安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

得 分	

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2018}\right)^n =$________.

2. 设函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=\cos(x+y)$ 确定的隐函数，则微分 $\mathrm{d}y=$________.

4. 曲线 $C: y=3x^5+5x^4-2x+4$ 的拐点坐标为________.

5. 广义积分 $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=$________.

得 分	

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 广义积分 $\int_1^{+\infty} x^p \mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是 （ ）

A. $-1<p<0$; B. $p>-1$; C. $0<p<1$; D. $p<-1$.

7. 已知极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^k}=c$，其中 k,c 均为实常数，且 $c\neq 0$. 则 （ ）

A. $k=4, c=-\frac{1}{24}$; B. $k=4, c=\frac{1}{24}$;

C. $k=5, c=-\frac{1}{120}$; D. $k=5, c=\frac{1}{120}$.

8. 设函数$F(x)$是$f(x)$的一个原函数．则下列说法正确的是 (　　)

A．$F(x)$是偶函数当且仅当$f(x)$是奇函数；

B．$F(x)$是奇函数当且仅当$f(x)$是偶函数；

C．$F(x)$是周期函数当且仅当$f(x)$是周期函数；

D．$F(x)$是单调函数当且仅当$f(x)$是单调函数．

9. 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$（$0<a<b$）上有连续导数，且$f(x)>0$．则由曲线$C: y=f(x)$与直线$x=a, x=b$以及x轴围成图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为 (　　)

A．$2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$；　　B．$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$；

C．$\pi\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x$；　　D．$2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$．

10. 设函数$f(x)=\begin{cases} x^5\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 则下列说法正确的是 (　　)

A．$f(x)$在$x=0$处有2阶导数，但$f''(x)$在$x=0$处不连续；

B．$f(x)$在$x=0$处有2阶导数，且$f''(x)$在$x=0$处连续；

C．$f(x)$在$x=0$处有3阶导数，但$f'''(x)$在$x=0$处不连续；

D．$f(x)$在$x=0$处有3阶导数，且$f'''(x)$在$x=0$处连续．

三、计算题（本题共六小题，每小题 7 分，共 42 分）

得　分	

11．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t}{\tan x - x}$.

12. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\sin\dfrac{k\pi}{n}$.

13. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$（$t$为参数）. 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

14. 求不定积分$I=\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x$.

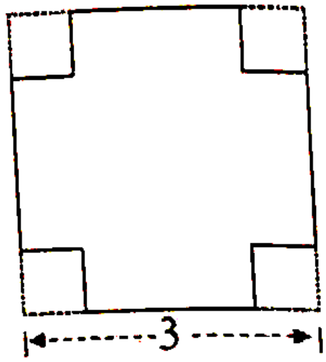
15. 求定积分$\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x} \mathrm{d}x$.

16. 求初值问题$\begin{cases} xy' + y = \cos x, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$ 的解.

四、应用题（本题共两小题，每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

17. 设有边长为3的正方形纸板，将其四角剪去相等的小正方形，然后叠成盒子．问小正方形的边长为多少时，叠成的盒子的体积为最大？



18. 设某钢丝段形状为 $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t \end{cases}$ $(t \in [0, 2\pi])$．求该钢丝段的长度．

五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

得　分	

19. 利用 Rolle（罗尔）定理证明 Lagrange（拉格朗日）中值定理：设$f(x)$满足 (i) 在$[a,b]$上连续，(ii) 在(a,b)内可导． 则至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

20. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对任意$x\in[a,b]$，$f(x)>0$. 证明：存在唯一的$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^{\xi}f(t)\mathrm{d}t=\int_{\xi}^{b}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）

参考答案与评分标准

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、$\underline{e^{2019}}$； 2、$\underline{\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$； 3、$\underline{-\dfrac{\sin(x+y)\mathrm{d}x}{1+\sin(x+y)}}$； 4、$\underline{(-1,8)}$； 5、$\underline{\dfrac{\pi}{3}}$.

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、D； 7、D； 8、A； 9、A； 10、B.

三、计算题（本题共六小题，每小题 7 分，共 42 分）

11. 解. 令 $x-t=u$，则

$$\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t=\int_x^0 \sin u^2(-\mathrm{d}u)=\int_0^x \sin u^2\mathrm{d}u \cdots\cdots\cdots\text{（3 分）}$$

故原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin u^2\,\mathrm{d}u}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\sec^2 x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\tan^2 x}=1\cdots\cdots\cdots$（7 分）

12. 解.

原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{k}{n}\sin(\dfrac{k}{n}\pi)\ =\int_0^1 x\sin(\pi x)\mathrm{d}x\cdots\cdots\cdots$（4 分）

$=-\dfrac{1}{\pi}(x\cos\pi x|_0^1-\int_0^1\cos\pi x\mathrm{d}x)=\dfrac{1}{\pi}.\cdots\cdots\cdots$（7 分）

13. 解. 由 $x'(t)=\cos t, y'(t)=t\cos t$ 可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t.\cdots\cdots\cdots$（4 分）

进而 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{\cos t}$，故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.\quad\cdots\cdots\cdots$（7 分）

14. 解. $I=\int\sec x\mathrm{d}(\tan x)=\sec x\tan x-\int\tan x\sec x\tan x\mathrm{d}x\cdots\cdots\cdots$（2 分）

$=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\sec x\tan x-I+\int\sec x\mathrm{d}x$

$=\sec x\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|$

故 $I=\dfrac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C\ \cdots\cdots\cdots$（7 分）

15. 解. 令$x=t^2, x|_0^1 \iff t|_0^1, \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，则

原式$=\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}\cdot(2t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t$..（3 分）

$=2\int_0^1 \frac{t^4-1+1}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t^2-1+\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$

$=2\left(\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$. ....（7 分）

16. 解. 原方程可写成 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\cos x}{x}$.

故原方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}(\sin x+C).$$ ....（5 分）

又因$y(\frac{\pi}{2})=1$， 由此可得$C=\frac{\pi}{2}-1$，故原初值问题的解为

$$y=\frac{1}{x}(\sin x+\frac{\pi}{2}-1).$$ ....（7 分）

四、应用题（本题共两小题，每小题 8 分，共 16 分）

17. 解. 设小正方形的边长为x，则叠成的盒子的体积为

$$V(x)=x(3-2x)^2,\ 0<x<\frac{3}{2}.$$ ....（3 分）

$V'(x)=3(3-2x)(1-2x)$，得驻点$x=\frac{3}{2}$（舍去），$x=\frac{1}{2}$，

又当$0<x<\frac{1}{2}$时，$V'(x)>0$，当$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$时，$V'(x)<0$，

所以$V(x)$在$x=\frac{1}{2}$时取得最大值，

即小正方形的边长为$\frac{1}{2}$时， 叠成的盒子体积最大. ....（8 分）

18. 解. 该钢丝段的长度为

$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t$ ....（4 分）

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t=\sqrt{3}\left(e^{2\pi}-1\right)$. ....（8 分）

五、证明题（本题共两小题，每小题6分，共12分）

19. 证明. 构造辅助函数$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$…………………………（3分）

则$F(a)=F(b)=f(a)$，且$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导.

由 Rolle 定理可知，存在$\xi\in(a,b)$使得 $F'(\xi)=0$，

即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$……………………………………………………………（6分）

20. 证明. 令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t.$

$$F(a)=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,\ F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0.$$

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续，由零点定理可知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F(\xi)=0$.

即$\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=\int_\xi^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t.$ ……………………………………………………（3分）

又因为$F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}>0$，所以$F(x)$为严格单调递增函数，故上述$\xi\in(a,b)$是唯一的. ……………………………………………………………………（6分）