пенью точности, т. е. будет выполнено неравенство (5.51). Это высказывание является, конечно, перефразировкой определения (5.50)—(5.51), разъясняющей интуитивное представление о непрерывной функции.

Так как непрерывность функции в точке является частным случаем существования предела функции, то определение непрерывности функции в точке можно дать в терминах окрестностей, надо лишь к условию (5.20) добавить требование $x_0 \in X$. Таким образом, функция f , определенная на множестве X , непрерывна в точке x_0, если для любой окрестности $U(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что выполняется включение

$$f(U(x_0) \cap X) \subset U(y_0), \quad x_0 \in X. \tag{5.52}$$

Наконец, перенося постоянную $f(x_0)$ в равенстве (5.18) в левую часть, внося ее под знак предела и замечая, что обозначение $x \to x_0$ при пределе функции равносильно обозначению $x - x_0 \to 0$ (см. п. 5.4), получим

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \tag{5.53}$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* и обозначается через $\triangle x$, а разность $f(x) - f(x_0)$ — *приращением функции* $y = f(x)$, соответствующим данному приращению аргумента $\triangle x$, и обозначается через $\triangle y$. Таким образом,

$$\triangle x = x - x_0,\ \triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0),\ x_0 \in X,\ x \in X. \tag{5.54}$$

В этих обозначениях равенство (5.53) принимает вид

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0 \tag{5.55}$$

т. е. непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Иногда бывает полезным условие непрерывности функции в точке, основанное на рассмотрении предела функции по проколотой окрестности.

Л Е М М А 3. *Если существует предел*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0) \cap X}} f(x) = a \qquad (5.56)$$

и функция f определена в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0) = a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функция f непрерывна в точке x_0, т. е. выполняется условие (5.13), то в силу очевидного включения $\mathring{U}(x_0) \cap X \subset X$ и того, что из существования предела по множеству следует существование предела и по любому подмножеству, имеем

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0) \cap X}} f(x) = f(x_0). \qquad (5.57)$$

Из (5.56) и (5.57) следует, что $f(x_0) = a$.

Пусть теперь, наоборот, выполняется условие $f(x_0) = a$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0) \cap X}} f(x) \underset{(5.56)}{=} f(x_0).$$

Отсюда имеем, что для любой окрестности $U(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что

$$f(\mathring{U}(x_0) \cap X) \subset U(f(x_0)). \qquad (5.58)$$

Но, очевидно, $f(x_0) \in U(f(x_0))$, поэтому в левой части включения (5.58) можно проколотую окрестность $\mathring{U}(x_0)$ заменить обычной окрестностью $U(x_0)$:

$$f(U(x_0) \cap X) \subset U(f(x_0))$$

Это и означает, что функция f непрерывна в точке x_0.$\square$

П р и м е р ы. 1. Функция $f(x) = c$, где c — постоянная, непрерывна на всей числовой прямой.

В самом деле, для любого $x_0 \in \boldsymbol{R}$ имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0).\square$$

2. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 \neq 0$. В самом деле,

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \frac{1}{x + \triangle x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\triangle x_0}{(x_0 + \triangle x)x_0},$$