学号________ 姓名________ 专业________ 年级________ 院/系________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学 2008-2009 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						
阅卷人						

得 分	

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 过点(1，2，3)且与直线 $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 平行的直线方程为________________.

2. 设 $f(x,\ y)=\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\ y)=$________________.

3. 累次积分 $\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy$ 交换积分次序后为________________.

4. 已知曲线 $L: x^2+y^2=a^2$（常数 $a>0$），则 $\oint_L x^2 ds=$________________.

5. 已知 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $(-\pi,\ \pi]$ 上 $f(x)$ 的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$$，则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=0$ 处收敛于________________.

得 分	

二、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 设 $y_1(x)$、$y_2(x)$、$y_3(x)$ 是非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的解，C_1、C_2 是任意常数，则该非齐次线性方程的通解可表示为（　　）.

A. $C_1y_1+C_2y_2+C_3$　　B. $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

C. $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　D. $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

7. 已知二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & xy=0\\ 1, & xy\neq 0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,\ 0)$ 处（　　）.

A. 连续，一阶偏导数不存在　　B. 不连续，一阶偏导数不存在

C. 不连续，一阶偏导数存在　　D. 连续，一阶偏导数存在

8．曲线$L:\begin{cases} x=t^2 \\ y=8/\sqrt{t} \\ z=4\sqrt{t} \end{cases}$在点（16，4，8）处的法平面方程是（　　）．

A．$8x-y-2z=108$　　　　B．$16x-y+2z=268$

C．$8x-y-2z=140$　　　　D．$16x-y+2z=244$

9．常数$a>0$，则第一型曲面积分$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} x^2 dS$的值为（　　）．

A．$\frac{4}{3}\pi a^4$　　B．$\frac{4}{3}\pi a^2$　　C．$4\pi a^4$　　D．$4\pi a^2$

10．下列级数中，绝对收敛的是（　）．

A．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　　　　B．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

C．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$　　　　D．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

得　分	

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

11．已知直线$L_1:\frac{x-3}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{-4}$，平面$\Sigma: x+2y+2z=5$，求直线$L_1$与平面$\Sigma$的夹角.

12．设$z=\arctan\frac{x}{y}$，求dz, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

13．求微分方程 $y''-3y'+2y=e^{-2x}$ 的通解.

14．计算二重积分 $\iint\limits_{D} e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy$，其中 D 是由直线 $x=0$、$y=1$ 及 $y=x$ 所围成的区域.

15．计算三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2+xz)dxdydz$，其中常数 $R>0$.

16．计算第二型曲线积分 $I=\int_C (e^x \sin y-2y)\,dx+(e^x\cos y-2)\,dy$，其中 C 为上半圆周 $x^2+y^2=ax$，方向为从 $A(a,0)$ 到 $O(0,0)$，常数 $a>0$.

17．设抛物面 Σ： $z=1-x^2-y^2$（ $z\ge 0$ ），方向取其上侧，计算 $\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+2dxdy$.

18．将 $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ 展开为 $(x+2)$ 的幂级数，并求该幂级数的收敛域.

院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

四、应用题（本大题共 8 分）

得　分	

19. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使该点到直线 $2x+3y-12=0$ 的距离最短.

五、证明题（本大题共 8 分）

得　分	

20. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减小，且 $a_n \geq 0\,(n=1,2,\cdots)$，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散.

证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

安徽大学 2008-2009 学年第二学期

《高等数学 A （二）、B（二）》考试试卷 （A 卷） 参考答案及评分细则

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$　　2. 2　　3. $\int_0^4 dy\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　4. πa^3　　5. $-\dfrac{\pi}{2}$

二、　单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6．D　　7. C　　8. B　　9. A　　10. D

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

11. 解：设直线的方向向量为$\vec{l}$：

则$\vec{l}=(3,0,-4)$，平面Σ的法向量$\vec{n}=(1,2,2)$，$\cos(\vec{l},\vec{n})=\dfrac{\vec{l}\cdot\vec{n}}{|\vec{l}|\cdot|\vec{n}|}=-\dfrac{1}{3}$.

故直线L_1与平面Σ的夹角为$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{1}{3}$（或$\theta=\arcsin\dfrac{1}{3}$）.

12 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$

故　$dz=z_x dx+z_y dy=\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$

13. 解：齐次方程　$y''-3y'+2y=0$对应的特征方程为：$\lambda^2-3\lambda+2=0$，则

$\lambda_{1,2}=1,2$.

因此齐次方程对应的通解为：$y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$，其中C_1,C_2为任意常数。

令非齐次方程的特解为：$y^*(x)=A\cdot e^{-2x}$

代入原式得：$A=\dfrac{1}{12}$，故$y^*(x)=\dfrac{1}{12}\cdot e^{-2x}$

因此非齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{12}e^{-2x}$

14. 解：

$$\iint_D e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-\frac{y^2}{2}}dx \quad =\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}ydy \quad =1-e^{-\frac{1}{2}}$$

15. 解

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdydz+\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}xzdxdydz\text{（对称性）}$$

$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdydz \quad =\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^4\sin^3\varphi dr$$

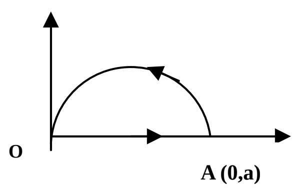
$$=\frac{8}{15}\pi R^5$$

提示：本题可以化为：

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdydz+\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}xzdxdydz\text{（对称性）}$$

$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdydz \quad =\frac{2}{3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2+z^2)dxdydz \quad =\frac{8}{15}\pi R^5$$

16. 解 如图所示：



C 为上半圆周，方向为逆时针。添加 $\overline{OA}$ 线段，方向如图所示. 这时 C 与 $\overline{OA}$ 构成一个平面区域 D.然后再 D 上应用 Green 公式：

$$I=(\int_C+\int_{\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}})(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$$

$$=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-2)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-2y)]dxdy-\int_0^1 0dx$$

$$=\iint_D 2dxdy=\frac{\pi a^2}{4}$$

17. 解：补充平面 $\Sigma_0: z=0(x^2+y^2\le 1)$ 取下侧，则 Σ_0 与 Σ 围成空间区域 Ω 于是

$$I=\oiint_{\Sigma_0+\Sigma}-\iint_{\Sigma_0}$$

$$=6\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dv+2\pi$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}r^3dz+2\pi$$

$$=12\pi\int_0^1(r^3-r^5)dr+2\pi$$

$$=3\pi$$

18. 解 $\frac{1}{1+2x}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2(x+2)}{3}}$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2(x+2)}{3}\right]^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}(x+2)^n$$

解出得收敛域为: $(-\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2})$

四、 应用题（本大题共 8 分）

19. 设 (x,y) 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任一点，则该点到直线 $2x+3y-12=0$ 的距离为

$$d=\frac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}}$$

令 $L=(12-2x-3y)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$，

于是由：

$$\begin{cases}L_x=-4(12-2x-3y)+2\lambda x=0\\ L_y=-6(12-2x-3y)+8\lambda y=0\\ L_\lambda=x^2+4y^2-4=0\end{cases}$$

得条件驻点： $M_1(\frac{8}{5},\frac{3}{5}),M_2(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$

$$d|_{M_1}=\frac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{13}\qquad d\Big|_{M_2}=\frac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}}=\frac{17\sqrt{13}}{13}$$

因此 $M_1(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ 为到直线距离最小值点.

提示，本题可以直接在椭圆上求一点的切线平行于直线。

对椭圆两边关于 x 求导得： $2x+8yy'=0\Rightarrow y'=-\frac{x}{4y}$

令 $y' = -\frac{x}{4y} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{8}x$

代入椭圆得：$M_1(\frac{8}{5},\frac{3}{5}), M_2(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$

$d\big|_{M_1} = \frac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$ $\quad\quad d\Big|_{M_2} = \frac{|12-2x-3y|}{\sqrt{13}} = \frac{17\sqrt{13}}{13}$

因此 $M_1(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ 为到直线距离最小值点.

五、证明题（本大题共 8 分）

20. 证明：因为 $\{a_n\}$ 单调减小，且 $a_n \ge 0$，即单调减小有下界，故 $\{a_n\}$ 收敛。

设其极限为 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，所以 $a > 0$（否则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛）。

于是对于任意的 n 有 $\frac{1}{1+a_n} < \frac{1}{1+a} < 1$，

而等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{1+a})^n$ 收敛。由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$ 收敛。