学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 院/系＿＿＿＿

答 题 勿 超 装 订 线

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《 高等数学 A（一） 》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号＿＿＿＿＿

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．若 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$（ ）.

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

2．若函数 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ ）间断点.

（A）可去 （B）跳跃
（C）第二类无穷型 （D）第二类振荡型

3．若 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值，则下列命题中正确的是（ ）.

（A） $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内单调减少，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内单调增加

（B）在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f'(x)<0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f'(x)>0$

（C） $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$

（D）对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，恒有 $f(x)>f(x_0)$

4．微分方程 $y''+4y=\frac{1}{2}\cos 2x$ 的特解形式为（ ）.

（A） $ax\cos 2x$ （B） $a\cos 2x$
（C） $ax\cos 2x+bx\sin 2x$ （D） $a\cos 2x+b\sin 2x$

5．下列广义积分中，发散的是（ ）.

（A） $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ （B） $\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ （C） $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ （D） $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)=$＿＿＿＿＿.

7．曲线 $y=x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为＿＿＿＿＿＿.

8．曲线 $y=\sqrt{1+x^2}$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率为__________.

9．曲线段 $y=\ln\cos x$（$0\le x\le\frac{\pi}{6}$）的弧长为__________.

10．$\int_{-3}^{3}\left(x^3\cos x+\sqrt{9-x^2}\right)dx=$___________.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．求极限 $\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

12．设 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程.

13．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)dx$.

14．设函数 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, -1\le x<0 \end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$.

15．设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 满足条件 $y(1)=2$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 与 x 轴所围图形的面积.

16．求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最大值和最小值.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，
证明：方程 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的实根.

18．设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(1)=\frac{1}{2}$，$f(2)=2$.

证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．B　　2．B　　3．D　　4．C　　5．A

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．$\frac{1}{2}$　　7．$y=x+2$　　8．1　　9．$\frac{1}{2}\ln 3$　　10．$\frac{9}{2}\pi$

三．计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(2\sin x+\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(2\sin x+\cos x-1)\right]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x}\right)}=e^2$

…………………………（10 分）

12．解：显然，当 $x=0$ 时，$y=1$

原方程两边对 x 求导，得

$e^{2x+y}(2+y')-(y+xy')\sin(xy)=0$. 所以切线斜率 $k=y'(0)=-2$.

法线斜率为 $\frac{1}{2}$，法线方程为 $y-1=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y+2=0$.

………………（10 分）

13．解：$\int_0^1 xf''(2x)dx\overset{u=2x}{=\!=}\frac{1}{2}\int_0^2\frac{u}{2}f''(u)du=\frac{1}{4}\int_0^2 ud\left[f'(u)\right]$

$=\left[\frac{u}{4}f'(u)\right]_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 f'(u)du=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}\left[f(u)\right]_0^2$

$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(2)+\frac{1}{4}f(0)=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=2$

………………（10 分）

14．解：设 $x-2=t$,则 $\int_1^4 f(x-2)dx=\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt$

$=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$

………………（10 分）

15．解：

由$xdy+\left(x-2y\right)dx=0$，得$y'-\dfrac{2}{x}y=-1$

得通解$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int -e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=x+Cx^2$

由$y(1)=2$,得$C=1$，故$y=x+x^2$

则$S=-\int_{-1}^{0}x+x^2dx=\dfrac{1}{6}$.

………………（10 分）

16．解：令 $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0$，得 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有唯一驻点 $x=\sqrt{2}$

$0<x<\sqrt{2}$ 时， $f'(x)>0$； $x>\sqrt{2}$ 时， $f'(x)<0$

所以， $x=\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内的极大值点

$f\left(\sqrt{2}\right)=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\big|_0^2-\int_0^2 e^{-t}dt=1+e^{-2}$，

$f(0)=0$， $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=1$

经过比较，得 $f(x)$ 的最大值是 $f\left(\sqrt{2}\right)=1+e^{-2}$，最小值是 $f(0)=0$

………………（10 分）

四．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明：设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，而

$F(0)=\int_1^0\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_0^1\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$， $F(1)=\int_0^1 f(\mathrm{t})\,\mathrm{d}t>0$，

由零点定理知，根存在.

又因为 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}>0$，故根唯一.

………………（5 分）

18．证明：令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$

显然， $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $F(1)=F(2)=\dfrac{1}{2}$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $F'(\xi)=\dfrac{\xi^2 f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{\xi^4}=0$

即 $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

………………（5 分）