École **S**upérieure **Pr**ivée d'**I**ngénierie et de **T**echnologies

Analyse Numérique

Correction série d'exercices N^{o}2 Interpolation et approximation polynomiale

Niveau : 3$^{\text{ème}}$ année — Année universitaire : 2022-2023

Exercice 1 *On considére les points* $(-2,4)$ *;* $(0,0)$ *;*$(1,0)$ *et* $(2,4)$*. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation* P *aux quatre points et justifier votre réponse.*

(1) $P_1(X) = X^4 + \frac{2}{3}X^3 + 3X^2 + \frac{8}{3}X$

(2) $P_2(X) = \frac{4}{3}X^2 - \frac{4}{3}$

(3) $P_3(X) = \frac{1}{3}X^3 + X^2 - \frac{4}{3}X$

(4) $P_4(X) = \frac{1}{6}X^4 + X^3 + \frac{2}{3}X^2 + X$

Correction :
On ne demande pas ici de calculer le polynôme mais de l'identifier, on va donc utiliser la caractérisation du polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points.

$$P \text{ polynôme d'interpolation de Lagrange aoocié à } x_i \Leftrightarrow \deg(P) \leq 3 \text{ et } \begin{cases} \text{P(-2)=4;} \\ \text{P(0)=0;} \\ \text{P(1)=0;} \\ \text{P(2)=4.} \end{cases}$$

Il n'y a qu'à trouver le polynôme qui satisfait toute les propriètés.
Existance et unicité du polynôme :

- Le polynôme P_1 est de degré 4 donc éliminé
- Le polynôme P_2 a un terme constant non nul il ne s'annule pas en 0 donc éliminé
- Le polynôme P_3 on vérifie qu'il convient et P_4 ne vérifie pas $P(1) = 0$

Exercice 2 (Examen Mai 2019)

Partie I : Interpolation polynomial

(a) *Justifier l'existence d'un unique polynôme* $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ *interpolant les points* $(-2,16), (0,-4)$ *et* $(2,8)$*.*

(b) *Déterminer l'expression du polynôme* P_2 *par une méthode (vue en cours) de votre choix*

Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

Dans l'objectif d'étudier le chemin de freinage d'un véhicule, correspondant à la distance parcourue en mètres (m) du début du freinage jusqu'à l'arrêt total du véhicule, en fonction de la vitesse en Kilomètres par heure (Km/h) de ce dernier, 12 expériences indépendantes ont été réalisées. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. On note par $X = (x_i)_{1\leq i\leq 12}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq 12}$, où x_i, et y_i, désignent, respectivement, la vitesse du véhicule et le chemin de freinage associés à l'éxpérience i.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y_i	9	11	20	27	39	45	58	78	79	93	108	12

(a) *Déterminer les coefficients $Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de la droite $f(t, Z) = a + bt$, qui ajuste au mieux les points $(x_i; y_i)_{1\leq i\leq 12}$ au sens des moindres carrées. On donne les valeurs des sommes suivantes :*

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 1140;\ \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 122600;\ \sum_{i=1}^{12} y_i = 691;\ \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 80840$$

(b) *Rouler à une vitesse de $105Km/h$, le conducteur de ce véhicule pourrait-il éviter un obstacle survenant à une distance de $60m$? Justifir votre réponse.*

Correction :

Partie I : Interpolation polynomiale

(a) Les abscisses des points $(-2, 16); (0, -4)$ et $(2, 8)$ sont deux à deux distincts donc il existe un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ passant par ces points. un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ passant par ces points.

(b) **Méthode de Lagrange :**

On considère les polynôme $(L_i)_{0\leq i\leq 2}$ de Lagrange associés aux $(-2, 16); (0, -4)$ et $(2, 8)$.

$$L_0(x) = \frac{x(x-2)}{8},\ L_1(x) = \frac{x^2-4}{-4},\ L_2(x) = \frac{x(x+2)}{8}$$

Alors $P_2(x) = 16L0(x) - 4L_1(x) + 8L_2(x) = 4x^2 - 2x - 4$

Méthode de Newton :

Le polynôme de Newton est donné par :

$$P_2(x) = \alpha_0 w_0(x) + \alpha_1 w_1(x) + \alpha_2 w_2(x)$$

avec

$$\begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_1(x) = x + 2 \\ w_2(x) = x(x+2) \end{cases}$$

Détermination des coefficients α_0, α_1 et α_2 par la méthode des differences divisées : On a :

$x_0 = -2, y_0 = 16$

$x_1 = 0, y_1 = -4$

$x_2 = 2,\ y_2 = 8$
alors $\alpha_0 = 16 = f[x_0], \alpha_1 = f[x0, x1] = -10, \alpha_2 = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = 4$
Ainsi $\alpha_0 = 16, \alpha_1 = -10$ et $\alpha_2 = 4$ d'où :

$$P_2(x) = 16w_0(x) - 10w_1(x) + 4w_2(x) = 4x^2 - 2x - 4$$

Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

(a) Le vecteur $Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de la droite $f(t, Z) = a + bt$, qui ajuste au mieux les points $(x_i; y_i)_{1\leq i\leq 12}$ au sens des moindres carrées

$$F(Z, X) = \sum_{i=1}^{12} \Big(f(x_i, Z) - y_i\Big)^2$$

Il est donné par la relation suivante : $Z^* = ({}^tAA)^{-1t}AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{12} \end{pmatrix}$ On a :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 12 & \displaystyle\sum_{i=1}^{12} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{12} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{12} x_i^2 \end{pmatrix} = {}^tAA = \begin{pmatrix} 12 & 1140 \\ 1140 & 122600 \end{pmatrix}$$

Cherchons $({}^tAA)^{-1}$?
On sait que $({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{det({}^tAA)}{}^tcom({}^tAA)$ avec $det({}^tAA) = 12 \times 122600 - (1140)^2 = 171600$
et $com({}^tAA) = \begin{pmatrix} 122600 & -1140 \\ -1140 & 12 \end{pmatrix}$ alors $({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{171600}\begin{pmatrix} 122600 & -1140 \\ -1140 & 12 \end{pmatrix}$ D'autre part ${}^tAY = \begin{pmatrix} 691 \\ 80840 \end{pmatrix}$ Ainsi

$$Z^* = ({}^tAA)^{-1t}AY = \begin{pmatrix} -43,36 \\ 1,06 \end{pmatrix} \quad Donc \quad f(t, Z) = -43,36 + 1.06t$$

(b) Une valeur estimée du chemin de freinage du véhicule à une vitesse de $105km/h$ est donné par $f(10.5; Z^*) = -43.36 + 1.06 \times 10.5 = 68.21$. Le conducteur du véhicule ne pourra pas éviter l'obstacle.

Exercice 3 **(1)** *Construire le polynôme P d'interpolation de Lagrange aux points $(-1, e); (0, 1)$ et $(1, e)$.*

(2) *Sans faire de calcul, donner l'expression du polynôme de Lagrange Q qui interpole les trois points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.*

(3) *Trouver le polynôme de l'espace vectoriel Vect$(1, X, X^2)$ qui interpole les trois points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.*

Correction :

1) Le polynôme P d'interpolation de Lagrange de degré n qui interpole $(n+1)$ points $\{(x_i, y_i); i = 0, ..., n\}$ s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

ici $n = 2$ donc on a :

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= \frac{ex(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + \frac{e(x+1)x}{2} = (e-1)x^2 + 1 \end{aligned}$$

2) Il suffit de changer les coefficients y_i dans l'expression précedente :

$$Q(x) = -\frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x+1)x}{2} = -x^2$$

3) Il s'agit de trouver un polynôme $P(x)$ qui soit combinaison linèaire de deux polynômes assigès (ie : $P(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$) et qui interpole les 3 points $(-1, -1); (0, 0)$ et $(1, -1)$.

$$\begin{cases} \text{P(-1)=1 ;} \\ \text{P(0)=0 ;} \\ \text{P(1)=-1 ;} \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha = 0; \beta = 0$ et $\gamma = -1$
le polynôme cherché est donc $P(x) = -x^2$

Exercice 4 *Soit la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(1) *Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton aux points* $-2, -1, 0$ *et* 1.

(2) *Donner la valeur approchée de* f *au point* $x = 0.5$

(3) *Calculer l'erreur à ce point.*

(4) *Estimer l'erreur sur l'intervalle* $[-2, 1]$.

Correction :

1) En utilisant la méthode de Newton,

$$P_3(x) = \beta_0 + \beta_1(x - x_0) + \beta_2(x - x_0)(x - x_1) + \beta_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

avec

$\beta_0 = y_0 = f(x_0) = 0.2$

$\beta_1 = [y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0.3$

$\beta_2 = [y_0, y_1, y_2] = \frac{[y_1,y_2]-[y_0,y_1]}{x_2-x_0} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-0.3}{x_2-x_0} = 0.25$

$\beta_3 = [y_0, y_1, y_2, y_3] = \frac{[y_1,y_2,y_3]-[y_0,y_1,y_2]}{x_3-x_0} = \frac{\frac{[y_2,y3]-[y_1,y_2]}{x_3-x_1}-0.25}{x_3-x_0} = -0.25$

d'où

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \beta_0 + \beta_1(x+2) + \beta_2(x+2)(x+1) + \beta_3(x+2)(x+1)x \\
&= 0.2 + 0.3(x+2) + 0.1(x+1)(x+2) - 0.2x(x+1)(x+2) \\
&= -0.2x^3 - 0.5x^2 + 0.2x + 1
\end{aligned}$$

2) $P(0.5) = 0.95 \simeq f(0.5)$

3) $E(0.5) =\mid f(0.5) - P(0.5) \mid=\mid 0.8 - 0.95 \mid= 0.015$

4) La fonction f est de Classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-2, 1]$ et on a :

$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

$f^{(2)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$.

$f^{(3)}(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$.
$f^{(4)}(x) = 24\frac{5x^4-10x^2+1}{(1+x^2)^5}$.
on cherche maintenant à maximiser $f^{(4)}$ sur $[-2, 1]$. On pose le changement de variable $X = x^2$, ce qui revient à maximiser la fonction :

$$F(X) = 24\frac{5X^2 - 10X + 1}{(1+X)^5} \quad \textbf{sur } [0, 4]$$

et on a

$$F'(X) = \frac{-15x^2 + 50X - 15}{(1+X)^6}$$

qui s'annule en 1/3 et 3, voir le TVA

X	0		$\frac{1}{3}$		3		4
$F'(X)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(X)$	24	$\searrow$	$-\frac{81}{8}$	$\nearrow$	$\frac{3}{8}$	$\searrow$	$\frac{984}{3125}$

On a alors pour tout $x \in [-2, 1]$:

$$E(x) \leq \sup_{t\in[-2,1]} \mid \frac{f^{(4)}(t)}{4!} \mid\mid x - x_0 \mid\mid x - x_1 \mid\mid x - x_2 \mid \quad \leq \quad \mid x + 2 \mid\mid x + 1 \mid\mid x \mid\mid x - 1 \mid$$