รวมข้อสอบคัดผู้แทนคอมพิวเตอร์โอลิมปิกและเฉลย ปี 2020

1 Utilization

มีเมืองอยู่จำนวน N เมือง โดยแต่ละเมือง i เราจะได้รับคู่อันดับจำนวน L_i คู่ $(X_{i,1}, Q_{i,1}), ..., (X_{i,L_i}, Q_{i,L_i})$ จำนวน L_i คู่ แทนการกระจายความน่าจะเป็นของการไฟดับ แต่ละคู่อันดับจะระบุว่า ความน่าจะเป็นที่จะมีบ้านไฟดับจำนวน $X_{i,j}$ บ้าน เท่ากับ $Q_{i,j}$ เนื่องจากเป็นการกระจายความน่าจะเป็น ผลรวมของความน่าจะเป็นสำหรับแต่ละเมืองจะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

เราต้องการจัดสรรเครื่องปั่นไฟ จำนวน M เครื่อง ไปยังเมืองต่างๆ เพื่อให้ค่าคาดหวังของจำนวนเครื่องปั่นไฟที่ถูกใช้งานนั้นสูงที่สุด โดยค่าคาดหวังของการจัดสรรเครื่องปั่นไฟสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{L_i} \min(X_{i,j}, \text{assigned}_i) * Q_{i,j}$$

หาก $assigned_i$ เป็นจำนวนเครื่องปั่นไฟที่จัดสรรไปให้เมือง i

ข้อจำกัด: $1 \le N \le 100\,000, 1 \le M \le 300\,000$ และ $L_1 + ... + L_N \le 300\,000$

1.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

<u>เงื่อนไขพิเศษ</u>: $L_i = 1$

เนื่องจาก $L_i = 1$ เราสามารถสรุปได้ว่า $Q_{i,1}$ จะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ ในกรณีนี้ สมการค่าคาดหวังจะกลายเป็น

$$\sum_{i=1}^{N} \min(X_{i,1}, \text{assigned}_i)$$

สังเกตว่า หากปัจจุบัน $\text{assigned}_i < X_{i,1}$ แล้วเราให้เครื่องปั่นไฟเพิ่มไปอีกเครื่อง ไม่ว่าจะเพิ่มไปที่เมืองไหน ค่าคาดหวังของเราจะเพิ่มขึ้นเท่ากับ 1 เสมอ ไม่เช่นนั้นจะเป็น 0

ดังนั้น วิธีในการให้เครื่องปั่นไฟที่ดีที่สุดคือ ให้กับเมืองใดก็ได้ที่ $\text{assigned}_i < X_{i,1}$ ไปเรื่อยๆ และคำตอบในกรณีนี้ ค่าคาดหวังจะมีค่าเท่ากับ $\min(M, \sum_{i=1}^{N} X_{i,1})$

Total time complexity: $\mathcal{O}(N)$

1.2 Subtask 2 (10 คะแนน)

<u>เงื่อนไขพิเศษ</u>: $L_i = 2$ และ $X_{i,1} = 0$ เสมอ

สมการค่าคาดหวังในกรณีนี้จะเท่ากับ $\sum_{i=1}^{N} \min(X_{i,2}, \text{assigned}_i) * Q_{i,2}$

เราจะแก้ปัญหาเช่นเดียวกับที่ทำใน Subtask 1 โดยจะค่อยๆ เพิ่มเครื่องปั่นไฟเข้าไปเรื่อยๆ

สังเกตว่าหากปัจจุบัน $\text{assigned}_i < X_{i,2}$ แล้วเราให้เครื่องปั่นไฟเพิ่มไปอีกเครื่อง ค่าคาดหวังของเราจะเพิ่มขึ้นเท่ากับ $Q_{i,2}$ ไม่เช่นนั้นจะเป็น 0

ดังนั้น วิธีในการให้เครื่องปั่นไฟที่ดีที่สุดคือ ให้กับเมืองที่ $\text{assigned}_i < X_{i,2}$ และมีค่า $Q_{i,2}$ มากที่สุด ไปเรื่อยๆ เนื่องจากค่า $Q_{i,2}$ มีค่าคงที่เสมอแม้จะเพิ่มเครื่องปั่นไฟเข้าไปที่เมืองใดก็ตาม

ในส่วน Implementation นั้น เราสามารถใช้ Max-priority queue เพื่อจำลองการเลือกเมืองที่มีค่า $Q_{i,2}$ มากที่สุดได้

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N)$

1.3 Subtask 3 (50 คะแนน)

<u>เงื่อนไขพิเศษ</u>: $N \leq 1\,000$ และ $M \leq 5\,000$

ในกรณีทั่วไปนั้น การเพิ่มเครื่องปั่นไฟหนึ่งเครื่องเข้าไปในเมืองที่มี i ที่มี เครื่องปั่นไฟอยู่แล้วจำนวน assigned_i เครื่อง

ความน่าจะเป็นที่เพิ่มขึ้นจากคู่อันดับ $(X_{i,j}, Q_{i,j})$ จะถูกแบ่งออกเป็นสองกรณีก็คือ

1. $\text{assigned}_i + 1 \leq X_{i,j}$ ในกรณีนี้ ค่าคาดหวังจะเพิ่มเท่ากับ $Q_{i,j}$
2. $\text{assigned}_i + 1 > X_{i,j}$ ในกรณีนี้ ค่าคาดหวังจะไม่เพิ่ม เนื่องจาก $\min$ ในสมการค่าคาดหวังบนสุด

ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าค่าคาดหวังที่จะเพิ่มขึ้นจะมีค่าเท่ากับ

$$\sum_{j \leq L_i, \text{assigned}_i + 1 \leq X_{i,j}} Q_{i,j}$$

สังเกตได้อีกว่า ยิ่ง assigned_i มีค่าเยอะขึ้น ค่าคาดหวังที่จะเพิ่มขึ้นอาจจะมีค่าน้อยลงกว่าเดิม

วิธีในการให้เครื่องปั่นไฟที่ดีที่สุดคือ เลือกให้กับเมืองที่ มีค่า $\sum_{\text{assigned}_i+1 \le X_{i,j}} Q_{i,j}$ มากที่สุด ไปเรื่อยๆ

เพราะการเลือกจัดให้กับเมืองที่มีค่าดังกล่าวที่ไม่มากที่สุด จะไม่ทำให้คำตอบดีขึ้น เนื่องจากค่าคาดหวังที่ได้หลังจากเพิ่มเครื่องปั่นไฟให้กับเมืองนั้นไปแล้ว จะไม่เยอะขึ้น ทำให้ไม่สามารถหวังว่าจะทำให้เกิดตัวเลือกที่ดีกว่า เมืองที่มีค่าดังกล่าวมากที่สุด ในภายหลัง

ในส่วนของ Implementation ในแต่ละรอบของการเพิ่มเครื่องปั่นไฟ เราสามารถไล่ดูว่าแต่ละเมืองมีค่าดังกล่าวเท่าไหร่ แล้วเลือกจัดให้กับเมืองที่มีค่ามากที่สุด

เราสามารถคำนวณค่า $\sum_{k \le X_{i,j}} Q_{i,j}$ สำหรับทุกค่า $i \le N$ และ $k \le M$ เอาไว้ตั้งแต่แรกได้แล้ว ซึ่งสามารถคำนวณอย่างรวดเร็วได้ด้วย Suffix sum ตามตัวอย่างโค้ดภาษา `C++` ด้านล่าง

```cpp
// compute suffix sum for each town
for(int i = 1; i <= n; i++) {
  for(int j = 1; j <= L[i]; j++) sum[i][X[i][j]] += Q[i][j];
  for(int k = m-1; k >= 0; k--) sum[i][k] += sum[i][k+1];
}

// run m times
while(m--) {
  // choose the best town
  int best = 1;
  for(int i = 2; i <= n; i++) {
    if(sum[i][assigned[i]+1] > sum[best][assigned[best]+1]) best = i;
  }
  // add to the answer
  ans += sum[best][assigned[best]+1];
  assigned[best]++;
}
```

Total time complexity: $\mathcal{O}(M * N)$

1.4 Subtask 4 (30 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

สังเกตว่า ค่าของ Suffix sum ของเมือง i จะเปลี่ยนค่าทุกครั้งที่ `k` เท่ากับ $X_{i,j}$ สำหรับบาง j ดังนั้นตอนคำนวณ Suffix sum เราสามารถละทิ้งค่าในตำแหน่ง `k` ที่ไม่สำคัญทิ้งไปได้จำนวนมาก

ทีนี้การหาค่าของเมือง i ที่จะมีเครื่องปั่นไปจำนวน $\text{assigned}_i + 1$ เครื่อง จะมีค่าเท่ากับ `sum[i][up]` โดย `up` แทน $X_{i,j}$ ที่น้อยที่สุดที่มากกว่าเท่ากับ $\text{assigned}_i + 1$

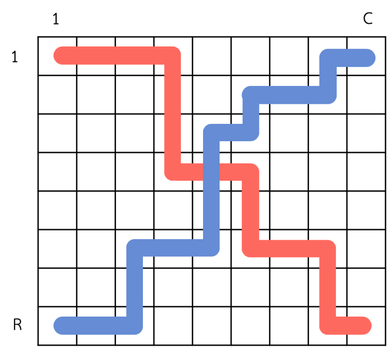
สุดท้าย เพื่อจำลองการเลือกเมืองที่มีค่ามากที่สุดทำได้เร็วขึ้น เราจะใช้ Max-priority queue ในการ Implement ข้อนี้

Total time complexity: $\mathcal{O}((M + N)\log N)$

2 Marching

เราได้รับแผนที่ป่าซึ่งเป็นตารางขนาด $R \times C$ มา ในช่อง (i, j) ใดๆ จะมีค่า $A_{i,j}$ กำกับอยู่ ซึ่งเป็นพลังงานที่ต้องใช้ในการถางป่าในช่องนั้น

โจทย์ถามว่าเราต้องใช้พลังงานน้อยที่สุดเท่าไหร่ในการถางป่าเพื่อสร้างทางเดินที่เราสามารถเดินจากช่องมุมบนซ้าย $(1, 1)$ ไปล่างขวา (R, C) และ ล่างซ้าย $(R, 1)$ ไปบนขวา $(1, C)$ ได้ โดย เส้นทางแรกจะเดินได้เพียงทิศขวาและลงล่าง ส่วน เส้นทางที่สองจะเดินได้เพียง ทิศขวาและขึ้นบน ช่องที่ถูกเดินผ่านซ้ำ จะคิดพลังงานในการถางเพียงแค่ครั้งเดียว



เส้นสีแดง เดิน ขวา – ล่าง
เส้นสีน้ำเงิน เดิน ขวา – บน

<u>ข้อจำกัด</u>: $R, C \leq 1\,500$

2.1 Subtask 1 (20 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $R, C \leq 10$

> เส้นทางเดินจาก $(1, 1)$ ไป (R, C) จะตัดกับ เส้นทางจาก $(R, 1)$ ไป $(1, C)$ หนึ่งครั้งพอดี

เนื่องจากโจทย์กำหนดว่าเส้นแรกจะเดินได้เพียงแค่ ขวา และ ลง และ เส้นสองเดินได้เพียงแค่ ขวา และ ขึ้น เท่านั้น ดังนั้นไม่มีทางที่เมื่อเส้นสองเส้นแยกจากกันแล้วจะวนกลับมาชนกันได้อีกครั้ง

หากเรากำหนดช่องสองช่อง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ให้เป็นจุดเริ่มที่ทั้งสองเส้นมาชนกัน และ จุดที่แยกออกจากกัน พลังงานที่จะใช้จะมีค่าเป็น พลังงานน้อยที่สุดในการถางป่าจากมุมเริ่มต้นสองมุมมาที่ช่อง (x_1, y_1) บวกกับ ช่อง (x_2, y_2) ไปยังมุมจบสองมุม บวกกับ เดินจาก (x_1, y_1) ไป (x_2, y_2)

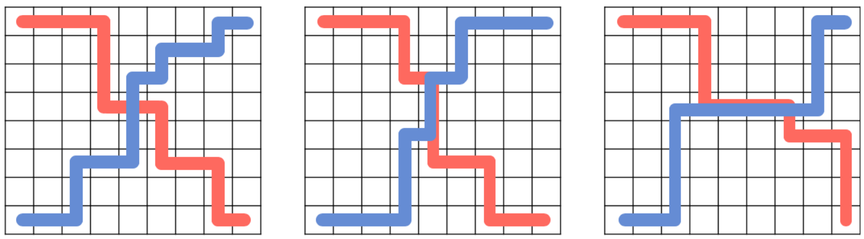
ซึ่งระยะจากจุดใดๆไปมุม สามารถหาได้ด้วยการลองเดินจากจุดนั้นไปยังมุม ซึ่งมีจำนวน $\mathcal{O}\binom{R+C-2}{R-1}$ ทาง (สามารถใช้ recursive function ในการคำนวณได้)

Total time complexity: $\mathcal{O}((R * C)^2 * \binom{R+C-2}{R-1})$

2.2 Subtask 2 (20 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $R, C \leq 500$

เส้นทางที่ทับกันนั้นจะเป็นเส้นตรง แนวนอน หรือ แนวตั้ง เท่านั้น



ตัดเพียงหนึ่งช่อง ตัดเป็นแนวตั้ง ตัดเป็นแนวนอน

เนื่องจากเส้นที่ทับกันมีลักษณะเป็นเส้นตรง การเลือกช่อง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) นี้จะมีทั้งหมด จำนวน $\mathcal{O}(R*C^2 + C*R^2)$ แบบ เนื่องจากมีสองกรณีนั่นก็คือ $x_1 = x_2$ หรือ $y_1 = y_2$

ดังนั้น เวลาที่ใช้ในการเลือกจะเหลือเพียง $\mathcal{O}(R*C^2 + C*R^2)$

นอกจากนี้ ในการคำนวณจะยะทางจากจุดมุม 4 มุมนั้น เราสามารถแก้ให้เป็น dynamic programming ได้ โดยทำการ memoize คำตอบเอาไว้ และ เราก็สามารถคำนวณพลังงานเหล่านี้ไว้ก่อนเริ่มทำการคำนวณจริงๆอีก เวลาที่ใช้ในการคำนวณพลังงานจากมุมจะเป็น $\mathcal{O}(R*C)$

```
for(int i = 1; i <= R; i++) {
  for(int j = 1; j <= C; j++) {
    if(i == 1 && j == 1) d1[i][j] = 0;
    else d1[i][j] = inf;

    if(i > 1) d1[i][j] = min(d1[i][j], d1[i-1][j] + a[i-1][j]);
    if(j > 1) d1[i][j] = min(d1[i][j], d1[i][j-1] + a[i][j-1]);
  }
}
```

ตัวอย่างการคำนวณพลังงานจากช่องมุมบนซ้ายไปยังทุกช่อง

Total time complexity: $\mathcal{O}(R*C^2 + C*R^2)$

2.3 Subtask 3 และ 4 (20+40 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

กำหนดให้ `d1[i][j]`, `d2[i][j]`, `d3[i][j]` และ `d4[i][j]` แทน พลังงานที่น้อยที่สุดที่ต้องใช้ในการถางป่าจากมุมบนซ้าย, มุมบนขวา, มุมล่างซ้าย, มุมล่างขวา เพื่อมายัง ช่อง (i, j) ตามลำดับ

เราจะทำการเลือกจุดเริ่มและจุดจบของเส้นที่ทับกันซึ่งคือ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ให้เร็วขึ้น โดยในการวิเคราะห์นี้จะขอพิจารณากรณี $x_1 = x_2$ เพียงกรณีเดียว เนื่องจากวิธีการทำจะมีลักษณะคล้ายกับกรณี $y_1 = y_2$ อย่างมาก

สมมติว่า $x_1 = x_2 = x$ เราจะต้องการเลือก y_1 และ y_2 โดยที่ `d1[x][y1] + d2[x][y2] + d3[x][y1] + d4[x][y2] + sum[x][y1..y2]` มีค่าน้อยที่สุด โดย `sum[x][y1..y2] = a[x][y1] + ... + a[x][y2]`

หากเรากำหนดให้ `qs[x][y] = sum[x][1..y]` เราจะต้องการหาค่าที่น้อยที่สุดของ `d1[x][y1] + d2[x][y2] + d3[x][y1] + d4[x][y2] + qs[x][y2] - qs[x][y1-1]`

ซึ่งสามารถแยกออกเป็น 2 กลุ่มได้ดังนี้

$\boxed{\texttt{d1[x][y1] + d3[x][y1] - qs[x][y1-1]}} + \boxed{\texttt{d2[x][y2] + d4[x][y2] + qs[x][y2]}}$

ดังนั้น ในแต่ละแถว x ใดๆ หากเราไล่จากซ้ายไปขวา แล้วเก็บค่าน้อยสุดของ `d1[x][y] + d3[x][y] - qs[x][y-1]` ใน prefix เอาไว้ แล้วเทียบกับค่า `d2[x][y] + d4[x][y] + qs[x][y]` ของตัวมันเอง เราก็จะหาค่าน้อยที่สุดของสมการยาวๆ ด้านบนได้

```
int ans = inf;
for(int x = 1; x <= R; x++) {
  int best = inf;
  for(int y = 1; y <= C; y++) {
    best = min(best, d1[x][y] + d3[x][y] - qs[x][y-1]);
    ans = min(ans, best + d2[x][y] + d4[x][y] + qs[x][y]);
  }
}
```

Total time complexity: $\mathcal{O}(R * C)$

3 Pandemic

มีประชากรจำนวน N คน หมายเลข 0 ถึง $N-1$ และ มีหนึ่งคนในนั้นเป็นผู้ติดเชื้อ

เรามีเวลาเพียง 34 วันเพื่อที่จะหาผู้ติดเชื้อ เราได้รับสมัครอาสาสมัครจำนวน K คน หมายเลข 0 ถึง $K-1$ โดยในแต่ละวัน เราสามารถส่งอาสาสมัครไปเข้าใกล้ประชากรคนใดจำนวนกี่คนก็ได้ แต่มีข้อกำหนดว่าในแต่ละวัน ประชากรแต่ละคนจะเจออาสาสมัครได้ไม่เกิน L คน

อาสาสมัครคนที่เข้าใกล้ผู้ติดเชื้อในวันที่ i จะติดเชื้อและเริ่มแสดงอาการในวันที่ $i+30$ พอดี และห้ามไปพบประชากรอีก

ในปัญหาย่อย 4 ถึง 6 คุณจะต้องใช้อาสาสมัครให้น้อยที่สุด ถึงแม้ $K \leq 100\,000$

ข้อจำกัด: $N \leq 100\,000$

- ปัญหาย่อย 1: $K = 20, L = 20$
- ปัญหาย่อย 2: $K = 15, L = 15$
- ปัญหาย่อย 3: $K = 15, L = 4$
- ปัญหาย่อย 4: $K = 100\,000, L = 3$
- ปัญหาย่อย 5: $K = 100\,000, L = 2$
- ปัญหาย่อย 6: $K = 100\,000, L = 1$

3.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

สำหรับคนหมายเลข i หากนำเลข i มาเขียนเป็นเลขฐานสองแล้ว บิท ที่ตำแหน่ง x เป็น 1 เราจะส่งอาสาสมัครหมายเลข x ไปคลุกคลีในวันที่ 1

ตัวอย่างเช่น สำหรับคนหมายเลข $101 = 1100101_2$ เราจะส่งอาสามัครคนที่ $0, 2, 5, 6$ ไปคลุกคลีในวันที่ 1

ในวันที่ 31 จะมีอาสาสมัครจำนวณหนึ่งแสดงอาการ ซึ่งหากอาสาสมัครหมายเลข x แสดงอาการแสดงว่าบิทที่ x ของหมายเลขผู้ติดเชื้อเป็น 1 ทำให้เราสรุปหมายเลขของผู้ติดเชื้อได้เลย

ตัวอย่างเช่น หากในวันที่ 31 เราพบว่าอาสาสมัครหมายเลข $1, 3, 6$ แสดงอาการ เราจะรู้ได้ว่าหมายเลขของผู้ติดเชื้อคือ $1001010_2 = 74$ นั่นเอง

เนื่องจากเราต้องใช้บิทจำนวน 17 บิทในการเขียน 100,000 เป็นเลขฐานสอง ดังนั้นเราจะต้องใช้อาสาสมัคร 17 คน และ แต่ละคนจะเจออาสาสมัครไม่เกิน 17 คนเช่นกัน

3.2 Subtask 2 (30 คะแนน)

เราจะแบ่งคนทั้ง N คนออกเป็น 4 กลุ่มโดยแต่ละกลุ่มมีจำนวน 25,000 คน โดยคนที่ 0 ถึง 24,999 อยู่กลุ่มที่ 0 คนที่ 25,000 ถึง 49,999 อยู่กลุ่มที่ 1 เช่นนี้ไปเรื่อยๆ

เราจะส่งอาสาสมัครไปหาคนกลุ่ม 0 ในวันที่ 1, คนกลุ่ม 1 ในวันที่ 2, คนกลุ่ม 2 ในวันที่ 3 และ คนกลุ่ม 3 ในวันที่ 4 ดังนั้นจากการดูวันแรกที่มีอาสาสมัครแสดงอาการ เราสามารถบอกได้ว่าผู้ติดเชื้ออยู่ในกลุ่มไหน

เราจะให้หมายเลขของคนที่ i ในกลุ่มที่ตัวเองอยู่เป็น $i \bmod 25000 + 1$ บวก 1 เพื่อไม่ให้หมายเลขใหม่นั้นเป็น 0 ซึ่งจะทำให้มีอาสาสมัครอย่างน้อยหนึ่งคนแสดงอาการแน่นอน

ในการส่งอาสาสมัครไปหาในแต่ละวันเราจะทำเช่นเดิมกับในปัญหาย่อย 1 โดยในคราวนี้เราจะเหลือ 15 บิท ดังนั้นเราจะใช้อาสาสมัครเพียง 15 คน และ ประชากรแต่ละคนจะต้องเจออาสาสมัครไม่เกิน 15 คนเท่านั้น

ตัวอย่างเช่น

สำหรับคนหมายเลข 25111 จะอยู่กลุ่ม 1 และ มีหมายเลขเท่ากับ $112 = 1110000_2$ เราจะส่งอาสาสมัครหมายเลข $4, 5, 6$ ไปหาในวันที่ 2

หากมีอาสาสมัครหมายเลข $0, 2, 4$ แสดงอาการในวันที่ 33 เราจะรู้ได้ว่าผู้ติดเชื้อคือหมายเลข $10101_2 + 25000 * 2 - 1 = 50020$

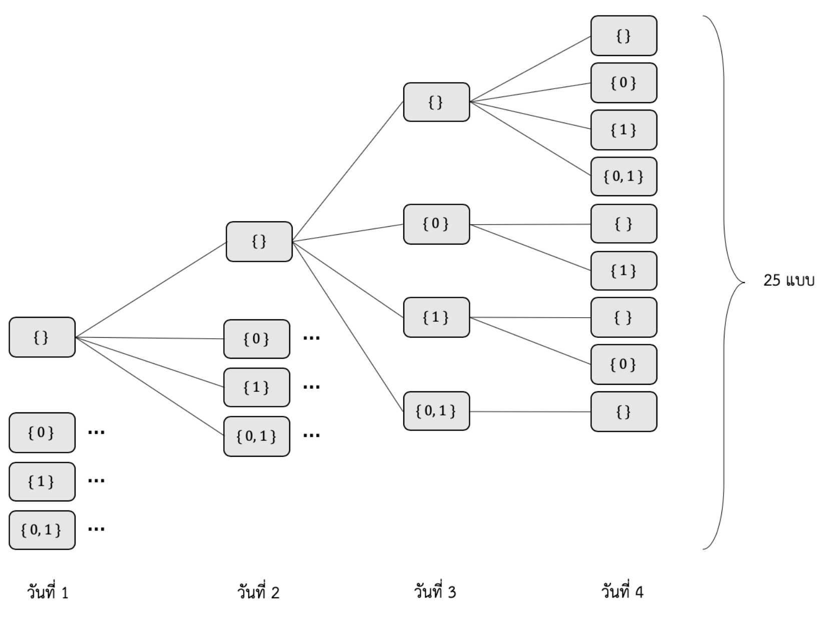
3.3 Subtask 3 ถึง 6 (30+10+10+10 คะแนน)

ให้ $X_{i,1}, X_{i,2}, X_{i,3}, X_{i,4}$ เป็นเซ็ทของอาสาสมัครที่เจอคนที่ i ในวันที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ เซ็ทเหล่านี้ไม่มีสมาชิกร่วมกัน เนื่องจากเราไม่ต้องการให้คนใดๆพบอาสาสมัครคนเดิมหลายครั้ง เพราะเราสนใจเพียงวันแรกที่อาสาสมัครแสดงอาการ

สมมติว่าผู้ติดเชื้อนั้นมีหมายเลข t ในวันที่ 31, 32, 33 และ 34 เซ็ทของอาสาสมัครที่แสดงอาการเป็นวันแรกจะเท่ากับ $X_{t,1}, X_{t,2}, X_{t,3}$ และ $X_{t,4}$ ตามลำดับ

ดังนั้นหากเราสามารถสร้างลำดับ X ขึ้นมาโดยที่ X_i ของแต่ละคนไม่เหมือนของคนอื่นเลย เราจะสามารถใช้ลำดับนี้ในทั้ง การส่งอาสาสมัคร และ สรุปว่าผู้ติดเชื้อนั้นเป็นใคร ได้เลย

ให้ M เป็นจำนวนอาสาสมัครที่จะใช้ในตอนสุดท้าย หาก $M = 2$ และ $L = 2$ เราจะสร้างลำดับ X_i ได้ 25 แบบ



ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้ $M = 2$ ได้เพราะจะมีลำดับไม่เพียงพอกับทุกคน

จากการคำนวณสามารถสรุปได้ว่า

- หาก $L = 1$ ค่า M ที่น้อยที่สุดที่เพียงพอคือ 19
- หาก $L \geq 2$ ค่า M ที่น้อยที่สุดที่เพียงพอคือ 8

เราสามารถสร้างลำดับ X_i ทั้งหมดที่เป็นไปได้นี้ออกมาด้วยการใช้ recursive function หลังจากนั้น เราสามารถทำ sequence เหล่านี้ไปใช้ในการ ถาม และ สรุปว่าผู้ติดเชื้อเป็นใครได้เลย

```
// generate by calling gen(1, [0, 1, ..., m - 1])
void gen(int day, vector<int> has) {
  if(day == 5) {
    if(person < n) {
      // meet[person][i] is the set of volunteers that person meets in day i
      for(int i = 1; i <= 4; i++) {
        meet[person][i] = seq[i];
        for(auto x : seq[i]) assignments[i][x].push_back(person);
      }
      person++;
    }
    return ;
  }

  // choose 0
  seq[day].clear();
  gen(day + 1, has);

  // choose 1
  for(auto x : has) {
    seq[day].clear(); seq[day].push_back(x);
    vector<int> nxt;
    for(auto t : has) if(t != x) nxt.push_back(t);
    gen(day + 1, nxt);
  }

  // choose 2 if L >= 2
  if(lim >= 2) {
    for(auto x : has) {
      for(auto y : has) {
        if(x >= y) continue;
        seq[day].clear(); seq[day].push_back(x); seq[day].push_back(y);
        vector<int> nxt;
        for(auto t : has) if(t != x && t != y) nxt.push_back(t);
        gen(day + 1, nxt);
      }
    }
  }
}
```

4 Collection

มีเมืองอยู่ N เมือง เชื่อมต่อกันด้วยถนนจำนวน $N-1$ เส้น โดยทุกคู่ของเมืองสามารถเดินทางไปหากันได้ด้วยถนนเหล่านี้ แต่ละเมืองจะมีแร่มูลค่าเท่ากับ A_i โดยที่ $|A_i| \leq 10^9$

รถเก็บแร่จะออกเดินทางจากเมืองๆหนึ่ง และ วิ่งไปถึงเมืองปลายทางโดยไม่วิ่งผ่านเมืองใดซ้ำ (Simple path) รถเก็บแร่อาจเดินทางไปเพียงเมืองเดียวก็ได้ มูลค่าแร่สะสมที่ได้จากการเดินทางจะเท่ากับผลรวมมูลค่าของแร่ในทุกเมืองที่รถเดินทางผ่าน

ในแต่ละ Q วันต่อไปนี้ จะเกิดเหตุการณ์ดังกล่าวขึ้น

1. ได้รับค่า j และ C $(|C| \leq 10^9)$
2. มูลค่าของแร่ของในเมือง j ถูกเปลี่ยนไปเป็น C
3. ถามว่ามูลค่าแร่สะสมที่มากที่สุดที่สามารถเก็บได้ด้วยรถเก็บแร่เท่ากับเท่าไหร่

ข้อจำกัด: $1 \leq N \leq 100\,000, 0 \leq Q \leq 100\,000$

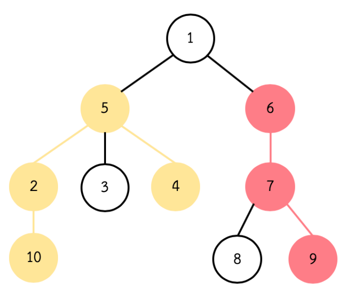
4.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 1\,000$ และ $Q \leq 1\,000$

เมืองเหล่านี้มีลักษณะเป็นต้นไม้ที่มี N จุดยอด พิจารณาการต้นไม้ที่ให้เมือง 1 เป็น root

ทางเดินระหว่างเมืองสองเมืองใดๆ จะแบ่งออกเป็นสองประเภทได้แก่

1. ทางเดินเป็นการเดินลงในต้นไม้ (ทางสีแดง)
2. ทางเดินต้องเดินขึ้นและลงในต้นไม้ (ทางสีเหลือง)



การหาทางสีแดงที่ดีที่สุดทำได้โดยนิยามให้ down_u แทนผลรวมแร่ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้หากทางสีแดงเริ่มที่เมือง u

$$\mathrm{down}_u = \max(0, \max_{v \in \mathrm{child}_u}(\mathrm{down}_v)) + A_u$$

ส่วนทางสีเหลืองที่ดีที่สุดที่เดินเปลี่ยนทิศที่ u นั้นจะเท่ากับ

$$\mathrm{cross}_u = \max\{\mathrm{down}_a + \mathrm{down}_b \mid a, b \in \mathrm{child}_u \wedge a \neq b\} + A_u$$

สังเกตุว่า a และ b ที่ดีที่สุด down_a และ down_b จะมีค่ามากที่สุดสองอันดับแรกในบรรดาลูกของ u

ในแต่ละวัน การคำนวณค่าเหล่านี้สามารถทำได้ด้วยการทำ recurrence dynamic programming บนต้นไม้ เริ่มต้นจาก เมือง 1 เพื่อหาค่า down_u และ cross_u และคำตอบจะเท่ากับ $\max(\max(\text{down}_u, \text{cross}_u))$

Total time complexity: $\mathcal{O}(NQ)$

4.2 Subtask 2 (11 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: ไม่มีสองเมืองใด ๆ ที่ต้องเดินทางผ่านถนนมากกว่า 10 เส้น

เนื่องจากไม่มีสองเมืองใดที่อยู่ห่างกันมากกว่าถนน 10 เส้น ต้นไม้ที่ได้จากการ root ที่เมืองใดๆก็จะมีความสูงไม่เกิน 10 เสมอ

สังเกตว่าการเปลี่ยนค่าของแร่ในเมือง u ใดๆ นั้นจะมีโอกาสทำให้ค่า down_v และ cross_v เปลี่ยน ก็ต่อเมื่อ v คือ u หรือเป็น ancestor ของ u เท่านั้น ดังนั้นในแต่ละวันการอัพเดตค่าดังกล่าวจะมีไม่เกิน 10 ครั้งเท่านั้น

ในขั้นตอน implementation นั้นจะให้ `std::multiset` $\text{mx}_u = \{\text{down}_v \mid v \in \text{child}_u\}$

หลังจากนั้นการคำนวณค่า down_u และ cross_u สามารถทำได้เพียงเรียกใช้ค่าใน mx_u และ หลังจากคำนวณแล้วจะต้องอัพเดตเซ็ท mx ของ parent ของ u ด้วย

Total time complexity: $\mathcal{O}(N + Q \log N)$

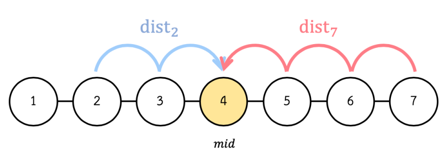
4.3 Subtask 3 (12 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: มีหนึ่งเมืองเดียวที่ติดกับเมืองอื่นมากกว่า 2 เมือง และติดไม่เกิน 10 เมือง

ก่อนอื่น เราจะแก้ปัญหานี้ในกรณีที่ต้นไม้เป็นเส้นตรง โดยหากเรามองเส้นตรงนั้นเป็นอาเรย์ ปัญหาคือช่วงใดในอาเรย์ที่มีผลรวมมากที่สุด

เริ่มแรก เราจะพิจารณาช่วงทุกช่วง $[l, r]$ ที่คลุมจุดกึ่งกลางของอาเรย์ mid $(l \leq mid \leq r)$

นิยามให้ dist_i เท่ากับผลรวมของทุกตำแหน่งที่อยู่ตั้งแต่ i จนถึง mid



ช่วงที่มีผลรวมมากที่สุดที่คลุมจุดกึ่งกลางของอาเรย์คือ

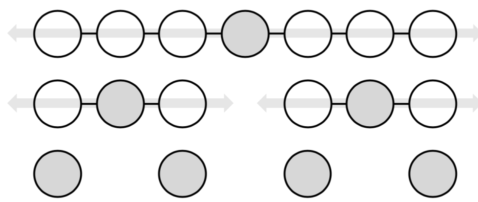
$$\text{pass}_{mid} = \max\{\text{dist}_i \mid i \leq mid\} + \max\{\text{dist}_i \mid mid \leq i\} + A_{mid}$$

หากมีการเปลี่ยนแปลงค่า A_j. ที่ตำแหน่ง j ใดๆ ค่า dist_i ที่จะเปลี่ยนไปคือ i ทุกตำแหน่งที่ต้องเดินผ่าน j ถึงจะมาถึง mid ได้ และ ค่า max ที่นำมาคำนวณผลรวมมากที่สุดที่คลุมจุดกึ่งกลางข้างต้น

เราสามารถใช้ Segment tree lazy propagation update ในการอัพเดตค่า j ทุกตำแหน่งที่ตรงตามเงื่อนไข และ เพื่อหาค่า max ของ ฝั่งซ้ายและฝั่งขวา ของ mid ได้เช่นกัน

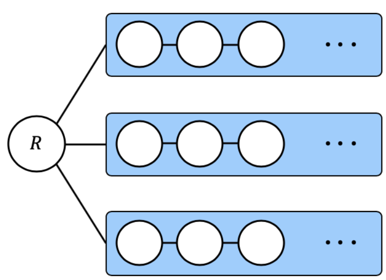
หลังจากเรารู้ช่วงที่มีผลรวมมากที่สุดที่คลุมจุดกึ่งกลางของอาเรย์แล้ว เราก็ต้องการรู้ช่วงที่มีผลรวมมาที่สุดที่ ไม่คลุม จุดกึ่งกลางของอาเรย์ เช่นกัน

ซึ่งเราเพียงแค่ทำแบบข้างต้นในส่วนซ้ายและขวาของ mid ไปเรื่อยๆ นั่นคือการสร้าง Segment tree ขึ้นมาเป็นจำนวน N ต้น



สังเกตว่าแต่ละตำแหน่งจะมีค่า dist_i ที่เกี่ยวข้องกับ mid ที่แตกต่างกันไม่เกิน $\log N$ ค่า ดังนั้นในการอัพเดตแต่ละครั้งเราจะเปลี่ยนค่าใน Segment tree ไม่เกิน $\log N$ ต้น และ เปลี่ยนค่า pass_{mid} ไม่เกิน $\log N$ ครั้งเช่นกัน

กลับมาพิจารณาต้นไม้ในปัญหาย่อยนี้ที่มีเมือง R เป็น root หาก R คือเมืองที่ติดกับเมืองอื่นมากกว่า 2 เมือง



หากเราทำแบบเดิมในแต่ละ chain เส้นตรงสีฟ้า แต่ละอันตอนนี้เราจะเหลือเพียงกรณี เส้นทางที่ผ่าน R เพียงเท่านั้น ซึ่งเราก็สามารถทำแบบเดิมเช่นเดียวกับในกรณีเส้นตรงได้

$$\text{pass}_{mid} = \max\{\max\{\text{dist}_i \mid i \in chain_x\} + \max\{\text{dist}_i \mid i \in chain_y\} \mid x \neq y\} + A_{mid}$$

คำตอบจะเท่ากับ $\max(\text{pass})$

Total time complexity: $\mathcal{O}(N + Q\log^2 N)$

4.4 Subtask 4 (12 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: มีหนึ่งเมืองเดียวที่ติดกับเมืองอื่นมากกว่า 2 เมือง และติดเกิน 10 เมือง

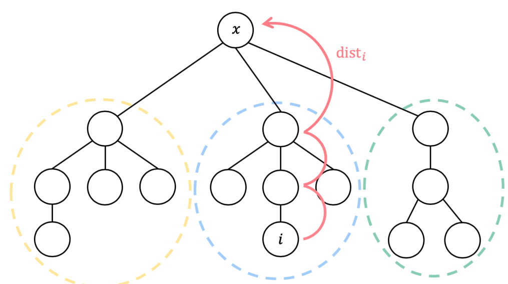
ในการหา pass_{mid} นั้น เราจะต้องหา x และ y ที่มีค่า $\max(\text{dist})$ ใน chain มากที่สุดสองอันดับ มาบวกกันซึ่งเราสามารถใช้ `std::multiset` เพื่อลดเวลาการ loop หาไปได้ โดยเราจะเก็บค่า $\max(\text{dist})$ ในทุก chain ไว้ ซึ่งตรงนี้เราจะต้องอัพเดตทุกครั้งที่มีการเปลี่ยนแปลงค่า max ใน chain ด้วย

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q \log^2 N)$

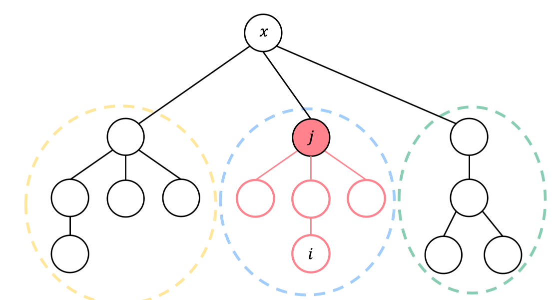
4.5 Subtask 5 (55 คะแนน)

<u>เงื่อนไข</u>: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เราจะทำ Centroid Decomposition บนต้นไม้นี้ โดยหาก x เป็น centroid ของ subtree เราจะสร้าง Segment tree สำหรับเก็บ dist_iในลักษณะเดียวกับที่ทำใน ปัญหาย่อย 3



ทีนี้ในการ update ค่า A_j ของ j ใดๆ เป็น C นั่นคือการบวกค่า dist_i สำหรับทุก i อยู่ใน subtree ของ j เพิ่มเท่ากับ $C - A_j$ นั่นเอง



ในส่วนตรงนี้เราสามารถใช้ Segment tree และ Euler Tour Tree เพื่อทำ Subtree query using segment tree ในการ range update และ query max ได้

เช่นเดียวกันกับในปัญหาย่อยที่ผ่านมา pass_x เท่ากับค่า max ใน subtree สองอันที่มากที่สุดรวมกัน บวกด้วย A_x

หลังจากเราสร้าง Segment tree สำหรับ centroid x เสร็จแล้ว เราก็แยกทำแบบเดิมใน subtree ย่อยๆต่อไป

เราจะสรุปได้เช่นเดียวกับ ปัญหาย่อยที่ผ่านมาว่า สำหรับแต่ละเมือง จะมีเมือง x ที่ต้องคำนวณ dist ไม่เกิน $\log N$ เมือง และ ทำให้เวลา อัพเดตค่ามูลค่าแร่ เราจะอัพเดต Segment tree และ ค่า pass ไม่เกิน $\log N$ ครั้ง

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q \log^2 N)$

5 Trainto

รถไฟขบวนหนึ่งมีตู้โดยสาร M ตู้ แต่ละตู้มีโต๊ะ 2 โต๊ะพอดี

มีผู้โดยสาร N คน โดยผู้โดยสารคนที่ i จะมีค่า A_i ซึ่งแทนระดับความน่ารำคาญที่จะส่งไปให้กับทุกคนที่นั่งอยู่โต๊ะเดียวกับเขา และ นอกจากนั้นผู้โดยสารแต่ละคนจะส่งความน่ารำคาญ 1 หน่วยไปยังทุกคนที่อยู่ตู้โดยสารเดียวกับเขาด้วย

โจทย์ต้องการให้เราจัดวางแผนที่นั่งให้ผลรวมระดับความน่ารำคาญที่ทุกคนได้รับมีค่าน้อยที่สุด

<u>ข้อจำกัด</u>: $N \leq 350$ และ $2M \leq N$

5.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $N \leq 10$

ด้วยจำนวนคนที่มีไม่เยอะ เราจึงสามารถ Brute force ทดลองวิธีในการจัดที่นั่งทั้งหมดที่เป็นไปได้ ซึ่งมีจำนวน $(2M)^N$ แบบ

Total time complexity: $\mathcal{O}((2M)^N)$

5.2 Subtask 2 (5 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $K = 1, N \leq 50$

ในปัญหาย่อยนี้ เราต้องการจัดกลุ่มคน N คน ออกเป็น 2 กลุ่ม โดยที่ค่าผลรวมระดับความน่ารำคาญที่ทุกคนได้รับมีค่าน้อยที่สุด

นั่นคือ หากให้ CNT_i และ SUM_i แทนจำนวนคน และ ผลรวมระดับความน่ารำคาญ ของคนกลุ่ม i ตามลำดับ เราต้องการที่จะทำให้ค่า $\mathrm{CNT}_1 * \mathrm{SUM}_1 + \mathrm{CNT}_2 * \mathrm{SUM}_2 + 2 * \mathrm{CNT}_1 * \mathrm{CNT}_2$ น้อยที่สุด

สมมติว่าเรารู้ค่า CNT_1 และ CNT_2 ในการจัดกลุ่มที่ดีที่สุดแล้ว เราจะหาวิธีการจัดคนเข้าไปในแต่ละกลุ่มที่ดีที่สุด

หาก $A_x > A_y$ แล้ว x จะอยู่ในกลุ่มที่<u>ไม่ใหญ่ไปกว่า</u>กลุ่มของ y เสมอ

เนื่องจาก หาก x อยู่ในกลุ่มที่ใหญ่กว่า y เราสามารถสลับ x กับ y เพื่อให้ค่าความน่ารำคาญน้อยลงได้

ดังนั้น เราเพียงแค่เรียงคนจากมากไปน้อย แล้วลองกำหนดค่า CNT_1 ทุกกรณี ($\mathrm{CNT}_2 = N - \mathrm{CNT}_1$ และ $\mathrm{CNT}_1 \leq \mathrm{CNT}_2$) ก็จะสามารถคำนวณผลรวมระดับความน่ารำคาญได้

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N)$

5.3 Subtask 3 (5 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: A_i เท่ากันหมด, $N \leq 50$

เนื่องจากทุกคนมีความน่ารำคาญเท่ากัน ดังนั้นเราจะสนใจเพียงแค่ขนาดของแต่ละโต๊ะในแต่ละตู้โดยสารเท่านั้น

เราสามารถนำผู้โดยสารทั้งหมดมาเรียงเป็นเส้นตรง แล้วแบ่งเป็น $2K$ ช่วง โดยช่วงที่ 1 และ 2 อยู่ตู้โดยสารแรก ช่วงที่ 3 และ 4 อยู่ตู้โดยสารที่สอง ไปเรื่อยๆ

เราสามารถใช้ Dynamic programming ในการแก้ปัญหาได้โดยกำหนดให้ `dp[x][k]` แทนผลรวมค่าความน่ารำคาญที่น้อยที่สุดสำหรับการแบ่ง `x` คนแรก ไปใน `k` ตู้โดยสาย ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

`dp[0][0] = 0` และ `dp[0][i] = inf` สำหรับ `i` ใดๆที่ไม่ใช่ 0

`dp[x][k] = min(dp[y-1][k-1] + cost(y,x)))` โดย 1 ≤ `y` ≤ `x`

`cost(l,r)` คือค่าความน่ารำคาญน้อยที่สุดสำหรับการแบ่งคนตั้งแต่ l ถึง r ออกเป็นสองส่วน ซึ่งทำเหมือนกับใน Subtask 2

Total time complexity: $\mathcal{O}(N^3 + N^2 * K)$

5.4 Subtask 4 (32 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $N \leq 50$

สมมติว่าเราได้แบ่งคนออกเป็น $2K$ กลุ่มแล้ว เราจะต้องจับคู่กลุ่ม $2K$ กลุ่มนี้ออกเป็น K คู่ เพื่อจัดไปในแต่ละตู้โดยสาร

การจับคู่ที่ดีที่สุดคือการจับคู่กลุ่มที่เล็กที่สุด กับ กลุ่มที่ใหญ่ที่สุด กลุ่มที่เล็กสุดถัดมา กับ กลุ่มเล็กสุดกลุ่มถัดมา ไปเรื่อยๆ จนหมด

เช่นเดียวกับใน Subtask 2 ถ้าหากเรานำผู้โดยสารทั้งหมดมาเรียงเป็นเส้นตรงจากระดับความน่ารำคาญมากไปน้อย แล้วแบ่งกลุ่มเป็น $2K$ ขนาดของกลุ่มจะใหญ่ขึ้นไล่ไปเรื่อยๆจากกลุ่มแรกจนถึงกลุ่มสุดท้าย

ดังนั้น เราสามารถจับคู่กลุ่มแรก กับ กลุ่มสุดท้าย และ กลุ่มสอง กับ กลุ่มรองสุดท้าย ไปเรื่อยๆ ได้เลย

เราสามารถใช้ Dynamic programming เพื่อแก้ปัญหาย่อยนี้เพียงแค่รู้ว่ากลุ่มหน้ากลับกลุ่มหลังจับคู่กันจะได้คำตอบที่ดีที่สุดได้ โดย `dp[k][l][r]` คือความน่ารำคาญน้อยที่สุดหากแบ่งคนตั้งแต่ l ถึง r ออกเป็น k กลุ่ม

`dp[k][l][r] = min(dp[k-1][x+1][y-1] +`

`(x-l+1)*sum[l..x] + (r-y+1)*sum[y..r]) + 2*(x-l+1)*(r-y+1))`

โดย `l` ≤ `x` < `y` ≤ `r`

Total time complexity: $\mathcal{O}(N^4 * K)$

5.5 Subtask 5 และ 6 (43+5 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

จาก Subtask 4 เรารู้ว่า ขนาดของช่วงน้อยจะมีขนาดน้อยไปมาก หากเรียงคนด้วยค่ามากไปน้อย

ช่วงที่ K จะมีขนาดไม่เกิน N/K เสมอ

เนื่องจากขนาดของช่วงที่ $K+1, ..., 2K$ จะมีขนาดอย่างน้อยเท่ากับขนาดของช่วงที่ K หากขนาดของช่วงที่ K มีขนาด $N/K + 1$ ผลรวมขนาดของช่วงหลังจะมีค่าอย่างต่ำ $N + K$ ซึ่งเกินจำนวนคนทั้งหมดที่มี และ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น ใน Loop ของ `x` ซึ่งแทนจำนวนคนในกลุ่มหน้าจะวนไม่เกิน $\mathcal{O}(N/K)$ ก็พอ ทำให้เราตัด K ออกไปจาก Time complexity ได้

Total time complexity: $\mathcal{O}(N^4)$

5.6 Challenge

เราอาจเพิ่มความเร็วของอัลกอริทึมได้ด้วย Divide and conquer optimization เป็น $\mathcal{O}(N^3 \log N)$

6 Racing

มีรถแข่ง N คัน หมายเลข 1 ถึง N กำลังออกตัวจากจุดเริ่มต้นของสนามแข่งรถที่มีความยาวไม่จำกัด N เลน ซึ่งความเร็วเริ่มต้นของรถคันที่ i เท่ากับ U_i เมตรต่อวินาที โดยที่ U_i เป็นจำนวนเต็มที่ $1 \leq U_i \leq 5$

นอกจากนั้น มีเหตุการณ์เกิดขึ้น M เหตุการณ์ ซึ่งเป็นไปได้สองแบบดังนี้

1. ที่เวลา T มีการขุดหลุมในเลน A ถึง B ที่ระยะ X จากจุดเริ่มต้น $(1 \leq T < 10^8, 1 \leq X \leq 10^9)$ รถที่มาถึงหลุมพอดีในเวลานั้นหรือช้ากว่าจะตกหลุมทำให้ขยับไปไหนไม่ได้อีก
2. ที่เวลา T ทำการปรับความเร็วรถในเลน A ถึง B ให้มีความเร็วไม่เกิน V $(1 \leq T < 10^8, 1 \leq V \leq 5)$ รถคันใดที่มีความเร็วไม่เกิน V อยู่แล้วจะไม่มีผลกระทบใดๆ และ V เป็นจำนวนเต็ม

เราอยากทราบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 10^8 วินาที รถแต่ละคันจะอยู่ที่ตำแหน่งใด

<u>ข้อจำกัด</u>: $1 \leq N \leq 100\,000$ และ $0 \leq M \leq 200\,000$

6.1 Subtask 1 (5 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $N \leq 1\,000$ และ $M \leq 1\,000$

สำหรับรถหมายเลข x ใดๆ เราต้องการหา $T_{x,1}, T_{x,2}, ..., T_{x,5}$ ซึ่งเป็นเวลาที่รถคันนี้เปลี่ยนความเร็วเป็นไม่เกิน $1, 2, ..., 5$ ตามลำดับ

$$T_{x,i} = \begin{cases} 1 & i \geq U_x \\ \min(T_y) & \text{สำหรับการปรับความเร็ว } y \text{ ที่ } A_y \leq x \leq B_y \text{ และ } i \geq V_y \\ 10^8 + 1 & i = 0 \end{cases}$$

รถคันที่ x จะตกหลุมที่ตำแหน่ง $\min(X_y)$ สำหรับทุกหลุม y ที่ $A_y \leq x \leq B_y$ และ มีบาง i ที่ $S_{x,i} + (T_y - T_{x,i}) * i \leq X_y$ เนื่องจาก ฝั่งซ้ายเป็นระยะทางที่เดินทางได้ใน T_y วินาที และ น้อยกว่าเท่ากับ X_y และ จะตกหลุมที่อยู่ใกล้จุดเริ่มต้นที่สุดที่เป็นไปได้หากมีโอกาสตกได้หลายหลุม

Total time complexity: $\mathcal{O}(N * M)$

6.2 Subtask 2 (5 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: ทั้ง M เหตุการณ์ เป็นแบบแรกทั้งหมด และ $A = 1, B = N$

เนื่องจากความเร็วรถไม่เปลี่ยนไปเลยดังนั้น ระยะทางที่รถคันที่ x วิ่งได้ใน T วินาทีเท่ากับ $(T - 1) * U_x$ และ จะตกหลุม y หาก $U_x * (T_y - 1) \leq X_y \implies U_x \leq \frac{X_y}{T_y - 1}$ และ X_y มีค่าน้อยสุดเท่าที่เป็นไปได้

ดังนั้นหากเราเรียงลำดับหลุมตามค่า X จากน้อยไปมาก แล้วให้หลุมเหล่านี้เลือกรถที่จะมาตกในหลุมมัน เราเพียงเลือกรถทุกคันที่ $U_x \leq \frac{X_y}{T_y - 1}$ และ ยังไม่ถูกเลือกออกไปเพียงเท่านั้น

Total time complexity: $\mathcal{O}(N + M)$

6.3 Subtask 3 (15 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ทั้ง M เหตุการณ์ เป็นแบบสองทั้งหมด

เราจะเรียงเหตุการณ์แบบสองตามค่า T จากน้อยไปมาก โดยแต่ละ y ในเหตุการณ์เหล่านี้ เราจะให้ $T_{x,i} = T_y$ สำหรับ $T_{x,i}$ ทุกค่าที่ $A_y \leq x \leq B_y$ และ $i \geq V_y$ และยังไม่เคยโดน assigned ค่ามาก่อน

เนื่องจากเราเรียงเหตุการณ์ตามค่า T จากน้อยไปมากแล้ว ดังนั้นค่าที่ assign ให้กับ $T_{x,i}$ ใดๆ ค่าแรกจะเป็นค่า $\min(T_y)$ สำหรับ y ที่เป็นไปได้อยู่แล้ว

ในส่วนของ implementation เราสามารถใช้ `std::set` และ `std::lower_bound` ในการหาค่า x ที่มีค่ามากกว่าเท่ากับ A_y และนำออกไปเรื่อยๆได้

```cpp
// get change time
for(int x = 1; x <= n; x++) {
  for(int i = 0; i <= 5; i++) change[x][i] = i < speed[x] ? (int)1e8 + 1 : 1;
  for(int i = 1; i <= 5; i++) has[i].insert(x);
}

// sort slows by time
sort(slows.begin(), slows.end(), [](tuple<int,int,int,int> x, tuple<int,int,int,int> y) {
  return get<0>(x) < get<0>(y);
});

for(auto slow : slows) {
  auto [ti, l, r, lim] = slow;
  for(int i = lim; i <= 5; i++) {
    while(has[i].lower_bound(l) != has[i].end()) {
      int x = *has[i].lower_bound(l);
      if(x > r) break;
      change[x][i] = min(change[x][i], ti); // first time the speed changes to `i`
      has[i].erase(x);
    }
  }
}

for(int x=1;x<=n;x++) {
  dist[x][5] = 0;
  for(int i=4;i>=0;i--) {
    dist[x][i] = dist[x][i+1] + (change[x][i] - change[x][i+1]) * (i+1);
  }
}
```

Total time complexity: $\mathcal{O}((N + M) \log N)$

6.4 Subtask 4 (14 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ในทุกเหตุการณ์แบบแรกที่ปรากฏ $A = 1, B = N$ เสมอ

เราจะเรียงหลุมตามค่า X จากน้อยไปมาก โดยในแต่ละหลุม y เราจะสรุปได้ว่า รถคันใดที่ $S_{x,i} - T_{x,i} * i \leq S_y - T_y * i$ สำหรับบาง i จะตกหลุมนี้ หากไม่เคยตกหลุมอื่นมาก่อนหน้านี้

เช่นกัน เนื่องจากเราเรียงหลุมด้วย X จากน้อยไปมาก รถคันที่ไม่เคยตกหลุมใดมาก่อนหน้านี้แล้วจะตกหลุมนี้อย่างแน่นอนเพราะอยู่ใกล้ที่สุดเท่าที่เป็นไปได้

ในส่วนของ implementation นั้นเราทำการคำนวณค่า $S_{x,i} - T_{x,i} * i$ ของแต่ละ x และ i เอาไว้ก่อนเพื่อใช้ตอนเราเลือกรถสำหรับแต่ละหลุมได้ และ เราก็ค่อยไล่ทุกค่า $i = 0, \ldots, 5$ ในภายหลังตอนที่เลือกในแต่ละหลุม

Total time complexity: $\mathcal{O}((N + M) \log N)$

6.5 Subtask 5 (14 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ทั้ง M เหตุการณ์ เป็นแบบแรกทั้งหมด

เราจะทำการเรียงหลุมตามค่า X จากน้อยไปมาก และ จะเอาหลุมเลือกรถที่จะมาตกหลุมเช่นเดียวกัน

สมมติว่าเราอยู่ที่หลุม y และกำหนด i เอาไว้แล้ว เราต้องการหารถ x ทั้งหมดที่

- $A_y \leq x \leq B_y$
- $S_{x,i} - T_{x,i} * i \leq S_y - T_y * i$

เราจะใช้ Segment tree (point update range minimum query) จำนวน i ต้น ในการแก้ปัญหานี้

ซึ่งเราจะใช้ segment tree ต้นที่ i เพื่อหาค่า $S_{x,i} - T_{x,i} * i$ ที่น้อยที่สุดสำหรับ x ในช่วง A_y ถึง B_y และ ทำให้เราสามารถเลือกรถที่ตรงเงื่อนไขที่จะตกหลุมได้

หลังจากนั้น เราจะเปลี่ยนค่าที่อยู่ในตำแหน่งของ x ให้เป็น ∞ แทนที่จะเป็น $S_{x,i} - T_{x,i} * i$ เพื่อที่จะให้รถคันที่ x ไม่โดนเลือกออกไปอีก

เราจะทำซ้ำๆ เพื่อเลือกรถทั้งหมดที่มีค่า $S_{x,i} - T_{x,i} * i \leq S_y - T_y * i$ ออกมาให้หมด สำหรับแต่ละ i

ดูตัวอย่างโค้ดได้ในหน้าถัดไป

```
// assign holes

// initial distance after 10^8 seconds
for(int x = 1; x <= n; x++) stop[x] = dist[x][0];

// sort holes by position
sort(holes.begin(), holes.end(), [](tuple<int,int,int,int> x, tuple<int,int,int,int> y) {
  return get<3>(x) < get<3>(y);
});

// build 5 segment trees each stores dist[x][i] - i * change[x][i]
for(int i = 1; i <= 5; i++) build(i,1,1,n);

for(auto hole : holes) {
  auto [ti, l, r, pos] = hole;
  for(int i = 1; i <= 5; i++) { // iterate speeds
    while(true) {
      auto [val, x] = query(i,1,1,n,l,r); // find minimum dist[x][i] - i * change[x][i]
      if(val > pos - ti * i) break; // dist[x][i] - i * change[x][i] <= pos - ti * i
      update(i,1,1,n,x,inf); // set x to infinity
      stop[x] = min(stop[x], pos); // first hole it falls into
    }
  }
}
```

Total time complexity: $\mathcal{O}((N+M)\log N)$

6.6 Subtask 6 (15 คะแนน)

เงื่อนไข: $N \leq 30\,000$ และ $M \leq 30\,000$

ปัญหาย่อยนี้สามารถแก้ได้ด้วย Square root Decomposition หรืออัลกอริทึมอื่น ๆ ที่อาจรันในเวลา $\mathcal{O}((N+M)\log^2 N)$ หรือ $\mathcal{O}((N+M)\log^3 N)$

6.7 Subtask 7 (32 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

ปัญหาย่อยนี้เป็นเพียงการรวมปัญหาย่อย 3 กับ 5 เข้าด้วยกัน

Total time complexity: $\mathcal{O}((N+M)\log N)$

7 MalwareX

มีการเรียงสับเปลี่ยน (permutation) $P : P_0 \cdots P_{N-1}$ $(0 \leq P_i \leq N-1)$

มีลำดับ L ความยาว $N+1$ โดยที่สมาชิกในลำดับเป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ และ $L_0 + \ldots + L_N = M$

Alice สามารถใช้เครื่องมือสื่อสารส่งข้อความบิตสตริง $x : x_0 \cdots x_{N-1}$ ไปหา Bob ได้ แต่เนื่องจากเครื่องมือสื่อสารติดมัลแวร์ จะมีสิ่งต่าง ๆ เกิดขึ้นดังต่อไปนี้

1. มัลแวร์เรียงสับเปลี่ยน x ให้เกิดเป็น y กล่าวคือ $y = x_{P_0} x_{P_1} \cdots x_{P_{N-1}}$
2. มัลแวร์แทรกบิตเข้าไปใน y ทั้งสิ้น M บิต ให้เกิดเป็น z กล่าวคือ
   - สำหรับ $1 \leq i \leq N-1$ แทรกบิตจำนวน L_i บิต ระหว่างตำแหน่ง $i-1$ และ i
   - แทรกบิตจำนวน L_0 บิตไปยังด้านหน้า (ก่อนตำแหน่ง 0)
   - แทรกบิตจำนวน L_N บิตไปยังด้านหลัง (หลังตำแหน่ง $N-1$)

   บิตที่ถูกแทรกอาจไม่ได้มาจากการสุ่ม เรียกผลลัพธ์ที่ได้จากกระบวนการการแทรกบิตนี้ว่า z
3. Bob ได้รับข้อความ z (แทนที่จะได้ x)
4. เครื่องส่งข้อความรายงานให้ Alice ทราบถึงข้อความ z ที่ได้ถูกส่งออกไป

ทั้ง Alice และ Bob ไม่ทราบ P

อย่างไรก็ตาม Alice ทราบ L (ทั้งนี้ Bob ไม่ทราบ L)

หน้าที่ของคุณคือพัฒนามาตรการสื่อสารระหว่าง Alice และ Bob ที่ใช้เพียงเครื่องมือสื่อสารที่กำหนด เพื่อให้ Bob สามารถทราบได้ถึงลำดับ L ทั้งนี้ Alice สามารถส่งข้อความได้หลายข้อความ (แต่ไม่เกินตามที่กำหนดไว้ในแต่ละปัญหาย่อย) และสามารถใช้ผลจากการส่งข้อความก่อน ๆ ในการตัดสินใจข้อความที่จะส่งในครั้งถัดไปได้

หมายเหตุ: ทั้ง Alice และ Bob ทราบค่า N และ M

<u>ข้อจำกัด</u>: $1 \leq M < N \leq 128$

7.1 Subtask 1 (8 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $N + M \leq 16$; ห้ามส่งเกิน $N + M - 1$ ข้อความ

ในแต่ละข้อความ หาก Alice ตั้งทุกบิตเป็น 0 หรือ 1 เหมือนกันทั้งหมด Bob จะทราบได้ว่า Alice ตั้งใจจะส่ง 0 หรือ 1 จากการดู "เสียงข้างมาก" ในบรรดาบิตในข้อความที่ได้รับ (เพราะ $M < N$)

สำหรับแต่ละ $0 \leq i \leq N-1$ ให้ Alice ส่งบิตสตริง 111...111 เป็นจำนวน L_i ข้อความ ตามด้วย 000...000 หนึ่งข้อความ (ยกเว้นเมื่อ $i = N-1$ ไม่ต้องส่ง 000...000 เพราะไม่มีความจำเป็น)

Bob จะสามารถทราบ L_i สำหรับ $0 \le i \le N-1$ ได้ทันที และทราบได้อีกว่า $L_N = M - \sum_{i=0}^{N-1} L_i$

Alice จะต้องส่งทั้งสิ้น $\sum_{i=0}^{N-1} (L_i + 1) - 1 \le M + N - 1$ ข้อความ

7.2 Subtask 2 (3 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $L_0 = M$ หรือ $L_N = M$; ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

ให้ Alice ไม่ต้องส่งข้อความเลย หาก $L_0 = M$ หรือ ส่งข้อความอะไรก็ได้หนึ่งข้อความ หาก $L_N = M$

7.3 Subtask 3 (6 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $L_i = M$ สำหรับบาง $0 \le i \le N$; ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

สำหรับข้อความที่ $j+1$ ให้ Alice ส่ง 111...111 หาก $((2^j)\&(i)) > 0$ (ไม่เช่นนั้น ให้ส่ง 000...000)

Bob จะทราบค่าของ i ที่ $L_i = M$ ได้ด้วยเทคนิคการดูเสียงข้างมากจาก Subtask 1

ด้วยมาตรการนี้ Alice จะต้องส่งไม่เกิน $\lceil \log_2 (N+1) \rceil \le \lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

7.4 Subtask 4 (27 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $2M \le N$; ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

นิยาม ให้ S แทนเซตของตำแหน่งทั้งหมดที่มาจากการแทรกบิต**ในข้อความที่ Bob ได้รับ** และให้ $S_0, S_1, \ldots, S_{M-1}$ แทนสมาชิกของเซตดังกล่าว

สังเกตว่า ลำดับ L แต่ละลำดับที่เป็นไปได้ จะให้เซต S ที่แตกต่างกัน

7.4.1 มุมมองของ Alice

สำหรับแต่ละ x $(0 \le x \le M-1)$ กำหนดให้ตำแหน่ง $2x$ และ $2x+1$ ในข้อความที่ Alice พยายามส่ง มีหน้าที่ส่งค่า S_x ไปให้ Bob (อันที่จริงแล้ว เลือกสองตำแหน่งใดก็ได้ สำหรับแต่ละ x)

สำหรับตำแหน่งที่ไม่ได้มีหน้าที่ส่งค่า S_x ใด ๆ ไปให้ Bob (หากมี: ได้แก่ตำแหน่งตั้งแต่ M ถึง $N-1$) ให้มีหน้าที่ส่งค่า S_0

ทั้งนี้ วิธีหนึ่งที่เป็นไปได้ในการส่งค่า v สำหรับแต่ละตำแหน่งคือ: ในข้อความที่ $i+1$ ให้ตำแหน่งนั้นมีค่าเป็น $((2^i)\&(v))$

7.4.2 มุมมองของ Bob

พิจารณากราฟที่มี $N+M$ จุดยอด: $0, 1, \ldots, N+M-1$

เมื่อพิจารณาข้อความทั้งหมดพร้อมกัน หากตำแหน่ง u (ตามที่ Bob มองเห็น; สำหรับแต่ละ $0 \le u \le N+M-1$) ส่งค่า v ที่ $v \le N+M-1$ มาให้ ให้สร้าง directed edge จาก u ไป v

ให้เซต T แทนเซตของบิตที่ Bob **ทราบอย่างแน่ชัด**แล้วว่าไม่ได้มาจากการแทรกบิต (เริ่มแรกเป็นเซตว่าง)

- สำหรับแต่ละจุดยอด u ที่ in-degree น้อยกว่า 2 ให้ **(1)** เพิ่ม u เข้าไปยังเซต T **และ (2)** ลบจุดยอด v ที่มี directed edge จาก u ไปยัง v ออกจากกราฟ
- ทำกระบวนการด้านบนซ้ำจนกว่าจะไม่มีจุดยอดที่ in-degree น้อยกว่า 2

หลังจบกระบวนการนี้ จะได้ว่า $S = \{0, 1, \dots, N + M - 1\} \setminus T$

Bob สามารถใช้เซต S คำนวณหาค่าของลำดับ L เพื่อตอบได้ทันที

7.5 Subtask 5 (28 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $P_i = i$ สำหรับทุก $0 \le i \le N-1$; ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

มองปัญหานี้เป็นปัญหากราฟ คล้ายกับใน Subtask 4

ในครั้งนี้ เราเพียงแค่ให้จุดยอดที่แทนตำแหน่งที่ไม่ได้มาจากการแทรกบิตชี้ไปมาหากัน เป็น cycle ขนาด N (สังเกตว่ามี adversary ได้อย่างมาก $N-1$ ตำแหน่ง ซึ่งจะไม่สามารถสร้าง cycle ขนาด N ให้ Bob มองเห็นได้)

Bob สามารถหา cycle จากกราฟที่ได้รับใน linear time เนื่องจาก out-degree ของแต่ละจุดยอดมีค่าไม่เกิน 1

สังเกตว่ามาตรการนี้จะใช้ไม่ได้หากเราไม่ทราบว่า $P_i = i$ เนื่องจาก Alice จะไม่ทราบว่าจะต้องส่งค่าอะไรในแต่ละตำแหน่ง เพื่อให้ Bob สามารถมองเห็นข้อความที่ได้รับและตีความได้เป็นกราฟตามที่ต้องการ

7.6 Subtask 6 (28 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2 N \rceil + 1$ ข้อความ

7.6.1 ส่วนแรก: $\lceil \log_2 N \rceil$ ข้อความแรก

ให้ตำแหน่ง x $(0 \le x \le N-1)$ ในมุมมองของ Alice พยายามส่งค่า x (ใช้ทั้งสิ้น $\lceil \log_2 N \rceil$ ข้อความ) เมื่อส่งข้อความตามกระบวนการข้างต้นแล้ว Alice จะสามารถทราบค่าของ P ได้จากข้อความที่เครื่องส่งข้อความรายงานว่าได้ถูกส่งออกไป

Bob จะเห็นค่าตั้งแต่ 0 ถึง $N-1$ ปรากฏอย่างน้อยหนึ่งครั้ง และหากค่าใดปรากฏครั้งเดียวพอดี จะทราบได้ทันทีว่าตำแหน่งในข้อความที่ค่านั้นปรากฏเป็นตำแหน่งที่ไม่ได้มาจากการแทรกบิต (จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งตำแหน่งเสมอ เนื่องจาก $M < N$)

ให้ R_i แทนลำดับของตำแหน่งที่ Bob เห็นว่าปรากฏเป็นค่า i โดยที่ $R_{i,j} < R_{i,j+1}$ สำหรับทุก $0 \le j \le |R_i| - 2$

สังเกตว่า

- Alice ทราบลำดับ R_i ทั้งหมดเช่นกัน
- สำหรับแต่ละ i มี j เดียวพอดี ที่ $R_{i,j}$ เป็นตำแหน่งที่ไม่ได้มาจากการแทรกบิต (ให้ pos_i แทน j ดังกล่าว)

7.6.2 ส่วนที่สอง: ข้อความสุดท้าย

Alice จะต้องใช้อีก 1 ข้อความที่เหลือ ส่งให้ Bob ทราบค่า pos_i สำหรับทุก $0 \leq i \leq N-1$

ให้ Q เป็นเซตที่เริ่มแรกประกอบไปด้วยทุก i ที่ $|R_i| = 1$

หลังจากนั้น ไล่ตั้งแต่ $i = 0$ ถึง $i = N-1$:

1. หาก $|R_i| = 1$ ข้ามไปยัง i ถัดไปทันที
2. เลือกสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุด $|R_i| - 1$ จำนวน จากเซต Q แทนด้วย $q_0, \ldots, q_{|R_i|-2}$
3. ลบ $q_0, \ldots, q_{|R_i|-2}$ ออกจากเซต Q
4. ให้ตำแหน่ง q_j เป็นบิต 1 ในข้อความถัดไป **ก็ต่อเมื่อ** $j < pos_i$ (ดังนั้นผลรวมของทุกบิตจะเท่ากับ pos_i)
5. เพิ่ม i เข้าไปในเซต Q

เราพิสูจน์ (by induction) ได้ว่า Q จะมีสมาชิกเพียงพอให้เลือกในขั้นตอน 2 เสมอ ลองพิสูจน์เองเพื่อเป็นการฝึกฝน :)

ทั้งนี้ เราสามารถเลือกพิจารณา i ในลำดับที่ $|R_i|$ ไม่ลดลง (non-decreasing order) ซึ่งอาจพิสูจน์ความถูกต้องได้ง่ายกว่า

ด้วยกระบวนการข้างต้น Bob จะได้รับข้อความที่สามารถใช้หาค่า pos_i สำหรับทุก $0 \leq i \leq N-1$ ซึ่งสามารถนำไปคำนวณหาลำดับ L ได้ในที่สุด

7.7 Challenge

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: ห้ามส่งเกิน $\lceil \log_2(N+M) \rceil$ ข้อความ

คำใบ้: หาก $\lceil \log_2(N+M) \rceil = \lceil \log_2 N \rceil + 1$ เราสามารถใช้มาตรการจาก Subtask 6 ได้เลย (ไม่เช่นนั้น $\lceil \log_2(N+M) \rceil = \lceil \log_2 N \rceil$ และเราจะต้องคิดหามาตรการขึ้นมาใหม่สำหรับกรณีนี้เท่านั้น)

8 Colorblind

มีอาเรย์ยาว $2N$ แต่ละตำแหน่งถูกระบายด้วยสีแดง และ สีฟ้า อย่างละ N แต่เราไม่รู้ว่าแต่ละตำแหน่งมีสีอะไรบ้าง ยกเว้นตำแหน่งแรกที่จะเป็นสีแดงเสมอ

เราต้องการที่จะหาว่าแต่ละตำแหน่งมีสีอะไรโดยการถามคำถามดังนี้ไม่เกิน $2N$ ครั้ง

- `ask(x,y)` จะตอบ minimum total cost ในการจับคู่จุดที่สีต่างกัน N คู่ โดย cost ของคู่ นั้นจะเป็นระยะห่างในอาเรย์ หากสลับสีในตำแหน่ง `x` และ `y` ของอาเรย์ (การสลับไม่ได้เกิดขึ้นจริง)

ข้อจำกัด: $1 \leq N \leq 256$

8.1 Subtask 1 (7 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: $N \leq 2$

ในกรณีที่ $N = 1$ นั้น อาเรย์จะเป็นดังนี้เลย `"RB"` โดยเราจะให้ `"R"` แทนสีแดง และ `"B"` แทนสีฟ้า

ในกรณีที่ $N = 2$ อาเรย์จะมี 3 แบบดังนี้ `"RRBB"`, `"RBRB"`, `"RBBR"` ซึ่งสามารถถามคำถามเพื่อแยกกรณีออกได้ดังนี้

- `"RRBB"`: มีเพียง `ask(0,1)` ที่เท่ากับ 4
- `"RBRB"`: มีเพียง `ask(1,2)` ที่เท่ากับ 4
- `"RBBR"`: มีเพียง `ask(0,3)` ที่เท่ากับ 4

Total query: 3

8.2 Subtask 2 (1 คะแนน)

เงื่อนไขเพิ่มเติม: ตำแหน่งที่มีสีแดงอยู่ติดกันหมด

แน่นอนว่าเนื่องจากตำแหน่งที่ 0 คือสีแดง ดังนั้น N ตำแหน่งแรกจะเป็นสีแดงอย่างแน่นอน ทำให้สามารถตอบได้เลยว่าอาเรย์คือ `"R...RB...B"`

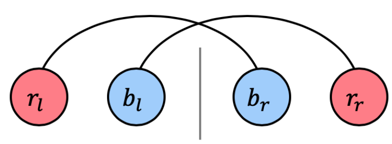
Total query: 0

8.3 Minimum total cost

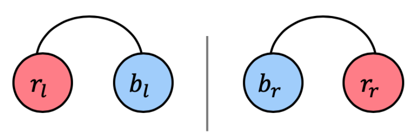
ก่อนอื่น หากเราได้รับอาเรย์มา แล้วให้หา minimum total cost ในการจับคู่ เราจะทำอย่างไร การหาค่านี้ทำได้หลายวิธีแต่ในเฉลยนี้เราจะพูดถึงวิธีหนึ่งที่นำไปใช้แก้ปัญหาหลักของเราต่อได้

> ถ้าแบ่งอาเรย์เป็นสองส่วนที่ระหว่างตำแหน่ง i และ $i+1$ และให้ R_i และ B_i เป็นจำนวนจุดสีแดง และ สีฟ้า ในด้านซ้าย
> เราจะสรุปได้ว่าจำนวนคู่ที่ จุดหนึ่งมาจากฝั่งซ้าย และ อีกจุดมาจากฝั่งขวา จะมีจำนวน $|R_i - B_i|$ ซึ่งเท่ากับจำนวนจุดที่เหลือในฝั่งซ้ายที่ไม่สามารถจับคู่กันในฝั่งเดียวกันได้

การจับคู่ในฝั่งเดียวกันให้มากที่สุดจะเป็นการจับคู่ที่ดีที่สุด เนื่องจากหากเราเหลือจุดสีแดงและสีฟ้า r_l และ b_l จากฝั่งซ้ายไว้ เราต้องนำสองจุดนี้ไปจับคู่กับจุดจากฝั่งขวา r_r และ b_r ซึ่งเห็นได้ชัดว่าจะต้องเสีย cost มากกว่าการจับคู่จุดในฝั่งเดียวกัน 2 คู่

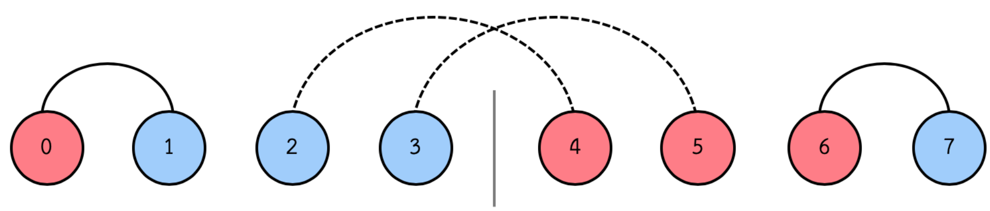


(a) จับคู่คนละฝั่ง cost = 4



(b) จับคู่ฝั่งเดียวกัน cost = 2

ในรูปข้างล่าง เราพยายามที่จะจับคู่ในฝั่งซ้ายให้หมดก่อน ซึ่งจะเหลือจุดสีฟ้า 2 จุด ที่จะต้องไปจับคู่กับฝั่งขวา



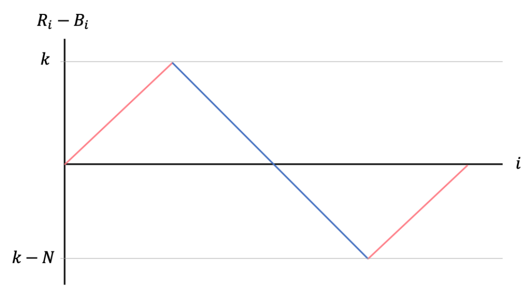
> Minimum total cost ในการจับคู่ของอาเรย์นี้ จะเท่ากับ $|R_0 - B_0| + \ldots + |R_{2N-2} - B_{2N-2}|$

8.4 Subtask 3 (13 คะแนน)

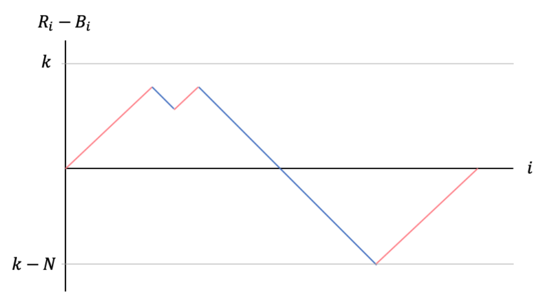
เงื่อนไขเพิ่มเติม: ตำแหน่งที่มีสีฟ้าอยู่ติดกันหมด

เรารู้ว่าอาเรย์ของเราจะมีหน้าตาเป็นดังนี้ `"R..RB..BR..R"` กำหนดให้ส่วนแรกที่เป็นสีแดงมีจำนวน k ตัว

สังเกตว่าค่า $R_i - B_i$ จะมีลักษณะเป็น $0, ..., k, k-1, ..., k-N, k-N+1, ..., 0$



สังเกตว่าในจุดยอดของกราฟจะเป็นตำแหน่งที่จุดสีแดงและสีฟ้าอยู่ติดกันซึ่งเป็นตำแหน่งที่เราต้องหา หากเราลองสลับสีแดงและฟ้าที่ติดกันเราจะเห็นว่ามันจะทำให้ minimum total cost น้อยลงจาก minimum total cost ของอาเรย์ดั้งเดิมดังรูป



อย่างไรก็ตาม หากอาเรย์คือ `"RB..BR..R"` การสลับ `"R"` กับ `"B"` คู่แรกจะไม่ทำให้ minimum total cost ลดลง เราต้องเช็คกรณีนี้เป็นพิเศษ

ทีนี้ เราจะหา minimum total cost ของอาเรย์ดั้งเดิมได้ยังไง ค่านั้นจะเท่ากับ **`ask(0,1)`** เสมอ เพราะว่าอย่างที่ได้กล่าวไป การสลับคู่แรกของอาเรย์จะไม่เปลี่ยนค่า cost ของการจับคู่ใดๆ ถึงแม้ว่าสีที่สลับจะต่างกัน

เราต้องการหาตำแหน่งแรกที่สีต่างกันโดยการถาม **`ask(i-1,i)`** ไปเรื่อยๆตั้งแต่ `i` = $2, 3, ..., N$
หาก **`ask(i-1,i)`** ≠ **`ask(0,1)`** แสดงว่าที่ตำแหน่ง `i` เป็นตำแหน่งแรกของจุดสีฟ้า

Total query: N

8.5 Subtask 4 (8 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: ตำแหน่ง $2x$ และ $2x+1$ มีสีแตกต่างกัน สำหรับทุก $0 \leq x \leq N-1$

เนื่องจาก ตำแหน่ง $2x$ และ $2x+1$ ใดๆมีสีแตกต่างกัน เราสามารถสรุปได้ว่าตำแหน่งที่ 1 มีสีฟ้า

สังเกตว่า หากเราถาม `ask(0,x)` โดยที่ `x` เป็นจำนวนคู่ แล้วจะเกิดได้สองกรณีดังนี้

1. ตำแหน่ง `x` เป็นสีแดง: `ask(0,x)` จะเท่ากับ minimum total cost ของอาเรย์เดิม เนื่องจากเราสลับสีแดงกับสีแดง อาเรย์ยังคงเหมือนเดิม
2. ตำแหน่ง `x` เป็นสีฟ้า: `ask(0,x)` จะมากกว่ากับ minimum total cost ของอาเรย์เดิมแน่นอน เนื่องจากอาเรย์จะเปลี่ยนจาก `"RB..BR.."` เป็น `"BB..RR.."` ซึ่งทำให้ต้องใช้ cost เพิ่มขึ้นในการจับคู่

ดังนั้นในส่วนของการหาอาเรย์ เราสามารถสรุปได้ว่าสำหรับ `x` = $2, 4, \ldots, 2N-2$ หาก `ask(i-1,i)` = `ask(0,1)` แสดงว่าตำแหน่ง `x` และ `x+1` จะเป็น `"RB"` ไม่เช่นนั้นจะเป็น `"BR"`

Total query: N

8.6 Subtask 5 (11 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: ตั้งแต่ตำแหน่ง 0 ถึง N มีตำแหน่งสีฟ้าหนึ่งตำแหน่งพอดี

ในปัญหาย่อยนี้เราจะทำการสังเกตค่าหากเราสลับตำแหน่ง i กับ N สังเกตว่าหากอาเรย์เป็น `"R..RB..B"` แล้ว minimum total cost จะมีค่ามากที่สุด ดังนั้นหาก `ask(i,N) > ask(0,1)` แล้ว แสดงว่าที่ตำแหน่ง `i` เป็นสีฟ้า หากไม่มี `i` ใดๆที่ตรงเงื่อนไขแล้ว ตำแหน่ง N จะเป็นสีฟ้า

Total query: N

8.7 Subtask 6 (60 คะแนน)

<u>เงื่อนไข</u>: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เราจะแบ่งอัลกอริทึมออกเป็นสองส่วน โดยในเฉลยนี้ขอแทนตำแหน่งสีแดงด้วย + และ สีฟ้าด้วย - ดังนั้น $R_i - B_i$ จะเท่ากับผลรวม i ตำแหน่งแรก ขอแทนด้วย pref_i

8.7.1 ส่วนแรก: หาสีของ 3 ตำแหน่งแรก

ใน 3 ตำแหน่งแรกนี้เป็นไปได้ 4 กรณีได้แก่ +++, ++-, +-+ และ +-- นอกจากนี้ สังเกตว่าหากเราสลับตำแหน่งระหว่างสองตัวใดๆในสามตำแหน่งนี้ ค่า pref_i สำหรับ $3 \leq i$ จะไม่เปลี่ยน ดังนั้นในตอนที่เราสลับคู่ใดๆ เราจะสนใจเพียงค่าที่เปลี่ยนไปของ pref_1 และ pref_2 ซึ่งเท่ากับค่า minimum total cost ที่เปลี่ยนไป

กำหนดให้ `C` เท่ากับ minimum total cost เริ่มต้น ซึ่งมีค่าเท่ากับ `ask(0,1)`

	`ask(0,1) - C`	`ask(0,2) - C`	`ask(1,2) - C`
$+++$	0	0	0
$++-$	0	-2	-2
$+-+$	0	0	+2
$+--$	0	+2	0

ตารางดังกล่าวแสดงค่าที่เปลี่ยนไปของ minimum total cost (`ask(?,?) - C`) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเราสามารถที่จะแยกทั้ง 4 กรณีออกได้เพียงการถามแค่ 3 ครั้งเท่านั้น

8.7.2 ส่วนที่สอง: หาสีของตำแหน่งถัดๆไป

สมมติว่าเรารู้สีของทุกตำแหน่งตั้งแต่ 0 ถึง $i-1$ แล้ว เราจะสามารถหาสีของตำแหน่ง i โดยแบ่งกรณีจากสีของสองตำแหน่งล่าสุด (ตำแหน่ง $i-2$ และ $i-1$) และ ผลรวมของสีก่อนหน้านั้น (pref_{i-3})

กำหนดให้ $\underline{?}$ เป็นสีของตำแหน่ง i ที่เรากำลังจะหา

- กรณี $++\underline{?}$

pref_{i-3}	`ask(i-1, i) - C`		`ask(i-2, i) - C`	
	$++\underline{+}$	$++\underline{-}$	$++\underline{+}$	$++\underline{-}$
≥ 0	0	-2		
-1			0	-4
≤ -2			0	+4

- กรณี $+-\underline{?}$

pref_{i-3}	`ask(i-1, i) - C`		`ask(i-2, i) - C`	
	$+-\underline{+}$	$+-\underline{-}$	$+-\underline{+}$	$+-\underline{-}$
≥ 0	+2	0		
≤ -1			0	+4

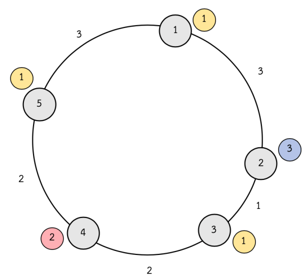
ส่วนกรณีที่เป็น $-+\underline{?}$ และ $--\underline{?}$ สังเกตว่าการสลับ $+$ และ $-$ ของทั้งอาเรย์ไม่ทำให้ minimum total cost เปลี่ยนไปเลย ดังนั้นเพียงกลับกรณี $++$ เป็น $--$ และ $+-$ เป็น $-+$ ได้เลย

ดังนั้น เราสามารถถามเพียง 1 คำถามเพื่อหาตัวถัดไปโดยแยกกรณีตามด้านบนได้

Total query: $3+(2N-3)=2N$

9 Coins

สนามแห่งหนึ่งมีลักษณะเป็นวงกลม และ มีตำแหน่งเก็บเหรียญจำนวน N ตำแหน่งโดยระยะห่างระหว่างตำแหน่ง i และ $i+1$ เท่ากับ A_i สำหรับ $1 \leq i < N$ และ ระยะห่างระหว่างตำแหน่ง N และ 1 เท่ากับ A_N ที่ตำแหน่ง i จะมีเหรียญหนึ่งเหรียญซึ่งมีเลข B_i กำกับอยู่ซึ่งเลขซ้ำกันได้



ตัวอย่างสนามวงกลมที่มี 5 ตำแหน่ง

เราต้องการที่จะเก็บเหรียญตามลำดับจากเลขน้อยสุดไปยังมากสุด ถ้ามีเหรียญที่มีเลขซ้ำกันจะต้องเก็บเหรียญหมายเลขนั้นให้หมดก่อนถึงจะไปเก็บเหรียญที่มีเลขมากกว่าได้ จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดจะเริ่มที่ไหนก็ได้

ถามว่าระยะทางสั้นที่สุดที่เราจะใช้ในการเก็บเหรียญให้ครบเท่ากับเท่าใด

<u>ข้อจำกัด</u>: $3 \leq N \leq 10^6$, $A_i \leq 10^8$ และ ผลรวม $A_i \leq 10^9$

9.1 Subtask 1 (5 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $N \leq 10$

เราสามารถ Brute force ทดลองลำดับในการเดินไปเก็บเหรียญทุกลำดับได้ ซึ่งมีจำนวน $N!$ แบบ

Total time complexity: $\mathcal{O}(N!)$

9.2 Subtask 2 (10 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: เหรียญแต่ละหมายเลขมีจำนวนไม่เกิน 2 เหรียญ

เราจะใช้ dynamic programming (DP) ในการแก้ปัญหาโดยแบ่งเป็นสองจังหวะ

1. st_x ระยะทางน้อยที่สุดโดยที่เหรียญที่เก็บล่าสุดอยู่ที่ ตำแหน่ง x และเป็นตำแหน่ง<u>แรก</u>ที่เก็บเหรียญหมายเลข B_x

   หากเราเก็บเหรียญหมายเลข $B_x - 1$ หมดแล้วและจบที่ตำแหน่ง y เราจะเดินมายังเหรียญหมายเลข B_x

$$\mathrm{st}_x = \min \begin{cases} \mathrm{ft}_y + \mathrm{walk}(y, x) \\ \mathrm{ft}_y + \mathrm{walk}(x, y) \end{cases} \quad \text{โดย } B_y = B_x - 1$$

กำหนดให้ $\mathrm{walk}(u, v)$ แทนระยะทางที่เดินจาก u ไป v ตามเข็มนาฬิกา

2. ft_x ระยะทางน้อยที่สุดโดยที่เหรียญที่เก็บล่าสุดอยู่ที่ ตำแหน่ง x และเป็นตำแหน่งสุดท้ายที่เก็บเหรียญหมายเลข B_x

   ส่วนนี้คือส่วนที่เราเริ่มเก็บเหรียญหมายเลข B_x ตำแหน่งแรกที่ y แล้ว เราต้องการเก็บเหรียญหมายเลขนี้ให้หมดแล้วมาหยุดที่ตำแหน่ง x นี้

$$\mathrm{ft}_x = \min(\mathrm{st}_y + \mathrm{collect}(y, x)) \text{ โดย } B_y = B_x$$

   โดย $\mathrm{collect}(u, v)$ แทนระยะทางที่น้อยที่สุดที่ต้องใช้หากเราจะเก็บเหรียญหมายเลข B_u ให้หมด โดยเริ่มเก็บที่ตำแหน่ง u และจบที่ตำแหน่ง v ($B_u = B_v$)

ในปัญหาย่อยนี้ เนื่องจากเหรียญแต่ละหมายเลขมีจำนวนไม่เกิน 2 ดังนั้นในการคำนวณจึงมีตัวเลือกน้อย และ $\mathrm{collect}(u, v)$ สามารถหาได้ง่ายมากเนื่องจากไม่ต้องไปเก็บเหรียญใดๆอื่นนอกจากจุดเริ่มและจบ (ตามเข็ม หรือ ทวนเข็มนาฬิกา)

คำตอบคือ ft_i สำหรับ i ที่ B_i = เหรียญที่มีเลขมากที่สุด

```cpp
long long walk(int x, int y) {
  if(y >= x) return pos[y] - pos[x];
  return circ + pos[y] - pos[x];
}

long long solve() {
  for(int x = 1; x <= n; x++) {
    m = max(m, B[x]);
    coins[B[x]].push_back(x);
    st[x] = ft[x] = inf;
  }
  for(int i = 1; i <= m; i++) {
    // solve for st[x]
    for(auto x : coins[i]) {
      for(auto y : coins[i-1]) st[x] = min(st[x], ft[y] + min(walk(y, x), walk(x, y)));
      if(i == 1) st[x] = 0;
    }
    // solve for ft[x]
    int sz = coins[i].size();
    if(sz == 1) ft[coins[i][0]] = st[coins[i][0]];
    else {
      for(auto x : coins[i]) {
        for(auto y : coins[i]) {
          if(x != y) ft[x] = min(ft[x], st[y] + min(walk(y, x), walk(x, y)));
        }
      }
    }
  }
  long long ans = inf;
  for(auto x : coins[m]) ans = min(ans, ft[x]);
  return ans;
}
```

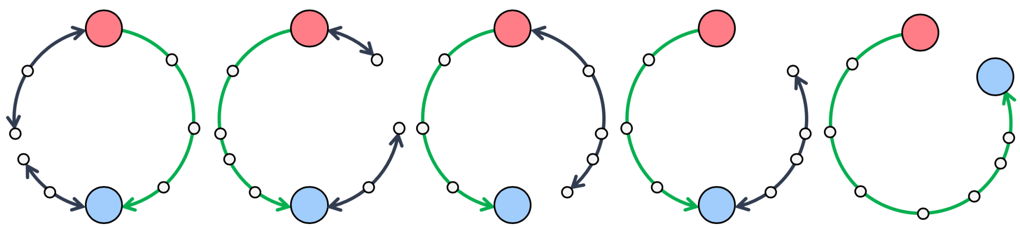
Total time complexity: $\mathcal{O}(N)$

9.3 Subtask 3 (30 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $N \leq 10\,000$, เหรียญแต่ละหมายเลขมีจำนวนไม่เกิน $1\,000$ เหรียญ และ ระยะห่างระหว่างเหรียญที่ติดกันเป็น 1 หมด

เราจะแก้ปัญหาด้วย DP เช่นเดียวกัน แต่ในปัญหาย่อยนี้ การหาค่า $\text{collect}(y, x)$ นั้นจะยากขึ้น

การเก็บเหรียญบนวงกลมที่ดีที่สุดนั้นทำได้อย่างไร ?

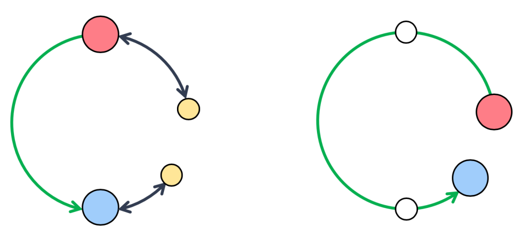


รูปข้างต้นเป็นตัวอย่างวิธีเดินเก็บเหรียญที่เป็นไปได้ หากเราต้องการเก็บเหรียญทั้งหมดโดยเริ่มจากสีแดงและจบที่สีฟ้า

การเดินเก็บเหรียญตามด้านบนจะมีลักษณะดังนี้

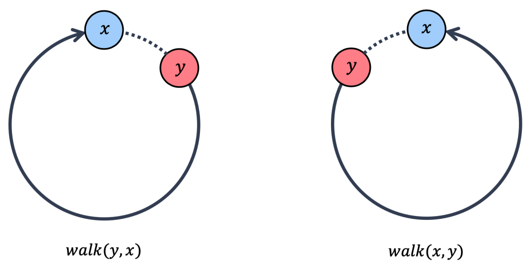
- **สีดำ**: เดินไปเก็บเหรียญจำนวนหนึ่งแล้วเดินกลับ (อาจไม่มี)
- **สีเขียว**: เดินไปเก็บไปถึงตำแหน่งสีฟ้า
- **สีดำ**: เดินเลยจากสีฟ้าไปเก็บเหรียญที่ยังเหลืออยู่แล้วเดินกลับ (อาจไม่มี)

> ในการคำนวณในส่วน 2 เราจะสนใจเพียงกรณีที่ <u>จุดเริ่มและจุดจบอยู่ติดกันในวงกลม</u> เนื่องจาก
> เราไม่จำเป็นจะต้องสนใจส่วนสีดำเนื่องจากส่วนนั้นเราสามารถให้ส่วน 1 นั้นเลือกแทนได้



ตัวอย่างเช่น จากรูปข้างบน แทนที่จะเดินไปกลับ หากเราย้ายจุดเริ่มและจุดจบมาที่จุดสีเหลืองแทน แล้วปล่อยให้การตัดสินใจเดินผ่านทางสีดำนั้นเป็นหน้าที่ของส่วนที่ 1 ซึ่งคือการเดินมาจากเหรียญหมายเลขต่ำกว่า

ดังนั้นการหาระยะทางจะมีเพียงสองแบบ



หาก x อยู่ก่อน y ในวงกลมแล้วเราจะต้องใช้ระยะทาง $\text{walk}(y, x)$ ไม่เช่นนั้นเราจะเดินย้อนอีกทางซึ่งเป็น $\text{walk}(x, y)$ ทั้งนี้ทิศทางการเดินนั้นขึ้นอยู่กับด้านที่ต้องไปเก็บเหรียญอื่นๆ

```
// solve for ft[x]
int sz = coins[i].size();
if(sz == 1) ft[coins[i][0]] = st[coins[i][0]];
else {
  for(int j = 0; j < sz; j++) {
    int x = coins[i][j], y;

    y = coins[i][(j+1)%sz];
    ft[x] = min(ft[x], st[y] + walk(y, x)); // walk from y to x clockwise

    y = coins[i][(j-1+sz)%sz];
    ft[x] = min(ft[x], st[y] + walk(x, y)); // walk from y to x counter-clockwise
  }
}
```

Total time complexity: $\mathcal{O}(N^2)$

9.4 Subtask 4 และ 5 (35+20 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

พิจารณา $\mathrm{st}_x = \min(\mathrm{ft}_y + \min(\mathrm{walk}(y,x), \mathrm{walk}(x,y)))$ ซึ่งแบ่งเป็นสองกรณี

1. $x \geq y$

$$\mathrm{st}_x = \min \begin{cases} \mathrm{ft}_y + \mathrm{walk}(y,x) = \boxed{\mathrm{ft}_y - \mathrm{pos}_y} + \mathrm{pos}_x \\ \mathrm{ft}_y + \mathrm{walk}(x,y) = \boxed{\mathrm{ft}_y + C + \mathrm{pos}_y} - \mathrm{pos}_x \end{cases}$$

2. $x < y$

$$\mathrm{st}_x = \min \begin{cases} \mathrm{ft}_y + \mathrm{walk}(y,x) = \boxed{\mathrm{ft}_y + \mathrm{pos}_y} - \mathrm{pos}_x \\ \mathrm{ft}_y + \mathrm{walk}(x,y) = \boxed{\mathrm{ft}_y + C - \mathrm{pos}_y} + \mathrm{pos}_x \end{cases}$$

โดย C แทน เส้นรอบวงของสนาม $= \sum A$

เนื่องจากเราต้องการให้ st_x มีค่าน้อยที่สุดดังนั้น เราจะหา $\mathrm{ft}_y + \mathrm{pos}_y$ หรือ $\mathrm{ft}_y + C - \mathrm{pos}_y$ ที่น้อยที่สุดหาก $x \leq y$ และ หา $\mathrm{ft}_y - \mathrm{pos}_y$ หรือ $\mathrm{ft}_y + C + \mathrm{pos}_y$ ที่น้อยที่สุดหาก $x > y$

ซึ่งเราสามารถใช้เทคนิค two pointer ในการหาค่าน้อยที่สุดได้ โดยเราจะค่อยๆไล่ค่า x จากน้อยไปมาก และ ค่อยๆเพิ่ม y ที่ $\leq x$ และจำค่าที่น้อยที่สุดของ $\mathrm{ft}_y - \mathrm{pos}_y$ และ $\mathrm{ft}_y + C + \mathrm{pos}_y$ ที่น้อยที่สุด เพื่อมาคำนวณ
และทำเช่นเดียวกันกับกรณี $x < y$ โดยการไล่ค่า x จากมากไปน้อย

```cpp
// case x >= y
int l = -1; // this is a pointer for y so that coins[i-1][l] <= x
long long mn1 = inf, mn2 = inf;

// iterate x in increasing order
for(auto x : coins[i]) {
  // gradually increase pointer for y
  while(l+1 < coins[i-1].size() && coins[i-1][l+1] <= x) {
    l++; int y = coins[i-1][l];
    mn1 = min(mn1, ft[y] - pos[y]);
    mn2 = min(mn2, ft[y] + circ + pos[y]);
  }
  st[x] = min(st[x], mn1 + pos[x]); // ft[y] + walk(y, x) = ft[y] - pos[y] + pos[x]
  st[x] = min(st[x], mn2 - pos[x]); // ft[y] + walk(x, y) = ft[y] + circ + pos[y] - pos[x]
}

// case x < y
// do the similar thing as above
```

Total time complexity: $\mathcal{O}(N)$

10 Castle

มีกราฟขนาด N โหนด (0 ถึง $N-1$) และ M เส้นเชื่อม ($N-1 \leq M \leq N+9$) กราฟนี้จะมีลักษณะเป็นต้นไม้ไบนารี่สมบูรณ์ (full binary tree) ที่มีเส้นเชื่อมพิเศษเพิ่มมาอีก $M-N+1$ เส้น

เราต้องเขียนโปรแกรมที่จะรองรับเหตุการณ์สองแบบ จำนวน Q เหตุการณ์

1. เส้นเชื่อมหนึ่งเส้นพังทลายลงไป
2. ถามว่า u และ v มีทางเดินที่เชื่อมกันอยู่รึไม่

โปรแกรมจะทำงานแบบ online ซึ่งหมายความว่าสำหรับเหตุการณ์คำถามเราต้องตอบคำถามก่อนถึงจะได้รับเหตุการณ์ต่อไป

<u>ข้อจำกัด</u>: $1 \leq N, Q \leq 100\,000$ และ $N-1 \leq M \leq N+9$

10.1 Subtask 1 (10 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $N \leq 1\,000, Q \leq 1\,000$

u และ v จะมีทางเดินเชื่อมกันอยู่ หาก u และ v อยู่ใน component เดียวกัน ซึ่งเราสามารถใช้ DFS/BFS หรือว่า Union-find disjoint set เพื่อหาว่าแต่ละโหนดอยู่ใน component ใดบ้างได้ใน $\mathcal{O}(M)$

ดังนั้นในการตอบคำถามแต่ละครั้ง เราก็รันอัลกอริทึมบนกราฟเพื่อหาว่า u และ v อยู่ใน component เดียวกันรึเปล่า

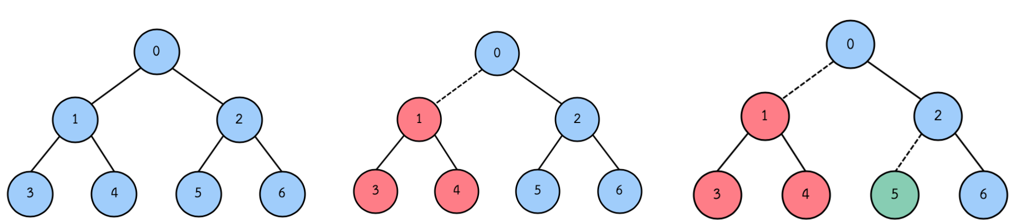
Total time complexity: $\mathcal{O}(M * Q)$

10.2 Subtask 2 (10 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $M = N-1$, ต้นไม้ไบนารี่ของกราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นเชื่อมโหนด i กับ $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ สำหรับทุก $i > 0$

เราจะทำการระบายสีต้นไม้โดยที่ หากโหนดใดๆมีทางเดินไปหากันได้จะมีสีเดียวกัน แน่นอนว่าเริ่มแรกทุกโหนดจะมีสีเดียวกัน

หากเรานำเส้นเชื่อมในต้นไม้ใดๆออก มันจะทำการแบ่งกลุ่มของต้นไม้ออกเป็นสองกลุ่มย่อย ซึ่งสองกลุ่มนั้นจะไม่สามารถเดินทางไปหากันได้ ทำให้เราต้องระบายสีต้นไม้ใหม่



(a) เริ่มแรกต้นไม้มีสีเดียวกันหมด (b) สีหลังจากตัดเส้นเชื่อม (0,1) (c) สีหลังจากตัดเส้นเชื่อม (2,5)

ทุกครั้งที่แบ่งจะแบ่งออกเป็นสองส่วนเสมอ ทีนี้เราต้องเลือกว่าจะระบายสีในส่วนไหนให้ดีที่สุด

> หากเราระบายสีในส่วนที่อยู่ด้านล่างเสมอ เราจะทำการระบายสีโหนดใดๆไม่เกิน $\log N$ ครั้ง เนื่องจากต้นไม้เป็น full binary tree

ในการระบายสี เราสามารถใช้ DFS/BFS ลงไปจากโหนดเริ่มต้นได้ตามตัวอย่างโค้ด C++ นี้

```cpp
// color the subtree rooted at u
void coloring(int u) {
  for(auto v : children[u]) {
    if(color[u] == color[v]) coloring(v);
  }
  color[u] = new_color;
}

// destroy an sedge between u and v
void cut(int u, int v) {
  new_color += 1; // initially, new_color = n
  if(depth[u] > depth[v]) coloring(u);
  else coloring(v);
}
```

เท่านี้ในตอนตอบคำถาม เราเพียงแค่ดูว่า `color[u]` เท่ากับ `color[v]` รึเปล่าเท่านั้น

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q)$

10.3 Subtask 3 (10 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $M = N - 1$

ในปัญหาย่อยที่แล้วเรารู้ว่า root ของต้นไม้เป็น 0 เสมอ แต่ในปัญหาย่อยนี้เราจะต้องหาเอง

สังเกตว่า root ของต้นไม้เป็นโหนดเดียวที่มีเส้นเชื่อมกับมันเท่ากับ 2 พอดี ดังนั้นเราสามารถหาได้เลยว่า root ของต้นไม้เป็นอะไรเพียงดูแค่ degree ของแต่ละ node

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q)$

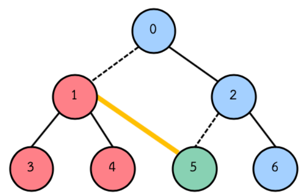
10.4 Subtask 4 (10 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $M = N$ และ ต้นไม้ไบนารี่ของกราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นเชื่อมโหนด i กับ $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ สำหรับทุก $i > 0$

ในปัญหาย่อยนี้มีลักษณะเหมือนกับปัญหาย่อยที่ 2 แต่มี เส้นเชื่อมพิเศษเพิ่มขึ้นมาอีก 1 เส้น กำหนดให้เส้นเชื่อมนี้เชื่อมระหว่างโหนด a และ b

เราจะทำแบบเดียวกับที่ทำใน Subtask 2 นั่นคือสนใจก่อนว่าสีที่ถูกระบายในต้นไม้ของ u และ v นั้นเป็นสีเดียวกันหรือไม่

แต่ว่าเนื่องจากเรามีเส้นเชื่อมพิเศษระหว่างโหนด a และ b ดังนั้นกลุ่มโหนดที่มีสี `color[a]` จะสามารถเดินทางไปหากลุ่มสี `color[b]` ได้ ตรงนี้เราสามารถเช็คได้ตอนถามคำถามได้เช่นเลย



มีเส้นเชื่อมพิเศษระหว่าง 1 และ 5 ทำให้สีแดงและเขียวสามารถเดินทางหากันได้

```cpp
// query connectivity
bool query(int u, int v) {
  // same color in the tree
  if(color[u] == color[v]) return true;

  // special edge connects color[a] and color[b]
  if(special) { // check whether the special edge has been cut
    if(color[u] == color[a] && color[v] == color[b]) return true;
    if(color[u] == color[b] && color[v] == color[a]) return true;
  }

  return false;
}

// destroy an sedge between u and v
void cut(int u, int v) {
  // cut special edge
  if((u == a && v == b) || (u == b && v == a)) special = false
  // cut tree edge
  else {
    new_color += 1; // initially, new_color = 0
    if(depth[u] > depth[v]) coloring(u);
    else coloring(v);
  }
}
```

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q)$

10.5 Subtask 5 (10 คะแนน)

<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: $M = N$

เช่นเดียวกันกับ Subtask 3 เราจะไม่รู้ว่าต้นไม้ไบนารี่นั้นมีลักษณะเป็นอย่างไร อย่างไรก็ตาม หากเราสังเกตคุณสมบัติของ full binary tree ความสูง k ที่มี $2^k - 1$ โหนด ต้นไม้จะมีโหนด degree = 2 เพียง 1 โหนด degree = 1 จำนวน 2^{k-1} และที่เหลือมี degree = 3

ดังนั้นถ้าสมมติเราทดลองเอาเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นออกจากกราฟ แล้วโหนดทั้งหมดมีคุณสมบัติตามข้างต้น แสดงว่าเส้นเชื่อมนั้นเป็นเส้นเชื่อมพิเศษ

หลังจากรู้เส้นเชื่อมพิเศษแล้วก็ใช้วิธีเดียวกับ Subtask 3 และ 4 รวมกันในการแก้

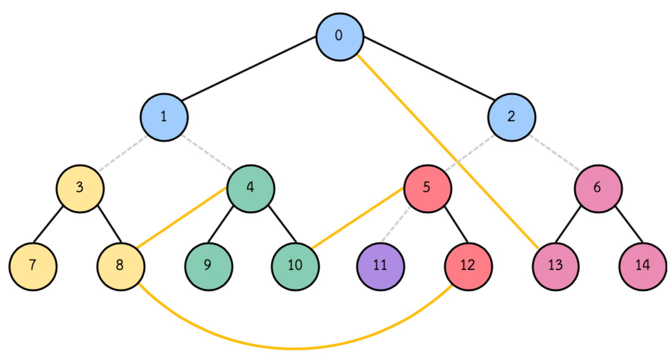
Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + Q)$

10.6 Subtask 6 (25 คะแนน)

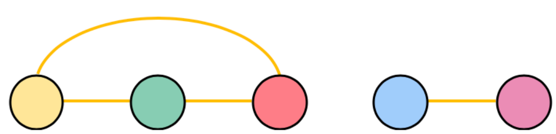
<u>เงื่อนไขเพิ่มเติม</u>: ต้นไม้ไบนารี่ของกราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นเชื่อมโหนด i กับ $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ สำหรับทุก $i > 0$

เนื่องจากในกราฟจะมีเส้นเชื่อมพิเศษไม่เกิน 10 เส้น ดังนั้นเราจะมีกลุ่มสีในต้นไม้ที่สนใจไม่เกิน 20 กลุ่ม

หากเราเอา 20 กลุ่มนี้มาสร้างกราฟขนาด 20 โหนด เราจะรู้ว่ากลุ่มใดสามารถเดินไปหากลุ่มใดในกราฟขนาดเล็กนี้ได้



ต้นไม้และเส้นเชื่อมพิเศษสี่เส้น



กราฟขนาดเล็กที่สร้างจากกลุ่มสีในต้นไม้และเส้นเชื่อมพิเศษข้างต้น

เช่น หากเราต้องการดูว่า 3 และ 5 สามารถเดินทางไปหากันได้รึเปล่า เราก็จะเช็คว่าสีของ 3 และ 5 ในต้นไม้ ซึ่งคือ สีเหลือง และสีแดง สามารถเดินทางไปหากันได้รึเปล่าในกราฟขนาดเล็ก ซึ่งการเช็คนั้นเราก็สามารถที่จะใช้ DFS/BFS หรือว่า Disjoint set ได้เช่นเดิม

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + 20 * Q)$

10.7 Subtask 7 (25 คะแนน)

เงื่อนไข: ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เนื่องจากเส้นเชื่อมพิเศษมีจำนวนไม่มาก (≤ 10 เส้น) หากเราเลือก spanning tree ใดๆ ออกมาจากกราฟ ต้นไม้นั้นจะยังมีลักษณะไม่ต่างจากต้นไม้ไบนารี่สมบูรณ์มาก (มีความสูงไม่เกิน $\mathcal{O}(\log N)$) ทำให้คุณสมบัติระบายสีไม่เกิน $\log N$ ครั้งต่อแต่ละโหนดที่ได้กล่าวไว้ใน Subtask 2 จึงยังมีผลอยู่

ดังนั้นในปัญหาย่อยนี้ เราเพียงเลือกต้นไม้ใดๆก็ได้ออกมาจากกราฟ แล้วทำลักษณะเช่นเดียวกับ Subtask 6 ได้เลย

Total time complexity: $\mathcal{O}(N \log N + 20 * Q)$

10.8 Challenge

ลองแก้ปัญหานี้หากกราฟมีลักษณะแบบไหนก็ได้ไม่จำเป็นต้องเป็นต้นไม้ไบนารี่สมบูรณ์ที่มีเส้นเชื่อมพิเศษเพิ่ม

ปัญหานี้สามารถแก้ได้ด้วยเวลา $\mathcal{O}(N \log N + 20 * Q)$ เช่นเดียวกัน

11 Analysis

Average score/score distribution ของโจทย์แต่ละข้อ

วันแข่ง	Task	Average score	100 points (person)	99-81 points (person)	80-61 points (person)	60-41 points (person)	40-21 points (person)	20 to 1 point (person)	0 points (person)
Day 1	Utilization	40	8	0	0	1	0	3	11
	Marching	46.09	10	0	0	0	3	2	8
	Collection	5.04	0	0	0	1	1	5	16
	Pandemic	16.17	1	0	1	0	4	5	12
Day 2	Racing	12.61	0	0	0	2	2	8	11
	Trainto	8.04	0	0	0	0	0	18	5
	MalwareX	1.65	0	0	0	0	1	1	21
Day 3	Castle	30.87	2	0	2	3	6	2	8
	Coins	16.74	3	0	0	1	1	2	16
	Colorblind	33.83	1	1	2	0	11	4	4