安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末试卷（A 卷）

（闭卷，时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

院/系______ 专业______ 姓名______ 学号______

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

一、 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 二元极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[2020x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{2021x}\right]$ （　　）

A. 不存在　　B. 等于 0　　C. 等于 $\frac{2020}{2021}$　　D. 存在，但不等于 0 也不等于 $\frac{2020}{2021}$

2. 下列命题**正确的**是（　　）

A. 若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点可微，则 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点必连续.

B. 若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点存在二阶偏导数，则 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点必有一阶连续偏导数.

C. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内存在二阶偏导数，则在区域 D 内必有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

D. 若 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点存在一阶偏导数，则 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点必可微。

3. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\le z,1\le z\le 2\right\}$， f 在 Ω 上连续，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv=$（　　）

A. $\pi\int_1^2 z^2 f(z)dz$　B. $2\pi\int_1^2 f(z)dz$　C. $2\pi\int_1^2 zf(z)dz$　D. $\pi\int_1^2 zf(z)dz$

4. 若第二类曲线积分 $\int_L(6xy+ky^2)dx+(3x^2+4xy)dy$ 与路径无关，则 k 的值是（ ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设有以下命题

①若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛　　②若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+2021}$ 收敛

③若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛　④若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛

则以上命题中**正确的**是（　）

A. ①②；　　B. ②③；　　C. ③④；　　D. ②④

二、　填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 点 $P(1,2,3)$ 到平面 $x+2y-2z=1$ 的距离为______________.

7. $\int_0^1 dx\int_x^{2-x} f(x,y)dy$ 交换积分次序是______________________

8. 函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值点是____________________

9. 已知 $z=f(x^2+y^2,\dfrac{x}{y})$, f 可微，则全微分 $dz=$____________________

10. 设 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left\{e^x\sin y, 2xy^2+z, xzy^2\right\}$，则散度 $div\overrightarrow{F}\big|_{(1,0,1)}=$___________________

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $z^3-3xyz=a^3$ 确定的隐函数，计算偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

12. 计算第一类曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(z-1)^2dS$，其中 Σ 球面 $x^2+y^2+z^2=9$.

13. 计算第二类曲面积分 $\iint\limits_S(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$， S 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

14. 计算第一类曲线积分 $\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 为 $x^2+y^2=ax(a>0)$.

15. 计算幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域与和函数，并求常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和.

16. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展开为傅里叶级数.

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

17. 求质点 $M(x,y)$ 在变力 $\overrightarrow{F}=(y+3x)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}$ 的作用下沿路径 L 顺时针方向运动一周所做的功, 其中 L 为椭圆 $4x^2+y^2=4$.

五、证明题（每小题 6 分，共 6 分）

18. 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\dfrac{1}{\ln n})$ 条件收敛.

安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末试卷（A 卷）参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、A　　3、D　　4、B　　5、B

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\dfrac{2}{3}$

7. $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

8. （0, 0）

9. $(2f_1'x+f_2'\dfrac{1}{y})dx+(2f_1'y-f_2'\dfrac{x}{y^2})dy$

10. 0

三、计算题

11.（9 分）　**解：**

设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，$F_x'=-3yz$，$F_y'=-3xz$，$F_z'=3z^2-3xy$，当 $z^2\neq xy$ 时，得

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$

12.（9 分）

解：

$\oiint\limits_{\Sigma}(z-1)^2dS=\oiint\limits_{\Sigma}z^2dS-\oiint\limits_{\Sigma}2zdS+\oiint\limits_{\Sigma}1dS$

因为：　$\oiint\limits_{\Sigma}1dS=4\pi 3^2=36\pi$，$\oiint\limits_{\Sigma}2zdS=0$，$\oiint\limits_{\Sigma}z^2dS=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}3^2dS=108\pi$

所以，原式=144π

13.（9 分）**解：** S_1：$x^2+y^2\le 1$ **取下侧**

由高斯公式

$\iint\limits_{S}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$

$=\oiint\limits_{S+S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$

$=3\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\dfrac{6\pi}{5}$

又因为：

$\iint (x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$
S_1
$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy=-\pi$

所以，原式=$\dfrac{11\pi}{5}$

14.（9 分）**解：**

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds=2\int_0^a \sqrt{ax}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx=a\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}}=2a^2$$

15. （9 分）

解：由题知，收敛域为$(-1,1)$.

对任意 $x\in(-1,1)$，设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则

$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1-x^2}$.

故 $s(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1-x^2}dx+s(0)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

16. （9 分）

先将其延拓为周期为2π 的函数$F(x)$，且连续

对任意 $F(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\pi$$

其中，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & n=2k-1\\ 0 & n=2k\end{cases}$，

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,[-\pi,\ \pi]$$

四、应用题（共 10 分）

17. **解：**由第二类曲线积分的物理意义和格林公式

$$W=\oint_L (y+3x)dx+(2y-x)dy=-\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial x}(2y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y+3x)dxdy$$

$$=2\iint\limits_D dxdy=2S_{椭圆}=4\pi$$

五、证明题（共 6 分）

18. $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{1}{\ln n})$

$\sin(\frac{1}{\ln n})\sim\frac{1}{\ln n}$，$n\to\infty$

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散，但$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$由莱布尼兹判别法可判断收敛

所以$\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$条件收敛.