Harjoitustehtävät, syys–lokakuu 2010. Vaativammat

Aktiivisuus, vastausten määrä ja laatu on yksi olennaisesti huomioon otettavista tekijöistä valittaessa kilpailujoukkueita. Harjoitustehtävien tavoite on tehtävien ratkaisemisen ohella opetella kirjoittamaan ratkaisuja ymmärrettävästi. Kirjoittakaa siis ratkaisunne paperille ja tuokaa ne seuraavaan valmennusviikonloppuun tai lähettäkää ne paperin alalaidassa olevaan osoitteeseen. Sähköinen lähettäminen on mahdollinen (`matti.lehtinen@helsinki.fi`), mutta ei ensisijainen vaihtoehto. Ei haittaa, jos kaikki tehtävät eivät ratkea!

1. Määritä kaikki reaalilukuparit (x, y), joille $x^3 + y^3 = 7$ ja $xy(x + y) = -2$.

2. n:s *kolmioluku* T_n on lukujen 1, 2, ..., n summa. Määritä kaikki kolmiolukujen parit (T_n, T_m), joille $T_n - T_m = 2011$.

3. Määritä toisen asteen polynomi f, jolla on seuraava ominaisuus: jos x on kokonaisluku, joka kirjoitetaan k:lla numerolla 5, niin $f(x)$ on kokonaisluku, joka kirjoitetaan $2k$:lla numerolla 5. (Esimerkiksi $f(5555) = 55555555$.)

4. Kolmion sivut ovat a, b ja c ja sen ympäri piirretyn ympyrän säde on R. Osoita, että

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{R^2}.$$

5. Määritä

$$\sum_{k=0^\circ}^{90^\circ} \cos^2 k.$$

6. Positiivisesta kokonaisluvusta vähennetään summa, jonka yhtenlaskettavina ovat luvussa esiintyvät numerot kukin korotettuna parittomaan, ei välttämättä samaan potenssiin. Osoita, että syntyvä luku on aina jaollinen kolmella. (Esimerkiksi $4321 - (4^5 + 3^3 + 2^7 + 1^5) = 3141 = 3 \cdot 1047$.)

7. Kolmion ABC sisällä on samasäteiset ympyrät $\mathcal{Y}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, niin että kukin ympyröistä $\mathcal{Y}_i$, $i = 1, 2, 3$, sivuaa kahta kolmion sivua (kukin eri sivuparia) ja $\mathcal{Y}_4$ sivuaa kolmea muuta ympyrää. Osoita, että ympyrän $\mathcal{Y}_4$ keskipiste on kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla.

8. Teräväkulmaisen kolmion ABC sivujen keskipisteet ovat A_1, A_2 ja A_3. Leikatkoot näistä pisteistä kolmion muita sivuja vastaan piirretyt kohtisuorat toisensa pisteissä A_2, B_2 ja C_2 (niin että $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ on kuusikulmio). Osoita, että kuusikulmion $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ ala on puolet kolmion ABC alasta.

9. EF on ympyrän Γ halkaisija ja e on E:n kautta piirretty Γ:n tangentti. Olkoon k vakio ja olkoot A ja B eri puolilla sijaitsevia e:n pisteitä, joille $AE \cdot EB = k$. Leikatkoot AF ja BF Γ:n myös pisteissä A' ja B'. Osoita, että kaikki janat $A'B'$ kulkevat saman pisteen kautta.

10. Luvuille x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pätee $0 < x_i < 1$. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + (n-1)x_i} \leq 1.$$

11. Olkoon (f_i), $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ Fibonaccin jono. Osoita, että on olemassa aidosti kasvava aritmeettinen jono positiivisia kokonaislukuja, jonka yksikään luku ei ole Fibonaccin jonon luku.

12. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$.

13. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot A, B ja C n-alkioisia mutta yhteisalkiottomia joukkoja, joille $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, 3n\}$. Osoita, että joillekin kolmelle luvulle $x \in A$, $y \in B$ ja $z \in C$ pätee, että yksi luvuista on kahden muun summa.

14. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Olkoon p sellainen alkuluku, että n on $p - 1$:n tekijä ja p on luvun $n^3 - 1$ tekijä. Osoita, että $4p - 3$ on neliöluku.

15. Polynomille $P(x)$ pätee $P(n) > n$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m on jonkin luvuista $P(1)$, $P(P(1))$, $P(P(P(1))), \ldots$ tekijä. Osoita, että $P(x) = x + 1$.