安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末试卷（B）

（闭卷，时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 二元极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[2021x\sin\dfrac{1}{y}\right]$ （　　）

A. 不存在　　B. 等于 0　　C. 等于 2021　　D. 存在，但不等于 0 也不等于 2021

2. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy =$（　　）

A. $\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x} f(x,y)dx$　B. $\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$　C. $\int_0^{1-x}dy\int_0^1 f(x,y)dx$　D. $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$

3. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2\le z, 1\le z\le 2\right\}$， f 在 Ω 上连续，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv =$（　　）

A. $\pi\int_1^2 z^2 f(z)dz$　B. $2\pi\int_1^2 f(z)dz$　C. $2\pi\int_1^2 zf(z)dz$　D. $\pi\int_1^2 zf(z)dz$

4. 若第二类曲线积分 $\int_L (6xy-ky^2)dx+(3x^2-4xy)dy$ 与路径无关，则 k 的值是（ ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 下列级数为条件收敛的级数是（　）

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$　B $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$　C $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n+1}$　D $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 已知 $f(x,y)=e^{-y}\sin(x+2y)$，则 $f_x'\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)=$____________________

7. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-2021)^n}{n^2}$ 的收敛域为______________.

8. 设 L 为圆 $x^2+y^2=4$，则曲线积分 $\oint_L(2xy+3x^2+3y^2)ds=$____________________

9. 已知 $z=f(x+y,xy)$, f 可微，则全微分 $dz=$____________________

10. $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式中系数 $b_3=$_________________________

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. 设设 $z=z(x,y)$ 是由 $z^3-3xyz=a^3$ 确定的隐函数，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

12. 设平面经过两点 $M_1(1,1,1)$，$M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程

13. 计算第一类曲线积分 $\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 为 $x^2+y^2=ax(a>0)$

14. 计算第二类曲面积分 $\iint\limits_S(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy, S$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧

15. 计算第一类曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(z+1)^2dS$，其中 Σ 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, a>0$

16. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 在 $x\in(-1,1)$ 的和函数

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

17. 求质点 $M(x,y)$ 受作用力 $F=(y+3x)i+(2y-x)j$ 沿路径 L 顺时针方向运动一周所做的功，其中 L 为椭圆 $4x^2+y^2=4$

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

18. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-2}$ 发散

安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末试卷（B 卷）参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、B　　3、D　　4、B　　5、D

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 0

7. $[2020, 2022]$

8. 48π

9. $(f_1' + f_2' y)dx + (f_1' + f_2' x)dy$

10. $\frac{2}{3}\pi$

三、计算题

11.（9 分） **解：**

设 $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3$，$F_x' = -3yz$，$F_y' = -3xz$，$F_z' = 3z^2 - 3xy$，当 $z^2 \neq xy$ 时，得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}$$

12.（9 分）解：

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - j - k$$

因此，所求平面方程为：

$2(x-1) - (y-1) - (z-1) = 0$

即$2x - y - z = 0$

13.（9 分）**解：**

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = 2\int_0^a \sqrt{ax}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx = a\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2a^2$$

14.（9 分）**解：** S_1：$x^2+y^2 \le 1$ **取下侧**

由高斯公式

$$\iint\limits_S (x^3+1)dydz + (y^3+1)dzdx + (z^3+1)dxdy$$

$$= \oiint\limits_{S+S_1} (x^3+1)dydz + (y^3+1)dzdx + (z^3+1)dxdy$$

$$= 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \frac{6\pi}{5}$$

又因为：

$\iint\limits_{S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$

$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy=-\pi$

所以，原式=$\frac{11\pi}{5}$

15. （9 分）

解：

$\oiint\limits_{\Sigma}(z+1)^2 dS=\oiint\limits_{\Sigma} z^2 dS+\oiint\limits_{\Sigma} 2zdS+\oiint\limits_{\Sigma} 1dS$

因为： $\oiint\limits_{\Sigma} 1dS=4\pi a^2$， $\oiint\limits_{\Sigma} 2zdS=0$， $\oiint\limits_{\Sigma} z^2 dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} a^2 dS=\frac{4}{3}\pi a^2$

所以，原式=$4\pi a^2+\frac{4}{3}\pi a^4$

16（9 分）

解 幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

设$\forall x\in(-1,1)$内，幂级数的和函数为$S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

对$S(x)$两边求 0 到x上的积分，得

$$\int_0^x S(t)\,dt=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=x(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)=\frac{x}{1-x},$$

则$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

四、应用题（共 10 分）

17. **解：**由第二类曲线积分的物理意义和格林公式

$W=\oint_L (y+3x)dx+(2y-x)dy=-\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial x}(2y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y+3x)dxdy$.

$=2\iint\limits_D dxdy=2S_{椭圆}=4\pi$

五、证明题（共 6 分）

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-2}$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-2}$发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-2}$由莱布尼茨判别法可判断收敛，收敛与发散和一定发散

所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-2}$发散