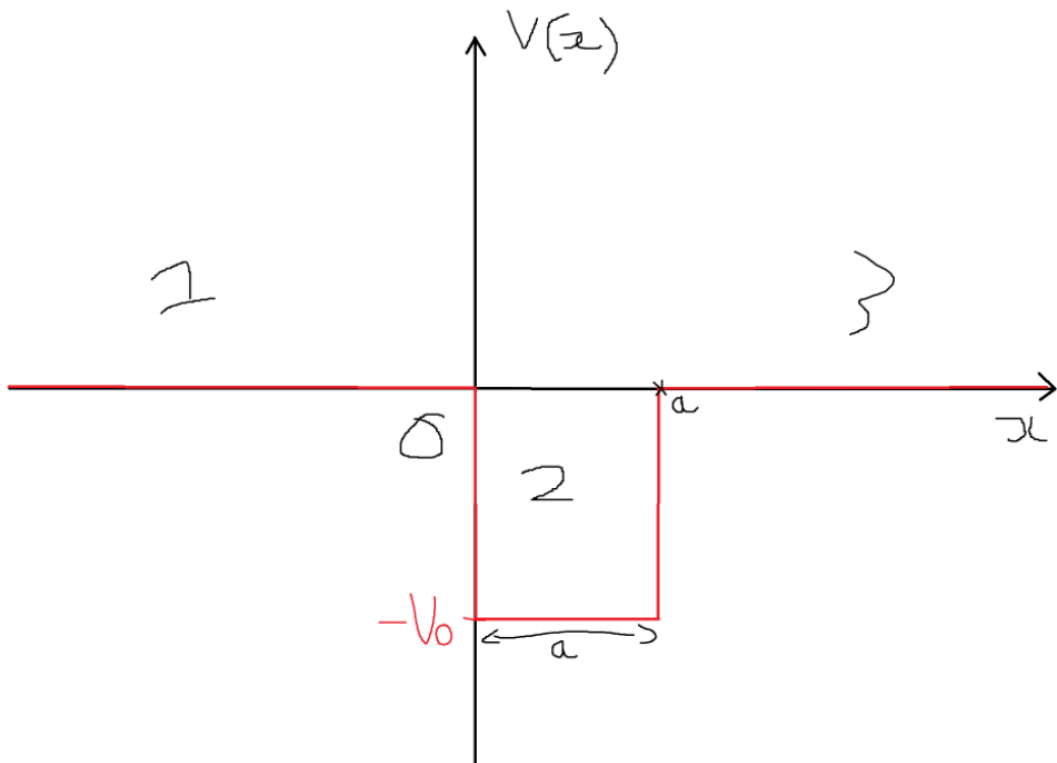


Résolution analytique



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \quad \text{ou } x > a \\ -V_0 & \text{si } 0 < x < a \end{cases}$$

On pose l'équation de Schrödinger

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + v(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

On a 3 cas qui corresponde a chaque zone

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Région} & 1 & \text{si } x < 0 \\ \text{Région} & 2 & \text{si } 0 < x < a \\ \text{Région} & 3 & \text{si } a > x \end{array} \right.$$

Région 1 (x<0)

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} &= E \psi_1(x) \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} &= \frac{2mE \psi_1(x)}{-\hbar^2} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2mE \psi_1(x)}{\hbar^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} + K_1^2 \psi_1(x) &= 0 \\ \text{Avec } K_1^2 &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc que } \left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x) = 0 \\ \text{ou} \\ K_1^2 = 0 \end{array} \right.$$

On trouve donc la solution général pour la région 1

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A e^{iK_1 x} + B e^{-iK_1 x} \\ \text{Avec } A, B &\in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Région 2 (0<x<a)

$$\begin{aligned}
& \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - V_0\psi_2(x) = E\psi_2(x) \\
\Leftrightarrow & \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - (V_0 + E)\psi_2(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{\hbar^2(V_0 + E)}{2m}\psi_2(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + K_2^2\psi_2(x) = 0
\end{aligned}$$

$$\text{Avec } K_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2}}$$

$$\text{On a donc que } \begin{cases} \psi_2(x) = 0 \\ \text{ou} \\ K_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi_2 = De^{iK_2x} + Fe^{-iK_2x}$$

$$\text{Avec } D, F \in \mathbb{C}$$

Région 3 (x>a)

$$\begin{aligned}
& \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} = E\psi_3(x) \\
\Leftrightarrow & \frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} + K_1^2\psi_3(x) = 0
\end{aligned}$$

$$\text{Avec } K_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\text{On a donc que } \begin{cases} \psi_3(x) = 0 \\ \text{ou} \\ K_1^2 = 0 \end{cases}$$

On trouve donc la solution général pour la région 3

$$\psi_3(x) = Ce^{iK_2x} + Ge^{-iK_1x}$$

$G = 0$ Car le terme réfléchi est absent

$$\Leftrightarrow \psi_3(x) = Ce^{iK_1x}$$

Avec $C \in \mathbb{C}$

On regarde maintenant les conditions de raccordement

On doit avoir les conditions suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi'_1(0) = \psi'_2(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \psi'_2(a) = \psi'_3(a) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B = D + F \\ iK_1(A - B) = iK_2(D - F) \\ Ce^{iK_1a} = De^{iK_2a} + Fe^{-iK_2a} \\ iK_1Ce^{iK_1a} = iK_2(De^{iK_2a} - Fe^{-iK_2a}) \end{array} \right.$$

$$K_1(A - B) = K_2(D - F) \Leftrightarrow K_1(A - B) = K_2(A + B - 2F)$$

$$\Leftrightarrow A(K_1 - K_2) = K_2(B - 2F) + K_1B$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{K_2(B - 2F)}{K_1 - K_2} + \frac{K_1B}{K_1 - K_2}$$

$$\Leftrightarrow A = B \left(\frac{K_2 + K_1}{K_1 - K_2} \right) - \frac{2FK_2}{K_1 - K_2}$$

On trouve de la même manière

$$D = \left(\frac{K_2 + K_1}{K_2 - K_1} \right) F - \frac{2K_1}{K_2 - K_1} B$$

Coefficient de transmission

$$\begin{aligned}
T &= \frac{|D|^2}{|A|^2} \\
\Leftrightarrow T &= \frac{4K_1^2 K_2^2}{4K_1^2 K_2 + (K_1^2 + K_2^2)^2 \sin^2(K_2 a)} \\
\Leftrightarrow T &= \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sin^2(K_2 a)} \\
\Leftrightarrow T &= \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sin^2(K_2 a)}
\end{aligned}$$

Pour l'effet Ramsauer on souhaite le coefficient de transmission le plus grand possible ce qui représente une transmission totale

Pour avoir $T = 1$ il faut

$$\begin{aligned}
\sin(K_2 a) &= 0 \\
\Rightarrow K_2 a &= n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow K_2 = \frac{n\pi}{a}
\end{aligned}$$

On a fait la quantification de K_2

Quantification de E

Pour la région 2

On reprend les valeurs de K_2

$$K_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2}}$$

On injecte sa quantification

$$\begin{aligned}\frac{n\pi}{a} &= \sqrt{\frac{2m(V_0 + E_n)}{\hbar^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{(n\pi)^2}{a^2} &= \frac{2m(V_0 + E_n)}{\hbar^2} \\ \Leftrightarrow \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2} &= (V_0 + E_n) \\ \Leftrightarrow \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2} - V_0 &= E_n \\ \Leftrightarrow E_n &= \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2} - V_0 \\ \Leftrightarrow E_n &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(n\pi)^2}{a^2} - V_0\end{aligned}$$

Pour la région 1 & 3

On reprend les valeur de K_1

$$K_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

On injecte sa quantification

$$\begin{aligned}\frac{n\pi}{a} &= \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{(n\pi)^2}{a^2} &= \frac{2mE_n}{\hbar^2} \\ \Leftrightarrow \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2} &= E_n \\ \Leftrightarrow E_n &= \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2} \\ \Leftrightarrow E_n &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(n\pi)^2}{a^2}\end{aligned}$$