# 安徽大学 2021—2022 学年第二学期

# 《高等数学 A （二）》期中试卷

（闭卷，时间 120 分钟）

**考场登记表序号__________**

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | |

院/系______ 专业______ 姓名______ 学号______

答题勿超装订线

## 一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设有直线 L: $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$，则直线 L（ ）

A. 平行于 $\pi$　　B. 在 $\pi$ 上　　C. 垂直于 $\pi$　　D. 与 $\pi$ 相交但不垂直

2. 二次曲面 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-z^2=1$ 的形状是（　　）

（A）单叶双曲面　　（B）双叶双曲面　　（C）椭圆抛物面　　（D）双曲抛物面

3. 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} 1 & xy \neq 0 \\ 0 & xy=0 \end{cases}$ 则下列说法正确的是（ ）

A. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在　　B. $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在

C. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 不存在　　D. $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 存在

4. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 具有偏导数且在 $(x_0,y_0)$ 处有极值是 $f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$ 的（　　）条件

A. 充分非必要　　B. 必要非充分

C. 充分且必要　　D. 非充分非必要

5. 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy\,(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，

$D_2=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le \sqrt{x}\}$，$D_3=\{(x,y):0\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$，则（　　）

A. $J_1<J_2<J_3$　　B. $J_3<J_1<J_2$.

C. $J_2<J_3<J_1$.　　D. $J_2<J_1<J_3$

## 二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 已知 $(a,b,c)=2$，则 $[(a+b)\times(b+c)]\bullet(c+a)=$______________.

7. 点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离=______________.

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[x\sin\frac{2021}{y}+y\sin\frac{2022}{x}\right]=$________

9. 已知 $z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$，则全微分 $dz\big|_{(1,2)}=$________________.

10. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=$________________.

## 三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. 求通过点 $(2,1,1)$ 且垂直于直线 $\begin{cases}x+2y-z+1=0\\ 2x+y-z=0\end{cases}$ 的平面方程.

12. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性和可微性.

13. 计算 $\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$，其中 $D$ 是由曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=x$ 在第一象限内围成的区域.

14. 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2x, 0\le y\le x\right\}$.

15. 设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 是由方程组 $\begin{cases}u^2-v+x=0\\ u+v^2-y=0\end{cases}$ 确定的 $x,y$ 的隐函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

16. 设 $z=f(xy,\frac{y}{x})$，其中 $f$ 具有连续的二阶偏导数，计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

## 四、应用题（共 10 分）

17. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使该与三个坐标平面围成的四面体体积最小，求切点坐标.

## 五、证明题（共 6 分）

18. 设 $z=\dfrac{y}{f(u)}$，其中 $u=x^2-y^2$，$f(u)$ 为可微函数，试证明 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$

# 安徽大学 2021—2022 学年第二学期

# 《高等数学 A（二）》期中试卷参考答案

**一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）**

1、C　　2、B　　3、D　　4、A　　5、B

**二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）**

6. 4

7. $\sqrt{3}$

8. 0

9. $\dfrac{e^{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}(dx+2dy)$

10. $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

**三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）**

11. **解：**

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1,-1,-3)$$

$$(x-2)+(y-1)+3(z-1)=0$$

$$x+y+3z-6=0$$

12. **解：**

沿着$y=kx$路径趋向于0，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\bullet kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

$k=1$,极限为$\dfrac{1}{2}$，$k=2$,极限为$\dfrac{2}{5}$，极限不唯一

所以在点（0,0）处二元极限不存在，所以不连续，不可微

13. **解：**

$$\iint_D \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}(x-x^3)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}}{2}-1.$$

14. 解：

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{10\sqrt{2}}{9}$$

15. 解：

$$\begin{cases} 2udu - dv + dx = 0 \\ du + 2vdv - dy = 0 \end{cases}$$

$$(4uv+1)dv = -dx + 2udy \Rightarrow dv = \frac{-dx+2udy}{4uv+1} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u}{4uv+1};$$

$$(4uv+1)du = -2vdx + dy \Rightarrow du = \frac{-2vdx+dy}{4uv+1} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2v}{4uv+1}.$$

16.

**解** 设 $u = xy,\ v = \frac{y}{x}$, 则 $z = f(u, v)$. 再引入记号 $\frac{\partial f}{\partial u} = f_1',\ \frac{\partial f}{\partial v} = f_2'$ 及 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = f_{12}''$, 以及类似的 $f_{11}'',\ f_{21}'',\ f_{22}''$. 因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' - \frac{y}{x^2}f_2', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xf_1' + \frac{1}{x}f_2'.$$

其中 $f_1', f_2'$ 仍为复合函数, 并且其复合关系与 $f$ 的复合关系相同. 因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x\frac{\partial f_1'}{\partial y} + \frac{1}{x}\frac{\partial f_2'}{\partial y} \\ &= x\left(xf_{11}'' + \frac{1}{x}f_{12}''\right) + \frac{1}{x}\left(xf_{21}'' + \frac{1}{x}f_{22}''\right) \\ &= x^2 f_{11}'' + 2f_{12}'' + \frac{1}{x^2}f_{22}'', \end{aligned}$$

**四、应用题（共 10 分）**

17. **解：**

在 $P_0$ 处法向量为 $\left(F_x', F_y', F_z'\right)\Big|_{P_0} = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right)$，则切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y-y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z-z_0) = 0,$$

化简为：$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1$，所以切平面在三个坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$，

四面体体积为$V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$.

构建拉格朗日辅助函数$L=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$，则

$$\begin{cases} L'_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0 & (1)\\ L'_y=zx+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0 & (2)\\ L'_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0 & (3)\\ L'_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 & (4)\end{cases}$$

$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$

.

**五、证明题（共 6 分）**

18.证明：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yf'(u)}{f^2(u)}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2xyf'(u)}{f^2(u)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{f(u)}-\frac{yf'(u)}{f^2(u)}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{f(u)}+\frac{2y^2f'(u)}{f^2(u)},$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'(u)}{f^2(u)}+\frac{1}{yf(u)}+\frac{2yf'(u)}{f^2(u)}=\frac{1}{yf(u)}=\frac{z}{y^2}.$$