2022 级转数院试卷

来自 22 级考生

2023 年 9 月 5 日

一. 选择题

1. $x = 1$ 是 $\dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{1-x}}}$ 的 ( ) 间断点.

选项就那几个间断点, 当填空题算了

2. 4 个反常积分判断敛散性的题

3. 对于 $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$, 判断 $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}, g(x) = \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^2, h(x) = \dfrac{\tan x^2}{x^2}$ 的大小 ( ).

A. $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ B. $h(x) \geq f(x) \geq g(x)$

C. $g(x) \geq f(x) \geq h(x)$ C. $h(x) \geq g(x) \geq f(x)$

4. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处 ( ).

A. 连续且可微 B. 连续但不可微 C. 不连续 D. 无法判断

5. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{1+n^2}}$( ).

A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 无法确定

二. 填空题

1. $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} =$______.

2. $y = x(1 + \arcsin\dfrac{2}{x})$ 的渐近线为______.

3. 通解为 $y = C_1e^x + C_2xe^x$ 的常系数齐次线性微分方程为__________.

4. $y = \dfrac{4}{x}, y = x, y = 4x$ 所围成的图像的面积为______.

5. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y)\mathrm{d}x + (x - \sin^2 y)\mathrm{d}y$______.

三. 解答题

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\tan x \ln(1 + x^2)}$.

2. 求 $\displaystyle\int_e^x \frac{\ln t}{t^2 - 2t + 1}\mathrm{d}t$ 在 $x \in [e, e^2]$ 上的最值.

3. 求 $(x^2 - 1)y' + 2xy = \cos x$ 满足 $y(0) = 1$ 的特解.

4. 已知 z 是关于 x, y 的隐函数且满足 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5. 求 $\iint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是 $z = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}(0 \le z \le 1)$ 的上侧.

6. 求 $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n}\ \ (|x| < 1)$ 的和函数及极值.

7. 求过 $(1, 0)$ 的 $y = \sqrt{2-x}$ 的切线与 $y = \sqrt{2-x}$ 和 x 轴围成的区域绕 x 轴旋转一周得到物体的体积.

8. 已知 $f(1) > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ 且 f 在 $[0, 1]$ 上二阶可导. 求证:

(i)$f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 上至少有一实根.

(ii)$f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$ 有两个不同实根.