学号______________ 姓名______________ 专业______________ 年级______________ 院/系______________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2017—2018 学年第一学期

《高等数学 A（一）》考试试卷（B 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1．若函数 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x}$，则 $x=0$ 是其__________间断点．(填写类型)

2．若连续函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{\sin x}=1$，则 $f'(0)=$__________．

3．已知 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$__________．

4．曲线 $y=\ln\cos x$ 上从 $x=0$ 到 $x=\dfrac{p}{4}$ 一段的弧长为__________．

5．若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足 $\int_0^{x^2(x+1)}f(t)dt=x$，则 $f(2)=$__________．

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

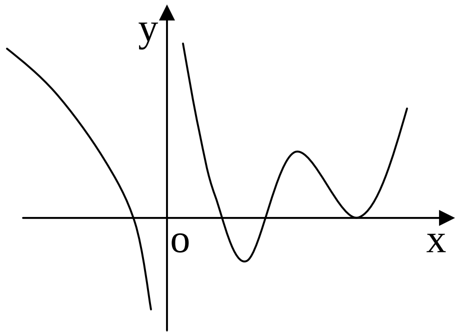
得 分	

6．下列曲线中，没有斜渐近线的是　　　　（　　）

（A）$y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})$　　（B）$y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

（C）$y=x+\arctan x$　　（D）$y=x+\sin x$

7．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内有二阶连续的导数， $f'(x)$ 的图形如图所示，若 m 表示函数 $y=f(x)$ 的极值点个数， n 表示曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数，则有 ( )



（A） $m=4,n=3$ （B） $m=4,n=4$

（C） $m=5,n=3$ （D） $m=5,n=4$

8．若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，且 $f(0)=-1$，则 $f(x)$ 的一个原函数可能是 ( )

（A） $1+\sin x$ （B） $1-\sin x$ （C） $1+\cos x$ （D） $1-\cos x$

9．设 $f(x)$， $g(x)$ 均在区间 $[0,2]$ 上二阶可导， $f(0)=g(0)=0, f(2)=g(2)=1$，且对任意 $x\in[0,2]$， $f''(x)>0$， $g''(x)<0$，记 $S_1=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x, S_2=\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$，则 ( )

（A） $S_1<S_2<1$ （B） $1<S_2<S_1$

（C） $S_1<1<S_2$ （D） $S_2<1<S_1$

10．下列反常积分中，收敛的是 ( )

（A） $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ （B） $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ （C） $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ （D） $\int_0^{1} \frac{1}{x^2}dx$

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

得 分	

11．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\frac{\arctan t^2}{t}dt}{x^2}$．

12．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

13．设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(mx^2+nx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，求常数 m，n 的值.

14．求积分 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

15．求积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{2018+x^{2017}}{\sqrt{4-x^{2}}}dx$.

16．求微分方程 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{x}$ 的通解.

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

得 分	

17．过点 $(1, 0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

答　题　勿　超　装　订　线

装　订　线

18．设 $f(x)$ 连续且满足 $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=x^2+f(x)$，（1）求 $f(0), f'(0)$；（2）求 $f(x)$.

五、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

得 分	

19．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

$$\int_0^p xf(\sin x)dx = p\int_0^{\frac{p}{2}} f(\sin x)dx .$$

20．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$.
证明：至少存在一点 $x \in (0,1)$，使得 $x f'(x) + f(x) = 0$.

安徽大学 2017—2018 学年第一学期

《高等数学 A（一)》（B 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．可去；　**2**．1；　**3**．$x+e^x+C$；　**4**．$\ln(1+\sqrt{2})$；　**5**．$\dfrac{1}{5}$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6．D；　**7**．A；　**8**．B；　**9**．C；　**10**．A

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

11．解：利用洛必达法则及无穷小量的等价替换，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\frac{\arctan t^2}{t}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\arctan(\sin x)^2}{\sin x}\cos x}{2x}$$ ………………… 4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\operatorname{rctan}(\sin x)^2}{2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x\cdot x}$$

$$=\frac{1}{2}$$ ………………… 8 分

12．解：利用定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$ ………………… 5 分

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$ ………………… 8 分

13．解：由 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$，知

$$e^x-(mx^2+nx+1)=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)-(mx^2+nx+1)$$

$$=(1-n)x+(\frac{1}{2}-m)x^2+o(x^2)$$ .... 5 分

依题意，有$1-n=0$，$\frac{1}{2}-m=0$，

故$m=\frac{1}{2},n=1$. .... 8 分

14．解：$\int\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\int\ln x d(\frac{1}{x+1})$ .... 2 分

$=-\frac{1}{x+1}\ln x+\int\frac{1}{x(x+1)}dx=-\frac{1}{x+1}\ln x+\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx$ .... 6 分

$=-\frac{1}{x+1}\ln x+\ln|\frac{x}{x+1}|+C$ .... 8 分

15．解：由对称区间上奇函数的定积分性质，

$I=\int_{-1}^{1}\frac{2018+x^{2017}}{\sqrt{4-x^2}}dx=2\times2018\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ .... 4 分

$=2018\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}dx=2018\times2\times\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{2018}{3}\pi$ .... 8 分

16．解：该方程对应齐次方程的特征方程 $r^2+2r+1=0$，故特征根$r_{1,2}=-1$，

所以相应齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$， .... 4 分

$\lambda=1$不是特征根，故设特解为 $y^*=(a+bx)\mathrm{e}^x$ ，代入原方程，

$4b+4(a+bx)=x$，$\Rightarrow$ $a=-\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{4}$，于是 $y^*=\frac{1}{4}(x-1)\mathrm{e}^x$ ，

所以所求通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)\mathrm{e}^x$ . ... 8 分

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

17．解：设切点为$(x_0,\sqrt{x_0-2})$，

切线斜率为$\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}=\frac{\sqrt{x_0-2}-0}{x_0-1}$，得 $x_0=3$， .... 4 分

所以 $V_x=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot(3-1)-\pi\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$ .... 10 分

18．解：（1）原方程中令$x=0$，得$f(0)=0$.

原方程两边对x求导，$xf(x)=2x+f'(x)$，故$f'(0)=0$ .... 6 分

（2）对方程$xf(x)=2x+f'(x)$，记$y=f(x)$，则有一阶线性方程$y'-xy=2x$，

通解为 $y = e^{\int x\,dx}(\int 2xe^{\int -x\,dx}dx + C) = e^{\frac{1}{2}x^2}(\int 2xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx + C)$

$$= e^{\frac{1}{2}x^2}(-2e^{-\frac{1}{2}x^2} + C) = -2 + Ce^{\frac{1}{2}x^2},$$

由原方程得 $f(0) = 0$，故 $C = 2$，

所以 $f(x) = 2(1 - e^{\frac{1}{2}x^2})$. .... 10 分

五、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

19．证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx$ .... 2 分

令 $x = \pi - t$，有

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi - t)f(\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f(\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx$$

故 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$. .... 6 分

20．证明：令 $F(x) = xf(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导.

又由积分中值定理知，至少存在一点 $\eta \in [0, \frac{1}{2}]$，使得

$$f(1) = 2\eta f(\eta)(\frac{1}{2} - 0) = \eta f(\eta)$$

即，$F(\eta) = F(1)$.

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi \in (\eta, 1)$，使得 $F'(\xi) = 0$，即

$$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0. \qquad .... \quad 6 分$$