1.求 $y=\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$ 的反函数

2.设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且对 $\forall x$，有 $f(2x)=f(x)\cos x$，求在 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 的表达式。

3.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left|1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}n\right|$

4.设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}\,(x\geq 0)$，讨论 $f(x)$ 的可导性

5.设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$， $x_{n+1}=\sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_1x_2x_3\cdots x_n$

6.设 $a_1=1$， $a_k=k(a_{k-1}+1)$，试计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)$

7.

（1）设 $f(x)$ 为在 $[a,b]$ 上的连续正值函数。求证： $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n dx}=\max\limits_{a\leq x\leq b}f(x)$

（2）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 且 $\sin^n x_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

8.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\bullet 3\bullet 5\bullet\cdots\bullet(2n-1)}{2\bullet 4\bullet 6\bullet\cdots\bullet(2n)}$

9.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$

10.计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2+x+\sin x}+(x+2)]$

11.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$

12.计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

13.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

14.计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}-\sqrt{1+x+x^2}\bullet\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$

15.设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$

16.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{x^4}$

17.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx}$

18.设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上具有连续导数，满足 $0\le f'(x)\le\dfrac{1}{x^2+2x+f(x)}$，且 $f(1)=1$，求证： $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\le\dfrac{3}{2}$

19.

（1）设 $f(x)=\arcsin(x+x^2)\sqrt{\dfrac{1-\sin^2 x}{1+x^2}}$，求 $f'(0)$

（2）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对于 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=1$，$f'(0)=1$，$g'(0)=0$，求 $f'(x)$

20.设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$， $a_{n+1}=2a_n^2-1$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n a_1a_2\bullet\cdots\bullet a_{n-1}}$

21.设 $f(x)=x+2\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，计算 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$

22.设函数 $f(x)$ 在 (x_0-1,x_0+1) 内无穷次可导，证明，对任意的正整数 n，都有如下式子成立。

$$\lim_{x\to x_0}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}$$

23.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且有 $f(0)=f(1)=0$ 。求证：

（1） $\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{4}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

（2） $\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{8}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

24.计算 $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$

25.

（1）计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$

（2）利用（1）计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}dx$

26.

（1）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

27.记 $C(\alpha)$ 为 $(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的幂级数的展开式中 x^{2018} 的系数，计算积分

$$\int_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+...+\frac{1}{y+2018}\right)dy$$

28.设函数 $f(x,y)$ 在单位圆域上有连续偏导数，且在边界上的值恒为 0 ，求证：

$$f(0,0)=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy$$

其中 D 是圆域 $\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1$.

29.设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 具有二阶连续导数，已知 $f(0)=f'(0)=0$ ，对 $\forall x\in[0,+\infty)$ ，都有 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)\ge 0$ 成立，求证： $f(x)\ge 0$

30.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，记 $I(f)=\int_0^1 x^2 f(x)dx$， $J(f)=\int_0^1 xf^2(x)dx$，求函数 $f(x)$ 使得 $I(f)-J(f)$ 最大

31.求不定积分 $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

32.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}$

33.

（1）设函数 $f(x)=|x|$， $x\in[-\pi,\pi)$。将函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数

（2）利用（1）的结论证明 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

（3）求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+e^u}du$ 的值

34.设函数 $f(x,y)$ 是定义在 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上的二元函数，$f(0,0)=0$，且在点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 可微，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$

35.求 $\sum\limits_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分

36.设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{\frac{1}{n}}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{|x|^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{2}{n}}+\frac{|x|^{\frac{3}{n}}}{n+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{|x|^{\frac{n}{n}}}{n+1}\right), & x\ne 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right), & x=0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的表达式

37.设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，满足 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$，及

$f(0,0)=0$，求 $f(x,y)$

38.已知函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$。求证：经变换 $u=\frac{1}{2}(x+y)$，$v=\frac{1}{2}(x-y)$，$w=ze^y$，以 u、v 作自变量，w 作因变量，方程可化为 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w$

39.设 $y=y(x)$ 满足 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)(a>0)$，求 $I=\int\frac{dx}{y(x^2+y^2+a^2)}$

40.若 D：$x^2+y^2\le\frac{\pi}{4}$，求 $\iint\limits_D\frac{\tan(x^2)}{1-\tan(x^2)\tan(y^2)}dxdy$

41.设 $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，求 $f^{(2017)}(0)$

42.求满足 $\frac{du(t)}{dt}=u(t)+\int_0^1 u(t)dt$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 $u(t)$

43.设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\ge 0$，对于 $(-1,1)$ 内任意的 $x\ne 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+f'(\theta(x)x)x$ 成立，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$

44.设 $0<a_n<1, n=1,2,...,$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$（有限或 $+\infty$），求证：

（1）当 $q>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

（2）判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2\ln n}{n^2}\right)^{n^2}$ 的敛散性

45.设 a、b 均为常数，$a>-2$，$a\ne 0$，求实数 a、b，使得

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)dx=\int_0^1\ln(1-r^2)dr$$

成立

46.计算$\iint\limits_D\cos\frac{x-y}{x+y}dxdy$，其中$D$是由直线$x+y=1$与两坐标轴围成的三角形区域

47.设一平面过原点和点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求该平面方程

48.设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上非负可积，求证：

（1）当$0<\lambda<1$时，$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^\lambda\geq\frac{1}{b-a}\int_a^b f^\lambda(x)dx$

（2）当$\lambda>1$或$\lambda<0$时，$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^\lambda\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f^\lambda(x)dx$

49.计算定积分$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\operatorname{arccot}(2017^x)}{1+\cos^4 x}dx$

50.求函数$u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在$(x-y)^2-z^2=1$条件下的极值

51.计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}$

52.计算$\int_0^x f(t)g(x-t)dt(x\geq 0)$，其中$x\geq 0$时$f(x)=x$，而$g(x)=\begin{cases}\sin x, 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\\ 0, \quad x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$

53.设$f(x)$为连续函数，求证：$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx=\ln 2\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{x}$

54.设函数$f(x)$是连续函数，且满足$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f(x^2-t)dt+\iint\limits_D f(xy)dxdy$，其中$D$

是以 $(-1,-1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形，$f(1)=0$，求 $\int_0^1 f(x)dx$

55.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}dx$

56.求由曲线 L_1：$y=\dfrac{1}{3}x^3+2x(0\le x\le 1)$ 绕直线 L_2：$y=\dfrac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积。

57.设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时具有连续导数且 $f(1)=2$，在右半平面 $(x>0)$ 内存在可微函数 $u=u(x,y)$ 使得 $du=4x^3ydx+xf(x)dy$，求函数 $f(x)$ 和 $u(x,y)$

58.设锐角三角形 ABC 的外接圆半径是一定值，且 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边长分别是 a、b、c，求证：$\dfrac{da}{\cos A}+\dfrac{db}{\cos B}+\dfrac{dc}{\cos C}=0$

59.设曲线 $C_n: x^{2n}+y^{2n}=1(n\in N^*)$，记 L_n 为 C_n 的长，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}L_n=8$

60.

（1）记 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 A，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$

（2）记 $B_n=n(A_n-A)$，求 B，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$

（3）记 $C_n=n(B_n-B)$，求 C，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=C$

61.设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx=f(1)$

62.设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2\right\}$ 上具有一阶连续偏导数，且满足 $f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$，以及 $\max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$，其中 $a>0$，求证：

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le\frac{4}{3}\pi a^4$$

63.计算$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+e^{x-\frac{1}{x}})(1+x^2)}$

64.设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 可微 $(0<a<b)$，$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f^2(x)dx=1$，证明：$\int_a^b x^2[f'(x)]^2dx\geq\frac{1}{4}$

65.设函数 $f''(x)$ 连续，$f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{u(x)}f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$。其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距。

66.设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数且满足 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=1$，求证：$\int_0^1 f^2(x)\geq4$

67.设数列 $\{x_n\}$ 为 $x_1=\sqrt{3},x_2=\sqrt{3-\sqrt{3}},x_{n+2}=\sqrt{3-\sqrt{3+x_n}}\,(n=1,2,\cdots)$，求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限

68.设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，其反函数为 $g(x)$，若 $\int_x^{x+f(x)}g(t-x)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$

69.求过点 $(-2,0,0)$ 和 $(0,-2,0)$ 且与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的交线为抛物线的平面方程。

70.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，求证：

$\left[\int_0^1 xf(x)dx\right]^2\leq\frac{1}{45}\int_0^1[f'(x)]^2dx$ 取等号的条件是当且仅当 $f(x)=A(x^3-x)$ 时成立，其中 A 为常数

71.设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq1\}$ 上具有二阶连续偏导数，且满足

$div(\mathbf{grad}(f(x,y,z)))=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)dV$

72.已知平面区域 D 是 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq1\}$，$L$ 是 D 的边界正向一周，求证：

$$I=\oint_L \frac{xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx}{2017x^2+2018y^2}\ge \frac{\pi}{1009}$$

73.设函数 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x)=1+\frac{1}{2}\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$，求 $\int_0^1 f(x)dx$

74.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)<0$，$f(b)>0$，且对任意的 $x\in[a,b]$，有 $f'(x)>0, f''(x)>0$，又对于数列 $\{x_n\}$，其满足 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，$n=0,1,2,...$，$x_0=b$。

（1）求证：方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内恰有一个根 ξ

（2）求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛于 ξ

75.设 $s>0$，计算 $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-sx}dx$

76.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 x^k f(x)=0(k=0,1,...,n-1)$，$\int_0^1 x^n f(x)dx=1$，求证：$\exists x_0\in[0,1]$，使得 $|f(x_0)|\ge(n+1)\bullet 2^n$

77.设 x , y , $z\in\mathbf{R}^+$，求方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\7x^3+14y^3+21z^3=6\end{cases}$ 的解

78.设 $a_n>0$， $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

（1）当 $a_1>1$ 且 $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ 时，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}$ 的敛散性

（2）当 $\alpha>0$ 时，求证：级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\alpha}}$ 收敛

79.设 $I(r)=\oint_C \frac{(y-1)dx-(x+1)dy}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^{\alpha}}$，其中曲线 C 为 $(x+1)^2+(y-1)^2=r^2$，取正向。求极限 $\lim_{r\to 0}I(r)$

80.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且 $0<m\le f(x)\le M$，求证：$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\le\frac{(m+M)^2}{4mM}$

81.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且有 $f(0)=f(1)=0,\left|f''(x)\right|\le A$。求证：对任意的 $x\in[0,1]$，有 $\left|f'(x)\right|\le\frac{A}{2}$

82.设 $\alpha>1$，求证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\cdots+n^\alpha}$ 收敛

83.设 $f(x,y)$ 为具有二阶连续偏导数的二次齐次函数，即对任意的 x、y、t，都有 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$.

（1）求证：$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)=2f(x,y)$

（2）设 D 是由 $L:x^2+y^2=4$ 正向一周所围成的闭区域，求证：

$$\oint_L f(x,y)ds=\iint_D div(\mathbf{grad}\ f(x,y))dxdy$$

84.设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$f'_+(a)=1$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上正值连续，如果 $\int_a^x f(t)g(t)dt=f(\xi(x))\int_a^x g(t)dt,\xi(x)\in(a,x)$，求 $\lim_{x\to a^+}\frac{\xi(x)-a}{x-a}$

85.已知平面区域 D 是 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，$L$ 是 D 的边界正向一周，求证：

$$I=\oint_L\frac{xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx}{x^2+xy+2y^2}\ge\frac{4}{5}\pi$$

86.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数，且 $f(0)=0,f(1)=1$，求证：对任意的 $x\in[0,1]$，有 $\int_0^1\left|f'(x)-f(x)\right|dx\ge\frac{1}{e}$

87.求证：对任意的 $x\ge 0,y\ge 0$，有 $\frac{x^2+y^2}{4}\le e^{x+y-2}$

88.设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^x f(t)dt \ge \int_a^x g(t)dt$，$x\in[a,b]$，$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$，求证：$\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$

89.设函数 $f(x)$ 二阶可导且 $f(x)>0$，对任意的 x，有 $f(x)f''(x)-[f'(x)]^2 \ge 0$，求证：

（1）对 $\forall x_1,x_2$，有 $f(x_1)f(x_2) \ge f^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

（2）若 $f(0)=1$，求证：对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\ge e^{f'(0)x}$

90.设 n 为自然数，$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t dt$，求证：$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可取得最大值，且 $\max\limits_{x\in[0,+\infty)} f(x) \le \dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

91.设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，求证：

（1）若 $a_n b_n \le a_{n+1}b_{n+1}, n=1,2,...,n$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散；

（2）若对某个正常数 a，有 $a_n\dfrac{b_n}{b_{n+1}}-a_{n+1}\ge a, n=1,2,...$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

92.设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(e^t)dt$，求证：$e^x\left|f(x)\right|\le 2$

93.设 $F(x)=\dfrac{x^4}{e^{x^3}}\int_0^x\int_0^{x-u} e^{u^3+v^3}dudv$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 或者证明它不存在

94.设 L 为曲线 $x^2+y^2=R^2$（常数 $R>0$）一周，$\mathbf{n}$ 为 L 的外法线向量，$u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$。求 $\oint_L \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds$

95.设二次函数 $y=\varphi(x)$（其中 x^2 项的系数为1）的图形与 x 轴的交点为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 及 $(B,0)$，其中 $B=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}}2e^{\sin t}dt-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$，求使二元函数 $I(\alpha,\beta)=\int_0^1[\varphi(x)-(\alpha x+\beta)]^2dx$ 取得最小的实数 α 、 β 的值

96.设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\theta}{2^k}$，其中 $\theta\neq 0$ 且 $\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

97.计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\pi x-\arctan x}{x}dx$

98.设 $\rho(\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}$, $f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi-x|^{\frac{1}{2}}\rho(\xi)d\xi$，其中 ξ,x 为任意实数， y 为正实数，求 $f(x)$ 的初等函数表达式

99.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数， $f(0)=f'(0)=0$ ， $f(1)=f'(1)=1$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right)=\frac{1}{24}$$

100.计算 $\int_0^{+\infty}(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots)(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots)dx$

101.计算 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$（提示： $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ）

102.求证：对于任意的自然数 n ，有 $\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$

103.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的整数部分

104.计算$\int_0^a x^3\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx$

105.设函数$F(x)=f(x)g(x)$，其中$f(x)$与$g(x)$满足：$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，$f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2e^x$，求$F(x)$

106.已知$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$存在，求证：$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$

107.计算$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\left(x\ln x+\frac{1}{4x}\right)e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}dx$

108.设$x\geq 0$，设函数$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{xt},g(x)=\int_0^x f(t)dt$

（1）求函数$g(x)$在$x\geq 0$部分的水平渐近线

（2）求函数$g(x)$与其水平渐近线及y轴在$x\geq 0$部分所围成的图形的面积A

109.求平面曲线C，使得C上两点$(0,1),(x,y)$之间的弧长为$\sqrt{y^2-1}$

110.设函数$f(x)$在$[0,2\pi]$上具有一阶连续导数，且$f'(x)\geq 0$，求证：对任意正整数n，有

$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx\right|\leq\frac{2\left|f(2\pi)-f(0)\right|}{n}$

111.设函数$f(x)$连续，$f'(0)$存在，并且对于$\forall x,y\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$$

（1）求证：$f(x)$在$\mathbf{R}$上可微

（2）若$f'(0)=\frac{1}{2}$，求$f(x)$

112.求曲线 $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^{x}}(x>0)$ 的非铅直渐近线

113.设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，计算 $\lim\limits_{h\to 0^{+}}\int_{-1}^{1}\frac{hf(x)}{h^{2}+x^{2}}dx$

114. 设 $f(x)$ 是二次可微的函数，满足 $f(0)=1, f'(0)=0$，且对 $\forall x\geq 0$，有 $f''(x)-6f'(x)+5f(x)\geq 0$，求证：对 $\forall x\geq 0$，都有 $f(x)\geq 3e^{2x}-2e^{3x}$

115.已知抛物线 $y=ax^{2}+bx+c$ 在点 $M(1,2)$ 处曲率圆的方程为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(y-\frac{5}{2}\right)^{2}=\frac{1}{2}$，求常数 a,b,c

116.计算 $\int_{0}^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^{2}}dx$

117.设函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f'(0)$，$f(\frac{1}{2})=0$，求证：至少存在一点 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$，使得 $f''(\xi)=\frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$

118.设正值函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，求证：$e^{\int_{0}^{1}\ln f(x)dx}\leq\int_{0}^{1}f(x)dx$

119.设 $y=y(x)$ 由方程 $x^{3}+y^{3}=3xy$ 确定，求 $\int\frac{y(1-xy)}{y^{2}-x}dx$

120.设函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内具有非负二阶导数，求证：对于 $\forall[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续函数 $f(x)$，有：

$$F\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin xdx\right]\leq\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}F[f(x)]\sin xdx$$