

一、(本题满分 18 分, 每小题 3 分) 填空题 (请将你认为正确的答案填在题后的横线上):

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{5x^3 + 4x - 3}{x(10x^2 + 7)} + \frac{1}{x} \sin x] = .$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $x - \sin x$ 与 kx^3 为等价无穷小, 则 $k =$

3. 函数 $y = x \ln x$ 的单增区间为

4. 设 $y = \sqrt{\tan \frac{x}{2}}$, 则 $y' =$

5. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 1$ 在区间 $(0, 1)$ 内满足拉格朗日定理结论的 $\xi =$

6. 设方程 $x + \ln(x + y) = y^2$ 确定 y 是 x 的函数 $y = y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} =$

二、(本题满分 18 分, 每小题 3 分) 选择填空题 (请将所选唯一答案填入题号前的方括号

内):

【 】 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{2x} - 1} =$

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) 0. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

【 】 2. 曲线 $y = \frac{\sin x}{x(x-1)}$ 的垂直渐近线方程为

(A) $x = 0$. (B) $x = 1$. (C) $x = 0$ 和 $x = 1$. (D) 不存在.

【 】 3. 已知 $f(x)$ 可导, $y = \sin f(x)$, 则 $y' =$

(A) $\cos f(x)$. (B) $-\cos f(x)$. (C) $\cos f(x) \cdot f'(x)$. (D) $-\cos f(x) \cdot f'(x)$.

【 】 4. 曲线 $y = 1 - \frac{1}{x}$ 在 $x = 1$ 点处的切线方程为

(A) $x - y = 0$. (B) $x - y + 1 = 0$. (C) $x + y - 1 = 0$. (D) $x - y - 1 = 0$.

【 】 5. 函数 $f(x) = xe^x$ 的带有佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式为

(A) $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$. (B) $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

(C) $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$. (D) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

【 】 6. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点处可导, 则 $f'(x_0) = 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点处取得极值的

(A) 必要条件. (B) 充分条件. (C) 充要条件. (D) 无关条件.

三、(本题满分 30 分) 求解下列各题:

1. (本小题 7 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^x - \sin x - x}{x \sin x}$.

2. (本小题 8 分) 设 $\varphi(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$, 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = 1$ 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi(x)}{x^3 + 1} - x + 1 \right] = \frac{1}{2},$$

求常数 a, b, c, d 的值.

3. (本小题 8 分) 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \arctan e^t \\ y = \ln(1 + e^{2t}) \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

4. (本小题 7 分) 已知函数 $f(x) = (3x^3 - 1)^2(x - 1)$, 求 $f'(1)$ 及 $f^{(7)}(x)$.

四、(本小题 12 分) 求函数 $f(x) = xe^{-2x}$ 的单调区间与极值、凹凸区间与拐点.

五、(本题满分 10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \leq 1; \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续且可导, 试确定 a 与 b 的值.

六、(本题满分 12 分) 设曲线 L 方程为 $y = ax^2 + (1 - a)x + 1$. (1) 求曲线 L 在 $x = 1$ 点处的曲率; (2) 求曲线 L 在 $x = 1$ 点处的切线 T 的方程; (3) 要使 T 与两坐标轴所围成的三角形面积最小, 试问 a 应取何值 (设 $a > -1$)?