安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《 高等数学 A（一） 》期末考试试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

得 分	

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．若 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=x-\sin x$ 与 kx^3 是等价无穷小，则 $k=$（　　　）.

（A）1　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{1}{6}$

2．若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{ax^2}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　　）.

（A）$ab=\frac{1}{2}$　　（B）$ab=-\frac{1}{2}$　　（C）$ab=2$　　（D）$ab=-2$

3．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则(　　　）.

（A）$f(0)=1$　　（B）$f'(0)=1$

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　（D）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

4．若 $f(x)$ 连续，且 $F(x)=\int_0^x f(t-x)dt$，则 $F'(x)$ 为(　　　）.

（A）$f(-x)$　　（B）$-f(-x)$　　（C）$f(0)$　　（D）$-f(0)$

5．反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ ，$\int_0^1\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ 分别(　　　）.

（A）收敛，收敛　　（B）收敛，发散　　（C）发散，发散　　（D）发散，收敛

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=$ ________ .

7．曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+x-2}$ 的斜渐近线为__________ .

8．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^2=3$ 确定，则 $y(x)$ 的极小值为__________.

9．由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中所围图形的面积为 _________.

10．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+x^2}+\sin^2 x\right)dx=$ ___________.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

得 分	

11．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}$.

12．求函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$ 的凹凸区间及该函数图形的拐点.

13．计算不定积分$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$（$x>1$）.

14．计算定积分$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$.

15．求曲线$y=x^3$（$x\geq 0$）与直线$x=2$， $y=0$所围成的图形绕y轴旋转产生的旋转体的体积.

16．求微分方程 $(x^2-1)y'+2xy=\cos x$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得 分	

17．设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明；存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)-f(\xi)=0$.

18．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)<1$．证明：方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（B 卷）参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2．A　　3．C　　4．A　　5．B

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．$\ln 2$　　7．$y=x-1$　　8．-2　　9．$4\ln 2$　　10．$\dfrac{\pi}{2}$

三．计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{\frac{x^4}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}.$

............................（10 分）

12．解：函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,\infty)$， $y'=\dfrac{4x}{(1-x)^3}$， $y''=\dfrac{8x+4}{(1-x)^4}$

令 $y'=0$，得 $x=0$，令 $y''=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2}$，列表如下：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$		$-$	0	+		$-$
y''	$-$	0	+	+	+		+
y		拐点		极小值			

由此可知，函数在$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$上是凸的，在$\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$和$(1,+\infty)$上是凹的，

$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{9}\right)$是曲线的拐点

………………（10 分）

13．解：令 $x=\sec t$， $t\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{x^2-1}=\tan t$, $dx=\sec t\tan t dt$，有

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

………………（10 分）

14．解：令 $t=\sqrt{x}$，即 $x=t^2$ 则 $dx=2tdt$， $x=0 \Rightarrow t=0$， $x=\pi^2 \Rightarrow t=\pi$，于是

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx = \int_0^{\pi} t\cos t dt^2 = 2\int_0^{\pi} t^2 \cos t dt$$

$$=2\int_0^{\pi} t^2 d\sin t = 2[t^2(\sin t)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin t dt^2] = -2\int_0^{\pi} 2t\sin t dt$$

$$=4\int_0^{\pi} t d\cos t = 4[t\cdot\cos t\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos t dt] = -4\pi .$$

………………（10 分）

15．解：所求的体积 $V=\pi\int_0^8 2^2 dy - \pi\int_0^8 y^{\frac{1}{3}} dy$

$$=32\pi - \pi\cdot\frac{3}{5}\cdot y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8 = \frac{64}{5}\pi$$

………………（10 分）

16．解：原方程改写为 $y' + \frac{2x}{x^2-1}y = \frac{\cos x}{x^2-1}$，这是一阶线性微分方程，通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(\int \frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{x^2-1}\left(\int\cos x\,\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{x^2-1}(\sin x + C),$$

将 $y(0)=1$ 代入，得 $C=-1$，所求特解为 $y=\frac{\sin x - 1}{x^2-1}$.

………………（10 分）

四．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明：令 $F(x)=e^{-x}f(x)$

显然，$F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=e^{-\xi}f'(\xi)-e^{-\xi}f(\xi)=0$

即 $f'(\xi)-f(\xi)=0$.

………………（5 分）

18．证明：令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$，显然，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导 $F(0)=-1<0$， $F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt = 1-f(\eta)>0$，其中 $\eta\in[0,1]$

由零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$

又因为 $F'(x)=2-f(x)>0$，知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调，故 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根

………………（5 分）