Chapter 1

# 第1章 矩　　阵

矩阵是数学中重要的基本概念之一, 很多问题中的一些数量关系要用矩阵来描述. 矩阵是代数学的一个重要研究对象, 在数学的很多分支和其他学科中有着广泛的应用. 本章将介绍矩阵的概念和运算、矩阵的初等变换、矩阵的分块等基本理论, 它们是学习本课程知识的基础.

## 1.1　矩阵的概念

### 1.1.1　引例

本节的两个例子将展示如何将某些数学问题或实际应用问题与一张数表——矩阵联系起来, 其中第二个例子是对实际应用问题进行数学建模.

**例1.1.1**　设线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \qquad\quad +6x_4=-2, \\ 2x_1-x_2+2x_3+4x_4=-2, \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4=-3, \\ 5x_1-3x_2+x_3+20x_4=-2. \end{cases}$$

这个线性方程组未知量系数及常数项按方程中的相对次序组成一个数表如下:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 20 & -2 \end{pmatrix}.$$

这个数表决定着给定方程组是否有解, 以及有解时如何求解等问题, 因而研究这个数表很有必要.

**例1.1.2**　某航空公司在A, B, C, D四城市之间开辟了若干航线, 图1-1-1表示四城之间的情况. 若从A到B有航班, 则用带箭头的线连接A与B, 其他连线可作类似解释. 用表格表示为表1-1-1.

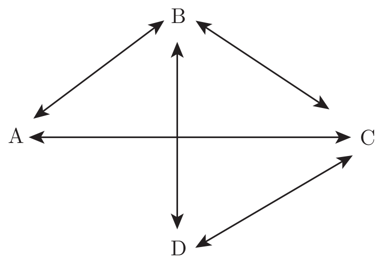


图 1-1-1

**表1-1-1**

| | | 列标表示到站 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| 行标表示发站 | A | | √ | √ | |
| | B | √ | | √ | √ |
| | C | √ | √ | | √ |
| | D | | √ | √ | |

为便于讨论, 记表1-1-1中√为1, 空的为0, 则得一个数表

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

该数表反映了四城市间的航班往来情况.

### 1.1.2　矩阵的定义

**定义1.1.1**　由$m \times n$个数$a_{ij}$ $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$排成的$m$行$n$列的

矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m$**行**$n$**列矩阵**, 简称$m\times n$ **矩阵**, 其中, $a_{ij}$为该矩阵的第$i$行第$j$列元素, $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$.

通常用大写的英文字母$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$ 表示矩阵. 有时为指明矩阵的行数与列数, 也将$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$写成$\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 如果$\boldsymbol{A}$的元素为$a_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$, 也将$\boldsymbol{A}$记为$(a_{ij})$或$(a_{ij})_{m\times n}$. 当$\boldsymbol{A}$的行数与列数都是$n$时, 称$\boldsymbol{A}$为$n$**阶方阵**或$n$**阶矩阵**, 一阶矩阵就是一个数, 即$(a)=a$.

所有元素是实数的矩阵称为**实矩阵**, 所有元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书中的矩阵除特殊说明外都指实矩阵. 元素全为零的矩阵称为**零矩阵**, 记为$\mathbf{0}$.

如果两个矩阵具有相同的行数与相同的列数, 则称这两个矩阵为**同型矩阵**.

**定义1.1.2** 如果矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为同型矩阵, 且相同位置上的元素均相等, 则称矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$**相等**, 记为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 即若$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$且$a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$, 则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

**例1.1.3** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} y & 2 & -5 \\ z & u & -5 \end{pmatrix}$. 若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 则$x=-5$, $y=1$, $z=0$, $u=3$.

### 1.1.3 几种特殊的矩阵

1) 对角矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

的$n$阶矩阵称为$n$**阶对角矩阵**, 其中$a_1$, $a_2, \cdots, a_n$称为**主对角元**, 位于矩阵的对角线上(即从左上角到右下角). 对角矩阵也可记为

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

2) 数量矩阵

当$n$阶对角矩阵的主对角元均相等时, 称该对角矩阵为$n$**阶数量矩阵**, 即形如

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

特别地, 当$a=1$时, 称其为$n$**阶单位矩阵**, 记为$\boldsymbol{I}_n$ 或$\boldsymbol{I}$.

3) 上(下) 三角矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的$n$阶矩阵, 即主对角线左下方的元素全为零的$n$阶矩阵称为$n$**阶上三角矩阵**. 类似地, 主对角线右上方元素全为零的$n$阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为$n$**阶下三角矩阵**.

4) 对称矩阵与反对称矩阵

如果$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的元素满足$a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称$\boldsymbol{A}$为$n$**阶对称矩阵**.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

就是一个3阶对称矩阵.

如果$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的元素满足$a_{ij}=-a_{ji}\ (i,\ j=1,2,\cdots,n)$, 则称$\boldsymbol{A}$为$n$**阶**

**反对称矩阵**. 显然, 反对称矩阵的主对角元均为零, 如

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}
$$

就是一个3阶反对称矩阵.

## 习题 1.1

1. 有6名选手参加乒乓球比赛, 成绩如下：

选手1胜选手2, 4, 5, 6, 负于3; 选手2胜选手4, 5, 6, 负于1, 3; 选手3胜选手1, 2, 4, 负于5, 6; 选手4胜选手5, 6, 负于1, 2, 3; 选手5胜3, 6, 负于1, 2, 4. 若胜一场则得1分, 负一场得$-1$分, 平局为0分. 试用矩阵表示输赢状况, 并排序.

2.能源利用系统表示为加权有向图, 见图1-1-2. 试用矩阵表示.

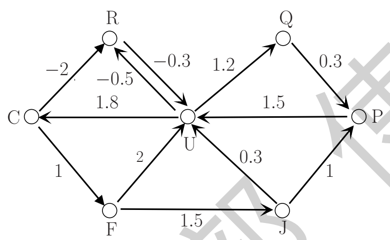


图 1-1-2

3.甲、乙、丙、丁、戊五人各自从图书馆借来一本小说, 他们约定读完后互相交换, 这五本书的厚度及他们五人的阅读速度差不多. 因此, 五人总是同时交换书, 经四次交换后, 他们读完了这些书. 现已知

(1)甲最后读的是乙读的第二本书;

(2)丙最后读的是乙读的第四本书;

(3)丙读的第二本是甲读的第一本书;

(4)丁最后读的是丙读的第三本书;

(5)乙读的第四本是戊读的第三本书;

(6)丁读的第三本是丙读的第一本书.

试根据以上情况说出这五人各自的读书顺序.

# 1.2 矩阵的运算

## 1.2.1 矩阵的线性运算

**定义1.2.1** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$. 则称$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$为**矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的和**, 记为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

由此可见, 两个矩阵的和就是两个矩阵对应位置元素相加而得到的矩阵. 显然, 只有同型矩阵才能相加.

设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 记$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$, 称$-\boldsymbol{A}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的**负矩阵**, 显然有

$$-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

由此, 矩阵的减法定义为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

**定义1.2.2** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $k$是一个数, 用$k$乘$\boldsymbol{A}$的每个元素所得的矩阵称为数$k$与矩阵$\boldsymbol{A}$的**数量乘积**, 记作$k\boldsymbol{A}$, 即

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法与数乘运算统称为矩阵的**线性运算**, 它满足下列运算规律:

设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{0}$均为同型矩阵, $k$, $l$是常数, 则

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;　　(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$;　　(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$;

(5) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;　　(6) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;　　(8) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

**例1.2.1** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, 求$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

**解** $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3-8 & 6-6 & 9-4 & 3+2 \\ 0-10 & 9+6 & -6-0 & 3-2 \\ 12-2 & 0-4 & 9+10 & 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 5 & 5 \\ -10 & 15 & -6 & 1 \\ 10 & -4 & 19 & 6 \end{pmatrix}. \quad \square$$

**例1.2.2** 已知$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, 且$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$. 求$\boldsymbol{X}$.

**解** $$\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

### 1.2.2 矩阵的乘法

首先看一实例.

**例1.2.3** 某地区有四个工厂1, 2, 3, 4, 生产甲、乙、丙三种产品, 矩阵$\boldsymbol{A}$表示一年中各工厂生产各种产品的数量; 矩阵$\boldsymbol{B}$表示各产品的单位价格(单位：元)及单位利润(单位：元); 矩阵$\boldsymbol{C}$表示各工厂的总收入及总利润.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \\ \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{单位价格} & \text{单位利润} \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{总收入} & \text{总利润} \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} \end{array},$$

其中$a_{ik}$表示第$i$个工厂生产第$k$种产品的产量, $b_{k1}$, $b_{k2}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$分别表示第$k$种产品的单位价格与单位利润, $c_{i1}$, $c_{i2}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$分别是第$i$个工厂生产三种产品

的总收入与总利润, 于是$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$三个矩阵的元素间有如下关系：

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \\ a_{41}b_{11}+a_{42}b_{21}+a_{43}b_{31} & a_{41}b_{12}+a_{42}b_{22}+a_{43}b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix},$$

其中$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ j=1,\ 2)$, 即矩阵$\boldsymbol{C}$中第$i$行第$j$列元素等于$\boldsymbol{A}$的第$i$行与$\boldsymbol{B}$的第$j$列对应元素乘积之和. 将上面例中矩阵的这种关系定义为矩阵的积.

**定义1.2.3**　设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$, 则定义$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的乘积为矩阵$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, 其中$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$, 记作$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 常读为$\boldsymbol{A}$左乘$\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{B}$右乘$\boldsymbol{A}$.

根据定义, 只有当左边矩阵$\boldsymbol{A}$的列数等于右边矩阵$\boldsymbol{B}$的行数时, 两个矩阵才能相乘, 且矩阵$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$的行数等于$\boldsymbol{A}$的行数, 列数等于$\boldsymbol{B}$的列数.

**例1.2.4**　若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{BA}$.

**解**　
$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times1+3\times2 & 2\times(-2)+3\times(-1) & 2\times(-3)+3\times0 \\ 1\times1+(-2)\times2 & 1\times(-2)+(-2)\times(-1) & 1\times(-3)+(-2)\times0 \\ 3\times1+1\times2 & 3\times(-2)+1\times(-1) & 3\times(-3)+1\times0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -7 & -6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & -7 & -9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times 1+(-3)\times 3 & 1\times 3+(-2)\times(-2)+(-3)\times 1 \\ 2\times 2+(-1)\times 1+0\times 3 & 2\times 3+(-1)\times(-2)+0\times 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**例1.2.5** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{BA}$.

**解** $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

上述两例都有$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$, 这表明矩阵乘法不满足交换律, 并且两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵, 从而矩阵的消去律不成立, 即若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$, 推不出$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 这是矩阵乘法与数的乘法的本质区别.

矩阵的乘法满足下列运算规律(假设运算都是可行的)：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$; (2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$;

(3) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$; (4) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$;

(5) 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵, 则$\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AI}_n=\boldsymbol{A}$;

(6) 设$k$为数, $\boldsymbol{A}$是$n$阶矩阵, 则$k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{A}$.

**定义1.2.4** 如果$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$ **可交换**.

**例1.2.6** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 试求与$\boldsymbol{A}$可交换的一切矩阵.

**解** 设与$\boldsymbol{A}$可交换的矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, 由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ -x_{11} & -x_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11}-x_{12} & 0 \\ x_{21}-x_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

由矩阵相等定义得

$$\begin{cases} x_{11} = x_{11} - x_{12}, \\ x_{12} = 0, \\ -x_{11} = x_{21} - x_{22}, \end{cases}$$

所以有

$$\begin{cases} x_{12} = 0, \\ x_{11} = -x_{21} + x_{22}, \end{cases}$$

故与$\boldsymbol{A}$可交换矩阵为$\begin{pmatrix} b-a & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, 其中$a, b$为任意数. □

**例1.2.7** 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

若记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则利用矩阵的乘法, 线性方程组(1.1.1)可表示为矩阵形式: $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, 其中$\boldsymbol{A}$称为方程组(1.1.1)的**系数矩阵**, 而$\bar{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})$ 称为方程组(1.1.1)的**增广矩阵**. □

**例1.2.8** 设变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与$y_1, y_2, \cdots, y_n$之间的关系式:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

称为从变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$到变量$y_1, y_2, \cdots, y_m$的**线性变换**, 其中$a_{ij}$为常数, $i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$.

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

则线性变换(1.1.2)可表示为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \tag{1.1.3}$$

易见线性变换与其系数矩阵之间存在一一对应的关系. 有关变量的线性变换的内容我们将在本书第5章作进一步讨论. □

### 1.2.3 矩阵的转置

**定义1.2.5** 设$m\times n$矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

将$\boldsymbol{A}$的行与列依次互换位置, 得到的$n\times m$矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**转置矩阵**, 简称为$\boldsymbol{A}$的转置, 记作$\boldsymbol{A}^{\top}$(或$\boldsymbol{A}'$).

例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}^{\top}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

当$\boldsymbol{A}$是对称矩阵时, 有$a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 即$\boldsymbol{A}^{\top}=\boldsymbol{A}$; 当$\boldsymbol{A}$是反对称矩阵时, 有$a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 即$\boldsymbol{A}^{\top}=-\boldsymbol{A}$.

矩阵的转置满足以下的运算规律(假设运算是可行的):

(1) $\left(\boldsymbol{A}^{\top}\right)^{\top}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\top}=\boldsymbol{A}^{\top}+\boldsymbol{B}^{\top}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\top}=k\boldsymbol{A}^{\top}$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\top}=\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}$.

**证明**　(1), (2), (3)显然成立, 现证(4)成立.

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$, 易见, $(\boldsymbol{AB})^{\top}$与$\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}$均为$n\times m$矩阵.

矩阵$(\boldsymbol{AB})^{\top}$的第$j$行第$i$列的元素是$\boldsymbol{AB}$的第$i$行第$j$列的元素, 即

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

而矩阵$\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}$的第$j$行第$i$列的元素是$\boldsymbol{B}^{\top}$的第$j$行与$\boldsymbol{A}^{\top}$的第$i$列对应元素乘积的和, 即是矩阵$\boldsymbol{B}$的第$j$列与$\boldsymbol{A}$的第$i$行对应元素乘积的和

$$b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots+b_{sj}a_{is}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

所以$(\boldsymbol{AB})^{\top}=\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}$. □

**例1.2.9**　已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$, 求$(\boldsymbol{AB})^{\top}$.

**解**　方法一. 因为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$$

所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\top}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

方法二. $(\boldsymbol{AB})^{\top}=\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}$. □

性质(4)可以推广到任意有限个可乘矩阵的情形, 即

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{\top}=\boldsymbol{A}_s^{\top}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\top}\boldsymbol{A}_1^{\top}.$$

由对称矩阵与反对称矩阵的定义易知

(1) (反)对称矩阵的和、数乘仍是(反)对称矩阵;

(2) 对任意矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$均为对称矩阵;

(3) 若$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$是两个$n$阶(反)对称矩阵, 则$\boldsymbol{AB}$是(反)对称矩阵的充要条件是$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\,(\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA})$.

**证明** 仅证(3). 因为$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为对称矩阵, 即$\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^\top=\boldsymbol{B}$, 所以如果$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则$(\boldsymbol{AB})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$, 即$\boldsymbol{AB}$对称.

反之, 如果$\boldsymbol{AB}$对称, 即$(\boldsymbol{AB})^\top=\boldsymbol{AB}$, 则$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{BA}$.

对反对称矩阵的情形, 类似可证. □

### 1.2.4 矩阵的逆

在数的运算中, $a\div b\,(b\neq 0)$ 可写成$b^{-1}a$或$ab^{-1}$, 那么在矩阵运算中是否也有类似的定义呢? 为此我们要讨论矩阵可逆的问题.

**定义1.2.6** 设$\boldsymbol{A}$是$n$阶矩阵. 如果存在矩阵$\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}, \tag{1.1.4}$$

则称$\boldsymbol{A}$是**可逆矩阵**, $\boldsymbol{B}$称为$\boldsymbol{A}$的一个**逆矩阵**.

显然, 若$\boldsymbol{A}$是$n$阶可逆矩阵, 则满足条件(1.1.4)的矩阵$\boldsymbol{B}$一定是$n$阶方阵, 且是唯一的. 事实上, 若$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$均是$\boldsymbol{A}$的逆矩阵, 则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BI}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{IC}=\boldsymbol{C},$$

故$\boldsymbol{A}$的逆唯一, 记为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

可逆矩阵还具有下列性质:

(1) 若$\boldsymbol{A}$可逆, 则$\boldsymbol{A}^{-1}$也可逆, 且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2) 若$\boldsymbol{A}$可逆, 则$\boldsymbol{A}^\top$也可逆, 且$\left(\boldsymbol{A}^\top\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^\top$;

(3) 若$\boldsymbol{A}$可逆, 数$k\neq 0$, 则$k\boldsymbol{A}$可逆, 且$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(4) 若$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为$n$阶可逆阵, 则$\boldsymbol{AB}$可逆, $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, 且可推广到任意有限个可逆矩阵的乘积, 即$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1}=\boldsymbol{A}_s^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$.

**例1.2.10** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

**解** 因为$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$, 故$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. □

### 1.2.5 矩阵的幂

**定义1.2.7** 设$\boldsymbol{A}$是$n$阶矩阵, 定义$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}$, $k$为非负整数, 则称$\boldsymbol{A}^k$为$\boldsymbol{A}$的$k$**次幂**.

矩阵的幂满足以下运算规律:

(1) $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n}$ ($m$, $n$为非负整数);

(2) $(\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}$.

**注** 由于矩阵的乘法不满足交换律, 故一般$(\boldsymbol{AB})^m\neq\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m$ ($m$为非负整数), 但如果$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为$n$阶矩阵, 且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则可以证明$(\boldsymbol{AB})^m=\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m$ ($m$为非负整数).

### 1.2.6 矩阵的共轭

**定义1.2.8** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为复矩阵, 记$\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a_{ij}})$, 其中$\overline{a_{ij}}$表示复数$a_{ij}$的共轭, 称$\overline{\boldsymbol{A}}$为$\boldsymbol{A}$的**共轭矩阵**.

共轭矩阵满足如下运算规律.

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为复矩阵, $k$为复数, 则

(1) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$;

(2) $\overline{k\boldsymbol{A}}=\overline{k}\cdot\overline{\boldsymbol{A}}$;

(3) $\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}$;

(4) $\overline{\left(\boldsymbol{A}^{\top}\right)}=\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)^{\top}$.



## 习题 1.2

1. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&2\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$. (1) 计算$3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$; (2) 求$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

2. 计算.

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

3. 已知$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$(\boldsymbol{AB})^\top$和$\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$.

4. 解下列矩阵方程.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与$\boldsymbol{A}$可交换的矩阵.

6.计算下列矩阵($n$为正整数)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$;　　(3) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

7.设有线性变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 其中系数矩阵$\boldsymbol{A}$分别取$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 试求当$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$时, 在相应变换下对应变量$\boldsymbol{Y}$的值.

8.证明：两个$n$阶下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵.

9.证明：任意$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$均可表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和.

## 1.3 矩阵的初等变换

### 1.3.1 矩阵的初等变换与初等矩阵

**定义1.3.1** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则以下三种变换称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**行(列)初等变换**.

(1) 交换$\boldsymbol{A}$的某两行(列);

(2) 用非零数$k$乘以$\boldsymbol{A}$的某一行(列)所有元素;

(3) 将$\boldsymbol{A}$的某一行(列)的$k$倍加到另一行(列)上.

矩阵的行、列初等变换统称为矩阵的**初等变换**.

**定义1.3.2** 由单位矩阵$\boldsymbol{I}$经过一次初等变换所得到的矩阵称为**初等矩阵**. 对应于上述初等变换得到三种初等矩阵.

例如, 对$\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$交换1,2行(列)得到初等矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 用$(-3)$去乘$\boldsymbol{I}_3$的第三行(列)得到初等矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; 将$\boldsymbol{I}_3$的第2行的$(-2)$倍加到第1行, 或第1列的$(-2)$倍加到第2列, 得初等矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

一般地, 对$n$阶单位矩阵$\boldsymbol{I}$,

(1) 交换$\boldsymbol{I}$的第$i$, $j$行(列), 得到的初等矩阵记为$\boldsymbol{I}\left(i,j\right)$;

(2) 用非零数$k$乘以$\boldsymbol{I}$的第$i$行(列), 得到的初等矩阵记为$\boldsymbol{I}\left(i\left(k\right)\right)$;

(3) 将$\boldsymbol{I}$的第$j$行的$k$倍加到第$i$行(或第$i$列的$k$倍加到第$j$列)上, 得到的初等矩阵

记为$\boldsymbol{I}\,(i,j\,(k))$; 即

$$\boldsymbol{I}(i,j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&& \\
&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&& 1 &&&&&& \\
&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&& 1 &&&& \\
&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&& \ddots && \\
&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix};$$

$$\boldsymbol{I}\,(i\,(k))=\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& k &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}\text{第}i\text{行};$$

$$\boldsymbol{I}(i,j(k))=\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 & \cdots & k && \\
&&& \ddots & \vdots && \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}.$$



直接验证, 初等矩阵具有如下性质.

**命题1.3.1** (1) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵;

(2) 初等矩阵均为可逆矩阵, 且其逆仍是同类型的初等矩阵, 即

$$\boldsymbol{I}\left(i,j\right)^{-1}=\boldsymbol{I}\left(i,j\right);\quad \boldsymbol{I}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{I}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);\quad \boldsymbol{I}\left(i,j\left(k\right)\right)^{-1}=\boldsymbol{I}\left(i,j\left(-k\right)\right).$$

矩阵的初等变换与初等矩阵之间有密切的联系.

**定理1.3.1** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是$m\times n$矩阵, 对$\boldsymbol{A}$施行一次某种初等行(列)变换, 相当于用一个相应的$m$ (或$n$)阶初等矩阵左(右)乘$\boldsymbol{A}$.

**证明** 现仅对$\boldsymbol{A}$进行交换$i$, $j$行的情形进行证明.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{I}(i,j)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

对于其余情形可类似证明. □

**例1.3.1** 设有矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (1)将$\boldsymbol{A}$的1, 3列互换; (2)将$\boldsymbol{A}$的第2行的$-3$倍加到第1行上, 写出对应的初等矩阵, 并用矩阵乘法将这两种变换表示出来.

**解**　(1)交换$\boldsymbol{A}$的1, 3列, 即用初等矩阵$\boldsymbol{I}_3(1,3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$右乘$\boldsymbol{A}$, 得

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 将$\boldsymbol{A}$的第2行的$-3$倍加到第1行上, 即用初等矩阵

$$\boldsymbol{I}_3\left(1,2\left(-3\right)\right)=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

左乘$\boldsymbol{A}$得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

### 1.3.2　矩阵的等价标准形

**定义1.3.3**　若矩阵$\boldsymbol{A}$经过有限次初等变换变成矩阵$\boldsymbol{B}$, 则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价, 记为$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$.

矩阵之间的等价关系具有下列基本性质.

(1) 自反性: $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$;

(2) 对称性: 若$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{A}$;

(3) 传递性: 若$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$, 则$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{C}$.

**例1.3.2**　设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 6 \\ -1 & -3 & 4 & -17 \\ 1 & 4 & -7 & 3 \\ -1 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, 对其做如下初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 6 \\ -1 & -3 & 4 & -17 \\ 1 & 4 & -7 & 3 \\ -1 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换}1,\,3\text{行}}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ -1 & -3 & 4 & -17 \\ 3 & 2 & 9 & 6 \\ -1 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{分别加到第2, 3, 4行}]{\text{第1行乘以1, }-3\text{, 1,}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & -10 & 30 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{加到第3行}]{\text{第2行乘以10}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -143 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{B},$$

其中矩阵$\boldsymbol{B}$依其结构特征称为阶梯形矩阵.

一般地, 称满足下列条件的矩阵为**阶梯形矩阵**:

(1) 若有零行(元素全为0的行), 则其位于非零行的下方;

(2) 每个非零行的第一个非零元都是位于上一行第一个非零元的右边.

对例1.3.2中的矩阵$\boldsymbol{B}$再做如下初等行变换:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -143 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}.$$

称这种特殊结构的阶梯形矩阵$\boldsymbol{C}$为行简化阶梯形矩阵.

一般地, 称满足下列条件的阶梯形矩阵为**行简化阶梯形矩阵**:

(1) 每个非零行的第一个非零元素是1;

(2) 每个非零行第一个非零元所在列的其余元素是0.

如果对上述矩阵$\boldsymbol{C}$再做初等列变换:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D},$$

其中矩阵$\boldsymbol{D}$称为原矩阵$\boldsymbol{A}$的等价标准形.

**定理1.3.2**　任意矩阵$\boldsymbol{A}$都与一个形如$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$的矩阵等价, 其中矩阵$\boldsymbol{D}$称为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的**等价标准形**.

**证明** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 若所有$a_{ij}$均为0, 则$\boldsymbol{A}$已是标准形$\boldsymbol{D}$的形式(此时$r=0$). 若$\boldsymbol{A}$至少有一个元素不为零, 不妨设$a_{11}\neq 0$ (若$a_{11}=0$, 而$a_{ij}\neq 0$, 将$\boldsymbol{A}$的第1, $i$行互换, 再将第1, $j$列互换即可). 用$-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$乘$\boldsymbol{A}$的第1行加到第$i$行上($i=2,\cdots,m$), 再用$-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$乘该矩阵的第1列加到第$j$列上($j=2,\cdots,n$), 然后再以$\frac{1}{a_{11}}$乘第1行, $\boldsymbol{A}$可化为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn}\end{pmatrix}.$$

记

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}a'_{22} & \cdots & a'_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn}\end{pmatrix}.$$

若$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{0}$, 则$\boldsymbol{A}$已化成$\boldsymbol{D}$的形式; 若$\boldsymbol{B}_1\neq\boldsymbol{0}$, 则重复上述过程, 即可化为$\boldsymbol{D}$的形式.□

由定理1.3.1, 可将定理1.3.2表述为以下形式.

**推论1.3.1** 对任意$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$, 存在$m$阶初等矩阵$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$和$n$阶初等矩阵$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$, 使得$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{D}$.

若设$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t$, 则$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$为可逆矩阵, 故有以下推论.

**推论1.3.2** 对任意$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$, 存在$m$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和$n$阶可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$.

**推论1.3.3** $n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的等价标准形为$\boldsymbol{I}_n$.

**推论1.3.4** 矩阵$\boldsymbol{A}$可逆当且仅当$\boldsymbol{A}$可以表示成若干个初等矩阵的乘积.

**证明** 如果$\boldsymbol{A}$可逆, 由推论1.3.3, $\boldsymbol{A}$的等价标准形是$\boldsymbol{I}$, 故存在初等矩阵$\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s$及$\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{I}$, 由初等矩阵均为可逆矩阵, 且其逆矩阵仍为初等矩阵, 故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_1^{-1},$$

即$\boldsymbol{A}$表示为初等矩阵的乘积.

反之, 如果$\boldsymbol{A}$可以表示成初等矩阵的乘积, 显然$\boldsymbol{A}$可逆. □

值得注意的是, 推论1.3.4的逆命题也真, 即若$\boldsymbol{A}$可逆, 则$\boldsymbol{A}$可表示成若干个初等矩阵的乘积.

### 1.3.3 求逆矩阵的初等变换法

设$\boldsymbol{A}$是$n$阶可逆矩阵, 则$\boldsymbol{A}^{-1}$也是$n$阶可逆矩阵, 从而$\boldsymbol{A}^{-1}$可表示成若干个初等矩阵的乘积. 设$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_m$, 其中$\boldsymbol{G}_i\,(i=1,2,\cdots,m)$为$n$阶初等矩阵, 于是$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_m\boldsymbol{A}$, 即

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_m\boldsymbol{A}, \tag{1.3.1}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_m\boldsymbol{I}. \tag{1.3.2}$$

式(1.3.1)表示对$\boldsymbol{A}$施以若干次初等行变换可化为$\boldsymbol{I}$; 式(1.3.2)表示对$\boldsymbol{I}$施以与$\boldsymbol{A}$相同的初等行变换可化为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

因此, 可构造$n\times 2n$矩阵$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{I})$, 然后对其施以初等行变换将$\boldsymbol{A}$化为$\boldsymbol{I}$, 此时$\boldsymbol{I}$就化为$\boldsymbol{A}^{-1}$, 即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$.

**例1.3.3** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

**解**

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-3&3\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

另外, 对$n$阶可逆矩阵$\boldsymbol{A}$来说, 由于$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$, 于是

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_m, \tag{1.3.3}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2\cdots\boldsymbol{G}_m. \tag{1.3.4}$$

式(1.3.3)表示对$\boldsymbol{A}$施以若干次初等列变换可化为$\boldsymbol{I}$; 式(1.3.4)表示对$\boldsymbol{I}$施以与$\boldsymbol{A}$相同的初等列变换可化为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

因此, 也可构造$2n\times n$矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$, 然后对其施以初等列变换, 将$\boldsymbol{A}$化为$\boldsymbol{I}$, 此时$\boldsymbol{I}$就化为$\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

利用初等变换求逆矩阵的方法可用于求解矩阵方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$或$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 其中$\boldsymbol{A}$为可逆矩阵, $\boldsymbol{X}$为未知矩阵. 方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 等价于$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 等价于$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

对$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$构造矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, 对其施以初等行变换将$\boldsymbol{A}$化为$\boldsymbol{I}$, 则$\boldsymbol{B}$ 化为$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 即$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$.

对$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$构造矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, 对其施以初等列变换将$\boldsymbol{A}$化为$\boldsymbol{I}$, 则$\boldsymbol{B}$化为$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$, 即$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$.

**例1.3.4**　设矩阵方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$, 求$\boldsymbol{X}$, 其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**解**　由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}$, 可知$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$, 则$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}$. 此时我们

并不知道$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$是可逆的, 但从后面的行变换结果, 可知它确实是可逆的.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

□



## 习题 1.3

1. 求矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$的等价标准形.

2. 用初等变换法求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (a_1a_2\cdots a_n \neq 0)$.

3. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为3阶矩阵, $\boldsymbol{A}$的第3行的$-2$倍加到第2行, 得$\boldsymbol{A}_1$; $\boldsymbol{B}$的第2列加到第1列, 得$\boldsymbol{B}_1$; 且

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{AB}$.

4. 解下列矩阵方程.

(1) 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{X}$使得$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$;

(2) 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{X}$使得$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$;

(3) 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX} = 2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}$, 求$\boldsymbol{X}$;

(4) 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AXA} + \boldsymbol{BXB} = \boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{BXA} + \boldsymbol{I}$, 求$\boldsymbol{X}$.

5. 已知$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 证明: $\boldsymbol{A}$可逆, 并求$\boldsymbol{A}^{-1}$.



## 1.4 分块矩阵

### 1.4.1 分块矩阵的概念

对于行数和列数较大的矩阵, 为了简化运算, 经常采用分块法, 把大矩阵的运算化为若干个小矩阵的运算, 同时也使原矩阵的结构显得简单而清晰. 具体的做法如下: 将大矩阵$\boldsymbol{A}$用若干个横线和纵线分成多个小矩阵, 每个小矩阵称为$\boldsymbol{A}$的**子块**.

以子块为元素的形式矩阵称为**分块矩阵**.

例如,

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\\hdashline 0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_3&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=(1),\quad \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0,&0,&0\end{pmatrix}.$$

矩阵的分块有多种方式, 可根据具体需要而定. 如上述矩阵$\boldsymbol{A}$也可分块成$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{A}_3\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}$, 其中$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&3\\0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 若记$\boldsymbol{\alpha}_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in}), i=1,2,\cdots,m$; $\boldsymbol{\beta}_j=(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\cdots,\alpha_{mj})^\top$, $j=1,2,\cdots,n$, 则$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}$, 称$\boldsymbol{A}$按行进行分块; 或$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, 称$\boldsymbol{A}$按列进行分块.

### 1.4.2 分块矩阵的运算

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算规则相似, 但分块时要注意, 参与运算的两矩阵按块能运算, 并且参与运算的子块也能运算.

(1) 加法运算: 设矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同型矩阵, 并采用相同的分块法, 则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的每个分块是$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$中对应子块之和.

(2) 数乘运算: 设$\boldsymbol{A}$为分块矩阵, $k$为数, 则$k\boldsymbol{A}$的每个子块是$k$与$\boldsymbol{A}$中相应子块的数乘.

(3) 乘法运算: 两分块矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的乘积依然按照普通矩阵的乘积进行运算, 但对于乘积$\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{A}$的列的分法必须与$\boldsymbol{B}$的行的分法一致.

**例1.4.1** 将矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分块如下：

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&3\\0&1&2&4\\ \hdashline 0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&0&0\\2&0&0&0\\ \hdashline 6&3&1&0\\0&-2&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1&3\\2&1&2&4\\6&3&0&0\\0&-2&0&0\end{pmatrix},$$

$$k\boldsymbol{A}=k\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{I}_2&k\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{0}&-k\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0&k&3k\\0&k&2k&4k\\0&0&-k&0\\0&0&0&-k\end{pmatrix}.$$ □

**例1.4.2** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&0&-2\\0&0&5&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&-2\\1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 用分块矩阵计算$\boldsymbol{AB}$.

**解**

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&-2&0\\0&1&0&-2\\ \hdashline 0&0&5&3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&-2\boldsymbol{I}_2\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c:cc}3&0&-2\\1&2&0\\ \hdashline 0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_2\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2 & -2\boldsymbol{I}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}-2\boldsymbol{I}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}. \quad \square$$

**例1.4.3** 设矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$可乘, $\boldsymbol{B}$按列分块成$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1, & \boldsymbol{B}_2, & \cdots, & \boldsymbol{B}_n\end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB}_1, & \boldsymbol{AB}_2, & \cdots, & \boldsymbol{AB}_n\end{pmatrix}$. 若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 则$\boldsymbol{AB}_j=\boldsymbol{0}$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

(4) 分块矩阵的转置.

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}^{\top}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\top} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\top}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\top} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\top}\end{pmatrix}$.

(5) 两类特殊的分块矩阵.

形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_n\end{pmatrix}$$

的分块矩阵称为**分块对角矩阵**, 其中$\boldsymbol{A}_i$均为方阵, 其余子块均为零矩阵. 同结构的分块对角矩阵的和、积、数乘仍是分块对角矩阵.

形如

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tt}\end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tt}\end{pmatrix}$$

的分块矩阵分别称为**分块上三角矩阵**和**分块下三角矩阵**, 其中$\boldsymbol{A}_{ii}$ $(i=1,2,\cdots,t)$为方阵. 同结构的分块上(下)三角矩阵的和、积、数乘仍是分块上(下)三角矩阵.

## 习题 1.4

1. 用分块矩阵乘法求下列矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. 设$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$及$s$阶矩阵$\boldsymbol{B}$都可逆, 求$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1}$.

3. 用矩阵的分块求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n \neq 0)$.

4. 设$\boldsymbol{C}$是$n$阶可逆矩阵, $\boldsymbol{D}$是$3 \times n$矩阵, 且$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 用分块矩阵的乘法求一个$n \times (n+3)$矩阵$\boldsymbol{X}$使得$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$.

5. 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^4$.

## // 复习题 1 //

1. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$n$阶方阵, 证明下列命题等价:

(1) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$;

(2) $(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 \pm 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$;

(3) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$.

2. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为$n$阶方阵, 且$\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I})$, 证明：$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$当且仅当$\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{I}$.

3. 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$为$n$阶方阵, 称$\boldsymbol{A}$的主对角元素之和$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$为$\boldsymbol{A}$的迹, 记作$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$. 证明: 当$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为$n$阶方阵时,

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$;

(2) $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A}) = k \cdot \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ ($k$为任意常数);

(3) $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^\top = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}$;

(4) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$.

4. 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^6$.

5. 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 3 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^n$.

6. 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^n - 2\boldsymbol{A}^{n-1}$ $(n \geqslant 2)$.

7. 设方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$,证明：

(1) $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$都可逆, 并求它们的逆;

(2) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$和$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$不同时可逆.

8. 用初等变换法求$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的逆.

9. 设$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$,其中$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}$.

10. 用矩阵的分块求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的逆.

11. 设$\boldsymbol{A}$是$n$阶可逆方阵, 互换$\boldsymbol{A}$的第$i$行与第$j$行后得到矩阵$\boldsymbol{B}$, 求$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$.

12. 已知$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为3阶矩阵, 将$\boldsymbol{A}$的第3行的$-2$倍加到第2行后得到矩阵$\boldsymbol{A}_1$, 将$\boldsymbol{B}$的第2列加到第1列后得到矩阵$\boldsymbol{B}_1$, 且

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

13. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵, $2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

(1) 证明: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$可逆, 并求$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^{-1}$;

(2) 若$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{B}$.

14. 设$(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{C}^{-1}$, 其中$\boldsymbol{A}$为4阶矩阵,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求矩阵$\boldsymbol{A}$.

15. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 6\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 其中$\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right)$, 求$\boldsymbol{B}$.

16. 设$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$ ($k$为正整数), 证明: $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$可逆.

17. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$分别为$n, s$阶可逆矩阵, 求

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}, \ \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}.$$

18. 若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$及$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$可交换, 证明: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$是同阶矩阵, 且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$可交换.

19. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵, 则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{I}_n$.

Chapter 2

# 第 2 章 行　列　式

行列式的概念起源于线性方程组的求解问题,是数学的基本概念之一, 不但在数学的许多领域, 而且在经济学、管理学、物理学等其他科学分支中都有广泛的应用. 行列式可以看成是有向面积或体积的概念在一般欧氏空间的推广, 描述一个线性变换对“体积”的影响. 本章主要介绍行列式的定义、性质和计算.

## 2.1　二阶、三阶行列式

行列式可视为方阵的函数, 把方阵的元素映射到一个数, 其函数值是一个标量. 我们经常把上述函数值也称为行列式. 在空间解析几何以及重积分的坐标变换等, 我们已经初步接触了二阶和三阶行列式的计算.

我们用$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示定义在二阶矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$上的函数, 其值为

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**例2.1.1**　$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2.$

**例2.1.2**　在二重积分的极坐标变换中, 我们知道

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

此时, 变换的雅可比行列式为

$$\begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = x'_r y'_\theta - x'_\theta y'_r = r,$$

类似地, 我们用$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$表示定义在三阶矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$上的函数, 其值为

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

**例2.1.3**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-2\times4\times9-1\times6\times8=0.$$

**例2.1.4** 设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

当三阶系数矩阵的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

上述三元线性方程组有唯一解, 且解可用行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中$D_i$ $(i=1,2,3)$为用常数项$b_1, b_2, b_3$代替系数矩阵的第$i$列所得的三阶行列式.

### 习题 2.1

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\left|\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n\right|$;　(4) $\left|\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right|^n$.

2. 求方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1, \\ 2x_1+x_3=1, \\ 2x_2-x_3=0 \end{cases}$的解.

3. 已知$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ -1 & -4a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$无解, 求实数$a$的取值范围.

4. 求三重积分中球面坐标变换的雅可比行列式.

5. 证明三点(2, 4, 1), (3, 7, 5)和(4, 10, 9)共线.

## 2.2　$n$阶行列式

### 2.2.1　排列与逆序

我们首先介绍排列和逆序的概念及有关性质.

**定义2.2.1**　一个$n$阶**排列**是由$1, 2, \cdots, n$构成的一个$n$ 元有序数组.

由乘法原理知, 所有$n$阶排列共有$n!$个, 其中按照自然数从小到大顺序排列的$n$阶排列称为$n$阶自然排列, 例如123456是一个6阶自然排列. 两个排列相同当且仅当这两个排列的元素顺序完全一样.

在一个排列里, 如果某个元素排在某个比它小的元素的前面, 则称这两个元素构成一个**逆序**. 排列$j_1j_2\cdots j_n$中逆序的个数称为这个排列的**逆序数**, 记为$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**; 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**. 显然, 自然排列的逆序数为0, 并且是一个偶排列.

例如, 对所有3阶排列, 逆序数分别为

$$\tau(123)=0,\ \tau(132)=1,\ \tau(213)=1,$$
$$\tau(231)=2,\ \tau(312)=2,\ \tau(321)=3.$$

所以, 123, 231, 312为偶排列, 132, 213, 321为奇排列. 从这个例子里还可以看到, 所

有的3阶排列中, 偶排列与奇排列个数相等. 这不是巧合, 后文将进一步给予解释.

在一个排列中, 互换某两个元素的位置, 且其他元素位置保持不变, 这样一个变换称为一个**对换**. 例如, 排列53421 经过对换2与3, 得到排列52431. 容易验证, 对换前后的两个排列的奇偶性不同. 事实上, 我们有如下的定理.

**定理2.2.1** 一次对换改变排列的奇偶性.

**证明** 首先考虑特殊情形, 即对换的两个元素在排列中相邻. 设原排列为

$$\cdots j\ k \cdots, \tag{2.2.1}$$

互换$j, k$, 且其他元素位置保持不变, 得到新排列

$$\cdots k\ j \cdots, \tag{2.2.2}$$

其中$\cdots$表示两个排列中位置不变的那些元素. 我们把排列中所有的逆序分成三种类型:

(1) 位置不变的元素彼此之间构成的逆序;

(2) 位置不变的元素和$k$或$j$之间构成的逆序;

(3) $k, j$构成的逆序.

我们可以看到, 类型(1)和(2)两种逆序关系在对换前后没有发生改变. 对于类型(3), 如果原来$j, k$构成逆序, 则对换后不再构成逆序, 从而排列(2.2.2)的逆序数减少一个; 如果原来$j, k$不构成逆序, 则对换后变成一个逆序, 从而排列(2.2.2)的逆序数增加了一个. 无论哪种情形, 排列的奇偶性都发生改变.

对于一般的情形, 假设$j, k$之间有$s$个元素, 记为$i_1, i_2, \cdots, i_s$. 设原排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots,$$

对换$j, k$后得到新排列

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots.$$

上述对换可以通过一系列相邻元素的对换来实现, 即将$j$向右依次与$i_1, i_2, \cdots, i_s, k$对换, 共$s+1$次相邻元素的对换, 所得排列为

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k j \cdots,$$

再将$k$向左依次与$i_s, i_{s-1}, \cdots, i_1$对换, 共$s$次相邻元素的对换. 因此, 上述$j$与$k$对换可通过$2s+1$次相邻位置元素的对换来实现. 根据对特殊情形的讨论可知, 每次相邻位置元素的对换改变排列的奇偶性, 而$2s+1$为奇数, 所以上述对换必改变原排列的奇偶性. □

**推论2.2.1** 奇数次对换改变排列的奇偶性,偶数次对换不改变排列的奇偶性.

**推论2.2.2** $n$元排列$i_1i_2\cdots i_n$可经有限次对换变为自然排列$12\cdots n$, 且对换次数的奇偶性与原排列的奇偶性相同.

**推论2.2.3** 在所有$n$元排列中($n\geqslant 2$), 奇排列与偶排列的个数相等, 均为$\frac{n!}{2}$.

**证明** $n$阶排列共有$n!$个, 不妨设有$s$个奇排列和$t$个偶排列. 任意固定两个位置, 分别将$n!$个排列对这两个位置上的元素做一次对换, 由定理2.2.1可知, $s$个奇排列变为$s$个偶排列, 所以$s\leqslant t$. 同时, $t$个偶排列变为$t$个奇排列, 所以$t\leqslant s$. 因此$s=t$. 由此可知, 奇排列与偶排列各有$\frac{n!}{2}$个. □

### 2.2.2 $n$阶行列式

我们现在可以给出$n$阶矩阵的行列式的定义.

**定义2.2.2** 矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式, 记为$\det\boldsymbol{A}$或$|\boldsymbol{A}|$, 定义为$\boldsymbol{A}$的所有取自不同行不同列的$n$个元素乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的代数和, 该项的符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$, 即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (2.2.3)$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对列下标构成的所有$n$阶排列求和. 注意, 定义中行下标是一个自然排列.

特别地, 定义一阶行列式$|a|=a$.

**例2.2.1** 计算上三角矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

**解** 行列式中每项的一般形式为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 由于矩阵的第$n$行的元素除去$a_{nn}$以外全为零, 因此只需考虑$j_n=n$ 即可. 而$a_{nn}$位于第$n$ 列, 因此不能在第$n$列再取任何元素. 接下来考虑$a_{nj_n}$前面的元素$a_{(n-1)j_{n-1}}$. 类似地, 只需考虑$j_{n-1}=n-1$ 即可. 依此类推, 该行列式中除去$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外, 其

余项全是0. 故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

□

**例2.2.2** 类似地, 下三角矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

与对角矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

仍然为$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. □

**例2.2.3** 计算如下矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

**解** 行列式中每项的一般形式为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 由于矩阵的第$n$行的元素除去$a_{n1}$以外全为零, 因此只需考虑$j_n=1$即可. 而$a_{n1}$ 位于第1 列, 因此不能在第1列再取任何元素. 只需考虑$j_{n-1}=2$即可. 依此类推, 该行列式中除去$(-1)^{\tau(n\cdots21)}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$外, 其余项全是0. 故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

□

在行列式的定义中, 每一项的行指标是按自然顺序$123\cdots n$来排列的, 但是(实或复)数的乘法是可交换的, 因此$n$阶行列式的一般项又可以写成$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$, 其中$i_1i_2\cdots i_n$, $j_1j_2\cdots j_n$分别为两个$n$阶排列. 利用排列的性质, 不难证明该项的符号为$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$. 因此, 我们就得到行列式的另外两种等价定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n,\\ j_1j_2\cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}; \tag{2.2.4}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{2.2.5}$$

由此可见, 行列式的行指标和列指标的地位是相同的.



## 习题 2.2

1. (1)求排列965743218的逆序数.

   (2) 求$2n$阶排列$246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$ 的逆序数.

   (3) 已知8阶排列$857i41j3$为奇排列, 求$i$和$j$.

2. 已知排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数为$k$, 求排列$i_n\cdots i_2i_1$的逆序数.

3. 写出4阶矩阵行列式$|(a_{ij})|$展开式中包含$a_{23}, a_{34}$ 并带正号的项.

4. 按定义计算下列行列式:

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}; \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

5. 用行列式定义证明：若$n$阶矩阵的零元素的个数多于$n^2-n$, 则该矩阵的行列式为零.

6. 用行列式定义证明 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

## 2.3 行列式的性质与展开

当$n$很大时, 利用定义直接计算$n$阶矩阵的行列式一般会比较繁琐. 本节将分析行列式的一些基本性质, 可以帮助简化行列式的计算. 下列性质可由行列式定义得到, 我们仅以性质2.3.4为例给出证明, 其余证明请读者自行给出.

**性质2.3.1** 矩阵行列互换, 其行列式不变, 即矩阵与其转置矩阵有相同的行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.3.1}$$

**性质2.3.2** 若矩阵的某一行(或某一列)有公因子$k$, 则$k$可以提到其行列式的外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.3.2}$$

特别地, 若矩阵的某行(或某列)的元素全为零, 则其行列式为零. 注意, 对于$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$, $|k\boldsymbol{A}| = k^n\,|\boldsymbol{A}|$ ($k$为常数).

**性质2.3.3** 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 分别用$b_1, b_2, \cdots, b_n$; $c_1, c_2, \cdots, c_n$与$b_1+c_1, b_2+c_2, \cdots, b_n+c_n$, 取代$\boldsymbol{A}$的第$i$行元素$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$, 所得方阵分别记为$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$, 则$|\boldsymbol{A}_3| = |\boldsymbol{A}_1| + |\boldsymbol{A}_2|$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.3.3}$$

**性质2.3.4** 互换矩阵的两行(或两列), 其行列式反号, 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

**证明** 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$. 不失一般性, 假设$l < k$. 交换$\boldsymbol{A}$的第$k$行与第$l$行得到方阵$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$. 则

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{B}| &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n)} b_{1j_1}\cdots b_{lj_l}\cdots b_{kj_k}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{kj_l}\cdots a_{lj_k}\cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{lj_k}\cdots a_{kj_l}\cdots a_{nj_n} \\ &= -\,|\boldsymbol{A}|. \end{aligned}$$

□

**性质2.3.5** 把矩阵的某一行(或列)乘以一个常数加到另一行(或列)上, 其行列

式不变, 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

**性质2.3.6** 若矩阵的某两行(或两列)对应元素成比例, 则其行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_1 & ka_2 & \cdots & ka_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

特别地, 若矩阵的某两行(或两列)对应元素完全相同, 则其行列式为零.

**性质2.3.7** 若$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为同阶方阵, 则$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$. 一般地, 若$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$均为同阶方阵, 则$|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m| = |\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$.

**例2.3.1** 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$.

**解** 将行列式的第1行与第2行交换, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

将第1行分别乘以$-2, -1$加到第2,4行, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 1 \end{vmatrix};$$

将第3行乘以$-3$加到第2行, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 1 \end{vmatrix};$$

将第2行分别乘以$-2, -7$加到第3, 4行, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 22 \end{vmatrix};$$

将第3行乘以$-\frac{7}{3}$加到第4行, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{vmatrix} = 10.$$

□

**例2.3.2**　证明奇数阶反对称矩阵的行列式等于零.

**证明**　设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为$n$阶反对称矩阵, 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

其中$n$为奇数, $a_{ij} = -a_{ji}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 把矩阵的各行提取公因子$-1$, 则

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left|\boldsymbol{A}^{\top}\right| = -|\boldsymbol{A}|. \end{aligned}$$

故$|\boldsymbol{A}| = 0$.　□

**例2.3.3** 计算$n$阶矩阵行列式$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

**解** 将矩阵各列加到第1列, 得

$$\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

将第1行乘以$-1$加到以下各行, 得

$$\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

□

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$为$n$阶方阵, 划去元素$a_{ij}$所在的行与列, 剩下的元素按原来的相对位置构成的$n-1$阶矩阵的行列式称为元素$a_{ij}$ 的**余子式**, 记为$M_{ij}$. 元素$a_{ij}$的**代数余子式**, 记为$A_{ij}$, 定义为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{2.3.4}$$

下面给出矩阵的行列式按行或列的展开公式.

**定理2.3.1** 设$n$阶方阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 则$|\boldsymbol{A}|$ 等于$\boldsymbol{A}$的任意一行(或列)的所有元素与它们所对应的代数余子式的乘积之和, 即对任意$i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

另一方面, $\boldsymbol{A}$的任意一行(或列)元素与其他行(或其他列)对应元素的代数余子式乘积之和为零, 即若$i \neq j, k \neq l$, 则

$$\begin{aligned} &a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \\ &a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \cdots + a_{nk}A_{nl} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

**证明**　只证明行的情形. 先证式(2.3.5). 分三种情形.

情形(1): $\boldsymbol{A}$的第一行除$a_{11}$外其余元素均为零. 此时,

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11}\sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}. \end{aligned}$$

情形(2)：$\boldsymbol{A}$的第$i$行除$a_{ij}$外其余元素全为零. 此时,

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{ij}A_{ij}.$$

首先将$\boldsymbol{A}$的第$i$行依次与第$i-1,i-2,\cdots,2,1$行交换, 再将第$j$列依次与第$j-$

$1, j-2, \cdots, 2, 1$列交换, 使$a_{ij}$位于第1 行第1列, 从而转化为情形(1). 故

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= (-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix}
a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}.
\end{aligned}
$$

情形(3): 一般情形. 先把第$i$行的每个元素分别写成该元素与$n-1$个0 之和, 根据性质2.3.3化为情形(2), 即

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.
\end{aligned}
$$

至此, 我们证明了行列式按行的展开公式.

下证式(2.3.6). 把矩阵$\boldsymbol{A}$ 的第$j$行元素换成第$i$行元素, 其余元素不动, 得到的矩

阵行列式记为$D$, 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将$D$按第$j$行展开, 因此,

$$D=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$

另一方面, 根据性质2.3.6, $D=0$. 因此, 式(2.3.6)成立. □

**例2.3.4**　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

求$A_{21}+2A_{22}+3A_{23}$.

**解**

$$A_{21}+2A_{22}+3A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0.$$

□

利用定理2.3.1计算行列式时, 将一个$n$阶行列式的计算问题转换成$n$个$n-1$阶的行列式计算问题, 一般会降低计算的复杂度. 同时, 应当尽量对含有零元素较多的行或列展开, 这样会减小计算量.

**例2.3.5**　计算5阶矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**解**　按矩阵最后一行展开,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{5+2} \times 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-3) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 8 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 336.$$

□

**例2.3.6**　求$n$阶矩阵行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

**解**　分下列三种情形讨论:

情形(1): $x_i \neq a, i = 1, 2, \cdots, n$. 从矩阵第2行开始, 每行减去第1行, 则

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a - x_1 & x_2 - a & 0 & \cdots & 0 \\ a - x_1 & 0 & x_3 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a - x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix}.$$

每列提取公因子$x_i-a$, $i=1,2,\dots,n$, 则

$$D=\left(\prod_{i=1}^n (x_i-a)\right)\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-a} & \dfrac{a}{x_2-a} & \dfrac{a}{x_3-a} & \cdots & \dfrac{a}{x_n-a} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

把第$2,3,\dots,n$列加到第1列, 则

$$\begin{aligned} D&=\left(\prod_{i=1}^n (x_i-a)\right)\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-a}+\sum_{j=2}^n \dfrac{a}{x_j-a} & \dfrac{a}{x_2-a} & \dfrac{a}{x_3-a} & \cdots & \dfrac{a}{x_n-a} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \\ &=\left(\frac{x_1}{x_1-a}+\sum_{j=2}^n \frac{a}{x_j-a}\right)\prod_{i=1}^n (x_i-a) \\ &=\left(1+\sum_{j=1}^n \frac{a}{x_j-a}\right)\prod_{i=1}^n (x_i-a). \end{aligned}$$

情形(2): 恰有一个$x_i$等于$a$, 不妨设为$x_i=a$. 通过$2(i-1)$次行列互换, 则

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & x_1 & a & \cdots & a \\ a & a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

从第2行开始, 各行减去第1行, 则

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} \\ &=a(x_1-a)(x_2-a)\cdots(x_{i-1}-a)(x_{i+1}-a)\cdots(x_n-a). \end{aligned}$$

情形(3): $x_1, x_2, \cdots, x_n$中至少有两个等于$a$. 显然, $D = 0$. □

**例2.3.7**　设$n \geqslant 2$, 称下列行列式为$n$阶**Vandermonde行列式**, 记为$V(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

则

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

**证明**　(数学归纳法) 当$n = 2$时,

$$V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

结论显然成立.

假设结论对$n-1$阶Vandermonde行列式成立. 下证$n$阶的情形. 从矩阵的第$n$行开始, 自下而上依次从每行减去它的上一行的$a_1$倍, 得

$$\begin{aligned} V(a_1, a_2, \cdots, a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 = j < i \leqslant n} (a_i - a_1) V(a_2, \cdots, a_n). \end{aligned}$$

由归纳假设,

$$V(a_2,\cdots,a_n)=\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

因此,

$$V(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

□

特别地, $V(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$当且仅当$a_1,a_2,\cdots,a_n$中至少有两个相等.

## 习题 2.3

1. 计算下面的行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$;

(3) $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$;

(7) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列行列式的全部代数余子式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

3. 设$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 9 & 27 \\ 4 & 1 & 16 & 64 \end{vmatrix}$, 求$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}$, 其中$A_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式.

4. 已知4阶矩阵$\boldsymbol{A}$的第3列元素分别是$-1,2,0,1$, 它们的余子式分别是$5,3,-7,4$, 求$\boldsymbol{A}$的行列式.

5. 证明:

$$\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

6. 设$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{I}, |\boldsymbol{A}| < 0$,求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

7. 已知厂商边际成本函数$C(Q) = a + bQ + cQ^2\ (c > 0)$, 且$C(10) = 1800$, $C(20) = 1100$, $C(70) = 600$. 求此边际成本函数.

## 2.4 逆矩阵

在第1章, 我们初步学习了逆矩阵的基本知识. 下面利用行列式这一工具, 进一步讨论矩阵可逆的条件以及矩阵逆的求解问题. 为此, 我们首先介绍伴随矩阵的概念.

**定义2.4.1** 若$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则称$\boldsymbol{A}$为**非奇异矩阵**或**非退化矩阵**. 反之, 称$\boldsymbol{A}$为**奇异矩阵**或**退化矩阵**.

**定义2.4.2** 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$是$n$阶矩阵, 用$\boldsymbol{A}$的第$i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$行元素对应的代数余子式$A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$作为第$i$列元素构成一个$n$阶矩阵, 称此矩阵为$\boldsymbol{A}$的**伴随**

**矩阵**, 记为$\boldsymbol{A}^*$, 即

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

**定理2.4.1** $n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵. 此时,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

**证明**

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{vmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}|\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}.$$

当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时, 取$\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 则有$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$, 从而$\boldsymbol{A}$可逆. 此时, $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

反之, 若$\boldsymbol{A}$可逆, 则存在$\boldsymbol{A}^{-1}$使$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 两边取行列式, $|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{I}|=1$. 因此$|\boldsymbol{A}|\neq 0$. □

**推论2.4.1** 若$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆, 则$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

**推论2.4.2** 设$\boldsymbol{A}$是$n$阶矩阵. 若存在$n$阶矩阵$\boldsymbol{B}$, 使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n$或$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$, 则$\boldsymbol{A}$可逆, 且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

**例2.4.1** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. 证明$\boldsymbol{A}$可逆, 并求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

**解** 因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

所以$\boldsymbol{A}$可逆. 因为

$$A_{11}=4,\quad A_{12}=-3,\quad A_{21}=-2,\quad A_{22}=1.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

于是

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

□

**例2.4.2** 已知$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明$\boldsymbol{A}$可逆, 并求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

**解** 由题中条件,

$$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=3\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{A}\left(\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\right)=\boldsymbol{I},$$

所以, $\boldsymbol{A}$可逆, 且$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$. □

**例2.4.3** 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-\ \ x_3=2,\\ x_1-x_2+\ \ x_3=1,\\ x_1+x_2+2x_3=-1.\end{cases}$$

**解** 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

则原方程组可写成矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$. 易知$\boldsymbol{A}$可逆, 所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}.$$

□

## 习题 2.4

1\. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. 证明$\boldsymbol{A}$可逆, 并求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

2. 证明: 对于$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$, $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 由此计算$|((\boldsymbol{A}^*)^*)^*|$.

3. 已知3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式为2, 求$\left|3\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{A}^{-1}\right|$.

4.设$A$是幂等阵, 即$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. 试证: $2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$可逆, 并求其逆;

5. 已知$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{I}$, $k$为正整数. 证明: $\boldsymbol{A}^{k-1} + \boldsymbol{A}^{k-2} + \cdots + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$ 可逆.

## 2.5 克拉默法则

本节将利用克拉默(Cramer)法则讨论一类特殊线性方程组, 即方程个数与未知量个数相等的线性方程组的求解问题.

**定理2.5.1**(克拉默法则) 设含有$n$个方程$n$个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

当系数矩阵的行列式$D = |\boldsymbol{A}| \neq 0$时, 方程组(2.5.1)有且仅有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{2.5.2}$$

其中$D_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$是用方程组的常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$代替$\boldsymbol{A}$的第$i$列所得方阵的行列式, 即

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证明** 首先证明式(2.5.2)是方程组(2.5.1)的解. 记

$$\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^\top.$$

则线性方程组可化为$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. 由于$\boldsymbol{A}$可逆, 则$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}$. 所以,

$$x_i = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\ (\boldsymbol{A}_{1i}b_1 + \boldsymbol{A}_{2i}b_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_{ni}b_n) = \frac{D_i}{D}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

因此式(2.5.2)是方程组(2.5.1)的解.

再证解的唯一性. 设$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$是方程组(2.5.1)的解, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{B},$$

所以$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = \mathbf{0}$, 两边同时乘以$\boldsymbol{A}^{-1}$, 得到$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2$. □

**例2.5.1**　用克拉默法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

**解**　系数矩阵的行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 324 \neq 0,$$

于是可用克拉默法则进行求解. 计算可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 \\ 8 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ -8 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 324, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 648,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 8 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -8 & 1 \end{vmatrix} = -324, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -648.$$

所以方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = 2,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = -1, x_4 = \frac{D_4}{D} = -2.$$

□

注意, 当方程组系数矩阵的行列式$D = 0$时, 方程组解的情况需要通过其他方法进行讨论.

常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**; 反之, 称为**非齐次线性方程组**. 显然, $(0, 0, \cdots, 0)$为齐次线性方程组的一个解, 称为**零解**. 对于齐次线性方程组, 我们主要关心的是它有无非零解. 应用克拉默法则, 我们不难得到如下结论.

**定理2.5.2** 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\quad\quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.5.3}$$

的系数矩阵的行列式$D \neq 0$, 则它只有零解.

**证明** 因为$D \neq 0$, 而根据定义$D_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 根据克拉默法则, 方程组(2.5.3)有唯一解$x_i = \frac{D_i}{D} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. □

需要强调的是, 定理的逆否命题当然成立, 即, 若方程组(2.5.3)有非零解, 则$D = 0$. 而且定理的逆命题也成立, 我们将在以后章节中讨论.

**例2.5.2** 讨论$\lambda$取何值时, 齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$有非零解.

**解** 由克拉默法则, 如果方程组有非零解, 则系数行列式$\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0$, 所以$\lambda = 3$. □

## 习题 2.5

1. 写出经过三点(1, 1, 1), (2, 3, −1), (3, −1, −1)的平面方程.

2. 用克拉默法则求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$$

3. 设多项式$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$满足条件$f(a_i) = b_i, i = 1, 2, \cdots, n+1$, 其中$a_i$互不相同. 证明: $f(x)$的系数$c_0, c_1, \cdots, c_n$是唯一确定的. 试给出当$n = 2$时$f(x)$的表达式.

4. 设$a, b, c, d$是不全为零的实数. 证明: 方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 = 0, \\ cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 = 0, \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 = 0 \end{cases}$$

只有零解.

5. 当$\lambda$为何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + \lambda x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

(1 )仅有零解; (2) 有非零解.

6. 求一个二次多项式$f(x)$, 使得$f(1) = 0, f(2) = 3, f(-3) = 28$.

## 2.6　拉普拉斯定理

矩阵的行列式可以按其一行或一列展开, 那么, 能否同时按照多行或多列展开呢? 这就是拉普拉斯(Laplace)定理要解决的问题.

首先介绍一些概念与记号. 设$n$阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

从$\boldsymbol{A}$中任意选取$k$行$l$列, 如第$i_1, i_2, \cdots, i_k$行与第$j_1, j_2, \cdots, j_l$列, 其中$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leqslant n$, 这些行与列交叉位置上的元素按照原来的相对位置构成的一个$k \times l$ 矩阵, 称为$\boldsymbol{A}$ 的一个$k \times l$**子矩阵**, 记为$\boldsymbol{A}[i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_l]$. 剩下$n-k$行与$n-l$列的元素按照原来的相对位置构成的$(n-k) \times (n-l)$矩阵称为上述子矩阵的**余子阵**, 记为$\boldsymbol{A}(i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_l)$.

若$k = l$, 则子矩阵$\boldsymbol{A}[i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k]$的行列式称为$\boldsymbol{A}$ 的$k$**阶子式**; 而余子阵$\boldsymbol{A}(i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k)$的行列式称为上述子式的**余子式**, 该余子式与符号$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}$的积称为上述子式的**代数余子式**.

显然, 当$k = l = 1$时, $k$阶子式就是1阶子式, 而它的余子式即是前面所述的$M_{i_1 j_1}$, 代数余子式即为$A_{i_1 j_1}$.

**定理2.6.1**　在$n$阶矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$中任意选取$k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$行, 由这$k$行元素所组成的一切$k$阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式$|\boldsymbol{A}|$.

注意到, 定理和式中共有$\mathrm{C}_n^k$项, 这是由于列指标$j_1 j_2 \cdots j_k$取遍了$n$列中的所有$k$列. 其次, 由于矩阵行列式的行与列地位是对等的, 所以也可以固定$k$列, 按$k$列展开. 最后, 当$k = 1$时, 此定理就是按一行或者一列作拉普拉斯展开, 即定理2.3.1.

**例2.6.1**　设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为方阵, 则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\,.$$

对于分块上三角矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tt} \end{pmatrix},$$

应用拉普拉斯定理, $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_{11}|\,|\boldsymbol{A}_{22}|\cdots|\boldsymbol{A}_{tt}|$. 因此, $\boldsymbol{A}$可逆的充分必要条件为$\boldsymbol{A}_{ii}$都可逆, $i=1,2,\cdots,t$. 当$\boldsymbol{A}$可逆时,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tt}^{-1} \end{pmatrix}.$$

请读者自行证明.　□

**例2.6.2**　设$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$, 其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$分别为$r$阶和$s$阶可逆矩阵. 证明$\boldsymbol{M}$可逆, 并求$\boldsymbol{M}^{-1}$.

**解**　因为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$可逆, $|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{C}| \neq 0$, 所以$\boldsymbol{M}$可逆. 设

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{X}_{11}$, $\boldsymbol{X}_{22}$分别为$r$阶和$s$阶方阵, 则

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_s \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{11} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{21} = \boldsymbol{I}_r, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{12} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{22} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{21} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{22} = \boldsymbol{I}_s. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{11} = \boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_{12} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_{21} = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{X}_{22} = \boldsymbol{C}^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{pmatrix}.$$

□

### 习题 2.6

1. 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

2. 设$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$, 其中$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$分别为$r$阶和$s$阶可逆矩阵, 证明$\boldsymbol{M}$可逆, 并求$\boldsymbol{M}^{-1}$.

## // 复习题 2 //

1. (1) 设$\boldsymbol{A}$为元素为1或$-1$的3阶方阵, 证明$|\boldsymbol{A}|$为偶数.

   (2) 设$\boldsymbol{A}$为元素为1或0的3阶方阵, 试确定$|\boldsymbol{A}|$的最大值.

2. (1) 已知$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, 求$\left|(4\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(4\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\top})\right|$;

   (2) 已知$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 求$(\boldsymbol{B}^{\top})^{-1}$.

3. 设$f(x) = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -x \end{vmatrix}$. 分别求$f(x)$中$x^4, x^3$ 的系数及$\frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3}$.

4. 解方程

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+a_{n-1}-x \end{vmatrix} = 0,$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$互不相同.

5. 计算下面行列式.

(1) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$, 其中$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$;

(3) $D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$;

(4) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$;

(5) $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$.

6. (1) 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

求$A_{44}+A_{45}$与$A_{41}+A_{42}+A_{43}$.

(2) 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ 1 & 5 & 6 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}.$$

求$A_{11}+2A_{21}+3A_{31}+\cdots+nA_{n1}$.

7. 计算$f(x+1)-f(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \mathrm{C}_n^2 & \mathrm{C}_n^3 & \cdots & \mathrm{C}_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & \mathrm{C}_{n+1}^2 & \mathrm{C}_{n+1}^3 & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

8. 证明: 若$\alpha \neq \beta$, 则

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

9. 计算$n$阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

10. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} A_{ji},$$

其中$A_{ij}$为$a_{ij}$的代数余子式.

11. 将$n$阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

展开成关于$\lambda$的多项式, 并用$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的子式表示$\lambda$的各次幂的系数.

12. 设实数$a,b,c$不全为零, $\alpha,\beta,\gamma$为任意实数, 且

$$\begin{cases} a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma, \\ c = a\cos\beta + c\cos\alpha. \end{cases}$$

证明: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

13. 证明: 若矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的每行元素的和及每列元素的和都等于0, 则$\boldsymbol{A}$的各元素的代数余子式$A_{ij}$都相等.

14. 证明: 方程组

$$\begin{cases} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n = x_1, \\ 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + 2a_{2n}x_n = x_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n = x_n \end{cases}$$

只有零解, 其中$a_{ij}$为整数, $i,j=1,2,\cdots,n$.

Chapter 3

# 第3章 线性方程组

求解线性方程组是代数学的起源之一, 它在自然科学和社会科学的许多领域都有着广泛的应用. 线性方程组的求解问题涉及到线性方程组解的存在性、线性方程组的求解方法以及解集的线性结构等问题. 本章所讨论的方程组比第2章利用克拉默法则求解的方程组更具一般性, 即方程的个数与未知量的个数不一定相等; 而且即使相等, 方程组的系数矩阵的行列式也不一定非零.

## 3.1 数域

作为代数运算的对象, "数"的范围随着人们对客观世界的认识加深而逐渐扩大. 具有不同性质的数集具有不同的定义. 关于代数运算, 我们知道, 在整数范围内, 可以进行加、减、乘三种运算, 然而两个整数的商不一定是整数, 也就是说, 整数对除法运算不具有封闭性.

但在有理数、实数、复数范围内, 它们关于加、减、乘、除(除数不为零) 四则运算, 均具有封闭性. 其实, 具有这种性质的数集还有很多. 在代数中经常将有共同性质的对象统一进行研究, 并且对涉及数的运算要求具有封闭性. 我们常常是在具有一定代数运算封闭性的数集上来讨论所要研究的代数对象. 为此, 我们引入下面的概念.

**定义3.1.1** 设$\mathbb{F}$是复数集的子集. 若

(1) $0,1 \in \mathbb{F}$;

(2) $\mathbb{F}$中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零) 仍属于$\mathbb{F}$.

则称$\mathbb{F}$为一个**数域**.

例如, 有理数集$\mathbb{Q}$、实数集$\mathbb{R}$、复数集$\mathbb{C}$都是数域, 但整数集$\mathbb{Z}$就不是数域, 所有奇数组成的集合也不是数域. 显然, 任意数域都是复数域的一个子集, 从而复数域是最大的数域.

**定理3.1.1** 任何数域$\mathbb{F}$都包含有理数域.

**证明** 设$\mathbb{F}$为任一数域, 则$1 \in \mathbb{F}$. 因为$\mathbb{F}$对于加法具有封闭性, 所以$1+1=2, 1+2=3, \cdots, 1+n=n+1, \cdots$全在$\mathbb{F}$中, 即$\mathbb{F}$包含全体自然数. 因为$0 \in \mathbb{F}$, 则$0-n=-n$也在$\mathbb{F}$中, 进而$\mathbb{F}$ 包含全体整数. 因为任一有理数都可以表示成两个整数的商, 且数域对除法具有封闭性, 所以$\mathbb{F}$包含一切有理数. □

本书将用$\mathbb{F}$表示一般数域, 将自然数集、整数集、有理数域、实数域和复数域分别记为$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$.

**例3.1.1** 设$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$. 证明: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$是数域.

**证明** 显然$0=0+0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), 1=1+0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 设$\alpha=a+b\sqrt{2}, \beta=c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 则

$$\begin{aligned}
&\alpha \pm \beta=(a+b\sqrt{2}) \pm(c+d\sqrt{2})=(a \pm c)+(b \pm d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \\
&\alpha \beta=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

设$\beta \neq 0$, 则$c, d$不全为0, 从而$c-d\sqrt{2} \neq 0$; 否则, $c=d\sqrt{2}$, 于是$d \neq 0$, 由此推出$\frac{c}{d}=\sqrt{2}$, 导致矛盾. 因此

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} &=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} \\
&=\frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^{2}-2d^{2}} \\
&=\frac{ac-2bd}{c^{2}-2d^{2}}+\frac{bc-ad}{c^{2}-2d^{2}}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

综上所述, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$是一个数域. □

## 习题 3.1

1. 验证以下数集是否构成数域, 并说明理由.

(1) 所有可以表示成形式$\dfrac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}$的数, 其中$m, n$为任意非负整数, $a_i, b_j$ $(i=0,1,\cdots,n; j=0,1,\cdots,m)$ 是整数.

(2) 所有奇数组成的数集.

(3) $\sqrt{2}$的整数倍的全体构成的数集.

2.证明$\mathbb{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i}|a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是数域, 其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

3. 设$\mathbb{F}$是至少含两个数的数集. 若$\mathbb{F}$中任意两个数的差和商(除数不为0) 仍属于$\mathbb{F}$, 则$\mathbb{F}$为一个数域.

4.(1) 设$\mathbb{F}$, $\mathbb{K}$为数域. 证明$\mathbb{F}\cap\mathbb{K}$为数域.

(2) 判断$\mathbb{F}\cup\mathbb{K}$是否为数域? 并请说明理由.

## 3.2 消元法

本节将用消元法讨论线性方程组的求解问题.

### 3.2.1 线性方程组的初等变换

设含有$m$ 个方程$n$个未知量的线性方程组的一般形式为

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \cdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right. \tag{3.2.1}$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$为未知量, $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为方程组的系数, $b_i\ (i=1,2,\cdots,m)$为方程组的常数项.

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

因此方程组(3.2.1)可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}.$$

其中$\boldsymbol{A}$ 为方程组(3.2.1)的系数矩阵, $\boldsymbol{X}$为未知量矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为方程组(3.2.1) 的常数项矩阵.

若将矩阵$\boldsymbol{A}$ 按列分块为$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 则方程组(3.2.1) 又可写成

$$\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{B}. \tag{3.2.2}$$

若用一组常数$d_1, d_2, \cdots, d_n$ 分别去替代方程组(3.2.1) 中的未知量$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使方程组(3.2.1) 中每个方程都成立等式, 则称$x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_n = d_n$ 为方程组(3.2.1) 的一个解, 向量

$$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_n)^{\top}$$

为方程组(3.2.1) 的一个**解向量**. 由方程组(3.2.1)的全体解(或解向量) 构成的集合称为方程组(3.2.1) 的解集. 当两个方程组的解集相同时, 称这两个方程组**同解**.

回忆中学课程, 我们在解二元、三元线性方程组所采用的加减消元法和代入消元法, 即所谓线性方程组的消元法, 是指利用等式的等量运算, 消去某些方程中未知量的个数, 使之能得到与原方程组同解的简化方程组. 为此, 我们采用相同原理求解一般线性方程组.

下面以例题说明用消元法解一般线性方程组的具体步骤.

**例3.2.1**　利用消元法求解下列线性方程组:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

**解**　在方程组(3.2.3)中互换第一、二个方程的位置,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

在方程组(3.2.4)中将第一个方程乘以$-1$加到第三个方程上,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

在方程组(3.2.5) 中将第二个方程分别乘以$2,-5,7$加到第一、三、四个方程上,

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_3 = 12, \\ -4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

在方程组(3.2.6) 中将第三个方程分别乘以$-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2$ 加到第一、二、四个方程上, 再对第三个方程乘以$\frac{1}{2}$, 第四个方程乘以$\frac{1}{8}$,

$$\begin{cases} x_1 \quad - 2x_4 = -8, \\ x_2 + x_4 = 3, \\ x_3 = 6, \\ x_4 = 0. \end{cases} \tag{3.2.7}$$

在方程组(3.2.7) 中将第四个方程分别乘以$2,-1$加到第一、二个方程上,

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 6, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

□

从上述解题过程可见, 用消元法解方程组实际上就是对方程组施行一系列的以下三种变换之一:

(1) 互换两个方程的位置;

(2) 用一个非零常数乘以某一个方程;

(3) 把一个方程的倍数加到另一个方程上.

以上三种变换通常称为方程组的**初等变换.**

由初等变换的定义易知以下结论.

**定理3.2.1** 初等变换将线性方程组化为同解的线性方程组.

显然, 消元法的目的就是利用方程组的初等变换将原方程组化为阶梯形方程组, 且这个阶梯形方程组与原方程组同解, 然后通过解这个阶梯形方程组从而得到原方程组的解.

### 3.2.2 系数矩阵与增广矩阵的初等变换

在例3.2.1的求解过程中, 我们还发现未知量并未参加运算, 参加运算的只是线性方程组的系数和常数项. 因此, 就其实质来说, 用初等变换来求解线性方程组等价于对相应的增广矩阵施行初等行变换. 例如, 将前面例3.2.1解方程组的过程用增广矩阵的初等行变换表示如下:

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



显然, 用初等变换化线性方程组成阶梯形方程组就相当于用初等行变换化增广矩阵成阶梯形矩阵. 因此, 解线性方程组可以通过矩阵来进行, 先用初等行变换化增广矩阵成阶梯形矩阵, 进而化成行简化阶梯形矩阵, 再回到与之对应的方程组求解.

### 3.2.3 解的一般形式、解的判定

由第1章1.3.2节, 线性方程组(3.2.1)的增广矩阵$\bar{\boldsymbol{A}}$ 可经过初等行变换、以及必

要的列交换(但不包括最后一列), 化成如下行简化阶梯形矩阵:

$$\bar{\boldsymbol{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.8}$$

与式(3.2.8)对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

注意这里$x_1, x_2, \cdots, x_n$的顺序可能有变化, 但为了书写的方便, 我们仍以$x_1$, $x_2, \cdots, x_n$ 的顺序写出, 这并不影响方程组解的讨论.

由定理3.2.1, 方程组(3.2.1)与(3.2.9)是同解的. 而方程组(3.2.9) 是否有解完全取决于最后一个方程$0 = d_{r+1}$是否成立.

当$d_{r+1} = 0$时, 方程组(3.2.9)一定有解; 当$d_{r+1} \neq 0$时, 方程组(3.2.9)没有解. 因此方程组(3.2.1)有解的充分必要条件是$d_{r+1} = 0$.

在有解的情形下,

(1) 如果$r = n$, 方程组(3.2.9)为

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_n = d_n. \tag{3.2.10}$$

显然式(3.2.10)即为方程组(3.2.1)的唯一解.

(2)如果$r < n$, 方程组(3.2.9)可改写为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \qquad\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases} \tag{3.2.11}$$

可见, 任意给定$x_{r+1},\cdots,x_n$的一组值, 就唯一地确定$x_1,\cdots,x_r$的值. 因此方程组(3.2.11)有无穷多个解, 从而方程组(3.2.1)有无穷多个解.

由方程组(3.2.11), $x_1,x_2,\cdots,x_r$可以通过$x_{r+1},\cdots,x_n$ 表示出来, 这样一组表达式称为方程组(3.2.1)的**一般解**, 其中$x_{r+1},\cdots,x_n$ 称为**自由未知量**.

**例3.2.2**　解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+3x_3=1,\\ 4x_1-2x_2+5x_3=4,\\ 2x_1-\ \ x_2+4x_3=0. \end{cases} \tag{3.2.12}$$

**解**　对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -2 & 5 & 4\\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由最后一行可知, 原方程组无解. □

**例3.2.3**　解方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=3,\\ 2x_1+6x_2+\ \ x_3-3x_4\qquad=2,\\ x_1+3x_2-2x_3-\ \ x_4-x_5=-1,\\ 3x_1+9x_2+4x_3-5x_4+x_5=5. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

**解**　对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 3\\ 2 & 6 & 1 & -3 & 0 & 2\\ 1 & 3 & -2 & -1 & -1 & -1\\ 3 & 9 & 4 & -5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此与方程组(3.2.13) 同解的方程组如下

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=3,\\ \qquad\qquad -5x_3+x_4-2x_5=-4. \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3-15x_2+7x_4+x_5}{5}, \\ x_3 = \dfrac{4+x_4-2x_5}{5}, \end{cases}$$

其中$x_2, x_4, x_5$ 为自由未知量. □

**定理3.2.2** 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0. \end{cases} \tag{3.2.14}$$

若$s<n$, 即方程的个数小于未知量的个数, 则该方程组必有非零解.

**证明** 显然, 方程组(3.2.14)化成阶梯形方程组后, 方程的个数$r$不超过$s$, 即$r \leqslant s < n$, 而且$d_{r+1}=0$. 因此, 方程组(3.2.14)有无穷多个解, 当然有非零解. □

## 习题 3.2

1. 判断下面线性方程组是否有解? 若有解, 求出所有解.

(1) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-x_4-x_5=2, \\ x_1+3x_2+x_3-6x_4+3x_5=3, \\ x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=1, \\ 3x_1-6x_2+3x_3+3x_4-3x_5=1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3-5x_4=17, \\ 2x_1+x_2-7x_3=9, \\ 2x_1-3x_2-6x_3+3x_4=27, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=0, \\ x_1+3x_2-2x_3=0, \\ 3x_1+7x_2+8x_3=0, \\ x_1+4x_2-9x_3=0. \end{cases}$

2. 讨论下列未知量的取值与对应线性方程组解的关系, 并在有解的情形求解.

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=a, \\ x_2+2x_3+2x_4=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=b. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=5, \\ 3x_1+2x_2+kx_3=18-5k, \\ x_2+x_3=2. \end{cases}$

3. 试讨论$p,t$取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-2x_3-2x_4=t+3. \end{cases}$$

有解或无解, 并在有解情形下求其全部解.

## 3.3　$n$维向量空间

本章3.2节介绍了消元法, 对于线性方程组的精确解, 消元法是一个最基本的方法. 但是, 是否可以从线性方程组本身直接判断它是否有解? 此外, 用消元法化线性方程组为阶梯形方程组, 阶梯形方程组中方程个数是否唯一呢? 这些问题需要我们对线性方程组做进一步研究.

一个线性方程组的解的情况是由方程组中方程之间的关系所确定的. 因此, 为了讨论线性方程组的解, 我们有必要来研究方程之间的关系.

一个$n$元方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,$$

可以用$n+1$元有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n,b)$$

来表示. 因此, 线性方程之间的关系实际上就是它们所对应的有序数组之间的关系.

### 3.3.1 向量及其线性运算

**定义3.3.1** 数域$\mathbb{F}$中$n$个有序的数$a_1, a_2, \ldots, a_n$所构成的数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ 或 } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为数域$\mathbb{F}$ 上一个$n$维行(或列)**向量**, 其中元素$a_i$称为向量的第$i$个**分量**(或**坐标**), $i = 1, 2, \ldots, n$,

数域$\mathbb{F}$ 上全体$n$ 维行(或列)向量构成的集合记作$\mathbb{F}^n$. 向量常用希腊字母$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$等表示.

**定义3.3.2** 若$n$ 维向量

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

的对应分量都相等, 即$a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 则称向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$**相等**, 记为$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$.

**定义3.3.3** 若$n$ 维向量的分量全为0, 即$(0, \cdots, 0)$, 称为**零向量**, 记为$\mathbf{0}$.

零向量满足

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}.$$

**定义3.3.4** 向量$(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$称为$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的**负向量**, 记为$-\boldsymbol{\alpha}$.

**定义3.3.5** 设$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$是数域$\mathbb{F}$ 上的向量, 称

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的**和**, 记为$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$.

利用负向量可以定义向量的减法:

$$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_n - b_n).$$

注意到, 只有两个向量的维数相同时, 它们才能进行加或减.

**定义3.3.6** 设$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是数域$\mathbb{F}$ 上的向量, $k \in \mathbb{F}$, 称向量$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$为数$k$与$\boldsymbol{\alpha}$的**数量乘积**, 记作$k\boldsymbol{\alpha}$.

向量的加法和数乘统称为向量的**线性运算**.

利用上述定义, 向量的线性运算满足下列性质:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$;

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

其中$k,\ l\in\mathbb{F},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$均为$\mathbb{F}$上的$n$维向量.

而且我们还可以发现

(9) $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

(10) $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$;

(11) $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

(12) 若$k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 则$k=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

**定义3.3.7** 数域$\mathbb{F}$ 上全体$n$ 维向量集合$\mathbb{F}^n$, 连同向量加法和数乘运算一起, 称为数域$\mathbb{F}$上$n$维**向量空间**.

$n$维行向量可视为$1\times n$ 矩阵, $n$ 维列向量可视为$n\times 1$ 矩阵, 向量与矩阵的线性运算及其规律是一致的. 利用矩阵转置的概念, 列向量的转置是行向量, 而行向量的转置是列向量.

### 3.3.2 线性相关性

对于一组$n$维向量, 按向量之间的关系, 可将向量组划分为两类, 一类是线性相关, 另一类则是线性无关.

**定义3.3.8** 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in\mathbb{F}^n$, $k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{F}$, 则称

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的一个**线性组合**.

设$\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{F}^n$. 若存在$k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{F}$, 使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

则称$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ **线性表示**(或**线性表出**), 或称$\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的一个**线性组合**.

**例3.3.1** 设$n$维向量$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$, 则任一个$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是否能被向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$线性表示.

**解** 易知, 存在下列等式

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

因此, 任一$n$ 维向量$\boldsymbol{\alpha}$都能被向量$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$线性表示, 且其表示系数就是向量$\boldsymbol{\alpha}$的各分量, 其中向量$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 称为**$n$维单位向量组**. □

下面讨论例3.3.1的一般情形. 设$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$, $i=1,2,\cdots,s$. 如何判定$\boldsymbol{\beta}$是否是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合? 怎样将$\boldsymbol{\beta}$表示为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合呢?

构造方程$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$, 其中$x_1,x_2,\ldots,x_s$ 为未知量. 由向量相等的定义, 上述方程等价于如下方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s=b_2,\\ \qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{ns}x_s=b_n. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

由此可知, $\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性组合的充要条件是线性方程组(3.3.1)有解.

**例3.3.2** 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$, $\boldsymbol{\beta}=(-3,8,7)$, 将$\boldsymbol{\beta}$表示为$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合.

**解** 考虑方程$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$, 其对应的方程组如下:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-3,\\ 2x_1-x_2+x_3=8,\\ 3x_1\qquad\ +x_3=7. \end{cases}$$

解此方程组, $x_1=2,x_2=-3,x_3=1$. 因此$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_3$. □

**定义3.3.9** 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\in\mathbb{F}^n$. 若对每个$i=1,2,\cdots,s$, 向量$\boldsymbol{\alpha}_i$都可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示, 则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_t$ **线性表示**. 若两个向量组可以互相线性表示, 则称它们**等价**.

可以验证, 向量组之间的等价具有以下性质:

(1) 反身性: 每个向量组都与它自身等价.

(2) 对称性: 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$等价, 则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$与$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$等价.

(3) 传递性: 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$与$\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_l$ 等价, 则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_l$等价.

**定义3.3.10** 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in\mathbb{F}^n$. 若存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s\in\mathbb{F}$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$在$\mathbb{F}$上**线性相关**; 否则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$在$\mathbb{F}$上**线性无关**.

由上述定义, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$在$\mathbb{F}$上线性无关等价于方程$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$在$\mathbb{F}$上只有零解, 即$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$. 易知含有零向量的向量组一定线性相关; 由一个向量$\alpha$构成的向量组线性相关当且仅当$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

**例3.3.3** $n$维单位向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

**证明** 设$k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n=\mathbf{0}$, 即

$$(k_1,\cdots,k_n)=(0,\cdots,0).$$

因此$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$, 从而$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$线性无关. □

一般地, 要判别一个向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni}),\ i=1,2,\cdots,s, \tag{3.3.2}$$

是否线性相关, 根据定义3.3.10, 即检验

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0} \tag{3.3.3}$$

是否有非零解. 式(3.3.3)按分量写出来就是

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s=0,\\ \qquad\qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{ns}x_s=0. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

因此, 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关(线性无关) 的充要条件是齐次线性方程组(3.3.4)有非零解(只有零解).

不难看出, 若向量组(3.3.2)线性无关, 则对每个向量添加$t$个分量所得到的$n+t$维向量组(称为“**延长向量组**”)

$$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni},a_{n+1,i},\cdots,a_{n+t,i}),\quad i=1,2,\cdots,s \tag{3.3.5}$$

也线性无关.

事实上, 类似于上述讨论, 与向量组(3.3.5)对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s = 0, \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,s}x_s = 0, \\ \cdots \\ a_{n+t,1}x_1 + a_{n+t,2}x_2 + \cdots + a_{n+t,s}x_s = 0. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

显然, 方程组(3.3.6)的解全是方程组(3.3.4)的解. 若方程组(3.3.4)只有零解, 则方程组(3.3.6)也只有零解.

**例3.3.4** 设$\boldsymbol{\alpha}_1 = (-4, 2, 10)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-2, 1, 5)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 1, 4)$, 则$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$是否线性相关?

**解** 考虑方程组$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$, 即

$$k_1(-4, 2, 10) + k_2(-2, 1, 5) + k_3(-1, 1, 4) = (0, 0, 0).$$

因而

$$\begin{cases} -4k_1 - 2k_2 - k_3 = 0, \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ 10k_1 + 5k_2 + 4k_3 = 0. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

方程组(3.3.7)的系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

于是, 方程组(3.3.7)有非零解, 即$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

**定理3.3.1** 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geqslant 2)$线性相关的充要条件是存在某个向量, 它可以由其余向量线性表示.

**证明** 先证必要性. 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性相关的, 则存在不全为零的$k_1$, $k_2, \cdots, k_s \in \mathbb{F}$, 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

不妨设$k_s \neq 0$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_s = -\frac{k_1}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_{s-1},$$

即$\boldsymbol{\alpha}_s$可由其余向量线性表示.

再证充分性. 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$中有一个向量可以用其余向量线性表示, 不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_s = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\ k_1, \cdots, k_{s-1} \in \mathbb{F}.$$

于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1} + (-1)\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

设$k_s = -1$, 则$k_1, \cdots, k_s$不全为0. 因而$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. □

**定理3.3.2**　设向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$线性相关, 则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表示, 且表示唯一.

**证明**　因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$线性相关, 所以存在一组不全为零的数$k_1, \cdots, k_m, k$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

先证$k \neq 0$. 若$k = 0$, 则有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$. 由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $k_1 = 0, k_2 = 0, \cdots, k_m = 0$. 这与$k_1, \cdots, k_m, k$ 不全为零矛盾. 故$k \neq 0$, 从而

$$\boldsymbol{\beta} = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_m.$$

再证表示唯一. 设$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则

$$(k_1 - l_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (k_m - l_m)\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 所以$k_1 - l_1 = 0, \cdots, k_m - l_m = 0$. 从而$k_1 = l_1, \cdots, k_m = l_m$, 即$\boldsymbol{\beta}$的表示唯一. □

**定理3.3.3**　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则它的部分向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$也线性无关, 其中$1 \leqslant r \leqslant s$.

**证明**　(反证法) 不妨设部分向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$. 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关, 则存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{F}$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}.$$

设$k_{r+1} = \cdots = k_s = 0$, 于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

但$k_1, \cdots, k_r, k_{r+1}, \cdots, k_s$不全为零, 故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关, 导致矛盾. 因此, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关. □

由此可见, 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的部分向量组线性相关, 则整个向量组线性相关. 特别地, 线性无关向量组不包含零向量.

**定理3.3.4**　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$线性表示, 且$r > s$, 则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关.

**证明**　由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$线性表示, 根据定义, 存在$a_{ij} \in \mathbb{F}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$, 使得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{12}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{1s}\boldsymbol{\beta}_s, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = a_{21}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{22}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{2s}\boldsymbol{\beta}_s, \\ \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r = a_{r1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{r2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{rs}\boldsymbol{\beta}_s, \end{cases}$$

假设存在数$k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}. \tag{3.3.8}$$

因为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = (k_1a_{11} + \cdots + k_ra_{r1})\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + (k_1a_{1s} + \cdots + k_ra_{rs})\boldsymbol{\beta}_s, \tag{3.3.9}$$

所以要证$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关, 即需证存在不全为零的$k_1, k_2, \cdots, k_r$使得式(3.3.8)成立, 也即需证, 存在不全为零的$k_1, k_2, \cdots, k_r$使得等式(3.3.9)右边为零向量.

事实上, 因为$r > s$, 由定理3.2.2, 下面齐次线性方程组(视$k_1, k_2, \cdots, k_r$为未知量)

$$\begin{cases} k_1a_{11} + \cdots + k_ra_{r1} = 0, \\ \qquad\qquad \cdots \\ k_1a_{1s} + \cdots + k_ra_{rs} = 0 \end{cases}$$

有非零解, 即存在不全为零的数$k_1, \cdots k_r$使得式(3.3.8) 成立. 因此$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关. □

由定理3.3.4, 我们容易得到下面一些推论.

**推论3.3.1**　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$线性表示, 且$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性无关, 则$r \leqslant s$.

**推论3.3.2**　任意$n+1$个$n$维向量必线性相关.

事实上, 每个$n$维向量都可以被$n$维单位向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$线性表出, 且$n + 1 > n$, 因而必线性相关.

**推论3.3.3** 两个等价的线性无关向量组必含有相同个数的向量.

**定义3.3.11** 向量组的一个部分向量组称为一个**极大线性无关组**, 如果这个部分向量组本身是线性无关的, 但从余下的向量中任意选一个向量(如果还有的话)添加到这个部分向量组, 则所得到的新部分向量组都是线性相关的.

由定理3.3.2, 极大线性无关组的定义也可以表述如下: 向量组的一个部分向量组称为一个极大线性无关组, 如果

(1) 这个部分向量组本身是线性无关的;

(2) 向量组中任意一个向量都可以由这个部分向量组线性表示.

**例3.3.5** 设$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,0)$. 求$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组.

**解** 因为$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 且$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, 所以$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$的一个极大线性无关组. 类似地, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 和$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 也都是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大线性无关组. □

此例说明,一个向量组的极大线性无关组一般不是唯一的, 但极大线性无关组中所含向量个数相同. 如下结论请读者自行证明.

**定理3.3.5** 任一向量组必与它的极大线性无关组等价.

**推论3.3.4** 任一向量组的两个极大线性无关组必等价.

**推论3.3.5** 一个向量组的任意两个极大线性无关组都含有相同个数的向量.

**定义3.3.12** 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组所含向量的个数$r$称为这个**向量组的秩**, 记为$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$, 或$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$.

易知, 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的充分必要条件是它的秩等于它所含向量的个数. 事实上, 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关等价于$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的极大线性无关组是它自身, 也等价于$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = s$.

**定理3.3.6** 如果向量组(I) 可以由向量组(II)线性表示, 则

$$\text{(I) 的秩} \leqslant \text{(II) 的秩}.$$

**证明** 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是(I)的一个极大无关组, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 是(II)一个极大无关组. 则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由(I) 线性表示, 而(I) 可以由(II) 线性表示, (II) 可以由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 因此$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出. 由于$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 根据推论3.3.1, $r \leqslant s$. □

由定理3.3.6立即得到, 等价的向量组有相同的秩.

下面介绍求向量组的极大线性无关组的常用方法. 将向量组按列向量排成矩阵$\boldsymbol{A}$, 对$\boldsymbol{A}$进行初等行变换, 化成阶梯形矩阵$\boldsymbol{B}$, 矩阵$\boldsymbol{B}$的非零行个数就是该向量组

的秩, 这些非零行第一个非零元素所在的列对应于$\boldsymbol{A}$的相应列的列向量就构成一个极大线性无关组. 请读者思考原因.

由于初等行变换的方法不同, 按照上述方法所得的极大线性无关组也可能不同, 但构成极大线性无关组的向量的个数是唯一的, 即向量组的秩.

**例3.3.6**　求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,2,2,-4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,0,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,1,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,-1,-1,-1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(1,2,1,1,1)$ 的极大线性无关组和秩.

**解**　将$\boldsymbol{\alpha}_1^\top,\boldsymbol{\alpha}_2^\top,\boldsymbol{\alpha}_3^\top,\boldsymbol{\alpha}_4^\top,\boldsymbol{\alpha}_5^\top$ 按列排成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1^\top,\boldsymbol{\alpha}_2^\top,\boldsymbol{\alpha}_3^\top,\boldsymbol{\alpha}_4^\top,\boldsymbol{\alpha}_5^\top\right)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1\\ -4 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

对$A$只进行初等行变换化成阶梯形矩阵:

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为3, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为其一个极大线性无关组. □

## 习题 3.3

1. 判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,0,2,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-4,2,1,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,5,0,1)$的线性相关性.

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-1,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,1,-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,-1,1)$. 问$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$是否线性相关? $\alpha_1$可否由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性表示? 如能表示求其表示式.

3. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$也线性无关.

4. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关. 问:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 并说明理由.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示? 并说明理由.

5. 证明: 一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组.

6. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-16,22)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(7,1,0,-3,3)$. 求$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩及一个极大线性无关组.

7. 证明: 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

对任何$b_1,b_2,\cdots,b_n$都有解的充要条件是系数矩阵的行列式不等于零.

## 3.4　矩阵的秩

本节引入矩阵秩的概念.

**定义3.4.1**　设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$ 非零矩阵. 若$\boldsymbol{A}$ 有一个$r$阶非零子式, 而其所有$r+1$阶子式(如果有的话)全为零, 则称矩阵$\boldsymbol{A}$的**秩**为$r$, 记为$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r$ 或$r(\boldsymbol{A})=r$. 当$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$时, 定义$r(\boldsymbol{A})=0$.

显然矩阵的秩具有下列性质:

(1) 若矩阵$\boldsymbol{A}$ 中有某个$s$ 阶子式不为零, 则$r(\boldsymbol{A})\geqslant s$;

(2) 若$\boldsymbol{A}$ 中所有$t+1$ 阶子式全为零, 则$r(\boldsymbol{A})\leqslant t$;

(3) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\top})$;

(4) 若$\boldsymbol{A}$ 为$m\times n$ 矩阵, 则$0\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant \min\{m,n\}$. 当$r(\boldsymbol{A})=\min\{m,n\}$, 称矩阵$\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**.

一般来说, 当矩阵的行数和列数比较大时, 根据定义去求矩阵的秩是很繁琐的. 我们知道, 任意矩阵都可以经过有限次初等行变换化为阶梯形矩阵, 而阶梯形矩阵的秩恰好为非零行的个数. 因此考虑借助初等变换来求矩阵的秩. 事实上, 矩阵的秩是初等变换下的不变量.

**定理3.4.1**　矩阵经过初等变换后, 其秩不变.

**证明**　先考察矩阵经过一次初等行变换的情形. 设$\boldsymbol{A}$经一次初等行变换得到矩阵$\boldsymbol{B}$. 设$r(\boldsymbol{A})=r$, $\boldsymbol{B}_1$为$\boldsymbol{B}$的任一$r+1$阶子矩阵. 下证$r(\boldsymbol{B})\leqslant r$.

对于第一种初等行变换(交换某两行), $\boldsymbol{B}$的$r+1$阶子式满足$|\boldsymbol{B}_1|=|\boldsymbol{A}_1|$ 或者$|\boldsymbol{B}_1|=-|\boldsymbol{A}_1|$, 其中$\boldsymbol{A}_1$是$\boldsymbol{A}$的某个$r+1$ 阶子矩阵.

对于第二种初等行变换(某行乘以一个非零数$k$), $|\boldsymbol{B}_1|=|\boldsymbol{A}_1|$ 或者$|\boldsymbol{B}_1|=k|\boldsymbol{A}_1|$, 其中$\boldsymbol{A}_1$是$\boldsymbol{A}$的某个$r+1$ 阶子矩阵.

对于第三种初等行变换(第$i$行乘以$k$加到第$j$行), 有以下三种情形, 其中$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$均为$\boldsymbol{A}$中的某个$r+1$ 阶子矩阵.

(1) $\boldsymbol{B}_1$不含第$j$行, 则$|\boldsymbol{B}_1| = |\boldsymbol{A}_1|$;

(2) $\boldsymbol{B}_1$同时包含第$i$行和第$j$行, 则$|\boldsymbol{B}_1| = |\boldsymbol{A}_1|$;

(3) $\boldsymbol{B}_1$包含第$j$行但不包含第$i$行, 则$|\boldsymbol{B}_1| = |\boldsymbol{A}_1| + k|\boldsymbol{A}_2|$ 或者$|\boldsymbol{B}_1| = |\boldsymbol{A}_1| - k|\boldsymbol{A}_2|$.

根据秩的定义, $\boldsymbol{A}$的所有$r+1$ 阶子式全为零. 根据上述讨论, $\boldsymbol{B}$的任一$r+1$阶子式都为零, 所以$r(\boldsymbol{B}) \leqslant r = r(\boldsymbol{A})$.

由于矩阵的初等行变换是可逆的, $\boldsymbol{B}$也可以经过一次初等行变换化为$\boldsymbol{A}$, 故$r(\boldsymbol{A}) \leqslant r(\boldsymbol{B})$. 因此, $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$.

最后讨论初等列变换的情形. 设$\boldsymbol{A}$ 经过一次初等列变换化为$\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{A}^\top$ 经过一次初等行变换化为$\boldsymbol{B}^\top$, 且$r(\boldsymbol{A}^\top) = r(\boldsymbol{B}^\top)$. 由于$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^\top)$, $r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{B}^\top)$, 因此$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$.

综上所述, 若$\boldsymbol{A}$经过有限次初等变换化为$\boldsymbol{B}$, 则$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$. □

定理3.4.1给出了求矩阵秩的初等变换方法. 用初等变换将矩阵$\boldsymbol{A}$ 化成阶梯形矩阵, 则阶梯形矩阵中非零行的个数就等于$\boldsymbol{A}$ 的秩.

上一节定义了向量组的秩, 现在我们从向量的角度研究矩阵的秩. 若把矩阵的每行视为一个向量, 那么矩阵就是由这些行向量组成的. 类似地, 若把矩阵的每列视为一个向量,那么矩阵就是由这些列向量组成的.

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n},$$

其中$\mathbb{F}^{m\times n}$表示数域$\mathbb{F}$上全体$m \times n$ 矩阵构成的集合. 记$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. 则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$构成矩阵$\boldsymbol{A}$的行向量组, $\boldsymbol{A}$可写成

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}.$$

类似地, 记$\boldsymbol{\beta}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^\top$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_n$构成$\boldsymbol{A}$的

列向量组, $\boldsymbol{A}$可写成

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

**定义3.4.2**　矩阵的**行秩**定义为矩阵的行向量组的秩; 矩阵的**列秩**定义为矩阵的列向量组的秩.

**定理3.4.2**　设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则$\boldsymbol{A}$ 的行秩等于$\boldsymbol{A}$ 的列秩.

**证明**　设$\boldsymbol{A}$ 的列向量组为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$, 即$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$. 设$\boldsymbol{A}$的列秩为$r$, 且不妨设$\boldsymbol{A}$ 的前$r$ 个列向量, 即$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 为$\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组.

由于$\boldsymbol{A}$ 的每个列向量都可以由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 故可设

$$\boldsymbol{\beta}_j=b_{1j}\boldsymbol{\beta}_1+b_{2j}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+b_{rj}\boldsymbol{\beta}_r,\ j=1,2,\ldots,n.$$

因此

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn}\end{pmatrix}$$

记$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(c_{ij})_{m\times r}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{r\times n}$. 由上式可得, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$. 设$\boldsymbol{A}$的行向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{B}$的行向量组为$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$. 则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_r\end{pmatrix}$$

因此,

$$\boldsymbol{\alpha}_i=c_{i1}\boldsymbol{b}_1+c_{i2}\boldsymbol{b}_2+\cdots+c_{ir}\boldsymbol{b}_r,\ i=1,2,\cdots,m,$$

即$\boldsymbol{A}$ 的行向量组可由$\boldsymbol{B}$的行向量组的线性表示. 根据定理3.3.6, $\boldsymbol{A}$ 的行秩小于或等于$\boldsymbol{B}$ 的行秩, 但$\boldsymbol{B}$ 仅有$r$ 行, 所以$\boldsymbol{A}$ 的行秩小于或等于$r$, 从而$\boldsymbol{A}$ 的行秩小于或等于$\boldsymbol{A}$ 的列秩.

根据上述讨论, $\boldsymbol{A}^\top$的行秩小于或等于$\boldsymbol{A}^\top$ 的列秩. 注意到, $\boldsymbol{A}$的列秩(行秩)即为$\boldsymbol{A}^\top$ 的行秩(列秩). 因此$\boldsymbol{A}$的列秩小于或等于$\boldsymbol{A}$的行秩. 故, $\boldsymbol{A}$的行秩等于$\boldsymbol{A}$的列秩. □

**定理3.4.3**　矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式为零的充要条件是$\boldsymbol{A}$的行秩(或列秩)小于$n$.

**证明** 先证充分性. 因为$\boldsymbol{A}$ 的行秩小于$n$, 所以$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关. 当$n=1$ 时, $\boldsymbol{A}=(a)$ 是一个数或者1维向量. 由一个向量构成的向量组线性相关当且仅当该向量为零向量, 因此$|\boldsymbol{A}|=a=0$. 当$n>1$ 时, 根据定理3.3.1, $\boldsymbol{A}$的某个行向量是其余行向量的线性组合. 在矩阵$\boldsymbol{A}$中, 将该行依次减去其余各行的倍数(来自于线性组合的系数), 则该行元素全变成零. 根据行列式的性质, $|\boldsymbol{A}|=0$.

再证必要性. 对$n$作数学归纳. 当$n=1$ 时, 显然$\boldsymbol{A}=(0)$, 从而$\boldsymbol{A}$的行秩为零.

假设结论对$n-1$阶矩阵成立. 设$\boldsymbol{A}$为$n$阶矩阵, 且$|\boldsymbol{A}|=0$. 设$\boldsymbol{A}$的行向量为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 如果$\boldsymbol{A}$的第一列元素全为零, 那么$\boldsymbol{A}$ 的列向量组中含有零向量, 当然$\boldsymbol{A}$的列秩(或行秩)小于$n$. 否则, 不妨设$a_{11}\neq 0$, 那么从$\boldsymbol{A}$的第2行直到第$n$行减去第1行的适当倍数, 使得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix},$$

其中

$$(0,a'_{i2},\cdots,a'_{in})=\boldsymbol{\alpha}_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\boldsymbol{\alpha}_1,\quad i=2,\cdots,n.$$

由于$|\boldsymbol{A}|=0$, 故

$$|\boldsymbol{A}'|=\begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

根据归纳假设, $\boldsymbol{A}'$的行秩小于$n-1$, 因此它的行向量组线性相关. 故向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\boldsymbol{\alpha}_1$$

也线性相关, 即存在不全为零的数$k_2,\cdots,k_n$, 使得

$$k_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\boldsymbol{\alpha}_1\right)+\cdots+k_n\left(\boldsymbol{\alpha}_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\boldsymbol{\alpha}_1\right)=\boldsymbol{0}.$$

改写一下, 有

$$-\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}k_2+\cdots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}k_n\right)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}.$$

故$\boldsymbol{A}$的行向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, $\boldsymbol{A}$的行秩小于$n$. 必要性得证. □

**推论3.4.1** 矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式不为零的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的行秩(或列秩)等于$n$.

**定理3.4.4** 矩阵$\boldsymbol{A}$的行秩(或列秩)等于矩阵的秩.

**证明** 设矩阵$\boldsymbol{A}$ 的行秩为$r$, 则$\boldsymbol{A}$ 的任意$r+1$个行向量都线性相关. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的任意$r+1$阶子矩阵的行向量组也线性相关. 根据定理3.4.3, $\boldsymbol{A}$ 的任意$r+1$阶子式为零.

接下来证明$\boldsymbol{A}$有一个$r$ 阶子式不为零. 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 因为$\boldsymbol{A}$的行秩为$r$, 所以$\boldsymbol{A}$有$r$个线性无关的行向量, 不妨设为前$r$个行向量. 由这$r$个行向量构成如下矩阵

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

显然, 矩阵$\boldsymbol{A}_1$ 的行秩为$r$, 因而它的列秩也是$r$. 不妨设$\boldsymbol{A}_1$的前$r$个列向量线性无关. 根据推论3.4.1,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0.$$

故$\boldsymbol{A}$有一个$r$阶非零子式.

综上所述, $\boldsymbol{A}$的秩为$r$. 由定理3.4.2, 矩阵$\boldsymbol{A}$的列秩也等于矩阵$\boldsymbol{A}$的秩. □

我们现在发现, 矩阵的行秩、列秩以及矩阵的秩是从不同角度下描述矩阵性质的同一个参数.

**定理3.4.5** 设$\boldsymbol{A}$ 为$m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为$s\times n$ 矩阵, 则

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}.$$

**证明** 设$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 根据定理3.4.2的证明, $\boldsymbol{C}$ 的每个行向量都是$\boldsymbol{B}$的行向量组的线性组合, 因此$\boldsymbol{C}$ 的行秩小于或等于$\boldsymbol{B}$ 的行秩. 类似地, $\boldsymbol{C}$ 的每个列向量都是$\boldsymbol{A}$的列向量组的线性组合, 因此$\boldsymbol{C}$ 的列秩小于或等于$\boldsymbol{A}$ 的列秩. 由定理3.4.4, 矩阵的行秩和列秩都等于矩阵的秩. 因此结论成立. □

## 习题 3.4

1. 利用初等变换求下列矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$; =

(2) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & -4 & -10 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & -6 \\ -4 & 6 & 2 & -10 & -12 \end{pmatrix}$; $\big( 1 \quad 5 \quad 6 \quad -4 \quad -10$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 用定义计算如下矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & -4 & 0 & 8 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

3. 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是$m \times n$矩阵, 证明:

$$|r(\boldsymbol{A}) - r(\boldsymbol{B})| \leqslant r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leqslant r(A, B) \leqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}).$$

4. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$分别为$m \times n$, $n \times s$矩阵, 并且$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$. 证明$r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

5. 若矩阵$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$和$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}$的秩分别是$m$和$n$, 则矩阵$\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{I}$的秩不大于$m + n$.

6. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$分别为$s \times n$与$n \times m$矩阵, 则$r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - n \leqslant r(\boldsymbol{AB})$.

# 3.5　线性方程组的解

### 3.5.1　解的判定

对于线性方程组(3.2.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+\ a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\cdots+\ a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

系数矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$可以按行向量或列向量写成如下形式:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n),$$

其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$为$\boldsymbol{A}$的行向量或$1\times n$子矩阵, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$为$\boldsymbol{A}$的列向量或$n\times 1$子矩阵. 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

利用矩阵的乘法, 则上述方程组可写为矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}, \tag{3.5.1}$$

其中$\boldsymbol{X}$为未知向量或未知矩阵.

若把系数矩阵$\boldsymbol{A}$ 按行分块, 则线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 可写为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\ \text{或}\ \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{X}=b_1, \\ \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{X}=b_2, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{X}=b_m. \end{cases} \tag{3.5.2}$$

这就相当于把每个方程

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i,\ i=1,2,\cdots,m,$$

写为

$$\boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{X} = b_i \ i = 1, 2, \cdots, m.$$

若把系数矩阵$\boldsymbol{A}$ 按列分块, 则线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 又可写为

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{B},$$

即

$$x_1 \boldsymbol{\beta}_1 + x_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{B}. \tag{3.5.3}$$

式(3.5.1)~(3.5.3)是线性方程组(3.2.1)的各种变形. 今后, 它们与方程组(3.2.1)将混合使用而不加区分, 并都称为线性方程组或线性方程, 也不区分解与解向量. 它们的含义可以通过上下文理解而不至产生误解.

利用系数矩阵$\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵$\bar{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})$ 的秩, 可以方便地讨论线性方程组是否有解, 以及有解时解是否唯一等问题, 即如下定理.

**定理3.5.1** 对于$n$元线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$,

(1) 它有解的充要条件是$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}})$;

(2) 它有唯一解的充分必要条件是$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = n$;

(3) 它有无穷多解的充分必要条件是$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) < n$.

**证明** 设$r(\boldsymbol{A}) = r$. 若$r = 0$, 则$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$有解当且仅当$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, 即$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 0 < n$. 此时方程组有无穷多解, 结论成立.

下面设$r \geqslant 1$. 则$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$. 根据3.2.3节的讨论, 对$\bar{\boldsymbol{A}}$实施初等行变换以及前$n$列的交换, 最终可以将$\bar{\boldsymbol{A}}$ 化为如下形式

$$\bar{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\bar{\boldsymbol{C}}$对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_{i_1} \qquad +c_{1,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{1n}x_{i_n}=d_1, \\ \quad x_{i_2} \quad +c_{2,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{2n}x_{i_n}=d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad x_{i_r}+c_{r,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{rn}x_{i_n}=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \end{cases}$$

其中$x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}$是$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个重新排列.

根据式(3.5.4), 方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解当且仅当$d_{r+1}=0$, 也等价于$r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})=r$. 这就证明了结论(1).

若$r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})=n$, 则$\bar{\boldsymbol{C}}$ 对应的方程组为

$$\begin{cases} x_{i_1}=d_1, \\ x_{i_2}=d_2, \\ \quad\cdots \\ x_{i_n}=d_n. \end{cases}$$

故$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有唯一解.

若$r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})<n$, 则$\bar{\boldsymbol{C}}$对应的方程组为

$$\begin{cases} x_{i_1}=d_1-c_{1,r+1}x_{i_{r+1}}-\cdots-c_{1n}x_{i_n}, \\ x_{i_2}=d_2-c_{2,r+1}x_{i_{r+1}}-\cdots-c_{2n}x_{i_n}, \\ \qquad\qquad\cdots \\ x_{i_r}=d_r-c_{r,r+1}x_{i_{r+1}}-\cdots-c_{rn}x_{i_n}. \end{cases} \tag{3.5.4}$$

此时, 任给$x_{i_{r+1}},\cdots,x_{i_n}$的一组值$k_{r+1},\cdots,k_n$, 就得到方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的一个解:

$$\begin{cases} x_{i_1} = d_1-c_{1,r+1}k_{r+1}-\cdots-c_{1n}k_n, \\ x_{i_2} = d_2-c_{2,r+1}k_{r+1}-\cdots-c_{2n}k_n, \\ \quad\cdots \\ x_{i_r} = d_r-c_{r,r+1}k_{r+1}-\cdots-c_{rn}k_n, \\ x_{i_{r+1}} = k_{r+1}, \\ \quad\cdots \\ x_{i_n} = k_n. \end{cases} \tag{3.5.5}$$

因此, 方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有无穷多解.

根据上述讨论, 可证明结论(2)和(3). □

当$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) < n$, 由式(3.5.4)可知, $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}$ 可通过$x_{i_{r+1}}, \cdots, x_{i_n}$ 表示出来, 式(3.5.5)称为方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$的**一般解**, $x_{i_{r+1}}, \cdots, x_{i_n}$ 称为**自由未知量**, 共$n-r$ 个.

**例3.5.1** 判断下列线性方程组是否有解, 若有解给出解的表达式.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 - x_2 + 14x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 2. \end{cases}$$

**解** 方程组的增广矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 14 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

对$\bar{\boldsymbol{A}}$ 进行初等行变换

$$\bar{\boldsymbol{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 2 < 4$. 因此, 原方程组有解并且有无穷多解.

相应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1, \\ 7x_2 + x_3 - 14x_4 = 2. \end{cases}$$

将$x_3, x_4$ 视为自由未知量, 可得

$$x_1 = \frac{1 - 11x_3}{7}, \ x_2 = \frac{2 - x_3 + 14x_4}{7}.$$

分别取$x_3, x_4$ 为任意数$k_3, k_4$, 可得方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1 - 11k_3}{7}, \\ x_2 = \dfrac{2 - k_3 + 14k_4}{7}, \\ x_3 = k_3, \\ x_4 = k_4, \end{cases}$$

其中$k_3, k_4$为任意常数.

对于齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$, 显然有$r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})$, 而且有一个平凡解, 即零解. 所以我们主要关注它的非零解的情形.

**定理3.5.2**　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 则齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是$r(\boldsymbol{A})<n$.

**证明**　由定理3.5.1, 当$r(\boldsymbol{A})=n$时, 方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有唯一解, 即零解. 当$r(\boldsymbol{A})<n$ 时, 方程组有无穷多解. 因而, 除零解外, 必然有非零解. □

**推论3.5.1**　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$. 则齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是$|\boldsymbol{A}|=0$.

**证明**　可由定理3.4.3, 定理3.4.4和定理3.5.2得到. □

**例3.5.2**　设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\ \ x_3=0,\\ 2x_1+\ \ x_2+\mu x_3=0,\\ 3x_1+\lambda x_2+\mu x_3=0.\end{cases}$$

问$\lambda,\mu$满足何条件时, 该方程组有非零解.

**解**　方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&\lambda&1\\2&1&\mu\\3&\lambda&\mu\end{vmatrix}=2\lambda+\mu-3.$$

当$|\boldsymbol{A}|=0$, 即$2\lambda+\mu-3=0$ 时, 方程组有非零解. □

### 3.5.2　解的结构

当数域$\mathbb{F}$上线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有无穷多解时, 这些解之间有何联系呢? 本节从向量的角度, 探讨方程组的解向量构成的解集的结构性质.

1. 齐次线性方程组的解结构

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 则$n$元齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}, \tag{3.5.6}$$

的解(向量)有以下性质.

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}$是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解, 则对任意的$k\in\mathbb{F}$, $k\boldsymbol{\alpha}$ 也是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解, 则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 也是$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解.

(3) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$都是$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解, 则对任意的$k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{F}$,

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{a}_i$$

仍为$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解.

**证明**　(1)和(2)都可由(3)推出, 故只证(3). 根据矩阵乘法的线性性,

$$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{a}_i\right)=\sum_{i=1}^{r}k_i(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_i)=\sum_{i=1}^{r}k_i\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

所以$\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i$ 仍为$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解. □

根据以上性质, 齐次线性方程组的解集关于加法和数乘运算封闭, 解的线性组合仍然是解. 我们希望找到解集的一个含有限个向量的极大无关组, 使得任一个解向量都可以由这个极大无关组线性表示.

**定义3.5.1**　设$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的一组解. 若它满足:

(1) $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关;

(2)$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任一个解都可由$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$线性表示,

则称$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 为$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的一个**基础解系**.

易见, 齐次线性方程组的基础解系(如果存在的话)实际上就是其解集的一个极大线性无关组. 因此, 基础解系是不唯一的, 但任意两个基础解系都是等价的, 因而它们所含解向量的个数相同. 下面定理证明了基础解系的存在性.

**定理3.5.3**　(基础解系的存在性) 若$n$ 元齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解, 即$r(\boldsymbol{A})=r<n$, 则$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$有基础解系, 且基础解系含有$n-r$个解向量.

**证明**　根据定理3.5.1的证明, 增广矩阵$\bar{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\mathbf{0})$ 经过初等变换化为阶梯形矩阵$\bar{\boldsymbol{C}}$, $\bar{\boldsymbol{C}}$对应于方程组(3.5.4). 不妨设$x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}$ 即为$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则

$$\begin{cases} x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n,\\ x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\\ x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n. \end{cases}\tag{3.5.7}$$

注意到任给$x_{r+1},\cdots,x_n$一组值$k_{r+1},\cdots,k_n$, 就得到方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的一个解.

依次取$(x_{r+1},\cdots,x_n)$ 为$(1,0,\cdots,0,0)$, $(0,1,\cdots,0,0)$, $\cdots$, $(0,0,\cdots,0,1)$, 则得到$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的$n-r$个解:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= (-c_{1,r+1},-c_{2,r+1},\ldots,-c_{r,r+1},1,0,\cdots,0,0)^\top,\\
\boldsymbol{\eta}_2 &= (-c_{1,r+2},-c_{2,r+2},\ldots,-c_{r,r+2},0,1,\cdots,0,0)^\top,\\
&\cdots\\
\boldsymbol{\eta}_{n-r} &= (-c_{1,n},-c_{2,n},\ldots,-c_{r,n},0,0,\cdots,0,1)^\top.
\end{aligned}
\tag{3.5.8}
$$

由于向量组$(1,0,\cdots,0,0)$, $(0,1,\cdots,0,0)$, $\cdots$, $(0,0,\cdots,0,1)$线性无关, 因此它们的延长向量组$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$也线性无关.

由此我们得到方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的$n-r$个线性无关的解向量, 下面证明方程组的任一个解向量都可由这$n-r$个线性无关的解向量线性表示. 设

$$\boldsymbol{\eta}=(k_1,\cdots,k_r,k_{r+1},\cdots,k_n)^\top$$

为$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的任一个解. 于是$\boldsymbol{\eta}$满足式(3.5.7), 即

$$
\begin{cases}
k_1=-c_{1,r+1}k_{r+1}-\cdots-c_{1n}k_n,\\
k_2=-c_{2,r+1}k_{r+1}-\cdots-c_{2n}k_n,\\
\cdots\\
k_r=-c_{r,r+1}k_{r+1}-\cdots-c_{rn}k_n.
\end{cases}
$$

从而$\boldsymbol{\eta}$可以写成如下形式:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} k_1\\ \vdots\\ k_r\\ k_{r+1}\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}
&=\begin{pmatrix}
-c_{1,r+1}k_{r+1} & - & \cdots & - & c_{1n}k_n\\
\vdots & & & & \vdots\\
-c_{r,r+1}k_{r+1} & - & \cdots & - & c_{rn}k_n\\
1\cdot k_{r+1} & + & \cdots & + & 0\cdot k_n\\
\vdots & & & & \vdots\\
0\cdot k_{r+1} & + & \cdots & + & 1\cdot k_n
\end{pmatrix}\\
&=k_{r+1}\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\ \vdots\\ -c_{r,r+1}\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}-c_{1n}\\ \vdots\\ -c_{rn}\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\\
&=k_{r+1}\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\eta}_{n-r}.
\end{aligned}
$$

因此$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的任一个解$\boldsymbol{\eta}$都可以由$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$线性表示. 从而$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$是方程组(3.5.6)的一个基础解系, 它含$n-r$个解向量. □

**定理3.5.4**　(齐次线性方程组解的结构定理) 设齐次线性方程组(3.5.6)的一个基础解系为$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$. 则它的全部解(或通解、一般解)为

$$\boldsymbol{\eta}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中$c_1,\cdots,c_{n-r}$为任意常数.

**例3.5.3**　求下列齐次线性方程组的一个基础解系和一般解.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0,\\ -3x_1-x_2+x_3+x_4=0,\\ -7x_1-5x_2+x_3+2x_4=0,\\ 4x_1+x_2+3x_3-7x_4=0. \end{cases}$$

**解**　对系数矩阵进行初等行变换, 化为行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3\\ -3 & -1 & 1 & 1\\ -7 & -5 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -5 & 10\\ 0 & 9 & -13 & 23\\ 0 & -7 & 11 & -19 \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 9 & -13 & 23\\ 0 & -7 & 11 & -19 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

相应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0,\\ \qquad x_2-x_3+2x_4=0,\\ \qquad\quad -4x_3+5x_4=0, \end{cases}$$

其中$x_4$为自由未知量. 取$x_4=4$, 原方程组的一个基础解系为$\boldsymbol{\eta}_1=(4,-3,5,4)$. 因此, 原方程组的一般解为

$$\boldsymbol{\eta}=k\boldsymbol{\eta}_1=k(4,-3,5,4),$$

其中$k$为任意常数. □

2. 非齐次线性方程组解的结构

设非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 其中$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$. 称齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的**导出(方程)组**.

非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解有以下性质, 请读者自行证明.

(1) 设$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的两个解, 则$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$是其导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 设$\boldsymbol{\gamma}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解, $\boldsymbol{\eta}$是其导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解, 则$\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解.

**定理3.5.5** (非齐次线性方程组解的结构定理) 设$\gamma_0$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的一个特解, 则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的全部解(或通解、一般解)为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}, \tag{3.5.9}$$

其中$\boldsymbol{\eta}$为导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的任一个解.

**证明** 设$\boldsymbol{\gamma}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的任一个解. 则$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+(\gamma-\gamma_0)$. 根据上述性质(1), $\eta=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\gamma}_0$为导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 故$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的任一个解可表示为式(3.5.9)的形式. 反之, 根据上述性质(2), 式(3.5.9)的$\boldsymbol{\gamma}$确实是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解. □

设$\gamma_0$是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的一个特解, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是其导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 根据定理3.5.5, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的通解为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数.

**推论3.5.2** 若非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解, 则解是唯一的充分必要条件是它的导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

**证明** 假设$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解$\gamma$. 若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解$\boldsymbol{\eta}$, 则$\gamma+\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$另一个解; 矛盾. 因此, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

反过来, 假设$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$只有零解. 若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有两个不同解$\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$, 则其差$\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个非零解; 矛盾. 因此$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解是唯一的. □

数域$\mathbb{F}$上的$n$元齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解集

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{F}^n:\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\}$$

实际上是$\mathbb{F}$上向量空间$\mathbb{F}^n$的子空间, 称为解空间. 解空间的维数为$n-r(\boldsymbol{A})$. 解空间的一个基称作基础解系, 它含$n-r(\boldsymbol{A})$个解向量. 方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的所有解都可以由这个基础解系线性表示. 这些概念将在本书第6章6.4节详细论述.

$n$元非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解集实际上是

$$\boldsymbol{\gamma}_0+\mathcal{S}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}:\boldsymbol{\eta}\in\mathcal{S}(\boldsymbol{A})\},$$

其中$\gamma_0$是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的一个特解, $\mathcal{S}(\boldsymbol{A})$是其导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解空间. 解集$\boldsymbol{\gamma}_0+\mathcal{S}(\boldsymbol{A})$是子空间$\mathcal{S}(\boldsymbol{A})$ 的一个平移, 称为$\mathcal{S}(\boldsymbol{A})$的陪集或仿射空间. 有兴趣的读者可查看代数学相关书籍.

**例3.5.4** 求如下非齐次线性方程组的一般解.

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=3,\\ 2x_1+x_2-3x_4=1,\\ -2x_1-2x_3+10x_4=4.\end{cases}$$

**解** 对增广矩阵实施初等行变换, 化为阶梯形矩阵,

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\2&1&0&-3&1\\-2&0&-2&10&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\0&-1&2&-7&-5\\0&2&-4&14&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-5&-2\\0&1&-2&7&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1=-2-x_3+5x_4,\\ x_2=5+2x_3-7x_4.\end{cases}$$

取$x_3=x_4=0$, 得到原方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\gamma}_0=(-2,5,0,0).$$

根据上述阶梯形矩阵, 方程的导出组化为

$$\begin{cases} x_1=-x_3+5x_4,\\ x_2=2x_3-7x_4.\end{cases}$$

其中$x_3,x_4$ 为自由未知量. 导出组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,2,1,0),\ \boldsymbol{\eta}_2=(5,-7,0,1).$$

因此原方程组的一般解为

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=(-2,5,0,0)+k_1(-1,2,1,0)+k_2(5,-7,0,1),$$

其中$k_1,k_2$ 为任意常数. □

## 习题 3.5

1. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系及一般解.

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4-\ \ x_5=0, \\ x_1+2x_2-\ \ x_3+3x_4-2x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-7x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ 4x_3-\ \ 3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+\ \ 6x_3-\ \ 4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-\ \ 2x_3+\ \ 3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

2. 求下列非齐次线性方程组的一般解.

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\ \ x_4=3, \\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4=7, \\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4=12. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 24x_1+14x_2+30x_3+40x_4+\ \ 41x_5=28, \\ 36x_1+21x_2+45x_3+61x_4+\ \ 62x_5=43, \\ 48x_1+28x_2+60x_3+82x_4+\ \ 83x_5=58, \\ 60x_1+35x_2+75x_3+99x_4+102x_5=69. \end{cases}$

3. 问$\lambda$为何值时, 齐次方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)\,x+2y+2z &=0, \\ 2x+(6-\lambda)\,y &=0, \\ 2x+(4-\lambda)\,z &=0 \end{cases}$$

有非零解.

4.讨论当$a$为何值时, 下列方程组无解、有解? 并在有解时求出其通解.

$$\begin{cases} x+2y-z-2w &=0, \\ 2x-y-z+w &=1, \\ 3x+y-2z-w &=a. \end{cases}$$

5. 证明: 设$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$是数域$\mathbb{F}$上非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解, 数$k_1,k_2,\cdots,k_m$满足$k_1+k_2+\cdots+k_m=1$, 则$k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\gamma}_m$也是方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解.

## // 复习题 3 //

1. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,-2,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,2,3,-11)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,10,0)$的一个极大线性无关组和秩.

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,a+2,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-1,3,a+7)$线性相关. 若$\beta=(3,-1,a+6,a+11)$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示, 讨论$a$的取值, 并写出$\beta$的线性表示式.

3. 设向量组(I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$; (II) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$; (III) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$. 设各向量组的秩分别为: (I)的秩=(II)的秩=3, (III)的秩=4. 证明: 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为4.

4. 设方程组: $x_1-x_2=a_1, x_2-x_3=a_2, x_3-x_4=a_3, x_4-x_5=a_4, x_5-x_1=a_5$. 证明: 该方程组有解的充要条件为$\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=0$.

5. 讨论$a,b$的取值, 使下列非齐次线性方程组有解, 并求其解.

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+2x_3=1, \\ (b-1)x_2+x_3=0, \\ ax_1+bx_2+(1-b)x_3=3-2b. \end{cases}$$

6.讨论$\lambda$取何值时, 下列方程组有解, 并求解:

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2. \end{cases}$$

7. 设$\boldsymbol{\beta}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的一个解, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是其导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系. 证明:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$线性无关;

(2) $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关;

(3) 方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的任一解$\boldsymbol{\alpha}$可表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=k_0\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s).$$

其中$k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.

8. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵, $\boldsymbol{B}$为$n\times l$矩阵. 证明$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$的充要条件是$B$的每个列向量均是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解.

9. 设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解. 问在什么条件下, $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解?

10. 设3元非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为2, 且它的三个解向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$满

足

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}4\\0\\6\end{pmatrix}.$$

求方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的通解.

11. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别是$m\times n$和$n\times l$矩阵, 且$\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$. 证明:

$$r\left(\boldsymbol{A}\right)+r\left(\boldsymbol{B}\right)\leqslant n.$$

12. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵, 证明:

(1)存在矩阵$\boldsymbol{B}\neq\mathbf{0}$, 使得$\boldsymbol{A}B=\mathbf{0}$的充要条件是$r\left(\boldsymbol{A}\right)<n$;

(2)存在矩阵$\boldsymbol{C}\neq\mathbf{0}$, 使得$\boldsymbol{CA}=\mathbf{0}$的充要条件是$r\left(\boldsymbol{A}\right)<m$.

Chapter 4 第 4 章

# 矩阵的特征值与特征向量



矩阵的特征值与特征向量以及相似标准形理论是矩阵理论的重要组成部分, 是研究矩阵运算、线性变换等众多线性代数问题的重要工具. 它在数学的其他分支, 如微分方程、概率统计、计算数学, 以及在其他科学技术领域都有着广泛的应用.

首先来看一个例子. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{A}^{100}$.

如果按照矩阵幂运算的定义来处理此问题, 很明显极其复杂. 我们发现对角矩阵的幂运算极其简单. 如果存在一个可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\times\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\times\cdots\times\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1^{100} & & & \\ & \lambda_2^{100} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{100}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

上述计算涉及到矩阵的相似对角化, 为此我们要引入矩阵的特征值与特征向量.

## 4.1　矩阵的特征值与特征向量

**定义4.1.1**　设$\boldsymbol{A}$为数域$\mathbb{F}$上的$n$阶矩阵. 若存在数$\lambda\in\mathbb{F}$及非零向量$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{F}^n$, 使得

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{4.1.1}$$

则称$\lambda$为$\boldsymbol{A}$的一个**特征值**, $\boldsymbol{\alpha}$为$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda$的一个**特征向量**.

在定义4.1.1中, 式(4.1.1)与$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$等价, 即$\boldsymbol{\alpha}$是齐次线性方程组

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{4.1.2}$$

的非零解. 而式(4.1.2)有非零解的充要条件为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0. \tag{4.1.3}$$

**定义4.1.2**　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\lambda$为一个变量. 矩阵$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$的行列式

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为$\boldsymbol{A}$的**特征多项式**.

由上面分析可知, 若$\lambda$为$\boldsymbol{A}$的特征值, 则$\lambda$一定是$\boldsymbol{A}$的特征多项式在数域$\mathbb{F}$上的一个根; 反过来, 若$\lambda$是$\boldsymbol{A}$的特征多项式在数域$\mathbb{F}$中的一个根, 则$\lambda$就是$\boldsymbol{A}$的一个特征值.

因此, 确定矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量的方法如下:

(1) 写出$\boldsymbol{A}$的特征多项式$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$.

(2) 求出$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$在数域$\mathbb{F}$中的所有根, 它们就是$\boldsymbol{A}$的全部特征值.

(3) 对每个特征值$\lambda$, 求出齐次线性方程组$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$在数域$\mathbb{F}$上的一个基础解系, 基础解系就是该特征值对应的极大无关特征向量组, 从而得到$\lambda$所对应的所有特征向量, 即基础解系的线性组合.

如不做特别说明, 本书在讨论特征值和特征向量时, 总假设数域$\mathbb{F}$为复数域.

**例4.1.1** 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量.

**解** $\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2.$$

由$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, $\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$.

对于$\lambda_1=2$, 解齐次方程组$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 故$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_1=2$的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中$k_1$为任意非零常数.

对于$\lambda_2=\lambda_3=-1$, 解齐次方程组$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. 故$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=-1$的全部特征向量为$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中$k_2,k_3$ 为任意不全为零常数. □

**例4.1.2** 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&0&2\end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量.

**解** $\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\2&\lambda-1&0\\-3&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

由$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, $\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

对于$\lambda_1=2$, 解齐次方程组$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 故$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_1=2$的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中$k_1$为任意非零常数.

对于$\lambda_2=\lambda_3=1$, 解齐次方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\-3&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. 故$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量为$k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中$k_2$为任意非零常数. □

**例4.1.3** 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量.

**解** $A$的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -2\\ 2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+4.$$

在复数域内, 由$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, $\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=2\mathbf{i}$, $\lambda_2=-2\mathbf{i}$, 其中$\mathbf{i}=\sqrt{-1}$.

对于$\lambda_1=2\mathbf{i}$, 求解齐次方程组$(2\mathbf{i}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$,

$$\begin{pmatrix}2\mathbf{i} & -2\\ 2 & 2\mathbf{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-\mathbf{i}\\ 1\end{pmatrix}$. 故$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_1=2\mathbf{i}$ 的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中$k_1$为任意非零常数.

对于$\lambda_2=-2\mathbf{i}$, 求解齐次方程组$(-2\mathbf{i}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$, 基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ 1\end{pmatrix}$. 故$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_2=-2\mathbf{i}$的全部特征向量为$k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中$k_2$为任意非零常数. □

从上述例4.1.1∼4.1.3, 可以发现$\boldsymbol{A}$的特征值与数域$\mathbb{F}$ 的选取有关. 设$\lambda_0$为$\boldsymbol{A}$的一个特征值. $\lambda_0$的**代数重数**定义为$\lambda_0$作为特征多项式$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$的根的重数. $\lambda_0$的**几何重数**定义为齐次线性方程组$(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系所含特征向量的个数. 从上述例子中, 可以发现一个特征值的几何重数不超过其代数重数. 有兴趣的读者可以尝试证明.

**性质4.1.1** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$\boldsymbol{A}$的全部特征值. 则

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n&=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n&=|\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

**证明**

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}\\ &=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

利用代数基本定理及多项式根与系数的关系,

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\ &=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n&=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n&=|\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

□

矩阵$\boldsymbol{A}$的对角线元素之和称为$\boldsymbol{A}$的**迹**, 记为$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$. 根据性质4.1.1, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$等于$\boldsymbol{A}$的所有特征值之和.

**推论4.1.1** $n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{A}$的所有特征值全不为零.

设$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$为数域$\mathbb{F}$上的多项式. 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 定义$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}$. 下面给出特征值的另一个重要性质. 有兴趣的读者可以自行证明.

**性质4.1.2** 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\lambda$是其特征值.

(1) 设$f(x)$为数域$\mathbb{F}$上的多项式. 则$f(\lambda)$是$f(\boldsymbol{A})$的特征值.

(2) 若$\lambda \neq 0$, 则$\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda}\,|\boldsymbol{A}|$ 分别为$\boldsymbol{A}^{-1}$ ($\boldsymbol{A}$可逆), $\boldsymbol{A}^*$的特征值.

**例4.1.4** 设$\boldsymbol{A}$是一个3阶不可逆矩阵, 有一个特征值1, 且$|2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$. 求$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}|$.

**解** 由于$\boldsymbol{A}$不可逆, $|\boldsymbol{A}| = 0$, 故$\boldsymbol{A}$必有特征值0. 因为$|2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, $\boldsymbol{A}$有特征值2. 故$\boldsymbol{A}$的特征值为$0, 1, 2$. 由性质4.1.2, 矩阵$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$有特征值$1, 2, 3$. 由性质4.1.1, $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}| = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
□

**性质4.1.3** 矩阵$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值的特征向量必线性无关.

**证明** 对不同特征值的个数$k$进行数学归纳. 当$k = 1$时, 设$\boldsymbol{\alpha}_1$为对应特征值$\lambda_1$的特征向量. 由于$\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 显然$\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

假设结论对$k-1$个不同特征值的情形成立. 设$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$为$\boldsymbol{A}$的$k$个不同特征值, 分别对应特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$. 设

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_k\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{0}, \tag{4.1.4}$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_k\boldsymbol{\alpha}_k) = \boldsymbol{0}, \\ l_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

即

$$l_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_k\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{0}. \tag{4.1.5}$$

用$\lambda_k$乘以式(4.1.4)

$$l_1\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_k\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{0}. \tag{4.1.6}$$

由式(4.1.5)及式(4.1.6)得

$$l_1(\lambda_k - \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\boldsymbol{\alpha}_{k-1} = \boldsymbol{0}.$$

由归纳假设, $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k-1}$线性无关, 所以

$$l_i(\lambda_k - \lambda_i) = \boldsymbol{0},\ i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

由于$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$互不相同, $l_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$. 从而式(4.1.4)变为$l_k\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{0}$, 故$l_k = 0$. 因此$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$线性无关. □

**性质4.1.4**　设$\lambda_1,\lambda_2$是$\boldsymbol{A}$的不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_1$的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_2$的线性无关的特征向量, 则$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关.

**证明**　设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}.$$

设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,\\ \boldsymbol{\beta}&=l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t,\end{aligned}$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}. \tag{4.1.7}$$

若$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 则$\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$. 因为$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$分别是属于$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量, 根据性质4.1.3, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性无关, 与式(4.1.7)矛盾. 因此$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 即

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},\ l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0},$$

所以, $k_1=\cdots=k_s=0$, $l_1=\cdots=l_t=0$. 故$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关.　□

注意到, 性质4.1.4可以推广到多个不同特征值的情形.

**例4.1.5**　设$\boldsymbol{A}$为$n$阶矩阵, $\lambda_1,\lambda_2$是$\boldsymbol{A}$的两个不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$分别是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量.

**证明**　假设$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{A}$的特征向量, 则存在$\lambda$, 使得$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$. 因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

从而$\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 即

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}.$$

根据性质4.1.3, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 与$\lambda_1,\lambda_2$互异矛盾. 故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量.　□



## 习题　4.1

1. 求下列矩阵的特征值与特征向量.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&4&2\\1&-3&1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 设$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和都是3, 求$\boldsymbol{A}$的一个特征值及相应的一个特征向量.

3. 若3维列向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$满足$\boldsymbol{\alpha}^{\top}\boldsymbol{\beta}=2$, 求矩阵$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\top}$的一个非零特征值.

4. 设2是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & t & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$的特征值.

(1) 求$t$的值;

(2 )求属于特征值2的所有特征向量.

5. 设$\boldsymbol{A}$为3阶可逆矩阵, 满足$|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=0$, $\left|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\right|=0$. 求矩阵$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$的所有特征值.

6. 设$\boldsymbol{A}$为$n$阶矩阵. 证明: $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}^{\top}$有相同的特征值.

7. 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$2,-2,1$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$. 求$|\boldsymbol{B}|$.

8. 设2阶矩阵$\boldsymbol{A}$有两个不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$A$的线性无关的特征向量, 且满足$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$. 求$|\boldsymbol{A}|$.

9. 设$\boldsymbol{A}$是3阶矩阵. 若线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(3,3,3)^{\top}$的通解为

$$k_1(-1,2,-1)^{\top}+k_2(0,-1,1)^{\top}+(1,1,1)^{\top},$$

其中$k_1,k_2$是任意常数. 求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

10. 设$\lambda_1,\lambda_2$是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. 求$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充要条件.

## 4.2　矩阵的相似

**定义4.2.1**　设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为数域$\mathbb{F}$上的两个$n$阶矩阵. 若存在数域$\mathbb{F}$上的$n$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则称$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B}$, 记作$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

显然, 相似具有以下基本性质:

(1) 反身性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$;

(2) 对称性: 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$;

(3) 传递性: 若$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$, 则$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

**性质4.2.1** 相似矩阵有相同的特征多项式, 因此有相同的特征值.

**证明** 若$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 于是

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \left|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right| = \left|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}\right| = \left|\boldsymbol{P}^{-1}\right| |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| \, |\boldsymbol{P}| = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| . \quad \square$$

注意, 此结论的逆命题不成立, 如$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 显然$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征多项式及特征值, 但是$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$不相似, 因为与$\boldsymbol{A}$相似的矩阵只能是$\boldsymbol{A}$本身.

显然, 相似矩阵有相同的行列式. 此外, 矩阵相似一定等价, 从而相似矩阵有相同的秩.

**性质4.2.2** 若$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则有$\boldsymbol{A}^{\top} \sim \boldsymbol{B}^{\top}$, $\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^{*} \sim \boldsymbol{B}^{*}$.

**例4.2.1** 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & b \end{pmatrix}.$$

若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似, 求$a, b$的值.

**解** 由于$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似, $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值, 从而有相同的行列式与迹. 于是

$$\begin{cases} |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|, \\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -2 = 2(8 + 3b), \\ 2 + 0 + a = 2 + 3 + b. \end{cases}$$

故$a = 0$, $b = -3$. $\square$

**例4.2.2** 设$\boldsymbol{A}$是一个2阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$是一个2维列向量. 已知$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$线性无关, 且$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

**解** 设$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$为一个2 阶矩阵. 由$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$线性无关知, 矩阵$\boldsymbol{P}$可逆, 且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}\right) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, 2\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

设$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$. 由相似的定义知, $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$都相同的特征值. 由于

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2,$$

故$\boldsymbol{B}$的特征值为$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, 从而$\boldsymbol{A}$的特征值为$1, -2$. $\square$

现在, 回到本章开始提出的问题, 即关于矩阵可对角化的问题.

若$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$相似于对角矩阵, 则称矩阵$\boldsymbol{A}$可以**相似对角化**, 即存在$n$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

此时, 称$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的**相似标准形**.

**定理4.2.1**　$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可以相似对角化的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量.

**证明**　设$\boldsymbol{A}$可以相似对角化, 则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

设$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i, i=1,2,\cdots,n$, 因此, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$\boldsymbol{A}$的$n$个线性无关的特征向量. 反过来, 将上述过程逆推过去即得充分性的证明. □

显然, 若$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$与对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似, 则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的全部特征值.

**推论4.2.1**　若$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$有$n$个不同特征值, 则矩阵$\boldsymbol{A}$一定可以相似对角化.

值得注意的是, 这是一个充分而非必要条件. 例如, 数量矩阵$k\boldsymbol{I}$是可对角化的, 但它只有特征值$k$ ($n$重).

**例4.2.3** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明$\boldsymbol{A}$可对角化;

(2) 求$\boldsymbol{A}^{100}$.

**解** (1) $\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

故$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

对特征值$\lambda_1=-2$, 齐次方程组$(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

此为特征值$\lambda_1=-2$的特征向量.

对特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$, 齐次方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

此为特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的2个线性无关的特征向量.

因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{A}$的3个线性无关的特征向量, 故$\boldsymbol{A}$ 可以对角化. 设

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 由(1), $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$. 故

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{100}&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}(-2)^{100} & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}-2^{100}+2 & -2^{101}+2 & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{101}-1 & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{101}-2 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

最后, 不加证明地给出另一个常见的判定矩阵可相似对角化的方法, 即若一个矩阵的每个特征值的代数重数等于几何重数, 则该矩阵可以相似对角化.

**定理4.2.2**　$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可相似对角化的充要条件是对于每一个$n_i$重(代数重数)特征值$\lambda_i$, 恰好有$n_i$个线性无关的特征向量, 即秩$r(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-n_i$.

**例4.2.4**　判定矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$是否可以相似对角化.

**解**

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-3 & 4\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda-1)=0,$$

故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=1$.

对于2重特征值$\lambda_1=\lambda_2=3$, $r(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$. 因此, $A$可以相似对角化. □

上述两种矩阵相似对角化的判定方法中, 定理4.2.1利用线性无关的特征向量个数来判定, 而定理4.2.2侧重于利用矩阵的秩而不需要计算特征向量. 读者视情形灵活运用.

## 习题 4.2

1. 若$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似, 证明:

(1) $\boldsymbol{A}^{\top}$与$\boldsymbol{B}^{\top}$相似;

(2) $\boldsymbol{A}^{*}$与$\boldsymbol{B}^{*}$相似;

(3) 若$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$可逆, 则$\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}^{-1}$相似.

2. 设$\boldsymbol{\alpha}$是$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}$属于特征值$\lambda$的特征向量. 求$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$的一个特征值, 并求出相应的一个特征向量.

3. 判断下列矩阵能否相似对角化. 如果能, 求出相似变换矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角矩阵; 如果不能, 请说明理由.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可相似于一个对角矩阵, 试求$x,y$应满足的条件.

5. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似.

(1) 求$a,b$的值;

(2) 求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

6. 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^{n}$ ($n$为正整数).

7. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$有3个线性无关的特征向量, 求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角矩阵.

8. 设$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^\top$, $\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^\top$, 矩阵$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^\top$相似于$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 求$k$的值

9. 矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$的特征多项式有一个2重根, 求$a$的值, 并讨论$\boldsymbol{A}$是否可相似对角化.

10. 证明: $n$阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似.

## 4.3 内积与正交矩阵

在第3章中, 我们介绍了数域$\mathbb{F}$上的向量空间$\mathbb{F}^n$的运算, 包括向量加法与数乘运算, 并由此讨论向量组的线性相关性、线性方程组解的结构等问题. 但是, 向量空间$\mathbb{F}^n$没有度量性质, 如向量的长度、向量之间的夹角等. 为此, 本节引入内积的概念, 并由此讨论向量空间的度量性. 在本节以及后一节, 总假设$\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

**定义4.3.1** 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\top$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^\top\in\mathbb{R}^n$. 定义**内积**

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

由内积定义, 不难验证内积具有如下基本性质:

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$, 且$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$当且仅当$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,

其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{R}$.

向量内积有更一般的定义, 有兴趣读者可以查阅相关书籍. 有了内积运算, 我们可以度量向量的长度.

**定义4.3.2** 设$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$, 称非负实数$\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$为向量$\boldsymbol{\alpha}$的**长度** (或**模**), 记为$||\boldsymbol{\alpha}||$, 即$||\boldsymbol{\alpha}||=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$.

显然, $||\boldsymbol{\alpha}||=\boldsymbol{0}$的充要条件是$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 当$||\boldsymbol{\alpha}||=1$时, 称$\boldsymbol{\alpha}$为一个**单位向量**. 若$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 则$\frac{1}{||\boldsymbol{\alpha}||}\boldsymbol{\alpha}$为一个单位向量, 并称之为$\boldsymbol{\alpha}$的**单位化向量**.

**定理4.3.1** 对于$\mathbb{R}^n$中任意两个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 有下列不等式

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leqslant ||\boldsymbol{\alpha}|| \cdot ||\boldsymbol{\beta}||,$$

其中等号成立的充要条件是$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关.

**证明** 如果$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关, 则$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$或$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$, $k\in\mathbb{R}$, 无论哪种情形都有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}),$$

从而$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=||\boldsymbol{\alpha}||\cdot||\boldsymbol{\beta}||$.

设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性无关, 则对任意$t\in\mathbb{R}$, $t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$. 于是$(t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},t\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})>0$, 即

$$t^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2t(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})>0.$$

上式左边是$t$的二次多项式, 由于它对任意的$t$都成立, 所以

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})<0,$$

从而$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|<||\boldsymbol{\alpha}||\cdot||\boldsymbol{\beta}||$. □

上述不等式称为柯西(Cauchy)不等式, 我们容易得到如下结论.

**例4.3.1** 对于任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$,

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$ □

**定义4.3.3** 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为$\mathbb{R}^n$的两个非零向量, 定义$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的**夹角**为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{||\boldsymbol{\alpha}||\cdot||\boldsymbol{\beta}||}.$$

**定义4.3.4** 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$. 若$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$, 则称向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$ **正交**, 记为$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

显然, 根据内积的定义, 正交在几何上表示垂直, 故正交也称垂直. 零向量与任何向量正交.

**定义4.3.5** 设非零向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in\mathbb{R}^n$. 若它们是两两正交的向量组, 则称$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$为一个**正交向量组**. 进一步地, 若每个向量还是单位向量, 则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为一个**单位正交向量组**.

正交向量组是我们遇到又一类比较特殊的向量组, 在前面我们曾经探讨过线性无关组, 那么这两种向量组有什么关系呢?

**定理4.3.2** 正交向量组一定是线性无关组.

**证明** 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为一个正交向量组. 假设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

用$\boldsymbol{\alpha}_i$与上式两边作内积

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_i,\mathbf{0}).$$

由内积的性质及正交的定义知

$$k_i\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i\right)=0.$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_i\neq\mathbf{0}$, $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)>0$, 故$k_i=0$, $i=1,2,\cdots,r$. □

显然, 定理的逆命题不成立, 但可以由线性无关组构造正交向量组, 这就是施密特(Schmidt)正交化方法.

**定理4.3.3**　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为一个线性无关组, 则一定存在一个正交向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$, 且这两个向量组等价.

**证明**　设

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\\
&\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,\\
&\quad\cdots\\
&\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1})}\boldsymbol{\beta}_{r-1},
\end{aligned}$$

则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$即为一个所求的正交向量组. 请读者自己验证. □

**例4.3.2**　在$\mathbb{R}^4$中, 把向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0,1)$化成单位正交向量组.

**解**　第一步: 正交化.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)\,,\\
\boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1,0)-\frac{1}{2}(1,1,0,0)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right),\\
\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2\\
&=(-1,0,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,0,0)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right).
\end{aligned}$$

第二步: 单位化.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1&=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{||\boldsymbol{\beta}_1||}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\\
\boldsymbol{\eta}_2&=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{||\boldsymbol{\beta}_2||}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right),\\
\boldsymbol{\eta}_3&=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{||\boldsymbol{\beta}_3||}=\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}}\right).
\end{aligned}$$

则$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$即为所求的单位正交向量组. □

向量组与矩阵联系紧密, 列(行)向量组线性无关的方阵为一个可逆矩阵, 那么列(行)向量组为单位正交向量组的方阵又具有什么特性呢?

**定义4.3.6**　设$\boldsymbol{A}$为$n$阶矩阵, $\boldsymbol{I}$为$n$阶单位矩阵. 若

$$\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{I},$$

则称$\boldsymbol{A}$为**正交矩阵**.

显然, 正交矩阵具有以下性质.

(1) 若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵, 则$\boldsymbol{A}$为一个可逆矩阵;

(2) 若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵, 则$|\boldsymbol{A}|=\pm1$;

(3) 若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵, 则$\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^\top,\boldsymbol{A}^*$也是正交矩阵;

(4) 若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为正交矩阵, 则$\boldsymbol{AB}$也是正交矩阵.

**定理4.3.4**　设$\boldsymbol{A}$为$n$阶实矩阵, 则$\boldsymbol{A}$为正交矩阵的充要条件是其列(行)向量组是单位正交向量组.

**证明**　设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$\boldsymbol{A}$的列向量组. $\boldsymbol{A}$为正交矩阵等价于$\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$, 而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^\top\\\boldsymbol{\alpha}_2^\top\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^\top\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{\alpha}_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^\top\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_n^\top\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_n^\top\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)&\cdots&(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n)\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)&\cdots&(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)&(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2)&\cdots&(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$等价于

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=1,\quad i=1,2,\cdots,n,\\(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0,\quad i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

即$\boldsymbol{A}$为正交矩阵的充要条件是其列向量组为单位正交向量组.

类似可证$\boldsymbol{A}$为正交矩阵当且仅当其行向量组为单位正交向量组.　□

## 习题　4.3

1. 在$\mathbb{R}^4$中, 求向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,2,3)$与$\boldsymbol{\beta}=(3,1,5,1)$的夹角$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$.

2. 用施密特正交化方法将下列向量组化为单位正交向量组.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,-3,-4)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,2,3)$.

3. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$, 求非零向量$\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, 使得$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$两两正交.

4. 判别下列矩阵是否为正交矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

5. 设$\boldsymbol{A}$为$n$阶正交矩阵, $n$为奇数, 且$|\boldsymbol{A}|=1$. 证明: $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$不可逆.

## 4.4　实对称矩阵的对角化

现在, 我们回到矩阵相似对角化问题, 在4.2节中我们知道并不是每个矩阵都是可以相似对角化的, 但是有一类矩阵一定可以相似对角化, 这就是实对称矩阵.

一般地, 实矩阵在复数域上的特征值未必全是实数, 但对于实对称矩阵, 我们有以下定理.

**定理4.4.1**　实对称矩阵在复数域上的特征值都是实数.

**证明**　设$\lambda$为$\boldsymbol{A}$的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$为$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda$的特征向量. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},$$

两边取共轭,

$$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{\alpha}}.$$

因此,

$$\lambda\bar{\boldsymbol{\alpha}}^\top\boldsymbol{\alpha}=\bar{\boldsymbol{\alpha}}^\top(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{\alpha}})^\top\boldsymbol{\alpha}=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{\alpha}}^\top\boldsymbol{\alpha}.$$

由于$\boldsymbol{\alpha}$为非零向量, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^\top\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 故$\lambda=\bar{\lambda}$, 即$\lambda$为实数. □

由于实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值都是实数, 所以对$\boldsymbol{A}$的任一特征值$\lambda$, $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$必在实数域上有解, 因此必有一个实特征向量属于$\lambda$.

**定理4.4.2**　实对称矩阵的属于不同特征值的实特征向量互相正交.

**证明**　设$\lambda_1$, $\lambda_2$是实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$分别为$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_1$, $\lambda_2$的实特征向量. 于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

分别用$\boldsymbol{\alpha}_2^\top$, $\boldsymbol{\alpha}_1^\top$左乘上面两式, 得

$$\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{\alpha}_2.$$

因为$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵, 以及$\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1$是一个数, 所以

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1)^\top=\boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{\alpha}_2,$$

而$\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{\alpha}_2$, 因此$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{\alpha}_1=0$. 所以$\boldsymbol{\alpha}_2^\top\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$, 即$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$正交. □

**定理4.4.3**　设$\boldsymbol{A}$为$n$阶实对称矩阵, 则存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的全部特征值.

**证明**　对矩阵$\boldsymbol{A}$的阶用数学归纳法. 当$n=1$时, 1阶矩阵$\boldsymbol{A}$显然是对角矩阵, 结论成立. 假设对任意的$n-1$阶实对称矩阵, 结论成立. 下面证明对$n$阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$, 结论也成立.

设$\lambda_1$是$\boldsymbol{A}$的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_1$的一个实特征向量. 由于$\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{||\boldsymbol{\alpha}_1||}$也是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_1$的特征向量, 故不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是单位列向量. 由$\boldsymbol{\alpha}_1$可以扩充为一个单位正交列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 设$\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$. 根据定理4.3.4, $\boldsymbol{Q}_1$为$n$阶正交矩阵. 把$\boldsymbol{Q}_1$分块为$\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{R})$, 其中$\boldsymbol{R}$为$n\times(n-1)$矩阵, 则

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_1^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^\top\\ \boldsymbol{R}^\top\end{pmatrix}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{R})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\end{pmatrix}.$$

注意到$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_1^\top\boldsymbol{\alpha}_1=1$及$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{R}$的各列向量都正交, 从而有

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$为$n-1$阶实对称矩阵.

对于$\boldsymbol{A}_1$, 根据归纳假设, 存在$n-1$阶正交矩阵$\boldsymbol{Q}_2$, 使得

$$\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

设$\boldsymbol{Q}_3=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}$, 不难验证$\boldsymbol{Q}_3$仍是正交矩阵, 并且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_3^{-1}(\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1)\boldsymbol{Q}_3&=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

记$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_3$, 则结论对$n$阶实对称矩阵也成立. □

在定理4.4.3中, 如果设$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 则$\boldsymbol{\alpha}_i$就是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_i$的实特征向量, $i=1,2,\ldots,n$. 因此, $n$阶实对称矩阵有$n$个互相正交的实特征向量, 每个特征值的代数重数等于其几何重数.

实对称矩阵可以通过以下步骤实现正交相似对角化.

(1) 求出实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值, 不妨设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$是$\boldsymbol{A}$的所有不同特征值;

(2) 对每个$k_i$重(代数重数)特征值$\lambda_i$, 解齐次线性方程组

$$(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\mathbf{0},$$

求出一个基础解系$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ik_i}$ (必含$k_i$个特征向量, 此处$k_i$为几何重数), 将其正交化和单位化, 得到$\boldsymbol{\eta}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{ik_i}$ (仍为对应于特征值$\lambda_i$的特征向量);

(3) 设$\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{\eta}_{11},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{1k_1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{rk_r}\right)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$, 则$\boldsymbol{Q}$为所求的正交矩阵, 对角矩阵为$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 其中$\lambda_i$对应于特征向量$\boldsymbol{\eta}_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

**例4.4.1**　设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$. 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵.

**解**　矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\-2&\lambda-4&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-8),$$

故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=8$.

对于$\lambda_1=\lambda_2=2$, 齐次方程组$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

对于$\lambda_3=8$, 齐次方程组$(8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

下面对每个特征值所对应的基础解系进行施密特正交化. 设

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3.
\end{aligned}$$

再进行单位化.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{||\boldsymbol{\beta}_1||} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top, \\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{||\boldsymbol{\beta}_2||} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^\top, \\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{||\boldsymbol{\beta}_3||} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\top,
\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

此时

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}.$$

□

**例4.4.2** 设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 且对应于$\lambda_1 = -1$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1, 1)^\top$, 求矩阵$\boldsymbol{A}$.

**解** 因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵, 所以属于不同特征值的特征向量正交. 设$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$对应的特征向量为$(x_1, x_2, x_3)^\top$, 于是

$$x_2 + x_3 = 0.$$

此齐次线性方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 0, 0)^\top, \ \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 1, -1)^\top,$$

此为属于$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$的两个正交的特征向量.

设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{||\boldsymbol{\alpha}_1||} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top, \\ \boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{||\boldsymbol{\alpha}_2||} = (1, 0, 0)^\top, \\ \boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{||\boldsymbol{\alpha}_3||} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top.\end{aligned}$$

另一方面, 因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵, 故$\boldsymbol{A}$一定可以对角化, 故设

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

此时

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

## 习题 4.4

1. 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得$\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1, 1, -1$, 与$\lambda = 1$对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求矩阵$\boldsymbol{A}$.

3. 设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为3, $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的两个解.

(1) 求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得$\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{AQ}$为对角矩阵.

4. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$都是实对称矩阵, 证明: 存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{B}$的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值.

5. 设$\boldsymbol{A}$是$n$阶实对称矩阵, 且$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. 证明: 存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{AQ} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

6. 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 设$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵使得$\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵. 若$\boldsymbol{Q}$的第1列为$\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^\top$, 求$a$, $\boldsymbol{Q}$.

7. 设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$, $\alpha_1 = (1, -1, 1)^\top$是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_1$的一个特征向量, 记$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{I}$.

(1) 验证$\boldsymbol{\alpha}_1$是矩阵$\boldsymbol{B}$的特征向量, 并求$\boldsymbol{B}$的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵$\boldsymbol{B}$.

## // 复习题 4 //

1. 求下列矩阵的特征值与特征向量.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8&-2&-1\\-2&5&-2\\-3&-6&6\end{pmatrix}$;

2. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则(　).

(A) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$相似, $\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$相似.

(B) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$不相似, $\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$相似.

(D) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$不相似, $\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$不相似.

3. 设$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量.

(1) 试确定参数$a$, $b$及特征向量$\boldsymbol{\xi}$所对应的特征值;

(2) 问$\boldsymbol{A}$能否相似于对角阵? 说明理由.

4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^\top$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^\top$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)^\top$为$\boldsymbol{A}$的特征向量, 求矩阵$\boldsymbol{A}$.

5. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有解但不唯一.

(1) 求$a$的值;

(2) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得$\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{AQ}$为对角矩阵.

6. 设$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}$.

(1) 求$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵.

7. 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$与3维向量$\boldsymbol{X}$ 使得$\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$线性无关, 且$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$.

(1) 记$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}\right)$, 求3阶矩阵$\boldsymbol{B}$, 使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$;

(2) 计算行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

Chapter 5

# 第5章 二次型

二次型的理论来源于解析几何中二次曲线和二次曲面的研究. 在平面解析几何中, 中心在坐标原点的二次曲线的一般方程为

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1.$$

为研究它的几何性质, 选择适当的坐标旋转变换

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\theta - \tilde{y}\sin\theta, \\ y = \tilde{x}\sin\theta + \tilde{y}\cos\theta, \end{cases}$$

把方程化为标准形式

$$\tilde{a}\tilde{x}^2 + \tilde{b}\tilde{y}^2 = 1.$$

这类问题具有普遍性, 在许多理论和实际问题中常会遇到. 本章将这类问题一般化, 讨论含$n$个变量的二次齐次多项式的标准形问题.

## 5.1 二次型及其矩阵

**定义5.1.1** 数域$\mathbb{F}$上的关于$n$个变量$x_1, \cdots, x_n$的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} & f(x_1, \cdots, x_n) \\ & = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

称为是数域$\mathbb{F}$上的$n$**元二次型**, 简称**二次型**. 当$\mathbb{F} = \mathbb{R}$时, $f(x_1, \cdots, x_n)$为**实二次型**; 当$\mathbb{F} = \mathbb{C}$时, $f(x_1, \cdots, x_n)$为**复二次型**.

本章只讨论实二次型. 例如

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$$

和

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

都是二次型, 而

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9$$

和

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_3 + 5$$

都不是二次型.

为了讨论的方便, 在式(5.1.1)中, 定义$a_{ji} = a_{ij}\ (i < j)$, 则

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i\ (i < j),$$

于是式(5.1.1)可以改写成

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

将式(5.1.2)的系数排成一个$n$阶实对称矩阵, 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

记$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\top$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j. \end{aligned}$$

于是二次型(5.1.1)可以写成

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

其中$\boldsymbol{A}$称为二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$的矩阵. 显然$\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}$. 矩阵$\boldsymbol{A}$的秩称为**二次型的秩**. 于是二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$和它的矩阵$\boldsymbol{A}$是相互唯一确定的, 即$n$元实二次型与$n$阶实对称矩阵一一对应.

**例5.1.1** 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$的矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{pmatrix}.$$

反之, 上述矩阵$\boldsymbol{A}$所对应的二次型是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}&=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\&=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3=f(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

□

**例5.1.2** 求二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2^2+6x_3^2$的秩.

**解** 二次型的矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&-2&0\\1&0&6\end{pmatrix}$, 对$\boldsymbol{A}$做初等变换

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-6&2\\0&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&5\\0&0&17\end{pmatrix},$$

可知$r(\boldsymbol{A})=3$, 所以二次型的秩为3. □

为了深入地研究二次型, 希望通过变量的线性变换来化简二次型.

**定义5.1.2** 称

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n,\\\qquad\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}\tag{5.1.3}$$

为由变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$到变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$的一个**线性变换**.

记

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

则式(5.1.3)可写成矩阵形式$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$.

当$\boldsymbol{C}$为可逆矩阵时, 称该线性变换为**非退化的** (或**可逆的**)**线性变换**.

对一般二次型$f=\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 经可逆线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 可将其化为

$$f=\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})^{\top}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\top}(\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y},$$

其中$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 因为$\boldsymbol{B}^{\top}=(\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\top}=\boldsymbol{C}^{\top}AC=\boldsymbol{B}$, 所以$\boldsymbol{Y}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$为关于$y_1,y_2,\cdots,y_n$的二次型, 对应的矩阵为$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

关于$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$的关系, 我们给出下列定义.

**定义5.1.3**　设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为两个$n$阶矩阵. 如果存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$, 使得$\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$, 则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是**合同的**, 或$\boldsymbol{A}$ **合同于** $\boldsymbol{B}$, 记$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

易见, 二次型$f=\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$的矩阵$\boldsymbol{A}$与经可逆线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$得到的新二次型的矩阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$是合同的.

矩阵合同具有以下基本性质.

(1) 反身性: $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{A}$;

(2) 对称性: 若$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{A}$;

(3) 传递性: 若$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{C}$, 则$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{C}$.

## 习题　5.1

1. 写出下列二次型的矩阵, 并求出二次型的秩.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_1x_2-2x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2-2x_2x_3+3x_3x_4$;

(4) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.

2. 写出对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$所对应的二次型.

3. 写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$的矩阵.

4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. 求可逆矩阵$\boldsymbol{C}$, 使得$\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

5. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 分别做下列可逆线性变换, 求出新的二次型:

$$(1)\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Y};\quad (2)\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&1&-2\\0&1&-1\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}.$$

## 5.2　二次型的标准形

如果二次型$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$经可逆线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$化为只含平方项的二次型$\boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$, 即

$$\boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2, \tag{5.2.1}$$

则称式(5.2.1)为二次型$\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$的**标准形**.

易见, 二次型(5.2.1)的矩阵$\boldsymbol{B}$为$n$阶对角矩阵, 即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

从而, 一个二次型能否化为标准形, 等价于该二次型的矩阵是否与一个对角矩阵合同. 我们从三个方面来讨论这个问题.

### 5.2.1　用配方化二次型为标准形

先看下面的例子.

**例5.2.1**　将$\mathbb{R}^3$上的二次型$f(x,y,z)=x^2+2y^2+5z^2+2xy+2xz+6yz$化为标准形, 并求出所用的可逆线性变换.

**解**　先将含$x$的项配方

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=x^2+2x(y+z)+2y^2+5z^2+6yz\\&=(x+y+z)^2+2y^2+5z^2+6yz-(y+z)^2\\&=(x+y+z)^2+y^2+4z^2+4yz,\end{aligned}$$

再对后面含$y$的项配方, 可得$f(x,y,z)=(x+y+z)^2+(y+2z)^2$. 设

$$\begin{cases}x_1=x+y+z,\\y_1=y+2z,\\z_1=z,\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

也就是做可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

则原二次型可化为标准形$f(x,y,z) = x_1^2 + y_1^2$. □

**例5.2.2**　将二次型$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$化为标准形.

**解**　此二次型没有平方项, 故先做一个线性变换, 使其出现平方项, 然后再如例5.2.1所示的方法进行配方. 设

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

则原二次型化为

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2. \end{aligned}$$

再设

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$$

也就是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

于是原二次型化为标准形$f(x_1,x_2,x_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$, 且所做的可逆线性变换为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

一般地, 利用配方法可以得到以下结论.

**定理5.2.1**　任一个$n$元二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形.

用配方法化二次型为标准形的一般步骤为:

(1) 若二次型含有$x_i$的平方项, 则先把含有$x_i$的项集中, 然后配方, 再对其余变量重复上述过程, 直到所有变量都配成平方项为止.

(2) 若二次型中不含有平方项, 但是存在$a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$. 则先做可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j, \\ x_j = y_i + y_j, \\ x_k = y_k,\ k = 1, 2, \cdots, n; k \neq i, j, \end{cases}$$

化二次型为含有平方项的二次型, 然后再按(1)的方法配方.

用矩阵的语言, 定理5.2.1 可叙述为以下形式.

**定理5.2.2**　任意实对称矩阵都合同于对角矩阵.

### 5.2.2　用初等变换化二次型为标准形

设有可逆线性变换$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 它将二次型$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$化为标准形$\boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$, 则$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$为对角矩阵. 因为任一可逆矩阵均可表示为若干个初等矩阵的乘积, 故存在初等矩阵$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$使得$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$, 且

$$\boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_s^\top \cdots \boldsymbol{P}_2^\top \boldsymbol{P}_1^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$$

为对角矩阵.

由此可见, 对$2n \times n$矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$施以对应于右乘$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$的初等列变换, 再对$\boldsymbol{A}$施以对应于左乘$\boldsymbol{P}_1^\top, \boldsymbol{P}_2^\top, \cdots, \boldsymbol{P}_s^\top$的初等行变换, 则矩阵$\boldsymbol{A}$变为对角矩阵, 而$\boldsymbol{I}$就变为所要求的可逆矩阵$\boldsymbol{C}$, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\text{施以一系列同样的初等列变换}]{\text{对}\boldsymbol{A}\text{施以一系列初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_s^\top \cdots \boldsymbol{P}_2^\top \boldsymbol{P}_1^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s \\ \boldsymbol{I}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s \end{pmatrix}.$$

**例5.2.3**　用初等变换法将下面的二次型化为标准形.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 - 2x_2x_3.$$

**解**　二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.
$$

设$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, 做可逆线性变换$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 则

$$
\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\left(1, -4, \frac{9}{4}\right).
$$

从而原二次型可化为标准形$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - 4y_2^2 + \frac{9}{4}y_3^2$. □

类似地, 若构造$n \times 2n$矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$. 对$\boldsymbol{A}$每施行一次初等列变换, 就对$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$施行一次相同的初等行变换. 当$\boldsymbol{A}$化为对角矩阵时, $\boldsymbol{I}$就化为所要求的可逆矩阵$\boldsymbol{C}^{\top}$, 即

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对}\boldsymbol{A}\text{施以一系列同样的初等列变换}]{\text{对}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{I})\text{施以一系列初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_s^{\top}\cdots\boldsymbol{P}_2^{\top}\boldsymbol{P}_1^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s & \boldsymbol{P}_s^{\top}\cdots\boldsymbol{P}_2^{\top}\boldsymbol{P}_1^{\top}\boldsymbol{I} \end{pmatrix}.
$$

**例5.2.4**　用初等变换法化二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$为标准形.

**解** 二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$. 于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&1&0\\1&\frac{1}{2}&0&0&0&1\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1&1&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&1&0\\1&\frac{1}{2}&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&0&0&1&0\\1&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

设

$$\boldsymbol{C}^{\top}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-1&-1&1\end{pmatrix},\ \text{即}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

做可逆线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$, 则原二次型的标准形为$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2$. □

### 5.2.3 用正交变换化二次型为标准形

由于实二次型的矩阵为实对称矩阵, 而由第4章定理4.4.3知, 实对称矩阵一定可以通过正交矩阵实现(相似或合同)对角化, 从而我们有以下定理.

**定理5.2.3** 对于实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 存在$n$阶正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得经线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$将$\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$化为标准形.

如果线性变换的系数矩阵为正交矩阵, 则称该线性变换为**正交线性变换**.

由定理5.2.3, 用正交线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$化二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$为标准形, 等同于求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵. 具体步骤等同于4.4节实对称矩阵的正交相似对角化, 重述如下:

(1) 写出二次型所对应的矩阵$\boldsymbol{A}$;

(2) 求出$\boldsymbol{A}$的所有特征值, 不妨设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$为$\boldsymbol{A}$的所有不同特征值;

(3) 对每个$k_i$重特征值$\lambda_i$, 解齐次线性方程组

$$(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},$$

求出一个基础解系$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{ik_i}$, 即对应于$\lambda_i$的$k_i$ 个线性无关的特征向量; 将其正交化和单位化, 得到$\boldsymbol{\eta}_{i1},\ldots,\boldsymbol{\eta}_{ik_i}$;

(4) 记$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_{11},\ldots,\boldsymbol{\eta}_{1k_i},\ldots,\boldsymbol{\eta}_{r1},\ldots,\boldsymbol{\eta}_{rk_r})$, 则$\boldsymbol{Q}$ 为所求的正交矩阵;

(5) 做正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$, 则$f$的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

**例5.2.5** 用正交线性变换化下面二次型为标准形, 并写出所做的正交线性变换.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_4+x_2^2-2x_2x_3+2x_3x_4+x_3^2+x_4^2.$$

**解** 二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$.

求其特征值. 由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0&1\\-1&\lambda-1&1&0\\0&1&\lambda-1&-1\\1&0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)(\lambda+1),$$

$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3,\lambda_4=-1$.

求特征向量. 对$\lambda_1=\lambda_2=1$, 解齐次线性方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, 其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0,1)^\top,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)^\top.$$

将其正交化和单位化,

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^\top,\ \boldsymbol{\eta}_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\top.$$

对$\lambda_3=3$, 解齐次线性方程组$(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, 其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-1,-1)^\top.$$

将其单位化,

$$\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^\top.$$

对$\lambda_3=-1$, 解齐次线性方程组$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, 其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)^\top.$$

将其单位化,

$$\boldsymbol{\eta}_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^\top.$$

设

$$
\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},
$$

做$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$, 原二次型化为$y_1^2+y_2^2+3y_3^2-y_4^2$. □

### 5.2.4 惯性定理

由例5.2.2和例5.2.4可以看出, 二次型的标准形不是唯一的, 与所做的可逆线性变换有关. 但是, 由于通过可逆线性变换, 二次型的矩阵化为一个与之合同的矩阵, 因而它们有相同的秩. 因此, 尽管一个二次型可以化为不同的标准形, 但是标准形中非零平方项的个数是相同的. 本节将进一步证明, 一个二次型的标准形中所含的正、负平方项的个数也相同.

**定义5.2.1** 如果二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$经过可逆线性变换化为

$$
y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,\quad 其中\ p\leqslant r\leqslant n, \tag{5.2.2}
$$

则称式(5.2.2)为该二次型的**规范形**.

**定理5.2.4** (惯性定理) 任意实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都可以通过可逆线性变换化为规范形, 且规范形是唯一的.

**证明** 由定理5.2.1, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可通过可逆线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$化为标准形

$$
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2,
$$

其中$d_i>0\ (i=1,2,\cdots,r)$, $r$为二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩.

再做可逆线性变换

$$
\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{d_1}}z_1, \\ \cdots\cdots \\ y_r=\frac{1}{\sqrt{d_r}}z_r, \\ y_{r+1}=z_{r+1}, \\ \cdots\cdots \\ y_n=z_n, \end{cases}
$$

则二次型化为规范形

$$
f(x_1,\cdots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2.
$$

假设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经两个可逆线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Z}$分别化为如下规范形

$$
\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2, \\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2. \end{aligned} \tag{5.2.3}
$$

可知, $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Y}$. 设$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{B}_1=(g_{ij})$, 则

$$\begin{cases} z_1=g_{11}y_1+g_{12}y_2+\cdots+g_{1n}y_n, \\ z_2=g_{21}y_1+g_{22}y_2+\cdots+g_{2n}y_n, \\ \cdots \\ z_n=g_{n1}y_1+g_{n2}y_2+\cdots+g_{nn}y_n. \end{cases}$$

下证$p=q$. 假设$p>q$, 则线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}y_1+g_{12}y_2+\cdots+g_{1n}y_n &= 0, \\ \cdots \\ g_{q1}y_1+g_{q2}y_2+\cdots+g_{qn}y_n &= 0, \\ y_{p+1} &= 0, \\ \cdots \\ y_n &= 0, \end{cases}$$

有非零解(因为$q<p\leqslant n$). 设非零解为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$, 则$k_{p+1},\cdots,k_n$全为0, 而$k_1,\ldots,k_p$ 不全为0. 代入式(5.2.3)第一式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=k_1^2+k_2^2+\cdots+k_p^2>0,$$

但是, 代入式(5.2.3)第二式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-z_{q+1}^2-z_{q+2}^2-\cdots-z_r^2\leqslant 0,$$

从而导致矛盾. 故$p\leqslant q$. 类似地, 可证$q\leqslant p$, 所以$p=q$, 即$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的规范形是唯一性的. □

**例5.2.6** 在例5.2.4中, 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$的标准形为$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-\dfrac{1}{4}y_2^2-y_3^2$, 做可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1=z_1, \\ y_2=2z_2, \\ y_3=z_3, \end{cases} \quad \text{即} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

则二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为规范形$z_1^2-z_2^2-z_3^2$.

用矩阵的语言, 定理5.2.4可以叙述为以下定理.

**定理5.2.5** 设$\boldsymbol{A}$为$n$阶实对称矩阵, 则存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & & \\ & -\boldsymbol{I}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

其中$r = r(\boldsymbol{A})$, $0 \leqslant p \leqslant r$, 且$p$由$\boldsymbol{A}$唯一确定.

二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的规范形中的正项个数$p$称为该二次型的**正惯性指数**, 负项个数$r - p$称为该二次型的**负惯性指数**, 而它们的差$p-(r-p)=2p-r$称为该二次型的**符号差**.

由定理5.2.5容易得以下推论.

**推论5.2.1**　两个$n$阶实对称矩阵合同的充要条件是它们有相同的秩和正惯性指数.

## 习　题　5.2

1. 分别用配方法和初等变换法将下列二次型化为标准形, 并写出所用的可逆线性变换.

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$;

(4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

2. 用正交变换法将下列二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

3. 将下列二次型化为规范形, 并指出其正惯性指数及秩.

(1) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$;

(2) $2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_1x_4$.

4. 求正交变换, 把二次曲面的方程$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 = 1$化为标准方程.

5. 设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$的秩为2, 求$c$, 并用正交变换将二次型化为标准形.

# 5.3　正定二次型

在实二次型中, 正定二次型占有特殊的地位. 本节中, 我们给出其定义以及常用的判别条件.

**定义5.3.1**　设实二次型$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 其中$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\top}$. 如果对任意的$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\top} \neq \boldsymbol{0}$, 都有$\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$, 则称该二次型为**正定二次型**, 实对称矩阵$\boldsymbol{A}$为**正定矩阵**.

易见, 正定矩阵首先是实对称矩阵.

**例5.3.1**　二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定二次型.

**例5.3.2**　二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ 不是正定二次型.

**例5.3.3**　二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$是正定二次型的充要条件为$d_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$.

由上面的例子可以看出, 如果二次型已经是标准形, 则很容易判断二次型的正定性.

**引理5.3.1**　可逆线性变换不改变二次型的正定性.

**证明**　设二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$为正定二次型. 经可逆线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$化为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^\top(\boldsymbol{C}^\mathrm{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}=g(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

对任意的$\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_n)^\top\neq\boldsymbol{0}$, 由于$\boldsymbol{C}$是可逆的, 故$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$. 从而

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\boldsymbol{Y}^\top(\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^\mathrm{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0.$$

故二次型$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是正定的.

类似可证, 当$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是正定时, $f(x_1,\cdots,x_n)$也正定. □

**定理5.3.1**　$n$元实二次型$f(x_1,\cdots,x_n)$是正定的充分必要条件是它的正惯性指数等于$n$.

**证明**　设二次型$f(x_1,\cdots,x_n)$经可逆线性变换化为标准形

$$d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2. \tag{5.3.1}$$

由引理5.3.1知, $f(x_1,\cdots,x_n)$正定当且仅当二次型(5.3.1)正定, 而由例5.3.3知, 二次型(5.3.1)正定的充分必要条件是$d_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$, 即正惯性指数为$n$. □

定理5.3.1说明正定二次型$f(x_1,\cdots,x_n)$的规范形为$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$.

下面讨论正定矩阵的若干性质.

**命题5.3.1**　对角矩阵$\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$为正定矩阵的充分必要条件是$d_i>0, i=1,2,\cdots,n$.

由引理5.3.1知

**命题5.3.2**　设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶实对称矩阵, 且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同. 则$\boldsymbol{A}$正定当且仅当$\boldsymbol{B}$正定.

由定理5.3.1知

**命题5.3.3**　实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正定当且仅当$\boldsymbol{A}$合同于单位矩阵$\boldsymbol{I}$, 即存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$, 使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{C}$.

**推论5.3.1**　若$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 则$|\boldsymbol{A}|>0$.

**证明**　根据命题5.3.3, 存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$,使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{C}$, 所以$|\boldsymbol{A}|=\left|\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{C}\right|=|\boldsymbol{C}|^2$. 因为$\boldsymbol{C}$是可逆矩阵, $|\boldsymbol{C}|\neq0$, 故$|\boldsymbol{A}|>0$. □

值得注意的是,如果实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式大于零, $\boldsymbol{A}$也未必是正定矩阵. 例如$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,-2,-3)$, $|\boldsymbol{A}|=6>0$, 但$\boldsymbol{A}$不是正定矩阵.

**命题5.3.4**　实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正定的充要条件是它的特征值全大于零.

**证明**　根据定理4.4.3, 对任一实对称矩阵$\boldsymbol{A}$, 总存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的全部特征值, 则结论由命题5.3.1及命题5.3.2可得. □

**定义5.3.2**　设$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. $\boldsymbol{A}$的$k$阶主子阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}, \text{ 其中 } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n,$$

称为$\boldsymbol{A}$的$k$**阶主子式** $(k=1,2,\cdots,n)$, 而主子式

$$|\boldsymbol{A}_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

称为$\boldsymbol{A}$的$\boldsymbol{k}$ **阶顺序主子式** $(k=1,2,\cdots,n)$.

**定理5.3.2**　$n$阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充要条件是$\boldsymbol{A}$的所有顺序主子式全大于零, 即$|\boldsymbol{A}_k|>0,\ k=1,2,\cdots,n$.

**证明**　必要性. 设$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 则对应的$n$元二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定二次型. 对任意给定的$k=1,2,\cdots,n$, 取$\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^\top\neq\boldsymbol{0}$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0) &= (x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (x_1,\cdots,x_k)\boldsymbol{A}_k\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} > 0, \end{aligned}$$

故$\boldsymbol{A}_k$为正定矩阵. 根据推论5.3.1, $|\boldsymbol{A}_k|>0$.

充分性. 设$\boldsymbol{A}$的各阶顺序主子式$|\boldsymbol{A}_k|>0,\ k=1,2,\cdots,n$. 下证$\boldsymbol{A}$为正定矩阵. 对$\boldsymbol{A}$的阶数$n$用数学归纳法.

当$n=1$时, $|\boldsymbol{A}_1|=a_{11}>0$, 显然结论成立.

假设结论对$n-1$阶实对称矩阵成立. 设二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 由于$a_{11}>0$, 对含$x_1$的项进行配方,

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j,$$

其中$b_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}$, $i, j = 2, 3, \cdots, n$. 设$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, $i, j = 2, 3, \ldots, n$. 显然$\boldsymbol{B}$为$n-1$阶实对称矩阵, 故

$$g(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j = \tilde{\boldsymbol{X}}^\top \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{X}}$$

为$n-1$阶二次型, 其中$\tilde{\boldsymbol{X}} = (x_2, x_3, \ldots, x_n)^\top$.

对$k = 2, \cdots, n$, 考察行列式

$$|\boldsymbol{A}_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}.$$

由于$|\boldsymbol{A}_k| > 0$及$a_{11} > 0$, 所以

$$\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0,\ k = 2, \cdots, n.$$

故$\boldsymbol{B}$的各阶顺序主子式都大于零.

根据归纳假设, $\boldsymbol{B}$是正定的, 从而$n-1$元二次型$g(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \tilde{\boldsymbol{X}}^\top \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{X}}$是正定的. 由于$a_{11} > 0$, 不难证明二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$是正定的, 即$\boldsymbol{A}$是正定矩阵. □

**例5.3.4** 当$\lambda$取何值时, 下面二次型是正定的.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2.$$

**解** 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}.$$

由定理5.3.2, 二次$f$正定当且仅当

$$|\boldsymbol{A}_1| = 1 > 0,\ |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ |\boldsymbol{A}_3| = |\boldsymbol{A}| = \lambda - 5 > 0.$$

因此, 当$\lambda > 5$时, $f(x_1, x_2, x_3)$是正定的. □

除了正定二次型, 实二次型中还有与正定性类似的其他概念.

**定义5.3.3** 设实二次型$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 其中$\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}$. 如果对任意的$\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n)^\top \neq \boldsymbol{0}$, 都有$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} < 0$, 则称二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$为**负定的**, 实对称矩阵$\boldsymbol{A}$为**负定矩阵**.

如果对任意$\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)$, 都有$\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geqslant 0$ ($\leqslant 0$), 则称二次型$f(x_1,\cdots,x_n)$为**半正定** (**半负定**)的, 实对称矩阵$\boldsymbol{A}$为**半正定** (**半负定**) **矩阵**.

如果$f(x_1,\cdots,x_n)$既不是半正定的, 又不是半负定的, 则称该二次型为**不定的**, 实对称矩阵$\boldsymbol{A}$为**不定矩阵**.

由正定二次型的讨论, 我们不难得到负定二次型判别条件, 因为$f(x_1,\cdots,x_n)$是负定的当且仅当$-f(x_1,\cdots,x_n)$是正定的.

**定理5.3.3** 对于实二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 下列条件等价.

(1) $f(x_1,\cdots,x_n)$为半正定二次型;

(2) 它的正惯性指数等于它的秩;

(3) $\boldsymbol{A}$合同于$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$, $r=r(\boldsymbol{A})\leqslant n$;

(4) 存在实矩阵$\boldsymbol{C}$, 使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{C}$;

(5) $\boldsymbol{A}$的所有主子式都大于或等于零;

(6) $\boldsymbol{A}$的所有特征值都大于或等于零.

注意到, 仅有顺序主子式大于或等于零是不能保证实对称矩阵的半正定性. 例如,

$$f(x_1,x_2)=-x_2^2=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

就是一个反例.

**定理5.3.4** 设二次型$f(x_1,\cdots,x_n)$的规范形为$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$. 则

(1) $f$为正定二次型当且仅当$p=r=n$;

(2) $f$为半正定二次型当且仅当$p=r\leqslant n$;

(2) $f$为负定二次型当且仅当$p=0,r=n$;

(3) $f$为半负定二次型当且仅当$p=0,r\leqslant n$;

(4) $f$为不定二次型当且仅当$0<p<r\leqslant n$.

利用二次型的正定性, 我们可以得到一个判定多元函数极值的充分条件.

设$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $n$元函数$f(\boldsymbol{X})$在$\boldsymbol{X}_0$的某个邻域内有二阶连续的偏导数, 则由$f(\boldsymbol{X})$的二阶偏导数构成的矩阵

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}f_{11}(\boldsymbol{X}) & f_{12}(\boldsymbol{X}) & \cdots & f_{1n}(\boldsymbol{X})\\ f_{21}(\boldsymbol{X}) & f_{22}(\boldsymbol{X}) & \cdots & f_{2n}(\boldsymbol{X})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(X) & f_{n2}(X) & \cdots & f_{nn}(X)\end{pmatrix}$$

称之为**Hesse矩阵**, 其中$f_{ij}(\boldsymbol{X})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\boldsymbol{X})$, $i,j=1,2,\ldots,n$.

设$\boldsymbol{X}_0$为$f(\boldsymbol{X})$的驻点(一阶偏导数都是零的点). 根据多元函数的Taylor公式,

(1) 若$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{X}_0)$为正定矩阵, 则$f(\boldsymbol{X}_0)$为$f(\boldsymbol{X})$ 的极小值;

(2) 若$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{X}_0)$为负定矩阵, 则$f(\boldsymbol{X}_0)$为$f(\boldsymbol{X})$ 的极大值;

(3) 若$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{X}_0)$为不定矩阵, 则$f(\boldsymbol{X}_0)$不是极值.

## 习题 5.3

1.判别下列二次型的正定性.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=10x_1^2+2x_2^2+x_3^2+8x_1x_2+24x_1x_3-28x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$.

2. 当$a$取何值时, 下列二次型为正定二次型.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

3. 已知$\begin{pmatrix} 2-a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$是正定矩阵, 求$a$取值范围.

4. 设$\boldsymbol{A}$为$n$阶正定矩阵, 证明: $\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$也是正定矩阵.

5. 如果$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶正定矩阵, 证明: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$也是正定矩阵.

6. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$m,n$阶正定矩阵, 证明: 分块矩阵$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$也是正定矩阵.

## // 复习题 5 //

1. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2+6x_2x_3$的秩为2, 讨论$a$的取值.

2.设$\boldsymbol{A}$为$n$阶矩阵. 若对所有的$n$维向量$\boldsymbol{X}$, 恒有$\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$.证明: $\boldsymbol{A}$是反对称矩阵.

3. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(1) 已知$\boldsymbol{A}$的一个特征值为3, 试求$y$;

(2) 求矩阵$\boldsymbol{P}$, 使$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^\top(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})$为对角矩阵.

4. 证明: 二次型$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$在$\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}=1$时的最大值就是矩阵$\boldsymbol{A}$的最大特征值.

5. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经正交线性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

化为标准形$y_1^2+4y_2^2$, 求$a$, $b$的值及正交矩阵$\boldsymbol{P}$.

6. 设$\boldsymbol{A}$为3阶实对称矩阵, 且满足$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}$, 求二次型$\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$经正交变换所化的标准形.

7. 判断$n$元二次型$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}x_ix_j$的正定性.

8. 求二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的正、负惯性指数, 并指出方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种二次曲面.

9. 考虑二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$. 问$k$取何值时, $f$是正定二次型.

10. 设$\boldsymbol{A}$为$n$阶正定矩阵, 证明$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|>1$.

11. 证明: 正定矩阵主对角线上的元素全为正数.

12. 设$\boldsymbol{A}$为$n\times m$实矩阵, 且$r(\boldsymbol{A})=m<n$. 证明: (1) $\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A}$是$m$阶正定矩阵; (2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top}$是$n$阶半正定矩阵.

13. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为两个$n$阶实对称矩阵, 且$\boldsymbol{B}$是正定矩阵. 证明: 存在$n$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 同时为对角矩阵.

14. 对任意正实数$\lambda,\mu$. 证明:

(1) 当$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为半正定时, $\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B}$也半正定;

(2) 当$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$中一个正定, 另一个半正定时, $\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B}$正定.

15. 设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为同阶的实对称矩阵, 其中$\boldsymbol{A}$为正定矩阵, 证明: 存在实数$t$, 使$t\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$为正定矩阵.

16. 设$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵, 且正、负惯性指数均不为零. 证明: 存在非零向量$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$, 使得$\boldsymbol{X}_1^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1>0$, $\boldsymbol{X}_2^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2<0$, $\boldsymbol{X}_3^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3=0$.

17. 设$\boldsymbol{A}$为$m$阶实对称正定矩阵, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明: $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$正定的充要条件是$r(\boldsymbol{B})=n$.

Chapter 6

# 第6章 线性空间与线性变换

## 6.1 线性空间

线性空间是线性代数的中心内容和基本概念之一. 线性空间的理论和方法在科学技术的各个领域都有广泛的应用. 本节首先引入线性空间的概念, 并讨论它的一些基本性质.

**定义6.1.1** 设$\mathbb{F}$为一个数域, $V$是一个非空集合. 在集合$V$上定义一种代数运算, 称为**加法**, 即对于$V$中任意的两个元素$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$, 在$V$中都有唯一的元素$\boldsymbol{\gamma}$与它们对应, 称为$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$ 的**和**, 记为$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 在数域$\mathbb{F}$和集合$V$的元素之间还定义一种运算, 称为**数乘**, 即对数域$\mathbb{F}$中的任意一个数$k$和集合$V$中的任意一个元素$\boldsymbol{\alpha}$, 在$V$中都有唯一的元素$\boldsymbol{\eta}$与它们对应, 称为$k$与$\boldsymbol{\alpha}$的**数量乘积**, 记为$\boldsymbol{\eta}=k\boldsymbol{\alpha}$.

如果上述的加法和数乘满足以下运算法则, 则称$V$为数域$\mathbb{F}$上的一个**线性空间**(或**向量空间**), 称$V$中的元素为**向量**.

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3)在$V$中存在**零向量**$\mathbf{0}$, 使得对任意的$\boldsymbol{\alpha}\in V, \boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4)对$V$中的任意元素$\boldsymbol{\alpha}$, 存在**负向量**$\boldsymbol{\beta}\in V$, 使得$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$;

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k\,(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\,\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $(k+l)\,\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $k\,(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

其中$k,l\in\mathbb{F}$, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$为$V$中元素.

我们通常用小写希腊字母$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$表示线性空间$V$中的向量, 用小写的英文字母$a,b,c,\cdots$表示数域$\mathbb{F}$中的数.

回顾第三章3.3节, 数域$\mathbb{F}$上的的全体$n$维向量的集合$\mathbb{F}^n$就是一个具体的向量空间. 特别地, 取$\mathbb{F}=\mathbb{R}$, 我们就有如下结论.

**定理6.1.1** 所有$n$维实向量集合$\mathbb{R}^n$以及在其上定义的加法和数乘是$\mathbb{R}$上的一个线性空间称为$n$维**实向量空间**.

**例6.1.1** 数域$\mathbb{F}$上关于$x$的一元多项式集合$\mathbb{F}[x]$, 对于多项式加法和数与多项式的乘法, 构成数域$\mathbb{F}$上的一个线性空间, 其中零向量为零多项式.

**例6.1.2** 设$n$为正整数, 记$\mathbb{F}_n[x]$为数域$\mathbb{F}$上所有次数小于$n$的多项式集合(包含零多项式). 在多项式加法和数与多项式的乘法下, $\mathbb{F}_n[x]$是数域$\mathbb{F}$上的线性空间.

**例6.1.3** 设$\mathbb{F}^{m\times n}$为数域$\mathbb{F}$上所有$m\times n$矩阵构成的集合. 按矩阵的加法和数乘, 它构成数域$\mathbb{F}$上的一个线性空间.

**例6.1.4** 全体实函数, 按函数的加法和数与函数的数乘, 构成了实数域上的一个线性空间.

需要强调的是, 对于同一个集合, 如果选取不同的数域, 则构成不同的线性空间. 利用线性空间的定义, 可以得到线性空间的一些简单性质. 我们在这里只列举一些性质, 请读者自行完成证明.

**性质6.1.1** 零向量是唯一的.

**性质6.1.2** 任一向量$\boldsymbol{\alpha}$的负向量是唯一的, 记为$-\boldsymbol{\alpha}$.

**性质6.1.3** 对任意$k\in\mathbb{F}$和$\boldsymbol{\alpha}\in V$, $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $(-k)\boldsymbol{\alpha}=k(-\boldsymbol{\alpha})=-k\boldsymbol{\alpha}$.

**性质6.1.4** 设$k\in\mathbb{F},\boldsymbol{\alpha}\in V$. 则$k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$当且仅当$k=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

## 习题 6.1

1. 设$V$为数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $k\in\mathbb{F},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$. 证明:

(1) $-(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}$.

2. 证明: 设$V$为数域$\mathbb{F}$上的线性空间. 如果$V$有一个非零向量, 则$V$一定有无穷多个向量.

3. 检验以下集合$V$对于所定义的运算是否构成数域$\mathbb{F}$上的线性空间.

(1) $V$为平面上全体向量构成的集合, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $V$中的向量加法为通常的向量加法; 数乘定义为: 对任意的$k\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha}\in V$, $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

(2) $V$为平面上全体向量构成的集合, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $V$中的向量加法为通常的向量加法; 数乘定义为: 对任意的$k\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha}\in V$, $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(3) $V$为所有满足$f(-1)=0$的实函数集合, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $V$中向量的加法为函数的加法; 数乘定义为实数与函数的乘;

(4) $V$为$\mathbb{F}$上的全体$n$阶对称(反对称)矩阵全体构成的集合. 加法和数乘即为通常的矩阵的加法和数乘;

(5) 设$\boldsymbol{A}$为$\mathbb{F}$上的$n$阶方阵, $V$为所有满足$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$的$\mathbb{F}$上的方阵$\boldsymbol{B}$的集合. 加法和数乘为通常的矩阵加法和数乘.

## 6.2 向量组的线性相关性

在第3章3.3节, 我们学习了实向量空间$\mathbb{R}^n$的有关性质, 我们将把这些性质推广到一般线性空间.

**定义6.2.1** 设$V$为数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$为$V$的一组向量. 若存在$k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{F}$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

则称向量$\boldsymbol{\alpha}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$**线性表示**, 或称$\boldsymbol{\alpha}$为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$的一个**线性组合**.

由定义易知, 零向量是任一个向量组的线性组合.

**例6.2.1** $\mathbb{F}^{m\times n}$为数域$\mathbb{F}$上的线性空间. 设矩阵$\boldsymbol{E}_{ij} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 其第$i$行第$j$列元素为1, 其余元素均为0, 其中$i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$. 对任意$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 易知

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}.$$

**定义6.2.2** 设$V$为数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$为$V$的一组向量. 如果存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{F}$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{0}, \tag{6.2.1}$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ **线性相关**; 否则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ **线性无关**.

**例6.2.2** 在例6.2.1中, 向量组$\boldsymbol{E}_{ij}$ $(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$线性无关. $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}_{ij}$ $(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$构成的向量组线性相关.

**例6.2.3** 设$C([a, b])$是闭区间$[a, b]$上所有连续函数构成的集合. 它关于函数的加法、实数与函数的乘法构成一个实线性空间. 向量组$1, x, x^2, \cdots, x^{r-1}$是线性无关的. 事实上, 假设存在$k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{R}$, 使得$k_1 1 + k_2 x + \cdots + k_r x^{r-1} = 0$对所有的$x \in [a, b]$成立. 则必有$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$.

在第3章3.3节, 向量空间$\mathbb{F}^n$上的一些定义和性质可以平移到一般的线性空间. 在此我们不再重复论证, 有兴趣的读者可以自行证明.

由线性相关的定义可以得到以下性质.

**性质6.2.1** 任一个包含零向量的向量组一定是线性相关的.

**性质6.2.2** 由一个向量$\boldsymbol{\alpha}$组成的向量组线性相关当且仅当$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$.

**性质6.2.3** 若一个向量组的部分向量组线性相关, 则这个向量组线性相关.

**性质6.2.4**　若一个向量组线性无关, 则它的任一部分向量组也线性无关.

下面定理给出线性相关与线性组合的内在联系.

**定理6.2.1**　向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ $(r\geqslant 2)$线性相关当且仅当其中一个向量是其余$r-1$个向量的线性组合.

**定义6.2.3**　如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的每个$\boldsymbol{\alpha}_i$ 都可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示, $i=1,2,\cdots,r$, 则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ **线性表示**.

**性质6.2.5**　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示, 且$r>s$, 则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关.

**性质6.2.6**　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示, 且向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关, 则$r\leqslant s$.

**定义6.2.4**　如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$和向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$可以互相线性表示, 则称这两个向量组**等价**.

容易验证, 向量组等价是一种等价关系, 即满足反身性、对称性和传递性; 具体参考3.3节定义3.3.9后面的备注.

**定理6.2.2**　如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关, 而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$线性相关, 则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示, 且表示唯一.

**定义6.2.5**　若向量组的一个部分向量组是线性无关的, 且与该向量组等价, 则称这个部分向量组为该向量组的一个**极大线性无关组**.

**定义6.2.6**　称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的极大线性无关组所含向量的个数为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的**秩**, 记为$r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\right)$.

**性质6.2.7**　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示, 则

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s).$$

**性质6.2.8**　若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$等价, 则

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=r\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\right).$$



## 习题　6.2

1. 设$V$为实数域上连续函数全体构成的线性空间. 证明下列函数组线性无关.

(1) $\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx$;

(2) $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx$.

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关. 讨论$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$的线性相关性, 其中$s\geqslant 2$.

3. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩为$r$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是其中的$r$个向量, 使得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个极大线性无关组.

4. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 有相同的秩. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$等价.

5. 设$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$. 证明: 向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$有相同的秩.

## 6.3 基与坐标

**定义6.3.1** 设$S$为数域$\mathbb{F}$上线性空间$V$的一个子集. 若$S$中任意有限个向量都是线性无关的, 且$V$的任一向量都可以由$S$中有限个向量线性表示, 则称$S$为线性空间$V$的一个**基**. 若$V$有一个仅含有限个向量的基, 则称线性空间$V$为**有限维**的; 否则称线性空间$V$为**无限维**的.

如果数域$\mathbb{F}$上线性空间$V$只含一个向量, 则$V=\{\mathbf{0}\}$. 此时, 称$V$为**零空间**. 对于零空间, 上述的向量集合$S$是空集. 因而上述定义是针对非零空间的.

按照上述定义, 不难看出, 单位向量组$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\}$是实向量空间$\mathbb{R}^3$的一个基. 因而, $\mathbb{R}^3$是有限维的. 根据例6.2.1, 矩阵组$\boldsymbol{E}_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$为线性空间$\mathbb{F}^{m\times n}$的一个基.

对于由实系数多项式构成的实线性空间$\mathbb{R}[x]$, $S=\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1},\cdots\}$是$\mathbb{R}[x]$的一个基, 且$\mathbb{R}[x]$是无限维的实线性空间. 本章中我们主要讨论有限维线性空间.

**定理6.3.1** 设数域$\mathbb{F}$上有限维线性空间$V$有一个基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 则$V$中任意一个线性无关向量集$S$都是有限的, 且$S$中所含的向量个数不超过$n$.

**推论6.3.1** 有限维线性空间$V$的任意两个基所含的向量个数相等.

根据上述推论, 有如下定义.

**定义6.3.2** 称数域$\mathbb{F}$上有限维线性空间$V$的一个基中所含向量的个数$n$ 为$V$ 的**维数**, 记为$\dim_{\mathbb{F}} V$或简记为$\dim V$, 并称$V$为$n$ **维线性空间.**

根据定理6.3.1, 我们有如下推论.

**推论6.3.2** 设$V$为数域$\mathbb{F}$上的$n$维线性空间, 则$V$中任意$n+1$个向量都线性相关.

在3.3节, 数域$\mathbb{F}$上的向量空间$\mathbb{F}^n$中的运算都是针对向量的分量或坐标(仍属于$\mathbb{F}$) 进行的. 对于$\mathbb{F}$上线性空间$V$, 我们仍希望向量的运算可以在$\mathbb{F}$ 中进行. 为此, 我们可以引入向量坐标的概念.

**定义6.3.3** 设$V$为数域$\mathbb{F}$上$n$维线性空间, $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$为$V$的一个基, $\boldsymbol{\alpha}$为$V$的任一向量, 则$\boldsymbol{\alpha}$可由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$唯一线性表示:

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

称$a_1,a_2,\cdots,a_n$为向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的**坐标**, 记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

给定线性空间的一个基, 则向量与其坐标是一一对应的. 向量的运算可以通过其坐标实现. 设$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标分别为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, 则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为$(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$. 设$k \in \mathbb{F}$, 则$k\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标为$k(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

**例6.3.1** 在数域$\mathbb{F}$上的线性空间$\mathbb{F}_n[x]$, $1, x, \cdots, x^{n-1}$是$n$个线性无关的向量. 对任意$f(x) \in \mathbb{F}_n[x]$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, 其中$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$. 故$1, x, \cdots, x^{n-1}$ 为$\mathbb{F}_n[x]$的一个基, $\dim \mathbb{F}_n[x] = n$. 容易看出, $f(x)$在该基下的坐标为$(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$.

根据推论6.3.1, 在$n$维线性空间中, 任意$n$个线性无关向量组都可以作为线性空间的基. 同一个向量在不同基下的坐标一般是不同的. 现在我们来讨论同一个向量在不同基下的坐标之间的联系.

设$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$与$\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n$均为数域$\mathbb{F}$上$n$维线性空间$V$ 的基. 则$\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 可由$\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示, 即

$$\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\varepsilon}'_1 = a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n, \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2 = a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n, \\ \cdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_n = a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\end{array}\right. \tag{6.3.1}$$

其中$a_{ij} \in \mathbb{F}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

记$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 将式(6.3.1)写成矩阵的形式,

$$(\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

或

$$(\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\,\boldsymbol{A}. \tag{6.3.2}$$

式(6.3.2)称为由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$到基$\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n$的**基变换公式**, $\boldsymbol{A}$ 称为由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$到基$\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 的**过渡矩阵**.

**例6.3.2** 求$\mathbb{R}^3$中由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (1, 1, 1)$ 到基$\boldsymbol{\varepsilon}'_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}'_2 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}'_3 = (0, 1, 0)$的过渡矩阵.

**解** 显然, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 0, 1)$为$\mathbb{R}^3$的一组基, 且

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}.$$

故

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}^{-1}.$$

类似可得

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3'\right)&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},\end{aligned}$$

即由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$到$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3'$的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

□

在例6.3.2中, $\boldsymbol{A}$其实为由基$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$到基$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$的过渡矩阵. 我们发现$\boldsymbol{A}$是可逆的, 但这不是巧合.

**定理6.3.2** 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$与$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$均为$\mathbb{F}$上$n$维线性空间$V$的基. 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 的过渡矩阵. 则$\boldsymbol{A}$可逆, 且由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 到基$\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

**证明** 由于矩阵$\boldsymbol{A}$为基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到基$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$的过渡矩阵, 则

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'\right)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\,\boldsymbol{A}.$$

设由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 到基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的过渡矩阵为$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)&=\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'\right)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=c_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\\boldsymbol{\varepsilon}_2=c_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\\qquad\cdots\cdots\\\boldsymbol{\varepsilon}_n=c_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n.\end{cases}$$

因此,

$$\begin{cases}(c_{11}-1)\,\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n=0,\\c_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+(c_{22}-1)\,\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n=0,\\\qquad\cdots\cdots\\c_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+(c_{nn}-1)\,\boldsymbol{\varepsilon}_n=0.\end{cases}$$

由于向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$是线性无关的, 所以

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

由此可知, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n$. 从而方阵$\boldsymbol{A}$可逆, 且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$. □

现在给出向量在不同基下的坐标间的联系.

**定理6.3.3**　设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$与$\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$均为$\mathbb{F}$上$n$维线性空间$V$的基. 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到基$\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$的过渡矩阵. 设向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$与$\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$下的坐标分别为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$, 则

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}. \tag{6.3.3}$$

式(6.3.3)为同一个向量在不同基下的**坐标变换公式**.

**证明**　由题中条件,

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n)\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix},$$

且

$$(\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\,\boldsymbol{A}.$$

因此,

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}.$$

根据向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下坐标的唯一性,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}.$$

□

### 习题　6.3

1. 求线性空间$\mathbb{F}^{n\times n}$的维数与一个基.

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是数域$\mathbb{F}$上$n$维线性空间$V$的一个基. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$仍是$V$的一个基. 若向量$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$(n, n-1, \cdots, 2, 1)$, 求$\boldsymbol{\alpha}$在后一个基下的坐标.

3. 证明: 在数域$\mathbb{F}$上所有次数小于$n$的多项式构成的线性空间$\mathbb{F}_n[x]$中, 向量1, $(x+a)$, $(x+a)^2$, $\cdots$, $(x+a)^{n-1}$构成一个基, 其中$a\in\mathbb{F}$. 并求$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$在这个基下的坐标.

## 6.4　线性子空间

在空间解析几何中, 对于一个过原点的平面, 它是3维欧式空间$\mathbb{R}^3$的子集, 而且它对$\mathbb{R}^3$的加法和数乘自身构成了一个线性空间. 本节将这一情形推广到一般线性空间中, 引入线性子空间的概念.

**定义6.4.1**　设$V$是数域$\mathbb{F}$上维线性空间, $W$是$V$的一个非空子集. 若$W$关于$V$的加法和数乘也构成了数域$\mathbb{F}$上的线性空间, 则称$W$为$V$的一个**线性子空间**, 简称**子空间**.

根据线性空间的定义, 我们不难证明如下定理, 请读者自行证明.

**定理6.4.1**　若线性空间$V$的非空子集$W$关于$V$的加法和数乘运算封闭, 则$W$ 是$V$ 的子空间.

**例6.4.1**　显然, 线性空间$V$本身是$V$的一个子空间; 仅由零向量构成的集合$\{\mathbf{0}\}$ 也是$V$的子空间, 称为**零子空间**. 这两个子空间称为$V$的**平凡子空间**, 而$V$的其他子空间称为$V$的**非平凡子空间**.

**例6.4.2**　在全体实函数构成的实线性空间中, 所有实系数多项式集合构成它的一个子空间.

**例6.4.3**　设$\mathbb{F}[x]$为数域$\mathbb{F}$上关于$x$的一元多项式构成的线性空间. 则集合$W=\{f(x)\in\mathbb{F}[x]: f(-x)=f(x)\}$是$\mathbb{F}[x]$ 的一个子空间.

**证明**　对任意$f, g\in W$,

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x).$$

因此, $f+g\in W$. 对任意$k\in\mathbb{F}$, $f\in W$,

$$(kf)(-x)=kf(-x)=kf(x)=(kf)(x).$$

因此$kf\in W$. 根据定理6.4.1, $W$是$\mathbb{F}[x]$的一个子空间. □

**例6.4.4**　设齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$, 其中$\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 由定理6.4.1不难验证, 方程组在$\mathbb{F}$上所有的解构成的集合

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{F}^n:\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\}$$

是数域$\mathbb{F}$上向量空间$\mathbb{F}^n$的子空间, 称之为方程组的**解空间**. 方程组的基础解系就是解空间$\mathcal{S}(\boldsymbol{A})$的一个基. 因此, 解空间$\mathcal{S}(\boldsymbol{A})$的维数为$n-r(\boldsymbol{A})$, 即基础解系所含向量的个数.

**例6.4.5**　设矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\lambda\in\mathbb{F}$为$\boldsymbol{A}$的一个特征值. 设

$$\mathcal{V}_\lambda(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{F}^n:\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\},$$

即由$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda$的特征向量及零向量构成的集合. 由定理6.4.1不难验证, $\mathcal{V}_\lambda(\boldsymbol{A})$ 是$\mathbb{F}^n$ 的子空间, 称之为$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda$的**特征子空间**. 特征子空间$\mathcal{V}_\lambda(\boldsymbol{A})$ 的维数就是解空间$\mathcal{S}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$的维数, 或方程组$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的基础解系所含向量的个数, 为$n-r(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$. 特征值$\lambda$的**几何重数**即为特征子空间$\mathcal{V}_\lambda(\boldsymbol{A})$ 的维数.

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是数域$\mathbb{F}$上线性空间$V$的一组向量, 则这组向量所有可能的线性组合构成的集合, 记为

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r:k_1,k_2,\cdots,k_r\in\mathbb{F}\},$$

关于$V$的两种运算封闭, 因而是$V$的一个子空间, 称为由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ **生成的子空间**.

**定理6.4.2**　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是线性空间$V$的一组向量. 由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 生成的子空间$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$ 是$V$ 的包含$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的最小子空间.

在有限维线性空间中, 任何一个子空间都可以由有限个向量生成. 事实上, 设$W$是线性空间$V$的一个子空间, 则$W$也是有限维的. 取$W$一个基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$, 则$W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$. 特别地, $V$本身就可以由它的基向量生成.

**定理6.4.3**　(1)两个向量组生成相同子空间当且仅当这两个向量组等价;

(2) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的极大线性无关组就是$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$的一个基, 因此$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$的维数就是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的秩.

**证明**　(1) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$为两个向量组. 如果

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s),$$

则对任意$i=1,2,\cdots,r$, 向量$\boldsymbol{\alpha}_i\in L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$, 即$\boldsymbol{\alpha}_i$是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的线性组合, 因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示. 类似地, 向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示, 因此这两个向量组等价.

反之, 如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$等价, 则任一$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合都可以由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示. 因此

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\subseteq L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s).$$

类似可证$L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\subseteq L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$. 故

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s).$$

(2) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的秩为$s$, 且不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是它的一个极大线性无关组. 因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价, 由(1)可知,

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r),$$

故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 就是$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$的一个基. 因此, $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$的维数为$s$, 即向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的秩. □

**定理6.4.4** 数域$\mathbb{F}$上$n$维线性空间$V$的任一个线性无关的向量组都可扩充成为$V$的一个基, 即, 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ $(r<n)$是$V$的一个线性无关的向量组, 则存在$\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$, 使得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一个基.

**推论6.4.1** 设$V$为数域$\mathbb{F}$上的$n$维线性空间, $W$为$V$的一个$m$维子空间$(m<n)$, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 为$W$的一个基. 则存在$n-m$个向量$\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$, 使得$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{m+2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一个基.

## 习题 6.4

1. 设$\mathbb{R}^3$的两个子集

$$W_1=\{(x_1,x_2,x_3):x_1-2x_2+2x_3=0\},$$
$$W_2=\{(x_1,x_2,x_3):x_1+\frac{1}{2}x_2+x_3=1\}.$$

证明: $W_1$是$\mathbb{R}^3$的一个子空间, $W_2$不是$\mathbb{R}^3$的一个子空间.

2. 在$\mathbb{R}^4$中, 求由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$生成的子空间维数和一个基, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,5),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,4),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,2,4),\ \boldsymbol{\alpha}_5=(1,-3,0,-7).$$

3. 在$\mathbb{R}^3$中,求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1);$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4),\ \boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1),\ \boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6).$$

4. 求下列齐次线性方程组的解空间的维数以及一个基.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0,\\ -3x_1-x_2+x_3+x_4=0,\\ -7x_1-5x_2+x_3+2x_4=0,\\ 4x_1+x_2+3x_3-7x_4=0.\end{cases}$$

5. 求下列矩阵的所有特征子空间以及相应的维数.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 6.5 线性映射与矩阵

线性映射是研究两个线性空间之间的关系或同一线性空间中向量间内在联系的一种重要映射, 是线性代数的中心内容.

**定义6.5.1** 设$V$和$W$均为数域$\mathbb{F}$上的线性空间. 如果映射$\varphi: V \to W$满足:

(1) 对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, $\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta})$;

(2) 对任意$k\in\mathbb{F},\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\varphi(k\boldsymbol{\alpha})=k\varphi(\boldsymbol{\alpha})$.

则称$\varphi$为线性空间$V$到$W$的**线性映射**(或**线性变换**).

特别地, 当$V=W$时, 通常称$\varphi$为$V$上的**线性变换**. 当$W=\mathbb{F}$时, 则称$\varphi$为$V$上的**线性函数**. 记$\mathrm{Hom}(V,W)$ 为$V$到$W$的所有线性映射构成的集合.

**例6.5.1** 设$V$和$W$均为数域$\mathbb{F}$上的线性空间. 对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$, 定义$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$. 显然$\varphi$是$V$到$W$的一个线性映射, 称为**零映射**.

**例6.5.2** 设$V$为数域$\mathbb{F}$上的线性空间, 定义$I_V: V\to V$, $I_V(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$. 显然, $I_V$为$V$ 上的线性变换, 称为$V$上的**恒等变换**, 简记为$I$.

**例6.5.3** 设$V$为数域$\mathbb{F}$上$n$维线性空间, $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$为$V$的一个基. 对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$, 若它在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 定义$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 证明: 映射$\varphi$为$V$到$n$维向量空间$\mathbb{F}^n$的一个线性映射.

**证明** 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标分别为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 则

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\ \varphi(\boldsymbol{\beta})=(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

显然, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$与$k\boldsymbol{\alpha}$的坐标分别为$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$ 与$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$, 其中$k\in\mathbb{F}$. 因此,

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta}),$$
$$\varphi(k\boldsymbol{\alpha})=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)=k\varphi(\boldsymbol{\alpha}).$$

由定义可知, 映射$\varphi: V\to\mathbb{F}^n$是线性映射. □

设$V,W$均为$\mathbb{F}$上线性空间, $\varphi: V\to W$为线性映射. 容易验证$\varphi$具有以下性质.

**性质6.5.1** $\varphi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

**性质6.5.2** 设$k_1, k_2, \cdots, k_m \in \mathbb{F}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in V$, 则

$$\varphi\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m\right) = k_1\varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_m\varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_m\right).$$

**性质6.5.3** 设$V'$为$V$的子空间, $W'$为$W$的子空间. 则$V'$在$\varphi$下的像$\varphi(V') = \{\varphi(\boldsymbol{\alpha}) \in W : \boldsymbol{\alpha} \in V'\}$ 为$W$ 的一个子空间, $W'$在$\varphi$下的原像$\varphi^{-1}(W') = \{\boldsymbol{\alpha} \in V : \varphi(\boldsymbol{\alpha}) \in W'\}$为$V$的一个子空间.

下面定理说明线性映射是由它在基向量上的作用唯一确定. 请读者自行证明.

**定理6.5.1** 设$V$与$W$分别为数域$\mathbb{F}$上$n$维与$m$维线性空间, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$为$V$的一个基. 则对于$W$中任意给定的$n$个向量$\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n$, 存在唯一线性映射$\varphi : V \to W$, 使得$\varphi\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i\right) = \boldsymbol{\gamma}_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

下面我们讨论线性映射与矩阵的联系.

设$V$与$W$分别为$\mathbb{F}$上$n$维与$m$维线性空间, $\varphi$为$V$到$W$的线性映射. 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$分别为$V$与$W$的基. 则$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$可由$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$线性表示, 即

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1\right) &= a_{11}\boldsymbol{\eta}_1 + a_{21}\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{\eta}_m, \\
\varphi\left(\boldsymbol{\varepsilon}_2\right) &= a_{12}\boldsymbol{\eta}_1 + a_{22}\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{\eta}_m, \\
&\cdots\cdots \\
\varphi\left(\boldsymbol{\varepsilon}_n\right) &= a_{1n}\boldsymbol{\eta}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{\eta}_m.
\end{aligned}$$

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则

$$\begin{aligned}
(\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_n)) &= (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m)\boldsymbol{A}.
\end{aligned}$$

称$\boldsymbol{A}$为$\varphi$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵.

根据定理6.5.1, 给定$V$与$W$的基, 则线性映射$\varphi : V \to W$由它在这两个基下的矩阵所唯一确定. 接下来我们给出$\boldsymbol{\alpha}$在$V$的基下的坐标与它的像$\varphi(\boldsymbol{\alpha})$在$W$基下的坐标之间的联系, 即定理6.5.2, 请读者尝试证明.

**定理6.5.2** 设$\varphi$为线性空间$V$到$W$的线性映射, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$ 分别为$V$与$W$ 的基, 且$\varphi$在这两个基下的矩阵为$\boldsymbol{A}$. 若$\boldsymbol{\alpha} \in V$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\varphi(\boldsymbol{\alpha})$ 在基$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$ 下的坐标为$(y_1, y_2, \cdots, y_m)$, 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**定理6.5.3** 设$\varphi$为线性空间$V$到$W$的线性映射. 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 为$V$的两个基, 且$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$. 设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ 与$\boldsymbol{\eta}_1',\boldsymbol{\eta}_2',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m'$ 为$W$的两个基, 且$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ 到$\boldsymbol{\eta}_1',\boldsymbol{\eta}_2',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m'$ 的过渡矩阵为$\boldsymbol{Q}$. 若线性映射$\varphi$ 在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ 下的矩阵为$\boldsymbol{A}$, 在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 和基$\boldsymbol{\eta}_1',\boldsymbol{\eta}_2',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m'$下的矩阵为$\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

定理6.5.3给出了$\varphi$在$V$和$W$的两组不同基下的矩阵的联系, 即它们是等价的. 根据第一章定理1.3.2和推论1.3.2, 任一个矩阵都和一个标准形等价. 因此, 对于定理6.5.3中的矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 存在$m$ 阶可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$和$n$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}, \tag{6.5.1}$$

其中$r$为矩阵$\boldsymbol{A}$的秩. 因此, 如果我们在$V$中取基

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P},$$

在$W$中取基

$$(\boldsymbol{\eta}_1',\boldsymbol{\eta}_2',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m')=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m)\boldsymbol{Q},$$

则$\varphi$在新的基下的矩阵为$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即式(6.5.1) 的标准形. 写成矩阵的形式,

$$(\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_1'),\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_2'),\cdots,\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_n'))=(\boldsymbol{\eta}_1',\boldsymbol{\eta}_2',\cdots,\boldsymbol{\eta}_m')\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

等价于

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_i')=\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_i', & i=1,2,\ldots,r;\\ \boldsymbol{0}, & i=r+1,r+2,\ldots,n.\end{cases} \tag{6.5.2}$$

这说明, 如果我们在$V$和$W$中分别取比较好的基, 则线性映射$\varphi:V\to W$在这两个基下的矩阵具有最简形式.

**定理6.5.4** 设$\varphi$为线性空间$V$到$W$的线性映射, 则存在$V$的一个基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和$W$的一个基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$, 使得$\varphi$在这两个基下的矩阵为式(6.5.1), 或等价地, $\varphi$对基向量的作用满足式(6.5.2).

下面我们来讨论线性映射之间的运算.

设$V$与$W$分别为数域$\mathbb{F}$上$n$维与$m$维线性空间, $\varphi,\psi$为$V$到$W$的两个线性映射, $k\in\mathbb{F}$. 分别定义$\varphi$与$\psi$的加法以及$k$与$\varphi$的数乘如下: 对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$,

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(\boldsymbol{\alpha}) &= \varphi(\boldsymbol{\alpha})+\psi(\boldsymbol{\alpha}),\\ (k\varphi)(\boldsymbol{\alpha}) &= k\varphi(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

容易验证, $\varphi+\psi$与$k\varphi$仍为$V$到$W$的线性映射. 因此, $\mathrm{Hom}(V,W)$, 即$V$到$W$的所有线性映射构成的集合, 在上述加法与数乘运算下构成了数域$\mathbb{F}$上线性空间.

**定理6.5.5**　设$\varphi,\psi$均为$V$到$W$上的线性映射, 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$和$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$分别为$V$和$W$的基, 且$\varphi,\psi$在这两个基下的矩阵分别为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$. 则$\varphi+\psi$, $k\varphi$在这两个基下的矩阵分别为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $k\boldsymbol{A}$, 其中$k\in\mathbb{F}$.

设$\varphi,\psi$分别为$V$到$W$, $W$到$U$的线性映射. 定义映射$\varphi$与$\psi$的复合$\psi\circ\varphi: V\to U$, 即对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$, $(\psi\circ\varphi)(\boldsymbol{\alpha})=\psi(\varphi(\boldsymbol{\alpha}))$. 容易验证, $\psi\circ\varphi$为$V$到$U$的线性映射.

**定理6.5.6**　设$\varphi,\psi$ 分别为$V$到$W$, $W$到$U$的线性映射. 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$; $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$; $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_l$ 分别为$V,W,U$ 的基, 且$\varphi$ 在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$\boldsymbol{A}$, $\psi$ 在基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ 与$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_l$ 下的矩阵为$\boldsymbol{B}$, 则$\psi\circ\varphi$ 在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_l$下的矩阵为$\boldsymbol{BA}$.

### 习题 6.5

1. 证明: 存在一个线性映射$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, 使得$\varphi(1,1)=(1,0,2)$, $\varphi(2,3)=(1,-1,4)$, 并求$\varphi(8,11)$.

2. 是否存在线性映射$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, 使得$(1,0,3)=\varphi^{-1}(1,1)$, $(-2,0,-6)=\varphi^{-1}(2,1)$.

3. 证明: 映射$\varphi: V\to W$为线性映射当且仅当对任意$\lambda,\mu\in\mathbb{F}$, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, 均有$\varphi(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\mu\varphi(\boldsymbol{\beta})$.

## 6.6　线性空间的同构

前面我们利用线性映射建立了同一数域上线性空间之间的联系, 进一步地, 本节将讨论线性空间的分类问题.

**定义6.6.1**　设$\varphi$为线性空间$V$到$W$的线性映射. 若$\varphi$是单射, 则称$\varphi$为$V$到$W$的一个**单线性映射**. 若$\varphi$是满射, 则称$\varphi$是$V$到$W$的一个**满线性映射**. 若$\varphi$是双射, 则称$\varphi$是$V$到$W$的一个**同构映射**, 并称线性空间$V$与$W$同构, 记作$V\cong W$.

在数域$\mathbb{F}$上的$n$维线性空间$V$中取定一个基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $V$中每个向量$\boldsymbol{\alpha}$在该基下都有唯一的坐标$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 即$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 根据例6.5.3, 映射$\varphi:\alpha\mapsto(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是$V$到$\mathbb{F}^n$的一个线性映射. 可以证明, $\varphi$是一个同构映射.

**定理6.6.1**　数域$\mathbb{F}$上任一$n$维线性空间都与$\mathbb{F}^n$ 同构, 其中$n\geqslant 1$.

下面我们来讨论同构映射的性质.

**性质6.6.1**　同构映射的逆映射是同构映射.

**性质6.6.2**　两个同构映射的复合是同构映射.

由上述性质可知, 线性空间之间的同构关系具有以下性质. 对数域$\mathbb{F}$上任意线性空间$V,W,U$,

(1) 反身性: $V\cong V$;

(2) 对称性: 若$V \cong W$, 则$W \cong V$;

(3) 传递性: 若$V \cong W$, $W \cong U$, 则$V \cong U$.

因此, 同构关系是数域$\mathbb{F}$上所有线性空间的一种等价关系. 由此可以给出$\mathbb{F}$上线性空间的分类, 使得同一类中的任意两个线性空间是同构的.

**定理6.6.2** 设$\varphi$为$V$到$W$的同构映射. 则

(1) $V$中向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关(或线性无关) 当且仅当$\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1), \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\alpha}_r)$线性相关(或线性无关).

(2) 若$U$为$V$的子空间, 则$\dim U = \dim \varphi(U)$.

**定理6.6.3** 设$V_1, V_2$均为数域$\mathbb{F}$上线性空间. 则$V_1 \cong V_2$ 当且仅当$\dim V_1 = \dim V_2$.

在对线性空间的讨论中, 我们并没有涉及线性空间中的向量的具体特征, 也没有涉及其中的具体运算, 而只是关注线性空间在所定义的运算下的代数性质. 从这个观点来看, 同构的线性空间是可以不加区别的.

定理6.6.3表明维数是有限维线性空间的唯一本质特征. 因此从结构上看, 对数域$\mathbb{F}$上任一$n$维线性空间而言, 总可以选取$n$维向量空间$\mathbb{F}^n$作为其所在同构类的代表元, 也就是说可以用$\mathbb{F}^n$来理解一般的$\mathbb{F}$上的$n$维线性空间.

### 习题 6.6

1. 设$\varphi$为$V$到$W$的线性映射. 证明: $\varphi$为同构映射当且仅当$\varphi$在$V$到$W$的任两个基下的矩阵可逆.

2. 设$\varphi$为$V$到$W$的线性映射. 证明:

(1)若$\dim V < \dim W$, 则$\varphi$不可能是满射;

(2) 若$\dim V > \dim W$, 则$\varphi$不可能是单射.



## 6.7 线性映射的像与核

本节介绍线性映射的像和核. 在今后的代数学习中, 常用到这两个概念.

**定义6.7.1** 设$\varphi$为$V$到$W$的线性映射. 称集合$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(\boldsymbol{\alpha}) \in W : \boldsymbol{\alpha} \in V\}$ 为$\varphi$的**像**; 称集合$\operatorname{Ker}\varphi = \{\boldsymbol{\alpha} \in V : \varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}\}$为$\varphi$ 的**核**.

**例6.7.1** 考虑$\mathbb{R}^n$上的线性函数$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. 显然, $\operatorname{Im} f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, $\operatorname{Ker} f = \left\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0\right\}$.

**定理6.7.1** 设$\varphi$为$V$到$W$的线性映射. 则$\varphi$为单射的充要条件是$\operatorname{Ker}\varphi = 0$.

**定理6.7.2** 设$\varphi$为$V$到$W$的线性映射. 则$\operatorname{Ker}\varphi$为$V$的子空间, $\operatorname{Im}\varphi$为$W$的子空间.

**例6.7.2** 设$\mathbb{F}^n$为数域$\mathbb{F}$上$n$维列向量空间, $\boldsymbol{A}$为$\mathbb{F}$上的$m\times n$矩阵. 定义线性映射$\varphi:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m, \boldsymbol{X}\mapsto\boldsymbol{AX}$. 记$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 则$\operatorname{Ker}\varphi$即为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解空间, $\operatorname{Im}\varphi$为$\boldsymbol{A}$的列向量组生成的子空间$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

关于像与核的关系, 我们有如下非常重要的定理.

**定理6.7.3** 设$\varphi$为$V$到$W$的线性映射. 则$\dim V=\dim(\operatorname{Im}\varphi)+\dim(\operatorname{Ker}\varphi)$.

**定义6.7.2** 设$\varphi$为$V$到$W$的线性映射. 称$\dim(\operatorname{Im}\varphi)$为$\varphi$的**秩**, 记为$r(\varphi)$; 称$\dim(\operatorname{Ker}\varphi)$为$\varphi$的**零度**, 记为$\upsilon(\varphi)$.

**推论6.7.1** 设$\varphi$为$V$到$W$的线性映射, 且$\varphi$在$V$的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与$W$的基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$下的矩阵为$\boldsymbol{A}$. 则$r(\varphi)=r(\boldsymbol{A})$, $\upsilon(\varphi)=n-r(\boldsymbol{A})$.

## 习题 6.7

1. 证明: 映射$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1,(x,y)\mapsto x-y$是线性映射; 并求其值域与核.

2. 设$\varphi$为$V$到$W$的线性映射, 且$\dim V>\dim W$. 证明: $\operatorname{Ker}\varphi\neq\{0\}$.

## // 复习题 6 //

1. 设$\mathbb{F}$为数域. 证明:

(1) $f_r(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{r-1})(x-a_{r+1})\cdots(x-a_n)$, $r=1,2,\cdots,n$, 是$\mathbb{F}_n[x]$的一个基, 其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为互不相同的数.

(2) 在(1)中, 取$a_1,a_2,\cdots,a_n$为全体$n$次单位根, 求基$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$到$f_1,f_2,\cdots,f_n$的过渡矩阵.

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$; $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$; $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩分别为$r_1$, $r_2$, $r_3$. 证明: $\max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2$.

3. 设$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,m$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 证明: 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

的解全是方程$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$的解, 则$\boldsymbol{\beta}$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表出.

4. 设$\boldsymbol{\eta}_0$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个解, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$是它的导出组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 设$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t+1}=\boldsymbol{\eta}_t+\boldsymbol{\eta}_0$. 证明: 线性方程组的任一个解$\boldsymbol{\gamma}$都可表示成$\boldsymbol{\gamma}=u_1\boldsymbol{\gamma}_1+u_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\gamma}_{t+1}$, 其中$u_1+u_2+\cdots+u_{t+1}=1$.

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$为数域$\mathbb{F}$上$n$维线性空间$V$的一个基, $\boldsymbol{A}$是一个$n \times s$矩阵, 且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\, \boldsymbol{A},$$

证明: $L\,(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)$的维数等于$\boldsymbol{A}$的秩.

6. 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为数域$\mathbb{F}$上的$m \times n$矩阵. 证明: $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$.

7. 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$分别为数域$F$上$n \times m$和$m \times n$矩阵. 设$V = \{\boldsymbol{B\alpha} | \boldsymbol{AB\alpha} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{F}^n\}$. 证明: $V$是数域$\mathbb{F}$上的一个线性空间, 且$\dim V = r(\boldsymbol{A}) - r(\boldsymbol{AB})$.

# 习题参考答案

## 习题 1.1

1.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | $-1$ | 1 | 1 | 1 |
| 2 | $-1$ | 0 | $-1$ | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| 4 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | 0 | 1 | 1 |
| 5 | $-1$ | $-1$ | 1 | $-1$ | 0 | 1 |
| 6 | $-1$ | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 0 |

, 排序为: 1, 3, 2, 4, 5, 6.

2.

| | $C$ | $F$ | $J$ | $P$ | $Q$ | $R$ | $U$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-2$ | 0 |
| $F$ | 0 | 0 | 1.5 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| $J$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $P$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.5 |
| $Q$ | 0 | 0 | 0 | 0.3 | 0 | 0 | 0 |
| $R$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-0.3$ |
| $U$ | 1.8 | 0 | 0 | 0 | 1.2 | $-0.5$ | 0 |

.

3.

| | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 戊 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $E$ | $D$ | $A$ | $C$ | $B$ |
| 2 | $C$ | $A$ | $E$ | $B$ | $D$ |
| 3 | $B$ | $E$ | $D$ | $A$ | $C$ |
| 4 | $D$ | $C$ | $B$ | $E$ | $A$ |
| 5 | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |

.

## 习题 1.2

1. (1) $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 11 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -4 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

2. (1) (10); (2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; (5) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$.

3. $\begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (1) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -9 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

5. $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, 其中$a,b$为任意常数.

6. (1) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8. 9. 略.

## 习题 1.3

1. $(\boldsymbol{I}_3\ \boldsymbol{0})$.

2. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. (1) $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -5 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. 证明: 略. $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})$.

## 习题 1.4

1. (1) $\begin{pmatrix} a & 0 & ac & 0 \\ 0 & a & 0 & ac \\ 1 & 0 & c+bd & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c+bd \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

3. (1) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$.

4. $X = \left(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$, 其中$\boldsymbol{B}$是第一列元素全为零而其余元素任意取值的$n \times 3$ 矩阵.

5. $\begin{pmatrix} 5^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}$.

## 复习题 1

1. 2. 3. 略.

4. $(-4)^5\,\boldsymbol{A}$.

5. $\begin{pmatrix} 3^n & \mathrm{C}_n^1 3^{n-1} & \mathrm{C}_n^2 3^{n-2} & & \\ & 3^n & \mathrm{C}_n^1 3^{n-1} & & \\ & & 3^n & & \\ & & & 3\cdot 6^{n-1} & -6^{n-1} \\ & & & -96^{n-1} & 36^{n-1} \end{pmatrix}$.

6. 0.

7. 略.

8. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & \\ & & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & -2 \\ & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $\boldsymbol{I}(i,j)$.

12. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

13. (1) $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$; (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 9 & -4 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

16. 略.

17. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$.

18. 19. 略

## 习题 2.1

1 (1) $-2$; (2) $-10$; (3) $\lambda^{2n}$; (4) $\lambda^{2n}$.

2. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -1$.

3. $|a| > \frac{3}{2}$.

4. $r^2 \sin\varphi$.

5. 略.

## 习题 2.2

1. (1) 27; (2) $\dfrac{n(n+1)}{2}$; (3) $i = 6, j = 2$.

2. $\frac{n(n-1)}{2} - k$.

3. $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4. (1) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$; (2) 0; (3) $(-1)^{(n-1)}n!$; (4) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

5. 6. 略.

## 习题 2.3

1. (1) 1; (2) $x^2y^2$; (3) $x^n + (-1)^{n+1}y^n$; (4) $(-1)^{n-1}m^{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m\right)$;
(5) $-2(n-2)!$; (6) $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$; (7) $2^{n-1}$.

2. 略.

3. $-12$.

4. $-15$.

5. 略.

6. 0.

7. $2700-100Q+Q^2$.

## 习题 2.4

1. $|\boldsymbol{A}|=2\neq 0,\ \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. $|\boldsymbol{A}|^{(n-1)^3}$.

3. 32.

4. $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$.

5. 略.

## 习题 2.5

1. $4x+y+3z-8=0$.

2. $x_1=1, x_2=-1, x_3=1, x_4=-1, x_5=1$.

3. 当$n=2$时,

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}^{-1}\left(\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1^2 \\ b_2 & a_2 & a_2^2 \\ b_3 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & b_1 & a_1^2 \\ 1 & b_2 & a_2^2 \\ 1 & b_3 & a_3^2 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}x^2\right).$$

4. 略.

5. (1) $\lambda\neq\pm 1$; (2) $\lambda=\pm 1$.

6. $2x^2-3x+1$.

## 习题 2.6

1. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -\frac{9}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{13}{20} & -\frac{9}{20} \\ 0 & 0 & \frac{4}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$.

## 复习题 2

1. (1) 略; (2) 2.

2. (1) 324; (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. $x^4$的系数为5, $x^3$的系数为1, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}=120x+6$.

4. $x_1=a_1, x_2=a_2, \cdots, x_{n-1}=a_{n-1}$.

5. (1) $n!$; (2) $\prod_{i=1}^n a_i-\prod_{i=2}^n a_i\sum\limits_{k=2}^n \frac{1}{a_k}$;

   (3) $a^{n-2}(a^2-b^2)$; (4) $\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}^n(x_i-x_j)\sum\limits_{k=1}^n x_k$;

   (5) 当$y\neq z$时, $\dfrac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$; 当$y=z$时, $[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$.

6. (1) 18, $-9$; (2) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

7. $(n+1)x^n$.

8. 略.

9. $3^{n+1}-2^{n+1}$.

10. 略.

11. 12. 13. 14. 略.

## 习题 3.1

1. (1) 数域.

   (2) 不是数域.

   (3) 不是数域.

2. 略.

3. 略.

4. (1) 略.

   (2) 否, 例如设$\mathbb{F}=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

## 习题 3.2

1. (1) 无解.

(2) 有唯一解, 解为$x_1=3$,$x_2=-4$,$x_3=-1$,$x_4=1$.

(3) 有无穷多解, 通解为$k(-19,7,1)$, 其中$k$为任意常数.

2. (1) 当$a=0,b=2$时, 线性方程组有解, 通解为

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中$k_1,k_2$为任意常数. 对于其他情形, 线性方程组无解.

(2) 当$k\neq 0$且$k\neq 2$时, 线性方程组有唯一解, 解为$\begin{cases}x_1=\frac{3}{k}\\x_2=\frac{-5k^2+14k-9}{k^2-2k}\\x_3=\frac{7k^2-18k+9}{k^2-2k}\end{cases}$. 当$k=0$或$k=2$时, 线性方程组无解.

3. 解:

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-2&-2&t+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&t+4\\0&1&2&2&1\\0&0&-4&1&-(t+5)\\0&0&0&\frac{p+8}{4}&-\frac{(p+8)(t+5)}{4}\end{pmatrix}$$

(1) 当$p\neq-8$时, 方程组有唯一解, 为$(t+4,2t+11,0,-(t+5))$.

(2) 当$p=-8$时, 方程组有无穷个解, 通解为$(t+4,-\frac{t+3+5k}{2},\frac{t+5+k}{4},k)$, 其中$k$为任意常数.

## 习题 3.3

1. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

2. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{5}{4}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_4-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_5$.

3. 略.

4. (1) 能; (2) 不能.

5. 略.

6. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为3, 极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$, 或$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$, 或$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

7. 略.

## 习题 3.4

1. (1) 2;　(2) 2;　(3) 3.

2. (1) 秩为4;　(2) 秩为4.

3. 略.

4. 可考虑方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解.

5. 利用等式$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$.

6. 利用等式$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{AB} \end{pmatrix}$.

## 习题　3.5

1. (1) 基础解系为$(-2,1,0,0,0)$, $(-4,0,-1,1,0)$, $(3,0,1,0,1)$. 一般解为$k_1(-2,1,0,0,0)+k_2(-4,0,-1,1,0)+k_3(3,0,1,0,1)$, 其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

(2) 基础解系为$(8,-6,1,0)$,　$(-7,5,0,1)$. 一般解为$k_1(8,-6,1,0)+k_2(-7,5,0,1)$, 其中$k_1,k_2$为任意常数.

2. (1) 一般解为

$$\left(\frac{31}{6},\frac{2}{3},-\frac{7}{6},0\right)+k\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1\right),\quad \text{其中}k\text{ 为任意常数.}$$

(2)一般解为

$$\left(-\frac{1}{2},0,0,1,0\right)+k_1\left(-\frac{7}{12},1,0,0,0\right)+k_2\left(-\frac{5}{4},0,1,0,0\right)+k_3\left(-\frac{7}{8},0,0,-\frac{1}{2},1\right),$$

其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

3. 当$\lambda$取8或5或2时, 原方程组有非零解.

4. 方程组有解的充分必要条件是$a=1$. 当$a=1$时, 方程组的通解为

$$(x,y,z,w)=\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5},0,0\right)+k_1\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5},1,0\right)+k_2(0,1,0,1),$$

其中$k_1,k_2$为任意常数.

5. 略.

## 复习题 3

1. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为2, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为其一个极大线性无关组.

2. 当$a\neq 3$且$a\neq 5$时, $\boldsymbol{\beta}=(1-3t)\boldsymbol{\alpha}_1+(t-4)\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4$, 其中$t$为任意常数.

3. 4. 略.

5. 当$a \neq 0, b \neq \pm 1$时, 有唯一解:

$$x_1 = \frac{5-b}{a\,(b+1)},\ x_2 = -\frac{2}{b+1},\ x_3 = \frac{2\,(b-1)}{b+1}.$$

当$a \neq 0, b = 1$时, 有无穷多解:

$$x_1 = \frac{1-c}{a},\ x_2 = c,\ x_3 = 0,\ \text{其中}c\text{为任意常数}.$$

当$a \neq 0, b = -1$时, 无解.

当$a = 0, b \neq \pm 1, b \neq 5$时, 无解.

当$a = 0, b = -1$时, 无解.

当$a = 0, b = 1$时, 有无穷多解:

$$x_1 = c,\ x_2 = 1,\quad x_3 = 0,\ \text{其中}c\text{为任意常数}.$$

当$a = 0, b = 5$时, 有无穷多解:

$$x_1 = c,\quad x_2 = -\frac{1}{3},\quad x_3 = \frac{4}{3},\ \text{其中}c\text{为任意常数}.$$

6. 当$\lambda \neq -2$ 且$\lambda \neq 1$时, 方程组有唯一解, $x_1 = \frac{-(\lambda+1)}{\lambda+2}, x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$.

当$\lambda = -2$时, 方程组无解.

当$\lambda = 1$时,方程组有无穷多解, 一般解为$x_1 = 1 - x_2 - x_3$, 其中$x_2, x_3$为自由未知量.

7. 用线性方程组解的性质.

8. 略.

9. 当$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = 0$时, $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\eta}_s$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的解.

10. 通解为

$$\boldsymbol{\eta} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \text{其中}k\text{为任意常数}.$$

11. 略.

12. 提示: 利用第11题结论.

## 习题　4.1

1. (1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 1$.

属于$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$的特征向量为$k\,(1, 1, -1)^{\top}$, $k \neq 0$;

属于$\lambda_3=1$的特征向量为$k\,(3,1,-3)^{\top}$, $k\neq 0$.

(2) $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=6$.

属于$\lambda_1=\lambda_2=2$的特征向量为$k_1\,(1,-1,0)^{\top}+k_2\,(1,0,-1)^{\top}$, $k_1,k_2$不全为零;

属于$\lambda_3=6$的特征向量为$k_3\,(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $k_3\neq 0$.

(3) $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1+\sqrt{3}$, $\lambda_3=1-\sqrt{3}$.

属于$\lambda_1=2$的特征向量为$k_1\,(-2,1,0)^{\top}$, $k_1\neq 0$;

属于$\lambda_2=1+\sqrt{3}$的特征向量为$k_2\left(-3,1,\sqrt{3}-2\right)^{\top}$, $k_2\neq 0$;

属于$\lambda_3=1-\sqrt{3}$的特征向量为$k_3\left(-3,1,-\sqrt{3}-2\right)^{\top}$, $k_3\neq 0$.

(4) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=\lambda_4=2$.

属于$\lambda_1=1$的特征向量为$k_1\,(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $k_1\neq 0$;

属于$\lambda_2=-1$的特征向量为$k_2\left(-\frac{3}{2},1,0,0\right)^{\top}$, $k_2\neq 0$;

属于$\lambda_3=\lambda_4=2$的特征向量为$k_3\left(2,\frac{1}{3},1,0\right)^{\top}$, $k_3\neq 0$.

2. 一个特征值为$a$, 相应的一个特征向量为$(1,1,\cdots,1)^{\top}$.

3. 2.

4. (1) $t=8$; (2) $k\,(0,1,-2)^{\top}$, $k\neq 0$.

5. $0,2,-1$.

6. 略.

7. 21.

8. $-1$.

9. $3,0,0$.

10. $\lambda_2\neq 0$.



## 习题 4.2

1. 略.

2. $\lambda$是$\boldsymbol{B}$ 的特征值, $\boldsymbol{P}^{-1}\alpha$是其一个特征向量.

3. (1) 能对角化, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$;

(2) 不能对角化;

(3) 能对角化, $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$.

4. $x+y=0$

5. (1) $a=0,b=1$; (2) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

6. $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1&2^n-1\\0&2^n&0\\0&1-2^n&1\end{pmatrix}$.

7. $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.

8. 2.

9. 当$a=-2$时, $\boldsymbol{A}$可相似对角化; 当$a=-\frac{2}{3}$时, $\boldsymbol{A}$不可相似对角化.

10. 略.

## 习题 4.3

1. $\frac{\pi}{4}$.

2. (1) $\eta_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\eta_2=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right)$, $\eta_3=\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$;

(2) $\eta_1=\left(\frac12,\frac12,\frac12,\frac12\right)$, $\eta_2=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},0,\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$, $\eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{42}},0,\frac{-5}{\sqrt{42}},\frac{4}{\sqrt{42}}\right)$.

3. $\alpha_2=(1,0,-1)$, $\alpha_3=\left(-\frac12,1,-\frac12\right)$.

4. (1)不是; (2) 是.

5. 略.

## 习题 4.4

1. (1) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (1) $\lambda_1=3$, 对应的特征向量为$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k_1\neq 0$,

$\lambda_2=\lambda_3=0$, 对应的特征向量为$k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k_2,k_3$不全为零;

(2) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

4. 5. 略.

6. $a=-1$, $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

7. (1) $\boldsymbol{B}$的全部特征值为$-2,1,1$, $\boldsymbol{B}$的属于1的特征向量为$k_1(1,0-1)^\top+k_2(1,1,0)^\top$, 其中$k_1,k_2$为不全为零的任意常数; $\boldsymbol{B}$的属于$-2$ 的特征向量为$k_3(1,-1,1)^\top$, 其中$k_3$不为零.

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.



## 复习题 4

1. (1) $\lambda_1=1$, 对应的特征向量: $k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中$k_1$为非零常数.

$\lambda_2=\lambda_3=2$, 对应的特征向量: $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, 其中$k_2,k_3$为不全为零常数.

(2) $\lambda_1=\lambda_2=9$, 对应的特征向量: $k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 其中$k_1,k_2$为不全为零常数.

$\lambda_3=1$, 对应的特征向量: $k_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, 其中$k_3$为非零常数.

2. B.

3. (1) $a=-3,\ b=0$, 特征值为$\lambda=-1$;

(2) 不能相似于对角阵.

4. $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

5. (1) $a=-2$; (2) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

6. (1) 当$b\neq0$时, $\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1+(n-1)b$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

属于$\lambda_1$的特征向量为$k\xi_1=k(1,1,1,\cdots,1)^\top$, 其中$k$为非零的常数.

属于$\lambda_2$的特征向量为$k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n$, 其中$k_2,k_3,\cdots,k_n$为不全为零的常数, $\xi_2=(1,-1,0,\cdots,0)^\top$, $\xi_3=(1,0,-1,\cdots,0)^\top$, $\cdots$, $\xi_n=(1,0,0,\cdots,-1)^\top$.

当$b=0$时, 特征值为$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$, 此时任意非零向量均为特征向量.

(2) 当$b\neq0$时, $A$有$n$个线性无关的特征向量, 设$\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1+(n-1)b&&&\\&1-b&&\\&&\ddots&\\&&&1-b\end{pmatrix}.$$

当$b=0$时, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$, 对任意可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 均有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$.

7. (1) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$; (2) $-4$.

## 习题　5.1

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 3;　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 2;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$, 4;　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 3.

2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. (1) $f = 2y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$;　(2) $f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

## 习题　5.2

1. (1) $y_1^2 + y_2^2$; (2) $-y_1^2 + y_2^2 - 12y_3^2$; (3) $2y_1^2 - 2y_2^2$; (4) $y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2$.

2. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$;　(2) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

3. (1) 规范形为$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 正惯性指数为2, 秩为3.

   (2)规范形为$y_1^2 - y_2^2$, 正惯性指数为1, 秩为2.

4. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

5. $c = 3$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

## 习题　5.3

1. (1)是正定的;　(2)不是正定的.

2. (1) $-\frac{4}{5}<a<0$;　(2) $a>2$.

3. $-3<a<1$.

4. 5. 6. 略.

## 复习题 5

1. $-3$.

2. 略.

3. (1) 2;　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 略.

5. $a=3, b=1, \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

6. $2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.

7. 正定.

8. 2, 0; 椭圆柱面.

9. $-1<k<0$.

10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 略.

## 习题　6.1

1. 2. 略.

3. (1) 否; (2) 否; (3) 是; (4) 是; (5) 是.

## 习题　6.2

1. 略.

2. 当$s$为奇数时, 向量组线性无关; 当$s$为偶数时,向量组线性相关.

3. 4. 5. 略.

## 习题 6.3

1. $\dim \mathbb{F}^{n\times n} = n^2$, 基为$E_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

2. $(1, 1, \cdots, 1)$.

3. $\left(f(-a), f'(-a), \cdots, \frac{f^{(n-1)}(-a)}{(n-1)!}\right)$.

## 习题 6.4

1. 略.

2. 维数为3, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$为一个基.

3. $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

4. 维数为1, $(4, -3, 5, 4)$为一个基.

5. 特征值为2, 1 (2重). 对应于特征值2的特征子空间为$\{k(0, 0, 1) : k$ 任意常数$\}$, 维数为1. 对应于特征值1的特征子空间为$\{k(0, 1, 0) : k$ 任意常数$\}$, 维数为1.

## 习题 6.5

1. 略.

2. 不存在.

3. 略.

## 习题 6.6

1. 2. 略.

## 习题 6.7

1. 2. 略.

## 复习题 6

1. (1) 略. (2) 提示: $x^n - 1 = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$, 把$f_r(x)$ 的系数用单位根表示出来.

2-7. 略.