# P18 习题1.2

2.(1) 袋中有7个白球、3个黑球，现从中任取2个球，试求"所取两球颜色相同"的概率
(2) 甲袋中有5个白球3个黑球，乙袋中有4个白球6个黑球，现从两袋中各取一球，试求"所取两球颜色相同"的概率。

(1) 两球颜色相同：两个白或者两个黑球.

设事件A：取出两个白球　事件B：取出两个黑球　即A、B互斥

$P\{所取颜色相同\} = P(A\cup B) = P(A)+P(B) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} + \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$

(2) 设事件A：从甲袋取出白球　事件B：从乙袋中取出白球

$P\{所取颜色相同\} = P(AB\cup\bar{A}\bar{B}) = P(AB)+P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{5}{8}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{8}\times\frac{6}{10} = \frac{19}{40}$

或 $\frac{C_5^1C_4^1+C_3^1C_6^1}{C_8^1C_{10}^1} = \frac{19}{40}$

6 (1) 已知事件A、B满足 $AB=\bar{A}\bar{B}$，若 $P(A)=a$，试求 $P(B)$

(2) 已知事件A、B满足 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，若 $P(A)=a$，试求 $P(B)$

$AB=\bar{A}\bar{B}$，$(AB)B = (\bar{A}\bar{B})B \overset{结合律}{=} \bar{A}(\bar{B}B) = \bar{A}\phi = \phi$

$\Rightarrow AB = \bar{A}\bar{B} = \phi$

对偶律 $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B} = \phi$

$\Rightarrow A\cup B = \Omega$

(1) $AB=\bar{A}\bar{B}\subseteq\bar{A} \Rightarrow AB=\phi$

$\bar{A}\bar{B} = AB\subseteq A \Rightarrow \bar{A}\bar{B}=\phi$

$\Rightarrow$ A与B为对立事件　$\therefore P(B) = 1-P(A) = 1-a$

(2) $P(\bar{A}\bar{B}) = 1-P(A\cup B) = 1-[P(A)+P(B)-P(AB)] = P(AB) \Rightarrow P(B) = 1-P(A) = 1-a$

P24 习题1.3

2. (1) 已知 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{6}$, 试求 $P(\bar{A}|\bar{B})$

(2) 已知 $P(A)=0.8$, $P(B)=0.7$, $P(A-B)=0.2$, 试求 $P(B|\bar{A})$

(3) 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$, 试求 $P(\bar{A}\bar{B})$

(1) $P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}$ $\quad P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

$P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$ $\quad \therefore P(\bar{A}\bar{B})=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$ $\quad P(\bar{B})=1-P(B)=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{2}{9}\Big/\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

(2) $P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}$ $\quad P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.2 \Rightarrow P(AB)=0.6 \Rightarrow P(\bar{A}B)=0.7-0.6=0.1$

$P(\bar{A})=1-P(A)=0.2$ $\quad \therefore P(B|\bar{A})=\frac{0.1}{0.2}=0.5$

(3) $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ $\quad P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2} \Rightarrow P(B)=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$

$\therefore P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

10. 两台车床加工同样的零件, "第一台出现不合格品"的概率是0.03, "第二台出现不合格品"的概率是0.06, 加工出来的零件放在一起, 并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍.

(1) 试求"任取一个零件是合格品"的概率.

(2) 如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

(1) 设事件A：取出的零件是不合格品　事件$B_i$：取出的零件来自第i台加工，$i=1,2$

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{3}\times0.03+\frac{1}{3}\times0.06=0.04$$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.04=0.96$$

(2) $$P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}=\frac{\frac{1}{3}\times0.06}{0.04}=0.5$$

13. (1) 某商店正在销售10台彩电，其中7台是一级品，3台是二级品，某人到商店时，彩电已售出2台，试求此人能买到一级品的概率。

(2) 送检的两批灯泡在运输中各打碎一只，若每批10只，且第一批中有一只次品，第二批中有两只次品，现从剩下的灯泡中任取一只，求取到次品的概率。

(1) 设事件A：买到一级品　　事件$B_i$：售出i台一级品　$i=0,1,2$

$$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

$$=\frac{C_7^0C_3^2}{C_{10}^2}\times\frac{7}{8}+\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}\times\frac{6}{8}+\frac{C_7^2C_3^0}{C_{10}^2}\times\frac{5}{8}=\frac{7}{10}$$

(2) 设事件A：取到次品　　事件$B_i$：取到i批灯泡　$i=1,2$　事件$C_i$：打碎i只次品，$i=0,1$

10　1+9
　　× √
　　1　8
　　0　9
10　2+8
　　× √
　　2　7
　　1　8

$P(A|B_1)=P(C_0|B_1)P(A|C_0B_1)+P(C_1|B_1)P(A|C_1B_1)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\times 0=\frac{1}{10}$

$P(A|B_2)=P(C_0|B_2)P(A|C_0B_2)+P(C_1|B_2)P(A|C_1B_2)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{18}{90}=\frac{2}{10}$

$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}=\frac{3}{20}$

17. 玻璃杯成箱出售，每箱20只，假设各箱有0,1,2只次品的概率分别为0.8, 0.1, 0.1 一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时售货员随机取一箱，顾客开箱随机地查看4只，若无次品，就买下这箱玻璃杯；否则退回 试求.

1　19　　2　18
× √　　× √

(1) "顾客买下这箱玻璃杯"的概率

(2) "在顾客买下的一箱中，确实没有次品"的概率

(1) 设事件A：顾客买下这箱玻璃杯　事件$B_i$：所取箱含有i只次品，i=0,1,2

则 $P(B_0)=0.8$　$P(B_1)=P(B_2)=0.1$

$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.8\times1+0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.943$

(2) $P(B_0|A)=\frac{P(AB_0)}{P(A)}=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8\times1}{0.943}=0.85$

P30 习题1.4

1. 假设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.9$ 在以下情形下求$P(B)$

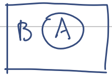
(1) A,B互斥 (2) A,B独立 (3) $A\subset B$

$P(AB)=0$

(1) $P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.9-0.4=0.5$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$\Rightarrow 0.4+P(B)-0.4P(B)=0.9 \Rightarrow P(B)=\frac{5}{6}$

(3) 


$P(B)=P(A\cup B)=0.9$

5 一射手对同一目标独立地射击四次，若至少命中一次的概率为$\frac{80}{81}$，试求该射手进行一次射击的命中率.

设射手进行一次射击的命中率为$p$. 命中次数$X\sim B(4,p)$

$P(\text{至少命中一次})=\frac{80}{81}$ 则$P(\text{一次都没有命中})=1-\frac{80}{81}=\frac{1}{81}$

$P(X=0)=C_4^0\, p^0(1-p)^4=\frac{1}{81} \Rightarrow p=\frac{2}{3}$

8. 甲乙两人轮流射击，首先命中目标者获胜. 甲的命中率为$a$ 乙的命中率为$b$. 甲先射击 求甲(或乙)获胜的概率.

$P(\text{甲胜})=a+(1-a)(1-b)a+(1-a)^2(1-b)^2a+\cdots+(1-a)^n(1-b)^n a$

甲赢a 甲输 乙输 甲赢

$=a[1+(1-a)(1-b)+(1-a)^2(1-b)^2+\cdots+(1-a)^n(1-b)^n]$ 等比数列求和 $q=(1-a)(1-b)$

$=a\cdot\frac{1[1-(1-a)^n(1-b)^n]}{1-(1-a)(1-b)}\overset{n\to\infty}{=}a\frac{1}{1-(1-a)(1-b)}=\frac{a}{a+b-ab}$

$P(乙胜) = 1 - P(甲胜) = \frac{b-ab}{a+b-ab}$ 或 $P(乙胜) = \underbrace{(1-a)}_{甲输}\overset{乙赢}{b} + \underbrace{(1-a)}_{甲输}\overset{乙输}{(1-b)}\underbrace{(1-a)}_{甲输}\overset{乙赢}{b} + (1-a)^3(1-b)^2 b + \cdots + (1-a)^n(1-b)^{n-1} b = \frac{b-ab}{a+b-ab}$

10. 甲乙两台机组并联向城市供电，当一台机组发生故障时，另一台机组能在这段时间满足城市用电需求的概率为0.85，设每台机组发生故障的概率为0.1，且它们是否发生故障相互独立。

(1) 求"保证城市供电"的概率。

(2) 若已知电厂机组发生故障，求"供电能满足需求"的概率。

(1) 设事件A：机组保证城市供电　　事件$B_i$：有i台机组发生故障　i=0,1,2

$P(B_0) = C_2^0\, 0.1^0\, 0.9^2 = 0.81$　　$P(B_1) = C_2^1\, 0.1^1 \cdot 0.9^1 = 0.18$　　$P(B_2) = C_2^2\, 0.1^2\, 0.9^0 = 0.01$

且 $P(A|B_0) = 1$　　$P(A|B_1) = 0.85$　　$P(A|B_2) = 0$

$P(A) = P(B_0)P(A|B_0) + P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$

$= 0.81\times1 + 0.18\times0.85 + 0.01\times0 = 0.963$

(2) $P(A|B_1 \cup B_2) = \frac{P(A\cap(B_1\cup B_2))}{P(B_1\cup B_2)} = \frac{P(AB_1)+P(AB_2)}{P(B_1)+P(B_2)} = \frac{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)+P(B_2)}$

$= \frac{0.18\times0.85}{0.18+0.01} = 0.81$

$P[(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)] = P(AB_1) + P(AB_2)$
分配律

P34 习题2.1

2.(1) 设离散型 r.v X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<3 \\ \frac{1}{3}, & 3\le x<6 \\ 1, & x\ge 6 \end{cases}$　试求 $P(X<3)$，$P(X\le3)$，$P(X>1)$，$P(X\ge1)$

$\forall x \in R$, $F(x^-) = p(X<x)$

$p(X<3) = F(3^-) = \lim\limits_{x\to 3^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $p(X\le 3) = F(3) = \frac{1}{3}$

$p(X>1) = 1-p(X\le 1) = 1-F(1) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $p(X\ge 1) = 1-p(X<1) = 1-F(1^-) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(2) 设连续型 r.v X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ \ln^x, & 1\le x<e \\ 1, & x\ge e \end{cases}$ 试求 $p(X<2)$, $p(0\le X\le 3)$, $p(2<X<2.5)$

$p(X<2) = F(2^-) = F(2) = \ln^2$

$p(0\le X\le 3) = F(3) - F(0) = 1-0 = 1$

$p(2<X<2.5) = p(X<2.5) - p(X\le 2) = F(2.5^-) - F(2) = \ln^{2.5} - \ln^2 = \ln^{\frac{5}{4}}$

(3) 设混合型 r.v X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x/2, & 0\le x<1 \\ 2/3, & 1\le x<2 \\ 11/12, & 2\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}$ 试求 $p(X<3)$, $p(1\le X<3)$, $p(X>\frac{1}{2})$, $p(X=3)$

$p(X<3) = F(3^-) = \frac{11}{12}$ $p(1\le X<3) = p(X<3) - p(X<1) = F(3^-) - F(1^-) = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

$p(X>\frac{1}{2}) = 1-p(X\le\frac{1}{2}) = 1-F(\frac{1}{2}) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $p(X=3) = p(X\le 3) - p(X<3) = F(3) - F(3^-) = \frac{1}{12}$

P41 习题2.2

3 某公司有5个顾问，每个顾问提供正确意见的概率为0.6 公司就某项事宜是否可行征求各顾问的意见，并按多数人的意见作出决策，试求"公司作出正确决策"的概率.

事件A：公司作出正确决策　X为提供正确意见的顾问人数

易知 $X \sim B(5, 0.6)$

$P(A) = P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$= C_5^3 \cdot 0.6^3 0.4^2 + C_5^4\, 0.6^4\, 0.4^1 + C_5^5\, 0.6^5\, 0.4^0 = 0.6826$

8. (1) 已知 r.v. X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.5, & 0 \leq x < 1 \\ 0.7, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ 试求X的分布律.

当X=0时 $F(0)=0.5$

$P(X=0) = F(0) - F(0^-) = 0.5 - 0 = 0.5$

$P(X=1) = F(1) - F(1^-) = 0.7 - 0.5 = 0.2$

$P(X=3) = F(3) - F(3^-) = 1 - 0.7 = 0.3$

即有X的分布律

| X | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | 0.5 | 0.2 | 0.3 |

(2) 已知 r.v. X 的分布律为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & a & b \end{pmatrix}$ 其分布函数为 $F(x) = \begin{cases} c, & x<-1 \\ d, & -1 \leq x < 0 \\ 0.75, & 0 \leq x < 1 \\ e, & x \geq 1 \end{cases}$ 求 a.b c d e

$F(-\infty) = 0 \Rightarrow c = 0$

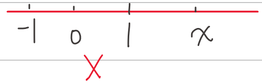
$P(X=-1) = F(-1) - F(-1^-) = d - c = 0.25 \Rightarrow d = 0.25$

$P(X=0) = F(0) - F(0^-) = 0.75 - d = a \Rightarrow a = 0.5$

$0.25+a+b=1 \Rightarrow b=0.25$

$F(+\infty)=1 \Rightarrow e=1$

$F(x)=P(X\le x)=e, x\ge 1$




P50 习题2.3

5. 设连续性 r.v. X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} ae^{x} & x<0 \\ b & 0\le x<1 \\ 1-ae^{-(x-1)} & x\ge 1 \end{cases}$ 试求 (1) $a,b$ (2) $f(x)$ (3) $P(X>\frac{1}{2})$

(1) 由 $F(0^-)=F(0)$ 得 $ae^{0}=b \Rightarrow a=b$

$F(1^-)=F(1)$ 得 $b=1-a$ 求得 $a=b=\frac{1}{2}$

(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x<0 \\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x\ge 1 \\ 0, & \text{其他点} \end{cases}$

(3) $P(X>\frac{1}{2})=1-P(X\le\frac{1}{2})=1-F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

12. 设r.v $X\sim N(3,2^2)$, 试求

(1) $P(2<X\le 5)$, $P(|X|>2)$

(2) 求 $c$, s.t. $P(X>c)=P(X<c)$

(3) 设 $d$ 满足 $P(X>d)\ge 0.9$, $d$ 至多为多少?

(1)① $P(2<X\le 5)=P(\frac{2-3}{2}<\frac{X-3}{2}\le\frac{5-3}{2})$

由 $X\sim N(3,2^2) \Rightarrow \frac{X-3}{2}\sim N(0,1)$

即 $P\left(\frac{2-3}{2}<\frac{X-3}{2}\le\frac{5-3}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)=\Phi(1)+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-1=0.5328$

② $P(|X|>2)=1-P(|X|\le 2)=1-P\left(\frac{-2-3}{2}\le\frac{X-3}{2}\le\frac{2-3}{2}\right)$

$=1-P\left(\frac{-5}{2}\le\frac{X-3}{2}\le-\frac{1}{2}\right)=1-\left[\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{2}\right)\right]$

$=1-\left[1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{5}{2}\right)\right)\right]=1+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{5}{2}\right)=0.6977$

(2) 由 $P(X>C)=P(X<C)=P(X\le C)=\frac{1}{2}$

$P(X\le C)=P\left(\frac{X-3}{2}\le\frac{C-3}{2}\right)=\Phi\left(\frac{C-3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{C-3}{2}=0\quad\therefore C=3$

(3) $P(X>d)=1-P(X\le d)=1-P\left(\frac{X-3}{2}\le\frac{d-3}{2}\right)=1-\Phi\left(\frac{d-3}{2}\right)$

$=1-\Phi\left(-\frac{3-d}{2}\right)=1-\left[1-\Phi\left(\frac{3-d}{2}\right)\right]=\Phi\left(\frac{3-d}{2}\right)\ge 0.9=\Phi(1.29)$

$\therefore\frac{3-d}{2}\ge 1.29\Rightarrow d\le 0.42$

$\therefore$ d最多为0.42

P52 习题2.4

1.(1) 设r.v X的分布律为 $\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 3\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{11}{30}\end{pmatrix}$ 试求 $Y=X^2$ 与 $Z=|X|$ 的分布律.

(2) 设r.v. X的概率分布为 $P(X=k)=\frac{1}{2^k}$, $k=1,2,\cdots$ 试求 $Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的分布律

(1) $Y=X^2$:

$Y\sim\begin{pmatrix}4 & 1 & 0 & 1 & 9\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{11}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4 & 9\\ \frac{1}{5} & \frac{21}{90} & \frac{1}{5} & \frac{11}{30}\end{pmatrix}$

$\downarrow\ \frac{7}{30}$

$Z=|X|$: $Z \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{11}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{30} & \frac{1}{5} & \frac{11}{30} \end{pmatrix}$

(2) 易知 $Y=\{-1,0,1\}$ 且 $\{Y=0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{X=2k\}$

等比数列求和

$P\{Y=0\} = P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X=2k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^k = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Y=0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| Y=1 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 |
| Y=-1 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 |

$P\{Y=1\} = P(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{X=4k+1\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=4k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+1}}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{16})^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$

$P\{Y=-1\} = 1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\} = 1-\frac{1}{3}-\frac{8}{15} = \frac{2}{15}$ 或 $P\{Y=-1\} = P(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{X=4k+3\})$

$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=4k+3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+3}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{15}$

$\therefore Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}$

3(1) 设 r.v. $X \sim U(0,1)$ 试求 $1-X$ 的分布

(2) 设 r.v. $X \sim E(2)$ 试证: $Y_1 = e^{-2X}$ 与 $Y_2 = 1-e^{-2X}$ 均服从 $(0,1)$ 的均匀分布

3.(1) 令 $Y=g(X)=1-X$, $X \sim U(0,1)$ $\therefore f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$0<x<1$
$0<1-y<1 \Rightarrow 0<y<1$

$g(x)$ 为单调减函数 由定理 2.4.1 知 $f_Y(y) = \begin{cases} f(1-y)\,|(1-y)'| = 1, & 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$\varphi(y) = \begin{cases} f(g^{-1}(y))\,|g^{-1}(y)'|, & y\in(\alpha,\beta) \\ 0, & y\notin(\alpha,\beta) \end{cases}$

即 $Y = 1-X \sim U(0,1)$

$x>0,\ y_1 = e^{-2x} > 0$
$-\frac{1}{2}\ln y_1 > 0 = \ln 1 \Rightarrow y_1 < 1$

(2)① 令 $Y_1 = g(X) = e^{-2X}$ $X \sim E(2)$ $\therefore f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

$g'(x) = -2e^{-2x} < 0$ 则 $g(x)$ 为单调递减 由定理 2.4.1 知 $f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} f(-\frac{1}{2}\ln y_1)\,|(-\frac{1}{2}\ln y_1)'|, & 0<y_1<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$\Rightarrow f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} 2e^{-2(-\frac{1}{2}\ln y_1)}\,|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y_1}| = 1, & 0<y_1<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

或者

② $Y_1 \sim U(0,1)$ ② 令 $Y_2 = h(X) = 1 - e^{-2X}$，$h'(X) \Rightarrow -(-2)e^{-2X} > 0$ 则 $h(X)$ 为单调递增，由定理2.4.1知：

$Y_2 = 1 - Y_1 \sim U(0,1)$ $f_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y_2)\right)\left|\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y_2)\right]'\right| = 2e^{\ln(1-y_2)} \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-y_2}\right| = 1, & 0<y_2<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$X>0$

$-\frac{1}{2}\ln(1-y_2) > 0 = \ln 1$

$\Rightarrow y_2 > 0$

$y_2 = 1 - e^{-2X} < 1$

$\therefore 0 < y_2 < 1$

综上①② $Y_1$ 和 $Y_2$ 均服从 $U(0,1)$ 分布

5 设r.v. $X \sim U(0,1)$ 试求以下Y的密度函数

(1) $Y = 3X+1$ (2) $Y = e^X$ $X \sim U(0,1)$ 则 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

5(1) 设 $y = g(X) = 3X+1$ ↑ $X \in (0,1)$ 其反函数为 $X = g^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y-1)$ $0 < \frac{1}{3}(y-1) < 1 \Rightarrow 1 < y < 4$

$f_Y(y) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{3}(y-1)\right)\left|\left[\frac{1}{3}(y-1)\right]'\right| = \frac{1}{3}, & 1<y<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2) 设 $y = g(X) = e^X$ ↑ 其反函数为 $X = g^{-1}(y) = \ln y$ $0 < \ln y < 1 \Rightarrow 1 < y < e$

$f_Y(y) = \begin{cases} f(\ln y)\left|(\ln y)'\right| = \frac{1}{y}, & 1<y<e \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

6.(1) 设r.v. X的密度函数为 $f(X) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & X \in [1,8] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

设F(X)为X的分布函数，试求r.v. $Y = F(X)$ 的分布函数

(2) 设r.v X的分布函数F(X)为严格单调连续函数，试求 $Z = -2\ln F(X)$ 的概率分布

6(1) $X\in[1,8]$ ①当 $x<1$ $F(x)=P(X\le x)=P(\phi)=0$ ②当 $x\ge 8$ 时 $F(x)=P(X\le x)=P(\Omega)=1$

③当 $x\in[1,8)$, $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{1}f(t)dt+\int_{1}^{x}f(t)dt=\int_{1}^{x}\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt=t^{\frac{1}{3}}\Big|_{1}^{x}=\sqrt[3]{x}-1$

即: $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \sqrt[3]{x}-1, & 1\le x<8\\ 1, & x\ge 8\end{cases}$ 由 $Y=F(X)=\sqrt[3]{X}-1$ 得 $0\le Y<1$

①当 $y<0$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$ ②当 $y\ge 1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=1$

③当 $y\in[0,1)$ $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)=P(\sqrt[3]{X}-1\le y)=P(X\le(1+y)^3)=F((1+y)^3)=\sqrt[3]{(1+y)^3}-1=y$

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$ 即 $Y\sim U(0,1)$

$X\sim U(a,b)$ 则 $F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$

6(2) $Y\sim U(0,1)$ $f(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 令 $Z=-2\ln^{y}=g(y)$

其反函数 $g'(z)=e^{-\frac{z}{2}}$, $f_Z(z)=\begin{cases}f(e^{-\frac{z}{2}})\left|(e^{-\frac{z}{2}})'\right|=\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

即 $Z\sim E(\frac{1}{2})$

$0<y<1$

$0<e^{-\frac{z}{2}}<1=e^{0}$ $z>0$

P64 习题3.1

1. 袋中有1个红球,2个黑球,3个白球共6个.现有放回地从袋中取两次,每次取一球,以X,Y,Z分别表示两次取到的红球,黑球,白球的个数.求:

| 红 | 黑 | 白 |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| X | Y | Z |
| 1 | 1 | 0 |

(1) $P(X=1|Z=0)$ (2) $(X,Y)$ 的概率分布

1.(1) $P(X=1|Z=0)=\frac{P(X=1,Z=0)}{P(Z=0)}=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Z=0)}$

第1次 红 黑
第2次 黑 红

$$= \frac{\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{9}$$

(2) $P(X=0,Y=0)=\underset{白}{\frac{3}{6}}\times\underset{白}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=0,Y=1)=\underset{黑}{\frac{2}{6}}\times\underset{白}{\frac{3}{6}}+\underset{白}{\frac{3}{6}}\times\underset{黑}{\frac{2}{6}}=\frac{1}{3}$

$P(X=0,Y=2)=\underset{黑}{\frac{2}{6}}\times\underset{黑}{\frac{2}{6}}=\frac{1}{9}$ $\quad P(X=1,Y=0)=\underset{红}{\frac{1}{6}}\times\underset{白}{\frac{3}{6}}+\underset{白}{\frac{3}{6}}\times\underset{红}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$

$P(X=1,Y=1)=\underset{红}{\frac{1}{6}}\times\underset{黑}{\frac{2}{6}}+\underset{黑}{\frac{2}{6}}\times\underset{红}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{9}$ $\quad P(X=2,Y=0)=\underset{红}{\frac{1}{6}}\times\underset{红}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{36}$

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ |
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 |

4 (1) 假设X,Y同分布,且 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, $P(XY=0)=1$

试求(X,Y)的联合分布及 $P(|X|=|Y|)$

由 $P(XY=0)=1$ 得 $P(XY\neq0)=0$ 即 $P\{X=-1,Y=-1\}\cup P\{X=-1,Y=1\}\cup P\{X=1,Y=-1\}\cup P\{X=1,Y=1\}=0$

| X \ Y | -1 | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | |

先算红色的,再算黄色的

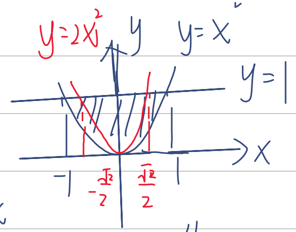
$P(|X|=|Y|) = P(X=Y)+P(X=-Y)$

$= P(X=1,Y=1)+P(X=-1,Y=-1)+P(X=-1,Y=1)+P(X=1,Y=-1)$

$=0+0+0+0=0$

5(1) 设(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(i) 确定c　(ii) 求$P((X,Y)\in D)$ 其中 $D=\{(x,y)\mid 2x^2\le y\le 1\}$




(1) 记 $D_1: x^2\le y\le 1$

由 $\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx\int_{x^2}^{1} cx^2y\,dy$

$=\int_{-1}^{1} \left(\frac12 cx^2y^2\right)\Big|_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac12cx^2-\frac12cx^6\right)dx$

$=\frac12c\left(\frac13x^3-\frac17x^7\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac12c\left[\frac13-\frac17-\left(-\frac13+\frac17\right)\right] = \frac{4}{21}c=1$

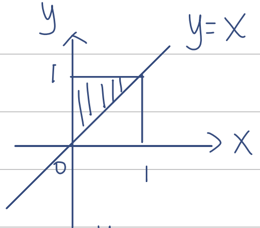
$\Rightarrow c=\frac{21}{4}$

(2) $P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)\,dxdy = \frac{21}{4}\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\int_{2x^2}^{1} x^2y\,dy = \frac{21}{8}\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt2}{2}} x^2(1-4x^4)\,dx$

$=\frac{\sqrt2}{4}$

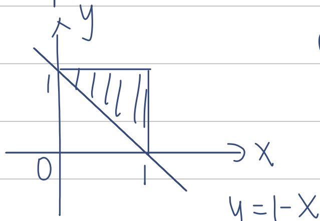
5(4) 设X,Y具有密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x,y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 试求 $P(X<Y)$, $P(X+Y\geq 1)$, $P(Y\geq X+\frac{1}{2})$

记 $D=[0,1]\times[0,1]$ 即 $f(x,y)=\begin{cases}4xy, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$ 令 $D_1 = x<y$




① $P(X<Y)=P(\{(X,Y)\in D_1\})=\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 4xy\,dy$

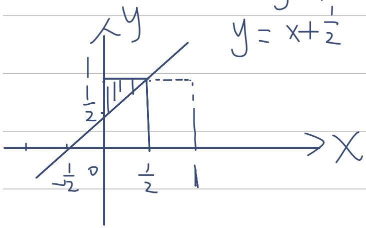
$=\int_0^1 2xy^2\Big|_x^1 dx=\int_0^1 2x(1-x^2)\,dx=\frac{1}{2}$




② $P(X+Y\geq 1)=\iint_{x+y\geq 1} f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 4xy\,dy$

$=\int_0^1 2xy^2\Big|_{1-x}^1 dx=\int_0^1 2x[1-(1-x)^2]\,dx$

$=\frac{5}{6}$




③ $P(Y\geq X+\frac{1}{2})=\iint_{y\geq x+\frac{1}{2}} f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_{x+\frac{1}{2}}^1 4xy\,dy$

$=\int_0^{\frac{1}{2}} 2xy^2\Big|_{x+\frac{1}{2}}^1 dx=\int_0^{\frac{1}{2}} 2x[1-(x+\frac{1}{2})^2]\,dx=\frac{7}{96}$

6.(1) 从(0,1)中随机取两个数，求"其积不小于$\frac{3}{16}$且和不大于1"的概率.

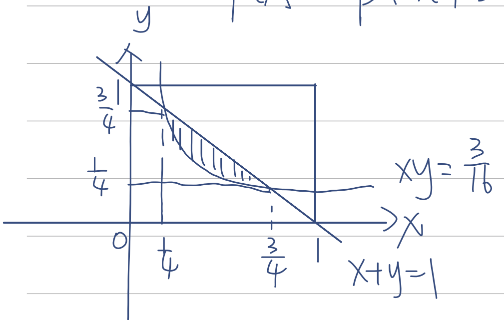
设两个数分别为$(X,Y)$，由题意 $(X,Y)\sim U(D)$，其中$D=(0,1)\times(0,1)$

令$(X,Y)\sim f(x,y)$，则 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S(D)}=1, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$

面积 $S(D)=1$

设事件A：其积不小于$\frac{3}{16}$且和不大于1

$$P(A)=P\left(XY\geq\frac{3}{16}, X+Y\leq 1\right)=\iint_{\substack{XY\geq\frac{3}{16}\\X+Y\leq 1}} f(x,y)\,dx\,dy=\frac{S(A)}{S(D)}$$




$$S(A)=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\underline{(1-x)-\frac{3}{16x}}\,dx$$

上面直线面积减去下面面积

$$=\left(x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{16}\ln x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\ln 3$$

$\therefore P(A)=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\ln 3$

# P71 习题3.2

1. 设 $(X,Y)$ 的密度函数为 $f(x,y)=\dfrac{1+\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 试求 $(X,Y)$ 关于 $X,Y$ 的边缘密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy}_{\text{关于}y\text{奇函数!}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy}_{=1}+0$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty$$

$h(y)=\dfrac{\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

$h(-y)=\dfrac{-\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ $\quad h(-y)=-h(y)$

即 $X\sim N(0,1)$

同理: $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+0$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\ -\infty<y<+\infty$$

即 $Y\sim N(0,1)$

2 (1) 设 $(X,Y)$ 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}x^2+\frac{xy}{3}, & (x,y)\in[0,1]\times[0,2]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 试求 $X,Y$ 的边缘密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 及 $P(Y<\frac{1}{2}\mid X<\frac{1}{2})$

(2) 设 $(\xi,\eta)\sim U(D)$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0<x^2<y<x<1\}$, 试求: $\xi$ 的边缘密度函数及 $P(\eta>\frac{1}{2})$

(3) 已知 $(X,Y)$ 的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}Axy; & (x,y)\in D\\ 0; & (x,y)\notin D\end{cases}$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 4,\ 0\le y\le\sqrt{x}\}$

试求X的边缘分布函数 $F_X(x)$ 及Y的边缘密度函数 $f_Y(y)$

(1) ① $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_0^2 + \int_2^{+\infty}\right) f(x,y)\,dy, & 0\le x\le 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0, & 其他\end{cases}$

$= \begin{cases} \int_0^2 \left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy = 2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

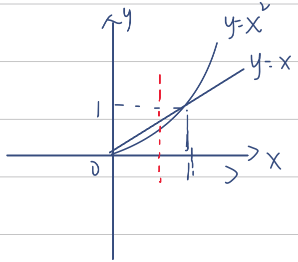
② $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_0^1 \left(x^2+\frac13 xy\right)dx = \frac13+\frac16 y, & 0\le y\le 2\\ \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0, & 其他\end{cases}$

③ $P(Y<\frac12 \mid X<\frac12) = \frac{P(X<\frac12, Y<\frac12)}{P(X<\frac12)} = \frac{\iint_{(-\infty,\frac12)\times(-\infty,\frac12)} f(x,y)\,dxdy}{\int_{-\infty}^{\frac12} f_X(x)\,dx} = \frac{\int_0^{\frac12}dx\int_0^{\frac12}\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy}{\int_0^{\frac12}\left(2x^2+\frac23 x\right)dx}$

$= \frac{\int_0^{\frac12}\left(\frac12 x^2+\frac16 x\cdot\frac14\right)dx}{\frac23\cdot\frac18+\frac13\cdot\frac14} = \frac{5}{32}$

(2) $(\xi,\eta)\sim U(D)$

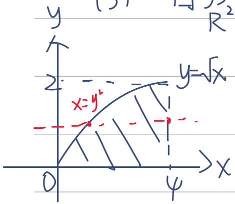
$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$ $\quad S_D=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}dy=\int_0^1(x-x^2)\,dx=\frac12x^2-\frac13x^3\Big|_0^1=\frac16$




$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6\,dy = 6x-6x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_y^{\sqrt y} 6\,dx = 6(\sqrt y - y), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$P(\eta>\frac12) = \int_{\frac12}^1 6(\sqrt y - y)\,dy = \frac74-\sqrt2$




(3) 由 $\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy = \iint_D Axy\,dxdy = \int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{x}} Axy\,dy = \int_0^4 \frac{A}{2}x\,x\,dx = \frac{A}{6}\cdot 64 = 1 \Rightarrow A=\frac{3}{32}$

易见: $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_{y^2}^4 \frac{3}{32}xy\,dx, & 0\le y\le 2\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dx=0, & 其他\end{cases} = \begin{cases}\frac{3y}{64}(16-y^4), & 0\le y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$

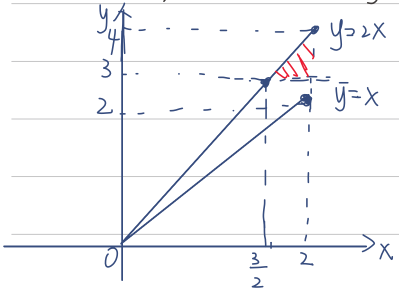
$\forall x<0,\ F_X(x)=P(X\le x)=0$ ; $\forall x\ge 4,\ F_X(x)=P(X\le x)=1$

$\forall 0\le x<4,\ F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,\ 0\le Y\le 2)$

$= \iint_{(-\infty,x]\times[0,2]} f(s,t)\,dsdt = \int_0^x ds\int_0^{\sqrt{s}} \frac{3}{32}st\,dt = \int_0^x \frac{3}{64}s\,s\,ds = \frac{1}{64}x^3$

即: $F_X(x) = \begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{64}x^3, & 0\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$

3.(2) 设$(X,Y)$的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{8}x, & 0<x<2,\ x<y<2x\\ 0, & 其他\end{cases}$ 试求 $P(Y>3)$




$P(Y>3)=P(0<X<2,\ Y>3)=\iint_{(0,2)\times(3,+\infty)} f(x,y)\,dxdy$

$=\int_{\frac{3}{2}}^{2} dx\int_3^{2x}\frac{3}{8}x\,dy$

$=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{3}{8}x(2x-3)\,dx = \left(\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{16}x^2\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{2}$

$=\frac{11}{64}$