Matematiikan olympiavalmennus
Huhtikuun 2013 vaativa tehtäväsarja

1. Olkoon annettu n numeroa a_1:stä a_n:ään tietyssä järjestyksessä. Onko olemassa sellaista luonnollista lukua, jolla neliöjuurensa desimaaliesityksessä heti pilkun oikealla puollla seuravat juuri nämä numerot annetussa järjestyksessä?

2. Suorakulmaisen huoneen lattian päällystämiseen käytetään kahdenlaisia levyjä; toiset ovat muotoa 2 kertaa 2 ja toiset muotoa 4 kertaa 1. Todista, että päällystäminen ei ole mahdollista, jos halutaan käyttää toisia levyjä yksi vähemmän ja toisia yksi enemmän.

3. Mikä on pienin positiivinen kokonaisluku t, jolla luku 2002^{2002} voidaan esittää t kokonaisluvun kuution summana?

4. Ympyrät γ_1 ja γ_2 leikkaavat pisteissä P ja Q. Olkoot A_1 ja B_1 (kumpikaan pisteistä ei ole P eikä Q) ympyrän γ_1 eri pisteitä. Suora A_1P leikkaa ympyrää γ_2 lisäksi pisteessä A_2 ja B_1P vastaavasti pisteessä B_2, sekä suorat A_1B_1 ja A_2B_2 leikkaavat C:ssä. Todista, että kun A_1 ja B_1 vaihtelevat, kolmion A_1A_2C ympäripiirrettyjen ympyröiden keskipisteet sijaitsevat yhdellä kiinteällä ympyränpiirillä.

5. 120 hengen seurueessa on ystäväpareja (kukin voi kuulua useampaan tällaiseen pariin). *Heikko nelikkö* on neljän hengen joukko, jossa on täsmälleen yksi ystäväpari. Mikä on suurin mahdollinen määrä heikkoja neliköitä?

6. Olkoon n pariton positiivinen kokonaisluku. $n \times n$-ruudukon ruudut väritetään vuorotellen mustiksi ja valkoisiksi niin, että kulmaruudut ovat mustia. *Tromino* on kolmesta ruudusta muodostuva L-muotoinen palikka. Millä parittomilla $n \in \mathbb{N}$ $n \times n$-ruudukolle voidaan asettaa ruutujen myötäisesti trominoja niin, että mustat ruudut tulevat peitetyiksi ja trominot eivät ole päällekkäin? Määritä pienin tarvittava määrä trominoja, kun tämä on mahdollista.

7. Olkoon $(a_1, a_2, \ldots)$ päättymätön jono reaalilukuja ja $c \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että kaikilla $i \in \mathbb{N}^*$ pätee $0 \leq a_i \leq c$ ja kaikilla eri $i, j \in \mathbb{N}^*$

$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j}.$$

Todista, että $c \geq 1$.

8. Olkoon $r \geq 2$ kokonaisluku ja $\mathcal{F}$ ääretön perhe joukkoja, joista kussakin on r alkiota ja joista mitkään kaksi eivät ole erillisiä. Todista, että on olemassa $r-1$ alkion joukko, joka leikkaa kutakin perheen $\mathcal{F}$ joukoista.

Ratkaisut toivotaan palautettavan joko valmennusleirillä tai lähetettävän (Kukan päivään mennessä) osoitteeseen

Kerkko Luosto
Talvitie 1D
33900 Tampere