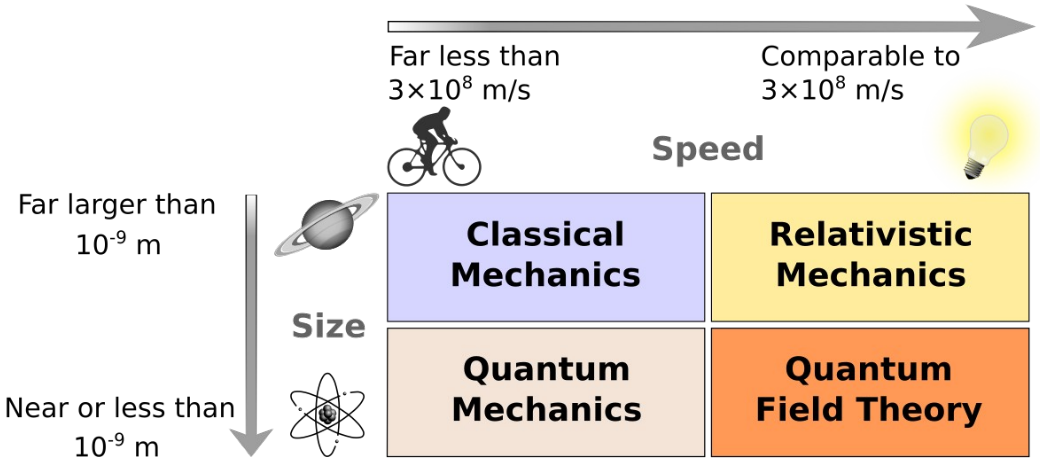
Лекция 2

Введение в механику. Описание позиции и ориентации твердого тела в 2D.

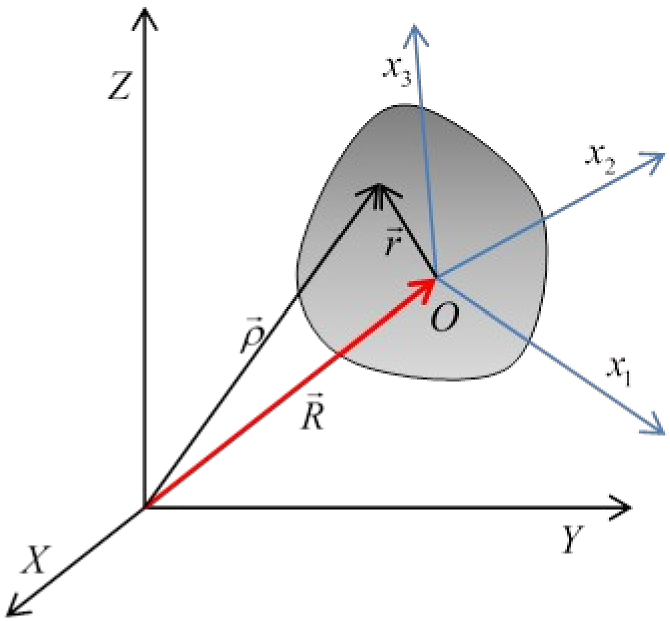
Механика

- Механика – раздел физики, изучающий движение тел.
- Механика делится на три части:
  - Кинематика – изучает законы, вне зависимости от причин, его вызывающих
  - Динамика – изучает законы движения и его причины
  - Статика – изучает условия, при которых тела находятся в покое.



Математические модели

- В настоящем курсе будут использоваться две модели – материальная точка и твердое тело
- Законы движения твердого тела выводятся из законов движения материальной точки
- Для материальной точки существуют три фундаментальных законов Ньютона:
  - Если на тело не действует никаких сил, то оно покоится, либо движется с постоянной скоростью.
  - F=ma
  - Сила действия равна сила противодействия. При этом силы находятся на одной прямой и направлены противоположно друг другу.



Кинематика

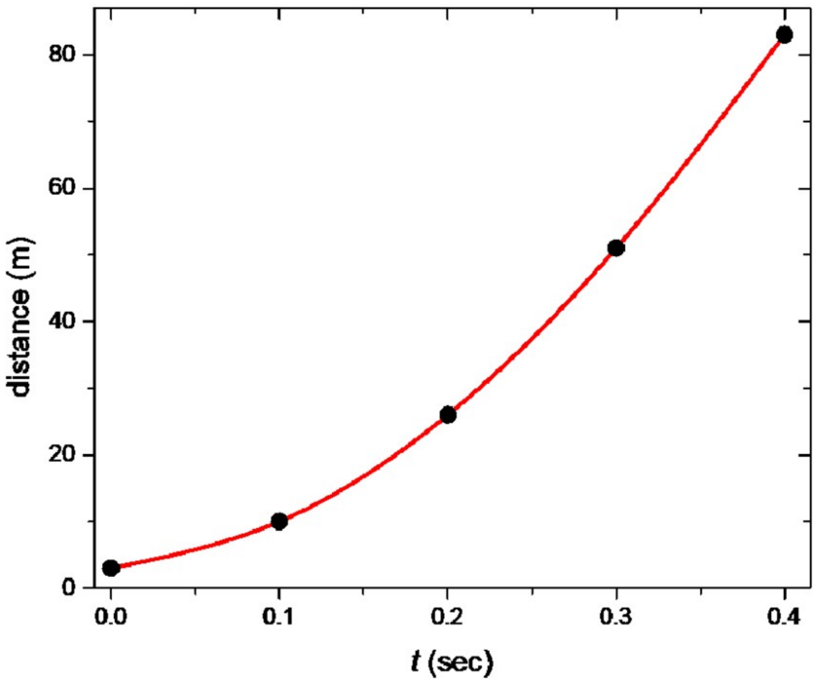
- Движение – изменение положения тел друг относительно друга со временем.
- Чтобы описать движение тела, вводятся понятия перемещения, скорости, ускорения.
- Кинематика использует линейную алгебру, интегральное и дифференциально счисление.

Kinematic Equations

$$v_f = v_i + at \qquad v_f^2 = v_i^2 + 2a\,\Delta x$$

$$\Delta x = v_i t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \Delta x = \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

Понятие производной (на доске)



$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$s(t) = at^2$$

$$s(t+\Delta t) = a(t+\Delta t)^2 = a(t^2 + 2\Delta t \cdot t + \Delta t^2)$$

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = a(2\Delta t \cdot t + \Delta t^2)$$

$$= \underbrace{2at \cdot \Delta t}_{\text{differential}} + a\Delta t^2.$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + a\Delta t \; ; \; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at$$

Элементы линейной алгебры

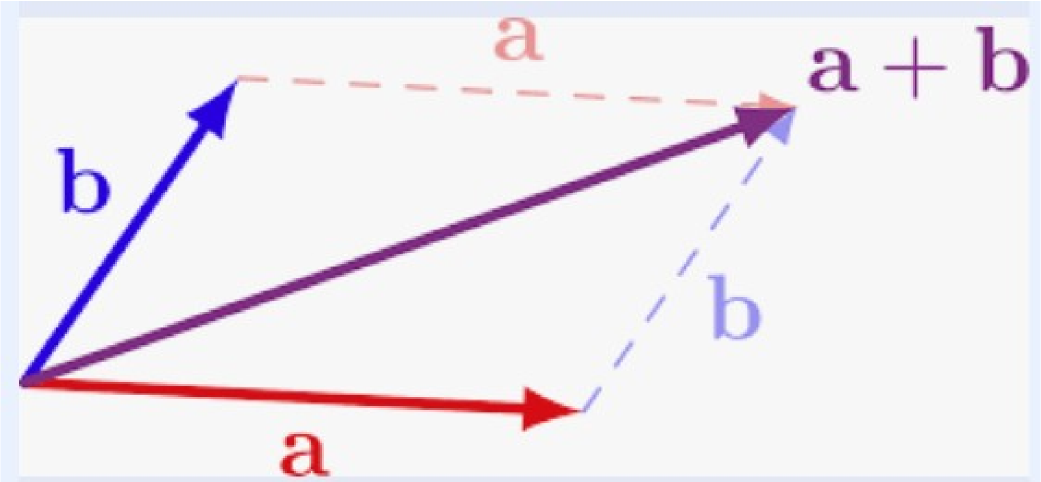
- Вектор – направленный отрезок.
- Две ключевые операции линейной алгебры – умножение вектора на число и сложение векторов.
- Сумма произведений векторов на числа есть линейная комбинация.

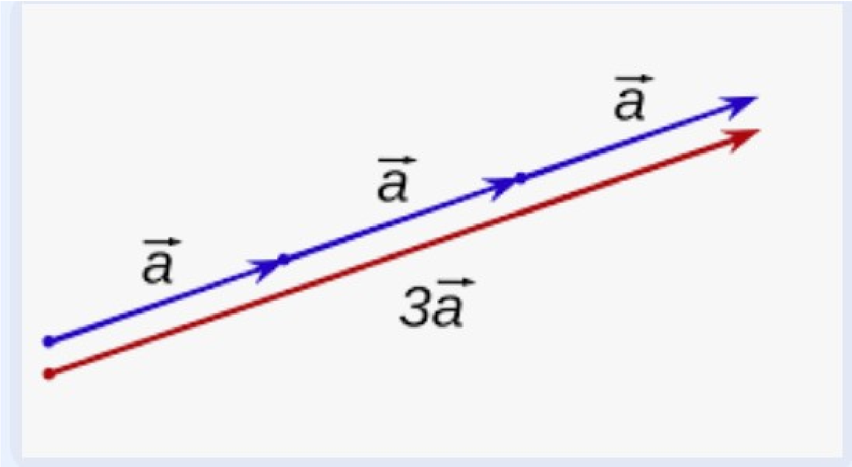
Definition of Vector Space

Let V be a set on which two operations (**vector addition** and **scalar multiplication**) are defined. If the listed axioms are satisfied for every $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, and $\mathbf{w}$ in V and every scalar (real number) c and d, then V is called a **vector space.**

Addition:	
1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is in V.	Closure under addition
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	Commutative property
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	Associative property
4. V has a **zero vector** $\mathbf{0}$ such that for every $\mathbf{u}$ in V, $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.	Additive identity
5. For every $\mathbf{u}$ in V, there is a vector in V denoted by $-\mathbf{u}$ such that $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.	Additive inverse
Scalar Multiplication:	
6. $c\mathbf{u}$ is in V.	Closure under scalar multiplication
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	Distributive property
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	Distributive property
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	Associative property
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$	Scalar identity

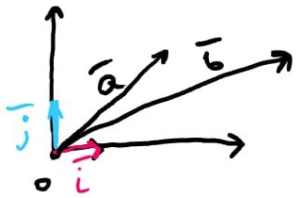
Действия над векторами





Описание положения точки (на доске)

- Для численного описания вводится система координат.
- Каждый вектор – линейная комбинация базисных векторов.
- Координаты векторов представлены коэфициентами в линейной комбинации.
- Линейную комбинацию можно записать в матричном виде



$\bar a = 2{,}5\,\bar i + 2\,\bar j$;

$\bar b = 5\,\bar i + 2\,\bar j$;

$\bar c = 6\cdot\bar a + 3\,\bar b$;

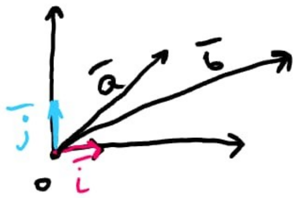
$\bar a = \begin{bmatrix}2{,}5\\2\end{bmatrix}$; $\bar b = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$;

$$\bar c = 6\cdot\begin{bmatrix}2{,}5\\2\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c}\begin{bmatrix}2.5 & 5\\2 & 2\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}1 & \quad 2\end{array}\end{array}\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}\begin{array}{c}1\\2\end{array}$$

Описание положения точки (на доске)

- Для численного описания вводится система координат.
- Каждый вектор – линейная комбинация базисных векторов.
- Координаты векторов представлены коэфициентами в линейной комбинации.
- Линейную комбинацию можно записать в матричном виде



$$\bar a = 2{,}5\,\bar i + 2\,\bar j;$$

$$\bar b = 5\,\bar i + 2\,\bar j;$$

$$\bar c = 6\cdot\bar a + 3\,\bar b;$$

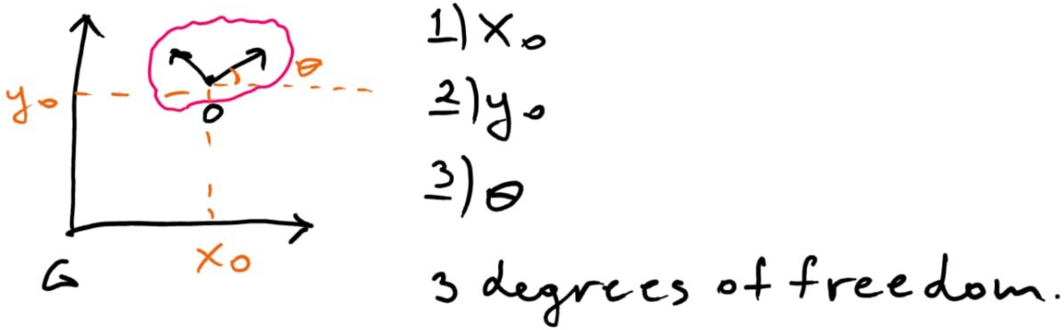
$$\bar a = \begin{bmatrix}2{,}5\\2\end{bmatrix}; \quad \bar b = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix};$$

$$\bar c = 6\cdot\begin{bmatrix}2{,}5\\2\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

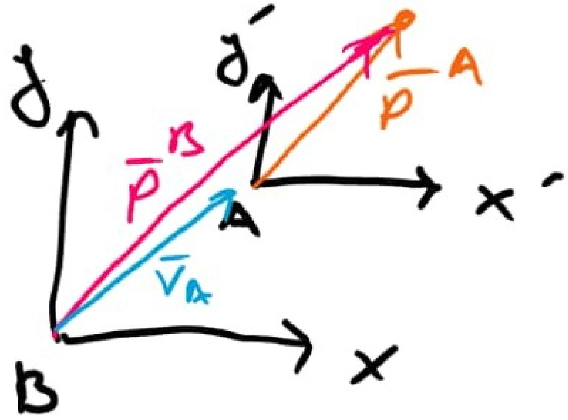
$$= \begin{array}{cc} \begin{bmatrix}2.5 & 5\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \\ \begin{matrix}1 & \quad 2\end{matrix} & \end{array}$$

Описание положения твердого тела (на доске)

- Для того, чтобы описать положение твердого тела, нужно привязать к нему систему координат, которая будет двигаться вместе с ним.
- Затем необходимо определить три параметра: координаты системы отсчета тела и угол между осями x.
- Параметры, необходимые для описания положения системы называются степенями свободы.



Описание положения с помощью матриц (параллельный перенос)

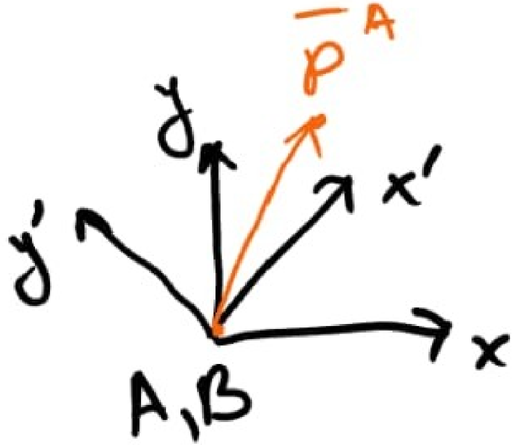


$$\bar{p}^B = \bar{p}^A + \bar{v}_A$$

$$= p^A_x \cdot \bar{x}_A + p^A_y \cdot \bar{y}_A + \bar{v}_A$$

$$\bar{p}^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_{Ax} \\ 0 & 1 & v_{Ay} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^A_x \\ p^A_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Описание положения с помощью матриц (Вращение)

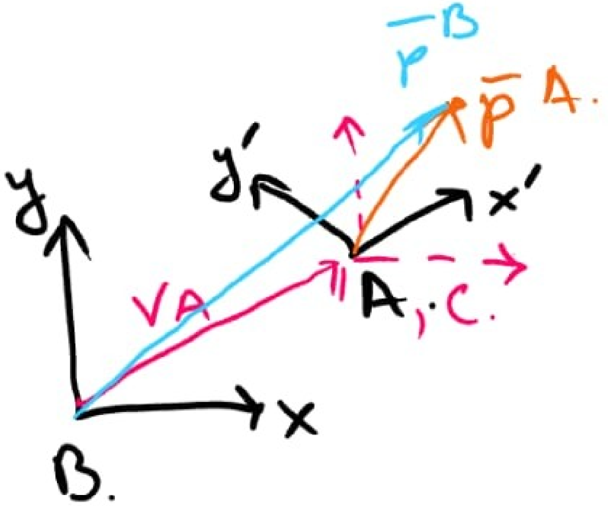


$$p^A = p^A_x \cdot \bar{x}_A + p^A_y \cdot \bar{y}_A$$

$$p^B = \begin{bmatrix} \bar{x}_A^B & \bar{y}_A^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^A_x \\ p^A_y \end{bmatrix}$$

$$p^B = \begin{bmatrix} \bar{x}_{A\,x}^{B} & \bar{y}_{A\,x}^{B} \\ \bar{x}_{A\,y}^{B} & \bar{y}_{A\,y}^{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^A_x \\ p^A_y \end{bmatrix}$$

Вращение + перенос



$$\bar{p}^B = \bar{p}^C + \bar{v}_A.$$

$$\bar{p}^B = p_x^A \cdot \bar{x}_A + p_y^A \cdot \bar{y}_A + \bar{v}_A.$$

$$\bar{p}^B = \begin{bmatrix} \bar{x}_A^B & \bar{y}_A^B & \bar{v}_A^B \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^A \\ p_y^A \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Источники

- Strang Introduction to Linear algebra
- Фихтенгольц основы матанализа.
- Трофимова Курс общей физики
- Craig Introduction to Robotics