安徽大学2021-2022学年第二学期

《高等数学A（一）》期末试卷（A卷）

（闭卷　满分100分　时间120分钟）

考场登记表序号________

题号	一	二	三	总分
得分				
阅卷人				

专业________ 院/系________ 学号________ 姓名________ 座号________

答题勿超装订线　　装　　订　　线

一．选择题（每小题3分，共15分）

1．设函数$f(x)$在$x=1$处连续但不可导，则下列在$x=1$处可导的函数是（　　）

$A.\ (x^2-1)f(x)$　　$B.\ f(x)x^2$　　$C.\ f(x^2)$　　$D.\ f(x)(x+1)$

2．设函数$f(x)$满足微分方程$f''(x)-f'(x)-\pi f(x)=0$，且$f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则函数$f(x)$在点处在x_0处（　　）

$A.$ 取极大值　　$B.$ 取极小值　　$C.$ 附近单调增加　　$D.$ 附近单调减少

3．下列广义积分中，收敛的是（　　）

$A.\ \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$　　$B.\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$　　$C.\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$　　$D.\ \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}dx$

4．下列说法正确的是（　　）

$A.$ 若数列$\{a_n^2\}$收敛，则数列$\{a_n\}$必收敛；

$B.$ 若数列$\{a_n\}$收敛、$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调有界，则$\{f(a_n)\}$不一定收敛；

$C.$ 若数列$\{a_n\}$收敛于a、数列$\{b_n\}$发散，则数列$\{a_nb_n\}$必发散；

$D.$ 若数列$\{a_{3n-2}\}$与数列$\{a_{3n-1}\}$均收敛于a，则数列$\{a_n\}$也收敛于a.

5．星形线$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$（$a>0$）在$t$从0到$2\pi$上的全长为（　　）

$A.\ 6a$　　$B.\ 3a$　　$C.\ 6\pi a$　　$D.\ 3\pi a$

二. 填空题（每小题3分，共15分）

6. 若函数$f(x)$在$\left[0,+\infty\right)$上连续，且满足$\int_0^{x^2(x+1)} f(t)dt = 15x$，则$f(2) =$__________.

7. 曲线$y = x^2(x-2)^2$有__________个拐点.

8. 设常数$a>0$，则$\frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx =$__________.

9. $x\in\left[0,\pi\right]$时，曲线$y=\frac{\sin x}{\pi^2}$与x轴围成的图形绕y轴旋转而成的立体体积为_______.

10. 曲线 $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}} \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ 在$t=1$处的曲率为________.

三. 计算及证明题（每小题10分，共70分）

11. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2021}\right)^n$.

12. 设函数$f(x)=x^{x}, x\in\left(0,+\infty\right)$,求$f'(x)$及$\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)$.

13. 求不定积分$\int e^{x}\cos x dx$.

14. 求曲线$y=\sqrt{1+x^{2}}$的斜渐近线、及其在点(0,1)处的法线方程.

15. 计算定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{\cos x}\sin^3 x+\sin^2 x\right)dx.$

16. 求微分方程 $y+xy'=e^x$，$y(1)=e$ 的解.

17. 运用Rolle（罗尔）中值定理证明Lagrange（拉格朗日）中值定理：设$f(x)$满足(i)在$[a,b]$连续、(ii)在(a,b)可导，则至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

《高等数学A（一）》期末A卷答案解析

一. 选择题（每小题3分，共15分）

1. 设函数$f(x)$在$x=1$处连续但不可导，则下列在$x=1$处可导的函数是（ A ）

$A.\ (x^2-1)f(x)$　　$B.\ f(x)x^2$　　$C.\ f(x^2)$　　$D.\ f(x)(x+1)$

$f(x)$在$x=1$处连续但不可导 $\Rightarrow$ $f(1)$存在，但$f'(1)$不存在。

A. 记$A(x)=(x^2-1)f(x)$　$A'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$　$A'(1)=2f(1)$　存在

B. 记$B(x)=f(x)x^2$　$B'(x)=f'(x)\cdot x^2+2xf(x)$　$B'(1)=f'(1)+2f(1)$　不存在

C. 记$C(x)=f(x^2)$　$C'(x)=f'(x^2)\cdot 2x$　$C'(1)=f'(1)2$　不存在

D. 记$D(x)=f(x)(x+1)$　$D'(x)=f'(x)(x+1)+f(x)$　$D'(1)=2f'(1)+f(1)$　不存在

只要含有$f'(1)$，则不存在。$\Rightarrow$ 只有A符合题意

2. 设函数$f(x)$满足微分方程$f''(x)-f'(x)-\pi f(x)=0$，且$f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则函数$f(x)$在点处在x_0处（ B ）

$A.$ 取极大值　　$B.$ 取极小值　　$C.$ 附近单调增加　　$D.$ 附近单调减少

代入$x=x_0$。 $f''(x_0)-f'(x_0)-\pi f(x_0)=0 \Rightarrow f''(x_0)=\underbrace{f'(x_0)}_{=0}+\pi\underbrace{f(x_0)}_{>0}>0$.

$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $f(x)$在$x=x_0$处取极小值。选B.

3. 下列广义积分中，收敛的是（ C ）

$A.\ \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$　　$B.\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}$　　$C.\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$　　$D.\ \int_\pi^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx$

A. $\int_0^2\frac{dx}{\ln x}=\int_0^1\frac{dx}{\ln x}+\int_1^2\frac{dx}{\ln x}$，$x=1$为奇点。 $x>1$时，$\ln x<x-1 \Rightarrow \frac{1}{\ln x}>\frac{1}{x-1}$

故$\int_1^2\frac{dx}{\ln x}>\int_1^2\frac{dx}{x-1}=\ln(x-1)\Big|_1^2=+\infty$ 发散。 奇点单侧发散 $\Rightarrow$ 总体也发散。

B. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}=+\infty$。 发散。

C. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$。 $\boxed{\text{收敛}}$.

D. $\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx \approx \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln x\Big|_0^{+\infty}=+\infty$。 发散

4. 下列说法正确的是（ B ）

A. 若数列$\{a_n^2\}$收敛，则数列$\{a_n\}$必收敛；

B. 若数列$\{a_n\}$收敛、$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调有界，则$\{f(a_n)\}$不一定收敛；

C. 若数列$\{a_n\}$收敛于a、数列$\{b_n\}$发散，则数列$\{a_nb_n\}$必发散；

D. 若数列$\{a_{3n-2}\}$与数列$\{a_{3n-1}\}$均收敛于a，则数列$\{a_n\}$也收敛于a.

A. 若 $a_n=(-1)^n$. 则不成立.

B. 若 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$. $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0.\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$ 不存在. 发散

若 $a_n=\frac{1}{n}$, $f(x)=x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 收敛

不一定收敛（正确）

C. 若 $a_n=0$, $b_n=n$. 则 $a_nb_n=0$. 收敛.

D. 由于第三个子列$\{a_{3n}\}$的敛散性未知. 故$\{a_n\}$不一定收敛于 a.

5. 星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$（$a>0$）在$t$从0到$2\pi$上的全长为（ A ）

$A.\ 6a$ $B.\ 3a$ $C.\ 6\pi a$ $D.\ 3\pi a$

$\begin{cases}x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t\\ y'(t)=3a\sin^2 t\cos t\end{cases}$

$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=3a\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$

$=\frac{3a}{2}\int_0^{2\pi}|2\cos t\sin t|\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,dt$

$=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin 2t\,dt=6a\cdot(-\frac{\cos 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$

二. 填空题（每小题3分，共15分）

6. 若函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足$\int_0^{x^2(x+1)}f(t)dt=15x$，则$f(2)=$____3____.

两边同时对x求导. $f(x^2(x+1))(3x^2+2x)=15$.

代入$x=1$得: $f(2)\cdot 5=15 \Rightarrow f(2)=3$

7. 曲线$y=x^2(x-2)^2$有____2____个拐点.

$y=x^4-4x^3+4x^2$,

$y'=4x^3-12x^2+8x$

$y''=12x^2-24x+8=4(3x^2-6x+2)$

$g(x)=3x^2-6x+2$,

令 $g(x)=0$. $\Delta=6^2-4\cdot3\cdot2>0$. 故有两不同实根.

$\Rightarrow g(x)$在$(-\infty,+\infty)$会变号2次 $\Rightarrow$ 有2个拐点.

8. 设常数$a>0$，则$\dfrac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=$______1______.

令 $x=a\sin t$，$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. $dx=a\cos t\,dt$. $\cos t\geq 0$.

则 $\frac{2}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{2}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\cos t\,dt=\frac{2a^2}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$=\frac{1}{\pi}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}(\pi+0)=1$

9. $x\in[0,\pi]$时，曲线$y=\dfrac{\sin x}{\pi^2}$与x轴围成的图形绕y轴旋转而成的立体体积为____2____.

令 $f(x)=\frac{\sin x}{\pi^2}$ $x\in[0,\pi]$.

$V_y=\int_0^{\pi}2\pi x f(x)dx=2\pi\int_0^{\pi}x\cdot\frac{\sin x}{\pi^2}dx=\frac{2\pi}{\pi^2}\int_0^{\pi}x\cdot(-d\cos x)=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx\right)$

$=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\sin x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}[(-1)(-\pi)-0+0]=2$

10. 曲线$\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}\\ y=3t-t^3\end{cases}$在$t=1$处的曲率为_____3____.

$\begin{cases}x'(t)=\frac{2t}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}t\\ y'(t)=3-3t^2\end{cases}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3-3t^2}{\sqrt{2}t}=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t}-t\right)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{t^2}-1\right)}{\sqrt{2}t}=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t}\right)$

$\rho\Big|_{t=1}=\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=1}=\frac{|-3|}{(1+0)^{3/2}}=\frac{3}{1}=3$

三. 计算及证明题（每小题10分，共70分）

11. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2021}\right)^n$.

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2022}{n-2021}\right)^n\ \xlongequal[n\to\infty\ \Rightarrow\ t\to\infty]{\text{令}t=\frac{n-2021}{2022},\ n=2022t+2021}\ \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2022t+2021}$

$=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{2022}\cdot\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^{2021}=e^{2022}\cdot 1=e^{2022}$

12. 设函数$f(x)=x^x, x\in(0,+\infty)$,求$f'(x)$及$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

解: $f'(x)=(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=x^x(\ln x+1)$.

求导也可用对数法: 令$y=x^x$, $\Rightarrow \ln y=x\ln x$, 两边同时对x求导:

$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+1 \Rightarrow y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)}=e^0=1$$

13. 求不定积分$\int e^x\cos x dx$.

解: 该题需做2次分部积分, 并结合递推公式求解.

$I=\int e^x\cos x dx=\int\cos x de^x=\cos x\cdot e^x-\int e^x d\cos x=\cos x\cdot e^x+\int e^x\sin x dx$

$=\cos x\cdot e^x+\int\sin x de^x=\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x-\int e^x d\sin x$

$=e^x(\cos x+\sin x)-\int e^x\cos x dx=e^x(\cos x+\sin x)-I+C_1$

故有: $2I=e^x(\cos x+\sin x)+C_1 \Rightarrow I=\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+C \quad (C=\frac{C_1}{2})$

14. 求曲线$y=\sqrt{1+x^2}$的斜渐近线、及其在点(0,1)处的法线方程.

解: $x\to+\infty$时. $a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$.

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0$ $\Bigg\}\Rightarrow y=x$

$x\to-\infty$时, $a_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{1}{(-x)^2}+1}=-1$

$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$ $\Bigg\}\Rightarrow y=-x$.

令$f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f'(0)=0$, $\Rightarrow k_{切}=0$, $k_{法}=\infty$.

法线垂直于x轴、且过$(0,1)$ $\Rightarrow x=0$.

故所求斜渐近线方程为: $y=\pm x$. 法线方程为 $x=0$.

15. 计算定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{\cos x}\sin^3 x+\cos^2 x\right)dx$.

解：由于积分区间关于原点对称，且 $\begin{cases} e^{\cos x}\sin^3 x \text{ 为奇函数} \\ \sin^2 x \text{ 为偶函数} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 奇零偶倍

$$\Rightarrow \text{原式} = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx - \left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi$$

16. 求微分方程 $y+xy'=e^x$，$y(1)=e$ 的解.

解：$e^x = y+xy' = x'y+xy' = (xy)'$，两边同时对 x 积分：

$$\int e^x dx = \int (xy)'dx$$

即：$e^x + C = xy$

$y = \dfrac{e^x+C}{x}$，代入 $y(1)=e$：$e = \dfrac{e+C}{1} \Rightarrow C=0$.

$\Rightarrow y = \dfrac{e^x}{x}$. 此即为所求微分方程的解.

17. 运用Rolle（罗尔）中值定理证明Lagrange（拉格朗日）中值定理：设$f(x)$满足(i)在$[a,b]$连续、(ii)在(a,b)可导，则至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明：记 $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导 $\Rightarrow$ $F(x)$ 也在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导.

$F(a) = F(b) = f(a)$，故由罗尔中值定理：

存在 $\xi\in(a,b)$，使得：$F'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

$\Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，得证。