Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, tammikuu 2021

Uutta: mukana on monivalintatehtäviä, joihin ei pyydetä perusteluja, vaan niihin vastaamiseen riittää kirjainrivi.

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella – poikkeuksena uudet monivalintatehtävät.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 26.2.2021 mennessä sähköpostitse. Vastausosoitteet kussakin osiossa.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Monivalintatehtäviä

Lähetä vastauksesi osoitteessa `https://tehtavat.matematiikkakilpailut.fi/2021-01/` tai jos se ei jostain syystä onnistu, sähköpostilla `jks@iki.fi`. Muista kertoa nimesi.

1. Fibonaccin lukujono $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ alkaa kahdella ykkösellä ja aina seuraava termi on kahden edellisen termin summa. Mikä seuraavista numeroista ilmestyy viimeisenä ykkösten paikalla Fibonaccin lukujonossa?

(A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 9

2. Kahden positiivisen reaaliluvun summa on viisi kertaa niiden erotus. Mikä on suuremman luvun suhde pienempään?

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{9}{5}$ (D) 2 (E) $\frac{5}{2}$

3. Heksadesimaaleissa (16-kantajärjestelmässä) luvut kirjoitetaan käyttämällä numeroita nollasta yhdeksään sekä kirjaimia A:sta F:ään (edustamassa numeroita kymmenestä viiteentoista). Ensimmäisen tuhannen positiivisen kokonaisluvun joukossa on n heksadesimaaliesitystä, joissa on vain numeroita. Mikä on luvun n numeroiden summa (kymmenkantajärjestelmässä)?

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

4. Jos $x \notin \{0, 4\}$ ja $y \notin \{0, 6\}$, niin

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2}$$

on yhtäpitävää sen kanssa, että

(A) $4x + 3y = xy$ (B) $y = \dfrac{4x}{6 - y}$ (C) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2$ (D) $\dfrac{4y}{y - 6} = x$ (E) ei mikään edellämainituista

5. Olkoot x_1 ja x_2 sellaiset luvut, että $x_1 \neq x_2$ ja $3x_i^2 - hx_i = b$, $i = 1, 2$. Silloin $x_1 + x_2$ on yhtä kuin

(A) $-\frac{h}{3}$ (B) $\frac{h}{3}$ (C) $\frac{b}{3}$ (D) $2b$ (E) $-\frac{b}{3}$

6. Kun kerrotaan auki polynomi

$$(1 + 2x - x^2)^4,$$

termin x^7 kerroin on

(A) -8 (B) 12 (C) 6 (D) -12 (E) ei mikään edellämainituista

7. Mikä on jakojäännös, kun $x^{51}+51$ jaetaan $x+1$:llä?

(A) 0 (B) 1 (C) 49 (D) 50 (E) 51

8. Kun nelikulmio $ABCD$ on piirretty ympyrän sisään ja sivua AB jatketaan B:n ohi pisteeseen E siten, että $\angle BAD = 92°$ and $\angle ADC = 68°$, mitä on $\angle EBC$?

(A) $66°$ (B) $68°$ (C) $70°$ (D) $88°$ (E) $92°$

9. Mikä on pienin alkuluku, joka jakaa summan $3^{11}+5^{13}$?

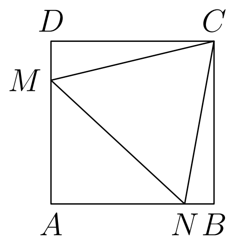
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) $3^{11}+5^{13}$ (E) ei mikään edellämainituista

10. Suorakulmaisen tasakylkisen kolmion sisäsäde on r ja ympäryssäde R. (Ts. kolmion sisään voidaan piirtää r-säteinen ympyrä, joka sivuaa kolmion sivuja, ja kolmion kärkien kautta voidaan piirtää R-säteinen ympyrä.) Suhde R/r on yhtä kuin

(A) $1+\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ (D) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ (E) $2(2-\sqrt{2})$

11. Oheisessa kuvassa $ABCD$ on neliö ja CMN on tasasivuinen kolmio. Jos neliön $ABCD$ ala on yksi neliösenttimetri, niin kolmion CMN ala neliösenttimetreinä on

(A) $2\sqrt{3}-3$ (B) $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (E) $4-2\sqrt{3}$



12. Olkoon

$$T = \frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}.$$

Silloin

(A) $T<1$ (B) $T=1$ (C) $1<T<2$ (D) $T>2$

(E) $T = \dfrac{1}{(3-\sqrt{8})(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}$

Helpompia tehtäviä

Lähetä perustellut ratkaisut osoitteeseen `n.palojarvi@gmail.com`. Muista mainita viestissä nimesi.

13. Kumpi luvuista 2^{2014} ja $3^{303}\cdot 4^{404}\cdot 5^{505}$ on suurempi?

14. Etsi yhtälöparin

$$\begin{cases} x(y-1)+y(x+1) &= 6 \\ (x-1)(y+1) &= 1. \end{cases}$$

kaikki reaalilukuratkaisut.

15. Millä luvun x arvolla tulo

$$(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$$

saa suurimman arvonsa ja mikä tämä arvo on?

16. Etsi kolminumeroinen luku, jonka kaikkien potenssien desimaalikehitelmät päättyvät tähän kolminumeroiseen lukuun.

Seuraavia muutamaa tehtävää varten selvitä itsellesi, mitä on matemaattinen induktio. Mahdollisia lähteitä ovat ainakin:

- https://fi.wikipedia.org/wiki/Matemaattinen_induktio
- https://www.youtube.com/watch?v=QL6LKiYoWXQ
- https://www.youtube.com/watch?v=VSRksdjkDJA
- https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Induction
- https://www.youtube.com/watch?v=dMn5w4_ztSw

17. Todista induktiolla:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

kun n on positiivinen kokonaisluku.

18. Merkintä $n!$ tarkoittaa tuloa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Todista induktiolla:

$$n! > 2^n,$$

kun $n \geq 4$ on kokonaisluku.

19. Todista joko induktiolla tai jollain muulla tavalla:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

kun n on positiivinen kokonaisluku. (Muu tapa voisi olla teleskooppisumma: vaihda jokainen summattava kahden luvun erotukseksi, niin että peräkkäiset luvut kumoavat toisiaan sopivasti.)

20. Todista joko induktiolla tai jollain muulla tavalla (mutta mieluiten ilman derivointia) Bernoullin epäyhtälö:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

kun $x \geq -1$ on reaaliluku ja n on positiivinen kokonaisluku.

21. Piste U on kolmion ABC sivulla BC siten, että AU on kolmion kulmanpuolittaja. Piste O on kolmion ympärysympyrän (eli ympäripiirretyn ympyrän) keskipiste. Osoita, että janan AU keskinormaali, suora AO ja pisteen U kautta kulkeva janan BC normaali leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

22. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

23. Olkoon piste I kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste, piste X ympyrän sivuamispiste janalla BC ja piste Y ympyrän sivuamispiste janalla CA. Olkoon piste P suoran XY ja suoran AI leikkauspiste. Osoita, että $AI \perp BP$.

24. Kolmion ABC kulman A asteluku on $60°$. Piste on O on ympärysympyrän keskipiste ja piste H korkeusjanojen leikkauspiste. Suora OH leikkaa sivut AB ja AC pisteissä X ja Y.

1. Osoita, että kolmion AXY piiri on $AB + AC$.
2. Osoita, että $OH = |AB - AC|$.

25. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Selvitä suurin luvun 3 potenssi, jolla luku $10^k - 1$ on jaollinen.

Vaativampia tehtäviä

Lähetä perustellut ratkaisut osoitteeseen `anne-maria.ernvall-hytonen@helsinki.fi`. Muista mainita viestissä nimesi.

26. Ympyrän kehälle on merkitty tuhat pistettä ja kunkin näistä pisteistä viereen on kirjoitettu jonkin kokonaisluvun neliö. Minkä tahansa viereisen 41 luvun summa on jaollinen luvulla 41^2. Onko aina totta, että kaikki näistä tuhannesta luvusta ovat jaollisia luvulla 41?

27. Olkoot x, y ja z positiivisia lukuja, joilla

$$x + y + z = 1.$$

Osoita, että

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

28. Olkoon p alkuluku. Osoita, että on mahdollista löytää kokonaisluvut x ja y, joilla $x^2 + y^2 + 1$ on jaollinen luvulla p.

29. Olkoon ABC kolmio, jonka kulma C on suora. Konstruoi harpilla ja viivaimella piste N, jolle $\angle CBN = \angle ACN = \angle BAN$.

30. Tasossa on m-kulmio ja n-kulmio, joiden leikkaus on myös monikulmio.

a) Jos sekä m- että n-kulmio ovat konvekseja, mikä on suurin mahdollinen niiden leikkauksen sivujen lukumäärä?

b) Jos m- ja n-kulmioista vain toinen oletetaan konveksiksi, onko a-kohdan tulos voimassa?

31. Olkoot kolmion ABC ympärysympyrän kaarten BC, CA ja AB keskipisteet samassa järjestyksessä A', B' ja C'. Kolmion sivu BC leikkaa janat $C'A'$ ja $A'B'$ pisteissä M ja N; sivu CA janat $A'B'$ ja $B'C'$ pisteissä P ja Q; ja sivu AB janat $B'C'$ ja $C'A'$ pisteissä R ja S. Todista, että $MN = PQ = RS$ jos ja vain jos kolmio ABC on tasasivuinen.

32. Määritellään lukujonot $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ rekursiivisesti:

$$\begin{aligned} &x_0 = 1, \quad x_1 = 4, \quad x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n, \\ &y_0 = 1, \quad y_1 = 2, \quad y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n. \end{aligned}$$

a) Todista, että

$$x_n^2 - 5y_n^2 + 4 = 0$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 0$.

b) Olkoot a ja b kaksi positiivista kokonaislukua, joille $a^2 - 5b^2 + 4 = 0$. Todista, että on olemassa kokonaisluku $k \geq 0$, jolle $a = x_k$ ja $b = y_k$.

❦ ❦ ❦

Määritellään $\sigma(n)$ luvun positiivisten tekijöiden (n mukaanluettuna) summaksi ja $\pi(n)$ alkulukujen $p \leq n$ lukumääräksi. Esimerkiksi $\sigma(6) = 12$ ja $\pi(6) = 3$.

33. Todista, että

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor,$$

missä $\lfloor x \rfloor$ on x:n kokonaisosa.

34. Todista, että kaikille n pätee $\sigma(n) < n \cdot \ln(3n)$.

35. Todista, että kaikille n pätee $n^{\pi(2n) - \pi(n)} < 4^n$.