# 安徽大学 2012—2013 学年第二学期

# 《 高等数学 A(二)、B(二) 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

**考场登记表序号____________**

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | |

院/系______ 年级______ 专业______ 姓名______ 学号______

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

## 一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

| 得 分 | |
|---|---|

1. 过点 $(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程为__________________.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x} =$________________.

3. 累次积分 $\int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx$ 交换积分次序后为________________.

4. 函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿方向 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的方向导数为________________.

5. 设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，它在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}+x, & -\pi<x<0, \\ \dfrac{\pi}{2}-x, & 0\le x\le \pi, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=3\pi$ 处收敛于____________.

## 二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

| 得 分 | |
|---|---|

6. 函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\ne 0 \\ 0, x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　　）

（A）偏导数存在但不连续；　　（B）连续但偏导数不存在；

（C）连续且偏导数存在；　　（D）不连续且偏导数不存在.

7. 直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和直线 $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ 的夹角为（　　　）.

（A） $3\pi/4$；　　　　（B） $\pi/4$；

（C） $\pi/3$；　　　　（D） $\pi/2$.

8. 设向量场 $\vec{\mathbf{F}}=(2z-3y)\vec{\mathbf{i}}+(3x-z)\vec{\mathbf{j}}+(y-2x)\vec{\mathbf{k}}$，则 $\vec{\mathbf{F}}$ 的旋度为（　　　　）.

（A） $2x+4y+6z$；　　　　（B） $2\vec{\mathbf{i}}+4\vec{\mathbf{j}}+6\vec{\mathbf{k}}$；

（C） $6\vec{\mathbf{i}}+2\vec{\mathbf{j}}+4\vec{\mathbf{k}}$；　　　　（D） $-2\vec{\mathbf{i}}-4\vec{\mathbf{j}}-6\vec{\mathbf{k}}$.

9. 下列级数中条件收敛的是（　　　）.

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　　　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$；

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$；　　　　（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}$.

10. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域是（　　　）.

（A） $[-1,1)$；　　　　（B） $(-1,1)$；

（C） $[0,2)$；　　　　（D） $(0,2)$.

| 得 分 | |
|---|---|

**三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）**

11. 设空间曲面 $\Sigma$ 的方程为 $x^2+xy+yz+x+1=0$，求 $\Sigma$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面与法线方程.
.

12. 设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 $f$ 具有二阶导数，求 $dz$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz$，其中 $\Omega$ 由平面 $z=0$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的上半球部分.

14. 计算曲线积分 $\oint_L ydx+zdy+xdz$，其中 $L$ 为平面 $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ 被三坐标面所截三角形的整个边界，若从 $z$ 轴正向看去，$L$ 的方向为逆时针方向.

15. 计算第一类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS$，其中 $\Sigma$ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分.

16. 计算第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$，其中 $\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 截下的部分，方向取下侧.

17. 将 $f(x)=\ln(2+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n \bullet 2^{n}}$ 的和.

答题勿超装订线

线

订

装

## 四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

| 得 分 | |
|---|---|

18. 求函数 $z=x^{2}+2y^{2}$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极小值.

19. 已知一条非均匀金属丝 $L$ 的方程为 $L$: $x=a(\cos t+t\sin t)$， $y=a(\sin t-t\cos t)$，$(0\le t\le 2\pi)$. 它在点 $(x,y)$ 处的线密度是 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求该金属丝的质量.

| 得 分 | |
|---|---|

**五、证明题（本题 5 分）**

20. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{\ 2}$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 收敛.

# 安徽大学 2012—2013 学年第二学期

# 《高等数学 A（二）、B（二）》（A 卷）

# 考试试题参考答案及评分标准

**一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）**

1、$x-3y-z+4=0$；　2、2；　3、$\int_0^1 dx\int_x^1 x^2 e^{-y^2}dy$；　4、$1-\sqrt{3}$；　5、$\dfrac{\pi}{2}$.

**二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）**

6、C；　7、B；　8、B；　9、D；　10、C.

**三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）**

**11. 解：** 令

$$F(x,y,z)=x^2+xy+yz+x+1，$$

则 $F_x=2x+y+1$， $F_y=x+z$， $F_z=y$ 。

故在 $(0,1,-1)$ 处曲面 $\Sigma$ 的法向量为

$$\vec{n}=(F_x(0,1,-1),F_y(0,1,-1),F_z(0,1,-1))=(2,-1,1)\text{ 。}$$

故在 $(0,1,-1)$ 处，曲面 $\Sigma$ 的切平面方程为

$$2\bullet(x-0)-1\bullet(y-1)+1\bullet(z+1)=0，$$

即 $2x-y+z+2=0$ 。

法线方程为

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}.$$

**12. 解：**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2)；\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2)；$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2(xdx+ydy)f'(x^2+y^2)\text{ 。}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''(x^2+y^2)\bullet 2y=4xyf''(x^2+y^2)$$ 。

**13. 解：**

**解法 1：** 做球坐标变换

$x=r\sin\varphi\cos\theta$， $y=r\sin\varphi\sin\theta$， $z=r\cos\varphi$， $0\le r\le 1$， $0\le\theta\le 2\pi$， $0\le\varphi\le\pi/2$

得到

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r^2\cos^2\varphi\bullet r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{2}{15}\pi .$$ (9 分)

**解法 2：** $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1-z^2, 0\le z\le 1\}$

$$\text{原式}=\int_0^1 z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy ,$$ (5 分)

其中 $D_z$ 为 $z$ 固定情况下的圆 $x^2+y^2\le 1-z^2$， 面积为 $\pi(1-z^2)$， 则

$$\text{原式}=\pi\int_0^1 z^2(1-z^2)dz$$

$$=\frac{2}{15}\pi .$$ (9 分)

**14. 解：** $L$ 所围曲面 $\Sigma$ 定向取为上侧，则由 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-3 ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{2} ,$$

故 $$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\left\{-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right\}$$

$$=\left\{\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7}\right\}$$ 。

由 Stockes 公式，

$$\oint_L ydx+zdy+xdz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$

$$=-\iint_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS$$

$$=-\frac{11}{7}\iint_{\Sigma}dS=-\frac{11}{7}\times\frac{7}{2}=-\frac{11}{2}\text{。}$$

**15. 解：** 在$\Sigma$上，$z=4-2x-\frac{4}{3}y$，$\Sigma$在$xOy$面上的投影区域$D_{xy}$为由$x$轴、$y$轴和直线$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$所围成的三角形闭区域，故

$$\iint_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[\left(4-2x-\frac{4}{3}y\right)+2x+\frac{4}{3}y\right]\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}4\bullet\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)=4\sqrt{61}\text{。}$$

**16.**

添加辅助曲面$\Sigma_1=\{(x,y,z)\,|\,z=1,x^2+y^2\le1\}$，方向取上侧，则在由$\Sigma$和$\Sigma_1$所围成的空间闭区域$\Omega$上应用高斯公式，得到

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial(y^2-z)}{\partial x}+\frac{\partial(z^2-x)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2-y)}{\partial z}\right)dv$$

$$=\iiint_{\Omega}0dv=0$$

故原式

$$=-\iint_{\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$$=-\iint_{\Sigma_1}(x^2-y)dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy$$

这里$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$。

由对称性得到$\iint_{D_{xy}}ydxdy=0$，又$\iint_{D_{xy}}x^2dxdy=\iint_{D_{xy}}y^2dxdy$，故

$$原式=-\iint_{D_{xy}}(x^2-y)dxdy=-\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\bullet rdr=-\frac{\pi}{4}.$$

**17. 解：**

$$\ln(2+x)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

显然，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\bullet 2^n}=f(1)-\ln 2=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

**四．应用题（每小题 6 分，共 12 分）**

**18.**

**解**：构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+\lambda(x+y-1)$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=4y+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-1=0\end{cases}$$

故得到

$x=\dfrac{2}{3},y=\dfrac{1}{3}$。

又

$$A=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2,C=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=4,B=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0$$

$AC-B^2=8>0$，且 $A>0$，故 $(2/3,1/3)$ 为 $L$ 的极小值点，即为函数 $z=x^2+2y^2$ 的

极小值点，对应的极小值为$z|_{(2/3,1/3)}=\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$.

**19.**

**解：** 弧微分

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}dt=atdt$$

故金属丝的质量

$$M=\int_L(x^2+y^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]atdt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^3(1+t^2)tdt=2\pi^2a^3(1+2\pi^2)\,.$$

**五．证明题（共 5 分）**

**20.**

**证明：** 因为

$$\frac{|u_n|}{n}\leq\frac{1}{2}\left(u_n{}^2+\frac{1}{n^2}\right)$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$均收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|u_n|}{n}$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$绝对收敛，故必收敛。