安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试试卷

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系______ 专业______ 姓名______ 学号______

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}=$__________.

2. 已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，则$a=$________，$b=$________.

3. 已知当$x\to 0$时，$\sqrt[3]{1+2x^{\alpha}}-1$是$1-\cos x$的同阶无穷小量，则$\alpha=$________.

4. 曲线$y=x^{\frac{2}{3}}$在点(1, 1)处的法线方程为________________.

5. 设函数$f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 则$f'(0)=$__________.

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6. 函数$f(x)=\dfrac{|x-2|\sin x}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界 (　　)

A. $(-1,\ 0)$;　　B. $(0,\ 1)$;　　C. $(1,\ 2)$;　　D. $(2,\ 3)$.

7. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$都是非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$，则下面结论一定正确的是 (　　)

A. 对任意$n\in\mathbb{N}$，$a_n<b_n$;　　B. 对任意$n\in\mathbb{N}$，$b_n<c_n$;

C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$不存在;　　D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

8．设函数$f(x)=(x-\frac{\pi}{2})\frac{1}{\cos x}$，则$x=\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的 （　　）

A．跳跃间断点；　B．可去间断点；　C．无穷间断点；　D．连续点．

9．设函数$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 则$f(x)$在$x=0$处 （　　）

A．二阶可导，且$f''(x)$在$x=0$处连续；　B．二阶可导，但$f''(x)$在$x=0$处不连续；

C．一阶可导，且$f'(x)$在$x=0$处连续；　D．一阶可导，但$f'(x)$在$x=0$处不连续．

10. 设函数$f(x)$在$x=0$处连续，则下列命题**错误**的是 （　　）

A．若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则$f(0)=0$；

B．若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则$f(0)=0$；

C．若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则$f(x)$在$x=0$处可导；

D．若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则$f(x)$在$x=0$处可导.

三、计算题（本题共六小题，每小题 8 分，共 48 分）

得　分	

11．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2n+1}+\frac{2}{n^2+2n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n+n}\right)$.

姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

12. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x}}{\sin x+\tan x}$.

13. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}$.

14. 求函数$y=(\arctan\sqrt{x})^{x}$的导数.

15．设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=3\sec t, \\ y=2\tan t \end{cases}$（$t$为参数）所确定，求导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

16. 设函数$y=y(x)$由方程$y-x\cdot 2^{y}=1$所确定，求导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

四、分析计算题（本题共 10 分）

得　分	

17．设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < \pi$，$x_n = \sin x_{n-1}$，$n \geq 2$．请判断极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$是否存在；若存在，则求出该极限.

姓名________学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装　订　线

五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

得　分	

18．设数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2} = A$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

19．设函数$f(x)$在闭区间$[a,\ b]$上连续，且$f(a) = f(b)$. 证明：存在$\xi \in [a,\ b)$，使得

$f(\xi) = f(\xi + \dfrac{b-a}{2})$.

安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试参考答案与评分标准

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、$\underline{\quad 0 \quad}$；2、$\underline{9,\ -12}$；3、$\underline{\quad 2 \quad}$；4、$\underline{y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}$；5、$\underline{\frac{\pi}{2}}$.

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、A；7、D；8、B；9、C；10、D.

三、计算题（本题共六小题，每小题 8 分，共 48 分）

11. 解. 对任意$1\le i\le n$, $\frac{i}{n^2+2n+n}\le\frac{i}{n^2+2n+i}\le\frac{i}{n^2+2n+1}$.......（3 分）

于是，

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n+n)}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2n+i}\le\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n+1)}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{i}{n^2+2n+i}\le\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n+1)}=\frac{1}{2}$,

由夹逼定理可知，原式$=\frac{1}{2}$. ....（8 分）

12. 解.

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+3x)-(1-2x)}{(\tan x)(\cos x+1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{(1+3x)(1-2x)}+\sqrt[3]{(1-2x)^2})}$

$=\frac{5}{6}$. ....（8 分）

13. 解.

原式$\lim\limits_{x\to0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}$ ....（3 分）

$=\lim\limits_{x\to0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x\ln(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$. ....（8 分）

14. 解. 对$y=(\arctan\sqrt{x})^x$两边求对数可得$\ln y=x\ln(\arctan\sqrt{x})$. ....（2 分）

方程两边同时求导可得

$\frac{1}{y}y'=\ln\arctan\sqrt{x}+x(\frac{1}{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}})$,

由此可得 $y'=(\arctan\sqrt{x})^x(\ln(\arctan\sqrt{x})+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)\arctan\sqrt{x}})$ ....（8 分）

15. 解.

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3\sec t\tan t, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2\sec^2 t$. ……………………………………………………（4 分）

故$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{2}{3\sin t}$. ……………………………………………………（8 分）

16. 解. 方程$y-x\cdot 2^y=1$两边同时对x求导可得

$y'-2^y-x\cdot y'\cdot\ln 2\cdot 2^y=0$. ……………………………………………………（4 分）

由此可得

$y'=\frac{2^y}{1-(\ln 2)x\cdot 2^y}$. ……………………………………………………（8 分）

四、分析计算题（本题共 10 分）

17. 解. 由$0<x_1<\pi$可知，$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$.

由数学归纳法可知，$0<x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}<\pi$.

故数列$\{x_n\}$为单调递减有界数列. 由单调有界原理可知，$\lim_{n\to\infty}x_n$存在. ………（5 分）

设$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，方程$x_n=\sin x_{n-1}$两边同时取极限可得$a=\sin a$，

故$a=0$, 即$\lim_{n\to\infty}x_n=0$. ……………………………………………………（10 分）

五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

18. 证明. 由题设可知，对$\forall\varepsilon>0$，存在$N_1>0$，当$n>N_1$时， $|x_{3n}-A|<\varepsilon$；

存在$N_2>0$，当$n>N_2$时， $|x_{3n+1}-A|<\varepsilon$；

存在$N_3>0$，当$n>N_3$时， $|x_{3n+2}-A|<\varepsilon$. ……………………………………（3 分）

令$N=\max\{3N_1,3N_2+1,3N_3+2\}$，当$n>N$时，总有$|x_n-A|<\varepsilon$.

故$\lim_{n\to\infty}x_n=A$. ……………………………………………………………………（6 分）

19. 证明. 构造辅助函数$F(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{2})$. ……………………………（3分）

由$f(x)$在$[a,b]$上连续可知，$F(x)$在$[a,\frac{a+b}{2}]$连续.

则$F(a)=f(a)-f(a+\frac{b-a}{2})=f(a)-f(\frac{b+a}{2})$

$F(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(b)$

再由$f(a)=f(b)$可知，$F(a)F(\frac{a+b}{2})\le 0$.

故由连续函数介值定理可知，存在$\xi\in[a,\frac{a+b}{a}]\subset[a,b)$，使得$F(\xi)=0$.

即$f(\xi)=f(\xi+\frac{b-a}{2})$. ……………………………………………………………（6 分）

安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试试卷

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}=$ ____0____.

$=\left[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right]\cdot\sqrt{n}$

2. 已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，则 $a=$ ____9____，$b=$ ____-12____.

3. 已知当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+2x^{\alpha}}-1$ 是 $1-\cos x$ 的同阶无穷小量，则 $\alpha=$ ____2____.

4. 曲线 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(1,\ 1)$ 处的法线方程为 ____$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$____.

$y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 则 $f'(0)=$ ____$\frac{\pi}{2}$____.

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6. 函数 $f(x)=\dfrac{|x-2|\sin x}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界 （ A ）

$\to \dfrac{\sin x}{x(x-1)|x-2|}$

A. $(-1,\ 0)$； B. $(0,\ 1)$； C. $(1,\ 2)$； D. $(2,\ 3)$.

7. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 都是非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$，则下面结论一定正确的是 （ D ）

$2e^{-n}$ 　 2 　 2 　 n

A. 对任意 $n\in\mathbb{N}$，$a_n<b_n$； B. 对任意 $n\in\mathbb{N}$，$b_n<c_n$；

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 不存在； D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

0 　 2

令$t=x-\frac{\pi}{2}$，则$x=t+\frac{\pi}{2}$，$f(t)=-\frac{t}{\sin t}$（讨论点$t=0$）

8．设函数$f(x)=(x-\frac{\pi}{2})\frac{1}{\cos x}$，则$x=\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的　　（ B ）

A．跳跃间断点；　B．可去间断点；　C．无穷间断点；　D．连续点．

参考P97 复习题3 第10题　详解请见最后一页

9．设函数$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则$f(x)$在$x=0$处　（不一定会考）　　（ C ）

A．二阶可导，且$f''(x)$在$x=0$处连续；　B．二阶可导，但$f''(x)$在$x=0$处不连续；

C．一阶可导，且$f'(x)$在$x=0$处连续；　D．一阶可导，但$f'(x)$在$x=0$处不连续．

10．设函数$f(x)$在$x=0$处连续，则下列命题**错误**的是　　（ D ）

A．若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则$f(0)=0$；

B．若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则$f(0)=0$；

C．若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则$f(x)$在$x=0$处可导；

D．若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则$f(x)$在$x=0$处可导．

三、计算题（**本题共六小题，每小题8分，共48分**）

得　分	

11．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2n+1}+\frac{2}{n^2+2n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n+n}\right)$．

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+3n}$ < 原式 < $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n+1}$

（左）　　　　（右）．

由于左边 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n(n+3)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{2+\frac{6}{n}}=\frac{1}{2}$

右边 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}$

故依据夹逼定理，

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2n+1}+\frac{2}{n^2+2n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n+n}\right)=\frac{1}{2}$

姓名＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿

答题勿超装订线

装 订 线

12．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x}}{\sin x+\tan x}$.

解：由立方差公式：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1-2x)^{\frac{1}{3}}}{\sin x+\tan x}\cdot\frac{(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+3x)^{\frac{1}{3}}(1-2x)^{\frac{1}{3}}+(1-2x)^{\frac{2}{3}}}{(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+3x)^{\frac{1}{3}}(1-2x)^{\frac{1}{3}}+(1-2x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)-(1-2x)}{x+x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+3x)^{\frac{1}{3}}(1-2x)^{\frac{1}{3}}+(1-2x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

13．求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}$.

解：$\text{原式}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x\ln(1+x)}}$ (*).

由于$x\to 0$时，$-2\sin^2\frac{x}{2}\to 0$，$\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\sim\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\ln(1+x)}\sim\dfrac{1}{2}$

故 $(*)=e^{-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

14．求函数$y=(\arctan\sqrt{x})^x$的导数.

解：$\ln y=x\ln\arctan x^{\frac{1}{2}}$，两边对$x$求导.

$$\frac{y'}{y}=\ln\arctan x^{\frac{1}{2}}+x\cdot\frac{1}{\arctan x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\ln\arctan x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2(1+x)\arctan x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore y'(x)=(\arctan\sqrt{x})^x\left[\ln\arctan\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)\arctan\sqrt{x}}\right]$$

15. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=3\sec t,\\ y=2\tan t\end{cases}$（$t$为参数）所确定，求导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：$x'(t)=\frac{dx}{dt}=3\tan t\sec t$

$y'(t)=\frac{dy}{dt}=2\sec^2 t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2\sec^2 t}{3\tan t\cdot\sec t}=\frac{2\sec t}{3\tan t}=\frac{2}{3}\csc t$

16. 设函数$y=y(x)$由方程$y-x\cdot 2^y=1$所确定，求导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：[法一] 直接求导：$y'-2^y-x\cdot\ln2\cdot2^y\cdot y'=0$

$y'(1-x\ln2\cdot2^y)=2^y$

$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{2^y}{1-\ln2\cdot x\cdot2^y}$

[法二]. 求微分：$dy-dx\cdot2^y-x\,d(2^y)=0$

$=dy-dx\cdot2^y-x\ln2\cdot2^y\cdot dy$

$dy(1-x\ln2\cdot2^y)=2^y\cdot dx$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2^y}{1-\ln2\cdot x\cdot2^y}$

姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装　订　线

四、分析计算题（本题共 10 分）

得　分	

17．设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$，$x_n=\sin x_{n-1}$，$n\geq 2$．请判断极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$是否存在；若存在，则求出该极限．

解：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

由于 $x_1\in(0,\pi)$，故 $x_2=\sin x_1>0$，由数学归纳法可得

$x_n>0$，$(n\geq 1)$．故 $\{x_n\}$ 有下界；

又由于 $x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}$ $(n\geq 2)$．

故 $\{x_n\}$ 为单调减少数列；

依据单调有界原理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

设 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}$ 也为 A．

代入 $x_n=\sin x_{n-1}$，可得

$A=\sin A$．

解得：$A=0$．

故：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$．

五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

得 分	

18．设数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2}=A$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

证明：对于A的任何开邻域U，

因 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{3n}=A$，故存在$N_1\in N^+$，当$n>N_1$时，有$x_{3n}\in U$；

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=A$，故存在$N_2\in N^+$，当$n>N_2$时，有$x_{3n+1}\in U$；

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+2}=A$，故存在$N_3\in N^+$，当$n>N_3$时，有$x_{3n+2}\in U$；

于是，当 $n>N=\max\{3N_1, 3N_2+1, 3N_3+2\}$ 时，必有$x_n\in U$。

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$

19．设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$f(a)=f(b)$. 证明：存在$\xi\in[a, b)$，使得$f(\xi)=f(\xi+\frac{b-a}{2})$.

证明：构建函数 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{2})$，即题干需证

方程$g(x)=0$ 在区间$[a,b)$上有根。

$$\begin{cases} g(a)=f(a)-f(a+\frac{b-a}{2})=f(a)-f(\frac{a+b}{2}) \\ g(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(b) \end{cases}$$

两式相加可得 $g(a)+g(\frac{a+b}{2})=f(a)-f(b)=0$.

(1) 如果 $g(a)=g(\frac{a+b}{2})=0$，由于 a、$\frac{a+b}{2}$ 均在$[a,b)$内，

故 $g(x)=0$ 在$[a,b)$上有根，ξ存在；

(2) 如果 $g(a)\neq 0$、$g(\frac{a+b}{2})\neq 0$，则必有 $g(a)\cdot g(\frac{a+b}{2})<0$，

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，$(a, \frac{a+b}{2})\subseteq[a,b]$

故根据零点定理，$g(x)=0$ 在$(a, \frac{a+b}{2})$上有根，

即存在$\xi\in(a,\frac{a+b}{2})\subseteq[a,b)$，使得$f(\xi)=f(\xi+\frac{b-a}{2})$.

综上，命题得证。

P97. 复习题3. 10. $f(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x}, & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 讨论 $x=0$ 连续、可导?

解：(1). 当 $m<0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{-m}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$，因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{-m}}=\infty$，$\sin\frac{1}{x}$ 有界，

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 不连续；

当 $m=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$（不存在）$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 不连续；

当 $m>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^m\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$，因 $\lim\limits_{x\to 0} x^m=0$。$\sin\frac{1}{x}$ 有界.

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$，$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 连续。

(2) $m>0$ 时，有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{m-1}\sin\frac{1}{x}$.

当 $0<m\leq 1$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^{m-1}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 一阶不可导；

当 $m>1$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^{m-1}\sin\frac{1}{x}$ 存在，$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 一阶可导。

(3) $m>1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 一阶可导，且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^{m-1}\sin\frac{1}{x}=0$，

$x\neq 0$ 时，$f'(x)=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}+x^m\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}$.

$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}, & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}\right)$

当 $1<m\leq 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续；

当 $m>2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0=f'(0)\Rightarrow f'(x)$ 在 $x=0$ 连续。

(4). $m>2$ 时，有 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(mx^{m-2}\sin\frac{1}{x}-x^{m-3}\cos\frac{1}{x}\right)$

当 $2<m\leq 3$ 时，$f''(0)$ 不存在，$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 二阶不可导；

当 $m>3$ 时，$f''(0)$ 存在，$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导。

(5) $m>3$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导，且 $f''(0)=0$，计算化简可得：

$f''(x)=\begin{cases} m(m-1)x^{m-2}\sin\frac{1}{x}-(2m-2)x^{m-3}\cos\frac{1}{x}-x^{m-4}\sin\frac{1}{x}, & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f''(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[m(m-1)x^{m-2}\sin\frac{1}{x}-(2m-2)x^{m-3}\cos\frac{1}{x}-x^{m-4}\sin\frac{1}{x}\right]$

n=2 即为试卷第9题的情形

当 $3<m\leq 4$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f''(x)$ 不存在，$\Rightarrow f''(x)$ 在 $x=0$ 不连续；

当 $m>4$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f''(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0} f''(x)=0=f''(0)\Rightarrow f''(x)$ 在 $x=0$ 连续。

规律：($n\in N^+$)

当 $2n-2<m\leq 2n-1$ 时，$f^{(n-1)}(x)$ 在 $x=0$ 连续，$f(x)$ 在 $x=0$ $\begin{cases} n-1\text{阶可导} & (n\geq 2)\\ n\text{阶不可导}\end{cases}$

当 $2n-1<m\leq 2n$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ n 阶可导，但 $f^{(n)}(x)$ 在 $x=0$ 不连续。