

## 【练习题 3 参考解答】

一、(本题满分 21 分, 每小题 3 分) 单项选择题 (请将所选答案填入题号前的方括号内):

【 B 】 1.  $\int x f''(x) dx =$

(A)  $xf(x) - f(x) + C$ .

(B)  $xf'(x) - f(x) + C$ .

(C)  $f'(x) - f(x) + C$ .

(D)  $xf(x) - f'(x) + C$ .

【 A 】 2.  $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx =$

(A)  $2\sqrt{2}$ .

(B)  $2\sqrt{2} - 2$ .

(C) 0.

(D) 2.

【 D 】 3. 设  $f(x)$  连续, 则  $\int_a^b f(x) dx =$

(A)  $\int_a^b f(3x) d(3x)$ .

(B)  $\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{b}{3}} f(-3x) d(-3x)$ .

(C)  $\int_a^b f(-3x) d(-3x)$ .

(D)  $\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{b}{3}} f(3x) d(3x)$ .

【 C 】 4. 由曲线  $y = e^x$ ,  $y = e$ ,  $y = e^2$  及  $y$  轴所围平面图形的面积为

(A)  $2e$ .

(B)  $2e^2$ .

(C)  $e^2$ .

(D)  $e$ .

【 D 】 5. 微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$  的通解为

(A)  $x \sin \frac{y}{x} = C$ . (B)  $\cos \frac{y}{x} = x^2 + C$ . (C)  $x^2 \cos \frac{y}{x} = C$ . (D)  $\sin \frac{y}{x} = Cx$ .

【 A 】 6. 用待定系数法求二阶方程  $y'' + y = xe^x$  的一个特解时, 其特解的形式应设为

(A)  $y^* = (ax + b)e^x$ . (B)  $y^* = x(ax + b)e^x$ . (C)  $y^* = axe^x$ . (D)  $y^* = ax^2e^x$ .

【 A 】 7. 曲线  $y = \sqrt{x}$  与  $x$  轴及直线  $x = 1$  所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积是

(A)  $\frac{\pi}{2}$ .

(B)  $\pi$ .

(C)  $2\pi$ .

(D)  $\frac{3\pi}{2}$ .

二、(本题满分 21 分, 每小题 3 分) 填空题:

1. 设  $f(x)$  的一个原函数为  $x^2$ , 则  $\int x f(x) dx = \underline{\frac{2}{3}x^3 + C}$ .

2.  $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1+x^4} dx = \underline{0}$ .

3. 设函数  $f(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} dt$ , 则  $f'(x) = \underline{2e^{4x^2}}$ .

4. 椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  所围成的平面图形的面积为  $\underline{2\pi}$ .

5.  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{1}$ .

6. 微分方程  $yy'' + 2y'^2 = 0$  的通解为  $\underline{y^3 = C_1x + C_2}$ .

7. 微分方程  $y'' - y' - 2y = 0$  的通解为  $\underline{y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}}$ .

三、(本题满分 8 分) 计算不定积分  $\int x \cos 3x dx$ .

**[解]** 原式  $= \frac{1}{3} \int x d \sin 3x = \frac{1}{3} [x \sin 3x - \int \sin 3x dx] = \frac{1}{3} [x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x d 3x]$   
 $= \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$ .

四、(本题满分 8 分) 计算定积分  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$ .

**[解]** 原式  $= \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 (1 - \frac{1}{x^2+1}) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$   
 $= x \Big|_0^1 - \arctan x \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$ .

五、(本题满分 8 分) 计算定积分  $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$ .

**[解]** 令  $\sqrt{2x+1} = t$ , 得  $x = \frac{1}{2}(t^2-1)$ ,  $dx = t dt$ , 当  $x=0$  时,  $t=1$ ; 当  $x=4$  时,  $t=3$

从而原式  $= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{t^2+3}{t} \cdot t dt = \frac{1}{2} \int_1^3 (t^2+3) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{t^3}{3} + 3t \right) \Big|_1^3 = \frac{22}{3}$ .

六、(本题满分 8 分) 求微分方程  $y' - y = 2e^{2x}$  满足初始条件  $y(0) = 1$  的特解.

**[解]** 由一阶线性方程通解公式

$$y = e^{-\int -dx} \left( \int 2e^{2x} e^{\int -dx} dx + C \right) = e^x (2e^x + C)$$

将  $y(0) = 1$  代入上式中即得  $C = -1$

从而满足条件的特解为  $f(x) = e^x (2e^x - 1)$ .

七、(本题满分 8 分) 求微分方程  $y'' + 6y' + 13y = 0$  的通解.

【解】所给方程的特征方程为  $r^2 + 6r + 13 = 0$ , 其根为  $r_1 = -3 + 2i$ ,  $r_2 = -3 - 2i$  是一对

共轭复根, 因此所求通解为  $y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ .

八、(本题满分 8 分) 求由曲线  $y = \ln x$  及直线  $x = 1$ ,  $x = e$  以及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

$$\begin{aligned} \text{【解】依题意 } V &= \pi \int_1^e \ln^2 x \, dx = \pi \left[ x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e x \, d \ln^2 x = \pi \left[ x \ln^2 x \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x \, dx \\ &= \pi \left[ e - 2(x \ln x) \right]_1^e - \int_1^e dx = \pi [e - 2(e - (e - 1))] = \pi(e - 2). \end{aligned}$$

九、(本题满分 10 分) 将一直角边长为  $a$  的等腰直角三角形薄片垂直放入水中, 其中一条直角边与水面齐平, 求此薄片一侧所受的水压力 (已知水的密度为  $\rho$ ).

【解】在如图所示坐标系下, 取典型小区间  $[x, x + dx]$ , 此区间上对应的小片所受的水压力的近似值, 即压力元素为

$$dF = \rho g x(a - x) dx$$

从而整个薄片一侧所受水压力

$$F = \int_0^a \rho g x(a - x) dx = \rho g \int_0^a x(a - x) dx = \rho g \left( \frac{a}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^a = \frac{1}{6} \rho g a^3.$$