怎样在微分中值定理中构造辅助函数成了解这类题的主要关键，下面介绍怎样构造的方法，还有附带几个经典例题，希望对广大高数考生有所帮助。

先看这一题，已知 f(x)连续，且 f(a)=f(b)=0,求证在（a，b）中存在 ε 使 f’(ε)=f(ε)

证明过程： f’(ε)=f(ε), 所以 f’(x)=f(x), 让 f(x)=y,

所以 $\frac{dy}{dx}=y$,即$\frac{1}{y}dy=dx$，所以对两边简单积分，即$\int\frac{1}{y}dy=\int 1dx$，所以解出来（真的是不定积分的话后面还要加个常数 C，但这只是我的经验方法，所以不加）就是$\ln y=x$，也就是$y=e^{x}$，这里就到了最关键的一步，要使等式一边为 1 !，所以把e^{x}除下来，就是$\frac{y}{e^{x}}=1$，所以左边就是构造函数，也就是$y\cdot e^{-x}$，而 y 就是 f(x)，所以构造函数就是$f(x)e^{-x}$，你用罗尔定理带进去看是不是。再给大家举几个例子。

二、已知 f(x)连续，且 f(a)=f(b)=0,求证：

在（a，b）中存在 ε 使 f’(ε)+2 ε f(ε)=0

证：一样的，$\frac{dy}{dx}=-2xy$，把 x,y 移到两边，就是$\frac{1}{y}dy=-2xdx$，所以积分出来就是$\ln y=-x^{2}$，注意 y 一定要单独出来，不能带 ln，所以就是$y=e^{-x^{2}}$，移出 1 就是$ye^{x^{2}}=1$,所以构造函数就是$f(x)e^{x^{2}}$，再用罗尔定理就出来了。

三、已知 f(x)连续，且 f(a)=f(-a),求证在（-a，a）中存在 ε 使 f’(ε) ε +2f(ε)=0.

证：$\frac{dy}{dx}x+2y=0$，移项就是$\frac{1}{y}dy=-2\frac{1}{x}dx$，所以$\ln y=-2\ln x$，所以就是$y=\frac{1}{x^2}$，移项就是$y\cdot x^2=1$，所以构造的函数就是$f(x)\cdot x^2$，再用罗尔定理就可以了。

注：这种方法不是万能的，

下面介绍一些常见表达式中的原函数:

(1) 要证 $f'(\zeta)g(\zeta)+f(\zeta)g'(\zeta)=0$ 即证 $[f(x)g(x)]'_{x=\zeta}=0$; 所以可令 $F(x)=f(x)g(x)$。

(2) 要证 $f'(\zeta)g(\zeta)-f(\zeta)g'(\zeta)=0,(g(x)\neq 0)$，即证 $\frac{f'(\zeta)g(\zeta)-f(\zeta)g'(\zeta)}{g^2(\zeta)}=0$，即证 $[\frac{f(x)}{g(x)}]'_{x=\zeta}=0$，所以可令 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$。

(3) 要证 $f'(\zeta)+f(\zeta)g'(\zeta)=0$，即证 $e^{g(\zeta)}[f'(\zeta)+f(\zeta)g'(\zeta)]=0$，即证 $[e^{g(x)}f(x)]'_{x=\zeta}=0$。所以可令 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$。

结合下面例题尝试做下。

微分中值定理的证明题

1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：$\forall\lambda\in R$，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得：$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$。

证：构造函数$F(x)=f(x)e^{\lambda x}$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$F(a)=F(b)=0$，由罗尔中值定理知：$\exists\xi\in(a,b)$，使$F'(\xi)=0$

即：$[f'(\xi)+\lambda f(\xi)]e^{\lambda\xi}=0$，而$e^{\lambda\xi}\neq 0$，故$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$。

经典题型二：

思路分析：

例 3　设$x_1x_2>0$, 证明: $x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\zeta)e^{\zeta}(x_1-x_2)$ 式中, ζ在x_1,x_2之间。

分析: 要证的等式是固定点x_1,x_2以及中间值ζ的表达式, 作变形, 使x_1,x_2与ζ分离。再生成改变量的商, 选用中值定理证明, 具体步骤为:

(1) ζ与x_1,x_2分离　$\dfrac{x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}}{x_1-x_2}=(1-\zeta)e^{\zeta}$

(2) 产生改变量的商　$\dfrac{\dfrac{e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=(1-\zeta)e^{\zeta}$

(3) 作辅助函数　令$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$

只需在$[x_1,x_2]$上用柯西定理即可。

实战分析：

设$a,b>0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)$。

证：将上等式变形得：$\dfrac{1}{b}e^{\frac{1}{\frac{1}{b}}}-\dfrac{1}{a}e^{\frac{1}{\frac{1}{a}}}=(1-\xi)e^{\frac{1}{\frac{1}{\xi}}}(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a})$

作辅助函数$f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$，则$f(x)$在$[\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a}]$上连续，在$(\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a})$内可导，

由拉格朗日定理得：

$$\frac{f(\frac{1}{b})-f(\frac{1}{a})}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=f'(\frac{1}{\xi}) \quad \frac{1}{\xi}\in(\frac{1}{b},\frac{1}{a})$$ ，

即 $$\frac{\frac{1}{b}e^{b}-\frac{1}{a}e^{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=(1-\frac{1}{\xi})e^{\frac{1}{\frac{1}{\xi}}} \qquad \frac{1}{\xi}\in(\frac{1}{b},\frac{1}{a})$$ ，

即：$\mathrm{ae}^{b}-be^{e}=(1-\xi)e^{\xi}(a,b) \qquad \xi\in(a,b)$ 。

经典题型三

设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有二阶导数，且 $f(1)=0$，有 $F(x)=x^2 f(x)$ 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得：$F''(\xi)=0$ 。

证：显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又 $F(0)=F(1)=0$，故由罗尔定理知：$\exists x_0\in(0,1)$，使得 $F'(x_0)=0$

又 $F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$，故 $F'(0)=0$， 于是 $F'(x)$ 在 $[0，x_0]$ 上满足罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(0,x_0)$， 使得：$F''(\xi)=0$，而 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$，即证