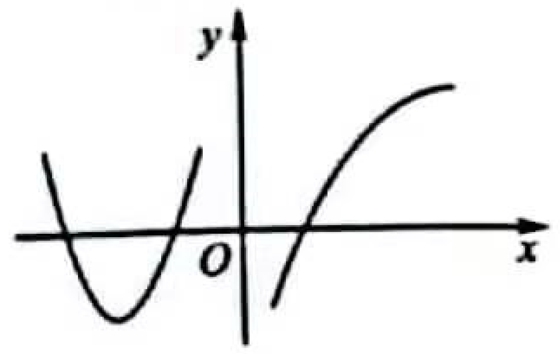
期末同步测试 A 卷

（满分：100 分）

一、选择题（1 ～ 6 小题，每题 3 分，共 18 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如右下图所示，则 $f(x)$ 有　（　　）



(A) 1 个极小值点和 2 个极大值点

(B) 2 个极小值点和 1 个极大值点

(C) 2 个极小值点和 2 个极大值点

(D) 3 个极小值点和 1 个极大值点

2. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为　（　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 无穷多个

3. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$. 若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有　（　　）

(A) $f(0)=0$　　(B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)+f'(0)=0$　　(D) $f(0)-f'(0)=0$.

4. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N"，则必有　（　　）

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

5. 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是　（　　）

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

6. 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$，则　（　　）

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

二、填空题（7 ～ 12 小题，每题 3 分，共 18 分）

7. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为________.

8. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $y'''\big|_{x=\sqrt{3}}=$ ________.

9. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}+|x|\right)dx=$ ________.

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)=$ ________.

11. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2dt=$ ________.

12. 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=\dfrac{-1}{9}$ 的解为________.

三、解答题（13 ～ 20 小题，每题 8 分，共 64 分）

13. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}dx$.

14. 设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过 $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt2},\dfrac{\pi}{\sqrt2}\right)$ 的光滑曲线，当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0\leqslant x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.

15. 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

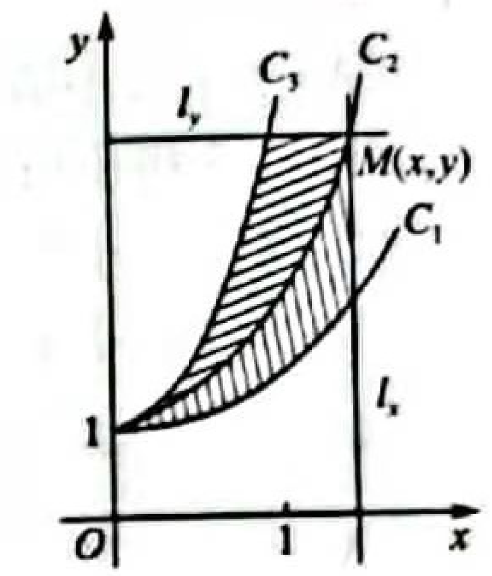
16. 设当 $x\in[2,4]$ 时，有不等式 $ax+b\geqslant\ln x$，其中 a,b 为常数. 试求使得积分

$$I=\int_2^4(ax+b-\ln x)\mathrm{d}x$$

取得最小值的 a 和 b.

17. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$. 对任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线 $x=0,x=t$，曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周形成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

18. 如右下图所示，C_1 和 C_2 分别是 $y=\frac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图形，过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图形. 过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴、y 轴的直线 l_x 和 l_y，记 C_1,C_2 与 l_x 所围成的区域的面积为 $S_1(x)$；C_2,C_3 与 l_y 所围成的区域的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.



19. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}$ $(t\geqslant0)$，

(1) 讨论 L 的凹凸性.

(2) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出切线的方程.

(3) 求此切线与 L(对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

20. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant1,\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

期末同步测试 A 卷解析

一、选择题

1. C　2. C　3. A　4. A　5. D　6. B

1. 解析：根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个，而 $x=0$ 则是导数不存在的点.

3 个一阶导数为零的点左右两侧导数符号不一致，必为极值点，且 2 个是极小值点，1 个是极大值点. 在 $x=0$ 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点. 故 $f(x)$ 共有 2 个极小值点和 2 个极大值点.

故选 C.

2. 【思路探索】首先求出函数的间断点，然后求 x 趋近各间断点时 $f(x)$ 的极限即可得出结果.

解析：$f(x)$ 的间断点为 $x=0, x=\pm1, \pm2, \cdots$，

而当 $x=0, x=\pm1$ 时，$x-x^3=0$，

又 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\dfrac{1}{\pi}$，

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\dfrac{2}{\pi}$，

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x}=\dfrac{2}{\pi}$，

$\lim\limits_{x\to n} f(x)=\lim\limits_{x\to n}\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty, n=\pm2, \pm3, \cdots$.

故 $x=0, x=\pm1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，其余均为无穷间断点，故应选 C.

3. 解析：$F(x)=\begin{cases} f(x)(1-\sin x), -\dfrac{\pi}{2}<x<0, \\ f(0), \qquad x=0, \\ f(x)(1+\sin x), 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to0^-}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=f'(0)-f(0),$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0^+}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=f'(0)+f(0).$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $F'_-(0)=F'_+(0)$，

所以 $f(0)=0$. 故应选 A.

【方法点击】含有绝对值的函数应作为分段函数对待，因此函数在分段点的导数应按导数的定义，通过左、右导数进行分析.

　　$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充要条件是左、右导数存在且相等.

4. 解析：用排除法：

对于 B，取 $f(x)=\cos x+1$ 为偶函数，则 $F(x)=\sin x+x+1$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，但 $F(x)$ 不是

奇函数，于是排除 B.

对于 C，令 $f(x)=|\sin x|$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $f(x)$ 的一个原函数是

$F(x)=\begin{cases}1-\cos x, \sin x>0,\\ 1+\cos x, \sin x<0,\end{cases}$ 而 $F(x)$ 不是周期函数，故排除 C.

对于 D，令 $f(x)=2x$，显然 $f(x)$ 为单调函数，但 $f(x)$ 的原函数 $F(x)=x^2$ 不是单调函数，因此排除 D.

故应选 A.

5. 【思路探索】本题是已知微分方程的通解，反求微分方程的形式，一般应先根据通解的形式分析出特征值，然后从特征方程入手.

解析：由 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 可知其特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm 2i$. 故对应的特征方程为

$(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)=(\lambda-1)(\lambda^2+4)$

$=\lambda^3+4\lambda-\lambda^2-4=\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4$，

所以所求的微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$，

故应选 D.

6. 解析：由方程 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$ 得

$$f''(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2,\text{则}$$

$$f''(x_0)=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0}-3[f'(x_0)]^2$$

$$=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

故应选 B.

二、填空题

7. $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$	8. $\frac{5}{32}$
9. $\frac{\pi^2}{4}$	10. $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$
11. $\sin x^2$	12. $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$

7. 解析：设 $y=ax+b$ 为曲线的斜渐近线，则

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2x+1)x}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2x+1}-\frac{1}{2}x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4}.$$

所以斜渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

故应填 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

8. 解析：
$$y'=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$y''=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y'''=-(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}-x\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}+3\cdot\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}},$$

$$y'''\Big|_{x=\sqrt{3}}=\frac{5}{32}.$$

故应填 $\frac{5}{32}$.

9. 解析：由于 $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ 为奇函数，$|x|$ 为偶函数，而积分区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 关于原点对称，于是根据奇偶函数的积分性质得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}+|x|\right)dx$$

$$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x|\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx=x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

故应填 $\frac{\pi^2}{4}$.

10. 解析：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{\pi i}{n}}$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\,dx=\int_0^1\sqrt{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\cos\frac{\pi x}{2}dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

故应填 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

11. 解析：$\int_0^x\sin(x-t)^2dt\xlongequal{x-t=u}\int_x^0\sin u^2(-du)$

$$=\int_0^x\sin u^2du,$$

故原式 $=\frac{d}{dx}\int_0^x\sin u^2du=\sin x^2$.

故应填 $\sin x^2$.

12. 解析：原方程可以写成

$y'+\frac{2}{x}y=\ln x$（一阶线性微分方程），

所以通解为

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(C+\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(C+\int x^2\ln x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(C+\frac{1}{3}\int\ln x\,dx^3\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[C+\frac{1}{3}\left(x^3\ln x-\int x^2dx\right)\right]$$

$$=\frac{C}{x^2}+\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$$

由初始条件 $y(1)=-\frac{1}{9}$，得 $-\frac{1}{9}=C-\frac{1}{9}$，即 $C=0$.

所以所求的解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

三、解答题

13. 解：方法一：$\int\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}x}{\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]x^2}$

$=-\int\arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^2+C.$

方法二：利用分部积分法计算.

$\int\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}(\arctan x)$

$=\arctan\frac{1}{x}\cdot\arctan x$

$-\int\arctan x\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\arctan\frac{1}{x}\cdot\arctan x+\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\arctan\frac{1}{x}\cdot\arctan x+\int\arctan x\mathrm{d}(\arctan x)$

$=\arctan\frac{1}{x}\cdot\arctan x+\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$

14.【思路探索】在 $(-\pi,0)$ 上利用初始条件 $y\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，可得微分方程的特解；在 $[0,\pi)$ 上可得二阶微分方程的通解. 由于 $y=y(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内光滑，故可利用 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性与连续性确定任意常数.

解：① 对 $(-\pi,0)$ 上的曲线求特解.

由于曲线上任一点处的法线都过原点，所以曲线的法线为 $y=-\frac{x}{y}$，即 $y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$，积分得

$y^2=-x^2+C$，

把 $y\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 代入得 $C=\pi^2$，

从而有 $x^2+y^2=\pi^2$.

又因曲线过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$，

所以 $y=\sqrt{\pi^2-x^2}$.

② 对曲线在 $[0,\pi)$ 上求通解.

由于函数在 $[0,\pi)$ 上满足非齐次微分方程，所以先求对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的通解，易知为 $y^*=C_1\cos x+C_2\sin x$，

设 $y''+y+x=0$ 的特解为 $Y=ax+b$，

则有 $0+ax+b+x=0$，得 $a=-1,b=0$，

故 $Y=-x$，所以，$y''+y+x=0$ 的通解为

$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x$.

③ 根据 $y=y(x)$ 的光滑性求 ② 中通解的常数.

由于 $y=y(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 内的光滑曲线，故 y 在 $x=0$ 处连续，在 $x=0$ 处可导.

于是由连续得 $y_-(0)=y_+(0)$，故 $C_1=\pi$.

又由可导得 $y_-'(0)=y_+'(0)$，

而 $y_-'(0)=\left(\sqrt{\pi^2-x^2}\right)'\Big|_{x=0}=0$，

$y_+'(0)=(-C_1\sin x+C_2\cos x-1)\Big|_{x=0}$

$=C_2-1$，

所以 $C_2-1=0$，即 $C_2=1$，

故 $y=y(x)$ 的表达式为

$$y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0,\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

【方法点击】本题的关键是求出函数 $y(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 与 $[0,\pi)$ 上满足的微分方程的通解.

(1) 在 $(-\pi,0)$ 上，题中给出了曲线的法线特点，如何将它表达成微分方程的形式是解题的关键，需要对法线方程的表达式熟练掌握.

(2) 由于 $y(x)$ 满足的微分方程是分段给出的，在利用可导性与连续性确定常数时，只能使用定义.

15. 证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,c)$，使

$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}$，

由于点 C 在弦 AB 上，故有

$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$，

从而 $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$.

同理可证，存在 $\xi_2\in(c,1)$，使 $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$.

由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ 知在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上，$f'(x)$ 满足罗尔定理的条件，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$，使 $f''(\xi)=0$.

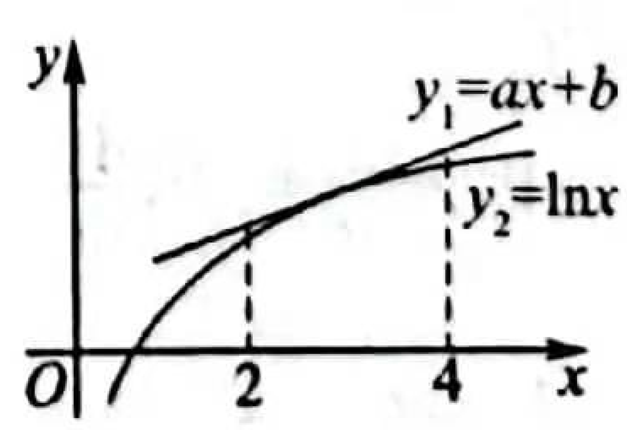
16. 解：如图(a)-1 所示. 首先

$I=\int_2^4(ax+b-\ln x)\mathrm{d}x=6a+2b-\int_2^4\ln x\mathrm{d}x$

$=6a+2b-A$ ($A=\int_2^4\ln x\mathrm{d}x$ 是常数).

其次，设直线 $y_1=ax+b$ 与曲线 $y_2=\ln x$ 相切于点 $P(x,y)$，则有

$\begin{cases}ax+b=\ln x,\\ a=\frac{1}{x},\end{cases}$ 于是 $\begin{cases}a=\frac{1}{x},\\ b=\ln x-1,\end{cases}$



图(a)-1

将上式代入 I 的表达式，得

$I=I(x)=\frac{6}{x}+2\ln x-A-2, x\in[2,4]$，

于是 $I'(x)=-\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{-6+2x}{x^2}$.

令 $I'(x)=0$，得唯一驻点 $x=3$，又当 $2<x<3$ 时，$I'(x)<0$；当 $3<x<4$ 时，$I'(x)>0$，故 $x=3$ 为 $I(x)$ 的最小值点，此时 $a=\frac{1}{3}$，$b=\ln 3-1$.

17.【思路探索】由定积分的几何应用建立方程，解方程即可.

解：旋转体的体积 $V=\pi\int_0^t f^2(x)\mathrm{d}x$，

侧面积 $S=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$，

由题设条件知

$\int_0^t f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$.

上式两端对 t 求导得

$f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}$，

即 $y=\sqrt{1+y'^2}$，从而有 $y'=\sqrt{y^2-1}$.

由分离变量法解得

$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=t+C_1$，

即 $y+\sqrt{y^2-1}=Ce^t$，将 $y(0)=1$ 代入知 $C=1$.

故 $y+\sqrt{y^2-1}=e^t$，即 $y=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$.

于是所求函数为 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

18. 解：由题设 $S_1(x)=S_2(y)$，知

$\int_0^x\left[e^t-\frac{1}{2}(1+e^t)\right]\mathrm{d}t=\int_1^y[\ln s-\varphi(s)]\mathrm{d}s$，

即 $\int_0^x\left(\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\int_1^y[\ln s-\varphi(s)]\mathrm{d}s$，

两边对 x 求导，得

$\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}=[\ln y-\varphi(y)]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

由 $y=e^x$ 得 $\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}=[x-\varphi(e^x)]e^x$，

于是 $\varphi(e^x)=x+\frac{1}{2e^x}-\frac{1}{2}$，

从而 $\varphi(y)=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$.

故曲线 C_3 的方程为 $x=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$.

19.【思路探索】(1) 利用二阶导数符号判断曲线凹凸. (2) 先利用$(-1,0)$ 在切线上写出切线方程，再根据曲线方程求出切点. (3) 利用定积分计算平面图形的面积.

解：方法一：(1) 因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4-2t$，

则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1$，

且 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2t}$

$=-\frac{1}{t^3}<0(t>0)$，

故曲线 L 当 $t\geqslant 0$ 时是凸的.

(2) 由(1) 知，过点$(-1,0)$ 的切线方程为

$y-0=\left(\frac{2}{t}-1\right)(x+1)$，

设 $x_0=t_0^2+1, y_0=4t_0-t_0^2$，

则 $4t_0-t_0^2=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(t_0^2+2)$，

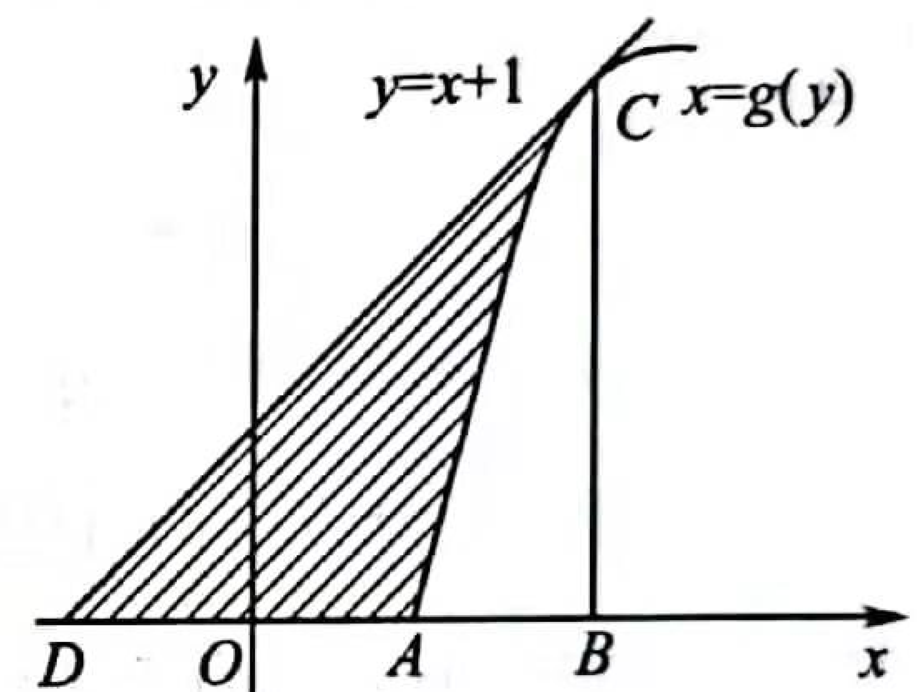
即 $4t_0^2-t_0^3=(2-t_0)(t_0^2+2)$，

整理得 $t_0^2+t_0-2=0$，所以 $(t_0-1)(t_0+2)=0$，则 $t_0=1$ 或 $t_0=-2$(舍去).

将 $t_0=1$ 代入参数方程，得切点为$(2,3)$，故切线方程为 $y-3=\left(\frac{2}{1}-1\right)(x-2)$，

即 $y=x+1$.

(3) 设 L 的方程为 $x=g(y)$，由题设可知，所求平面图形如图(a)-2 所示，其中各点坐标为 $A(1,0)$，$B(2,0)$，$C(2,3)$，$D(-1,0)$，



图(a)-2

则 $S=\int_0^3[g(y)-(y-1)]\mathrm{d}y$，

由参数方程可得 $t=2\pm\sqrt{4-y}$，

即 $x=(2\pm\sqrt{4-y})^2+1$.

由于$(2,3)$ 在 L 上，

则 $x=g(y)=(2-\sqrt{4-y})^2+1$

$=9-y-4\sqrt{4-y}$.

于是

$S=\int_0^3[(9-y-4\sqrt{4-y})-(y-1)]\mathrm{d}y$

$=\int_0^3(10-2y)\mathrm{d}y-4\int_0^3\sqrt{4-y}\mathrm{d}y$

$=(10y-y^2)\Big|_0^3+\frac{8}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{7}{3}$.

方法二：(1) 将曲线方程写成 $y=y(x)$.

由 $t=\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$ 代入 y 得

$$y=4\sqrt{x-1}-x+1.$$

于是

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\sqrt{x-1}}-1$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-(x-1)^{-\frac{3}{2}}<0(x>1)$.

所以曲线 L 是凸的.

(2) L 上任意点(x_0,y_0)处的切线方程是

$$y-y_0=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(x-x_0),$$

其中 $x_0>1$($x_0=1$ 时不合题意),由于$(-1,0)$在切线上,令 $x=-1,y=0$ 得

$$-4\sqrt{x_0-1}+x_0-1$$
$$=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(-1-x_0).$$

令 $t_0=\sqrt{x_0-1}$,

得 $-4t_0+t_0^2=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(-2-t_0^2)$,得 $t_0=1$.

其余同方法一.

(3) 所求平面图形的面积记为 S,则

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3-\int_1^2 y(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{9}{2}-\int_0^1(4t-t^2)\cdot 2t\mathrm{d}t=\frac{9}{2}-\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{4}\right)$$
$$=\frac{7}{3}.$$

20. 解:当 $-1\leqslant x<0$ 时,

$$F(x)=\int_{-1}^x\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^x$$
$$=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2};$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^0+\int_0^x\frac{te^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{2}-\int_0^x t\mathrm{d}\left(\frac{1}{e^t+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\Big|_0^x+\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{e^t+1}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{\mathrm{d}e^t}{e^t(e^t+1)}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^t}{e^t+1}\Big|_0^x$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2.$$

所以 $F(x)=$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \ln\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x}{e^x+1}+\ln 2-\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

【方法点击】本题考查分段函数变上限定积分表达式的计算方法.

注意到 $F(x)$ 的定义域为$[-1,1]$,所以$[-1,1]$范围以外不需要进行计算.当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$F(x)$ 应为$\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$,直接写成 $F(x)=\int_{-1}^x\frac{te^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t$ 是错误的.