院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学 2021—2022 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$与直线$L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$的夹角为(　　　)

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(　　　).

(A) 连续，偏导数存在　　(B) 连续，偏导数不存在

(C) 不连续，偏导数存在　　(D) 不连续，偏导数不存在

3. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$(　　　).

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

4. 设 $L:y=x,x\in[0,1]$，第一类曲线积分 $I_1=\int_L k(y-x)\mathrm{d}s$，$I_2=\int_L (y-x^2)\mathrm{d}s$，其中 k 为常数，则 I_1,I_2 的大小关系为(　　　).

(A) $I_1<I_2$　　(B) $I_1>I_2$　　(C) $I_1=I_2$　　(D) 无法比较

5. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处(　　　).

(A) 发散　　(B) 绝对收敛　　(C) 条件收敛　　(D) 敛散性不定

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 函数 $z=x^2y+2xy$ 在点 $(1,1)$ 处的最大方向导数为____________.

7. 函数 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$ 的全微分 $dz=$____________.

8. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 2\}$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xydv=$____________.

9．设曲面 Σ 的方程为 $x^2+y^2+z^2=1$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 3x^2\mathrm{d}S=$____________.

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi\le x\le 0,\\ 1+x^2,0<x\le\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在

$x=\pi$ 处收敛于____________.

三、解答题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

11. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切平面与法线方程.

12. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y-z=e^z$ 所确定隐函数，求 $z''_{xy}(\mathbf{1},\mathbf{0})$.

13. 求函数 $f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5$ 的极值.

14. 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}|y-x^2|\mathrm{d}\sigma$，其中区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

15．计算曲线积分 $I=\int_L(2+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-1)dy$，其中 L 是沿着圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 顺时针方向的上半圆周.

16. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2ydydz+y^2\sin xdzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分，并取外侧.

17. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及其和函数.

四、证明题（本题 7 分）

18. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

2021-2022 第二学期高等数学 A(二)试卷 A 参考答案

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. C. 2. C. 3. D. 4. A. 5. B.

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

6. 5. **7.** $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. **8.** $\dfrac{1}{2}$. **9.** 4π **10.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

三、计算题（每题 9 分，共 63 分）

11. 解： 令 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z,$ 3 分

于是该曲面在点 $(1,1,2)$ 处切平面的法向量为

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)\big|_{(1,1,2)} = (2x, 2y, -1)\big|_{(1,1,2)} = (2,2,-1),$$ 7 分

故所求切平面方程为

$$2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0,$$

即

$$2x + 2y - z = 2.$$

故所求法线方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$ 9 分

12. 解： 在方程两边关于 x 求偏导数得 $1 - \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^z \dfrac{\partial z}{\partial x}$，

当 $(x,y) = (1,0)$ 时，$z = 0$，代入上式，得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \dfrac{1}{2}$. 类似可得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \dfrac{1}{2}$. **4 分**

两边关于 y 求偏导数得 $-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^z \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + e^z \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$， **8 分**

代入 $x = 1, y = 0, z = 0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \dfrac{1}{2}$ 及 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \dfrac{1}{2}$，解得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)} = -\dfrac{1}{8}$. **9 分**

或者：计算得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{1+e^z}$， **3 分**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{-e^z}{(1+e^z)^3},$$ **6 分**

同理可得 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)}=-\frac{1}{8}$. **9 分**

13. 解： 令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=-2x+6=0, \\ f_y'(x,y)=3y^2-12=0, \end{cases}$ 得驻点 $(3,2),\ (3,-2)$. **4 分**

又 $f_{xx}''(x,y)=-2,\quad f_{xy}''(x,y)=0,\quad f_{yy}''(x,y)=6y$. **6 分**

在驻点 $(3,2)$ 处，$A=f_{xx}''(3,2)=-2, B=f_{xy}''(3,2)=0, C=f_{yy}''(3,2)=12$，

$AC-B^2=-24<0$，故 $(3,2)$ 不是极值点；

在驻点 $(3,-2)$ 处，$A=f_{xx}''(3,-2)=-2, B=f_{xy}''(3,-2)=0, C=f_{yy}''(3,-2)=-12$，

$AC-B^2=24>0$，且 $A<0$，故 $(3,-2)$ 是极大值点，且极大值为 $f(3,-2)=30$. **9 分**

14. 解：$D=D_1\cup D_2$，其中 $D_1: 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1$，$D_2: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2$.

$$I=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 (y-x^2)dy+\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy$$ 7 分

$$=\int_0^1(\frac{1}{2}-x^2+\frac{1}{2}x^4)dx+\int_0^1\frac{1}{2}x^4dx=\frac{4}{15}+\frac{1}{10}=\frac{11}{30}.$$ 9 分

15. 解： 令 $P=2+xe^{2y}, Q=x^2e^{2y}-1$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^{2y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$，故积分与路径无关， 6 分

取路径 $OA: y=0, x: 0\to 4$

$$I=\int_{OA}(2+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-1)dy=\int_0^4(2+x)dx=16.$$ 9 分

16. 解法一：补充曲面 $\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\le 1)$，取上侧；$\Sigma_2: z=0(x^2+y^2\le 1)$，取下侧，则 Σ,Σ_1,Σ_2 构成封闭曲面，取外侧，它们所围区域记为 Ω.

由高斯公式可得，$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint\limits_{\Omega}(2xy+2y\sin x+2z)\mathrm{d}V$， 5 分

根据奇偶对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega}2xy\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}2y\sin x\mathrm{d}V=0$，所以

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^1 z\mathrm{d}z=\pi.$$

7 分

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} = \iint\limits_{\Sigma_1} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi$，$\iint\limits_{\Sigma_2} = \iint\limits_{\Sigma_2} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 0^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$

8 分

所以 $I = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} - \iint\limits_{\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_2} = \pi - \pi - 0 = 0.$

9 分

解法二：由于 $\iint\limits_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，所以 $I = \iint\limits_{\Sigma} x^2 y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \sin x\mathrm{d}z\mathrm{d}x$. 1 分

补充曲面 $\Sigma_1 : z = 1(x^2+y^2\le 1)$，取上侧；$\Sigma_2 : z = 0(x^2+y^2\le 1)$，取下侧，则 Σ,Σ_1,Σ_2 构成封闭曲面，所围区域为 Ω，取外侧. 2 分

由高斯公式可得，$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} = \iiint\limits_{\Omega} (2xy + 2y\sin x)\mathrm{d}V$， 5 分

根据奇偶对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega} 2xy\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} 2y\sin x\mathrm{d}V = 0$，所以 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} = 0$. 8 分

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x^2 y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \sin x\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Sigma_2} x^2 y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \sin x\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$，所以 $I = 0$. 9 分

17. 解. 收敛半径 $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n+3} = 1$，故收敛区间为 $(-1,1)$ 。

显然 $x = \pm 1$ 的时候，原级数发散，从而收敛域为 $(-1,1)$

3 分

设 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n, x \in (-1,1)$

又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ 逐项求导得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$， 7 分

于是 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = \dfrac{2x}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}, x \in (-1,1).$

9 分

四、证明题（本题 7 分）

18. **证明**：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = s$.

由于其前 n 项部分和 $s_n = b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \cdots + b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - b_1$，

所以$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_1) = s$，得$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = s + b_1$，从而数列$\{b_n\}$有界. 4 分

不妨令$|b_n| \le M$，则$0 \le |a_n b_n| \le M a_n$.因为$\sum_{n=1}^{\infty} M a_n$收敛，所以由正项级数的比较判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛. 7 分