设 $X_1, X_2 \cdots$ 为一列随机变量 如果存在一常数列 $a_1, a_2 \cdots$ 使得对任意常数 $\varepsilon>0$ 都有

$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - a_n| < \varepsilon)$

第四章 大数定律与中心极限定理

$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - a_n| \geq \varepsilon) = 0$

习题 4.1 大数定律

则称随机变量列 $\{X_n\}$ 服从大数定律

1. 设随机变量 X 的方差为 2，根据切比雪夫不等式估计 $P(|X-EX|\geq 2) \leq$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

$P(|X-EX|\geq\varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

设 $X_1 \cdots$ 为一列随机变量

切比雪夫 $\{X_n\}$ 为独立随机变量列 若存在常数 C，使得 $DX_k \leq C$ $k=1,2\cdots$ 则 $\{X_n\}$ 服从大数定律

大数定律

$P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}EX_k|\geq\varepsilon) = P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k)|\geq\varepsilon) \leq \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k)}{\varepsilon^2} = \frac{D(\sum_{k=1}^{n}}{n^2\varepsilon^2}$

2. 设随机变量 X,Y 的数学期望分别为 $-2, 2$，方差分别为 $1, 4$，$\rho_{XY}=-0.5$，则由切比雪夫不等式 $P(|X+Y|\geq 6) \leq$ ~~$\frac{1}{4}$~~ ~~$\frac{1}{48}$~~ $\frac{1}{12}$

$P(|X+Y|\geq 6) \leq \frac{3}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$\left(P(|X+Y-0|\geq 6) \leq \frac{D(X+Y)}{6^2\times 2^2} = \frac{DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y)}{36\times 4} = \frac{1+4-2\times 0.5\times 1\times 2}{144} = \frac{3}{144} = \frac{1}{48}\right)$

贝努利大数定律：设 μ_n 表示 n 重贝努利试验中事件 A 出现的次数 $P(A)=p>0$ 则对任意 $\varepsilon>0$

$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\mu_n}{n} - p| < \varepsilon) = 1$

辛钦大数定律：设 $\{X_n\}$ 独立同分布且 $EX_n = a$ 则有

$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - a| < \varepsilon) = 1$

即 $\{X_n\}$ 服从大数定律

$EX = \frac{1}{2}$ $DX = \frac{1}{4}$

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，$X_i \sim E(2)$，则 $n\to\infty$ 时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\underline{\frac{1}{2}}$.

$EY_n = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2) = EX_1^2 = (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P($

（德莫佛—拉普拉斯定理）设 μ_n 是 n 重贝努力试验中事件A出现次数 $P(A)=p>0$ 则对任意实数 x 有

院系　　　　班级　　　　姓名　　　　学号

$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

习题 4.2　中心极限定理

1. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，由列维—林德伯格中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1,\cdots,X_n$（ C ）.

A. 有相同的数学期望　　　　B.有相同的方差

C. 服从同一指数分布　　　　~~D.服从同一离散型分布~~ 期望和未必存在

（林德伯格—列维定理）：设 $\{X_n\}$ 是一列独立同分布的随机变量列，且 $EX_n=a$ $DX_n=\delta^2$ 则 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理 那对任意实数 x 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-na}{\sqrt{n}\,\delta}\le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

2. 对敌阵地进行 100 次炮击，每次命中炮弹数的数学期望为 2，均方差 标准差 为1.5，试用中心极限定理计算这 100 次炮击中，有 180 颗到 220 颗炮弹命中的概率.

解：设命中 X 颗炮弹则有　　EX=2．DX=1.5 则

$$P(180\le\sum_{i=1}^{n}X\le 220)=P(-20\le\sum_{i=1}^{n}X_i-200\le 20)$$

$$=P(180-100EX\le\sum_{i=1}^{n}X_i-nEX\le 220-100EX)$$

$$=P(-20\le\sum_{i=1}^{n}X_i-200\le 20)$$

$$=P\left(\frac{-20}{10\times1.5}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-200}{10\times1.5}\le\frac{20}{15}\right)=\Phi(\tfrac{4}{3})-\Phi(-\tfrac{4}{3})$$

$$=2\Phi(\tfrac{4}{3})-1$$

$$=2\times0.9082-1$$

$$=0.8164$$

3. 某单位有 200 个分机，在同一时刻，每台分机以 0.05 概率使用外线，且每台分机使用外线是相互独立，那么该单位应装多少条外线，才能保证每台分机以 90% 的概率能使用外线?（试用中心极限定理计算）

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\right|\le \cancel{200}\right)\ge 90\%$

$=\mu_n\ge$

设使用外线分机台数为 X 则有　$X\sim B(200,0.05)$ 要确定应装几条线

$$P(0\le X\le N)=\Phi\left(\frac{N-0.05\times200}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}\right)-\Phi\left(\frac{-0.05\times200}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right)-\Phi(3.2)$$

$$=\phi\left(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right)-0.0007\ge0.9$$

$$\Phi\left(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right)\ge0.9007\quad \frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\ge1.28$$

$N\ge13.9$

取 $N=14$

np9

自测题

$P(450 \le X \le 550) = P(|X-500| \le 50) \ge 1-\frac{DX}{50^2}$

一、填空题（每题4分，共20分）

1．在每次实验中事件 A 发生的概率为0.5，利用切比雪夫不等式，则在1000次独立试验中事件 A 发生的次数在450到550之间的概率 ___0.9___．

2．设 $X \sim U(-1,b)$，由切比雪夫不等式有 $P(|X-1|<\varepsilon) \ge \frac{2}{3}$，则 $b=$ ___3___，$\varepsilon=$ ___2___．

$EX=1 \quad DX=\frac{16}{12}=\frac{4}{3} \quad 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}=\frac{2}{3} \quad \frac{DX}{\varepsilon^2}=\frac{1}{3}$

3．设随机变量 X 的数学期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式有 $P(|X-\mu| \ge 3\sigma) \le$ ___$\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}$___

4．一加法器同时收到20个噪声电压 $V_i(i=1,2,\cdots,20)$，设它们相互独立且都服从 $(0,10)$ 上的均匀分布，则 $P(\sum_{i=1}^{20} V_i > 105)=$ ___$1-\Phi(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}})$___

$DX=\frac{10^2}{12}=\frac{25}{3}$

$P(\sum_{i=1}^{20} V_i - nEX > 105-100) = P(\frac{\sum V_i - 100}{\sqrt{nDX}} > \frac{5}{\sqrt{nDX}})$

$=0.348$

5．设 $X_1, X_2, \cdots$ 为相互独立的随机变量序列，且 $X_i(i=1,2,\cdots)$ 服从参数为 λ 的泊松分布，则 $P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x)=$ ___$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$___

二、选择题（每题4分，共20分）

$P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{n}{\sqrt{n}\sigma}) = P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{\sqrt{n}}{\sigma})$

$=\Phi(\frac{1}{\sigma})$

1．设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布且 $EX_i=0$，则 $\lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^{n} X_i < n)=$（ D ）．

大数定律

$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i < 1) = \lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum X_i - E(\frac{1}{n}\sum X_i)| < 1) = 1$

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

2．设 $X_1, X_2, \cdots$ 为相互独立的随机变量序列，且 $X_i(i=1,2,\cdots)$ 服从参数为 λ 的指数分布，则必有（ D ）．

$EX=\frac{1}{\lambda} \quad DX=\frac{1}{\lambda^2}$

A. $\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{n\lambda} \le x)=\Phi(x)$　　B. $\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n}\lambda} \le x)=\Phi(x)$

C. $\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n}} \le x)=\Phi(x)$　　D. $\lim_{n\to\infty} P(\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x)=\Phi(x)$

3．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布，其分布函数为 $F(x)=a+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{b}, b\neq 0$，则辛钦大数定律对此序列（ C ）．

$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{b})^2}$

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{b}{\pi(b^2+x^2)}dx = \frac{b}{\pi(b^2+x^2)}$

$\frac{b}{2\pi}\ln(b^2+x^2)$

A. 适用　　B. 当常数 a,b 取适当的数值时适用　　C. 不适用　　D. 无法判断

4．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$，则根据~~列维－林德伯格~~中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（ C ）．

同分布，期望方差同时存在

A. 有相同的数学期望　　B. 有相同的方差　　C. 服从同一指数分布　　D. 服从同一离散分布

5．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，根据辛钦大数定律，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛其数学期望，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$（ C ）．

期望存在

A. 有相同的数学期望　　B. 服从同一离散分布　　C. 服从同一泊松分布　　D. 服从同一连续分布

三、解答题（每题10分，共60分）

1．从发芽率为0.95的一批种子里随机取400粒，试求其不发芽的种子不多于25粒的概率？

设 X 表不发芽的种子数 则 $B\sim$

$X \sim B(400, 0.05)$

$EX=np=400\times0.05=20$ 　　$X\sim(20, 19)$

$DX=np(1-p)=400\times0.05\times0.95=19$

$P(X\le 25)=P(\frac{X-20}{\sqrt{19}} \le \frac{25-20}{\sqrt{19}})=\Phi(\frac{5}{\sqrt{19}})=0.8749$

2．在0，1，....，9十个数字中，每次任意取出一个，有放回地抽取10000次，试求其中数字5出现的次数小于968的概率近似值．

设 X 表示抽中5次数 则 $X\sim B(10000, 0.1)$

$EX=1000$ 　　$X\sim N(1000, 900)$

$DX=900$

$P(X<968)=P(\frac{X-1000}{30} < \frac{968-1000}{30})=\Phi(-\frac{16}{15})\approx 0.142$

3. 某宿舍有学生500人，每人在傍晚大约有10%的时间要占用一个水龙头，设每人需要水龙头是相互独立的，问该宿舍至少需要安装多少个水龙头，才能以95%以上的概率保证用水需要。

~~设X表示需要水龙头个数~~

~~$X \sim B(500, 0.1)$~~

设有X个学生使用水龙头 N表示需要安装水龙头个数

$X \sim B(500, 0.1)$ $EX=50$ $DX=45$

$X \sim N(50, 45)$

则 $P(X \le N) = P\left(\frac{X-50}{\sqrt{45}} < \frac{N-50}{\sqrt{45}}\right) \ge 0.95 = \Phi(1.65)$

则有 $\frac{N-50}{\sqrt{45}} = 1.65$

解 $N \ge 61.07$

$N=62$ 个

4. 假设测量的随机误差 $X \sim N(0, 10^2)$，试求100次独立重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于19.6的概率 α，并用泊松分布求出 α 的近似值。

解 $EX=0$，$DX=10^2$

则 $p = P(|X| > 19.6) = P\left(\frac{|X|}{10} > 1.96\right) = 1 - P\left(\frac{|X|}{10} \le 1.96\right)$

$= 0.05$

$\alpha = 1 - \sum_{i=0}^{2} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ $\lambda = np = 100 \times 0.05 = 5$

$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $P(X)$

$\alpha = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$

$= 1 - (e^{-\lambda} + 5e^{-\lambda} + \frac{25}{2} e^{-\lambda})$

$= 1 - \frac{37}{2} e^{-5}$

$= 0.8753$

5. 在每次试验中，事件A发生的概率为0.75，利用切比雪夫不等式，求：n需要多大时，才能使得在n次重复独立试验中，事件A出现的频率在0.74~0.76之间的概率至少为0.9。

解 可得 $EX = 0.75n$ $DX = 0.75 \times 0.25 \times n = 0.1875n$

$P\left(0.74 < \frac{X}{n} < 0.76\right) = P(0.74n < X < 0.76n)$

$= P(|X - 0.75n| < 0.01n)$

由切比雪夫 $\ge 1 - \frac{0.1875n}{(0.01n)^2} = 0.9$

则 $n = 18750$

6. 某家保险公司有10000人参加人寿保险，每人每年付12元保险费，在一年内一个人死亡的概率为0.006，死亡时，其家属可向保险公司领到1000元，问：

（1）保险公司亏本的概率约有多大？

（2）保险公式每年的利润不少于40000元，60000元的概率各多大？

(1) X表示死亡人数 $X \sim (10000, 0.006)$

$EX = 60$ $DX = 59.64$

利润 $y = 10000 \times 12 - 1000X$

当 $y < 0$ 时 即 $X > 120$

则有 $P(X > 120) = 1 - P(X < 120) = 1 - P\left(\frac{X-60}{\sqrt{59.64}} < \frac{120-60}{\sqrt{59.64}}\right) = 1 - \Phi(7.77)$

≈ 0

(2) $y \ge 40000$ 则有 $X \le 80$

$P(X \le 80) = P(X \le 80) = P\left(\frac{X-60}{\sqrt{59.64}} \le \frac{80-60}{\sqrt{59.64}}\right) \approx 0.995$

$y \ge 60000$ 则有 $X \le 60$

$P(X \le 60) = 0.5$

第五章 数理统计的基本概念

1. 设总体 X 的期望 $EX=\mu$ 已知，方差 $DX=\sigma^2$ 未知，$X_1,\cdots,X_n$ 为其一个样本，试判别

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$\frac{1}{2}(X_1+X_2)-\mu$，$\max(X_1,\cdots,X_n)$，

样本 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的函数 $f(X_1,\cdots,X_n)$ 称为统计量 其中 $f(X_1,\cdots,X_n)$ 不含未知参数

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 之中哪些是统计量，哪些不是统计量？为什么？

2. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则

（1）$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从自由度为 <u>n</u> 的 χ^2 分布；

（2）$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从自由度为 <u>n-1</u> 的 χ^2 分布.

3. 设 $X_1,\cdots,X_4$ 来自总体 $N(0,16)$ 的样本，

（1）求 $P(0\le\overline{X}\le2)$；（2）令 $Y=X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2$，求 EY.

$\overline{X}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i$

$\overline{X}\sim N(0,4)$

$P(0\le\overline{X}\le2)$

$=P(\frac{0-0}{2}\le\frac{\overline{X}-0}{2}\le\frac{2-0}{2})$

$=\Phi(1)-\Phi(0)$

$=0.8413-0.5$

$=0.3413$

$X_i\sim N(0,16)$

$\frac{X_i}{4}\sim N(0,1)$

$\frac{X_1^2}{16}+\frac{X_2^2}{16}+\frac{X_3^2}{16}+\frac{X_4^2}{16}\sim\chi^2(4)$

则 $\frac{1}{16}Y\sim\chi^2(4)$

$E(\frac{1}{16}Y)=4$

$EY=64$

4. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则：

（1）$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}\sim$ <u>$\cancel{t}(2,2)$</u> 分布；

（2）$\frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}}\sim$ <u>$t(n-1)$</u> 分布；

（3）$\frac{X_2^2+\cdots+X_n^2}{(n-1)X_1^2}\sim$ <u>$F(n-1,1)$</u> 分布.

5. 从总体 $N(0,\sigma^2)$ 中抽取一容量为6的样本 $X_1,\cdots,X_6$，试确定常数 c,d，使

$$Y=c(X_1+X_2+X_3)^2+d(X_4+X_5+X_6)^2$$

服从 χ^2 分布，并求其自由度.

解：$X_1+X_2+X_3\sim N(0,3\sigma^2)$

$\therefore \frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\sim N(0,1)$ $\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$

同理 $\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}\sigma}\sim N(0,1)$ $\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$

则 $c=d=\frac{1}{3\sigma^2}$ 自由度为2

6. X 与 Y 均服从 $N(0,1)$ 分布，则（ C ）.

A. $X+Y$ 服从正态分布　　B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

C. X^2 和 Y^2 均服从 χ^2 分布　　D. X^2/Y^2 服从 F 分布

7. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其一个样本．求 $P((\overline{X}-\mu)^2\le\frac{\sigma^2}{n})$.

$\because X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$　　$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$P((\bar{X}-\mu)^2\le\frac{\sigma^2}{n})=$

$=P(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\bar{X}-\mu\le\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$=P(|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}|\le 1)$

$=\Phi(1)-\Phi(-1)$

$=2\Phi(1)-1$

$=0.6826$

院系　　班级　　姓名　　学号

自测题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $X\sim N(4,4^2)$，$\overline{X}$ 为 10 个样本的均值，则 $\frac{\overline{X}-4}{4/\sqrt{10}}$ $\sim N(0,1)$

2. 设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X$ 与 Y 相互独立，其样本容量为 n_1 与 n_2，样本方差分别为 s_1^2 与 s_2^2，则统计量 $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ 服从 $F(n_1-1,n_2-1)$ 的条件是 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

3. 设总体 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,9)$，$\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}Y_i$，

其中 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{10}$ 分别来自总体 X 与 Y 的简单随机样本，则统计量 $\overline{X}-\overline{Y}$ 服从 正态 $N(0,1)$ 分布，$|\overline{X}-\overline{Y}|$ 的期望是 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 方差为 $1-\frac{2}{\pi}$

$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-Y_i)$

$E|\bar{X}-\bar{Y}|=$

4. 设一组观测值为 4,6,4,3,5,4,5,8,4，则样本均值为 4.78，样本方差为 2.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，

$Y_i=X_i-\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}X_j(i=1,2,\cdots,n+1)$，则 Y_i 服从 ~~$N(0,\frac{n(n+1)}{(n+1)^2})$~~ 分布. $N(0,\frac{n}{n+1}\sigma^2)$

$D(\frac{n}{n+1}X_i-\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}X_j)=(\frac{n}{n+1})^2DX_i+(\frac{n}{n+1})^2DX_2$

$=\frac{n^2+n}{(n+1)^2}=\frac{\quad}{n}$

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的随机样本，则下列结论正确的是（ C ）.

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布　　B. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布

C. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布　　D. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布

$\sigma^2=3$

2. X 服从正态分布，且 $EX=-1, EX^2=4$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从的分布为（ A ）.

A. $N(-1,\frac{3}{n})$　　B. $N(-1,\frac{4}{n})$　　C. $N(-\frac{1}{n},4)$　　D. $N(-\frac{1}{n},\frac{3}{n})$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$S_6^*=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(X_i-\overline{X})^2$，则

$\frac{10}{25}\sigma^4$

$D(S_6^2) =$ （ D ）.

A. $\frac{1}{3}\sigma^4$　　B. $\frac{1}{5}\sigma^4$　　C. $\frac{2}{5}\sigma^2$　　D. $\frac{2}{5}\sigma^4$

4. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\frac{Y}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 独立，$T = \frac{X-\mu}{\sqrt{Y}}\sqrt{n}$ 服从（ B

A. $t(n-1)$　　B. $t(n)$　　C. $N(0,1)$　　D. $F(1,n)$

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{10}$ 分别来自两个正态总体 $N(-1,4)$ 与 $N(2,5)$ 的样本，且相

$\frac{X+1}{2} \sim N(0,1)$

互独立，S_1^2 和 S_2^2 分别为两个样本的样本方差，则服从 $F(7,9)$ 的统计量是（ D ）.

A. $\frac{2S_1^2}{5S_2^2}$　　B. $\frac{4S_1^2}{5S_2^2}$　　C. $\frac{5S_1^2}{4S_2^2}$　　D. $\frac{5S_1^2}{4S_2^2}$

$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$

三、解答题（每题 10 分，共 60 分）

1. 某厂生产的灯泡的使用寿命 $X \sim N(2250, 250^2)$，现进行质量检查，方法如下：任意挑选若干个灯泡，如果这些灯泡的平均寿命超过 2200 小时，就认为该厂生产的灯泡的质量合格．若要使检查能通过的概率超过 0.997，问至少应检查多少只灯泡？

解：至少检查 n 个灯泡

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\overline{X} \sim (2250, \frac{250^2}{n})$

$P(\overline{X} > 2200) = 1 - P(\overline{X} \le 2200)$

$= 1 - P\left(\frac{\overline{X}-2250}{\frac{250}{\sqrt{n}}} < \frac{2200-2250}{\frac{250}{\sqrt{n}}}\right)$

$= 1 - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{5}) > 0.997$

$n \approx 189.06$　则 n 取 190

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 为来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本，求 $P(\sum_{i=1}^{6} X_i^2 > 6.54)$.

解：$X \sim N(0, 2^2)$

$\frac{X-0}{2} \sim N(0,1)$

$\therefore \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{6} X_i^2 \sim \chi^2(6)$

即 $P(\sum_{i=1}^{6} X_i^2 > 6.54) = P(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{6} X_i^2 > 1.635)$

则 χ^2分布表可知 $p = 0.95$

3. 某厂生产的灯泡的使用寿命 $X \sim N(2250, \sigma^2)$（单位：小时），抽取一容量为 16 的样本，得到 $\overline{X} = 2300, S = 1200$，求 $P(\overline{X} < 2300)$.

$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

则 $P(\overline{X} < 2300) = P\left(\frac{\overline{X}-2250}{\frac{1200}{\sqrt{16}}} < \frac{2300-2250}{\frac{1200}{\sqrt{16}}}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{\overline{X}-2250}{300} < \frac{50}{300}\right)$

$= 1 - P(t(15) \ge \frac{1}{6})$

$= 0.55$

$P(t(n) \ge t_\alpha(n)) = \alpha$

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 为来自参数 $\lambda = 3$ 的泊松总体的一个样本，试求：

（1）$\overline{X}$ 的数学期望和方差；　（2）S^2 的数学期望；　（3）$P(\overline{X} > 10)$.

(1) 解　$EX = 3$　$DX = 3$

$\overline{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$

$E\overline{X} = E(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i) = 3$

$D\overline{X} = \frac{3}{100}$

(2) $ES^2 = \sigma^2 = \frac{3}{100}$

(3) $P(\overline{X} > 10) = P\left(\frac{\overline{X}-3}{\frac{3}{100}} > \frac{10-3}{\frac{3}{100}}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{100(\overline{X}-3)}{3} \le \frac{700}{3}\right)$

≈ 0

5. 设总体 X 服从两点分布 $P(X=0)=1-p$，$P(X=1)=p$，其中 p 为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.（1）求出 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率分布；

（2）指出 $\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，X_1+X_2，$X_n^2-X_1^2$，$2(p+1)X_1X_2$，$\sum_{i=1}^{n}(X_i+p)^2$ 中哪些是统计量？哪些不是？

$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$　$P(X=n)=p^x(1-p)^{1-x}$

$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

$=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$

6. 设电子元件寿命（时数）X 服从参数 $\lambda=0.0015$ 的指数分布，今测试 6 个元件，并记下它们各自失效时间（单位：小时），试问：（1）至 800 小时没有一个元件失效的概率是多少？（2）至 3000 小时所有元件都失效的概率是多少？

(1) $P(X_i>800)=\int_{800}^{+\infty}0.0015e^{-0.0015x}dx=e^{-1.2}$

至800小时没有一个元件失效的概率为 $(e^{-1.2})^6=e^{-7.2}=0.0007$

$P(X_i<3000)=\int_0^{3000}0.0015e^{-0.0015x}dx=1-e^{-4.5}$

至3000小时所有元件都失效的概率为 $(1-e^{-4.5})^6=0.9351$

院系　　班级　　姓名　　学号

第六章 参数估计

习题 6.1 点估计

1. 已知总体 $X\sim E(\lambda)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的一个的样本，求 λ 的矩估计.

解：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$X\sim E(\lambda)$

$EX=\frac{1}{\lambda}$

$EX=\bar{X}$

$\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}$

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，σ^2 已知，$X_1,\cdots,X_n$ 为样本，求 μ 的矩估计量.

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$EX=\bar{X}$

$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

3. 设总体 $X\sim P(\lambda)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的一个样本，求 λ 的极大似然估计量.

解：$f(x_1,x_2\cdots x_n,\lambda)=\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}\cdots\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}e^{-\lambda}$

$=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}$

$\ln f(x_1,x_2\cdots x_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)-n\lambda$

$\frac{d\ln f(x_1,x_2\cdots x_n,\lambda)}{d\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n=0$

则 $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

Scanned by CamScanner

4. 设总体 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & (1-2\theta) \end{pmatrix}$ $\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 未知，来自 X 的样本值 3，1，3，0，3，1，2，3，求 θ 的矩估计值和最极大似然估计值。

矩估计 $EX = 0\times\theta^2 + 1\times 2\theta(1-\theta) + 2\times\theta^2 + 3\times(1-2\theta) = 3-4\theta$

$\bar{x} = \frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$

$EX = \bar{x}$ $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$

极大似然估计值

$L(\theta) = P(X_1=3, X_2=1, \cdots X_7=2, X_8=3) = \theta^2 \cdot (2\theta(1-\theta))^2 \cdot (\theta^2)^2 \cdot (1-2\theta)^4$

$= 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$

$\ln L(\theta) = \ln 4 + 8\ln\theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta)$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} + \frac{-2}{1-\theta} + \frac{4\times(-2)}{1-2\theta} = 0$ $\quad 3(1-\theta)(1-2\theta) - \theta(1-2\theta) - 4\theta(1-\theta) = 0$

$\hat{\theta} =$ $\quad 3 - 9\theta + 6\theta^2 - \theta + 2\theta^2 - 4\theta + 4\theta^2 = 0$

$12\theta^2 - 14\theta + 3 = 0$

$\theta = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4\times3\times12}}{2\times12}$

$\theta = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12}$

$\because 0<\theta<\frac{1}{2}$ $\therefore \theta = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 未知，σ^2 已知，$x_1, \cdots, x_n$ 为样本值，求 μ 的极大似然估计值。

解：$f(x_1 x_2 \cdots x_n, \mu) = \prod_{i=1}^{n} f(\mu, x_i)$

$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\ln f(x_1 x_2 \cdots x_n, \mu) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

$\frac{d\ln f(x_1 x_2 \cdots x_n, \mu)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$ $\quad \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$

6. 设总体 X 的概率密度函数 $f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1, \\ 0, & x \le 1. \end{cases}$ 其中未知参数 $\beta>1$，$X_1, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求 β 的极大似然估计量。

解：$x>1$ 有 $f(x_1 x_2 \cdots x_n, \beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta}{x_i^{\beta+1}}$

$= \frac{\beta^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta+1}}$

$\ln f(x_1 x_2 \cdots x_n, \beta) = n\ln\beta - (\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{d\ln f(x_1 \cdots x_n, \beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

习题 6.2 估计量的评选标准

1. 设 $X_1, \cdots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，判断 $\bar{X}-S^2$ 是否为 np^2 的无偏估计？

$EX = np \quad DX = npq$

$E(\bar{X}-S^2) = E\bar{X} - ES^2 = np - np(1-p) = np^2$

$\therefore \bar{X}-S^2$ 是 np^2 的无偏估计

2. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本（其中 σ^2 未知，$n>1$），选择 C 使 $T = C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

$EX = \mu, \quad DX = \sigma^2$

$ET = E\left(C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right) = C\,E\left(\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right) = C\sum_{i=1}^{n-1} E\left((X_{i+1}-X_i)^2\right)$

$= C\sum_{i=1}^{n-1}[D(X_{i+1}-X_i) + E^2(X_{i+1}-X_i)] = C\sum_{i=1}^{n-1} D(X_{i+1}-X_i)$

$= 2C\sum_{i=1}^{n-1}\sigma^2 = 2C(n-1)\sigma^2 = \sigma^2$

则 $C = \frac{1}{2(n-1)}$

3. 设 X_1, X_2 为来自 $N(\mu, 1)$ 的样本，则下列三个 μ 的无偏估计量：

$\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2$，$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$，$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$，

中哪一个最有效？

$D(\hat{\mu}_1) = D(\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2) = \frac{4}{9}DX_1 + \frac{1}{9}DX_2 = \frac{5}{9}$

$D(\hat{\mu}_2) = D(\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2) = \frac{1}{16}DX_1 + \frac{9}{16}DX_2 = \frac{5}{8}$

$D(\hat{\mu}_3) = D(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2) = \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{4}DX_2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \hat{\mu}_3$ 最小最有效

习题 6.3　区间估计

1. 设正态总体 X 的标准差为 1，由来自 X 的简单随机样本建立的数学期望 μ 的 0.95 置信区间，则当样本容量为 25 时，置信区间的长度 $L=$ 0.8238 为使置信区间的长度不大于 0.5，应取样本容量 $n \geq$ 67.8648

68

2. 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\bar{x}=20(cm)$，样本标准差 $S=1(cm)$，则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是（ C ）.

A. $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$.　　B. $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.

C. $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$.　　D. $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.

3. 设从总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中分别抽取容量为 $n_1=10$，$n_2=15$ 的独立样本，可计算得 $\bar{x}=82$，$S_x^2=56$，$\bar{y}=76$，$S_y^2=52.4$.

（1）若已知 $\sigma_1^2=64$，$\sigma_2^2=49$，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间；

（2）若已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间；

（3）求 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间.

(1) $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$　σ_1, σ_2 已知

$\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$

置信区间 $[\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$

$\approx [-0.0939, 12.09393]$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知　$t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

置信区间 $[\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$,

$\bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]$

$=(-0.2063, 12.2063)$

(3) $\frac{\frac{S_x^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_y^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1-1,n_2-1)$

$\therefore (\frac{S_x^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)S_y^2}, \frac{S_x^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)S_y^2})$

$=[0.3359, 4.07933]$

自 测 题

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 若一个样本的观测值为 0，0，1，1，0，1，则总体均值的矩估计值为 $\frac{1}{2}$

2. 总体未知参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$ 就是 似然 函数的最大值点.

3. 当 σ^2 已知时，正态总体均值 μ 的 90% 的置信区间的长度为 $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}=2u_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

4. 设由总体 $X \sim F(x,\theta)$（θ 为未知参数）的样本观测值求得 $P(35.5<\theta<45.5)=0.9$，则称 (35.5, 45.5) 为 θ 的一个置信度为 0.9 的置信区间.

5. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，若 σ^2 已知，总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar{X}-\lambda\frac{6}{\sqrt{n}},\bar{X}+\lambda\frac{6}{\sqrt{n}}\right)$，则 $\lambda=$ $\frac{\sigma u_{\alpha/2}}{6}$.

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1、设 0，1，0，1，1 为来自分布总体 $B(1,p)$ 的样本观测值，则 p 的矩估计值为（ C ）.

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

2、设 0，2，2，3，3 为来自均匀分布总体 $U(0,\theta)$ 的样本观测值，则 θ 的矩估计值为（ D ）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3、无论 σ^2 是否已知，正态总体均值 μ 的置信区间的中心都是（ C .

A. μ　　B. σ^2　　C. $\bar{X}$　　D. S^2

4、设 $X \sim N(1,3^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的样本，则（　）.

A. $\frac{\bar{X}-1}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$　B. $\bar{X} \sim N(0,1)$　C. $\frac{\bar{X}-1}{9} \sim N(0,1)$　D. $\frac{\bar{X}-1}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$

5、设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，总体均值 μ 的置信区间长度 L 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是（ A ）.

A. 当 $1-\alpha$ 缩小时，L 缩短　　B. 当 $1-\alpha$ 缩小时，L 增大

C. 当 $1-\alpha$ 缩小时，L 不变　　D. 以上说法均错误

三、解答题（每题 10 分，共 60 分）

1. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和极大似然法求 θ 的估计量.

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$EX=\int_0^1 x f(x;\theta)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$

则 $\frac{\hat\theta+1}{\hat\theta+2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$\hat\theta=\frac{1}{1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}-2$

$f(x_1,x_2\cdots x_n;\theta)=(\theta+1)^n x_1^{\theta}x_2^{\theta}\cdots x_n^{\theta}$

$=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$

$\ln f(x_1,x_2\cdots x_n;\theta)=n\ln(\theta+1)+\sum_{i=1}^{n}\theta\ln x_i$

$\frac{\partial\ln f(x_1\cdots x_n;\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$

$\hat\theta=-\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$

2. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\lambda)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.（1）求 θ 的矩估计 $\hat\theta$；（2）求 $D\hat\theta$.

$EX=\int_0^{\theta}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)\cdot x\,dx=\frac{2x^3}{\theta^2}-\frac{3x^4}{2\theta^3}\Big|_0^{\theta}=2\theta-\frac{3}{2}\theta=\frac{1}{2}\theta$

$EX=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$\hat\theta=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$D\hat\theta=D(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{4n}{n^2}DX_i=\frac{4}{n}DX_i$

$DX_i=EX^2-(EX)^2=\int_0^{\theta}x^2\cdot\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)dx-(\frac{1}{2}\theta)^2$　　$\therefore D\hat\theta=\frac{1}{5n}\theta^2$

$=\frac{3x^4}{2\theta^2}-\frac{6x^5}{5\theta^3}\Big|_0^{\theta}-\frac{1}{4}\theta^2$

$=\frac{3}{2}\theta^2-\frac{6}{5}\theta^2-\frac{1}{4}\theta^2$

$=\frac{1}{20}\theta^2$　　$\frac{30-24-5}{20}$

3. 设某种元素的使用寿命 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta\\ 0 & x\le\theta\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的极大似然估计值.

~~$x\geq\theta$ 时有~~

$f(x_1,x_2\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}2e^{-2(x_i-\theta)} & x\geq\theta\\ 0 & x<\theta\end{cases}$

$\ln f(x_1,x_2\cdots x_n;\theta)=\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$

$\frac{\partial\ln f(x_1,x_2\cdots x_n;\theta)}{\partial\theta}=2>0$

$\hat\theta=\min(X_1\cdots X_n)$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自均匀分布总体 $U(0,\theta)$ 的样本，试求参数 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

矩估计：$EX=\frac{\theta}{2}$

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$\hat\theta=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

极大似然估计　$f(x_1,\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\theta^n}$

$\ln f(x_1,\cdots x_n;\theta)=-n\ln\theta$

$\frac{\partial\ln f(x_1,\cdots x_n;\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}<0$

$\therefore\hat\theta=\max(X_1,\cdots,X_n)$

5. 某地区 110kv 电网电压在正常情况下服从正态分布，某日内测得 10 个电压数据（kv）如下：

108.1， 108.9， 109.8， 109.2， 109.9， 110.1， 110.2， 110.5， 110.8， 111.2

试以 95%的置信度估计电压均值和标准差的范围.

$n=10$ $\overline{X}=\frac{1}{10}(108.1+\cdots+111.2)=109.87$ $S=\sqrt{S^2}=\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2=0.9263$

$1-\alpha=0.95$ $\alpha=0.05$

$\therefore \mu$的置信区间 $[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]=(109.21, 110.53)$

σ的区间 $[\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}})\approx(0.64, 1.67)$

6. 研究两种固态燃料火箭推进器的燃烧率，设两台都服从正态分布，并已知两种燃料的标准差均近似地为 $0.05\,cm/s$，取样本容量为 $n_1=n_2=20$，得燃烧率的样本均值分别为 $\overline{X}=18cm/s$，$\overline{Y}=20cm/s$，求两种燃烧率总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间.

$X\sim(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim(\mu_2,\sigma_2^2)$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=0.05^2$ $\alpha=0.05$

$\mu_1-\mu_2$的置信区间 $(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \overline{X}-\overline{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n}})$

$\approx(-2.031, -1.969)$