2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　　）

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

（2）过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为（　　）

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　(B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

(C) $y=x$ 与 $x+y-z=1$　　(D) $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$（　　）

(A) $\sin1+\cos1$　　(B) $2\sin1+\cos1$　　(C) $\sin1+\cos1$　　(D) $3\sin1+2\cos1$

（4）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则（　　）

(A) $M>N>K$　　(B) $M>K>N$　　(C) $K>M>N$　　(D) $K>N>M$

（5）下列矩阵中，与矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似的为（　　）

(A) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

（6）设 A、B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，(X,Y) 表示分块矩阵，则（　　）

(A) $r(A,AB)=r(A)$　　(B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　(D) $r(A,B)=r(A^T,B^T)$

（7）设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则 $p\{X0\}=$（　　）

(A) 0.2　　(B) 0.3　　(C) 0.4　　(D) 0.6

（8）给定总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，给定样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，对总体均值 μ 进行检验，令 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则（　　）

(A) 若显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$时也拒绝H_0

(B) 若显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时也拒绝H_0

(C) 若显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$时接受H_0

(D) 若显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时也接受H_0

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则$k=$__________.

（10）$y=f(x)$的图像过$(0,0)$，且与$y=2^x$相切于$(1,2)$，则$\int_0^1 xf''(x)dx=$__________.

（11）$F(x,y,z)=xy\vec{i}-yz\vec{j}+xz\vec{k}$，则$rot\vec{F}(1,1,0)=$__________.

（12）曲线S由$x^2+y^2+z^2=1$与$x+y+z=0$相交而成，则$\oint\limits_S xyds$ __________.

（13）二阶矩阵A有两个不同特征值，α_1,α_2是A的线性无关特征向量，$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，则$|A|=$__________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

（16）（本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

（17）（本题满分 10 分）

$\Sigma: x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$取正向，求$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+(y^3+z)dzdx+z^3dxdy$.

（18）（本题满分 10 分）

微分方程$y'+y=f(x)$

（1）当$f(x)=x$时，求微分方程的通解

（2）当$f(x)$为周期函数时，证明该微分方程有通解且该通解也为周期函数

（19）（本题满分 10 分）

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0, x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$.证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（20）（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数.

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

（21）（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（1）求 a；

（2）求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P.

（22）（本题满分 11 分）

已知随机变量 X,Y 相互独立，且 $P\{X=1\}=y_1,P\{X=-1\}=y_2$，$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布，$Z=XY$

（1）求 $Cov(X,Z)$；

（2）求 Z 的概率分布.

（23）（本题满分 11 分）

已知总体 X 的密度函数为 $f(x,\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$，$-\infty<x<+\infty$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，σ 为大于 0 的参数，σ 的最大似然估计量为 σ

（1）求 σ；

（2）求 $E\sigma$，$D\sigma$

（答案待修正中，关注金程考研持续更新）