探析夹逼准则在求极限中的应用

夏 滨

(四川建筑职业技术学院 四川 德阳 618000)

摘要:本文主要通过几类函数的极限问题对夹逼准则在求极限中的应用进行了探讨。

关键词:夹逼准则 函数 极限

中图分类号:G642 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-1578(2009)11-0076-02

夹逼准则:若 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} h(x)=A$,且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A$。此准则多适用于所求极限的函数比较容易适当放大和缩小、且经放大和缩小后的函数易求得相同极限的情形。利用此准则可把所求极限转化为求放大和缩小后的函数极限。夹逼准则所适用的不等式可在充分大以后成立。利用夹逼准则求极限的关键在于,找出两个相同极限值的函数 $g(x)$ 及 $h(x)$,使 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$。下面笔者介绍常用夹逼准则求极限的几类函数。

1 含有乘方和(或)阶乘形式的函数

这类函数的极限可用夹逼准则求(证)之。这类函数的自变量 n 或 x 包含在幂指数、根指数或对数中,且有两处出现该自变量。为利用夹逼准则,先用伯努利不等式 $(1+p)^n\geqslant 1+np(P>-1,n$ 为任意自然数$)$,或 $(1+p)^n$ 的二项展开式:$(1+p)^n=1+np+\frac{n(n-1)}{2}p^2+\cdots\cdots p^n$,将其适当放大或缩小,从而把 n 或 x 从幂指数、根指数或对数中"解脱"出来,然后再利用夹逼准则求其极限。

例 1:证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$;

[证]:因为 $0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n}\leqslant\frac{4}{n}$,且

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{n!}=0$;

故由夹逼准则知

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$。

例 2:计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{\alpha^n}(\alpha>1)$;

解:设 $\alpha=1+h(h>0)$,则

$\alpha^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+h^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2$,

从而有 $0<\frac{n}{\alpha^n}<\frac{2}{(n-1)h^2}$;

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{(n-1)h^2}=0$,

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{\alpha^n}=0$。

例 3:计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$

解:由于 $0\leqslant\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}\right|\leqslant\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}<\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$,

即 $-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$,

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}=0$。

2 已知或易求出双向不等式的数列(或函数)可用夹逼准则求其极限

例 4:证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$。

[证]:由于 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$;

所以由夹逼准则知

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$。

例 5:设 $x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$,$\cdots$,$x_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$,$\cdots$

证明 $x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}(n=1,2\cdots)$,并求 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$。

[证]:当 n=1 时,$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,不等式成立。

设 n=k 时,不等式成立,即

$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ 则对 n=k+1 时,有

$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\sqrt{\frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+2)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

因为 $(2k+1)(2k+3)=4k^2+8k+3<4k^2+8k+4=(2k+2)^2$

故 $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}=<\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}$,

依数学归纳法,对任意自然数 n 有 $x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$。

又由于 $0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

所以由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=0$。

例 6:设 $x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$,求 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$.

解:因为 $x_n=3\left[(\frac{1}{3})^n+(\frac{2}{3})^n+1\right]^{\frac{1}{n}}$,对任意的 n 有

$1<(\frac{1}{3})^n+(\frac{2}{3})^n+1<3$

故 $3<\left[1+2^n+3^n\right]^{\frac{1}{n}}<3.3^{\frac{1}{n}}$;

又 $\lim\limits_{x\to\infty}3.3^{\frac{1}{n}}=3$,

所以由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=3$。

(下转 125 页)

浅谈对学生阅读能力的指导

李乃勤
(四川省蓬安县龙蚕初级中学 四川 蓬安 637800)

中图分类号:G633.3 文献标识码: C 文章编号:1672-1578(2009)11-0125-01

在我们语文教学的诸多内容中，阅读教学可谓是耗时最多而收效甚微的一项。作为阅读主体的学生,从小学到初中,学习了那么多的课文,背了那么多的经典,做了那么多的笔记,最终却很少有人形成了良好的读书习惯和具备了独立阅读、分析文章的能力。而日新月异的现代社会对人才的要求越来越高,阅读教学的任务也显得越来越艰巨。因为阅读教学中的阅读,对学生来说是一个学习理解语言,掌握阅读方法,汲取知识,提高认识,发展思维,丰富思想感情的过程。因此,下面笔者谈谈如何针对学生的现状来提高学生的阅读能力。

1 培养兴趣

传统的阅读指导更多的是把动机、情绪、意志当作影响阅读的因素,强调从教师的角度出发,如何去激发、调动学生这些非智力因素以促进他们的阅读。而实际上,学生作为阅读的主体,在阅读中更需要学会自我激励、自我调控情绪,从而取得更高的阅读效率。我国古代大教育家孔子就曾经说过“知之者不如好之者,好之者不如乐之者。”,可见兴趣是最好的老师,是人们从事任何活动的动力,学生对阅读感兴趣,才能从内心深处对阅读产生主动需要,才会减轻疲劳感,才能把阅读当成是一种享受,才能感受到阅读的乐趣,也才能取到事半功倍的效果。

2 加强指导

古人云:“授之以鱼不如授之以渔。”浩如烟海的资料文献,教师是永远也讲不完的,只有教给学生一定的学习方法,培养他们阅读的能力,自学的能力,让他们借助一定的工具;自己去探索、辨析、历练才能得益。而传统阅读指导内容上更多地集中在阅读个别环节的完善和改进上，只是提供一些具体的外显得方法指导,如怎样诵读、如何分层、概括文意等。缺乏高层次的、即从信息加工角度进行的更一般的内隐的策略指导。

2.1 学会选择

在信息铺天盖地袭来的语言大环境中，我们固然应强调学生对作品的感悟、熏陶和积累,但学生不可能、也没有必要对所有材料都给予注意加工,对所有的文本都予以精思熟读。因此,在阅读过程中培养学生对读物内容的筛选能力就显得尤为重要。所以,学生必须将注意集中在与学习有关的信息或重要信息上学会去抉择。

2.2 学会批判质疑

西方学者一直将批判思维作为创新精神的核心部分来看待,他们主张:批判思维是创新思维的动力和基础,开发人的批判思维就是开发人的创新思维。因此,如何充分激活学生原有的知识储备和科学的思维方法,正确看待学生发表的“异端”,与学生打成一片也就显得尤为重要。

3 拓宽视野

“书籍是人类进步的阶梯”。《新课程标准》也指出:广泛阅读各种类型的读物,课外阅读总量不少于260万字,每学年阅读两三部名著。课外阅读既可以拓宽学生视野,增加积累,又可以提高学生的语文素养,为其终身阅读和写作奠定良好的基础,最重要的是课外阅读是学生在自由、无拘束、无心理负担的状态下进行的,所以学生对课外阅读兴趣盎然、如痴如醉,充分享受着阅读的自由、阅读的快乐。

总之,阅读教学只有通过课堂教学与课外阅读相结合,充分调动学生的自主性,才能真正提高学生的阅读能力,才能让学生在阅读中感受阅读的快乐,收获阅读的成功,才能再创语文教学的新境界。

(上接76页)

3 极限号下函数含取整函数,其极限可用夹逼准则求之

极限号下函数含取整函数 $y=[x]$时,常用该函数满足的不等式$[x]\leqslant x\leqslant[x]+1$ 或 $x-1<[x]\leqslant x$,根据夹逼准则求极限。

例7:计算$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$;

解:由 $x-1<[x]\leqslant x$,得到

(1)当 $x>0$ 时,$\frac{x-1}{x}<\frac{[x]}{x}<\frac{x}{x}$, 即 $1-\frac{1}{x}<\frac{[x]}{x}\leqslant 1$;

(2)当 $x<0$ 时,$\frac{x-1}{x}>\frac{[x]}{x}\geqslant\frac{x}{x}$, 即 $1-\frac{1}{x}>\frac{[x]}{x}\geqslant 1$;

因$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})=1$, 故由夹逼准则得到

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}=1$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$ 。

例8:计算$\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{\alpha}\left[\frac{b}{x}\right]$ $(\alpha>0,b>0)$;

解:因$\frac{b}{x}-1<\left[\frac{b}{x}\right]\leqslant\frac{b}{x}(x\neq0)$,

当 $x>0$ 时,各项乘以$\frac{x}{\alpha}$, 有$\frac{b}{\alpha}-\frac{x}{\alpha}<\frac{x}{\alpha}\left[\frac{b}{x}\right]\leqslant\frac{b}{\alpha}$;

又$\lim\limits_{x\to+0}(\frac{b}{\alpha}-\frac{x}{\alpha})=\frac{b}{\alpha}$,于是由夹逼准则得到

$\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{\alpha}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{\alpha}$。

本文通过一些典型例题探讨了夹逼准则在极限计算中的应用,今后大家在遇到此类问题时,便可迎刃而解了。

参考文献:

[1]同济大学数学教研室.高等数学[M].高等教育出版社,1988.4.
[2]朱弘毅.高等数学[M].上海科学技术出版社,2001.6.
[3]廖玉麟等.高等数学试题精选题解[M].华中科技大学出版社,2001.10.