安徽大学 2016—2017 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

院/系＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿

答 题 勿 超 装 订 线

装－－－－订－－－－线

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}(\sin x+\cos x)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

3. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6. 下列关于数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a 的定义，错误的是　　（　　　　）

A. 对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $a_n\in U(a,\varepsilon)$

B. 对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 a_n，使得 $|a_n-a|<\varepsilon$

C. 对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<c\varepsilon$，其中 c 是正常数

D. 对任意给定 $m\in N^+$，存在 $m\in N^+$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\dfrac{1}{m}$

7．设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时　　　　　　　　　　　　（　　　　）

A． $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小　　　　　　B． $f(x)$ 是 x 的低阶无穷小

C． $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　　　　　D． $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小

8．设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$，则下列说法正确的是　　　　　　　　（　　　　）

A． $x=0$ 是可去间断点　　　　　　B． $x=0$ 是跳跃间断点

C． $x=1$ 是可去间断点　　　　　　D． $x=1$ 是跳跃间断点

9．下列函数在区间 $(0,+\infty)$ 内有界的是　　　　　　　　　　（　　　　）

A． $x\sin x$　　　　　　B． $x\cos x$

C． $\dfrac{\sin x}{x}$　　　　　　D． $\dfrac{\cos x}{x}$

10．设 $y=f\left(\dfrac{x-2}{3x+2}\right)$， $f'(x)=\arctan x^2$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$　　　　（　　　　）

A． $\dfrac{\pi}{2}$　　　　　　B． $\dfrac{\pi}{3}$

C． $\dfrac{\pi}{4}$　　　　　　D． π

三、计算题（每小题 8 分，共 56 分）

得 分	

11．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

12．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{\sin x}-1\right)^3\cos x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}$

13．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

14．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

15．求常数 a,b 的值，使得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, x<0,\\ ax+b, 0\le x\le 1,\\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续函数.

16．函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

17． $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

得 分	

18．设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<3$， $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛.

19．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)f(1)>0$， $f(0)f(\frac{1}{2})<0$

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

安徽大学 2016—2017 学年第一学期
《高等数学 A（一)》期中考试试卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．0； **2**．8； **3**．$y=x-1$； **4**．1； **5**．$2e^3$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6．B； **7**．D； **8**．D； **9**．C； **10**．A

三、计算题（每小题 8 分，共 56 分）

11．解：由 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$

………………… 4 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\frac{1}{2}$，同理 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\frac{1}{2}$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$

………………… 8 分

12．$\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)^3\cos x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3 x\cos x}{(1-\cos x)x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3\cos x}{\frac{1}{2}x^2x}=2\lim\limits_{x\to0}\cos x=2$

………………… 8 分

13．解：$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}]^{\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=e^{-\frac{1}{2}}$

………………… 8 分

14．解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

………………… 8 分

15．解：依题意，只需 $f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=1$ 处连续即可。

故 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\frac{\sqrt{1-ax}-1}{x}=-\frac{1}{2}a=f(0)=b$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\arctan\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}=f(1)=a+b$$

解得， $a=\pi, b=-\frac{\pi}{2}$ ………………… 8 分

16．解： $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}=\frac{1}{t}$ ………………… 4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}=-\frac{1+t^2}{t^3}$$ ………………… 8 分

17．解： $x\neq 0, f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot(-\frac{1}{x^4})\cdot 2x=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}$

$x=0$， $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\frac{1}{x^2}-0}{x}=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}[\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}]=\frac{\pi}{2}=f'(0)$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续 ………………… 8 分

四、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

18． $0<x_n=\sqrt{x_{n-1}(3-x_{n-1})}\le\frac{x_{n-1}+(3-x_{n-1})}{2}=\frac{3}{2}$

又因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{x_n(3-x_n)}}{x_n}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}\ge 1$

由单调有界原理知 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，证毕. ………………… 7 分

19．由 $f(0)f(1)>0$， $f(0)f(\frac{1}{2})<0$ 知， $f(0)f(\frac{1}{2})<0$， $f(\frac{1}{2})f(1)<0$

由连续函数的零点定理知，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$，$\zeta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=f(\zeta)=0$

令 $F(x)=e^x f(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由罗尔定理知，

至少存在 $\xi\in(\eta,\zeta)\subset(0,1)$， 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$

………………… 7 分