2019 安徽大学理工科转专业《高等数学》考试试卷

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(\frac{1}{n})-1\right]=$________

2. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=$________

3. 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程是________

4. 设 $\Sigma=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\}$, 则 $\displaystyle\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}S=$________

5. 设 $x^2=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$, 则 $a_2=$________

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$ 在 $[0,+\infty)$ 上间断点有（　　）个

$A.$　0　　　$B.$　1　　　$C.$　2　　　$D.$　3

7. 考虑一元函数 $f(x)$ 的下列四条性质

（1）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续　　（2）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

（3）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数　　（4）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导

则下列关系正确的是（　　）

$A.$　$(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$　　　$B.$　$(4)\Rightarrow(1)\Rightarrow(2)$

$C.$　$(1)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)$　　　$C.$　$(4)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$

8. 微分方程 $y''-6y'+8y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解应具有形式（其中 a,b 为常数）（　　）

$A.$　$a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{2x}$　　$B.$　$ax\mathrm{e}^{2x}+b\mathrm{e}^{2x}$　　$C.$　$a\mathrm{e}^x+bx\mathrm{e}^{2x}$　　$D.$　$ax\mathrm{e}^x+bx\mathrm{e}^{2x}$

9. 函数 $f(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$（　　）

$A.$有无穷多个极大值，也有无穷多个极小值　　$B.$仅有有限个极值

$C.$有无穷多个极大值，但无极小值　　$D.$有无穷多个极小值，但无极大值

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2}, x\neq 0 \\ \frac{1}{2}, x=0\end{cases}$, 则 $f^{(6)}(0)=$ (　　)

$A.\quad -\dfrac{1}{56}$　　　　$B.\quad \dfrac{1}{56}$　　　　$C.\quad 1$　　　　$D.\quad -1$

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 设 $F(x,y)=\dfrac{f(y-x)}{2x}, F(1,y)=\dfrac{1}{2}y^2-y+5, x_n>0, x_{n+1}=F(x_n,2x_n), n=0,1,2,3...$, 试证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出此值.

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

13. 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.
(1) 求 $y(x)$;
(2) 求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

14. 计算 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-2y\right|\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由 $x^2+y^2\leq 4$ 所确定的区域.

15. 计算 $\int_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 L 为摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)-a\pi \\ y=a(1-cost)\end{cases}$ $(a>0)$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一摆.

16. 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-z^2}$ 的上侧.

17. 计算幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}x^n$ 的和函数, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ 的和.

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

18. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}t$.
(1) 证明：$f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;
(2) 求 $f(x)$ 的最大值与最小值;
(3) 求曲线 $y=f(x), y=0, x=0, x=\pi$ 所围成平面图形的面积.

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 试证: 对任意给定的正数 a, b, 在 $(0,1)$ 内存在不同的 $\xi\eta$ 使

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$