Recopilacion-de-preguntas-para-p...

Anónimo

Matemática Discreta

1º Grado en Ingeniería del Software

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universidad de Málaga

Tema 1

Inducción

2. (Hasta 2 puntos) Usa el Principio de Inducción para demostrar que $a_n = 2^n - 3\cdot(-1)^n - n$ es la solución de la recurrencia:

$$\begin{cases} a_0 = -2, \ a_1 = 4 \\ a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2n - 5, \ n \geq 2 \end{cases}$$

1. (Hasta 2 ptos.) Usa inducción para demostrar que $5^n > 2^n + 3^n$ para todo $n \geq 2$.

2. (Hasta 3 puntos) Demuestre por inducción la siguiente igualdad

$$\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$$

2. (Hasta 2.5 puntos) Demuestra por inducción que si m es un número impar, entonces $1+7^m$ es múltiplo de 8.

1. (Hasta 1,6 pt.) Sea la sucesión $\{u_n\}$ definida

$$\begin{cases} u_0 = 11 \quad u_1 = 23 \\ u_n = u_{n-1} + 6u_{n-2} \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

Usa el principio de inducción completa para demostrar que $u_n = 3^{n+2} + 2(-2)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$

a) (Hasta 0.5 pt.) Demuestra la siguiente igualdad para todo $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(j-1)j = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

Congruencias lineares

d) Los siguientes sistemas tienen solución:

☐ $\begin{cases} 2x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{15} \\ x \equiv 11 \pmod{21} \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ 3x \equiv 2 \pmod{15} \\ x \equiv 11 \pmod{21} \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{15} \\ 4x \equiv 2 \pmod{21} \end{cases}$

c) Indica cuál o cuáles de los siguientes sistemas tienen solución:

☐ $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 8 \pmod{15} \\ x \equiv 8 \pmod{10} \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x \equiv 2 \pmod{6} \\ 3x \equiv 8 \pmod{15} \\ 4x \equiv 8 \pmod{10} \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x \equiv 2 \pmod{6} \\ 4x \equiv 8 \pmod{15} \\ 3x \equiv 8 \pmod{10} \end{cases}$

4. (Hasta 1,5 ptos.) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} 9x &\equiv 2 \pmod{10} \\ 9x &\equiv 12 \pmod{15} \end{aligned}$$

6. (Hasta 1,2 pt.) Sea el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{100} \\ x \equiv 23 \pmod{56} \end{cases}$$

- Estudia si tiene solución.
- En caso afirmativo, resuélvelo.

4. (Hasta 1.8 puntos) Demuestra que un número es divisible por 13 si y solo si, al restar al número sin la cifra de las unidades, 9 veces las unidades, obtenemos un número divisible por 13.
(Por ejemplo, 351 es divisible por 13, ya que $35 - 9 \cdot 1 = 26 = 2 \cdot 13$.)

2. (Hasta 2 ptos.) Demuestra que un número es divisible por 7 si y solo si al restar al número sin la cifra de las unidades, el doble de la cifra de las unidades, el resultado es divisible por 7.
(Por ejemplo: 378 es divisible por 7, ya que $37 - 2 \cdot 8 = 21$ y 21 es múltiplo de 7.)

1. (Hasta 4 puntos) Estamos empaquetando un número de libros superior a 100 e inferior a 125. Si intentamos guardarlos en paquetes de 5 sobran 3. Por otro lado, si el número de libros se cuadruplicase, los podríamos guardar en paquetes de 6 y sobrarían 2. ¿Cuántos libros hay en total?

4. (Hasta 2.5 puntos) Un distribuidor de televisores efectúa un pedido de entre mil y mil quinientos. El fabricante se los envía en contenedores completos con capacidad para sesenta y ocho unidades cada uno. El distribuidor los reparte a los diferentes puntos de venta en furgonetas con capacidad para veinte unidades, quedando treinta y dos sin repartir en el almacén. ¿Cuántos televisores pidió el distribuidor a la fábrica?

4. (Hasta 0,8 pt.) Se sabe que el número $3x2645$ es múltiplo 13. Usa la definición de congruencia y los teoremas de aritmética modular para determinar el dígito x.

b) Estudia si el siguiente sistema de congruencias tiene solución y, en caso afirmativo, resuélvelo.

$$\begin{cases} x \equiv 44^{27} \pmod{21} \\ 5x - 32 \equiv 23 \pmod{24} \\ 23x \equiv 1 \pmod{30} \end{cases}$$

c) (Hasta 0.6 pt.) Estudia si el siguiente sistema de congruencias tiene solución y, en caso afirmativo, resuélvelo.

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{15} \\ 2x + 4 \equiv -1 \pmod{21} \\ 3x \equiv 10 \pmod{35} \end{cases}$$

c) Si $x \equiv 2 \pmod{3}$ y $x \equiv 3 \pmod{5}$, ¿cuál es el resto de dividir x entre 15?

Inversos Modulares

c) Las siguientes igualdades son ciertas:

☐ $[12]_{15}^{-1} = [12^{14}]_{15}$ ☐ $[20]_{21}^{-1} = [20]_{21}$ ☐ $[9]_{20}^{-1} = [-11]_{20}$ ☐ $[9]_{21}^{-1} = [12]_{21}$

3. (Hasta 2 ptos.) Calcula, si existen, el inverso de 57 módulo 46 y el inverso de 46 módulo 57.

5. (Hasta 0,8 pt.) Justifica si existe el inverso de 7 módulo 25 y el inverso de 17 módulo 51. En caso afirmativo, hállalo.

Ecuaciones diofanticas

b) Las siguientes ecuaciones diofánticas tienen solución:

☐ $42x + 105y = 21$ ☐ $144x + 702y = 9$ ☐ $20x - 56y = 8$ ☐ $42x + 105y = -21$

b) Indica cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones diofánticas tiene solución:

☐ $15x - 9y = -1$ ☐ $36x + 24y = 6$ ☐ $15x + 18y = 9$

3. (Hasta 2.5 puntos) Encuentra, si existen, todas las soluciones positivas de la ecuación diofántica

$$46x + 62y = 494$$

3. (Hasta 2 puntos) Enviamos por correo dos tipos de paquetes A y B. Enviar un paquete de tipo A cuesta 15 céntimos más que enviar un paquete de tipo B. Sabiendo que hemos enviado más paquetes de tipo B que de tipo A, que en total hemos enviado 12 paquetes y que nos han cobrado un total de 13.20 €, calcula cuantos paquetes hemos enviado de cada tipo y cuánto cuesta enviar cada tipo de paquete.

3. (Hasta 0,8 pt.) Justifica cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones diofánticas tiene solución:

i) $51x + 17y = 1$ *ii*) $11x - 4y = 1$ *iii*) $100x + 56y = 88$

Divisores

a) Las siguientes afirmaciones son ciertas:

☐ Si a es divisor de c y b es divisor de c entonces ab divide a c.

☐ Si a, b, s, t son enteros tales que $a \cdot s + b \cdot t = 3$, entonces $\text{mcd}(a, b) = 3$

☐ Si $\text{mcd}(a \cdot b, c) = 1$, entonces $\text{mcd}(a, c) = 1 = \text{mcd}(b, c)$

3. (Hasta 3 puntos) Determine el resto de dividir 113^{34291} entre 5.

5. (Hasta 1,5 ptos.) ¿Cuál es el resto que queda al dividir 4953^{4287} entre 49?

b) Demuestra que $2^{50} + 3^{50}$ es múltiplo de 13.

2. (Hasta 0,8 pt.) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $mcd(a, b) = 1$. Usa la identidad de Bezout para demostrar el siguiente enunciado:

Si a es un divisor de c y b es un divisor de c, entonces $a \cdot b$ es un divisor de c.

b) (Hasta 0.5 pt.) Demuestra que el número $3333^{7777} + 7777^{3333}$ es múltiplo de 5.

Tema 2

Conjuntos

5. (Hasta 0.75 puntos) Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Demuestra la siguiente igualdad:

$$(A \cup B) - (\overline{A} \cap C) = A \cup (B - C)$$

6. (Hasta 3 ptos.) Demuestra que la siguiente igualdad es válida para cualesquiera conjuntos A, B y C:

$$(B - (C - A)) \cup (A \cap C) = (B - C) \cup (A \cap (B \cup C))$$

5. (Hasta 2 puntos) Sean A ,B y C tres conjuntos cualesquiera. ¿Es cierto que: si $A \cup B \subseteq A \cup C$, entonces $B \subseteq C$?

7. (Hasta 1.5 puntos) Una multinacional tiene 10000 empleados de los cuales 5600 hablan inglés, 4400 hablan francés y 2200 castellano. Se sabe que cualquiera de ellos habla, al menos, uno de los tres idiomas, que 1600 hablan inglés y francés, 200 francés y castellano y 100 hablan los tres idiomas.

   a) Halla cuántos empleados hablan únicamente castellano.

   b) Si el director general habla inglés y castellano, ¿con cuántos empleados puede comunicarse sin necesidad de intérprete?

a) Indica cuál o cuáles de las siguientes relaciones entre conjuntos, son correctas:

☐ $\{a, b\} \subseteq \{a, \{b\}\}$ ☐ $\{a\} \subseteq \{\varnothing, \{a\}\}$ ☐ $a \in \{\{a, b\}, c\}$

7. (Hasta 0,8 pt.) Demuestra que las siguientes igualdades son válidas para cualesquiera conjuntos A, B y C:

   a) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ b) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$ c) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$

2. (Hasta 1.4 puntos)

   a) En el universo $\mathcal{U}$ de los números enteros tales que $1 \leq n \leq 24$ se consideran los conjuntos

   $A = \{n \in \mathcal{U} \mid n \text{ divide a } 24\}$; $B = \{n \in \mathcal{U} \mid n \text{ es primo }\}$; $C = \{n \in \mathcal{U} \mid n \text{ es par }\}$

   Detemine los siguientes conjuntos:

   (i) $A \cap B$; (ii) $(A \cup B) \cap C$; (iii) $\overline{A \cup B}$

Recuento

8. (Hasta 5 puntos) Un pequeño editor acaba de lanzar 3 nuevos títulos y para promocionarlos, va a enviar a cada uno de sus 9 mejores clientes un ejemplar de uno de esos libros.

   a) ¿De cuántas maneras puede enviarlos si tiene suficientes ejemplares de cada título?

   b) ¿De cuántas maneras puede enviarlos si tiene suficientes ejemplares de cada uno y quiere enviar al menos uno de cada título?

   c) ¿De cuántas maneras puede enviarlaos si solo tiene 3 ejemplares de cada título?

   d) ¿De cuántas maneras puede enviarlos si consideramos que los clientes son indistiguibles y tiene suficientes ejemplares de cada título?

   e) ¿De cuántas maneras puede enviarlos si consideramos que los clientes son indistiguibles pero de dos de los títulos solo tiene cuatro ejemplares de cada uno?

5. (Hasta 5 puntos) Rafa Nadal quiere colocar de forma secuencial sus 21 trofeos de torneos de Grand Slam en una gran estantería de su academia. Desde el primero que obtuvo en 2005, ha conseguido en total 13 copas de Roland Garros, 2 de Wimbledon, 4 del Open de Estados Unidos y 2 del Open de Australia. Suponiendo que los trofeos dentro de cada torneo son indistinguibles, se pide:

   a) ¿De cuántas formas diferentes los puede ordenar?

   b) ¿Cuántas ordenaciones no tienen las 2 de las de Wimbledon juntas ni las 2 de las del Open de Australia juntas?

   c) Dado que estamos en 2022, demuestre que ha habido seguro un año en el que Rafa ha conseguido al menos dos trofeos.

Recurrencias

9. (Hasta 1.5 puntos) Resuelve la recurrencia: $\begin{cases} a_0 = 2, \quad a_1 = 3 \\ a_{n+2} = a_n + 3 \end{cases}$

6. (Hasta 3 puntos) Halle una fórmula explícita para el término general de la sucesión:

$$u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_2 = 0 \text{ y } u_n = 3u_{n-2} + 2u_{n-3} \text{ para } n \geq 3.$$

Funciones

6. (Hasta 1.25 puntos) Sea el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y las funciones

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \qquad\qquad g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$a \mapsto (a, 2a) \qquad\qquad (a, b) \mapsto a + b$$

a) Determina $g \circ f$ y $f \circ g$.

b) Estudia las propiedades de f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$.

9. (Hasta 1,5 pt.) Sea el conjunto $\mathbb{N}$ de los números enteros y las funciones

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & \text{y} & g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (a, b) \mapsto a + 2b & & a \mapsto (a, 0) \end{array}$$

(a) Determina $g \circ f$ y $f \circ g$.

(b) Calcula las imágenes de $(2, 1)$ por $g \circ f$ y de -7 por $f \circ g$.

(c) Calcula, si existen, las preimágenes de $(3, 0)$ y $(5, 5)$ por $g \circ f$ y de 3 y 4 por $f \circ g$.

(d) Estudia las propiedades de $g \circ f$ y $f \circ g$ (inyectividad, sobreyectividad y biyectividad). Si alguna de ellas tiene inversa, determínala.

4. (Hasta 2 puntos) Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y la función $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ definida por

$$f(X) = (A - X) - \{a\}$$

a) Calcule $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(\{a\})$ y $f(\{b\})$.

b) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f biyectiva?

8. (Hasta 2 puntos) Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Estudia si f es inyectiva. Estudia si f es sobreyectiva.

e) En $\{a, b, c, d\}$ consideramos la relación definida por la siguiente matriz de adyacencia, construida considerando el orden lexicográfico de los elementos. Indica las afirmaciones correctas sobre la relación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ☐ Es antisimétrica
- ☐ No es antisimétrica
- ☐ Es conexa
- ☐ No es conexa
- ☐ Es transitiva
- ☐ No es transitiva

d) Sea $f : A \to B$ una función. Estudia la veracidad de las siguientes afirmaciones, demostrando las que sean ciertas y dando un contraejemplo para las falsas:

I: f es inyectiva si y solo si cada elemento de A tiene una única imagen en B.

II: f es inyectiva si y solo si cada elemento de B es imagen de, a lo sumo, un elemento de A.

III: f es sobreyectiva si y solo si todo elemento de B es imagen de, al menos, un elemento de A.

IV: f es sobreyectiva si y solo si todo elemento de B es imagen de, a lo sumo, un elemento de A.

Relaciones

f) Dada la función $f : \{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por $\mathcal{R}_f = \{(a, 1), (b, 4), (c, 1), (d, 4), (e, 3)\}$

- ¿Cuál es la imagen de a? ☐
- ¿Cuál es la imagen de f? ☐
- ¿Cuál es la preimagen de $\{1, 3\}$? ☐
- ¿Cuál es la preimagen de 5? ☐

6. (Hasta 2 puntos) Estudia las propiedades de la siguiente relación definida en $\mathbb{Q}$: $x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$

7. (Hasta 2 puntos) Utiliza el algoritmo de Warshall para hallar el cierre de equivalencia de la siguiente relación $\mathcal{S}$, en $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$:

$$\mathcal{S} = \{(a, d), (b, c), (c, e), (f, b), (g, a)\}$$

¿Cuál es el conjunto cociente del cierre calculado?

7. (Hasta 3 ptos.) Utiliza el algoritmo de Warshall para hallar el cierre de equivalencia de la siguiente relación en $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$:

$$\mathcal{S} = \{(a, b), (b, e), (c, d), (d, f), (g, c)\}$$

¿Cuál es el conjunto cociente del cierre calculado?

8. (Hasta 1,2 pt.) Utiliza el algoritmo de Warshall para hallar el cierre de equivalencia de la siguiente relación en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 5), (4, 1), (5, 3), (6, 6)\}$$

¿Cuál es el conjunto cociente del cierre calculado?

8. (Hasta 3 + 1 ptos.) En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definimos la relación:

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si y solo si} \quad 2x - 3y \text{ es múltiplo de } 7$$

a) Estudia si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y, en tal caso, determina sus clases de equivalencia.

b) Estudia si $\mathcal{R}$ es una función y, en tal caso, estudia si es inversible.

10. (Hasta 0.5 pt.) Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria definida en un conjunto A. Se dice que $\mathcal{R}$ es **circular** si para todos los elementos a,b y $c \in A$ se verifica que $(a\mathcal{R}b \text{ y } b\mathcal{R}c) \Rightarrow c\mathcal{R}a$.
Demuestra que si una relación es reflexiva y circular, entonces es de equivalencia.

b) Halla el dominio y el rango de la siguiente relación $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{N}$.

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si y solo si} \quad 6x + 10y = 104$$

c) En el conjunto $\mathbb{Q}$ se define la siguiente relación

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si y solo si existe } h \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \quad y = \frac{3x + h}{3}$$

I: ¿Los números $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{6}$ están relacionados mediante $\mathcal{R}$?

II: Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

III: Razona si los números $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ pertenecen a la misma clase de equivalencia.