高等数学A(一) 1-3章模拟测验

（满分100分 时间50分钟）

姓名：________ 学号：________________ 班级：__________ 得分：______

选择题每空4分，大题每题12分。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=$（ 2 ），$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x^2)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}=$（ $\sqrt{e}$ 或 $e^{\frac{1}{2}}$ ）。

设 $f(x)=\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]$，$\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$.

$$\text{故}\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2\lim_{x\to 0^-}[x]\ \underset{\text{无穷小量等价替换}}{\overset{x\to 0^-\text{时},\,e^{\frac{2}{x}},e^{\frac{1}{x}}\to 0}{=\!=\!=}}\ \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}-2(-1)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}+2=0+2=2.$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2\lim_{x\to 0^+}[x]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[e^{\frac{2}{x}}(e^{-\frac{2}{x}}+1)]}{\ln[e^{\frac{1}{x}}(e^{-\frac{1}{x}}+1)]}-2\cdot 0$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}+\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\frac{1}{x}+\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2+x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2$. 故有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+x^2)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\ln(1+x)}\ln(\cos x+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(x^2+\cos x-1)]}{x\ln(1+x)}}$$

$$\underset{\text{等价替换}}{\overset{\text{无穷小量}}{=\!=\!=}}\ e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\cos x-1}{x\cdot x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{1-\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

2. 函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$（ $-\dfrac{1+t^2}{t^3}$ ）。

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}=\frac{t}{1+t^2}\\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2}\end{cases}$$

$$\text{故}\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}$$

3. $y=\sqrt[3]{\dfrac{2019^{x}(\arcsin x)^{2020}}{(\ln x)^{2021}\sec(2022x)}}$，则

$\dfrac{dy}{dx}=$（ $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2019^{x}(\arcsin x)^{2020}}{(\ln x)^{2021}\sec(2022x)}}\left[\ln 2019+\dfrac{2020}{\arcsin x\sqrt{1-x^{2}}}-\dfrac{2021}{x\ln x}-2022\tan(2022x)\right]$ ）。

$y=\sqrt[3]{\dfrac{2019^{x}(\arcsin x)^{2020}}{(\ln x)^{2021}\sec(2022x)}}$ 两边同时取对数：

$\ln y=\frac{1}{3}\left[x\ln 2019+2020\ln\arcsin x-2021\ln\ln x-\ln\sec(2022x)\right]$. 同时对$x$求导:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\left[\ln 2019+2020\cdot\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2021\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{\sec(2022x)}\cdot\sec(2022x)\tan(2022x)\cdot 2022\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln 2019+\frac{2020}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}-\frac{2021}{x\ln x}-2022\tan(2022x)\right]$$

$$\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{2019^{x}(\arcsin x)^{2020}}{(\ln x)^{2021}\sec(2022x)}}\cdot\left[\ln 2019+\frac{2020}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}-\frac{2021}{x\ln x}-2022\tan(2022x)\right]$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^4+1^3}+\dfrac{2^2n}{n^4+2^3}+\dfrac{3^2n}{n^4+3^3}+\ldots\ldots+\dfrac{n^3}{n^4+n^3}\right)=$（ $\dfrac{1}{3}$ ）。

$$\text{设 } b_n=\frac{n}{n^4+1^3}+\frac{2^2n}{n^4+2^3}+\frac{3^2n}{n^4+3^3}+\cdots+\frac{n^3}{n^4+n^3}$$

$$=\frac{1^2}{n^3+\frac{1^3}{n}}+\frac{2^2}{n^3+\frac{2^3}{n}}+\frac{3^2}{n^3+\frac{3^3}{n}}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}$$

$$a_n=\frac{1^2}{n^3+n^2}+\frac{2^2}{n^3+n^2}+\frac{3^2}{n^3+n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}=\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+n^2}$$

$$c_n=\frac{1^2}{n^3+\frac{1}{n}}+\frac{2^2}{n^3+\frac{1}{n}}+\frac{3^2}{n^3+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+\frac{1}{n}}$$

当$n\geq 2$时. 有 $a_n<b_n<c_n$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{3}$

故由夹逼定理. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{3}$

5.默写如下“差化积”公式：

$\sin\alpha-\sin\beta=$（ $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ），$\cos\alpha-\cos\beta=$（ $-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ ）。

三角函数和角差角公式：

$$\begin{cases}\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A\\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B\end{cases}$$

故有：
$$\begin{cases}\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\sin B\cos A\\ \cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B\end{cases}$$

令 $A=\frac{\alpha+\beta}{2}$、$B=\frac{\alpha-\beta}{2}$. 则 $\alpha=A+B$、$\beta=A-B$. 代入上式：
$$\begin{cases}\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$$

6. 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x+1}}{e^{nx}+x^2}$ 的间断点，并判断它们的类型（小类）。

解：
$$f(x)=\begin{cases}0 & x>0\\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}, & x<0\text{ 且 }x\neq-1\end{cases}$$

$x\neq0$ 且 $x+1\neq0$ $\Rightarrow$ $x=0$ 和 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}=\dfrac{\pi}{4}\cdot\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\xlongequal[x\to0^-\text{时}t\to+\infty]{\text{令}t=-\frac{1}{x}}\dfrac{\pi}{4}\cdot\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{e^t}=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0\end{cases}$$

故 $x=0$ 为第一类的可去间断点.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}\xlongequal[x\to-1^-\text{时}r\to-\infty]{\text{令}r=\frac{1}{1+x}}e^{-1}\cdot\lim\limits_{r\to-\infty}\arctan r=-\dfrac{\pi}{2e}\\ \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\arctan\frac{1}{1+x}}{x^2}\xlongequal[x\to-1^+\text{时},s\to+\infty]{\text{令}s=\frac{1}{1+x}}e^{-1}\lim\limits_{s\to+\infty}\arctan s=\dfrac{\pi}{2e}\end{cases}$$

故 $x=-1$ 为第一类的跳跃间断点.

7. 设$u(x)$、$v(x)$均可导，$v(x)\neq 0$，请用定义证明：$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$。

证明：$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\cdot\dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{v(x+\Delta x)v(x)}\cdot\dfrac{[u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)]-[u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)]}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{v(x+\Delta x)v(x)}\cdot\left[\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$

$=\dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)v(x)}\left\{\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right]\cdot v(x)-u(x)\cdot\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\right\}=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

8. 设函数$f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0\\ 0, \qquad x=0\end{cases}$，求$f'(x)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性。

解：当$x\neq 0$时，$f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}+x\cdot\dfrac{1}{1+(\frac{1}{x^2})^2}\cdot(-2x^{-3})=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}$

而$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x^2}\xlongequal[x\to 0\text{时}, t\to 0^+]{\text{令}t=x^2}\lim\limits_{t\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{t}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}, & x\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)=\dfrac{\pi}{2}-0=\dfrac{\pi}{2}=f'(0)$

故$f'(x)$在$x=0$处连续.

9. $y=f(x)$严格单调、二阶导函数连续，$x=\varphi(y)$，$f(1)=2$，$f'(1)=2$，$f''(1)=4$，求$\varphi''(2)$。

解：由于$f(x)$严格单调，$f(1)=2$，故$\varphi(2)=1$，$x=1$与$y=2$一一对应

$\varphi'(y)=\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{f'(x)}$

$\varphi''(y)=\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)\cdot\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\left[\dfrac{1}{f'(x)}\right]'\cdot\dfrac{1}{f'(x)}=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\dfrac{1}{f'(x)}=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

$\Rightarrow\varphi''(2)=-\dfrac{f''(1)}{[f'(1)]^3}=-\dfrac{4}{2^3}=-\dfrac{1}{2}$

10. 函数$y=f(x)$由方程$\tan(xy)+\ln(y-x)=x$确定，求曲线$y=f(x)$在$x=0$处的法线方程。

解：代入$x=0$. 可得：$y|_{x=0}=1$

两边同时求导：$\sec^2(xy)(y+xy')+\frac{1}{y-x}\cdot(y'-1)=1$

代入$x=0$，$y|_{x=0}=1$. $\Rightarrow 1\cdot(1+0)+1\cdot(y'-1)=1 \Rightarrow y'|_{x=0}=1=k_{切}$

故有：$k_{法}=\frac{-1}{k_{切}}=\frac{-1}{1}=-1$，法线方程为：$y-1=-1\cdot(x-0)$. 即：$y=-x+1$

或 $x+y-1=0$

11. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2+\frac{a_n}{2+a_n},(n=1,2,\ldots)$，请判断$\{a_n\}$的敛散性并证明。

解：$\{a_n\}$收敛. 证明如下：

$a_1=2>0$，$a_2-a_1=\frac{a_1}{2+a_1}>0$. 即 $a_2>a_1$

假设 $a_n>a_{n-1}$，则 $a_{n+1}-a_n=\left(2+\frac{a_n}{2+a_n}\right)-\left(2+\frac{a_{n-1}}{2+a_{n-1}}\right)=\frac{2(a_n-a_{n-1})}{(2+a_n)(2+a_{n-1})}>0$.

即 $a_{n+1}>a_n$ 成立. 故由数学归纳法可得：$\{a_n\}$单调增加. $\Rightarrow a_n\geq a_1=2$

故有 $a_{n+1}=2+\frac{a_n}{2+a_n}<2+1=3 \Rightarrow \{a_n\}$有上界.

由单调有界原理，数列$\{a_n\}$收敛.