安徽大学 2010—2011 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1．设向量 $\boldsymbol{a}=(2,0,1)$， $\boldsymbol{b}=(2,3,4)$，则与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位向量为______________.

2．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=$________________.

3．交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=$____________________.

4. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则

$f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=4\pi$ 处收敛于___________________.

5．设 $f(x,y)=xy^2$ 在点 $(2,1)$ 处沿方向 $(4,-3)$ 的方向导数等于 __________________.

得 分	

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1． 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处 （ ）

A． 不连续

B． 可微

C． 不可微，且偏导数不存在

D． 不可微，但偏导数存在.

学号__________ 姓名__________ 专业__________ 院/系__________

答 题 勿 超 装 订 线

2．设 $f(t)$ 为连续奇函数，S^{+} 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧．则下列第二类曲面积分值**不一定**等于零的是　　　　（　　）

A．$\iint\limits_{S^{+}} f^2(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　　　B．$\iint\limits_{S^{+}} xf^2(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

C．$\iint\limits_{S^{+}} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　　　D．$\iint\limits_{S^{+}} (x+2y+3z)f(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

3．直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 与直线 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ 的位置关系是　　　　（　　）

A．平行　　B．相交与一点　　C．异面　　D．　重合．

4．设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\rho$，则下列说法正确的是　　　　（　　）

A．当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛　　　　B．　当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

C．当 $\rho\le 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛　　　　D．　当 $\rho\ge 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛．

5．设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿单位向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向增加最快，则 $\boldsymbol{v}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{3}(2,2,-1)$　　　　B．$\dfrac{1}{3}(-2,-2,1)$

C．$\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$　　　　D．$\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$．

得　分	

三、计算题（第 1、2、3 小题每小题 10 分，第 4、5 小题每小题 12 分，共 54 分）

1．设空间曲面 Σ 的方程为 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求其在点 $(1,1,\dfrac{\pi}{4})$ 处的切平面与法线方程．

2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的空间有界闭区域.

3. 计算第一类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \mathrm{d}S$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 介于平面 $z = 0$ 与 $z = 1$ 之间的部分.

4．（1）将函数 $f(x)=\ln x$ 展开为 $(x-2)$ 的幂级数，并确定所求幂级数的收敛域.

（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$ 的和.

5．（1）设 $\begin{cases} x=uv \\ y=\sin u+\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.

（2）设 $\sin z-xyz=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

得　分	

1. 求函数 $f(x,y,z)=x+2y+3z$ 在柱面 $x^2+y^2=2$ 和平面 $y+z=1$ 交线上的最大值与最小值.

2.　已知一条非均匀金属线 L 的方程为 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t, t\in[0,1]$. 它在点 (x,y,z) 处的线密度 $\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$，求该金属丝的质量.

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得　分	

1．证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+2011}$条件收敛．

2．设L为空间某封闭光滑曲线，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$为$\mathbb{R}^3$中具有一阶连续偏导数的函数．证明：

$$\left|\oint_{L^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le\max_{(x,y,z)\in\Sigma}\sqrt{\left(Q_x-P_y\right)^2+\left(R_y-Q_z\right)^2+\left(P_z-R_x\right)^2}\cdot S$$

其中Σ为以L为边界的某曲面，S为曲面Σ的面积．

安徽大学 2010—2011 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》期末考试试卷（A 卷）

参考答案与评分标准

一、 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．$\pm\frac{1}{3}(-1,-2,2)$； 2．0； 3．$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；4．$\frac{\pi}{2}$； 5．$-\frac{8}{5}$．

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．D； 2． C； 3．B； 4．B； 5．A．

三、计算题（其中第 1、2、3 小题每小题 10 分，第 4、5 小题每小题 12 分，共 54 分）

1． 解． 设 $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$，

则 $f_x(1,1)=\left.\frac{-y}{x^2+y^2}\right|_{(1,1)}=-\frac{1}{2}$， $f_y(1,1)=\left.\frac{x}{x^2+y^2}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2}$

故所求切平面方程为 $-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+(-1)(z-\frac{\pi}{4})=0$，

整理得 $x-y+2z=\frac{\pi}{2}$．

法线方程为 $\frac{x-1}{-1/2}=\frac{y-1}{1/2}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}$，

整理得 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2}$．

2． 解． 空间区域 Ω 在 xoy 平面上的投影为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$．

则 原式 $=\iint\limits_D(\int_{x^2+y^2}^4 z\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{1}{2}[16-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=8\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=32\pi-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^4\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=32\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}\pi\ .$$

3． 解． 将曲面 Σ 向 zox 平面投影得 $D_{zx}=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1, 0\le z\le 1\}$．

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}+0}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\,.$$

由对称性可得原式 $=2\iint\limits_{D_{zx}}\frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi^2}{2}$.

4． 解． (1) $f(x)=\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$.

当 $x\in(-1,1]$ 时，$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

故当 $\frac{x-2}{2}\in(-1,1]$ 时，即 $x\in(0,4]$ 时，$\ln x=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$.

(2) 在(1)中，令 $x=3$ 可得 $\ln 3=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$,

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\ln 3-\ln 2$.

5． (1) 方程组两边同时对 x 求偏导数得 $\begin{cases}1=\dfrac{\partial u}{\partial x}v+u\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ 0=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos u-\dfrac{\partial v}{\partial x}\sin v\end{cases}$

解方程可得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{u\cos u+v\sin v},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos u}{u\cos u+v\sin v}$.

(2) 方程 $\sin z-xyz=0$ 两边同时对 y 求偏导得 $\cos z\frac{\partial z}{\partial y}-x(z+y\frac{\partial z}{\partial y})=0$, (*)

由此可知 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{\cos z-xy}$.

方程(*)两边再对 y 求偏导得 $-\sin z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\cos z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})=0$

由此解得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{\cos z-xy}\left[\sin z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2x\frac{\partial z}{\partial y}\right]=\frac{x^2z^2\sin z+2x^2z\cos z-2x^3yz}{(\cos z-xy)^3}\,.$$

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

1． 解． 构造 Lagrange 函数

$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x+2y+3z+\lambda(x^2+y^2-2)+\mu(y+z-1)$.

求偏导得 $L_x=1+2\lambda x, L_y=2+2\lambda y+\mu, L_z=3+\mu$, $L_\lambda=x^2+y^2-2, L_\mu=y+z-1$,

联立解得 $x=-1, y=1, z=0$ 或 $x=1, y=-1, z=2$.

代入原函数得 $f(-1,1,0)=1, f(1,-1,2)=5$. 故所求最大值为 5，最小值为1.

2． 解． 所求金属丝的质量为 $m=\int_L \rho \mathrm{d}s$.

弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t=\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t$.

故 $m=\int_0^1 \frac{1}{2e^{2t}}\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-1})$.

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1． 证 明． 设 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+2011}$ ， 则 $f'(x)=\frac{2011-x}{2\sqrt{x}(x+2011)}$ ， 显 然 $x\ge 2011$ 时，$f'(x)\le 0$ ， 即 $f(x)$ 单调递减. 从而当 $n\ge 2011$ 时， $f(n)$ 单调递减. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}=0$，故由 Leibniz 判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}$ 收敛.

另一方面，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故由比较判别法极限形式可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}$ 发散. 综上所述可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+2011}$ 条件收敛.

2． 证明：由 Stokes 公式可得

$$左=\iint\limits_{\Sigma}[(R_y-Q_z)\cos\alpha+(P_z-R_x)\cos\beta+(Q_x-P_y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$\le\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{\left[\left(Q_x-P_y\right)^2+\left(R_y-Q_z\right)^2+\left(P_z-R_x\right)^2\right](\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}\mathrm{d}S$$

$$\le\max_{(x,y,z)\in\Sigma}\sqrt{\left(Q_x-P_y\right)^2+\left(R_y-Q_z\right)^2+\left(P_z-R_x\right)^2}\cdot\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=右$$

其中 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为曲面 Σ 单位法向量的方向余弦.