Ollin
Opas
Olympiatason
Ongelmanratkaisuun

Olli Järviniemi

Sisältö

1 Lue tämä ensin **3**

2 Johdantotehtäviä **7**

3 Kehäkulmalause ja jännenelikulmiot (Geometria) **10**

4 Geometrian lisämenetelmiä (Geometria) **25**

5 Projektiivinen geometria (Geometria) **46**

6 Aritmetiikan peruslause (Lukuteoria) **59**

7 Kongruenssit (Lukuteoria) **68**

8 Eksponenttifunktiot ja neliönjäännökset (Lukuteoria) **75**

9 Asteet ja primitiivijuuret (Lukuteoria) **88**

10 Vaativampia lisätehtäviä (Lukuteoria) **100**

11 Polynomit (Algebra) **117**

12 Arviointi ja epäyhtälöt (Algebra) **126**

13 Summia (Algebra) **144**

14 Lineaariset rekursiot (Algebra) **150**

15 Funktionaaliyhtälöt (Algebra) **159**

16 Vaativampia lisätehtäviä (Algebra) **170**

17 Pelit (Kombinatoriikka) **182**

18 Prosessit (Kombinatoriikka) **191**

19 Verkot (Kombinatoriikka) **198**

20 Yläkoulu- ja lukiotietoja **211**

21 Kevyempää luettavaa **232**

22 Lisämateriaaleja **242**

23 Kiitokset **244**

1 Lue tämä ensin

Mistä tässä on kyse?

Tämän materiaalin päätavoite on opettaa matematiikkakilpailuissa tarvittavaa ongelmanratkaisua, kuten kirjan nimikin kertoo. Tähän pyritään etenkin esittämällä lukuisia esimerkkitehtäviä, jotka sisältävät erilaisia lähestymistapoja vaikeiden ongelmien ratkomiseen. Kirja sisältää myös kilpailumatematiikassa tarvittavaa teoriaa, koska useat tehtävät olisi käytännössä mahdotonta ratkaista suoraan peruskoulu- ja lukiomatematiikan pohjalta.

Kirjan tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä. Suuressa osassa lukuja viimeinen tehtävä on tarkoituksellisesti muita vaikeampi, ja esimerkiksi Lisätehtävät-luvuissa kaikki tehtävät ovat haastavia. Kirjaa ei siis välttämättä kannata lukea luku kerrallaan, vaan tarvittaessa kannattaa hypätä vaikeimpien kohtien yli ja palata niihin myöhemmin.

Pääpainona kirjassa on siis ongelmanratkaisu. Suosittelenkin lukijaa miettimään tehtävien ratkaisuja lukiessaan esimerkiksi seuraavia kysymyksiä: Mikä oli ratkaisun pääidea? Mikä oli ratkaisun vaikein kohta, ja mitkä osat olivat vain rutiininomaisia yksityiskohtia? Miten ratkaisuun voisi päätyä? Olisinko itse voinut keksiä ratkaisun? Miksi tai miksi en? Osittain näitä kysymyksiä on käsiteltykin ratkaisuissa ja niihin lisätyissä kommenteissa. Lisäksi suosittelen lukemaan kirjaa kynän ja paperin kanssa. Erityisesti geometrian luvuissa voi ratkaisua lukiessa olla hyödyksi piirtää paperille oma mallikuva, jota voi tarkastella tekstiä eteenpäin lukiessaan.

Miten matematiikkakilpailut toimivat Suomessa?

Suomessa kilpailuvuoden aloittaa syksyllä järjestettävä valtakunnallinen Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailu, jonka järjestää MAOL. Syksyllä on myös marraskuussa järjestettävä kansainvälinen Baltian tie -joukkuematematiikkakilpailu, jonka viisihenkinen joukkue valitaan syksyn alussa valmennusviikonlopussa.

MAOLin loppukilpailu pidetään alkukilpailua seuraavan vuoden alussa. Huhtikuussa pidetään Pohjoismainen matematiikkakilpailu, johon valitaan 20 edustajaa Suomesta. Samoihin aikoihin pidetään Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset EGMO. Kilpailuvuoden kohokohta ovat Kansainväliset matematiikkaolympialaiset (International Mathematical Olympiad, IMO), jotka järjestetään heinäkuussa. Suomen kuusihenkinen joukkue valitaan toukokuussa pidettävällä valintaviikolla.

IMO-valintaviikon lisäksi valmennus järjestää kuusi kertaa vuodessa kaikille avoimia valmennusviikonloppuja. Lisätietoa kilpailuista ja valmennustoiminnasta löytyy Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaoston eli matematiikkavalmennuksen sivuilta osoitteesta https://matematiikkakilpailut.fi/.

Kenelle kirja on suunnattu?

Kirjoittaessani kirjaa ajattelin kohdeyleisön olevan kilpailumatematiikasta kiinnostuneet nuoret (noin lukioikäiset), koska he ovat kilpailuja ajatellen sopivan ikäisiä. Kirja soveltuu kuitenkin yleisesti kenelle vain, jolla on peruskoulutaidot matematiikasta ja jota kiinnostaa kilpailumatematiikka ja siihen liittyvä ongelmanratkaisu.

Kirja ei kuitenkaan ole kevyttä luettavaa. Esimerkiksi kyky seurata monimutkaisia todistuksia (tai ylipäätään todistuksia) ei ole itsestäänselvyys, mutta kirjan lukemista varten tämä taito on välttämätön. Lisäksi monet kirjan tehtävistä ovat hyvin vaikeita. Lukeminen siis vaatii lukijalta merkittävää panostusta.

Tästä huolimatta myös nuoremmille lukijoille on pyritty tarjoamaan mahdollisuus kirjan sisällön ymmärtämiseksi. Lukuun Yläkoulu- ja lukiotietoja on koottu kirjan kannalta oleellisimpia esitietoja. Tarkoituksena on, että materiaali on itsenäinen ja että kiinnostunut ja päättäväinen yläkouluikäinen pystyy käyttämään sitä.

Kattaako kirja kaiken kilpailumatematiikasta?

Näkisin, että kilpailumatematiikkaa koskevat tiedot voidaan karkeasti jakaa kahteen kategoriaan: ensimmäinen on yleisesti tunnetut esitiedot ja toinen on harvinaisemmat kikat. Kirjan luvuissa käsitellään kohtuullisen kattavasti näitä yleisesti tunnettuja esitietoja. Ei olisi kuitenkaan mielekästä (tai edes mahdollista) tehdä listaa kaikista mahdollisista tempuista, joita tehtävien ratkaisemiseen voi käyttää. Näiden oppimiseen paras tapa on ratkoa tehtäviä, mihin kirjan on tarkoitus antaa hyvät valmiudet.

Kirjan yksi tavoitteista on opettaa lukijalle riittävästi, jotta hän pystyy lukemaan myös muita materiaaleja. Lisämateriaaleja-lukuun on listattu joitain hyviksi kokemiani materiaaleja.

Eikö tällaista materiaalia ole olemassa jo ennestään?

Kilpailumatematiikkaan liittyvää materiaalia on tietysti paljon, mutta mielestäni monessa materiaalissa on puutteita. Suurin ongelma on sisältö: monissa teksteissä käydään läpi tehtävien ratkaisuja, mutta niissä ei opeteta, miten ratkaisuihin voisi päätyä itse. Tämän kirjan tekstistä suuri osa kuvaakin sitä, miten olen itse ratkaissut jonkin tehtävän.

Toinen merkittävä ongelma on aloittelijaystävällisyys: ei ole helppoa löytää materiaalia tai kokoelmaa materiaaleja, jotka lähtisivät perusteista (kilpailumatematiikan kannalta) ja joista voisi oppia suunnilleen kaiken tarvittavan. Lisäksi monet materiaalit käsittelevät matematiikkaa mielestäni aivan liian formaalisti – tyyli ei sovi harrastelijalle, joka ei ole törmännyt matematiikkaan koulun ulkopuolella. Näiden ongelmien korjaamiseksi tämä materiaali lähtee perusteista ja tekstin tyylilaji on rennompi kuin monissa muissa materiaaleissa.

Samoilla linjoilla kanssani on nykyään Yhdysvaltojen IMO-joukkueen valmentamisessa mukana oleva Evan Chen, joka on kirjoittanut oman kirjansa[1] johdannossa seuraavasti: ”Indeed, I was inspired to write this book because as a contestant I did not find any resources I particularly liked. Some books were rich in theory but contained few challenging problems for me to practice on. Other resources I found consisted of hundreds of problems, loosely sorted in topics as broad as ’collinearity and concurrence’, and lacking any exposition on how a reader should come up with the solutions in the first place. I have thus written this book keeping these issues in

[1]Chenin kirja on mielestäni huippuhyvä, ja se on mainittu Lisämateriaaleja-luvussa. Se ei kuitenkaan aja samaa asiaa kuin tämä kirja, koska Chen opettaa kirjassaan nimenomaan geometriaa, kun taas minun tavoitteenani on opettaa yleisesti kilpailumatematiikkaa.

mind, and I hope that the structure of the book reflects this."

Missä järjestyksessä kirjaa kannattaa lukea?

Kuten aiemmin mainittiin, lukujen viimeiset tehtävät ovat usein muita vaikeampia, joten kirjaa ei kannata lukea suoraan alusta loppuun. Aihealueen sisällä luvut kannattaa kuitenkin lukea järjestyksessä ainakin lukuteorian ja geometrian kohdalla. Algebrassa järjestyksellä ei ole niin paljoa väliä ja kombinatoriikassa ei käytännössä ollenkaan. Aihealueiden välisiä riippuvuuksia ei juurikaan ole, vaikkakin jotkin yksityiskohdat saattavat aueta vasta sen jälkeen, kun on lukenut toisen osion materiaalia.

Kirjaa lukiessa kannattaa muistaa, että matematiikan lukeminen ei toimi niin, että joko on tai ei ole lukenut jotain asiaa. Vaikka osa ajatuksista menisi ohi, niin monesti lukemisesta silti oppii jotain. Lisäksi vaikeisiin kohtiin voi palata myöhemmin.

Miksi kombinatoriikan osio on paljon lyhyempi kuin muut osiot?

Kombinatoriikan osio oli vaikein kirjoittaa, koska siihen liittyen on vähiten yleistä teoriaa. Tämän vuoksi kombinatoriikan luvut sisältävätkin käytännössä ainoastaan esimerkkitehtäviä. Osiossa on siis ihan yhtä paljon esimerkkitehtäviä (ellei enemmänkin) kuin muissakin osioissa, ja puuttuvat sivut ovat vain puuttuvaa teoriaa.

Lukuteorian ja algebran suhteen minusta tuntui, että materiaali oli hieman liian teoriapainotteinen, joten lisäsin näistä aiheista haastavampia lisätehtäviä sisältävät luvut. Näiden tehtävien ratkaisut eivät ole yhtä yksityiskohtaisia kuin muiden tehtävien ja ne saattavat vaatia hieman laajempaa osaamista matematiikasta, joten lisätehtävät eivät välttämättä sovi perheen pienimmille.

Tekstin seassa esiintyy erilaisia lyhenteitä, kuten IMO. Mitä nämä tarkoittavat?

IMO eli Kansainväliset matematiikkaolympialaiset mainittiin jo aiemmin Suomen kilpailutoiminnan yhteydessä. Muita tekstissä esiintyviä kilpailujen lyhenteitä ovat MAOL (Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto), ELMO (Ex-Lincoln Math Olympiad: tämä on eräs Yhdysvaltojen vuosittainen harjoituskilpailu) ja APMO (Asian-Pacific Math Olympiad). Lisäksi kilpailun yhteydessä voidaan mainita, että tehtävä on kilpailun lyhytlistalta, mikä tarkoittaa sitä, että tehtävä on ollut ehdolla kilpailun tehtäväksi, mutta sitä ei ole valittu itse kilpailuun.

Mainittujen kilpailuiden tehtävät toimivat hyvänä harjoittelumateriaalina. Harjoittelumateriaaleista on kerrottu lisää Lisämateriaaleja-luvussa.

Mistä kirjan nimi tulee?

Motivaatio kirjan kirjoittamiseen tuli Suomen kisakoodausvalmennuksen puolelta. Antti Laaksonen on kirjoittanut opetusmateriaalin nimeltä "Kisakoodarin käsikirja", joka lyhennetään usein KKKK. Kirja on tarkoitukseensa toimiva, ja ajattelin, että myös matematiikan puolelle voisi tehdä vastaavan materiaalin. Aluksi kirja kulki työnimellä "Matematiikkamittelijän mittava manuaali" eli MMMM.

Kun mietin kirjan nimeä uudelleen, halusin painottaa ongelmanratkaisua jo sen nimessä. Lyhenteeksi pitäisi siis tulla OOOO. Tästä muodostui nykyinen nimi, joka on kuvaava monestakin syystä:

- Sana ”Ollin” kuvaa kirjan persoonallista tyyliä: Kerron nimenomaan omista ajatuksistani ja ideoistani, ja tehtävien ratkaisut vastaavat omaa ratkaisuprosessiani. Lisäksi kirjan lopussa on kirjoittamiani kilpailumatematiikkaa koskevia tekstejä, jotka voivat olla kiinnostavia ja opettavaisia.
- Kirja on vähän niin kuin oppikirja, mutta rennompi, joten se on opas.
- Materiaali tähtää olympiatason osaamiseen. Monet esimerkkitehtävät ovat vaikeita.
- Toistetaan vielä kerran, että tavoitteena on ongelmanratkaisun opettaminen.

2 Johdantotehtäviä

Kilpailumatematiikka jakautuu neljään osa-alueeseen: algebraan, geometriaan, kombinatoriikkaan ja lukuteoriaan. Tässä luvussa annetaan pieni maistiainen jokaisesta osa-alueesta esittämällä yksi kuhunkin aihealueeseen liittyvä tehtävä. Kaikki näistä eivät ole helppoja, ainakaan jos ei ole harrastanut kilpailumatematiikkaa aiemmin. Tehtävät onkin valittu itse tehtävän tai sen ratkaisun mielenkiintoisuuden vuoksi. Lukija voi halutessaan pohtia tehtäviä ennen ratkaisujen lukemista.

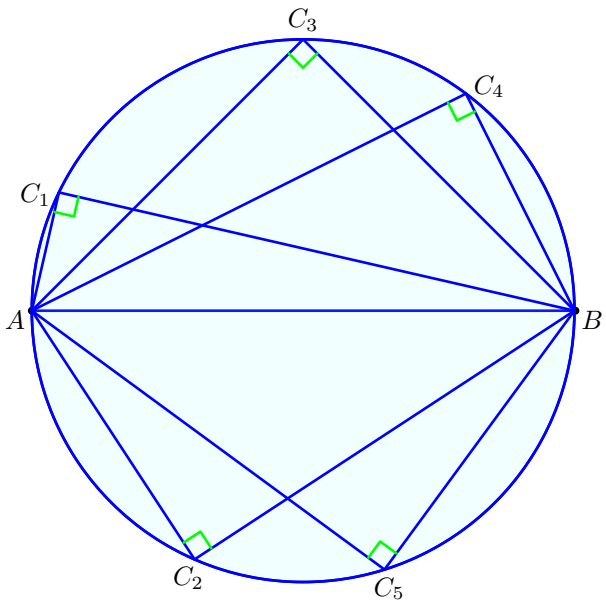
2.1 Geometria

Tehtävänä on osoittaa seuraava tulos, joka tunnetaan nimellä Thaleen lause.

Lause (Thaleen lause)

Tasoon on piirretty ympyrä, jonka halkaisija on jana AB. Ympyrältä valitaan jokin piste C. Osoita, että $\angle ACB = 90°$.

Tässä kuvassa tilannetta on havainnollistettu viidellä eri pisteen C valinnalla.



Kuvien suorat kulmat todella näyttävät suorilta kulmilta, mutta miten se todistetaan? Todistus näytetään ensimmäisessä geometrian kappaleessa.

2.2 Lukuteoria

Tehtävä

Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y, joilla $|3^x - 2^y| = 1$.

Listaamalla kakkosen potensseja $2, 4, 8, 16, \ldots$ ja kolmosen potensseja $3, 9, 27, 81, \ldots$ huomataan, että parit $(2, 3)$, $(4, 3)$ ja $(8, 9)$ ovat sellaisia, joissa luvut ovat yhden päässä toisistaan. Ovatko tässä kaikki kakkosen ja kolmosen potenssien parit, jotka ovat yhden etäisyydellä toisistaan? Ratkaisu ongelmaan löytyy lukuteorian kappaleesta Eksponenttifunktiot ja neliönjäännökset.

2.3 Algebra

Tehtävä

Yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ on kolme ratkaisua. Merkitään niitä kirjaimin a, b ja c. Laske $a^2 + b^2 + c^2$.

Kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen on vaikeaa (mutta ratkaiseminen on mahdollista). Olisi hyvin työlästä etsiä yhtälölle kaikki kolme ratkaisua, laskea ratkaisujen neliöt ja summata nämä yhteen. Tehtävään on kuitenkin elegantti ratkaisu, jossa vastauksen laskeminen on ovelien havaintojen vuoksi hyvin helppoa. Ratkaisu löytyy kappaleesta Polynomit.

2.4 Kombinatoriikka

Tehtävä

Anna ja Berg pelaavat dominopalikoilla (2×1) peliä $n \times 1$ ruudun laudalla. Pelissä pelaajat laittavat vuorotellen yhden dominopalikan laudalle niin, että palikka peittää täsmälleen kaksi ruutua eikä mene yhdenkään muun palikan päälle. Peli loppuu, kun tällaisia siirtoja ei pystytä enää tekemään. Viimeisen siirron tehnyt pelaaja voittaa pelin. Osoita, että jos Anna ja Berg pelaavat yhden pelin jokaisella luvun n arvolla $2, 3, \ldots, 2007$, Anna aloittaa jokaisen pelin ja molemmat pelaajat pelaavat optimaalisesti, niin Anna voittaa ainakin 1505 peliä.

Käydään läpi esimerkkipeli arvolla $n = 9$ eli 9×1 -laudalla.

Anna voi laittaa dominopalikan ruutujen 4 ja 5 kohdalle.

Berg voi laittaa palikan kohtien 6 ja 7 kohdalle, jolloin tilanne näyttää tältä:

Pelaa Anna miten tahansa, voi Berg tehdä vielä yhden siirron Annan jälkeen. Berg saa tehtyä viimeisen siirron ja voittaa pelin. Olisiko Anna voinut voittaa pelaamalla alussa jotenkin muuten?

Usein pelejä käsittelevissä tehtävissä oletetaan, että pelaajat pelaavat parhaalla mahdollisella tavalla, ja yleensä kysytään pelin voittajaa. Tämä tehtävä on hieman epätavallinen, koska tehtävässä ei pyydetä osoittamaan mitään koskien tiettyä luvun n arvoa. Halutaan vain todistaa, että aloittava Anna voittaa suurimman osan peleistä, tarkemmin sanoen vähintään 1505 peliä. Tehtävän ratkaisu löytyy kombinatoriikan luvusta Pelit.

3 Kehäkulmalause ja jännenelikulmiot (Geometria)

Tässä luvussa esitetään kilpailuissa esiintyvän geometrian perusteet.

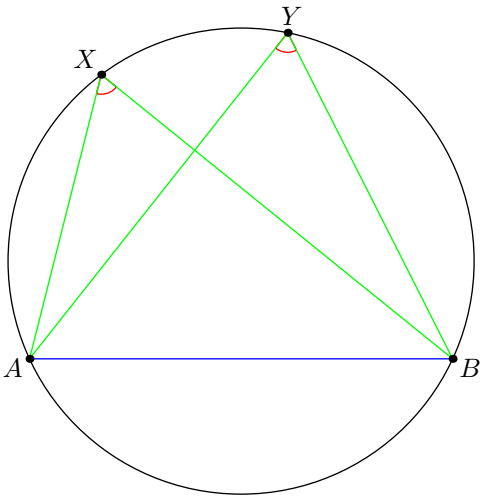
Lukijan oletetaan muistavan koulusta seuraavat perusasiat:

- Kolmion kulmien summa on $180°$.[2]
- Jos kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, niin siinä on kaksi yhtä suurta kulmaa, ja toisin päin. Tällaisia kolmioita kutsutaan tasakylkisiksi kolmioiksi.

Seuraavaksi käsitellään kehäkulmalausetta, joka myös on koulusta tuttu. Tulos on kuitenkin tärkein kilpailugeometriassa käytettävistä välineistä, joten se kannattaa käydä läpi huolella.

3.1 Kehäkulmalause

Tutkitaan seuraavaa kuvaa.



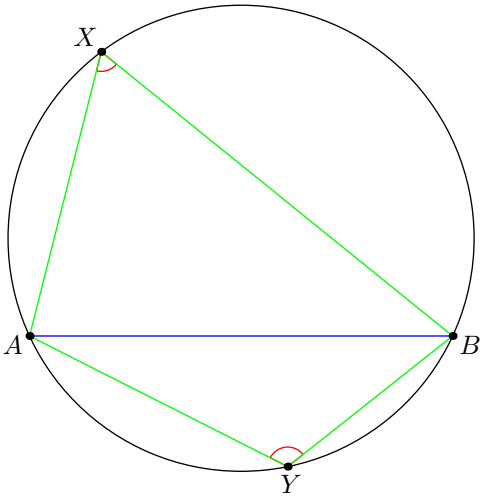
Pisteet A, B, X ja Y ovat siis mielivaltaisia pisteitä ympyrän kehällä. Kehäkulmalause sanoo, että punaisella merkityt kulmat ovat yhtä suuret.

Lause (Kehäkulmalause)

Olkoot A, B, X ja Y mielivaltaiset (eri) pisteet ympyrän kehällä. Oletetaan, että X ja Y ovat samalla puolella janaa AB. Tällöin $\angle AXB = \angle AYB$.

Huomaa lauseen oletus pisteiden X ja Y sijainnista. Tämä oletus on välttämätön, kuten seuraavasta kuvasta nähdään – toinen kulmista näyttää olevan tylppä ja toinen terävä.

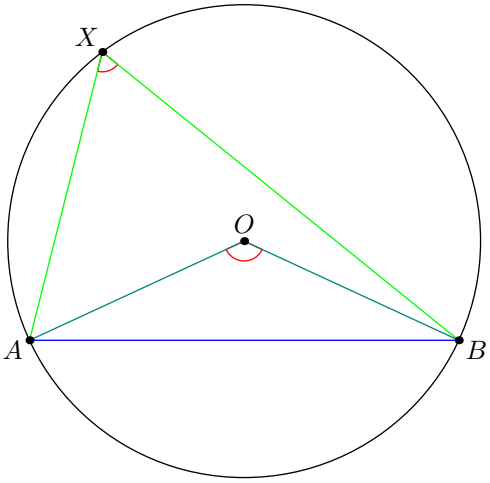
[2] Osaatko todistaa tämän?



Ennen kuin tutkitaan tilannetta pidemmälle, esitetään kehäkulmalauseen yleistys. Tämä yleistys on oikeastaan helpompi siksi, että se antaa vinkin siitä, miten lause todistetaan.

Lause (Kehäkulmalauseen keskuskulmaversio)

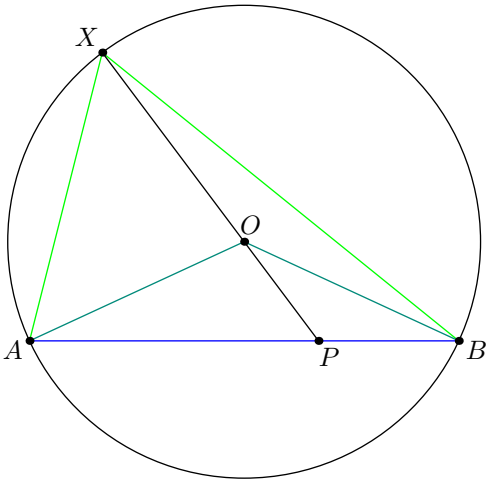
Olkoot A, B ja X (eri) pisteitä ympyrän kehällä, ja olkoon O ympyrän keskipiste. Tällöin pätee $\angle AOB = 2\angle AXB$.



Huomaa, että tämä lause todistaa kehäkulmalauseen: lausehan osoittaa, että $\angle AXB$ on aina puolet kulmasta $\angle AOB$ riippumatta siitä, miten piste X valitaan. Siis $\angle AXB$ on aina sama kaikilla pisteen X valinnoilla. Paitsi...

Myös tässä lauseessa tulee huomioida se mahdollisuus, että X on ”väärällä puolella” janaa AB. Tällöin kulma $\angle AOB$ tulee mitata niin, että se kiertää pisteen O eri puolelta kuin kuvassa.

Lauseen voi todistaa käyttäen pelkästään tietoa siitä, että kolmion kulmien summa on 180 astetta ja että jos kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, niin siinä on kaksi yhtä suurta kulmaa.



Määritellään P olemaan suoran XO ja janan AB leikkauspiste. Kolmio AXO on tasakylkinen, koska janat AO ja XO ovat ympyrän säteitä ja siten yhtä pitkiä. Jos siis merkitään $\alpha = \angle AXO$, niin pätee $\angle XAO = \alpha$. Koska kolmion kulmien summa on 180 astetta, niin $\angle XOA = 180° - 2\alpha$. Oikokulma on myös 180 astetta, joten $\angle AOX + \angle AOP = 180°$, eli $\angle AOP = 2\alpha$.

Saimme siis todistettua, että $\angle AOP$ on kaksinkertainen kulmaan $\angle AXO$ verrattuna. Vastaavasti saadaan, että $\angle BOP$ on kaksi kertaa kulma $\angle BXO$. Yhdistämällä nämä huomiot saadaan, että $\angle AXB$ on puolet kulmasta $\angle AOB$.

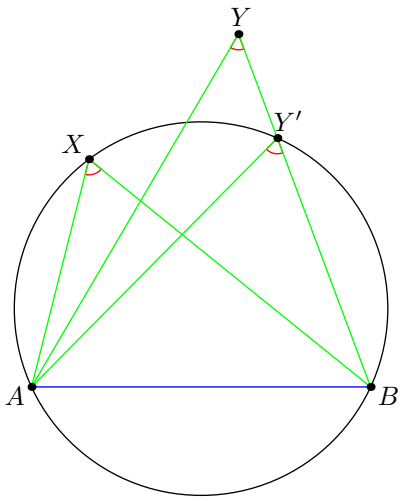
(Todistus on hieman erilainen tapauksessa, jossa O ei ole kolmion AXB sisällä. Tämän tapauksen tutkiminen sivuutetaan, mutta lukija voi halutessaan miettiä myös tätä tilannetta.)

Kehäkulmalauseen väite pätee myös toiseen suuntaan.

Lause (Kehäkulmalauseen vain jos -puoli)

Olkoot A, B ja X pisteitä ympyrällä. Olkoon Y sellainen piste, joka on samalla puolella janaa AB kuin piste X ja jolla pätee $\angle AXB = \angle AYB$. Tällöin piste Y on samalla ympyrällä kuin pisteet A, B ja X.

Tehdään vastaoletus: piste Y ei olekaan tällä ympyrällä. Tutkitaan ensin sitä tapausta, jossa Y on ympyrän ulkopuolella. Olkoon Y' kuten kuvassa janan YB leikkauspiste ympyrän kanssa.



Nyt kehäkulmalauseen nojalla $\angle AY'B$ on sama kuin $\angle AXB$, joka puolestaan on oletuksen nojalla sama kuin kulma $\angle AYB$. Nyt kolmiossa AYY' kulma $\angle AY'Y$ on $180° - \angle AYY'$, ja koska kolmion kulmien summa on 180°, tulisi kulman $\angle YAY'$ olla 0°. Tämä on mahdotonta, joten Y ei voi olla ympyrän ulkopuolella.

Vastaavasti käsitellään tapaus, jossa piste Y on ympyrän sisäpuolella.

3.2 Jännenelikulmiot

Aiemmin tutkittiin tilannetta, jossa pisteet X ja Y ovat eri puolilla janaa AB. Kehäkulmalauseen keskuskulmaversion nojalla tällöin $\angle AXB$ vastaa puolta kulmasta $\angle AOB$ ja $\angle AYB$ on puolet kulmasta $\angle AOB$, missä kulma kiertää pisteen O toista kautta kuin kulman $\angle AXB$ tapauksessa. Yhteensä näiden keskuskulmien summa on täysi kulma, eli pätee $\angle AXB + \angle AYB = 180°$. Siis jos nelikulmion $AYBX$ kaikki pisteet ovat samalla ympyrällä, niin sen vastakkaisten kulmien $\angle AXB$ ja $\angle AYB$ summa on 180°.

Toisaalta jos nelikulmion $AYBX$ vastakkaisten kulmien $\angle AXB$ ja $\angle AYB$ summa on 180°, niin kehäkulmalauseen vain jos -puolella ja keskuskulmaversiolla saadaan, että pisteet A, Y, B ja X todella ovat kaikki samalla ympyrällä.

Edelliset huomiot antavat seuraavan hyvin tärkeän lauseen koskien jännenelikulmioita, eli nelikulmioita, joiden kaikki kärkipisteet ovat samalla ympyrällä.

Lause (Jännenelikulmioiden peruslause)

Olkoon $AYBX$ nelikulmio. Tällöin pisteet A, Y, B ja X ovat samalla ympyrällä jos ja vain jos nelikulmion vastakkaisten kulmien $\angle AYB$ ja $\angle AXB$ summa on 180 astetta.

Sillä ei tietenkään ole väliä, kumpi pari vastakkaisia kulmia ehtoon otetaan, koska nelikulmion kulmien summa on 360° (joten $\angle AYB + \angle AXB$ on 180° täsmälleen silloin, kun $\angle XAY + \angle XBY = 180°$).

Huomaa, että lausetta käyttäessä tulee ottaa nimenomaan vastakkaiset kulmat

nelikulmiosta. Tämän vuoksi lauseessa tulee tietää, missä järjestyksessä pisteet A, Y, B ja X ovat toisiinsa nähden. Puhuttaessa nelikulmiosta $ABCD$ oletetaankin aina, että A, B, C ja D sijaitsevat tässä järjestyksessä toisiinsa nähden eli että sen sivut eivät leikkaa toisiaan.

Kehäkulmalauseella ja sen vain jos -puolella saadaan toinen ekvivalentti ehto jännenelikulmiolauseen väitteen kanssa: nelikulmio $AYBX$ on jännenelikulmio jos ja vain jos $\angle YAB = \angle YXB$.

3.3 Huomautus: suunnatut kulmat

Edellä esitetyt tulokset tuntuvat epäkäytännöllisiltä: miltei jokaista tulosta käytettäessä tulisi varmistaa, että jotkin pisteet ovat oikealla puolella jotain janaa tai että pisteet ovat oikeassa järjestyksessä.

Yllättävää kyllä, tämä ongelma on paljon lievempi kuin mitä edellisen tekstin perusteella luulisi. Suuressa osassa kilpailutehtäviä ei esiinny tällaisia ns. konfiguraatioongelmia, ja niissä, joissa esiintyy, käsiteltävät tapaukset monesti ratkeavat käytännössä katsoen samalla todistuksella. Usein riittääkin vain alussa olettaa, että kuvan pisteet ovat siinä järjestyksessä, missä ne ovat itse piirretyssä kuvassa, ja lopuksi mainita, että muut tapaukset ratkeavat samalla tavalla (olettaen, että näin todella on – muuten voi tulla ongelmia).

Edellinen ”ratkaisu” ongelmaan voi tuntua epäilyttävältä (ja onhan se). Ongelmaan on kuitenkin myös ”oikea” ratkaisu: suunnatut kulmat. Suunnatut kulmat perustuvat siihen ideaan, että merkitessä $\angle ABC$ tarkoitetaan kulman vastaavan aluetta, joka saadaan kiertämällä janaa BC vastapäivään, kunnes se kohtaa janan BA. Lisäksi ajatellaan, että kulmat lasketaan ”modulo 180 astetta”[3]. Täten esimerkiksi $\angle ABC = 360^\circ - \angle CBA \equiv -\angle CBA \pmod{180^\circ}$. En ole itse tarvinnut suunnattuja kulmia kilpailutehtäviä ratkoessani, minkä vuoksi niitä ei käytetä tässä materiaalissa.

Oli ratkaisu ongelmaan mikä hyvänsä, tulee kilpailuissa aina piirtää mallikuva geometrian tehtäviin – tällöin on selvää, mitä konfiguraatiota tarkastellaan.

3.4 Esimerkkitehtäviä

Pelkästään kehäkulmalause ja jännenelikulmioita koskevat tulokset riittävät ratkomaan suuren osan geometrian tehtävistä, kunhan niitä osaa soveltaa hyvin. Ja vaikka tehtävä ei ratkeaisikaan pelkästään näillä menetelmillä, on niiden soveltaminen usein iso osa ratkaisua.

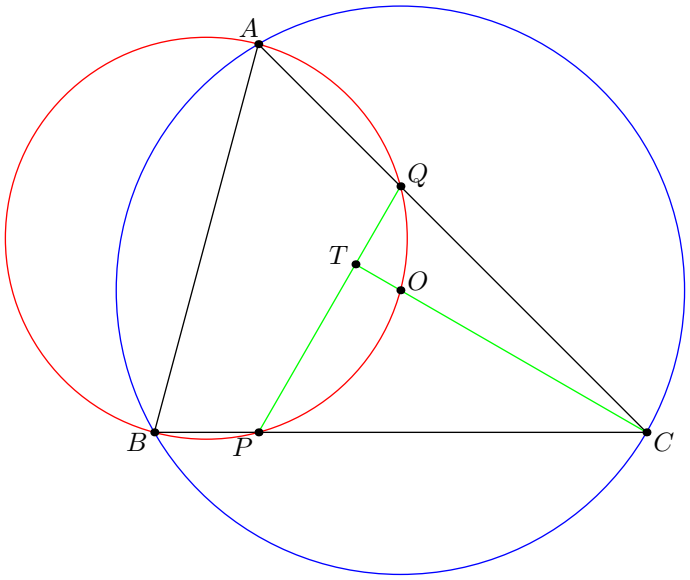
Ensimmäinen esimerkkitehtävä on ollut MAOLin loppukilpailussa vuonna 2014.

[3]Modulo on määritelty lukuteorian kappaleessa Kongruenssit. Lukija ei kuitenkaan jää paljosta paitsi, vaikka hän ei vielä olisikaan lukenut kongruensseista.

Tehtävä

Olkoon O teräväkulmaisen kolmion ABC ympärysympyrän keskipiste. Pisteiden A, B ja O kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivut BC ja AC pisteissä P ja Q. Osoita, että janan CO jatke leikkaa kohtisuorasti janaa PQ.

Minkä tahansa kolmion kärkipisteiden kautta voidaan piirtää ympyrä (tämä todistetaan hieman myöhemmin). Tehtävässä O on tämän ns. ympärysympyrän keskipiste.



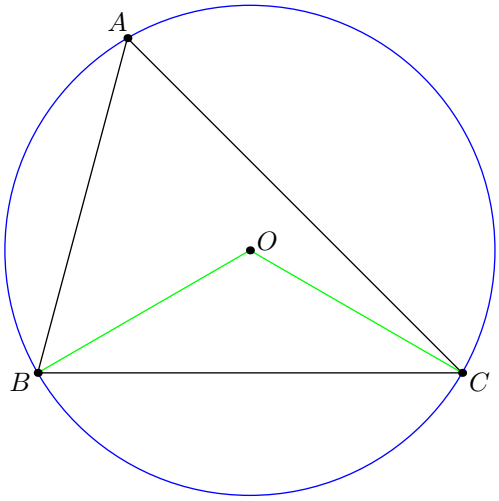
Merkitään kyseistä leikkauspistettä kirjaimella T. Haluamme siis todistaa, että $\angle PTC = 90°$. Yksi lähestymistapa voisi olla yrittää laskea, mitä ovat $\angle TPC$ ja $\angle TCP$: jos näiden kulmien summa on 90°, niin tällöin pätee $\angle PTC = 90°$.

Koitetaan ensiksi laskea, mitä $\angle TPC$ on. Yleinen ajatus kulmanjahtauksessa on aina yrittää esittää kulmia ”tunnettujen” kulmien avulla. Esimerkiksi tässä (ja käytännössä kaikissa tehtävissä, jotka käsittelevät kolmiota) tunnetuiksi kulmiksi voi ajatella kulmat $\angle BAC$, $\angle ACB$ ja $\angle CBA$. Nämä kulmat lyhennetään usein kirjoittamalla $\angle A, \angle B$ ja $\angle C$, koska niitä käytetään ratkaisuissa hyvin paljon.

Ei ole kovin vaikeaa nähdä ”polkua”, jonka kautta $\angle TPC$ saadaan palautettua kolmion ABC kulmiin: Ensinnäkin $\angle TPC = 180° - \angle BPT$. Koska $ABPQ$ on jännenelikulmio, on sen vastakkaisten kulmien summa 180°. Täten $\angle BPQ + \angle BAQ = 180°$, eli $\angle BPT = 180° - \angle A$. Yhdistämällä saadut tiedot saadaan $\angle TPC = \angle A$.

Olemme saaneet laskettua, mitä $\angle TPC$ on. Vielä pitää laskea kulma $\angle PCT$, jonka haluamme olevan $90° - \angle A$. Nyt on hyvä ensiksi huomata, että $\angle PCT = \angle BCO$. Pelkästään kuvaa katsomalla voisi ajatella, että tämä sievennys on triviaali, mutta toisaalta pisteet P ja T ovat paljon ”vaikeampia” kuin piste O. Tämän takia kannattaa mieluummin keskittyä kulmaan $\angle BCO$.

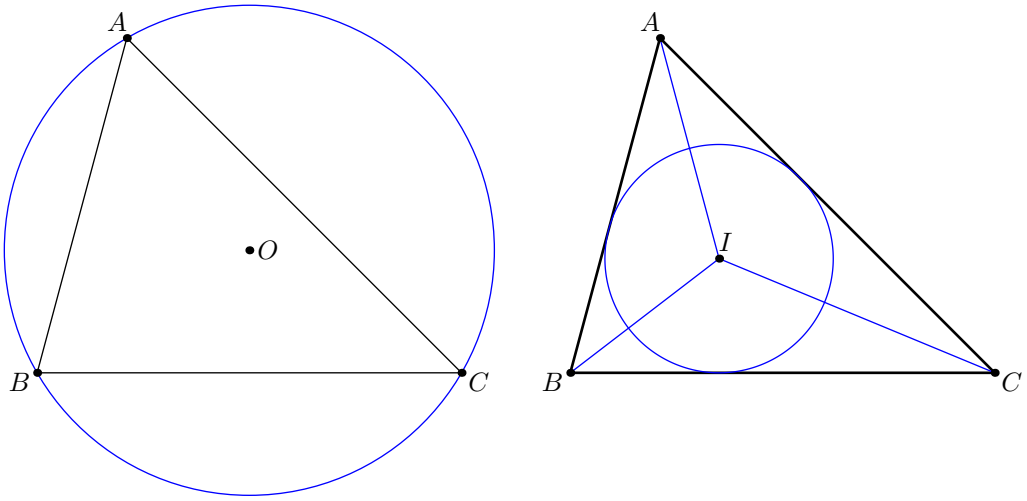
Voimme nyt unohtaa kokonaan pisteet P, T ja Q, ja ongelma palautuu muotoon ”Todista, että $\angle BCO = 90° - \angle A$”. Tämä on selvästi edistystä. Tutkittava konfiguraatio on jo niin yksinkertainen, että tehtävän luulisi ratkeavan.



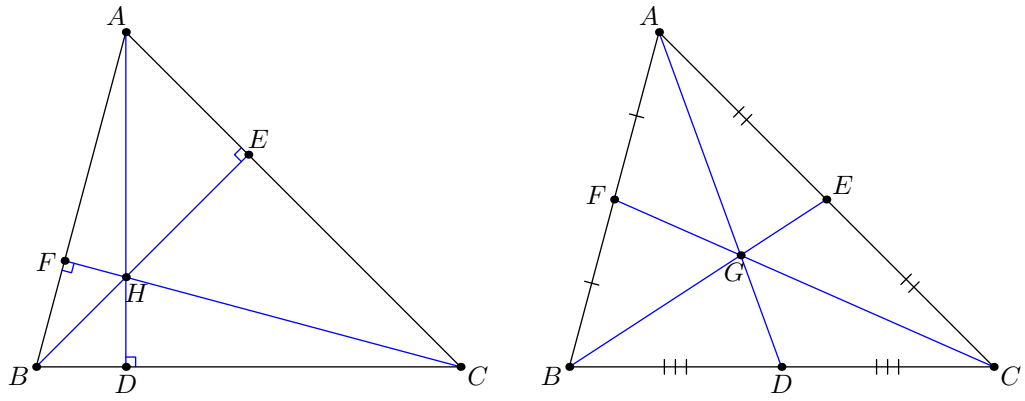
Kuvaan on piirretty apujana BO. Soveltamalla kehäkulmalauseen keskuskulmaversiota saadaan $\angle BOC = 2\angle A$, ja koska BOC on tasakylkinen kolmio, saadaan kantakulmat laskettua: $\angle OBC = \angle OCB = 90 - \angle A$. Olemme siis valmiit.

Huomattiin siis, että tehtävä palautuu yhtälön $\angle BCO = 90° - \angle A$ todistamiseen. Huomaamme, että pystymme oikeastaan laskemaan minkä tahansa kulman, jotka muodostetaan valitsemalla jotkin kolme pisteistä A, B, C ja O. Onkin tärkeää tietää, miten yleiset konfiguraatiot käyttäytyvät.

Ympärysympyrän keskipiste O ei ole ainoa kolmion tärkeä piste. Seuraavaksi esitetään neljä yleisimmin esiintyvää kolmion merkillistä pistettä.[4]



[4]Kilpailutehtävissä tarvitsee harvemmin tietää monia eksoottisia pisteitä. Seuraavassa luvussa käydään vielä läpi sivuympyröiden keskipisteitä ja yhdeksän pisteen ympyrää koskevia ominaisuuksia. Täällä on lueteltu kymmeniä tuhansia kolmion merkillisiä pisteitä: https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.



Vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas: ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O, sisään piirretyn ympyrän keskipiste I, korkeusjanojen leikkauspiste (ortokeskus) H ja mediaanien leikkauspiste (painopiste) G. (Kirjainten nimet tulevat englannista.) Ensi luvussa todistetaan näiden pisteiden olemassaolot.

Ympäri piirretyn ympyrän keskipistettä koskevia ominaisuuksia on jo käyty läpi. Mainitaan vielä yksi asia: piste O on janojen AB, BC ja CA keskinormaalien leikkauspiste. (Kerrataan, että janan normaali on suora, joka leikkaa sitä kohtisuorasti ja keskinormaali on normaali, joka jakaa janan kahteen yhtä pitkään osaan.)

Sisään piirretyn ympyrän keskipistettä I koskien mainitaan aluksi seuraavat asiat:

1. I määritellään olemaan sellaisen ympyrän (ns. sisäympyrän) keskipiste, joka sivuaa jokaista kolmion ABC sivuista.

2. I on kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste. (Kulmanpuolittaja on nimensä mukaisesti suora, joka puolittaa jonkin kulman. Siis esimerkiksi $\angle BAI = \angle CAI = \frac{1}{2}\angle A$.)

Usein sisään piirretyn ympyrän yhteydessä esiintyvät kolmion ABC sivuamispisteet sisäympyrän kanssa ja leikkauspisteet kulmanpuolittajien kanssa. Huomaa, että nämä eivät ole samat pisteet.

Konfiguraatiosta, jossa on kolmion kärjet A, B ja C, kulmanpuolittajat AD, BE ja CF sekä näiden leikkauspiste I, voidaan laskea osa kulmista varsin suoraviivaisesti, mutta aivan kaikkea ei saada laskettua. Esimerkiksi kulmaa $\angle AEF$ ei saa laskettua kulmien $\angle A, \angle B$ ja $\angle C$ avulla.

Kolmion ortokeskus H on sen korkeusjanojen leikkauspiste. Ei ole ilmeistä, miksi korkeusjanat leikkaavat samassa pisteessä (tämä todistetaan myöhemmin). Kyseessä on jälleen konfiguraatio, josta voi laskea kaikki kulmat. Seuraava lemma on tärkeä tulos tähän liittyen.

Lemma

Olkoon ABC kolmio, ja olkoot AD, BE ja CF sen korkeusjanat. Olkoon H kolmion ABC ortokeskus. Tällöin $AFHE$ ja $BFEC$ ovat jännenelikulmioita.

Lemman todistus on triviaali käyttämällä tuloksia kehäkulmalauseesta ja jännenelikulmioista. Tarvitsemme oikeastaan vain erikoistapausta suorille kulmille, joka tunnetaan Thaleen lauseena, joka esiteltiin jo johdantokappaleessa.

Huomaa, että lemmassa mainitut jännenelikulmiot on ”otettu pisteen A suhteen”. Konfiguraatiossa on oikeastaan kuusi kappaletta jännenelikulmioita, kaksi jokaista kärkeä A, B ja C kohti.

Nyt ei ole vaikeaa laskea kulmia kuvasta. Ehkäpä vaikein kulma laskea on $\angle FED$. Ensiksi huomataan, että $\angle FED = \angle FEH + \angle HED$. Lemmaa käyttämällä tämä saadaan muotoon $\angle FAH + \angle HCD$. Molemmat näistä kulmista ovat $90° - \angle B$, mikä nähdään katsomalla suorakulmaisia kolmioita BAD ja BCF.

Ortokeskusta koskeva konfiguraatio on myös siitä näppärä, että sivujen pituuksia voi laskea suhteellisen helposti trigonometrian avulla.

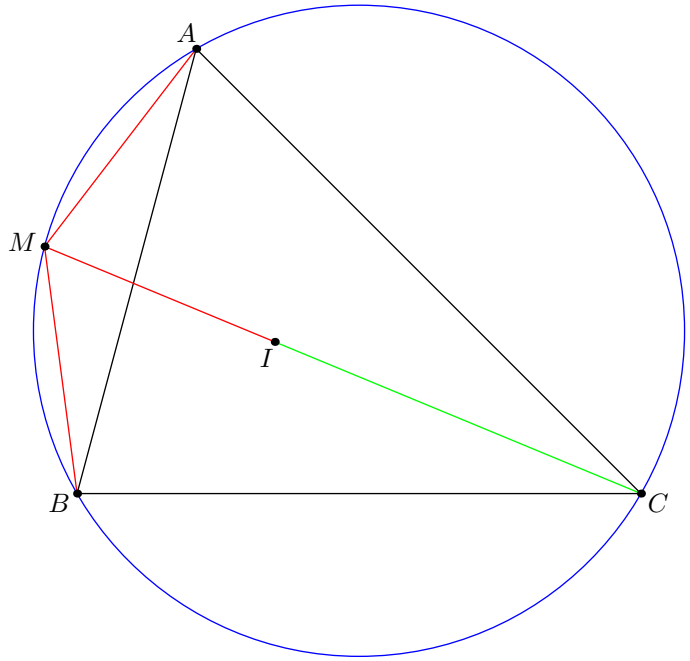
Kolmion mediaaneiksi tai keskijanoiksi kutsutaan niitä janoja, joiden toinen pää on kolmion yksi kärkipiste ja toinen pää on kolmion vastakkaisen sivun keskipiste. Näiden janojen leikkauspistettä G kutsutaan kolmion painopisteeksi.

Jos AD on kolmion mediaani, niin kulmia $\angle BAD$ ja $\angle DAC$ ei saa laskettua pelkästään kulmien $\angle A, \angle B$ ja $\angle C$ avulla (käyttämättä trigonometrisia funktioita). Kolmio DEF on kuitenkin yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa. Tämä seuraa huomaamalla, että kolmioilla FAE ja BAC on yhteinen kulma $\angle A$ ja että tämän kulman vieressä olevien sivujen suhteet ovat samat, nimittäin $1 : 2$. Täten pätee $FE : BC = 1 : 2$. Vastaava pätee myös muille sivuille. Huomataan vielä, että janat BC ja FE ovat yhdensuuntaiset.

Seuraava tehtävä on hieman samantyylinen kuin aiempi MAOLin tehtävä. Tehtävän konfiguraatio esiintyy usein kilpailutehtävissä, joten se kannattaa opetella tunnistamaan.

Tehtävä

Olkoon ABC kolmio, ja olkoon I sen sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Olkoon M kulman $\angle C$ puolittajan leikkauspiste kolmion ABC ympärysympyrän kanssa. Osoita, että M on kolmion AIB ympärysympyrän keskipiste.



Haluamme osoittaa, että $MA = MB = MI$. Todistetaan ensin helpompi osuus $MA = MB$.

Kehäkulmalauseen nojalla pätee $\angle MAB = \angle MCB$. Vastaavasti $\angle MBA = \angle MCA$. Oletuksen nojalla MC on kulman $\angle C$ puolittaja, joten $\angle MCB = \angle MCA$. Täten $\angle MBA = \angle MAB$, eli MBA on tasakylkinen kolmio, eli $MA = MB$. Yleisesti pätee, että yhtä suuria kulmia vastaavat kaaret ovat yhtä pitkiä.

Todistetaan sitten, että $MA = MI$. Toisin sanoen halutaan, että MAI on tasakylkinen kolmio. Koitetaan laskea kolmion MAI kulmat. Helpoin kulma on $\angle AMI$: tämä on vain $\angle AMC = \angle B$.

Seuraavaksi lasketaan vaikkapa kulma $\angle MAI$. Saadaan

$$\angle MAI = \angle MAB + \angle BAI = \angle MCB + \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A.$$

Nyt saadaan laskettua $\angle MIA$:

$$\angle MIA = 180^\circ - \angle AMI - \angle MAI = 180^\circ - \angle B - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C.$$

Tämän voi sieventää kirjoittamalla $180^\circ = \angle A + \angle B + \angle C$, jolloin jäljelle jää $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C = \angle MAI$. Tämä todistaa väitteen.

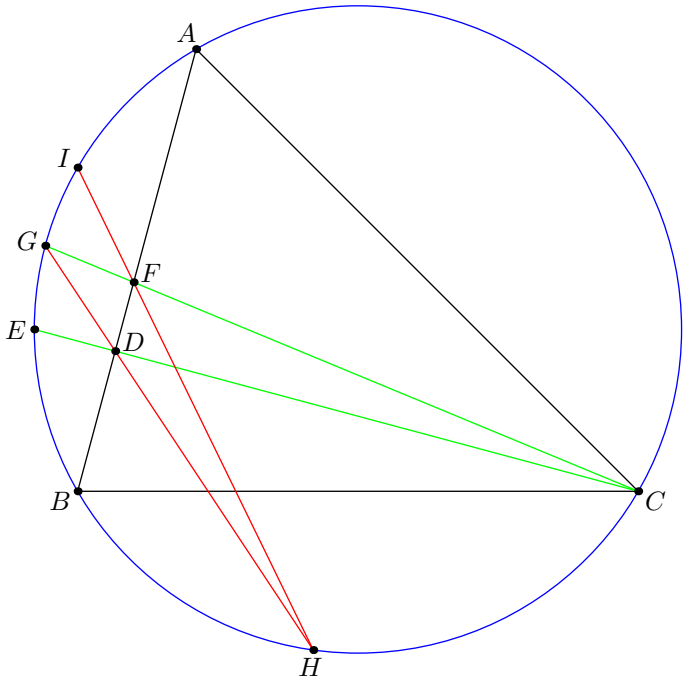
Kommentti: Todistus vaatii pienen määrän laskemista, mutta siinä ei ole mitään erityisen vaikeaa: lasketaan vain rutiininomaisesti kaikki kulmat, mitä nähdään, ja tulos seuraa.

Väitteelle on myös seuraava lyhyempi todistus, mutta tämä on hieman vaikeampi nähdä. Huomataan, että $\angle AIB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$, mikä sieventyy, kuten edellä, muotoon $90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$. Lisäksi $\angle AMB = 180^\circ - \angle C$. Nyt sen kulman $\angle AMB$, joka on kuvassa yli 180°, koko on $180^\circ + \angle C = 2\angle AIB$, joten väite seuraa kehäkulmalauseen keskuskulma- ja vain jos -versioista.

Seuraava esimerkkitehtävä on vuoden 2014 Baltian tie -kilpailusta.

Tehtävä

Olkoon Γ teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Pisteen C kautta kulkeva sivun AB normaali leikkaa sivun AB pisteessä D ja ympyrän Γ uudelleen pisteessä E. Kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä F ja ympyrän Γ uudelleen pisteessä G. Suora GD leikkaa ympyrän Γ uudelleen pisteessä H, ja suora HF leikkaa ympyrän Γ uudelleen pisteessä I. Osoita, että $AI = EB$.



Ensinnäkin todetaan, että $AI = EB$ täsmälleen silloin, kun janoja AI ja EB vastaavat ympärysympyrän kaaret ovat yhtä pitkät, mikä puolestaan tapahtuu täsmälleen silloin, kun $\angle ICA = \angle ECB$.[5] Tämä kulmaehto on paljon lähestyttävämpi kuin pituuksia koskeva ehto, joten käytetään sitä.

Kaaret $\widehat{AI}$ ja $\widehat{BE}$ eivät vielä ole kovin helppoja käsitellä. Huomataan kuitenkin, että $\widehat{BE} = \widehat{BG} - \widehat{EG}$ ja $\widehat{AI} = \widehat{GA} - \widehat{GI}$, missä vähennyslaskulla tarkoitetaan kaarien pituuksien vähennyslaskua. Kulmanpuolittajaominaisuuden vuoksi kaarien $\widehat{BG}$ ja $\widehat{AG}$ pituudet ovat samat.

Riittää siis todistaa, että kaarien $\widehat{EG}$ ja $\widehat{GI}$ pituudet ovat samat. Kaari EG vastaa kulmaa $\angle ECG$, ja kaari GI vastaa kulmaa $\angle GHI$. Haluamme siis, että $\angle GHI = \angle ECG$.

Pääsemme nyt helposti eroon osasta konfiguraation pisteitä: Koska $\angle GHI = \angle DHF$ ja $\angle ECG = \angle DCF$, voimme unohtaa pisteet I ja E. Nyt riittää siis todistaa, että $\angle DHF = \angle DCF$. (Pistettä G ei voi unohtaa, koska sitä käytettiin pisteen H määrittelemiseen.)

[5] Formaalin todistuksen saa esimerkiksi käyttämällä sinilausetta, joka esitetään luvun lopussa.

Ehto $\angle DHF = \angle DCF$ vastaa tietysti sitä, että $DCHF$ on jännenelikulmio. Mitä kautta tämä kannattaa todistaa? Hyvä idea on lähteä siitä, mitä kulmia pystyy laskemaan. Ainakin $\angle DCF$ pystyttäisiin laskemaan erotuksena $\angle BCF - \angle BCD$. Tämä ei kuitenkaan ole kovin hyödyllistä: jotta tätä tietoa pystyisi hyödyntämään, pitäisi osata laskea myös $\angle DHF$, mutta tästähän me lähdimme.

Toinen kulma, joka pystytään laskemaan, on $\angle DFC$:

$$\angle DFC = 180^\circ - \angle AFC = \angle FAC + \angle FCA = \angle A + \frac{1}{2}\angle C.$$

Jotta tätä voitaisiin hyödyntää, haluttaisiin laskea $\angle DHC$. Huomataan, että tämäkin onnistuu:

$$\angle DHC = \angle GHC = \angle GHA + \angle AHC = \angle GCA + \angle ABC = \frac{1}{2}\angle C + \angle B.$$

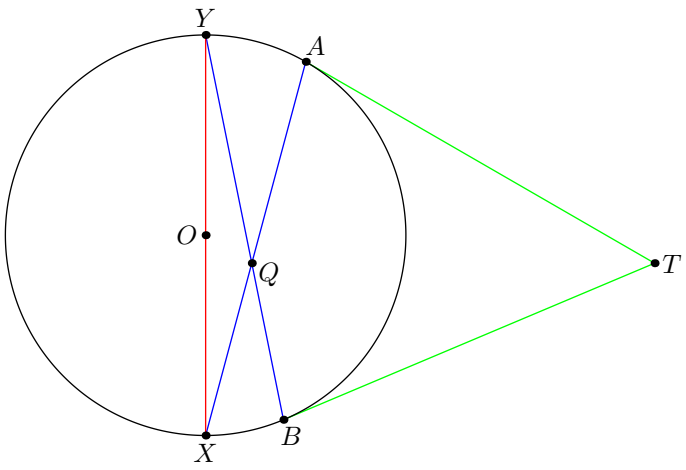
Siispä $\angle DFC + \angle DHC = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, eli $DHCF$ todella on jännenelikulmio, ja olemme valmiit.

Kommentti: Välillä on hyvä yrittää ”kuoria” tehtävänantoa eli muotoilla ekvivalentteja muotoja tehtävästä. Helpommissa tehtävissä, kuten tässä, tehtävä voi lähes ratketa tällaisilla muunnoksilla, ja vaikeammissakin tehtävissä tällä pääsee usein alkuun.

Viimeinen tehtävä on MAOLin loppukilpailusta vuodelta 2017.

Tehtävä

Valitaan ympyrän kehältä mielivaltaisesti kaksi sellaista pistettä A ja B, että AB ei ole ympyrän halkaisija. Pisteisiin A ja B piirretyt ympyrän tangentit kohtaavat pisteessä T. Seuraavaksi valitaan halkaisija XY niin, että janat AX ja BY leikkaavat: olkoon tämä leikkauspiste Q. Osoita, että pisteet A, B ja Q ovat ympyrällä, jonka keskipiste on T.



On yleisesti tunnettu fakta, että $TA = TB$ – toisin sanoen ympyrälle piirretyt tangentit ovat yhtä pitkät. Todistetaan tämä pikaisesti. Huomaa, että tämän todistuksen kannalta pisteet X, Y ja Q eivät ole oleellisia.

Olkoon O ympyrän keskipiste. Huomataan seuraavat faktat:

- $\angle OAT = 90^\circ$ tangenttiominaisuuden nojalla.
- $\angle OBT = 90^\circ$ samoin tangenttiominaisuuden nojalla.
- $OA = OB$, koska nämä janat ovat ympyrän säteitä.

Näillä huomioilla nähdään, että OAT ja OBT ovat suorakulmaisia kolmioita, joilla on yhtä pitkät hypotenuusat (OT) ja yhtä pitkät kateetit ($OA = OB$). Täten ne ovat yhteneviä, eli pätee $TA = TB$.

Koitetaan sitten todistaa, että $TA = TQ$, eli kulmaehdoilla muotoiltuna $\angle QAT = \angle AQT$. Helpomman oloinen kulma on $\angle QAT = \angle XAT$, koska tämä ei vaadi vaikean pisteen Q käsittelemistä.

Kulma $\angle XAT$ voidaan kirjoittaa helpommin muotoon

$$\angle XAT = \angle OAT - \angle OAX = 90^\circ - \angle OAX = 90^\circ - \angle OXA = 90^\circ - \angle YXA.$$

Tämän voi vielä kirjoittaa muotoon $\angle AYX$ kolmion AXY kautta. Lauseke ei kuitenkaan tästä enää sievene: voidaan ajatella, että "tiedämme" kulman $\angle AYX$ suuruuden, aivan kuten kolmiotehtävissä "tiedämme" kulmien $\angle A, \angle B$ ja $\angle C$ suuruudet.

Seuraavaksi pitäisi laskea $\angle AQT$. Tämä ei kuitenkaan vaikuta helpolta: emme tiedä, miten pisteet Q ja T liittyvät toisiinsa. Ainoat pisteeseen Q liittyvät kulmat, jotka tiedämme, ovat

$$\angle YQA = 180^\circ - \angle YAQ - \angle AYQ = 90^\circ - \angle AYB$$

ja

$$\angle AQB = 180^\circ - \angle YQA = 90^\circ + \angle AYB,$$

sekä tietysti $\angle XQB = \angle YQA$.

Vaikuttaa siltä, ettemme saa laskettua kulmaa $\angle AQT$. Olisi kannattanut miettiä vaikeampaa kulmaa ennen helppoa kulmaa $\angle XAT$, koska $\angle XAT$ on aivan turha ilman tietoa kulmasta $\angle AQT$.

Mitä nyt tehdään? Pitäisi keksiä jokin toinen tapa saada todistettua, että A, Q ja B ovat T-keskisellä ympyrällä. Ei ole olemassa montaa tapaa todistaa tämän tyyppistä väitettä. Edellisen lisäksi yksi tulee kuitenkin mieleen: kehäkulmalauseen keskuskulmaversio.

Edellä laskimme, että $\angle AQB = 90^\circ + \angle AYB$. Haluamme vielä laskea kulman $\angle ATB$: kulmista $\angle ATB$ sen, joka on yli 180°, tulisi olla $180^\circ + 2\angle AYB$, eli pienemmän tulee olla $180^\circ - 2\angle AYB$.

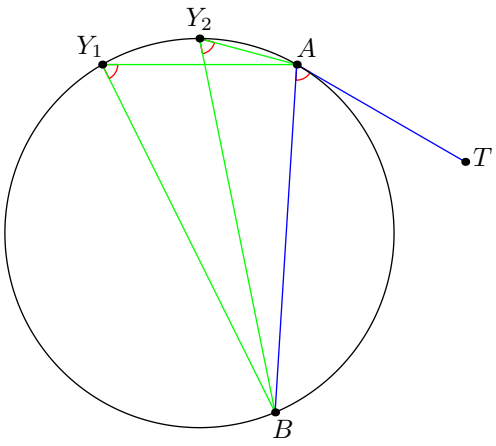
Kolmio ABT on tasakylkinen, eli jotta $\angle ATB = 180^\circ - 2\angle AYB$, tulee olla $\angle BAT = \angle AYB$. Huomataan, että tämä väite riippuu enää vain pisteistä A, B, Y ja T, eli pisteet X ja Q voidaan unohtaa. Lisäksi pisteen T tarkalla sijainnilla ei ole väliä: oleellista on, että se on pisteeseen A piirretyllä tangentilla. Todetaan vielä,

että yhtälön $\angle BAT = \angle AYB$ vasen puoli ei riipu pisteen Y sijainnista, mutta oikea riippuu.

Käytännössä haluamme todistaa seuraavan tuloksen:

Lause (Kehäkulmalauseen tangenttiversio)

Olkoot A, B ja Y mielivaltaisia pisteitä ympyrällä. Olkoon T pisteeseen A piirretyllä tangentilla. Tällöin pätee $\angle BAT = \angle BYA$.



(Tässä pitää jälleen olettaa, että pisteet ovat oikeassa järjestyksessä toisiinsa nähden.)

Väite on uskottavan kuuloinen: jos annamme pisteen Y mennä lähemmäs ja lähemmäs pistettä A (kuten Y_1 ja Y_2 kuvassa), niin AY on lähempänä ja lähempänä yhdensuuntaista tangentin AT kanssa. Tangenttiversio vastaa siis tapausta, jossa $Y = A$. Tarkka todistaminen sivuutetaan. Väitteen voi kuitenkin todistaa samaan tapaan kuin normaalin kehäkulmalauseen, eikä todistus ole merkittävästi normaalia tapausta vaikeampi. Tämä ratkaisee tehtävän.

3.5 Sinilause

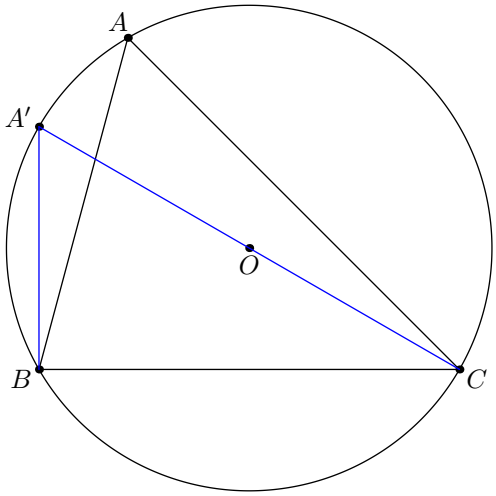
Lukiosta tuttu sinilause sanoo seuraavaa.

Lause (Sinilause)

Olkoon ABC kolmio, ja olkoon R sen ympärysympyrän säde. Pätee

$$\frac{BC}{\sin(\angle A)} = \frac{AC}{\sin(\angle B)} = \frac{AB}{\sin(\angle C)} = 2R.$$

Usein sinilauseesta ei tarvita sitä tietoa, että nämä kaikki suhteet ovat juurikin $2R$. Tämä versio lauseesta on kuitenkin siitä kätevä, että se antaa helpon tavan todistaa lauseen. Tutkitaan alla olevaa kuvaa.



Piste A' on valittu niin, että $A'C$ on ympyrän halkaisija. Nyt $\angle A'BC = 90°$, joten suorakulmaisesta kolmiosta $A'BC$ saadaan

$$\sin(\angle BA'C) = \frac{BC}{A'C} = \frac{BC}{2R}.$$

Koska kehäkulmalauseen nojalla $\angle BA'C = \angle A$, saadaan nyt $\frac{BC}{\sin(\angle A)} = 2R$. Vastaavasti saadaan muut sinilauseen yhtälöt.

Sinilause on kätevä silloin, kun halutaan muuttaa kulmia koskevia tietoja sivujen pituuksia koskeviksi tiedoiksi, tai toisin päin. Tästä tullaan näkemään esimerkkejä myöhemmissä geometrian ratkaisuissa. Tässä on toinen näppärä seuraus sinilauseesta: Olkoot A, B, X ja Y pisteitä saman ympyrän kehällä. Tällöin janat AB ja XY ovat yhtä pitkät täsmälleen silloin, kun kaaria $\widehat{AB}$ ja $\widehat{XY}$ vastaavat kulmat ovat yhtä suuret. (Tämä tulos mainittiin jo aiemmin.)

4 Geometrian lisämenetelmiä (Geometria)

Tässä luvussa esitetään kehäkulmalauseen ja jännenelikulmioiden jälkeen hyödyllisimpiä ja yleisimpiä geometrian menetelmiä. Lisäksi luvussa käydään läpi parin vaativamman tehtävän ratkaisut.

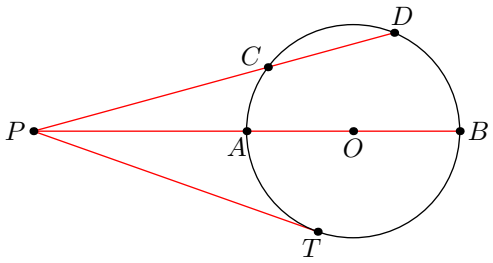
Osa tuloksista (pisteen potenssi, radikaaliakselit, homotetia, Cevan lause) ovat itsessään hyödyllisiä asioita, jotka kannattaa muistaa. Näiden lisäksi esitetään erilaisten konfiguraatioiden (sivuympyrät, yhdeksän pisteen ympyrä) ominaisuuksia. Näistä esitettäviä tuloksia ei tarvitse opetella ulkoa, mutta on hyvä olla jonkinlainen käsitys siitä, mitä näissä konfiguraatioissa tapahtuu.[6]

4.1 Pisteen potenssi ja radikaaliakselit

Lause (Pisteen potenssi)

Olkoon Γ ympyrä, ja olkoon P piste, joka ei ole ympyrän Γ kehällä. Olkoon ℓ suora, joka kulkee pisteen P kautta ja joka leikkaa ympyrää Γ pisteissä A ja B. Pituuksien PA ja PB tulo $PA \cdot PB$ ei riipu suorasta ℓ.

Tätä tuloa $PA \cdot PB$ kutsutaan pisteen P potenssiksi.



Kuvassa on esitetty kolme eri tapausta. Yksi tapaus on sellainen, jossa jana AB on ympyrän halkaisija. Toinen on satunnainen tapaus (pisteet C ja D), ja kolmas tapaus on sellainen, jossa suoraksi valitaan ympyrän tangentti. Tulo on siis sama myös silloin, kun valitaan ympyrälle tangentti: tällöin tulo on $PT \cdot PT$. Tämän voi perustella intuitiivisesti samaan tapaan kuin kehäkulmalauseen tangenttiversion: Tangentti saadaan valitsemalla jokin ympyrää leikkaava suora ℓ ja kääntämällä se kulkemaan pisteen T kautta. Suoran ℓ lähestyessä pistettä T myös suoran ja ympyrän leikkauspisteet A ja B lähestyvät pistettä T. Mitä lähempänä A ja B ovat pistettä T, sitä lähempänä etäisyydet PA ja PB ovat etäisyyttä PT.

Merkitään pisteen P potenssia ympyrän Γ suhteen merkinnällä $\text{Pow}_\Gamma(P)$. Kuvasta nähdään, että $\text{Pow}_\Gamma(P) = PA \cdot PB$. Kun AB on ympyrän Γ halkaisija, niin pätee $PA = OP - r$ ja $PB = OP + r$ (tässä r on ympyrän säde). Siispä

$$\text{Pow}_\Gamma(P) = (OP - r)(OP + r) = OP^2 - r^2.$$

[6] Todistettavat tulokset sivuympyröistä ja yhdeksän pisteen ympyrästä eivät ole mitenkään järkyttävän vaikeita, joten jos tietää mitä haluaa, voi tulokset aina todistaa itse kohtalaisen vähällä vaivalla.

Tämä antaa suoraviivaisen tavan laskea pisteen potenssin.

Pisteen potenssilla saadaan myös todistus Pythagoraan lauseelle: Pätee $PT^2 = OP^2 - r^2$ eli $PT^2 + OT^2 = OP^2$. Pythagoraan lause on todistettu suorakulmaiselle kolmiolle POT, ja on selvää, että POT voi olla minkä tahansa suorakulmaisen kolmion muotoinen, eli väite on todistettu kaikille suorakulmaisille kolmioille.

Todistetaan sitten pisteen potenssia koskevat väitteet. Teemme tämän kahdessa osassa.

1. Jos C ja D ovat eri pisteitä ympyrän Γ kehällä ja AB on ympyrän halkaisija, niin $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
2. Jos PT on ympyrän tangentti ja AB on ympyrän halkaisija, niin $PA \cdot PB = PT \cdot PT$.

Todistamalla nämä väitteet saadaan, että kaikki tulot $PX \cdot PY$ ovat yhtä suuria kuin tulo $PA \cdot PB$, mikä todistaa väitteen.

Aloitetaan kohdasta 1. Ideana on, että neljä pistettä ympyrällä antaa paljon tietoa kulmista, ja tämä tieto voidaan muuttaa pituuksia koskevaksi tiedoksi kolmioiden yhdenmuotoisuutta käyttäen. Tämän vuoksi onkin hyödyllistä kirjoittaa haluttu väite muodossa

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$

Aiomme siis todistaa, että kolmiot PAC ja PDB ovat yhdenmuotoiset.

Ensin huomataan, että kolmioissa PAC ja PDB on ainakin yksi sama kulma, nimittäin kärjestä P lähtevä. Lisäksi jännenelikulmioiden ominaisuuksilla saadaan suoraan

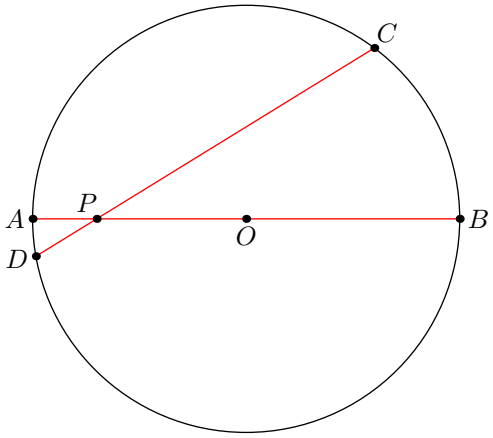
$$\angle PCA = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - (180^\circ - \angle ABD) = \angle PBD.$$

Siis kolmion PAC kulma $\angle C$ vastaa kolmion PDB kulmaa $\angle B$. Kolmioissa PAC ja PDB on täten kaksi samaa kulmaparia, joten ne ovat yhdenmuotoiset, mikä todistaa väitteen.

Todistetaan sitten kohta 2. Kuten aiemmin perusteltiin, tämä on tavallaan vain erikoistapaus kohdasta 1, ja siksi myös todistus etenee vastaavalla tavalla. Todistamme, että kolmiot PAT ja PTB ovat yhdenmuotoiset. Kuten edellä, kolmioilla on samat kulmat kärjessä P. Lisäksi kehäkulmalauseen tangenttiversiolla saadaan $\angle PTA = \angle PBT$, joka todistaa toisen yhteisen kulmaparin olemassaolon. Väite seuraa kuten yllä.

Todistus demonstroi hyvin, miten yhdenmuotoisilla kolmioilla voi muuttaa kulmaehtoja pituusehdoiksi. Tämä toimii tietysti myös toiseen suuntaan.

Pisteen potenssi toimii myös silloin, kun piste P on ympyrän sisällä.



Todistus sille, että tulot ovat aina samat, on tässä tapauksessa helpompi kuin aiemmin käsitellyssä tapauksessa (koska eri tapauksia on vähemmän): kehäkulmalauseen perusteella $\angle ADP = \angle PBC$, ja lisäksi pätee $\angle APD = \angle CPB$. Siis kolmiot PAD ja PCB ovat yhdenmuotoiset, ja väite seuraa. Tässä emme tarvinneet edes sitä tietoa, että AB on ympyrän halkaisija.

Tässä tapauksessa on kuitenkin pieni yksityiskohta, joka kannattaa huomioida: jos määrittelemme edelleen pisteen potenssiksi $\text{Pow}_\Gamma(P) = OP^2 - r^2$, niin nyt $\text{Pow}_\Gamma(P)$ on negatiivinen. Tämä on ehkä hieman epäintuitiivista: miksi pituuksien tulo $PA \cdot PB$ olisi negatiivinen? Yksi selitys on, että mentäessä pisteestä P pisteisiin A ja B joudutaan nyt kulkemaan ”eri suuntiin”, joten jos tutkisimme ns. suunnattuja pituuksia, niin pituuksien PA ja PB merkit olisivat vastakkaismerkkiset, ja tulo olisi negatiivinen. Toinen syy sille, miksi määritelmästä $\text{Pow}_\Gamma = OP^2 - r^2$ kannattaa pitää kiinni, tulee ilmi seuraavaksi radikaaliakseleita käsiteltäessä.

Valitaan tasosta kaksi ympyrää Γ_1 ja Γ_2. Missä sijaitsevat ne pisteet P, joiden pisteen potenssit molempien ympyröiden suhteen ovat samat?

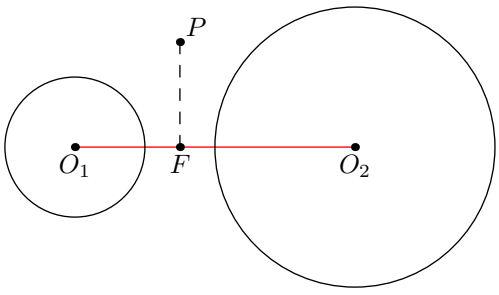
Olkoot r_1 ja r_2 ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 säteet, ja olkoot O_1 ja O_2 näiden ympyröiden keskipisteet. Haluamme, että

$$O_1P^2 - r_1^2 = \text{Pow}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pow}_{\Gamma_2}(P) = O_2P^2 - r_2^2$$

eli että

$$O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Pituuksien neliöt houkuttelevat käyttämään Pythagoraan lausetta. Tutkitaan seuraavaa kuvaa.



Olkoon siis P jokin tason piste, ja olkoon F pisteen P projektio suoralle O_1O_2. Olkoot $x = O_1F$, $y = FO_2$ ja $PF = h$. Pythagoraan lauseella voidaan kirjoittaa $O_1P^2 = x^2 + h^2$ ja $O_2P^2 = y^2 + h^2$. Täten yhtälö $\text{Pow}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pow}_{\Gamma_2}(P)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$x^2 - y^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Huomaamme, että $x^2 - y^2$ on jokin vakio. Mutta $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ja $x + y = O_1O_2$ on vakio, joten $x - y$ on vakio. Tästä seuraa, että pisteen F sijainti on vakio, eli kaikki pisteet P sijaitsevat jollain suoralla. Toisaalta kaikki pisteet P, joiden projektio suoralle O_1O_2 on tämä sopiva F, toteuttavat ehdon $\text{Pow}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pow}_{\Gamma_2}(P)$.

Edellinen todistus vaatisi hieman teknisiä yksityiskohtia, jotka on lakaistu maton alle. Todistuksessa ensinnäkin oletettiin, että F on pisteiden O_1 ja O_2 välissä, jotta saatiin $x+y = O_1O_2$. Toiseksi todistuksessa ei missään kohtaa todistettu, että löydetty kelpaava F on pisteiden O_1 ja O_2 välissä. (Näin ei oikeastaan edes aina ole: jos Γ_2 on kokonaan ympyrän Γ_1 sisällä, niin radikaaliakseli sijaitsee ympyröiden ulkopuolella.) Nämä yksityiskohdat saa käsiteltyä helposti sijoittamalla pisteet koordinaatistoon ja tätä kautta selvittämällä kelpaavien P sijainnit. Mitään uusia ideoita todistus ei kuitenkaan vaadi, joten yksityiskohdat sivuutetaan.

Niiden pisteiden P joukkoa, joilla pätee $\text{Pow}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pow}_{\Gamma_2}(P)$, kutsutaan ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 radikaaliakseliksi. Todistimme edellä seuraavan tuloksen.

Lause (Radikaaliakseli on suora)

Olkoot Γ_1 ja Γ_2 ympyröitä, joilla on eri keskipisteet. Tällöin niiden radikaaliakseli on suora.

Lauseen oletus siitä, että keskipisteet eivät ole samat, ei aiheuta tehtäviä ratkoessa käytännössä mitään ongelmia. Se on kuitenkin tarpeellinen oletus: jos keskipisteet ovat samat, niin radikaaliakseli joko sisältää kaikki pisteet (jos ympyröiden säteet ovat samat) tai ei mitään pisteitä (jos ympyröiden säteet eivät ole samat).

Mitä radikaaliakselista voidaan sanoa? Ensinnäkin se on kohtisuorassa ympyröiden keskipisteiden O_1 ja O_2 välistä janaa kohden, mikä on selvää symmetrian vuoksi (ja seuraa myös todistuksesta). Lisäksi jos Γ_1 ja Γ_2 leikkaavat kahdessa pisteessä P_1 ja P_2, niin P_1 ja P_2 ovat tietysti radikaaliakselilla, koska niiden pisteen potenssit ovat nollia molempien ympyröiden suhteen. Tällöin radikaaliakseli on suora, joka kulkee pisteiden P_1 ja P_2 kautta.

Lopuksi mainitaan vielä yksi tulos radikaaliakseleita koskien.

Lause (Radikaalikeskuksen olemassaolo)

Olkoot Γ_1, Γ_2 ja Γ_3 ympyröitä, joilla on eri keskipisteet. Olkoon ℓ_1 ympyröiden Γ_2 ja Γ_3 radikaaliakseli, ℓ_2 ympyröiden Γ_1 ja Γ_3 radikaaliakseli ja ℓ_3 ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 radikaaliakseli. Suorat ℓ_1, ℓ_2 ja ℓ_3 joko ovat kaikki yhdensuuntaisia tai leikkaavat samassa pisteessä.

Lauseen mukaista leikkauspistettä kutsutaan ympyröiden Γ_1, Γ_2 ja Γ_3 radikaalikeskukseksi. Tapaus, jossa ℓ_1, ℓ_2 ja ℓ_3 ovat yhdensuuntaisia, voidaan mieltää niin,

että suorat ℓ_i leikkaavat toistensa kanssa ”äärettömän kaukana” tavallisista pisteistä. Tällaisia tilanteita käsitellään tarkemmin projektiivisen geometrian luvussa. Ideana on, ettei tämä tapaus oikeastaan eroa yleisestä tapauksesta.

Lauseen todistusta varten tutkitaan seuraavia väitteitä:

1. Kolmion ABC sivujen keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä (kolmion ympärysympyrän keskipiste).
2. Kolmion ABC kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä (kolmion sisäympyrän keskipiste).
3. Kolmen ympyrän radikaaliakselit leikkaavat samassa pisteessä.

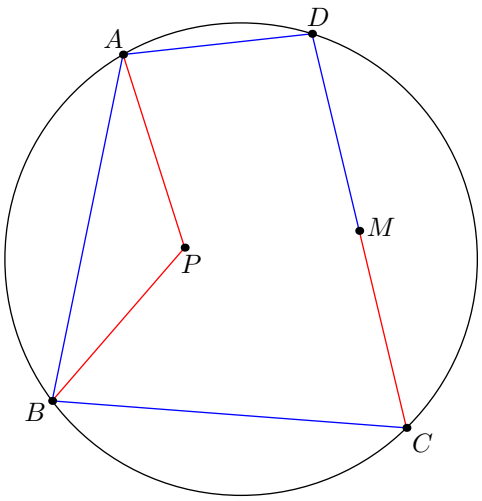
Jokainen näistä tuloksista voidaan todistaa samalla idealla.

1. Olkoon P sivujen AB ja BC keskinormaalien leikkauspiste. Koska P on sivun AB keskinormaalilla, pätee $PA = PB$. Vastaavasti $PB = PC$. Täten $PA = PC$, eli P on sivun AC keskinormaalilla.
2. Olkoon P kärkien A ja B kulmanpuolittajien leikkauspiste. Koska P on kulman A puolittajalla, on P yhtä kaukana sivuista AB ja AC. Vastaavasti P on yhtä kaukana sivuista BA ja BC. Täten P on yhtä kaukana sivuista CA ja CB, eli se on kulman C puolittajalla.
3. Olkoon P radikaaliakselien ℓ_1 ja ℓ_2 leikkauspiste. Koska P on radikaaliakselilla ℓ_1, pätee $\text{Pow}_{\Gamma_2}(P) = \text{Pow}_{\Gamma_3}(P)$. Vastaavasti $\text{Pow}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pow}_{\Gamma_3}(P)$. Täten $\text{Pow}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pow}_{\Gamma_2}(P)$, eli P on radikaaliakselilla ℓ_3.

Ensimmäinen esimerkkitehtävä on vuoden 2016 Baltian tie -kilpailusta.

Tehtävä

Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio, jonka sivut AB ja CD eivät ole yhdensuuntaisia. Olkoon M sivun CD keskipiste. Olkoon P sellainen piste jännenelikulmion $ABCD$ sisällä, että $PA = PB = CM$. Todista, että AB, CD ja janan MP keskinormaali kulkevat saman pisteen kautta.



Tehtävän ratkaisu on hyvin yksinkertainen: Olkoon Γ_1 jännenelikulmion $ABCD$ ympärysympyrä, Γ_2 ympyrä, jonka säde on AP ja keskipiste P, ja Γ_3 ympyrä, jonka keskipiste on M ja säde CM. Tällöin ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 radikaaliakseli on AB (koska A ja B ovat ympyröiden leikkauspisteet), ja vastaavasti ympyröiden Γ_1 ja Γ_3 radikaaliakseli on CD. Täten ympyröiden Γ_2 ja Γ_3 radikaaliakseli kulkee suorien AB ja CD leikkauspisteen kautta radikaalikeskuksen olemassaolon nojalla. Koska ympyröiden Γ_2 ja Γ_3 säteet ovat samat, on niiden radikaaliakseli nimenomaan janan PM keskinormaali.

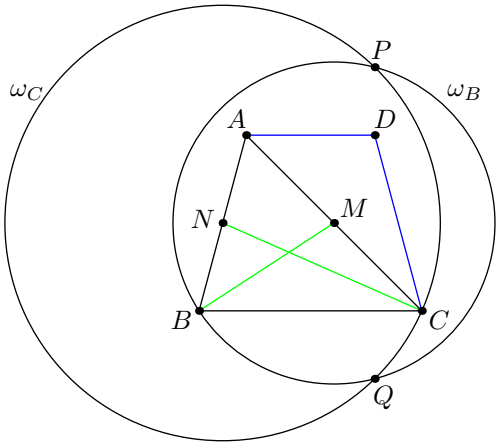
Huomaa, että ratkaisu ei missään kohdassa käyttänyt tietoa siitä, että P on nelikulmion $ABCD$ sisällä. Väite päteekin myös pisteen P ollessa nelikulmion ulkopuolella.

Kommentti: Miten tehtävän ratkaisuun voi päätyä? Tehtävässä on monta tekijää, jotka vihjaavat käyttämään radikaaliakseleita: paljon yhtä pitkiä janoja (mistä saadaan ympyröitä) ja kolmen suoran leikkaaminen samassa pisteessä. Lisäksi konfiguraatiossa ei ole paljoakaan asioita, mitä voi tehdä – melkeinpä ainoa lähestymistapa on lisätä P- ja M-keskiset ympyrät. Ratkaisu seuraa tämän jälkeen hyvinkin suoraviivaisesti.

Seuraava tehtävä on vuoden 2017 Pohjoismaisesta matematiikkakilpailusta.

Tehtävä

Olkoot M ja N teräväkulmaisen kolmion ABC sivujen AC ja AB keskipisteet, missä $AB \neq AC$. Olkoon ω_B M-keskinen ympyrä, joka kulkee pisteen B kautta, ja olkoon ω_C N-keskinen ympyrä, joka kulkee pisteen C kautta. Olkoon D sellainen piste, että $ABCD$ on tasakylkinen puolisuunnikas ja AD on BC:n suuntainen. Oletetaan, että ω_B ja ω_C leikkaavat kahdessa (eri) pisteessä P ja Q. Osoita, että D sijaitsee suoralla PQ.



Heti nähdään, että haluamme pisteen D olevan ympyröiden ω_B ja ω_C radikaaliakselilla. On mahdollista[7] laskea suoraan $\text{Pow}_{\omega_B}(D) = MD^2 - MB^2$ ja $\text{Pow}_{\omega_C}(D)$, jolloin tehtävä ratkeaa. Etenemme kuitenkin toisella tavalla.

Mitä radikaaliakselista voidaan sanoa? Kuvasta näyttää siltä, että se on kohtisuorassa suoria AD, NM ja BC vasten. Todistetaan tämä. Muistetaan, että radikaaliakseli on kohtisuorassa ympyröiden keskipisteiden välistä suoraa vasten, eli tässä tapauksessa PQ ja NM ovat kohtisuoria. Koska N ja M ovat sivujen AB ja AC keskipisteet, pätee $NM||BC$. Tämä todistaa aputuloksen.

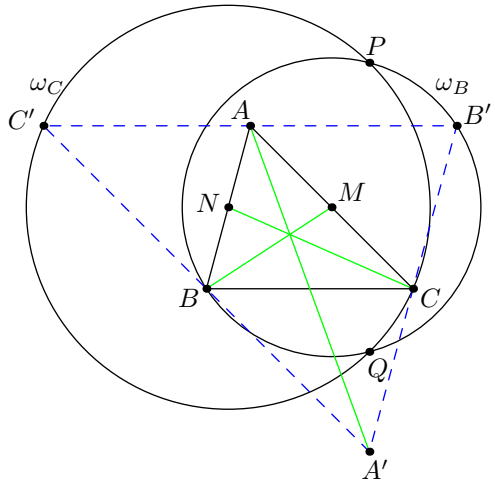
Jäljellä on enää radikaaliakselin PQ "sijainnin" määrittäminen: onko PQ vaakasuuntaan nähden samassa kohdassa kuin D (kun jana BC on x-akselin suuntainen)? Yksi tapa ratkaista ongelma on käyttää analyyttistä geometriaa eli asetella pisteet koordinaatistoon ja laskea pisteiden koordinaatteja. Tämä idea johtaa ratkaisuun, eikä lähestymistapa edes vaadi kovin raskaita laskuja.[8] Vältämme kuitenkin jälleen mekaanista laskemista ja esitämme erilaisen lähestymistavan.

Kuten aiemmin todettiin, pisteen D y-koordinaatilla ei ole väliä, vaan ainoastaan sen x-suuntaisella sijainnilla on väliä. Tämän vuoksi on luontevaa korvata D hieman helpommin käsiteltävällä pisteellä, nimittäin pisteen A peilauksella sivun BC keskipisteen yli. Olkoon tämä peilattu piste A'.

Nyt voidaan huomata mielenkiintoinen kuvio: suora AA' kulkee mediaanien BM ja CN leikkauspisteen kautta. Lisäksi jos määrittelemme ympyrän ω_A samaan tapaan kuin ympyrät ω_B ja ω_C, niin AA' on sen halkaisija. Tästä motivoituneena peilataan myös pisteet B ja C pisteiden M ja N yli, jotta saadaan ympyröiden ω_B ja ω_C halkaisijat.

[7] Ratkaisusta tulee kuitenkin hyvin laskennallinen.

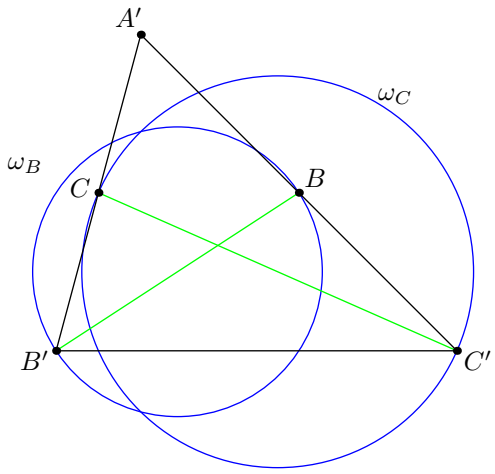
[8] Aivoja ei kuitenkaan kannata heittää narikkaan. Yksi hyvä tapa valita pisteiden koordinaatit on sijoittaa B origoon $(0,0)$, C pisteeseen $(2c,0)$ ja A pisteeseen $(2a,2)$. Nyt $N = (a,1)$, $M = (a+c,1)$ ja $D = (2c-2a,2)$. Pisteiden P ja Q sijainnit saadaan kahden ympyrän leikkauspisteinä. Voimme huijata hieman: tiedämme, että leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat $2c-2a$ (tämähän pyydettiin todistamaan), jolloin vähällä vaivalla saadaan myös y-koordinaatit. Voimme siis kirjoittaa "Huomataan, että leikkauspisteet ovat $P = ...$ ja $Q = ...$" ja vain sijoittamalla tarkistaa, että nämä pisteet todella ovat ympyröillä ω_B ja ω_C.



Nyt on hyvä hetki pysähtyä ja tarkastella ongelmaa kolmion $A'B'C'$ näkökulmasta. Ongelma muuttuu seuraavaan muotoon: ”Janat BB' ja CC' ovat kolmion $A'B'C'$ mediaaneja. Olkoot ω_B ja ω_C ympyröitä, joiden halkaisijat ovat BB' ja CC'. Osoita, että A' on ympyröiden ω_B ja ω_C radikaaliakselilla”.

Ongelma ei ehkä vielä ole triviaali, eikä se äkkiseltään edes näytä juurikaan helpommalta kuin alkuperäinen ongelma. Tässä muotoilussa on kuitenkin yksi selvä etu: ongelma koskee pelkästään yhtä kolmiota ja sen mediaaneja, kun taas alkuperäinen ongelma vaati lisäksi pisteen D tasakylkisen puolisuunnikkaan muodostamiseksi. Tämä muotoilu ongelmasta on siten paljon yksinkertaisempi ja myös luultavasti helpompi.

Tässä on uusi, selkeämpi kuva ongelmasta.



Konfiguraatio alkaa näyttää varsin yksinkertaiselta.

Jotta A' olisi radikaaliakselilla, tulisi sen pisteen potenssien olla samat molempien ympyröiden ω_B ja ω_C suhteen. Yksi tapa osoittaa tämä olisi käyttää kaavaa $\omega_\Gamma(P) = OP^2 - r^2$. Tässä tapauksessa tämä kaava ei kuitenkaan ole kovin hyödyllinen, koska ei ole helppoa laskea mediaanien pituuksia tai pisteen A' etäisyyttä mediaanin CC'

keskipisteeseen.[9] Toinen idea on yrittää valita ympyrältä pisteet X ja Y siten, että A on suoralla XY, ja laskea $AX \cdot AY$. Ympyrällä ω_B ainoat järkevät kandidaatit pisteeksi X ovat B ja B'. Tästä pääsemme seuraavaan ratkaisuun.

Olkoon E kärjen B' korkeusjanan kantapiste. Koska $\angle B'EB = 90°$, on E ympyrällä ω_B. Määritellään F vastaavasti, jolloin F on ympyrällä ω_C. Halutaan osoittaa, että $A'F \cdot A'C = A'E \cdot A'B$ eli että

$$\frac{A'F}{A'E} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Jälkimmäinen osamäärä on sama kuin $\frac{A'C'}{A'B'}$, koska kolmiot $A'BC$ ja $A'C'B'$ ovat yhdenmuotoisia. Riittää siis osoittaa, että

$$\frac{A'F}{A'E} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

Ortokeskusta koskevista konfiguraatioista tiedämme, että $B'FEC'$ on jännenelikulmio, joten pisteen potenssilla saadaan $A'F \cdot A'B' = A'E \cdot A'C'$, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{A'F}{A'E} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

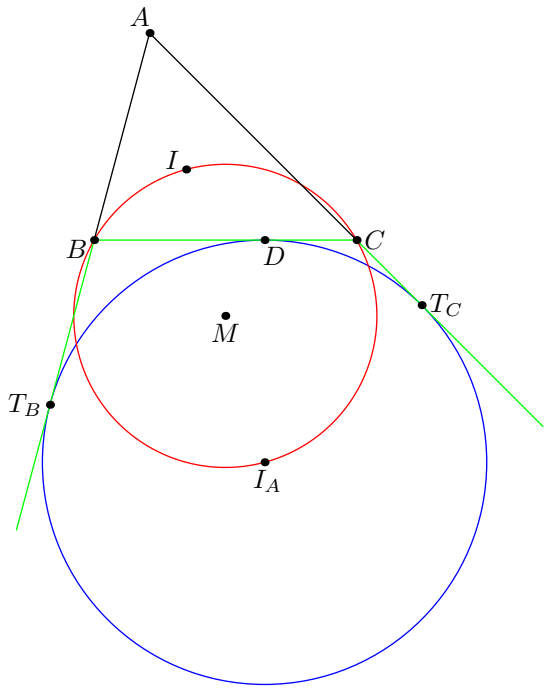
Tämä ratkaisee ongelman.

Kommentti: Ratkaisun vaikein osio vaikuttaisi olevan pisteiden A', B' ja C' lisääminen kuvioon. Mistä tämän voisi keksiä? Yksi ajatus on, etteivät tehtävässä valmiiksi olevat pisteet oikein tahdo riittää ongelman ratkaisemiseksi, joten tehtävään on hyvä lisätä uusia pisteitä (”Mitä muutakaan tässä voi tehdä?”). Jos taas ajatuksena on lisätä pisteitä, niin esitetyt lisäykset ovat varsin luonnollisia: ongelma pyörii sivujen keskipisteiden ympärillä, joten peilaukset näiden pisteiden yli ovat luonteva idea (varsinkin, kun näin saadaan ympyröiden halkaisijoita). Mainittakoon vielä, että usein ensimmäinen yritys ei onnistu, vaan ratkaisua etsiessä täytyy kokeilla monia erilaisia ideoita.

4.2 Sivuympyrät ja yhdeksän pisteen ympyrä

Olkoon annettuna kolmio ABC. Tutkitaan sellaista ympyrää, joka sivuaa sivua BC sekä sivujen AB ja AC jatkeita. Seuraavassa kuvassa on esitetty tämä konfiguraatio.

[9] Mediaanin pituuden voi tosin laskea seuraavasti: Peilataan C' pisteen C yli pisteeseen C'', jolloin $C''A'C'B'$ on suunnikas. Niin sanottu suunnikaslause sanoo, että suunnikkaan lävistäjien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin suunnikkaan sivujen pituuksien neliöiden summa: tulos seuraa kohtuu suoraviivaisesti kosinilauseesta. Kosinilause opetetaan lukiossa ja sen voi myös etsiä netistä.



Kuvassa siis I_A on määritellyn ympyrän keskipiste. Tämä ympyrä sivuaa janaa BC pisteessä D ja sivujen AC ja AB jatkeita pisteissä T_B ja T_C. Lisäksi kuvaan on piirretty kolmion ABC sisäympyrän keskipiste I.

Entä piste M? M on määritelty olemaan kolmion BIC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Edellisessä luvussa huomasimme, että tämä M on kolmion ABC ympärysympyrän kaaren BC keskipiste. Kuten kuvasta nähdään, myös seuraava tulos pätee.

Lemma

Nelikulmio $BICI_A$ on jännenelikulmio, jonka ympärysympyrän keskipiste on M. Lisäksi II_A on halkaisija tälle ympyrälle.

Mietitään hetki pisteen I_A ominaisuuksia. Samoin kuin todistimme ympärysympyrän keskipisteen, sisäympyrän keskipisteen ja radikaalikeskuksen olemassaolon, voimme myös todistaa, että I_A on kulmien $\angle BAC$, $\angle T_BBC$ ja $\angle BCT_C$ puolittajien leikkauspiste. Piste I_A on siis olemassa.

Sitten lemman todistukseen. Haluamme siis osoittaa, että $BICI_A$ on jännenelikulmio. Tämän voi tehdä hyvin monella eri tavalla, tässä on yksi: Osoitetaan, että $\angle I_ABC = \angle I_AIC$. Ensimmäinen kulma saadaan laskettua edellä esitetyn huomion avulla:

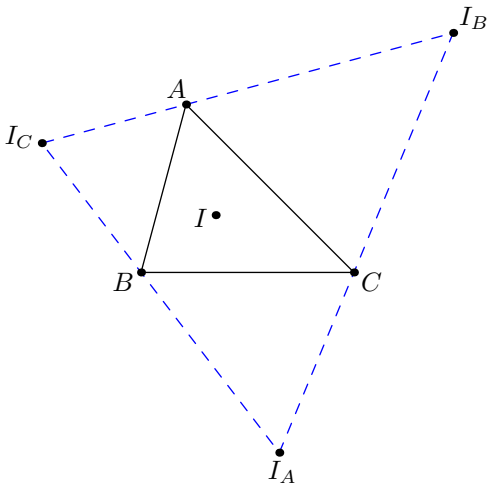
$$\angle I_ABC = \frac{1}{2}\angle T_BBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B.$$

Toista kulmaa varten huomataan ensiksi, että $\angle I_AIC = \angle MIC$. Tämä pätee, koska pisteet I, M ja I_A ovat kulman $\angle A$ puolittajalla. Nyt koska M on kolmion BIC ympärysympyrän keskipiste, pätee

$$\angle MIC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle IMC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle IBC) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B.$$

Täten $BICI_A$ on jännenelikulmio. Lisäksi M on tietysti sen ympärysympyrän keskipiste ja II_A on ympyrän halkaisija.

Lemmasta seuraa, että $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90°$ (mikä seuraa myös suoremmin kulmanpuolittajaominaisuuksista). Tutkitaan seuraavaa konfiguraatiota.



Pätee $\angle IBI_A = 90°$ ja vastaavasti $\angle IBI_C = 90°$. Siis $\angle I_CBI_A = 180°$, eli pisteet I_C, B ja I_A ovat samalla suoralla. Eikä siinä vielä kaikki: pätee $\angle I_BBI_C = \angle IBI_C = 90°$, eli I_BB on kolmion $I_AI_BI_C$ korkeusjana. Pisteet A, B ja C ovat täten kolmion $I_AI_BI_C$ korkeusjanojen kantapisteet, ja piste I on kolmion ortokeskus. Konfiguraatio on siis jo edellisestä luvusta tuttu.

Kehitellään tuloksia vielä eteenpäin. Tutkitaan kolmioita $I_AI_BI_C$ ja ABC. Tiedämme, että janan II_A keskipiste (eli jännenelikulmion $BICI_A$ ympärysympyrän keskipiste) M_A on ABC:n ympärysympyrällä. Määritellään M_B ja M_C vastaavasti.

Olkoon N_A janan I_BI_C keskipiste, jolloin N_A on jännenelikulmion I_BCBI_C ympärysympyrän keskipiste. Suora lasku antaa

$$\angle AN_AB = \angle I_CN_AB = 2\angle I_CCB = 2\angle ICB = \angle C,$$

eli N_A on kolmion ABC ympärysympyrällä.[10] Määritellään N_B ja N_C vastaavasti.

Olemme siis todistaneet, että pisteet $A, B, C, M_A, M_B, M_C, N_A, N_B$ ja N_C ovat kaikki samalla ympyrällä. Tähän asti kaikkea on tutkittu kolmion $I_AI_BI_C$ näkökulmasta. Katsomalla tilannetta kolmion ABC silmin saadaan seuraava tulos.

Lause (Yhdeksän pisteen ympyrä)

Olkoon ABC kolmio. Olkoot H_A, H_B ja H_B kolmion ABC korkeusjanojen kantapisteet ja N_A, N_B ja N_C kolmion ABC sivujen keskipisteet. Olkoon H kolmion ABC ortokeskus, ja olkoot M_A, M_B ja M_C janojen HA, HB ja HC keskipisteet. Tällöin pisteet $H_A, H_B, H_C, N_A, N_B, N_C, M_A, M_B$ ja M_C ovat kaikki samalla ympyrällä.

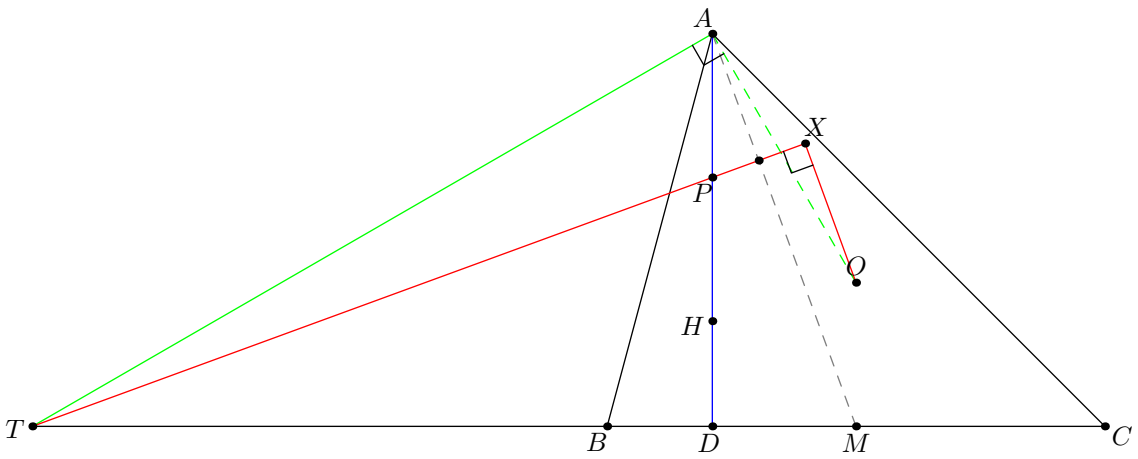
[10] Lisäksi pätee, että N_AM_A on kolmion ABC ympärysympyrän halkaisija.

Seuraava vaikea esimerkkitehtävä demonstroi loistavasti, miten tähän asti esiteltyjä geometrian menetelmiä voidaan soveltaa. Tehtävä on vuoden 2018 ELMO-lyhytlistalta.

Tehtävä

Olkoon ABC kolmio, ja olkoot H ja O sen ortokeskus ja ympärysympyrän keskipiste. Olkoon P janan AH keskipiste, ja olkoon T se piste suoralla BC, jolla $\angle TAO = 90°$. Olkoon X pisteen O projektio suoralle TP. Osoita, että janan PX keskipiste on kolmion ABC yhdeksän pisteen ympyrällä.

Tässä on tehtävän konfiguraatiosta kuva, johon on lisätty pari hyödylliseksi osoittautuvaa pistettä.



Olkoon Q janan PX keskipiste.

Miten todistetaan, että jokin piste on yhdeksän pisteen ympyrällä? Valitsemalla kyseiseltä ympyrältä jotkin kolme pistettä S, T ja U ja osoittamalla, että valitut pisteet ja annettu piste muodostavat yhdessä jännenelikulmion. On tietysti monta tapaa valita pisteet S, T ja U. Millainen olisi hyvä valinta?

Piste P on yhdeksän pisteen ympyrällä ja se esiintyy valmiiksi tehtävässä, joten se voisi olla hyvä valinta. Mikään muu tehtävänannon pisteistä ei ole yhdeksän pisteen ympyrällä, joten mietitään muita kriteerejä. Haluamme, että pisteiden S, T, U ja Q väliset kulmat ovat laskettavissa. Montaa kandidaattia ei tule mieleen, mutta kärjen A korkeusjanan kantapiste D vaikuttaa lupaavalta, koska $\angle QPD$ liittyy vahvasti tehtävän pisteisiin.

Jos kerran tiedämme, mitä $\angle QPD$ on, niin haluaisimme neljännen pisteen U olevan sellainen, että voimme laskea kulman $\angle DUQ$ suuruuden. Käymällä läpi vaihtoehtoja (korkeusjanojen kantapisteet, sivujen keskipisteet sekä janojen BH ja CH keskipisteet) huomataan, että sivun BC keskipiste M näyttäisi olevan samalla suoralla kuin pisteet A ja Q. Lisäksi huomataan, että tämä suora näyttäisi olevan kohtisuorassa suoraa TX kohti. Täten piste M vaikuttaa todella hyvältä valinnalta.

Saimme aikaan edistystä: saimme lisätietoa siitä, mitä tehtävässä tapahtuu ja miten tehtävänannon väitteen voisi todistaa. Toisaalta olemme ongelmissa: mediaanit

ja kulmat ovat haastava yhdistelmä, joten tehtävä ei tule ratkeamaan suoralla kulmanjahtauksella.

Saamme kuitenkin jonkinlaisen otteen pisteestä M. Tiedämme, että $\angle TMO = \angle BMO = 90^\circ = \angle TXO = \angle TAO$. Pisteet T, A, X, O ja M ovat siis kaikki samalla ympyrällä (jonka halkaisija on jana TO).

Työn alla on seuraavien väitteiden todistaminen.

1. Pisteet A, Q ja M ovat samalla suoralla.
2. Suorat AM ja TX ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.
3. Kulmien $\angle DPQ$ ja $\angle DMQ$ summa on 180°. Olettamalla, että kohta 1 pätee, tämä saadaan muotoon $\angle DPX + \angle DMA = 180^\circ$.

Kohtien 1 ja 2 väitteet kannattaa yhdistää seuraavaksi väitteeksi: "Jana AM puolittaa janan PX ja leikkaa tätä kohtisuorasti". Tämä liittyy aiemmin mainittuun tehtävän "kuorimiseen": ongelmat kannattaa aina esittää mahdollisimman lähestyttävässä muodossa. Motivaatio muotoilun takana on se, että on usein helpompaa osoittaa, että jokin jana puolittaa jonkin toisen janan, kuin että kolme pistettä ovat samalla suoralla.

Kohdan 2 väitteestä seuraa, että nelikulmio $TAQD$ on jännenelikulmio ja että suorat AQ ja XO ovat yhdensuuntaiset.

Olettaen kohtien 1 ja 2 väitteet saadaan

$$\angle PTD = \angle QTD = \angle QAD = \angle MAD = \angle AMO = \angle ATO.$$

Kohta 3 seuraa tästä. Kohdan 3 yhtälö $\angle DPX + \angle DMA = 180^\circ$ voidaan nimittäin muotoilla uudelleen: Ensinnäkin $\angle DPX = 180 - \angle TPD = 90 + \angle PTD$. Toiseksi $\angle DMA = \angle TMA = \angle TOA = 90^\circ - \angle ATO$, eli haluamme $\angle PTD = \angle ATO$. Tämä todistettiin edellä.

Todistettavana on siis seuraava väite: "Jana AM puolittaa janan PX ja leikkaa tätä kohtisuorasti". Kohtisuoruus on helpompi ehto kuin pituuksia koskeva väite, joten aloitetaan siitä. Tässä vaiheessa voimme unohtaa pisteen X.

Mitä johtopäätöksiä voitaisiin vetää, jos pätisi $AM \perp TP$? Huomataan[11], että tällöin P olisi kolmion AMT ortokeskus. Tämä on joustavampi ehto kuin $AM \perp TP$, joten käytetään sitä.

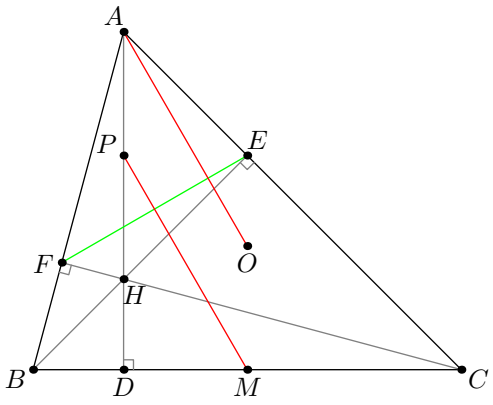
Ortokeskusominaisuus seuraa, jos osoitamme, että $MP \perp AT$, mikä puolestaan on ekvivalenttia sen kanssa, että suorat AO ja PM ovat yhdensuuntaisia. Tämä on hyvä muotoilu ongelmallemme: olemme päässeet kokonaan eroon pisteestä T. Tutkitaan siis pisteitä A, P, M ja O.

Tiedämme, että suorat AP ja MO ovat molemmat kohtisuorassa sivua BC kohden, joten $AP||MO$. Ehto $AO||PM$ tarkoittaisi siis sitä, että nelikulmio $APMO$ olisi

[11] Tätä ei tosin ole kovin helppo huomata.

suunnikas. Kulman $\angle PAO$ voi laskea melko helposti, mutta kulma $\angle PMO$ on paljon vaikeampi.

Mietitään hetki ennen kuin jatketaan: mitä pisteistä P ja M voidaan sanoa? Ne ovat kyllä joidenkin janojen keskipisteitä, mutta tämä ei ole mielenkiintoisin asia, mitä pisteistä voidaan sanoa. Jos nimittäin E ja F ovat kärjistä B ja C lähtevien korkeusjanojen kantapisteet,[12] niin P on jännenelikulmion $AEHF$ ympärysympyrän keskipiste. Vastaavasti M on jännenelikulmion $BFEC$ ympärysympyrän keskipiste.



Ympyröiden keskipisteiden välinen jana PM on kohtisuorassa radikaaliakselia vasten. Tässä tapauksessa ympyrät leikkaavat kahdessa pisteessä E ja F, joten jana PM on kohtisuorassa janaa EF kohden. Enää tulee siis osoittaa, että AO on kohtisuorassa janaa EF kohden. Olemme päässeet eroon vaikeasta pisteestä P, mikä on hyvää edistystä.

Tämä ongelma on jo varsin helppo: pätee

$$\angle OAE = \angle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) = 90^\circ - \angle B,$$

ja koska $BCFE$ on jännenelikulmio, niin

$$\angle FEA = \angle B,$$

joten väite seuraa.

Olemme nyt saaneet todistettua, että $AM \perp TP$, ja olemme huomanneet, että tästä seuraa, että P on kolmion TAM ortokeskus. Enää halutaan puolittajaominaisuus. Tutkitaan hetki tehtävää kolmion TAM näkökulmasta: Nyt O on sellainen piste kolmion TAM ympärysympyrällä, että TO on tämän ympyrän halkaisija. Tärkeämpi kysymys on kuitenkin ”mikä piste X on?”. Myös piste X on, kuten olemme jo aiemmin todenneet, kolmion TAM ympärysympyrällä. Lisäksi nyt tiedämme, että se saadaan jatkamalla kärjestä T lähtevää kolmion TAM korkeusjanaa tämän kolmion ympärysympyrälle.

[12] On luontevaa lisätä nämä pisteet konfiguraatioon, koska kuvio sisältää jo ortokeskuksen H.

Tehtävä on käytännössä palautettu tuttuun tilanteeseen, jossa tutkitaan kolmiota, sen ortokeskusta ja joitain pisteitä tähän liittyen. Tämän ongelman ratkaiseminen ei enää ole vaikeaa.

Saadaan

$$\angle MAX = \angle MTX = 90^\circ - \angle TMA = 90^\circ - (90^\circ - \angle MAD) = \angle MAP,$$

eli suora AM on kulman $\angle PAX$ puolittaja. Täten kolmion PAX kärjestä A lähtevä korkeusjana ja kulmanpuolittaja ovat sama suora, joten kolmio on tasakylkinen. Väite on näin todistettu.

Kommentti: Tehtävä on vaikea, ja ratkaisu vaatii monia erilaisia huomioita. Vaikeita tehtäviä ratkoessa korostuu se, että pystyy välillä katsomaan ongelmaa kauempaa: on vaikea kuvitella, että yllä esitettyyn ratkaisuun voisi päätyä ”vahingossa” eli vain tekemällä sokeasti erilaisia havaintoja, vaan ratkaisua keksiessä pitää olla selkeä suunnitelma.

Tehtävässä tuli hyvin ilmi parikin asiaa, jotka ovat tärkeitä geometrian tehtäviä ratkoessa. Ensinnäkin on hyvä keksiä ensin kelvollinen suunnitelma, jota lähtee toteuttamaan.[13] Toiseksi tehtävän ratkaiseminen voi vaatia hyvinkin vaikeita huomioita konfiguraatiosta. Tässä tehtävässä mielestäni vaikeiten keksittävä huomio oli se, että piste P on kolmion TAM ortokeskus. Kolmanneksi: On hyvä olla käsitys siitä, mikä on edistystä eli mitä kannattaa tavoitella. Tässä ratkaisussa tärkeimpiä edistysaskelia olivat vaikeiden pisteiden eliminoiminen sekä ehtojen kirjoittaminen joustavampaan muotoon.

Tämän tehtävän ratkaisussa korostui vielä ortokeskuksien perusominaisuuksien hyödyllisyys.[14] Tähän on nostettu pari hyödyllistä ortokeskusta koskevaa tulosta, jotka tulivat edellisessä ratkaisussa ilmi, mutta joita ei ole mainittu aiemmin. Todistaminen jätetään lukijalle.

Lemma

Olkoon H kolmion ABC ortokeskus. Olkoon H' pisteen H peilaus sivun BC yli, ja olkoon H'' pisteen H peilaus sivun BC keskipisteen yli. Tällöin

1. H' on kolmion ABC ympärysympyrällä
2. H'' on kolmion ABC ympärysympyrällä
3. AH'' on kolmion ABC ympärysympyrän halkaisija.

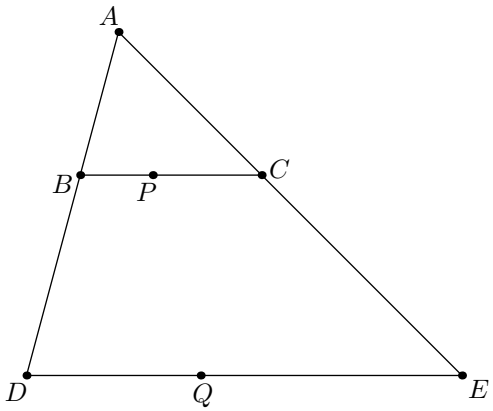
4.3 Homotetia

Olkoon ABC jokin kolmio, ja olkoot D ja E sellaisia pisteitä janojen AB ja AC jatkeilla, että janat BC ja DE ovat yhdensuuntaisia. Olkoon P sellainen piste janalla

[13] Suunnitelma voi tietysti muuttua matkan varrella.

[14] Mitä hyötyä on vaikean ongelman palauttamisesta helppoon ongelmaan, jos tätä helppoa ongelmaa ei saa ratkaistua?

BC, että $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{3}$, ja olkoon Q vastaavasti sellainen piste janalla DE, että $\frac{DQ}{QE} = \frac{2}{3}$.



Intuitio sanoo, että pisteet A, P ja Q ovat samalla suoralla: kolmio ADE on vain suurennettu versio kolmiosta ABC, ja pisteiden P ja Q suhteelliset sijainnit ovat samat. Väitteen voi todistaa yhdenmuotoisilla kolmioilla. Yksityiskohdat sivuutetaan tässä.

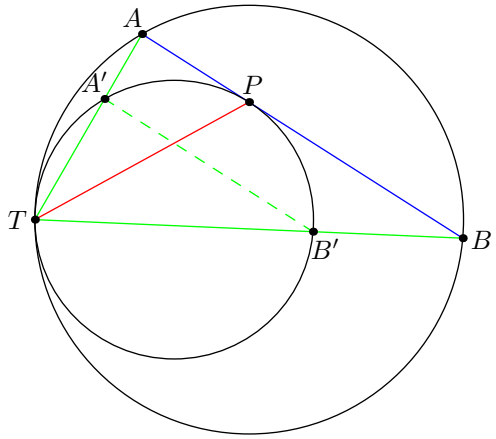
Homotetia mahdollistaa tämänkaltaisen ajatuksen formalisoinnin ja käyttämisen yleisessä tilanteessa. Homotetia on on tason kuvaus, eli homotetiassa tason pisteet kuvautuvat toisille tason pisteille. Kuvauksen määrää kaksi muuttujaa: piste ja kerroin. Edellisessä esimerkissä voitaisiin tutkia A-keskistä homotetiaa, jonka kerroin on $\frac{AD}{AB}$. Tämä homotetia ”venyttää” tasoa, jolloin pisteet B ja C kuvautuvat pisteiksi D ja E. Vastaavasti piste P kuvautuu pisteeksi Q.

Homotetian kerroin k voi myös olla negatiivinen: tällöin pisteen P kuvaamiseksi ensin peilataan P homotetian keskuksen A yli ja sitten kerrotaan etäisyys AP luvulla $|k|$.

Konsepti ei siis ole kovin ihmeellinen. Kyse onkin siitä, miten eri konfiguraatioita kannattaa käsitellä. Tähän liittyen esitetään vuoden 2019 syksyllä valmennustehtävänä olleen ongelman ratkaisu.

Tehtävä

Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan sisäpuolisesti pisteessä T. Ulomman ympyrän jänne AB on sisemmän ympyrän tangentti pisteessä P. Osoita, että suora TP puolittaa kulman $\angle ATB$.



Ajatuksena on, että isompi ympyrä saadaan venyttämällä pienempää ympyrää pisteestä T nähden, eli toisin sanoen on olemassa T-keskinen homotetia, joka kuvaa pienemmän ympyrän isommaksi ympyräksi. Alla on esitetty väitteelle todistus.

Olkoon O_1 isomman ympyrän keskipiste, ja olkoon O_2 pienemmän ympyrän keskipiste. Valitaan homotetian kertoimeksi $k = \frac{TO_1}{TO_2}$. Tulee osoittaa, että jos X on piste pienemmän ympyrän kehällä, niin se piste X', joka on samalla suoralla[15] kuin T ja X ja jolla $TX' = k \cdot TX$, on isommalla ympyrällä.

Tämä väite voidaan todistaa yhdenmuotoisilla kolmioilla. Tiedämme, että $\frac{TX}{TO_2} = \frac{TX'}{TO_1}$ ja että $\angle XTO_2 = \angle X'TO_1$. Täten kolmiot TXO_2 ja $TX'O_1$ ovat yhdenmuotoisia. Koska kolmio TXO_2 on tasakylkinen, on kolmio $TX'O_1$ myös tasakylkinen, joten $TO_1 = X'O_1$. Tämä on mitä haluttiinkin.

Tehtävän voi täten ajatella seuraavasti: Valitsemme pieneltä ympyrältä pisteet A' ja B'. Piirrämme pienelle ympyrälle tangentin (kuvassa jana AB), joka on yhdensuuntainen[16] janan $A'B'$ kanssa. Olkoon P tämä tangenttipiste. Haluamme osoittaa, että jana TP puolittaa janan $\angle A'TB'$, eli toisin sanoen että P on kaaren $\widehat{A'B'}$ keskipiste.

Tätä ongelmaa voi vielä halutessaan ajatella hieman eri näkökulmasta: valitaan ensiksi piste P ja piirretään sen kautta kulkeva tangentti, ja valitaan vasta sitten tangentin kanssa yhdensuuntainen ympyrän jänne $A'B'$. Pisteen P tulisi aina olla kaaren $A'B'$ keskipiste riippumatta siitä, mikä on tangentin ja jänteen $A'B'$ välinen etäisyys.

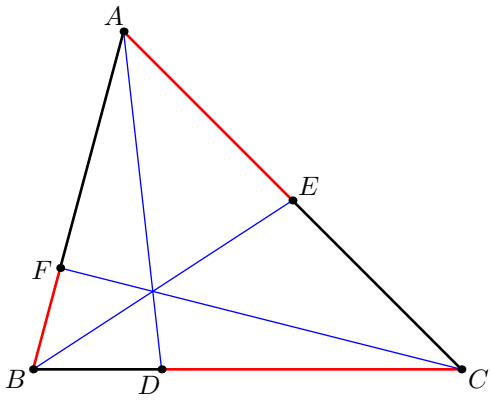
Edelliset huomiot antavat ideoita siihen, miten väitettä kannattaa lähteä todistamaan. Todistus ei ole vaikea: Jos pisteet A, B, A' ja B' ovat kuten kuvassa, niin kehäkulmalauseen tangenttiversion nojalla $\angle A'B'P = \angle A'PA$. Toisaalta koska suorat $A'B'$ ja AB ovat yhdensuuntaisia, niin $\angle PA'B' = \angle A'PA$. Täten $\angle A'B'P = \angle PA'B'$, ja väite seuraa.

[15] Ja samalla puolella pistettä T kuin X.

[16] Homotetiassahan suora kuvautuu aina suoraksi, joka on yhdensuuntainen alkuperäisen suoran kanssa.

4.4 Cevan lause ja kolmion merkilliset pisteet

Luvun viimeisessä osiossa esitetään Cevan lause, jonka avulla voidaan todistaa kolmion merkillisten pisteiden olemassaolot.



Cevan lause ratkaisee seuraavan ongelman: Kolmion ABC sivuilla on pisteet D, E ja F, kukin yhdellä sivulla. Milloin janat AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä?

Lause (Cevan lause)

Olkoot D, E ja F pisteitä kolmion ABC sivuilla BC, AC ja AB (tässä järjestyksessä). Janat AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä jos ja vain jos

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Pisteet D, E ja F jakavat sivut AB, BC ja CA yhteensä kuuteen osaan. Cevan lauseen vasemman puolen osoittajissa on joka toinen näistä kuudesta osasta (kuvassa mustalla) ja nimittäjissä loput osat (kuvassa punaisella).

Cevan lauseen voi todistaa ovelasti käyttämällä pinta-aloja. Oletetaan ensin, että janat leikkaavat samassa pisteessä P. Merkitään kolmion XYZ pinta-alaa $[XYZ]$. Kolmioilla BDP ja CDP on sama pisteestä P lähtevä korkeusjana, joten niiden pinta-alojen suhde on sama kuin kantojen pituuksien suhde:

$$\frac{[PBD]}{[PDC]} = \frac{BD}{DC}.$$

Vastaavalla logiikalla kolmioilla ABD ja ADC saadaan

$$\frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{BD}{DC}.$$

Tästä seuraa,[17] että

$$\frac{[ABD] - [PBD]}{[ADC] - [PDC]} = \frac{BD}{DC},$$

[17] Jos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, niin $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$. Tämä on helppo tarkistaa auki kertomalla.

eli

$$\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{BD}{DC}.$$

Samalla tavalla saadaan muille sivuille

$$\frac{[BCP]}{[ABP]} = \frac{EC}{AE}$$

ja

$$\frac{[ACP]}{[BCP]} = \frac{FA}{BF}.$$

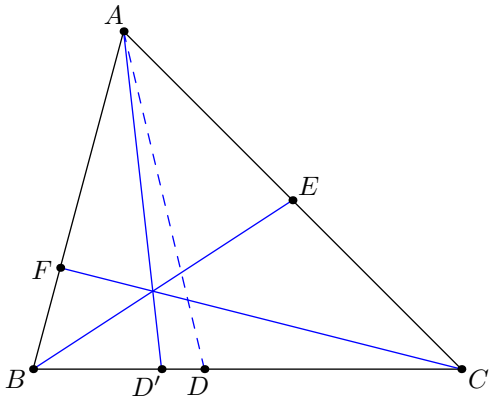
Väite seuraa kertomalla nämä kolme yhtälöä keskenään, koska pinta-alat supistuvat pois.

Olemme nyt todistaneet toisen osan Cevan lauseesta. Esimerkiksi painopisteen olemassaoloa varten mielenkiintoisempi osuus on kuitenkin ”jos sivujen pituudet toteuttavat yhtälön, niin janat AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä”. Tämä saadaan edellisestä osasta yksikäsitteisyysargumentilla.

Oletetaan, että pisteet D, E ja F on valittu niin, että

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Jos janat AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä, niin olemme valmiit. Muussa tapauksessa: olkoon P janojen BE ja CF leikkauspiste, ja olkoon D' janan AP jatkeen leikkauspiste sivun BC kanssa.



Cevan lauseen aiemmin todistetun osan nojalla pätee

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

joten yhdistämällä tämä pisteen D tietoihin saadaan

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BD'}{D'C}.$$

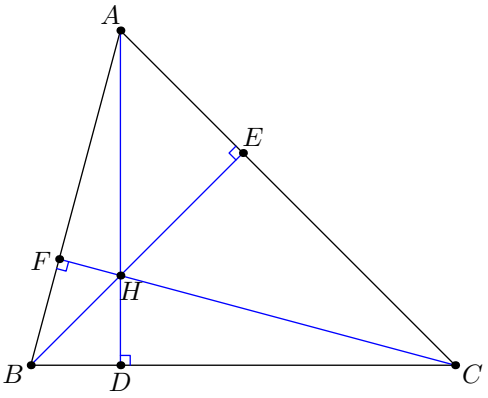
Tästä seuraa, että $D = D'$. Miksi? Suhde $\frac{BX}{XC}$ kasvaa koko ajan, kun pistettä X liikutetaan pisteestä B päin pistettä C kohti, joten suhteet $\frac{BD}{DC}$ ja $\frac{BD'}{D'C}$ eivät voi olla samat millään kahdella eri pisteillä D ja D', jotka ovat janalla BC. Tämä todistaa Cevan lauseen toisen puolen.

Osoitetaan sitten, että kolmion merkilliset pisteet ovat olemassa.

Painopiste

Painopisteen olemassaolo on varsin triviaali: Cevan lauseen pisteet D, E ja F ovat tällöin sivujen keskipisteet, eli pätee $\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = 1$, eli näiden suhteiden tulo on myös 1.

Ortokeskus



Kuten on jo mainittu, tiedämme ortokeskukseen liittyen kaikki kulmat. Täten trigonometrialla tai yhdenmuotoisilla kolmioilla saadaan sivujen pituuksien suhteita. Kolmiot BAD ja BCF ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BF},$$

eli

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{AB}.$$

Kirjoittamalla vastaavat lausekkeet kärjille A ja C ja kertomalla yhtälöt keskenään nähdään, että Cevan lauseen ehto pätee, mistä väite seuraa.

Edellinen todistus vaatii sen, että kolmio ABC on teräväkulmainen. Suorakulmaisella kolmiolla ortokeskus sijaitsee suoran kulman kärjessä, ja tylppäkulmaisella kolmiolla ortokeskus on kolmion ulkopuolella. Eri tapauksista on hyvä olla tietoinen, vaikkakin monesti teräväkulmaisille kolmioille toimiva todistus toimii myös suora- ja tylppäkulmaisille kolmioille.[18]

[18]Tähän liittyy hauska fakta: jos H on kolmion ABC ortokeskus, niin A on kolmion HBC ortokeskus.

Ortokeskuksen olemassaolon saisi myös tutkimalla kolmion DEF sisäympyrän keskipistettä (jonka olemassaolon olemme todistaneet jo aiemmin). Kolmion DEF kulmanpuolittajat leikkaavat kolmion ABC ortokeskuksessa (mikä seuraa helpolla kulmanjahtauksella). Tämä ei ole yllättävää: aiemmin käsittelimme sivuympyröiden keskipisteiden muodostamaa kolmiota $I_AI_BI_C$ ja sen ominaisuuksia, ja huomasimme pisteiden A, B ja C olevan kolmion $I_AI_BI_C$ korkeusjanojen kantapisteet.

Sisäympyrän ja ympärysympyrän keskipisteet

Sisäympyrän olemassaolo todistettiin jo aiemmin, mutta tämän voi todistaa myös Cevan lauseella. Muistellaan lukiosta ns. kulmanpuolittajalausetta: Olkoon piste D kolmion ABC kulman $\angle A$ puolittajan ja sivun BC leikkauspiste. Nyt

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Kulmanpuolittajalause on helpohko seuraus sinilauseesta. Sisäympyrän keskipisteen olemassaolo seuraa kertomalla tätä muotoa olevat yhtälöt keskenään.

Ympärysympyrän keskipisteen olemassaolon voi todistaa teräväkulmaisille kolmioille sinilausetta käyttämällä. Todistus ei kuitenkaan suoraan yleisty tylppäkulmaisille kolmioille. Helpoin todistus ympärysympyrän keskipisteen olemassaololle onkin aiemmin esitetty keskinormaaleihin perustuva argumentti.

5 Projektiivinen geometria (Geometria)

Tässä luvussa esitetään projektiivisen geometrian keskeisimmät työkalut kilpailutehtäviä ajatellen. Luvun tehtävät ovat Evan Chenin kirjan Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads projektiivista geometriaa käsittelevästä osiosta, ja myös teoriaosioon on otettu vaikutteita Chenin kirjasta.

5.1 Perustulokset

Kehäkulmalauseen avulla pystytään jahtaamaan kulmia. Monesti vastaan tulee kuitenkin ongelmia, joita ei saa ratkaistua pelkästään laskemalla kaikkia kulmia. Usein esteenä on, että joillekin kulmille ei ole olemassa mitään yksinkertaista esitystä tunnettujen kulmien avulla. Projektiivinen geometria tarjoaa työkaluja, joilla voidaan ratkaista ongelmia, joihin pelkkä kehäkulmalause ei riitä. Karkeasti voisi sanoa, että kehäkulmalauseella voidaan jahdata kulmia ja ns. perspektiivin ottamisella voidaan jahdata pituuksia.

Ensimmäisenä mainitaan pisteet äärettömyydessä. Aiemmin kolmen ympyrän radikaaliakseleista puhuttaessa mainittiin, että radikaaliakselit joko leikkaavat kaikki samassa pisteessä tai ovat kaikki yhdensuuntaisia. Tapauskäsittelyn välttämiseksi määritellään piste äärettömyydessä. Jos ℓ on suora, niin suoralla ℓ määritellään olemaan sellainen piste P_∞, joka on "äärettömän kaukana" kaikista tason "normaaleista" pisteistä. Jos kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset, niitä vastaa sama piste äärettömyydessä, ja muussa tapauksessa nämä pisteet ovat eri pisteet. Radikaaliakseleita koskevan väitteen voi nyt muotoilla niin, että radikaaliakselit leikkaavat kaikki samassa pisteessä, joka voi olla piste äärettömyydessä.

Mennään sitten itse asiaan. Teoria käsittelee paljolti seuraavaksi määriteltävää harmonista suhdetta.

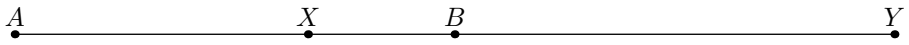
Määritelmä

Olkoot A, B, X ja Y tason (eri) pisteitä. Niiden harmoniseksi suhteeksi määritellään

$$\frac{\frac{AX}{AY}}{\frac{BX}{BY}}.$$

Tätä merkitään $(A, B; X, Y)$.

Määritelmässä pituudet ovat suunnattuja, eli ne voivat olla myös negatiivisia. Jos A, B, X ja Y ovat samalla suoralla, niin suhde on negatiivinen täsmälleen silloin, kun tasan yksi pisteistä X ja Y on pisteiden A ja B välissä. Tästä on esimerkki seuraavassa kuvassa.



Hyvin usein tarkastellaan tilannetta, jossa harmoninen suhde on -1. Tällöin rajoitutaan yleensä tilanteeseen, jossa A, X, B ja Y ovat samalla suoralla tai $AXBY$

on jännenelikulmio. Huomaa, että suora voidaan ajatella ympyränä, jonka keskipiste on sopiva piste äärettömyydessä.

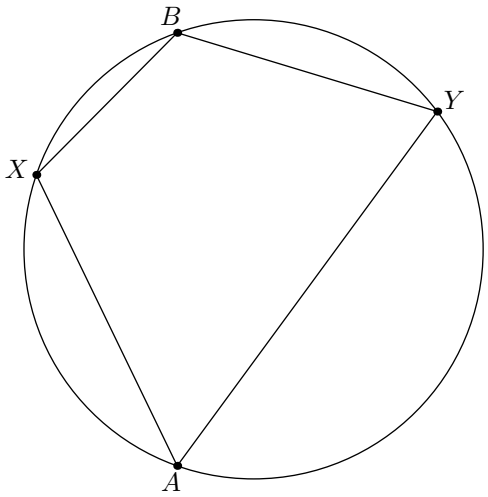
Määritelmä

Olkoot A, B, X ja Y tason (eri) pisteitä, jotka ovat samalla ympyrällä. Sanotaan, että A, B, X ja Y muodostavat harmonisen nelikon, jos

$$(A, B; X, Y) = -1.$$

Jos A, B, X ja Y ovat samalla ympyrällä, jonka säde on äärellinen, voidaan puhua myös harmonisesta (jänne)nelikulmiosta.

Edellä esitetyssä kuvassa A, X, B ja Y muodostavat harmonisen nelikon. Alla on esimerkki harmonisesta nelikulmiosta. Huomaa, että pisteiden A, X, B ja Y tulee jälleen olla oikeassa järjestyksessä ympyrän kehällä, eli pisteiden X ja Y tulee olla eri puolilla pisteitä A ja B. Negatiivisuus käsitellään siis vastaavasti kuin suoran tapauksessa.



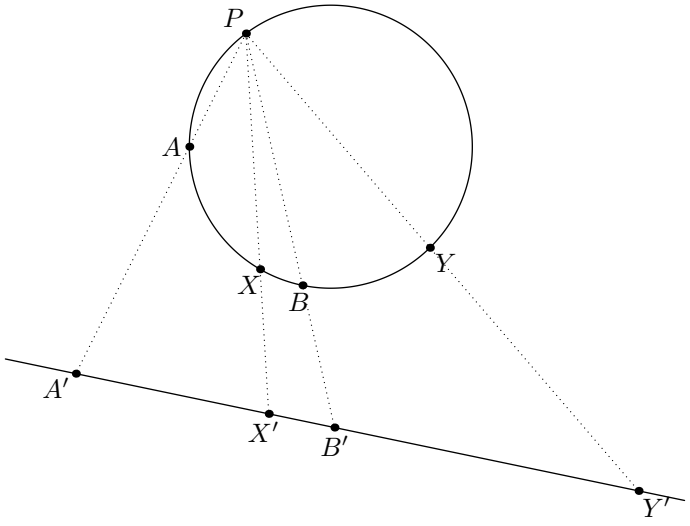
Seuraavaksi esitetään harmonisen suhteen ja harmonisten nelikoiden ominaisuuksia. Ensimmäisenä on kehäkulmalausetta vastaava tulos.

Lemma

Olkoon $AXBY$ jännenelikulmio, ja olkoon P piste tällä ympyrällä. Olkoon ℓ jokin tason suora. Olkoon A' suorien AP ja ℓ leikkauspiste, ja määritellään B', X' ja Y' vastaavasti. Tällöin

$$(A, B; X, Y) \overset{P}{=} (A', B'; X', Y').$$

Sanotaan, että ”otamme perspektiivin pisteestä P”. Lemmassa merkintä $\overset{P}{=}$ tarkoittaa normaalia yhtäsuuruutta, mutta jossa samalla annetaan tieto siitä, että otamme perspektiivin juurikin pisteen P kautta.



Väitteen voi todistaa sinilauseella seuraavasti. Kolmiosta $A'X'P$ saadaan sinilauseella

$$\frac{A'X'}{PA'} = \frac{\sin(\angle A'PX')}{\sin(\angle A'X'P)}.$$

Vastaavasti kolmiosta $A'Y'P$ saadaan

$$\frac{A'Y'}{PA'} = \frac{\sin(\angle A'PY')}{\sin(\angle A'Y'P)}.$$

Nyt jakamalla ylempi yhtälö alemmalla saadaan

$$\frac{A'X'}{A'Y'} = \frac{\sin(\angle A'PX')}{\sin(\angle A'PY')} \cdot \frac{\sin(\angle A'Y'P)}{\sin(\angle A'X'P)}.$$

Toistamalla edellinen todistus pisteen A' sijasta pisteelle B' saadaan

$$\frac{B'X'}{B'Y'} = \frac{\sin(\angle B'PX')}{\sin(\angle B'PY')} \cdot \frac{\sin(\angle B'Y'P)}{\sin(\angle B'X'P)}.$$

Seuraavaksi jaetaan pistettä A' koskeva yhtälö pistettä B' koskevalla yhtälöllä. Tällöin osa termeistä supistuu (huomaa, että $\sin(x) = \sin(180^\circ - x)$), ja saadaan

$$\frac{\frac{A'X'}{A'Y'}}{\frac{B'X'}{B'Y'}} = \frac{\frac{\sin(\angle A'PX')}{\sin(\angle A'PY')}}{\frac{\sin(\angle B'PX')}{\sin(\angle B'PY')}}.$$

Tässä vasen puoli on harmoninen suhde $(A', B'; X', Y')$.

Olemme siis saaneet laskettua suhteen $(A', B'; X', Y')$ pisteestä P lähtevien kulmien avulla. Voimme tehdä vastaavat laskut pisteille A, B, X ja Y (käyttäen sievennyksissä apuna kehäkulmalausetta). Saamme täsmälleen saman lausekkeen harmoniselle suhteelle $(A, B; X, Y)$. Koska laskut ovat samanlaiset kuin yllä, ne jätetään lukijalle. Täten $(A, B; X, Y) = (A', B'; X', Y')$, mikä on haluttu väite.

Kommentti: Sinilause on luotu muuttamaan kulmaehtoja pituusehdoiksi (ja toisin päin), ja sitä tullaan soveltamaan myös myöhempien tulosten todistuksissa. Todistus onkin hyvin luonnollinen. Ensin lasketaan sopiva pituuksien $A'X', A'Y', B'X'$ ja $B'Y'$ suhde "tunnettujen kulmien" eli P:stä lähtevien kulmien avulla. Tämän jälkeen vastaava suhde lasketaan pisteille A, B, X ja Y.

Aivan vastaavaan tapaan kuin edellä voidaan todistaa seuraava väite, joka myös koskee perspektiivin ottamista.

Lemma

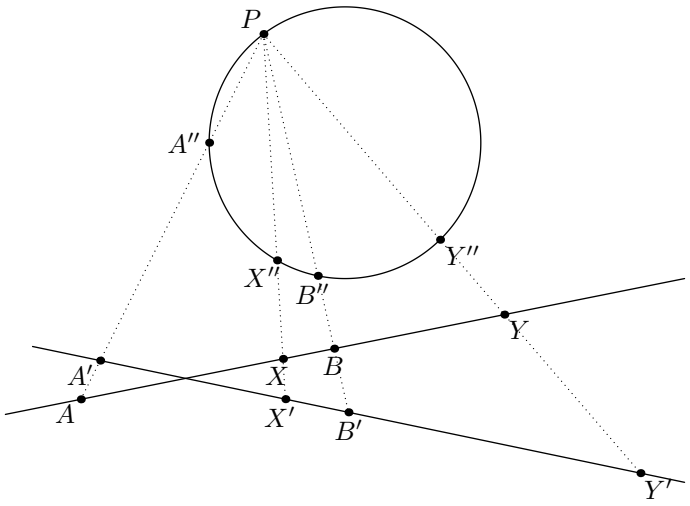
Olkoot A, B, X ja Y pisteitä, jotka ovat samalla suoralla ℓ. Olkoon P jokin piste suoran ℓ ulkopuolella. Olkoon ℓ' jokin suora, ja olkoon A' suorien AP ja ℓ' leikkauspiste. Määritellään pisteet B', X' ja Y' vastaavasti. Tällöin pätee

$$(A, B; X, Y) \overset{P}{=} (A', B'; X', Y').$$

Tämä tulos oikeastaan seuraa edellä mainitusta lemmasta. Yksi[19] ratkaisu on piirtää ympyrä, jonka kehällä on piste P, ja määritellä A'' olemaan suoran AP leikkauspiste tämän ympyrän kanssa. Määritellään pisteet B'', X'' ja Y'' vastaavasti, jolloin käyttämällä ensimmäistä lemmaa saadaan

$$(A, B; X, Y) \overset{P}{=} (A'', B''; X'', Y'') \overset{P}{=} (A', B'; X', Y'),$$

ja väite seuraa.



5.2 Keskeiset tulokset

Seuraavaksi esitetään, mistä harmonisia nelikkoja löytää käytännössä.

[19]Tuntuu hieman hassulta, että perspektiivin ottaminen pitää perustella eri tavoilla suorien ja ympyröiden tapauksissa. (Totesimmehan aiemmin, että suorat ovat vain äärettömän suuria ympyröitä.) Ehkäpä parempi selitys ilmiölle voidaan antaa Möbius-kuvausten avulla. Möbius-kuvaukset ovat kompleksitason kuvaukset muotoa $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, missä a, b, c ja d ovat vakioita. Suorat ja ympyrät kuvautuvat Möbius-kuvauksissa joko suoriksi tai ympyröiksi, ja lisäksi kuvaus säilyttää harmonisen suhteen.

Ensimmäinen tulos yhdistää janojen keskipisteet ja yhdensuuntaiset suorat. Tässä yhdensuuntaisia suoria edustaa niiden leikkauspiste äärettömyydessä. Tämän tuloksen hyödyllisyys tulee paremmin esiin myöhemmin esimerkkitehtävien yhteydessä.

Lemma

Olkoot A ja B (eri) pisteitä. Olkoon M janan AB keskipiste, ja olkoon P_∞ suoraa AB vastaava piste äärettömyydessä. Tällöin

$$(A, B; M, P_\infty) = -1.$$

Väite seuraa suoraan määritelmästä: saadaan

$$(A, B; M, P_\infty) = \frac{\frac{AM}{AP_\infty}}{\frac{BM}{BP_\infty}}.$$

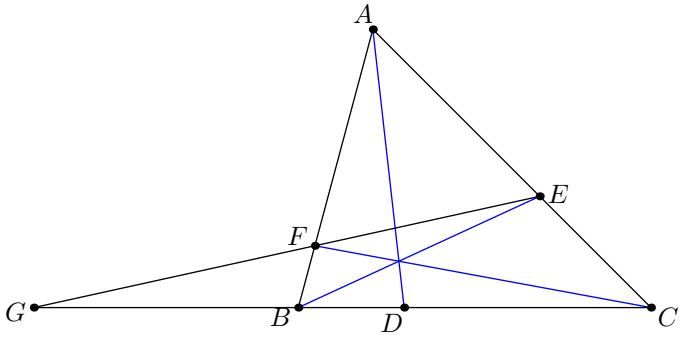
Pätee $AM = BM$, ja lisäksi $AP_\infty = BP_\infty = \infty$.[20] Koska M on pisteiden A ja B välissä ja P_∞ ei ole, niin etumerkiksi tulee miinus.

Seuraavat tulokset ovat epätriviaalimpia.

Lemma

Olkoon ABC kolmio, ja olkoot D, E ja F sellaisia pisteitä janoilla BC, AC ja AB, että AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä. Olkoon G suorien EF ja BC leikkauspiste. Tällöin

$$(B, C; G, D) = -1.$$



Todistuksen ideana on käyttää Cevan lausetta pisteille D, E ja F, ja Menelaoksen lausetta[21] pisteille G, F ja E. Väite seuraa vertaamalla näistä saatuja yhtälöitä.

[20] Voi olla vakuuttavampaa ajatella raja-arvoa $\lim_{P \to P_\infty} \frac{AP}{BP}$, missä P kulkee suoraa AB pitkin kohti pistettä P_∞. Tämä raja-arvo on muotoa $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+c}$, joka on 1.

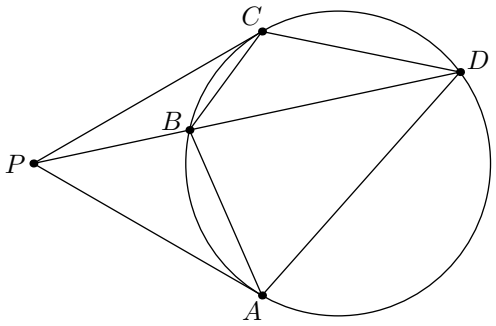
[21] Menelaoksen lause sanoo seuraavaa: Olkoon ABC kolmio. Olkoon G piste suoralla BC, E piste suoralla AC ja F piste suoralla AB. Nyt pisteet G, E ja F ovat samalla suoralla jos ja vain jos

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1,$$

missä pituudet ovat jälleen kerran suunnattuja (mikä tarkoittaa sitä, että parillisen määrän pisteistä G, F ja E tulee olla kolmion sivuilla eikä niiden jatkeilla).

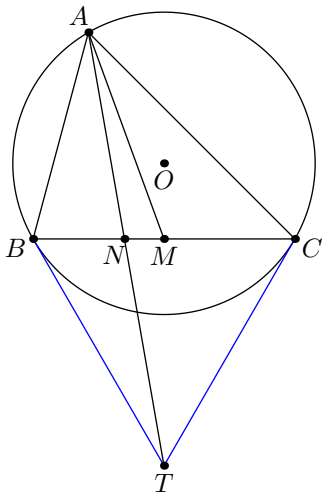
Lemma

Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio. $ABCD$ on harmoninen jos ja vain jos pisteisiin A ja C piirretyt tangentit leikkaavat suoralla BD.



Huomaa, että ehdossa voitaisiin symmetrian vuoksi tutkia myös pisteisiin B ja D piirrettyjä tangentteja.

Väitteen todistamista varten tutkitaan yleisempää ns. symmediaaneja koskevaa tilannetta.



Kuvassa T on kolmion ABC ympärysympyrän pisteisiin B ja C piirrettyjen tangenttien leikkauspiste. Jana AM on piirretty niin, että $\angle BAT = \angle MAC$. Toisin sanoen suora AM saadaan peilaamalla AN kulman $\angle BAC$ puolittajan yli. Väite on, että M on janan BC keskipiste. Janaa AN kutsutaan kolmion ABC (kärjestä A lähteväksi) symmediaaniksi.

Kirjoitetaan $\alpha = \angle BAN$ ja $\beta = \angle NAM$. Todistuksen ideana on käyttää sinilausetta ja muuttaa kulmaehtoja pituusehdoiksi (kuten perspektiiviä otettaessa). Kolmiosta ABM saadaan

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\sin(\angle B)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

ja kolmiosta ACM saadaan vastaavasti

$$\frac{AM}{CM} = \frac{\sin(\angle C)}{\sin(\alpha)}.$$

Jakamalla ylempi yhtälö alemmalla saadaan

$$\frac{CM}{BM} = \frac{\sin(\angle B)}{\sin(\angle C)} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Haluamme, että tämä tulo on 1.

Kulmiin α ja $\alpha+\beta$ päästään käsiksi kolmioista ABT ja CBT. Kolmiosta ABT saadaan nimittäin

$$\frac{AT}{BT} = \frac{\sin(\angle TBA)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\angle C)}{\sin(\alpha)}.$$

Tässä jälkimmäisen yhtäsuuruuden saamiseksi on käytetty kehäkulmalauseen tangenttiversiosta saatavaa tulosta $\angle TBC = \angle A$ sekä tietoa $\sin(\angle A + \angle B) = \sin(\angle C)$. Vastaavasti saadaan

$$\frac{AT}{CT} = \frac{\sin(\angle C + \angle A)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Väite seuraa huomaamalla, että $BT = CT$ ja $\sin(\angle C + \angle A) = \sin(\angle B)$.

Lukijalle jätetään sen miettiminen, miten alkuperäinen lemman väite seuraa tästä (tämä ei ole aivan triviaalia, mutta ei erityisen vaikeatakaan). Tämän luvun viimeisen esimerkkitehtävän ratkaisu antaa ongelmaan vihjeen.

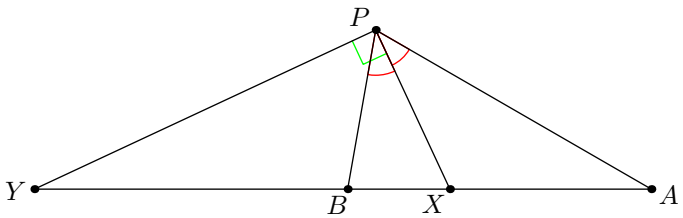
Viimeisenä mainittava tulos on myös varsin hyödyllinen.

Lemma

Olkoot pisteet A, X, B ja Y suoralla tässä järjestyksessä, ja olkoon P piste tämän suoran ulkopuolella. Jos mitkä tahansa kaksi seuraavista väitteistä pätevät, niin myös kolmaskin pätee.

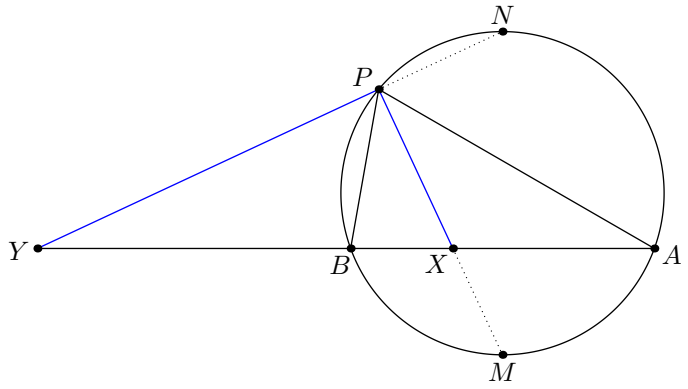
1. $(A, B; X, Y) = -1$.
2. PX puolittaa kulman $\angle APB$.
3. $\angle XPY = 90°$.

Lemman tilanne on esitetty seuraavassa kuvassa.



Tuloksen voi todistaa käyttäen sinilausetta. Esitetään kuitenkin hieman projektiivista geometriaa käyttävä ratkaisu. Todistuksen ideana on täydentää kuvaan kolmion ABP

ympärysympyrä ja suorien PX ja PY leikkauspisteet tämän ympyrän kanssa.[22] Ongelma palautuu kohtalaisen tutun kuvion käsittelemiseen.



Oletetaan ensiksi, että $\angle XPY = 90°$. Tutkitaan nyt kahta tapausta lemman mukaisesti. Molemmissa tapauksissa on ideana ottaa ensiksi perspektiivi suoralta AY ympyrälle pisteestä P, jolloin

$$(A, B; X, Y) \overset{P}{=} (A, B; M, N).$$

Tämän jälkeen todistukset jakautuvat eri suuntiin.

1. Oletetaan, että pätee $\angle BPX = \angle XPA$. Tällöin M on pienemmän kaaren $\widehat{AB}$ keskipiste ja N on suuremman kaaren $\widehat{AB}$ keskipiste. Nyt $\frac{AM}{BM} = 1$ ja $\frac{AN}{BN} = 1$, joten harmonisen suhteen määritelmästä saadaan $(A, B; M, N) = -1$, eli edellisen nojalla $(A, B; X, Y) = -1$.

2. Oletetaan, että pätee $(A, B; X, Y) = -1$ eli $(A, B; M, N) = -1$. Oletuksen $\angle XPY = 90°$ nojalla MN on aina ympyrän halkaisija. Ei ole vaikeaa nähdä, että jos tätä halkaisijaa NM kääntää kuvassa esitetystä tilanteesta, niin jompikumpi suhteista $\frac{AM}{AN}$ ja $\frac{BM}{BN}$ on suurempi kuin toinen. (Vaihtoehtoisesti voitaisiin käyttää edellistä lemmaa, josta saadaan suoraan, että halkaisijalle on vain yksi vaihtoehto.) Pisteet M ja N ovat täten lyhyemmän ja pidemmän kaaren $\widehat{AB}$ keskipisteet, mistä väite seuraa.

Enää tulee osoittaa, että jos $\angle BPX = \angle XPA$ ja $(A, B; X, Y) = -1$, niin pätee $\angle XPY = 90°$. Tämä seuraa kuten edellä: Nyt M on pienemmän kaaren $\widehat{AB}$ keskipiste, joten ehdosta $(A, B; X, Y) = -1$ seuraa, että N on suuremman kaaren $\widehat{AB}$ keskipiste. Täten $\angle MPN = 90°$, eli $\angle XPY = 90°$.

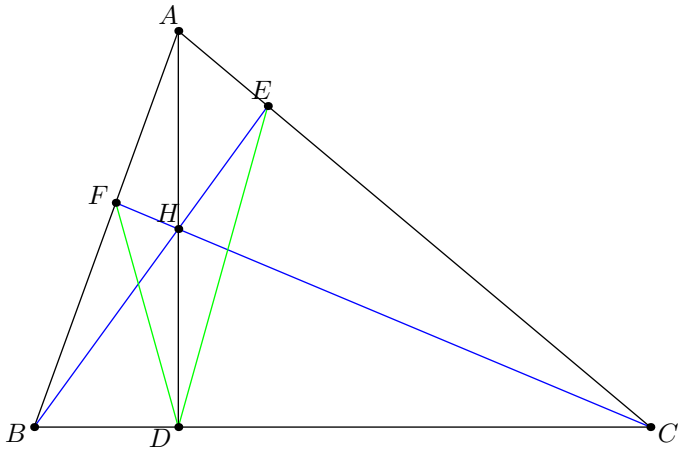
[22] Tätä ei ole kovin helppoa keksiä itse. Keksin tämän lähestymistavan ratkoessani projektiiviseen geometriaan liittyvää tehtävää, jossa vastaavanlainen konfiguraatio oli jo annettuna. Väitettä ei tämän huomion jälkeen ole enää kovin vaikeaa todistaa, koska jokainen yksittäinen lemman tapaus on kohtuu suoraviivainen.

5.3 Esimerkkitehtäviä

Ensimmäinen tehtävä demonstroi tulosten soveltamista käytännössä. Tehtävä on Kanadan kansallisesta kilpailusta vuodelta 1994.

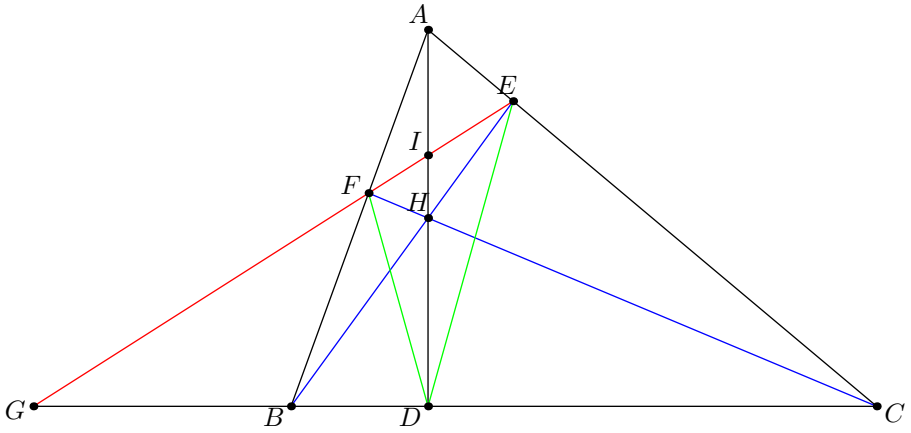
Tehtävä

Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio. Olkoon AD pisteestä A piirretty korkeusjana, ja olkoon H mielivaltainen piste janalla AD. Olkoot E ja F suorien BH ja CH leikkauspisteet kolmion ABC sivujen kanssa. Osoita, että $\angle EDH = \angle FDH$.



Naiivi lähestymistapa olisi yrittää jahdata kuviosta kulmia. Jos H olisi ortokeskus, niin tämä onnistuisi hyvinkin helposti jännenelikulmioita käyttämällä, mutta tehtävän tilanteessa yksinkertainen kulmanjahtaus ei toimi.

Mikä avuksi? Tehtävässä oleellista on (ilmeisesti) se, että D on nimenomaan korkeusjanan kantapiste, eikä vaikkapa janan BC keskipiste. Koitetaan siis hyödyntää tietoa siitä, että $\angle BDH = 90°$. Huomataan, että viimeisen lemman nojalla ehto $\angle FDH = \angle HDE$ voidaan muotoilla uudelleen harmonisten nelikoiden avulla. Tutkitaan siis suoraa FE tarkemmin.



Olkoon siis I janan FE leikkauspiste janan AH kanssa ja G suorien FE ja BC leikkauspiste. Haluamme osoittaa, että $(F, E; I, G) = -1$. Alamme siis metsästämään kuvasta harmonisia nelikoita. Muistetaan, että olemme nähneet vastaavanlaisen kuvion aiemmin: yksi lemmoistahan on, että $(B, C; D, G) = -1$. Tästä ei enää ole vaikeaa huomata, että

$$(B, C; D, G) \overset{A}{=} (F, E; I, G),$$

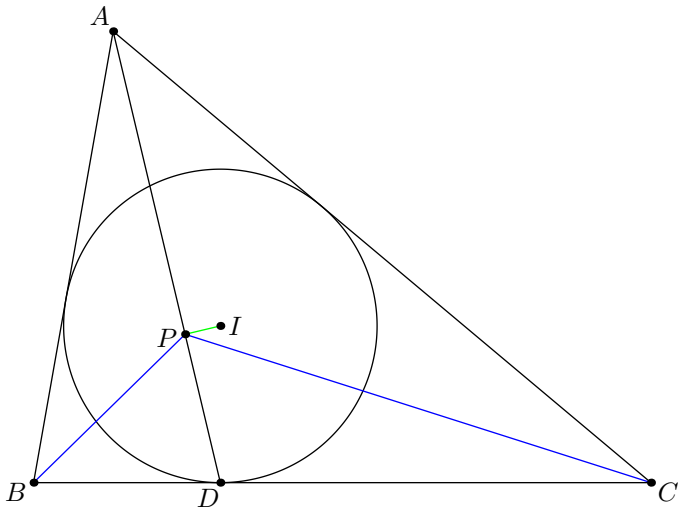
mikä ratkaisee tehtävän.

Kommentti: Harmonisten nelikoiden soveltamista ajatellen on usein hyvä, jos tehtävässä on paljon leikkauspisteitä. Usein kuviossa ei ole valmiiksi kaikkia tarvittavia pisteitä, vaan osa pitää tajuta lisätä kuvaan itse.

Toinen esimerkkitehtävä on ELMO-lyhytlistalta vuodelta 2012.

Tehtävä

Olkoon ABC kolmio ja I sen sisäympyrän keskipiste. Olkoon D kolmion ABC sisäympyrän sivuamispiste sivun BC kanssa, ja olkoon P pisteestä I janalle AD piirretyn korkeusjanan kantapiste. Osoita, että $\angle BPD = \angle DPC$.



Kuten edellisessä tehtävässä myös tässä on hyvin vaikeaa päästä suoraan käsiksi kulmiin. Tämän vuoksi määritellään K olemaan suoran IP leikkauspiste suoran BC kanssa, jolloin tavoitteena on osoittaa, että $(B, C; D, K) = -1$.

Tämä tilannehan muistuttaa hieman edellisen tehtävän konfiguraatiota. Ehto $(B, C; D, K) = -1$ pätee täsmälleen yhdellä pisteen K valinnalla, joka saadaan konstruoitua valitsemalla janoilta AC ja AB pisteet E ja F niin, että AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä, ja ottamalla suorien EF ja BC leikkauspiste. Koitetaan nyt valita sellaiset ehdon täyttävät pisteet E ja F, joiden käsittely on mahdollisimman helppoa.

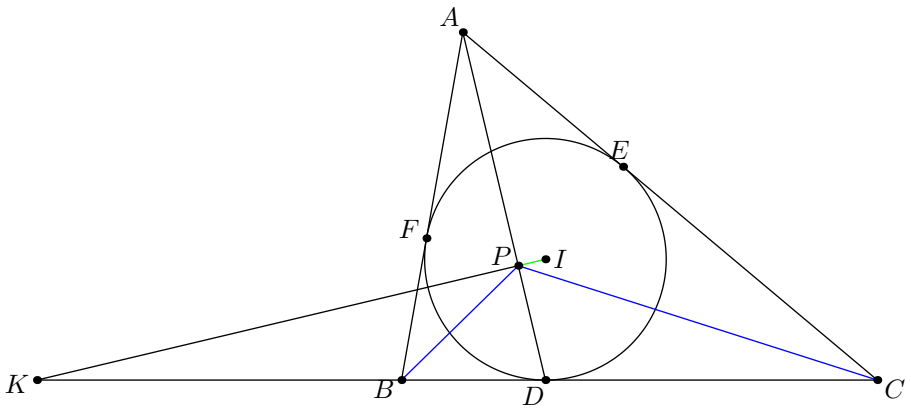
Mikä olisi luonnollinen tapa valita E ja F? Intuitiivisesti paras olisi sellainen, jolla AD, BE ja CF vastaisivat ”samaa asiaa” (kuten vaikkapa korkeusjanat). Tällä perusteella kannattaisi pisteet E ja F valita olemaan sisäympyrän tangeerauspisteet

kolmion sivujen kanssa. Leikkaavatko AD, BE ja CF tällöin samassa pisteessä? Muistetaan, että vastaava korkeusjanoja koskeva ongelma ratkesi Cevan lauseella, ja huomataan, että sama pätee myös tässä: Jos E ja F ovat tangeerauspisteet, niin tällöin mm. $AE = AF$, koska AE ja AF ovat sisäympyrälle pisteestä A piirretyt tangentit. Tämän avulla saadaan Cevan lauseen ehto

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

joten janat AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä.

Tutkitaan siis seuraavaa kuvaa. Tavoitteena on osoittaa, että pisteet E, F ja K ovat samalla suoralla.



Mikä piste K oikeastaan on? Määritelmän mukaan se on pisteeseen D piirretyn sisäympyrän tangentin ja suoran PI leikkauspiste. Mutta piste I on sisäympyrän keskipiste ja PI ja AD ovat kohtisuorassa, joten pisteen K toinen tangentti sisäympyrälle on janalla AD. Olkoon tämä tangenttipiste G.

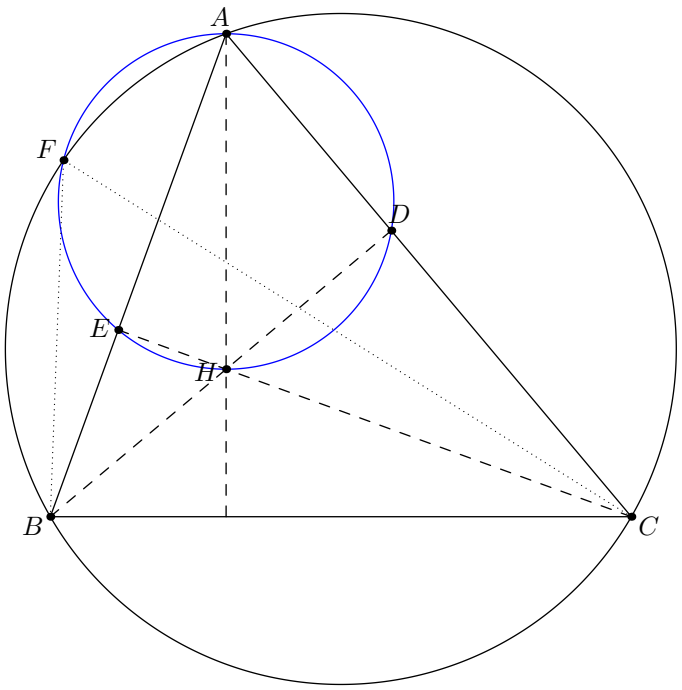
Todistettava väite on siis, että jännenelikulmion $DFGE$ pisteisiin D ja G piirretyt tangentit leikkaavat suoralla FE. Toisin sanoen nelikulmion $DFGE$ tulisi olla harmoninen. Tämä on kuitenkin selvää, koska pisteisiin F ja E piirretyt tangentit leikkaavat suoralla DG, nimittäin pisteessä A.

Kommentti: Tässä ratkaisussa korostui asioiden katsominen oikeasta näkökulmasta. Ensimmäinen kohta oli pisteen K tulkitseminen suorien EF ja BC leikkauspisteenä. Toisessa kohdassa K taas tulkittiin tangenttien avulla. Koska harmonisia nelikoita koskevat lemmat ovat hyvin monimuotoisia, kannattaa myös tehtävien konfiguraatioita katsoa monesta eri näkökulmasta.

Viimeinen tehtävä on vuoden 2011 Brazilian kansallisesta kilpailusta.

Tehtävä

Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio. Olkoot BD ja CE kolmion korkeusjanoja, ja olkoon H sen ortokeskus. Kolmion ADE ympärysympyrä leikkaa kolmion ABC ympärysympyrää pisteessä $F \neq A$. Osoita, että kulmien $\angle BFC$ ja $\angle BHC$ kulmanpuolittajat leikkaavat suoralla BC.



Huomataan, että pisteillä D ja E ei ole paljoakaan väliä: kolmion ADE ympärysympyrä on vain se ympyrä, jonka halkaisija on AH.

Kulman $\angle BFC$ puolittaja on ehkä helpointa tulkita janana FM, jossa M on (pienemmän) kaaren $\widehat{BC}$ keskipiste. Kulman $\angle BHC$ puolittajalle ei saa uutta muotoilua aivan yhtä helposti. Pienellä luovuudella saadaan kuitenkin seuraava idea: Peilataan H janan BC yli pisteeseen H'. Tiedetään, että tämä peilaus on kolmion ABC ympärysympyrällä. Olkoon N suuremman kaaren $\widehat{BC}$ keskipiste. Nyt $H'N$ on kulman $\angle BH'C$ kulmanpuolittaja, ja se leikkaa suoraa BC symmetrian nojalla samassa kohdassa kuin kulman $\angle BHC$ puolittaja. Ongelma on tässä muodossa ehkä hieman alkuperäistä muotoilua helpompi, koska H' on ainakin samalla ympyrällä kuin monet muutkin tehtävän pisteistä.

Haluamme siis, että nelikulmion $BFCH'$ kulmien $\angle BFC$ ja $\angle BH'C$ puolittajat leikkaavat nelikulmion lävistäjällä BC. Voisiko tämä ehto olla sama, kuin että $BFCH'$ on harmoninen nelikulmio? Kyllä vain. Tämän voi todistaa vaikkapa kulmanpuolittajalauseella: Jos X on kulman $\angle BFC$ puolittajan leikkauspiste janan BC kanssa, niin

$$\frac{BX}{XC} = \frac{BF}{FC}.$$

Nyt jos $(B, C; F, H') = -1$, niin

$$\frac{BF}{FC} = \frac{BH'}{H'C},$$

eli pätee $\frac{BX}{XC} = \frac{BH'}{H'C}$, ja täten X on myös kulman $\angle BH'C$ puolittajalla. (Toinenkin suunta pätee: todistus on sama kuin edellä.)

Voidaan keksiä parikin ideaa nelikulmion $BFCH'$ harmonisuuden todistamiseksi. Yksi idea on ottaa perspektiivi pisteestä A, jolloin tulisi todistaa nelikulmion

$FEHD$ harmonisuus. Toinen idea perustuu myös perspektiivin ottamiseen pisteestä A, mutta projektio otetaankin suoralle BC. Esitämme molempiin lähestymistapoihin perustuvat ratkaisut.

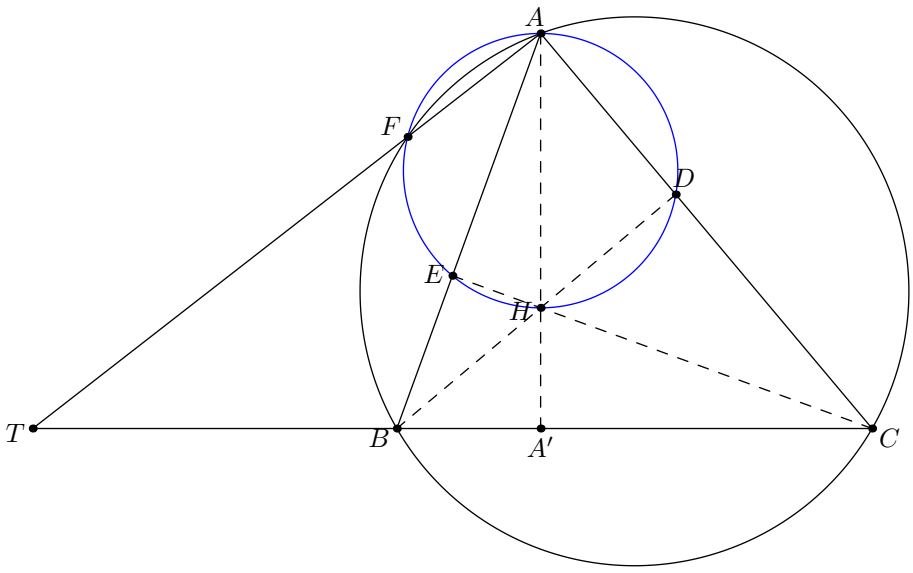
Ensimmäistä ideaa varten haluamme siis, että $FEDH$ on harmoninen. Otetaan perspektiivi pisteestä H suoralle BC. Tällöin E kuvautuu pisteelle C ja D pisteelle B. Väite: F kuvautuu janan BC keskipisteelle. Todistus: Olkoon A' suoran FH leikkauspiste kolmion ABC ympärysmpyrän kanssa. Tällöin $\angle AFA' = \angle AFH = 90°$, eli AA' on ympyrän halkaisija. Mutta edellisessä luvussa todettiin, että pisteen H peilaus P janan BC keskipisteen yli antaa halkaisija AP, eli FH todella kulkee janan BC keskipisteen läpi. Merkitään tätä keskipistettä kirjaimella M.

Minne piste H kuvautuu? Olkoon ℓ suora, joka on tangentti kolmion ADE ympärysympyrälle pisteessä H. Piste H kuvautuu perspektiiviä ottaessa suorien ℓ ja BC leikkauspisteelle: tämä vastaa sitä, että valittaisiin ympyrän kehältä piste Q *hyvin* läheltä pistettä H ja kuvattaisiin se. Tangentti ℓ on kohtisuorassa halkaisijaa AH kohti, joka puolestaan on kohtisuorassa suoraa BC kohti. Täten suorat ℓ ja BC ovat yhdensuuntaiset, eli leikkaavat pisteessä äärettömyydessä. Siispä

$$(F, H; D, E) \overset{H}{=} (M, P_\infty; B, C),$$

joka on -1, kuten lemmojen yhteydessä todettiin. Tämä on mitä haluttiinkin.

Tutkitaan sitten toisen idean mukaista lähestymistapaa. Otamme siis perspektiivin nelikulmiosta $FBH'C$ pisteen A kautta suoralle BC.



Tavoitteena on todistaa, että $(T, B; A', C) = -1$. Tiedämme, missä pisteen T tulisi sijaita: sen pitäisi olla suorien ED ja BC leikkauspiste. Toisin sanoen haluamme osoittaa, että suorat AF, ED ja BC leikkaavat samassa pisteessä. Avainsana tähän on radikaaliakselit: Nelikulmio $BCDE$ on jännenelikulmio, ja nyt suorat AF, DE ja BC ovat kolmioiden ADE, ABC ja BCD ympärysympyröiden radikaaliakselit. Täten ne leikkaavat samassa pisteessä.

6 Aritmetiikan peruslause (Lukuteoria)

Tässä luvussa käydään läpi lukuteorian perusteita. Tärkein tulos on aritmetiikan peruslause.

Aritmetiikan peruslause on syystäkin nimetty peruslauseeksi: se on hyvin perustavanlaatuinen tulos, ja ilman sitä on hyvin vaikea tehdä oikein mitään lukuteoriassa.[23]

Kerrataan alkuluvun määritelmä.

Määritelmä

Kokonaislukua $p > 1$ kutsutaan alkuluvuksi, jos se ei ole jaollinen muilla positiivisilla kokonaisluvuilla kuin 1 ja p.

Päätulos on seuraava.

Lause (Aritmetiikan peruslause)

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Luku n voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla alkulukujen tulona.

Esimerkiksi 12 on yksikäsitteisesti $2 \cdot 2 \cdot 3$. Huomaa, että tulontekijöiden järjestyksellä ei ole väliä, eli vaikkapa $2 \cdot 3 \cdot 2$ on sama tapa esittää luku 12 alkulukujen tulona kuin $2 \cdot 2 \cdot 3$. Usein samat alkutekijät "kerätään" yhteen, ja luvun n alkutekijähajotelmaksi kirjoitetaan

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

missä $p_1, \ldots, p_k$ ovat eri alkulukuja ja a_i ovat positiivisia kokonaislukuja.

Tulos on uskottava, mutta sen todistaminen ei ole aivan suoraviivaista. Ennen todistusta esitetäänkin pari aputulosta, jotka ovat itsessäänkin hyödyllisiä.

6.1 Bezout'n lemma

Ensimmäinen tulos on Bezout'n lemma.[24] Bezout'n lemma on näennäisesti kaukana aritmetiikan peruslauseesta, mutta sitä tullaan tarvitsemaan myöhemmin.

Lemma

Olkoot a ja b kokonaislukuja. Oletetaan, että ei ole olemassa ykköstä suurempaa kokonaislukua c, joka jakaa molemmat luvuista a ja b. Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut x ja y, että

$$ax + by = 1.$$

[23] Harjoitustehtävä: Todista (ilman aritmetiikan peruslausetta), että 2^n ei ole jaollinen kolmella millään positiivisella kokonaisluvulla n.

[24] Tulosten nimet eivät sinänsä ole tärkeitä, mutta on luontevaa viitata lemmoihin ja lauseisiin niiden nimillä.

Lemman ehdon täyttäviä a ja b sanotaan yhteistekijättömiksi tai suhteellisiksi alkuluvuiksi, ja sanotaan, että lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on 1. Selvästikin ehto on välttämätön ehto sille, että $ax + by = 1$ jollain x ja y: muuten lemman c jakaisi yhtälön vasemman puolen, muttei oikeaa. Esimerkiksi yhtälön $15x + 6y = 1$ vasen puoli on aina jaollinen kolmella, kun taas oikea puoli ei ole koskaan jaollinen kolmella.

Tässä on lemmalle todistus.[25] Olkoon d pienin positiivinen kokonaisluku, joka voidaan esittää muodossa $ax + by$. Haluamme osoittaa, että $d = 1$. Tehdään vastaoletus, eli oletetaan, että $d > 1$. Kirjoitetaan $ax_d + by_d = d$, missä x_d ja y_d ovat kokonaislukuja.

Koska $d > 1$ ja lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on 1, niin d ei voi jakaa molempia luvuista a ja b. Oletetaan, että d ei jaa lukua b (tapaus, jossa d ei jaa lukua a, on samanlainen). Kirjoitetaan jakoyhtälön avulla $b = kd + r$, missä r $(0 \leq r < d)$ on jakojäännös ja k on kokonaisosa, kun b jaetaan luvulla d. Koska d ei jaa lukua b, niin r ei ole 0, ja täten $0 < r < d$. Nyt

$$r = b - kd = b - k(ax_d + by_d) = a \cdot (-kx_d) + b(1 - ky_d).$$

Olemme siis saaneet esitettyä lukua d pienemmän positiivisen kokonaisluvun r muodossa $ax + by$. Tämä on ristiriita, eli vastaoletus on väärä, ja tuleekin päteä $d = 1$. Olemme valmiit.

Kommentti: Todistuksessa on siis ideana, että jos löydämme vaikkapa sellaiset luvut x ja y, että $ax + by = 3$, niin tätä esitystä voidaan vielä ”parantaa”, ja lopulta saadaan $ax + by = 1$. Todistus myös antaa tavan, jolla voidaan käytännössä löytää nämä halutut x ja y. Menetelmä ei kuitenkaan ole paras mahdollinen lukujen löytämiseen. Niin sanottu Eukleideen algoritmi on parempi tähän tarkoitukseen, mutta se on mielestäni vaikeampi kuin edellinen todistus. Tämän vuoksi edellä on esitetty toisenlainen algoritmi.

6.2 Eukleideen lemma

Bezout'n lemmaa sovelletaan ns. Eukleideen lemman todistamiseen. Eukleideen lemma on hyvin luonnollinen.

Lemma

Jos alkuluku p jakaa kahden kokonaisluvun a ja b tulon ab, niin p jakaa vähintään toisen luvuista a ja b.

Lemman tulos ei tietenkään päde muilla kuin alkuluvuilla: esimerkiksi $6|2 \cdot 3$, mutta 6 ei jaa kumpaakaan luvuista 2 ja 3.

Todistetaan Eukleideen lemma. Jos p jakaa luvun a, niin olemme valmiit. Oletetaan, että näin ei ole. Koska p on alkuluku, ei ole olemassa sellaista kokonaislukua c $(c > 1)$,

[25] Kiitokset Juho Aralalle tämän todistuksen keksimisestä.

että se jakaisi molemmat luvuista a ja p. Siispä Bezout'n lemman nojalla on olemassa sellaiset kokonaisluvut x ja y, että

$$ax + py = 1.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla b:

$$(ab)x + p(by) = b.$$

Oletettiin, että p jakaa tulon ab, joten p jakaa molemmat yhtälön vasemman puolen termeistä. Täten p jakaa niiden summan ja siten oikean puolen luvun b. Tämä todistaa väitteen.

Eukleideen lemma yleistyy useammalle luvulle suoraan induktiolla: jos p on alkuluku, joka jakaa lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tulon, niin p:n tulee jakaa vähintään yksi näistä luvuista.

6.3 Aritmetiikan peruslauseen todistus

Ensimmäiseksi todetaan, että jokainen positiivinen kokonaisluku n voidaan esittää jollain tavalla alkutekijöiden tulona: Jos n on alkuluku, tämä on selvää. Jos luku n ei ole alkuluku, niin n voidaan määritelmän mukaan kirjoittaa muodossa ab, missä $1 < a, b < n$. Kuten Bezout'n lemman kohdalla riittää tässäkin ratkaista helpompi ongelma pienemmillä luvuilla a ja b. Formalisoinnin voi jälleen tehdä induktiolla.

Luku $n = 1$ on erikoistapaus: tällöin tulossa ei ole yhtäkään tulontekijää, vaan kyseessä on ns. tyhjä tulo.

Keskitytään sitten vaikeampaan osuuteen, eli tulon yksikäsitteisyyteen. Oletetaan, että luku n voidaan esittää kahdella tavalla alkulukujen tulona: olkoon

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k = q_1 q_2 q_3 \cdots q_m,$$

missä $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ja $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ovat alkulukuja. Halutaan osoittaa, että nämä esitykset ovat samat, kuten tapauksessa $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2$.

Tutkitaan alkulukua p_1. Se jakaa vasemman puolen $p_1 p_2 \cdots p_k$ ja täten myös oikean puolen $q_1 q_2 \cdots q_m$. Luvun p_1 tulee jakaa Eukleideen lemman (monen luvun version) vuoksi jokin luvuista q_i. Koska lukujen järjestyksellä ei ole väliä, voidaan olettaa, että $i = 1$ eli että p_1 jakaa luvun q_1.

Luku q_1 on alkuluku, joka on jaollinen luvulla p_1. Tulee olla $p_1 = q_1$, ja yhtälö $p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_m$ yksinkertaistuu muotoon

$$p_2 p_3 \cdots p_k = q_2 q_3 \cdots q_m.$$

Ongelma on palautettu helpompaan versioon, ja näin voidaan jatkaa: Lukua p_2 vastaa jokin alkuluku oikealla puolella yhtälöä, vaikkapa luku q_2. Supistetaan luvut p_2 ja q_2 pois ja jatketaan.

Prosessi loppuu siihen, kun toisella puolella ei ole enää alkulukuja eli kun toinen puoli on 1. Tällöin myös toisen puolen tulee olla 1, eli molemmat puolet olivat alun perin samat. Tämä todistaa alkutekijähajotelman yksikäsitteisyyden.

6.4 Aritmetiikan peruslauseen seurauksia

Aritmetiikan peruslause on ennen kaikkea fakta, joka auttaa ajattelemaan kokonaislukuja ”oikealla” tavalla. Esimerkiksi jaollisuus määräytyy täysin alkutekijähajotelman kautta: luku a jakaa luvun b täsmälleen silloin, kun jokaisen alkutekijän eksponentti luvussa a on enintään vastaava eksponentti luvussa b. (Todistuksen idea: toinen suunta on selvä, ja toista suuntaa varten tehdään vastaoletus, jonka jälkeen sovelletaan Eukleideen lemmaa.) Ennen kuin mainitaan lisää ominaisuuksia, esitetään kätevä notaatio.

Määritelmä

Olkoon $n \neq 0$ kokonaisluku, ja olkoon p alkuluku. Merkitään notaatiolla $v_p(n)$ luvun p eksponenttia luvun n alkutekijähajotelmassa.

Esimerkki

Pätee $v_2(12) = 2$, $v_3(12) = 1$ ja $v_5(12) = 0$.

Jokainen positiivinen kokonaisluku n voidaan ajatella äärettömänä lukujonona $v_2(n), v_3(n), v_5(n), v_7(n), \ldots$ Tässä muutama huomio:

1. Positiiviset kokonaisluvut a ja b ovat samat täsmälleen silloin, kun kaikilla alkuluvuilla p pätee $v_p(a) = v_p(b)$.
2. Luku a jakaa luvun b täsmälleen silloin, kun $v_p(a) \leq v_p(b)$ kaikilla alkuluvuilla p.
3. Nollasta eroavien kokonaislukujen a ja b suurin yhteinen tekijä $\text{syt}(a, b)$ (eli suurin kokonaisluku, joka jakaa molemmat luvuista a ja b) on
$$2^{\min(v_2(a),v_2(b))}3^{\min(v_3(a),v_3(b))}5^{\min(v_5(a),v_5(b))}\ldots$$
Huomaa, että tulossa on vain äärellisen monta ykkösestä poikkeavaa termiä.
4. Nollasta eroavien kokonaislukujen a ja b pienin yhteinen jaettava $\text{pyj}(a, b)$ (eli pienin positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen molemmilla luvuista a ja b) on
$$2^{\max(v_2(a),v_2(b))}3^{\max(v_3(a),v_3(b))}5^{\max(v_5(a),v_5(b))}\ldots$$
Tässäkin tulossa on vain äärellisen monta ykkösestä poikkeavaa termiä.

Huomioista 3 ja 4 saadaan, että kaikilla alkuluvuilla p pätee

$$\begin{aligned} v_p(ab) &= v_p(a) + v_p(b) = \min(v_p(a), v_p(b)) + \max(v_p(a), v_p(b)) \\ &= v_p(\text{syt}(a, b)) + v_p(\text{pyj}(a, b)) = v_p(\text{syt}(a, b)\text{pyj}(a, b)), \end{aligned}$$

ja ensimmäisen huomion nojalla nyt pätee $ab = \text{syt}(a, b)\text{pyj}(a, b)$.

Tässä pari samantyylistä huomiota. Ensimmäinen koskee tekijöiden määrää.

Lemma

Positiivisen kokonaisluvun n tekijöiden määrä on $(v_2(n)+1)\cdot(v_3(n)+1)\cdot(v_5(n)+1)\cdot\ldots$

Ykköstä suurempia tulontekijöitä on jälleen vain äärellinen määrä.

Lemman todistus on luonnollinen. Luvun n tekijän m tulee olla sellainen, että $v_p(m) \leq v_p(n)$ kaikilla alkuluvuilla p. Toisaalta jos $v_p(m) \leq v_p(n)$ kaikilla p, niin m myös on luvun n tekijä. Kysymys siis on: kuinka monta sellaista lukujonoa $v_2(m), v_3(m), v_5(m), \ldots$ on olemassa, jolla $v_p(m) \leq v_p(n)$ kaikilla p?

Luvulle $v_2(m)$ vaihtoehdot ovat $0, 1, 2, \ldots, v_2(n)$, eli vaihtoehtoja on $v_2(n)+1$ kappaletta. Vastaavasti luvulle $v_p(m)$ on $v_p(n)+1$ vaihtoehtoa kaikilla p. Tämä johtaa vastaukseen.

Esimerkki

Lasketaan luvun 1080 tekijöiden määrä. Luvun 1080 alkutekijähajotelma on $2^3\cdot 3^3\cdot 5$. Valittaessa luvun 1080 tekijöitä luvun 2 eksponentille on 4 vaihtoehtoa $0, 1, 2, 3$, luvun 3 eksponentille on 4 vaihtoehtoa ja luvun 5 eksponentille on 2 vaihtoehtoa. Muiden alkulukujen eksponenteille on 1 vaihtoehto: eksponentti 0.
Siispä tekijöitä on $4\cdot 4\cdot 2 = 32$ kappaletta.

Tekijöiden summa

Vastaavalla logiikalla kuin aiemmin saadaan luvun n tekijöiden summa. Tulos itsessään ei ole erityisen tärkeä, mutta todistuksen idea on näppärä.

Lemma

Luvun $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ tekijöiden summa on

$$\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Kuten aiemmin, voimme ”rakentaa” luvulle n tekijän m valitsemalla ensiksi eksponentin $v_{p_1}(m) \leq a_1$ alkuluvulle p_1, sitten eksponentin $v_{p_2}(m) \leq a_2$ luvulle p_2 ja niin edelleen. Tämän voi muotoilla niin, että valitaan tulon

$$\begin{gathered}\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1}\right)\\ \cdot\left(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{a_2}\right)\\ \ldots\\ \cdot\left(1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{a_k}\right)\end{gathered}$$

jokaisesta tulontekijästä yksi termi: ensimmäisestä $p_1^{v_{p_1}(m)}$, toisesta $p_2^{v_{p_2}(m)}$ ja niin edelleen. Koska käymme läpi kaikki tavat rakentaa tekijät ja summaamme tulokset,

on haluttu tekijöiden summa sama kuin koko tulo. Geometrisen summan avulla saadaan

$$1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{a_i} = \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1},$$

mikä viimeistelee todistuksen.

Lukija voi harjoituksena miettiä, miten lasketaan luvun n tekijöiden tulo.

Käytännössä kaikissa edellä esitetyissä tuloksissa yksittäisten alkulukujen muodostamia ehtoja pystyi yhdistelemään ja saamaan kokonaiskuvan. Esimerkkinä suurin yhteinen tekijä luvuille a ja b: valitaan jokin alkuluku p ja sen suurin potenssi, joka jakaa molemmat luvuista a ja b, ja kerrotaan nämä potenssit yhteen.

Monissa tilanteissa yksittäisten alkulukujen muodostamat ehdot voidaan yhdistää kokonaiskuvaksi.

Tämä on yleinen teema. Yleisemmin puhutaan, että ”lokaalit” ehdot tai väitteet yhdistetään ”globaaliksi” tulokseksi. Tämä teema toistuu useaan kertaan lukuteorian materiaalissa. Käymme seuraavaksi läpi pari aiheeseen liittyvää esimerkkitehtävää.

6.5 Esimerkkitehtäviä

Tehtävä

Olkoot a ja b sellaisia positiivisia kokonaislukuja, joilla $a^2b | a^3 + b^3$. Osoita, että $a = b$.

Väitteen $a = b$ todistamiseksi riittää todistaa, että $v_p(a) = v_p(b)$ kaikilla alkuluvuilla p. Jaollisuusehto antaa, että $v_p(a^2b) \leq v_p(a^3 + b^3)$ kaikilla p. Selvästi $v_p(a^2b) = v_p(a^2) + v_p(b) = 2v_p(a) + v_p(b)$, mutta oikean puolen laskeminen on vaikeampaa. Tässä auttaa seuraava lemma.

Lemma

Olkoot x ja y positiivisia kokonaislukuja. Pätee

$$v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)).$$

Lisäksi jos $v_p(x) \neq v_p(y)$, niin $v_p(x + y) = \min(v_p(x), v_p(y))$.

Huomautus: jos $v_p(x) = v_p(y)$, voi päteä $v_p(x + y) > \min(v_p(x), v_p(y))$: näin käy esimerkiksi tapauksessa $x = 1$ ja $y = p - 1$. Lisäksi väite pätee +-merkin sijasta myös miinusmerkillä, kuten todistuksesta nähdään.

Lemman todistus on suoraviivainen: selvästi jos $p^k | x$ ja $p^k | y$, niin $p^k | x + y$. Valitaan $k = \min(v_p(x), v_p(y))$, mikä todistaa epäyhtälön. Yhtäsuuruustapausta varten

huomataan, että mikäli $v_p(x) \neq v_p(y)$, niin

$$p^{\min(v_p(x),v_p(y))+1}$$

jakaa täsmälleen yhden luvuista x ja y, joten se ei voi jakaa summaa $x+y$.

Palataan tehtävän ratkaisuun. Haluaisimme, että $v_p(a) = v_p(b)$, joten oletetaan, että $v_p(a) \neq v_p(b)$, ja yritetään saada ristiriita.

Tutkitaan ensiksi tapaus $v_p(a) > v_p(b)$. Tällöin $v_p(a^3) \neq v_p(b^3)$, ja lemman toisen osan avulla

$$v_p(a^3+b^3) = \min(v_p(a^3), v_p(b^3)) = v_p(b^3) = 3v_p(b).$$

Siispä $v_p(a^2b) = 2v_p(a)+v_p(b) \leq 3v_p(b)$, eli $v_p(a) \leq v_p(b)$. Tämä on ristiriita oletuksen $v_p(a) > v_p(b)$ kanssa.

Tutkitaan sitten tapaus $v_p(b) > v_p(a)$. Vastaavasti kuin edellä saadaan $v_p(a^3+b^3) = 3v_p(a)$, joten $2v_p(a) + v_p(b) \leq 3v_p(a)$, mikä johtaa ristiriitaan kuten edellä.

Täten tulee päteä $v_p(a) = v_p(b)$ kaikilla p, eli $a = b$.

Seuraavana on samantyylinen esimerkki, joka on esiintynyt vuoden 2007 Baltian tie -kilpailussa.

Tehtävä

Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja, joilla $b < a$ ja luku $a^3 + b^3 + ab$ on jaollinen luvulla $ab(a-b)$. Osoita, että ab on kokonaisluvun kuutio.

Haluamme osoittaa, että ab on kokonaisluvun kuutio. Toisin sanoen halutaan, että $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ on jaollinen kolmella kaikilla alkuluvuilla p. Tutkitaan jälleen lukuja $v_p(a)$ ja $v_p(b)$ sekä jaollisuusehtoa.

Tiedämme siis, että $v_p(ab(a-b)) \leq v_p(a^3+b^3+ab)$. Kuten edellisessä ratkaisussa on nytkin hyödyllistä jakautua tapauksiin, jotta v_p-lausekkeiden arvot saadaan laskettua.

Tutkitaan ensin tapausta $v_p(a) > v_p(b)$. Tällöin edellisen tehtävän lemman yhtäsuuruusosion avulla

$$v_p(ab(a-b)) = v_p(a) + 2v_p(b).$$

Yritetään sitten laskea $v_p(a^3+b^3+ab)$. Tämä ei onnistu suoraan, koska emme tiedä, mikä luvuista $v_p(a^3), v_p(b^3)$ ja $v_p(ab)$ on pienin. Tiedämme ainoastaan, että $v_p(a^3) > v_p(b^3)$, eli pienin luku on joko $v_p(b^3)$ tai $v_p(ab)$. Jakaudutaan osatapauksiin.

Tapaus 1: $v_p(b^3) < v_p(ab)$. Tällöin $v_p(a^3+b^3+ab) = v_p(b^3) = 3v_p(b)$. Täten $v_p(ab(a-b)) = v_p(a) + 2v_p(b) > 3v_p(b)$, mikä on ristiriita.

Tapaus 2: $v_p(ab) < v_p(b^3)$. Tällöin $v_p(a^3+b^3+ab) = v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Jotta pätee $v_p(a) + 2v_p(b) \leq v_p(a) + v_p(b)$, tulee päteä $v_p(b) = 0$, mutta tällöin ehto $v_p(ab) < v_p(b^3)$ ei toteudu. Ristiriita.

Tapaus 3: $v_p(ab) = v_p(b^3)$. Tällöin $v_p(ab) = 3v_p(b)$ on jaollinen kolmella, ja saimme mitä halusimme.

Tapaus $v_p(a) < v_p(b)$ etenee vastaavalla tavalla (lausekkeet ovat käytännössä symmetrisiä lukujen a ja b suhteen).

Tutkitaan vielä tapaus $v_p(a) = v_p(b) = t$. Saamme $v_p(ab(a-b)) \geq 3t$, ja jos $t > 0$, niin $v_p(a^3 + b^3 + ab) = 2t$. Tämä ei käy, eli tulee olla $t = 0$. Tällöin $v_p(ab) = 0$ on jaollinen kolmella, kuten halusimmekin.

Siis kaikissa mahdollisissa tapauksissa pätee, että $v_p(ab)$ on jaollinen kolmella. Olemme valmiit.

Kommentti: Ratkaisussa oli jonkin verran tapauskäsittelyä, mutta se ei vaatinut nerokkaita oivalluksia. Joka kohdassa jakauduttiin sopiviin tapauksiin, jotta termit $v_p(ab(a-b))$ ja $v_p(a^3+b^3+ab)$ saatiin laskettua. Tämän jälkeen saatiin joko ristiriita tai haluttu väite.

Viimeisenä esitettävä tehtävä on selvästi aiempia vaikeampi.

Tehtävä

Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut a ja b, joilla $a^b = b^a$.

Potenssiin korottaminen ei tunnetusti ole vaihdannainen operaatio, eli esimerkiksi $2^3 \neq 3^2$. Tästä huolimatta pätee $2^4 = 4^2$. Yhtälöllä on lisäksi triviaaliratkaisu $a = b$. Onko tässä kaikki ratkaisut yhtälölle?

Nähdään, että jos a ja b antavat ratkaisun, niin niillä tulee olla samat alkutekijät. Luonnollinen seuraava askel on tutkia näiden alkutekijöiden eksponentteja. Olkoon $v_p(a) = x$ ja $v_p(b) = y$, ja oletetaan, että $x, y > 0$. Vertaamalla alkuluvun p eksponenttia yhtälön vasemmalla ja oikealla puolella saadaan

$$bx = ay$$

eli

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

Tämä tarkoittaa, että suhde $\frac{x}{y}$ ei riipu valitusta alkuluvusta p: lopputulos on aina $\frac{a}{b}$. Jos $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ on supistetussa muodossa $\frac{X}{Y}$, niin kaikilla p pätee $X|v_p(a)$ ja $Y|v_p(b)$. Tällöin on olemassa jokin kokonaisluku m (joka voi riippua luvusta p), jolla $v_p(a) = mX$ ja $v_p(b) = mY$. Kirjoitetaan $f(p) = m$.

Tästä motivoituneena määritellään kokonaisluku

$$c = 2^{f(2)}3^{f(3)}5^{f(5)} \cdots,$$

jotta saadaan $c^X = a$ ja $c^Y = b$. Jos $c = 1$, niin $a = b = 1$. Muussa tapauksessa sijoitus alkuperäiseen yhtälöön antaa

$$c^{Xb} = c^{Ya},$$

eli $Xb = Ya$, eli

$$Xc^Y = Yc^X.$$

Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $X = Y$ (eli $a = b$). Etsitään muita ratkaisuja. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $X > Y$. Tällöin

$$c^{X-Y} = \frac{X}{Y}.$$

Vasen puoli on kokonaisluku, joten myös oikean puolen tulee olla, eli $Y|X$. Kirjoitetaan $X = Yt$, missä $t \geq 2$ on kokonaisluku. Saadaan

$$c^{(t-1)Y} = t.$$

Idea on, että vasen puoli on suurempi kuin oikea puoli, ellei t ole pieni. Jos nimittäin $t > 2$, niin

$$c^{(t-1)Y} \geq 2^{t-1} > t.$$

Siispä $t = 2$, eli $c^Y = 2$, mistä seuraa $Y = 1, c = 2$ ja siten $X = 2$. Tästä saadaan ratkaisu $a = c^X = 4$ ja $b = c^Y = 2$. Lisäksi on symmetrinen ratkaisu $a = 2$ ja $b = 4$, sekä aiemmin todettu triviaaliratkaisu $a = b$. Yhtälöllä ei ole muita ratkaisuja.

Kommentti: Ratkaisu koostuu kahdesta osasta. Ensimmäisessä osassa todistetaan, että on olemassa kokonaisluku c niin, että $c^X = a$ ja $c^Y = b$ positiivisilla kokonaisluvuilla X ja Y. Sijoitetaan nämä yhtälöön $a^b = b^a$. Toisessa osassa ratkaisua todistetaan, että syntyneellä yhtälöllä $c^{X-Y} = \frac{X}{Y}$ ei ole muita ratkaisuja kuin $X = Y$ ja $X = 2, Y = 1$ (sekä $Y = 2, X = 1$).

Ensimmäisen osan voi tehdä useammalla tavalla. Esitetty v_p-menetelmä on yksi tapa, joka lähestyy ongelmaa konkreettisesti alkutekijähajotelman kautta. Toinen tapa on ottaa a-kantainen logaritmi puolittain ja saada yhtälö $\frac{b}{a} = \log_a(b)$. Tämä tarkoittaa, että $\log_a(b)$ on rationaaliluku $\frac{a}{b} = \frac{X}{Y}$, mistä saadaan halutut yhtälöt $c^X = a$ ja $c^Y = b$.

Toisen osan arvion $c^{(t-1)Y} \geq 2^{t-1} > t$ tyyliset arviot ovat usein hyödyllisiä: monesti tehtävissä voi saada ylimääräistä tietoa muuttujista tekemällä sopivia epäyhtälöitä. Joskus arviot ovat suhteellisen helppoja (kuten tässä), joskus taas ratkaisu voi perustua hyviin arvioihin. Luvussa Arvionti ja epäyhtälöt keskitytään tarkemmin tähän aiheeseen.

Lukuteorian lisätehtäviä -luvussa on esitetty vielä yksi tehtävä, joka perustuu alkutekijähajotelmien eksponenttien tutkimiseen mutta joka on huomattavasti tähän mennessä esitettyjä vaikeampi.

7 Kongruenssit (Lukuteoria)

Tässä luvussa käydään läpi kongruenssien perusteet.

Kongruenssit antavat kätevän tavan merkitä jaollisuusehtoja.

Määritelmä

Olkoot a, b ja m ($m > 0$) kokonaislukuja. Jos m jakaa luvun $a - b$, niin merkitään

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Sanotaan, että a ja b ovat kongruentteja modulo m. Lukua m kutsutaan moduloksi. Puhekielessä sanotaan usein lyhyesti "a on b modulo m".

Nyt siis $x \equiv 0 \pmod{m}$ täsmälleen silloin, kun $m|x$. Määritelmän voi ajatella niin, että a ja b antavat saman jakojäännöksen luvulla m jaettaessa tai että a:n ja b:n etäisyys eli erotus on jokin m:llä jaollinen kokonaisluku.

Kongruenssiyhtälöt voi rinnastaa kelloon: Tunnit luetaan aina modulo 12 tai modulo 24. Esimerkiksi kellon ollessa 22 kolmen tunnin päästä kello on 1, eli $22+3 \equiv 1 \pmod{24}$.

7.1 Perusominaisuuksia

Kongruenssin merkintä $\equiv$ näyttää samalta kuin tavallinen yhtäsuuruusmerkki $=$, ja tälle on hyvä syy: kongruenssimerkki $\equiv$ toteuttaa monia samoja ehtoja kuin tavallinen yhtäsuuruus. Ensin esitetään pari helppoa huomiota, jotka seuraavat suoraan kongruenssin ja jaollisuuden määritelmistä.

- Jos $a \equiv b \pmod{m}$, niin $b \equiv a \pmod{m}$.
- Kaikilla a pätee $a \equiv a \pmod{m}$.
- Jos $a \equiv b \pmod{m}$ ja $b \equiv c \pmod{m}$, niin $a \equiv c \pmod{m}$.

Esimerkiksi viimeinen kohta seuraa siitä, että $m|a - b$ ja $m|b - c$ johtaa ehtoon $m|(a - b) + (b - c) = a - c$.

Seuraavaan lemmaan on kerätty muutama muu hyödyllinen tulos.

Lemma

Olkoot a, b, c, d ja m ($m > 0$) kokonaislukuja. Oletetaan, että $a \equiv b \pmod{m}$ ja $c \equiv d \pmod{m}$. Tällöin

1. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
2. $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
3. $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Kongruenssiyhtälöitä voi siis laskea yhteen, vähentää toisistaan ja kertoa keskenään. Pointtina on:

Kongruenssiyhtälöitä voi käsitellä kuten tavallisia yhtälöitä.

Aivan kaikki ehdot eivät säily, kuten myöhemmin nähdään eksponenttifunktioita käsitellessä, mutta perusominaisuudet toimivat kuten odottaisi.

Todistetaan lemman väitteet. Aloitetaan ensimmäisestä. Tiedämme, että $m|a-b$ ja $m|c-d$. Täten $m|(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d)$, mikä on haluttu väite.

Toinen väite seuraa vastaavasti: Oletamme, että $m|a-b$ ja $m|c-d$, joten $m|(a-b)-(c-d) = (a-c)-(b-d)$.

Kolmas väite on hieman vaikeampi. Koska $m|a-b$, voidaan kirjoittaa $a - b = mk$ jollain kokonaisluvulla k. Siispä $a = b + mk$. Vastaavasti $c = d + mn$ jollain kokonaisluvulla n. Nyt

$$ac = (b+mk)(d+mn) = bd + mnb + mkd + m^2kn \equiv bd + 0 + 0 + 0 \equiv bd \pmod{m}.$$

Asettamalla lemmaan $c = a$ ja $d = b$ saadaan, että mikäli $a \equiv b \pmod{m}$, niin $a \cdot a \equiv b \cdot b \pmod{m}$, eli $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$. Kongruenssiyhtälöitä voi siis neliöidä. Potenssiinkorottaminen onnistuu myös yleisesti, mikä seuraa helpolla induktiolla: jos $a \equiv b \pmod{m}$ ja $a^{k-1} \equiv b^{k-1} \pmod{m}$, niin kertomalla yhtälöt yhteen saadaan $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

Tätä voi vielä yleistää:

Lause (Polynomit kongruensseissa)

Olkoon P polynomi, jonka kertoimet ovat kokonaislukuja. Olkoot a, b ja m sellaisia kokonaislukuja, että $a \equiv b \pmod{m}$. Tällöin

$$P(a) \equiv P(b) \pmod{m}.$$

Väite on käytännössä katsoen jo todistettu: Jos $a \equiv b \pmod{m}$, niin tiedämme, että

- $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 0$
- kongruenssiyhtälöitä saa laskea yhteen

- kongruenssiyhtälön saa kertoa puolittain kokonaisluvulla.

Voimme siis rakentaa polynomin P. Jos vaikkapa $P(x) = 123x^{456} + 789x^3 + 100x^2$, niin voimme summata yhtälöt

$$123a^{456} \equiv 123b^{456} \pmod{m},$$

$$789a^3 \equiv 789b^3 \pmod{m}$$

ja

$$100a^2 \equiv 100b^2 \pmod{m}.$$

Väite seuraa tästä.

Esitetään esimerkkitehtävä, jossa on luontevaa käyttää kongruensseja. Myöhemmin esitetään enemmän esimerkkejä.

Tehtävä

Olkoon $F_n = 2^{2^n}+1$ kaikilla $n \geq 0$. Osoita, että kaikilla $i \neq j$ pätee $\text{syt}(F_i, F_j) = 1$.

Lukuja F_n kutsutaan Fermat'n luvuiksi. Aloitetaan ratkaisu vastaoletuksella: on olemassa sellaiset $i \neq j$ ja alkuluku p, joilla $p|F_i$ ja $p|F_j$. Ehto $p|F_i$ voidaan muotoilla kongruenssiyhtälönä

$$2^{2^i} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Neliöimällä yhtälö saadaan $2^{2^{i+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Neliöimällä uudestaan saadaan $2^{2^{i+2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Voidaan olettaa $j > i$, joten neliöimällä toistuvasti saadaan lopulta $2^{2^j} \equiv 1 \pmod{p}$. Mutta ehto $p|F_j$ tarkoittaa, että $2^{2^j} \equiv -1 \pmod{p}$, eli saadaan $1 \equiv -1 \pmod{p}$. Tämä tarkoittaa, että $p = 2$, mutta Fermat'n luvut ovat parittomia, joten saimme aikaan ristiriidan.

7.2 Kiinalainen jäännöslause

Kilpailutehtävissä käytetyistä kongruensseihin liittyvistä lauseista kiinalainen jäännöslause on ylivoimaisesti yleisin ja tärkein.[26] Johdatteluna toimii seuraava tehtävä.

Tehtävä

Olkoon x kokonaisluku. Tiedetään, että $x \equiv 1 \pmod{3}$. Mitä voidaan sanoa luvun x jakojäännöksestä jaettaessa luvulla 4?

Vastaus: ei yhtikäs mitään. Jos nimittäin $x = 1$, ehto $x \equiv 1 \pmod{3}$ pätee, ja $x \equiv 1 \pmod{4}$. Jos $x = 4$, saadaan $x \equiv 0 \pmod{4}$. Jos $x = 7$, niin $x \equiv 3 \pmod{4}$, ja jos $x = 10$, niin $x \equiv 2 \pmod{4}$.

Tässä on toinen samankaltainen tehtävä.

[26] Sana "ylivoimaisesti" on ehkä hieman liioittelua. Tulos on kuitenkin hyvin tärkeä.

Tehtävä

Olkoon x kokonaisluku. Tiedetään, että x on pariton. Mitä voidaan sanoa luvun x jakojäännöksestä jaettaessa luvulla 4?

Tällä kertaa voidaan sanoa jotain: ei voi päteä $x \equiv 0 \pmod 4$, koska tällöin x olisi jaollinen neljällä, joten se olisi parillinen. Vastaavasti ei voi päteä $x \equiv 2 \pmod 4$. Vaihtoehdot $x \equiv 1 \pmod 4$ ja $x \equiv 3 \pmod 4$ ovat kuitenkin mahdollisia, kuten nähdään arvoilla $x = 1$ ja $x = 3$.

Kiinalainen jäännöslause kertoo juuri tästä ilmiöstä. Kun tutkittavat modulot ovat yhteistekijättömiä,[27] mitään tietoa ei välity eri kongruenssiehtojen välillä. Tämä voidaan muotoilla seuraavasti.

Lause (Kiinalainen jäännöslause)

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Olkoot $m_1, m_2, \ldots, m_n$ positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat pareittain yhteistekijättömiä. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mielivaltaisia kokonaislukuja. Tällöin on olemassa kokonaisluku x, jolla $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ kaikilla $1 \leq i \leq n$.
Lisäksi tämä x on yksikäsitteinen modulo $m_1 m_2 \cdots m_n$.

Esimerkki

Valitaan lauseeseen $n = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$ ja $a_1 = 1$. Lause sanoo, että kaikilla luvun a_2 valinnoilla on olemassa x, jolla $x \equiv 1 \pmod 3$ ja $x \equiv a_2 \pmod 4$. Tämä vastaa juurikin ensimmäisen tehtävän tilannetta.

On monta tapaa, jolla lauseen voi visualisoida. Yksi tapa on kuvitella n kappaletta hedelmäpyöriä, joista ensimmäisessä on m_1 eri hedelmän kuvaa, toisessa m_2 kuvaa, ja näin jatkuu, kunnes viimeisessä on m_n kuvaa. Yhdessä askeleessa jokaista hedelmäpyörää pyöräytetään yksi askel eteenpäin. Lause sanoo, että kaikki mahdolliset hedelmäyhdistelmät tullaan käymään läpi, kunhan $\text{syt}(m_i, m_j) = 1$ kaikilla $i \neq j$. Lisäksi ehto ”tämä x on yksikäsitteinen modulo $m_1 m_2 \cdots m_n$” tarkoittaa, että samat hedelmien yhdistelmät toistuvat aina täsmälleen $m_1 m_2 \cdots m_n$ askeleen välein.

Tämä ajattelutapa melkein jo todistaa väitteen. Numeroidaan pyörän i hedelmät luvuin $0, 1, \ldots, m_i - 1$. Aloitetaan ajanhetkestä $t = 0$, jolloin jokaisessa hedelmäpyörässä on näkyvissä hedelmä numero 0. Oletetaan, että on olemassa kaksi ajanhetkeä t_1 ja t_2, joina on näkyvissä samat hedelmät. Osoitetaan, että $t_1 \equiv t_2 \pmod{m_1 m_2 \cdots m_n}$, mikä osoittaa lauseen yksikäsitteisyysosan.

Pyörässä 1 näkyy samat hedelmät, joten tulee olla $t_1 \equiv t_2 \pmod{m_1}$, koska ensim-

[27] Entä se tapaus, jossa moduloilla on yhteisiä tekijöitä? Yleistetty kiinalainen jäännöslause vastaa tähän kysymykseen: yhtälöryhmällä $x \equiv a_i \pmod{m_i}, 1 \leq i \leq n$ on ratkaisu jos ja vain jos $\text{syt}(m_i, m_j) \mid a_i - a_j$ kaikilla $i \neq j$. (En ole tarvinnut tulosta mitään kilpailutehtävää ratkoessani, mutta tulos on mielestäni luonnollinen ja kiinnostava.) Todistuksen idea: Kiinalaisen jäännöslauseen nojalla ehto $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ voidaan muotoilla ehtoina $x \equiv a_i \pmod{p^{v_p(m_i)}}$. Eri luvut m_i antavat nyt tietoa siitä, mitä x on modulo p:n potenssit. Enää tulee tutkia, ovatko ehdot yhteensopivia sen tiedon kanssa, joka saadaan isoimmasta p:n potenssista.

mäisen pyörän hedelmät toistuvat m_1 askeleen välein. Siispä $m_1 | t_1 - t_2$. Vastaavasti pyörille $2, 3, \ldots, n$ saadaan $m_2 | t_1 - t_2, \ldots, m_n | t_1 - t_2$.

Koska $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ovat yhteistekijättömiä, seuraa tästä $m_1 m_2 \cdots m_n | t_1 - t_2$. Siispä samat kuviot voivat toistua vain $m_1 m_2 \cdots m_n$ ajanhetken välein, mikä todistaa yksikäsitteisyysosuuden.

Miten todistetaan, että jokainen hedelmäyhdistelmä esiintyy prosessin aikana? Tutkitaan ajanhetkiä $0, 1, 2, \ldots, m_1 m_2 \cdots m_n - 1$. Edellisen päättelyn nojalla näillä ajanhetkillä tulee olla eri hedelmäyhdistelmät. Mutta koska mahdollisia hedelmäyhdistelmiä on $m_1 m_2 \cdots m_n$ kappaletta, tulee jokaisen yhdistelmän esiintyä.

Esitetään pari esimerkkiä kiinalaisen jäännöslauseen käytöstä.

Tehtävä

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5. \end{cases}$$

Kiinalainen jäännöslause kertoo, että yhtälöryhmällä on ratkaisu ja että tämä ratkaisu on yksikäsitteinen modulo $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Lause ei kuitenkaan kerro, miten ratkaisu löydetään. Yksi tapa on aina valita kaksi yhtälöä ja yhdistää ne.

Tutkitaan ensiksi yhtälöitä $x \equiv 1 \pmod 2$ ja $x \equiv 2 \pmod 3$. Tällä yhtälöparilla on ratkaisu modulo 6, joka saadaan kokeilemalla kaikki kuusi vaihtoehtoa läpi. Saadaan $x \equiv 5 \pmod 6$.

Enää tulee ratkoa yhtälöpari $x \equiv 5 \pmod 6$ ja $x \equiv 3 \pmod 5$. Koska tällä yhtälöparilla on ratkaisu modulo $6 \cdot 5 = 30$, voidaan käydä läpi kaikki 30 eri vaihtoehtoa $0, 1, 2, \ldots, 29$. Tämä on hieman hidasta, ja kokeilemista voidaankin nopeuttaa käymällä läpi vain ne vaihtoehdot, joilla $x \equiv 5 \pmod 6$. Nämä ovat $5, 11, 17, 23$ ja 29. Tästä nähdään, että ratkaisu on $x \equiv 23 \pmod{30}$.

Tehtävä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa jotkin n peräkkäistä positiivista kokonaislukua, jotka ovat jaollisia jonkin alkuluvun neliöllä.

Haluamme siis löytää positiivisen kokonaisluvun x, jolla luvut $x, x+1, x+2, \ldots, x+n-1$ ovat kaikki jaollisia jonkin alkuluvun neliöllä. Koitetaan valita ne alkuluvut, joiden neliöillä nämä luvut ovat jaollisia: valitaan luvulle x alkuluku p_0, luvulle $x+1$ alkuluku p_1 ja jatketaan näin, kunnes viimeiseksi luvulle $x+n-1$ valitaan alkuluku p_{n-1}. Haluamme siis, että $x + i \equiv 0 \pmod{p_i^2}$ kaikilla i. Tällä yhtälöryhmällä on ratkaisu, kunhan alkuluvut p_i ovat eri alkulukuja. Jokin ratkaisu x on tietysti myös positiivinen.

Kiinalainen jäännöslause on hyvä pitää mielessä: se on jälleen esimerkki monen lokaalin ehdon yhdistämisestä yhdeksi globaaliksi ehdoksi.

7.3 Jakolasku kongruensseissa

Voiko kongruensseissa tehdä jakolaskuja? Voi, mutta tämä vaatii varovaisuutta. Esimerkiksi $6 \equiv 12 \pmod 2$, mutta tätä yhtälöä ei saa jakaa puolittain kahdella. Kolmella jakaminen kuitenkin onnistuu. Miksi toinen onnistuu ja toinen ei?

Tutkitaan yhtälöä muotoa $ac \equiv bc \pmod m$, jonka haluamme jakaa puolittain luvulla c. Tiedämme siis, että $m|ac - bc = c(a - b)$, ja haluaisimme saada ehdon $m|a - b$. Edellä totesimme, että aina tämä ei onnistu, joten koitetaan saada jotain muuta.

Aritmetiikan peruslauseen yhteydessä todettiin, että jaollisuutta voi tutkia yksi alkuluku kerrallaan. Valitaan siis jokin alkuluku p. Olkoon M luvun p eksponentti luvun m alkutekijähajotelmassa, ja määritellään C vastaavasti. Olkoon vielä D luvun p eksponentti erotuksen $a - b$ alkutekijähajotelmassa. Koska $m|c(a - b)$, pätee $M \leq C + D$, eli $M - C \leq D$. Tämä kertoo, että p^{M-C} jakaa luvun $a - b$.

Väitteessä "p^{M-C} jakaa luvun $a - b$" ei ole järkeä, jos $C > M$. Tällöin alkuluvun p eksponentista luvussa $a - b$ ei voida sanoa mitään. Muussa tapauksessa päättely toimii. Tapaukset voidaan yhdistää sanomalla, että $p^{M-\min(M,C)}|a - b$. Yhdistämällä näitä lokaaleja ehtoja saadaan globaali ehto. Muistetaan, että minimi eksponenteista esiintyy kahden luvun suurinta yhteistä tekijää laskettaessa. Saamme seuraavan lemman.

Lemma

Olkoot a, b, c ja m ($m > 0$) kokonaislukuja. Oletetaan, että $ac \equiv bc \pmod m$. Tällöin

$$a \equiv b \left(\mod \frac{m}{\text{syt}(m, c)} \right).$$

Tärkein tapaus lemmasta on $\text{syt}(m, c) = 1$, jolloin modulo ei muutu.

Kysymyksen "voiko kongruensseissa tehdä jakolaskuja?" voi tulkita myös toisella tavalla: jos valitaan kaksi kokonaislukua a ja b, tarkoittaako $\frac{a}{b} \pmod m$ mitään järkevää?

Jos merkitään $\frac{a}{b} \equiv x \pmod m$, tulisi luvun x toteuttaa ehto $a \equiv bx \pmod m$. Tämä ei onnistu, jos esimerkiksi $b = 0$ ja $a = 1$. Tämä ei yllätä: nollalla ei muutenkaan saa jakaa. Yhtälöllä $a \equiv bx \pmod m$ on kuitenkin aina ratkaisu, jos $\text{syt}(m, b) = 1$: Haluamme, että $m|a - bx$ eli että $a - bx = my$ jollain kokonaisluvulla y. Mutta Bezout'n lemman nojalla yhtälöllä $bx + my = 1$ on ratkaisu, ja kertomalla tämän puolittain luvulla a saadaan $bX + mY = a$ sopivilla kokonaisluvuilla X ja Y.

Esimerkki

Luvun, joka on $\frac{1}{2} \pmod 3$, tulisi olla sellainen luku x, joka kerrottuna kahdella antaa ykkösen. Siis $2x \equiv 1 \pmod 3$. Tällä yhtälöllä on uniikki ratkaisu $x \equiv 2 \pmod 3$.

Yleisestikin vastaavalla lineaarisella yhtälöllä $bx \equiv a \pmod{m}$ on uniikki ratkaisu, kunhan $\text{syt}(m, b) = 1$: Jos x_1 ja x_2 ovat ratkaisuja, niin $bx_1 \equiv a \equiv bx_2 \pmod{m}$, eli $m|b(x_1 - x_2)$. Koska $\text{syt}(m, b) = 1$, tästä seuraa $m|x_1 - x_2$, eli $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$.

Saadut tulokset ovat erityisen hyviä, kun modulo m on alkuluku p. Tällöin $\frac{a}{b} \pmod{p}$ voidaan ajatella kokonaislukuna modulo p, kunhan b ei ole $0 \pmod{p}$. Erityisesti todetaan, että $\frac{1}{b} \pmod{p}$ on järkevä merkintä. Tätä lukua kutsutaan luvun b käänteisluvuksi modulo p.

8 Eksponenttifunktiot ja neliönjäännökset (Lukuteoria)

Tässä luvussa käydään syvemmin läpi kongruenssien ominaisuuksia.

8.1 Fermat'n pieni lause

Kongruenssiyhtälöitä voidaan laskea yhteen ja kertoa keskenään, ja jakolasku toimii jotenkuten. Lisäksi jos $a \equiv b \pmod m$, niin $P(a) \equiv P(b) \pmod m$ kaikilla kokonaislukukertoimisilla polynomeilla P. Vaikuttaa siltä, että kaikki toimii kuten pitääkin. Varmaan myös eksponenttifunktiot käyttäytyvät samalla tavalla? Ei aivan.

Esimerkki

Pätee $0 \equiv 3 \pmod 3$, mutta $2^0 \equiv 1 \not\equiv 2 \equiv 2^3 \pmod 3$.

Esimerkki

Pätee $2^0 \equiv 1 \pmod 2$, ja kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x pätee $2^x \equiv 0 \pmod 2$

Eksponenttifunktiot eivät siis käyttäydy samalla tavalla kuin polynomit, mutta ne käyttäytyvät tästä huolimatta melko säännöllisesti. Tärkeä tulos tähän liittyen on Fermat'n pieni lause.

Lause (Fermat'n pieni lause)

Olkoon p alkuluku, ja olkoon a kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla p. Tällöin

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Esitetään tulokselle perustelu ennen varsinaista todistusta. Tutkitaan lukuja $a^0, a^1, a^2, \ldots \pmod p$. Koska kokonaisluvut antavat vain p erisuurta jakojäännöstä luvulla p jaettaessa, tulee jossain kohtaa lukujen a^n olla jaksollisia, eli ne alkavat toistaa samoja lukuja, jotka ovat jo esiintyneet.

Tässä toistettavien lukujen listassa tulee olla luku $a^0 = 1$. Oletetaan nimittäin, että lukujono alkaa toistaa itseään kohdasta i lähtien ja että toistuvia lukuja on T kappaletta. Tällöin $a^i \equiv a^{i+T} \pmod p$. Jos $i = 0$, olemme valmiit. Muuten, koska $\text{syt}(a, p) = 1$, voidaan yhtälö jakaa puolittain luvulla a, ja saadaan $a^{i-1} \equiv a^{i-1+T} \pmod p$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että lukujono toistaa itseään vasta kohdasta i lähtien. Täten $a^T \equiv 1 \pmod p$ jollain $T > 0$.

Esimerkki

Luvun 2 potenssit $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ ovat $1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, \ldots$ modulo 5. Tässä toistuvia lukuja on $T = 4$ kappaletta.

Miksi juuri $T = p-1$ kelpaa? Syy tälle on se, että luvun a potensseille $a^0, a^1, a^2, \ldots \pmod p$ on $p-1$ eri mahdollisuutta, nimittäin luvut $1, 2, \ldots, p-1 \pmod p$ (tämä selitys ei ole kovin syvällinen – todistus antaa paremman käsityksen).

Fermat'n pieni lause siis osoittaa, että eksponenttifunktio on jaksollinen jaksolla $p-1$. Tilanne on erilainen kuin esimerkiksi polynomeilla, joiden todettiin olevan jaksollisia jaksolla p.

Esitetään sitten lauseelle todistus. Olkoon $S = \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$, ja olkoon $T = \{a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a\}$. Osoitetaan, että "$S$ ja T ovat samat modulo p". Tarkemmin sanoen osoitetaan, että

jokaista joukon T alkiota t vastaa uniikki joukon S alkio s, jolla $t \equiv s \pmod p$

ja että

mitään kahta alkiota t_1, t_2 ei vastaa sama alkio s.

Jokainen joukon T alkio on muotoa ka, missä $1 \leq k \leq p-1$ on kokonaisluku. Ensimmäinen väite seuraa tästä: Haluamme, että $p \nmid ka$. Mutta jos $p \mid ka$, niin joko $p \mid k$ tai $p \mid a$, mutta kumpikaan vaihtoehto ei ole mahdollinen.

Toinen väite on myös selvä: Jos $t_1 \equiv t_2 \pmod p$, niin $k_1 a \equiv k_2 a \pmod p$ jollain kokonaisluvuilla $1 \leq k_1 \neq k_2 \leq p-1$. Koska $\text{syt}(a, p) = 1$, voidaan jakaa puolittain luvulla a, jolloin saadaan $k_1 \equiv k_2 \pmod p$. Erotus $k_1 - k_2$ on täten jaollinen luvulla p, ja koska $1 \leq k_1, k_2 \leq p-1$, niin $|k_1 - k_2| < p$. Tulee siis olla $k_1 - k_2 = 0$, eli $k_1 = k_2$, mikä on ristiriita.

Väitteistä seuraa, että joukkojen S ja T alkioiden tulot ovat samat modulo p, eli

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \equiv a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \pmod p.$$

Koska $\text{syt}((p-1)!, p) = 1$, voidaan jakaa puolittain luvulla $(p-1)!$, jolloin saadaan

$$1 \equiv a \cdot a \cdot a \cdots a = a^{p-1} \pmod p.$$

Tämä todistaa väitteen.

8.2 Eulerin lause

Fermat'n pieni lause on hyvä tulos, mutta onko olemassa vastaavaa väitettä muille kuin alkulukumoduloille? On, mutta muotoilu on aavistuksen verran teknisempi. Ensin määritellään ϕ-funktio.[28]

[28] ϕ lausutaan "fii".

Määritelmä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Määritellään $\phi(n)$ olemaan niiden kokonaislukujen m määrä, joilla $1 \leq m \leq n$ ja $\text{syt}(m,n) = 1$.

Esimerkki

Pätee $\phi(6) = 2$, koska mahdollisista kandidaateista $1, 2, 3, 4, 5$ ja 6 ainoastaan kaksi ovat yhteistekijättömiä luvun 6 kanssa, nimittäin luvut 1 ja 5.

Esimerkki

Kaikilla alkuluvuilla p pätee $\phi(p) = p-1$, koska kandidaateista $1, 2, \ldots, p-1, p$ ainoastaan luku p ei kelpaa.

Esimerkki

Olkoon p alkuluku ja $k \geq 1$ kokonaisluku. Tällöin $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, koska kandidaateista $1, 2, \ldots, p^k$ kelpaavat kaikki paitsi ne, jotka ovat jaollisia luvulla p. Epäkelpaavia lukuja on p^{k-1}, joten kelpaavia on $p^k - p^{k-1}$.

Seuraava tulos yleistää Fermat'n pientä lausetta.

Lause (Eulerin lause)

Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoon a sellainen kokonaisluku, että $\text{syt}(a,n) = 1$. Tällöin

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Eulerin lauseen todistus on käytännössä katsoen sama kuin edellä esitetty Fermat'n pienen lauseen todistus. Tällä kertaa joukoksi S valitaan niiden lukujen s joukko, joilla $1 \leq s \leq n$ ja $\text{syt}(s,n) = 1$, ja joukoksi T luvut muotoa as, missä $s \in S$. Yksityiskohtainen tarkastelu jätetään lukijalle.

Käytännön tarkoituksia varten ϕ-funktion arvoja olisi kiva osata laskea. Seuraava tulos antaa suoran kaavan funktion arvoille.

Lemma

Olkoon n positiivinen kokonaisluku, jonka alkutekijähajotelma on

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}.$$

Tällöin

$$\phi(n) = \prod_{1 \leq i \leq k} p_i^{a_i - 1}(p_i - 1).$$

Kaavan voi myös kirjoittaa sievemmin muotoon

$$\phi(n) = n \prod_{1 \leq i \leq k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Väitteen todistus perustuu siihen faktaan, että $\phi(p^a) = p^{a-1}(p-1)$ kaikilla alkuluvuilla p ja kokonaisluvuilla $a \geq 1$. Tämä todistettiin jo edellä esitetyissä esimerkeissä. Enää tulee yhdistää nämä ehdot.[29]

Ideana on käyttää kiinalaista jäännöslausetta. Tutkitaan kandidaatteja $1, 2, \ldots, n$. Valitaan jokin kandidaatti x. Tämä x määräytyy yksikäsitteisesti, kun tiedetään, mitä x on modulo $p_i^{a_i}$ kaikilla i: tällöin kiinalaisen jäännöslauseen avulla tiedetään, mitä x on modulo n. Lisäksi kandidaatti x on kelpaava jos ja vain jos x on yhteistekijätön kaikkien lukujen $p_i^{a_i}$ kanssa.

Voimme siis luoda kaikki kelpaavat luvut x seuraavalla tavalla: Valitaan kokonaisluvut $b_1, b_2, \ldots, b_k$, joilla b_i ja $p_i^{a_i}$ ovat yhteistekijättömiä kaikilla i, ja valitaan x olemaan (kiinalaisen jäännöslauseen) yhtälöryhmän $x \equiv b_i \pmod{p_i^{a_i}}$ ratkaisu väliltä $[1, n]$. Käymällä läpi kaikki vaihtoehdot luvuille $b_1, b_2, \ldots, b_k$ saadaan kelpaavat luvut täsmälleen kerran, kun vaaditaan vielä, että $0 \leq b_i < p_i^{a_i}$ kaikilla i.

Kuinka monta vaihtoehtoa luvuille $b_1, b_2, \ldots, b_n$ on? Yksittäiselle b_i on $\phi(p_i^{a_i})$ vaihtoehtoa, ja kertomalla yksittäisten lukujen b_i vaihtoehtojen määrä saadaan kelpaavien lukujen määrä. Tämä todistaa halutun väitteen.

Seuraavana esitetään ratkaisu Johdantotehtäviä-luvussa esitettyyn tehtävään. Ratkaisussa kantavana teemana on eksponenttifunktioiden jaksollisuus kongruensseissa.

Tehtävä

Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y, joilla $|3^x - 2^y| = 1$.

Käytännössä ratkaistavana on kaksi eri yhtälöä. Ensimmäinen on $3^x - 2^y = 1$ ja toinen $3^x - 2^y = -1$. Ensimmäisellä näistä on ainakin kaksi ratkaisua $(x, y) = (1, 1), (2, 3)$, ja toisella on ainakin yksi ratkaisu $(x, y) = (1, 2)$. Voisi veikata, että se yhtälö, jolla on enemmän ratkaisuja, on vaikeampi. Aloitetaan siis yhtälöstä $3^x - 2^y = -1$.

Yksi idea yhtälön ratkaisemiseksi on tutkia sitä modulo m jollain positiivisella kokonaisluvulla m. Jos nimittäin pätee $3^x - 2^y = -1$, niin pätee $3^x - 2^y \equiv -1 \pmod{m}$ kaikilla m. Tätä kautta voisimme saada tietoa luvuista x ja y.

Millainen olisi hyvä m? Ainakin jos m on kakkosen tai kolmosen potenssi, niin jompikumpi termeistä 3^x ja 2^y on 0 modulo m (kun muuttujien x ja y arvot ovat suuria). Valitaan ensiksi $m = 3$. Nyt pätee $-2^y \equiv -1 \pmod{3}$, eli $2^y \equiv 1 \pmod{3}$. Tämä selvästikin vaatii, että y on parillinen. Saimme siis tietoa luvusta y, mutta tehtävä ei ole vielä ratkennut. Koitetaan muita luvun m valintoja.

Valitaan $m = 4$. Koska y on parillinen, niin $y \geq 2$, ja tällöin $-1 \equiv 3^x - 2^y \equiv 3^x \pmod{4}$. Tästä saadaan ehto $x \equiv 1 \pmod{2}$. Koitetaan vielä seuraavaa sellaista luvun m arvoa, joka on kakkosen tai kolmosen potenssi, eli lukua $m = 8$. Jos $y \geq 3$,

[29] Jälleen lokaalit ehdot yhdistetään globaaliksi tulokseksi.

niin $-1 \equiv 3^x - 2^y \equiv 3^x \pmod 8$. Tällä yhtälöllä ei kuitenkaan ole ratkaisuja, koska luvun 3 potenssit ovat aina 1 tai 3 modulo 8. Siis ainoa mahdollisuus on $y = 2$, ja tästä saadaan ratkaisu $x = 1$ ja $y = 2$.

Tutkitaan sitten yhtälöä $3^x - 2^y = 1$. Kuten edellä voimme tutkia yhtälöä modulo kakkosen ja kolmosen potenssit. Esimerkiksi modulo 16 saadaan (olettaen, että $y \geq 4$) ehto $x \equiv 0 \pmod 4$. Modulo 9 saadaan (olettaen, että $x \geq 2$) ehto $y \equiv 3 \pmod 6$

Yhtälöä voisi tutkia vielä esimerkiksi modulo 64 ja modulo 81. Huomataan kuitenkin, että vaikka yhtälöistä saadaan lisää tietoa luvuista x ja y, niin emme kuitenkaan saa rajoitettua yhtälön ratkaisuja. Täytyy siis keksiä jotain muuta.

Voisimmeko jotenkin hyödyntää saatuja tietoja $x \equiv 0 \pmod 4$ ja $y \equiv 3 \pmod 6$? Ainakin tietoa $x \equiv 0 \pmod 4$ voisi hyödyntää valitsemalla moduloksi m sellaisen luvun, että kolmosen potenssien jakso modulo m on jaollinen neljällä. Helpoin tapa toteuttaa tämä idea on valita $m = 5$, jolloin Fermat'n pienen lauseen nojalla kolmosen potenssit toistuvat modulo 5 neljän jaksoissa. (Tämän voi tietysti myös tarkistaa tässä tapauksessa käsin). Koska tiedämme, että $x \equiv 0 \pmod 4$, niin pätee $3^x \equiv 3^0 \equiv 1 \pmod 5$. Täten

$$1 = 3^x - 2^y \equiv 1 - 2^y \pmod 5,$$

joten 2^y on jaollinen viidellä. Tämä on selvästi mahdotonta.

Muistetaan, että aiemmin teimme oletukset $y \geq 4$ ja $x \geq 2$. Käytimme lopulta vain oletuksella $y \geq 4$ saatavaa tietoa, joten tulee enää käsitellä ne tapaukset, joissa $y < 4$. Näiden tapausten läpikäynti on helppoa, ja saamme ratkaisut $(x, y) = (1, 1), (2, 3)$.

Kaiken kaikkiaan johdantokappaleessa löydetyt ratkaisut $(x, y) = (1, 1), (1, 2), (2, 3)$ ovat yhtälön $|3^x - 2^y| = 1$ ainoat ratkaisut.

Kommentti: Jos tutkisimme polynomiyhtälöitä eli vaikkapa yhtälöä $x^2 - 3y^2 = 17$ (joka esiintyy myöhemmin esimerkkitehtävänä), niin emme voisi mitenkään yhdistellä eri (yhteistekijättömillä) moduloilla saatavia tietoja. Tämä johtuu siitä, että vaikkapa modulo 2 yhtälöstä saadaan ehtoja siitä, mitä x ja y ovat modulo 2, ja tutkiminen modulo 5 antaa tietoa siitä, mitä x ja y ovat modulo 5. Kiinalaisen jäännöslauseen perusteella nämä ehdot eivät kommunikoi mitenkään keskenään.

Tässä tehtävässä tilanne on kuitenkin toinen. Tutkimalla modulo 16 saimme tiedon $x \equiv 0 \pmod 4$. Tämä kertoo, mitä 3^x on modulo 5. Syy tähän eroon polynomien ja eksponenttifunktioiden välillä on arvojen jaksollisuus: polynomien arvot ovat jaksollisia modulo m jaksolla m, mutta eksponenttifunktioiden jaksot ovat jotain aivan muuta. Esimerkiksi kolmosen potenssit ovat jaksollisia jaksolla neljä sekä modulo 16 että modulo 5. Yhteistekijättömät modulot 16 ja 5 siis kommunikoivat keskenään, toisin kuin polynomien tapauksessa.

Näillä ideoilla saamme myös käsitystä siitä, miten tehtävässä kannattaa valita eri moduloita m: Valitaan niitä niin, että saamme mahdollisimman paljon toisistaan riippuvia kongruenssiehtoja luvuille x ja y. Tämä saavutetaan valitsemalla moduloksi m sellaisia lukuja, että lukujen 2 ja 3 potenssien jaksojen pituudet modulo m sisältävät paljon yhteisiä tekijöitä. Ratkaisussa tämä saavutettiin kolmosen po-

tensseille arvoilla $m = 16$ ja $m = 5$, joilla nämä jaksojen pituudet olivat samat.[30] Eksponenttifunktioiden jaksollisuuden tutkimista jatketaan seuraavassa luvussa.

8.3 Neliönjäännökset

Tutkitaan kokonaislukuja modulo 3. Huomataan, että $0^2 \equiv 0 \pmod 3$, $1^2 \equiv 1 \pmod 3$ ja $2^2 \equiv 1 \pmod 3$. Mikään näistä neliöistä ei ole $2 \pmod 3$, ja oikeastaan yhtälöllä $x^2 \equiv 2 \pmod 3$ ei ole ratkaisua. Todistetaan tämä.

Valitaan mielivaltainen kokonaisluku x. Tiedetään, että x on joko 0, 1 tai 2 modulo 3. Jos $x \equiv 0 \pmod 3$, niin neliöimällä yhtälö saadaan $x^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 3$. Vastaavasti muissa tapauksissa saadaan $x^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$ ja $x^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Mitä tapahtuu, jos 3 korvataan jollain muulla alkuluvulla?[31]

Määritelmä

Olkoon p alkuluku. Sanotaan, että kokonaisluku a on neliönjäännös modulo p, jos on olemassa kokonaisluku x, jolla $x^2 \equiv a \pmod p$ ja $p \nmid a$. Vastaavasti sanotaan, että a on neliönepäjäännös modulo p, jos $x^2 \not\equiv a \pmod p$ kaikilla x ja $p \nmid a$. Luvut $a \equiv 0 \pmod p$ eivät ole neliönjäännöksiä eivätkä neliönepäjäännöksiä.

Esimerkki

Luku 1 on neliönjäännös modulo 3, ja luku 2 on neliönepäjäännös modulo 3.

Kuinka monta neliönjäännöstä tai neliönepäjäännöstä on modulo p? Tehdään pieni lista:

- Jos $p = 2$, on 1 neliönjäännös: 1. Neliönepäjäännöksiä on 0 kappaletta.
- Jos $p = 3$, on 1 neliönjäännös: 1. Neliönepäjäännöksiä on 1 kappale.
- Jos $p = 5$, on 2 neliönjäännöstä: 1 ja 4. Neliönepäjäännöksiä on 2 kappaletta.
- Jos $p = 7$, on 3 neliönjäännöstä: 1, 2 ja 4. Neliönepäjäännöksiä on 3 kappaletta.
- Jos $p = 11$, on 5 neliönjäännöstä: 1, 3, 4, 5 ja 9. Neliönepäjäännöksiä on 5 kappaletta.

[30] Muistan joskus nähneeni tehtävän, jossa tutkittiin ainakin viittä eri moduloa, joista viimeinen oli 37. Silloin ajattelin, että ratkaisu oli aivan mahdoton, mutta ratkaisulle on selvä motivaatio: Luku 37 on alkuluku, joten Fermat'n pienen lauseen nojalla eksponenttifunktiot ovat jaksollisia modulo 37 jaksolla 36. Luvulla 36 on vain pieniä alkutekijöitä, joten se kommunikoi hyvin muiden kongruenssiehtojen kanssa.

[31] Mielivaltainen kokonaislukumodulo voidaan palauttaa kiinalaisella jäännöslauseella alkuluvun potensseihin, ja tämä ei ole paljoa vaikeampi tapaus kuin jos modulo olisi alkuluku (katso Lukuteorian lisätehtävät -luvun toisen tehtävän kommentti).

Vaikuttaisi siltä, että neliönjäännöksiä ja -epäjäännöksiä on aina sama määrä, eli $\frac{p-1}{2}$ (paitsi kun $p = 2$).

Lemma

Olkoon p pariton alkuluku. Luvuista $1, 2, \ldots, p-1$ täsmälleen $\frac{p-1}{2}$ ovat neliönjäännöksiä modulo p.

Neliönjäännökset saadaan listaamalla $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, (p-1)^2$. Näissä tulisi olla $\frac{p-1}{2}$ eri lukua.

Valitaan $p = 11$. Tällöin luvut $1^2, 2^2, \ldots, 10^2$ ovat

$$1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1 \pmod{11}.$$

Säännönmukaisuus on selvä: ensimmäiset $\frac{p-1}{2}$ lukua ovat eri lukuja, ja sitten samat luvut toistuvat käänteisessä järjestyksessä. Loppuosan toistuminen johtuu yksinkertaisesti yhtälöstä $x^2 \equiv (p-x)^2 \pmod{p}$, mikä seuraa suoralla laskulla:

$$(p-x)^2 = p^2 - 2px + x^2 \equiv x^2 \pmod{p}.$$

Entä alkuosan käyttäytyminen?

Haluamme osoittaa, että $a^2 \not\equiv b^2 \pmod{p}$, kun $1 \leq a, b \leq \frac{p-1}{2}$ ja a ja b ovat erisuuria. Oletetaan, että olisikin $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$. Tällöin $p | a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Eukleideen lemman nojalla joko $p | a-b$ tai $p | a+b$. Kumpikaan näistä ei ole mahdollinen vaihtoehto, koska $1 \leq a, b \leq \frac{p-1}{2}$ ja $a \neq b$. Olemme valmiit.

Tässä on pari yksinkertaista esimerkkiä neliönjäännösten sovelluksesta yhtälöiden kokonaislukuratkaisujen etsimiseen. Ensimmäinen on vanha valmennustehtävä.

Tehtävä

Määritä yhtälön $x^2 - 3y^2 = 17$ kaikki kokonaislukuratkaisut.

Kokeilemalla pieniä lukujen x ja y arvoja ei löydetä ratkaisuja. Syy tälle on seuraava: Jos (x, y) on ratkaisu, niin $x^2 - 3y^2 = 17$, ja täten $x^2 - 3y^2 \equiv 17 \pmod{3}$. Tästä seuraa $x^2 \equiv 2 \pmod{3}$, mikä on mahdotonta. Ratkaisuja ei siis ole.

Todistus perustuu siihen, että halutulla yhtälöllä ei ole ratkaisuja modulo 3. Vastaavaa ideaa voi hyödyntää yleisemminkin korvaamalla luvun 3 jollain muulla kokonaisluvulla. Tässä toinen samantyylinen esimerkki.

Tehtävä

Määritä yhtälön $x^2 + y^2 + z^2 = 3996$ kaikki kokonaislukuratkaisut.

Koska $a^2 \geq 0$ kaikilla a, tulee kaikkien luvuista x, y ja z olla enintään $\sqrt{3996}$, koska muuten vasen puoli olisi suurempi kuin oikea. Siispä mahdollisia kandidaatteja luvuille x, y ja z on vain äärellisen monta, eli ne voisi periaatteessa käydä läpi. Vaihtoehtoja on kuitenkin liikaa käsin kokeiltavaksi, joten mietitään jotain muuta.

Voidaan kokeilla moduloita. Yhtälön tarkkaileminen modulo 2 tai modulo 3 ei tunnu antavan mitään hyödyllistä, mutta modulo 4 saadaan jotain: koska luvut $0^2, 1^2, 2^2$ ja 3^2 ovat $0, 1, 0, 1$ modulo 4, pätee $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ tai $a^2 \equiv 1 \pmod 4$ kaikilla kokonaisluvuilla a. On neljä mahdollista tapausta:

1. Kaikki kolme lukua x, y ja z ovat sellaisia, joiden neliö on $0 \pmod 4$. Tällöin $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod 4$.
2. Kaksi lukua luvuista x, y ja z ovat sellaisia, joiden neliö on $0 \pmod 4$, ja kolmannen neliö on $1 \pmod 4$. Tällöin $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod 4$.
3. Yksi neliö on $0 \pmod 4$, ja kaksi muuta ovat $1 \pmod 4$. Tällöin $x^2+y^2+z^2 \equiv 2 \pmod 4$.
4. Kaikki neliöt ovat $1 \pmod 4$, jolloin $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod 4$.

Koska $3996 \equiv 0 \pmod 4$, vain ensimmäinen vaihtoehto kelpaa. Siis $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 0 \pmod 4$, mikä tarkoittaa, että luvut x, y ja z ovat parillisia. Voidaan siis kirjoittaa $x = 2a$, $y = 2b$ ja $z = 2c$, missä a, b, c ovat kokonaislukuja. Nyt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = 3996,$$

eli $a^2 + b^2 + c^2 = 999$. Yhtälö on samantyylinen kuin aiemminkin, mutta yhtälön oikea puoli on pienentynyt. Tämä on edistystä.

Modulo 4 ei juurikaan auta enää: saamme, että a, b ja c ovat parittomia, mutta se siitä. Voidaan kokeilla muita moduloita. Modulo 8 sattuu toimimaan: voidaan tarkistaa, että $x^2 \equiv 0, 1$ tai $4 \pmod 8$. Ei ole mahdollista valita kolmea lukua joukosta $\{0, 1, 4\}$ niin, että niiden summa olisi $999 \equiv 7 \pmod 8$. Tämän takia ratkaisuja ei ole.

Onko mitään nopeaa tapaa määrittää, onko jokin tietty kokonaisluku neliönjäännös modulo p? Yksi tapa on listata neliöt $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, mutta on myös nopeampi menetelmä. Esitetään teoriaa, jonka sovelluksena saadaan tämä nopeampi menetelmä sekä muita tuloksia.

Määritelmä

Olkoon a kokonaisluku, ja olkoon p alkuluku. Määritellään Legendren symboli $\left(\frac{a}{p}\right)$ seuraavasti: jos a on neliönjäännös modulo p, niin $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, jos a on neliönepäjäännös modulo p, niin $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, ja muuten $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$.

Merkintä muistuttaa ikävästi jakolaskua, mutta kontekstista voi päätellä, mitä tarkoitetaan.

Huomioita:

1. Jos $a \equiv b \pmod p$, niin $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

2. Kahden neliönjäännöksen tulo on neliönjäännös: jos $x^2 \equiv a \pmod p$ ja $y^2 \equiv b \pmod p$, niin $(xy)^2 \equiv ab \pmod p$.

Seuraava lemma yleistää jälkimmäistä huomiota.

Lemma

Olkoon p alkuluku. Kaikilla kokonaisluvuilla a ja b pätee

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right).$$

Tulosta voi tavallaan ajatella tulon merkkisääntönä. Reaaliluvuissa luku on neliö jos ja vain jos se on epänegatiivinen. Kahden neliön tulo on neliö, neliö kerrottuna epäneliöllä on epäneliö, ja kahden epäneliön luvun tulo on neliö. Lemman tulos todistaa saman kokonaisluvuille modulo p.

Lemma selvästi pätee, jos $a \equiv 0 \pmod p$ tai $b \equiv 0 \pmod p$, koska tällöin saadaan $0 = 0$. Oletetaan, että $a, b \not\equiv 0 \pmod p$. Edellä todistettiin tapaus $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right) = 1$ eli merkkivaihtoehto $(+,+)$.

Tutkitaan seuraavana tapaus $(-,+)$. Oletetaan siis, että a on neliönepäjäännös ja b on neliönjäännös, ja yritetään todistaa, että ab on neliönepäjäännös. Tehdään vastaoletus: luku ab on neliönjäännös modulo p. Kirjoitetaan $x^2 \equiv b \pmod p$ ja $y^2 \equiv ab \pmod p$. Koska $b \not\equiv 0 \pmod p$, on luvuilla b ja x käänteisluvut b^{-1} ja x^{-1} modulo p. Nyt

$$a \equiv ab \cdot b^{-1} \equiv y^2 \cdot (x^{-1})^2 \equiv (yx^{-1})^2 \pmod p,$$

eli a onkin neliönjäännös modulo p, mikä on ristiriita.

Merkkivaihtoehto $(+,-)$ seuraa symmetrian nojalla.

Jäljellä on vaikein tapaus $(-,-)$, eli se, että kahden neliönepäjäännöksen tulo on neliönjäännös. Idea todistuksessa on valita jokin neliönepäjäännös ja todistaa, ettei sitä voi esittää kahden neliönepäjäännöksen tulona. Tämä tehdään laskemalla tietynlaisten parien lukumääriä.

Valitaan jokin neliönepäjäännös c. Kuinka monta paria sellaista paria (a,b) on, joilla $ab \equiv c \pmod p$? Koska $c \not\equiv 0 \pmod c$, niin $a, b \not\equiv 0 \pmod p$. Jokaista luvun a vaihtoehtoa $1, 2, \ldots, p-1$ vastaa yksikäsitteinen b, nimittäin $a^{-1}c$. Siis yhtälöllä $ab \equiv c \pmod p$ on täsmälleen $p-1$ ratkaisua.

Mitä näistä ratkaisuista voidaan sanoa? Jos a on neliönjäännös (tällaisia ratkaisuja on $\frac{p-1}{2}$ kappaletta), niin b:n tulee olla neliönepäjäännös. Jos taas b on neliönjäännös (tällaisia ratkaisuja on myös $\frac{p-1}{2}$ kappaletta), niin a on neliönepäjäännös. Nämä tapaukset käsittelevät kaikki $p-1$ ratkaisua. Jokaisessa näistä ratkaisuista tasan yksi luvuista a ja b on neliönjäännös, mikä todistaa väitteen: lukua c ei voi esittää kahden neliönepäjäännöksen tulona.

Seuraavaksi esitetään ilman todistuksia pari neliönjäännöksiin liittyvää tulosta. Todistuksista kiinnostuneelle lukijalle suositellaan valmennuksen sivuilta löytyvää Esa Vesalaisen materiaalia Lyhyt johdatus alkeelliseen lukuteoriaan. Materiaalissa esitetään myös erilainen todistus edelliselle lemmalle.[32]

Lemma

Olkoon p pariton alkuluku. Tällöin -1 on neliönjäännös modulo p täsmälleen silloin, kun $p \equiv 1 \pmod 4$.

Lemma

Olkoon p pariton alkuluku. Tällöin 2 on neliönjäännös modulo p täsmälleen silloin, kun $p \equiv 1 \pmod 8$ tai $p \equiv 7 \pmod 8$.

Itse muistan aina ainoastaan sen, että $\left(\frac{2}{p}\right)$ riippuu vain siitä, mitä 2 on modulo 8. Tästä saa kuitenkin koko väitteen kokeilemalla pieniä tapauksia: esimerkiksi modulo 3 luku 2 on neliönepäjäännös, joten yleisesti ehdosta $p \equiv 3 \pmod 8$ seuraa $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.

Edelliset kaksi lemmaa toimivat täydennyksinä seuraavalle tulokselle. Todistusta ei esitetä tässä, mutta myös tämän väitteen todistus on esitetty Vesalaisen materiaalissa.

Lause (Neliönjäännösten resiprookkilaki)

Olkoot p ja q parittomia alkulukuja. Jos vähintään toinen luvuista p ja q on $1 \pmod 4$, niin $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, ja muuten (kun $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$) pätee $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$.

Esitetään nyt aiemmin luvattu menetelmä, jonka avulla pystyy laskemaan arvon $\left(\frac{a}{p}\right)$ nopeasti. Tehdään tämä esimerkin kautta.

Esimerkki

Lasketaan $\left(\frac{1010}{2017}\right)$ (ei ole ilmeistä, että 2017 on alkuluku, mutta näin on).

Hajotetaan 1010 alkutekijöihin: $1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$. Käyttäen ”tulon merkkisääntöä” saadaan

$$\left(\frac{1010}{2017}\right) = \left(\frac{2}{2017}\right)\left(\frac{5}{2017}\right)\left(\frac{101}{2017}\right).$$

Lasketaan jokainen termi yksitellen. Ensimmäiseen termiin ei voida käyttää resiprookkilakia (koska 2 ei ole pariton alkuluku), mutta voidaan käyttää toista täydentävää tulosta: pätee $2017 \equiv 1 \pmod 8$, joten 2 on neliönjäännös modulo 2017.

[32] Pidän Vesalaisen todistusta Legendren symbolin multiplikatiivisuudelle parempana, koska se on luonnollinen osa neliönjäännösten teoriaa ja koska vastaavilla menetelmillä saadaan osoitettua muun muassa se, että -1 on neliönjäännös modulo p jos ja vain jos $p \equiv 1 \pmod 4$. Esittämäni todistus parien lukumääriä laskemalla on kuitenkin mielestäni helpompi keksiä itse, minkä vuoksi esitin tämän ratkaisun.

Ensimmäinen termi on siis $+1$.

Toiseen termiin voidaan soveltaa resiprookkilakia, eli saadaan

$$\left(\frac{5}{2017}\right) = \left(\frac{2017}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right),$$

joten tämä termi on -1.

Viimeiseen termiin voidaan vastaavasti soveltaa resiprookkilakia:

$$\left(\frac{101}{2017}\right) = \left(\frac{2017}{101}\right).$$

Nähdään, että $2017 = 2020 - 3 \equiv -3 \pmod{101}$. Enää tulee laskea

$$\left(\frac{-3}{101}\right) = \left(\frac{-1}{101}\right)\left(\frac{3}{101}\right).$$

Ensimmäinen termi on $+1$ ensimmäisen täydentävän lemman nojalla, ja toinen termi on -1 resiprookkilain avulla.

Keräämällä tulokset yhteen saadaan, että $\left(\frac{1010}{2017}\right) = 1$.

Huomaa, että neliönjäännösten resiprookkilaki ja sen täydennystulokset antavat tavan laskea symbolin $\left(\frac{a}{p}\right)$ arvon millä tahansa alkuluvulla p ja kokonaisluvulla a. Tämän luvun viimeinen tehtävä demonstroi tätä ideaa.

Tehtävä

Olkoon a kokonaisluku. Oletetaan, että a ei ole neliöluku. Osoita, että on olemassa äärettömän monta alkulukua p, joilla a on neliönepäjäännös modulo p.

Ehto siitä, ettei a ole neliöluku, on selvästi välttämätön väitteen pätevyydelle.

Mistä aloitetaan? Koitetaan jotain yksinkertaista tapausta, vaikkapa $a = -1$. Tällöin halutaan, että äärettömän monella alkuluvulla p pätee $p \equiv 3 \pmod{4}$. Tämä väite pätee ja on erikoistapaus erittäin tunnetusta Dirichlet'n lauseesta. Lauseen tulos on hyvin uskottavan kuuloinen, ja tulos on hyvä pitää mielessä.

Lause (Dirichlet'n lause)

Olkoot a ja b yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. On olemassa äärettömän monta alkulukua p, joilla $p \equiv a \pmod{b}$.

Tämä ratkaisee tapauksen $a = -1$. Myös tapaus $a = 2$ ratkeaa tämän lauseen ja täydennystuloksen avulla.

Edetään hieman vaikeampaan tapaukseen: olkoon $a = q$ jollain alkuluvulla q. Voidaan olettaa, että $q > 2$. Halutaan

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -1.$$

Käytetään neliönjäännösten resiprookkilakia. Yritetään valita $p \equiv 1 \pmod 4$, jolloin resiprookkilakia käytettäessä ei synny etumerkkiä $-$. Näillä p halutaan

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1.$$

Tämä onnistuu: Koska $q > 2$, on olemassa neliönepäjäännös $a \pmod q$. Valitaan p niin, että $p \equiv a \pmod q$ ja $p \equiv 1 \pmod 4$. Nämä ehdot voidaan kirjoittaa kiinalaisen jäännöslauseen avulla muodossa $p \equiv b \pmod{4q}$ sopivalla b. Pätee $\text{syt}(b, 4q) = 1$ (miksi?), joten Dirichlet'n lause todistaa väitteen.

Yritetään sitten ratkaista yleinen tapaus. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi ensiksi, että $a > 0$ ja että a on pariton. Kirjoitetaan $a = q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdots q_n^{e_n}$, missä q_i ovat erisuuria parittomia alkulukuja. Saadaan

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{q_1^{e_1}}{p}\right)\left(\frac{q_2^{e_2}}{p}\right)\cdots\left(\frac{q_n^{e_n}}{p}\right).$$

Jos e_i on parillinen, niin $\left(\frac{q_i^{e_i}}{p}\right) = 1$ (paitsi jos $p = q_i$, mutta tämä poissulkee vain äärellisen monta p). Nämä termit voidaan unohtaa. Jos e_i on pariton, niin $\left(\frac{q_i^{e_i}}{p}\right) = \left(\frac{q_i}{p}\right)$.

Olkoot $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ne alkuluvut q_i, joiden eksponentti luvussa a on pariton. Saamme siis

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{r_1}{p}\right)\left(\frac{r_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{r_k}{p}\right).$$

Nyt vaikuttaa hyvältä tilaisuudelta käyttää resiprookkilakia. Kuten alkulukutapauksessa oletetaan nytkin, että $p \equiv 1 \pmod 4$. Saadaan

$$\left(\frac{r_1}{p}\right)\cdots\left(\frac{r_k}{p}\right) = \left(\frac{p}{r_1}\right)\cdots\left(\frac{p}{r_k}\right).$$

Haluamme siis valita luvun p niin, että tämä tulo on -1. Naiivi tapa on yrittää valita p niin, että ensimmäinen termi on -1 ja loput termit ovat $+1$. Tämä myös onnistuu. Alkuluvut r_i ovat oletuksen nojalla parittomia, joten on olemassa neliönepäjäännös $t \pmod{r_1}$. Valitaan p seuraavasti:

- $p \equiv t \pmod{r_1}$. Näin saadaan ensimmäisestä termistä -1.
- $p \equiv 1 \pmod{r_i}$ kaikilla $i \geq 2$. Näin saadaan muista termeistä $+1$.
- $p \equiv 1 \pmod 4$. Tätä ehtoa käytettiin resiprookkilakia sovellettaessa.

Ehdot voidaan yhdistää kiinalaisella jäännöslauseella, eli saadaan $p \equiv s \pmod m$. Jälleen pätee $\text{syt}(s, m) = 1$ (miksi?), joten Dirichlet'n lause todistaa väitteen. (Missä kohtaa käytettiin tietoa siitä, että a ei ole neliöluku?)

Oletimme, että $a > 0$ ja että a on pariton. Muut tapaukset voidaan kuitenkin käsitellä vastaavalla tavalla (tarkastelu on hieman vaivalloinen, muttei mitenkään vaikea, joten se sivuutetaan).

Huomaa, että vastaavalla tavalla saadaan luotua äärettömän monta alkulukua p, joilla a on neliönjäännös modulo p. Tämä ongelma on yksityiskohtien puolesta helpompi kuin edellä esitetty.[33]

[33]Tämän ongelman voi ratkaista myös toisella tavalla tutkimalla niitä p, jotka jakavat jonkin polynomin $P(x) = x^2 - a$ arvoista kokonaislukupisteessä (katso Lukuteorian lisätehtävät -luvun toisen tehtävän kommentti).

9 Asteet ja primitiivijuuret (Lukuteoria)

Tässä luvussa käsitellään lukujen asteita modulo m ja primitiivijuuria.

9.1 Asteet ja niiden perusominaisuudet

Edellisessä luvussa esitelty Fermat'n pieni lause sanoo, että kaikilla alkuluvuilla p ja kokonaisluvuilla a, joilla $\text{syt}(a,p) = 1$, pätee $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Luku $p-1$ ei kuitenkaan aina ole pienin eksponentti n, jolla $a^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Esimerkki

Fermat'n pieni lause sanoo, että $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$, mutta oikeastaan pätee myös $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$.

Tästä motivoituneena määritellään luvun aste. Laajennamme käsittelyä myös muillekin kuin alkulukumoduloille. (Todistukset eivät ole yhtään sen vaikeampia kuin vain alkulukumoduloita käytettäessä.)

Määritelmä

Olkoon m positiivinen kokonaisluku, ja olkoon a kokonaisluku, jolla $\text{syt}(a,m) = 1$. Määritellään $\text{ord}_m(a)$ olemaan pienin positiivinen kokonaisluku n, jolla $a^n \equiv 1 \pmod{m}$.

Esimerkki

Pätee $\text{ord}_7(2) = 3$, koska $2^1 \not\equiv 1 \pmod{7}$ ja $2^2 \not\equiv 1 \pmod{7}$, mutta $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$.

Aloitetaan tärkeällä lemmalla.

Lemma

Olkoon m positiivinen kokonaisluku, ja olkoon a kokonaisluku, jolla $\text{syt}(a,m) = 1$. Jos jollain kokonaisluvulla n pätee $a^n \equiv 1 \pmod{m}$, niin $\text{ord}_m(a) | n$.

Todistus perustuu vastaoletukseen: oletetaan, että $\text{ord}_p(a) \nmid n$, ja kirjoitetaan $n = k \cdot \text{ord}_p(a) + r$, missä r $(0 < r < \text{ord}_p(a))$ on jakojäännös jaettaessa luku n luvulla $\text{ord}_p(a)$. Määritelmän nojalla $a^{\text{ord}_m(a)} \equiv 1 \pmod{m}$, joten korottamalla puolittain potenssiin k saadaan

$$a^{k \cdot \text{ord}_m(a)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Kertomalla puolittain luvulla a^r ja käyttämällä ehtoa $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ saadaan $a^r \equiv 1 \pmod{m}$. Siis r on positiivinen kokonaisluku, joka on pienempi kuin $\text{ord}_m(a)$ ja jolla pätee $a^r \equiv 1 \pmod{m}$. Tämä on ristiriidassa luvun $\text{ord}_m(a)$ määritelmän kanssa, joten $\text{ord}_m(a) | n$.

Ennen kuin jatketaan eteenpäin, tehdään pari huomautusta. Ensinnäkin lemman tulos ja Eulerin lause antavat suoraan $\text{ord}_m(a)|\phi(m)$ kaikille m ja a. Toiseksi lemman todistuksen idea yleistyy seuraavaan väitteeseen. Henkilökohtaisesti tykkään tuloksesta todella paljon ja pidän sitä myös tärkeänä. Käytän siitä nimitystä syt-kikka.

Lause (Syt-kikka)

Olkoon m positiivinen kokonaisluku, ja olkoon a kokonaisluku, jolla $\text{syt}(a,m) = 1$. Jos joillain nollasta eroavilla kokonaisluvuilla n ja k pätee $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ ja $a^k \equiv 1 \pmod{m}$, niin tällöin myös

$$a^{\text{syt}(n,k)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Todistus on sovellus Bezout'n lemmasta, joka voidaan ajatella yleistyksenä edellä käytetystä jakoyhtälöstä. Olkoon $d = \text{syt}(n,k)$. Tällöin

$$\text{syt}\left(\frac{n}{d}, \frac{k}{d}\right) = 1.$$

Bezout'n lemman nojalla on olemassa kokonaisluvut x ja y, joilla

$$\frac{n}{d}x + \frac{k}{d}y = 1$$

eli $nx + ky = d$. Korotetaan yhtälö $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ potenssiin x (joka voi olla negatiivinen, mutta tämä ei haittaa, koska luvun a käänteisalkio modulo m on olemassa ehdon $\text{syt}(a,m) = 1$ nojalla), jolloin saadaan $a^{nx} \equiv 1 \pmod{m}$. Vastaavasti $a^{ky} \equiv 1 \pmod{m}$, joten kertomalla nämä saadaan

$$a^{nx+ky} = a^d \equiv 1 \pmod{m},$$

mikä on haluttu väite.

Huomautus: käytännössä samalla todistuksella voi todistaa, että mikäli $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ ja $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, missä $\text{syt}(a,m) = \text{syt}(b,m) = 1$, niin $a^{\text{syt}(n,k)} \equiv b^{\text{syt}(n,k)} \pmod{m}$. Tämä versio oikeastaan seuraa myös edellä todistetusta lauseen versiosta luvulle $\frac{a}{b}$. Käytän myös tästä tuloksesta nimitystä syt-kikka.

Mainitaan vielä toinen seuraus lemmasta "jos $a^n \equiv 1 \pmod{m}$, niin $\text{ord}_m(a)|n$".

Lemma

Olkoon m positiivinen kokonaisluku ja a kokonaisluku, jolla $\text{syt}(a,m) = 1$. Jos joillain kokonaisluvuilla n ja k pätee $a^n \equiv a^k \pmod{m}$, niin $n \equiv k \pmod{\text{ord}_m(a)}$.

Todistus on suoraviivainen: ehto antaa $a^{n-k} \equiv 1 \pmod{m}$, joten $\text{ord}_m(a)|n-k$, mikä on haluttu väite.

Mainitaan vielä, että käytetty idea jakoyhtälön soveltamisesta yleistyy vielä yhteen suuntaan. Yleinen tilanne näyttää tältä: on annettu funktio f ja aloitusarvo x_0.

Määritellään $x_{i+1} = f(x_i)$ kaikilla $i \geq 0$, eli lukujono on $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \ldots$ Oletetaan, että funktion f arvot ovat kokonaislukuja väliltä 0 ja $m-1$ jollain modulolla m, jolloin tiedämme, että lukujonon x_i arvot toistuvat jostain pisteestä lähtien.

Luonnollinen kysymys on, millä indekseillä i pätee vaikkapa $x_i = 1$. Edellä esiintynyttä todistusta asteen jakamisominaisuudesta voi soveltaa monille[34] eri f todistamaan, että nämä indeksit ovat täsmälleen jollain kokonaisluvulla k jaolliset indeksit, ja lemmassa todistettiin väite funktiolle $f(x) = ax$ alkuarvolla $x_0 = 1$. Pointti siis on, että todistuksessa esitettyä ideaa voi yleisesti yrittää soveltaa silloin, kun jotain prosessia toistetaan, eli esimerkiksi rekursiivisten lukujonojen tapauksessa.

9.2 Primitiivijuuret

Jatketaan eteenpäin ja yritetään saada lisää tietoa lukujen asteista. Luonnollinen kysymys on: onko kaikilla m olemassa jokin a, jolla $\text{ord}_m(a) = \phi(m)$? Esimerkiksi modulo $m = 5$ todetaan, että $a = 2$ kelpaa: luvun 2 potenssit ovat $2, 4, 3$ ja 1. Modulo 8 tällaista lukua ei kuitenkaan ole: jokaisen luvuista $1, 3, 5$ ja 7 aste on joko 1 tai 2. Ennen kuin keskitytään ongelmaan syvemmin, esitetään tarvittava määritelmä.

Määritelmä

Olkoon m positiivinen kokonaisluku, ja olkoon a kokonaisluku, jolla $\text{syt}(a, m) = 1$. Sanotaan, että a on primitiivijuuri modulo m, jos $\text{ord}_m(a) = \phi(m)$.

Haluaisimme siis löytää ne m, joilla on olemassa primitiivijuuri. Aiomme osoittaa seuraavan lauseen.

Lause (Primitiivijuuren olemassaolo)

Olkoon p alkuluku. On olemassa primitiivijuuri modulo p.

Hauskaa tuloksessa on se, että se takaa sellaisen luvun g olemassaolon, että luvun g potenssit modulo p ovat luvut $1, 2, \ldots, p-1$ jossain järjestyksessä. Jos nimittäin $\text{ord}_p(g) = p-1$, niin luvut $g^1, g^2, g^3, \ldots, g^{p-1}$ eivät ole kongruentteja modulo p, joten niiden tulee olla jotkin $p-1$ eri lukua modulo p. Mikään niistä ei tietenkään voi olla $0 \pmod p$, joten ne ovat luvut $1, 2, \ldots, p-1$.

Lauseen todistus ei ole helpoimmasta päästä, ja sen todistus vaatii muutaman aputuloksen. Ensimmäisenä aputuloksena esitetään Lagrangen lause.

[34] Todistus toimii esimerkiksi silloin, kun f on jaksollinen heti indeksistä 0 lähtien.

Lause (Lagrangen lause)

Olkoon p alkuluku, ja olkoon P kokonaislukukertoiminen polynomi, jonka korkeimman asteen termin kerroin ei ole $0 \pmod p$. Tällöin yhtälöllä

$$P(x) \equiv 0 \pmod p$$

on enintään $\deg(P)$ ratkaisua, kun vaaditaan, että $0 \leq x < p$.

Tuloksen ei pitäisi tulla täytenä yllätyksenä ottaen huomioon, että normaalistikin polynomeilla on enintään asteensa verran nollakohtia. Itse asiassa todistus Lagrangen lauseelle on täsmälleen sama kuin Polynomit-luvussa esitetty todistus, koska polynomien jakoyhtälö toimii myös modulo p. Todistusta ei siksi kopioida tähän, mutta lukija voi halutessaan varmentaa tämän itse.

Yleisemmin voi kysyä: miksei kaikkia samoja asioita, joita tehdään normaalisti rationaaliluvuilla, voisi tehdä modulo p? Modulo p voidaan kuitenkin tehdä täysin samoja laskutoimituksia kuin muutenkin: yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut toimivat kuten pitääkin. Lisäksi rationaalilukuja voi ajatella kokonaislukuina modulo p, kunhan ei jaeta nollalla.[35]

Palataan takaisin asteisiin. Esitetään pari luonnollista kysymystä asteista.

1. Totesimme, että $\text{ord}_p(a) | \phi(p) = p-1$ kaikilla a ja p. Löytyykö kaikille luvun $p-1$ tekijöille d sellainen a, että $\text{ord}_p(a) = d$?
2. Jos vastaus edelliseen kysymykseen on myönteinen, niin montako tällaista a on?

Kysymys 1 on varmaankin vaikea: tapauksessa $d = p-1$ kyse on juurikin primitiivijuuren olemassaolosta. Kysymys 2 sattuukin olemaan helpompi. Ratkaistaan se.

Olkoon a siis kokonaisluku, jonka aste modulo p on d. Yritetään generoida lukuja, joiden aste modulo p on myös d. Tutkitaan lukuja muotoa a^n, missä n on positiivinen kokonaisluku. Mitkä ovat niiden asteet? Tähän vastaa seuraava lemma.

Lemma

Jos luvun a aste modulo p on d, niin luvun a^n aste modulo p on

$$\frac{d}{\text{syt}(n,d)}.$$

Tässä on intuitiivinen tapa tulkita lemman tulosta: Jotta luvusta a saa potenssiin korottamalla luvun $1 \pmod p$, niin eksponentin tulee olla jaollinen luvulla d.

[35] Yleisesti lukujoukkoja, joilla on hyvin määritellyt yhteen- ja kertolasku, kutsutaan kunniksi (englanniksi field). Siis esimerkiksi rationaaliluvut tai kokonaisluvut modulo alkuluku muodostavat kunnan. Kaikilla kunnilla toimii esimerkiksi polynomien jakoyhtälö, ja todistus on käytännössä sama kuin rationaaliluvuilla (koska rationaaliluvut ovat kunta). Tämä selittää, miksi rationaaliluvuilla ja kokonaisluvuilla modulo p on paljon yhteisiä ominaisuuksia: kaikilla kunnilla on nämä ominaisuudet.

Tutkittaessa lukua a^n olemme jo valmiiksi korottaneet lukua a potenssiin n. Tämä ”auttaa” saamaan luvun a joksikin potenssiksi ykkösen. Eksponentti n auttaa lemmassa esitetyn luvun $\text{syt}(n,d)$ verran.

Lemman todistamiseksi tutkitaan luonnollisesti yhtälöä $(a^n)^x \equiv 1 \pmod m$ eli $a^{nx} \equiv 1 \pmod m$. Tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että $d = \text{ord}_m(a) \mid nx$, eli

$$\frac{d}{\text{syt}(n,d)} \mid x.$$

Tämä todistaa väitteen.

Lemman avulla saamme tasan d kappaletta lukuja, joiden aste on jokin luvun d tekijä, nimittäin luvut $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{d-1}$. Huomaamme, että luvun b aste on luvun d tekijä jos ja vain jos b on polynomin $P(x) = x^d - 1$ nollakohta (modulo p). Lagrangen lauseen nojalla tällä polynomilla on enintään d nollakohtaa. Siis luvut muotoa $a^n, 0 \leq n < d$, ovat kaikki luvut, joiden asteet jakavat luvun d. Erityisesti todetaan, että tästä joukosta löytyvät kaikki luvut, joiden asteet ovat tasan luku d.

Lemmasta ja tästä havainnosta saadaan, että on olemassa täsmälleen $\phi(d)$ lukua, joiden aste on d: jotta saadaan aste d, tulee valita $\text{syt}(n,d) = 1$, ja ϕ-funktio määritelmän nojalla laskee näiden n määrän.

Ratkaistaan sitten kysymys 1 käyttäen kysymyksen 2 vastausta. Tiedämme siis, että jokaisella $d|p-1$ on olemassa joko 0 tai $\phi(d)$ kappaletta lukuja, joiden aste on d. Osoitetaan, että millään luvulla d tämä määrä ei ole nolla. Tällöin erikoistapauksena saadaan arvolla $d = p-1$ todistettua primitiivijuurien olemassaolo.

Olkoon $f(d)$ niiden lukujen määrä, joiden aste on d. Pointtina on, että

$$\sum_{d|p-1} f(d) = p-1,$$

koska jokaisen luvuista $1, 2, \ldots, p-1$ aste on jokin luvun $p-1$ tekijä, joten jokainen luku kasvattaa summaa $\sum f(d)$ yhdellä. Olemme siis valmiit, jos osoitamme, että

$$\sum_{d|p-1} \phi(d) = p-1,$$

koska tällöin epäyhtälöissä muotoa $f(d) \leq \phi(d)$ tulee aina päteä yhtäsuuruus. Todistetaan seuraava yleisempi lemma.

Lemma

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n.$$

Lemman voi todistaa parillakin tavalla. Esitetään todistus, joka muistuttaa aiemmin nähtyjä todistuksia luvun n tekijöiden määrälle ja summalle.

Kirjoitetaan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$. Tällöin kaikki luvun n tekijät d ovat muotoa $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$, missä $b_i \leq a_i$ kaikilla i. Tekijöiden summaa laskiessa ideana on kerätä kaikki tekijät d tulosta

$$\begin{aligned} &\Big(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{a_1}\Big) \\ \cdot&\Big(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{a_2}\Big) \\ &\ldots \\ \cdot&\Big(1 + p_k + p_k^2 + \ldots + p_k^{a_k}\Big). \end{aligned}$$

Idea on nytkin sama: keräämme tekijät tulosta

$$\begin{aligned} &\Big(\phi(1) + \phi(p_1) + \phi(p_1^2) + \ldots + \phi(p_1^{a_1})\Big) \\ \cdot&\Big(\phi(1) + \phi(p_2) + \phi(p_2^2) + \ldots + \phi(p_2^{a_2})\Big) \\ &\ldots \\ \cdot&\Big(\phi(1) + \phi(p_k) + \phi(p_k^2) + \ldots + \phi(p_k^{a_k})\Big). \end{aligned}$$

Eli siis luvun $d = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$ muodostamiseksi valitaan tulontekijästä i termi $\phi(p_i^{b_i})$. Huomaa, että ϕ-funktion multiplikatiivisuus[36] antaa

$$\phi(p_1^{b_1})\phi(p_2^{b_2}) \cdots \phi(p_k^{b_k}) = \phi(p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}) = \phi(d),$$

eli saamme todella haluamamme termin $\phi(d)$.

Summa termeistä $\phi(d)$ on siis edellä esitetty tulo. Tulo sievenee nätisti, koska i:s tulontekijä on

$$\begin{aligned} &\phi(1) + \phi(p_i) + \phi(p_i^2) + \ldots + \phi(p_i^{a_i}) \\ &= 1 + (p_i - 1) + (p_i^2 - p_i) + \ldots + (p_i^{a_i} - p_i^{a_i - 1}) \\ &= p_i^{a_i}. \end{aligned}$$

Tulo on täten $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = n$, joten olemme valmiit lemman kanssa, ja primitiivijuuren olemassaolo on täten todistettu.

Kommentti: Todistus koostui kahdesta osasta; kysymyksestä 1 ja kysymyksestä 2. Kysymyksen 2 todistus oli lokaali: riitti tutkia lukua, jonka aste on d, ja tästä saatiin käytännössä kaikki haluttu tieto.

Kysymyksen 1 todistus oli globaali: nopeasti vilkaisemalla ei ole mitään ongelmaa, jos jollakin yksittäisellä d ei olisi olemassa lukua a, jolla $\mathrm{ord}_p(a) = d$. Tällöin iso kuva kuitenkin hajoaa: pätee $p - 1 = \sum f(d) \leq \sum \phi(d) = p - 1$, joten todellisuudessa kaikilla d tulee päteä $f(d) = \phi(d)$.

Todistus osoittaa samalla, että primitiivijuuria modulo p on $\phi(p-1)$ kappaletta.

[36] Multiplikatiivisuus tarkoittaa siis sitä, että $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m ja n, joilla $\mathrm{syt}(m, n) = 1$.

Aiemmin esitettiin kysymys ”Millä m on olemassa primitiivijuuri modulo m?” Vastaus tähän kysymykseen on seuraava:

Lause (Primitiivijuuren olemassaolo)

Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Modulo m on olemassa primitiivijuuri jos ja vain jos m on $1, 2, 4, p^k$ tai $2p^k$, missä p on pariton alkuluku ja k on positiivinen kokonaisluku.

Lausetta ei todisteta tässä. Aiemmin mainitun Esa Vesalaisen monisteen Lyhyt johdatus alkeelliseen lukuteoriaan luvussa 6 todistetaan, että on olemassa primitiivijuuri modulo p^k parittomilla alkuluvuilla p. Harjoitustehtävissä 43 ja 46 saatetaan todistus loppuun.

9.3 Esimerkkitehtäviä

Esitetään pari esimerkkitehtävää, joissa voi käyttää apuna todistettuja tuloksia. Ensimmäisenä esitettävä tehtävä on hyvin tunnettu.

Tehtävä

Osoita, että ei ole olemassa kokonaislukua n $(n > 1)$, jolla $n \mid 2^n - 1$.

Teemme tietysti vastaoletuksen. Ehdon voi muokata muotoon $2^n \equiv 1 \pmod{n}$, jolloin tilanne muistuttaa enemmän aiemmin käsiteltyjä tuloksia. Saamme siis $\text{ord}_n(2)|n$. Lisäksi $\text{ord}_n(2)|\phi(n)$, joten syt-kikan avulla saamme (koska n on varmasti pariton)

$$2^{\text{syt}(n,\phi(n))} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Suurin yhteinen tekijä on kuitenkin vaikea laskea. Jos n olisi alkuluku, niin tämä olisi helppoa: saisimme $\text{syt}(n, n-1)$, joka on 1.

Voimme kuitenkin tuoda tehtävään alkulukuja: ehdosta $2^n \equiv 1 \pmod{n}$ seuraa, että $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ kaikilla luvun n alkutekijöillä p. Siis $\text{ord}_p(2)|n$ ja $\text{ord}_p(2)|p-1$, joten syt-kikan nojalla

$$2^{\text{syt}(n,p-1)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Suurin yhteinen tekijä on vieläkin vaikea laskea: luvulla n voi olla lukua p pienempiä alkutekijöitä, jotka jakavat luvun $p-1$. Tämä voidaan kuitenkin estää valitsemalla p pienimmäksi luvun n alkutekijöistä. Tällöin $\text{syt}(n, p-1) = 1$ ja $2^1 \equiv 1 \pmod{p}$, mikä on ristiriita.

Edellä esitetyssä todistuksessa valitaan luvun n pienin alkutekijä p. Tämä ei onnistu, jos $n = 1$. Väite tuli kuitenkin osoittaa vain arvoille $n > 1$.

Seuraavassa tehtävässä ei varsinaisesti tarvita todistettuja tuloksia. Ratkaisun opetuksena onkin se, että tieto tunnetuista tuloksista antaa intuitiota, joka johtaa ratkaisuun.

Tehtävä

Osoita, että yhtälöllä $x^3 + y^4 = 7$ ei ole kokonaislukuratkaisuja.

Idea väitteen todistamiseksi on käyttää kongruenssiehtoja: jos yhtälöllä ei ole ratkaisua modulo m jollain m, ei sillä voi olla kokonaislukuratkaisuja. Kiinalaisen jäännöslauseen takia riittää käsitellä moduloita, jotka ovat alkuluvun potensseja. Tutkitaan ensiksi vain alkulukumoduloita.

Millainen p olisi hyvä modulo ristiriidan saamiseksi? Olisi hyvä, jos kuutioiden ja neljänsien potenssien määrä modulo p olisi pieni. Voidaanko tämä määrä laskea? Voidaan:

Lemma

Olkoon p alkuluku, ja olkoon $d > 0$ kokonaisluku. Niiden potenssien määrä modulo p, joiden eksponenttina on luku d (eli ns. d:nsien potenssien määrä) modulo p on

$$\frac{p-1}{\text{syt}(p-1,d)} + 1.$$

Tässä termi $+1$ syntyy siitä, että luku 0 on aina d:s potenssi. Huomaa, että määrä riippuu ainoastaan luvusta p ja lukujen $p-1$ ja d suurimmasta yhteisestä tekijästä eikä suoraan luvusta d. Tämä muistuttaa hieman aiemmin todistettua tulosta luvun a^n asteesta.

Olkoon g primitiivijuuri modulo p. Jos x ($x \not\equiv 0 \pmod p$) on täydellinen d:s potenssi, niin $x \equiv y^d \pmod p$ jollain y. Tälle y voidaan kirjoittaa $y \equiv g^Y \pmod p$ jollain kokonaisluvulla Y, joten nyt $x \equiv g^{Yd}$. Tästä nähdään, että d:nnet (nollasta eroavat) potenssit modulo p ovat täsmälleen kaikki luvut muotoa g^{dn}, missä n on kokonaisluku (ja lisäksi luku 0 on d:s potenssi). käsitteleviä kysymyksiä.

Kuinka monta eri lukua muotoa g^{dn} on olemassa? Oletetaan, että $g^{dn} \equiv g^{dm} \pmod p$. Tällöin $g^{d(n-m)} \equiv 1 \pmod p$, eli $d(n-m) \equiv 0 \pmod{p-1}$ luvun g primitiivijuuriominaisuuden vuoksi. Tämä on ekvivalenttia ehdon

$$n - m \equiv 0 \left(\text{mod } \frac{p-1}{\text{syt}(d, p-1)} \right)$$

kanssa. Tästä siis nähdään, että arvoilla $n = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{\text{syt}(d,p-1)} - 1$ saadaan kaikki funktion g^{dn} eri arvot, ja lemman tulos seuraa.

Siirrytään takaisin tehtävän pariin. Lemman nojalla kannattavaa olisi valita p niin, että $1 + \frac{p-1}{\text{syt}(p-1,d)}$ on pieni. Toisin sanoen halutaan, että p on pieni ja $\text{syt}(p-1, d)$ on suuri, kun $d = 3$ ja $d = 4$. Kannattaa siis valita $p \equiv 1 \pmod 3$ ja $p \equiv 1 \pmod 4$ eli $p \equiv 1 \pmod{12}$. Pienin tämän ehdon toteuttava alkuluku on $p = 13$. Tämä toimii: Listaamalla kuutiot modulo 13 saadaan, että kuutiot ovat kongruentteja jonkin luvuista $0, 1, 5, 8$ ja 12 kanssa modulo 13. Vastaavasti neljännet potenssit ovat kongruentteja jonkin luvuista $0, 1, 3$ ja 9 kanssa modulo 13. Nyt on helppoa tarkistaa, että kolmannen ja neljännen potenssin summa modulo 13 ei voi olla 7.

Kommentti: Tehtävän ratkaisun pystyy tiivistämään yhdellä lauseella: ”Yhtälöllä ei ole ratkaisua modulo 13.” Kilpailutilanteessa kannattaa toki kirjoittaa ratkaisuun vain moduloa 13 koskevat päättelyt, mutta mikäli ratkaisuprosessia haluaa selittää jollekulle, on hyvä perustella, mistä keksitään tutkia juurikin moduloa 13.

Ratkaisun lemman todistus perustui primitiivijuurien käyttämiseen. Yleisesti primitiivijuurien tutkiminen on hyvä idea esimerkiksi d:nsiä potensseja käsitellessä, koska primitiivijuurilla voidaan kuvata hyvin kokonaislukujen modulo p rakennetta. Lukuteorian lisätehtävät -luvun viimeinen tehtävä on tästä erinomainen esimerkki.

Seuraava tehtävä on vuoden 2016 Baltian tie -kilpailusta.

Tehtävä

Olkoon $p > 3$ alkuluku, jolla $p \equiv 3 \pmod 4$. Positiivista kokonaislukua a_0 kohden määritetään kokonaislukujen jono $a_0, a_1, \ldots$, jossa $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Todista, että on mahdollista valita sellainen a_0, että osajono $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ ei ole vakio modulo p millään positiivisella kokonaisluvulla N.

Lukujonon rekursioyhtälö on niin yksinkertainen, että luvuille a_n voisi olla suora kaava lukujen n ja a_0 avulla ilmaistuna. Yritetään etsiä se listaamalla pari ensimmäistä lukujonon termiä. Saadaan $a_1 = a_0^2$, $a_2 = a_1^{2^2} = a_0^{2^3}$ ja $a_3 = a_2^{2^3} = a_0^{2^6}$. Listaamalla vielä pari termiä $a_4 = a_0^{2^{10}}$ ja $a_5 = a_0^{2^{15}}$ kuvio alkaa löytymään: luvun 2 eksponentit ovat $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ eli kolmioluvut[37] $\frac{n(n+1)}{2}$. Siis

$$a_n = a_0^{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

kaikilla $n \geq 0$, mikä on helppo todistaa induktiolla.

Mitä haluamme? Haluamme, että $a_n \not\equiv a_{n-1} \pmod p$ äärettömän monella n. Siis

$$a_0^{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} \not\equiv a_0^{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \pmod p,$$

eli jos $a_0 \not\equiv 0 \pmod p$ (ja tämä valinta on pakko tehdä), niin

$$a_0^{2^{\frac{n(n+1)}{2}} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \not\equiv 1 \pmod p.$$

Asteiden avulla tulkittuna tämä tarkoittaa, että

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{ord}_p(a_0)}.$$

Jotta tämä ehto toteutuisi, on paras luvun a_0 valinta sellainen, jolla $\operatorname{ord}_p(a_0) = p - 1$. Tämä siksi, että millä tahansa luvun a_0 valinnalla pätee $\operatorname{ord}_p(a_0) \mid p - 1$, joten kaikkein rajoittavin ehto saadaan silloin, kun aste on $p - 1$.

[37] Kolmioluvut ovat siis 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ja niin edelleen. Nimitys tulee siitä, että esimerkiksi 10 palloa voidaan asetella tasasivuiseksi kolmioksi, jonka sivun pituus on 4 ja jonka sisus on täytetty.

Valitaan siis a_0 primitiivijuureksi. Nyt haluamme, että

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \not\equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Tämä on jaollisuusehto: tutkitaan sitä alkuluvun potenssi kerrallaan. Kakkosen potenssien puolesta vasen puoli on aina 0 tarpeeksi suurilla n. Tutkitaan siis jotain muuta alkulukua q, joka jakaa luvun $p-1$. Tällainen on olemassa, koska $p-1$ ei ole jaollinen neljällä ehdon $p \equiv 3 \pmod 4$ vuoksi ja koska $p-1 > 2$.

Haluamme siis, että

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} \not\equiv 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \pmod{q},$$

eli jakamalla luvun q kanssa yhteistekijättömällä termillä $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ saamme

$$2^n \not\equiv 1 \pmod{q}.$$

Tämä ehto toteutuu varmasti äärettömän monella n. Olemme siis valmiit.

Kommentti: Tehtävänannossa on pari erikoista ehtoa. Ensinnäkin vaaditaan $p \equiv 3 \pmod 4$, ja toiseksi $p = 3$ on jostakin syystä erikoistapaus. Näistä ehdoista ei kuitenkaan tarvitse aluksi välittää, vaan voidaan rohkeasti lähteä tutkimaan haluttua väitettä. Ehtojen $p > 3$ ja $p \equiv 3 \pmod 4$ käyttäminen tuleekin ratkaisussa melkein kuin itsestään: jotta saamme todistettua väitteen, tarvitsemme luvun $p-1$ parittoman alkutekijän, ja tämän olemassaolon ehdot takaavat. Muutenkin ratkaisu etenee lähinnä niin, että aina tehdään luonnollisin asia: nerokkaita oivalluksia ei tarvita.

Viimeisenä esitettävä tehtävä on vuoden 2008 Baltian tie -kilpailusta.

Tehtävä

Positiiviset kokonaisluvut a ja b toteuttavat yhtälön

$$a^b - b^a = 1008.$$

Osoita, että a ja b ovat kongruentteja modulo 1008.

Hajotetaan ongelma heti osatehtäviin: koska $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, on kiinalaisen jäännöslauseen nojalla ekvivalenttia todistaa, että $a \equiv b \pmod{2^4}$, $a \equiv b \pmod{3^2}$ ja $a \equiv b \pmod 7$.

Mistä aloitetaan? Tapauskäsittelyä olisi turhan paljon, jos lähtisi suoraan todistamaan vaikkapa väitettä $a \equiv b \pmod{2^4}$. Aloitetaan helpommista väitteistä: osoitetaan ensin, että $a \equiv b \pmod 2$. Tämä seuraakin suoraan yhtälön parillisuuksista.

Osoitetaan sitten, että $a \equiv b \pmod 4$. Tapauksessa $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$ Eulerin lauseella saadaan $a^b \equiv a^1 \pmod 4$ ja vastaavasti $b^a \equiv b^1 \pmod 4$, joten

$$0 \equiv 1008 = a^b - b^a \equiv a^1 - b^1 \equiv a - b \pmod 4.$$

Täten $a \equiv b \pmod 4$, jos a ja b ovat parittomia. Jos taas a ja b olisivat molemmat parillisia ja molemmat vähintään 5, niin yhtälön $a^b - b^a = 1008$ vasen puoli olisi

jaollinen luvulla 2^5 ja oikea puoli ei olisi. Tulee siis tutkia vain neljä tapausta: $a = 2, b = 2, a = 4$ ja $b = 4$. Ei ole vaikeaa todistaa, että nämä eivät anna yhtälölle ratkaisuja.[38]

Tiedämme siis, että $a \equiv b \pmod 4$ ja että sekä a että b ovat parittomia. Käytetään nyt Eulerin lausetta modulolle 8: Saadaan $x^4 \equiv 1 \pmod 4$ kaikilla parittomilla x, joten koska $a \equiv b \pmod 4$, niin $x^a \equiv x^b \pmod 8$. Täten

$$0 \equiv 1008 = a^b - b^a \equiv a^a - b^a \pmod 8,$$

eli $a^a \equiv b^a \pmod 8$. Toisaalta Eulerin lauseen nojalla $a^4 \equiv 1 \equiv b^4 \pmod 8$, joten syt-kikalla saadaan

$$a^{\text{syt}(a,4)} \equiv b^{\text{syt}(a,4)} \pmod 8,$$

eli $a \equiv b \pmod 8$.

Nyt ei enää tarvita suurta luovuutta tutkia moduloa 16. Pätee $a \equiv b \pmod 8$, joten Eulerin lauseen nojalla $x^a \equiv x^b \pmod{16}$ kaikilla parittomilla x, eli kuten edellä saadaan

$$0 \equiv 1008 = a^b - b^a \equiv a^a - b^a \pmod{16}.$$

Eulerin lauseella $a^8 \equiv 1 \equiv b^8 \pmod{16}$, joten saamme syt-kikalla $a \equiv b \pmod{16}$.

Siirrytään sitten moduloiden 3^2 ja 7 pariin. Aloitetaan pienimmästä modulosta eli luvusta 3. Todetaan, että jos $3|a$ tai $3|b$, niin sekä a että b ovat jaollisia kolmella. Mutta jos a ja b olisivat jaollisia kolmella, niin $a^b - b^a$ olisi jaollinen luvulla 27, toisin kuin luku 1008.

Oletetaan siis, että $a, b \not\equiv 0 \pmod 3$. Nyt käyttämällä Eulerin lausetta ja tietoa $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$ saadaan

$$0 \equiv 1008 \equiv a^b - b^a \equiv a^1 - b^1 \pmod 3,$$

eli $a \equiv b \pmod 3$. Tutkitaan sitten moduloa 9. Tiedämme, että $a \equiv b \pmod 6$, joten saamme jälleen Eulerin lauseella

$$0 \equiv 1008 \equiv a^b - b^a \equiv a^a - b^a \pmod 9.$$

Täten $a^a \equiv b^a \pmod 9$, joten taas syt-kikalla $a \equiv b \pmod 9$.

Vielä käsitellään modulo 7. Käytetään tietoa $a \equiv b \pmod 6$, jolloin

$$0 \equiv a^b - b^a \equiv a^a - b^a \pmod 7,$$

joten vielä kerran syt-kikalla (koska a ja b eivät voi molemmat olla jaollisia seitsemällä) saadaan $a^{\text{syt}(a,6)} \equiv b^{\text{syt}(a,6)} \pmod 7$, eli $a \equiv b \pmod 7$. Olemme valmiit.

Kommentti: Ratkaisu vaati jonkin verran tekemistä, kuten tehtävien ratkaiseminen joskus vaatii. Lisävaivaa aiheuttivat erikoistapaukset, joissa joko 2 tai 3 jakaa jommankumman luvuista a tai b, koska tällöin Eulerin lausetta ei voi soveltaa.

[38] Yhtälöllä on kyllä vähintään yksi ratkaisu: $a = 1009$ ja $b = 1$. Tämä ratkaisu toteuttaa ehdon $a \equiv b \pmod{1008}$.

Ratkaisun idea on kuitenkin suoraviivainen: Kerätään helppo tieto $a \equiv b \pmod 2$, ”korotetaan” tämä tiedoksi $a \equiv b \pmod 4$, ja korottamalla vielä kahdesti saadaan $a \equiv b \pmod{16}$. Toistamalla vastaava moduloille $3, 9$ ja 7 saadaan haluttu väite. Ja vaikka erikoistapaukset, joissa $\text{syt}(6, ab) > 1$, ovat ikäviä, ei niiden käsitteleminen ole vaikeaa, vaan ainoastaan työlästä.

10 Vaativampia lisätehtäviä (Lukuteoria)

Tässä luvussa esitetään haastavia esimerkkitehtäviä lukuteoriasta. Lisäksi osassa tehtäviä on kommentoitu tehtävien kytköksistä kilpailujen ulkopuoliseen lukuteoriaan.

Ensimmäinen tehtävä on IMO-lyhytlistalta vuodelta 2011.

Tehtävä

Olkoot $d_1, d_2, \ldots, d_9$ erisuuria positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon $P(x) = (x+d_1)\cdots(x+d_9)$. Osoita, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku N, että kaikilla kokonaisluvuilla $x \geq N$ luku $P(x)$ on jaollinen jollain lukua 20 isommalla alkuluvulla.

Tehtävänannon väite kuulostaa erittäin uskottavalta – totta kai näin on. Väite on myös sen näköinen, että kannattaa tehdä vastaoletus. Nyt $P(x)$ on äärettömän monella x muotoa

$$P(x) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_M^{a_M},$$

missä luvut $p_1, \ldots, p_M$ ovat lukua 20 pienemmät alkuluvut. Alkuluvut p_i ovat

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,$$

eli niitä on $M = 8$ kappaletta. Tämä on yhden pienempi kuin kokonaislukujen d_i määrä. Ei ole vielä selvää, miten tämä auttaa, mutta asia on hyvä pistää muistiin.

Koska $P(x)$ on tulo termeistä $(x + d_i)$, tulee jokaisen näistä tulontekijöistä olla myös lukua 20 pienempien alkulukujen tulo. Jokainen näistä luvuista $x + d_i$ voidaan siis, aritmetiikan peruslauseen nojalla, ajatella kahdeksan pituisena lukujonona

$$V_i = (v_2(x + d_i), v_3(x + d_i), \ldots, v_{19}(x + d_i)).$$

Huomaa, että V_i riippuu luvusta x.

Mitä näistä lukujonoista voidaan sanoa? Jos x on hyvin suuri, niin jokainen luvuista $x + d_i$ on hyvin suuri, ja tällöin joidenkin alkutekijöiden eksponentit tulevat olemaan hyvin suuria. Kukin lukujonoista $V_1, \ldots, V_9$ sisältää siis vähintään yhden hyvin suuren luvun. Luonnollinen seuraava askel on käyttää laatikkoperiaatetta ja huomata, että joillain kahdella lukujonolla V_i ja V_j on samassa kohdassa jokin hyvin suuri luku. (Koska lukujonoja on yksi enemmän kuin lukujonoissa on jäseniä.)

Saadaanko tästä ristiriita? Kyllä vain. Jos esimerkiksi V_1 ja V_2 sisältävät hyvin suuren luvun ensimmäisessä kohdassaan, niin määritelmien nojalla luvuilla $x + d_1$ ja $x + d_2$ on hyvin suuri kakkosen eksponentti alkutekijähajotelmassaan. Siis näiden lukujen erotus $d_1 - d_2$ on myös jaollinen jollain suurella kakkosen potenssilla. Tämä ei kuitenkaan onnistu. Muut tapaukset ratkeavat vastaavasti.

Kommentti: Esitetty ratkaisu sivuuttaa yksityiskohtia, jotka liittyvät suuria lukuja koskevia epäyhtälöitä, ja kilpailussa nämä kohdat olisi hyvä perustella hieman tarkemmin. Formalisointi ei kuitenkaan ole kovin vaikeaa: jos todella voimme valita mielivaltaisen suuria lukuja x, joilla väite ei päde, niin voimme myös valita mielivaltaisen suuria eksponentteja luvuille $x + d_i$, ja niin edelleen.

Toinen luonnollinen idea tehtävän ratkaisemiseksi olisi tutkia 9 luvun d_i sijasta aluksi pienempää määrää. Esimerkiksi jos lukuja d_i olisi kaksi kappaletta, niin vastaava väite olisi, että $(x+d_1)(x+d_2)$ on kakkosen potenssi vain äärellisellä määrällä positiivisia kokonaislukuja x. Tämän voi todistaa esitetyn ratkaisun idealla, mutta myös toteamalla, että peräkkäisten kakkosen potenssien välit kasvavat mielivaltaisen suuriksi (ja siten suuremmiksi kuin $|d_1 - d_2|$). Kolmella luvulla polynomi P on $P(x) = (x + d_1)(x + d_2)(x + d_3)$. Tässä eri vaihtoehtoja todistukselle on jo vähemmän, ja tätä esimerkkiä tutkimalla voi keksiä ratkaisun alkuperäiseen ongelmaan.

Tehtävänannon väite on hyvin heikko ja paljon vahvempiakin tuloksia on todistettu. Esimerkiksi ns. Kobayashin lause sanoo, että mikäli ääretön lukujono $a_1, a_2, \ldots$ on sellainen, että vain äärellisen moni alkuluku p jakaa jonkin luvuista a_i, niin tällöin millä tahansa kokonaisluvulla $c \neq 0$ on olemassa äärettömän monta alkulukua p, jotka jakavat jonkin luvuista $a_i + c$. (Harjoitustehtävä: ratkaise esimerkkitehtävä käyttämällä Kobayashin lausetta.) Tämän voi myös muotoilla niin, että millä tahansa kokonaisluvulla N ja $c \neq 0$ on olemassa vain äärellisen monta sellaista kokonaislukuparia (x, y), että molempien lukujen x ja y alkutekijät ovat enintään N, ja että pätee $x - y = c$. Näistä aiheista kiinnostunut voi hakea netistä lisätietoa hakusanalla "S-unit equation". Tämä ei kuitenkaan ole relevanttia kilpailumatematiikan kannalta, ja menetelmät vaativat merkittävän määrän pohjatietoja kilpailumatematiikan ulkopuolelta.

Seuraava tehtävä on Kiinan IMO-joukkueen valintakokeesta vuodelta 2015.

Tehtävä

Osoita, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua n, että luku $n^2 + 1$ ei ole jaollinen minkään alkuluvun neliöllä.

On ainakin kaksi tapaa lähestyä tehtävää: ensimmäinen on yrittää vetää hatusta sopivia luvun n arvoja, ja toinen on tutkia, millaiset luvut n toteuttavat tai ovat toteuttamatta tehtävänannon ehdon. Ensimmäisen tavan arvailemista voisi auttaa se, että hankitaan ensin tietoa toisen lähestymistavan mukaisesti.[39]

Oletetaan, että $n^2 + 1$ on jaollinen jollain alkuluvun neliöllä p^2. Huomataan, että p ei voi olla 2, koska n^2 on aina joko 0 tai 1 modulo 4. Vastaavasti p ei voi olla 3, koska $n^2 + 1$ ei koskaan ole jaollinen kolmella, saati sitten yhdeksällä.

Yleisesti, jotta voisi päteä $p^2 | n^2 + 1$, niin tulee päteä $p | n^2 + 1$ eli

$$n^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Täten -1 on neliönjäännös modulo p, joten (käyttämällä neliönjäännöskappaleen tuloksia) saadaan, että tulee olla $p \equiv 1 \pmod 4$ (tai $p = 2$, mutta tämä tapaus käsiteltiin jo).

Jos yhtälöllä $n^2 \equiv -1 \pmod p$ on ratkaisu, niin onko myös yhtälöllä $n^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$ ratkaisu? Totesimme, että arvolla $p = 2$ näin ei ole, mutta helpolla las-

[39] Emme ratkaisussa tule esittämään ensimmäisen tavan mukaista lähestymistapaa, koska toinen tapa johtaa ratkaisuun. (En tiedä tehtävään ensimmäisen lähestymistavan mukaista ratkaisua, ja olen hieman epäileväinen sellaisen ratkaisun olemassaolosta.)

kemisella saadaan, että arvolla $p = 5$ yhtälöllä $n^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$ on ratkaisu $n = 7$.

Yhtälöllä $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$ on aina enintään kaksi ratkaisua (ks. neliönjäännöskappale), ja oikeastaan jos $p \equiv 1 \pmod 4$, niin sillä on täsmälleen kaksi ratkaisua. Olkoot t ja $-t$ jotkin ratkaisut. Jotta nyt voisi päteä $n^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$, niin tulee päteä $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$, eli $n \equiv t \pmod{p}$ tai $n \equiv -t \pmod{p}$.

Yhtälön $n^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$ ratkaisut ovat siis muotoa $n = px \pm t$, missä x on jokin kokonaisluku. Tutkitaan +-tapausta (toinen tapaus on analoginen). Halutaan siis, että

$$(px + t)^2 \equiv -1 \pmod{p^2},$$

eli kertomalla auki saadaan

$$(px)^2 + 2(px)t + t^2 \equiv -1 \pmod{p^2}.$$

Termi $(px)^2$ on 0 modulo p^2, eli yhtälö palautuu muotoon $2pxt + t^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$. Tätä on vielä hieman vaikea käsitellä: tiedämme kyllä, että $t^2 \equiv -1 \pmod{p}$, mutta emme tiedä, mitä t^2 on modulo p^2. Kirjoitetaan siis $t^2 = kp - 1$, missä k on jokin kokonaisluku. Yhtälömme muuttuu muotoon

$$2pxt + kp - 1 \equiv -1 \pmod{p^2}$$

eli

$$2pxt + kp \equiv 0 \pmod{p^2}$$

eli

$$2tx + k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Tämä on lineaarinen yhtälö modulo p muuttujan x suhteen. Kunhan p ei jaa muuttujan x kerrointa $2t$, niin yhtälöllä on yksi (ja vain yksi) ratkaisu x. Koska t ei selvästi voi olla $0 \pmod{p}$, niin $p \nmid 2t$ kaikilla parittomilla p.

Mitä siis todistimme? Todistimme, että yhtälön $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$ yhdestä ratkaisusta $n = t$ voidaan luoda ratkaisu yhtälölle $n^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$. Lisäksi tämä ratkaisu on yksikäsitteinen, kun vaadimme, että $n \equiv t \pmod{p}$. Voimme siis "nostaa" ratkaisuja modulo p ratkaisuiksi modulo p^2 ja vieläpä yksikäsitteisellä tavalla.

Tästä saadaan, että yhtälöllä $n^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$ on aina täsmälleen kaksi ratkaisua, kun $p \equiv 1 \pmod 4$: kahdesta ratkaisusta yhtälölle $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$ saadaan molemmista yksi ratkaisu yhtälölle modulo p^2. Jos $p \not\equiv 1 \pmod 4$, niin ratkaisuja ei ole. Ratkaisuja on siis melko harvassa. Tämä motivoi seuraavan kysymyksen:

Valitaan satunnainen positiivinen kokonaisluku n. Millä todennäköisyydellä $n^2 + 1$ on jaollinen jollain alkuluvun neliöllä?

Todennäköisyys sille, että $n^2 + 1$ on jaollinen alkuluvun p neliöllä p^2 on 0, mikäli $p \not\equiv 1 \pmod 4$, ja muuten $\frac{2}{p^2}$. Jos $p = 5$, niin $\frac{2}{p^2}$ on kahdeksan prosenttia, ja arvolla $p = 13$ tämä on jo hieman alle puolitoista prosenttia. Jos todennäköisyyksien summa on alle 100 prosenttia, niin tehtävä on ratkennut.

(Todennäköisyyksien summa voisi toki teoriassa olla yli 100 prosenttia, vaikka tehtävänannon väite pätisikin, koska $n^2 + 1$ voi olla jaollinen samanaikaisesti usean

eri alkuluvun neliöllä. Mutta jos todennäköisyyksien summa on alle 100 prosenttia, niin alkulukujen neliöitä on niin harvassa, että ne eivät jaa muotoa n^2+1 olevia lukuja riittävän usein, vaikka kunkin luvun n^2+1 jakaisi korkeintaan yksi alkuluvun neliö. Jos siis todennäköisyyksien summa on alle 100 prosenttia, niin positiivisella osuudella kaikista luvuista n pätee, että n^2+1 on neliövapaa, eli erityisesti todetaan, että näitä n on äärettömän monta.)

Haluamme siis todistaa, että

$$\sum \frac{2}{p^2} < 1$$

eli että

$$\sum \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2},$$

missä p käy läpi kaikki alkuluvut, jotka ovat 1 modulo 4.

Tutkimme ensiksi, mitä on summa $\sum \frac{1}{n^2}$, missä n käy läpi kaikki positiiviset kokonaisluvut. Tämän summan laskeminen tunnetaan Baselin ongelmana, ja ratkaisu sanoo, että summa on tasan $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.65$. Tämän avulla saa melko helposti riittävän arvion vastaavalle summalle alkulukujen yli. Tässä esitetään toinen tapa, joka ei vaadi Baselin ongelman ratkaisun tietämistä.

Muutetaan summan $\sum \frac{1}{n^2}$ termejä niin, että saadaan teleskooppisumma:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \\
&< \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots \\
&= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Siis summa $\sum \frac{1}{n^2}$ on pienempi kuin 2. Verrataan tähän summaa alkulukujen $p \equiv 1 \pmod 4$ yli. Naiivi tapa olisi ottaa summa $\sum \frac{1}{n^2} < 2$ ja vähentää tästä termit $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{6^2}$ ja niin edelleen. Tämä ei kuitenkaan anna riittäviä arvioita ainakaan kovin helposti. Toinen, ovelampi tapa on arvioida

$$\sum_{p \equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{p^2} \leq \sum_{n \equiv 1 \pmod 4,\ n>1} \frac{1}{n^2},$$

eli unohdamme alkulukurajoituksen. Ideana on, että pätee esimerkiksi

$$\frac{1}{5^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right),$$

ja vastaavasti yleisesti pätee

$$\frac{1}{(4n+1)^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(4n-2)^2} + \frac{1}{(4n-1)^2} + \frac{1}{(4n)^2} + \frac{1}{(4n+1)^2}\right).$$

Näillä arvioilla saadaan

$$\sum_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{p^2} < \sum_{n\equiv 1 \pmod 4, n>1} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4}\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} - 1\right) < \frac{1}{4}.$$

Tämä on riittävä arvio, joten olemme valmiit.

Kommentti: Ratkaisun loppuosa ei ole aivan formaali. Emme nimittäin voi sanoa valitsevamme ”satunnaista positiivista kokonaislukua n”, vaan meidän tulee valita n satunnaisesti joltain isolta väliltä $[1, N]$ ja antaa N:n kasvaa suureksi. Tällöin niiden lukujen n määrä, joilla n^2+1 on jaollinen luvulla p^2, on enintään $\left\lceil \frac{N}{p^2} \right\rceil$. Haluamme osoittaa, että summa tätä muotoa olevista termeistä on alle $0.999N$. Kattofunktiot eivät tässä tapauksessa vaikuta summaan merkittävästi: Kaikissa nollasta eroavissa termeissä tulee päteä $p \leq N$, eli termejä on yhtä monta kuin niitä alkulukuja $p \equiv 1 \pmod 4$, jotka ovat enintään N. Koska lukua N pienempiä alkulukuja on noin $\frac{N}{\log(N)}$ (tätä tulosta kutsutaan alkulukulauseeksi – tulos on hyvin epätriviaali), niin arvioimalla $\left\lceil \frac{N}{p^2} \right\rceil < \frac{N}{p^2} + 1$ ja etenemällä kuten ratkaisussa saadaan haluttu argumentti läpi.

Ratkaisun ideat ovat luonnollisia: Millä luvuilla n tehtävänannon väite ei päde? Toimiiko satunnainen n? Molempien kysymysten vastausten todistukset ovat päällisin puolin melko teknisiä. Ensimmäisen kysymyksen vastauksen todistus kuitenkin yksinkertaisesti vastaa sitä, miten ratkaisuja kannattaisi etsiä konkreettisilla esimerkeillä.

Toisen ongelman todistus taas oli hieman tekninen sen takia, että esitetty ratkaisu ei ole optimaalinen. Jos esimerkiksi tietää Baselin ongelman ratkaisun, niin saa heti paljon paremman arvion summalle $\frac{1}{n^2}$, ja tarvittavan arvion summalle alkulukujen yli saa vaikka seuraavasti:

$$\sum_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{p^2} \leq \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4},$$

ja koska $\frac{\pi^2}{6}$ on alle 1.7 (helppo lasku), niin tästä saadaan tarvittava arvio.

Toinen tapa lyhentää toisen osan todistusta on tehdä teleskooppisumman yhteydessä hieman tarkempi arvio: pätee esimerkiksi, että

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{18}\right),$$

joten saamme nyt talteen $\frac{1}{4} + \frac{1}{18} > 0.25 + 0.05 = 0.3$ verran termejä. Siis teleskooppisummalla saa arvion $\sum \frac{1}{n^2} < 1.7$, ja nyt ratkaisu saadaan kuten edellä, mutta ilman tarkkaa arvoa $\frac{\pi^2}{6}$.

Vielä kolmas tapa olisi valita n olemaan satunnainen viidellä jaollinen kokonaisluku. Tällöin n^2+1 ei ole koskaan jaollinen viidellä, joten voimme unohtaa termin $\frac{1}{5^2}$. Toimimalla vastaavasti riittävän monelle ensimmäisistä alkuluvuista relevantti summa $\sum \frac{1}{p^2}$ saadaan niin pieneksi kuin halutaan. Tämä lähestymistapa antaa hieman

epäsuoremman tavan todistaa väitteen, mutta varsinaisia laskuja ei tarvitse tehdä (kunhan on osoittanut, että summa $\sum \frac{1}{p^2}$ suppenee).

On avoin ongelma, onko olemassa äärettömän monta lukua n, jolla n^2+1 on alkuluku. Itse asiassa ei ole todistettu, että yksikään vähintään toisen asteen polynomi saisi äärettömän monta alkulukuarvoa. Ensimmäisen asteen polynomithan käsittelee Dirichlet'n lause. On kuitenkin todistettu, että n^2+1 on äärettömän usein enintään kahden alkuluvun tulo.

Ratkaisun motivoimana esitetään hieman lisätuloksia koskien polynomiyhtälöitä modulo alkuluvun potenssit.

Esitetty menetelmä yhtälön $x^2+1 \equiv 0 \pmod{p}$ ratkaisujen korottamisesta korkeammille p:n potensseille yleistyy. Tässä esitetään lyhyesti todistuksen idea.

Olkoon $P(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Suoralla laskulla voidaan osoittaa, että pätee yhtälö

$$P(a+bp^k) \equiv P(a) + bp^k P'(a) \pmod{p^{k+1}}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $a, b, k \geq 0$ ja alkuluvuilla p. Tässä P' on polynomin P derivaatta. (Todistuksen idea: Kirjoitetaan $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$ ja kerrotaan termit $a_i(a+bp^k)^i$ auki binomilauseella. Melkein kaikki termit ovat nolla modulo p^{k+1}, jolloin kokoamalla jäljelle jääneet termit saadaan yhtälön oikea puoli. Tämä myös kertoo, miten identiteettiin voi päätyä itse: koitetaan vain korottaa yhtälön ratkaisuja kuten esimerkkitehtävässä, eli koitetaan laskea $P(a+bp^k)$.)

Oletetaan, että yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ on ratkaisu $x=a$. Koitetaan korottaa tämä ratkaisu moduloon p^2. Etsitään ratkaisuja muotoa $x = a+bp$, missä b on kokonaisluku. Käyttämällä edellä esitettyä tulosta saadaan $P(a+bp) \equiv P(a) + bpP'(a) \pmod{p^2}$. Jos $P'(a)$ ei ole $0 \pmod{p}$, niin voimme löytää sellaisen b, jolla $P(a)+bpP'(a) \equiv 0 \pmod{p^2}$ (kirjoittamalla $P(a) = pA$ jollain $A \in \mathbb{Z}$ ja supistamalla p pois jäjelle jää ensimmäisen asteen yhtälö modulo p muuttujalle b). Ratkaisun voi vastaavasti korottaa ratkaisuksi modulo p^3 ja siitä moduloon p^4 ja niin edelleen.

Enää tulee tutkia tapausta $P'(a) \equiv 0 \pmod{p}$. Väite: jos P on kokonaisluvuissa jaoton polynomi, niin vain äärellisen monelle alkuluvulle p on olemassa kokonaisluku a niin, että $P(a) \equiv 0 \pmod{p}$ ja $P'(a) \equiv 0 \pmod{p}$. Väite antaa, että ongelmallisia alkulukuja p on vain äärellisen monta. Väitteen voi todistaa Bezout'n lemman variantilla polynomeille: on olemassa kokonaislukukertoimiset polynomit X ja Y, joilla $X(x)P(x) + Y(x)P'(x) = N$, missä $N \neq 0$ on kokonaisluku. (Tässä P ja P' ovat yhteistekijättömiä, koska P on jaoton.) Nyt jos $P(a) \equiv P'(a) \equiv 0 \pmod{p}$, niin $p|N$, mikä todistaa väitteen. Tämän Bezout'n lemman variantin voi todistaa kuten normaalinkin Bezout'n lemman.

Tässä on seuraus tuloksista:

Lemma

Olkoon P kokonaislukukertoiminen polynomi. Kaikilla paitsi äärellisen monella alkuluvulla p pätee seuraava väite. Jos yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ on ratkaisu, niin yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ on ratkaisu kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

Edellä väite todistettiin jaottomille P. Yleinen tapaus seuraa vain hajottamalla P jaottomien polynomien tuloksi ja soveltamalla tulosta näille tulontekijöille.[40]

Entä mitä voidaan sanoa niistä p, joilla yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ on ratkaisu? Jos P on epävakio, niin näitä p on äärettömän monta, minkä todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Yleisesti voidaan sanoa paljon enemmän: näiden p osuus kaikista alkuluvuista on jokin positiivinen luku, joka on vähintään $\frac{1}{\deg(P)}$ (tätä ei jätetä harjoitustehtäväksi, koska väitteen todistus vaatii paljon kilpailumatematiikan ulkopuolista teoriaa). Toisen asteen polynomeilla nämä p voidaan esittää kongruenssiehdoin kuten polynomin $x^2 + 1$ tapauksessa. Tämän todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi, vinkkinä mainitaan neliönjäännöksiä koskeva luku. Yleisesti polynomeilla ei ole mitään nättiä esitystä sille, mitkä p ovat sellaisia, joilla yhtälö $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ratkeaa.

Seuraava tehtävä on edellisen tehtävän tavoin Kiinan IMO-joukkueen valintakokeesta. Tehtävä on vuodelta 2010.

Tehtävä

Olkoon $f(n)$ luvun n niiden (positiivisten) tekijöiden summa, jotka ovat pienempää kuin n. Määritellään $f^1(n) = f(n)$, ja $f^{i+1}(n) = f^i(f(n))$ kaikilla $i \geq 1$. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolla $n < f(n) < f^2(n) < \ldots < f^k(n)$.

Esimerkiksi $f^2(12) = f(f(12)) = f(1+2+3+4+6) = f(16) = 1+2+4+8 = 15$. Haluaisimme siis, että luku, jonka tekijöiden summa (poislukien luku itse) lasketaan, kasvaisi joka iteraatiolla eli joka vaiheessa. Esimerkissä ensimmäinen vaihe toimii, koska $16 > 12$, mutta toinen vaihe ei toimi, koska $15 < 16$. Täten $n = 12$ toimii esimerkiksi tehtävään arvolla $k = 1$, muttei enää arvolla $k = 2$.

Tämän tehtävän kohdalla tehdään poikkeuksellisesti niin, että ensin esitetään puhtaaksi kirjoitettu ratkaisu. Tämän jälkeen mietitään, miten ratkaisuun olisi voinut päätyä itse.

Ratkaisu: Valitaan $n = 6p_1p_2 \cdots p_k$, missä $p_1 \equiv -1 \pmod{6}$, $p_i \equiv -1 \pmod{p_{i-1}^2}$ kaikilla $2 \leq i \leq k$ ja $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ovat alkulukuja. Tämä valinta on mahdollinen Dirichlet'n lauseen nojalla valitsemalla alkutekijät järjestyksessä $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

[40] Jos P on kokonaislukukertoiminen polynomi, niin on olemassa rationaaliluvuissa jaottomat kokonaislukukertoimiset polynomit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, joilla $P = Q_1 \cdots Q_k$. Väite ei ole triviaali: voimme tietysti valita polynomit Q_i niin, että ne ovat rationaalilukukertoimisia, mutta miksi pystymme valitsemaan kokonaislukukertoimet? Ns. Gaussin lemma kertoo, että tämä voidaan tehdä.

Lemma: Kaikilla $0 \leq i < k$ pätee $f^i(n) > 6$, $6 \mid f^i(n)$ ja $v_{p_j}(f^i(n)) = 1$ kaikilla $1 \leq j \leq k - i$.

Todistetaan lemma induktiolla muuttujan i suhteen. Tapaus $i = 0$ on selvä.[41] Suoritetaan induktioaskel.

Oletetaan, että lemman väite pätee arvolla $i = m$, ja merkitään $\sigma(n) = f(n) + n$. Nyt pätee

$$f^{m+1}(n) = f(f^m(n)) = \sigma(f^m(n)) - f^m(n).$$

Oletuksen nojalla $f^m(n)$ on jaollinen kuudella. Lisäksi, koska $m \leq k - 1$, pätee $v_{p_1}(f^m(n)) = 1$. Täten funktion σ multiplikatiivisuuden avulla saadaan

$$\sigma(f^m(n)) = \sigma(p_1)\sigma\left(\frac{f^m(n)}{p_1}\right) = (p_1 + 1)\sigma\left(\frac{f^m(n)}{p_1}\right) \equiv 0 \pmod 6$$

oletuksen $p_1 \equiv -1 \pmod 6$ nojalla. Täten $6 \mid f^{m+1}(n)$.

Todistetaan vastaavasti, että $v_{p_j}(f^{m+1}(n)) = 1$ kaikilla $j \leq k - (m + 1)$. Induktio-oletuksen nojalla $v_{p_{j+1}}(f^m(n)) = 1$, joten vastaavasti kuin edellä

$$\sigma(f^m(n)) = \sigma(p_{j+1})\sigma\left(\frac{f^m(n)}{p_{j+1}}\right) = (p_{j+1} + 1)\sigma\left(\frac{f^m(n)}{p_{j+1}}\right) \equiv 0 \pmod{p_j^2}$$

luvun p_{j+1} valinnan nojalla. Täten $f^{m+1}(n) = \sigma(f^m(n)) - f^m(n)$ on kahden sellaisen luvun erotus, joista ensimmäinen on jaollinen luvulla p_j^2 ja jälkimmäinen on jaollinen luvulla p_j, muttei luvulla p_j^2 (induktio-oletuksen nojalla). Täten $v_{p_j}(f^{m+1}(n)) = 1$.

Lopuksi todetaan, että lemman osa $f^{m+1}(n) > 6$ seuraa ehdoista $6 | f^{m+1}(n)$ ja $v_{p_1}(f^{m+1}(n)) = 1$. Lemma on näin todistettu.

Lemman seurauksena $f^i(n)$ on jaollinen kuudella ja isompi kuin 6 kaikilla $0 \leq i < k$, joten

$$f^{i+1}(n) > \frac{f^i(n)}{2} + \frac{f^i(n)}{3} + \frac{f^i(n)}{6} = f^i(n),$$

mistä tehtävänannon väite seuraa.

Ennen kuin lähdetään miettimään motivaatiota ratkaisun takana, käydään ensiksi läpi, mitä ratkaisussa oikeastaan tapahtuu. Ideana on pakottaa luku $f^i(n)$ olemaan jaollinen kuudella arvoilla $i = 0, 1, \ldots, k - 1$, koska tällöin saadaan ratkaisun lopussa esitetty epäyhtälö $f^{i+1}(n) > f^i(n)$.

Mihin tämä kuudella jaollisuus perustuu? Tämä saadaan ratkaisussa pakottamalla luvuille $f^i(n)$ alkutekijä p_1 eksponentilla 1 (eli $v_{p_1}(f^i(n)) = 1$). Tällöin $f^{i+1}(n) = \sigma(f^i(n)) - f^i(n)$ on kahden luvun erotus, joista kumpikin on jaollinen kuudella.

Ehto $v_{p_1}(f^i(n)) = 1$ puolestaan säilytetään ehdolla $v_{p_2}(f^i(n)) = 1$. Ideana on siis, että alkuluku p_2 "suojelee" alkutekijää p_1, aivan kuten p_1 suojelee luvun $f^i(n)$

[41] Voimme siis määritellä $f^0(n) = n$ kaikilla n. Mikäli lukija ei ole tähän tyytyväinen, hän voi halutessaan todistaa väitteen arvolla $i = 1$. Todistus vastaa induktioaskelta.

jaollisuutta kuudella. Vastaavasti p_{j+1} suojelee lukua p_j kaikilla j. Kuudella jaollisuus saadaan siis säilytettyä suojelijoiden ketjulla $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Mikään ei suojele alkutekijää p_k, jolloin se katoaa ensimmäisen funktion f iteroinnin jälkeen. Yleisesti yhdellä iteroinnilla katoaa aina seuraava suojelija jonon päästä.

Nyt siis tiedämme, mitä ratkaisussa tapahtuu, ja saimme myös jonkinlaista käsitystä siitä, miten ratkaisun voisi keksiä. Tässä on vielä hieman lisää ajatuksia ratkaisuprosessista.

Kuudella jaollisuus on varsin luonnollinen idea, koska se on yksi (ja ehkäpä yksinkertaisin) vastaus kysymykseen "Miten voisimme pakottaa ehdon $f(n) > n$?"

Ratkaisua miettiessäni tutkin seuraavaksi tehtävää arvolla $k = 2$, eli epäyhtälöketjua

$$n < f(n) < f(f(n)).$$

Tässä ensimmäinen epäyhtälö saadaan tosiaan valitsemalla n suuremmaksi kuin 6 ja kuudella jaolliseksi. Vastaavasti voisi yrittää todistaa seuraavaa epäyhtälöä $f(n) < f(f(n))$ valitsemalla luvun $f(n)$ olemaan jaollinen kuudella (tiedämmehän, että helpoin tapa varmistaa epäyhtälö $k < f(k)$ on valita k olemaan jaollinen kuudella: meillä ei siis oikein ole muutakaan vaihtoehtoa[42]).

Miten voimme pakottaa luvun $f(k)$ olemaan jaollinen kuudella? Tämän tapauksen käsittelyä helpottaa funktion σ määritteleminen asettamalla $\sigma(n) = f(n) + n$, jolloin $\sigma(n)$ on luvun n kaikkien tekijöiden summa. Tekijöiden summalle tiedetään Aritmetiikan peruslause -luvussa todistettu kaava

$$\sigma(p_1^{a_1} \cdots p_t^{a_t}) = \prod_{1 \leq i \leq t} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Lisäksi huomataan, että mikäli n on jaollinen kuudella, niin $\sigma(n) \equiv f(n) \pmod 6$, joten on aivan sama asia pakottaa luku $\sigma(n)$ olemaan jaollinen kuudella kuin pakottaa luku $f(n)$ olemaan jaollinen kuudella.

Ehdon $\sigma(n) \equiv 0 \pmod 6$ varmistamiseksi yksi idea on valita luvun $\sigma(n)$ kaavasta jokin tulontekijä $\frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}$ ja asettaa se olemaan jaollinen kuudella. Tähän on luontevaa valita $a_i = 1$ ja $p_i \equiv -1 \pmod 6$. Ehto $p \equiv -1 \pmod 6$ pätee Dirichlet'n lauseen nojalla äärettömän monella alkuluvulla p.

Huomaamme siis, että valinnalla $n = 6p$, missä p ($p \equiv -1 \pmod 6$) on alkuluku, saadaan ketju $n < f(n) < f(f(n))$.

Ei ole enää kovin vaikeaa jatkaa tätä ideaa eteenpäin: Tiedämme nyt, miten saadaan toteutettua epäyhtälöketju $n < f(n) < f(f(n))$. Jotta tehtävä saadaan ratkaistua arvolla $k = 3$, tulee varmistaa epäyhtälöketjun

$$n < f(n) < f^2(n) < f^3(n)$$

[42]Periaatteessa voisimme myös pakottaa ehdon $k < f(k)$ valitsemalla luvun k olemaan jaollinen kaikilla alkuluvuilla väliltä $[100, N]$, missä N on riittävän suuri kokonaisluku, ja yleisesti valita luvuille $k, f(k), f^2(k), \ldots$ naiivisti valtavan määrän alkutekijöitä. (Alkulukujen käänteislukujen summa hajaantuu.) Tämän idean toteuttaminen on kuitenkin työläämpää kuin esitetyn ratkaisun.

pätevyys. Tämän ketjun voi nähdä koostuvan kahdesta osasta: $n < f(n)$ ja $f(n) < f^2(n) < f^3(n)$. Ensimmäinen osa on helppo varmistaa. Toista osaa varten tulee soveltaa tapauksen $k = 2$ ratkaisua luvulle $f(n)$ luvun n sijasta. Koitamme siis saada luvun $f(n)$ olemaan jaollinen kuudella ja saada ehdon $v_p(f(n)) = 1$ pätemään jollain $p \equiv -1 \pmod 6$. Tämän voi saavuttaa valitsemalla $n = 6pq$, missä q ($q \equiv -1 \pmod{p^2}$) on alkuluku.

Valinnan $n = 6pq, q \equiv -1 \pmod{p^2}$ motivaationa on tutkia yhtälöä $f(n) = \sigma(n) - n$. Ehdon $v_p(f(n)) = 1$ varmistamiseksi on kaksi vaihtoehtoa:[43]

1. Valitaan $v_p(\sigma(n)) \geq 2$ ja $v_p(n) = 1$.
2. Valitaan $v_p(\sigma(n)) = 1$ ja $v_p(n) \geq 2$.

Jälkimmäinen vaihtoehto on selvästi huonompi kuin ensimmäinen: lukua $\sigma(n)$ on vaikeampi käsitellä kuin lukua n, joten vaikeampi ehto $v_p(m) = 1$ kannattaa mieluummin varata luvulle n kuin luvulle $\sigma(n)$. Nyt naiivi tapa saada $v_p(\sigma(n)) \geq 2$ on valita luvulle n alkutekijä q eksponentilla 1, missä $q \equiv -1 \pmod{p^2}$.

Näillä ideoilla ei ole enää vaikeaa yleistää ratkaisua mielivaltaiselle k.

Kommentti: Tehtävässä käytettiin Dirichlet'n lausetta osana ratkaisua. Lukuteorian tehtävissä Dirichlet'n lause on hyvä työkalu sopivien alkulukujen valitsemiseen, monesti yhdessä kiinalaisen jäännöslauseen kanssa. Tästä nähtiin esimerkki jo neliönjäännöksiä käsittelevässä kappaleessa.

Seuraavaksi esitetään tehtävä ELMO-lyhytlistalta vuodelta 2017. Lukuteorian lisäksi algebra on tehtävässä huomattavassa osassa.

Tehtävä

Olkoon C positiivinen kokonaisluku. Osoita, että ei ole olemassa ääretöntä erisuurten positiivisten kokonaislukujen jonoa $a_1, a_2, \ldots$ niin, että kaikilla $k \geq 1$ pätisi

$$a_{k+1}^k \mid C^k a_1 a_2 \cdots a_k.$$

Yritetään muodostaa tehtävänannon mukainen lukujono, jotta nähdään, mikä menee pieleen. Tätä kautta voidaan saada ideoita siihen, miten väite kannattaa todistaa.

Ensimmäinen luonnollinen askel on tutkia jaollisuusehtoja yksittäisen alkuluvun potenssien kautta. Saamme

$$k \cdot v_p(a_{k+1}) \leq k \cdot v_p(C) + \sum_{i=1}^{k} v_p(a_i)$$

eli

$$v_p(a_{k+1}) \leq v_p(C) + \frac{v_p(a_1) + v_p(a_2) + \ldots + v_p(a_k)}{k}.$$

[43] Periaatteessa myös valinnoilla $v_p(n) = v_p(\sigma(n)) = 0$ tai $v_p(n) = v_p(\sigma(n)) = 1$ voitaisiin saada $v_p(f(n)) = 1$, mutta tämä on huomattavasti vaikeampaa.

Täten $v_p(a_{k+1})$ on enintään lukujen $v_p(a_i)$ keskiarvo plus jokin vakio.

Luonteva idea olisi yrittää aina valita $v_p(a_{k+1})$ suurimmaksi mahdolliseksi luvuksi. Ei ole vaikeaa huomata, että tällöin keskiarvot $\frac{1}{k}(v_p(a_1)+\ldots+v_p(a_k))$ kasvavat mielivaltaisen suuriksi, kunhan $v_p(C) > 0$. Miksei tämä ole vastaesimerkki tehtävänannon väitteelle? Ongelmaksi tulee, että luvut $v_p(a_i)$ kasvavat liian hitaasti, jolloin samat luvut toistuvat lukujonossa useampaan kertaan.

Nyt tiedämme, mistä tehtävässä on kyse: luvuille $v_p(a_i)$ on annettu epäyhtälöt, ja tulee todistaa, että epäyhtälöt pakottavat jotkin luvut a_i olemaan yhtä suuria. Teemme vastaoletuksen. Tämä tarkoittaa, että voimme kasvattaa lukuja $v_p(a_i)$ vuorotellen eri alkuluvuilla p niin, etteivät samat luvut a_i toistu lukujonossa.

Huomaamme, että tehtävässä on vain äärellisen monta "mielenkiintoista" alkulukua p, eli siis sellaisia alkulukuja, jotka jakavat jonkin luvuista a_i, on vain äärellisen monta. Tarkemmin pätee, että mikäli $p|a_i$ jollain i, niin $p|C \cdot a_1$. Väite seuraa helpolla vastaoletuksella: Oletetaan, että $p \nmid C \cdot a_1$ ja oletetaan, että $p|a_i$ jollain i (jolloin $i \geq 2$). Valitaan pienin tällainen i, jolloin $v_p(a_1) = v_p(a_2) = \ldots = v_p(a_{i-1}) = 0$. Edellistä keskiarvoepäyhtälöä käyttämällä saadaan

$$v_p(a_i) \leq v_p(C) + \frac{v_p(a_1)+\ldots+v_p(a_{i-1})}{i-1} = 0,$$

mikä on ristiriita oletuksen $p|a_i$ kanssa.

Olkoot $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ne alkuluvut, jotka jakavat vähintään toisen luvuista a_1 ja C. Tiedämme nyt, että jokainen a_i voidaan määrittää, kunhan tiedetään luvut $v_{p_1}(a_i), v_{p_2}(a_i), \ldots, v_{p_n}(a_i)$.

Tehtävää voi visualisoida seuraavasti. Jos $n = 2$, niin luvut a_i voidaan kuvata eksponenteilla $v_{p_1}(a_i)$ ja $v_{p_2}(a_i)$. Nämä kaksi lukua voidaan tulkita xy-koordinaatiston pisteiden koordinaatteina. Emme saa valita samaa pistettä kahdesti, ja lisäksi rajoitteena on, että uuden pisteen x- ja y-koordinaatit saavat olla enintään edellisten x- tai y-koordinaattien keskiarvo plus jokin vakio.

Voidaan ajatella, että jokainen johonkin hetkeen mennessä valittu piste on aluksi jossain neliössä, jonka vasen alakulma on origo $(0,0)$ ja oikea ylänurkka on (N,N). Uusi piste voi olla sellainen, jonka x- tai y-koordinaatti on yli N. Tällöin saamme laajennettua aluetta, jossa pisteet sijaitsevat. Tehtävässä pyydetään osoittamaan, ettei tämä laajentuminen voi tapahtua liian nopeasti.

Tutkitaan yksiulotteista tapausta, jossa siis $n = 1$. Merkitään $b_k = v_{p_1}(a_k)$ ja $c = v_{p_1}(C)$. On annettuna epäyhtälö

$$b_{k+1} \leq c + \frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k},$$

ja haluamme, että mikään luku ei toistu kahdesti lukujonossa $b_1, b_2, \ldots$ Tutkitaan vielä konkreettista tapausta, jossa $c = 2$ ja $b_1 = 0$. Jos valitsemme lukujonoon aina suurimman mahdollisen luvun, niin jono näyttää tältä:

$$0, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

Mitä pidemmälle lukujono etenee, sitä kauemmin kestää, että päästään yhtä isompaan lukuun. Näyttäisi oikeastaan siltä, että $b_k \approx \log(k)$ eli että lukujono kasvaa todella hitaasti.

Koitetaan todistaa, että edellä esitetty ilmiö tapahtuu väistämättä, vaikka luvut b_1 ja c olisivat suuria ja vaikkei aina valittaisi suurinta mahdollista lukua. Tätä varten on luontevaa yrittää rajoittaa lukujen keskiarvon kasvunopeutta. Koitetaan muotoilla annettu epäyhtälö uudelleen keskiarvojen avulla. Olkoon $s_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$. Pätee

$$b_{k+1} = s_{k+1} - s_k \leq c + \frac{s_k}{k},$$

eli

$$s_{k+1} \leq c + \frac{s_k}{k} \cdot (k+1),$$

joten jakamalla puolittain luvulla $k+1$ saadaan vasemmalle puolelle keskiarvo:

$$\frac{s_{k+1}}{k+1} \leq \frac{c}{k+1} + \frac{s_k}{k}.$$

Jos nyt merkitään ensimmäisen k luvun keskiarvoa $A_k = \frac{s_k}{k}$, niin saadaan

$$A_{k+1} \leq \frac{c}{k+1} + A_k.$$

Tästä nähdään, että lukujono todella kasvaa hyvin hitaasti; tarkemmin sanoen yhtä hitaasti kuin harmoninen sarja. Purkamalla epäyhtälöä nimittäin nähdään, että

$$\begin{aligned}
& A_{k+1} \\
\leq\ & \frac{c}{k+1} + A_k \\
\leq\ & \frac{c}{k+1} + \frac{c}{k} + A_{k-1} \\
\vdots\ & \\
\leq\ & \frac{c}{k+1} + \frac{c}{k} + \ldots + \frac{c}{2} + A_1 \\
=\ & A_1 + c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1}\right).
\end{aligned}$$

Lukiosta tiedetään, että harmoninen sarja kasvaa suunnilleen yhtä nopeasti kuin $\log(k)$. (Nopea perustelu: voidaan arvioida

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3,$$

ja yleisesti termejä voidaan arvioida aina edelliseen kakkosen potenssiin. Tämä ei anna optimaalista ylärajaa,[44] mutta tarkoituksiimme raja on hyvinkin riittävä.)

Todistuksen viimeistely on helppoa. Valitaan jokin suuri luku N. Koska luvut $A_1, A_2, \ldots$ kasvavat edellisen nojalla noin logaritmista vauhtia, pätee $A_k \leq T \log(N)$

[44] Tällä lähestymistavalla saadaan $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \leq \log_2(k)$, mutta parempi approksimaatio on $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \approx \ln(k)$. Tämä arvio on alle 1 päässä tarkasta arvosta.

jollain luvusta c riippuvalla (mahdollisesti suurella) vakiolla T kaikilla $k \leq N$. Tällöin $b_i \leq c + T\log(N)$ kaikilla $i \leq N$. Luvuille b_i on siis vain $T\log(N) + c$ verran "liikkumatilaa", ja tähän tilaan ei mahdu N eri lukua, kun N on riittävän suuri.

Edellä ratkaistiin yksiulotteinen tapaus $n = 1$. Yleinen tapaus seuraa kuitenkin suoraan edellisestä todistuksesta: Jokaiselle käsiteltävistä n alkuluvusta $p_1, \ldots, p_n$ voidaan määritellä keskiarvo

$$A_{i,k} = \frac{v_{p_i}(a_1) + v_{p_i}(a_2) + \ldots + v_{p_i}(a_k)}{k}.$$

Jokaiselle $i = 1, 2, \ldots, n$ on olemassa jokin vakio T_i, jolla

$$A_{i,k} \leq T_i \log(k)$$

kaikilla k.

Valitaan jokin suuri N. Jokaisella luvulla a_k $(k \leq N)$ tulee päteä $v_{p_i}(a_k) \leq c_i + T_i \log(N)$ jaollisuusehdosta seuraten. Täten liikkumatilaa eli eri mahdollisuuksia luvuille a_i on vain

$$(c_1 + T_1\log(N))(c_2 + T_2\log(N)) \cdots (c_n + T_n\log(N)),$$

mikä on alle N, kun N on suuri, koska logaritmit eivät kasva läheskään lineaarista vauhtia (tämän tarkempi perustelu jätetään lukijalle.)

Kommentti: Tehtävässä on annettu jaollisuusehto, jota voidaan tutkia lokaalisti yksi alkuluku kerrallaan (ja tässä tehtävässä tämä on selvästi luonnollisin tapa tulkita väitettä). Tämän lisäksi vaaditaan, että luvut a_i ovat keskenään erisuuria, mikä puolestaan on globaali ehto. Tässäkin ratkaisussa tulee hieman tasapainotella sen kanssa, tutkitaanko tilannetta lokaalisti vai globaalisti.

Viimeisenä esitettävä tehtävä on oma luomukseni. Pidän tehtävästä hyvin paljon, koska väite on hieman yllättävä ja ratkaisu koskee mielestäni tärkeää lukuteoriaan liittyvää ajattelutapaa.

Tehtävä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa äärellinen joukko S, jonka alkiot ovat ykköstä suurempia kokonaislukuja ja joka toteuttaa seuraavat ehdot.

1. Mitään joukon S alkiota ei voi esittää muodossa a^b, missä a ja b $(b > 1)$ ovat kokonaislukuja.
2. Kaikilla alkuluvuilla p on olemassa kokonaisluku x ja joukon S alkio s niin, että $x^n - s$ on jaollinen luvulla p.

Haluamme siis muodostaa lukujoukon niin, että kaikilla alkuluvuilla p jokin sen jäsenistä on n:s potenssi modulo p.

Aloitetaan helpoimmasta (epätriviaalista) tapauksesta $n = 2$. Tällöin ongelma koskee neliönjäännöksiä ja voidaan muotoilla Legendren symbolin avulla: haluamme, että

$$\left(\frac{s}{p}\right) = 1$$

kaikilla p, kun s valitaan sopivasti (jokaiselle p erikseen). Jos joukossa S on vain yksi alkio a, niin tiedämme neliönjäännöksiä käsittelevän kappaleen perusteella, että mikäli a ei ole neliö, niin äärettömän monella p pätee

$$\left(\frac{a}{p}\right) = -1.$$

Luku a ei oletuksen nojalla saa olla neliö. Siis tehtävään ei tapauksessa $n = 2$ ole ratkaisua, jossa $|S| = 1$.

Haluaisimme jonkin tavan pakottaa jonkin Legendren symboleista olemaan 1, ja tämä ei onnistu, jos valitsemme vain yhden luvun. Käytännössä ainoa tavat, joilla tiedämme Legendren symbolien arvojen liittyvän toisiinsa, ovat multiplikatiivisuus eli se, että

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right),$$

ja neliönjäännösten resiprookkilaki. Tutkitaan ensiksi multiplikatiivisuudesta saatavia tuloksia.

Jotta saamme erilaisia riippuvuuksia joukon S alkioiden Legendren symboleille, kannattaa joukkoon valita paljon erilaisia tuloja samoista luvuista. Pienin tällainen joukko on $S = \{2, 3, 6\}$. Huomataan, että tämä toimii: Jos nimittäin pätisi

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{6}{p}\right) = -1,$$

niin multiplikatiivisuuden nojalla pätisi myös

$$\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{p}\right) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1,$$

mikä on mahdotonta, koska $2 \cdot 3 \cdot 6 = 6^2$ on neliö. Siis kaikilla p vähintään yksi luvuista $2, 3$ ja 6 on neliönjäännös modulo p.

Edellä esitetty ratkaisu ei suoraan yleisty korkeammille luvun n arvoille, koska näille ei ole vastaavaa multiplikatiivista symbolia. Erilaisten tulojen tutkiminen vaikuttaa kuitenkin hyvältä idealta myös yleisessä tapauksessa: tiedämme nimittäin, että kahden n:nnen potenssin tulo on myös n:s potenssi, koska jos $x^n \equiv a \pmod{p}$ ja $y^n \equiv b \pmod{p}$, niin $(xy)^n \equiv ab \pmod{p}$.

Ongelmana on tosiaan se, että jos a ja b eivät ole n:nsiä potensseja, niin niiden tulo ei välttämättä ole n:s potenssi, jos $n > 2$. Esimerkiksi tapauksessa $n = 3$ ja $p = 7$ luvut 2 ja 5 eivät ole kuutioita modulo 7, ja niiden tulo $10 \equiv 3 \pmod{7}$ ei myöskään ole kuutio. Tämän vuoksi tapauksen $n = 2$ konstruktio $S = \{2, 3, 6\}$ ei välttämättä toimi.

Tutkitaan tapausta $n = 3$. Kriittinen havainto on se, että joissain tapauksissa kahden epäkuution luvun tulo on kuutio, ja näin on oikeastaan aika usein. Esimerkiksi modulo 7 luvut 2 ja 3 eivät ole kuutioita modulo 7, mutta niiden tulo $6 \equiv -1 \pmod 7$ on kuutio $(-1)^3$.

Yksi tapa tämän idean selventämiseksi on käyttää primitiivisiä juuria.[45] Olkoon g primitiivijuuri modulo p. Jokainen luku x, joka ei ole $0 \pmod p$, voidaan esittää g:n potenssina: $g^y \equiv x \pmod p$. Merkitään jotain tällaista lukua y merkinnällä $\ell(x)$. (Tämä $\ell(x)$ on uniikki modulo $p-1$.) Jos $\ell(x)$ on jaollinen kolmella, niin x on tietysti kuutio. Muussa tapauksessa $\ell(x)$ on joko 1 tai 2 $\pmod 3$.

Tutkitaan sitten luvun $\ell(xy)$ jaollisuutta kolmella, kun tiedetään luvut $\ell(x)$ ja $\ell(y)$. Ensinnäkin, koska

$$g^{\ell(x)+\ell(y)} \equiv g^{\ell(x)} g^{\ell(y)} \equiv xy \equiv g^{\ell(xy)} \pmod p,$$

niin $\ell(xy) \equiv \ell(x) + \ell(y)$.[46] Jos nyt joko $\ell(x)$ tai $\ell(y)$ on jaollinen kolmella, niin kaikki on hyvin: luku x tai luku y on kuutio. Lisäksi jos $\ell(x) \equiv 1 \pmod 3$ ja $\ell(y) \equiv 2 \pmod 3$, niin $\ell(xy) \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$, eli xy on kuutio. Vastaavasti menetellään, jos $\ell(x) \equiv 2 \pmod 3$ ja $\ell(y) \equiv 1 \pmod 3$.

Jäljelle jäävät tapaukset $\ell(x) \equiv \ell(y) \equiv 1 \pmod 3$ ja $\ell(x) \equiv \ell(y) \equiv 2 \pmod 3$. Näissä tapauksissa pätee $\ell(xy) \equiv 2 \pmod 3$ ja $\ell(xy) \equiv 1 \pmod 3$, vastaavasti, joten $S = \{x, y, xy\}$ ei vielä ole ratkaisu tehtävään. Tämä ongelma voidaan kuitenkin korjata lisäämällä joukkoon S vielä lisää lukujen tuloja: jos $\ell(x) \equiv 1 \pmod 3$ ja $\ell(xy) \equiv 2 \pmod 3$, niin tällöin $\ell(x^2y) \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$. Vastaavasti tapauksessa $\ell(x) \equiv 2 \pmod 3$, $\ell(xy) \equiv 1 \pmod 3$ saadaan, että x^2y on kuutio.

Olemme saaneet ratkaistua tehtävän tapauksessa $n = 3$: voimme valita joukoksi $S = \{x, y, xy, x^2y\}$, missä x ja y ovat sellaisia kokonaislukuja, että x, y, xy ja x^2y eivät ole täydellisiä potensseja. Tämä onnistuu esimerkiksi valinnalla $x = 2$ ja $y = 3$, jolloin kelpaava joukko on $S = \{2, 3, 6, 12\}$.

Luonnollisesti yleiselle n koitetaan menetellä vastaavasti. Kokeillaan siis valita joukoksi S joukko $\{x, y, xy, x^2y, \ldots, x^{n-1}y\}$. Tällöin haluamme, että joko $\ell(x) \equiv 0 \pmod n$ tai $\ell(x^k y) = k\ell(x) + \ell(y) \equiv 0 \pmod n$ jollain $0 \leq k < n$. Huomataan, että jälkimmäinen ehto on lineaarinen yhtälö muuttujan k suhteen, joten sillä on ratkaisu ainakin silloin, kun $\ell(x)$ ja n ovat yhteistekijättömiä. Jos n on alkuluku, niin tällöin joko $\ell(x)$ ja n ovat yhteistekijättömiä tai $\ell(x) \equiv 0 \pmod n$, ja meillä on ratkaisu tehtävään. Tapauksessa $n = 4$ voisi kuitenkin olla, että $\ell(x) \equiv 2 \pmod 4$ ja $\ell(y) \equiv 1 \pmod 4$, jolloin konstruktio ei toimikaan.

Pitää siis keksiä jotain muuta. Edellä joukkoon S lisättiin vain kahden luvun x ja y tuloja. Meillä on kuitenkin paljon enemmän valinnanvaraa – voimme lisätä joukkoon S vaikka mitä. Yksi (muttei todellakaan ainoa) toimiva idea on muodostaa joukko S seuraavasti: Ensinnäkin joukkoon S lisätään suuri määrä alkulukuja. Esimerkiksi n ensimmäistä alkulukua $p_1, \ldots, p_n$ riittävät. Toiseksi lisätään kaikki sellaiset näistä

[45] Primitiiviset juuret ja täydelliset potenssit liittyvät yleisesti hyvin vahvasti toisiinsa, joten primitiivisten juurten tutkiminen on luonnollinen (ja hyvä) idea.

[46] Oikeastaan $\ell(xy) \equiv \ell(x) + \ell(y) \pmod{p-1}$.

alkuluvuista saatavat tulot, jotka ovat neliövapaita, eli joissa mikään alkuluku p_i ei esiinny useammin kuin kerran. Tällöin siis $|S| = 2^n - 1$.

Ongelma palautuu nyt seuraavaan muotoon: on annettu luvut $\ell(p_1), \ell(p_2), \ldots, \ell(p_n)$, ja haluamme osoittaa, että näistä voidaan valita jokin osajoukko niin, että tämän osajoukon lukujen summa on jaollinen luvulla n. Tehtävä palautuu siis kombinatoriikan ongelmaksi. Tämä ongelma ei ole aivan helppo, mutta pienen mietinnän jälkeen voi keksiä seuraavan ratkaisun: Tutkitaan lukuja

$$\ell(p_1), \ell(p_1) + \ell(p_2), \ell(p_1) + \ell(p_2) + \ell(p_3), \ldots, \ell(p_1) + \ell(p_2) + \cdots + \ell(p_n).$$

Jos jokin näistä luvuista on jaollinen luvulla n, niin olemme valmiit. Muussa tapauksessa ne antavat enintään $n - 1$ eri jakojäännöstä jaettassa luvulla n, joten jotkin kaksi lukua antavat saman jakojäännöksen. Näiden lukujen erotus on jaollinen luvulla n ja on myös edelleen jokin summa luvuista $\ell(p_i)$, joten olemme valmiit.

Kommentti: Ratkaisun loppuosa ei ole helpoin mahdollinen. Helpompaa olisi valita joukkoon S ensimmäisten vaikkapa n^2 alkuluvun tulot (missä jokainen luku esiintyy vain kerran), jolloin luvuista $\ell(p_1), \ldots, \ell(p_{n^2})$ jotkin n ovat samat modulo n. Näiden lukujen $\ell(p_i)$ summa on siis jaollinen luvulla n ja näiden p_i tulo on joukossa S, mikä ratkaisee ongelman. Valitsin kuitenkin yllä esitetyn toteutuksen, koska se todistaa hieman vahvemman väitteen (ja koska keksin sen itse ensiksi). Huomaa, että $n - 1$ alkulukua ei riitä, koska voisi olla $\ell(p_i) \equiv 1 \pmod{n}$ kaikilla i.

Valitsin funktion $\ell(x)$ merkinnäksi nimenomaan l-kirjaimen siitä syystä, että funktio vastaa logaritmia: $\ell(x)$ on kuin $\log_g(x)$ modulo p. Kaikki normaalien logaritmien laskusäännöt toimivat myös tässä tilanteessa, esimerkkinä ratkaisussa käytetty $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$. (Huomaa, että $\ell(x)$ on uniikki modulo $p - 1$, eli oikeasti tulisi kirjoittaa $\ell(xy) \equiv \ell(x) + \ell(y) \pmod{p-1}$. Lisäksi $\ell(x)$ riippuu valitusta primitiivijuuresta g.)

Legendren symbolin arvot ovat -1 ja 1 (ja 0). Jos kuutioille määrittelisi vastaavasti "kuutiollisen Legendren symbolin", niin sen arvoissa olisi hyvä olla 1, sellaisia lukuja, joiden kuutiot ovat ykkösiä (aivan kuten neliönjäännöksillä -1 on sellainen luku, jonka neliö on 1), sekä luku 0. Tällöin arvot olisivat siis $1, \omega, \omega^2$ ja 0, missä ω on sellainen (kompleksi)luku, jolla $\omega^3 = 1$ mutta $\omega \neq 1$. Nyt voitaisiin määritellä kuutiollisen Legendren symbolin arvon muuttujalla x olevan 1, jos $\ell(x) \equiv 0 \pmod{3}$, ω, jos $\ell(x) \equiv 1 \pmod{3}$ ja ω^2, jos $\ell(x) \equiv 2 \pmod{3}$ (ja 0, jos $p|x$). Tällä määritelmällä kuutiollinen Legendren symboli on multiplikatiivinen.[47] Yleisesti arvolla n voisi määritellä n:nsien potenssien Legendren symbolin vastaavasti, jolloin sen arvot olisivat niin sanotut n:nnet yksikköjuuret eli sellaiset kompleksiluvut, joiden n:nnet potenssit ovat ykkösiä. Arvolla $n = 2$ nämä ovat yksinkertaisesti 1 ja -1, ja esimerkiksi arvolla $n = 4$ nämä ovat $1, i, -1$ ja $-i$. Tämä antaa vaihtoehtoisen tavan tulkita tehtävää.

Tutkitaan taas tapausta $n = 3$. Jos $p \equiv 2 \pmod{3}$, niin tällöin kaikki luvut ovat kuutioita modulo p, kuten Asteet ja primitiivijuuret -kappaleessa nähtiin, joten nämä alkuluvut p eivät ole mielenkiintoisia. Jos $p \equiv 1 \pmod{3}$ ja g on primitiivinen juuri

[47] Huomaa, että käytännössä todistimme samalla normaalin Legendren symbolin multiplikatiivisuuden.

modulo p, niin luku $g^{\frac{p-1}{3}}$ on sellainen, jonka kuutio on 1 (mod p), mutta joka ei itsessään ole 1 (mod p). Tämä siis vastaa edellä määriteltyä kolmatta yksikköjuurta ω.

Edelliset huomiot koskevat samaa teemaa, jota on käsitelty jo aiemminkin: ”normaalit luvut”, eli vaikkapa rationaaliluvut tai kompleksiluvut, eivät eroa paljoakaan kokonaisluvuista modulo p. Normaalit laskutoimitukset, mukaan lukien jakolasku, toimivat normaalisti. Normaalisti toimii myös polynomien jakoyhtälö, ja nyt todettiin vielä logaritmien ja yksikköjuurienkin toimivan vastaavasti kompleksiluvuissa ja kokonaisluvuissa modulo p. Tämä vastaavuus on todella vahva.

Ratkaisussa todettiin, että jos n on alkuluku, niin on olemassa sellainen toimiva joukko S, jonka koko on $n + 1$. On mahdollista todistaa (kilpailumatematiikan ulkopuolisia menetelmiä käyttämällä), että ei ole olemassa toimivaa joukkoa S, jonka koko olisi enintään n. Tämän voi tulkita niin, että (ainakin kun n on alkuluku) esitetty lähestymistapa ongelmalle on tietyssä mielessä oikea. Yleisesti joukon S minimikoko voi olla suurempi kuin $n + 1$. Esimerkiksi arvolla $n = 4$ pienimmän ratkaisun koko on 6.

11 Polynomit (Algebra)

Tässä luvussa käydään läpi polynomien perusominaisuuksia.

11.1 Algebran peruslause

Seuraava tulos on hyvin yleinen, ja se oletetaan monissa materiaaleissa jo valmiiksi tunnetuksi.

Lause (Algebran peruslause)

Olkoon $P(x)$ polynomi, jonka aste on n ja joka ei ole nollapolynomi. Tällöin polynomilla P on tasan n nollakohtaa.

Huomaa, että esimerkiksi polynomin $P(x) = (x-1)^2$ nollakohtien määrä on 2, koska kohdassa $x = 1$ on kaksinkertainen nollakohta, joka lasketaan kahdesti.

Nollakohdat voivat olla kompleksilukuja. Esimerkiksi polynomilla $P(x) = x^2 + 1$ ei ole reaalisia nollakohtia (koska $x^2 + 1 \geq 0 + 1 > 0$ kaikilla reaaliluvuilla x), mutta kaksi kompleksista nollakohtaa $x = i$ ja $x = -i$ löytyy.

Algebran peruslausetta ei todisteta tässä. Monet sen todistukset käyttävät tietoja, joita ei esiinny lukiossa eikä kilpailuissa. Mainitaan kuitenkin, että riittää todistaa, että epävakiolla polynomilla P on vähintään yksi nollakohta. Tällöin voidaan soveltaa seuraavaksi esitettävää polynomien jakoyhtälöä ja löytää loput nollakohdat.

11.2 Polynomien jakoyhtälö

Kokonaislukujen tapaan myös polynomeille on jakoyhtälö.

Lause (Polynomien jakoyhtälö)

Olkoot $A(x)$ ja $B(x)$ polynomeja (joiden kertoimet voivat olla rationaalilukuja, reaalilukuja tai kompleksilukuja). Oletetaan, että B ei ole vakiopolynomi. Tällöin on olemassa sellaiset polynomit P ja Q, että $\deg(Q) < \deg(B)$ ja että

$$A(x) = P(x)B(x) + Q(x).$$

Lisäksi jos polynomien A ja B kertoimet ovat rationaalilukuja, niin P ja Q voidaan valita niin, että myös niiden kertoimet ovat rationaalisia. Vastaava väite pätee reaalilukukertoimille.

Haluamme siis löytää polynomin Q, jolla $\deg(Q) < \deg(B)$ ja jolla $A(x) - Q(x)$ on jaollinen polynomilla B. Tilannetta voi verrata kokonaislukujen jakoyhtälöön, jossa haluamme löytää kokonaisluvulle a sellaisen kokonaisluvun q, että $0 \leq q < b$ ja $a \equiv q \pmod{b}$.

Todistamme väitteen ”redusoimalla polynomia A modulo B”. Esimerkiksi jos

$A(x) = x^3$ ja $B(x) = x^2 + 1$, niin $x^3 = x \cdot x^2 \equiv x \cdot (-1) = -x \pmod{x^2+1}$, ja haluttu Q on löydetty.

Yleisesti jos $\deg(A) < \deg(B)$, voidaan valita $Q = A$, ja olemme valmiit. Muussa tapauksessa tutkitaan polynomia

$$A_*(x) = A(x) - cx^{\deg(A)-\deg(B)}B(x),$$

missä c on sellainen vakio, että polynomin $A_*(x)$ termin $x^{\deg(A)}$ kerroin on 0. Saamme redusoitua polynomin A polynomiksi A_*, jonka aste on pienempi kuin polynomin A. Jatkamalla tätä prosessia riittävän pitkään päädytään tilanteeseen, jossa pätee $\deg(A) < \deg(B)$. Tällöin olemme valmiit: polynomi P saadaan summaamalla prosessin aikana käytetyt termit $cx^{\deg(A)-\deg(B)}$.

Tärkeä sovellus jakoyhtälölle on seuraava lemma.

Lemma

Olkoon $A(x)$ polynomi, jolla on nollakohta a. Tällöin on olemassa polynomi P, jolla

$$A(x) = (x-a)P(x).$$

Väitteen todistus on jakoyhtälön avulla suoraviivainen: Jaetaan polynomi A polynomilla $x - a$. Tällöin $A(x) = (x-a)P(x) + Q(x)$ jollain polynomilla Q, jolla $\deg(Q) < \deg(x-a) = 1$. Polynomin Q tulee siis olla vakiopolynomi. Tämän vakiopolynomin tulee olla 0, koska $0 = A(a) = (a-a)P(a) + Q(a) = Q(a)$, joten $A(x) = (x-a)P(x)$.

Lemma on hyödyllinen esimerkiksi yhtälöitä ratkottaessa: jos löydetään yhtälölle $A(x) = 0$ ratkaisu $x = a$, voidaan yhtälön ratkaiseminen palauttaa pienempiasteiseen yhtälöön $P(x) = 0$.

Lemman avulla voidaan todistaa, että astetta n olevalla polynomilla P on enintään n nollakohtaa ilman, että käytetään algebran peruslausetta. Jos nimittäin nollasta eroavalla polynomilla P olisi vähintään $n+1$ nollakohtaa, niin voitaisiin kirjoittaa $P(x) = (x - \alpha_1)Q(x)$, missä α_1 on ensimmäinen näistä nollakohdista ja Q on jokin polynomi. Nyt Q:n aste on $n-1$ ja sillä on n nollakohtaa. Voimme edetä näin. Lopulta saamme vakiopolynomin, jolla on yksi nollakohta. Tästä seuraa, että tämä vakio on nolla, mutta tällöin myös P on nollapolynomi.

11.3 Rationaalinen juuri

On olemassa yksinkertainen kriteeri, jolla voi määrittää, onko kokonaislukukertoimisella polynomilla rationaalisia juuria.

Lause (Rationaaliset juuret)

Olkoon $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, missä kertoimet a_i ovat kokonaislukuja ja $a_n \neq 0$. Tällöin kaikki polynomin P rationaaliset juuret muotoa $\frac{s}{t}$ (missä $\text{syt}(s,t) = 1$) ovat sellaisia, joilla $s|a_0$ ja $t|a_n$.

Todistetaan lause. Olkoon $\frac{s}{t}$, missä $\text{syt}(s,t) = 1$, jokin polynomin P rationaalinen juuri. Tutkitaan lauseketta $P(\frac{s}{t})$. Saadaan

$$0 = P\left(\frac{s}{t}\right) = a_n\frac{s^n}{t^n} + a_{n-1}\frac{s^{n-1}}{t^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{s}{t} + a_0.$$

Koska tutkimme jaollisuutta, on luontevaa kertoa puolittain luvulla t^n, jolloin jokainen termi saadaan kokonaisluvuksi:

$$0 = a_n s^n + a_{n-1}ts^{n-1} + \ldots + a_1 t^{n-1}s + a_0 t^n.$$

Ensimmäistä lukuun ottamatta kaikki termit ovat jaollisia luvulla t. Koska summa on 0, eli jaollinen t:llä, tulee olla $t|a_n s^n$. Koska $\text{syt}(s,t) = 1$, seuraa tästä $t|a_n$. Vastaavasti $s|a_0 t^n$, eli $s|a_0$.

Esimerkki

Ratkaise yhtälö $x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 2 = 0$.

Jotta polynomi saadaan kokonaislukukertoimiseksi, tulee yhtälö ensiksi kertoa puolittain luvulla 3. Saadaan $3x^3 + 5x^2 + 11x + 6 = 0$. Tiedetään, että rationaaliset juuret ovat muotoa $\frac{p}{q}$, missä $p|6$ ja $q|3$. Vaihtoehtoja on siis maksimissaan 16: luvun p tulee olla jokin luvuista $1, 2, 3$ ja 6, ja luvun q tulee olla joko 1 tai 3, ja lisäksi tulee huomioida negatiiviset ratkaisut etumerkillä $-$.

Ei vie kovin paljoa aikaa käydä 16 vaihtoehtoa läpi. Monesti läpikäyntiä voi kuitenkin nopeuttaa helpoilla havainnoilla. Nämä havainnot voivat olla esimerkiksi seuraavanlaisia.

Jos $q = 1$, olisi ratkaisu kokonaisluku. Tällöin $3x^3 + 5x^2 + 11x + 6$ on pariton, eikä siis 0. Siispä $q = 3$.

Koska $q = 3$, luku p ei saa olla jaollinen kolmella, koska muuten $\frac{p}{q}$ ei olisi supistetussa muodossa (ja olisi kokonaisluku). Täten $p = 1$ tai $p = 2$.

Mahdollisia ratkaisuja on enää neljä: $\pm\frac{1}{3}$ ja $\pm\frac{2}{3}$. Huomataan vielä, että polynomin $3x^3 + 5x^2 + 11x + 6$ kaikki kertoimet ovat positiivisia, joten ratkaisu ei voi olla positiivinen. Siispä vaihtoehtoja on enää kaksi: $-\frac{1}{3}$ ja $-\frac{2}{3}$. Nämä jaksaa jo käydä läpi, ja löydetään ratkaisu $x = -\frac{2}{3}$. Polynomien jakokulmalla saadaan

$$3x^3 + 5x^2 + 11x + 6 = (3x + 2)(x^2 + x + 3).$$

Muut nollakohdat saadaan ratkaisemalla toisen asteen yhtälö $x^2 + x + 3 = 0$.

Yhtälöillä ei tietenkään aina ole rationaalisia ratkaisuja, ja näihin tapauksiin menetelmä ei auta.

11.4 Vietan kaavat

Tutkitaan toisen asteen polynomeja $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Tiedetään, että tämän polynomin nollakohdat ovat

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nollakohtien summa on siis

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Lopputulos on yllättävän sievä. Entä nollakohtien tulo? Tulo on

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Lauseke sievenee käyttämällä yhtälöä $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$. Saamme

$$\frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{(2a)^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Jälleen yllättävän sievä lopputulos. Mistä tämä johtuu?

Syy ilmiölle on, että polynomit voidaan esittää nollakohtiensa avulla.

Lemma

Olkoon $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polynomi. Olkoot sen n juurta $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Tällöin

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Todistus: Polynomilla P on nollakohta α_1, joten se voidaan kirjoittaa muodossa $P(x) = (x - \alpha_1)Q_1(x)$. Polynomilla Q_1 on nollakohdat $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, joten se voidaan kirjoittaa muodossa $Q_1(x) = (x - \alpha_2)Q_2(x)$. Näin voidaan jatkaa: lopulta $Q_{n-1}(x)$ voidaan kirjoittaa muodossa $(x - \alpha_n)Q_n(x)$. Polynomilla $Q_n(x)$ ei ole enää juuria, joten se on vakio. Purkamalla sijoitukset saadaan

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)Q_n(x).$$

Vertaamalla termin x^n kerrointa puolittain saadaan, että vakion $Q_n(x)$ tulee olla a_n. Tämä todistaa väitteen.

Lemmasta seuraa Vietan kaavat, jotka selittävät aiemmin havaitun ilmiön.

Lause (Vietan kaavat)

Olkoon $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polynomi. Olkoot sen n juurta $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Tällöin

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Yleisemmin: Olkoon S_k summa, joka saadaan laskemalla yhteen kaikki mahdolliset k eri juuren α_i tulot. (Edellä esitetyt tulo ja summa ovat S_n ja S_1.) Tällöin

$$S_k = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Lauseen väite seuraa yhtälöstä

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

Yhtälön oikea puoli on lukujen S_i määritelmän nojalla

$$a_n\Big(x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - S_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n S_n\Big).$$

Vertailemalla termien x^k kertoimia saadaan haluttu väite.

Esimerkki

Tutkitaan polynomia $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Olkoot sen nollakohdat a, b ja c. Tiedetään, että

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x - a)(x - b)(x - c).$$

Kerrotaan oikea puoli auki:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc.$$

Vertailemalla termin x^2 kerrointa näissä esityksissä saadaan $a + b + c = -2$. Vastaavasti $ab + bc + ca = 3$ ja $abc = -4$.

Tutkitaan sitten Johdantotehtäviä-luvun tehtävää.

Tehtävä

Yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ on kolme ratkaisua. Merkitään niitä kirjaimin a, b ja c. Laske $a^2 + b^2 + c^2$.

Edellinen esimerkki kertoo, mitä ovat $a + b + c$, $ab + bc + ca$ ja abc, mutta nämä eivät suoraan anna vastausta. Vastauksen voi kuitenkin esittää näiden lausekkeiden

avulla: auki kertominen nimittäin antaa, että

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca).$$

Oikea puoli on $(-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2$. Siispä $a^2 + b^2 + c^2 = -2$. Huomaa, että neliöiden summa voi olla negatiivinen, koska a, b ja c eivät välttämättä ole reaalilukuja.

Voisiko vastaavaa menetelmää soveltaa vaikkapa lausekkeen $a + 2b + 3c$ arvon laskemiseen? Ei, koska tunnetut polynomit $a + b + c$, $ab + bc + ca$ ja abc ovat symmetrisiä muuttujien a, b ja c suhteen, joten niiden yhdistelmäkin on. Kysymyksessä ei oikeastaan olisi järkeä, jos $a^2 + b^2 + c^2$ korvattaisiin lausekkeella $a + 2b + 3c$, koska vastaus riippuisi siitä, mikä juuri olisi a, mikä b ja mikä c. Tehtävän polynomin tulee siis myös olla symmetrinen.

Entä voiko vastaavaa menetelmää soveltaa lausekkeen $a^{100} + b^{100} + c^{100}$ arvon laskemiseen? Tämä on seuraava aihe.

11.5 Symmetriset polynomit

Aloitetaan symmetristen polynomien määritelmällä.

Määritelmä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muuttujia. Sanotaan, että polynomi $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ on symmetrinen muuttujien $a_1, \ldots, a_n$ suhteen, jos kaikilla permutaatioilla $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ pätee

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = P(a_{f(1)}, a_{f(2)}, \ldots, a_{f(n)}).$$

Määritelmä on hieman tekninen, mutta intuitiivisesti on selvää, milloin polynomi on symmetrinen.

Esimerkki

Polynomi $P(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2$ on symmetrinen, mutta polynomi $Q(a, b, c) = a + 2b + 3c$ ei ole.

Esitettävää päätulosta varten määritellään vielä alkeissymmetrispolynomit.

Määritelmä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muuttujia. Kokonaisluvulle $1 \leq k \leq n$ määritellään S_k olemaan se polynomi, joka saadaan summaamalla kaikki mahdolliset tulot k eri luvusta a_i. Polynomeja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ kutsutaan n:siksi alkeissymmetrispolynomeiksi.

Esimerkki

Kolmannet alkeissymmetrispolynomit ovat $S_1 = a + b + c$, $S_2 = ab + bc + ca$ ja $S_3 = abc$.

Alkeissymmetrispolynomit ovat siis samat polynomit, joita käsiteltiin jo aiemmin Vietan kaavojen yhteydessä. Päätulos on seuraava.

Lause (Symmetristen polynomien peruslause)

Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoon $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ symmetrinen polynomi. Tällöin P voidaan esittää n:nsien alkeissymmetrispolynomien avulla, eli on olemassa n muuttujan polynomi Q, jolla $Q(S_1, S_2, \ldots, S_n) = P$.

Esimerkki

Polynomi $a^2+b^2+c^2$ on symmetrinen, joten se voidaan esittää alkeissymmetrispolynomien $a+b+c$, $ab+bc+ca$ ja abc avulla: $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(a+b+c)$.

Lausetta ei todisteta formaalisti, mutta käydään läpi, miten esitys löydetään.

Esimerkki

Etsi polynomille $P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3$ esitys alkeissymmetrispolynomien avulla.

Etsitään esitys vähentämällä polynomista P polynomi $(a + b + c)^3$. Jäljelle jää

$$P_1(a, b, c) = P(a, b, c) - (a + b + c)^3 = -3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - 6abc.$$

Huomaa, että lopputulos on symmetrinen.

Riittää siis enää esittää $P_1(a, b, c)$. Koitetaan eliminoida termit muotoa a^2b. Tämä saadaan tehtyä tulolla $(a + b + c)(ab + bc + ca)$, joka on auki kerrottuna summa termeistä muotoa a^2b plus $3ab$. Lisätään siis polynomiin $P_1(a, b, c)$ polynomi $3(a + b + c)(ab + bc + ca)$. Saamme

$$P_2(a, b, c) = P_1(a, b, c) + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) = 3abc.$$

Polynomin P_2 voi esittää alkeissymmetrispolynomien avulla, joten myös polynomin P_1 voi, ja siten myös polynomin P voi. Esitys saadaan purkamalla sijoitukset:

$$\begin{aligned} & P(a, b, c) \\ = \; & P_1(a, b, c) + (a + b + c)^3 \\ = \; & P_2(a, b, c) - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + (a + b + c)^3 \\ = \; & 3abc - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + (a + b + c)^3 \end{aligned}$$

Esitystavan etsimiseen on selkeä logiikka, jota seuraamalla päästään maaliin: eliminoidaan aina ”isoimmat” lausekkeet. Edellisessä esimerkissä eliminoitiin ensiksi termit muotoa a^3 (valinnanvaraa ei ollut). Tämän jälkeen oli kaksi vaihtoehtoa: eliminoidaan joko termit a^2b tai termi abc. Termi a^2b on kuitenkin isompi, joten se eliminoitiin ensimmäisenä. Lopussa on jäljellä enää ”pieni” termi abc, joka ratkeaa suoraan.

Logiikka, jolla määritellään isoin termi, on yksinkertainen. Tutkitaan termejä $a^x b^y c^z$, ja oletetaan, että $x \geq y \geq z$. Isoin termi on se, jolla on suurin luvun x arvo. Jos muuttujan x arvot ovat samat, vertaillaan luvun y arvoa ja niin edelleen. Tämän vuoksi termi $a^3 = a^3b^0c^0$ on suurempi kuin $a^2b = a^2b^1c^0$. Luonnollinen tapa ajatella järjestystä on sanakirja, jossa on sanoja xyz (kuten 300 ja 210): isoin termi on se, joka on sanakirjassa viimeisenä.

Eliminointiin käytettävä polynomi on yksikäsitteinen. Ensimmäisessä askeleessa haluttiin eliminoida termit a^3. Ainoa tapa tähän on valita lauseke $(a+b+c)^3$, koska muualta ei saa termiä a^3. Vastaavasti termien a^2b eliminointiin ainoa mahdollisuus oli $(a+b+c)(ab+bc+ca)$, koska muualta ei saa termiä a^2b (paitsi polynomista $(a+b+c)^3$, mutta tätä ei voida enää käyttää, koska syntyisi iso termi a^3).

Symmetristen polynomien peruslauseen todistus perustuu juuri näihin havaintoihin: redusoidaan polynomia niin, että jäljelle jää aina vain pienempiä ja pienempiä termejä.

11.6 Monen muuttujan polynomit

Edellä käsiteltiin symmetrisiä polynomeja. Mitä voidaan yleisesti sanoa monen muuttujan polynomeista?

Monen muuttujan polynomit käyttäytyvät paljolti samalla tavalla kuin yhden muuttujan polynomit. Yleinen ajatus onkin, että vaikkapa kahden muuttujan polynomia $P(x,y)$ voi aluksi käsitellä polynomina muuttujan y suhteen. Tällöin muuttujaa x pidetään vakiona. Etuna tässä on se, että esimerkiksi jakoyhtälöä voidaan soveltaa tälle muuttujan y polynomille.

Esitetään esimerkkitehtävä. Vaikka tehtävä on näennäisesti epäyhtälötehtävä, perustuu ratkaisu juuri edellä esitettyyn ideaan. Tehtävä on esiintynyt helmikuun 2018 valmennustehtävissä.

Tehtävä

Olkoot x, y ja z reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdot $x+y \geq 2z$ ja $y+z \geq 2x$. Osoita, että

$$5(x^3+y^3+z^3)+12xyz \geq 3(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$$

ja että yhtäsuuruus vallitsee jos ja vain jos $x+y=2z$ tai $y+z=2x$.

Tutkitaan siis polynomia $P(x,y,z) = 5(x^3+y^3+z^3)+12xyz-3(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$. Haluamme osoittaa, että tämä on aina vähintään 0 ja että nollakohtia ovat muun muassa $x+y=2z$ ja $y+z=2x$. Nollakohtien tarkistaminen on helppoa ja jätetään lukijalle. Yhden muuttujan polynomeilla nollakohdista saadaan tulontekijä, joten yritetään samaa monen muuttujan tilanteessa.

Tutkitaan siis polynomia $P(x,y,z)$ polynomina muuttujan z suhteen, jonka kertoimet ovat polynomeja muuttujista x ja y. Jaetaan P jakokulmassa polynomilla $2z-(x+y)$ muuttujan z suhteen. Saadaan

$$P(x,y,z) = (2z-(x+y))Q(x,y,z)+R(x,y,z).$$

Jakoyhtälön toiminnan vuoksi voidaan olettaa, että polynomin R aste muuttujan z suhteen on pienempi kuin polynomin $2z-(x+y)$ aste (muuttujan z suhteen). Siis R on vakio muuttujan z suhteen, eli R on kahden muuttujan polynomi $R(x,y)$.

Sijoitetaan yllä $z=\frac{x+y}{2}$. Tällöin $P(x,y,z)=0$ ja $2z=x+y$. Yhtälö on siis

$$R(x,y)=0.$$

Koska x ja y olivat mielivaltaisia, on polynomin R oltava nollapolynomi. Täten

$$P(x,y,z)=(2z-(x+y))Q(x,y,z).$$

Vastaavalla menettelyllä muille symmetrisille lausekkeille saadaan

$$P(x,y,z)=\Big(2z-(x+y)\Big)\Big(2y-(x+z)\Big)\Big(2x-(y+z)\Big)A(x,y,z)$$

jollain polynomilla A. Koska polynomin P aste on 3 ja oikean puolen aste on $\deg(A)+3$, tulee polynomin A olla vakiopolynomi c. On helppoa tarkistaa, että $c=1$ tutkimalla vaikkapa termin x^3 kerrointa. Tehtävän viimeistely tästä ei ole enää vaikeaa.

12 Arviointi ja epäyhtälöt (Algebra)

Tässä luvussa esitetään tehtäviä, joissa erilaisten arvioiden ja epäyhtälöiden tekeminen on oleellisessa osassa.

12.1 Johdanto

Aloitetaan muutamalla tuloksella, jotka johdattelevat aiheeseen. Tulokset ovat melko intuitiivisia, joten todistukset sivuutetaan, mutta lukija voi halutessaan miettiä niitä itsekseen.

Esimerkki

Kaikilla riittävän suurilla n pätee $n < 2^n$.

Esimerkki

Kaikilla riittävän suurilla n pätee $n^{100} < 2^n$.

Esimerkki

Kaikilla riittävän suurilla n pätee $n^{100} < 1.01^n$.

Edellä esitetyt tulokset käytännössä sanovat, että polynomit kasvavat hitaammin kuin eksponenttifunktiot.

Virke muotoa ”Kaikilla tarpeeksi suurilla n pätee väite V” on hyvin yleinen. Tämän voi muotoilla tarkemmin sanomalla ”On olemassa sellainen c, että kaikilla $n > c$ pätee väite V.” Tämän formaalimman muotoilun etuna on sen tarkkuus, mutta se ei ole aivan yhtä kuvaileva kuin muoto ”tarpeeksi suurilla”.

12.2 Jaollisuusesimerkkejä

Seuraavat kaksi esimerkkiä perustuvat seuraavaan helppoon huomioon: jos $a|b$, niin pätee joko $b = 0$ tai $|a| \leq |b|$.

Aloitetaan helpolla esimerkillä.

Tehtävä

Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut m ja n, joilla $m|n+1$ ja $n|m+1$.

Ratkaisun ideana on, että ehdosta $m|n+1$ seuraa $m \leq n+1$. Vastaavasti saadaan $n \leq m+1$. Yhdistämällä nämä tiedot saadaan

$$n - 1 \leq m \leq n + 1.$$

Tulee tutkia kolme helppoa tapausta:

Tapaus 1: $m = n - 1$. Tällöin $n|m + 1$ toteutuu varmasti ja $m|n + 1$ tarkoittaa, että $n - 1|n + 1$, mistä seuraa $n - 1|2$. Siispä $n - 1 = 1$ tai $n - 1 = 2$, joten saadaan ratkaisut $(m, n) = (1, 2)$ ja $(m, n) = (2, 3)$.

Tapaus 2: $m = n$. Tällöin $n|m + 1$ vaatii, että $n = 1$, ja tästä saadaan ratkaisu $m = n = 1$.

Tapaus 3: $m = n + 1$. Tämä on sama kuin tapaus $m = n - 1$, mutta luvut m ja n on vaihdettu toisin päin. Saadaan ratkaisut $(m, n) = (2, 1)$ ja $(m, n) = (3, 2)$.

Kommentti: Tehtävän voi ratkoa myös toisella tavalla. Ratkaisu perustuu seuraavaan huomioon: jos $m|n + 1$, mutta $m \neq n + 1$, niin m on enintään $\frac{n+1}{2}$. Jos siis oletamme, että $m \neq n + 1$, niin yhdessä ehdon $n \mid m + 1$ kanssa nyt pätee

$$n \leq m + 1 \leq \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n}{2} + \frac{3}{2}.$$

Tästä seuraa, että $n \leq 3$. Tehtävän viimeistely voidaan nyt tehdä samaan tapaan kuin yllä.

Seuraavana on toinen jaollisuustehtävä, joka on esiintynyt vuonna 2009 Japanin kansallisessa kilpailussa.

Tehtävä

Määritä kaikki kokonaisluvut n, joilla $2^n + n|8^n + n$.

Jaollisuusehdosta saatava epäyhtälö $2^n + n \leq 8^n + n$ pätee tietysti kaikilla n, joten tämä ei auta. Tulee siis tehdä jotain muuta.

Ideana on redusoida lukua $8^n + n$ modulo $2^n + n$, jolloin saadaan toivottavasti pieni jakojäännös, jonka tulee olla 0 modulo $2^n + n$. Tällöin saadaan hyödyllinen epäyhtälö.

Tuumasta toimeen. Yksi tapa toteuttaa idea on seuraava: pätee

$$2^n \equiv -n \pmod{2^n + n},$$

joten kuutioimalla puolittain saadaan

$$8^n \equiv -n^3 \pmod{2^n + n},$$

eli

$$2^n + n|8^n + n^3.$$

Yhdistämällä tämän tietoon $2^n + n|8^n + n$ saadaan

$$2^n + n|n^3 - n.$$

Tämä näyttää jo varsin hyvältä: suurilla luvun n arvoilla pätee $2^n + n > n^3 - n \neq 0$, joten enää tulee tutkia pienet tapaukset. Kysymys kuuluu: kuinka suurilla n epäyhtälö $2^n + n > n^3 - n$ pätee?

On monta tapaa saada jokin sopiva raja. Tässä on yksi niistä: Ehto $2^n+n > n^3-n$ pätee ainakin silloin, kun $2^n \geq n^3$. Huomataan, että väite pätee arvolla $n = 10$, koska

$$2^{10} = 1024 \geq 1000 = 10^3.$$

Jos lukua n kasvatetaan yhdellä, niin 2^n kaksinkertaistuu. Toisaalta luku n^3 enintään kaksinkertaistuu, kun $n \geq 7$:

$$(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1 \leq n^3+3n^2+3n^2+n^2 = n^3+7n^2 \leq n^3+n\cdot n^2 = 2n^3.$$

Siispä induktiolla saadaan todistettua, että $2^n \geq n^3$ pätee kaikilla $n \geq 10$. Täten kaikki tehtävän ratkaisut ovat alle 10, ja nämä voidaan vain käydä käsin läpi. Tätä helpottaa se, että ehto $2^n+n | 8^n+n$ pätee täsmälleen silloin, kun $2^n+n | n^3-n$: luvut muotoa 8^n kasvavat nopeasti melko suuriksi, mutta n^3 kasvaa verrattain hitaasti. Saadaan ratkaisut $n = 1, 2, 4, 6$.

Kommentti: Monesti jaollisuusehdon tullessa vastaan kannattaa ensiksi katsoa, voisiko sen esittää luonnollisesti jossain muussa muodossa. Tässä tehtävässä jaollisuusehdon muotoilu $2^n + n | n^3 - n$ on sekä luonnollinen että hyödyllinen.

12.3 Polynomien arvot ja kertoma

Seuraavana esitetään hyödyllinen tulos polynomien arvojen suuruuden arvioimiseksi. Tulos on intuitiivinen, vaikkakin todistus on aavistuksen tekninen.

Lemma

Olkoon $P(x) = a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Oletetaan, että $a_d > 0$. Kaikilla tarpeeksi suurilla x pätee $0.99 \cdot a_dx^d < P(x) < 1.01 \cdot a_dx^d$.

Lemman vakiot 0.99 ja 1.01 voidaan tietysti korvata vakioilla $1-\epsilon$ ja $1+\epsilon$, missä ϵ on mikä tahansa positiivinen (pieni) luku. Lisäksi vastaava väite on luonnollisesti olemassa, jos $a_d < 0$. Pointtina on, että korkeimman asteen termin kerroin määrää polynomin arvojen kasvunopeuden.

Todistetaan sitten lemma. Ideana on kirjoittaa $P(x) = a_dx^d + \ldots + a_1x + a_0$ muotoon

$$P(x) = a_dx^d\left(1+\frac{a_{d-1}}{a_dx}+\frac{a_{d-2}}{a_dx^2}+\ldots+\frac{a_0}{a_dx^d}\right).$$

Nähdään, että kun x on hyvin suuri, niin suluissa oleva termi tulee olemaan lukujen 0.99 ja 1.01 välillä. Tarkan todistuksen ylärajalle voi todistaa vaikka seuraavasti: Valitaan x niin, että kaikilla $0 \leq i \leq d-1$ pätee

$$\frac{a_i}{a_dx^{d-i}} < \frac{0.01}{d}$$

eli

$$\sqrt[d-i]{\frac{100a_id}{a_d}} < x.$$

Tämä selvästi onnistuu (haluamme siis vain, että x on suurempi kuin jotkin d lukua). Luku x valittiin näin, jotta saadaan seuraava epäyhtälö:

$$\begin{aligned} &1 + \frac{a_{d-1}}{a_d x} + \frac{a_{d-2}}{a_d x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_d x^d} \\ &< 1 + \frac{0.01}{d} + \frac{0.01}{d} + \ldots + \frac{0.01}{d} = 1.01. \end{aligned}$$

Alaraja saadaan aivan vastaavaan tapaan. Yksityiskohdat on hyvä käydä läpi ainakin mielessä.

Käydään sitten läpi esimerkkitehtävä. Tehtävä on esiintynyt Suomen IMO-joukkueen valintakokeessa.

Tehtävä

Määritä kaikki kokonaislukukertoimiset polynomit P, joilla kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee sekä $P(n) > 0$ että

$$P(n!) = (P(n))!.$$

Ratkaisu perustuu oleellisesti ottaen siihen, että yhtälön oikean puolen $P(n)!$ kasvaa huomattavasti nopeammin kuin vasemman puolen $P(n!)$ kaikissa paitsi hyvin pienessä määrässä tapauksia. Lukija voi halutessaan yrittää todistaa tämän polynomille $P(x) = x^2$ ennen kuin lukee ratkaisun.

Olkoon $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$. Kertoimet a_i ovat oletuksen nojalla kokonaislukuja. Lisäksi pätee $a_d > 0$ (miksi?), joten $a_d \geq 1$. Käyttämällä edellistä lemmaa saadaan, että kaikilla tarpeeksi suurilla x pätee

$$0.99 a_d x^d \leq P(x) \leq 1.01 a_d x^d.$$

Yritetään käyttää tätä yhtälön vasemman ja oikean puolen arvioimiseen. Molempien puolien arvioimisessa tulee vastaan sama ongelma: kuinka suuri kertoma $n!$ on? Tähän vastaa seuraava lemma. Lemman antamat ala- ja ylärajat ovat melko huonot, mutta ne kuitenkin riittävät tarkoituksiimme. Tarkempia tuloksia antaa Stirlingin approksimaatio, jonka lukija voi halutessaan etsiä netistä.[48]

Lemma

Kaikilla $n \geq 1$ pätee

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$$

Todistus on varsin helppo: pätee

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1},$$

[48] Stirlingin approksimaatiolle ei kuitenkaan tule usein käyttöä kilpailumatematiikassa, mutta on ehkäpä kiinnostavaa tietää tarkemmin, kuinka suuri $n!$ on. Strilingin approksimaatio käytännössä kertoo, että $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$, missä $e \approx 2.718$ on Eulerin luku. Täten tulon $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ termit ovat tietyssä mielessä keskimäärin $\frac{n}{e}$. Tämä keskiarvo on lukujen $\frac{n}{3}$ ja $\frac{n}{2}$ välissä.

ja

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n.$$

Etsitään nyt luvulle $P(n!)$ yläraja. Koska kaikilla tarpeeksi suurilla n pätee epäyhtälö $P(n) \leq P(n+1)$ (harjoitustehtävä), ja pätee $n! \leq n^n$, niin pätee myös

$$P(n!) \leq P(n^n).$$

Käyttämällä arviota $P(x) < 1.01 \cdot a_d x^d$ saadaan

$$P(n^n) \leq 1.01 \cdot a_d n^{nd}.$$

Etsitään sitten luvulle $P(n)!$ alaraja. Vastaavasti kuin edellä saadaan

$$P(n)! \geq \lfloor 0.99 a_d n^d \rfloor ! \geq 2^{\lfloor 0.99 a_d n^d \rfloor - 1}.$$

Haluamme siis todistaa, että

$$1.01 a_d n^{nd} < 2^{\lfloor 0.99 a_d n^d \rfloor - 1}.$$

Otetaan puolittain 2-kantainen logaritmi ja käytetään logaritmien laskusääntöjä:

$$\log_2(1.01 a_d) + nd \log_2(n) < \lfloor 0.99 a_d n^d \rfloor - 1.$$

Vasen puoli on enintään vaikkapa $n\sqrt{n}$, kun n on suuri (koska $\log_2(1.01 a_d)$ on vakio ja $d \log_2(n)$ kasvaa hitaammin kuin $\sqrt{n}$), ja oikea puoli on vähintään $0.98 a_d n^d$, kun n on suuri. Jos $d \geq 2$, niin epäyhtälö pätee tarpeeksi suurilla n.

Olemme päässeet jo pitkälle: tiedämme, että kaikkien ratkaisujen P asteet ovat enintään 1. Edelliset arviot ovat kuitenkin liian huonoja ratkaisemaan tapauksen $\deg(P) \leq 1$, joten tämä pitää tutkia vielä erikseen. Kirjoitetaan $P(x) = ax + b$. Vakiotapaus on helppo ($b = 1$ tai $b = 2$), joten oletetaan, että $a \geq 1$. Yhtälö

$$P(n!) = P(n)!$$

muuttuu muotoon

$$a \cdot n! + b = (an + b)!.$$

On uskottavaa, että oikea puoli kasvaa nopeammin kuin vasen puoli, jos $a \geq 2$. Tämän saa todistettua vaikkapa seuraavasti: kaikilla tarpeeksi suurilla n pätee

$$(an + b)! \geq (2n + b)! \geq (n + 1)! = (n + 1) \cdot n! > (a + 1) \cdot n! = a \cdot n! + n! > a \cdot n! + b.$$

Olemme taas poissulkeneet suuren määrän polynomeja. Enää on jäljellä tapaus $a = 1$ eli tapaus $P(x) = x + b$. Tutkitaan ensiksi tapaus $b \geq 1$: kuten edellä tällöin saadaan

$$P(n)! = (n + b)! \geq (n + 1)! = (n + 1) \cdot n! = n \cdot n! + n! > n! + b = P(n!)$$

kaikilla suurilla n.

Jos taas $P(x) = x + b$, missä $b < 0$, niin suurilla n pätee

$$P(n)! = (n+b)! \leq (n-1)! < n! + b = P(n!).$$

Ainoa jäljellä oleva tapaus on $b = 0$, ja tämä antaa ratkaisun $P(x) = x$. Kokonaisuudessaan kaikki ratkaisut ovat siis $P(x) = 1$, $P(x) = 2$ ja $P(x) = x$.

Kommentti: Ratkaisussa on melko paljon laskemista, mutta mikään tehdyistä arvioista ei kuitenkaan ole erityisen vaikea, eikä mikään arvioista ole erityisen ”tiukka”. Lähinnä jokaisessa vaiheessa ratkaisua riittää keksiä jokin siedettävän hyvä arvio. Esitetyt epäyhtälöt eivät siis todellakaan ole ainoat tavat saada todistettua halutut väitteet.

12.4 Vaikea esimerkki

Seuraavana esitetään tehtävä, jossa tarvitaan melko vaikeita arvioita. Ratkaisu on hyvin pitkä, ja sen aikana nähdään monia erilaisia tapoja tehdä arvioita. Tehtävä on vuoden 2018 ELMO-kilpailusta.

Tehtävä

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_m$ positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa epänegatiiviset kokonaisluvut b, c ja N, joilla

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n + a_i} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{bn + c} \rfloor$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n > N$.

Summaa neliöjuurilausekkeista voidaan siis arvioida hyvin yhdellä neliöjuurilausekkeella, mikä on melko mielenkiintoista.

On luontevaa yrittää ensin keksiä, mitä luvut b ja c ovat, ja sen jälkeen yrittää todistaa tämän arvauksen toimivuus. Luku N kuvastaa tässä tietysti vain sitä, että tutkitaan vain suuria luvun n arvoja.

Yhtälön vasen puoli on suurilla n karkeasti kokoluokkaa $m \cdot \sqrt{n}$ eli $\sqrt{m^2 n}$. Tämän takia arvaus $b = m^2$ vaikuttaa hyvältä. Tämä on oikeastaan ainoa luvun b arvo, joka voisi mitenkään toimia: Vasenta puolta voidaan arvioida seuraavasti:

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n + a_i} \right\rfloor > \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n + 0} \right\rfloor = \lfloor m\sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{m^2 n} \rfloor > \sqrt{m^2 n} - 1.$$

Yhtälön oikea puoli saadaan vastaavasti arvioitua ylöspäin: isoilla n pätee

$$\lfloor \sqrt{bn + c} \rfloor < \sqrt{bn + c} + 1 < \sqrt{bn + 0.5n} + 1 = \sqrt{(b + 0.5)n} + 1.$$

Nyt nähdään, että mikäli $b \leq m^2 - 1$, niin $\sqrt{(b+0.5)n} + 1 < \sqrt{m^2 n} - 1$ kaikilla suurilla n, mikä on ristiriita. Siispä tulee päteä $b \geq m^2$. Vastaavasti saadaan $b \leq m^2$. Tätä ei osoiteta tässä, koska todistusta ei oikeastaan edes tarvita tehtävän ratkaisemiseksi.

Koitetaan sitten arvata luvun c arvo. Tämä ei ole aivan yhtä helppoa kuin luvun b arvaaminen, koska nyt tarvitaan parempia arvioita neliöjuurilausekkeille. Tähän on kuitenkin yksi kikka, jota voisi yrittää:

Lukujen $k^2, k^2+1, k^2+2, \ldots, k^2+2k+1 = (k+1)^2$ neliöjuuret ovat välillä $[k, k+1]$. Voisi olettaa, että nämä neliöjuuret ovat melko tasaisesti jakautuneita eli että nämä $2k+2$ lukua jakavat välin $[k, k+1]$ suunnilleen yhtä suuriin väleihin, joita on $2k+1$ kappaletta. Voidaan siis arvioida

$$\sqrt{k^2+x} \approx k + \frac{x}{2k+1},$$

kun $0 \leq x \leq 2k+1$.

Tämän avulla voidaan veikata luvun c arvo. Tutkitaan ensin vain tilanteita, joissa n on neliöluku k^2. Nyt

$$\Big\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{k^2+a_i} \Big\rfloor \approx \Big\lfloor \sum_{i=1}^{m} k + \frac{a_i}{2k+1} \Big\rfloor = \Big\lfloor mk + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{2k+1} \Big\rfloor.$$

Vastaavasti saadaan

$$\lfloor \sqrt{bn+c} \rfloor = \lfloor \sqrt{(mk)^2+c} \rfloor \approx \Big\lfloor mk + \frac{c}{2mk+1} \Big\rfloor.$$

Vaikuttaa siis siltä, että veikkaus $c = m(a_1+a_2+\ldots+a_m)$ tai jokin tämäntyylinen toimisi. Edellä esitetyt arviot eivät kuitenkaan ole missään nimessä formaaleja todistuksia, joten tämä veikkaus ei välttämättä edes toimi. Kannattaa siis tutkia jotain erikoistapausta ja sen perusteella tarkistaa, toimiiko arvaus vai pitääkö luvun c arvoa muuttaa.

Huomataan, että jos kaikki luvut a_i ovat yhtä suuria, niin tehty valinta $c = m(a_1+\ldots+a_m)$ todella toimii: tällöin yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria kuin $\lfloor \sqrt{m^2(n+a_1)} \rfloor$. Entä vaikkapa tapaus $m = 2, a_1 = 1$ ja $a_2 = 3$? Tällöin epäyhtälön vasen puoli on $\lfloor \sqrt{n+1} + \sqrt{n+3} \rfloor$ ja oikea puoli on $\lfloor \sqrt{4n+8} \rfloor$.

Ei ole selvää, toimiiko arvaus tässä tapauksessa. Lienee kuitenkin hyödyllistä ratkaista tämä erikoistapaus ennen yleiseen tapaukseen siirtymistä. Miten tämän toimivuus (tai epätoimivuus) todistetaan? Yksi idea on asettaa $\lfloor \sqrt{4n+8} \rfloor = k$, ja toivoa, että pätee myös $\lfloor \sqrt{n+1} + \sqrt{n+3} \rfloor = k$. Pätee siis

$$k \leq \sqrt{4n+8} < k+1,$$

eli neliöinnin ja uudelleenjärjestelyn jälkeen

$$\frac{k^2-8}{4} \leq n < \frac{k^2+2k-7}{4}.$$

Funktio $f(n) = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}$ on kasvava, joten funktion $\lfloor f(n) \rfloor$ arvojen määrittämiseksi riittää tutkia sen arvoja, kun n saa maksimi- ja minimiarvonsa. Tutkitaan ensiksi minimiarvoa, joka on

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{k^2-8}{4}+1} + \sqrt{\frac{k^2-8}{4}+3} \right\rfloor = \Big\lfloor \frac{1}{2}\left(\sqrt{k^2-4} + \sqrt{k^2+4}\right) \Big\rfloor.$$

Tämä on alle $\lfloor 4n+8 \rfloor = k$, eli meillä on ongelma. Huomataan, että n todella saa arvon $\frac{k^2-8}{4}$ äärettömän usein, nimittäin silloin kun $4n+8$ on neliö. Siis veikkaus $c = m(a_1 + \ldots + a_m)$ ei toimi kaikissa tapauksissa.

Kaikki työ ei ole kuitenkaan mennyt hukkaan: Ensinnäkin esimerkki vihjaa pienentämään lukua c hieman, joten voimme seuraavaksi yrittää valita $c = m(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - 1$ (veikkauksemme luvusta c oli kuitenkin vain melko vähän pielessä). Toiseksi saimme idean siitä, miten epäyhtälön voisi todistaa yleisessä tapauksessa. Jos tämäkään luvun c veikkaus ei toimi, niin se tullaan huomaamaan todistusta yrittäessä, ja voimme yrittää keksiä vielä uuden suunnitelman.

Tutkitaan siis yleistä tapausta luvuilla $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Veikkaamme, että valinta $b = m^2$ ja $c = m(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - 1$ toimii. Asetetaan $\lfloor \sqrt{bn+c} \rfloor = k$, eli

$$k \leq \sqrt{bn+c} < k+1.$$

Kuten edellä tästä voidaan ratkaista n:

$$\frac{k^2-c}{b} \leq n < \frac{(k+1)^2-c}{b}.$$

Ja kuten edellä riittää todistaa, että

$$k \leq \Big\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n+a_i} \Big\rfloor < k+1,$$

kun n saa pienimmän ja suurimman arvonsa.

Tutkitaan ensiksi maksimitapausta. Koska n on kokonaisluku, on sen suurin arvo enintään

$$\frac{(k+1)^2-c-1}{b},$$

joten haluamme, että

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{\frac{(k+1)^2-c-1}{b} + a_i} < k+1.$$

Sijoitetaan tähän arvauksen mukaiset lukujen b ja c arvot. Saamme

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{\frac{(k+1)^2 - m(a_1+a_2+\ldots+a_m)}{m^2} + a_i} < k+1$$

eli

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{(k+1)^2 + m^2 a_i - m(a_1+\ldots+a_m)} < (k+1)m.$$

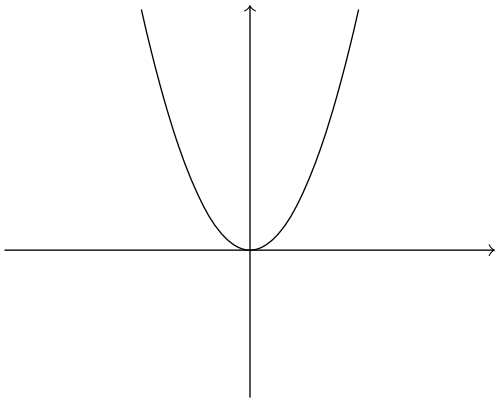
Haluamme siis todistaa ylärajan sille, kuinka suuri summa neliöjuurilausekkeista voi olla.

Apuun tulee Jensenin epäyhtälö. Sen esittämistä varten tarvitaan seuraava määritelmä.

Määritelmä

Funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kutsutaan konveksiksi, jos seuraava ehto pätee: jos funktion f kuvaajalta valitaan mitkä tahansa kaksi pistettä $P_A = (a, f(a))$ ja $P_B = (b, f(b))$, niin kuvaaja kulkee pisteiden P_A ja P_B välillä näiden pisteiden välisen janan alapuolella (tai janan päällä).

Esimerkiksi paraabeli $f(x) = x^2$ on konveksi, koska sen kuvaaja näyttää tältä:



Määritelmä ei tällaisenaan ole vielä kovin käyttökelpoinen. Ehdon voi kuitenkin kirjoittaa muodossa

$$f(ax + b(1 - x)) \leq f(a)x + f(b)(1 - x),$$

missä $0 \leq x \leq 1$ ja a ja b ovat mielivaltaisia. Tämä on vain algebrallinen muoto ehdon graafiselle muodolle. Toinen, käytännössä hyödyllisin muotoilu konveksisuudelle on ehto $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Jensenin epäyhtälö liittyy konvekseihin funktioihin.

Lause (Jensenin epäyhtälö)

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksi funktio. Kaikilla reaaliluvuilla $x_1, x_2, \ldots, x_m$ pätee

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_m)}{m} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}\right).$$

Pari kommenttia epäyhtälöön liittyen: Jos f on ns. aidosti konveksi eli $f''(x) > 0$ kaikilla[49] x, niin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus vain silloin, kun $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$. Lisäksi jos f on konkaavi funktio, eli $f''(x) \leq 0$ kaikilla x, niin epäyhtälö pätee toiseen suuntaan. (Tämän voi todistaa tutkimalla konkaavin funktion f sijasta konveksia funktiota $g(x) = -f(x)$.)

Idea epäyhtälön takana on intuitiivinen. Tutkitaan esimerkiksi tapausta $f(x) = e^x$.

[49] Tätä ehtoa voi oikeastaan vielä lieventää: riittää olettaa, että $f''(x) \geq 0$ kaikilla x ja $f''(x) = 0$ pätee vain yksittäisissä pisteissä. Esimerkiksi funktio $f(x) = x^4$ on aidosti konveksi.

Tällöin $f''(x) = e^x > 0$, eli f on aidosti konveksi. Nyt pätee

$$\frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \geq e^{\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

Jos x_1 on hyvin suuri verrattuna lukuun x_2, niin yhtälön vasen puoli on kokoluokkaa $\frac{1}{2}e^{x_1}$ ja oikea puoli vain kokoluokkaa $e^{x_1/2}$. Termi e^{x_1} on "dominoiva" termi, ja sen jakaminen kahdella vaikuttaa paljon vähemmän kuin eksponentin x_1 jakaminen kahdella. Kun x_1 ja x_2 ovat lähellä toisiaan, tapahtuu vastaava ilmiö, vaikkakin pienemmässä mittakaavassa.

Funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on aidosti konkaavi funktio:

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0.$$

Siispä Jensenin epäyhtälö pätee toiseen suuntaan, ja pätee esimerkiksi

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} \leq \sqrt{\frac{3+5}{2}} = \sqrt{4}.$$

Tämä on luonnollista: mitä isompi luku x on, sitä hitaammin $\sqrt{x}$ kasvaa (tämä on käytännössä konkaaviuden määritelmä, ja neliöjuuren tapauksessa väite käy muutenkin järkeen). Siispä $\sqrt{3}$ on kauempana luvusta $\sqrt{4}$ kuin mitä $\sqrt{4}$ on luvusta $\sqrt{5}$, mistä seuraa edellä esitetty epäyhtälö.

Huomautus: Sovelsimme tässä Jenseniä neliöjuurifunktiolle, vaikka funktio $f(x) = \sqrt{x}$ ei ole määritelty kaikilla reaaliluvuilla. Tämä ei kuitenkaan ole ongelma: Jenseniä saa soveltaa yleisesti tapauksessa, jossa f on määritelty jollain reaalilukujen välillä (kunhan funktio on tällä välillä konveksi tai konkaavi). Tällöin epäyhtälön luvuiksi x_i saa tietysti valita lukuja vain tältä väliltä, eli esimerkiksi neliöjuurifunktiolle tulee valita $x_i \geq 0$. (Miksi näin saadaan tehdä? Esimerkiksi neliöjuurifunktiota voidaan "laajentaa" negatiivisille luvuille niin, että syntynyt funktio on konkaavi, ja tälle funktiolle voidaan soveltaa Jenseniä aivan normaalisti. Toinen perustelu: Jensenin epäyhtälön todistus toimii samaan tapaan funktioille $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuin vaikkapa funktioille $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.)

Palataan tehtävän ratkaisuun. Suoraviivainen Jensenin epäyhtälön soveltaminen antaa arvion

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{i=1}^m \sqrt{(k+1)^2 + m^2 a_i - m(a_1 + \ldots + a_m)}}{m} \\ \leq &\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (k+1)^2 + m^2 a_i - m(a_1 + \ldots + a_m)}{m}} \\ = &\sqrt{(k+1)^2} = k+1. \end{aligned}$$

Haluamme kuitenkin, että summa termeistä $\sqrt{(k+1)^2 + m^2 a_i - m(a_1 + \ldots + a_m)}$ on aidosti pienempää kuin $(k+1)m$. Miten poissuljemme yhtäsuuruustapauksen?

Jensenin epäyhtälön yhteydessä mainittiin, että aidosti konvekseilla tai aidosti konkaaveilla funktioilla epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus vain silloin, kun kaikki luvut, joille epäyhtälöä sovelletaan, ovat samat. Siispä edellä pätee yhtäsuuruus vain silloin, kun kaikki luvut a_i ovat samoja. Tämä on kuitenkin helppo tapaus (jonka käsittelimme jo aiemmin), koska tällöin voidaan valita $c = m(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$. Täten tapaus, joissa kaikki luvut a_i ovat samat, on käsitelty, ja muissa tapauksissa saimme halutun epäyhtälön.

Olemme nyt käsitelleet maksimitapauksen, mutta vielä on tekemättä minimitarkastelu. Haluamme, että

$$k \leq \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n + a_i} \right\rfloor$$

kaikilla käsiteltävillä n. Sijoitetaan luvun n paikalle aiemmin saatu alaraja $\frac{1}{b}(k^2 - c)$ ja sijoitetaan tähän myös luvut b ja c. Edellinen epäyhtälö palautuu väitteeseen

$$km \leq \sum_{i=1}^{m} \sqrt{k^2 + m^2 a_i - m(a_1 + \ldots + a_m) + 1},$$

joka on vastaavan tyyppinen kuin maksimitapauksen yhteydessä saatu epäyhtälö. Tällä kertaa kuitenkin haluamme alarajan neliöjuurien summalle.

Ennen kuin koitetaan todistaa tämä epäyhtälö, katsellaan sitä hieman kauempaa. Epäyhtälö on muotoa

$$km \leq \sum_{i=1}^{m} \sqrt{k^2 + b_i},$$

missä luvut $b_i = m^2 a_i - m(a_1 + \ldots + a_m) + 1$ ovat kokonaislukuja, jotka eivät riipu luvusta k. Osa luvuista b_i voi olla negatiivisia ja osa positiivisia. Lisäksi todetaan, että lukujen summa on m (eli positiivinen), mikä antaa hieman liikkumavaraa.

Meillä on ongelma: Jensenin epäyhtälö antaa neliöjuurien summalle ylärajan muotoa

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{2a + 2b},$$

mutta se ei anna alarajaa.

Haluaisimme ikään kuin soveltaa Jensenin epäyhtälöä toiseen suuntaan neliöjuurille luvuista $k^2 + b_i$. Sellaisenaan epäyhtälö ei tietenkään päde haluttuun suuntaan, mutta ehkä sitä voitaisiin muuttaa hieman halutun epäyhtälön saamiseksi.

Seuraava lemma demonstroi tätä kahdella muuttujalla.

Lemma

Olkoot a ja b reaalilukuja. Kaikilla tarpeeksi suurilla k pätee

$$\sqrt{k^2 + a} + \sqrt{k^2 + b} \geq 2\sqrt{k^2 + \frac{a+b}{2} - 1}.$$

Luku k siis valitaan suureksi verrattuna lukuihin a ja b. Huomaa, että Jensenin epäyhtälön nojalla pätee

$$\sqrt{k^2+a}+\sqrt{k^2+b} \leq 2\sqrt{k^2+\frac{a+b}{2}},$$

eli termi -1 oikean puolen neliöjuuren sisällä on todella tarpeen. Termi -1 voitaisiin oikeastaan korvata millä tahansa negatiivisella vakiolla.

Lemman voi todistaa naiivisti neliöimällä: Haluamme, että

$$(k^2+a)+(k^2+b)+2\sqrt{k^2+a}\sqrt{k^2+b} \geq 4\left(k^2+\frac{a+b}{2}-1\right)$$

eli

$$\sqrt{k^2+a}\sqrt{k^2+b} \geq k^2+\frac{a+b}{2}-2.$$

Neliöidään uudestaan. Saadaan

$$k^4+(a+b)k^2+ab \geq k^4+k^2(a+b-4)+\left(\frac{a+b}{2}-2\right)^2$$

eli

$$4k^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}-2\right)^2-ab.$$

Tämä selvästi pätee suurilla k.

Lemman tulos ei oikeastaan ole yllättävä: Jensenin epäyhtälön antama arvio on varsin hyvä silloin, kun käytetyt luvut x_i ovat lähellä toisiaan. Lemman tuloksessa luvut k^2+a ja k^2+b ovat (suhteessa lukujen kokoon) hyvin lähellä toisiaan, kun k on suuri, ja tällöin

$$\sqrt{k^2+a}+\sqrt{k^2+b} \approx 2\sqrt{k^2+\frac{a+b}{2}} > 2\sqrt{k^2+\frac{a+b}{2}-1}.$$

Lemma ei kuitenkaan itsessään vielä riitä, vaan haluaisimme siitä seuraavan monen muuttujan variantin.

Lemma

Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_m$ reaalilukuja. Kaikilla tarpeeksi suurilla k pätee

$$\sum_{i=1}^{m}\sqrt{k^2+x_i} \geq m\sqrt{k^2+\frac{x_1+\ldots+x_m}{m}-1}.$$

Tämä lemma todistaisi haluamamme väitteen, koska tämän tehtävän tapauksessa lukujen x_i summa on m, joten epäyhtälön oikea puoli on yhtä kuin mk. Lemman todistaminen ei kuitenkaan ole kovin helppoa: naiivi neliöiminen vain lisäisi termien määrää. Seuraavaksi esitettävä ratkaisu vaatiikin jonkin verran töitä.

Epäyhtälön voi kirjoittaa muodossa

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sqrt{k^2 + x_i} - \sqrt{k^2 + A - 1} \right) \geq 0,$$

missä $A = \frac{1}{m}(x_1 + \ldots + x_m)$ on lukujen x_i keskiarvo.

Epäyhtälön todistamista varten haluamme arvioida erotuksia muotoa

$$\sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

Tähän on (ainakin) kaksi tapaa. Ensimmäinen tapa on pieni "jippo": pätee

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}},$$

joka on vain tuttu kaava $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ kirjoitettuna muuttujille $x = \sqrt{b}$ ja $y = \sqrt{a}$. Toinen tapa on arvioida erotusta $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ integraalina

$$\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{x}} dx,$$

kun $a < b$. Tätä integraalia voidaan arvioida yksinkertaisesti toteamalla $\frac{1}{\sqrt{b}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$, joten

$$\frac{2}{\sqrt{b}} \cdot (b-a) \leq \int_a^b \frac{2}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot (b-a).$$

Tässä tapauksessa yhtälö

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

antaa helpomman tavan käsitellä erotuksia (mutta yleisesti integraalimenetelmä voi auttaa, kun selvää jippoa ei ole). Nyt pätee

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sqrt{k^2 + x_i} - \sqrt{k^2 + \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} - 1} \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - A + 1}{\sqrt{k^2 + x_i} + \sqrt{k^2 + A - 1}} \right).$$

Aiomme arvioida positiivisia ja negatiivisia termejä erikseen. Jos $x_i - A + 1 \leq 0$, niin suurilla k pätee $k^2 + x_i \geq (k-1)^2$ ja $k^2 + (A-1) \geq (k-1)^2$, jolloin pätee myös

$$\frac{x_i - A + 1}{\sqrt{k^2 + x_1} + \sqrt{k^2 + A - 1}} \geq \frac{x_i - A + 1}{\sqrt{(k-1)^2} + \sqrt{(k-1)^2}} = \frac{x_i - A + 1}{2k - 2}.$$

Jos $x_i - A + 1 \geq 0$, niin vastaavalla logiikalla pätee

$$\frac{x_i - A + 1}{\sqrt{k^2 + x_1} + \sqrt{k^2 + A - 1}} \geq \frac{x_i - A + 1}{\sqrt{k^2 + 2k + 1} + \sqrt{k^2 + 2k + 1}} = \frac{x_i - A + 1}{2k + 2},$$

kun k on riittävän suuri.

Olkoon S_- summa termeistä muotoa

$$\frac{x_i - A + 1}{\sqrt{k^2 + x_i} + \sqrt{k^2 + A - 1}},$$

missä $x_i - A + 1$ on negatiivinen. Määritellään S_+ vastaavasti. (Termit, joissa $x_i - A + 1$ on nolla, ovat nollia, joten niistä ei tarvitse välittää.)

Nyt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - A + 1}{\sqrt{k^2 + x_i} + \sqrt{k^2 + A - 1}} \right) &= S_+ + S_- \\ \geq \sum_{x_i - A + 1 > 0} \frac{x_i - A + 1}{2k + 2} &+ \sum_{x_i - A + 1 < 0} \frac{x_i - A + 1}{2k - 2}.\end{aligned}$$

Jos S'_- on niiden termien $x_i - A + 1$ summa, joilla $x_i - A + 1 < 0$, ja S'_+ määritellään vastaavasti, niin pätee

$$S_- + S_+ = x_1 + x_2 + \ldots + x_m - Am + m = m,$$

eli $S_- = m - S_+$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}&\sum_{x_i - A + 1 > 0} \frac{x_i - A + 1}{2k + 2} + \sum_{x_i - A + 1 < 0} \frac{x_i - A + 1}{2k - 2} \\ &= \frac{S_+}{2k + 2} + \frac{S_-}{2k - 2} \\ &= \frac{S_+}{2k + 2} + \frac{m - S_+}{2k - 2} \\ &= \frac{m}{2k - 2} - \left(\frac{S_+}{2k - 2} - \frac{S_+}{2k + 2} \right).\end{aligned}$$

Tämä on positiivinen suurilla k. Intuitiivisesti tämä johtuu siitä, että termit $\frac{S_k}{2k-2}$ ja $\frac{S_+}{2k+2}$ ovat hyvin lähellä toisiaan, joten niiden erotus on hyvin pieni verrattuna termiin $\frac{m}{2k-2}$. Tarkemmin väitteen saa todistettua seuraavasti:

$$\begin{aligned}&\frac{m}{2k - 2} - \left(\frac{S_+}{2k - 2} - \frac{S_+}{2k + 2} \right) \\ &= \frac{m}{2k - 2} - \frac{S_+(2k + 2) - S_+(2k - 2)}{(2k - 2)(2k + 2)} \\ &= \frac{m}{2k - 2} - \frac{S_+}{(k - 1)(k + 1)} \\ &= \frac{1}{k - 1} \left(\frac{m}{2} - \frac{S_+}{k + 1} \right).\end{aligned}$$

Tämä puolestaan selvästi on positiivinen suurilla k. Olemme näin ollen valmiit.

Kommentti: Ratkaisu koostui seuraavista osista:

1. Arvataan (oikein) lukujen b ja c arvot.
2. Muutetaan haluttu väite epäyhtälöiksi lattiafunktioyhtälön sijasta.
3. Todistetaan ylärajaa koskeva väite.
4. Todistetaan alarajaa koskeva väite.

Ensimmäinen askel on hyvin luonnollinen, mutta oikean arvauksen tekeminen vaatii varovaisuutta, varsinkin luvun c kohdalla. Ei ole kovin helppoa huomata, että arvaus $c = m(a_1 + \ldots + a_m)$ ei toimi, vaan että tästä tulee vähentää vielä 1. Esitetyssä ratkaisussa tätä käytiin läpi erikoistapauksen kautta, mutta toinen luonnollinen tapa on vain yrittää todistaa väitettä virheellisellä luvun c arvolla ja huomata sen toimimattomuus. Ongelma virheellisellä arvolla tulee yritettäessä todistaa alarajaa, joka näyttää tältä:

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{k^2 + b_i} \geq m\sqrt{k^2 + \frac{b_1 + \ldots + b_m}{m}}.$$

Tämä on Jensen neliöjuurifunktiolle, mutta väärään suuntaan, eli epäyhtälö ei voi päteä (paitsi jos kaikki b_i ovat yhtä suuria). Tästä myös nähdään, että lukua c tulee pienentää hieman, joten on luonnollista yrittää valintaa $c = m(a_1 + \ldots + a_m) - 1$.

Toinen askel on varsin tyypillinen lattiafunktiota sisältävissä ehdoissa: lattiafunktion määritelmähän on $\lfloor x \rfloor = k$ jos ja vain jos $k \leq x < k + 1$. Jossain kohdassa lattiafunktiota koskeva epäyhtälö pitää purkaa auki.

Kolmas askel on suhteellisen helppo, jos tietää etukäteen jotain klassisia epäyhtälöitä. Tässä tapauksessa käytettiin Jensenin epäyhtälöä (joka on yleisesti hyvin käyttökelpoinen epäyhtälö), mutta myös parilla muulla yleisellä epäyhtälöllä saa todistettua väitteen (ks. alla).

Neljäs askel tuotti minulle ratkaisua miettiessäni selvästi eniten vaikeuksia. Todistettava epäyhtälö on hyvin uskottava, mutta toimivan arvion tekeminen ei ole kovin helppoa. Lisätyötä aiheuttaa negatiivisten ja positiivisten lukujen käsittely erikseen. Erilaisten arviointimenetelmien esittelyyn ratkaisu on kuitenkin hyvä.

Summan paloittelu erikseen positiivisiin ja negatiivisiin termeihin on luonnollinen ja yleisestikin usein harkinnanarvoinen idea. Tässä tehtävässä motivaationa toimii seuraava ajatus:[50] Jos $x_i > A + 1$, niin $\sqrt{k^2 + x_i}$ on suurempi kuin $\sqrt{k^2 + A - 1}$, ja haluamme tietää, kuinka paljon suurempi se on (tai ainakin saada jokin alaraja), eli haluamme tietää, kuinka paljon hyödymme tästä termistä x_i. Jos taas $x_i < A + 1$, niin $\sqrt{k^2 + x_i}$ on pienempi kuin $\sqrt{k^2 + A - 1}$, ja haluamme jonkin alarajan näiden termien erotuksen itseisarvolle, jotta tiedämme tästä termistä x_i koituvan haitan.

[50] Tämä on mielestäni ratkaisun kriittinen idea. Idean voi varmastikin toteuttaa monella tavalla.

12.5 Klassiset epäyhtälöt

Usein puhuttaessa epäyhtälöistä kilpailumatematiikan yhteydessä tarkoitetaan ”perinteisiä” epäyhtälöitä: aritmeettis-geometrinen, Cauchy-Schwarz, Hölder, Schur, Jensen, Muirhead, potenssikeskiarvot, Minkowski ja niin edelleen. Puhtaat epäyhtälötehtävät olivat kilpailuissa melko yleisiä vielä vaikkapa pari vuosikymmentä sitten, mutta niiden yleisyys on laskenut vuosien varrella. Yksi selitys tälle on, että epäyhtälöiden ratkaisemiseksi rakennettu kalusto on muuttunut hyvin raskaaksi ja tehokkaaksi, joten on vaikeaa saada hyvää kilpailutehtävää epäyhtälöistä: toisaalta tehtävän ei tulisi vaatia syvällistä epäyhtälöiden osaamista, jotta sen voi ratkaista, toisaalta tehtävän ei tulisi ratketa triviaalisti tunnetuilla (tai hieman vähemmän tunnetuilla) työkaluilla.

Henkilökohtaisesti kilpatehtäviä ratkoessani olen mieltänyt epäyhtälöiden soveltamiseni ennemminkin arvioiden tekemisenä kuin klassisten epäyhtälöiden soveltamisena, mikä heijastuu tämän luvun sisällössä. En väitä, etteikö klassisten epäyhtälöiden osaaminen olisi hyödyksi (päinvastoin, tätä kautta oppii tekemään erilaisia arvioita), mutta minulle on tullut useammin vastaan (esimerkiksi tehtävän osatehtävänä) ongelmia muotoa[51] ”arvio lukujen $n!$ ja $P(n)$ suuruuksia, kun P on polynomi” kuin klassisia epäyhtälöitä muotoa ”Todista, että kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a, b ja c pätee $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$.”[52]

Tässä on esitetty pari yleisintä ja tärkeimpiin kuuluvaa epäyhtälöä. Nämä kannattaa osata hyvin. Esimerkki- ja harjoitustehtäviä löytyy Lisämateriaaleja-luvussa mainitusta epäyhtälömateriaalista.

Lause (Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö)

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja. Pätee

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Yhtälön vasen puoli on lukujen a_i aritmeettinen keskiarvo ja oikea puoli geometrinen keskiarvo, mikä perustelee epäyhtälön nimen.

Yksi lukuisista tavoista todistaa aritmeettis-geometrinen epäyhtälö on käyttää Jensenin epäyhtälöä. Koska a_i on positiivinen kaikilla i, voidaan kirjoittaa $a_i = e^{b_i}$ jollain sopivalla reaaliluvulla b_i (joka voi olla negatiivinen). Epäyhtälö voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\frac{e^{b_1} + e^{b_2} + \ldots + e^{b_n}}{n} \geq e^{\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}},$$

mikä on vain Jensenin epäyhtälö aidosti konveksille funktiolle $f(x) = e^x$. Tästä näemme myös, että yhtäsuuruus pätee vain, jos kaikki luvut b_i ovat yhtä suuria eli

[51] Esimerkkejä tästä löytyy lukuteorian lisätehtävistä (”arvioi summaa $\sum \frac{1}{p^2}$, kun p käy läpi kaikki alkuluvut $p \equiv 1 \pmod 4$” ja ”analysoi lukujonoa, jossa seuraava termi on enintään edellisten keskiarvo plus jokin vakio”) ja algebran lisätehtävistä (”todista epäyhtälö $a_i + \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor \geq b_i + \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor$, kun $a_i \geq b_i$ ja $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_+$” ja ”arvioi polynomin $pf + g$ juurien kokoa”).

[52] Tämä tehtävä on vuoden 2001 IMOn tehtävä 2.

jos $a_1 = \ldots = a_n$.

Tapaus $n = 2$ antaa $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Tämä on varsin helppo epäyhtälö, mutta se antaa kätevän ylärajan kahden luvun tulon koolle (tai vastaavasti alarajan lukujen summalle).

Yleensä aritmeettis-geometrinen epäyhtälö esitetään vielä yhteydessä muihin keskiarvoihin:

Lause (QM-AM-GM-HM)

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja. Pätee

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Yleisemmin pätee, että summa $\sqrt[k]{\frac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{n}}$ kasvaa luvun k kasvaessa. Tämä tunnetaan potenssikeskiarvojen epäyhtälönä. Edellisessä epäyhtälössä QM eli kvadraattinen keskiarvo (engl. quadratic mean) vastaa arvoa $k = 2$, aritmeettinen keskiarvo AM arvoa $k = 1$ ja harmoninen keskiarvo HM arvoa $k = -1$. Geometrinen keskiarvo GM vastaa arvoa $k = 0$. Tämä ei ole ilmeistä, mutta voidaan osoittaa, että kun k lähestyy arvoa 0 (huomaa, että k voi olla myös epäkokonaisluku), niin eksponentin k potenssikeskiarvo lähestyy geometrista keskiarvoa. Potenssikeskiarvojen epäyhtälön voi todistaa Jensenillä vastaavaan tapaan kuin aritmeettis-geometrisen epäyhtälön.

Huomaa, että sijoittamalla $a_1 = \sqrt{b_1}$ saadaan QM-AM-epäyhtälöstä neliöjuurien summalle sama yläraja kuin Jensenillä.

Potenssikeskiarvojen epäyhtälö on esimerkki symmetrisestä polynomiepäyhtälöstä. Toinen voimakas epäyhtälö näihin liittyen on Muirheadin epäyhtälö, joka kertoo esimerkiksi, että epäyhtälö

$$\sum a^7 b^3 c^2 \geq \sum a^6 b^3 c^3$$

pätee kaikilla positiivisilla a, b ja c, missä summat käyvät läpi kaikki $3! = 6$ permutaatioita muuttujista a, b ja c. Täten siis vasen puoli epäyhtälöstä on

$$a^7 b^3 c^2 + a^7 b^2 c^3 + a^3 b^7 c^2 + a^3 b^2 c^7 + a^2 b^7 c^3 + a^2 b^3 c^7.$$

Yleisesti Muirheadin epäyhtälö tiivistää ajatuksen siitä, milloin jotkin symmetriset polynomit ovat suurempia kuin toiset. Tässä eksponentit $7, 3$ ja 2 antavat suuremman lausekkeen kuin eksponentit $6, 3$ ja 3. Epäyhtälön tarkkaa muotoilua varten viitataan jälleen Lisämateriaalit-luvussa mainittuun epäyhtälömateriaaliin.

Viimeisenä mainitaan vielä yksi hyvin tärkeä epäyhtälö.

Lause (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö)

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reaalilukuja. Pätee

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

Huomaa, että luvut a_i ja b_i voivat olla negatiivisia, koska vasemman puolen arvo ei riipu lukujen merkeistä ja oikea puoli voi vain pienentyä, jos jonkin luvun muuttaa positiivisesta negatiiviseksi.

Myös Cauchy-Schwarzin epäyhtälön avulla saa arvion neliöjuurien summalle asettamalla $b_i = 1$ ja $a_i = \sqrt{x_i}$ kaikilla i.

13 Summia (Algebra)

Tässä luvussa käydään lyhyesti läpi, miten erilaisia summia voidaan laskea.

Summa $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ on aritmeettisen lukujonon summa, ja se on $\frac{n(n+1)}{2}$. Entä mitä on $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$? Tai yleisesti $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$?

Osoitetaan, että summa $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ saadaan erään polynomin $P_k(n)$ arvoilla, ja esitetään metodi, jolla tämä polynomi voidaan laskea.

13.1 Teleskooppisumma

Ensimmäinen tehtävä on tunnettu klassikko.

Tehtävä

Laske

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

Ratkaisun ideana on kirjoittaa

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}.$$

Annettu summa muuttuu muotoon

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \ldots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right).$$

Miltei kaikki supistuu pois, ja jäljelle jää $\frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

Käytettyä menetelmää kutsutaan teleskooppisummaksi, koska summa kutistuu kasaan kuten teleskooppi. Menetelmä on kätevä, ja sitä käytetään seuraavassa osiossa.

13.2 Binomikertoimien erotukset

Pascalin identiteetti sanoo, että

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

eli $\binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$.

Ideana on, että summa $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ voidaan esittää binomikertoimien avulla teleskooppisummien kautta. Käydään tätä läpi esimerkkien kautta.

Esimerkki

Lasketaan summa $1 + 2 + \ldots + n$.

Tutkitaan tätä varten erotuksia

$$\binom{m+1}{2} - \binom{m}{2} = \binom{m}{1} = m.$$

Tämän erotuksen aste on 1, kuten Pascalin identiteetin mukaan kuuluukin olla. Käyttäen erotuksia apuna teleskooppisummalla saadaan

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \ldots + n \\
&= \left[\binom{2}{2} - \binom{1}{2}\right] + \left[\binom{3}{2} - \binom{2}{2}\right] + \ldots + \left[\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2}\right] \\
&= -\binom{1}{2} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Tässä käytettiin tietoa siitä, että $\binom{a}{b} = 0$ kaikilla $a < b$.[53]

Esimerkki

Lasketaan summa $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Tutkitaan erotuksia

$$\binom{m+1}{3} - \binom{m}{3} = \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Ratkaistaan tästä termi m^2:

$$m^2 = 2\binom{m+1}{3} - 2\binom{m}{3} + m.$$

Käytetään jälleen teleskooppisummaa:

$$\begin{aligned}
&1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \\
&= \left[2\binom{2}{3} - 2\binom{1}{3} + 1\right] + \left[2\binom{3}{3} - 2\binom{2}{3} + 2\right] + \ldots + \left[2\binom{n+1}{3} - 2\binom{n}{3} + n\right] \\
&= 2\binom{n+1}{3} - 2\binom{1}{3} + 1 + 2 + \ldots + n \\
&= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.
\end{aligned}$$

Usein lopputulos kirjoitetaan vielä tulomuotoon $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Metodi toimii yleisesti vastaavalla tavalla: summan $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ laskemisen askeleet ovat seuraavat.

[53] Tämä on enemmänkin määritelmä kuin varsinainen tulos. Määritelmä ei ole aivan välttämätön: todistuksissa voitaisiin vain olla kirjoittamatta näitä termejä näkyviin, ja kaikki toimisi muuten samalla tavalla.

1. Tutkitaan erotusta $\binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1} = \binom{m}{k}$.

2. Binomikerroin $\binom{m}{k}$ on astetta k oleva polynomi muuttujan m suhteen. Termin m^k kerroin on $\frac{1}{k!}$. Kerrotaan kaikki luvulla $k!$, jolloin saadaan termi m^k kertoimella 1 (sekä pienempiasteisia termejä).

3. Kirjoitetaan summa termeistä $k!\binom{m+1}{k+1} - k!\binom{m}{k}$, missä $m = 1, 2, \ldots, n$. Summa on teleskooppisumma, joten sen arvo on $k!\binom{n+1}{k+1}$. Toisaalta summa on summa termeistä $k!\binom{m}{k}$. Koska $\binom{m}{k}$ on astetta k muuttujan m suhteen, summa termeistä $k!\binom{m}{k}$ koostuu alisummista muotoa $c(1^t + 2^t + \ldots + n^t)$ jollain kertoimella c, missä $0 \leq t \leq k$.

4. Tiedämme alisummat $1^t + 2^t + \ldots + n^t$, kun $t < k$. Siispä saadaan laskettua summa $1^k + 2^k + \ldots + n^k$.

Esimerkiksi summan $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ laskeminen palautuu summien $1 + 2 + \ldots + n$ ja $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ laskemiseen. Lukijalle suositellaan harjoituksena kuutioiden summan laskemista. Lopputulos on varsin sievä.

Menetelmä osoittaa samalla, että summa $1^k + 2^k \ldots + n^k$ on astetta $k + 1$ oleva polynomi $P_k(n)$. Tämän polynomin korkeimman asteen termi on $\frac{n^{k+1}}{k+1}$, joka kertoo summan kasvunopeuden.

13.3 Polynomien arvojen erotukset

Binomikerroin $\binom{x}{k}$ on astetta k oleva polynomi $P(x)$. Edellä todettiin, että erotuksen $P(x+1) - P(x)$ aste on $k - 1$. Tämä pätee yleisestikin.

Lemma

Olkoon $P(x)$ polynomi, ja olkoon $Q(x) = P(x) - P(x-1)$. Tällöin Q on kahden polynomin erotuksena polynomi. Lisäksi pätee $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ (kun P ei ole vakio).

Todistetaan tämä.

Selvästi $\deg(Q) \leq \deg(P)$. Jos $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, niin polynomin $Q(x) = P(x) - P(x-1)$ termin x^n kerroin on $a_n - a_n = 0$. Siis $\deg(Q) \leq \deg(P) - 1$.

Tutkitaan sitten termin x^{n-1} kerrointa. Polynomissa $P(x)$ tämä on a_{n-1}. Polynomissa $P(x-1) = a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \ldots + a_0$ on kaksi tapaa, jolla voidaan muodostaa termi x^{n-1}: Ensimmäinen tapa on termistä $a_{n-1}(x-1)^{n-1}$, josta saadaan kerroin a_{n-1}. Toinen tapa on termistä $a_n(x-1)^n$, josta saadaan kerroin $-a_n \cdot n$. Polynomissa Q termin x^{n-1} kerroin on siis $a_{n-1} - (a_{n-1} - na_n) = na_n$, joka on nollasta eroava.

Esimerkki

Olkoon $P(x) = x^3$. Tällöin $Q(x) = P(x) - P(x-1) = x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$. Kuten edellä todettiin, termin x^3 kerroin supistuu ja termin x^2 kertoimeksi tulee $na_n = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$.

Osoittautuu myös, että mikäli funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ erotukset $f(x) - f(x-1)$ ovat jonkin polynomin arvot, niin myös f on polynomi. Esimerkiksi jos $f(x) - f(x-1)$ on vakiopolynomi, niin f on lineaarinen, ja jos erotukset ovat ensimmäisen asteen polynomin arvot, niin f on toisen asteen polynomi.

Todistuksen idea on karkeasti seuraava: Jos on annettu polynomi $Q(x)$, joka vastaa erotuksia, niin on mahdollista löytää polynomi P, jolla $P(x) - P(x-1) = Q(x)$. Tämä voidaan tehdä valitsemalla yksitellen polynomille P kertoimia aloittaen korkeimman asteen termin kertoimesta.

Enää tulee osoittaa, että kaikki ehdon $f(x) - f(x-1) = Q(x)$ toteuttavat funktiot f ovat polynomeja. Tämä on suoraviivaista: ehdon toteuttavat funktiot ovat yksikäsitteisiä vakiolla lisäämistä vaille, koska arvosta $f(0)$ voidaan määrittää $f(1)$, mistä voidaan määrittää $f(2)$, ja niin edelleen.

Esitetään vielä aiheeseen liittyvä esimerkkitehtävä. Tehtävä on vuoden 2018 ELMO-kilpailun lyhytlistalta.

Tehtävä

Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, joilla pätee

$$a_1 a_2 \cdots a_n \mid (x + a_1) \cdots (x + a_n)$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x.

On annettuna polynomi $P(x) = (x+a_1) \cdots (x+a_n)$, ja tiedämme, että $a_1 \cdots a_n | P(x)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x. Jos määritellään $Q(x) = P(x) - P(x-1)$, niin pätee myös

$$a_1 \cdots a_n | Q(x)$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x. Voimme nyt tutkia polynomin Q erotuksia $Q(x) - Q(x-1)$, ja seuraavaksi voimme tutkia tämän erotuspolynomin erotuksia ja niin edelleen.

Ennen pitkää erotuksista tulee nollapolynomi. Yhtä askelta tätä ennen polynomi on ollut vakio. Mikä vakio? Yllä todistettiin, että mikäli $Q(x) = P(x) - P(x-1)$, niin polynomin Q korkeimman asteen termi on $dc_d x^{d-1}$, kun polynomin P korkeimman asteen termin kerroin on $c_d x^d$. Täten toistuvasti ottamalla erotukset päädytään lopulta vakioon

$$c_d \cdot d \cdot (d-1) \cdot \ldots \cdot 1 = c_d \cdot d!.$$

Tässä tehtävässä $d = n$ ja $c_d = 1$, joten pätee

$$a_1 \cdots a_n | n!$$

Tämä on mahdollista vain silloin, kun luvut a_i ovat pienimmät mahdolliset eli kun $a_i = i$ kaikilla i. Tämä on myös ratkaisu tehtävään, koska

$$\frac{(x+1)\cdots(x+n)}{n!} = \binom{x+n}{n}$$

on kokonaisluku kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x.

13.4 Yhdistelmä polynomeista ja eksponenttifunktioista

Summan $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ laskeminen onnistuu, samoin geometrisen lukujonon summan $1 + q + q^2 + \ldots + q^m$. Myös näiden yhdistäminen onnistuu, eli voidaan laskea summa termeistä $i^k q^i$, kun k ja q ovat vakioita ja $i = 1, 2, \ldots, n$.

Lähtökohtana toimii yhtälö

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Derivoidaan puolittain. Saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} i x^{i-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}.$$

Kertomalla puolittain luvulla x saadaan laskettua summa ix^i. Esimerkiksi

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = 2\Big((n+1)2^n - (2^{n+1} - 1)\Big) = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Derivoimalla summan uudestaan saa laskettua summan

$$\sum_{i=2}^{n} i(i-1)x^{i-2}.$$

Lisäämällä tähän summaan summan termeistä ix^{i-2} saa summan i^2x^{i-2}. Laskut muuttuvat nopeasti melko työläiksi,[54] mutta periaatteessa tällä menetelmällä saa laskettua kaikki summat muotoa $i^k q^i$. Arvon $x = 1$ sijoittaminen ei onnistu suoraan, mutta tämä tapaus vastaa summan $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ laskemista.

Derivointiin perustuva menetelmä ei ole ainoa tapa saada laskettua summia. Toinen idea etenee määrittelemällä

$$S = \sum_{i=0}^{n} ix^i.$$

Näemme, että[55]

$$xS + \sum_{i=1}^{n} x^{i+1} = \sum_{i=1}^{n} (i+1)x^{i+1} = S + (n+1)x^{n+1} - x.$$

[54] Toisaalta yleisen tapauksen kaava sattuu olemaan monimutkainen, joten mekaanisia laskuja tulee välttämättä jonkin verran.

[55] Tämä idea on samanlainen kuin se, jota käytetään geometrisen summan $\sum x^i$ laskemiseksi.

Idea on siis, että $xS + \sum_{i=1}^{n} x^{i+1}$ on suunnilleen S. Tästä saadaan muuttujalle S yhtälö, joka voidaan ratkaista. Samaan tapaan voidaan laskea summa $i^k x^i$, kun tiedetään vastaavat summat $i^m x^i$, missä $0 \leq m < k$.

14 Lineaariset rekursiot (Algebra)

Tässä luvussa esitetään menetelmä lineaarisen rekursioyhtälön ratkaisemiseksi. Esimerkki lineaarisesta rekursiosta on Fibonaccin lukujono $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

14.1 Fibonaccin luvut

Fibonaccin luvut määritellään yhtälöillä $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ja $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ kaikilla $n \geq 0$.

Koitetaan etsiä yleinen kaava Fibonaccin luvuille. Fibonaccin luvut kasvavat suunnilleen eksponentiaalisesti, joten veikataan $F_n = r^n$ kaikilla n, missä r on sopiva vakio. Veikkaus ei tietenkään ole täysin oikea, mutta katsotaan, mihin se johtaa.

Jotta $F_n = r^n$ toimisi, tulee olla $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, eli $r^{n+2} = r^{n+1} + r^n$. Tietysti $r = 0$ toteuttaa yhtälön, mutta tämä ei ole kovin kiinnostavaa. Oletetaan, että $r \neq 0$, jolloin jakamalla puolittain pois r^n saadaan

$$r^2 = r + 1.$$

Tällä yhtälöllä on ratkaisut $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nämä toimivat rekursioyhtälön puolesta, mutta alkuarvot $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$ menevät pieleen.

Kriittiset huomiot ovat seuraavat:

- Jos $F_n = f(n)$ toimii rekursioyhtälön puolesta, niin myös $F_n = c \cdot f(n)$ toimii rekursioyhtälön puolesta kaikilla vakiolla c.
- Jos $F_n = f(n)$ ja $F_n = g(n)$ toimivat rekursioyhtälön puolesta, niin myös $F_n = f(n) + g(n)$ toimii rekursioyhtälön puolesta.

Jälkimmäisellä pointilla tarkoitetaan sitä, että mikäli $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ ja $g(n+2) = g(n+1) + g(n)$ pätevät kaikilla n, niin silloin tietysti $f(n+2) + g(n+2) = (f(n+1) + g(n+1)) + (f(n) + g(n))$ kaikilla n.

Huomioiden seurauksena saadaan seuraava väite:

Olkoot r_1 ja r_2 yhtälön $r^2 = r + 1$ kaksi ratkaisua, ja olkoot c_1 ja c_2 mielivaltaisia vakioita. Tällöin $F_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ toteuttaa rekursioyhtälön $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Enää tulee valita vakiot c_1 ja c_2 niin, että alkuarvot osuvat kohdilleen. Tällöin sekä alkuarvot että rekursioyhtälöt menevät oikein ja olemme valmiit.

Haluamme siis, että $F_0 = 0 = c_1 a_1^0 + c_2 a_2^0 = c_1 + c_2$ ja että $F_1 = 1 = c_1 r_1 + c_2 r_2$. Tästä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1. \end{cases}$$

Luvut r_1 ja r_2 ovat $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Sijoitetaan ne paikoilleen, ja ratkotaan yhtälöpari. Saadaan ratkaisu

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

eli

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Kuten aiemmin todettiin, tämä toteuttaa sekä alkuarvoehdot että rekursioyhtälön, joten olemme valmiit.

14.2 Yleinen tapaus

Määritellään ensiksi, mitä tarkoitetaan lineaarisella rekursiolla.

Määritelmä

Olkoon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ lukujono. Sanotaan, että luvut $a_0, a_1, \ldots$ muodostavat lineaarisen rekursion, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku k ja luvut $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ niin, että

$$a_{n+k} = a_n b_0 + a_{n+1} b_1 + \ldots + a_{n+k-1} b_{k-1}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 0$.

Määritellään samalla lineaarisen rekursion karakteristinen polynomi.

Määritelmä

Olkoon $a_0, a_1, \ldots$ lineaarinen rekursio, ja olkoot $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ kuten edellä. Lukujonon $a_0, a_1, \ldots$ karakteristinen polynomi on

$$P(x) = x^k - b_{k-1}x^{k-1} - b_{k-2}x^{k-2} - \ldots - b_1 x - b_0.$$

Esimerkki

Fibonaccin lukujonon $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ karakteristinen polynomi on $x^2 - x - 1$.

Fibonaccin lukujonon ratkaisun yhteydessä karakteristisen polynomin nollakohdat antoivat sellaiset luvut r_1 ja r_2, että $F_n = r_i^n$ toteuttaa Fibonaccin lukujen rekursioyhtälön. Karakteristisen polynomin määritelmä on valittu niin, että näin käy yleisestikin.

Yleinen tapaus toimii siis käytännössä samalla tavalla: Veikataan, että

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \ldots + c_k r_k^n,$$

missä $r_1, \ldots, r_k$ ovat karakteristisen polynomin nollakohdat ja $c_1, \ldots, c_k$ ovat joitain vakioita. Tällöin a_n toteuttaa halutun rekursioyhtälön, jolloin enää tulee valita luvut c_i siten, että alkuarvot osuvat kohdalleen. Saamme yhtälöryhmän, jossa on k

yhtälöä ja k muuttujaa, joten sillä on ratkaisu.[56] Tässä päättelyssä jätettiin kuitenkin huomioimatta kaksin- ja moninkertaiset nollakohdat, joihin keskitytään seuraavaksi.

14.3 Kaksinkertainen nollakohta

Tutkitaan rekursiota $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ (ei kiinnitetä huomiota alkuarvoihin). Karakteristinen polynomi on $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Tällä on vain yksi nollakohta $x = 2$. Mitä tapahtuu?

Jos jatkamme kuten edellä, saisimme $a_n = c_1 2^n + c_2 2^n$ sopivilla vakioilla c_1 ja c_2, eli $a_n = c2^n$. Kaikki ratkaisut eivät kuitenkaan ole tätä muotoa: Valitaan $a_0 = 0$ ja $a_1 = 1$. Jos $a_n = c2^n$, tulisi ehdon $a_0 = 0$ vuoksi olla $c = 0$, mutta tällöin $a_n = 0$ kaikilla n.

Kaksinkertaiset nollakohdat käyttäytyvät eri tavalla kuin yksinkertaiset. Huomataan, että $a_n = n2^n$ toteuttaa rekursioyhtälön:

$$(n+2)2^{n+2} = (4n+8)2^n = (8n+8)2^n - 4n2^n = 4(n+1)2^{n+1} - 4n2^n.$$

Siispä yleisesti $a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n$ on ratkaisu rekursioyhtälöön. Olivat alkuarvot a_0 ja a_1 mitkä tahansa, niin yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} c_1 = a_0 \\ 2c_1 + 2c_2 = a_1 \end{cases}$$

on ratkaisu.

Yleisen lineaarisen rekursioyhtälön ratkaisun toimintamekanismin kertoo seuraava lause.

Lause (Yleisen lineaarisen rekursioyhtälön ratkaisu)

Olkoon $a_0, a_1, \ldots$ lineaarisesti rekursiivinen lukujono, jonka karakteristinen polynomi on P. Olkoot $r_1, r_2, \ldots, r_m$ kaikki P:n erisuuret juuret, ja olkoot niiden kertaluvut $e_1, e_2, \ldots, e_m$. On olemassa polynomit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, joilla

$$a_n = Q_1(n)r_1^n + Q_2(n)r_2^n + \ldots + Q_m(n)r_m^n.$$

Lisäksi näillä Q_i pätee ehto $\deg(Q_i) < e_i$.

Lauseen todistus sivuutetaan.

14.4 Esimerkkejä

Esitetään neljä esimerkkiä edeten helposta vaikeaan.

[56] Vielä tulisi perustella, että tämän yhtälöryhmän yhtälöt ovat lineaarisesti riippumattomia. Aiheen tarkka käsittely kuitenkin sivuutetaan.

Tehtävä

Olkoot $a_0 = 0$, $a_1 = 5$ ja $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 6a_n$. Määritä yleinen lauseke termille a_n.

Ratkaisut muotoa r^n saadaan karakteristisen polynomin $x^2 - 7x + 6$ nollakohdista: ratkaisut ovat $x = 1$ ja $x = 6$. Siis vakiofunktio 1^n toteuttaa rekursioyhtälön, kuten myös eksponenttifunktio 6^n. Yleinen ratkaisu lukujonolle onkin

$$a_n = x6^n + y1^n = x6^n + y,$$

missä x ja y ovat joitain vakioita. Tässä tapauksessa halutaan, että $a_0 = 0$ ja $a_1 = 5$, joten

$$0 = a_0 = x6^0 + y = x + y$$

ja

$$5 = a_1 = x6^1 + y = 6x + y.$$

Tällä yhtälöparilla on yksikäsitteinen ratkaisu $x = 1$, $y = -1$. Siis lauseke termille a_n on

$$a_n = 6^n - 1.$$

Ratkaisun toimivuuden voi vielä tarkistaa helpolla induktiolla.

Tehtävä

Olkoon $n \geq 0$ kokonaisluku, Osoita, että

$$2^n \mid \lceil (3 + \sqrt{5})^n \rceil$$

(Kattofunktio $\lceil x \rceil$ kuvaa pienintä kokonaislukua, joka on vähintään x.)

Tätä tehtävää on vaikea lähestyä, ellei ole nähnyt vastaavaa aiemmin. On kuitenkin kaksi ideaa, jotka voivat tulla mieleen:

1. Kerrotaan luku $(3 + \sqrt{5})^n$ auki binomilauseen avulla:

$$(3 + \sqrt{5})^n = 3^n + \binom{n}{1} 3^{n-1}\sqrt{5} + \binom{n}{2} 3^{n-2}5 + \ldots + \sqrt{5}^n.$$

   Joka toinen termi on kokonaisluku ja joka toinen on muotoa $k\sqrt{5}$ kokonaisluvulla k. Muotoa $k\sqrt{5}$ olevat termit voisi koittaa saada kumottua tutkimalla summaa $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$. Tämä toimii: lopputulos on kokonaisluku. Huomataan, että tämä kokonaisluku on se, jonka haluamme: $0 < (3 - \sqrt{5})^n < 1$, eli $\lceil (3 + \sqrt{5})^n \rceil = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$.

2. Muistetaan, että vaikkapa Fibonaccin lukujonon yleisen termin lausekkeessa on muotoa r^n olevien termien erotus ja että erotus jaettuna luvulla $\sqrt{5}$ on kokonaisluku F_n. Erotuksessa toinen termeistä r^n, siis $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$, on hyvin pieni. Tämä kertoo, että luku $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ on lähellä kokonaislukua suurilla luvun n arvoilla. Voisiko lineaarisia rekursioita hyödyntää tässä tehtävässä?

Edellisten ideoiden innoittamana yksi idea ratkaisuun voisi olla seuraava: muodostetaan lukujono a_n, jonka yleinen jäsen on suunnilleen $(3+\sqrt{5})^n$, ja tutkitaan tämän lukujonon jäsenten jaollisuutta luvulla 2^n.

Lukujonon karakteristinen polynomi x^2+ax+b kannattaisi valita niin, että sillä on nollakohdat $3\pm\sqrt{5}$. Kertomalla auki $(x-(3+\sqrt{5}))(x-(3-\sqrt{5}))$ saadaan polynomi x^2-6x+4. Idean 1 perusteella on luontevaa valita lukujonon alkuarvot niin, että yleinen termi on täsmälleen luvut muotoa $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$. Alkuarvoiksi tulee tällöin $a_0=2$ ja $a_1=6$.

Saadaan siis rekursioyhtälö $a_{n+2}=6a_{n+1}-4a_n$ alkuarvoilla $a_0=2$ ja $a_1=6$. Nyt on hyvin helppoa osoittaa induktiolla, että $2^n \mid a_n$. Tämä todistaa väitteen.

Seuraava tehtävä on esiintynyt vuoden 2018 tammikuun valmennustehtävissä.

Tehtävä

Määritellään $a_0=a_1=3$ ja $a_{n+1}=7a_n-a_{n-1}$ jokaisella $n\in\mathbb{Z}_+$. Osoita, että a_n-2 on neliöluku jokaisella $n\in\mathbb{Z}_+$.

Luonnollinen ensimmäinen askel on listata muutama ensimmäinen arvo. Saadaan $a_2=18$, $a_3=123$ ja $a_4=843$. Tutkitaan sitten, minkä lukujen neliöitä luvut a_n-2 ovat: merkitään näitä lukuja merkinnöillä b_n. Lukujonon $b_0,b_1,\ldots$ ensimmäiset termit ovat siis $1,1,4,11,29$. Pienellä mielikuvituksella (ja tarvittaessa laskemalla vielä lisää termejä) tästä näkee rekursion $b_{n+1}=3b_n-b_{n-1}$, paitsi kun $n=1$. Tapaus $n=1$ voidaan kuitenkin korjata valitsemalla $b_0=-1$, jolloin $a_0-2=b_0^2$ pätee edelleen ja $b_2=3b_1-b_0$.

Meillä on nyt arvaus siitä, mitä luvut $\sqrt{a_0-2}$ ovat: jonkin lineaarisesti rekursiivisen lukujonon jäsenet. Miten tämä todistetaan? Luonnollinen idea olisi käyttää induktiota. (Väite onkin mahdollista todistaa induktiolla, mutta tämä ei ole aivan suoraviivaista.) Tässä esitetään kuitenkin toisenlainen ratkaisu, joka ei vaadi minkäänlaista luovuutta. Ideana on yksinkertaisesti määrittää yleinen lauseke lukujonojen a_n ja b_n termeille, ja todistaa väite siitä.

Ennen kuin edetään pidemmälle voidaan jopa todeta, että tämä ratkaisu tulee toimimaan. Tiedämme nimittäin jo etukäteen, että jonon a_n termit saadaan suoraan kaavalla muotoa

$$a_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n,$$

missä c_1 ja c_2 ovat sopivia vakiota ja r_1 ja r_2 ovat lukujonon a_n karakteristisen polynomin x^2-7x+1 nollakohdat (huomaa, että nollakohdat eivät ole kaksinkertaisia). Vastaavasti saadaan

$$b_n=d_1s_1^n+d_2s_2^n$$

sopivilla vakiolla d_1,d_2,s_1 ja s_2. Todistettavaan väitteeseen

$$a_n-2=b_n^2$$

voidaan sijoittaa edellä saadut lausekkeet luvuille a_n ja b_n, ja tämän jälkeen termi b_n^2 voidaan kertoa auki. Miltä jäljelle jäävä yhtälö näyttää? Se koostuu termeistä

muotoa $a \cdot q^n$, joita summaamalla saadaan 0:

$$\sum a_i \cdot q_i^n = 0.$$

Kuinka vaikeaa tällaisen yhtälön todistaminen voi olla? Vastaus: yhtälön todistamiseksi riittää vain sieventää se. Oletetaan nimittäin, että yhtälö on sievennetyssä muodossa, eli oletetaan, että $q_i \neq q_j$ kaikilla $i \neq j$ ja kaikki a_i ovat nollasta eroavia. Pointtina on, että se summan termeistä $a_i \cdot q_i^n$, jolla $|q_i|$ on isoin, tulee "dominoimaan" summaa, eli se määrää summan kasvunopeuden. Esimerkiksi summassa $3^n - 100 \cdot 2^n$ termi 3^n tulee dominoimaan ennen pitkää. Summan tulee kuitenkin olla 0, mikä tarkoittaa, että dominoivaa termiä ei ole ja että sievennetyssä muodossa on 0 termiä.[57]

Enää jäljelle jää laskeminen. Edellä kuvailtujen vakioiden $c_1, c_2, r_1, r_2, d_1, d_2, s_1$ ja s_2 laskeminen ei ole vaikeaa (vaikkakin se on hieman työlästä), joten esitetään vain vastaukset: pätee

$$a_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ja

$$b_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Koska lausekkeet ovat melko ikäviä, käytetään vielä hetken aikaa eksplisiittisten esitysten sijasta kirjaimia.

Tutkitaan yhtälöä $a_n - 2 = b_n^2$. Tämä muuttuu muotoon

$$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n - 2 = d_1^2 (s_1^2)^n + 2 d_1 d_2 (s_1 s_2)^n + d_2^2 (s_2^2)^n,$$

missä oikealla puolella on kerrottu neliö $(d_1 s_1^n + d_2 s_2^n)^2$ auki. Yritetään sieventää tätä hillitysti: emme halua sijoittaa kaikkien muuttujien paikoille niiden arvoja, koska laskeminen muuttuisi ikäväksi.

Kuten aiemmin todettiin, yhtälön todistamiseksi riittää vain sen sieventäminen. Siispä termien q^n kantalukujen q pitäisi olla samoja yhtälön molemmilla puolilla.

Tästä motivoituneena tehdään seuraavat havainnot: Pätee

$$s_1^2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2},$$

joka on yhtä suuri kuin r_1. Lisäksi kertoimet ovat oikeat:

$$d_1^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = c_1.$$

[57] Esimerkiksi summan $2^n + (-2)^n$ analysoinnissa tulee olla hieman varovaisempi, koska tämä on nolla parittomilla n. Ei ole vaikeaa todistaa (käymällä läpi pari tapausta), että väite pätee kuitenkin myös tässä tilanteessa.

Täten termit $c_1 r_1^n$ ja $d_1^2 (s_1^2)^n$ kumoavat toisensa. Vastaavasti nähdään, että termit $c_2 r_2^n$ ja $d_2^2 (s_2^2)^n$ kumoavat toisensa. Todistettavana on enää yhtälö

$$-2 = 2 d_1 d_2 (s_1 s_2)^n.$$

Jotta tämä pätisi kaikilla n, tulee päteä $s_1 s_2 = 1$. Ja niin päteekin:

$$s_1 s_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

joka saadaan sievennettyä (käyttämällä yhtälöä $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$) muotoon

$$\frac{3^2 - 5}{2^2} = 1,$$

joka on mitä haluttiinkin. Väite $s_1 s_2 = 1$ seuraa myös käyttämällä Vietan kaavoja lukujonon b_n karakteristiselle polynomille $x^2 - 3x + 1$.

Vielä lopuksi todetaan, että $d_1 d_2 = -1$, ja ratkaisu on valmis: kaikilla n pätee $a_n - 2 = b_n^2$, eli $a_n - 2$ on aina kokonaisluvun b_n neliö. Kuten alussa mainittiin, yhtälön $a_n - 2 = b_n^2$ todistamiseksi riitti helpot sievennykset.

Yleisesti ennen kuin lähtee ratkaisemaan tehtävää paljon manuaalisia laskuja vaativalla tavalla, on hyvä vakuuttua siitä, että ratkaisu todella tulee toimimaan.

Viimeinen tehtävä on myös esiintynyt valmennustehtävänä.

Tehtävä

Selvitä joukon $\{1, 2, \ldots, 2000\}$ niiden osajoukkojen lukumäärä, joiden sisältämien lukujen summa on viidellä jaollinen.

Tutkitaan ensin mitä tapahtuu, jos 5 korvataankin jollain muulla luvulla, koska yksinkertaisemman tapauksen tarkastelu varmaankin auttaa tehtävää ratkoessa. Tutkitaan yleisesti joukkoa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Tapaus 1: Yhdellä jaollisuus. Tällöin osajoukkojen määrä on 2^n joukon koon ollessa n.

Tapaus 2: Kahdella jaollisuus. Osoitetaan, että tasan puolet osajoukoista ovat sellaisia, joissa osajoukon alkioiden summa on parillinen. Valitaan jokin osajoukko X. Jos $1 \in X$, muodostetaan joukko X' poistamalla joukosta X alkio 1. Tällöin joukon X' alkioiden summan parillisuus on eri kuin joukon X. Vastaavasti jos $1 \notin X$, muodostetaan X' lisäämällä joukkoon X alkio 1. Näin saadaan muodostettua osajoukoista pareja, joiden alkioilla on eri summat modulo 2. Tämä osoittaa väitteen.

Tapaus 3: Kolmella jaollisuus. Nyt ongelmaksi tulee se, ettei kohdan 2 kaltaista yksinkertaista paritusta voida tehdä. Ideaa voi kuitenkin jalostaa. Valitaan jokin joukon $\{4, 5, \ldots, n\}$ osajoukko X. Voimme luoda tästä 8 erilaista joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkoa sen mukaan, mitä alkioita joukosta $\{1, 2, 3\}$ lisätään joukkoon X.

Eri valinnat muuttavat joukon X alkioiden summaa eri tavalla modulo 3. On neljä vaihtoehtoa, jotka eivät muuta summaa: ei lisätä mitään, lisätään 1 ja 2, lisätään 3

ja lisätään 1, 2 ja 3. Vastaavasti voidaan käsitellä muita tapauksia. Tästä voidaan rakentaa rekursioyhtälöitä.

Tutkitaan sitten viidellä jaollisuutta. Tapauksen 3 idea voisi soveltua tähänkin tapaukseen. Idea on siis seuraava: Oletetaan, että arvolla $n = k$ tiedetään, kuinka monta sellaista joukon $\{1, 2, \ldots, k\}$ osajoukkoa on, joiden alkioiden summa on $0 \pmod 5, 1 \pmod 5, \ldots, 4 \pmod 5$. Tällöin vastaavat tiedot saadaan ratkaistua arvolle $n = k + 5$.

Kiinnostavinta on tutkia vain viidellä jaollisten joukkojen kokoa. Merkitään $5n$-kokoisen joukon $\{1, 2, \ldots, 5n\}$ niiden osajoukkojen määrää, joiden alkioiden summa on $0 \pmod 5$, luvulla a_n. Määritellään vastaavasti lukujonot b_n, c_n, d_n ja e_n jakojäännöksille $1, 2, 3$ ja 4.

Intuitio sanoo, että jäännökset 1 ja 4 eivät juurikaan poikkea toisistaan; ne ovat ikään kuin toistensa komplementteja. Tämä on helppo muotoilla ja todistaa formaalisti: Olkoon X joukko, jonka alkioiden summa $S(X)$ on $1 \pmod 5$. Tällöin X:n komplementin, eli niiden $y \in \{1, 2, \ldots 5n\}$ joukko, joilla $y \notin X$, alkioiden summa on $1 + 2 + \ldots + 5n - S(X) = \frac{5n(5n+1)}{2} - S(X) \equiv 4 \pmod 5$. Tämä osoittaa, että $b_n \leq e_n$ kaikilla n. Vastaavasti saadaan $e_n \leq b_n$, joten $e_n = b_n$.[58] Samoin todistetaan, että $c_n = d_n$ kaikilla n.

Ongelma on nyt palautettu kolmeen lukujonoon viiden sijasta, mikä on hyvää edistystä. Muodostetaan sitten rekursioyhtälöt.[59]

Käyttämällä tapauksen 3 ideaa saadaan siis seuraava rekursioyhtälö:

$$a_{n+1} = a_1 a_n + e_1 b_n + d_1 c_n + c_1 d_n + b_1 e_n.$$

Lyhyt perustelu, joka on kuin edellä: Valitaan jokin joukon $\{6, 7, \ldots, 5(n+1)\}$ osajoukko X. Jos $S(X) \equiv 0 \pmod 5$, voidaan joukkoa X täydentää a_1 tavalla. Jos $S(X) \equiv 1 \pmod 5$, niin täydentäminen voidaan tehdä e_1 tavalla, ja niin edelleen.

Pieni laskeminen antaa $a_1 = 8$ ja $b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = 6$. Käyttämällä vielä ehtoja $e_n = b_n$ ja $d_n = c_n$ saadaan

$$a_{n+1} = 8a_n + 12b_n + 12c_n.$$

Vastaavasti saadaan

$$b_{n+1} = 6a_n + 14b_n + 12c_n$$

ja

$$c_{n+1} = 6a_n + 12b_n + 14c_n.$$

Nyt on triviaalia osoittaa induktiolla, että $b_n = c_n$ kaikilla n. Ongelma redusoituu enää kahteen lukujonoon, eli tutkittavina ovat nyt yhtälöt

$$a_{n+1} = 8a_n + 24b_n$$

[58] Teimme siis samankaltaisen parituksen kuin mitä käytettiin ongelman varianttiin, jossa käsiteltiin osajoukkojen alkioiden summien parillisuuksia.

[59] Rekursioyhtälöt olisi voinut muodostaa myös ennen kuin todistaa $b_n = e_n$. Lisäksi rekursioyhtälöistä näkisi suoraan, että $b_n = e_n$ pätee kaikilla n.

ja

$$b_{n+1} = 6a_n + 26b_n.$$

Nyt ei ole ilmeistä, miten jatkaa. Kyseessä on lineaaristen rekursioiden ja yhtälöparin yhdistelmä. Kuten lineaarisissa yhtälöpareissa voisi tässäkin kuvitella olevan mahdollista eliminoida toinen muuttuja (eli lukujono), jolloin ongelma palautuu yhden lukujonon tutkimiseen. Yksi tapa tähän on toistuva sijoittaminen:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \\ &= 8a_n + 24b_n \\ &= 8a_n + 24(6a_{n-1} + 26b_{n-1}) \\ &= 8a_n + 24(6a_{n-1} + 26(6a_{n-2} + 26b_{n-2})) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lopputulos on jotain kauheaa, mutta ideana on, että kyseessä on jokin summa termeistä a_i. Lisäksi summan kertoimet vaikuttavat olevan likimain jonkin geometrisen lukujonon jäsenet. Jos kertoimet muodostaisivat geometrisen lukujonon, jonka suhdevakio on c, olisi erotuksen $a_{n+1} - ca_n$ tutkiminen hyödyllistä: tällöinhän miltei kaikki supistuisi pois. Nyt tilanne ei tunnu olevan aivan otollisin tälle, mutta yritetään silti:

$$a_{n+1} - ca_n = (8a_n + 24b_n) - ca_n = (8 - c)a_n + 24b_n.$$

Vielä ei saatu mitään hyödyllistä, joten jatketaan iterointia:

$$a_{n+1} - ca_n = (8 - c)(8a_{n-1} + 24b_{n-1}) + 24(6a_{n-1} + 26b_{n-1}).$$

Luku c halutaan valita niin, että termi b_{n-1} supistuu pois. Tämä onnistuu, kun $24(8 - c) + 24 \cdot 26 = 0$ eli kun $c = 34$. Tällöin saadaan

$$a_{n+1} - 34a_n = 64a_{n-1}.$$

Tämä on tavallinen lineaarinen rekursioyhtälö, joka osataan ratkaista. Alkuarvo $a_1 = 8$ on tiedossa. Lisäksi voidaan ajatella, että $a_0 = 1$, jolloin saadaan ratkaisu:

$$a_n = \frac{2^{n+2} + 2^{5n}}{5}.$$

Arvolla $n = 400$ saadaan tehtävän ratkaisu $\frac{2^{402}+2^{2000}}{5}$. Vastaus on oikeaa kokoluokkaa, onhan $a_n \approx b_n = c_n = d_n = e_n \approx \frac{2^{2000}}{5}$. Summa $0 \pmod 5$ sattuu olemaan muita hieman yleisempi.

Edellinen esimerkki näytti, että lineaarisesti rekursiivisten lukujonojen yhtälöpari voidaan ratkaista. Yleisesti ongelmia voi yrittää palauttaa yhden lineaarisesti rekursiivisen lukujonon tapaukseen. Joissakin tapauksissa muuttujanvaihto voi olla hyödyllinen, kuten esimerkiksi rekursioyhtälössä $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$.

15 Funktionaaliyhtälöt (Algebra)

Tässä luvussa käydään läpi funktionaaliyhtälötehtäviä sekä yleisimpiä ratkaisuideoita.

Tavallisin funktionaaliyhtälötehtävä on seuraavanlainen: on annettu yhtälö, ja haluamme määrittää kaikki funktiot, jotka toteuttavat annetun yhtälön. Tässä on yksinkertainen esimerkkitehtävä.

Tehtävä

Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$f(x) - f(y) = x - y$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Ratkaisu: Olkoon f jokin funktio, joka toteuttaa ehdot. Pyritään saamaan tietoa funktiosta f. Yhtälö $f(x) - f(y) = x - y$ toteutuu kaikilla luvuilla x ja y, joten se toteutuu arvolla $y = 0$. Siispä $f(x) - f(0) = x - 0$, eli

$$f(x) = x + f(0).$$

Luku x on mielivaltainen, eli $f(x)$ on yleisesti muotoa $x + c$ jollain vakiolla c. Miten voimme määrittää tämän c? Emme mitenkään, koska kaikki tätä muotoa olevat funktiot ovat ratkaisuja:

$$f(x) - f(y) = (x + c) - (y + c) = x - y.$$

Siis vastaus tehtävään on: kaikki funktiot muotoa $x + c$, missä c on jokin reaaliluku.

Funktionaaliyhtälötehtävissä on kaksi osaa:

1. Osoitetaan, että kaikkien ehdot toteuttavien funktioiden tulee olla tiettyä muotoa. Esimerkiksi edellisessä tehtävässä todistettiin, että ehdon toteuttavien f tulee olla muotoa $x + c$.
2. Osoitetaan, että nämä tiettyä muotoa olevat funktiot todella olevat ratkaisuja. Esimerkiksi edellisessä tehtävässä tarkistettiin, että muotoa $x+c$ olevat funktiot todella toteuttavat alkuperäisen ehdon.

Osa 2 on vain rutiininomaista laskemista, ja tehtävien vaikeus perustuu osan 1 vaikeuteen.

Funktionaaliyhtälöt ovat melko yleisiä kilpailutehtävissä. Yksi syy tälle on, että funktionaaliyhtälöihin on hyvin vähän yleistä teoriaa – ennemminkin on yleisiä temppuja, joita voi yrittää soveltaa. Tämä näkyy tämän luvun sisällössä.

15.1 Cauchyn funktionaaliyhtälö

Cauchyn funktionaaliyhtälö on ehkäpä ainoa teoriaa muistuttava asia, jota funktionaaliyhtälöistä voi sanoa. Se on hyvä pitää mielessä.

Cauchyn funktionaaliyhtälöksi kutsutaan funktionaaliyhtälöä

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Yleensä oletetaan, että $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esitetään ensiksi ratkaisu rationaaliluvuille.

Osoitetaan, että $f(x) = cx$ kaikilla x, missä c on sopiva vakio. Selvästi tätä muotoa olevat funktiot ovat ratkaisuja (osa 2), joten osoitetaan, että kaikki ratkaisut ovat tätä muotoa (osa 1).

Ensinnäkin $f(0+0) = f(0) + f(0)$, eli $f(0) = 0$. Sijoitetaan $x = y = 1$, saadaan $f(2) = 2f(1)$. Sijoittamalla $x = 2, y = 1$ saadaan $f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$. Sijoittamalla $x = 3, y = 1$ saadaan $f(4) = f(3) + f(1) = 4f(1)$. Yleisesti induktiolla saadaan $f(n) = nf(1)$, kun n on positiivinen kokonaisluku.

Sijoituksella $y = -x$ saadaan $f(0) = f(x) + f(-x)$, eli $f(-x) = -f(x)$. Täten $f(-n) = -f(n) = -nf(1)$, kun n on positiivinen kokonaisluku. Siis $f(k) = kf(1)$ kaikilla kokonaisluvuilla k.

Valitaan sitten jokin rationaaliluku $\frac{p}{q}$, ja pyritään osoittamaan, että $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$. Oletetaan, että $q > 0$.

Induktiolla nähdään, että $f(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ kaikilla rationaaliluvuilla x_i. Siispä

$$\begin{aligned} pf(1) = f(p) &= f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) \\ &= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}\right) \\ &= f\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right) + \ldots + f\left(\frac{p}{q}\right) \\ &= qf\left(\frac{p}{q}\right). \end{aligned}$$

Täten $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$, ja olemme valmiit.

Reaalilukujen tapaus eroaa merkittävästi rationaalilukujen tapauksesta. Vastaavasti kuin rationaalilukujen tapauksessa saadaan $f(r) = rf(1)$ kaikilla $r \in \mathbb{Q}$. Matka päättyy tähän: miten ihmeessä saadaan käsiteltyä irrationaalilukuja? Miten saadaan määritettyä vaikkapa $f(\sqrt{2})$? Vastaus: ei mitenkään.

On olemassa ”ikäviä” ratkaisuja Cauchyn funktionaaliyhtälölle, kun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nämä ratkaisut ovat erittäin kummallisia: ne ovat esimerkiksi tiheitä siinä mielessä,

että tulostettu kuva niiden kuvaajasta olisi täysin musta.[60] Toistetaan vielä: Cauchyn funktionaaliyhtälön ikävät ratkaisut ovat todella ikäviä.

Jos funktionaaliyhtälöön tehdään esimerkiksi lisäoletus $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 0$, niin silloin ainoat ratkaisut ovat ”mukavat” lineaariset ratkaisut $f(x) = cx$ vakioilla $c \geq 0$. Muita riittäviä lisäoletuksia ovat jatkuvuus jossain pisteessä tai rajoittuneisuus jostain suunnasta jollain välillä $[a, b]$, jossa $a < b$.

Monet funktionaaliyhtälöt ovat samantyylisiä kuin Cauchyn yhtälö, ja on hyvä taito nähdä, milloin ongelman voi palauttaa Cauchyn yhtälöön. Tutkitaan esimerkiksi yhtälöä

$$g(x + y) = g(x)g(y).$$

Tämä voidaan palauttaa Cauchyn funktionaaliyhtälöön seuraavasti.

Sijoittamalla $x = y$ saadaan $g(2x) = g(x)^2 \geq 0$, eli $g(t) \geq 0$ kaikilla t. Jos $g(t) = 0$ jollain t, niin $g(t + y) = g(t)g(y) = 0$ kaikilla y, eli g on nollafunktio. Muussa tapauksessa $g(x) > 0$ kaikilla x. Tällöin voidaan asettaa $f(x) = \ln(g(x))$, jolloin $g(x) = e^{f(x)}$. Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön. Saadaan $e^{f(x+y)} = e^{f(x)+f(y)}$, eli

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

15.2 Yleisiä ratkaisuideoita

Vaikka funktionaaliyhtälöihin ei ole yleistä ratkaisumenetelmää, on olemassa muutama yleinen kikka, joista jokin yleensä antaa jotain hyödyllistä. Tässä on joitakin ajatuksia siitä, miten lähteä ratkomaan funktionaaliyhtälötehtäviä.[61]

Ensiksi katsellaan funktionaaliyhtälöä ja tehdään helppoja sijoituksia.

Tärkeää on saada asioita supistumaan.

Ensimmäisenä tehtävät sijoitukset ovat ne, joilla saa ilmeisiä termejä supistumaan: esimerkiksi $x = 0$ on usein tällainen sijoitus. Jos yhtälössä esiintyy vaikkapa termi $f(y - f(x))$, niin voi sijoittaa $y = f(x)$. Tavoitteena on saada ”työkalupakkiin” jotain hyödyllistä funktiosta f, esimerkiksi $f(f(x)) = f(x)$. Yleisesti halutaan jotakin, joka voi auttaa myöhemmin.

Työkalupakissa hyvin usein tärkeäksi osoittautuvat injektiivisyys ja surjektiivisuus.[62]

Määritelmä

Olkoon f funktio. Sanotaan, että f on injektio, jos ehdosta $f(x) = f(y)$ seuraa $x = y$.

[60] Formaalimmin tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla tason pisteillä P on olemassa mielivaltaisen lähellä P:tä olevia kuvaajan pisteitä $(x, f(x))$.

[61] Teksti kuvaa suunnilleen sitä, miten itse lähden ratkomaan funktionaaliyhtälötehtäviä.

[62] Henkilökohtaisesti teen aina ensimmäisenä nopean injektiivisyys- ja surjektiivisuustarkastelun ja vasta sitten helpot sijoitukset.

Esimerkki

Funktio $f(x) = x$ on injektio, mutta $g(x) = x^2$ ei ole, koska $g(-1) = g(1)$.

Huomautus: Todellisuudessa ominaisuudet riippuvat funktion lähtö- ja maalijoukosta. Esimerkiksi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $g(x) = x^2$, ei ole injektio, mutta $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, jolla $h(x) = x^2$, on injektio. Termien kanssa tulee olla tarkkana.

Määritelmä

Olkoon $f : A \to B$ funktio. Sanotaan, että f on surjektio, jos kaikilla $b \in B$ on olemassa $a \in A$, jolla $f(a) = b$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = x$ kaikilla x, on surjektio. Funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $g(x) = x^2$, ei ole surjektio, koska se ei saa esimerkiksi arvoa -1.

Määritelmä

Sanotaan, että funktio f on bijektio, jos f on sekä injektio että surjektio.

Injektiivisyyttä tai surjektiivisuutta ei tietenkään kannata yrittää todistaa, jos funktionaaliyhtälöllä ei ole injektiivisiä tai surjektiivisia ratkaisuja. Siksi alussa kannattaa suunnilleen keksiä, mitä ratkaisuja yhtälöllä on. Yleisesti jos yhtälön kaikilla ratkaisuilla pätee vaikkapa $f(0) = 0$, voi tämä olla hyvä asia yrittää todistaa.

Kun kaikki ”helpot” sijoitukset ja huomiot on tehty, on kaksi tapausta: tehtävä joko on ratkennut tai ei ole ratkennut. Jälkimmäisessä tapauksessa on usein kuitenkin saatu käsitys siitä, mistä tehtävässä todella on kyse, miksi ongelma on vaikea ja mikä estää ratkaisemasta koko ongelmaa.

15.3 Esimerkkitehtäviä

Aloitamme helpommista tehtävistä ja etenemme vaikeampiin.

Ensimmäinen tehtävä on kohtuullisen tunnettu.

Tehtävä

Määritä kaikki jatkuvat funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$f(f(x+y)) = f(x) + f(y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Sijoitetaan $y = 0$: saamme $f(f(x)) = f(x) + f(0)$. Tämä tarkoittaa, että $f(f(x))$ saadaan ilmoitettua muuttujan $f(x)$ avulla. Korvataan tämä alkuperäiseen yhtälöön, jolloin saamme

$$f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y).$$

Tämä saadaan sijoituksella muutettua Cauchyn funktionaaliyhtälöksi: olkoon $g(x) = f(x) - f(0)$. Edellisestä yhtälöstä saadaan $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Koska f on jatkuva, niin myös g on, ja täten ainoa ratkaisu on mukava lineaarinen ratkaisu $g(x) = kx$. Nyt $f(x) = kx + c$ jollain vakiolla c. Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön:

$$k(k(x+y)+c)+c = kx + c + ky + c.$$

Vertailemalla muuttujan x kerrointa saadaan $k^2 = k$, eli joko $k = 0$ tai $k = 1$. Jos $k = 0$, niin $c = 0$, eli ratkaisuksi saadaan nollafunktio. Jos $k = 1$, kelpaa luvuksi c mikä vain, ja saadaan ratkaisu $f(x) = x + c$.

Siis kaikki ratkaisut ovat nollafunktio ja $f(x) = x + c$.

Seuraava tehtävä on Pohjoismaisesta matematiikkakilpailusta vuodelta 2011.

Tehtävä

Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Yhtälöllä on ratkaisunaan ainakin nollafunktio. Termi x^2 vihjaa siihen, että $f(x) = x^2$ tai jokin variantti (jokin toisen asteen polynomi) voisi olla ratkaisu. Helppo tarkistus osoittaakin, että $f(x) = x^2$ on ratkaisu:

$$f(f(x)+y) = (x^2+y)^2 = x^4 + 2x^2y + y^2 = (x^2-y)^2 + 4yx^2 = f(x^2-y) + 4yf(x).$$

Tässä saattaa olla kaikki ratkaisut. Tehdään helppoja sijoituksia. Ensiksi $y = 0$, josta saadaan

$$f(f(x)) = f(x^2).$$

Luonnollisia yrityksiä ovat myös $x = 0$, $y = x^2$ ja $y = -f(x)$, joilla saadaan asioita supistumaan. Esitettävässä ratkaisussa ei kuitenkaan käytetä näitä, vaan tehdään jotain muuta.

Emme ole löytäneet yhtäkään injektiivistä ratkaisua, joten injektiivisyyttä ei kannata yrittää todistaa. Voidaan kuitenkin katsoa, mitä ehdosta $f(a) = f(b)$ seuraa. Olkoon $f(a) = f(b) = c$. Sijoitetaan vuorotellen $x = a$ ja $x = b$ ja annetaan y:n olla mielivaltainen. Saadaan

$$f(c+y) = f(a^2 - y) + 4yc$$

ja

$$f(c+y) = f(b^2 - y) + 4yc,$$

eli

$$f(a^2 - y) = f(b^2 - y).$$

Tätä voi vielä selkeyttää muuttujanvaihto $y = a^2 - z$, jolloin yhtälö on siis

$$f(z) = f(z - (a^2 - b^2)).$$

Tämä yhtälö pätee kaikilla reaaliluvuilla z. Jos $a^2 - b^2 \neq 0$, tarkoittaa tämä, että f on jaksollinen: funktion f arvot toistuvat tietyin väliajoin. Jakaudutaan tapauksiin sen mukaan, onko f jaksollinen vai ei.

Tapaus 1: f on jaksollinen.

Olkoon $f(x) = f(x+T)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Löytämistämme ratkaisuista ainoastaan nollafunktio on jaksollinen, joten pyritään todistamaan, että f:n tulee olla nollafunktio. Sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön muuttujan y paikalle $y+T$, jolloin

$$f(f(x)+y+T) = f(x^2 - y - T) + 4(y+T)f(x),$$

eli $f(f(x)+y) = f(x^2-y) + 4yf(x) + 4Tf(x)$. Vertaamalla tätä alkuperäiseen yhtälöön saadaan $4Tf(x) = 0$. Koska x oli mielivaltainen, saadaan $f(x) = 0$ kaikilla x, eli f on nollafunktio.

Motivaatio sijoituksen $y \to y+T$ takana on se, että tällä saadaan muutettua osaa alkuperäisen yhtälön kohdista ja osa pysyy muuttumattomina.[63] Tällöin saadaan uutta tietoa, kuten yllä.

Tapaus 2: f ei ole jaksollinen.

Päädyimme jatkuvuuskysymykseen ehdosta $f(a) = f(b)$, josta seurasi $f(z) = f(z - (a^2 - b^2))$. Jos f ei ole jaksollinen, niin ehdosta $f(a) = f(b)$ seuraa $a^2 = b^2$ eli $a = \pm b$: ei aivan injektiivisyys, mutta melkein.

Miten voisimme hyödyntää tätä ehtoa? Haluamme $f(\text{jotain}_1) = f(\text{jotain}_2)$, josta saisimme $\text{jotain}_1 = \pm\text{jotain}_2$. Alkuperäistä yhtälöä tutkimalla nähdään, että tähän päästään (jo ratkaisun alussa tehdyllä sijoituksella) $y = 0$: saamme

$$f(f(x)) = f(x^2),$$

eli $f(x) = \pm x^2$ kaikilla x.

Huomaa, että tiedämme, että jokaisella x:n arvolla pätee $f(x) = x^2$ tai $f(x) = -x^2$. **Emme vielä tiedä, voiko merkki vaihtua kesken kaiken.** Voisi vaikkapa olla, että $f(x) = x^2$, kun $x > 123$, ja muulloin $f(x) = -x^2$. On hyvin yleinen virhe vain tarkistaa, että $f(x) = -x^2$ ei ole ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön, ja todeta, että $f(x) = x^2$. Virhe on oikeastaan niin yleinen, että sillä on oma nimensä: Pointwise trap.

Miten ansalta vältytään? Lähdetään siitä, mitä haluamme todistaa: haluamme osoittaa, että $f(a) \neq -a^2$ kaikilla a (jotka eivät ole 0). Oletetaan, että tällainen a on, ja koitetaan saada ristiriita. Sijoitetaan vaikka $x = a$, jolloin saadaan

$$f(y - a^2) = f(a^2 - y) - 4ya^2$$

eli

$$\pm(y - a^2) = \pm(a^2 - y) - 4ya^2$$

[63] Tämä on yleinen ajatus: ”Mikä muuttuu ja mikä ei muutu?”

Jokainen merkkien yhdistelmä johtaa yhtälöön muotoa

$$c(y - a^2) = 4ya^2,$$

missä $-2 \leq c \leq 2$ on kokonaisluku. Tämä voidaan ajatella polynomiyhtälönä muuttujan y suhteen. Vakioiden tulee olla puolittain samat, eli $-a^2c = 0$. Oletimme, että $a \neq 0$, eli $c = 0$. Mutta tällöin $4ya^2 = 0$ kaikilla y, mikä ei tietenkään käy.

Olemme siis todistaneet, että $f(a) \neq -a^2$ kaikilla a, joten tulee olla $f(a) = a^2$ kaikilla a. Tämä päättää ratkaisun.

Kommentti: Tehtävän ratkaisu oli suhteellisen pitkä, mutta tämä ei kerro suoraan ratkaisun vaativuudesta. Monet kohdista ovat tyyppiä ”tulee vain tehdä jotain”. Esimerkiksi tapauksessa 1 riittää vain jotenkin käyttää jaksollisuutta. Yksi luonnollisimmista tavoista on juuri $y \to y + T$, ja tämä toimi. Toinen esimerkki on tapauksessa 2 käytetty ”melkein injektiivisyyden” soveltaminen, ja tässäkin $y = 0$ on yksi luonnollisimmista vaihtoehdoista.

Itse injektiivisyystarkastelun kokeileminen voi tuntua vaikealta kohdalta. Injektiivisyys on hyvin yleinen työkalu, joten tämäkin askel on jossain määrin vain ”yleinen temppu”.

Seuraava tehtävä on esiintynyt lukuisissa eri kilpailuissa.

Tehtävä

Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, joilla

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n)$$

kaikilla kokonaisluvuilla m ja n.

Harjoitus lukijalle: keksitkö, mitkä ratkaisut funktionaaliyhtälöllä on?

Jälleen voidaan tehdä helppoja sijoituksia, kuten $m = 0$, $n = 0, m = n$ tai $m = n - f(n)$. Henkilökohtaisesti tykkään injektiivisyys- ja surjektiivisuustarkasteluista, joten aloitetaan niillä.

Surjektiivisuutta yhtälöstä on vaikea saada: kaikki on funktion f sisässä. (Lisäksi tulemme näkemään, että yhtälöllä ei ole yhtäkään surjektiivista ratkaisua.) Tutkitaan siis injektiivisyyttä: oletetaan, että $f(a) = f(b) = c$. Sijoitetaan $m = a$ ja $m = b$. Saadaan

$$f(a - n + f(n)) = c + f(n)$$

ja

$$f(b - n + f(n)) = c + f(n).$$

Saamme siis $f(a - n + f(n)) = f(b - n + f(n))$. Tämä on jaksollisuuden henkinen, mutta tällä on vaikea tehdä mitään, koska emme tiedä, mitä arvoja $f(n) + n$ saa. Koitetaan sittenkin sijoitusta $n = a$ ja $n = b$. Saadaan

$$f(m - a + c) = f(m) + c$$

ja

$$f(m-b+c) = f(m) + c.$$

Nämä antavat jaksollisuuden, jos f ei ole injektio. Voimme jälleen jakautua kahteen tapaukseen.

Tapaus 1: f on jaksollinen.

Olkoon $f(n) = f(n+T)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Voisimme yrittää tehdä sijoituksia $m \to m+T$ tai $n \to n+T$. Tämä ei kuitenkaan hyödytä mitään: emme saa mitään uutta tietoa.

Mitä jaksollisuus kertoo? Funktion f arvot toistuvat tietyin väliajoin. Koska f on funktio $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, saa f vain äärellisen monta eri arvoa. Voidaanko näistä arvoista sanoa jotain?

Olkoon y suurin arvo, jonka f saa, ja olkoon $f(x) = y$. Sijoitetaan $m = n = x$, jolloin yhtälö antaa

$$f(y) = 2y.$$

Siis f saa arvon $2y$. Koska y oli suurin arvo, saadaan $2y \leq y$ eli $y \leq 0$. Funktio f ei täten saa positiivisia arvoja. Vastaavasti voidaan tutkia pienintä arvoa z, ja saada $2z \geq z$ eli $z \geq 0$. Täten f ei saa negatiivisia arvoja. Siispä f:n tulee olla nollafunktio.

Tapaus 2. f on injektio.

Haluaisimme soveltaa injektiivisyyttä. Jos jollain m pätee $f(m) = 0$, saadaan

$$f(m-n+f(n)) = f(n)$$

eli $m - n + f(n) = n$. Tästä seuraisi $f(n) = 2n - m$, ja olisimme käytännössä valmiit (sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön $f(x) = 2x + c$, ja todetaan arvon $c = 0$ olevan ainoa ratkaisu). Ei kuitenkaan ole ilmeistä, miten tällaisen m olemassaolo todistetaan.

Toinen lähestymistapa olisi valita kaksi lukuparia (m_1, n_1) ja (m_2, n_2) niin, että $f(m_1) + f(n_1) = f(m_2) + f(n_2)$. Tällöin annetun yhtälön oikean puolen arvo on sama parien välillä, joten myös vasemman puolen arvo on sama. Tästä saamme

$$f(m_1 - n_1 + f(n_1)) = f(m_2 - n_2 + f(n_2)),$$

ja pääsemme käyttämään injektiivisyyttä.

Miten voidaan varmistaa ehto $f(m_1) + f(n_1) = f(m_2) + f(n_2)$? Helppo valinta $m_1 = n_2 = a$ ja $n_1 = m_2 = b$ ainakin toimii, ja tästä saamme

$$f(a-b+f(b)) = f(b-a+f(a)).$$

Nyt $a-b+f(b)) = b-a+f(a)$. Sijoitetaan vaikkapa $a = 0$, jolloin $f(b) = 2b+f(0)$. Koska b oli mielivaltainen, tämä pätee kaikilla b. Sijoittamalla tämän alkuperäiseen yhtälöön saadaan ratkaisu $f(n) = 2n$.

Yhtälöllä on siis kaksi ratkaisua: nollafunktio ja $f(x) = 2x$ kaikilla x.

Kommentti: Kokonaisluvuilla määritellyt funktionaaliyhtälöt toimivat eri tavalla kuin reaaliluvuilla määritellyt. Tapauksessa 1 todettiin jaksollisuudesta seuraavan, että f saa vain äärellisen monta arvoa: tämä ei päde reaaliluvuilla, ja tangenttifunktio jopa saa kaikki reaalilukuarvot jaksollisuudestaan huolimatta.

Tapauksessa 2 käytetty muuttujien m ja n vaihtaminen toisikseen on yleinen temppu, jota voi käyttää silloin, kun yhtälön toinen puoli on symmetrinen muuttujien suhteen, mutta toinen puoli ei ole.

Seuraava tehtävä on vuoden 2002 IMO-lyhytlistalta.

Tehtävä

Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Aloitetaan jälleen injektiivisyys- ja surjektiivisuustarkasteluilla. Surjektiivisuus vaikuttaa houkuttelevalta, koska $2x$ on vapaa muuttuja. Valitaan y niin, että jompikumpi f-termeistä pysyy vakiona x:n muuttuessa. Tämä onnistuu valinnalla $y = -f(x)$. Tällöin

$$f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x),$$

eli $f(f(-f(x)) - x)$ saa kaikki reaalilukuarvot, eli f on surjektio.

Injektiivisyyttä varten oletetaan taas, että $f(a) = f(b)$. Sijoittamalla $y = a$ ja $y = b$ ja vertaamalla lopputuloksia saadaan $f(f(x) + a) = f(f(x) + b)$ kaikilla x. Koska f on surjektio, $f(x)$ saa kaikki reaalilukuarvot z, eli $f(z+a) = f(z+b)$ kaikilla reaaliluvuilla z. Voimme jakautua tapauksiin. Vaikuttaako tutulta?[64]

Tapaus 1: f on jaksollinen.

Oletetaan, että $f(x) = f(x + T)$ kaikilla x. Sijoitus $x \to x + T$ antaa suoraan ristiriidan. Yhtälöllä ei siis ole jaksollisia ratkaisuja.

Tapaus 2: f on injektio.

Tilanne $f(\text{jotain}_1) = f(\text{jotain}_2)$ on helppoa luoda valinnalla $x = 0$. Saamme $f(0) + y = f(y)$, eli $f(y) = y + c$. Sijoittamalla nähdään, että kaikki funktiot muotoa $f(x) = x + c$ ovat ratkaisuja.

Siis kaikki ratkaisut ovat $f(x) = x + c$, missä c on mielivaltainen vakio.

Luvun viimeinen ja vaikein esimerkki on vuoden 2012 Turkin kansallisessa kilpailussa esiintynyt tehtävä. Tehtävä on esiintynyt myös Suomen IMO-joukkueen valintakokeessa.

[64] Lupaan, että kaikki funktionaaliyhtälöt eivät ratkea samalla tavalla.

Tehtävä

Määritä kaikki kasvavat funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$f(f(x^2) + y + f(y)) = x^2 + 2f(y)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Yhtälöllä on ratkaisu $f(x) = x$, ja tämä on varmaankin ainoa ratkaisu.

Huomataan, että termit x^2 voidaan vain korvata muuttujalla x ja vaatia $x \geq 0$. Siis

$$f(f(x) + y + f(y)) = x + 2f(y)$$

kaikilla reaaliluvuilla $x \geq 0$ ja y. Tutkitaan loppuratkaisun ajan vain tätä yhtälöä.

Aloitetaan injektiivisyydestä ja surjektiivisuudesta. Injektiivisyys seuraa suoraan epänegatiivisille luvuille: jos $f(a) = f(b)$ joillain $a, b \geq 0$, niin sijoittamalla $x = a$ ja $x = b$ ja vertaamalla saadaan $a = b$.

Toinen lähestymistapa on sijoittaa $y = a$ ja $y = b$. Saadaan

$$f(f(x) + a + c) = f(f(x) + b + c).$$

Emme vielä tiedä, mitä arvoja $f(x)$ saa, joten tutkitaan surjektiivisuutta ja palataan sitten tähän.

Hyödynnetään vapaata muuttujaa x ja asetetaan $y = 0$. Antamalla x:n käydä läpi kaikki epänegatiiviset arvot yhtälön oikea puoli käy läpi arvot väliltä $[2f(0), \infty[$. Siispä f saa kaikki tarpeeksi suuret arvot.

Palataan yhtälöön $f(f(x) + a + c) = f(f(x) + b + c)$. Jos f ei ole injektio, niin f on jaksollinen tarpeeksi suurilla arvoilla muuttujan x arvoilla. Voimme jakautua tapauksiin...

Jaksollisuus suurilla arvoilla ei käy, koska $x \to x + T$ pitää vasemman puolen puolen vakiona, mutta oikea puoli kasvaa arvolla T. Siispä f on injektio.

Koitetaan soveltaa injektiivisyyttä. Naiivi tapa tälle on valita $x = -f(y)$ (tämä vaatii $f(y) \leq 0$), jolloin saadaan

$$f(f(-f(y)) + y + f(y)) = f(y),$$

eli injektiivisyydellä $f(-f(y)) + f(y) = 0$. Kirjoitetaan tämä muodossa $f(-f(y)) = -f(y)$. Siis $f(z) = z$ kaikilla arvoilla z, jotka $-f(y)$ saa – paitsi että pitää huomioida tehty oletus $f(y) \leq 0$. Jos tietäisimme, että f on surjektio, saisimme $f(z) = z$ kaikilla $z \geq 0$. Tutkitaan ensiksi, saako tästä $f(z) = z$ kaikille z, ja keskitytään sitten surjektiivisuuteen.

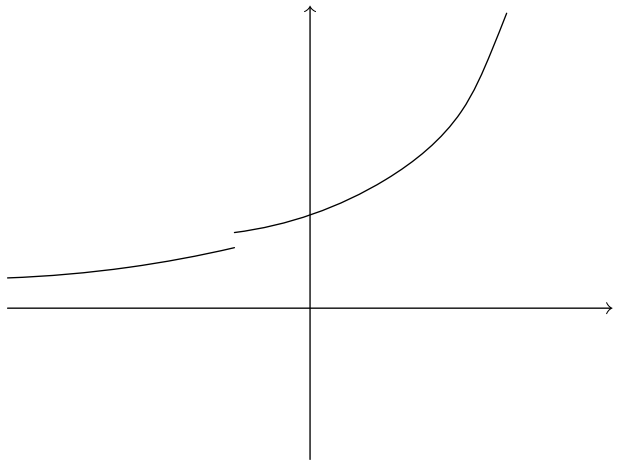
Oletetaan, että $f(x) = x$ kaikilla $x \geq 0$. Haluamme tehdä annettuun yhtälöön sijoituksen, jolla saadaan $f(x) = x$ arvoilla $x < 0$. Koska emme saa asettaa muuttujan x arvoksi negatiivisia lukuja, on luontevaa antaa y:n olla mielivaltainen negatiivinen luku ja valita x sopivasti. Tämä toimii: Olkoon y mielivaltainen, ja olkoon x sellainen,

että $x \geq \max(-(y+f(y)), 0)$. Nyt

$$f(f(x)+y+f(y)) = f(x+y+f(y)),$$

ja koska $x \geq -(y+f(y))$, saadaan $f(x+y+f(y)) = x+y+f(y)$. Vertaamalla tätä annetun yhtälön oikeaan puoleen $x+2f(y)$ saadaan vihdoin $y = f(y)$.

Enää on jäljellä surjektiivisuuden todistaminen. Jos f saa arvon t, niin valitsemalla y niin, että $f(y) = t$, voidaan todeta, että f saa kaikki arvot, jotka ovat vähintään $2t$. Jos f siis saisi arvon -1, se saisi myös arvot, jotka ovat vähintään ≥ -2, eli myös arvot vähintään -4 ja niin edelleen. Siis jos f ei ole surjektio, niin f:n arvoilla on jokin epänegatiivinen alaraja. Lisäksi koska f on kasvava, tarkoittaisi tämä sitä, että f:n kuvaaja näyttäisi joltain tämän tyyliseltä:



Kuvaajassa siis voisi olla hyppäyksiä, mutta arvot lähellä $-\infty$ lähestyisivät jotain alarajaa.

Merkitään tätä alarajaa arvolla c. Siis f saa arvoja, jotka ovat mielivaltaisen lähellä lukua c, mutta arvot eivät mene koskaan luvun c alle. Annetaan funktionaaliyhtälössä muuttujan y lähestyä pistettä $-\infty$ ja pidetään x jonakin vakiona. Vasen puoli lähestyy nyt arvoa

$$f(f(x)+y+f(y)) \to f(f(x)+(-\infty)+c) \to c$$

ja oikea puoli arvoa

$$x+2f(y) \to x+2c.$$

Kunhan $x \neq -c$, olemme saaneet ristiriidan. Alarajaa ei siis voi olla, joten f saa mielivaltaisen pieniä arvoja ja täten kaikki arvot. Näin ollen f on surjektio, ja olemme valmiit.

Kommentti: Tämä on esimerkki vaikeasta tehtävästä, jossa pelkästään rutiininomaiset sijoitukset eivät riitä ratkaisuun. Niillä kuitenkin sai injektiivisyyden, ja lisäksi saatiin selville, mistä on todella kyse: funktion f surjektiivisuudesta. Tutkimalla funktion f käyttäytymistä saatiin myös surjektiivisuus.

16 Vaativampia lisätehtäviä (Algebra)

Tässä luvussa käydään läpi haastavampia algebran tehtäviä.

Ensimmäinen tehtävä on vuoden 2012 ELMOn lyhytlistalta.

Tehtävä

Olkoot a_0 ja b_0 positiivisia kokonaislukuja. Määritellään $a_{i+1} = a_i + \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor$ ja $b_{i+1} = b_i + \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor$ kaikilla $i \geq 0$. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolla $a_n = b_n$.

Jos a_i on paljon suurempi kuin b_i, niin mentäessä luvusta b_i lukuun b_{i+1} kasvu on suurempaa kuin mentäessä luvusta a_i lukuun a_{i+1}. Idea on siis, että a_i ja b_i lähenevät aina toisiaan ja jostain pisteestä lähtien lukujonot ovat samat.

Ennen kuin mennään asioiden edelle, todistetaan pari luonnollista huomiota lukujonoista a_i ja b_i. Ensimmäinen huomio on, että jos $a_i \geq b_i$, niin silloin myös $a_{i+1} \geq b_{i+1}$. Tämän todistaminen vaatii hieman työtä, mutta se ei ole erityisen vaikeaa. Epäyhtälö $a_{i+1} \geq b_{i+1}$ on ekvivalentti epäyhtälön

$$a_i + \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor \geq b_i + \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor$$

kanssa. Neliöjuurien lattiafunktioiden käsittelyä varten kirjoitetaan $b_i = k^2 + r$, missä k ja $0 \leq r \leq 2k$ ovat kokonaislukuja. Nyt siis $k^2 \leq b_i < (k+1)^2$, eli $\lfloor \sqrt{b_i} \rfloor = k$. Tutkitaan paria tapausta.

Tapaus 1: Pätee $k^2 \leq a_i < (k+1)^2$. Tällöin $\lfloor \sqrt{a_i} \rfloor = \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor$, joten väite seuraa oletuksesta $a_i \geq b_i$.

Tapaus 2: Pätee $a_i \geq (k+1)^2$. Ideana on, että nyt a_i on niin paljon suurempi kuin b_i, että pätee $a_i + \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor \geq b_i + \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor$, vaikka oikean puolen termi $\lfloor \sqrt{a_i} \rfloor$ on suurempi kuin vasemman puolen termi $\lfloor \sqrt{b_i} \rfloor$. Kirjoitetaan $(k+m)^2 \leq a_i < (k+m+1)^2$, missä $m \geq 1$. Nyt epäyhtälö saadaan muotoon

$$a_i \geq b_i + m.$$

Käydään nopeasti läpi kaksi osatapausta.

Tapaus 2.1: $m = 1$. Tällöin epäyhtälö pätee, koska $a_i > b_i$.

Tapaus 2.2: $m \geq 2$. Tässä tapauksessa $a_i - b_i$ on jo hyvin suuri ja tarvittavat helpot arviot saa vaikka seuraavasti:

$$a_i \geq (k+m)^2 = k^2+2mk+m^2 \geq k^2+2k+m^2 \geq k^2+2k+m+1 = (k+1)^2+m > b_i+m.$$

Oletetaan tästä lähtien, että $a_0 \geq b_0$, jolloin kaikilla i pätee $a_i \geq b_i$.

Seuraava luonnollinen huomio on, että erotukset $a_i - b_i$ eivät koskaan kasva. Tämän todistaminen on helpompaa kuin aiemman huomion. Väite seuraa yksinkertaisesti oletuksella $a_i \geq b_i$:

$$a_{i+1} - b_{i+1} = a_i - b_i + (\lfloor \sqrt{b_i} \rfloor - \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor) \leq a_i - b_i.$$

Tiedämme siis, että $a_i - b_i \geq 0$ kaikilla i ja että $a_i - b_i$ ei koskaan kasva. Olemme melkein ratkaisseet tehtävän: enää tulee poissulkea tilanne, jossa erotukset $a_i - b_i$ pysyvät (nollasta eroavana) vakiona jostain kohdasta lähtien. Tehdään vastaoletus: oletetaan, että kaikilla tarpeeksi suurilla i pätee $a_i - b_i = c$ jollain $c \neq 0$ (jolloin $c > 0$).

Sijoitetaan rekursioyhtälöihin saatu yhtälö $a_i = b_i + c$. Saadaan

$$b_{i+1} + c = b_i + c + \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor$$

ja

$$b_{i+1} = b_i + \lfloor \sqrt{b_i + c} \rfloor.$$

Tämä tarkoittaa, että $\lfloor \sqrt{b_i + c} \rfloor = \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor$ kaikilla tarpeeksi suurilla i. Toisin sanoen välillä $(b_i, b_i + c]$ ei ole neliölukua millään suurella i. Jotta vaikein tapaus $c = 1$ saataisiin poissuljettua, tulisi luvun $b_i + 1$ olla neliöluku jollain i.

Lähdetään siis ylemmän yhtälön määritelmästä $b_{i+1} = b_i + \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor$ ja yritetään todistaa, että $b_i + 1$ on neliöluku jollain i. Yksi idea on tutkia erikoistapauksia ja saada tätä kautta intuitiota.

Erikoistapaus 1: Luku b_i on neliöluku jollain i. Kirjoitetaan $b_i = k^2$. Nyt $b_{i+1} = k^2 + k$ ja $b_{i+2} = k^2 + 2k$, mikä on yhden vaille neliöluku $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Tämä tapaus on kunnossa.

Erikoistapaus 2: Luku b_i on muotoa $k^2 + 1$ jollain i. Laskemalla saadaan $b_{i+1} = b_i + k = k^2 + k + 1$ ja $b_{i+2} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. Ongelma on palautettu ensimmäiseen erikoistapaukseen.

Tutkimalla tarvittaessa vielä erikoistapausta $b_i = k^2 + 2$ huomataan säännönmukaisuus: luvusta $k^2 + t$ siirrytään kahdella askeleella lukuun $(k+1)^2 + (t-1)$. Jos tämä pätee, niin olemme valmiit, koska lopulta kaikki palautuu erikoistapaukseen 1. Seuraavaksi todistetaan tämä väite.

Kirjoitetaan siis $b_i = k^2 + t$, missä $t \leq 2k$. Saadaan

$$b_{i+1} = b_i + k = k^2 + (t + k).$$

Haluaisimme vetää johtopäätöksen $b_{i+2} = b_{i+1} + k = (k+1)^2 + (t-1)$. Tämä pätee kuitenkin vain silloin, kun $\lfloor \sqrt{b_{i+1}} \rfloor = k$ eli kun $t \leq k$. Ongelma on kuitenkin helppo ratkaista: Jos yhtälössä $b_i = k^2 + t$ pätee $t > k$, niin kirjoitetaan $s = t - k$. Nyt

$$b_{i+1} = k^2 + (t + k) = k^2 + (s + 2k) = (k+1)^2 + (s-1)$$

ja $0 \leq s - 1 \leq (k+1)$, joten päädymme edellä käsiteltyyn tapaukseen, jossa t on pieni. Olemme valmiit.

Kommentti: Ratkaisussa esitetyt väitteet ”erotus $a_i - b_i$ ei koskaan kasva”, ”erotus $a_i - b_i$ on aina vähintään 0” ja ”erotus $a_i - b_i$ ei voi olla positiivinen vakio jostain kohdasta lähtien” kertovat paljon lukujonojen a_i ja b_i käyttäytymisestä. Jokaisen yksittäisen väitteen todistus on suhteellisen helppo, mutta kokonaisessa ratkaisussa tulee huomata jokainen näistä tuloksista, mistä syntyy osa tehtävän vaikeudesta.

Viimeistä kysymystä koskien tilannetta $a_i - b_i = c$ varten ratkaisussa tutkittiin erikoistapauksia $b_i = k^2$ ja $b_i = k^2 + 1$, joiden kautta huomattiin säännönmukaisuus. Konkreettisten erikoistapauksien käsitteleminen ei välttämättä vaadi pienillä luvuilla kokeilujen tekemistä. Mielestäni tässä tilanteessa on oikeastaan helpompaa huomata säännönmukaisuus tutkimalla yleisesti tapausta $b_i = k^2$ kuin tutkimalla vaikkapa tapausta $b_i = 9$. Lisäksi laskuvirheen mahdollisuus on pienempi (ainakin jos on hyvä rutiini lausekkeiden käsittelystä).

Seuraava tehtävä on vuoden 2018 European Mathematical Cup -kilpailusta.

Tehtävä

Mille reaaliluvuille $k > 1$ on olemassa rajoitettu, positiivisista reaaliluvuista koostuva joukko S, jossa on vähintään 3 alkiota ja jolla

$$k(a - b) \in S$$

kaikilla $a, b \in S$, joilla $a > b$?
(Positiivisista reaaliluvuista koostuvaa joukkoa S kutsutaan rajoitetuksi, jos on olemassa sellainen reaaliluku M, että kaikilla $x \in S$ pätee $x < M$.)

Aloitetaan ratkaisuprosessi tutkimalla jotain erikoistapauksia. Ensin on esitetty sekalaisia ajatuksia.

Mitä tapahtuu, jos S sisältää vaikkapa luvut 1 ja 2? Tällöin saadaan esimerkiksi $k(2-1) = k \in S$, $k(2-k) \in S$ ja $k(k-1) \in S$. Tämä ei vaikuta kovin hyödylliseltä, joten koitetaan jotain muuta.

Tehtävänannossa vaaditaan, että S sisältää vähintään kolme lukua. Onko olemassa kahden kokoista esimerkkiä? Jos $S = \{a, b\}$, missä $a > b$, tulee olla

$$k(a - b) \in S = \{a, b\}.$$

Jos $k(a - b) = a$, pätee $b = \frac{k-1}{k}a$, mistä saadaan yksi ratkaisu. Jos taas $k(a - b) = b$, niin

$$a = b\frac{k+1}{k},$$

mistä saadaan toinen ratkaisu.

Huomaamme, että kelpaavasta joukosta S saa uuden kelpaavan joukon kertomalla kaikki joukon S alkiot jollain (positiivisella) vakiolla.

Onko olemassa kolmen kokoista kelpaavaa joukkoa S? Kirjoitetaan $S = \{a, b, c\}$, missä $a > b > c$. Luvut

$$k(a - b), k(a - c) \text{ ja } k(b - c)$$

ovat kaikki joukon S alkioita. Näiden lukujen keskinäisistä suuruusjärjestyksistä voidaan sanoa $k(a - c) > k(b - c)$ ja $k(a - c) > k(a - b)$. Täten luku $k(a - c)$ on joko a tai b, ja vastaavasti luvut $k(b - c)$ ja $k(a - b)$ ovat joko b tai c.

Ongelma jakautuu melko moneen tapaukseen:

1. $k(a-c) = b$, $k(b-c) = c$ ja $k(a-b) = c$.
2. $k(a-c) = a$, $k(b-c) = b$ ja $k(a-b) = b$.
3. $k(a-c) = a$, $k(b-c) = b$ ja $k(a-b) = c$.
4. $k(a-c) = a$, $k(b-c) = c$ ja $k(a-b) = b$.
5. $k(a-c) = a$, $k(b-c) = c$ ja $k(a-b) = c$.

Tapauksissa 1, 2 ja 5 pätee, että $b-c = a-b$ eli että luvut a, b ja c muodostavat aritmeettisen lukujonon. Oletetaan vaikka, että $b = 1$, jolloin pätee $c = 1-d$ ja $a = 1+d$, missä d on lukujonon erotusvakio. Tulee päteä $kd \in S$ ja $2kd \in S$. Pieni tapauskäsittely (jonka yksityiskohdat sivuutetaan) antaa ratkaisun $k = 2$. Tämä vastaa erotusvakiota $d = \frac{1}{3}$.

Tapaukset 3 ja 4 voi käsitellä suoraan laskemalla, mutta tässä on hieman kevyempi ratkaisu. Tapauksessa 3 saadaan

$$k(a-c) - k(b-c) - k(a-b) = a - b - c.$$

Vasen puoli on yhtä kuin 0, joten $a = b+c$. Tapauksessa 4 saadaan vastaavasti $a = b+c$. Molemmissa tapauksissa voimassa oleva ehto $k(a-c) = a$ antaa nyt $kb-b = c$, jolloin $a = kb$. Tästä ei ole enää vaikeaa viedä laskuja maaliin. Yksityiskohdat sivuutetaan, mutta luvulle k saadaan yhtälö $k^2 - k = 1$, ja ratkaisemalla toisen asteen yhtälö saadaan ratkaisu

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

(Luvun k tulee olla yli 1, joten toinen yhtälön $k^2 - k = 1$ ratkaisuista ei käy.)

Hengähdetään hetki. Edellä tutkittiin tapausta $|S| = 3$ ja löydettiin kaksi ratkaisua. Tämä on tietysti edistystä: löysimme joitain kelpaavia luvun k arvoja. Laskeminen on kuitenkin raskasta, ja yleistä tapausta ei voi vain laskea läpi. Koitetaan keksiä jokin strategia, jolla tehtävän voisi saada ratkaistua kokonaan.

Olemme tähän mennessä käsitelleet vain äärellisiä joukkoja S. Tehtävässä on kuitenkin myös mahdollista, että S on ääretön. Ehto "joukko S on rajoitettu" onkin mielenkiintoinen ainoastaan äärettömillä joukoilla S.

Tästä motivoituneena voisimme ensiksi yrittää ratkaista tapauksen, jossa S on ääretön. Palataan tämän jälkeen äärellisten joukkojen tapaukseen, ja yritetään löytää näille jokin yleisesti toimiva menetelmä.

Oletetaan, että S sisältää äärettömän monta alkiota.

Selvästikin joukon S rajoittuneisuus on tärkeä oletus (eihän sitä muuten olisi annettu).[65] Oletetaan siis, että kaikilla $x \in S$ pätee $x < M$.

[65] On oikeastaan hyvin yksinkertaista luoda äärettömiä joukkoja S, joilla $k(a-b) \in S$ kaikilla

Kuvitellaan joukon S alkioiden sijoittumista reaaliakselille. Tiedämme, että näitä pisteitä on äärettömästi ja että jokainen piste on välillä $(0, M)$. Näiden pisteiden joukossa on sellaisia pisteitä, jotka ovat enintään etäisyydellä $\frac{1}{1000}$ toisistaan (muutenhan pisteitä olisi enintään $1000M$). Jos pätee $|a-b| < \frac{1}{1000}$ ja $a > b$, kun $a, b \in S$, niin nyt ehdon nojalla $k(a-b) \in S$, eli S sisältää jonkin alkion, joka on alle $\frac{k}{1000}$. Korvaamalla luvun 1000 yleisesti jollain mielivaltaisen suurella luvulla saadaan, että S sisältää mielivaltaisen pieniä lukuja.

Entä sitten? Miksei S voisi sisältää vaikka kaikkia lukuja väliltä $(0, M)$? Tämän esimerkin toimimattomuus nähdään valitsemalla a olemaan hyvin suuri luku (noin M) ja b olemaan hyvin pieni luku (noin 0). Tällöin ehdon $k > 1$ avulla saadaan

$$k(a-b) \approx kM > M,$$

eli tällöin $k(a-b)$ ei ole enää joukossa S. Tämän idean voi yleistää kaikille äärettömille S seuraavasti.

Olkoon M sellainen reaaliluku, jolla $x < M$ kaikilla $x \in S$. Valitaan tämä M lisäksi niin, että on olemassa jokin luku x, jolla $x > \frac{M}{k}$ ja jolla $x \in S$ (haluamme siis, että M on suunnilleen samaa kokoluokkaa kuin joukon S suurimmat alkiot).[66] Olkoon y sellainen joukon S alkio, jolla $y < x - \frac{M}{k}$ (tällainen y on olemassa, koska S sisältää mielivaltaisen pieniä lukuja). Nyt

$$k(x-y) > k \cdot \frac{M}{k} > M,$$

joten $k(x-y) \notin S$, mikä on ristiriita.

Oletetaan sitten, että S sisältää vain äärellisen monta alkiota $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Oletetaan, että $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$. Tiedämme siis, että $k(a_i - a_j)$ on jokin luvuista $a_1, \ldots, a_n$, olivat i ja j $(i < j)$ mitä tahansa.

Voisimme yrittää soveltaa kolmen luvun joukkojen käsittelyssä käytettyä ideaa: Pätee

$$k(a_1 - a_2) > k(a_1 - a_3) > \ldots > k(a_1 - a_n).$$

Tämä antaa melko paljon tietoa siitä, mitä luvut $k(a_1 - a_i)$ voivat olla. Yhteensä tapauksia on n kappaletta:

- $k(a_1 - a_2) = a_2, k(a_1 - a_3) = a_3, k(a_1 - a_4) = a_4, \ldots, k(a_1 - a_n) = a_n$.
- $k(a_1 - a_2) = a_1, k(a_1 - a_3) = a_3, k(a_1 - a_4) = a_4, \ldots, k(a_1 - a_n) = a_n$.

$a, b \in S, a > b$. Yksi esimerkki: k on kokonaisluku, $S = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Toinen esimerkki: lisätään joukkoon S alkiot 1 ja 2, ja lisätään aina luku $k(a-b)$ joukkoon S, kun a ja b ovat joukon S alkioita.

[66] Ratkaisun selittämistä vaikeuttaa se, ettemme voi puhua joukon S suurimmasta alkiosta. Jos esimerkiksi S sisältää kaikki luvut väliltä 0 ja 1, muttei lukuja 0 eikä 1, niin joukossa S ei ole suurinta eikä pienintä lukua. Tämän ongelman voi kiertää puhumalla joukon S pienimmästä ylärajasta (merkitään usein $\sup(S)$). On fakta, että kaikilla reaalilukujen joukoilla on olemassa pienin yläraja (joka on mahdollisesti ääretön). Tämä on oikeastaan (yksi) syy sille, miksi reaaliluvut on määritelty: rationaaliluvuilla ei ole tätä ominaisuutta, mutta analyysin kannalta ominaisuus on tärkeä.

- $k(a_1 - a_2) = a_1, k(a_1 - a_3) = a_2, k(a_1 - a_4) = a_4, \ldots, k(a_1 - a_n) = a_n.$

  $\vdots$

- $k(a_1 - a_2) = a_1, k(a_1 - a_3) = a_2, k(a_1 - a_4) = a_3, \ldots, k(a_1 - a_n) = a_{n-1}.$

On siis olemassa jokin "hyppäyskohta" h, jolla pätee $k(a_1 - a_i) = a_{i-1}$ kaikilla $i \leq h$ ja $k(a_1 - a_i) = a_i$ kaikilla $i > h$. Edellisen listan hyppäyskohdat ovat ylhäältä alas luvut $1, 2, \ldots, n$.

Miltä lukujono sitten näyttää? Tapauksessa $h = 1$ kaikilla $i \geq 2$ pätee

$$k(a_1 - a_i) = a_i$$

eli

$$a_i = a_1 \frac{k}{k+1}.$$

Tällöinhän $a_2 = a_3 = \ldots = a_n$, mikä ei selvästi käy.

Vastaavalla idealla huomataan, että hyppäyskohta ei voi olla mikään luvuista $2, 3, \ldots, n-2$: muuten arvoilla $i = n-1$ ja $i = n$ pätisivät sama yhtälö

$$a_i = a_1 \frac{k}{k+1}$$

kuin yllä arvolla $h = 1$. Tästä seuraisi $a_{n-1} = a_n$, mutta tämä ei käy.

Olemme siis kahden tapauksen päässä tehtävän ratkaisemisesta.

Tapaus 1: $h = n$. Tällöin kaikilla $i \geq 2$ pätee

$$k(a_1 - a_i) = a_{i-1}.$$

Arvolla $i = 2$ tästä saadaan $k(a_1 - a_2) = a_1$ eli

$$a_2 = a_1 \frac{k-1}{k}.$$

Nyt arvolla $i = 3$ pätee $k(a_1 - a_3) = a_2$. Sijoittamalla tähän luvun a_2 arvon saadaan

$$a_3 = \frac{ka_1 - a_2}{k} = a_1 \frac{k - \frac{k-1}{k}}{k} = a_1 \frac{k^2 - k + 1}{k^2}.$$

Lasketaan vielä yksi arvo:

$$a_4 = \frac{ka_1 - a_3}{k} = a_1 \frac{k - \frac{k^2-k+1}{k^2}}{k} = a_1 \frac{k^3 - k^2 + k - 1}{k^3}.$$

Tästä nähdään, miten lukujonon termi a_i lasketaan. Tämä toki lisää uskoa ratkaisun toimivuuteen, mutta nyt herää kysymys: mitä seuraavaksi?

Tutkitaan jotain erotusta, joka ei ole muotoa $a_1 - a_i$. Ehkäpä yksinkertaisin on $a_2 - a_3$. Nyt luvun $k(a_2 - a_3)$ pitäisi kuulua joukkoon S. Luku $k(a_1 - a_2)$ voidaan laskea:

$$a_1 k \left(\frac{k^2 - k}{k^2} - \frac{k^2 - k + 1}{k^2} \right) = -\frac{a_1}{k}.$$

Tämähän on negatiivinen – teimmekö jossain laskuvirheen? Emme: tämä vain tarkoittaa, että $h = n$ ei anna ratkaisuja.

Jälkeenpäin ajateltuna tämä ei yllätä: tapaus $h = n$ vastaa aiemmin käsitellyn tilanteen $|S| = 3$ tapausta 3, jolla ei myöskään ollut ratkaisuja.

Tapaus 2: $h = n - 1$.

Saadaan siis $k(a_1 - a_i) = a_{i-1}$ kaikilla $2 \leq i \leq n - 1$. Huomataan, että jos $n \geq 4$, niin edellisen tapauksen käsittely toimii ilman ongelmia: voimme laskea luvut a_2 ja a_3 ja todeta, että $a_3 > a_2$. Tapaus $n = 3$ onkin käsitelty jo.

Olemme siis valmiit: tehtävän kaikki ratkaisut ovat $k = 2$ ja $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Kommentti: Tehtävässä on paljon tekemistä. Tapauksen $|S| = 3$ käsittely vaatii jonkin verran laskemista, tapaus $|S| = \infty$ vaatii muutaman erilaisen huomion ja tapaus $4 \leq |S| < \infty$ ei myöskään ole triviaali. Tästä ei kuitenkaan pidä lannistua, vaan kannattaa vain aloittaa jostain. Lisäksi huomattiin, että vaikka tapaus $|S| = 3$ voi aluksi näyttää vain turhalta ja työläältä erikoistapauksien läpikäymiseltä, saatiin tästä hyödyllinen idea yleiseen tapaukseen. Tapaus $|S| = 3$ oli tavallaan myös vaikeampi kuin tapaus $4 \leq |S| < \infty$, jossa kaikki tapaukset sai käsiteltyä samalla tavalla. (Tämä on loogista: Kun $|S| = n$, niin ehtoja muotoa $k(a_i - a_j) \in S$ on $\binom{n}{2}$ kappaletta, ja mitä suurempi n on, sitä suurempi $\binom{n}{2}$ on joukon S kokoon verrattuna. Täten tuntuu uskottavalta, että ratkaisuja löytyy silloin, kun $|S|$ on pieni, mutta ei silloin, kun $|S|$ on suuri.)

Seuraavana on esimerkki vaikeasta funktionaaliyhtälöstä. Tehtävä on esiintynyt vuoden 2018 APMOssa.

Tehtävä

Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Ryhdytään hommiin. Tehdään helppo sijoitus $x = 0$. Saadaan

$$f(f(y)) = f(y^2) + 2f(0) + f(f(0)).$$

Saamme siis laskettua, mitä on $f(f(y))$. Sijoituksella $y = 0$ saadaan $f(0) = 0$, joten $f(f(y)) = f(y^2)$ pätee kaikilla y. Sijoittamalla tämän alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$f(x^2 + f(y)) = f(x^2) + f(y^2) + 2f(xy). \tag{1}$$

Yhtälön oikea puoli on symmetrinen muuttujien x ja y suhteen, joten tästä saadaan

$$f(x^2 + f(y)) = f(y^2 + f(x)). \tag{2}$$

Jos saisimme injektiivisyyden, niin tehtävä olisi ratkaistu: nyt olisi $x^2 + f(y) = y^2 + f(x)$ eli $f(x) = x^2 + f(0) = x^2$. Helppo tarkastus osoittaa, että $f(x) = x^2$ on

ratkaisu. Emme kuitenkaan mitenkään voi saada injektiivisyyttä, koska $f(x) = x^2$ ei ole injektio.

Vaikka injektiivisyys on liikaa toivottu, niin voi silti auttaa tutkia, mitä ehdosta $f(a) = f(b)$ saadaan irti. Sijoittamalla yhtälöön 1 vuorotellen $y = a$ ja $y = b$ saadaan

$$f(a^2) + 2f(xa) = f(b^2) + 2f(xb).$$

Sijoittamalla tähän $x = 0$ saadaan edelleen $f(a^2) = f(b^2)$, eli kaikilla x pätee $f(xa) = f(xb)$. Täten (sijoituksella $x \to \frac{x}{b}$) pätee

$$f(cx) = f(x) \tag{3}$$

kaikilla x, missä $c = \frac{a}{b}$ on vakio. (Jos $b = 0$, niin f on vakio, mistä saadaan ratkaisu $f = 0$.) Tämä on hyvin voimakas ehto.

Tästä saamme muodostettua strategian tehtävän ratkaisemiseksi. Oletetaan, että on olemassa jokin luku c ($c \neq \pm 1$), jolla $f(cx) = f(x)$ kaikilla x, ja yritetään osoittaa, että f on vakiofunktio. Tällöin epävakioilla f ehdosta $f(a) = f(b)$ seuraa $a = \pm b$ (mikä vastaa tapausta $c = \pm 1$). Tästä "melkein injektiivisyydestä" tehtävän luulisi ratkeavan.

Tutkimme siis joukkoa $C = \{\frac{a}{b} \mid f(a) = f(b)\}$. Kysymys kuuluu: mitä lukuja joukossa C on?

Ensinnäkin, jos $f(x) = f(cx)$ kaikilla x, niin $f(x) = f(cx) = f(c^2x) = \ldots$ Täten $f(x) = f(c^n x)$ kaikilla n ja x, eli $c^n \in C$ kaikilla $c \in C$, ja muun muassa $\frac{1}{c} \in C$.

Toiseksi yhtälöstä 2 saadaan

$$\frac{x^2 + f(y)}{y^2 + f(x)} \in C$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ (joilla $y^2 + f(x) \neq 0$). Esimerkiksi valinnalla $y = 0$ saadaan $\frac{x^2}{f(x)} \in C$.

On tietysti hyvä, että saadaan $c^n \in C$ kaikilla $c \in C$ ja että $\frac{x^2}{f(x)} \in C$, koska nämä antavat lisätietoa joukosta C. Ongelmana on kuitenkin, etteivät nämä ehdot vielä läheskään riitä todistamaan, että C sisältää kaikki reaaliluvut. Esimerkiksi ehto $\frac{x^2}{f(x)} \in C$ ei loppujen lopuksi kerro kovin paljoa.

Millainen olisi hyvä tieto joukosta C? Olisi hyvä, jos saataisiin ehto muotoa $L(x, y) \in C$, jossa L on jokin lauseke muuttujista x ja y: tämä antaa enemmän tietoa kuin "yksiulotteinen" väite $\frac{x^2}{f(x)} \in C$.[67] Toinen tärkeä huomio on, että ehtojen tulee olla sellaisia, jotka poissulkevat esimerkiksi tapauksen $C = \mathbb{Q}$. Pelkästään ehdot muotoa $c^n \in C$ tai $c_1 + c_2 \in C$ kaikilla $c, c_1, c_2 \in C$ eivät riittäisi poissulkemaan tätä tapausta. Tästä motivoituneena lähdetään todistamaan, että joukko C sisältää kaikki reaaliluvut joltain väliltä $[a, b]$.[68]

[67] Esimerkkinä tällaisesta "kaksiulotteisesta" tiedosta on yhtälöstä 2 saatu ehto $\frac{x^2+f(y)}{y^2+f(x)} \in C$, mutta tätäkin on vielä turhan hankala käyttää.

[68] Tätä strategiaa ei välttämättä edes tarvitse keksiä, jotta voi päätyä esitettyyn ratkaisuun, mutta strategialle on selkeä motivaatio.

Käyttämällä yhtälöä 2, sijoitusta $x \to cx$ ja yhtälöä 3 saadaan yhtälöketju

$$f(c^2x^2 + f(y)) = f(y^2 + f(cx)) = f(y^2 + f(x)) = f(x^2 + f(y)),$$

eli pätee

$$\frac{c^2x^2 + f(y)}{x^2 + f(y)} \in C.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$c^2 - \frac{(c^2 - 1)f(y)}{x^2 + f(y)} \in C.$$

Oletetaan hetkeksi, että pätee $c^2 > 1$ ja $f(y) > 0$. Huomataan, että kun x kulkee läpi arvot nollasta äärettömään, niin tämä lauseke saa kaikki arvot väliltä $[1, c^2)$. Tässä c on mikä tahansa luku, joka toteuttaa ehdon $c^2 > 1$. Koska c voidaan tarvittaessa korottaa potenssiin n, niin C sisältää edellisen nojalla kaikki luvut, jotka ovat vähintään 1. Tästä seuraa, että f on vakio.[69]

Edellä tehtiin kaksi oletusta: $c^2 > 1$ ja $f(y) > 0$. Nämä eivät ole kovin oleellisia rajoituksia, ja niistä päästään eroon vaikkapa seuraavasti: Jos $c^2 < 1$, niin luvun c^2 sijasta voidaan käsitellä lukua $c^{-2} > 1$. Oletus $f(y) > 0$ voidaan myös tehdä. Todistetaan tämä vastaoletuksella, eli oletetaan, että kaikilla y pätee $f(y) \leq 0$. Aiemmin yhtälön 3 yhteydessä todettiin, että mikäli f ei ole injektiivinen nollassa (eli funktiolla f on useampi nollakohta), niin f on vakio. Siis $f(y) < 0$ kaikilla $y \neq 0$. Valitaan jokin $y \neq 0$. Nyt yhtälöstä 1 saadaan sijoituksella $x = \sqrt{-f(y)}$ ehto

$$0 = f(x^2) + f(y^2) + 2f(xy),$$

eli $f(y^2) = f(x^2) = 2f(xy) = 0$, eli muun muassa $y^2 = 0$. Tästä seuraa, että $y = 0$, mikä on ristiriidassa oletuksen $y \neq 0$ kanssa. (Sijoitus $x = \sqrt{-f(y)}$ on luonnollinen, koska sillä saadaan asioita supistumaan.)

Edellä siis oletettiin, että on olemassa $c \neq \pm 1$, jolla $c \in C$. Muussa tapauksessa f on melkein injektio, eli ehdosta $f(a) = f(b)$ seuraa $a = \pm b$. Soveltamalla tätä yhtälöön 2 saadaan

$$x^2 + f(y) = \pm(y^2 + f(x)),$$

eli sijoittamalla $y = 0$ saadaan

$$f(x) = \pm x^2$$

kaikilla x. Vielä pitää poissulkea pointwise trap, eli halutaan, että etumerkki yhtälössä $f(x) = \pm x^2$ ei riipu luvusta x. Tämä ei ole erityisen vaikeaa.

Oletetaan, että $f(y) = -y^2$ jollain reaaliluvulla $y \neq 0$. Yhtälöstä 2 saadaan

$$f(x^2 - y^2) = f(y^2 + f(x)).$$

Tutkitaan paria tapausta:

[69] Teoriassa olisi mahdollista, että f olisi eri vakio positiivisilla ja negatiivisilla luvuilla. Helpot sijoitukset alkuperäiseen yhtälöön kuitenkin todistavat, ettei tämä ole mahdollista.

Tapaus 1: $f(x) = x^2$ jollain x. Nyt $f(x^2 - y^2) = f(x^2 + y^2)$, eli $\pm(x^2 - y^2) = \pm(x^2 + y^2)$ jollain etumerkkien valinnoilla.

Jos etumerkit ovat samat, saadaan $y = 0$ vastoin oletusta.

Jos etumerkit eivät ole samat, saadaan $x = 0$. Tämä tarkoittaa, että ehdosta $f(x) = x^2$ seuraa $x = 0$, eli $f(x) = -x^2$ kaikilla x. Sijoittamalla tämä alkuperäiseen yhtälöön on helppoa tarkistaa, ettei tämä ole ratkaisu.

Tapaus 2: $f(x) = -x^2$ kaikilla x. Kuten edellä todettiin, tämä ei ole ratkaisu.

Täten ainoat ratkaisut ovat $f(x) = 0$ kaikilla x ja $f(x) = x^2$ kaikilla x.

Kommentti: Pidän tästä tehtävästä. Standarditempuilla ja -sijoituksilla päädytään tutkimaan joukkoa C, ja tämän jälkeen pitää hoksata jotain joukon C rakenteesta. Ainoa keksimäni tapa todistaa, että C sisältää kaikki reaaliluvut, oli yrittää pakottaa joukko C sisältämään jokin väli. Tehtävän ratkaiseminen voi mennä pahasti pieleen, jos yhtälöihin tekee sokeasti yksiulotteisia sijoituksia, koska näistä on hyvin vaikeaa saada mitään järkevää tietoa joukosta C. Ratkaisun löytämiseksi ei ole pakko lähteä todistamaan nimenomaan sitä, että C sisältää jonkin välin, mutta on hyvä olla jokin käsitys siitä, millainen olisi riittävä tieto joukosta C.

Viimeinen esimerkkitehtävä on vuoden 2012 IMO-lyhytlistalta.

Tehtävä

Olkoot f ja g sellaisia kokonaislukukertoimisia polynomeja, jotka eivät ole nollapolynomeja ja joilla $\deg(f) > \deg(g)$. Oletetaan, että äärettömän monella alkuluvulla p polynomilla $pf+g$ on rationaalinen juuri. Osoita, että polynomilla f on rationaalinen juuri.

Ensimmäisenä muistetaan, että polynomin rationaaliset nollakohdat ovat muotoa ”vakiotermin tekijä jaettuna korkeimman asteen termin tekijällä”. Tämän soveltamiseksi kirjoitetaan f:n ja g:n kertoimet auki: Olkoot

$$f(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$$

ja

$$g(x) = b_{d-1} x^{d-1} + \ldots + b_0.$$

Tässä $d = \deg(f)$ ja $a_d \neq 0$, mutta b_{d-1} voi olla 0.

Olkoon p jokin tehtävänannon mukainen alkuluku. Jos $\frac{m}{n}$ on jokin polynomin

$$pf + g = pa_d x^d + (pa_{d-1} + b_{d-1}) x^{d-1} + \ldots + (pa_0 + b_0)$$

nollakohta, niin seuraavien (tärkeiden) jaollisuusehtojen tulee päteä:

$$m | pa_0 + b_0$$

ja

$$n | pa_d.$$

On kaksi mahdollisuutta: joko $p \nmid n$ tai $p \mid n$. Ensimmäisessä tapauksessa n on jokin luvun a_d tekijä. Toisessa tapauksessa n on vastaavasti muotoa $c \cdot p$, missä

$c|a_d$. Oleellista tässä on, että ensimmäisessä tapauksessa n on enintään jokin vakio ja toisessa tapauksessa n kasvaa lineaarisesti muuttujan p mukana. Jakaudutaan kahteen tapaukseen.

Tapaus 1: Äärettömän monella p pätee $p \nmid n$.

Täten n on enintään vakio. Toisaalta polynomin $pf + g$ juurien tulee olla melko pieniä: jos luvun x itseisarvo on hyvin suuri, niin luvun $pf(x) + g(x)$ arvo on suunnilleen sama kuin luvun $pf(x)$ (koska $\deg(f) > \deg(g)$). Täten minkä tahansa polynomin $pf + g$ juuren tulee olla enintään jokin vakio, joka ei riipu luvusta p.

Täten jos $\frac{m}{n}$ on polynomin $pf + g$ juuri, niin koska n on enintään vakio, on myös m enintään jokin vakio. Tästä seuraa, että luvulle $\frac{m}{n}$ on vain äärellisen monta eri vaihtoehtoa. Ei ole vaikeaa nähdä, että jonkin tällaisen rationaaliluvun $\frac{m}{n}$ tulee olla polynomin f juuri. Yksi tapa tämän todistamiseksi on seuraava: Koska $\frac{m}{n}$ on polynomin $pf + g$ nollakohta, niin

$$p = -\frac{g\left(\frac{m}{n}\right)}{f\left(\frac{m}{n}\right)}$$

olettaen, että $f\left(\frac{m}{n}\right) \neq 0$. Luvulle $\frac{m}{n}$ on vain äärellisen monta vaihtoehtoa, mutta luvulle p on äärettömän monta eri vaihtoehtoa. Tämä johtaa ristiriitaan.

Tapaus 2: Äärettömän monella p pätee $p \mid n$.

Voimme käyttää tapauksen 1 tuloksia: Jos $\frac{m}{n}$ on polynomin $pf + g$ juuri, niin $\frac{m}{n}$ on enintään jokin vakio. Pätee myös

$$p = -\frac{g\left(\frac{m}{n}\right)}{f\left(\frac{m}{n}\right)},$$

jos $\frac{m}{n}$ ei ole polynomin f juuri.

Mitä tästä seuraa? Koska yhtälön vasemman puolen p voi kasvaa mielivaltaisen suureksi, tulee myös oikean puolen lausekkeen $-\frac{g(x)}{f(x)}$ (itseisarvon) kasvaa mielivaltaisen suureksi. Koska juuret $\frac{m}{n}$ ovat enintään jokin vakio, on myös arvo $g\left(\frac{m}{n}\right)$ enintään jokin vakio. Jotta luku

$$-\frac{g\left(\frac{m}{n}\right)}{f\left(\frac{m}{n}\right)}$$

voi kasvaa mielivaltaisen suureksi, tulee juurten $\frac{m}{n}$ lähestyä jotain polynomin f juurta.

Miten tämä mahdollisuus poissuljetaan? Edellisessä tapauksessa tämä olisi ollut helppoa, koska siinä luvulle $\frac{m}{n}$ oli vain äärellisen monta eri vaihtoehtoa. Tässä tapauksessa tiedämme, että $p \mid n$, joten luvulle n on vain äärellisen monta vaihtoehtoa, mutta luvusta m tiedetään vain

$$m \mid pa_0 + b_0.$$

Voimme ainakin tehdä vastaoletuksen ja katsoa, mitä tapahtuu. Oletetaan siis, että polynomilla f on jokin juuri α, jota luvut $\frac{m}{n}$ lähestyvät. Täten

$$\frac{m}{n} \approx \alpha.$$

Käytetään nyt tietoa siitä, että luku m on luvun $pa_0 + b_0$ tekijä. Voidaan kirjoittaa

$$m = \frac{pa_0 + b_0}{C}$$

jollain kokonaisluvulla C. Saamme nyt

$$\frac{pa_0 + b_0}{nC} \approx \alpha.$$

Käytetään vielä tietoa siitä, että n on jaollinen luvulla p. Kirjoitetaan siis $n = pc$, missä c on jokin kokonaisluku (jolle on vain äärellisen monta vaihtoehtoa). Saadaan

$$\frac{pa_0 + b_0}{pcC} \approx \alpha.$$

Tämän approksimaation vasen puoli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{a_0}{cC} + \frac{b_0}{pcC}.$$

Kun p kasvaa suureksi, niin termi $\frac{b_0}{pcC}$ lähestyy nollaa. Täten juuret $\frac{n}{m}$ eivät voi lähestyä mitään irrationaalista lukua α, koska tällöin myös lukujen $\frac{a_0}{cC}$ tulisi lähestyä lukua α. Tämä ei ole selvästi ole mahdollista: Jos α on irrationaalinen, niin $|\alpha| > 0$. On kuitenkin olemassa vain äärellisen monta kokonaislukujen c ja C arvoa, joilla luvun $|\frac{a_0}{cC}|$ koko on suunnilleen kokoluokkaa $|\alpha|$, joten näillä ei voi approksimoida irrationaalilukua α mielivaltaisen hyvin.

Kommentti: Ratkaisussa huomionarvoista on, ettei siinä tarvinnut tehdä raskaita laskuja, vaan oleellisinta oli korkean tason ymmärrys juurten $\frac{m}{n}$ käyttäytymisestä. Kuvailen tätä ongelmanratkaisumenetelmää usein sanomalla ”zoom in, zoom out”. (Tämä on hieman toisenlainen näkökulma aiemmin käsiteltyyn aiheeseen kokonaiskuvasta ja yksityiskohdista.) Tässä *zoom out* kuvaa suurien kuvioiden suunnittelua, heuristiikkojen keksimistä ja erilaisten ideoiden punnitsemista. Usein en *zoom out* -tilassa edes koske kynään. *Zoom in* puolestaan tapahtuu silloin, kun keskitytään yksityiskohtiin, käydään pieniä tapauksia läpi tai manuaalisesti lasketaan jotain. Monesti silloin, kun en ole saanut ratkaistua tehtävää, olen ollut liikaa *zoom in* -mielentilassa.

Sanoisin myös, että neljän ja puolen tunnin kilpailuissa (kuten IMOssa) ei ole tarkoituksenakaan olla koko aikaa *zoom in* -tilassa – tehtävät eivät ratkea pelkästään raa’alla voimalla, ja lisäksi monta tuntia *zoom in* -tilaa olisi varmasti hyvin raskasta. Lisää tästä aiheesta löytyy kehittymistä käsittelevästä tekstistäni sekä siellä linkatusta blogipostauksesta.

17 Pelit (Kombinatoriikka)

Tässä luvussa esitetään menetelmiä kombinatoristen pelien analysoimiseksi. Kilpailutehtävien peleissä tilanne on usein seuraava: kaksi pelaajaa pelaavat peliä, ja haluamme määrittää, kumpi voittaa molempien pelatessa optimaalisesti.

Aloitetaan suhteellisen yksinkertaisella esimerkillä, joka on esiintynyt vuoden 2012 MAOLin alkukilpailussa.

Tehtävä

Kasassa on 2012 tulitikkua. Anna ja Bella poistavat vuorotellen kasasta tikkuja. Jokaisella vuorolla poistettujen tulitikkujen määrän tulee olla joko $1, 2$ tai 3. Viimeisen tulitikun poistanut pelaaja voittaa. Kumpi voittaa, kun molemmat pelaavat optimaalisesti ja Anna aloittaa?

2012 on hyvin suuri luku, mutta peliä voi pelata myös pienemmällä määrällä tikkuja. Huomataan, että tikkumäärillä $1, 2$ ja 3 Anna voittaa valitsemalla kaikki tikut. Jos taas kasassa on 4 tikkua, Anna ei voi voittaa ensimmäisellä siirrolla, ja Bella saa seuraavalla siirrolla tyhjennettyä kasan.

Tikkumäärillä $5, 6$ ja 7 Anna voi toimia seuraavasti: hän poistaa kasasta sen verran tikkuja, että jäljelle jää 4 tikkua. Nyt peliä voikin ajatella niin, että Bella aloittaa ja että kasassa on tällöin 4 tikkua. Tämä tilanne käsiteltiin jo: aloittaja, eli nyt Bella, häviää ja Anna voittaa.

Huomataan, että tikkumäärällä 8 Anna joutuu siirtymään johonkin tikkumääristä $5, 6$ ja 7. Edellä todettiin, että näillä määrillä aloittava pelaaja, eli nyt Bella, voittaa ja siispä Anna häviää.

Nähdään, että aloittava pelaaja häviää täsmälleen silloin, kun kasassa on neljällä jaollinen määrä tikkuja. Tämän voi todistaa helposti induktiolla (mikä jätetään lukijalle). Siispä 2012 tulitikulla aloittaja häviää, eli Bella voittaa molempien pelatessa optimaalisesti.

Edellinen esimerkkitehtävä motivoi voitto- ja häviötilojen käsitteet.

Määritelmä

Kahden pelaajan pelin voittotiloiksi kutsutaan niitä tiloja, joissa vuorossa oleva pelaaja voittaa, ja häviötiloiksi puolestaan niitä tiloja, joissa vuorossa oleva pelaaja häviää.

Haluaisimme tietysti tavan määrittää voitto- ja häviötilat. Tässä auttaa seuraava tulos.

Lemma

Kahden pelaajan pelin tila on voittotila täsmälleen silloin, kun siitä pääsee johonkin häviötilaan. Tila on häviötila täsmälleen silloin, kun siitä pääsee vain voittotiloihin.

Lemman todistus perustuu samaan havaintoon kuin esimerkkitehtävässä. Jos pelissä on Annan vuoro ja hän pystyy siirtymään tilaan, jossa aloittava pelaaja (eli tällöin Bella) häviää varmasti, niin Anna voittaa tekemällä tämän siirron. Jos taas kaikki mahdolliset Annan siirrot johtavat tilanteeseen, jossa seuraavana siirtävä Bella voittaa, niin Anna häviää.

Tämä idea on varsin yleinen ja antaa helpon tavan laskea voitto- ja häviötiloja monissa erilaisissa peleissä. Tikkupelin tapauksessa käydään läpi tikkumääriä $1, 2, 3, \ldots$ ja pidetään kirjaa pelin voitto- ja häviötiloista. Tikkumäärän n status riippuu vain tilojen $n-1, n-2, n-3$ statuksista.

Esitetään vielä toinen vastaavanlainen tehtävä. Tämä tehtävä on Suomen IMO-joukkueen valintakokeesta.

Tehtävä

Liitutaululle on kirjoitettu luku 2019. Anna ja Bella tekevät vuorotellen seuraavanlaisia operaatioita: jos taululla on luku n, niin se voidaan korvata luvulla $n-d$, missä $d < n$ on jokin luvun n tekijä. Pelin voittaa se, joka saa muutettua taululla olevan luvun ykköseksi. Anna aloittaa. Kumpi voittaa, kun molemmat pelaavat optimaalisesti?

Aloitetaan pienillä tapauksilla: Tila 2 on aloittavalle pelaajalle voittoisa, koska luvusta voidaan vähentää $d = 1$. Tila 3 on häviötila, koska tästä voidaan siirtyä vain voittotilaan 2. Tila 4 on taas voittotila, koska siitä voidaan siirtyä häviötilaan 3.

Tiloja voidaan laskea rutiininomaisesti eteenpäin vaikkapa kymmeneen asti. Saadaan, että $3, 5, 7$ ja 9 ovat häviötiloja ja $2, 4, 6, 8$ ja 10 ovat voittotiloja. Logiikka on selvä: voittotiloja ovat täsmälleen parilliset luvut.

Väitteen voi todistaa induktiolla. Oletetaan, että tiloista $2, 3, \ldots, n-1$ voittotiloja ovat täsmälleen parilliset luvut. Todistetaan sama väite tilalle n. Tutkitaan kahta tapausta luvun n parillisuuden mukaan.

Tapaus 1: Luku n on parillinen. Tällöin $n-1$ on (induktio-oletuksen nojalla) häviötila ja tilasta n voidaan siirtyä tilaan $n-1$ valinnalla $d = 1$. Siis n on voittotila, kuten halusimmekin.

Tapaus 2: Luku n on pariton. Haluamme todistaa, että tila n on häviötila eli että tilasta n pääsee vain voittotiloihin eli parillisiin lukuihin. Tämä on selvää: Koska n on pariton, kaikki luvun n tekijät d ovat parittomia. Tällöin seuraava tila on $n-d$, joka on kahden parittoman luvun erotus ja täten parillinen. Luvusta n ei siis pääse voittotiloihin, joten lukua n vastaa häviötila.

Väite on todistettu kaikille n, ja täten Anna häviää aloitettaessa luvusta 2019.

Voitto- ja häviötiloilla ei, ikävä kyllä, voida käsitellä kaikkia pelejä. Edellisissä ongelmissa pelin tiloja pystyi helposti kuvaamaan yhdellä positiivisella kokonaisluvulla, mutta yleisesti ongelmaksi muodostuu usein mahdollisten tilojen suuri määrä. Johdantokappaleessa esitetty tehtävä on tästä oiva esimerkki. Tehtävä on esiintynyt

Suomen valmennuksen harjoituskokeessa.

Tehtävä

Anna ja Berg pelaavat dominopalikoilla (2×1) peliä $n \times 1$ ruudun laudalla. Pelissä pelaajat laittavat vuorotellen yhden dominopalikan laudalle niin, että palikka peittää täsmälleen kaksi ruutua eikä mene yhdenkään muun palikan päälle. Peli loppuu, kun tällaisia siirtoja ei pystytä enää tekemään. Viimeisen siirron tehnyt pelaaja voittaa pelin. Osoita, että jos Anna ja Berg pelaavat yhden pelin jokaisella luvun n arvolla $2, 3, \ldots, 2007$, Anna aloittaa jokaisen pelin ja molemmat pelaajat pelaavat optimaalisesti, niin Anna voittaa ainakin 1505 peliä.

Pelissä on paljon muitakin mahdollisia tiloja kuin tyhjät laudat kokoa $n \times 1$ (vertaa aiempiin esimerkkeihin, joissa näin ei ollut). Tämän vuoksi voitto- ja häviötilojen laskeminen ei toimi suoraan.[70]

Hankitaan hieman tuntumaa tehtävästä pienien tapauksien kautta, niin kuin aiemmissa tehtävissä. Arvoilla $n = 2, 3, 4$ Anna voi pakottaa voiton heti ensimmäisellä siirrolla. Arvolla $n = 5$ tämä ei kuitenkaan onnistu: Berg voi aina tehdä vähintään yhden siirron, minkä jälkeen laudasta on peitetty jo neljä ruutua viidestä eikä enempää siirtoja voida enää tehdä.

Arvolla $n = 6$ huomataan, että Anna voittaa laittamalla palikan kahteen keskimmäiseen ruutuun. Pienellä mielikuvituksella huomataan, että tämä toimii kaikilla parillisilla n: Anna aloittaa laittamalla palikan kahden keskimmäisten ruudun päälle. Tämän jälkeen Anna vain matkii Bergiä: kun Berg laittaa palikan, Anna laittaa palikan toiselle puolelle keskimmäistä palikkaa ja yhtä kauaksi keskikohdasta kuin Berg. Nyt lauta on aina symmetrinen Annan siirron jälkeen, joten ei voi syntyä tilannetta, jossa Berg saisi tehtyä siirron ja Anna ei. Täten Anna voittaa.

Anna siis voittaa parillisilla n, joten arvoilla $n = 2, 3, \ldots, 2007$ Anna voittaa vähintään 1003 peliä. Tämä ei vielä riitä, joten pitää tutkia myös parittomia n.

Parittomilla luvun n arvoilla ei ole selvää tapaa jakaa lautaa kahteen eri osaan, ja kuten aiemmin totesimme arvon $n = 5$ kohdalla, Anna ei edes voita kaikkia pelejä. Tarvitsisimme Annalle kuitenkin vielä 502 voittotilaa parittomilla luvuilla eli noin puolet parittomien lukujen tapauksista. Tämä antaakin pienen vihjeen: tehtävänannossa ei pyydetä määrittämään kaikkia voittotiloja, vaan halutaan vain, että noin puolilla parittomista n Anna voittaa. Tämä motivoi seuraavan idean.

Oletetaan, että arvolla $n = 2k - 1$ Anna häviää. Jos saamme todistettua, että esimerkiksi arvolla $n = 2k + 1$ Anna voittaa, niin saamme jokaista häviötilaa vastaamaan jonkin voittotilan, jolloin vähintään puolet parittomista n ovat aloittajan voittoja.

Idea on helppo toteuttaa. Tutkitaan peliä arvolla $n = 2k + 1$. Anna voi laittaa

[70] Voidaan kuitenkin ajatella, että ensimmäisen siirron jälkeen pelilauta jakautuu kahdeksi pienemmäksi pelilaudaksi, joilla pelataan samanaikaisesti (ja pelaaja saa päättää, kummalla laudalla tekee siirron). Tämä ei kuitenkaan suoraan johda ratkaisuun.

palikan kahden ensimmäisen ruudun kohdalle, jolloin peli käytännössä vastaa $2k-1 \times 1$-kokoista lautaa. Mutta $n = 2k - 1$ vastasi häviötilaa, eli vuorossa oleva Berg häviää pelin molempien pelatessa optimaalisesti. Siis $n = 2k + 1$ todella on voittotila.

Enää täytyy tehdä tarkat laskut voittotilojen määristä. Totesimme jo, että $n = 3$ on voittotila. Nähdään, että vähiten parittomien n voittotiloja on siinä tapauksessa, että tilat

$$n = 5, 9, 13, 17, \ldots, 2001, 2005$$

vastaisivat häviötiloja ja tilat

$$n = 3, 7, 11, 15, \ldots, 2003, 2007$$

vastaisivat voittotiloja. Tällöin voittotiloja olisi 502 kappaletta. Olivat voittotilat siis mitä tahansa, saimme haluamamme 502 voittotilaa, joten olemme valmiit.

Kommentti: ratkaisussa käsiteltiin parilliset ja parittomat n eri tavoilla. Parilliset n saatiin käsiteltyä symmetrian avulla, ja parittomat n saatiin ns. strategianvarastuksella. Molemmat ideat ovat hyvin yleisiä pelejä käsittelevissä tehtävissä.

Seuraava tehtävä on klassinen esimerkki strategianvarastamisesta. Netistä lisää pelistä löytää nimellä Chomp.

Tehtävä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Liitutaululle on kirjoitettu luvun n kaikki positiiviset tekijät (mukaan lukien 1 ja n). Anna ja Bella tekevät vuorotellen seuraavanlaisia siirtoja: pelaaja valitsee taululta luvun d ja poistaa taululta kaikki luvut muotoa kd, missä $k = 1, 2, \ldots$ Pelaaja, joka poistaa taululta luvun 1, häviää pelin. Anna aloittaa. Osoita, että Anna voittaa kaikilla $n > 1$.

Esimerkiksi arvolla $n = 6$ taululla on aluksi luvut $1, 2, 3$ ja 6. Anna voi aloittaa poistamalla luvun 6. Tällöin Bella joutuu valitsemaan toisen luvuista 2 ja 3, minkä jälkeen Anna valitsee näistä jäljelle jääneen. Lopulta Bella joutuu poistamaan luvun 1.

Jos n on alkuluvun potenssi p^k, niin tehtävän väite on triviaali: Anna valitsee luvun p. Mutta jo tapaus $n = p^a q^b$ joillain alkuluvuilla $p \neq q$ ja kokonaisluvuilla $a, b \geq 1$ on vaikea. Tätä tilannetta voi hahmottaa pelinä, jossa on annettuna $a \times b$ -suklaalevy, jonka kohta (x, y) vastaa luvun n tekijää $p^x q^y$. Pelaajat lohkaisevat vuorotellen levystä jonkin "ylänurkan" (eli valitsevat kohdan (x, y), ja poistavat kaikki sen yläpuolella, oikealla puolella tai ylempänä ja oikeammalla olevat kohdat). Jos luvulla n on kolme erisuurta alkutekijää, niin suklaalevy muuttuukin kolmiulotteiseksi kappaleeksi, ja yleisellä n suklaalevy voi olla vielä moniulotteisempi.

Vaikuttaa siis melko vaikealta ratkaista tehtävä suoraan keksimällä voittostrategia Annalle. Idea onkin todistaa epäsuorasti strategianvarastusidealla voittavan strategian olemassaolo. Tutkimme kahta tapausta:

Tapaus 1: Anna voittaa valitsemalla aluksi luvun n. Tässä tapauksessa Anna voittaa.

Tapaus 2: Anna ei voita valitsemalla aluksi luvun n. Tämä tarkoittaa, että mikäli Anna valitsisi luvun n, niin Bellalla olisi voittava strategia. Olkoon d luvun n tekijä, jonka Bella valitsisi heti Annan ensimmäisen siirron jälkeen. Anna voikin varastaa Bellan strategian: sen sijaan, että Anna valitsisi ensimmäisellä siirrollaan luvun n, hän valitseekin luvun d. Syntynyt tila on sama kuin mikä syntyisi Annan valitessa ensin luvun n ja Bellan vastatessa luvulla d, mutta nyt vuorossa oleva pelaaja on vaihtunut. Siispä Anna voittaa.

Seuraavana esitetään tehtävä vuoden 2011 MAOLin loppukilpailusta.

Tehtävä

Kaksi pelaajaa, rakentaja ja hajottaja, pelaavat seuraavanlaista peliä. Rakentaja aloittaa, ja pelaajat valitsevat vuorotellen joukon $\{0, 1, \ldots, 10\}$ eri alkioita. Rakentaja voittaa, jos jotkin neljä hänen valitsemistaan kuudesta alkiosta muodostavat aritmeettisen jonon. Hajottaja puolestaan voittaa, jos hän pystyy estämään rakentajaa muodostamasta tällaista aritmeettista nelikkoa. Kummalla pelaajista on voittostrategia?

Miten tehtävää lähestytään? Jos ei keksi mitään järkevää, niin voi ainakin tutkia, mitä erilaisia neljän pituisia aritmeettisia jonoja on. Jos jonon erotusvakio on 1, niin jonot ovat $(0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), \ldots, (7, 8, 9, 10)$. Erotusvakion ollessa kaksi jonot ovat $(0, 2, 4, 6)$, $(1, 3, 5, 7)$, $(2, 4, 6, 8)$, $(3, 5, 7, 9)$ ja $(4, 6, 8, 10)$. Jonoilla $(0, 3, 6, 9)$ ja $(1, 4, 7, 10)$ erotusvakio on 3. Muita jonoja ei ole.

Jotta rakentaja voittaisi, tulisi hänen saada valittua jokin näistä jonoista. Hyvä idea olisi valita aluksi sellaisia lukuja, jotka kuuluvat mahdollisimman moneen näistä jonoista. Tämä on hyvä strategia myös hajottajalle.

Mitkä sitten ovat usein jonoissa esiintyviä lukuja? Tarkastelemalla edellä tehtyä listausta nähdään, että luvut 4 ja 6 esiintyvät eniten. Myös luvut 3 ja 7 ovat yleisiä. Rakentaja saa varmasti valittua näistä luvuista vähintään kaksi kappaletta, samoin hajottaja.

Nyt voisi tutkia paria eri tapausta sen mukaan, mitä lukuja rakentaja saa valittua. Tämä ei kuitenkaan tunnu helpolta: vaikka rakentaja saisi valittua luvut 3 ja 4, niin ei ole selvää, miten hän voittaisi.

Sen sijaan huomataan, että mikäli hajottaja saa valittua luvut 3 ja 4, niin hänellä on jo erittäin hyvä asema: jokaisessa kahden tai kolmen erotusvakion jonossa on joko luku 3 tai 4, kuten listauksesta nähdään. Tämä ei kuitenkaan aivan riitä: Jos rakentaja valitsee luvut 6 ja 7, niin hajottaja ei valittuaan luvut 3 ja 4 voi enää estää rakentajan voittoa. Rakentaja voisi valita luvun 8, ja hän saa vielä valittua joko luvun 5 tai luvun 9.

Edellinen idea kuitenkin toimii luvuilla 3 ja 6: tämä estää jo kaikki erotusvakioden 1 ja 2 jonot, ja jäljelle jää enää jono $(1, 4, 7, 10)$. Nyt hajottaja saa varmasti valittua vielä jonkin luvuista $1, 4, 7$ ja 10, joten hän voittaa pelin. Vastaava väite tietysti pätee symmetrian nojalla lukujen 3 ja 6 sijasta myös luvuilla 4 ja 7. Alkaa vaikuttaa siltä, että hajottajalla on voittostrategia.

Voimme jatkaa samaa ideaa vielä eteenpäin. Jos hajottaja saa valittua luvut 3 ja 8, niin jäljelle jäävät jonot $(4, 5, 6, 7)$, $(0, 2, 4, 6)$ ja $(1, 4, 7, 10)$, mikä vaikuttaa hyvältä tilanteelta hajottajalle. Vastaavanlainen tilanne pätee hajottajan saadessa haltuunsa luvut 2 ja 7.

Nämä ideat varmaankin riittävät ratkaisuun, ja kyse on enää ideoiden yhdistämisestä. Alla on esitetty ratkaisu.

Osoitetaan, että hajottajalla on voittostrategia. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että rakentajan ensimmäisen vuoron luku on enintään 5. Tutkitaan kolmea tapausta.

1. Rakentaja ei aluksi valitse kumpaakaan luvuista 3 ja 4. Tällöin hajottaja voi valita luvun 3, ja rakentajan tulee yllä esitetyn päättelyn nojalla vastata luvulla 6. Hajottaja valitsee luvun 4, ja rakentajan tulee vastaavalla logiikalla vastata luvulla 7. Hajottaja voi nyt valita luvun 8. Huomataan, että hajottaja on saanut estettyä kaikki nelikot.

2. Rakentaja valitsee aluksi luvun 3. Tällöin hajottaja voi vastata valitsemalla luvun 7, jolloin rakentajan tulee valita luku 4. Hajottaja valitsee luvun 2. Jäljelle jääneet nelikot ovat $(3, 4, 5, 6)$, $(4, 6, 8, 10)$ ja $(0, 3, 6, 9)$. Jakaudutaan vielä pariin helppoon osatapaukseen.

   (a) Rakentaja ei valitse lukua 6. Tällöin hajottaja valitsee seuraavaksi luvun 6 ja voittaa.

   (b) Rakentaja valitsee luvun 6. Hajottaja vastaa luvulla 5. Nähdään, ettei rakentaja voi enää pakottaa voittoa: hänellä on nelikoista $(4, 6, 8, 10)$ ja $(0, 3, 6, 9)$ valittuna alkiot $3, 4$ ja 6, joten hajottaja voi aina estää uhkaukset.

3. Rakentaja valitsee aluksi luvun 4. Hajottaja vastaa luvulla 3, ja rakentajan tulee valita luku 6. Hajottaja valitsee luvun 8. Jäljelle jääneet nelikot ovat $(4, 5, 6, 7)$, $(0, 2, 4, 6)$ ja $(1, 4, 7, 10)$. Jos rakentaja ei seuraavalla vuorolla valitse mitään luvuista $0, 2$ ja 7, voi hajottaja valita seuraavalla vuorollaan luvun 7 ja voittaa. Tutkitaan loput tapaukset.

   (a) Rakentaja valitsee luvun 7. Tällöin hajottaja valitsee luvun 5, ja kuten kohdassa 2b hajottaja voi aina estää rakentajan uhkaukset.

   (b) Rakentaja valitsee luvun 0. Tällöin hajottaja valitsee luvun 2. Jos rakentaja ei seuraavaksi valitse lukua 7, voi hajottaja valita luvun 7, jolloin hän voittaa. Muuten hajottaja valitsee luvun 5 ja selvästikin voittaa pelin.

   (c) Rakentaja valitsee luvun 2. Hajottava valitsee luvun 0, ja tilanne on sama kuin edellisessä kohdassa.

Täten hajottajalla on voittostrategia.

Kommentti: Tehtävästä voi olla vaikea saada otetta ennen ensimmäistä hyödyllistä huomiota. Tämän jälkeen tehtävä kuitenkin murenee palasiin: voimme löytää

(yrityksen ja erehdyksen kautta) monenlaisia hajottajalle edullisia asetelmia ja käydä näiden pohjalta läpi kaikki mahdolliset siirtosarjat. Tapauskäsittely itsessään ei ole vaikea, eikä sen tekeminen vie paljoakaan aikaa.

Osoittautuu myös, että mikäli hajottaja saa valittua molemmat luvuista 4 ja 9 ensimmäisellä kahdella siirrollaan, niin hän voittaa. Tämän voi todistaa suoraan tutkimalla paria eri tapausta. Vastaavasti hajottaja voittaa saamalla luvut 1 ja 6, ja kuten aiemmin todettiin, myös lukujen 3 ja 6 tai lukujen 4 ja 7 saaminen voittaa pelin. Ei ole vaikeaa nähdä, että hajottaja saa pakotettua jonkin näistä pareista itselleen ensimmäisten kahden siirtonsa aikana. Tämä antaa vaihtoehtoisen viimeistelyn ratkaisulle.

Viimeisenä esitettävä tehtävä on vuoden 2015 IMO-lyhytlistalta Suomen ehdottama tehtävä.

Tehtävä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Anna ja Bella pelaavat peliä, jossa he valitsevat positiivisia kokonaislukuja $k \leq n$. Säännöt ovat seuraavat:

1. Pelaaja ei saa valita lukua, jonka jompikumpi pelaajista on valinnut jollain aiemmalla vuorolla.
2. Pelaaja ei saa valita lukua, joka on yhden päässä tämän pelaajan jo aiemmin valitsemasta luvusta.
3. Peli on tasapeli, jos kaikki luvut on valittu. Muussa tapauksessa pelaaja, joka ei voi siirtää, häviää pelin.

Anna aloittaa. Määritä pelin lopputulos, kun molemmat pelaavat optimaalisesti.

Huomaa, että pelaaja voi valita luvun k, vaikka vastustaja olisi valinnut jommankumman (tai molemmat) luvuista $k-1$ ja $k+1$, mutta ehto 2 kieltää uuden luvun valitsemisen oman luvun vierestä.

Nopea pienten tapausten tarkastelu antaa, että arvoilla $n = 1, 2, 4$ peli on tasapeli ja arvolla $n = 3$ Bella voittaa. Tästä ei vielä voida vetää kovin suuria johtopäätöksiä.

Huomataan helppo symmetria-argumentti: parillisilla n Bella ei ainakaan häviä. Bella voi nimittäin aina peilata Annan valintoja, eli jos Anna valitsee luvun i, niin Bella valitsee luvun $n + 1 - i$. Tämä todistus ei kuitenkaan yleisty parittomille n.

Yleisesti ottaen Bellalla on pieni etu: pelissä on huono asia, jos joutuu tekemään siirron, koska tämä poissulkee myöhempien siirtojen mahdollisia valintoja. Vastaavalla logiikalla on hyvä idea valita luku 1 tai luku n eikä antaa näitä vastustajalle, koska näiden lukujen valitseminen poissulkee vain yhden luvun jatkosta.

Tästä motivoituneena koitetaan todistaa, että Bella ei ainakaan häviä, keksimällä strategia, jossa Bella valitsee ensimmäisellä vuorollaan joko luvun 1 tai n. Oletetaan, että $n \geq 2$, jolloin Bella todella saa valittua jommankumman luvuista 1 ja n. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että Anna valitsee ensimmäisellä vuorollaan

jonkin luvun, joka on enintään $\frac{n+1}{2}$, jolloin Bella voi valita luvun n.

Tutkitaan tilannetta Annan toisen siirron jälkeen. Anna on valinnut luvut a_1 ja a_2, joilla $1 \leq a_1 < a_2 < n$, ja Bella on valinnut luvun n. Nyt Bella voi ainakin valita itselleen luvun lukujen a_1 ja a_2 välistä. Annan valitsee seuraavalla vuorollaan jonkin luvun a_3, minkä seurauksena Annan lukuihin syntyy uusi väli, josta Bella voi valita itselleen seuraavan luvun. Jos esimerkiksi $a_1 < b < a_3 < a_2$, niin lukujen a_3 ja a_2 väliin syntyy uusi väli, josta Bella voi valita toisen lukunsa. Yleisesti Annan siirrot luovat aina uuden välin, josta Bella ei ole vielä valinnut yhtään lukua ja josta Bella voi näin ollen valita uuden luvun.

Bella ei siis häviä, joten enää pitää tutkia, milloin peli päättyy tasapeliin Bellan pelatessa edellä kuvaillulla strategialla. On uskottavaa, että oikeastaan peli päättyy hyvin harvoin tasapeliin: tämä vaatisi, että Annan ja Bellan valitsemat luvut olisivat täsmälleen parittomat ja parilliset luvut, vastaavasti.

Täten Bella voi estää tasapelin valitsemalla jonkin parittoman luvun samalla, kun pelaa edellä kuvaillulla strategialla. Jos n on pariton, niin tämä selvästi onnistuu, koska Bella tulee heti ensimmäisellä vuorollaan valitsemaan luvun n. Parillisilla n pyritään valitsemaan pariton luku toisella vuorolla.

Arvolla $n = 6$ tämä ei vielä onnistu: Anna voi aloittaa valitsemalla luvun 1, jolloin Bella strategiansa vuoksi valitsee luvun 6. Anna vastaa valitsemalla luvun 3, mikä varmistaa mahdollisuuden valita luvun 5 Annan kolmannella eli viimeisellä siirrolla.

Arvoilla $n \geq 8$ tämä kuitenkin onnistuu. Tutkitaan tilannetta, jossa Bella on valinnut luvun n ja Anna luvut a ja b, $1 \leq a < b < n$. Luvut a ja b voivat itsessään peittää maksimissaan kaksi paritonta lukua, ja lisäksi luku $n - 1$ on pariton luku, jota Bella ei voi valita toisella vuorollaan. Koska parittomia lukuja välillä $[1, n]$ on $\frac{n}{2} \geq 4$ kappaletta, on jäljellä vielä vähintään yksi pariton luku, jonka Bella voi valita. Täten Bella voittaa, jos $n \geq 8$.

Olemme siis tapausta $n = 6$ vaille valmiit. Todistetaan, että tapauksessa $n = 6$ Anna voi varmistaa tasapelin valitsemalla ensiksi luvun 1. Tutkitaan tapauksia sen mukaan, mitä Bella vastaa.

- Jos Bella valitsee luvun 2, Anna vastaa valitsemalla luvun 5. Anna saa varmasti myöhemmin valittua luvun 3.
- Jos Bella valitsee luvun 3, Anna vastaa valitsemalla luvun 6. Anna saa varmasti myöhemmin valittua luvun 4.
- Bella: 4, Anna: 6, myöhemmin Anna: 3.
- Bella: 5, Anna: 6, myöhemmin Anna: 4.
- Bella: 6, Anna: 3, myöhemmin Anna: 5.

Siis tapauksessa $n = 6$ sekä Anna että Bella voivat varmistaa, etteivät he häviä, joten peli on tasapeli.

Täten peli on tasapeli täsmälleen silloin, kun $n = 1, 2, 4$ tai 6, ja muissa tapauksissa Bella voi varmistaa voiton.

Kommentti: Tehtävä ei ole helppo. Ensinnäkään vastausta ei ole helppoa arvata, koska arvoilla $n = 2, 4, 6$ peli on tasapeli ja arvoilla $n = 3, 5, 7$ peli on Bellan voitto. Luonnollinen arvaus siitä, että peli on tasapeli parillisilla n ja Bellan voitto parittomilla n, osoittautuu vääräksi. Tämän arvauksen vian voi intuitiivisesti nähdä näin: Bella ei häviä parillisilla n symmetria-argumentin takia. Jos peli olisi tasapeli arvolla $n = 100$, niin Annan tulisi saada kaikki parilliset tai parittomat luvut. Kuulostaa kuitenkin epäuskottavalta, että Bella ei voisi estää tätä tapahtumasta, kun Bellalla on hieman etua Annan aloittaessa.

Toisekseen ei ole kovin helppoa keksiä voittostrategiaa Bellalle. Tähän voi kuitenkin päätyä keksimällä ratkaisussa esitetyn idean lukujen 1 ja n hyödyllisyydestä. Tämän jälkeen luonnollinen kysymys on ”Miltä näyttäisi tilanne, jossa lauta ei ole vielä täynnä, mutta Bella ei voi tehdä yhtäkään siirtoa?” Tällaista tilannetta ei ole, ja syyn voi nähdä konkreettisia esimerkkejä tarkastelemalla: Anna on aina tehnyt enemmän siirtoja kuin Bella, ja tämän vuoksi on aina olemassa kaksi Annan lukua, joiden välissä ei ole Annnan eikä Bellan lukuja. Tästä välistä voi siis valita luvun Bellalle.

18 Prosessit (Kombinatoriikka)

Tässä luvussa käydään läpi esimerkkitehtäviä, joissa tutkitaan erilaisia prosesseja. Aiheesta ei esitetä sen kummemmin teoriaa, vaan tehtävien ratkaisujen kautta esitetään erilaisia ideoita tällaisten ongelmien käsittelemiseen.

Ensimmäinen tehtävä on esiintynyt mm. Suomen valmennuksen harjoituskokeessa.

Tehtävä

Pyöreän pöydän ympärillä istuu 25 poliitikkoa, jotka äänestävät. Ensimmäisellä äänestyskierroksella jokainen äänestää satunnaisesti joko ”Kyllä” tai ”Ei”. Jokaisella seuraavista kierroksista jokainen poliitikko äänestää seuraavasti:

- Jos vähintään toinen poliitikon vierustovereista äänesti edellisellä kerralla samoin kuin poliitikko itse, niin poliitikko äänestää samoin kuin edellisellä kerralla.
- Muussa tapauksessa poliitikko äänestää päinvastoin kuin edellisellä kierroksella.

Osoita, että jostain kierroksesta lähtien kenenkään poliitikon ääni ei enää muutu.

Numeroidaan poliitikot myötäpäivään $1, 2, \ldots, 25$. Esimerkiksi jos ensimmäisellä kierroksella henkilöt $1, 2, \ldots, 24$ äänestävät ”Kyllä” ja henkilö 25 äänestää ”Ei”, niin toisella kierroksella kaikki äänestävät ”Kyllä”, samoin myös kolmannella kierroksella. Tällöin kenenkään ääni ei enää muutu.

Ongelmasta saa melko helposti tehtyä seuraavat havainnot: Jos henkilöt A ja B istuvat vierekkäin ja äänestävät samalla tavalla, niin kumpikaan ei tule vaihtamaan ääntään enää missään vaiheessa. Lisäksi koska 25 on pariton luku, niin ensimmäisellä kierroksella on olemassa jotkin kaksi vierekkäin istuvaa poliitikkoa, jotka äänestävät samoin. Muutoin kaikkien parittoman luvun saaneiden poliitikkojen tulisi äänestää samalla tavalla ja vastaavasti kaikkien parillisen luvun saaneiden tulisi äänestää samalla tavalla, mutta tällöin henkilöt 1 ja 25 äänestävät samalla tavalla.

Jokaisella äänestyskerralla löytyy siis vähintään yksi ryhmä, jonka jäsenet istuvat vierekkäin, eli muodostavat yhtenäisen osan pyöreän pöydän kehästä, ja äänestävät keskenään samalla tavalla. Enää tulee osoittaa, että jokaisesta poliitikosta tulee ennen pitkää osa jotakin tällaista ryhmää.

Tämä on oikeastaan melko helppoa. Valitaan jokin vierekkäisten poliitikkojen joukko S. Olkoon h poliitikko, joka kuuluu joukkoon S mutta jonka vierustoveri h' ei kuulu joukkoon S. (Jos tällaista poliitikkoa ei löydy, niin S sisältää kaikki 25 poliitikkoa ja olemme valmiit.) Jos poliitikko h' ei aiemmin kuulunut mihinkään ryhmään, on hän edellisellä äänestyskierroksella äänestänyt eri tavalla kuin h. Tällöin h' tulee äänestämään seuraavalla kierroksella samalla tavalla kuin h, joten hän liittyy joukkoon S.

Huomataan siis, että jokainen ryhmä S haalii joukkoonsa vieressään istuvia polii-

tikkoja, jos ne eivät jo valmiiksi kuulu johonkin ryhmään. Tämän vuoksi jokainen poliitikko tulee jossakin vaiheessa kuulumaan johonkin ryhmään, mikä todistaa väitteen.

Huomaa, että parillisilla määrillä poliitikkoja väite ei päde, koska tällöin ensimmäisellä äänestyskerralla ei välttämättä muodostu yhtään ryhmää.

Seuraava tehtävä on vuoden 2014 IMO-lyhytlistalta.

Tehtävä

Olkoon $m \geq 1$ kokonaisluku. 2^m paperiarkille on jokaiseen kirjoitettu luku 1. Yhdellä operaatiolla voidaan valita kaksi eri paperiarkkia, joissa on luvut a ja b, pyyhkiä nämä luvut ja kirjoittaa molempiin arkkeihin luku $a + b$. Osoita, että $m \cdot 2^{m-1}$ askeleen jälkeen papereihin kirjoitettujen lukujen summa on vähintään 4^m.

Askelmäärä $m \cdot 2^{m-1}$ ei oikein anna mitään vihjeitä. Kannattaa siis aluksi vain saada todistettua jotain hyviä alarajoja. Summa kasvaa tietysti aina vähintään kahdella, mutta tämä ei ole vielä lähellekään riittävä alaraja.

Luonnollinen idea on tutkia, kuinka monella operaatiolla summaa saadaan kasvatettua jollain pienellä määrällä. Esimerkiksi maksimissaan $\frac{2^m}{2}$ operaatiolla summa voi kasvaa vain kahdella ja maksimissaan $\frac{2^m}{2}$ operaatiolla summa voi kasvaa tasan kolmella.

Tämä lähestymistapa johtaa kuitenkin ongelmiin: emme voi samanaikaisesti saada $\frac{2^m}{2}$ operaatiolla summaa kasvamaan vain kahdella ja $\frac{2^m}{2}$ operaatiolla summaa kasvamaan vain kolmella. Tällä idealla saatavat alarajat eivät täten ole kovin hyviä.

Huomataan, että tehtävän alaraja todella on saavutettavissa: yhdistetään ensiksi 2^{m-1} operaatiolla lappuja niin, että jokaisessa on luku 2, minkä jälkeen käytetään jälleen 2^{m-1} operaatiota niin, että jokaisessa on luku 4, ja niin edelleen. Arvioiden tulee siis olla oikeasti melko tarkkoja.

Miksei edellinen lähestymistapa toimi? Syynä on se, että siinä katsotaan vain, mitä tapahtuu yksittäisille lapuille, eikä tutkita niinkään kokonaiskuvaa. Tässä tuleekin esiin tärkeä ajatus:

Välillä tulee tutkia kokonaiskuvaa ja välillä vain yksittäisiä asioita.

Tämä on hieman ympäripyöreä muotoilu, mutta ajatus on tärkeä. Idea tuli oikeastaan ilmi jo lukuteorian ensimmäisessä kappaleessa puhuttaessa lokaaleista ja globaaleista ilmiöistä. Tehtävissä vaikeus piilee usein siinä, miten tasapainotellaan kokonaiskuvan ja yksityiskohtien välillä.

Miltä näyttäisi globaali ratkaisu? Koitetaan muodostaa paperilappujen luvuista jokin suure, joka kasvaa jokaisella operaatiolla ja jonka kautta saadaan lopulta alaraja summalle. Yksinkertaisesti ”lukujen summa” ei ole hyvä tällainen suure, kuten jo aiemmin totesimme – sitä on vaikea arvioida hyvin. Luonnollinen seuraava yritys on valita suureeksi lukujen tulo. Hankaluutena tässä valinnassa on se, ettei

heti välttämättä näe, miten tulosta päästään lopussa takaisin summaan. On kuitenkin rohkaisevaa huomata, että tulo käyttäytyy hyvin operaatioita tehdessä, kuten seuraavaksi näemme.

Mitä lukujen tulolle tapahtuu yhdellä operaatiolla? Muut kuin operaatioon valitut luvut a ja b pysyvät samana ja tulo ab muuttuu tuloksi $(a+b)^2$. Miten näitä voi verrata? Pienellä kokeilemisella (tai aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä) nähdään, että saamme tuloon kertoimen 4: pätee

$$(a+b)^2 \geq 4ab,$$

koska tämä voidaan kirjoittaa muodossa $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ eli $(a-b)^2 \geq 0$.

Huomataan siis, että paperiarkkien lukujen tulo vähintään nelinkertaistuu, kun tehdään yksi operaatio. Koska aluksi tulo oli 1, niin k askeleen jälkeen tulo on vähintään 4^k. Erityisesti kun $k = m \cdot 2^{m-1}$, on tulo vähintään

$$4^{m \cdot 2^{m-1}} = 2^{m \cdot 2^m}.$$

Viimeinen haaste ratkaisussa on: kuinka suuri lukujen summan tulee vähintään olla, jos tiedämme, että tulo on vähintään 2^{m2^m}? Intuitiivisesti summa minimoituu silloin, kun kaikki luvut ovat suunnilleen yhtä suuria. Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö sanoo nimenomaan tämän (ks. Arvionti ja epäyhtälöt -luku). Jos lopuksi papereilla olevat luvut ovat $a_1, a_2, \ldots, a_{2^m}$, niin pätee

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^m}}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_{2^m}}.$$

Oikean puolen tulo on $2^{m \cdot 2^m}$, joten epäyhtälön oikea puoli on vähintään $\sqrt[2^m]{2^{m \cdot 2^m}} = 2^m$. Saamme siis $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^m} \geq 4^m$, mikä on haluttu arvio.

Edellinen ratkaisu perustui siihen, että jokin suure, tässä tapauksessa lukujen tulo, kasvoi jokaisella operaatiolla (ja vieläpä tarpeeksi nopeasti). Tällaista hallitusti muuttuvaa suuretta kutsutaan semi-invariantiksi. Invariantti puolestaan on suure, joka ei muutu ollenkaan. Seuraavan klassikkotehtävän ratkaisu sisältää helpon esimerkin tästä.

Tehtävä

Kokoa 8×8 olevan ruudukon kaksi vastakkaista kulmaa on leikattu pois. Voiko jäljelle jääneet 62 ruutua peittää 2×1 ja 1×2 -dominopalikoilla, kun kunkin palikan tulee peittää täsmälleen kaksi (vierekkäistä) ruutua ja mitkään kaksi laattaa eivät saa mennä päällekkäin?

Ideana on värittää ruudukko shakkilautamaisesti. Nähdään, että leikatussa laudassa on 30 valkoista ja 32 mustaa ruutua (tai toisin päin). Kukin dominopalikka kuitenkin peittää täsmälleen yhden ruudun kumpaakin väriä, joten kaikkien ruutujen peittäminen on mahdotonta.

Jos invariantin haluaa tuoda eksplisiittisemmin esiin, voidaan sanoa, että suure ”peitettyjen valkoisten ruutujen määrä miinus peitettyjen mustien ruutujen määrä” ei muutu, kun dominopalikoita lisätään, ja että peittäminen on siksi mahdotonta.

Seuraavana on tehtävä vuoden 2018 IMO-lyhytlistalta.

Tehtävä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Anna pelaa seuraavaa peliä laudalla, joka koostuu $n+1$ laatikosta, jotka on numeroitu $0, 1, \ldots, n$. Aluksi laatikossa 0 on n kiveä ja muut laatikot ovat tyhjiä. Jokaisella vuorolla Anna voi valita laatikon, jossa on k kiveä, ja siirtää yhtä laatikon kivistä enintään k ruutua eteenpäin (mutta kuitenkin niin, että kivi pysyy pelilaudalla). Annan tavoite on saada kaikki n kiveä laatikkoon n. Osoita, että Annan täytyy tehdä vähintään

$$\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$$

siirtoa saavuttaakseen tavoitteensa.

Raja on mielenkiintoisen näköinen, ja se vaikuttaa luonnolliselta. Yksi idea olisi yrittää saada siirrettyä yhtä kiveä $\lceil \frac{n}{1} \rceil$ kertaa, toista kiveä $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ kertaa ja niin edelleen. Toinen ajatus on siirtää jokaista kiveä aina niin pitkälle kuin mahdollista.

Pienillä tapauksilla on varsin helppoa saavuttaa raja. Yleinen tapaus tuntuu kuitenkin vaikeammalta. Tähän on luonnollinen syy: tehtävässä pyydetään todistamaan alarajaa, mutta se ei välttämättä ole tiukka.[71] Ei siis välttämättä ole olemassa sellaista strategiaa, joka saavuttaisi tämän minimisiirtomäärän.

Miten rajan pitävyyden voisi todistaa? Tutkimalla pelin kulkua konkreettisissa tapauksissa huomataan, että kaikilla i jokin kivi siirtyy jossain vaiheessa laatikosta i laatikkoon $i+1$. Tämän voi todistaa seuraavasti: Tutkitaan siirtoa, jonka jälkeen laatikoissa $1, 2, \ldots, i$ ei ole enää yhtään kiveä. Viimeisenä siirrettävän kiven täytyy olla ainoa kivi laatikossaan, joten se voi siirtyä vain yhdellä eteenpäin, eli se siirtyy laatikosta i laatikkoon $i+1$. Voidaan ajatella, että yhden askeleen eteenpäin siirtyvä kivi on aina sama kivi, koska kivien identiteeteillä ei ole väliä. Numeroidaan tämä kivi kiveksi numero 1. Kivi 1 on siis aina jonon viimeisenä.

Vastaavasti huomataan, että jokaisessa pelissä on ikään kuin kivi, joka hyppii aina maksimissaan kahden laatikon päähän ja joka ei ole kivi numero 1. Tämän voi todistaa samoin kuin edellä: Tutkitaan tilannetta, jossa laatikoissa $1, 2, \ldots, i$ on viimeisen kerran yhteensä kaksi kiveä. Tällöin kivi, joka ei ole kivi numero 1, joko hyppää laatikosta $i-1$ kahden päähän tai hyppää laatikosta i yhden tai kahden päähän. Numeroidaan tämä kivi kiveksi 2, jolloin kivi numero 2 hyppää siis aina enintään kahden ruudun päähän.

Yleisesti nähdään, että kivet voidaan numeroida edellä kuvaillulla tavalla luvuilla $1, 2, \ldots, n$ niin, että kivi numero t hyppää aina enintään t laatikon päähän. Täten se tekee vähintään $\lceil \frac{n}{t} \rceil$ hyppäystä. Summaamalla nämä luvut arvoilla $t = 1, 2, \ldots, n$ saadaan haluttu väite.

Kommentti: Idea on hyvin luonnollinen ja tulee esiin kokeilemalla pelin kulkua. Idean toteutusta tarvitsee miettiä hieman, mutta tämä ei ole erityisen vaikeaa.

[71] Kyseinen raja ei todella olekaan tiukka.

Huomionarvoinen on idea siitä, että laskemme kullekin kivelle tehtyjä siirtoja emmekä esimerkiksi jokaisen laatikon tekemiä siirtoja. (Toteutus tämänkin lähestymistavan kautta on mahdollinen käyttämällä samanlaisia ideoita kuin edellä, mutta pidän kuitenkin kivien näkökulmaa luonnollisempana). Tämä on oikeastaan koko tehtävän pointti: vaihdamme näkökulmaa laatikoista kiviin. Idea näkökulman muuttamisesta ei ole harvinainen, ja esimerkiksi ns. kahdella tavalla laskemisen periaate perustuu nimenomaan tähän ideaan.

Myös seuraava tehtävä on IMO-lyhytlistalta vuodelta 2013.

Tehtävä

Riviin on kirjoitettu äärellinen määrä positiivisia kokonaislukuja. Yhdellä operaatiolla Anna voi valita kaksi vierekkäistä lukua x ja y, missä x on y:n vasemmalla puolella ja $x > y$, ja korvata parin (x, y) joko parilla $(y + 1, x)$ tai parilla $(x - 1, x)$. Osoita, että Anna voi tehdä vain äärellisen monta operaatiota.

Huomataan, että jokaisella operaatiolla valittu oikeanpuoleinen luku kasvaa. Väite perustuukin tähän: hiljalleen rivin oikeassa päässä alkaa olla isoimmat luvut ja vasemmassa päässä pienimmät luvut. Enää pitää todistaa, että näin käy varmasti.

Sen lisäksi, että oikeanpuoleinen luku kasvaa, vasemmanpuoleinen luku joko pienenee tai pysyy samana.

Numeroidaan rivin luvut indekseillä $1, 2, \ldots, n$, missä 1 vastaa vasemmanpuoleisinta lukua ja n vastaa oikeanpuoleisinta lukua. Yksi idea on tutkia, mitä tapahtuu kohdissa 1 ja n oleville luvuille. Tutkitaan kohtaa 1. Jokaisella operaatiolla kohdassa 1 oleva luku pienenee tai pysyy samana. Jos tietäisimme, että kaikki rivin luvut ovat aina positiivisia, niin saisimme, että vasemmanpuolisin luku ei voi pienentyä äärettömän montaa kertaa. Mutta tämän voi todistaa seuraavasti: Aluksi kaikki luvut ovat positiivisia. Tarkastellaan ensimmäistä operaatiota, jonka seurauksena riviin tulee epäpositiivinen luku. Jos jollain askeleella jokin luku muuttuu nollaksi tai negatiiviseksi, niin sen tulee tapahtua operaation $(x, y) \to (x - 1, x)$ seurauksena. Tällöin tulisi olla $x \leq 1$, mikä pakottaisi $y \leq 0$, joten jokin luku olisikin jo valmiiksi nolla tai negatiivinen, mikä on ristiriita.

Siis kohdan 1 luvulle voidaan tehdä vain äärellinen määrä operaatioita muotoa $(x, y) \to (x - 1, x)$, ja jos sille tehdään operaatio muotoa $(x, y) \to (y + 1, x)$, niin kaikilla paitsi äärellisen monella operaatiolla tulee päteä $x = y + 1$. Kohdan 1 luku ei siis enää muutu jostain pisteestä lähtien, ja aina, kun sille tehdään operaatio, niin kohdassa 2 oleva luku on yhtä pienempi kuin kohdan 1 luku.

Jos kohdille 1 ja 2 tehdään vain äärellinen määrä operaatioita, voimme kokonaan unohtaa kohdan 1 ja tutkia yhtä pienempää tapausta (tai kirjoittaa ratkaisun alkuun ”todistetaan väite induktiolla muuttujan n suhteen”, ja todeta, että tässä tapauksessa ollaan valmiit). Oletetaan siis, että kohdille 1 ja 2 tehdään äärettömän monta operaatioita. Tehdään vastaava oletus myös muille pareille i ja $i + 1$.

Seuraava luonnollinen kysymys on: mitä arvoja kohdassa 2 oleva luku voi saada? Jos kohdassa 1 on luku x, niin kun kohdille 1 ja 2 suoritetaan operaatio, tulee

kohdassa 2 olla tätä ennen luku $x-1$. Tämän jälkeen kohdassa 2 on luku x. Kohdille 1 ja 2 tehtävien operaatioiden välillä kohdan 2 luvun tulee siis pienentyä yhdellä. Toteamme, että kohdassa 2 on aina joko luku x tai $x-1$.

Mitä sitten on kohdassa 3? Jollain ajanhetkellä kohdille 2 ja 3 tulee tehdä operaatio, joka vähentää kohdan 2 lukua arvosta x arvoon $x-1$. (Huomaa, että kohdan 2 luku ei koskaan voi olla alle $x-1$.) Tämän jälkeen kohdassa 3 tulee olemaan luku x. Toisaalta kohdan 3 arvo ei voi koskaan enää muuttua suuremmaksi kuin x.

Jatkamalla tätä päättelyä huomataan, että jokaisessa kohdassa lukujen arvot ovat aina enintään x (jostain ajanhetkestä lähtien). Erityisesti todetaan, että kohdassa n oleva arvo on jostain pisteestä lähtien aina enintään x. Mutta aina, kun kohdille $n-1$ ja n tehdään operaatio, kasvaa kohdassa n oleva luku vähintään yhdellä. Täten kohdille $n-1$ ja n tehdään vain äärellisen monta operaatiota, ja kaikki loput operaatiot tehdään kohdissa $1, 2, \ldots, n-1$.

Olemme siis saaneet redusoitua ongelman yhtä pienempään tapaukseen. Toistamalla tätä (tai kuten aiemmin mainittiin, käyttämällä induktiota) tehtävä saadaan ratkaistua.

Kommentti: Tehtävän voi ratkaista myös suoraan semi-invarianteilla. Määritellään lukurivin arvo seuraavasti: jos rivissä on vasemmalta oikealle luvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$, niin sen arvo on $\frac{x_1}{2^n} + \frac{x_2}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{x_n}{2}$. Helppo tarkastelu osoittaa, että jokaisella siirrolla arvo kasvaa vähintään luvun $\frac{1}{2^n}$ verran. Koska rivin lukujen maksimi M ei kasva, on rivin arvo kuitenkin enintään $\frac{M}{2^n} + \frac{M}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{M}{2} < M$, joten operaatioita voidaan tehdä vain äärellisen monta.

Tämän ratkaisun voi motivoida niin, että lähdetään heti etsimään jotain semi-invarianttia ja kokeillaan erilaisia suureita kunnes jokin toimii. Lisäksi monesti semi-invariantti rakennetaan antamalla kullekin luvulle jokin painokerroin ja summaamalla saadut termit yhteen,[72] joten esitetty rivin arvon määritelmä on melko tyypillinen ja siksi verrattain helppo keksiä. Toinen toimiva tapa valita painokertoimet on valita termille x_i kerroin i.

Viimeinen esimerkki on niin ikään IMO-lyhytlistalta, tällä kertaa vuodelta 2017.

Tehtävä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Määritellään kameleontti olemaan mikä tahansa $3n$ merkin pituinen merkkijono, jossa on tasan n kappaletta kutakin kirjaimista a, b ja c. Yhdellä operaatiolla kameleontista saa vaihtaa kahden vierekkäisen kirjaimen paikat. Osoita, että mille tahansa kameleontille X on olemassa sellainen kameleontti Y, että X:ää ei voi muuttaa Y:ksi alle $\frac{3n^2}{2}$ operaatiolla.

Ei ole ilmeistä, miten Y tulee valita. Tämän vuoksi voisi olla hyödyllistä tutkia ensiksi jotain yksittäistä Y ja katsoa, mille X tehtävänannon ehto toteutuu. (Voitaisiin myös valita jokin X ja katsoa, mitkä Y sille kelpaa.)

[72] Tämä on tietysti ihan luonnollinen idea.

Yksinkertaisin esimerkkitapaus saadaan valitsemalla kameleontiksi Y merkkijono

$$\text{aa}\ldots\text{aabb}\ldots\text{bbcc}\ldots\text{cc}.$$

Tehtävän voi nyt hahmottaa seuraavasti: jotta kameleontista X päästään jollain operaatiosarjalla kameleonttiin Y, tulee meidän saada järjestettyä X:n merkit aakkosjärjestykseen. Intuitiivisesti tämä onnistuu helpoiten silloin, kun X:n merkit ovat valmiiksi jo melkein oikeassa järjestyksessä. Vastaavasti vaikein tapaus on se, jossa X on Y takaperin.

Tulisi siis keksiä jokin tapa mitata sitä, kuinka kaukana oikeaa järjestystä kameleontti X on. Miten tämän suureen tulee käyttäytyä? Sen pitäisi pienentyä silloin, kun menemme ”oikeaan suuntaan” eli teemme X:lle operaation, joka saa sen lähemmäs oikeaa järjestystä. Vastaavasti suureen tulee kasvaa, jos teemme huonon siirron.

Millaisia ovat siirrot, joilla menemme oikeaan suuntaan? Siirrot, joilla vaihdamme kaksi vierekkäistä merkkiä ba järjestykseen ab ovat hyviä siirtoja. Jos X:ssä on aluksi jossain kohdassa i merkki b ja jossain i:stä vasemmalla olevassa kohdassa merkki a, niin jossain vaiheessa tulee tehdä siirto, joka vaihtaa juuri nämä kirjaimet a ja b toisin päin. Vastaavasti operaatiot, jotka vaihtavat vierekkäiset merkit ca järjestykseen ac ja merkit cb järjestykseen bc, ovat hyviä siirtoja.

Merkkijono on eniten epäjärjestyksessä silloin, kun on paljon sellaisia pareja i ja j, että kohta i on kohdan j vasemmalla puolella ja kohdan i kirjain on aakkosissa kohdan j jälkeen. Tämä voisi siis olla haluamamme suure. Kutsutaan tällaisia pareja kameleontin inversioiksi. Suureemme on siis kameleontin inversioiden määrä.

Edellisten huomioiden avulla ei ole vaikeaa nähdä, että jokaisella aiemmin kuvatulla ”hyvällä” siirrolla inversioiden määrä pienenee yhdellä ja jokaisella ”huonolla” siirrolla (joka esimerkiksi vaihtaisi merkit ab merkeiksi ba) inversioiden määrä kasvaa yhdellä. Jos operaatio vaihtaa kaksi samaa merkkiä keskenään, niin merkkijono ei muutu ja myöskään inversioiden määrä ei muutu.

Siis jos kameleontissa X on vähintään $\frac{3n^2}{2}$ inversiota, niin sitä ei voi muuttaa kameleontiksi Y alle $\frac{3n^2}{2}$ operaatiolla, koska jokainen siirto vähentää inversioiden määrää enintään yhdellä. Kuinka suuren osan merkkijonoista tämä käsittelee? Noin puolet. Suurin määrä inversioita, mitä kameleontissa voi olla, saadaan nimittäin silloin, kun se on Y takaperin. Tällöin inversioiden määrä on $3n^2$.

Tästä huomaammekin, että tutkimalla kameleonttia

$$Y' = \text{cc}\ldots\text{ccbb}\ldots\text{bbaa}\ldots\text{aa}$$

saadaan vastaavasti käsiteltyä ne X, joissa on enintään $\frac{3n^2}{2}$ inversiota suhteessa kameleonttiin Y.

Tehtävä on siis ratkaistu: jokaiselle X voimme aina valita kameleontiksi Y joko merkkijonon, joka on aakkosjärjestyksessä, tai merkkijonom, joka on käänteisessä aakkosjärjestyksessä.

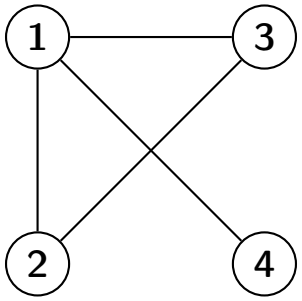
Kommentti: Merkkijonon inversioiden määrä on myös monissa muissa ongelmissa esiintyvä idea. Tämän idean tietäminen valmiiksi helpottaa tietysti tehtävän ratkaisua huomattavasti.

19 Verkot (Kombinatoriikka)

Tutkitaan jotakin ihmisjoukkoa. Kuvitellaan, että jotkut henkilöistä ovat kavereita keskenään ja jotkut eivät ole. Tilannetta voidaan kuvastaa verkkona: verkossa on joukko solmuja (vertaa ihmisiin), joiden välillä on kaaria (vertaa ystävyyssuhteisiin). Tässä luvussa esitetään perusteet verkoista ja käydään läpi esimerkkitehtäviä.

Tutkimme luvussa vain ns. suuntaamattomia verkkoja. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jos henkilö A on henkilön B kaveri, niin myös henkilö B on henkilön A kaveri.

Verkkoa merkitään usein kirjaimella G, ja joskus voidaan merkitä $G = (V, E)$, missä V on jokin joukko solmuja ja E on näiden solmujen välillä olevien kaarien joukko.



Verkko, jossa on neljä solmua ja neljä kaarta.

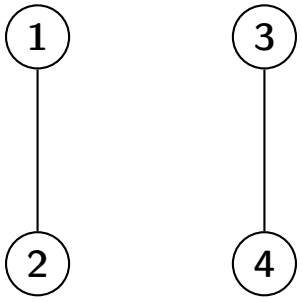
Yllä esitetyssä verkossa solmujen joukko on $\{1, 2, 3, 4\}$ ja kaarien joukko on $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$.

Aloitetaan verkon yhtenäisyyden käsitteellä.

Määritelmä

Verkkoa G sanotaan yhtenäiseksi, jos mistä tahansa solmusta voi kulkea mihin tahansa solmuun verkon kaaria pitkin.

Alla oleva verkko ei ole yhtenäinen.



Epäyhtenäinen verkko.

Esimerkiksi sellainen verkko, jossa jokaisen solmuparin välillä on kaari, on yhtenäinen, koska ehto selvästi toteutuu. Määritelmän mukaista reittiä solmusta a solmuun

b kutsutaan poluksi. (Polusta oletetaan yleensä, ettei se kulje saman solmun kautta useammin kuin kerran.)

Onko mitään kivaa kriteeriä sille, onko verkko yhtenäinen? Tutkimme tähän liittyen kahta kysymystä. Ensinnäkin: mikä on pienin määrä kaaria, jolla verkko voi olla yhtenäinen? Toiseksi: kuinka paljon kaaria vaaditaan, jotta verkko on varmasti yhtenäinen?

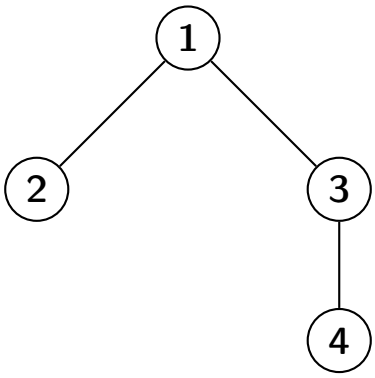
Tehtävä

Olkoon G verkko, jossa on n ($n \geq 2$) solmua. Todista, että mikäli G:n kaarien määrä on enintään $n-2$, niin G ei ole yhtenäinen. Todista lisäksi, että jos verkon G kaarien määrä on $n-1$, niin G voi olla yhtenäinen.

Ideana on tutkia, mitä kaarettomalle verkolle tapahtuu, kun siihen lisätään $n-2$ kaarta. Alkutilanteessa verkossa on n erillistä yhden solmun joukkoa. Verkossa on tällöin n komponenttia. (Komponentiksi kutsutaan sellaista solmujen joukkoa, jossa mistä tahansa solmusta pääsee mihin tahansa solmuun.)[73] Lisäämällä yhden kaaren joidenkin kahden solmun välille voidaan yhdistää kaksi erillistä komponenttia yhdeksi (mutta näin ei välttämättä käy). Yhdellä siirrolla saadaan siis vähennettyä komponenttien määrää (enintään) yhdellä. Jotta G olisi yhtenäinen $n-2$ siirron jälkeen, tulisi siinä olla vain yksi komponentti, mutta edellisen päättelyn nojalla siinä on vähintään kaksi komponenttia.

Väitteen toinen osa ratkeaa triviaalilla esimerkillä: jos verkon solmut on numeroitu $1, 2, 3, \ldots, n$, niin voimme yhdistää kaarella solmut 1 ja 2, solmut 2 ja 3, solmut 3 ja 4 ja niin edelleen. On kuitenkin olemassa paljon muitakin esimerkkejä. Niitä voi luoda edellisen kohdan todistuksen avulla: valitaan ensin solmut 1 ja 2 ja yhdistetään ne kaarella. Komponenttien määrä pienenee yhdellä. Yhdistetään sitten solmu 3 solmuun 1 tai solmuun 2, jolloin komponenttien määrä pienenee yhdellä. Yhdistetään sitten solmu 4 johonkin solmuista $1, 2$ ja 3, jolloin komponenttien määrä pienenee taas yhdellä. Jatketaan vastaavasti.

Sellaisia yhtenäisiä verkkoja, joissa kaarien määrä on yhden pienempi kuin solmujen määrä, kutsutaan puiksi.



Neljä solmua sisältävä puu.

[73] Lisäksi tietysti oletetaan, että mikäli komponentin solmusta a pääsee kaaria pitkin solmuun b, niin myös b kuuluu kyseiseen komponenttiin.

Jos verkko on puu, niin sille pätee muun muassa seuraavat ehdot:

- Verkossa ei ole syklejä. Sykliksi kutsutaan sellaista reittiä verkossa, jonka alku- ja loppusolmu ovat sama solmu ja jonka varrella missään muussa solmussa ei käydä useammin kuin kerran.
- Jos a ja b ovat mielivaltaisia verkon (eri) solmuja, niin on olemassa täsmälleen yksi polku solmusta a solmuun b. (Muista, että polku saa käydä yhdessä solmussa enintään kerran.)

Edelliset kohdat pätevät myös toiseen suuntaan: Jos verkko on yhtenäinen ja siinä ei ole syklejä, niin sen tulee olla puu. Vastaavasti jos minkä tahansa kahden solmun välillä on täsmälleen yksi polku, niin verkko on puu.

Puita käsitellessä puhutaan usein juurista, lapsista ja lehdistä. Puulla on yksi juuri, josta lähtee kaaria muihin solmuihin. Näitä juuren naapureita kutsutaan juuren lapsiksi, ja juuri on näiden lapsien vanhempi. Näistä lapsisolmuista voi edelleen lähteä kaaria uusiin solmuihin, jotka muodostavat uusia lapsi-vanhempi -suhteita. Solmua, jolla ei ole yhtäkään lasta, kutsutaan puun lehdeksi.

Voidaan osoittaa, että edellisen tehtävän yhteydessä esitetty tapa luoda puu antaa (solmujen uudelleennumerointia vaille) kaikki mahdolliset puut. Voidaan ajatella, että solmu 1 on puun juuri ja solmulle 1 lisätään prosessin aikana joitain lapsia, kuten solmu 2. Puun hahmottaminen juuren näkökulmasta antaa helpon, konkreettisen tavan visualisoida puun.

Seuraavaksi esitetään vastaus aiemmin esitettyyn kysymykseen ”Kuinka paljon kaaria vaaditaan, jotta verkko on varmasti yhtenäinen?”

Tehtävä

Olkoon G verkko, jossa on n ($n \geq 2$) solmua. Todista, että mikäli G:n kaarien määrä on vähintään $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, niin G on yhtenäinen. Todista lisäksi, että jos verkon G kaarien määrä on $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, niin se ei välttämättä ole yhtenäinen.

Toisessa osassa luonnollinen idea antaa ratkaisun. Jos solmut on numeroitu $1, 2, \ldots, n-1, n$, niin muodostetaan sellainen verkko, jossa kaikki solmuista $1, \ldots, n-1$ on yhdistetty toisiinsa kaarilla, mutta solmua n ei ole yhdistetty yhteenkään toiseen solmuun. Nyt verkossa on kaksi komponenttia ja $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ kaarta.

Ensimmäinen osa on vaikeampi. Ideana on, että jos verkon kaarien määrä on vähintään $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, niin siitä ”puuttuu” enintään $n-2$ kaarta. Olkoon siis G' se verkko, jonka solmujen joukko on sama kuin verkolla G ja jossa solmujen a ja b välillä on kaari täsmälleen silloin, kun solmujen a ja b välillä ei ole kaarta verkossa G. Verkkoa G' kutsutaan verkon G komplementiksi. Verkossa G' on nyt enintään $n-2$ kaarta, joten se ei edellisen tehtävän nojalla voi olla yhtenäinen, eli siinä on vähintään kaksi komponenttia.

Olkoot nyt a ja b mielivaltaisia solmuja. On kaksi mahdollista tapausta:

- Solmut a ja b ovat verkon G' eri komponenteissa. Tällöin solmujen a ja b välillä ei määritelmän nojalla ole kaarta verkossa G', joten verkossa G niiden välillä on kaari. Solmut a ja b kuuluvat siis samaan verkon G komponenttiin.
- Solmut a ja b ovat samassa verkon G' komponentissa. Koska G' ei ole yhtenäinen, on olemassa jokin toinen verkon G' (epätyhjä) komponentti, joka ei sisällä solmuja a ja b. Olkoon c jokin tämän toisen komponentin solmu. Nyt (kuten edellisessä tapauksessa) solmujen a ja c ja solmujen b ja c välillä on kaaret verkossa G, eli a ja b ovat samassa verkon G komponentissa.

Molemmissa tapauksissa mielivaltaiset solmut kuuluvat samaan komponenttiin, joten G on yhtenäinen.

Tehtävään on myös toisenlainen ratkaisu: Oletetaan, että G ei ole yhtenäinen. Tällöin verkon G solmut voidaan jakaa kahteen (epätyhjään) osaan V_1 ja V_2 niin, ettei näiden osien välillä ole kaaria. Nyt verkon G kaarien määrä on enintään osien V_1 ja V_2 sisältämien kaarien määrien summa. Olkoon n_1 osan V_1 solmujen määrä, jolloin V_1:n solmujen välillä voi olla enintään

$$\binom{n_1}{2}$$

solmua. Määritellään n_2 vastaavasti, jolloin $n_1+n_2=n$. Ristiriidan saamiseksi riittää todistaa, että

$$\binom{n_1}{2}+\binom{n_2}{2}<\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1.$$

Loppu onkin hyvin rutiininomaista laskemista. Kirjoittamalla auki binomikertoimien määritelmän ja kertomalla puolittain kahdella saadaan

$$(n_1^2-n_1)+(n_2^2-n_2)<n^2-3n+4.$$

Sijoitetaan yhtälön oikealle puolelle $n=n_1+n_2$. Sievennysten jälkeen jäljelle jää

$$2n_1+2n_2<2n_1n_2+4$$

eli

$$0<(n_1-1)(n_2-1)+1,$$

mikä selvästi pätee.

Seuraava esimerkkitehtävä on Suomen IMO-joukkueen valintakokeesta vuodelta 2017.

Tehtävä

Kesäleirille osallistuu koululaisia kolmesta eri kaupungista. Jokaisesta kaupungista osallistuu täsmälleen $n\in\mathbb{Z}_+$ koululaista. Leirin päätyttyä jokainen koululainen tuntee täsmälleen $n+1$ leirille osallistunutta muualta kuin kotikaupungistaan tullutta koululaista. Osoita, että leirin päättyessä jotkut kolme koululaista sekä ovat kolmesta eri kaupungista että tuntevat kaikki toisensa.

Huomaa, että tehtävänannossa ei puhuta mitään verkoista. Kilpailutehtävissä onkin tyypillistä, että itse tehtävänannossa ei käytetä teknisiä termejä. Kilpailijan oletetaan ymmärtävän, että tehtävä koskee verkkoja.

On siis annettuna verkko, jonka solmut on jaettu joukkoihin A, B ja C. Tiedetään, että jokaisen joukoista A, B, C koko on n ja solmusta $a \in A$ on yhteensä $n+1$ kaarta joukkojen B ja C solmuihin (ja vastaavasti joukoista B ja C muihin joukkoihin). Huomataan, että esimerkiksi joukon A solmujen välisillä kaarilla ei ole tehtävän kannalta merkitystä, joten niitä ei tarvitse huomioida.

Huomataan, että jos on olemassa sellainen solmu $a \in A$, josta on kaari kaikkiin joukon B solmuihin, niin olemme valmiit. Tällöin on nimittäin vielä jokin solmu $c \in C$, joka on yhteydessä solmuun a ja jonka tulee olla yhteydessä johonkin solmuun $b \in B$. Nyt a on oletuksen nojalla yhteydessä solmuun b, joten solmut a, b ja c ovat halutunlaiset.

Seuraava luonnollinen askel on tutkia tapausta, jossa $a \in A$ on yhteydessä kaikkiin paitsi yhteen joukon B solmuista. Olkoon $b \in B$ se solmu, johon a ei ole yhteydessä. On olemassa jokin solmu $c_a \in C$, joka on yhteydessä solmuun a. Jos c_a on yhteydessä johonkin joukon B solmuun b', joka ei ole solmu b, niin kolmikko a, b', c_a on halutunlainen. Muussa tapauksessa c_a on yhteydessä enintään (ja täten tasan) yhteen solmuun joukossa B, eli c_a on yhteydessä kaikkiin joukon A solmuihin. Tällöin ongelma palautuu edellisen kappaleen tapaukseen.

Saimme siis palautettua ongelman jo käsiteltyyn tapaukseen. Näin tulee käymään myös siinä tapauksessa, että $a \in A$ on yhdistetty kaarella $n-2$ kappaleeseen joukon B solmuja. Oikeastaan sama logiikka toimii myös yleisesti. Kokonaisen todistuksen saa kirjoitettua siististi seuraavasti.

Tehdään vastaoletus: Kolmea eri kaupungista tulevaa ja toistensa tuntevaa koululaista ei löydy. Olkoon $a_{i,B}$ niiden joukon B solmujen määrä, joihin joukon A järjestykseltään i:nnes solmu on yhdistetty kaarella, kun $1 \leq i \leq n$. Määritellään vastaavasti luvut $a_{i,C}, b_{i,A}, b_{i,C}, c_{i,A}$ ja $c_{i,B}$. Valitaan suurin näistä luvuista; olkoon se k. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $k = a_{i,B}$ jollain i. Merkitään tätä joukon A järjestykseltään i:nnettä solmua kirjaimella a. Olkoot $b_1, \ldots, b_k$ ne joukon B solmut, jotka ovat yhteydessä solmuun A.

Valitaan jokin niistä $n-k+1$ solmusta $c \in C$, jotka ovat yhteydessä solmuun a. Oletuksen nojalla c ei ole yhteydessä mihinkään solmuista $b_1, \ldots, b_k$. Täten c on yhteydessä enintään $n-k$ solmuun joukossa B ja siten $k+1$ solmuun joukossa A. Tämä on ristiriita luvun k maksimiominaisuuden kanssa, joten vastaoletus oli väärä ja todistettava väite pätee.

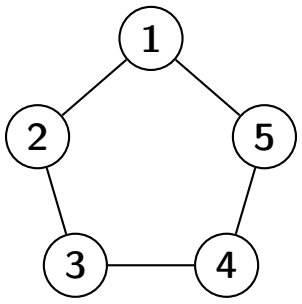
Seuraava tehtävä on vuoden 2018 ELMO-kilpailusta.

Tehtävä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kuningaskunnassa on $2018n+1$ kaupunkia. Kuningas haluaa rakentaa kaksisuuntaisia teitä eri kaupunkien välille niin, että kaikilla kaupungeilla C ja kokonaisluvuilla $1 \leq i \leq n$ pätee, että täsmälleen n kaupunkia on etäisyydellä i kaupungista C. [Kahden kaupungin välinen etäisyys on pienin määrä teitä millään reitillä näiden kaupunkien välillä.] Millä luvun n arvoilla kuninkaan on mahdollista toteuttaa toiveensa?

Huomataan, että arvolla $n = 1$ tavoite ei onnistu: Valitaan mikä tahansa kaupunki C. Nyt verkon tulisi olla 2019 solmua sisältävä polku, jonka yksi päätepiste on C. Tämä ei tietenkään onnistu kaikilla C.

Arvolla $n = 2$ halutaan muun muassa, että jokaisella solmulla on kaksi naapuria. Huomataan, että $2018 \cdot 2 + 1$ solmua sisältävä sykli toteuttaa halutut ehdot. (Ei ole vaikeaa todistaa, että ainoa yhtenäinen verkko, jossa jokaisella solmulla on 2 naapuria, on sykli.)



Viiden pituinen sykli.

Vastaavasti arvolla $n = 3$ halutaan, että jokaisella solmulla on kolme naapuria. Seuraava hyvin tunnettu lemma auttaa ratkaisemaan tämän tapauksen.

Lemma

Olkoon G verkko. Olkoon k niiden verkon G solmujen määrä, joiden aste on pariton. Tällöin k on parillinen.

Solmun aste on yksinkertaisesti niiden solmujen määrä, joihin solmusta on kaari.

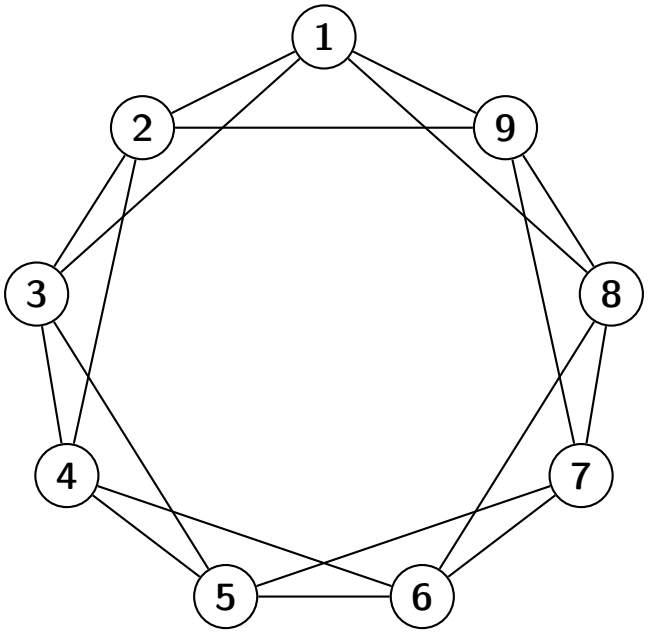
Tulos tunnetaan nimellä Handshaking-lemma. Verkon voi nimittäin ajatella kuvaavan ihmisten välisiä kättelyitä. Jokainen uusi kättely lisää kahden ihmisen kättelyiden määriä yhdellä, eli verkon solmujen asteiden summa kasvaa kahdella. Siispä solmujen asteiden summan parillisuus pysyy aina samana, eli se on aina parillinen. Täten paritonasteisten solmujen määrä on parillinen.

Tämän vuoksi tehtävänannon tavoitetta ei voi saavuttaa, kun $n = 3$: haluaisimme, että verkon jokaisen $2018 \cdot 3 + 1$ solmun aste on pariton, mutta tällöin paritonasteisia solmuja olisi pariton määrä. Vastaava päättely todistaa, että mikään pariton n ei kelpaa.

Siirrytään sitten tapaukseen $n = 4$. Tätä olisi mukavampaa käsitellä pienemmällä kuin $2018 \cdot 4 + 1$ solmua sisältävällä verkolla, joten yritetään tutkia vastaavaa väitettä kokoa $k \cdot 4 + 1$ olevalla verkolla. Parittomien n poissulkeminen perustuu luvun k parillisuuteen, joten varmuuden vuoksi kannattaa valita k parilliseksi. Tutkitaan siis tapausta $n = 4$ ja $k = 2$ eli yhdeksän solmun kokoista verkkoa.

Mistä tahansa solmusta C lähtee neljä kaarta, ja lisäksi loput neljä solmua ovat kahden etäisyydellä solmusta C. Tämä kertoo jo melko paljon verkon rakenteesta. Koska ehto on symmetrinen solmujen suhteen, on luontevaa yrittää löytää konstruktio, joka on symmetrinen jokaisen solmun suhteen. Vielä yksi ajatus on se, että mikäli kaikki solmut kuuluvat yhteen isoon sykliin (kuten tapauksessa $n = 2$), niin etäisyyksiä on kohtalaisen helppo "mitata". Näillä ideoilla ja yritysten ja erehdysten kautta keksitään seuraava konstruktio.

Olkoot solmut $C_1, C_2, \ldots, C_9$. Yhdistetään solmut C_i ja C_j jos ja vain jos i ja j ovat enintään kahden päässä toisistaan "modulo 9". Siis esimerkiksi solmu C_1 on yhdistetty solmuihin C_2, C_3, C_8 ja C_9. On selvää, että haluttu ehto pätee solmulle C_1, ja symmetrian vuoksi väite pätee tällöin kaikille solmuille C_i.



Ratkaisu alkuperäisen tehtävän $2n + 1$-varianttiin arvolla $n = 4$.

Nähdään, että tästä saadaan ratkaisu myös alkuperäisen tehtävän tapaukseen $n = 4$: Olkoot solmut $C_1, C_2, \ldots, C_{2018 \cdot 4 + 1}$. Yhdistetään solmut C_i ja C_j kaarella jos ja vain jos i ja j ovat enintään kahden päässä toisistaan (modulo $2018 \cdot 4 + 1$).

Enää ei ole vaikeaa yleistää tätä mielivaltaiselle parilliselle n: edellisen kohdan ehto "enintään kahden päässä toisistaan" vain korvataan ehdolla "enintään $\frac{n}{2}$:n päässä toisistaan". Tämän konstruktion toimivuuden tarkistaminen jätetään lukijalle.

Kaiken kaikkiaan kuningas pystyy toteuttamaan ehdon jos ja vain jos n on parillinen.

Viimeinen tehtävä on IMO-lyhytlistalta vuodelta 2013.

Tehtävä

Omalaatuinen fyysikko löysi uudenlaisen alkeishiukkasen, jolle hän antoi nimeksi *imoni*, kun joitakin sellaisia yllättäen ilmestyi hänen laboratorioonsa. Jotkin imonien parit ovat *lomittuneita*, ja jokainen imoni voi olla osallisena monessa eri lomittumisessa. Fyysikkomme on löytänyt tavan suorittaa seuraavanlaisia operaatioita näille hiukkasille, yhden operaation kerrallaan.

1. Jos jokin imoni on lomittunut parittoman monen muun laboratorion imonin kanssa, niin fyysikko voi tuhota sen.

2. Fyysikko voi kaksinkertaistaa laboratorionsa imonien määrän luomalla jokaiselle imonille I kopion I'. Tässä operaatiossa kaksi kopiota I' ja J' lomittuvat jos ja vain jos I ja J ovat lomittuneet ja jokainen kopio I' lomittuu alkuperäisen imonin I kanssa. Mitään muita lomittumisia ei synny tai häviä tämän operaation aikana.

Osoita, että fyysikko voi näitä operaatioita sopivasti toistaen tuottaa sellaisen kokoelman imoneita, jossa mitkään kaksi imonia eivät ole lomittuneet.

Toista operaatiotyyppiä voi havainnollistaa geometrisesti seuraavasti: Verkon $G = (V, E)$ solmut on aseteltu levylle. Levystä luodaan kopio, joka asetetaan alkuperäisten solmujen yläpuolelle, ja kohdakkain osuvat solmut yhdistetään kaarella. Jos tehdään vielä toinen uusi kopio, levyjä asettuu neljä päällekkäin, mutta niiden väliset kytkökset ovat monimutkaisempia kuin vain kohdakkain olevien solmujen yhdistäminen. Toinen tapa visualisoida asiaa on asetella levyjä myös muihin ulottuvuuksiin kuin päällekkäin. Yleisesti tilanne muuttuu n-ulotteisen hyperkuution tutkimiseksi. Käytämme pääsääntöisesti termiä pystyrivi, mutta myöhemmin käytämme myös hyperkuutioideaa.

Symbolisemmin asian voi esittää näin: Ensimmäisellä kopioimiskerralla solmujen joukko V muuttuu pareiksi muotoa (v, x), missä $x \in \{0, 1\}$. Tässä x vastaa sitä, monennessako levyssä solmu on. Toisella kopioimiskerralla solmut muuttuvat muotoon $((v, x), y)$, $x, y \in \{0, 1\}$, mikä on käytännössä vain parit muotoa (v, z), missä $z \in \{0, 1, 2, 3\}$. Yleisesti n operaation jälkeen parit ovat muotoa (v, z), missä $0 \leq z \leq 2^n - 1$. Mikäli välissä ei tehdä poisto-operaatioita, niin solmut (v, x) ja (v, y) on yhdistetty kaarella jos ja vain jos lukujen x ja y binääriesitykset[74] poikkeavat tasan yhden numeron kohdalla.

Naiivi idea[75] tehtävän ratkaisemiseksi olisi vähentää verkossa olevia ”pystyrivejä” eli yritetään poistaa kaikki solmut muotoa $(w, i), i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, missä w on jokin verkon G solmu. Pystyrivien määrä ei muutu uusia kopioita tehdessä (vaikkakin verkon rakenne muuten muuttuu monimutkaisemmaksi), joten teoriassa tämä idea

[74] Normaalisti luvut esitetään kymmenkannassa: $567 = 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$. Binääriesityksessä kannaksi valitaan 2. Luvut yhdestä viiteentoista ovat binääriesityksessä $1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110$ ja 1111.

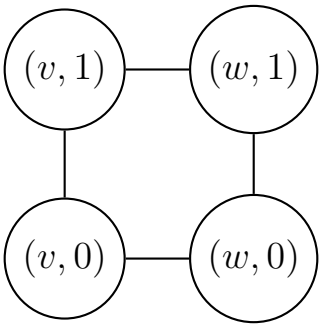
[75] Ehkä vielä naiivimpaa olisi yrittää todistaa väitettä induktiolla verkon solmujen määrän suhteen. Tämä ei kuitenkaan helposti johda ratkaisuun: jokainen tyypin 2 operaatio tuplaa verkon solmujen määrän, joten kopiointien väleissä tulisi saada tehtyä todella paljon tyypin 1 operaatiota.

voisi toimia. Tämän strategian toteuttamisessa on kuitenkin elintärkeää muokata pystyrivin solmuja hallitusti eli kahden tyypin 2 operaation välissä aina poistaa pystyriviltä joko kaikki solmut tai olla tekemättä mitään – muutenhan käsitteessä ”pystyrivi” ei olisi järkeä.

Esimerkkinä voidaan tutkia kolmen solmun V_1, V_2, V_3 verkkoa, jossa kaikkien parien (V_1, V_2), (V_2, V_3) ja (V_3, V_1) välillä on kaaret. Tällöin kopion luomisen jälkeen voidaan poistaa seuraavat solmut tässä järjestyksessä: V_1, V_2', V_1', V_2. Tämä poistaa peräti kaksi pystyriviä. Jäljelle jäänyt pystyrivi on myös helppo poistaa. Tämä esimerkki osoittautui helpoksi.

Tutkitaan sitten yleistä tapausta. Olkoon annettuna verkko $G_1 = (V_1, E_1)$. Aivan aluksi poistetaan verkosta solmuja niin kauan, kunnes kaikkien solmujen asteet ovat parillisia. Olkoon syntynyt verkko $G_2 = (V_2, E_2)$.

Ei ole muuta vaihtoehtoa kuin tehdä kopio verkosta. Olkoon G_3 syntynyt verkko, jonka solmut ovat muotoa (v_2, x), jossa $v_2 \in V_2$ ja $x \in \{0, 1\}$. Valitaan jokin solmu $(v, 0)$, jolla on naapuri $(w, 0)$. Poistetaan seuraavat solmut tässä järjestyksessä: $(v, 0), (w, 1), (v, 1), (w, 0)$. Tämä on sallittua, koska jokaisessa kohdassa poistetun solmun aste on pariton. Pystyrivien määrä pienenee kahdella.



Jos neliön solmujen asteet ovat parittomia, voidaan solmut poistaa.

Edellä oletettiin, että solmulla $(v, 0)$ on muotoa $(w, 0)$ oleva naapuri, jonka aste on pariton. Kun operaatioita tehdään toistuvasti, verkkoon voi muodostua myös sellaisia pystyrivejä, joiden solmujen asteet ovat parillisia. Lisäksi on mahdollista, että jossain vaiheessa jollain pystyrivillä ei ole yhtäkään naapuria.

Tässä on listattuna kaikki mahdolliset tapaukset, joita voi tulla vastaan, kun valitaan jokin paritonasteinen pystyrivi.

1. Paritonasteisella pystyrivillä on paritonasteinen naapuri.
2. Paritonasteisella pystyrivillä on vain parillisasteisia naapureita.
3. Paritonasteisella pystyrivillä ei ole naapureita.
4. Paritonasteisia pystyrivejä ei ole.

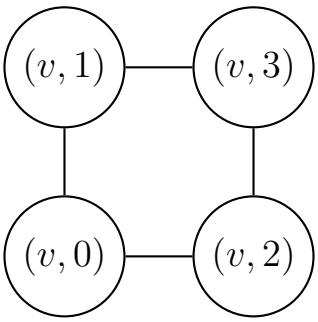
Tapaus 1 käsiteltiin jo: jos pystyrivit ovat $(v, 0), (v, 1)$ ja $(w, 0), (w, 1)$, niin poistetaan solmut $(v, 0), (w, 1), (v, 1)$ ja $(w, 0)$ tässä järjestyksessä.

Tapaus 2 käsitellään vastaavasti poistamalla solmut järjestyksessä $(v,0),(w,0),(w,1),(v,1)$.

Tapauksessa 3 pystyrivin $(v,0),(v,1)$ solmujen asteet ovat 1. Tällöin vain poistetaan solmu $(v,1)$, jolloin solmun $(v,0)$ aste on 0. Tästä lähtien aina, kun teemme tyypin 2 operaation, tulee solmun $(v,0)$ naapuri poistaa. Tämä on hyvin pieni (ja helppo) yksityiskohta, mutta prosessin kannalta on tärkeää aina poistaa kaari, jos se yhdistää kaksi solmua, joiden asteet ovat 1.

Tapauksessa 4 verkon jokaisen solmun aste on parillinen ja ainoa mahdollisuus on luoda kopio verkosta.

Olemme nyt tilanteessa, jossa jokaisen pystyrivin solmujen määrä on 4 ja jossa jokaisen pystyrivin jokaisen solmun aste on pariton. (Poislukien solmut, joiden aste on 1: näistä sovittiin, että aste tiputetaan aina nollaan.) Huomataan, että paritonasteinen pystyrivi $(v,0),(v,1),(v,2),(v,3)$ voidaan poistaa – tämähän vastaa jo aiemmin käsiteltyä neliön poistamista.



Neliön poistaminen onnistuu nytkin.

Voimme siis jälleen vähentää pystyrivien määrää.

Kysymys kuuluu: voimmeko edetä näin niin kauan kuin pystyrivejä on jäljellä? Vastaus on myönteinen, mutta tämä ei ole aivan selvää. Tutkitaan yksityiskohtaisesti, mitä tapahtuu siinä kohdassa, kun pystyrivien koot ovat 2^n.

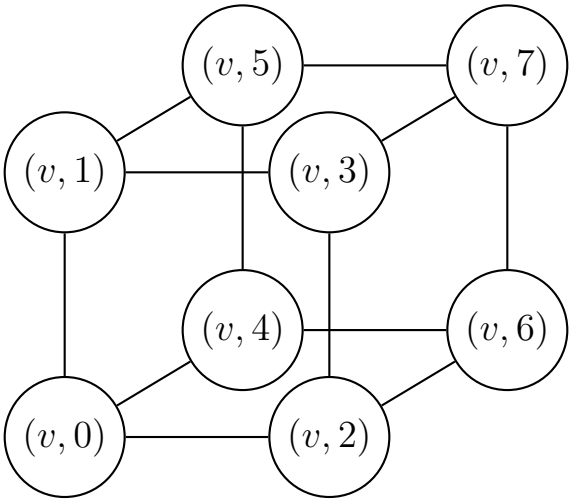
Tutkitaan jotain pystyriviä, jonka solmujen asteet ovat parittomia. Jos tällaista pystyriviä ei ole, niin teemme verkosta kopion, jolloin verkosta löytyy ainakin yksi paritonasteinen pystyrivi, joka voidaan valita. Olkoon tarkasteltava pystyrivi $(v,0),(v,1),\ldots,(v,2^n-1)$.

Haluaisimme poistaa tämän pystyrivin kokonaan. Pystyrivin rakenne muistuttaa todellisuudessa n-ulotteista hyperkuutiota. Jos $n=2$, niin kyseessä on vain edellisessä kuvassa esitetty neliö.

Yleisellä n tilannetta voi olla vaikea hahmottaa geometrisesti, mutta symbolisesti tämä on kohtalaisen helppoa lukujen binääriesitysten kautta: solmut (v,x) ja (v,y) on yhdistetty kaarella jos ja vain jos lukujen x ja y binääriesityksissä on täsmälleen yksi kohta, jossa luvuilla on eri numero. (Yksi tapa motivoida tämä on ajatella n-ulotteista kuutiota, jonka kärkipisteet on n-ulotteisessa koordinaatistossa niin, että jokaisen pisteen jokainen n:stä koordinaatista on joko 0 tai 1. Nämä n koordinaattia

vastaavat jotain binääriesityksessä annettua lukua, ja toisin päin. Kaaret vastaavat tällöin n-ulotteisen kuution särmiä.)

Miten sitten saamme poistettua kuution kärkipisteet annetuilla operaatioilla? Jo aiemmin käsitellyssä tapauksessa $n = 2$ poistimme ensin lukuja 0 ja 3 (binääriesityksessä 00 ja 11) vastaavat solmut, ja sitten poistimme lukuja 1 ja 2 (binääriesityksessä 01 ja 10) vastaavat solmut. Tapauksessa $n = 3$ ideana on aina poistaa "vastakkaisia kulmia": ensiksi voidaan poistaa luvut $0, 3, 5$ ja 6 (binääriesityksessä 000, 011, 101 ja 110) ja sitten luvut $1, 2, 4$ ja 7 (binääriesityksessä $001, 010, 100$ ja 111). Tässä on kuitenkin pieni ongelma: solmujen $1, 2, 4$ ja 7 asteet ovat solmujen $0, 3, 5$ ja 6 poistamisten jälkeen parillisia. Emme kuitenkaan ole enää kaukana ratkaisusta.



Kuution poistaminen melkein onnistuu.

Huomataan, että mikäli n on parillinen, niin n-ulotteisen hyperkuution solmut voi poistaa poistamalla ensiksi ne solmut (v, x), joissa luvun x binääriesityksessä on parillinen määrä ykkösiä, ja sitten ne solmut (v, y), joissa luvun y binääriesityksessä on pariton määrä ykkösiä. Tällöin samassa vaiheessa poistettavien solmujen välillä ei ole kaaria ja toisessa vaiheessa solmuilta on poistettu parillinen määrä naapureita, koska kuution sisällä solmuilla on n naapuria. Siis ainoastaan parittomilla n muodostuu edellä kuvailtu ongelma. Tutkimme täten enää vain parittomia n.

Ongelman korjaamiseen voidaan ottaa hieman vinkkiä siitä, mitä teimme aiemmin. Tapauksessa $n = 1$, eli kahden kokoisilla pystyriveillä, tutkimme pystyrivin $(v, 0), (v, 1)$ lisäksi jotain solmun $(v, 0)$ naapuria $(w, 0)$ ja sen pystyriviä $(w, 0), (w, 1)$. Teimme operaatiot kahdella tavalla riippuen siitä, oliko solmun $(w, 0)$ aste parillinen vai pariton. Jos solmun $(w, 0)$ aste oli pariton, niin poistimme neliöstä ensiksi vastakkaiset kulmat, ja jos solmun $(w, 1)$ aste oli parillinen, niin poistimme ensiksi neliön alarivin solmut $(v, 0)$ ja $(w, 0)$ ja sitten ylärivin solmut $(w, 1)$ ja $(v, 1)$. Lisäksi tuli erikseen tutkia tapaus, jossa parittomalla pystyrivillä ei ollut yhtään naapuria.

Toimimme siis vastaavasti yleisessä tapauksessa. Käsittelemme samat tapaukset kuin tapauksessa $n = 1$.

1. Paritonasteisella pystyrivillä on paritonasteinen naapuri.

2. Paritonasteisella pystyrivillä on vain parillisasteisia naapureita.

3. Paritonasteisella pystyrivillä ei ole naapureita.

4. Paritonasteisia pystyrivejä ei ole.

Tapaus 1: Idea on sama kuin tapauksessa $n = 1$. Sen sijaan, että yrittäisimme käsitellä pystyriviä $(v, 0), \ldots, (v, 2^n - 1)$ yksinään n-ulotteisena kuutiona, käsittelemmekin pystyrivejä $(v, 0), \ldots, (v, 2^n - 1)$ ja $(w, 0), \ldots, (w, 2^n - 1)$ yhdessä $n + 1$-ulotteisena kuutiona (esimerkiksi tapauksessa $n = 1$ siirryimmekin tutkimaan kahta kahden kokoista pystyriviä, eli neliötä). Koska hyperkuutioiden käsittely onnistuu parillisilla ulottuvuuksilla ja $n + 1$ on parillinen, voidaan molemmat pystyrivit poistaa samanaikaisesti.

Tapaus 2: Tämä on vaikein tapaus. Tapauksessa $n = 1$ toimimme niin, että poistimme solmut $(v, 0), (w, 0), (w, 1)$ ja $(v, 1)$ tässä järjestyksessä. Ei ole selvää, miten kannattaa toimia yleisesti. Tätä voidaan kuitenkin käsitellä toisen erikoistapauksen kautta.

Vaikka tutkimmekin enää parittomia n, niin intuition saamiseksi voimme hetkeksi tutkia erikoistapausta $n = 2$. Ongelman voi nyt halutessaan visualisoida $n + 1 = 3$-ulotteisena kuutiona. Ei ole kovin vaikeaa nähdä, että tällöin ongelma ratkeaa poistamalla ensin solmu $(v, 0)$, jonka jälkeen poistetaan solmu $(w, 0)$. Tämän jälkeen voidaan poistaa solmu $(w, 1)$, jonka perään poistetaan solmu $(v, 1)$. Vastaavasti poistetaan parit $(w, 2), (v, 2)$ ja $(v, 3), (w, 3)$.

Huomionarvoista on, että voimme poistaa solmuja pareissa: poistamme ensin solmun (v, x) ja sen jälkeen solmun (w, x) tai toisin päin. Huomataan, että tämä toimii myös yleisellä n: kunhan säilytämme symmetrian, niin solmujen (v, x) ja (w, x) asteilla on eri parillisuus. Toisen aste on siis pariton, joten voimme poistaa sen, ja tämän jälkeen voimme poistaa myös toisen parin solmuista.

Tapaus 3: Tässä tapauksessa voimme yksinkertaisesti poistaa kaikki solmut (v, x), joissa luvun x binääriesityksessä on parillinen määrä ykkösiä. Jäljelle jää kaikki ne 2^{n-1} solmua muotoa (v, y), missä y:llä on pariton määrä ykkösiä binääriesityksissään. Nämä solmut eivät ole yhteydessä toisiinsa, joten niiden aste on 0. Tämä on hyvä lopputulos.

Tapaus 4: Ei auta muuta kuin luoda kopio verkosta.

Olemme siis vihdoin valmiit: Jos verkossa on jäljellä jokin paritonasteinen pystyrivi, niin se voidaan poistaa. Jos jäljellä on vain parillisasteisia pystyrivejä, niin verkosta voidaan luoda kopio. Tällöin pystyrivien asteet muuttuvat parittomiksi ja niistä voidaan poistaa vähintään yksi.

Kommentti: Tehtävä on haastava. Henkilökohtaisesti eniten ongelmia ratkaisussa tuotti se, etten tiennyt, tulisiko ratkaisu toimimaan: ”Voiko niinkin yksinkertainen ratkaisu kuin pystyrivien poistaminen yksitellen toimia? Epätriviaaleja yksityiskohtia syntyy melko paljon: ehkä tämä idea onkin huono”. Pieni kriittisyys ratkaisua kohtaan on tervettä, mutta toisaalta miltei jokainen tehtävä vaatii sen, että sitä oikeasti alkaa tekemään ja tarvittaessa käsitellee yksityiskohtia matkan varrella.

Muuten ratkaisussa ei ole sen kummoisempia motivaatioita. Minulle luonnollinen ja helppo tapa ajatella kopiointia oli päällekkäin asettuvat levyt ja niiden pystyrivit. Pystyrivien määrä ei kasva kopioinnilla, joten luonteva idea on yrittää vähentää niiden määrää poisto-operaatioilla. Tutkimalla hieman pieniä tapauksia huomataan, että ongelma palautuu pystyrivien eli hyperkuutioiden kärkipisteiden poistamiseen. Tämä ongelma itsessään ei ole enää kovin vaikea. Ratkaisun suurin vaikeus onkin mielestäni käsitellä kaikki yksityiskohdat ja oletukset niin, ettei todistukseen jää aukkoja.

20 Yläkoulu- ja lukiotietoja

Tässä liitteessä esitetään joitain tietoja, jotka lukijan olisi hyvä tietää varsinaista tekstiä lukiessa. Luku on jaettu karkeasti yläkoulu- ja lukiotietoihin. Materiaalissa ei tietenkään ole mahdollista käydä oppimäärien sisältöjä läpi, ja asioita ei pystytä esittämään kovin syvällisesti, mutta tekstistä on mahdollisesti hyötyä nuorimmille lukijoille. Lukijan suositellaan etsivän netistä lisätietoja epäselviin asioihin.

20.1 Yläkoulutietoja

Tämän osion sisältö on seuraava:

- Muuttujan käsite
- Polynomit
- Yhtälönratkaisu
- Geometria
- Epäyhtälöt
- Funktiot

Aiheet on järjestetty suunnilleen tärkeysjärjestykseen varsinaisen tekstin kannalta.

Muuttujat ja potenssiinkorotus

Muuttuja tarkoittaa karkeasti symbolia, jolle voi antaa eri arvoja. Esimerkiksi muuttujan x arvon voidaan sanoa olevan 4, eli $x = 4$.

Muuttujia voidaan kertoa luvuilla ja saada lausekkeita. Esimerkiksi $2 \cdot x + 3$ on lauseke, joka saadaan kertomalla tuntematon luku x luvulla 2 ja lisäämällä 3. Jos muuttujan x arvo on 4, niin lausekkeen arvo on $2 \cdot 4 + 3 = 11$.

On muutama yleisesti käytössä oleva lyhennysmerkintä. Esimerkiksi tuloa $123 \cdot x$ merkitään vain lyhyesti $123x$. Tätä lyhennysmerkitää ei tietenkään käytetä luvuille, koska muuten 12 voisi tarkoittaa lukua kaksitoista tai lukua $1 \cdot 2 = 2$.

Tuloa $x \cdot x$ merkitään x^2, tuloa $x \cdot x \cdot x$ merkitään x^3 ja yleisesti tuloa, jossa on n kappaletta muuttujaa x, merkitään x^n. Tätä voidaan käyttää myös luvuille: esimerkiksi $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Tätä operaatiota kutsutaan potenssiinkorotukseksi: 3^4 luetaan ”kolme potenssiin neljä”.

Potensseilla on pari hyödyllistä laskusääntöä. Yksi on sääntö $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$, missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja.[76] Esimerkiksi jos $m = 3$ ja $n = 2$, niin väite

[76] Väitteet pätevät oikeastaan millä tahansa reaaliluvuilla m ja n (reaalilukuja käsitellään myöhemmin). Tällöin pitää ajatella, että esimerkiksi $x^{1/2}$ on luvun x neliöjuuri $\sqrt{x}$, koska laskusäännöillä $(x^{1/2})^2 = x^{1/2 \cdot 2} = x$. (Luvun x neliöjuuri $\sqrt{x}$ on se luku, jonka neliö on x. Esim. $\sqrt{25} = 5$.) Vastaavasti voi määritellä, mitä on vaikkapa $x^{\frac{2}{3}}$: se on se luku, jonka kuutio on x^2. Ei ole kuitenkaan selvää, miten kuuluisi määritellä x^y, kun y ei ole rationaalinen. Lukijan ei tarvitse välittää tästä.

sanoo, että $x^5 = x^3 \cdot x^2$. Tämän yhtälön pätevyys seuraa potenssin määritelmästä: vasemmalla puolella on $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$, eli muuttujaa x on viisi kappaletta, ja oikean puolen tulo on $(x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x)$, eli myös oikealla puolella x esiintyy tulossa viisi kertaa. Vastaavasti huomataan, että pätee myös $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$, eli esimerkiksi $(x^3)^2 = x^6$.

Lauseke x^0 määritellään olemaan 1: ikään kuin kerromme nolla kappaletta termejä keskenään. Jos miettii tilannetta "summaan $1+2+3$ summataan lisäksi vielä nolla termiä", niin lopputuloksena tulee vain $1+2+3$, koska nollan kappaleen summaaminen ei tee mitään. Siis nollan kappaleen termejä summa on 0. Vastaavasti tilanteessa "tulo $1 \cdot 2 \cdot 3$ kerrotaan vielä nollalla kappaleella termejä" vastaus on vain $1 \cdot 2 \cdot 3$, joten nollan kappaleen termejä tulo on 1. Tämän vuoksi x^0 on luontevaa määritellä olemaan 1.

Lisäksi määritellään $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, eli esimerkiksi $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$. Tämä on luontevaa, koska kehiteltyjen laskusääntöjen nojalla $x^n \cdot x^{-n} = x^{n+(-n)} = x^{n-n} = x^0 = 1$. Luvun x^{-n} tulee siis olla sellainen luku, jonka kertominen luvulla x^n antaa lopputulokseksi ykkösen. Tämä luku on tietysti $\frac{1}{x^n}$.

Polynomit

Termi "polynomi" on yhteisnimitys kaikille tietyntyyppisille lausekkeille. Polynomeja ovat esimerkiksi lausekkeet $123x^3 - 456x^2 + 3$ ja 1, mutta $\frac{1}{x}$ ei ole polynomi. Tarkka määritelmä on seuraava:

Määritelmä

Polynomit (muuttujan x suhteen) ovat kaikki lausekkeet muotoa $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, missä $n \geq 0$ on kokonaisluku ja $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat lukuja.

Polynomit saadaan siis kertomalla muuttujan x potensseja x^k joillain luvuilla ja summaamalla näitä yhteen.

Huomaa, että määritelmässä esiintyvä symboli a_0 merkitsee vain jotain lukua, ja notaatiolla ei ole mitään tekemistä potenssiinkorottamisen a^0 kanssa. Jos haluaa merkitä vaikkapa tuhatta eri muuttujaa, on tällainen notaatio paljon kätevämpi kuin jos jokaista muuttujaa merkitsisi eri kirjaimella (tai kirjainyhdistelmällä).

Niin kuin luvuilla myös polynomeilla on omat laskutoimituksensa. Seuraava esimerkki näyttää, miten lasketaan yhteen kaksi polynomia.

Esimerkki

Lasketaan yhteen polynomit $100x^3 + 15x^2 - 3x + 7$ ja $-2x^3 + 4x^2 - 7$.

Tehdään tämä tutkimalla jokaisen muuttujan x potenssin x^k kertoimia yksitellen:

- Termin x^3 kerroin ensimmäisessä polynomissa on 100 ja toisessa -2. Siispä lopputuloksessa se on $100 + (-2) = 98$.
- Termin x^2 kerroin ensimmäisessä polynomissa on 15 ja toisessa 4. Siispä lopputuloksessa se on $15 + 4 = 19$.

- Termin x kerroin ensimmäisessä polynomissa on -3. Toisessa polynomissa kerrointa ei ole merkitty, mikä tarkoittaa kerrointa 0 (olisi turhaa työtä kirjoittaa termi $0x$). Siispä lopputuloksessa kerroin on $-3+0=-3$.
- Vakiotermi on ensimmäisessä polynomissa 7 ja toisessa -7. Siispä lopputuloksessa se on 0.

Täten summa on $98x^3+19x^2-3x$. Huomaa, että esimerkiksi termejä $98x^3$ ja $19x^2$ ei voi yhdistää mitenkään, joten vastausta ei voi enää sieventää.

Kahden polynomin kertominen keskenään ei ole aivan näin suoraviivaista. Ennen kuin edetään tähän, tutkitaan hetki allekkain kertolaskua. Kerrotaan allekkain luvut 123 ja 45.

$$\begin{array}{r} \times\ 1\ 2\ 3 \\ \quad\ 4\ 5 \\ \hline \quad 6\ 1\ 5 \\ 4\ 9\ 2\ \ \\ \hline 5\ 5\ 3\ 5 \end{array}$$

Miten kertolasku tarkalleen ottaen toimii? Allekkain kertolaskussa valitaan aina numeropareja: ensiksi 3 ja 5, sitten 2 ja 5, sitten 1 ja 5, minkä jälkeen toistetaan sama numerolla 4. Kun kerrotaan vaikkapa numerot 3 ja 4 keskenään, jätetään kertolaskuun yksi tyhjä ruutu (rivillä, jossa on 492): tämä johtuu siitä, että todellisuudessa numero 4 vastaa lukua 40.

Allekkain kertolaskussa siis kerrotaan luvut $123\cdot 45$ kirjoittamalla kertolasku muodossa $(1\cdot 100+2\cdot 10+3\cdot 1)\times(4\cdot 10+5\cdot 1)$. Tämän jälkeen valitaan ensimmäisestä sulkulausekkeesta yksi yhteenlaskun termi ja toisesta toinen ja kerrotaan ne yhteen. Käymällä kaikki yhdistelmät läpi (kuusi kappaletta) ja laskemalla yhteen tulokset saadaan vastaus.

Polynomien kertolasku toimii samalla tavalla, ja allekkain kertolasku oikeastaan vastaa polynomien kertolaskua arvolla $x=10$.

Esimerkki

Kerrotaan polynomit x^2+2x+3 ja $4x+5$ keskenään.

Haluamme siis laskea tulon

$$(x^2+2x+3)\times(4x+5).$$

Käydään läpi kaikki tavat valita ensimmäisestä sulkulausekkeesta yksi termi ja toisesta sulkulausekkeesta toinen termi. Tehdään tämä samassa järjestyksessä kuin allekkain kertolaskussa.

- Valitaan polynomista x^2+2x+3 termi 3 ja polynomista $4x+5$ termi 5. Saadaan $3\cdot 5=15$.
- Valitaan polynomista x^2+2x+3 termi $2x$ ja polynomista $4x+5$ termi 5. Saadaan $2x\cdot 5=10x$.

- Valitaan polynomista $x^2 + 2x + 3$ termi x^2 ja polynomista $4x + 5$ termi 5. Saadaan $x^2 \cdot 5 = 5x^2$.
- Valitaan polynomista $x^2 + 2x + 3$ termi 3 ja polynomista $4x + 5$ termi $4x$. Saadaan $3 \cdot 4x = 12x$.
- Valitaan polynomista $x^2 + 2x + 3$ termi $2x$ ja polynomista $4x + 5$ termi $4x$. Saadaan $2x \cdot 4x = 8x^2$. Huomaa, että lopputuloksessa on tosiaan termi x^2, koska tulon $2x \cdot 4x$ molemmissa termeissä on yksi kappale muuttujaa x, joten lopputulokseen tulee $x \cdot x = x^2$.
- Valitaan polynomista $x^2 + 2x + 3$ termi x^2 ja polynomista $4x + 5$ termi $4x$. Saadaan $x^2 \cdot 4x = 4x^3$.

Summataan vastaukset yhteen polynomien yhteenlaskulla:

$$15 + 10x + 5x^2 + 12x + 8x^2 + 4x^3 = 4x^3 + 13x^2 + 22x + 15.$$

Arvolla $x = 10$ tämä antaa

$$4 \cdot 10^3 + 13 \cdot 10^2 + 22 \cdot 10 + 15 = 4000 + 1300 + 220 + 15,$$

ja tämä on 5535, joka on sama tulos kuin allekkain kertolaskussa.

Polynomien kertolasku toimii yleisesti vastaavalla tavalla. Laskeminen on melko työlästä, mutta rutiini tuo nopeutta laskuihin.

Käsitellyissä polynomeissa oli vain yhtä muuttujaa x. Vastaavasti voidaan kuitenkin käsitellä vaikkapa kahden muuttujan polynomeja (esimerkiksi $x + 4y$ ja $2xy + 3$ ovat kahden muuttujan polynomeja).

Yhtälönratkaisu

Yhtälössä on annettuna jokin yhtäsuuruus, jonka muuttujan tulisi toteuttaa. Esimerkiksi $3x - 6 = 0$ on yhtälö. Yhtälöistä halutaan usein määrittää ratkaisut. Selvästikin jos $3x - 6 = 0$, niin tulee olla $3x = 6$. Tästä nähdään, että $x = 2$.

Yleisesti yhtälöiden molemmille puolille saa lisätä jonkin luvun ja molemmilta puolilta voi vähentää jonkin luvun. Molemmat puolet saa kertoa jollakin luvulla, ja molemmat puolet saa jakaa luvulla, joka ei ole nolla. Edellä yhtälöön lisättiin 6 molemmille puolille, ja sen jälkeen jaettiin puolittain kolmella.

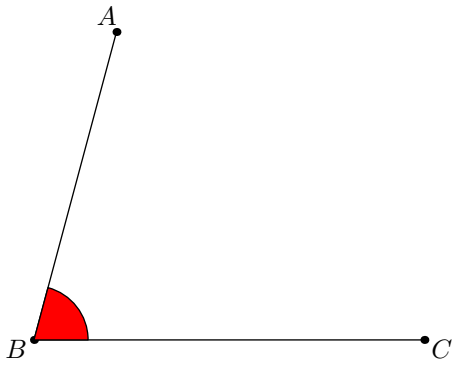
Tutkitaan yhtälöä $3x+5 = -x-7$. Lisätään puolittain 7, jolloin saadaan $3x+12 = -x$. Lisätään puolittain vielä x, jolloin saadaan $4x + 12 = 0$. Tämä yhtälö on samankaltainen kuin aiemmin esitetty yhtälö $3x-6 = 0$, ja se ratkeaa samalla tavalla. Saadaan $x = -3$. Yleisesti yhtälö kannattaa ensin sieventää muotoon "jotain = 0", koska yhtälön käsitteleminen on tällöin helpompaa.

Tässä on vielä toinen esimerkki. "Kaupassa leivän hinta on 2 euroa. Hinta koostuu verottomasta hinnasta ja arvonlisäverosta, jonka suuruus on 24 prosenttia verottomasta hinnasta. Laske leivän veroton hinta." Ratkaisua varten merkitään leivän verotonta hintaa muuttujalla x. Tiedämme, että kahden euron hinta koostuu verottomasta

hinnasta x ja arvonlisäverosta, jonka suuruus on $24\% \cdot x$ eli $0.24x$. Siis $x + 0.24x = 2$, eli $1.24x = 2$. Täten $x = \frac{2}{1.24}$ (jolle voi vielä halutessaan laskea likiarvon laskimella).

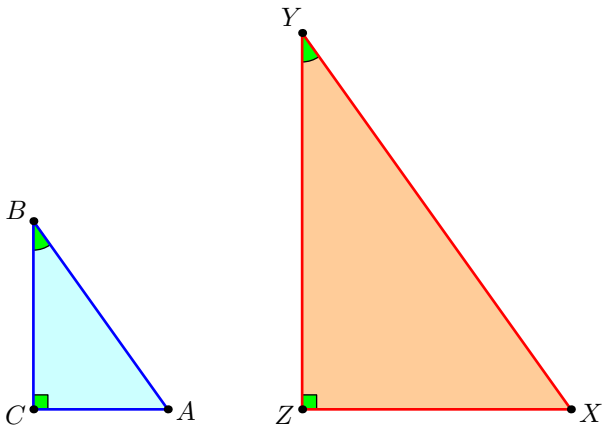
Geometriaa

Kuvissa esiintyviä kulmia merkitään muodossa $\angle ABC$. Alla olevassa kuvassa on merkitty punaisella kulma $\angle ABC$. Kulmassa kerrotaan siis ensiksi yhden sivun päätepiste A, sitten itse kulman piste B ja lopuksi toisen sivun päätepiste C. Ei ole väliä, kumman sivun päätepisteistä kirjoittaa ensimmäisenä, eli $\angle ABC$ ja $\angle CBA$ tarkoittavat samaa asiaa.[77]



Yläkoulun geometriassa käsitellään paljolti suorakulmaisia kolmioita. Näihin liittyen esitetään trigonometriaa sekä Pythagoraan lause. Käydään ensiksi läpi trigonometriaa.

Ideana on, että suorakulmaisen kolmion muodon päättää yksi kulma (suoran kulman lisäksi). Jos siis tiedämme, että kolmiossa ABC kulma $\angle ACB$ on 90 astetta ja kulma $\angle ABC$ on vaikkapa 30 astetta, niin kolmion ABC muoto on selvillä. Kolmion koosta ei kuitenkaan ole tietoa: olisi mahdollista, että kolmio XYZ olisi samanmuotoinen kuin kolmio ABC, mutta jokainen kolmion XYZ sivu olisi kaksinkertainen kolmion ABC sivuihin verrattuna:



[77] Joskus käytetään myös ns. suunnattuja kulmia, jolloin $\angle ABC$ ja $\angle CBA$ eivät olekaan aivan sama asia, vaan $\angle ABC$ saadaan kiertämällä vastapäivään pisteestä A pistettä C kohti, ja vastaavasti $\angle CBA$ saadaan kiertämällä vastapäivään pisteestä C pistettä A kohti. Kuvassa olisi siis tällä määritelmällä merkittynä kulma $\angle CBA$ eikä $\angle ABC$. Tässä kirjassa ei kuitenkaan käytetä suunnattuja kulmia.

Mutta koska kolmioiden muodot ovat samat, niin sivujen suhteet[78]

$$\frac{AB}{BC} \text{ ja } \frac{XY}{YZ}$$

ovat samat. Voisimme siis periaatteessa selvittää, mikä tämä suhde on, käyttämällä tietoa $\angle ABC = 30°$, koska suhdehan määräytyy yksikäsitteisesti, kun tiedetään kulma.

Asiasta puhumisen helpottamiseksi määritellään sini, kosini ja tangentti.

Määritelmä

Olkoon ABC suorakulmainen kolmio, jossa kulma $\angle ACB$ on 90 astetta, ja kulman $\angle ABC$ koko on α. Määritellään sini suhteena

$$\sin(\alpha) = \frac{AC}{AB},$$

kosini suhteena

$$\cos(\alpha) = \frac{BC}{AB}$$

ja tangentti suhteena

$$\tan(\alpha) = \frac{AC}{BC}.$$

Siniin, kosiniin ja tangenttiin viitataan yhteisnimityksellä trigonometrinen funktio.

Sini on siis vastakkaisen sivun ja hypotenuusan, eli suoraa kulmaa vastapäätä sijaitsevan sivun, suhde. Suoran kulman viereisiä sivuja kutsutaan kateeteiksi. Vastaavasti kosini on vierekkäisen kateetin suhde hypotenuusaan, ja tangentti on vastakkaisen kateetin suhde vierekkäiseen kateettiin.

Trigonometristen funktioiden arvojen laskeminen ei ole kovin helppoa (käsin), eikä siihen ole tarvettakaan. Käytännössä käytetään laskinta tai tietokonetta apuna. Kilpailuissa ei kuitenkaan useimmiten sallita laskimia, mutta kilpailutilanteessa ei usein tarvitse laskea konkreettisilla luvuilla mitään.

Viimeisenä esitetään Pythagoraan lause.

Lause (Pythagoraan lause)

Olkoon ABC suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat a ja b, ja jonka hypotenuusan pituus on c. Tällöin $a^2 + b^2 = c^2$.

Lause käytännössä antaa tavan laskea suorakulmaisen kolmion kolmannen sivun pituuden, kun kahden sivun pituudet tunnetaan. Esimerkiksi jos kateettien a ja b pituudet ovat 3 ja 4, niin pätee $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$, eli $c = 5$.

Lausetta ei todisteta tässä, vaan sen todistus esitetään varsinaisessa geometriaosiossa.

[78] Tässä (ja muuallakin kirjassa) merkitsemme pisteiden A ja B välisen janan pituutta merkinnällä AB.

Epäyhtälöt

Epäyhtälöiden avulla puhutaan siitä, kumpi joistakin luvuista on suurempi. Esimerkiksi $1 < 2$ tarkoittaa sitä, että 1 on pienempi kuin 2. Vastaavasti merkitään $2 > 1$. Epäyhtälöitä voi tietysti käyttää myös muuttujille, eli $x < y$ tarkoittaa, että muuttujan x arvo on pienempi kuin muuttujan y arvo. Esimerkiksi väite $x + 1 > x$ tarkoittaa sitä, että $x+1$ on suurempi kuin x (mikä tietysti pitää paikkaansa). Lisäksi epäyhtälöissä voidaan sallia yhtäsuuruus: merkintä $x \leq y$ tarkoittaa, että y on joko suurempi kuin x tai yhtä suuri kuin x (eli y on vähintään x).

Epäyhtälöitä voi käsitellä melko samalla tavalla kuin yhtälöitäkin.[79] Esimerkki: "Määritä kaikki luvut x, joilla $x + 5 < 2x + 2$." Tässä voidaan ensiksi vähentää puolittain 2, jolloin epäyhtälö muuttuu muotoon $x + 3 < 2x$. (Siis: väite $x + 3 < 2x$ pätee täsmälleen silloin, kun $x + 5 < 2x + 2$.) Tästä voidaan vähentää puolittain x, jolloin jäljelle jää $3 < x$. Alkuperäinen epäyhtälö pätee siis täsmälleen silloin, kun x on suurempi kuin 3.

Funktiot

Funktiot (merkitään usein kirjaimilla f, g ja h) voidaan ajatella koneina, jotka ottavat sisään luvun ja jotka palauttavat jonkin toisen luvun.[80] Esimerkki funktiosta: funktio f ottaa sisään luvun x ja palauttaa luvun $x + 1$. Toisin sanoen f aina kasvattaa annettua lukua yhdellä. Tätä merkitään kirjoittamalla $f(x) = x + 1$.

Funktioiden ei kuitenkaan tarvitse olla missään mielessä yksinkertaisia laskusääntöjä. Esimerkiksi aiemmin määritelty sinifunktion $\sin(\alpha)$ ottaa sisään kulman α, jonka suuruus on nollan ja 90 asteen väliltä, ja palauttaa sopivan sivujen pituuksien suhteen. Sinifunktion toiminta ei ole yksinkertainen, mutta kuten jo aiemmin todettiin, sen toiminta noudattaa kuitenkin selvää logiikkaa.

Tässä on funktiolle vielä hieman tarkempi ja formaalimpi määritelmä funktiolle, johon voi tarvittaessa palata myöhemmin. Jos A ja B ovat mitä tahansa joukkoja,[81] niin funktio f joukolta A joukolle B (merkitään $f : A \to B$) on sellainen objekti, joka ottaa syötteenä jonkin joukon A elementin ja palauttaa jonkin joukon B elementin. Ainoat rajoitukset ovat, että tämän funktion tulee "toimia" kaikilla joukon A elementeillä, eli jokaista joukon A elementtiä a tulee vastata jokin joukon B alkio b, ja lisäksi tämän alkion tulee olla yksikäsitteinen. Esimerkiksi sinifunktio on funktio joukolta "kulmat, joiden suuruus on nollan ja 90 asteen väliltä" joukolle "positiiviset luvut". Jokaista kulmaa vastaa yksikäsitteinen sinifunktion arvo.

[79] Välillä tulee kuitenkin olla tarkkana. Jos epäyhtälön kertoo puolittain negatiivisella luvulla, niin epäyhtälön suunta muuttuu (jos $1 < 2$, niin $1 \cdot (-3) > 2 \cdot (-3)$). Kahden samansuuntaisen epäyhtälön yhteenlasku toimii, eli jos $a < b$ ja $c < d$, niin $a + c < b + d$. Näitä ei kuitenkaan saa vähentää toisistaan: pätee $0 < 1$ ja $2 < 100$, mutta $0 - 2 > 1 - 100$. Eri suuntaan osoittavia epäyhtälöitä ei myöskään saa laskea yhteen.

[80] Yleisesti funktioit voivat ottaa sisään tai palauttaa mitä tahansa objekteja, vaikkapa kulmien suuruuksia tai lukupareja.

[81] Joukot käydään yksityiskohtaisemmin läpi myöhemmin.

20.2 Lukiotietoja

Kaikkea lukion oppimäärästä ei yritetä tiivistää tähän.[82] Tämän osion sisältö on seuraava:

- Induktio
- Lukujoukot ja joukot
- Binomikertoimet ja binomilause
- Lukujonot
- Trigonometria yksikköympyrässä
- Toisen asteen yhtälö
- Logaritmi

Aiheet on jälleen järjestetty suunnilleen tärkeysjärjestykseen.

Induktio

Induktio esitetään ensimmäisenä, koska se on yksi yleisimmistä ja tärkeimmistä todistustekniikoista. Tämän luvun ulkopuolella induktiotodistuksia ei usein edes kirjoiteta näkyviin, vaan lukijan oletetaan osaavan täydentää yksityiskohdat itse. Kannattaa siis pyrkiä sisäistämään induktion idea.

Esitetään induktion periaate konkreettisella tilanteella.

Jaakko kiipeää äärettömän pitkiä tikapuita ylöspäin. Tiedämme seuraavat asiat Jaakosta:

1. Jaakko pääsee tikapuiden ensimmäiselle askelmalle.
2. Jaakko voi aina nousta vielä yhden askelman ylöspäin.

Tällöin tiedämme, että Jaakko pääsee mille tahansa tikapuiden askelmista.

Tutkitaan induktiota esimerkkitehtävän kautta.

Tehtävä

Todista, että luku $n(n+1)$ on parillinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

Edetään kuten tikapuuesimerkissä. Jokainen positiivinen kokonaisluku n vastaa tikapuiden askelmaa. Tulee varmistaa kaksi asiaa:

1. Pääsemme ensimmäiselle askelmalle, eli väite pätee arvolla $n = 1$.

[82] Esimerkiksi analyysiin ei kosketa tässä kappaleessa ollenkaan, vaikka algebran osioissa välillä käytetäänkin derivaattoja ja integraaleja.

2. Pääsemme aina vielä yhden askelman ylöspäin, eli jos väite pätee arvolla $n = k$, niin se pätee myös arvolla $n = k + 1$.

Ensimmäinen ehto on selvä: kun $n = 1$, niin $n(n + 1) = 1 \cdot (1 + 1) = 2$, joka on parillinen.

Toinen ehto on hieman vaikeampi. Oletamme siis, että $k(k + 1)$ on parillinen. Haluamme todistaa, että $(k + 1)(k + 2)$ on parillinen. Kertomalla auki saadaan $(k+1)(k+2) = k^2+3k+2 = k(k+1)+2k+2$. Summan ensimmäinen termi $k(k+1)$ on oletuksen nojalla parillinen, ja termit $2k$ ja 2 ovat selvästi parillisia. Siis myös summa on parillinen, ja toinen ehto on todistettu.

Ensimmäinen ehto osoittaa, että väite pätee arvolla $n = 1$. Koska väite pätee arvolla $n = 1$, niin toisen ehdon nojalla väite pätee arvolla $n = 2$. Koska väite pätee arvolla $n = 2$, niin toisen ehdon nojalla väite pätee arvolla $n = 3$. Koska väite pätee arvolla $n = 3$, niin... Väite siis pätee kaikilla n.

Esitetty tehtävä on tietysti helppo ilman induktiotodistustakin,[83] mutta induktiota voidaan hyödyntää myös lukuisissa muissa tehtävissä. Tässä on esimerkkitehtävä, joka suositellaan todistettavaksi induktiolla. Tehtävä on klassinen esimerkki induktiosta ja esimerkiksi Wikipediasta löytää väitteelle todistuksen induktiotodistusta käsittelevältä sivulta.

Tehtävä

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Lukujoukot ja joukot

Kokonaisluvut ovat tietysti luvut $0, 1, 2, 3, \ldots$ ja $-1, -2, -3, \ldots$, ja niiden joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{Z}$.[84] Positiivisia kokonaislukuja merkitään usein symbolilla $\mathbb{Z}_+$. Myös termiä ”luonnollinen luku” käytetään viittaamaan positiivisiin kokonaislukuihin, mutta ei ole vakiintunutta käytäntöä siitä, onko 0 luonnollinen luku.

Rationaaliluvut ovat muotoa $\frac{m}{n}$ olevat luvut, missä m ja n ovat kokonaislukuja (voidaan merkitä $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{Z}$, missä $m \in \mathbb{Z}$ tarkoittaa ”m on joukon $\mathbb{Z}$ alkio”). Näitä merkitään symbolilla $\mathbb{Q}$.[85] Rationaalilukujen joukko on siitä mukava, että tulokseksi saadaan aina rationaaliluku, kun kaksi rationaalilukua lasketaan yhteen, vähennetään toisistaan, kerrotaan keskenään tai jaetaan toisillaan (paitsi nollalla ei saa jakaa). Myös seuraavaksi esitettävillä reaaliluvuilla ja kompleksiluvuilla on nämä ominaisuudet.

Rationaaliluvuissa on tiettyjä ”puutteita”: rationaaliluvuissa ei esimerkiksi ole sellaista lukua q, jolla $q^2 = 2$, eli toisin sanoen $\sqrt{2}$ ei ole rationaalilukujen joukon

[83] Kahdesta peräkkäisestä kokonaisluvusta aina toinen on parillinen, ja parillinen kertaa mikä tahansa kokonaisluku on edelleen parillinen.

[84] Miksi juuri kirjain Z? Saksan sana ”Zahl” tarkoittaa lukua. Saksassa on elänyt monia kuuluisia ja tuotteliaita matemaatikkoja, joten saksankielinen alkuperä on luonnollinen.

[85] Kirjain Q tulee englannin sanasta ”quotient”, joka tarkoittaa osamäärää.

alkio (jos et ole nähnyt todistusta tälle, kannattaa katsoa se netistä). Tätä ongelmaa paikkaamaan on luotu reaaliluvut $\mathbb{R}$. Reaalilukujen tarkka määritteleminen on hankalaa, mutta ne voi vain ajatella olemaan "kaikki luvut". Esimerkiksi $\sqrt{2}$ on reaaliluku. Kaikki reaaliluvut voidaan esittää desimaaliesityksessä kirjoittamalla numeroita peräkkäin.

Reaaliluvuissakin on vielä pieni puute: ei ole olemassa reaalilukua x, jolla $x^2 = -1$. Tätä puutetta paikkaamaan on luotu vielä kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$, joka sisältää luvut muotoa $a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja i on sellainen kompleksiluku, jolla $i^2 = -1$.[86] Kompleksilukuja ei kovin usein tarvita kilpailumatematiikassa, mutta niistä on hyvä olla tietoinen.[87] Lisäksi algebrassa kompleksiluvuilla on tärkeä rooli polynomien nollakohtien kannalta: esimerkiksi polynomilla $x^2 + 1$ ei ole nollakohtia reaalilukujen joukossa, mutta kompleksilukujen joukossa sillä on kaksi nollakohtaa: i ja $-i$.

Yleisesti joukolla viitataan johonkin kokoelmaan jotakin asioita. Esimerkiksi joukkoa, joka sisältää luvut 1 ja 2, merkitään $\{1, 2\}$. Joukon sisältämiin asioihin viitataan sanalla alkio. Joukon alkiot voivat olla mitä vain: esimerkiksi {kissa} on joukko, joka sisältää alkion kissa. Joukot voivat sisältää myös lisää joukkoja: $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ on joukko, joka sisältää kaksi kahden kokoista joukkoa.

Sopimuksen mukaan joukoissa saa olla sama alkio vain kerran. Esimerkiksi $\{1, 1\}$ ei kelpaa joukoksi. Huomaa, että esimerkki $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ on joukko: alkiot $\{1, 2\}$ ja $\{2, 3\}$ eivät ole samat. Myöskään joukon alkioiden järjestyksellä ei ole väliä, eli $\{1, 2\}$ ja $\{2, 1\}$ ovat sama joukko.

Joukon S kokoa merkitään $|S|$. Jos esimerkiksi $S = \{7, 9, 10\}$, niin $|S| = 3$.

Binomikertoimet

Aloitetaan seuraavalla tehtävällä.

Tehtävä

Rivissä on n kappaletta kolikoita, ja niistä tulee valita kaksi. Kaikki kolikot ovat erilaisia, ja kolikoiden valitsemisjärjestyksellä ei ole väliä. Kuinka monella eri tavalla valinnan voi tehdä?

Numeroidaan kolikot luvuin $1, 2, \ldots, n$. Jos $n = 3$, on kolme erilaista valintavaihtoehtoa: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ ja $\{1, 3\}$.

Ensimmäiselle kolikolle on n eri vaihtoehtoa. Tämän jälkeen toinen kolikko tulee valita jäljellä olevista $n-1$ kolikosta. Siispä tapoja on $n(n-1)$, paitsi että tämä tulee vielä jakaa kahdella, jottei esimerkiksi valintoja $\{1, 2\}$ ja $\{2, 1\}$ lasketa eri valinnoiksi. Siis vastaus on $\frac{n(n-1)}{2}$.

[86] Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku määritellään aivan kuten luulisikin. Esimerkki: $(1+2i)+(3+4i) = (1+3)+(2+4)i = 4+6i$. (Vertaa polynomien $1+2x$ ja $3+4x$ yhteenlaskuun). Tulo lasketaan seuraavasti: $(1+2i)(3+4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i + 2i \cdot 3 + 2i \cdot 4i = 3 + 4i + 6i + 8i^2$. Käytetään tietoa $i^2 = -1$, jolloin edellinen sievenee muotoon $3 + 4i + 6i - 8 = -5 + 10i$. (Vertaa taas polynomien kertolaskuun, johon on lisätty tieto $x^2 = -1$.)

[87] Mielestäni on ihan hyödyllistä tietää esimerkiksi kompleksiluvuista perusteet, vaikka niitä ei käytetäkään erityisen usein, koska tämä antaa lisää ymmärryistä tietyistä aiheista.

Entä jos kolikoita olisi pitänyt valita 3? Tällöin vastaus olisi samanlaisella logiikalla

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}.$$

Jakaja $3 \cdot 2$ tulee siitä, että sama kolmikko tulee laskettua 6 kertaa.

Kuinka monta kertaa sama 100 kolikon joukko tulee lasketuksi? Tutkitaan siis, kuinka monella tavalla voidaan valita vaikkapa kolikot $1, 2, \ldots, 100$. Vastaus on $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$: ensimmäiseksi kolikoksi voidaan valita jokin näistä sadasta kolikosta, toiseksi kolikoksi jokin 99 jäljelle jääneestä kolikosta ja niin edelleen. Tätä lukua merkitään yksinkertaisuuden vuoksi merkinnällä 100!, ja yleisesti merkitään $k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Lisäksi määritellään $0! = 1$.[88] Sanotaan, että 100! on luvun 100 kertoma.

Mikä on vastaus alkuperäiseen tehtävään, jos tuleekin valita 100 kolikkoa? Vastaavalla logiikalla kuin aiemmin

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-99)}{100!}.$$

Tämä voidaan merkitä nätimmin muodossa

$$\frac{n!}{100!(n-100)!}.$$

Tämä on ns. binomikerroin, ja sitä merkitään

$$\binom{n}{100}.$$

Yleisesti

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kertoo, kuinka monella tavalla n kolikosta voidaan valita k kolikkoa, kun järjestyksellä ei ole väliä. Tässä oletetaan, että $0 \leq k \leq n$. Kun $k = n$, niin määritelmä $0! = 1$ on hyödyllinen: vastauksen tuleekin olla 1.

Binomikertoimista mainitaan tässä pari ominaisuutta. Ensinnäkin huomataan, että

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

mikä on selvää binomikertoimien kaavasta, mutta myös niiden merkityksestä. Se, että valitsee k kappaletta kolikoita, on sama kuin valitsisi, mitkä $n-k$ kolikkoa eivät tule valituksi.

Seuraavaksi osoitetaan väite

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

[88] Kuten määritellessä $x^0 = 1$ todettiin, nollan luvun kertominen on hyvä määritellä ykköseksi.

Yhtälön paikkansapitävyyden voi tarkistaa suoralla, vaikkakin melko työläällä, laskulla. Tässä esitetään toisenlainen ratkaisu. Kuvitellaan tapoja valita $n+1$ kolikosta $k+1$ kolikkoa. Näitä tapoja on määritelmän mukaan $\binom{n+1}{k+1}$. Tapojen määrän voi laskea myös toisella tavalla. Jokainen valinta kuuluu yhteen seuraavista tapauksista:

1. Kolikko 1 tulee valituksi.
2. Kolikko 1 ei tule valituksi.

Ensimmäisessä tapauksessa jäljelle jää n kolikkoa, joista tulee valita k kappaletta, joten tapoja on $\binom{n}{k}$. Toisessa tapauksessa jäljelle jää n kolikkoa, joista tulee valita $k+1$ kappaletta, joten tapoja on $\binom{n}{k+1}$. Yhteensä eri tapoja on siis $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. Väite seuraa tästä.

Tässä toinen kiinnostava väite: pätee

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tämä yhtälö perustuu siihen, että molemmilla puolella lasketaan joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkojen määrä: toisaalta näitä on 2^n kappaletta[89] mutta toisaalta määrä saadaan laskemalla ensiksi nollan kokoisten osajoukkojen määrä, lisäämällä tähän yhden kokoisten osajoukkojen määrä ja niin edelleen.

Lopuksi mainitaan yhteys binomilauseeseen. Binomilause kertoo, miltä $(x+y)^n$ näyttää auki kerrottuna, kun n on positiivinen kokonaisluku.

Lause (Binomilause)

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n.$$

Tutkitaan termin $x^k y^{n-k}$ kerrointa, kun $(x+y)^n$ kerrotaan auki. Miten termi $x^k y^{n-k}$ saadaan muodostettua tulosta

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)?$$

Joistain k kappaleesta termejä tulee valita muuttuja x, ja lopuista $n-k$ kappaleesta termejä tulee valita muuttuja y. Koska polynomien kertolasku perustuu kaikkien kombinaatioiden läpikäymiseen, saadaan tästä haluttu tulos: kerroin on $\binom{n}{k}$.

Lukijaa suositellaan etsimään netistä Pascalin kolmio ja miettimään yhteyttä binomikertoimien ja Pascalin kolmion välillä.

Lukujonot

[89] Jokainen osajoukko voidaan luoda seuraavasti: päätetään, valitaanko 1 osajoukkoon vai ei (kaksi eri vaihtoehtoa), päätetään, valitaanko 2 osajoukkoon vai ei (kaksi eri vaihtoehtoa) ja niin edelleen. Yhteensä tehdään n valintaa, ja mahdollisia lopputuloksia on 2^n kappaletta.

Lukujonot ovat nimensä mukaisesti jonoja lukuja. Lukujonot voivat olla joko äärellisen tai äärettömän pituisia. Tässä luvussa tutkitaan enimmäkseen äärellisiä lukujonoja.

Tärkeimpiä lukujonoja ovat aritmeettiset ja geometriset lukujonot. Keskitytään ensiksi aritmeettisiin lukujonoihin.

Määritelmä

Sanotaan, että luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muodostavat aritmeettisen lukujonon, jos erotus $a_{i+1} - a_i$ on sama kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Olkoon d tämä erotus $a_{i+1} - a_i$, jolloin lukujonon alkiot ovat a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, $\ldots$, $a_1 + (n-1)d$. Esimerkiksi lukujono $1, 2, 3, \ldots, n$ on aritmeettinen lukujono.

Induktion yhteydessä mainittiin tehtävä $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Vastaavasti voisi kysyä, onko mahdollista laskea yleisen aritmeettisen lukujonon lukujen summa. Seuraavaksi esitetään ratkaisu tälle ongelmalle.

Lasketaan siis summa $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-1)d$. Tässä lukujonossa on n jäsentä, ja keskimääräisen luvun koko on $a + \frac{n-1}{2}d$. Summa on keskiarvo kerrottuna lukujen määrällä eli

$$na + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Arvoilla $a = 1$ ja $d = 1$ saadaan summa $1 + 2 + \ldots + n$.

Seuraavaksi esitetään geometrinen lukujono.

Määritelmä

Sanotaan, että luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muodostavat geometrisen lukujonon, jos on olemassa sellainen luku q, että $a_{i+1} = qa_i$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Toisin sanoen: jos lukujonon kaikki jäsenet ovat nollasta eroavia, niin se on geometrinen, jos $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ on sama kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Jos tätä suhdetta merkitään kirjaimella q, niin lukujonon jäsenet ovat $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots, a_1q^{n-1}$. Esimerkiksi kakkosen potenssit $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}$ muodostavat geometrisen lukujonon.

Kuten aritmeettiselle lukujonolle myös geometriselle lukujonolle on summakaava. Olkoon $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ haluttu summa. Edellä todettiin, että lukujonon jäsenet ovat muotoa a_1q^k, missä $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Siis

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}.$$

Ideana on vähentää luvusta S luku qS, jolloin melkein kaikki termeit supistuvat. Koska

$$qS = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n,$$

niin vähentämällä tämä aiemmasta yhtälöstä saadaan

$$S - qS = a_1 - a_1q^n.$$

Jakamalla puolittain luvulla $1-q$ saadaan

$$S = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Huomaa, että menetelmä ei toimi, jos $q = 1$. Tällöin summa on kuitenkin helppo laskea, koska lukujono on vain $a_1, a_1, a_1, \ldots, a_1$.

Arvoilla $q = 2$ ja $a_1 = 1$ saadaan

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Induktioharjoituksena voi yrittää todistaa tämän yhtälön induktiolla muuttujan n suhteen.[90]

Joskus on tarvetta laskea myös äärettömien geometristen lukujonojen summia. Lukujonon $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ summa ei ole luku (sanotaan, että summa ei suppene), ja tällöin kysymyksessä ei ole järkeä. Tilanne on kuitenkin eri, kun halutaan laskea vaikkapa summaa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Tämän summan arvo on 2. Summan saa laskettua tutkimalla saatua kaavaa

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

ja ”asettamalla luvun n arvoksi äärettömän”.[91] Jos $-1 < q < 1$, niin termi ”q^∞” on 0. Tällöin summa on

$$S = a_1 \frac{-1}{q-1} = a_1 \frac{1}{1-q}.$$

Esimerkki $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ vastaa arvoja $a_1 = 1$ ja $q = \frac{1}{2}$.

Jos $q \geq 1$ tai $q \leq -1$, niin ääretöntä summaa ei voi laskea.

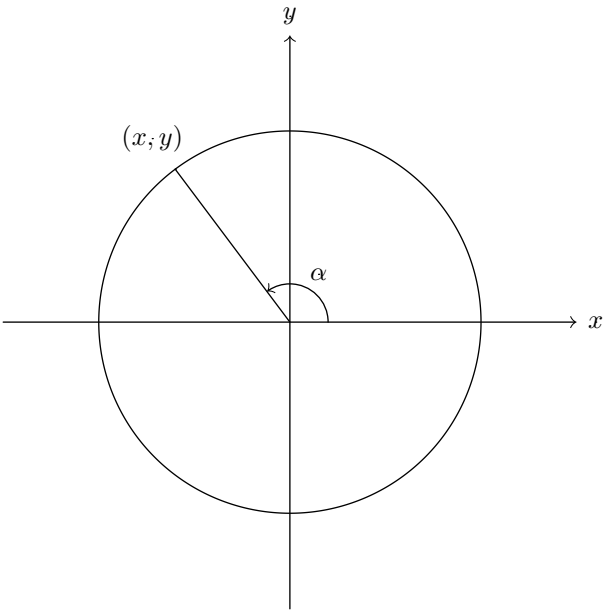
Trigonometria

Yläkoulun osiossa esitettiin trigonometriset funktiot suorakulmaisen kolmion avulla. Tässä on se puute, että tällöin tutkittavat kulmat ovat välttämättä nollan ja 90 asteen väliltä. Trigonometria halutaan kuitenkin yleistää käsittelemään muitakin kolmioita kuin suorakulmaisia kolmioita, ja tällöin kolmion kulmat voivat hyvinkin olla yli 90 astetta.

Tämä puute korjataan määrittelemällä trigonometristen funktioiden arvot yksikköympyrän avulla. Yksikköympyrä tarkoittaa yksinkertaisesti ympyrää, jonka säde on yksi ja jonka keskipiste on origo. Valitaan sitten jokin kulma $0° \leq \alpha < 360°$, ja piirretään ympyrän säde, joka on x-akselista nähden kulman α verran vastapäivässä.

[90] Myös yleisen geometrisen lukujonon summakaavan voi todistaa induktiolla.

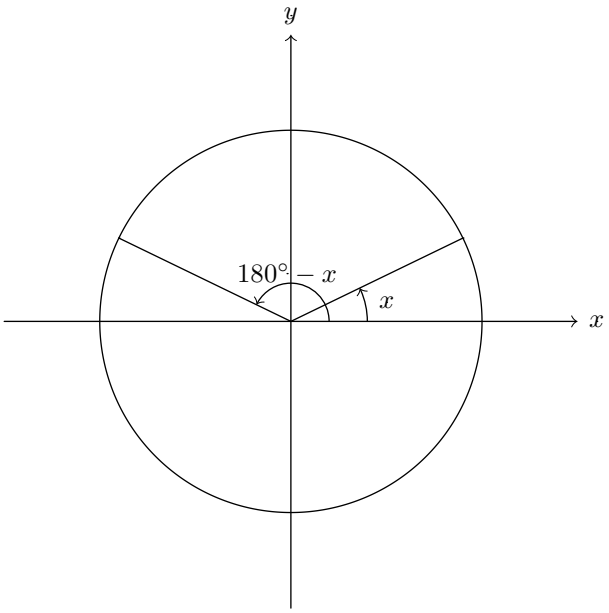
[91] Tämän voi muotoilla tarkemmin raja-arvojen avulla.



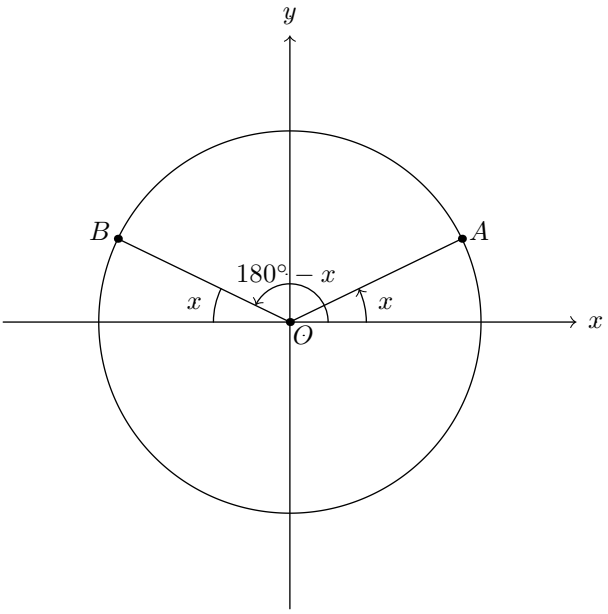
Säde leikkaa ympyrän jossain pisteessä (x, y). Määritellään nyt $\sin(\alpha) = y$ ja $\cos(\alpha) = x$ sekä $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$, kun $x \neq 0$. Sini ja kosini on nyt määritelty kaikille kulmille $0° \leq \alpha < 360°$. (Huomaa, että arvot voivat olla negatiivisia.) Lisäksi voidaan ajatella, että esimerkiksi kulma $730°$ eli $10° + 360° + 360°$ on vain sama asia kuin kulma $10°$, koska täydet kierrokset eivät vaikuta valittuun säteeseen. Vastaavasti vaikkapa $-330°$ vastaa kulmaa $30°$.

Tällä tavalla määritellyt sini ja kosini antavat samat tulokset kuin suorakulmaisen kolmion antamat arvot, kun $0 < \alpha < 90°$, minkä voi nähdä piirtämällä sopivan kuvan ja tutkimalla sitä.

Yksikköympyrää tutkimalla voi todistaa erilaisia trigonometristen funktioiden ominaisuuksia. Osoitetaan harjoituksen vuoksi, että kaikilla kulmilla x pätee $\sin(x) = \sin(180° - x)$. Tutkitaan ensiksi tapausta $0° \leq x \leq 90°$. Tällöin tilanne näyttää tältä:



Säteiden päätepisteiden y-koordinaatit ovat samat. Tämän voi todistaa seuraavasti: Olkoon O origo, ja olkoon kulmaa x vastaavan säteen päätepiste A ja kulmaa $180° - x$ vastaavan säteen päätepiste B. Koska oikokulma on $180°$, säde OB ja negatiivinen osa x-akselista muodostavat kulman x. Tämä on sama kulma kuin säteen OA ja positiivisen x-akselin välinen kulma. Kuvio on siis symmetrinen y-akselin suhteen, eli pisteillä A ja B todella on samat y-koordinaatit. Koska sini vastaa y-koordinaattia, on yhtälö $\sin(x) = \sin(180° - x)$ todistettu.



Vastaavasti voidaan käsitellä tapaus $90° \leq x \leq 180°$ (oikeastaan tämä seuraa jo edellisestä) ja niin ikään myös tapaus $180° \leq x < 360°$.

Trigonometrian tuloksisa ja sovelluksia kilpailumatematiikkaan käsitellään tarkemmin varsinaisen tekstin puolella.

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälöt ovat muotoa $ax^2 + bx + c = 0$, missä a, b ja c ovat vakioita (ja $a \neq 0$). Usein halutaan selvittää yhtälön toteuttavat luvut x. Ideana on yrittää palauttaa yhtälö muotoon $y^2 = d$, mistä y osataan ratkaista ottamalla neliöjuuri. Tämä onnistuu yhtälössä $ax^2 + bx + c = 0$ silloin, kun $b = 0$: tällöin vähentämällä c ja jakamalla a:lla saadaan $x^2 = -\frac{c}{a}$. Yleinen tapaus voidaan redusoida tähän tapaukseen "siirtämällä" muuttujaa x sopivasti, eli toisin sanoen kirjoittamalla yhtälö esimerkiksi muuttujan $x + 1$ avulla muuttujan x sijasta. Muuttujan x siirtäminen valitaan niin, että ensimmäisen asteen termi bx saadaan katoamaan.

Tuumasta toimeen. Jaetaan yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ luvulla a (joka ei ole 0), jolloin yhtälö on

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Toteutetaan siirtämisidea: vasen puoli on suunnilleen $(x + \frac{b}{2a})^2$: ainoastaan vakio

menee pieleen. Pätee siis

$$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}.$$

Kirjoitetaan yhtälö uudelleen muotoon

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Tämä yhtälö on juurikin aiemmin kuvailtua muotoa $y^2 = d$. Otetaan puolittain neliöjuuri. Huomaa, että $y^2 = d$ tarkoittaa, että y on joko $\sqrt{d}$ tai $-\sqrt{d}$, ja molemmat tapaukset tulee huomioida.[92] Saadaan siis

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Loppu onkin rutiininomaista lausekkeiden sieventelyä. Vähennetään puolittain $\frac{b}{2a}$:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

Tämän voi kirjoittaa vielä (käyttämällä neliöjuurien laskusääntöjä) muodossa

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

eli

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logaritmi

Yhtälöstä $x^3 = 125$ saa ratkaistua x:n ottamalla puolittain kolmannen juuren: koska $x^3 = 125$, niin $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{125}$. Vasen puoli on x ja oikea puoli on 5, koska $5^3 = 125$. Täten yhtälöllä on ratkaisu $x = 5$.

Tutkitaan sitten yhtälöä muotoa $3^x = 81$. Kokeilemalla nähdään ratkaisu $x = 4$. Olisi kuitenkin hyvä olla jokin systemaattinen tapa ratkaista tämäntyyppisiä yhtälöitä. Apuun tulevat logaritmit.

Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja ($a \neq 1$). Tutkitaan yhtälöä muotoa $a^x = b$. Tällä yhtälöllä on olemassa täsmälleen yksi ratkaisu. Esitetään väitteelle perustelu, jonka lukija voi halutessaan sivuuttaa. Kun x on hyvin pieni eli noin $-\infty$, niin a^x on suunnilleen nolla. Kun x on hyvin suuri eli noin ∞, niin a^x on myös hyvin suuri (noin ∞). Koska b on nollan ja äärettömän välissä, on olemassa jokin luvun x arvo, jolla a^x on täsmälleen luku b. Olemme nyt perustelleet,[93] että ratkaisuja on ainakin

[92] Toisen asteen yhtälöllähän on useimmiten kaksi erisuurta ratkaisua.

[93] Perustelu toivottavasti selittää intuitiivisesti, miksi yhtälöllä on ratkaisu, mutta se ei ole vielä todistus väitteelle. Lisäksi tarvitaan tieto siitä, että a^x on jatkuva (mikä perustuu potenssiinkorotuksen määritelmään) ja väliarvolause. Emme kuitenkaan syvenny yksityiskohtiin.

yksi. Ratkaisuja on myös enintään yksi, koska jos $a^x = b$ ja $a^y = b$, niin $a^x = a^y$ eli $a^{x-y} = 1$. Tästä seuraa,[94] että $x - y = 0$ eli $x = y$.

Merkitsemme tätä yhtälön $a^x = b$ ratkaisua merkinnällä $\log_a(b)$, jolloin siis $a^{\log_a(b)} = b$. Tämä luku on nimeltään "a-kantainen logaritmi luvusta b".

Esimerkiksi $\log_2(64) = 6$, koska $2^6 = 64$, ja $\log_2(4096) = 12$, koska $2^{12} = 4096$. Määritelmään totuttelu vaatii jonkin verran aikaa.

Huomataan, että logaritmi kasvaa hitaasti: niinkin isolla luvulla kuin 4096 logaritmin arvo (kannalla 2) on vain 12. Luvun 2^{100} kaksikantainen logaritmi $\log_2(2^{100})$ on hyvin pieni (100), vaikka 2^{100} on luku, jossa on 31 numeroa.

Mitä hyötyä logaritmin määritelmästä on? Logaritmeilla on paljon käteviä ominaisuuksia. Yksi on seuraava: pätee $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ (missä a, x ja y ovat mielivaltaisia positiivisia reaalilukuja ja $a \neq 1$). Logaritmi siis muuttaa tulon summaksi. Tämä muistuttaa hieman potenssiinkorotuksen sääntöä $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, jossa summa muuttui tuloksi, ja laskusäännön todistus logaritmeille perustuukin vastaavaan sääntöön potensseille.[95] Logaritmilla on siis päinvastainen vaikutus kuin potenssiinkorotuksella (mikä on luonnollista, koska logaritmi on määritelty potenssiinkorotuksen käänteisoperaatioksi).

Myös yhtälö $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$ pätee. Tässä on perustelu: Mihin potenssiin luku a pitää korottaa, jotta saadaan luku x^y? Määritelmän nojalla vastaus on $\log_a(x^y)$. Toisaalta jotta luvusta a saadaan x^y, riittää ensin korottaa lukua a niin, että saadaan luku x, ja korottaa tämän jälkeen lopputulos potenssiin y. Tämä saavutetaan korottamalla a ensin potenssiin $\log_a(x)$ ja sitten potenssiin y, eli yhteensä potenssiin $y \cdot \log_a(x)$. (Pätee siis $a^{y \cdot \log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^y = x^y$, joka saadaan käyttämällä potenssien laskusääntöjä ja logaritmin määritelmää.)

[94] Tarkka perustelu sivuutetaan jälleen.

[95] Perustelu yhtälölle $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$: Luku $\log_a(x)$ on se luku s, jolla $a^s = x$. Luku $\log_a(y)$ on se luku t, jolla $a^t = y$. Nyt potenssien laskusäännöillä saadaan, että $a^{s+t} = a^s \cdot a^t = x \cdot y = xy$. Täten $s + t$ on se luku, johon korottamalla luvusta a saadaan xy. Mutta tämä luku on määritelmän nojalla $\log_a(xy)$, joten $\log_a(xy) = s + t$. Tämä todistaa halutun väitteen.

20.3 Sekalaisia notaatioita ja käsitteitä

Tähän osioon on koottu sekalaisia asioita, jotka eivät ole osa selkeämpää kokonaisuutta.

Yleensä matematiikassa muuttujalla n viitataan johonkin kokonaislukuun, joka on useimmiten positiivinen. Yleensä kontekstista voi päätellä, mitä arvoja mikäkin muuttuja voi saada (ja/tai sillä ei ole juurikaan väliä), ja valitut kirjaimet auttavat tässä päättelyssä. Esimerkiksi virkkeestä "Osoitetaan, että kaikilla n luku $n(n+1)$ on parillinen" voidaan päätellä, että n on kokonaisluku, koska n usein viittaa kokonaislukuun ja koska ei ole järkeä puhua epäkokonaisluvun parillisuudesta.

Intuitiivisesti on selvää, mitä kokonaislukujen jaollisuudella tarkoitetaan: luku 10 on jaollinen luvulla 2, muttei luvulla 3. Tässä on tarkka määritelmä:

Määritelmä

Sanotaan, että kokonaisluku a on jaollinen kokonaisluvulla b, jos on olemassa sellainen kokonaisluku c, että $a = bc$.

Jaollisuutta merkitään $b|a$, eli b jakaa a:n. Jos b ei jaa lukua a, niin merkitään $b \nmid a$ (samoin kuin jos x ja y eivät ole yhtä suuria, niin merkitään $x \neq y$).

Alkuluvulla tarkoitetaan ykköstä suurempaa kokonaislukua, joka on jaollinen vain itsellään ja ykkösellä. Ensimmäiset alkuluvut ovat siis $2, 3, 5, 7, 11$ ja 13. Kirjaimella p viitataan usein alkulukuun.[96]

Merkintä $|x|$ tarkoittaa luvun x itseisarvoa. Jos $x \geq 0$, niin itseisarvo on x, ja jos $x < 0$, niin itseisarvo on $-x$. Itseisarvo siis kertoo luvun etäisyyden nollasta ja on siksi hyvä tapa mitata luvun suuruutta. (Kompleksiluvun $a + bi$ etäisyys nollasta saadaan Pythagoraan lauseella tutkimalla pisteitä kompleksitasossa: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.)

Merkintä $\lfloor x \rfloor$ kuvastaa ns. lattiafunktiota, joka on luvun x pyöristys alaspäin kokonaislukuun. Esimerkiksi $\lfloor 3.9 \rfloor = 3$ ja $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$. Negatiivisten lukujen kanssa on hyvä olla tarkkana: $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$. Vastaavasti merkitään kattofunktiota $\lceil x \rceil$, joka on luvun x pyöristys ylöspäin. Luvun x murto-osaa merkitään $\{x\}$, ja tämän määritellään olevan $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Esimerkiksi $\{1.2345\} = 0.2345$.[97]

Jos a ja b ovat reaalilukuja, niin välillä $[a, b]$ tarkoitetaan niiden lukujen x joukkoa, jotka toteuttavat ehdot $a \leq x$ ja $x \leq b$. Siispä a ja b ovat mukana tässä välissä. (a, b) tarkoittaa väliä, jossa on kaikki luvut x, joilla $a < x$ ja $x < b$. Tässä a ja b eivät siis ole mukana. Joissain lähteissä käytetään merkintää $]a, b[$ tarkoittamaan samaa asiaa. Vastaavasti voidaan määritellä vielä $[a, b)$ ja $(a, b]$.

Summamerkintöjä voidaan lyhentää. Summa $1 + 2 + \ldots + 100$ voidaan kirjoittaa tiivisti muotoon

$$\sum_{i=1}^{100} i.$$

[96] Englanniksi alkuluku on "prime number".

[97] Tämä notaatio on, ikävä kyllä, sama kuin joukkojen merkitsemiseen käytetty notaatio. Kontekstista voidaan kuitenkin päätellä, mitä tarkoitetaan.

Summamerkki Σ on kreikan kielen kirjain iso sigma. Tässä i on siis muuttuja, joka käy läpi arvot $1, 2, \ldots, 100$. Summaamme näillä i:n arvoilla muuttujan i. Toinen esimerkki: summa $7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + \ldots + 35^2$ on

$$\sum_{i=7}^{35} i^2.$$

Tässä i käy läpi kokonaislukuarvot väliltä $[7, 35]$, ja summaamme näillä i luvut i^2.

Vastaavasti voidaan merkitä tiiviisti tuloa. Aiemmin määriteltiin $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Tätä merkitään

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Tulomerkki on kreikan kirjain iso pii. Logiikka on siis sama kuin aiemmin, mutta summa on korvattu tulolla.

Lukujen $1, 2, \ldots, n$ permutaatiolla tarkoitetaan jotain uudelleenjärjestystä näille luvuille. Esimerkiksi lukujen $1, 2, 3$ permutaatioita ovat seuraavat jonot:

- $(1, 2, 3)$
- $(1, 3, 2)$
- $(2, 1, 3)$
- $(2, 3, 1)$
- $(3, 1, 2)$
- $(3, 2, 1)$

Lukujen $1, 2, \ldots, n$ permutaatioiden määrä on $n!$ (miksi?).

Aiemmin esiteltiin induktiotodistus. Toinen yleinen todistustekniikka on vastaoletustodistus. Haluamme todistaa väitteen X. Todistamme väitteen olettamalla, että X ei päde ja saamalla aikaan ristiriidan. Siis ei voi olla mahdollista, että X ei päde, joten X pätee. Klassinen esimerkki vastaoletustodistuksesta on alkulukujen äärettömyyden todistaminen.

Lause (Alkulukujen äärettömyys)

On olemassa äärettömän monta alkulukua.

Ennen lauseen todistusta todetaan ilmiselvä fakta: jokainen ykköstä suurempi kokonaisluku n on jaollinen jollain alkuluvulla. Jos nimittäin n ei ole jaollinen millään alkuluvulla, niin sen tulee itse olla alkuluku.

Sitten lauseen todistukseen. Oletetaan, että on olemassa vain äärellisen monta alkulukua. Olkoot ne $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tutkitaan lukua

$$P = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Mitä luvusta P tiedetään? Se on ykköstä suurempi kokonaisluku, joten edellä esitetyn faktan nojalla P on jaollinen jollain alkuluvulla. Koska kaikki alkuluvut ovat $p_1, p_2, \ldots, p_n$, niin pätee $p_i | P$ jollain indeksillä i. Siispä $p_i | p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, mutta tämä on selvästi mahdotonta.

Oletimme, että on olemassa vain äärellisen monta alkulukua, ja päädyimme mahdottomuuteen. Täten alkulukuja täytyy olla äärettömän monta.

21 Kevyempää luettavaa

Olen kirjoittanut erilaisia epämatemaattisia tekstejä, joiden uskon kiinnostavan lukijoita. Kerron lähinnä omia ajatuksiani ja mielipiteitäni (aikana, jona opiskelen ensimmäistä lukukautta yliopistossa), enkä juurikaan koeta vetää mitään yleisiä johtopäätöksiä. Olen lisäksi linkannut muita tekstien aiheisiin liittyviä materiaaleja, joiden uskon niin ikään olevan kiinnostavia.

Ensimmäinen teksti käsittelee kilpailu-uraani, ja tekstin pääpaino on kilpailu-urani alkupuolella. Toisessa kirjoituksessa käsittelen ajatuksiani lahjakkuudesta itseni kohdalla. Kolmannessa tekstissä pohdin, mistä kehittyminen koostuu eli mitä asioita opin harjoittelemalla. Viimeisenä on teksti koskien kilpailumatematiikan hyötyjä.

21.1 Kilpailu-urani

Kuulin ensimmäistä kertaa matematiikkakilpailuista ala-asteella – kuulemma tulevalla yläkoulullani järjestettäisiin matematiikkakilpailu joka syksy. Kilpailu kiinnosti minua, koska jo tuolloin pidin matematiikasta, mutten ajatellut asiaa sen enempää. Yläkoulun seitsemännellä luokalla sain kuulla, että kilpailuun saavat osallistua vain kahdeksannen ja yhdeksännen luokan oppilaat.

Kahdeksannen luokan syksyllä alkoi taas puhe kilpailusta, ja innostuin asiasta toden teolla. Tutkin edellisten vuosien tehtäviä ja pisterajoja loppukilpailuun pääsemiseksi, laskin kilpailuun jäljellä olevia päiviä ja luin lisää muista matematiikkakilpailuista. Erityisesti minua houkutti lukemani tieto siitä, että loppukilpailuun päässeet kutsuttaisiin jatkovalmennukseen: ”Tätä minä haluan.”[98]

Itse kilpailupäivänä olin melko jännittynyt. Kilpailu sujui tästä huolimatta melko hyvin, vaikkakin aika tuntui loppuvan kesken enkä ymmärtänyt yhden alkupään tehtävän kysymystä. Kilpailun jälkeisinä päivinä tarkistin monta kertaa päivässä MAOLin nettisivut tulosten toivossa. Viikkojen odottaminen palkittiin: eräänä päivänä tulokset löytyivät sivuilta, ja sain tietää päässeeni loppukilpailuun rimaa hipoen.

Valmistauduin tammikuussa pidettävään loppukilpailuun kuten alkukilpailuunkin eli ratkomalla vanhoja kilpailutehtäviä. Totesin yllätyksekseni, etteivät aiempien vuosien voittajien pistemäärät tuntuneet mahdottomilta saavuttaa. Hakemalla netistä peruskoulun kilpailussa pärjänneiden nimiä huomasin, että jotkut heistä olivat pärjänneet myös lukion kilpailuissa ja jopa kansainvälisesti. Löysin Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten sivut, ja toivoin pääseväni Suomen joukkueeseen jonain päivänä.

Loppukilpailu järjestettiin Helsingissä. Perjantaina oli luvassa kolmiosainen kilpailu, ja lauantaina olisi palkintojenjako. Kisapäivänä olin hyvissä ajoin tapahtumapaikalla, ja odotellessani katselin muita kisaajia. He näyttivät hyvin pelottavilta ja valmistautuneilta voittamaan minut.

[98] En vielä tiennyt, että valmennukseen saavat tulla kaikki halukkaat.

Kilpailu meni omalta osaltani erittäin hyvin: jokainen kilpailun kolmesta osiosta sujui ilman suurempia ongelmia. Olin tästä huolimatta yllättynyt kuullessani palkintojenjaossa, että olin ollut kilpailun paras suomalainen! Tämän seurauksena sain edustuspaikan Viron kansalliseen kilpailuun.

Loppuosa kahdeksannen luokkani keväästä kului Viron kilpailuun valmistautuessa sekä yleisesti matematiikan parissa. Harjoitteluun käytin pääasiassa Viron kilpailun vanhoja tehtäviä (kilpailu meni ihan hyvin: voitin noin puolet virolaisista). Suuntasin myös katsettani kohti lukion kilpailuja ja tutkin valmennuksen sivuilta löytyvää materiaalia.

Olin keväällä myös ensimmäistä kertaa valmennusviikonlopussa. Ennen viikonloppua olin käyttänyt huomattavan määrän aikaa valmennustehtävien miettimiseen, ja olin tyytyväinen saadessani ratkaistua niistä yhden tai kaksi.

Itse viikonloppuna olin aika hukassa. Tehtävät tuntuivat vaikeilta ja minulta puuttui esitietoja (kuten logaritmit). Minua kuitenkin rohkaisi se, etteivät muutkaan tajunneet kaikesta kaikkea. Olin myös hyvin hämmästynyt, kun muut eivät saaneetkaan heti ratkaistua uusia valmennustehtäviä.

Kesällä osallistuin Päivölän matematiikkalinjan kesäviikoille, joiden avulla sain paikattua matemaattisen yleissivistykseni aukkoja. Lisäksi kuulin paljon tarinoita vanhoista opiskelijoista, jotka olivat menestyneet lukemattomissa eri kilpailuissa. Heistä tuli minun esikuviani, ja toivoin pääseväni joskus pääseväni heidän joukkoonsa.

Yhdeksännen luokan syksyllä tapahtui paljon. Mieleenpainuvin, yllättävin ja tärkein hetki tapahtui ensimmäisellä valmennusviikonlopulla, kun kuulin pääseväni Suomen joukkueeseen Baltian tiehen. Samoihin aikoihin oli peruskoulun ja lukion matematiikkakilpailuiden alkukilpailut, joista molemmista pääsin jatkoon.

Vuoden 2016 Baltian tie järjestettiin marraskuussa Oulussa. Minulla oli matkalla todella mukavaa: tutustuin muuhun joukkueeseen, vitsailimme paljon, majoituimme kotoisissa mökeissä, järjestelyt sujuivat hyvin, kävimme hienoissa paikoissa ja niin edelleen. Kävin myös uimassa hyytävässä Itämeressä erään joukkuelaisen houkuteltua minut suklaalevyllä. Matkassa minua jäi harmittamaan ainoastaan oma suoritukseni joukkuekilpailussa: en kokenut saaneeni tehtyä juuri mitään. Eräs joukkueestamme kuitenkin kommentoi, että vuoden päästä voisin olla parempi kuin kukaan tämänhetkisestä joukkueesta. Pidin tätä enemmänkin lohduttavana kommenttina kuin realistisena arviona.

Käytin seuraavan joululomani suurelta osin harjoitteluun. Tein suunnilleen joka päivä yhden MAOLin lukion loppukilpailun, ja aina kilpailun tehtyäni tutkin sen malliratkaisuja. Jälkeenpäin ajateltuna tämä oli minulle selvästi käännekohta: opin hurjasti ongelmanratkaisua, ja aloin vihdoin saamaan valmennus- ja kisatehtäviä tehtyä.

Vuoden 2017 MAOLin loppukilpailussa osallistuin sekä peruskoulun että lukion sarjaan, ja tein kilpailut perätysten iltapäivän ja illan aikana. Peruskoulun kilpailu meni muuten loistavasti, mutta menetin askarteluosiossa paljon pisteitä. Lukion kilpailu meni niin ikään erinomaisesti. Vietin myöhäisillasta monta tuntia ystävieni kanssa tuloksia spekuloiden – arvaukset menivät aivan päin mäntyä, mutta hauskaa

oli.

Tulokset olivat kannaltani erinomaiset, ja erityisesti lukion kilpailun tulos tuli suurena yllätyksenä. Olin peruskoulun kisassa jälleen paras suomalainen, ja lukion kilpailussa pääsin toiselle sijalle. Palkintojenjakotilaisuuden jälkeen yksi Viron valmentajista kyseli minulta tunnelmaa, enkä oikein saanut sanaa suustani.

Keväällä oli vielä Viron kansallinen kilpailu, Pohjoismainen (lukion) kilpailu sekä Suomen IMO-joukkueen valintaleiri. Olin harjoitellut tekemällä vanhojen Pohjoismaisten tehtävät ja kehityin lujaa tahtia. Voitin Viron kilpailun, mutta Pohjoismainen kilpailu meni kehnosti. Olin kuitenkin kehittynyt sen verran, että IMOon pääseminen ei tullut yllätyksenä, ja nälkäni kasvoi. Tavoittelin pronssia.[99]

IMO-matka oli mahtava kokemus. Matka koostuu kahdesta osasta: viikon pituisesta pohjoismaisten joukkueiden valmennusleiristä Tanskassa, sekä viikosta itse IMOn järjestäjämaassa. Tanskassa oli opetusta samaan tyyliin kuin valmennusviikonlopuissa, ja lisäksi oli pari harjoituskilpailua. Vapaa-ajallamme pelasimme pöytäjalkapalloa ja ultimatea sekä kiipeilimme puissa.

Vuoden 2017 IMO järjestettiin Brasiliassa. Käytännössä kaikki toiminta ekskursioita lukuun ottamatta tapahtui erinomaisella hotellillamme, ja käytännön järjestelyt toimivat sujuvasti. Ruoka oli herkullista (erityisesti appelsiinimehu oli suomalaisten mieleen), ekskursiot viihdyttäviä ja vapaa-ajan huone hoiti tehtävänsä loistavasti.

Jännitin kilpailupäiviä paljon, ja ensimmäisenä päivänä kilpailun ensimmäiset parikymmentä minuuttia kuluivat paljolti rauhoittumiseen. Kilpailu meni kuitenkin suunnilleen toivotusti. Ainoa ongelma oli se, että tein kahden pisteen arvoisen hutiloinnin ensimmäisessä tehtävässä, minkä seurauksena menetin pronssin. Otin tämän melko raskaasti, ja olin hieman tympääntynellä mielellä suuren osan loppumatkasta.

Mennessäni lukioon tilanne matematiikkapiireissä muuttui rajusti: IMO-joukkueen kuudesta jäsenestä neljälle IMO oli viimeinen kilpailu, joten kilpailujoukkueissa oli paljon tilaa uusille tulokkaille. Esimerkiksi syksyn Baltian tie -joukkueesta en tuntenut kahta henkilöä entuudestaan ollenkaan.

Konkareiden poistuttua kilpailupiireistä tulin hieman liiankin itsevarmaksi omista kyvyistäni, mikä näkyi muun muassa harjoittelumotivaation laskuna. Ylimielisyys tuli vastaan Baltian tiessä: kilpailutilanteessa en pärjännytkään niin hyvin kuin mitä olisin halunnut tai uskonut. Havahduin tämän kautta raakaan todellisuuteen ja lisäksi tajusin, että muut joukkueen jäsenet eivät olleetkaan hassumpia.

Muuten syksy ja kevät etenivät kohtalaisen samoja ratoja kuin edellisenä vuonna. MAOLin lukion loppukilpailussa ennen kilpailua muut kisaajat näyttivät yhtä pelottavilta kuin aiemminkin, mutta onnistuin kuitenkin voittamaan kilpailun. Osallistuin myös tietotekniikan Datatähti-kilpailuun, jonka tuloksesta yllätyin positiivisesti sijoittuessani neljänneksi.[100] Keväällä oli vielä Pohjoismainen kilpailu ja IMO-valintaleiri.

[99]IMOssa (ja monissa muissakin tiedeolympialaisissa) jaetaan mitaleja niin, että noin puolet saa mitalin, ja mitalien määrien suhde on $1 : 2 : 3$. Täten kultaa saavien kilpailijoiden osuus on $\frac{1}{12}$ kaikista kilpailijoista ja vähintään hopeaa saavia on yksi neljäsosa.

[100]En suhtautunut kisakoodaukseen aivan yhtä innokkaasti kuin matematiikkakilpailuihin, joten menestyminen tuli yllätyksenä.

Pohjoismainen meni edellistä vuotta mukaillen kehnosti.

Vuoden 2018 IMO järjestettiin Romaniassa. Matka oli jälleen kerran mahtava. Matkustin Tanskaan jo viikkoa ennen varsinaista harjoitusleiriä ja osallistuin epäviralliselle leirille, jossa harjoittelin yhdessä muiden paikalle päässeiden pohjoismaalaisten kanssa. Kaksi viikkoa intensiivistä mutta miellyttävää leireilyä ennen olympialaisia sopi minulle hyvin. Leireiltä löytyi pöytäjalkapallopöydät, jotka auttoivat rentoutumaan harjoittelun lomassa.

Oma kilpailuni meni hyvin, mutta kuten edellisenäkin vuonna tein kahden pisteen arvoisen hutiloinnin ensimmäisessä tehtävässä, minkä seuraksena menetin tällä kertaa hopean. En kuitenkaan ottanut tappiota niin raskaasti tällä kertaa, koska sain kuitenkin mitalin. Lisäksi olin alkanut näkemään, että kilpailuista saa muutakin kuin mainetta ja kunniaa, joten en pitänyt IMOa enää kysymyksenä elämästä ja kuolemasta.

Viimeisenä kilpailuvuotenani en keskittynyt enää niin pääasiallisesti kilpailemiseen, vaan tein ensimmäisen kosketukseni ”oikeaan” matematiikkaan. Löysin ongelman,[101] joka kiinnosti minua valtavasti ja jonka parissa vietin paljon aikaa. Osallistuin kuitenkin kilpailuhin normaalisti ja välillä harjoittelin kilpailumatematiikkaa, koska tavoittelin viimeisestä IMOstani hopeaa.

Pietarin Baltian tie oli varsin mukava kilpailumatka. Kiertelimme paljon kaupungilla, ja kauniita maisemia ja rakennuksia oli kaikkialla. Erityisesti kirkot olivat vertaansa vailla. Kilpailu itsessään meni mielestäni mukiinmenevästi, vaikkakaan Suomen sijoitus ei ollut kummoinen.

Viimeisessä MAOLin loppukilpailussani osallistuin matematiikkaan, tietotekniikkaan ja fysiikkaan. Jotkin asiat eivät muutu: edelleen muut ihmiset näyttivät pelottavilta ja valmiilta voittamaan minut. Matematiikassa suoritukseni ei ollut parasta tasoani, mutta voitin onneksi kuitenkin kilpailun. Datatähdessä pääsin kolmannelle sijalle, ja fysiikassa olin yllättäen viides.

Toinen asia, mikä ei kohdallani muuttunut, oli Pohjoismaisessa kilpailussa kehnosti suoriutuminen. Kolmas muuttumaton asia: IMO-matka oli mahtava. Iso-Britannian vuoden 2019 IMOssa oli hauskaa, kuten aina muutenkin muiden matematiikkavalmennuksessa olevien kanssa. Lisäksi pärjäsin oikein hyvin, ja sain tavoittelemani hopean.

21.2 Miksi juuri minä?

Olen menestynyt lukiolaisten tiedekilpailuissa mainiosti.[102] Minun näkökulmastani tämä tuntuu hassulta: neljä vuotta sitten olin verrattain tavallinen kahdeksannetta

[101] Olkoon P kokonaislukukertoiminen polynomi. Sanotaan, että alkuluku p on P:n alkutekijä, jos p jakaa jonkin luvun muotoa $P(n)$, missä n on kokonaisluku. Mitä voidaan sanoa polynomien alkutekijöistä? Ongelman pintaa on raapaistu Lukuteorian lisätehtävät -luvun toisen tehtävän kommentissa.

[102] Suhteellinen sijoitukseni vuoden 2019 IMOssa oli paras Suomen IMOon osallistumisen historiassa.

luokkaa käyvä poika, ja yhtäkkiä olinkin yksi Suomen parhaista lukiolaisista matematiikassa. En koe, että olisin tehnyt mitään, mihin viiden miljoonan väestöstä kukaan muu ei pystyisi. Miksi siis juuri minä olen pärjännyt näin hyvin muihin verrattuna?

Jos minulta olisi neljä vuotta sitten kysytty, mikä on tärkeintä huipulle pääsemisessä, olisin ehdottomasti maininnut luonnonlahjakkuuden. Olen kuitenkin alkanut kyseenalaistamaan tätä ajatusta (vaikkakin uskon kyllä, että joillakin on hieman parempi mutututuntuma vaikkapa matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen kuin joillain toisilla). Koen, että ennen kaikkea tärkeintä on puhdas ja rehellinen kiinnostus sitä kohtaan, mitä tekee.[103]

On hyvin vaikeaa haluta jotakin todella paljon. Moni varmaankin vastaisi myöntävästi, jos heiltä kysyttäisiin ”Haluaisitko olla jonkin lajin olympiakultamitalisti?”, mutta tämä ei tarkoita, että he todella haluaisivat sitä. Jos edes promillea Suomen väestöstä kiinnostaisi todella paljon olla Suomen paras matematiikassa, olisi kilpailu paljon kovempaa. Sen pohjalta, mitä olen nähnyt muiden ihmisten suhtautumisesta matematiikkaan, olen sitä mieltä, että minut erottaa muista kiinnostuksen määrä: minä todella haluan oppia matematiikkaa. Lisäksi kilpailuja ajatellen minun kilpailuhenkisestä luonteestani ei varsinaisesti ole haittaa: minä myös todella halusin olla paras.

Pelkkä kiinnostus ei varmasti riitä huipulle pääsemisessä, koska monessa lajissa huipulle tähtää useampi henkilö, jotka kaikki haluavat huipulle todella paljon. Esimerkiksi maailman parhaista tennispelaajista varmasti kaikilla tai melkein kaikilla on motivaatio aivan huipussaan, mutta jotkut heistä ovat silti parempia kuin toiset. Tästä huolimatta kiinnostus on mielestäni Suomen kilpailumatematiikkapiirejä ajatellen tärkein mittari.

Jos oletetaan, että syynä menestykseeni on kiinnostuksen määrä, niin miksi minua sitten kiinnostaa enemmän kuin muita? Pystyn tietysti puhumaan vain omista kokemuksistani ja siitä, minkä koen vaikuttaneeni kiinnostukseeni ja mikä mielestäni erottaa minut muista.

Tuttavani on kuvaillut minua sanalla ”worrywart”, joka tarkoittaa karkeasti henkilöä, joka tuppaa murehtimaan erilaisia asioita. Jo pienestä pitäen minulla on ollut tämä luonteenpiirre, ja, ehkä yllättäen, se on ajanut minua eteenpäin. Ajattelin, että jokaisella luokalla on oma matikkaneronsa, enkä kokenut olevani mitenkään erityinen. Kuitenkin aina ala- ja yläkoulussa kuullessani kysymyksen ”mitä haluatte olla isona?” vastasin haluavani olla matemaatikko. Yhdistelmä ”matematiikassa pärjäävät vain ne, jotka ovat luonnostaan huippuja”[104] ja ”haluan olla isona matemaatikko” selvästi vaati, että minä olisin luonnostaan hyvä matematiikassa. Minusta ei tuntunut tältä, ja kuvittelin, että isona joko pääsisin matemaatikoksi tai jäisin työttömäksi, kerjäisin kadulla rahaa ja näkisin nälkää.[105]

Kilpailu-urani alkaessa kahdeksannella luokalla aloin huomaamaan, että saatan

[103]Kiinnostus tietysti vaikuttaa harjoittelun määrään.

[104]Pienenä ajattelin, että tiettyyn ammattiin päästäkseen siinä täytyy olla (luonnostaan) erittäin lahjakas. Kuten jo mainitsin, en ole tästä enää samaa mieltä.

[105]Nälkäkuolema voi kuulostaa tässä vitsiltä, mutta minulla oli oikeasti aika lailla tällainen ajatusmaailma. Tietenkään en aktiivisesti pelännyt nälkään nääntymistä, mutta ajatus oli mielessäni.

olla kansallisella tasolla kilpailukykyinen. Huomasin tämän tutkiessani peruskoulun matematiikkakilpailun tuloksia: vaikutti siltä, että voisin ihan hyvin saada samanlaisia tuloksia kuin Suomen parhaat. Aluksi olin hieman epäuskoinen ja ajattelin vain olevani ylimielinen. Myöhemmin kilpailuissa osoittautui, että ajatukseni olivat realistisia.

Ajattelin, että tämä ei kuitenkaan riitä: lukiokilpailujen tehtävät ovat paljon vaativampia kuin peruskoulun kisan tehtävät, ja jos en halua kuolla nälkään, niin minun tulee pärjätä vielä paremmin. Tämä tilanne toistui moneen kertaan: ”pärjäsin ihan hyvin edellisessä kilpailussa, mutta jos oikeasti haluan olla riittävän hyvä tehdäkseni matematiikkaa työkseni, niin minun pitää tulla paremmaksi, tai muuten jään työttömäksi ja kuolen nälkään.” En tiedä, onko ajatusmaailmani vieläkään muuttunut tästä, vaikkakin alan ehkä pikkuhiljaa vakuuttua siitä, että voin tehdä jotain matematiikkaan liittyvää työkseni.

Edelliset kappaleet luovat melko synkän kuvan; ikään kuin tekisin matematiikkaa vain, jotten kuolisi nälkään. Ensinnäkin ymmärsin kyllä, että ainakaan peruskoulussa tai lukiossakaan kukaan ei kuole nälkään, vaan yksi mahdollisuus on vain käydä koulua. En siis olisi aivan heti asumassa kadulla, vaikka epäonnistuisin jossain kilpailussa. Toiseksi minä tähtäsin matemaatikoksi tulemiseen ihan hyvästä syystä: minä tykkäsin matematiikasta.

Konkreettinen esimerkki ajatusmaailmastani liittyy lukion toisena vuonna tekemääni tutkielmaan.[106] Minulle oli ollut jo jonkin aikaa selvää, että haluaisin tehdä työni teoreettisesta matematiikasta. Minulla oli kuitenkin jonkinlaiset standardit työni laadun suhteen: en haluaisi tehdä mitään tylsää työtä, vaan siinä tulisi olla jotain uutta ja mielenkiintoista. Tästä syystä aloitin työn aiheen pohtimisen ja projektin työstämisen suhteellisen aikaisin. Osittain standardieni, työn vaativuuden ja kiinnostukseni takia projektiin kului todella paljon aikaa. Lopputuloksena työ menestyi loistavasti tutkielmakilpailuissa. Tämä on malliesimerkki negatiivisen ja positiivisen motivaattorin yhdistelmän tehokkuudesta minun kohdallani.

Ymmärsin vasta lukiossa, että työpaikan saaminen ei välttämättä vaadi huippuosaamista jollain alalla ja että muut eivät oikeastaan ajattele samalla tavalla kuin minä. Muita ihmisiä ei pelottanut nälkään kuoleminen, ja monet eivät halunneet mitään yhtä paljon kuin minä matematiikan osaamista.

Osittain ajatusmaailmaani sekoittivat tunnetut lausahdukset ”verta, hikeä ja kyyneliä” ja ”tuhansia tunteja töitä”. Kun aloitin matematiikkakilpailujen tekemisen, minusta ei tuntunut, että tekisin työtä – työhän on määritelmän mukaan (silloisen minäni mielestä) tylsää ja ikävää. Ajattelin, että muut tekivät paljon enemmän työtä, ja minä tein tätä vain ohimennen huvikseni. Jälkeenpäin olen todennut, että lainaukset antavat virheellisen kuvan harjoittelusta. On totta, että olen viettänyt tuhansia tunteja matematiikan parissa, mutta en missään nimessä käyttäisi sanaa ”työ” aktiviteettien kuvailemiseen. Minä todellakin nautin siitä, mitä teen! Ja vaikka joskus tulee vaikeita hetkiä ja turhautumista, niin ”työni” ei silti tunnu vastenmieliseltä.

[106] Tutkielmakilpailun sivut: https://tukoke.tek.fi/.

Suosittelen vahvasti lukemaan aiheeseen liittyvän tekstin täältä:
http://www.paulgraham.com/hs.html.

21.3 Mistä kehittyminen koostuu?

Sain hopeaa vuoden 2019 Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa. Miksen kyennyt samaan suoritukseen jo vuoden 2017 olympialaisissa? Lyhyt ja sisällötön vastaus: olin kehittynyt näiden kahden vuoden aikana. Oleellista on tietysti se, miten olin kehittynyt. Mitä sellaisia asioita vuoden 2019 Olli osasi, joita vuoden 2017 Olli ei osannut?

Yksi tärkeimmistä taidoista, mielestäni jopa tärkein, on kyky keksiä monenlaisia eri ideoita. Vuonna 2017 ollessani IMOssa sain ratkaistua tehtävät 1 ja 4,[107] mutta tämäkään ei tullut helposti: tehtävää 4 ratkoessani juutuin pitkäksi aikaa, koska en keksinyt juurikaan ideoita, joilla tehtävän saisi ratkaistua. Tehtävään 2 minulla oli yksi järkevä idea, josta sainkin pisteitä, mutta tie päättyi tähän. Tehtävään 5 minulla ei ollut mitään ideoita.

Vuonna 2019 tehtävän 2 ratkaisemiseen minulta kului pari tuntia. Tämän parin tunnin aikana keksin ja kokeilin lukuisia eri ideoita tehtävän ratkaisemiseksi, ja lopulta löysin jotain, jolla tehtävä ratkesi. Idea ei ollut niin vaikea, etteikö vuoden 2017 Olli olisi mitenkään voinut keksiä sitä, mutta vuoden 2017 Olli olisi varmaankin jumittunut yhteen toimimattomaan ideaan, eikä siksi olisi saanut tehtävää ratkaistua.

Toinen tärkeä taito, joka liittyy edelliseen kohtaan, on kyky arvioida idean toimivuutta. Vuonna 2017 yritin pitkän aikaa ratkaista tehtävää 2 lähestymistavalla, joka ei yksinkertaisesti toiminut. Vuonna 2018 minulla oli tehtävään 2 toimiva idea, mutten syystä tai toisesta uskonut siihen riittävästi ja alkanut oikeasti ratkomaan tehtävää. Vuonna 2019 minulla oli tehtävään 5 idea, jonka tiesin toimivan. Lähestymistapa vaati paljon laskemista ja uskoa siihen, että idea toimii, mutta sain vietyä ratkaisun loppuun.

Kolmas tekijä on nopeus. Vuonna 2017 minulta kului yli puolet toisesta kilpailupäivästä tehtävän 4 ratkaisemiseen, kun taas vuonna 2019 sain tehtävän 1 tehtyä ensimmäiseen kymmeneen minuuttiin. (Olin melko nopea muihinkin kilpailijoihin verrattuna.) Olenkin kuullut sanottavan, että parhaat IMO-kilpailijat käyttävät viisi minuuttia päivän ensimmäiseen tehtävään, vartin toiseen tehtävään ja loppuajan viimeiseen tehtävään. Tässä on ehkä hieman liioittelua, muttei niin paljon kuin voisi kuvitella.

Nopeuteen vaikuttaa moni tekijä, ja nopeus onkin mielestäni yksi parhaista tavoista arvioida nopeasti (heh) kilpailijan taitotasoa.

- Nopeudessa näkyy rutiini ja kokemus. Kokenut kilpailija voi nähdä tehtävästä heti, miten se kuuluu ratkaista, koska hän on nähnyt vastaavanlaisen tehtävän

[107] Lukijan ei tarvitse tietää tekstiä lukiessaan, mistä tehtävistä tarkalleen on kyse. Tehtävien numeroiden on tarkoitus kertoa, kuinka mones (ja kuinka vaikea) tehtävä kyseessä on. Tehtävät 1 ja 4 ovat kahden kilpailupäivän ensimmäiset ja helpoimmat tehtävät, tehtävät 2 ja 5 ovat keskivaikeita ja tehtävät 3 ja 6 ovat vaikeita.

aiemmin (tai koska hän on kokemuksen kautta oppinut, miten erinäköisiä tehtäviä kannattaa lähestyä).

- Nopeudessa näkyy tieto. Kokenut kilpailija voi tunnistaa tehtävästä, että tämähän liittyy tunnettuun ongelmaan tai että tehtävä koskee asiaa, jonka tiedetään olevan vaikea. Tästä saa vinkkiä siihen, mistä ratkaisua kannattaa etsiä: ongelmassa tulee olla jokin piirre, joka on erilainen kuin tunnetussa vaikeassa ongelmassa, ja tätä kautta ongelman tulee ratketa.[108]
- Nopeudessa näkyy intuitio. Kokenut kilpailija voi keksiä nopeasti parikin ideaa siitä, miten ongelmaa voisi lähestyä, ja osaa arvioida, mikä lähestymistavoista toimii.

Vielä yksi tekijä on itseluottamus. Aloittaessani kilpailujen parissa ajattelin liian usein, etten voisi saada jotain tehtävää ratkaistua, koska en tiedä riittävästi matematiikasta. Hämmästyin toistuvasti huomatessani, että minähän tiesin kaikki tarvittavat asiat, mutta vika olikin ongelmanratkaisutaidoissani. Itseluottamus on tärkeää: monesti tehtäviä ratkoessa tilanne voi hetkellisesti näyttää pahalta (erityisesti laskennallisissa tehtävissä), ja vaatii itseluottamusta olla välittämättä tästä ja viedä ratkaisu maaliin.

Loppukommentti: Yksi tapa kuvailla kehittynyttä ongelmanratkaisutaitoani on, että osaan katsoa ongelmaa kauempaa, tunnustella sitä ja miettiä rauhassa lähestymistapaa. Aiemmin ehkäpä vain kokeilin sokeasti jotain satunnaista, ja jos idea ei toiminut, niin en miettinyt sen tarkemmin syytä idean toimimattomuudelle, vaan yritin vain jotain muuta. Kriittistä on ”kovien” taktiikoiden lisäksi soveltaa ”pehmeitä” ongelmanratkaisumentelmiä: lue https://usamo.wordpress.com/2019/05/03/hard-and-soft-techniques/.

21.4 Kilpailumatematiikan hyöty

”Kilpailumatematiikasta ei ole hyötyä.”

Olen kuullut monenkin ihmisen sanovan näin. Aloittaessani kilpailumatematiikan parissa ajattelin ”ei se mitään, tämä on hauskaa”. Nykyään ajattelen ”kylläpäs on, ja tämä on lisäksi hauskaa”.

Vähiten yllättävä hyöty kilpailumatematiikasta on se, että olen oppinut matematiikkaa. Vastaukseksi tähän olen kuullut ”en näe, miten klassisen geometrian oppiminen olisi hyödyllistä”.[109] Toki olen oppinut klassista geometriaa, mutta kilpailumatematiikassa on muutakin. Lempiosa-alueeni matematiikasta on lukuteoria, joten voisin nähdä itseni lukuteoreetikkona tulevaisuudessa. En siis sanoisi kilpailujen kautta oppimani lukuteorian olevan hyödytöntä.

[108] Tai vielä yleisemmin, tehtävän jokin osa tuntuu vaikealta (ja voidaan esittää perusteluja sille, miksi se on vaikea), joten tähän osaan liittyen pitää keksiä jotain ovelaa.

[109] Olen kuullut näitä kilpailumatematiikan vastaisia kommentteja harvakseltaan, mutta olen silti hieman hämilläni siitä, miksi jollakulla olisi jotakin kilpailumatematiikkaa vastaan.

Toisaalta kilpailuissa ei tarvitse kovin laajasti lukuteoriaa: lukuteoriaa on tutkittu pari vuosituhatta, ja kilpailuissa tarvittavan lukuteorian pystyy tiivistämään muutamaan kymmeneen sivuun. Kilpailumatematiikasta ei siis opi kovin syvällisesti teoriaa, eikä se ole kilpailujen tarkoituskaan (pikemminkin päinvastoin). Mielestäni kilpailumatematiikan paras anti on kehittyneet ongelmanratkaisutaidot.

Tilanne on siis tämä: Matematiikassa on (joltain osin) kyse ongelmien ratkaisemisesta. Tavoitteenani on ryhtyä isona matemaatikoksi. Auttaisi, jos kehittäisin ongelmanratkaisutaitojani. Kilpailumatematiikassa keskitytään ongelmanratkaisuun.[110] Minulle sanotaan, ettei kilpailumatematiikasta ole hyötyä.

Tuntuu naurettavalta, että joskus uskoin, ettei kilpailumatematiikasta olisi hyötyä.

Matematiikan ja ongelmanratkaisutaitojen harjoittelun lisäksi kilpailumatematiikka on harrastus. Pidin matematiikasta ja sain ympäristön, joka mahdollisti ja motivoi matematiikan harjoittelemisen. Tapasin muita kiinnostuneita, joilta opin ja joille opetin. Verkostoiduin ja tätä kautta hyödyin muutenkin kuin matemaattisesti.

Yksi esimerkki näistä hyödyistä on tutustuminen Päivölään, jossa myöhemmin suoritin lukion. Toinen esimerkki: sain kuulla tutkielmakilpailuista ja pääsin ympäristöön, joka mahdollisti ja motivoi matematiikan tutkimuksen tekemisen. Pääsin lähemmäksi haavettani matemaatikon urasta.

Edellä mainitut kilpailumatematiikan hyödyt koskevat enemmän tai vähemmän kaikki sen harrastajia: vaikkei tavoitteena olisikaan tutkijan ura, on ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen silti hyvästä, ja harrastuksesta saa silti tuttuja.

Yksi henkilökohtaisempi ja vähemmän ilmeinen hyöty kilpailumatematiikasta minulle on motivaatio työntekoon. Pienenä minulle opetettiin, että koulut tulee käydä hyvin, koska hyvä koulutus johtaa hyvään elämään. Minä keskityin kyllä koulunkäyntiini, mutta kasvaessani takaraivossani alkoi itämään ajatus ”milloin näen työni hedelmät?” Jälkiviisaana voin todeta, ettei elämääni ole paljoakaan vaikuttanut se, että sain seitsemännellä luokalla puukäsitöistä arvosanan 8 tehtyäni ylitöitä koulun jälkeen.

Kilpailumatematiikan kautta olen päässyt tilanteeseen, jossa työntekoni laadulla ja määrällä on suora korrelaatio pärjäämiseeni ja saamiini palkkioihin. Näin oli kilpailuihin harjoitellessa ja tutkimuskilpailun projektia tehdessä, ja niin on nyt myös opiskellessani yliopistossa. Hyödyn työnteostani, ja työnteko tuntuu mielekkäältä, koska hyödyn siitä (ja tietysti koska työt koskevat matematiikkaa).

”Kilpailumatematiikasta ei ole hyötyä.” Entä jos olisin vastannut ”olet oikeassa, lopetan kilpailumatematiikan”? Mitä olisin tehnyt ylimääräisellä ajallani? Harrastanut jotain ”hyödyllistä”? Kuten mitä?

Yksi minulle kohdennettu kommentti kuului ”opiskele oikeaa matematiikkaa” [viitaten yliopistoissa opiskeltavaan matematiikkaan]. Tämä ei oikeastaan ole kovin huono idea. Olen toisaalta saanut kilpailumatematiikan kautta matemaattista kypsyyttä ja ongelmanratkaisutaitoja, jotka puolestaan auttavat merkittävästi yliopisto-opinnoissa. Siis myös tästä näkökulmasta kilpilumatematiikan harjoittelu oli varsin hyvä valinta.

[110] Vielä vahvemmin: IMO-kilpailijat ovat maailman parhaita ongelmanratkaisijoita ikäisistään.

Toisenlaisesta aiheeseen liittyvästä näkökulmasta voi lukea täältä: https://usamo.wordpress.com/2018/01/05/lessons-from-math-olympiads/. Myös seuraavien linkkien takaa löytyy aihetta sivuavia ajatuksia: https://usamo.wordpress.com/2016/08/13/against-the-research-vs-olympiads-mantra/, https://web.evanchen.cc/FAQs/raqs.html.

22 Lisämateriaaleja

Tähän lukuun on koottu lisälukemista eri osa-alueista.

Yleistä

Sivusto https://artofproblemsolving.com/ (AOPS) on suurin ja suosituin kilpailumatematiikkasivusto. Harjoittelussa auttaa sivuston kilpailutehtäväkokoelma, jossa on lukematon määrä erilaisia kilpailutehtäviä: https://artofproblemsolving.com/community/c13_contests. Lisäksi AOPSista löytyy joitain hyviä materiaaleja, joista osa on mainittu alla.

Materiaalien lukemisen lisäksi lukijan suositellaan ratkovan tehtäviä. Hyviä tehtäviä harjoitteluun ovat esimerkiksi MAOLin kilpailujen, Pohjoismaisen matematiikkakilpailun, Baltian tien ja IMO-lyhytlistojen tehtävät. Lisäksi eri vuosien IMO-tehtävät ovat parhaasta (ja vaikeimmasta) päästä. Tässä kirjassa ei ole käytetty tuoreita IMO-tehtäviä esimerkkitehtävinä, vaan ne on tarkoituksella jätetty harjoitustarkoituksiin. MAOLin, Pohjoismaisen kilpailun ja Baltian tien tehtäviä löytää parhaiten valmennuksen sivuilta (https://matematiikkakilpailut.fi/), ja IMO-lyhytlistat löytyvät ainakin AOPSista. Lisäksi luetelluissa materiaaleissa on teorian lisäksi paljon harjoitustehtäviä, jotka ovat hyviä tietyn aihealueen harjoitteluun.

Yleisesti ottaen harjoitteluun riittää vain ottaa jokin kilpailu AOPSista ja alkaa tekemään sen tehtäviä. Esimerkiksi eri maiden kansalliset kilpailut ovat tähän loistavia, ja vaikeustasoa voi tarvittaessa muuttaa valitsemalla IMOssa paremmin tai huonommin pärjäävän maan. Ei siis kannata lähteä yliajattelemaan sitä, käyttääkö harjoitteluun juuri parhaita mahdollisia tehtäviä, vaan kannattaa vain tehdä tehtäviä, jotka ovat sopivaa vaikeustasoa.

Harjoitteluun liittyen suosittelen vahvasti lukemaan tekstin täältä: https://usamo.wordpress.com/2019/01/31/math-contest-platitudes-v3/.

Alla on eritelty joitain materiaaleja aihealueittain. Lista ei missään nimessä ole kaikenkattava, ja lisälukemista löytää AOPSista ja tietysti muualta netistä.

Geometria

Ylivoimaisesti paras geometrian materiaali on Evan Chenin kirjoittama kirja Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (EGMO). Tämä on myös ylipäätään paras kilpailumatematiikkaan liittyvä materiaali, jonka olen löytänyt.

Kombinatoriikka

Hyvä materiaali löytyy täältä postauksista 1, 11 ja 49: https://artofproblemsolving.com/community/c365902h601134_olympiad_combinatorics_book. Materiaalit muodostavat siis yhdessä kokonaisen kirjan. (Ilmeisesti materiaalin lukemista varten täytyy kirjautua sisään AOPSiin.)

Algebra

Hyvä funktionaaliyhtälöihin liittyvä materiaali löytyy täältä postauksesta numero 29: https://artofproblemsolving.com/community/c365902h1592427_my_fe_handout. (Myös tämän lukemiseksi täytyy kirjautua sisään.)

Paul Vaderlindin kirjoittama kattava esitys klassisista epäyhtälöistä: https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/vaderlind.pdf

Lukuteoria

Lukuteorian suhteen kirjassa ei ole merkittäviä puutteita. Lukijan suositellaan siis lähinnä tekevän tehtäviä lukuteoriaan liittyen.

Tämän kirjan lukuteoriamateriaali käsittelee paljolti samoja aiheita kuin Esa Vesalaisen lukuteoriamateriaali. Voi silti olla hyödyllistä lukea Vesalaisen tekstiä: https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/laajalukuteoriamoniste.pdf.[111]

Lisäksi mainitaan pari juttua, jotka ovat riittävän tärkeitä, että niistä on kiva olla kuullut, mutta joita ei ole aivan välttämätöntä osata.[112]

Yksi kohtalaisen tunnetuksi muodostunut tulos on Lifting the Exponent (LTE): https://artofproblemsolving.com/community/c6t108f6h393335_lifting_the_exponent_lemma_containing_pdf_file.

Täällä on Matti Lehtisen teksti Pellin yhtälöistä: https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/pell.pdf.

Muuta

EGMOn yhteydessä mainittiin Evan Chen. Nykyään Chen toimii Yhdysvaltojen IMO-joukkueen valmennus- ja valintatoiminnassa. Hänellä on paljon laadukasta materiaalia:

- Olympiamateriaaleja sisältävät sivut: https://web.evanchen.cc/olympiad.html
- Blogi: https://usamo.wordpress.com/
- "Napkin". Materiaalin sisältö on kuvattu myös linkin sivustolla, mutta tiivistetysti materiaalissa on esitelty "korkeamman" matematiikan eri osa-alueita. Sisältö ei siis varsinaisesti ole kilpailumatematiikkaa, mutta on mahdollisesti mielenkiintoista luettavaa kuitenkin. https://web.evanchen.cc/napkin.html

Suosittelen vahvasti Chenin blogipostauksien lukemista: niissä on erinomaisia ajatuksia ongelmanratkaisuun ja yleisesti kilpailumatematiikkaan liittyen. Ylhäällä on poimittu jo yksi harjoitteluun liittyvä kirjoitus, ja tässä on kaksi lisäpoimintaa:

- https://usamo.wordpress.com/2017/03/06/on-reading-solutions/
- https://usamo.wordpress.com/2019/10/26/understanding-with-system-1/

[111] Vesalainen on lisäksi käsitellyt joitain aiheita, jotka olen itse sivuuttanut (esimerkiksi täydelliset luvut, Wilsonin lause, neliöiden summat, Gaussin kokonaisluvut ja Pythagoraan kolmikot).

[112] Huhut kertovat, että IMOssa tehtävien ei haluta ratkeavan Pellin yhtälöillä, koska kilpailijoiden oletetaan osaavan niihin liittyvän teorian perinpohjaisesti. Tämän vuoksi Pellin yhtälöä ei tule vastaan kovin usein. LTE on mielestäni varsin kätevä työkalu, jota voi myös soveltaa kohtalaisen usein.

23 Kiitokset

Valmennustapahtumat ja niissä järjestettävän opetuksen tarjoaa Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaosto. Kiitokset tästä kuuluvat koko valmennusjaostolle ja heidän panokselleen valmennustoiminnan mahdollistamiseksi sekä Opetushallitukselle toiminnan tukemisesta taloudellisesti. Kirjoittaja on kiitollinen Opetushallitukselle myös tämän kirjan kirjoittamisen tukemisesta.

En tietenkään olisi voinut kirjoittaa kirjaa, ellen olisi oppinut kilpailumatematiikkaa. Henkilökohtaiset kiitokset kuuluvat kaikille valmentajille, joiden opetuksessa olen vuosien mittaan ollut. Erityisesti haluan kiittää Otte Heinävaaraa, joka toimi minulle esikuvana ja jolta opin valtavasti ongelmanratkaisua.

Inspiraation lähteenä kirjalle toimi kisakoodauksen puolella vaikuttava Antti Laaksonen ja hänen materiaalinsa Kisakoodarin käsikirja. Kisakoodarin käsikirja tietysti auttoi minua harjoitellessani ohjelmointikilpailuihin, mutta se toimi myös esimerkkinä tälle kirjalle.

Monet valmennuksessa tutustumiini henkilöistä ovat tulleet minulle hyviksi ystäviksi. He ovat omalta osin motivoineet minua harjoittelemaan ja kilpailu-urani päätyttyä ryhtymään valmentajaksi. Lisäksi olen käynyt hyödyllisiä keskusteluja heidän kanssaan ja saanut opettamista ja kirjantekoa koskevaa palautetta.

Viimeisenä haluan kiittää Akseli Jussinmäkeä, johon myös tutustuin valmennuksen kautta. Hänen valtavan työpanoksensa, tuhansien kommenttien ja huolellisten korjausten myötä kirjasta kehittyi lukukelpoinen versio.