大学物理 II 公式整理

Iori

2020.7.25

Contents

1 电磁学

1.1 电场

1.1.1 静电场

库仑定律：$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$

电场：$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$

电势：$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$

场强与电势的关系：$\vec{E} = -\nabla\vec{U} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial z}\vec{k}$

E 通量：$\Psi_E = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$，同向通量为正，反之为负

场强散度：$\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

dq 常见的几种变形：$dq = \lambda dl$、$dq = \sigma dS$、$dq = \rho dV$

dl 在极坐标下：$dl = rd\theta$

静电场的环路定理：$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{L} = 0$

静电场的高斯定理：$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (q 在此处表示的是总电荷量. $q = q_0$(自由电荷）$+ q'$(极化电荷）)

静电平衡：电荷全部分布在导体的表面，导体内任何一点电场强度均为 0。表面附近的电场强度 $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$，可以用高斯定理推得。

1.1.2 电介质

极化电荷：$E=E_0-E'$

电位移：$D=\varepsilon_0 E+P=\varepsilon E=\varepsilon_0\varepsilon_r E$

电介质电场的高斯定理：$\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_0$（自由电荷）

E、D、P 之间的关系：$\begin{cases}\sigma=D=\varepsilon E, & \text{自由电荷面密度}\\ \sigma'=P=D-\varepsilon_0 E=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E, & \text{极化电荷面密度}\\ \text{其方向与介质面法向量相同取正，否则取负}\end{cases}$

在极化介质交界面前后中，D 是不变的，而根据介质不同 E、P 改变。E、D、P 方向相同。

证明：取交界面两侧组成一个高斯面，设两侧面积都为 S。则由高斯定理 $DS-D'S=0$，从而 $D=D'$

电容：$C=\dfrac{q}{U}=\dfrac{\varepsilon S}{d}$(平行板电容器)

求一般电容器的方法：首先根据电介质高斯定理得出电场强度 E，根据 $U=\int Edr$ 计算得到电势差，通过定义来求解。

1.1.3 电场的能量

电场能量（密度）：$\begin{cases}\omega_E=\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}=\dfrac{1}{2}ED=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2\\ \omega_{max}=2\omega_E=ED\\ W=\iiint_V \omega_E dV\end{cases}$ 电容器能量：$W=\dfrac{1}{2}CU^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

电场做功两部分：电场对电源做的功：$A_1=-\Delta W_e=-\Delta QU$；电场对电介质做的功 $A_2=-\Delta W_e-A1$（二者之和为静电能的改变量）。

1.2 磁场

磁场与电场性质之间存在类比关系。

1.2.1 磁场

毕-萨定理：$dB=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl}{r^2}$

常见得到 I 的方法：$I=\dfrac{dq}{dt}=\lambda\dfrac{dl}{dt}=\lambda v=\lambda\omega R$

安培环路定理：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{L}=\mu_0\Sigma(I+I_s)$ (I 为传导电流，I_s 为磁化电流)

磁场的高斯定理：$\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$

电荷在磁场中的运动：$F=qvB$、$R=\dfrac{mv_\perp}{qB}$、$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$、$\omega=\dfrac{qB}{m}$

磁场对载流导线的作用：$\begin{cases}\text{安培定律：} d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}, \\ \text{磁场力做功：} W = I\Delta\Phi\end{cases}$

1.2.2 磁介质

磁介质：$B = B_0 + B'$(与电介质关系不同)

磁场强度：$H = \dfrac{B}{\mu_0} - M = \dfrac{B}{\mu} = \dfrac{B}{\mu_0\mu_r}$

H、B、M 之间的关系：$\begin{cases}\alpha = H = \dfrac{B}{\mu}, & \text{传导面电流} \\ \alpha_s = M = H - \dfrac{B}{\mu_0} = \dfrac{B}{\mu_0}(\dfrac{1}{\mu_r} - 1), & \text{磁化面电流} \\ \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \Sigma Is, & \text{总磁化电流，} I_s \text{ 方向与 H 满足右手定则} \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma I & \text{总传导电流，} I \text{ 与 } I_s \text{ 方向一致}\end{cases}$

磁介质交界面处，B 的大小不发生改变。

证明：取交界面两侧组成一个高斯面，设两侧面积都为 S。则由高斯定理 $BS - B'S = 0$，因此 $B = B'$

1.2.3 磁场的能量

磁场能量：$\omega_m = \dfrac{1}{2}BH = \dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu}$ 电感能量：$W_m = \iiint_V \omega_m dV = \dfrac{1}{2}LI^2$

1.3 电磁感应

法拉第电磁感应定律：$\begin{cases}\xi_i = -N\dfrac{d\Phi}{dt} = -NB\dfrac{dS}{dt} = -NBl\dfrac{dx}{dt} = -NBlv, & N\Phi\text{：磁链} \\ \Delta Q = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} I_i dt = \dfrac{\Delta\Phi}{R} & \\ \oint_L \vec{E_k} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\displaystyle\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, & E_k\text{：感生电场强度}\end{cases}$

自感应：$\begin{cases}\xi_L = -L\dfrac{dI}{dt}, & \text{感生电动势} \\ L = \dfrac{d\Phi_N}{dI} = \dfrac{\Phi_N}{I} = \mu_0\dfrac{N^2}{l}\pi R^2, & \text{自感系数}\end{cases}$

互感应：$\begin{cases}M = \dfrac{\Phi_{21}}{I_1} = \dfrac{\Phi_{12}}{I_2}, & \text{互感系数} \\ \xi_{21} = -M\dfrac{dI_1}{dt}, \xi_{12} = -M\dfrac{dI_2}{dt}, & \text{互感电动势} \\ M = k\sqrt{L_1L_2}, 0 \le k \le 1 & k\text{：耦合系数}\end{cases}$

位移电流：电容器极板间变化的电场等效的电流。

$I_d = S\dfrac{dD}{dt} = S\dfrac{d\sigma}{dt} = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{dU}{dt}$

修正后的环路定理：$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma(I + Id)$。$I$ 为回路中传导的电流，Id 为电容的电流，二者方向一致。

1.4 麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \Sigma q = \int_V \rho dV, & \text{介质电场的高斯定理，} q\text{、}\rho \text{ 均代表自由电荷} \\ \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0, & \text{磁场的高斯定理} \\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + I_d = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial D}{\partial t}\cdot d\vec{S}, & \text{安培环路定理} \\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial B}{\partial t}\cdot d\vec{S} & \text{法拉第电磁感应定律} \end{cases}$$

2 振动、波、光学

2.1 振动

2.1.1 机械振动

谐振动的条件：$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

例如：弹簧振子

振动的参数：$\begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, & \text{角频率} \\ A = \sqrt{x_0^2 + (\dfrac{v_0}{\omega})^2}, & \text{振幅} \\ \varphi_0 = -\arctan(-\dfrac{v_0}{\omega x_0})(+\pi \text{ if necessary}), & \text{初相，应根据运动位置和速度判断角度所处的象限} \end{cases}$

振动的能量：$\begin{cases} E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 & = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ E_p = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) & = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \\ E_k + E_p = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 & = \dfrac{1}{2}kA^2 \end{cases}$

拍：两个频率不同的振动叠加而产生。$\nu = \mid \nu_1 - \nu_2 \mid$

2.1.2 电磁振荡

一般形式：$L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = \xi_0 \cos\omega_d t$

谐振时 $i = I_0\cos(\omega_d t + \varphi')$

$$\begin{cases} \omega_d = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}, & \text{谐振角频率} \\ I_0 = \dfrac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C})^2}}, & \text{振幅} \\ \varphi' = \arctan\dfrac{\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C}}{R}, & \text{初相} \end{cases}$$

2.2 波

2.2.1 机械波与电磁波

波函数：$y=\cos[\omega(t\pm\frac{x}{u})+\varphi_0]=\cos 2\pi(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{\lambda}+\frac{\varphi_0}{2\pi})$(向 x 轴正向传播取负号，反之取正)

波动方程：$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

波的能量：$\begin{cases}\Delta E_k=\Delta E_p=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\sin\omega(t-\frac{x}{u})\Delta V \\ \omega=\rho A^2\omega^2\sin\omega(t-\frac{x}{u}), & \text{能量密度} \\ \overline{\omega}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 & \text{平均能量密度}\end{cases}$

波的强度：$\overline{p}=\overline{\omega}uS$。$I=\overline{\omega}u$：平均能流密度

电磁波：E 与 H 同相位，但是偏振方向相互垂直。

电磁波的量值关系：$\begin{cases}u=c \\ \sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H\Rightarrow E=uB\end{cases}$

电磁波的能量：$\begin{cases}\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H} \\ \Rightarrow S=E_0H_0\cos^2[\omega(t-\frac{x}{c})+\varphi_0] \\ \overline{S}=\frac{1}{2}E_0H_0\end{cases}$

2.2.2 波的衍射和干涉

衍射：波传播方向绕过障碍发生偏移

干涉：波在不同相位叠加

驻波：“静止”，波腹（峰值对应的 x），波节（平衡位置对应的 x）

半波损失：波疏—波密反射时发生。折射无半波损失。

2.2.3 多普勒效应

$\nu_R=\frac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S$ RS 靠近，二者均取正；RS 远离，均取负。

2.3 光学

公式少，懒得整理了。算了算了。

$n_1<n<n_2$ or $n_1>n>n_2$ 入射光和出射光无附加光程差 $\frac{\lambda}{2}$ $n_1>n,n_2>n$ or $n_1<n,n_2<n$ 入射光和出射光有附加光程差 $\frac{\lambda}{2}$

2.3.1 干涉

看光程差 δ 对应相位相消/增强

2.3.2 衍射

单缝：$a\sin\theta$ 每 2 个 $\dfrac{\lambda}{2}$ 光振动抵消。
圆孔：$\dfrac{l}{x}\approx\theta\approx\sin\theta=1.22\dfrac{\lambda}{d}$

2.3.3 光栅衍射

光栅常数 $a+b=\dfrac{N}{L}$
缺级：衍射暗纹 + 干涉明纹。不一定只有一个条件

2.3.4 光的偏振性

过偏振片时：
偏振光：$I_1=I_0\cos^2\alpha$。自然光：$I=\dfrac{1}{2}I_0$
反射光完全偏振：$i=i_B=\tan\dfrac{n_2}{n_1}$

3 常用的例子

3.1 特殊电场

3.1.1 带电直棒，电荷线密度 λ

设 θ_1，θ_2 为一点到棒两端连线与 x 轴同一侧的夹角。则 $E=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{2-2\cos(\theta_1-\theta_2)}$
当直棒无限长 ($\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$)：$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$

3.1.2 带电圆环，中轴线上的电场强度

$E=\dfrac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\approx\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0x^2}(x\gg R)$

3.1.3 带电圆面，电荷面密度 σ 中轴线上的电场强度

$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\dfrac{x}{\sqrt{R^2+x^2}})\approx\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R\to\infty)$

3.2 特殊电容器

3.2.1 圆柱电容器

可以直接推导，但是计算有点麻烦。$C=\dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}$
式中：l——电容器的高度；R_A——内层半径；R_B——外层半径。

3.2.2 球形电容器

同上，直接推导计算较为复杂。$C = 4\pi\varepsilon \dfrac{R_A R_B}{R_B - R_A}$

式中：R_A——内层半径；R_B——外层半径。

3.3 特殊磁场

3.3.1 载流直导线

设 θ_1、θ_2 为某点到导线两端与垂直于导线方向的夹角。则 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$

当导线无限长（$\theta_1 = -\dfrac{\pi}{2}$、$\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$，$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

式中：a——该点到导线的垂直距离。

3.3.2 载流圆线圈

$B = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{IS}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$，when $x = 0$，$B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

3.3.3 载流螺线管

设 β_1、β_2 为螺线管内一点与螺线管两端连线与螺线管轴线的夹角，则 $B = \dfrac{\mu_0}{2} nI(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$

当螺线管很长（$\beta_1 \to 0$，$\beta_2 \to \pi$），$B = \mu_0 nI = \mu_0 \dfrac{NI}{l}$

式中：n——螺线管单位长度的匝数；N——螺线管总匝数；l——螺线管长度。

3.3.4 运动电荷的磁场

$dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{vdq}{r^2}$