一、（本题满分 18 分，每小题 3 分）填空题（**请将你认为正确的答案填在题后的横线上**）：

1．$\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x)=$.

2．若 $x\to 0$ 时 $f(x)=2^x+3^x-2$ 与 $g(x)=kx(k\neq 0)$ 是等价无穷小，则 $k=$.

3．使三次代数方程 $x^3-3x+c=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内有唯一实根的 c 的最大取值区间为.

4．设 $y=x^3+x$，则 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=2}=$.

5．设 $y=y(x)$ 由方程 $x=y^y$ 确定，则 $dy=$.

6．设 $f(x)=x^3-3x^2-9x$，则函数 $f(x)$ 单调减少且曲线 $y=f(x)$ 向上凸的区间是.

二、（本题满分 18 分，每小题 3 分）选择填空题：

【 】1. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，$\{b_n\}$ 收敛于 b，$a\neq b$，则数列 a_1, b_1, a_2, b_2, $\cdots$, a_n, b_n, $\cdots$

(A) 收敛于 a． (B) 收敛于 b． (C) 收敛于 $\dfrac{a+b}{2}$． (D) 发散.

【 】2. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1-x)\sin x}$ 的

(A) 可去间断点． (B) 无穷间断点． (C) 跳跃间断点． (D) 连续点.

【 】3．设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b, & x<0, \\ \sin(ax), & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则

(A) $a=2,b=-1$． (B) $a=-2,b=1$． (C) $a=-1,b=2$． (D) $a=1,b=-2$.

【 】4． 设 $f(x)$ 可导，$g(x)=f(e^x)e^{-x}$，则 $g'(x)=$

(A) $f'(e^x)-e^{-x}f(e^x)$． (B) $f'(e^x)+e^{-x}f(e^x)$．

(C) $-f'(e^x)+e^{-x}f(e^x)$． (D) $-f'(e^x)-e^{-x}f(e^x)$.

【 】5．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，则有 $\xi\in(a,b)$ 使 $e^{f(b)}-e^{f(a)}=$

(A) $e^{f'(\xi)}f'(\xi)(b-a)$． (B) $e^{f(\xi)}f'(\xi)(b-a)$．

(C) $e^{f(\xi)}[f(b)-f(a)]$． (D) $e^{f'(\xi)}[f(b)-f(a)]$.

【 】6．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，$f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则在 $(-\infty,0)$ 内

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$． (B) $f'(x)<0, f''(x)>0$．

(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$． (D) $f'(x)>0, f''(x)>0$.

三、（本题满分 35 分，每小题 7 分）求解下列各题：

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sin x})$．

2．设有一质点 M 在 Oxy 坐标系中沿曲线轨道 $y=8x-x^2$ 运动，已知 M 的横坐标 x 随时间 t 变化的规律为 $x=t^{\frac{3}{2}}$（t 的单位为秒，x 的单位为米）．求动质点 M 位于点 $(1,7)$ 时沿 y 轴方向的运动速度.

3．求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$，使其与曲线 $y=e^{2x}$ 在 $x=0$ 处相切，且在切点处有相同曲率.

4．设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2-\ln t \\ y=\dfrac{1}{t}+1 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}$.

5．求 a , b 使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$.

四、（**本题满分 10 分**）求函数 $f(x)=x^2\ln x$ 的单调区间、凹凸区间、极值与拐点.

五、（**本题满分 11 分**）

[**第(1)题**]　给定第一象限内的曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}\ (x>0)$.

① 求曲线上点 $(a,\dfrac{1}{a^2})$ 处的切线方程；

② a 为何值时，①中的切线被两坐标轴所截线段的长度 L 最短，并求 L 的最小值.

[**第(2)题**]　已知轮船在航行时的燃料费与其航行速度的立方成正比，当轮船以速度 $v=10km/h$ 航行时，燃料费每小时 80 元，又知航行途中其他开销为 540 元/小时。问轮船以多大速度航行最经济？

六、（**本题满分 8 分**）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$， $f(1)=0$，

试证明：（1）存在 $\xi\in(\dfrac{1}{2},1)$ 使 $f(\xi)=\dfrac{1}{2}\xi$ ；（2）存在 $\eta\in(0,1)$ 使 $f(\eta)+\eta f'(\eta)=\eta$.