

2023 级大统转专业试卷

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 2n + 1} + \frac{2}{n^2 + 2n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 2n + n} \right).$

2. 交换积分次序 $\int_{\pi/6}^{\pi/2} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy.$

3. $z = \arctan \frac{x-y}{x+y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}.$

4. a_n 周期为 2, 函数 $f(x) = 1 - x$ ($0 \leq x \leq 1$), 又 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}.$

5. 求 $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿 $\vec{l}(2, -2, 1)$ 的方向导数.

6. $f(x) = \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}$, 则 ().

A. $f(x)$ 连续 B. $x = -1$ 为间断点 C. $x = 0$ 为间断点 D. $x = 1$ 为间断点

7. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n+j)}.$

8. 闭域套相关, 题目忘了.

9. 下列正确的是 ().

①若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

②若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2024}$ 收敛.

③若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

④若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

A. ①②

B. ②③

C. ②④

D. ①③

10. 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则下列选项中错误的是 ().

A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.

B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.

C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

11. 试确定 a 的值, 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^{3/x})}{\ln(1 + e^{1/x})} + a[x]$ 存在.

12. 记不太清了. $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 二阶可导, $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 由 $\begin{cases} f(ux, v - y) = 0 \\ g(\text{不记得了}) = 0 \end{cases}$

所确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

13. D 是 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$, $y \geq x$ 确定的区域, 求 $\iint_D (y-x) dx dy$.

14. $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 求 $\iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dV$.

15. $L: 4x^2 + y^2 = 4$, 质点 (x, y) 沿 L 顺时针作功, 且 $\vec{F} = (y+3x)\vec{i} + (2y-x)\vec{j}$, 求所作的功.

16. $f_n(x) = e^{-nx} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 求收敛域及和函数.

17. 若 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 问:

① $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处极限存在吗?

② $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续吗? 偏导数是否存在?

③ $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微吗?