院/系　　　年级　　　专业　　　姓名　　　学号

答题勿超装订线

装　　　订　　　线

安徽大学 2011—2012 学年第二学期

《 高等数学 A(二)、B(二) 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 点 $(1,1,1)$ 到平面 $x+2y+3z-6=0$ 的距离为______________.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$______________.

3. 若函数 $z=2x^2+2y^2+3xy+ax+by+c$ 在点 $(-2,3)$ 处取得极小值 -3，则常数 a、b、c、之积 $abc=$______________.

4. 梯度 $grad\left(xy+\dfrac{z^2}{y}\right)\Bigg|_{(2,1,1)}=$______________.

5. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 2, & 0\le x<\pi,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=9\pi$ 处收敛于____________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和平面 $x+y+z=3$ 的位置关系是（　　　）.

（A）平行且直线不在平面内；　　（B）垂直；

（C）相交且夹角为 $\pi/3$；　　（D）直线在平面内.

7. 向量场 $A=y^2\vec{i}+xy\vec{j}+xz\vec{k}$ 的旋度为（　　　）.

（A） $z\vec{j}-y\vec{k}$；　（B） $x\vec{j}+x\vec{k}$；　（C） $-z\vec{j}-y\vec{k}$；　（D） $2x$.

8. 将累次积分 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 交换积分次序后为（　　）.

（A）$\int_0^1 dy\int_1^e f(x,y)dx$；　　（B）$\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$；

（C）$\int_0^e dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$；　　（D）$\int_0^1 dy\int_1^{e^y} f(x,y)dx$.

9. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，方向取外侧，S_1 为其上半球面，方向取上侧，则下列式子正确的是（　　）.

（A）$\iint\limits_S zdxdy = 2\iint\limits_{S_1} zdxdy$；　　（B）$\iint\limits_S zdxdy = 4\iint\limits_{S_1} zdxdy$；

（C）$\iint\limits_S z^2dxdy = 2\iint\limits_{S_1} z^2dxdy$；　　（D）$\iint\limits_S zdxdy = 0$.

10. 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数必然收敛的是（　　）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$；　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{u_n}}$；　（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$；　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}nu_n$.

得 分	

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 设空间曲面 S 的方程为 $z=x^2+y^2-1$，求 S 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面与法线方程.

12. 设 $e^z-xyz=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

13. 计算三重积分 $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$，其中 V 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$.

14. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L ydx+(2x+y)dy$.

15. 计算第一类曲面积分 $\iint\limits_{S} x^2 dS$，其中 S 为曲面 $z = x^2 + y^2\ (0 \le z \le 1)$.

16. 计算第二类曲面积分 $\iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 S 为半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$，方向取上侧.

17. 将 $f(x)=\sin^2 x$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}$ 的和.

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

得 分	

18. 设 $u=xyz$，求其在条件 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{a}$ （$x>0$， $y>0$， $z>0$）下的极值，其中 a 为正常数.

19. 已知曲线 $L: x=\cos t$， $y=\sin t$，$(0\le t\le 2\pi)$ 在点 (x,y) 处的线密度是 $\rho(x,y)=|y|$，求该曲线的质量.

五、证明题（本题 5 分）

得 分	

20. 设正项数列 $\{u_n\}$ 单调递减，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n+1}\right)^n$ 收敛.

安徽大学 2011—2012 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》（A 卷）

考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1、0；　　2、1/4；　　3、30；　　4、$\{1,1,2\}$；　　5、$1/2$.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6、D；　　7、C；　　8、B；　　9、A；　　10、C.

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11. 解：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1,4)}=2x\big|_{(2,1,4)}=4,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1,4)}=2y\big|_{(2,1,4)}=2,$$ (5 分)

故 S 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面方程为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0,$$

即　$4x+2y-z-6=.$

S 在点 $(2,1,4)$ 处的法线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$ (9 分)

12. 解：令 $F(x,y,z)=e^z-xyz$，

则　$F_x=-yz$，$F_z=e^z-xy$。

当 $F_z\neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy}。$$ (5 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(e^z-xy)-yz(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y)}{(e^z-xy)^2}$$

$$=\frac{y^2z-yz(e^z\times\frac{yz}{e^z-xy}-y)}{(e^z-xy)^2}$$

$$=\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}.$$ (9 分)

13. 解:

解法 1: 由对称性

$$原式=\frac{1}{3}\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

根据球坐标变换

$x=r\sin\varphi\cos\theta$， $y=r\sin\varphi\sin\theta$， $z=r\cos\varphi$， $0\le r\le 1$， $0\le\theta\le 2\pi$， $0\le\varphi\le\pi$

得到

$$原式=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{4}{15}\pi.$$ (9 分)

解法 2: $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1-z^2,-1\le z\le 1\}$

$$原式=\int_{-1}^1 z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy,$$ (5 分)

其中 D_z 为 z 固定情况下的圆 $x^2+y^2\le 1-z^2$，面积为 $\pi(1-z^2)$，则

$$原式=\pi\int_{-1}^1 z^2(1-z^2)dz$$

$$=\frac{4}{15}\pi.$$ (9 分)

14. 解:

解法 1: 设圆 $x^2+y^2=2x$ 在第一象限内从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 的曲线为 C_1，$x^2+y^2=4$ 在第一象限内从 $(2,0)$ 到 $(0,2)$ 的曲线为 C_2， L_1 为直线段 $x=0$（$0\le y\le 2$），且方向向下，记这三条曲线围成的区域为 D，由格林公式

$$I=\int_{L+L_1} ydx+(2x+y)dy-\int_{L_1} ydx+(2x+y)dy$$

$$=\iint_D (2-1)dxdy-\int_2^0 ydy \qquad (7\text{ 分})$$

$$=S_D+2$$

$$=\frac{1}{4}\times 4\pi-\frac{1}{2}\times\pi+2$$

$$=\frac{\pi}{2}+2. \qquad (9\text{ 分})$$

解法 2: 设圆 $x^2+y^2=2x$ 在第一象限内从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 的曲线为 C_1，$x^2+y^2=4$ 在第一象限内从 $(2,0)$ 到 $(0,2)$ 的曲线为 C_2， 故

$$I=\int_L ydx+(2x+y)dy=\int_{C_1} ydx+(2x+y)dy+\int_{C_2} ydx+(2x+y)dy。 \qquad (2\text{ 分})$$

对于 C_1 上的积分，令 $x=1+\cos\theta$， $y=\sin\theta$， θ 从 π 变到 0，则有

$$\int_{C_1} ydx+(2x+y)dy=\int_\pi^0[\sin\theta\times(-\sin\theta)+(2+2\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta]d\theta$$

$$=\int_\pi^0[-\sin^2\theta+2\cos\theta+2\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta]d\theta$$

$$=\int_\pi^0[-\frac{1-\cos 2\theta}{2}+2\cos\theta+2\times\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\theta]d\theta$$

$$=\int_\pi^0\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2\theta+2\cos\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)d\theta$$

$$=-\frac{\pi}{2}. \qquad (5\text{ 分})$$

对于 C_2 上的积分，令 $x=2\cos\theta$， $y=2\sin\theta$， θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$， 则有

$$\int_{C_2} ydx+(2x+y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\sin\theta(-2\sin\theta)+(4\cos\theta+2\sin\theta)2\cos\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-4\sin^2\theta+8\cos^2\theta+2\sin 2\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-4\times\frac{1-\cos 2\theta}{2}+8\times\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\sin 2\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2+10\cos 2\theta+2\sin 2\theta]d\theta$$

$$=\pi+2. \qquad (8\text{ 分})$$

故 $I=\int_{C_1} ydx+(2x+y)dy+\int_{C_2} ydx+(2x+y)dy=-\frac{\pi}{2}+\pi+2=\frac{\pi}{2}+2$.　　(9 分)

15. 解： 设 S_1 为 S 在第一卦限中的部分，则由对称性，

$$\text{原式}=4\iint_{S_1} x^2 dS$$

$$=4\iint_{D} x^2\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$。

令 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$， $0\le\theta\le\pi/2$， $0\le r\le 1$，

$$\text{则原式}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}r^3dr \qquad (7\text{ 分})$$

$$=4\times\frac{\pi}{4}\times\int_0^1\sqrt{1+4r^2}r^3dr$$

$$=\pi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}r^3dr$$

$$=\frac{\pi}{32}\int_0^1\sqrt{1+4r^2}(1+4r^2-1)d(1+4r^2)$$

令 $1+4r^2=t$，则

$$\text{原式}=\frac{\pi}{32}\int_1^5\sqrt{t}(t-1)dt$$

$$=\frac{\pi}{32}g\left(\frac{20}{3}\sqrt{5}+\frac{4}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{5}{24}\sqrt{5}+\frac{1}{120}\right)\pi. \qquad (9\text{ 分})$$

16.解法 1： 添加辅助曲面 $S_1=\{(x,y,z)\,|\,z=0, x^2+y^2\le 1\}$，取下侧，则在由 S 和 S_1 所围成的空间闭区域 V 上应用 Gauss 公式有

$$\iint_{S+S_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dv \qquad (5\text{ 分})$$

$$=3\iiint_V dv$$

$$=3\times\frac{2\pi}{3}=2\pi,$$

$$\text{故原式}=2\pi-\iint_{S_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=2\pi-0=2\pi .$$ (9 分)

解法 2： 将 S 投影到 xOy 平面上，得到投影区域：

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\},$$

而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$原式=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy .$$

令 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$， $0\le\theta\le 2\pi$， $0\le r\le 1$

$$原式=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdr=2\pi$$

. (9 分)

解法 3： 将第二类曲面积分转化为第一类曲面积分再计算。将 S 投影到 xOy 平面上，得到投影区域：

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}。$$

$$1+{z_x}^2+{z_y}^2=\frac{1}{1-x^2-y^2},$$

$$\cos\alpha=-\frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}=x,\quad \cos\beta=-\frac{-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}=y,$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}=\sqrt{1-x^2-y^2},$$ (4 分)

$$原式=\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$= \iint_S (x^2 + y^2 + (1 - x^2 - y^2))dS$$

$$= \iint_S dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy .$$

令 $x = r\cos\theta$， $y = r\sin\theta$， $0 \le \theta \le 2\pi$， $0 \le r \le 1$

原式 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} rdr = 2\pi$. (9 分)

17. 解法 1：

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

， . (6 分)

. (9 分)

解法 2：

$$f'(x) = \sin 2x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1} ,$$

故 $f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1}dx$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}\int_0^x x^{2n-1}dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} , \quad x \in (-\infty, +\infty) .$$ (6 分)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!} = f(1) = \sin^2 1 .$$ (9 分)

四．应用题（每小题 6 分，共 12 分）

18. 解：构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}-\frac{1}{a}\right) \qquad (2\text{ 分})$$

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=yz-\dfrac{\lambda}{x^2}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=xz-\dfrac{2\lambda}{y^2}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=xy-\dfrac{3\lambda}{z^2}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}-\dfrac{1}{a}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}yz=\dfrac{\lambda}{x^2}\\ xz=\dfrac{2\lambda}{y^2}\\ xy=\dfrac{3\lambda}{z^2}\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{a}\end{cases}$

得到 $x=3a, y=6a, z=9a$

极值为 $u=3a\times 6a\times 9a=162a^3$. (6 分)

19. 解： $ds=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=dt$

则曲线的质量为

$$\int_L \rho(x,y)ds=\int_L |y|\,ds \qquad (4\text{ 分})$$

$$=\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sin t dt+(-\int_{\pi}^{2\pi}\sin t dt)$$

$$=4. \qquad (6\text{ 分})$$

五．证明题（共 5 分）

20.证明：因为 $u_n>0$（$n=1,2,\cdots$）且单调递减，故必有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$，且 $u\geq 0$。

若 $u=0$，则由莱布尼兹定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛，这与已知条件矛盾，因此 $u>0$。

因为 $u_n\geq u>0$，所以 $\left(\dfrac{1}{u_n+1}\right)^n\leq\left(\dfrac{1}{u+1}\right)^n$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{u+1}\right)^n$ 收敛，故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{u_n+1}\right)^n$ 收敛。 (5 分)