安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《 高等数学 A（一） 》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 院/系＿＿＿＿

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列命题中错误的是（　　）.

（A）若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$有界

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，则当$n$充分大时，$a_n>\dfrac{1}{2}$

（C）数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$ $\{a_{2n}\}$、$\{a_{2n-1}\}$均收敛，且收敛于同一值

（D）数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$

2. 函数$f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$有（　　）个第一类间断点.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

3. 设函数$y=f(x)$有$f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当$\Delta x\to 0$时，$f(x)$在$x=x_0$处增量Δy是（　　）.

（A）与Δx同阶的无穷小　　（B）与Δx等价的无穷小

（C）比Δx高阶的无穷小　　（D）比Δx低阶的无穷小

4. 设函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，则$f(x)$在(a,b)内（　　）.

（A）有界　　（B）无界　　（C）存在最值　　（D）不一定有界

5. 设函数 $f(x)$在$x=0$ 处连续，且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则下列结论正确的是（　　）.

（A） $f(0)=0$，$f'(0)=1$　　（B） $f(0)=0$，$f'(0)$不一定存在

（C） $f(0)=1$，$f'(0)=1$　　（D） $f(0)=1$，$f'(0)$不一定存在

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}(\sin x+\cos x)=$________.

7. 若$x\to 0$时，$\sqrt{1+ax^2}-1$与$1-\cos x$是等价无穷小，则$a=$______.

8．若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{2x}}{\arcsin x}, x>0\\ ae^{x}, \quad x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______ .

9．若函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^{3}+t^{2}\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$______ .

10．若函数 $y=f(\ln x)e^{x}$，则微分 $dy=$______ .

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^{2}}+\dfrac{1}{(n+2)^{2}}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^{2}}\right)$.

12．求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^{2}\ln(1+x)}$.

13．求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}}{x^{2}-1}\right)^{x^{2}}$.

14．已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^{2}+bx+1}\right)=2$，求常数 $a,\ b$ 的值.

15．设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 确定，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

16．设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^{2}}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明方程 $2^{x}+\sin x=2$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 内至少有一个根.

18．设数列 $\left\{a_{n}\right\}$ 满足 $a_{1}=1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{a_{n}}{1+a_{n}}$，$(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\left\{a_{n}\right\}$ 收敛.

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期中考试试题参考答案

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2．B　　3．A　　4．D　　5．B

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．0　　7．1　　8．-2　　9．2　　10．$e^{x}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)\right]dx$

三．计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：$\frac{n}{(2n)^2}\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{n}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(2n)^2}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}=0$，由夹逼定理知：

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2})=0$

12．解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x\left(1-\cos x\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$

13．解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{\left(x^2-1\right)\cdot\frac{x^2}{x^2-1}}$

其中，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1$，故原式$=e^1=e$

14．解：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=2$　　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=0$　　$a=9$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-bx-1}{3x+\sqrt{9x^2+bx+1}}-\frac{b}{6}=2\ \Rightarrow\ b=-12$

15．解：方程$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两边同时对x求导，有

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{1}{y-x}(y'-1)=1$$

令$x=0,y=1$带入上式，得$y'(0)=1$，故切线方程$y=x+1$

16．解：当$x\neq 0$时，$f^{'}\left(x\right)=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}$，

$$f^{'}\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}f^{'}\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right]=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

故$f'(x)$在$x=0$处连续.

五．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明：令$f(x)=2^x+\sin x-2$，显然$f(x)$在$[0,1]$上连续，且

$f(0)=-1<0$，$f(1)=\sin 1>0$，

由零点定理知，至少存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=0$，故

方程$2^x+\sin x=2$在区间$\left(0,1\right)$内至少有一个根.

18．证明：显然$a_n>0$，$(n=1,2,\cdots)$，$a_2-a_1=\frac{a_1}{1+a_1}>0$，即 $a_2>a_1$，

设$a_n>a_{n-1}$，则$a_{n+1}-a_n=(1+\frac{a_n}{1+a_n})-(1+\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}})=\frac{a_n-a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}>0$，

即 $a_{n+1}>a_n$，故$\{a_n\}$单调增加；

因为$a_n>0$，所以 $a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n}<2$，故数列$\{a_n\}$有上界；

由单调有界定理，数列$\left\{a_n\right\}$收敛.