

安徽大学2022-2023学年第1学期

《复变函数与数理方程》考试试卷 (A卷)

一、单项选择题 (2*15=30分)

1. 复数 $\frac{1-j}{1+j}$ 的模和主角分别是()

A. 1和 $\frac{\pi}{2}$ B. 1和 $-\frac{\pi}{2}$ C. $\sqrt{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ D. $\sqrt{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2}$

2. 关于复数的运算, 下面描述不正确的是()

A. $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ B. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
C. $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ D. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

3. 下面对一些初等复变函数的描述不正确的是()

A. $e^{jz} = \cos z + j \sin z$ B. $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$
C. $|\cos z| \leq 1$ D. 指数函数是以纯虚数 $j2\pi$ 为周期的函数

4. $e^{1+j} =$ ()

A. e B. je
C. $e(\cos 1 + j \sin 1)$ D. $e^2(\cos 1 + j \sin 1)$

5. $\text{Ln}(-1) =$ ()

A. 0 B. $j\pi$
C. $j2k\pi$, k 为任意整数 D. $j(2k+1)\pi$, k 为任意整数

6. $\cos(j) =$ ()

A. $\frac{1}{2}(e + e^{-1})$ B. $\frac{1}{2}(e - e^{-1})$ C. $\frac{j}{2}(e + e^{-1})$ D. $\frac{j}{2}(e - e^{-1})$

7. 下面积分结果为零的是()

A. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz$ B. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$
C. $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$ D. $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz$

8. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} (z-1)^n$ 是收敛圆是()

$$\begin{array}{ll} A. |z| = 2 & B. |z| = \frac{1}{2} \\ C. |z - 1| = 2 & D. |z - 1| = \frac{1}{2} \end{array}$$

9. $z = 0$ 是函数 $\frac{1}{e^z - 1}$ 的()

A. 可去奇点 B. 一阶极点 C. 二阶极点 D. 本性奇点

10. 留数 $\text{Res}[\frac{e^z}{z+1}, -1] = ()$

A. 1 B. e C. e^{-1} D. 2π

11. $\delta(x - x_0)$ 的广义傅里叶变换是()

A. 1 B. 2π C. $e^{j\omega}$ D. $\delta(\omega)$

12. 正弦函数 $\sin(kx)$ (k 为实数) 的拉普拉斯变换是()

A. $\frac{k}{s}$ B. $\frac{k}{s^2}$ C. $\frac{s}{s^2 + k^2}$ D. $\frac{k}{s^2 + k^2}$

13. 关于 $u(x, y)$ 的二阶偏微分方程 $u_{xx} + u_{yy} = -xy$, 下面描述正确的是()

A. 线性、齐次 B. 线性、非齐次 C. 非线性、齐次 D. 非线性、非齐次

14. 勒让德方程 $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ 的一个解是下面哪一个勒让德函数()

A. $P_1(x)$ B. $P_2(x)$ C. $P_3(x)$ D. $P_6(x)$

15. 贝塞尔方程 $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$ 的一个解是下面哪一个贝塞尔函数()

A. $J_1(x)$ B. $J_2(x)$ C. $J_4(x)$ D. $J_{16}(x)$

二、证明题 (10分)

16. 证明函数 $f(z) = z \cdot \text{Re}(z)$ 在整个复平面上处处不解析。

三、辨析题 (10分)

17. 判断 $x = 0$ 是方程 $(1 + x)y'' + y = 0$ 的常点还是正则奇点, 并写出以 $x = 0$ 为中心的

四、计算题 (10+10+10+12+8=50分)

18. C 为逆时针方向沿圆周 $|z| = 4$ 的闭合曲线, 计算积分

$$\oint_{|z|=4} \frac{z}{z-3} dz.$$

19. 在区域 $0 < |z| < 1$ 内把函数 $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$ 以 $z_0 = 0$ 为中心展开为罗朗级数。

20. 求矩形函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \tau \\ 0, & |x| > \tau \end{cases}$ 的傅里叶级数, 其中 τ 为大于零的实数。

21. 用分离变量法求解如下定解问题(常数 $l > 0, k > 0$)。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & (t > 0) \\ u(x, 0) = \begin{cases} kx, & (0 \leq x \leq \frac{l}{2}) \\ k(l-x), & (\frac{l}{2} < x \leq l) \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

22. 求解如下初值问题(A 和 B 为常数)。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (-\infty < x < \infty, t > 0, a > 0) \\ u(x, 0) = a \sin x, & u_t(x, 0) = B \cos x \end{cases}$$