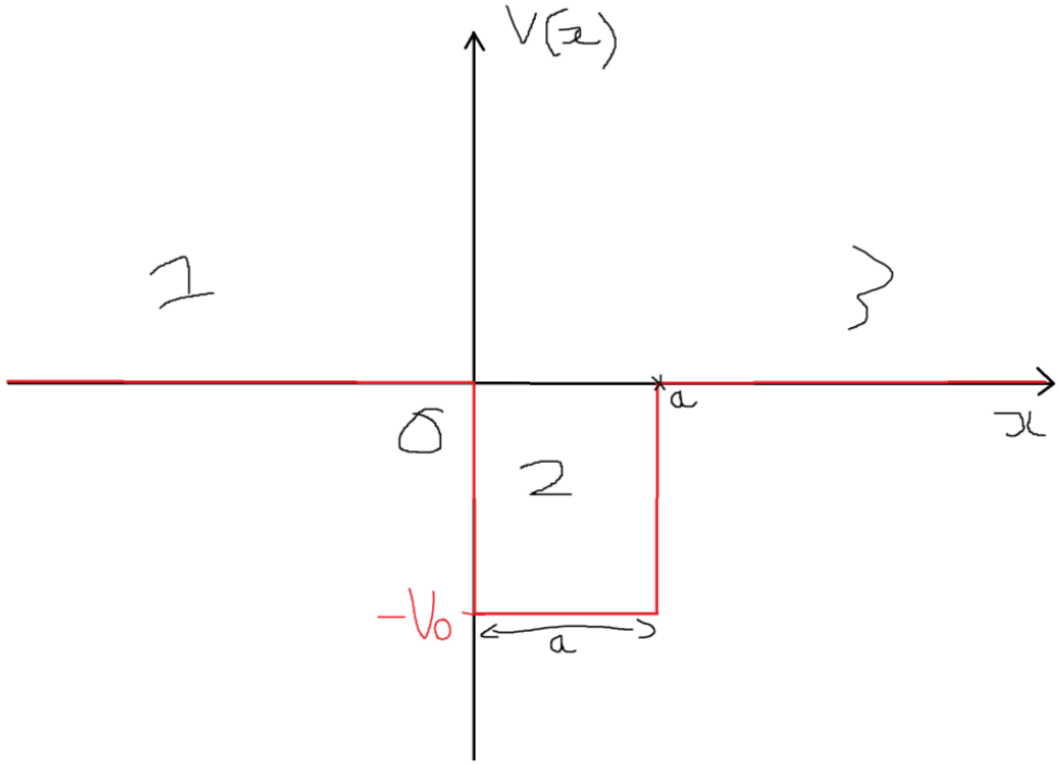
Résolution analytique



$$V(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \qquad ou \quad x > a \\ -V_0 & si \quad 0 < x < a \end{cases}$$

On pose l'équation de Schrödinger

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + v(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

On a 3 cas qui corresponde a chaque zone

$$\begin{cases} Région & 1 & si & x<0 \\ Région & 2 & si & 0<x<a \\ Région & 3 & si & a>x \end{cases}$$

Région 1 (x<0)

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = E\psi_1(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = \frac{2mE\psi_1(x)}{-\hbar^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2mE\psi_1(x)}{\hbar^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + K_1^2\psi_1(x) = 0$$

$$Avec\ K_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$On\ a\ donc\ que \begin{cases} \psi_1(x) = 0 \\ ou \\ K_1^2 = 0 \end{cases}$$

On trouve donc la solution général pour la région 1

$$\psi_1(x) = Ae^{iK_1x} + Be^{-iK_1x}$$

$$Avec\ A, B \in \mathbb{C}$$

Région 2 (0<x<a)

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - V_0\psi_2(x) = E\psi_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - (V_0 + E)\psi_2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{\hbar^2(V_0 + E)}{2m}\psi_2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi_2}{dx^3} + K_2^2\psi_2(x) = 0$$

$$Avec\ K_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2}}$$

$$On\ a\ donc\ que \begin{cases} \psi_2(x) = 0 \\ ou \\ K_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$=> \psi_2 = De^{iK_2x} + Fe^{-iK_2x}$$

$$Avec\ D, F \in \mathbb{C}$$

Région 3 (x>a)

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} = E\psi_3(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} + K_1^2\psi_3(x) = 0$$

$$Avec\ K_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$On\ a\ donc\ que \begin{cases} \psi_3(x) = 0 \\ ou \\ K_1^2 = 0 \end{cases}$$

On trouve donc la solution général pour la région 3

$$\psi_3(x) = Ce^{iK_2x} + Ge^{-iK_1x}$$

$$G = 0 \; Car\ le\ terme\ réfléchi\ est\ absent$$

$$\Leftrightarrow \psi_3(x) = Ce^{iK_1x}$$

$$Avec\ C \in \mathbb{C}$$

On regarde maintenant les conditions de raccordement

$$On\ doit\ avoir\ les\ conditions\ suivante$$

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \psi_2'(a) = \psi_3'(a) \end{cases} => \begin{cases} A + B = D + F \\ iK_1(A - B) = iK_2(D - F) \\ Ce^{iK_1a} = De^{iK_2a} + Fe^{-iK_2a} \\ iK_1Ce^{iK_1a} = iK_2(De^{iK_2a} - Fe^{-iK_2a}) \end{cases}$$

$$K_1(A - B) = K_2(D - F) \Leftrightarrow K_1(A - B) = K_2(A + B - 2F)$$

$$\Leftrightarrow A(K_1 - K_2) = K_2(B - 2F) + K_1B$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{K_2(B - 2F)}{K_1 - K_2} + \frac{K_1B}{K_1 - K_2}$$

$$\Leftrightarrow A = B\left(\frac{K_2 + K_1}{K_1 - K_2}\right) - \frac{2FK_2}{K_1 - K_2}$$

On trouve de la même manière

$$D = \left(\frac{K_2 + K_1}{K_2 - K_1}\right)F - \frac{2K_1}{K_2 - K_1}B$$

Coefficient de transmission

$$T = \frac{|D|^2}{|A|^2}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{4K_1^2K_2^2}{4K_1^2K_2 + (K_1^2 + K_2^2)^2 sin^2(K_2a)}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 sin^2(K_2a)}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} sin^2(K_2a)}$$

$$Pour\ l'effet\ ramsauer\ on\ souhaite\ le\ coefficient\ de\ transmission$$

$$le\ plus\ grand\ possible\ ce\ qui\ represente\ une\ transmission\ total$$

$$Pour\ avoir\ T = 1\ il\ faut$$

$$sin(K_2a) = 0$$

$$\Rightarrow K_{\mathrm{n2}}a = n\pi\ (n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow K_{\mathrm{n2}} = \frac{n\pi}{a}$$

$$On\ a\ fait\ la\ quantification\ de\ K_2$$

Quantification de E

Pour la région 2

$$On\ reprend\ les\ valeur\ de\ K_2$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2}}$$

$$On\ injecte\ sa\ quantification$$

$$\frac{n\pi}{a} = \sqrt{\frac{2m(V_0 + E_n)}{\hbar^2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(n\pi)^2}{a^2} = \frac{2m(V_0 + E_n)}{\hbar^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2} = (V_0 + E_n)$$
$$\Leftrightarrow \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2} - V_0 = E_n$$
$$\Leftrightarrow E_n = \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2} - V_0$$
$$\Leftrightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{(n\pi)^2}{a^2} - V_0$$

Pour la région 1 & 3

$$On\ reprend\ les\ valeur\ de\ K_1$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$On\ injecte\ sa\ quantification$$

$$\frac{n\pi}{a} = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(n\pi)^2}{a^2} = \frac{2mE_n}{\hbar^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2} = E_n$$
$$\Leftrightarrow E_n = \frac{(n\pi\hbar)^2}{(2m)a^2}$$
$$\Leftrightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{(n\pi)^2}{a^2}$$