院/系____ 年级____ 专业____ 姓名____ 学号____

装 订 线 答题勿超装订线

安徽大学 2019—2020 学年第二学期

《高等数学 A（二)》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1．方程 $y'=-y+xe^{-x}$ 是（　　　）.

(A) 一阶非齐次线性方程　　(B)一阶齐次线性方程

(C) 齐次方程　　(D) 可分离变量方程

2．向量场 $\vec{a}=\left(x^2y+y^3\right)\vec{i}+\left(x^3-xy^2\right)\vec{j}$ 的散度为（　　　）.

(A) 2　　(B) $2x^2-4y^2$　　(C) $2xy$　　(D) 0

3. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$（　　　）.

（A）偏导数不存在　（B）不连续　（C）不可微　（D）可微

4．设 $L: y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$，则 $I=\int_L xds=$（　　　）.

（A）2　　（B）0　　（C）$\dfrac{13}{6}$　　（D）$\dfrac{5}{6}$

5．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}$ 发散的充分必要条件是 (　　　).

（A）$p>0$　　（B）$p\le 0$　　（C）$p\le 1$　　（D）$p<1$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6．已知 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 ____________________.

7．若 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______________.

8. 计算 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy=$ ____________________.

9. 设 L：$x^2+y^2=9$, 方向为逆时针方向，$\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=$ ____________.

10．函数 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi\le x\le 0\\ 1+x^2,0<x\le\pi\end{cases}$，以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 ____________.

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

得 分	

11．设 $z=f(u),u=\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

12．求微分方程 $4y''+4y'+y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2,y'|_{x=0}=0$ 的特解.

13．计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dv$，其中 V 由 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成.

14．求过点 $Q(3,-1,3)$ 及直线 $\begin{cases}x=2+3t\\ y=-1+t\\ z=1+2t\end{cases}$ 的平面方程.

15．计算第二类曲面积分 $\iint\limits_\Sigma xdydz$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0,z=3$ 所截得的在第Ⅰ卦限内的部分的前侧.

16．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

得 分	

17．求 $z=x^2+y^2+5$ 在约束条件 $x+y=1$ 下的极值，并说明是极小值还是极大值.

18．设一三角形薄片，顶点分别为 $(0,0),(a,0),(0,a)$，其薄片上各点处的面密度为 $\rho(x,y)=x+y$，求该薄片的质量.

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

得 分	

19．证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 是条件收敛.

安徽大学 2019—2020 学年第二学期

《高等数学 A（二）》（A 卷）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．A； 2．D； 3．C； 4．C； 5．B

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6．$\dfrac{\pi}{3}$； **7**．$\dfrac{1}{1+x^2}$； **8**．$\dfrac{1}{2}(e-1)$； 9．-18π； **10**．$\dfrac{\pi^2}{2}$.

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11．解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

………………… 9 分

12.解： 由特征方程 $4r^2+4r+1=0$，得两等根 $r_{1,2}=-\dfrac{1}{2}$.

故微分方程的通解为 $y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{x}{2}}$，两边对 x 求导，得

$y'=\left(-\dfrac{1}{2}c_1+c_2-\dfrac{1}{2}c_2x\right)e^{-\frac{x}{2}}$，由初始条件 $y\big|_{x=0}=2,y'\big|_{x=0}=0$，得 $c_1=2,c_2=1$，故

所求特解为 $y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$.

………………… 9 分

13.解 利用柱坐标变换

$$\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2\cdot rdz=2\pi\int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr=\frac{16}{3}\pi .$$

………………… 9 分

14.解：由于直线$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$过点$P(2,-1,1)$，方向向量为$\vec{v}=\{3,1,2\}$，

所求平面的法向量为$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\{-2,4,1\}$，

从而所求平面方程为$-2(x-3)+4(y+1)+(z-3)=0$，

即$2x-4y-z=7$．　　　　　　　　　　　………………… 9分

15．解：Σ在yoz面的投影为矩形域D_{yz}:$0\le y\le 1, 0\le z\le 3$，

原式$=\iint\limits_{\Sigma} xdydz = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}dydz$ ．

$$=\int_0^1 dy\int_0^3 \sqrt{1-y^2}dz = 3\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{3}{4}\pi$$

………………… 9分

16．解：

由$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，得收敛区间$-1<x<1$．

且当$x=1$时，级数均收敛，当$x=-1$时，级数发散，

故收敛域为$(-1,1]$．　　　　　　　　　　………………… 4分

令其和函数为$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，显然$s(0)=0$

$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}, -1<x<1.$　　$s(x)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$

因级数在$x=1$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x), -1<x\le 1$．

………………… 9分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

17．解：作 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+5+\lambda(x+y-1)$

解方程组 $\begin{cases} L_x=2x+\lambda=0 \\ L_y=2y+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y-1=0 \end{cases}$，得唯一驻点 $x=y=\dfrac{1}{2}$，又

$A=z_{xx}=2, B=z_{xy}=0, C=z_{yy}=2 \quad AC-B^2=4>0, A>0$，故当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时，

$z\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{2}$ 为极小值，无极大值。

.... 10 分

18．解：三角形斜边所在的直线方程为 $x+y=a$，薄片的质量

$$M=\iint_{D_{xy}}\rho(x,y)d\sigma=\iint_{D_{xy}}(x+y)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x+y)\,dy=\frac{1}{3}a^3$$

.... 10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

19．证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

因 $\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n+1}$,，而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，得原级数非绝对收敛，

但 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0, u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{\ln(n+2)}=u_{n+1}$，故由莱布尼兹判别法，

交错级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 收敛，故原级数条件收敛.

.... 6 分