35

安徽大学 2018—2019 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1. 点 $P(1,2,3)$ 到平面 $x+2y-2z=1$ 的距离为__________.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to 0}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$__________.

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的隐函数，且 $z(1,0)=-1$． 则全微分 $dz|_{(1,0)}=$__________.

4. 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=$__________.

5. 设向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\{y^2,z^2,x^2\}$， $M=(1,2,3)$． 则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(M)=$__________.

二、选择题（本题共五小题，每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个领域内有定义． 下列命题**正确**的是 （　　）

A. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处任意方向导数存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微．

B. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则点 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处任意方向导数存在．

C. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在，则点 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处任意方向导数存在．

D. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处任意方向导数存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在．

7. 设直线L的方程为$\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x+y-4z=2. \end{cases}$ 则直线L （　　）

A. 垂直于y轴. B. 平行于y轴. C. 垂直于x轴. D. 平行于x轴.

8. 设曲线$L: y=x^2, -2\le x\le 2$. 则曲线积分$\int_L e^y \ln(x+\sqrt{1+x^2})ds=$ （　　）

A. e^2. B. e^{-2}. C. 0. D. e.

9. 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数. 下列结论中**正确**的是 （　　）

A. 若$\lim_{n\to\infty}nu_n=0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

B. 若存在非零常数a，使得$\lim_{n\to\infty}nu_n=a$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

C. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}nu_n=0$.

D. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则存在非零常数a，使得$\lim_{n\to\infty}nu_n=a$.

10. 函数$y=\arctan x$ （$x\in[-1,1]$）展开成x的幂级数为 （　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. C. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

三、计算题（本题共五小题，每小题9分，共45分）

得　分	

11. 计算三重积分$\iiint_V (x+y+z)dxdydz$，其中V是由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=1$所围成的闭区域.

12. 计算第二类曲线积分$\oint\limits_{L}\dfrac{-y\,\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$为正方形$ABCD$的边界，方向为逆时针方向，点$A,B,C,D$ 的坐标依次为$(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.

13. 计算第二类曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$上满足$x\geq 0$，$y\geq 0$，$z\leq 1$的部分的上侧.

14． 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，且$f(x)=|x|$，$x\in(-\pi,\pi]$． 将$f(x)$展开成 Fourier 级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和．

15． 设二元函数$z=f(x,y)$在点$(1,1)$处可微，且$f(1,1)=1$，$f_x(1,1)=2$，$f_y(1,1)=3$．$g(x)=f(x,x)$，$h(x)=f(f(x,x),x)$．求$g'(1)$与$h'(1)$的值．

四、应用题（本题共两小题，每小题10分，共20分）

得　分	

16．求函数 $f(x,y,z)=2x+y+3z$ 在柱面 $x^2+y^2=2$ 和平面 $x+z=1$ 的交线上的最大值与最小值.

姓名________ 学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装　　　　订　　　　线

17． 设三角形铁皮 Σ 的顶点坐标分别为 $A(1,0,0)$， $B(0,1,0)$， $C(0,0,1)$ ，且面密度 $\rho(x,y,z)=z+1$． 求铁皮 Σ 的质量.

五、证明题（**本题共两小题，每小题 5 分，共 10 分**）

得　分	

18．证明：级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛.

19．设函数 $y=f(x)$ 连续．证明：$\iint_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$.

安徽大学 2018—2019 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末考试（A 卷）参考答案与评分标准

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、$\underline{\dfrac{2}{3}}$；2、$\underline{0}$；3、$\underline{\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y}$；4、$\underline{\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x}$；5、$\underline{(-6,-2,-4)}$.

二、选择题（本题共五小题，每小题 2 分，共 10 分）

6、B；　7、A；　8、C；　9、B；　10、D.

三、计算题（本题共五小题，每小题 9 分，共 45 分）

11. **解.** V 关于 zOx 平面和 yOz 平面对称，故 $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$（4 分）

V 在 xOy 平面的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$.

$$\text{原式}=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}[1-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^4)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}$$ ……………………………………（9 分）

12. **解.** 记 $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. ……………（4 分）

任取 ε 满足 $0<\varepsilon<1$，设 $C_\varepsilon:x^2+y^2=\varepsilon^2$，方向为逆时针. 则

$$\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{C_\varepsilon}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\varepsilon^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}2\pi\varepsilon^2=2\pi$$ ………………………（9 分）

13. **解法一**. 曲面Σ在xOy平面的投影区域为$D_{xy}: x^2+y^2\le 1, x, y\ge 0$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 又因$\Sigma$的方向向上，所以

$$\iint_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)(-\frac{\partial z}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{..........（5 分）}$$

$$=-\iint_{D_{xy}} y\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sin\theta r\mathrm{d}r=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=-\frac{1}{4} \text{.....（9 分）}$$

解法二. 曲面Σ在zOx平面的投影区域为$D_{zx}: 0\le z\le 1, 0\le x\le z$.

因为$\Sigma: y=\sqrt{z^2-x^2}$的方向向上，即为该锥面的左侧，故

$$\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{D_{zx}} z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x \text{.................................（5 分）}$$

$$=-\int_0^1 z^2\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}x=-\int_0^1 z^3\mathrm{d}z=-\frac{1}{4} \text{. ....（9 分）}$$

14. **解**. 设$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

因为$f(x)$是偶函数，所以$b_n=0, n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k.\end{cases}$$

因为$f(x)$连续，故$f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}\cos nx$ ....（7 分）

$$=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x$$

于是，$0=f(0)=\dfrac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{(2n-1)^2\pi}$. 从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$ ....（9 分）

15. **解**. $g'(x)=f_1(x,x)+f_2(x,x)=2+3=5$ ....（4 分）

$$h'(x)=f_1(g(x),x)g'(x)+f_2(g(x),x)$$

故由$f(1,1)=1$可知$\varphi'(1)=f_1(1,1)[f_1(1,1)+f_2(1,1)]+f_2(1,1)=13$ . ...（9 分）

四、应用题（本题共两小题，每小题 10 分，共 20 分）

16. 解. 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=2x+y+3z+\lambda(x^2+y^2-2)+\mu(x+z-1).$$

令 $L_x=2+2\lambda x+\mu=0$，

$L_y=1+2\lambda y=0$，

$L_z=3+\mu=0$ ，

$L_\lambda=x^2+y^2-2=0$，

$L_\mu=x+z-1=0$. ………… （5 分）

解得 $x=1,y=-1,z=0$ 或 $x=-1,y=1,z=2$.

又因为 $f(x,y,z)$ 在条件 $x^2+y^2=2$ 和 $x+z=1$ 下必有最大值和最小值,

故 $f(x,y,z)$ 在点 $(1,-1,0)$ 处取最小值 $f(1,-1,0)=1$,

$f(x,y,z)$ 在点 $(-1,1,2)$ 处取最大值 $f(-1,1,2)=5$ ………… （10 分）

17. 解. $M=\iint_\Sigma \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$ ……………………………… （3 分）

Σ 的方程为 $z=1-x-y$，

且在 xOy 平面上的投影区域为 $\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}=-1,$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3}$$

故

$$M=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}(2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(2-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ …………………………………… （10 分）

五、证明题（本题共两小题，每小题 5 分，共 10 分）

18. 证明. 当$n\ge 2$时，$a_n=n-\ln n>0$.

又因为$a_{n+1}-a_n=(n+1)-\ln(n+1)-(n-\ln n)=1-\ln(1+\frac{1}{n})>0$，

所以 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$. 故$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$收敛. ....（3 分）

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n-\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{\ln n}{n}}=1$，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$发散.

从而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$条件收敛. ....（5 分）

19. 证明：作变量替换$x+y=u,x-y=v$，则$x=\frac{u+v}{2},y=\frac{u-v}{2}$ ....（2 分）

D对应区域$\{(u,v)\,|\,-1\le u\le 1,-1\le v\le 1\}$. $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$.

故

$$\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{-1\le u\le 1,\\ -1\le v\le 1}} f(u)\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u\ .\ ....（5 分）$$