Rapport TP - Simulation de Variables Aléatoires Réelles

Antonin Peralta ING1 - GI

Exercice 1

1. Lois binomiale

La loi binomiale étant discrète, sa fonction de répartition est en "escalier" et n'est donc pas continue. On ne peut donc pas utiliser la formule inverse et chercher dans quel intervalle et de probabilité tombe notre U (vu en td)
On prendras les paramètre $n = 10,\ p = 0.69,\ N = 5658\ (Taille\ de\ l'échantillon)$

a) Simulation
On cherche k entier tels que
$F(k-1)\ <\ U\ <\ F(k)$

b) Résultat théorique
$\mathbb{E}(x) = np = 10\ \times 0.69\ =\ 6.9$
$Var(X)\ =\ np(1-p) = 10 \times 0.69 \times (1-0.69)\ =\ 2.139$

c) Résultat obtenue

```
Moyenne empirique : 6.860374690703429 espérance, 6.8999999999999995
Variance empirique : 2.120130082300408 Variance, 2.1390000000000002
```

Figure 1: Résultat simulation n1

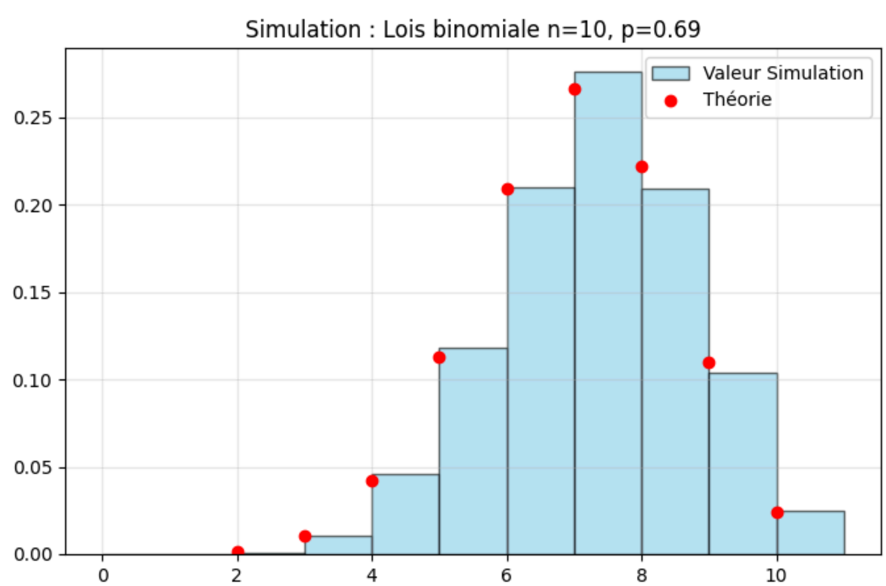

Figure 2: Graphique simulation n1

```
Moyenne empirique : 6.827854365500177 espérance, 6.8999999999999995
Variance empirique : 2.129786170377726 Variance, 2.1390000000000002
```

Figure 3: Résultat simulation n2

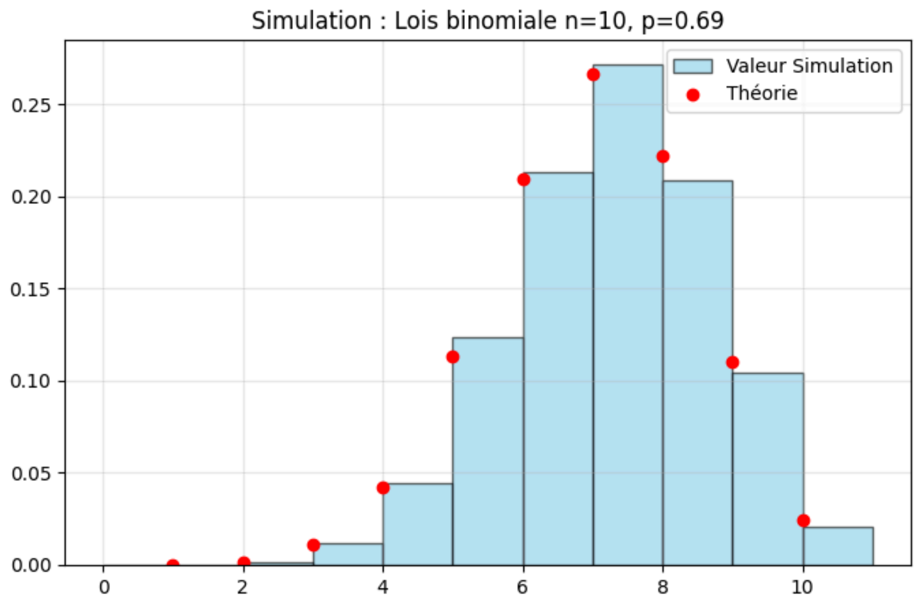

Figure 4: Graphique simulation n2

```
Moyenne empirique : 6.893071756804525 espérance, 6.8999999999999995
Variance empirique : 2.1513447177212335 Variance, 2.1390000000000002
```

Figure 5: Résultat simulation n3

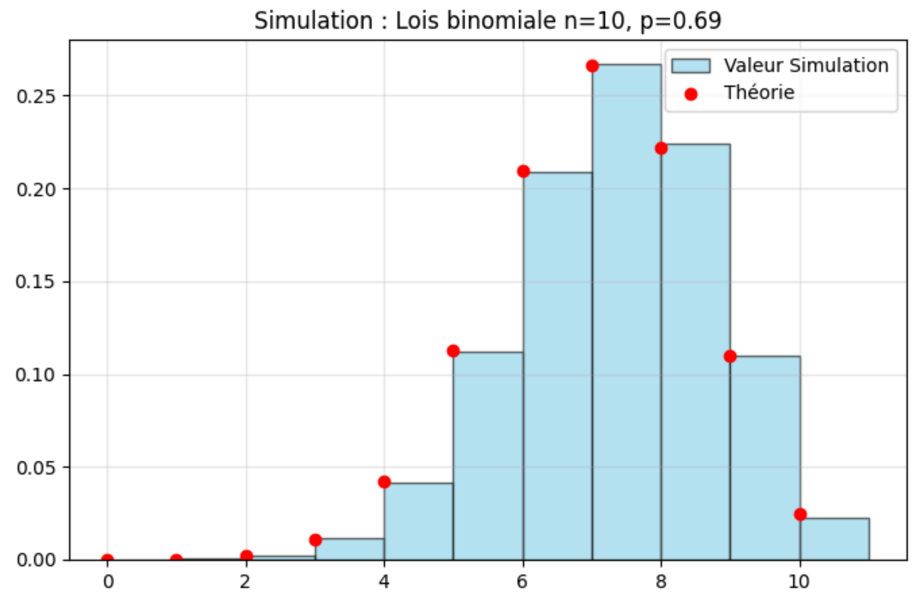

Figure 6: Graphique simulation n3

On remarque donc qu'avec $n = 10,\ p = 0.69,\ N = 5658$ la moyenne et variance empirique se rapproche fortement des valeur d'espérance et variance théorique, de plus on remarque via le graphique que les valeur de simmulation prenne bien les valeur théorique

2. Loi de Poisson

Ici, même problème que pour la loi binomiale, la loi poisson est dicrete est donc n'admet pas de formule inverse
On prendras les paramètre $\lambda = 8,\ N = 5656\ (Taille\ de\ l'échantillon)$
a) Simulation
Même idée que pour la binomiale

b) Résultat théorique
$\mathbb{E} = \lambda = 8$
$Var\ =\ \lambda\ =\ 8$

c) Résultat obtenue

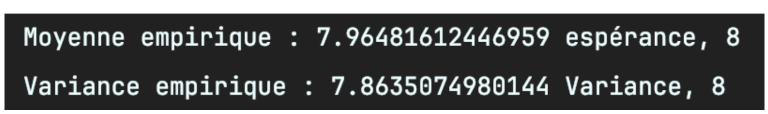
```
Moyenne empirique : 7.96481612446959 espérance, 8
Variance empirique : 7.8635074980144 Variance, 8
```

Figure 7: Résultat simulation n1

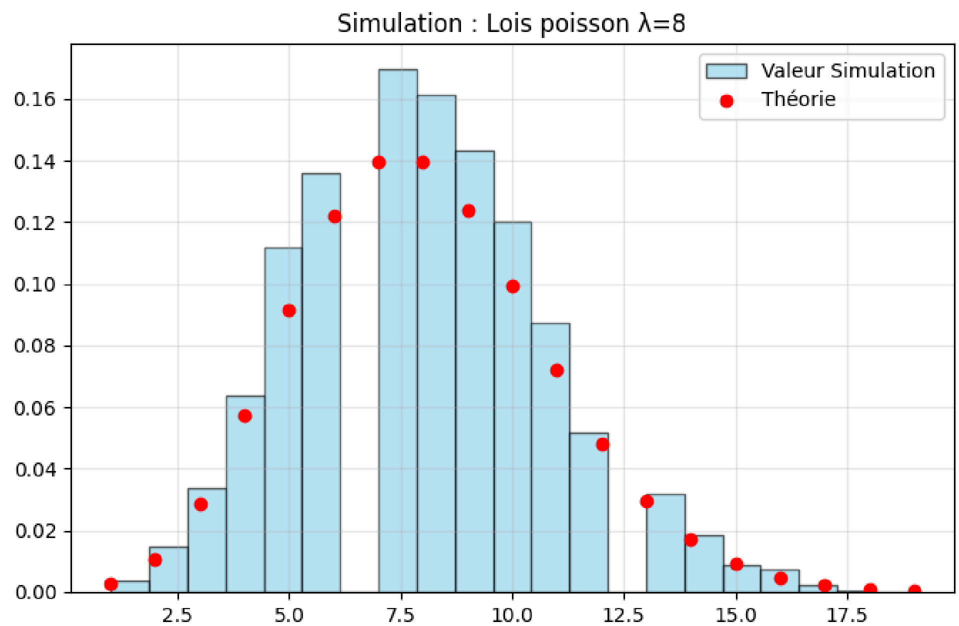

Figure 8: Graphique simulation n1

```
Moyenne empirique : 7.950318246110325 espérance, 8
Variance empirique : 8.05711446731913 Variance, 8
```

Figure 9: Résultat simulation n2

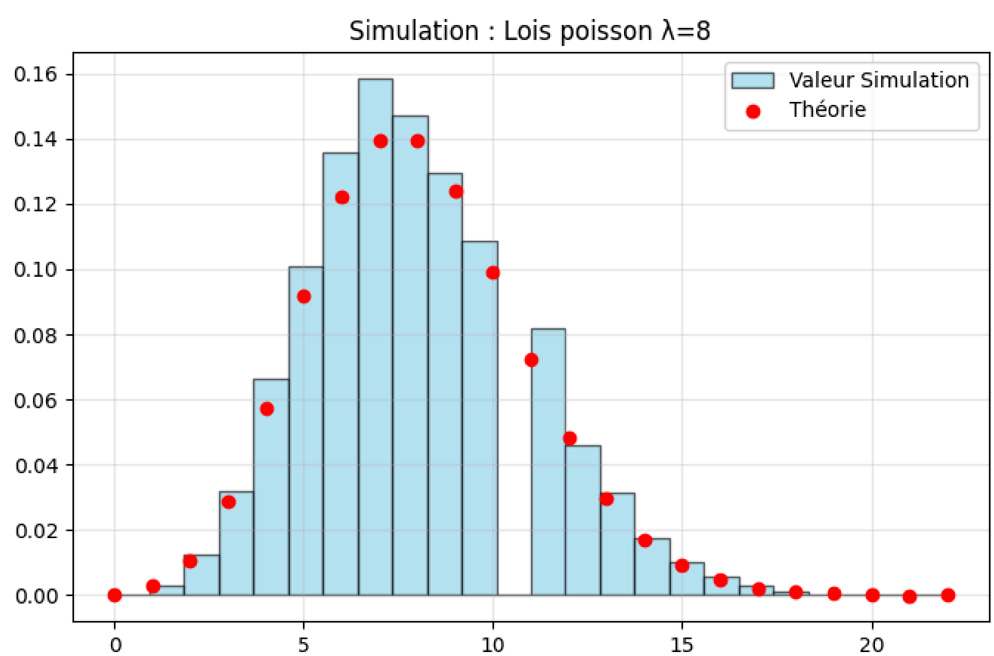

Figure 10: Graphique simulation n2

```
Moyenne empirique : 8.017857142857142 espérance, 8
Variance empirique : 8.259758915942616 Variance, 8
```

Figure 11: Résultat simulation n3

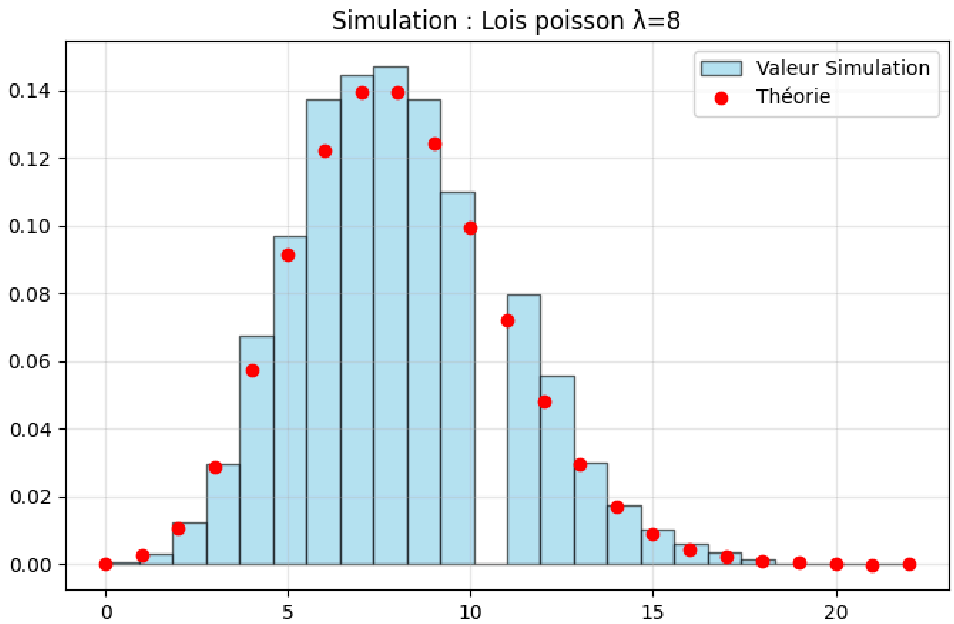

Figure 12: Graphique simulation n3

On remarque donc qu'avec $\lambda = 8,\ N = 5656$ la moyenne et variance empirique se rapproche fortement des valeur d'espérance et variance théorique, de plus on remarque via le graphique que les valeur de simmulation semble bien suivre les valeur théorique malgré une absence avant 10

3. Loi Exponentielle

Pour la lois exponentielle on prend le paramètre $\lambda = 7$ et $N = 5693$ $(Taille\ de\ l'échantillon)$

a) Calcul de l'inverse

Fonction répartition $F(x) = 1 - e^{-\lambda}x$,

On pose $u = 1 - e^{-\lambda x} \Longleftrightarrow x = \dfrac{-ln(1-u)}{\lambda}$

b) Résultat théorique

$$\mathbb{E} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{7} \approx 0.1428$$

$$Var = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} \approx 0.0204$$

c) Résultat obtenue

```
Moyenne empirique : 0.14398879549620927 espérance, 0.14285714285714285
Variance empirique : 0.020155544495427863 Variance, 0.02040816326530612
```

Figure 13: Résultat simulation n1

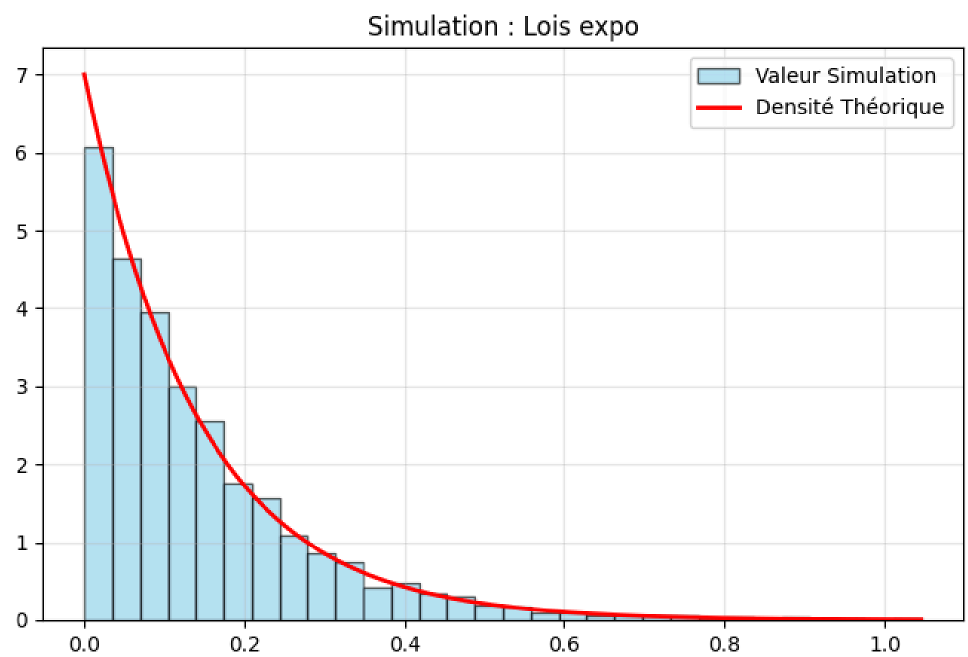

Figure 14: Graphique simulation n1

```
Moyenne empirique : 0.14443242451051697 espérance, 0.14285714285714285
Variance empirique : 0.02018740677038574 Variance, 0.02040816326530612
```

Figure 15: Résultat simulation n2

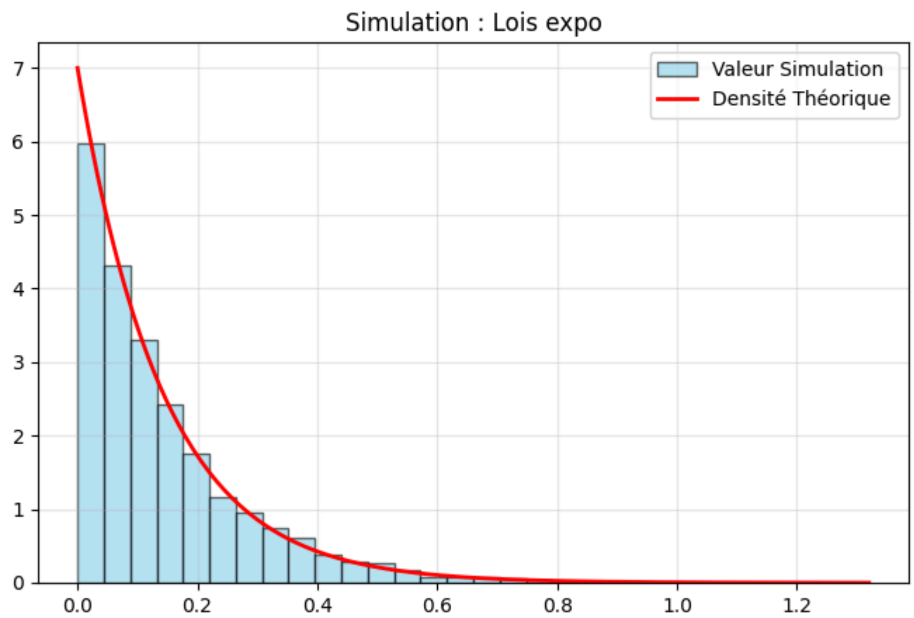

Figure 16: Graphique simulation n2

```
Moyenne empirique : 0.1405619158237392 espérance, 0.14285714285714285
Variance empirique : 0.019238961385576833 Variance, 0.02040816326530612
```

Figure 17: Résultat simulation n3

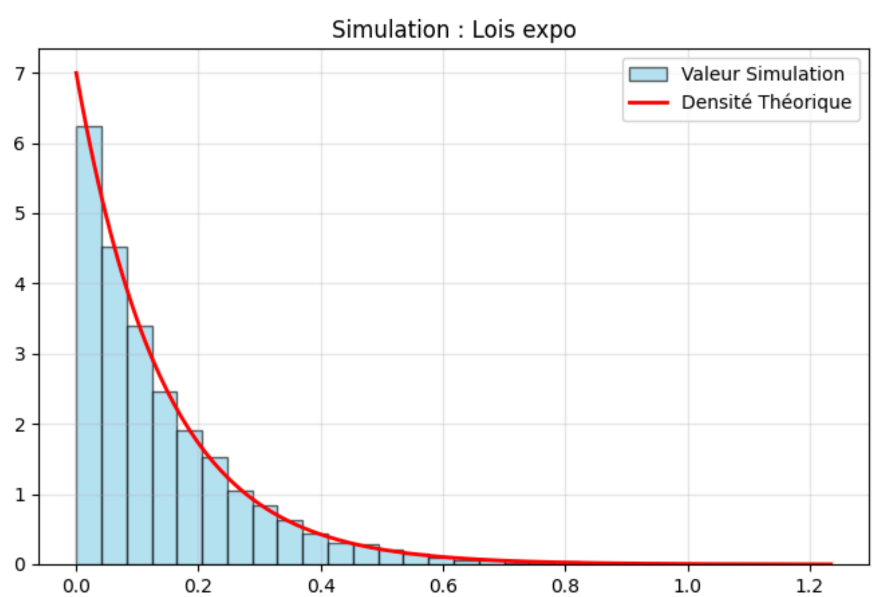

Figure 18: Graphique simulation n3

On remarque donc qu'avec $\lambda = 7\ et\ N \approx 5693$ la moyenne et variance empirique se rapproche fortement des valeur d'espérance et variance théorique, de plus on remarque via le graphique que les valeur de simmulation suivent bien la fonction densité

4. f(x) = 2x

On prend $N = \ 5693 \ (Taille\ de\ l'échantillon)$

a) Calcul de l'inverse

On a $f(x) \ = \ 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ il nous faut $F(x)$ pour faire l'inversion $F(x) \ = \ \int_0^x 2tdt \ = \ \left[2\frac{t^2}{2}\right]_0^x \ = \ \left[t^2\right]_0^x = x^2$

Inversion $u \ = \ x^2 \ \Longrightarrow x \ = \sqrt{u}$

b) Résultat théorique

$$\mathbb{E}(X) = \ \int_0^1 x2x\ dx \ = \ \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \ = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) \ = \ \int_0^1 x^2 2x\ dx \ = \ \left[\frac{2}{4}x^4\right]_0^1 \ = \ \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 \ = \ \frac{1}{2}$$

$$Var(X) \ = \ \mathbb{E}\left(X^2\right) \ - \ \mathbb{E}(X)^2 \ = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \ = \ \frac{1}{18} \approx 0.0556$$

c) Résultat obtenue

```
Moyenne empirique : 0.6656273501316843 espérance, 0.6667
Variance empirique : 0.05596584924560751 Variance, 0.0556
```

Figure 19: Résultat simulation n1

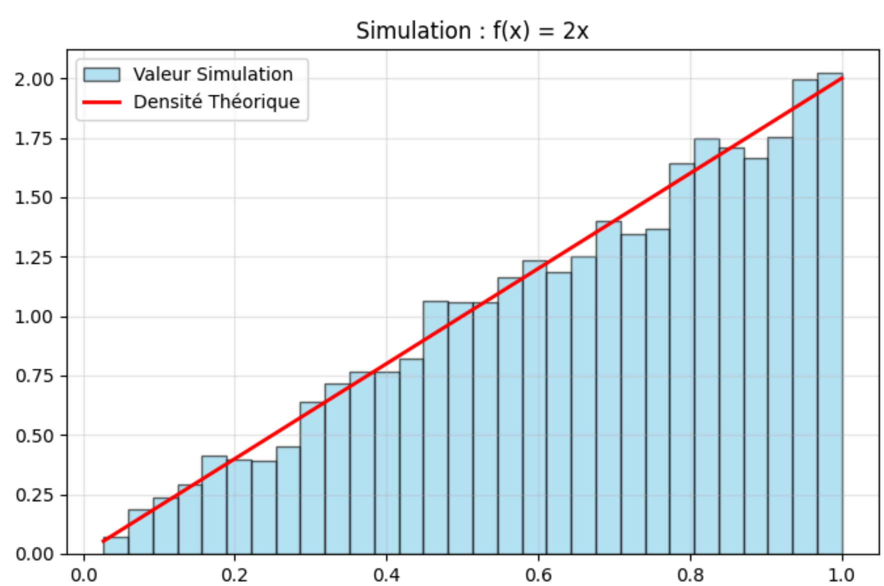

Figure 20: Graphique simulation n1

```
Moyenne empirique : 0.6682575799661303 espérance, 0.6667
Variance empirique : 0.05410384716232729 Variance, 0.0556
```

Figure 21: Résultat simulation n2

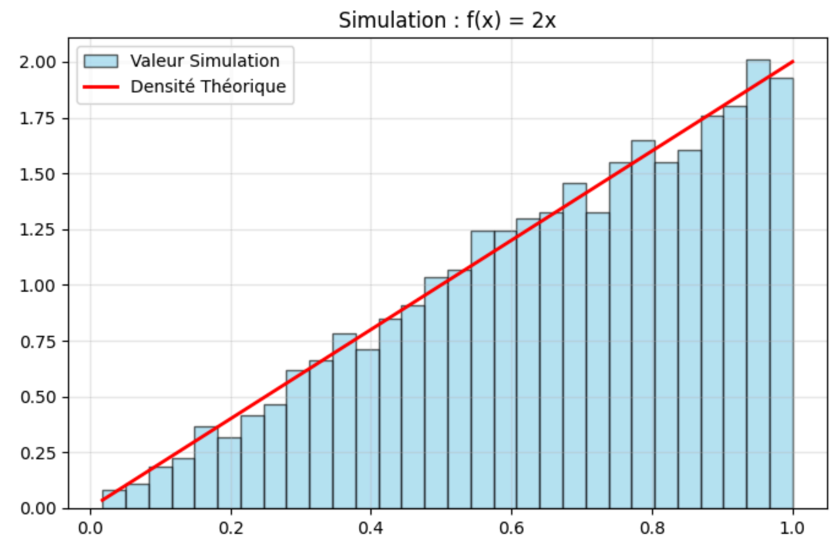

Figure 22: Graphique simulation n2

```
Moyenne empirique : 0.6691515323057708 espérance, 0.6667
Variance empirique : 0.056092842629569026 Variance, 0.0556
```

Figure 23: Résultat simulation n3

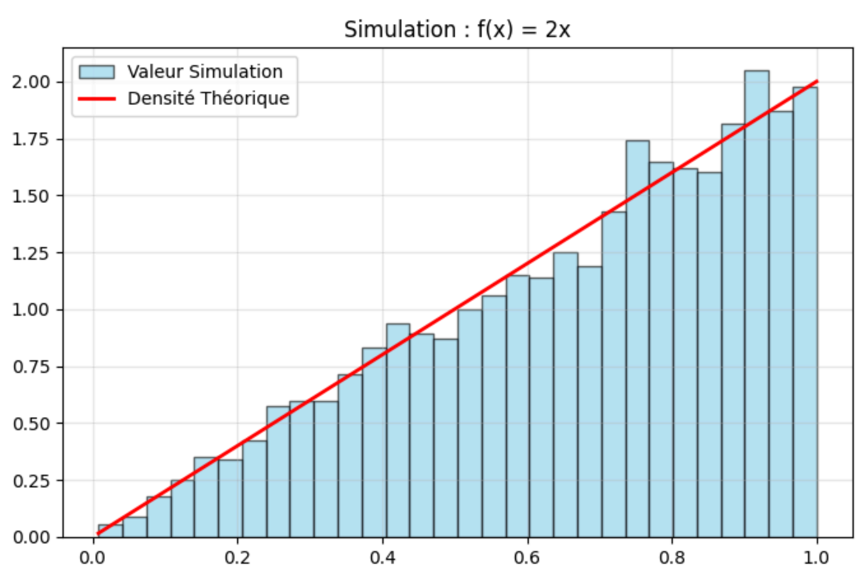

Figure 24: Graphique simulation n3

On remarque donc qu'avec $N \approx 5693$ la moyenne et variance empirique se rapproche fortement des valeur d'espérance et variance théorique, pour ce qui est du graphique on remarque que les valeur suivent-aussi globalement la courbe de densité même si cela semble moin précis que pour la lois exponnentielle (par exemple)

Exercice 2

5. Lois uniforme

On prend les paramètre $N = 10000 \geqslant 500\ ;\ n = 150$

a) Calcule des valeur $\mu\ et\ \sigma\ f(x) = \begin{cases} 1\ si\ x \in [0,1] \\ 0\ sinon \end{cases}$

$$\mu = \mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xdx = \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{\infty} xdx = \int_{0}^{1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2dx = \int_{-\infty}^{0} x^2dx + \int_{0}^{1} x^2dx + \int_{1}^{\infty} x^2dx = \int_{0}^{1} x^2dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

b) Application mathématique

Appliquons le Théorème Central Limite avec

$$Zn = \frac{Sn - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}$$

Avec

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{12}} \quad n = 150 \quad Sn = \sum_{i=0}^{150} X_i$$

Ce qui nous donne

$$Zn = \frac{Sn - \frac{1}{2}150}{\frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{150}} = \frac{2(Sn - 75)}{5\sqrt{2}}$$

c) Résultat théorique

$$Moyenne = 0$$
$$\sigma^2 = 1$$

d) Résultat obtenue

```
Moyenne empirique : -0.0045584534649200864 moyenne, 0
Variance empirique : 0.989479610159545 sigma, 1
```

Figure 25: Résultat simulation n1

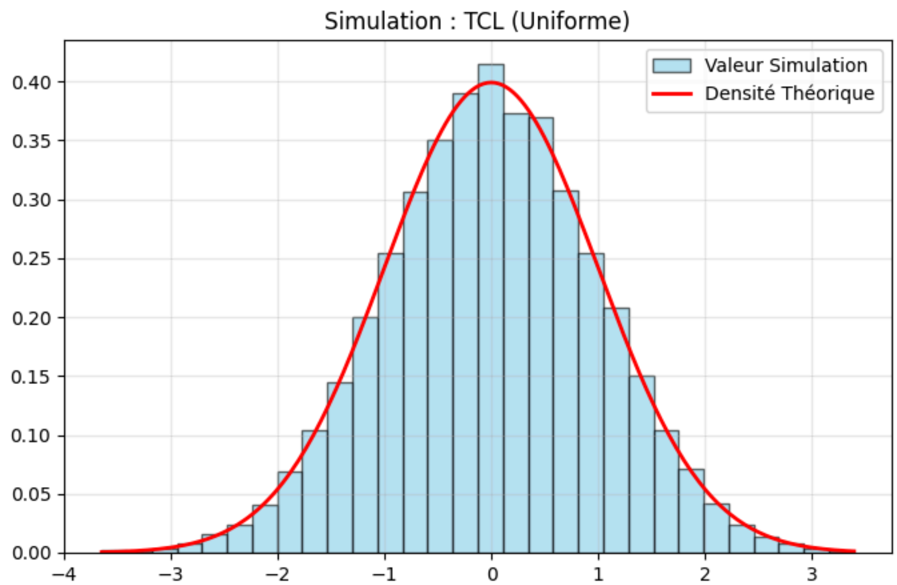

Figure 26: Graphique simulation n1

```
Moyenne empirique : -0.007563421739087789 moyenne, 0
Variance empirique : 0.9809676140021792 sigma, 1
```

Figure 27: Résultat simulation n2

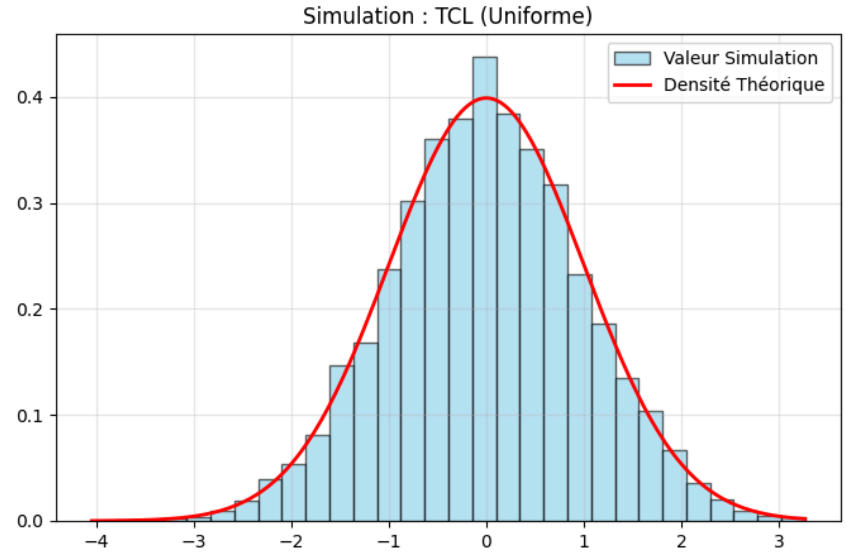

Figure 28: Graphique simulation n2

```
Moyenne empirique : -0.004683794646321763 moyenne, 0
Variance empirique : 1.0185494932756791 sigma, 1
```

Figure 29: Résultat simulation n3

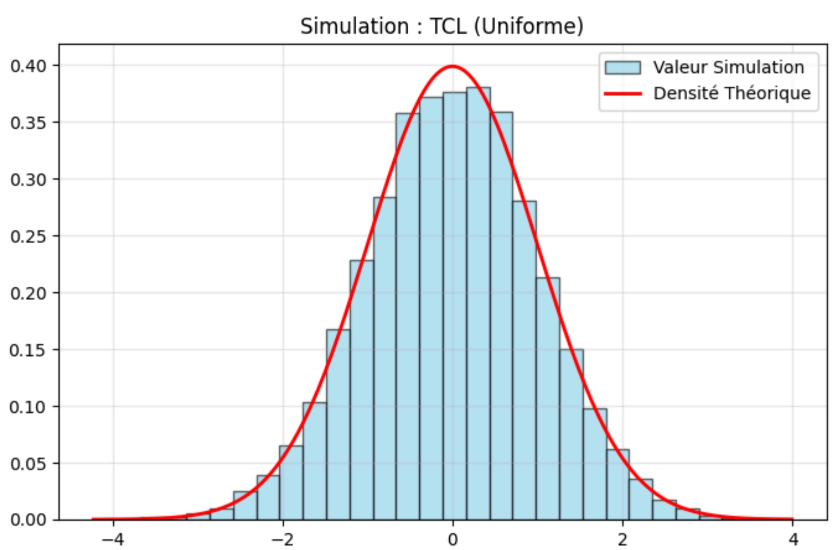

Figure 30: Graphique simulation n3

On remarque que les valeur de moyenne et de variance empirique sont proche des valeur théorique, pour ce qui est des graphique les valeur de simulation suivent bien les valeur les plus éloigné se trouvant au sommet (vers le 0)

6. Lois Exponentielle

Pour la lois exponentielle on prend le paramètre $\lambda = 7$; $n = 150$ $N = 5693$ $(Taille\ de\ l'échantillon)$

a) Calcule des valeur $\mu\ et\ \sigma$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{7} = \mu$$
$$Var(X) = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} = \sigma^2$$
$$\sigma = \frac{1}{7}$$

b) Application mathématique
Appliquons le Théorème Central Limite avec

$$Zn = \frac{Sn - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}$$

Avec

$$\mu = \frac{1}{7} \quad \sigma = \frac{1}{7} \quad n = 150 \quad Sn = \sum_{i=0}^{150} X_i$$

Ce qui nous donne

$$Zn = \frac{Sn - \frac{1}{7}150}{\frac{1}{7}\sqrt{150}} = \frac{7Sn - 150}{5\sqrt{6}}$$

c) Résultat théorique
$Moyenne = 0 = \mu$
$\sigma^2 = 1$

d) Résultat obtenue

Exercice 3

7. $\mathcal{N}(0,1)$

On prend la taille d'échantillon $N = 5693$ afin de pouvoir comparé avec l'exercice précédent

a) Application mathématique
Avec la méthode Box-Muller, on a

$$X = \sqrt{-2ln(U)}cos(2\pi V)$$

$Y = \sqrt{-2ln(U)}sin(2\pi V)$

$U, V \in [0, 1]$

b) Résultat théorique

$Moyenne = 0 = \mu$

$\sigma^2 = 1$

d) Résultat obtenue

```
Moyenne empirique : -0.025570385745756423 espérance, 0
Variance empirique : 0.99505950443327 Variance, 1
```

Figure 31: Résultat simulation n1

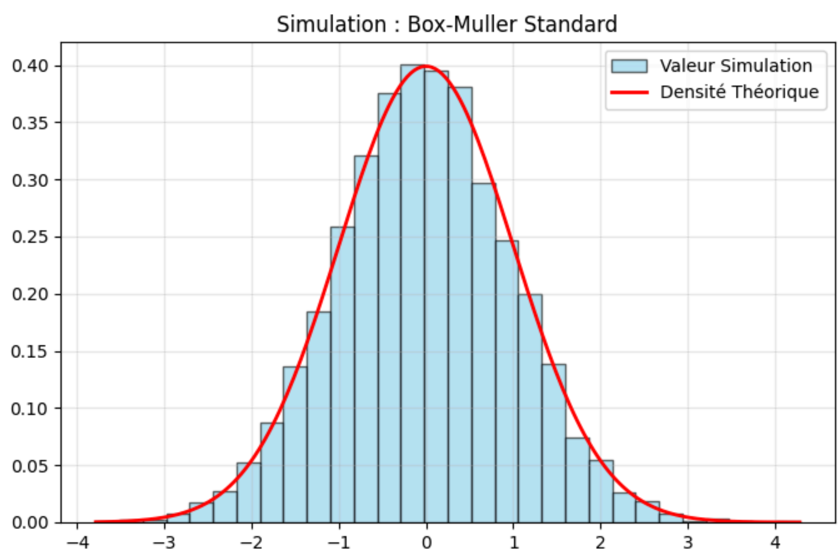

Figure 32: Graphique simulation n1

```
Moyenne empirique : 0.016613183436433643 espérance, 0
Variance empirique : 0.9999103397121129 Variance, 1
```

Figure 33: Résultat simulation n2

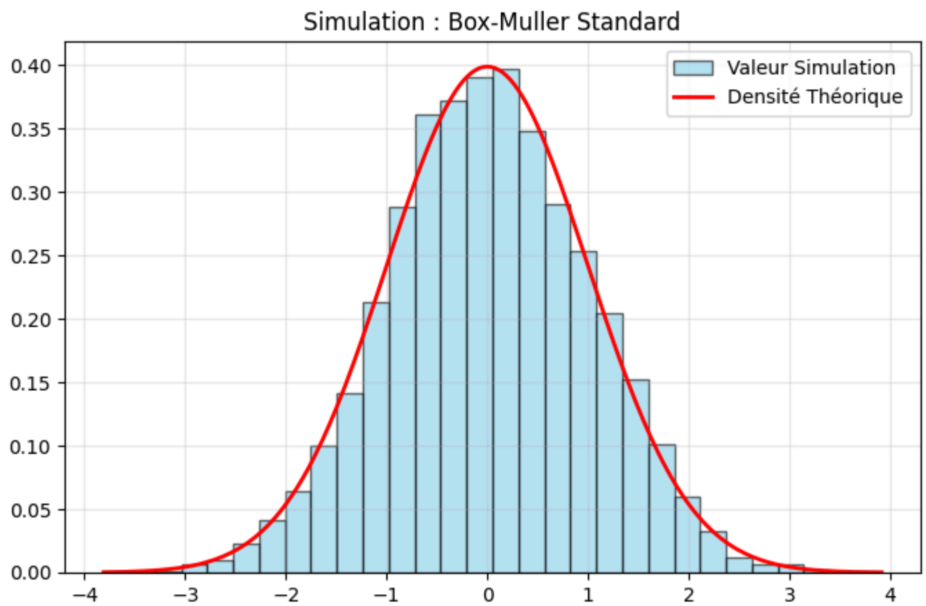

Figure 34: Graphique simulation n2

```
Moyenne empirique : 0.007727351791851681 espérance, 0
Variance empirique : 1.0188719926114238 Variance, 1
```

Figure 35: Résultat simulation n3

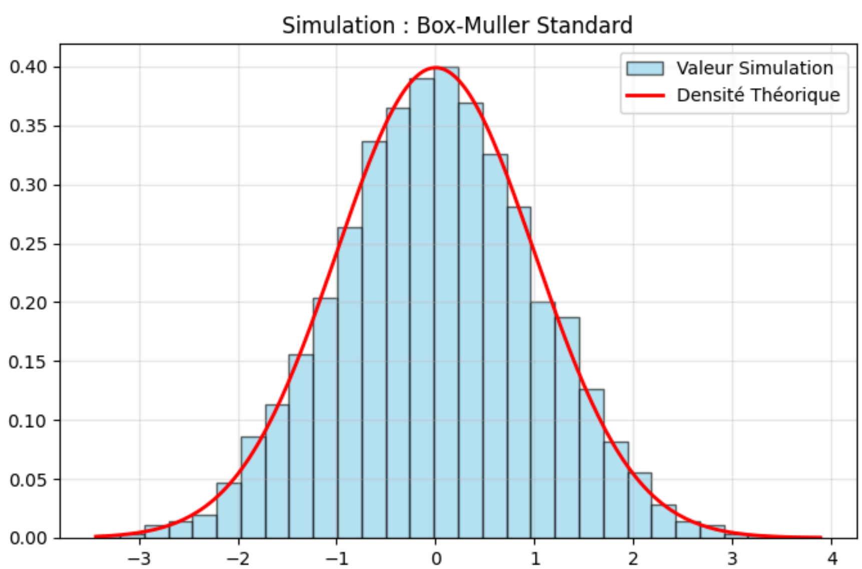

Figure 36: Graphique simulation n3

La méthode de box-muller semble plus précise que la TCL, surtout au niveau du sommet (vers le 0) ou les valeur de la simulation semble plus proche de la fonction densité que la TCL ou elle était souvent assez inférieur ou supérieur

8. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

On prendra les paramètre $\mu = 5 \;\; \sigma = 2 \;\;\; N = 5693$ (*Taille de l'échantillon*)

a) Application mathématique

$X = \sqrt{-2ln(U)}cos(2\pi V)$

$Y \; = \; \sqrt{-2ln(U)}sin(2\pi V)$

$U, V \; \in \; [0, 1]$

On prend Z la concatenation de X et Y

on a donc que $Z_{dist} \; = \; Z*(\mu + \sigma)$

b) Résultat théorique

$Moyenne \; = \; 5 \; = \; \mu$

$\sigma^2 = 4$

d) Résultat obtenue

```
Moyenne empirique : 5.018120817799728 espérance, 5
Variance empirique : 4.044959344286674 Variance, 4
```

Figure 37: Résultat simulation n1

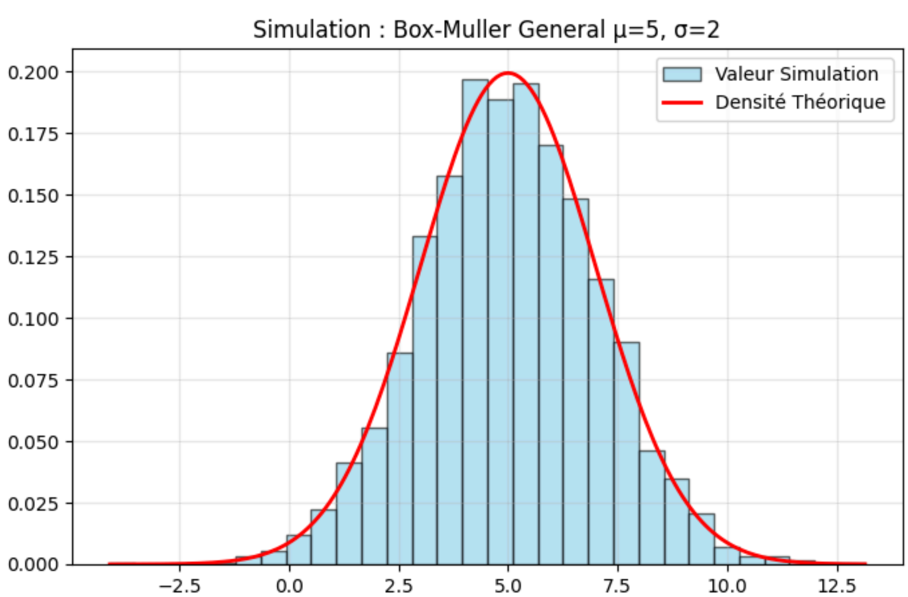

Figure 38: Graphique simulation n1

```
Moyenne empirique : 4.964933685163447 espérance, 5
Variance empirique : 4.106020573196242 Variance, 4
```

Figure 39: Résultat simulation n2

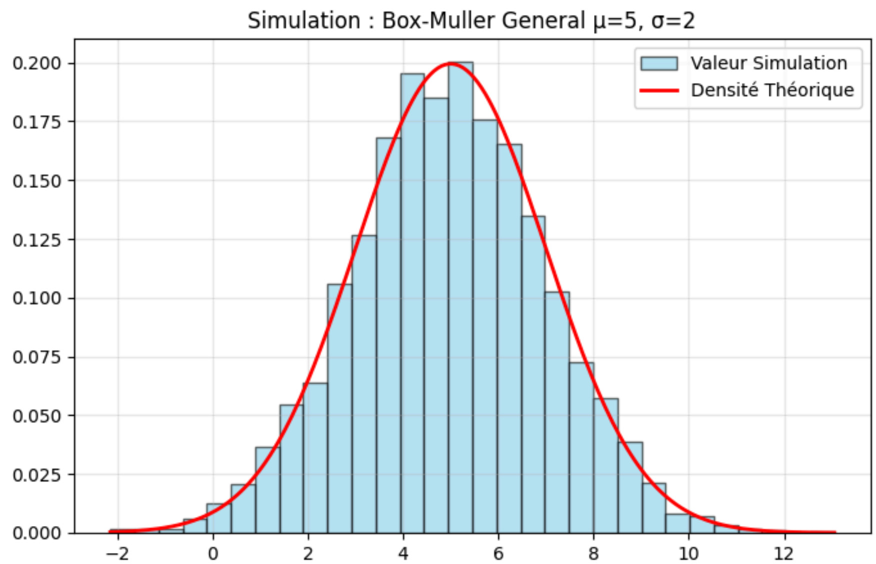

Figure 40: Graphique simulation n2

```
Moyenne empirique : 4.9483229632572 espérance, 5
Variance empirique : 4.048500325340037 Variance, 4
```

Figure 41: Résultat simulation n3

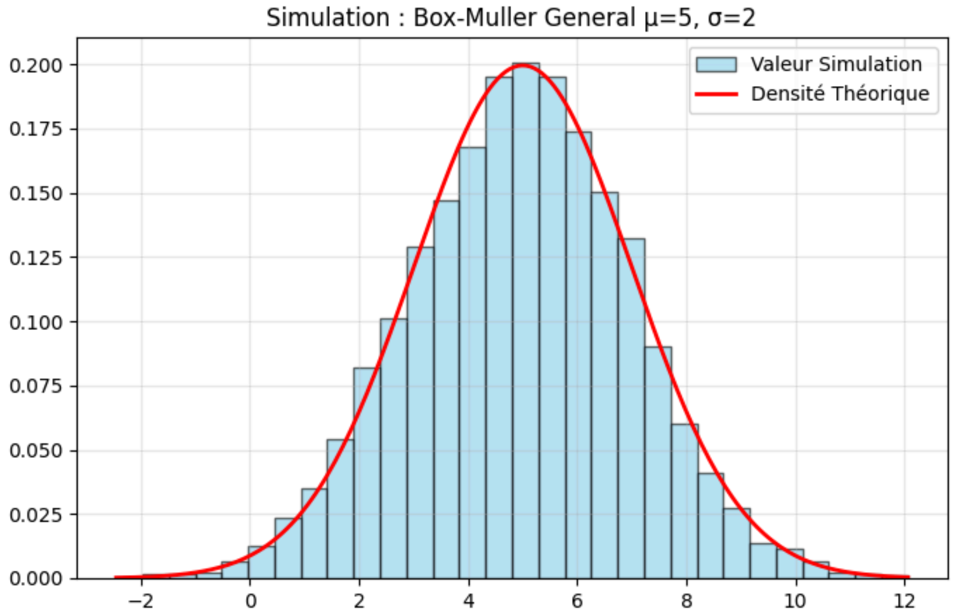

Figure 42: Graphique simulation n3

Les résultat empirique sont équivalent au résultat théorique, même si on peut voir sur les histogramme que cela semble un peux moin précis que la question précédente on retrouve les imprécision au niveau du sommet (0)

$*_*{*_*}{*_*}{*_*}{*_*}*$ *FIN* $*_*{*_*}{*_*}{*_*}{*_*}*$