

2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 则 ()

- (A) $a = \frac{1}{2}, b = -1$ (B) $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ (C) $a = \frac{1}{2}, b = 1$ (D) $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

(2) 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ()

- (A) $f(x) = |x| \sin |x|$ (B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$
(C) $f(x) = \cos |x|$ (D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-ax, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x-b, & x \geq 0 \end{cases}$, 若 $f(x) + g(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 则 ()

- (A) $a=3, b=1$ (B) $a=3, b=2$ (C) $a=-3, b=1$ (D) $a=-3, b=2$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则 ()

- (A) 当 $f'(x) < 0$ 时, $f(\frac{1}{2}) < 0$ (B) 当 $f''(x) < 0$ 时, $f(\frac{1}{2}) < 0$
(C) 当 $f'(x) > 0$ 时, $f(\frac{1}{2}) < 0$ (D) 当 $f''(x) > 0$ 时, $f(\frac{1}{2}) < 0$

(5) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则 ()

- (A) $M > N > K$ (B) $M > K > N$ (C) $K > M > N$ (D) $K > N > M$

(6) $\int_{-1}^0 dx \int_{-\pi}^{2-x^2} (1-xy) dy + \int_0^1 dx \int_{\pi}^{2-x^2} (1-xy) dy = ()$

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{7}{6}$

(7) 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似的为 ()

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(8) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, (X, Y) 表示分块矩阵, 则 ()

(A) $r(A, AB) = r(A)$

(B) $r(A, BA) = r(A)$

(C) $r(A, B) = \max\{r(A), r(B)\}$

(D) $r(A, B) = r(A^T, B^T)$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 曲线 $y = x^2 + 2 \ln x$ 在其拐点处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(11) $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\ln z + e^{z-1} = xy$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组, 若 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, $A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$, 则 A 的实特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx.$

(16) (本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(x-t) dt = ax^2$

(1) 求 $f(x)$;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为 1, 求 a 的值.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D (x+2y) dx dy.$

(18) (本题满分 10 分)

已知常数 $k \geq \ln 2 - 1$. 证明: $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0.$

(19) (本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 问: 三个图形的面积和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

(20) (本题满分 11 分)

已知曲线 $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geq 0)$, 点 $O(0,0)$, 点 $A(0,1)$. 设 P 是 L 上的动点, S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成图形的面积. 若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 求此时 S 关于时间 t 的变化率.

(21) (本题满分 11 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n=1,2,\dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(22) (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

(23) (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a ;

(2) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

(答案待修正中, 关注金程考研持续更新)