安徽大学 2022—2023 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末试卷（B 卷）

（闭卷，时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

得 分	

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n-1}{2n^2+4}=$__________________.

2. 当 $x\to 0$ 时，$\sin ax^2$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$______________________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}=$__________________.

4. 设 $y=e^{2022x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$_____________.

5. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2023}xdx=$__________________.

得 分	

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{3}f'(x_0)$　（B）$-\dfrac{1}{3}f'(x_0)$　（C）$3f'(x_0)$　（D）$-3f'(x_0)$

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 a 满足（　　）

A. a=1　B. a=0　C. a 为无穷大　D. 无法确定

8. 下列各式**不正确**的是（ ）

A. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du$　B. $\int_a^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx=0$

C. $\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$　D. $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\dfrac{\pi a^2}{2}$

9. 若函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$,则 $x=0$ 是其(　)

A. 连续点　　　　　　　　　　B. 无穷间断点

C. 跳跃间断点　　　　　　　　D. 可去间断点

10. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列命题**错误**的是（ ）

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　　B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(x)$在$x=0$ 可导　D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(x)$在$x=0$ 可导

三、计算题（每题 9 分，共 54 分）

得　分	

11. 计算数列 $a_n=\dfrac{1}{1\bullet 2}+\dfrac{1}{2\bullet 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\bullet n}$ 的极限.

12. 计算函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}$.

13. 计算 $y=e^{3x}\sin 2x+\ln\sqrt{1+x^2}$ 的导函数 $y'(x)$.

14. 计算不定积分 $\int \frac{1}{9+x^2}dx$.

15. 计算定积分 $\int_1^e \ln x dx$.

16. 求一阶微分方程 $(1+y)dx+(x-1)dy=0$ 的通解.

四、应用题（共 10 分）

得　分	

17. 过原点作曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线，设此曲线、切线及 x 轴所围成的平面图形为 A，计算图形 A 的面积.

五、证明题（共 6 分）

得　分	

18. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上可导，且 $f(1)=0$，证明：在 $\left(0,1\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

安徽大学 2022—2023 学第一学期

《高等数学 A 一》期末 B 卷答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 1/2
2. -1/2
3. 3
4. $e^{2022x}\cdot 2022$
5. 0

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、D　7、B　8、C　9、D　10、D

三、计算题（共 54 分，每题 9 分）

11. 解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\bullet n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1$$

12. 解：由定积分定义可知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x-1}{1+x}\right)^{2x}$$

$$=e^{-2}$$

13 解：

$$y=e^{3x}\sin 2x+\ln\sqrt{1+x^2}$$

$$y'=3e^{3x}\sin 2x+2e^{3x}\cos 2x+\frac{x}{1+x^2}$$

14 解：

$$\int\frac{1}{9+x^2}dx=\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+c$$

15:解：

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = 1$$

16 解：可分离变量

$$(1+y)dx+(x-1)dy=0$$

$$\ln|1+y| = -\ln|1-x| + c_1$$

$$(1+y)(1-x)=C$$

其中C为任意常数

四：应用题（共 10 分）

17 解：

$$y=\sqrt{x-1}$$

切点（$x_0,\sqrt{x_0-1}$)

$$y-\sqrt{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$$

$$\because x=0, y=0$$

$$\therefore x_0=2, y_0=1$$

$\therefore$ 切线方程为$y=\dfrac{x}{2}$

$$S=\int_0^1(1+y^2-2y)dy=\frac{1}{3}$$

五、证明题（共 6 分）

18 解：令

$$F(x)=xf(x)$$

$$F(0)=F(1)=0$$

$\therefore$由罗尔中值定理可知，$\exists\xi\in$（0, 1），$F'(\xi)=0$

$$\therefore \xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$