安徽大学2017-2018学年第二学期

《高等数学A(二)》期末考试A卷参考答案与评分标准

一、填空题(本题共五小题，每小题3分, 共15分)

1. $\underline{\quad \dfrac{\pi}{3} \quad}$.

2. $\underline{\quad x-y+z+2=0 \quad}$.

3. $\underline{\quad x+2 \quad}$.

4. $\underline{\quad \dfrac{4}{3}\pi R^4 \quad}$.

5. $\underline{\quad \dfrac{\pi+1}{2} \quad}$.

二、选择题 (本题共五小题，每小题3分, 共15分)

6. A. 7. D. 8. B. 9. C. 10. B.

三、计算题 (本题共六小题，每小题8分, 共48分)

11. 解. $f_x = 2x(1+y^2)$, $f_y = 2x^2y + \ln y + 1$.

求解$f_x = f_y = 0$得，$(x,y) = (0, e^{-1})$. .... (3分)

$A = f_{xx}(0,e^{-1}) = 2(1+e^{-2}) > 0$, $B = f_{xy}(0,e^{-1}) = 0$, $C = f_{yy}(0,e^{-1}) = e > 0$.

故$A > 0, AC - B^2 > 0$.

由此可知，$(0,e^{-1})$为$f(x,y)$的极小值点，且极小值$f(0,e^{-1}) = -e^{-1}$. ..... (8分)

12. 解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2(yf_1'-\dfrac{1}{x^2}f_2')=2xf+x^2yf_1'-f_2'$. .... (2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f+2x(yf_1'-\frac{1}{x^2}f_2')+2xyf_1'+x^2y(yf_{11}''-\frac{1}{x^2}f_{12}'')-(yf_{21}''-\frac{1}{x^2}f_{22}'')$$

$$=2f+4xyf_1'-\frac{2}{x}f_2'+x^2y^2f_{11}''-2yf_{12}''+\frac{1}{x^2}f_{22}''\ .$$ .... (6分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x^2f_1'+x^2f_1'+x^2y(xf_{11}'')-xf_{21}''=3x^2f_1'+x^3yf_{11}''-xf_{21}''$$ .... (8分)

13. 解. (1) $f_x=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}$,

$f_y=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $f_z=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

故$f(x,y,z)$在点A的梯度$\mathbf{grad}f(1,0,1)=(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2})$........................ (4分)

(2) 由题设可知，$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$. 故$\overrightarrow{AB}$方向上的单位向量为$\vec{v}=(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3})$.

故所求方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0,1)=\mathbf{grad}f(1,0,1)\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}$. .... (8分)

14. 解. 作球面坐标变换，即令$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$.

则$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$，且$V$可表示为: $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 1\le r\le 2$. .... (3分)

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r\cos\varphi r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi)(\int_1^2 r^3\mathrm{d}r)=\frac{15}{4}\pi.$$ (8分)

15. 解. 设Σ_1为xOy平面上圆盘: $x^2+y^2\le 1, z=0$，方向取下侧.

记V 为由Σ,Σ_1围成的空间闭区域. 由Gauss公式可知

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=6\iiint\limits_V(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=6\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-z}}(r^2+z)r\mathrm{d}r=3\pi\int_0^1(1-z^2)\mathrm{d}z=2\pi.$$ .... (6分)

又因为$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi$.

于是$I=2\pi-3\pi=-\pi$. .... (8分)

16. 解. 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n}=\dfrac{1}{2}$可知，原幂级数的收敛半径为2.

又因为$x=\pm2$时，原级数发散，所以该幂级数的收敛域为$(-2,2)$..........(2分)

考虑幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$. 两边同时对$x$求导可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

由此可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=\dfrac{x}{(1-x)^2}$. 两边再同时对$x$求导得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}x^{n-1}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(\dfrac{x}{2})^{n-1}=\dfrac{2(2+x)}{(2-x)^3}$, $x\in(-2,2)$. ....(8 分)

四、应用题(本题共10分)

17. 解：L的质量为$M=\displaystyle\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$. ....(3 分)

由$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t=\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t$可得

$M=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^{2t}}\sqrt{3}e^t\mathrm{d}t=\sqrt{3}\int_0^1e^{-t}\mathrm{d}t=\sqrt{3}(1-e^{-1})$. ....(10 分)

五、证明题（每小题6分，共12分）

18. 证明：设$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+2018}$, $f'(x)=\dfrac{2018-x}{2\sqrt{x}(x+2018)^2}$.

当$x>2018$时，$f'(x)<0$，从而当$n>2018$时，$\dfrac{\sqrt{n}}{n+2018}$单调递减.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+2018}=0$，故由Leibniz 判别法可知，原级数收敛. ....(4 分)

由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\dfrac{\sqrt{n}}{n+2018}=1$ 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+2018}$发散. 故原级数条件收敛. . (6 分)

19. 证明：在等式$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$两边同时对t求导得

$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$.

令$t=1$可知，对任意$(x,y)\in D$, $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=-2f(x,y)$. ...... (3 分)

设$P(x,y)=yf(x,y),Q(x,y)=-xf(x,y)$. 则对任意$(x,y)\in D$,

$\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=(f+yf_y)+(f+xf_x)=xf_x+yf_y+2f=0$.

显然$\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在$D$内任一点有连续导数，故原曲线积分与积分路径无关. (6 分)