安徽大学 2017--2018 学年第一学期

《高等数学 A(一)》期末考试试卷（A 卷）

（ 闭卷　时间 120 分钟 ）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系__________ 年级__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

装--------------------订--------------------线

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 曲线 $y = x^2(x-1)^2$ 有__________个拐点。

2. 设 $f(x) = \int_{-1}^{x} te^{|t|}dt,\ t \in [-1,1]$，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值在点 $x =$______处达到。

3. 设常数 $a > 0$，则定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$__________。

4. 广义积分 $\int_0^1 \ln x\,dx =$__________。

5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + xf(x)}{x^3} = 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^2} =$__________。

得 分	

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 函数 $f(x) = \dfrac{x}{a + e^{bx}}$ 在 R 上连续，且 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$，则常数 a,b 满足（　　）。

(A) $a<0, b<0$　　(B) $a>0, b>0$

(C) $a \le 0, b > 0$　　(D) $a \ge 0, b < 0$

7. 设积分曲线族 $y = \int f(x)\,dx$ 中有倾角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线，则曲线 $y = f(x)$ 的图形是（　　）。

(A) 平行于 x 轴的直线　　(B) 平行于 y 轴的直线

(C) 直线 $y = \sqrt{3}x$　　(D) 直线 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

8. 设函数 $f(x)$ 满足微分方程 $f''(x) - f'(x) + 5f(x) = 0$，且 $f(x_0) > 0,\ f'(x_0) = 0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处（　）。

(A) 取极小值　　(B) 取极大值

(C) 附近单调减少　　(D) 附近单调增加

9. 曲线 $y=\int_0^x \sqrt{\sin t}\,dt$（$0\le x\le\pi$）的弧长为（　）。

(A) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos x}\,dx$　　(B) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx$

(C) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin x}\,dx$　　(D) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sqrt{\sin x}}\,dx$

10. 设 $y=y(x)$ 是二阶线性非齐次微分方程初值问题

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$$

的解，其中 $\alpha(x),\beta(x)$ 在 R 上连续。下列结果正确的是（　）。

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)}{x^2}$ 不存在　　(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)}{x^2}=1$

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$　　(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)}{x^2}=\dfrac{1}{4}$

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

得 分	

11. 常数 $a>b>0$，曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$，P 为曲线 Γ 上对应于参数 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点。求曲线 Γ 在 P 点的曲率。

院/系＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿

装…………订…………线

答题切超装订线

12. 计算不定积分 $I=\int e^{-x}\sin x\,dx$。

13. 计算定积分 $I=\int_{-1}^{1}\left[(x+|x|)^2+x^3e^{x^2}\right]dx$。

14. 计算积分 $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$。

15. 设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt,\ x>0$，求 $f(x)+f(1/x),\ x>0$。

16. 函数 $y=y(x)$ 连续，满足 $y(x)=e^x+\int_0^x ty(t)dt-x\int_0^x y(t)dt$。（1）求 $y(0)$ 和 $y'(0)$ 的值；（2）验证 $y''(x)+y(x)=e^x$；（3）求 $y(x)$。

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

得分	

17. 在平面曲线 $y = x^2\,(x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线，
使之与该曲线以及 x 轴所围图形 S 的面积为 $1/12$。试求：(1) 切点 A 的坐标；(2) 过切点 A 的切线方程；(3) 由上述平面图形 S 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

18. 设 Y 种群生活在 V 区域，$y = y(t)$ 表示 t 时刻 Y 种群的个体数量，Y 种群的初始个体数量为 $y(0) = y_0 > 0$。假设 V 区域的总资源是 1 个单位，V 区域的 Y 种群饱和容纳量为 K(其中常数 $K > 0$)，称 $\left[1 - (y(t)/K)\right]$ 为 V 区域的剩余资源量，称 $y'(t)/y(t)$ 为 Y 种群的平均增长率。假设 Y 种群的平均增长率与 V 区域的剩余资源量成正比，比例系数为 r（常数 $r > 0$）。试求 Y 种群个体数量 $y(t)$ 的表达式，并计算 $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$。

五、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内二阶可导，且有 $f''(x)\ge 0,\ x\in(a,b)$。
设 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$， $x_1,x_2\in(a,b)$，记 $x_0=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$。

（1）分别写出 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 在 x_0 点处的一阶具 Lagrange 型余项的 Taylor 公式；

（2）证明 $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$。

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，n 为正整数。试证明：（1）对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}|\sin nx|dx=\frac{4}{n}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$。

安徽大学 2017—2018 学年第一学期
《高等数学 A（一）》（A 卷）期末考试试题
参考答案及评分标准

温馨提示：

1. 考试考务中心告知，安大本学期选用教材《高等数学》（理工类，上册，第 3 版，安徽大学出版社）。考虑到安徽大学已经举行过期中考试，结合教学大纲要求和教学进度安排，本卷更加关注期中考试以后的教学内容。

2. 下文中的**参考答案及评分标准**仅供参考，允许学生有其它解法，允许学生合理省略相关过程，允许学生使用自学的理论及知识解答本试题。

3. 阅卷时，阅卷人员应该严格按照分工和要求，坚持**公平**、**公正**原则，做到**给分有理**、**扣分有据**，确保评卷准确无误。

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 2　　2. 0　　3. $\pi a^2/4$　　4. -1　　5. 1/6

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. D　　7. A　　8. B　　9. B　　10.C

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

11. 解：直接计算得：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\frac{b}{a}\cot t$$ （2 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-\frac{b}{a}\cot t)=\frac{(-\frac{b}{a}\cot t)'}{x'(t)}=-\frac{b\csc^2 t}{a^2\sin t}$$

$$k=\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|/(1+(\frac{dy}{dx})^2)^{3/2}=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

$$k\big|_P=\frac{ab}{(a^2\sin^2\frac{\pi}{4}+b^2\cos^2\frac{\pi}{4})^{3/2}}=\frac{2\sqrt{2}ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}$$ （8 分）

12. 解：$I=\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx$ （3 分）

$=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$

$=-e^{-x}(\sin x+\cos x)-I+2C$

$$I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$$ （8 分）

13. 解：$I=\int_{-1}^{1}\left[(x+|x|)^2+x^3e^{x^2}\right]dx$

$=\int_{-1}^{1}(x+|x|)^2\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x+|x|)^2\,dx+\int_{0}^{1}(x+|x|)^2\,dx$

$=\int_{0}^{1}(2x)^2\,dx$ （7 分）

$=\frac{4}{3}$ （8 分）

14. 解：先对被积函数进行代数分解，得到：

$\frac{x}{(1+x)^3}=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}$ （4 分）

$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int_{0}^{+\infty}(\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3})dx$

$=(\frac{-1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2})\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2}$ （8 分）

15. 解：在 $f(1/x)$ 的表达式中，令 $y=\frac{1}{t},\ dt=-\frac{1}{y^2}dy$，

因此， $f(1/x)=\int_{1}^{1/x}\frac{\ln t}{1+t}dt=\int_{1}^{x}\frac{\ln y}{y(1+y)}dy=\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{t(1+t)}dt$ （5 分）

所以， $f(x)+f(1/x)=\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{t(1+t)}dt=\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{t}dt$

$=\frac{1}{2}\ln^2 t\Big|_{1}^{x}=\frac{1}{2}\ln^2 x,\ x>0$ （8 分）

16.解：（1）由 $y(x)=e^x+\int_0^x t\,y(t)dt-x\int_0^x y(t)dt$ 可知 $y(0)=1$

由 $y'(x)=e^x-\int_0^x y(t)dt$ （*）

可得 $y'(0)=1$. （3 分）

（2）对（*）式再求导，得到：

$y''(x)=e^x-y(x)$，也即 $y''(x)+y(x)=e^x$. （5 分）

（3）对应的齐次方程的通解为：

$\tilde{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$，

直接观察可得非其次方程的一个特解为：$y_0(x)=\frac{1}{2}e^x$，

所以 $y(x)=\tilde{y}(x)+y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x/2$，

根据初始条件可得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，所以 $y(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$ （8 分）

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 解：（1）设切点 A 的坐标为 (a,a^2)，则过 A 点的切线斜率为 $y'\big|_{x=a}=2a$，

切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，

切线与 x 轴的交点为 $(\dfrac{a}{2},0)$

平面图形 S 的面积为 $S=\int_0^a x^2dx-\dfrac{a^3}{4}=\dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a^3}{4}=\dfrac{a^3}{12}$

由题设 $S=1/12$，解得 $a=1$

所以切点 A 的坐标为 $(1,1)$ （5 分）

（2）切线方程为 $y-1=2(x-1)$，也即 $y=2x-1$ (6 分）

（3）旋转体的体积为：

$$V=\pi\int_0^1((x^2))^2dx-\pi\int_{1/2}^1(2x-1)^2dx$$
$$=\pi\left(\frac{1}{5}x^5\bigg|_0^1-\frac{1}{6}(2x-1)^3\bigg|_{1/2}^1\right)=\frac{\pi}{30}$$ (8 分）

18. 解：根据题意，可列出如下微分方程：

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=r(1-\frac{1}{K}y(t))$$ （4 分）

这是一个可分离变量微分方程，解得：

$y(t)=\dfrac{CK}{C+(K-C)e^{-rt}}$ （或 $y(t)=\dfrac{CK}{C+e^{-rt}}$ 或 $\ln\dfrac{y}{K-y}=rt+C$ ），

代入初始条件，可求得 $C=y_0$（或 $C=\dfrac{y_0}{K-y_0}$ ），

从而 $y(t)=\dfrac{Ky_0}{y_0+(K-y_0)e^{-rt}}$，$t\ge 0$

直接计算可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=K$. （8 分）

五、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

19.证明：（1）根据 Taylor 定理，存在 ξ_1,ξ_2，其中 ξ_1 在 x_1 和 x_0 之间，ξ_2 在 x_2 和 x_0 之间，使得

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)\left[x_1-x_0\right]+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)\left[x_1-x_0\right]^2$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)\left[x_2-x_0\right]+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)\left[x_2-x_0\right]^2$$ （6 分）

（2）

$$\begin{aligned}\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)&=\lambda_1 f(x_0)+\lambda_1 f'(x_0)(x_1-x_0)+\lambda_2 f(x_0)+\lambda_2 f'(x_0)(x_2-x_0)\\&\quad+\frac{1}{2!}\lambda_1 f''(\xi_1)\left[x_1-x_0\right]^2+\frac{1}{2!}\lambda_2 f''(\xi_2)\left[x_2-x_0\right]^2\\&=(\lambda_1+\lambda_2)f(x_0)+\frac{1}{2!}\lambda_1 f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2+\frac{1}{2!}\lambda_2 f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2\\&=f(x_0)+\frac{1}{2!}\lambda_1 f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2+\frac{1}{2!}\lambda_2 f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2\\&\geq f(x_0)=f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\end{aligned}$$

这就证明了：

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$$ （8 分）

20.证明：（1）作变换 $t=nx,\ dx=\frac{1}{n}dt$，从而

$$\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}\left|\sin nx\right|dx=\frac{1}{n}\int_{2(i-1)\pi}^{2i\pi}\left|\sin t\right|dt$$

注意到被积函数是周期为 π 的周期连续，积分区间长度为 2π。因此我们有：

$$\begin{aligned}\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}\left|\sin nx\right|dx&=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left|\sin t\right|dt=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|dt+\frac{1}{n}\int_{\pi}^{2\pi}\left|\sin t\right|dt\\&=\frac{1}{n}\left[\int_0^{\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)\,dt\right]=\frac{1}{n}\left[-\cos t\Big|_0^{\pi}+\cos t\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]=\frac{4}{n}\end{aligned}$$ （6 分）

（2）利用定积分的定义、积分中值定理，可得：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\left|\sin nx\right|dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}f(x)\left|\sin nx\right|dx\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\int_{2(i-1)\pi/n}^{2i\pi/n}\left|\sin nx\right|dx\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{4}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\frac{2\pi}{n}\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx\end{aligned}$$ （8 分）