安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二)》期中考试试卷

（闭卷，时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答题勿超装订线

装 订 线

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1. 直线 L_1: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与直线 L_2: $\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角是______________.
2. 交换积分次序 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx=$_____________.
3. 已知 $f(x,y)=(2020+\sin x+\cos x)^{2021y}$，则 $f'_y\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)=$____________________.
4. 二阶微分方程 $y''-4y'+13y=0$，其通解为____________________.
5. xoz 坐标面上曲线 $z=e^{x^2}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程为____________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6. 平面 $x-y+2z-6=0$ 与平面 $2x+y+z-5=0$ 位置关系是（　　）

A. 平行　　B. 垂直　　C. 相交但不垂直　　D. 重合

7. 设 $z=f(x,y)$ 的全微分是 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$（　　）

A. 不是 $f(x,y)$ 极值点　　B. 是 $f(x,y)$ 极小值点

C. 是 $f(x,y)$ 极大值点　　D. 无法判别

8. 设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$， $I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$， $I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$，

其中 $D: x^2+y^2\le 1$，则（　　　　）。

(A)　$I_3>I_2>I_1$　　　　(B)　$I_1>I_2>I_3$

(C)　$I_2>I_1>I_3$　　　　(D)　$I_3>I_1>I_2$

9. 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A. 偏导数不存在 ，不连续，不可微　　　　B. 偏导数存在 ，连续，可微

C. 偏导数不存在 ，不连续，可微　　　　D. 偏导数存在 ，连续，不可微

10. 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+e^x$，其中 c_1,c_2 为任意常数，则微分方程中的 a,b,c 分别为（　　）

（A）1,0,1　　（B）1,0,2　　（C）2,1,3　　（D）2,1,4

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

得　分	

11. 求一阶微分方程的通解

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

12. 计算二元极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)-\arcsin(x^2y)}{x^6y^3}$

13 求椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$上平行于平面$x-y+2z=0$的切平面方程

14. 设$z=f(xy,\dfrac{x}{y})$，其中二元函数f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

15. 设$u=u(x,y),v=v(x,y)$是由方程组$\begin{cases} xu+yv=0 \\ yu-xv=1 \end{cases}$确定的$x,y$的隐函数，求$\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$

16. 计算二重积分$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-\dfrac{1}{4}\right|dxdy$，$D:x^2+y^2\le 1$.

四、应用题（共 10 分）

得　分	

17．求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积

五、证明题（共 6 分）

得　分	

18. 已知方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ （φ 为可微函数）所定义的隐函数 $z=z(x,y)$ ，证明 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$

安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期中试卷（参考答案）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\pi/3$
2. $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$
3. $2021^{2022}\ln 2021$
4. $e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数
5. $Z=e^{x^2+y^2}$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、C　　7、B　　8、A　　9、D　　10、D

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11、解：

这是典型的一阶非齐次线性方程，这里$P(x)=-\dfrac{2}{x+1},Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

于是直接利用公式，$y=\tilde{C}e^{-\int P(x)dx}+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\cdot e^{-\int P(x)dx}$

可知所求通解为

$$y=\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+\tilde{C}\right]e^{\int\frac{2}{x+1}dx}=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+\tilde{C}\right](x+1)^2$$ （9 分）

12、解：

$x^2y=t$

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t-\arcsin t}{t^3}$

$=-\dfrac{1}{3}$(利用洛必达法则，或者利用泰勒公式，都可以）

（9 分）

13、解

设：切点（x_0, y_0, z_0),

$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$

$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{-1}=\frac{z_0}{2}=\lambda$

$\lambda^2+2(-\frac{\lambda}{2})^2+（2\lambda)^2=1$

$\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$，$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$

（9 分）

14. **解：**

$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\frac{\partial f_1'}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\frac{\partial f_2'}{\partial y}$

$==f_1'+y\left(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}''\right)-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}''\right)$

$=f_1'+yxf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$ （9 分）

15．**解：**

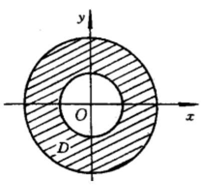
$x\frac{\partial u}{\partial y}+v+y\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$u+y\frac{\partial u}{\partial y}-x\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xv+yu}{x^2+y^2},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{xu-yv}{x^2+y^2}$

（9 分）

16.解：



$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$

$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-\frac{1}{4}\right|dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-r^2)rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{1}{2}}^{1}(r^2-\frac{1}{4})rdr$$

$$=\frac{5\pi}{16}$$

（9 分）

四、应用题（共 10 分）

17.

设长方体的长、宽、高分别为 x， y 和 z，则问题是要求函数

$$V=xyz \qquad （x>0，\ y>0，\ z>0）$$

在条件 $2(xy+yz+xz)-a^2=0$

下的最大值．令拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(2xy+2xz+2yz-a^2)，$$

求出 $L(x,y,z,\lambda)$ 对 x， y， z，的偏导数：

$$\begin{cases} L'_x=yz+2\lambda(y+z)=0, \\ L'_y=xz+2\lambda(x+z)=0, \\ L'_z=xy+2\lambda(x+y)=0, \\ L'_\lambda=2xy+2yz+2xz-a^2=0. \end{cases}$$

注意到 $x>0$， $y>0$， $z>0$

由此式可解得： $x=y=z$，可得：

$$x=y=z=\frac{\sqrt{6}a}{6}.$$

由于该问题最大值一定存在，且可能极值点唯一，因此可以断定所求得的点就是函数的最大值点． 于是便知，以棱长为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ 的立方体的体积最大，且最大体积 $V=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$. （10 分）

五、证明题（共 6 分）

18、证明：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{\varphi_1' c}{-a\varphi_1'-b\varphi_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{\varphi_2' c}{-a\varphi_1'-b\varphi_2'}$$

所以：

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$$

（6 分）