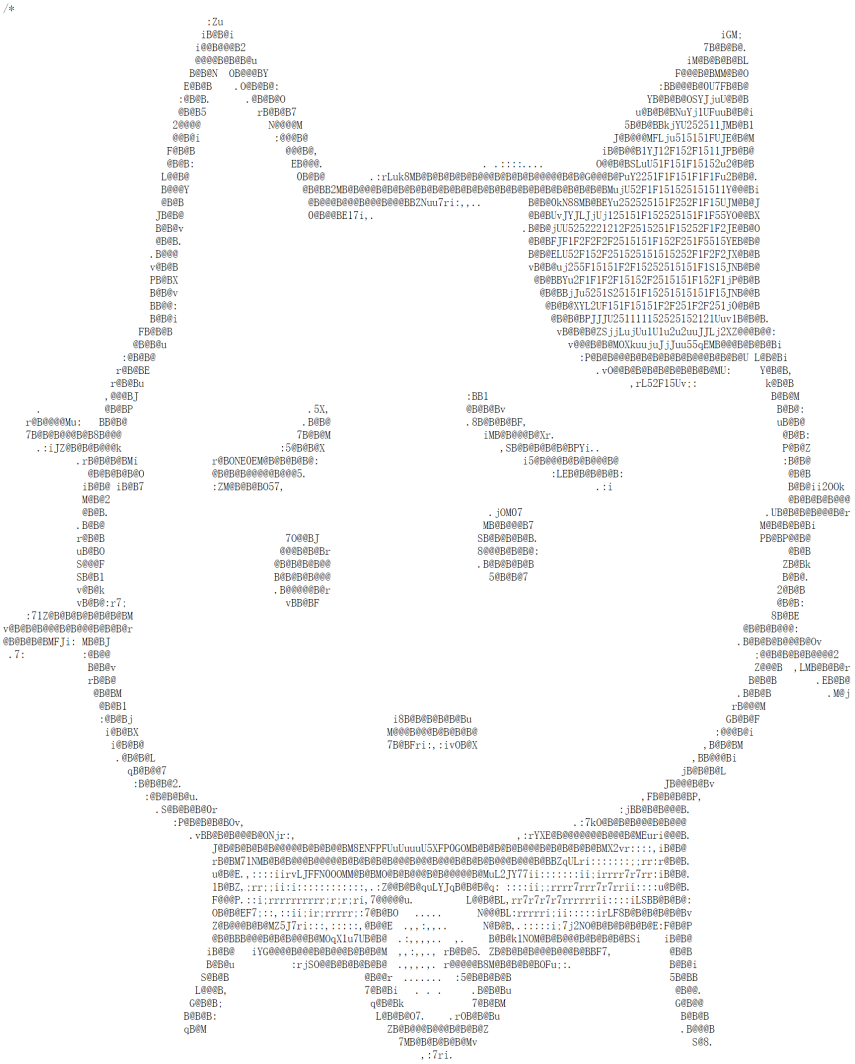
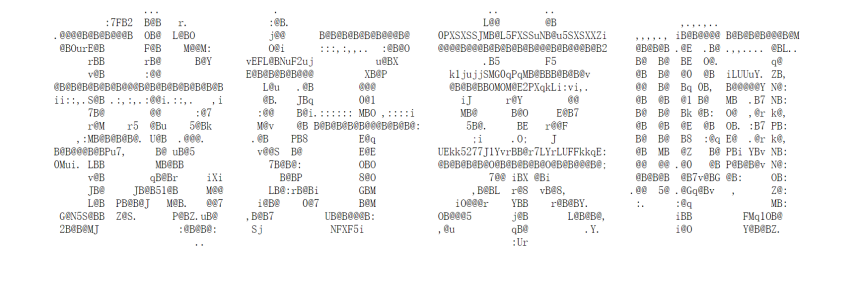
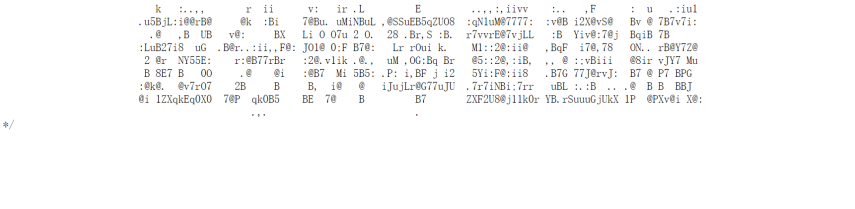
省选基础算法

雷宇辰

2017 年 3 月 8 日







目录

1 day1 图论

1.1 有向图强连通分量的 Tarjan 算法

定义 在**有向图** G 中，如果两个顶点 u,v 间存在一条路径 u 到 v 的路径且也存在一条 v 到 u 的路径，则称这两个顶点 u,v 是**强连通的 (strongly connected)**。如果有向图 G 的每两个顶点都强连通，称 G 是一个**强连通图**。有向非强连通图的极大强连通子图，称为**强连通分量 (strongly connected components)**。若将有向图中的强连通分量都缩为一个点，则原图会形成一个 DAG（有向无环图）。

极大强连通子图 G 是一个极大强连通子图当且仅当 G 是一个强连通子图且不存在另一个强连通子图 G' 使得 G 是 G' 的真子集。

Tarjan 算法 定义 $dfn(u)$ 为结点 u 搜索的次序编号，给出函数 $low(u)$ 使得

$low(u) = min$
{
$dfn(u)$,
$low(v)$, (u,v) 为树枝边，u 为 v 的父结点
$dfn(v)$ (u,v) 为后向边或指向栈中结点的横叉边
}

当结点 u 的搜索过程结束后，若 $dfn(u) = low(u)$，则以 u 为根的搜索子树上所有还在栈中的结点是一个强连通分量。

代码

tarjan - SCC

```
void tarjan(int u)
{
    dfn[u] = low[u] = ++idx;
    st[top++] = u;
    for (Edge cur : G[u])
        if (!dfn[cur.to])
            tarjan(cur.to),
            low[u] = min(low[u], low[cur.to]);
        else if (!scc[cur.to])
            low[u] = min(low[u], dfn[cur.to]);
    if (dfn[u] == low[u] && ++cnt)
        do scc[st[--top]] = cnt;
        while (st[top] != u);
}
```

练习题

POJ2186/BZOJ1051 - Popular Cows 双倍的快乐

Popular Cows

```
#include <cstdio>
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
```

```
int head[10010], next[50010], to[50010], ecnt;
int dfn[10010], low[10010], stk[10010], scc[10010], top, idx, scccnt;
bool instk[10010];
int deg[10010];
inline void addEdge(int f, int t)
{
    ecnt++;
    next[ecnt] = head[f];
    head[f] = ecnt;
    to[ecnt] = t;
}
void tarjan(int x)
{
    dfn[x] = low[x] = ++idx;
    instk[stk[top++] = x] = true;
    for (int cur = head[x]; cur; cur = next[cur])
        if (!dfn[to[cur]])
            tarjan(to[cur]), low[x] = min(low[x], low[to[cur]]);
        else if (instk[to[cur]])
            low[x] = min(low[x], dfn[to[cur]]);
    if (dfn[x] == low[x])
    {
        scccnt++;
        do
        {
            top--;
            scc[stk[top]] = scccnt;
            instk[stk[top]] = false;
        } while (stk[top] != x);
    }
}
int main()
{
    int n, m;
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 0, x, y; i < m; i++)
    {
        scanf("%d%d", &x, &y);
        addEdge(x, y);
    }
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        if (!dfn[i])
            tarjan(i);
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        for (int cur = head[i]; cur; cur = next[cur])
            if (scc[i] != scc[to[cur]])
                deg[scc[i]]++;
    int zcnt = 0, id = 0;
    for (int i = 1; i <= scccnt; i++)
        if (deg[i] == 0)
            zcnt++, id = i;
    if (zcnt != 1)
```

```
        putchar('0');
    else
    {
        int ans = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i++)
            if (scc[i] == id)
                ans++;
        printf("%d", ans);
    }
    return 0;
}
```

POJ3180 - The Cow Prom The $N(2 <= N <= 10,000)$ cows are so excited.

The Cow Prom

```
#include <cstdio>
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
const int maxn = 100010;
int head[maxn], next[maxn << 1], to[maxn << 1], ecnt, n, m;
int dfn[maxn], scc[maxn], cnt[maxn], scccnt, stk[maxn], low[maxn], idx, top;
inline void addEdge(int f, int t)
{
    ecnt++;
    next[ecnt] = head[f];
    head[f] = ecnt;
    to[ecnt] = t;
}
void tarjan(int x)
{
    dfn[x] = low[x] = ++idx;
    stk[top++] = x;
    for (int i = head[x]; i; i = next[i])
        if (!dfn[to[i]])
            tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
        else if (!scc[to[i]])
            low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
    if (dfn[x] == low[x])
    {
        scccnt++;
        do
            scc[stk[--top]] = scccnt;
        while (stk[top] != x);
    }
}
int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 0, x, y; i < m; i++)
    {
        scanf("%d%d", &x, &y);
        addEdge(x, y);
```

```
    }
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        if (!dfn[i]) tarjan(i);
    int ans = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) cnt[scc[i]]++;
    for (int i = 1; i <= scccnt; i++)
        if (cnt[i] > 1) ans++;
    printf("%d", ans);
    return 0;
}
```

POJ1236 - Network of Schools 强连通分量缩点求出度为 0 的和入度为 0 的分量个数

Network of Schools

```
#include <cstdio>
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
const int maxn = 110, maxm = 10100;
int head[maxn], next[maxm], to[maxm], ecnt, f[maxn], g[maxn];
inline void addEdge(int f, int t)
{
    ecnt++;
    next[ecnt] = head[f];
    head[f] = ecnt;
    to[ecnt] = t;
}
int dfn[maxn], low[maxn], stk[maxn], scc[maxn], scccnt, top, idx;
void tarjan(int x)
{
    dfn[x] = low[x] = ++idx;
    stk[top++] = x;
    for (int i = head[x]; i; i = next[i])
        if (!dfn[to[i]])
            tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
        else if (!scc[to[i]])
            low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
    if (dfn[x] == low[x])
    {
        scccnt++;
        do
            scc[stk[--top]] = scccnt;
        while (stk[top] != x);
    }
}
int main()
{
    int n;
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1, x; i <= n; i++)
        for (scanf("%d", &x); x; scanf("%d", &x))
            addEdge(i, x);
    for (int i = 1; i <= n; i++)
```

```
        if (!dfn[i]) tarjan(i);
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        for (int j = head[i]; j; j = next[j])
            if (scc[i] != scc[to[j]])
                f[scc[i]]++, g[scc[to[j]]]++;
    int ans1 = 0, ans2 = 0;
    if (scccnt == 1)
        printf("1\n0");
    else
    {
        for (int i = 1; i <= scccnt; i++)
            ans1 += f[i] == 0, ans2 += g[i] == 0;
        printf("%d\n%d", ans2, ans1 > ans2 ? ans1 : ans2);
    }
    return 0;
}
```

1.2 图的割点、桥与双连通分量

定义

点连通度与边连通度 在一个**无向连通图**中，如果有一个顶点集合 V，删除顶点集合 V，以及与 V 中顶点相连（至少有一端在 V 中）的所有边后，原图**不连通**，就称这个点集 V 为**割点集合**。
一个图的**点连通度**的定义为：最小割点集合中的顶点数。
类似的，如果有一个边集合，删除这个边集合以后，原图不连通，就称这个点集为**割边集合**。

双连通图、割点与桥 如果一个无向连通图的**点连通度大于** 1，则称该图是**点双连通的 (point biconnected)**，简称双连通或重连通。一个图有**割点**，当且仅当这个图的点连通度为 1，则割点集合的唯一元素被称为**割点 (cut point)**，又叫关节点 (articulation point)。一个图可能有多个割点。
如果一个无向连通图的**边连通度大于** 1，则称该图是**边双连通的 (edge biconnected)**，简称双连通或重连通。一个图有**桥**，当且仅当这个图的边连通度为 1，则割边集合的唯一元素被称为**桥 (bridge)**，又叫关节边 (articulation edge)。一个图可能有多个桥。
可以看出，点双连通与边双连通都可以简称为双连通，它们之间是有着某种联系的，下文中提到的双连通，均既可指点双连通，又可指边双连通。（但这并不意味着它们等价）
双连通分量（分支）：在图 G 的所有子图 G' 中，如果 G' 是双连通的，则称 G' 为双连通子图。如果一个双连通子图 G' 它不是任何一个双连通子图的真子集，则 G' 为极大双连通子图。双连通分量 (biconnected component)，或重连通分量，就是图的极大双连通子图。特殊的，点双连通分量又叫做块。

Tarjan 算法 给出函数 $low(u)$ 使得
$low(u) = min$
{
$dfn(u)$,
$low(v)$, (u, v) 为树枝边 (父子边)
$dfn(v)$ (u, v) 为后向边 (返祖边) 等价于 $dfn(v) < dfn(u)$ 且 v 不为 u 的父亲结点
}

代码

tarjan - BCC

```
void tarjan(int u, int p)
{
    dfn[u] = low[u] = ++idx;
    for (int e = head[u]; e; e = next[e])
        if (!dfn[to[e]])
            tarjan(to[e], u), low[u] = min(low[u], low[to[e]]);
        else if (to[e] != p)
            low[u] = min(low[u], dfn[to[e]]);
}
```

练习题

POJ3177 - Redundant Paths 将一张有桥图通过加边变成边双连通图，至少要加 $\frac{leaf+1}{2}$ 条边。

Redundant Paths

```
#include <cstdio>
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
int head[5010], to[20010], next[20010], ecnt, map[5010][5010];
int dfn[5010], low[5010], idx, cnt[5010];
void addEdge(int f, int t)
{
    ecnt++;
    next[ecnt] = head[f];
    head[f] = ecnt;
    to[ecnt] = t;
}
void tarjan(int u, int p)
{
    dfn[u] = low[u] = ++idx;
    for (int e = head[u]; e; e = next[e])
        if (!dfn[to[e]])
            tarjan(to[e], u), low[u] = min(low[u], low[to[e]]);
        else if (to[e] != p)
            low[u] = min(low[u], dfn[to[e]]);
}
int main()
{
    int n, m;
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 1, x, y; i <= m; i++)
    {
        scanf("%d%d", &x, &y);
        if (!map[x][y])
        {
            addEdge(x, y);
            addEdge(y, x);
            map[x][y] = map[y][x] = true;
```

```
        }
    }
    tarjan(1, 0);
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        for (int e = head[i]; e; e = next[e])
            if (low[to[e]] != low[i])
                cnt[low[i]]++;
    int ans = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        ans += cnt[i] == 1;
    printf("%d", (ans + 1) >> 1);
    return 0;
}
```

POJ1523 - SPF 求割点与删除这个点之后有多少个连通分量

Redundant Paths

```
#include <cstdio>
#include <cctype>
#include <cstring>
#define clz(X) memset(X, 0, sizeof(X))
inline int max(int a, int b) { return a > b ? a : b; }
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
inline void read(int &x)
{
    int ch = x = 0;
    while (!isdigit(ch = getchar()));
    for (; isdigit(ch); ch = getchar())
        x = x * 10 + ch - '0';
}
int map[1010][1010], range;
int dfn[1010], low[1010], idx;
int son, subnet[1010];
void tarjan(int u)
{
    dfn[u] = low[u] = ++idx;
    for (int v = 1; v <= range; v++)
        if (map[u][v])
            if (!dfn[v])
            {
                tarjan(v);
                low[u] = min(low[u], low[v]);
                if (low[v] >= dfn[u])
                    (u == 1 ? son : subnet[u])++;
            }
            else
                low[u] = min(low[u], dfn[v]);
}
int main()
{
    int x, y, T = 0;
```

```
    while (read(x), x)
    {
        clz(map), clz(dfn), clz(low), clz(subnet), son = idx = 0;
        read(y);
        map[x][y] = map[y][x] = 1;
        range = max(x, y);
        while (read(x), x)
        {
            read(y);
            map[x][y] = map[y][x] = 1;
            range = max(range, max(x, y));
        }
        printf("Network #%d\n", ++T);
        tarjan(1);
        bool flag = false;
        if (son > 1) subnet[1] = son - 1;
        for (int i = 1; i <= range; i++)
            if (subnet[i])
                printf("  SPF node %d leaves %d subnets\n", i, subnet[i] + 1),
                flag = true;
        if (!flag)
            puts("  No SPF nodes");
        putchar('\n');
    }
    return 0;
}
```

POJ2942 - Knights of the Round Table 这题过于复杂，我来先给个别人的题解。然后是我自己的实现（仿佛还是没看懂。
//实现被狗吃了

1.3 2-SAT

定义 给定一个布尔方程，判断是否存在一组布尔变量的取值方案，使得整个方程值为真的问题，被称为布尔方程的可满足性问题 (SAT)。SAT 问题是 NP 完全的，但对于一些特殊形式的 SAT 问题我们可以有效求解。
我们将下面这种布尔方程称为合取范式：

$$(a \vee b \vee c \vee \cdots) \wedge (d \vee e \vee f \vee \cdots) \wedge \cdots$$

其中 $a, b, c, \cdots$ 称为文字，它是一个布尔变量或其否定。像 $(a \vee b \vee c \vee \cdots)$ 这样用 $\vee$ 连接的部分称为子句。如果合取范式的每个子句中的文字个数都不超过两个，那么对应的 SAT 问题又称为 **2-SAT** 问题。

解法 对于给定的 **2-SAT** 问题，首先利用 $\Rightarrow$ 将每个子句 $(a \vee b)$ 改写成等价形式 $(\neg a \Rightarrow b \wedge a \Rightarrow \neg b)$. 这样原布尔公式就变成了把 $a \Rightarrow b$ 形式的布尔公式用 $\wedge$ 连接起来的形式。
对每个布尔变量 x 构造两个顶点分别代表 x 与 $\neg x$。以 $\Rightarrow$ 关系为边建立有向图。若在此图中 a 点能到达 b 点，就表示 a 为真时 b 也一定为真。因此该图中同一个强连通分量中所含的所有变量的布尔值均相同。
若存在某个变量 x, 代表 x 与 $\neg x$ 的两个顶点在同一个强连通分量中，则原布尔表达式的值无法为真。
反之若不存在这样的变量，那么我们先将原图中所有的强连通分量缩为一个点，构出一个新图，新图显然

是一个拓扑图，我们求出它的一个拓扑序。那么对于每个变量 x，

$$x\text{所在的强连通分量（新图中的点）的拓扑序在}\neg x\text{所在的强连通分量之后} \Leftrightarrow x\text{为真}$$

就是一组合适布尔变量赋值。注意到 Tarjan 算法所求的强连通分量就是按拓扑序的逆序得出的，因此不需要真的缩点建新图求拓扑序，直接利用强连通分量的编号来当做顺序即可。

练习题

POJ3648 - Wedding Additionally, there are several pairs of people conducting adulterous relationships (both different-sex and same-sex relationships are possible)

adulterous relationships

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
const int maxn = 2010, maxm = 500010;
int head[maxn], next[maxm], to[maxm], ecnt;
inline void addEdge(int f, int t)
{
    next[ecnt] = head[f];
    head[f] = ecnt;
    to[ecnt] = t;
    ecnt++;
}
int dfn[maxn], low[maxn], stk[maxn], scc[maxn], top, idx, scccnt;
void tarjan(int x)
{
    dfn[x] = low[x] = ++idx;
    stk[top++] = x;
    for (int i = head[x]; ~i; i = next[i])
        if (!dfn[to[i]])
            tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
        else if (!scc[to[i]])
            low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
    if (dfn[x] == low[x])
    {
        scccnt++;
        do
            scc[stk[--top]] = scccnt;
        while (stk[top] != x);
    }
}
int main()
{
    int m, n;
    while (scanf("%d%d", &n, &m) && (m + n))
    {
        memset(head, -1, sizeof(head));
        memset(dfn, 0, sizeof(dfn));
        memset(low, 0, sizeof(low));
        memset(scc, 0, sizeof(scc));
```

```
        idx = top = ecnt = scccnt = 0;
        int a1, a2;
        char c1, c2;
        for (int i = 0; i < m; i++)
        {
            scanf("%d%c %d%c", &a1, &c1, &a2, &c2);
            a1 = a1 << 1 | (c1 == 'h'), a2 = a2 << 1 | (c2 == 'h');
            addEdge(a1, a2 ^ 1), addEdge(a2, a1 ^ 1);
        }
        addEdge(0, 1);
        for (int i = 0; i < (n << 1); i++)
            if (!dfn[i]) tarjan(i);
        bool flag = true;
        for (int i = 0; i < n && flag; i++)
            if (scc[i << 1] == scc[i << 1 | 1])
                flag = false;
        if (!flag)
            puts("bad luck");
        else if (n < 1)
            putchar('\n');
        else
            for (int i = 1; i < n; i++)
                printf("%d%c%c", i, (scc[i << 1] > scc[i << 1 | 1]) ? 'w' : 'h', " \n"[i
                    == n - 1]);
    }
    return 0;
}
```

POJ3678 - Katu Puzzle 我什么时候做过这个题？

Katu Puzzle

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
const int maxn = 10010, maxm = 4000010;
int head[maxn], next[maxm], to[maxm], ecnt;
inline void addEdge(int f, int t)
{
    next[ecnt] = head[f];
    head[f] = ecnt;
    to[ecnt] = t;
    ecnt++;
}
int dfn[maxn], low[maxn], stk[maxn], scc[maxn], top, idx, scccnt;
void tarjan(int x)
{
    dfn[x] = low[x] = ++idx;
    stk[top++] = x;
    for (int i = head[x]; ~i; i = next[i])
        if (!dfn[to[i]])
            tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
```

```
        else if (!scc[to[i]])
            low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
    if (dfn[x] == low[x])
    {
        scccnt++;
        do
            scc[stk[--top]] = scccnt;
        while (stk[top] != x);
    }
}
int main()
{
    int n, m;
    while (~scanf("%d%d", &n, &m))
    {
        memset(dfn, 0, sizeof(dfn));
        memset(low, 0, sizeof(low));
        memset(scc, 0, sizeof(scc));
        memset(head, -1, sizeof(head));
        ecnt = top = idx = scccnt = 0;
        for (int i = 0, u, v, w; i < m; ++i)
        {
            char op[5];
            scanf("%d%d%d%s", &u, &v, &w, op);
            if (op[0] == 'A')
                if (w)
                {
                    addEdge(u << 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1 | 1);
                    addEdge(u << 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1 | 1);
                    addEdge(u << 1 | 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1);
                }
                else
                {
                    addEdge(u << 1 | 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1);
                }
            if (op[0] == 'O')
                if (w)
                {
                    addEdge(u << 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1 | 1);
                }
                else
                {
                    addEdge(u << 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1 | 1);
                    addEdge(u << 1 | 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1);
                    addEdge(u << 1 | 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1);
                }
            if (op[0] == 'X')
                if (w)
                {
                    addEdge(u << 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1 | 1);
                    addEdge(u << 1 | 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1);
                }
```

```
                else
                {
                    addEdge(u << 1, v << 1), addEdge(v << 1 | 1, u << 1 | 1);
                    addEdge(u << 1 | 1, v << 1 | 1), addEdge(v << 1, u << 1);
                }
        }
        for (int i = 0; i < (n << 1); i++)
            if (!dfn[i]) tarjan(i);
        bool flag = true;
        for (int i = 0; i < n && flag; i++)
            if (scc[i << 1] == scc[i << 1 | 1])
                flag = false;
        puts(flag ? "YES" : "NO");
    }
    return 0;
}
```

POJ2749 - Building roads 杀光奶牛问题就会得到解决

Building roads

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
inline int abs(int x) { return x >= 0 ? x : -x; }
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
const int inf = 0x3f3f3f3f, maxn = 10010, maxm = 1200010;
int head[maxn], next[maxm], to[maxm], ecnt, n, A, B;
int dfn[maxn], low[maxn], stk[maxn], scc[maxn], top, idx, scccnt;
int sx1, sy1, sx2, sy2, sLen, X[maxn], Y[maxn], hate[maxn][2], like[maxn][2],
d[maxn];
inline void addEdge(int f, int t)
{
    next[ecnt] = head[f];
    head[f] = ecnt;
    to[ecnt] = t;
    ecnt++;
}
void tarjan(int x)
{
    dfn[x] = low[x] = ++idx;
    stk[top++] = x;
    for (int i = head[x]; ~i; i = next[i])
        if (!dfn[to[i]])
            tarjan(to[i]), low[x] = min(low[x], low[to[i]]);
        else if (!scc[to[i]])
            low[x] = min(low[x], dfn[to[i]]);
    if (dfn[x] == low[x])
    {
        scccnt++;
        do
            scc[stk[--top]] = scccnt;
        while (stk[top] != x);
```

```
    }
}
bool check(int x)
{
    memset(dfn, 0, sizeof(dfn));
    memset(low, 0, sizeof(low));
    memset(scc, 0, sizeof(scc));
    memset(head, -1, sizeof(head));
    ecnt = top = idx = scccnt = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        for (int j = i + 1; j <= n; j++)
        {
            int l1 = d[i << 1], l2 = d[i << 1 | 1];
            int r1 = d[j << 1], r2 = d[j << 1 | 1];
            if (l1 + r1 > x)
                addEdge(i << 1, j << 1 | 1), addEdge(j << 1, i << 1 | 1);
            if (l1 + r2 + sLen > x)
                addEdge(i << 1, j << 1), addEdge(j << 1 | 1, i << 1 | 1);
            if (l2 + r1 + sLen > x)
                addEdge(i << 1 | 1, j << 1 | 1), addEdge(j << 1, i << 1);
            if (l2 + r2 > x)
                addEdge(i << 1 | 1, j << 1), addEdge(j << 1 | 1, i << 1);
        }
    for (int i = 1, a, b; i <= A; i++)
    {
        a = hate[i][0], b = hate[i][1];
        addEdge(a << 1, b << 1 | 1);
        addEdge(a << 1 | 1, b << 1);
        addEdge(b << 1, a << 1 | 1);
        addEdge(b << 1 | 1, a << 1);
    }
    for (int i = 1, a, b; i <= B; i++)
    {
        a = like[i][0], b = like[i][1];
        addEdge(a << 1, b << 1);
        addEdge(a << 1 | 1, b << 1 | 1);
        addEdge(b << 1, a << 1);
        addEdge(b << 1 | 1, a << 1 | 1);
    }
    for (int i = 1; i <= (n << 1); i++)
        if (!dfn[i])
            tarjan(i);
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        if (scc[i << 1] == scc[i << 1 | 1])
            return false;
    return true;
}
int main()
{
    scanf("%d%d%d%d%d%d%d", &n, &A, &B, &sx1, &sy1, &sx2, &sy2);
    sLen = abs(sx1 - sx2) + abs(sy1 - sy2);
    for (int i = 1; i <= n; i++)
```

```
        scanf("%d%d", X + i, Y + i);
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        d[i << 1] = abs(X[i] − sx1) + abs(Y[i] − sy1),
        d[i << 1 | 1] = abs(X[i] − sx2) + abs(Y[i] − sy2);
    for (int i = 1; i <= A; i++)
        scanf("%d%d", &hate[i][0], &hate[i][1]);
    for (int i = 1; i <= B; i++)
        scanf("%d%d", &like[i][0], &like[i][1]);
    int l = 0, r = 8000000, m, ans = −1;
    while (l <= r)
        check(m = (l + r) >> 1) ? r = (ans = m) − 1 : l = m + 1;
    printf("%d\n", ans);
    return 0;
}
```

1.4 欧拉回路

定义 设 $G = (V, E)$ 是一个图。

欧拉回路 图 G 中经过**每条边一次**并且**仅一次**的回路称作欧拉回路。

欧拉路径 图 G 中经过**每条边一次**并且**仅一次**的路径称作欧拉路径。

欧拉图 存在**欧拉回路**的图称为欧拉图。

半欧拉图 存在欧拉路径但不存在欧拉回路的图称为半欧拉图。

性质与定理 以下不加证明的给出一些定理 ~~（因为我懒得抄讲义子~~

定理 1 无向图 G 为欧拉图，当且仅当 G 为连通图且所有顶点的度为偶数。

推论 1 无向图 G 为半欧拉图，当且仅当 G 为连通图且除了两个顶点的度为奇数之外，其它所有顶点的度为偶数。

定理 2 有向图 G 为欧拉图，当且仅当 G 的基图[1]连通，且所有顶点的入度等于出度。

推论 2 有向图 G 为半欧拉图，当且仅当 G 的基图连通，且存在顶点 u 的入度比出度大 1、v 的入度比出度小 1，其它所有顶点的入度等于出度。

解法 由此可以得到以下求欧拉图 G 的欧拉回路的算法：

1. 在图 G 中任意找一个回路 C。
2. 将图 G 中属于回路 C 的边删除
3. 在残留图的各极大连通子图中分别寻找欧拉回路。
4. 将各极大连通子图的欧拉回路合并到 C 中得到图 G 的欧拉回路。

[1] 忽略有向图所有边的方向，得到的无向图称为该有向图的基图。

该算法的伪代码如下：

```
void dfs(u)
{
    for (edge e : edges[u])
        if (!flag[e])
        {
            flag[e] = true;
            flag[rev(e)] = true; //如果图 G 是有向图则删去本行
            dfs(e.to);
            S.push(v);
        }
}
```

最后依次取出栈 S 每一条边而得到图 G 的欧拉回路 (也就是边出栈序的逆序)。由于该算法执行过程中每条边最多访问两次，因此该算法的时间复杂度为 $O(|E|)$。

练习题

UOJ117 - 欧拉回路 混合两个子任务使代码风格变得鬼畜起来。

Building roads

```
#include <cstdio>
#include <cctype>
inline void read(int &x)
{
    int ch = x = 0;
    while (!isdigit(ch = getchar()));
    for (; isdigit(ch); ch = getchar()) x = x * 10 + ch - '0';
}
const int N = 100000 + 10, E = N << 2;
int adj[N], to[E], nxt[E], ecnt = 1;
int out[N], in[N], t, n, m;
bool flag[E];
int ans[E], tail;
inline void addEdge(int u, int v)
{
    ecnt++;
    nxt[ecnt] = adj[u];
    adj[u] = ecnt;
    to[ecnt] = v;
}
void dfs(int u)
{
    for (int &i = adj[u]; i; i = nxt[i])
    {
        int c = t == 1 ? i >> 1 : i - 1;
        bool sig = i & 1;
        if (!flag[c])
        {
```

```
            flag[c] = true;
            dfs(to[i]);
            ans[tail++] = (t == 1 && sig) ? -c : c;
        }
    }
}
int main()
{
    read(t), read(n), read(m);
    for (int i = 0, u, v; i < m; i++)
    {
        read(u), read(v);
        addEdge(u, v);
        out[u]++, in[v]++;
        if (t == 1) addEdge(v, u);
    }
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        if (t == 1 ? ((in[i] + out[i]) & 1) : (in[i] != out[i]))
            return puts("NO"), 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        if (adj[i])
        {
            dfs(i);
            break;
        }
    if (tail != m) return puts("NO"), 0;
    puts("YES");
    for (int i = m - 1; i >= 0; i--) printf("%d ", ans[i]);
    return 0;
}
```

2 day2 字符串（一）

2.1 KMP

算法介绍 用来在线性时间内匹配字符串

算法流程 我觉得鑝鑝鑝在 WC 上讲的比较清楚，于是我开始抄讲义。

字符串： $s[1\dots n], |s| = n$。

子串： $s[i\dots j] = s[i]s[i+1]\cdots[j]$。

前缀： $pre(s,x) = s[1\dots x]$, 后缀：$suf(s,x) = s[n-x+1\dots n]$

若 $0 \le r \le |s|, pre(s,r) = suf(s,r)$, 就称 $pre(s,r)$ 是 s 的 **border**。

KMP 算法的第一步主要做这么一件事：在 $O(n)$ 时间求出数组 $next[1\dots n]$, 其中 $next[i]$ 表示前缀 $s[1\dots i]$ 的最大 border 长度。于是可以知道 s 的所有 border 长度为 $next[n], next[next[n]], \cdots$，我想这是显然的，于是不加证明的在这里给出。

第二步就是匹配，如果失配了就把模式串的当前位置指针 i 跳到 $next[i]$ 处然后继续匹配，然后就好了。

算法实现

genNext

```
for (int i = 1, j = -1; i < len; i++)
{
    while (~j && str[j + 1] != str[i]) j = next[j];
    if (str[j + 1] == str[i]) j++;
    next[i] = j;
}
```

Find

```
for (int i = 0, j = -1; i < len; i++)
{
    while (~j && t[j + 1] != s[i]) j = next[j];
    if (t[j + 1] == s[i]) j++;
    if (j == len - 1) ans++, j = next[j];
}
```

练习题

POJ3461 - Oulipo 求出所有匹配位置

Oulipo

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
char a[1 << 20 | 1], b[1 << 14 | 1];
int la, lb;
int next[1 << 14 | 1];
int main()
{
    next[0] = -1;
    int n;
    scanf("%d", &n);
    while (n--)
    {
        scanf("%s%s", b, a);
        la = strlen(a), lb = strlen(b);
        for (int i = 1, j = -1; i < lb; i++)
        {
            while (~j && b[j + 1] != b[i]) j = next[j];
            if (b[j + 1] == b[i]) j++;
            next[i] = j;
        }
        int ans = 0;
        for (int i = 0, j = -1; i < la; i++)
        {
            while (~j && b[j + 1] != a[i]) j = next[j];
            if (b[j + 1] == a[i]) j++;
            if (j == lb - 1) ans++, j = next[j];
        }
        printf("%d\n", ans);
    }
```

```
    return 0;
}
```

POJ2406 - Power Strings $next$ 数组的奇妙性质

Power Strings

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
char str[1 << 20 | 1];
int next[1 << 20 | 1];
int len;
int main()
{
    next[0] = -1;
    while (scanf("%s", str))
    {
        if (str[0] == '.') break;
        len = strlen(str);
        for (int i = 0, j = -1; i < len;)
            (~j && str[i] != str[j]) ? j = next[j] : next[++i] = ++j;
        printf("%d\n", len % (len - next[len]) == 0 ? len / (len - next[len]) : 1);
    }
    return 0;
}
```

CF526D - Om Nom and Necklace 啥？

Om Nom and Necklace

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
char s[1000010];
int next[1000010], n, k, len;
int main()
{
    scanf("%d%d%s", &n, &k, s);
    next[0] = -1;
    len = strlen(s);
    for (int i = 1; i < len; ++i)
    {
        int j;
        for (j = next[i - 1]; j != -1 && s[j + 1] != s[i]; j = next[j]);
        if (s[j + 1] == s[i]) j++;
        next[i] = j;
    }
    for (int i = 0; i < len; ++i)
    {
        int p = i + 1, q = p / (i - next[i]);
        putchar(((p % (i - next[i]) == 0) ? (q / k >= q % k ? '1' : '0') : (q / k > q % k
            ? '1' : '0')) );
    }
    return 0;
```

```
}
```

讲道理我 KMP 真的学的不是很明白，望各位 dalao 给予指导。

2.2 Trie

简介 字典树，也称 Trie、字母树，指的是某个字符串集合对应的形如下图的有根树。树的每条边上对应有恰好一个字符，每个顶点代表从根到该节点的路径所对应的字符串（将所有经过的边上的字符按顺序连接起来）。

实现 水

Trie - impl

```
struct node
{
    node *trans[26];
    int cnt;
};
void insert(node *n, char *str)
{
    for (; *str; n = n->trans[*str - '0'])
        if (n->trans[*str - '0'] == 0)
            n->trans[*str - '0'] = new_node();
    n->cnt++;
}
```

练习题

POJ3630 - Phone List 若插入过程中，有某个经过的节点带有串结尾标记，则之前插入的某个串是当前串的前缀。

Oulipo

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
struct node
{
    node *trans[10];
    bool is_end;
} nodes[100010];
node *root;
int cnt;
node *new_node() { return &nodes[cnt++]; }
char buf[11];
bool try_insert(node *n, char *str)
{
    if (n->is_end) return false;
    if (*str == '\0')
    {
        for (int i = 0; i < 10; i++)
            if (n->trans[i])
                return false;
```

```
        n->is_end = true;
        return true;
    }
    if (n->trans[*str - '0'] == 0) n->trans[*str - '0'] = new_node();
    return try_insert(n->trans[*str - '0'], str + 1);
}
int main()
{
    int t, n;
    scanf("%d", &t);
    while (t--)
    {
        memset(nodes, 0, sizeof(nodes));
        cnt = 0;
        root = new_node();
        scanf("%d", &n);
        bool flag = true;
        while (n--)
        {
            scanf("%s", buf);
            if (flag) flag = try_insert(root, buf);
        }
        puts(flag ? "YES" : "NO");
    }
    return 0;
}
```

POJ2945 - Find the Clones n 个基因片段，每个长度为 m，输出 n 行表示重复出现 i 次 $(1 \le i \le n)$ 的基因片段的个数

Find the Clones

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
struct node
{
    node *trans[4];
    int cnt;
} nodes[400010];
int tot;
node *root;
inline node *new_node() { return &nodes[tot++]; }
void try_insert(node *n, char *str)
{
    if (*str == '\0')
        n->cnt++;
    else
    {
        if (n->trans[*str - '0'] == 0) n->trans[*str - '0'] = new_node();
        try_insert(n->trans[*str - '0'], str + 1);
    }
}
```

```
char f[1 << 8 | 1];
int ans[20010];
int main()
{
    f['A'] = '0', f['C'] = '1', f['G'] = '2', f['T'] = '3';
    int n, m;
    char buf[22];
    while (~scanf("%d%d", &n, &m) && (n + m))
    {
        memset(ans, 0, sizeof(ans));
        memset(nodes, 0, sizeof(nodes));
        tot = 0;
        root = new_node();
        for (int i = 0; i < n; i++)
        {
            scanf("%s", buf);
            for (int j = 0; j < m; j++)
                buf[j] = f[buf[j]];
            try_insert(root, buf);
        }
        for (int i = 0; i < tot; i++) ans[nodes[i].cnt]++;
        for (int i = 1; i <= n; i++)
            printf("%d\n", ans[i]);
    }
    return 0;
}
```

2.3 Aho-Corasick Automaton

简介 多模式串字符串匹配，Trie 上的 KMP，其中 $next$ 数组变成了 $fail$ 指针，功能相同。

实现 Trie 的实现上文已经出现，所以此处不再重复。

buildFail

```
void buildFail()
{
    int h = 0, t = 0;
    root->fail = &virt;
    que[t++] = root;
    while (h < t)
    {
        node *cur = que[h++];
        for (int i = 0; i < 26; i++)
        {
            node *f = cur->fail;
            while (f->trans[i] == 0) f = f->fail;
            f = f->trans[i];
            if (cur->trans[i])
                (que[t++] = cur->trans[i])->fail = f;
            else
                cur->trans[i] = f;
```

```
        }
    }
}
```

练习题

HDU2222 - Keywords Search AC 自动机模板题，注意统计答案时，每个节点只能统计一次不要重复统计。

Keywords Search

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
struct node
{
    node *trans[26], *fail;
    int cnt;
} nodes[500010], virt;
node *que[500010];
int tot;
node *root;
node *new_node() { return &nodes[tot++]; }
void insert(char *str)
{
    node *cur = root;
    for (; *str; str++)
    {
        if (cur->trans[*str - 'a'] == 0)
            cur->trans[*str - 'a'] = new_node();
        cur = cur->trans[*str - 'a'];
    }
    cur->cnt++;
}
void buildFail()
{
    int h = 0, t = 0;
    root->fail = &virt;
    que[t++] = root;
    while (h < t)
    {
        node *cur = que[h++];
        for (int i = 0; i < 26; i++)
        {
            node *f = cur->fail;
            while (f->trans[i] == 0) f = f->fail;
            f = f->trans[i];
            if (cur->trans[i])
                (que[t++] = cur->trans[i])->fail = f;
            else
                cur->trans[i] = f;
        }
    }
```

```
}
char buf[1000010];
int vis[500010];
int main()
{
    memset(vis, -1, sizeof(vis));
    int T, n;
    scanf("%d", &T);
    while (T--)
    {
        memset(nodes, 0, sizeof(nodes));
        tot = 0, root = new_node();
        for (int i = 0; i < 26; i++) virt.trans[i] = root;
        scanf("%d", &n);
        for (int i = 0; i < n; i++)
        {
            scanf("%s", buf);
            insert(buf);
        }
        buildFail();
        scanf("%s", buf);
        node *cur = root, *tmp;
        int ans = 0;
        for (char *ch = buf; *ch; ch++)
        {
            tmp = cur = cur->trans[*ch - 'a'];
            while (tmp != &virt && vis[tmp - nodes] != T)
            {
                vis[tmp - nodes] = T;
                ans += tmp->cnt;
                tmp = tmp->fail;
            }
        }
        printf("%d\n", ans);
    }
    return 0;
}
```

2.4 Manacher

求出字符串每一位的回文半径，算法流程奥妙重重，不易让常人理解，然后我就抄了份板子改了改，然后就比讲义上的标程快了 20%。

练习题

POJ3974 - Palindrome Manacher 模板题

Palindrome

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
```

```
inline int max(int a, int b) { return a > b ? a : b; }
char buf[1000100], str[2000200];
int R[2000200], T;
int main()
{
    while (scanf("%s", buf), buf[0] != 'E')
    {
        int m = int(strlen(buf)), n = 0;
        str[n++] = '!';
        str[n++] = '#';
        for (int i = 0; i < m; i++)
            str[n++] = buf[i], str[n++] = '#';
        str[n++] = '#';
        str[n++] = '?';
        int p = 0, mx = 0, ans = 0;
        for (int i = 1; i < n; i++)
        {
            R[i] = mx > i ? min(R[2 * p - i], mx - i) : 1;
            while (str[i + R[i]] == str[i - R[i]]) R[i]++;
            if (R[i] + i > mx)
                mx = i + R[p = i];
            ans = max(ans, R[i]);
        }
        printf("Case %d: %d\n", ++T, ans - 1);
    }
    return 0;
}
```

3 day3 简单数学

说是简单数学其实我后半部分也没看懂

3.1 整除及剩余

整除定义 设 a, b 是两个整数，且 $b \neq 0$. 如果存在整数 c，使得 $a = bc$，则称 a 被 b 整除，或 b 整除 a，记作 $b|a$。此时，又称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的因子。

整除的基本性质

1. $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c)$
2. $a|b \Rightarrow \forall c \in \mathbb{Z},\ a|bc$
3. $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

同余基本定义和定理

定义 1：带余除法

$$\forall a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \rightarrow \exists q, r \in \mathbb{Z}, a = qb + r, r \in [0, |b|)$$

定义 2：同余

$$a \bmod m = b \bmod m \iff a \equiv b \pmod m$$

定义 3：剩余类

$$\mathbf{A_i} = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge x \bmod m = i\} \to \forall a, b \in \mathbf{A_i}, a \equiv b \pmod m$$

定义 4：完系

$$\{a_1 \bmod m, a_2 \bmod m, \ldots, a_n \bmod m\} = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

定理 1

$$a \equiv b \pmod m \iff \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + km \iff m | (a - b)$$

定理 2 同余关系是等价关系

1. $a \equiv a \pmod m$
2. $a \equiv b \pmod m \Rightarrow b \equiv a \pmod m$
3. $a \equiv b \pmod m \ \wedge \ b \equiv c \pmod m \Rightarrow a \equiv c \pmod m$

定理 3 同余的三则运算

$a, b, c \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*, a \equiv b \pmod m \Rightarrow$

1. $a + c \equiv b + c \pmod m$
2. $a - c \equiv b - c \pmod m$
3. $ac \equiv bc \pmod m$

定理 4 同余式的三则运算

$a, b, c \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*, a \equiv b \pmod m \wedge c \equiv d \pmod m \Rightarrow$

1. $ax + cy \equiv bx + dy \pmod m \qquad x, y \in \mathbb{Z}$
2. $ac \equiv bd \pmod m$
3. $a^n \equiv b^n \pmod m \qquad n \in \mathbb{N}^*$
4. $f(a) \equiv f(b) \pmod m \qquad f(x)$ 为任一整系数多项式

定理 5

1. $a \equiv b \pmod m \wedge d | m \Rightarrow a \equiv b \pmod d$
2. $a \equiv b \pmod m \Rightarrow gcd(a, m) = gcd(b, m)$
3. $\forall i \in [1, n]\ , \ a \equiv b \pmod{m_i} \iff a \equiv b \pmod{lcm(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$

3.2 素数

定义 素数（质数）是大于 1 的正整数，并且除了 1 和它本身不能被其他正整数整除。大于 1 的非素数的正整数称为合数。

分布 素数有无穷多个. 如果使用 $\pi(x)$ 表示小于一个正实数 x 的素数有多少个，那么有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x}=\ln x$$

算术基本定理/惟一分解定理

$$n=\prod_{i=1}^{\infty}p_i^{a_i}\qquad p_i\in\mathbb{P},\ a_i\in\mathbb{N}$$

判定

$$n\in\mathbb{P}\iff\forall i\in[2,\sqrt{n}],\ i\nmid n$$

Eratosthenes 筛法

Eratosthenes Sieve

```
fill(isprime, true);
for (int i = 2; i < n; i++)
    if (isprime[i])
        for (int j = i * i; j < n; j += i)
            isprime[i] = false;
```

欧拉函数 欧拉函数 $\varphi(n)$ 指不超过 n 且与 n 互素的正整数的个数，其中 n 是一个正整数。

欧拉函数的性质 $n=\prod_{i=1}^{m}p_i^{a_i}\to\varphi(n)=\prod_{i=1}^{m}\varphi(p_i^{a_i})$

定理 1 $p\in\mathbb{P}\iff\varphi(p)=p-1$

定理 2 $p\in\mathbb{P},\ a\in\mathbb{N}_+\Rightarrow\varphi(p^a)=p^a-p^{a-1}$

定理 3 $m,n\in\mathbb{N}_+\wedge gcd(m,n)=1\Rightarrow\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$

定理 4 $n=\prod_{i=1}^{m}p_i^{a_i}\to\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{m}(1-\frac{1}{p_i})$

推论 $n\equiv 1\pmod 2\to\varphi(2n)=\varphi(n)$

定理 5 $n\in(2,+\infty)\bigcap\mathbb{Z}\Rightarrow\varphi(n)\equiv 0\pmod 2$

定理 6 $n\in\mathbb{N}_+\Rightarrow\sum_{d|n}\varphi(n)=n$

欧拉定理 $gcd(a,m)=1,a\in\mathbb{N}_+,m\in[2,+\infty)\bigcap\mathbb{Z}\Rightarrow a^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod m$

费马小定理 $m\in\mathbb{P}\Rightarrow a^{m-1}\equiv 1\pmod m$

练习题

POJ2689 - Prime Distance 暴力筛掉合数

Prime Distance

```
#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <cstring>
int prime_count;
int prime[5140];
bool f[1000010];
bool notprime[50010];
int main()
{
    for (int i = 2; i < 50010; i++)
        if (!notprime[i])
            for (long long j = 1ll * i * i; j < 50010; j += i)
                notprime[j] = true;
    for (int i = 2; i < 50010; i++)
        if (!notprime[i])
            prime[prime_count++] = i;
    int l, r;
    while (~scanf("%d%d", &l, &r))
    {
        l = l == 1 ? 2 : l;
        memset(f, 0, sizeof(f));
        for (int i = 0, a, b; i < prime_count; i++)
        {
            a = (l - 1) / prime[i] + 1;
            b = r / prime[i];
            for (int j = a; j <= b; j++)
                if (j > 1)
                    f[j * prime[i] - l] = true;
        }
        int mx = -1, mn = 0x3f3f3f3f, x1 = 0, x2 = 0, y1 = 0, y2 = 0;
        for (int i = 0, p = -1; i <= r - l; i++)
            if (!f[i])
            {
                if (~p)
                {
                    if (mx < i - p)
                        mx = i - p, x1 = p + l, y1 = i + l;
                    if (mn > i - p)
                        mn = i - p, x2 = p + l, y2 = i + l;
                }
                p = i;
            }
        if (mx == -1)
            puts("There are no adjacent primes.");
        else
            printf("%d,%d are closest, %d,%d are most distant.\n", x2, y2, x1, y1);
    }
    return 0;
}
```

POJ3421 - X-factor Chains 质因子的排列组合

X-factor Chains

```
#include <cstdio>
int f[1 << 12 | 1];
long long _f(int x)
{
    long long ans = 1;
    for (int i = x; i; i--) ans *= i;
    return ans;
}
int main()
{
    int x;
    while (~scanf("%d", &x))
    {
        int _x = x, t = 0;
        for (int i = 2; i * i <= _x; i++)
        {
            f[t] = 0;
            while (_x % i == 0)
                _x /= i, f[t]++;
            t++;
        }
        if (_x != 1) f[t++] = 1;
        int sum = 0;
        for (int i = 0; i < t; i++) sum += f[i];
        long long fac = _f(sum);
        for (int i = 0; i < t; i++) fac /= _f(f[i]);
        printf("%d %lld\n", sum, fac);
    }
    return 0;
}
```

POJ3090 - Visible Lattice Points 欧拉函数

Visible Lattice Points

```
#include <cstdio>
const int maxn = 1010;
int phi[maxn], sum[maxn];
int main()
{
    phi[1] = 1;
    for (int i = 2; i <= 1005; i++) if (!phi[i])
        for (int j = i; j <= 1005; j += i)
        {
            if (!phi[j]) phi[j] = j;
            phi[j] = phi[j] / i * (i - 1);
        }
    for (int i = 1; i <= 1005; i++) sum[i] = sum[i - 1] + phi[i];
    int T, x;
```

```
    scanf("%d", &T);
    for (int i = 1; i <= T; i++)
    {
        scanf("%d", &x);
        printf("%d %d %d\n", i, x, sum[x] << 1 | 1);
    }
    return 0;
}
```

3.3 欧几里得算法

最大公约数与最小公倍数

定义 1 设 a 和 b 是两个整数，如果 $d|a$ 且 $d|b$，则称 d 是 a 与 b 的公因子

定义 2 设 a 和 b 是两个不全为 0 的整数，称 a 与 b 的公因子中最大的为 a 与 b 的最大公因子，或最大公约数，记作 $gcd(a,b)$

定义 3 设 a 和 b 是两个非零整数，称 a 与 b 最小的正公倍数为 a 与 b 的最小公倍数，记作 $lcm(a,b)$

最大公约数与最小公倍数的性质

1. $a|m \wedge b|m \Rightarrow lcm(a,b)|m$
2. $d|a \wedge d|b \Rightarrow d|gcd(a,b)$
3. $lcm(a,b) = \frac{ab}{gcd(a,b)}$
4. $m,a,b \in \mathbb{N}_+ \rightarrow lcm(ma,mb) = m \times lcm(a,b)$, $gcd(ma,mb) = m \times gcd(a,b)$

计算方法

素因子分解法 令

$$a = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i} \ , \quad b = \prod_{i=1}^{m} p_i^{s_i}$$

于是

$$gcd(a,b) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{min(r_i,s_i)} \ , \quad lcm(a,b) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{max(r_i,s_i)}$$

欧几里得算法 1

$$gcd(a,b) = gcd(b, a \bmod b)$$

欧几里得算法 2

$$gcd(a,b) = gcd(a, a-b)$$

拓展欧几里得算法 不理解就记下来

exgcd

```
void exgcd(int64 a, int64 b, int64 &x, int64 &y)
{ b == 0 ? (x = 1, y = 0) : (exgcd(b, a % b, y, x), y -= x * (a / b)); }
```

3.4 线性同余方程

二元一次不定方程

定义 1 $a,b,c\in\mathbb{Z},a\neq 0,b\neq 0$，那形如 $ax+by=c$ 的方程称为二元一次不定方程。

定理 1 设 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $d=gcd(a,b)$，如果 $d|c$，那么方程存在无穷多个整数解，否则方程不存在整数解。

定理 2 如果不定方程有解且特解为 $x=x_0,y=y_0$ 那么方程的解可以表示为

$$x=x_0+\frac{b}{d}t,y=y_0-\frac{a}{d}t,\text{其中}t\in\mathbb{Z}$$

同余方程与不定方程 在 $a>0$ 且 $b>0$ 的条件下，求二元一次方程 $ax+by=c$ 的整数解等价于求一元线性同余方程 $ax\equiv c \bmod b$ 的整数解

求一元线性同余方程 要求 $ax\equiv c \bmod b$，即为求 $ax+my=b$ 的解。记 $d=gcd(a,m)$，先使用拓展欧几里得求 $ax+my=b$，如果 $d\nmid b$ 则无解，否则 $\bmod m$ 意义下的解有 d 个，可以通过对其中某个解不断地加 $\frac{m}{d}$ 得到。(这 d 个解的形式为 $x_0+\frac{m}{d}t,\ t\in\mathbb{Z}$, 其中 x_0 是已知的一个解)

中国剩余定理 若 $m_1,m_2,m_3,\ldots,m_r$ 是两两互素的正整数，则同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ x\equiv a_3 \pmod{m_3} \\ \cdots \\ x\equiv a_r \pmod{m_r} \end{cases} \tag{3.1}$$

有 $\bmod M=\prod_1^r m$ 的唯一解，即为中国剩余定理。

若 $n=pq$ 且 $gcd(p,q)=1$，那么 $x \bmod p, x \bmod q$ 的值确定后，$x \bmod n$ 的值也会随之确定。

算法说明

$$M_i=\prod_{j\neq i} m_j \to gcd(M_i,m_i)=1\Rightarrow \exists p_i,q_i,\ M_ip_i+m_iq_i=1$$

$$(e_i=M_ip_i)\equiv int(j==i) \pmod{m_i} \to \sum_1^r e_ia_i \bmod \sum_1^r m_i\text{是方程的最小非负整数解}$$

练习题

POJ1061 - 蛤蛤的约会 +1s

蛤蛤的约会

```
#include <cstdio>
typedef long long int64;
int64 gcd(int64 a, int64 b) { return b == 0 ? a : gcd(b, a % b); }
void exgcd(int64 a, int64 b, int64 &x, int64 &y) { b == 0 ? (x = 1, y = 0) : (exgcd(b, a
    % b, y, x), y -= x * (a / b)); }
```

```
int main()
{
    int64 s, t, p, q, L;
    scanf("%lld%lld%lld%lld%lld", &s, &t, &p, &q, &L);
    int64 a = (p − q + L) % L, b = L, c = (t − s + L) % L;
    int64 x = 0, y = 0, g = gcd(a, b);
    if (c % g)
        puts("Impossible");
    else
    {
        a /= g, b /= g, c /= g;
        exgcd(a, b, x, y);
        printf("%lld", (((x % b + b) % b) * c) % b);
    }
    return 0;
}
```

POJ2142 - The Balance 求 $ax+by=c$ 的一组解，使得 $|x|+|y|$ 尽量小，在前者尽量小时 $|ax|+|by|$ 尽量小

The Balance

```
#include <cstdio>
inline int abs(int x) { return x >= 0 ? x : −x; }
void exgcd(int a, int b, int &d, int &x, int &y) { !b ? (x = 1, y = 0, d = a) : (exgcd(b,
     a % b, d, y, x), y −= x * (a / b)); }
int main()
{
    int a, b, c, x, y, g, u1, v1, u2, v2;
    while (~scanf("%d%d%d", &a, &b, &c) && a + b + c)
    {
        exgcd(a, b, g, x, y);
        a /= g, b /= g, c /= g;
        u1 = (x % b * c % b + b) % b;
        v1 = abs((c − u1 * a) / b);
        v2 = (y % a * c % a + a) % a;
        u2 = abs((c − v2 * b) / a);
        if (u1 + v1 > u2 + v2 || (u1 + v1 == u2 + v2 && a * u1 + b * v1 > a * u2 + b * v2
            )) u1 = u2, v1 = v2;
        printf("%d %d\n", u1, v1);
    }
    return 0;
}
```

3.5 逆元

解一元线性同余方程

$$gcd(a,m)=1 \Rightarrow \exists x, ax \equiv 1 \pmod{m}$$

$$ax \equiv 1 \pmod{m} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, ax-km=1$$

```
int inv(int a, int m)
{
    int x, y;
    exgcd(a, m, x, y);
    return (x % m + m) % m;
}
```

费马小定理

$$\forall p \in \mathbb{P} \to x^p \equiv x \pmod{p}$$

被称为费马小定理，若 $p \nmid x$，有

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

于是有

$$\forall p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{Z} \to x^{-1} \equiv x^{p-2} \pmod{p}$$

使用快速幂即可计算。

3.6 离散对数问题

解这鬼东西：

$$A^x \equiv B \pmod{C}$$

这玩意有个性质，$A^x \mod C$ 有周期性，最大周期不超过 C，我想这是显然的（除非你没上过小学）。

$C \in \mathbb{P}$ 普通的 BSGS

POJ2417 - Discrete Logging 模板题

Primitive Roots

```
#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <cstring>
typedef long long i64;
void exgcd(i64 a, i64 b, i64 &x, i64 &y)
{
    b == 0 ? (x = 1, y = 0) : (exgcd(b, a % b, y, x), y -= (a / b) * x);
}
struct HashTable
{
    static const size_t sz = 500009;
    i64 idx[sz], val[sz];
    void init()
    {
        memset(idx, -1, sizeof(idx));
        memset(val, -1, sizeof(val));
    }
    void insert(i64 i, i64 v)
    {
        i64 j = i % sz;
```

```
        while (idx[j] != -1 && idx[j] != i)
        {
            j++;
            if (j == sz)
                j = 0;
        }
        if (val[j] == -1)
        {
            idx[j] = i;
            val[j] = v;
        }
    }
    i64 find(i64 i)
    {
        i64 j = i % sz;
        while (idx[j] != -1 && idx[j] != i)
        {
            j++;
            if (j == sz)
                j = 0;
        }
        return val[j];
    }
} H;
int main()
{
    for (i64 a, b, c; ~scanf("%lld%lld%lld", &c, &a, &b) && a | b | c;)
    {
        H.init();
        i64 m = i64(ceil(sqrt(c))), d = 1;
        for (int i = 0; i < m; i++, d = d * a % c)
            H.insert(d, i);
        i64 res = 1, x, y;
        bool flag = false;
        for (i64 i = 0; i < m && !flag; i++, res = res * d % c)
        {
            exgcd(res, c, x, y);
            x = (x * b % c + c) % c;
            i64 j = H.find(x);
            if (j != -1)
                printf("%lld\n", i * m + j), flag = true;
        }
        if (!flag)
            puts("no solution");
    }
    return 0;
}
```

$C \in \mathbb{N}_+$ 待续

3.7 原根

阶

$$n > 1, a \in \mathbb{Z}, gcd(a, n) = 1 \rightarrow \exists r \in [1, n], a^r \equiv 1 \pmod{n}$$

r 的最小整数值称为 a 模 n 的阶，记为 $Ord_n(a)$

阶的性质

$$gcd(a, n) = 1, r = Ord_n(a), \forall N \in \{x | a^N \equiv 1 \pmod{n}\} \Rightarrow r | N$$

$$gcd(a, n) = 1 \Rightarrow Ord_n(a) | \varphi(n)$$

特别的，$p \in \mathbb{P}, gcd(a, p) = 1 \Rightarrow Ord_p(a) | p - 1$，显然$\varphi(p) = p - 1$

原根 $n \in \mathbb{N}_+, a \in \mathbb{Z}, Ord_n(a) = \varphi(n)$，则称 a 为模 n 的一个原根，由阶的定义可知原根和 n 必然互质。

求质数 p 的原根算法 暴力从小到大枚举 $g \in \mathbb{N}_+$，$\forall a \in \{x \mid x | p - 1, x \in \mathbb{P}\}, g^{\frac{p-1}{a}} \not\equiv 1 \pmod{p}$

Primitive Root

```
#include <cstdio>
typedef unsigned long long u64;
const size_t MAXN = 1 << 16 | 1;
bool notprime[MAXN];
int prime[MAXN], pcnt, x;
inline u64 fast_pow(u64 a, u64 b, u64 m)
{
    u64 ret = 1;
    for (; b; a = a * a % m, b >>= 1)
        if (b & 1)
            ret = ret * a % m;
    return ret;
}
int main()
{
    for (size_t i = 2; i < MAXN; i++)
        if (!notprime[i] && (prime[pcnt++] = int(i)))
            for (size_t j = i * i; j < MAXN; j += i)
                notprime[j] = true;
    while (~scanf("%d", &x))
        for (int a = 2, flag = 0; flag == 0; a++)
        {
            flag = 1;
            for (int i = 0, k = x - 1; i < pcnt && k > 1 && flag; i++)
                if (k % prime[i] == 0)
                {
                    flag = fast_pow(a, (x - 1) / prime[i], x) != 1;
                    while (k % prime[i] == 0)
                        k /= prime[i];
                }
            if (flag)
                printf("%d\n", a);
        }
```

```
34      return 0;
35  }
```

练习题

POJ1284 - Primitive Roots 如果 $n \in \mathbb{N}_+$ 有一个原根，那么 n 一共有 $\varphi(\varphi(n))$ 个不同余的原根

Primitive Roots

```
1   #include <cstdio>
2   const int N = 1 << 16 | 1;
3   int phi[N];
4   int main()
5   {
6       for (int i = 2; i < N; i++) if (!phi[i])
7           for (int j = i; j < N; j += i)
8           {
9               if (!phi[j]) phi[j] = j;
10              phi[j] = phi[j] / i * (i - 1);
11          }
12      for (int p; ~scanf("%d", &p);)
13          printf("%d\n", phi[p - 1]);
14      return 0;
15  }
```

4 day4 数据结构

4.1 树状数组

在 $\lg n$ 的时间内更新或查询 $\sum_{i=1}^{n} a_i$

lowbit `lowbit(x) = x & -x`

两个操作 $\lg n$ 更新或查询

Fenwick tree

```
1   void add(int x, int v)
2   {
3       for (; x <= n; x += lowbit(x))
4           A[x] += v;
5   }
6
7   void sum(int x)
8   {
9       int res = 0;
10      for (; x; x -= lowbit(x))
11          res += A[x];
12      return res;
13  }
```

练习题

POJ2352 - Stars 。。。

Stars

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
#define lowbit(x) ((x) & -(x))
const int maxn = 1 << 15 | 1;
int a[maxn], n, m, level[maxn];
void update(int pos, int x)
{
    for (; pos < maxn; pos += lowbit(pos)) a[pos] += x;
}
int query(int pos)
{
    int ans = 0;
    for (; pos; pos -= lowbit(pos)) ans += a[pos];
    return ans;
}
int main()
{
    scanf("%d", &n);
    memset(level, 0, sizeof(level));
    memset(a, 0, sizeof(a));
    for (int i = 0, x, y; i < n; ++i)
    {
        scanf("%d%d", &x, &y);
        level[query(++x)]++;
        update(x, 1);
    }
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        printf("%d\n", level[i]);
    return 0;
}
```

POJ2299 - Ultra-QuickSort 求逆序对数量，不过配图是啥玩意？马桶橛子？

Ultra-QuickSort

```
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <stdint.h>
#define lowbit(x) ((x) & -(x))
const int N = 500005;
int sum[N];
int query(int x)
{
    int ans = 0;
    for (; x; x -= lowbit(x)) ans += sum[x];
    return ans;
```

```
}
void update(int x, int y)
{
    for (; x <= N; x += lowbit(x)) sum[x] += y;
}
struct abcd
{
    int val, pos;
    bool operator<(const abcd &rhs) const { return val < rhs.val; }
} nodes[N];
int map[N];
int main()
{
    int n;
    while (~scanf("%d", &n) && n)
    {
        memset(sum, 0, sizeof(sum));
        for (int i = 1; i <= n; i++) scanf("%d", &nodes[i].val), nodes[i].pos = i;
        std::sort(nodes + 1, nodes + n + 1);
        for (int i = 1; i <= n; i++) map[nodes[i].pos] = i;
        int64_t ans = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i++)
        {
            update(map[i], 1);
            ans += i - query(map[i]);
        }
        printf("%lld\n", ans);
    }
    return 0;
}
```

POJ1990 - MooFest 杀光奶牛问题就会得到解决

MooFest

```
#include <algorithm>
#include <cstdio>
#define lowbit(x) ((x) & -(x))
const int N = 20005;
void add(int *arr, int pos, int val)
{
    for (; pos < N; pos += lowbit(pos))
        arr[pos] += val;
}
int query(int *arr, int pos)
{
    int ans = 0;
    for (; pos; pos -= lowbit(pos))
        ans += arr[pos];
    return ans;
}
int sum[2][N];
struct cow
{
    int pos, vol;
    bool operator<(const cow &rhs) const { return vol < rhs.vol; }
} cows[N];
int main()
{
    int n;
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        scanf("%d%d", &cows[i].vol, &cows[i].pos);
    std::sort(cows + 1, cows + n + 1);
    long long ans = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        long long a = query(sum[0], cows[i].pos), b = query(sum[1], cows[i].pos);
        ans += (cows[i].pos * a - b + query(sum[1], 20000) - b -
                (i - 1 - a) * cows[i].pos) *
               cows[i].vol;
        add(sum[0], cows[i].pos, 1);
        add(sum[1], cows[i].pos, cows[i].pos);
    }
    printf("%lld", ans);
    return 0;
}
```

4.2 Sparse Table

处理区间最值，即 RMQ（Range Minimum Query）问题。

预处理 计算一个数组 f，使 $f[i][j]=min[i,i+2^j)$，然后你就可以开始倍增了。

$$f[i][j]=\begin{cases} a[i] & j=0 \\ min(f[i][j-1],f[i+2^{j-1}][j-1]) & j>0 \end{cases} \tag{4.1}$$

询问 考虑一个询问区间 $[x,y)$ 的最小值的询问操作。
我们可以求出满足 $2^i \le y-x<2^{i+1}$ 的 i，即 $\lfloor \log_2 y-x \rfloor$，这样我们可以用两个长度为 2^i 的小区间覆盖询问的大区间。
而长度为 2^i 的小区间的最小值在预处理时已经求出，于是区间 $[x,y)$ 的最小值为 $min\{f[x][i],f[y-2^i][i]\}$，由于是求最值，区间有交集也没关系。

练习题

POJ3264 - Balanced Lineup 给你一个长度为 n 的序列 $a[N]$，询问 Q 次，每次输出 $[L,R]$ 区间最大值与最小值的差是多少，果真这种简化了的题面真是清晰易懂。

Balanced Lineup

```
#include <cstdio>
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
inline int max(int a, int b) { return a > b ? a : b; }
const int N = 50010;
const int LogN = 16;
int minT[LogN][N], maxT[LogN][N], Log[N];
int main()
{
    Log[0] = -1;
    for (int i = 1; i < N; i++) Log[i] = Log[i >> 1] + 1;
    int m, n;
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 1, x; i <= n; i++)
    {
        scanf("%d", &x);
        minT[0][i] = maxT[0][i] = x;
    }
    for (int j = 1; j < LogN; j++)
        for (int i = 1; i + (1 << j) - 1 <= n; i++)
            minT[j][i] = min(minT[j - 1][i], minT[j - 1][i + (1 << (j - 1))]),
            maxT[j][i] = max(maxT[j - 1][i], maxT[j - 1][i + (1 << (j - 1))]);
    for (int i = 1, x, y, z; i <= m; i++)
    {
        scanf("%d%d", &x, &y);
        z = Log[y - x + 1];
        printf("%d\n", max(maxT[z][x], maxT[z][y - (1 << z) + 1]) - min(minT[z][x], minT[
            z][y - (1 << z) + 1]));
    }
    return 0;
}
```

CF359D - Pair of Numbers 首先要知道 gcd 有“最值的性质”，然后二分暴力。

Pair of Numbers

```cpp
#include <cstdio>
#include <cctype>
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
inline int gcd(int a, int b) { return b == 0 ? a : gcd(b, a%b); }
inline void read(int &x)
{
    int ch = x = 0;
    while (!isdigit(ch = getchar()));
    for (; isdigit(ch); ch = getchar()) x = (x << 3) + (x << 1) + ch - '0';
}
int n, a[1 << 20 | 1], Log[1 << 20 | 1];
int M[1 << 20 | 1][20], G[1 << 20 | 1][20];
struct
{
    int c, a[1 << 20 | 1], r;
}ans;
inline bool can(int l, int r)
{
    int k = Log[r - l + 1];
    return min(M[l][k], M[r - (1 << k) + 1][k]) == gcd(G[l][k], G[r - (1 << k) + 1][k]);
}
bool check(int len)
{
    int cnt = 0;
    for (int i = 0; i + len < n; i++)
        if (can(i, i + len))
            ans.a[cnt++] = i;
    if (cnt) ans.r = len, ans.c = cnt;
    return cnt;
}
int main()
{
    read(n);
    Log[0] = -1;
    for (int i = 1; i <= n; i++) Log[i] = Log[i >> 1] + 1;
    for (int i = 0; i < n; i++) read(a[i]);
    for (int i = 0; i < n; i++) M[i][0] = G[i][0] = a[i];
    for (int j = 1; j <= Log[n]; j++)
        for (int i = 0; i + (1 << j) - 1 < n; i++)
            M[i][j] = min(M[i][j - 1], M[i + (1 << (j - 1))][j - 1]),
            G[i][j] = gcd(G[i][j - 1], G[i + (1 << (j - 1))][j - 1]);
    int L = 0, R = n, m;
    while (L < R)
        check(m = (L + R) >> 1) ? L = m + 1 : R = m;
    printf("%d %d\n", ans.c, ans.r);
    for (int i = 0; i < ans.c; i++)
        printf("%d ", ans.a[i] + 1);
    return 0;
}
```

4.3 左偏树

左偏树是一种可以合并的堆，所以它可以支持堆的几种操作，并且也都是在相同的时间复杂度下完成的，并且它能额外支持合并两棵左偏树的这种操作。

性质 我们先定义节点 i 的距离为节点 i 到它的后代中，最近的外节点所经过的边数，其中左子树或右子树为空的节点被称为外节点，这种节点的距离为 0。

性质 1：堆有序性质 节点的值不小于其子节点的值（假设这是一个大根左偏树）。

性质 2：左偏性质 节点的左子节点的距离不小于右子节点的距离。

性质 3 节点的距离等于它的右子节点的距离加一。

左偏树的操作

合并 现在我们有两棵左偏树 A 和 B，欲将其合并。我们假设 A 的根节点大于 B 的根节点，不然交换一下就行了。然后把 A 的右子节点与树 B 合并作为 A 的新右子节点，检查 A 现在的左子节点和右子节点的距离，如果右子节点的距离大于左子节点，那么交换这两棵子树，然后更新 A 的距离，如此这般递归下去，因为只有 $\log_2 n$ 的深度，所以铁定不会爆栈，除非你的脸黑到一定境界了。

合并的简单实现

```
struct node
{
    int val, dis;
    node *ch[2];
};
#define dis(x) ((x) ? (x)->dis : -1)
node *merge(node *a, node *b)
{
    if (a && b) return (node*)(uintptr_t(a) | uintptr_t(b));
    if (a->val < b->val) swap(a, b);
    a->ch[1] = merge(a->ch[1], b);
    if (dis(a->ch[0]) < dis(a->ch[1])) swap(a->ch[0], a->ch[1]);
    a->dis = dis(a->ch[1]) + 1;
    return a;
}
```

插入 把新节点当作一棵只有一个节点的树与原树合并。

删除极值 合并根节点下的两个子节点。

删除指定元素 将指定节点的两个子树合并作为这个节点。然后维护其父节点的数值，如果父节点被改变，就继续向上维护，直到节点数据不改变。

练习题

BZOJ2809 - [Apio2012]dispatching 考虑对每个点维护一个大根堆，堆内存储的是这个节点子树内所有点的 C_i。当堆内的和大于 M 时就要弹出堆顶元素；每个点的堆可以通过将所有儿子的堆合并起来再插入自己节点的 C_i 来得到

Apio2012 dispatching

```
#include <cctype>
#include <cstdio>
template <typename T> inline void swap(T &x, T &y) {
    T t = x;
    x = y;
    y = t;
}
template <typename T> inline T max(T x, T y) { return x > y ? x : y; }
inline void read(int &x)
{
    int ch = x = 0;
    while (!isdigit(ch = getchar()));
    for (; isdigit(ch); ch = getchar()) x = x * 10 + ch - '0';
}
const int maxn = 100010;
int n, m, fa[maxn], C[maxn], L[maxn], cnt;
typedef struct Node
{
    Node *lc, *rc;
    int val, dis, sz;
    long long sum;
} *lpNode;
lpNode merge(lpNode x, lpNode y)
{
    if (x == 0) return y;
    if (y == 0) return x;
    if (x->val < y->val) swap(x, y);
    x->rc = merge(x->rc, y);
    if (x->lc == 0 || x->lc->dis < x->rc->dis) swap(x->lc, x->rc);
    x->dis = x->rc ? x->rc->dis + 1 : 0;
    x->sz = (x->lc ? x->lc->sz : 0) + (x->rc ? x->rc->sz : 0) + 1;
    x->sum = (x->lc ? x->lc->sum : 0) + (x->rc ? x->rc->sum : 0) + x->val;
    return x;
}
Node mem[maxn];
lpNode nodes[maxn];
int head[maxn], to[maxn], next[maxn], ecnt, arr[maxn], aend;
inline void addEdge(int f, int t)
{
    ecnt++;
    next[ecnt] = head[f];
    head[f] = ecnt;
    to[ecnt] = t;
}
int main()
{
    read(n), read(m);
```

```
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        read(fa[i]), read(C[i]), read(L[i]), addEdge(fa[i], i),
        (nodes[i] = mem + i)->sz = 1, nodes[i]->sum = nodes[i]->val = C[i];
    for (int i = 0; i <= n; i++)
        for (int cur = head[i]; cur; cur = next[cur])
            arr[++aend] = to[cur];
    long long ans = 0;
    for (int i = aend; i; i--)
    {
        int x = arr[i], y = fa[x];
        ans = max(ans, 1ll * nodes[x]->sz * L[x]);
        nodes[y] = merge(nodes[y], nodes[x]);
        while (y && nodes[y]->sum > m)
            nodes[y] = merge(nodes[y]->lc, nodes[y]->rc);
    }
    printf("%lld", ans);
    return 0;
}
```

4.4 线段树

既可以 $\log(n)$ 修改，也可以 $\log(n)$ 查询最值，也可以 $\log(n)$ 查询和，总之只要是能合并的数据都能在 $\log(n)$ 的时间内用其维护。

普通的线段树：单点修改，区间查询 直接搞

稍屌的线段树：区间修改，单点查询 普通的 Lazy-tag

通用的线段树：区间修改，区间查询 这东西包括以上两者，有两种实现方法，标记下传和标记永久化，其中标记永久化在可持久化数据结构中是必须的。现在给出一个大模板题，并且下面将会用两种方法加以实现。

这是题：POJ3468 - A Simple Problem with Integers

标记下传 这玩意儿是这么个搞法，还是照例的打标记，当我们要从某个节点递归下去时，将当前节点的 add 值下传，更新两个子节点的 add 与 sum 值，并将当前节点的 add 值清零。

标记下传例程：2.3s

```
#include <cstdio>
#include <cctype>
#define C(x) (x = getchar())
#define L(x) ((x) << 1)
#define R(x) ((x) << 1 | 1)
#define avg(x, y) (((x) + (y)) >> 1)
inline void read(int &x)
{
    int ch = x = 0, flag = 1;
    while (!isdigit(C(ch))) if (ch == '-') flag = -1;
    for (; isdigit(ch); C(ch))
        x = x * 10 + ch - '0';
    x *= flag;
```

```
}
const int N = int(1e5 + 5);
typedef long long i64;
int a[N];
i64 A[N << 2], S[N << 2];
inline void add(int k, int l, int r, i64 v)
{
    A[k] += v;
    S[k] += (r - l) * v;
}
inline void pushdown(int k, int l, int r)
{
    if (A[k] == 0) return;
    int m = avg(l, r);
    add(L(k), l, m, A[k]);
    add(R(k), m, r, A[k]);
    A[k] = 0;
}
void build(int k, int l, int r)
{
    if (l == r - 1) return void(S[k] = a[l]);
    int m = avg(l, r);
    build(L(k), l, m);
    build(R(k), m, r);
    S[k] = S[L(k)] + S[R(k)];
}
i64 query(int k, int l, int r, int x, int y)
{
    if (x <= l && r <= y) return S[k];
    pushdown(k, l, r);
    int m = avg(l, r);
    i64 res = 0;
    if (x < m) res += query(L(k), l, m, x, y);
    if (y > m) res += query(R(k), m, r, x, y);
    return res;
}
void modify(int k, int l, int r, int x, int y, int v)
{
    if (x <= l && r <= y) return add(k, l, r, v);
    int m = avg(l, r);
    pushdown(k, l, r);
    if (x < m) modify(L(k), l, m, x, y, v);
    if (y > m) modify(R(k), m, r, x, y, v);
    S[k] = S[L(k)] + S[R(k)];
}
int main()
{
    int n, m;
    read(n), read(m);
    for (int i = 0; i < n; i++) read(a[i]);
    build(1, 0, n);
    while (m--)
```

```
    {
        int op = 0, x, y, z;
        while (op != 'Q' && op != 'C') C(op);
        if (op == 'Q')
        {
            read(x), read(y);
            printf("%lld\n", query(1, 0, n, x − 1, y));
        }
        else
        {
            read(x), read(y), read(z);
            modify(1, 0, n, x − 1, y, z);
        }
    }
    return 0;
}
```

标记永久化 这种情况下 add 标记将不会被下传，子节点的影响在修改时便已计算，递归时要累加祖先节点上的标记。

标记永久化例程：2.0s

```
#include <cctype>
#include <cstdio>
#define C(x) ((x) = getchar())
#define L(x) ((x) << 1)
#define R(x) ((x) << 1 | 1)
#define avg(x, y) (((x) + (y)) >> 1)
typedef long long i64;
inline int max(int a, int b) { return a > b ? a : b; }
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
inline void read(int &x)
{
    int ch = x = 0, sign = 1;
    while (!isdigit(C(ch))) if (ch == '−') sign = −1;
    for (; isdigit(ch); C(ch))
        x = x * 10 + ch − '0';
    x *= sign;
}
const int N = int(1e5 + 5);
i64 add[N << 2], sum[N << 2];
int a[N];
void build(int k, int l, int r)
{
    if (l == r − 1) return void(sum[k] = a[l]);
    int m = avg(l, r);
    build(L(k), l, m);
    build(R(k), m, r);
    sum[k] = sum[L(k)] + sum[R(k)];
}
void modify(int k, int l, int r, int x, int y, int v)
{
```

```
    if (x <= l && r <= y)
        return void(add[k] += v);
    sum[k] += 1ll * (min(r, y) - max(l, x)) * v;
    int m = avg(l, r);
    if (x < m) modify(L(k), l, m, x, y, v);
    if (y > m) modify(R(k), m, r, x, y, v);
}
i64 query(int k, int l, int r, int x, int y)
{
    if (x <= l && r <= y)
        return sum[k] + (r - l) * add[k];
    int m = avg(l, r);
    i64 res = add[k] * (min(r, y) - max(l, x));
    if (x < m) res += query(L(k), l, m, x, y);
    if (y > m) res += query(R(k), m, r, x, y);
    return res;
}
int main()
{
    int n, m;
    read(n), read(m);
    for (int i = 0; i < n; i++) read(a[i]);
    build(1, 0, n);
    while (m--)
    {
        int op = 0, x, y, z;
        while (op != 'C' && op != 'Q') C(op);
        if (op == 'Q')
        {
            read(x), read(y);
            printf("%lld\n", query(1, 0, n, x - 1, y));
        }
        else
        {
            read(x), read(y), read(z);
            modify(1, 0, n, x - 1, y, z);
        }
    }
    return  0;
}
```

经过测试，发现标记永久化的写法快一些，可能是因为没有那么多的 pushdown 导致的。

4.5 树链剖分

轻重链剖分,把重链连续的铺在一棵线段树上,然后就解决了!是不是很容易?233333333333333333333333

练习题

BZOJ1036 - [ZJOI2008] 树的统计 Count 模板题

ZJOI2008 树的统计 Count

```
#include <cstdio>
#include <cctype>
#define L(x) ((x) << 1)
#define R(x) ((x) << 1 | 1)
#define avg(x, y) (((x) + (y)) >> 1)
inline int max(int a, int b) { return a > b ? a : b; }
inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
template <typename T> inline void swap(T &a, T &b)
{
    T t = a;
    a = b;
    b = t;
}
inline void read(int &x)
{
    int ch = x = 0, sign = 1;
    while (!isdigit(ch = getchar())) if (ch == '-') sign = -1;
    for (; isdigit(ch); ch = getchar()) x = x * 10 + ch - '0';
    x *= sign;
}
const int N = int(3e4 + 5), inf = 0x3f3f3f3f;
int adj[N], nxt[N << 1], to[N << 1], ecnt;
int sum[N << 2], mx[N << 2];
int n, sz[N], son[N], dep[N], fa[N], top[N], idx[N], pos[N], val[N];
inline void addEdge(int f, int t)
{
    ecnt++;
    nxt[ecnt] = adj[f];
    adj[f] = ecnt;
    to[ecnt] = t;
}
void build(int k, int l, int r)
{
    if (l == r - 1) return void(sum[k] = mx[k] = val[idx[l]]);
    int m = avg(l, r);
    build(L(k), l, m);
    build(R(k), m, r);
    sum[k] = sum[L(k)] + sum[R(k)];
    mx[k] = max(mx[L(k)], mx[R(k)]);
}
void modify(int k, int l, int r, int p, int v)
{
    if (l == r - 1) return void(sum[k] = mx[k] = v);
    int m = avg(l, r);
    (p < m) ? modify(L(k), l, m, p, v) : modify(R(k), m, r, p, v);
    sum[k] = sum[L(k)] + sum[R(k)];
    mx[k] = max(mx[L(k)], mx[R(k)]);
}
int qsum(int k, int l, int r, int x, int y)
{
    if (x <= l && r <= y) return sum[k];
```

```
    int m = avg(l, r), res = 0;
    if (x < m) res += qsum(L(k), l, m, x, y);
    if (y > m) res += qsum(R(k), m, r, x, y);
    return res;
}
int qmax(int k, int l, int r, int x, int y)
{
    if (x <= l && r <= y) return mx[k];
    int m = avg(l, r), res = -inf;
    if (x < m) res = max(res, qmax(L(k), l, m, x, y));
    if (y > m) res = max(res, qmax(R(k), m, r, x, y));
    return res;
}
int psum(int u, int v)
{
    int res = 0;
    while (top[u] != top[v])
    {
        if (dep[top[u]] < dep[top[v]]) swap(u, v);
        res += qsum(1, 0, n, pos[top[u]], pos[u] + 1);
        u = fa[top[u]];
    }
    if (dep[u] > dep[v]) swap(u, v);
    return res + qsum(1, 0, n, pos[u], pos[v] + 1);
}
int pmax(int u, int v)
{
    int res = -inf;
    while (top[u] != top[v])
    {
        if (dep[top[u]] < dep[top[v]]) swap(u, v);
        res = max(res, qmax(1, 0, n, pos[top[u]], pos[u] + 1));
        u = fa[top[u]];
    }
    if (dep[u] > dep[v]) swap(u, v);
    return max(res, qmax(1, 0, n, pos[u], pos[v] + 1));
}
void init()
{
    static int que[N];
    int len = 0, u, v;
    que[len++] = 1;
    for (int i = 0; i < len; i++)
    {
        sz[u = que[i]] = 1;
        for (int e = adj[u]; e; e = nxt[e])
            if ((v = to[e]) != fa[u])
                fa[v] = u, dep[v] = dep[u] + 1, que[len++] = v;
    }
    for (int i = len - 1; i; i--)
    {
        u = que[i], v = fa[u];
```

```
        sz[v] += sz[u];
        if (sz[u] > sz[son[v]]) son[v] = u;
    }
    for (int i = 0, tot = 0; i < len; i++)
        if (top[u = que[i]] == 0)
            for (v = u; v; v = son[v])
                idx[pos[v] = tot++] = v, top[v] = u;
}
int main()
{
    read(n);
    for (int i = 1, x, y; i < n; i++)
    {
        read(x), read(y);
        addEdge(x, y), addEdge(y, x);
    }
    for (int i = 1; i <= n; i++) read(val[i]);
    init();
    build(1, 0, n);
    int m, u, v;
    read(m);
    static char op[10];
    while (m--)
    {
        scanf("%s", op);
        read(u), read(v);
        if (op[1] == 'H') modify(1, 0, n, pos[u], v);
        if (op[1] == 'M') printf("%d\n", pmax(u, v));
        if (op[1] == 'S') printf("%d\n", psum(u, v));
    }
    return 0;
}
```

5 day5 计算几何

5.1 基础概念

点 $P(x,y)$

线段 用两个端点或一个端点加一条向量表示，这两种方式等价。其中线段 AB 上的点 C 满足：

$$\forall C \in AB, \exists p \in [0,1], C = pA + (1-p)B$$

直线 使用直线方程 $ax+by+c=0$ 或 $y=kx+b$ 或直线上两个不同点或一个点加上一个向量表示。

多边形 若干条线段首尾顺次相连所形成的平面图形

圆 使用圆心坐标和半径表示

向量 几何向量是线性空间中有大小与方向的量。

向量的表示 $a=\overrightarrow{OA}=(x,y),|a|=\sqrt{x^2+y^2}$

向量的计算 $a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2),a\pm b=(x_1+x_2\pm y_1+y_2),ak=(kx_1,ky_1)$

向量的夹角 $\cos<a,b>=\frac{ab}{|a||b|}$

正弦定理 对于任意三角形 ABC，a,b,c 分别为 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边，R 为三角形 ABC 外接圆半径，则有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

余弦定理 对于任意三角形 ABC，a,b,c 分别为 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边，则有

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}$$

向量的点积 $a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2),ab=(x_1x_2,y_1y_2)=|a||b|\cos<a,b>$

向量的叉积

三维叉积：两个向量 $a=(x_1,y_1,z_1),b=(x_2,y_2,z_2)$ 的叉积的结果是一个向量 c，记作

$$c=a\times b=\begin{vmatrix}i & j & k\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

c 的模长等于以 a,b 为两条邻边所作成的平行四边形的面积，c 的方向遵循右手定则。

二维叉积：若 $a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2)$，则我们可以将它们看做是 z 轴为 0 的两个三维向量，根据定义我们可知叉积结果为 $(0,0,x_1y_2-x_2y_1)$。因此我们定义二维叉积为 $a\times b=x_1y_2-x_2y_1$，它的几何意义是，叉积结果大小等于以 a,b 为两条邻边所作成的平行四边形的有向面积，即 $a\times b=|a|\times|b|\times\sin<a,b>$

根据叉积结果，我们能判断 a,b 的方向。当 $a\times b>0$ 时，b 在 a 的逆时针方向，当 $a\times b<0$ 时，b 在 a 的顺时针方向。

$a\times b=-b\times a$　　$a\times b=0\iff a,b$共线

向量的旋转 向量 $a=(x,y)$ 逆时针旋转 θ，得到的向量 b 的坐标 $b=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$。我们可以借助两个复数相乘，积的模等于两复数模的积，积的辐角等于两复数辐角的和这个性质，将旋转看做是两个复数相乘，即 $(x+yi)$ 与 $(\cos\theta+i\sin\theta)$ 相乘，再利用复数乘法式子 $(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ 得出上面向量旋转的结果。

5.2 基础问题

1. $a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2)$ 两点距离：$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

2.

(1) 叉积： $2S_{\triangle}ABC=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|$

(2) 海伦公式： $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},p=\frac{a+b+c}{2}$

3. 判断点 P 是否在线段 AB 上：判断是否 $|PA|+|PB|=|AB|$

4. 判断点 P 是否在直线 AB 上（三点共线）：判断是否 $\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}=0$

5. 判断连续两条线段 AB,BC 的拐向：叉积判断，如 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}>0 \iff$ 逆时针拐弯

6. 求 $\angle AOB$ 的种类：$s=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}, s=0 \iff$ 直角, $s>0 \iff$ 锐角, $s<0 \iff$ 钝角

7. 求点 P 到线段 AB 的最短距离：

(1) 若 $\angle BAP,\angle ABP$ 有一个是钝角，则最短距离为 $min(|PA|,|PB|)$

(2) 否则最短距离为 $\triangle PAB$ 底边 AB 的高：$\frac{|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$

8. 判断两线段 AB,CD 是否相交：判断 A,B 是否在 CD 两边，以及 C,D 是否在 AB 两边, 注意共线的特殊情况。若 AB,CD 不共线，则判断 $(\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CA})\times(\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CB})\le 0$ 且 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\le 0$；否则判断是否 $\exists P\in AB, P\in CD$。

9. 求两直线（线段）交点，假设交点存在：

(1) 代数方法： 求出两条直线的方程，列方程组求解

(2) 几何方法： $s_1=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}, s_2=\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}, P=A+\frac{\overrightarrow{AB}\times s_1}{s_1+s_2}$

10. 求点 E 到直线 AB 的垂足 D

(1) 将 $\overrightarrow{AB}$ 旋转 $\frac{\pi}{2}$，直线求交

(2)

$$D=A+\overrightarrow{AB}\times\frac{\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}}$$

11. 求 $\angle E$ 的角平分线：做两点 A,B 使得 $EA=EB$，则此时将 $\overrightarrow{AB}$ 旋转即可。

12. 求一个点 P 是否在多边形 Q 内部：射线法，过 P 做一条平行于 x 轴的射线 L，若与多边形有奇数个交点，则点在多边形内部，这可以转化为求 L 与 Q 的每一条边是否有交点，但要注意一些特殊情况，比如交点时多边形的顶点，这时我们需要规定交在边的下端点统计进答案或是交在边的上端点统计进答案（也就是保证一个点要么都被统计要么都不被统计）。

13. 多边形面积：利用叉积的几何意义（有向面积）求解。

$$S=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=0}^{n-1} v_i\times v_{(i+1)\ mod\ n}\right|$$

14. 圆与直线求交点：求圆心到直线的距离 d，根据半径 R 以及 d 求 $\angle AOE$，然后再以 O 为中心顺时针、逆时针分别旋转 $\overrightarrow{OE}$，再利用缩放得出 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$，进而求出 A,B

15. 圆与圆求交点：已知大小半径 R, r，并且可以利用圆心坐标求出圆心距 d，利用圆心距与半径的关系可以先判断两圆关系，若有交点则我们可以利用余弦定理求出 $\angle BAP$，再以 A 为中心旋转、缩放 $\overrightarrow{AB}$ 得到 $\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP}$，进而求出 P, Q。

16. 求两圆公切线：考虑求出两个切点，分两种情况讨论：

(1) AC 长度为两圆半径差，$\angle ACB$ 是直角，进而可知 $\angle BAC$ 大小，将 $\overrightarrow{AB}$ 旋转至 $\overrightarrow{AC}$ 再进行缩放得到切点坐标。另一个切点同理可求。

(2) 由两圆半径比例可得 AO 长度，$\angle ACO$ 是直角且 AC 是半径，因此可求 $\angle OAC$，将 $\overrightarrow{AO}$ 旋转缩放得到 $\overrightarrow{AC}$，求出切点坐标。另一个切点同理可求。

练习题

ZOJ1081 - Points Within 以上第 12 点

Points Within

```
#include <cstdio>
#define C const
#define I inline
struct P
{
    int x, y;
    P() {}
    P(int _x, int _y) { x = _x, y = _y; }
} a[105];
I P operator+(C P &L, C P &R) { return P(L.x + R.x, L.y + R.y); }
I P operator-(C P &L, C P &R) { return P(L.x - R.x, L.y - R.y); }
I int cross(C P &L, C P &R) { return L.x * R.y - L.y * R.x; }
I int dot(C P &L, C P &R) { return L.x * R.x + L.y * R.y; }
I bool check(C P &p, C P &u, C P &v)
{
    return cross(u - p, v - p) == 0 && dot(u - p, v - p) <= 0;
}
int main()
{
    for (int n, m, T = 1; (scanf("%d", &n), n) && scanf("%d", &m); T++)
    {
        if (T > 1) putchar('\n');
        printf("Problem %d:\n", T);
        for (int i = 0; i < n; i++)
            scanf("%d%d", &a[i].x, &a[i].y);
        a[n] = a[0];
        while (m--)
        {
            P p;
            scanf("%d%d", &p.x, &p.y);
            bool flag = false;
            int cnt = 0;
            for (int i = 0; i < n; i++)
```

```
            {
                if (flag = check(p, a[i], a[i + 1])) break;
                int d1 = a[i].y - p.y, d2 = a[i + 1].y - p.y,
                    d = cross(a[i] - p, a[i + 1] - p);
                cnt += (d >= 0 && d1 < 0 && d2 >= 0) || (d <= 0 && d1 >= 0 && d2 < 0);
            }
            puts(flag || (cnt & 1) ? "Within" : "Outside");
        }
    }
    return 0;
}
```

5.3 凸包

平面上有 N 个点，有一个周长最小（面积最小）的凸多边形包含这 N 个点，这个凸多边形就叫做这个点集的凸包。

做法 常用 Graham 扫描法：

(1) 选出最左下角的点（x 坐标最小，如果相同就 y 坐标最小）作为极点，这个点显然在凸包上。

(2) 对其余点进行极角排序，相同时比较到极点的距离（使用叉积实现，免得调用 CRT 的数学库）

(3) 用一个栈来储存凸包上的点，先将极点和极角序最小的两个点入栈。

(4) 按序扫描每个点，检查栈顶的两个点和这个点“是否拐向右”

(5) 如果是的，弹出栈顶元素，回到第四步

(6) 该点入栈，继续循环这个过程。

(7) 没了

练习题

POJ3348 - Cows 模板题，注意公式要背对

Cows

```
#include <cstdio>
#include <algorithm>
const int N = int(1e4 + 5);
struct point
{
    int x, y;
    point() {}
    point(int _x, int _y) : x(_x), y(_y) {}
}a[N], stk[N];
inline point operator+(const point &L, const point &R)
{ return point(L.x + R.x, L.y + R.y); }
```

```
inline point operator-(const point &L, const point &R)
{ return point(L.x - R.x, L.y - R.y); }
inline int cross(const point &L, const point &R) { return L.x * R.y - L.y * R.x; }
inline int dot(const point &L, const point &R) { return L.x * R.x + L.y * R.y; }
inline int len2(const point &u, const point &v)
{
    point p = u - v;
    return p.x * p.x + p.y * p.y;
}
inline bool cmp1(const point &L, const point &R)
{ return L.x < R.x || (L.x == R.x && L.y < R.y); }
inline bool cmp2(const point &L, const point &R)
{
    int det = cross(L - a[0], R - a[0]);
    return det != 0 ? det > 0: len2(L, a[0]) < len2(R, a[0]);
}
int main()
{
    int n;
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; i++)
        scanf("%d%d", &a[i].x, &a[i].y);
    std::swap(*std::min_element(a, a + n, cmp1), a[0]);
    std::sort(a + 1, a + n, cmp2);
    int top = 0;
    stk[top++] = a[0];
    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        while (top >= 2 && cross(a[i] - stk[top - 1], stk[top - 1] - stk[top - 2]) >= 0)
            top--;
        stk[top++] = a[i];
    }
    stk[top] = stk[0];
    int res = 0;
    for (int i = 0; i < top; i++)
        res += cross(stk[i], stk[i + 1]);
    printf("%d", res / 100);
    return 0;
}
```

5.4 旋转卡壳

你知道吗？旋转卡壳有 16 种读法。

首先有个很直观的结论：最远点对的两点一定在凸包上。我们的思路就是枚举凸包上的所有边，对每一条边找出凸包上离该边最远的顶点，计算这个顶点到该边两个端点的距离，并记录最大的值。当我们逆时针枚举边的时候，最远点的变化也是逆时针的，这样就可以不用从头计算最远点，而可以紧接着上一次的最远点继续计算，于是我们得到了 $O(n)$ 的算法。

练习题

POJ2187 - Beauty Contest 模板题，注意符号要写对

Beauty Contest

```
#include <cstdio>
#include <algorithm>
inline int max(int a, int b) { return a > b ? a : b; }
const int N = 50005;
struct point
{
    int x, y;
    point() {}
    point(int _x, int _y) : x(_x), y(_y) {}
}a[N], stk[N];
#define pArg(x) const point &x
inline point operator+(pArg(l), pArg(r)) { return point(l.x + r.x, l.y + r.y); }
inline point operator-(pArg(l), pArg(r)) { return point(l.x - r.x, l.y - r.y); }
inline int cross(pArg(l), pArg(r)) { return l.x * r.y - l.y * r.x; }
inline int dot(pArg(l), pArg(r)) { return l.x * r.x + l.y * r.y; }
inline int len2(pArg(p)) { return p.x * p.x + p.y * p.y; }
inline bool cmp1(pArg(l), pArg(r)) { return l.x < r.x || (l.x == r.x && l.y < r.y); }
inline bool cmp2(pArg(l), pArg(r))
{
    int det = cross(l - a[0], r - a[0]);
    return det != 0 ? det > 0 : len2(l - a[0]) < len2(r - a[0]);
}
#define nxt(x) ((x) == n - 1 ? 0 : (x) + 1)
#define area(p, u, v) cross(u - p, v - p)
int main()
{
    int n;
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; i++)
        scanf("%d%d", &a[i].x, &a[i].y);
    std::swap(a[0], *std::min_element(a, a + n, cmp1));
    std::sort(a + 1, a + n, cmp2);
    int top = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        while (top >= 2 && cross(a[i] - stk[top - 1], stk[top - 1] - stk[top - 2]) >= 0)
            top--;
        stk[top++] = a[i];
    }
    stk[top] = stk[0];
    int res = 0;
    if (top == 2)
        res = len2(stk[1] - stk[0]);
    else for (int i = 0, j = 2; i < n; i++)
    {
        while (nxt(j) != i &&
               area(stk[j], stk[i], stk[i + 1]) <=
               area(stk[j + 1], stk[i], stk[i + 1]))
            j = nxt(j);
```

```
49          res = max(res, max(len2(stk[j] - stk[i]), len2(stk[j] - stk[i + 1])));
50      }
51      printf("%d", res);
52      return 0;
53  }
```

6 day6 网络流

6.1 最大流/最小割

我不想抄讲义了，就通俗易懂的说一下。每次找一条从源点到汇点的可行流，增广，直到源点和汇点不联通。就这样。Dinic 和 ISAP 都是最短增广路算法，不同的就是维护增广路的方式。

Dinic 虽然我并不使用 Dinic，不过，我认为研究这种算法也是有其必要性的。比如可以加深对费用流的理解（滑稽）。

POJ1273 - Drainage Ditches (Dinic)

```
1   #include <cstdio>
2   #include <cstring>
3   inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
4   const int inf = 0x3f3f3f3f;
5   int adj[205], nxt[405], to[405], cap[405], cur[205], dis[405], ecnt;
6   inline void addEdge_impl_(int f, int t, int c)
7   {
8       nxt[ecnt] = adj[f];
9       adj[f] = ecnt;
10      to[ecnt] = t;
11      cap[ecnt] = c;
12      ecnt++;
13  }
14  inline void addEdge(int f, int t, int c)
15  {
16      addEdge_impl_(f, t, c);
17      addEdge_impl_(t, f, 0);
18  }
19  int n, m;
20  bool bfs()
21  {
22      static int que[205];
23      for (int i = 1; i <= n; i++)
24          cur[i] = adj[i], dis[i] = inf;
25      int len = dis[1] = 0;
26      que[len++] = 1;
27      for (int i = 0; i < len; i++)
28          for (int e = adj[que[i]]; ~e; e = nxt[e])
29              if (cap[e] && dis[to[e]] > dis[que[i]] + 1)
30                  dis[que[len++] = to[e]] = dis[que[i]] + 1;
31      return dis[n] < inf;
32  }
33  int dinic(const int u, int rest)
```

```
34 {
35     if (u == n) return rest;
36     int flow = 0;
37     for (int e = cur[u], curFlow; rest && ~e; e = nxt[e])
38         if (cur[u] = e, cap[e] && dis[u] == dis[to[e]] - 1)
39             if ((curFlow = dinic(to[e], min(cap[e], rest))))
40                 rest -= curFlow, flow += curFlow,
41                 cap[e] -= curFlow, cap[e ^ 1] += curFlow;
42     if (rest) dis[u] = inf;
43     return flow;
44 }
45 int main()
46 {
47     while (~scanf("%d%d", &m, &n))
48     {
49         ecnt = 0;
50         memset(adj, -1, sizeof(adj));
51         for (int i = 0, x, y, z; i < m; i++)
52             scanf("%d%d%d", &x, &y, &z), addEdge(x, y, z);
53         int ans = 0;
54         while (bfs()) ans += dinic(1, inf);
55         printf("%d\n", ans);
56     }
57     return 0;
58 }
```

对这段代码简单的说两句。值得注意的有这么几点，一是`cur[u]`的使用，在单次增广时可以避免无谓的探查；二是 40，41 行在没有把以上配额用光之前没有返回可以造成多路增广的情况来增加效率；三是第 42，43 行的判断，如果所有子节点的可用流之和都不能满足当前点的配额，这个点就没有访问的必要了。我想大概就这么些。

ISAP 我经常使用 ISAP，因为据说这玩意更稳定，由于我的脸黑，我怕碰上一些恶心的数据卡掉 Dinic，并且目前没有一道普通网络流的题能卡掉 ISAP。以下还是上面那道题。

POJ1273 - Drainage Ditches (ISAP)

```
1  #include <cstdio>
2  #include <cctype>
3  #include <cstring>
4  inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
5  inline void read(int &x)
6  {
7      int ch = x = 0;
8      while (!isdigit(ch = getchar()));
9      for (; isdigit(ch); ch = getchar()) x = x * 10 + ch - '0';
10 }
11 const int N = 205, inf = 0x3f3f3f3f;
12 int adj[N], nxt[N << 1], to[N << 1], cap[N << 1], cur[N], cnt[N], dis[N], fa[N], ecnt;
13 inline void addEdge_impl_(int f, int t, int c)
14 {
15     nxt[ecnt] = adj[f];
16     adj[f] = ecnt;
17     to[ecnt] = t;
```

```
    cap[ecnt] = c;
    ecnt++;
}
inline void addEdge(int f, int t, int c)
{
    addEdge_impl_(f, t, c);
    addEdge_impl_(t, f, 0);
}
int ISAP(int S, int T)
{
    int flow = 0;
    for (int i = 0; i < N; i++) dis[i] = N - 1;
    int len = 0, x;
    static int que[N];
    dis[que[len++] = T] = 0;
    for (int i = 0; i < len; i++)
        for (int e = adj[x = que[i]]; ~e; e = nxt[e])
            if (cap[e ^ 1] && dis[to[e]] > dis[x] + 1)
                dis[que[len++] = to[e]] = dis[x] + 1;
    memset(cnt, 0, sizeof(cnt));
    for (int i = 0; i < N; i++) cur[i] = adj[i], cnt[dis[i]]++;
    x = S;
    while (dis[S] < N - 1)
    {
        if (x == T)
        {
            int curFlow = inf;
            for (x = T; x != S; x = to[fa[x] ^ 1]) curFlow = min(curFlow, cap[fa[x]]);
            for (x = T; x != S; x = to[fa[x] ^ 1]) cap[fa[x]] -= curFlow, cap[fa[x] ^ 1]
                += curFlow;
            flow += curFlow, x = S;
        }
        bool needRetreat = true;
        for (int e = cur[x]; needRetreat && ~e; e = nxt[e])
            if (cur[x] = e, cap[e] && dis[x] == dis[to[e]] + 1)
                needRetreat = false, fa[x = to[e]] = e;
        if (needRetreat)
        {
            int nd = N - 2;
            for (int e = adj[x]; ~e; e = nxt[e])
                if (cap[e]) nd = min(nd, dis[to[e]]);
            if (--cnt[dis[x]] == 0) break;
            ++cnt[dis[x] = nd + 1];
            cur[x] = adj[x];
            if (x != S) x = to[fa[x] ^ 1];
        }
    }
    return flow;
}
int main()
{
    int n, m;
```

```
69      while (~scanf("%d%d", &m, &n))
70      {
71          memset(adj, -1, sizeof(adj)), ecnt = 0;
72          for (int i = 0, x, y, z; i < m; i++)
73              scanf("%d%d%d", &x, &y, &z), addEdge(x, y, z);
74          printf("%d\n", ISAP(1, n));
75      }
76  }
```

重新写了一遍，1A，我很高兴。ISAP 比 Dinic 要注意的点真是多多了，注意第 58 行的 break，这可以大大加速，因为此时源点和汇点已经不会联通了，继续做下去无益。反正我觉得 ISAP 要是能一遍写出来的话是比 Dinic 好的。

6.2 最小费用最大流

每次找到一条最短的路增广，大体上与 Dinic 完全相同，不过总感觉很奇怪，包括没有了 cur，多出了 vis 等一些不同，并且不加就会爆炸。

POJ2135 - Farm Tour

```
1   #include <cstdio>
2   #include <cstring>
3   inline int min(int a, int b) { return a < b ? a : b; }
4   const int inf = 0x3f3f3f3f, N = 1005, M = 50005;
5   int adj[N], nxt[M], to[M], cap[M], cost[M], dis[N], ecnt, idx;
6   inline void addEdge_impl_(int f, int t, int c, int w)
7   {
8       nxt[ecnt] = adj[f];
9       adj[f] = ecnt;
10      to[ecnt] = t;
11      cap[ecnt] = c;
12      cost[ecnt] = w;
13      ecnt++;
14  }
15  inline void addEdge(int f, int t, int c, int w)
16  {
17      addEdge_impl_(f, t, c, w);
18      addEdge_impl_(t, f, 0, -w);
19  }
20  int T;
21  bool bfs(int S)
22  {
23      memset(dis, inf, sizeof(dis)), idx++;
24      static int que[N << 1];
25      static bool inq[N];
26      int len = 0;
27      dis[que[len++] = S] = 0;
28      for (int i = 0; i < len; inq[que[i++]] = false)
29          for (int e = adj[que[i]]; ~e; e = nxt[e])
30              if (cap[e] && dis[to[e]] > dis[que[i]] + cost[e])
31              {
32                  dis[to[e]] = dis[que[i]] + cost[e];
33                  if (!inq[to[e]]) que[len++] = to[e];
```

```
            }
    return dis[T] < inf;
}
int dfs(int x, int rest)
{
    static int vis[N];
    if (x == T) return rest;
    vis[x] = idx;
    int flow = 0;
    for (int e = adj[x], curFlow; rest && ~e; e = nxt[e])
        if (vis[to[e]] != idx && cap[e] && dis[to[e]] == dis[x] + cost[e])
            if (bool(curFlow = dfs(to[e], min(cap[e], rest))))
                rest -= curFlow, flow += curFlow, cap[e] -= curFlow,
                cap[e ^ 1] += curFlow;
    return flow;
}
int main()
{
    memset(adj, -1, sizeof(adj));
    int n, m;
    scanf("%d%d", &n, &m);
    T = n + 1;
    for (int i = 0, x, y, z; i < m; i++)
        scanf("%d%d%d", &x, &y, &z), addEdge(x, y, 1, z), addEdge(y, x, 1, z);
    addEdge(0, 1, 2, 0);
    addEdge(n, T, 2, 0);
    int ans = 0;
    while (bfs(0)) ans += dis[T] * dfs(0, inf);
    printf("%d", ans);
    return 0;
}
```

后记 我多次尝试直接移植 dinic 的模板来解决最小费用最大流问题，不过最后都只是收获了一个个 RE，看来直接照抄 dinic 的代码是不行的，仍然要加上 vis 数组之类的东西来保证不会爆栈（虽然我觉得我的移植代码也不会爆栈），如果哪名巨佬在 Review 我的代码时发现了方法，请不吝告知，蒟蒻万分感谢。

7 day7 XJB 算法合集 1

XJB 算法的时间复杂度均为 O(跑得过)，空间复杂度均为)(开的下)。

7.1 二分与三分

二分 玄学算法之一，什么都可以往上套，会使时间复杂度乘上 $\log n$。但是二分法仅适用于求解具有单调性的问题，所以做题前要大胆猜想，小（bu）心（yong）求证。

二分的写法

整数二分的写法 我被 STL 荼毒了

```
while (L < R) check(m = (L + R) >> 1) ? L = m + 1 : R = m;
```

注意答案的取值是 L 还是 R 还是其他什么的，这是一个大问题，因题而异，不可描述。

实数二分的写法

```
while (R - L > eps) check(m = (L + R) / 2) ? L = m : R = m;
```

二分法常见模型

二分答案 最小值最大（或是最大值最小）问题，这类双最值问题常常使用二分法求解，也就是确定答案后，配合贪心或 DP 等其他算法来检验这个答案是否合法，将最优化问题转变为判定性问题。例如：将长度为 n 的序列 a_i 分成最多 m 个连续段，求所有分法中每段和的最大值最小能是多少。

二分查找 具有单调性的布尔表达式求解分界点，比如在有序数列中求解数字 x 的排名。

二分导数代替三分 有时对于一些单峰函数，我们可以通过二分导函数的方法求解函数极值，这样使用时通常定义域为整数域比较方便，因为此时 dx 可以直接取整数 1。

二分的例题 我讨厌奶牛。

POJ2456 - Aggressive cows

```
#include <cstdio>
#include <algorithm>
int n, m, a[100005];
bool check(int d)
{
    int cow = 0, nxt = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        if (a[i] >= nxt)
            cow++, nxt = a[i] + d;
    return cow >= m;
}
int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 0; i < n; i++) scanf("%d", a + i);
    std::sort(a, a + n);
    int L = 0, R = 0x3f3f3f3f, mid;
    while (L < R)
        check(mid = (L + R) >> 1) ? L = mid + 1 : R = mid;
    printf("%d", L - 1);
    return 0;
}
```

你看，这次的答案就是`L - 1`。

三分 三分法适用于求解单峰函数的极值问题。二次函数就是一个典型的单峰函数。三分法与二分法一样，它会不断缩小答案所在的求解区间。二分法缩短区间利用的原理是函数的单调性，而三分法利用的则是函数的单峰性。

设当前求解的区间为 $[l,r]$，令 $m_1 = l + \frac{r-l}{3}, m_2 = r - \frac{r-l}{3}$，接着我们计算这两个点的函数值 $f(m_1), f(m_2)$ 之后我们将两点中函数值更优的那个点称为好点（若计算最大值，则 f 更大的那个点就为好点，计算最小

值同理），而函数值较差的那个点称为坏点。并且最优点与好点会在坏点同侧，即我们的求解区间由 $[l,r]$ 变为了 $[l,m_2]$ 或 $[m_1,r]$。因此根据这个结论我们可以不停缩短求解区间，直至可以得出近似解。

三分的写法 以求上凸单峰函数的最大值为例，三分的代码：

```
while (R - L > eps) f(m1 = L + (R - L) / 3) < f(m2 = R - (R - L) / 3) ? L = m1 : R = m2;
```

三分的例题

$$S=\pi rl+\pi r^2, h=\sqrt{l^2-r^2}, V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

若确定了底面半径，则其他值都可以依次计算出来，同时根据上面几个有关圆锥的公式也可以看出，V 是关于 r 的一个单峰函数，因此三分底面半径求解

POJ3737 - UmBasketella

```cpp
#include <cmath>
#include <cstdio>
const double pi = acos(-1.0), eps = 1e-6;
double S;
inline double calc(double r)
{
    double l = (S - r * r) / r;
    double h = sqrt(l * l - r * r);
    return pi * r * r * h / 3;
}
int main()
{
    while (~scanf("%lf", &S))
    {
        S /= pi;
        double l = 0, r = sqrt(S), m1, m2, d;
        while ((d = r - l) > eps)
            calc(m1 = l + d / 3) < calc(m2 = r - d / 3) ? l = m1 : r = m2;
        l = (S - r * r) / r;
        double h = sqrt(l * l - r * r);
        double V = pi * r * r * h / 3;
        printf("%.2f\n%.2f\n%.2f\n", V, h, r);
    }
    return 0;
}
```

7.2 Hash

人品算法，没有什么意思，附一个 UOJ 模数：$998244353=7*17*2^{23}+1$

7.3 二分图匹配

给定一个二分图 G，在 G 的一个子图 M 中，M 的边集 E 中的任意两条边都不依附于同一个顶点，则称 M 是一个匹配。在二分图 G 中所有的匹配 M 中，边数最多的匹配，称为二分图的最大匹配。

求解二分图最大匹配

使用网络流算法 实际上，可以将二分图最大匹配问题看成是最大流问题的一种特殊情况。首先：建立源点 s 和汇点 t，从 s 向 X 集合的所有顶点引一条边，容量为 1，从 Y 集合的所有顶点向 t 引一条边，容量为 1。然后将二分图的所有边看成是从 X_i 到 Y_j 的一条有向边，容量为 1。求最大匹配就是求 s 到 t 的最大流。

使用匈牙利算法： 利用所有边的容量都是 1 以及二分图的性质，我们还可以将二分图最大匹配算法更简单地实现：
假设 M 是二分图 G 的一个匹配，则称 M 中边所依附的顶点是已匹配的顶点，若 P 是图 G 中一条连通两个未匹配顶点的路径，并且不属于 M 的边和属于 M 的边（即待匹配的边和已匹配边）在 P 上交替出现，则称 P 为相对于 M 的一条增广路径。如果我们将 P 的路径看着边的集合，我们令 $M' = M \, xor \, P$，则 M' 是比 M 多一条边的匹配，即更大的匹配 M' 包含了或者属于 M，或者属于 P，但不同时属于 M 和 P 的边。当找不到增广路的时候，则这时候的 M 是最大匹配。

例题 把光束当作图的顶点，小行星当作连接对应光束的边。

POJ3041 - Asteroids

```cpp
#include <cstdio>
int adj[505], nxt[10005], to[10005], ecnt, mate[505], vis[505], idx, n, m;
inline void addEdge(int f, int t)
{
    nxt[++ecnt] = adj[f], adj[f] = ecnt, to[ecnt] = t;
}
bool hungry(int u)
{
    for (int e = adj[u]; e; e = nxt[e])
        if (!mate[to[e]])
            return mate[to[e]] = u, true;
    for (int e = adj[u]; e; e = nxt[e])
        if (vis[to[e]] != idx)
        {
            vis[to[e]] = idx;
            if (hungry(mate[to[e]])) return mate[to[e]] = u, true;
        }
    return false;
}
int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 0, x, y; i < m; i++)
        scanf("%d%d", &x, &y), addEdge(x, y);
    int ans = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        idx++;
        if (hungry(i)) ans++;
    }
    printf("%d", ans);
    return 0;
}
```

7.4 迭代加深搜索

通过搜索的办法来判断是否有不超过某个 x 的解。把 x 从 0 开始每次增加 1，那么首次找到解时的 x 便是最优解。这种搜索就被称为迭代加深搜索 (IDDFS)。如果加上状态 v 到目标状态的距离下界的估价函数 $h^*(v)$ 进行提前剪枝优化后的算法则称为 IDA*。但要保证 $h^*(v)$ 的值小于真实的值，否则会导致错误的剪枝。

例题 估价函数：还没有走到正确位置上的棋子的个数

BZOJ1085 - 骑士精神

```
#include <cstdio>
template <typename T>
inline void swap(T &a, T &b)
{
    T t = a;
    a = b;
    b = t;
}
const char des[5][5] = { {'1', '1', '1', '1', '1'},
                         {'0', '1', '1', '1', '1'},
                         {'0', '0', '*', '1', '1'},
                         {'0', '0', '0', '0', '1'},
                         {'0', '0', '0', '0', '0'} };
const int dx[] = { 1, 2, 2, 1, -1, -2, -2, -1 };
const int dy[] = { -2, -1, 1, 2, 2, 1, -1, -2 };
const int Move[8][2] = { {1, -2}, {2, -1}, {2, 1}, {1, 2}, {-1, 2}, {-2, 1}, {-2, -1},
    {-1, -2} };
char cur[5][5];
#define H()                                                     \
    ((cur[0][0] != des[0][0]) + (cur[0][1] != des[0][1]) + \
     (cur[0][2] != des[0][2]) + (cur[0][3] != des[0][3]) + \
     (cur[0][4] != des[0][4]) + (cur[1][0] != des[1][0]) + \
     (cur[1][1] != des[1][1]) + (cur[1][2] != des[1][2]) + \
     (cur[1][3] != des[1][3]) + (cur[1][4] != des[1][4]) + \
     (cur[2][0] != des[2][0]) + (cur[2][1] != des[2][1]) + \
     (cur[2][2] != des[2][2]) + (cur[2][3] != des[2][3]) + \
     (cur[2][4] != des[2][4]) + (cur[3][0] != des[3][0]) + \
     (cur[3][1] != des[3][1]) + (cur[3][2] != des[3][2]) + \
     (cur[3][3] != des[3][3]) + (cur[3][4] != des[3][4]) + \
     (cur[4][0] != des[4][0]) + (cur[4][1] != des[4][1]) + \
     (cur[4][2] != des[4][2]) + (cur[4][3] != des[4][3]) + \
     (cur[4][4] != des[4][4]) - 1)
inline bool can(int x, int y)
{
    return 0 <= x && x <= 4 && 0 <= y && y <= 4;
}
int DEP;
bool dfs(int x, int y, int step)
{
    if (step == DEP) return H() == -1;
    if (H() + step > DEP) return false;
    for (int i = 0, nx, ny; i < 8; i++)
```

```
        if (can(nx = x + dx[i], ny = y + dy[i]))
        {
            swap(cur[x][y], cur[nx][ny]);
            if (dfs(nx, ny, step + 1)) return true;
            swap(cur[x][y], cur[nx][ny]);
        }
    return false;
}
int main()
{
    int T;
    scanf("%d", &T);
    while (T--)
    {
        for (int i = 0; i < 5; i++)
            scanf("%s", cur[i]);
        int si = -1, sj = -1;
        for (int i = 0; i < 5; i++)
            for (int j = 0; j < 5; j++)
                if (cur[i][j] == '*')
                    si = i, sj = j;
        for (DEP = 0; DEP <= 15; DEP++)
            if (dfs(si, sj, 0))
                break;
        printf("%d\n", DEP > 15 ? -1 : DEP);
    }
    return 0;
}
```

7.5 折半搜索/MITM

从初始状态与目标状态同时出发进行搜索

有向图模型 考虑这样一个问题：给定一张有向图 G, 图中所有边的长度均为 1，现在求从图中的点 A 到点 B 之间有多少条长度为 L 的不同的路径。两条路径不同当且仅当某一步它们所走的边不相同。我们设图中点的最大出度为常数 D。

朴素的想法是我们从 A 开始 DFS 走 L 步，若最后停在了 B 点则我们可以记录进答案。这个做法的复杂度是 $O(D^L)$。

我们换个角度考虑，从点 A 到点 B 长度为 L 的路径，可以看做是点 A 到某点 u 长度为 $\frac{L}{2}$ 的路径加上点 u 到点 B 长度为 $\frac{L}{2}$ 的路径。

从点 A 正向 DFS$\frac{L}{2}$ 步，对每个点记 P_u 表示点 A 正向走到它的不同路径数。

从点 B 反向 DFS$\frac{L}{2}$ 步，对每个点记 Q_u 表示点 B 反向走到它的不同路径数。

根据加法原理与乘法原理以及上面的分析我们可知最后的答案为：$\sum_u P_u \cdot Q_u$

容易发现，这个做法的复杂度就降为了 $O(D^{\frac{L}{2}})$。

这就是常用折半搜索的第一种模型，即有向图模型，从这个模型的做法我们也能看出，折半搜索是一种双向搜索。

方程模型 考虑这样一个问题,给定一个整数的集合 S,求有多少有序六元组 (a,b,c,d,e,f) 满足 $a,b,c,d,e,f \in S, d \neq 0$ 且 $\frac{ab+c}{d} - e = f, |S| \leq 100$。

朴素的算法是 $O(|S|^6)$ 枚举，并按上述式子计算，判定是否符合条件。
我们将原式移项为 $ab+c=(e+f)\times d$，此时方程两边都有 3 个元素，因此我们考虑先 $O(|S|^3)$ 的时间枚举左边的三个元素，算出结果，再用 $O(|S|^3)$ 的时间枚举右边的三个元素，也算出对应的结果，那么我们现在的问题是给出两个多重数集，问有多少个数同时在两个多重数集中出现了。这个问题可以使用哈希表来解决。这里我们就简单地认为哈希表插入与查询的复杂度均为 $O(1)$。那么这个算法的总时空复杂度均为 $O(|S|^3)$。
这就是折半搜索第二种常用的模型，方程模型，其核心就是通过移项，将方程两边的变量数进行平衡，之后再暴力搜索每一边，所得到的的结果利用数据结构进行存储查询，或是利用其他的一些算法进行合并，从而优化复杂度。

算法总结 通常折半搜索能将时间复杂度从 $O(D^L)$ 变为 $O(D^{\frac{L}{2}}\times$ 合并复杂度$)$。尽管时间复杂度仍然是指数级别，但指数减小一半，在一些问题中就能使得我们在时限内出解。并且该算法实现简单，算法使用的搜索过程与朴素算法无异，合并时也只需要用到哈希表等简单的数据结构。