《高等数学A（一）》期中模拟试卷解析

一. 选择题（每小题3分，共15分）

1. 下列命题中，正确的个数是（ A ）

(1)若l为某给定正整数，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+l}=a$是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的必要不充分条件；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在且不为0$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$；　(3)数列$\{a_n^2\}$收敛$\Rightarrow$数列$\{a_n\}$收敛；

(4)数列$\{a_n\}$收敛、且$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调有界$\Rightarrow\{f(a_n)\}$收敛；

(5)数列$\{a_n\}$收敛于a、数列$\{b_n\}$发散$\Rightarrow$数列$\{a_nb_n\}$发散；

(6)数列$\{a_{3n-2}\}$与数列$\{a_{3n-1}\}$均收敛于$a\Rightarrow$数列$\{a_n\}$也收敛于a；

(7)$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}$和$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$均存在$\Rightarrow\{a_n\}$未必有界；

(8)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有无穷多项$a_n$，使得$|a_n-a|<\varepsilon$。

$A.\ 0$　　$B.\ 1$　　$C.\ 2$　　$D.\ 3$

概念题需要仔细分析，多找可能的反例。（8项全错，选A）

①. l为给定（即有限）正整数，则$\{a_n\}$与$\{a_{n+l}\}$仅仅只是项平移而已，不会有敛散性差异，故互为充要条件。即：$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+l}=a\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

证充分：$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+l}=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，当$n>N_1$时，$|a_{n+l}-a|<\varepsilon$.

$\Rightarrow$取$N_1'=N_1+l$，当$n>N_1'=N_1+l$时，$|a_n-a|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

证必要：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2>0$，当$n>N_2$时，$|a_n-a|<\varepsilon$.

$\Rightarrow$取$N_2'=N_2-l$，当$n>N_2'=N_2-l$时，$|a_{n+l}-a|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+l}=a$.

② 原命题成立，但逆命题不成立（无法倒推），反例：$a_n=n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，但$\{a_n\}$发散.

③ 逆命题成立，原命题不成立，反例：$a_n=(-1)^n$，$\{a_n^2\}$收敛，但$\{a_n\}$发散.

④ 未必成立，因为$f(x)$不一定连续，举反例：$a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，$f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$.

当$n\to\infty$时，$f(a_n)$在-1和1之间来回振荡，故发散.

⑤ 未必成立，反例：$a_n=\dfrac{1}{n^2}$，$b_n=n$，$\{a_nb_n\}=\{\dfrac{1}{n}\}$，收敛.

⑥. 未必成立，只有子列中的项能涵盖所有原数列项，且收敛于同一值时，方能成立.

⑦. 不成立，由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$均存在，故它们收敛$\Rightarrow$有界.

$\Rightarrow\exists M_1、M_2>0$，使得$|a_{2n-1}|\le M_1$，$|a_{2n}|\le M_2$，又$\{a_n\}=\{a_{2n-1}\}\cup\{a_{2n}\}$

取$M_0=\mathrm{Max}\{M_1,M_2\}$，则有$|a_n|\le M_0\Rightarrow\{a_n\}$必有界.

⑧ 原命题成立，但逆命题不成立，因为子列也可以有无限项，如$\{(-1)^n\}$的奇子列.

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3}, & x>0\\ 0, & x=0\\ g(x)\cdot\arcsin^2 x, & x<0\end{cases}$，其中$g(x)$有界，则$f(x)$在$x=0$处（ C ）

A. 极限不存在　　*B.* 极限存在，但不连续　　*C.* 连续，但不可导　　*D.* 可导

$f(x)$在$x=0$处连续，但不可导．选C．

$$\left\{\begin{aligned} f(0^+)&=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x^2}{x^3}\xlongequal[\text{等价替换}]{\text{无穷小量}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac12x^4}{x^3}=0=\lim_{x\to0^+}\frac12x\\ f(0^-)&=\lim_{x\to0^-}g(x)\cdot\arcsin^2x=\lim_{x\to0^-}g(x)\cdot\lim_{x\to0^-}\arcsin^2x\xlongequal[\text{仍为无穷小量}]{\text{无穷小量与有界变量乘积}}0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(0^+)=f(0^-)=f(0)$$

则$f(x)$在$x=0$连续．

$$\left\{\begin{aligned} f'_+(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x^2}{x^3\cdot x}\xlongequal[\text{等价替换}]{\text{无穷小量}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac12x^4}{x^4}=\frac12\\ f'_-(0)&=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}g(x)\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{\arcsin^2x}{x}\xlongequal[\text{仍为无穷小量}]{\text{无穷小量与有界变量乘积}}0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

故$f(x)$在$x=0$不可导

3. 函数$f(x)$在$x=0$可导的充分条件是（ B ）

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}$存在　　*B.* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$存在

C. $f'_-(0)$与$f'_+(0)$均存在　　*D.* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)}{x}$存在

考察$x=0^+$、$x=0^-$是否均得到分析，对应的$f'_+(0)$、$f'_-(0)$存在且相等方可导．选B．

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}\xlongequal[x\to0\text{时}, h\to0^+]{\text{令}h=x^2}\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=f'_+(0)$存在．但$f'_-(0)$未知；

B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\xlongequal[x\to0\text{时}, i\to0]{\text{令}i=x^3}\lim\limits_{i\to0}\dfrac{f(i)-f(0)}{i-0}=f'(0)$存在（左右涵盖．故可导）；

C. $f'_-(0)$与$f'_+(0)$虽存在．但未必相等．故无法判定可导；

D. 设$k=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)}{x}\xlongequal[\text{等价替换}]{\text{无穷小量}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)}{\sin x}\xlongequal[x\to0\text{时}, j\to0]{\text{令}\sin x=j}\lim\limits_{j\to0}\dfrac{f(j)-0}{j-0}=\lim\limits_{j\to0}\dfrac{f(j)}{j}$

若要上式符合导数定义，则需$f(0)=0$．

由于$\lim\limits_{j\to0}j=0$．$\Rightarrow\lim\limits_{j\to0}f(j)=\lim\limits_{j\to0}\dfrac{f(j)}{j}\cdot\lim\limits_{j\to0}j=k\cdot0=0=\lim\limits_{x\to0}f(x)$

$f(x)$在$x=0$连续性未知．故由$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$无法得到$f(0)=0$

举例：$f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{\arcsin x}\right), & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{x}\cdot\sin\dfrac1x=0$（存在）．$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$．但$f(0)=1$

4. 设函数$f(x)$在$x=1$处连续但不可导，则下列在$x=1$处可导的函数是（ A ）

$A.\ (x^2-1)f(x)$ $B.\ f(x)x^2$ $C.\ f(x^2)$ $D.\ f(x)(x+1)$

设 $F_A(x)=(x^2-1)f(x)$. $F_B(x)=f(x)x^2$. $F_C(x)=f(x^2)$. $F_D(x)=f(x)(x+1)$

A. $F_A'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[(1+\Delta x)^2-1]f(1+\Delta x)-(1-1)f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)f(1+\Delta x)=2f(1)$

B. $F_B'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)(1+\Delta x)^2-f(1)\cdot 1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[(2+\Delta x)f(1+\Delta x)+\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\right]=2f(1)+f'(1)$ 不存在

C. $F_C'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[(1+\Delta x)^2]-f(1^2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[(1+\Delta x)^2]-f(1^2)}{(1+\Delta x)^2-1^2}\cdot\dfrac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=f'(1^2)\cdot 2$ 不存在

D. $F_D'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)(1+\Delta x+1)-f(1)(1+1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\cdot 2+f(1+\Delta x)\right]=2f'(1)+f(1)$ 不存在

只有A符合要求. 故选A.

5. 函数$f(x)=\dfrac{|x-3|\sin\pi x}{x(x-1)(x-2)(x-3)^3}$在下列哪个区间内无界（ D ）

$A.\ (-1,0)$ $B.\ (0,1)$ $C.\ (1,2)$ $D.\ (2,3)$

显然. $f(x)$在$x=0$、$x=1$、$x=2$. $x=3$间断. 在其它区间连续.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\pi\cdot\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\frac{|x-3|}{(x-1)(x-2)(x-3)^3}=\pi\cdot 1\cdot\frac{3}{(-1)(-2)(-3)^3}=-\frac{\pi}{18}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}\cdot\frac{|x-3|}{x(x-2)(x-3)^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}\ \underset{x\to 1\text{时}t\to 0}{\overset{\text{令}t=x-1}{=\!=}}\ \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t+\pi)}{t}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}-\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\pi=-\frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\sin\pi x}{x-2}\cdot\frac{|x-3|}{x(x-1)(x-3)^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\frac{\sin\pi x}{x-2}=-\frac{1}{2}\cdot(-\pi)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left[-\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\cdot\frac{\sin\pi x}{x-3}\cdot\frac{1}{x-3}\right]=-\frac{1}{6}\pi\cdot(-\infty)=+\infty.$$

同理: $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-\infty$. 故$f(x)$仅在$x=3$邻域内无界. 选D

二. 填空题（每小题3分，共15分）

6. 已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-f(x)\ln\cos x}-1}{(e^{2x}-1)\arctan\frac{x}{6}}=2$，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$_____ 4 ____。

由于 $\lim\limits_{x\to0}(e^{2x}-1)\arctan\frac{x}{6}=0$. 故 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{1-f(x)\ln\cos x}-1=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0}f(x)\ln\cos x=0$.

故可进行无穷小量等价替换： $x\to0$ 时，$f(x)\ln\cos x\to0$，$2x\to0$，$\frac{x}{6}\to0$.

$$2=\lim_{x\to0}\frac{[1-f(x)\ln\cos x]^{\frac13}-1}{(e^{2x}-1)\arctan\frac{x}{6}}\xlongequal[\text{等价替换}]{\text{无穷小量}}\lim_{x\to0}\frac{-\frac13 f(x)\ln[1+(\cos x-1)]}{2x\cdot\frac{x}{6}}$$

$$\xlongequal[\text{等价替换}]{\text{无穷小量}}\lim_{x\to0}\frac{-\frac13 f(x)}{\frac{x^2}{3}}\cdot(\cos x-1)\xlongequal[\text{等价替换}]{\text{无穷小量}}\lim_{x\to0}-\frac{f(x)}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=\frac12\lim_{x\to0}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)=4$$

7. 设$y=(\arctan\sqrt{x})^x$，则$dy=$__ $(\arctan\sqrt{x})^x\left(\ln\arctan\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)\arctan\sqrt{x}}\right)dx$ __。

先求y'. 由 $y=(\arctan\sqrt{x})^x$. 取对数：$\ln y=x\ln\arctan\sqrt{x}$. 两边同时对$x$求导：

$$\frac1y\cdot y'=\ln\arctan\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\ln\arctan\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{\arctan\sqrt{x}\cdot2(1+x)}$$

$$\Rightarrow dy=y'\cdot dx=(\arctan\sqrt{x})^x\cdot\left[\ln\arctan\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)\arctan\sqrt{x}}\right]dx$$

8. 极坐标曲线$r=e^\theta$在点$(r,\theta)=\left(e^{\frac{3\pi}{2}},\dfrac{3\pi}{2}\right)$处切线的直角坐标方程为__ $x+y+e^{\frac{3\pi}{2}}=0$ __。

由 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan\frac{y}{x}\end{cases}$ 故 $r=e^\theta\Rightarrow\ln r=\theta$. 即 $\underset{\frac12\ln(x^2+y^2)}{\underset{\parallel}{\ln\sqrt{x^2+y^2}}}=\arctan\frac{y}{x}$

两边同时对x求导： $\frac12\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x+2y\cdot y')=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}$

$$\Rightarrow\frac{x+y\cdot y'}{x^2+y^2}=\frac{y'x-y}{x^2+y^2}\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}\ (x\neq0\text{ 且 }x\neq y).$$

当$\theta=\frac32\pi$时，$r=e^{\frac{3\pi}{2}}\Rightarrow x=0$，$y=e^{\frac{3\pi}{2}}-e^{\frac{3\pi}{2}}\Rightarrow y'|_{x=0}=-1=k_{切}$.

故切线方程为：$\cancel{y=}$ $y-(-e^{\frac{3\pi}{2}})=-1(x-0)$. 即：$y=-x-e^{\frac{3\pi}{2}}$

或 $x+y+e^{\frac{3\pi}{2}}=0$

9. 设$f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$，则$f^{(n)}(x)=$ __$(-1)^n\cdot(2)^n\cdot n!(1+2x)^{-(n+1)}$__。

$f(x)=(1+2x)^{-1}$. 则 $f'(x)=-1\cdot(1+2x)^{-2}\cdot 2$

$f''(x)=-1\cdot(-2)\cdot(1+2x)^{-3}\cdot 2^2$

$f'''(x)=-1\cdot(-2)\cdot(-3)(1+2x)^{-4}\cdot 2^3$

$\vdots$

猜测：$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\,(1+2x)^{-(n+1)}\cdot 2^n$. 下用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，$f'(x)=-2(1+2x)^{-2}$. 成立.

当 $n=2$ 时，$f''(x)=8(1+2x)^{-3}$. 成立.

$\vdots$

假设当 $n=k-1$ 时成立. 则 $f^{(k-1)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+2x)^{-k}\cdot 2^{k-1}$

则 $f^{(k)}(x)=\left[f^{(k-1)}(x)\right]'=(-1)^{k-1}(k-1)!\,(-k)(1+2x)^{-(k+1)}\cdot 2\cdot 2^{k-1}=(-1)^k\cdot k!\,(1+2x)^{-(k+1)}\cdot 2^k$ 也成立.

故命题得证. $f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot 2^n\cdot n!\,(1+2x)^{-(n+1)}$

10. 函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=te^t\\ y=e^{2t}+1\end{cases}$确定，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ __$\dfrac{2t}{(1+t)^3}$__。

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x'(t)=e^t+te^t=e^t(1+t)\\ \dfrac{dy}{dt}=y'(t)=2e^{2t}\end{cases}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t}}{e^t(1+t)}=\frac{2e^t}{1+t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'(t)}{x'(t)}=\frac{2\cdot\frac{e^t(1+t)-e^t}{(1+t)^2}}{e^t(1+t)}=\frac{2t}{(1+t)^3}$$

三. 计算与证明题（每小题7分，共70分）

11. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$。

解：**法1** $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(2\sin x+\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+(2\sin x+\cos x-1)\right]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\left[1+(2\sin x+\cos x-1)\right]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}$$

$$\xrightarrow[2\sin x+\cos x-1\to 0]{\text{由于}x\to 0\text{时}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x}\right)}=e^2$$

法2 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(2\sin x+\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}}$

$$\xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}}=e^2$$

12. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3}{n^4+n^3+1^3}+\dfrac{2^3}{n^4+n^3+2^3}+\ldots+\dfrac{n^3}{n^4+n^3+n^3}\right)$和$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$。

解：设 $b_n=\dfrac{1^3}{n^4+n^3+1^3}+\dfrac{2^3}{n^4+n^3+2^3}+\cdots+\dfrac{n^3}{n^4+n^3+n^3}$

$$a_n=\frac{1^3}{n^4+n^3+n^3}+\frac{2^3}{n^4+n^3+n^3}+\cdots+\frac{n^3}{n^4+n^3+n^3}=\frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4+2n^3}$$

$$c_n=\frac{1^3}{n^4+n^3+1^3}+\frac{2^3}{n^4+n^3+1^3}+\cdots+\frac{n^3}{n^4+n^3+1^3}=\frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4+n^3+1^3}$$

当$n\geq 2$时，显然有：$a_n<b_n<c_n$。又由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{4}$

故由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{4}$.

$\sin n\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$，故有：

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)-\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=\lim_{n\to\infty}\left[\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)-\sin n\pi\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sin\left(\pi\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\right)\cos\left(\pi\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}2\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)}_{\to 0}\underbrace{\cos\left(\pi\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2}\right)}_{\text{有界量}}=0.$$

故有：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)=0+\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$.

13. $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求问它在$x=0$几阶可导、并判断各阶导函数的连续性。

解：由于 $f(x)$ 及其各阶导函数只存在一个间断点 $x=0$，故只需研究它们在 $x=0$ 的邻域性质

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} x^4\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$．故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续．

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x^3\sin\frac{1}{x}=0$．故一阶可导

$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0 & x=0.\end{cases}$

当 $x\neq0$ 时．$f'(x)=4x^3\cdot\sin\frac{1}{x}+x^4\cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0-0=0=f'(0)\Rightarrow f'(x)$ 在 $x=0$ 连续．

$f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}(4x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x})=0-0=0$ 故二阶可导．

当 $x\neq0$ 时．$f''(x)=12x^2\cdot\sin\frac{1}{x}+4x^3\cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})-\left[2x\cos\frac{1}{x}+x^2(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})\right]$

$\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}12x^2\sin\frac{1}{x}-6x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\\ 0\end{cases}$ 极限不存在． $\lim\limits_{x\to0}f''(x)$ 不存在 $\Rightarrow f''(x)$ 在 $x=0$ 不连续．

综上 $f(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导．且一阶导函数连续．二阶导函数不连续．

14. 设$f(x)=x^3\sin x$，求$f^{(2022)}(0)$。

解：设 $g(x)=x^3$．$h(x)=\sin x$． $\begin{cases}g'(x)=3x^2.\quad g''(x)=6x,\quad g'''(x)=6,\quad g^{(k)}(x)=0,\ k\geq4.\ k\in N\\ h^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})\end{cases}$

由莱布尼兹公式：

$f^{(2022)}(x)=\left[g(x)\cdot h(x)\right]^{(2022)}$

$=C_{2022}^0 g(x)\cdot h^{(2022)}(x)+C_{2022}^1 g'(x)\cdot h^{(2021)}(x)+C_{2022}^2 g''(x)\cdot h^{(2022)(2020)}(x)+C_{2022}^3 g'''(x)\cdot h^{(2019)}(x)+0\times2019$

$=x^3(-\sin x)+C_{2022}^1\cdot3x^2\cos x+C_{2022}^2\cdot6x\sin x+C_{2022}^3\cdot6\cdot(-\cos x)$

代入 $x=0$ 可得：$f^{(2022)}(0)=0+0+0+C_{2022}^3\cdot6\cdot(-1)=-6C_{2022}^3=-A_{2022}^3=-8254653240$

15. 函数$y=y(x)$由方程$e^y+6xy+x^2=1$确定，求$x=0$处的切线方程及$y''(0)$。

解：代入 $x=0$．可得：$y(0)=0$．两边对 x 求导：

$e^y\cdot y'+6(y+xy')+2x=0$．(*) 代入 $x=0$．$y(0)=0$．可得：$y'(0)=0=k_{切}$．

故切线方程为：$y-0=0(x-0)$．即：$y=0$．

(*) 继续对 x 求导：$e^y\cdot y'\cdot y'+e^y\cdot y''+6(y'+y'+xy'')+2=0$．

代入 $x=0$．$y(0)=0$．$y'(0)=0$．可得：$y''(0)=-2$．

综上所述．所求切线方程为 $y=0$，$y''(0)=-2$．

16. 设$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$，求$f(x)$的间断点、并判断其类型（小类）。

解：由$\tan x$定义域 $\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，由$\tan x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi$.（$k\in Z$）.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{\tan x}=1$，故$x=0$为可去间断点.

$k>0$时. $\lim\limits_{x\to k\pi^-}\dfrac{x}{\tan x}=\dfrac{k\pi}{\lim\limits_{x\to0^-}\tan x}=-\infty$. $\lim\limits_{x\to k\pi^+}\dfrac{x}{\tan x}=\dfrac{k\pi}{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x}=+\infty$

$k<0$时, $\lim\limits_{x\to k\pi^-}\dfrac{x}{\tan x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to k\pi^+}\dfrac{x}{\tan x}=-\infty$, 故$x=k\pi$（$k\neq0$、$k\in Z$）为无穷间断点.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-}\frac{x}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x}=0\\&\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+}\frac{x}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\text{ 为可去间断点.}\ (k\in Z)$$

综上所述. $f(x)$的间断点为: $\left\{\begin{aligned}&x=k\pi\ (k\neq0.\ k\in Z).\ \text{无穷间断点.}\\&\left.\begin{aligned}&x=0.\\&x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in Z)\end{aligned}\right\}\text{可去间断点.}\end{aligned}\right.$

17. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{(e^{2\arctan x}-1)(\sqrt{1+3\arcsin x}-1)\ln(1+4x)}$。

解：$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\ \xlongequal[\text{或平方差公式}]{\text{分子有理化}}\ \dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

故原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\dfrac{1}{(e^{2\arctan x}-1)\left[(1+3\arcsin x)^{\frac{1}{2}}-1\right]\ln(1+4x)}$

$\xlongequal[\text{极限四则运算法则}]{\text{无穷小量等价替换}}\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{2\arctan x\cdot\frac{3}{2}\arcsin x\cdot4x}$

$\dfrac{1}{2}\cdot\ \xlongequal[\text{等价替换}]{\text{无穷小量}}\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{2x\cdot\frac{3}{2}x\cdot4x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{48}$

18. $f(x)$定义在R上且$f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，求证：$f(x)$为最小正周期为2π的周期函数。

证明：$f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ ①. 用$x+\pi$替换x：

$\Rightarrow f(x+2\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)=f(x+\pi)-\sin x$ ②.

①+② 可得：$f(x+2\pi)=f(x)$. 故$f(x)$为周期为2π的周期函数.

设T为$f(x)$的周期. 则有$f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.

将①中的x替换为$x-T$：$f(x-T+\pi)=f(x-T)+\sin(x-T)$.

由$f(x-T+\pi)=f(x+\pi)$，$f(x-T)=f(x)\Rightarrow f(x+\pi)=f(x)+\sin(x-T)$ ③.

①-③ 可得：$0=\sin x-\sin(x-T)\xlongequal{\text{差化积}}2\sin\frac{x-(x-T)}{2}\cos\frac{x+(x-T)}{2}$

$=2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x-\frac{T}{2}\right)$.

由于$\cos\left(x-\frac{T}{2}\right)$不恒为0. 故有$\sin\frac{T}{2}\equiv 0\Rightarrow\frac{T}{2}=k\pi$, $T=2k\pi$ $(k\in N^{+})$

故T_{min}在$k=k_{min}=1$时取得：$T_{min}=2\pi$.

综上所述：$f(x)$为最小正周期为2π的周期函数.

19. 求证：方程$2^{x}+\sin x=2$在区间(0,1)内至少有一个实根。

证明：设$f(x)=2^{x}+\sin x-2$. 显然$f(x)$在R上连续.

由于$f(0)=-1<0$，$f(1)=\sin 1>0$. 故$f(0)\cdot f(1)<0$.

故由零点定理：$f(x)=0$在$(0,1)$上至少有一个根.

$\Leftrightarrow$ 方程$2^{x}+\sin x=2$在$(0,1)$上至少有一个根. 命题得证.

20. 设数列$\{a_n\}$满足$0<a_1<3$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n(3-a_n)}$，请判断$\{a_n\}$的敛散性、并证明。

答：$\{a_n\}$收敛. 证明如下：

$a_1>0$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n(3-a_n)}\geq 0$ $(n\in N^{+})\Rightarrow a_n\geq 0$

故有$a_{n+1}=\sqrt{a_n}\cdot\sqrt{3-a_n}\leq\frac{(\sqrt{a_n})^2+(\sqrt{3-a_n})^2}{2}=\frac{3}{2}<3$ $(n\in N^{+})\Rightarrow a_n<3$

$\Rightarrow\{a_n\}$有上界.

由于$n\geq 2$时. $a_n\leq\frac{3}{2}$ 故：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{a_n(3-a_n)}}{a_n}=\sqrt{\frac{3}{a_n}-1}\geq\sqrt{\frac{3}{\frac{3}{2}}-1}=1$.

$\Rightarrow n\geq 2$时. $\{a_n\}$单调增加.

故由单调有界原理：$\{a_n\}$收敛. 命题得证.