院/系________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

# 安徽大学 2018—2019 学年第二学期

# 《高等数学 A（二）》期中考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

**考场登记表序号________**

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | |

## 一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

| 得 分 | |
|---|---|

1. 平面 $x-\sqrt{2}y+z=1$ 与平面 $x+z=3$ 的夹角为________.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)-x^2y}{x^6y^3}=$ ________.

3. 三元函数 $u(x,y,z)=xy^2e^z$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的全微分为 $\mathrm{d}u|_{(1,-1,0)}=$ ________.

4. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在 $(2,-1,-1)$ 处的法平面方程为________.

5. 点 $(1,2,3)$ 到直线 $x=y=z$ 的距离为________.

## 二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

| 得 分 | |
|---|---|

6. 直线 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=z+2$ 与直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z$ 的位置关系是（　　）

A. 相交于一点；　B. 平行；　C. 异面；　D. 重合.

7. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某个领域内有定义. 则下列说法**不正确**的是（　　）

A. 若 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 与 $f_{yx}(x_0,y_0)$ 存在，则必有 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$；

B. 若 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续，则必有 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$；

C. 若 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续，则 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可微；

D. 若 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续，则 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续.

二次曲面$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-z^2=1$的形状是　　　　(　　)

A．单叶双曲面；　　B．双叶双曲面；　　C．椭圆抛物面；　　D．双曲抛物面．

设二元函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个领域内有二阶连续偏导数．若$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，$f_{xx}(0,0)=0$，$f_{xy}(0,0)=-2$，$f_{yy}(0,0)=3$．则$f(x,y)$在点$(0,0)$处　　　　(　　)

A．取极大值；　　B．要么取极大值，要么取极小值；

C．取极小值；　　D．不可能取极大值，也不可能取极小值．

设有二阶常系数齐次线性微分方程$y''+py'+qy=0$．若$\alpha\pm i\beta$为特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$的根，其中$\alpha,\beta$为实数，且$\beta\neq0$，i为虚数单位，$C_1,C_2$为任意常数．则原方程的通解为　　　　(　　)

A．$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$；　　B．$y=C_1e^{\beta x}+C_2xe^{\beta x}$；

C．$y=e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x))$；　　D．$y=e^{\beta x}(C_1\cos(\alpha x)+C_2\sin(\alpha x))$．

**计算题（本题共六小题，每小题8分，共48分）**

| 得　分 | |
|---|---|

．设直线$L$的方程为$\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{6}=z-1$，曲面$S$的方程为$z=2x^2+3y^2+1$．求曲面$S$上一点$P$，使得直线$L$平行于$S$在点$P$的法线，并求出$S$在点$P$的法线方程．

12．设二元函数 $z=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$．求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{\pi})$ 处的值.

13．设 $z=f(x^2+y^2,e^{xy})$，其中二元函数 $f$ 具有二阶连续偏导数．求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

14．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 所确定．求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

姓名＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿

答题勿超装订线

装　订　线

15. 设$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$ 是函数组$\begin{cases} x = e^u + u\sin v, \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$的反函数组．求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$．

16．求微分方程$y'' - 6y' + 9y = 18x - 3$的通解．

## 四、应用题（本题共 10 分）

| 得 分 | |
|---|---|

17．利用 Lagrange 乘数法，求函数 $z = xy$ 在条件 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\ (x, y \geq 0)$ 下的最大值.

姓名______ 学号______

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

五、证明题（本题共两小题，每小题6分，共12分）

| 得　分 | |
|---|---|

8. 利用定义证明：二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

9. 设函数 $f(u)$ 有二阶连续导数，且二元函数 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$.

证明：$f''(u)=f(u)$.

# 安徽大学2018—2019学年第二学期

# 《高等数学A（二）》期中考试参考答案与评分标准

## 一、填空题（本题共五小题，每小题3分，共15分）

1、$\underline{\frac{\pi}{4}}$；2、$\underline{-\frac{1}{6}}$；3、$\underline{\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}$；4、$\underline{y-z=0}$；5、$\underline{\sqrt{2}}$.

## 二、选择题（本题共五小题，每小题3分，共15分）

6、C；7、A；8、B；9、D；10、C.

## 三、计算题（本题共六小题，每小题8分，共48分）

11. 解. 设点$P$的坐标为$(x,y,z)$.

则曲面$S$在点$P$处的法向量为$\vec{n}=(4x,6y,-1)$. ……………………………（3分）

由题设，$\vec{n}//L$，且$L$的方向向量为$\vec{v}=(4,6,1)$. 故$x=-1,y=-1$，且$z=6$.

进一步，$S$在点$P$的法线方程为$\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{6}=z-6$. ………………………（8分）

12. 解. $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-x}(-\frac{x}{y^2})\cos\frac{x}{y}$ ……………………………………（3分）

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x=2}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=\frac{1}{\pi}}\right)=\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x=2}(-\pi^2xe^{-x}\cos(\pi x))$$

$$=-\pi^2(e^{-x}\cos(\pi x)-xe^{-x}\cos(\pi x)-\pi xe^{-x}\sin(\pi x))|_{x=2}$$

$$=\pi^2e^{-2}$$ ……………………………………………………（8分）

13. 解. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2yf_1'+xe^{xy}f_2'$ ………………………（4分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(2yf_{11}''+xe^{xy}f_{12}'')+(e^{xy}+xye^{xy})f_2'+ye^{xy}(2yf_{21}''+xe^{xy}f_{22}'')$$

$$=(1+xy)e^{xy}f_2'+4xyf_{11}''+2e^{xy}(x^2+y^2)f_{12}''+xye^{2xy}f_{22}''$$ ………………………（8分）

14. 解. 方程两边对 $x$ 求导得 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}(2-3\frac{\partial z}{\partial x})$ ，

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}$． …………（4 分）

方程两边对 $y$ 求导得 $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3z}(-3\frac{\partial z}{\partial y})+2$，

故 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$．…………（8 分）

15. 解. 对 $x$ 求导得

$$1=e^{u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\sin v+u(\cos v)\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0=e^{u}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cos v+u(\sin v)\frac{\partial v}{\partial x}.$$ ……………………………（4 分）

于是，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^{u}(\sin v-\cos v)+1}$ ，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^{u}}{u[e^{u}(\sin v-\cos v)+1]}$ ………………（8 分）

16. 解. 特征方程 $\lambda^2-6\lambda+9=0$ 有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2=3$．故对应齐次方程组 $y''-6y'+9y=0$ 的通解为 $\overline{Y}=(C_1+C_2x)e^{3x}$．………………（4 分）

又设原方程的特解为 $y^*=ax+b$，代入原方程得 $-6a+9(ax+b)=18x-3$，比较系数得 $a=2,b=1$.因此原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+2x+1$，其中 $C_1,C_2$ 为任意常数.(8 分)

## 四、应用题（本题共 10 分）

17. 解. 构造 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(2x^2+3y^2-6)$．

令 $L_x=y+4\lambda x=0$，$L_y=x+6\lambda y=0$，$L_\lambda=2x^2+3y^2-6=0$． ..….….…（5 分）

解得 $y=1,x=\frac{\sqrt{6}}{2},\lambda=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$. 此时 $z=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

又因为 $z=xy$ 在条件 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$（$x,y\geq 0$）下必有最大值，且当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，$z=0$．故 $z=xy$ 在 $x=\frac{\sqrt{6}}{2},y=1$ 处取到最大值 $z=\frac{\sqrt{6}}{2}$. .…..….….…（10 分）

## 五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

18. 证明. 由定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0. \text{......................................（3 分）}$$

又因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(\dfrac{x^3}{x^2+y^2}-x)$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

令 $y=x$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=x}}\dfrac{-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. 因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\neq 0$.

从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. ............（6 分）

19. 证明：设 $z=f(u)$, $u=e^x\sin y$,

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y$. ...........（3 分）

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y+f'(u)e^x\sin y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y-f'(u)e^x\sin y$.

故 $e^{2x}f(u)=e^{2x}z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}$，即 $f''(u)=f(u)$ ..................（6 分）