安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《 高等数学 A（一）》期末考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列（　　）区间内有界.

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

2. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）.

(A) $dy<\Delta y<0$　　(B) $\Delta y<dy<0$　　(C) $0<dy<\Delta y$　　(D) $0<\Delta y<dy$

3. 设 $f(x)$ 有二阶连续导函数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=-1$，则存在 $\delta>0$，有（　　）.

(A) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx>0$　　(B) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx<0$

(C) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx=0$　　(D) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx>0$ 且 $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx<0$

4. 曲线 $y=\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}$ 有（　　）条渐近线.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 下列反常积分中收敛的是（　　）.

(A) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$　　(B) $\int_1^2\dfrac{dx}{(x-1)^3}$　　(C) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln\sqrt{x})^2}dx$　　(D) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}dx$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{-y}+x(y-x)=1+x$ 所确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为______.

7. 曲线 $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ 在点 $t=1$ 处的曲率半径为_______.

8. 设 $f(x)$ 有连续导函数且 $f(x)>0$，$\ln f(x)=\sin x$，则 $\int\dfrac{xf'(x)}{f(x)}dx=$ __________.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$ ________.

10. 半径为 1 的半圆周 $x^2+y^2=1(y\geq 0)$ 的质心坐标为 ________.

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)dt}{x^2(1-e^{x^2})}$.

12. 求 $f(x)=\left|xe^{-x}\right|$ 的极值与拐点.

13. 计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx$.

14. 计算 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}}$.

15. 已知 $a_n=\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nx dx$（$n$ 为正整数），求 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$.

16 设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）.

（1）证明：$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$；

（2）利用（1）的结果计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx$.

四、应用题（每小题 12 分，共 12 分）

17. 设曲线 $y=a(1-x^2)(a>0)$ 在点 $A(1,0)$ 和点 $B(-1,0)$ 处的法线与曲线所围成封闭图形为 D.

（1）当 D 的面积最小时，求 a 的值和最小面积.

（2）当 D 的面积最小时，求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

18. 设 $f(x)$ 可导，$f(0)=0$，$f'(x)$ 单调递减. 证明：对 $x\in(0,1)$，有 $f(1)x<f(x)<f'(0)x$.

19. 已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}\right)=0$，$f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx$. 试证：存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《 高等数学 A（一）》期末考试试卷答案详解

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. A 2. C 3. B 4. D 5. C

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. $y=-x$ **7.** 6 **8.** $x\sin x+\cos x+C$ **9.** $\frac{\pi}{6}$ **10.** $\left(0,\frac{2}{\pi}\right)$

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11.【解】 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt \overset{x^2-t^2=u}{=} -\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\,du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt}{x^2(1-e^{x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du}{x^2(-x^2)}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du}{x^4}$

$$\overset{\text{洛比达}}{=}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x^2)\cdot2x}{4x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)}{4x^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}$$

$$=-\frac{1}{4}f'_+(0)=-\frac{1}{4}f'(0)=-\frac{1}{4}$$ 9 分

12. 【解】由已知，有

$$f(x)=\begin{cases}-xe^{-x}, & x<0,\\ xe^{-x}, & x\ge0,\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续

故
$$f'(x)=\begin{cases}e^{-x}(x-1), & x<0,\\ e^{-x}(1-x), & x>0,\end{cases}$$

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-xe^{-x}}{x}=-1$， $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xe^{-x}}{x}=1$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处不可导.

令 $f'(x)=0$，得 $f(x)$ 的唯一驻点 $x=1$；

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	—	不存在	+	0	—

$f(x)$	]	极小值	Z	极大值	]

则 $f(x)$ 的极大值 $f(1)=e^{-1}$，极小值 $f(0)=0$；

又 $f''(x)=\begin{cases} e^{-x}(2-x), & x<0, \\ e^{-x}(x-2), & x>0, \end{cases}$ 令 $f''(x)=0$，得 $x=2$； $x=0$ 为 $f(x)$ 不可导点，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	+	不存在	—	0	+
$f(x)$	凹	拐点	凸	拐点	凹

则 $f(x)$ 的拐点为 $(0,0)$ 和 $(2,2e^{-2})$ 9 分

13.【解】

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx \overset{\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t}{\underset{x=\frac{1}{t^2-1}}{=}} \int \ln(1+t)\,d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)^2}$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{t+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)+C$$ 9 分

14.【解】方法一（倒代换）

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}} \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+4t}}$$

$$=\frac{1}{2}(1+4t)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right).$$ 9 分

方法二（三角换元）

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}}=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x+2)^2-4}} \overset{x+2=2\sec t}{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sec t\cdot\tan t}{2(\sec t-1)\cdot 2\tan t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{\sec t-1}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\cos t}dt=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^2\frac{t}{2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$ 9 分

15.【解】 $a_n=\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nxdx=-\int_0^{2\pi}\sin nxd(e^{-x})$

$$=-\left(e^{-x}\sin nx\Big|_0^{2\pi}-n\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos nxdx\right)=n\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos nxdx$$

$$=-n\int_0^{2\pi}\cos nxd(e^{-x})=-n\left(e^{-x}\cos nx\Big|_0^{2\pi}+n\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nxdx\right)$$

$$=-n(e^{-2\pi}-1)-n^2\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nxdx=-n(e^{-2\pi}-1)-n^2a_n$$

移项，得 $a_n=\dfrac{n(1-e^{-2\pi})}{1+n^2}$；

故 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(1-e^{-2\pi})}{1+n^2}=1-e^{-2\pi}$. 9 分

16.【解】（1）$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx\overset{x=-t}{=}-\int_{a}^{-a}f(-t)g(-t)dt=\int_{-a}^{a}f(-x)g(-x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx.$$

（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x\right|\arctan e^x dx$ 中 $f(x)=\arctan e^x$， $g(x)=\left|\sin x\right|$，

$g(x)$ 为偶函数，下证 $f(x)+f(-x)=A$，考虑其导数，有

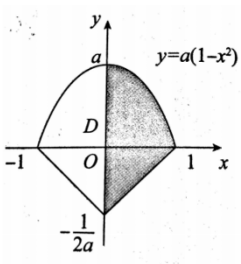
$$\left[f(x)+f(-x)\right]'=\left(\arctan e^x+\arctan e^{-x}\right)'=0,$$

所以 $f(x)+f(-x)\equiv A$，取 $x=0$，可得 $A=\dfrac{\pi}{2}$，则

$$f(x)+f(-x)=\arctan e^x+\arctan e^{-x}=\frac{\pi}{2},$$

则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x\right|\arctan e^x dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x\right|dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\dfrac{\pi}{2}$. 9 分

四、应用题（每小题 12 分，共 12 分）



17.【解】（1）由 $y=a(1-x^2)$，有 $y'=-2ax$，则过点 $A(1,0)$ 的法线斜率为 $\dfrac{1}{2a}$，从而得到过点 $A(1,0)$ 的法线方程为 $y=\dfrac{1}{2a}(x-1)$；

如图所示，由于图形关于 y 轴对称，故 D 的面积为

$S(a)=2\int_0^1\left[a(1-x^2)-\frac{1}{2a}(x-1)\right]dx=\frac{4a}{3}+\frac{1}{2a}$，

令 $S'(a)=\frac{4}{3}-\frac{1}{2a^2}=0$，解得 $a=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $a=-\frac{\sqrt{6}}{4}$（舍去），又 $S''\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)>0$，故当

$a=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 时，$S(a)$ 最小，最小面积为 $S\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

（2）由于 D 的下半部分三角形区域绕 y 轴旋转为圆锥体，其体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\times1^2\times\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{9}\pi,$$

且 D 的上半部分绕 y 轴旋转体的体积为

$$V_2=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\pi\cdot x^2(y)\,dy=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\pi\cdot\left(1-\frac{4}{\sqrt{6}}y\right)dy=\frac{\sqrt{6}}{4}\pi-\frac{3\pi}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{8}\pi,$$

故所求旋转体的体积为

$$V=V_1+V_2=\frac{\sqrt{6}}{9}\pi+\frac{\sqrt{6}}{8}\pi=\frac{17\sqrt{6}}{72}\pi.$$ 12 分

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

18.【证明】

（1）先证 $f(x)<f'(0)x$

当 $x\in(0,1)$，令 $g(x)=f(x)-f'(0)x$，$g'(x)=f'(x)-f'(0)<0$，

则 $g(x)$ 单调递减，又 $g(0)=0$，可知 $g(x)<g(0)=0$，有 $f(x)<f'(0)x$；

（2）再证 $f(1)x<f(x)$

令 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$，只要证 $h(x)>h(1)$，即只要证 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

$h'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)\cdot x-[f(x)-f(0)]}{x^2}=\frac{f'(x)\cdot x-f'(\xi)x}{x^2}$，其中 $0<\xi<x$

因为 $f'(x)$ 单调递减，所以 $h'(x)<0$，即 $h(x)$ 单调递减，则 $h(x)=\frac{f(x)}{x}>\frac{f(1)}{1}$，

即 $f(1)x<f(x)$； 7 分

19.【证明】

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}=0$ 及 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续，则 $0=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=f(\frac{1}{2})$，进而可得

$$f'(\frac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=0;$$

又由积分中值定理可知，存在$\eta \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$，使得

$$f(2) = 2\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx = 2f(\eta)\cdot\frac{1}{2} = f(\eta);$$

由 $f(x)$ 在$[\eta, 2]$上连续，在$(\eta, 2)$内可导， $f(2) = f(\eta)$，由罗尔定理，存在 $\tau \in (\eta, 2)$，使得 $f'(\tau) = 0$；

又 $f'(x)$ 在$[\frac{1}{2}, \tau]$上连续，在$\left(\frac{1}{2}, \tau\right)$内可导， $f'(\frac{1}{2}) = f'(\tau)$，由罗尔定理，存在

$\xi \in (\frac{1}{2}, \tau) \subset (0, 2)$，使得 $f''(\xi) = 0$. 7 分