安徽大学2017-2018学年第二学期
《高等数学A（二）》期中考试试卷

（闭卷　时间120分钟）

考场登记表序号 ____________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

院/系____________ 年级____________ 专业____________ 姓名____________ 学号____________

答　题　勿　超　装　订　线

装　订　线

一、填空题（每小题3分，共15分）

得分	

1. 点$(2,1,0)$到平面$3x+4y+5z=0$的距离为________.

2. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 则$f_x(0,0)=$______，$f_y(0,0)=$______.

3. 函数$f(x,y,z)=x^2y+z^2$在点$(1,2,0)$处沿向量$\vec{v}=(1,2,2)$的方向导数为__________.

4. 参数曲线$\begin{cases}x=2t,\\ y=t^2-1,\\ z=t^3\end{cases}$ 在点$(2,0,1)$处的切线方程为________________.

5. 设参数$\sigma>0$. 反常积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2018)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=$____________________.

二、选择题（每小题3分，共15分）

得分	

6. 设直线L_1的方程为$\begin{cases}-y+z=1,\\ x=0,\end{cases}$ 直线L_2的方程为$\begin{cases}x-z=1,\\ y=0\end{cases}$. 则$L_1$与$L_2$ 的位置关系是　(　　)

   (A)　相交于一点.　(B)　平行.　(C)　异面.　(D)　重合.

7. 二元函数f在点(x_0,y_0)的某个邻域内有定义. 则下列说法不正确的是　(　　)

   (A)　若f在(x_0,y_0)处可微，则f在(x_0,y_0)处的偏导数存在.

   (B)　若f在(x_0,y_0)处偏导数都存在，则f在(x_0,y_0)处连续.

   (C)　若f的偏导数f_x,f_y在(x_0,y_0)处连续，则f在(x_0,y_0)处可微.

   (D)　若f在(x_0,y_0)处可微，则f在(x_0,y_0)处连续

8. 设函数$f(x,y)$在开区域D内有二阶连续偏导数，且$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$. 记$A = f_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f_{yy}(x_0,y_0)$. 则下列为$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取极小值的充分条件的是 ( )

(A) $A < 0, AC - B^2 > 0$. (B) $A > 0, AC - B^2 > 0$.

(C) $A < 0, AC - B^2 > 0$. (D) $A > 0, AC - B^2 < 0$.

9. 设D是xy平面上以原点$O(0,0)$与点$A(1,1)$，$B(-1,1)$为顶点的三角形区域，D_1是D在第一象限部分，则$\iint_D (xy + \cos x \sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ( )

(A) $2\iint_{D_1} \cos x \sin y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (B) $2\iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $2\iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (D) 0.

10. 设$f(x,y)$是连续函数，则$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x =$ ( )

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_0^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

三、计算题 (每小题8分，共40分)

得分	

11. 设直线L: $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - ay - z = 0 \end{cases}$ 平行于曲面$z = x^2 + y^2$在点$P(1,-2,5)$处的切平面. 求a的值.

12. 设函数$f(u,v)$有2阶连续偏导数，$y=f(e^x,\sin x)$, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

13. 设二元函数$z=z(x,y)$由方程$e^z+xyz+x+\cos x=2$确定. 求全微分$\mathrm{d}z|_{(0,1)}$.

14. 计算二重积分$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中平面区域$D$由直线$x=3y$, $y=3x$及$x+y=8$围成.

15. 计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域.

答题勿超装订线

装订线

四、应用题(每小题10分，共20分)

得分	

16. 将长为2米的铁丝分为两段，分别围成正方形和正三角形. 试用Lagrange乘数法讨论两个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

17. 设平面区域D由两条抛物线$y=x^2, y=2x^2$和两条直线$y=2x, y=x$围成. 求区域D的面积.

五、证明题(每小题5分，共10分)

得分	

18. 设函数$f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数, 且$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$满足等式$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.
证明: 对任意$u>0$, $uf''(u)+f'(u)=0$.

19. 证明: $\dfrac{100}{51}\leq\displaystyle\iint\limits_D\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq 2$, 其中$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leq 10\}$.

安徽大学2017-2018学年第二学期

《高等数学A(二)》期中考试参考答案与评分标准

一、填空题(每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\quad\sqrt{2}\quad}$.

2. $\underline{\quad 1\quad}$, $\underline{\quad -1\quad}$.

3. $\underline{\quad 2\quad}$.

4. $\underline{\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}}$.

5. $\underline{\quad\sqrt{2\pi}\sigma\quad}$.

二、选择题(每小题3分, 共15分)

6. C.　　7. B.　　8. B.　　9. A.　　10. D.

三、计算题(每小题8分, 共40分)

11. 解. 曲面$z=x^2+y^2$在点$(1,-2,5)$处的一个法向量为

$\vec{n}=(2x,2y,-1)|_{(1,-2,5)}=(2,-4,-1)$. ………………………………… (3分)

曲线L的一个方向向量为

$\vec{v}=(1,1,0)\times(1,-a,-1)=(-1,1,-a-1)$.

由题设可知, $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$, 即$(2,-4,-1)\cdot(-1,1,-a-1)=0$.

由此可知, $a=+5$. ………………………………………… (8分)

12. 解. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1' e^x + f_2' \cos x$, ...(3分)

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = f_1' e^x + f_{11}'' e^{2x} + f_{12}'' e^x \cos x - f_2' \sin x + f_{21}'' e^x \cos x + f_{22}'' \cos^2 x$ ·····(7分)

于是，

$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = f_1'(1,0) + f_{11}''(1,0) + 2f_{12}''(1,0) + f_{22}''(1,0).$ ....(8分)

13. 解. 当$x=0, y=1$时，$z=0$. 方程两边同时对x求导得

$e^z \dfrac{\partial z}{\partial x} + yz + xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + 1 - \sin x = 0$. 由此可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -1$. ....(4分)

方程两边同时对x求导得

$e^z \dfrac{\partial z}{\partial y} + xz + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. 由此可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 0$. ------(7分)

故$\mathrm{d}z|_{(0,1)} = -\mathrm{d}x$. ....(8分)

14. 解. $y=3x$与$x+y=8$交于点$(2,6)$; $y=\dfrac{1}{3}x$与$x+y=8$交于点$(6,2)$. 于是,

$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{3}x}^{3x} x^2 \mathrm{d}y + \int_2^6 \int_{\frac{1}{3}x}^{8-x} x^2 \mathrm{d}y$ ....(5分)

$= \int_0^2 \left(3x - \dfrac{1}{3}x\right) x^2 \mathrm{d}x + \int_2^6 \left(8 - x - \dfrac{1}{3}x\right) x^2 \mathrm{d}x$

$= \dfrac{416}{3}$ ....(8分)

15. 解. 由积分区域的对称性和被积函数的奇偶性，

方法一：$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_{y\geq 0}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

作极坐标变换，当$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$时，$0 \leq r \leq 2$;

当$\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$时，$-2\cos\theta \leq r \leq 2$. ....(4分)

原式$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r^2 \mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{-2\cos\theta}^{2} r^2 \mathrm{d}r\right)$

$= 2\left(\dfrac{4}{3}\pi + (\dfrac{4}{3}\pi - \dfrac{16}{9})\right) = \dfrac{16}{9}(3\pi - 2)$. ....(8分)

方法二：设D_1: $x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0$; D_2: $(x+1)^2+y^2 \leq 1, y \geq 0$

$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy - 2\iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ -----(4分)

$= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r^2 dr$

$= \dfrac{16}{3}\pi - \dfrac{32}{9}$ ——(8分)

四、应用题（每小题10分，共20分）

16. 解. 设正方形边长为x，正三角形边长为y. 则问题转化为讨论函数$z=x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$在条件$4x+3y=2\ (x,y\geq 0)$下的最小值问题. ....(2分)

令$L(x,y,\lambda)=x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2-\lambda(4x+3y-2)$. 考虑方程组

$$\begin{cases} L_x=2x-4\lambda=0, \\ L_y=\frac{\sqrt{3}}{2}y-3\lambda, \\ L_\lambda=-(4x+3y-2)=0. \end{cases}$$ ------(7分)

解得$x_0=\frac{2}{4+3\sqrt{3}}$, $y_0=\frac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}$. $f(x_0,y_0)=\frac{1}{4+3\sqrt{3}}$. ....(9分)

当$x=0,y=\frac{2}{3}$时，$f(0,\frac{2}{3})=\frac{\sqrt{3}}{9}>f(x_0,y_0)$;

当$x=\frac{1}{2},y=0$时，$f(\frac{1}{2},0)=\frac{1}{4}>f(x_0,y_0)$.

故两个图形的面积之和存在最小值，且最小值为$\frac{1}{4+3\sqrt{3}}$. ....(10分)

17. 解：区域D的面积为$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

令$u=\frac{y}{x^2},v=\frac{y}{x}$，则$x=\frac{v}{u},y=\frac{v^2}{u}$. 且区域$D$对应于$D_1$：$1\leq u\leq 2,1\leq v\leq 2$. ---(5分)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ -\frac{v^2}{u^2} & \frac{2v}{u} \end{vmatrix}=-\frac{v^2}{u^3}.$$ ....(7分)

于是$S=\iint\limits_{D_1}\frac{v^2}{u^3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^2 v^2\mathrm{d}v\int_1^2\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u=\frac{7}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$. ....(10分)

五、证明题（每小题5分，共10分）

18. 证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ……………………………(2分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(\sqrt{x^2+y^2})(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}),$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(\sqrt{x^2+y^2})(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}).$$

由题设可知，

$$f''(\sqrt{x^2+y^2})+f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

令$u=\sqrt{x^2+y^2}$，即有$uf''(u)+f'(u)=0$. ……………………………(5分)

19. 证明：设$I=\iint\limits_D\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 对任意$(x,y)\in D$，显然有

$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$. ……………………………(2分)

于是，$\frac{1}{102}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le I\le\frac{1}{100}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

D是边长为$10\sqrt{2}$的正方形，故D的面积为$\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=200$. - — — -- (4分)

由此可知，$\frac{200}{102}\le I\le 2$. ……………………………(5分)