

省选基础算法

雷宇辰

2017 年 2 月 13 日

目录

1 day1 图论	1
1.1 有向图强连通分量的 Tarjan 算法	1
1.2 图的割点、桥与双连通分量	4
1.3 2-SAT	7
1.4 欧拉回路	12

1 day1 图论

1.1 有向图强连通分量的 Tarjan 算法

定义 在有向图 G 中, 如果两个顶点 u, v 间存在一条路径 u 到 v 的路径且也存在一条 v 到 u 的路径, 则称这两个顶点 u, v 是**强连通的 (strongly connected)**。如果有向图 G 的每两个顶点都强连通, 称 G 是一个**强连通图**。有向非强连通图的极大强连通子图, 称为**强连通分量 (strongly connected components)**。若将有向图中的强连通分量都缩为一个点, 则原图会形成一个 DAG (有向无环图)。

极大强连通子图 G 是一个极大强连通子图当且仅当 G 是一个强连通子图且不存在另一个强连通子图 G' 使得 G 是 G' 的真子集。

Tarjan 算法 定义 $dfn(u)$ 为结点 u 搜索的次序编号, 给出函数 $low(u)$ 使得

$low(u) = \min$

```
{
     $dfn(u)$ ,
     $low(v)$ ,    $(u, v)$  为树枝边,  $u$  为  $v$  的父结点
     $dfn(v)$     $(u, v)$  为后向边或指向栈中结点的横叉边
}
```

当结点 u 的搜索过程结束后, 若 $dfn(u) = low(u)$, 则以 u 为根的搜索子树上所有还在栈中的结点是一个强连通分量。

代码

tarjan - SCC

```
1 void tarjan(int u)
2 {
3     dfn[u] = low[u] = ++idx;
4     st[top++] = u;
5     for (Edge cur : G[u])
6         if (!dfn[cur.to])
7             tarjan(cur.to),
8             low[u] = min(low[u], low[cur.to]);
9         else if (!scc[cur.to])
10            low[u] = min(low[u], dfn[cur.to]);
11 if (dfn[u] == low[u] && ++cnt)
12     do scc[st[--top]] = cnt;
13     while (st[top] != u);
14 }
```

练习题

POJ2186/BZOJ1051 - Popular Cows 双倍的快乐

Popular Cows

```
1 #include <cstdio>
2 inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
3 int head[10010], next[50010], to[50010], ecnt;
4 int dfn[10010], low[10010], stk[10010], scc[10010], top, idx, scccnt;
5 bool instk[10010];
```

```

6  int deg[10010];
7  inline void addEdge(int f, int t)
8  {
9      ecnt++;
10     next[ecnt] = head[f];
11     head[f] = ecnt;
12     to[ecnt] = t;
13 }
14 void tarjan(int x)
15 {
16     dfn[x] = low[x] = ++idx;
17     instk[stk[top++] = x] = true;
18     for (int cur = head[x]; cur; cur = next[cur])
19         if (!dfn[to[cur]])
20             tarjan(to[cur]), low[x] = min(low[x], low[to[cur]]);
21         else if (instk[to[cur]])
22             low[x] = min(low[x], dfn[to[cur]]);
23     if (dfn[x] == low[x])
24     {
25         scccnt++;
26         do
27         {
28             top--;
29             scc[stk[top]] = scccnt;
30             instk[stk[top]] = false;
31         } while (stk[top] != x);
32     }
33 }
34 int main()
35 {
36     int n, m;
37     scanf("%d%d", &n, &m);
38     for (int i = 0, x, y; i < m; i++)
39     {
40         scanf("%d%d", &x, &y);
41         addEdge(x, y);
42     }
43     for (int i = 1; i <= n; i++)
44         if (!dfn[i])
45             tarjan(i);
46     for (int i = 1; i <= n; i++)
47         for (int cur = head[i]; cur; cur = next[cur])
48             if (scc[i] != scc[to[cur]])
49                 deg[scc[i]]++;
50     int zcnt = 0, id = 0;
51     for (int i = 1; i <= scccnt; i++)
52         if (deg[i] == 0)
53             zcnt++, id = i;
54     if (zcnt != 1)
55         putchar('0');
56     else
57     {
58         int ans = 0;
59         for (int i = 1; i <= n; i++)
60             if (scc[i] == id)
61                 ans++;
62         printf("%d", ans);
63     }
64     return 0;
65 }

```

POJ3180 - The Cow Prom The $N(2 \leq N \leq 10,000)$ cows are so excited.

The Cow Prom

```

1  #include <stdio>
2  inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
3  const int maxn = 100010;
4  int head[maxn], next[maxn << 1], to[maxn << 1], ecnt, n, m;
5  int dfn[maxn], scc[maxn], cnt[maxn], scccnt, stk[maxn], low[maxn], idx, top;
6  inline void addEdge(int f, int t)
7  {
8      ecnt++;
9      next[ecnt] = head[f];
10     head[f] = ecnt;
11     to[ecnt] = t;
12 }
13 void tarjan(int x)
14 {
15     dfn[x] = low[x] = ++idx;
16     stk[top++] = x;
17     for (int i = head[x]; i; i = next[i])
18         if (!dfn[to[i]])
19             tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
20         else if (!scc[to[i]])
21             low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
22     if (dfn[x] == low[x])
23     {
24         scccnt++;
25         do
26             scc[stk[--top]] = scccnt;
27         while (stk[top] != x);
28     }
29 }
30 int main()
31 {
32     scanf("%d%d", &n, &m);
33     for (int i = 0, x, y; i < m; i++)
34     {
35         scanf("%d%d", &x, &y);
36         addEdge(x, y);
37     }
38     for (int i = 1; i <= n; i++)
39         if (!dfn[i]) tarjan(i);
40     int ans = 0;
41     for (int i = 1; i <= n; i++) cnt[scc[i]]++;
42     for (int i = 1; i <= scccnt; i++)
43         if (cnt[i] > 1) ans++;
44     printf("%d", ans);
45     return 0;
46 }

```

POJ1236 - Network of Schools 强连通分量缩点求出度为 0 的和入度为 0 的分量个数

Network of Schools

```

1  #include <stdio>
2  inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
3  const int maxn = 110, maxm = 10100;
4  int head[maxn], next[maxm], to[maxm], ecnt, f[maxn], g[maxn];
5  inline void addEdge(int f, int t)
6  {
7      ecnt++;

```

```

8     next[ecnt] = head[f];
9     head[f] = ecnt;
10    to[ecnt] = t;
11 }
12 int dfn[maxn], low[maxn], stk[maxn], scc[maxn], scccnt, top, idx;
13 void tarjan(int x)
14 {
15     dfn[x] = low[x] = ++idx;
16     stk[top++] = x;
17     for (int i = head[x]; i; i = next[i])
18         if (!dfn[to[i]])
19             tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
20         else if (!scc[to[i]])
21             low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
22     if (dfn[x] == low[x])
23     {
24         scccnt++;
25         do
26             scc[stk[--top]] = scccnt;
27         while (stk[top] != x);
28     }
29 }
30 int main()
31 {
32     int n;
33     scanf("%d", &n);
34     for (int i = 1, x; i <= n; i++)
35         for (scanf("%d", &x); x; scanf("%d", &x))
36             addEdge(i, x);
37     for (int i = 1; i <= n; i++)
38         if (!dfn[i]) tarjan(i);
39     for (int i = 1; i <= n; i++)
40         for (int j = head[i]; j; j = next[j])
41             if (scc[i] != scc[to[j]])
42                 f[scc[i]]++, g[scc[to[j]]]++;
43     int ans1 = 0, ans2 = 0;
44     if (scccnt == 1)
45         printf("1\n0");
46     else
47     {
48         for (int i = 1; i <= scccnt; i++)
49             ans1 += f[i] == 0, ans2 += g[i] == 0;
50         printf("%d\n%d", ans2, ans1 > ans2 ? ans1 : ans2);
51     }
52     return 0;
53 }

```

1.2 图的割点、桥与双连通分量

定义

点连通度与边连通度 在一个无向连通图中，如果有一个顶点集合 V ，删除顶点集合 V ，以及与 V 中顶点相连（至少有一端在 V 中）的所有边后，原图不连通，就称这个点集 V 为**割点集合**。

一个图的**点连通度**的定义为：最小割点集合中的顶点数。

类似的，如果有一个边集合，删除这个边集合以后，原图不连通，就称这个点集为**割边集合**。

双连通图、割点与桥 如果一个无向连通图的点连通度大于 1，则称该图是点双连通的 (**point bi-connected**)，简称双连通或重连通。一个图有割点，当且仅当这个图的点连通度为 1，则割点集合的唯一元素被称为割点 (**cut point**)，又叫关节点 (**articulation point**)。一个图可能有多个割点。

如果一个无向连通图的边连通度大于 1，则称该图是边双连通的 (**edge biconnected**)，简称双连通或重连通。一个图有桥，当且仅当这个图的边连通度为 1，则割边集合的唯一元素被称为桥 (**bridge**)，又叫关节边 (**articulation edge**)。一个图可能有多个桥。

可以看出，点双连通与边双连通都可以简称为双连通，它们之间是有着某种联系的，下文中提到的双连通，均既可指点双连通，又可指边双连通。(但这并不意味着它们等价)

双连通分量 (分支)：在图 G 的所有子图 G' 中，如果 G' 是双连通的，则称 G' 为双连通子图。如果一个双连通子图 G' 它不是任何一个双连通子图的真子集，则 G' 为极大双连通子图。双连通分量 (**biconnected component**)，或重连通分量，就是图的极大双连通子图。特殊的，点双连通分量又叫做块。

Tarjan 算法 给出函数 $low(u)$ 使得

$low(u) = \min$

```
{
    dfn(u),
    low(v),    (u, v) 为树枝边 (父子边)
    dfn(v)    (u, v) 为后向边 (返祖边) 等价于  $dfn(v) < dfn(u)$  且  $v$  不为  $u$  的父亲结点
}
```

代码

tarjan - BCC

```
1 void tarjan(int u, int p)
2 {
3     dfn[u] = low[u] = ++idx;
4     for (int e = head[u]; e; e = next[e])
5         if (!dfn[to[e]])
6             tarjan(to[e], u), low[u] = min(low[u], low[to[e]]);
7         else if (to[e] != p)
8             low[u] = min(low[u], dfn[to[e]]);
9 }
```

练习题

POJ3177 - Redundant Paths 将一张有桥图通过加边变成边双连通图，至少要加 $\frac{leaf+1}{2}$ 条边。

Redundant Paths

```
1 #include <cstdio>
2 inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
3 int head[5010], to[20010], next[20010], ecnt, map[5010][5010];
4 int dfn[5010], low[5010], idx, cnt[5010];
5 void addEdge(int f, int t)
6 {
7     ecnt++;
8     next[ecnt] = head[f];
9     head[f] = ecnt;
```

```

10     to[ecnt] = t;
11 }
12 void tarjan(int u, int p)
13 {
14     dfn[u] = low[u] = ++idx;
15     for (int e = head[u]; e; e = next[e])
16         if (!dfn[to[e]])
17             tarjan(to[e], u), low[u] = min(low[u], low[to[e]]);
18         else if (to[e] != p)
19             low[u] = min(low[u], dfn[to[e]]);
20 }
21 int main()
22 {
23     int n, m;
24     scanf("%d%d", &n, &m);
25     for (int i = 1, x, y; i <= m; i++)
26     {
27         scanf("%d%d", &x, &y);
28         if (!map[x][y])
29         {
30             addEdge(x, y);
31             addEdge(y, x);
32             map[x][y] = map[y][x] = true;
33         }
34     }
35     tarjan(1, 0);
36     for (int i = 1; i <= n; i++)
37         for (int e = head[i]; e; e = next[e])
38             if (low[to[e]] != low[i])
39                 cnt[low[i]]++;
40     int ans = 0;
41     for (int i = 1; i <= n; i++)
42         ans += cnt[i] == 1;
43     printf("%d", (ans + 1) >> 1);
44     return 0;
45 }

```

POJ1523 - SPF 求割点与删除这个点之后有多少个连通分量

Redundant Paths

```

1  #include <cstdio>
2  #include <cctype>
3  #include <cstring>
4  #define clz(X) memset(X, 0, sizeof(X))
5  inline int max(int a, int b) { return a > b ? a : b; }
6  inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
7  inline void read(int &x)
8  {
9      int ch = x = 0;
10     while (!isdigit(ch = getchar()));
11     for (; isdigit(ch); ch = getchar())
12         x = x * 10 + ch - '0';
13 }
14 int map[1010][1010], range;
15 int dfn[1010], low[1010], idx;
16 int son, subnet[1010];
17 void tarjan(int u)
18 {
19     dfn[u] = low[u] = ++idx;
20     for (int v = 1; v <= range; v++)
21         if (map[u][v])

```



```

22         if (!dfn[v])
23         {
24             tarjan(v);
25             low[u] = min(low[u], low[v]);
26             if (low[v] >= dfn[u])
27                 (u == 1 ? son : subnet[u])++;
28         }
29         else
30             low[u] = min(low[u], dfn[v]);
31     }
32 int main()
33 {
34     int x, y, T = 0;
35     while (read(x), x)
36     {
37         clz(map), clz(dfn), clz(low), clz(subnet), son = idx = 0;
38         read(y);
39         map[x][y] = map[y][x] = 1;
40         range = max(x, y);
41         while (read(x), x)
42         {
43             read(y);
44             map[x][y] = map[y][x] = 1;
45             range = max(range, max(x, y));
46         }
47         printf("Network #%d\n", ++T);
48         tarjan(1);
49         bool flag = false;
50         if (son > 1) subnet[1] = son - 1;
51         for (int i = 1; i <= range; i++)
52             if (subnet[i])
53                 printf("  SPF node %d leaves %d subnets\n", i, subnet[i] + 1),
54                     flag = true;
55         if (!flag)
56             puts("  No SPF nodes");
57         putchar('\n');
58     }
59     return 0;
60 }

```

1.3 2-SAT

定义 给定一个布尔方程，判断是否存在一组布尔变量的取值方案，使得整个方程值为真的问题，被称为布尔方程的可满足性问题（SAT）。SAT 问题是 NP 完全的，但对于一些特殊形式的 SAT 问题我们可以有效求解。

我们将下面这种布尔方程称为合取范式：

$$(a \vee b \vee c \vee \dots) \wedge (d \vee e \vee f \vee \dots) \wedge \dots$$

其中 a, b, c, \dots 称为文字，它是一个布尔变量或其否定。像 $(a \vee b \vee c \vee \dots)$ 这样用 \vee 连接的部分称为子句。如果合取范式的每个子句中的文字个数都不超过两个，那么对应的 SAT 问题又称为 **2-SAT** 问题。

解法 对于给定的 **2-SAT** 问题，首先利用 \Rightarrow 将每个子句 $(a \vee b)$ 改写成等价形式 $(\neg a \Rightarrow b \wedge a \Rightarrow \neg b)$ 。这样原布尔公式就变成了把 $a \Rightarrow b$ 形式的布尔公式用 \wedge 连接起来的形式。

对每个布尔变量 x 构造两个顶点分别代表 x 与 $\neg x$ 。以 \Rightarrow 关系为边建立有向图。若在此图中 a 点能到达 b 点，就表示 a 为真时 b 也一定为真。因此该图中同一个强连通分量中所含的所有变量的布尔值

均相同。

若存在某个变量 x ，代表 x 与 $\neg x$ 的两个顶点在同一个强连通分量中，则原布尔表达式的值无法为真。反之若不存在这样的变量，那么我们将原图中所有的强连通分量缩为一个点，构出一个新图，新图显然是一个拓扑图，我们求出它的一个拓扑序。那么对于每个变量 x ，

x 所在的强连通分量（新图中的点）的拓扑序在 $\neg x$ 所在的强连通分量之后 $\Leftrightarrow x$ 为真

就是一组合适布尔变量赋值。注意到 Tarjan 算法所求的强连通分量就是按拓扑序的逆序得出的，因此不需要真的缩点建新图求拓扑序，直接利用强连通分量的编号来当做顺序即可。

练习题

POJ3648 - Wedding Additionally, there are several pairs of people conducting adulterous relationships (both different-sex and same-sex relationships are possible)

adulterous relationships

```

1  #include <stdio>
2  #include <cstring>
3  inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
4  const int maxn = 2010, maxm = 500010;
5  int head[maxn], next[maxm], to[maxm], ecnt;
6  inline void addEdge(int f, int t)
7  {
8      next[ecnt] = head[f];
9      head[f] = ecnt;
10     to[ecnt] = t;
11     ecnt++;
12 }
13 int dfn[maxn], low[maxn], stk[maxn], scc[maxn], top, idx, scccnt;
14 void tarjan(int x)
15 {
16     dfn[x] = low[x] = ++idx;
17     stk[top++] = x;
18     for (int i = head[x]; ~i; i = next[i])
19         if (!dfn[to[i]])
20             tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
21         else if (!scc[to[i]])
22             low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
23     if (dfn[x] == low[x])
24     {
25         scccnt++;
26         do
27             scc[stk[--top]] = scccnt;
28         while (stk[top] != x);
29     }
30 }
31 int main()
32 {
33     int m, n;
34     while (scanf("%d%d", &n, &m) && (m + n))
35     {
36         memset(head, -1, sizeof(head));
37         memset(dfn, 0, sizeof(dfn));
38         memset(low, 0, sizeof(low));
39         memset(scc, 0, sizeof(scc));
40         idx = top = ecnt = scccnt = 0;
41         int a1, a2;
42         char c1, c2;

```

```

43     for (int i = 0; i < m; i++)
44     {
45         scanf("%d%c %d%c", &a1, &c1, &a2, &c2);
46         a1 = a1 << 1 | (c1 == 'h'), a2 = a2 << 1 | (c2 == 'h');
47         addEdge(a1, a2 ^ 1), addEdge(a2, a1 ^ 1);
48     }
49     addEdge(0, 1);
50     for (int i = 0; i < (n << 1); i++)
51         if (!dfn[i]) tarjan(i);
52     bool flag = true;
53     for (int i = 0; i < n && flag; i++)
54         if (scc[i << 1] == scc[i << 1 | 1])
55             flag = false;
56     if (!flag)
57         puts("bad luck");
58     else if (n < 1)
59         putchar('\n');
60     else
61         for (int i = 1; i < n; i++)
62             printf("%d%c%c", i, (scc[i << 1] > scc[i << 1 | 1]) ? 'w' : 'h', " \n"[i == n - 1]);
63 }
64 return 0;
65 }

```

POJ3678 - Katu Puzzle 我什么时候做过这个题?

Katu Puzzle

```

1  #include <stdio>
2  #include <cstring>
3  inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
4  const int maxn = 10010, maxm = 4000010;
5  int head[maxn], next[maxm], to[maxm], ecnt;
6  inline void addEdge(int f, int t)
7  {
8      next[ecnt] = head[f];
9      head[f] = ecnt;
10     to[ecnt] = t;
11     ecnt++;
12 }
13 int dfn[maxn], low[maxn], stk[maxn], scc[maxn], top, idx, scccnt;
14 void tarjan(int x)
15 {
16     dfn[x] = low[x] = ++idx;
17     stk[top++] = x;
18     for (int i = head[x]; ~i; i = next[i])
19         if (!dfn[to[i]])
20             tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
21         else if (!scc[to[i]])
22             low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
23     if (dfn[x] == low[x])
24     {
25         scccnt++;
26         do
27             scc[stk[--top]] = scccnt;
28         while (stk[top] != x);
29     }
30 }
31 int main()
32 {
33     int n, m;
34     while (~scanf("%d%d", &n, &m))

```

```

35 {
36     memset(dfn, 0, sizeof(dfn));
37     memset(low, 0, sizeof(low));
38     memset(scc, 0, sizeof(scc));
39     memset(head, -1, sizeof(head));
40     ecnt = top = idx = scccnt = 0;
41     for (int i = 0, u, v, w; i < m; ++i)
42     {
43         char op[5];
44         scanf("%d%d%d%s", &u, &v, &w, op);
45         if (op[0] == 'A')
46             if (w)
47             {
48                 addEdge(u << 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1 | 1);
49                 addEdge(u << 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1 | 1);
50                 addEdge(u << 1 | 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1);
51             }
52             else
53             {
54                 addEdge(u << 1 | 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1);
55             }
56         if (op[0] == 'O')
57             if (w)
58             {
59                 addEdge(u << 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1 | 1);
60             }
61             else
62             {
63                 addEdge(u << 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1 | 1);
64                 addEdge(u << 1 | 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1);
65                 addEdge(u << 1 | 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1);
66             }
67         if (op[0] == 'X')
68             if (w)
69             {
70                 addEdge(u << 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1 | 1);
71                 addEdge(u << 1 | 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1);
72             }
73             else
74             {
75                 addEdge(u << 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1 | 1);
76                 addEdge(u << 1 | 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1);
77             }
78     }
79     for (int i = 0; i < (n << 1); i++)
80         if (!dfn[i]) tarjan(i);
81     bool flag = true;
82     for (int i = 0; i < n && flag; i++)
83         if (scc[i << 1] == scc[i << 1 | 1])
84             flag = false;
85     puts(flag ? "YES" : "NO");
86 }
87 return 0;
88 }

```

POJ2749 - Building roads 杀光奶牛问题就会得到解决

Building roads

```

1 #include <stdio>
2 #include <cstring>
3 inline int abs(int x) { return x >= 0 ? x : -x; }

```

```

4 inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
5 const int inf = 0x3f3f3f3f, maxn = 10010, maxm = 1200010;
6 int head[maxn], next[maxm], to[maxm], ecnt, n, A, B;
7 int dfn[maxn], low[maxn], stk[maxn], scc[maxn], top, idx, scccnt;
8 int sx1, sy1, sx2, sy2, sLen, X[maxn], Y[maxn], hate[maxn][2], like[maxn][2],
9 d[maxn];
10 inline void addEdge(int f, int t)
11 {
12     next[ecnt] = head[f];
13     head[f] = ecnt;
14     to[ecnt] = t;
15     ecnt++;
16 }
17 void tarjan(int x)
18 {
19     dfn[x] = low[x] = ++idx;
20     stk[top++] = x;
21     for (int i = head[x]; ~i; i = next[i])
22         if (!dfn[to[i]])
23             tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
24         else if (!scc[to[i]])
25             low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
26     if (dfn[x] == low[x])
27     {
28         scccnt++;
29         do
30             scc[stk[--top]] = scccnt;
31         while (stk[top] != x);
32     }
33 }
34 bool check(int x)
35 {
36     memset(dfn, 0, sizeof(dfn));
37     memset(low, 0, sizeof(low));
38     memset(scc, 0, sizeof(scc));
39     memset(head, -1, sizeof(head));
40     ecnt = top = idx = scccnt = 0;
41     for (int i = 1; i <= n; i++)
42         for (int j = i + 1; j <= n; j++)
43         {
44             int l1 = d[i << 1], l2 = d[i << 1 | 1];
45             int r1 = d[j << 1], r2 = d[j << 1 | 1];
46             if (l1 + r1 > x)
47                 addEdge(i << 1, j << 1 | 1), addEdge(j << 1, i << 1 | 1);
48             if (l1 + r2 + sLen > x)
49                 addEdge(i << 1, j << 1), addEdge(j << 1 | 1, i << 1 | 1);
50             if (l2 + r1 + sLen > x)
51                 addEdge(i << 1 | 1, j << 1 | 1), addEdge(j << 1, i << 1);
52             if (l2 + r2 > x)
53                 addEdge(i << 1 | 1, j << 1), addEdge(j << 1 | 1, i << 1);
54         }
55     for (int i = 1, a, b; i <= A; i++)
56     {
57         a = hate[i][0], b = hate[i][1];
58         addEdge(a << 1, b << 1 | 1);
59         addEdge(a << 1 | 1, b << 1);
60         addEdge(b << 1, a << 1 | 1);
61         addEdge(b << 1 | 1, a << 1);
62     }
63     for (int i = 1, a, b; i <= B; i++)
64     {
65         a = like[i][0], b = like[i][1];

```

```

66         addEdge(a << 1, b << 1);
67         addEdge(a << 1 | 1, b << 1 | 1);
68         addEdge(b << 1, a << 1);
69         addEdge(b << 1 | 1, a << 1 | 1);
70     }
71     for (int i = 1; i <= (n << 1); i++)
72         if (!dfn[i])
73             tarjan(i);
74     for (int i = 1; i <= n; i++)
75         if (scc[i << 1] == scc[i << 1 | 1])
76             return false;
77     return true;
78 }
79 int main()
80 {
81     scanf("%d%d%d%d%d%d", &n, &A, &B, &sx1, &sy1, &sx2, &sy2);
82     sLen = abs(sx1 - sx2) + abs(sy1 - sy2);
83     for (int i = 1; i <= n; i++)
84         scanf("%d", X + i, Y + i);
85     for (int i = 1; i <= n; i++)
86         d[i << 1] = abs(X[i] - sx1) + abs(Y[i] - sy1),
87         d[i << 1 | 1] = abs(X[i] - sx2) + abs(Y[i] - sy2);
88     for (int i = 1; i <= A; i++)
89         scanf("%d", &hate[i][0], &hate[i][1]);
90     for (int i = 1; i <= B; i++)
91         scanf("%d", &like[i][0], &like[i][1]);
92     int l = 0, r = 8000000, m, ans = -1;
93     while (l <= r)
94         check(m = (l + r) >> 1) ? r = (ans = m) - 1 : l = m + 1;
95     printf("%d\n", ans);
96     return 0;
97 }

```

1.4 欧拉回路

定义 设 $G = (V, E)$ 是一个图。

欧拉回路 图 G 中经过每条边一次并且仅一次的回路称作欧拉回路。

欧拉路径 图 G 中经过每条边一次并且仅一次的路径称作欧拉路径。

欧拉图 存在欧拉回路的图称为欧拉图。

半欧拉图 存在欧拉路径但不存在欧拉回路的图称为半欧拉图。

性质与定理 以下不加证明的给出一些定理 (因为我懒得抄讲义子)

定理 1 无向图 G 为欧拉图, 当且仅当 G 为连通图且所有顶点的度为偶数。

推论 1 无向图 G 为半欧拉图, 当且仅当 G 为连通图且除了两个顶点的度为奇数之外, 其它所有顶点的度为偶数。

定理 2 有向图 G 为欧拉图，当且仅当 G 的基图¹连通，且所有顶点的入度等于出度。

推论 2 有向图 G 为半欧拉图，当且仅当 G 的基图连通，且存在顶点 u 的入度比出度大 1、 v 的入度比出度小 1，其它所有顶点的入度等于出度。

解法 由此可以得到以下求欧拉图 G 的欧拉回路的算法：

1. 在图 G 中任意找一个回路 C 。
2. 将图 G 中属于回路 C 的边删除
3. 在残留图的各极大连通子图中分别寻找欧拉回路。
4. 将各极大连通子图的欧拉回路合并到 C 中得到图 G 的欧拉回路。

该算法的伪代码如下：

```
void dfs(u)
{
    for (edge e : edges[u])
        if (!flag[e])
        {
            flag[e] = true;
            flag[rev(e)] = true; //如果图 G 是有向图则删去本行
            dfs(e.to);
            S.push(v);
        }
}
```

最后依次取出栈 S 每一条边而得到图 G 的欧拉回路（也就是边出栈序的逆序）。由于该算法执行过程中每条边最多访问两次，因此该算法的时间复杂度为 $O(|E|)$ 。

练习题

UOJ117 - 欧拉回路 混合两个子任务使代码风格变得鬼畜起来。

Building roads

```
1 #include <cstdio>
2 #include <cctype>
3 inline void read(int &x)
4 {
5     int ch = x = 0;
6     while (!isdigit(ch = getchar()));
7     for (; isdigit(ch); ch = getchar()) x = x * 10 + ch - '0';
8 }
9 const int N = 100000 + 10, E = N << 2;
10 int adj[N], to[E], nxt[E], ecnt = 1;
11 int out[N], in[N], t, n, m;
12 bool flag[E];
13 int ans[E], tail;
14 inline void addEdge(int u, int v)
15 {
```

¹忽略有向图所有边的方向，得到的无向图称为该有向图的基图。

```

16     ecnt++;
17     nxt[ecnt] = adj[u];
18     adj[u] = ecnt;
19     to[ecnt] = v;
20 }
21 void dfs(int u)
22 {
23     for (int &i = adj[u]; i; i = nxt[i])
24     {
25         int c = t == 1 ? i >> 1 : i - 1;
26         bool sig = i & 1;
27         if (!flag[c])
28         {
29             flag[c] = true;
30             dfs(to[i]);
31             ans[tail++] = (t == 1 && sig) ? -c : c;
32         }
33     }
34 }
35 int main()
36 {
37     read(t), read(n), read(m);
38     for (int i = 0, u, v; i < m; i++)
39     {
40         read(u), read(v);
41         addEdge(u, v);
42         out[u]++, in[v]++;
43         if (t == 1) addEdge(v, u);
44     }
45     for (int i = 1; i <= n; i++)
46         if (t == 1 ? ((in[i] + out[i]) & 1) : (in[i] != out[i]))
47             return puts("NO"), 0;
48     for (int i = 1; i <= n; i++)
49         if (adj[i])
50         {
51             dfs(i);
52             break;
53         }
54     if (tail != m) return puts("NO"), 0;
55     puts("YES");
56     for (int i = m - 1; i >= 0; i--) printf("%d ", ans[i]);
57     return 0;
58 }

```