院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线 装订线

安徽大学2017-2018学年第二学期

《高等数学A（二）》期末考试试卷（A卷）

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题 (本题共五小题，每小题3分，共15分)

得分	

1. 直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{0}$的夹角为____________.

2. 曲面$x^2+yz+x+1=0$在点$(0,1,-1)$处的切平面方程为________________________.

3. 设向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x+y+z,xy,z)$. 则散度$\mathrm{div}\boldsymbol{F}(x,y,z)=$__________________.

4. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$. 则第一类曲面积分$\displaystyle\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=$________________.

5. 设f是以2为周期的函数，且在区间$(-1,1]$上的定义为$f(x)=\begin{cases}\pi, & -1<x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1.\end{cases}$

   则$f(x)$的Fourier级数在$x=3$处收敛于___________.

二、选择题 (本题共五小题，每小题3分，共15分)

得分	

6. 设平面Π的方程为$x+3z+2=0$. 则平面Π (　　)

   (A) 平行于y轴.　(B) 经过y轴.　(C) 平行于xOy平面.　(D) 平行于xOz平面.

7. 设有三元方程$e^{xz}+xy-yz=2$，由隐函数存在定理，存在点$(1,1,0)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程 (　　)

   (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$.

   (B) 可以确定两个具有连续偏导数的隐函数$y=y(x,z)$和$z=z(x,y)$.

   (C) 可以确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$.

   (D) 可以确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$.

8. 设$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x,y \le 1\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$, $D_3 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$, $I_i = \iint\limits_{D_i} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $i = 1,2,3$. 则 ( )

(A) $I_1 > I_2 > I_3$. (B) $I_2 > I_1 > I_3$.

(C) $I_1 > I_3 > I_2$. (D) $I_3 > I_1 > I_2$.

9. 设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$的上半部分，Σ_1是Σ在第一卦限中的部分. 则 ( )

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$. (B) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} y\mathrm{d}S$.

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S$. (D) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$.

10. 设有两个数列$\{a_n\}, \{b_n\}$. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则下列命题正确的是 ( )

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛. (B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散. (D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散.

三、计算题 (本题共六小题，每小题8分，共48分)

得分	

11. 求二元函数$f(x,y) = x^2(1+y^2) + y\ln y$的极值点与极值.

12. 设二元函数$z=x^2f(xy,\frac{1}{x})$，其中二元函数f具有二阶连续偏导数. 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

13. 设函数$f(x,y,z)=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$，点$A$的坐标为$(1,0,1)$.

(1) 求函数$f(x,y,z)$在点A的梯度.

(2) 求函数$f(x,y,z)$在点A处沿点A指向点$B=(3,-2,2)$方向的方向导数.

14. 计算三重积分$\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$是由曲面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$以及xOy平面所围成.

15. 计算第二类曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$为曲面$z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$的上侧.

16. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}x^{n-1}$ 的收敛域与和函数.

四、应用题(本题共10分)

得分	

17. 已知一条非均匀金属线L的参数方程为

$$x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t\ (0\le t\le 1).$$

它在点(x,y,z)处的线密度为$\rho(x,y,z)=\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$. 求金属线$L$的质量.

五、证明题(本题共两小题，每小题6分，共12分)

得分	

18. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+2018}$条件收敛.

19. 设在上半平面$D=\{(x,y)\mid y>0\}$内，二元函数$f(x,y)$具有连续偏导数，且对任意$t>0$，都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对D内任意分段光滑的有向曲线C，曲线积分$\displaystyle\int_C yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y$只与$C$的起点及终点有关，而与积分路径无关.

安徽大学2017-2018学年第二学期
《高等数学A(二)》期末考试A卷参考答案与评分标准

一、填空题(本题共五小题，每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\quad \dfrac{\pi}{3} \quad}$.

2. $\underline{\quad x-y+z+2=0 \quad}$.

3. $\underline{\quad x+2 \quad}$.

4. $\underline{\quad \dfrac{4}{3}\pi R^4 \quad}$.

5. $\underline{\quad \dfrac{\pi+1}{2} \quad}$.

二、选择题 (本题共五小题，每小题3分, 共15分)

6. A. 7. D. 8. B. 9. C. 10. B.

三、计算题 (本题共六小题，每小题8分, 共48分)

11. 解. $f_x = 2x(1+y^2)$, $f_y = 2x^2y + \ln y + 1$.

求解$f_x = f_y = 0$得，$(x,y) = (0, e^{-1})$. .... (3分)

$A = f_{xx}(0,e^{-1}) = 2(1+e^{-2}) > 0$, $B = f_{xy}(0,e^{-1}) = 0$, $C = f_{yy}(0,e^{-1}) = e > 0$.

故$A > 0, AC - B^2 > 0$.

由此可知，$(0,e^{-1})$为$f(x,y)$的极小值点，且极小值$f(0,e^{-1}) = -e^{-1}$. ..... (8分)

12. 解. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xf + x^2(yf_1' - \dfrac{1}{x^2}f_2') = 2xf + x^2yf_1' - f_2'$. .... (2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f + 2x(yf_1' - \frac{1}{x^2}f_2') + 2xyf_1' + x^2y(yf_{11}'' - \frac{1}{x^2}f_{12}'') - (yf_{21}'' - \frac{1}{x^2}f_{22}'')$$

$$= 2f + 4xyf_1' - \frac{2}{x}f_2' + x^2y^2f_{11}'' - 2yf_{12}'' + \frac{1}{x^2}f_{22}'' \text{ .}$$ .... (6分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x^2f_1' + x^2f_1' + x^2y(xf_{11}'') - xf_{21}'' = 3x^2f_1' + x^3yf_{11}'' - xf_{21}''$$ .... (8分)

13. 解. (1) $f_x=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}$,

$f_y=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $f_z=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

故$f(x,y,z)$在点A的梯度$\mathbf{grad}f(1,0,1)=(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2})$........................(4分)

(2) 由题设可知，$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$. 故$\overrightarrow{AB}$方向上的单位向量为$\vec{v}=(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3})$.

故所求方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0,1)=\mathbf{grad}f(1,0,1)\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}$. ....(8分)

14. 解. 作球面坐标变换，即令$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$. 则$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$，且$V$可表示为: $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 1\le r\le 2$. ....(3分)

$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r\cos\varphi r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi)(\int_1^2 r^3\mathrm{d}r)=\frac{15}{4}\pi$. (8分)

15. 解. 设Σ_1为xOy平面上圆盘: $x^2+y^2\le 1, z=0$，方向取下侧.

记V 为由Σ,Σ_1围成的空间闭区域. 由Gauss公式可知

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=6\iiint\limits_V(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$=6\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-z}}(r^2+z)r\mathrm{d}r=3\pi\int_0^1(1-z^2)\mathrm{d}z=2\pi$. .... (6分)

又因为$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi$.

于是$I=2\pi-3\pi=-\pi$. ....(8分)

16. 解. 由$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n}=\frac{1}{2}$可知，原幂级数的收敛半径为2.

又因为$x=\pm 2$时，原级数发散，所以该幂级数的收敛域为$(-2,2)$..........(2分)

考虑幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$. 两边同时对$x$求导可得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.

由此可得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$. 两边再同时对$x$求导得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}x^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac{2(2+x)}{(2-x)^3}$, $x\in(-2,2)$. ....(8 分)

四、应用题(本题共10分)

17. 解：L的质量为$M=\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s$. .... (3 分)

由$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t=\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t$可得

$M=\int_0^1 \frac{1}{e^{2t}}\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t=\sqrt{3}\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t=\sqrt{3}(1-e^{-1})$. .... (10 分)

五、证明题（每小题6分，共12分）

18. 证明：设$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+2018}$, $f'(x)=\frac{2018-x}{2\sqrt{x}(x+2018)^2}$.

当$x>2018$时，$f'(x)<0$，从而当$n>2018$时，$\frac{\sqrt{n}}{n+2018}$单调递减.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2018}=0$，故由Leibniz 判别法可知，原级数收敛. .... (4 分)

由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n}}{n+2018}=1$ 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2018}$发散. 故原级数条件收敛. . (6 分)

19. 证明：在等式$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$两边同时对t求导得

$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$.

令$t=1$可知，对任意$(x,y)\in D$, $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=-2f(x,y)$. ...... (3 分)

设$P(x,y)=yf(x,y), Q(x,y)=-xf(x,y)$. 则对任意$(x,y)\in D$,

$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=(f+yf_y)+(f+xf_x)=xf_x+yf_y+2f=0$.

显然$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$在$D$内任一点有连续导数，故原曲线积分与积分路径无关. (6 分)