# Harjoitustehtävät, loka–marraskuu 2010. Vaativammat – ratkaisuja

**1.** Määrittäkää kaikki positiiviset kokonaisluvut $m$ ja $n$, joille kertolaskun

$$\underbrace{11\ldots1}_{m \text{ kpl}} \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kpl}}$$

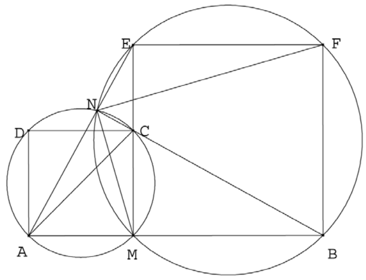
tulos on palindromiluku [numerot samassa järjestyksessä vasemmalta oikealle ja oikealta vasemmalle].

**Ratkaisu.** Kertolaskun vaihdannaisuuden vuoksi voidaan olettaa, että $m \le n$. Ajatellaan kertolasku suoritettavaksi normaalilla kertolaskualgoritmilla, "allekkain". Joudutaan siis laskemaan yhteen $n$ riviä, joissa kussakin on $m$ ykköstä. Jos $n \le 9$, päällekkäin ei ole useampia kuin 9 ykköstä, eikä yhteenlaskussa tarvita muistinumeroa. Ykkösrivit muodostavat "suunnikaskuvion", ja samalla etäisyydellä vasemmasta ja oikeasta laidasta on yhtä korkea ykkössarake. Tulos on palidromiluku. Olkoon sitten $n \ge 10$. Nyt oikeasta laidasta lukien kymmenen saraketta tuottavat yhteenlaskun jälkeen tuottavat tulon lopun $\ldots 0987654321$. Toisaalta $m$ ja $n$ ovat kumpikin suurempia, kuin luku, joka kirjoitetaan yhdeksällä ykkösellä ja riittävällä määrällä loppunollia, mutta pienempiä kuin luku, joka kirjoitetaan yhdeksällä ykkösellä, kakkosella ja riittävällä määrällä loppunollia. Näiden sekä ala-, että ylälikiarvojen tulon ensimmäiset numerot ovat 123456790. Lukujen tulon ensimmäiset numerot ovat siis myös 123456790, joten tulo ei voi olla palindromiluku. Pelkillä ykkösillä kirjoitettavien lukujen tulo on siis palindromi silloin ja vain silloin, kun pienempi luvuista kirjoitetaan enintään yhdeksällä ykkösellä.

**2.** $A$ ja $B$ tapasivat uudenvuoden päivänä vuonna 1953. $A$ kertoi $B$:lle, että hänen ikänsä (vuosina) on sama kuin hänen syntymävuotensa numeroiden summa. Hetken kuluttua $B$ onnitteli $A$:ta. Miksi? Milloin $A$ oli syntynyt?

**Ratkaisu.** Vuosiluvuista, jotka ovat pienempiä kuin 1953, suurin numeroiden summa on 1899:llä; se on 27. Tästä seuraa, että $A$ on syntynyt aikaisintaan 1920-luvulla ($1952-27 = 1925$). Olkoon $A$:n syntymävuosi $1900 + 10x + y$, missä $2 \le x \le 5$ ja $0 \le y \le 9$. Jos $A$ ei ole syntynyt 1.1., on $1 + 9 + x + y = 1952 - (1900 + 10x + y)$ eli $11x + 2y = 42$. Koska $2y \le 18$, on $11x \ge 42 - 18 = 24$. Koska $x \le 5$, ei kokonaislukuratkaisua ole. Jos $A$ on syntynyt 1.1., on oltava $1 + 9 + x + y = 1953 - (1900 + 10x + y)$ eli $11x + 2y = 43$. Tällä yhtälöllä on ratkaisu $x = 3$, $y = 5$. $B$ onnitteli $A$:ta syntymäpäivän johdosta; $A$ oli syntynyt 1. tammikuuta vuonna 1935.

**3.** $M$ on janan $AB$ piste. $AMCD$ ja $MBFE$ ovat neliöitä samalla puolen suoraa $AB$. Osoittakaa, että neliöiden ympäri piirretyllä ympyrällä ja suorilla $AE$ ja $BC$ on yhteinen leikkauspiste.




**Ratkaisu.** Leikatkoot neliöiden ympäri piirretyt ympyrät myös pisteessä $N$. Kehäkulmalauseesta saadaan heti $\angle ANM = \angle ACM = 45°$ ja $\angle MNB = \angle MEB = 45°$. $AN$ ja $NB$ ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan. Koska $EB$ on neliön $MBFE$ ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, $\angle BNE$ on suora kulma. Siis myös $NE$ on kohtisuorassa $NB$:tä vastaan. Mutta tästä seuraa, että $N$ on suoralla $AE$. Koska $AC$ on neliön $AMCD$ ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, $NC \perp AN$. Koska myös $NB \perp AN$ (jo todistettu), niin $N$ on suoralla $BC$. Suorat $AE$ ja $CB$ kulkevat ympyröiden leikkauspisteen $N$ kautta.

**4.** Profeetta *Mysticior* lähetti seuraajilleen 10000-kirjaimisen merkkijonon, jonka muodostui vain kirjaimista $A$ ja $\Omega$. Kannattajat johtuivat päättelemään, että jonon jokainen $k$:sta peräkkäisestä merkistä koostuva osa on ennussana, $k = 1, 2, \ldots, 10000$. Lisäksi pääteltiin, että 3:n merkin pituisia ennussanoja on enintään 7. Mikä on suurin mahdollinen määrä profeetan viestiin sisältyviä 10 merkin pituisia ennussanoja?

**Ratkaisu.** Olkoon $f(n)$ $n$:n merkin pituisten ennussanojen suurin mahdollinen lukumäärä. Selvästi $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ ja oletuksen mukaan $f(3) = 7$. Koska kahdesta merkistä voidaan muodostaa $2^3 = 8$ erilaista merkkijonoa, yksi näistä ei esiinny profeetan merkkijonossa; olkoon se $a_1a_2a_3 = W$. Voimme arvioida $f(n)$:ää seuraavasti: koska $n$:n merkin ennussana ei pääty $W$:hen, $n$:n merkin pituiset ennussanat voidaan luokitella niihin, joiden viimeinen merkki ei ole $a_3$; tällaisia on enintään $f(n-1)$ kappaletta, niihin, joiden viimeinen merkki on $a_3$ mutta toiseksi viimeinen merkki ei ole $a_2$; näitä on enintään $f(n-2)$ kappaletta, ja niihin, joiden kahden viimeisen merkin jono on $a_2a_3$, mutta kolmanneksi viimeinen merkki on $a_1$; näitä on enintään $f(n-3)$ kappaletta. Siis $f(n) \le f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)$. Jos $W = AAA$, nähdään, että itse asiassa $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3)$: jokaiseen $n-3$-pituiseen sanaan, jossa ei ole jonoa $AAA$, voidaan liittää jono $\Omega AA$, jokaiseen $n-2$-pituiseen vastaavanlaiseen sanaan voidaan liittää jono $\Omega A$ ja jokaiseen $n-1$-pituiseen sanaan jono $\Omega$. Kun nyt lähdetään arvoista $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ ja $f(3) = 7$, saadaan $f(4) = 13$, $f(5) = 24$, $f(6) = 44$, $f(7) = 81$, $f(8) = 149$, $f(9) = 274$ ja $f(10) = 504$. On vielä tarkistettava, että profeetan sanassa voi olla 504 eri ennussanaa. Todellakin näin voi olla, sillä voimme kirjoittaa kaikki 504 erilaista 10 merkin jonoa peräkkäin ja erottaa sanat $\Omega$-merkeillä. Tällöin on käytetty $11 \cdot 504$ merkkiä; loput merkit voivat olla $\Omega$:oja.

**5.** Olkoon $x_0 = x$ ja

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Määrittäkää $x_{2010}$.

**Ratkaisu.** Jos $x = 0$, jokainen $x_n = 0$. Olkoon $x > 0$. Silloin jokainen $x_n$ on positiivinen. Koska

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1 + nx_n}{x_n} = \frac{1}{x_n} + n,$$

$$\frac{1}{x_{2010}} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{2009} k = \frac{1}{x} + 1005 \cdot 2009 = \frac{1}{x} + 2019045$$

ja

$$x_{2010} = \frac{x}{1 + 2019045x}. \tag{1}$$

Jos $x < 0$, on mahdollista johtua tilanteeseen $1 + nx_n = 0$, jolloin $x_{n+1}$ ei ole määritelty. Jos $1 + kx_k \neq 0$, kun $k < n$, niin $\dfrac{1}{x_n} = -n$ silloin, kun

$$-n = \frac{1}{x_0} + \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{x_0} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tämä totetutuu, kun $x_0 = -\dfrac{2}{n(n+1)}$. Yhtälön (1) mukainen ratkaisu on siis voimassa kaikilla $x$ lukuun ottamatta lukuja

$$x = -\frac{2}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots, 2009.$$

**6.** Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ kaikilla $x, y \in R$. Lisäksi $f(2010) = 2010$. Määrittäkää $f$.

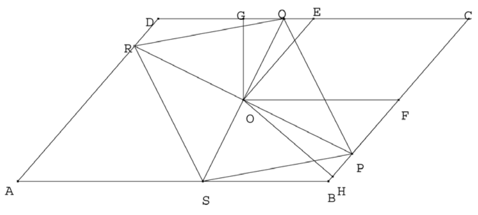
**Ratkaisu.** Olkoon $a$ mielivaltainen luku ja olkoon $n$ mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Olkoon vielä $d = \dfrac{1}{n}(a - 2010)$. Nyt

$$|f(a) - f(2010)| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(2010 + kd) - f(2010 - (k-1)d) \right|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(2010 + kd) - f(2010 + (k-1)d)| \leq \sum_{k=1}^{n} d^2 = \frac{(a-2010)^2}{n}.$$

Koska tämä pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n$, on $f(a) - f(2010) = 0$. Siis $f(a) = 2010$ kaikilla $a$.

**7.** Olkoon $ABCD$ suunnikas. Selvittäkää, millainen on pinta-alaltaan pienin sellainen vinoneliö, jonka kaikki kärjet ovat suunnikkaan sivuilla.

**Ratkaisu.** Olkoon $PQRS$ vinoneliö siten, että $P$ on sivulla $BC$, $Q$ sivulla $CD$ jne. Olkoon $O$ vinoneliön keskipiste. Silloin $O$ on myös suunnikkaan $ABCD$ keskipiste. Olkoot $AB = 2a$ ja $BC = 2b$ sekä $\angle DAB = \alpha$ ja olkoot $E$ ja $F$ sivujen $CD$ ja $BC$ keskipisteet. Voidaan olettaa, että $Q$ on janalla $ED$. Olkoon vielä $\angle QOE = \phi$. Vinoneliön lävistäjät ovat kohtisuorassa



toisiaan vastaan ja vinoneliön ala on lävistäjien tulo. Pyritään minimoimaan tulo $OP \cdot OQ$. Koska $\angle OEQ = \alpha$, $\angle OQE = 180^\circ - (\alpha + \phi)$. Sen mukaan, onko $P$ janalla $FC$ (kuten kuvassa) tai $BF$, on $\angle POF = \alpha + \phi - 90^\circ$ tai $90^\circ - \alpha - \phi$ ja $\angle OPF = 90^\circ \mp \phi$. Sovelletaan sinilausetta kolmioihin $OEQ$ ja $OFP$. Saadaan

$$\frac{OQ}{a} = \frac{OQ}{OE} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \phi)}, \quad \frac{OP}{b} = \frac{OP}{OF} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ \mp \phi)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\phi}.$$

Siis

$$OP \cdot OQ = \frac{ab\sin^2\alpha}{\sin(\alpha + \phi)\cos\phi}.$$

Suunnikkaan alan minimoimiseksi on maksimoitava $\sin(\alpha+\phi)\cos\phi = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+2\phi)+\sin\alpha)$. [Trigonometrisen lausekkeen jälkimmäinen muoto seuraa esimerkiksi sinin yhteenlaskukaavasta: $\sin(\alpha + 2\phi) = \sin((\alpha + \phi) + \phi) = \sin(\alpha + \phi)\cos\phi + \cos(\alpha + \phi)\sin\phi$, $\sin\alpha = \sin((\alpha + \phi) - \phi) = \sin(\alpha + \phi)\cos\phi - \cos(\alpha + \phi)\sin\phi$.] Summa on suurin mahdollinen, kun $\alpha + 2\phi = 90^\circ$ eli kun $\phi = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Jos $G$ ja $H$ ovat sellaiset $CD$:n ja $BC$:n pisteet, että $OG \perp CD$ ja $OH \perp BC$, niin minimivinoneliön lävistäjät ovat kulmien $EOG$ ja $FOH$ puolittajia. – Ratkaisussa on implisiittisesti oletettu, että minimitilanteessa pisteet $Q$ ja $P$ ovat suunnikkaan $ABCD$ sivuilla. Ellei näin ole, niin minimivinoneliön toinen lävistäjä on $ABCD$:n lyhempi lävistäjä.

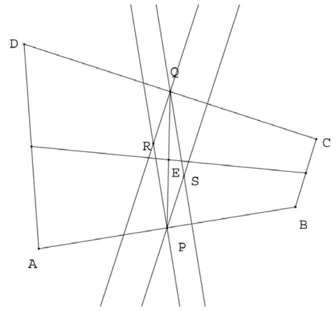
**8.** *Liisa* ja *Pekka* pelaavat seuraavaa peliä: Pekka valitsee rationaaliluvun $a \neq 2010$ ja ilmoittaa sen Liisalle. Sitten Liisa valitsee rationaaliluvun $b \neq 2010$ ja ilmoittaa sen Pekalle. Pekka muodostaa toisen asteen yhtälön, jonka kertoimet ovat jossain järjestyksessä 2010, $a$ ja $b$. Liisa voittaa, jos yhtälöllä on kaksi eri suurta rationaalista juurta, Pekka voittaa muussa tapauksessa. Osoittakaa, että Liisa voi aina valita lukunsa niin, että hän voittaa.

**Ratkaisu.** Jos Liisa valitsee luvun $b$ niin, että $a + b + 2010 = 0$, niin Pekan muodostaman toisen asteen yhtälön toteuttaa varmasti $x = 1$. Mutta toisen asteen yhtälön juurien tulo on yhtälön vakiotermi. Kun toinen juuri on 1, toinen juuri on tämä vakiotermi. Oletusten mukaan se on rationaaliluku. Liisa voittaa siis aina.

**9.** Osoittakaa (muodostamatta itse desimaalikehitelmää), että luvun $\sqrt{2}$ desimaalikehitelmässä miljoonannen ja kolmannenmiljoonannen desimaalin välissä on ainakin yksi nollasta eroava numero.

**Ratkaisu.** Oletetaan, että kaikki $\sqrt{2}$:n desimaalit miljoonannen ja kolmannenmiljoonannen välissä ovat nollia. Silloin $\sqrt{2} = n10^{-10^6} + a$, missä $n$ on kokonaisluku, $n < 2 \cdot 10^{10^6}$ ja $0 < a < 10^{-3 \cdot 10^6}$. Mutta tästä seuraa $2 \cdot 10^{2 \cdot 10^6} - n^2 = 2an10^{10^6} + a^2 10^{2 \cdot 10^6}$. Yhtälön vasen puoli on positiivinen kokonaisluku ja oikea puoli on pienempi kuin 1. Ristiriita; alkuperäinen väite on tosi.

**10.** Sovitaan, että kuperan nelikulmion sivuun liittyvä *korkeussuora* on sivua vastaan kohtisuora ja vastakkaisen sivun keskipisteen kautta kulkeva suora. Osoittakaa, että nelikulmion korkeussuorat leikkaavat toisensa samassa pisteessä jos ja vain jos nelikulmio on jännenelikulmio.




**Ratkaisu.** Nelikulmio on jännenelikulmio, jos ja vain jos sen kaikkien sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä (joka on nelikulmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste). Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio ja $P$ sivun $AB$, $Q$ sivun $CD$ keskipiste. Tunnetusti nelikulmion keskipisteet kärkinä piirretty nelikulmio on suunnikas (sivut ovat pareittain alkuperäisen nelikulmion lävistäjien suuntaisia). Tämän suunnikkaan lävistäjien keskipiste on janan $PQ$ keskipiste $E$. Osoitetaan, että nelikulmion vastakkaisten sivujen keskinormaalien leikkauspiste, esimerkiksi $AB$:n ja $CD$:n keskinormaalien leikkauspiste $R$, ja vastakkaisiin sivuihin liittyvien korkeusjanojen leikkauspiste, esimerkiksi $P$:stä ja $Q$:sta piirrettyjen korkeusjanojen leikkauspiste $S$ sijaitsevat symmetrisesti pisteen $E$ suhteen. Tämä seuraa välittömästi siitä, että $PR\|QS$, $PS\|QR$, joten $PSQR$ on suunnikas, jonka toinen lävistäjä on $QP$. $QP$:n keskipiste $E$ on silloin myös lävistäjän $RS$ keskipiste. Tehtävän väite seuraa: Vastakkaisiin sivupareihin liittyvien korkeusjanojen leikkauspisteet yhtyvät jos ja vain jos vastaavien keskinormaalien leikkauspisteet yhtyvät, ja jälkimmäinen tilanne valitsee silloin ja vain silloin, kun $ABCD$ on jännenelikulmio.

**11.** Kuinka pitkä on lyhin mahdollinen venymättömästä narusta tehty silmukka, jonka läpi voidaan pujottaa säännöllinen tetraedri, jonka särmän pituus on $a$?

**Ratkaisu.** Levitetään tetraedri tasokuvioksi, joka on suunnikas $ABCD$; suunnikkaan pitempi sivu on $AB = 2a$ ja lyhempi $BC = a$. Jos $E$ ja $F$ ovat sivujen $AB$ ja $CD$ keskipisteet, niin teraedrin tahkot ovat kolmiot $AED$, $EFD$, $EBF$ ja $BCF$; janaparit $AE$ ja $EB$, $AD$ ja $BC$ sekä $DF$ ja $FC$ liittyvät kukin yhteen tetraedrin särmään. Olkoot $P$ janan $AD$ ja $Q$ janan $BC$ samaa teraedrin särmän pistettä $S$ vastaavat pisteet (siis $AP = BQ$). Tetraedrin pinnalla kiertävää silmukka, joka kulkee $S$:n kautta, vastaa jokin pisteet $P$ ja $Q$ suunnikkaan $ABCD$ alueella kiertävä käyrä. Tällaisen käyrän pituus ei voi olla pienempi kuin $PQ = 2a$. Mutta jos silmukka pingotetaan niin, että mainittu käyrä kuvautuu suunnikkaaseen aina janaksi $PQ$, niin pituus $2a$ riittää.

**12.** Määrittäkää kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$2f(x) = xy + f(xf(y) + f(x)) \tag{1}$$

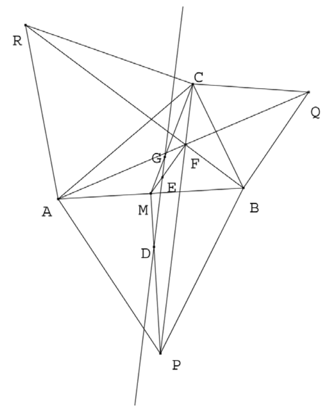
kaikilla $x$, $y \in \mathbb{R}$.

**Ratkaisu.** [Tehtävä jossain määrin tärveltyi yhtälöön (1) jääneen kirjoitusvirheen vuoksi. Tarkoitus oli kirjoittaa $2f(x) = -xy + f(xf(y) + f(x))$.] Funktio $f$ on bijektio. Asetetaan $x = 1$: silloin $f(f(y) + f(1)) = 2f(1) - y$, joten $f$ saa kaikki reaalilukuarvot ja on siis surjektio, ja jos $f(x) = f(y)$, niin $f(f(x)+f(1)) = f(f(y)+f(1))$, mistä seuraa $2f(1)-x = 2f(1) - y$ ja $x = y$, joten $f$ on myös injektio. Olkoon sitten $x \neq 0$ ja $y = \dfrac{f(x)}{x}$. Silloin $2f(x) = xy+f(x)$. Koska oletuksen mukaan $2f(x) = xy+f(xf(y)+f(x))$ ja $f$ on injektio, on oltava

$$x = xf\left(\frac{f(x)}{x}\right) + f(x). \qquad (2)$$

Sijoitetaan (1):een $x = y = 0$. Saadaan $2f(0) = f(f(0))$. Olkoon $f(0) = c$; tällöin $f(c) = 2c$. Jos nyt olisi $c = 0$, voitaisiin sijoittaa (1):een $y = 0$, jolloin $f(f(x)) = 2f(x)$ kaikilla $x$. Koska $f$ on surjektio, olisi $f(x) = 2x$ kaikilla $x$. Mutta $f(x) = 2x$ ei toteuta yhtälöä (1). Siis $c \neq 0$. Sijoitetaan $x = c$ yhtälöön (2). Saadaan $1 = f(2) + 2$, joten $f(2) = -1$. Sijoiteaan nyt $y = 2$ yhtälöön (1). Saadaan $2(f(x) - x) = f(f(x) - x)$. Osoitetaan, että $c$ on ainoa sellainen luku $a$, jolle $f(a) = 2a$. Olkoon siis $a$ luku, jolle $f(a) = 2a$. Koska $f$ on surjektio, on olemassa luku $b$, jolle $a = f(b)$. Sijoitetaan $x = b$ ja $y = 0$ yhtälöön (1). Saadaan $2f(b) = f(bc + a)$ eli $2a = f(bc + a)$. Koska $f$ on injektio, $bc + a = a$; koska $c \neq 0$, on oltava $b = 0$. Siis $a = f(0) = c$. Näin ollen $f(x) - x = c$ eli $f(x) = x + c$. Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (1), saadaan $2x + 2c = xy + x(y + c) + x + c + c$ eli $(c - 1)x + 2xy = 0$. Yhtälö ei voi toteutua. Tehtävällä ei ole ratkaisua. [Jos tehtävän yhtälö olisi ollut se, mitä tarkoitettiin, jokseenkin sama päättely olisi johtanut ratkaisuun $f(x) = x + 1$ kaikilla $x$.]

**13.** Olkoon $ABC$ teräväkulmainen kolmio ja olkoon $F$ sen *Fermat'n piste* eli se piste, jolle $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°$. Osoittakaa, että kolmioiden $ABF$, $BCF$ ja $CAF$ Eulerin suorat [suorat, jotka kulkevat kolmion korkeusjanojen leikkauspisteen ja keskijanojen leikkauspisteen kautta] leikkaavat toisensa samassa pisteessä.




**Ratkaisu.** Olkoot $P$, $Q$ ja $R$ ne pisteet kolmion $ABC$ ulkopuolella, joille $BAP$, $CBQ$ ja $ACR$ ovat tasasivuisia kolmioita. Tunnetusti $F$ on janojen $AQ$, $BR$ ja $CP$ yhteinen piste. [Todistus: Leikatkoot $AQ$ ja $BR$ pisteessä $F'$. Koska $\angle RCB = \angle ACQ$, $AC = RC$ ja $BC = CQ$, niin kolmiot $ACQ$ ja $RCB$ ovat yhteneviä. Siis $\angle CRF' = \angle CAF'$, joten $AF'CR$ on jännenelikulmio ja $\angle AF'C = 120°$. Myös $\angle F'BC = \angle F'QC$, joten $BQCF'$ on jännenelikulmio ja $\angle CF'B = 120°$. Siis $F' = F$. Samoin osoitetaan, että $CP$:n ja $AQ$:n leikkauspiste on $F$.] Tarkastetaan esimerkiksi kolmion $ABF$ Eulerin suoraa. Olkoon $M$ janan $AB$ keskipiste. Eulerin suora kulkee kolmion $ABF$ painopisteen $E$ kautta ja kolmion $ABF$ ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen $D$ kautta. Mutta koska $APBF$ on jännenelikulmio, $D$ on samalla kolmion $BAP$ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Koska $BAP$ on tasasivuinen kolmio, $D$ jakaa janan $PM$ suhteessa $2 : 1$ samoin kuin $E$ jakaa janan $FM$. Tästä seuraa, että $DE \| PF$. Mutta silloin $DE$ jakaa myös janan $CM$ suhteessa $2 : 1$ eli kulkee kolmion $ABC$ painopisteen $G$ kautta. Samoin nähdään, etä muutkin tehtävän Eulerin suorat kulkevat pisteen $G$ kautta.

**14.** Määritellään jokaiselle joukon $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukolle $A$ funktio $f$ asettamalla $f(A)$:ksi $A$:n suurimman ja pienimmän luvun erotus. Laskekaa $\sum_{A \subset S_n} f(A)$.

**Ratkaisu.** Olkoon $M$ kaikkien osajoukkojen suurimpien lukujen summa ja $m$ kaikkien osajoukkojen pienimpien lukujen summa. Selvästikin tehtävässä kysytty summa on $M-m$. Olkoon $1 \le k \le n$. $k$ on pienin luku jokaisessa joukossa $\{k\} \cup A$, missä $A \subset \{k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n\}$. Tällaisia joukkoja on $2^{n-k}$ kappaletta. Siis

$$m = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)2^j.$$

Summan määrittämiseksi lasketaan sellaisten joukkojen lukumäärä, joiden *halkaisija* eli suurimman ja pienimmän luvun erotus on $j$. Jos $a$ on tällaisen joukon pienin luku, niin suurin luku on $a+j \le n$. $a$:ksi voidaan ottaa mikä tahansa $n-j$:sta luvusta $1,\ 2, \ldots n-j$ ja kutakin valittua $a$:ta kohden joukkoon voidaan valita tai olla valitsematta mikä hyvänsä $j-1$:stä luvusta $a+1,\ a+2,\ \ldots,\ a+j-1$. Joukkoja, joiden halkaisija on $j \ge 1$ on siis $(n-j)2^{j-1}$ kappaletta. Joukolla $S_n$ on kaikkiaan $2^n - n - 1$ epätyhjää vähintään kaksialkioista osajoukkoa. Siis

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)2^{j-1} = 2^n - n - 1.$$

Tästä seuraa heti, että

$$m = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)2^j = 2(2^n - n - 1) + n = 2^{n+1} - n - 2. \tag{1}$$

On vielä selvitettävä $M$. Nyt jokainen $S_n$:n osajoukko $\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k\} \ne S_n$ voidaan yksikäsitteisesti liittää joukkoon $\{n+1-a_1,\ n+1-a_2,\ \ldots,\ n+1-a_k\}$ eli peilata keskikohdan yli. Toisen joukon pienimmän ja toisen joukon suurimman luvun summa on $n+1$. Koska $S_n$:llä on kaikkiaan $2^n-2$ epätyhjää osajoukkoa ja joukossa $S_n$ on suurimman ja pienimmän luvun summa $n+1$, on

$$M + m = (n+1)(2^n - 1).$$

Tästä ja yhtälöstä (1) ratkaistaan

$$M - n = (n-3) \cdot 2^n + n + 3.$$

**15.** Olkoon $f(n)$ luvun $n$ suurin alkutekijä. Osoittakaa, että äärettömän monelle positiiviselle kokonaisluvulle $n$ on voimassa $f(n) < f(n+1) < f(n+2)$.

**Ratkaisu.** Valitaan pariton alkuluku $q$ ja asetetaan $n+1 = q^{2^k}$. Silloin $f(n+1) = q$. Olkoon $m > k$. Olkoon $d$ lukujen $q^{2^k}+1$ ja $q^{2^m}+1$ suurin yhteinen tekijä. Varmasti $d \ge 2$. Mutta $q^{2^k} \equiv -1 \mod d$ ja $q^{2^m} = (q^{2^k})^{2^{m-k}} \equiv (-1)^{2^{m-k}} = 1 \mod d$. Siis $((q^{2^m}+1) - (q^{2^k}+1) \equiv 2 \mod d$, joten $d \mid 2$. Siis $d = 2$. Tästä seuraa, että $f(q^{2^k}+1)$ voi saada miten suuria arvoja hyvänsä. Olkoon $k$ pienin kokonaisluku, jolle $f(q^{2^k}+1) > q$. Silloin kaikkien lukujen $q^{2^t}+1$, $t < k$ kaikki alkutekijät ovat pienempiä kuin $q$. Koska $q^{2^k} - 1 = (q-1)(q+1)(q^2+1)\cdots(q^{2^{k-1}}+1)$ ja $q-1 < q$, kaikki luvun $q^{2^k}-1$ alkutekijät ovat $< q$ eli $f(q^{2^k}-1) < q$.