总分
得　分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 已知 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=1$，则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$________________.
2. 过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程为__________________.
3. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ y\to0}}\dfrac{\tan(xy)}{y}=$________________.
4. 设向量场 $\vec{\mathbf{F}}=(2z-3y)\vec{\mathbf{i}}+(3x-z)\vec{\mathbf{j}}+(y-2x)\vec{\mathbf{k}}$，则 $\vec{\mathbf{F}}$ 的旋度为________________.
5. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=3x^2+1$，则将 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数为________________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 设直线 L 为 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$，平面 π 为 $3x-2y+7z=8$，则 L 与 π 的夹角为（　　）.

　（A）0；　　（B）$\pi/2$；

　（C）$\pi/3$；　　（D）$\pi/4$.

7. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　）条件.

　（A）充分非必要；　　（B）必要非充分；

　（C）充分必要；　　（D）既非充分，也非必要.

8. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则累次积分 $\int_0^1 dy\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ 交换积分次序后为（　　）.

　（A）$\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；

　（B）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$；

　（C）$\int_{-1}^0 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；

　（D）$\int_{-1}^0 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

9. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列级数必收敛的是（　　）.

（A） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$；　　（B） $\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$；

（C） $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$；　　（D） $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

10. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n}$，则其收敛域为（　　）.

（A） $[4,6]$；　　（B） $[4,6)$；

（C） $(4,6]$；　　（D） $(4,6)$.

得 分	

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 设空间曲线 L 的方程为 $x=\frac{t}{1+t}, y=\frac{1+t}{t}, z=t^2$，求 L 在 $t=1$ 的点处的切线与法平面方程.

12. 设 $x^2+y^2+z^2=4z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

13．计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$，其中 V 由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

14.计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$,其中 L 为正方形 $|x|+|y|=1$，方向为逆时针方向.

15. 计算第一类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面.

16. 计算第二类曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，方向取外侧.

17. 将 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

线

答 题 勿 超 装 订 线

订

得 分	

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

18. 求函数 $f(x,y,z)=x+y+2z$ 在附加条件 $x^2+y^2+z^2=4$ 下的极值.

装

19．已知一条非均匀金属丝 L 的方程为 $L: x=e^t\cos t$， $y=e^t\sin t$， $z=e^t$，$(0\le t\le 2)$. 它在点 (x,y,z) 处的线密度是 $r(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$，求该金属丝的质量.

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

得 分	

20. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

安徽大学 2013—2014 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》（B 卷）

考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、2； 2、$3x-7y+5z-4=0$； 3、2；

4、$\{2,4,6\}$（或写成 $2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$）；

5、 $f(x)=p^{2}+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}\cos nx$， $-\infty<x<+\infty$.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6、B； 7、D； 8、C； 9、D； 10、B.

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 解：曲线在对应于 $t=1$ 的点为 $\left(\frac{1}{2},2,1\right)$，该点处的切向量为

$$\vec{n}=(x'(1),y'(1),z'(1))=\left(\frac{1}{(1+t)^{2}},-\frac{1}{t^{2}},2t\right)\bigg|_{t=1}=\left(\frac{1}{4},-1,2\right)$$

故曲线在该点处的切线方程为 $\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$，即 $\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}$.

法平面方程为 $\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y-2)+2(z-1)=0$，

即 $2x-8y+16z-1=0$. （9 分）

12. 解：令 $F(x,y,z)=x^{2}+y^{2}+z^{2}-4z$，则 $F_{x}=2x$， $F_{y}=2y$， $F_{z}=2z-4$。

当 $F_{z}\neq 0$ 时，有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_{x}}{F_{z}}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z}$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{(2-z)-x(0-\frac{\partial z}{\partial y})}{(2-z)^2}=\frac{2-z+xz_x}{(2-z)^2}=\frac{2-z+\frac{x^2}{2-z}}{(2-z)^2}$$

$$=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$ (9 分)

13. 解：由 $x^2+y^2=2z$ 及 $z=2$ 消去 z，得到 $x^2+y^2=4$，故 V 在 xOy 平面上的投影区域为 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$。

作柱面坐标变换 $x=r\cos q$， $y=r\sin q$， $z=z$，

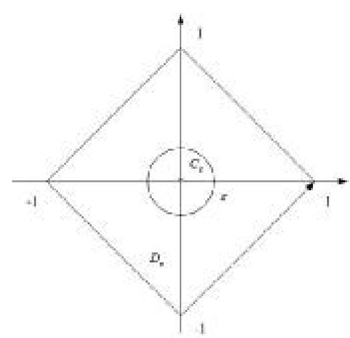
则 V 可表示为 $V'=\{(r,q,z)\,|\,0\le r\le 2, 0\le q\le 2p, r^2/2\le z\le 2\}$。

故有 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2p}dq\int_0^2 r^3dr\int_{r^2/2}^2 dz$

$$=\int_0^{2p}dq\int_0^2 r^3(2-r^2/2)dr$$

$$=\frac{16p}{3}.$$ （9 分）

14. 解：如图



令 $P(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$， 则

$I=\oint_L Pdx+Qdy$， 设 L 所围闭区域为 D， 故

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 。

取一小圆周 $C_e: x^2+y^2=e^2, e>0$ 充分小，使得 C_e 位于 D 内，设 L 与 C_e 所围成的区域为 D_e， 则 P,Q 在 D_e 内有连续的偏导数，于是由 Green 公式得

$\int_{L^+} Pdx+Qdy=\iint\limits_{D_e}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$， 即

$\int_{L^+} Pdx+Qdy=-\int_{C_e^-} Pdx+Qdy=\int_{C_e^+} Pdx+Qdy$

$$\overset{x=e\cos q}{\underset{y=e\sin q}{=\!=\!=\!=}}\int_0^{2p}\frac{(e\sin q)(-e\sin q)-(e\cos q)(e\cos q)}{e^2}dq=-\int_0^{2p}dq=-2p$$ 。（9 分）

15. 解： Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成，其中 Σ_1 为平面 $z=1$ 上被圆周 $x^2+y^2=1$ 所围的部分；

Σ_2 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ （$0\le z\le 1$）。

在 Σ_1 上，$dS=dxdy$；在 Σ_2 上，$dS=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$ 。

Σ_1 和 Σ_2 在 xoy 平面上的投影区域 D_{xy} 均为 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，故

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy=(1+\sqrt{2})\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$

用极坐标变换，上式 $=(1+\sqrt{2})\int_0^{2p}dq\int_0^1 r^3dr=\frac{1+\sqrt{2}}{2}p$ （9 分）

16. 解： 直接应用高斯公式，

$$\text{原式}=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=3\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dv$$

$$=3\int_0^{2p}dq\int_0^{p}dj\int_0^{a}r^2 g r^2\sin j\,dr$$

$$=\frac{12}{5}p\,a^5\ .$$ （9 分）

17. 解： 因为 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ， $x\in(-1,1)$

而 $\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}g\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}g\frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)}=\frac{1}{3}g\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n$ ， $\frac{3-x}{3}\in(-1,1)$

即 $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}g\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}(x-3)^n$ ， $x\in(0,6)$ （9 分）

四．应用题（每小题 6 分，共 12 分）

18. 解： 令 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$ ， 故 $g(x,y,z)=0$ 。令拉格朗日函数

$$F(x,y,z,l)=f(x,y,z)+lg(x,y,z)=x+y+2z+l\left(x^2+y^2+z^2-4\right)$$

$$F_x=1+2lx \qquad F_y=1+2ly \qquad F_z=2+2lz \qquad F_l=x^2+y^2+z^2-4$$

令 $\begin{cases} 1+2lx=0 \\ 1+2ly=0 \\ 2+2lz=0 \\ x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases}$

当 $l=0$，代入 $1+2lx=0$，则 $1=0$ 矛盾。

故 $l\neq 0$，则 $x=\dfrac{-1}{2l},y=\dfrac{-1}{2l},z=\dfrac{-1}{l}$，代入 $x^2+y^2+z^2-4=0$，

得 $l=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $\dfrac{-\sqrt{6}}{4}$。

当 $l=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，则 $(x,y,z)=\left(\dfrac{-\sqrt{6}}{3},\dfrac{-\sqrt{6}}{3},\dfrac{-2\sqrt{6}}{3}\right)$。

当 $l=\dfrac{-\sqrt{6}}{4}$，则 $(x,y,z)=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$。

$$f\left(\frac{-\sqrt{6}}{3},\frac{-\sqrt{6}}{3},\frac{-2\sqrt{6}}{3}\right)=-2\sqrt{6}<f\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=2\sqrt{6}$$

故 $f\left(\dfrac{-\sqrt{6}}{3},\dfrac{-\sqrt{6}}{3},\dfrac{-2\sqrt{6}}{3}\right)=-2\sqrt{6}$ 为绝对极小值，

$f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)=2\sqrt{6}$ 为绝对极大值。（6 分）

19. 解： 弧微分 $ds=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$

$$=\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t)^2}\,dt=\sqrt{3}e^t dt$$

故金属丝的质量 $M=\displaystyle\int_L\frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds=\int_0^{2p}\frac{1}{e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}}\sqrt{3}e^t dt=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$.（6 分）

五．证明题（每小题 5 分，共 5 分）

20.证明：由题知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$，

由极限的定义知，存在正整数 N，当 $n\geq N$ 时，有 $u_n+v_n<1$，故 $(u_n+v_n)^2<u_n+v_n$，

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.（5 分）