安徽大学2022-2023学年第一学期
《高等数学A（一）》期中模拟试卷

（闭卷　满分100分　时间120分钟）

考场登记表序号________

专业________ 院/系________ 学号________ 姓名________ 座号________

答题勿超装订线　装　订　线

一. 选择题（每小题3分，共15分）

1. 下列命题中，正确的个数是（　　）

(1)若l为某给定正整数，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+l}=a$是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的必要不充分条件；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在且不为0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$；　(3)数列$\{a_n^2\}$收敛$\Rightarrow$数列$\{a_n\}$收敛；

(4)数列$\{a_n\}$收敛、且$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调有界$\Rightarrow\{f(a_n)\}$收敛；

(5)数列$\{a_n\}$收敛于a、数列$\{b_n\}$发散$\Rightarrow$数列$\{a_nb_n\}$发散；

(6)数列$\{a_{3n-2}\}$与数列$\{a_{3n-1}\}$均收敛于$a\Rightarrow$数列$\{a_n\}$也收敛于a；

(7)$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}$和$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$均存在$\Rightarrow\{a_n\}$未必有界；

(8)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有无穷多项$a_n$，使得$|a_n-a|<\varepsilon$。

$A.$ 0　　$B.$ 1　　$C.$ 2　　$D.$ 3

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3}, & x>0\\ 0, & x=0\\ g(x)\cdot\arcsin^2 x, & x<0\end{cases}$，其中$g(x)$有界，则$f(x)$在$x=0$处（　　）

$A.$ 极限不存在　　$B.$ 极限存在，但不连续　　$C.$ 连续，但不可导　　$D.$ 可导

3. 函数$f(x)$在$x=0$可导的充分条件是（　　）

$A.$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}$存在　　$B.$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$存在

$C.$ $f'_-(0)$与$f'_+(0)$均存在　　$D.$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)}{x}$存在

4. 设函数$f(x)$在$x=1$处连续但不可导，则下列在$x=1$处可导的函数是（　　）

$A.$ $(x^2-1)f(x)$　　$B.$ $f(x)x^2$　　$C.$ $f(x^2)$　　$D.$ $f(x)(x+1)$

5. 函数$f(x)=\dfrac{|x-3|\sin\pi x}{x(x-1)(x-2)(x-3)^2}$在下列哪个区间内无界（　　）

$A.\ (-1,0)$　　$B.\ (0,1)$　　$C.\ (1,2)$　　$D.\ (2,3)$

二. 填空题（每小题3分，共15分）

6. 已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-f(x)\ln\cos x}-1}{(e^{2x}-1)\arctan\dfrac{x}{6}}=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$__________。

7. 设$y=(\arctan\sqrt{x})^x$，则$dy=$______________________________________。

8. 极坐标曲线$r=e^\theta$在点$(r,\theta)=\left(e^{\frac{3\pi}{2}},\dfrac{3\pi}{2}\right)$处切线的直角坐标方程为__________。

9. 设$f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$，则$f^{(n)}(x)=$_________________。

10. 函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=te^t\\ y=e^{2t}+1\end{cases}$确定，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_________________。

三. 计算与证明题（每小题7分，共70分）

11. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$。

12. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3}{n^4+n^3+1^3}+\dfrac{2^3}{n^4+n^3+2^3}+\ldots+\dfrac{n^3}{n^4+n^3+n^3}\right)$和$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$。

13. $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求问它几阶可导、并判断各阶导函数在$x=0$的连续性。

14. 设$f(x)=x^3\sin x$，求$f^{(2022)}(0)$。

15. 函数$y=y(x)$由方程$e^y+6xy+x^2=1$确定，求$x=0$处的切线方程及$y''(0)$。

16. 设$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$，求$f(x)$的间断点、并判断其类型（小类）。

17. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{(e^{2\arctan x}-1)(\sqrt{1+3\arcsin x}-1)\ln(1+4x)}$。

18. $f(x)$定义在R上且$f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，求证：$f(x)$为最小正周期为2π的周期函数。

19. 求证：方程$2^x+\sin x=2$在区间$(0,1)$内至少有一个实根。

20. 设数列$\{a_n\}$满足$0<a_1<3$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n(3-a_n)}$，请判断$\{a_n\}$的敛散性、并证明。