安徽大学 2016—2017 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B （二）》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 院/系＿＿＿＿

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

得 分	

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．过直线 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 且平行于直线 $\begin{cases} x=2t-2 \\ y=t+1 \\ z=t \end{cases}$ 的平面方程是

____________________.

2．若二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y)}{xy}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\ 1)}=$______________.

3．$\int_0^1 dy\int_y^1 \dfrac{\tan x}{x}dx=$________________.

4．平面上曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2+y)dx+(x-2\sin^2 y)dy=$________________.

5．若 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx$（$-\pi\le x\le\pi$），则 $a_2=$_____________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6．二元极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{x+y}$　　　　　　（　　　）

（A）不存在　　　　（B）等于 0

（C）等于 $\dfrac{1}{2}$　　　　（D）存在，但不等于 0 也不等于 $\dfrac{1}{2}$

7．设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则在 $(0,0)$ 处函数　　　　（　　　）

（A）取得极大值　　　　（B）取得极小值

（C）不取极值　　　　（D）无法确定

8．设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z,1\le z\le 2\}$， f 在Ω上连续，则$\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv=$ (　　)

（A）$\pi\int_1^2 z^2 f(z)dz$ （B）$2\pi\int_1^2 f(z)dz$

（C）$2\pi\int_1^2 zf(z)dz$ （D）$\pi\int_1^2 zf(z)dz$

9．设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$（$z\ge 0$），Σ_1为Σ在第一卦限的部分，则有 (　　)

（A）$\iint\limits_{\Sigma} xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$ （B）$\iint\limits_{\Sigma} ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1} ydS$

（C）$\iint\limits_{\Sigma} zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} zdS$ （D）$\iint\limits_{\Sigma} xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$

10．若幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x+2)^n$在$x=0$处收敛，在$x=-4$处发散，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-3)^n$在$x=5$处 (　　)

（A）发散 （B）绝对收敛

（C）条件收敛 （D）不能确定

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

得 分	

11．设$f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中$z=z(x,y)$是由方程$x+y+z+xyz=0$确定的隐函数，求$f_x'(0,1,-1)$.

12．在曲面$z=x^2+y^2$上求一点，使得该点的切平面平行于平面$2x+4y-z=0$，并求函数$F(x,y,z)=x^2+y^2-z$在该点处沿着方向$\vec{n}=\{2,4,-1\}$的方向导数.

线

答 题 勿 超 装 订 线

订

13．求$\iint\limits_D |y-x^2|\,dxdy$，其中$D$由$|x|\le 1$，$0\le y\le 2$所围成.

装

14．计算$I=\iiint\limits_V zdxdydz$，其中$V$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围立体.

15．计算$\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中$L:x^2+y^2=ax$（$a>0$）.

16．计算曲面积分$\iint\limits_S (x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$，其中$S$为上半球面

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

17．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$的收敛域及数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$的和.

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

得 分	

四、应用题（每小题 6 分，共 12 分）

18．设空间曲面块Σ是球面$x^2+y^2+z^2=4$被平面$z=1$截出的顶部，其面密度分布为$\rho(x,y,z)=\frac{1}{z}$，求该曲面块的质量.

19．求质点$M(x,y)$受作用力$\vec{F}=(y+3x)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}$沿路径$L$顺时针方向运动一周所做的功．其中$L$为椭圆$4x^2+y^2=4$．

五、证明题（每小题 5 分，共 5 分）

得 分	

20．证明：级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-1}$发散．

安徽大学 2016—2017 学年第二学期

《高等数学 A（二）、B（二）》（A 卷）参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．$x-3y+z+2=0$；　2．1；　3．$-\ln\cos 1$；　4．$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sin 2$；　5．1

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6．A；　7．B；　8．D；　9．C；　10．C

三、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

11．解：由 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，知 $f_x'(x,y,z)=e^x yz^2+e^x y\cdot 2z\cdot z_x'(x,y)$

由 $x+y+z+xyz=0$，两边对 x 求导，得 $1+0+z_x'(x,y)+yz+xyz_x'(x,y)=0$

令 $x=0,y=1$，得 $z_x'(0,1)=0$，

故 $f_x'(0,1,-1)=1+2\cdot(-1)\cdot z_x'(0,1)=1-2z_x'(0,1)=1$．…………………… 9 分

12．解：$F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，$F_x'=2x$，$F_y'=2y$，　$F_z'=-1$．

设切点坐标为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则切平面的法向量为 $\{2x_0,2y_0,-1\}$，

由切平面与已知平面 $2x+4y-z=0$ 平行，因此有 $\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{4}=\frac{-1}{-1}$，

解得 $x_0=1,y_0=2$，相应地有 $z_0=x_0^2+y_0^2=5$．

故切点坐标为 $(1,2,5)$．…………………… 6 分

$\vec{n}=\{2,4,-1\}$ 的单位向量为 $\{\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}}\}$，故所求的方向导数为

$\frac{\partial F}{\partial n}|_{P_0}=2\times\frac{2}{\sqrt{21}}+4\times\frac{4}{\sqrt{21}}+(-1)\times\frac{(-1)}{\sqrt{21}}=\sqrt{21}$．…………………… 9 分

13．解：设 $D_1=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}$；$D_2=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1, x^2\le y\le 2\}$，

则 $\iint\limits_{D}|y-x^2|dxdy=\iint\limits_{D_1}(x^2-y)dxdy+\iint\limits_{D_2}(y-x^2)dxdy$

$=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}(y-x^2)dy=\frac{1}{5}+\frac{43}{15}=\frac{46}{15}$…………………… 9 分

14．解：　利用柱坐标变换

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^{\sqrt{2-r^2}} zr\,dz=\frac{\pi}{2}.$$ ………………… 9分

15．解：依题意，$ds=\sqrt{1+(\frac{a-2x}{2y})^2}\,dx=\frac{a}{2y}dx=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx$，$0\le x\le a$

由对称性知 $\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds=2\int_0^a\sqrt{ax}\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx=a\sqrt{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}}=2a^2$.

………………… 9分

16．解：$\iint\limits_S(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$

$=\oiint\limits_{S+S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy-\iint\limits_{S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$

其中S_1：$x^2+y^2\le1$，取下侧，由高斯公式

$\oiint\limits_{S+S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy=3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\frac{6}{5}\pi$，

$\iint\limits_{S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le1}dxdy=-\pi$，

………………… 9分

故原式$=\frac{11}{5}\pi$.

17．解：由$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}|=x^2<1$，得收敛区间$-1<x<1$.

且当$x=\pm1$时，级数均收敛，故收敛域为$[-1,1]$. ………………… 3分

和函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-t^2)^{n-1}dt$

………………… 7分

$=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$.

………………… 9分

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}=S(1)=\arctan1=\frac{\pi}{4}$.

四、应用题（每小题6分，共12分）

18．解：Σ的方程为 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，Σ在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3\}$．又 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=2\big/\sqrt{4-x^2-y^2}$，

故曲面块的质量

$$m=\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{2dxdy}{4-x^2-y^2}=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\frac{rdr}{4-r^2}=4\pi\ln 2 \text{……………… 6分}$$

19．解：由第二类曲线积分的物理意义及格林公式，

$W=\oint_L(y+3x)dx+(2y-x)dy=-\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(2y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y+3x)]dxdy$，其中 D 为 L 所围成的闭区域 $4x^2+y^2\le 4$．

故 $W=2\iint_D dxdy=2\cdot\pi\cdot 2=4\pi$． ………………… 6分

五、证明题（每小题5分，共5分）

20．$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}[(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}+\frac{1}{n-1}]$

令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$，由 $f'(x)=\frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0$，知 $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 单调递减，

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$，故由莱布尼兹判别法，交错级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛.

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，由级数的性质知，$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-1}$ 发散.

………………… 5分