

1. 求 $y = \sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x} + \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$ 的反函数

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且对 $\forall x$, 有 $f(2x) = f(x)\cos x$, 求在 $x \neq 0$ 时 $f(x)$ 的表达式。

3. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot |1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}n|$

4. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}} (x \geq 0)$, 讨论 $f(x)$ 的可导性

5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$

6. 设 $a_1 = 1$, $a_k = k(a_{k-1} + 1)$, 试计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$

7.

(1) 设 $f(x)$ 为在 $[a, b]$ 上的连续正值函数。求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx} = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 且 $\sin^n x_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

8. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$

9. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$

10. 计算 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2+x+\sin x} + (x+2)]$

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$

12. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}$

13. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

14. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3} - \sqrt{1+x+x^2} \cdot \frac{\ln(x+e^x)}{x} \right]$

15. 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的

特解, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$

16. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{x^4}$

17. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx}$

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上具有连续导数, 满足 $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{x^2 + 2x + f(x)}$, 且 $f(1) = 1$,

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \frac{3}{2}$

19.

(1) 设 $f(x) = \arcsin(x + x^2) \sqrt{\frac{1 - \sin^2 x}{1 + x^2}}$, 求 $f'(0)$

(2) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对于 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$, 且 $f(0) = 0, g(0) = 1, f'(0) = 1, g'(0) = 0$, 求 $f'(x)$

20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$, 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$

21. 设 $f(x) = x + 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

22. 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ 内无穷次可导, 证明, 对任意的正整数 n , 都有如下式子成立。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}$$

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且有 $f(0) = f(1) = 0$ 。求证:

$$(1) \int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{4} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

$$(2) \int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

24. 计算 $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$

25.

$$(1) \text{ 计算 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

$$(2) \text{ 利用 (1) 计算 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx$$

26.

$$(1) \text{ 计算 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$$

$$(2) \text{ 计算 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$$

27. 记 $C(\alpha)$ 为 $(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的幂级数的展开式中 x^{2018} 的系数, 计算积分

$$\int_0^1 C(-y-1) \left(\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+2} + \dots + \frac{1}{y+2018} \right) dy$$

28. 设函数 $f(x, y)$ 在单位圆域上有连续偏导数, 且在边界上的值恒为 0, 求证:

$$f(0,0) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{x f'_x + y f'_y}{x^2 + y^2} dx dy$$

其中 D 是圆域 $\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$.

29. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 具有二阶连续导数, 已知 $f(0) = f'(0) = 0$, 对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 都

有 $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) \geq 0$ 成立, 求证: $f(x) \geq 0$

30. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 记 $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x) dx$, $J(f) = \int_0^1 x f^2(x) dx$, 求函数 $f(x)$ 使得 $I(f) - J(f)$ 最大

31. 求不定积分 $\int \left(1+x-\frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$

32. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n \tan \frac{i}{n}}{n^2 + i}$

33.

(1) 设函数 $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi)$ 。将函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数

(2) 利用 (1) 的结论证明 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(3) 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{u}{1+e^u} du$ 的值

34. 设函数 $f(x, y)$ 是定义在 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上的二元函数, $f(0,0) = 0$, 且在点 $(0,0)$ 处

$f(x, y)$ 可微, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-\frac{x^4}{4}}}$

35. 求 $\sum_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分

36. 设 $f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|^{\frac{1}{n}}}{n + \frac{1}{n}} + \frac{|x|^{\frac{2}{n}}}{n + \frac{2}{n}} + \frac{|x|^{\frac{3}{n}}}{n + \frac{3}{n}} + \cdots + \frac{|x|^{\frac{n}{n}}}{n + 1} \right), & x \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right), & x = 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的表达式

37. 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 满足 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$, 及

$f(0,0)=0$ ，求 $f(x,y)$

38. 已知函数 $z = z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$ 。求证：经

变换 $u = \frac{1}{2}(x+y)$ ， $v = \frac{1}{2}(x-y)$ ， $w = ze^y$ ，以 u 、 v 作自变量， w 作因变量，方程可化

为 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2w$

39. 设 $y = y(x)$ 满足 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)(a > 0)$ ，求 $I = \int \frac{dx}{y(x^2 + y^2 + a^2)}$

40. 若 $D: x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4}$ ，求 $\iint_D \frac{\tan(x^2)}{1 - \tan(x^2)\tan(y^2)} dx dy$

41. 设 $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ，求 $f^{(2017)}(0)$

42. 求满足 $\frac{du(t)}{dt} = u(t) + \int_0^1 u(t) dt$ 及 $u(0) = 1$ 的可微函数 $u(t)$

43. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x) \geq 0$ ，对于 $(-1,1)$ 内任意的 $x \neq 0$ ，存在唯一的 $\theta(x) \in (0,1)$ ，使得 $f(x) = f(0) + f'(\theta(x))x$ 成立，计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$

44. 设 $0 < a_n < 1, n = 1, 2, \dots$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = q$ （有限或 $+\infty$ ），求证：

(1) 当 $q > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当 $q < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

(2) 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2 \ln n}{n^2}\right)^{n^2}$ 的敛散性

45. 设 a 、 b 均为常数， $a > -2$ ， $a \neq 0$ ，求实数 a 、 b ，使得

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x + a)} - 1 \right) dx = \int_0^1 \ln(1 - r^2) dr$$

成立

46. 计算 $\iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} dx dy$, 其中 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴围成的三角形区域

47. 设一平面过原点和点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 求该平面方程

48. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负可积, 求证:

$$(1) \text{ 当 } 0 < \lambda < 1 \text{ 时, } \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right)^\lambda \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\lambda(x) dx$$

$$(2) \text{ 当 } \lambda > 1 \text{ 或 } \lambda < 0 \text{ 时, } \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right)^\lambda \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\lambda(x) dx$$

49. 计算定积分 $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \operatorname{arccot}(2017^x)}{1 + \cos^4 x} dx$

50. 求函数 $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ 条件下的极值

51. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{2k^2}$

52. 计算 $\int_0^x f(t)g(x-t)dt (x \geq 0)$, 其中 $x \geq 0$ 时 $f(x) = x$, 而 $g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

53. 设 $f(x)$ 为连续函数, 求证: $\int_1^4 f\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = \ln 2 \int_1^4 f\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right) \frac{dx}{x}$

54. 设函数 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 $f(x) = x^2 + x \int_0^{x^2} f(x^2 - t) dt + \iint_D f(xy) dx dy$, 其中 D

是以 $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ 为顶点的三角形, $f(1) = 0$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$

55. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$

56. 求由曲线 $L_1: y = \frac{1}{3}x^3 + 2x (0 \leq x \leq 1)$ 绕直线 $L_2: y = \frac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积。

57. 设函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时具有连续导数且 $f(1) = 2$, 在右半平面 ($x > 0$) 内存在可微函数

$u = u(x, y)$ 使得 $du = 4x^3 y dx + x f(x) dy$, 求函数 $f(x)$ 和 $u(x, y)$

58. 设锐角三角形 ABC 的外接圆半径是一定值, 且 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边长分别是 a 、 b 、 c , 求证: $\frac{da}{\cos A} + \frac{db}{\cos B} + \frac{dc}{\cos C} = 0$

59. 设曲线 $C_n: x^{2n} + y^{2n} = 1 (n \in N^*)$, 记 L_n 为 C_n 的长, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 8$

60.

(1) 记 $A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$, 求 A , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$

(2) 记 $B_n = n(A_n - A)$, 求 B , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$

(3) 记 $C_n = n(B_n - B)$, 求 C , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$

61. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n x^n f(x) dx = f(1)$

62. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 上具有一阶连续偏导数, 且满足

$f(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = a^2$, 以及 $\max_{(x,y) \in D} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] = a^2$, 其中 $a > 0$, 求证:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{4}{3} \pi a^4$$

63. 计算 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+e^{\frac{1}{x}})(1+x^2)}$

64. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 可微 ($0 < a < b$), $f(a) = f(b) = 0$,

$\int_a^b f^2(x) dx = 1$, 证明: $\int_a^b x^2 [f'(x)]^2 dx \geq \frac{1}{4}$

65. 设函数 $f''(x)$ 连续, $f''(x) > 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{u(x)} f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$. 其中 $u(x)$

是曲线 $y = f(x)$ 上点 $P(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距。

66. 设函数 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的可积函数且满足 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$, 求证: $\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4$

67. 设数列 $\{x_n\}$ 为 $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3 - \sqrt{3}}, x_{n+2} = \sqrt{3 - \sqrt{3 + x_n}}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛并求极限

68. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_x^{x+f(x)} g(t-x) dt = x^2 e^x$, 求 $f(x)$

69. 求过点 $(-2, 0, 0)$ 和 $(0, -2, 0)$ 且与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的交线为抛物线的平面方程。

70. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 求证:

$\left[\int_0^1 xf(x) dx \right]^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$ 取等号的条件是当且仅当 $f(x) = A(x^3 - x)$ 时成立, 其中 A 为常数

71. 设函数 $f(x, y, z)$ 在区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 上具有二阶连续偏导数, 且满足

$\text{div}(\text{grad}(f(x, y, z))) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 计算 $I = \iiint_{\Omega} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) dV$

72. 已知平面区域 D 是 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, L 是 D 的边界正向一周, 求证:

$$I = \oint_L \frac{xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx}{2017x^2 + 2018y^2} \geq \frac{\pi}{1009}$$

73. 设函数 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_x^1 f(y)f(y-x)dy$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$

74. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, 且对任意的 $x \in [a, b]$,

有 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 又对于数列 $\{x_n\}$, 其满足 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $x_0 = b$ 。

(1) 求证: 方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内恰有一个根 ξ

(2) 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 ξ

75. 设 $s > 0$, 计算 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-sx} dx$

76. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 x^k f(x) dx = 0 (k = 0, 1, \dots, n-1)$, $\int_0^1 x^n f(x) dx = 1$, 求证:

$\exists x_0 \in [0, 1]$, 使得 $|f(x_0)| \geq (n+1) \cdot 2^n$

77. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, 求方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 7x^3 + 14y^3 + 21z^3 = 6 \end{cases}$ 的解

78. 设 $a_n > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

(1) 当 $a_1 > 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ 时, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n}$ 的敛散性

(2) 当 $\alpha > 0$ 时, 求证: 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^\alpha}$ 收敛

79. 设 $I(r) = \oint_C \frac{(y-1)dx - (x+1)dy}{(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2)^\alpha}$, 其中曲线 C 为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = r^2$, 取正向。

求极限 $\lim_{r \rightarrow 0} I(r)$

80. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且 $0 < m \leq f(x) \leq M$, 求证: $\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$

81. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, 且有 $f(0) = f(1) = 0, |f''(x)| \leq A$. 求证: 对任意的 $x \in [0,1]$, 有 $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$

82. 设 $\alpha > 1$, 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}$ 收敛

83. 设 $f(x, y)$ 为具有二阶连续偏导数的二次齐次函数, 即对任意的 x, y, t , 都有

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y).$$

(1) 求证: $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y) = 2f(x, y)$

(2) 设 D 是由 $L: x^2 + y^2 = 4$ 正向一周所围成的闭区域, 求证:

$$\oint_L f(x, y) ds = \iint_D \operatorname{div}(\mathbf{grad} f(x, y)) dx dy$$

84. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f'_+(a) = 1$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上正值连续, 如果

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = f(\xi(x)) \int_a^x g(t)dt, \xi(x) \in (a, x), \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\xi(x) - a}{x - a}$$

85. 已知平面区域 D 是 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, L 是 D 的边界正向一周, 求证:

$$I = \oint_L \frac{xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx}{x^2 + xy + 2y^2} \geq \frac{4}{5}\pi$$

86. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 求证: 对任意的

$$x \in [0,1], \text{ 有 } \int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx \geq \frac{1}{e}$$

87. 求证: 对任意的 $x \geq 0, y \geq 0$, 有 $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}$

88. 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且满足 $\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt$, $x \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt, \text{ 求证: } \int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$$

89. 设函数 $f(x)$ 二阶可导且 $f(x) > 0$, 对任意的 x , 有 $f(x)f''(x) - [f'(x)]^2 \geq 0$, 求证:

$$(1) \text{ 对 } \forall x_1, x_2, \text{ 有 } f(x_1)f(x_2) \geq f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$(2) \text{ 若 } f(0) = 1, \text{ 求证: 对 } \forall x \in \mathbf{R}, \text{ 都有 } f(x) \geq e^{f'(0)x}$$

90. 设 n 为自然数, $f(x) = \int_0^x (t-t^2) \sin^{2n} t dt$, 求证: $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可取得最大值, 且

$$\max_{x \in [0, +\infty)} f(x) \leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

91. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 求证:

$$(1) \text{ 若 } a_n b_n \leq a_{n+1} b_{n+1}, n=1, 2, \dots, n, \text{ 则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ 发散时, } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散:}$$

$$(2) \text{ 若对某个正常数 } a, \text{ 有 } a_n \frac{b_n}{b_{n+1}} - a_{n+1} \geq a, n=1, 2, \dots, \text{ 则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ 收敛时, } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收}$$

敛。

92. 设 $f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t) dt$, 求证: $e^x |f(x)| \leq 2$

93. 设 $F(x) = \frac{x^4}{e^{x^3}} \int_0^x \int_0^{x-u} e^{u^3+v^3} du dv$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 或者证明它不存在

94. 设 L 为曲线 $x^2 + y^2 = R^2$ (常数 $R > 0$) 一周, \mathbf{n} 为 L 的外法线向量, $u(x, y)$ 具有二阶

连续偏导数且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2$ 。求 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$

95. 设二次函数 $y = \varphi(x)$ (其中 x^2 项的系数为1) 的图形与 x 轴的交点为 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 及 $(B, 0)$,

其中 $B = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} 2e^{\sin t} dt - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, 求使二元函数 $I(\alpha, \beta) = \int_0^1 [\varphi(x) - (\alpha x + \beta)]^2 dx$ 取得

最小的实数 α 、 β 的值

96. 设 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\theta}{2^k}$, 其中 $\theta \neq 0$ 且 $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

97. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x} dx$

98. 设 $\rho(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2}$, $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi - x|^{\frac{1}{2}} \rho(\xi) d\xi$, 其中 ξ, x 为任意实数, y 为正

实数, 求 $f(x)$ 的初等函数表达式

99. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = f'(1) = 1$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right) = \frac{1}{24}$$

100. 计算 $\int_0^{+\infty} \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} - \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots \right) \left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \right) dx$

101. 计算 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ (提示: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

102. 求证: 对于任意的自然数 n , 有 $\frac{2}{3} n \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6} \sqrt{n}$

103. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\left[\frac{2n}{k} \right] - 2 \left[\frac{n}{k} \right] \right)$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的整数部分

104. 计算 $\int_0^a x^3 \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx$

105. 设函数 $F(x) = f(x)g(x)$ ，其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足： $f'(x) = g(x)$ ， $g'(x) = f(x)$ ，

$f(0) = 0$ ， $f(x) + g(x) = 2e^x$ ，求 $F(x)$

106. 已知 $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 存在，求证： $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$

107. 计算 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \left(x \ln x + \frac{1}{4x} \right) e^{\left(x - \frac{1}{x} \right)^2} dx$

108. 设 $x \geq 0$ ，设函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{t} \right)^{xt}$ ， $g(x) = \int_0^x f(t) dt$

(1) 求函数 $g(x)$ 在 $x \geq 0$ 部分的水平渐近线

(2) 求函数 $g(x)$ 与其水平渐近线及 y 轴在 $x \geq 0$ 部分所围成的图形的面积 A

109. 求平面曲线 C ，使得 C 上两点 $(0,1), (x,y)$ 之间的弧长为 $\sqrt{y^2 - 1}$

110. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上具有一阶连续导数，且 $f'(x) \geq 0$ ，求证：对任意正整数 n ，有

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{2|f(2\pi) - f(0)|}{n}$$

111. 设函数 $f(x)$ 连续， $f'(0)$ 存在，并且对于 $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ，有

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - 4f(x)f(y)}$$

(1) 求证： $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上可微

(2) 若 $f'(0) = \frac{1}{2}$ ，求 $f(x)$

112. 求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} (x > 0)$ 的非铅直渐近线

113. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 计算 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx$

114. 设 $f(x)$ 是二次可微的函数, 满足 $f(0) = 1, f'(0) = 0$, 且对 $\forall x \geq 0$, 有 $f''(x) - 6f'(x) + 5f(x) \geq 0$, 求证: 对 $\forall x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$

115. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在点 $M(1, 2)$ 处曲率圆的方程为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$,

求常数 a, b, c

116. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$

117. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f'(0)$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, 求证: 至少存在一点

$\xi \in (0, \frac{1}{2})$, 使得 $f''(\xi) = \frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$

118. 设正值函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 求证: $e^{\int_0^1 \ln f(x) dx} \leq \int_0^1 f(x) dx$

119. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 = 3xy$ 确定, 求 $\int \frac{y(1-xy)}{y^2 - x} dx$

120. 设函数 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 内具有非负二阶导数, 求证: 对于 $\forall [0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续函数 $f(x)$, 有:

$$F\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx\right] \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} F[f(x)] \sin x dx$$