

รวมข้อสอบคัดผู้แทนคอมพิวเตอร์โอลิมปิกและเฉลย ปี 2020

จิรายุ บุรพาชีพ, ภาสพล เสาวคนธ์

1 Utilization

มีเมืองอยู่จำนวน N เมือง โดยแต่ละเมือง i เราจะได้รับคูนับจำนวน L_i คู่ $(X_{i,1}, Q_{i,1}), \dots, (X_{i,L_i}, Q_{i,L_i})$ แทนการกระจายความน่าจะเป็นของการไฟดับ แต่ละคูนับจะระบุว่า ความน่าจะเป็นที่จะมีบ้านไฟดับจำนวน $X_{i,j}$ บ้าน เท่ากับ $Q_{i,j}$ เนื่องจากการกระจายความน่าจะเป็น ผลรวมของความน่าจะเป็นสำหรับแต่ละเมืองจะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

เราต้องการจัดสรรเครื่องปั่นไฟ จำนวน M เครื่อง ไปยังเมืองต่างๆ เพื่อให้ค่าคาดหวังของจำนวนเครื่องปั่นไฟที่ถูกใช้งานนั้นสูงที่สุด โดยค่าคาดหวังของการจัดสรรเครื่องปั่นไฟสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \min(X_{i,j}, \text{assigned}_i) * Q_{i,j}$$

หาก assigned_i เป็นจำนวนเครื่องปั่นไฟที่จัดสรรไปให้เมือง i

ข้อจำกัด: $1 \leq N \leq 100\,000, 1 \leq M \leq 300\,000$ และ $L_1 + \dots + L_N \leq 300\,000$

1.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

เงื่อนไขพิเศษ: $L_i = 1$

เนื่องจาก $L_i = 1$ เราสามารถสรุปได้ว่า $Q_{i,1}$ จะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ ในกรณีนี้ สมการค่าคาดหวังจะกลายเป็น

$$\sum_{i=1}^N \min(X_{i,1}, \text{assigned}_i)$$

สังเกตว่า หากปัจจุบัน $\text{assigned}_i < X_{i,1}$ แล้วเราให้เครื่องปั่นไฟเพิ่มไปอีกเครื่อง ไม่ว่าจะเพิ่มไปที่เมืองไหน ค่าคาดหวังของเราจะเพิ่มขึ้นเท่ากับ 1 เสมอ ไม่เช่นนั้นจะเป็น 0

ดังนั้น วิธีในการให้เครื่องปั่นไฟที่ดีที่สุดคือ ให้กับเมืองใดก็ได้ที่ $\text{assigned}_i < X_{i,1}$ ไปเรื่อยๆ และคำตอบในกรณีนี้ ค่าคาดหวังจะมีค่าเท่ากับ $\min(M, \sum_{i=1}^N X_{i,1})$

Total time complexity: $\mathcal{O}(N)$

1.2 Subtask 2 (10 คะแนน)

เงื่อนไขพิเศษ: $L_i = 2$ และ $X_{i,1} = 0$ เสมอ

สมการค่าคาดหวังในกรณีนี้จะเท่ากับ $\sum_{i=1}^N \min(X_{i,2}, \text{assigned}_i) * Q_{i,2}$

เราจะแก้ปัญหานี้เช่นเดียวกับที่ทำใน Subtask 1 โดยจะค่อยๆ เพิ่มเครื่องปั่นไฟเข้าไปเรื่อยๆ

สังเกตว่าหากปัจจุบัน $\text{assigned}_i < X_{i,2}$ แล้วเราให้เครื่องปั่นไฟเพิ่มไปอีกเครื่อง ค่าคาดหวังของเราจะเพิ่มขึ้นเท่ากับ $Q_{i,2}$ ไม่เช่นนั้นจะเป็น 0

ดังนั้น วิธีในการให้เครื่องปั่นไฟที่ดีที่สุดคือ ให้กับเมืองที่ $\text{assigned}_i < X_{i,2}$ และมีค่า $Q_{i,2}$ มากที่สุดไปเรื่อยๆ เนื่องจากค่า $Q_{i,2}$ มีค่าคงที่เสมอแม้จะเพิ่มเครื่องปั่นไฟเข้าไปที่เมืองใดก็ตาม

ในส่วน Implementation นั้น เราสามารถใช้ Max-priority queue เพื่อจำลองการเลือกเมืองที่มีค่า $Q_{i,2}$ มากที่สุดได้

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N)$

1.3 Subtask 3 (50 คะแนน)

เงื่อนไขพิเศษ: $N \leq 1\,000$ และ $M \leq 5\,000$

ในกรณีทั่วไปนั้น การเพิ่มเครื่องปั่นไฟหนึ่งเครื่องเข้าไปในเมืองที่มี i ที่มี เครื่องปั่นไฟอยู่แล้วจำนวน assigned_i เครื่อง

ความน่าจะเป็นที่เพิ่มขึ้นจากคู่อันดับ $(X_{i,j}, Q_{i,j})$ สำหรับ j ใดๆ จะถูกแบ่งออกเป็นสองกรณีก็คือ

1. $\text{assigned}_i + 1 \leq X_{i,j}$ ในกรณีนี้ ค่าคาดหวังจะเพิ่มเท่ากับ $Q_{i,j}$
2. $\text{assigned}_i + 1 > X_{i,j}$ ในกรณีนี้ ค่าคาดหวังจะไม่เพิ่ม เนื่องจาก \min ในสมการค่าคาดหวังบนสุด

ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าค่าคาดหวังที่จะเพิ่มขึ้นจะมีค่าเท่ากับ

$$\sum_{j \leq L_i, \text{assigned}_i + 1 \leq X_{i,j}} Q_{i,j}$$

สังเกตได้อีกว่า ยิ่ง assigned_i มีค่าเยอะขึ้น ค่าคาดหวังที่จะเพิ่มขึ้นอาจจะมีค่าน้อยลงกว่าเดิม

วิธีในการให้เครื่องปั่นไฟที่ดีที่สุดคือ เลือกให้กับเมืองที่มีค่า $\sum_{\text{assigned}_i+1 \leq X_{i,j}} Q_{i,j}$ มากที่สุด ไปเรื่อยๆ

เพราะการเลือกจัดให้กับเมืองที่มีค่าดังกล่าวที่ไม่มากที่สุด จะไม่ทำให้คำตอบดีขึ้น เนื่องจากค่าคาดหวังที่ได้หลังจากเพิ่มเครื่องปั่นไฟให้กับเมืองนั้นไปแล้ว จะไม่เยอะขึ้น ทำให้ไม่สามารถหวังว่าจะทำให้เกิดตัวเลือกที่ดีกว่า เมืองที่มีค่าดังกล่าวมากที่สุด ในภายหลัง

ในส่วนของการ Implementation ในแต่ละรอบของการเพิ่มเครื่องปั่นไฟ เราสามารถไล่ดูว่าแต่ละเมืองมีค่าดังกล่าวเท่าไร แล้วเลือกจัดให้กับเมืองที่มีค่ามากที่สุด

เราสามารถคำนวณค่า $\sum_{k \leq X_{i,j}} Q_{i,j}$ สำหรับทุกค่า $i \leq N$ และ $k \leq M$ เอาไว้ตั้งแต่แรกได้แล้ว ซึ่งสามารถคำนวณอย่างรวดเร็วได้ด้วย Suffix sum ตามตัวอย่างโค้ดภาษา C++ ด้านล่าง

```

1 // compute suffix sum for each town
2 for(int i = 1; i <= n; i++) {
3     for(int j = 1; j <= L[i]; j++) sum[i][X[i][j]] += Q[i][j];
4     for(int k = m-1; k >= 0; k--) sum[i][k] += sum[i][k+1];
5 }
6
7 // run m times
8 while(m--) {
9     // choose the best town
10    int best = 1;
11    for(int i = 2; i <= n; i++) {
12        if(sum[i][assigned[i]+1] > sum[best][assigned[best]+1]) best = i;
13    }
14    // add to the answer
15    ans += sum[best][assigned[best]+1];
16    assigned[best]++;
17 }

```

Total time complexity: $\mathcal{O}(M * N)$

1.4 Subtask 4 (30 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

สังเกตว่า ค่าของ Suffix sum ของเมือง i จะเปลี่ยนค่าทุกครั้งที่ k เท่ากับ $X_{i,j}$ สำหรับบาง j ดังนั้นตอนคำนวณ Suffix sum เราสามารถละทิ้งค่าในตำแหน่ง k ที่ไม่สำคัญทิ้งไปได้จำนวนมาก

ที่นี้การหาค่าของเมือง i ที่จะมีเครื่องปั่นไปจำนวน $\text{assigned}_i + 1$ เครื่อง จะมีค่าเท่ากับ $\text{sum}[i][\text{up}]$ โดย up แทน $X_{i,j}$ ที่น้อยที่สุดที่มากกว่าเท่ากับ $\text{assigned}_i + 1$

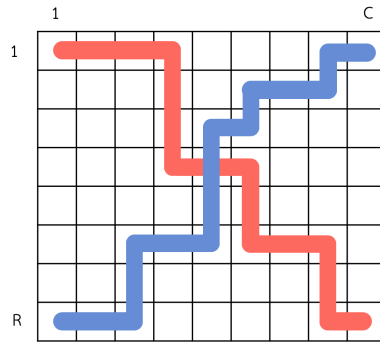
สุดท้าย เพื่อจำลองการเลือกเมืองที่มีค่ามากที่สุดทำได้เร็วขึ้น เราจะใช้ Max-priority queue ในการ Implement ข้อนี

Total time complexity: $\mathcal{O}((M + N) \log N)$

2 Marching

เราได้รับแผนที่ป่าซึ่งเป็นตารางขนาด $R \times C$ มา ในช่อง (i, j) ใดๆ จะมีค่า $A_{i,j}$ กำกับอยู่ ซึ่งเป็นพลังงานที่ต้องใช้ในการถางป่าในช่องนั้น

โจทย์ถามว่าเราต้องใช้พลังงานน้อยที่สุดเท่าไรในการถางป่าเพื่อสร้างทางเดินที่เราสามารถเดินจากช่องมุมบนซ้าย $(1, 1)$ ไปล่างขวา (R, C) และ ล่างซ้าย $(R, 1)$ ไปบนขวา $(1, C)$ ได้ โดย เส้นทางแรกจะเดินได้เพียงทิศขวาและลงล่าง ส่วน เส้นทางที่สองจะเดินได้เพียง ทิศขวาและขึ้นบน ช่องที่ถูกเดินผ่านซ้ำ จะคิดพลังงานในการถางเพียงแค่ครั้งเดียว



เส้นสีแดง เดิน ขวา – ล่าง

เส้นสีน้ำเงิน เดิน ขวา – บน

ข้อจำกัด: $R, C \leq 1\,500$

2.1 Subtask 1 (20 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $R, C \leq 10$

เส้นทางเดินจาก $(1, 1)$ ไป (R, C) จะตัดกับ เส้นทางจาก $(R, 1)$ ไป $(1, C)$ หนึ่งครั้งพอดี

เนื่องจากโจทย์กำหนดว่าเส้นทางจะเดินได้เพียงแค่ ขวา และ ลง และ เส้นทางสองเดินได้เพียงแค่ ขวา และ ขึ้น เท่านั้น ดังนั้นไม่มีทางที่เมื่อเส้นทางสองเส้นแยกจากกันแล้วจะวนกลับมาชนกันได้อีกครั้ง

หากเรากำหนดช่องสองช่อง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ให้เป็นจุดเริ่มที่ทั้งสองเส้นมาชนกัน และ จุดที่แยกออกจากกัน พลังงานที่จะใช้จะมีค่าเป็น พลังงานน้อยที่สุดในการถางป่าจากมุมเริ่มต้นสองมุมมาที่ช่อง (x_1, y_1) บวกกับ ช่อง (x_2, y_2) ไปยังมุมจบสองมุม บวกกับ เดินจาก (x_1, y_1) ไป (x_2, y_2)

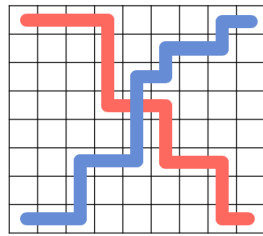
ซึ่งระยะจากจุดใดๆไปมุม สามารถหาได้ด้วยการลองเดินจากจุดนั้นไปยังมุม ซึ่งมีจำนวน $\mathcal{O}\left(\binom{R+C-2}{R-1}\right)$ ทาง (สามารถใช้ recursive function ในการคำนวณได้)

Total time complexity: $\mathcal{O}((R * C)^2 * \left(\binom{R+C-2}{R-1}\right))$

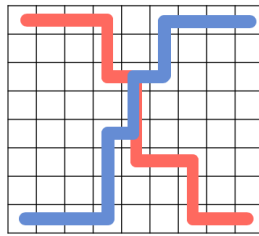
2.2 Subtask 2 (20 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $R, C \leq 500$

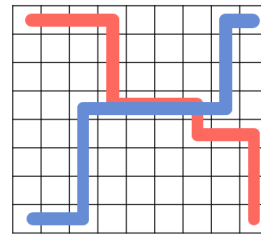
เส้นทางที่ทับกันนั้นจะเป็นเส้นตรง แนวนอน หรือ แนวตั้ง เท่านั้น



ตัดเพียงหนึ่งช่อง



ตัดเป็นแนวตั้ง



ตัดเป็นแนวนอน

เนื่องจากเส้นที่ทับกันมีลักษณะเป็นเส้นตรง การเลือกช่อง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) นี้จะมีทั้งหมด จำนวน $\mathcal{O}(R * C^2 + C * R^2)$ แบบ เนื่องจากมีสองกรณีนั่นก็คือ $x_1 = x_2$ หรือ $y_1 = y_2$

ดังนั้น เวลาที่ใช้ในการเลือกจะเหลือเพียง $\mathcal{O}(R * C^2 + C * R^2)$

นอกจากนี้ ในการคำนวณระยะทางจากจุดมุม 4 มุมนั้น เราสามารถแก้ไขให้เป็น dynamic programming ได้ โดยทำการ memoize คำตอบเอาไว้ และ เราก็สามารถคำนวณพลังงานเหล่านี้ไว้ก่อนเริ่มทำการคำนวณจริงๆ อีก เวลาที่ใช้ในการคำนวณพลังงานจากมุมจะเป็น $\mathcal{O}(R * C)$

```
1 for(int i = 1; i <= R; i++) {
2   for(int j = 1; j <= C; j++) {
3     if(i == 1 && j == 1) d1[i][j] = 0;
4     else d1[i][j] = inf;
5
6     if(i > 1) d1[i][j] = min(d1[i][j], d1[i-1][j] + a[i-1][j]);
7     if(j > 1) d1[i][j] = min(d1[i][j], d1[i][j-1] + a[i][j-1]);
8   }
9 }
```

ตัวอย่าง $d1[i][j]$ แทนระยะทางสั้นที่สุดที่ใช้ในการเดินจากช่องบนซ้ายมาที่ช่อง (i, j) โดยไม่นับ $A_{i,j}$

Total time complexity: $\mathcal{O}(R * C^2 + C * R^2)$

2.3 Subtask 3 และ 4 (20+40 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

กำหนดให้ $d1[i][j]$, $d2[i][j]$, $d3[i][j]$ และ $d4[i][j]$ แทน พลังงานที่น้อยที่สุดที่ต้องใช้ในการถ่างป่าจากมุมบนซ้าย, มุมบนขวา, มุมล่างซ้าย, มุมล่างขวา เพื่อมายัง ช่อง (i, j) ตามลำดับ

เราจะทำการเลือกจุดเริ่มและจุดจบของเส้นที่ทับกันซึ่งคือ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ให้เร็วขึ้น โดยในการวิเคราะห์นี้จะขอพิจารณากรณี $x_1 = x_2$ เพียงกรณีเดียว เนื่องจากวิธีการทำจะมีลักษณะคล้ายกับกรณี $y_1 = y_2$ อย่างมาก

สมมติว่า $x_1 = x_2 = x$ เราจะต้องการเลือก y_1 และ y_2 โดยที่ $d1[x][y1] + d2[x][y2] + d3[x][y1] + d4[x][y2] + \text{sum}[x][y1..y2]$ มีค่าน้อยที่สุด โดย $\text{sum}[x][y1..y2] = a[x][y1] + \dots + a[x][y2]$

หากเรากำหนดให้ $qs[x][y] = \text{sum}[x][1..y]$ เราจะต้องการหาค่าที่น้อยที่สุดของ $d1[x][y1] + d2[x][y2] + d3[x][y1] + d4[x][y2] + qs[x][y2] - qs[x][y1-1]$

ซึ่งสามารถแยกออกเป็น 2 กลุ่มได้ดังนี้

$$\boxed{d1[x][y1] + d3[x][y1] - qs[x][y1-1]} + \boxed{d2[x][y2] + d4[x][y2] + qs[x][y2]}$$

ดังนั้น ในแต่ละแถว x ใดๆ หากเราไล่จากซ้ายไปขวา แล้วเก็บค่าน้อยสุดของ $d1[x][y] + d3[x][y] - qs[x][y-1]$ ใน prefix เอาไว้ แล้วเทียบกับค่า $d2[x][y] + d4[x][y] + qs[x][y]$ ของตัวมันเอง เราก็จะหาค่าน้อยที่สุดของสมการยาวๆ ด้านบนได้

```

1 int ans = inf;
2 for(int x = 1; x <= R; x++) {
3     int best = inf;
4     for(int y = 1; y <= C; y++) {
5         best = min(best, d1[x][y] + d3[x][y] - qs[x][y-1]);
6         ans = min(ans, best + d2[x][y] + d4[x][y] + qs[x][y]);
7     }
8 }

```

Total time complexity: $\mathcal{O}(R * C)$

3 Pandemic

มีประชากรจำนวน N คน หมายเลข 0 ถึง $N - 1$ และมีหนึ่งคนในนั้นเป็นผู้ติดเชื้อ

เรามีเวลาเพียง 34 วันเพื่อที่จะหาผู้ติดเชื้อ เราได้รับสมัครอาสาสมัครที่ไม่ได้มาจากประชากร N คนนี้ทั้งหมดจำนวน K คน หมายเลข 0 ถึง $K - 1$ โดยในแต่ละวัน เราสามารถส่งอาสาสมัครไปเข้าใกล้ประชากรคนใดจำนวนกี่คนก็ได้ แต่มีข้อกำหนดว่าในแต่ละวัน ประชากรแต่ละคนจะเจออาสาสมัครได้ไม่เกิน L คน

อาสาสมัครคนที่เข้าใกล้ผู้ติดเชื้อในวันที่ i จะติดเชื้อและเริ่มแสดงอาการในวันที่ $i + 30$ พอดี และห้ามไปพบประชากรอีก

ในปัญหาย่อย 4 ถึง 6 คุณจะต้องใช้อาสาสมัครให้น้อยที่สุด ถึงแม้ $K \leq 100\,000$

ข้อจำกัด: $N \leq 100\,000$

- ปัญหาย่อย 1: $K = 20, L = 20$
- ปัญหาย่อย 2: $K = 15, L = 15$
- ปัญหาย่อย 3: $K = 15, L = 4$
- ปัญหาย่อย 4: $K = 100\,000, L = 3$
- ปัญหาย่อย 5: $K = 100\,000, L = 2$
- ปัญหาย่อย 6: $K = 100\,000, L = 1$

3.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

สำหรับคนหมายเลข i หากนำเลข i มาเขียนเป็นเลขฐานสองแล้ว บิต ที่ตำแหน่ง x เป็น 1 เราจะส่งอาสาสมัครหมายเลข x ไปคลุกคลีในวันที่ 1

ตัวอย่างเช่น สำหรับคนหมายเลข $101 = 1100101_2$ เราจะส่งอาสาสมัครคนที่ 0, 2, 5, 6 ไปคลุกคลีในวันที่ 1

ในวันที่ 31 จะมีอาสาสมัครจำนวนหนึ่งแสดงอาการ ซึ่งหากอาสาสมัครหมายเลข x แสดงอาการแสดงว่าบิตที่ x ของหมายเลขผู้ติดเชื้อเป็น 1 ทำให้เราสามารถสรุปหมายเลขของผู้ติดเชื้อได้เลย

ตัวอย่างเช่น หากในวันที่ 31 เราพบว่าอาสาสมัครหมายเลข 1, 3, 6 แสดงอาการ เราจะได้รู้ว่าหมายเลขของผู้ติดเชื้อคือ $1001010_2 = 74$ นั่นเอง

เนื่องจากเราต้องใช้บิตจำนวน 17 บิตในการเขียน 100,000 เป็นเลขฐานสอง ดังนั้นเราจะต้องใช้อาสาสมัคร 17 คน และแต่ละคนจะเจออาสาสมัครไม่เกิน 17 คนเช่นกัน

3.2 Subtask 2 (30 คะแนน)

เราจะแบ่งคนทั้ง N คนออกเป็น 4 กลุ่มโดยแต่ละกลุ่มมีจำนวน 25,000 คน โดยคนที่ 0 ถึง 24,999 อยู่กลุ่มที่ 0 คนที่ 25,000 ถึง 49,999 อยู่กลุ่มที่ 1 เช่นนี้ไปเรื่อยๆ

เราจะส่งอาสาสมัครไปหาคนกลุ่ม 0 ในวันที่ 1, คนกลุ่ม 1 ในวันที่ 2, คนกลุ่ม 2 ในวันที่ 3 และ คนกลุ่ม 3 ในวันที่ 4 ดังนั้นจากการดูวันแรกที่มีอาสาสมัครแสดงอาการ เราสามารถบอกได้ว่าผู้ติดเชื้ออยู่ในกลุ่มไหน

เราจะให้หมายเลขของคนที่ i ในกลุ่มที่ตัวเองอยู่เป็น $i \bmod 25000 + 1$

เราทำการ บวก 1 เพื่อไม่ให้หมายเลขใหม่นั้นเป็น 0 ซึ่งจะทำให้มีอาสาสมัครอย่างน้อยหนึ่งคนแสดงอาการแน่นอน

ในการส่งอาสาสมัครไปหาในแต่ละวันเราจะทำเช่นเดิมกับในปัญหาย่อย 1 โดยในคราวนี้เราจะเหลือ 15 บิท ดังนั้นเราจะใช้อาสาสมัครเพียง 15 คน และ ประชากรแต่ละคนจะต้องเจออาสาสมัครไม่เกิน 15 คนเท่านั้น

ตัวอย่างเช่น

สำหรับคนหมายเลข 25111 จะอยู่กลุ่ม 1 และมีหมายเลขเท่ากับ $112 = 1110000_2$ เราจะส่งอาสาสมัครหมายเลข 4, 5, 6 ไปหาในวันที่ 2

หากมีอาสาสมัครหมายเลข 0, 2, 4 แสดงอาการในวันที่ 33 เราจะได้ว่าผู้ติดเชื้อคือหมายเลข $10101_2 + 25000 * 2 - 1 = 50020$

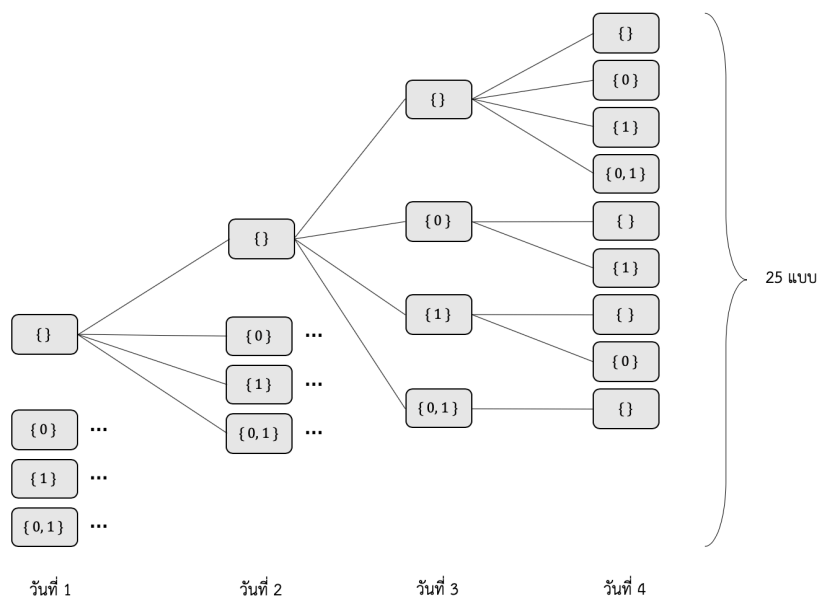
3.3 Subtask 3 ถึง 6 (30+10+10+10 คะแนน)

ให้ $X_{i,1}, X_{i,2}, X_{i,3}, X_{i,4}$ เป็นเซตของอาสาสมัครที่เจอคนที่ i ในวันที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ เซตเหล่านี้ไม่มีสมาชิกร่วมกัน เนื่องจากเราไม่ต้องการให้คนใดๆพบอาสาสมัครคนเดิมหลายครั้ง เพราะเราสนใจเพียงวันแรกที่อาสาสมัครแสดงอาการ

สมมติว่าผู้ติดเชื้อนั้นมีหมายเลข t ในวันที่ 31, 32, 33 และ 34 เซตของอาสาสมัครที่แสดงอาการเป็นวันแรกจะเท่ากับ $X_{t,1}, X_{t,2}, X_{t,3}$ และ $X_{t,4}$ ตามลำดับ

ดังนั้นหากเราสามารถสร้างลำดับ X ขึ้นมาโดยที่ X_i ของแต่ละคนไม่เหมือนของคนอื่นเลย เราจะสามารถใช้ลำดับนี้ในทั้ง การส่งอาสาสมัคร และ สรุปว่าผู้ติดเชื้อนั้นเป็นใคร ได้เลย

ให้ M เป็นจำนวนอาสาสมัครที่จะใช้ในตอนสุดท้าย หาก $M = 2$ และ $L = 2$ เราจะสร้างลำดับ X_i ได้ 25 แบบ



ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้ $M = 2$ ได้เพราะจะมีลำดับไม่เพียงพอกับทุกคน

จากการคำนวณสามารถสรุปได้ว่า

- หาก $L = 1$ ค่า M ที่น้อยที่สุดที่เพียงพอคือ 19
- หาก $L \geq 2$ ค่า M ที่น้อยที่สุดที่เพียงพอคือ 8

เราสามารถสร้างลำดับ X_i ทั้งหมดที่เป็นไปได้นี้ออกมาด้วยการใช้ recursive function หลังจากนั้น เราสามารถทำ sequence เหล่านี้ไปใช้ในการ ถาม และ สรุปว่าผู้ติดเชื่อเป็นใครได้เลย

```
1 // generate by calling gen(1, [0, 1, ..., m - 1])
2 void gen(int day, vector<int> has) {
3     if(day == 5) {
4         if(person < n) {
5             // meet[person][i] is the set of volunteers that person meets in day i
6             for(int i = 1; i <= 4; i++) {
7                 meet[person][i] = seq[i];
8                 for(auto x : seq[i]) assignments[i][x].push_back(person);
9             }
10            person++;
11        }
12        return ;
13    }
14
15    // choose 0
16    seq[day].clear();
17    gen(day + 1, has);
18
19    // choose 1
20    for(auto x : has) {
21        seq[day].clear(); seq[day].push_back(x);
22        vector<int> nxt;
23        for(auto t : has) if(t != x) nxt.push_back(t);
24        gen(day + 1, nxt);
25    }
26
27    // choose 2 if L >= 2
28    if(lim >= 2) {
29        for(auto x : has) {
30            for(auto y : has) {
31                if(x >= y) continue;
32                seq[day].clear(); seq[day].push_back(x); seq[day].push_back(y);
33                vector<int> nxt;
34                for(auto t : has) if(t != x && t != y) nxt.push_back(t);
35                gen(day + 1, nxt);
36            }
37        }
38    }
39 }
```

4 Collection

มีเมืองอยู่ N เมือง เชื่อมต่อกันด้วยถนนจำนวน $N - 1$ เส้น โดยทุกคู่ของเมืองสามารถเดินทางไปหากันได้ด้วยถนนเหล่านี้ แต่ละเมืองจะมีแรมมูลค่าเท่ากับ A_i โดยที่ $|A_i| \leq 10^9$

รถเก็บแรมจะออกเดินทางจากเมืองหนึ่ง และ วิ่งไปถึงเมืองปลายทางโดยไม่วิ่งผ่านเมืองใดซ้ำ (Simple path) รถเก็บแรมอาจเดินทางไปเพียงเมืองเดียวก็ได้ มูลค่าแรมสะสมที่ได้จากการเดินทางจะเท่ากับผลรวมมูลค่าของแรมในทุกเมืองที่รถเดินทางผ่าน

ในแต่ละ Q วันต่อไปนี้จะเกิดเหตุการณ์ดังกล่าวขึ้น

1. ได้รับค่า j และ C ($|C| \leq 10^9$)
2. มูลค่าของแรมของเมือง j ถูกเปลี่ยนไปเป็น C
3. ถามว่ามูลค่าแรมสะสมที่มากที่สุดที่สามารถเก็บได้ด้วยรถเก็บแรมเท่ากับเท่าไร

ข้อจำกัด: $1 \leq N \leq 100\,000, 0 \leq Q \leq 100\,000$

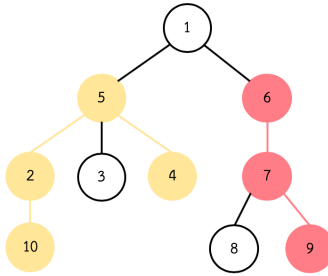
4.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 1\,000$ และ $Q \leq 1\,000$

เมืองเหล่านี้มีลักษณะเป็นต้นไม้ที่มี N จุดยอด พิจารณาการต้นไม้ที่ให้เมือง 1 เป็น root

ทางเดินระหว่างเมืองสองเมืองใดๆ จะแบ่งออกเป็นสองประเภทได้แก่

1. ทางเดินเป็นการเดินลงในต้นไม้ (ทางสีแดง)
2. ทางเดินต้องเดินขึ้นและลงในต้นไม้ (ทางสีเหลือง)



การหาทางสีแดงที่ดีที่สุดทำได้โดยนิยามให้ down_u แทนผลรวมแรมที่มากที่สุดที่เป็นไปได้หากทางสีแดงเริ่มที่เมือง u

$$\text{down}_u = \max(0, \max_{v \in \text{child}_u} (\text{down}_v)) + A_u$$

ส่วนทางสีเหลืองที่ดีที่สุดที่เดินเปลี่ยนทิศที่ u นั้นจะเท่ากับ

$$\text{cross}_u = \max\{\text{down}_a + \text{down}_b \mid a, b \in \text{child}_u \wedge a \neq b\} + A_u$$

สังเกตว่า a และ b ที่ดีที่สุด down_a และ down_b จะมีค่ามากที่สุดสองอันดับแรกในบรรดาลูกของ u

ในแต่ละวัน การคำนวณค่าเหล่านี้สามารถทำได้ด้วยการทำ recurrence dynamic programming บนต้นไม้ เริ่มต้นจาก เมือง 1 เพื่อหาค่า down_u และ cross_u และคำตอบจะเท่ากับ $\max(\max(\text{down}_u, \text{cross}_u))$

Total time complexity: $\mathcal{O}(NQ)$

4.2 Subtask 2 (11 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ไม่มีสองเมืองใด ๆ ที่ต้องเดินทางผ่านถนนมากกว่า 10 เส้น

เนื่องจากไม่มีสองเมืองใดที่อยู่ห่างกันมากกว่าถนน 10 เส้น ต้นไม้ที่ได้จากการ root ที่เมืองใด ๆ ก็จะมีความสูงไม่เกิน 10 เสมอ

สังเกตว่าการเปลี่ยนค่าของเรในเมือง u ใดๆ นั้นจะมีโอกาสทำให้ค่า down_v และ cross_v เปลี่ยน ก็ต่อเมื่อ v คือ u หรือเป็น ancestor ของ u เท่านั้น ดังนั้นในแต่ละวันการอัปเดตค่าดังกล่าวจะมีไม่เกิน 10 ครั้งเท่านั้น

ในขั้นตอน implementation นั้นจะให้ $\text{std::multiset } \text{mx}_u = \{\text{down}_v \mid v \in \text{child}_u\}$

หลังจากนั้นการคำนวณค่า down_u และ cross_u สามารถทำได้เพียงเรียกใช้ค่าใน mx_u และ หลังจากคำนวณแล้วจะต้องอัปเดตเซต mx ของ parent ของ u ด้วย

Total time complexity: $\mathcal{O}(N + Q \log N)$

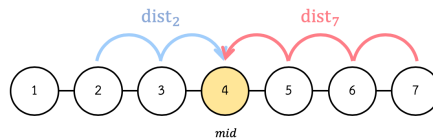
4.3 Subtask 3 (12 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: มีหนึ่งเมืองเดียวที่ติดกับเมืองอื่นมากกว่า 2 เมือง และติดไม่เกิน 10 เมือง

ก่อนอื่น เราจะแก้ปัญหานี้ในกรณีที่ดินไม้เป็นเส้นตรง โดยหากเรามองเส้นตรงนั้นเป็นอาเรย์ ปัญหาคือช่วงใดในอาเรย์ที่มีผลรวมมากที่สุด

เริ่มแรก เราจะพิจารณาช่วงทุกช่วง $[l, r]$ ที่คลุมจุดกึ่งกลางของอาเรย์ mid ($l \leq mid \leq r$)

นิยามให้ dist_i เท่ากับผลรวมของทุกตำแหน่งที่อยู่ตั้งแต่ i จนถึง mid (ไม่นับ mid)



ช่วงที่มีผลรวมมากที่สุดที่คลุมจุดกึ่งกลางของอาเรย์คือ

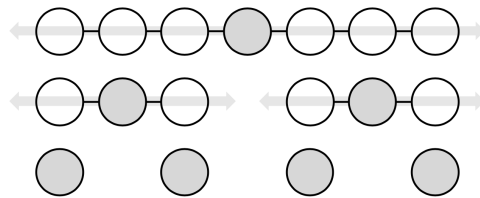
$$\text{pass}_{mid} = \max\{\text{dist}_i \mid i \leq mid\} + \max\{\text{dist}_i \mid mid \leq i\} + A_{mid}$$

หากมีการเปลี่ยนแปลงค่า A_j ที่ตำแหน่ง j ใดๆ ค่า dist_i ที่จะเปลี่ยนไปคือ i ทุกตำแหน่งที่ต้องเดินผ่าน j ถึงจะมาถึง mid ได้ และ ค่า \max ที่นำมาคำนวณผลรวมมากที่สุดที่คลุมจุดกึ่งกลางข้างต้น

เราสามารถใช้ [Segment tree lazy propagation update](#) ในการอัปเดตค่า j ทุกตำแหน่งที่ตรงตามเงื่อนไข และ เพื่อหาค่า \max ของ ฝั่งซ้ายและฝั่งขวา ของ mid ได้เช่นกัน

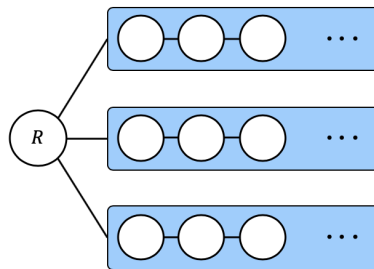
หลังจากเรารู้ช่วงที่มีผลรวมมากที่สุดที่คลุมจุดกึ่งกลางของอาร์เรย์แล้ว เราต้องการรู้ช่วงที่มีผลรวมมากที่สุดที่ ไม่คลุม จุดกึ่งกลางของอาร์เรย์ เช่นกัน

ซึ่งเราเพียงแค่ทำแบบข้างต้นในส่วนซ้ายและขวาของ mid ไปเรื่อยๆ นั่นคือการสร้าง Segment tree ขึ้นมาเป็นจำนวน N ต้น



สังเกตว่าแต่ละตำแหน่งจะมีค่า dist_i ที่เกี่ยวข้องกับ mid ที่แตกต่างกันไม่เกิน $\log N$ ค่า ดังนั้นในการอัปเดตแต่ละครั้ง เราจะเปลี่ยนค่าใน Segment tree ไม่เกิน $\log N$ ต้น และ เปลี่ยนค่า pass_{mid} ไม่เกิน $\log N$ ครั้งเช่นกัน

กลับมาพิจารณาต้นไม้ในปัญหาย่อยนี้ที่มีเมือง R เป็น root หาก R คือเมืองที่ติดกับเมืองอื่นมากกว่า 2 เมือง



หากเราทำแบบเดิมในแต่ละ chain เส้นตรงสีฟ้า แต่ละอันตอนนั้นเราจะเหลือเพียงกรณี เส้นทางที่ผ่าน R เพียงเท่านั้น ซึ่งเราก็สามารถทำแบบเดิมเช่นเดียวกับในกรณีเส้นตรงได้

$$\text{pass}_R = \max\{\max\{\text{dist}_i \mid i \in \text{chain}_x\} + \max\{\text{dist}_i \mid i \in \text{chain}_y\} \mid x \neq y\} + A_R$$

คำตอบจะเท่ากับ $\max(\text{pass})$

Total time complexity: $\mathcal{O}(N + Q \log^2 N)$

4.4 Subtask 4 (12 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: มีหนึ่งเมืองเดียวที่ติดกับเมืองอื่นมากกว่า 2 เมือง และติดเกิน 10 เมือง

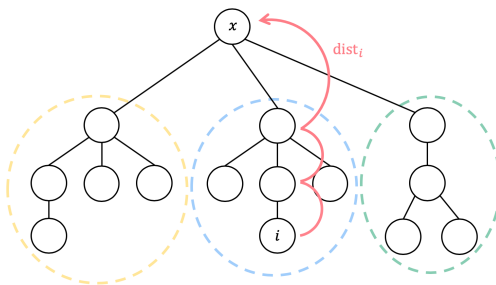
ในการหา pass_{mid} นั้น เราจะต้องหา x และ y ที่มีค่า $\max(\text{dist})$ ใน chain มากที่สุดสองอันดับ มาบวกกันซึ่งเราสามารถหาค่า $\text{std}::\text{multiset}$ เพื่อลดเวลาการ loop หาไปได้ โดยเราจะเก็บค่า $\max(\text{dist})$ ในทุก chain ไว้ ซึ่งตรงนี้เราจะต้องอัปเดตทุกครั้งที่มีการเปลี่ยนแปลงค่า \max ใน chain ด้วย

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q \log^2 N)$

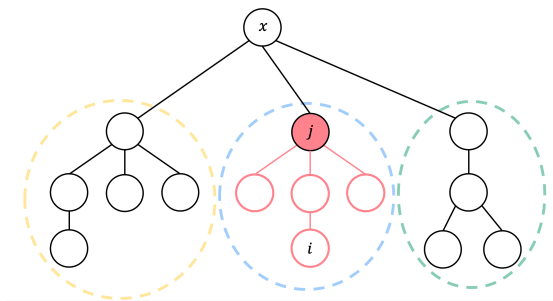
4.5 Subtask 5 (55 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เราจะทำ [Centroid Decomposition](#) บนต้นไม้ โดยหาก x เป็น centroid ของ subtree เราจะสร้าง Segment tree สำหรับเก็บ dist_i ในลักษณะเดียวกับที่ทำใน ปัญหาย่อย 3



ทีนี้ในการ update ค่า A_j ของ j ใดๆ เป็น C นั้นคือการบวกค่า dist_i สำหรับทุก i อยู่ใน subtree ของ j เพิ่มเท่ากับ $C - A_j$ นั่นเอง



ในส่วนตรงนี้เราสามารถหาค่า Segment tree และ Euler Tour Tree เพื่อทำ [Subtree query using segment tree](#) ในการ range update และ query max ได้

เช่นเดียวกันกับในปัญหาย่อยที่ผ่านมา pass_x เท่ากับค่า \max ใน subtree สองอันที่มากที่สุดรวมกัน บวกด้วย A_x

หลังจากเราสร้าง Segment tree สำหรับ centroid x เสร็จแล้ว เราก็แยกทำแบบเดิมใน subtree ย่อยๆต่อไป

เราจะสรุปได้เช่นเดียวกับ ปัญหาย่อยที่ผ่านมาว่า สำหรับแต่ละเมือง จะมีเมือง x ที่ต้องคำนวณ dist ไม่เกิน $\log N$ เมือง และ ทำให้เวลา อัปเดตค่ามูลค่าเร่ เราจะอัปเดต Segment tree และ ค่า pass ไม่เกิน $\log N$ ครั้ง

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q \log^2 N)$

5 Trainto

รถไฟขบวนหนึ่งมีตู้โดยสาร M ตู้ แต่ละตู้มีโต๊ะ 2 โต๊ะพอดี

มีผู้โดยสาร N คน โดยผู้โดยสารคนที่ i จะมีค่า A_i ซึ่งแทนระดับความน่ารำคาญที่จะส่งไปให้กับทุกคนที่นั่งอยู่โต๊ะเดียวกับเขา และ นอกจากนั้นผู้โดยสารแต่ละคนจะส่งความน่ารำคาญ 1 หน่วยไปยังทุกคนที่อยู่ตู้โดยสารเดียวกับเขาด้วย

โจทย์ต้องการให้เราจัดวางแผนที่นั่งให้ผลรวมระดับความน่ารำคาญที่ทุกคนได้รับมีค่าน้อยที่สุด

ข้อจำกัด: $N \leq 350$ และ $2M \leq N$

5.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 10$

ด้วยจำนวนคนที่มีไม่เยอะ เราจึงสามารถ Brute force ทดลองวิธีในการจัดที่นั่งทั้งหมดที่เป็นไปได้ได้ ซึ่งมีจำนวน $(2M)^N$ แบบ

Total time complexity: $\mathcal{O}((2M)^N)$

5.2 Subtask 2 (5 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $K = 1, N \leq 50$

ในปัญหาย่อยนี้ เราต้องการจัดกลุ่มคน N คน ออกเป็น 2 กลุ่ม โดยที่ค่าผลรวมระดับความน่ารำคาญที่ทุกคนได้รับมีค่าน้อยที่สุด

นั่นคือ หากให้ CNT_i และ SUM_i แทนจำนวนคน และ ผลรวมระดับความน่ารำคาญ ของคนกลุ่ม i ตามลำดับ เราต้องการที่จะทำให้ค่า $CNT_1 * SUM_1 + CNT_2 * SUM_2 + 2 * CNT_1 * CNT_2$ น้อยที่สุด

สมมติว่าเรารู้ค่า CNT_1 และ CNT_2 ในการจัดกลุ่มที่ดีที่สุดแล้ว เราจะหาวิธีการจัดคนเข้าไปในแต่ละกลุ่มที่ดีที่สุด

หาก $A_x > A_y$ แล้ว x จะอยู่ในกลุ่มที่ ไม่ใหญ่ไปกว่า กลุ่มของ y เสมอ

เนื่องจาก หาก x อยู่ในกลุ่มที่ใหญ่กว่า y เราสามารถสลับ x กับ y เพื่อให้ค่าความน่ารำคาญน้อยลงได้

ดังนั้น เราเพียงแค่เรียงคนจากมากไปน้อย แล้วลองกำหนดค่า CNT_1 ทุกกรณี ($CNT_2 = N - CNT_1$ และ $CNT_1 \leq CNT_2$) ก็จะสามารถคำนวณผลรวมระดับความน่ารำคาญได้

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N)$

5.3 Subtask 3 (5 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: A_i เท่ากันหมด, $N \leq 50$

เนื่องจากทุกคนมีความนำราคาเท่ากัน ดังนั้นเราจะสนใจเพียงแค่ขนาดของแต่ละโต๊ะในแต่ละตู้โดยสารเท่านั้น

เราสามารถนำผู้โดยสารทั้งหมดมาเรียงเป็นเส้นตรง แล้วแบ่งเป็น $2K$ ช่วง โดยช่วงที่ 1 และ 2 อยู่ตู้โดยสารแรก ช่วงที่ 3 และ 4 อยู่ตู้โดยสารที่สอง ไปเรื่อยๆ

เราสามารถใช้ Dynamic programming ในการแก้ปัญหาได้โดยกำหนดให้ $dp[x][k]$ แทนผลรวมค่าความนำราคาคนที่น้อยที่สุดสำหรับการแบ่ง x คนแรก ไปใน k ตู้โดยสาร ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$dp[0][0] = 0 \text{ และ } dp[0][i] = \text{inf} \text{ สำหรับ } i \text{ ใดๆที่ไม่ใช่ } 0$$

$$dp[x][k] = \min(dp[y-1][k-1] + \text{cost}(y, x)) \text{ โดย } 1 \leq y \leq x$$

$\text{cost}(l, r)$ คือค่าความนำราคาคนที่น้อยที่สุดสำหรับการแบ่งคนตั้งแต่ l ถึง r ออกเป็นสองส่วน ซึ่งทำเหมือนกับใน Subtask 2

Total time complexity: $\mathcal{O}(N^3 + N^2 * K)$

5.4 Subtask 4 (32 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 50$

สมมติว่าเราได้แบ่งคนออกเป็น $2K$ กลุ่มแล้ว เราจะต้องจับคู่กลุ่ม $2K$ กลุ่มนี้ออกเป็น K คู่ เพื่อจัดไปในแต่ละตู้โดยสาร

การจับคู่ที่ดีที่สุดคือการจับคู่กลุ่มที่เล็กที่สุด กับ กลุ่มที่ใหญ่ที่สุด กลุ่มที่เล็กสุดถัดมา กับ กลุ่มเล็กสุดกลุ่มถัดมา ไปเรื่อยๆ จนหมด



เช่นเดียวกับใน Subtask 2 ถ้าหากเรานำผู้โดยสารทั้งหมดมาเรียงเป็นเส้นตรงจากระดับความนำราคาจากมากไปน้อย แล้วแบ่งกลุ่มเป็น $2K$ ขนาดของกลุ่มจะใหญ่ขึ้นไล่ไปเรื่อยๆ จากกลุ่มแรกจนถึงกลุ่มสุดท้าย

ดังนั้น เราสามารถจับคู่กลุ่มแรก กับ กลุ่มสุดท้าย และ กลุ่มสอง กับ กลุ่มรองสุดท้าย ไปเรื่อยๆ ได้เลย

เราสามารถใช้ Dynamic programming เพื่อแก้ปัญหานี้ได้โดยเพียงแค่รู้ว่ากลุ่มหน้ากลับกลุ่มหลังจับคู่กันจะได้คำตอบที่ดีที่สุดได้ โดย $dp[k][l][r]$ คือความนำราคาคนที่น้อยที่สุดหากแบ่งคนตั้งแต่ l ถึง r ออกเป็น k กลุ่ม

$$dp[k][l][r] = \min(dp[k-1][x+1][y-1] + (x-l+1)*\text{sum}[l..x] + (r-y+1)*\text{sum}[y..r]) + 2*(x-l+1)*(r-y+1)$$

โดย $l \leq x < y \leq r$

Total time complexity: $\mathcal{O}(N^4 * K)$

5.5 Subtask 5 และ 6 (43+5 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

จาก Subtask 4 เราเห็นว่า ขนาดของช่วงน้อยจะมีขนาดน้อยไปมาก หากเรียงคนด้วยค่ามากไปน้อย

ช่วงที่ K จะมีขนาดไม่เกิน N/K เสมอ

เนื่องจากขนาดของช่วงที่ $K+1, \dots, 2K$ จะมีขนาดอย่างน้อยเท่ากับขนาดของช่วงที่ K หากขนาดของช่วงที่ K มีขนาด $N/K + 1$ ผลรวมขนาดของช่วงหลังจะมีค่าอย่างต่ำ $N + K$ ซึ่งเกินจำนวนคนทั้งหมดที่มี และ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น ใน Loop ของ x ซึ่งแทนจำนวนคนในกลุ่มหน้าจะวนไม่เกิน $\mathcal{O}(N/K)$ ก็พอ ทำให้เราตัด K ออกไปจาก Time complexity ได้

Total time complexity: $\mathcal{O}(N^4)$

5.6 Challenge

เราอาจเพิ่มความเร็วของอัลกอริทึมได้ด้วย Divide and conquer optimization เป็น $\mathcal{O}(N^3 \log N)$

6 Racing

มีรถแข่ง N คัน หมายเลข 1 ถึง N กำลังออกตัวจากจุดเริ่มต้นของสนามแข่งรถที่มีความยาวไม่จำกัด N เลน ซึ่งความเร็วเริ่มต้นของรถคันที่ i เท่ากับ U_i เมตรต่อวินาที โดยที่ U_i เป็นจำนวนเต็มที่ $1 \leq U_i \leq 5$

นอกจากนั้น มีเหตุการณ์เกิดขึ้น M เหตุการณ์ ซึ่งเป็นไปได้สองแบบดังนี้

1. ที่เวลา T มีการขุดหลุมในเลน A ถึง B ที่ระยะ X จากจุดเริ่มต้น ($1 \leq T < 10^8, 1 \leq X \leq 10^9$) รถที่มาถึงหลุมพอดีในเวลานั้นหรือช้ากว่าจะตกหลุมทำให้ขยับไปไหนไม่ได้อีก
2. ที่เวลา T ทำการปรับความเร็วรถในเลน A ถึง B ให้มีความเร็วไม่เกิน V ($1 \leq T < 10^8, 1 \leq V \leq 5$) รถคันใดที่มีความเร็วไม่เกิน V อยู่แล้วจะไม่มีผลกระทบใดๆ และ V เป็นจำนวนเต็ม

เราอยากทราบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 10^8 วินาที รถแต่ละคันจะอยู่ที่ตำแหน่งใด

ข้อจำกัด: $1 \leq N \leq 100\,000$ และ $0 \leq M \leq 200\,000$

6.1 Subtask 1 (5 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 1\,000$ และ $M \leq 1\,000$

สำหรับรถหมายเลข x ใดๆ เราต้องการหา $T_{x,1}, T_{x,2}, \dots, T_{x,5}$ ซึ่งเป็นเวลาที่รถคันนี้เปลี่ยนความเร็วเป็นไม่เกิน $1, 2, \dots, 5$ ตามลำดับ

$$T_{x,i} = \begin{cases} 1 & i \geq U_x \\ \min(T_y) & \text{สำหรับการปรับความเร็ว } y \text{ ที่ } A_y \leq x \leq B_y \text{ และ } i \geq V_y \\ 10^8 + 1 & i = 0 \end{cases}$$

รถคันที่ x จะตกหลุมที่ตำแหน่ง $\min(X_y)$ สำหรับทุกหลุม y ที่ $A_y \leq x \leq B_y$ และ มีบาง i ที่ $S_{x,i} + (T_y - T_{x,i}) * i \leq X_y$ เนื่องจาก ฝั่งซ้ายเป็นระยะทางที่เดินทางได้ใน T_y วินาที และ น้อยกว่าเท่ากับ X_y และ จะตกหลุมที่อยู่ใกล้จุดเริ่มต้นที่สุดที่เป็นไปได้หากมีโอกาสตกได้หลายหลุม

Total time complexity: $\mathcal{O}(N * M)$

6.2 Subtask 2 (5 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ทั้ง M เหตุการณ์ เป็นแบบแรกทั้งหมด และ $A = 1, B = N$

เนื่องจากความเร็วรถไม่เปลี่ยนแปลงดังนั้น ระยะทางที่รถคันที่ x วิ่งได้ใน T วินาทีเท่ากับ $(T - 1) * U_x$ และ จะตกหลุม y หาก $U_x * (T_y - 1) \leq X_y \implies U_x \leq \frac{X_y}{T_y - 1}$ และ X_y มีค่าน้อยสุดเท่าที่เป็นไปได้

ดังนั้นหากเราเรียงลำดับหลุมตามค่า X จากน้อยไปมาก แล้วให้หลุมเหล่านี้เลือกรถที่จะมาตกในหลุมมัน เราเพียงเลือกรถทุกคันที่ $U_x \leq \frac{X_y}{T_y - 1}$ และ ยังไม่ถูกเลือกออกไปเพียงเท่านั้น

Total time complexity: $\mathcal{O}(N + M)$

6.3 Subtask 3 (15 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ทั้ง M เหตุการณ์ เป็นแบบสองทั้งหมด

เราจะเรียงเหตุการณ์แบบสองตามค่า T จากน้อยไปมาก โดยแต่ละ y ในเหตุการณ์เหล่านี้ เราจะให้ $T_{x,i} = T_y$ สำหรับ $T_{x,i}$ ทุกค่าที่ $A_y \leq x \leq B_y$ และ $i \geq V_y$ และยังไม่เคยโดน assigned ค่ามาก่อน

เนื่องจากเราเรียงเหตุการณ์ตามค่า T จากน้อยไปมากแล้ว ดังนั้นค่าที่ assign ให้กับ $T_{x,i}$ ใดๆ ค่าแรกจะเป็นค่า $\min(T_y)$ สำหรับ y ที่เป็นไปได้อยู่แล้ว

ในส่วนของการ implementation เราสามารถใช้ `std::set` และ `std::lower_bound` ในการหาค่า x ที่มีค่ามากกว่าเท่ากับ A_y และนำออกไปเรื่อยๆได้

```
1 // get change time
2 for(int x = 1; x <= n; x++) {
3     for(int i = 0; i <= 5; i++) change[x][i] = i < speed[x] ? (int)1e8 + 1 : 1;
4     for(int i = 1; i <= 5; i++) has[i].insert(x);
5 }
6
7 // sort slows by time
8 sort(slow.begin(), slow.end(), [](tuple<int,int,int,int> x, tuple<int,int,int,int> y) {
9     return get<0>(x) < get<0>(y);
10 });
11
12 for(auto slow : slows) {
13     auto [ti, l, r, lim] = slow;
14     for(int i = lim; i <= 5; i++) {
15         while(has[i].lower_bound(l) != has[i].end()) {
16             int x = *has[i].lower_bound(l);
17             if(x > r) break;
18             change[x][i] = min(change[x][i], ti); // first time the speed changes to `i`
19             has[i].erase(x);
20         }
21     }
22 }
23
24 for(int x=1;x<=n;x++) {
25     dist[x][5] = 0;
26     for(int i=4;i>=0;i--) {
27         dist[x][i] = dist[x][i+1] + (change[x][i] - change[x][i+1]) * (i+1);
28     }
29 }
```

Total time complexity: $\mathcal{O}((N + M) \log N)$

6.4 Subtask 4 (14 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ในทุกเหตุการณ์แบบแรกที่ปรากฏ $A = 1, B = N$ เสมอ

เราจะเรียงหลุมตามค่า X จากน้อยไปมาก โดยในแต่ละหลุม y เราจะสรุปได้ว่า รถคันใดที่ $S_{x,i} - T_{x,i} * i \leq S_y - T_y * i$ สำหรับบาง i จะตกหลุมนี้ หากไม่เคยตกหลุมอื่นมาก่อนหน้านี้

เช่นกัน เนื่องจากเราเรียงหลุมด้วย X จากน้อยไปมาก รถคันที่ไม่เคยตกหลุมใดมาก่อนหน้านี้แล้วจะตกหลุมนี้แน่นอนเพราะ อยู่ใกล้ที่สุดเท่าที่เป็นไปได้

ในส่วนของการ implementation นั้นเราทำการคำนวณค่า $S_{x,i} - T_{x,i} * i$ ของแต่ละ x และ i เอาไว้ก่อนเพื่อใช้ตอนเราเลือกรถสำหรับแต่ละหลุมได้ และ เราก็ค่อยไล่ทุกค่า $i = 0, \dots, 5$ ในภายหลังตอนที่เลือกในแต่ละหลุม

Total time complexity: $\mathcal{O}((N + M) \log N)$

6.5 Subtask 5 (14 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ทั้ง M เหตุการณ์ เป็นแบบแรกทั้งหมด

เราจะทำการเรียงหลุมตามค่า X จากน้อยไปมาก และ จะเอาหลุมเลือกรถที่จะมาตกหลุมเช่นเดียวกัน

สมมติว่าเราอยู่ที่หลุม y และกำหนด i เอาไว้แล้ว เราต้องการหารถ x ทั้งหมดที่

- $A_y \leq x \leq B_y$
- $S_{x,i} - T_{x,i} * i \leq S_y - T_y * i$

เราจะใช้ [Segment tree \(point update range minimum query\)](#) จำนวน i ต้น ในการแก้ปัญหา

ซึ่งเราจะใช้ segment tree ต้นที่ i เพื่อหาค่า $S_{x,i} - T_{x,i} * i$ ที่น้อยที่สุดสำหรับ x ในช่วง A_y ถึง B_y และ ทำให้เราสามารถเลือกรถที่ตรงเงื่อนไขที่จะตกหลุมได้

หลังจากนั้น เราจะเปลี่ยนค่าที่อยู่ในตำแหน่งของ x ให้เป็น ∞ แทนที่จะเป็น $S_{x,i} - T_{x,i} * i$ เพื่อที่จะให้รถคันที่ x ไม่โดนเลือกออกไปอีก

เราจะทำซ้ำๆ เพื่อเลือกรถทั้งหมดที่มีค่า $S_{x,i} - T_{x,i} * i \leq S_y - T_y * i$ ออกมาให้หมด สำหรับแต่ละ i

ดูตัวอย่างโค้ดได้ในหน้าถัดไป

```

1 // assign holes
2
3 // initial distance after 10^8 seconds
4 for(int x = 1; x <= n; x++) stop[x] = dist[x][0];
5
6 // sort holes by position
7 sort(holes.begin(), holes.end(), [](tuple<int,int,int,int> x, tuple<int,int,int,int> y) {
8     return get<3>(x) < get<3>(y);
9 });
10
11 // build 5 segment trees each stores dist[x][i] - i * change[x][i]
12 for(int i = 1; i <= 5; i++) build(i,1,1,n);
13
14 for(auto hole : holes) {
15     auto [ti, l, r, pos] = hole;
16     for(int i = 1; i <= 5; i++) { // iterate speeds
17         while(true) {
18             auto [val, x] = query(i,1,1,n,l,r); // find minimum dist[x][i] - i * change[x][i]
19             if(val > pos - ti * i) break; // dist[x][i] - i * change[x][i] <= pos - ti * i
20             update(i,1,1,n,x,inf); // set x to infinity
21             stop[x] = min(stop[x], pos); // first hole it falls into
22         }
23     }
24 }

```

Total time complexity: $\mathcal{O}((N + M) \log N)$

6.6 Subtask 6 (15 คะแนน)

เงื่อนไข: $N \leq 30\,000$ และ $M \leq 30\,000$

ปัญหาย่อยนี้สามารถแก้ได้ด้วย Square root Decomposition หรืออัลกอริทึมอื่น ๆ ที่อาจรันในเวลา $\mathcal{O}((N + M) \log^2 N)$ หรือ $\mathcal{O}((N + M) \log^3 N)$

6.7 Subtask 7 (32 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

ปัญหาย่อยนี้เป็นเพียงการรวมปัญหาย่อย 3 กับ 5 เข้าด้วยกัน

Total time complexity: $\mathcal{O}((N + M) \log N)$

7 MalwareX

มีการเรียงสับเปลี่ยน (permutation) $P : P_0 \cdots P_{N-1}$ ($0 \leq P_i \leq N - 1$)

มีลำดับ L ความยาว $N + 1$ โดยที่สมาชิกในลำดับเป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ และ $L_0 + \dots + L_N = M$

Alice สามารถใช้เครื่องมือสื่อสารส่งข้อความบิตสตริง $x : x_0 \cdots x_{N-1}$ ไปหา Bob ได้ แต่เนื่องจากเครื่องมือสื่อสารดิจิตอลจะมีสิ่งต่าง ๆ เกิดขึ้นดังต่อไปนี้

1. มัลแวร์เรียงสับเปลี่ยน x ให้เกิดเป็น y กล่าวคือ $y = x_{P_0}x_{P_1} \cdots x_{P_{N-1}}$
2. มัลแวร์แทรกบิตเข้าไปใน y ทั้งหมด M บิต ให้เกิดเป็น z กล่าวคือ
 - สำหรับ $1 \leq i \leq N - 1$ แทรกบิตจำนวน L_i บิต ระหว่างตำแหน่ง $i - 1$ และ i
 - แทรกบิตจำนวน L_0 บิต ไปยังด้านหน้า (ก่อนตำแหน่ง 0)
 - แทรกบิตจำนวน L_N บิต ไปยังด้านหลัง (หลังตำแหน่ง $N - 1$)

บิตที่ถูกแทรกอาจไม่ได้มาจากการสุ่ม เรียกผลลัพธ์ที่ได้จากกระบวนการการแทรกบิตนี้ว่า z

3. Bob ได้รับข้อความ z (แทนที่จะได้ x)
4. เครื่องส่งข้อความรายงานให้ Alice ทราบถึงข้อความ z ที่ได้ถูกส่งออกไป

ทั้ง Alice และ Bob ไม่ทราบ P

อย่างไรก็ตาม Alice ทราบ L (ทั้งนี้ Bob ไม่ทราบ L)

หน้าที่ของคุณคือพัฒนาวิธีการสื่อสารระหว่าง Alice และ Bob ที่ใช้เพียงเครื่องมือสื่อสารที่กำหนด เพื่อให้ Bob สามารถทราบได้ถึงลำดับ L ทั้งนี้ Alice สามารถส่งข้อความได้หลายข้อความ (แต่ไม่เกินตามที่กำหนดไว้ในแต่ละปัญหาย่อย) และสามารถใช้ผลจากการส่งข้อความก่อน ๆ ในการตัดสินใจข้อความที่จะส่งในครั้งถัดไปได้

หมายเหตุ: ทั้ง Alice และ Bob ทราบค่า N และ M

ข้อจำกัด: $1 \leq M < N \leq 128$

7.1 Subtask 1 (8 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N + M \leq 16$; ห้ามส่งเกิน $N + M - 1$ ข้อความ

ในแต่ละข้อความ หาก Alice ตั้งทุกบิตเป็น 0 หรือ 1 เหมือนกันทั้งหมด Bob จะทราบได้ว่า Alice ตั้งใจจะส่ง 0 หรือ 1 จากการดู “เสียงข้างมาก” ในบรรดาบิตในข้อความที่ได้รับ (เพราะ $M < N$)

สำหรับแต่ละ $0 \leq i \leq N - 1$ ให้ Alice ส่งบิตสตริง 111...111 เป็นจำนวน L_i ข้อความ ตามด้วย 000...000 หนึ่งข้อความ (ยกเว้นเมื่อ $i = N - 1$ ไม่ต้องส่ง 000...000 เพราะไม่มีความจำเป็น)

Bob จะสามารถทราบ L_i สำหรับ $0 \leq i \leq N - 1$ ได้ทันที และทราบได้อีกว่า $L_N = M - \sum_{i=0}^{N-1} L_i$

Alice จะต้องส่งทั้งสิ้น $\sum_{i=0}^{N-1} (L_i + 1) - 1 \leq M + N - 1$ ข้อความ

7.2 Subtask 2 (3 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $L_0 = M$ หรือ $L_N = M$; ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

ให้ Alice ไม่ต้องส่งข้อความเลย หาก $L_0 = M$ หรือ ส่งข้อความอะไรก็ได้หนึ่งข้อความ หาก $L_N = M$

7.3 Subtask 3 (6 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $L_i = M$ สำหรับบาง $0 \leq i \leq N$; ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

สำหรับข้อความที่ $j + 1$ ให้ Alice ส่ง 111...111 หาก $((2^j) \& (i)) > 0$ (ไม่เช่นนั้น ให้ส่ง 000...000)

Bob จะทราบค่าของ i ที่ $L_i = M$ ได้ด้วยเทคนิคการดูเสียงข้างมากจาก Subtask 1

ด้วยมาตรการนี้ Alice จะต้องส่งไม่เกิน $\lceil \log_2(N + 1) \rceil \leq \lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

7.4 Subtask 4 (27 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $2M \leq N$; ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

นิยาม ให้ S แทนเซตของตำแหน่งทั้งหมดที่มาจากการแทรกบิตในข้อความที่ Bob ได้รับ และให้ S_0, S_1, \dots, S_{M-1} แทนสมาชิกของเซตดังกล่าว

สังเกตว่า ลำดับ L แต่ละลำดับที่เป็นไปได้ จะให้เซต S ที่แตกต่างกัน

7.4.1 มุมมองของ Alice

สำหรับแต่ละ x ($0 \leq x \leq M - 1$) กำหนดให้ตำแหน่ง $2x$ และ $2x + 1$ ในข้อความที่ Alice พยายามส่ง มีหน้าที่ส่งค่า S_x ไปให้ Bob (อันที่จริงแล้ว เลือกสองตำแหน่งใดก็ได้ สำหรับแต่ละ x)

สำหรับตำแหน่งที่ไม่ได้มีหน้าที่ส่งค่า S_x ใด ๆ ไปให้ Bob (หากมี: ได้แก่ตำแหน่งตั้งแต่ M ถึง $N - 1$) ให้มีหน้าที่ส่งค่า S_0 ทั้งนี้ วิธีหนึ่งที่เป็นไปได้ในการส่งค่า v สำหรับแต่ละตำแหน่งคือ: ในข้อความที่ $i + 1$ ให้ตำแหน่งนั้นมีค่าเป็น $((2^i) \& (v))$

7.4.2 มุมมองของ Bob

พิจารณารูปกราฟที่มี $N + M$ จุดยอด: $0, 1, \dots, N + M - 1$

เมื่อพิจารณาข้อความทั้งหมดพร้อมกัน หากตำแหน่ง u (ตามที่ Bob มองเห็น; สำหรับแต่ละ $0 \leq u \leq N + M - 1$) ส่งค่า v ที่ $v \leq N + M - 1$ มาให้ ให้สร้าง directed edge จาก u ไป v

ให้เซต T แทนเซตของบิตที่ Bob ทราบอย่างแน่ชัดแล้วว่าไม่ได้มาจากการแทรกบิต (เริ่มแรกเป็นเซตว่าง)

- สำหรับแต่ละจุดยอด u ที่ in-degree น้อยกว่า 2 ให้ (1) เพิ่ม u เข้าไปยังเซต T และ (2) ลบจุดยอด v ที่มี directed edge จาก u ไปยัง v ออกจากกราฟ
- ทำกระบวนการด้านบนซ้ำจนกว่าจะไม่มีจุดยอดที่ in-degree น้อยกว่า 2

หลังจบกระบวนการนี้ จะได้ว่า $S = \{0, 1, \dots, N + M - 1\} \setminus T$

Bob สามารถใช้เซต S คำนวณค่าของลำดับ L เพื่อตอบได้ทันที

7.5 Subtask 5 (28 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $P_i = i$ สำหรับทุก $0 \leq i \leq N - 1$; ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

มองปัญหานี้เป็นปัญหากราฟ คล้ายกับใน Subtask 4

ในครั้งนี้ เราเพียงแค่ให้จุดยอดที่แทนตำแหน่งที่ไม่ได้มาจากการแทรกบิตชี้ไปมาหากัน เป็น cycle ขนาด N (สังเกตว่ามี adversary ได้อย่างมาก $N - 1$ ตำแหน่ง ซึ่งไม่สามารถสร้าง cycle ขนาด N ให้ Bob มองเห็นได้)

Bob สามารถหา cycle จากกราฟที่ได้รับใน linear time เนื่องจาก out-degree ของแต่ละจุดยอดมีค่าไม่เกิน 1

สังเกตว่ามาตรการนี้จะใช้ได้หากเราไม่ทราบว่า $P_i = i$ เนื่องจาก Alice จะไม่ทราบว่าต้องส่งค่าอะไรในแต่ละตำแหน่ง เพื่อให้ Bob สามารถมองเห็นข้อความที่ได้รับและตีความได้เป็นกราฟตามที่ต้องการ

7.6 Subtask 6 (28 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

7.6.1 ส่วนแรก: $\lceil \log_2 N \rceil$ ข้อความแรก

ให้ตำแหน่ง x ($0 \leq x \leq N - 1$) ในมุมมองของ Alice พยายามส่งค่า x (ใช้ทั้งสิ้น $\lceil \log_2 N \rceil$ ข้อความ) เมื่อส่งข้อความตามกระบวนการข้างต้นแล้ว Alice จะสามารถทราบค่าของ P ได้จากข้อความที่เครื่องส่งข้อความรายงานว่าได้ถูกส่งออกไป

Bob จะเห็นค่าตั้งแต่ 0 ถึง $N - 1$ ปรากฏอย่างน้อยหนึ่งครั้ง และหากค่าใดปรากฏครั้งเดียวพอดี จะทราบได้ทันทีว่าตำแหน่งในข้อความที่ค่านั้นปรากฏเป็นตำแหน่งที่ไม่ได้มาจากการแทรกบิต (จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งตำแหน่งเสมอ เนื่องจาก $M < N$)

ให้ R_i แทนลำดับของตำแหน่งที่ Bob เห็นว่าปรากฏเป็นค่า i โดยที่ $R_{i,j} < R_{i,j+1}$ สำหรับทุก $0 \leq j \leq |R_i| - 2$

สังเกตว่า

- Alice ทราบลำดับ R_i ทั้งหมดเช่นกัน
- สำหรับแต่ละ i มี j เดียวพอดี ที่ $R_{i,j}$ เป็นตำแหน่งที่ไม่ได้มาจากการแทรกบิต (ให้ pos_i แทน j ดังกล่าว)

7.6.2 ส่วนที่สอง: ข้อความสุดท้าย

Alice จะต้องใช้อีก 1 ข้อความที่เหลือ ส่งให้ Bob ทราบค่า pos_i สำหรับทุก $0 \leq i \leq N - 1$

ให้ Q เป็นเซตที่เริ่มแรกประกอบไปด้วยทุก i ที่ $|R_i| = 1$

หลังจากนั้น ไล่ตั้งแต่ $i = 0$ ถึง $i = N - 1$:

1. หาก $|R_i| = 1$ ข้ามไปยัง i ถัดไปทันที
2. เลือกสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุด $|R_i| - 1$ จำนวน จากเซต Q แทนด้วย $q_0, \dots, q_{|R_i|-2}$
3. ลบ $q_0, \dots, q_{|R_i|-2}$ ออกจากเซต Q
4. ให้ตำแหน่ง q_j เป็นบิต 1 ในข้อความถัดไป ก็ต่อเมื่อ $j < pos_i$ (ดังนั้นผลรวมของทุกบิตจะเท่ากับ pos_i)
5. เพิ่ม i เข้าไปในเซต Q

เราพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า Q จะมีสมาชิกเพียงพอให้เลือกในขั้นตอน 2 เสมอ ลองพิสูจน์เองเพื่อเป็นการฝึกฝน :)

(หรือ เราสามารถเลือกพิจารณา i ในลำดับที่ $|R_i|$ ไม่ลดลง (non-decreasing order) ก็ได้ ซึ่งอาจจะ intuitive กว่า)

ด้วยกระบวนการข้างต้น Bob จะได้รับข้อความที่สามารถใช้หาค่า pos_i สำหรับทุก $0 \leq i \leq N - 1$ ซึ่งสามารถนำไปคำนวณหาลำดับ L ได้ในที่สุด

7.7 Challenge

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2(N + M) \rceil$ ข้อความ

คำใบ้: หาก $\lceil \log_2(N + M) \rceil = \lceil \log_2 N \rceil + 1$ เราสามารถใช้มาตรการจาก Subtask 6 ได้เลย (ไม่เช่นนั้น $\lceil \log_2(N + M) \rceil = \lceil \log_2 N \rceil$ และเราจะต้องคิดหามาตรการขึ้นมาใหม่สำหรับกรณีนี้เท่านั้น โดยหนึ่งในมาตรการที่เป็นไปได้มีลักษณะที่คล้ายเดิม เพียงแต่มีความซับซ้อนมากกว่า)

8 Colorblind

มีอาเรียยาว $2N$ แต่ละตำแหน่งถูกระบายด้วยสีแดง และ สีฟ้า อย่างละ N แต่เราไม่รู้ว่ามีสีอะไรบ้าง ยกเว้นตำแหน่งแรกที่เป็นสีแดงเสมอ

เราต้องการที่จะหาว่าแต่ละตำแหน่งมีสีอะไรโดยการถามคำถามดังนี้ไม่เกิน $2N$ ครั้ง

- $\text{ask}(x, y)$ จะตอบ minimum total cost ในการจับคู่จุดที่ต่างกัน N คู่ โดย cost ของคู่ นั้นจะเป็นระยะห่างในอาเรีย หากสลับสีในตำแหน่ง x และ y ของอาเรีย (การสลับไม่ได้เกิดขึ้นจริง)

ข้อจำกัด: $1 \leq N \leq 256$

8.1 Subtask 1 (7 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 2$

ในกรณีที่ $N = 1$ นั้น อาเรียจะเป็นดังนี้เลย "RB" โดยเราจะให้ "R" แทนสีแดง และ "B" แทนสีฟ้า

ในกรณีที่ $N = 2$ อาเรียจะมี 3 แบบดังนี้ "RRBB", "RBRB", "RBRR" ซึ่งสามารถถามคำถามเพื่อแยกกรณีออกได้ดังนี้

- หาก $\text{ask}(0, 1) = 4$ จะมีเพียงกรณี "RRBB" เท่านั้น
- หาก $\text{ask}(1, 2) = 4$ จะมีเพียงกรณี "RBRB" เท่านั้น
- หาก $\text{ask}(1, 3) = 4$ จะมีเพียงกรณี "RBRR" เท่านั้น

Total query: 3

8.2 Subtask 2 (1 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ตำแหน่งที่มีสีแดงอยู่ติดกันหมด

แน่นอนว่าเนื่องจากตำแหน่งที่ 0 คือสีแดง ดังนั้น N ตำแหน่งแรกจะเป็นสีแดงอย่างแน่นอน ทำให้สามารถตอบได้เลยว่าอาเรียคือ "R...RB...B"

Total query: 0

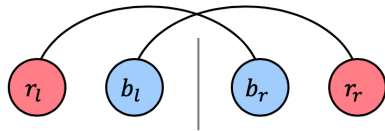
8.3 Minimum total cost

ก่อนอื่น หากเราได้รับอาเรย์มา แล้วให้หา minimum total cost ในการจับคู่ เราจะทำอย่างไร การหาค่านี้ทำได้หลายวิธีแต่ในเฉลยนี้เราจะพูดถึงวิธีหนึ่งที่นำไปใช้แก้ปัญหาลึกของเราต่อไป

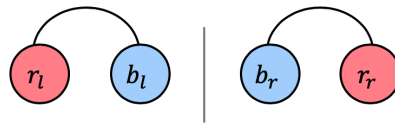
ถ้าแบ่งอาเรย์เป็นสองส่วนที่ระหว่างตำแหน่ง i และ $i + 1$ และให้ R_i และ B_i เป็นจำนวนจุดสีแดง และ สีฟ้า ในด้านซ้าย

เราจะสรุปได้ว่าจำนวนคู่ที่ จุดหนึ่งมาจากฝั่งซ้าย และ อีกจุดมาจากฝั่งขวา จะมีจำนวน $|R_i - B_i|$ ซึ่งเท่ากับจำนวนจุดที่เหลือในฝั่งซ้ายที่ไม่สามารถจับคู่กันในฝั่งเดียวกันได้

การจับคู่ในฝั่งเดียวกันให้มากที่สุดจะเป็นการจับคู่ที่ดีที่สุด เนื่องจากหากเราเหลือจุดสีแดงและสีฟ้า r_l และ b_l จากฝั่งซ้ายไว้ เราต้องนำสองจุดนี้ไปจับคู่กับจุดจากฝั่งขวา r_r และ b_r ซึ่งเห็นได้ชัดว่าจะต้องเสีย cost มากกว่าการจับคู่จุดในฝั่งเดียวกัน 2 คู่

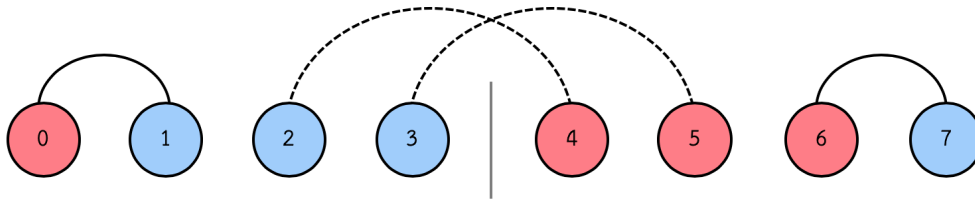


(a) จับคู่คนละฝั่ง cost = 4



(b) จับคู่ฝั่งเดียวกัน cost = 2

ในรูปข้างล่าง เราพยายามที่จะจับคู่ในฝั่งซ้ายให้หมดก่อน ซึ่งจะเหลือจุดสีฟ้า 2 จุด ที่จะต้องไปจับคู่กับฝั่งขวา



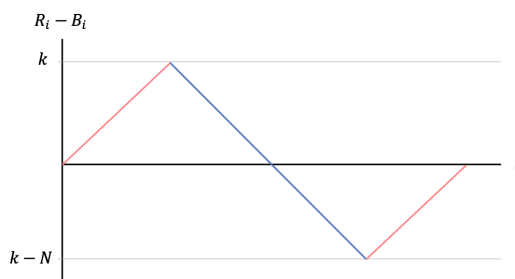
Minimum total cost ในการจับคู่ของอาเรย์นี้ จะเท่ากับ $|R_0 - B_0| + \dots + |R_{2N-2} - B_{2N-2}|$

8.4 Subtask 3 (13 คะแนน)

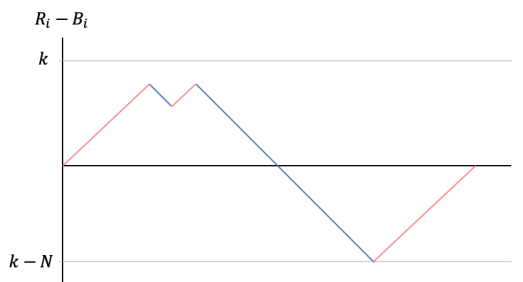
เงื่อนไขเพิ่มเติม: ตำแหน่งที่มีสีฟ้าอยู่ติดกันหมด

เรารู้ว่าอาเรียของเราจะมีหน้าตาเป็นดังนี้ "R..RB..BR..R" กำหนดให้ส่วนแรกที่เป็นสีแดงมีจำนวน k ตัว

สังเกตว่าค่า $R_i - B_i$ จะมีลักษณะเป็น $0, \dots, k, k-1, \dots, k-N, k-N+1, \dots, 0$



สังเกตว่าในจุดยอดของกราฟจะเป็นตำแหน่งที่จุดสีแดงและสีฟ้าอยู่ติดกันซึ่งเป็นตำแหน่งที่เราต้องหา หากเราลองสลับสีแดงและฟ้าที่ติดกันเราจะเห็นว่ามันจะทำให้ minimum total cost น้อยลงจาก minimum total cost ของอาเรียดั้งเดิมดังรูป



อย่างไรก็ตาม หากอาเรียคือ "RB..BR..R" การสลับ "R" กับ "B" คู่แรกจะไม่ทำให้ minimum total cost ลดลง เราต้องเช็คกรณีนี้เป็นพิเศษ

ที่นี่ เราจะหา minimum total cost ของอาเรียดั้งเดิมได้ยังไง คำนี้นจะเท่ากับ $ask(0,1)$ เสมอ เพราะอย่างที่ได้กล่าวไป การสลับคู่แรกของอาเรียจะไม่เปลี่ยนค่า cost ของการจับคู่ใดๆ ถึงแม้ว่าสีที่สลับจะต่างกัน

เราต้องการหาตำแหน่งแรกที่สีต่างกันโดยการถาม $ask(i-1,i)$ ไปเรื่อยๆตั้งแต่ $i = 2, 3, \dots, N$

หาก $ask(i-1,i) \neq ask(0,1)$ แสดงว่าที่ตำแหน่ง i เป็นตำแหน่งแรกของจุดสีฟ้า

Total query: N

8.5 Subtask 4 (8 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ตำแหน่ง $2x$ และ $2x + 1$ มีสีแตกต่างกัน สำหรับทุก $0 \leq x \leq N - 1$

เนื่องจาก ตำแหน่ง $2x$ และ $2x + 1$ ใด ๆ มีสีแตกต่างกัน เราสามารถสรุปได้ว่าตำแหน่งที่ 1 มีสีฟ้า

สังเกตว่า หากเราถาม $\text{ask}(0, x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนคู่ แล้วจะเกิดได้สองกรณีดังนี้

1. ตำแหน่ง x เป็นสีแดง: $\text{ask}(0, x)$ จะเท่ากับ minimum total cost ของอาเรียเดิม เนื่องจากเราสลับสีแดงกับสีแดง อาเรียยังคงเหมือนเดิม
2. ตำแหน่ง x เป็นสีฟ้า: $\text{ask}(0, x)$ จะมากกว่า minimum total cost ของอาเรียเดิมแน่นอน เนื่องจากอาเรียจะเปลี่ยนจาก "RB...BR..." เป็น "BB...RR..." ซึ่งทำให้ต้องใช้ cost เพิ่มขึ้นในการจับคู่

ดังนั้นในส่วนของการหาอาเรีย เราสามารถสรุปได้ว่าสำหรับ $x = 2, 4, \dots, 2N - 2$ หาก $\text{ask}(i-1, i) = \text{ask}(0, 1)$ แสดงว่าตำแหน่ง x และ $x+1$ จะเป็น "RB" ไม่เช่นนั้นจะเป็น "BR"

Total query: N

8.6 Subtask 5 (11 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ตั้งแต่ตำแหน่ง 0 ถึง N มีตำแหน่งสีฟ้าหนึ่งตำแหน่งพอดี

ในปัญหาย่อยนี้เราจะทำการสังเกตค่าหากเราสลับตำแหน่ง i กับ N สังเกตว่าหากอาเรียเป็น "R...RB...B" แล้ว minimum total cost จะมีค่ามากที่สุด ดังนั้นหาก $\text{ask}(i, N) > \text{ask}(0, 1)$ แล้ว แสดงว่าที่ตำแหน่ง i เป็นสีฟ้า หากไม่มี i ใดๆที่ตรงเงื่อนไขแล้ว ตำแหน่ง N จะเป็นสีฟ้า

Total query: N

8.7 Subtask 6 (60 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เราจะแบ่งอัลกอริทึมออกเป็นสองส่วน โดยในเฉลยนี้ขอแทนตำแหน่งสีแดงด้วย + และ สีฟ้าด้วย - ดังนั้น $R_i - B_i$ จะเท่ากับ ผลรวม i ตำแหน่งแรก ขอแทนด้วย pref_i

8.7.1 ส่วนแรก: หาสีของ 3 ตำแหน่งแรก

ใน 3 ตำแหน่งแรกนี้เป็นไปได้ 4 กรณีได้แก่ +++, ++-, +-+ และ +-+ นอกจากนี้ สังเกตว่าหากเราสลับตำแหน่งระหว่างสองตัวใด ๆ ในสามตำแหน่งนี้ ค่า pref_i สำหรับ $3 \leq i$ จะไม่เปลี่ยน ดังนั้นในตอนที่เราสลับคู่ใดๆ เราจะสนใจเพียงค่าที่เปลี่ยนไปของ pref_1 และ pref_2 ซึ่งเท่ากับค่า minimum total cost ที่เปลี่ยนไป

กำหนดให้ c เท่ากับ minimum total cost เริ่มต้น ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\text{ask}(0, 1)$

	$\text{ask}(0,1) - C$	$\text{ask}(0,2) - C$	$\text{ask}(1,2) - C$
$+++$	0	0	0
$++-$	0	-2	-2
$+ - +$	0	0	+2
$+ - -$	0	+2	0

ตารางดังกล่าวแสดงค่าที่เปลี่ยนไปของ minimum total cost ($\text{ask}(?,?) - C$) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเราสามารถที่จะแยกทั้ง 4 กรณีย่อยได้เพียงการถามแค่ 3 ครั้งเท่านั้น

8.7.2 ส่วนที่สอง: หาสีของตำแหน่งถัดไป

สมมติว่าเรารู้สีของทุกตำแหน่งตั้งแต่ 0 ถึง $i - 1$ แล้ว เราจะสามารถหาสีของตำแหน่ง i โดยแบ่งกรณีจากสีของสองตำแหน่งล่าสุด (ตำแหน่ง $i - 2$ และ $i - 1$) และ ผลรวมของสีก่อนหน้านี้ (pref_{i-3})

กำหนดให้ $?$ เป็นสีของตำแหน่ง i ที่เรากำลังจะหา

- กรณี $++?$

pref_{i-3}	$\text{ask}(i-1, i) - C$		$\text{ask}(i-2, i) - C$	
	$++\pm$	$++\bar{\pm}$	$++\pm$	$++\bar{\pm}$
≥ 0	0	-2		
-1			0	-4
≤ -2			0	+4

- กรณี $+ - ?$

pref_{i-3}	$\text{ask}(i-1, i) - C$		$\text{ask}(i-2, i) - C$	
	$+ - \pm$	$+ - \bar{\pm}$	$+ - \pm$	$+ - \bar{\pm}$
≥ 0	+2	0		
≤ -1			0	+4

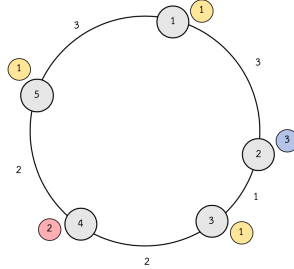
ส่วนกรณีที่ เป็น $- + ?$ และ $-- ?$ สังเกตว่าการสลับ $+$ และ $-$ ของทั้งอาเรย์ไม่ทำให้ minimum total cost เปลี่ยนไปเลย ดังนั้นเพียงกลับกรณี $++$ เป็น $--$ และ $+ -$ เป็น $- +$ ได้เลย

ดังนั้น เราสามารถถามเพียง 1 คำถามเพื่อหาตัวถัดไปโดยแยกกรณีตามด้านบนได้

$$\text{Total query: } 3 + (2N - 3) = 2N$$

9 Coins

สนามแห่งหนึ่งมีลักษณะเป็นวงกลม และมีตำแหน่งเก็บเหรียญจำนวน N ตำแหน่งโดยระยะห่างระหว่างตำแหน่ง i และ $i+1$ เท่ากับ A_i สำหรับ $1 \leq i < N$ และ ระยะห่างระหว่างตำแหน่ง N และ 1 เท่ากับ A_N ที่ตำแหน่ง i จะมีเหรียญหนึ่งเหรียญซึ่งมีเลข B_i กำกับอยู่ซึ่งเลขซ้ำกันได้



ตัวอย่างสนามวงกลมที่มี 5 ตำแหน่ง

เราต้องการที่จะเก็บเหรียญตามลำดับจากเลขน้อยสุดไปยังมากที่สุด ถ้ามีเหรียญที่มีเลขซ้ำกันจะต้องเก็บเหรียญหมายเลขนั้นให้หมด ก่อนถึงจะไปเก็บเหรียญที่มีเลขมากกว่าได้ จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดจะเริ่มที่ไหนก็ได้

ถ้าวาระยะทางสั้นที่สุดที่เราจะใช้ในการเก็บเหรียญให้ครบเท่ากับเท่าใด

ข้อจำกัด: $3 \leq N \leq 10^6$, $A_i \leq 10^8$ และ ผลรวม $A_i \leq 10^9$

9.1 Subtask 1 (5 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 10$

เราสามารถ Brute force ทดลองลำดับในการเดินไปเก็บเหรียญทุกลำดับได้ ซึ่งมีจำนวน $N!$ แบบ

Total time complexity: $\mathcal{O}(N!)$

9.2 Subtask 2 (10 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: เหรียญแต่ละหมายเลขมีจำนวนไม่เกิน 2 เหรียญ

เราจะใช้ dynamic programming (DP) ในการแก้ปัญหาโดยแบ่งเป็นสองจังหวะ

1. st_x ระยะทางน้อยที่สุดโดยที่เหรียญที่เก็บล่าสุดอยู่ที่ ตำแหน่ง x และเป็นตำแหน่งแรกที่เก็บเหรียญหมายเลข B_x

หากเราเก็บเหรียญหมายเลข $B_x - 1$ หมดแล้วและจบที่ตำแหน่ง y เราจะเดินมายังเหรียญหมายเลข B_x

$$st_x = \min \begin{cases} ft_y + \text{walk}(y, x) \\ ft_y + \text{walk}(x, y) \end{cases} \quad \text{โดย } B_y = B_x - 1$$

กำหนดให้ $\text{walk}(u, v)$ แทนระยะทางที่เดินจาก u ไป v ตามเข็มนาฬิกา

2. ft_x ระยะทางน้อยที่สุดโดยที่เหรียญที่เก็บล่าสุดอยู่ที่ ตำแหน่ง x และเป็นตำแหน่งสุดท้ายที่เก็บเหรียญหมายเลข B_x

ส่วนนี้คือส่วนที่เราเริ่มเก็บเหรียญหมายเลข B_x ตำแหน่งแรกที่ y แล้ว เราต้องการเก็บเหรียญหมายเลขนี้ให้หมดแล้วมาหยุดที่ตำแหน่ง x นี้

$$\text{ft}_x = \min(\text{st}_y + \text{collect}(y, x)) \text{ โดย } B_y = B_x$$

โดย $\text{collect}(u, v)$ แทนระยะทางที่น้อยที่สุดที่ต้องใช้หากเราจะเก็บเหรียญหมายเลข B_u ให้หมด โดยเริ่มเก็บที่ตำแหน่ง u และจบที่ตำแหน่ง v ($B_u = B_v$)

ในปัญหานี้ เนื่องจากเหรียญแต่ละหมายเลขมีจำนวนไม่เกิน 2 ดังนั้นในการคำนวณจึงมีตัวเลือกน้อย และ $\text{collect}(u, v)$ สามารถหาได้ง่ายมากเนื่องจากไม่ต้องไปเก็บเหรียญใดๆอื่นนอกจากจุดเริ่มและจบ (ตามเข็มนาฬิกา หรือ ทวนเข็มนาฬิกา)

คำตอบคือ ft_i สำหรับ i ที่ $B_i =$ เหรียญที่มีเลขมากที่สุด

```
1 long long walk(int x, int y) {
2     if(y >= x) return pos[y] - pos[x];
3     return circ + pos[y] - pos[x];
4 }
5
6 long long solve() {
7     for(int x = 1; x <= n; x++) {
8         m = max(m, B[x]);
9         coins[B[x]].push_back(x);
10        st[x] = ft[x] = inf;
11    }
12    for(int i = 1; i <= m; i++) {
13        // solve for st[x]
14        for(auto x : coins[i]) {
15            for(auto y : coins[i-1]) st[x] = min(st[x], ft[y] + min(walk(y, x), walk(x, y)));
16            if(i == 1) st[x] = 0;
17        }
18        // solve for ft[x]
19        int sz = coins[i].size();
20        if(sz == 1) ft[coins[i][0]] = st[coins[i][0]];
21        else {
22            for(auto x : coins[i]) {
23                for(auto y : coins[i]) {
24                    if(x != y) ft[x] = min(ft[x], st[y] + min(walk(y, x), walk(x, y)));
25                }
26            }
27        }
28    }
29    long long ans = inf;
30    for(auto x : coins[m]) ans = min(ans, ft[x]);
31    return ans;
32 }
```

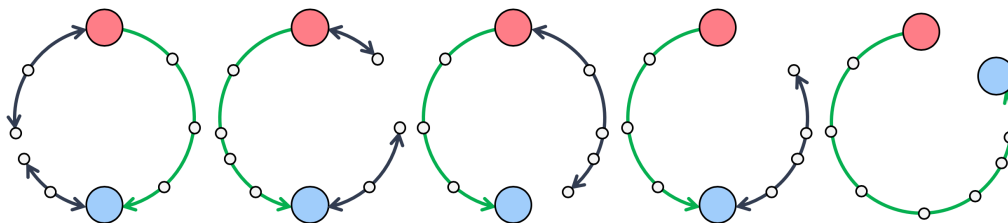
Total time complexity: $\mathcal{O}(N)$

9.3 Subtask 3 (30 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 10\,000$, เหยี่ยวแต่ละหมายเลขมีจำนวนไม่เกิน 1 000 เหยี่ยว และ ระยะห่างระหว่างเหยี่ยวที่ติดกันเป็น 1 หมุด

เราจะแก้ปัญหาด้วย DP เช่นเดียวกัน แต่ในปัญหาย่อยนี้ การหาค่า $\text{collect}(y, x)$ นั้นจะยากขึ้น

การเก็บเหยี่ยวบนวงกลมที่ดีที่สุดนั้นทำได้อย่างไร ?

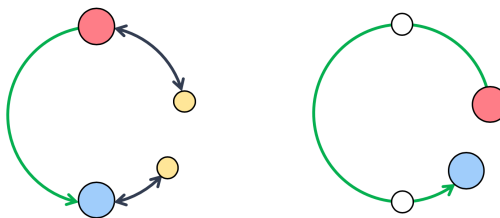


รูปข้างต้นเป็นตัวอย่างวิธีเดินเก็บเหยี่ยวที่เป็นไปได้ หากเราต้องการเก็บเหยี่ยวทั้งหมดโดยเริ่มจากสีแดงและจบที่สีฟ้า

การเดินเก็บเหยี่ยวตามด้านบนจะมีลักษณะดังนี้

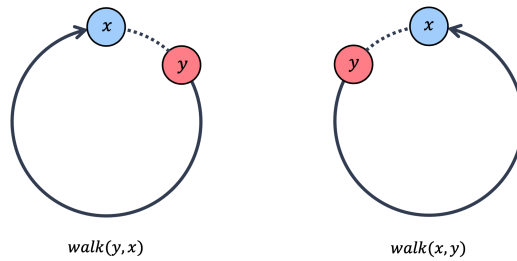
- สีดำ: เดินไปเก็บเหยี่ยวจำนวนหนึ่งแล้วเดินกลับ (อาจไม่มี)
- สีเขียว: เดินไปเก็บไปถึงตำแหน่งสีฟ้า
- สีดำ: เดินเลยจากสีฟ้าไปเก็บเหยี่ยวที่ยังเหลืออยู่แล้วเดินกลับ (อาจไม่มี)

ในการคำนวณในส่วน 2 เราจะสนใจเพียงกรณีที่ จุดเริ่มและจุดจบอยู่ติดกันในวงกลม เนื่องจากเราไม่จำเป็นต้องสนใจส่วนสีดำเนื่องจากส่วนนั้นเราสามารถให้ส่วน 1 นั้นเลือกแทนได้



ตัวอย่างเช่น จากรูปข้างบน แทนที่จะเดินไปกลับ หากเราย้ายจุดเริ่มและจุดจบมาที่จุดสีเหลืองแทน แล้วปล่อยให้การตัดสินใจเดินผ่านทางสีดำนั้นเป็นหน้าที่ของส่วนที่ 1 ซึ่งคือการเดินมาจากเหยี่ยวหมายเลขต่ำกว่า

ดังนั้นการหาระยะทางจะมีเพียงสองแบบ



หาก x อยู่ก่อน y ในวงกลมแล้วเราจะต้องใช้ระยะทาง $walk(y, x)$ ไม่เช่นนั้นเราจะเดินย้อนอีกทางซึ่งเป็น $walk(x, y)$ ทั้งนี้ทิศทางการเดินนั้นขึ้นอยู่กัด้านที่ต้องไปเก็บเหรียญอื่นๆ

```
1 // solve for ft[x]
2 int sz = coins[i].size();
3 if(sz == 1) ft[coins[i][0]] = st[coins[i][0]];
4 else {
5     for(int j = 0; j < sz; j++) {
6         int x = coins[i][j], y;
7
8         y = coins[i][(j+1)%sz];
9         ft[x] = min(ft[x], st[y] + walk(y, x)); // walk from y to x clockwise
10
11        y = coins[i][(j-1+sz)%sz];
12        ft[x] = min(ft[x], st[y] + walk(x, y)); // walk from y to x counter-clockwise
13    }
14 }
```

Total time complexity: $\mathcal{O}(N^2)$

9.4 Subtask 4 และ 5 (35+20 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

พิจารณา $st_x = \min(ft_y + \min(\text{walk}(y, x), \text{walk}(x, y)))$ ซึ่งแบ่งเป็นสองกรณี

1. $x \geq y$

$$st_x = \min \begin{cases} ft_y + \text{walk}(y, x) = \boxed{ft_y - pos_y} + pos_x \\ ft_y + \text{walk}(x, y) = \boxed{ft_y + C + pos_y} - pos_x \end{cases}$$

2. $x < y$

$$st_x = \min \begin{cases} ft_y + \text{walk}(y, x) = \boxed{ft_y + pos_y} - pos_x \\ ft_y + \text{walk}(x, y) = \boxed{ft_y + C - pos_y} + pos_x \end{cases}$$

โดย C แทน เส้นรอบวงของสนาม $= \sum A$

เนื่องจากเราต้องการให้ st_x มีค่าน้อยที่สุดดังนั้น เราจะหา $ft_y + pos_y$ หรือ $ft_y + C - pos_y$ ที่น้อยที่สุดหาก $x \leq y$ และ หา $ft_y - pos_y$ หรือ $ft_y + C + pos_y$ ที่น้อยที่สุดหาก $x > y$

ซึ่งเราสามารถใช้เทคนิค two pointer ในการหาค่าน้อยที่สุดได้ โดยเราจะค่อยๆไล่ค่า x จากน้อยไปมาก และ ค่อยๆเพิ่ม y ที่ $\leq x$ และจำค่าที่น้อยที่สุดของ $ft_y - pos_y$ และ $ft_y + C - pos_y$ ที่น้อยที่สุด เพื่อมาคำนวณ และทำเช่นเดียวกันกับกรณี $x < y$ โดยการไล่ค่า x จากมากไปน้อย

```

1 // case x >= y
2 int l = -1; // this is a pointer for y so that coins[i-1][l] <= x
3 long long mn1 = inf, mn2 = inf;
4
5 // iterate x in increasing order
6 for(auto x : coins[i]) {
7     // gradually increase pointer for y
8     while(l+1 < coins[i-1].size() && coins[i-1][l+1] <= x) {
9         l++; int y = coins[i-1][l];
10        mn1 = min(mn1, ft[y] - pos[y]);
11        mn2 = min(mn2, ft[y] + circ + pos[y]);
12    }
13    st[x] = min(st[x], mn1 + pos[x]); // ft[y] + walk(y, x) = ft[y] - pos[y] + pos[x]
14    st[x] = min(st[x], mn2 - pos[x]); // ft[y] + walk(x, y) = ft[y] + circ + pos[y] - pos[x]
15 }
16
17 // case x < y
18 // do the similar thing as above

```

Total time complexity: $\mathcal{O}(N)$

10 Castle

มีกราฟขนาด N โหนด (0 ถึง $N - 1$) และ M เส้นเชื่อม ($N - 1 \leq M \leq N + 9$) กราฟนี้จะมีลักษณะเป็นต้นไม้ไบนารีสมบูรณ์ (full binary tree) ที่มีเส้นเชื่อมพิเศษเพิ่มมาอีก $M - N + 1$ เส้น

เราต้องเขียนโปรแกรมที่จะรองรับเหตุการณ์สองแบบ จำนวน Q เหตุการณ์

1. เส้นเชื่อมหนึ่งเส้นพังทลายลงไป
2. ถามว่า u และ v มีทางเดินที่เชื่อมกันอยู่หรือไม่

โปรแกรมจะทำงานแบบ online ซึ่งหมายความว่าสำหรับเหตุการณ์คำถามเราต้องตอบคำถามก่อนถึงจะได้รับเหตุการณ์ต่อไป

ข้อจำกัด: $1 \leq N, Q \leq 100\,000$ และ $N - 1 \leq M \leq N + 9$

10.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 1\,000, Q \leq 1\,000$

u และ v จะมีทางเดินเชื่อมกันอยู่ หาก u และ v อยู่ใน component เดียวกัน ซึ่งเราสามารถใช้ DFS/BFS หรือว่า Union-find disjoint set เพื่อหาว่าแต่ละโหนดอยู่ใน component ไตบ้างได้ใน $\mathcal{O}(M)$

ดังนั้นในการตอบคำถามแต่ละครั้ง เราก็รันอัลกอริทึมบนกราฟเพื่อหาว่า u และ v อยู่ใน component เดียวกันหรือไม่

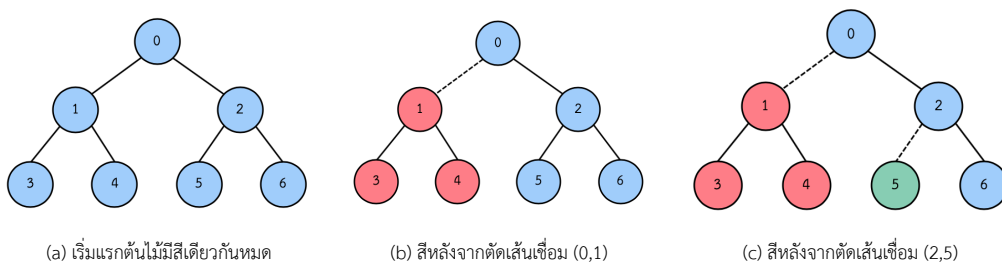
Total time complexity: $\mathcal{O}(M * Q)$

10.2 Subtask 2 (10 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $M = N - 1$, ต้นไม้ไบนารีของกราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นเชื่อมโหนด i กับ $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ สำหรับทุก $i > 0$

เราจะทำการระบายสีต้นไม้โดยที่ หากโหนดใดๆมีทางเดินไปหากันได้จะมีสีเดียวกันแน่นอนว่าเริ่มแรกทุกโหนดจะมีสีเดียวกัน

หากเรานำเส้นเชื่อมในต้นไม้ใดๆออก มันจะทำการแบ่งกลุ่มของต้นไม้ออกเป็นสองกลุ่มย่อย ซึ่งสองกลุ่มนั้นจะไม่สามารถเดินทางไปหากันได้ ทำให้เราต้องระบายสีต้นไม้ใหม่



ทุกครั้งที่แบ่งจะแบ่งออกเป็นสองส่วนเสมอ ที่นี้เราต้องเลือกว่าจะระบายสีในส่วนไหนให้ดีที่สุด

หากเราระบายสีในส่วนที่อยู่ด้านล่างเสมอ เราจะทำการระบายสีโหนดใดๆไม่เกิน $\log N$ ครั้ง เนื่องจากต้นไม้เป็น full binary tree

ในการระบายสี เราสามารถใช้ DFS/BFS ลงไปจากโหนดเริ่มต้นได้ตามตัวอย่างโค้ด C++ นี้

```
1 // color the subtree rooted at u
2 void coloring(int u) {
3     for(auto v : children[u]) {
4         if(color[u] == color[v]) coloring(v);
5     }
6     color[u] = new_color;
7 }
8
9 // destroy an sedge between u and v
10 void cut(int u, int v) {
11     new_color += 1; // initially, new_color = n
12     if(depth[u] > depth[v]) coloring(u);
13     else coloring(v);
14 }
```

เท่านี้ในตอนตอบคำถาม เราเพียงแค่ว่า $\text{color}[u]$ เท่ากับ $\text{color}[v]$ รีเปล่านั้น

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q)$

10.3 Subtask 3 (10 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $M = N - 1$

ในปัญหาย่อยที่แล้วเรารู้ว่า root ของต้นไม้เป็น 0 เสมอ แต่ในปัญหาย่อยนี้เราจะต้องหาเอง

สังเกตว่า root ของต้นไม้เป็นโหนดเดียวที่มีเส้นเชื่อมกับมันเท่ากับ 2 พอดี ดังนั้นเราสามารถหาได้เลยว่า root ของต้นไม้เป็นอะไรเพียงดูแค่ degree ของแต่ละ node

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q)$

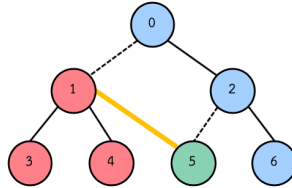
10.4 Subtask 4 (10 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $M = N$ และ ต้นไม้ใบนารีของกราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นเชื่อมโหนด i กับ $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ สำหรับทุก $i > 0$

ในปัญหาย่อยนี้มีลักษณะเหมือนกับปัญหาย่อยที่ 2 แต่มี เส้นเชื่อมพิเศษเพิ่มขึ้นมาอีก 1 เส้น กำหนดให้เส้นเชื่อมนี้เชื่อมระหว่างโหนด a และ b

เราจะทำแบบเดียวกับที่ทำใน Subtask 2 นั่นคือสนใจก่อนว่าสีที่ถูกระบายในต้นไม้ของ u และ v นั้นเป็นสีเดียวกันหรือไม่

แต่ว่าเนื่องจากเรามีเส้นเชื่อมพิเศษระหว่างโหนด a และ b ดังนั้นกลุ่มโหนดที่มีสี $\text{color}[a]$ จะสามารถเดินทางไปหากลุ่มสี $\text{color}[b]$ ได้ ตรงนี้เราสามารถเช็คได้ตอนถามคำถามได้เช่นเลย



มีเส้นเชื่อมพิเศษระหว่าง 1 และ 5 ทำให้สีแดงและเขียวสามารถเดินทางหากันได้

```

1 // query connectivity
2 bool query(int u, int v) {
3     // same color in the tree
4     if(color[u] == color[v]) return true;
5
6     // special edge connects color[a] and color[b]
7     if(special) { // check whether the special edge has been cut
8         if(color[u] == color[a] && color[v] == color[b]) return true;
9         if(color[u] == color[b] && color[v] == color[a]) return true;
10    }
11
12    return false;
13 }
14
15 // destroy an edge between u and v
16 void cut(int u, int v) {
17     // cut special edge
18     if((u == a && v == b) || (u == b && v == a)) special = false;
19     // cut tree edge
20     else {
21         new_color += 1; // initially, new_color = 0
22         if(depth[u] > depth[v]) coloring(u);
23         else coloring(v);
24     }
25 }

```

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q)$

10.5 Subtask 5 (10 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $M = N$

เช่นเดียวกับกับ Subtask 3 เราจะไม่รู้ว่าต้นไม้ไบนารีนนั้นมีลักษณะเป็นอย่างไร อย่างไรก็ตาม หากเราสังเกตคุณสมบัติของ full binary tree ความสูง k ที่มี $2^k - 1$ โหนด ต้นไม้จะมีโหนด degree = 2 เพียง 1 โหนด degree = 1 จำนวน 2^{k-1} และที่เหลือมี degree = 3

ดังนั้นถ้าสมมติเราทดลองเอาเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นออกจากกราฟ แล้วโหนดทั้งหมดมีคุณสมบัติตามข้างต้น แสดงว่าเส้นเชื่อมนั้นเป็นเส้นเชื่อมพิเศษ

หลังจากรู้เส้นเชื่อมพิเศษแล้วก็ใช้วิธีเดียวกับ Subtask 3 และ 4 รวมกันในการแก้

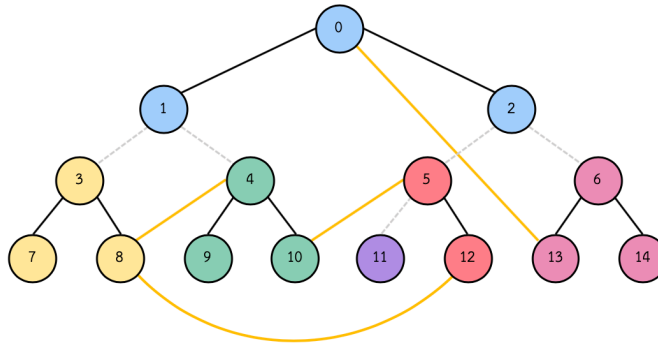
Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q)$

10.6 Subtask 6 (25 คะแนน)

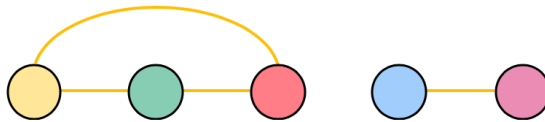
เงื่อนไขเพิ่มเติม: ต้นไม้ใบนารีของกราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นเชื่อมโหนด i กับ $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ สำหรับทุก $i > 0$

เนื่องจากในกราฟจะมีเส้นเชื่อมพิเศษไม่เกิน 10 เส้น ดังนั้นเราจะมีกลุ่มสีในต้นไม้ที่สนใจไม่เกิน 20 กลุ่ม

หากเราเอา 20 กลุ่มนี้มาสร้างกราฟขนาด 20 โหนด เราจะรู้ว่ากลุ่มใดสามารถเดินทางไปหากกลุ่มใดในกราฟขนาดเล็กนี้ได้



ต้นไม้และเส้นเชื่อมพิเศษสีเส้น



กราฟขนาดเล็กที่สร้างจากกลุ่มสีในต้นไม้และเส้นเชื่อมพิเศษข้างต้น

เช่น หากเราต้องการดูว่า 3 และ 5 สามารถเดินทางไปหากันได้หรือไม่ เราก็จะเช็คสีของ 3 และ 5 ในต้นไม้ ซึ่งคือ สีเหลือง และ สีแดง สามารถเดินทางไปหากันได้หรือไม่ในกราฟขนาดเล็ก ซึ่งการเช็คนั้นเราก็สามารถใช้ DFS/BFS หรือว่า Disjoint set ได้เช่นเดิม

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + 20 * Q)$

10.7 Subtask 7 (25 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เนื่องจากเส้นเชื่อมพิเศษมีจำนวนไม่มาก (≤ 10 เส้น) หากเราเลือก spanning tree ใดๆ ออกมาจากกราฟ ต้นไม้มันจะยังมีลักษณะไม่ต่างจากต้นไม้ไบนารีสมบูรณ์มาก (มีความสูงไม่เกิน $\mathcal{O}(\log N)$) ทำให้คุณสมบัติระบายสีไม่เกิน $\log N$ ครั้งต่อแต่ละโหนดที่ได้กล่าวไว้ใน Subtask 2 จึงยังมีผลอยู่

ดังนั้นในปัญหาย่อยนี้ เราเพียงเลือกต้นไม้ใดๆก็ได้ ออกมาจากกราฟ แล้วทำลักษณะเช่นเดียวกับ Subtask 6 ได้เลย

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + 20 * Q)$

10.8 Challenge

ลองแก้ปัญหาหากกราฟมีลักษณะแบบไหนก็ได้ไม่จำเป็นต้องเป็นต้นไม้ไบนารีสมบูรณ์ที่มีเส้นเชื่อมพิเศษเพิ่ม

ปัญหานี้สามารถแก้ได้ด้วยเวลา $\mathcal{O}(N \log N + 20 * Q)$ เช่นเดียวกัน

11 Analysis

Average score/score distribution ของโจทย์แต่ละข้อ

วันแข่ง	Task	Average score	100 points (person)	99-81 points (person)	80-61 points (person)	60-41 points (person)	40-21 points (person)	20 to 1 point (person)	0 points (person)
Day 1	Utilization	40	8	0	0	1	0	3	11
	Marching	46.09	10	0	0	0	3	2	8
	Collection	5.04	0	0	0	1	1	5	16
	Pandemic	16.17	1	0	1	0	4	5	12
Day 2	Racing	12.61	0	0	0	2	2	8	11
	Trainto	8.04	0	0	0	0	0	18	5
	MalwareX	1.65	0	0	0	0	1	1	21
Day 3	Castle	30.87	2	0	2	3	6	2	8
	Coins	16.74	3	0	0	1	1	2	16
	Colorblind	33.83	1	1	2	0	11	4	4