安徽大学2017-2018学年第二学期
《高等数学A（二）》期末考试试卷（B卷）

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答题勿超装订线　　装　订　线

一、填空题 (本题共五小题，每小题3分，共15分)

得分	

1. 空间直角坐标系$Oxyz$中，点$(2,1,1)$到平面$x+y-z+1=0$的距离为____________.

2. 曲面$x^2+yz+x+1=0$在点$(0,1,-1)$处的法线方程为______________________.

3. 函数$f(x,y,z)=xyz$在点$P_0(1,1,1)$处沿方向$\vec{v}=(2,2,1)$的方向导数为____________.

4. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=4$. 则第一类曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=$ ________________.

5. 设f是以2为周期的函数，且在区间$(-1,1]$上的定义为$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1.\end{cases}$

   则$f(x)$的Fourier级数在$x=1$处收敛于___________.

二、选择题 (本题共五小题，每小题3分，共15分)

得分	

6. 直线$L_1:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$ 与直线$L_2:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$的位置关系是　(　　)

   (A)　重合.　(B)　平行.　(C)　相交但不重合.　(D)　异面.

7. 设函数$f(x,y)$在开区域D内有二阶连续偏导数，且$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. 记$A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$. 则下列为$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取极大值的充分条件的是　(　　)

   (A)　$A<0, AC-B^2>0$.　　(B)　$A>0, AC-B^2>0$.

   (C)　$A<0, AC-B^2<0$.　　(D)　$A>0, AC-B^2<0$.

8. 设函数$f(x,y)$连续，则二次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$可以写成 (　　)

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

9. 设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$的上半部分，则下列第一类曲面积分值为零的是(　　)

(A) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\sin z\mathrm{d}S$.　(B) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\sin z\mathrm{d}S$.　(C) $\iint\limits_{\Sigma}x\sin z\mathrm{d}S$.　(D) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\cos z\mathrm{d}S$.

10. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数. 则下列命题正确的是 (　　)

(A) 若$\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(B) 若存在非零常数λ, 使得$\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=\lambda$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

(C) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to+\infty}n^2a_n=0$.

(D) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则存在非零常数$\lambda$, 使得$\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=\lambda$.

三、计算题 (本题共六小题，每小题8分，共48分)

得分	

11. 求由方程组$\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$和$z=z(x)$的导数.

12. 设二元函数$z = f(xy, \frac{x}{y})$，其中二元函数f具有二阶连续偏导数. 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

13. 设数量场$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

(1) 求f的梯度场$\mathbf{grad} f$. (2) 求$\mathbf{grad} f$的散度$\mathrm{div}\ \mathbf{grad} f$.

14. 计算三重积分$I = \iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$ 是由曲面$z = \sqrt{x^2+y^2}$和曲面$z = \sqrt{2-x^2-y^2}$所围成.

15. 计算第二类曲面积分$I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中$\Sigma$为上半球面$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

16. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$的收敛域与和函数.

四、应用题(本题共10分)

得分	

17. 已知一条非均匀金属线L的参数方程为

$$x=\cos t, y=\sin t, z=2t\ (0\le t\le \pi).$$

它在点(x,y,z)处的线密度为$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. 求金属线L的质量.

五、证明题(本题共两小题，每小题6分，共12分)

得分	

18. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$条件收敛.

19. 设D是平面上一个有界闭区域，其边界线∂D分段光滑，证明区域D 的面积

$$A(D)=\oint_{\partial D}-\frac{1}{2}y\mathrm{d}x+\frac{1}{2}x\mathrm{d}y.$$

安徽大学2017-2018学年第二学期

《高等数学A(二)》期末考试B卷参考答案与评分标准

一、填空题(本题共五小题，每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\quad\sqrt{3}\quad}$.

2. $\underline{\quad\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}\quad}$.

3. $\underline{\quad\dfrac{5}{3}\quad}$.

4. $\underline{\quad\dfrac{64}{3}\pi\quad}$.

5. $\underline{\quad\dfrac{3}{2}\quad}$.

二、选择题 (本题共五小题，每小题3分, 共15分)

6. A.　　7. A.　　8. D.　　9. C.　　10. B.

三、计算题 (本题共六小题，每小题8分, 共48分)

11. 解. 方程组两边同时对x求导得

$$\begin{cases}1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5\text{分})$$

求解可得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{y-z}$. ……………………………(8分)

12. 解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$. ……………………………(2 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(yf_{11}''+\dfrac{1}{y}f_{12}'')+\dfrac{1}{y}(yf_{21}''+\dfrac{1}{y}f_{22}'')=y^2f_{11}''+2f_{12}''+\dfrac{1}{y^2}f_{22}''$. ………(6分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-\dfrac{x}{y^2}f_{12}')-\dfrac{1}{y^2}f_2'+\dfrac{1}{y}(xf_{21}''-\dfrac{x}{y^2}f_{22}'')$

$=f_1'-\dfrac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''$ ……………………………(8分)

13. 解. (1) $f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$, $f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}$, $f_z = \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$.

故$f(x,y,z)$的梯度场

$\mathbf{grad} f(x,y,z) = (\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2})$……………(4分)

(2) $\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\ f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$. ……………………(8分)

14. 解法1. 曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$的交线为$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1. \end{cases}$ …. (2分)

设D_{xy}: $0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1$.

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z\mathrm{d}z$$

$= 2\pi\displaystyle\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$. ……………………………………(8分)

解法2. 曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$的交线为$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1. \end{cases}$ …….. (2分)

记D_{1z}: $x^2+y^2\le z^2, 0\le z\le 1$; D_{2z}: $x^2+y^2\le 2-z^2, 1\le z\le\sqrt{2}$. 于是

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_{1z}} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}z \iint\limits_{D_{2z}} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$= \displaystyle\int_0^1 \pi z^3\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{2}} \pi z(2-z^2)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}$ ……………………………(8分)

15. 解. 首先，我们有$I = \displaystyle\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. …………………(2分)

设Σ_1为xOy平面上圆盘: $x^2+y^2\le 1, z=0$，方向取下侧.

记V 为由Σ, Σ_1围成的空间闭区域. 由Gauss公式可知

$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi$. …………………(6分)

又因为$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi$.

于是$I = \dfrac{4}{3}\pi + \pi = \dfrac{7}{3}\pi$. ……………………………………(8分)

16. 解. 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$可知，原幂级数的收敛半径为2.

又因为$x=2$时，原级数发散，当$x=-2$时，原级数收敛,

所以该幂级数的收敛域为$[-2,2)$..(2分)

设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. 两边同时对$x$求导可得$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$.

由此可得$f(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+f(0)=-\ln(1-x)$.

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}=-\ln(1-\dfrac{x}{2})$, $x\in[-2,2)$. ....(8 分)

四、应用题(本题共10分)

17. 解：L的质量为$M=\displaystyle\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$. ....(3 分)

由$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t=\sqrt{5}\mathrm{d}t$可得

$M=\displaystyle\int_0^{\pi}(1+4t^2)\sqrt{5}\mathrm{d}t=\sqrt{5}(\pi+\dfrac{4}{3}\pi^3)$. ....(10 分)

五、证明题（每小题6分，共12分）

18. 证明：当$n>1$时，$\dfrac{1}{n-\ln n}$单调递减.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}=0$，故由Leibniz 判别法可知，原级数收敛. ....(4 分)

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-\ln n}=1$ 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$发散. 故原级数条件收敛. ....(6 分)

19. 证明：由Green公式与二重积分的几何意义可知

$\displaystyle\oint_{\partial D}-\dfrac{1}{2}y\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A(D)$. ....(6 分)