

KESÄN VALMENNUSTEHTÄVÄSARJA

Ratkaisuita pyydetään lähettämään syyskuun alkuun mennessä postitse osoitteeseen

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68
00014 Helsingin yliopisto

tai sähköpostitse osoitteeseen esavesalainen@gmail.com, johon voi myös lähettää kysymyksiä tehtävistä.

Hyvää kesää ja työn iloa!

Helpompia tehtäviä

1. Olkoot yhtälön $x^2 + (p^2 + 1)x + p = 2$ ratkaisut x_1 ja x_2 , ja olkoot ne nollasta poikkeavia sekä erisuuria. Määritä kaikki parametrin p arvot, joilla

$$\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2}.$$

2. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y , joilla

$$(x^2 + y)(y^2 + x)$$

on jonkin alkuluvun viides potenssi.

3. Etsi kaikki reaaliluvut a ja b , joilla yhtälöparilla

$$\begin{cases} x + a = y + b \\ x^2 - a = 2y \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu (x_0, y_0) , ja tämä ratkaisu toteuttaa ehdon $x_0^{10} + y_0^{10} = 1025$.

4. Kolmiossa ABC , jossa $AB > BC$, piste K on sivulla AB niin, että $AK = BC + BK$. Suora ℓ , joka kulkee pisteen K kautta on kohtisuorassa janaan AB . Osoita, että suora ℓ , sivun AC puolittaja ja kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaavat samassa pisteessä.

5. Olkoot a , b , c ja d reaalilukuja. Osoita, että pienin luvuista

$$a - b^2, \quad b - c^2, \quad c - d^2 \quad \text{ja} \quad d - a^2$$

on enintään $1/4$.

6. Olkoot a ja b reaalilukuja. Jos $a + b = 4$ ja $a^2 + b^2 = 14$, niin mitä on $a^3 + b^3$?

7. Olkoon $ABCDE$ säännöllinen viisikulmio, ja leikatkaa suorat AB ja DE pisteessä F . Selvitä kolmion $\triangle BEF$ kulmat.

8. Kolmion ympäröity ympyrä peilataan yhden kolmion sivun suhteen. Osoita, että peilikuvaympyrä kulkee kolmion korkeusjanojen leikkauspisteen kautta.

9. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Laske

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin kx \cos(n-k)x.$$

10. Olkoot α ja β reaalilukuja väliltä $]0, \pi/2[$, ja oletetaan, että

$$\cos^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

Osoita, että $\alpha + \beta = \pi/2$.

11. Kolmion sivujen pituudet ovat a , b ja c . Selvitä, milloin myös a^2 , b^2 ja c^2 ovat jonkin kolmion sivujen pituudet.

Vaikeampia tehtäviä

12. Määritellään positiiviselle kokonaisluvulle n luku a_n seuraavasti: $a_n = 0$, jos luvulla n on parillinen määrä lukua 2007 suurempia tekijöitä ja $a_n = 1$, jos luvulla n on pariton määrä lukua 2007 suurempia tekijöitä. Onko luku $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ rationaalinen?

13. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joilla pätee, että jos $a, b, c \geq 0$ ja $a + b + c = 3$, niin $abc(a^n + b^n + c^n) \leq 3$.

14. Olkoon $a_1 > \frac{1}{12}$ ja $a_{n+1} = \sqrt{(n+2)a_n + 1}$, kun $n \geq 1$. Osoita, että

1. $a_n > n - \frac{2}{n}$,
2. jono $b_n = 2^n \left(\frac{a_n}{n} - 1 \right)$ suppenee ($n = 1, 2, \dots$).

15. Ratkaise yhtälöryhmä kokonaislukujen joukossa:

$$\begin{cases} 3a^4 + 2b^3 = c^2, \\ 3a^6 + b^5 = d^2. \end{cases}$$

16. Olkoot a ja b erisuuria positiivisia reaalilukuja. Etsi kaikki positiivisten reaalilukujen parit (x, y) , jotka ratkaisevat yhtälöparin

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = ax - by, \\ x^2 - y^2 = \sqrt[3]{a^2 - b^2}. \end{cases}$$