

Analyse numérique

Correction série d'exercices N°1 : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires

Niveau : 3 A & B

Année universitaire : 2022-2023

Exercice 1

Partie I

1. a) On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 32 \neq 0.$$

Alors le système (S) admet dans \mathbb{R}^3 une unique solution.

b)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{array} \right)$$

Étape 1 :

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1 \end{aligned}$$

. Alors

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array} \right)$$

Étape 2 :

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1, \\ L_2 &\leftarrow L_2 \end{aligned}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2,$$

. Alors,

$$(A|b)^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array} \right)$$

$$\text{Alors, } S \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1 \\ 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_3 = -4 \end{cases} . \text{ En utilisant la méthode de remontée on obtient :}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

2) a)

Rappel : Soit A une matrice à diagonale strictement dominante alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées au système $(S) : AX = b$ sont convergentes pour tous $X^{(0)}$.

On dit que A est à **diagonale strictement dominante** lorsque le module de chaque terme diagonal est supérieur strictement à la somme des modules des autres termes de sa ligne, c-à-d,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|, \quad \forall i \in [1, n].$$

On a ,

$$\begin{cases} |2| > |0| + |1| \\ |4| > |2| + |-1| \\ |3| > |-1| + |1| \end{cases}$$

Ainsi A est à diagonale strictement dominante et par suite les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes pour la résolution du système (S) .

2) b) Schéma itératif de la méthode de Jacobi : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} = 1 \\ 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} = 3 \\ -x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 3x_3^{(k+1)} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{-4 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{3} \end{cases}$$

Schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} = 1 \\ 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} = 3 \\ -x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 3x_3^{(k+1)} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1 - x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3 - 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{-4 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{3} \end{cases}$$

2) c) Pour un vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(i) la méthode de Jacobi :

$$X_J^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_J^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

(ii) la méthode de Gauss-Seidel :

$$X_{G-S}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad X_{G-S}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Partie II

3) 1^{ère} itération :

$$E_J^{(1)} = \|X_J^{(1)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{\sqrt{5}}{4} = 0,5590.$$

$$E_{G-S}^{(1)} = \|X_{G-S}^{(1)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{18}} = 0,7817.$$

2^{ème} itération :

$$E_J^{(2)} = \|X_J^{(2)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0,3535.$$

$$E_{G-S}^{(2)} = \|X_{G-S}^{(2)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{11}{162}} = 0,2605.$$

4) Suite à la première itération, la méthode de Jacobi approche mieux la solution et suite à la deuxième itération, la méthode de Gauss-Seidel approche mieux la solution.

Exercice 2

1.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2 - 2).$$

Pour que A soit inversible il faut et il suffit que $\det(A) \neq 0$, or $\det(A) = \alpha(\alpha^2 - 2)$, donc A est inversible si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

2. Pour que la méthode de Jacobi soit convergente il suffit que A soit à diagonale strictement dominante c-à-d :

$$\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |\alpha| > 2 \\ |\alpha| > 1 \end{cases}$$

Donc si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, alors la méthode de Jacobi est convergente.

3. Pour $\alpha = 3$, alors $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(a)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array} \right)$$

Étape 1 :

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \end{aligned}$$

. Alors :

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array} \right)$$

Étape 2 :

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1, \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{3}{8}L_2, \end{aligned}$$

. Alors :

$$(A|b)^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{25}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & \frac{63}{8} \end{array} \right)$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) —

• Décomposition de Jacobi :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1}{3}(5 - x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1}{3}(10 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{1}{3}(11 - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

• Itération de Jacobi : Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \text{— Itération 1 : } X^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5 - 1) \\ \frac{1}{3}(10 - 1 - 1) \\ \frac{1}{3}(11 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \\ \text{— Itération 2 : } X^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5 - \frac{8}{3}) \\ \frac{1}{3}(10 - \frac{4}{3} - \frac{10}{3}) \\ \frac{1}{3}(11 - \frac{8}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3

Partie I : $\theta = 1$

1. La matrice associée à (S_α^1) est $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$.

(S_α^1) admet une unique solution ssi $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 2/3 & 5/3 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 3\left(\frac{2}{3}\alpha - \frac{10}{3}\right) = 2\alpha - 10. \end{aligned}$$

$\det(A) \neq 0 \iff \alpha \neq 5$.

Conclusion : pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$, le système (S_α^1) admet une unique solution.

2. On pose $\alpha = 6$, Dans ce cas $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

D'abord on peut vérifier facilement que A admet une unique décomposition LU , en effet :

$$A^{(1)} = (3); \quad \det(A^{(1)}) = |3| \neq 0,$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \det(A^{(2)}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0,$$

$$A^{(3)} = A; \quad \det(A^{(3)}) = \det(A) = 2 \times 6 - 10 = 2 \neq 0,$$

Ainsi toutes les mineurs principaux de A sont inversibles et par suite A admet une unique décomposition LU .

PREMIÈRE MÉTHODE : PAR LES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

On effectue la réduction de la matrice A jusqu'à obtenir une forme échelonnée. On calcule au fur et à mesure la matrice triangulaire inférieure L (pour la première colonne de L , on a $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$, pour la deuxième colonne de L on a $l_{i2} = \frac{a_{i2}}{a_{22}}$ et ainsi de suite pour les colonnes suivantes).

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{2/3} & 5/3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = L$$

DEUXIÈME MÉTHODE : PAR IDENTIFICATION

$A = LU$ avec L matrice triangulaire inférieure de diagonale unité et U matrice triangulaire supérieure :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix}$$

Alors par identification :

- $1 \times u_{1,1} = 3 \Rightarrow u_{1,1} = 3$
- $1 \times u_{1,2} = 4 \Rightarrow u_{1,2} = 4$
- $1 \times u_{1,3} = -2 \Rightarrow u_{1,3} = -2$
- $l_{2,1} \times 3 = 1 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{3} \times 4 + 1 \times u_{2,2} = 2 \Rightarrow u_{2,2} = \frac{2}{3}$
- $\frac{1}{3} \times -2 + 1 \times u_{2,3} = 1 \Rightarrow u_{2,3} = \frac{5}{3}$
- $3 \times l_{3,1} = 0 \Rightarrow l_{3,1} = 0$
- $l_{3,2} \times \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow l_{3,2} = 3$
- $3 \times \frac{5}{3} + 1 \times u_{3,3} = 6 \Rightarrow u_{3,3} = 1$

On obtient :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RÉSOLUTION

$$AX = b \iff LUX = b$$

Cherchons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ la solution du système linéaire $LY = b$.

$$L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après avoir calculer le vecteur Y il reste à trouver la solution du système linéaire

$$UX = Y$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient : $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'unique solution de (S_1^6) .

$$3. A^2X = b \iff A(AX) = b \iff \begin{cases} AY = b \\ AX = Y \end{cases}$$

Exemple : Pour $\theta = 1$ et $\alpha = 6$ résoudre $A^2X = b$

$$AY = b \iff Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (d'après Q2 partie I)}$$

$$AX = Y \leftrightarrow LUX = Y \leftrightarrow \begin{cases} LZ = Y \\ UX = Z \end{cases}$$

Cherchons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ la solution du système linéaire $LZ = Y$.

$$LZ = Y \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 4/3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Après avoir calculer le vecteur Z il reste à trouver la solution du système linéaire $UX = Z$

Alors,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4/3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode de remontée on obtient : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57/3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

Partie II : $\theta \in \mathbb{R}$

1. Pour que la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel soient convergentes il suffit que A soit à diagonale strictement dominante c-à-d :

$$\begin{cases} |3\theta| > 6 \\ |2\theta| > 2 \\ |\alpha| > 2 \end{cases}$$

Donc si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ et $\theta \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ alors la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.

2. Pour $\alpha = 6$ et $\theta = 3$, $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

A est une matrice à diagonale strictement dominante, ainsi, la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss Seidel sont convergentes.

Méthode de Jacobi

- Décomposition de Jacobi : On pose $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1 - 4x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}}{9} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{2 - 2x_2^{(k)}}{6} \end{cases}$$

- Itération de Jacobi : Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

— Itération 1 : $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$

— Itération 2 : $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1851 \\ 0.1851 \\ 0.3888 \end{pmatrix}$

Méthode de Gauss Seidel

- Décomposition de Gauss-Seidel : On pose $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1 - 4x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}}{9} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k+1)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{1 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k+1)} - a_{3,2}x_2^{(k+1)}}{a_{3,3}} = \frac{2 - 2x_2^{(k+1)}}{6} \end{cases}$$

- *Itération de Gauss Seidel : Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,*

— *Itération 1 : $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 1/52 \\ 52/162 \end{pmatrix}$*

— *Itération 2 : $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1742 \\ -0,0290 \\ 0,3430 \end{pmatrix}$*