安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系______ 年级______ 专业______ 姓名______ 学号______

答 题 勿 超 装 订 线

装……订……线

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 下列说法正确的是（　　）.

A. 若数列 $\{x_n^2\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 必收敛；

B. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上单调有界函数，则 $\{f(x_n)\}$ 必收敛；

C. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，数列 $\{y_n\}$ 发散，则数列 $\{x_ny_n\}$ 必发散；

D. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则数列 $\{x_{3n}\}$ 与数列 $\{x_{3n+1}\}$ 均收敛于 a.

2. 下列关于函数 $y=\dfrac{e^x}{x^2-1}$ 的渐近线说法正确的是（　　）.

A. 有水平渐近线 $y=1$；　　B. 有垂直渐近线 $x=\pm1$；

C. 有两条斜渐近线；　　D. 无垂直渐近线.

3. 已知方程 $x^3-3x+k=0$ 有 3 个不同的实根，则 k 的取值范围是（　　）.

A. $(-\infty,-2)$；　B. $(2,+\infty)$；　C. $(-2,2)$；　D. $[-2,2]$.

4. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to1} f(x)<\lim\limits_{x\to1} g(x)$；　　B. $f'(x)<g'(x)$；

C. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$；　　D. $\int f(x)\mathrm{d}x<\int g(x)\mathrm{d}x$.

5. 若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上可导的偶函数，则 $\int f(x)f'(-x)\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $-\dfrac{1}{2}f^2(x)+C$；　　B. $\dfrac{1}{2}f^2(x)+C$；

C. $-\dfrac{1}{2}f(x^2)+C$；　　D. $\dfrac{1}{2}f(x^2)+C$.

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n+n}{\sin n-n}=$ ______________.

7. 设 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}$，则 $x=$ _________是其可去间断点.

8. 已知 $y=f(x^2)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$ _____________.

9. 函数 $f(x)=\int_1^x(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}})\mathrm{d}t\ \ (x>0)$ 的单调增加区间为___________.

10. 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $(a>0)$ 在 t 从 0 到 2π 上的全长为____________.

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

得 分	

11．求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{(\mathrm{e}^x-1)}$.

12. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=1$，求 a 和 b.

13．设 $y=y(x)$ 是由方程 $x=y^{y}$ 确定的隐函数，求微分 $\mathrm{d}y$.

线

14．计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^{2}}}$.

答 题 勿 超 装 订 线

订

15．计算 $\int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^{2}}\mathrm{d}x$.

装

16．计算$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

17. 求曲线 $y=x^2$ 上任一点处的曲率，并问哪一点处曲率最大？

18. 设曲线 $xy=a$，直线 $x=a$， $x=2a$ $(a>0)$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形分别绕 x 轴与 y 轴旋转得到的旋转体体积分别记作 V_x 和 V_y，问 a 为何值时， $V_x=V_y$.

线

答 题 勿 超 装 订 线

订

装

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

得 分	

19. 证明 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ $(x>0,y>0,x\neq y)$.

安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试题（A 卷）

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 **2** 分，共 **10** 分）

1. D　　2. B　　3. C　　4. C　　5. A

二、填空题（每小题 **2** 分，共 **10** 分）

6. -1　　7. -1　　8. $\dfrac{\pi}{2}$　　9. $(\dfrac{1}{4},+\infty)$　　10. $6a$

三、计算题（每小题 **9** 分，共 **54** 分）

11. 解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-1)\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^2}{x\mathrm{e}^x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$，

…………………… 7 分

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{(\mathrm{e}^x-1)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-1)\ln x}=\mathrm{e}^0=1$. ……………………9 分

12. 解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{b-\cos x}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}$ …………………… 4 分

当 $b\neq 1$ 时，极限值为 0，与题设矛盾. 所以 $b=1$. ……………………6 分

因此，原式左边 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a+x}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$.

由 $\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$，得出 $a=4$. …………………… 9 分

13. 解：因为 $x=y^y$，则 $x=\mathrm{e}^{y\ln y}$. …………………… 3 分

对等式两边关于 x 求导，则有 $1=\mathrm{e}^{y\ln y}(y'\ln y+y')$，

从而 $y'=\dfrac{1}{y^y(\ln y+1)}=\dfrac{1}{x(\ln y+1)}$， …………………… 8 分

故 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln y+1)}$. ························9 分

14. 解：原式 $=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^{2}}}$ ························4 分

$=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^{2}}}\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)=\arcsin(\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2})+C$. ························9 分

15. 解：原式 $=\displaystyle\int_{0}^{1}\ln(1+x)\mathrm{d}(\frac{1}{2-x})$ ······················ 3 分

$=\displaystyle\left.\frac{\ln(1+x)}{2-x}\right|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{3}\int_{0}^{1}(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x})\mathrm{d}x$ ························6 分

$=\ln 2-\dfrac{1}{3}[-\ln(2-x)|_{0}^{1}+\ln(1+x)|_{0}^{1}]=\dfrac{\ln 2}{3}$. ························9 分

16. 解：原式 $=\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^{2}+1}\right)\mathrm{d}x$ ······················ 3 分

$=\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^{2}+1)\right]\Big|_{1}^{b}$ ······················ 6 分

$=\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{\sqrt{b^{2}+1}}+\frac{1}{2}\ln 2=\ln 1+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$. ······················ 9 分

四、应用题（每小题 **8** 分，共 **16** 分）

17. 解：因为 $y'=2x$， $y''=2$，

所以曲线的曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^{2})^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{(1+4x^{2})^{\frac{3}{2}}}$. ······················ 4 分

从而曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{2}(1+4x^{2})^{\frac{3}{2}}$， $\rho'=6x(1+4x^{2})^{\frac{1}{2}}$.

令 $\rho'=0$，得 $x=0$. 当 $x<0$ 时， $\rho'<0$；当 $x>0$ 时， $\rho'>0$. 所以在 $x=0$ 时， ρ 取

得极小值；驻点唯一，从而ρ的极小值也是最小值，从而在$x=0$时，K取得最大值.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………… 8 分

18．**解：** 由题知，$V_x=\pi\int_a^{2a}\left(\frac{a}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi a}{2}$，　　　　　　　　……………………3 分

$V_y=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{a}{y}\right)^2\mathrm{d}y+\pi\int_0^{\frac{1}{2}}4a^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1 a^2\mathrm{d}y=2\pi a^2$.　　　　　　……………………7 分

因为$V_x=V_y$，所以$a=\frac{1}{4}$.　　　　　　　　　　　　　　　　…………………… 8 分

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

19. **证明：** 令 $f(x)=x\ln x$，$x>0$，则 $f'(x)=1+\ln x, f''(x)=\frac{1}{x}>0, x>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是下凸的，　　　　　　　　　　　　　　……………………4 分

从而对任意的 $x,y\in(0,+\infty)$，$x\neq y$，恒有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x)+f(y)],$$

即 $\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)$，

亦即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.　　　　　　　　　　　　…………………… 10 分