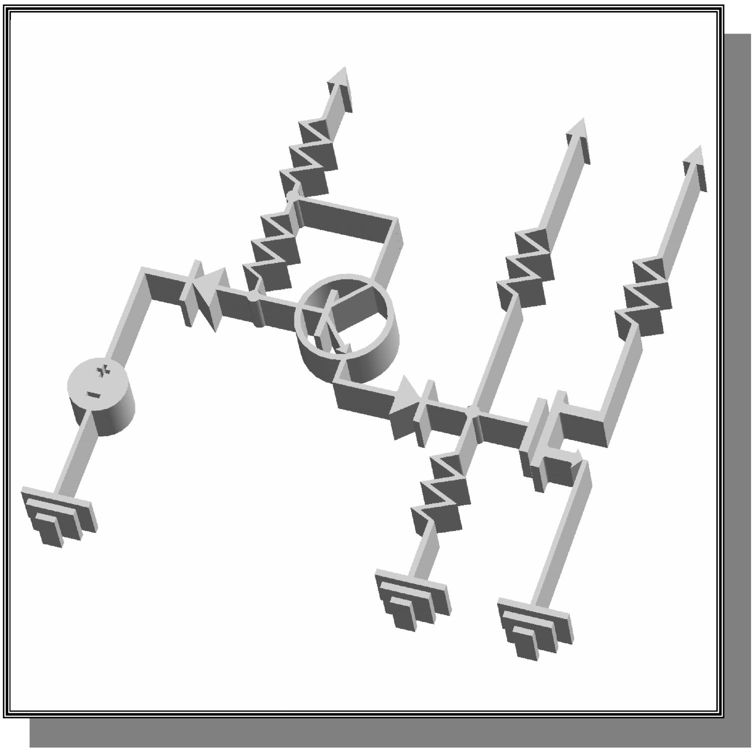
ALBERTO DAZA MÁRQUEZ
JAVIER LÓPEZ GARCÍA

EJERCICIOS DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA / MANUALES

ALBERTO DAZA MÁRQUEZ
JAVIER LÓPEZ GARCÍA

EJERCICIOS DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA / MANUALES

Primera edición corregida, julio 2004

Imprime: Imagraf Impresores, S.A. Tel.: 952 32 85 97
I.S.B.N.: 84-7496-970-0
Depósito Legal: MA-1.798/2002

Diseño de la colección: J.M. Mercado

ÍNDICE

PRÓLOGO

La electrónica se ha convertido tanto en un estímulo como en una parte integral del crecimiento y desarrollo tecnológico de nuestra sociedad actual. El campo de la electrónica está relacionado con el diseño y las aplicaciones que de él se derivan mediante la utilización de los Dispositivos Electrónicos.

Los dispositivos semiconductores y los circuitos integrados son la base de la tecnología moderna, y su estudio a partir de sus características y aplicaciones es una parte fundamental del plan de estudios en carreras tales como Ingeniería Electrónica, Informática, Telecomunicaciones, etc.

Con el ánimo de aportar un punto de vista práctico al estudio de la electrónica de dispositivos aparece la presente obra, que pretende ser un texto complementario para cualquier estudiante de Ingeniería que se enfrenta por primera vez con asignaturas relacionadas con esta disciplina del saber tan cambiante y dinámica.

Esta obra tiene el interés de servir de apoyo y ayuda al alumno en la tarea de asimilación y asentamiento de conocimientos de tipo teórico mediante la utilización de procedimientos sistemáticos para el análisis y diseño de circuitos. El alumno necesita disponer de un texto adicional de tipo práctico que abarque la mayoría de los conocimientos impartidos en una asignatura cuatrimestral o semestral sobre Dispositivos Electrónicos.

Basado en la experiencia docente de los profesores del Departamento de Electrónica de la Universidad de Málaga se introducen y aplican conceptos básicos imprescindibles para alumnos de primeros cursos de Ingeniería, y se hace una recopilación de ejercicios, principalmente extraídos de exámenes, que guían al estudiante en la resolución de problemas típicos como pueden ser el cálculo del Punto de Trabajo y la Característica de Transferencia, entre otros. Para ello se utilizan modelos discretos de dispositivos semiconductores, a la vez que métodos básicos de análisis de circuitos (Teoremas de Kirchhoff, Thèvenin, etc.).

En la elaboración de este manual los autores han puesto especial interés en el uso de un lenguaje ameno y comprensible, a la vez que han pretendido utilizar ecuaciones sencillas encaminadas a la obtención de resultados y conclusiones cuantitativas.

También se ha prestado gran atención en la forma pedagógica de explicar las resoluciones de los ejercicios, mediante el uso de una notación matemática coherente, el dibujo cuidadoso de las figuras, el planteamiento de los sistemas de ecuaciones, etc., todo lo cual redunda en beneficio del lector.

Entre los objetivos principales que se han pretendido conseguir con el desarrollo de este texto podemos destacar los siguientes:

- Entender las características reales e ideales de los dispositivos semiconductores.
- Aprender a utilizar los modelos de los dispositivos electrónicos y los métodos de análisis de circuitos.
- Desarrollar las habilidades necesarias en el análisis y diseño de circuitos y subsistemas electrónicos que forman la base de la electrónica digital.
- Adquirir experiencia a la hora de realizar un análisis de funcionamiento de un circuito empleando razonamientos sencillos de forma rápida y fiable.
- Lograr una comprensión intuitiva del estado de los distintos componentes de un circuito para, a continuación, realizar un análisis matemático de su comportamiento que nos lleve a obtener las relaciones cuantitativas que lo definen.

La distribución de conocimientos o materias se ha organizado en cinco capítulos y un apéndice internamente estructurados cada uno de ellos de menos a más, es decir, se comienza planteando problemas sencillos que van creciendo progresivamente en dificultad conforme se va avanzando por el Capítulo. En concreto para el Capítulo 1, comenzamos resolviendo problemas mediante las herramientas matemáticas básicas de análisis de circuitos, como son las Leyes de Kirchhoff, equivalente Thèvenin, Teorema de Superposición, etc. Continuamos aportando distintos métodos de resolución, totalmente equivalentes, que nos ayudarán a analizar circuitos de mayor complejidad y concluimos con el Análisis de Circuitos Transitorios estudiando la respuesta de los condensadores frente a procesos de carga y descarga variables en el tiempo.

En el Capítulo 2 se introducen los primeros dispositivos semiconductores, los diodos. Se emplean los métodos de análisis del punto de trabajo y de la curva de transferencia y se utilizan los conocimientos adquiridos en el primer capítulo. Además, se resuelven problemas de tipo práctico como puede ser la construcción de un generador de tensión estabilizado mediante diodo zener.

El Capítulo 3 contiene problemas con Transistores Bipolares (BJT). Los ejercicios están ordenados de menor a mayor complejidad, es decir, comenzamos analizando circuitos sencillos hasta llegar a circuitos con un elevado grado de dificultad, como puede ser el análisis de la puerta inversora de la familia lógica TTL. También empleamos los métodos de análisis del punto de trabajo y de la curva de transferencia y se analizan circuitos que forman los bloques básicos de los sistemas digitales, como son las puertas lógicas, calculando sus propiedades características: Fan-Out, consumo, márgenes de ruido, etc. Por último, en el apartado de casos prácticos se incluyen problemas de polarización y en definitiva de diseño de circuitos con transistores.

El Capítulo 4 recoge problemas con el dispositivo semiconductor más empleado en la actualidad, el transistor MOSFET. Al igual que en el caso del transistor Bipolar se resuelven ejercicios sobre punto de trabajo, característica de transferencia, estudio de las puertas lógicas correspondientes, además de casos prácticos de diseño y polarización con este tipo de transistor Metal-Óxido-Semiconductor. De igual forma el capítulo comienza con el análisis de problemas sencillos, seguido de circuitos donde se mezclan dispositivos semiconductores estudiados en los capítulos precedentes, hasta llegar al cálculo de la característica de transferencia de circuitos con MOSFET, que son los que poseen un mayor nivel de dificultad. El capítulo finaliza con un bloque dedicado al proceso de análisis y síntesis de funciones lógicas en tecnología CMOS.

El siguiente capítulo (Capítulo 5) agrupa problemas sobre las memorias de estado sólido más utilizadas, como pueden ser las memorias ROM, EPROM, RAM, etc., donde se detalla la construcción de las matrices internas. Se incluye asimismo un caso práctico que analiza el comportamiento de una memoria RAM dinámica.

Por último se incluye un apéndice (Apéndice A) donde se describen los distintos modelos matemáticos que asemejan el comportamiento real del dispositivo semiconductor a un comportamiento aproximado y más sencillo de manejar, facilitando la resolución de los problemas que aparecen en la presente obra.

Nota: Se ha habilitado una dirección web en la que se irán actualizando las erratas encontradas en el presente manual:

http://www.el.uma.es/albertod/FedeerratasEjerciciosdeDispositivos.pdf

1. Análisis de Circuitos Básicos

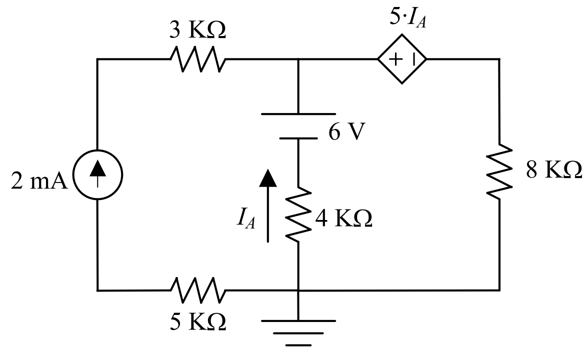
OBJETIVOS:

- Asimilar conocimientos básicos fundamentales sobre teoría de circuitos que nos serán muy útiles a lo largo del presente manual.
- Dominar con profundidad los métodos básicos de análisis (especialmente el uso de las leyes de Kirchhoff) además de otros métodos alternativos.
- Técnicas de análisis de circuitos con condensadores (transitorios).
- Mostrar el uso de diferentes criterios a la hora de contabilizar tensiones a lo largo de una malla (tomando signos a la entrada o salida de los elementos) para hacer notar que ambos son completamente válidos.

1.1. ANÁLISIS DEL PUNTO DE OPERACIÓN (LEYES DE KIRCHHOFF)

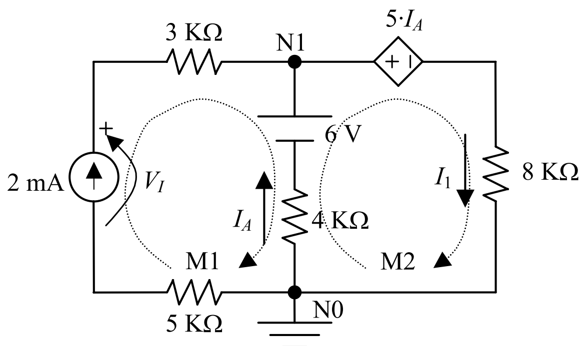
Ejercicio 1.1.1.

Analizar el punto de operación del siguiente circuito, utilizando el método general de resolución por mallas.



Solución :

Asignamos un sentido arbitrario a las intensidades en las ramas en las que no hay generador de intensidad; como en la rama central ya nos viene dada la intensidad I_A, la dejamos como está ya que será una de las incógnitas a calcular, por tanto sólo habrá que asignar una intensidad I_1 a la rama de la derecha. Situamos la caída de tensión en el generador de intensidad (V_I) y contabilizamos el número total de nudos (2, N0 y N1) y ramas (3), por lo que utilizaremos R–(N–1) mallas en nuestros cálculos (2 mallas). Asignamos también el sentido en el que vamos a recorrer estas mallas:



Aplicamos la 1ª ley de Kirchhoff al número de nudos menos uno, por tanto obtenemos una ecuación de nudos a partir de N1, por ejemplo; asimismo aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff a las 2 mallas indicadas, quedando las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \text{N1} \rightarrow 2 + I_A = I_1 \\ \text{M1} \rightarrow V_I - 3{\cdot}2 - 6 + 4I_A - 5{\cdot}2 = 0 \\ \text{M2} \rightarrow -4I_A + 6 - 5I_A - 8I_1 = 0 \end{array}\right\}$$

(Hemos tomado el criterio de escoger el signo que presenta cada elemento en su salida según el sentido en que recorremos las mallas)

Resolviendo el sistema de ecuaciones por sustitución tenemos:

$$I_1 = 2 + I_A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{M1} \rightarrow V_I - 22 + 4I_A = 0 \\ \text{M2} \rightarrow -9I_A + 6 - 8\,(2 + I_A) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_I - 22 + 4I_A = 0 \\ -10 - 17I_A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_I - 22 + 4I_A = 0 \\ I_A = -{}^{10}\!/_{17}\ \text{mA} \cong -0{,}588\ \text{mA} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_I = 22 - 4I_A \cong 24{,}353\ \text{V} \\ I_A \cong -0{,}588\ \text{mA} \end{array}\right\}$$

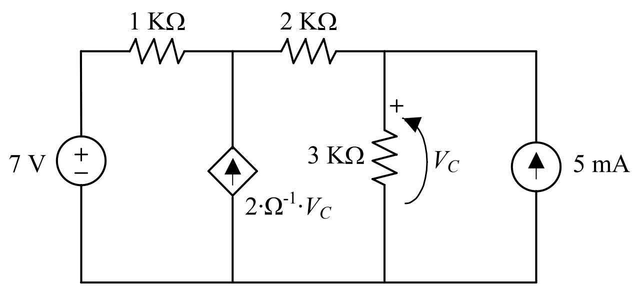
$$I_1 = 2 + I_A \cong 2 + (-0{,}588) = 1{,}412\ \text{mA}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} V_I \cong 24{,}353\ \text{V} \\ I_A \cong -0{,}588\ \text{mA} \\ I_1 \cong 1{,}412\ \text{mA} \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 1.1.2.

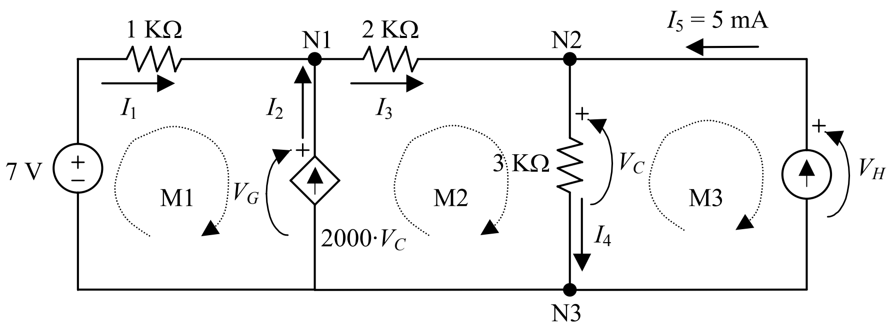
Analiza el siguiente circuito.



Solución:

El circuito a priori no parece demasiado complicado de resolver, pero si no ponemos atención en la homogenización de las unidades se llega a un sistema de ecuaciones sin sentido que no conduce a ningún tipo de solución. No debemos mezclar en las ecuaciones los KΩ (Kilo-Ohmios = 1000 Ω) de las resistencias con los Ohmios de la fuente controlada de intensidad. Por lo tanto pasaremos la unidad Ohmio a Kilo-Ohmio y trabajaremos con las unidades KΩ, Voltio y mili-Amperio.

Asignando sentidos arbitrarios a las intensidades de cada rama y tensiones para el caso de las fuentes de intensidad, el circuito queda:



Se observa que el circuito posee 3 nudos (N = 3) y 5 ramas (R = 5) luego en total necesitamos 5 ecuaciones que se obtienen N–1 de los nudos (1ª Ley de Kirchhoff) y R–(N–1) de las mallas (2ª Ley de Kirchhoff).

El sistema de ecuaciones que resuelve el circuito es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \text{Nudo N1} \rightarrow I_1 + 2000 \cdot V_C - I_3 = 0 \\
(2) & \text{Nudo N2} \rightarrow -I_4 + 5 + I_3 = 0 \\
(3) & \text{Malla 1} \rightarrow -7 + I_1 + V_G \ = 0 \\
(4) & \text{Malla 2} \rightarrow +2I_3 - V_G + 3I_4 \ = 0 \\
(5) & \text{Malla 3} \rightarrow -3I_4 + V_H \ = 0
\end{array}\right\}$$

(En este caso se toma para las tensiones en las mallas el criterio de elegir los signos que nos encontramos a la entrada de los elementos)

Sumando las ecuaciones (3) y (4) obtenemos: $7 - I_1 - 2I_3 - 3I_4 = 0 \quad (6)$

Por otro lado $V_C = 3I_4 = V_H$ y la ecuación (1) queda $I_1 + 6000I_4 - I_3 = 0$ que sumada a la ecuación (6) obtenemos:

$$5997I_4 - 3 \cdot I_3 + 7 = 0 \quad (7)$$

Multiplicando por 3 la ecuación (2) y sumada a (7):

$$5994 I_4 + 22 = 0 \Rightarrow I_4 = -3{,}67 \cdot 10^{-3} \text{ mA}$$

Sustituyendo este último valor en (2) se obtiene:

$$I_3 = -5 + I_4 = -5{,}004 \text{ mA}, \; V_C = V_H = -0{,}011 \text{ V}, I_2 = 2000 \cdot V_C = -22{,}02 \text{ mA}$$

A partir de $(1) \Rightarrow I_1 = +I_3 - I_2 = 17{,}02 \text{ mA}$

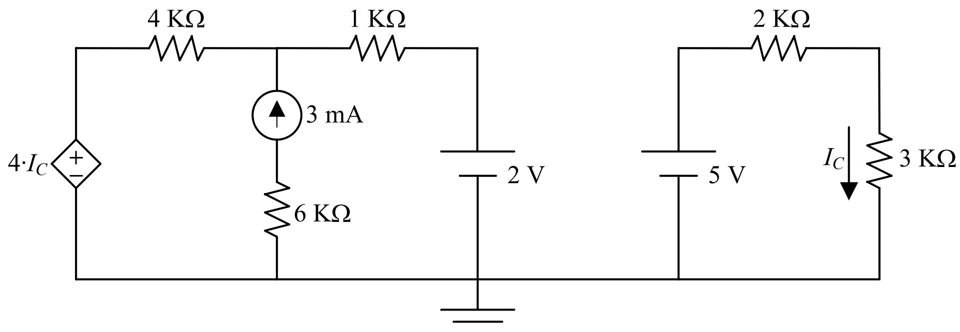
Por último de $(3) \Rightarrow V_G = 7 - I_1 = 7 - 17{,}02 = -10{,}02 \text{ V}$

Resumiendo:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = 17{,}02 \text{ mA} \\ I_2 = 2000 \cdot V_C = -22{,}02 \text{ mA} \\ I_3 = -5{,}004 \text{ mA} \\ I_4 = -3{,}67 \cdot 10^{-3} \text{ mA} \end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{l} V_C = V_H = -0{,}011 \text{ V} \\ V_G = -10{,}02 \text{ V} \end{array}\right\}$$

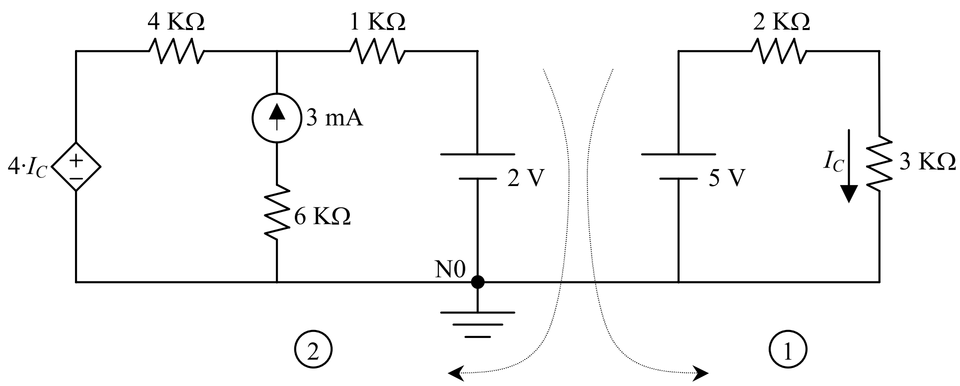
Ejercicio 1.1.3.

Calcular el punto de operación del circuito (intensidades y tensiones de las ramas) utilizando el método de resolución por mallas.



Solución:

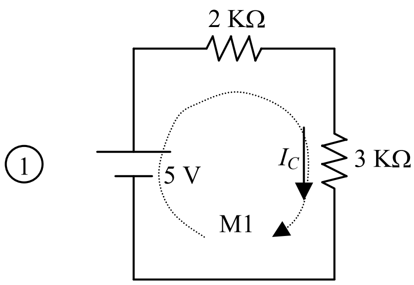
Observamos que el circuito está formado a su vez por otros 2 circuitos que están compartiendo un único nudo (N0) y cuyas mallas están cerradas, por lo que no puede haber intercambio de intensidades entre ellos y podemos analizarlos independientemente:



Empezaremos analizando el circuito 1 ya que es el que posee la intensidad I_C que sirve como control de la fuente de tensión controlada por intensidad que aparece en el circuito 2.

Circuito 1:

Se trata de un circuito muy simple, formado únicamente por una rama, en el que ya viene dada la incógnita a calcular (I_C). Hay una sola malla, no hay nudos, y sólo tenemos que plantear una ecuación aplicando la segunda ley de Kirchhoff (ley de mallas):

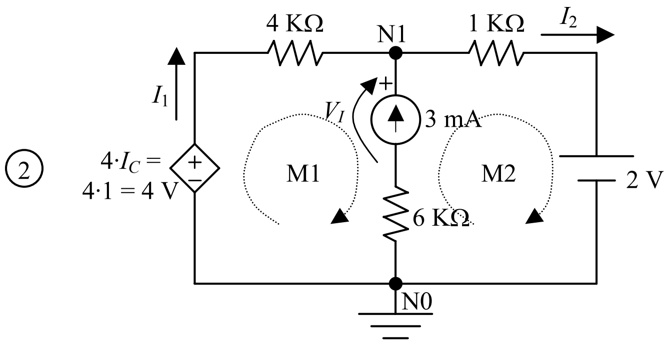


$$\text{M1} \rightarrow 5 - 2I_C - 3I_C = 0 \Rightarrow I_C = 1\,\text{mA}$$

Una vez hemos hallado el valor de I_C, que ejerce el control de la fuente de tensión del circuito 2, estamos en condiciones de poder resolverlo también.

Circuito 2:

Asignamos un sentido arbitrario a las intensidades I_1 e I_2 y situamos la caída de tensión V_I en la fuente de intensidad. Calculamos el valor de la fuente controlada e indicamos las mallas a realizar:



Aplicamos 1ª ley de Kirchhoff al nudo N1, y hacemos las mallas M1 y M2:

$$\left.\begin{array}{l} \text{N1} \rightarrow 3 + I_1 = I_2 \\ \text{M1} \rightarrow 4 - 4I_1 - V_I + 6{\cdot}3 = 0 \\ \text{M2} \rightarrow -6{\cdot}3 + V_I - 1I_2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow 3 + I_1 = I_2 \\ (2) \rightarrow 22 - 4I_1 - V_I = 0 \\ (3) \rightarrow -20 + V_I - I_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Si sumamos las ecuaciones (2) y (3) obtenemos la expresión (4), y si sustituimos el valor de I_2 obtenido en la ecuación (1) llegamos a lo siguiente:

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (2) \rightarrow 22 - 4I_1 - V_I = 0 \\ + \;\; (3) \rightarrow -20 + V_I - I_2 = 0 \end{array}\right\} \\ \hline \left.\begin{array}{l} (4) \rightarrow 2 - 4I_1 - I_2 = 0 \\ (1) \rightarrow I_2 = 3 + I_1 \end{array}\right\} \end{array} \Rightarrow 2 - 4I_1 - (3 + I_1) = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{5}\text{ mA} = -0{,}2\text{ mA}$$

Sustituyendo el valor obtenido de I_1 en la ecuación (1) obtenemos el valor de I_2:

$$\left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow I_2 = 3 + I_1 \\ I_1 = -0{,}2\text{ mA} \end{array}\right\} \Rightarrow I_2 = 2{,}8\text{ mA}$$

Despejando V_I de la ecuación (2) por ejemplo y utilizando el valor calculado de I_1 averiguamos su valor:

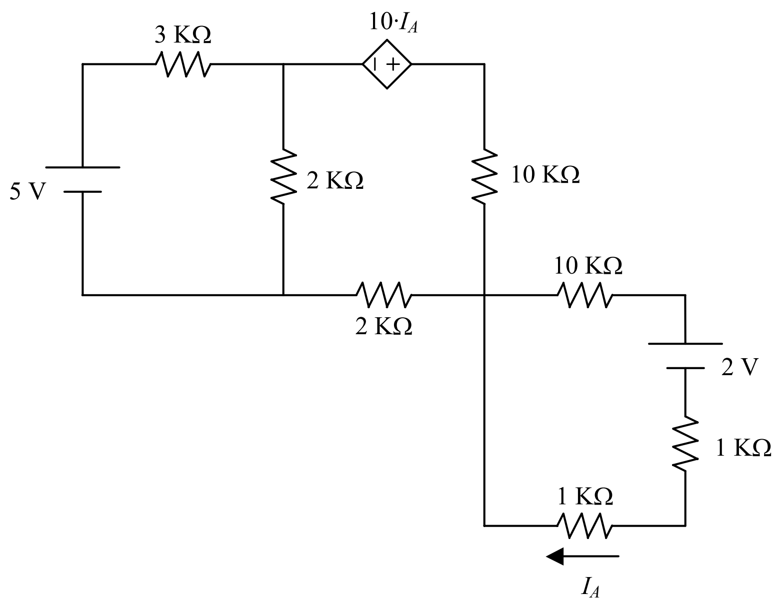
$$\left.\begin{array}{l}(2) \rightarrow V_I = 22 - 4I_1 \\ I_1 = -0{,}2 \text{ mA}\end{array}\right\} \Rightarrow V_I = 22{,}8 \text{ V}$$

Resultados:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}I_C = 1 \text{ mA} \\ I_1 = -0{,}2 \text{ mA} \\ I_2 = 2{,}8 \text{ mA} \\ V_I = 22{,}8 \text{ V}\end{array}\right\}}$$

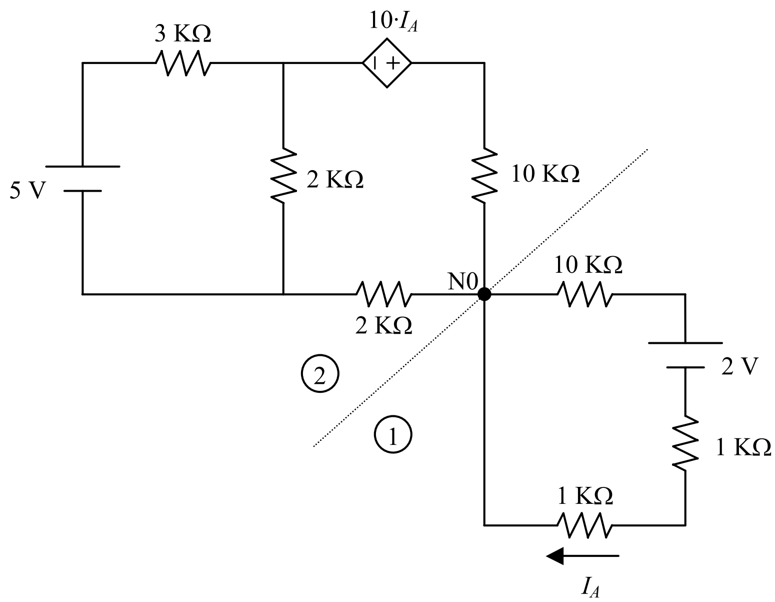
Ejercicio 1.1.4.

Analizar el punto de operación del siguiente circuito, utilizando el método general de resolución por mallas.



Solución:

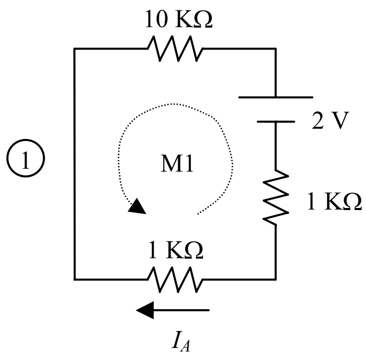
Se observa que el circuito está formado por 2 subcircuitos que están compartiendo un único nudo (N0) y cuyas mallas están cerradas, por lo que no puede haber intercambio de intensidades entre ellos y podemos analizarlos independientemente:



Empezaremos analizando el circuito 1 ya que es el que posee la intensidad I_A que sirve como control de la fuente de tensión controlada por intensidad que aparece en el circuito 2.

Circuito 1:

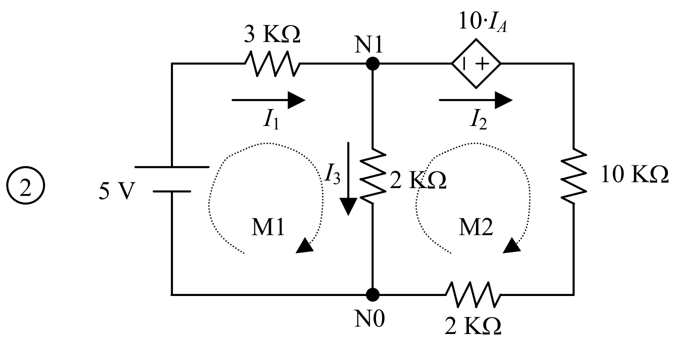
Se trata de un circuito muy simple, formado únicamente por una rama, en el que ya viene dada la incógnita a calcular (I_A). Hay una sola malla, no hay nudos, y sólo tenemos que plantear una ecuación aplicando la segunda ley de Kirchhoff (ley de mallas):



$$M1 \rightarrow 2+10I_A+1I_A+1I_A=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12I_A+2=0 \Rightarrow I_A=-\frac{1}{6}=-0{,}1\widehat{6}\text{ mA}$$

Una vez hemos hallado el valor de I_A, que ejerce el control de la fuente de tensión del circuito 2, estamos en condiciones de poder resolverlo también. Hay que hacer notar que hemos obtenido un valor negativo para I_A, el cual habrá que respetar, es decir, posteriormente sustituiremos el valor con el signo incluido.

Circuito 2:



El circuito posee 2 nudos (N0, N1) y 3 ramas, por tanto tendremos 3 incógnitas que calcularemos haciendo una ecuación de nudos (1ª ley de Kirchhoff) y 2 de mallas (2ª ley de Kirchhoff):

$$\left.\begin{array}{l} N1 \rightarrow I_1=I_2+I_3 \\ M1 \rightarrow 5-3I_1-2I_3=0 \\ M2 \rightarrow 2I_3+10I_A-10I_2-2I_2=0 \end{array}\right\}$$

Tomando el valor de I_A calculado previamente nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$10I_A = 10\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} (1) \rightarrow I_1 = I_2 + I_3 \\ (2) \rightarrow -3I_1 - 2I_3 + 5 = 0 \\ (3) \rightarrow -12I_2 + 2I_3 - 5/3 = 0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema vamos a sustituir la ecuación (1) en la (2), simplificaremos y la reduciremos con (3), obteniendo I_3:

$$(1)\text{ y }(2) \rightarrow -3(I_2 + I_3) - 2I_3 + 5 = 0 \Rightarrow -3I_2 - 5I_3 + 5 = 0 \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} (4) &\rightarrow -3I_2 - 5I_3 + 5 = 0 \\ (3) &\rightarrow -12I_2 + 2I_3 - 5/3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (4)\times(-4) &\rightarrow 12I_2 + 20I_3 - 20 = 0 \\ (3) &\rightarrow -12I_2 + 2I_3 - 5/3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22I_3 - 20 - \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{20 + 5/3}{22} = \frac{65}{66} = 0{,}98\overline{48}\text{ mA}$$

A continuación hallamos el valor de I_1 e I_2 aplicando las ecuaciones (2) y (1), respectivamente:

$$(2) \rightarrow -3I_1 - 2I_3 + 5 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{2I_3 - 5}{-3} = \frac{100}{99} = 1{,}\overline{01}\text{ mA}$$

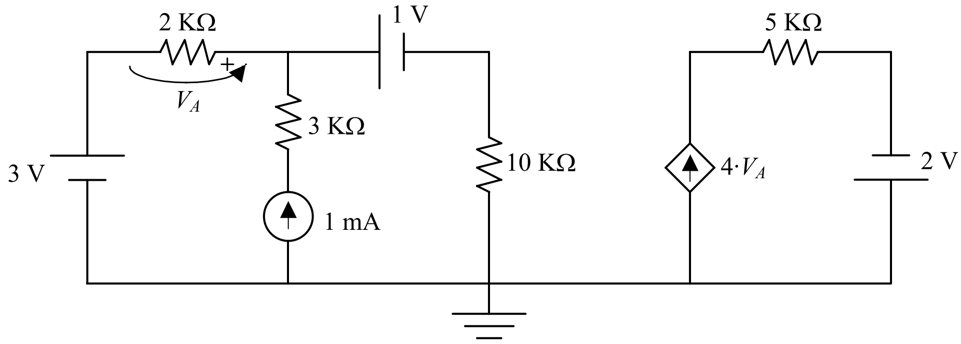
$$(1) \rightarrow I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_2 = I_1 - I_3 = \frac{100}{99} - \frac{65}{66} = \frac{5}{198} = 0{,}0\overline{25}\text{ mA}$$

Por tanto, los valores de las incógnitas son:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} I_A &= -\frac{1}{6}\text{ mA} = -0{,}1\widehat{6}\text{ mA} \\ I_1 &= \frac{100}{99}\text{ mA} = 1{,}\overline{01}\text{ mA} \\ I_2 &= \frac{5}{198}\text{ mA} = 0{,}0\overline{25}\text{ mA} \\ I_3 &= \frac{65}{66}\text{ mA} = 0{,}98\overline{48}\text{ mA} \end{aligned}\right\}}$$

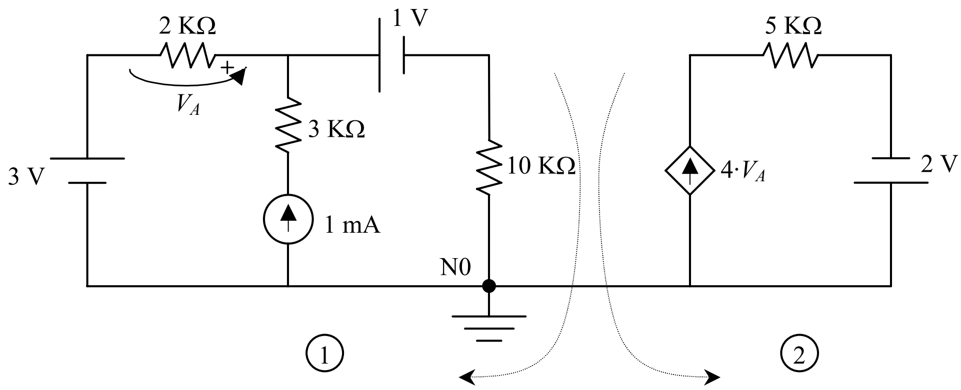
Ejercicio 1.1.5.

Calcula el punto de operación del circuito (intensidades y tensiones de las ramas) utilizando el método de resolución por mallas.



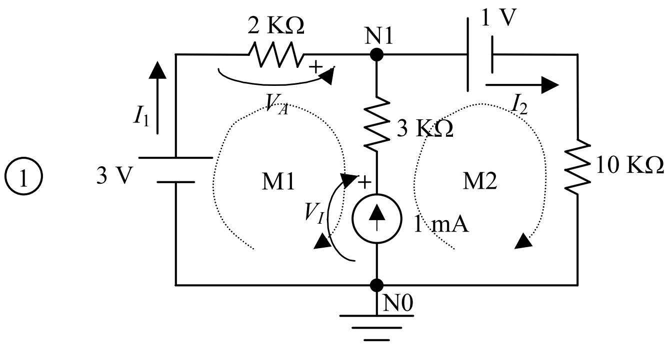
Solución:

Tenemos dos circuitos independientes, ya que son 2 mallas cerradas unidas por un único nudo (el nudo de tierra N0), por lo que los resolveremos por separado, empezando por el circuito que contiene a V_A, ya que es el control de la fuente de intensidad controlada del circuito de la derecha:



Circuito 1:

Asignamos un sentido arbitrario a las intensidades en las ramas en las que no hay generador de intensidad (I_1, I_2), y situamos la caída de tensión en el generador de intensidad (V_I). Además, contabilizamos el número total de nudos (2, N0 y N1) y ramas (3), por lo que utilizaremos *R*–(*N*–1) mallas en nuestros cálculos (2 mallas). Asignamos también el sentido en el que vamos a recorrer estas mallas:



Aplicamos la 1ª ley de Kirchhoff al número de nudos menos uno, por tanto obtenemos una ecuación de nudos de, por ejemplo, N1; asimismo aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff a las 2 mallas indicadas, quedando las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{N1} \rightarrow I_1 + 1 = I_2 \\ \mathrm{M1} \rightarrow 3 - 2I_1 + 3 \cdot 1 - V_I = 0 \\ \mathrm{M2} \rightarrow V_I - 3 \cdot 1 - 1 - 10I_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow I_1 + 1 = I_2 \\ (2) \rightarrow 6 - 2I_1 - V_I = 0 \\ (3) \rightarrow V_I - 4 - 10I_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo la ecuación (1) en (3) y reduciendo el resultado con (2) obtenemos el valor de I_1:

$$\left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow I_2 = I_1 + 1 \\ (3) \rightarrow V_I - 4 - 10I_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_I - 4 - 10\,(I_1 + 1) = 0 \rightarrow V_I - 14 - 10I_1 = 0 \qquad (4)$$

$$\begin{array}{rl} & \left.\begin{array}{l} (4) \rightarrow V_I - 14 - 10I_1 = 0 \\ (2) \rightarrow 6 - 2I_1 - V_I = 0 \end{array}\right\} \\ + & \\ \hline & -8 - 12I_1 = 0 \end{array} \Rightarrow I_1 = -\frac{2}{3}\,\mathrm{mA} = -0{,}\widehat{6}\,\mathrm{mA}$$

Ahora calculamos el resto de incógnitas; del valor de I_1 y la ecuación (1) obtenemos I_2, y si lo unimos a la ecuación (2) obtendremos V_I:

$$\left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow I_2 = I_1 + 1 \\ I_1 = -\dfrac{2}{3}\,\mathrm{mA} \end{array}\right\} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{3}\,\mathrm{mA} = 0{,}\widehat{3}\,\mathrm{mA}$$

$$\left.\begin{array}{l}(2) \rightarrow V_I = 6 - 2I_1 \\ I_1 = -\dfrac{2}{3}\text{ mA}\end{array}\right\} \Rightarrow V_I = \frac{22}{3}\text{ V} = 7{,}\widehat{3}\text{ V}$$

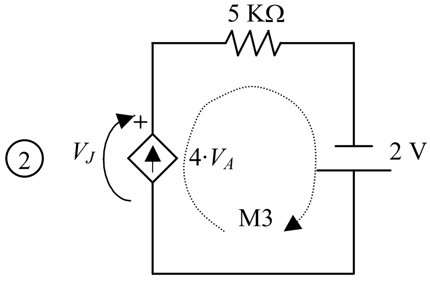
A continuación resolvemos el circuito de la derecha, para lo cual debemos calcular primero el valor de V_A, que ejerce de control de la fuente de intensidad. El valor lo obtenemos aplicando la ley de Ohm a la resistencia de 2 KΩ de la malla M1:

$$V_A = -2I_1 = -2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\text{ V} = 1{,}\widehat{3}\text{ V} \qquad (5)$$

Es muy importante destacar que en el cálculo de V_A hay que tener muy presente dónde está el signo positivo de V_A y dónde lo tiene la resistencia de 2 KΩ en la que medimos dicho valor; el positivo de V_A está situado a la derecha de la resistencia, pero según hemos situado la intensidad I_1 el positivo debería estar a la izquierda de la resistencia aplicando el criterio general para los elementos pasivos ("por donde entre la intensidad asignamos el positivo de la tensión"). Por tanto poseen signos opuestos, de ahí que al aplicar ley de Ohm tengamos que poner uno de los términos con signo negativo. Pero además, como el signo de I_1 fue negativo, debemos introducirlo tal y como resultó en la ecuación, según hemos visto en (5).

Circuito 2:

Observando el circuito apreciamos que solamente tiene una rama, por tanto sólo hay una malla posible, la M3. Asignamos la caída de tensión en el generador de intensidad controlado (que será la incógnita a calcular) y aplicamos segunda ley de Kirchhoff a dicha malla:



$$\left.\begin{array}{l}\text{M3} \rightarrow V_J - 5\,(4{\cdot}V_A) + 2 = 0 \\ V_A = \dfrac{4}{3}\text{ V}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

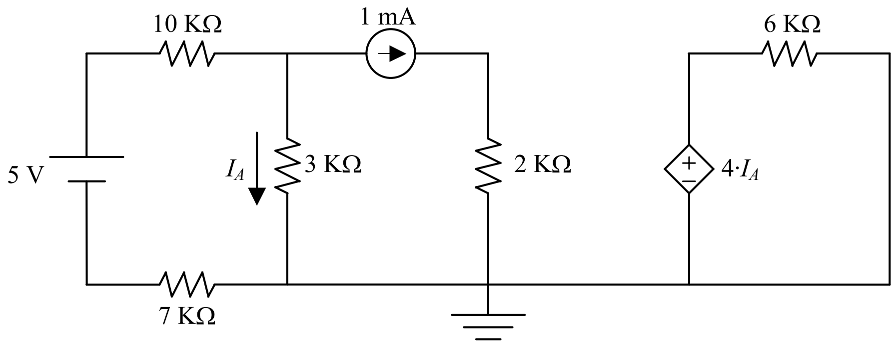
$$\Rightarrow V_J = 20V_A - 2 = \frac{74}{3}\text{ V} = 24{,}\widehat{6}\text{ V}$$

Resultados:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= -\frac{2}{3}\ \text{mA} = -0{,}\widehat{6}\ \text{mA} \\ I_2 &= \frac{1}{3}\ \text{mA} = 0{,}\widehat{3}\ \text{mA} \\ V_I &= \frac{22}{3}\ \text{V} = 7{,}\widehat{3}\ \text{V} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} V_A &= \frac{4}{3}\ \text{V} = 1{,}\widehat{3}\ \text{V} \\ V_J &= \frac{74}{3}\ \text{V} = 24{,}\widehat{6}\ \text{V} \end{aligned}\right\}$$

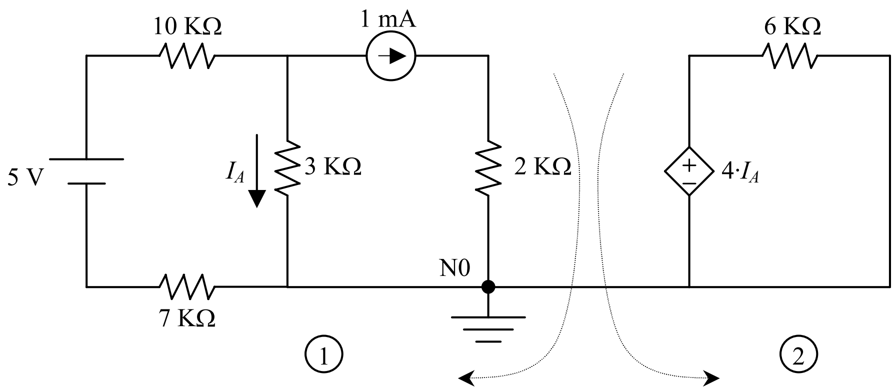
Ejercicio 1.1.6.

Calcular el punto de operación del circuito (intensidades y tensiones de las ramas) utilizando el método de resolución por mallas.



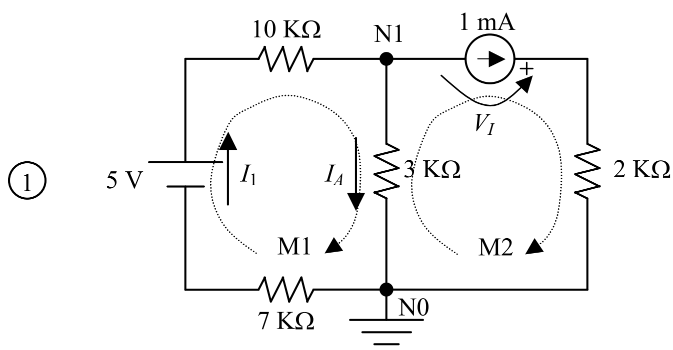
Solución:

Tenemos dos circuitos independientes, ya que son 2 mallas cerradas unidas por un único nudo (el nudo de tierra N0), por lo que los resolveremos por separado, empezando por el circuito que contiene a I_A, ya que es el control de la fuente de tensión del circuito de la derecha.



Circuito 1:

Asignamos un sentido arbitrario a las intensidades en las ramas en las que no hay generador de intensidad; como en la rama central ya tenemos indicada la intensidad I_A la dejamos como está ya que será una de las incógnitas a calcular, por tanto sólo habrá que asignar una intensidad I_1 a la rama de la izquierda. Situamos la caída de tensión en el generador de intensidad (V_I) y contabilizamos el número total de nudos (2, N0 y N1) y ramas (3), por lo que utilizaremos R–(N–1) mallas en nuestros cálculos (2 mallas). Asignamos también el sentido en el que vamos a recorrer estas mallas:



Aplicamos la 1ª ley de Kirchhoff al número de nudos menos uno, por tanto obtenemos una ecuación de nudos a partir de N1, por ejemplo; asimismo aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff a las 2 mallas indicadas, quedando las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \text{N1} \rightarrow I_1 = I_A + 1 \\ \text{M1} \rightarrow 5 - 10I_1 - 3I_A - 7I_1 = 0 \\ \text{M2} \rightarrow 3I_A + V_I - 2{\cdot}1 = 0 \end{array}\right\}$$

Despejando I_1 de N1 y sustituyendo en M1 obtenemos el valor de I_A, el cual al introducirlo en M2 obtenemos V_I, y si lo introducimos en N1 conseguiremos I_1:

$$\left.\begin{array}{l} \text{N1} \rightarrow I_1 = I_A + 1 \\ \text{M1} \rightarrow 5 - 17I_1 - 3I_A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 - 17\,(I_A + 1) - 3I_A = 0 \Rightarrow I_A = -\frac{3}{5}\ \text{mA} = -0{,}6\ \text{mA}$$

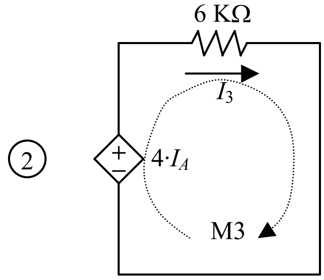
$$\left.\begin{array}{l} I_A = -\dfrac{3}{5}\ \text{mA} \\ \text{M2} \rightarrow 3I_A + V_I - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_I = \frac{19}{5}\ \text{V} = 3{,}8\ \text{V}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_A = -\dfrac{3}{5}\ \text{mA} \\ \text{N1} \rightarrow I_1 = I_A + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 = \frac{2}{5}\ \text{mA} = 0{,}4\ \text{mA}$$

Una vez que tenemos resuelto el Circuito 1, realizamos la malla para el Circuito 2, tomando el valor de I_A tal y como lo hemos obtenido del circuito anterior, incluido el signo.

Circuito 2:

Observando el circuito apreciamos que solamente tiene una rama, por tanto sólo hay una malla, la M3. Asignamos el sentido de la intensidad I_3 de la manera indicada, aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff a dicha malla y resolvemos la ecuación utilizando el valor calculado previamente para I_A:



$$\left.\begin{array}{l} \text{M3} \rightarrow 4{\cdot}I_A - 6I_3 = 0 \\ I_A = -0{,}6\ \text{mA} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

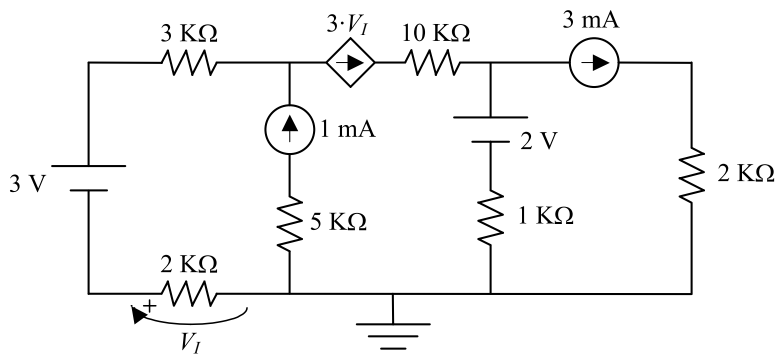
$$\Rightarrow 4\,(-0{,}6) - 6I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = -0{,}4\ \text{mA}$$

Resultados:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= 0{,}4\ \text{mA} \\ I_A &= -0{,}6\ \text{mA} \\ V_I &= 3{,}8\ \text{V} \end{aligned}\right\} \qquad I_3 = -0{,}4\ \text{mA}\}$$

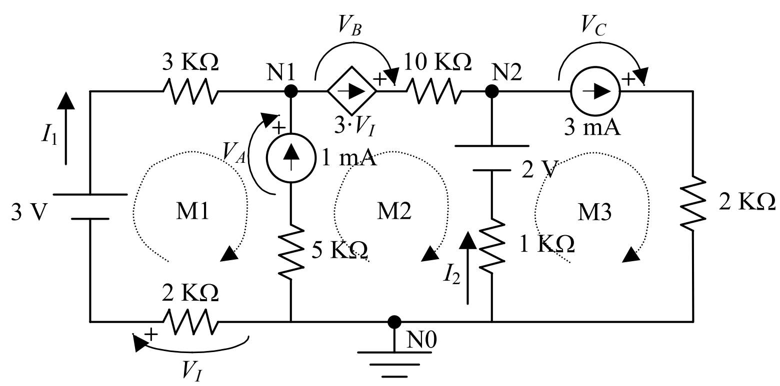
Ejercicio 1.1.7.

Analizar el punto de operación del siguiente circuito, utilizando el método general de resolución por mallas.



Solución:

Tenemos un total de 3 nudos (N0, N1, N2) y 5 ramas, por lo que tendremos 5 incógnitas. El valor de V_I no entra dentro de esas 5 incógnitas, ya que se calculará a partir del valor de la intensidad I_1 aplicando la ley de Ohm. Una vez situadas las incógnitas (2 intensidades I_1 e I_2 en las ramas donde no hay generador de intensidad, y 3 tensiones V_A, V_B, V_C, correspondientes a los generadores de intensidad) el dibujo completo con las mallas a realizar quedaría como sigue:



Podríamos plantear el sistema de ecuaciones completo y resolverlo, pero se aprecia que es posible solucionarlo por partes de una manera más sencilla. Podemos aplicar la ley de Kirchhoff de intensidades al nudo N1 y calcular mediante la ley de Ohm el valor de V_I, y veremos que podremos despejar I_1 de manera directa:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{N1} \rightarrow I_1 + 1 = 3 \cdot V_I \\ V_I = -2I_1 \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 + 1 = 3(-2I_1) \Rightarrow 7I_1 + 1 = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{7} \cong -0{,}1429 \text{ mA}$$

$$V_I = -2I_1 = -2\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{7} \text{ V} \cong 0{,}2857 \text{ V}$$

Es muy importante destacar que en el cálculo de V_I hay que tener muy presente dónde está el signo positivo de V_I y dónde lo tiene la resistencia de 2 KΩ en la que medimos dicho valor; el positivo de V_I está situado a la izquierda de la resistencia, pero según como hemos situado la intensidad I_1 el positivo debería estar a la derecha de la resistencia aplicando el criterio general para los elementos pasivos ("por donde entre la intensidad asignamos el positivo de la tensión"). Por tanto poseen signos opuestos, de ahí que al aplicar la ley de Ohm tengamos que poner uno de los términos con signo negativo.

Ahora podemos calcular, por ejemplo, el valor de I_2 aplicando la 1ª ley de Kirchhoff en el nudo N2 y utilizando los valores previamente calculados para V_I e I_1:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{N2} \rightarrow 3 \cdot V_I + I_2 = 3 \\ V_I = -2I_1 \\ I_1 = -\frac{1}{7} \text{ mA} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3(-2I_1) + I_2 = 3 \\ I_1 = -\frac{1}{7} \text{ mA} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\left(-\frac{1}{7}\right) + I_2 = 3 \Rightarrow I_2 = \frac{15}{7} \text{ mA} \cong 2{,}1429 \text{ mA}$$

Finalmente, aplicando la 2ª ley de Kirchhoff a las tres mallas indicadas, obtenemos los valores de las incógnitas restantes (las tensiones V_A, V_B y V_C):

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M1} \rightarrow -2I_1 + 3 - 3I_1 - V_A + 5 \cdot 1 = 0 \\ \mathrm{M2} \rightarrow -5 \cdot 1 + V_A + V_B - 10(3 \cdot V_I) - 2 + 1I_2 = 0 \\ \mathrm{M3} \rightarrow -1I_2 + 2 + V_C - 2 \cdot 3 = 0 \\ I_1 = -\frac{1}{7} \text{ mA}\,; I_2 = \frac{15}{7} \text{ mA}\,; V_I = \frac{2}{7} \text{ V} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

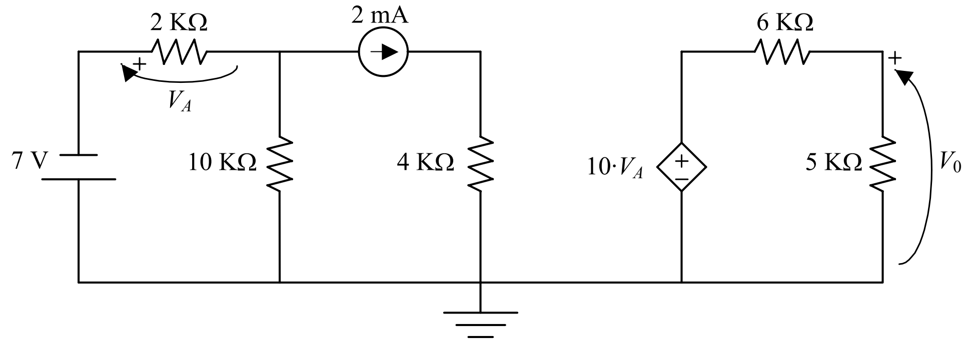
$$\left.\begin{array}{l} \text{M1} \rightarrow -5I_1 - V_A + 8 = 0 \\ \text{M2} \rightarrow V_A + V_B - 30V_I + I_2 - 7 = 0 \\ \Rightarrow \text{M3} \rightarrow V_C - I_2 - 4 = 0 \\ I_1 = -\dfrac{1}{7}\,\text{mA}\,;\, I_2 = \dfrac{15}{7}\,\text{mA}\,;\, V_I = \dfrac{2}{7}\,\text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_A = \dfrac{61}{7}\,\text{V} \cong 8{,}7143\,\text{V} \\ V_B = \dfrac{33}{7}\,\text{V} \cong 4{,}7143\,\text{V} \\ V_C = \dfrac{43}{7}\,\text{V} \cong 6{,}1429\,\text{V} \end{array}\right\}$$

Resultados:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} I_1 = -\dfrac{1}{7}\,\text{mA} \cong -0{,}1429\,\text{mA} \\ I_2 = \dfrac{15}{7}\,\text{mA} \cong 2{,}1429\,\text{mA} \\ V_I = \dfrac{2}{7}\,\text{V} \cong 0{,}2857\,\text{V} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} V_A = \dfrac{61}{7}\,\text{V} \cong 8{,}7143\,\text{V} \\ V_B = \dfrac{33}{7}\,\text{V} \cong 4{,}7143\,\text{V} \\ V_C = \dfrac{43}{7}\,\text{V} \cong 6{,}1429\,\text{V} \end{array}\right\}}$$

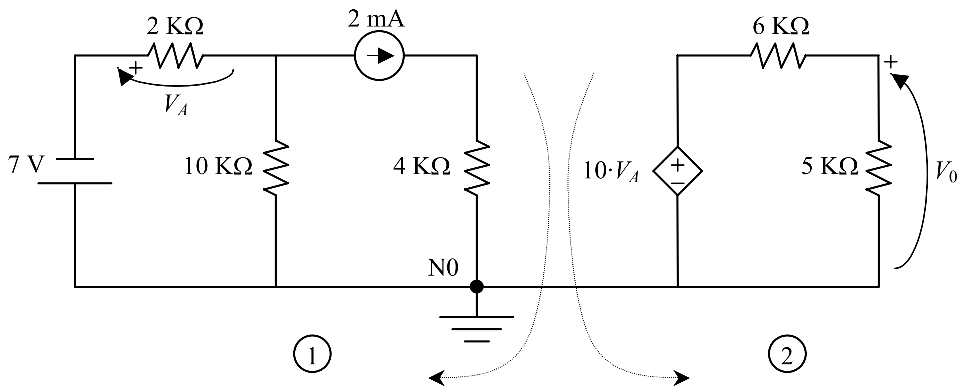
Ejercicio 1.1.8.

Calcular el punto de operación del circuito (intensidades y tensiones de las ramas) utilizando el método de resolución por mallas. Indicar también el valor de salida V_0.



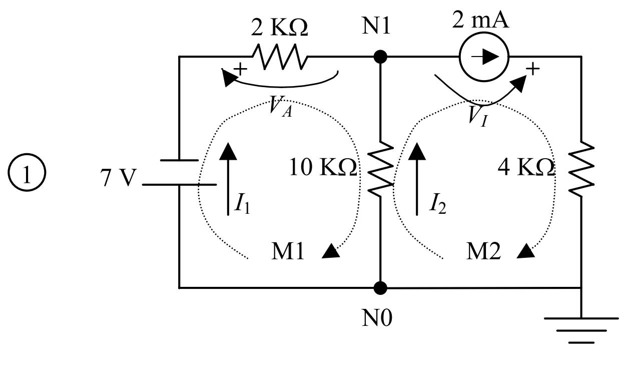
Solución:

Tenemos dos circuitos independientes, ya que son 2 mallas cerradas unidas por un único nudo (el nudo de tierra N0), por lo que los resolveremos por separado, empezando por el circuito que contiene a V_A, ya que es el control de la fuente de tensión del circuito de la derecha:



Circuito 1:

Asignamos un sentido arbitrario a las intensidades en las ramas en las que no hay generador de intensidad (I_1, I_2), y situamos la caída de tensión en el generador de intensidad (V_I). Además, contabilizamos el número total de nudos (2, N0 y N1) y ramas (3), por lo que utilizaremos *R*–(*N*–1) mallas en nuestros cálculos (2 mallas). Asignamos también el sentido en el que vamos a recorrer estas mallas:



Aplicamos la 1ª ley de Kirchhoff al número de nudos menos uno, por tanto obtenemos una ecuación de nudos a partir de N1, por ejemplo; asimismo aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff a las 2 mallas indicadas, quedando las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{N1} \rightarrow I_1 + I_2 = 2 \\ \mathrm{M1} \rightarrow -7 - 2I_1 + 10I_2 = 0 \\ \mathrm{M2} \rightarrow -10I_2 + V_I - 4{\cdot}2 = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por sustitución tenemos:

$$\mathrm{N1} \rightarrow I_1 + I_2 = 2 \Rightarrow I_1 = 2 - I_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{M1} \rightarrow -7 - 2\,(2 - I_2) + 10 I_2 = 0 \\ \mathrm{M2} \rightarrow -10 I_2 + V_I - 4 \cdot 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -7 - 4 + 2 I_2 + 10 I_2 = 0 \\ -10 I_2 + V_I - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -11 + 12 I_2 = 0 \\ -10 I_2 + V_I - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_2 = {}^{11}\!/_{12} = 0{,}91\widehat{6}\ \mathrm{mA} \\ -10 I_2 + V_I - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

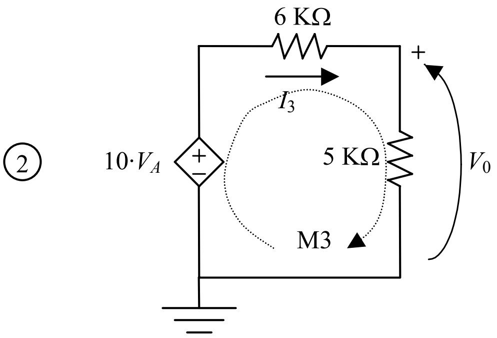
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_2 = 0{,}91\widehat{6}\ \mathrm{mA} \\ -10 \cdot 0{,}91\widehat{6} + V_I - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_2 = 0{,}91\widehat{6}\ \mathrm{mA} \\ V_I = 17{,}1\widehat{6}\ \mathrm{V} \end{array}\right\}$$

$$I_1 = 2 - I_2 \;\Rightarrow\; I_1 = 2 - 0{,}91\widehat{6} = 1{,}08\widehat{3}\ \mathrm{mA}$$

A continuación resolvemos el circuito de la derecha, para lo cual debemos calcular primero el valor de V_A, que ejerce de control de la fuente de tensión. Dicho valor lo obtenemos aplicando la ley de Ohm a la resistencia de 2 KΩ de la malla M1: $V_A = 2 I_1 = 2{,}1\widehat{6}\ \mathrm{V}$

Circuito 2:

Observando el circuito apreciamos que solamente tiene una rama, por tanto sólo hay una malla, la M3. Asignamos el sentido de la intensidad I_3 de la manera indicada:



Aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff a la malla M3 y resolvemos la ecuación utilizando el valor calculado previamente para V_A:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M3} \rightarrow 10 V_A - 6 I_3 - 5 I_3 = 0 \\ V_A = 2{,}1\widehat{6}\ \mathrm{V} \end{array}\right\} \Rightarrow 10 \cdot 2{,}1\widehat{6} - 11 I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{21{,}\widehat{6}}{11} = 1{,}\overline{96}\ \mathrm{mA}$$

El valor de V_0 lo calculamos aplicando la ley de Ohm a la resistencia de 5 KΩ de la malla M3:

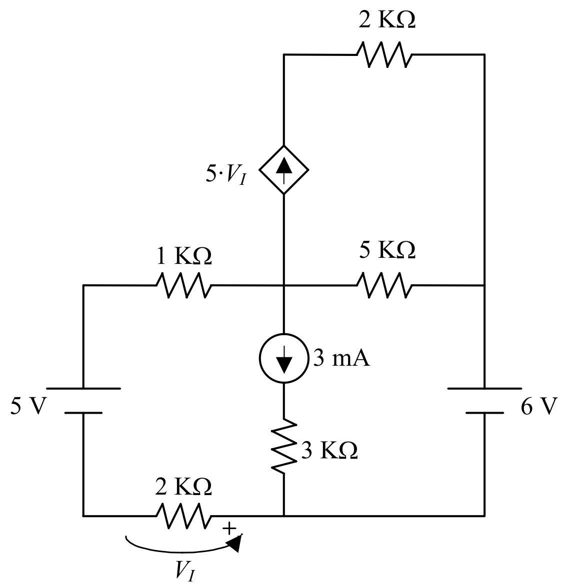
$$V_0 = 5I_3 = 5 \cdot 1,\overline{96} = 9,\overline{84}\ \text{V}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} I_1 = 1{,}08\widehat{3}\ \text{mA} \\ I_2 = 0{,}91\widehat{6}\ \text{mA} \\ I_3 = 1{,}\overline{96}\ \text{mA} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} V_I = 17{,}1\widehat{6}\ \text{V} \\ V_A = 2{,}1\widehat{6}\ \text{V} \\ V_0 = 9{,}\overline{84}\ \text{V} \end{array}\right\}}$$

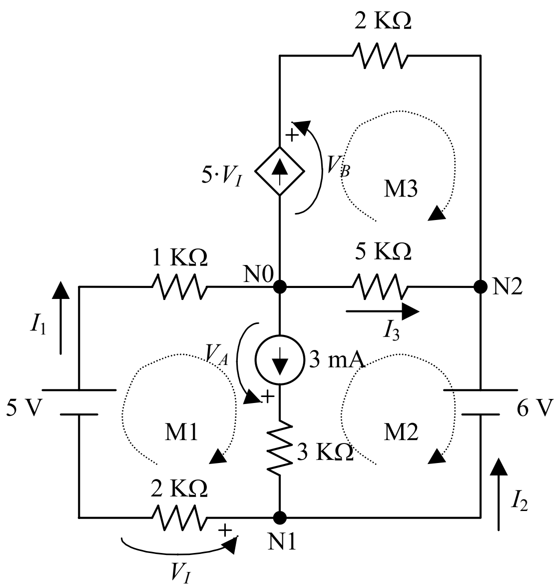
Ejercicio 1.1.9.

Analizar el punto de operación del siguiente circuito, utilizando el método general de resolución por mallas.



Solución:

Contamos el número de nudos y ramas que tenemos en el circuito, y establecemos las incógnitas (intensidades en las ramas donde no hay generador de intensidad y tensiones que caen en dichos generadores). Asimismo, habrá que calcular el valor de V_I para hallar el valor de la fuente de intensidad controlada, si bien esta V_I no será una incógnita propiamente dicha, sino que se calculará posteriormente aplicando la ley de Ohm una vez conocida la intensidad que atraviesa la resistencia de 2 KΩ de la rama inferior izquierda:



Se observa que el circuito posee 3 nudos (N0, N1 y N2) y 5 ramas, por lo tanto tendremos que buscar 5 incógnitas. Éstas las encontraremos planteando un sistema de ecuaciones formado por 2 ecuaciones de nudos (1ª ley de Kirchhoff) aplicadas sobre sendos nudos (por ejemplo N0 y N1), así como 3 ecuaciones de mallas (2ª ley de Kirchhoff) aplicadas a M1, M2 y M3. Las incógnitas a buscar son I_1, I_2, I_3, V_A y V_B.

Hay que destacar que en la rama central superior tenemos un generador de intensidad controlado por tensión, y no se debe confundir su control con lo que genera: el control del generador es V_I (una tensión), y lo que genera es una intensidad en la rama en la que se encuentra situado, y esa intensidad tendrá un valor, en mA, de $5{\cdot}V_I$.

Por tanto el sistema de ecuaciones quedará como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{N0} \rightarrow I_1 = 3 + 5{\cdot}V_I + I_3 \\ \mathrm{N1} \rightarrow 3 = I_1 + I_2 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de nudos}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M1} \rightarrow -2I_1 + 5 - I_1 + V_A - 3{\cdot}3 = 0 \\ \mathrm{M2} \rightarrow 3{\cdot}3 - V_A - 5I_3 - 6 = 0 \\ \mathrm{M3} \rightarrow V_B - 2{\cdot}5{\cdot}V_I + 5I_3 = 0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de mallas}$$

Falta una ecuación para poder resolver el sistema, y es la que relaciona el valor de V_I con el de alguna de las incógnitas "reales" del circuito; ésta la obtendremos tras aplicar la ley de Ohm a la resistencia en la que está medida dicha tensión: $V_I = 2I_1$ (Es muy importante fijarse en que coincidan en el dibujo el signo positivo de V_I con el lado por donde entre la intensidad a dicha resistencia, para que al aplicar la ley de Ohm tomemos los dos términos como positivos; si esto no se diera habría que tomar negativo alguno de los dos términos, ya que no coincidirían sus polaridades).

Con estas seis ecuaciones ya podemos resolver el sistema; empezamos sustituyendo el valor de V_I por el calculado en el sistema de ecuaciones:

$$V_I = 2I_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{N0} \rightarrow I_1 = 3 + 5\,(2I_1) + I_3 \\ \mathrm{N1} \rightarrow 3 = I_1 + I_2 \\ \mathrm{M1} \rightarrow -2I_1 + 5 - I_1 + V_A - 3{\cdot}3 = 0 \\ \mathrm{M2} \rightarrow 3{\cdot}3 - V_A - 5I_3 - 6 = 0 \\ \mathrm{M3} \rightarrow V_B - 2{\cdot}5\,(2I_1) + 5I_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow 9I_1 + I_3 + 3 = 0 \\ (2) \rightarrow I_1 + I_2 = 3 \\ (3) \rightarrow -3I_1 + V_A - 4 = 0 \\ (4) \rightarrow -V_A - 5I_3 + 3 = 0 \\ (5) \rightarrow -20I_1 + V_B + 5I_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Sumando las ecuaciones (3) y (4) obtenemos la expresión (6), la cual la reducimos con la ecuación (1) y nos queda:

$$\begin{array}{l} (3) \rightarrow -3I_1 + V_A - 4 = 0 \\ \underline{+\ \ (4) \rightarrow -V_A - 5I_3 + 3 = 0} \\ \left.\begin{array}{l} (6) \rightarrow -3I_1 - 5I_3 - 1 = 0 \\ (1) \rightarrow 9I_1 + I_3 + 3 = 0 \end{array}\right\} \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (6)\times 3 \rightarrow -9I_1 - 15I_3 - 3 = 0 \\ (1) \rightarrow 9I_1 + I_3 + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = 0$$

Hallamos el valor de I_1 usando la ecuación (1):

$$(1) \rightarrow 9I_1 + I_3 + 3 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{-3 - I_3}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} = -0{,}\widehat{3}\ \mathrm{mA}$$

A continuación calculamos I_2 mediante la ecuación (2):

$$(2) \rightarrow I_1 + I_2 = 3 \Rightarrow I_2 = 3 - I_1 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} = 3{,}\widehat{3}\ \mathrm{mA}$$

Una vez que tenemos calculadas las intensidades hallamos los valores de las tensiones:

$$V_I = 2I_1 = -\frac{2}{3} = -0{,}\overset{\frown}{6}\ \text{V}$$

$$(4) \to -V_A - 5I_3 + 3 = 0 \Rightarrow V_A = 3\ \text{V}$$

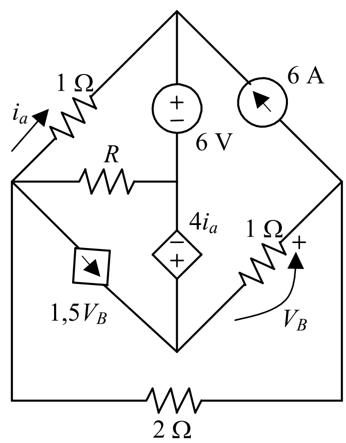
$$(5) \to -20I_1 + V_B + 5I_3 = 0 \Rightarrow V_B = 20I_1 = -\frac{20}{3} = -6{,}\overset{\frown}{6}\ \text{V}$$

Por tanto, los valores de las incógnitas son:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} I_1 = -0{,}\overset{\frown}{3}\ \text{mA} \\ I_2 = 3{,}\overset{\frown}{3}\ \text{mA} \\ I_3 = 0\ \text{mA} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} V_A = 3\ \text{V} \\ V_B = -6{,}\overset{\frown}{6}\ \text{V} \\ V_I = -0{,}\overset{\frown}{6}\ \text{V} \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 1.1.10.

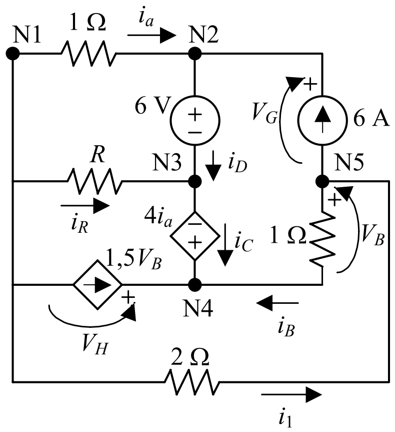
Calcule el valor de *R* sabiendo que la fuente de tensión de 6 V absorbe una potencia de 48 W.



Solución:

A continuación:

- Transformamos el aspecto del circuito.
- Asignamos nombres a los nudos.
- Asignamos sentidos arbitrarios a las intensidades que recorren el circuito y a las mallas que lo componen.



Se necesita un sistema de 8 ecuaciones, 4 de ellas obtenidas a partir de los nudos y otras 4 a partir de las mallas. Según se muestra a continuación:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \text{Nudo N1} \rightarrow i_a + i_R + 1{,}5V_B + i_1 = 0 \\
(2) & \text{Nudo N2} \rightarrow i_a + 6 - i_D = 0 \\
(3) & \text{Nudo N3} \rightarrow i_R - i_C + i_D = 0 \\
(4) & \text{Nudo N5} \rightarrow i_B + 6 - i_1 = 0 \\
(5) & \text{Malla (N1, N2, N3, N1)} \rightarrow 1i_a + 6 - R \cdot i_R = 0 \\
(6) & \text{Malla (N1, N3, N4, N1)} \rightarrow -4i_a + V_H + R \cdot i_R = 0 \\
(7) & \text{Malla (N1, N4, N5, N1)} \rightarrow -V_H - 1i_B - 2i_1 = 0 \\
(8) & \text{Malla (N2, N5, N4, N3, N2)} \rightarrow 4i_a - 6 + V_G + 1i_B = 0
\end{array}\right\}$$

El enunciado del problema indica que la fuente de 6 V absorbe una potencia de 48 W, ello quiere decir que dicha fuente se está comportando como una resistencia ya que en lugar de aportar energía al circuito la está consumiendo. Al comportarse como un dispositivo pasivo, el sentido de la intensidad i_D es contrario al del voltaje. El valor de i_D se obtiene de:

$$P(6\text{ V}) = V \cdot i_D = 6i_D = 48\text{ W} \Rightarrow i_D = 8\text{ A}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) $\Rightarrow i_a = 2$ A

De la ecuación (5) $\Rightarrow R \cdot i_R = 8$, que sustituida en (6) obtenemos $V_H = 0$ V

Multiplicando por –2 la ecuación (4) y sumada a la (7):

$$-12 - 3i_B = 0 \Rightarrow i_B = -4 \text{ A}$$

Sustituyendo en (4) $\Rightarrow i_1 = 2 \text{ A}$

De la ecuación (8) $\Rightarrow V_G = 2 \text{ V}$

Por la ley de Ohm $\Rightarrow V_B = 1 i_B = -4 \text{ A}$

Sustituyendo en (1) $\Rightarrow i_R = 2 \text{ A}$

El valor de la resistencia *R* será: $R \cdot i_R = 8 \Rightarrow R = 4\,\Omega$

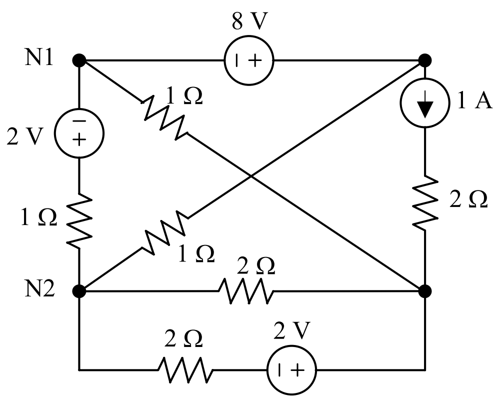
Por último, de la ecuación (3) $\Rightarrow i_C = 8 + i_R = 10 \text{ A}$

Resultados:

$$\left.\begin{array}{l} i_a = 2 \text{ A} \\ i_B = -4 \text{ A} \\ i_C = 10 \text{ A} \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{l} i_D = 8 \text{ A} \\ i_R = 2 \text{ A} \\ i_1 = 2 \text{ A} \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{l} V_G = 2 \text{ V} \\ V_H = 0 \text{ V} \\ R = 4\,\Omega \end{array}\right\}$$

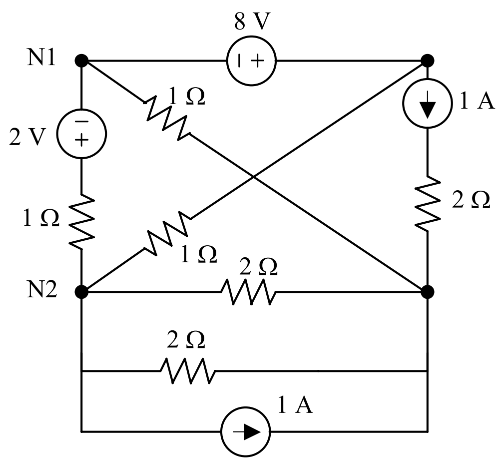
Ejercicio 1.1.11.

Calcule el voltaje entre los nudos N1 y N2 y la energía que suministra al circuito el generador de corriente.



Solución:

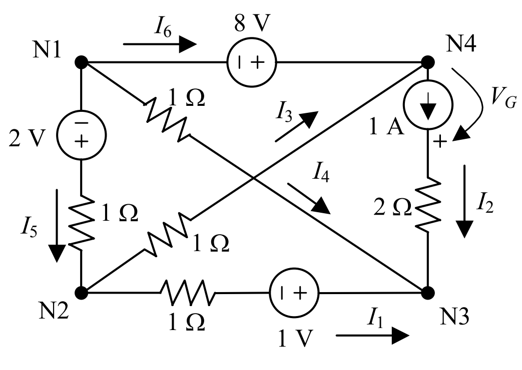
Podemos plantear las ecuaciones directamente o bien simplificar progresivamente el circuito mediante transformación de generadores y obtener así un circuito algo más sencillo. Pues bien, si empleamos ésta última opción, transformamos la fuente de tensión que aparece en la parte inferior del circuito para asociar las resistencias de 2 Ω en paralelo:



A continuación:

- Convertimos de nuevo a fuente de tensión.
- Señalamos sentidos arbitrarios en las intensidades.
- En las mallas donde aparezca un generador de corriente asignamos un valor de tensión en los extremos del generador.

De modo que obtenemos el siguiente circuito:



El circuito tiene 4 nudos (N = 4) y 6 ramas (R = 6) luego en total necesitamos 6 ecuaciones que se obtienen N–1 de los nudos utilizando la 1ª Ley de Kirchhoff y R–(N–1) de las mallas utilizando la 2ª Ley de Kirchhoff.

El sistema de ecuaciones que resuelve el circuito es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \text{Nudo N1} \rightarrow I_5 + I_6 + I_4 = 0 \\
(2) & \text{Nudo N2} \rightarrow I_5 - I_3 - I_1 = 0 \\
(3) & \text{Nudo N3} \rightarrow I_1 + I_2 + I_4 = 0 \\
(4) & \text{Malla(N1,N3,N2,N1)} \rightarrow 1I_4 + 1 - 1I_1 - I_5 + 2 = 0 \\
(5) & \text{Malla(N2,N3,N4,N1)} \rightarrow 1I_1 - 1 - 2I_2 + V_G - 1I_3 = 0 \\
(6) & \text{Malla(N1,N2,N4,N1)} \rightarrow -2 + 1I_5 + 1I_3 + 8 = 0
\end{array}\right\}$$

De $(6) \rightarrow -I_5 - 6 = I_3$ sustituyendo en $(2) \Rightarrow 2I_5 + 6 - I_1 = 0 \quad (7)$

De $(3) \rightarrow I_4 = -I_1 - I_2$ y sustituyendo en $(4) \Rightarrow -I_1 - I_2 + 1 - I_1 + 2 - I_5 = 0$

Como $I_2 = 1\text{ A} \Rightarrow -2 \cdot I_1 - I_5 + 2 = 0 \quad (8)$

De (7) y (8) obtenemos $\Rightarrow I_1 = 2\text{ A}$ e $I_5 = -2\text{ A}$.

Además: $I_3 = -4\text{ A}$, $I_4 = -3\text{ A}$, $I_6 = 5\text{ A}$ y $V_G = -3\text{ V}$

La tensión entre los nudos N1 y N2 es $V_{N1-N2} = -2 + I_5 \cdot 1 = -2 - 2 = -4\text{ V}$ y la potencia que suministra la fuente de intensidad es $P(1\text{ A}) = 1\text{ A} \cdot V_G = -3\text{ W}$.

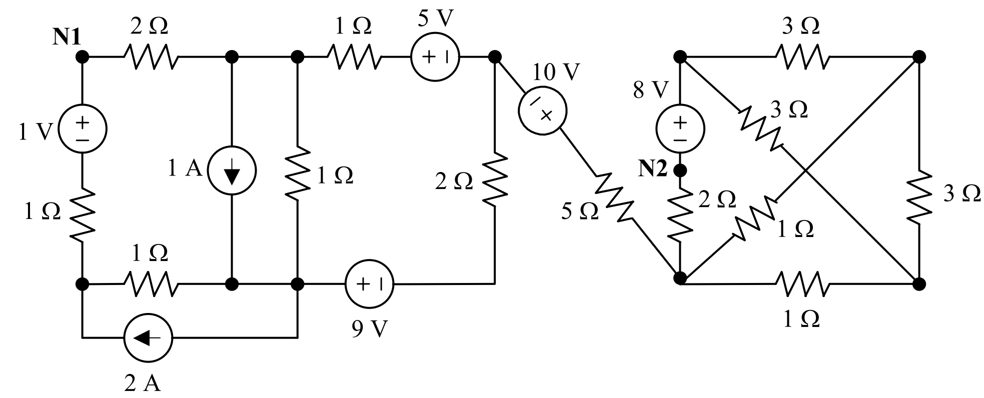
El signo negativo indica que la fuente de intensidad se está comportando como un elemento pasivo ya que absorbe energía en lugar de aportarla al circuito.

Resultados:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} I_1 = 2\text{ A} \\ I_2 = 1\text{ A} \\ I_3 = -4\text{ A} \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{l} I_4 = -3\text{ A} \\ I_5 = -2\text{ A} \\ I_6 = 5\text{ A} \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{l} V_G = -3\text{ V} \\ V_{N1-N2} = -4\text{ V} \\ P(1\text{ A}) = -3\text{ W} \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 1.1.12.

Calcule el voltaje entre los puntos marcados como N1 y N2 para el circuito de la figura.

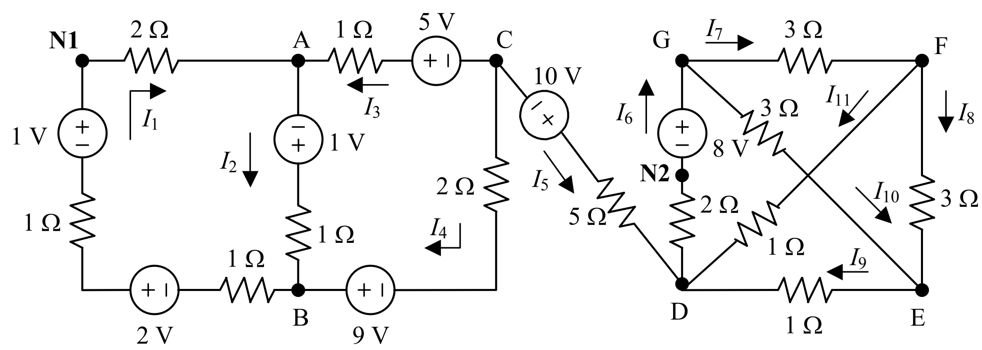


Solución:

En la medida de lo posible, transformamos ligeramente el circuito para simplificarlo, es decir:

- Transformamos ambos generadores de intensidad en fuentes de tensión.
- Señalamos sentidos arbitrarios en las intensidades.
- Damos nombres a los nudos para referenciarlos cómodamente.

Y así obtenemos el siguiente circuito:



Podemos observar que no hemos asociado las tres resistencias en serie que aparecen en la rama de más a la izquierda ya que ello provocaría que el punto N1 cambiase su posición física en el circuito.

En principio se trata de un circuito compuesto de N = 7 nudos y R = 11 ramas que debe ser resuelto con un sistema de 11 ecuaciones con 11 incógnitas.

Pero podemos aplicar las reglas de Kirchhoff de una forma un poco especial de modo que implícitamente, a la vez que planteamos las ecuaciones, también podemos aplicar la ley de Ohm, con lo cual sólo vamos a necesitar plantear un sistema de N–1 = 6 ecuaciones para resolver el circuito.

En primer lugar, las ecuaciones se obtienen aplicando la 1ª ley de Kirchhoff a todos los nudos menos uno:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Nudo A} \rightarrow I_1 + I_3 = I_2 \\
\text{Nudo B} \rightarrow I_4 + I_2 = I_1 \\
\text{Nudo C} \rightarrow I_3 + I_4 + I_5 = 0 \\
\text{Nudo D} \rightarrow I_5 + I_9 + I_{11} = I_6 \\
\text{Nudo E} \rightarrow I_8 + I_{10} = I_9 \\
\text{Nudo F} \rightarrow I_7 = I_{11} + I_8
\end{array}\right\}$$

A continuación expresamos las intensidades que aparecen en las ecuaciones anteriores mediante tensiones entre los nudos origen y destino de la rama que atraviesan. Por ejemplo:

$$I_8 = \frac{V_F - V_E}{3}, I_1 = \frac{V_B - V_A + 2 + 1}{2 + 1 + 1}, I_5 = \frac{V_C - V_D + 10}{5} \ldots$$

De este modo las ecuaciones quedan como sigue:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Nudo A} \rightarrow \dfrac{V_B - V_A + 2 + 1}{2 + 1 + 1} + \dfrac{V_C - V_A + 5}{1} = \dfrac{V_A - V_B + 1}{1} \\
\text{Nudo B} \rightarrow \dfrac{V_C - V_B + 9}{2} + \dfrac{V_A - V_B + 1}{1} = \dfrac{V_B - V_A + 2 + 1}{4} \\
\text{Nudo C} \rightarrow \dfrac{V_C - V_A + 5}{1} + \dfrac{V_C - V_B + 9}{2} + \dfrac{V_C - V_D + 10}{5} = 0
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nudo D} \rightarrow \dfrac{V_C - V_D + 10}{5} + \dfrac{V_E - V_D}{1} + \dfrac{V_F - V_D}{1} = \dfrac{V_D - V_G + 8}{2} \\ \text{Nudo E} \rightarrow \dfrac{V_F - V_E}{3} + \dfrac{V_G - V_E}{3} = \dfrac{V_E - V_D}{1} \\ \text{Nudo F} \rightarrow \dfrac{V_G - V_F}{3} = \dfrac{V_F - V_D}{1} + \dfrac{V_F - V_E}{3}\end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema de 6 ecuaciones y 7 incógnitas (7 tensiones) pero tomando como nudo de tierra uno de ellos, por ejemplo el nudo B $\Rightarrow V_B = 0$ V, desaparece dicha incógnita y el sistema ya es resoluble.

Vemos que este método reduce considerablemente la complejidad a la hora de resolver el circuito ya que hemos pasado de un sistema de 11 ecuaciones a otro de sólo 6.

Simplificamos las ecuaciones un poco más eliminando los denominadores:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \text{Nudo A} \rightarrow -9V_A + 4V_C + 19 = 0 \\ (2) & \text{Nudo B} \rightarrow 5V_A + 2V_C + 19 = 0 \\ (3) & \text{Nudo C} \rightarrow -10V_A + 17V_C - 2V_D + 115 = 0 \\ (4) & \text{Nudo D} \rightarrow 2V_C - 27V_D + 5V_G + 10V_E + 10V_F - 20 = 0 \\ (5) & \text{Nudo E} \rightarrow V_F - 5V_E + V_G + 3V_D = 0 \\ (6) & \text{Nudo F} \rightarrow V_G - 5V_F + V_E + 3V_D = 0\end{array}\right\}$$

Las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, que al resolverlo obtenemos: $V_A = -1\text{ V}$ y $V_C = -7\text{ V}$

Sustituyendo en (3) $\Rightarrow V_D = 3\text{V}$

Sustituyendo los valores calculados en (4), (5) y (6) llegamos a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que una vez resuelto obtenemos:

$$V_G = 7\text{ V}, V_E = 4\text{ V}, V_F = 4\text{ V}$$

Con las soluciones anteriores ya podemos calcular los valores de las intensidades a partir de sus ecuaciones y obtener así las corrientes que circulan por todas las ramas del circuito:

$$\left.\begin{array}{l}
I_1 = \dfrac{0-(-1)+3}{4} = 1\text{ A},\ I_2 = \dfrac{-1+1}{1} = 0\text{ A},\ I_3 = \dfrac{-7+1+5}{1} = -1\text{ A} \\
I_4 = \dfrac{-7+0+9}{2} = 1\text{ A},\ I_5 = \dfrac{-7-3+10}{5} = 0\text{ A},\ I_6 = \dfrac{3-7+8}{2} = 2\text{ A} \\
I_7 = \dfrac{7-4}{3} = 1\text{ A},\ I_8 = \dfrac{4-4}{3} = 0\text{ A},\ I_9 = \dfrac{4-3}{1} = 1\text{ A} \\
I_{10} = \dfrac{7-4}{3} = 1\text{ A},\ I_{11} = \dfrac{4-3}{1} = 1\text{ A}
\end{array}\right\}$$

Por último queda calcular el valor de la tensión entre los puntos N1 y N2 (V_{N1-N2}). Para ello planteamos la ecuación de la malla que parte de N1 y llega hasta N2:

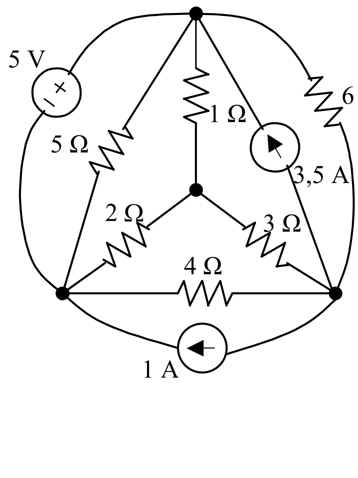
$$V_{N1-N2} - 2I_6 - 5I_5 + 10 - 5 + 1I_3 - 2I_1 = 0 \Rightarrow V_{N1-N2} = 2\text{ V}$$

Resultados:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}
I_1 = 1\text{ A}, I_2 = 0\text{ A}, I_3 = -1\text{ A} \\
I_4 = 1\text{ A}, I_5 = 0\text{ A}, I_6 = 2\text{ A} \\
I_7 = 1\text{ A}, I_8 = 0\text{ A}, I_9 = 1\text{ A} \\
I_{10} = 1\text{ A}, I_{11} = 1\text{ A}
\end{array}\right\}\ ;\ V_{N1-N2} = 2\text{ V}\}}$$

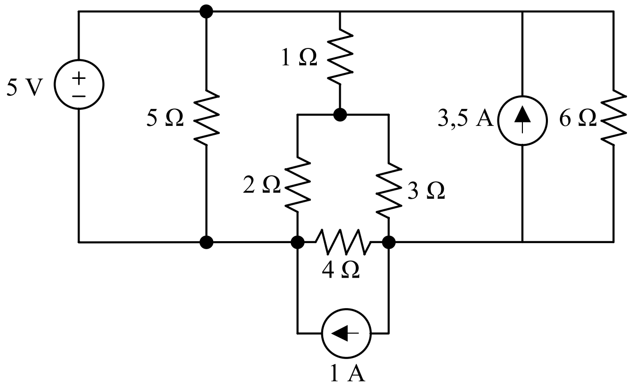
Ejercicio 1.1.13.

Calcule el balance de potencias del circuito de la figura.



Solución:

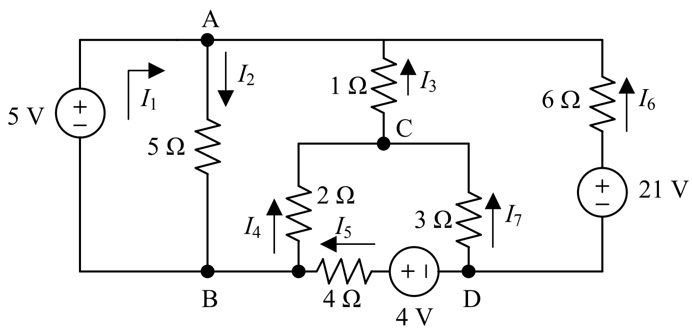
Transformamos ligeramente el circuito para que tome una forma similar a la que estamos acostumbrados:



A continuación:

- Pasamos las fuentes de intensidad a fuentes de tensión.
- Asignamos nombres a los nudos.
- Asignamos sentidos arbitrarios a las intensidades que recorren las ramas.

Obteniendo el siguiente circuito:



Resulta un circuito compuesto de $N = 4$ nudos y $R = 7$ ramas que debe ser resuelto con un sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas.

Pero podemos simplificar el problema aplicando las reglas de Kirchhoff junto con la ley de Ohm. De modo que el análisis del circuito se reduce a la resolución de un sistema de 3 ecuaciones (*N*–1) según observamos a continuación:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nudo A} \rightarrow I_1 - I_2 + I_3 + I_6 = 0 \\ \text{Nudo B} \rightarrow I_5 + I_2 - I_1 - I_4 = 0 \\ \text{Nudo D} \rightarrow I_7 + I_5 + I_6 = 0\end{array}\right\}$$

Seguidamente aplicamos la ley de Ohm, expresando las intensidades mediante tensiones entre los nudos origen y destino de la rama que atraviesan. Pero existe un pequeño inconveniente, por ejemplo la intensidad I_1 no puede expresarse mediante la ley de Ohm puesto que no existe ninguna resistencia en esa rama, de modo que dejamos que I_1 siga como una incógnita en el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nudo A} \rightarrow I_1 - \dfrac{V_A - V_B}{5} + \dfrac{V_C - V_A}{1} + \dfrac{V_D - V_A + 21}{6} = 0 \\ \text{Nudo B} \rightarrow \dfrac{V_D - V_B + 4}{4} + \dfrac{V_A - V_B}{5} - I_1 - \dfrac{V_B - V_C}{2} = 0 \\ \text{Nudo D} \rightarrow \dfrac{V_D - V_C}{3} + \dfrac{V_D - V_B + 4}{4} + \dfrac{V_D - V_A + 21}{6} = 0\end{array}\right\}$$

Observamos que se trata de un sistema de 3 ecuaciones y 5 incógnitas, pero tomando como nudo de tierra uno de ellos, por ejemplo el nudo B $\Rightarrow V_B = 0$ V. Además, según el circuito vemos que hay conectada una fuente de tensión de 5 V entre el nudo A y el B, de forma que $V_A - V_B = 5$ V, y así conseguimos eliminar 2 incógnitas y el sistema ya tendría solución.

Quitando denominadores y simplificando:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \rightarrow 6I_1 + 6V_C + V_D - 20 = 0 \\ (2) & \rightarrow -4I_1 + 2V_C + V_D + 8 = 0 \\ (3) & \rightarrow -4V_C + 9V_D + 44 = 0\end{array}\right\}$$

Multiplicando (1) por 4, multiplicando (2) por 6 y sumando ambos resultados eliminamos la variable I_1 y obtenemos:

$$36V_C + 10V_D - 32 = 0 \quad (4)$$

Multiplicando (3) por 9 y sumando con (4):

$$91V_D - 364 = 0 \Rightarrow V_D = -4 \text{ V}$$

Sustituyendo en (4) $\Rightarrow V_C = 2$ V

De (1) $\Rightarrow I_1 = 2$ A

Y para el resto de intensidades:

$$I_2 = 1 \text{ A}, I_3 = -3 \text{ A}, I_4 = -1 \text{ A}, I_5 = 0 \text{ A}, I_6 = 2 \text{ A}, I_7 = -2 \text{ A}$$

Podríamos volver a transformar las fuentes de tensión de 21 V y de 4 V en fuentes de intensidad, obteniendo el circuito original del problema y calcular así las intensidades que realmente circulan por las resistencias de 6 Ω y 4 Ω pero ello no influiría en el cálculo del balance de potencias. De modo que dicho balance resulta:

$$P(\text{Disipada en Resistencias}) = P(\text{Suministrada por Fuentes})$$

$$P(\text{Suministrada por Fuentes}) = \sum V \cdot I = 5I_1 + 21I_6 + 4I_5 = 52 \text{ W}$$

$$P(\text{Disipada en Resistencias}) = \sum R \cdot I^2 = 5I_2^2 + 2I_4^2 + 1I_3^2 + 4I_5^2 + 3I_7^2 + 6I_6^2 = 52 \text{ W}$$

Resultados:

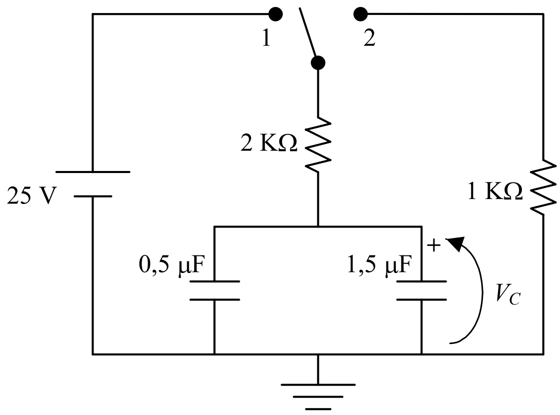
$$\left.\begin{array}{l} I_1 = 2 \text{ A}, I_2 = 1 \text{ A}, I_3 = -3 \text{ A}, I_4 = -1 \text{ A} \\ I_5 = 0 \text{ A}, I_6 = 2 \text{ A}, I_7 = -2 \text{ A} \end{array}\right\} \; ; \; \left.\begin{array}{l} P(\text{Generadores}) = 52 \text{ W} \\ P(\text{Resistencias}) = 52 \text{ W} \end{array}\right\}$$

1.2. ANÁLISIS TRANSITORIOS (CONDENSADORES)

Ejercicio 1.2.1.

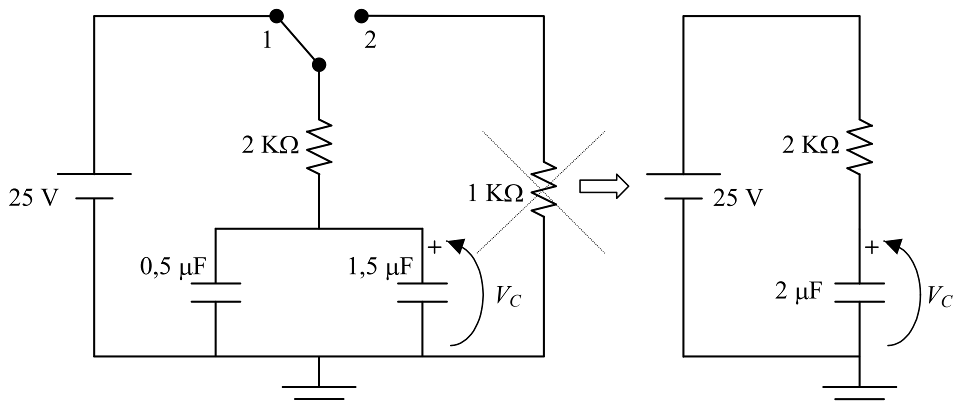
El circuito de la figura conmuta a la posición 1 en un tiempo $t = 0$. En $t = 3$ ms conmuta a la posición 2. Encontrar la expresión de la tensión V_C en función del tiempo.

Inicialmente los condensadores están completamente descargados.



Solución:

En un tiempo $t = 0$ el interruptor queda conectado en la posición 1, por lo que la resistencia de la derecha de 1 KΩ queda anulada (tiene un terminal al aire). Además, si unimos los dos condensadores en uno solo (al estar en paralelo se suman directamente) el circuito nos queda como sigue:

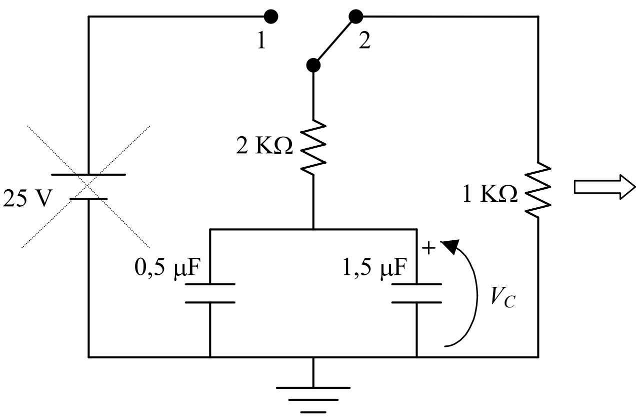


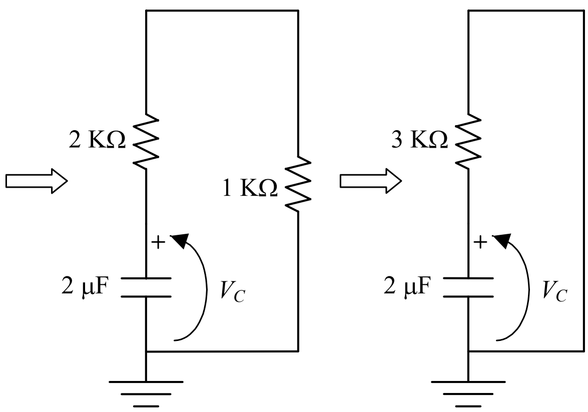
Como sólo posee una fuente de tensión y una resistencia podemos ya aplicar directamente las ecuaciones de carga y descarga conocidas. En este caso se trata de un proceso de carga del condensador:

$$* \,\text{Carga}: \; t = 0 \text{ ms} \Rightarrow V(t=0) = 0 \text{ V}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_C = V\,(1 - e^{-t/\tau}) \\ V = 25 \text{ V} \\ \tau = R \cdot C = 2 \cdot 2 = 4 \text{ ms} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall\, 0 \text{ ms} \le t \le 3 \text{ ms} \Rightarrow V_C = 25\,(1 - e^{-t/4})$$

En el tiempo t = 3 ms el conmutador cambia a la posición 2, por lo que el circuito queda de la siguiente forma:





Ahora el circuito entrará en un proceso de descarga, por lo que calcularemos la condición inicial en la que se encuentra el condensador (V_0) y aplicaremos la fórmula de la descarga del condensador:

$$\text{* Carga inicial}: V_0 = V_C(t = 3\text{ ms}) = 25\,(1 - e^{-3/4}) \cong 13{,}19\text{ V}$$

$$\text{* Descarga}:$$

$$\left.\begin{array}{l} V_C = V_0\, e^{-t/\tau} \\ V_0 = 13{,}19\text{ V} \\ \tau = R{\cdot}C = 2{\cdot}3 = 6\text{ ms} \end{array}\right\} \Rightarrow V_C = 13{,}19\, e^{-t/6}$$

El tiempo *t* está expresado como tiempo relativo (a partir de 0). Si lo queremos en tiempo absoluto habrá que restarle el tiempo transcurrido hasta ese momento (3 ms):

$$\forall\, t \geq 3\text{ ms} \Rightarrow V_C = 13{,}19\, e^{-(t-3)/6}$$

Resumiendo:

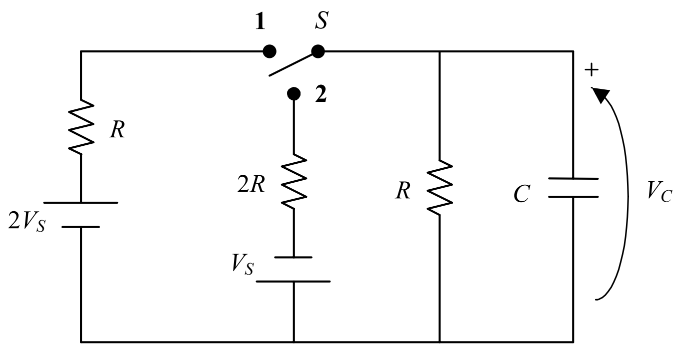
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall\, 0\text{ ms} \leq t \leq 3\text{ ms} \Rightarrow V_C = 25\,(1 - e^{-t/4}) \\ \forall\, t \geq 3\text{ ms} \Rightarrow V_C = 13{,}19\, e^{-(t-3)/6} \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 1.2.2.

Realiza el análisis transitorio del circuito de la figura con las siguientes condiciones:

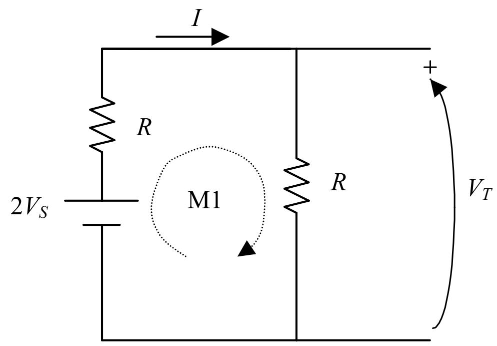
> **a)** $t = t_0 = 0 \rightarrow S$ **se encuentra en la posición 1 y** $V_C = 0$
> **b)** $t = t_1 = 3RC \rightarrow S$ **se encuentra en la posición 2.**

Traza la curva de V_C **en función del tiempo para los valores** $V_S = 10$ **V,** $R = 2$ **KΩ y** $C = 10$ **μF.**

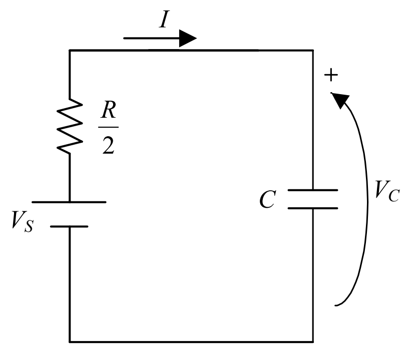


Solución:

a) El circuito resultante en esta situación donde $t = t_0 = 0$ es el siguiente:



Aplicando Thèvenin $\Rightarrow I = \frac{2V_S}{2R} = \frac{V_S}{R} \Rightarrow V_T = R \cdot I = V_S$; $R_T = \frac{R}{2}$



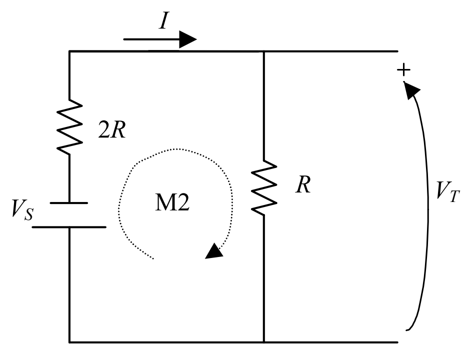
La ecuación de carga/descarga de un condensador es:

$$V_C = V_F + (V_i - V_F)\, e^{-t/\tau}$$

donde la tensión inicial es $V_i = 0, \tau = \frac{RC}{2}$, y la tensión final es $V_F = V_S$, luego:

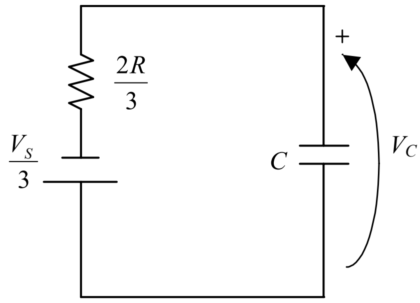
$$\boxed{V_C = V_S \left(1 - e^{-2t/RC}\right)}$$

b) El circuito resultante en esta situación donde $t = t_1 = 3RC$ es el siguiente:



Simplificando el circuito usando Thèvenin:

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{-V_S}{3R} \Rightarrow V_T = -\frac{V_S}{3} \\ R_T &= \frac{2R}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$



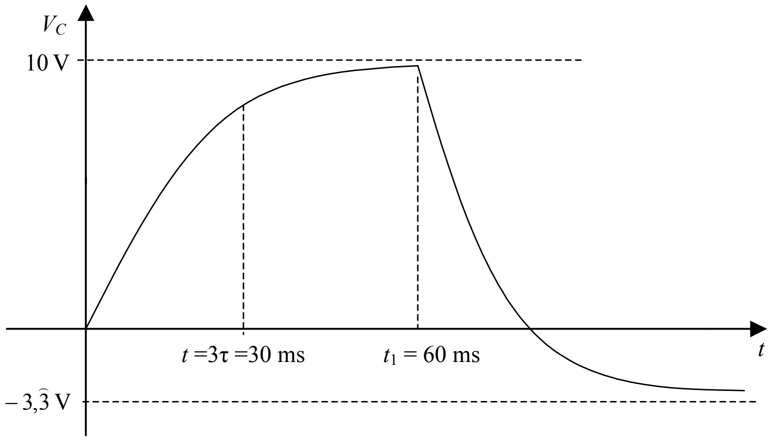
La ecuación de descarga es $V_C = V_F + (V_i - V_F)\, e^{-t/\tau}$. El valor de la tensión inicial V_i lo podemos obtener a partir de la ecuación calculada en la situación anterior $V_C(t = t_1 = 3RC) = V_S\left(1 - e^{-6}\right) = V_S \cdot 0{,}9975 \approx V_S$. Observamos que podemos aproximar el valor de $V_i = V_S$ sin demasiado error.

En la ecuación anterior no debemos confundir el instante de tiempo $t = t_1 = 3RC$ con el valor de tiempo $t = 3\,\tau$ que representaba el instante en el que la tensión en el condensador alcanzaba el 95% de su valor final.

Por otro lado $\tau = \dfrac{2RC}{3}$ y la tensión final que se alcanza es $V_F = -\dfrac{V_S}{3}$, por lo tanto:

$$\boxed{V_C = -\frac{V_S}{3} + \left(V_S - \left(-\frac{V_S}{3}\right)\right)\, e^{-3(t-3RC)/2RC} = -\frac{V_S}{3} + \frac{4V_S}{3}\, e^{-3(t-3RC)/2RC}}$$

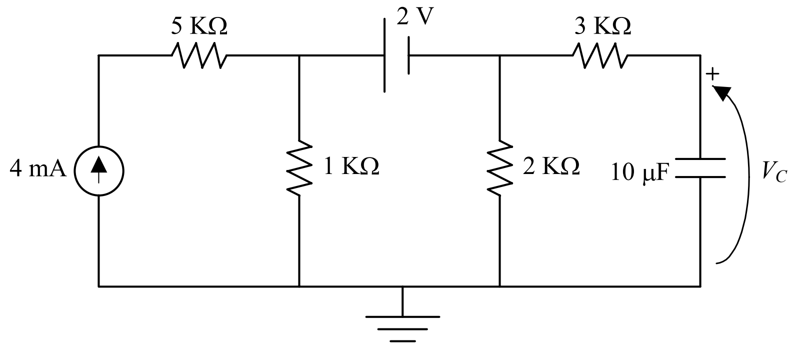
La ecuación de V_C en función del tiempo para los valores del enunciado se muestra en la gráfica siguiente:



Ejercicio 1.2.3.

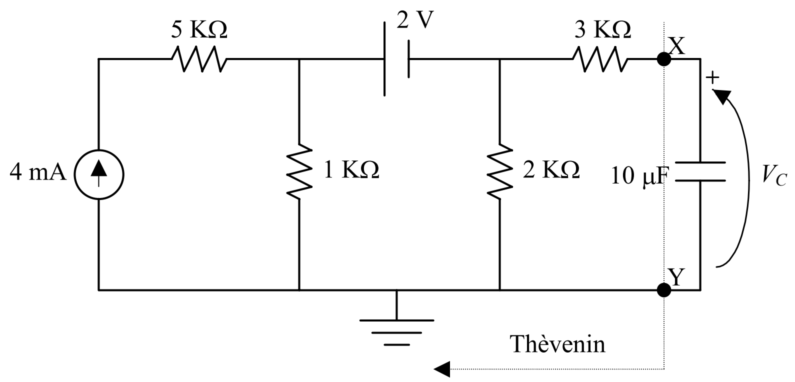
a) Calcular el valor de salida V_C en función del tiempo para el circuito de la figura.
b) ¿Cuánto tiempo tardará V_C en alcanzar la mitad de su máximo valor posible?

Inicialmente el condensador está completamente descargado.



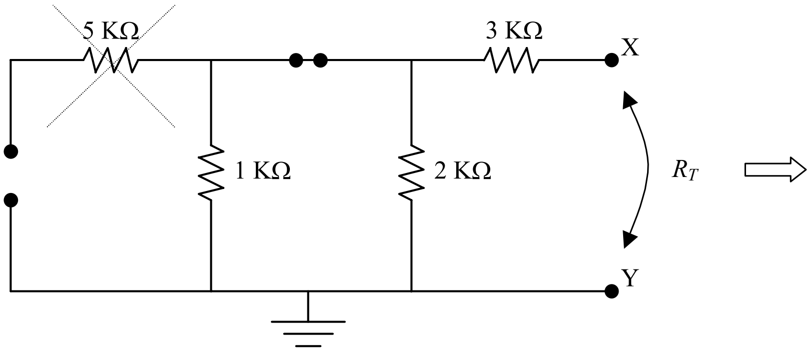
Solución:

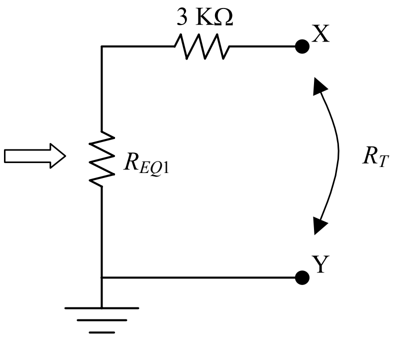
a) Calculamos el equivalente Thèvenin a la parte indicada del circuito, para dejarlo en función de una sola fuente de tensión y una resistencia:



Cálculo de R_T:

En primer lugar calculamos la resistencia de Thèvenin, anulando previamente todas las fuentes del circuito:





$$R_{EQ1} = \frac{1 \cdot 2}{1+2} = 0{,}\widehat{6}\ \mathrm{K\Omega} \Rightarrow$$

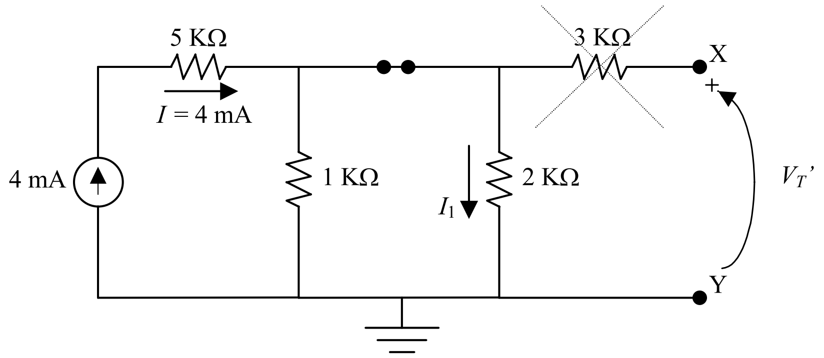
$$\Rightarrow R_T = R_{EQ1} + 3\ \mathrm{K\Omega} = 3{,}\widehat{6}\ \mathrm{K\Omega}$$

La resistencia de 5 KΩ se anula porque tiene un terminal al aire, y vemos cómo las resistencias de 1 KΩ y 2 KΩ se encuentran en paralelo, a partir de las cuales se calcula la resistencia R_{EQ1}. Ésta, a su vez, estará en serie con la de 3 KΩ, por lo que la resistencia de Thèvenin queda con el valor mostrado en la anterior ecuación.

Cálculo de V_T:

A continuación calculamos el valor de la tensión de Thèvenin V_T. Lo haremos por superposición:

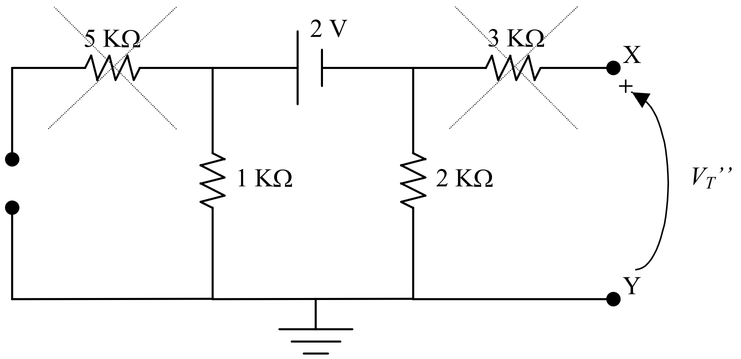
1º.- Dejamos la fuente de intensidad y anulamos la de tensión:



Anulamos la resistencia de 3 KΩ por tener un terminal al aire, por lo que no hay diferencia de potencial en sus extremos. Aplicando la fórmula del divisor de intensidad y la ley de Ohm obtenemos V_T':

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I \cdot \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{4}{3}\,\text{mA} \\ V_T' = 2I_1 \end{array}\right\} \Rightarrow V_T' = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}\widehat{6}\ \text{V}$$

2º.- Dejamos la fuente de tensión y anulamos la de intensidad:



Eliminamos de nuevo la resistencia de 3 KΩ por la misma razón que antes, al igual que la de 5 KΩ. Aplicando la fórmula del divisor de tensión obtenemos V_T'':

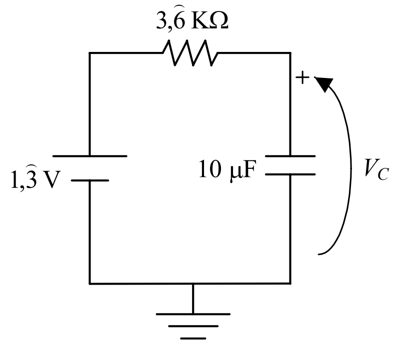
$$V_T'' = (-2) \cdot \frac{2}{1+2} = -\frac{4}{3} = -1{,}\widehat{3}\ \text{V}$$

Hay que hacer notar que, como los signos positivos de V_T'' y la fuente de 2 V no coinciden, debemos tomar la fuente como –2 V para realizar los cálculos correctamente. Otra forma de ver esto sería haciendo una malla en lugar de aplicar la fórmula del divisor de tensión directamente, y el resultado sería idéntico.

Por tanto, la tensión de Thèvenin será:

$$V_T = V_T' + V_T'' = 2,\widehat{6}\ \text{V} + (-1,\widehat{3}\ \text{V}) = 1,\widehat{3}\ \text{V}$$

El circuito equivalente queda de la siguiente forma, y se da un proceso de carga del condensador:



$$\left.\begin{array}{l} V_C = V\,(1 - e^{-t/\tau}) \\ V = 1,\widehat{3}\ \text{V} \\ \tau = R{\cdot}C = 3,\widehat{6}{\cdot}10 = 36,\widehat{6}\ \text{ms} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\, t \geq 0\ \text{ms} \Rightarrow V_C = 1,\widehat{3}\,(1 - e^{-t/36,\widehat{6}})$$

b) Si tenemos en cuenta que el máximo valor posible de V_C sería el de la fuente de alimentación, para calcular el tiempo t en el que se habrá alcanzado la mitad de esa tensión máxima tendremos que resolver la siguiente ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} V_C = 1,\widehat{3}\,(1 - e^{-t/36,\widehat{6}}) \\ V_{MAX} = 1,\widehat{3}\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow 1,\widehat{3}\,(1 - e^{-t/36,\widehat{6}}) = \frac{1,\widehat{3}}{2} \Rightarrow 1 - e^{-t/36,\widehat{6}} = 0,5 \Rightarrow 0,5 = e^{-t/36,\widehat{6}}$$

$$\text{Tomando logaritmos} \Rightarrow \ln 0,5 = \ln\ e^{-t/36,\widehat{6}} \Rightarrow -0,693 = -\frac{t}{36,\widehat{6}} \Rightarrow t \cong 25,415\ \text{ms}$$

Resultados:

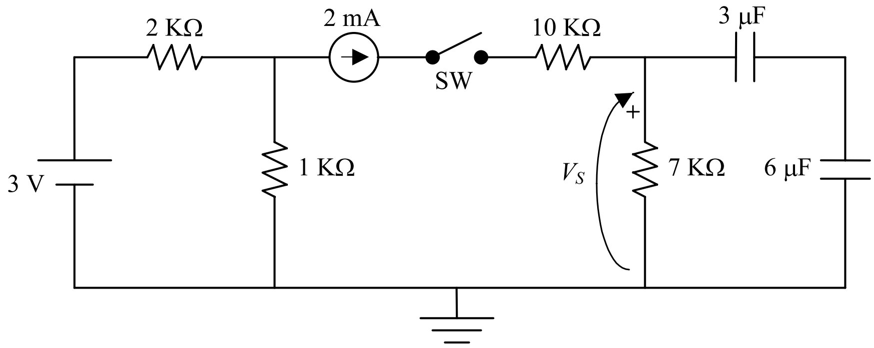
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \text{a) } \forall\, t \geq 0\ \text{ms} \Rightarrow V_C = 1,\widehat{3}\,(1 - e^{-t/36,\widehat{6}}) \\ \text{b) } t \cong 25,415\ \text{ms} \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 1.2.4.

Calcular el valor de salida V_S en función del tiempo para el siguiente circuito, teniendo en cuenta que evoluciona de la siguiente manera:

a) En $t = 0$ ms ⇒ SW está cerrado
b) En $t = 7$ ms ⇒ SW se abre

Inicialmente los condensadores están completamente descargados.

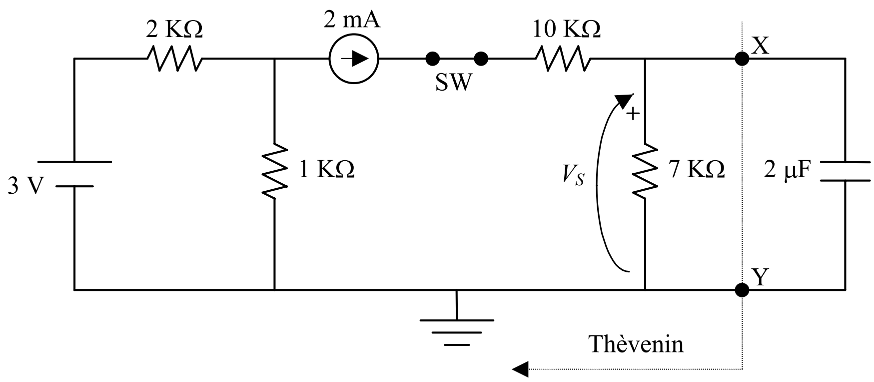


Solución:

En primer lugar calculamos el condensador equivalente a los dos que tenemos. Como están en serie, su equivalente será:

$$C_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2\,\mu\text{F}$$

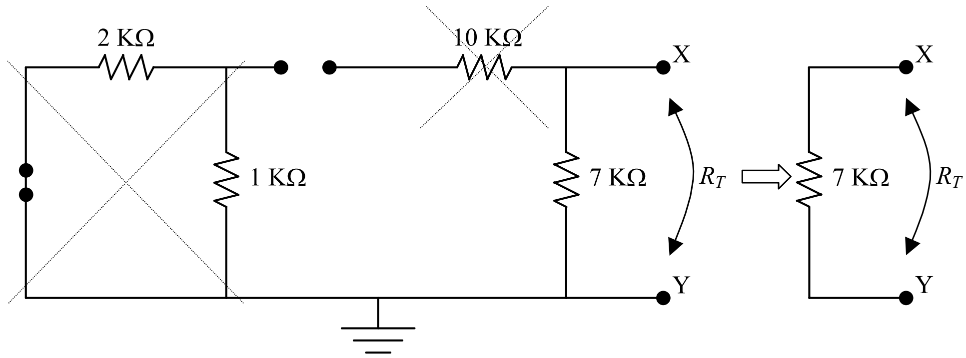
a) En un tiempo $t = 0$ ms el circuito nos queda como sigue:



Calculamos el equivalente Thèvenin a la parte indicada del circuito, para dejarlo en función de una sola fuente de alimentación y una resistencia.

Cálculo de R_T:

En primer lugar calculamos la resistencia de Thèvenin, anulando previamente todas las fuentes del circuito:

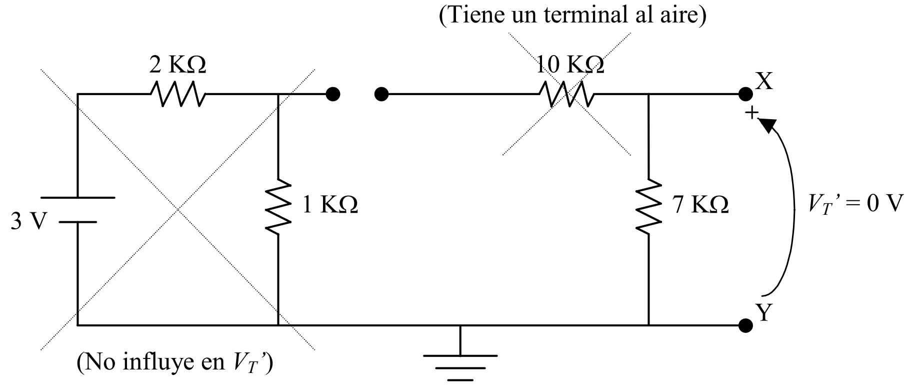


La resistencia de 10 KΩ se anula porque tiene un terminal al aire, y la parte izquierda del circuito no influye en el cálculo de la resistencia equivalente (R_T). El valor final de ésta será de 7 KΩ.

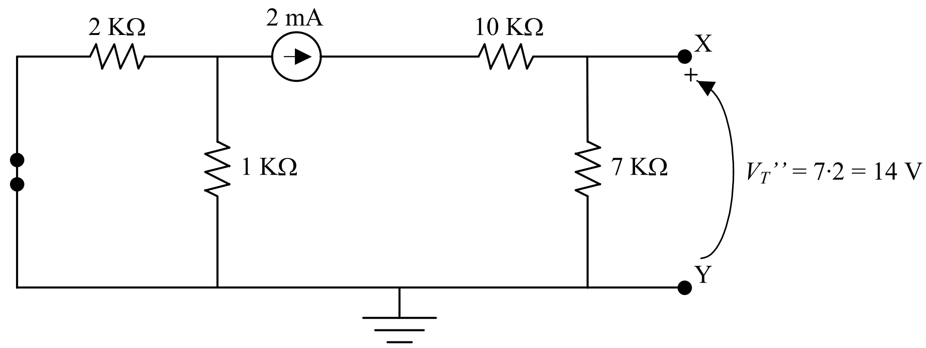
Cálculo de V_T:

A continuación calculamos el valor de la tensión de Thèvenin V_T. Lo haremos por superposición:

1º.- Dejamos la fuente de tensión y anulamos la de intensidad, obteniendo V_T', que será 0 ya que no pasa intensidad a través de la resistencia de 7 KΩ:



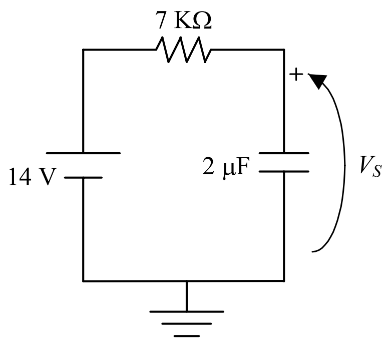
2º.- Dejamos la fuente de intensidad y anulamos la de tensión, obteniendo V_T'', la cual calcularemos aplicando la ley de Ohm a la resistencia de 7 KΩ:



Por tanto, la tensión de Thèvenin será:

$$V_T = V_T' + V_T'' = 0 \text{ V} + 14 \text{ V} = 14 \text{ V}$$

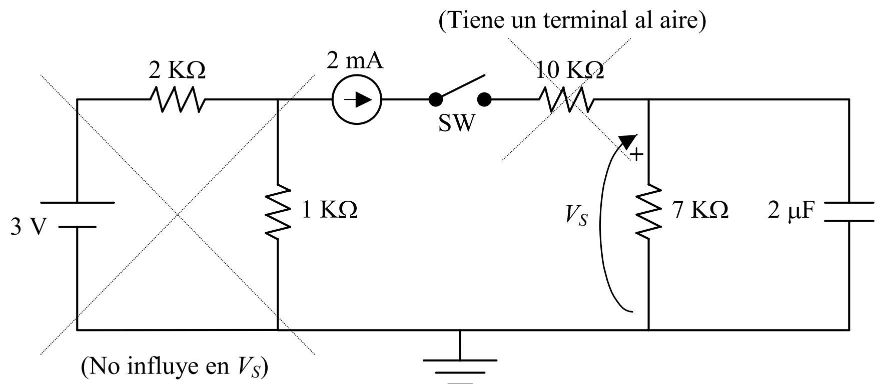
El circuito equivalente queda de la siguiente forma, y se da un proceso de carga del condensador:



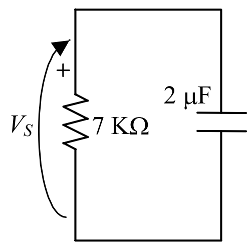
$$\left.\begin{array}{l} V_S = V\,(1-e^{-t/\tau}) \\ V = 14\text{ V} \\ \tau = R\cdot C = 7\cdot 2 = 14\text{ ms} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\ 0\text{ ms} \le t \le 7\text{ ms} \Rightarrow V_S = 14\,(1-e^{-t/14})$$

b) En un tiempo t = 7 ms tendremos la siguiente configuración en el circuito:



El circuito se reducirá únicamente a una resistencia y un condensador, por lo que estaremos en descarga. En primer lugar calcularemos cuánto se había cargado el condensador en 7 ms y posteriormente plantearemos la fórmula de descarga del nuevo circuito:



$$\text{* Carga inicial}: V_0 = V_S(t = 7\text{ ms}) = 14\,(1-e^{-7/14}) \cong 5{,}5086\text{ V}$$

$$\text{* Descarga}:$$

$$\left.\begin{array}{l} V_S = V_0\, e^{-t/\tau} \\ V_0 = 5{,}5086\text{ V} \\ \tau = R\cdot C = 7\cdot 2 = 14\text{ ms} \end{array}\right\} \Rightarrow V_S = 5{,}5086\, e^{-t/14}$$

El tiempo t está expresado como tiempo relativo (a partir de 0). Si lo queremos en tiempo absoluto habrá que restarle el tiempo transcurrido hasta ese momento (7 ms):

$$\forall\, t \geq 7 \text{ ms} \Rightarrow V_S = 5{,}5086\, e^{-(t-7)/14}$$

Resumiendo:

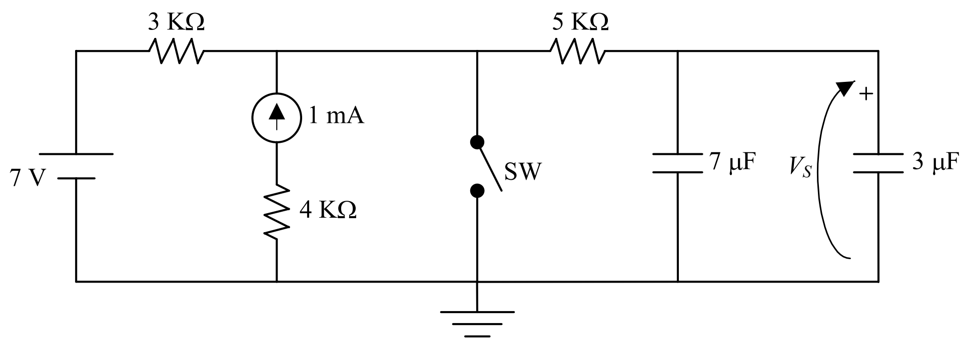
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall\, 0 \text{ ms} \leq t \leq 7 \text{ ms} \Rightarrow V_S = 14\,(1 - e^{-t/14}) \\ \forall\, t \geq 7 \text{ ms} \Rightarrow V_S = 5{,}5086\, e^{-(t-7)/14} \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 1.2.5.

Calcular el valor de salida V_S en función del tiempo para el siguiente circuito, teniendo en cuenta que evoluciona de la siguiente manera:

a) En t = 0 ms ⇒ SW está abierto
b) En t = 5 ms ⇒ SW se cierra

Inicialmente los condensadores están completamente descargados.

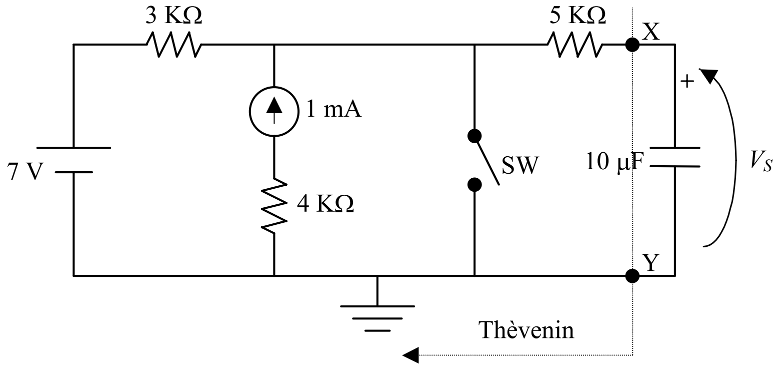


Solución:

En primer lugar calculamos el condensador equivalente a los dos que tenemos. Como están en paralelo, su equivalente será:

$$C_{EQ} = 7\,\mu\text{F} + 3\,\mu\text{F} = 10\,\mu\text{F}$$

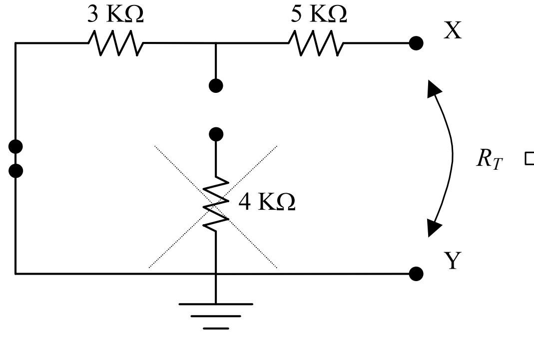
a) En un tiempo $t = 0$ ms el circuito nos queda como sigue:



Calculamos el equivalente Thèvenin a la parte indicada del circuito, para dejarlo en función de una sola fuente de alimentación y una resistencia.

Cálculo de R_T:

En primer lugar calculamos la resistencia de Thèvenin, anulando previamente todas las fuentes del circuito:



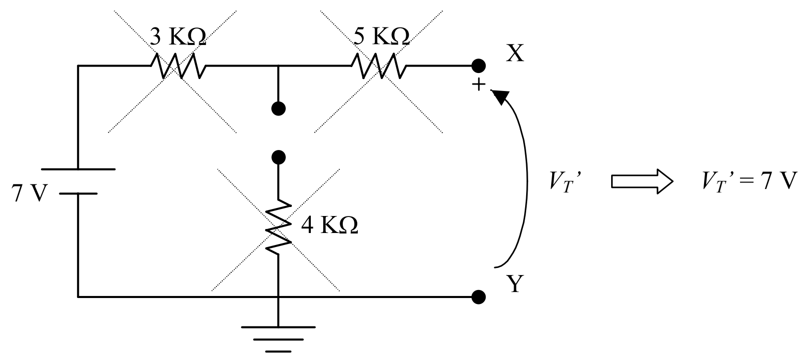
$$R_T = 3\text{ K}\Omega + 5\text{ K}\Omega = 8\text{ K}\Omega$$

La resistencia de 4 KΩ se anula porque tiene un terminal al aire, y el valor final de R_T será de 8 KΩ.

Cálculo de V_T:

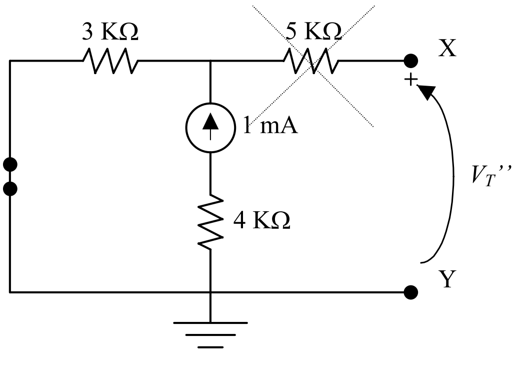
A continuación calculamos el valor de la tensión de Thèvenin V_T. Lo haremos por superposición:

1º.- Dejamos la fuente de tensión y anulamos la de intensidad, obteniendo V_T', que se corresponderá con el valor de la fuente de tensión de 7 V:



La resistencia de 4 KΩ se queda con un terminal al aire, por lo que no influye en la tensión a calcular entre X e Y; la resistencia de 5 KΩ también se queda con un terminal al aire (ya que la tensión de Thèvenin se mide en circuito abierto), por lo que se elimina; como consecuencia de esto último, la resistencia de 3 KΩ también se queda con un terminal al aire, por lo que se elimina igualmente, quedándonos sólo con la fuente de tensión de 7 V. Otra forma de ver lo anterior consiste en apreciar que el circuito está abierto completamente (no hay formada ninguna malla cerrada), por lo que la única tensión que existe es la que aporta la fuente de tensión.

2º.- Dejamos la fuente de intensidad y anulamos la de tensión, obteniendo V_T'', la cual calcularemos aplicando la ley de Ohm a la resistencia de 3 KΩ:

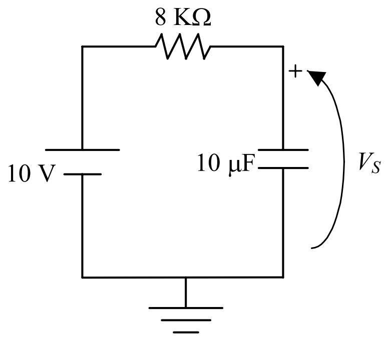


$V_T'' = 3\ \text{K}\Omega \cdot 1\ \text{mA} = 3\ \text{V}$

Por tanto, la tensión de Thèvenin será:

$$V_T = V_T' + V_T'' = 7\ \text{V} + 3\ \text{V} = 10\ \text{V}$$

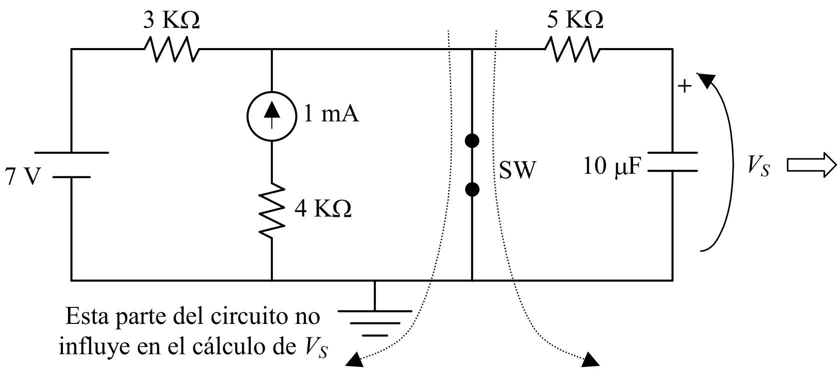
El circuito equivalente queda de la siguiente forma, estando en un proceso de carga del condensador:

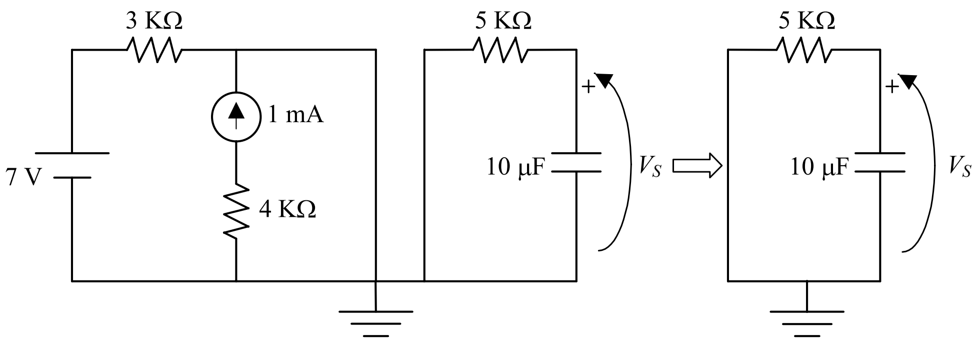


$$\left.\begin{aligned} V_S &= V\,(1-e^{-t/\tau}) \\ V &= 10\ \text{V} \\ \tau &= R{\cdot}C = 8{\cdot}10 = 80\ \text{ms} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\ 0\ \text{ms} \le t \le 5\ \text{ms} \Rightarrow V_S = 10\,(1-e^{-t/80})$$

b) En un tiempo t = 5 ms tendremos la siguiente configuración en el circuito:





Vemos que la rama en donde se cierra el interruptor SW provoca que el circuito quede dividido en dos mallas independientes y cerradas, por lo que las podemos analizar por separado. Como lo que nos interesa calcular es el valor de V_S únicamente, el circuito se reduce tan sólo a una resistencia y un condensador, y estamos en un proceso de descarga. En primer lugar calcularemos cuánto se había cargado el condensador en 5 ms y posteriormente plantearemos la fórmula de descarga del nuevo circuito:

$$\text{* Carga inicial}: V_0 = V_S(t = 5\ \text{ms}) = 10\,(1 - e^{-5/80}) \cong 0{,}6059\ \text{V}$$

$$\text{* Descarga}:$$

$$\left.\begin{array}{l} V_S = V_0\, e^{-t/\tau} \\ V_0 = 0{,}6059\ \text{V} \\ \tau = R{\cdot}C = 5{\cdot}10 = 50\ \text{ms} \end{array}\right\} \Rightarrow V_S = 0{,}6059\, e^{-t/50}$$

El tiempo t está expresado como tiempo relativo (a partir de 0). Si lo queremos en tiempo absoluto habrá que restarle el tiempo transcurrido hasta ese momento (5 ms):

$$\forall\, t \geq 5\ \text{ms} \Rightarrow V_S = 0{,}6059\, e^{-(t-5)/50}$$

Resumiendo:

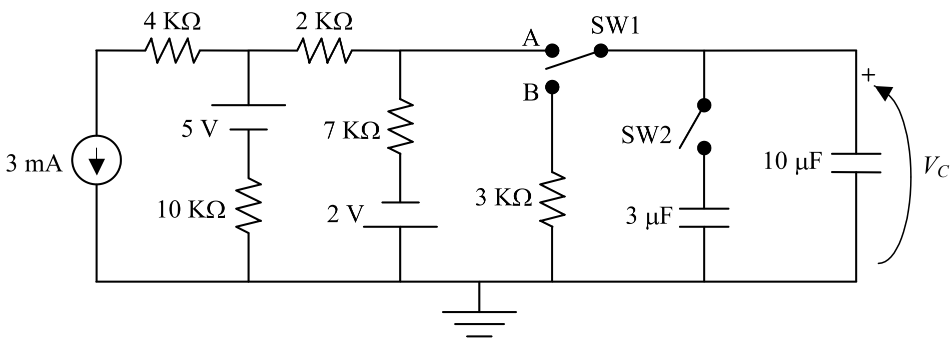
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall\, 0\ \text{ms} \leq t \leq 5\ \text{ms} \Rightarrow V_S = 10\,(1 - e^{-t/80}) \\ \forall\, t \geq 5\ \text{ms} \Rightarrow V_S = 0{,}6059\, e^{-(t-5)/50} \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 1.2.6.

Calcular el valor de salida V_C del siguiente circuito en transición, si se dan las siguientes condiciones:

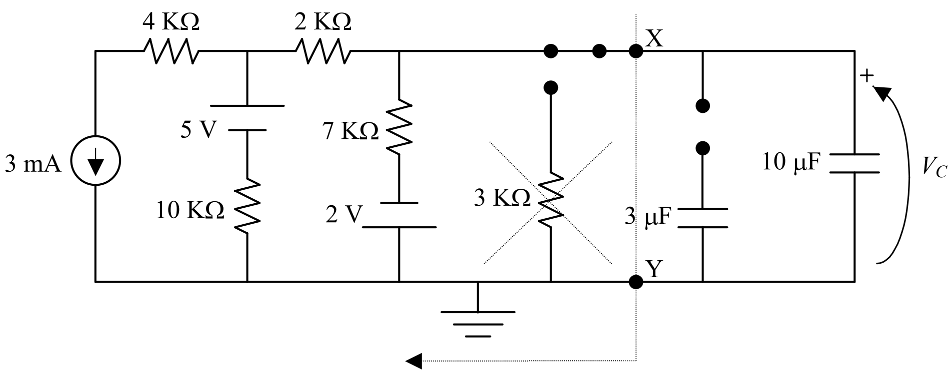
a) En t = 0 ms ⇒ SW1 en posición A; SW2 cerrado.
b) En t = 30 ms ⇒ SW2 abierto.
c) En t = 50 ms ⇒ SW1 en posición B.

Inicialmente los condensadores están completamente descargados.



Solución:

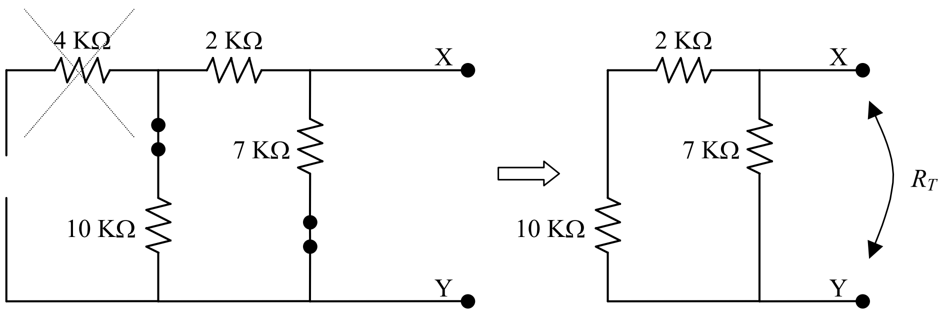
a) En un tiempo t = 0 el circuito nos queda de la siguiente forma:



La resistencia de 3 KΩ la eliminamos porque tiene un terminal al aire. Calculamos el equivalente Thèvenin de la parte señalada (X,Y) hacia la izquierda, para dejar el circuito con una sola fuente de tensión y una resistencia:

Cálculo de R_T:

Eliminamos los generadores independientes, abriendo los de intensidad y cortocircuitando los de tensión:



Eliminamos la resistencia de 4 KΩ porque tiene un terminal al aire, de tal manera que la resistencia equivalente entre los puntos X e Y será:

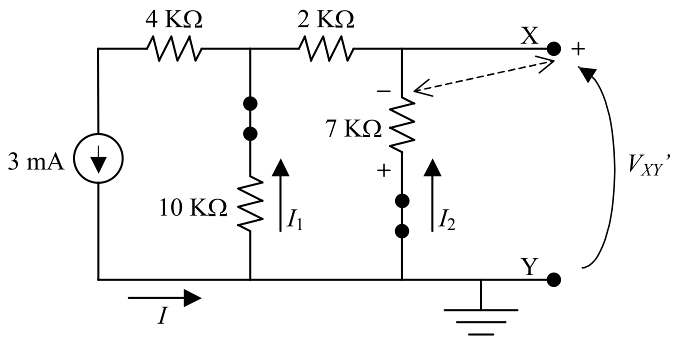
$$R_T = \frac{7\,(10+2)}{7+(10+2)} \cong 4{,}421\,\text{K}\Omega$$

(las resistencias de 10 KΩ y 2 KΩ están en serie, por lo que se suman directamente, y ambas están en paralelo con la de 7 KΩ).

Cálculo de V_T:

Para calcular el valor de la tensión V_T podemos resolver el circuito por superposición, ya que sólo queremos saber la tensión entre los puntos X e Y (V_{XY}):

1º.- Dejamos sólo el generador de intensidad:



El circuito resultante es un divisor de intensidad, por lo que I_2 será:

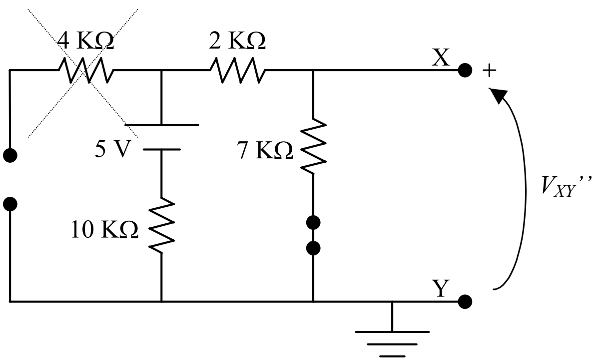
$$I_2 = I \cdot \frac{10}{10+(7+2)} = 3 \cdot \frac{10}{19} \cong 1{,}5789 \text{ mA}$$

La tensión V_{XY}' se obtiene aplicando la ley de Ohm:

$$V_{XY}' = -I_2 \cdot 7 \cong -11{,}05 \text{ V}$$

(I_2 se toma negativa porque tiene la polaridad cambiada respecto a como estamos midiendo en la resistencia de 7 KΩ la tensión V_{XY}', según se aprecia en la figura).

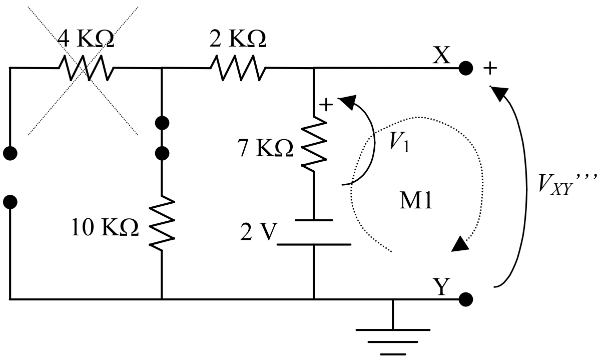
2º.- Dejamos un solo generador de tensión:



El circuito es un divisor de tensión:

$$V_{XY}'' = V \cdot \frac{7}{10+2+7} = 5 \cdot \frac{7}{19} \cong 1{,}8421 \text{ V}$$

3º.- Dejamos únicamente el otro generador de tensión:



La tensión V_1 la calculamos teniendo en cuenta que el circuito es un divisor de tensión:

$$V_1 = V \cdot \frac{7}{10+2+7} = 2 \cdot \frac{7}{19} \cong 0{,}7368 \text{ V}$$

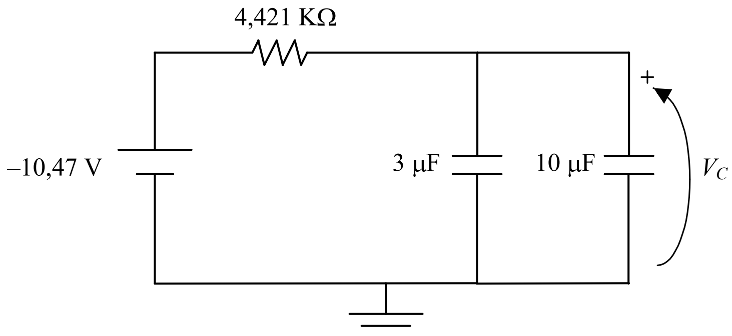
La tensión V_{XY}''' se puede calcular haciendo la malla M1 indicada:

$$\text{M1} \rightarrow -2 + V_1 - V_{XY}''' = 0 \Rightarrow V_{XY}''' = -2 + V_1 \cong -1{,}2632 \text{ V}$$

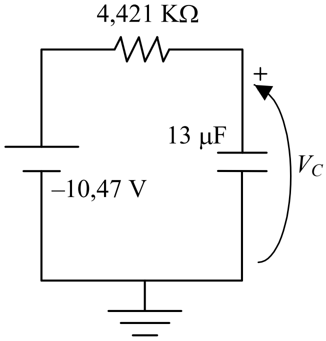
Por tanto, el valor de V_T para el equivalente Thèvenin será:

$$V_T = V_{XY} = V_{XY}' + V_{XY}'' + V_{XY}''' \cong -10{,}47 \text{ V}$$

y el circuito queda como sigue:



Uniendo los 2 condensadores en uno nos quedaría como se aprecia en la siguiente figura, y en este caso estaríamos en un proceso de carga:

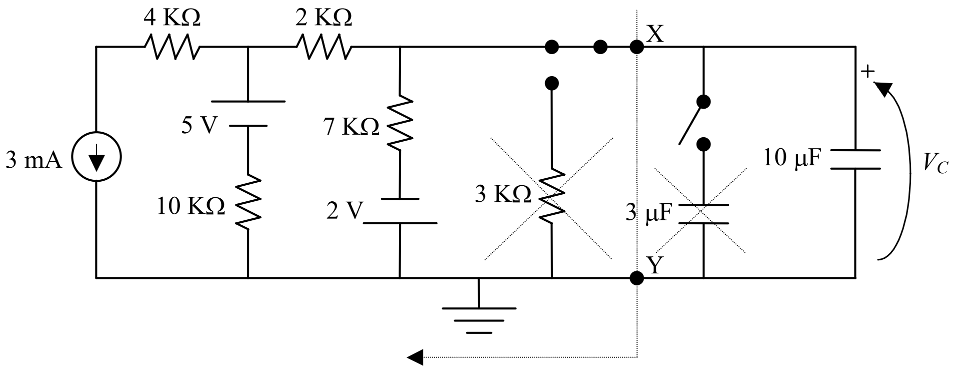


$$* \text{Carga} : t = 0 \text{ ms} \Rightarrow V(t=0) = 0 \text{ V}$$

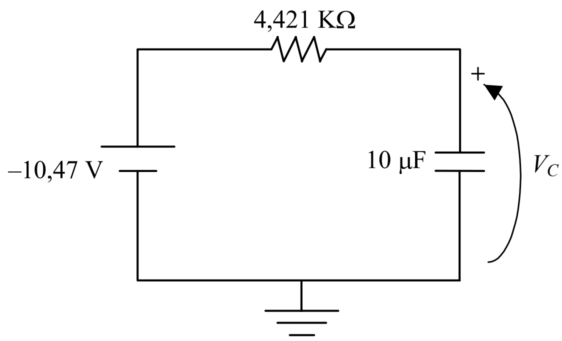
$$\left.\begin{array}{l} V_C = V\,(1 - e^{-t/\tau}) \\ V = -10{,}47 \text{ V} \\ \tau = R \cdot C = 4{,}421 \cdot 13 = 57{,}473 \text{ ms} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\ 0 \text{ ms} \le t \le 30 \text{ ms} \Rightarrow V_C = -10{,}47\,(1 - e^{-t/57{,}473})$$

b) En un tiempo t = 30 ms cambia la configuración del circuito y nos queda de la siguiente forma:



Por tanto, utilizando el equivalente Thèvenin calculado previamente (ya que nos queda el mismo circuito desde los puntos X,Y hacia la izquierda) tenemos:



En el tiempo t = 30 ms el condensador tendrá la siguiente carga:

$$V_C(t = 30\text{ ms}) = -10{,}47\,(1 - e^{-30/57{,}473}) \cong -4{,}258\text{ V} = V_0$$

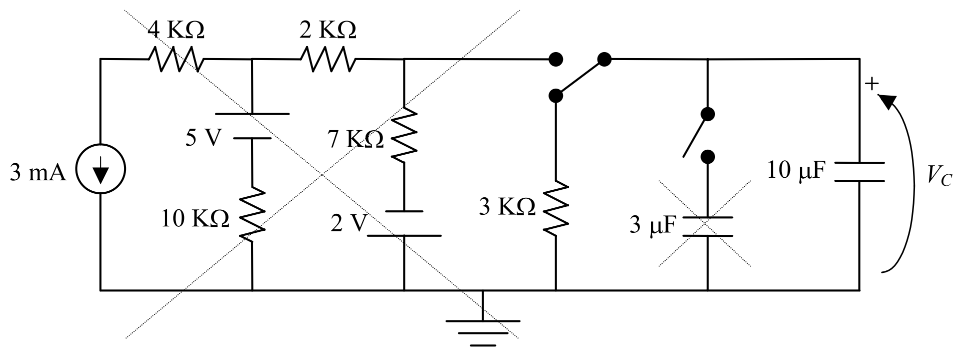
Por tanto, consideramos como si se tratara de una nueva situación de carga en la que el condensador tiene cierta tensión inicial V_0:

$$\left.\begin{array}{l} V_C = (V_0 - V)\,e^{-t/\tau} + V \\ V_0 = -4{,}258\text{ V} \\ V = -10{,}47\text{ V} \\ \tau = R\cdot C = 4{,}421\cdot 10 = 44{,}21\text{ ms} \end{array}\right\} \Rightarrow V_C = 6{,}212\,e^{-t/44{,}21} - 10{,}47$$

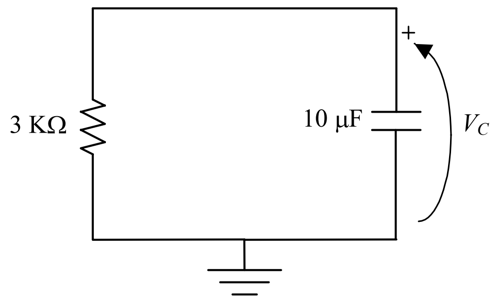
Esta fórmula sería para un tiempo relativo, es decir, partiendo de nuevo desde un instante 0. Si queremos seguir usando la fórmula con tiempos absolutos habrá que restarle a ese tiempo t el momento a partir del cual es válida la nueva fórmula (30 ms):

$$\forall\, 30\text{ ms} \le t \le 50\text{ ms} \Rightarrow V_C = 6{,}212\,e^{-(t-30)/44{,}21} - 10{,}47$$

c) En un tiempo t = 50 ms el circuito nos queda de la siguiente forma:



El condensador de 3 μF queda anulado porque tiene un terminal al aire; además, todo el circuito que aparece a la izquierda de la resistencia de 3 KΩ no influye en el circuito de la derecha, ya que son 2 mallas cerradas unidas por un único nudo (el de tierra), por lo que lo obviamos. Por tanto el circuito a analizar será:



Ahora el circuito entrará en un proceso de descarga, por lo que calcularemos la condición inicial en la que se encuentra el condensador (V_0') y aplicaremos la fórmula de la descarga del condensador:

$$\text{* Carga inicial}: V_0' = V_C(t = 50\text{ ms}) = 6{,}212\, e^{-(50-30)/44{,}21} - 10{,}47 \cong -6{,}518\text{ V}$$

$$\text{* Descarga}:$$

$$\left.\begin{aligned} & V_C = V_0'\, e^{-t/\tau} \\ & V_0' = -6{,}518\text{ V} \\ & \tau = R{\cdot}C = 3{\cdot}10 = 30\text{ ms} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_C = -6{,}518\, e^{-t/30}$$

Al igual que antes, t está expresado como tiempo relativo (a partir de 0). Si lo queremos en tiempo absoluto:

$$\forall\, t \geq 50\text{ ms} \Rightarrow V_C = -6{,}518\, e^{-(t-50)/30}$$

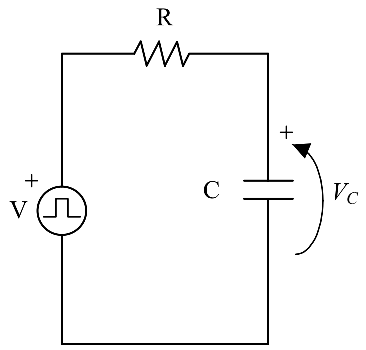
Resumiendo:

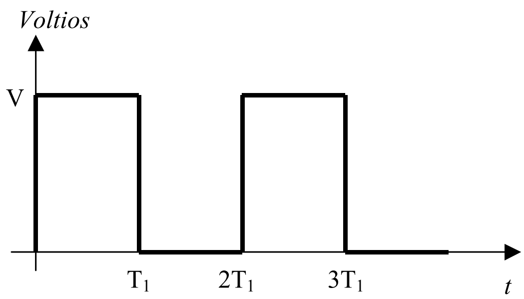
$$\boxed{\left.\begin{aligned} & \forall\, 0 \leq t \leq 30\text{ ms} \Rightarrow V_C = -10{,}47\,(1 - e^{-t/57{,}473}) \\ & \forall\, 30\text{ ms} \leq t \leq 50\text{ ms} \Rightarrow V_C = 6{,}212\, e^{-(t-30)/44{,}21} - 10{,}47 \\ & \forall\, t \geq 50\text{ ms} \Rightarrow V_C = -6{,}518\, e^{-(t-50)/30} \end{aligned}\right\}}$$

Ejercicio 1.2.7.

Realiza el análisis transitorio calculando el valor máximo y mínimo que alcanza la tensión en el condensador del circuito de la figura, sabiendo que la tensión de entrada es una onda cuadrada según aparece en la gráfica adjunta.

Nota: Suponer que el proceso de carga y descarga tarda más de T_1 unidades de tiempo.





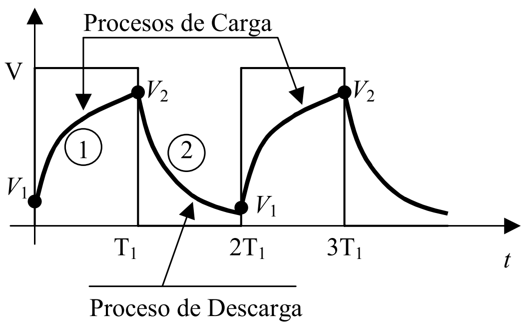
Solución:

Se observa que la fuente de tensión de entrada genera una señal de onda cuadrada periódica (se repite cada $2T_1$ unidades de tiempo) con un valor de V voltios, según la gráfica del enunciado.

Suponiendo que se ha establecido un régimen permanente, podemos observar el comportamiento de la onda cuadrada. En $t = 0$ tiene un valor de 0 voltios e instantáneamente el valor de la tensión sube hasta los V voltios. Dicha tensión es la responsable de cargar el condensador, pero la tensión va a almacenarse de forma progresiva. Este proceso sigue una curva exponencial que depende de lo que se denomina la constante de tiempo τ (producto de R y C), por lo tanto el proceso de carga de un condensador no se realiza de forma instantánea, si no que va a depender de la resistencia conectada en serie y del valor del condensador o capacidad.

Por otro lado también se observa que la fuente de tensión, cuando alcanza el valor de V voltios para un tiempo $t = T_1$, cambia bruscamente a un valor de 0 voltios. De nuevo el condensador no puede descargarse de forma instantánea y alcanzar una tensión nula. Lo que sucede en realidad es que también se descarga progresivamente según una curva exponencial, pero en este caso con forma decreciente.

Luego está claro que va a existir un proceso de carga en el condensador, tratando de alcanzar los V voltios, y un proceso de descarga tratando de alcanzar los 0 voltios según la figura siguiente:



Atendiendo al enunciado el proceso de carga y descarga dura más de T_1, luego nunca se alcanza el valor máximo para la carga (V voltios) ni tampoco el valor mínimo en la descarga (0 voltios). Estos valores se representan en la figura anterior y se denominan como V_2 para valor máximo y como V_1 para el valor mínimo.

La ecuación general para la carga y descarga de un condensador viene dada por $V_C = V_F + (V_i - V_F)\, e^{-t/\tau}$ donde la tensión inicial es V_i, la tensión final es V_F, y τ es R · C.

a) Proceso de Carga, Tramo (1) de la gráfica.

La tensión inicial es V_1, y la tensión final es V voltios (no confundir el valor máximo que podría alcanzar la tensión en el condensador que es V con el valor que en realidad alcanza que es V_2), luego $V_i = V_1$ y la tensión final V_F = V con lo cual $V_{CARGA} = \mathrm{V} + (V_1 - \mathrm{V})\, e^{-t/\tau}$.

b) Proceso de Descarga, Tramo (2) de la gráfica.

La tensión inicial es V_2, y la tensión final es 0 voltios (de nuevo no confundir el valor mínimo que podría alcanzar la tensión en el condensador que es 0 con el valor que en realidad alcanza que es V_1), luego $V_i = V_2$ y la tensión final $V_F = 0$, con lo cual la ecuación queda: $V_{DESCARGA} = 0 + (V_2 - 0)\, e^{-t/\tau}$.

Pero para esta última ecuación hay que modificar el origen de coordenadas de la curva puesto que según vemos en la figura ésta comienza en el instante t = T$_1$, luego la ecuación se transforma en: $V_{DESCARGA} = 0 + (V_2 - 0)\, e^{-(t-T_1)/\tau}$.

Aún debemos calcular los valores de V_1 y V_2 que es precisamente lo que pide el problema. Estos valores se dan en unos instantes determinados de tiempo, en concreto, el valor V_2 es el valor de tensión obtenido mediante la curva del proceso de carga al hacer t = T$_1$ y el valor de tensión para V_1 se obtiene de la curva del proceso de descarga cuando t = 2T$_1$.

De modo que realizando dichas sustituciones obtenemos:

$$V_{CARGA}(t = \mathrm{T}_1) = V_2 = \mathrm{V} + (V_1 - \mathrm{V})\, e^{-T_1/\tau} \quad (1)$$

$$V_{DESCARGA}(t = 2\mathrm{T}_1) = V_1 = V_2 \cdot e^{-T_1/\tau} \quad (2)$$

Se trata de un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas. Sustituyendo la ecuación (2) en la (1) obtenemos:

$$V_2 = \mathrm{V} + V_2 \cdot e^{-T_1/\tau} \cdot e^{-T_1/\tau} - \mathrm{V} \cdot e^{-T_1/\tau} = \mathrm{V} \cdot \frac{1 - e^{-T_1/\tau}}{1 - e^{-2T_1/\tau}}$$

Simplificando $\Rightarrow V_2 = \mathrm{V} \cdot \dfrac{1}{1 + e^{-T_1/\tau}}$

Y sustituyendo la ecuación anterior en (2) $\Rightarrow V_1 = \mathrm{V} \cdot \dfrac{e^{-T_1/\tau}}{1 + e^{-T_1/\tau}}$

Resultados:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} V_{MÍNIMA} &= V_1 = \mathrm{V} \cdot \frac{e^{-T_1/\tau}}{1 + e^{-T_1/\tau}} \\ V_{MÁXIMA} &= V_2 = \mathrm{V} \cdot \frac{1}{1 + e^{-T_1/\tau}} \end{aligned}\right\}}$$

2. Circuitos con Diodos Semiconductores

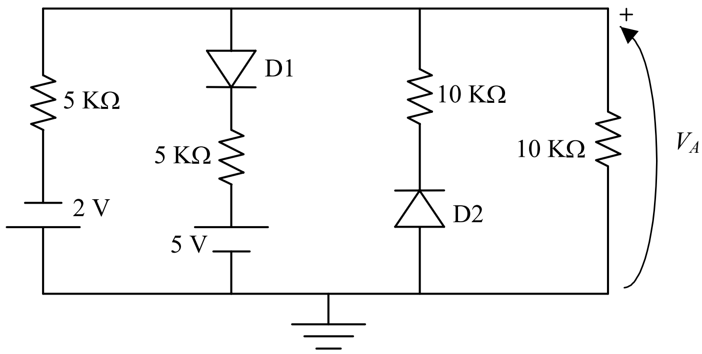
OBJETIVOS:

- Aplicar los conocimientos adquiridos en el tema anterior a circuitos con diodos.
- Aprender el manejo de modelos linealizados del diodo para la resolución de circuitos.
- Resolución de ejercicios de cálculo del punto de trabajo y característica de transferencia en circuitos donde aparecen diodos semiconductores y diodos zener.
- Estudio de aplicaciones prácticas de los diodos: Estabilización y recortadores de ondas.

2.1. PUNTO DE TRABAJO

Ejercicio 2.1.1.

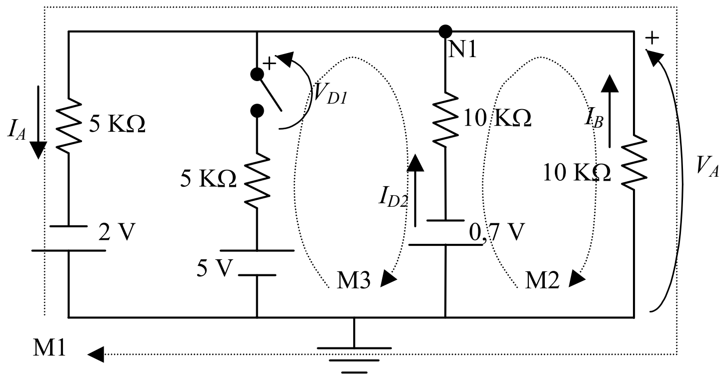
Calcular el valor de la tensión V_A en el siguiente circuito, utilizando para los diodos el modelo con tensión umbral $V_\gamma = 0,7$ V.



Solución:

Intentaremos deducir cual será el estado correcto a priori para no tener que empezar a probar estados a ciegas. Si nos fijamos en el diodo D1 vemos que tiene conectado en el lado N el terminal positivo de la fuente de tensión de 5 V. Como ésa es la tensión más alta de todo el circuito, y además tiene su lado P conectado (mediante una resistencia) al terminal negativo de la fuente de 2 V, ese diodo va a estar seguro en OFF. En cuanto al D2 vemos que su parte P está conectada directamente al terminal positivo de la fuente de 2 V, y el lado N al terminal negativo de la misma fuente a través de la resistencia de 5 KΩ de la rama de la izquierda, por lo que parece que la diferencia de potencial será suficiente para que conduzca. Por tanto, probamos el caso de D1 en OFF y D2 en ON:

Suponemos D1 OFF; D2 ON:



$$\text{Condiciones:} \quad \left.\begin{array}{l} V_{D1} \leq 0{,}7\ \text{V} \\ I_{D2} \geq 0 \end{array}\right\}$$

Planteamos una ecuación de nudos en N1, y dos de mallas para M1 y M2; resolvemos el sistema y calculamos los valores de las tres intensidades:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nudo N1} \rightarrow I_A = I_{D2} + I_B \\ \text{Malla M1} \rightarrow -2 + 5I_A + 10I_B = 0 \\ \text{Malla M2} \rightarrow -0{,}7 - 10I_{D2} + 10I_B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sustituyendo } I_A \text{ en M1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2 + 5(I_{D2} + I_B) + 10I_B = 0 \\ -0{,}7 - 10I_{D2} + 10I_B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2 + 5I_{D2} + 15I_B = 0 \quad (\times 2) \\ -0{,}7 - 10I_{D2} + 10I_B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\begin{array}{rl} & -4 + 10I_{D2} + 30I_B = 0 \\ + & -0{,}7 - 10I_{D2} + 10I_B = 0 \end{array}}{-4 - 0{,}7 + 30I_B + 10I_B = 0} \Rightarrow I_B = \frac{4{,}7}{40} = 0{,}1175\ \text{mA}$$

$$I_{D2} = \frac{10I_B - 0{,}7}{10} = 0{,}0475\ \text{mA} \geq 0\ (\text{Cumple la 2ª condición})$$

$$I_A = I_{D2} + I_B = 0{,}165\ \text{mA}$$

Para calcular el valor de V_{D1} realizamos la malla M3, utilizamos el valor hallado anteriormente para I_{D2} y aplicamos la condición correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Malla M3} \rightarrow 5 + V_{D1} + 10I_{D2} + 0{,}7 = 0 \\ I_{D2} = 0{,}0475\ \text{mA} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_{D1} = -5 - 0{,}7 - 10I_{D2} \\ I_{D2} = 0{,}0475\ \text{mA} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{D1} = -6{,}175$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{D1} = -6{,}175\ \text{V} \\ V_{D1} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se cumple}$$

Por tanto hemos verificado las dos condiciones y el estado correcto de los diodos es el supuesto. El valor de salida de V_A será:

$$\left.\begin{aligned} V_A &= -10 I_B \\ I_B &= 0{,}1175\ \text{mA} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_A = -1{,}175\ \text{V}$$

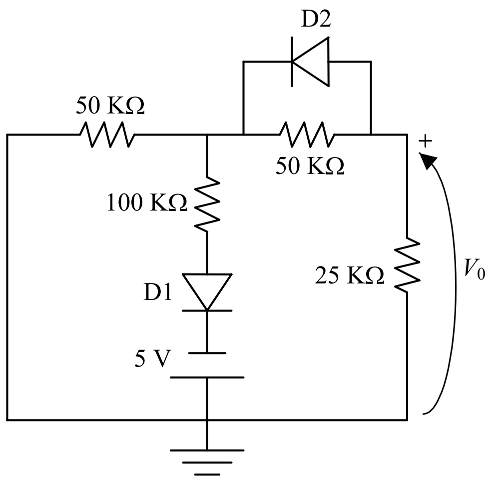
El hecho de tomar negativo el signo para V_A al aplicar la ley de Ohm sobre la resistencia de 10 KΩ es porque no coincide el signo positivo con el que se mide la tensión V_A con el signo que indica la intensidad I_B sobre la propia resistencia (al ser un elemento pasivo el positivo estaría abajo, por donde entra la intensidad, y nosotros estamos midiendo la V_A con el positivo arriba, de ahí que tengamos que poner un signo menos).

Resultados:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} I_A &= 0{,}165\ \text{mA} \\ I_B &= 0{,}1175\ \text{mA} \\ I_{D2} &= 0{,}0475\ \text{mA} \end{aligned}\right\} \quad ; \quad \left.\begin{aligned} V_{D1} &= -6{,}175\ \text{V} \\ V_A &= -1{,}175\ \text{V} \end{aligned}\right\}}$$

Ejercicio 2.1.2.

Calcular el valor de la tensión V_0 del circuito de la derecha, utilizando para los diodos el modelo con tensión umbral V_γ = 0,7 V.



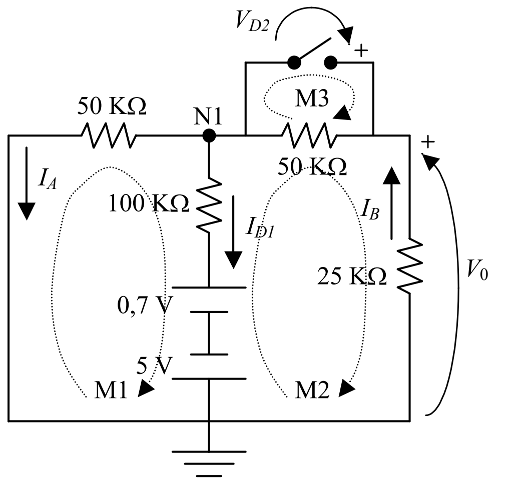
Solución:

Intentamos deducir cual será el estado más probable de los cuatro posibles. Se aprecia que el diodo D1 tiene su terminal N conectado a la parte negativa de la fuente de tensión de 5 V (la tensión más negativa de todo el circuito), mientras que la parte P está conectada, a través de diversas resistencias, a la parte positiva de la misma fuente, por lo que parece probable que conduzca. Sin embargo no podemos decir nada con certeza del diodo D2, parece que habrá más tensión en su parte P que en la N, pero ni es seguro ni sabemos si será suficiente para que conduzca. Por tanto los casos a probar serían:

$$\left.\begin{array}{l}\text{D1 ON; D2 OFF}\\ \text{D1 ON; D2 ON}\end{array}\right\}$$

Empezamos por el primero de ellos que será más fácil de comprobar.

Suponemos D1 ON; D2 OFF:



$$\left.\begin{array}{l}\text{Condiciones:}\\ I_{D1} \geq 0\\ V_{D2} \leq 0{,}7\ \text{V}\end{array}\right\}$$

Aplicamos la ley de Kirchhoff de intensidades al nudo N1, y la ley de Kirchhoff de tensiones a las mallas M1 y M2 para obtener el valor de todas las intensidades. La malla M3 que contiene a la rama abierta de V_{D2} la dejaremos para el final, cuando ya estén calculadas todas las demás incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nudo N1} \rightarrow I_B = I_{D1} + I_A\\ \text{Malla M1} \rightarrow 50I_A - 100I_{D1} - 0{,}7 + 5 = 0\\ \text{Malla M2} \rightarrow -5 + 0{,}7 + 100I_{D1} + 50I_B + 25I_B = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}I_B = I_{D1} + I_A\\ 50I_A - 100I_{D1} + 4{,}3 = 0\\ 75I_B + 100I_{D1} - 4{,}3 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 50I_A - 100I_{D1} + 4{,}3 = 0 \\ 75\,(I_{D1} + I_A) + 100I_{D1} - 4{,}3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} 50I_A - 100I_{D1} + 4{,}3 = 0 & (\times -1{,}5) \\ 75I_A + 175I_{D1} - 4{,}3 = 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -\ 75I_A + 150I_{D1} - 6{,}45 = 0 \\ +\quad 75I_A + 175I_{D1} - 4{,}3 = 0 \\ \hline 325I_{D1} - 10{,}75 = 0 \end{array} \Rightarrow I_{D1} = \frac{10{,}75}{325} \cong 0{,}03308\,\text{mA}$$

$$\begin{array}{l} \text{Malla M1} \rightarrow I_A = \dfrac{100I_{D1} - 4{,}3}{50} \cong -0{,}01985\,\text{mA} \\ \text{Nudo N1} \rightarrow I_B = I_{D1} + I_A \cong 0{,}01323\,\text{mA} \end{array}$$

El valor hallado de I_{D1} verifica la primera condición (es positivo), por lo que tan sólo resta comprobar cuánto vale V_{D2}, cuyo valor es obtenido de la malla M3:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Malla M3} \rightarrow V_{D2} - 50I_B = 0 \\ I_B \cong 0{,}01323\,\text{mA} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{D2} = 50I_B \cong 0{,}6615\,\text{V} \leq 0{,}7\,\text{V (Se cumple)}$$

Por tanto el estado supuesto es correcto, y el valor que se pedía de V_0 será:

$$\left.\begin{array}{l} V_0 = -25I_B \\ I_B \cong 0{,}01323\,\text{mA} \end{array}\right\} \Rightarrow V_0 \cong -0{,}3308\,\text{V}$$

(Tomamos signo menos al aplicar la ley de Ohm porque no coinciden los signos de V_0 y el que impone la intensidad I_B).

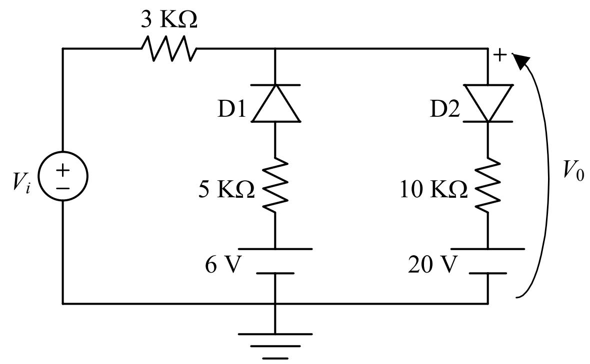
Resultados:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Estado correcto : D1 ON; D2 OFF} \\ \left.\begin{array}{l} I_A \cong -0{,}01985\,\text{mA} \\ I_B \cong 0{,}01323\,\text{mA} \\ I_{D1} \cong 0{,}03308\,\text{mA} \end{array}\right\} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} V_{D2} \cong 0{,}6615\,\text{V} \\ V_0 \cong -0{,}3308\,\text{V} \end{array}\right\} \end{array}}$$

2.2. CARACTERÍSTICA DE TRANSFERENCIA

Ejercicio 2.2.1.

Calcular la característica de transferencia del circuito de la derecha, utilizando el modelo ideal para los diodos.

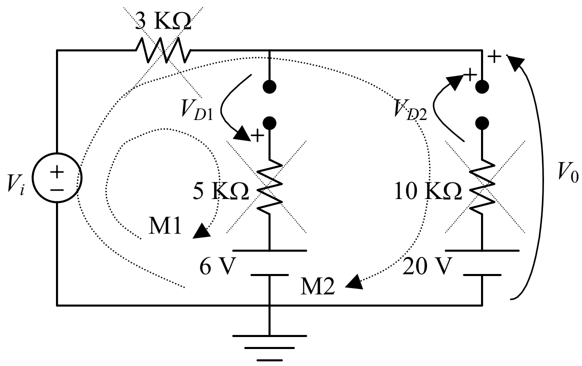


Solución:

Si examinamos previamente el circuito podemos fijarnos en que parece difícil que conduzcan los dos diodos a la vez, ya que tienen una disposición opuesta, así que dejaremos el caso de los dos en ON para el final, por lo que empezaremos probando las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) D1 OFF; D2 OFF} \\ \text{b) D1 ON; D2 OFF} \\ \text{c) D1 OFF; D2 ON} \end{array}\right\}$$

a) D1 OFF; D2 OFF



Condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} V_{D1} \le 0 \\ V_{D2} \le 0 \end{array}\right\}$$

No circula intensidad por ninguna rama, ya que están todas abiertas, de ahí que eliminemos todas las resistencias. Planteamos las mallas M1 y M2, aplicando las condiciones de V_{D1} y V_{D2}:

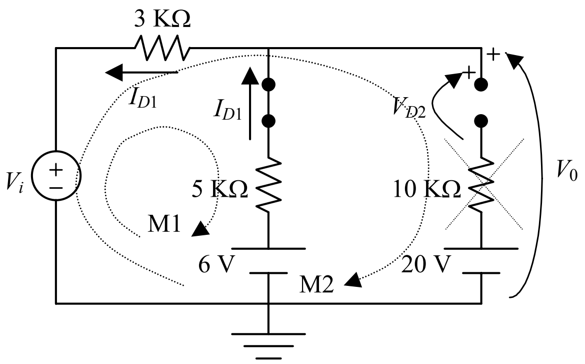
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M1} \rightarrow V_i + V_{D1} - 6 = 0 \Rightarrow V_{D1} = 6 - V_i \\ V_{D1} \leq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 6 - V_i \leq 0 \Rightarrow V_i \geq 6$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M2} \rightarrow V_i - V_{D2} - 20 = 0 \Rightarrow V_{D1} = V_i - 20 \\ V_{D2} \leq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_i - 20 \leq 0 \Rightarrow V_i \leq 20$$

Se verifica que son compatibles las dos restricciones sobre V_i, por lo que ya sólo falta calcular V_0, pero vemos que su valor coincide con el de V_i al no caer tensión en la resistencia de 3 KΩ, por tanto:

$$\forall\, 6\ \mathrm{V} \leq V_i \leq 20\ \mathrm{V} \Rightarrow V_0 = V_i$$

b) D1 ON; D2 OFF



$$\text{Condiciones:}\quad \left.\begin{aligned} I_{D1} \geq 0 \\ V_{D2} \leq 0 \end{aligned}\right\}$$

En este caso se nos queda una única malla cerrada (la M1), por lo que la intensidad I_{D1} será la que la recorra como está indicado. Vemos que además se nos queda otra rama abierta (la de la derecha), que la trataremos posteriormente. Empezamos realizando la malla M1 para calcular I_{D1} y aplicar su condición correspondiente:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M1} \rightarrow V_i + 3I_{D1} + 5I_{D1} - 6 = 0 \Rightarrow I_{D1} = \frac{6 - V_i}{8} \\ I_{D1} \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{6 - V_i}{8} \geq 0 \Rightarrow 6 - V_i \geq 0 \Rightarrow V_i \leq 6$$

Una vez calculada I_{D1} podemos realizar la malla M2 que contiene a la rama abierta para averiguar el valor de V_{D2}, tras lo cual aplicaremos la 2ª condición:

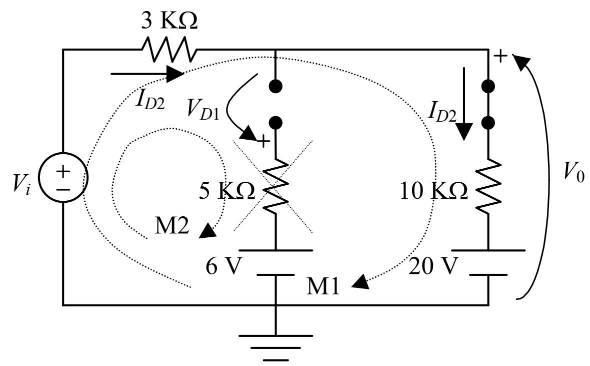
$$\left.\begin{aligned} \text{M2} \rightarrow V_i + 3I_{D1} - V_{D2} - 20 = 0 \\ I_{D1} = \frac{6-V_i}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_i + 3\left(\frac{6-V_i}{8}\right) - V_{D2} - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} V_{D2} = 0{,}625V_i - 17{,}74 \\ V_{D2} \leq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0{,}625V_i - 17{,}74 \leq 0 \Rightarrow V_i \leq 28{,}4$$

Tenemos dos condiciones para V_i, por lo que nos quedaremos con la más restrictiva ($V_i \leq 6$). Calculamos el valor de salida V_0 y el tramo quedará:

$$\left.\begin{aligned} V_0 = V_i + 3I_{D1} \\ I_{D1} = \frac{6-V_i}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_0 = V_i + 3\left(\frac{6-V_i}{8}\right) \Rightarrow \forall\, V_i \leq 6\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0{,}625V_i + 2{,}25$$

c) D1 OFF; D2 ON



Condiciones:

$$\left.\begin{aligned} V_{D1} \leq 0 \\ I_{D2} \geq 0 \end{aligned}\right\}$$

Este caso es igual que el anterior, pero se intercambian los comportamientos de las ramas central y derecha: ahora la central está abierta (por lo que se elimina la resistencia de 5 KΩ) y la única malla cerrada posible es la externa (malla M1), la cual contiene a la intensidad I_{D2}, por lo que empezaremos calculándola y aplicando su condición:

$$\left.\begin{aligned} \text{M1} \rightarrow V_i - 3I_{D2} - 10I_{D2} - 20 = 0 \Rightarrow I_{D2} = \frac{V_i - 20}{13} \\ I_{D2} \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V_i - 20}{13} \geq 0 \Rightarrow V_i \geq 20$$

A continuación planteamos la malla M2 que contiene a la rama abierta, mediante la cual calcularemos V_{D1} y aplicaremos su condición correspondiente:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{M2} \rightarrow V_i - 3I_{D2} + V_{D1} - 6 = 0 \\ I_{D2} = \dfrac{V_i - 20}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow V_i - 3\left(\frac{V_i - 20}{13}\right) + V_{D1} - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} V_{D1} = -0{,}7692V_i + 1{,}3846 \\ V_{D1} \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0{,}7692V_i + 1{,}3846 \leq 0 \Rightarrow V_i \geq 1{,}8$$

Calculamos V_0 y este tramo de la característica quedará:

$$\left.\begin{array}{r} V_0 = V_i - 3I_{D2} \\ I_{D2} = \dfrac{V_i - 20}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow V_0 = V_i - 3\left(\frac{V_i - 20}{13}\right) \Rightarrow \forall\, V_i \geq 20 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 0{,}7692V_i + 4{,}615$$

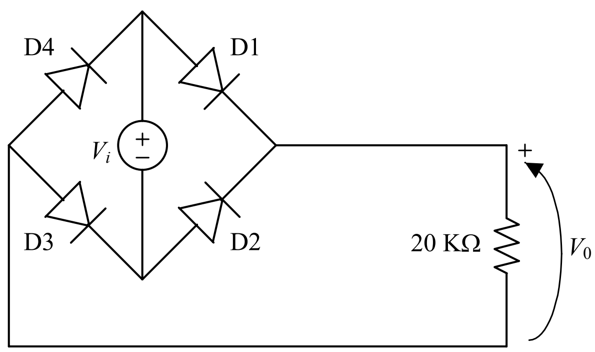
Ya tenemos cubierto todo el rango desde –∞ hasta +∞, por lo que no hay que analizar más casos. A continuación se verificaría fácilmente que la característica es continua en los puntos críticos (6 y 20 V), y los tramos quedarían:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall\, V_i \leq 6 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 0{,}625V_i + 2{,}25 \\ \forall\, 6 \text{ V} \leq V_i \leq 20 \text{ V} \Rightarrow V_0 = V_i \\ \forall\, V_i \geq 20 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 0{,}7692V_i + 4{,}615 \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 2.2.2.

Calcular la característica de transferencia de este circuito, utilizando el modelo con tensión umbral para los diodos.

Dato: $V_\gamma = 0{,}7$ V



Solución:

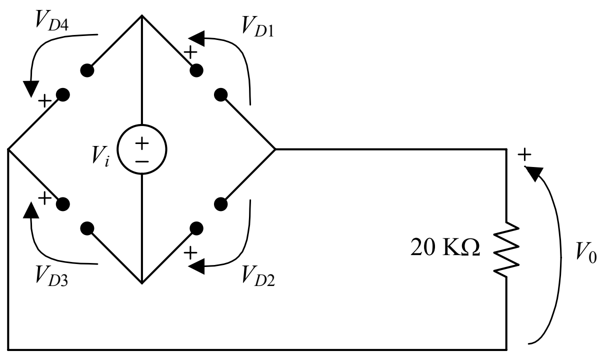
Si examinamos previamente el circuito podemos darnos cuenta que sólo hay tres combinaciones posibles para los diodos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) D1 OFF; D2 OFF; D3 OFF; D4 OFF} \\ \text{b) D1 ON; D2 OFF; D3 ON; D4 OFF} \\ \text{c) D1 OFF; D2 ON; D3 OFF; D4 ON} \end{array}\right\}$$

Por tanto, o bien están todos los diodos sin conducir, o bien conducen los que están enfrentados en el dibujo (la pareja de diodos D1-D3 ó la D2-D4), que es la única manera de formarse una malla cerrada que contenga a la fuente de tensión V_i, todas las demás combinaciones formarían circuitos imposibles o no verificarían las condiciones de conducción de los diodos. Por ejemplo, si suponemos que solamente conduce un diodo de los cuatro, vemos que eso no es posible ya que por un lado el diodo que está en conducción forzaría a que hubiera una intensidad mayor que cero en su rama, si bien todos los demás diodos están abiertos y sería imposible formar una malla cerrada en el circuito, lo cual implicaría que la intensidad sería nula en todo el circuito, y entraría en contradicción con la condición de conducción del primer diodo. Se puede hacer razonamientos similares suponiendo que conducen a la vez diodos como el D1 y D2, ó el D2 y el D3, etc., pero en todos esos casos veríamos que no se cumple alguna de las condiciones de conducción.

Por tanto, vamos a pasar a analizar las distintas situaciones:

a) D1 OFF; D2 OFF; D3 OFF; D4 OFF



Condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} V_{D1} \leq 0{,}7\ \text{V} \\ V_{D2} \leq 0{,}7\ \text{V} \\ V_{D3} \leq 0{,}7\ \text{V} \\ V_{D4} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{array}\right\}$$

En este caso no hay ninguna malla cerrada, por lo que la intensidad será cero en todo el circuito. Vamos a hacer las siguientes mallas: la primera (M1) estará compuesta por el diodo D4, V_i, D2 y la resistencia de 20 KΩ; la segunda (M2) la forma el diodo D3, V_i, D1 y la resistencia. A estas mallas les aplicamos la ley de Kirchhoff de tensiones y las condiciones para que estén en OFF todos los diodos:

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{M1} \rightarrow -V_{D4} - V_i - V_{D2} = 0 \Rightarrow V_{D2} = -V_i - V_{D4} \\ V_{D2} \le 0{,}7\end{array}\right\} \Rightarrow -V_i - V_{D4} \le 0{,}7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}V_{D4} \ge -V_i - 0{,}7 \\ V_{D4} \le 0{,}7\end{array}\right\} \Rightarrow -V_i - 0{,}7 \le V_{D4} \le 0{,}7 \Rightarrow V_i \ge -1{,}4\ \mathrm{V}$$

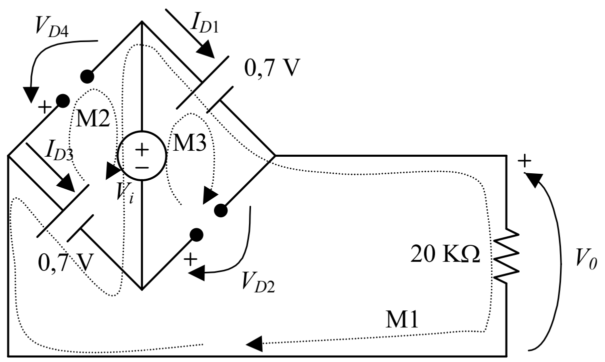
$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{M2} \rightarrow -V_{D3} + V_i - V_{D1} = 0 \Rightarrow V_{D1} = V_i - V_{D3} \\ V_{D1} \le 0{,}7\end{array}\right\} \Rightarrow V_i - V_{D3} \le 0{,}7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}V_{D3} \ge V_i - 0{,}7 \\ V_{D3} \le 0{,}7\end{array}\right\} \Rightarrow V_i - 0{,}7 \le V_{D3} \le 0{,}7 \Rightarrow V_i \le 1{,}4\ \mathrm{V}$$

El valor de salida de V_0 será cero, ya que no circula intensidad por la resistencia en donde se mide esta tensión.

$$\forall -1{,}4\ \mathrm{V} \le V_i \le 1{,}4\ \mathrm{V} \Rightarrow V_0 = 0\ \mathrm{V}$$

b) D1 ON; D2 OFF; D3 ON; D4 OFF



$$\mathrm{Condiciones:}\quad \left.\begin{array}{l}I_{D1} \ge 0 \\ I_{D3} \ge 0 \\ V_{D2} \le 0{,}7\ \mathrm{V} \\ V_{D4} \le 0{,}7\ \mathrm{V}\end{array}\right\}$$

Como hay una sola malla cerrada (una rama), resulta que las intensidades de los diodos D1 y D3 tienen que ser iguales ($I_{D1} = I_{D3}$). Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla M1 y comprobamos las condiciones de las intensidades de los diodos (que se reducirán a una única condición):

$$\left.\begin{array}{r} \text{M1} \rightarrow -0{,}7 + V_i - 0{,}7 - 20I_{D1} = 0 \Rightarrow I_{D1} = \dfrac{V_i - 1{,}4}{20} \\ I_{D1} = I_{D3} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \geq 1{,}4 \text{ V}$$

Para calcular las tensiones V_{D2} y V_{D4} planteamos otras dos mallas:

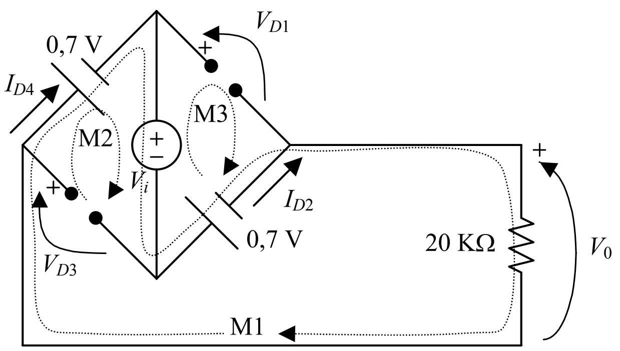
$$\left.\begin{array}{r} \text{M2} \rightarrow 0{,}7 - V_{D4} - V_i = 0 \Rightarrow V_{D4} = 0{,}7 - V_i \\ V_{D4} \leq 0{,}7 \text{ V} \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{M3} \rightarrow V_i - 0{,}7 + V_{D2} = 0 \Rightarrow V_{D2} = 0{,}7 - V_i \\ V_{D2} \leq 0{,}7 \text{ V} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\text{i}} \geq 0$$

De todas las condiciones halladas para V_i se toma la más restrictiva ($V_i \geq 1{,}4$ V). El valor de salida para V_0 sería:

$$V_0 = 20I_{D1} = V_i - 1{,}4 \Rightarrow \forall\, V_i \geq 1{,}4 \text{ V} \Rightarrow V_0 = V_{\text{i}} - 1{,}4$$

c) D1 OFF; D2 ON; D3 OFF; D4 ON



$$\text{Condiciones:} \quad \left.\begin{array}{l} I_{D2} \geq 0 \\ I_{D4} \geq 0 \\ V_{D1} \leq 0{,}7 \text{ V} \\ V_{D3} \leq 0{,}7 \text{ V} \end{array}\right\}$$

Al igual que en el caso anterior, hay una sola malla cerrada, con lo que $I_{D2} = I_{D4}$. Aplicamos la ley de mallas a M1 y utilizamos las condiciones de las intensidades de los diodos (reducidas a una sola nuevamente):

$$\left.\begin{array}{r} \text{M1} \rightarrow -0{,}7 - V_i - 0{,}7 - 20I_{D2} = 0 \Rightarrow I_{D2} = \dfrac{-V_i - 1{,}4}{20} \\ I_{D2} = I_{D4} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \leq -1{,}4 \text{ V}$$

Calculamos las tensiones V_{D1} y V_{D3}, aplicando sus condiciones posteriormente:

$$\left.\begin{array}{r} \text{M2} \rightarrow -0{,}7 - V_i + V_{D3} = 0 \Rightarrow V_{D3} = V_i + 0{,}7 \\ V_{D3} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \leq 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{M3} \rightarrow V_i - V_{D1} + 0{,}7 = 0 \Rightarrow V_{D1} = V_\text{i} + 0{,}7 \\ V_{D1} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \leq 0$$

De todas las condiciones que hemos obtenido para V_i se toma la más restrictiva ($V_i \leq -1{,}4$ V). El valor de salida para V_0 será:

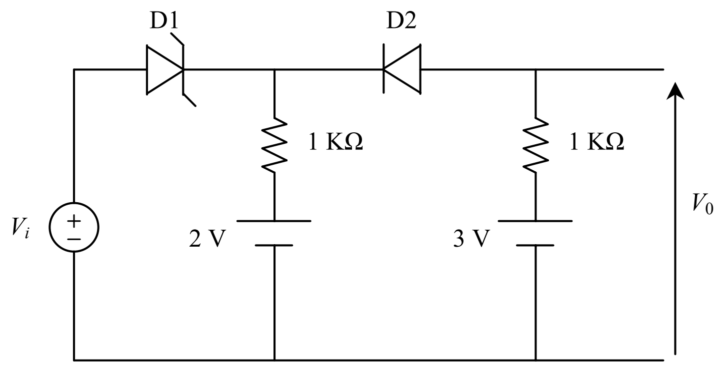
$$V_0 = 20 I_{D2} = -V_\text{i} - 1{,}4 \Rightarrow \forall\, V_i \leq -1{,}4\ \text{V} \Rightarrow V_0 = -V_i - 1{,}4$$

Se comprueba de manera muy sencilla que la característica de transferencia es continua en los puntos $V_i = -1{,}4$ V y $V_i = 1{,}4$ V. Por tanto, ésta queda como sigue:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall\, V_i \leq -1{,}4\ \text{V} \Rightarrow V_0 = -V_\text{i} - 1{,}4\ \text{V} \\ \forall\, -1{,}4\ \text{V} \leq V_i \leq 1{,}4\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0\ \text{V} \\ \forall\, V_i \geq 1{,}4\ \text{V} \Rightarrow V_0 = V_i - 1{,}4\ \text{V} \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 2.2.3.

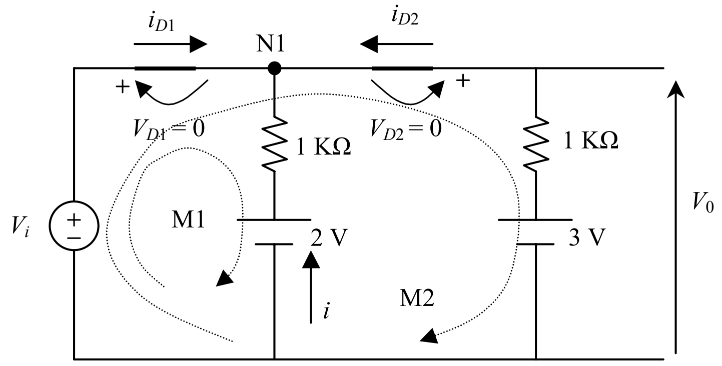
Calcula la característica de transferencia $V_0 = f\,(V_i)$ del siguiente circuito considerando los diodos ideales y que la tensión inversa del zener es de 2 voltios.



Solución:

El número de combinaciones posibles de funcionamiento de los diodos es $2^1 \cdot 3^1 = 6$

a) D1→ ON $\Rightarrow i_{D1} \geq 0$ (1) ; $V_{D1} = 0$
D2→ ON $\Rightarrow i_{D2} \geq 0$ (2) ; $V_{D2} = 0$



Debemos obtener 2 mallas que contengan a las variables i_{D1} e i_{D2}, a las cuales les aplicaremos las condiciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Malla M1} \rightarrow -V_i - 1 \cdot i + 2 = 0 \\ \text{Malla M2} \rightarrow -V_i - 1 \cdot i_{D2} + 3 = 0 \\ \text{Nudo N1} \rightarrow i_{D1} + i_{D2} + i = 0 \end{array}\right\}$$

Despejando i, i_{D2} e i_{D1} obtenemos:

$$i = \frac{2 - V_i}{1} ; i_{D2} = \frac{3 - V_i}{1} \Rightarrow i_{D1} = -i - i_{D2} = -\frac{2 - V_i}{1} - \frac{3 - V_i}{1}$$

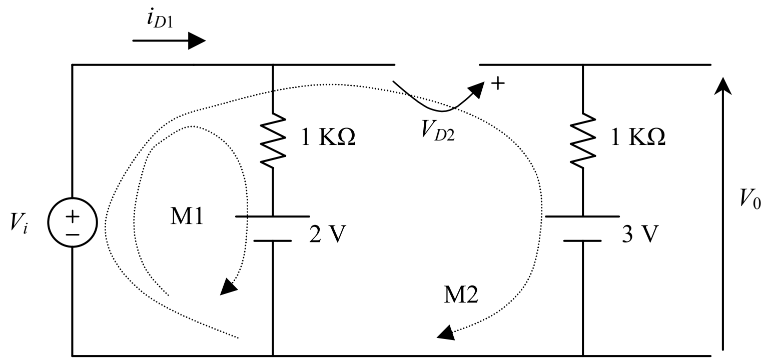
Aplicando la condición (1) a $i_{D1} \Rightarrow -2 + V_i - 3 + V_i \geq 0 \Rightarrow V_i \geq 2{,}5$ V
Aplicando la condición (2) a $i_{D2} \Rightarrow 3 - V_i \geq 0 \Rightarrow V_i \leq 3$ V

Luego $2{,}5 \text{ V} \leq V_i \leq 3 \text{ V}$

Para la tensión de salida vemos que en esta combinación $V_0 = V_i$

Por lo tanto $\forall\ 2{,}5\ \text{V} \le V_i \le 3\ \text{V} \Rightarrow V_0 = V_i$

b) D1→ ON $\Rightarrow i_{D1} \ge 0$ (3) ; $V_{D1} = 0$
D2→ OFF$\Rightarrow i_{D2} = 0$; $V_{D2} \le 0$ (4)



$$\left.\begin{array}{l}\text{Malla M1} \rightarrow -V_i + 1{\cdot}i_{D1} + 2 = 0 \\ \text{Malla M2} \rightarrow -V_i - V_{D2} + 3 = 0\end{array}\right\}$$

Despejando i_{D1} de M1, V_{D2} de M2, y aplicando las condiciones (3) y (4) respectivamente obtenemos:

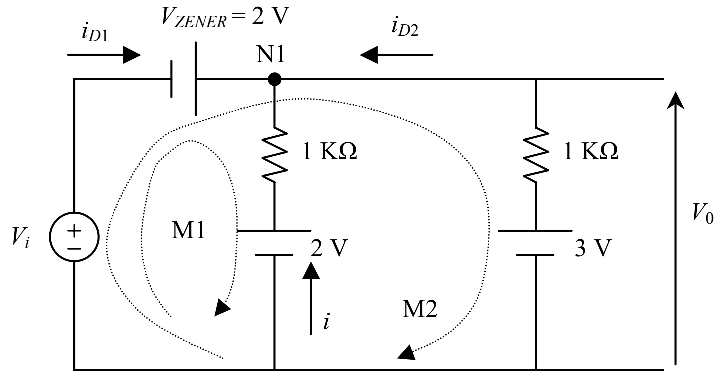
$$i_{D1} = \frac{V_i - 2}{1} \ge 0 \Rightarrow V_i \ge 2\,; V_{D2} = 3 - V_i \le 0 \Rightarrow V_i \ge 3$$

Esta última condición es la más restrictiva ya que siempre que $V_i \ge 3$ también se cumple que $V_i \ge 2$, pero no al contrario.

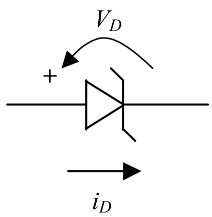
Para la tensión de salida, al no haber caída de tensión en la resistencia de 1 KΩ, vemos que $V_0 = 3$ V.

Por lo tanto: $\forall\, V_i \ge 3\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 3\ \text{V}$

c) D1→ INVERSA $\Rightarrow i_{D1} \le 0$ (5) ; $V_{D1} = -2\ \text{V} = -V_{ZENER}$
D2→ ON $\Rightarrow i_{D2} \ge 0$ (6) ; $V_{D2} = 0$



Sirva de aclaración que el diodo D1 en zona inversa se comporta como:



$i_D \le 0$; $V_D = -V_{ZENER}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Malla M1} \rightarrow -V_i - V_{ZENER} - 1{\cdot}i + 2 = 0 \\ \text{Malla M2} \rightarrow -V_i - V_{ZENER} - 1{\cdot}i_{D2} + 3 = 0 \\ \text{Nudo N1} \rightarrow i + i_{D1} + i_{D2} = 0\end{array}\right\}$$

Despejando el valor de i y de i_{D2} de las mallas:

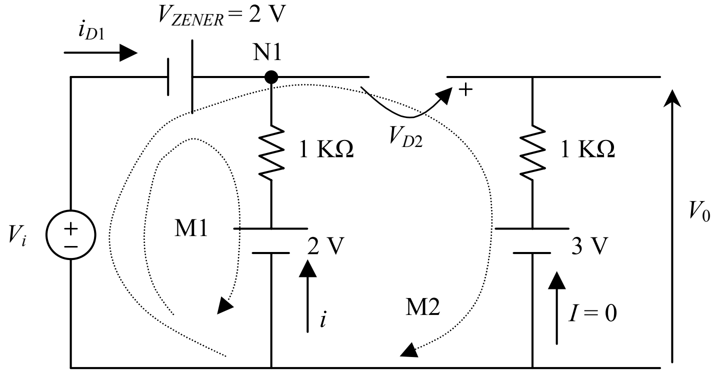
$$i = \frac{2-(V_i+2)}{1} = -V_i\,,\; i_{D2} = \frac{3-(V_i+2)}{1} = 3 - V_i - 2\,;$$

Y aplicando la condición (6) resulta $\Rightarrow V_i \le 1$.

Por otro lado, a partir del nudo N1, $i_{D1} = -i - i_{D2} = -3 + V_i + 2 + V_i$ y aplicando la condición (5) resulta $V_i \le 0{,}5$ (esta última condición engloba a la anterior). Además, de la malla M2 $\rightarrow -V_i - V_{ZENER} + V_0 = 0 \Rightarrow V_0 = 2 + V_i$, por lo tanto:

$$\forall V_i \leq 0{,}5\text{ V} \Rightarrow V_0 = 2 + V_i$$

d) D1→ INVERSA $\Rightarrow i_{D1} \leq 0$ (7) ; $V_{D1} = -2$ V $= -V_{ZENER}$
D2→ OFF $\Rightarrow i_{D2} = 0$; $V_{D2} \leq 0$ (8)



$$\left.\begin{aligned} &\text{Malla M1} \rightarrow -V_i - V_{ZENER} - 1{\cdot}i + 2 = 0 \Rightarrow i = \frac{2-(V_i+2)}{1} \\ &\text{Malla M2} \rightarrow -V_i - V_{ZENER} - V_{D2} - 1{\cdot}I + 3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Observamos que $i + i_{D1} = 0$ a partir del nudo N1.

Luego $i_{D1} = -i = -\dfrac{2-(V_i+2)}{1}$

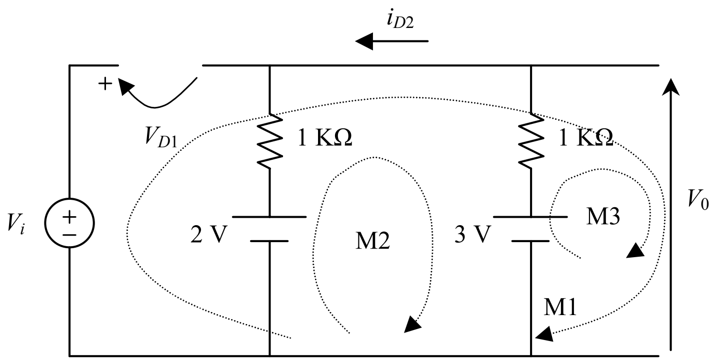
Aplicando la condición (7) $\Rightarrow$ $i_{D1} = -i = -2 + V_i + 2 \leq 0 \Rightarrow V_i \leq 0$

Despejando V_{D2} de la malla M2 y aplicando la condición (8) resulta:

$$V_{D2} = -(2+V_i) + V_0 \leq 0 \Rightarrow V_0 = 3 \Rightarrow V_i \geq 1$$

Vemos que las condiciones obtenidas son incompatibles, luego esta combinación es IMPOSIBLE.

e) D1→ OFF $\Rightarrow i_{D1} = 0$; -2 V $\leq V_{D1} \leq 0$ (9)
D2→ ON $\Rightarrow i_{D2} \geq 0$ (10) ; $V_{D2} = 0$



$$\left.\begin{array}{l}\text{Malla M1} \rightarrow -V_i + V_{D1} + V_0 = 0 \Rightarrow V_{D1} = V_i - V_0 \\ \text{Malla M2} \rightarrow -2 + 3 - i_{D2}\cdot(1+1) = 0 \\ \text{Malla M3} \rightarrow -3 + 1\cdot i_{D1} + V_0 = 0 \Rightarrow V_0 = 3 - i_{D2}\end{array}\right\}$$

Aplicando la condición (9) $\Rightarrow -2 \le \left(V_{D1} = V_i - V_0\right) \le 0$ (11)

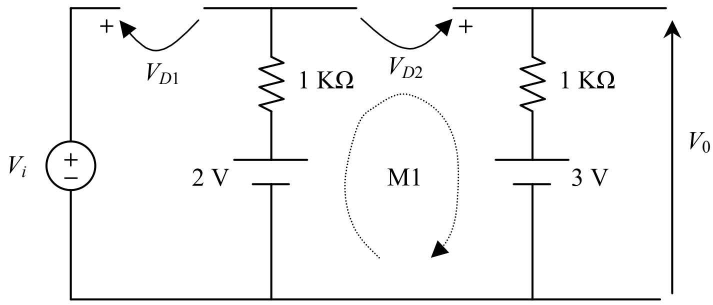
Por otro lado $i_{D2} = \dfrac{3-2}{1+1} = 0{,}5\ \text{mA}$, y a partir de M3 obtenemos $V_0 = 2{,}5$ V.

Sustituyendo en (11) resulta:

$$-2 \le \left(V_i - 2{,}5\right) \le 0 \Rightarrow 0{,}5\ \text{V} \le V_i \le 2{,}5\ \text{V}$$

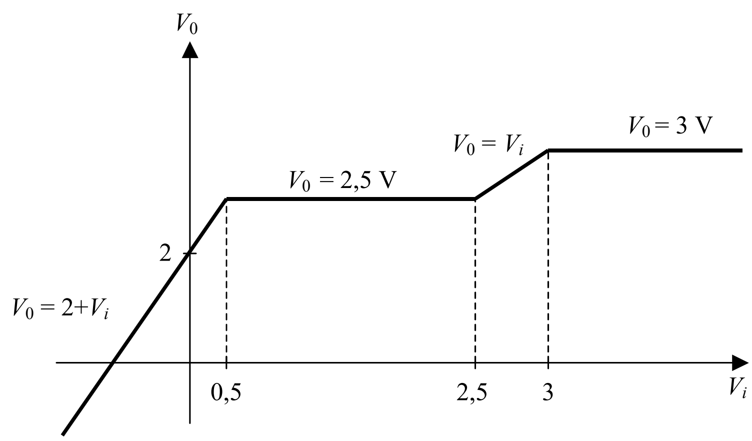
En resumen: $\forall\ 0{,}5\ \text{V} \le V_i \le 2{,}5\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 2{,}5\ \text{V}$

f) D1→ OFF $\Rightarrow i_{D1} = 0$; $-2\ \text{V} \le V_{D1} \le 0$
D2→ OFF $\Rightarrow i_{D2} = 0$; $V_{D2} \le 0$



Sólo existe una malla, M1→ $-2-V_{D2}+3 = 0 \Rightarrow V_{D2} = 3 - 2 = 1 > 0$, por lo tanto se trata de un caso IMPOSIBLE.

Por último comprobamos la continuidad de todos los tramos obtenidos de la función de transferencia y sólo resta representarla:



Resumiendo todos los tramos de la característica de transferencia:

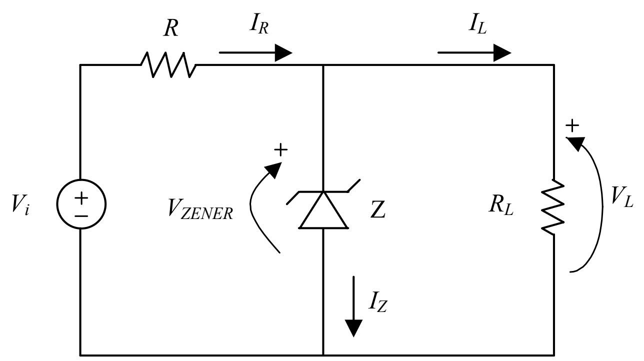
$$\left.\begin{array}{l} \forall\, V_i \le 0{,}5\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 2 + V_i \\ \forall\, 0{,}5\ \text{V} \le V_i \le 2{,}5\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 2{,}5\ \text{V} \\ \forall\, 2{,}5\ \text{V} \le V_i \le 3\ \text{V} \Rightarrow V_0 = V_i \\ \forall\, V_i \ge 3\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 3\ \text{V} \end{array}\right\}$$

2.3. CASOS PRÁCTICOS

Ejercicio 2.3.1.

Para el circuito de la figura se pretende que la tensión de la carga V_L permanezca constante. Se desea calcular:

a) Valor máximo y mínimo de R_L suponiendo V_L = 10 V, V_i = 50 V, $I_{Zmáx}$ = 32 mA y R = 1 KΩ
b) Valor máximo y mínimo de V_i suponiendo V_L = 20 V, R_L = 1,2 KΩ, $I_{Zmáx}$ = 60 mA y R = 220 Ω



Solución:

Para ambos casos vemos que el zener se va a utilizar en la zona inversa para estabilizar o fijar la tensión en la resistencia de carga (R_L), en el primer caso a 10 V y en el segundo caso a 20 V. De un modo sencillo podemos comentar que el diodo zener actúa de válvula regulando la intensidad que pasa a través de él y así, indirectamente, regulando también la intensidad que circula por la carga.

Apartado a)

El valor de la resistencia de carga lo podemos calcular a partir de $R_L = \dfrac{V_L}{I_L}$

Esta expresión alcanzará su valor mínimo cuando su denominador (I_L) sea máximo. Como $I_L = I_R - I_Z$ esto sucederá cuando la intensidad que circula por el diodo zener (I_Z) sea mínima, es decir, $I_Z = 0 \Rightarrow I_L = I_R = \dfrac{V_i - V_{ZENER}}{R}$

Además, como $V_L = V_{ZENER}$, sustituyendo estos valores en la expresión de R_L obtenemos su valor mínimo:

$$R_{Lmín} = \frac{V_{ZENER}}{\dfrac{V_i - V_{ZENER}}{R}} = \frac{10}{\dfrac{50-10}{1\,\text{K}\Omega}} = 250\,\Omega$$

Para este valor mínimo se asegura que el zener se encuentra en zona inversa.

El valor máximo de la resistencia de carga se obtiene también a partir de la expresión de R_L anterior, es decir, $R_{Lmáx} = \dfrac{V_{ZENER}}{I_{Lmín}}$, el valor de la intensidad que circula por la carga I_L será mínimo cuando la intensidad que atraviesa el zener sea la máxima ya que $I_L = I_R - I_Z \Rightarrow I_{Lmín} = I_R - I_{Zmáx}$

A partir de la expresión anterior observamos que necesitamos calcular el valor de I_R:

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{V_i - V_{ZENER}}{R} = \frac{50-10}{1\,\text{K}\Omega} = 40\text{ mA}$$

$$I_{Lmín} = 40 - 32 = 8\text{ mA}$$

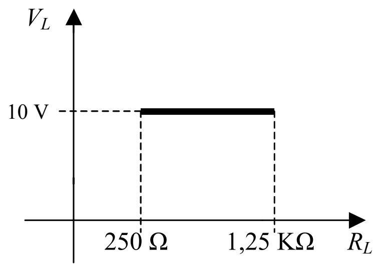
Sustituyendo en la expresión de $R_{Lmáx}$:

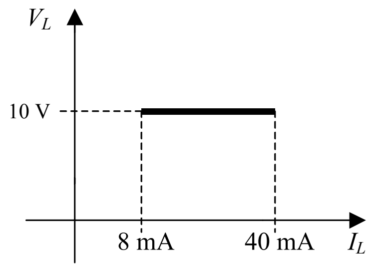
$$R_{Lmáx} = \frac{10}{8} = 1{,}25\,\text{K}\Omega$$

En resumen, para $250\,\Omega < R_L < 1{,}25\,\text{K}\Omega$ aseguramos que el zener está en zona inversa y por lo tanto la tensión en la carga permanece constante e igual a 10V.

Una conclusión que podemos obtener es que una vez que el zener está en zona inversa el voltaje y la intensidad en la resistencia R permanecen constantes, ya que $V_R = V_i - V_{ZENER} = 50 - 10 = 40\text{ V}$, $I_R = 40\text{ mA}$.

En las gráficas siguientes podemos observar para qué rangos de R_L y de I_L se asegura una tensión constante en la carga.





Apartado b)

Para el segundo caso debemos tener en cuenta que V_i debe ser lo suficientemente grande para que el zener esté en zona inversa.

El mínimo valor de V_i que cumple dicha condición se produce cuando por el diodo zener no circula intensidad ya que $I_Z = I_R - I_L = 0$:

$$V_L = V_{ZENER} = R_L \cdot \frac{V_i}{(R_L + R)}$$

$$\Rightarrow V_{imín} = (R_L + R) \cdot \frac{V_{ZENER}}{R_L} = (1{,}2\ \text{K}\Omega + 0{,}22\ \text{K}\Omega) \cdot \frac{20}{1{,}2\ \text{K}\Omega} = 23{,}67\ \text{V}$$

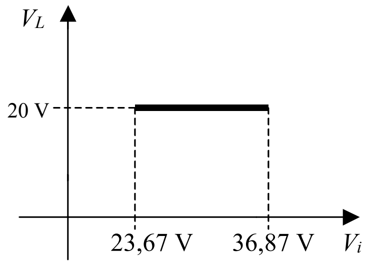
$$I_L = \frac{V_L}{R_L} = \frac{V_{ZENER}}{R_L} = \frac{20}{1{,}2\ \text{K}\Omega} = 16{,}67\ \text{mA} \Rightarrow \text{Valor constante}$$

Por otro lado el valor máximo de la tensión V_i está limitado por la intensidad máxima que es capaz de soportar el zener en la zona inversa:

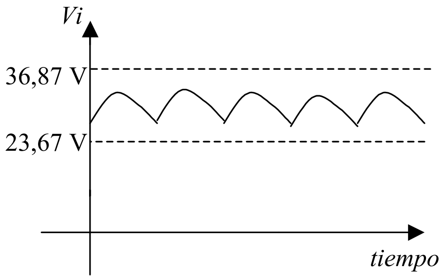
$$I_{Zmáx} = I_{Rmáx} - I_L \Rightarrow I_{Rmáx} = I_{Zmáx} + I_L = 60 + 16{,}67 = 76{,}67\ \text{mA}$$

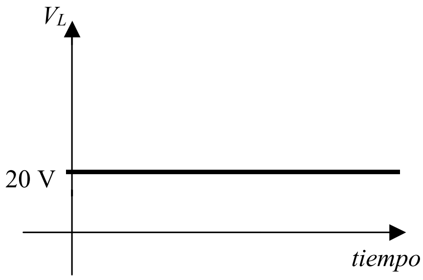
Luego $V_{imáx} = I_{Rmáx} \cdot R + V_{ZENER} = 76{,}67 \cdot 0{,}22 + 20 = 36{,}87\ \text{V}$

En la siguiente gráfica podemos ver la tensión en la carga en función de la tensión de entrada.



La aplicación práctica de este caso puede ser la eliminación del "rizado" de una onda de entrada. Según se observa en la siguiente figura podríamos tener una variación de 23,67 V < V_i < 36,87 V y ello no afectaría al valor de la tensión a la salida del circuito ya que ésta permanecería constante e igual a 20 V.





Resumiendo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } 250\,\Omega < R_L < 1{,}25\text{ K}\Omega \\ \text{b) } 23{,}67\text{ V} < V_i < 36{,}87\text{ V} \end{array}\right\}$$

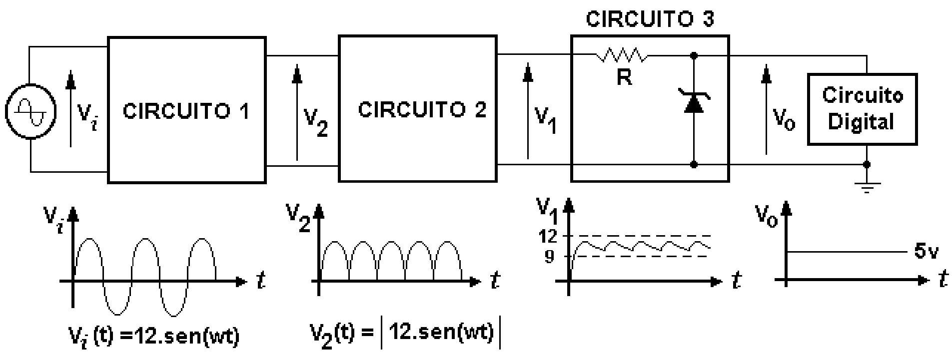
Ejercicio 2.3.2.

Se desea construir una fuente de alimentación (según el circuito de la figura) que suministre una tensión constante de 5 V a un circuito digital cuyo consumo oscila entre 300 mA y 500 mA. Se pide:

a) Dibuja los esquemas contenidos en los recuadros etiquetados como CIRCUITO 1 y CIRCUITO 2.

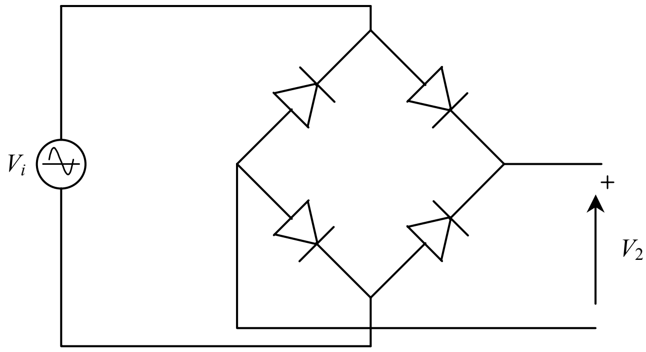
b) Para el CIRCUITO 3, calcule el valor de R y las características del diodo zener a emplear sabiendo que $I_{ZENERmínima}$ debe ser el 10% de la $I_{ZENERmáxima}$.

Dibujar la zona de funcionamiento del zener sobre su curva característica, $i_D = f(v_D)$

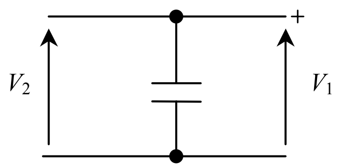


Solución:

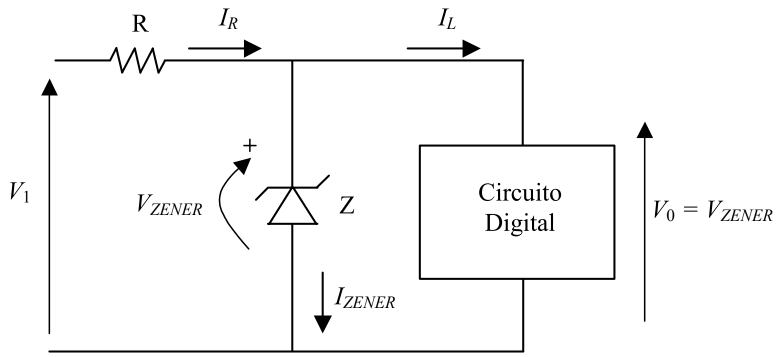
a) Observando la forma de la gráfica de V_i vemos que se trata de una onda senoidal que debe ser rectificada mediante un rectificador de onda completa para poder obtener la señal V_2. Luego el contenido del recuadro CIRCUITO 1 puede ser un puente rectificador como el que aparece en la figura siguiente:



La forma de la señal V_1 se corresponde con un proceso de filtrado con condensador aplicado a una señal proveniente de una rectificación de onda completa. Luego el contenido del recuadro CIRCUITO 2 es un condensador:



b) El valor de la resistencia R viene dado por la expresión $\mathrm{R} = \dfrac{V_1 - V_{ZENER}}{I_{ZENER} + I_L}$, obtenida a partir del circuito de la figura:



- La intensidad que circula por el zener será mínima ($I_{Zmín}$) cuando I_L es máxima ($I_{Lmáx}$) y la tensión de entrada es mínima ($V_{1MÍN}$):

$$R = \frac{V_{1MÍN} - V_{ZENER}}{I_{Zmín} + I_{Lmáx}} \qquad (1)$$

- La intensidad que circula por el zener será máxima ($I_{Zmáx}$) cuando I_L es mínima ($I_{Lmín}$) y la tensión de entrada es máxima ($V_{1MÁX}$):

$$R = \frac{V_{1MÁX} - V_{ZENER}}{I_{Zmáx} + I_{Lmín}} \qquad (2)$$

Obviamente el valor de R no debe variar para ambas condiciones. Luego igualando obtenemos:

$$\frac{V_{1MÍN} - V_{ZENER}}{I_{Zmín} + I_{Lmáx}} = \frac{V_{1MÁX} - V_{ZENER}}{I_{Zmáx} + I_{Lmín}}$$

Sustituyendo los valores: $I_{Lmín}$ = 300 mA, $I_{Lmáx}$ = 500 mA, $V_{1MÍN}$ = 9 V, $V_{1MÁX}$ = 12 V, V_{ZENER} = 5 V = V_0 y reordenando la expresión anterior obtenemos:

$$4 \cdot I_{Zmáx} + 1200 = 7 \cdot I_{Zmín} + 3500 \qquad (3)$$

Esta última ecuación tiene 2 incógnitas, luego para resolverla necesitamos otra ecuación que podemos obtener a partir del enunciado ya que se indica que:

$$I_{Zmín} = I_{Zmáx} \cdot \frac{10}{100} \qquad (4)$$

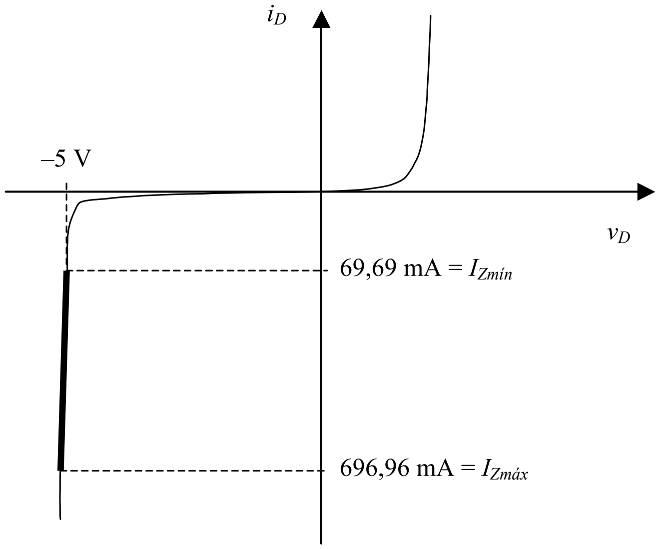
Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (3) y (4) obtenemos $I_{Zmáx}$ = 696,96 mA e $I_{Zmín}$ = 69,69 mA. Sustituyendo en (1) o en (2) obtenemos R = 7,021 Ω.

En resumen, las características del diodo zener que debemos utilizar son:

$$V_{ZENER} = 5\,\text{V}, I_{Zmáx} = 696{,}96\,\text{mA}$$

Y el valor de R = 7,021 Ω.

La zona de funcionamiento del zener la podemos ver en la siguiente gráfica:

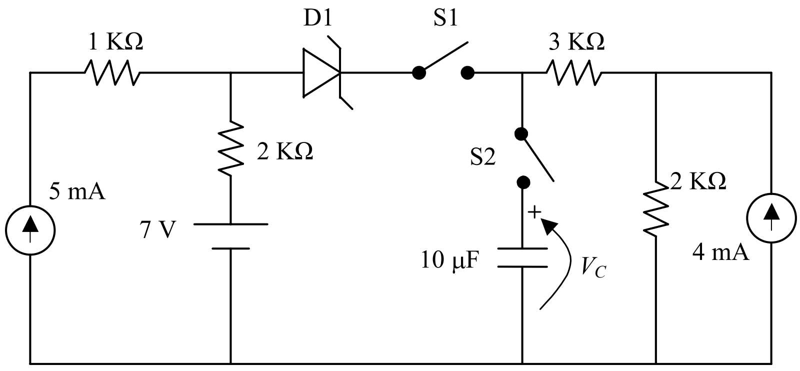


Ejercicio 2.3.3.

Realiza el análisis transitorio del circuito de la figura teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- $t = t_0 = 0 \rightarrow$ **S1 = S2 = ON ;** $V_C = 0$
- $t = t_1 >> t_0 \rightarrow$ **S1 = OFF ; S2 = ON**

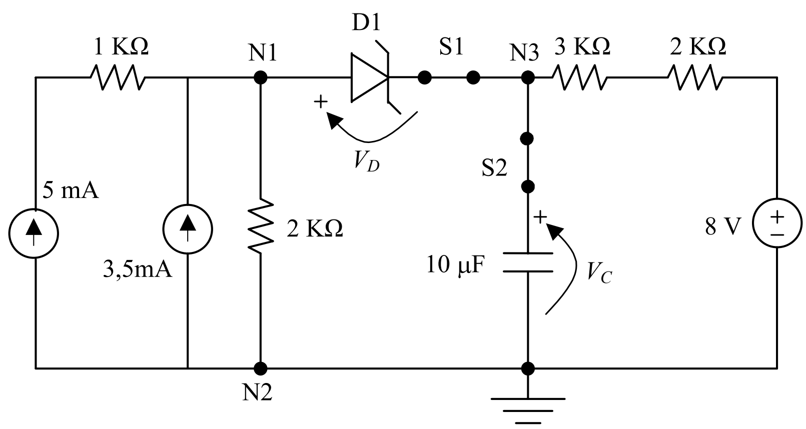
Considera el diodo ideal con una tensión inversa zener $V_Z = 3$ **V**



Solución:

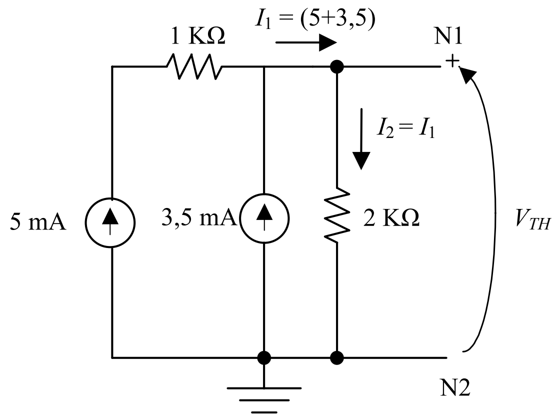
Vemos que se trata de un problema de carga y descarga de un condensador pero con la particularidad de tener un diodo zener. Para ver el efecto de dicho diodo sobre el circuito debemos simplificar éste lo máximo posible y deducir fácilmente si el diodo está en ON o en OFF. Para ello convertimos el generador real de tensión de 7 V en generador de intensidad y al contrario para el generador de intensidad de 4 mA.

Para la primera situación en $t = t_0 = 0$ donde ambos interruptores están cerrados obtenemos el siguiente circuito:

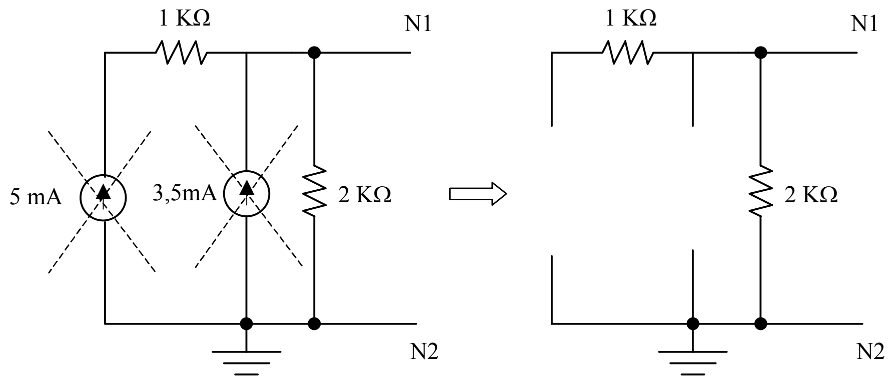


El estado del diodo viene determinado por su tensión V_D donde $V_D = V(\mathrm{N1}) - V(\mathrm{N3})$

Para calcular la tensión en N1 realizamos el equivalente Thèvenin entre los nudos N1 y N2:

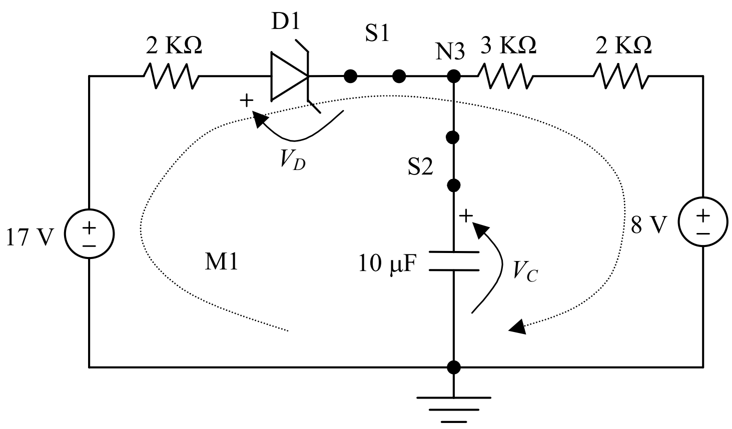


La tensión Thèvenin $V_{TH} = I_1 \cdot 2 \Rightarrow 8{,}5\ \text{mA} \cdot 2\ \text{K}\Omega = 17\ \text{V}$, y la resistencia Thèvenin se obtiene eliminando las fuentes de intensidad y cortocircuitando las fuentes de tensión:



Vemos claramente que $R_{TH} = 2\ \text{K}\Omega$

Sustituyendo el equivalente Thèvenin calculado obtenemos el siguiente circuito:



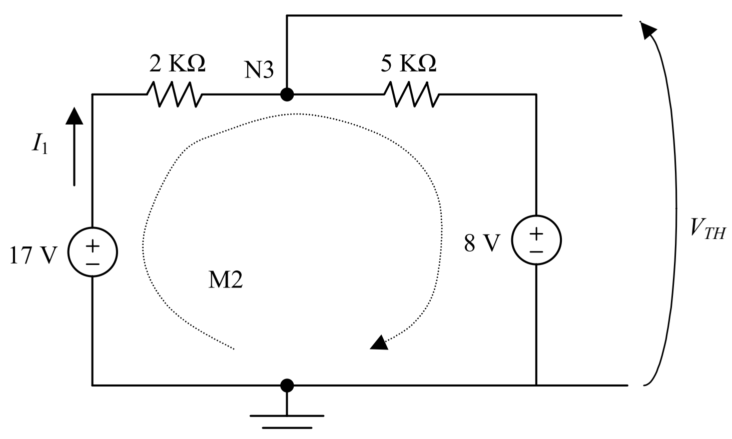
Suponemos D1→ON: $i_{D1} \geq 0$; $V_D = 0$

Analizando la malla M1:

$$\text{M1} \rightarrow -17+8+(2+3+2)\cdot i_{D1} = 0 \Rightarrow i_{D1} = \frac{17-8}{(3+2+2)} \geq 0 \quad \text{(Se cumple)}$$

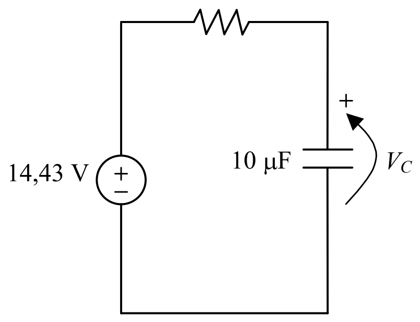
Por lo tanto el diodo está en ON, funcionando como un diodo normal, donde $V_D = 0$.

Podemos simplificar aún más el circuito calculando el equivalente Thèvenin entre el nudo N3 y masa:



$$I_1 = \frac{17-8}{7} = 1{,}29 \text{ mA} \Rightarrow V_{TH} = 8 + 1{,}29 \cdot 5 = 14{,}43 \text{ V} ; R_{TH} = \frac{2 \cdot 5}{(5+2)} = 1{,}43 \text{ K}\Omega$$

El circuito final queda:

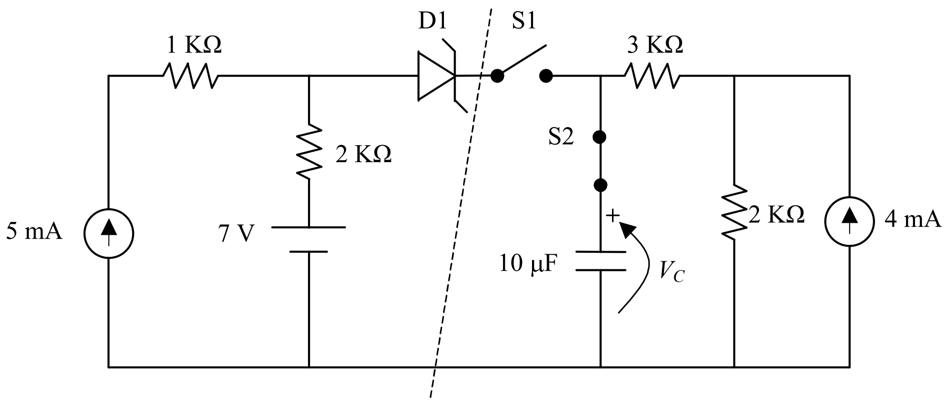


Para obtener la ecuación de carga del condensador basta con sustituir los datos en la ecuación general de carga/descarga:

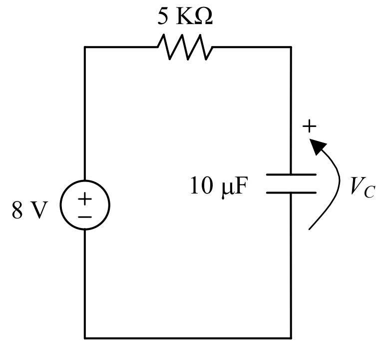
$$V_C = V_F + (V_i - V_F) \cdot e^{-t/RC}$$

Donde la tensión inicial $V_i = 0$, la tensión final $V_F = 14{,}43$ V, $R = 1{,}43$ KΩ y $C = 10$ µF. De ahí obtenemos $V_C = 14{,}43 \cdot (1 - e^{-t/14{,}3})$.

Para evaluar la condición que falta donde $t = t_1 >> t_0$, suponemos que el condensador alcanza su tensión final puesto que t_1 es mucho mayor que t_0 y en el instante $t = t_1$ el interruptor S1 se abre quedando la parte izquierda del circuito sin efecto, según apreciamos en la figura:



Y el circuito para analizar, realizando un equivalente Thèvenin, será el siguiente:

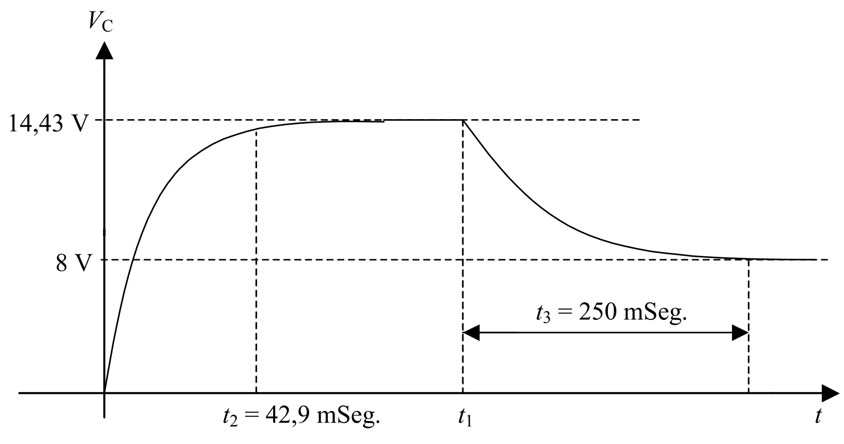


$$\left.\begin{aligned} V_{TH} &= 2\ \mathrm{K\Omega} \cdot 4\ \mathrm{mA} = 8\ \mathrm{V} \\ R_{TH} &= 3\ \mathrm{K\Omega} + 2\ \mathrm{K\Omega} = 5\ \mathrm{K\Omega} \end{aligned}\right\}$$

Se trata de un proceso de descarga desde una tensión inicial de 14,43 V a una tensión final de 8 V. La ecuación que representa el valor de la tensión en el condensador para esta situación será:

$$V_C = 8 + (14{,}43 - 8) \cdot e^{-T/RC}, \text{ con } R = 5\ \mathrm{K\Omega},\ C = 10\ \mu\mathrm{F} \text{ y } T = t - t_1$$

Por último, la gráfica para V_C que agrupa tanto el proceso de carga como el de descarga es la siguiente:



Observando la gráfica, para $t_2 \cong 3RC = 5 \cdot 1{,}43\ \mathrm{K\Omega} \cdot 10\ \mu\mathrm{F} = 42{,}9\ \mathrm{mSeg.}$ la rampa de subida alcanza el 95 % del valor final.

Para $t_3 \cong 5RC = 5 \cdot 5\,\text{K}\Omega \cdot 10\,\mu\text{F} = 250\,\text{mSeg.}$ a partir de t_1, la rampa de bajada alcanza el 99 % de su valor final.

Resumiendo:

$$1^{\text{er}}\ \text{caso}: \text{S1} = \text{S2} = \text{ON} \rightarrow \begin{cases} \text{DIODO} \rightarrow \text{ON} \\ V_C = 14{,}43 \cdot (1 - e^{-t/14{,}3}) \end{cases}$$

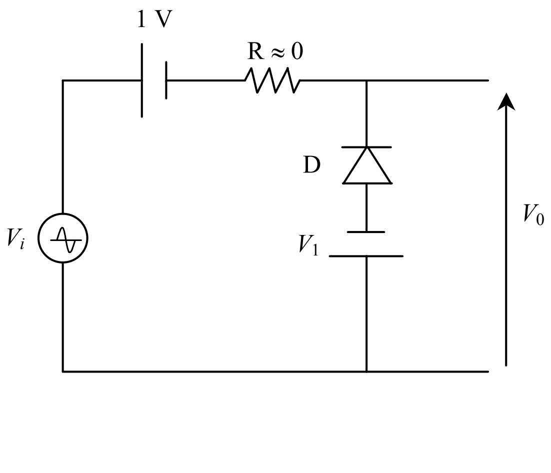
$$2^{\text{o}}\ \text{caso}: \text{S1 OFF}\,;\ \text{S2 ON} \rightarrow \begin{cases} \text{DIODO} \rightarrow \text{NO INFLUYE} \\ V_C = 8 + 6{,}43 \cdot e^{-(t-t_1)/50} \end{cases}$$

Ejercicio 2.3.4.

Calcula la gráfica de la tensión de salida V_0 del siguiente circuito, considerando los casos:

a) $V_1 = 0$ V
b) $V_1 = V_B > 1$ V

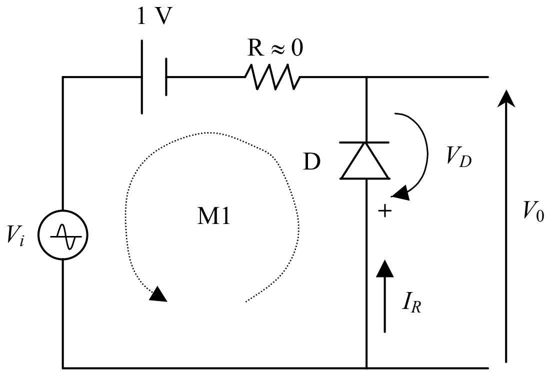
cuando se le aplica una tensión de entrada senoidal $V_i = 2 \cdot \text{sen}\,(\omega t)$ y considerando para el diodo un modelo ideal.



Solución:

Se trata de una aplicación sobre la base de diodos semiconductores que consiste en recortar o eliminar parte de una onda de entrada.

a) El circuito para $V_1 = 0$ V queda como sigue:



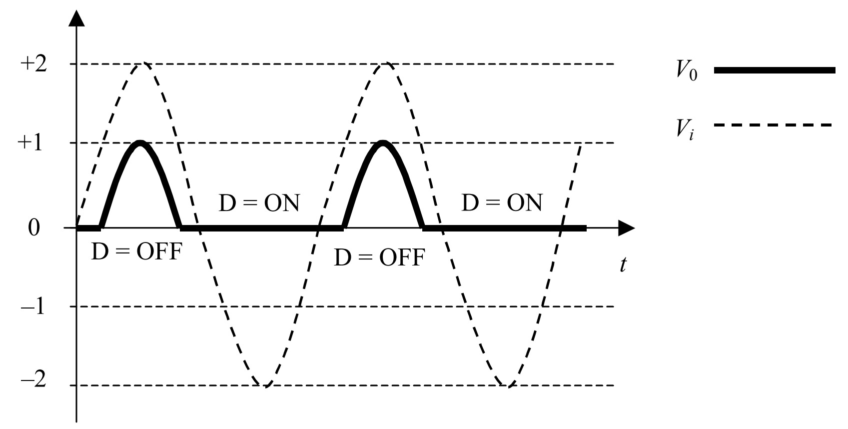
La ecuación de la malla M1 $\Rightarrow V_i + V_D - 1 + R \cdot I_R = 0$

Como el valor de R es aproximadamente nulo:

$$R \approx 0 \Rightarrow R \cdot I_R \approx 0 \Rightarrow V_0 = -V_D = V_i - 1$$

Según la última ecuación vemos que cuando el diodo esté conduciendo (ON), al ser un diodo ideal se comportará como un cable conductor y $V_D = 0 = V_0$, y tan sólo cuando el diodo esté cortado (OFF) la señal de la salida será igual a la de la entrada menos 1, es decir, $V_0 = V_i - 1$.

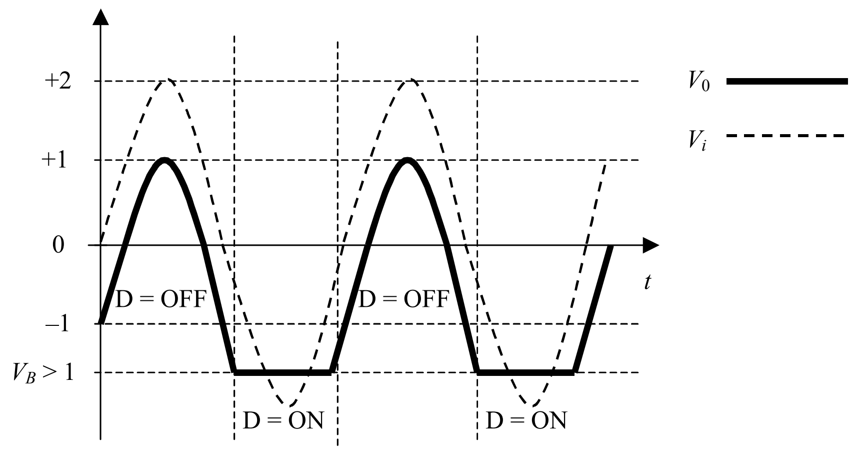
En la siguiente gráfica vemos la representación de la señal de entrada y la de salida:



La señal de entrada es una onda senoidal que tiene una amplitud igual a 2 y aparece representada por la curva de trazos, mientras que la señal de salida aparece representada con línea gruesa. Podemos observar que la señal obtenida es un recorte de la señal de entrada.

b) Para $V_1 = V_B$ la señal de salida $V_0 = -V_D - V_B$, y la ecuación de la malla principal es $V_i + V_D - 1 + R \cdot I_R + V_B = 0$. Cuando el diodo conduce $V_D = 0$ por lo tanto $V_0 = -V_B$, y cuando el diodo no conduce $V_0 = V_i - 1$.

Luego la gráfica resultante es:



Donde la curva de trazos representa la señal de entrada y la señal de salida aparece representada con línea gruesa.

3. Circuitos con Transistores Bipolares

OBJETIVOS:

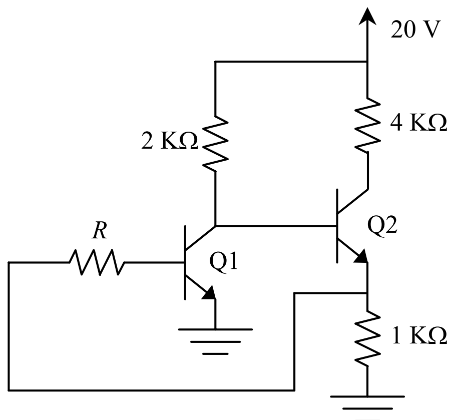
- Análisis del punto de trabajo y característica de transferencia en circuitos con transistores bipolares.
- Adquirir destreza en el análisis previo del comportamiento de los distintos dispositivos que aparecen en un circuito, mediante razonamientos sencillos a partir de la mera observación del mismo.
- Aplicación de las propiedades del transistor en conmutación para el diseño y análisis de puertas lógicas.
- Aprender a calcular parámetros característicos de las puertas lógicas: Fan-Out, potencia consumida, niveles de ruido, etc.
- Estudio de aplicaciones prácticas enfocadas al diseño o polarización de circuitos con transistores bipolares.

3.1. PUNTO DE TRABAJO

Ejercicio 3.1.1.

Calcular el valor de la resistencia *R* para que la tensión entre el colector y el emisor del transistor Q2 sea de 10 V.

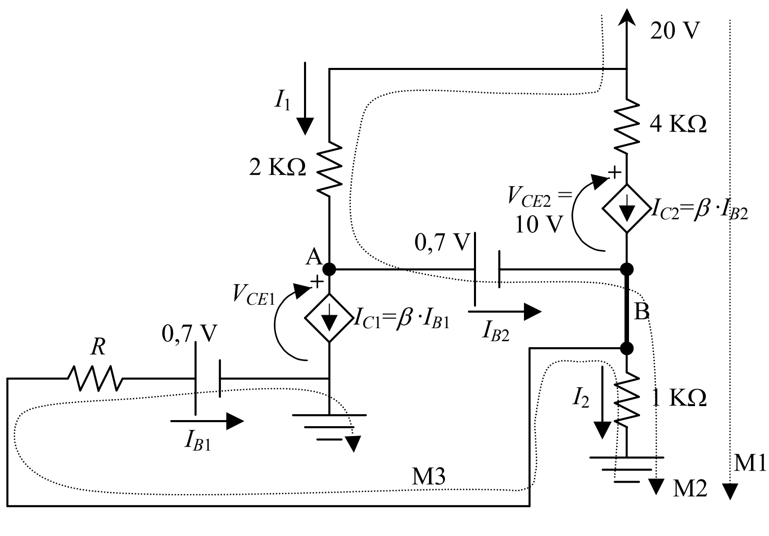
Datos:
$V_{BE(ON)}$ = 0,7 V
$V_{CE(SAT)}$ = 0,2 V
β = 100



Solución:

En primer lugar razonamos el estado de ambos transistores. El único estado posible para Q2 es el de ACTIVA, ya que si estuviera en corte su V_{CE2} sería 20 V (no caería tensión ni en la resistencia de 4 KΩ ni en la de 1 KΩ), y si estuviera en saturación sería el valor de la $V_{CE(SAT)}$, que es de 0,2 V.

Por tanto suponemos Q2 en ACTIVA, y Q1 tendrá que conducir ya que si no lo hiciera no podríamos calcular el valor de *R*. Por tanto, estará en SATURACIÓN o en ACTIVA. Empezamos suponiendo Q1 y Q2 en ACTIVA:



Condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} I_{B1} \geq 0 \\ I_{B2} \geq 0 \\ V_{CE1} \geq 0{,}2\ \text{V} \\ V_{CE2} \geq 0{,}2\ \text{V} \end{array}\right\}$$

Empezamos calculando los valores de las intensidades de base de ambos transistores, para lo cual necesitaremos 2 ecuaciones de nudos y 2 de mallas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nudo A} \rightarrow I_1 = I_{B2} + \beta{\cdot}I_{B1} \\ \text{Nudo B} \rightarrow \beta{\cdot}I_{B2} + I_{B2} = I_2 + I_{B1} \Rightarrow I_2 = (\beta+1){\cdot}I_{B2} - I_{B1} \\ \text{Malla M1} \rightarrow 20 - 4\beta{\cdot}I_{B2} - 10 - 1I_2 = 0 \\ \text{Malla M2} \rightarrow 20 - 2I_1 - 0{,}7 - 1I_2 = 0\end{array}\right\}$$

Sustituyendo el valor de las intensidades I_1 e I_2 en las mallas M1 y M2 y simplificando tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{M1} \rightarrow 10 - 4\beta{\cdot}I_{B2} - ((\beta+1){\cdot}I_{B2} - I_{B1}) = 0 \\ \text{M2} \rightarrow 19{,}3 - 2\,(I_{B2} + \beta{\cdot}I_{B1}) - ((\beta+1){\cdot}I_{B2} - I_{B1}) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_{B1} - 501I_{B2} + 10 = 0 \\ -199I_{B1} - 103I_{B2} + 19{,}3 = 0\end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema (por ejemplo, por reducción) tenemos:

$$I_{B2} = \frac{2009'3}{99802} \cong 0{,}0201\,\text{mA} \;\; ; \;\; I_{B1} \cong 0{,}0866\,\text{mA}$$

Ahora plantemos una malla que contenga a R (por ejemplo M3), calculamos el valor de I_2 y hallamos la resistencia R:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Malla M3} \rightarrow 1I_2 - RI_{B1} - 0{,}7 = 0 \\ I_2 = (\beta+1){\cdot}I_{B2} - I_{B1} \cong 1{,}9469\,\text{mA}\end{array}\right\} \Rightarrow R = \frac{I_2 - 0{,}7}{I_{B1}} \cong 14{,}4\ \text{K}\Omega$$

Por último comprobamos que se cumplen todas las condiciones de los transistores:

$$\left.\begin{array}{l} I_{B1} \geq 0 \\ I_{B1} \cong 0{,}0866\,\text{mA}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se cumple} \;\; ; \;\; \left.\begin{array}{l} I_{B2} \geq 0 \\ I_{B2} \cong 0{,}0201\,\text{mA}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se cumple}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{CE1} \geq 0{,}2\ \text{V} \\ V_{CE1} = 1I_2 + 0{,}7 \cong 2{,}6469\ \text{V}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se cumple} \;\; ; \;\; \left.\begin{array}{l} V_{CE2} \geq 0{,}2\ \text{V} \\ V_{CE2} = 10\ \text{V}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se cumple}$$

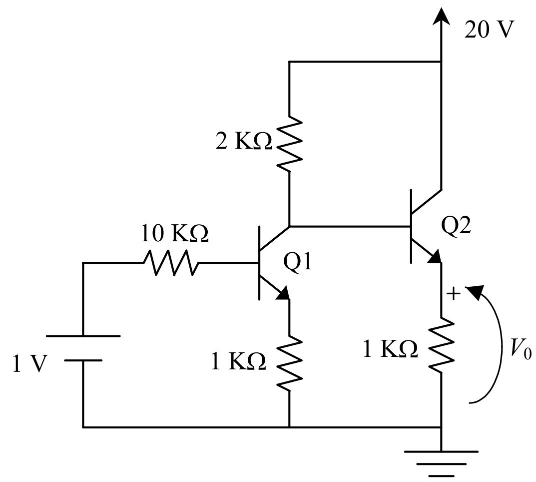
Por tanto se cumplen las condiciones de ACTIVA de los 2 transistores, y el valor de *R* es:

$$\boxed{R = 14{,}4\ \mathrm{K\Omega}}$$

Ejercicio 3.1.2.

Calcular el punto de trabajo del circuito de la derecha, así como el valor de salida V_0. Indicar también el consumo que presenta la fuente de 20 V.

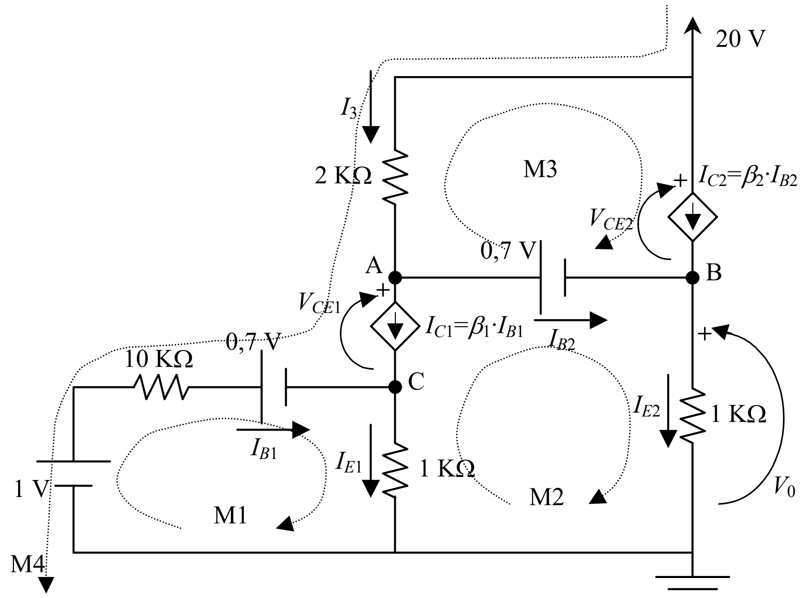
Datos:
$V_{BE(ON)} = 0{,}7$ V
$V_{CE(SAT)} = 0{,}2$ V
$\beta_1 = 800$; $\beta_2 = 100$



Solución:

En primer lugar analizamos cual puede ser el estado más probable de ambos transistores. Observamos cómo el transistor Q2 tiene el colector conectado a la tensión más positiva de todo el circuito (20 V), por lo que es imposible que esté en saturación (para que se sature debería tener más de 20 V en la base, lo cual no será posible), así que el transistor Q2 estará en ACTIVA (descartamos corte porque posee una tensión muy grande en su base). Por otra parte, el transistor Q1 tiene conectada en la base una fuente de tensión de 1 V, la cual parece suficiente para que conduzca, si bien no sería lo suficientemente elevada como para saturar dicho transistor, ya que su colector se encuentra conectado a la fuente de 20 V a través de una resistencia relativamente pequeña (2 KΩ), por lo tanto es probable que se encuentre trabajando igualmente en zona ACTIVA. Si éste no fuera el caso podría probarse el transistor Q1 en corte.

Suponemos Q1 ACTIVA, Q2 ACTIVA:



Condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} I_{B1} \geq 0 \\ I_{B2} \geq 0 \\ V_{CE1} \geq 0{,}2\ \text{V} \\ V_{CE2} \geq 0{,}2\ \text{V} \end{array}\right\}$$

Tenemos un circuito que presenta 7 incógnitas diferentes (una por rama). Empezamos resolviendo una parte sencilla del circuito, formada por la malla M1 y el nudo C; con las ecuaciones correspondientes podemos averiguar los valores de I_{B1} y de I_{E1}:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nudo C} \rightarrow I_{E1} = I_{B1} + \beta_1 \cdot I_{B1} \\ \text{Malla M1} \rightarrow 1 - 10 I_{B1} - 0{,}7 - 1 I_{E1} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 10 I_{B1} - 0{,}7 - 1\,(I_{B1} + 800 I_{B1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{B1} \cong 0{,}0003699\ \text{mA} \geq 0\ \text{(Cumple la primera condición)} \Rightarrow I_{E1} \cong 0{,}2963\ \text{mA}$$

A continuación planteamos un sistema de ecuaciones para las 5 incógnitas restantes, formado por 2 ecuaciones de nudos y 3 de mallas:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nudo A} \rightarrow I_3 = \beta_1 \cdot I_{B1} + I_{B2} \\ \text{Nudo B} \rightarrow I_{E2} = I_{B2} + \beta_2 \cdot I_{B2} \\ \text{Malla M2} \rightarrow 1 I_{E1} + V_{CE1} - 0{,}7 - 1 I_{E2} \\ \text{Malla M3} \rightarrow 2 I_3 - V_{CE2} + 0{,}7 = 0 \\ \text{Malla M4} \rightarrow 20 - 2 I_3 - V_{CE1} + 0{,}7 + 10 I_{B1} - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema por sustitución, por ejemplo, tenemos los siguientes resultados:

$$\left.\begin{array}{l} I_{B2} \cong 0{,}1816 \text{ mA} \geq 0 \text{ (Cumple la segunda condición)} \\ I_{E2} \cong 18{,}3369 \text{ mA} \\ I_3 \cong 0{,}4775 \text{ mA} \\ V_{CE1} \cong 18{,}7406 \text{ V} \geq 0{,}2 \text{ (Cumple la tercera condición)} \\ V_{CE2} \cong 1{,}655 \text{ V} \geq 0{,}2 \text{ (Cumple la cuarta condición)} \end{array}\right\}$$

Por tanto este es el estado correcto, y procedemos a calcular el valor de V_0 aplicando la Ley de Ohm sobre la resistencia de 1 KΩ que aparece en el emisor del transistor Q2:

$$V_0 = 1I_{E2} \cong 18{,}3369 \text{ V}$$

La potencia consumida por la fuente de 20 V la obtendremos sumando todas las intensidades que salen de dicha fuente (I_3 e I_{C2}) y multiplicándolas por el propio valor de la fuente:

$$P = 20\,(I_3 + I_{C2}) = 20\,(I_3 + 100 I_{B2}) \cong 372{,}75 \text{ mW}$$

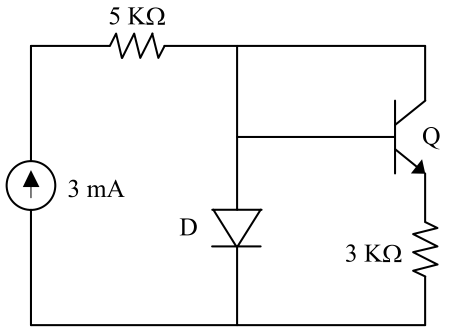
Resumiendo, estos serían todos los valores de las intensidades y tensiones del circuito:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \text{Q1 ACTIVA :} \\ I_{B1} \cong 0{,}0003699 \text{ mA} \\ I_{C1} \cong 0{,}2959 \text{ mA} \\ I_{E1} \cong 0{,}2963 \text{ mA} \\ V_{CE1} \cong 18{,}7406 \text{ V} \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{l} \text{Q2 ACTIVA :} \\ I_{B2} \cong 0{,}1816 \text{ mA} \\ I_{C2} \cong 18{,}155 \text{ mA} \\ I_{E2} \cong 18{,}3369 \text{ mA} \\ V_{CE2} \cong 1{,}655 \text{ V} \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{l} I_3 \cong 0{,}4775 \text{ mA} \\ V_0 \cong 18{,}3369 \text{ V} \\ P \cong 372{,}75 \text{ mW} \end{array}\right\}}$$

Ejercicio 3.1.3.

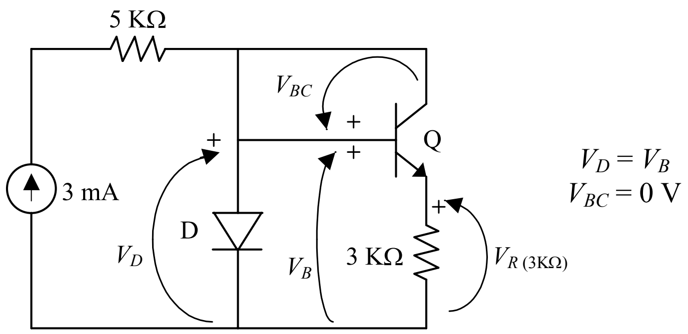
Analizar el punto de trabajo del siguiente circuito, indicando el estado del diodo D y del transistor Q así como el valor de las intensidades y tensiones en cada rama.

Datos: $V_\gamma = 0{,}4$ V ; $V_{BE(ON)} = 0{,}7$ V ; $V_{CE(SAT)} = 0{,}2$ V ; $\beta = 100$



Solución:

Analizamos inicialmente cuál puede ser la combinación más probable del diodo D y el transistor Q, para lo cual nos ayudaremos de la siguiente figura:



Por la disposición que tiene en el circuito el transistor bipolar (base y colector unidos por un conductor ideal) podemos deducir que nunca se puede encontrar en saturación, ya que no se puede dar que la tensión en la base sea mayor que en el colector, por lo que únicamente puede estar en activa o en corte.

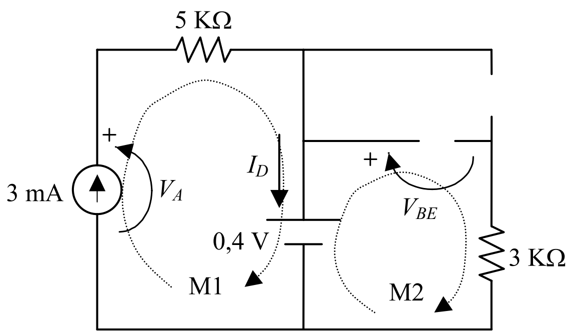
Por otra parte, el diodo D puede estar en cualquier estado (ON u OFF), si bien debemos hacer algunas matizaciones:

- No se puede dar el caso en el que los dos dispositivos estén cortados simultáneamente, ya que la intensidad de 3 mA no tendría hacia dónde ir (estarían todas las ramas abiertas) y formaríamos un circuito imposible.
- Tampoco se puede dar que los dos dispositivos conduzcan a la vez, porque si el diodo está en ON fuerza a que haya una tensión en la base del transistor de 0,4 Voltios ($V_D = V_B = 0{,}4$ V), insuficiente para que éste conduzca.
- Si el transistor conduce forzaría a que en el lado P del diodo hubiera una tensión mayor de 0,7 Voltios ($V_D = V_{BE(ON)} + V_{R\,(3K\Omega)}$), por lo que el diodo no podría estar en OFF.

Resumiendo, sólo nos queda un caso posible:

D	Q	Caso a estudiar
OFF	CORTE	Imposible, no cumpliría la 1ª ley de Kirchhoff
OFF	ACTIVA	Imposible, $V_D > 0{,}7$ V $> V_\gamma$ implicaría D ON
OFF	SATURACIÓN	Imposible, $V_{BC} = 0$
ON	CORTE	1º
ON	ACTIVA	Imposible, $V_B = V_D = 0{,}4$ V $< 0{,}7$ V
ON	SATURACIÓN	Imposible, $V_{BC} = 0$

1º.- D ON; Q CORTE



Condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} I_D \geq 0 \\ V_{BE} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{array}\right\}$$

En la malla M1 no hay presente ningún nudo, por lo que el valor de I_D debe ser el de la fuente intensidad de 3 mA. Realizando la malla M2 obtenemos el valor de V_{BE}, y aplicamos las condiciones:

$$\text{Malla M1} \rightarrow \begin{cases} I_D = 3\text{ mA} \geq 0 \text{ (Se cumple)} \\ V_A - 5 \cdot 3 - 0{,}4 = 0 \Rightarrow V_A = 15{,}4\text{ V} \end{cases}$$

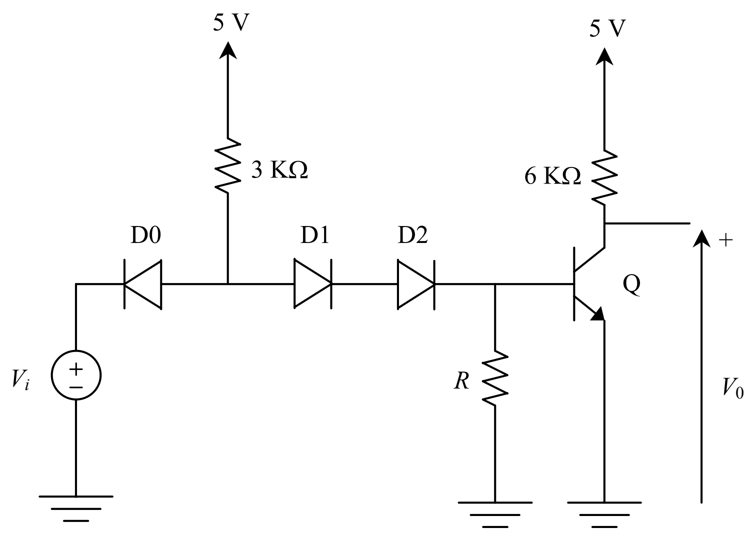
$$\text{Malla M2} \rightarrow 0{,}4 - V_{BE} = 0 \Rightarrow V_{BE} = 0{,}4\text{ V} \leq 0{,}7\text{ V (Se cumple)}$$

Por tanto éste sería el caso correcto, al cumplirse todas las condiciones.

$$\boxed{\text{D} \rightarrow \text{ON, Q} \rightarrow \text{CORTE}: \begin{cases} I_D = 3\text{ mA} \\ V_A = 15{,}4\text{ V} \\ V_{BE} = 0{,}4\text{ V} \end{cases}}$$

Ejercicio 3.1.4.

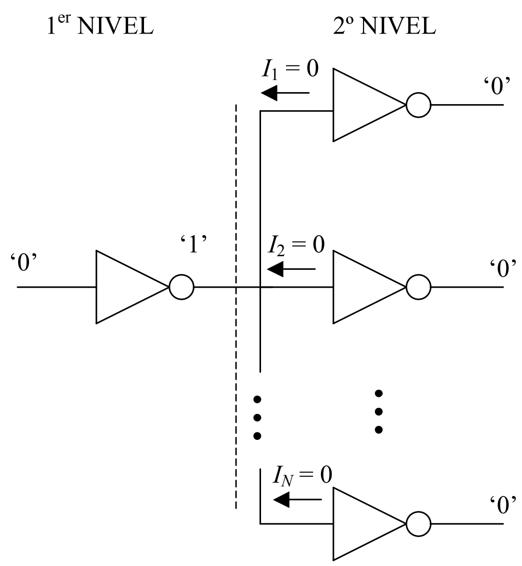
Calcule el valor de la resistencia *R* sabiendo que el Fan-Out para el inversor de la figura es igual a 10. Considerando para los diodos el modelo con tensión umbral V_γ = 0,7 V y V_{BEon} = 0,7 V, V_{CEsat} = 0,2 V, β = 50 para el transistor bipolar Q.



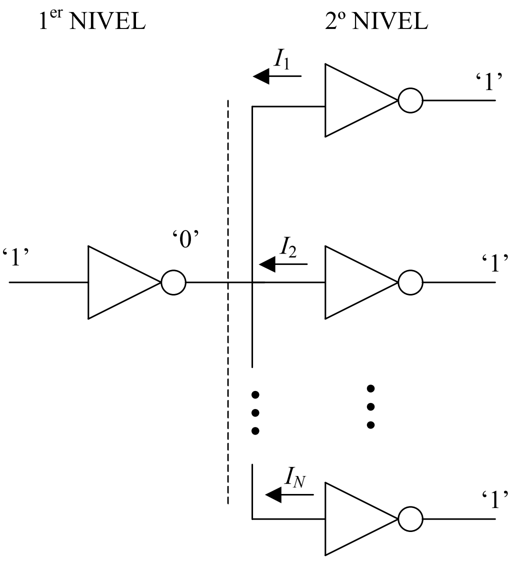
Solución:

En primer lugar debemos averiguar cuál es el peor caso de funcionamiento desde el punto de vista del circuito, entre una entrada a nivel alto o una entrada a nivel bajo, ya que dicho caso establecerá el valor del Fan-Out (número máximo de puertas que se pueden conectar a la salida de otra del mismo tipo).

Observando el circuito vemos que el diodo D0 no conducirá cuando la entrada V_i tenga un valor lógico '1' (5 Voltios), luego, a priori, podríamos conectar infinitas puertas ($N = \infty$) a la salida de la anterior ya que $I_1 = I_2 = ... = I_N = 0$ y ello no afectaría al correcto funcionamiento de la puerta según mostramos a continuación en la figura:

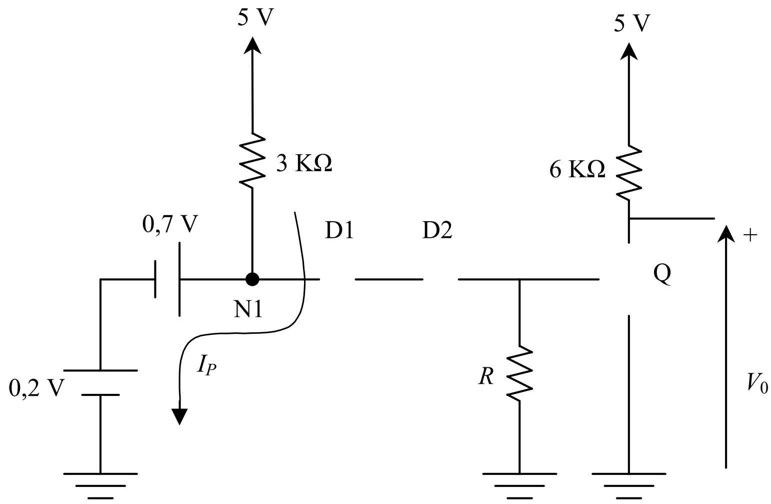


La otra situación la podemos observar en la figura siguiente. Cuando a la entrada de la puerta suministramos un valor lógico '0' existirá un consumo o paso de corriente a través de dicha entrada, ya que $I_1 = I_2 = ... = I_N \neq 0$ y por lo tanto a través del transistor Q de la puerta del primer nivel circulará la suma de las corrientes debidas a cada una de las puertas conectadas.



Cuando por el transistor Q de la puerta del nivel 1 circula una corriente excesiva se provoca que dicho transistor salga de la zona de saturación y entre en la zona lineal, con lo cual la tensión V_{CE} irá subiendo hasta tal punto que la puerta del nivel siguiente interpretará a su entrada un nivel alto en lugar de un nivel bajo ('0' lógico) que sería lo correcto. Vemos pues que esta última situación es la que determina el Fan-Out de la puerta.

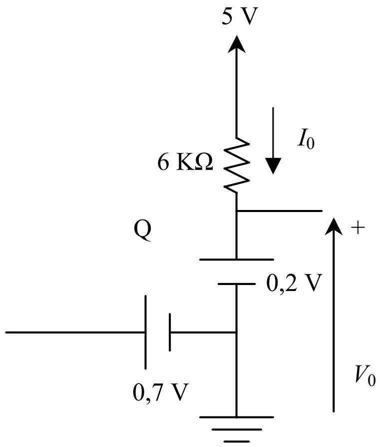
Continuando con la resolución del problema, calcularemos el consumo en la entrada de una puerta cuando ésta es un nivel lógico '0' (0,2 V) a partir del siguiente circuito:



Al suponer V_i = 0,2 V la tensión en el nudo N1 es 0,9 V, la cual es insuficiente para polarizar las uniones de D1, D2 y Q y por lo tanto D1, D2 y Q estarán cortados. La intensidad consumida a la entrada es:

$$I_P = \frac{5 - 0,7 - 0,2}{3} = 1,3\widehat{6}\ \text{mA} = I_1 = I_2 = ... = I_N$$

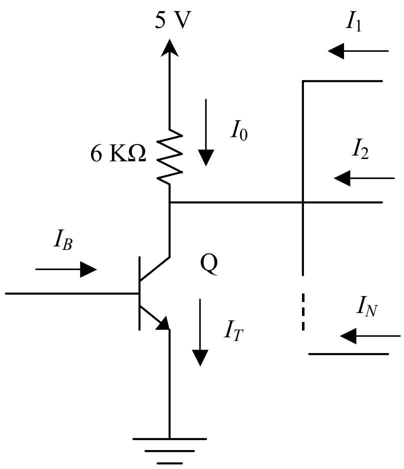
Por otro lado la intensidad que circula por el transistor (intensidad de colector) al conectar la entrada de la puerta a nivel '1', cuando no exista ninguna puerta conectada a su salida y suponiendo Q en saturación, es:



$$I_0 = \frac{5 - 0,2}{6} = 0,8\ \text{mA}$$

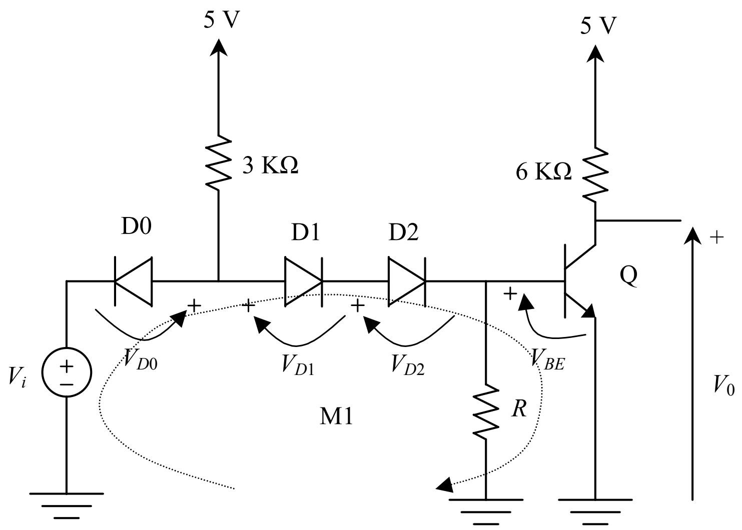
Extendiendo la conexión a más de una puerta tenemos que la intensidad total que circula por el transistor de la puerta del nivel 1 es:

$$I_T = I_0 + N \cdot I_P \text{, donde}$$
$$N = \text{Fan-Out} = 10,$$
$$I_T = 0,8 + 10 \cdot 1,3\widehat{6} = 14,4\widehat{6}\ \text{mA}$$



El enunciado del problema señala que el Fan-Out = 10, por lo tanto es de suponer que para una intensidad $I_T = 14{,}4\widehat{6}$ mA a la salida de la puerta del primer nivel se sigue interpretando un '0' lógico.

A partir de aquí caben dos posibilidades. La primera, suponer que un consumo mayor de $I_T = 14{,}4\widehat{6}$ mA provoca que el transistor abandone la zona de saturación para alcanzar la zona activa, con lo cual la tensión de salida V_{CE} irá aumentando. Y la segunda posibilidad es considerar que la tensión de salida puede aumentar aunque el transistor salga de la saturación, pero hasta un límite dado por V_{IL} = 1,4 V (mínima tensión de entrada que es interpretada como un '0' lógico) y que se puede calcular a partir de la malla de entrada M1 de la figura siguiente:



$$\text{Malla M1} \rightarrow -V_i - V_{D0} + V_{D1} + V_{D2} + V_{BE} = 0$$

Si la puerta interpreta un cero lógico a la entrada, por tratarse de un inversor, la salida debe ser un nivel alto, o lo que es lo mismo Q debe estar cortado, por lo tanto $V_{BE} < 0{,}7$ V.

$$V_{BE} = +V_i + V_{D0} - V_{D1} - V_{D2} < 0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_i < 1{,}4\ \text{V} = V_{IL}$$

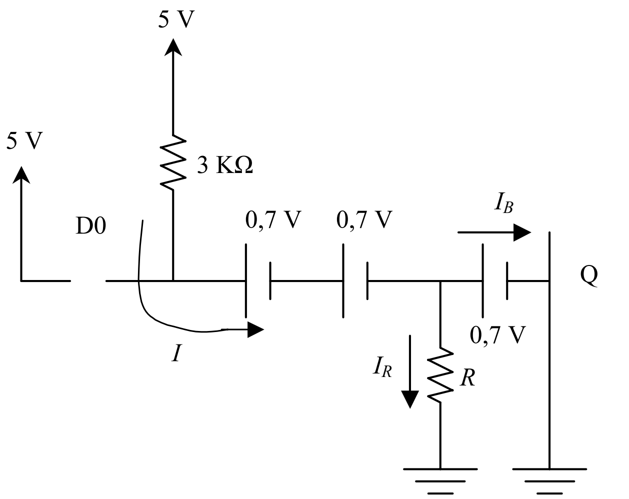
De modo que la primera posibilidad (suponer que cuando Q abandona la zona de saturación es el límite de intensidad soportada) se basa en un criterio más simple de aplicar y más conservativo y será en definitiva el que utilizaremos.

El límite viene dado cuando Q pase de la zona de saturación a la zona activa, es decir, cuando I_C aumenta hasta alcanzar el valor de $\beta \cdot I_B$:

$$I_C = \beta \cdot I_B \Rightarrow I_B = \frac{14{,}4\widehat{6}}{50} = 0{,}289\widehat{3}\ \text{mA}$$

En el siguiente circuito podemos calcular la intensidad que atraviesa R ya que:

$$R = \frac{V_{BE}}{I_R} = \frac{0{,}7}{I_R}$$



$$I_R = I - I_B \Rightarrow \frac{5 - 0{,}7 - 0{,}7 - 0{,}7}{3} - 0{,}289\widehat{3} = 0{,}677\widehat{3}\ \text{mA}$$

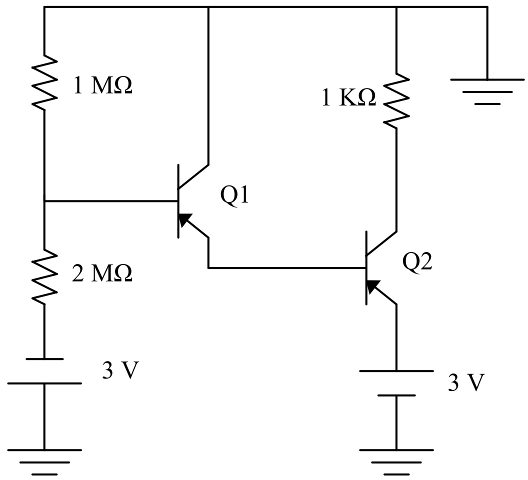
Por tanto el valor de R será:

$$\boxed{R = \frac{0{,}7}{I_R} = 1{,}033\ \text{K}\Omega}$$

Ejercicio 3.1.5.

Calcule el punto de trabajo de los transistores del circuito de la figura. Sabiendo que Q1 y Q2 son idénticos y tienen las siguientes características:

$$\mathbf{Q1, Q2} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{V_{ECsat}} = \mathbf{0{,}2\ V} \\ \boldsymbol{V_{EBon}} = \mathbf{0{,}7\ V} \\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{50} \end{matrix} \right\}$$

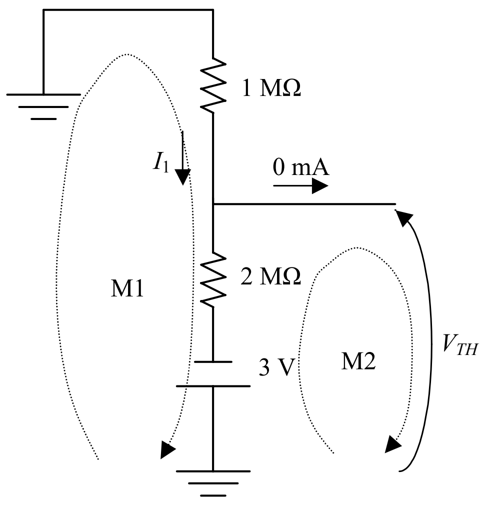


Solución:

Como podemos observar en el circuito sólo aparecen transistores de tipo PNP. Recordemos que el modelo utilizado para este transistor es el mismo que el del transistor NPN con la particularidad de que es necesario cambiar el orden en las letras de los subíndices que referencian a los terminales del transistor del modelo. Por ejemplo, la V_{BE} para un transistor NPN se referencia como V_{EB} para un transistor de tipo PNP, a la vez que en el circuito cambiamos el sentido de la flecha del voltaje (Ver Apéndice A).

En cuanto a las intensidades basta con cambiarlas de sentido respecto al modelo del NPN.

Dicho esto, vemos que las resistencias de 1 MΩ y de 2 MΩ forman un divisor de tensión que puede simplificarse mediante el teorema de Thèvenin de la siguiente manera:



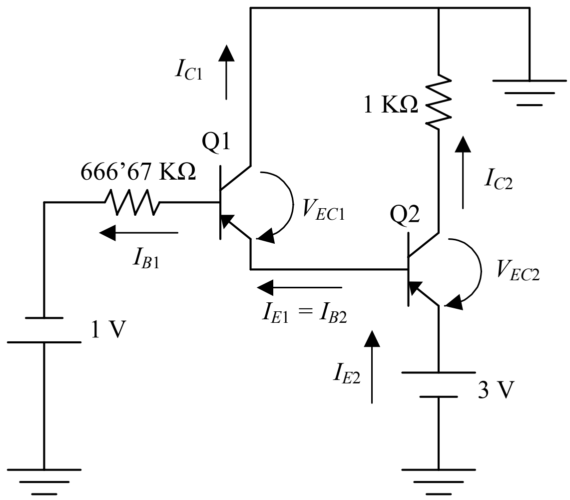
A partir de la malla M1:

$$M1 \rightarrow 1\,\text{M}\Omega \cdot I_1 + 2\,\text{M}\Omega \cdot I_1 - 3 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{3}{2\,\text{M}\Omega + 1\,\text{M}\Omega} = 1\,\mu\text{A}$$

$$M2 \rightarrow +3 - 2\,\text{M}\Omega \cdot I_1 + V_{TH} = 0 \Rightarrow V_{TH} = 2\,\text{M}\Omega \cdot 1\,\mu\text{A} - 3 = -1\,\text{V}$$

$$R_{TH} = \frac{2\,\text{M}\Omega \cdot 1\,\text{M}\Omega}{2\,\text{M}\Omega + 1\,\text{M}\Omega} = 666{,}67\,\text{K}\Omega$$

Sustituyendo el equivalente calculado, el circuito queda:



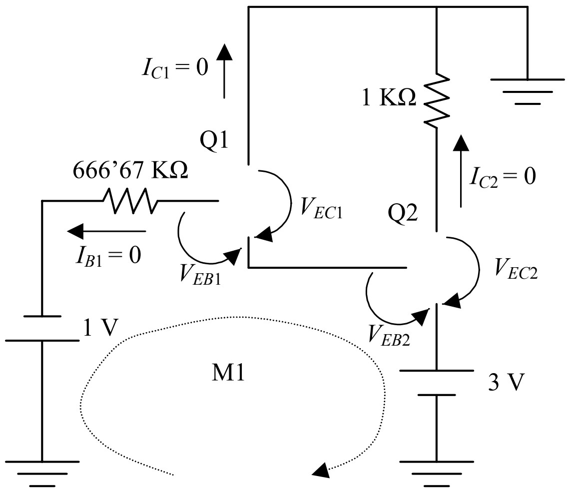
A partir del circuito podemos observar que cuando alguno de los transistores esté cortado el otro también lo estará. Luego las siguientes combinaciones NO se van a dar:

$$\left.\begin{array}{l} Q1 \rightarrow \text{SATURACIÓN}, Q2 \rightarrow \text{CORTE} \\ Q1 \rightarrow \text{ACTIVA}, Q2 \rightarrow \text{CORTE} \\ Q1 \rightarrow \text{CORTE}, Q2 \rightarrow \text{ACTIVA} \\ Q1 \rightarrow \text{CORTE}, Q2 \rightarrow \text{SATURACIÓN} \end{array}\right\}$$

Comenzaremos a evaluar las $3^2 - 4 = 5$ combinaciones restantes:

a) Q1→CORTE
Q2→CORTE

$$\begin{cases} I_{B1} = I_{B2} = 0 \\ V_{EB1} \leq 0{,}7\ \text{V} \\ V_{EB2} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{cases}$$

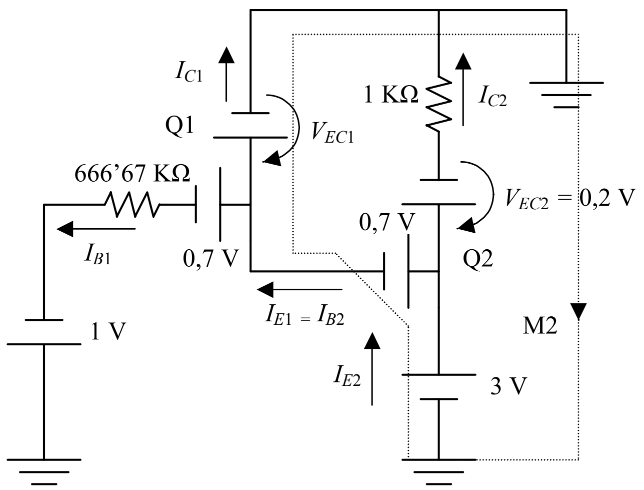


A partir de la malla M1:

$$1 - I_{B1} \cdot 666{,}67\ \text{K}\Omega - V_{EB1} - V_{EB2} + 3 = 0\ ;\ I_{B1} = 0 \Rightarrow V_{EB1} + V_{EB2} = 4\ \text{V}$$

Aplicando las condiciones anteriores: $V_{EB1} + V_{EB2} \leq 0{,}7 + 0{,}7 = 1{,}4\ \text{V}$, luego observamos que es imposible que ambos transistores estén cortados.

b) Q1→SATURACIÓN y Q2→SATURACIÓN: $\begin{cases} V_{EB1} = V_{EB2} = 0{,}7\ \text{V} \\ V_{EC1} = V_{EC2} = V_{ECsat} = 0{,}2\ \text{V} \\ \beta \cdot I_{B1} \geq I_{C1}\ ,\ \beta \cdot I_{B2} \geq I_{C2} \end{cases}$

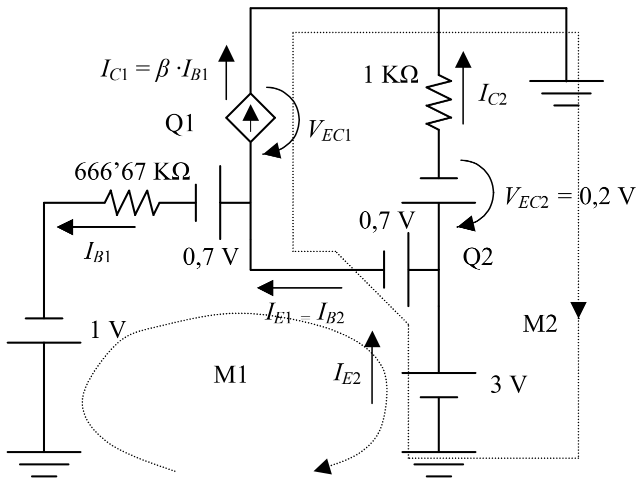


A partir de la malla M2:

$$-3+V_{EB2}+V_{EC1}=0 \Rightarrow V_{EC1}=3-0{,}7=2{,}3\text{ V}\geq 0{,}2\text{ V}$$

Luego el transistor Q1 no está en SATURACIÓN y la combinación ya no es válida. Esta última conclusión hace que el número de combinaciones se vaya reduciendo, por lo que lo más lógico es probar a continuación Q1 en activa.

c) Q1→ACTIVA y Q2→SATURACIÓN: $\begin{cases} V_{EB1}=V_{EB2}=0{,}7\text{ V} \\ V_{EC1}\geq 0{,}2\text{ V},\ V_{EC2}=V_{ECsat}=0{,}2\text{ V} \\ \beta\cdot I_{B1}=I_{C1}\text{ y }\beta\cdot I_{B2}\geq I_{C2} \end{cases}$



A partir de la malla M1:

$$1-I_{B1}\cdot 666{,}67\text{ K}\Omega-V_{EB1}-V_{EB2}+3=0 \Rightarrow I_{B1}=\frac{4-0{,}7-0{,}7}{666{,}67}=3{,}9\ \mu\text{A}$$

Al igual que en el apartado anterior, de la malla M2 obtenemos:

$$-3+V_{EB2}+V_{EC2}=0 \Rightarrow V_{EC1}=3-0{,}7=2{,}3\text{ V}\geq 0{,}2\text{ V}$$

Confirmándose la zona activa para el transistor Q1.

Luego si Q1 está en activa:

$$\Rightarrow I_{E1} = (\beta + 1) \cdot I_{B1} = 51 \cdot 3{,}9\ \mu\text{A} = 0{,}1989\ \text{mA},$$
$$I_{C1} = \beta \cdot I_{B1} = 50 \cdot 3{,}9\ \mu\text{A} = 0{,}195\ \text{mA}$$

Suponiendo Q2 en saturación, la expresión de la malla de salida es:

$$-3 + V_{EC2sat} + 1 \cdot I_{C2} = 0 \Rightarrow I_{C2} = 3 - 0{,}2 = 2{,}8\ \text{mA}$$

En el circuito podemos observar claramente que $I_{B2} = I_{E1} = 0{,}1989$ mA. Luego podemos así comprobar la condición de saturación para Q2:

$$I_{C2} \leq \beta \cdot I_{B2} \Rightarrow 2{,}8 \leq 50 \cdot 0{,}1989 = 9{,}945$$

Por tanto se confirma que Q2 está en saturación.

En resumen:

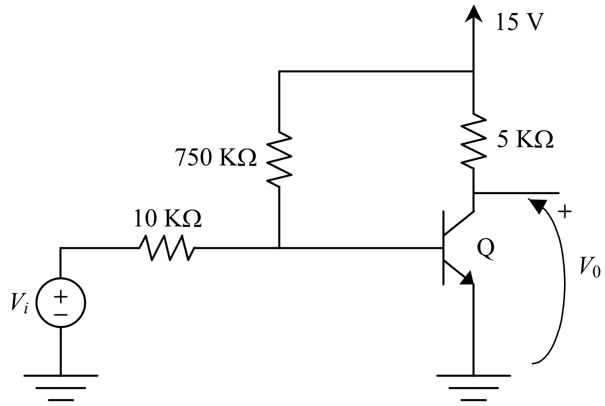
$$\text{Q1} \rightarrow \text{ACTIVA}: \begin{cases} V_{EB1} = 0{,}7\ \text{V} \\ V_{EC1} = 2{,}3\ \text{V} \\ I_{B1} = 3{,}9\ \mu\text{A} \\ I_{C1} = 0{,}195\ \text{mA} \end{cases} ;\ \text{Q2} \rightarrow \text{SATURACIÓN}: \begin{cases} V_{EB2} = 0{,}7\ \text{V} \\ V_{EC2} = 0{,}2\ \text{V} \\ I_{B2} = 0{,}1989\ \text{mA} \\ I_{C2} = 2{,}8\ \text{mA} \end{cases}$$

3.2. CARACTERÍSTICA DE TRANSFERENCIA

Ejercicio 3.2.1.

Calcular la característica de transferencia del siguiente circuito (V_0 en función de V_i). Averiguar asimismo el consumo que presenta la fuente de 15 V en cada una de las combinaciones tratadas, y representar gráficamente tanto la característica como el consumo frente a V_i.

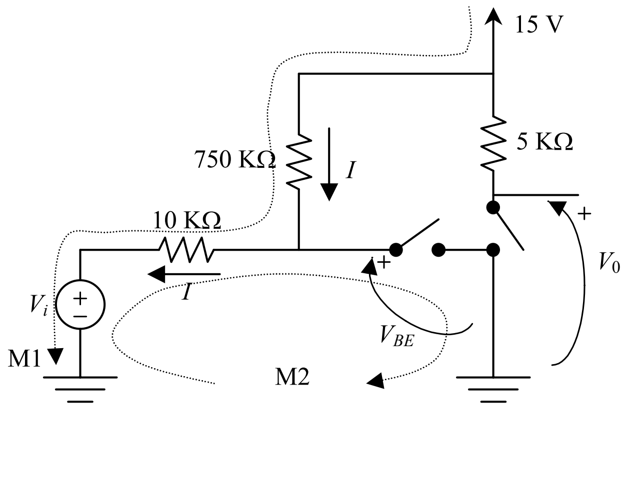
Datos: $V_{BE(ON)}$ = 0,7 V; $V_{CE(SAT)}$ = 0,2 V; β = 100



Solución:

Para este circuito habrá que analizar las tres situaciones posibles del transistor bipolar Q, CORTE, ACTIVA y SATURACIÓN.

Suponemos Q→CORTE:



Condición: $V_{BE} \leq 0{,}7\,\text{V}$

Plantemos la malla M1 para calcular el valor de la intensidad I, que nos permitirá a continuación, realizando la malla M2, calcular el valor de la tensión base-emisor y poder verificar la condición:

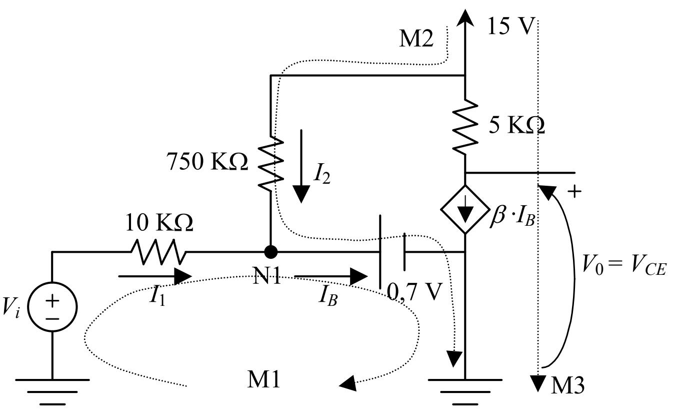
$$\text{Malla M1} \rightarrow 15 - 750I - 10I - V_i = 0 \Rightarrow I = \frac{15 - V_i}{760}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Malla M2} \rightarrow V_i + 10I - V_{BE} = 0 \\ I = \dfrac{15 - V_i}{760} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{BE} = V_i + 10I = V_i + 10\left(\frac{15 - V_i}{760}\right) = \frac{75V_i + 15}{76}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{BE} = \dfrac{75V_i + 15}{76} \\ V_{BE} \leq 0{,}7\text{ V} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{75V_i + 15}{76} \leq 0{,}7 \Rightarrow V_i \leq 0{,}509\widehat{3}\text{ V}$$

El valor de la tensión V_0 se aprecia que es 15 V, ya que en la resistencia de 5KΩ no cae tensión (al no circular intensidad a través de ella por tener un terminal al aire).

Suponemos Q→ACTIVA:



$$\text{Condiciones:} \quad \left.\begin{array}{l} I_B \geq 0 \\ V_{CE} \geq 0{,}2\text{ V} \end{array}\right\}$$

Hay que tener presente las diferentes ramas que aparecen en el circuito, donde cada una de ellas tendrá una intensidad distinta.

En este caso planteando la malla M1 podemos calcular directamente el valor de I_1, y a partir de la M2 calculamos I_2; una vez calculadas ambas, mediante una ecuación de nudos en N1 podemos averiguar I_B y aplicar su condición correspondiente:

$$\text{Malla M1} \rightarrow V_i - 10I_1 - 0{,}7 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{V_i - 0{,}7}{10}$$

$$\text{Malla M2} \rightarrow 15 - 750I_2 - 0{,}7 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{15-0{,}7}{750} = 0{,}0190\overset{\frown}{6}\ \text{mA}$$

$$\text{Nudo N1} \rightarrow I_1 + I_2 = I_B \Rightarrow I_B = \frac{V_i - 0{,}7}{10} + 0{,}0190\overset{\frown}{6} = \frac{V_i - 0{,}509\overset{\frown}{3}}{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_B = \dfrac{V_i - 0{,}509\overset{\frown}{3}}{10} \\ I_B \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_i - 0{,}509\overset{\frown}{3}}{10} \geq 0 \Rightarrow V_i \geq 0{,}509\overset{\frown}{3}$$

Ahora calculamos el valor de V_{CE} mediante la malla M3, y aplicamos su condición:

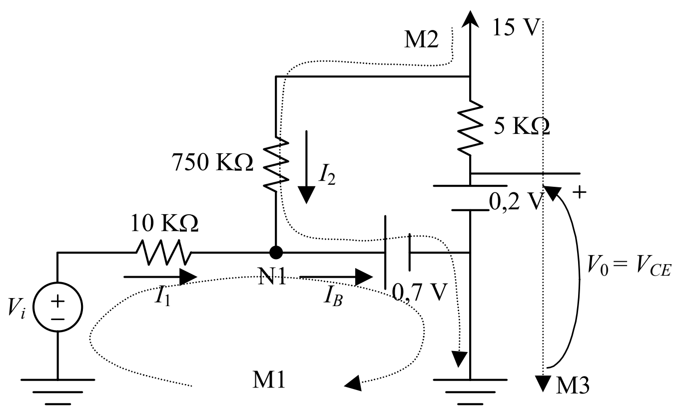
$$\left.\begin{array}{l} \text{Malla M3} \rightarrow 15 - 5I_C - V_{CE} = 0 \\ I_C = \beta \cdot I_B = 100 I_B \\ I_B = \dfrac{V_i - 0{,}509\overset{\frown}{3}}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow 15 - 5 \cdot 100 \left(\frac{V_i - 0{,}509\overset{\frown}{3}}{10} \right) - V_{CE} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_{CE} = 40{,}4\overset{\frown}{6} - 50V_i \\ V_{CE} \geq 0{,}2\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow 40{,}4\overset{\frown}{6} - 50V_i \geq 0{,}2 \Rightarrow V_i \leq 0{,}805$$

Por tanto este tramo de la característica de transferencia quedaría:

$$\forall\ 0{,}509\overset{\frown}{3} \leq V_i \leq 0{,}805\overset{\frown}{3} \Rightarrow V_0 = 40{,}4\overset{\frown}{6} - 50V_i$$

Suponemos Q→SATURACIÓN:



$$\text{Condiciones:} \quad \left.\begin{array}{l} I_B \geq 0 \\ I_C \geq 0 \\ I_C \leq \beta \cdot I_B \end{array}\right\}$$

Podemos observar que el caso de saturación es prácticamente idéntico al anterior de activa, las mallas M1, M2 y el nudo N1 son los mismos. Por tanto son válidos los resultados calculados en el apartado anterior para I_1, I_2 e I_B:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Malla M1} \rightarrow I_1 = \dfrac{V_i - 0{,}7}{10} \\ \text{Malla M2} \rightarrow I_2 = 0{,}0190\widehat{6}\ \text{mA} \\ \text{Nudo N1} \rightarrow I_B = \dfrac{V_i - 0{,}509\widehat{3}}{10}\end{array}\right\}$$

Tras aplicar la primera condición sobre I_B resulta la misma restricción sobre V_i que en el caso de ACTIVA:

$$\left.\begin{array}{l} I_B = \dfrac{V_i - 0{,}509\widehat{3}}{10} \\ I_B \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \geq 0{,}509\widehat{3}$$

Ahora realizamos la única malla que sí ha cambiado, la M3, de la cual obtenemos el valor de I_C, tras lo cual podemos verificar las otras dos condiciones:

$$\text{Malla M3} \rightarrow 15 - 5I_C - 0{,}2 = 0 \Rightarrow I_C = 2{,}96\ \text{mA}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_C = 2{,}96\ \text{mA} \\ I_C \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se cumple}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_C = 2{,}96\ \text{mA} \\ I_C \leq \beta \cdot I_B \\ I_B = \dfrac{V_i - 0{,}509\widehat{3}}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow 2{,}96 \leq 100\left(\dfrac{V_i - 0{,}509\widehat{3}}{10}\right) \Rightarrow V_i \geq 0{,}805\widehat{3}$$

De las dos restricciones sobre V_i obtenidas elegimos la más restrictiva (la última). Este tramo quedará por tanto:

$$\forall\, V_i \geq 0{,}805\widehat{3} \Rightarrow V_0 = 0{,}2\ \text{V}$$

* Cálculo del consumo:

Para cada uno de los 3 tramos de la característica habrá que buscar cuáles son las intensidades que parten de la fuente de tensión de 15 V para calcular el consumo de la misma:

CORTE: Tenemos una sola intensidad, *I*, por lo que el consumo quedará:

$$\left.\begin{array}{l} P_{CORTE} = I \cdot V \\ I = \dfrac{15 - V_i}{760} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{CORTE} = \left(\frac{15 - V_i}{760}\right) 15 = \frac{45 - 3V_i}{152} \text{ mW}$$

ACTIVA: En este caso tenemos dos intensidades saliendo de la fuente de 15 V, la I_2 y la I_C:

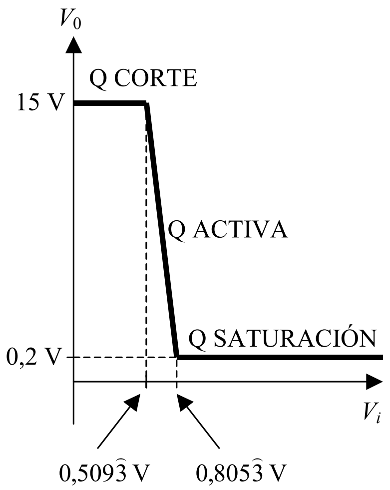
$$\left.\begin{array}{l} P_{ACTIVA} = (I_2 + I_C) V \\ I_2 = 0{,}0190\widehat{6} \text{ mA} \\ I_C = 100\left(\dfrac{V_i - 0{,}509\widehat{3}}{10}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow P_{ACTIVA} = \left(0{,}0190\widehat{6} + 100\left(\frac{V_i - 0{,}509\widehat{3}}{10}\right)\right) 15 \Rightarrow$$

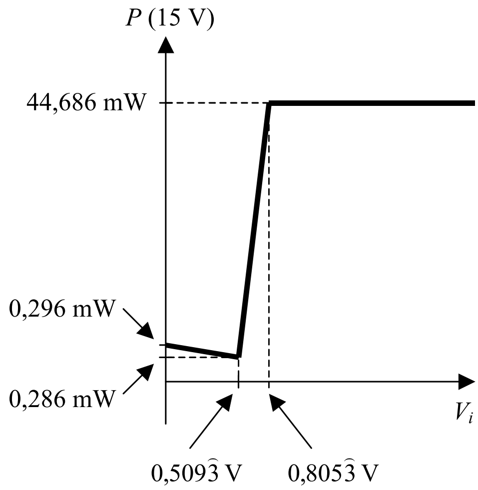
$$\Rightarrow P_{ACTIVA} = 150V_i - 76{,}114 \text{ mW}$$

SATURACIÓN: Volvemos a tener las intensidades I_2 e I_C saliendo de la fuente:

$$\left.\begin{array}{l} P_{SATUR.} = (I_2 + I_C) V \\ I_2 = 0{,}0190\widehat{6} \text{ mA} \\ I_C = 2{,}96 \text{ mA} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{SATUR.} = \left(0{,}0190\widehat{6} + 2{,}96\right) 15 \cong 44{,}686 \text{ mW}$$

Las gráficas que recogen tanto la característica de transferencia como el consumo en la fuente de tensión de 15 V son las siguientes:





Resumiendo los resultados:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, V_i \le 0{,}509\widehat{3}\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 15\ \text{V} \\ \forall\, 0{,}509\widehat{3}\ \text{V} \le V_i \le 0{,}805\widehat{3}\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 40{,}4\widehat{6} - 50\,V_i \\ \forall\, V_i \ge 0{,}805\widehat{3}\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2\ \text{V} \end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Característica}\\ \text{de transferencia}\end{array}$$

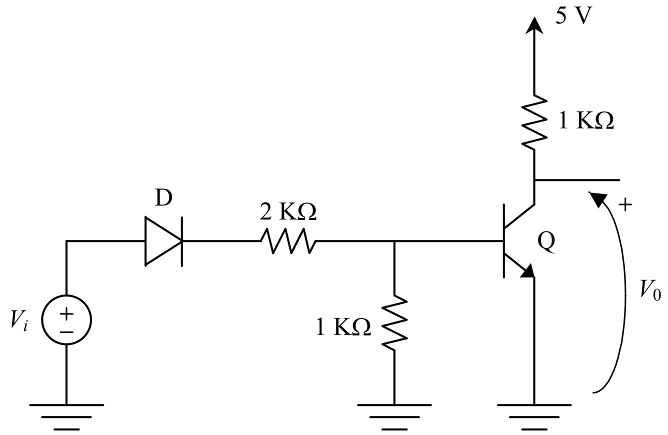
$$\left.\begin{array}{l} P_{CORTE} = \dfrac{45 - 3V_i}{152}\ \text{mW} \\ P_{ACTIVA} = 150V_i - 76{,}114\ \text{mW} \\ P_{SATUR.} \cong 44{,}686\ \text{mW} \end{array}\right\}\ \text{Consumo}$$

Ejercicio 3.2.2.

a) Calcular y representar gráficamente la característica de transferencia (V_0 en función de V_i) del siguiente circuito, utilizando el modelo con tensión umbral V_γ para el diodo.

b) Hallar los parámetros V_{IH}, V_{IL}, V_{OH}, V_{OL}, los márgenes de ruido a nivel alto y bajo, el ancho de transición y la excursión lógica de este circuito. Comentar los resultados obtenidos.

Datos : $V_{BE(ON)} = V_\gamma = 0{,}7$ V ; $V_{CE(SAT)} = 0{,}2$ V ; $\beta = 100$

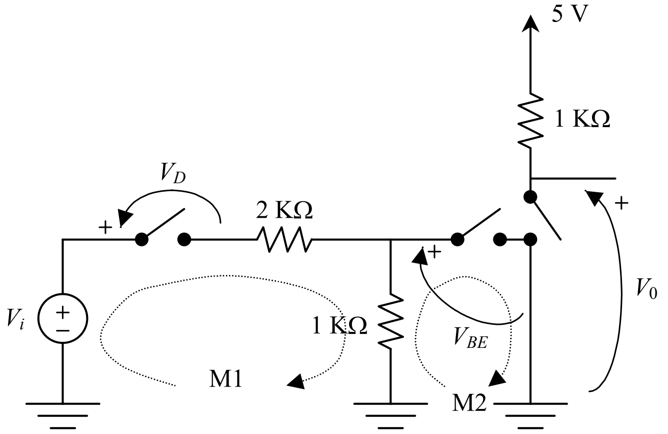


Solución:

Las posibles combinaciones del diodo D y el transistor Q son:

D	Q	Caso a estudiar
OFF	CORTE	1º
OFF	ACTIVA	⇒ Imposible, porque si D→OFF entonces $I_B = 0$, y Q debería estar en CORTE.
OFF	SATURACIÓN	⇒ Igual que el caso anterior
ON	CORTE	2º
ON	ACTIVA	3º
ON	SATURACIÓN	4º

1º.- D OFF; Q CORTE



$$\text{Condiciones:} \begin{cases} V_D \leq 0{,}7\ \text{V} \\ V_{BE} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{cases}$$

Calculamos los valores de V_D y V_{BE}, aplicando posteriormente las 2 condiciones:

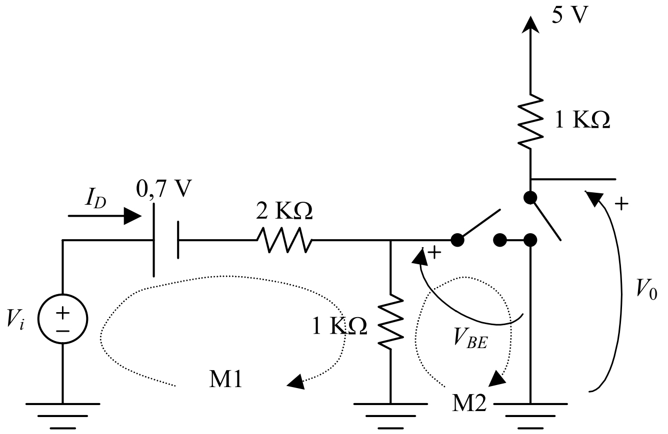
$$\left.\begin{array}{l} \text{Malla M1} \rightarrow V_i - V_D = 0 \Rightarrow V_D = V_i \\ V_D \leq 0{,}7\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \leq 0{,}7\ \text{V}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Malla M2} \rightarrow 0 - V_{BE} = 0 \Rightarrow V_{BE} = 0 \\ V_{BE} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se cumple}$$

Por tanto se verifican las dos condiciones y el valor de salida de V_0 será 5 Voltios:

$$\forall\, V_i \leq 0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 5\ \text{V}$$

2º.- D ON ; Q CORTE



$$\text{Condiciones:} \begin{cases} I_D \geq 0 \\ V_{BE} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{cases}$$

Planteamos la malla M1 para calcular el valor de I_D, y aplicamos la 1ª condición:

$$\text{Malla M1} \rightarrow V_i - 0{,}7 - 2I_D - 1I_D = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_D = \dfrac{V_i - 0{,}7}{3} \\ I_D \geq 0 \end{cases} \Rightarrow V_i \geq 0{,}7\ \text{V}$$

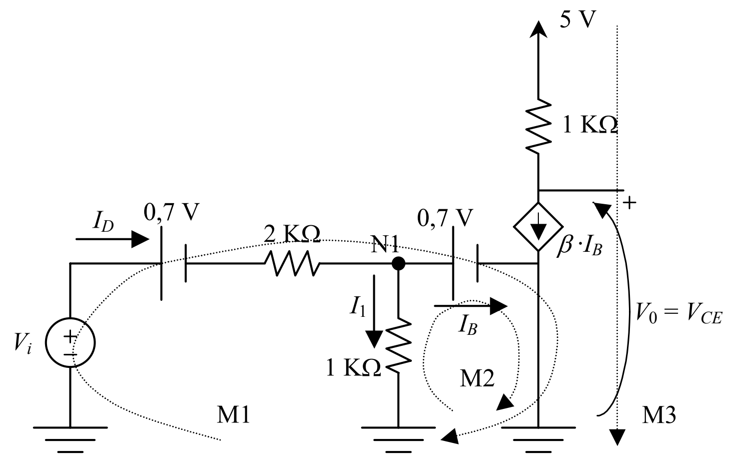
A continuación calculamos la tensión V_{BE} y aplicamos la 2ª condición:

$$\text{Malla M2} \rightarrow 1I_D - V_{BE} = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_{BE} = I_D = \dfrac{V_i - 0{,}7}{3} \\ V_{BE} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{cases} \Rightarrow V_i \leq 2{,}8\ \text{V}$$

La tensión de salida sigue siendo la misma que en el primer caso, ya que el transistor sigue cortado:

$$\forall\ 0{,}7\ \text{V} \leq V_i \leq 2{,}8\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 5\ \text{V}$$

3º.- D ON ; Q ACTIVA



$$\text{Condiciones:} \begin{cases} I_D \geq 0 \\ I_B \geq 0 \\ V_{CE} \geq 0{,}2\ \text{V} \end{cases}$$

En primer lugar podemos calcular el valor de I_1 mediante la malla M2:

$$\text{Malla M2} \rightarrow 1I_1 - 0{,}7 = 0 \Rightarrow I_1 = 0{,}7\ \text{mA}$$

A partir la malla M1 calculamos el valor de I_D y aplicamos la 1ª condición:

$$\text{Malla M1} \rightarrow V_i - 0{,}7 - 2I_D - 0{,}7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_D = \dfrac{V_i - 1{,}4}{2} \\ I_D \geq 0 \end{cases} \Rightarrow V_i \geq 1{,}4\ \text{V}$$

Aplicando la 1ª ley de Kirchhoff en N1 hallamos el valor de I_B y verificaremos la segunda condición:

$$\text{Nudo N1} \rightarrow I_D = I_1 + I_B \Rightarrow I_B = I_D - I_1 = \frac{V_i - 1{,}4}{2} - 0{,}7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_B = \dfrac{V_i - 2{,}8}{2} \\ I_B \geq 0 \end{cases} \Rightarrow V_i \geq 2{,}8\ \text{V}$$

Escogemos esta última condición obtenida ya que es más restrictiva que la anterior.

Por último calculamos el valor de I_C, realizamos la malla M3 para hallar V_{CE} (que es V_0), y aplicamos la 3ª condición:

$$I_C = \beta \cdot I_B = 100 \cdot \frac{V_i - 2{,}8}{2} = 50V_i - 140$$

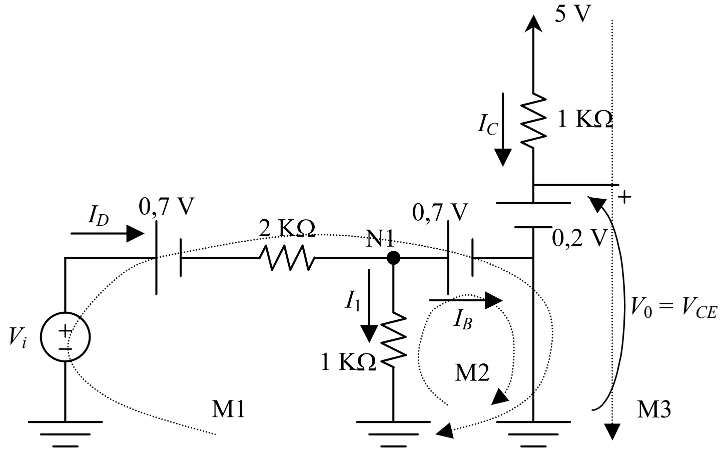
$$\text{Malla M3} \rightarrow 5 - 1I_C - V_0 = 0 \Rightarrow V_0 = 5 - I_C = 145 - 50V_i$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{CE} = V_0 = 145 - 50V_i \\ V_{CE} \geq 0{,}2\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \leq 2{,}896\ \text{V}$$

Por tanto, este tramo de la característica de transferencia quedará:

$$\forall\ 2{,}8\ \text{V} \leq V_i \leq 2{,}896\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 145 - 50V_i$$

4º.- D ON ; Q SATURACIÓN



$$\text{Condiciones:}\quad \begin{cases} I_D \geq 0 \\ I_B \geq 0 \\ I_C \geq 0 \\ I_C \leq \beta \cdot I_B \end{cases}$$

En este caso se aprecia que las mallas M1 y M2 son exactamente las mismas que las del caso anterior, por lo que los valores de las intensidades son iguales, así como las acotaciones de los valores de V_i que obtenemos al aplicar las dos primeras condiciones a I_D e I_B:

$$\left. \begin{array}{l} I_D = \dfrac{V_i - 1{,}4}{2} \\ I_D \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow V_i \geq 1{,}4 \text{ V} \;;\; \left. \begin{array}{l} I_B = \dfrac{V_i - 2{,}8}{2} \\ I_B \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow V_i \geq 2{,}8 \text{ V}$$

Lo que sí varía es el valor de I_C, que habrá que calcularlo a partir de la malla M3. Aplicando las dos últimas condiciones referidas a dicha intensidad obtendremos la acotación final para V_i:

$$\text{Malla M3} \rightarrow 5 - 1I_C - 0{,}2 = 0 \Rightarrow I_C = 4{,}8 \text{ mA} \geq 0 \text{ (Se cumple)}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_C = 4{,}8 \text{ mA} \\ I_B = \dfrac{V_i - 2{,}8}{2} \\ I_C \leq \beta \cdot I_B \end{array} \right\} \Rightarrow 4{,}8 \leq 100 \cdot \frac{V_i - 2{,}8}{2} \Rightarrow V_i \geq 2{,}896 \text{ V}$$

(Esta última condición es la más restrictiva de todas, por lo que nos quedamos con ella).

El valor de salida de V_0 será la $V_{CE(SAT)}$:

$$\forall\, V_i \geq 2{,}896 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2 \text{ V}$$

Por tanto, la característica de transferencia de este circuito queda:

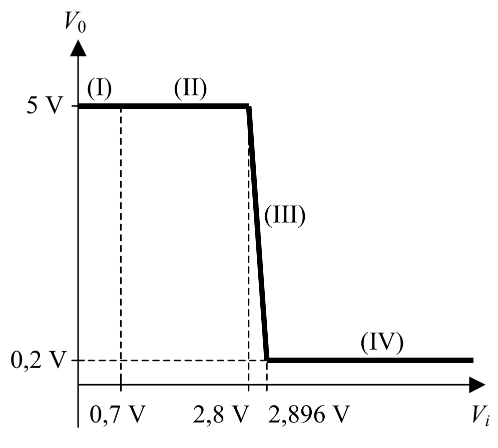
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \text{(I)} \quad \forall\, V_i \leq 0{,}7 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 5 \text{ V} \\ \text{(II)} \quad \forall\, 0{,}7 \text{ V} \leq V_i \leq 2{,}8 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 5 \text{ V} \\ \text{(III)} \quad \forall\, 2{,}8 \text{ V} \leq V_i \leq 2{,}896 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 145 - 50V_i \\ \text{(IV)} \quad \forall\, V_i \geq 2{,}896 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2 \text{ V} \end{array}\right\}}$$

Comprobamos que es continua:

$$V_i = 0{,}7 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} V_0 = 5 \text{ V} \\ V_0 = 5 \text{ V} \end{cases} \quad ; \quad V_i = 2{,}8 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} V_0 = 5 \text{ V} \\ V_0 = 145 - 50 \cdot 2{,}8 = 5 \text{ V} \end{cases}$$

$$V_i = 2{,}896 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} V_0 = 145 - 50 \cdot 2{,}896 = 0{,}2 \text{ V} \\ V_0 = 0{,}2 \text{ V} \end{cases}$$

Representamos gráficamente la característica de transferencia:



Los parámetros que caracterizan a esta puerta lógica inversora son los siguientes:

V_{IL} = 2,8 V ; V_{IH} = 2,896 V ; V_{OL} = 0,2 V ; V_{OH} = 5 V
Margen de ruido a nivel alto ⇒ $NM_H = V_{OH} - V_{IH}$ = 2,104 V
Margen de ruido a nivel bajo ⇒ $NM_L = V_{IL} - V_{OL}$ = 2,6 V
Ancho de transición ⇒ $TW = V_{IH} - V_{IL}$ = 0,096 V
Excursión lógica ⇒ $LS = V_{OH} - V_{OL}$ = 4,8 V

Comentario :

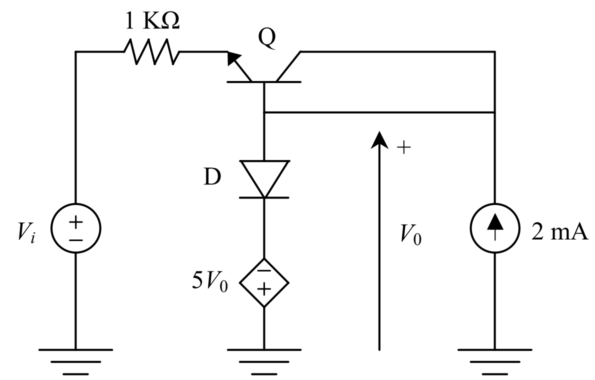
El inversor lógico analizado posee un margen de ruido a nivel bajo ligeramente mayor que a nivel alto, si bien se encuentran suficientemente equilibrados, lo cual es bueno para una puerta lógica.

El ancho de transición en muy pequeño (apenas 0,1 Voltios), lo cual está bastante bien ya que se busca que éste tienda a 0.

La excursión lógica es muy amplia (tiene casi el valor de la fuente de alimentación de 5 V), lo que permite una buena separación a la salida de los niveles correspondientes al '0' y al '1' lógico.

Ejercicio 3.2.3.

Calcule la característica de transferencia $V_0 = f(V_i)$ del circuito de la figura considerando el diodo ideal y V_{BEon} = 0,7 V, V_{CEsat} = 0,2 V, β = 100 para el transistor bipolar Q.

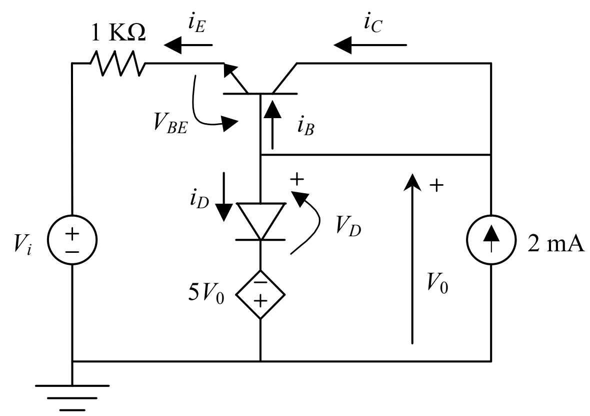


Solución:

En el circuito podemos observar que el transistor tiene unidos el terminal de la base y el de colector, de modo que nunca estará en saturación y siempre que conduzca lo hará en zona activa, ya que la tensión $V_{CE} = V_{BE} = 0{,}7$ V > 0,2 V = V_{CEsat}. Por tanto, el circuito puede estar como máximo en 4 estados:

a) D→OFF, Q→CORTE
b) D→ON, Q→CORTE
c) D→OFF, Q→ACTIVA
d) D→ON, Q→ACTIVA

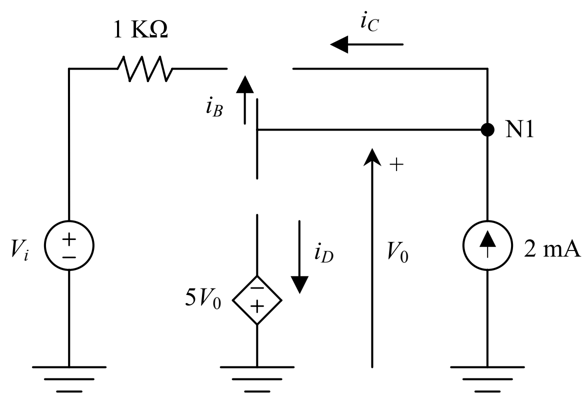
Asignamos sentidos a las tensiones e intensidades y obtenemos el siguiente circuito:



a) Las condiciones para este caso son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{D} \rightarrow \mathrm{OFF}:\\ &i_D = 0\,; V_D \leq 0\\ &\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{CORTE}:\\ &i_B = i_C = 0\,; V_{BE} \leq 0{,}7\ \mathrm{V}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Sustituyendo los modelos de los dispositivos, el circuito equivalente es el mostrado a la derecha:

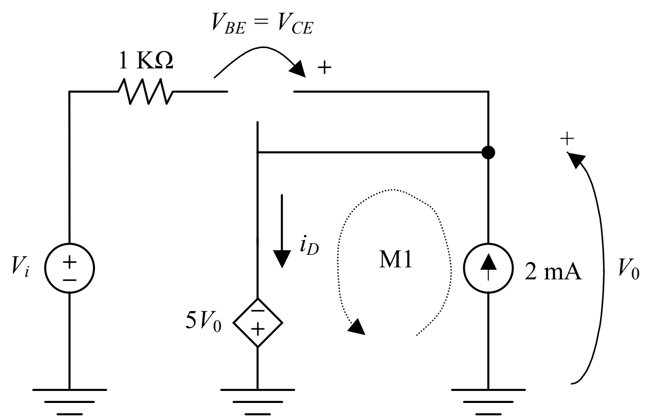


Aplicando la 1ª ley de Kirchhoff al nudo N1 $\Rightarrow i_D + i_B + i_C = 2$, si aplicamos las condiciones de (1) resulta que 0 = 2 ⇒ no se cumple, situación IMPOSIBLE.

b) El siguiente caso que evaluaremos es:

$$\left.\begin{array}{l} \text{D} \rightarrow \text{ON} \Rightarrow i_D \geq 0\,; V_D = 0 \\ \text{Q} \rightarrow \text{CORTE} \Rightarrow i_B = i_C = 0\,; V_{BE} \leq 0{,}7\ \text{V} \end{array}\right\}$$

Para estas condiciones el circuito equivalente es el siguiente:



Observando el circuito deducimos que i_D = 2 mA > 0

La ecuación de la malla M1→ $V_0 = -5 \cdot V_0 \Rightarrow V_0 = 0$

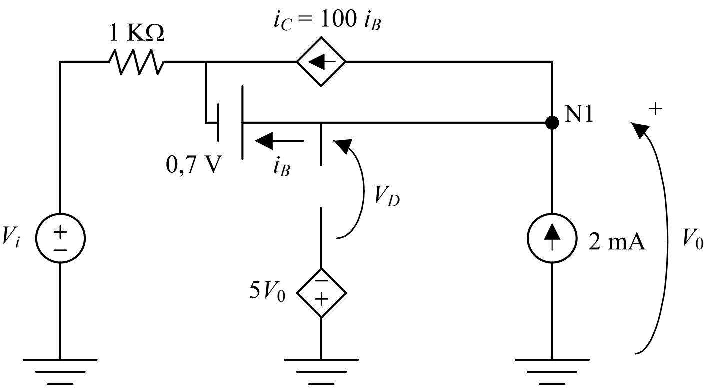
$$V_{BE} = V_0 - V_i = -V_i \leq 0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_i \geq -0{,}7\ \text{V}$$

Luego $\forall\, V_i \geq -0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0\ \text{V}$

c) El tercer caso a analizar:

$$\left.\begin{array}{l} \text{D} \rightarrow \text{OFF} \Rightarrow i_D = 0\,; V_D \leq 0 \\ \text{Q} \rightarrow \text{ACTIVA} \Rightarrow V_{BE} = 0{,}7\ \text{V}\,; i_C = 100 \cdot i_B\,; i_B \geq 0 \end{array}\right\}$$

Para esta combinación el circuito equivalente resulta:



En el nudo N1→ $100 \cdot i_B + i_B = 2 \Rightarrow i_B = 0{,}0198 \text{ mA} > 0$

$$V_0 = 0{,}7 + 101 \cdot i_B + V_i = 2{,}7 + V_i$$

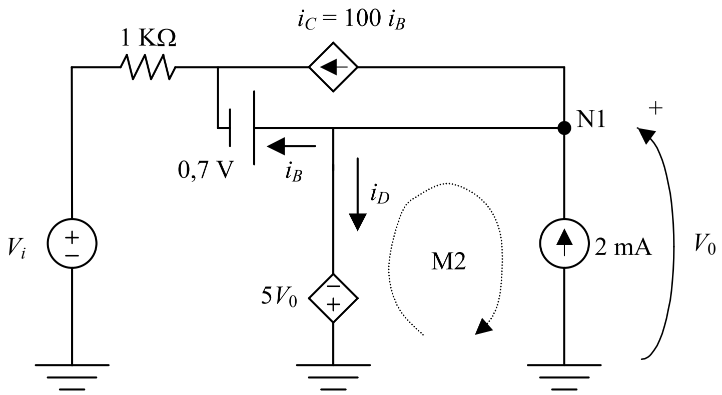
$$V_D = V_0 - (-5 \cdot V_0) = 6 \cdot V_0 = 6 \cdot (2{,}7 + V_i) \leq 0 \Rightarrow V_i \leq -2{,}7 \text{ V}$$

Luego $\forall\, V_i \leq -2{,}7 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 2{,}7 + V_i$

d) La última combinación de estados es:

$$\left.\begin{array}{l} \text{D} \rightarrow \text{ON} \Rightarrow i_D \geq 0\ ;\ V_D = 0 \\ \text{Q} \rightarrow \text{ACTIVA} \Rightarrow V_{BE} = 0{,}7 \text{ V}\ ;\ i_C = 100 \cdot i_B\ ;\ i_B \geq 0 \end{array}\right\}$$

Aplicando las condiciones anteriores el circuito resulta:



La ecuación de la malla M2 es: $6 \cdot V_0 = 0 \Rightarrow V_0 = 0\ \text{V}$

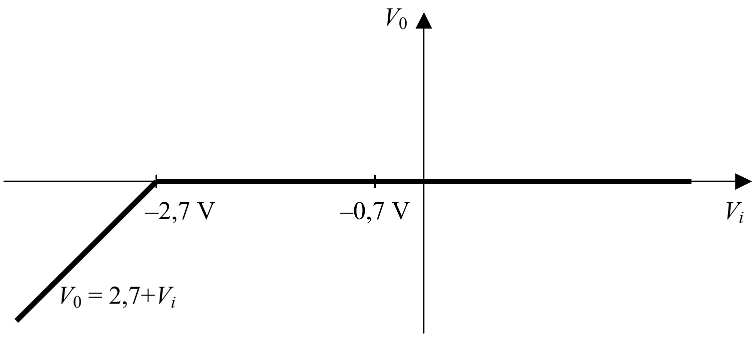
Para aplicar la condición $i_B \geq 0$ referida al transistor debemos obtener la ecuación de una malla que contenga dicha variable. Esta malla se obtiene partiendo del nudo de tierra, continuando con V_0, después la fuente de 0,7 V, a continuación la resistencia y por último la fuente de entrada V_i:

$$V_0 = 0 = 0{,}7 + 101 \cdot i_B + V_i \Rightarrow i_B = \frac{-V_i - 0{,}7}{101} \geq 0 \Rightarrow V_i \leq -0{,}7\ \text{V}$$

Ahora aplicamos la condición para el diodo a una ecuación que contenga a la intensidad i_D, como por ejemplo la ecuación del nudo N1:

$$2\text{mA} = 101 \cdot i_B + i_D = -V_i - 0{,}7 + i_D \Rightarrow i_D = 2{,}7 + V_i \geq 0 \Rightarrow V_i \geq -2{,}7\ \text{V}$$
$$\forall -2{,}7\ \text{V} \leq V_i \leq -0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0\ \text{V}$$

Por último la gráfica de la característica de transferencia es:

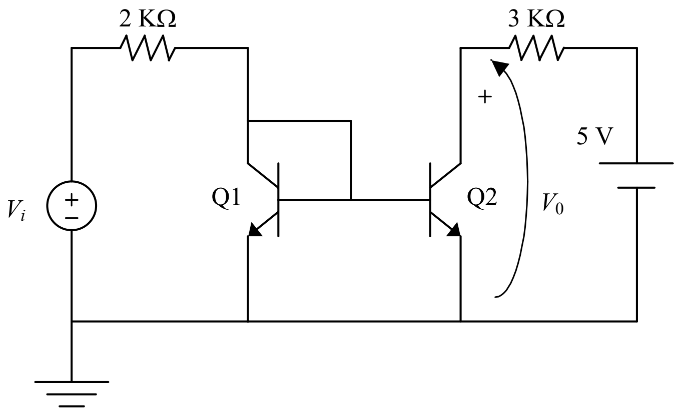


La característica de transferencia completa quedará como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\ V_i \leq -2{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 2{,}7 + V_i \\ \forall -2{,}7\ \text{V} \leq V_i \leq -0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0\ \text{V} \\ \forall\ V_i \geq -0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0\ \text{V} \end{array}\right\}$$

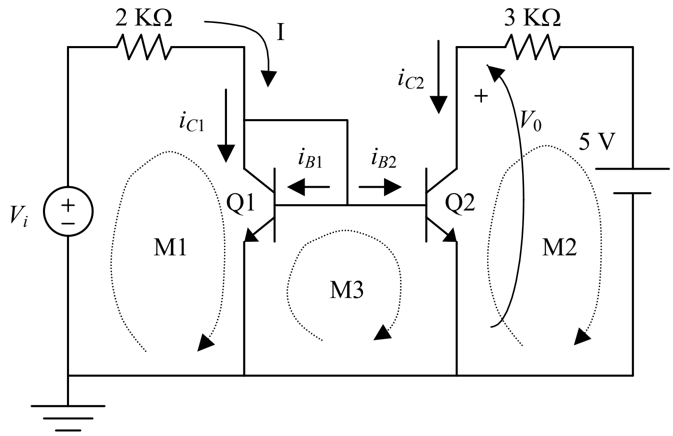
Ejercicio 3.2.4.

Suponiendo Q1 y Q2 idénticos ($V_{BE1} = V_{BE2} \Rightarrow i_{B1} = i_{B2}$) con V_{BEon} = 0,7 V, V_{CEsat} = 0,2 V y β = 100, calcular la característica de transferencia y dibujar su gráfica.



Solución:

Realizando un análisis previo del circuito de la figura:



Vemos que el número máximo de estados o combinaciones del circuito es $3^2 = 9$ pero puede reducirse en gran medida teniendo en cuenta que:

- $V_{BE1} = V_{BE2} \Rightarrow$ De modo que si Q1 está en CORTE implica que Q2 también lo está y viceversa.
- $V_{BE1} = V_{CE1} \Rightarrow$ De modo que si Q1 no está en corte V_{BE1} = 0,7 V = = V_{CE1} > 0,2 V $\Rightarrow$ Q1 obligatoriamente debe estar en activa.

Según lo anterior los estados posibles se reducen drásticamente a sólo 3, que son los siguientes:

a) Q1→ CORTE, Q2→ CORTE
b) Q1→ ACTIVA, Q2→ ACTIVA
c) Q1→ ACTIVA, Q2→ SATURACIÓN

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito son:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad \text{Malla M1} \rightarrow 2\cdot(i_{C1}+i_{B1}+i_{B2})+V_{BE1}-V_i=0\\ (2)\quad \text{Malla M2} \rightarrow 3\cdot i_{C2}+V_{CE2}-5=0\\ (3)\quad \text{Malla M3} \rightarrow V_{BE1}=V_{CE1}=V_{BE2}\\ \text{Con } V_0=V_{CE2}\end{array}\right\}$$

El análisis de las 3 únicas combinaciones posibles del circuito es el siguiente:

a) Q1→ CORTE $\Rightarrow \begin{cases} i_{B1}=i_{C1}=0 \\ V_{BE1}\leq 0{,}7\ \text{V}\end{cases}$

Q2→ CORTE $\Rightarrow \begin{cases} i_{B2}=i_{C2}=0 \\ V_{BE2}\leq 0{,}7\ \text{V}\end{cases}$

Sustituyendo en (1), (2) y (3) obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} V_{CE2}=5\ \text{V}=V_0 \\ V_i=V_{BE1}\leq 0{,}7\ \text{V}\end{array}\right\} \Rightarrow \forall\, V_i \leq 0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0=5\ \text{V}$$

b) Q1→ ACTIVA $\Rightarrow \begin{cases} i_{C1}=100\cdot i_{B1}\,;V_{BE1}=0{,}7\ \text{V} \\ i_{B1}\geq 0\ \text{V}\,;V_{CE1}\geq 0{,}2\ \text{V}\end{cases}$

Q2→ ACTIVA $\Rightarrow \begin{cases} i_{C2}=100\cdot i_{B2}\,;V_{BE2}=0{,}7\ \text{V} \\ i_{B2}\geq 0\ \text{V}\,;V_{CE2}\geq 0{,}2\ \text{V}\end{cases}$

Con estas condiciones las ecuaciones (1), (2) y (3) quedan:

$$V_i = 2(\beta+1)\cdot i_{B1} + 2\cdot i_{B2} + 0{,}7 = 202\cdot i_{B1} + 2\cdot i_{B2} + 0{,}7 \qquad (4)$$
$$3\beta\cdot i_{B2} + V_{CE2} - 5 = 0 \Rightarrow 300\cdot i_{B2} + V_{CE2} - 5 = 0 \qquad (5)$$

Al tratarse de transistores idénticos $V_{BE1} = V_{BE2} \Rightarrow i_{B1} = i_{B2}$. Aplicando las condiciones a las ecuaciones (4) y (5) se transforman en:

$$V_i = 204\cdot i_{B1} + 0{,}7 \Rightarrow i_{B1} = i_{B2} = \frac{V_i - 0{,}7}{204} \geq 0 \Rightarrow V_i \geq 0{,}7\ \text{V}$$
$$V_{CE2} = 5 - 300\cdot i_{B2} = 5 - 300\cdot\left(\frac{V_i - 0{,}7}{204}\right) = V_0 = 6{,}029 - 1{,}47V_i \geq 0{,}2 \Rightarrow V_i \leq 3{,}96\ \text{V}$$

$$\forall\ 0{,}7\ \text{V} \leq V_i \leq 3{,}96\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 6{,}029 - 1{,}47V_i$$

c) Q1→ ACTIVA $\Rightarrow \begin{cases} i_{C1} = 100\cdot i_{B1}\,;\, V_{BE1} = 0{,}7\ \text{V} \\ i_{B1} \geq 0\ \text{V}\,;\, V_{CE1} \geq 0{,}2\ \text{V} \end{cases}$

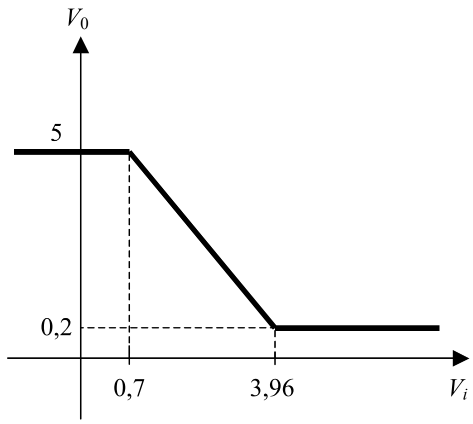
Q2→ SATURACIÓN $\Rightarrow \begin{cases} V_{CE2} = 0{,}2\ \text{V}\,;\, V_{BE2} = 0{,}7\ \text{V} \\ i_{C2} \leq 100\cdot i_{B2} \end{cases}$

Aplicando estas condiciones a las ecuaciones (1), (2) y (3) resulta:

$$\left.\begin{array}{r} V_i = 202\cdot i_{B1} + 2\cdot i_{B2} + 0{,}7 \\ 5 = 3\cdot i_{C2} + 0{,}2 \Rightarrow i_{C2} = \dfrac{5-0{,}2}{3} = 1{,}6\ \text{V} \end{array}\right\}$$
$$V_0 = 0{,}2\ \text{V}, V_{BE1} = V_{BE2} \Rightarrow i_{B1} = i_{B2} = \frac{V_i - 0{,}7}{204} \geq 0 \Rightarrow V_i \geq 0{,}7\ \text{V}$$
$$i_{C2} \leq 100\cdot i_{B2} \Rightarrow 100\cdot\frac{V_i - 0{,}7}{204} \geq 1{,}6 \Rightarrow V_i \geq 3{,}96\ \text{V}$$

$$\forall V_i \geq 3{,}96\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2\ \text{V}$$

Finalmente la gráfica de la característica de transferencia puede verse en la figura siguiente:



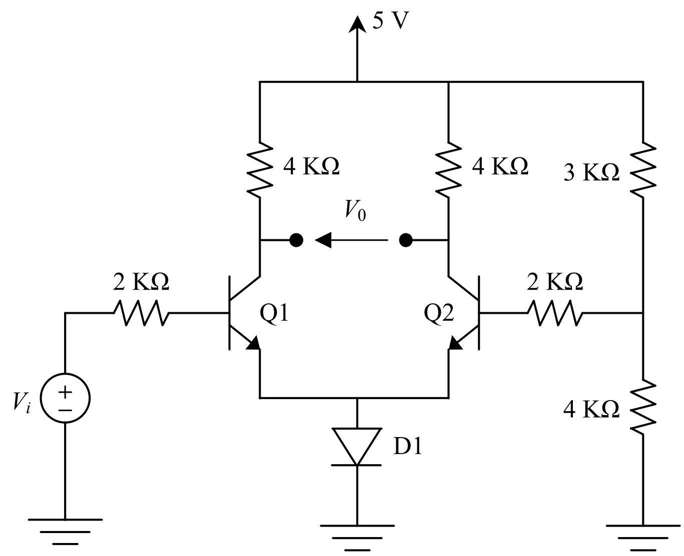
Y los tramos de ésta quedan como sigue:

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, V_i \le 0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 5\ \text{V}\\ \forall\, 0{,}7\ \text{V} \le V_i \le 3{,}96\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 6{,}029 - 1{,}47V_i\\ \forall\, V_i \ge 3{,}96\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2\ \text{V}\end{array}\right\}$$

Ejercicio 3.2.5.

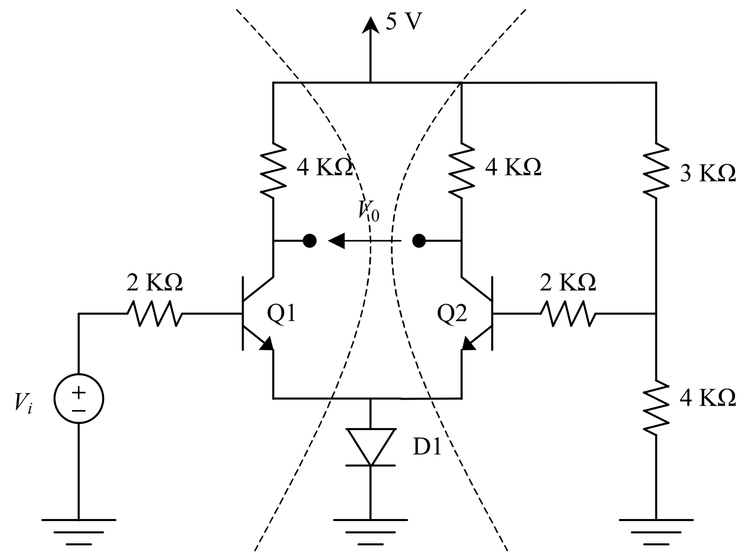
Calcula la característica de transferencia $V_0 = f\,(V_i)$ del circuito de la figura, realizando su representación gráfica.

DATOS:
$V_{BEon} = V_\gamma = 0{,}8$ V
$V_{CEsat} = 0{,}2$ V
$\beta = 25$



Solución:

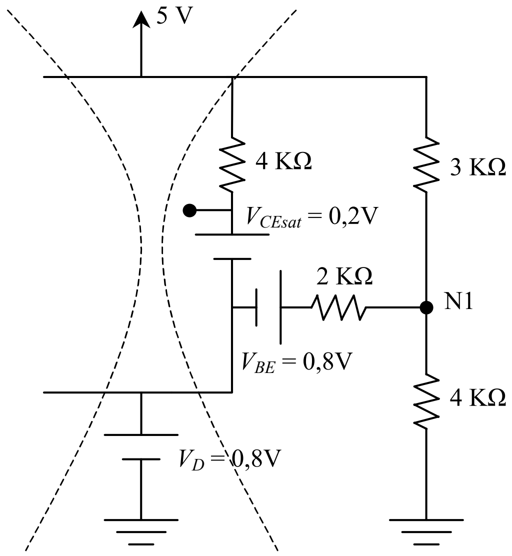
El circuito tiene una estructura que se puede considerar dividida en dos partes de cara a realizar su estudio. La parte de la derecha (ver siguiente figura) está compuesta por un divisor de tensión (resistencias de 3 KΩ y de 4 KΩ), la resistencia de base de 2 KΩ y la del colector 4 KΩ. Y en la parte de la izquierda aparece la fuente de entrada V_i, la resistencia de base de 2 KΩ y la de colector de 4 KΩ.



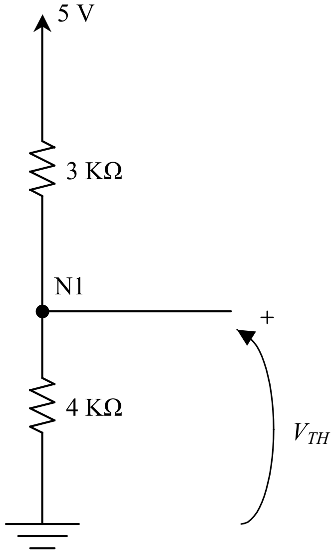
El estado del transistor Q2 puede analizarse independientemente del estado de Q1 ya que se puede observar que la fuente de entrada V_i no influye para nada en la parte derecha del circuito.

Supondremos que el transistor Q2 se encuentra en saturación, es decir, a través de él circula intensidad que necesariamente debe atravesar el diodo D1, por lo que supondremos que éste se encuentra conduciendo.

El modelo de la parte derecha queda como se aprecia en la figura:



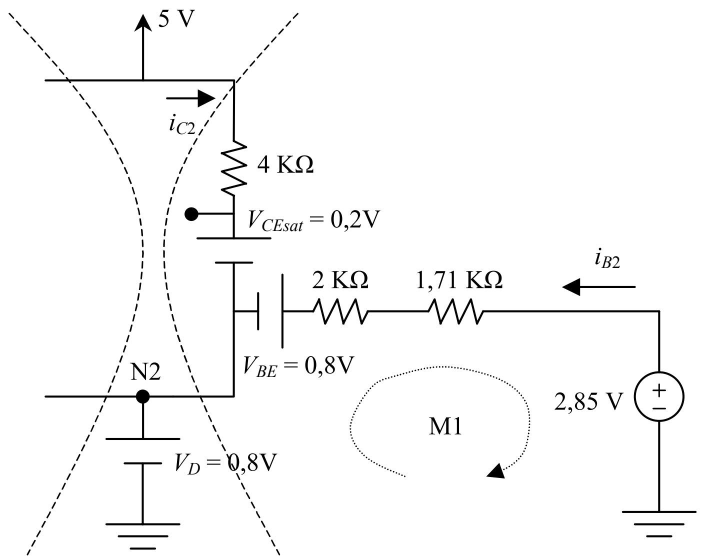
Para analizar el circuito anterior, por sencillez, podemos transformar el divisor de tensión en una resistencia de base más un generador aplicando Thèvenin entre el nudo N1 y masa. La tensión en el nudo N1 la podemos calcular a partir de la fórmula del divisor de tensión, y la resistencia Thèvenin es la combinación paralela de ambas resistencias:



$$V_{TH} = V_{N1} = 5 \cdot \frac{4}{7} = 2{,}85\ \text{V}$$

$$R_{TH} = \frac{3 \cdot 4}{3+4} = 1{,}71\ \text{K}\Omega$$

Sustituyendo el equivalente en el circuito original obtenemos:



De la ecuación de la malla M1 despejamos la intensidad de base de Q2:

$$i_{B2} = \frac{2{,}85 - 0{,}8 - 0{,}8}{2 + 1{,}71} = 0{,}336 \text{ mA}$$

De la malla de salida despejamos la intensidad de colector de Q2:

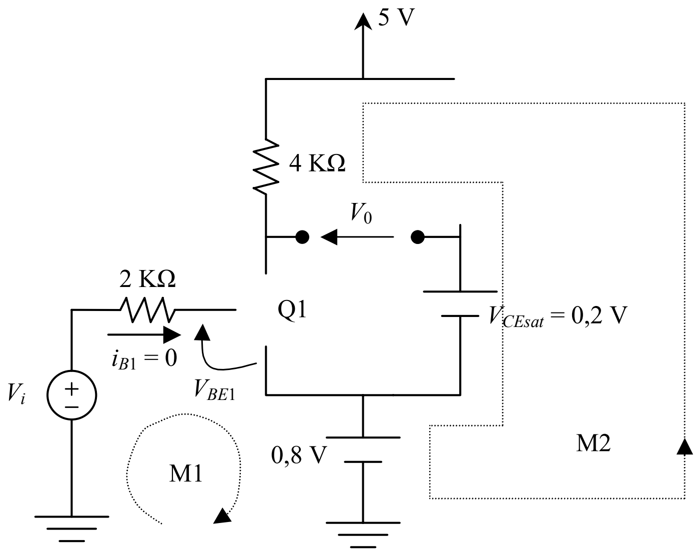
$$i_{C2} = \frac{5 - 0{,}8 - 0{,}2}{4} = 1 \text{ mA}$$

Comprobamos que Q2 está en saturación: $i_{C2} \leq i_{B2} \cdot \beta \Rightarrow 1 \leq 8{,}4$

Comprobamos que D1 está en ON $\Rightarrow i_D \geq 0$, del nudo N2 de la figura anterior obtenemos que aún en el supuesto de que Q1 estuviese en corte e $i_{E1} = 0$, como $i_{E2} = i_{B2} + i_{C2} = 1{,}336 \text{ mA}$, entonces seguro que $i_D = i_{E1} + i_{E2} \geq 0$.

A continuación, y una vez que hemos analizado el punto de trabajo del transistor Q2, debemos estudiar la parte izquierda del circuito.

a) Suponiendo Q1 en CORTE



De la malla M1 obtenemos:

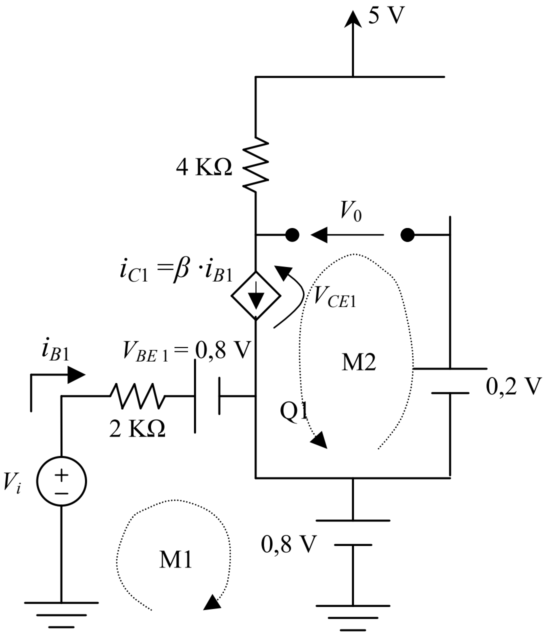
$$-V_i + V_{BE1} + 0{,}8 = 0 \Rightarrow V_{BE1} = V_i - 0{,}8 \leq 0{,}8 \Rightarrow V_i \leq 1{,}6 \text{ V}$$

De la malla M2 obtenemos V_0 teniendo en cuenta que al no existir intensidad en la malla tampoco existe caída de tensión en la resistencia de 4 KΩ luego:

$$V_0 = 5 - 0{,}2 - 0{,}8 = 4 \text{ V}$$

Por tanto $\forall\, V_i \leq 1{,}6 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 4 \text{ V}$

b) Para Q1 en ACTIVA el circuito queda como sigue:



De la ecuación de la malla M1 del circuito anterior despejamos el valor de i_{B1} y le aplicamos la condición $i_{B1} \geq 0 \Rightarrow i_{B1} = \dfrac{V_i - 1{,}6}{2} \geq 0 \Rightarrow V_i \geq 1{,}6 \text{ V}$

Otra condición que podemos aplicar es $V_{CE1} \geq V_{CE1sat} = 0{,}2 \text{ V}$:

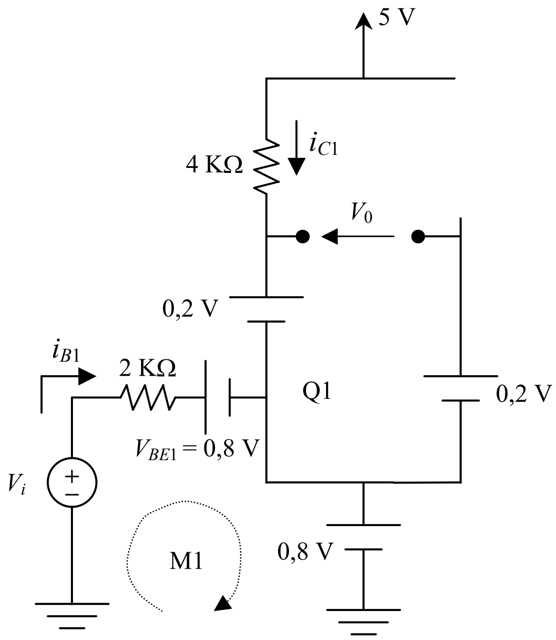
$$V_{CE1} = 5 - 0{,}8 - 4 \cdot \left(\frac{V_i - 1{,}6}{2} \right) \cdot 25 \geq 0{,}2 \Rightarrow V_{CE1} = 84{,}2 - 50 \cdot V_i \geq 0{,}2 \Rightarrow V_i \leq 1{,}68 \text{ V}$$

Para obtener el valor de V_0 lo podemos despejar de la ecuación de la malla M2 del circuito anterior:

$$-0{,}2 - V_0 + V_{CE1} = 0 \Rightarrow V_0 = V_{CE1} - 0{,}2 = 84{,}2 - 50 \cdot V_0 - 0{,}2 \Rightarrow V_0 = 84 - 50 \cdot V_i$$

En resumen: $\forall\, 1{,}6\ \text{V} \le V_i \le 1{,}68\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 84 - 50 \cdot V_i$

c) Sustituyendo el modelo de Q1 en SATURACIÓN obtenemos el circuito siguiente:



De la malla M1 despejamos el valor de $i_{B1} = \dfrac{V_i - 1{,}6}{2} \ge 0 \Rightarrow V_i \ge 1{,}6\ \text{V}$.

Además: $i_{C1} = \dfrac{5 - 0{,}2 - 0{,}8}{4} = 1\ \text{mA}$

Otra condición que debemos aplicar es la de saturación:

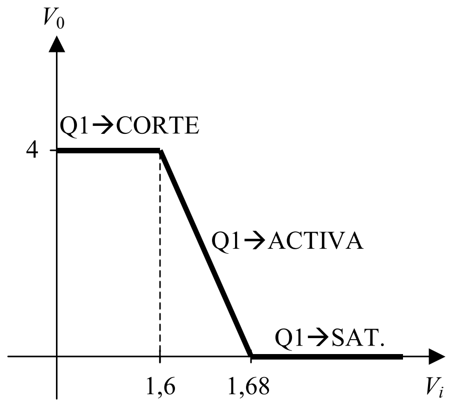
$$i_{B1} \cdot \beta \ge i_{C1} \Rightarrow \frac{V_i - 1{,}6}{2} \cdot 25 \ge 1 \Rightarrow V_i \ge 1{,}68\ \text{V}$$

De entre las dos condiciones, la más restrictiva es $V_i \geq 1{,}68\,\mathrm{V}$.

Por otro lado, el valor para $V_0 \Rightarrow -1 - V_0 + 0{,}2 + 0{,}8 = 0 \Rightarrow V_0 = 0\,\mathrm{V}$

Entonces $\forall\, V_i \geq 1{,}68\,\mathrm{V} \Rightarrow V_0 = 0\,\mathrm{V}$

Y por último la curva de transferencia del circuito donde también se describe el estado del transistor Q1 aparece en la figura siguiente:



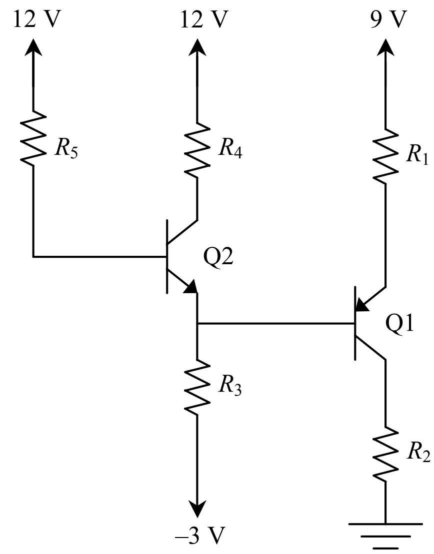
La característica de transferencia completa queda como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, V_i \leq 1{,}6\,\mathrm{V} \Rightarrow V_0 = 4\,\mathrm{V} \\ \forall\, 1{,}6\,\mathrm{V} \leq V_i \leq 1{,}68\,\mathrm{V} \Rightarrow V_0 = 84 - 50 \cdot V_i \\ \forall\, V_i \geq 1{,}68\,\mathrm{V} \Rightarrow V_0 = 0\,\mathrm{V} \end{array}\right\}$$

3.3. CASOS PRÁCTICOS

Ejercicio 3.3.1.

Diseñe el circuito de la figura de forma que los transistores Q1 y Q2 trabajen en las condiciones siguientes:



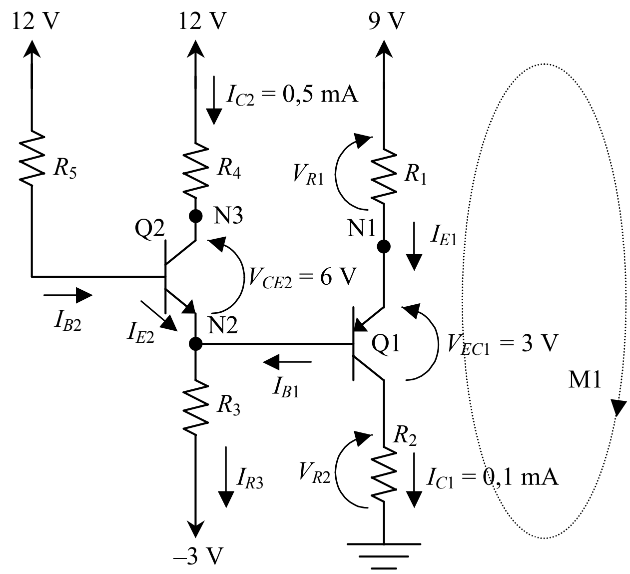
$$\mathbf{Q1} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{V_{EC1} = 3\ \mathrm{V}} \\ \boldsymbol{I_{C1} = 0{,}1\ \mathrm{mA}} \\ \boldsymbol{\beta_1 = 10} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{Q2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{V_{CE2} = 6\ \mathrm{V}} \\ \boldsymbol{I_{C2} = 0{,}5\ \mathrm{mA}} \\ \boldsymbol{\beta_2 = 80} \end{array} \right\}$$

Datos: $\boldsymbol{V_{BEon} = V_{EBon} = 0{,}7\ \mathrm{V}}$
$\boldsymbol{V_{CEsat} = V_{ECsat} = 0{,}2\ \mathrm{V}}$

Solución:

Dibujando de nuevo el circuito e indicando sobre él las condiciones de trabajo de los transistores, tenemos:



Como primera conclusión que podemos obtener a partir de los datos del problema es que ambos transistores van a estar en la zona activa, ya que la tensión colector-emisor es mayor que 0,2 V.

Además, por tratarse de un problema de diseño, debemos tomar un criterio o decisión con respecto al valor de la caída de tensión en R_1. En nuestro caso adoptamos un valor igual a 4 V. Planteando la ecuación de la malla M1:

$$-V_{R2} - V_{EC1} - V_{R1} + 9 = 0 \Rightarrow -V_{R2} - 3 - 4 + 9 = 0 \Rightarrow V_{R2} = 2\ \text{V}$$

De modo que: $R_2 = \dfrac{2\ \text{V}}{0{,}1\ \text{mA}} = 20\ \text{K}\Omega$

Por R_1 circula la intensidad de emisor de Q1 que es la suma de la corriente de base más la de colector por lo tanto:

$$R_1 = \frac{4}{I_{C1} + I_{B1}} = \frac{4}{I_{C1} \cdot (1/\beta_1 + 1)} = \frac{4}{0{,}1 \cdot (1/10 + 1)} = 36{,}36\ \text{K}\Omega$$

$$I_{E1} = I_{C1}(1/\beta_1 + 1) = 0{,}11\ \text{mA}, I_{B1} = I_{C1}(1/\beta_1) = 0{,}01\ \text{mA}$$

Para calcular la resistencia R_3 es necesario conocer el voltaje en sus extremos, además de la intensidad que la atraviesa (I_{R3}).

La ecuación para el nudo N2 es $I_{R3} = I_{E2} + I_{B1}$ donde sí conocemos la intensidad de base de Q1 pero no la intensidad de emisor I_{E2} del transistor Q2.

$$I_{E2} = I_{B2} + I_{C2} = \frac{I_{C2}}{\beta_2} + I_{C2} = 0{,}50625\ \text{mA}$$

Luego $I_{R3} = I_{E2} + I_{B1} = 0{,}50625 + 0{,}01 = 0{,}51625\ \text{mA}$

La tensión en el nudo N2 la podemos calcular sabiendo que $V_{N2} = V_{N1} - V_{EB1}$

La tensión emisor-base de Q1 es 0,7 V puesto que el transistor está conduciendo, y la tensión en el punto N1 la podemos calcular fácilmente también a partir de la malla M1:

$$V_{N1} = 9 - V_{R1} = 9 - 4 = 5\ \text{V}$$

Ya estamos en situación de calcular la resistencia R_3:

$$R_3 = \frac{V_{N2} - (-3)}{I_{R3}} = \frac{4,3 + 3}{0,51625} = 14,14 \text{ K}\Omega$$

Calculemos ahora la resistencia R_4. Para ello lo único que debemos conocer es la tensión en sus bornes ya que sabemos que a través suyo circulan $0,5 \text{ mA} = I_{C2}$. Dicha tensión es la diferencia entre los 12 V de la fuente de alimentación y la tensión del punto N3:

$$V_{N3} = V_{N2} + V_{CE2} = 4,3 + 6 = 10,3 \text{ V} \Rightarrow R_4 = \frac{12 - V_{N3}}{I_{C2}} = \frac{12 - 10,3}{0,5} = 3,4 \text{ K}\Omega$$

Por último resta calcular la resistencia R_5 para completar el diseño.

$$R_5 = \frac{12 - V_{B2}}{I_{B2}}$$

La tensión en la base de Q2 es muy sencilla de calcular:

$$V_{B2} = V_{B1} + V_{BE2} = 4,3 + 0,7 = 5 \text{ V}$$

Y la intensidad de base de Q2:

$$I_{B2} = \frac{I_{C2}}{\beta_2} = \frac{0,5}{80} = 6,25\,\mu\text{A}$$

Luego $R_5 = \dfrac{12 - 5}{6,25\,\mu\text{A}} = 1,12 \text{ M}\Omega$

Resumiendo:

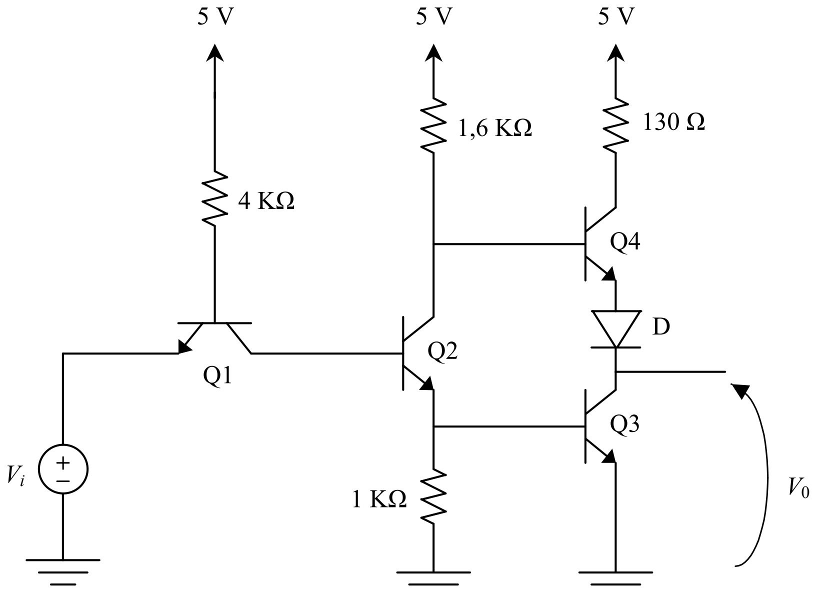
$$\boxed{\text{Tomando } V_{R1} = 4 \text{ V} \rightarrow \begin{cases} R_1 = 36,36 \text{ K}\Omega, R_2 = 20 \text{ K}\Omega \\ R_3 = 14,14 \text{ K}\Omega, R_4 = 3,4 \text{ K}\Omega \\ R_5 = 1,12 \text{ M}\Omega \end{cases}}$$

Ejercicio 3.3.2.

Calcular la característica de transferencia y el Fan-Out para la puerta TTL que aparece en la figura, teniendo en cuenta que Q1 puede operar en zona activa inversa. ¿Qué misión tiene la resistencia de 130 Ω?

DATOS: **Para todos los transistores:** $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{V_{BEon} = 0{,}7\ \mathrm{V},\ V_{CEsat} = 0{,}2\ \mathrm{V},\ \beta = 100} \\ \boldsymbol{\beta_{FORZADA} = 10,\ \ \beta_R = 0{,}02} \end{array} \right\}$

Para el Diodo: $\boldsymbol{V_\gamma = 0{,}7\ \mathrm{V}}$



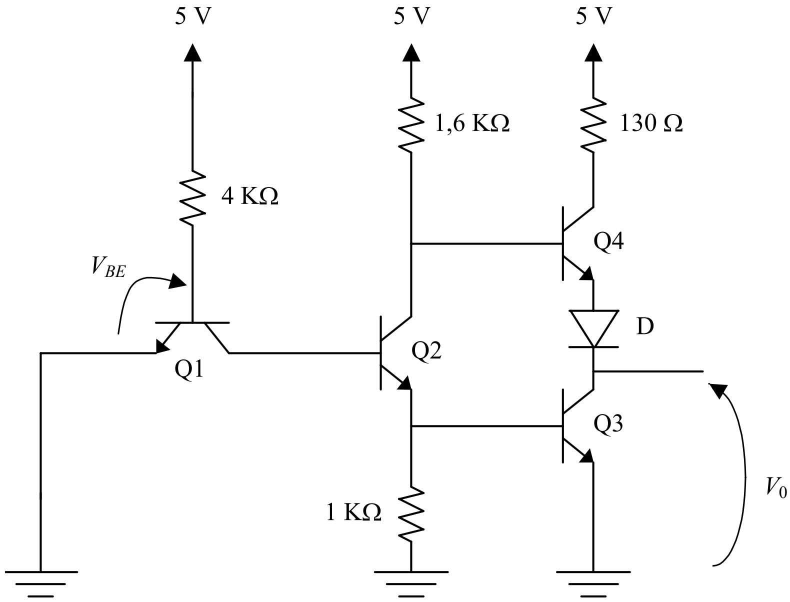
Solución:

El número de combinaciones para analizar es de $2^1 \cdot 3^4$ = 162 y eso sin tener en cuenta que alguno de los transistores puede trabajar en zona activa inversa como sucede con Q1.

Se hace necesario por lo tanto analizar el problema con un poco de intuición y eliminar combinaciones que a buen seguro no se van a dar.

Comenzaremos el cálculo de la característica de transferencia suponiendo que V_i = 0 e iremos aumentado poco a poco su valor.

Para $V_i = 0$ el circuito quedaría:

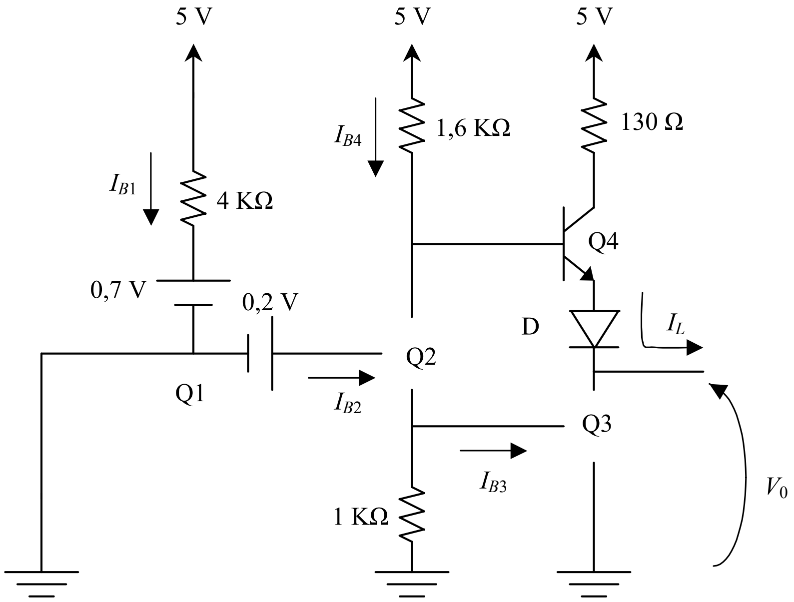


Se observa que Q1 tiene polarizada la unión base-emisor en directa luego estará en zona activa o en zona de saturación.

La tensión en la base de Q2 es la que determina en un principio el estado de Q1 ya que si dicha tensión $V_{B2} \geq 0{,}2$ V entonces Q1 estará en zona activa, conduciendo una corriente cada vez menor ya que se va perdiendo a través de él hacia masa. Sea como sea la situación de Q1 dependerá del estado anterior de la puerta.

Lo que es seguro es que al ir decreciendo la tensión en la base de Q2 llegará un momento en que pase al estado de corte, y la tensión $V_{CE1} = V_{CEsat} = 0{,}2$ V con lo cual Q1 estará saturado pero conduciendo una corriente muy pequeña (Corriente inversa de saturación).

En resumen, Q1 estará en saturación y Q2 en corte con lo cual Q3 también estará cortado puesto que $I_{B3} = 0$



Además:

$$I_{B1} = \frac{5-0{,}7}{4} = 1{,}075 \text{ mA}, \ I_{B2} = 0, \ V_{BE2} \leq 0{,}7 \text{ V}$$

$$I_{B3} = 0, \ V_{BE3} \leq 0{,}7 \text{ V}$$

Dependiendo del valor de la corriente I_L (corriente que circula por la carga de salida) Q4 estará en activa o en saturación.

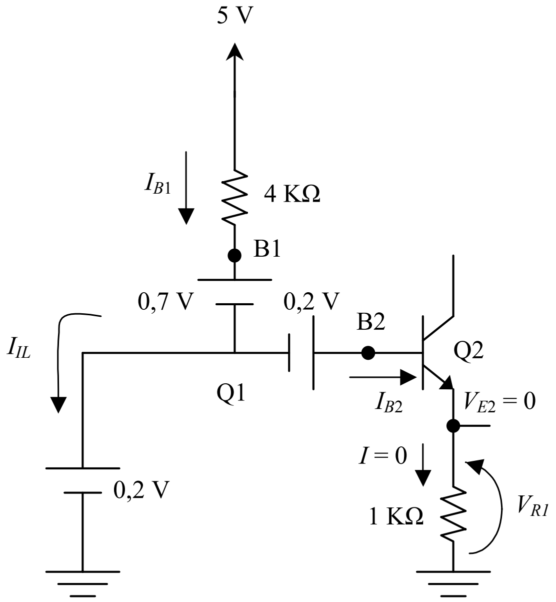
Con el terminal de salida desconectado, la corriente I_L será muy pequeña (la mayor parte debida a fugas) y la unión emisor-base de Q4 junto con la del diodo estarán conduciendo una corriente prácticamente igual a cero.

El valor de la tensión de salida con estas condiciones lo podemos calcular a partir de la expresión:

$$V_0 = 5 - V_{BE4} - V_\gamma - 1{,}6 \cdot I_{B4}$$

Y despreciando la corriente de base de Q4 $\Rightarrow V_0 \approx 5 - 0{,}7 - 0{,}7 = 3{,}6 \text{ V}$

Si continuamos aumentando la tensión V_i, por ejemplo, hasta llegar a 0,2 V, obtenemos el siguiente circuito:



El estudio de este caso es muy interesante ya que es la situación que se produce al conectar dos puertas TTL de este tipo en cascada donde 0,2 V sería la tensión de salida de la puerta del primer nivel ('0' lógico) que a su vez es la entrada para la puerta del nivel siguiente.

Por lo tanto a partir del circuito anterior deducimos que:

En la base de Q1 $\Rightarrow V_{B1} = 0{,}2 + V_{BE1} = 0{,}9$ V

Luego $\Rightarrow I_{B1} = \dfrac{5-0{,}9}{4} \approx 1\,\text{mA}$

Debido a que 0,9 V no es tensión suficiente para polarizar directamente la unión base-colector de Q1 junto con la unión base-emisor de Q2, este último seguirá cortado. Entonces $I_{C1} \approx 0$ mA y Q1 seguirá en saturación. Por lo tanto $\Rightarrow V_{B2} = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4\text{ V} \leq 0{,}7\text{ V}$

Para la tensión de salida V_0 decir que ésta no cambia con respecto a la situación precedente $\Rightarrow V_0 \approx 3{,}6$ V

$$V_0 = 5 - \frac{I_L}{(\beta+1)} \cdot 1{,}6\ \text{K}\Omega - V_{BE4} - V_D \qquad (1)$$

En el circuito anterior observamos que la corriente que circula por la entrada en una puerta TTL a la cual se le aplica un nivel lógico bajo (‘0’), tiene un valor de $I_{IL} = I_{E1} = I_{B1} + I_{C1} \approx 1 + 0 = 1\ \text{mA}$. Al encadenar puertas del mismo tipo, dicha intensidad deberá fluir por el transistor Q3 de la puerta anterior y por lo tanto será un dato muy útil a la hora de calcular el Fan-Out de la puerta TTL según veremos más adelante.

Continuando con el análisis de la puerta TTL, si seguimos aumentando la tensión de entrada V_i hasta llegar a los 0,6 V conseguiremos polarizar la unión base-emisor de Q1 y la unión base-emisor de Q2 ya que:

$$V_{B1} = V_{BC1} + V_{BE2} + V_{R1} = V_i + V_{BE1} = 1{,}3\ \text{V} \qquad (2)$$

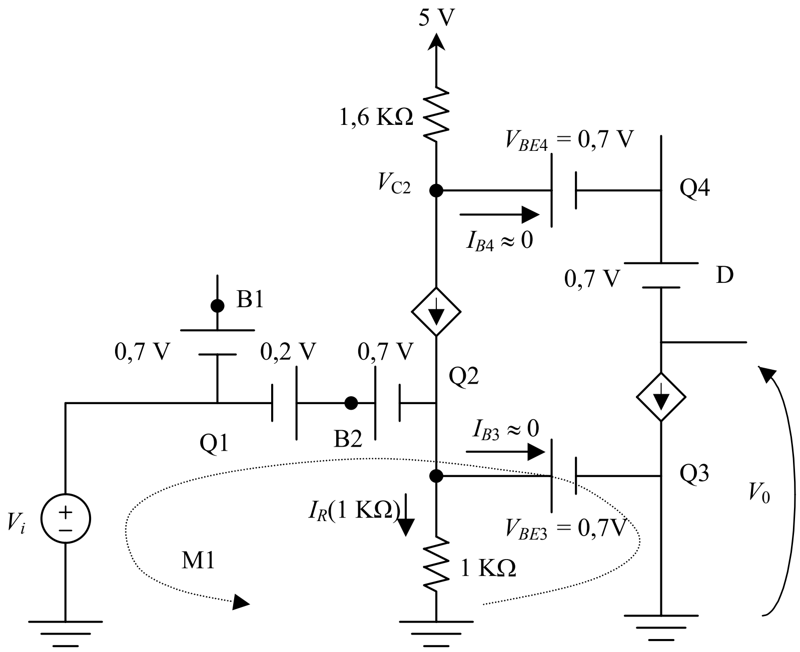
La situación será la siguiente: Q1→Saturación, Q2→Comienza a conducir en activa, Q3→Cortado y Q4→Se mantiene igual, conduce.

La tensión de salida sigue con el mismo valor: V_0 = 3,6 V

$$\boxed{\forall\ 0 \leq V_i \leq 0{,}6\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 3{,}6\ \text{V}}$$

El transistor Q3 todavía permanece en corte ya que la intensidad que fluye a través de Q2 es insuficiente para excitar la base de Q3 (V_{BE3} < 0,7 V) de ahí que podamos considerar que la tensión en la resistencia de 1 KΩ (V_{R1}) que aparece en la expresión (2) sea aproximadamente igual a 0 Voltios.

Analicemos ahora la combinación Q1→Saturación, Q2→Activa, Q3→ON, Q4→ON, es decir, cuando Q3 comienza a conducir ligeramente.



Q3 comenzará a conducir cuando por Q2 circule suficiente intensidad. Tomando la malla M1 en el circuito de la figura anterior obtenemos:

$$V_i = V_{BE3} + V_{BE2} - V_{CEsat}(\text{Q1}) = 0{,}7 + 0{,}7 - 0{,}2 = 1{,}2\ \text{V}$$

Despreciando la corriente de base de Q3→$I_{B3} \approx 0$ debido a que Q3 está comenzando a conducir, la intensidad a través de la resistencia de 1 KΩ, será:

$$I_R(1\,\text{K}\Omega) \approx \frac{0{,}7}{1\text{K}\Omega} = 0{,}7\ \text{mA}$$

Además $I_{E2} \approx I_R(1\,\text{K}\Omega) = 0{,}7\ \text{mA}$

Y como el factor β es elevado, también $I_{C2} \approx I_{E2} = 0{,}7$ mA

Realizando una nueva simplificación $I_{B4} \approx 0$ mA, entonces la tensión en el colector de Q2 es:

$$V_{C2} = 5 - 0{,}7 \cdot 1{,}6\ \text{K}\Omega = 3{,}88\ \text{V} \Rightarrow V_{CE2} = V_{C2} - 0{,}7\ \text{V} = 3{,}18\ \text{V} > V_{CEsat}$$

Luego Q2 se confirma en zona activa y la tensión de salida obtenida a partir del circuito anterior es:

$$V_{C2} - V_{BE4} - V_{\gamma} - V_0 = 0 \Rightarrow V_0 = 3{,}88 - 0{,}7 - 0{,}7 = 2{,}48\ \text{V}$$

Resumiendo: $\boxed{V_i = 1{,}2\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 2{,}48\ \text{V}}$

Seguimos aumentando la tensión de entrada V_i y Q3 comienza a conducir cada vez más intensidad en zona activa. Mientras, Q1 sigue saturado y Q2 y Q4 siguen también en zona activa.

Esta situación se mantiene hasta que Q2 y Q3 se saturan y Q4 se corta, esto sucede para un voltaje de entrada obtenido a partir de la siguiente expresión:

$$V_i = V_{BE3} + V_{BE2} + V_{BC1} - V_{BE1} = 1{,}4\ \text{V}$$

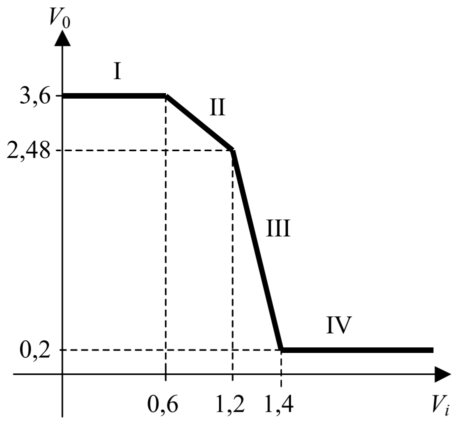
Podemos comentar que desde que V_i era igual a 0,6 V cada vez más corriente de base de Q1 se ha estado desviando hacia su unión base-colector de modo que si seguimos aumentando V_i la tensión V_{BC1} aumenta y la V_{BE1} disminuye hasta tal punto en que se igualan y la unión base-emisor de Q1 se corta y Q1 sale de la saturación para entrar en el modo activo inverso, es decir, unión base-emisor polarizada inversamente y unión base-colector polarizada directamente.

De modo que $I_{E1} = \beta_{\text{R}} \cdot I_{B1}$ e $I_{C1} \approx (\beta_{\text{R}} + 1) \cdot I_{B1}$, donde $\beta_{\text{R}} = 0{,}02 << 1$ es la ganancia en zona activa inversa.

En resumen, a partir de $V_i \geq 1{,}4$ V tenemos Q1→Activa inversa, Q2 y Q3→Saturación y Q4→Cortado, con lo cual, $V_0 = V_{CEsat}$ (Q3) = 0,2 V:

$$\boxed{V_i \geq 1{,}4\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2\ \text{V}}$$

La curva de transferencia aparece en la gráfica siguiente, en donde se detallan para los distintos tramos el estado de los transistores de la puerta TTL:



TRAMO	Q1	Q2	Q3	Q4
I	SATURACIÓN	OFF	OFF	ON
II	SATURACIÓN	ACTIVA	OFF	ON
III	SATURACIÓN	ACTIVA	ACTIVA	ON
IV	ACTIVA INVERSA	SATURACIÓN	SATURACIÓN	OFF

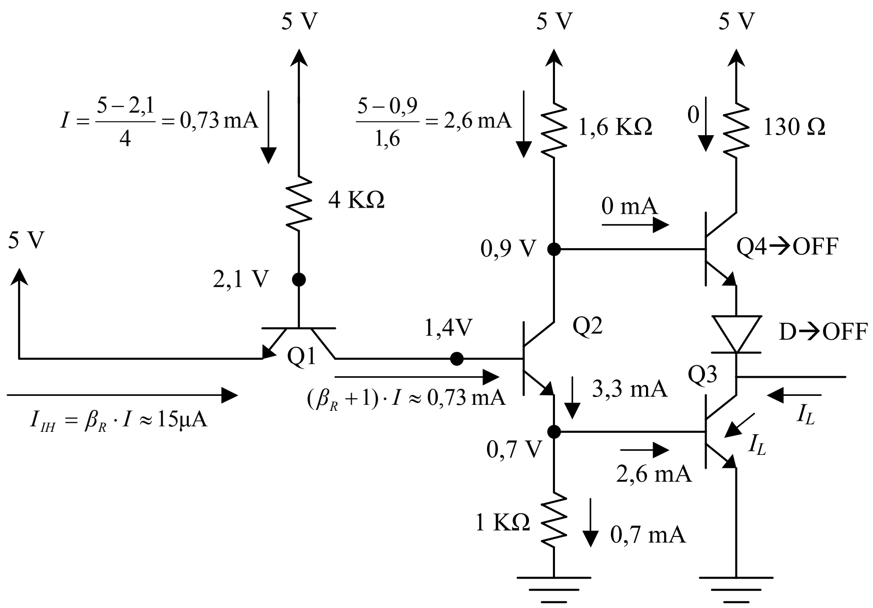
La resistencia de 130 Ω tiene la misión de evitar que a través de Q4 circule una intensidad muy elevada que pueda destruirlo. Esta situación se produce cuando Q3 y Q4 (tramo III de la característica de transferencia) se encuentran conduciendo, provocando así un cortocircuito que es evitado por dicha resistencia al limitar la corriente a aproximadamente 5 V / 0,13 KΩ = 45 mA.

Resta por calcular el Fan-Out de la puerta. Para ello será necesario introducir unos conocimientos teóricos a lo largo de este desarrollo (entre ellos el significado del coeficiente denominado $\beta_{FORZADA}$) que nos ayudarán a entender más profundamente el funcionamiento de la puerta.

Pero lo primero que debemos hacer es determinar qué situación le afectará más al valor del Fan-Out respecto al consumo de una entrada de la puerta, una entrada a nivel bajo o bien una entrada a nivel alto.

El consumo de la entrada para un nivel bajo (I_{IL}), ya ha sido analizado anteriormente para un valor de V_i = 0,2 V, luego necesitamos analizar el circuito para una entrada V_i = 5 V y determinar la situación para la cual se produce un mayor consumo en la entrada de la puerta.

En la figura siguiente podemos ver las tensiones y las intensidades en el circuito para V_i = 5 V:



$$I = \frac{5-2{,}1}{4\ \text{K}\Omega} = 0{,}73\ \text{mA},\ I_{IH} = \beta_R \cdot I \approx 0{,}02 \cdot 0{,}7 \approx 15\ \mu\text{A}$$

$$I_{B2} = (\beta_R + 1)\cdot I \approx 0{,}73\ \text{mA},\ V_{C2} = 0{,}7 + 0{,}2 = 0{,}9\ \text{V}$$

$$I_R(1{,}6\ \text{K}\Omega) = \frac{5-0{,}9}{1{,}6\ \text{K}\Omega} = 2{,}6\ \text{mA}$$

Q4 está cortado ya que en su base hay 0,9 V y se necesitaría como mínimo $V_{BE4} + V_\gamma + V_{CE3}$, siempre mucho mayor que 0,9 V. Por lo tanto Q4→Corte, entonces $I_{B4} = 0$, y ésta es la razón por la cual se le añade el diodo al circuito, para provocar una caída adicional de 0,7 V que asegure que Q4 esté en corte.

Así pues:

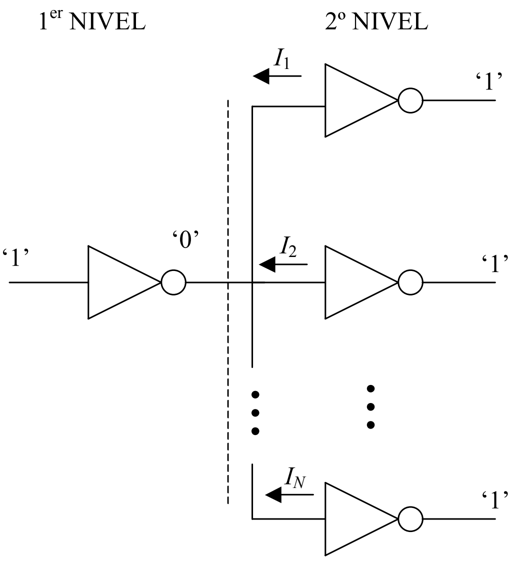
$$I_{C2} = I_R(1{,}6\ \text{K}\Omega) = 2{,}6\ \text{mA}$$

$$I_{E2} = 2{,}6 + I_{B2} = 2{,}6 + 0{,}73 = 3{,}3\ \text{mA} = I_{C2} + I_{B2}$$

$$I_R(1\ \text{K}\Omega) = \frac{0{,}7}{1\ \text{K}\Omega} = 0{,}7\ \text{mA}\ ,\ I_{B3} = 3{,}2 - 0{,}7 = 2{,}6\ \text{mA}$$

Q3→Saturación y la tensión de salida $V_0 = 0{,}2$ V

Una vez analizado el circuito para una entrada a nivel alto vemos que el consumo en dicha entrada es muy pequeño $I_{IH} \approx 15$ μA por lo tanto el caso más perjudicial de cara al cálculo del Fan-Out se produce cuando la entrada $V_i = 0{,}2$ V que tenía un consumo por entrada de $I_{IL} \approx 1$ mA $= I_1 = I_2 = ... = I_N$ y será por tanto el caso que estudiaremos:



Mientras Q3 se encuentre en saturación, su tensión colector-emisor permanecerá a 0,2 V (nivel bajo) para la entrada de las puertas del segundo nivel.

La máxima corriente de salida I_L que puede soportar Q3 sin salir del estado de saturación es $I_{Lmáx} = I_{B3} \cdot \beta_{FORZADA} = 2{,}6 \cdot \beta_{FORZADA}$ y como cada puerta consume 1mA en su entrada para N puertas el consumo será de N mA y por lo tanto:

$$\boxed{2{,}6\beta_{FORZADA} \geq N \cdot 1\,\text{mA} \Rightarrow N = FAN - OUT = 2{,}6 \cdot 10 = 26}$$

Para el cálculo del Fan-Out habría que considerar que el transistor de salida está en zona activa para una tensión $V_{CE3} = V_{IL} = 1{,}4$ V que sigue siendo interpretado por las puertas del segundo nivel como un nivel bajo. No obstante nosotros hemos aplicado un criterio más simple que ha consistido en considerar que el límite de puertas que se pueden conectar se alcanza en el momento mismo en que Q3 abandona la zona de saturación.

Por último se hace preciso comentar el valor del parámetro $\beta_{FORZADA}$ utilizado en Q3.

Normalmente definimos un modelo para el transistor BJT muy simple en donde $I_C = \beta \cdot I_B$ pero cuando la I_B supera a la intensidad de base mínima que lleva al transistor a la saturación, entonces el parámetro β se degrada ya que por la base se está introduciendo una corriente I_{Bsat} mayor de la que realmente se necesita para llevar al transistor a la saturación.

Recordemos que en una configuración en emisor común asumíamos $I_C = (1+\beta)\cdot I_{CBO}+\beta\cdot I_B$ y al hacer la $I_C \approx \beta\cdot I_B$ estamos realizando una simplificación válida en la zona activa, pero cuando el transistor se satura al introducir una intensidad de base excesiva dicha simplificación no es del todo correcta. A esto hay que añadir que el valor de β también se ve afectado por la temperatura, las dimensiones físicas del transistor, entre otros factores, además de otros de tipo aleatorio, por lo que la β difiere incluso entre dos transistores fabricados bajo las mismas condiciones. De modo que el fabricante del transistor suministra un valor medio de β obtenido a partir de un muestreo.

Basándonos en lo anterior y siendo un poco más estrictos con el valor dado para β, podemos definir una nueva expresión que tenga en cuenta el efecto que produce una I_B que supera la mínima necesaria para entrar en saturación. En este caso se le denomina β forzada y su valor viene dado por:

$$\beta_{FORZADA} = \frac{\beta}{\frac{I_B}{I_{Bsat}}}$$

Para el cálculo del Fan-Out hemos utilizado el valor de la β forzada ya que la intensidad de base de Q3 es mayor de la que realmente se necesita para llevarlo al estado de saturación.

4. Circuitos con Transistores MOSFET

OBJETIVOS:

- Estudio del comportamiento sobre la base de modelos simplificados del dispositivo electrónico más importante en la actualidad, el transistor con estructura metal-óxido-semiconductor (MOSFET) y los distintos tipos que existen (canal N, P, deplexión, acumulación).
- Análisis y diseño de circuitos electrónicos con transistores MOSFET: cálculo del punto de trabajo y característica de transferencia.
- Análisis de circuitos con diseños mixtos compuestos por transistores bipolares y transistores MOS.
- Estudio del comportamiento y de las características del transistor MOS empleado como dispositivo básico en la construcción de puertas lógicas: Implementación y análisis de funciones booleanas complejas.

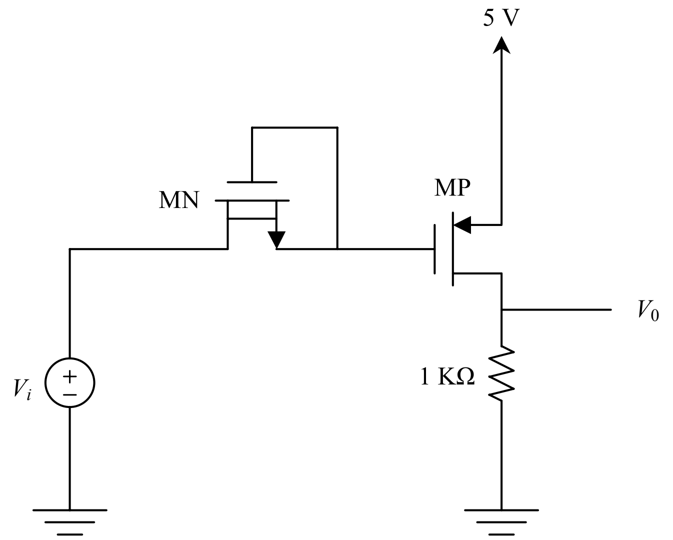
4.1. PUNTO DE TRABAJO

Ejercicio 4.1.1.

Resuelve el circuito de la figura indicando el estado de todos los dispositivos, el valor de la tensión V_0 y la potencia consumida para los dos casos siguientes:

a) $V_i = 0$ V
b) $V_i = 5$ V

Datos MOSFETs: $\begin{cases} \textbf{Canal P} \rightarrow K_P = 1\ \text{mA/V}^2, V_{TP} = 2\ \text{V} \\ \textbf{Canal N} \rightarrow K_N = 1\ \text{mA/V}^2, V_{Pinch-off} = -1\ \text{V} \end{cases}$



Solución:

El transistor MN es un transistor de deplexión, es decir, dispone siempre de un canal prefabricado el cual sólo desaparece para una tensión de puerta negativa, que en nuestro caso es igual a 1 Voltio.

Además en el circuito aparece conectada la puerta con el terminal de fuente, luego: $V_{GS} = 0 \Rightarrow V_{GS} \geq V_{Pinch\text{-}off} \Rightarrow$ Por lo tanto MN nunca va a estar cortado, siempre estará en zona óhmica o bien en zona de saturación.

La intensidad I_D que circula a través de MN es cero ya que la puerta del transistor MP no consume corriente, de modo que tampoco puede estar en saturación ya que $V_{GS} - V_{Pinch\text{-}off} > 0$ y ello implicaría que $I_D > 0$.

Por lo tanto MN sólo podrá estar en zona óhmica:

$$I_D = K_N \cdot \left(V_{GS} - V_{Pinch-off} - \frac{V_{DS}}{2} \right) \cdot V_{DS} = 0$$

Se puede comprobar que la única manera de que la ecuación anterior sea igual a cero es que $V_{DS} = 0$, ya que la otra opción, teniendo en cuenta que $V_{GS} = 0$, sería:

$$\left(V_{GS} - V_{Pinch-off} - \frac{V_{DS}}{2} \right) = \left(0 - V_{Pinch-off} - \frac{V_{DS}}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_{DS} = -2 \cdot V_{Pinch-off} \qquad (1)$$

Y por estar en zona óhmica se debe cumplir que:

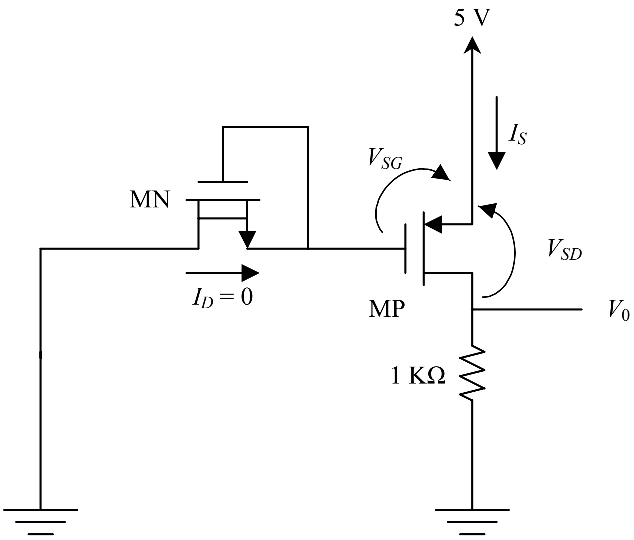
$$V_{DS} \leq V_{GS} - V_{Pinch-off} \Rightarrow V_{DS} \leq -V_{Pinch-off}$$

Sustituyendo el valor de (1) en la ecuación anterior obtenemos:

$$-2 \cdot V_{Pinch-off} \leq -V_{Pinch-off} \Rightarrow 2 \cdot V_{Pinch-off} \geq V_{Pinch-off}$$

Pero $V_{Pinch\text{-}off}$ es siempre negativa luego la relación anterior es siempre falsa, con lo cual deducimos que esta opción nunca puede hacer cero la expresión de la intensidad I_D.

a) Si $V_i = 0 \Rightarrow V_{SG} = 5$



Suponiendo que MP se encuentra en saturación:

$$I_S = \frac{K_P}{2}(V_{SG} - V_{TP})^2 = 0{,}5 \cdot (5-2)^2 = 4{,}5 \text{ mA}$$

La tensión $V_{SD} = 5 - V_0 = 5 - I_S \cdot 1\,\text{K}\Omega = 0{,}5\text{ V}$

La condición de saturación no se cumple ya que:

$$V_{SD} \geq V_{SG} - V_{TP} \Rightarrow 0{,}5 \geq 5 - 2$$

Supongamos que MP está en óhmica:

$$I_S = K_P \cdot \left(V_{SG} - V_{TP} - \frac{V_{SD}}{2} \right) \cdot V_{SD} \qquad (2)$$

De la malla de salida→ $-5 + V_{SD} + I_S \cdot 1 = 0 \Rightarrow I_S = 5 - V_{SD}$, que sustituido en la expresión (2):

$$5 - V_{SD} = 1 \cdot \left(5 - 2 - \frac{V_{SD}}{2} \right) \cdot V_{SD} \Rightarrow V_{SD}^2 - 8 \cdot V_{SD} + 10 = 0$$

Obtenemos dos soluciones: V_{SD} = 6,445 V y V_{SD} = 1,555 V. La primera es físicamente imposible ya que no se puede alcanzar en ningún punto del circuito una tensión superior a la de la fuente de alimentación. Por lo tanto la segunda solución es la correcta, de hecho cumple que MP se encuentra en zona óhmica ya que:

$$V_{SD} \leq V_{SG} - V_{TP} \Rightarrow 1{,}555 \leq 5 - 2$$

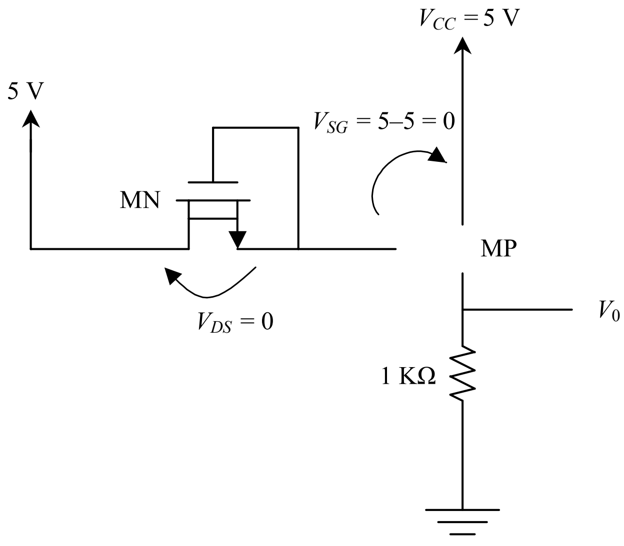
La potencia consumida para este caso es:

$$P(V_i = 0) = V_{CC} \cdot I_S = 5 \cdot 3{,}445 = 17{,}225 \text{ mW}$$

Y el valor de la tensión de salida $V_0 = I_S \cdot 1\,\text{K}\Omega = 3{,}445\,\text{V}$

b) Si V_i = 5 V $\Rightarrow$ V_{SG} = 0 V $\Rightarrow$ $V_{SG} \leq V_{TP}$ y por lo tanto el transistor MP se encuentra cortado.

El transistor MN sigue en zona óhmica ya que para él no han cambiado las condiciones debido a que la intensidad que lo atraviesa continúa siendo igual a 0 y se comporta como una resistencia a través de la cual no circula intensidad, luego tampoco existe caída de tensión (V_{DS} = 0).



La potencia consumida es nula y la tensión de salida V_0 = 0 V, ya que la caída de tensión en la resistencia es cero puesto que no circula intensidad a través de ella.

Soluciones:

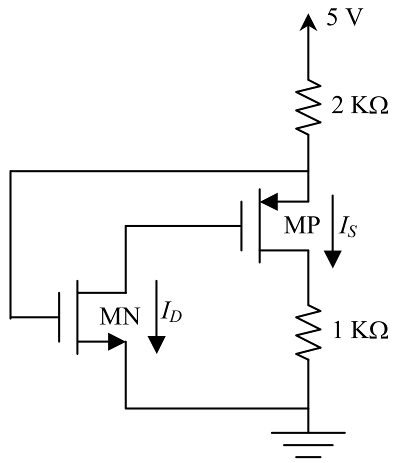
$$\text{a)}\, V_i = 0\,\text{V} \rightarrow \begin{cases} \text{MN ÓHMICA}: V_{GS} = 0\,\text{V}\,; I_D = 0\,\text{mA}\,; V_{DS} = 0\,\text{V} \\ \text{MP ÓHMICA}: V_{SG} = 5\,\text{V}\,; I_S = 3{,}445\,\text{mA}\,; V_{SD} = 1{,}555\,\text{V} \\ V_0 = 3{,}445\,\text{V}\,; P = 17{,}225\,\text{mW} \end{cases}$$

$$\text{b)}\, V_i = 5\,\text{V} \rightarrow \begin{cases} \text{MN ÓHMICA}: V_{GS} = 0\,\text{V}\,; I_D = 0\,\text{mA}\,; V_{DS} = 0\,\text{V} \\ \text{MP CORTE}: V_{SG} = 0\,\text{V}\,; I_S = 0\,\text{mA}\,; V_{SD} = 5\,\text{V} \\ V_0 = 0\,\text{V}\,; P = 0\,\text{mW} \end{cases}$$

Ejercicio 4.1.2.

En el siguiente circuito calcular el valor de las intensidades I_S e I_D, así como las tensiones que caracterizan a los transistores MOS (V_{GS} y V_{DS} para MN; V_{SG} y V_{SD} para MP). Indicar asimismo el estado de ambos transistores.

Datos :
MN: $V_{TN} = 1$ V ; $K_N = 2$ mA/V^2
MP: $V_{TP} = 2$ V ; $K_P = 3$ mA/V^2

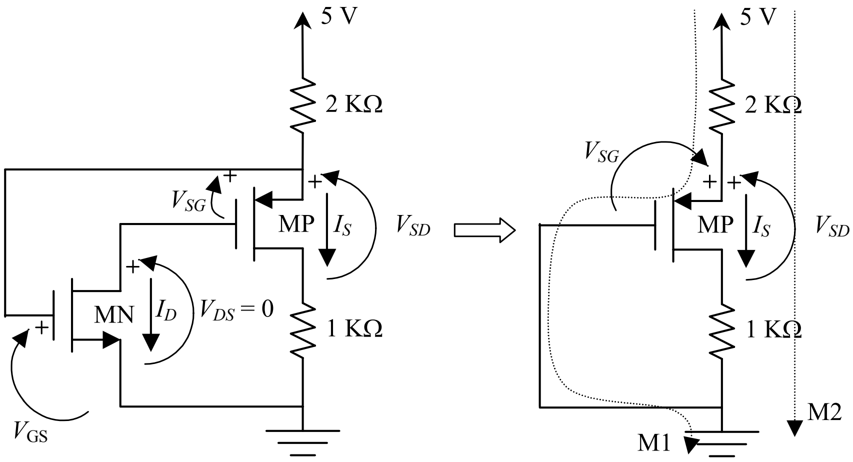


Solución:

Analizamos previamente el estado de los transistores:

Se aprecia que MN tiene conectado su drenador a la puerta del transistor MP, por lo que siempre será $I_D = 0$ (nunca entra ni sale intensidad por la puerta de un transistor MOS). Para que se dé una intensidad nula, MN tendrá que estar o bien en ÓHMICA o bien en CORTE (solamente se podría dar una intensidad nula en SATURACIÓN si la V_{GS} y la V_{TN} son idénticas).

Ahora bien, esté como esté MN su tensión V_{DS} siempre será 0 V, ya que nunca pasa intensidad a través de él, por tanto la puerta del transistor MP es como si estuviera conectada a tierra con lo cual podríamos analizar el siguiente circuito equivalente:



Observando el primer circuito podemos apreciar también que los valores de V_{GS} y V_{SG} son iguales, por tanto analizamos el circuito equivalente obtenido, para lo cual habrá que suponer un estado para el transistor MP. Se aprecia que el transistor debe conducir (por tener su puerta conectada a tierra, la tensión V_{SG} será grande), así que vamos a suponer que lo hace en SATURACIÓN:

$$\text{Condiciones} \rightarrow \left.\begin{matrix} V_{SG} \geq V_{TP} \\ V_{SD} \geq V_{SG} - V_{TP} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} V_{SG} \geq 2 \text{ (Cond. 1)} \\ V_{SD} \geq V_{SG} - 2 \text{ (Cond. 2)} \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Modelo} \rightarrow I_S = \frac{K_P}{2}(V_{SG} - V_{TP})^2 \Rightarrow I_S = \frac{3}{2}(V_{SG} - 2)^2$$

En esta ecuación tenemos 2 incógnitas (I_S y V_{SG}), por lo que necesitamos una 2ª ecuación. Ésta la obtendremos a partir de la malla M1 en el circuito, la cual relaciona estas dos incógnitas:

$$\text{Malla M1} \rightarrow 5 - 2I_S - V_{SG} = 0$$

Despejando I_S en ambas ecuaciones e igualando obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Modelo} \to I_S = \dfrac{3}{2}(V_{SG}-2)^2 \\ \text{M1} \to I_S = \dfrac{5-V_{SG}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5-V_{SG}}{2} = \frac{3}{2}(V_{SG}-2)^2 \Rightarrow 5-V_{SG} = 3\,(V_{SG}-2)^2;$$

$$3V_{SG}^2 - 11V_{SG} + 7 = 0 \Rightarrow V_{SG} \cong \begin{cases} 2{,}847\ \text{V} \\ 0{,}8195\ \text{V}\end{cases}$$

Si aplicamos la 1ª condición observamos que la solución correcta coincide con el primer valor:

$$\text{Cond.1} \to V_{SG} \geq 2\ \text{V} \Rightarrow V_{SG} \cong 2{,}847\ \text{V}$$

Calculamos I_S:

$$I_S = \frac{3}{2}(V_{SG}-2)^2 \cong \frac{3}{2}(2{,}847-2)^2 \cong 1{,}076\ \text{mA}$$

Por último, calculamos el valor de V_{SD} realizando la malla M2:

$$\text{Malla M2} \to 5 - 2I_S - V_{SD} - 1I_S = 0 \Rightarrow V_{SD} = 5 - 3I_S \cong 1{,}77\ \text{V}$$

Hemos comprobado que MP está en SATURACIÓN. Vamos a ver en qué estado se encuentra MN:

Suponemos MN en ÓHMICA:

$$\text{Condiciones} \to \left.\begin{array}{l} V_{GS} \geq V_{TN} \\ V_{DS} \leq V_{GS} - V_{TN}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_{GS} \geq 1 \\ V_{DS} \leq V_{GS} - 1\end{array}\right\}$$

Como tenemos que $V_{SG} = V_{GS}$ y $V_{DS} = 0$ nos queda:

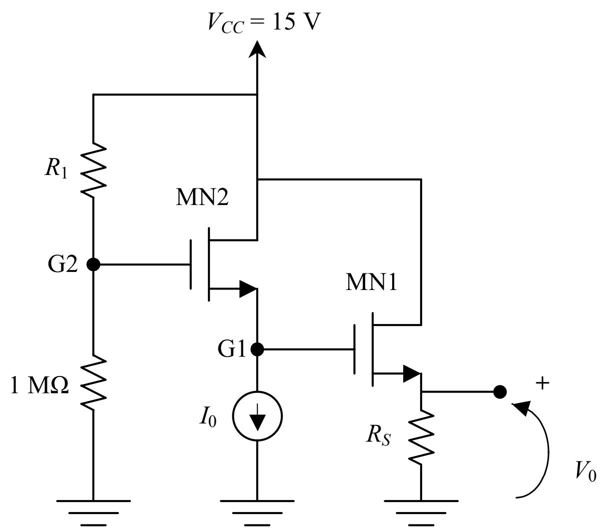
$$\left.\begin{array}{l} V_{GS} \geq 1 \\ V_{GS} = V_{SG} \cong 2{,}847\ \text{V}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se cumple} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} V_{DS} = 0 \\ V_{GS} \cong 2{,}847\ \text{V} \\ V_{DS} \leq V_{GS} - 1\end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq 1{,}847 \Rightarrow \text{Se cumple}$$

Por tanto MN está en ÓHMICA. Los resultados serán los siguientes:

$$\text{MN ÓHMICA} \rightarrow \begin{cases} V_{GS} \cong 2{,}847\ \text{V} \\ V_{DS} = 0\ \text{V} \\ I_D = 0\ \text{mA} \end{cases} \quad ; \quad \text{MP SATURACIÓN} \rightarrow \begin{cases} V_{SG} \cong 2{,}847\ \text{V} \\ V_{SD} \cong 1{,}77\ \text{V} \\ I_S \cong 1{,}076\ \text{mA} \end{cases}$$

Ejercicio 4.1.3.

Los dos transistores de la figura tienen K_N = 4 mA/V^2 y V_T =0,6 V. Si i_D = 2 mA para ambos transistores y V_0 = 3 V calcular: V_{G1}, V_{G2}, V_{DS1}, V_{DS2}, I_0, R_S, R_1, indicando asimismo la zona de trabajo de MN1 y MN2.



Solución:

La variable más sencilla de calcular es I_0 ya que el enunciado indica que a través del transistor MN2 circula i_D = 2 mA y como la intensidad de puerta en un MOSFET (MN1) es cero entonces $I_0 = i_D$ = 2 mA.

El valor de la resistencia R_S tampoco es muy complicado de calcular ya que:

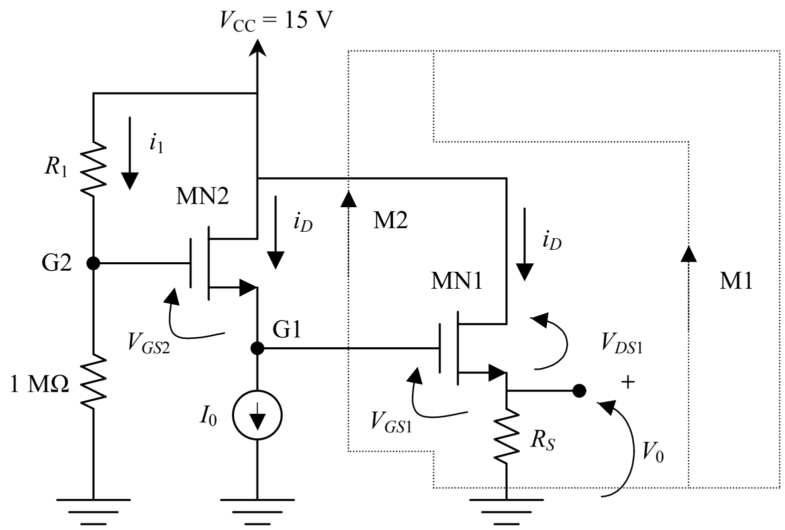
$$R_S = \frac{V_0}{i_D} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ \text{K}\Omega$$

Calculemos ahora la zona de funcionamiento del transistor MN1:

Si suponemos MN1 en saturación entonces:

$$i_D = 2 = \frac{K_N}{2}\left(V_{GS1} - V_T\right)^2 \Rightarrow \text{Despejando } V_{GS1} = 1{,}6 \text{ V}$$

Debemos comprobar si la suposición para MN1 es correcta, es decir, si la condición $V_{DS1} \geq V_{GS1} - V_T$ se cumple, pero para ello es necesario calcular el valor de V_{DS1}. Por tanto planteamos la ecuación de la malla M1 en el circuito de la figura siguiente:



Comenzando por el nudo de tierra:

$$-V_0 - V_{DS1} + 15 = 0 \Rightarrow V_{DS1} = 15 - 3 = 12 \text{ V}$$

$V_{DS1} \geq V_{GS1} - V_T \Rightarrow 12 \geq 1{,}6 - 0{,}6 \Rightarrow$ Se confirma que MN1 se encuentra en SATURACIÓN.

Continuamos la resolución del problema suponiendo el estado de saturación también para el transistor MN2, luego la intensidad que circula por él es:

$$i_D = 2 = \frac{K_N}{2}\left(V_{GS2} - V_T\right)^2 \Rightarrow \text{ Despejando } V_{GS2} = 1{,}6 \text{ V}$$

A continuación calculamos la tensión V_{DS2} a partir de la ecuación de la malla M2:

$$V_{DS2} = 15 - V_{G1} = 15 - V_0 - V_{GS1} = 15 - 3 - 1{,}6 = 10{,}4 \text{ V}$$
$$\text{ya que} \Rightarrow V_{G1} = V_0 + V_{GS1} = 4{,}6 \text{ V}$$

Se confirma que MN2 está en SATURACIÓN debido a que:

$$V_{DS2} \geq V_{GS2} - V_T \Rightarrow 10{,}4 \geq 1{,}6 - 0{,}6$$

Según se pide en el problema $\Rightarrow V_{G2} = V_0 + V_{GS1} + V_{GS2} = 6{,}2 \text{ V}$

Lo único que falta por determinar es la resistencia R_1:

$$R_1 = \frac{15 - V_{G2}}{i_1}$$

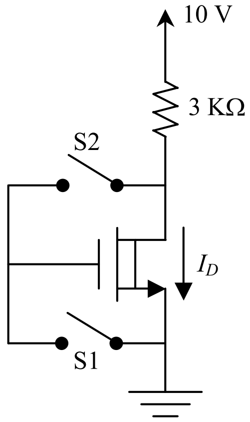
De esta última ecuación tan sólo necesitamos calcular i_1 que es también la misma intensidad que atraviesa la resistencia de 1 MΩ, ya que por la puerta del transistor MOS no circula intensidad. Luego:

$$i_1 = \frac{V_{G2}}{1\,\text{M}\Omega} = \frac{6{,}2}{1\,\text{M}\Omega} = 6{,}2\ \mu\text{A} \quad \text{y} \quad R_1 = \frac{15 - V_{G2}}{i_1} = 1{,}42\ \text{M}\Omega$$

Resultados:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{M1} \rightarrow \text{SATURACIÓN} \begin{cases} V_{G1} = 4{,}6 \text{ V} \\ V_{DS1} = 12 \text{ V} \end{cases} \\ \text{M2} \rightarrow \text{SATURACIÓN} \begin{cases} V_{G2} = 6{,}2 \text{ V} \\ V_{DS2} = 10{,}4 \text{ V} \end{cases} \\ I_0 = 2 \text{ mA} \ ; \ R_S = 1{,}5 \text{ K}\Omega \ ; \ R_1 = 1{,}42 \text{ M}\Omega \end{array}}$$

Ejercicio 4.1.4.



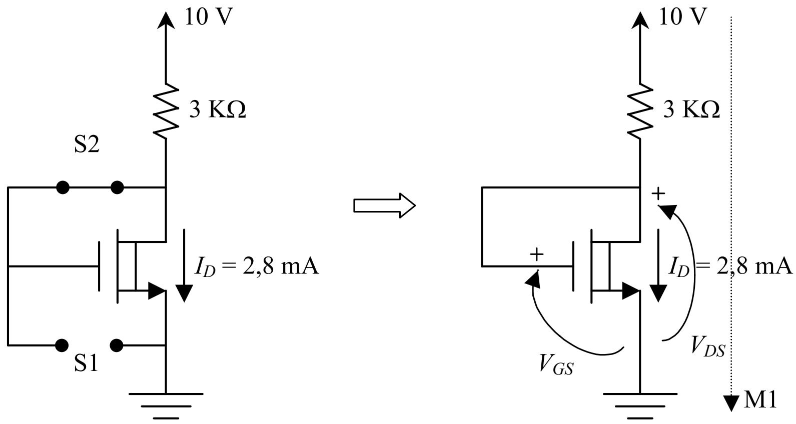
En el siguiente circuito se conoce el valor de la intensidad I_D para las siguientes combinaciones de los interruptores S1 y S2:

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{S1 abierto}\\ \textbf{S2 cerrado}\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{I_D = 2{,}8\ \mathrm{mA}};\ \left.\begin{array}{l}\textbf{S1 cerrado}\\ \textbf{S2 abierto}\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{I_D = 1{,}4\ \mathrm{mA}}$$

Calcular el valor de los parámetros K_N y V_P del transistor MOS.

Solución:

1º.- S1 abierto, S2 cerrado



Para este caso se aprecia en la figura anterior que los valores de V_{GS} y V_{DS} coinciden, o dicho de otra manera, la tensión entre la puerta y el drenador del transistor MOS es cero. Al ser éste de DEPLEXIÓN y de canal N será imposible que se encuentre en saturación, ya que la tensión umbral (tensión PINCH-OFF en los MOS de deplexión) es siempre menor que cero. Esto lo demostramos a través de las condiciones de saturación:

$$\text{Suponemos SATURACIÓN} \rightarrow \text{Condiciones}: \begin{cases} V_{GS} \geq V_P \\ V_{DS} \geq V_{GS} - V_P \end{cases}$$

$$\text{Pero como } V_{DS} = V_{GS} \Rightarrow V_{GS} \geq V_{GS} - V_P \Rightarrow 0 \geq -V_P \Rightarrow V_P \geq 0$$

(lo cual es IMPOSIBLE porque V_P es siempre mayor que cero)

Por tanto la única posibilidad es suponerlo en ÓHMICA, ya que la intensidad es mayor que cero y por tanto el caso de corte queda descartado.

Suponemos ÓHMICA:

$$V_{DS} = V_{GS}$$

$$\text{Condiciones} \rightarrow \begin{cases} V_{GS} \geq V_P \Rightarrow V_{DS} \geq V_P \text{ (Cond. 1)} \\ V_{DS} \leq V_{GS} - V_P \Rightarrow V_P \leq 0 \text{ (Siempre se cumple)} \end{cases}$$

$$\text{Modelo} \rightarrow I_D = K_N (V_{GS} - V_P - \frac{V_{DS}}{2}) V_{DS}$$

Como nos dan el valor de la intensidad I_D podemos averiguar cuánto vale la tensión V_{DS} planteando la malla M1 en nuestro circuito:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Malla M1} \rightarrow 10 - 3I_D - V_{DS} = 0 \\ I_D = 2{,}8 \text{ mA} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{DS} = 10 - 3 \cdot 2{,}8 = 1{,}6 \text{ V}$$

Si introducimos este valor en la condición 1 tendremos una primera acotación para el valor de V_P, y si lo introducimos en el modelo de la intensidad de drenador tendremos una primera ecuación con 2 incógnitas:

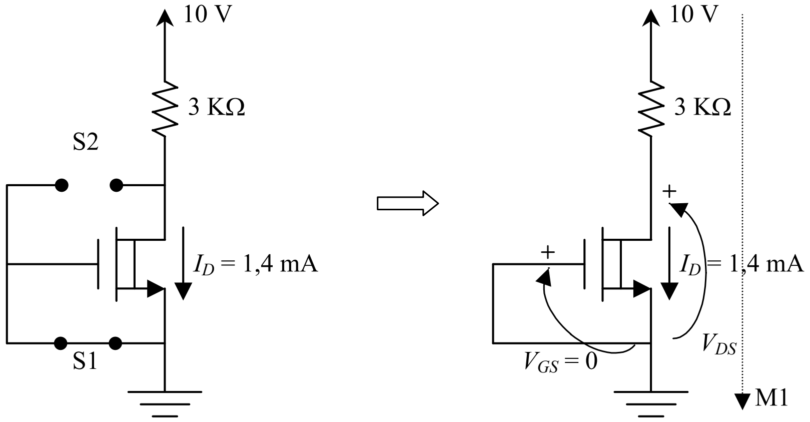
$$\left. \begin{array}{l} V_{DS} = 1{,}6 \text{ V} \\ V_{DS} \geq V_P \text{ (Cond. 1)} \end{array} \right\} \Rightarrow V_P \leq 1{,}6 \text{ V (Se cumple ya que } V_P < 0 \text{ V siempre)}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{DS} = 1{,}6 \text{ V}; I_D = 2{,}8 \text{ mA} \\ I_D = K_N (V_{GS} - V_P - \frac{V_{DS}}{2}) V_{DS} \end{array} \right\} \Rightarrow 2{,}8 = K_N (1{,}6 - V_P - \frac{1{,}6}{2}) 1{,}6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_N (0{,}8 - V_P) = 1{,}75 \text{ (Ecuación 1)}$$

Para resolver esta ecuación será necesario realizar el mismo proceso para la otra combinación de los interruptores, y obtendremos una segunda ecuación. Resolviendo el sistema hallaremos dos valores para V_P, de los cuales sólo uno será válido (el que cumpla todas las condiciones).

2º.- S1 cerrado, S2 abierto



En este caso lo que se aprecia es que la tensión en la puerta del transistor es 0 V, por lo que la $V_{GS} = 0$ V; como hay intensidad circulando (1,4 mA) el transistor deberá estar en un estado de conducción, nunca en CORTE.

Para intentar deducir cuál es el estado correcto (óhmica o saturación) vamos a calcular previamente la tensión V_{DS}, la cual nos puede dar algunas “pistas”. Para ello planteamos la malla M1 y analizamos qué les ocurriría a las condiciones del MOS para ambos estados:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Malla M1} \rightarrow 10 - 3I_D - V_{DS} = 0 \\ I_D = 1{,}4\ \text{mA}\end{array}\right\} \Rightarrow V_{DS} = 10 - 3{\cdot}1{,}4 = 5{,}8\ \text{V}$$

$$\text{Si suponemos ÓHMICA} \rightarrow \begin{cases} V_{GS} \geq V_P \Rightarrow 0 \geq V_P\ \text{(Siempre se cumple)} \\ V_{DS} \leq V_{GS} - V_P \Rightarrow 5{,}8 \leq 0 - V_P \Rightarrow V_P \leq -5{,}8\ \text{V} \end{cases}$$

$$\text{Si suponemos SATURACIÓN} \rightarrow \begin{cases} V_{GS} \geq V_P \Rightarrow 0 \geq V_P\ \text{(Siempre se cumple)} \\ V_{DS} \geq V_{GS} - V_P \Rightarrow 5{,}8 \geq 0 - V_P \Rightarrow V_P \geq -5{,}8\ \text{V} \end{cases}$$

Parece más probable que el valor de V_P se sitúe entre –5,8 V y 0 V a que sea menor que –5,8 V, por lo que empezaremos probando el caso de SATURACIÓN:

$$\text{Condiciones} \rightarrow \begin{cases} V_{GS} \geq V_P \Rightarrow 0 \geq V_P \text{ (Siempre se cumple)} \\ V_{DS} \geq V_{GS} - V_P \Rightarrow V_P \geq -5{,}8\text{ V (Cond. 2)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Modelo} \rightarrow I_D = \dfrac{K_N}{2}(V_{GS} - V_P)^2 \\ V_{GS} = 0\text{ V}\,;\, I_D = 1{,}4\text{ mA} \end{array}\right\} \Rightarrow 1{,}4 = \frac{K_N}{2}(0 - V_P)^2 \Rightarrow 2{,}8 = K_N(-V_P)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_N \cdot V_P^2 = 2{,}8 \text{ (Ecuación 2)}$$

Ahora sí podemos plantear el sistema de ecuaciones que nos dará dos posibles valores de V_P, los cuales los obtendremos al resolver la ecuación de segundo grado que nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(Ecuación 1)} \rightarrow K_N(0{,}8 - V_P) = 1{,}75 \Rightarrow K_N = \dfrac{1{,}75}{0{,}8 - V_P} \\ \text{(Ecuación 2)} \rightarrow K_N \cdot V_P^2 = 2{,}8 \Rightarrow K_N = \dfrac{2{,}8}{V_P^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1{,}75}{0{,}8 - V_P} = \frac{2{,}8}{V_P^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}75V_P^2 + 2{,}8V_P - 2{,}24 = 0 \Rightarrow V_P \cong \begin{cases} 0{,}58564\text{ V} \\ -2{,}18564\text{ V} \end{cases}$$

Como el valor de V_P debe ser negativo, nos quedamos con la segunda solución, que además cumple la Condición 2 ($V_P \geq -5{,}8$ V), por lo que será el resultado correcto.

Calculamos K_N a partir del valor obtenido de V_P:

$$\left.\begin{array}{l} K_N = \dfrac{2{,}8}{V_P^2} \\ V_P \cong -2{,}18564\text{ V} \end{array}\right\} \Rightarrow K_N \cong 0{,}586\text{ mA/V}^2$$

Para realizar una demostración completa vamos a comprobar igualmente la posibilidad de que el transistor se encuentre en ÓHMICA. Para los valores de V_P menores que –5,8 V probaremos el transistor en dicho estado:

$$\text{Condiciones} \rightarrow \begin{cases} V_{GS} \geq V_P \Rightarrow 0 \geq V_P \text{ (Siempre se cumple)} \\ V_{DS} \leq V_{GS} - V_P \Rightarrow V_P \leq -5{,}8 \text{ V (Cond. 3)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Modelo} \rightarrow I_D = K_N (V_{GS} - V_P - \frac{V_{DS}}{2})\, V_{DS} \\ V_{GS} = 0 \text{ V}\,;\, I_D = 1{,}4 \text{ mA}\,;\, V_{DS} = 5{,}8 \text{ V} \end{array}\right\} \Rightarrow 1{,}4 = K_N (0 - V_P - \frac{5{,}8}{2}) \cdot 5{,}8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}4 = 5{,}8\, K_N (-V_P - 2{,}9) \text{ (Ecuación 3)}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones que nos dará el valor de V_P:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(Ecuación 1)} \rightarrow K_N (0{,}8 - V_P) = 1{,}75 \Rightarrow K_N = \dfrac{1{,}75}{0{,}8 - V_P} \\ \text{(Ecuación 3)} \rightarrow 1{,}4 = 5{,}8\, K_N (-V_P - 2{,}9) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}4 = 5{,}8 \cdot \frac{1{,}75}{0{,}8 - V_P} \cdot (-V_P - 2{,}9) \Rightarrow 1{,}4\,(0{,}8 - V_P) = 10{,}15\,(-V_P - 2{,}9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1{,}4 - 10{,}15)\, V_P = 1{,}12 + 29{,}435 \Rightarrow V_P = -3{,}492 \text{ V}$$

En este caso obtenemos únicamente un valor posible de V_P , el cual NO cumple la Condición 3 ($V_P \leq -5{,}8$ V), por lo que el resultado no es correcto, y por tanto no se puede dar que el transistor MOS se encuentre en ÓHMICA para esta combinación de los interruptores.

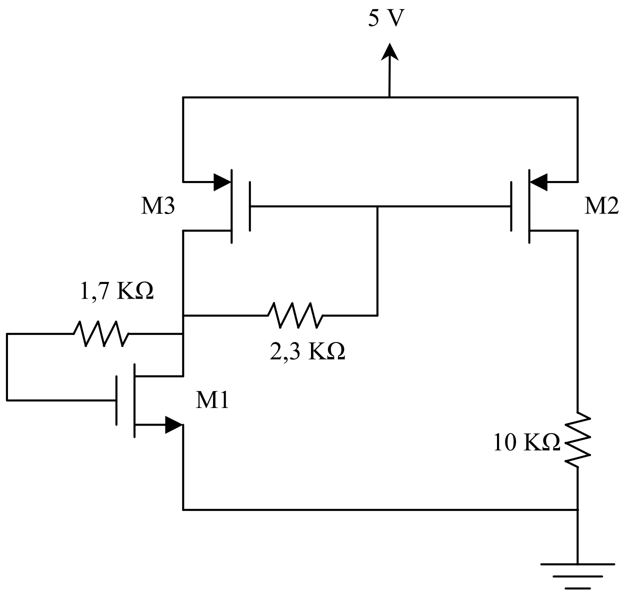
Resultados:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{S1 abierto, S2 cerrado} \rightarrow \text{Transistor en ÓHMICA} \\ \text{S1 cerrado, S2 abierto} \rightarrow \text{Transistor en SATURACIÓN} \\ \left.\begin{array}{l} K_N \cong 0{,}586 \text{ mA/V}^2 \\ V_P \cong -2{,}18564 \text{ V} \end{array}\right\} \end{array}}$$

Ejercicio 4.1.5.

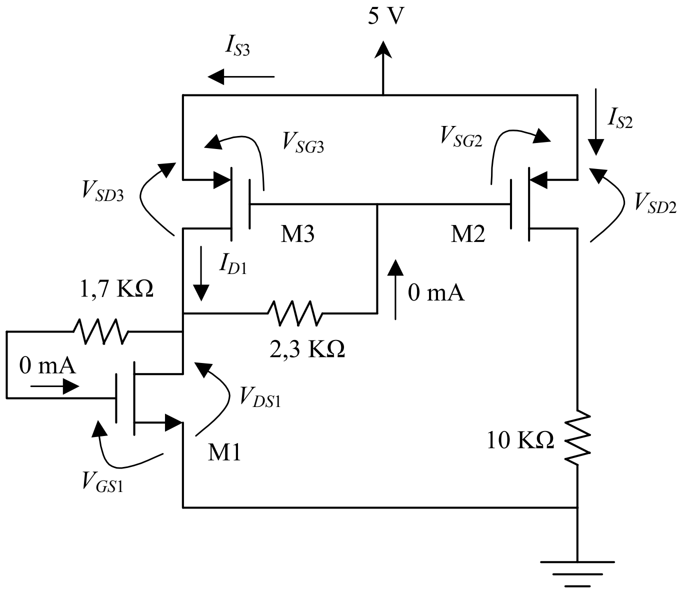
Calcula el punto de trabajo de todos los transistores que aparecen en el circuito de la figura.

DATOS: $K_N = 0{,}9$ mA/V^2 y $V_{TN} = 1$ V; $K_P = 0{,}4$ mA/V^2 y $V_{TP} = 2$ V.



Solución:

Podemos observar que las resistencias de 1,7 KΩ y de 2,3 KΩ no tienen efecto sobre el circuito, ya que a través de las puertas de los transistores MOSFET no circula corriente, luego la caída de tensión en esas resistencias es nula. Tan sólo conectan la puerta con el drenador de modo que para el transistor M1, $V_{GS1} = V_{DS1}$, por lo tanto M1 está en saturación ya que $V_{DS1} \geq V_{GS1} - V_{TN}$, de lo cual se deduce que $V_{TN} \geq 0$. Y lo mismo sucede para el transistor M3 ya que $V_{SG3} = V_{SD3}$, luego también se encuentra en saturación.



Observando el circuito de la figura anterior se aprecia que la intensidad que circula a través de M3 es la misma que circula a través de M1 ya que $I_{S3} = I_{D1}$. Además $V_{SG2} = V_{SG3}$.

Por otro lado, a partir del circuito deducimos que:

$$V_{SD3} + V_{DS1} = 5 \Rightarrow V_{SD3} = 5 - V_{DS1}$$

Si M3 está en saturación:

$$I_{S3} = I_{D1} = \frac{K_P}{2}(V_{SG3} - V_{TP})^2 = \frac{K_N}{2}(V_{GS1} - V_{TN})^2$$

En la ecuación anterior aparecen 2 variables, V_{SG3} y V_{GS1}. Expresando dichas variables en función de V_{DS1} resulta:

$$\frac{K_P}{2}((5 - V_{DS1}) - V_{TP})^2 = \frac{K_N}{2}(V_{DS1} - V_{TN})^2$$

Sustituyendo valores tenemos que:

$$\frac{0{,}4}{2}(5 - V_{DS1} - 2)^2 = \frac{0{,}9}{2}(V_{DS1} - 1)^2 \Rightarrow 5V_{DS1}^2 + 6V_{DS1} - 27 = 0$$

Resolviendo obtenemos dos raíces, 1,8 V y –3 V. Esta última solución es físicamente incorrecta y la descartamos. Luego V_{DS1} = 1,8 V.

A partir de este resultado obtenemos V_{GS1} = 1,8 V y también:

$$V_{SD3} = 5 - V_{DS1} = 3{,}2\text{V} = V_{SG3} = V_{SG2}$$

La intensidad que circula por M1 y por M3:

$$I_{D1} = \frac{K_N}{2}(1{,}8 - 1)^2 = 0{,}288\text{ mA} = \frac{K_P}{2}(3{,}2 - 2)^2 = I_{S3}$$

Comprobamos que ambos transistores se encuentran en saturación:

$$V_{DS1} \geq V_{GS1} - V_{TN} \Rightarrow 1{,}8 \geq 1{,}8 - 1 \;\text{ y }\; V_{SD3} \geq V_{SG3} - V_{TP} \Rightarrow 3{,}2 \geq 3{,}2 - 2$$

Para el transistor M2 podemos suponer que también se encuentra en saturación, y al tener las mismas características que M3:

$$I_{S2} = \frac{K_P}{2}(3{,}2 - 2)^2 = 0{,}288\text{ mA}$$

A partir de la malla de salida del transistor M2:

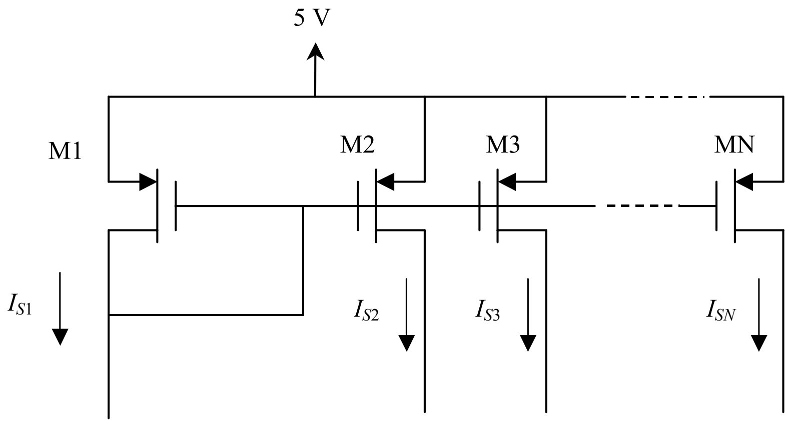
$$V_{SD2} = 5 - I_{S2} \cdot 10\text{ K}\Omega = 5 - 0{,}288 \cdot 10\text{ K}\Omega = 2{,}12\text{ V} \qquad (1)$$

Confirmamos que M2 esté saturado:

$$V_{SD2} \geq V_{SG2} - V_{TP} \Rightarrow 2{,}12 \geq 3{,}2 - 2$$

Como hemos podido apreciar la intensidad que circula por M3 es la misma que circula por M2 (I_{S3} = I_{S2}). A este tipo de circuito se le denomina “espejo de corriente” ya que la intensidad es “reflejada” y podemos crear réplicas de dicha intensidad y utilizarlas en cualquier otra parte del circuito. Los espejos de corriente son muy utilizados en el diseño electrónico de tipo analógico.

En la figura siguiente podemos observar un espejo de corriente que utiliza transistores de tipo P:



La intensidad I_{S1} es "replicada" de modo que $I_{S2} = I_{S3} = ... = I_{SN} = I_{S1}$.

Resumiendo los resultados del problema:

$$\text{M1} \rightarrow \text{SATURACIÓN} \begin{cases} V_{GS1} = V_{DS1} = 1{,}8 \text{ V} \\ I_{D1} = 0{,}288 \text{ mA} \end{cases}$$

$$\text{M2} \rightarrow \text{SATURACIÓN} \begin{cases} V_{SG2} = 3{,}2 \text{ V} \\ V_{SD2} = 2{,}12 \text{ V} \\ I_{S2} = 0{,}288 \text{ mA} \end{cases}$$

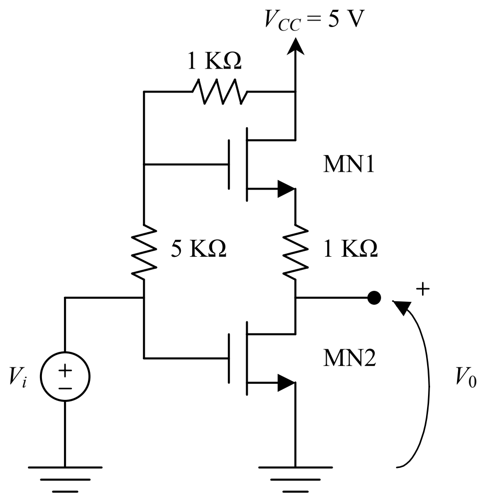
$$\text{M3} \rightarrow \text{SATURACIÓN} \begin{cases} V_{SG3} = V_{SD3} = 3{,}2 \text{ V} \\ I_{S3} = 0{,}288 \text{ mA} \end{cases}$$

Ejercicio 4.1.6.

Resuelva el circuito de la figura indicando el estado de todos los dispositivos, el valor de la tensión V_0 y la potencia consumida para los dos casos siguientes:

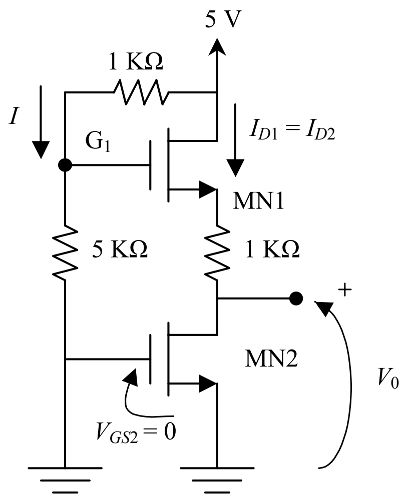
a) $V_i = 0$ V
b) $V_i = 5$ V

Datos MOSFETs:
K_N =1 mA/V^2,
V_T = 1 V



Solución:

a) Para $V_i = 0$ V, el circuito queda de la siguiente forma:



La tensión V_{GS2} del transistor MN2 es igual a 0, luego $V_{GS2} < V_T$ y por lo tanto MN2 está en corte e $I_{D2} = 0$.

Para el transistor MN1 tenemos que $I_{D1} = I_{D2} = 0$, por lo tanto no existe caída de tensión en la resistencia de salida de 1 KΩ.

Suponiendo MN1 en saturación:

$$I_{D1} = 0 = \frac{K_N}{2}(V_{GS1} - V_T)^2 \Rightarrow V_{GS1} = V_T = 1\,\text{V}$$

A continuación debemos comprobar si el transistor está realmente en saturación mediante la condición $V_{DS1} \geq V_{GS1} - V_T$:

$$\left.\begin{array}{l} V_{DS1} = 5 - V_0 \\ V_{GS1} = V_{G1} - V_0 \\ V_{G1} = I \cdot 5\text{K}\Omega \\ I = \dfrac{5}{6\,\text{K}\Omega} = 0{,}833\,\text{mA} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 - V_0 \geq V_{G1} - V_0 - V_T \Rightarrow 5 - V_0 \geq 4{,}16 - V_0 - V_T \Rightarrow$$

$$V_T > 4{,}16 - 5 \Rightarrow 1 \geq -0{,}84 \Rightarrow \text{ MN1 está en saturación.}$$

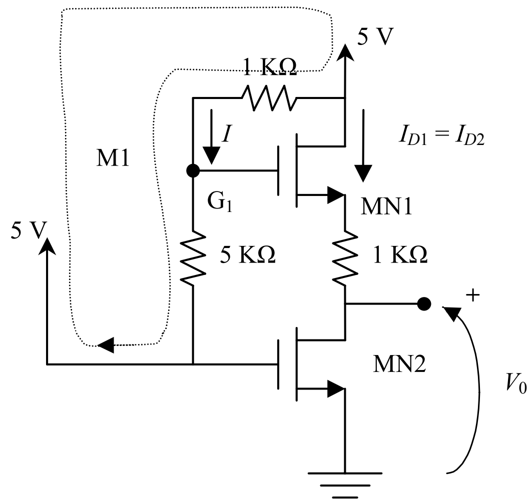
La tensión de salida $V_0 = V_{G1} - V_T = 4{,}16 - 1 = 3{,}16\,\text{V}$

En resumen, MN2 en CORTE, MN1 en SATURACIÓN.

La potencia consumida por el circuito o, lo que es lo mismo, aportada por la fuente de alimentación es:

$$P(V_i = 0) = V_{CC} \cdot (I + I_{D1}) = 5 \cdot (0{,}833 + 0) = 4{,}16\,\text{mWatios}$$

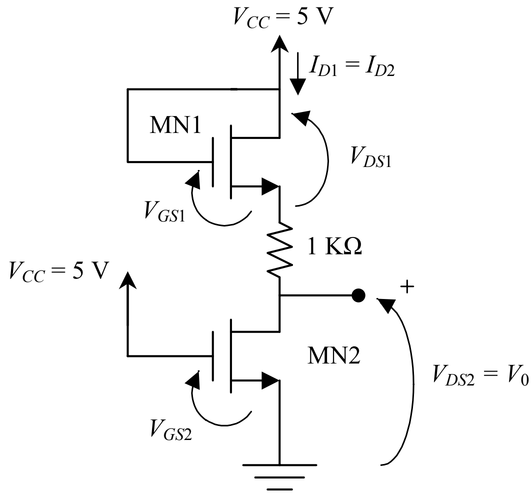
b) Para V_i = 5 V la resolución es algo más compleja. El circuito quedaría como se aprecia a la derecha:



Para el cálculo de la corriente I obtenemos la ecuación de la malla M1 de la figura, recordando que la corriente de puerta de un MOSFET es nula:

$$-5+5+I\cdot(5+1)=0 \Rightarrow I=0$$

Por lo tanto no hay caída de tensión en las resistencias, la tensión V_{G1} = 5 V y el circuito puede simplificarse según aparece a continuación:



Observamos que $V_{GS1} = V_{DS1}$, luego lo más lógico es suponer MN1 en saturación ya que $V_{DS1} \geq V_{GS1} - V_T \Rightarrow 0 \geq -V_T \Rightarrow V_T \geq 0$ de tal forma que la suposición, MN1 en SATURACIÓN, es correcta.

La intensidad que pasa por MN1 es:

$$I_{D1} = \frac{K_N}{2}\left(V_{GS1} - V_T\right)^2 \qquad (1)$$

El transistor MN2 tiene una tensión puerta-drenador $V_{GS2} = 5 > V_T$. Podemos suponer que se encuentra en zona lineal, lo cual deberemos confirmar posteriormente con los resultados obtenidos.

La intensidad que circula a través de MN2 es:

$$I_{D2} = K_N\left(V_{GS2} - V_T - \frac{V_{DS2}}{2}\right)\cdot V_{DS2} \qquad (2)$$

Además $I_{D2} = I_{D1}$ (3)

Podemos obtener una última ecuación de malla, comenzando por el nudo de tierra hasta llegar a la fuente de alimentación de 5 V:

$$-V_{DS2} - I_{D1}\cdot R - V_{DS1} + 5 = 0 \qquad (4)$$

Agrupando las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se obtiene un sistema de ecuaciones con 4 incógnitas. Sustituyendo los datos conocidos en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$I_{D1} = \frac{1}{2}(V_{GS1} - 1)^2 \qquad (5)$$

$$I_{D1} = I_{D2} = \left(4 - \frac{V_{DS2}}{2}\right)\cdot V_{DS2} \qquad (6)$$

$$-V_{DS2} - V_{GS1} + 5 = I_{D1} \qquad (7)$$

Desarrollando (5) e igualando con (6):

$$\frac{1}{2}\cdot\left(V_{GS1}^2 - 2\cdot V_{GS1} + 1\right) = 4\cdot V_{DS2} - \frac{V_{DS2}^2}{2} \Rightarrow V_{GS1}^2 - 2\cdot V_{GS1} - 8\cdot V_{DS2} + V_{DS2}^2 + 1 = 0 \qquad (8)$$

Desarrollando (5) e igualando con (7):

$$\frac{1}{2}\cdot\left(V_{GS1}^2 - 2V_{GS1} + 1\right) = 5 - V_{DS2} - V_{GS1} \Rightarrow V_{GS1}^2 - 2\cdot V_{DS2} - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{DS2} = \frac{9 - V_{GS1}^2}{2} \qquad (9)$$

Sustituyendo (9) en (8) y después de simplificar obtenemos la siguiente ecuación:

$$V_{GS1}^4 + 2\cdot V_{GS1}^2 - 8\cdot V_{GS1} - 59 = 0$$

Resolviendo se obtienen dos raíces dobles:

$$V_{GS1} = -2{,}33\ \text{V} \ \text{ y } \ V_{GS1} = 2{,}845\ \text{V}$$

La única físicamente válida es $V_{GS1} = 2{,}845$ V.

Y para el resto de variables obtenemos:

$$I_{D1} = 1{,}703\,\text{mA},\ V_{DS2} = 0{,}4518\ \text{V},\ V_0 = 0{,}4518\ \text{V}$$

Resta por confirmar que MN2 se encuentra en zona óhmica:

$$V_{DS2} \le V_{GS2} - V_T \Rightarrow 0{,}4518 \le 5 - 1 \Rightarrow \text{ Se cumple}$$

La potencia consumida en este caso es:

$$P(V_i = 5) = V_{CC} \cdot (I + I_{D1}) = 5 \cdot (0 + 1{,}703\,\text{mA}) = 8{,}515\,\text{mW}$$

Resumiendo los resultados:

$$\text{a)}\, V_i = 0\ \text{V}: \begin{cases} \text{MN1} \rightarrow \text{SATURACIÓN}: V_{GS1} = 1\ \text{V}\,; V_{DS1} = 1{,}84\ \text{V}\,; I_{D1} = 0\ \text{mA} \\ \text{MN2} \rightarrow \text{CORTE}: V_{GS2} = 0\ \text{V}\,; I_{D2} = 0\ \text{mA} \\ V_0 = 3{,}16\ \text{V}\,; P = 4{,}16\,\text{mW} \end{cases}$$

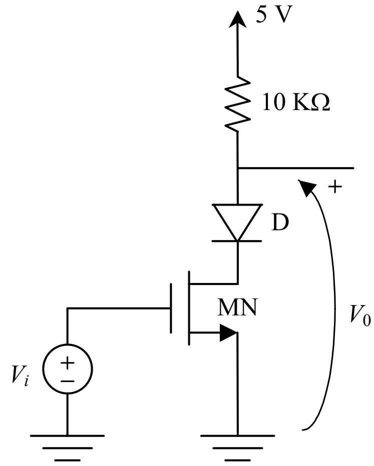
$$\text{b)}\, V_i = 5\ \text{V}: \begin{cases} \text{MN1} \rightarrow \text{SATURACIÓN}: V_{GS1} = V_{DS1} = 2{,}845\ \text{V}\,; I_{D1} = 1{,}703\,\text{mA} \\ \text{MN2} \rightarrow \text{ÓHMICA}: V_{GS2} = 5\ \text{V}\,; V_{DS2} = 0{,}4518\ \text{V}\,; I_{D2} = 1{,}703\,\text{mA} \\ V_0 = 0{,}4518\ \text{V}\,; P = 8{,}515\,\text{mW} \end{cases}$$

Ejercicio 4.1.7.

En el siguiente circuito calcular el estado del diodo D y del transistor MN, así como el valor de salida V_0 para las siguientes combinaciones de V_i:

a) $V_i = 0$ V
b) $V_i = 5$ V

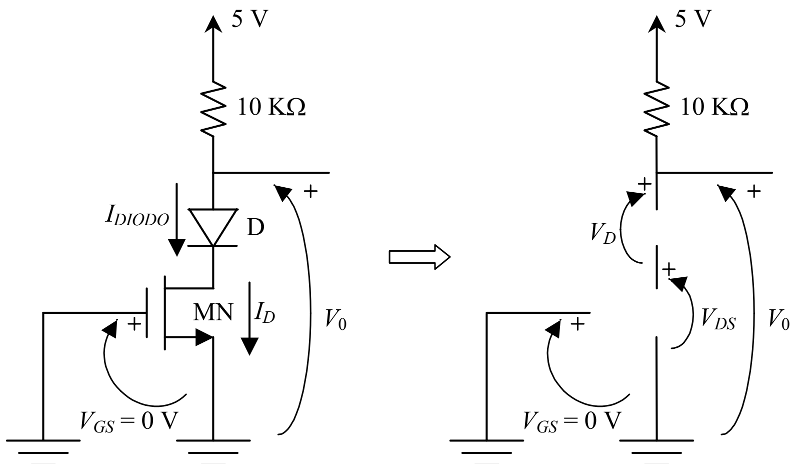
Datos :
$K_N = 2$ mA/V^2
$V_T = 2$ V
$V_\gamma = 0,7$ V (Modelo con tensión umbral para el diodo)



Solución:

a) $V_i = 0$ V

Para este caso en el que la tensión de entrada V_i es igual a cero, lo más probable que suceda es que el transistor esté en corte, ya que tanto a la puerta como a la fuente del mismo llegan 0 V, por lo que su tensión V_{GS} será cero, menor que la tensión umbral:



Por tanto MN estará en CORTE, y al no circular intensidad a través de él ($I_D = 0$), tampoco circulará intensidad a través del diodo ($I_D = I_{DIODO} = 0$), por lo que estará en OFF:

$$\text{Condiciones} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{MN CORTE} \rightarrow V_{GS} \leq V_T \\ \text{D OFF} \rightarrow V_D \leq V_\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Como tenemos } V_{GS} = V_i = 0 \text{ V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leq 2 \text{ (Se cumple)} \\ V_D \leq 0{,}7 \text{ V} \end{array}\right\}$$

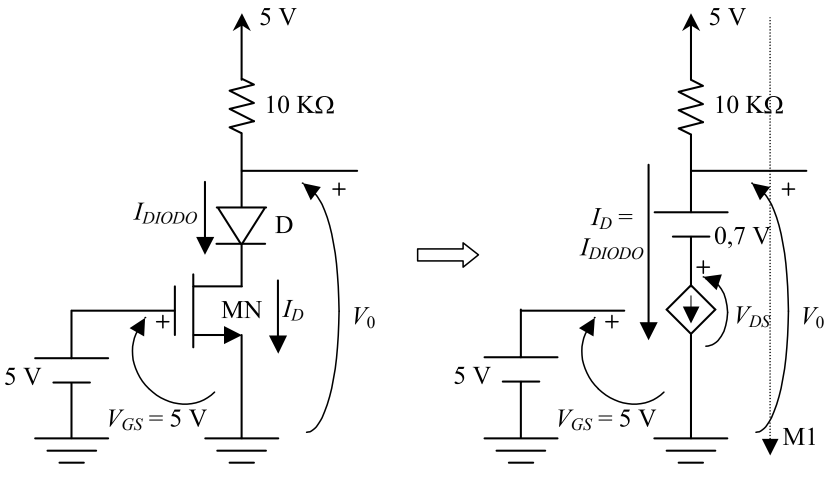
$$\text{Modelo} \rightarrow I_D = I_{DIODO} = 0 \text{ mA}$$

Para comprobar que la condición del diodo se cumple habría que calcular el valor concreto de V_D, pero esto no es posible ya que el lado N del diodo está completamente "al aire", es decir, no está conectado a ningún sitio. Lo que sí está claro es que por ahí no va a pasar intensidad ya que el MOS está cortado, por tanto la única posibilidad para el diodo es que esté en OFF.

Se aprecia claramente que el valor de V_0 será de 5 V, al no pasar intensidad por la resistencia de 10 KΩ y por tanto no caer tensión en la misma.

b) $V_i = 5$ V

En esta situación tendremos que analizar el siguiente circuito; vamos a suponer que el transistor conduce en SATURACIÓN, lo cual obligará a que el diodo esté en ON:



Planteamos las condiciones y los modelos:

$$\text{Condiciones} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{MN SAT.} \rightarrow \begin{cases} V_{GS} \geq V_T \\ V_{DS} \geq V_{GS} - V_T \end{cases} \\ \text{D ON} \rightarrow I_{DIODO} = I_D \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 \geq 2 \text{ (Se cumple)} \\ V_{DS} \geq 5 - 2 = 3 \text{ (Cond. 1)} \\ I_D \geq 0 \text{ (Cond. 2)} \end{array} \right\}$$

$$\text{Modelos} \rightarrow \left. \begin{array}{l} I_D = \dfrac{K_N}{2}(V_{GS} - V_T)^2 \\ V_D = 0{,}7 \text{ V} \end{array} \right\}$$

Por tanto queda comprobar las condiciones 1 y 2. Para ellos aplicamos el modelo de la intensidad I_D y averiguamos su valor:

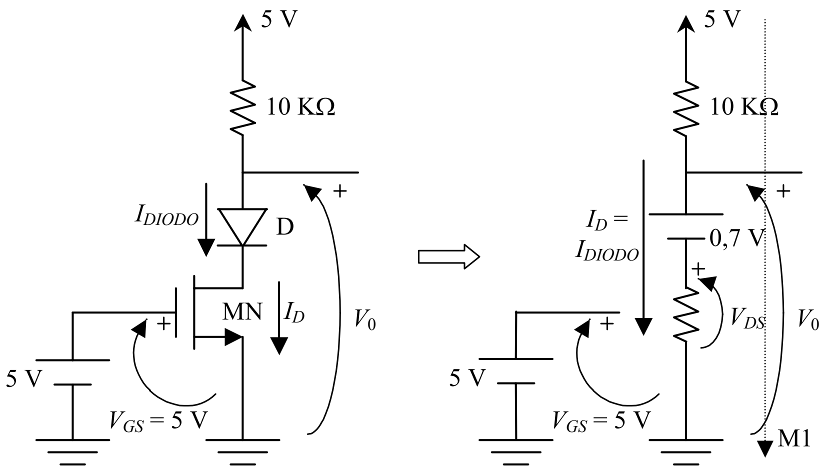
$$I_D = \frac{K_N}{2}(V_{GS} - V_T)^2 \Rightarrow I_D = \frac{2}{2}(5-2)^2 = 9 \text{ mA (Se cumple Cond. 2)}$$

Y a continuación realizamos la malla M1 para calcular V_{DS}:

$$\text{Malla M1} \rightarrow 5 - 10 I_D - 0{,}7 - V_{DS} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_{DS} = 5 - 10 \cdot 9 - 0{,}7 = -85{,}7 \\ V_{DS} \geq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{NO cumple la Cond. 1}$$

Por tanto se deduce que el transistor NO está en SATURACIÓN. Lo probaremos a continuación en ÓHMICA mientras el diodo lo mantenemos en ON:



De nuevo planteamos condiciones y modelos:

$$\text{Condiciones} \rightarrow \begin{matrix} \text{MN ÓHM.} \rightarrow \begin{cases} V_{GS} \geq V_T \\ V_{DS} \leq V_{GS} - V_T \end{cases} \\ \text{D ON} \rightarrow I_{DIODO} = I_D \geq 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \begin{cases} 5 \geq 2 \text{ (Se cumple)} \\ V_{DS} \leq 5 - 2 = 3 \text{ (Cond. 1)} \end{cases} \\ I_D \geq 0 \text{ (Cond. 2)} \end{matrix} \right\}$$

$$\text{Modelos} \rightarrow \left. \begin{matrix} I_D = K_N (V_{GS} - V_T - \frac{V_{DS}}{2}) V_{DS} \\ V_D = 0{,}7 \text{ V} \end{matrix} \right\}$$

Ahora la intensidad depende de otra variable más, V_{DS}, por lo que necesitaremos plantear un sistema con 2 ecuaciones y 2 incógnitas (I_D y V_{DS}). La segunda ecuación la obtendremos, como de costumbre, realizando una malla (la M1):

$$\left. \begin{matrix} \text{Modelo} \rightarrow I_D = K_N (V_{GS} - V_T - \frac{V_{DS}}{2}) V_{DS} \\ \text{Malla M1} \rightarrow 5 - 10 I_D - 0{,}7 - V_{DS} = 0 \end{matrix} \right\}$$

Despejamos la I_D e igualamos los términos, tras lo cual obtendremos una ecuación de segundo grado que nos dará dos valores de V_{DS}:

$$\left. \begin{matrix} \text{Modelo} \rightarrow I_D = 2 (5 - 2 - \frac{V_{DS}}{2}) V_{DS} \\ \text{Malla M1} \rightarrow I_D = \frac{4{,}3 - V_{DS}}{10} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2 (3 - \frac{V_{DS}}{2}) V_{DS} = \frac{4{,}3 - V_{DS}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6V_{DS} - V_{DS}^2 = 0{,}43 - 0{,}1V_{DS} \Rightarrow V_{DS}^2 - 6{,}1V_{DS} + 0{,}43 = 0 \Rightarrow V_{DS} \cong \begin{cases} 0{,}0713 \text{ V} \\ 6{,}02867 \text{ V} \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas tenemos que quedarnos con la que cumpla la condición 1:

$$\left. \begin{matrix} \text{(Cond. 1)} \rightarrow V_{DS} \leq 3 \\ V_{DS} \cong 0{,}0713 \text{ V ó } V_{DS} \cong 6{,}02867 \text{ V} \end{matrix} \right\} \Rightarrow V_{DS} \cong 0{,}0713 \text{ V}$$

Para comprobar la condición 2 tenemos que calcular I_D:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Malla M1} \rightarrow I_D = \dfrac{4{,}3 - V_{DS}}{10} \\ V_{DS} \cong 0{,}0713\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow I_D \cong 0{,}42287\ \text{mA (Cumple la Cond. 2)}$$

Por tanto tenemos todas las condiciones verificadas, y el valor de V_0 lo calculamos, como se aprecia en el circuito, sumando 0,7 V a la tensión V_{DS}:

$$V_0 = 0{,}7 + V_{DS} \cong 0{,}7713\ \text{V}$$

Resumiendo los resultados:

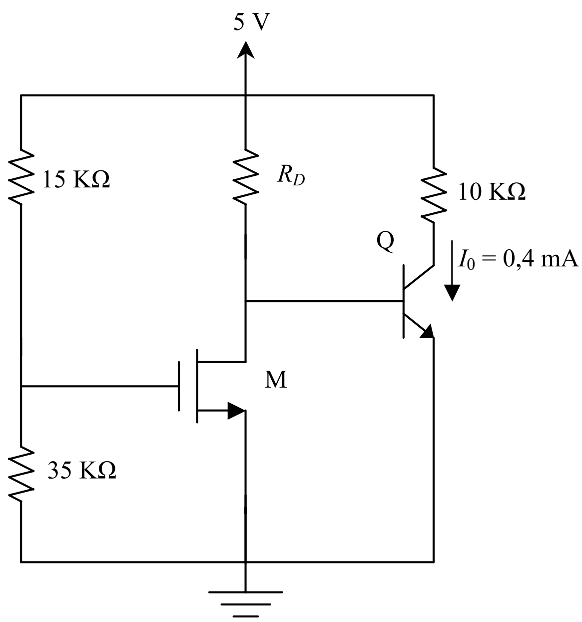
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{a) } V_i = 0\ \text{V} \Rightarrow \text{M CORTE, D OFF, } V_0 = 5\ \text{V} \\ \text{b) } V_i = 5\ \text{V} \Rightarrow \text{M ÓHMICA, D ON} \begin{cases} I_D \cong 0{,}42287\ \text{mA} \\ V_{DS} \cong 0{,}0713\ \text{V} \\ V_0 \cong 0{,}7713\ \text{V} \end{cases} \end{array}}$$

Ejercicio 4.1.8.

En el circuito de la figura se sabe que I_0 = 0,4 mA. Calcular:
a) Zona de trabajo en la que se encuentra el transistor bipolar
b) Zona de trabajo del transistor MOSFET. Valores de V_{DS} y V_{GS}
c) Valor de la resistencia R_D

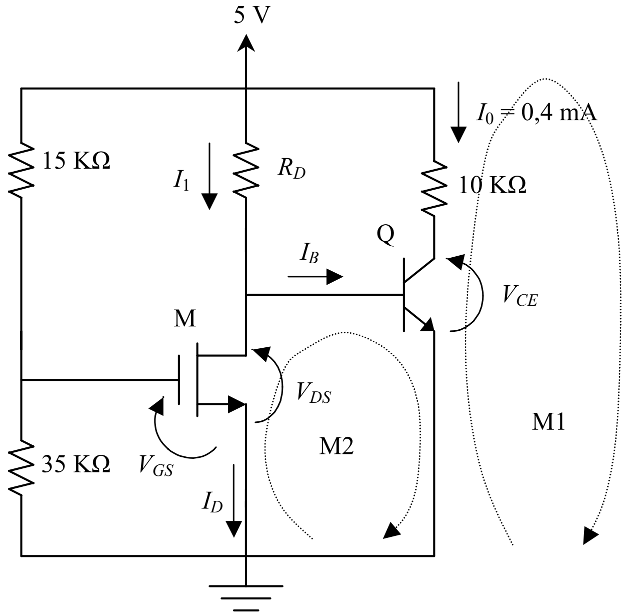
DATOS MOSFET:
K_N = 0,5 mA/V^2, V_T = 2 V

DATOS BIPOLAR:
V_{BEon} = 0,7 V, β = 10,
V_{CEsat} = 0,2 V



Solución:

a) Es obvio que el transistor Q no está en corte ya que a través de su colector circulan 0,4 mA. Debemos determinar si se encuentra en saturación o en zona activa. Para ello bastará con calcular su tensión colector-emisor V_{CE}:



De la malla de salida M1 obtenemos: $10 \cdot I_0 - 5 + V_{CE} = 0 \Rightarrow V_{CE} = 1$, por lo que al ser mayor que 0,2 V deducimos que el transistor se encuentra en zona ACTIVA, con los siguientes datos como punto de operación:

$$Q \rightarrow \begin{cases} V_{CE} = 1\,\text{V} \\ I_B = \dfrac{I_C = I_0}{\beta} = \dfrac{0{,}4}{10} = 0{,}04\text{ mA} \\ V_{BE} = 0{,}7\,\text{V} \end{cases}$$

b) A partir del divisor de tensión formado por las resistencias de 15 KΩ y 35 KΩ podemos determinar la tensión puerta-fuente del MOSFET.

$$V_{GS} = \frac{5}{15+35} \cdot 35 = 3{,}5\text{ V} \Rightarrow \text{El transistor M conduce ya que } V_{GS} \geq V_T$$

Queda por determinar si lo hace en saturación o en óhmica. Suponiendo zona de saturación:

$$I_D = \frac{K_N}{2}\left(V_{GS} - V_T\right)^2 = \frac{0{,}5}{2}\left(3{,}5-2\right)^2 = 0{,}5625\,\text{mA}$$

Comprobemos que realmente está en saturación mediante la condición $V_{DS} \geq V_{GS} - V_T$. Para ello es necesario determinar el valor de V_{DS}.

De la malla M2 obtenemos:

$$-0{,}7 + V_{DS} = 0 \Rightarrow V_{DS} = 0{,}7\,\text{V}$$

Luego $V_{DS} \geq V_{GS} - V_T \Rightarrow 0{,}7 \geq 3{,}5 - 2$ observamos que no se cumple, luego M no está en saturación.

Supongamos la zona óhmica para M, entonces:

$$I_D = K_N \cdot \left(V_{GS} - V_T - \frac{V_{DS}}{2} \right) \cdot V_{DS} = 0{,}5 \cdot \left(3{,}5 - 2 - \frac{0{,}7}{2} \right) \cdot 0{,}7 = 0{,}4025\,\text{mA}$$

De modo que $I_1 = I_D + I_B = 0{,}4025 + 0{,}04 = 0{,}4425\,\text{mA}$

Comprobemos que M está realmente en zona lineal u óhmica:

$$V_{DS} \leq V_{GS} - V_T \Rightarrow 0{,}7 \leq 3{,}5 - 2 \Rightarrow \text{M está en óhmica}$$

c) El valor de la resistencia $R_D = \dfrac{5 - V_{DS}}{I_1} = \dfrac{5 - 0{,}7}{0{,}4425} = 9{,}71\,\text{K}\Omega$

Resumiendo:

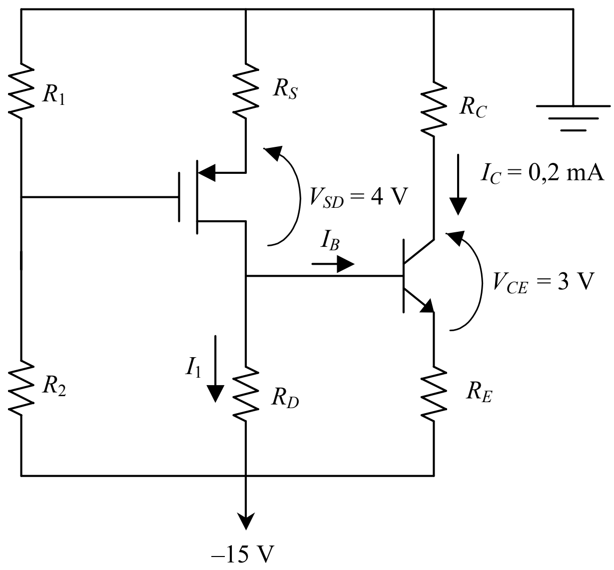
$$\text{Q} \rightarrow \text{ACTIVA} \begin{cases} V_{BE} = 0{,}7\,\text{V} \\ V_{CE} = 1\,\text{V} \\ I_B = 0{,}04\,\text{mA} \\ I_C = I_0 = 0{,}4\,\text{mA} \end{cases} \qquad \text{M} \rightarrow \text{ÓHMICA} \begin{cases} V_{GS} = 3{,}5\,\text{V} \\ V_{DS} = 0{,}7\,\text{V} \\ I_D = 0{,}4025\,\text{mA} \end{cases}$$

$$R_D = 9{,}71\,\text{K}\Omega$$

Ejercicio 4.1.9.

Los transistores del circuito están polarizados según se muestra en la figura. Calcule el valor de las resistencias sabiendo que $I_1 = 10 \cdot I_B$

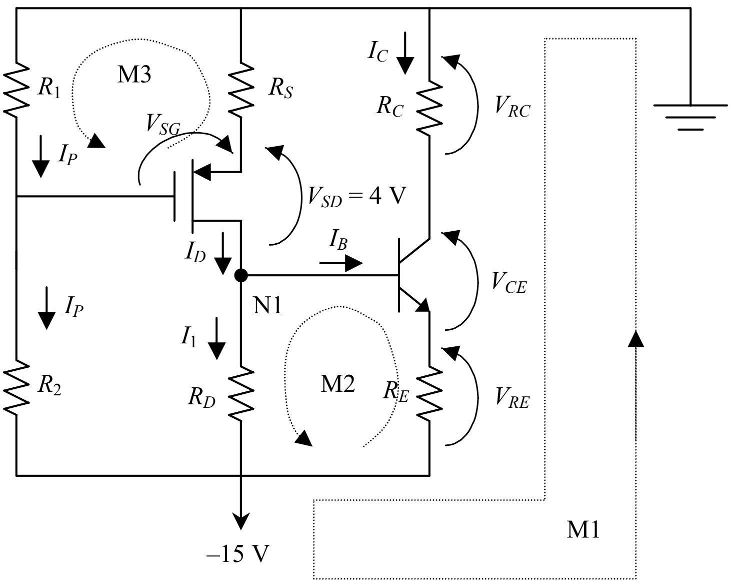
DATOS: MOSFET: $K_P = 0{,}2$ mA/V^2, $V_T = 2$ V
BIPOLAR: $V_{BEon} = 0{,}7$ V, $\beta = 30$, $V_{CEsat} = 0{,}2$ V



Solución:

Se trata de un problema de diseño abierto, es decir, existen varias soluciones que dependerán de los criterios que utilice el diseñador.

Realizaremos el diseño a partir de la figura siguiente:



En concreto elegimos para las resistencias R_C y R_E unas caídas de tensión de 4 y 8 Voltios respectivamente, de modo que se cumpla la ecuación de la malla M1 $\Rightarrow V_{RC} + V_{RE} + V_{CE} - 15 = 0$. Por lo tanto:

$$R_C = \frac{4}{0{,}2\text{ mA}} = 20\text{ K}\Omega$$

Observamos que el transistor bipolar va a trabajar en la zona lineal o zona activa, ya que $V_{CE} = 3 > V_{CEsat}$. Luego resulta que:

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{0{,}2\text{ mA}}{30} = 0{,}0067\text{ mA}$$

$$R_E = \frac{8}{I_C + I_B} = \frac{8}{0{,}2 + 0{,}067} = 38{,}7\text{ K}\Omega$$

A partir de la malla M2 $\Rightarrow -V_{RE} - V_{BEon} + V_{RD} = 0 \Rightarrow -8 - 0{,}7 + I_1 \cdot R_D = 0$

A partir de la ecuación del nudo N1 y teniendo en cuenta que $I_1 = 10 \cdot I_B$ obtenemos la intensidad I_D que pasa a través del MOSFET de canal P:

$$I_D = I_1 + I_B = 0{,}067 + 0{,}0067 = 0{,}0737\text{ mA}$$

Por otro lado, sustituyendo el valor de I_1 en la malla M2 y despejando obtenemos:

$$R_D = \frac{8{,}7}{0{,}067} = 129{,}85\ \mathrm{K\Omega}$$

La caída de tensión en R_S puede calcularse como:

$$V_{RS} = 15 - V_{SD} - V_{RD} = 15 - 4 - 8{,}7 = 2{,}3\ \mathrm{V}$$

Luego el valor de la resistencia:

$$R_S = \frac{2{,}3}{I_D} = \frac{2{,}3}{0{,}0737} = 31{,}20\ \mathrm{K\Omega}$$

Para calcular las resistencias R_1 y R_2 es necesario decidir la zona de trabajo del transistor PMOS. Lo más cómodo es que trabaje en saturación, luego:

$$I_D = 0{,}0737 = \frac{K_P}{2}\left(V_{SG} - V_T\right)^2 \Rightarrow V_{SG}^2 - 4 \cdot V_{SG} + 3{,}263 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado anterior obtenemos dos soluciones, $V_{SG} = 1{,}1415$ y $V_{SG} = 2{,}858$ V, de las cuales la primera no cumple la condición $V_{SG} \geq V_T$ y por lo tanto no es válida. Y para la segunda solución se comprueba que es mayor que la tensión umbral a la vez que confirma el estado de saturación para el transistor, ya que:

$$V_{SD} \geq V_{SG} - V_T \Rightarrow 4 \geq 2{,}858 - 2$$

Para el cálculo del divisor de tensión formado por las resistencias R_1 y R_2 debemos tomar una decisión, ya que existe una infinidad de soluciones que satisfacen las condiciones siguientes:

$$V_{R1} = V_{SG} + V_{RS} = 2{,}858 + 2{,}3 = 5{,}158\ \mathrm{V}$$
$$V_{R2} = 15 - 5{,}158 = 9{,}842\ \mathrm{V}$$

Es necesario plantear un sistema de 2 ecuaciones con R_1 y R_2 como incógnitas. La primera ecuación se obtiene estableciendo, por ejemplo, que la combinación en paralelo de R_1 y R_2 sea igual a 2 MΩ, es decir, $\frac{R_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = 2\ \mathrm{M\Omega}$ (1) . La segunda ecuación la obtenemos a partir de la malla M3:

$$\left.\begin{array}{l} -V_{RS} - V_{SG} + V_{R1} = 0 \Rightarrow V_{R1} = 2{,}3 + 2{,}858 = I_P \cdot R_1 \\ I_P = \dfrac{15}{R_1 + R_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{15}{R_1 + R_2} R_1 = 5{,}158\ \mathrm{V} \qquad (2)$$

Resolvemos el sistema formado por (1) y (2), multiplicando (2) por R_2 y sustituyendo (1):

$$15 \frac{R_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = 5{,}158 \cdot R_2 \Rightarrow 15 \cdot 2\ \mathrm{M\Omega} = 5{,}158 \cdot R_2$$

Despejando R_2 = 5,81 MΩ

Y el valor para R_1 = 3,04 MΩ

Con estos resultados se completa una solución válida de entre otras posibles que satisfacen las condiciones exigidas por el problema.

Resultados:

$$\text{Tomando } V_{R_C} = 4\ \mathrm{V}, V_{R_E} = 8\ \mathrm{V} \text{ y} \begin{cases} \text{Transistor Bipolar} \rightarrow \text{ACTIVA} \\ \text{Transistor MOS} \rightarrow \text{SATURACIÓN} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = 3{,}04\ \mathrm{M\Omega}, R_2 = 5{,}81\ \mathrm{M\Omega} \\ R_S = 31{,}20\ \mathrm{K\Omega}, R_D = 129{,}85\ \mathrm{K\Omega} \\ R_C = 20\ \mathrm{K\Omega}, R_E = 38{,}7\ \mathrm{K\Omega} \end{cases}$$

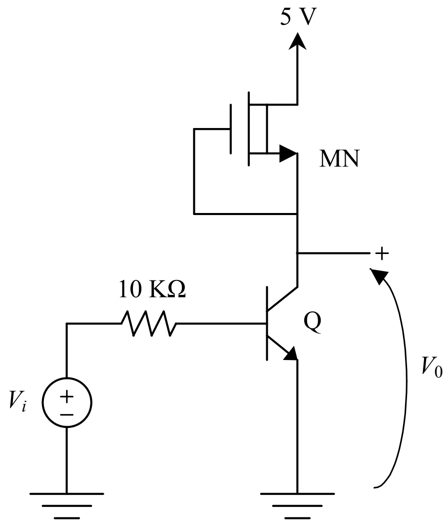
Ejercicio 4.1.10.

Resuelve el circuito de la figura indicando el estado de todos los dispositivos, el valor de la tensión V_0 y la potencia consumida en todos los generadores del circuito para los dos casos siguientes:

a) $V_i = 0{,}2$ V
b) $V_i = 5$ V

Calcular asimismo el Fan-Out de la puerta.

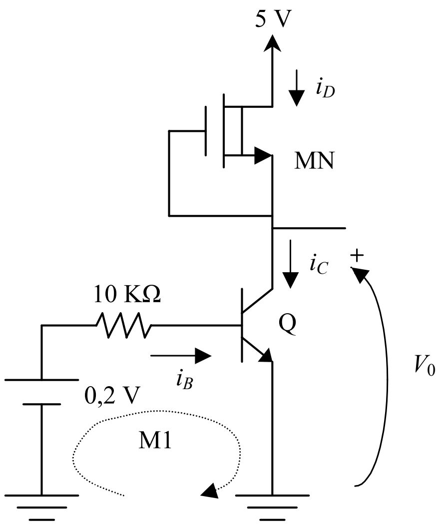
Datos: **MOSFET→ $K_N = 0{,}5$ mA/V^2 y $V_P = -2$ V**
BJT→ $V_{BEon} = 0{,}7$ V, $V_{CEsat} = 0{,}2$ V, $\beta = 50$



Solución:

El transistor MN tiene cortocircuitados su terminal de puerta y de fuente; esto significa que $V_{GS} = 0 > -2\text{ V} = V_P \Rightarrow$ MN nunca estará en CORTE.

a) Para $V_i = 0{,}2$ V el circuito queda como sigue:



A partir de la malla M1:

$$-0{,}2 + 10 \cdot i_B + V_{BE} = 0 \Rightarrow V_{BE} = 0{,}2 - 10 \cdot i_B$$

Como $i_B \geq 0 \Rightarrow V_{BE} = 0{,}2 - 10 \cdot i_B < 0{,}7\ \text{V}$ por lo tanto el transistor bipolar Q estará cortado e $i_C = i_D = 0$.

A continuación determinamos el estado de MN. Supongamos que se encuentra en SATURACIÓN:

$$i_D = \frac{K_P}{2}\left(V_{GS} - V_P\right)^2 = \frac{0{,}5}{2}\left(0 + 2\right)^2 = 1\ \text{mA}$$

Al ser distinto de cero vemos que es imposible, ya que i_D debería ser igual a cero. Por lo tanto es imposible que MN esté en SATURACIÓN.

Supongamos que se encuentra en ÓHMICA:

$$i_D = K_P\left(V_{GS} - V_P - \frac{V_{DS}}{2}\right) \cdot V_{DS} = 0{,}5\left(0 + 2 - \frac{V_{DS}}{2}\right) \cdot V_{DS} = 0$$

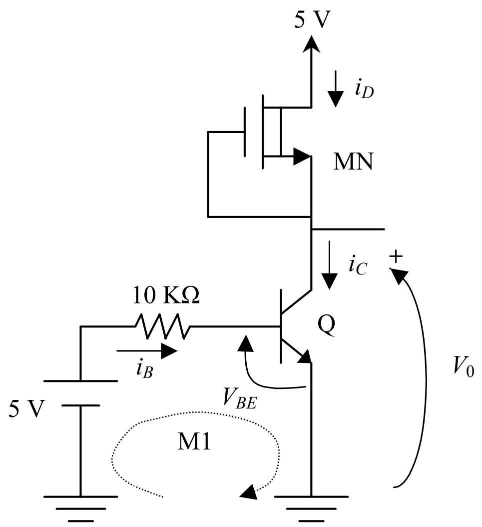
Para anular esta última ecuación existen dos soluciones: $\begin{cases} V_{DS} = 0 \\ V_{DS} = 4 \end{cases}$

Al suponer zona óhmica $\Rightarrow V_{DS} \leq V_{GS} - V_P \Rightarrow V_{DS} \leq 2$ V $\Rightarrow$ Por lo cual la solución correcta es $V_{DS} = 0$ V

En lo referente a la tensión de salida $V_0 = 5 - V_{DS} \Rightarrow V_0 = 5$ V.

Al ser $i_B = i_C = i_D = 0$, la potencia consumida es 0.

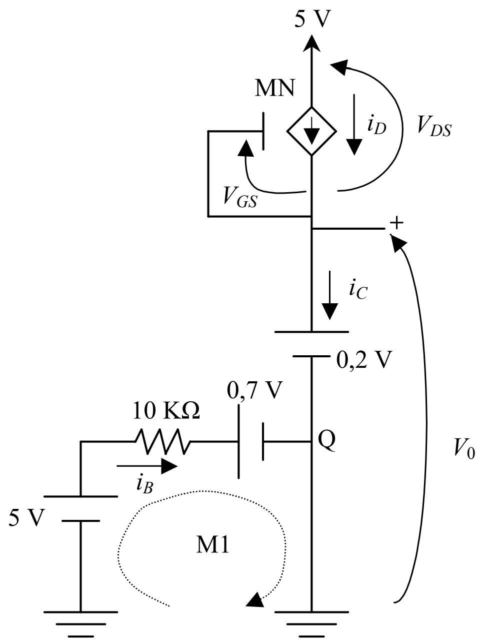
b) El circuito para $V_i = 5$ V queda:



En este caso la tensión de entrada V_i es suficiente para polarizar la unión base-emisor del transistor en sentido directo, con lo cual seguro que Q no estará en Corte.

De los cuatro casos posibles de funcionamiento, a priori, el más simple de analizar es Q→SATURACIÓN y MN→SATURACIÓN.

Sustituyendo los modelos correspondientes, el circuito equivalente resulta:



A partir de la malla M1:

$$-5 + 10 \cdot i_B + 0{,}7 = 0 \Rightarrow i_B = \frac{5 - 0{,}7}{10} = 0{,}43\ \text{mA}$$

$$i_D = i_C = \frac{K_P}{2}\left(V_{GS} - V_P\right)^2 = \frac{0{,}5}{2}\left(0 + 2\right)^2 = 1\ \text{mA}$$

Como hemos supuesto que Q está en SATURACIÓN, se debe cumplir que:

$$\beta \cdot i_B \geq i_C$$

$$\beta \cdot i_B = 50 \cdot 0{,}43 = 21{,}5\ \text{mA} \geq i_C = 1\ \text{mA} \Rightarrow \text{Q está en SATURACIÓN}$$

Como hemos supuesto que MN está en SATURACIÓN, se debe cumplir que:

$$V_{DS} \geq V_{GS} - V_P$$

$$V_{DS} = 5 - 0{,}2 = 4{,}8 \geq 0 - (-2) \Rightarrow \text{MN está en SATURACIÓN}$$

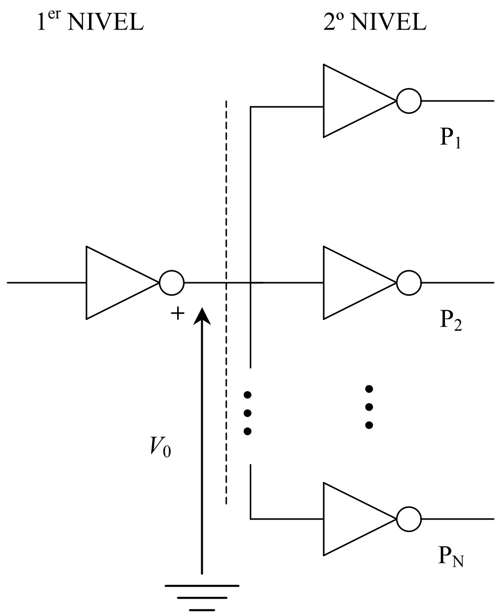
El valor de la tensión de salida: $V_0 = 0{,}2$ V = V_{CEsat}

La potencia consumida es la suma de la potencia consumida de la fuente que alimenta el circuito más la consumida en la entrada. En total:

$$P = 5 \cdot i_D + 5 \cdot i_B = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0{,}43 = 7{,}15 \text{ mW}$$

Por último resta calcular el Fan-Out para la puerta que acabamos de analizar.

La conexión en cascada de puertas de este tipo la podemos observar en la figura siguiente:



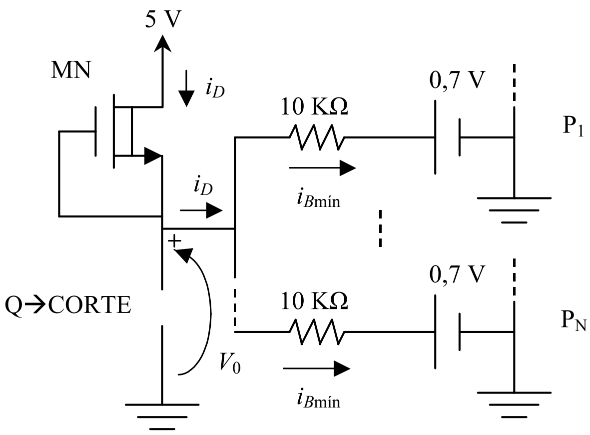
Cuando $V_0 = 0{,}2$ V $\leq V_{BEon}$, los transistores de entrada de las puertas $P_1,...,P_N$ están en CORTE y podría conectarse cualquier número de puertas, lo que equivaldría a un Fan-Out infinito, luego éste no es el estado que limita el Fan-Out de la puerta. El Fan-Out debe calcularse para una salida a nivel alto.

La entrada de cualquiera de las puertas $P_1,...,P_N$ será un '1' lógico cuando sus transistores estén en saturación. El mínimo valor de V_i que garantiza esto viene dado por la tensión V_{IH}. Debemos calcular la intensidad que necesitan en su entrada cada una de las puertas del segundo nivel y aplicarle la condición para mantener en saturación al transistor bipolar:

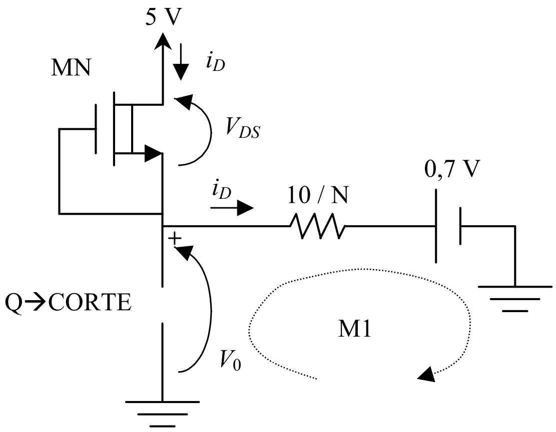
$$i_{B\text{mín}} = \frac{V_{IH} - 0{,}7}{10}$$

$$\beta \cdot i_{B\text{mín}} = i_C \Rightarrow 50 \cdot \frac{V_{IH} - 0{,}7}{10} = 1 \Rightarrow V_{IH} = 0{,}9 \text{ V}$$

La conexión entre la puerta del primer nivel con las del segundo quedaría:



El circuito equivalente agrupando las puertas P_1,..., P_N es:



Sabiendo que para un valor de $V_0 = V_{IH} = 0{,}9$ V se garantiza un nivel de entrada alto, el estado del transistor MN lo podemos deducir a partir de la condición de saturación:

$$V_{DS} \geq V_{GS} - V_P$$
$$V_{DS} = 5 - 0{,}9 = 4{,}1\ \mathrm{V} > 0 - (-2) = -V_P$$

Por lo tanto se confirma que el transistor MN está en SATURACIÓN y la corriente que circula por él es:

$$i_D = \frac{K_P}{2}\left(V_{GS} - V_P\right)^2 = \frac{0{,}5}{2}\left(0 + 2\right)^2 = 1\ \mathrm{mA}$$

Con una intensidad de 1 mA a través de MN se puede garantizar un número máximo de transistores bipolares en saturación (pertenecientes a puertas del segundo nivel) que coincidirá con el valor del Fan-Out.

A partir de la malla M1:

$$V_0 = i_D \cdot \frac{10}{\mathrm{N}} + 0{,}7 \Rightarrow 0{,}9 = 1 \cdot \frac{10}{\mathrm{N}} + 0{,}7 \Rightarrow \mathrm{N} = \frac{10}{0{,}2} \Rightarrow \mathrm{N} = 50 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{FAN\text{-}OUT} = 50$$

Resultados del problema:

$$\text{a) } V_i = 0{,}2\ \mathrm{V} \begin{cases} \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{CORTE}: I_B = I_C = 0\ \mathrm{mA} \\ \mathrm{MN} \rightarrow \text{ÓHMICA}: V_{GS} = V_{DS} = 0\ \mathrm{V}, I_D = 0\ \mathrm{mA} \\ V_0 = 5\ \mathrm{V}, P = 0\ \mathrm{mW} \end{cases}$$

$$\text{b) } V_i = 5\ \mathrm{V} \begin{cases} \mathrm{Q} \rightarrow \text{SATURACIÓN}: I_B = 0{,}43\ \mathrm{mA}, I_C = 1\ \mathrm{mA} \\ \mathrm{MN} \rightarrow \text{SATURACIÓN}: V_{GS} = 0\ \mathrm{V}, V_{DS} = 4{,}8\ \mathrm{V}, I_D = 1\ \mathrm{mA} \\ V_0 = 0{,}2\ \mathrm{V}, P = 7{,}15\ \mathrm{mW} \end{cases}$$

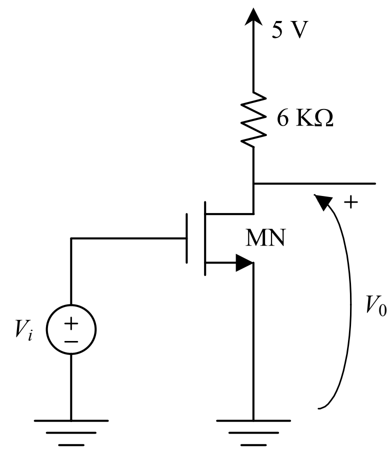
Fan - Out = 50

4.2. CARACTERÍSTICA DE TRANSFERENCIA

Ejercicio 4.2.1.

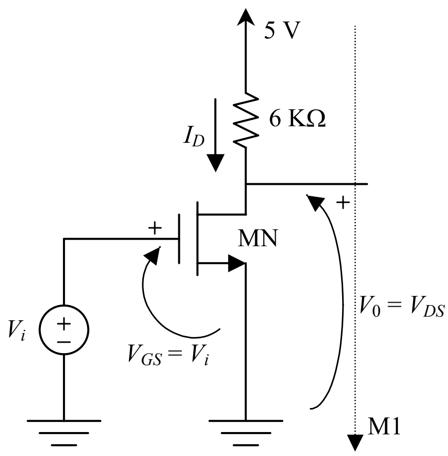
Calcular la característica de transferencia del circuito de la derecha con los siguientes datos:

$\boldsymbol{V_T = 2}$ **V**
$\boldsymbol{K_N = 1}$ **mA/V²**



Solución:

En este circuito tendremos que analizar los tres posibles estados del transistor MOS de acumulación de canal N, que serán CORTE, ÓHMICA Y SATURACIÓN. En cada uno de dichos estados establecemos las condiciones que se deben satisfacer sobre las variables V_{GS} y V_{DS} así como el modelo a aplicar sobre la intensidad I_D:



Se aprecia que en todos los casos el valor de V_i va a coincidir con el de V_{GS} y el de V_0 con el de V_{DS}.

Suponemos MN en CORTE:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Condición} \rightarrow V_{GS} < V_T \Rightarrow V_i < 2\text{ V}\\ \text{Modelo} \rightarrow I_D = 0\end{array}\right\}$$

Realizando la malla M1 obtenemos fácilmente que $V_0 = 5$ V, y este caso será válido cuando V_i sea menor de 2 V.

Suponemos MN en ÓHMICA:

$$\left.\text{Condiciones} \rightarrow \begin{array}{l} V_{GS} \geq V_T \Rightarrow V_i \geq 2\text{ V (Cond. 1)}\\ V_{DS} \leq V_{GS} - V_T \Rightarrow V_0 \leq V_i - 2\text{ (Cond. 2)}\end{array}\right\}$$

$$\text{Modelo} \rightarrow I_D = K_N (V_{GS} - V_T - \frac{V_{DS}}{2}) V_{DS} \Rightarrow I_D = 1 (V_i - 2 - \frac{V_0}{2}) V_0$$

Si aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff a la malla M1 y unimos el resultado con el modelo de I_D formamos un sistema con 2 ecuaciones y 2 incógnitas, el cual podremos resolver. Despejaremos la I_D de ambas ecuaciones y las igualaremos para así averiguar el valor de V_0. Siempre nos interesará calcular en primer lugar el valor de V_{DS} ya que las condiciones indicarán qué valor de los obtenidos es el correcto a la vez que establecen restricciones sobre esta variable (que en este caso coincide con V_0 como hemos visto):

$$\left.\begin{array}{l}\text{M1} \rightarrow 5 - 6I_D - V_0 = 0\\ \text{Modelo} \rightarrow I_D = 1 (V_i - 2 - \frac{V_0}{2}) V_0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_D = \dfrac{5 - V_0}{6}\\ I_D = (V_i - 2 - \frac{V_0}{2}) V_0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5 - V_0}{6} = (V_i - 2 - \frac{V_0}{2}) V_0$$

Simplificando esta expresión llegamos a una ecuación de segundo grado para V_0, la cual tiene la siguiente resolución:

$$3V_0^{\ 2} + (11 - 6V_i) V_0 + 5 = 0 \Rightarrow V_0 = \frac{-(11 - 6V_i) \pm \sqrt{(11 - 6V_i)^2 - 4{\cdot}3{\cdot}5}}{2{\cdot}3} =$$

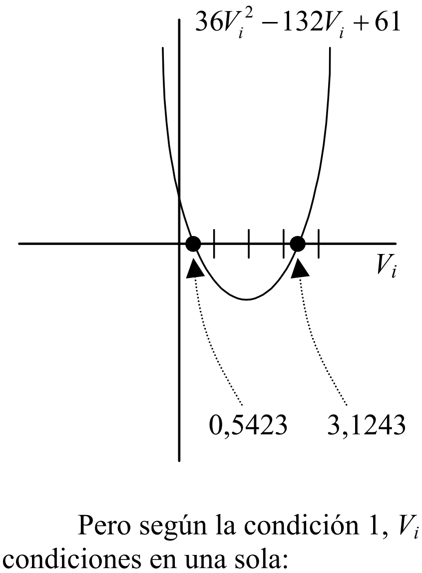
$$= \frac{6V_i - 11 \pm \sqrt{11^2 + 6^2 V_i^2 - 2{\cdot}11{\cdot}6V_i - 60}}{6} = \frac{6V_i - 11 \pm \sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61}}{6}$$

Llegado este punto tenemos que asegurar que la ecuación tiene soluciones reales (no imaginarias), de modo que el contenido de la raíz cuadrada deberá ser mayor que cero. Por tanto planteamos la desigualdad $36V_i^2 - 132V_i + 61 \geq 0$, mediante la cual obtendremos nuevas acotaciones para el valor de V_i que deberán ser compatibles con las condiciones 1 y 2 anteriores.

Para averiguar qué intervalos de valores de V_i cumplen dicha desigualdad calculamos las raíces o cortes por cero de esta ecuación de segundo grado, la cual se corresponde con una parábola abierta hacia arriba, ya que el coeficiente de la V_i al cuadrado es positivo:

$$36V_i^2 - 132V_i + 61 \geq 0 \rightarrow \text{Calculamos las raíces:}$$
$$36V_i^2 - 132V_i + 61 = 0 \Rightarrow V_i = \frac{132 \pm \sqrt{132^2 - 4 \cdot 36 \cdot 61}}{2 \cdot 36} = \frac{132 \pm \sqrt{8640}}{72} \cong$$
$$\cong \frac{132 \pm 92{,}9516}{72} \cong \begin{cases} 3{,}1243 \\ 0{,}5423 \end{cases}$$

Esto significa que para valores de V_i menores que 0,5423 ó mayores que 3,1243 la ecuación $36V_i^2 - 132V_i + 61$ presentará valores mayores que cero y por tanto al calcular V_0 obtendremos soluciones reales. Gráficamente lo podemos ver de la siguiente manera:



$$\text{Si } V_i \leq 0{,}5423 \text{ ó } V_i \geq 3{,}1243 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36V_i^2 - 132V_i + 61 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61} \text{ tiene solución real}$$

Pero según la condición 1, V_i debe ser mayor que 2 y podemos englobar a las condiciones en una sola:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cond. 1} \rightarrow V_i \geq 2 \\ V_i \leq 0{,}5423 \ \text{ó} \ V_i \geq 3{,}1243\end{array}\right\} \Rightarrow V_i \geq 3{,}1243\,(\text{Cond. 3})$$

Recuperamos la expresión anterior de V_0:

$$V_0 = \frac{6V_i - 11 \pm \sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61}}{6}$$

A partir de ésta debemos encontrar la solución correcta (es decir, decidir entre el valor + ó el valor – de la raíz cuadrada). Para ello utilizamos la segunda condición $V_0 \leq V_i - 2$ (Cond. 2), que aplicamos al valor de V_0 tratando de hacerla compatible con la condición 3 que acabamos de obtener:

$$\left.\begin{array}{l}V_0 = \dfrac{6V_i - 11 \pm \sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61}}{6} \\ V_0 \leq V_i - 2\,(\text{Cond. 2})\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6V_i - 11 \pm \sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61}}{6} \leq V_i - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6V_i - 11 \pm \sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61} \leq 6V_i - 12 \Rightarrow \pm\sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61} \leq -1$$

Debemos elegir la solución negativa de la raíz para que pueda ser menor que uno:

$$\pm\sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61} \leq -1 \Rightarrow -\sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61} \leq -1$$

Multiplicando por –1 en ambos términos y elevando al cuadrado:

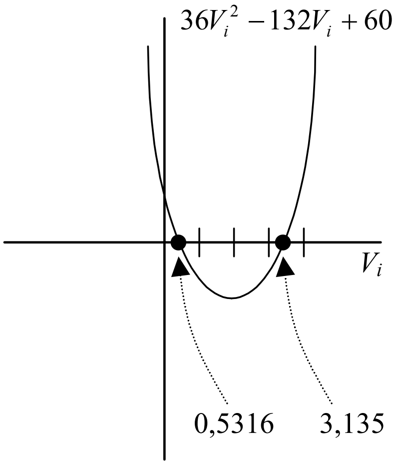
$$\sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61} \geq 1 \Rightarrow \left(\sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61}\right)^2 \geq 1^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36V_i^2 - 132V_i + 61 \geq 1 \Rightarrow 36V_i^2 - 132V_i + 60 \geq 0$$

Al igual que antes obtenemos una inecuación para la cual debemos calcular los valores de V_i que hacen que sea mayor que cero, por lo que procedemos de la misma forma: igualamos a cero, calculamos los cortes por el eje X y representamos gráficamente la parábola, tomando el rango de valores oportunos que cumpla esta desigualdad:

$$36V_i^2 - 132V_i + 60 \geq 0 \rightarrow \text{Calculamos las raíces:}$$

$$36V_i^2 - 132V_i + 60 = 0 \Rightarrow V_i = \frac{132 \pm \sqrt{132^2 - 4 \cdot 36 \cdot 60}}{2 \cdot 36} =$$

$$= \frac{132 \pm \sqrt{8784}}{72} \cong \frac{132 \pm 93{,}723}{72} \cong \begin{cases} 3{,}135 \\ 0{,}5316 \end{cases}$$



$$\text{Si } V_i \leq 0{,}5316 \text{ ó } V_i \geq 3{,}135 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36V_i^2 - 132V_i + 60 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{Cumple Cond. 2}$$

Según la condición 3, V_i debe ser mayor que 3,1243, de modo que todas las condiciones se engloban en una sola:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cond. 3} \rightarrow V_i \geq 3{,}1243 \\ V_i \leq 0{,}5316 \text{ ó } V_i \geq 3{,}135 \end{array}\right\} \Rightarrow V_i \geq 3{,}135 \text{ (Cond. 4)}$$

El valor de V_0 será, tomando la raíz negativa según vimos anteriormente:

$$V_0 = \frac{6V_i - 11 - \sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61}}{6}$$

Suponemos MN en SATURACIÓN:

$$\text{Condiciones} \rightarrow \left.\begin{array}{l} V_{GS} \geq V_T \Rightarrow V_i \geq 2 \text{ V (Cond. 1)} \\ V_{DS} \geq V_{GS} - V_T \Rightarrow V_0 \geq V_i - 2 \text{ (Cond. 2)} \end{array}\right\}$$

$$\text{Modelo} \rightarrow I_D = \frac{K_N}{2}(V_{GS} - V_T)^2 \Rightarrow I_D = \frac{1}{2}(V_i - 2)^2$$

Procedemos igual que en el apartado anterior: planteamos de nuevo la malla M1 e igualamos las intensidades I_D del modelo y la obtenida de dicha malla:

$$\left.\begin{aligned} &\text{M1} \rightarrow 5 - 6I_D - V_0 = 0 \\ &\text{Modelo} \rightarrow I_D = \frac{1}{2}(V_i - 2)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} I_D &= \frac{5 - V_0}{6} \\ I_D &= \frac{1}{2}(V_i - 2)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5 - V_0}{6} = \frac{1}{2}(V_i - 2)^2 \Rightarrow V_0 = 5 - 3\,(V_i - 2)^2$$

En este caso hemos obtenido de manera más sencilla el valor de V_0. Ahora lo que debemos obtener son los valores de V_i para los cuales ese valor de salida es válido.

Si aplicamos la condición 2 sobre el valor de V_0 tenemos:

$$\left.\begin{aligned} &V_0 = 5 - 3\,(V_i - 2)^2 \\ &V_0 \geq V_i - 2\,(\text{Cond. } 2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5 - 3\,(V_i - 2)^2 \geq V_i - 2 \Rightarrow -3V_i^2 + 11V_i - 5 \geq 0$$

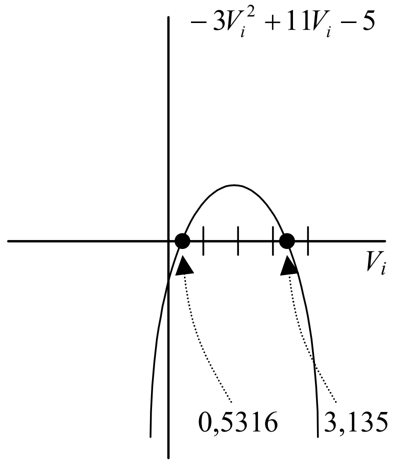
De nuevo resulta una ecuación de segundo grado que debe ser mayor que cero. Procedemos igual que en los casos anteriores:

$$-3V_i^2 + 11V_i - 5 \geq 0 \rightarrow \text{Calculamos las raíces:}$$

$$-3V_i^2 + 11V_i - 5 = 0 \Rightarrow V_i = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-5)}}{2\cdot(-3)} =$$

$$= \frac{-11 \pm \sqrt{61}}{-6} \cong \frac{-11 \pm 7{,}8102}{-6} \cong \begin{cases} 0{,}5316 \\ 3{,}135 \end{cases}$$

Obtenemos una parábola con la apertura hacia abajo, ya que el coeficiente de la V_i al cuadrado es negativo:



$$\begin{aligned}&\text{Si}\, V_i \geq 0{,}5316 \ \text{ y } \ V_i \leq 3{,}135 \Rightarrow\\ &\Rightarrow -3V_i^2+11V_i-5 \geq 0 \Rightarrow\\ &\Rightarrow \text{Cumple Cond. 2}\end{aligned}$$

Observamos que también se cumple la condición 1, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} V_i \geq 2 \ (\text{Cond. 1}) \\ V_i \geq 0{,}5316 \ \text{ y } \ V_i \leq 3{,}135 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \leq V_i \leq 3{,}135$$

Resumiendo toda la característica de transferencia, quedaría como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} \text{MN CORTE} \rightarrow \forall\, V_i < 2\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 5\ \text{V} \\ \text{MN SATURACIÓN} \rightarrow \forall\, 2\ \text{V} \leq V_i \leq 3{,}135\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 5-3\,(V_i-2)^2 \\ \text{MN ÓHMICA} \rightarrow \forall\, V_i \geq 3{,}135\ \text{V} \Rightarrow V_0 = \dfrac{6V_i - 11 - \sqrt{36V_i^2 - 132V_i + 61}}{6} \end{array}\right\}$$

Por último, se comprueba que es continua en los puntos críticos:

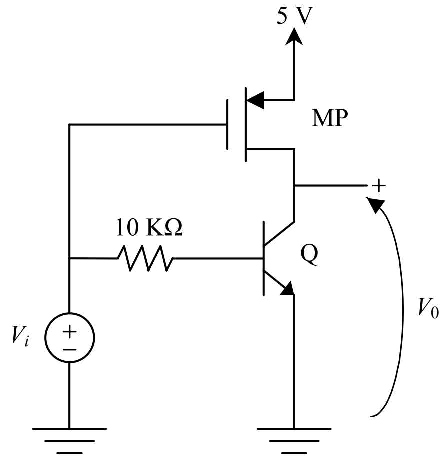
$$V_i = 2\ \text{V}\begin{cases} \text{CORTE} \rightarrow V_0 = 5 \\ \text{SAT.} \rightarrow V_0 = 5-3\,(2-2)^2 = 5 \end{cases}$$

$$V_i = 3{,}135\ \text{V}\begin{cases} \text{SAT.} \rightarrow V_0 = 5-3\,(3{,}135-2)^2 \cong 1{,}1353 \\ \text{ÓHM.} \rightarrow V_0 = \dfrac{6\cdot 3{,}135 - 11 - \sqrt{36\cdot(3{,}135)^2 - 132\cdot 3{,}135 + 61}}{6} \cong 1{,}1353 \end{cases}$$

Ejercicio 4.2.2.

Determina la expresión analítica y realiza la representación gráfica de la curva de transferencia del circuito adjunto, teniendo en cuenta que:

DATOS MOSFET:
$K_P = 0{,}5$ mA/V^2 y $V_T = 1$ V
DATOS BJT:
$V_{BEon} = 0{,}7$ V, $V_{CEsat} = 0{,}2$ V, $\beta = 50$



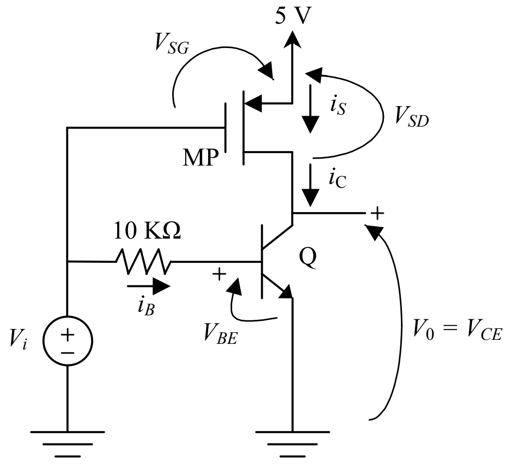
Solución:

El cálculo de la característica de transferencia en circuitos donde aparecen transistores MOS es algo complejo. Ello es debido a que los modelos empleados para estos transistores no son lineales, de modo que algunos tramos de la gráfica están formados por trazos curvos. Además a menudo es preciso escoger la solución físicamente correcta de entre varias que son matemáticamente válidas.

Los pasos a seguir en la resolución de este tipo de problemas son los siguientes:

a) Plantear los distintos estados de funcionamiento en los que pueden encontrarse cada uno de los dispositivos (Diodos, BJT, MOSFET) que aparecen en el circuito.
b) Dibujar las distintas combinaciones del apartado a) sobre el plano ($V_0 \rightarrow V_i$). Esto da una idea de las zonas en las que debe estar cada tramo de la característica de transferencia, y también permite deducir de un modo sencillo las combinaciones de funcionamiento que no se van a dar con tan sólo observar si son o no adyacentes en el plano.
c) Aplicar las condiciones para las distintas combinaciones del apartado a) y obtener las curvas que definen el comportamiento de cada zona del apartado b).

Apliquemos estos pasos en la resolución de nuestro problema a partir de la figura siguiente, donde podemos observar que siempre se verifica que $i_S = i_C$:



Paso a)

1) Transistor MP: $V_{SG} = 5 - V_i$; $V_{SD} = 5 - V_0$

Condiciones de CORTE:

* $V_{SG} \le V_T \Rightarrow V_{SG} \le 1$
* A partir de la malla de entrada:
$\Rightarrow -V_i - V_{SG} + 5 = 0 \Rightarrow V_{SG} = 5 - V_i \le 1 \Rightarrow V_i \ge 4$ V

Condiciones de SATURACIÓN:

* $V_{SG} \ge V_T \Rightarrow V_{SG} \ge 1$
* A partir de la malla de entrada:
$\Rightarrow -V_i - V_{SG} + 5 = 0 \Rightarrow V_{SG} = 5 - V_i \ge 1 \Rightarrow V_i \le 4$ V
* Además: $V_{SD} \ge V_{SG} - V_T \Rightarrow V_{SD} \ge V_{SG} - 1$
* Y a partir de la malla de salida:
$-V_0 - V_{SD} + 5 = 0 \Rightarrow V_{SD} = 5 - V_0$
$5 - V_0 \ge 5 - V_i - 1 \Rightarrow V_0 \le V_i + 1$

Condiciones de ÓHMICA:

* Al igual que antes $V_{SG} \ge 1$ y $V_i \le 4$ V
* Además $V_{SD} \le V_{SG} - V_T \Rightarrow V_{SD} \le V_{SG} - 1$ y $V_0 \ge V_i + 1$

2) Transistor Q: $V_{BE} = V_i - 10 \cdot i_B$; $V_{CE} = V_0$

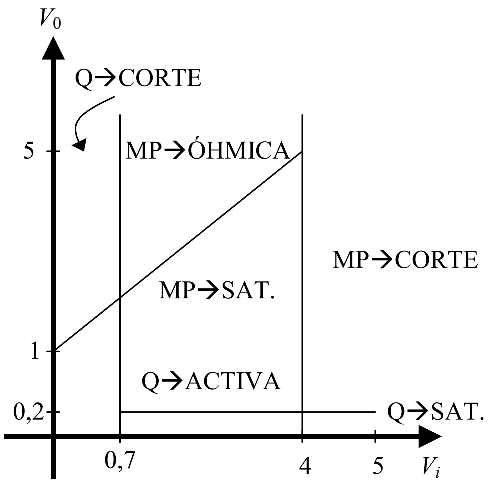
Condiciones de CORTE: $\left.\begin{cases} V_{BE} \leq 0{,}7\ \mathrm{V} \\ i_B = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow V_i \leq 0{,}7\ \mathrm{V}$

Condiciones de SATURACIÓN: $\left.\begin{cases} V_{BE} = 0{,}7\ \mathrm{V} \\ i_B \geq 0 \\ i_C \leq \beta \cdot i_B \end{cases}\right\} \Rightarrow V_i \geq 0{,}7\ \mathrm{V}\ ; V_0 = 0{,}2\ \mathrm{V}$

Condiciones de ACTIVA: $\left.\begin{cases} V_{BE} = 0{,}7\ \mathrm{V} \\ i_C = \beta \cdot i_B \\ i_B \geq 0 \\ V_{CE} \geq V_{CEsat} = 0{,}2\ \mathrm{V} \end{cases}\right\} \Rightarrow V_i \geq 0{,}7\ \mathrm{V}\ ; V_0 \geq 0{,}2\ \mathrm{V}$

Paso b)

Dibujamos el diagrama de estados basándonos de las combinaciones anteriores:



Observando el diagrama se deduce que las siguientes combinaciones de estados son imposibles:

Q→CORTE y MP→ CORTE.
Q→SATURACIÓN y MP→ÓHMICA.

Esto es debido a que en el plano las zonas correspondientes no son adyacentes.

Paso c)

A continuación analizaremos el circuito para los 7 estados restantes mediante la aplicación de sus condiciones correspondientes.

1) MP→CORTE: $i_S = 0$, $V_i \geq 4$ V
   Q→ACTIVA: $i_C = \beta \cdot i_B \geq 0$, $V_0 \geq 0{,}2$ V

$$i_S = i_C = 0 \Rightarrow i_B = 0 \Rightarrow \frac{V_i - 0{,}7}{10} = 0 \Rightarrow V_i = 0{,}7\text{ V}$$

Pero esto contradice que $V_i \geq 4$ V luego se trata de un caso IMPOSIBLE.

2) MP→CORTE: $i_S = 0$, $V_i \geq 4$ V
   Q→SATURACIÓN: $\begin{cases} V_{BE} = 0{,}7\text{ V}, V_{CE} = V_0 = 0{,}2\text{ V} \\ 50 \cdot i_B \geq i_C \end{cases}$

$$i_S = i_C = 0 \Rightarrow 50 \cdot i_B \geq 0 \Rightarrow i_B \geq 0 \Rightarrow V_i \geq 0{,}7\text{ V}$$

Esta condición se encuentra dentro de la restricción $V_i \geq 4\text{V}$, por tanto:

$$\boxed{\forall V_i \geq 4\text{ V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2\text{ V}}$$

3) MP→SATURACIÓN: $\begin{cases} i_S = \dfrac{K_P}{2}(V_{SG} - V_T)^2 = 0{,}25 \cdot (4 - V_i)^2 \\ V_i \leq 4, V_i \geq V_0 - 1 \end{cases}$
   Q→CORTE: $i_B = 0$, $i_C = 0, V_i \leq 0{,}7$ V

$$i_S = i_C = 0 \Rightarrow V_i = 4\text{V}$$

Pero esto no verifica que $V_i \leq 0{,}7$ V $\Rightarrow$ Caso IMPOSIBLE.

4) MP→SATURACIÓN: $\begin{cases} i_S = \dfrac{K_P}{2}(V_{SG} - V_T)^2 = 0{,}25 \cdot (4 - V_i)^2 \\ V_i \leq 4\,, V_i \geq V_0 - 1 \end{cases}$

Q→ACTIVA: $V_{BE} = 0{,}7\text{ V},\ i_C = 50 \cdot i_B \geq 0\,, V_{CE} = V_0 \geq 0{,}2\text{ V}$

$$i_B = \frac{V_i - 0{,}7}{10}\quad ; i_S = i_C = 50 \cdot i_B \Rightarrow 0{,}25 \cdot (4 - V_i)^2 = 5 \cdot V_i - 3{,}5 \Rightarrow$$

$$V_i^2 - 28 \cdot V_i + 30 = 0\quad ; V_i = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 120}}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{i1} = 26{,}884\text{ V} \\ V_{i2} = 1{,}116\text{ V} \end{Bmatrix}$$

La solución físicamente válida es $V_{i2} = 1{,}116\text{ V} \Rightarrow V_0 \leq V_i + 1 = 2{,}116\text{ V}$

En resumen: $\boxed{V_i = 1{,}116\text{ V} \quad \forall\ 0{,}2\text{ V} \leq V_0 \leq 2{,}116\text{ V}}$

5) MP→SATURACIÓN: $\begin{cases} i_S = \dfrac{K_P}{2}(V_{SG} - V_T)^2 = 0{,}25 \cdot (4 - V_i)^2 \\ V_i \leq 4\,, V_i \geq V_0 - 1 \end{cases}$

Q→SATURACIÓN: $V_{BE} = 0{,}7\text{ V},\ V_{CE} = V_0 = 0{,}2\text{ V},\ 50 \cdot i_B \geq i_C$

$$i_S = i_C = 0{,}25 \cdot (4 - V_i)^2; i_B = \frac{V_i - 0{,}7}{10} \Rightarrow 50 \cdot i_B = 5\,V_i - 3{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50 \cdot i_B \geq i_C \Rightarrow 5\,V_i - 3{,}5 \geq 0{,}25 \cdot (4 - V_i)^2 \Rightarrow V_i^2 - 28 \cdot V_i + 30 \leq 0$$

Se trata de la misma ecuación del caso anterior, luego: $V_i \geq 1{,}116\text{ V}$; $V_i \geq V_0 - 1 \Rightarrow V_i \geq -0{,}8\text{ V}$; esta condición es menos restrictiva, de modo que podemos concluir:

$$\boxed{\forall\ 1{,}116\text{ V} \leq V_i \leq 4\text{ V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2\text{ V}}$$

6) MP→ÓHMICA: $\begin{cases} i_S = K_P(V_{SG} - V_T - \dfrac{V_{SD}}{2}) \cdot V_{SD} = 0{,}25(3 - 2 \cdot V_i + V_0)(5 - V_0) \\ V_i \leq 4\text{ V},\ V_i \leq V_0 - 1 \end{cases}$

Q→CORTE: $i_B = 0\,, i_C = 0\,, V_i \leq 0{,}7\text{ V}$

$$i_S = i_C = 0 \Rightarrow 0{,}25(3 - 2 \cdot V_i + V_0)(5 - V_0) = 0$$

Para hacer cero esta última ecuación pueden darse dos casos:

a) $(3 - 2 \cdot V_i + V_0) = 0 \Rightarrow V_0 = 2V_i - 3$;
$V_i \leq V_0 - 1 \Rightarrow V_i \leq 2V_i - 3 - 1 \Rightarrow V_i \geq 4 \Rightarrow$
Esto contradice la condición, luego no es esta expresión la que vale 0.

b) $(5 - V_0) = 0 \Rightarrow V_0 = 5$; No contradice ninguna de las condiciones hechas en la suposición del estado, luego ésta es la opción correcta.

Por lo tanto: $\boxed{\forall\, V_i \leq 0{,}7\text{ V} \Rightarrow V_0 = 5\text{ V}}$

7) MP→ÓHMICA: $\begin{cases} i_S = K_P(V_{SG} - V_T - \dfrac{V_{SD}}{2}) \cdot V_{SD} = 0{,}25(3 - 2 \cdot V_i + V_0)(5 - V_0) \\ V_i \leq 4\text{ V},\ V_i \leq V_0 - 1 \end{cases}$

Q→ACTIVA: $V_{BE} = 0{,}7\text{ V}$, $i_C = 50 \cdot i_B \geq 0$, $V_{CE} = V_0 \geq 0{,}2\text{ V}$

$$i_S = i_C \Rightarrow 0{,}25(3 - 2 \cdot V_i + V_0)(5 - V_0) = 50 \cdot \left(\frac{V_i - 0{,}7}{10}\right) \Rightarrow$$

$$V_0^2 - 2 \cdot (V_i + 1) \cdot V_0 + 30 \cdot V_i - 29 = 0 \Rightarrow$$

$$V_0 = V_i + 1 \pm \sqrt{V_i^2 - 28 \cdot V_i + 30}$$

$V_i \leq V_0 - 1 \Rightarrow V_0 \geq V_i + 1 \Rightarrow$ Es necesario elegir el signo + de la raíz:

$$\Rightarrow V_0 = V_i + 1 + \sqrt{V_i^2 - 28 \cdot V_i + 30}$$

Como la corriente de base es positiva, obtenemos:

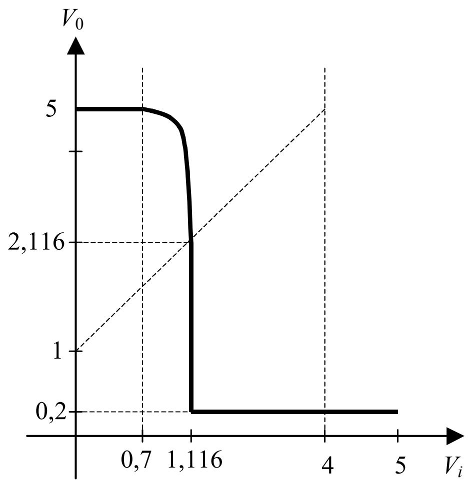
$$i_B \geq 0 \Rightarrow \frac{V_i - 0{,}7}{10} \geq 0 \Rightarrow V_i \geq 0{,}7$$

Y como la raíz debe dar como resultado un número real se debe cumplir que $V_i^2 - 28 \cdot V_i + 30 \geq 0 \Rightarrow$ Observamos que se trata de la misma ecuación que en casos anteriores, por lo que $V_i \leq 1{,}116$ V.

Por lo tanto:

$$\boxed{\forall\ 0{,}7\ \text{V} \le V_i \le 1{,}116\ \text{V} \Rightarrow V_0 = V_i + 1 + \sqrt{V_i^2 - 28 \cdot V_i + 30}}$$

Por último la representación gráfica, basándonos en la figura realizada en el Paso b), es la siguiente:



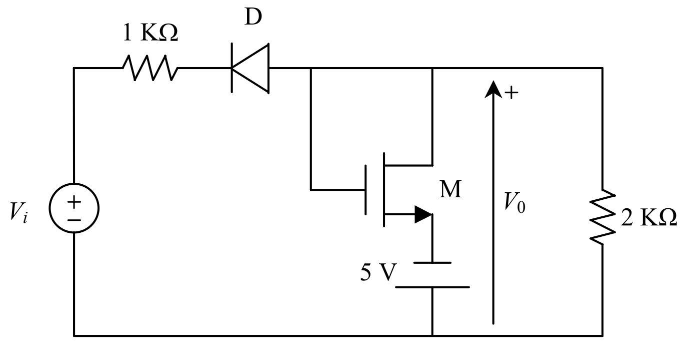
Resumen:

MP	Q	Resultado de la Combinación
CORTE	CORTE	IMPOSIBLE
CORTE	ACTIVA	IMPOSIBLE
CORTE	SAT.	$\Rightarrow \forall V_i \ge 4\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2\ \text{V}$
SAT.	CORTE	IMPOSIBLE
SAT.	ACTIVA	$\Rightarrow V_i = 1{,}116\ \text{V} \quad \forall\ 0{,}2\ \text{V} \le V_0 \le 2{,}116\ \text{V}$
SAT.	SAT.	$\Rightarrow \forall\ 1{,}116\ \text{V} \le V_i \le 4\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 0{,}2\ \text{V}$
ÓHMICA	CORTE	$\Rightarrow \forall\ V_i \le 0{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = 5\ \text{V}$
ÓHMICA	ACTIVA	$\Rightarrow \forall\ 0{,}7\ \text{V} \le V_i \le 1{,}116\ \text{V} \Rightarrow$ $V_0 = V_i + 1 + \sqrt{V_i^2 - 28 \cdot V_i + 30}$
ÓHMICA	SAT.	IMPOSIBLE

Ejercicio 4.2.3.

Determina la expresión analítica de la curva de transferencia $V_0 = f(V_i)$ del circuito de la figura, sabiendo que:

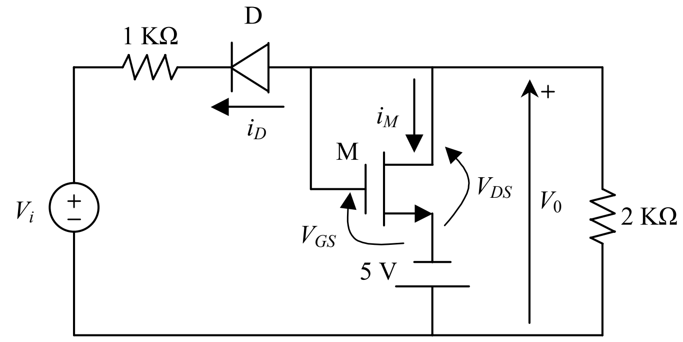
MOSFET →K_N = 2 mA/V^2 y V_T = 1 V
DIODO→V_γ = 0,7 V



Solución:

En el transistor MN observamos que $V_{GS} = V_{DS} \Rightarrow V_{DS} \geq V_{GS} - V_T \Rightarrow V_T \geq 0$ luego nunca puede encontrarse en zona ÓHMICA. Por lo tanto sólo son posibles los estados de CORTE y SATURACIÓN, de modo que el circuito a priori solamente tiene 4 estados posibles.

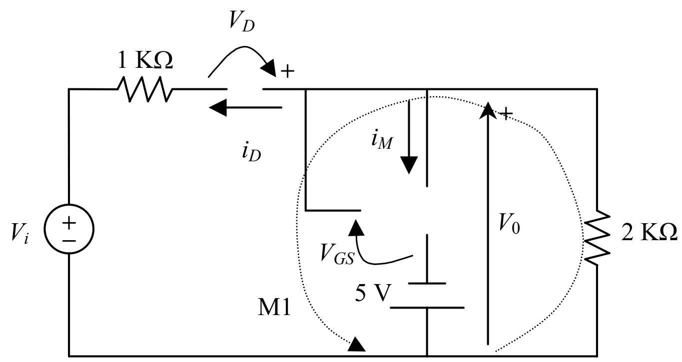
El desarrollo de las distintas combinaciones del circuito se realiza a partir de la figura siguiente:



Se ha utilizado el nombre de i_M para la intensidad de drenador del transistor MOS en lugar de la habitual i_D para no confundirla con la intensidad del diodo, que sí hemos nombrado en nuestro circuito como i_D.

1) D→OFF $\Rightarrow V_D \leq 0{,}7$ V
   M→CORTE $\Rightarrow V_{GS} \leq V_T \Rightarrow V_{GS} \leq 1$

El circuito equivalente con estas condiciones es:

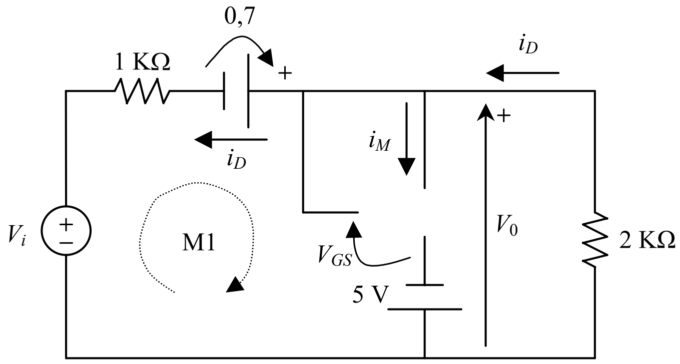


$$i_D = i_M = 0 \Rightarrow \text{M1} \rightarrow V_{GS} - 5 = 0 \Rightarrow V_{GS} = 5$$

Luego no cumple la condición $V_{GS} \leq 1$ y este caso es IMPOSIBLE.

2) D→ON $\Rightarrow i_D \geq 0$ V
   M→CORTE $\Rightarrow V_{GS} \leq V_T \Rightarrow V_{GS} \leq 1$

Sustituyendo los modelos correspondientes resulta el siguiente circuito:



A partir de la malla externa obtenemos:

$$V_i + 0{,}7 + (2+1)\cdot i_D = 0 \Rightarrow i_D = \frac{-V_i - 0{,}7}{3} \geq 0 \Rightarrow V_i \leq -0{,}7\ \text{V} \qquad (1)$$

A continuación aplicamos la condición referida al transistor, con lo cual necesitamos una ecuación de malla que contenga a la variable V_{GS}, en este caso se trata de la malla M1 de la figura anterior:

$$V_{GS} - 5 + 2i_D = 0 \Rightarrow V_{GS} = 5 - 2i_D = 5 + \frac{2V_i + 1{,}4}{3} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2\cdot V_i + 1{,}4}{3} \leq -4 \Rightarrow 2\cdot V_i \leq -13{,}4 \Rightarrow V_i \leq -6{,}7\ \text{V} \qquad (2)$$

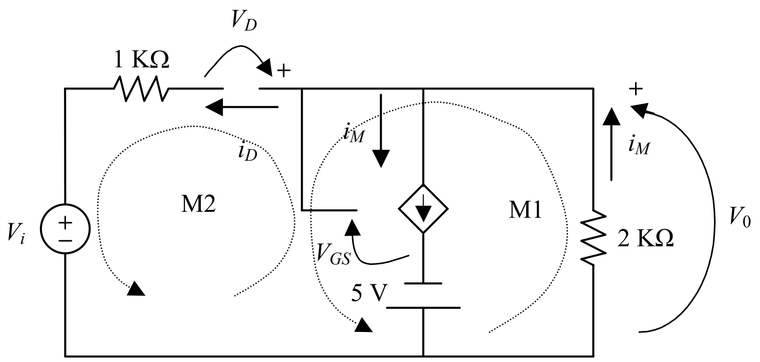
La condición (2) engloba a la (1).

Por otro lado la tensión $V_0 = -2\cdot i_D = \dfrac{2V_i + 1{,}4}{3}$

Luego: $\boxed{\forall V_i \leq -6{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = \dfrac{2\cdot V_i + 1{,}4}{3}}$

3) D→OFF ⇒ $V_D \leq 0{,}7$ V
M→SATURACIÓN ⇒ $V_{GS} \geq V_T \Rightarrow V_{GS} \geq 1$

El circuito queda de la siguiente forma:



$$i_M = \frac{K_N}{2}\left(V_{GS} - V_T\right)^2 = \frac{2}{2}\left(V_{GS} - 1\right)^2 = V_{GS}^2 - 2 \cdot V_{GS} + 1$$

Es necesario otra ecuación para resolver el sistema, luego a partir de la malla M1 del circuito anterior:

$$V_{GS} - 5 + 2 \cdot i_M = 0 \Rightarrow 2 \cdot V_{GS}^2 - 3 \cdot V_{GS} - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$V_{GS} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4} \Rightarrow V_{GS1} = 2{,}186\ \text{V}, \quad V_{GS2} = -0{,}686\ \text{V}$$

Como $V_{GS} \geq 1 \Rightarrow V_{GS} = 2{,}186\ \text{V} \Rightarrow i_M = 1{,}406\ \text{mA}$

A continuación debemos aplicar la condición referida al diodo a la ecuación obtenida de la malla M2:

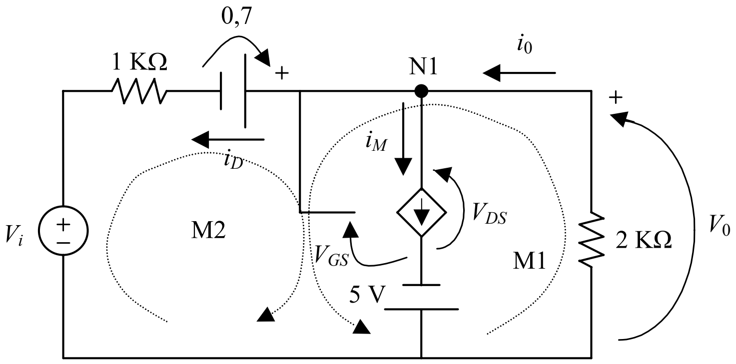
$$V_D + V_i + 5 - 2{,}186 = 0 \Rightarrow V_D = -V_i - 2{,}184 \leq 0{,}7 \Rightarrow V_i \geq -3{,}514\ \text{V}$$

Por otra parte $V_0 = -2 \cdot i_M = -2{,}813\ \text{V}$

En resumen: $\boxed{\forall\, V_i \geq -3{,}514\ \text{V} \Rightarrow V_0 = -2{,}813\ \text{V}}$

4) D→ON $\Rightarrow i_D \geq 0$ V
M→SATURACIÓN $\Rightarrow V_{GS} \geq V_T \Rightarrow V_{GS} \geq 1$

El circuito queda de la siguiente forma:



Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nudo N1} \rightarrow i_0 = i_D + i_M \\ \text{Malla M1} \rightarrow V_{GS} - 5 + 2 \cdot i_0 = 0 \\ \text{Malla M2} \rightarrow V_{GS} - 5 - V_i - i_D - 0{,}7 = 0 \\ i_M = (V_{GS} - 1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{Sustituyendo en M1} \\ \text{el valor de } i_0 \text{ :}\end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_{GS} - 5 + 2i_D + 2 \cdot (V_{GS} - 1)^2 = 0 \\ i_D = V_{GS} - V_i - 5{,}7 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot V_{GS}^2 - V_{GS} - 2V_i - 14{,}4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{GS} = \frac{1 \pm \sqrt{16 \cdot V_i + 116{,}2}}{4} = 0{,}25 \pm \sqrt{V_i + 7{,}2625}$$

Como la raíz debe ser un número real: $V_i \geq -7{,}2625\ \text{V}$ (3)

Por otro lado:

$$V_{GS} \geq 1 \Rightarrow V_{GS} = 0{,}25 \pm \sqrt{V_i + 7{,}2625} \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(V_i + 7{,}2625) \geq (1 - 0{,}25)^2 = 0{,}5625 & \text{(a)} \\ +(V_i + 7{,}2625) \geq (1 - 0{,}25)^2 = 0{,}5625 & \text{(b)} \end{cases}$$

(a) $\Rightarrow V_i \leq -7{,}825\ \text{V} \Rightarrow$ Incompatible con (3)

(b) $\Rightarrow V_i \geq -6{,}7\ \text{V} \Rightarrow$ Es compatible con (3) ya que la engloba, de ahí que el signo válido de la raíz sea el positivo. Por tanto:

$$V_{GS} = 0{,}25 + \sqrt{V_i + 7{,}2625}$$

Continuando con el análisis, y a partir de M2 con el diodo en ON:

$$i_D = V_{GS} - V_i - 5{,}7 \geq 0 \qquad (4)$$

El valor mínimo de V_{GS} es 1 V, que se da para:

$$V_i = -6{,}7\ \text{V} \Rightarrow i_D = 1 - (-6{,}7) - 5{,}7 = 2\ \text{mA} \geq 0$$

La expresión (4) se verifica para $V_i \geq -6{,}7$ V

Para calcular el límite superior:

$$\begin{gathered}(4) \Rightarrow 0{,}25 \pm \sqrt{V_i + 7{,}2625} - V_i - 5{,}7 \geq 0 \Rightarrow \\ \sqrt{V_i + 7{,}2625} \geq V_i + 5{,}45 \Rightarrow V_i + 7{,}2625 \geq (V_i + 5{,}45)^2 \Rightarrow \\ V_i + 7{,}2625 \geq V_i^2 + 10{,}9 \cdot V_i + 29{,}7025 \Rightarrow V_i^2 + 9{,}9 \cdot V_i + 22{,}4 \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (V_i + 3{,}514)(V_i + 6{,}386) \leq 0 \Rightarrow\end{gathered}$$

El límite superior es $V_i \leq -3{,}514$ V y el valor de V_0 a partir de la malla M1:

$$V_0 = V_{GS} - 5 = -4{,}75 + \sqrt{V_i + 7{,}2625}$$

En definitiva $\boxed{\forall -6{,}7\ \text{V} \leq V_i \leq -3{,}514\ \text{V} \Rightarrow V_0 = -4{,}75 + \sqrt{V_i + 7{,}2625}}$

Resumiendo todos los resultados obtenidos:

DIODO	**NMOS**	**Resultado de la Combinación**
OFF	CORTE	IMPOSIBLE
ON	CORTE	$\forall V_i \leq -6{,}7\ \text{V} \Rightarrow V_0 = \dfrac{2 \cdot V_i + 1{,}4}{3}\ \text{V}$
ON	SAT.	$\forall -6{,}7\ \text{V} \leq V_i \leq -3{,}514\ \text{V} \Rightarrow V_0 = -4{,}75 + \sqrt{V_i + 7{,}2625}$
OFF	SAT.	$\forall V_i \geq -3{,}514\ \text{V} \Rightarrow V_0 = -2{,}813\ \text{V}$

4.3. ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE FUNCIONES LÓGICAS

Ejercicio 4.3.1.

Implementar con la familia CMOS estándar las siguientes funciones lógicas, de forma que se minimice el número de transistores usados así como el número de niveles de lógica. Suponer que sólo se dispone de las variables sin negar (si queremos usar una variable negada habrá que utilizar un inversor CMOS).

a) XOR
b) $\mathbf{A \cdot B \cdot C + D + \overline{E}}$
c) $\mathbf{(\overline{A} + \overline{B}) \cdot C \cdot D}$
d) $\mathbf{\overline{A} + \overline{B} \cdot (\overline{C} + D)}$
e) $\mathbf{\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{C} \cdot D}$
f) $\mathbf{\overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot D + \overline{A} \cdot D}$
g) $\mathbf{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{D})}$
h) $\mathbf{A \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C}$

Soluciones:

---

a) XOR

La función lógica XOR tiene la siguiente tabla de verdad:

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

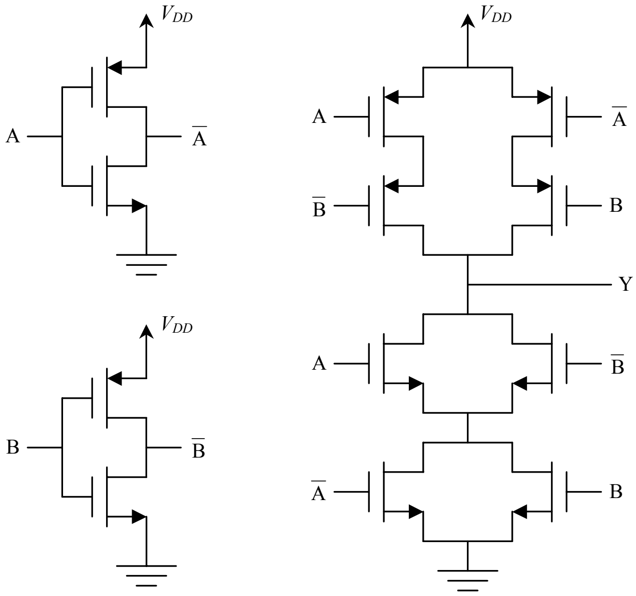
De esta tabla de verdad extraemos la función lógica de la puerta XOR. Si intentamos implementar directamente la función "típica" de la XOR ($\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$) se utilizarían 14 transistores y 3 niveles de lógica. Podemos intentar adaptar esta función lógica de la mejor manera posible para que en tecnología CMOS estándar sea implementada de manera óptima, es decir, sabemos que en CMOS estándar las funciones implementadas están negadas a la salida, por lo que trataremos de obtener una función equivalente a la XOR pero que esté negada a su salida (con lo cual nos ahorramos un inversor final); asimismo, siempre es conveniente utilizar el mínimo número posible de señales de entrada negadas, ya que tendríamos que usar un inversor para cada una de ellas (sólo se dispone de las variables sin negar).

Por ejemplo, si tenemos que implementar $\overline{A}+\overline{B}$ deberíamos usar dos inversores (uno para A y otro para B) a la entrada, un circuito que calcule la OR y, como la salida de éste sería a su vez negada, necesitaríamos un nuevo inversor para eliminar dicha negación. Si convertimos esta función de la siguiente manera: $\overline{A}+\overline{B}=\overline{A\cdot B}$ aplicando las leyes de De Morgan podemos ver cómo se puede implementar en un único circuito (con un solo nivel, en lugar de 3 niveles como antes), sin tener que usar variables negadas y además la función de salida ya está negada, con lo cual nos ahorramos igualmente el inversor de salida.

Este tipo de razonamiento será el que habrá que aplicar a todas las funciones a implementar. En nuestro caso para la puerta XOR vamos a aplicar una doble negación y las leyes de De Morgan para simplificarla:

$$\mathrm{XOR} \rightarrow \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B} = \overline{\overline{\overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}}} = \overline{(\overline{\overline{A}\cdot B})\cdot(\overline{A\cdot\overline{B}})} =$$
$$\overline{(\overline{\overline{A}}+\overline{B})\cdot(\overline{A}+\overline{\overline{B}})} = \overline{(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)}$$

Implementamos la última función negada obtenida, ya que tendrá menos transistores que si construimos directamente la XOR:

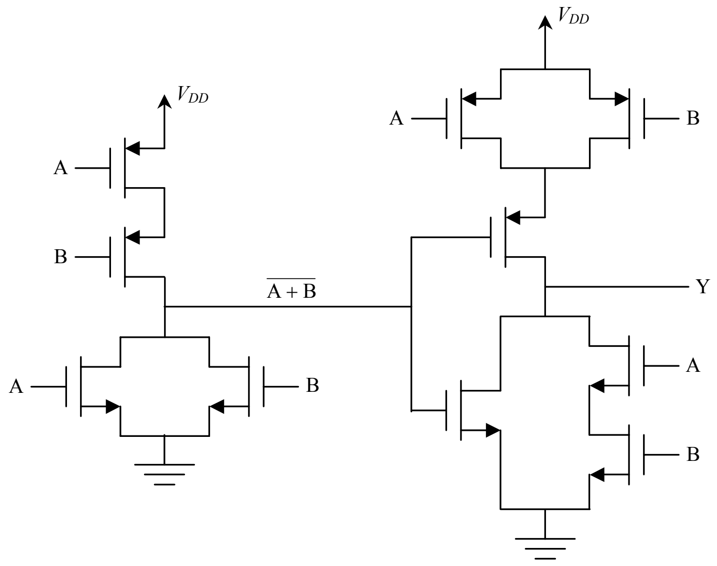


La función quedaría construida con 12 transistores y 2 niveles de lógica, pero ésta no sería la implementación más óptima posible. Si la función lógica de la puerta XOR la extraemos de la tabla de verdad pero en lugar de agrupar los unos (minitérminos) agrupamos los ceros (maxitérminos), además simplificamos igualmente usando doble negación y leyes de De Morgan y tenemos en cuenta que trabajamos con tecnología CMOS, obtenemos la siguiente función:

$$\mathrm{XOR} \rightarrow (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B}) = \overline{\overline{(A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})}} = \overline{\overline{(A+B)}+\overline{(\overline{A}+\overline{B})}} =$$

$$= \overline{\overline{(A+B)}+(\overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}})} = \overline{\overline{(A+B)}+A\cdot B}$$

Como podemos observar esta función se implementa con tan sólo 10 transistores y 2 niveles de lógica:



b) $\mathbf{A\cdot B\cdot C + D + \overline{E}}$

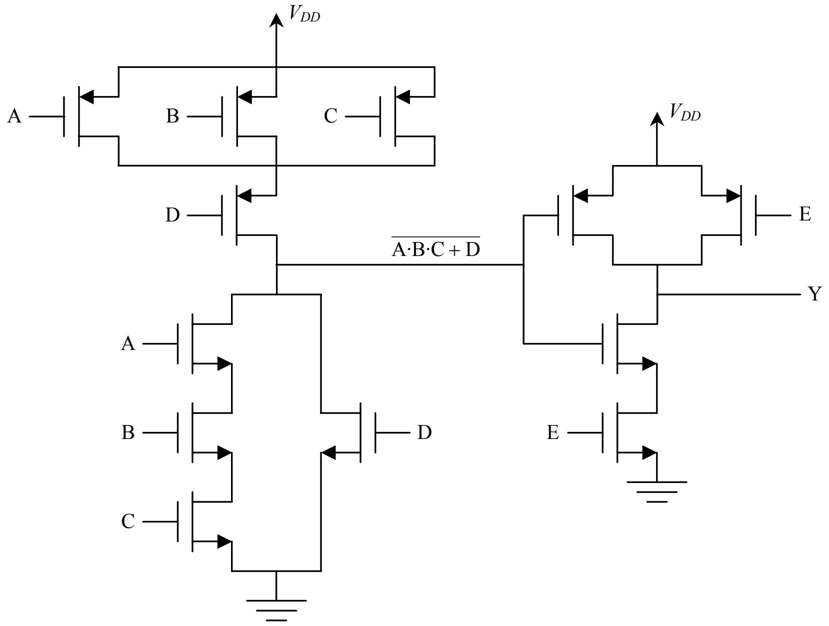
Adaptamos esta función lógica para que tenga una salida negada y así su implementación en tecnología CMOS sea más óptima:

$$Y \equiv A\cdot B\cdot C + D + \overline{E} = \overline{\overline{A\cdot B\cdot C + D + \overline{E}}} = \overline{\overline{(A\cdot B\cdot C + D) + \overline{E}}} =$$

$$= \overline{\overline{(A\cdot B\cdot C + D)}\cdot\overline{\overline{E}}} = \overline{\overline{(A\cdot B\cdot C + D)}\cdot E}$$

Hemos usado doble negación, propiedad asociativa y leyes de De Morgan para la conversión. El hecho de utilizar la propiedad asociativa es para reunir todas las variables que estén sin negar (A,B,C,D) en un solo grupo, y así poder eliminar la negación de E (siempre nos interesará más tener grupos de variables sin negar y que el grupo completo esté negado, como es el caso de $\overline{(A\cdot B\cdot C + D)}$, a tener variables sueltas negadas).

La implementación física quedaría como sigue:

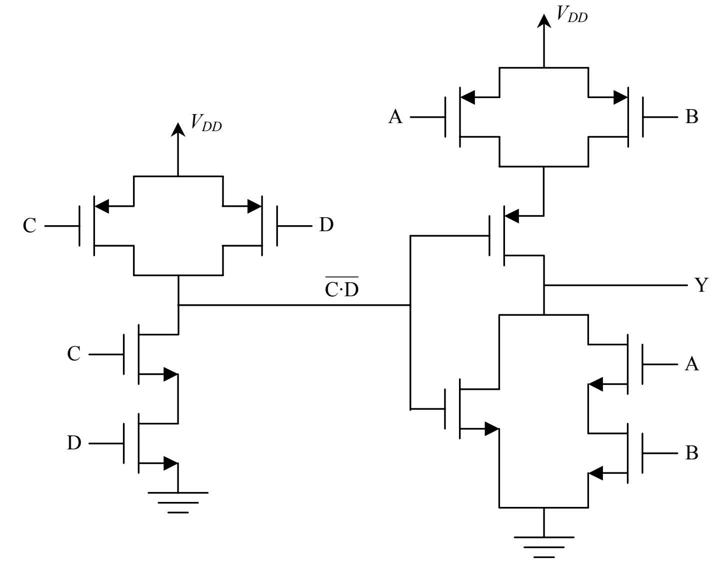


---

c) $(\overline{A} + \overline{B})\cdot C\cdot D$

Transformamos la función para obtenerla negada:

$$Y \equiv (\overline{A} + \overline{B})\cdot C\cdot D = \overline{\overline{(\overline{A} + \overline{B})\cdot(C\cdot D)}} = \overline{\overline{(\overline{A} + \overline{B})} + \overline{(C\cdot D)}} =$$
$$= \overline{(\overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}}) + \overline{(C\cdot D)}} = \overline{(A\cdot B) + \overline{(C\cdot D)}}$$



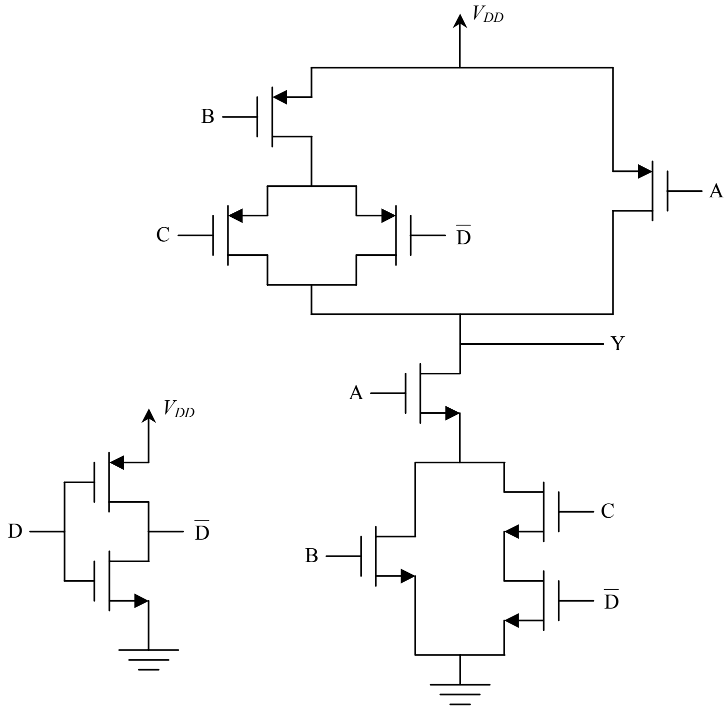
---

d) $\mathbf{\overline{A} + \overline{B}\cdot(\overline{C} + D)}$

Volvemos a realizar una transformación sobre la función original para optimizarla de cara a ser implementada con lógica CMOS estándar. En este caso debemos tener cuidado con la forma de agrupar las variables, manteniendo siempre el orden correcto de las operaciones al aplicar las leyes de De Morgan:

$$Y \equiv \overline{A} + \overline{B}\cdot(\overline{C}+D) = \overline{\overline{\overline{A}+\overline{B}\cdot(\overline{C}+D)}} = \overline{(\overline{\overline{A}})\cdot(\overline{\overline{B}\cdot(\overline{C}+D)})} =$$

$$= \overline{A\cdot(\overline{\overline{B}}+(\overline{\overline{C}+D}))} = \overline{A\cdot(B+(\overline{\overline{C}}\cdot\overline{D}))} = \overline{A\cdot(B+(C\cdot\overline{D}))}$$

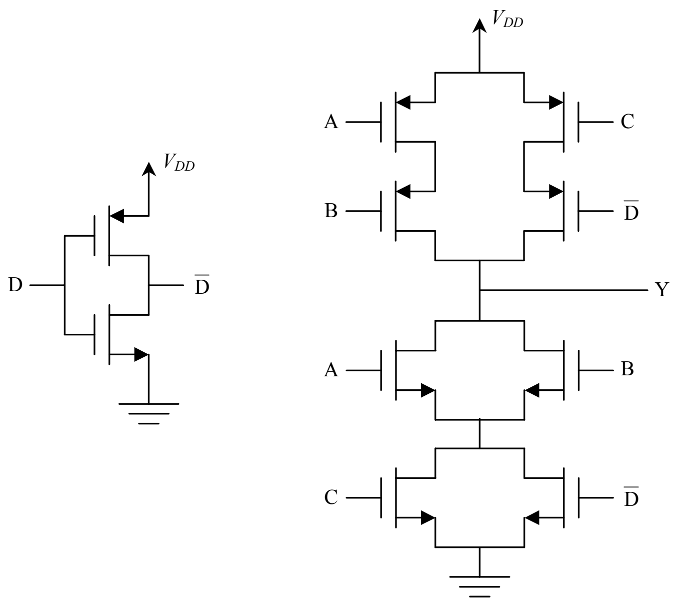


---

e) $\mathbf{\overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{C}\cdot D}$

Transformamos la función lógica para optimizar su implementación en CMOS:

$$
\begin{aligned}
Y &\equiv \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{C}\cdot D = \overline{\overline{(\overline{A + B}) + \overline{C}\cdot D}} = \overline{\overline{\overline{(A + B)}}\cdot(\overline{\overline{C}\cdot D})} = \\
&= \overline{(A + B)\cdot(\overline{\overline{C}} + \overline{D})} = \overline{(A + B)\cdot(C + \overline{D})}
\end{aligned}
$$



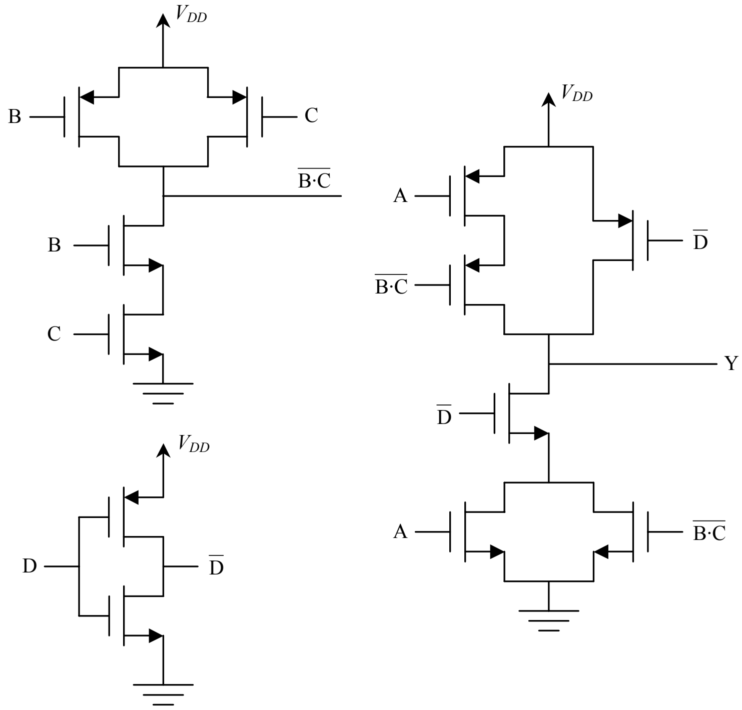
f) $\mathbf{\overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot D + \overline{A}\cdot D}$

Para esta función factorizamos la variable D, simplificamos la A y aplicamos doble negación y leyes de De Morgan:

$$Y \equiv \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot D + \overline{A}\cdot D = \overline{A}\cdot B\cdot C + \underbrace{(A+\overline{A})}_{=1}\cdot D = \underbrace{\overline{A}\cdot B\cdot C + D}_{\text{12 transistores, 3 niveles}} = \overline{\overline{\overline{A}\cdot B\cdot C + D}} =$$

$$= \overline{\overline{(\overline{A}\cdot(B\cdot C))}\cdot\overline{D}} = \overline{(\overline{\overline{A}} + \overline{(B\cdot C)})\cdot\overline{D}} = \underbrace{\overline{(A + \overline{(B\cdot C)})\cdot\overline{D}}}_{\text{12 transistores, 2 niveles}}$$

Llegamos a la conclusión de que, en este caso, será más óptimo implementar la función $\overline{(A + \overline{(B\cdot C)})\cdot\overline{D}}$ (en cuanto a número de niveles de lógica) frente a $\overline{A}\cdot B\cdot C + D$.

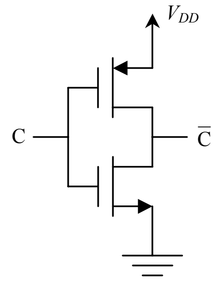


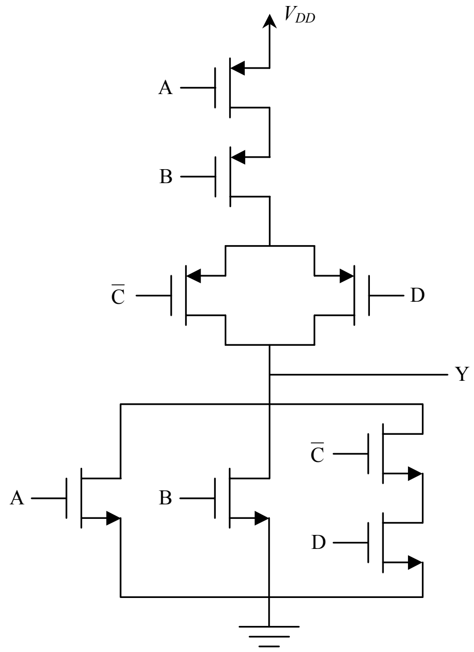
---

g) $\mathbf{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{D})}$

Transformamos la función utilizando el álgebra de Boole:

$$Y \equiv \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{D}) = (\overline{A + B}) \cdot (C + \overline{D}) = \overline{\overline{(\overline{A + B}) \cdot (C + \overline{D})}} =$$
$$= \overline{(\overline{\overline{A + B}}) + (\overline{C + \overline{\overline{D}}})} = \overline{(A + B) + (\overline{C} \cdot \overline{\overline{D}})} = \overline{A + B + (\overline{C} \cdot D)}$$





---

h) $\mathbf{A{\cdot}\overline{C} + A{\cdot}\overline{B}{\cdot}C}$

Para simplificar esta función podemos empezar sacando factor común:

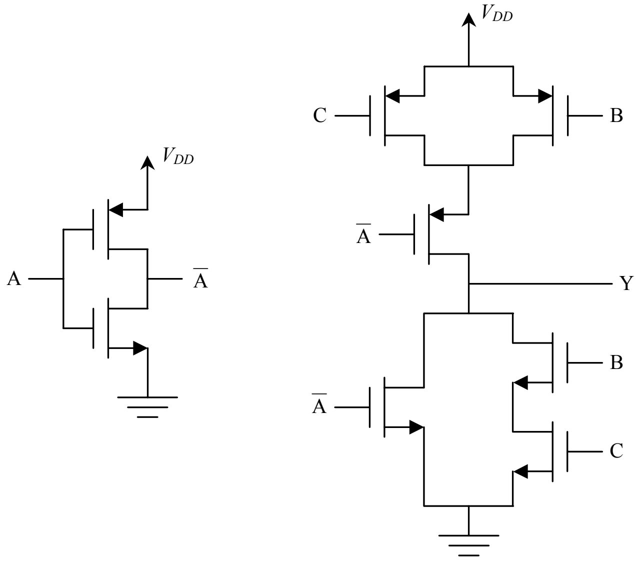
$$Y \equiv A{\cdot}\overline{C} + A{\cdot}\overline{B}{\cdot}C = A{\cdot}(\overline{C} + \overline{B}{\cdot}C)$$

A continuación planteamos el mapa de Karnaugh de la función que aparece dentro del paréntesis ($\overline{C} + \overline{B}{\cdot}C$) para simplificarla:

C \ B	0	1
0	1	1
1	1	0

Por tanto la función extraída del mapa de Karnaugh es $\overline{B} + \overline{C}$, y la función a implementar queda como sigue:

$$Y \equiv A{\cdot}(\overline{C} + \overline{B}{\cdot}C) = A{\cdot}(\overline{B} + \overline{C}) = A{\cdot}\overline{(B{\cdot}C)} = \overline{\overline{A{\cdot}\overline{(B{\cdot}C)}}} = \overline{\overline{A} + \overline{\overline{(B{\cdot}C)}}} = \overline{\overline{A} + (B{\cdot}C)}$$



Ejercicio 4.3.2.

Construir un circuito CMOS estándar que implemente un sumador completo de un bit, utilizando el mínimo número de transistores posibles. Un sumador completo realiza la suma de dos bits (A y B) de dos palabras distintas más un acarreo de entrada (C_{in}), obteniéndose la suma (S) y un acarreo de salida (C_{out}).

La tabla de verdad que realiza esa función es la que se adjunta.

A	B	C_{in}	S	C_{out}
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Solución:

La función de suma S siempre se obtiene haciendo la XOR entre todos los bits que tengamos a sumar, que en este caso son 3 (A, B y el acarreo de entrada C_{in}).

La función que genera el acarreo de salida C_{out} la podemos obtener simplificando la tabla de verdad dada, usando un mapa de Karnaugh, de la siguiente manera:

		A B			
		0 0	0 1	1 1	1 0
C_{in}	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

Por tanto, las funciones lógicas que implementan el sumador completo de un bit quedan así:

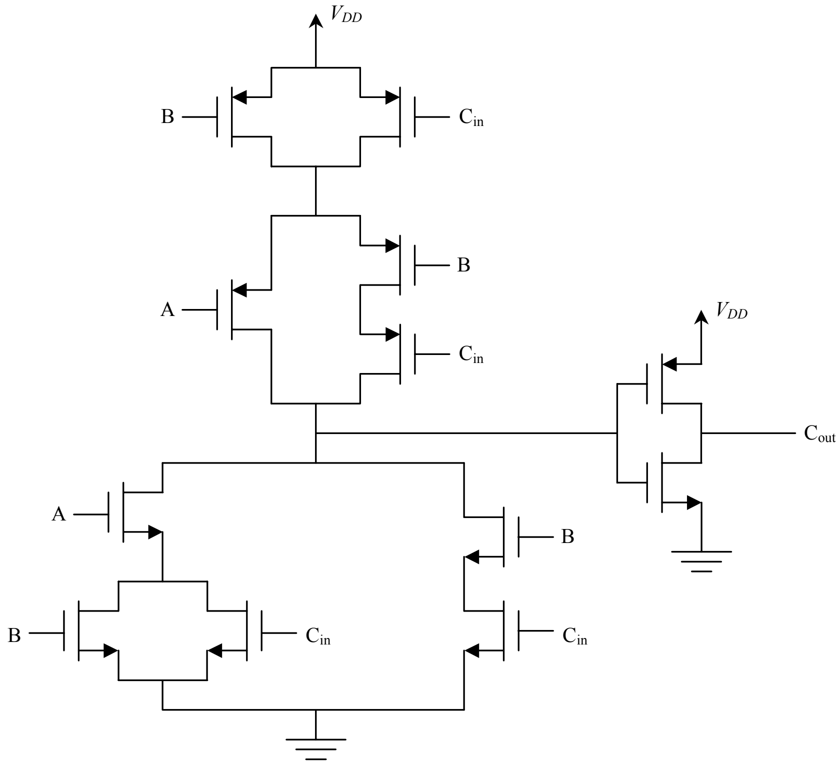
$$S \equiv A \oplus B \oplus C$$
$$C_{out} \equiv A{\cdot}B + B{\cdot}C_{in} + A{\cdot}C_{in}$$

Ahora tenemos que adaptar ambas funciones para poder implementarlas del modo más simple posible mediante un circuito CMOS estándar. La simplificación más obvia que podemos efectuar se realiza sobre la función del acarreo de salida C_{out}, y consiste en factorizar alguna de las 3 variables (por ejemplo, A), con lo que esta función nos quedaría:

$$C_{out} \equiv A{\cdot}(B + C_{in}) + B{\cdot}C_{in}$$

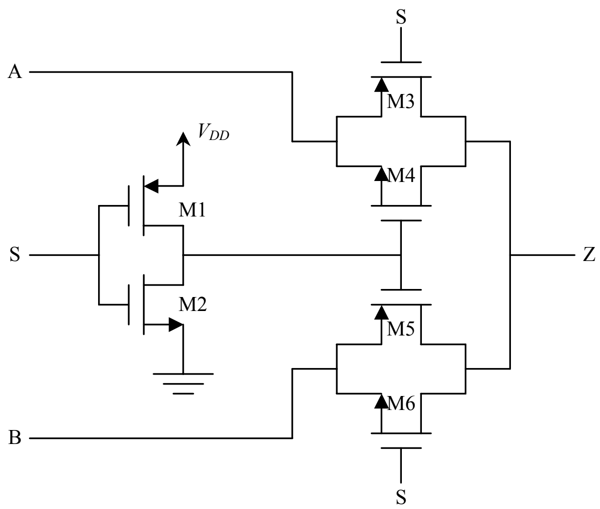
Ya estamos en condiciones de implementar ambas funciones. Para la función suma utilizaremos 2 puertas XOR de 2 entradas encadenadas una tras otra (ver ejercicio anterior de cómo construir una puerta XOR).

El circuito CMOS que genera el acarreo de salida sería el siguiente, utilizándose en total 32 transistores (funciones de suma y acarreo):



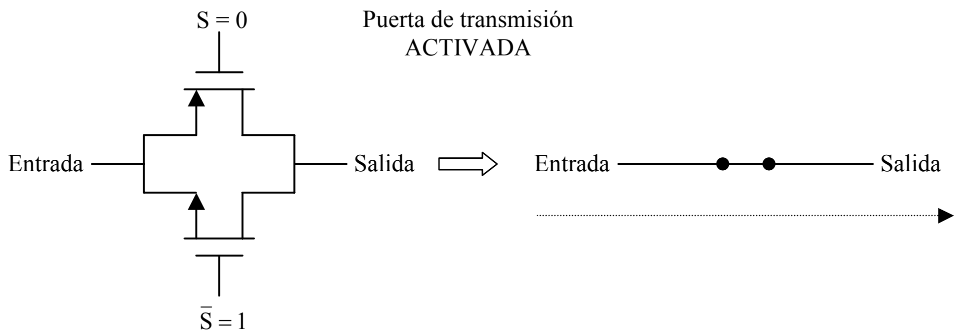
Ejercicio 4.3.3.

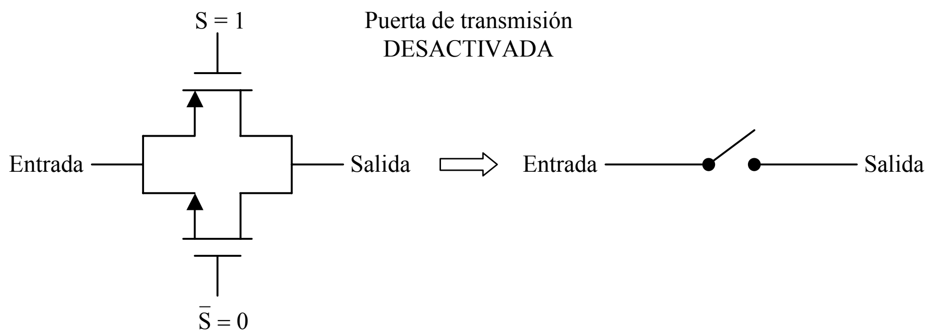
Analizar qué función lógica lleva a cabo el siguiente circuito con transistores MOS, realizando una tabla con el estado de los transistores M1 a M6 en función de las entradas A, B y S, y dando el valor de salida Z.



Solución:

En primer lugar tratamos de identificar estructuras ya conocidas. Por ejemplo, los transistores M1 y M2 forman un inversor CMOS, y se encargan de generar la inversión lógica de la entrada S; los transistores M3 y M4 forman una puerta de transmisión, al igual que el par M5 y M6. Una puerta de transmisión CMOS o bien conecta la entrada con la salida directamente, o deja la salida aislada por completo (estado de alta impedancia):





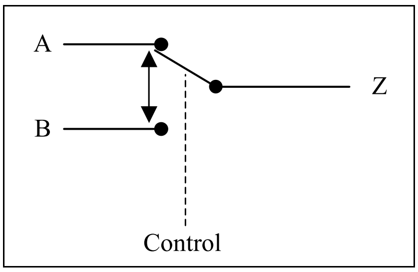
Es necesario destacar que cuando se produce un estado de conducción desde la entrada hacia la salida nunca pueden conducir los dos transistores a la vez (el de canal N y el de canal P):

- Cuando a la entrada haya un 0 lógico, la tensión V_{GS} del transistor de canal N será grande (mayor que la tensión umbral) y conducirá, mientras que el de canal P tendrá una V_{SG} igual a cero voltios, por lo que no conducirá.
- Cuando a la entrada hay un 1 lógico entonces será el MOS de canal P el que conducirá (V_{SG} será mayor que la tensión umbral), y el de canal N estará cortado (V_{GS} = 0 V).

Conociendo ya el funcionamiento de una puerta de transmisión, planteamos la tabla de verdad que nos indicará cómo está funcionando el circuito que estamos analizando. En los transistores que pertenecen a puertas de transmisión tendremos que poner atención en la tensión V_{GS} (en los de canal N) ó V_{SG} (en los de canal P) para determinar si conducen o no: si ésta tensión es mayor que 0 conducirán, y si es menor o igual que cero no lo harán. Evidentemente asociaremos a un 0 lógico 0 Voltios, y a un 1 lógico V_{DD} Voltios.

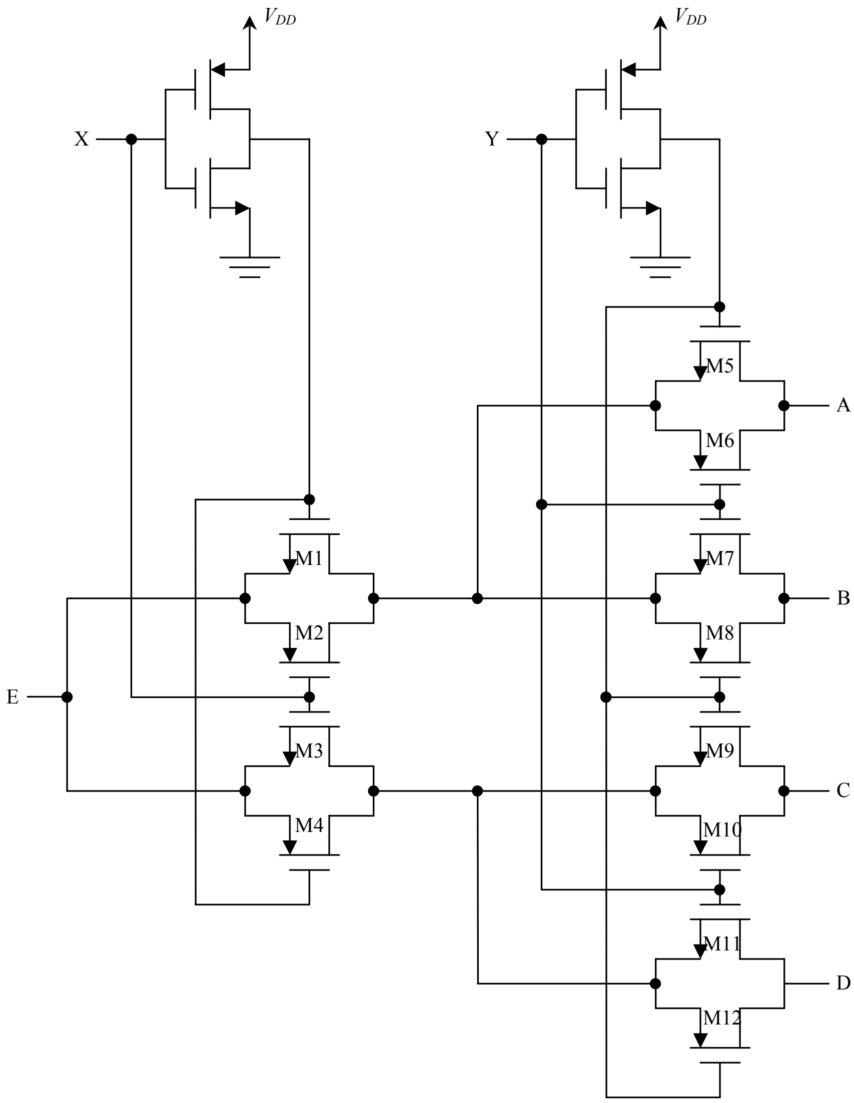
S	A	B	M1	M2	M3	M4	M5	M6	Z
0	0	0	COND.	CORTE	CORTE	COND.	CORTE	CORTE	0
0	0	1	COND.	CORTE	CORTE	COND.	CORTE	CORTE	0
0	1	0	COND.	CORTE	COND.	CORTE	CORTE	CORTE	1
0	1	1	COND.	CORTE	COND.	CORTE	CORTE	CORTE	1
1	0	0	CORTE	COND.	CORTE	CORTE	CORTE	COND.	0
1	0	1	CORTE	COND.	CORTE	CORTE	COND.	CORTE	1
1	1	0	CORTE	COND.	CORTE	CORTE	CORTE	COND.	0
1	1	1	CORTE	COND.	CORTE	CORTE	COND.	CORTE	1

De la tabla planteada se deduce que la función lógica que realiza este circuito es la de un multiplexor, con datos de entrada en A y B, y selección con la entrada S. El esquema físico de un multiplexor es el siguiente:



Ejercicio 4.3.4.

Analizar qué función lógica se corresponde con el siguiente circuito realizado con transistores MOS, creando una tabla con el estado de los transistores M1 a M12 en función de las entradas X, Y y E, e indicando los valores de salida A, B, C y D para cada combinación de entrada.



Solución:

Al igual que en el ejercicio anterior, buscaremos en el circuito estructuras ya conocidas. En este caso se aprecia claramente que en la parte superior hay presentes 2 inversores, uno para la señal de entrada X y otro para la Y. Además, observamos como hay un total de 6 puertas de transmisión con el comportamiento que ya conocemos (ver ejercicio anterior).

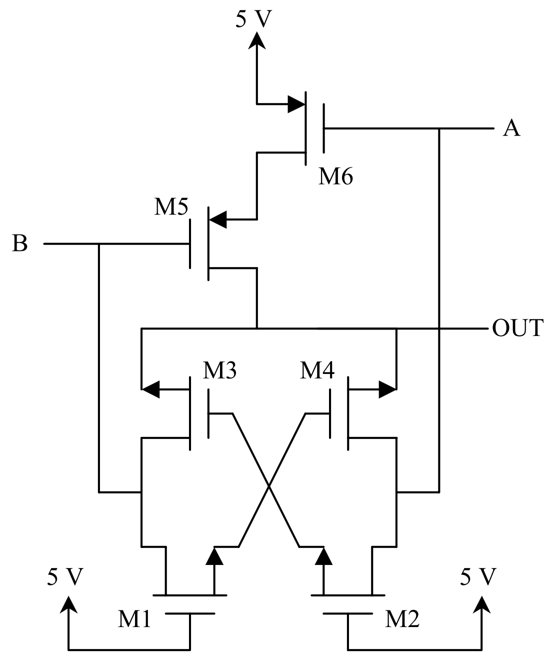
Planteamos la tabla de verdad de este circuito con todas las combinaciones posibles de entrada, indicando para cada una de ellas el estado de todos los transistores así como los valores de salida para A, B, C y D. Los transistores marcados con una 'C' conducen, y si tienen una 'X' es que no lo hacen:

X	Y	E	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	A	B	C	D
0	0	0	C	X	X	X	C	X	X	X	X	X	X	X	0	*Z*	*Z*	*Z*
0	0	1	X	C	X	X	X	C	X	X	X	X	X	X	1	*Z*	*Z*	*Z*
0	1	0	C	X	X	X	X	X	C	X	X	X	X	X	*Z*	0	*Z*	*Z*
0	1	1	X	C	X	X	X	X	X	C	X	X	X	X	*Z*	1	*Z*	*Z*
1	0	0	X	X	C	X	X	X	X	X	C	X	X	X	*Z*	*Z*	0	*Z*
1	0	1	X	X	X	C	X	X	X	X	X	C	X	X	*Z*	*Z*	1	*Z*
1	1	0	X	X	C	X	X	X	X	X	X	X	C	X	*Z*	*Z*	*Z*	0
1	1	1	X	X	X	C	X	X	X	X	X	X	X	C	*Z*	*Z*	*Z*	1

De la tabla planteada se deduce que la función lógica que realiza este circuito es la de un demultiplexor con dos entradas de selección (X e Y), una entrada de datos (E) y 4 salidas posibles (A,B,C,D), de tal manera que en cada momento, por las salidas en las que no está encaminado el dato de entrada E, se produce un estado de alta impedancia denotado con *Z*, es decir, la salida se queda "al aire" (desconectada), no tiene ni un uno ni un cero lógico.

Ejercicio 4.3.5.

Indicar la función lógica implementada por el circuito de la figura, justificando el estado de los transistores.

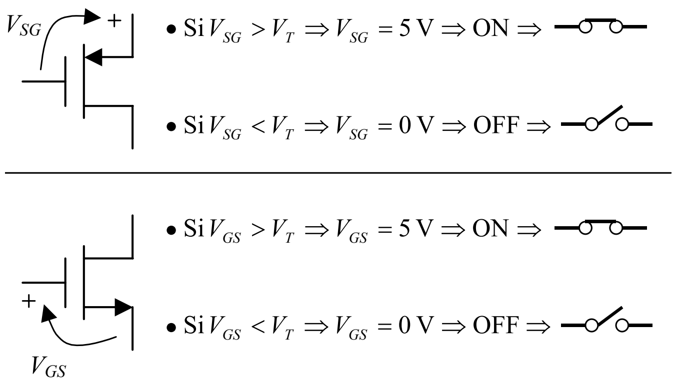


Solución:

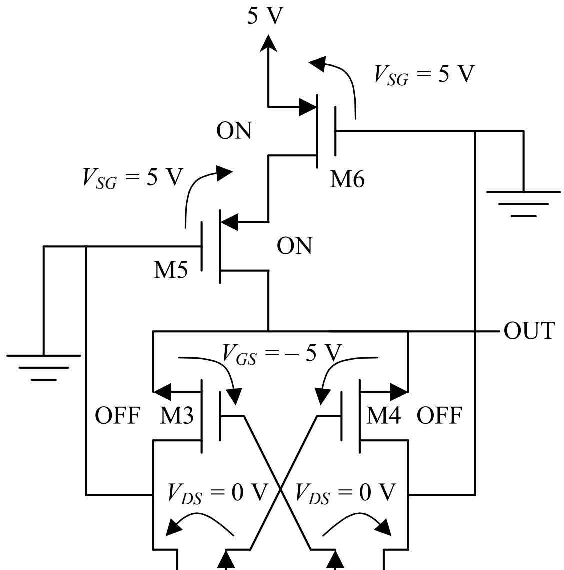
Observando el esquema apreciamos que existen dos entradas A y B, por lo tanto las combinaciones que debemos analizar serán las siguientes:

A	B	OUT
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Para realizar el análisis del problema tan sólo debemos tener en cuenta la tensión puerta-fuente de cada transistor según el criterio mostrado en la figura siguiente:



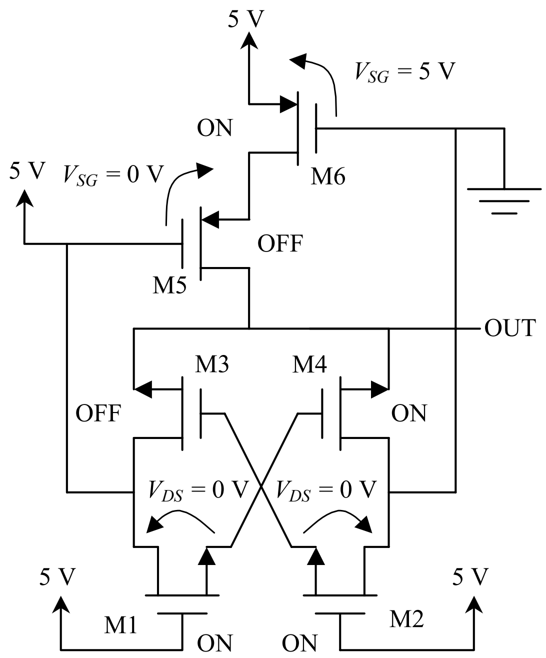
a) A = ’0’, B = ’0’



Observamos que los transistores M1 y M2 de la figura anterior van a estar siempre conduciendo ya que su puerta está conectada a una tensión positiva de 5 V, por lo tanto existirá canal pero a través de ellos no circulará corriente ya que sus terminales de fuente están conectados con las puertas de otros dos transistores MOS que no consumen corriente. Podemos afirmar que M1 y M2 realizan una función similar a la de una resistencia, pero al no circular corriente por ellos implica que tampoco existe una caída de tensión, es decir, la tensión entre drenador y fuente es cero ($V_{DS} = 0$ V).

Con respecto a la salida del circuito, según esta combinación de entradas, será de 5 V, que se corresponde con el nivel lógico '1' que se propaga a través de los dos transistores que se encuentran en serie (M5 y M6).

b) A = '0', B = '1'



Para esta situación, el segundo de los transistores de canal P que están en serie (el M5) se encuentra cortado. Además, a través del transistor M1 (que siempre está conduciendo), se polariza la puerta del transistor M4 con lo cual éste pasará a conducir el dato proveniente de la entrada digital A, a la vez que el valor de dicha entrada se propagará por M2 y cortará al transistor M3 según podemos ver en la figura anterior.

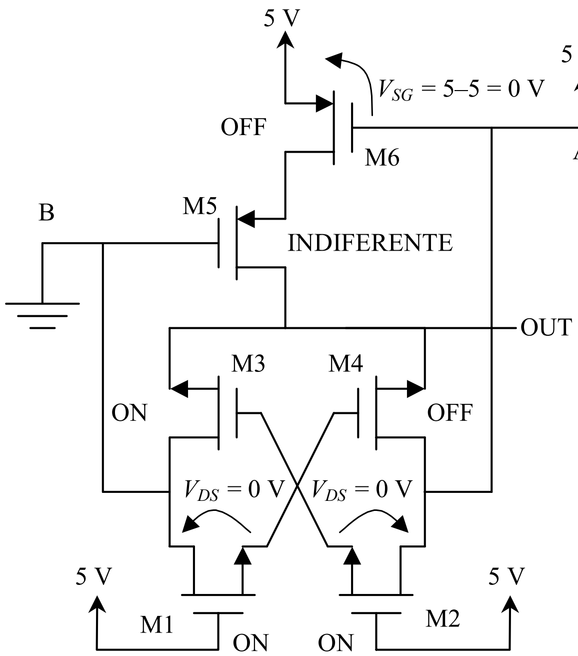
El valor de la salida lo fija la propia entrada digital A mediante el transistor M4, es decir, la salida es un nivel lógico '0'.

c) A = '0', B = '1'

Para esta combinación sigue cortado el camino compuesto por los dos transistores serie (M5 y M6), ya que el primero de ellos es el que estará cortado y el estado del segundo transistor en serie es indiferente (no afecta a la salida).

Por otro lado M4 está cortado, puesto que a través de M1 se propaga un nivel lógico ‘0’ que proviene de la entrada digital B, mientras que el transistor M3 está conduciendo ya que M2 deja pasar el nivel lógico ‘1’ proveniente de la entrada digital A.

La salida tiene un valor de ‘0’ lógico forzado por el valor de M3 que deja pasar la entrada B según se observa en la figura siguiente:

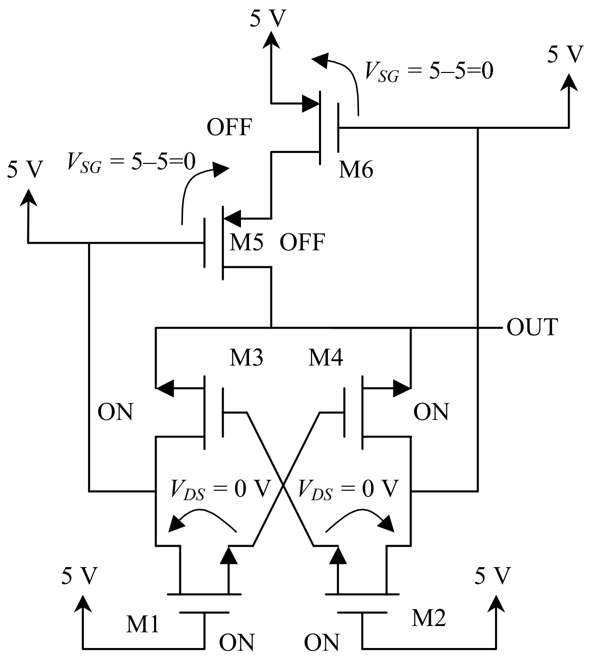


d) A = ’1’, B = ’1’

Para esta situación ambos transistores de la combinación serie se encuentran cortados y por lo tanto al igual que en los dos últimos casos tampoco afectan a la tensión de salida.

Respecto a la parte inferior del circuito, M3 y M4 están conduciendo, ya que establecen un canal que comunica a ambas entradas lógicas con el terminal de salida, luego dicho terminal se encuentra a un nivel lógico ‘1’.

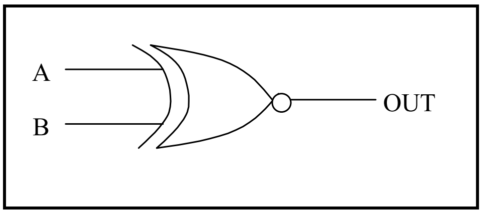
La figura siguiente muestra esta última situación.



El resumen de resultados correspondiente a los 4 casos analizados aparece en la tabla siguiente:

A	B	OUT
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A partir de la tabla anterior deducimos que la función lógica implementada es una función EXNOR:



5. Memorias de Estado Sólido

OBJETIVO:

- Analizar y diseñar la estructura interna de los distintos tipos de memorias utilizados en los sistemas digitales.

5.1. CONSTRUCCIÓN DE MATRICES DE MEMORIAS ROM Y EPROM

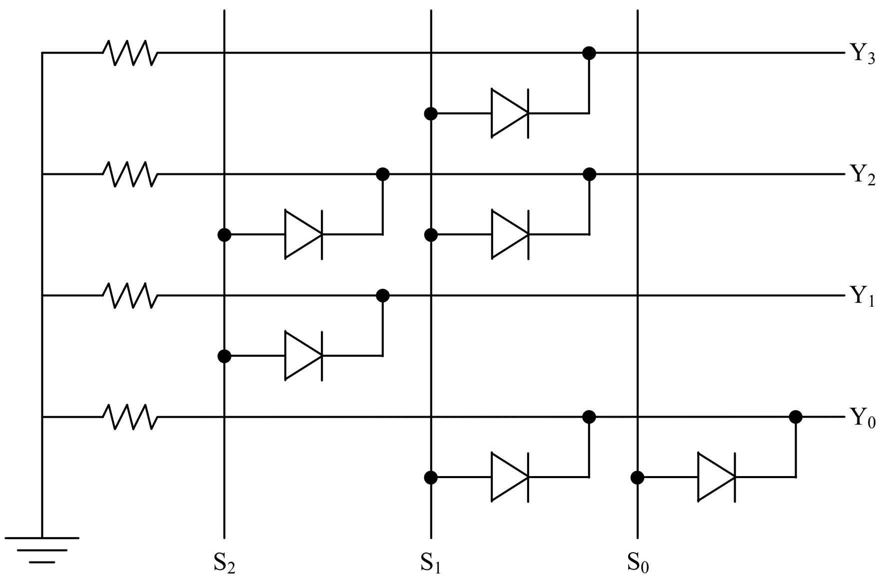
Ejercicio 5.1.1.

Construir una memoria ROM utilizando una matriz de diodos, que tenga 3 líneas de direcciones y 4 líneas de datos con la siguiente codificación:

Direcciones			Salidas			
S_2	S_1	S_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1

Solución:

Como las líneas de direccionamiento son activas a 1 lógico quiere decir que donde haya un diodo la salida será un '1', si bien la tensión de salida será proporcionada por la propia entrada de selección, por lo que será un poco más pequeña que ésta (hay que restarle la caída de tensión en el diodo). Por tanto la matriz de memoria quedaría como sigue:



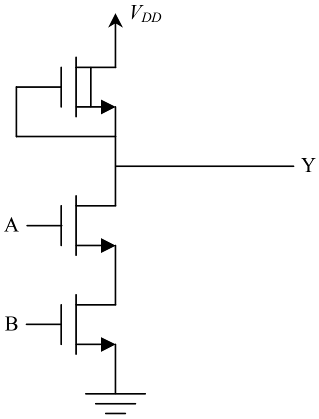
Ejercicio 5.1.2.

Construir una matriz de memoria ROM NAND NMOS de 4 líneas de direcciones y 5 líneas de salida que contenga la siguiente información:

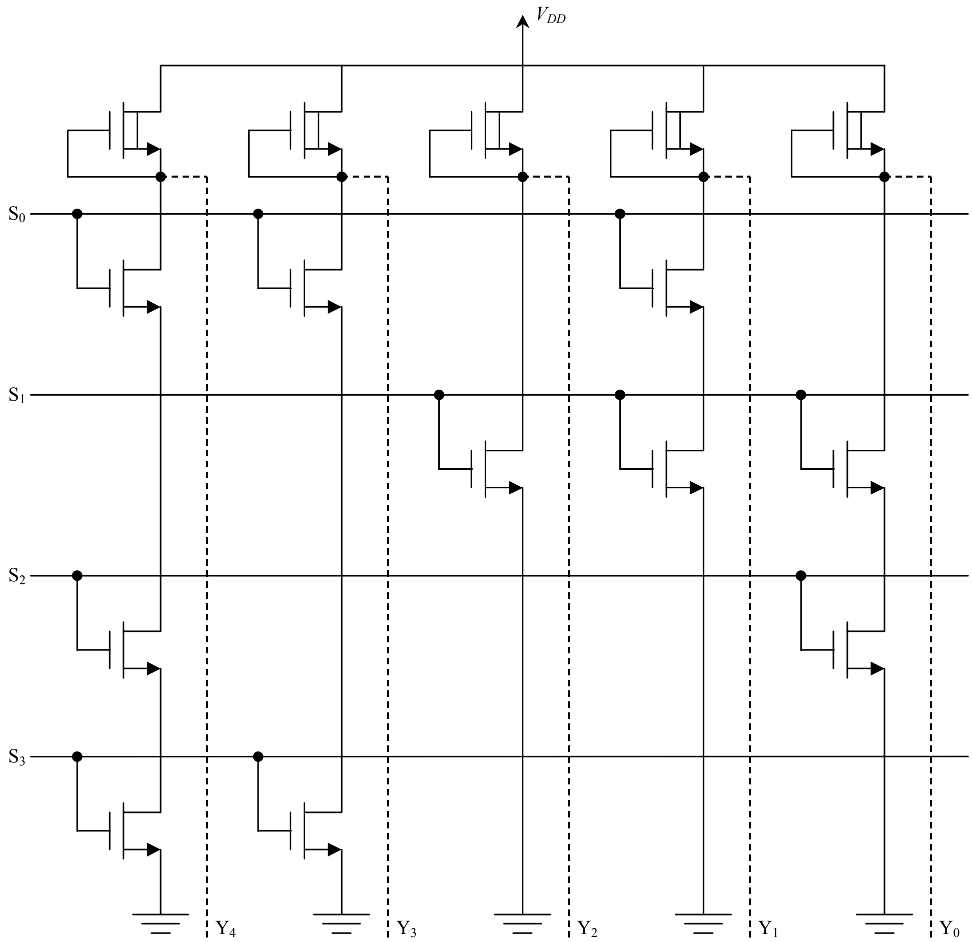
Direcciones				Salidas				
S_3	S_2	S_1	S_0	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0

Solución:

Tenemos que organizar la memoria de la misma forma que una puerta lógica NAND NMOS, es decir, con los transistores MOS de canal N de acumulación dispuestos en serie (conectados de forma que la fuente de un transistor esté unida al drenador del siguiente), como vemos a continuación:



Como las líneas de direccionamiento son activas a 0 lógico quiere decir que donde haya un transistor la salida será un '1', porque éste no conduciría y la salida quedaría conectada a V_{DD}. Por tanto, la matriz de memoria quedaría como sigue:



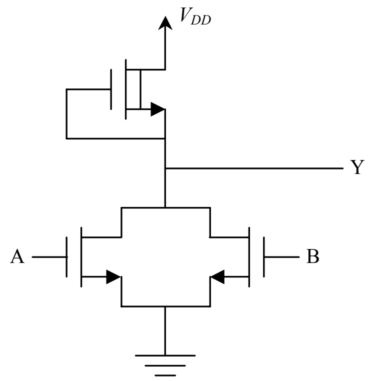
Ejercicio 5.1.3.

Construir una matriz de memoria ROM NOR NMOS de 4 líneas de direcciones y 3 líneas de salida que contenga la siguiente información:

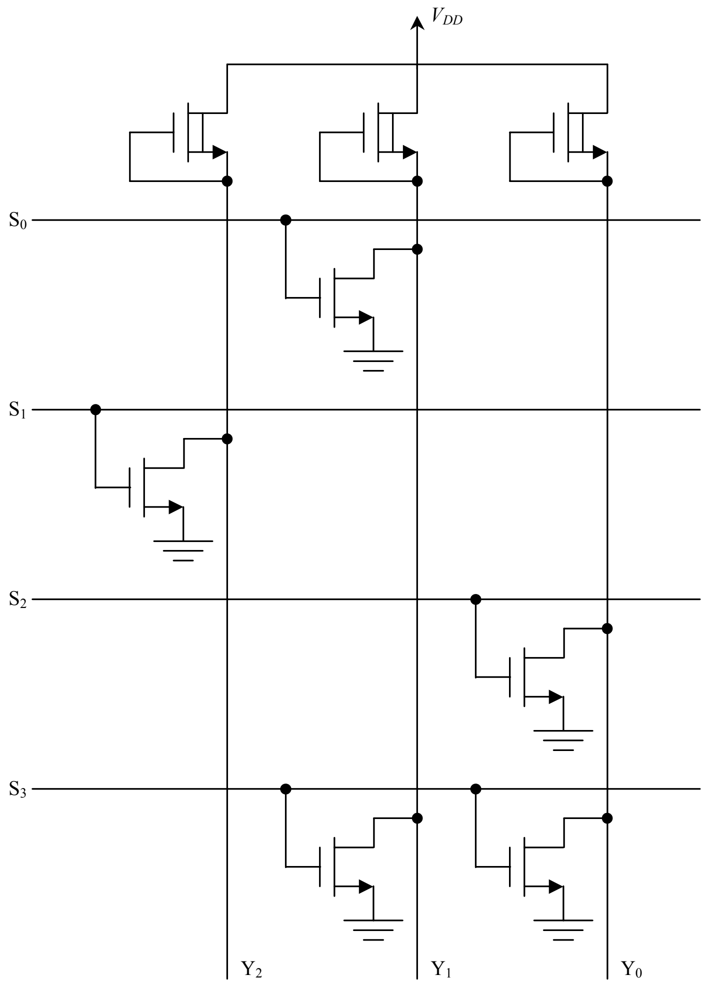
Direcciones				Salidas		
S_3	S_2	S_1	S_0	Y_2	Y_1	Y_0
1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1

Solución:

Tenemos que organizar la memoria de la misma forma que una puerta lógica NOR NMOS, es decir, con los transistores MOS de canal N de acumulación dispuestos en paralelo (conectados drenador con drenador y fuente con fuente), como se aprecia en la figura de la derecha:



Como las líneas de direccionamiento son activas a 1 lógico quiere decir que donde haya un transistor la salida será un ‘0’, porque éste conduciría. Por tanto la matriz de memoria quedaría como sigue:



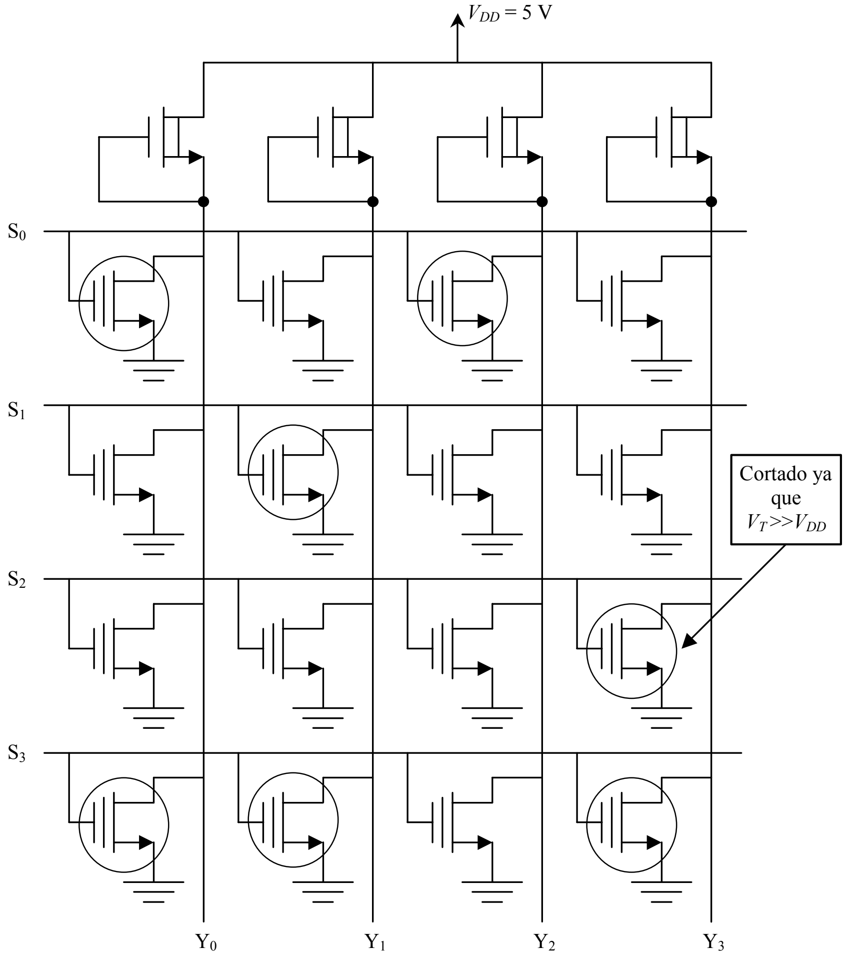
Ejercicio 5.1.4.

Construye una matriz de memoria EPROM de 4 líneas de direcciones y 4 líneas de datos de salida que contenga la información mostrada en la tabla adjunta. Para ello encierra con un círculo los transistores cuya puerta flotante deba contener cargas negativas.

Direcciones				Salidas			
S_0	S_1	S_2	S_3	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1

Solución:

La matriz queda como sigue:



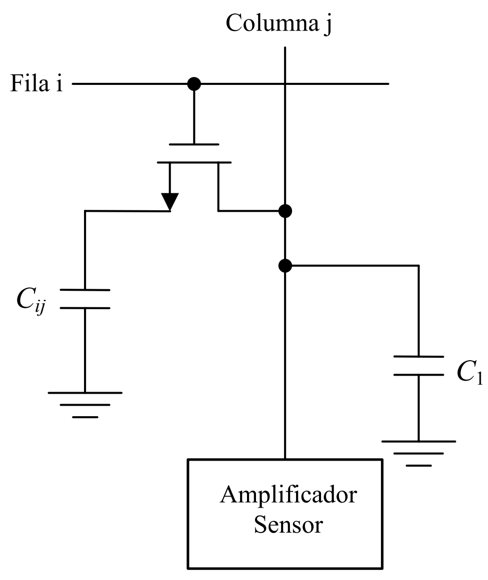
Recordando brevemente el funcionamiento del transistor MOS de doble puerta, podemos comentar que al aplicarle una tensión positiva elevada en su puerta se provocaba que las cargas negativas provenientes del substrato, al sentirse atraídas por este potencial de signo opuesto, eran capaces de atravesar el dieléctrico de la puerta flotante y cargar ésta negativamente, de modo que la puerta de dicho transistor estaba sometida permanentemente a un potencial negativo y por lo tanto no había posibilidad de establecer un canal, permaneciendo el transistor cortado.

Luego si la puerta flotante del transistor está cargada negativamente equivale a una celda que tiene almacenado un '1' lógico ya que el transistor no actúa. Pero si es un '0' lógico lo que deseamos almacenar será necesario dejar la puerta flotante descargada y así el transistor tendrá un funcionamiento similar al de un MOSFET normal.

5.2. CASO PRÁCTICO

Ejercicio 5.2.1.

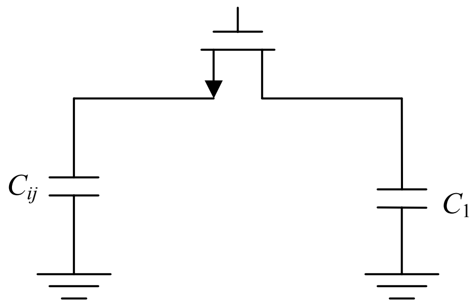
Para el esquema de la figura determinar el valor de tensión del '0' lógico y del '1' lógico que debe detectar un circuito Amplificador-Sensor de una memoria dinámica para diferenciar ambos datos sabiendo que C_{ij} = 10 nF y C_1 = 10 nF. Considerar que el circuito se alimenta a V_{CC} = 5 Voltios y que el transistor MOSFET tiene una V_{DS} = 0 cuando está conduciendo.



Solución:

El funcionamiento del bloque Amplificador-Sensor consiste en determinar si el dato almacenado en la celda era un '0' o un '1' mediante la medida del nivel de tensión una vez que se ponen en contacto el condensador de la celda C_{ij} con el de la columna C_1.

El proceso es muy sencillo, en primer lugar el Amplificador-Sensor carga a la tensión de alimentación (5 Voltios) el condensador C_1. A continuación se unen eléctricamente ambos condensadores y según la tensión obtenida como resultado de dicha unión se determina si es un '1' o un '0' lo almacenado. El esquema simplificado resulta:



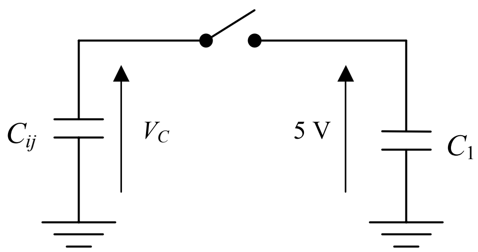
Según el enunciado del problema cuando el transistor conduce, es decir, cuando se selecciona la celda, su tensión $V_{DS} = 0$. Esto significa que se comporta como un interruptor ideal (no hay caída de tensión).

A partir del circuito anterior podemos derivar dos situaciones:

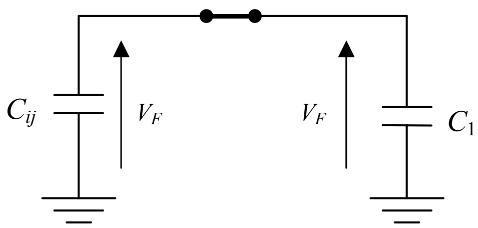
* Situación 1, donde el transistor aún no conduce y el Amplificador-Sensor carga C_1 a un valor alto de 5 V.

El valor de la tensión V_C representa el nivel lógico almacenado:

$V_C = 0$ V $\Rightarrow$ '0' lógico.
$V_C \approx 5$ V $\Rightarrow$ '1' lógico.



* Situación 2, donde el transistor conduce y los voltajes de los condensadores se igualan a un valor final dado por V_F.



Se trata de un problema de compartimiento de la carga, donde los voltajes en los condensadores cambian desde un estado inicial a un estado final y donde lo único que no cambia de una situación a otra es la carga Q almacenada en los condensadores.

La expresión de la carga almacenada en un condensador viene dada por $Q = C \cdot V$, donde C es la capacidad y V el voltaje en los bornes del condensador. Por lo tanto la carga en la situación 1 es igual a la carga de la situación 2. Ello se basa en el principio de conservación de la carga:

$$Q_{SITUACIÓN\ 1} = Q_{SITUACIÓN\ 2} \Rightarrow C_{ij} \cdot V_C + C_1 \cdot V_{CC} = (C_{ij} + C_1) \cdot V_F$$

Despejando V_F:

$$V_F = \frac{C_{ij} \cdot V_C + C_1 \cdot V_{CC}}{C_1 + C_{ij}} = \frac{10 \cdot V_C + 50}{20}$$

Si el dato almacenado era un '0' lógico $\Rightarrow$ $V_C \approx 0$ V ya que C_{ij} estaría descargado, luego:

$$V_F = \frac{10 \cdot 0 + 50}{20} = 2{,}5\ \text{V}$$

Si el dato almacenado era un '1' lógico $\Rightarrow$ $V_C \approx 5$ V, luego:

$$V_F = \frac{10 \cdot 5 + 50}{20} = 5\ \text{V}$$

En resumen:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall\ 0 \le V_F \le 2{,}5\ \text{V} \Rightarrow \text{Dato almacenado un '0' lógico} \\ \forall\ 2{,}5 \le V_F \le 5\ \text{V} \Rightarrow \text{Dato almacenado un '1' lógico} \end{array}\right\}}$$

El Amplificador-Sensor detecta una mayor caída de tensión en la primera situación y deduce que el dato almacenado era un cero.

Vemos que el proceso de lectura ha destruido la información almacenada en la celda, luego otra función del bloque Amplificador-Sensor consiste en restaurar el dato de la celda a su valor original.

Apéndice A. Modelos Simplificados de Dispositivos Semiconductores

OBJETIVOS:

- Comprender el funcionamiento de los dispositivos semiconductores más importantes y simular su comportamiento sobre la base de modelos matemáticos.
- Describir los modelos básicos que aproximan el comportamiento real de los dispositivos como el diodo, el transistor bipolar y los transistores MOSFET.
- Describir a fondo los modelos utilizados en el análisis de los problemas presentados.

A.1. INTRODUCCIÓN

El análisis de circuitos con elementos semiconductores presenta el inconveniente de que, al tratarse de dispositivos no lineales, aplicando los métodos de resolución de sistemas lineales se obtienen unas ecuaciones excesivamente complejas de resolver, sólo accesibles mediante cálculo numérico por computador. No obstante, en muchas ocasiones, es preferible obtener un resultado menos exacto pero que aporte información sobre el funcionamiento del circuito. Por ello se utilizan métodos aproximados de cálculo de tipo analítico que usan modelos linealizados y que aproximan la curva característica del dispositivo a una curva lineal a tramos con lo cual ya es posible aplicar métodos de análisis de circuitos lineales.

La forma de realizar esta aproximación no es única, de ahí que para cada dispositivo puedan considerarse varios modelos linealizados distintos.

Los modelos utilizados para cada uno de los dispositivos que aparecen en este libro son descritos a continuación.

A.2. MODELOS PARA EL DIODO SEMICONDUCTOR Y DIODO ZENER

A.2.1. Modelo idealizado

Es el modelo más simple y consiste en considerar que el diodo se comporta como un circuito abierto en polarización inversa y como un cortocircuito en polarización directa.

A.2.2. Modelo con tensión umbral

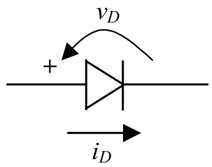
Es un modelo algo más aproximado, el cual tiene en cuenta que la conducción del diodo en polarización directa sólo es apreciable por encima de un determinado valor de tensión, denominado tensión umbral V_γ. De esta forma, el diodo se comporta como un circuito abierto en polarización inversa, hasta el valor de V_γ, y como una fuente de tensión igual a la tensión umbral en polarización directa.

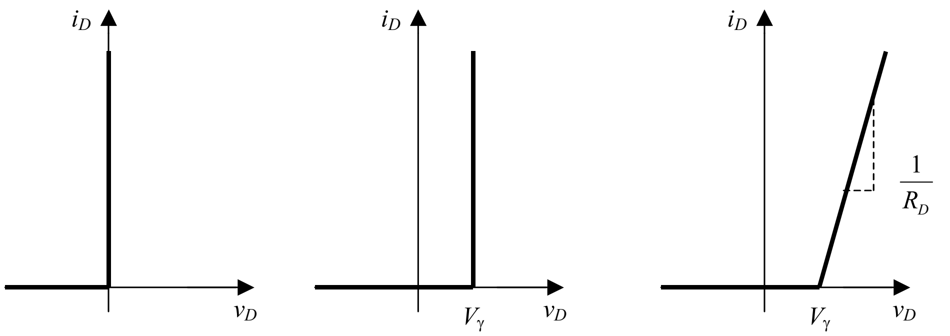
A.2.3. Modelo linealizado general

Este modelo tiene además en cuenta la caída de tensión por efectos resistivos que se producen en el diodo cuando circula corriente por él.

El diodo se comporta como un circuito abierto en polarización inversa y como una fuente de tensión igual a la tensión umbral en serie con una resistencia en polarización directa.

Los modelos linealizados del diodo descritos anteriormente aparecen representados de forma gráfica en la figura siguiente:





Modelo idealizado:

$\forall\, v_D \le 0 \Rightarrow i_D = 0$

$\forall\, i_D \ge 0 \Rightarrow v_D = 0$

Modelo con V_γ:

$\forall\, v_D \le V_\gamma \Rightarrow i_D = 0$

$\forall\, i_D \ge 0 \Rightarrow v_D = V_\gamma$

Modelo linealizado general:

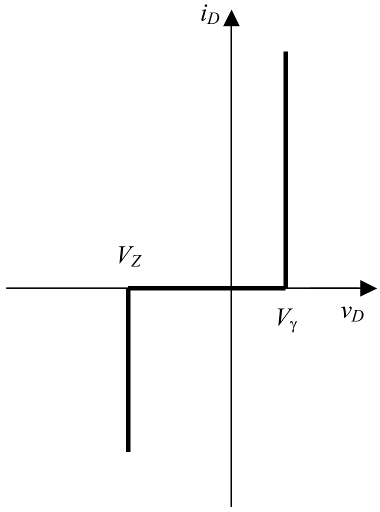
$\forall\, v_D \le V_\gamma \Rightarrow i_D = 0$

$\forall\, v_D \ge V_\gamma \Rightarrow i_D = \dfrac{(v_D - V_\gamma)}{R_D}$

A.2.4. Modelo linealizado para el diodo Zener

El modelo linealizado del diodo zener se forma a partir de cualquiera de los modelos del diodo básico añadiendo una nueva zona de operación, la de conducción inversa a partir de un determinado valor de tensión denominado tensión de ruptura V_Z. La expresión en polarización directa permanece sin cambios pero en la zona inversa debemos introducir una modificación en la condición.

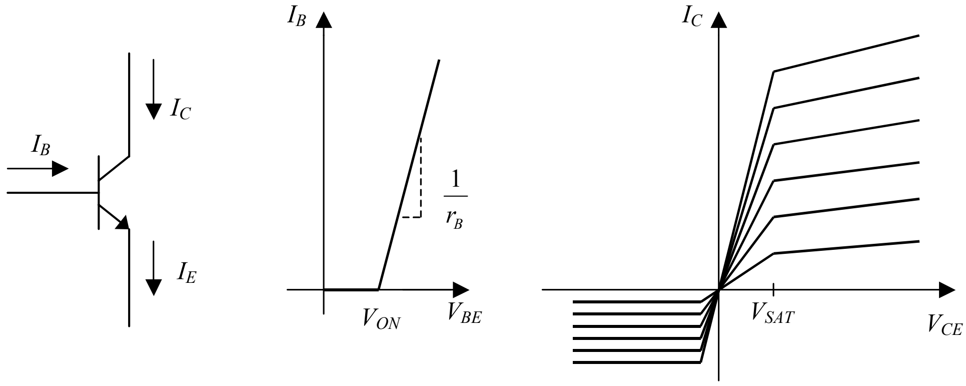
$$\begin{cases} \forall\, i_D \geq 0 \Rightarrow v_D = V_\gamma \\ \forall\, V_Z \leq v_D \leq V_\gamma \Rightarrow i_D = 0 \\ \forall\, i_D \leq 0 \Rightarrow v_D = V_Z \end{cases}$$



A.3. MODELOS PARA EL TRANSISTOR BIPOLAR NPN

A.3.1. Modelo linealizado general

En este modelo, las curvas características de entrada y salida se aproximan por las que se muestran en las figuras siguientes:



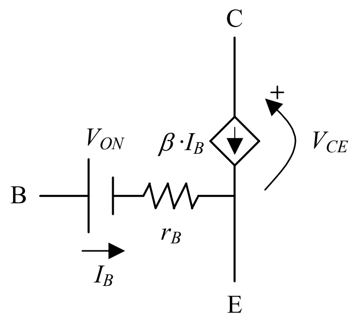
Los parámetros necesarios para caracterizar este modelo son la tensión umbral de la base V_{ON}, la resistencia de la base r_B, las ganancias en directa e inversa β y β_R respectivamente y la tensión de saturación V_{SAT}.

Para cada región de funcionamiento el transistor bipolar se comporta como un circuito lineal diferente, debiéndose verificar una serie de condiciones que se muestran a continuación:

Zona Activa:

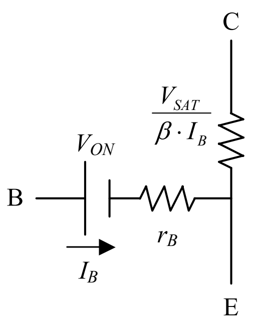
$$\text{Condiciones}: \begin{cases} I_B \geq 0 \\ V_{CE} > V_{SAT} \end{cases}$$

$$\text{Circuito}: \begin{cases} V_{BE} = V_{ON} + I_B \cdot r_B \\ I_C = \beta \cdot I_B \end{cases}$$

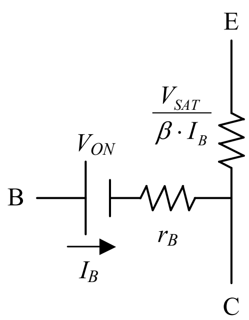


ZONA ACTIVA

Zona de Saturación:



ZONA DE SATURACIÓN
$V_{CE} > 0$



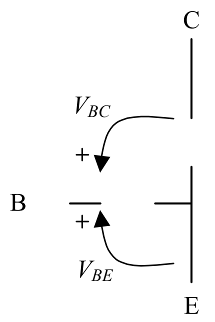
ZONA DE SATURACIÓN
$V_{CE} < 0$

$$\text{Condiciones}: \begin{cases} I_B \geq 0 \\ -\dfrac{\beta_R}{\beta} V_{SAT} \leq V_{CE} \leq V_{SAT} \end{cases} ;\text{Circuito}: \begin{cases} I_C = \dfrac{\beta \cdot I_B}{V_{SAT}} V_{CE} \\ V_{BE} = V_{ON} + I_B \cdot r_B \ \text{ si } \ V_{CE} \geq 0 \\ V_{BC} = V_{ON} + I_B \cdot r_B \ \text{ si } \ V_{CE} \leq 0 \end{cases}$$

Zona de Corte:

$$\text{Condiciones}: \begin{cases} V_{BE} < V_{ON} \\ V_{BC} < V_{ON} \end{cases}$$

$$\text{Circuito}: \begin{cases} I_B = 0 \\ I_C = 0 \end{cases}$$

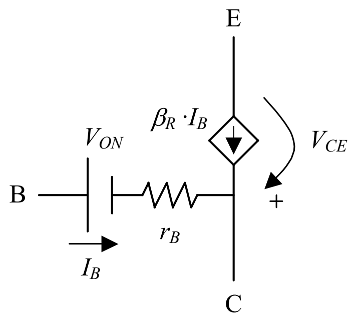


ZONA DE CORTE

Zona Inversa:

$$\text{Condiciones}: \begin{cases} I_B \geq 0 \\ V_{CE} < -\dfrac{\beta_R}{\beta} V_{SAT} \end{cases}$$

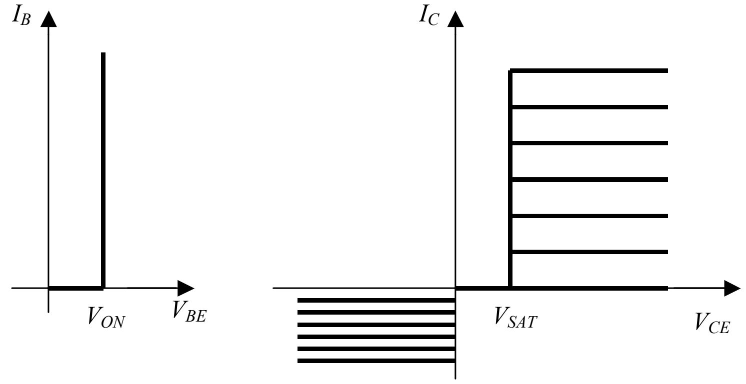
$$\text{Circuito}: \begin{cases} V_{BC} = V_{ON} + I_B \cdot r_B \\ I_E = \beta_R \cdot I_B \end{cases}$$



ZONA INVERSA

A.3.2. Modelo Idealizado

En este modelo se introducen simplificaciones tanto en las curvas de entrada como en las de salida, según se muestra en la figura siguiente:



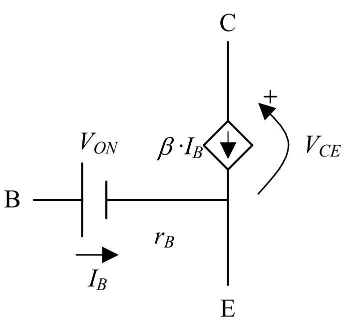
En este nuevo modelo la resistencia de base r_B se hace nula, y la zona de saturación se reduce a considerar que $V_{CE} = V_{SAT}$ para I_C positiva y $V_{CE} = 0$ para I_C negativa.

El funcionamiento del transistor y las condiciones en cada zona de operación son las siguientes:

Zona Activa:

$$\text{Condiciones}: \begin{cases} I_B \geq 0 \\ V_{CE} > V_{SAT} \end{cases}$$

$$\text{Circuito}: \begin{cases} V_{BE} = V_{ON} \\ I_C = \beta \cdot I_B \end{cases}$$

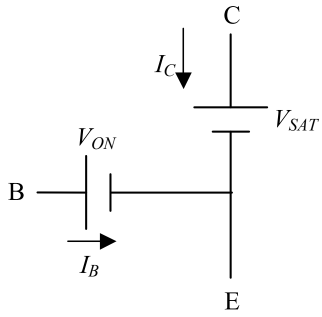


ZONA ACTIVA

Zona de Saturación:

$$\text{Condiciones}: \begin{cases} I_B > 0 \\ 0 < I_C \leq \beta \cdot I_B \end{cases}$$

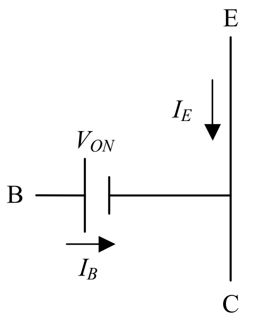
$$\text{Circuito}: \begin{cases} V_{BE} = V_{ON} \\ V_{CE} = V_{SAT} \end{cases}$$



ZONA DE SATURACIÓN
$I_C > 0$

$$\text{Condiciones}: \begin{cases} I_B > 0 \\ 0 < I_E \leq \beta_R \cdot I_B \end{cases}$$

$$\text{Circuito}: \begin{cases} V_{BC} = V_{ON} \\ V_{CE} = 0 \end{cases}$$

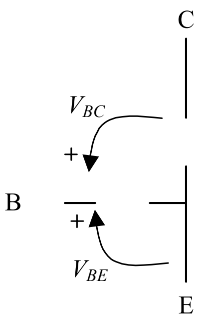


ZONA DE SATURACIÓN
$I_C < 0$

Zona de Corte:

$$\text{Condiciones}: \begin{cases} V_{BE} < V_{ON} \\ V_{BC} < V_{ON} \end{cases}$$

$$\text{Circuito}: \begin{cases} I_B = 0 \\ I_C = 0 \end{cases}$$

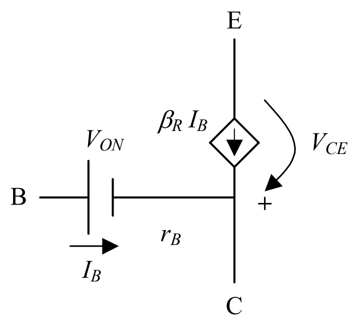


ZONA DE CORTE

Zona Inversa:

$$\text{Condiciones}: \begin{cases} I_B \geq 0 \\ V_{CE} < 0 \end{cases}$$

$$\text{Circuito}: \begin{cases} V_{BC} = V_{ON} \\ I_E = \beta_R \cdot I_B \end{cases}$$



ZONA INVERSA

A.3.3. Modelo Simplificado

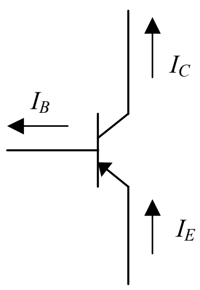
Es una variación del modelo idealizado que consiste en considerar que la tensión de conducción en el diodo base-emisor es diferente en las zonas activas y de saturación. De esta forma, para transistores bipolares de silicio, se tiene:

1) Si el transistor trabaja en la zona activa: $V_{BE} = 0{,}6$ V
2) Si el transistor se encuentra en zona de saturación:
   $V_{BE} = 0{,}8$ V ; $V_{CE} = 0{,}2$ V
3) Si el transistor se encuentra en corte: $V_{BE} < 0{,}5$ V

El resto de las condiciones coinciden con el modelo idealizado.

A.4. MODELOS PARA EL TRANSISTOR BIPOLAR PNP

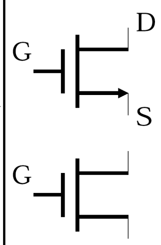
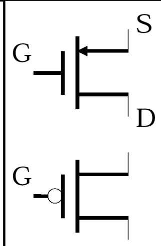
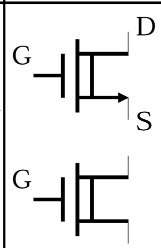
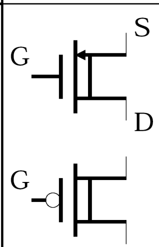
Todos los modelos y expresiones descritos para el transistor NPN son exactamente válidos para el PNP, sólo que en éste hay que cambiar los sentidos de las intensidades y la referencia de las tensiones. De esta forma, I_B e I_C son positivas cuando salen e I_E cuando entra, y las tensiones consideradas son V_{EC}, V_{EB} y V_{CB}. Observamos que se mantienen las expresiones del NPN pero cambiando V_{CE} por V_{EC}, V_{BE} por V_{EB} y V_{BC} por V_{CB}. ***No es necesario cambiar ningún signo ni ninguna desigualdad***.



A.5. MODELOS PARA EL TRANSISTOR MOSFET

En la tabla de la siguiente página se muestran los modelos y las expresiones utilizados tanto para transistores de acumulación como para transistores de deplexión. La única diferencia entre ellos, en cuanto a modelos se refiere, es que en el de acumulación se utiliza la tensión umbral V_T, que representa la mínima tensión necesaria para que exista canal y que siempre tiene un valor positivo, mientras que en las expresiones correspondientes al transistor de deplexión se emplea la tensión de Pinch-Off V_P, que es la tensión a la cual desaparece el canal prefabricado del transistor y que siempre tiene un valor negativo.

TRANSISTORES MOSFET

	ACUMULACIÓN o ENRIQUECIMIENTO ($V_T > 0$)			
	Símbolos de circuito	Zona de CORTE	Zona OHMICA	Zona de SATURACIÓN
canal N		$V_{GS} < V_T$ $I_D = 0$	$V_{GS} \geq V_T$ $V_{DS} \leq V_{GS} - V_T$ $I_D = K_N\,(V_{GS} - V_T - \frac{V_{DS}}{2})\ V_{DS}$	$V_{GS} \geq V_T$ $V_{DS} \geq V_{GS} - V_T$ $I_D = \frac{K_N}{2}\,(V_{GS} - V_T)^2$
canal P		$V_{SG} < V_T$ $I_S = 0$	$V_{SG} \geq V_T$ $V_{SD} \leq V_{SG} - V_T$ $I_S = K_P\,(V_{SG} - V_T - \frac{V_{SD}}{2})\ V_{SD}$	$V_{SG} \geq V_T$ $V_{SD} \geq V_{SG} - V_T$ $I_S = \frac{K_P}{2}\,(V_{SG} - V_T)^2$
	DEPLEXIÓN o EMPOBRECIMIENTO ($V_P < 0$)			
canal N		$V_{GS} < V_P$ $I_D = 0$	$V_{GS} \geq V_P$ $V_{DS} \leq V_{GS} - V_P$ $I_D = K_N\,(V_{GS} - V_P - \frac{V_{DS}}{2})\ V_{DS}$	$V_{GS} \geq V_P$ $V_{DS} \geq V_{GS} - V_P$ $I_D = \frac{K_N}{2}\,(V_{GS} - V_P)^2$
canal P		$V_{SG} < V_P$ $I_S = 0$	$V_{SG} \geq V_P$ $V_{SD} \leq V_{SG} - V_P$ $I_S = K_P\,(V_{SG} - V_P - \frac{V_{SD}}{2})\ V_{SD}$	$V_{SG} \geq V_P$ $V_{SD} \geq V_{SG} - V_P$ $I_S = \frac{K_P}{2}\,(V_{SG} - V_P)^2$