安徽大学 2016—2017 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B （二）》考试试卷（B 卷）

（闭卷　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系____ 年级____ 专业____ 姓名____ 学号____

答 题 勿 超 装 订 线

装 ---- 订 ---- 线

得 分	

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．过点 $(1,0,1)$ 且垂直于直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ 的平面方程是

____________________.

2．$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ ____________.

3．若 $z=\arctan\dfrac{x-y}{x+y}$，则____________.

4．设 $f(x,y)$ 连续，直角坐标系下交换积分次序

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy =$ __________________.

5．设 $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi<x<0 \\ 1+x^2, & 0<x\le\pi \end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于

__________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 二元极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x-y}{x+y}$ （　　）

（A）等于 0　　（B）等于 $\dfrac{1}{2}$

（C）存在但不等于 0 也不等于 $\dfrac{1}{2}$　　（D）不存在

2. 二元函数 $z=xy^2-4xy-y^2+4y$ 在 $(1,0)$ 处 （　　）

（A）不取极值　　（B）取得极小值

（C）取得极大值　　（D）不能确定是否取得极值

3. 设曲线 L 是区域 D 的正向边界，那么 D 的面积为 （　　）

（A）$\dfrac{1}{2}\oint_L ydx-xdy$　　（B）$\dfrac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

（C）$\oint_L ydx-xdy$　　（D）$\oint_L xdy-ydx$

4. 设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 上具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 D 内与路径无关的充要条件是 （　　）

（A）$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$　　（B）$\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial x}$

（C）$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{\partial P}{\partial y}$　　（D）$\dfrac{\partial Q}{\partial y}=-\dfrac{\partial P}{\partial x}$

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2n+1}$ 的收敛域是 （　　）

（A）$(-1,1)$　　（B）$[-1,1)$

（C）$(-1,1]$　　（D）$[-1,1]$

答题勿超装订线

装　　订　　线

三、计算题（每小题10分，共60分）

得分	

11．设函数 f 可微，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x,x^2+1)$，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$．

12．求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程．

13．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}z^2dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$R>0$．

14. 设C为平面曲线$x^2+y^2=1$，计算曲线积分$\oint_C (x+y)^2 ds$.

15. 计算$\oint_L (y+x)dx+(2x+y)dy$，其中L是圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，逆时针方向.

16. 计算曲面积分$\iint\limits_S x dydz+(z+1)dxdy$，其中$S$为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

17．将 $f(x)=\ln x$ 展开成 $x-2$ 的幂级数．

18．求抛物线 $y^2=4x$ 上的点，使它与直线 $x-y+4=0$ 的距离最近．

三、证明题（每小题 4 分，共 4 分）

得 分	

19. 证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n^2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$发散.

安徽大学 2016—2017 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》（B 卷）参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．$3x-2y-z-2=0$；　2．0；　3．$\dfrac{y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x}{x^2+y^2}dy$；

4．$\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)dx$；　5．0

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6．D；　7．A；　8．B；　9．A；　10．C

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11．解：

$$\frac{dy}{dx}=f_1'(e^x,\cos x,x^2+1)e^x+f_2'(e^x,\cos x,x^2+1)(-\sin x)+f_3'(e^x,\cos x,x^2+1)\cdot 2x$$

故 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=f_1'(1,1,1)$

………………… 10 分

12．解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，$G(x,y,z)=x+y+z$

故曲线在点 $(1,-2,1)$ 处的切线向量为 $\vec{\tau}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\{-6,0,6\}$

故曲线在点 $(1,-2,1)$ 处切线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$

………………… 10 分

13．解：由曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 具有轮换对称性，知

$$\iint_\Sigma z^2 dS=\iint_\Sigma x^2 dS=\iint_\Sigma y^2 dS=\frac{1}{3}\iint_\Sigma\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=\frac{1}{3}\iint_\Sigma R^2 dS=\frac{4}{3}\pi R^4$$

………………… 10 分

14．解：$\oint_C (x+y)^2 ds=\oint_C\left(x^2+y^2+2xy\right)ds$

C 关于 x 轴对称，而 $2xy$ 关于 y 是奇函数，由对称性知

$$\oint_C (x+y)^2 ds=\oint_C\left(x^2+y^2+2xy\right)ds=\oint_C\left(x^2+y^2\right)ds=\oint_C ds=2\pi.$$

………………… 10 分

15．解： 由格林公式，

$$\oint_L (y+x)dx+(2x+y)dy=\iint\limits_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1}(2-1)dxdy=6\pi .$$

………………… 10 分

16．解：$\iint\limits_S xdydz+(z+1)dxdy$

$=\oiint\limits_{S+S_1} xdydz+(z+1)dxdy-\iint\limits_{S_1} xdydz+(z+1)dxdy$ 其中 S_1： $x^2+y^2\le 1$，取下侧，

由高斯公式

$$\oiint\limits_{S+S_1} xdydz+(z+1)dxdy=2\iiint\limits_V dxdydz=\frac{4\pi}{3},$$

$$\iint\limits_{S_1} xdydz+(z+1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy=-\pi,$$

故原式$=\frac{7\pi}{3}$.

………………… 10 分

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

17．解：$f(x)=\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$

其中 $0<x\le 4$.

………………… 8 分

18．解：平面上任一点 (x,y) 到直线 $x-y+4=0$ 的距离

$$d=\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}.$$

由题意求最短距离等价于求以 $y^2=4x$ 为约束条件时，d^2 的极小值点.

令 $L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x-y+4)^2-\lambda(y^2-4x)$， ………………… 4 分

令 $\begin{cases} L_x'=(x-y+4)+4\lambda=0 \\ L_y'=-(x-y+4)-2\lambda y=0 \\ L_\lambda'=y^2-4x=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

显然 d^2 存在最小值，所以抛物线 $y^2=4x$ 上的点 $(1,2)$ 到直线 $x-y+4=0$ 的距离最

短. ………………………… 8分

五、证明题（每小题4分，共4分）

19．由$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$绝对收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$收敛。

另一方面，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，故由级数的性质知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n^2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$发散。

………………… 4分