安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《 高等数学 A（一） 》期末考试试卷（C 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．函数 $f(x)=10^{-x}\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 内是（　　）.

（A）奇函数　　（B）偶函数　　（C）单调函数　　（D）有界函数

2．$x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的（　　）间断点.

（A）可去　　（B）跳跃

（C）第二类无穷型　　（D）第二类振荡型

3．设函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=2$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处增量 Δy 是（　　）.

（A）比 Δx 高阶的无穷小　　（B）比 Δx 低阶的无穷小

（C）与 Δx 同阶的无穷小　　（D）与 Δx 等价的无穷小

4．$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$ 是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值的一个(　　)．

（A）充分必要条件　　（B）充分而非必要条件

（C）必要而非充分条件　　（D）既非充分也非必要条件

5．若 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=($　　$)$．

（A） $x\cos x-\sin x+C$　　（B） $x\sin x+\cos x+C$

（C） $x\cos x+\sin x+C$　　（D） $x\sin x-\cos x+C$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\arctan n}{n^2+n+1}=$________．

7．若 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与 $e^{x^2}-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$__________．

8．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________.

9．曲线 $y=\frac{(x-1)^2}{4(x+1)}$ 的斜渐近线方程是______________.

10．不定积分 $\int \frac{1}{x\ln x}dx=$______________.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．求极限 $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})$.

12．求极限 $\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

13．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 确定，求 $dy|_{x=0}$.

14．设函数 $y=x^3\sin x$ ，求 $y^{(6)}(0)$.

15．计算不定积分 $\int e^{-x}\sin x dx$.

16．计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ （ $x>1$ ）.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明方程 $x^7+4x^4-x=3$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

18．设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(1)=\frac{1}{2}$ ，$f(2)=2$.

证明：$\exists \xi\in(1,2)$ 使 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

安徽大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（C 卷）参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2．C　　3．C　　4．B　　5．A

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6． 0　　7． 3　　8． $\frac{1}{2}t$　　9． $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$　　10． $\ln\left|\ln x\right|+C$

三．计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

…………………………（10 分）

12．解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(2\sin x+\cos x-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(2\sin x+\cos x-1\right)\right]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}$

故$\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x}\right)}=e^2$

………………（10 分）

13．解：方程两边同时对 x 求导，得 $2^{xy}(\ln 2)(y+xy')=1+y'$

因为，当 $x=0$ 时， $y=1$，代入上式得， $y'|_{x=0}=\ln 2-1$，于是

$dy|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$

………………（10 分）

14．解： $y=x^3\sin x=x^3(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))=x^4-\frac{1}{6}x^6+o(x^6)$

所以 $y^{(6)}\left(0\right)=-\frac{1}{6}\times 6!=-120$

【注】本题也可利用乘积函数的高阶导数公式计算

………………（10 分）

15．解： $\int e^{-x}\sin xdx=-\int\sin xde^{-x}=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos xdx$

$=-e^{-x}\sin x-\int\cos xde^{-x}=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin xdx$

故 $\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}\left(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\right) + C$

………………（10 分）

16．解：令 $x=\sec t$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{x^2-1}=\tan t$，$dx=\sec t\tan t dt$，有

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sec t\tan t}{\sec^2 t\tan t}dt=\int\cos t dt=\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$

………………（10 分）

四．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明：令 $f(x)=x^7+4x^4-x-3$，该函数在区间 $[0,1]$ 上为连续函数，

$f(0)=-3<0, f(1)=1>0$，由零点定理，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\xi^7+4\xi^4-\xi-3=0$，

所以，方程 $x^7+4x^4-x=3$ 在区间（0, 1）内至少有一个根

………………（5 分）

18．证明：令 $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$

显然，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $F(1)=F(2)=\frac{1}{2}$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $F'(\xi)=\frac{\xi^2 f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{\xi^4}=0$

即 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$

………………（5 分）