# 【练习题 2 参考解答】

一、（本题满分 18 分，每小题 3 分）填空题.

1．$\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x)=\underline{\ 1\ }$.

2．若 $x\to 0$ 时 $f(x)=2^x+3^x-2$ 与 $g(x)=kx(k\neq 0)$ 是等价无穷小，则 $k=\underline{\ln 6}$.

3．使三次代数方程 $x^3-3x+c=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内有唯一实根的 $c$ 的最大取值区间为 $\underline{(0,2)}$.

4．设 $y=x^3+x$，则 $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=2}=\underline{\frac{1}{4}}$.

5．设 $y=y(x)$ 由方程 $x=y^y$ 确定，则 $dy=\underline{\frac{dx}{x(1+\ln y)}}$.

6．设 $f(x)=x^3-3x^2-9x$，则函数 $f(x)$ 单调减少且曲线 $y=f(x)$ 向上凸的区间是 $\underline{[-1,1]}$.

二、（本题满分 18 分，每小题 3 分）选择题.

【D】1. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$，$\{b_n\}$ 收敛于 $b$，$a\neq b$，则数列 $a_1$，$b_1$，$a_2$，$b_2$，$\cdots$，$a_n$，$b_n$，$\cdots$

$(A)$ 收敛于 $a$.　　$(B)$ 收敛于 $b$.　　$(C)$ 收敛于 $\frac{a+b}{2}$.　　$(D)$ 发散.

【A】2. $x=0$ 是函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1-x)\sin x}$ 的

$(A)$ 可去间断点.　　$(B)$ 无穷间断点.　　$(C)$ 跳跃间断点.　　$(D)$ 连续点.

【B】3. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b, & x<0, \\ \sin(ax), & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则

$(A)$ $a=2,b=-1$.　　$(B)$ $a=-2,b=1$.　　$(C)$ $a=-1,b=2$.　　$(D)$ $a=1,b=-2$.

【A】4. 设 $f(x)$ 可导，$g(x)=f(e^x)e^{-x}$，则 $g'(x)=$

$(A)$ $f'(e^x)-e^{-x}f(e^x)$.　　$(B)$ $f'(e^x)+e^{-x}f(e^x)$.

$(C)$ $-f'(e^x)+e^{-x}f(e^x)$.　　$(D)$ $-f'(e^x)-e^{-x}f(e^x)$.

【B】5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$(a,b)$ 内可导，则有 $\xi\in(a,b)$ 使 $e^{f(b)}-e^{f(a)}=$

$(A)$ $e^{f'(\xi)}f'(\xi)(b-a)$.　　$(B)$ $e^{f(\xi)}f'(\xi)(b-a)$.

$(C)$ $e^{f(\xi)}[f(b)-f(a)]$.　　$(D)$ $e^{f'(\xi)}[f(b)-f(a)]$.

【C】6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，$f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则在 $(-\infty,0)$ 内

$(A)$ $f'(x)<0,f''(x)<0$.　　$(B)$ $f'(x)<0,f''(x)>0$.

$(C)$ $f'(x)>0,f''(x)<0$.　　$(D)$ $f'(x)>0,f''(x)>0$.

三、

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sin x})$.

[解] 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{3x^2}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6x}=-\dfrac{1}{6}$

2. 设有一质点 $M$ 在 $Oxy$ 坐标系中沿曲线轨道 $y=8x-x^2$ 运动，已知 $M$ 的横坐标 $x$ 随时间 $t$ 变化的规律为 $x=t^{\frac{3}{2}}$ ($t$ 的单位为秒， $x$ 的单位为米). 求动质点 $M$ 位于点 $(1\,,7)$ 时沿 $y$ 轴方向的运动速度.

[解] 当 $x=1$ 时，由 $x=t^{\frac{3}{2}}$ 知 $t=1$，此时 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=1}=\left.(t^{\frac{3}{2}})'\right|_{t=1}=\dfrac{3}{2}$，又 $y=8x-x^2$，于是

$$\frac{dy}{dt}=8\frac{dx}{dt}-2x\frac{dx}{dt}=(8-2x)\frac{dx}{dt},$$

从而 $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}=(8-2\times 1)\dfrac{3}{2}=9\ (m/s)$. 即动质点 $M$ 位于点 $(1\,,7)$ 时沿 $y$ 轴方向的运动速度为 $9\ (m/s)$.

3. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$，使其与曲线 $y=e^{2x}$ 在 $x=0$ 处相切，且在切点处有相同曲率.

[解] 由题设，$a\,,b\,,c$ 必须满足

$$\begin{cases}\left.(ax^2+bx+c)\right|_{x=0}=\left.e^{2x}\right|_{x=0},\\ \left.(ax^2+bx+c)'\right|_{x=0}=\left.(e^{2x})'\right|_{x=0},\\ \left.(ax^2+bx+c)''\right|_{x=0}=\left.(e^{2x})''\right|_{x=0}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left.(ax^2+bx+c)\right|_{x=0}=\left.e^{2x}\right|_{x=0},\\ \left.(2ax+b)\right|_{x=0}=\left.(2e^{2x})\right|_{x=0},\\ 2a=\left.(4e^{2x})\right|_{x=0}.\end{cases}$$

由此即得 $c=1\,,b=2\,,a=2$，从而所求抛物线为 $y=2x^2+2x+1$.

4. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2-\ln t\\ y=\dfrac{1}{t}+1\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$ .

[解] $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{t}$，$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=(-\frac{1}{t^2})\bigg/(-\frac{1}{t})=\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{t})\cdot\frac{1}{(-1/t)}=\frac{1}{t}.$$

5. 求 $a\,,b$ 使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$ .

[解法 1] 要使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，需 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-(a+2bx)}{2x}=2\quad(*)$

为此必须有 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{1+x}-(a+2bx)]=0,$ 由此可得 $a=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+x}=1.$

又（*）式的的充分条件为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-2b}{2}=2,$

由此可得 $b=-2-\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)^2}=-\frac{5}{2}.$

[解法 2] $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x-(\frac{1}{2}+b)x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}[\frac{1-a}{x}-(\frac{1}{2}+b)+\frac{o(x^2)}{x^2}],$$

从而由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$ 得，$\begin{cases}1-a=0,\\-(\frac{1}{2}+b)=2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\b=-\frac{5}{2}.\end{cases}$

四、（本题满分 10 分）求函数 $f(x)=x^2\ln x$ 的单调区间、凹凸区间、极值与拐点.

[解] $f(x)=x^2\ln x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内连续且二阶可导，

$$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1),\ f''(x)=2\ln x+3.$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=e^{-\frac{1}{2}}$, 令 $f''(x)=0$ 得 $x=e^{-\frac{3}{2}}$.

当 $0<x<e^{-1/2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $e^{-1/2}<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$. 从而，$f(x)$ 的单增区间为 $[e^{-1/2},+\infty)$, 单减区间为 $(0,e^{-1/2}]$，$x=e^{-1/2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(e^{-1/2})=-\frac{1}{2e}.$

当 $0<x<e^{-3/2}$ 时，$f''(x)<0$；当 $e^{-3/2}<x<+\infty$ 时，$f''(x)>0$. 从而，$f(x)$ 的上凹区间为 $[e^{-3/2},+\infty)$, 上凸区间为 $(0,e^{-3/2}]$, 曲线 $y=f(x)=x^2\ln x$ 的拐点为 $(e^{-3/2},-\frac{3}{2}e^{-3}).$

五、（本题满分 11 分）

[ 第(1)题 ] 给定第一象限内的曲线 $y=\frac{1}{x^2}\ (x>0)$. ① 求曲线上点 $(a,\frac{1}{a^2})$ 处的切线方程；② $a$ 为何值时，①中的切线被两坐标轴所截线段的长度 $L$ 最短，并求 $L$ 的最小值.

[ 第(2)题 ] 已知轮船在航行时的燃料费与其航行速度的立方成正比，当轮船以速度 $v=10km/h$ 航行时，燃料费每小时 80 元，又知航行途中其他开销为 540 元/小时。问轮船以多大速度航行最经济？

[ 第(1)题 ] [解] ① 曲线上点 $(a,\frac{1}{a^2})$ 处的切线斜率为

$$k=(\frac{1}{x^2})'\Big|_{x=a}=-\frac{2}{x^3}\Big|_{x=a}=-\frac{2}{a^3},$$

从而切线方程为 $y-\frac{1}{a^2}=-\frac{2}{a^3}(x-a)$，即 $y=-\frac{2}{a^3}x+\frac{3}{a^2}$.

② ①中的切线在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距分别为 $X=\frac{3}{2}a,\ Y=\frac{3}{a^2}$, 从而

$$L=\sqrt{X^2+Y^2}=3\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{1}{a^4}}.$$

令 $\frac{dL}{da}=\frac{3}{2\sqrt{a^2/4+1/a^4}}(\frac{a}{2}-\frac{4}{a^5})=\frac{3}{4a^5\sqrt{a^2/4+1/a^4}}(a^6-8)=0$，

解得 $a=\sqrt{2}\in(0,+\infty)$.

根据问题的实际意义，$L$ 存在最小值且在 $(0,+\infty)$ 内取得，现在 $L$ 只有一个驻点 $a=\sqrt{2}\in(0,+\infty)$，从而 $L$ 在点 $a=\sqrt{2}$ 处取最小值，且最小值为 $\max\limits_{a\in(0,+\infty)}L=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

[ 第(2)题 ] [解] 设航程为 $S$，以速度 $v$ 行驶，航行的总费用为 $y$，则

$$y=(kv^3+540)t=(\frac{2}{25}v^2+\frac{540}{v})S \qquad (v>0)$$

令 $\frac{dy}{dv}=(\frac{4}{25}v-\frac{540}{v^2})S=0$，解得唯一驻点 $v=15$.

根据实际问题，最经济的航速必然存在，现在有效范围内仅求得唯一驻点 $v=15$，故当航速为 $v=15(km/h)$ 时，航行最经济.

六、(本题满分 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$f(1)=0$，试证明：

(1) 存在 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $f(\xi)=\frac{1}{2}\xi$；(2) 存在 $\eta\in(0,1)$ 使 $f(\eta)+\eta f'(\eta)=\eta$.

[证明] (1) 令 $\varphi(x)=f(x)-\frac{x}{2}$, 由题设条件知 $\varphi(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，又

$$\varphi(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}>0,\ \varphi(1)=f(1)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0,$$

从而由零点定理知，存在 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $\varphi(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\frac{1}{2}\xi.)$

(2) 令 $\psi(x)=xf(x)-\frac{x^2}{2}$, 由题设条件知 $\psi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$\psi'(x)=f(x)+xf'(x)-x,$$

又 $$\psi(0)=0,\quad \psi(\xi)=\xi f(\xi)-\frac{\xi^2}{2}=\xi[f(\xi)-\frac{\xi}{2}]=0,$$

从而由 Rolle 定理知，存在 $\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$ 使 $\psi'(\eta)=0$, 即 $f(\eta)+\eta f'(\eta)=\eta$.