UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

E.T.S.I. Informática
Dpto. Matemática Aplicada

Primer apellido: Torres
Segundo apellido: Postigo
Nombre: José
DNI o Pasaporte: 77.237.167-Q
Grado y grupo: 1ºD Ing. Software

MATEMÁTICA DISCRETA (4/10/2022, Tarea CCB1)

1. Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica: $27x + 4y = 5$ para $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. Resuelve la ecuación en congruencias: $22^{721}x \equiv 3 \pmod{15}$.
3. Estudia si el siguiente sistema de congruencias tiene solución y, en caso afirmativo, resuélvelo

$$\begin{cases} x - 4 \equiv 1 \pmod{15} \\ 4x \equiv 5 \pmod{21} \end{cases}$$

① $27x + 4y = 5 \quad x, y \in \mathbb{Z}$

Veamos si tiene solución: $mcd(27,4) = 1 \mid 5 \Rightarrow$ Tiene solución

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \begin{pmatrix} d \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

$mcd(27,4) = 1 = 27 \cdot (-1) + 4 \cdot 7$

$1 = 27 \cdot (-1) + 4 \cdot 7$

$\cdot 5 \; 5 = 27 \cdot \underbrace{(-5)}_{x_0} + 4 \cdot \underbrace{35}_{y_0}$

$\left.\begin{matrix} x_0 = -5 \\ y_0 = 35 \end{matrix}\right\}$ solución particular

• Vayamos ahora a por la solución general. Siendo (x,y) una solución:

$$\begin{array}{r} 27x + 4y = 5 \\ - \; 27 \cdot (-5) + 4 \cdot 35 = 5 \\ \hline 27(x+5) + 4(y-35) = 0 \end{array}$$

$\rightarrow 27(x+5) = 4(-y+35) \rightarrow \frac{x+5}{4} = \frac{-y+35}{27} = q \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\begin{cases} x = -5 + 4q \\ y = 35 - 27q \end{cases}\right\} q \in \mathbb{Z}}$$

SOLUCIÓN GENERAL

② $22^{721}x \equiv 3 \pmod{15}$

Para resolver esto, usaremos el teorema de Euler-Fermat, que enuncia: $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$

$22^{\phi(15)} \equiv 1 \pmod{15}$ $\phi(15) = \phi(3\cdot 5) = (3-1)(5-1) = 8$

Luego, $22^8 \equiv 1 \pmod{15}$

$721 \,\underline{|\,8}$
$\quad\; 90$
$\;\;1$

Así, simplificamos la ecuación: $[22]^{721}_{15} \equiv [\cancel{22^8}]^{\cancel{90}\,1}_{15} \cdot [22]_{15} \equiv [22]_{15} \equiv [7]_{15}$

Luego $22^{721}x \equiv \underline{7x \equiv 3 \pmod{15}}$, ← Esta ecuación la transformaremos a una ecuación diofántica para resolverla.

$7x + 15y = 3$

¿$mcd(7,15) \mid 3$?

$\begin{pmatrix}15\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\\-\end{pmatrix}$

~~[mcd(7,15) = 1 = 7(-2) + 15·1]~~

$mcd(7,15) = 1 = 7\cdot(-2) + 15\cdot 1 \mid 3$ ✓ → La ecuación tiene solución.

- Solución particular: $7(-2) + 15\cdot 1 = 1 \xrightarrow{\cdot 3} 7(-6) + 15\cdot 3 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -6 \\ y_0 = 3 \end{cases}$

- Buscamos la solución general:

$$\begin{array}{l} 7x + 15y = 3 \\ -\;7(-6) + 15(3) = 3 \\ \hline 7(x+6) + 15(y-3) = 0 \end{array} \rightarrow 7(x+6) = -15(y-3) \rightarrow \frac{x+6}{-15} = \frac{y-3}{7} = q$$

$\begin{cases} x = -6 - 15q \\ y = 3 + 7q \end{cases}$ $q \in \mathbb{Z}$ ⟹ La solución a la ecuación de congruencia $7x \equiv 3 \pmod{15}$ es $x = -6 - 15q$, $q \in \mathbb{Z}$

~~$7(-6-15q) \equiv 3 \pmod{15}$~~ ⟹ ~~$-105q \equiv 45 \pmod{15}$~~ NO

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
E.T.S. de Ingeniería Informática

ASIGNATURA: Matemáticas Discretas

FECHA: 4/10/22 GRUPO: 1ºD Ing. Software

APELLIDO 1º: Torres

APELLIDO 2º: Pertigo

NOMBRE: José

---

③ $\begin{cases} x-4 \equiv 1 \pmod{15} \\ 4x \equiv 5 \pmod{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{15} \\ 4x \equiv 5 \pmod{21} \end{cases}$

Transformaremos la segunda ecuación para poder aplicar el Tª Chino del resto.

$\begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \leftarrow [4]_{21}^{-1}$ d

El sistema quedaría: $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{15} \\ x \equiv 17 \pmod{21} \end{cases}$

Comprobamos que $mcd(15,21) = 3 \mid (17-5) \rightarrow$ Por el Tª Chino del Resto, el sistema tiene solución. Pasemos a ella:

Escaneado con CamScanner