学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答 题 勿 超 装 订 线

安徽大学 2017—2018 学年第一学期
《高等数学 A（一）》期中考试试卷
（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\dfrac{3}{n^2+n+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=$________。

3. 已知 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2017)$，$x\in R$，则 $f'(0)=$________。

4. 设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________。

5. 设函数 $f(x)$ 可微，$y=f(x)e^{f(x)}$，则 $dy=$________。

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则（ ）。

(A) $a=1,\ b=1$　　(B) $a=-1,\ b=1$

(C) $a=1,\ b=-1$　　(D) $a=-1,\ b=-1$

7. 当 $x\to 2$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$ 的极限（ ）。

(A) 等于 4　　(B) 等于 0

(C) 为 ∞　　(D) 不存在但也不为 ∞

8. 设当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小，则正整数n等于（　）。

(A) 1　　　　(B) 2　　　　(C) 3　　　　(D) 4

9. 已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^3$，则当n为正整数时，$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)=$（　）。

(A) $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)[f(x)]^{2n+1}$　　(B) $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)[f(x)]^{2n+1}$

(C) $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)[f(x)]^{2n-1}$　　(D) $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)[f(x)]^{2n-1}$

10. 设函数$f(x)$有连续的导函数，$f(0)=0$且$f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处连续，则常数$A=$（　）。

(A) a　　　　(B) b　　　　(C) $a+b$　　　　(D) 0

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

得 分	

11. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数。

12. 设数列$\{a_n\}$满足$a_0=1$，$a_n=\dfrac{3n-1}{3n}a_{n-1}$，$n$为正整数。求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

13. 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，求$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$。

14. 设$f(x)=\sqrt{\dfrac{2016^x(\arcsin x)^{2017}}{(\ln x)^{2018}\sin(2019x)}}$，求$f'(x)$。

15. 设 $f(x)=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。试分别求下列各项的值：

$f'_+(0)$、$f'_-(0)$、$f'(0)$、$f'(0^+)$、$f'(0^-)$、$\lim\limits_{x\to 0} f'(0)$。

16. 设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dx}{dy}$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}$。

17. 设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(2017)}(0)$。

18. 设$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$，试求$f(x)$的间断点并判断其类型。

四、应用题（本题共 6 分）

得 分	

19. 试确定a的值，使得两抛物线$C_1:(y-1)^2=x+1$和$C_2:(y-1)^2=-4x+a+1$在交点处各自切线互相垂直。

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得 分	

20. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数,}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数。}\end{cases}$ 试证明：

(1) 函数 $f(x)$ 为有界函数；(2) 函数 $f(x)$ 为偶函数；(3) 函数 $f(x)$ 是周期函数，但无最小正周期。

21. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内可导。试证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(\xi)}{\xi-a}=f'(\xi)。$$

安徽大学 2017—2018 学年第一学期《高等数学 A（一）》

期中考试试题参考答案及评分标准

温馨提示：

1. 考试考务中心告知，安大本学期选用教材《高等数学》（理工类，上册，第 3 版，安徽大学出版社）。根据教学进度安排，期中考试命题范围应不超过教材第 4 章第 1 节。

2. 安大新生进校仅仅 9 个星期，其中还遇国庆、中秋放假，实际教学时间不满 8 周，期中考试不预留复习时间，新生同学继续赶新课（一元微分学），命题时应考虑此实情。

3. 下文中的答案及评分标准仅供参考，允许学生有其它解法，允许学生合理简略相关过程，允许学生使用自学的理论及知识解答本试题。

4. 阅卷时，阅卷人员应该严格按照分工和要求，坚持公平、公正的原则，做到给分理、扣分有据,确保评卷准确无误。

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\frac{1}{2}$；　2. 0；　3. $2017!$；　4. $y-1=-2x$；　5. $[1+f(x)]f'(x)e^{f(x)}dx$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. C；　7. D；　8. B；　9. A；　10. C

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

11. 根据“当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$”、$\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$，……………………1 分

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right)+2=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+2=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}+2=2 \quad \text{………………4 分}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(e^{\frac{2}{x}}(1+e^{-\frac{2}{x}}))}{\ln(e^{\frac{1}{x}}(1+e^{-\frac{1}{x}}))}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{2}{x}+\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\frac{1}{x}+\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}\right)=2 \quad \text{………………7 分}$$

由极限存在定理，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=2$ ……………………………………………………8 分

12. 由递推公式，有 $a_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n}$， n为正整数……………………2 分

显然有 $a_n>0,n\in N$. 另外，

$$0<a_n^3=(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3})\cdot(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6})\cdot(\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9})\cdots(\frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n-1}{3n})$$
$$<(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8})\cdot(\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{11})\cdots(\frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n}{3n+1}\cdot\frac{3n+1}{3n+2})$$
$$=\frac{2}{3n+2}$$

所以 $0<a_n<\sqrt[3]{\frac{2}{3n+2}}$ ………………………………………………………………...6 分

根据夹逼原理易知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ……………………………………………………….8 分

13. 由极限与无穷小量的等价关系，$\frac{f(x)}{x^2}=2+\alpha(x)$， $x\neq 0$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$ ……2 分

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2x^2+x^2\alpha(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(2x+x\alpha(x)\right)\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(2x+x\alpha(x)\right)\right)^{\frac{1}{2x+x\alpha(x)}\cdot\frac{2x+x\alpha(x)}{x}}$$ ……………………………6 分

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(2x+x\alpha(x)\right)\right)^{\frac{1}{2x+x\alpha(x)}\cdot(2+\alpha(x))}=e^2$$ ………………………..8 分

14. $\ln f(x)=\frac{1}{2}\left(x\ln 2016+2017\ln\arcsin x-2018\ln\ln x-\ln\sin(2019x)\right)$ ……………..3 分

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\ln 2016+\frac{2017}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{2018}{x\ln x}-\frac{2019\cos(2019x)}{\sin(2019x)}\right)$$ …………………………7 分

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\ln 2016+\frac{2017}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{2018}{x\ln x}-\frac{2019\cos(2019x)}{\sin(2019x)}\right)f(x)$$ …………………...8 分

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2016+\frac{2017}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{2018}{x\ln x}-\frac{2019\cos(2019x)}{\sin(2019x)}\right)\sqrt{\frac{2016^x(\arcsin x)^{2017}}{(\ln x)^{2018}\sin(2019x)}}$$

15. $f(x)=[x]$ 在 $(-1,1)$ 上的表达式为 $f(x)\begin{cases}0,0\le x\le 1,\\-1,-1<x<0.\end{cases}$ ………………………………1 分

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0-0}{x}=0$$ ……………………………………………..2 分

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1-0}{x}=+\infty$$ ………………………………………3 分

所以 $f'(0)$ 不存在……………………………………………………………………………4 分

$f'(x)=0, x\in(-1,0)\cup(0,1)$ ……………………………………………………………5 分

$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 0=0$ ……………………………………………………6 分

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 0=0$ ……………………………………………………7 分

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$ …………………………………………………………………..8 分

16. $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dy}=\dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=(t-1)^2$ …………………………………………….4 分

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dy}{dt}}=\frac{d\left((t-1)^2\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{d\arctan t}{dt}}$$

$$=\frac{2(t-1)}{\frac{1}{1+t^2}}=2(t-1)(1+t^2)$$ ……………………………………………………………8 分

17. $\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right), n\in N,$

$(x^2)'=2x, (x^2)''=2, (x^2)^{(k)}=0$, k 为$\geq 3$的整数………………………………………4 分

由 Leibniz.公式，有

$f^{(2017)}(x)=C_{2017}^{0}x^2\sin^{(2017)}x+C_{2017}^{1}2x\sin^{(2016)}x+C_{2017}^{2}2\sin^{(2015)}x$ …………………6 分

$f^{(2017)}(0)=C_{2017}^{2}2\sin^{(2015)}x|_{x=0}=2017\cdot 2016\cdot\sin\left(0+\dfrac{2015\pi}{2}\right)=-2017\cdot 2016$ ……..8 分

18. 因为$f(x)$在$x=0, n\pi, n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n\in Z)$处无定义，

所以$x=0, n\pi, n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n\in Z)$均为$f(x)$的间断点。…………………………….....2 分

因为$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cos x=1$

所以$x=0$是$f(x)$的可去间断点。……………………………………………………….4 分

因为$\lim\limits_{x\to n\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\infty, (n\in Z, n\neq 0)$

所以$x=n\pi(n\in Z, n\neq 0)$是$f(x)$的无穷间断点。……………………………….6 分

因为$\lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=0,$

所以 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in Z)$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。……………………………………8 分

四、应用题（本题共 6 分）

19. 两抛物线方程联立，得交点坐标为 $(\frac{a}{5},1+\sqrt{1+\frac{a}{5}}),(\frac{a}{5},1-\sqrt{1+\frac{a}{5}})$ …………………2 分

由对称性，不妨证明两曲线在点 $(\frac{a}{5},1+\sqrt{1+\frac{a}{5}})$ 处的切线相互垂直。

对 C_1 的方程求导，得 $y'=\frac{1}{2(y-1)}$, 对 C_2 的方程求导，得 $y'=\frac{-2}{y-1}$。

C_1、C_2 上点 $(\frac{a}{5},1+\sqrt{1+\frac{a}{5}})$ 处的切线斜率分别为 $\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{a}{5}}}$, $\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{a}{5}}}$ ……………4 分

故由 $\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{a}{5}}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{a}{5}}}=-1$ 得 $a=0$ ……………………………………………6 分

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

20. (1)因为 $|f(x)|\le 1$，所以 $f(x)$ 为有界函数。……………………………………………1 分

（2）当 x 为有理数时，$-x$ 也是有理数，所以 $f(-x)=f(x)=1$

当 x 为无理数时，$-x$ 也是无理数，所以 $f(-x)=f(x)=0$

因此对任意实数 x，$f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数。…………………..3 分

(3) 设 T 为任意有理数，那么有：

当 x 为有理数时，$x+T$ 也是有理数，所以 $f(x+T)=f(x)=1$

当 x 为无理数时，$x+T$ 也是无理数，所以 $f(x+T)=f(x)=0$

因此对任意实数 x，$f(x+T)=f(x)$。

所以，函数 $f(x)$ 为偶函数，并且任意有理数均是 $f(x)$ 的周期。

由于没有最小的正有理数，故 $f(x)$ 无最小正周期。………………………………..5 分

21. 令 $F(x)=[f(b)-f(x)](x-a),x\in[a,b]$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有

$F'(x)=-f'(x)(x-a)+f(b)-f(x),x\in(a,b)$，另外，$F(a)=F(b)=0$ ……..3 分

对 $F(x)$ 运用 Rolle 定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，也即：

$$-f'(\xi)(\xi-a)+f(b)-f(\xi)=0$$

化简得 $\dfrac{f(b)-f(\xi)}{\xi-a}=f'(\xi)$ …………………………………………………………...5 分