# 2021 级转数院转专业试卷

某企图转数院的人

2023 年 1 月 2 日

注：由于记忆偏差，故顺序和部分数字可能产生错误

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[(3+2\tan t)^t-3^t\right]\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{3x^3}-1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k^2}$

3. 已知 $f$ 是周期为 5 的连续函数，且在 $x=1$ 处可导，以下式子成立

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)\quad(x\to 0)$$

求 $f$ 在点 $x=6$ 处的切线方程

4. 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ 求 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

5. 设 $l$ 是 $f(x)=\ln x$ 过原点的切线, 设 $l,\ln x,x$ 轴组成的图像为 D
(1) 求 D 的面积　　(2) 求 D 绕 $x=\mathrm{e}$ 旋转得到的几何体的体积

6. 设 $f$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(1)=3\displaystyle\int_0^{1/3}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$ 求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

7. 已知 $y''+2y'+ky=0\quad(0<k<1)$ 求证:
(1)$\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛　(2)$y(0)=1,y'(0)=1$, 求 (1) 中式子的具体值

8. 设 $f(u,v)$ 二阶偏导连续，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$ 且 $g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

9. 求 $\iint_D(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$ 其中 $D$ 是由 $x^2+y^2=2$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 围成的图形

10. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 化成 $(x-1)$ 的幂级数，并求出 $f^{(2020)}(1)$

11. 求在平面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 沿着 $l=\{1,-1,0\}$ 的方向导数取最大值时的点

12. 一道一点都想不起来的题，应该不会很难

13. 设 $L$ 是柱面 $|x|+|y|=1$ 与平面 $x+y+z=2$ 的交线，从 $z$ 轴看方向沿逆时针，求

$$\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

(如果我没记错应该是上面这个积分)

解析 (显得蛋疼顺便写的, 不保真啊):

1. **解**:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[(3+2\tan t)^t-3^t]}{\mathrm{e}^{3x^3}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[(3+2\tan t)^t-3^t]}{3x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(3+2\tan x)^x-3^x}{9x^2} && \text{洛必达}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3^x\exp\left[x\ln(3+2\tan x)-x\ln 3\right]-3^x}{9x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}3^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\exp\left[x\ln(1+\frac{2}{3}\tan x)\right]-1}{9x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+\frac{2}{3}\tan x)}{9x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}\tan x}{9x}\\
&= \frac{2}{27}
\end{aligned}
$$

2. **解**:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2} &= \lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}}\frac{1}{n}\\
&= \int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x && \text{定积分定义}\\
&= \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x^2}{1+x^2}\\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

3. **解**:

考虑到原函数的周期为 5, 于是我们先求其在 $x=1$ 处的信息, 结合 $f$ 的连续性, 我们有

$$-2f(1)=\lim_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim_{x\to 0}[8x+o(x)]=0$$

得到 $f(1)=f(6)=0$. 在题目所给的式子的两边同时除以 $\sin x$ 并取极限得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{\sin x}=8 \tag{1}$$

由于 $f$ 在 $x=1$ 处可导, 于是我们知道极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)}{\sin x}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sin x)}{-\sin x}$ 都存在且等于 $f'(1)$, 于是 (1) 式化为 $f'(1)+3f'(1)=8$ 得到 $f'(1)=2$, 进而我们可以求出 $f$ 在 $x=6$ 处的切线方程 $y=2x-12$

4. **解**:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1\int_t^{\sqrt{t}}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1\int_{u^2}^{u}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}t\mathrm{d}u && \text{交换积分次序} \\
&= \int_0^1\frac{\sin u}{u}(u-u^2)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1\sin u\mathrm{d}u-\int_0^1 u\sin u\mathrm{d}u \\
&= 1-\sin 1
\end{aligned}
$$

5. **解**: