Gymnasiets matematiktävling starttävlingens grundserie

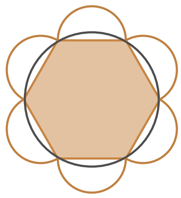
9. 10. 2019

Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. Pias arbetsvecka förkortades med p % samtidigt som hennes timlön steg med p %. Då sjönk Pias veckolön med 4 %. Vi kan då dra slutsatsen att

a) $p < 15$	b) $p \geq 15$	c) $p = 20$	d) $p = 10$

2. Innanför cirkeln Γ har man ritat en regelbunden 6-hörning och på sidorna av 6-hörningen har man ritat cirkelhalvbågar enligt bilden.



Förhållandet mellan summan av dessa halvcirklars areor och arean av cirkeln Γ är

a) $2/3$	b) mindre än 0,8	c) $3/4$	d) $4/5$

3. Bestäm ett bråktal q som ligger lika långt från de periodiska decimaltalen $0{,}0246246\ldots$ och $0{,}0328328\ldots$ (i båda talen är perioderna tresiffriga).

a) $q = \dfrac{612}{15000}$	b) $q = \dfrac{120}{7290}$
c) $q = \dfrac{574}{19980}$	d) Ett sådant tal existerar inte.

4. Sidlängderna i ett likbent parallelltrapets är $a+3$, $a-3$, $a+3$ ja $a+7$. Parallelltrapetsets diagonaler står vinkelrätt mot varandra. Vad kan vi säga om längden a?

a) $a < 8$	b) $a = 10$	c) $a = 7$	d) a är ett heltal

5. Med en *diagonal* i en månghörning avser vi en sträcka som förenar två hörn så att denna sträcka inte är en sida i månghörningen. Månghörningens vinklar tillåts inte vara raka. Med en *konvex månghörning* avser vi en månghörning vars alla diagonaler är innanför månghörningen. Vilka av påståendena som berör månghörningar är sanna?

a) Det existerar en femhörning som har två parallella diagonaler.
b) Diagonalerna i en regelbunden månghörning skär alltid varandra.
c) Om två diagonaler i en konvex n-hörning är parallella så är $n \geq 6$.
d) En månghörning kan ha två diagonaler som utgör två skilda delar av samma linje.

6. Vad kan vi säga om talet 7^{7^7} då det skrivs på det vanliga sättet i tiosystemet?

a) Det har färre än en miljon siffror.
b) Det slutar med siffran 3.
c) Dess siffersumma är inte delbar med tre.
d) Det är inte ett primtal.

7. För en aritmetisk talföljd $a_1, a_2, \ldots$ gäller att $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1 + d}{d}$ och $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$ där $d = a_2 - a_1$. Bestäm a_1 ja d när vi antar att a_1 och d har samma tecken.

8. Maja spelar följande spel för sig själv på ett oändligt rutbräda: Anta att k är ett positivt heltal. Maja har en spelknapp som först är i origo dvs. i rutan $(0, 0)$. Hon får flytta spelknappen med ett drag $k - 1$ rutor i vågrät riktning, k rutor i lodrät riktning eller $k + 1$ rutor i sned riktning. Hon får alltså flytta knappen med ett drag från rutan (x, y) till någon av följande rutor:

– till rutan $(x - (k - 1), y)$ eller rutan $(x + (k - 1), y)$,

– till rutan $(x, y - k)$ eller rutan $(x, y + k)$,

– eller till rutan $(x - (k + 1), y - (k + 1))$, rutan $(x - (k + 1), y + (k + 1))$, rutan $(x + (k + 1), y - (k + 1))$ eller rutan $(x + (k + 1), y + (k + 1))$.

Maja lottar ut en heltalspunkt dvs. en målruta (a, b). Maja vinner om hon hittar en serie drag med vilka hon kommer från rutan $(0, 0)$ till rutan (a, b). Vinner Maja alltid oberoende av heltalen a och b ifall hon spelar på rätt sätt när a) $k = 6$, b) $k = 2019$?

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

9. 10. 2019

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. ***Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.*** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn: ______________________________

Skola: ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens mellanserie

9. 10. 2019

Det finns uppgifter på två sidor; de tre första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. Bottendiametern i en rak cirkulär kon är 2 och avståndet från spetsen till bottenytans sida är 2. Sidan i en rak pyramids kvadratiska bottenyta är 2 och avståndet från spetsen till basytans hörn är 2. Vad kan vi säga om volymerna?

a) Volymerna är heltal.
b) Vi kan inte beräkna volymerna med den givna informationen.
c) Kropparna har samma volym.
d) Den cirkulära konen är större.

2. Vilka av följande påståenden är sanna för polynomet med heltalskoefficienter $P(x) = x^4 + x^2 + 1$?

a) Det är odelbart dvs. vi kan inte uttrycka det som en produkt av polynom med heltalskoefficienter och lägre grad.
b) Det saknar reella nollställen.
c) Dess graf är symmetrisk med avseende på y-axeln.
d) Ekvationen $P(x) = 7$ har en rationell lösning.

3. För funktionen $f\colon\ ]0,\infty[\ \longrightarrow\ ]1,\infty[$ gäller att

$$f(x) = e^{f(x)-x-1}$$

för alla $x \in\ ]0,\infty[$. Vilka av följande påståenden är säkert sanna?

a) När $x, y \in\ ]0,\infty[$ och $x \neq y$ så är $f(x) \neq f(y)$.
b) När $x \in\ ]0,\infty[$ är $f(x) < x$.
c) Det existerar ett $x \in\ ]0,\infty[$, för vilket $f(x) = x + 1$.
d) När $x \in\ ]0,\infty[$ är $f(x) > x$.

4. För en aritmetisk talföljd $a_1,\ a_2,\ \ldots$ gäller att $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1 + d}{d}$ och $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$ där $d = a_2 - a_1$. Bestäm a_1 och d när vi antar att a_1 och d har samma tecken.

5. Maja spelar följande spel för sig själv på ett oändligt rutbräda: Anta att k är ett positivt heltal. Maja har en spelknapp som först är i origo dvs. i rutan $(0,0)$. Hon får flytta spelknappen med ett drag $k-1$ rutor i vågrät riktning, k rutor i lodrät riktning eller $k+1$ rutor i sned riktning. Hon får alltså flytta knappen med ett drag från rutan (x,y) till någon av följande rutor:

- till rutan $(x-(k-1),y)$ eller rutan $(x+(k-1),y)$,
- till rutan $(x,y-k)$ eller rutan $(x,y+k)$,
- eller till rutan $(x-(k+1),y-(k+1))$, rutan $(x-(k+1),y+(k+1))$, rutan $(x+(k+1),y-(k+1))$ eller rutan $(x+(k+1),y+(k+1))$.

Maja lottar ut en heltalspunkt dvs. en målruta (a,b). Maja vinner om hon hittar en serie drag med vilka hon kommer från rutan $(0,0)$ till rutan (a,b). Med vilka heltalsvärden på k vinner Maja alltid oberoende av heltalsvärdena a och b om hon spelar på rätt sätt?

6. Lös den Diofantiska ekvationen

$$x^4y^2+2x=2019$$

dvs. ta reda på alla heltalspar (x,y) som satisfierar den ovan nämnda ekvationen.

9. 10.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

2019

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervals-uppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. ***Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.*** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn: ______________________________

Skola: ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

9. 10.

Gymnasiets matematiktävling
starttävlingens öppna serie

2019

1. Låt $ABCDE$ vara en regelbunden femhörning för vilken arean av stjärnan $ACEBD$ är ett. Bestäm arean av fyrhörningen $APQD$ när P är skärningspunkten mellan sträckorna AC och BE och Q är skärningspunkten mellan sträckorna BD och CE.

2. Maja spelar följande spel för sig själv på ett oändligt rutbräda: Anta att k är ett positivt heltal. Maja har en spelknapp som först är i origo dvs. i rutan $(0, 0)$. Hon får flytta spelknappen med ett drag $k-1$ rutor i vågrät riktning, k rutor i lodrät riktning eller $k+1$ rutor i sned riktning. Hon får alltså flytta knappen med ett drag från rutan (x, y) till någon av följande rutor:

– till rutan $(x-(k-1), y)$ eller rutan $(x+(k-1), y)$,

– till rutan $(x, y-k)$ eller rutan $(x, y+k)$,

– eller till rutan $(x-(k+1), y-(k+1))$, rutan $(x-(k+1), y+(k+1))$, rutan $(x+(k+1), y-(k+1))$ eller rutan $(x+(k+1), y+(k+1))$.

Maja lottar ut en heltalspunkt dvs. en målruta (a, b). Maja vinner om hon hittar en serie drag med vilka hon kommer från rutan $(0, 0)$ till rutan (a, b). Med vilka heltalsvärden på k vinner Maja alltid oberoende av heltalsvärdena a och b om hon spelar på rätt sätt?

3. Lös den Diofantiska ekvationen

$$x^4y^2 + 2x = 2019$$

dvs. ta reda på alla heltalspar (x, y) som satisfierar den ovan nämnda ekvationen.

4. Vi undersöker Fibonaccis talföljd $F_1, F_2, \ldots$ som definieras genom att sätta $F_1 = F_2 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för varje positivt heltal n. Bestäm det minsta positiva heltal k som har den egenskapen att det i intervallet $]F_n, F_{n+1}[$ finns ett kubtal för varje heltal $n \geqslant k$ eller visa att det inte existerar att sådant tal k. Positiva kubtal är $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ och så vidare.

Tävlingstiden är **120 minuter**.
Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och skola tydligt på varje provpapperet.