

安徽大学2022-2023学年第一学期
《高等数学A（一）》期末模拟试卷

（闭卷 满分100分 时间120分钟）

实际作答时间：2023年2月__日__时__分——2月__日__时__分

一. 选择题（每小题3分，共15分）

1. 下列命题中，错误的个数是（ ）

- (1) 数列 $\{a_{3n-2}\}$ 、 $\{a_{3n-1}\}$ 和 $\{a_{3n}\}$ 均收敛于 $a \Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a ;
(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调有界、且数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{f(a_n)\}$ 有可能发散;
(3) 若 $f(x)$ 在 x_0 可微，则 $f(x)$ 在 x_0 连续;
(4) 若 $f(x)$ 在 x_0 取极大值，则 $\forall \delta > 0$ ，使得 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内单调减少;
(5) 一段曲线可能存在两条不平行的斜渐近线;
(6) 一切初等函数在其有定义的区间上都有原函数;
(7) $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则当 $f(x)$ 为偶函数时， $F(x)$ 必为奇函数;
(8) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积;
(9) $(1+y^2)\frac{d^3y}{dx^3} + 3(\frac{d^2y}{dx^2})^2 + 4y = 5x$ 是三阶非线性偏微分方程。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量， Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x < 0$ ，则（ ）

A. $dy < \Delta y < 0$ B. $\Delta y < dy < 0$ C. $0 < dy < \Delta y$ D. $0 < \Delta y < dy$

3. 函数 $f(x) = \frac{4x - 5x^3 + x^5}{\sin \pi x}$ 的可去间断点个数为（ ）

A. 1 B. 3 C. 4 D. 5

4. 下列广义积分中，发散的是（ ）

A. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln \sqrt[3]{x})^2} dx$ B. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ C. $\int_e^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-e)^4}}$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$

5. 设 $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 为一阶非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的两个线性无关的特解，则该方程的通解为（ ）

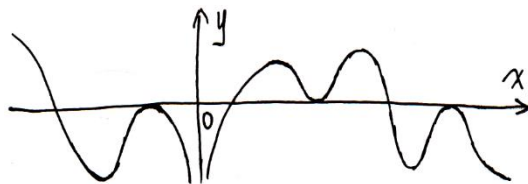
A. $C[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]$ B. $C[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]$
C. $C[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] + \varphi_2(x)$ D. $[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] + C\varphi_2(x)$

二. 填空题 (每小题3分, 共15分)

6. 设 $f(x) = e^x \cos x$, 则 $f^{(2023)}(x) =$ _____。

7. $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x$ 与 mx^n 为等价无穷小量, 则 $m =$ _____ $n =$ _____。

8. 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续、且在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上有二阶连续导数, $f'(x)$ 图像如右图所示, 则 $f(x)$ 有 _____ 个驻点、_____ 个极值点、_____ 个拐点。



9. 设某钢丝形状为
$$\begin{cases} x = e^{2t} \cos 3t, \\ y = e^{2t} \sin 3t, \quad t \in [0, \pi], \\ z = \sqrt{3}e^{2t}. \end{cases}$$
 则该钢丝的长度为 _____。

10. 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = \frac{2024}{9}$ 的解为 _____。

三. 计算与证明题 (每小题7分, 共70分)

11. 求不定积分并写出计算过程: (1) $\int \csc x dx$ (2) $\int \csc^3 x dx$

12. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2}{3} - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2}{3} - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2}{3} - n^2}} \right)$ 。

13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan(x-t)^4 dt}{12x - 2x^3 - 12 \sin x}$ 。

14. 求函数 $f(x) = 2 - \frac{4}{3} \sqrt{x^2 + 2x + 10}$ 的渐近线。

15. 运用分部积分法求: (1) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ (2) $\int e^{ax} \sin bxdx$ 其中 $a > 0$ 、 $b \neq 0$ 。

16. 求不定积分: $\int \ln(1 + \sqrt{\frac{1-x}{x}}) dx$ 。

17. 求曲线 $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ 在 $t=1$ 处的曲率。

18. $f(x)$ 为定义在 $[0, +\infty)$ 上的具有连续导数的单调增加函数, $f(0) = 1$ 。对 $\forall t \in [0, +\infty)$, 直线 $x=0$ 、 $x=t$ 、 $y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周得到旋转体 Ω , 若 Ω 的侧面积在数值上等于其体积的2倍, 求 $f(x)$ 表达式。

19. $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 连续、 $(1, 2)$ 可导, 且 $f(1) = 2 \int_1^{\frac{5}{4}} x^2 f(x) dx^2$, 求证: 至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $\xi f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$ 。

20. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且 $f(x) < 0$, 求证: 存在唯一的 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^\xi f(t) dt = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)} dt$ 。

四. 附加题 (每小题10分, 共20分)

21. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}$ 。

22. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$, $x > 0$, 求 $f(x) + f(\frac{1}{x})$ 。