

# Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävät ja ratkaisut 1995 – 2014

## Tehtävät

### 36. IMO, Toronto 1995

**1995.1.** Olkoot  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  neljä eri pistettä suoralla, tässä järjestyksessä. Ympyrät, joiden halkaisijat ovat  $AC$  ja  $BD$  leikkaavat toisensa pisteissä  $X$  ja  $Y$ . Suorat  $XY$  ja  $BC$  leikkaavat toisensa pisteessä  $Z$ . Piste  $P$  on mielivaltainen suoran  $XY$  piste,  $P \neq Z$ . Suora  $CP$  leikkaa  $AC$ -halkaisijaisen ympyrän pisteissä  $C$  ja  $M$  ja suora  $BP$  leikkaa  $BD$ -halkaisijaisen ympyrän pisteissä  $B$  ja  $N$ . Osoita, että suorat  $AM$ ,  $DN$  ja  $XY$  kulkevat saman pisteen kautta.

**1995.2.** Olkoot  $a$ ,  $b$  ja  $c$  positiivisia reaalilukuja ja olkoon  $abc = 1$ . Osoita, että

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

**1995.3.** Määritä kaikki sellaiset kokonaisluvut  $n > 3$ , joille on olemassa  $n$  tason pistettä  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ja reaaliluvut  $r_1, r_2, \dots, r_n$  siten, että seuraavat ehdot ovat samanaikaisesti voimassa:

- (i) Mitkään kolme pisteistä  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eivät ole samalla suoralla.
- (ii) Kaikilla  $i, j, k$  ( $1 \leq i < j < k \leq n$ ) kolmion  $A_i A_j A_k$  ala on  $r_i + r_j + r_k$ .

**1995.4.** Määritä suurin  $x_0$ , jolle on olemassa positiiviset reaaliluvut  $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$ , jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- (i)  $x_0 = x_{1995}$ ;
- (ii)  $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$  kaikilla  $i = 1, 2, \dots, 1995$ .

**1995.5.** Olkoon  $ABCDEF$  kupera kuusikulmio ja  $AB = BC = CD$ ,  $DE = EF = FA$  sekä  $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$ . Olkoot  $G$  ja  $H$  kaksi kuusikulmion sisäpistettä, jotka on valittu niin, että  $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$ . Osoita, että

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

**1995.6.** Olkoon  $p$  pariton alkuluku. Määritä joukon  $\{1, 2, \dots, 2p\}$  kaikkien sellaisten osajoukkojen  $A$  lukumäärä, joille on voimassa

- (i)  $A$ :ssa on tasan  $p$  alkia ja
- (ii)  $A$ :n alkioden summa on jaollinen  $p$ :llä.

### 37. IMO, Mumbai 1996

**1996.1.** Suorakaiteen muotoinen pelilauta  $ABCD$ , missä  $|AB| = 20$  ja  $|BC| = 12$ , on jaettu  $20 \times 12$ :ksi yksikköneliöksi. Olkoon  $r$  positiivinen kokonaisluku. Laudalla voidaan siirtää kolikkoa neliöstä toiseen jos ja vain jos neliöiden keskipisteiden etäisyys on  $\sqrt{r}$ . Tehtävänä on löytää jono siirtoja, joilla kolikko voidaan siirtää neliöstä, jonka kärki on  $A$  neliöön, jonka kärki on  $B$ .

- (a) Osoita, että tehtävää ei voida suorittaa, jos  $r$  on jaollinen 2:lla tai 3:lla.
- (b) Osoita, että tehtävä voidaan suorittaa, jos  $r = 73$ .
- (c) Osoita, että tehtävä on mahdoton, jos  $r = 97$ .

**1996.2.** Olkoon  $P$  kolmion  $ABC$  sisäpiste ja olkoon  $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ . Olkoot  $D$  ja  $E$  kolmioiden  $APB$  ja  $APC$  sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. Osoita, että  $AP$ ,  $BD$  ja  $CE$  kulkevat saman pisteen kautta.

**1996.3.** Olkoon  $\mathbf{S} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot  $f$ , jotka on määritelty joukossa  $\mathbf{S}$  ja joiden arvot kuuluvat joukkoon  $\mathbf{S}$  ja jotka toteuttavat yhtälön

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

kaikilla joukon  $\mathbf{S}$  alkioilla  $m$  ja  $n$ .

**1996.4.** Positiiviset kokonaisluvut  $a$  ja  $b$  on valittu niin, että luvut  $15a + 16b$  ja  $16a - 15b$  ovat molemmat positiivisten kokonaislukujen neliöitä. Määritä näistä neliöistä pienemmän pienin mahdollinen arvo.

**1996.5.** Olkoon  $ABCDEF$  kupera kuusikulmio ja olkoon  $AB$   $ED$ :n kanssa yhdensuuntainen,  $BC$   $FE$ :n kanssa yhdensuuntainen ja  $CD$   $AF$ :n kanssa yhdensuuntainen. Olkoot  $R_A$ ,  $R_C$  ja  $R_E$  kolmioiden  $FAB$ ,  $BCD$  ja  $DEF$  ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet ja  $p$  kuusikulmion piiri. Todista, että

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

**1996.6.** Olkoot  $n$ ,  $p$  ja  $q$  positiivisia kokonaislukuja ja  $n > p + q$ . Olkoot  $x_0, x_1, \dots, x_n$  kokonaislukuja, joille ovat voimassa seuraavat ehdot:

- (a)  $x_0 = x_n = 0$ ;
- (b) kaikille kokonaisluvuille  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , pätee joko  $x_i - x_{i-1} = p$  tai  $x_i - x_{i-1} = -q$ .

Osoita, että on olemassa indeksipari  $(i, j)$ ,  $i < j$ ,  $(i, j) \neq (0, n)$ , jolle pätee  $x_i = x_j$ .

### 38. IMO, Mar del Plata 1997

**1997.1.** Tason kokonaislukukoordinaattiset pisteet ovat yksikköneliöiden kärkiä. Neliöt on väritetty vuorotellen mustiksi ja valkeiksi (šakkilaudan tapaan). Olkoot  $m$  ja  $n$  positiivisia kokonaislukuja. Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota, jonka kärkien koordinaatit ovat kokonaislukuja, jonka kateettien pituudet ovat  $m$  ja  $n$  ja jonka kateetit sijaitsevat neliöiden sivuilla. Olkoon  $S_1$  kolmion mustan osan ala ja  $S_2$  kolmion valkean osan ala. Olkoon

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|.$$

(a) Laske  $f(m, n)$  kaikille positiivisille kokonaisluvuille  $m, n$ , jotka ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia.

(b) Todista, että  $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max(m, n)$  kaikilla  $m$  ja  $n$ .

(c) Osoita, että ei ole olemassa vakiota  $C$ , jolle  $f(m, n) < C$  kaikilla  $m$  ja  $n$ .

**1997.2.** Kulma  $A$  on pienin kolmion  $ABC$  kulmista. Pisteet  $B$  ja  $C$  jakavat kolmion ympäri piirretyn ympyrän kahdeksi kaareksi. Olkoon  $U$  sisäpiste sillä  $B$ :n ja  $C$ :n välisellä kaarella, jolla  $A$  ei ole. Janan  $AB$  keskinormaali leikkaa suoran  $AU$  pisteessä  $V$  ja janan  $AC$  keskinormaali leikkaa suoran  $AU$  pisteessä  $W$ . Suorat  $BV$  ja  $CW$  leikkaavat toisensa pisteessä  $T$ . Osoita, että

$$AU = TB + TC.$$

**1997.3.** Olkoot  $x_1, x_2, \dots, x_n$  reaalityyppiset luvut, jotka toteuttavat ehdot

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$$

ja

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2}, \quad \text{kun } i = 1, 2, \dots, n.$$

Osoita, että on olemassa jonon  $x_1, x_2, \dots, x_n$  permutaatio  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , jolle pätee

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

**1997.4.** Kutsumme  $n \times n$ -neliomatriiseja (neliömäistä lukutaulukkoa) *hopeamatriiseiksi*, jos sen alkiot kuuluvat joukkoon  $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$  ja jos jokaisella  $i = 1, 2, \dots, n$  matriisin  $i$ :nnen vaakarivin ja  $i$ :nnen pystyrivin alkioiden yhdiste sisältää  $S$ :n kaikki alkiot. Osoita, että

(a) kun  $n = 1997$ , hopeamatriiseja ei ole olemassa;

(b) hopeamatriiseja on olemassa äärettömän monella  $n$ :n arvolla.

**1997.5.** Määritä kaikki kokonaislukuparit  $(a, b)$ ,  $a \geq 1, b \geq 1$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$a^{b^2} = b^a.$$

**1997.6.** Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku. Eri tapoja kirjoittaa  $n$  luvun 2 sellaisten potenssien summana, joiden eksponentti on ei-negatiivinen kokonaisluku, olkoon  $f(n)$  kapaleutta. Esityksiä, jotka eroavat toisistaan vain yhteenlaskettavien järjestyksen suhteen, pidetään samoina. Esimerkiksi  $f(4) = 4$ , koska 4 voidaan esittää seuraavilla neljällä tavalla:  $4$ ;  $2 + 2$ ;  $2 + 1 + 1$ ;  $1 + 1 + 1 + 1$ . Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla  $n \geq 3$  pätee

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

### 39. IMO, Taipei 1998

**1998.1.** Kuperan nelikulmion  $ABCD$  lävistäjät  $AC$  ja  $BD$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja nelikulmion vastakkaiset sivut  $AB$  ja  $DC$  eivät ole yhdensuuntaiset. Oletamme, että  $AB$ :n ja  $DC$ :n keskinormaalien leikkauspiste  $P$  on  $ABCD$ :n sisäpuolella. Todista, että nelikulmion  $ABCD$  ympäri voidaan piirtää ympyrä, jos ja vain jos kolmioilla  $ABP$  ja  $CDP$  on sama pinta-ala.

**1998.2.** Kilpailussa on  $a$  kilpailijaa ja  $b$  tuomaria, missä  $b \geq 3$  on pariton kokonaisluku. Jokainen tuomari arvostelee jokaisen kilpailijan suorituksen joko hyväksytyksi tai hylätyksi. Olkoon  $k$  sellainen luku, että jokaiset kaksi tuomaria ovat samaa mieltä enintään  $k$ :n kilpailijan suorituksista. Todista, että

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

**1998.3.** Olkoon  $d(n)$  positiivisen kokonaisluvun  $n$  positiivisten tekijöiden (1 ja  $n$  mukaan lukien) lukumäärä. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut  $k$ , joille pätee

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

jollakin kokonaisluvulla  $n$ .

**1998.4.** Määritä kaikki positiiviset kokonaislukuparit  $(a, b)$ , joille  $ab^2 + b + 7$  on luvun  $a^2b + a + b$  tekijä.

**1998.5.** Olkoon  $I$  kolmion  $ABC$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Kolmion  $ABC$  sisään piirretyn ympyrän ja kolmion sivujen  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  sivuamispisteet ovat  $K$ ,  $L$  ja  $M$ , tässä järjestyksessä. Pisteiden  $B$  kautta kulkeva  $MK$ :n suuntainen suora leikkaa suorat  $LM$  ja  $LK$  pisteissä  $R$  ja  $S$ . Osoita, että  $\angle RIS$  on terävä.

**1998.6.** Tarkastellaan kaikkia positiivisten kokonaislukujen joukossa  $\mathbb{N}^+$  määriteltyjä funktioita  $f$ , joiden arvot ovat positiivisia kokonaislukuja ja jotka toteuttavat ehdon

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

kaikilla  $s, t \in \mathbb{N}^+$ . Määritä  $f(1998)$ :n pienin mahdollinen arvo.

## 40. IMO, Bukarest 1999

**1999.1.** Määritä kaikki äärelliset tasojoukot  $S$ , joissa on vähintään kolme pistettä ja jotka täyttävät seuraavan ehdon: kun  $A$  ja  $B$  ovat joukon  $S$  kaksi eri pistettä, joukko  $S$  on symmetrinen janan  $AB$  keskinormaalien suhteen.

**1999.2.** Olkoon  $n$  kiinteä kokonaisluku, jolle  $n \geq 2$ . (a) Määritä pienin sellainen vakio  $C$ , että kaikilla reaaliluvuilla  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  pätee epäyhtälö

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left( \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4.$$

(b) Määritä, milloin yhtäsuuruus on voimassa, kun  $C$  on kuten yllä.

**1999.3.** Tarkastellaan  $n \times n$ -lautaa, missä  $n$  on kiinteä positiivinen parillinen kokonaisluku. Lauta koostuu  $n^2$  yksikköruudusta. Kahden eri ruudun sanotaan olevan vierekkäiset, jos niillä on yhteinen sivu. Laudan  $N$  ruutua merkitään niin, että jokaisen laudan (merkityn tai merkitsemättömän) ruudun vieressä on vähintään yksi merkitty ruutu. Määritä luvun  $N$  pienin mahdollinen arvo.

**1999.4.** Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen parit  $(n, p)$ , että  $p$  on alkuluku,  $n \leq 2p$  ja  $(p-1)^n + 1$  on jaollinen luvulla  $n^{p-1}$ .

**1999.5.** Ympyrät  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$  sisältyvät ympyrään  $\Gamma$  ja sivuavat ympyrää  $\Gamma$  eri pisteissä  $M$  ja  $N$ . Ympyrä  $\Gamma_1$  kulkee ympyrän  $\Gamma_2$  keskipisteen kautta. Ympyröiden  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$  leikkauspisteiden kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän  $\Gamma$  pisteissä  $A$  ja  $B$ . Suorat  $MA$  ja  $MB$  leikkaavat ympyrän  $\Gamma_1$  pisteissä  $C$  ja  $D$ . Todista, että suora  $CD$  sivuaa ympyrää  $\Gamma_2$ .

**1999.6.** Määritä kaikki sellaiset kuvaukset  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , että jokaisella  $x, y \in \mathbb{R}$  on voimassa yhtälö

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1.$$

## 41. IMO, Taejon 2000

**2000.1.** Ympyrät  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$  leikkaavat toisensa pisteissä  $M$  ja  $N$ . Olkoon  $l$  se  $\Gamma_1$ :n ja  $\Gamma_2$ :n yhteinen tangentti, joka on lähempänä  $M$ :ää kuin  $N$ :ää. Suora  $l$  sivuaa  $\Gamma_1$ :tä pisteessä  $A$  ja  $\Gamma_2$ :tä pisteessä  $B$ . Pisteiden  $M$  kautta kulkeva  $l$ :n suuntainen suora leikkaa ympyrän  $\Gamma_1$  myös pisteessä  $C$  ja ympyrän  $\Gamma_2$  myös pisteessä  $D$ . Suorat  $CA$  ja  $DB$  leikkaavat pisteessä  $E$ ; suorat  $AN$  ja  $CD$  leikkaavat pisteessä  $P$ ; suorat  $BN$  ja  $CD$  leikkaavat pisteessä  $Q$ . Osoita, että  $EP = EQ$ .

**2000.2.** Olkoot  $a, b$  ja  $c$  positiivisia reaalilukuja ja olkoon  $abc = 1$ . Todista, että

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

**2000.3.** Olkoon  $n \geq 2$  positiivinen kokonaisluku. Vaakasuuralla suoralla on  $n$  kirppua, jotka eivät kaikki ole samassa pisteessä. Olkoon  $\lambda$  positiivinen reaaliluku. Määritellään

*siirtymä* seuraavasti: valitaan jotkin kaksi kirppua, jotka ovat pisteissä  $A$  ja  $B$ ,  $A$   $B$ :n vasemmalla puolella; annetaan  $A$ :ssa olevan kirpun hypätä siihen  $B$ :n oikealla puolella olevaan suoran pisteeseen  $C$ , jolle  $BC/AB = \lambda$ . Määritä kaikki sellaiset  $\lambda$ :n arvot, joilla kaikki kirput voivat siirtyä mistä hyvänsä alkuasemasta minkä hyvänsä pisteen  $M$  oikealle puolelle äärellisen monen siirtymän avulla.

**2000.4.** Taikurilla on sata korttia, jotka on numeroitu 1:stä 100:aan. Taikuri sijoittaa kortit kolmeen rasiaan, punaiseen, valkoiseen ja siniseen, niin että joka rasiassa on ainakin yksi kortti. Eräs katsojista valitsee rasioista kaksi, ottaa kummastakin rasiasta yhden kortin ja kertoo valituissa korteissa olevien numeroiden summan. Kuultuaan summan taikuri ilmoittaa, mistä rasiasta ei ole otettu kortteja. Monellako tavalla kortit voidaan sijoittaa rasioihin niin, että kuvattu temppu aina onnistuu? (Kahta sijoittelua pidetään eri sijoitteluina, jos niissä ainakin yksi kortti on eri rasiassa.)

**2000.5.** Selvitä, onko olemassa positiivista kokonaislukua  $n$ , jolle  $n$  on jaollinen tasan 2000:lla eri alkuluvulla ja  $2^n + 1$  on jaollinen  $n$ :llä.

**2000.6.** Olkoot  $AD$ ,  $BE$  ja  $CF$  teräväkulmaisen kolmion  $ABC$  korkeusjanat. Kolmion  $ABC$  sisään piirretty ympyrä sivuaa sivuja  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  pisteissä  $G$ ,  $H$  ja  $J$ , tässä järjestyksessä. Olkoot suorat  $a$ ,  $b$  ja  $c$  suorien  $EF$ ,  $FD$  ja  $DE$  peilikuvat suorien  $HJ$ ,  $JG$  ja  $GH$  yli suoritetuissa peilauksissa (tässä järjestyksessä). Todista, että  $a$ ,  $b$  ja  $c$  määrittävät kolmion, jonka kärjet ovat kolmion  $ABC$  sisään piirretyn ympyrän kehällä.

## 42. IMO, Washington D.C. 2001

**2001.1.** Teräväkulmaisessa kolmiossa  $ABC$  on  $O$  ympäripiiretyn ympyrän keskipiste ja  $AP$  korkeusjana. Lisäksi  $\angle C \geq \angle B + 30^\circ$ . Todista, että  $\angle A + \angle COP < 90^\circ$ .

**2001.2.** Todista, että kaikille positiivisille luvuille  $a$ ,  $b$  ja  $c$  pätee

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

**2001.3.** Matematiikkakilpailuun osallistui 21 poikaa ja 21 tyttöä. Osoittautui, että

- (a) kukin kilpailija ratkaisi enintään kuusi tehtävää ja
- (b) jokaista pojan ja tytön muodostamaa paria kohden oli ainakin yksi tehtävä, jonka molemmat ratkaisivat.

Osoita, että kilpailussa oli ainakin yksi tehtävä, jonka oli ratkaissut ainakin kolme tyttöä ja kolme poikaa.

**2001.4.** Olkoon  $n > 1$  pariton kokonaisluku ja olkoot  $c_1, c_2, \dots, c_n$  kokonaislukuja. Jos  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  on jonon  $\{1, 2, \dots, n\}$  permutaatio, niin merkitään

$$S(a) = \sum_{i=1}^n c_i a_i.$$

Todista, että on olemassa  $\{1, 2, \dots, n\}$ :n permutaatiot  $a \neq b$ , joille  $S(a) - S(b)$  on jaollinen luvulla  $n!$ .

**2001.5.** Kolmiossa  $ABC$  on  $\angle BAC = 60^\circ$ . Piste  $P$  on  $\angle BAC$ :n puolittajan ja  $BC$ :n leikkauspiste ja  $Q$   $\angle ABC$ :n puolittajan ja  $AC$ :n leikkauspiste. Lisäksi  $AB + BP = AQ + QB$ . Määritä kolmion  $ABC$  kulmien suuruudet.

**2001.6.** Olkoot  $a, b, c$  ja  $d, a > b > c > d$ , positiivisia kokonaislukuja. Olkoon

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Osoita, että  $ab + cd$  ei ole alkuluku.

### 43. IMO, Glasgow, 2002

**2002.1.** Olkoon  $S$  kaikkien ei-negatiivisten kokonaislukujen  $h, k$ , joille pätee  $h + k < n$ , muodostamien parien  $(h, k)$  joukko. Jokainen  $S$ :n alkio väritetään punaiseksi tai siniseksi niin, että jos  $(h, k)$  on punainen ja  $h' \leq h, k' \leq k$ , niin  $(h', k')$  on myös punainen. Joukon  $S$  osajoukko on tyyppiä 1, jos siinä on  $n$  sinistä paria, joissa on eri ensimmäinen jäsen ja tyyppiä 2, jos siinä on  $n$  sinistä paria, joissa on eri toinen jäsen. Osoita, että  $S$ :llä on yhtä monta tyyppi 1 ja tyyppi 2 osajoukkoa.

**2002.2.**  $BC$  on  $O$ -keskisen ympyrän halkaisija.  $A$  on mielivaltainen ympyrän kehän piste siten, että kulma  $AOC > 60^\circ$ . Jänne  $EF$  on janan  $AO$  keskinormaali.  $D$  on pienemmän kaaren  $AB$  keskipiste.  $O$ :n kautta piirretty  $AD$ :n suuntainen suora leikkaa  $AC$ :n pisteessä  $J$ . Osoita, että  $J$  on kolmion  $CEF$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

**2002.3.** Määritä kaikki kokonaislukujen  $m > 2, n > 2$  parit, joille  $k^n + k^2 - 1$  on luvun  $k^m + k - 1$  tekijä äärettömän monella kokonaisluvulla  $k$ .

**2002.4.** Kokonaisluvun  $n > 1$  positiiviset tekijät ovat  $d_1 < d_2 < \dots < d_k$  (siis  $d_1 = 1$  ja  $d_k = n$ ). Olkoon  $d = d_1d_2 + d_2d_3 + \dots + d_{k-1}d_k$ . Osoita, että  $d < n^2$  ja määritä ne luvut  $n$ , joille  $d$  on  $n^2$ :n tekijä.

**2002.5.** Määritä kaikki reaalimuuttujan reaaliarvoiset funktiot  $f$ , joille  $(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu)$  kaikilla  $x, y, u$  ja  $v$ .

**2002.6.** Tasoon on piirretty  $n \geq 2$  ympyrää niin, että mikään suora ei leikkaa useampia kuin kahta näistä ympyröistä. Ympyröiden keskipisteet ovat  $O_1, O_2, \dots, O_n$ . Osoita, että

$$\sum_{i < j} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

### 44. IMO, Tokio 2003

**2003.1.** Olkoon joukon  $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$  osajoukossa  $A$  tasan 101 alkioita. Todista, että joukossa  $S$  on sellaiset luvut  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ , että joukot

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \quad j = 1, 2, \dots, 100,$$

ovat pareittain yhteisalkiottomia.

**2003.2.** Määritä kaikki ne positiivisten kokonaislukujen parit  $(a, b)$ , joille

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

on positiivinen kokonaisluku.

**2003.3.** Kuperan kuusikulmion jokaisella kahdella vastakkaisella sivulla on seuraava ominaisuus: sivujen keskipisteiden etäisyys on  $\sqrt{3}/2$  kertaa sivujen pituuksien summa. Osoita, että kuusikulmion kulmat ovat yhtä suuria.

**2003.4.** Olkoon  $ABCD$  jännelikulmio. Olkoot  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  pisteen  $D$  kohtisuorat projektiot suorilla  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$ , tässä järjestyksessä. Osoita, että  $PQ = QR$ , jos ja vain jos kulmien  $\angle ABC$  ja  $\angle ADC$  puolittajien leikkauspiste on suoralla  $AC$ .

**2003.5.** Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku ja olkoot  $x_1, x_2, \dots, x_n$  reaalilukuja, joille pätee  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ .

(a) Osoita, että

$$\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

(b) Osoita, että edellisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on aritmeettinen jono.

**2003.6.** Olkoon  $p$  alkuluku. Osoita, että on olemassa sellainen alkuluku  $q$ , että  $n^p - p$  ei millään kokonaisluvulla  $n$  ole jaollinen  $q$ :lla.

## 45. IMO, Ateena 2004

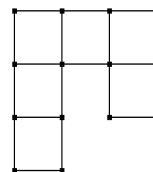
**2004.1.** Olkoon  $ABC$  teräväkulmainen kolmio ja  $AB \neq AC$ . Ympyrä, jonka halkaisija on  $BC$ , leikkaa sivun  $AB$  pisteessä  $M$  ja sivun  $AC$  pisteessä  $N$ . Olkoon  $O$  sivun  $BC$  keskipiste. Kulmien  $BAC$  ja  $MON$  puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä  $R$ . Todista, että kolmioiden  $BMR$  ja  $CNR$  ympäri piirretyllä ympyröillä on yhteinen piste, joka on sivulla  $BC$ .

**2004.2.** Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit  $P(x)$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

kaikilla ehdon  $ab + bc + ca = 0$  toteuttavilla reaaliluvuilla  $a, b$  ja  $c$ .

**2004.3.** Olkoon *koukku* oheisen kuvion mukaisesti kuudesta yksikköneliöstä muodostuva kuvio tai mikä hyvänsä tästä kuviosta kierroilla tai peilauksilla muodostuva kuvio. Määritä kaikki  $m \times n$ -suorakaiteet, jotka voidaan peittää koukuilla niin, että suorakaide peittyy aukottomasti eivätkä koukut peitä toisiaan, mutta mikään koukku ei peitä suorakaiteen ulkopuolista aluetta.





**2004.4.** Olkoon  $n \geq 3$  kokonaisluku ja olkoot  $t_1, t_2, \dots, t_n$  positiivisia reaalilukuja, joille on voimassa

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Osoita, että  $t_i, t_j, t_k$  ovat kaikilla  $i, j, k, 1 \leq i < j < k \leq n$ , kolmion sivujen pituuksia.

**2004.5.** Kuperan nelikulmion  $ABCD$  lävistäjä  $BD$  ei ole kulman  $ABC$  eikä kulman  $CDA$  puolittaja. Piste  $P$  on nelikulmion  $ABCD$  sisällä ja toteuttaa ehdot

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{ja} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Todista, että  $ABCD$  on jännenelikulmio, jos ja vain jos  $AP = CP$ .

**2004.6.** Positiivista kokonaislukua kutsutaan *vuorottelevaksi*, jos sen kymmenjärjestelmäesityksessä jokaisesta kahdesta peräkkäisestä numerosta toinen on parillinen ja toinen pariton. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on vuorotteleva monikerta.

## 46. IMO, Mérida 2005

**2005.1.** Tasasivuisen kolmion  $ABC$  sivuilta valitaan kuusi pistettä:  $A_1$  ja  $A_2$  sivulta  $BC$ ,  $B_1$  ja  $B_2$  sivulta  $CA$  ja  $C_1$  sekä  $C_2$  sivulta  $AB$ . Pisteet muodostavat kuperan kuusikulmion  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ , jonka sivut ovat yhtä pitkiä. Osoita, että suorat  $A_1B_2$ ,  $B_1C_2$  ja  $C_1A_2$  leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

**2005.2.** Kokonaislukujonossa  $a_1, a_2, \dots$  on äärettömän monta positiivista ja äärettömän monta negatiivista jäsentä. Oletetaan, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla  $n$  lukujen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jakojäännökset  $n$ :llä jaettaessa ovat  $n$  eri lukua. Osoita, että jokainen kokonaisluku esiintyy tässä jonossa täsmälleen kerran.

**2005.3.** Positiiviset reaaliluvut  $x, y$  ja  $z$  toteuttavat ehdon  $xyz \geq 1$ . Todista, että

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

**2005.4.** Tarkastellaan kaavan

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

määrittelemää lukuja  $a_1, a_2, \dots$ . Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla ei ole yhteistä tekijää jonon minkään luvun kanssa.

**2005.5.** Kuperassa nelikulmiossa  $ABCD$  sivut  $BC$  ja  $AD$  ovat yhtä pitkät mutta erisuuntaiset. Olkoon  $E$  sivun  $BC$  ja  $F$  sivun  $AD$  sisäpiste ja olkoon  $BE = DF$ . Suorat  $AC$  ja  $BD$  leikkaavat pisteessä  $P$ , suorat  $BD$  ja  $EF$  leikkaavat pisteessä  $Q$  ja suorat  $EF$  ja  $AC$  leikkaavat pisteessä  $R$ . Tarkastellaan kaikkia kolmioita  $PQR$ , kun  $E$  ja  $F$  liikkuvat. Osoita, että näiden kolmioiden ympäri piirretyillä ympyröillä on  $P$ :n lisäksi toinenkin yhteinen piste.

**2005.6.** Matematiikkakilpailussa oli 6 tehtävää. Mitkä tahansa kaksi näistä tehtävistä ratkaisi yli  $\frac{2}{5}$  kilpailijoista. Kukaan kilpailijoista ei ratkaissut kaikkia kuutta tehtävää. Osoita, että ainakin kaksi kilpailijoista ratkaisi tasan 5 tehtävää.

## 47. IMO, Ljubljana 2006

**2006.1.** Kolmion  $ABC$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste on  $I$ . Kolmion sisäpiste  $P$  toteuttaa ehdon

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Osoita, että  $AP \geq AI$  ja että yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos  $P = I$ .

**2006.2.** Kutsumme säännöllisen 2006-kulmion  $P$  lävistäjää *hyväksi janaksi*, jos sen päätepisteet jakavat  $P$ :n piirin kahteen osaan, joista kumpikin koostuu parittomasta määrästä  $P$ :n sivuja. Myös  $P$ :n sivuja pidetään *hyvinä janoina*. Monikulmio  $P$  jaetaan kolmioiksi 2003:lla lävistäjällä, jotka eivät leikkaa toisiaan  $P$ :n sisällä. Määritä sellaisten jaossa syntyvien tasakylkisten kolmioiden, joiden sivuista kaksi on hyviä janoja, suurin mahdollinen lukumäärä.

**2006.3.** Määritä pienin reaaliluku  $M$ , jolle epäyhtälö

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

toteutuu kaikilla reaaliluvuilla  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

**2006.4.** Määritä kaikki kokonaislukuparit  $(x, y)$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**2006.5.** Kokonaislukukertoimisen polynomin  $P$  aste on  $n$ ,  $n > 1$ . Olkoon  $k$  mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan polynomia

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots)),$$

missä  $P$  esiintyy  $k$  kertaa. Todista, että on olemassa enintään  $n$  kokonaislukua  $t$ , joille pätee  $Q(t) = t$ .

**2006.6.** Liitetään jokaiseen kuperan monikulmion  $P$  sivuun  $b$  suurimman sellaisen kolmion ala, joka on kokonaan  $P$ :n sisällä ja jonka yksi sivu on  $b$ . Osoita, että kaikkiin  $P$ :n sivuihin liitettyjen alojen summa on ainakin kaksi kertaa  $P$ :n ala.

## 48. IMO, Hanoi 2007

**2007.1** On annettu reaaliluvut  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Jokaiselle  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , määritellään

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}.$$

Olkoon

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Osoita, että mielivaltaisille reaaliluvuille  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  pätee

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Osoita, että on olemassa reaaliluvut  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , joille epäyhtälössä  $(*)$  vallitsee yhtäsuuruus.

**2007.2** Pisteet  $A, B, C, D$  ja  $E$  sijaitsevat niin, että  $ABCD$  on suunnikas ja  $BCED$  on jännenelikulmio. Suora  $\ell$  kulkee pisteen  $A$  kautta. Oletetaan, että  $\ell$  leikkaa janan  $DC$  sen sisäpisteessä  $F$  ja suoran  $BC$  pisteessä  $G$ . Oletetaan, että  $EF = EG = EC$ . Todista, että  $\ell$  on kulman  $DAB$  puolittaja.

**2007.3** Matematiikkakilpailun osallistujista jotkut ovat toistensa ystäviä; ystävyys on aina molemminpuolista. Sanomme, että jokin kilpailijoiden joukko on *klikki*, jos kaikki sen jäsenet ovat toistensa ystäviä. (Erityisesti joukot, joissa on vähemmän kuin kaksi alkioita, ovat klikkejä.) Sanomme klikin jäsenten lukumäärää klikin *kooksi*.

Tiedetään, että tässä kilpailussa klikkien suurin koko on parillinen. Todista, että kilpailijat voidaan jakaa kahteen huoneeseen niin, että suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki on samankokoinen kuin suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki.

**2007.4** Kolmion  $ABC$  kulman  $BCA$  puolittaja leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä  $R$ , kolmion sivun  $BC$  keskinormaalilin pisteessä  $P$  ja sivun  $AC$  keskinormaalilin pisteessä  $Q$ . Sivun  $BC$  keskipiste on  $K$  ja sivun  $AC$  keskipiste on  $L$ . Osoita, että kolmioilla  $RPK$  ja  $RQL$  on sama ala.

**2007.5** Olkoot  $a$  ja  $b$  positiivisia kokonaislukuja. Todista, että jos luku  $4ab - 1$  on luvun  $(4a^2 - 1)^2$  tekijä, niin  $a = b$ .

**2007.6** Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan kolmiulotteisen avaruuden  $(n + 1)^3 - 1$  pistettä sisältävää joukkoa

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}.$$

Mikä on pienin määrä tasoja, joiden yhdiste sisältää joukon  $S$  pisteet, muttei pistettä  $(0, 0, 0)$ ?

## 49. IMO, Madrid 2008

**2008.1.** Teräväkulmaisen kolmion  $ABC$  korkeusjanojen leikkauspiste on  $H$ . Pisteestä  $H$  kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun  $BC$  keskipiste, leikkaa suoran  $BC$  pisteissä  $A_1$  ja  $A_2$ . Vastaavasti pisteestä  $H$  kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun  $CA$  keskipiste, leikkaa suoran  $CA$  pisteissä  $B_1$  ja  $B_2$ , ja pisteestä  $H$  kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun  $AB$  keskipiste, leikkaa suoran  $AB$  pisteissä  $C_1$  ja  $C_2$ . Osoita, että pisteet  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  ja  $C_2$  ovat samalla ympyrällä.

**2008.2.** (a) Todista, että

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

kaikille reaali- $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -lukuille, jotka ovat eri suuria kuin 1 ja joille pätee  $xyz = 1$ .

(b) Osoita, että äärettömän monella rationaalilukukolmikolla  $x, y, z$ , missä kaikki luvut ovat eri suuria kuin 1 ja  $xyz = 1$ , edellisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus.

**2008.3.** Osoita, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua  $n$ , jolle luvulla  $n^2 + 1$  on lukua  $2n + \sqrt{2n}$  suurempi alkutekijä.

**2008.4.** Määritä kaikki funktiot  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ( $f$  on siis positiivisten reaalilukujen joukossa määritelty funktio, jonka arvot ovat positiivisia reaalilukuja), joille pätee

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla  $w, x, y$  ja  $z$ , jotka toteuttavat ehdon  $wx = yz$ .

**2008.5.** Olkoot  $n$  ja  $k$ ,  $k \geq n$ , positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon  $k - n$  parillinen. Olkoon annettuna  $2n$  lamppua, jotka on varustettu numeroin  $1, 2, \dots, 2n$  ja joista jokainen voi *palaa* tai olla *pimeänä*. Aluksi kaikki lamput ovat pimeinä. Tarkastellaan askelista koostuvia jonoja. Jokaisella askeleella jonkin lampun tila vaihdetaan päinvastaiseksi (lamppu sytytetään tai sammutetaan).

Olkoon  $N$  kaikkien sellaisten  $k$ :sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput  $1, \dots, n$  palavat ja lamput  $n + 1, \dots, 2n$  ovat pimeinä.

Olkoon  $M$  kaikkien sellaisten  $k$ :sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput  $1, \dots, n$  palavat ja lamput  $n + 1, \dots, 2n$  ovat pimeinä, mutta lamppuja  $n + 1, \dots, 2n$  ei ole kertaakaan sytytetty.

Määritä suhde  $N/M$ .

**2008.6.** Kuperassa nelikulmiossa  $ABCD$  on  $BA \neq BC$ . Kolmioiden  $ABC$  ja  $ADC$  sisään piirretyt ympyrät ovat  $\omega_1$  ja  $\omega_2$ . Oletetaan, että on olemassa ympyrä  $\omega$ , joka sivuaa puolisuoraa  $BA$  eri puolella  $A$ :ta kuin  $B$  ja puolisuoraa  $BC$  eri puolella  $C$ :tä kuin  $B$  ja joka myös sivuaa suoria  $AD$  ja  $CD$ . Osoita, että ympyröiden  $\omega_1$  ja  $\omega_2$  yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste on ympyrällä  $\omega$ .

## 50. IMO, Bremen 2009

**2009.1.** Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku ja olkoot  $a_1, \dots, a_k$  ( $k \geq 2$ ) joukon  $\{1, \dots, n\}$  eri lukuja niin, että  $a_i(a_{i+1} - 1)$  on jaollinen  $n$ :llä, kun  $i = 1, \dots, k - 1$ . Osoita, että  $a_k(a_1 - 1)$  ei ole jaollinen  $n$ :llä.

**2009.2.** Olkoon  $ABC$  kolmio ja  $O$  sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Piste  $P$  on sivun  $CA$  sisäpiste ja piste  $Q$  sivun  $AB$  sisäpiste. Pisteet  $K, L$  ja  $M$  ovat janojen  $BP, CQ$  ja  $PQ$  keskipisteet, tässä järjestyksessä, ja  $\Gamma$  on pisteiden  $K, L$  ja  $M$  kautta kulkeva ympyrä. Oletetaan, että suora  $PQ$  on ympyrän  $\Gamma$  tangentti. Osoita, että  $OP = OQ$ .

**2009.3.** Oletetaan, että  $s_1, s_2, s_3, \dots$  on aidosti kasvava positiivisten kokonaislukujen jono ja että molemmat osajonot

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{ja} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

ovat aritmeettisiä jonoja. Osoita, että myös jono  $s_1, s_2, s_3, \dots$  on aritmeettinen jono.

**2009.4.** Olkoon  $ABC$  kolmio, jossa  $AB = AC$ . Kulmien  $CAB$  ja  $ABC$  puolittajat leikkaavat sivut  $BC$  ja  $CA$  pisteissä  $D$  ja  $E$ , tässä järjestyksessä. Olkoon  $K$  kolmion  $ADC$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Oletetaan, että  $\angle BEK = 45^\circ$ . Määritä  $\angle CAB$ :n kaikki mahdolliset arvot.

**2009.5.** Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen joukossa määritellyt funktiot  $f$ , joiden arvot ovat positiivisia kokonaislukuja ja joilla on seuraava ominaisuus: kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $a$  ja  $b$  on olemassa (ei-surkastunut) kolmio, jonka sivujen pituudet ovat

$$a, \quad f(b) \quad \text{ja} \quad f(b + f(a) - 1).$$

**2009.6.** Olkoot  $a_1, a_2, \dots, a_n$  keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja ja olkoon  $M$  joukko, jonka alkiot ovat  $n - 1$  positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Heinäsirkka hyppelee reaaliakselilla. Se lähtee origosta ja tekee  $n$  hyppyä oikealle. Hyppyjen pituudet ovat  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jossain järjestyksessä. Osoita, että heinäsirkka voi järjestää hyppynsä niin, ettei se milloinkaan osu pisteeseen, jonka koordinaatti on joukossa  $M$ .

## 51. IMO, Astana 2010

**2010.1.** Määritä kaikki funktiot  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , joille yhtälö

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

pätee kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}$ . ( $\lfloor x \rfloor$  tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin  $x$ .)

**2010.2.** Olkoon  $I$  kolmion  $ABC$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja  $\Gamma$  kolmion  $ABC$  ympäri piirretty ympyrä. Suora  $AI$  leikkaa  $\Gamma$ :n pisteessä  $D \neq A$ . Olkoon  $F$  sellainen sivun  $BC$  piste ja  $E$  sellainen kaaren  $BDC$  piste, että  $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC$ . Olkoon vielä  $G$  janan  $IF$  keskipiste. Todista, että suorien  $DG$  ja  $EI$  leikkauspiste on ympyrällä  $\Gamma$ .

**2010.3.** Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen jonot  $a_1, a_2, \dots$ , joille  $(a_m + n)(m + a_n)$  on neliöluku kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $m, n$ .

**2010.4.** Piste  $P$  on kolmion  $ABC$  sisäosan piste. Suorat  $AP$ ,  $BP$  ja  $CP$  leikkaavat kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän myös pisteissä  $K$ ,  $L$  ja  $M$ , tässä järjestyksessä. Ympäri piirretyn ympyrän pisteeseen  $C$  piirretty tangentti leikkaa suoran  $AB$  pisteessä  $S$ . Todista, että jos  $SC = SP$ , niin  $MK = ML$ .

**2010.5.** Kuusi kolikkopinoa  $S_1, \dots, S_6$  on asetettu vierekkäin. Aluksi joka pinossa on yksi kolikko. On mahdollista suorittaa kahdenlaisia siirtoja.

*Siirto 1:* Jos pinossa  $S_j$ , missä  $1 \leq j \leq 5$ , on ainakin yksi kolikko, on sallittua poistaa kolikko pinosta  $S_j$  ja lisätä kaksi kolikkoa pinoon  $S_{j+1}$ .

*Siirto 2:* Jos pinossa  $S_k$ , missä  $1 \leq k \leq 4$ , on ainakin yksi kolikko, on sallittua poistaa pinosta  $S_k$  yksi kolikko ja vaihtaa pinot  $S_{k+1}$  ja  $S_{k+2}$  keskenään.

Selvitä, onko näitä siirtoja toistamalla mahdollista saavuttaa tilanne, jossa viisi ensimmäistä pinoa ovat tyhjiä ja kuudennessa pinossa on  $2010^{2010}$  kolikkoa.

**2010.6.** Olkoot  $a_1, a_2, \dots, a_s$  positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Kun  $n > s$ , määritellään

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Todista, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut  $\ell$  ja  $N$ ,  $\ell \leq s$ , niin että  $a_n = a_{n-\ell} + a_\ell$  kaikilla  $n \geq N$ .

## 52. IMO, Amsterdam 2011

**2011.1.** Olkoon  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  joukko, jonka alkioina on neljä eri suurta positiivista kokonaislukua. Joukon alkioiden summaa  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  merkitään  $S_A$ :lla. Olkoon  $n_A$  niiden parien  $(i, j)$  lukumäärä, joille  $1 \leq i < j \leq 4$  ja  $a_i + a_j$  on  $S_A$ :n tekijä. Määritä kaikki sellaiset neljän eri suuren kokonaisluvun joukot  $A$ , joille  $n_A$  on mahdollisimman suuri.

**2011.2.** Tason äärellisessä joukossa  $\mathcal{S}$  on ainakin kaksi pistettä ja mitkään kolme  $\mathcal{S}$ :n pistettä eivät ole samalla suoralla. Seuraavaa prosessia kutsutaan *tuulimyllyksi*. Alkutilanteessa suora  $\ell$  kulkee joukkoon yhden joukon  $\mathcal{S}$  pisteen  $P$  kautta. Se kiertyy myötäpäivään *kierron keskipisteen*  $P$  ympäri, kunnes se kohtaa jonkin toisen joukkoon  $\mathcal{S}$  kuuluvan pisteen  $Q$ . Pisteestä  $Q$  tulee nyt kierron koskipiste, ja suora kiertyy  $Q$ :n ympäri myötäpäivään, kunnes se jälleen kohtaa jonkin  $\mathcal{S}$ :n pisteen. Prosessi jatkuu loputtomasti.

Osoita, että on mahdollista valita  $P \in \mathcal{S}$  ja  $P$ :n kautta kulkeva suora  $\ell$  niin, että näistä aloitettu tuulimylly käyttää jokaista  $\mathcal{S}$ :n pistettä kierron keskipisteenä äärettömän monta kertaa.

**2011.3.** Funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa ehdon

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

kaikilla reaaliluvuilla  $x$  ja  $y$ . Osoita, että  $f(x) = 0$  kaikilla  $x \leq 0$ .

**2011.4.** Olkoon  $n > 0$  kokonaisluku. Käytössä on kaksivartinen vaaka ja  $n$  punnusta, joiden massat ovat  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ . Punnukset on asetettava yksitellen vaa'alle niin, että oikea vaakakuppi ei koskaan paina enempää kuin vasen vaakakuppi. Joka vaiheessa valitaan yksi jäljellä olevista punnuksista ja se asetetaan joko vasempaan tai oikeaan vaakakuppiin, kunnes kaikki punnukset ovat vaa'alla.

Määritä, kuinka monella eri tavalla tämä voidaan tehdä.

**2011.5.** Funktio  $f$  on määritelty kokonaislukujen joukossa ja sen arvot ovat positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että jokaisella kahdella kokonaisluvulla  $m$  ja  $n$  erotus  $f(m) - f(n)$  on jaollinen luvulla  $f(m-n)$ . Osoita, että kaikilla sellaisilla kokonaisluvuilla  $m$  ja  $n$ , joilla  $f(m) \leq f(n)$ ,  $f(n)$  on jaollinen luvulla  $f(m)$ .

**2011.6.** Teräväkulmaisen kolmion  $ABC$  ympäri piirretty ympyrä on  $\Gamma$ . Suora  $\ell$  on ympyrän  $\Gamma$  tangentti ja suorat  $\ell_a, \ell_b$  ja  $\ell_c$  ovat suoran  $\ell$  kuvat peilauksissa yli suorien  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$ , tässä järjestyksessä. Osoita, että suorien  $\ell_a, \ell_b$  ja  $\ell_c$  määrittelemän kolmion ympäri piirretty ympyrä sivuaa ympyrää  $\Gamma$ .

## 53. IMO, Mar del Plata 2012

**2012.1.** Kolmion  $ABC$  kärkeä  $A$  vastassa olevan sivuympyrän keskipiste on  $J$ . Sivuympyrän ja sivun  $BC$  sivuamispiste on  $M$ . Ympyrä sivuaa suoraa  $AB$  pisteessä  $K$  ja suoraa

$AC$  pisteessä  $L$ . Suorien  $LM$  ja  $BJ$  leikkauspiste on  $F$  ja suorien  $KM$  ja  $CJ$  leikkauspiste on  $G$ . Olkoon vielä  $S$  suorien  $AF$  ja  $BC$  ja  $T$  suorien  $AG$  ja  $BC$  leikkauspiste. Todista, että  $M$  on janan  $ST$  keskipiste.

(Kolmion  $ABC$  kärkeä  $A$  vastassa oleva *sivuympyrä* on ympyrä, joka sivuaa janaa  $BC$ , puolisuoraa  $AB$  janan  $AB$  jatkeella ja puolisuoraa  $AC$  janan  $AC$  jatkeella.)

**2012.2.** Olkoon  $n \geq 3$  ja olkoot  $a_2, a_3, \dots, a_n$  positiivisia reaalilukuja, joille pätee  $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ . Todista, että

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

**2012.3.** *Valehteluleikki* on peli, jossa on kaksi pelaajaa  $A$  ja  $B$ . Pelin säännöt perustuvat positiivisiin kokonaislukuihin  $k$  ja  $n$ , jotka ovat molempien pelaajien tiedossa.

Pelin alussa  $A$  valitsee kokonaisluvut  $x$  ja  $N$ ,  $1 \leq x \leq N$ .  $A$  pitää luvun  $x$  salassa, mutta ilmoittaa  $B$ :lle rehellisesti luvun  $N$ .  $B$  pyrkii saamaan tietoa luvusta  $x$  tekemällä  $A$ :lle kysymyksiä. Jokaisessa kysymyksessä hän esittää jonkin positiivisten kokonaislukujen joukon  $S$  (samaa joukkoa on voitu käyttää jo aikaisemmassa kysymyksessä) ja kysyy  $A$ :lta, kuuluuko  $x$  joukkoon  $S$ .  $B$  voi tehdä niin monta kysymystä kuin haluaa.  $A$ :n on heti vastattava jokaiseen  $B$ :n kysymykseen joko *kyllä* tai *ei*, mutta hän voi valehdella niin usein kuin haluaa. Ainoa rajoitus on, että jokaisen  $k+1$ :n peräkkäisen vastauksen joukossa on oltava ainakin yksi rehellinen. Kysyttyään niin monta kysymystä kuin on halunnut,  $B$  ilmoittaa positiivisten kokonaislukujen joukon  $X$ , jossa on enintään  $n$  alkioita. Jos  $x$  kuuluu joukkoon  $X$ ,  $B$  voittaa. Muussa tapauksessa hän häviää. Todista, että

1. jos  $n \geq 2^k$ , niin  $B$ :llä on voittostrategia;
2. jokaista tarpeeksi suurta  $k$ :ta kohden on olemassa sellainen  $n \geq 1,99^k$ , että  $B$ :llä ei ole voittostrategiaa.

**2012.4.** Määritä kaikki ne funktiot  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , joille pätee

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

kaikille sellaisille kokonaisluvuille  $a, b, c$ , joilla  $a + b + c = 0$ . (Tässä  $\mathbb{Z}$  tarkoittaa kokonaislukujen joukkoa.)

**2012.5.** Kolmiossa  $ABC$  on  $\angle BCA = 90^\circ$  ja  $D$  on  $C$ :stä piirretyn korkeusjanan kantapiste. Olkoon  $X$  janan  $CD$  sisäpiste. Olkoon  $K$  se janan  $AX$  piste, jolle  $BK = BC$  ja  $L$  se janan  $BX$  piste, jolle  $AL = AC$ . Olkoon  $M$   $AL$ :n ja  $BK$ :n leikkauspiste. Osoita, että  $MK = ML$ .

**2012.6.** Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut  $n$ , joille on olemassa sellaiset ei-negatiiviset kokonaisluvut  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , että

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

## 54. IMO, Santa Marta 2013

**2013.1.** Todista, että jokaista positiivisten kokonaislukujen paria  $k$  ja  $n$  kohden on olemassa  $k$  sellaista positiivista kokonaislukua  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , (jotka eivät välttämättä ole eri lukuja, että

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

**2013.2.** 4027 tason pisteen asetelmaa kutsutaan *kolumbialaiseksi*, jos se koostuu 2013 punaisesta ja 2014 sinisestä pisteestä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Taso jaetaan useaksi alueeksi piirtämällä joukko suoria. Suorien joukko on *suoepa* kolumbialaiselle asetelmalle, jos seuraavat kaksi ehtoa täyttyvät:

- mikään suora ei kulje minkään asetelman pisteen kautta;
- missään alueessa ei ole erivärisiä asetelman pisteitä.

Etsi pienin sellainen  $k$ , että jokaista 4027 pisteen kolumbialaista asetelmaa kohden on olemassa tälle asetelmalle suoepa  $k$ :n suoran sijoittelu.

**2013.3.** Kolmion  $ABC$  kärjen  $A$  vastainen sivu ympyrä sivutkoon sivua  $BC$  pisteessä  $A_1$ . Määriteltäköön sivun  $CA$  piste  $B_1$  ja sivun  $AB$  piste  $C_1$  vastaavasti käyttämällä kärkien  $B$  ja  $C$  vastaisia sivu ympyröitä. Oletetaan, että kolmion  $A_1B_1C_1$  ympäri piirretyn ympyrän keskipiste sijaitsee kolmion  $ABC$  ympäri piirretyllä ympyrällä. Todista, että kolmio  $ABC$  on suorakulmainen.

*Kolmion  $ABC$  kärjen  $A$  vastainen sivu ympyrä on ympyrä, joka sivuaa janaa  $BC$ , puolisuoraa  $AB$  janan  $AB$  jatkeella ja puolisuoraa  $AC$  janan  $AC$  jatkeella. Kärkien  $B$  ja  $C$  vastaiset sivu ympyrät määritellään vastaavasti.*

**2013.4.** Olkoon  $ABC$  teräväkulmainen kolmio, jonka korkeusjanojen leikkauspiste on  $H$ , ja olkoon  $W$  sivun  $BC$  piste, joka sijaitsee aidosti pisteiden  $B$  ja  $C$  välissä. Pisteet  $M$  ja  $N$  olkoot kärjistä  $B$  ja  $C$  lähtevien korkeusjanojen kannat. Merkitään  $\omega_1$ :llä kolmion  $BWN$  ympäri piirrettyä ympyrää, ja olkoon  $X$  ympyrän  $\omega_1$  se piste, jolle  $WX$  on ympyrän  $\omega_1$  halkaisija. Merkitään  $\omega_2$ :lla vastaavasti kolmion  $CWM$  ympäri piirrettyä ympyrää, ja olkoon  $Y$  se ympyrän  $\omega_2$  piste, jolle  $WY$  on ympyrän  $\omega_2$  halkaisija. Todista, että  $X, Y$  ja  $H$  ovat samalla suoralla.

**2013.5.** Olkoon  $\mathbb{Q}_{>0}$  positiivisten rationaalilukujen joukko. Olkoon  $f : \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  kuvaus, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa:

- kaikilla  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  pätee  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ;
- kaikilla  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  pätee  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ;
- on olemassa rationaaliluku  $a > 1$ , jolle  $f(a) = a$ .

Todista, että jokaisella  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$  pätee  $f(x) = x$ .

**2013.6.** Olkoon  $n \geq 3$  kokonaisluku. Tarkastellaan ympyrää, jolle on merkitty  $n+1$  pistettä tasaisin välein. Tarkastellaan pisteiden kaikkia mahdollisia nimeämisiä luvuilla  $0, 1, \dots, n$ , missä kutakin lukua käytetään täsmälleen kerran; tällaisia nimeämisiä pidetään samoina, jos ne voidaan saada toisistaan ympyrän kierrolla. Nimeämistä kutsutaan *kauniiksi*, jos  $a$ :ksi ja  $d$ :ksi nimettyjen pisteiden välinen jänne ei leikkaa  $b$ :ksi ja  $c$ :ksi nimettyjen pisteiden välistä jännettä, kun neljälle nimelle  $a < b < c < d$  pätee  $a + d = b + c$ .



Olkoon  $M$  kauniiden nimeämisten lukumäärä, ja olkoon  $N$  niiden positiivisten kokonaislukujen järjestettyjen parien  $(x, y)$  lukumäärä, joille  $x + y \leq n$  ja s.y.t. $(x, y) = 1$ . Todista, että

$$M = N + 1.$$

## 55. IMO, Kapkaupunki 2013

**2014.1.** Olkoon  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$  päättymätön jono positiivisia kokonaislukuja. Todista, että on olemassa yksi ja vain yksi kokonaisluku  $n \geq 1$ , jolle pätee

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

**2014.2.** Olkoon  $n \geq 2$  kokonaisluku. Tarkastellaan  $n \times n$  -šakkilautaa, jonka  $n^2$  yksikköneliötä muodostavat. Kutsutaan  $n:n$  laudalla olevan tornin asetelmaa *rauhalliseksi*, jos laudan jokaisella vaaka- ja pystyriivillä on tasan yksi torni. Määritä suurin sellainen positiivinen kokonaisluku  $k$ , jolle jokaista rauhallista  $n:n$  tornin asetelmaa kohden on olemassa  $k \times k$  -neliö, jonka yhdessä sen  $k^2$ :sta yksikköneliöstä ei ole tornia.

**2014.3.** Kuperassa nelikulmiossa  $ABCD$  on  $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ . Piste  $H$  on pisteen  $A$  kohtisuora projektio suoralla  $BD$ . Piste  $S$  on sivulla  $AB$  ja piste  $T$  on sivulla  $AD$  niin, että  $H$  on kolmion  $SCT$  sisällä ja

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ.$$

Todista, että suora  $BD$  on kolmion  $TSH$  ympäri piirretyn ympyrän tangentti.

**2014.4.** Pisteet  $P$  ja  $Q$  ovat teräväkulmaisen kolmion  $ABC$  sivulla  $BC$  niin, että  $\angle PAB = \angle BCA$  ja  $\angle CAQ = \angle ABC$ . Piste  $M$  on suoralla  $AP$  ja piste  $N$  on suoralla  $AQ$  niin, että  $P$  on janan  $AM$  keskipiste ja  $Q$  on janan  $AN$  keskipiste. Todista, että suorien  $BM$  ja  $CN$  leikkauspiste on kolmion  $ABC$  ympäri piirretyllä ympyrällä.

**2014.5.** Kapkaupungin Pankki laskee liikkeelle kolikkoja, joiden arvo on  $\frac{1}{n}$ , kaikilla positiivisilla kokonaisluvulla  $n$ . Tarkastellaan äärellistä kokoelmaa tällaisia kolikkoja (joiden ei tarvitse olla keskenään eriarvoisia), jonka yhteisarvoarvo on enintään  $99 + \frac{1}{2}$ . Todista, että kokoelma voidaan jakaa sataan tai vähempään osaan, joista jokaisen arvo on enintään 1.

**2014.6.** Joukko tason suoria on *yleisessä asemassa*, jos mitkään kaksi eivät ole yhden-suuntaisia eivätkä mitkään kolme kulje saman pisteen kautta. Yleisessä asemassa oleva suorajoukko leikkaa tason alueiksi, joista jotkin ovat pinta-alaltaan äärellisiä; kutsutaan näitä joukon *äärellisiksi alueiksi*. Todista, että kaikilla riittävän suurilla  $n:n$  arvoilla on mahdollista värittää jokaisesta yleisessä asemassa olevassa  $n:n$  suoran joukosta ainakin  $\sqrt{n}$  suoraa sinisiksi niin, että suorajoukon minkään äärellisen alueen reuna ei ole kokonaan sininen.

*Huomautus:* Todistukset, joissa  $\sqrt{n}$ :n tilalla on  $c\sqrt{n}$ , saavat pisteitä sen mukaan, mikä on vakion  $c$  arvo.

## Ratkaisuja

**1995.1.** Olkoon  $Q$  suorien  $DN$  ja  $XY$  leikkauspiste ja olkoon  $R$  suorien  $AM$  ja  $XY$  leikkauspiste. Koska  $\angle AMC = 90^\circ = \angle AZP$ , niin kolmiot  $PCZ$ ,  $CAM$  ja  $RAZ$  ovat suorakulmaisia. Lisäksi kolmioilla on pareittain yhteinen kulma. Kolmiot, erityisesti  $PCZ$  ja  $RAZ$ , ovat siis yhdenmuotoisia. Samoin nähdään, että kolmiot  $PBZ$  ja  $QDZ$  ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{ZP}{CZ} = \frac{AZ}{ZR} \quad \text{ja} \quad \frac{ZP}{BZ} = \frac{DZ}{ZQ}.$$

Mutta jos lasketaan pisteen  $Z$  potenssi molempien tehtävässä esiintyvien ympyröiden suhteen, saadaan

$$AZ \cdot CZ = ZX \cdot ZY = BZ \cdot DZ.$$

Siis  $ZP \cdot ZR = CZ \cdot AZ = BZ \cdot DZ = ZP \cdot ZQ$ . Kun supistetaan  $ZP$ :llä, saadaan  $ZR = ZQ$ . Koska  $R$  ja  $Q$  ovat samalla puolella suoraa  $AD$ , on oltava  $R = Q$ . – Huomattakoon, että päättely ei riipu siitä, onko  $P$  janalla  $XY$  vai sen ulkopuolella. (Tuomas Korppi, Jukka Suomela, Toni Leppäkorpi)

**1995.2.** Merkitään  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$  ja  $z = \frac{1}{c}$ . Silloin  $xyz = 1$  ja

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2} = \frac{x^3yz}{y+z} + \frac{xy^3z}{x+z} + \frac{xyz^3}{x+y} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Voidaan olettaa, että  $x \leq y \leq z$ , jolloin myös  $\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{x+y}$ . Käyte-

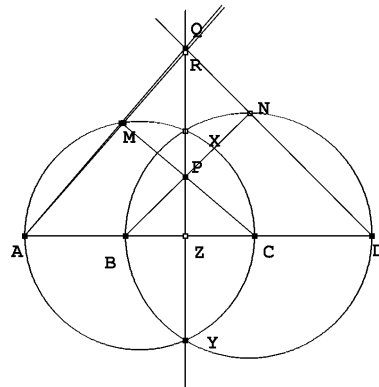
tään ensin Tšebyševin epäyhtälöä, jonka mukaan  $3 \left( \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{x+y} \right) \geq (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} \right)$ , ja sitten aritmeettisen ja harmonisen keskiarvon vä-

listä epäyhtälöä, jonka mukaan  $\frac{1}{3} \left( \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} \right) \geq \frac{3}{y+z+x+z+x+y} = \frac{3}{2x+y+z} = \frac{3}{2(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}}$ . Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyh-

tälön perusteella edelleen  $\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{3}{x+y+z}$ . Näin on päästy epäyhtälöön

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{9}{2} \frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}.$$

Tehtävän epäyhtälöön päästään tästä käyttämällä nimittäjään Cauchyn – Schwarzin epäyhtälöä muodossa  $(x+y+z)^2 = (1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z)^2 \leq (1+1+1)(x^2+y^2+z^2) = 3(x^2+y^2+z^2)$ . (Uoti Urpala)



**1995.3.** Havaitaan heti, että jos  $n = 4$ , pisteet  $A_1, A_2, A_3$  ja  $A_4$ , jotka ovat sellaisen neliön kärjet, jonka ala on  $6a$ , toteuttavat tehtävän ehdot, kun kaikki  $r_i$ :t ovat  $= a$ . Todistetaan sitten, että vaadittuja pisteitä ei ole, jos  $n = 5$ . Jos pisteet  $A_1, A_2, A_3$  ja  $A_4$  ovat kuperan nelikulmion kärjet ja nelikulmion ala on  $A$ , niin  $A = (r_1 + r_2 + r_3) + (r_1 + r_3 + r_4) = (r_1 + r_2 + r_4) + (r_2 + r_3 + r_4)$ , mistä seuraa  $r_2 + r_4 = r_1 + r_3$ . Oletetaan nyt, että pisteet  $A_1, \dots, A_5$  ja luvut  $r_1, \dots, r_5$  toteuttaisivat tehtävän ehdot. Pisteet voivat sijaita tasossa kolmella eri tavalla:

1°. Pisteet ovat kuperan viisikulmion kärjet. Silloin jokaiset neljä pisteistä ovat kuperan nelikulmion kärjet, ja edellä todistettua relaatiota hyväksi käyttäen saadaan  $r_2 + r_5 = r_1 + r_3 = r_2 + r_4, r_1 + r_4 = r_2 + r_5 = r_1 + r_3$  jne., ja näistä  $r_5 = r_4 = r_3 = r_2 = r_1$ . Tämä merkitsee, että kolmiot  $A_1A_2A_3$  ja  $A_1A_2A_4$  ovat yhtä suuret. Viisikulmion kuperuuden vuoksi  $A_4$  ja  $A_3$  ovat samalla puolella suoraa  $A_1A_2$ . Koska myös kolmiot  $A_3A_4A_2$  ja  $A_3A_4A_5$  ovat yhtä suuret,  $A_5$  on yhtä etäällä suorasta  $A_3A_4$  kuin  $A_2$ . Jos pisteet olisivat samalla puolella suoraa  $A_3A_4$ ,  $A_5, A_1$  ja  $A_2$  olisivat samalla suoralla. Siis  $A_5$  on kaksi kertaa niin kaukana suorasta  $A_1A_2$  kuin  $A_3$ . Tämä on selvästi ristiriidassa sen kanssa, että kolmioilla  $A_1A_2A_3$  ja  $A_1A_2A_5$  on sama ala.

2°. Neljä pisteistä, esim.  $A_1, \dots, A_4$  ovat kuperan nelikulmion kärjet ja viides on tämän nelikulmion sisällä. Pisteiden numerointi voidaan valita niin, että  $A_5$  on kolmion  $A_2A_4A_1$  sisällä. Kun sovelletaan alussa todistettua yhtälöä kuperiin nelikulmioihin  $A_1A_2A_3A_4$  ja  $A_5A_2A_3A_4$ , saadaan  $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 = r_5 + r_3$ , eli  $r_1 = r_5$ . Tämä merkitsee, että kolmioilla  $A_2A_4A_1$  ja  $A_2A_4A_5$  on sama ala, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että piste  $A_5$  on kolmion  $A_2A_4A_1$  sisällä.

3°. Mitkään neljä pistettä eivät ole kuperan nelikulmion kärjet. Silloin pisteistä löytyy kolme sellaista, esim.  $A_1, A_2$  ja  $A_3$ , että kaksi muuta pistettä ovat näiden kolmen pisteen muodostaman kolmion sisäpisteitä. Numerointi voidaan tehdä niin, että lisäksi  $A_5$  on kolmion  $A_1A_2A_4$  sisällä. Kun kolmion  $A_1A_2A_3$  ala lasketaan kahdella eri tavalla, saadaan  $r_1 + r_2 + r_3 = (r_1 + r_2 + r_5) + (r_2 + r_3 + r_5) + (r_3 + r_1 + r_5)$ , eli  $r_5 = -\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$ .

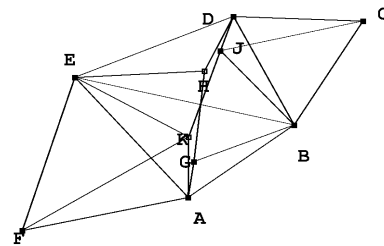
Täsmälleen samoin saadaan  $r_4 = -\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$ . Siis kolmioilla  $A_1A_2A_5$  ja  $A_1A_2A_4$  on sama ala, mikä on mahdotonta samoin perustein kuin kohdassa 2°.

Jos  $n > 5$ , voidaan aina valita viisi pistettä ja rajoittaa tarkastelu niihin. Tehtävällä ei siis ole muita ratkaisuja kuin  $n = 4$ . (*Tuomas Korppi*)

**1995.4.** Kun  $x_i$  ratkaistaan yhtälöstä (ii), saadaan kaksi ratkaisua,  $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$  ja  $x_i = \frac{x_{i-1}}{2}$ . Induktiivisesti todetaan, että jokainen  $x_i$  on muotoa  $2^k x_0^{\pm 1}$ , missä  $k$  on kokonaisluku; siirtyminen luvusta  $x_{i-1}$  lukuun  $x_i$  aiheuttaa joko  $k$ :n pienenemisen yhdellä tai sekä  $k$ :n että  $x_0$ :n eksponentin muuttumisen vastaluvukseen. Jos  $x_0$ :sta  $x_{1995}$ :een siirryttäessä olisi tehty parillinen määrä käänteislukuoperaatioita, olisi  $|k|$ :ta jouduttu muuttamaan pariton määrä kertoja. Silloin olisi  $x_{1995} = 2^{2\ell+1}x_0$ , eikä voisi olla  $x_{1995} = x_0$ . Käänteislukuoperaatioita on siis ollut pariton määrä, ja  $x_{1995} = 2^{2\ell}x_0^{-1} = x_0$ , josta  $x_0 = 2^\ell$ . Koska käänteisoperaatioita on ollut ainakin yksi, on  $2\ell$  enintään 1994. Siis  $x_0 \leq 2^{997}$ . Helposti nähdään, että jos  $x_0 = 2^{997}$ , niin jono, jossa  $x_i = \frac{x_{i-1}}{2}$ , kun  $i = 1, 2, \dots, 1994$  ja

$x_{1995} = \frac{1}{x_{1994}}$ , toteuttaa tehtävän ehdot. Suurin  $x_0$  on siis  $2^{1995}$ . (Toni Leppäkorpi)

**1995.5.** Havaitaan, että kolmiot  $BCD$  ja  $AEF$  ovat tasasivuisia. Näin ollen  $BA = BC = BD$  ja  $DE = EA = EF$ . Kolmiot  $ABE$  ja  $DBE$  ovat yhtenevät, joten  $BDEA$  on symmetrinen suoran  $BE$  suhteen. Olkoot  $J$  ja  $K$  pisteiden  $G$  ja  $H$  kuvat peilauksessa yli suoran  $BE$ . Silloin  $GH = JK$ ,  $AG = DJ$ ,  $GB = JB$ ,  $DH = AK$  ja  $HE = KE$ . Pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $G$  ovat sellaisen ympyrän kehällä, jonka keskipisteestä jana  $AB$  näkyy  $120^\circ$ :n kulmassa (kehäkulmaa  $120^\circ$  vastaa keskuskulma  $240^\circ = 360^\circ - 120^\circ$ ).



Peilauksessa tämän ympyrän keskipiste kuvautuu kolmion  $BCD$  keskipisteeksi, sillä jana  $BD$  näkyy pisteestä  $C$   $60^\circ$ :n kulmassa. On tunnettua, että mielivaltaiselle pisteelle  $J$  tasasivuisen kolmion  $BCD$  ympäri piirretyn ympyrän kaarella  $BD$  pätee  $CJ = BJ + DJ$ . (Todistus: Valitaan  $CJ$ :ltä piste  $L$  niin, että  $JLD$  on tasasivuinen kolmio. Silloin  $\angle CDL = 60^\circ - \angle LDB = \angle BDJ$ . Kehäkulmalauseen nojalla  $\angle JBD = \angle JCD$ . Koska  $BD = CD$ , kolmiot  $CDL$  ja  $BDJ$  ovat yhtenevät (ksk). Siis  $CL = BJ$  ja  $LJ = LD = JD$  ja  $CJ = CL + LJ = BJ + DJ$ .) Samoin nähdään, että  $FK = EK + AK$ . Nyt saadaan  $AG + GB + GH + DH + HE = BJ + DJ + JK + AK + EK = CJ + JK + KF \geq CF$ , sillä jana  $CF$  on enintään yhtä pitkä kuin mikä tahansa pisteet  $C$  ja  $F$  yhdistävä murtoviiva. (Jouni Seppänen)

**1995.6.** Joukot  $\{1, 2, \dots, p\}$  ja  $\{p + 1, p + 2, \dots, 2p\}$  toteuttavat ehdot: ensimmäisen alkioiden summa on  $\frac{p(p+1)}{2}$  ja jälkimmäisen  $\frac{p(p+1)}{2} + p^2$ . Tarkastellaan muita

$p$ -alkioisia osajoukkoja; niitä on  $\binom{2p}{p} - 2$ . Merkitään joukon  $A$  alkioiden summaa symbolilla  $g(A)$ . Osoitetaan, että jokaista  $r$ ,  $0 \leq r < p$  kohden on yhtä monta osajoukkoa  $A$ , jolle  $g(A) \equiv r \pmod{p}$ . Tästä seuraa erityisesti, että osajoukkoja, joille  $g(A) \equiv 0 \pmod{p}$ , on  $\frac{1}{p} \left( \binom{2p}{p} - 2 \right) + 2$  kappaletta. Tämän osoittamiseksi tarkastellaan  $p$ -alkioisten osajoukkojen  $S$  joukossa määritettyä funktiota  $f$ , joka määritellään seuraavasti: jos  $n \geq p + 1$ , niin  $n \in S \Leftrightarrow n \in f(S)$ , jos  $2 \leq n \leq p$ , niin  $n - 1 \in S \Leftrightarrow n \in f(S)$  ja  $p \in S \Leftrightarrow 1 \in f(S)$ . Jos joukossa  $S$  on  $m$  alkioita, jotka ovat  $\leq p$ , niin  $g(f(S)) = g(S) + m \pmod{p}$ . Lisäksi  $f^p(S) = S$  aina kun  $S$ :ssä on  $m$ ,  $1 \leq m \leq p - 1$  alkioita, jotka ovat  $\leq p$ . Tästä seuraa, että  $f$  on bijektio. Koska  $p$  on alkuluku, kongruenssiyhtälöllä  $mx \equiv q \pmod{p}$  on yksikäsitteinen ratkaisu  $r$ . Tarkastellaan joukkoja, joilla tasan  $m$  luvuista  $1, 2, \dots, p$  kuuluu joukkoon  $S$ . Tällaiselle joukolle  $g(S) \equiv 0$  jos ja vain jos  $g(f^r(S)) \equiv q$ . Näin saadaan yksikäsitteinen vastaavuus niiden joukkojen, joille  $g(S) \equiv 0$ , ja niiden joukkojen, joille  $g(S) \equiv q$ , kanssa. Tällaisia joukkoja on siis yhtä paljon. (Uoti Urpala)

**1996.1.** Siirrytään tarkastelemaan pisteiden  $(i, j)$ ,  $0 \leq i \leq 19$ ,  $0 \leq j \leq 11$ , muodostamaa hilaa  $\mathcal{A}$ . Tehtävä on löytää siirrot, joilla päästään pisteestä  $(0, 0)$  pisteeseen  $(0, 19)$ . Siirrot ovat muotoa  $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ , missä  $a^2 + b^2 = r$ . (a) Jos  $r$  on parillinen, niin  $a$  ja  $b$  ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia. Siis  $a + b$  on aina parillinen. Pisteestä

$(x, y)$ , jossa  $x + y$  on parillinen (kuten  $(0, 0)$ ) ei voi päästä pisteeseen  $(x', y')$ , missä  $x' + y'$  on pariton (kuten  $(0, 19)$ ). Jos  $r$  on jaollinen kolmella, sekä  $a$ :n että  $b$ :n tulee olla jaollisia kolmella. (Jos  $x$  ei ole jaollinen kolmella, niin  $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ .) Koska 19 ei ole jaollinen kolmella, tehtävä ei onnistu. (b) Olkoon  $r = 73 = 8^2 + 3^2$ . Merkitään  $a$ :lla,  $b$ :llä,  $c$ :llä ja  $d$ :llä siirtojen  $\pm(8, 3)$ ,  $\pm(8, -3)$ ,  $\pm(3, 8)$  ja  $\pm(3, -8)$  lukumääriä ( $a$  on tarkemmin sanoen siirtojen  $(8, 3)$  ja  $(-8, -3)$  lukumäärien erotus.) Onnistuneessa siirtosarjassa on oltava  $8(a+b)+3(c+d)=19$  ja  $3(a-b)+8(c-d)=0$ . Eräs nämä ehdot toteuttava ratkaisu olisi  $(a+b, c+d) = (2, 1)$ ,  $(a-b, c-d) = (2, -1)$  eli  $a = -3$ ,  $b = 5$ ,  $c = 2$ ,  $d = -1$ . Yritetään ratkaisua kolmella muotoa  $(-8, -3)$ , viidellä muotoa  $(8, -3)$ , kahdella muotoa  $(3, 8)$  ja yhdellä muotoa  $(-3, 8)$  olevalla siirrolla. Osoittautuu, että  $(0, 0) \rightarrow (3, 8) \rightarrow (11, 5) \rightarrow (19, 2) \rightarrow (16, 10) \rightarrow (8, 7) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (8, 1) \rightarrow (11, 9) \rightarrow (3, 6) \rightarrow (11, 3) \rightarrow (19, 0)$  on kelvollinen siirtojono. (c) Olkoon  $r = 97$ . Ainoa mahdollisuus kirjoittaa 97 kahden neliön summaksi on  $9^2 + 4^2$ . Jaetaan hila  $\mathcal{A}$  kahdeksi joukoksi  $\mathcal{B} = \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq 19, 4 \leq j \leq 7\}$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ . Selvästi jokainen siirto  $(\pm 9, \pm 4)$  johtaa joukosta  $\mathcal{B}$  joukkoon  $\mathcal{C}$  ja päinvastoin, kun taas jokainen muotoa  $(\pm 4, \pm 9)$  oleva siirto johtaa joukosta  $\mathcal{C}$  joukkoon  $\mathcal{C}$ . Edellisen tyyppin siirrot muuttavat  $x$ -koordinaatin parillisuuden, joten niitä pitäisi olla pariton määrä. Mutta koska lähtöpiste on  $\mathcal{C}$ :ssä, jokainen tällainen siirtosarja johtaa joukon  $\mathcal{B}$  pisteeseen. Tapauksessa  $r = 97$  siirtoja ei voi tehdä vaaditulla tavalla.

**1996.2.** Olkoot  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  pisteen  $P$  kohtisuorat projektiot sivuilla  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$ . Nelikulmio  $AZPY$  on jännenelikulmio ja  $PA$  nelikulmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, joten laajennettu sinilause sovellettuna kolmioon  $AZY$  antaa

$$\frac{YZ}{\sin A} = PA.$$

Samoin

$$\frac{ZX}{\sin B} = PB, \quad \frac{XY}{\sin C} = PC.$$

Jännenelikulmioista ja kolmion kulmien summalauseesta saadaan myös

$$\angle XYZ = \angle XYP + \angle PYZ = \angle BCP + \angle PAB = \angle APC - \angle ABC.$$

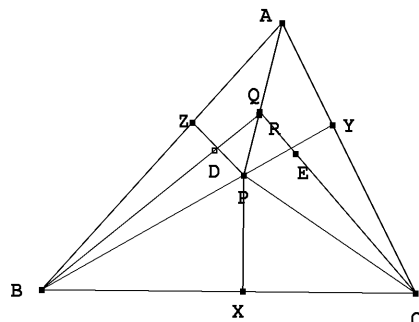
Vastaavasti  $\angle YZX = \angle BPA - \angle ACB$ . Tehtävän oletuksen perusteella  $\angle XYZ = \angle XZY$ , joten kolmio  $XYZ$  on tasakylkinen,  $XY = XZ$ . Laajennettu sinilause kolmioihin  $BXZ$  ja  $CYX$  sovellettuna antaa  $PB \sin B = PC \sin C$ . Tästä ja sinilauseesta kolmioon  $ABC$  sovellettuna seuraa  $PB \cdot AC = PC \cdot AB$  eli

$$\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}.$$

Olkoot  $Q$  ja  $R$  pisteet, joissa  $BD$  ja  $CE$  leikkaavat  $AP$ :n. Kulmanpuolittajalause ja edellinen yhtälö osoittavat, että

$$\frac{PQ}{QA} = \frac{PR}{RQ},$$

joten  $Q = R$ .



**1996.3.** Nollafunktio  $f(x) = 0$  kaikilla  $x$  on yksi ratkaisu. Sijoittamalla  $m = n = 0$  funktionaaliyhtälöön saadaan  $f(0) = 0$  ja  $f(f(n)) = f(n)$  kaikilla  $n$ . Tutkittava funktionaaliyhtälö on siis

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n).$$

Jos  $f$  ei ole identtisesti nolla, on olemassa lukuja  $x$ , joille  $f(x) = x$ ; näitä kutsutaan  $f$ :n kiintopisteiksi. Olkoon  $a$  pienin tällainen luku. Induktiolla näytetään, että  $f(ka) = ka$  kaikilla  $k \geq 1$ : oletetaan, että  $f(ka) = ka$ ,  $k \geq 1$ . Silloin  $f(a + ka) = f(a + f(ka)) = f(a) + f(ka) = (1+k)a$ . Jos  $a = 1$ ,  $f(n) = n$  kaikilla  $n$ . Oletetaan, että  $a > 1$ . Osoitetaan, että kaikki  $f$ :n kiintopisteet ovat muotoa  $ka$ . Olkoon  $b > a$  mielivaltainen kiintopiste. On olemassa  $q$  ja  $r$ ,  $0 \leq r < a$ , siten, että  $b = r + qa$ . Nyt  $r + qa = b = f(b) = f(r + qa) = f(r + f(qa)) = f(r) + f(qa) = f(r) + qa$ , joten  $r = f(r)$ . Koska  $r < a$ , on oltava  $r = 0$ . Koska aikaisemmin sanotun mukaan kaikki luvut  $f(n)$  ovat kiintopisteitä, on olemassa luvut  $n_0 = 0$ ,  $n_1, n_2, \dots, n_{a-1}$  siten, että  $f(i) = n_i a$ ,  $0 \leq i < a$ . Jos  $n > a$ , niin  $n = ka + i$ ,  $0 \leq i < a$ . Silloin  $f(n) = f(i + ka) = n_i a + ka$ . Olkoot toisaalta  $a$ , ja jos  $a > 1$ ,  $n_1, n_2, \dots, n_{a-1}$  mielivaltaisia ei-negatiivisia kokonaislukuja. Asetetaan  $n_0 = 0$  ja mielivaltaiselle  $n = ka + i$ ,  $0 \leq k$ ,  $0 \leq i < a$   $f(n) = (k + n_i)a$ . Osoitetaan, että näin määritelty  $f$  toteuttaa funktionaaliyhtälön. Olkoon  $n = ka + i$ ,  $m = la + j$ . Silloin todellakin  $f(m + f(n)) = f(la + j + ka + n_i a) = (l + k + n_i)a + n_j a = f(m) + f(n)$ .

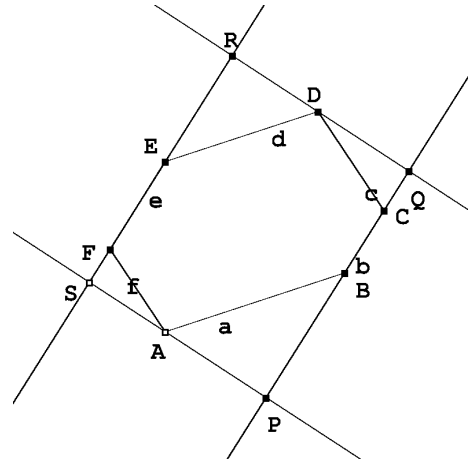
**1996.4.** Olkoon  $15a + 16b = r^2$  ja  $16a - 15b = s^2$ . Silloin  $r^4 + s^4 = (15a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2) = 13 \cdot 37 \cdot (a^2 + b^2)$ . Kokeilemalla (riittää, kun tutkitaan tapaukset  $1 \leq r \leq 6$ ) nähdään helposti, että jos  $r$  ei ole 13:lla jaollinen, niin  $r^4$  on kongruentti 1:n, 3:n tai 9:n kanssa modulo 13.  $r^4 + s^4$  on kongruentti 0:n kanssa modulo 13 vain, jos sekä  $r$  että  $s$  ovat jaollisia 13:lla. Samoin kokeilemalla (tapaukset  $1 \leq r \leq 18$ ) nähdään, että  $r^4 \equiv 1, 16, 7, 34, 33, 1, 33, 26, 12, 10, 26, 16, 34, 10, 9, 9, 12, 7 \pmod{37}$ . Nähdään heti, että  $r^4 + s^4$  on jaollinen 37:llä vain, jos sekä  $r$  että  $s$  ovat jaollisia 37:llä. Siis  $r \geq 481$  ja  $s \geq 481$ . Kun asetetaan  $a = 481 \cdot 31$  ja  $b = 481$ , nähdään, että  $r = 481$  voidaan saavuttaa. Kysytty pienin neliö on siis  $481^2$ .

**1996.5.** Oletuksen mukaisista yhdensuuntaisuusehdoista seuraa, että  $\angle BAF = \angle EDC = \alpha$ ,  $\angle CBA = \angle FED = \beta$  ja  $\angle AFE = \angle DCB = \gamma$ . Laajennetun sinilauseen perusteella

$$2R_A = \frac{BF}{\sin \alpha}, \quad 2R_C = \frac{BD}{\sin \gamma}, \quad 2R_E = \frac{DF}{\sin \beta}. \quad (1)$$

Olkoot  $P$  ja  $S$   $A$ :n kohtisuorat projektiot suorilla  $BC$  ja  $FE$  ja  $Q$  ja  $R$  vastaavasti  $D$ :n kohtisuorat projektiot näillä suorilla. Merkitään kuusikulmion sivujen  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  ja  $FA$  pituuksia kirjaimilla  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  ja  $f$ . Silloin  $PS = a \sin \beta + f \sin \gamma = QR = d \sin \beta + c \sin \gamma$ , ja

$$2BF \geq (a \sin \beta + f \sin \gamma) + (c \sin \gamma + d \sin \beta).$$



Samoin

$$\begin{aligned} 2DB &\geq (c \sin \alpha + b \sin \beta) + (f \sin \alpha + e \sin \beta), \\ 2FD &\geq (e \sin \gamma + d \sin \alpha) + (b \sin \gamma + a \sin \alpha). \end{aligned}$$

Kun tämä yhdistetään epäyhtälöihin (1) ja otetaan huomioon epäyhtälö  $x + x^{-1} \geq 2$ , saadaan, niin kuin pitääkin,

$$\begin{aligned} 4(R_A + R_C + R_E) &\geq a \left( \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right) + b \left( \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) + \dots + f \left( \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right) \\ &\geq 2(a + b + \dots + f) = 2p. \end{aligned}$$

**1996.6.** Voidaan olettaa, että  $p$ :llä ja  $q$ :lla ei ole yhteisiä tekijöitä: jos olisi  $(p, q) = d > 0$ , niin voitaisiin siirtyä tarkastelemaan lukuja  $p' = p/d$ ,  $q' = q/d$  ja  $x'_i = x_i/d$ . Jos indeksejä  $i$ , joilla  $x_i - x_{i-1} = p$  on  $k$  kappaletta, niin indeksejä  $i$ , joilla  $x_i - x_{i-1} = -q$ , on  $n - k$  kappaletta. On oltava  $kp = (n - k)q$ , ja koska  $p$ :llä ja  $q$ :lla ei ole yhteisiä tekijöitä, on  $k = aq$  ja  $(n - k) = ap$  jollakin  $a$ . Tästä seuraa, että  $n = a(p + q)$ ; koska  $n > p + q$ , on  $a \geq 2$ .

Merkitään  $y_i = x_{i+p+q} - x_i$ ,  $0 \leq i \leq n - p - q$ . Jos jokin  $y_i = 0$ , todistus on valmis. Muussa tapauksessa tarkastellaan lukuja  $x_{i+1} - x_i$ ,  $x_{i+2} - x_{i+1}$ ,  $\dots$ ,  $x_{i+p+q} - x_{i+p+q-1}$ . Näistä  $r$  kappaletta olkoon  $= p$  ja  $p + q - r$  kappaletta olkoon  $= -q$ . Siis  $y_i = rp - (p + q - r)q = (p + q)(r - q)$ . Toisaalta  $y_{i+1} - y_i = (x_{i+p+q+1} - x_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i)$  on joko 0 tai  $\pm(p + q)$ . Koska

$$y_0 + y_{p+q} + y_{2(p+q)} + \dots + y_{n-p+q} = x_n - x_0 = 0,$$

ei ole mahdollista, että kaikki  $y_{l(p+q)}$ :t olisivat positiivisia tai kaikki negatiivisia. Luvuista  $y_{l(p+q)}$  jotkin kaksi vierekkäistä ovat siten erimerkkisiä. Koska  $y_{l(p+q)}$ :t ovat  $(p + q)$ :n kerrannaisia, ja kahden vierekkäisen erotus on itseisarvoltaan  $p + q$ , on jonkin  $y_i$ :n oltava nolla.

**1997.1.** (a) Voimme olettaa, että kolmion kärjet ovat  $(0, 0)$ ,  $(0, m)$  ja  $(m, n)$ . Oletetaan nyt ja myöhemmin, että neliö, jonka keskipiste on  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , on musta. Tällöin mustia ovat täsmälleen ne neliöt, joiden keskipiste on  $\left(\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} + j\right)$ , missä  $k + j$  on parillinen. Täydennetään kolmio suorakaiteeksi, jonka neljäs kärki on  $(0, n)$ . Jos  $m$  ja  $n$  ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia,  $180^\circ$ :n kierto kolmioiden yhteisen hypotenuusan keskipisteen ympäri kuvaa kolmion toisikseen, jokaisen valkean neliön valkeaksi neliöksi ja jokaisen mustan neliön mustaksi neliöksi. Mustan ja valkean alan erotus on kummassakin kolmiossa sama. Jos  $mn$  on parillinen, suorakaiteessa on yhtä monta valkeaa neliötä kuin mustaa, joten kummassakaan kolmiossa ei voi olla toista väriä enemmän kuin toista. Tässä tapauksessa  $S_1 - S_2 = 0 = f(m, n)$ . Jos  $mn$  on pariton, on suorakaiteessa mustia ruutuja yksi enemmän kuin valkoisia. Tässä tapauksessa  $|S_1 - S_2| = \frac{1}{2}$ .

(b) Oletetaan, että  $n$  on pariton,  $m$  parillinen. Kolmiossa, jonka kärjet ovat  $(0, 0)$ ,  $(m, 0)$  ja  $(m, n-1)$  on valkoisen ja mustan osan ala sama (tämä pätee myös, kun  $n = 1$ ). Mustan tai valkean ylimäärä sisältyy siten kokonaan kolmioon, jonka kärjet ovat  $(0, 0)$ ,  $(m, n-1)$  ja  $(m, n)$ . Tämän kolmion ala on  $\frac{1}{2}m \leq \frac{1}{2} \max(m, n)$ .

(c) Arvioidaan itseisarvoa  $|S_1 - S_2|$  tapauksessa, jossa  $m$  on parillinen ja  $n = m + 1$ . Aikaisemman perusteella tiedetään, että  $|S_1 - S_2|$  on sama kuin mustan ja valkean alan erotus kolmiossa  $T$ , jonka kärjet ovat  $(0, 0)$ ,  $(m, m)$  ja  $(m, m+1)$ . Suora  $y = \frac{m+1}{m}x$  leikkaa suorat  $x = k$  ja  $y = k$  pisteissä  $x = \frac{(m+1)k}{m}$  ja  $y = \frac{mk}{m+1}$ . Tämän perusteella on helppo laskea, että suorien  $x = k$  ja  $x = k+1$  väliin jäävän  $T$ :n valkean osan ala on

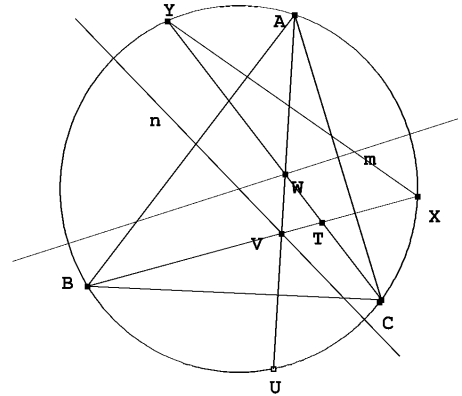
$$\frac{1}{2} \left( k - \frac{mk}{m+1} \right) \left( \frac{(m+1)k}{m} - k \right) = \frac{k^2}{2m(m+1)}.$$

$T$ :n valkean osan kokonaisala on siis

$$\frac{1}{2m(m+1)} \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{2m+1}{12} < \frac{m}{6}$$

(koska  $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ ). Mustaa alaa on siis oltava enemmän kuin  $\frac{m}{3}$ , joten mustan ja valkean alan erotus on suurempi kuin  $\frac{m}{6}$ . Tämä on suurempi kuin mikä hyvänsä  $C$ , kun  $m$  on tarpeeksi suuri.

**1997.2.** Koska  $A$  on  $ABC$ :n kulmista pienin,  $AC$ :n keskinormaali leikkaa myös sivun  $AB$  ja  $AB$ :n keskinormaali sivun  $AC$ . Tästä seuraa, että pisteet  $V$  ja  $W$  ovat kolmion  $ABC$  sisäpisteitä ja  $T$  samoin. Leikatkoon suora  $BT$  kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä  $X$  ja suora  $CT$  pisteessä  $Y$ . Koska  $AC$ :n keskinormaali  $n$  on ympyrän halkaisija, peilaus  $n$ :ssä vie janan  $AU$  janaksi  $CY$  ( $A$  peilautuu  $C$ :ksi,  $W$  pysyy paikallaan, ja  $U$ :n kuva on  $CW$ :n ja ympyrän leikkauspiste, siis  $Y$ ). Siis  $AU = YC$ . Samoin osoitetaan (peilataan  $AB$ :n keskinormaalissa  $m$ ), että  $AU = BX$ . Tästä seuraa, että kolmiot  $BCX$  ja  $YXC$  ovat yhtenevät (yhteinen sivu  $XC$  ja  $\angle CBX = \angle XYC$ ). Siis  $XY = BC$ . Edelleen kolmiot



$BCT$  ja  $YXT$  ovat yhtenevät (kks). Siis  $YT = BT$  ja  $AU = YC = YT + TC = BT + TC$ .

**1997.3.** Olkoon  $p = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  mielivaltainen jonon  $p_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  permutaatio. Merkitään  $s(p) = y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$ . Jos  $p'$  on se  $p_0$ :n permutaatio, jossa alkiot ovat täsmälleen käänteisessä järjestyksessä, niin  $|s(p_0) + s(p')| = |(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) +$



$(x_n + 2x_{n-1} + \dots + nx_1)| = (n+1)|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = n+1$ . Jos jompikumpi luvuista  $|s(p_0)|$ ,  $|s(p')|$  on  $\leq \frac{n+1}{2}$ , tehtävä on ratkaistu. Ellei näin ole,  $s(p_0)$  ja  $s(p')$  ovat erimerkkiset. Permutaatio  $p_0$  voidaan muuntaa permutaatioksi  $p'$  tekemällä ketju peräkkäisiä muunnoksia, joissa kahden vierekkäisen alkion paikka vaihdetaan: vaihdetaan esim. ensin  $x_1$  ja  $x_2$ , sitten  $x_1$  ja  $x_3$ , jne., kunnes  $x_1:n$  ja  $x_n:n$  vaihdon jälkeen  $x_1$  on viimeisenä, siirretään sitten  $x_2$  samalla menetelmällä toiseksi viimeiseksi jne. Jos  $p_i = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  ja  $p_{i+1} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  ovat permutaatioita, joissa  $y_k = z_{k+1}$ ,  $y_{k+1} = z_k$  ja  $y_j = z_j$ , kun  $j \neq k, k+1$ , niin  $|s(p_i) - s(p_{i+1})| = |ky_k + (k+1)y_{k+1} - kz_k - (k+1)z_{k+1}| = |y_{k+1} - y_k| \leq |y_k| + |y_{k+1}| \leq n+1$ . Jos nyt  $p_0, p_1, \dots, p_m = p'$  on ketju permutaatioita, jossa kaksi peräkkäistä saadaan toisistaan kahden vierekkäisen alkion vaihdolla, niin luvut  $s(p_0), s(p_1), \dots, s(p_m)$  eroavat toisistaan kukin enintään määrällä  $n+1$ , mutta  $s(p_0)$  ja  $s(p_m)$  ovat suljetun välin  $I = \left[-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right]$  eri puolilla sijaitsevia lukuja. Ainakin jonkin luvuista  $s(p_i)$  on siten kuuluttava väliin  $I$ .

**1997.4.** (a) Olkoon  $n > 1$  mielivaltainen ja olkoon  $A = (a_{ij})$   $n \times n$ -hopeamatriisi.  $A$ :n päälävistäjällä on enintään  $n$  eri alkioita, joten on olemassa  $x \in S$ , joka ei ole  $A$ :n päälävistäjällä. Sanomme  $i$ :n vaaka- ja  $i$ :n pystyriivin yhdistettä *ristiksi*  $i$ . Olkoon  $x = a_{ij}$ . Sanomme, että  $x$  liittää ristin  $i$  ja ristin  $j$ . Koska  $x$  esiintyy jokaisessa ristissä vain kerran,  $x$  ei voi liittää ristiä  $i$  mihinkään muuhun ristiin. Toisaalta  $x$  liittää jokaisen ristin johonkin toiseen. Tästä seuraa, että ristien määrä hopeamatriisissa on aina parillinen; 1997 puolestaan on pariton.

(b) Matriisi

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

on  $2 \times 2$ -hopeamatriisi. Olkoon  $A_n$   $n \times n$ -hopeamatriisi. Olkoon  $B_n$  matriisi, joka saadaan lisäämällä  $2n$  jokaiseen  $A$ :n alkioon, ja olkoon  $C_n$  matriisi, joka saadaan  $B_n$ :stä korvaamalla jokainen  $B_n$ :n päälävistäjän alkio luvulla  $2n$ . Tällöin

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & A_n \end{pmatrix}$$

on  $2n \times 2n$ -hopeamatriisi. Jos nimittäin  $i \leq n$ , niin  $A_{2n}$ :n ristissä  $i$  ovat ensinnäkin kaikki luvut  $1, 2, \dots, 2n-1$  ( $A_n$ :n osuus);  $1+2n, 2+2n, \dots, 2n-1+2n = 2(2n)-1$  ( $B_n$ :n ja  $C_n$ :n alkio, jotka ovat muotoa  $A_n$ :n alkio  $+ 2n$ ) sekä  $2n$  ( $C_n$ :n lävistäjäalkio). Näin ollen  $n \times n$  hopeamatriiseja on olemassa ainakin kaikilla  $n = 2^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  [Hopeamatriisimimityksen innoittajina olivat Argentiina ja Mar del Plata: hopea on latinaksi *argentum* ja espanjaksi *plata*]

**1997.5.** Olkoot  $a$  ja  $b$  tehtävän yhtälön toteuttavia kokonaislukuja. Luvuilla  $a$  ja  $b$  on samat alkutekijät:  $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ ,  $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ ,  $\alpha_i, \beta_i \geq 1$ . Koska yhtälön molempien puolien alkutekijöihin jako on sama, on oltava  $\alpha_i b^2 = \beta_i a$  kaikilla  $i$ . Siis

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{a}{b^2} = k$$

kaikilla  $i$ . Tästä seuraa, että  $a = b^k$  ja edelleen  $kb^2 = b^k$  ja  $k = b^{k-2}$ . Koska  $a$  ja  $b$  ovat kokonaislukuja,  $k$  on rationaaliluku. Kokonaisluvun rationaalilukueksponenttinen potenssi on rationaalinen vain, kun eksponentti on kokonaisluku. Siis  $k$  on kokonaisluku. Jos  $k = 1$ , niin  $b = 1$  ja  $a = 1$ . Jos  $k = 2$ , saadaan  $2 = b^0 = 1$ . Siis  $k \neq 2$ . Jos  $k = 3$ , saadaan  $3 = b^1 = b$ ,  $a^9 = 3^a$ , josta  $a = 3^3 = 27$ . Jos  $k = 4$ , saadaan  $4 = b^2$ ,  $b = 2$ ,  $a^4 = 4^a$ ,  $a = 2^4 = 16$ . Kun  $k \geq 5$ , yhtälöllä  $k = b^{k-2}$  ei ole ratkaisuja, koska  $k < 2^{k-2}$ , kun  $k \geq 5$ .

**1997.6.** Havaitaan helposti, että  $f(2n) = f(2n+1)$ , koska

$$2n = \sum a_i 2^{b_i} \Leftrightarrow 2n+1 = \sum a_i 2^{b_i} + 1.$$

Vastaavasti jokainen  $2n$ :n esitys joko sisältää ykkösiä, ja tällaisia esityksiä on täsmälleen yhtä paljon kuin  $2n-1$ :n esityksiä, tai sitten se ei sisällä yhtään ykköstä, jolloin kahdella jakamalla saadaan aina  $n$ :n esitys ja kääntäen. Siis  $f(2n) = f(2n-1) + f(n) = f(2n-2) + f(n)$ . Selvästi  $f(1) = 1$ . Määritellään  $f(0) = 1$ .  $f$  on ei-vähenevä. Nyt  $f(0) + f(1) + \dots + f(n) = f(0) + (f(2) - f(0)) + \dots + (f(2n) - f(2n-2)) = f(2n)$ , joten  $f(2n) < 2 + (n-1)f(n) < nf(n)$ , kun  $n \geq 2$ . Siis  $f(2^n) \leq 2^{n-1}f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1} \cdot 2^{n-2}f(2^{n-2}) \leq 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+1}f(2) = 2^{(n-1)n/2} \cdot 2 < 2^{n^2/2}$ , kun  $n \geq 3$ .

Vasemmanpuoleisen epäyhtälön todistamiseksi havaitaan, että kun  $a$  ja  $b$  ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia ja  $b \geq a$ , niin

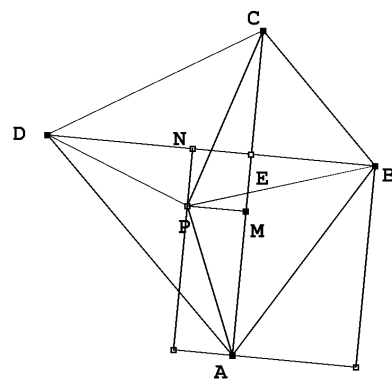
$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a). \quad (1)$$

Näin on varmasti, jos  $a$  ja  $b$  ovat parillisia; jos ne ovat parittomia,  $b = 2j-1$ ,  $a = 2i-1$ ,  $j \geq i$ , niin vasen puoli on  $f(j)$  ja oikea  $f(i)$ , ja väite seuraa  $f$ :n kasvavuudesta. Olkoot nyt  $r \geq k \geq 1$  ja  $r$  parillinen; sijoitetaan kaavaan (1) peräkkäin  $a = r-j$ ,  $b = r+j$ ,  $j = 0, 1, \dots, k-1$  ja lasketaan epäyhtälöt puolittain yhteen; saadaan  $f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1)$  ja (koska  $r$  on parillinen)  $f(r+k) + f(r-k+1) \geq 2f(r)$  kaikilla  $k = 1, 2, \dots, r$ . Kun nämä  $r$  epäyhtälöä lasketaan yhteen, saadaan  $f(1) + f(2) + \dots + f(2r) \geq 2rf(r)$  eli  $f(4r) - 1 \geq 2rf(r)$ ,  $f(4r) > 2rf(r)$  kaikilla parillisilla  $r \geq 2$ . Erityisesti  $f(2^m) \geq 2^{m-1}f(2^{m-2})$ , kun  $m \geq 3$ . Jos  $m$  on parillinen, saadaan  $f(2^m) > 2^{(m-1)+(m-3)+\dots+1}f(1) = 2^{m^2/4}$ . Jos  $m$  on pariton, saadaan vastaavasti  $f(2^n) > 2^{(n^2-1)/4}f(2) = 2^{(n^2-1)/4+1} > 2^{n^2/4}$ .

**1998.1.** Olkoon  $E$   $AC$ :n ja  $BD$ :n leikkauspiste ja  $M, N$   $P$ :n projektio  $AC$ :llä ja  $BD$ :llä. Kolmion  $APB$  ala on

$$AE \cdot BN - \frac{1}{2}(AE \cdot EB + AM \cdot EN + ME \cdot NB) = \frac{1}{2}(AM \cdot BN + EM \cdot EN).$$

Samoin saadaan kolmion  $CPD$  alaksi  $\frac{1}{2}(MC \cdot ND + EM \cdot EN)$ . Kolmioiden alojen erotus on  $\frac{1}{2}(AM \cdot BN - MC \cdot ND)$ . Oletetaan, että  $ABCD$  on jännenelikulmio. Silloin piste  $P$  on  $ABCD$ :n ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja pisteet  $M$  ja  $N$  ovat jänneiden  $AC$  ja  $BD$  keskipisteet. Edellä laskettu kolmioiden alojen erotus on 0. Oletetaan toisaalta, että kolmioiden alat ovat yhtä suuret eli että  $AM \cdot BN = MC \cdot ND$ . Oletetaan, että  $AP > PC$ . Silloin  $AM > MC$ , ja koska  $PB > PD$ , niin myös  $BN > ND$ . Mutta nyt olisi  $AM \cdot BN > MC \cdot ND$ . Vastaavasti oletus  $AP < PC$  johtaa ristiriitaan. Siis  $AP = PC$ , eli nelikulmion kaikki kärjet ovat yhtä etäällä pisteestä  $P$ , joten  $ABCD$  on jännenelikulmio.



**1998.2.** Lasketaan kahdella tavalla sellaisten tilanteiden lukumäärä, joissa kaksi tuomaria antaa jollekin kilpailijalle saman arvostelun. Jos kilpailija saa  $x$  hyväksyntää ja  $b - x$  hylkäystä, pareja, joilta hän saa saman arvostelun, on

$$\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2} = \frac{x(x-1) + (b-x)(b-x-1)}{2} = x(x-b) + \frac{b^2-b}{2} \geq \frac{b^2-b}{2} - \frac{b^2-1}{4} = \frac{(b-1)^2}{4}$$

kappaletta ( $x$  voi olla vain kokonaisluku, joten lauseke minimoituu, kun  $x = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}$ ). Jonkin tuomariparin johonkin kilpailijaan kohdistamia samanlaisia arvosteluja on siis ainakin

$$\frac{a(b-1)^2}{4}$$

kappaletta. Toisaalta tämä luku ei voi ylittää tuomariparien määrää  $\binom{b}{2}$  kerrottuna  $k$ :lla. Siis

$$k \frac{b}{2} = \frac{kb(b-1)}{2} \geq \frac{a(b-1)^2}{4},$$

mikä on yhtäpitävää väitöksen kanssa.

**1998.3.** Jos  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$ , missä  $p_1 < p_2 < \cdots < p_j$  ovat alkulukuja, niin  $d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_j + 1)$  ja  $d(n^2) = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \cdots (2k_j + 1)$ . Jos  $d(n^2)/d(n) = k$  on kokonaisluku, niin  $k$  on välttämättä pariton. Osoitetaan, että jokaisella parittomalla  $k$ :lla on esitys  $\frac{d(n^2)}{d(n)}$ . Koska  $d(1) = d(1^2) = 1$ , luvulla 1 on tämä ominaisuus. Osoitetaan

että jos luvulla  $x$  on esitys  $d(n^2)/d(n)$ , niin jokaisella luvulla  $2^k x - 1$  on tällainen esitys. Olkoon

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = x.$$

Olkoon  $p$  alkuluku, joka ei ole  $n$ :n tekijä. Silloin

$$\frac{d(p^{(x-1)^2} n^2)}{d(p^{x-1} n)} = \frac{(2x-1)x}{x} = 2x-1.$$

Väite on tosi, kun  $k = 1$ . Jos  $k > 1$ , valitaan

$$m = p_1^{2^{k-1}3x-2} p_2^{2^{k-2}3^2} \cdots p_{k-1}^{2 \cdot 3^{k-1}x-2} p_k^{3^{k-1}x-1} n,$$

missä  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ovat eri alkulukuja, jotka eivät ole  $n$ :n tekijöitä. Tällöin

$$\frac{d(m^2)}{d(m)} = \frac{2^k 3x - 3}{2^{k-1} 3x - 1} \frac{2^{k-1} 3^2 x - 3}{2^{k-2} 3^2 x - 1} \cdots \frac{2^2 3^{k-1} x - 3}{2 \cdot 3^{k-1} x - 1} \frac{2 \cdot 3^{k-1} x - 1}{3^{k-1} x} x = 2^k x - 1.$$

Nyt on helppo todistaa induktiolla, että jokaisella parittomalla luvulla on haluttu esitys. Jos se on kaikilla parittomilla luvuilla  $< n$ , niin kirjoitetaan  $n = 2^k x - 1$ , missä  $x < n$  on pariton luku; väite seuraa edellä sanotusta.

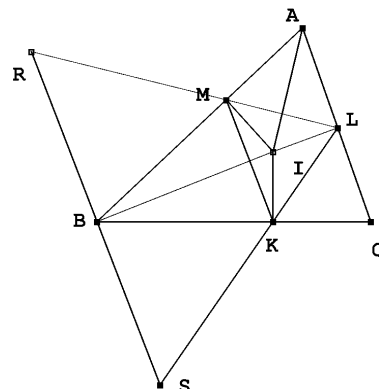
**1998.4.** Jos  $ab^2 + b + 7$  on luvun  $a^2b + a + b$  tekijä, niin se on myös luvun  $b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a$  tekijä. Koska  $ab^2 + b + 7 \geq b^2 - 7a$ , niin  $ab^2 + b + 7 \mid b^2 - 7a$  vain, jos  $b^2 - 7a \leq 0$ . Jaollisuus on voimassa, jos  $b^2 - 7a = 0$ . Koska  $a$  ja  $b$  ovat kokonaislukuja, on oltava  $b = 7k$ ,  $a = 7k^2$ . Tämä on ratkaisu jokaisella  $k \in \mathbb{N}^+$ . Jos  $b^2 - 7a < 0$ ,  $ab^2 + b + 7$  on tekijä positiivisessa luvussa  $7a - b^2 \leq 7a$ . Selvästikin tämä voi olla mahdollista vain, jos  $b = 1$  tai jos  $b = 2$ . Tapaus  $b = 1$ :  $a + 8 \mid 7a - 1$ . Koska  $7a - 1 = 7(a + 8) - 57$ , on luvun  $a + 8$  oltava jokin 57:n tekijä. Koska  $57 = 3 \cdot 19$ , luvut  $a = 49$  ja  $a = 11$  ovat mahdollisia; ne myös toteuttavat tehtävän ehdon. Tapaus  $b = 2$ :  $4a + 9 \mid 7a - 4$ ; nyt  $4(7a - 4) = 7(4a + 9) - 79$ . Alkuluku 79 ei ole muotoa  $4a + 9$ , joten tässä tapauksessa ei saada ratkaisuja.

**1998.5.** Olkoot kolmion  $ABC$  kulmat  $2\alpha$ ,  $2\beta$  ja  $2\gamma$ . Tarkastellaan kolmion  $MRB$  kulmia. Jänneleikulmiosta  $AMIL$  nähdään, että  $\angle LMI = \alpha$ . Tästä seuraa, että  $\angle RMB = 90^\circ - \alpha$ . Vastaavasti nähdään, että  $\angle RBM = 90^\circ - \beta$ , joten  $\angle MRB = 90^\circ - \gamma$ . Edelleen  $\angle RBI$  on suora. Sinilauseen nojalla

$$BR = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} MB.$$

Symmetrian vuoksi kolmiosta  $BKS$  saadaan samoin

$$BS = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} KB = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} MB.$$



Käytetään nyt Pythagoraan lausetta suorakulmaisiin kolmioihin  $IBR$  ja  $IBS$  ja kosini-lausetta kolmioon  $RSI$ :

$$\begin{aligned} 2 \cos(\angle RIS) \cdot IR \cdot IS &= IR^2 + IS^2 - RS^2 \\ &= (BI^2 + BR^2) + (BI^2 + BS^2) - (BR + BS)^2 = 2BI^2 - 2BM^2. \end{aligned}$$

Koska  $BIM$  on suorakulmainen kolmio, viimeinen erotus on  $2 \cdot MI^2$  ja siis positiivinen. Siis kulman  $RIS$  kosini on positiivinen, joten kulma on terävä.

**1998.6.** Olkoon  $f(1) = a$ . Silloin  $f(f(s)) = f(1^2 f(s)) = sf(1)^2 = a^2 s$  ja  $f(at^2) = f(t^2 f(1)) = f(t)^2$ . Edelleen  $(f(s)f(t))^2 = f(s)^2 f(at^2) = f(s^2 f(f(at^2))) = f(s^2 a^2 (at^2)) = f(a(ats)^2) = f(ast)^2$ . Siis  $f(s)f(t) = f(ast)$  ja edelleen  $af(t) = f(at)$ ,  $af(st) = f(ast) = f(s)f(t)$ . Tästä seuraa induktiolla, että  $f(s)^k = a^{k-1} f(s^k)$ . Osoitetaan, että  $a|f(s)$ . Jos  $p$  on alkuluku ja  $\alpha$  suurin kokonaisluku, jolla  $p^\alpha | a$ ,  $\beta$  suurin kokonaisluku, jolla  $p^\beta | f(s)$ , niin  $p^{(k-1)\alpha}$  on suurin  $p$ :n potenssi, joka on  $a^{k-1}$ :n tekijä ja  $p^{k\beta}$  suurin  $p$ :n potenssi, joka on  $f(s)^k$ :n tekijä. Siis  $(k-1)\alpha \leq k\beta$ . Tämä epäyhtälö toteutuu kaikilla  $k$ , joten on oltava  $\alpha \leq \beta$ . Olkoon nyt  $g(s) = \frac{1}{a} f(s)$ . Silloin

$$g(a) = \frac{1}{a} f(f(1)) = \frac{a^2}{a} = a, \quad a^2 g(st) = af(st) = f(s)f(t) = a^2 g(s)g(t) \text{ eli } g(st) = g(s)g(t).$$

Lisäksi  $a^2 g(g(s)) = ag(a)g(g(s)) = ag(ag(s)) = ag(f(s)) = f(f(s)) = a^2 s$ . Siis  $g(g(s)) = s$ . Siis  $g(t^2 g(s)) = g(t^2)g(g(s)) = sg(t)^2$ . Siis  $g$  toteuttaa saman funktionaaliyhtälön kuin  $f$ ;  $f(1998)$ :n pienintä arvoa etsittäessä voidaan näin ollen rajoittaa funktioihin  $f$ , joille  $f(1) = 1$ , ts. tyyppiä  $g$  oleviin funktioihin. Osoitetaan, että  $g(p)$  on alkuluku, jos  $p$  on alkuluku. Olkoon  $g(p) = uv$ . Silloin  $g(u)g(v) = g(uv) = g(g(p)) = p$ , joten esimerkiksi  $g(v) = 1$ . Mutta  $v = g(g(v)) = g(1) = 1$ . Tämä on mahdollista kaikille  $g(p)$ :n tekijöihin jaoille vain, jos  $g(p)$  on alkuluku.  $g$ :n multiplikatiivisuuden perusteella  $g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = g(p_1^{\alpha_1})g(p_2^{\alpha_2}) \cdots g(p_k^{\alpha_k})$ . Ehdon  $g(g(s)) = s$  nojalla  $g$  on injektio ja saa siis eri alkuluvuilla eri arvot. Siis  $g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)g(3)^3 g(37)$  on mahdollisimman pieni, kun  $g(3) = 2$ ,  $g(2) = 5$  ja  $g(37) = 3$ ; tällöin  $g(1998) = 120$ . Toisaalta voidaan määritellä ehdot toteuttava  $g$  asettamalla  $g(2) = 5$ ,  $g(3) = 2$ ,  $g(37) = 3$ ,  $g(5) = 37$  ja  $g(p) = p$ , jos  $p$  on alkuluku, joka ei ole 2, 3, 5 eikä 37. Kysytty pienin arvo on siis 120.

**1999.1.** Olkoon  $S$  tehtävän ehdon täyttävä joukko ja monikulmio  $S' = A_1 A_2 \dots A_n$  pienin  $S$ :n sisältävä kupera joukko. Monikulmion kärjet ovat  $S$ :n pisteitä. Jos  $l$  on  $S$ :n symmetria-akseli,  $l$  on myös  $S'$ :n symmetria-akseli, ja jokainen peilaus, jossa  $S$  kuvautuu itselleen, kuvaa myös  $S'$ :n itselleen. Oletetaan, että jokin  $S$ :n piste  $B$  olisi  $S'$ :n sisällä. Silloin peilaus, jossa  $A_1 \mapsto B$  ei kuvaisi  $S'$ :a itselleen. Siis  $S' = S$ . Mitkään kolme  $S$ :n pistettä eivät ole samalla suoralla. Jos  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  olisivat kolme tällaista pistettä ja  $l$  ja  $m$  janojen  $XY$  ja  $YZ$  keskinormaalit, niin peilaukset  $P_l$  ja  $P_m$  suorien  $l$  ja  $m$  yli kuvaisivat  $S$ :n itselleen. Toisaalta yhdistetty kuvaus  $P_m \circ P_l$  on translaatio, jossa  $X \mapsto Z$ . Mutta joukko, joka kuvautuu translaatioissa itselleen, ei voi olla äärellinen. Peilaus, jossa  $A_1 \mapsto A_3$  pitää välttämättä pisteen  $A_2$  paikallaan. Mutta tästä seuraa, että  $A_1 A_2 = A_2 A_3$ , ja symmetrian nojalla kaikki monikulmion sivut ovat yhtä pitkiä. Olkoon nyt  $n \geq 4$ . Peilaus, jossa  $A_1 \mapsto A_4$  kuvaa  $A_2$ :n  $A_3$ :lle. Mutta välttämättä  $\angle A_1 A_2 A_3 = \angle A_2 A_3 A_4$ . Siis  $S$  on säännöllinen  $n$ -kulmio. – On selvää, että jokainen säännöllinen  $n$ -kulmio toteuttaa tehtävän ehdon.

**1999.2.** Merkitään

$$S = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

$$T = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Silloin yksinkertaisen arvion ja aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella saadaan

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j S = \frac{1}{2} S \cdot 2 \sum_{i < j} x_i x_j \leq \frac{1}{2} \left( \frac{S + 2 \sum_{i < j} x_i x_j}{2} \right)^2 = \frac{T^4}{8}.$$

(*Kiinan olympiajoukkueen jäsenen Ruochuan Liun ratkaisu.*)

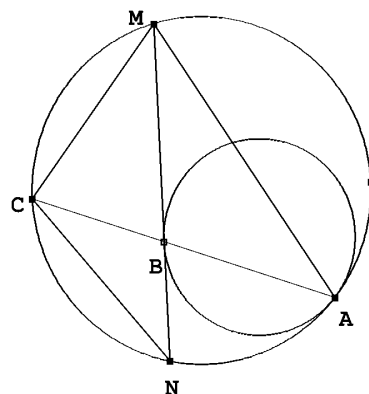
**1999.3.** Olkoon  $n = 2k$ . Reunaan rajoittuvat  $4(n-1)$  ruutua olkoot valkoisia, näihin rajoittuvat  $4(n-3)$  ruutua mustia, seuraavat  $4(n-5)$  valkoisia jne. Valkoisten ruutujen määrä on joko  $4(n-1+n-5+\cdots+1) = 4 \frac{n}{2} \frac{n+2}{4} = 2k(k+1)$  (jos  $k$  on pariton) tai  $4(n-1+n-5+\cdots+3) = 4 \frac{n+2}{2} \frac{n}{4} = 2k(k+1)$  (jos  $k$  on parillinen). Koska jokaisella ruudulla on naapurina tasan kaksi valkoista ruutua, on merkittävä ainakin  $k(k+1)$  ruutua, jotta jokaisella valkoisella ruudulla olisi merkitty naapuri. Merkittävien ruutujen määrä on siis ainakin  $k(k+1)$ . Aletaan nyt merkitä valkoisia ruutuja siten, että jokaisen valkoisen renkaan vasemman yläkulman kaksi vierekkäistä ruutua merkitään, seuraavat kaksi jätetään merkitsemättä, seuraavat kaksi merkitään jne. Näin jokainen valkoinen ruutu on merkityn ruudun vieressä. Mutta myös jokainen musta ruutu on merkityn ruudun vieressä: mustan renkaan vasen yläkulma on ulkopuolisen valkean renkaan toisen merkityn ruudun vieressä, myötäpäivään seuraavat kaksi sisäpuolisen valkean renkaan kahden ensimmäisen merkityn ruudun vieressä jne. (*Australian olympiajoukkueen jäsenen George Chun ratkaisu.*)

**1999.4.** Parit  $(1, p)$  ja  $(2, 2)$  toteuttavat tehtävän ehdon. Muissa ratkaisuisissa on oltava  $p \geq 3$ . Koska  $(p-1)^n + 1$  on pariton,  $n$  on pariton ja siis  $n < 2p$ . Olkoon  $q$   $n$ :n pienin alkutekijä.  $q$  on pariton. Koska  $q|(p-1)^n$ , niin  $(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$ . Toisaalta  $n$ :llä ja  $q-1$ :llä ei ole yhteisiä tekijöitä, joten on olemassa kokonaisluvut  $x$  ja  $y$ , joille  $xn + y(q-1) = 1$ . Siis  $p-1 \equiv (p-1)^{xn} \cdot (p-1)^{y(q-1)} \pmod{q}$ . Mutta yllä olevan perusteella tulon edellinen tekijä on kongruentti  $(-1)^k$ :n ja Fermat'n pienen lauseen nojalla jälkimmäinen puolestaan kongruentti  $1$ :n kanssa. Koska  $q$  on pariton,  $k$  on pariton. Siis  $p-1 \equiv -1 \pmod{q}$ . Mutta tämä merkitsee, että  $p$  on jaollinen  $q$ :lla, joten  $p = q$ . Edelleen  $p|n$ , ja koska  $n < 2p$ ,  $n = p$ . Luku  $p$  toteuttaa näin ollen ehdon  $p^{p-1} | (p-1)^p + 1$ . Mutta

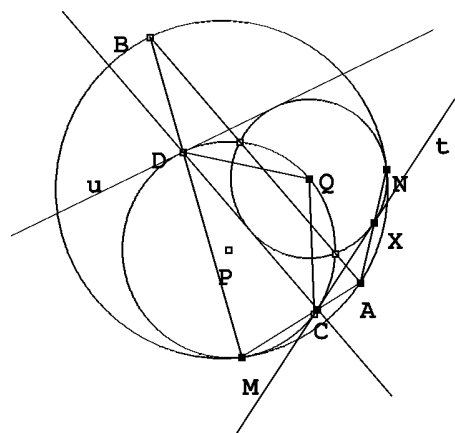
$$(p-1)^p + 1 = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} (-1)^j p^{p-j} = p^2 \left( \sum_{j=0}^{p-2} \binom{p}{j} (-1)^j p^{p-j-2} + 1 \right).$$

Koska sulkulauseke ei ole jaollinen  $p$ :llä,  $p-1 \leq 2$  eli  $p \leq 3$ .  $n = p = 3$  toteuttaa ehdon. Ratkaisuja ovat siis parit  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$  ja  $(1, p)$ ,  $p$  alkuluku.

**1999.5.** Todistetaan ensin aputulos: Jos  $y$  on ympyrä,  $y_1$  toinen ympyrä, joka sivuaa  $y$ :tä sisäpuolisesti pisteessä  $A$ ,  $NM$   $y$ :n jänne, joka sivuaa  $y_1$ :tä pisteessä  $B$  ja  $C$  sen  $y$ :n kaaren keskipiste, joka ei sisällä  $A$ :ta, niin  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ovat samalla suoralla ja  $CA \cdot CB = CM^2$ . Todistus perustuu  $A$ -keskiseen homotetiaan, joka vie  $y_1$ :n  $y$ :ksi ja  $NM$ :n  $NM$ :n suuntaiseksi  $y$ :n tangentiksi; tämän tangentin sivuamispiste on  $C$ , joten  $C$  on  $B$ :n kuva  $A$ -keskisessä homotetiassa. Koska  $C$  on kaaren  $MN$  keskipiste, kulmat  $\angle CMB = \angle CNM$  ja  $\angle CAM$  ovat yhtä suuret. Siis kolmiot  $ACM$  ja  $MCB$  ovat yhdenmuotoiset, mistä seuraa  $CA \cdot CB = CM^2$ .



Olkoot nyt  $P$  ja  $Q$   $\Gamma_1$ :n ja  $\Gamma_2$ :n keskipisteet ja  $t$ ,  $u$  ympyröiden yhteiset tangentit. Aputuloksen perusteella tangenttien  $\Gamma$ :sta leikkaamien kaarien (joilla  $\Gamma$ :n ja  $\Gamma_1$ :n ja  $\Gamma_2$ :n sivuamispisteet eivät ole) keskipisteillä on sama potenssi  $\Gamma_1$ :n ja  $\Gamma_2$ :n suhteen. Pisteet, joilla on sama potenssi kahden toisiaan leikkaavan ympyrän suhteen ovat ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran (eli ympyröiden *radikaaliakselin*) pisteet. Tästä seuraa, että mainitut kaarien keskipisteet ovat  $A$  ja  $B$ . Aputuloksen perusteella edelleen  $C$  ja  $D$  ovat  $\Gamma_1$ :n ja  $t$ :n sekä  $u$ :n sivuamispisteet. Jos  $H$  on  $M$ -keskinen homotetia, joka kuvaa  $\Gamma_1$ :n  $\Gamma$ :ksi, niin  $CD$  kuvautuu  $H$ :ssa  $AB$ :ksi. Siis  $AB \parallel CD$ ,  $CD \perp PQ$  ja  $Q$  on  $\Gamma_1$ :n kaaren  $CD$  keskipiste. Olkoon  $X$   $t$ :n ja  $\Gamma_2$ :n sivuamispiste. Silloin  $\angle XCQ = \angle DCQ$ .  $Q$  on siis kulman  $XCD$  puolittajalla. Mutta tästä seuraa, että  $CD$  on  $\Gamma_2$ :n tangentti.



**1999.6.** Olkoon  $A$   $\mathbb{R}$ :n kuva kuvauksessa  $f$ . Olkoon  $a = f(0)$ . Siis

$$f(-a) = f(a) + a - 1.$$

Tästä nähdään, että  $c \neq 0$ . Jos  $x = f(y)$ , niin

$$a = f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1,$$

joten

$$f(x) = \frac{1+a}{2} - \frac{1}{2}x^2$$

kaikilla  $x \in A$ . Osoitetaan, että jokainen reaaliluku voidaan kirjoittaa kahden  $A$ :han kuuluvan luvun erotuksena: jos tehtävän ehtoon asetetaan  $y = 0$ , saadaan

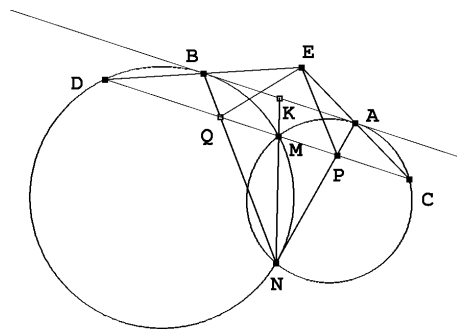
$$f(x-a) - f(x) = f(a) + ax - 1.$$

Koska  $a \neq 0$ , lukujen  $f(x-a) - f(x)$  joukko on koko reaalilukujen joukko. Jokaisella  $x \in \mathbb{R}$  on siis luvut  $y_1, y_2 \in A$  siten, että  $x = y_2 - y_1$ . Alkuperäisen ehdon perusteella

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_2 - y_1) = f(y_1) + y_1 y_2 + f(y_2) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(1+a) - \frac{y_1^2}{2} + y_1 y_2 + \frac{1}{2}(1+a) - \frac{y_2^2}{2} - 1 = a - \frac{(y_2 - y_1)^2}{2} = a - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

On oltava  $\frac{1}{2}(a+1) = a$  eli  $a = 1$ . Ainoa mahdollinen funktio on siis  $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ . On helppo tarkistaa, että se myös on ratkaisu.

**2000.1.** Olkoon  $K$  suorien  $AB$  ja  $MN$  leikkauspiste. Lasketaan  $K$ :n potenssi molempien ympyröiden suhteen:  $AK^2 = KM \cdot KN = BK^2$ . Siis  $AK = BK$ . Koska  $PQ \parallel AB$ , on myös  $M$  janan  $PQ$  keskipiste. Väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että  $EM \perp PQ$ . Mutta  $\angle EAB = \angle ECM = \angle BAM$  ja  $\angle EBA = \angle EDM = \angle ABM$ . Suorat  $AE$  ja  $BE$  ovat suorien  $AM$  ja  $BM$  peilikuvia suorassa  $AB$ , joten  $E$  ja  $M$  ovat toistensa peilikuvia. Siis  $EM \perp AB$ , joten  $EM \perp PQ$ .



**2000.2.** Koska  $abc = 1$ , voidaan valita positiiviset reaaliluvut  $x, y$  ja  $z$  niin, että

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z} \quad \text{ja} \quad c = \frac{z}{x}.$$

Epäyhtälö saa muodon

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz.$$

Vasemman puolen kolmesta tekijästä enintään yksi on negatiivinen, koska jokaisen kahden summa on positiivinen. Jos yksi tekijä on negatiivinen, epäyhtälö toteutuu. Jos kaikki tekijät ovat positiivisia, voidaan käyttää aritmeettis-geometrista epäyhtälöä:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - y + z)(x + y - z)} &\leq \frac{1}{2}(x - y + z + x + y - z) = x \\ \sqrt{(x + y - z)(y + z - x)} &\leq \frac{1}{2}(x + y - z + y + z - x) = y \\ \sqrt{(x - y + z)(z + y - x)} &\leq \frac{1}{2}(x - y + z + z + y - x) = z \end{aligned}$$

Kun nämä epäyhtälöt kerrotaan keskenään, saadaan väitetty epäyhtälö.

**2000.3.** Muodostetaan siirtymäjono niin, että äärimmäisenä vasemmalla oleva kirppu hyppää äärimmäisenä oikealla olevan kirppun yli. Olkoon  $D_k$  suurin kirppujen välinen etäisyys ja  $d_k$  pienin kirppujen välinen etäisyys  $k$ :n siirtymän jälkeen. Selvästi  $D_k \geq (n-1)d_k$ .  $k+1$ :nen siirto tuottaa kirppujen välisen etäisyyden  $\lambda D_k \geq \lambda(n-1)d_k$ , joka on samalla pienin hypänneen kirppun ja muiden kirppujen etäisyyksistä. Tästä seuraa, että  $d_{k+1} \geq \min\{d_k, \lambda(n-1)d_k\}$ . Jos  $\lambda(n-1) \geq 1$ , jokaisen siirron jälkeen vasemmanpuoleisin kirppu on siirtynyt ainakin  $d_0$ :n verran oikealle, joten äärellisen monen siirtymän jälkeen kaikki kirput ovat pisteen  $M$  oikealla puolella.



Olkoon sitten  $\lambda < \frac{1}{n-1}$ . Voidaan olettaa, että alussa vasemmanpuoleinen kirppu on origossa. Olkoon  $k$ :nnen siirtymän jälkeen kirppujen sijaintien summa  $s_k$  ja äärimmäisenä oikealla olevan kirpun sijainti  $w_k$ . Silloin  $s_k \leq nw_k$ . Jos  $k+1$ :ssä siirtymässä kirppu siirtyy pisteestä, jonka koordinaatti on  $a$  pisteeseen, jonka koordinaatti on  $c$  ylittäen kirpun pisteessä  $B$ , jonka koordinaatti on  $b$ , niin  $s_{k+1} = s_k - a + c$  ja  $c - b = \lambda(b - a) = \lambda(b - c + c - a)$ , joten  $c - a = \frac{\lambda}{1 + \lambda}(c - b)$ . Siis

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1 + \lambda}{\lambda}(c - b).$$

Jos  $w_{k+1} = c$ , niin  $b \leq w_k$ , joten

$$s_{k+1} - s_k \geq \frac{1 + \lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k).$$

Sama epäyhtälö on tosi myös, jos  $c \leq w_k$ , koska tällöin oikea puoli on 0 ja vasen  $c - a > 0$ . Mutta tämä merkitsee, että

$$\frac{1 + \lambda}{\lambda}w_k - s_k \geq \frac{1 + \lambda}{\lambda}w_{k+1} - s_{k+1}$$

kaikilla  $k$ . Jokainen  $\frac{1 + \lambda}{\lambda}w_k - s_k$  on pienempi kuin jokin vakio  $G$ . Mutta koska  $\lambda < \frac{1}{n-1}$ , on  $\frac{1 + \lambda}{\lambda} > n$ . Siis

$$\left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} - n\right)w_k < \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} - n\right)w_k + (nw_k - s_k) = \frac{1 + \lambda}{\lambda}w_k - s_k \leq G.$$

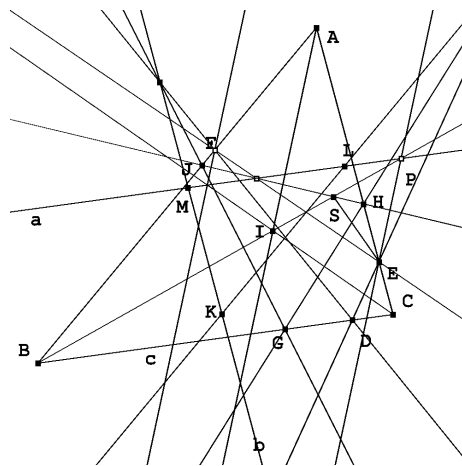
Mutta tämä merkitsee, että  $\{w_k\}$  on rajoitettu jono; oli alkuasetelma mikä hyvänsä, oikeanpuoleisin kirppu ei pääse mielivaltaisen kauas.

**2000.4.** Oletetaan, että kolme peräkkäisnumeroista korttia  $i$ ,  $i+1$  ja  $i+2$  ovat eri laatikoissa, esim.  $i$  punaisessa,  $i+1$  valkoisessa ja  $i+2$  sinisessä. Koska  $i + (i+3) = (i+1) + (i+2)$  ja  $(i-1) + (i+2) = i + (i+1)$  on  $i$ :nnen ja  $i+3$ :nnen kortin samoin kuin  $i-1$ :sen ja  $i+2$ :sen kortin oltava samoissa laatikoissa. Prosessia voidaan jatkaa kumpaankin suuntaan, ja päädytään siihen, että kortit 1, 2 ja 3 ovat erivärisissä laatikoissa; näiden korttien sijoitus määrää kaikki muut. Eri tapoja sijoittaa kortit 1, 2 ja 3 on 6. Oletetaan sitten, että ei ole kolmea peräkkäisnumeroista korttia, jotka olisi sijoitettu erivärisiin laatikkoihin. Olkoon esimerkiksi kortti 1 punaisessa laatikossa. Olkoon  $i$  pienin ei-punaisessa laatikossa oleva kortti. Oletetaan, että  $i$  on valkoisessa laatikossa. Olkoon vielä  $k$  pienin sinisessä laatikossa oleva kortti. Koska peräkkäisnumeroiset kortit eivät ole erivärisissä laatikoissa, on oltava  $i+1 < k$ . Koska  $i+k = (i-1) + (k+1)$ , kortin  $k+1$  on oltava punaisessa laatikossa. Mutta  $i+(k+1) = (i+1) + k$ , joten kortin  $i+1$  on oltava sinisessä laatikossa, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että  $k$  on pienin sinisessä laatikossa oleva kortti. Ristiriita välttyy vain, jos  $k = 100$ . Koska  $(i-1) + 100 = i + 99$ , 99 on valkoisessa laatikossa. Osoitetaan

vielä, että jos  $1 < t < 99$ , niin  $t$  on valkoisessa laatikossa. Jos  $t$  olisi punaisessa, olisi  $t + 99 = (t - 1) + 100$ . Tämä merkitsee, että  $t - 1$  olisi sinisessä laatikossa, mikä ei ole mahdollista, koska pienin sinisen laatikon kortti on 100. Sijoittelu, jossa 1 on punaisessa laatikossa, 100 sinisessä ja muut valkoisessa, toimii: jos summa on  $\leq 100$ , korttia ei ole otettu sinisestä laatikosta, jos se on 101, ei valkoisesta, ja jos yli 101, ei punaisesta. – Eri tapoja yhdistää värit ja kortit on jälleen 6.

**2000.5.** Todistetaan yleisempi tulos: Jokaista positiivista kokonaislukua  $k$  kohden on olemassa positiivinen kokonaisluku  $n = n(k)$  siten, että  $2^n + 1$  on jaollinen  $n$ :llä, 3 on  $n$ :n tekijä ja  $n$  on jaollinen tasan  $k$ :lla ei alkuluvulla. Todistetaan väite induktiolla. Nojaudutaan seuraavaan aputulokseen, joka todistetaan ensin: Jokaista positiivista kokonaislukua  $a > 2$  kohden on olemassa alkuluku  $p$  siten, että  $p$  on tekijänä  $a^3 + 1$ :ssä muttei  $a + 1$ :ssä. Oletetaan, että  $a$  on luku, jolle tämä ei päde. Koska  $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$ , jokainen luvun  $a^2 - a + 1$  alkutekijä on  $a + 1$ :n tekijä. Koska  $a^2 - a + 1 = (a + 1)(a - 2) + 3$ , vain 3 voi olla  $a^2 - a + 1$ :n alkutekijä, joten  $a^2 - a + 1$  on kolmen potenssi. Mutta  $a + 1$  ja myös  $a - 2 = a + 1 - 3$  ovat jaollisia 3:lla. Tästä seuraa, että  $a^2 - a + 1$  on jaollinen 3:lla, muttei 9:llä. Siis  $a^2 - a + 1 = 3$ , mikä ei ole mahdollista, jos  $a > 2$ . Aputulos on todistettu. Siirrytään sitten varsinaiseen induktiotodistukseen. Jos  $k = 1$ , luvuksi  $n = n(1)$  käy 3. Oletamme, että jollekin  $k \geq 1$  on olemassa  $n = n(k) = 3^q \cdot t$ ,  $q \geq 1$  ja  $t$  jaoton kolmella, niin että  $2^n + 1$  on jaollinen  $n$ :llä ja  $n$ :llä on  $k$  eri alkutekijää. Silloin  $n$  on pariton, mistä seuraa, että  $2^{2n} - 2^n + 1 \equiv 1^n - (-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ . Koska  $2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$ ,  $2^{3n} + 1$  on jaollinen luvulla  $3n$ . Aputuloksen mukaan on olemassa pariton kokonaisluku  $p$ , joka on tekijänä luvussa  $2^{3n} + 1$  muttei luvussa  $2^n + 1$ . Luvulla  $n(k + 1) = 3pn(k)$  on  $k + 1$  eri alkutekijää.  $(2^{3n})^p + 1$  on jaollinen sekä  $3n$ :llä että  $p$ :llä, joten  $n(k + 1)$  on kelvöllinen luku ja induktioaskel on otettu.

**2000.6.** Olkoot  $K$ ,  $L$  ja  $M$  pisteiden  $G$ ,  $H$  ja  $J$  kuvat peilauksissa kolmion  $ABC$  kulmien  $A$ ,  $B$  ja  $C$  puolittajissa. Koska kulmanpuolittajat ovat sisään piirretyn ympyrän halkaisijoita, pisteet  $K$ ,  $L$  ja  $M$  ovat  $ABC$ :n sisään piirretyllä ympyrällä. Osoitetaan, että suoran  $EF$  peilikuva  $a$  suoran  $HJ$  suhteen kulkee pisteen  $L$  kautta. Symmetrian nojalla tästä seuraa, että  $KLM$  on tehtävässä määrätty kolmio. Pisteet  $H$  ja  $E$  ovat samalla puolella suoraa  $BI$ ,  $H$  lähempänä  $BI$ :tä kuin  $E$ . Oletetaan, että myös  $C$  on samalla puolella suoraa  $BI$  kuin nämä (todistus on muunnettavissa tapaukseen, jossa näin ei ole). Olkoot kolmion  $ABC$  kulmat  $2\alpha$ ,  $2\beta$  ja  $2\gamma$ .

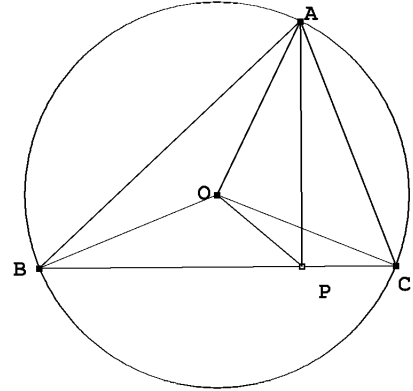


Osoitetaan, että pisteen  $E$  peilikuva suorassa  $HJ$  on suoralla  $BI$ . Olkoon  $\ell$  suoran  $HJ$  normaali, joka kulkee pisteen  $E$  kautta. Olkoon  $P$   $\ell$ :n ja  $BI$ :n leikkauspiste ja olkoon  $S$   $HJ$ :n ja  $BI$ :n leikkauspiste. Piste  $S$  on janalla  $BP$  ja janalla  $HJ$ . Osoitetaan, että  $\angle PSE = 2\angle PSH$ . Kolmion kulman vieruskulmalauseen nojalla ja koska  $AI \perp HJ$ ,  $\angle PSH = \angle BSJ = \angle AJS - \angle JBS = (90^\circ - \alpha) - \beta = \gamma$ . Koska  $G$  ja  $J$  ovat symmetrisiä suoran  $BI$  suhteen,  $\angle BSG = \angle BSJ = \gamma$ . Kulma  $BGS = 90^\circ + \alpha$ , joten  $S$  ja  $C$  ovat samalla puolella suoraa  $GI$ . Koska  $\angle ISG = \angle ICG$ ,  $IGCS$  on jännenelikulmio. Tästä

seuraa, että  $\angle ISC = \angle IGC = 90^\circ$ . Mutta tästä seuraa, että  $BCES$  on jännenelikulmio. Siis  $\angle PSE = 180^\circ - \angle BSE = \angle BCE = 2\gamma = 2\angle PSH$ . Tästä seuraa, että  $P$  on suoralla  $a$ . Edellä suoritettu päättely osoittaa lisäksi, että  $\angle BPH = \angle SEH = \beta$ , koska  $P$  ja  $E$  ovat peilikuvia suoran  $HJ$  suhteen ja koska  $BCES$  on jännenelikulmio. Koska  $L$  on  $H$ :n peilikuva  $BI$ :ssä,  $\angle BPL = \angle BPH = \beta = \angle CBP$ . Siis  $PL \parallel BC$ . Koska  $P$  on suoralla  $a$ , on todistettava, että  $a \parallel BC$ . Jos  $\beta = \gamma$ , näin on laita. Olkoon  $\beta \neq \gamma$ . Olkoot  $D$  ja  $E$  suoran  $BC$  ja suorien  $EF$  ja  $HJ$  leikkauspisteet. ( $D$  ja  $E$  ovat  $BC$ :llä samalla puolella  $C$ :tä.) Koska  $\angle BCF = 90^\circ - 2\beta$  ja  $\angle CBE = 90^\circ - 2\gamma$  ja koska  $\angle CFE = \angle CBE$  ( $BCEF$  on jännenelikulmio), on  $\angle BDF = 2\gamma - 2\beta$ . Koska  $\angle HJI = \alpha$  ja  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ , on  $\angle BEJ = 180^\circ - 2\beta - 90^\circ - \alpha = \gamma - \beta$ . Tästä seuraa, että suorien  $EF$  ja  $HJ$  välinen kulma on  $\gamma - \beta$  ja  $a$  on  $BC$ :n suuntainen. Todistus on valmis.

**2001.1.** Olkoon  $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle BCA = \gamma$  ja  $AO = BO = CO = R$ . Koska  $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 180^\circ - 2 \cdot \angle OCP$ ,  $\angle BAC + \angle OCP = 90^\circ$ . Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että  $\angle POC < \angle OCP$ . Tätä varten riittää, että osoitetaan, että  $PC < OP$ . Suorakulmaisista kolmioista  $ABP$  ja  $ACP$  sekä sinilauseesta saadaan

$$\begin{aligned} BP - PC &= AB \cos \beta - AC \cos \gamma \\ &= 2R(\sin \gamma \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta) = 2R \sin(\gamma - \beta). \end{aligned}$$



Mutta oletusten perusteella  $30^\circ \leq \gamma - \beta < 90^\circ$ , joten  $BP - PC \geq R$  eli  $R + PC \leq BP$ . Kolmioepäyhtälön

ja kolmion  $ABC$  teräväkulmaisuuuden perusteella  $BP < BO + OP = R + OP$ , josta haluttu epäyhtälö  $PC < OP$  seuraakin.

**2001.2.** Koska epäyhtälön vasen puoli on pysyvä samana, jos  $(a, b, c)$  korvataan  $(ka, kb, kc)$ :llä, voidaan olettaa, että  $abc = 1$ . On siis osoitettava, että

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8}{a^3}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8}{b^3}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8}{c^3}}} \geq 1.$$

On siis todistettava, että

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8x}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8y}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8z}} \geq 1,$$

kun  $xyz = 1$ . Tämä tulee todistetuksi, jos löydetään  $c$  siten, että

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8x}} \geq \frac{x^c}{x^c + y^c + z^c}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + 8y}} \geq \frac{y^c}{x^c + y^c + z^c}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + 8z}} \geq \frac{z^c}{x^c + y^c + z^c}.$$

Riittää, kun todistetaan epäyhtälöistä ensimmäinen. Mutta koska

$$y^c + z^c = \left(y^{c/2} - z^{c/2}\right)^2 + 2(yz)^{c/2} \geq \frac{2}{x^{c/2}},$$

riittää, kun löydetään  $c$ , jolle

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}} \geq \frac{x^c}{x^c + 2x^{-c/2}} = \frac{1}{1 + 2x^{-3c/2}} = \frac{1}{1 + 2x^d}$$

eli  $1 + 8x \leq (1 + 2x^d)^2$ . Tämän epäyhtälön molemmat puolet ovat samat, kun  $x = 1$ . Derivaattojen tarkastelu pisteessä  $x = 1$  osoittaa, että  $d = \frac{2}{3}$  on hyvä ehdokas eksponentiksi. On vielä todistettava, että  $1 + 8x \leq (1 + 2x^{2/3})^2$  eli

$$x \leq \frac{1}{2}(x^{2/3} + x^4).$$

Mutta tämä nähdään heti todeksi aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella.

**2001.3.** Olkoon  $P$  tehtävien joukko,  $G$  ja  $B$  kilpailuun osallistuneiden tyttöjen ja poikien joukot ja  $G(p)$ ,  $B(p)$  tehtävän  $p \in P$  ratkaisseiden tyttöjen ja poikien joukot. Olkoot vielä  $P(g)$  ja  $P(b)$  niiden tehtävien joukot, jotka  $g \in G$  tai  $b \in B$  ratkaisi. Olkoon  $|A|$  äärellisen joukon  $A$  alkioden lukumäärä. Oletetaan, että jokaiselle  $p \in P$  joko  $|G(p)| < 3$  tai  $|B(p)| < 3$ . Tarkastellaan 441-ruutuista  $21 \times 21$ -ruudukkoa, jonka rivit edustavat tyttöjä ja sarakkeet poikia. Väritetään ruudut seuraavasti: ruutua  $(g, p)$  kohden valitaan  $p \in P(g) \cap P(p)$ . Väritetään ruutu punaiseksi, jos  $|G(p)| < 3$ , muuten mustaksi. (Jos  $(g, p)$  on punainen,  $|G(p)| \geq 3$  ja  $|B(p)| < 3$ .) Ruuduista ainakin 221 on toista väriä, ja koska  $\lceil \frac{221}{21} \rceil = 11$ , jossakin rivissä on ainakin 11 mustaa neliötä tai jossain sarakkeessa on ainakin 11 punaista neliötä. Oletetaan, että tyttöä  $g$  vastaavalla rivillä on ainakin 11 mustaa neliötä. Silloin ruudun väriytykseen käytetyn tehtävän oli ratkaissut enintään kaksi poikaa.  $g$ :n on täytynyt ratkaista ainakin 6 eri tehtävää. Mutta  $g$  on ratkaissut enintään 6 tehtävää. Mutta näin ollen  $g$  on ratkaissut tasan kuusi tehtävää, ja jokaisen niistä on ratkaissut enintään kaksi poikaa. Yhdeksän poikaa ei ole ratkaissut yhtään samaa tehtävää kuin  $g$ . Sama ristiriita johdetaan, jos jossain sarakkeessa on ainakin 11 punaista neliötä.

**2001.4.** Oletetaan, että millään  $b \neq c$  ei ole  $S(b) \equiv S(c) \pmod{n!}$ . Lasketaan summa  $\sum S(a)$  yli kaikkien permutaatioiden  $a$  ja johdetaan ristiriita summan  $n!$ :lla jaollisuudesta. Summassa jokaisen  $k_j$  tulee kerrotuksi  $(n-1)!$  kertaa jokaisella luvuista  $1, 2, \dots, n$ .  $k_j$ :n kerroin summassa on siten

$$(n-1)! \sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2}(n+1)!.$$

Koska sama pätee joka kertoimelle,

$$\sum S(a) = \frac{1}{2}(n+1)! \sum_{j=1}^n k_j. \quad (1)$$

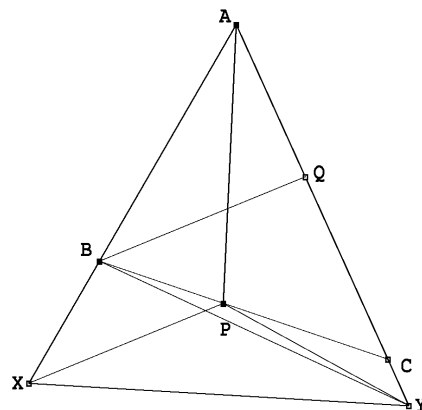
Jos mitkään kaksi lukua  $S(a)$  eivät ole kongruentit modulo  $n!$ , lukujen  $S(a)$  jakojäännökset  $n!$ :lla jaettaessa ovat  $0, 1, 2, \dots, n!-1$ . Siis

$$\sum S(a) \equiv \frac{1}{2}(n!-1)n! \pmod{n!}.$$

Jos  $n$  on parillinen, niin (1):ssä esiintyvä summa on  $n!$ :n monikerta. Koska  $n!-1$  on pariton,  $\frac{(n!-1)n!}{2}$  ei ole  $n!$ :n monikerta.

**2001.5.** Merkitään kolmion  $ABC$  kulmia tavanomaisesti  $\alpha$ :lla,  $\beta$ :lla ja  $\gamma$ :lla. Jatketään  $AB$ :tä pisteeseen  $X$  siten, että  $AX = AB + BP$  ja kiinnitetään  $Y$  suoralla  $AC$  niin, että  $AXY$  on tasasivuinen. Kolmio  $BXP$  on tasakylkinen, ja koska  $\angle PBX = 180^\circ - \beta$ ,  $\angle BXP = \beta/2$ . Koska  $AQ + QY = AB + BX = AB + BP = AQ + QB$ , niin  $QY = QB$  ja siis  $\angle QBY = \angle QYB$ . Koska kolmion  $AXY$  on tasasivuinen ja  $AP$  on kulman  $CAB$  puolittaja,  $PY = PX$ . Osoitetaan, että  $B, P$  ja  $Y$  ovat samalla suoralla. Ellei näin ole, kolmio  $BPY$  on oikea kolmio. Nyt  $\angle PBQ = \angle PXB = \angle PYQ = \beta/2$ . Näistä seuraa  $\angle YBP = \angle PYB$  ja  $PY = PB$  ja siis  $PX = PY = PB = BX$ . Kolmio  $BPX$  on siis tasasivuinen, joten

$\beta/2 = 60^\circ$  ja  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Koska tämä ei ole mahdollista,  $BPY$  on degeneroitunut. Mutta tällöin  $Y = C$ . Koska kolmio  $BCQ$  on tasakylkinen,  $120^\circ - \beta = \gamma = \beta/2$ , joten  $\beta = 80^\circ$  ja  $\gamma = 40^\circ$ .



**2001.6.** Tehdään vastaoletus:  $ab + cd$  on alkuluku. Nyt

$$ab + cd = (a + d)c + (b - c)a = mn,$$

missä  $n = \text{s.y.t.}(a + d, b - c)$ . Joko  $m = 1$  tai  $n = 1$ . Oletetaan, että  $m = 1$ . Silloin

$$n = ab + cd > ab + cd - (a - b + c + d) = (a + d)(c - 1) + (b - c)(a + 1) > 0.$$

Koska  $(a + d)(c - 1) + (b - c)(a + 1)$  on jaollinen  $n$ :llä, se on  $\geq n$ . Johdutaan siis ristiriitaan  $n > n$ . Oletetaan sitten, että  $n = 1$ . Sijoitetaan  $ac + bd = (a + d)b - (b - c)a$  tehtävän yhtälöön  $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$ ; saadaan

$$(a + d)(a - c - d) = (b - c)(b + c + d).$$

Koska  $n = 1$ , on olemassa positiivinen kokonaisluku  $k$ , jolle pätee

$$a - c - d = k(b - c),$$

$$b + c + d = k(a + d).$$

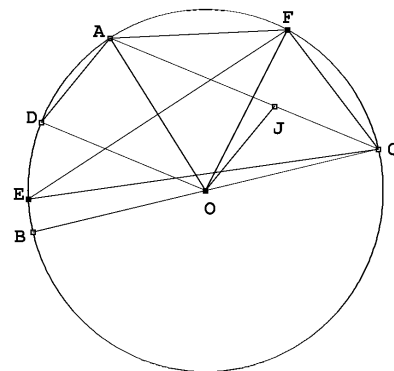
Kun nämä yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan  $a + b = k(a + b - c + d)$  ja  $k(c - d) = (k - 1)(a + b)$ . Jos  $k = 1$ , saadaan  $c = d$ , mikä ei ole tehtävän oletusten mukaista. Jos  $k \geq 2$ , niin

$$2 \geq \frac{k}{k - 1} = \frac{a + b}{c - d} > 2.$$

Jälleen ristiriita. Oletus, että  $ab + cd$  on alkuluku, johtaa aina ristiriitaan, joten se on väärä.

**2002.1.** Merkitään  $a_i$ :llä niiden  $S$ :n sinisten alkioden  $(h, k)$  lukumäärää, joilla  $h = i$  ja olkoon  $b_i$  niiden  $S$ :n alkioden  $(h, k)$  lukumäärä, joille  $k = i$ . Tyyppiä 1 olevien  $S$ :n osajoukkojen lukumäärä on  $a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$  ja tyyppiä 2 olevien osajoukkojen lukumäärä on  $b_0 b_1 \cdots b_{n-1}$ . Väite tulee todistetuksi, jos voidaan osoittaa, että jonoissa  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  ja  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  eli  $a$ -jonossa ja  $b$ -jonossa on samat luvut, mahdollisesti eri järjestyksessä. Olkoon nyt  $c_i$  suurin  $k$ , jolle  $(i, k)$  on punainen. Jos  $(i, k)$  on sininen kaikilla  $k$ , asetetaan  $c_i = -1$ . Jos  $i < j$  ja  $(j, c_j)$  on punainen, niin myös  $(i, c_j)$  on punainen, joten  $c_j \leq c_i$ . Koska  $(i, k)$  on punainen kaikilla  $k \leq c_i$  ja  $(i, k)$  on sininen kaikilla  $k > c_i$ , niin jono  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ ,  $c$ -jono, määrittää täysin  $S$ :n alkioden värityksen. Tarkastellaan nyt  $S$ :n sijasta joukkoa  $S_i$ , jonka  $c$ -jono on  $c_0, c_1, \dots, c_i, -1, \dots, -1$ . Siis  $S_{n-1} = S$ . Olkoon vielä  $S_{-1}$  joukko, jonka  $c$ -jono on  $-1, -1, \dots, -1$ ; tässä joukossa kaikki alkiot ovat sinisiä. Osoitetaan, että  $S_{-1}$ :n  $a$ -jonossa ja  $b$ -jonossa on samat alkiot ja että jos näin on joukossa  $S_i$ , niin samoin on joukossa  $S_{i+1}$ . Joukon  $S_0$   $a$ - ja  $b$ -jonot ovat molemmat  $n-1, n-2, \dots, 2, 1$ . Joukon  $S_i$   $i$  ensimmäistä  $a$ -jonon lukua ovat samat kuin  $S$ :n  $a$ -jonon  $i$  ensimmäistä lukua ja  $a_{i+1} = n-i-1, a_{i+2} = n-i-2$  jne. Joukossa  $S_{i+1}$  alkioden väritys on muuten sama kuin joukossa  $S_i$ , mutta alkiot  $(i+1, 0), (i+1, 1), \dots, (i+1, c_{i+1})$  ovat  $S_i$ :ssä sinisiä ja  $S_{i+1}$ :ssä punaisia. Siis  $S_{i+1}$ :ssä  $a_{i+1} = (n-i-1) - (c_{i+1} + 1) = n-i-c_{i+1}-2$ . Muuten  $S_i$ :n ja  $S_{i+1}$ :n  $a$ -jonot ovat samat. Joukossa  $S_i$  ovat  $b_{c_i+1}, b_{c_i+2}$  jne. samat kuin joukon  $S$   $b$ -jonon vastaavat luvut. Sen sijaan  $b_0 = n-i-1, b_1 = n-i-2, \dots, b_{c_i} = n-i-c_i-1$ . Siirryttäessä joukosta  $S_i$  joukkoon  $S_{i+1}$  luvut  $b_0, \dots, b_{c_i+1}$  pienenevät kukin yhdellä ja muut  $b$ -jonon luvut pysyvät ennallaan. Jonosta siis poistuu  $n-i-1$  ja tulee tilalle  $n-i-c_{i+1}-2$ .  $b$ -jonon muutos on tasan sama kuin  $a$ -jonon, joten  $a$ - ja  $b$ -jonon lukujen tulo on  $S_{i+1}$ :ssä sama. Induktioperiaatteen nojalla näin on myös joukossa  $S_{n-1} = S$ .

**2002.2.** Koska  $FA = FO = AO$ ,  $\angle AOF = 60^\circ < \angle AOC$ . Puolisuora  $CA$  on puolisuorien  $CF$  ja  $CE$  välissä. Koska  $\angle BOD = \frac{1}{2} \cdot \angle BOA = \angle BCA$ ,  $OD \parallel CA$ . Nelikulmio  $ADOJ$  on siis suunnikas. Siis  $AJ = OD = FA$ . Tästä seuraa, että  $J$  on samalla puolella suoraa  $EF$  kuin  $C$ , ja siis kolmion  $ECF$  sisällä. Pisteet  $F, J, O$  ja  $E$  ovat kaikki  $A$ -keskisellä ympyrällä. Kehäkulmalauseen perusteella  $\angle EFJ = \frac{1}{2} \cdot \angle EAJ$ . Mutta kehäkulmalause alkuperäiseen ympyrään sovellettuna antaa  $\angle EAJ = \angle EAC = \angle EFC$ . Piste  $J$  on siis kulman  $EFC$  puolittajalla. Mutta  $A$  on kaaren  $EF$



keskipiste, joten  $J$  on myös kulman  $ECF$  puolittajalla. Se on siis kolmion  $ECF$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

**2002.3.** Jotta tehtävässä kuvattu tilanne voisi ilmetä, on oltava  $m > n$ . Olkoot  $q(x)$  ja  $r(x)$  kokonaislukukertoimisia polynomeja, joille  $x^m + x - 1 = q(x)(x^n + x^2 - 1) + r(x)$  ja  $r(x)$ :n aste on  $< n$ . Nyt luku  $x^n + x^2 - 1$  on  $r(x)$ :n tekijä äärettömän monella kokonaisluvulla  $x$ . Mutta kaikilla tarpeeksi suurilla luvuilla  $x^n + x^2 - 1 > r(x)$ . Siis on oltava  $r(x) = 0$ , joten  $x^m + x - 1 = q(x)(x^n + x^2 - 1)$ . Mutta  $x^m + x - 1 = x^{m-n}(x^n + x^2 - 1) - x^{m+2-n} + x^{m-n} + x - 1 = x^{m-n}(x^n + x^2 - 1) + (1-x)(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1)$ . Näin

ollen  $x^n + x^2 - 1$  on myös polynomin  $x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1$  tekijä. Siis  $m - n + 1 \geq n$  eli  $m \geq 2n - 1$ . Edelleen  $x^n + x^2 - 1$  on polynomin  $x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1 - x^{m-2n+1}(x^n + x^2 - 1) = x^{m-n} - x^{m-2n+3} + x^{m-2n+1} - 1 = x^{m-2n+3}(x^{n-3} - 1) + (x^{m-2n+1} - 1)$  tekijä. Jos  $n > 3$  ja  $m > 2n - 1$ , viimeinen polynomi on aidosti negatiivinen kaikilla  $x \in (0, 1)$ . Toisaalta Bolzanon lauseen nojalla  $x^n + x^2 - 1$ :llä on nollakohta välillä  $(0, 1)$ . Siis ainoa mahdollisuus on  $n = 3$  ja  $m = 5$ . Koska  $x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$ ,  $n = 3$  ja  $m = 5$  on ratkaisu.

**2002.4.** Koska  $d_1 d_k = n$ ,  $d_2 d_{k-1} = n$  jne. ja  $d_j \geq j$  kaikilla  $j$ , niin  $d_1 \leq \frac{n}{1}$ ,  $d_2 \leq \frac{n}{2}$ , ...,  $d_{k+1-j} \leq \frac{n}{j}$ , ... Siis

$$d \leq \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^2}{2 \cdot 3} + \dots$$

Mutta

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots = 1.$$

Siis  $d < n^2$ . Epäyhtälö on aito, koska  $d$  on äärellinen summa. Jos  $n$  on alkuluku,  $d = 1 \cdot n$ , ja  $d$  on  $n^2$ :n tekijä. Olkoon sitten  $n$  yhdistetty luku ja olkoon  $p$   $n$ :n pienin alkutekijä. Silloin  $d_{k-1} = \frac{n}{p}$  ja  $d > d_{k-1} d_k = \frac{n^2}{p}$ . Mutta  $n^2$ :n pienin ykköstä suurempi tekijä on  $p$ , joten jos  $d$  on  $n^2$ :n tekijä, niin  $d \leq \frac{n^2}{p}$ . Siis  $d$  ei ole  $n^2$ :n tekijä, jos  $n$  on yhdistetty luku.

**2002.5.** Sijoitetaan yhtälöön  $x = y$  ja  $u = v = 0$ . Saadaan  $4f(0)f(x) = 2f(0)$ . Siis joko  $f(0) = 0$  tai  $f(x) = \frac{1}{2}$ . Funktio  $f(x) = \frac{1}{2}$  toteuttaa yhtälön. Oletetaan sitten, että  $f(0) = 0$ . Asetetaan  $x = u = 1$  ja  $y = v = 0$ . Saadaan  $f(1)^2 = f(1)$ . Siis  $f(1) = 0$  tai  $f(1) = 1$ . Oletetaan, että  $f(1) = 0$ . Asetetaan  $u = v = 1$ ,  $y = 0$ . Saadaan  $0 = 2f(x)$ . Funktio  $f(x) = 0$  toteuttaa selvästi yhtälön. Oletetaan sitten, että  $f(1) = 1$ . Sijoitetaan  $x = 0$ ,  $u = v = 1$ . saadaan  $2f(y) = f(-y) + f(y)$  eli  $f(-y) = f(y)$ . Riittää siis, että määritetään  $f(x)$ :n arvot, kun  $x > 0$ . Todistetaan induktiolla, että  $f(n) = n^2$  kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla  $n$ . Väite on tosi, kun  $n = 0$  ja  $n = 1$ . Oletetaan, että se on tosi arvoilla  $n - 1$  ja  $n$ . Asetetaan  $x = n$ ,  $y = u = v = 1$ . Saadaan  $2(f(n) + 1) = f(n - 1) + f(n + 1)$  eli  $2n^2 + 2 = (n - 1)^2 + f(n + 1)$ . Tämä sievenee muotoon  $f(n + 1) = (n + 1)^2$ , ja induktioaskel on otettu. Olkoon sitten  $x = n$ ,  $u = \frac{m}{n}$ ,  $y = v = 0$ . Saadaan  $f(n)f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)$  eli  $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m^2}{n^2}$ . Kaikilla rationaaliluvuilla  $q$  on siis  $f(q) = q^2$ . Asetetaan nyt  $x = u$ ,  $y = v = 0$ . Saadaan  $f(x)^2 = f(x^2)$ . Siis  $f(x) \geq 0$  kaikilla reaaliluvuilla  $x$ . Asetetaan  $u = y$ ,  $v = x$ . saadaan  $(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2)$  eli  $f(x^2 + y^2) = f(x)^2 + 2f(x)f(y) + f(y)^2 \geq f(x)^2 = f(x^2)$ . Tästä nähdään, että  $f$  on kasvava positiivisten lukujen joukossa. Jos  $x$  on mielivaltainen reaaliluku, sitä voidaan approksimoida alhaalta ja ylhäältä  $x$ :ää kohti suppenevilla rationaalilukujonoilla  $r_n$  ja  $q_n$ . Siis  $r_n^2 = f(r_n) \leq f(x) \leq f(q_n) = q_n^2$ . Tästä seuraa, että  $f(x) = x^2$ .

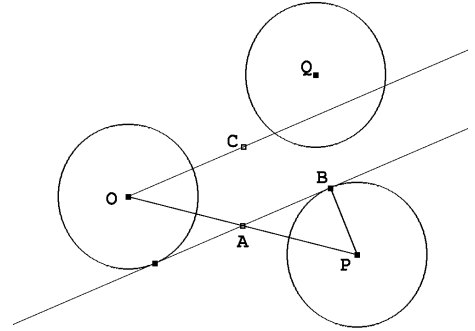
**2002.6.** Tarkastellaan ensin kahta yksikköympyrää,  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$ ; näiden keskipisteet ovat  $O$  ja  $P$ . Olkoot  $O$ :n kautta piirrettyjen  $\Gamma_2$ :n tangenttien sivuamispisteet  $X$  ja  $Y$ .  $\sin(\angle POX) =$

$\frac{1}{OP}$ , joten  $\angle YOX > \frac{2}{OP}$ .  $\Gamma_2$  "varaa" kulman  $\angle YOX$  ja sen ristikulman; jos suora ei saa leikata  $\Gamma_1$ :stä,  $\Gamma_2$ :sta ja kolmannesta ympyrästä kuin kahta, kolmannen ympyrän on oltava kokonaan mainittujen kahden kulman ulkopuolella. Tehtävän merkinnöin

$$\sum_{i \neq j} \frac{2}{O_i O_j} < \pi$$

kaikilla  $i$ .

Tarkastellaan sitten kolmea yksikköympyrää  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  ja  $\Gamma_3$ , jotka sijaitsevat niin, että mikään suora ei leikkaa niistä kaikkia kolmea; ympyröiden keskipisteet ovat  $O$ ,  $P$  ja  $Q$ . Jos  $A$  on  $OP$ :n keskipiste ja  $A$ :n kautta piirretty  $\Gamma_1$ :n ja  $\Gamma_2$ :n yhteinen tangentti sivuaa  $\Gamma_2$ :ta pisteessä  $B$ . Olkoon  $OC \parallel AB$ . Jos piste  $Q$  olisi kulman  $\angle POC$  aukeamassa, jokin suora leikkaisi kaikki kolme ympyrää. Siis  $\angle POQ > \angle PAB$ . Mutta  $\sin(\angle PAB) = \frac{2}{OP}$ , joten  $\angle POQ > \frac{2}{OP}$ . Symmetrian perusteella on myös  $\angle POQ > \frac{2}{OQ}$ .



Tarkastellaan  $n$ :ää pistettä  $O_i$ . Näistä jotkin  $m$ ,  $m \leq n$ , muodostavat kuperan  $m$ -kulmion, ja loput ovat tämän monikulmion sisäpisteitä. Oletetaan mukavuuden vuoksi, että  $O_n$ ,  $O_1$  ja  $O_2$  ovat  $m$ -kulmion vierekkäisiä kärkiä ja että  $\angle O_m O_1 O_2$  on  $n-2$ :n kulman  $\angle O_{i+1} O_1 O_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-1$  summa. Jokainen näistä on edellisen tarkastelun mukaan ainakin suurempi luvuista  $\frac{2}{O_1 O_i}$ ,  $\frac{2}{O_1 O_2}$ . Siis

$$\sum_{j=2}^{n'} \frac{2}{O_1 O_j} < \angle O_n O_1 O_2,$$

missä vasemmanpuoleisessa summassa on  $n-2$  termiä; esimerkiksi pienin  $\frac{2}{O_1 O_j}$  voidaan jättää pois. Koska kuperan  $m$ -kulmion kulmien summa on  $(m-2)\pi$ , saadaan toistamalla päättely eri kärkien kohdalla

$$\sum_{i \neq j}' \frac{2}{O_i O_j} < (m-2)\pi.$$

Summassa ovat mukana kaikki muut kunkin kärkipisteen ja muiden pisteiden etäisyydet paitsi jokaisen  $i$ :n kohdalla puuttuu se  $j$ , jolle  $O_i O_j$  on suurin. Monikulmion sisäpisteissä pätee alussa johdettu arvio. Kun nämä yhdistetään, saadaan

$$S' = \sum_{i \neq j}' \frac{2}{O_i O_j} < (n-2)\pi.$$



Summasta puuttuvien termien huomioon ottamiseksi havaitaan, että tiettyjä summassa mukana olevia  $n-2$ :ta termiä kohden on ehkä lisättävä yksi, joka on kaikkia näitä pienempi. Lopullinen summa on siis enintään

$$S' + \frac{1}{n-2}S' = \frac{n-1}{n-2}S'.$$

Siis

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{O_i O_j} < (n-1) \frac{\pi}{2}.$$

Tässä summassa jokainen etäisyys esiintyy kahdesti, joten

$$\sum_{i < j} \frac{1}{O_1 O_2} < (n-1) \frac{\pi}{4}.$$

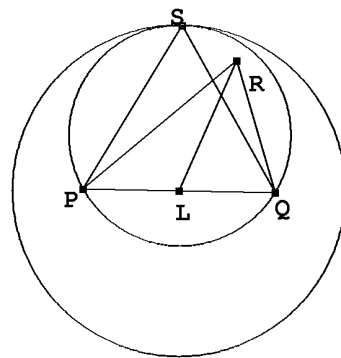
**2003.1.** Tarkastellaan joukkoa  $D = \{x - y \mid x, y \in A\}$ . Joukossa  $D$  on enintään  $101 \cdot 100 + 1 = 10101$  alkioita. Jos  $t \in A_i \cap A_j$ , niin  $t = x + t_i = y + t_j$ , joten  $t_i - t_j \in D$ . Jos voidaan valita 100 lukua  $t_i$ , niin, että mikään  $t_i - t_j$  ei ole joukossa  $D$ , tehtävä on suoritettu. Valitaan  $t_1$  mielivaltaisesti. Oletetaan, että on jo valittu luvut  $t_1, t_2, \dots, t_k$ ,  $k \leq 99$ . Jokainen jo valittu luku  $x$  estää valitsemasta seuraavaksi mitään joukon  $x + D = \{x + y \mid y \in D\}$  alkioita. Kiellettyjä alkioita on siis enintään  $10101k \leq 99 \cdot 10101 = 999999$ .  $k+1$ :nen alkio voidaan siis valita.

**2003.2.** Tehtävän yhtälöstä nähdään heti, että jos  $b = 1$ , jokainen parillinen  $a$  toteuttaa yhtälön, ja että jos  $b = 2a$ , yhtälö toteutuu. Oletetaan siis, että  $b > 1$  ja että  $2a \neq b$ . Oletetaan, että  $a^2 = k(2ab^2 - b^3 + 1)$ , missä  $k$  on positiivinen kokonaisluku. Silloin  $2ab^2 - b^3 + 1 > 0$  eli  $a > \frac{b}{2} - \frac{1}{2b^2} \geq \frac{b}{2} - \frac{1}{8}$  eli  $2a > b - \frac{1}{4}$ . Siis  $2a \geq b$ , ja koska  $2a \neq b$ ,  $2a > b$ . Koska  $k \geq 1$ ,  $a^2 \geq b^2(2a - b) + 1 > b^2$ , ja  $a > b$ . Luku  $a$  toteuttaa toisen asteen yhtälön  $a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0$ . Jos tällä yhtälöllä on kokonaislukujuuri  $a_1$ , sen toinenkin juuri on kokonaisluku, koska  $a_1 + a_2 = 2kb^2$ . Juurista suurempi, sanokaamme  $a_1$ , on  $\geq kb^2 > 0$ . Koska juurien tulo on  $k(b^3 - 1)$ , pienempikin juuri on positiivinen. Yhtälön molemmat juuret ovat alkuperäisen tehtävän ratkaisujen  $a$ -lukuja. Lisäksi

$$a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b.$$

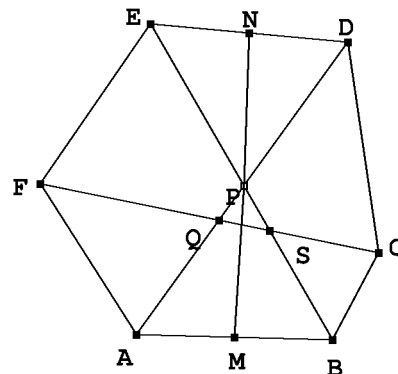
Alussa tehdyistä oletuksista seuraa, että on oltava  $b = 1$  tai  $a_2 = \frac{b}{2}$ , ja jälkimmäisessä tapauksessa  $b$ :n on oltava parillinen:  $b = 2c$ . Lisäksi on oltava  $k = \frac{b^2}{4}$  ja  $a_1 = \frac{b^4}{2} - \frac{b}{2} = 8c^4 - c$ . Mahdollisia ratkaisuja on siis kaikkiaan kolme sarjaa:  $(a, b) = (2c, 1)$ ,  $(a, b) = (c, 2c)$  ja  $(a, b) = (8c^4 - c, 2c)$ , missä  $c$  on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku.

**2003.3.** Todetaan ensin, että jos kolmiossa  $PQR$   $L$  on sivun  $PQ$  keskipiste ja  $\angle QRP \geq 60^\circ$ , niin  $RL \leq \frac{\sqrt{3}}{2}PQ$ , ja yhtäsuuruus vallitsee vain, kun kolmio  $PQR$  on tasasivuinen. Jos nimittäin  $PQS$  on tasasivuinen kolmio ja  $S$  ja  $R$  ovat samalla puolella suoraa  $PQ$ , niin  $R$  on kolmion  $PQS$  ympäri piirretyn ympyrän sisällä. Tämä ympyrä puolestaan on  $L$ -keskisen  $S$ :n kautta kulkevan ympyrän sisäpuolella ja  $LS = \frac{\sqrt{3}}{2}PQ$ .



Olkoon nyt  $ABCDEF$  tehtävän kuusikulmio. Tarkastellaan sen lävistäjiä  $AD$ ,  $BE$  ja  $CF$ . Niiden leikkauspisteet muodostavat (mahdollisesti pisteeksi surkastuneen) kolmion. Siten ainakin kahden lävistäjän välinen kulma on  $\geq 60^\circ$ . Olkoot nämä lävistäjät esimerkiksi  $AD$  ja  $BE$ . Olkoot  $M$  ja  $N$   $AB$ :n ja  $DE$ :n keskipisteet ja olkoon  $P$   $AD$ :n ja  $BE$ :n leikkauspiste. Kolmioepäyhtälön ja tehtävän oletuksen perusteella on

$$MN \leq MP + PN \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) = MN.$$

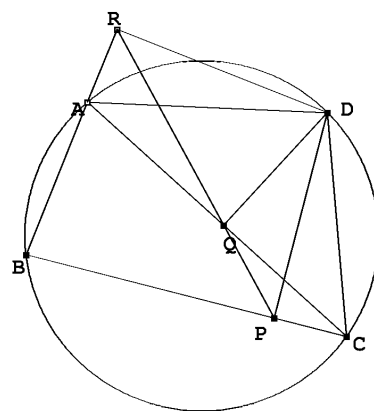


Alussa tehdyn havainnon perusteella kolmioiden  $ABP$  ja  $DEP$  on oltava tasasivuisia. Lävistäjä  $CF$  leikkaa ainakin toisen lävistäjästä  $AD$ ,  $BE$  ainakin  $60^\circ$ :een kulmassa. Olkoon se  $AD$  ja olkoon leikkauspiste  $Q$ . Toistamalle edellinen päättely nähdään, että kolmiot  $AFQ$  ja  $CDQ$  ovat tasasivuisia. Mutta nyt myös  $CF$ :n ja  $BE$ :n välinen kulma on  $60^\circ$ . Olkoon näiden lävistäjien leikkauspiste  $R$ . Samoin kuin edellä nähdään, että myös  $BCR$  ja  $EFR$  ovat tasasivuisia kolmioita. On siis todistettu, että jokainen kuusikulmion kulmista on  $120^\circ$ .

**2003.4.** Simsonin lauseesta seuraa, että  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  ovat samalla suoralla. Koska kulmat  $\angle DPC$  ja  $\angle DQC$  ovat suoria, pisteet  $D$ ,  $Q$ ,  $C$  ja  $P$  ovat samalla ympyrällä. Siis  $\angle QCD = \angle QPD$ . Samoin  $\angle QAD = \angle QRD$ . Kolmiot  $ACD$  ja  $RPD$  ovat siis yhdenmuotoiset. Samalla tavoin johdetaan yhdenmuotoisuudet  $DAB \sim DQP$  ja  $DBC \sim DRQ$ . Näin ollen

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP}.$$

Mutta myös



$$\frac{DR}{DB} = \frac{RQ}{BC}, \quad \frac{DP}{DB} = \frac{QP}{BA}.$$

Siis

$$\frac{DA}{DC} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}.$$

Siis  $PQ = QR$ , jos ja vain jos

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}.$$

Mutta kulman  $\angle ABC$  puolittaja jakaa  $AC$ :n suhteessa  $\frac{BA}{BC}$  ja kulman  $\angle ADC$  puolittaja jakaa  $AC$ :n suhteessa  $\frac{AD}{DC}$ . Jakopisteet yhtyvät, jos ja vain jos  $PQ = QR$ .

**2003.5.** Tehtävän epäyhtälö ei muutu, jos jokaiseen  $x_i$ :hin lisätään sama vakio. Voidaan siis olettaa, että  $\sum_{i,j} x_i = 0$ . Selvästi

$$\sum_{i,j=1}^n |x_j - x_i| = 2 \sum_{i < j} (x_j - x_i).$$

Oikean puolen summassa  $x_i$  esiintyy  $i - 1$  kertaa ja  $-x_i$   $n - i$  kertaa. Summa on siis

$$\sum_{i=1}^n (2i - n - 1)x_i,$$

joten

$$\sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j| = 2 \sum_{i=1}^n (2i - n - 1)x_i.$$

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön perusteella

$$\left( \sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^n (2i - n - 1)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (2i - (n+1))^2 &= \sum_{i=1}^n (4i^2 - 4i(n+1) + (n+1)^2) \\ &= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4(n+1) \frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)^2 \\ &= n(n+1) \left( \frac{2}{3}(2n+1) - 2(n+1) + (n+1) \right) = n(n+1) \frac{n-1}{3} = \frac{1}{3} n(n^2 - 1), \end{aligned}$$



mutta  $\angle NMR = \angle MNR$ , on  $\angle AMR \neq \angle ANR$ . Yhtenevyyslauseen ssk perusteella on siis  $\angle AMR = 180^\circ - \angle ANR$ . Tämä merkitsee, että  $AMRN$  on jännenelikulmio. Tästä puolestaan seuraa, että  $\angle MRA = \angle MNA$  ja  $\angle ARN = \angle AMN$ . Leikatkaa  $AR$  sivun  $BC$  pisteessä  $L$ . Kolmiosta  $ABL$  saadaan  $\angle ALC = \angle ABC + \angle BAL$  ja kolmiosta  $AMR$  samoin  $\angle RMB = \angle MRA + \angle RAM$ . Edellä sanotun perusteella kulmat  $\angle ALC$  ja  $\angle RMB$  ovat samat. Tämä merkitsee, että  $MBLR$  on jännenelikulmio. Aivan samoin todistetaan, että  $NRLC$  on jännenelikulmio. Sivun  $BC$  piste  $L$  on siis molempien kolmioiden  $MBR$  ja  $NRC$  yhteinen piste.

**2004.2.** Osoitetaan, että kysytyt polynomit ovat  $P(x) = a_4x^4 + a_2x^2$ , missä  $a_4$  ja  $a_2$  ovat mielivaltaisia reaalilukuja. Koska  $a = b = c = 0$  toteuttaa tehtävässä annetun ehdon, on  $3P(0) = 2P(0)$  eli  $P(0) = 0$ . Edelleen kaikilla  $x$  luvut  $a = x$ ,  $b = c = 0$  toteuttavat annetun ehdon, joten  $P(x) + P(-x) = 2P(x) = 0$ . Siis  $P(x) = P(-x)$ . Polynomissa, joka on samalla parillinen funktio, kaikkien  $x$ :n parittomien potenssien kertoimet ovat nollia. Tehtävän ehdon toteuttavia lukukolmikkoja on äärettömän paljon: jos  $(a, b, c)$  toteuttaa yhtälön, myös  $(ta, tb, tc)$  toteuttaa sen kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ . Esimerkiksi  $(1, 2, -\frac{2}{3})$  toteuttaa ehdon ja siten kaikki lukukolmikot  $(3t, 6t, -2t)$ . Siis  $P(-3t) + P(8t) + P(-5t) = 2P(7t)$  kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ . Kaksi polynomia on identtisesti samoja vain, jos niiden kaikki kertoimet ovat samoja. Jos siis  $P(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + \dots$ , niin  $a_{2k}(3^{2k} + 8^{2k} + 5^{2k}) = 2 \cdot 7^{2k} a_{2k}$ . Nyt  $3^2 + 8^2 + 5^2 = 98 = 2 \cdot 7^2$  ja  $3^4 + 8^4 + 5^4 = 4802 = 2 \cdot 7^4$ . Mutta  $8^6 - 2 \cdot 7^6 = 2(2^{17} - 49^3) > 2(128 \cdot 1000 - 125000) > 0$ , ja kun  $k \geq 8$ , niin  $8^k - 2 \cdot 7^k = (7+1)^k - 2 \cdot 7^k > 7^k + k \cdot 7^{k-1} - 2 \cdot 7^k > 0$ . Ainoat polynomit, jotka voivat toteuttaa ehdon, ovat polynomit  $P(x) = a_2x^2 + a_4x^4$ . On vielä osoitettava, että kaikki tällaiset polynomit toteuttavat tehtävän ehdot. Jos  $P_1(x)$  ja  $P_2(x)$  ovat tehtävän ehdot täyttäviä polynomeja, niin  $\alpha P_1(x) + \beta P_2(x)$  ovat myös tehtävän ehdot täyttäviä polynomeja kaikilla  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Riittää siis, että todetaan polynomien  $x^2$  ja  $x^4$  toteuttavan tehtävän ehdot. Jos  $ab + bc + ca = 0$ , niin  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4(ab + bc + ca) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$  ja  $2(a+b+c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ca) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$ . Polynomi  $x^2$  toteuttaa tehtävän ehdon. Samoin ehdoin  $2(a+b+c)^4 = 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4) + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$  ja  $(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 = 2(a^4 + b^4 + c^4) - 4(a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + ac^3 + a^3c) + 6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ . On siis näytettävä, että  $2(a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + ac^3 + a^3c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ . Mutta  $0 = (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2(ab^2c + a^2bc + abc^2)$ . Onkin siis näytettävä, että  $a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + ac^3 + a^3c + ab^2c + a^2bc + abc^2 = 0$ . Mutta  $a^3b + a^2bc = a^2(ab + bc) = -a^3c$ ,  $b^3c + ab^2c = b^2(bc + ca) = -ab^3$  ja  $ac^3 + abc^2 = c^2(ca + ab) = -bc^3$ . Kun nämä sijoitetaan edelliseen lausekkeeseen, nähdään, että yhtälö toteutuu. Siis  $x^4$  toteuttaa yhtälön, ja väite on todistettu.

**2004.3.** Osoitetaan, että peitto on mahdollinen jos ja vain jos luvuista  $m$  ja  $n$  yksi on jaollinen kolmella ja yksi neljällä eikä kumpikaan luvuista  $m, n$  ole 1, 2 tai 5. Oletetaan ensin, että jokin  $m \times n$ -suorakaide on peitetty koukuilla. Jokaista koukkuja  $A$  kohden on yksi ja vain yksi koukku  $B$ , joka peittää koukun  $A$  sisään jäävän ”poukaman”.  $A$  ja  $B$  voivat yhdistyä vain kahdella eri tavalla, joko  $3 \times 4$ -suorakaiteeksi tai ei-konveksiksi kahdeksankulmioksi, jonka sivut ovat 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2. Kummassakin kuviossa on 12 neliötä, joten peitto voi onnistua vain, jos  $mn$  on jaollinen 12:llä. Osoitetaan, että joko  $m$  tai  $n$  on jaollinen 4:llä. Ellei näin ole, sekä  $m$  että  $n$  ovat parillisia. Numeroidaan rivit ja

sarakkeet ja kirjoitetaan luku 1 jokaiseen sellaiseen ruutuun, jonka rivi- ja sarakenumeroista tasan toinen on neljällä jaollinen ja 2 jokaiseen sellaiseen ruutuun, jonka sekä rivi- että sarakenumero on neljällä jaollinen. Koska rivejä ja sarakkeita on parillinen määrä, koko ruudukkoon kirjoitettujen lukujen summa on parillinen. Toisaalta  $3 \times 4$ -suorakaiteeseen kirjoitettujen lukujen summa voi olla vain 3 tai 7 ja edellä kuvattuun kahdeksankulmaiseen koukkuyhdistelmään kirjoitettujen lukujen summa voi olla vain 5 tai 7. Tästä seuraa, että koukkupareja on oltava parillinen määrä, josta puolestaan seuraa, että  $mn$  on jaollinen 24:llä. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että kumpikaan luvuista  $m$  ja  $n$  ei olisi jaollinen neljällä. On selvää, että kumpikaan luvuista  $m$  ja  $n$  ei voi olla 1 tai 2. Myöskään 5 ei tule kyseeseen, kuten helposti nähdään, jos yritetään sijoittaa koukkuja viiden neliön pituiselle sivulle.

On vielä osoitettava, että esitetyt välttämättömät ehdot ovat riittäviä. Jos  $3 \mid m$  ja  $4 \mid n$  tai  $4 \mid m$  ja  $3 \mid n$ , asia on triviaali:  $3 \times 4$ -suorakaiteet riittävät. Jos  $12 \mid m$  ja  $n \notin \{1, 2, 5\}$ ,  $3 \nmid n$ ,  $4 \nmid n$ , niin  $n = 3a + 4b$  joillain positiivisilla kokonaisluvuilla  $a$  ja  $b$  (riittää, kun havaitaan, että 7, 11, 13, 14, 17 ja 19 ovat tätä muotoa).  $m \times n$  suorakaide voidaan jakaa  $m \times 3a$ - ja  $m \times 4b$ -suorakaiteiksi, jotka voidaan peittää  $3 \times 4$ -suorakaiteilla.

**2004.4.** Symmetrian perusteella riittää, kun osoitetaan, että  $t_1 < t_2 + t_3$ . On voimassa

$$\sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n t_i^{-1} = n + t_1 \left( \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) + \frac{1}{t_1} (t_2 + t_3) + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ (i, j) \neq (1, 2), (1, 3)}} \left( \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right).$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \geq \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}, \quad t_2 + t_3 \geq 2\sqrt{t_2 t_3} \quad \text{ja} \quad \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \geq 2.$$

Oletuksen perusteella on siis, kun merkitään  $a = t_1/\sqrt{t_2 t_3}$ ,

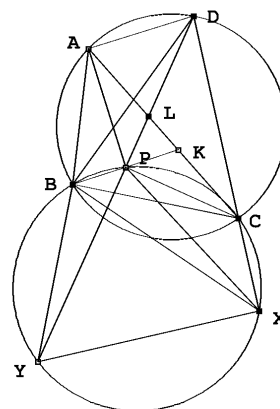
$$n^2 + 1 > n + \frac{2t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + \frac{2\sqrt{t_2 t_3}}{t_1} + 2 \left( \binom{n}{2} - 2 \right) = 2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4.$$

$a$  toteuttaa toisen asteen epäyhtälön  $2a + 2/a - 5 < 0$ , jonka ratkaisujoukko on  $(1/2, 2)$ . Siis  $t_1 < 2\sqrt{t_2 t_3} \leq t_2 + t_3$ .

**2004.5.** Voidaan olettaa, että  $P$  on kolmiossa  $BCD$  ja kolmiossa  $ABC$ . Oletetaan ensin, että  $ABCD$  on jännenelikulmio. Leikatkoon  $BP$   $AC$ :n pisteessä  $K$  ja  $DP$   $AC$ :n pisteessä  $L$ . Tehtävän oletuksesta ja kehäkulmalauseen seurauksista  $\angle ABD = \angle ACD$ ,  $\angle BCA = \angle BDA$  seuraa, että kolmiot  $ABD$ ,  $KBC$  ja  $LCD$  ovat yhdenmuotoiset. Tästä seuraa  $\angle PLK = \angle PKL$ , joten  $PK = PL$ . Myös kolmiot  $ADL$  ja  $BDC$  ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AL}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{KC}{BC}.$$

Siis  $AL = KC$ . Mutta tästä seuraa, että kolmiot  $ALP$  ja  $CKP$  ovat yhteneviä (sks). Siis  $AP = CP$ .



Oletetaan sitten, että  $AP = PC$ . Oletetaan, että kolmion  $BCP$  ympäri piirretty ympyrä leikkaa suoran  $DC$  myös pisteessä  $X$  ja suoran  $PD$  myös pisteessä  $Y$ . Silloin  $\angle PXC = \angle PBC = \angle ABP$ . Tästä seuraa, että kolmiot  $ABD$  ja  $PXD$  ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AD}{PD} = \frac{BD}{DX}.$$

Tästä seuraa, että kolmiot  $PDA$  ja  $XDB$  ovat yhdenmuotoisia (sks), joten

$$\frac{BX}{AP} = \frac{BD}{AD} = \frac{XD}{PD}. \quad (1)$$

Koska  $PYXC$  on jännekelikulmio,  $\angle PYX = \angle PCD$ . Kolmiot  $DPC$  ja  $DXY$  ovat siis yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{YX}{CP} = \frac{XD}{PD}. \quad (2)$$

Koska  $AP = PC$ , yhtälöistä (1) ja (2) seuraa  $BX = YX$ . Näin ollen  $\angle DCB = \angle DCP + \angle PCB = \angle PYX + \angle PYB = \angle XYB = \angle XBY = \angle XPY = \angle PDX + \angle PXD = \angle ADB + \angle ABD = 180^\circ - \angle DAB$ . Edellisen yhtälöketjun ensimmäisen ja viimeisen kulman yhtäsuuruus osoittaa, että  $ABCD$  on jännekelikulmio.

**2004.6.** Jos luku päättyy nollaan ja sen toiseksi viimeinen numero on parillinen, luvulla ei ole vuorottelevaa monikertaa. Osoitetaan, että kaikilla muilla luvuilla, siis luvuilla, jotka eivät ole jaollisia 20:llä, sellainen on. Merkitään numeroin  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1$  kirjoitettavaa lukua  $\overline{a_k a_{k+1} \dots a_1}$ . Merkintä  $u^k \parallel a$  tarkoittaa, että  $u^k \mid a$ , mutta  $u^{k+1} \nmid a$ . Osoitetaan ensin, että kaikilla luvun 2 potensseilla on vuorotteleva monikerta, jonka numeroiden lukumäärä on parillinen. Tähän riittää, jos voidaan konstruoida päättymätön jono väliin  $[0, 9]$  kuuluvia kokonaislukuja  $a_n$  niin, että  $a_n \equiv n + 1 \pmod{2}$ ,  $2^{2^{n-1}} \parallel \overline{a_{2n-1} a_{2n-2} \dots a_1}$  ja  $2^{2^{n+1}} \parallel \overline{a_{2n} a_{2n-1} \dots a_1}$  kaikilla  $n$ . Aloitetaan konstruktio luvuista  $a_1 = 2$  ja  $a_2 = 7$ . Oletetaan, että jono on jo konstruoitu lukuun  $a_{2n}$  asti. Asetetaan  $a_{2n+1} = 4$ . Koska  $2^{2^{n+2}} \parallel 4 \cdot 10^{2^n}$  ja  $2^{2^{n+1}} \parallel \overline{a_{2n} a_{2n-1} \dots a_1}$ , niin  $2^{2^{n+1}} \parallel \overline{a_{2n+1} a_{2n} \dots a_1}$ . Merkitään  $\overline{a_{2n+1} a_{2n} \dots a_1} = 2^{2^{n+1}} A$ , missä  $A$  on pariton luku. Luvun  $a_{2n+2}$  on nyt oltava pariton ja on oltava  $2^{2^{n+3}} \parallel \overline{a_{2n+2} a_{2n+1} \dots a_1} = a_{2n+2} \cdot 10^{2^{n+1}} + \overline{a_{2n+1} a_{2n} \dots a_1} = 2^{2^{n+1}} (a_{2n+2} 5^{2^{n+1}} + A)$ . Tämä toteutuu, jos  $5a_{2n+2} + A \equiv 4 \pmod{8}$ . Lineaaraisella kongruenssiyhtälöllä on ratkaisu  $a_{2n+2}$ ; ratkaisu voidaan aina valita joukosta  $\{0, 1, 2, \dots, 7\}$ . Konstruktiota voidaan siis jatkaa.

Osoitetaan sitten, että jokaisella muotoa  $2 \cdot 5^n$  olevalla luvulla on vuorotteleva monikerta, jossa on parillinen määrä numeroita. Tähän riittää, että konstruoidaan päättymätön jono väliin  $[0, 9]$  kuuluvia kokonaislukuja  $b_n$ , joille  $b_n \equiv n + 1 \pmod{2}$  ja  $2 \cdot 5^n \parallel \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1}$  kaikilla  $n$ . Aloitetaan asettamalla  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 5$ . Oletetaan, että luvut  $b_1, b_2, \dots, b_n$  on jo määritelty ja olkoon  $\overline{b_n b_{n-1} \dots b_1} = 5^q B$ , missä  $B$  ei ole jaollinen viidellä ja  $q \geq n$ . Luvun  $b_{n+1}$  on toteutettava  $b_{n+1} \equiv n + 2 \pmod{2}$ , ja  $5^{n+1} \mid b_{n+1}$  on oltava luvun  $\overline{b_{n+1} b_n \dots b_1} = b_{n+1} 10^n + \overline{b_n b_{n-1} \dots b_1} = 5^n (b_{n+1} 2^n + 5^{q-n} B)$  tekijä. Luvun  $b_n 2^n + 5^{q-n} B$  on oltava viidellä jaollinen. Kiinalaisen jäännöslauseen nojalla kongruenssiparilla

$$\begin{cases} x \equiv 2^n(n+1) \pmod{2^{n+1}} \\ x \equiv -5^{q-n} B \pmod{5} \end{cases}$$

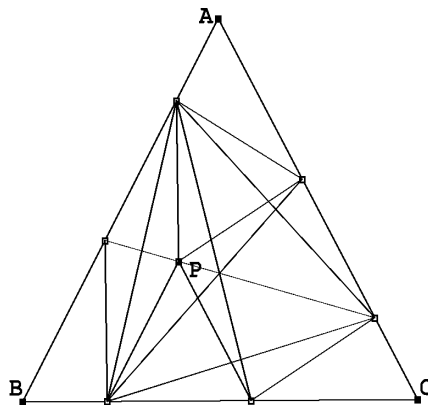
on ratkaisu  $x$ . Lisäksi  $x = 2^n y$ , missä  $y$  on kokonaisluku. Kongruenssiparilla

$$\begin{cases} y \equiv n + 1 \pmod{2} \\ 2^n y + 5^{q-n} B \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

on siis ratkaisu  $y$ . Ratkaisu voidaan aina valita joukosta  $\{0, 1, \dots, 9\}$ .

Siirrytään sitten yleisen luvun  $n = 2^\alpha 5^\beta k$ , missä  $k$  ei ole jaollinen kahdella eikä viidellä. Jos  $20 \nmid n$ , niin  $2^\alpha 5^\beta$  on joko kahden tai viiden potenssi tai muotoa  $2 \cdot 5^\beta$ . Edellä sanotun perusteella  $2^\alpha 5^\beta$ :lla on kaikissa näissä tapauksissa vuorotteleva monikerta  $M$ , jonka numeroiden määrä on parillinen,  $2m$ . Kaikilla  $p > 1$  luku  $C_p M$ , missä  $C_p = 1 + 10^{2p} + 10^{4p} + \dots + 10^{(p-1)2m}$  on  $2^\alpha 5^\beta$ :n vuorotteleva monikerta. Luvuista  $C_p$  jotkin kaksi, esimerkiksi  $C_{p_1}$  ja  $C_{p_2}$ , ovat laatikkoperiaatteen perusteella kongruenteja modulo  $k$ . Mutta  $C_{p_2} - C_{p_1} = C_{p_2-p_1} 10^{p_1 2m}$ , joten  $k | C_{p_2-p_1}$ . Luku  $C_{p_2-p_1} M$  on siten luvun  $n = 2^\alpha 5^\beta k$  vuorotteleva monikerta.

**2005.1.** Olkoon  $P$  se kolmion  $ABC$  sisäpiste, jolle  $A_1 A_2 P$  on tasasivuinen kolmio. Koska  $A_2 P \parallel B_1 B_2$ ,  $A_1 P C_1 C_2$  on suunnikas; koska  $A_2 B_1 = B_1 B_2$ ,  $B_2 P A_2 B_1$  on vinoneliö. Samoin perustein  $A_1 P C_1 C_2$  on vinoneliö. Mutta tästä seuraa, että  $B_2 C_1 P$  on tasasivuinen kolmio. Mutta tämä merkitsee, että  $\angle A_1 A_2 B_1 = 60^\circ + \angle P A_2 B_1 = 60^\circ + \angle B_1 B_2 P = \angle B_1 B_2 C_1$ . Kolmiot  $A_1 A_2 B_1$  ja  $B_1 B_2 C_1$  ovat siis yhteneviä tasakylkisiä kolmioita ja  $A_1 B_1 = B_1 C_1$ . Symmetrian vuoksi on oltava  $C_1 A_1 = A_1 B_1$  ja kolmion  $C_1 C_2 A_1$  yhtenevä kolmioiden  $A_1 A_2 B_1$  ja  $B_1 B_2 C_1$  kanssa. Mutta tästä seuraa, että  $B_1 C_2$ ,  $C_1 A_2$  ja  $A_1 B_2$  yhtyvät kolmion  $A_1 B_1 C_1$  korkeusjanoihin, ja leikkaavat toisensa samassa pisteessä.



**2005.2.** Kaikille indekseille  $i < j$  pätee  $a_i \neq a_j$ ; ellei näin olisi, jaettaessa lukuja  $a_1, a_2, \dots, a_j$   $j$ :llä saataisiin enintään  $j - 1$  eri jakojäännöstä. Havaitaan myös, että jos  $i < j \leq k$ , niin  $|a_i - a_j| \leq k - 1$ . Jos olisi  $m = |a_i - a_j| \geq k$ , lukujen  $a_i$  ja  $a_j$  jakojäännökset  $m$ :llä jaettaessa olisivat samat. Olkoon nyt  $k \geq 1$  mielivaltainen. Olkoon  $a_{i_k}$  pienin ja  $a_{j_k}$  suurin luvuista  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Silloin  $a_{j_k} - a_{i_k} \leq k - 1$ ; koska luvut  $a_1, \dots, a_k$  ovat eri lukuja, on  $a_{j_k} - a_{i_k} \geq k - 1$ . Siis  $a_{j_k} - a_{i_k} = k - 1$ , joten luvut  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ovat kaikki lukujen  $a_{i_k}$  ja  $a_{j_k}$  väliset luvut. Olkoon nyt  $x$  mielivaltainen kokonaisluku. Koska tehtävän jonossa on äärettömän monta negatiivista lukua, siinä on luku  $a_i \leq x$ . Koska jonossa on äärettömän monta positiivista lukua, siinä on luku  $a_j \geq x$ . Jos  $k \geq i$ ,  $k \geq j$ , niin edellä sanotun perusteella  $x$  on lukujen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  joukossa.

**2005.3.** 1. ratkaisu. Kun tehtävän epäyhtälö kirjoitetaan muotoon

$$\frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq \frac{x^5}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5}{z^5 + x^2 + y^2}$$



ja epäyhtälön molemmille puolille lisätään

$$\frac{y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{z^2 + x^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2}{z^5 + x^2 + y^2},$$

todistettava epäyhtälö saadaan yhtäpitävään muotoon

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{1}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{1}{z^5 + x^2 + y^2} \right) \leq 3.$$

Kun sovelletaan Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöä ja ehtoa  $xyz \geq 1$ , saadaan

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq \left( x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2 \right)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

eli

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Kun tämä ja siitä kiertovaihtelulla saatavat epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 2 + \frac{yz + zx + xy}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Tunnetusti  $x^2 + y^2 + z^2 \geq yz + zx + xy$ , joten todistus on valmis.

*2. ratkaisu.* (Moldovalaisen *Boreico Iurien* erikoispalkinnolla palkittu ratkaisu.) Kaikilla  $x$  pätee

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2}{x^5 + (y^2 + z^2)x^3}.$$

Jos nimittäin  $x \geq 1$ , vasemman puolen nimittäjä on suurempi kuin oikean puolen ja epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, jos taas  $x < 1$ , epäyhtälön molemmat puolet ovat negatiivisia ja oikean puolen nimittäjä on pienempi kuin vasemman puolen. Siis

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^2 + x^{-1}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Koska vastaavat epäyhtälöt ovat voimassa kiertovaihtelun jälkeen, todistettavaksi epäyhtälöksi jää

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = yz + zx + xy,$$

mikä on tunnetusti totta.

**2005.4.** Riittää, kun osoitetaan, että jokainen alkuluku on tekijänä jossain luvuista  $a_n$ . Koska  $a_2 = 4 + 9 + 36 - 1 = 48$ , ainakin alkuluvut 2 ja 3 ovat tällaisia alkulukuja. Olkoon sitten  $p > 3$  mielivaltainen alkuluku. Lasketaan modulo  $p$ . Fermat'n pienen lauseen nojalla  $2^{p-1} \equiv 1$ ,  $3^{p-1} \equiv 1$  ja  $6^{p-1} \equiv 1$ . Siis  $6 = 3 + 2 + 1 \equiv 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} =$

$6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2})$ . Koska 6:lla ja  $p$ :llä ei ole yhteisiä tekijöitä,  $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} \equiv 1$ , joten  $a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$  on jaollinen  $p$ :llä.

**2005.5.** Olkoon  $O$  janojen  $AC$  ja  $BD$  keskinormaalien leikkauspiste. Osoitetaan, että jokaisen kolmion  $PQR$  ympäri piirretty ympyrä kulkee pisteen  $O$  kautta. Kolmioissa  $AOD$  ja  $COB$  on  $AD = BC$ ,  $OA = OC$  ja  $OD = OB$ . Kolmiot ovat siis yhteneviä. Suoriteetaan kierto pisteen  $O$  ympäri niin, että  $OB$  kiertyy  $OD$ :ksi. Silloin kolmio  $OBC$  kiertyy kolmioksi  $ODA$ . Koska  $BE = DF$ , piste  $E$  kiertyy pisteeksi  $F$ . Siis  $OE = OF$  ja kulmat  $\angle FOE$ ,  $\angle DOB$  ja  $\angle AOC$  ovat yhtä suuret (kiertokulman suuruiset). Kolmiot  $EOF$ ,  $BOD$  ja  $COA$  ovat siis yhdenmuotoisia tasakylkisiä kolmioita. Siis

$$\frac{AC}{BD} = \frac{OC}{OB}. \quad (1)$$

Oletetaan ensin, että  $EF$  ei ole  $AB$ :n tai  $CD$ :n suuntainen. Oletetaan esimerkiksi, että suora  $EF$  leikkaa suoran  $CD$  pisteessä  $X$ . Sovelletaan Menelaoksen lausetta suoraan  $FE$  ja kolmioihin  $ACD$ ,  $BCD$ . Saadaan

$$\frac{AR}{RC} \cdot \frac{CX}{XD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1, \quad \frac{DQ}{QB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CX}{XD} = 1,$$

joista

$$\frac{AR}{RC} = \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DX}{XC} = \frac{CE}{EB} \cdot \frac{DX}{XC} = \frac{DQ}{QB}.$$

Samaan tulokseen päädytään, jos tarkastellaan  $EF$ :n ja  $AB$ :n leikkaamista. Jos taas  $EF \parallel AB$  ja  $EF \parallel CD$ ,  $ABCD$ :n on oltava tasasivuinen puolisuunnikas ja  $E$ :n ja  $F$ :n sen sivujen keskipisteitä. Tällöin triviaalisti

$$\frac{AR}{RC} = \frac{DQ}{QB}.$$

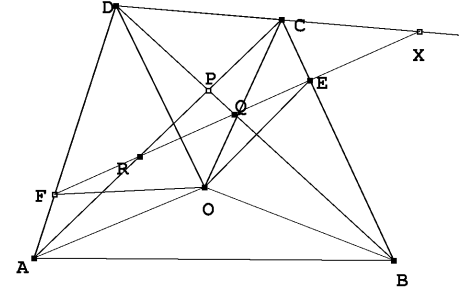
Yhtälöistä (1) ja

$$\frac{RC}{QB} = \frac{AR}{DQ} = \frac{AC - RC}{DB - QB}$$

ratkaistaan

$$\frac{RC}{QB} = \frac{OC}{OB}$$

Kolmiot  $OBQ$  ja  $OCR$  ovat yhdenmuotoiset (sks), joten  $\angle CRO = \angle OQB$ . Nelikulmiossa  $PROQ$  ovat vastakkaiset kulmat vieruskulmia, joten nelikulmio on jännenelikulmio. Nelikulmion ympäri piirretty ympyrä on samalla kolmion  $PRQ$  ympäri piirretty ympyrä, joten todistus on valmis.



**2005.6.** Olkoon kilpailijoita  $n$  kappaletta. Olkoon  $N$  järjestettyjen parien  $(K, T)$ , missä  $K$  on kilpailija ja  $T$  on tehtävä, jonka  $K$  ratkaisi, lukumäärä. Tehtäväpareja on  $\binom{6}{2} = 15$  kappaletta. Koska jokaisen parin ratkaisi yli  $\frac{2}{5}$  kilpailijoista,

$$N \geq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3. \quad (1)$$

Olkoon tasan viisi tehtävää ratkaisseiden kilpailijoiden lukumäärä  $k$ . Näistä kukin on ratkaissut  $\binom{5}{2} = 10$  tehtäväparia, mutta muut  $n-k$  kilpailijaa enintään  $\binom{4}{2} = 6$  tehtäväparia. Siis

$$N \leq 10k + 6(n-k) = 6n + 4k. \quad (2)$$

Siis  $6n+3 \leq 6n+4k$ , joten  $k \geq 1$ . Jos  $2n+1$  ei ole jaollinen 5:llä,  $2n+1$  kaavassa (1) voidaan korvata luvulla  $2n+2$ , jolloin  $N$ :n alarajaksi tulee  $6n+6$ . Tällöin  $k \geq 2$ . Jos taas joku kilpailija ratkaisi enintään 3 tehtävää, yläraja kaavassa (2) pienenee 3:lla, ja saadaan taas  $k \geq 2$ .

Tarkasteltavaksi jää tapaus, jossa  $5|(2n+1)$  ja kaikki kilpailijat ratkaisivat vähintään 4 tehtävää. Johdetaan ristiriita oletuksesta  $k=1$ . Viisi tehtävää ratkaissut on voittaja. Nyt  $N = 10 + 6(n-1) = 6n+4$ . Sanomme, että tehtäväpari on helppo, jos sen kummankin tehtävän ratkaisi yli  $\frac{2n+1}{5}$  kilpailijaa. Jos helppoja tehtäväpareja olisi enemmän kuin yksi, olisi

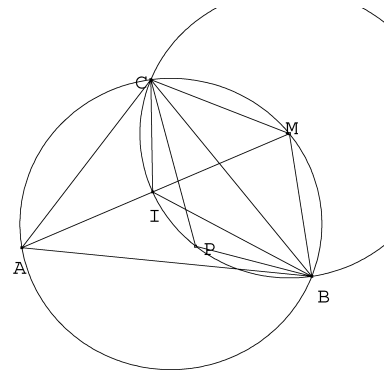
$$N \geq 13 \cdot \frac{2n+2}{5} + 2 \left( \frac{2n+1}{5} + 1 \right) = 6n+5.$$

Helppoja tehtäväpareja on siis enintään yksi. Jos helpon tehtäväparin tehtävät olisi ratkaissut yli  $\frac{2n+1}{5} + 1$  kilpailijaa, olisi

$$N \geq 14 \cdot \frac{2n+1}{5} + \left( \frac{2n+1}{5} + 2 \right) = 6n+5.$$

Olkoon  $T_0$  se tehtävä, jota 5 tehtävää ratkaissut ei osannut. Lasketaan parien  $(K, T_0)$  lukumäärä  $M$ . Tehtävä on mukana viidessä parissa, joista enintään yksi on helppo. Siis  $M = 5 \cdot \frac{2n+1}{5} = 2n+1$  tai  $M = 2n+2$ . Jos  $T_0$ :n ratkaisi  $m$  kilpailijaa, niin kukin näistä ratkaisi kolme muuta tehtävää eli kolme paria, joissa  $T_0$  on toinen osapuoli. Siis  $M = 3m$ . Siis joko  $2n+1 \equiv 0$  tai  $2n+1 \equiv -1 \pmod{3}$ . Olkoon sitten  $T_1 \neq T_0$ , missä  $T_1$  ei ole mahdollisen helpon tehtäväparin osapuoli. Olkoon  $L$  parien  $(K, T_1)$  lukumäärä. Silloin  $L = 2n+1$ . Olkoon  $l$  niiden kilpailijoiden, jotka ratkaisivat  $T_1$ :n, mutta eivät viittä tehtävää, lukumäärä. Silloin  $L = 4 + 3l$ , koska voittaja ratkaisi  $T_1$ :n ja neljä muuta tehtävää, muut  $T_1$ :n ratkaisseet kolme muuta tehtävää. Mutta tämä merkitsee, että  $2n+1 \equiv 1 \pmod{3}$ . Oletus  $k=1$  on kaikissa tapauksissa johtanut ristiriitaan, joten se on hylättävä. Siis  $k \geq 2$ .

**2006.1.** Olkoon  $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$  ja  $\angle BCA = \gamma$ . Koska  $\angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = \beta + \gamma$ , on tehtävän ehdon perusteella  $\angle PBC + \angle PCB = (\beta + \gamma)/2$ , joten  $\angle BPC = 180^\circ - (\beta + \gamma)/2$ . Mutta selvästi myös  $\angle BIC = 180^\circ - (\beta + \gamma)/2$ . Pisteet  $P$  ja  $I$  ovat siis samalla, pisteiden  $B$  ja  $C$  kautta kulkevalla ympyrän kaarella, eli piste  $P$  on kolmion  $BCI$  ympäri piirretyllä ympyrällä. Olkoon  $M$  kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän kaaren  $BC$  keskipiste. Silloin  $MB = MC$ . Kolmion  $ABI$  kulman vieruskulmana  $\angle MIB = \alpha/2 + \beta/2$ . Kehäkulmalau-



seen perusteella  $\angle CBM = \alpha/2$ . Siis  $\angle IBM = \alpha/2 + \beta/2 = \angle MIB$ . Kolmio  $MIB$  on siis tasakylkinen,  $MI = MB$ . Mutta tämä merkitsee, että  $M$  on kolmion  $BIC$  ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Kolmiosta  $APM$  saadaan nyt  $AP + PM \geq AM = AI + IM = AI + PM$ , joten  $AP \geq AI$ . Yhtäsuuruuden välttämätön ja riittävä ehto on, että  $P$  on janalla  $AM$  eli että  $P = I$ .

**2006.2.** Sanomme tasakylkistä kolmiota, jossa on kaksi hyvää janaa sivuina, *tasahyväksi*. Tasahyviä kolmioita voi olla ainakin 1003: jos yhdistetään  $P$ :n joka toinen kärki lävistäjillä, syntyy 1003 tasahyvä kolmiota ja säännöllinen 1003-kulmio. Se voidaan jakaa mielivaltaisesti 1000:lla lävistäjällä kolmioiksi.

Osoitetaan sitten, että 1003 on suurin tasahyvien kolmioiden määrä. Osoitetaan induktiolla, että jos  $AB$  on jokin  $P$ :n halkaisija ja  $\mathcal{L}$  lyhempi  $A$ :n ja  $B$ :n rajoittamista  $P$ :n piirin osista, ja että jos  $\mathcal{L}$  koostuu  $n$ :stä  $P$ :n sivusta, niin sellaisia tasahyviä kolmioita, joiden kärjet ovat murtoviivan  $\mathcal{L}$  kärkiä, on enintään  $\frac{n}{2}$  kappaletta. Väitteen totuus on ilmeinen, jos  $n = 2$  tai  $n = 3$ . Oletetaan, että se pätee kaikilla  $n < k$  ja että  $\mathcal{L}$  koostuu  $k$ :sta  $P$ :n sivusta. Olkoon  $PQ$  pisin sellaisen tasahyvän kolmion sivu, jonka kärjet ovat murtoviivalla  $\mathcal{L}$ . (Jos tällaisia kolmioita ei ole, väite on ilmeinen.) Olkoon  $PQS$  kyseinen tasahyvä kolmio. Koska  $\mathcal{L}$  on lyhempi murtoviivoista  $AB$ , kaikki kolmiot, joiden kärjet ovat  $\mathcal{L}$ :llä, ovat joko tylppä- tai suorakulmaisia. Tästä seuraa, että  $S$  on  $PQS$ :n huippu. Voimme olettaa, että  $A, P, S, Q$  ja  $B$  seuraavat toisiaan tässä järjestyksessä. Pisteet jakavat  $\mathcal{L}$ :n neljäksi murtoviivaksi  $\mathcal{L}_{AP}$ ,  $\mathcal{L}_{PS}$ ,  $\mathcal{L}_{SQ}$  ja  $\mathcal{L}_{QB}$ , joista kaksi voi surkastua vain yhdeksi pisteeksi. Koska  $P$ :n jakoon käytetyt lävistäjät eivät leikkaa toisiaan  $P$ :n sisällä ja koska  $PQ$  oli pisin  $\mathcal{L}$ :ään sisältynyt tasahyvän kolmion sivu, kaikkien  $\mathcal{L}$ :n tasahyvien kolmioiden, paitsi  $PQS$ :n, kaikki kärjet ovat jossakin  $\mathcal{L}$ :n neljästä jako-osasta. Niihin voidaan soveltaa induktio-oletusta. Lisäksi  $PS$  ja  $PQ$  ovat hyviä janoja, joten sovellettaessa induktio-oletusta  $\mathcal{L}_{PS}$ :ään ja  $\mathcal{L}_{SQ}$ :hun jää epäyhtälön puolikkaiden eroksi parittomuuden takia kummassakin tapauksessa ainakin  $\frac{1}{2}$ . Nämä puolikkaat kattavat kolmion  $PQS$ , joten yhteen laskien väite pätee  $\mathcal{L}$ :ään.

Olkoon nyt  $XY$  pisin  $P$ :n jaossa käytetty lävistäjä ja  $\mathcal{L}_{XY}$  lyhempi  $X$ :n ja  $Y$ :n rajaamista  $P$ :n piirin osista. Olkoon  $Z$  se jakoon kuuluvan kolmion  $XYZ$  kärki, joka ei ole murtoviivalla  $\mathcal{L}_{XY}$ . Kolmion  $XYZ$  kaikki kulmat ovat teräviä tai suoria:  $\angle YZX$ , koska  $\mathcal{L}_{XY}$  on murtoviivoista  $P$ :n piiriin kuuluvista murtoviivoista  $X \dots Y$  lyhempi ja muut kaksi kulmaa

siksi, että  $XY$  on kolmion  $XYZ$  pisin sivu. Määritellään kuten aikaisemmin murtoviivat  $\mathcal{L}_{XZ}$  ja  $\mathcal{L}_{ZY}$ . Kaikkien tasahyvien kolmioiden kärkien, paitsi mahdollisesti  $XYZ$ :n, tulee kuulua tasan yhteen paloista  $\mathcal{L}_{XY}$ ,  $\mathcal{L}_{XZ}$  ja  $\mathcal{L}_{ZY}$ . Niihin voidaan soveltaa induktio-oletusta. Jos  $XYZ$  ei ole tasahyvä, todistus on valmis. Jos  $XYZ$  on tasahyvä, mainituissa paloissa on kaksi, joiden sivujen määrä on pariton, ja joille tasahyvien kolmioiden lukumäärän arvio ei ole tarkka. Kuten edellä, nämä epäyhtälöiden puolien erotukset, jotka ovat ainakin  $\frac{1}{2}$ , kattavat kolmion  $XYZ$ .

**2006.3.** Tarkastellaan tehtävän epäyhtälön vasemmalla puolella itseisarvomerkkien välissä olevaa lauseketta  $a$ :n kolmannen asteen polynomina. Siinä kolmannen asteen termin kerroin on  $b-c$ . Jos  $a = b$  tai  $a = c$ , polynomin arvo on 0. Myös  $-(b+c)b((b+c)^2-b^2)+bc(b^2-c^2)-c(b+c)(c^2-(b+c)^2) = (b+c)(-2b^2c-bc^2+b^2c-bc^2+2bc^2+b^2c) = 0$ , joten  $-(b+c)$  on polynomin kolmas nollakohta. Kyseinen polynomi on siis  $(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)$ . Tehtävän epäyhtälö on

$$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Epäyhtälö on symmetrinen, joten voimme olettaa, että  $a \leq b \leq c$ . Tällöin

$$|(a-b)(b-c)| = (b-a)(c-b) \leq \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4}, \quad (1)$$

ja yhtäsuuruus on voimassa, kun  $b-a = c-b$  eli kun  $2b = a+c$ . Lisäksi

$$\left(\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2 \leq \frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2}$$

eli

$$3(c-a)^2 \leq 2((b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2), \quad (2)$$

missä yhtäsuuruus on voimassa vain, kun  $b-a = c-b$  eli  $2b = a+c$ . Kun (1) ja (2) yhdistetään ja käytetään aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä yhtälöä, saadaan

$$\begin{aligned} |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| &\leq \frac{1}{4}|(c-a)^3(a+b+c)| = \frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \\ &\leq \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2((b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2)}{3}\right)^3(a+b+c)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3(a+b+c)^2}\right)^2 \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right)^2 = \frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2+b^2+c^2)^2. \end{aligned}$$

Tehtävän epäyhtälö toteutuu siis, kun  $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$ , ja epäyhtälö on yhtälö, kun  $2b = a+c$  ja

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2.$$

Kun viimeiseen yhtälöön sijoitetaan  $b = \frac{a+c}{2}$ , se saa muodon  $2(c-a)^2 = 9(a+c)^2$ . Yhtäsuuruusehdot ovat siis  $2b = a+c$  ja  $(c-a)^2 = 18b^2$ . jos  $b = 1$ , ehdot toteutuvat, kun  $a = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$  ja  $c = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ . Täten  $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$  on todellakin pienin ehdon toteuttava  $M$ .

**2006.4.** Todetaan, että yhtälöllä ei ole ratkaisuja  $(x, y)$ , missä  $x < 0$ . Jos  $x \leq -2$ ,  $2^x + 2^{2x+1}$  ei ole kokonaisluku, ja jos  $x = -1$ , yhtälön vasen puoli on 2, joka puolestaan ei ole kokonaisluvun neliö. Jos  $(x, y)$  on ratkaisu, niin myös  $(x, -y)$  on ratkaisu. Selvästi  $(0, 2)$  ja  $(0, -2)$  ovat ratkaisuja. Voidaan olettaa, että  $x \geq 1$  ja  $y^2 \geq 11$  eli  $y > 3$ .  $y$  on pariton luku, joten  $y \geq 5$ . Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$2^x(2^{x+1} + 1) = (y-1)(y+1)$$

kanssa. Parillisista luvuista  $y-1$  ja  $y+1$  tasan toinen on jaollinen 4:llä. Jos tämä luku on  $y-1$ , niin  $y = 2^{x-1}u + 1$ , missä  $u$  on pariton luku. Siis  $2^x(2^{x+1} + 1) = 2^{2x-2}u^2 + 2^x u$  eli  $2^{x-2}u^2 + u = 2^{x+1} + 1$ . Tällöin  $1-u = 2^{x-2}(u^2-8)$ . Siis  $u^2-8 \leq 0$ , joka on mahdollista vain, kun  $u = 1$ . Ristiriita osoittaa, että  $y-1$  ei ole neljällä jaollinen. Jäljelle jää mahdollisuus  $y+1 = 2^{x-1}u$ . Samoin kuin edellä saadaan nyt  $1+u = 2^{x-2}(u^2-8) \geq 2(u^2-8)$  eli  $2u^2 - u - 17 \leq 0$ . Tästä seuraa  $u \leq 3$ .  $u = 1$  ei ole mahdollista. Sen sijaan  $u = 3$  antaa ratkaisun  $x = 4$  ja  $y = 23$ . Ainoat ratkaisut ovat siis  $(0, \pm 2)$  ja  $(4, \pm 23)$ .

**2006.5** Jos jokainen ehdon  $Q(x) = x$  toteuttava luku toteuttaa myös ehdon  $P(x) = x$ , väite on tosi, koska  $n$ :nnen asteen polynomilla  $P(x) - x$  on enintään  $n$  nollakohtaa. Oletetaan siis, että on olemassa luku  $x_0$ , jolle  $Q(x_0) = x_0$ , mutta  $P(x_0) \neq x_0$ . Jos nyt  $x_1 = P(x_0)$ ,  $x_2 = P(x_1)$ , ..., niin  $x_k = P(x_{k-1}) = Q(x_0) = x_0$ . Jos  $u$  ja  $v$  ovat mielivaltaisia kokonaislukuja, niin luku  $P(u) - P(v)$  on jaollinen luvulla  $u - v$  (koska  $u^j - v^j$  on kaikilla  $j$  jaollinen  $(u-v)$ :llä). Näin ollen  $x_{j+1} - x_j = P(x_j) - P(x_{j-1})$  on jaollinen  $(x_j - x_{j-1})$ :llä. Jonossa

$$x_0 - x_1, \quad x_1 - x_2, \quad \dots, \quad x_{k-1} - x_k, \quad x_k - x_{k+1} = x_0 - x_1$$

jokainen jäsen on jaollinen edellisellä. Tämä on mahdollista vain, jos jonon kaikkien jäsenten itseisarvo on sama; itseisarvo ei ole 0, koska  $x_1 \neq x_0$ . Jos  $x_m$  on luvuista  $x_0, \dots, x_k$  pienin, niin on oltava  $x_{m-1} - x_m = -(x_m - x_{m+1})$ . Siis  $x_{m-1} = x_{m+1}$ ,  $x_{m+2} = P(x_{m+1}) = P(x_{m-1}) = x_m$  jne. Jono  $x_0, x_1, \dots, x_k$  on siis vuorotteleva ja koostuu vain kahdesta eri luvusta. Jokainen ehdon  $Q(x) = x$  toteuttava luku toteuttaa myös ehdon  $P(P(x)) = x$ . On osoitettava, että tällaisia lukuja on enintään  $n$  kappaletta.

Olkoon nyt  $a$  ehdon  $P(P(a)) = a$  toteuttava luku ja olkoon  $b = P(a) \neq a$ . Silloin  $P(b) = a$ . Olkoon vielä  $c$  jokin ehdon  $P(P(c)) = c$  toteuttava luku ja  $d = P(c)$ ,  $c = P(d)$ . (On mahdollista, että  $c = d$ .) Aikaisemmin esitetyn mukaan  $c - a$  ja  $d - b$  ovat toistensa tekijöitä samoin kuin  $c - b$  ja  $d - a$ . Siis

$$c - b = \pm(d - a), \quad c - a = \pm(d - b).$$

Jos molemmissa edellisissä yhtälöissä olisi  $+$ -merkki, niistä seuraisi puolittain vähentämällä  $a - b = b - a$  eli  $a = b$ . Koska  $a \neq b$ , on ainakin toisessa yhtälössä  $-$ -merkki. Tämä yhtälö olisi silloin  $a + b = c + d$  eli  $a + b - c - P(c) = 0$ . Mutta tämä merkitsee, että jokainen

yhtälön  $P(P(x)) = x$  toteuttava luku toteuttaa yhtälön  $a + b - x - P(x) = 0$  eli on  $n$ :nnen asteen polynomin  $P(x) + x - a - b$  nollakohta (myös  $a$  ja  $b$  toteuttavat yhtälön). Näitä nollakohtia on enintään  $n$  kappaletta.

**2006.6.** Osoitetaan ensin, että jos kuperan  $2n$ -kulmion  $Q$  ala on  $S$ , niin jokin  $Q$ :n sivu ja  $Q$ :n kärki muodostavat kolmion, jonka ala on ainakin  $\frac{1}{n} \cdot S$ . Sanomme niitä  $Q$ :n lävistäjiä, joiden päätepisteet jakavat  $Q$ :n piirin murtoviivoiksi, joissa on  $n$  sivua,  $Q$ :n *päälävistäjiksi*. Jos  $b = AB$  on  $Q$ :n sivu, niin päälävistäjät  $AA'$  ja  $BB'$  leikkaavat pisteessä  $C$ . Merkitään kolmiota  $ABC$  symbolilla  $\Delta_b$ . Väitämme, että kun  $b$  käy läpi kaikki  $2n$ -kulmion  $Q$  sivut, niin kolmiot  $\Delta_b$  peittävät koko monikulmion  $Q$ . Jokainen jonkin päälävistäjän piste on jonkin kolmion  $\Delta_b$  sivun piste. Olkoon  $X$  sellainen  $Q$ :n piste, joka ei ole millään päälävistäjällä. Tulkitaan päälävistäjät suunnatuiksi janoiksi ja oletetaan, että  $X$  on  $AA'$ :n vasemmalla puolella. Tarkastellaan päälävistäjiä  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , ..., missä  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ... ovat  $Q$ :n peräkkäiset kärjet  $A$ :sta lukien  $A$ :n oikealla puolella. Päälävistäjäjonon  $n$ :s jäsen on päälävistäjä  $A'A$ , jonka oikealla puolella  $X$  on. Tästä seuraa, että  $Q$ :lla on sivu  $KL$  niin, että  $X$  on  $KK'$ :n vasemmalla, mutta  $LL'$ :n oikealla puolella. Mutta nyt  $X$ :n on oltava kolmiossa  $\Delta_{K'L'}$ . – Vastaava päättely toimii luonnollisesti myös, jos  $X$  on  $AA'$ :n vasemmalla puolella. Kolmiot  $\Delta_b$  peittävät siis koko  $Q$ :n. Tästä seuraa laatikkoperiaatteen nojalla, että on olemassa sivut  $b = AB$  ja  $b' = A'B'$  niin, että kolmioiden  $\Delta_b$  ja  $\Delta_{b'}$  yhteen laskettu ala on ainakin  $\frac{1}{n}S$ . Leikatko  $AA'$  ja  $BB'$  pisteessä  $Y$ . Oletetaan, että  $BY \geq B'Y$ . Silloin

$$|ABA'| = |ABY| + |YBA'| \geq |ABY| + |YA'B'| \geq \frac{1}{n}S.$$

Aputulos on todistettu.

Tarkastellaan nyt tehtävän  $n$ -kulmiota  $P$ . olkoot sen sivut  $b_1, b_2, \dots, b_n$  ja olkoon  $S_i$  suurimman sellaisen  $P$ :hen sisältyvän kolmion, jonka yksi sivu on  $b_i$ , ala. Tehdään vastaoletus

$$\sum_{i=1}^n \frac{S_i}{S} < 2.$$

Tällöin on olemassa rationaaliluvut  $q_i$  niin, että

$$q_i > \frac{S_i}{S}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^n q_i = 2.$$

Kirjoitetaan  $q_i = \frac{k_i}{m}$ , missä  $m$  on murtolukujen  $q_i$  nimittäjien pienin yhteinen monikerta. Lukujen  $k_i$  summa on  $2m$ . Jaetaan nyt jokainen  $P$ :n sivu  $b_i$   $k_i$ :hin yhtä suureen osaan. Syntyy kupera  $2m$ -kulmio  $Q$  (jonka jotkut kulmat ovat  $180^\circ$ ). Aputuloksen mukaan  $Q$ :lla on sivu  $b$  ja kärki  $H$ , jotka muodostavat kolmion, jonka ala on  $\geq \frac{1}{m}S$ .  $b$  on erään  $P$ :n sivun  $b_i$  osa. Kolmion, jonka määrittävät  $b$  ja  $H$ , ala on  $\geq k_i \cdot \frac{1}{m}S = q_i S > S_i$ . Tämä on ristiriidassa luvun  $S_i$  määritelmän kanssa. Vastaoletus on siis väärä ja tehtävän väite todistettu.

**2007.1.** Olkoon  $k$  jokin sellainen indeksi, jolle  $d = d_k$ . Olkoon  $k_1$  ja  $k_2 \geq k_1$  sellaiset indeksit, joille  $d_k = a_{k_1} - a_{k_2}$ . Jos  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , niin  $x_{k_1} \leq x_{k_2}$ . Jos  $a_{k_1} - x_{k_1} \geq \frac{d}{2}$ , niin (\*) pätee. Oletetaan, että  $a_{k_1} - x_{k_1} \leq \frac{d}{2}$ . Mutta silloin

$$x_{k_2} - a_{k_2} \geq x_{k_1} - a_{k_1} + d \geq -\frac{d}{2} + d = \frac{d}{2}.$$

Väite (a) on todistettu. Kohdassa (b) vaadittu jono voidaan rakentaa esimerkiksi seuraavasti. Olkoon  $x_1 = a_1 - \frac{d}{2}$  ja olkoon  $x_k$  suurempi luvuista  $x_{k-1}$  ja  $a_k - \frac{d}{2}$ . Silloin  $x_{k-1} \leq x_k$  kaikilla  $k$ . Olkoon  $m$  mielivaltainen indeksi. Jos  $x_m = a_m - \frac{d}{2}$ , niin  $|x_m - a_m| \leq \frac{d}{2}$ . Jos  $x_m > a_m - \frac{d}{2}$ , niin  $x_m = x_{m-1}$ . Olkoon nyt  $p$  pienin indeksi, jolle  $x_m = x_p$ . Silloin  $x_p = a_p - \frac{d}{2}$  ja, koska  $p < m$ ,  $x_m - a_m = a_p - \frac{d}{2} - a_m \leq d - \frac{d}{2} = d$ . Siis  $|a_m - x_m| \leq \frac{d}{2}$ . Nämä epäyhtälöt osoittavat, että epäyhtälössä (\*) vallitsee jonolle  $(x_k)$  yhtäsuuruus.

**2007.2.** Riittää, että osoitetaan  $CF = CG$ , koska tällöin  $\angle FAD = \angle FGC = \angle CFG = \angle BAF$ . Tehdään vastaoletus  $CF < GC$ . Olkoot  $K$  ja  $L$  pisteen  $E$  kohtisuorat projektiot janoilla  $CF$  ja  $CG$ . Silloin  $KF < CL$ . Koska  $FC$  ja  $GC$  ovat  $E$ -keskisen ympyrän jäniteitä, on  $EL < EK$ . Koska  $BCED$  on jännene-likulmio,  $\angle CBE = \angle CDE$ . Suorakulmaiset kolmiot  $BEL$  ja  $DEK$  ovat yhdenmuotoiset, joten  $DK > BL$ . Näin ollen  $DF = DK - KF > BL - CL = BC = AD$ . Mutta tämä on ristiriidassa sen kanssa, että kolmiot  $ADF$  ja  $GCF$  ovat yhdenmuotoiset ja  $CF < CG$ . Ehdoista  $CF > GC$  johdetaan ristiriita samoin.

*2. ratkaisu (Suomen joukkueen jäsen Sebastian Dumitrescu).* Kolmiot  $ABG$ ,  $FCG$  ja  $FDA$  ovat yhdenmuotoisia. Koska  $AD = BC$  ja  $AB = DC$ , saadaan

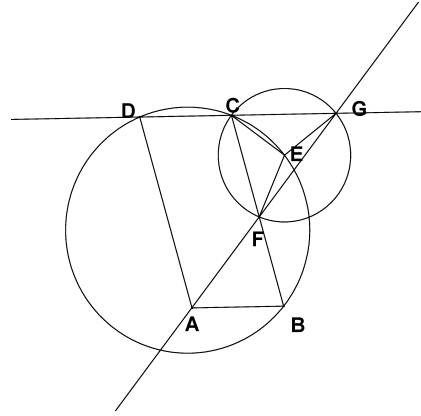
$$\frac{BC}{DF} = \frac{BG}{DC}. \quad (1)$$

Lasketaan pisteiden  $B$  ja  $D$  potenssi  $E$ -keskisen ja pisteet  $F$ ,  $C$  ja  $G$  sisältävän ympyrän suhteen. Saadaan  $BC \cdot BG = BE^2 - EC^2$  ja  $DF \cdot DC = DE^2 - EF^2$ . Kun yhtälöt jaetaan puolittain ja otetaan huomioon (1), saadaan

$$\frac{BC^2}{DF^2} = \frac{BE^2 - EC^2}{DE^2 - EF^2}. \quad (2)$$

Kosinilause sovellettuna kolmioihin  $EBC$  ja  $EDF$  antaa  $BE^2 - EC^2 = BC(2 \cdot BE \cos(\angle CBE))$  ja  $DE^2 - EF^2 = DF(2 \cdot DE \cos(\angle EDF) - DF)$ . Sijoitetaan edelliset lausekkeet kaavaan (2), joka sievenee muotoon

$$\frac{BC}{DF} = \frac{2 \cdot BE \cdot \cos(\angle CBE) - BC}{2 \cdot DE \cdot \cos(\angle EDF) - DF}. \quad (3)$$





Mutta koska  $BCED$  on jännenelikulmio,  $\angle EDF = \angle EDC = \angle CBE$ . (3) sievenee siten muotoon

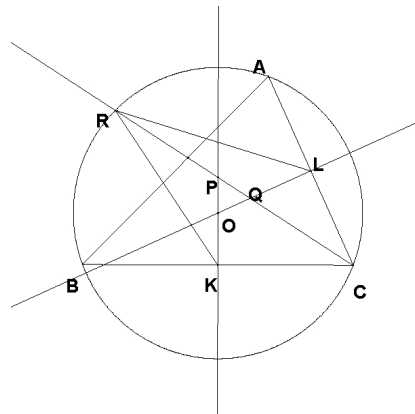
$$\frac{BC}{DF} = \frac{BE}{DE}.$$

Tästä ja juuri havaitusta kulmien yhtäsuuruudesta seuraa, että kolmiot  $BCE$  ja  $DFE$  ovat yhdenmuotoiset. Koska kolmioissa on yhtä pitkät sivut  $EF$  ja  $EC$ , kolmiot ovat yhtenevät. Siis  $DF = BC = AD$ , joten  $\angle DAF = \angle DFA = \angle FAB$ .

**2007.3.** Merkitään  $|E|$ :lla joukon  $E$  alkioden lukumäärää. Merkitään huoneissa olevien kilpailijoiden joukkoja symboleilla  $A$  ja  $B$  ja merkitään vastaavasti huoneessa olevan suurikokoisimman klikin kokoa  $c(A)$ :lla ja  $c(B)$ :llä. Olkoon  $M$  jokin klikki, jonka koko on suurin mahdollinen. Olkoon  $|M| = 2m$ . Sijoitetaan aluksi kaikki  $M$ :n jäsenet huoneeseen  $A$  ja kaikki muut kilpailijat huoneeseen  $B$ . Silloin  $c(A) = |M| \geq c(B)$ . Jos  $c(A) = c(B)$ , vaadittu sijoittelu on tehty. Jos  $c(A) > c(B)$ , siirretään yksi henkilö huoneesta  $A$  huoneeseen  $B$ . Tällöin  $c(A)$  pienenee yhdellä ja  $c(B)$  joko säilyy ennallaan tai kasvaa yhdellä. Jatketaan siirtoja, kunnes  $c(A) \leq c(B) \leq c(A) + 1$ . Tällöin  $c(A) = |A| \geq m$ . Merkitään  $c(A) = k$ . Jos nyt  $c(A) = c(B)$ , jako on valmis. Oletetaan, että  $c(B) = c(A) + 1$ . Jos nyt  $B$ -huoneessa on kilpailija  $x \in M$  ja klikki  $C$ , jolle  $|C| = k + 1$  ja  $x \notin C$ , niin siirretään  $x$  huoneeseen  $A$ . Silloin  $c(A) = k + 1 = |C| = c(B)$ , ja jako on suoritettu. Ellei tällaista kilpailijaa ole, niin jokainen  $x \in B \cap M$  kuuluu jokaiseen sellaiseen klikkiin  $C \subset B$ , jolle  $|C| = k + 1$ . Valitaan nyt jokin tällainen klikki ja siirretään siitä yksi kilpailija, joka ei kuulu  $M$ :ään,  $A$ -huoneeseen. Toistetaan askel niin monta kertaa kuin se on mahdollista. Joka siirrosta  $c(B)$  pienenee enintään yhdellä. Viimeisen mahdollisen siirron jälkeen  $c(B) = k$ . Tarkastellaan nyt tilannetta.  $A$ :ssa on yhä klikki  $A \cap M$ , joten  $c(A) \geq k$ . Olkoon  $Q$  mielivaltainen  $A$ :n klikki. Jos  $x \in Q$ , niin joko  $x \in A \cap M$ , jolloin  $x$  on jokaisen  $B \cap M$ :n jäsenen ystävä, tai  $x$  on siirretty sellaisesta  $B$ :n klikistä, joka sisälsi  $B \cap M$ :n, jolloin  $x$  myös on jokaisen  $B \cap M$ :n jäsenen ystävä. Siis  $Q \cup (B \cap M)$  on klikki. Mutta  $M$  on suurikokoisin klikki, joten  $|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|$ . Siis  $|Q| \leq |A \cap M| = k$ . Siis  $c(A) \leq k$ . Siis  $c(A) = k$ , ja haluttu jako on suoritettu.

**2007.4.** Olkoon  $\angle BCA = 2\gamma$ . Kolmion  $RPK$  sivua  $RP$  vastaan piirretyn korkeusjanan pituus on  $KC \cdot \sin \gamma$  ja kolmion  $RQL$  sivua  $RQ$  vastaan piirretyn korkeusjanan pituus on  $LC \cdot \sin \gamma$ . Väite tulee todistetuksi, jos saadaan osoitettua  $RP \cdot KC = RQ \cdot LC$ . Olkoon  $O$  kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste eli keskinormaalien leikkauspiste.

Suorakulmaisista kolmioista  $CPK$  ja  $CQL$  nähdään heti, että  $\angle KPC = \angle LQC = \angle OQP$ . Kolmio  $OQP$  on siis tasakylkinen. (Jos  $Q = P = O$ , tehtävän väite pätee triviaalisti.) Tästä seuraa, että pisteillä  $P$  ja  $Q$  on sama potenssi kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän suhteen ja edelleen, että  $RP \cdot PC = CQ \cdot QR$ . Tämä on mahdollista vain, jos  $RP = QC$  ja  $RQ = PC$ . Mutta yhdenmuotoisista kolmioista  $PKC$  ja  $QLC$  saadaan



$$\frac{QC}{LC} = \frac{PC}{KC},$$

joten väite on tosi.

**2007.5.** Tehdään vastaoletus: oletetaan, että on olemassa vastaesimerkkipari  $(a, b)$ , niin että  $a \neq b$  ja  $4ab - 1$  on luvun  $(4a^2 - 1)^2$  tekijä. Koska  $4ab \equiv 1 \pmod{4ab - 1}$ , niin  $(4ab)^2 \equiv 1 \pmod{4ab - 1}$  ja  $(4b^2 - 1)^2 \equiv (4b^2 - (4ab)^2) = 16b^2(4a^2 - 1) \equiv 0 \pmod{4ab - 1}$ . Siis myös pari  $(b, a)$  on vastaesimerkkipari. Voidaan siis olettaa, että on olemassa vastaesimerkkipari  $(a, b)$  niin, että  $a < b$ . Olkoon nyt

$$r = \frac{4a^2 - 1}{4ab - 1}.$$

Silloin

$$r \equiv (-r)(-1) \equiv (-r)(4ab - 1) \equiv -(4a^2 - 1)^2 \equiv -1 \pmod{4a}.$$

Siis  $r = 4ac - 1$  jollain positiivisella kokonaisluvulla  $c$ . Mutta  $r$  on luvun  $4a^2 - 1$  aito tekijä, joten  $r < 4a^2 - 1$ . Siis  $c < a$ . Tämä merkitsee, että  $(a, c)$  on myös vastaesimerkkipari ja  $c < a$ . Tarkastellaan nyt kaikkia vastaesimerkkipareja. Jollakin parilla  $(a, b)$  lauseke  $2a + b$  saa pienimmän mahdollisen arvonsa. Jos  $a > b$ , niin  $2b + a < 2a + b$ . Kuitenkin myös  $(b, a)$  on vastaesimerkkipari. Jos  $a < b$ , on olemassa vastaesimerkkipari  $(a, c)$ , jolle  $c < a$ . Selvästi  $2a + c < 2a + b$ . Kummassakin tapauksessa tullaan ristiriitaan  $2a + b$ :n minimaalisuuden kanssa. Vastaesimerkkipareja ei siis voi olla olemassa.

**2007.6.** Tasot, joiden yhtälöt ovat  $x + y + z = k$ ,  $k = 1, \dots, 3n$ , sisältävät kaikki  $S$ :n pisteet, mutta  $(0, 0, 0)$  ei kuulu mihinkään niistä. Näitä tasoja on  $3n$  kappaletta. Osoitetaan, että vähemmällä tasoilla peitto ei onnistu. Jos peittävien tasoja on  $m$  kappaletta ja niiden yhtälöt ovat  $T_k(x, y, z) = a_k x + b_k y + c_k z - 1 = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ , niin polynomi

$$P(x, y, z) = \prod_{k=1}^m T_k(x, y, z)$$

saa arvon 0 aina kun  $(x, y, z) \in S$ , mutta  $P(0, 0, 0) = (-1)^m \neq 0$ . Polynomin aste on  $m$ . Osoitetaan, että  $m \geq 3n$ .

Tarkastellaan ensin kahden muuttujan polynomia  $P(x, y)$ , jolle  $P(x, y) = 0$ , kun  $x$  tai  $y$  on jokin luvuista  $0, 1, \dots, n$ , mutta  $(x, y) \neq (0, 0)$ , ja jolle  $P(0, 0) \neq 0$ . Olkoon  $S(y) = y(y-1)(y-2)\cdots(y-n)$  ja olkoon  $R(x, y)$  polynomi, joka saadaan jakojäännökseksi, kun  $P(x, y)$  jaetaan  $S(y)$ :llä:  $P(x, y) = Q(x, y)S(y) + R(x, y)$ . Nyt  $R(x, y)$ :n aste  $y$ :n suhteen on  $< S(y)$ :n aste. Lisäksi  $R(x, y) = P(x, y)$ , kun  $x, y \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Siis  $R(x, y) = R_n(x)y^n + R_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + R_0(x)$ . Polynomi  $R(0, y)$  saa arvon 0, kun  $y = 1, \dots, n$ , mutta  $R(0, 0) \neq 0$ . Siis  $R(0, y)$ :n aste on  $\geq n$ . Tästä seuraa, että  $R_n(0) \neq 0$ . Olkoon sitten  $x \in \{1, \dots, n\}$ .  $y$ :n  $n$ :nnen asteen polynomi  $R(x, y) = 0$ , kun  $y = 0, 1, \dots, n$ , joten polynomi on identtisesti 0. Siis myös  $R_n(x) = 0$ , kun  $x \in \{1, \dots, n\}$ . Koska  $R_n(x)$  ei ole nollapolynomi, sen asteen on oltava  $\geq n$ . Mutta tämä merkitsee, että  $R(x, y)$ :n ja siis myös  $P(x, y)$ :n aste kahden muuttujan polynomina on  $\geq 2n$ .

Nyt todistetun perusteella voidaan osoittaa, että kolmen muuttujan polynomin  $P(x, y, z)$ , jolle  $P(x, y, z) = 0$ , kun  $(x, y, z) \in S$ , mutta  $P(0, 0, 0) \neq 0$ , aste on  $\geq 3n$ . Päätely on aivan sama kuin edellä (ja voitaisiin kiteyttää induktioaskeleeksi). Muodostetaan  $P(x, y, z)$ :n jakojäännös  $R(x, y, z)$  modulo  $S(z) = z(z-1)\cdots(z-n)$ .  $R$ :n aste  $z$ :n suhteen on  $\leq n$  ja  $R$  saa saman arvon kuin  $P$  kaikissa niissä pisteissä  $(x, y, z)$ , joissa  $x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Jos kirjoitetaan  $R(x, y, z) = R_n(x, y)z^n + \cdots + R_0(x, y)$ , niin  $R(0, 0, z)$  ei ole nollapolynomi, mutta kuitenkin polynomi, jolla on ainakin  $n$  nollakohtaa; siis  $R_n(0, 0) \neq 0$ . Jos  $(x, y) \neq (0, 0)$ , mutta  $x, y \in \{0, 1, \dots, n\}$ , niin  $R(x, y, z)$  on  $z$ :n  $n$ :nnen asteen polynomi, jolla on  $n+1$  nollakohtaa. Se on siis identtisesti nolla, joten  $R_n(x, y) = 0$ . Mutta aikaisemmin todistetun perusteella  $R_n(x, y)$ :n on oltava ainakin astetta  $2n$ . Siis  $R(x, y, z)$  ja myös  $P(x, y, z)$  on kolmen muuttujan polynomina ainakin astetta  $3n$ . Ratkaisu on valmis.

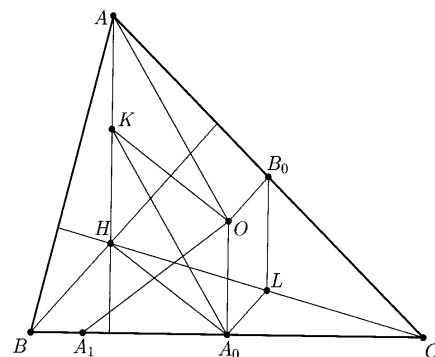
**2008.1** Olkoon  $A_0$  sivun  $BC$  keskipiste ja  $B_0$  sivun  $AC$  keskipiste. Ainoa piste, joka voi olla tehtävässä vaaditun ympyrän keskipiste, on janojen  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  ja  $C_1C_2$  keskinormaalien leikkauspiste. Sanotut keskinormaalit ovat myös kolmion sivujen keskinormaleja, ja ne leikkaavat kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteessä  $O$ . Olkoon kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän säde  $R$ . Koska  $A_0H = A_0A_1$ , Pythagoraan lauseesta saadaan

$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2. \quad (1)$$

Olkoot  $K$  ja  $L$  janojen  $AH$  ja  $CH$  keskipisteet. Kolmioista  $BCH$  ja  $CAH$  saadaan  $A_0L \parallel BH$  ja  $B_0L \parallel AH$ . Koska  $BH \perp AC$  ja  $OB_0 \perp AC$ , niin  $A_0L \parallel OB_0$ . Vastaavasti  $B_0L \parallel OA_0$ . Nelikulmio  $A_0LB_0O$  on siis suunnikas, joten  $OA_0 = B_0L = KH$ . Koska  $KH \parallel OA_0$ ,  $HA_0OK$  on suunnikas. Samoin  $KA_0OA$  on suunnikas. Siis  $A_0K = OA = R$ . Sovelletaan suunnikaslausetta suunnikkaaseen  $HA_0OK$ ; saadaan

$$2(OA_0^2 + A_0H^2) = OH^2 + A_0K^2 = OH^2 + R^2. \quad (2)$$

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan heti  $OA_1^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$ . Tiedetään, että  $OA_1 = OA_2$ .



Toisaalta sama lasku antaa saman arvon suureille  $OB_1^2$  ja  $OC_1^2$  ja  $OB_1 = OB_2$ ,  $OC_1 = OC_2$ . Kysytyt pisteet ovat siis kaikki samalla  $O$ -keskisellä ympyrällä.

**2008.2.** (a) Tehdään muuttujanvaihto

$$\frac{x}{x-1} = a, \quad \frac{y}{y-1} = b, \quad \frac{z}{z-1} = c$$

eli

$$x = \frac{a}{a-1}, \quad y = \frac{b}{b-1}, \quad z = \frac{c}{c-1}.$$

On siis todistettava, että  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$ , kun  $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$ , kun  $a, b, c \neq 1$ . Mutta viimeinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälöiden

$$\begin{aligned} a + b + c - 1 &= ab + bc + ca, \\ 2(a + b + c - 1) &= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2 &= (a + b + c)^2 - 2(a + b + c), \\ a^2 + b^2 + c^2 - 1 &= (a + b + c - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Väite on siis tosi.

(b) Edellisen yhtälöketjun viimeinen yhtälö osoittaa, että alkuperäisessä yhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos  $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$ . Koska  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ , yhtäsuuruuden ehto on yhtälöiden  $a + b + c = 1$  ja  $ab + bc + ca = 0$  yhtäaikainen voimassaolo, sekä  $a, b, c \neq 1$ . Kun yhtälöistä eliminoidaan  $c$ , saadaan  $a^2 + ab + b^2 = a + b$ . Tulkitaan tämä  $b$ :n toisen asteen yhtälöksi. Yhtälön diskriminantti on  $D = (a-1)^2 - 4a(a-1) = (1-a)(1+3a)$ . Saamme rationaalisia ratkaisuja, jos valitsemme  $a$ :n niin, että  $1-a$  ja  $1+3a$  ovat rationaaliluvun neliöitä; tällöin diskriminantti ja  $b$  ovat myös rationaalisia ja samoin  $c = 1 - a - b$ . Asetetaan  $a = \frac{k}{m}$ , missä  $k$  ja  $m$  ovat kokonaislukuja. Jos  $m = k^2 - k + 1$ , niin  $m - k = (k-1)^2$  ja  $m + 3k = (k+1)^2$ . Tällöin  $D = \frac{(k^2-1)^2}{m^2}$ ,  $b = \frac{1}{2m}(m - k \pm (k^2 - 1))$  ja  $c = \frac{1-k}{m}$ . Kun  $k \neq 1$ , niin  $a, b, c \neq 1$ . Kun  $k$  käy läpi luonnolliset luvut  $> 1$ , saadaan tällä tavoin äärettömän monta yhtälön  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa  $(a, b, c)$  ja samoin äärettömän monta tehtävän yhtälön toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa  $(x, y, z)$ .

**2008.3.** Tarkastellaan kokonaislukua  $k \geq 20$ . Olkoon  $p$  jokin luvun  $(k!)^2 + 1$  alkutekijä. Silloin  $p > 20$  ja luvuilla  $p$  ja  $k!$  ei ole yhteisiä tekijöitä. Olkoon  $x \equiv k! \pmod{p}$  ja  $0 < x < p$ . Jos  $p/2 > x$ , niin  $p - x < p/2$  ja  $p - x \equiv -k! \pmod{p}$ . Joka tapauksessa on olemassa  $n$ ,  $0 < n < p/2$  niin, että  $n^2 \equiv (k!)^2 \equiv -1 \pmod{p}$ .  $p$  on siis luvun  $n^2 + 1$  tekijä. Tästä seuraa edelleen  $(p - 2n)^2 = p^2 - 4pn + 4n^2 \equiv 4n^2 \equiv -4 \pmod{p}$ . Siis  $(p - 2n)^2 \geq p - 4$  eli  $p \geq 2n + \sqrt{p-4} > 2n + \sqrt{2n}$ , jos  $p > 20$ , sillä tällöin  $p - 4 \geq 2n + \sqrt{p-4} - 4 > 2n$ . On vielä osoitettava, että ehdon täyttäviä lukuja  $n$  on äärettömän monta. Olkoon  $n$  ja  $p$  edellä tuotetut luvut. Olkoon  $q$  jokin luvun  $(p^2)! + 1$  alkutekijä. Samoin kuin edellä löydetään  $n'$ ,  $n' < q/2$ , niin että  $q$  on  $n'^2 + 1$ :n tekijä ja  $q > 2n' + \sqrt{2n'}$ . Toisaalta  $n'^2 + 1 > q > p^2 > 4n^2 > n^2 + 1$ , joten  $n' > n$ . Jokaista ehdon täyttävää kokonaislukua kohden löytyy siis suurempi ehdon täyttävä kokonaisluku, joten ehdon täyttäviä kokonaislukuja on äärettömän monta.

**2008.4.** Olkoon  $f$  jokin ehdon toteuttava funktio. Asettamalla  $w = x = y = z = 1$  saadaan

$$\frac{2f(1)^2}{2f(1)} = 1,$$

josta seuraa  $f(1) = 1$ . Olkoon sitten  $w > 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = z = \sqrt{w}$ . Nyt

$$\frac{f(w)^2 + 1}{2f(w)} = \frac{w^2 + 1}{2w}.$$

Yhtälö sievenee muotoon

$$(wf(w) - 1)(f(w) - w) = 0.$$

Siis joko  $f(w) = w$  tai  $f(w) = \frac{1}{w}$ . On ilmeistä, että funktiot  $f(x) = x$  ja  $f(x) = \frac{1}{x}$  (kaikilla  $x > 0$ ) toteuttavat yhtälön. Osoitetaan, että muita yhtälön toteuttavia funktioita ei ole. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan tällainen funktio  $f$  olisi olemassa. Silloin olisi olemassa positiiviset luvut  $a$  ja  $b$ ,  $a, b \neq 1$ , niin että  $f(a) = \frac{1}{a}$  ja  $f(b) = b$ . Asetetaan  $w = a$ ,  $x = b$ ,  $y = z = \sqrt{ab}$ . Saadaan

$$\frac{\frac{1}{a^2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

eli

$$f(ab) = \frac{ab(a^{-2} + b^2)}{a^2 + b^2}.$$

Mutta  $f(ab)$  on joko  $ab$  tai  $\frac{1}{ab}$ . Edellisessä tapauksessa on oltava  $a^{-2} = a^2$  eli  $a = 1$ . Jälkimmäisessä tapauksessa  $a^2 b^2 (a^{-2} + b^2) = a^2 + b^2$ , josta seuraa  $b = 1$ . Kumpikin vaihtoehto johti ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä.

**2008.5.** Sanomme, että jono, jolla päästään alkutilasta tehtävän lopputilaan, on sallittu jono, ja sallittu jono, jolla päästään lopputilaan niin, että minkään lampun  $n + 1, \dots, 2n$  tilaa ei muuteta, on rajoitettu jono. Rajoitettuja jonoja on olemassa, koska on mahdollista sytyttää kukin lampuista  $1, \dots, n$  ja sen jälkeen sytyttää ja sammuttaa lamppua  $1 \frac{1}{2}(k - n)$  kertaa. Tarkastellaan nyt mielivaltaista rajoitettua jonoa  $X$  ja mielivaltaista lamppua  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ . Oletetaan, että jonossa tämän lampun tilaa on muutettu  $k_p$  kertaa;  $k_p$  on pariton. Valitaan mielivaltainen parillinen määrä jonon sellaisia askelia, joissa lampun  $p$  tilaa vaihdetaan ja korvataan jokainen askeleella, jossa lampun  $n + p$  tilaa vaihdetaan. Täten saadaan  $2^{k_p - 1}$  jonoa, joiden askeleet yhtyvät jonon  $X$  askeliin muuten kuin valittujen  $p$ :n tilaa muuttavien askelten kohdalla. ( $k_p$ -alkioisella joukolla on  $2^{k_p - 1}$  parillisalkioista osajoukkoa.) Samalla tavalla voidaan jokaiseen lamppuun  $1, \dots, n$  liittyvät tilanvaihdot siirtää lampun  $n + 1, \dots, 2n$  tilanvaihdoksi. Rajoitettuun jonoon  $X$  liittyy tällä tavoin  $2^{k_1 - 1} \cdot 2^{k_2 - 1} \dots 2^{k_n - 1} = 2^{k - n}$  erilaista sallittua jonoa.



valmis.

**2009.1.** Tehtävän oletuksen perusteella

$$a_i a_{i+1} \equiv a_i \pmod{n},$$

kun  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Siis

$$a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_1 \cdots a_{k-1} \equiv \cdots \equiv a_1 \pmod{n}.$$

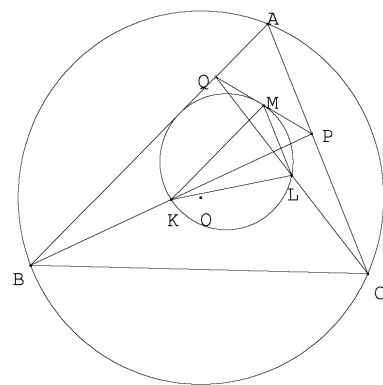
Tehdään vastaoletus  $a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}$ . Silloin

$$a_1 \equiv a_1 \cdots a_{k-1} a_k = a_k a_1 \cdots a_{k-1} \equiv a_k a_1 \cdots a_{k-2} \equiv \cdots \equiv a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}.$$

Mutta  $a_1, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , joten on oltava  $a_1 = a_k$ . Oletuksen mukaan  $a_1$  ja  $a_k$  ovat eri lukuja. Vastaoletus johti ristiriitaan, joten se on väärä.

**2009.2.** Koska  $M$  ja  $L$  ovat kolmion  $CQP$  sivujen keskipisteet,  $ML \parallel PC$ . Siis  $\angle LMP = \angle MPA$ . Koska  $QP$  on ympyrän  $\Gamma$  tangentti,  $\angle LMP = \angle MKL$ . Siis  $\angle MKL = \angle QPA$ . Vastaavasti osoitetaan, että  $\angle MLK = \angle AQP$ . Kolmiot  $AQP$  ja  $MLK$  ovat siis yhdenmuotoiset. Siis

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{QB}{PC}.$$



Mutta tämä merkitsee, että  $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$ . Pisteiden  $P$  ja  $Q$  potenssit kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän suhteen on siis samat. Molemmat pisteet ovat näin ollen samalla etäisyydellä ympyrän keskipisteestä  $O$ .

**2009.3.** Olkoon aritmeettisen jonon  $(s_n)$  peräkkäisten termien erotus  $D$ . Merkitään  $d_n = s_{n+1} - s_n$ . Osoitetaan, että  $d_n$  on vakio. Osoitetaan ensin, että luvut  $d_n$  ovat rajoitettuja. Koska  $(s_n)$  on kasvava kokonaislukujono,  $d_n \geq 1$  kaikilla  $n$ . Siis

$$d_n = s_{n+1} - s_n \leq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_{n+1}-1} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D.$$

Siitä, että jono  $(d_n)$  on rajoitettu, seuraa, että on olemassa

$$m = \min\{d_n \mid n = 1, 2, \dots\}, \quad M = \max\{d_n \mid n = 1, 2, \dots\}.$$

Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että  $m = M$ . Tehdään vastaoletus  $m < M$ . Jollain  $n$  on  $m = d_n = s_{n+1} - s_n$ . Nyt

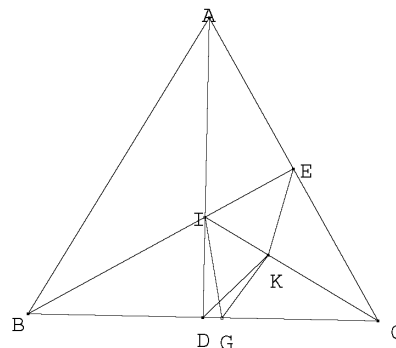
$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+m-1} \leq nM, \quad (1)$$

koska summassa on  $m$  termiä ja niistä jokainen on  $\leq M$ . Jollain  $n'$  on  $d_{n'} = M$ . Samoin kuin edellä saadaan

$$D = s_{s_{n'}+M} - s_{s_{n'}} = d_{s_{n'}} + d_{s_{n'}+1} + \cdots + d_{s_{n'}+M-1} \geq Mm. \quad (2)$$

Siis  $D = mM$  ja jos  $d_n = m$ , niin  $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{n+1}-1} = M$  ja vastaavasti jos  $d_n = M$ , niin  $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{n+1}-1} = m$ . Kaikille  $n$  pätee  $s_n \geq s_1 + (n-1) \geq n$ . Jos  $d_n = m$ , on oltava  $s_n > n$ . Jos nimittäin olisi  $s_n = n$ , olisi  $m = d_n = d_{s_n} = M$ , mikä olisi ristiriidassa oletuksen  $m < M$  kanssa. Samoin, jos  $d_n = M$ , niin  $d_{s_n} = m$  ja  $s_n > n$ . On siis olemassa aidosti kasvava jono  $n_1, n_2, \dots$ , jolle  $d_{s_{n_1}} = M$ ,  $d_{s_{n_2}} = m$ ,  $d_{s_{n_3}} = M$ ,  $d_{s_{n_4}} = m$  jne. Mutta jono  $d_{s_1}, d_{s_2}, \dots$  on aritmeettisten jonojen  $s_{s_1+1}, s_{s_2}, \dots$  ja  $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \dots$  termien erotusjono ja siis myös aritmeettinen jono. Sillä voi olla eik kasvava ja ei-vähenevä osajono vain, jos se on vakiojono. Ei siis voi olla  $m < M$ , ja todistus on valmis.

**2009.4.** Olkoon  $I$  kolmion  $ABC$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Koska kolmio  $ABC$  on tasakylkinen,  $AD \perp BC$ . Siis  $\angle IDK = 45^\circ$ . Olkoon  $G$  pisteen  $E$  peilikuva peilauksessa yli suoran  $CI$ . Koska  $CI$  on kulman  $BCA$  puolittaja,  $G$  on puolisuoralla  $CB$ . Jos  $G = D$ , jana  $EI$  on peilautunut janaksi  $DI$ , joten  $\angle IEC = 90^\circ$ . Mutta silloin kolmion  $ABC$   $B$ :stä piirretyt korkeusjana ja kulmanpuolittaja yhtyvät, ja  $BC = BA$ . Kolmio on tasasivuinen ja  $\angle BAC = 60^\circ$ . Oletetaan sitten, että  $G \neq D$  ja että  $G$  on  $D$ :n ja  $C$ :n välissä. Nyt  $\angle IGK = \angle IEK = \angle BEK$ . Jos  $\angle BEK$



$= 45^\circ$ , niin  $\angle IGK = \angle IDK$ . Pisteet  $I, D, G$  ja  $K$  ovat samalla ympyrällä. Tällöin  $\angle EIK = \angle GIK = \angle GDK = 45^\circ$ ,  $\angle BIC = 180^\circ - \angle EIK = 135^\circ$ ,  $2 \cdot \angle BCI = 45^\circ$ ,  $2 \cdot \angle BCA = 90^\circ$  ja  $\angle BAC = 90^\circ$ . Jos  $G$  olisi  $B$ :n ja  $D$ :n välissä, olisi samoin  $\angle EIK = \angle GIK = 180^\circ - \angle GDK = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ , ja saataisiin  $\angle BAC = 90^\circ$ . (Voidaan kuitenkin helposti osoittaa, että  $G$  ei voi olla janalla  $BD$ .) Kulman  $\angle BAC$  ainoat mahdolliset arvot ovat siis  $60^\circ$  ja  $90^\circ$ . On vielä varmistettava, että näillä arvoilla todellakin  $\angle BEK = 45^\circ$ . Olkoon  $\angle BAC = 60^\circ$ . Silloin  $BE \perp AC$  ja peilaus yli  $IC$ :n kuvaa  $D$ :n  $E$ :lle. Koska  $\angle IDK = 45^\circ$ , on  $\angle IEK = 45^\circ$ . Olkoon  $\angle BAC = 90^\circ$ . Silloin  $\angle AIE = \angle BID = \angle BEA = 90^\circ - 22,5^\circ$  ja  $\angle EIK = 180^\circ - 2 \cdot \angle BID = 45^\circ$ . Kolmio  $AIE$  on tasakylkinen, joten peilauksessa yli  $AK$ :n  $I$  ja  $E$  vastaavat toisiaan. Siis  $\angle IEK = \angle EIK = 45^\circ$ .

**2009.5.** Osoitetaan, että tehtävän ainoa ratkaisu on funktio  $f(x) = x$ . Varmistutaan ensin, että tämä funktio kelpaa. Olkoon siis  $f(x) = x$  ja olkoot  $a$  ja  $b$  positiivisia kokonaislukuja. Kolmion sivujen pituuksiksi ovat tarjolla  $a, b$  ja  $c = a + b - 1$ . Nyt  $c < a + b$ , mutta  $c \geq a \geq 1$  ja  $c \geq b \geq 1$ . Silloin  $c > |a - b|$ , joten kolmio, jonka sivut ovat  $a, b$  ja  $c$  on olemassa.

Osoitetaan sitten, että  $f(x) = x$  on ainoa ratkaisu. Tähän päästään soveltamalla toistuvasti kolmioepäyhtälöä, jonka mukaan kolmion kahden sivun pituuksien summa on aidosti suurempi kuin kolmas sivu. Osoitetaan ensin epäsuorasti, että  $f(1) = 1$ . Jos olisi



$f(1) = 1 + m > 1$ , muodostaisi kaikilla  $a$  kolmikko  $1, f(a), f(a+m)$  kolmion sivujen pituudet. Silloin olisi  $f(a) - 1 < f(a + f(1) - 1) < f(a) + 1$ . Koska  $f$ :n arvot ovat kokonaislukuja, on välttämättä  $f(a + f(1) - 1) = f(a)$  kaikilla  $a$ . Jos olisi  $f(1) - 1 = m > 0$ ,  $f$  voisi saada enintään  $m$  eri arvoa  $f(1), f(2), \dots, f(m)$ , ja jokin niistä olisi suurin; olkoon tämä suurin  $M$ . Mutta silloin ei olisi kolmiota, jonka sivut olisivat  $2M, f(b)$  ja  $f(b + f(2M) - 1)$ . Onkin oltava  $m = 0$  eli  $f(1) = 1$ .

Osoitetaan seuraavaksi, että  $f$  on niin sanottu *involuutio* eli että  $f(f(a)) = a$  kaikilla  $a$ . Tämä seuraa siitä, että  $a, 1 = f(1)$  ja  $f(1 + f(a) - 1) = f(f(a))$  ovat kolmion sivut. Involuutiokuvaukset ovat niin sanottuja injektioita: ne saavat eri pisteissä eri arvot. Jos nimittäin  $f(a) = f(b)$ , niin  $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$ . Käytetään hyväksi tätä ominaisuutta.

Koska  $f$  on injektio,  $f(2) \neq 1$ , joten  $f(2) = 1 + c$ , missä  $c \geq 1$ . Jos  $b$  on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin  $2, f(b)$  ja  $f(b + f(2) - 1) = f(b + c)$  ovat kolmion sivut, joten  $f(b) - 2 < f(b + c) < f(b) + 2$  tai  $f(b) - 1 \leq f(b + c) \leq f(b) + 1$ . Koska  $f(b + c) \neq f(b)$ , niin  $f(b + c) = f(b) \pm 1$ . Koska  $f(1 + c) = f(f(2)) = 2$ ,  $f(1 + 2c) = f(1 + c) \pm 1 = 2 \pm 1$ . Injektiivisyyden vuoksi ei voi olla  $f(1 + 2c) = 1$ . Siis  $f(1 + 2c) = 3$ . Induktiolla nähdään helposti, että  $f(1 + kc) = k + 1$  kaikilla luonnollisilla luvuilla  $k$ . Jos olisi  $c > 1$ , olisi  $f(c) = f(1 + kc)$  jollain luonnollisella luvulla  $k$ . Tämä on mahdotonta, joten on oltava  $c = 1$ . Tästä seuraa, että  $f(1 + k) = 1 + k$  kaikilla  $k \geq 0$ .

**2009.6.** Olkoon heinäsirkan hyppyjärjestys  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , jos sen peräkkäisten hyppyjen pituudet ovat  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ . Todistetaan väite induktiolla. Väite on ilmeisen tosi, kun  $n = 1$ . Olkoon  $n > 1$  ja olkoon väite tosi kaikilla  $n$ :ää pienemmillä kokonaisluvuilla. Voidaan olettaa, että annetut luvut toteuttavat ehdon  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Olkoon  $d = \min M$ . Tarkastellaan tilannetta sen mukaan, onko  $d < a_n$  vai  $d \geq a_n$ . Oletetaan ensin, että  $d < a_n$ . Induktio-oletuksen mukaan heinäsirka pystyy hyppimään  $n - 1$ :llä hypyllä pisteestä  $a_n$  pisteeseen  $s$ . Kun sarjaan liitetään hyppy origosta  $a_n$ :ään, saadaan vaadittu hyppysarja. Olkoon sitten  $a_n = d$ . Tarkastellaan  $n$ :ää joukkoa, joista jokaisella kahdella on epätyhjä leikkaus:  $\{a_n\}, \{a_1, a_1 + a_n\}, \{a_2, a_2 + a_n\}, \dots, \{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$ . Koska  $M$ :ssä on  $n - 1$  alkioita, ainakin yksi joukoista ei sisällä yhtään  $M$ :n alkioita. Olkoon se  $\{a_i, a_i + a_n\}$ . Joukossa  $M \cap [a_i + a_n, s]$  on enintään  $n - 3$  alkioita, koska  $d, a_n < a_i + a_n$ . Induktio-oletuksen perusteella heinäsirka voi hypellä pisteestä  $a_i + a_n$  (joka ei kuulu joukkoon  $M$ ) pisteeseen  $s$  käyttäen kaikkia muita hypyn pituuksia kuin  $a_i$  ja  $a_n$ . Jos nyt ensimmäinen hyppy on  $a_i$  ja toinen  $a_n$  ja sitten tehdään mainitut  $n - 3$  hyppyä, saadan vaadittu sarja. Oletetaan sitten, että  $d > a_n$ . Olkoon  $M' = M \setminus \{d\}$ . Induktio-oletuksen perusteella heinäsirka voi hyppiä pisteestä  $a_n$  pisteeseen  $s$  käymättä joukon  $M'$  pisteissä. Olkoon hyppyjärjestys  $(i_1, \dots, i_{n-1})$ . Jos tämä reitti ei käy pisteessä  $d$  (tällöin on  $d > a_n$ ), niin  $(n, i_1, \dots, i_{n-1})$  on kelvollinen hyppyjärjestys. Muussa tapauksessa voidaan olettaa, että heinäsirka osuu  $d$ :hen hypyllä  $i_j$ . Nyt  $(i_1, i_2, \dots, i_j, n, i_{j+1}, \dots, i_{n-1})$  on myös hyppyjärjestys, joka välttää muut  $M$ :n pisteet kuin  $d$ :n. Koska  $a_{j+1} < a_n$ , järjestys  $(i_1, i_2, \dots, i_j, i_{j+1}, n, \dots, i_{n-1})$  välttää myös  $d$ :n. Todistus on valmis.

**2010.1.** Osoitetaan, että ratkaisuja ovat kaikki funktiot  $f(x) = C$ , missä  $C$  on vakio ja  $C = 0$  tai  $1 \leq C < 2$ , ja vain ne. On helppo nähdä, että nämä funktiot toteuttavat tehtävän ehdon. Oletetaan sitten, että  $f$  on jokin tehtävän toteuttava funktio. Jos tehtävän ehtoon

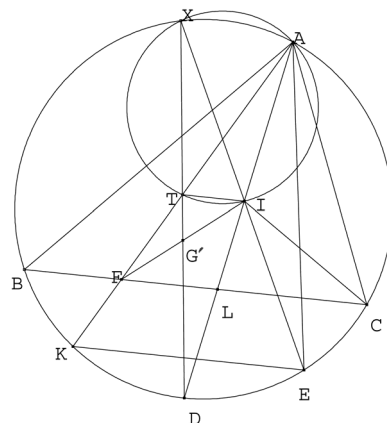
sijoitetaan  $x = 0$ , saadaan  $f(0) = f(0)\lfloor f(y) \rfloor$ . Jos  $f(0) = C \neq 0$ , on  $\lfloor f(y) \rfloor = 1$  kaikilla  $y$ , joten tehtävän ehdoksi saadaan  $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)$ . Kun tähän sijoitetaan  $y = 0$ , saadaan  $f(x) = C$  kaikilla  $x$ . Edelleen on oltava  $\lfloor f(y) \rfloor = \lfloor C \rfloor = 1$ , joten  $1 \leq C < 2$ . Olkoon sitten että  $f(0) = 0$ . Osoitetaan, että nyt  $f(x) = 0$  kaikilla  $x$ . Tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Oletetaan ensin, että  $f(t) \neq 0$  jollain  $t$ ,  $0 < t < 1$ . Sijoitetaan tehtävän yhtälöön  $x = t$ . Saadaan  $0 = f(0) = f(t)\lfloor f(y) \rfloor$ , joten  $\lfloor f(y) \rfloor = 0$  kaikilla  $y$ . Jos nyt sijoitetaan  $x = 1$  ja  $y = t$  tehtävän yhtälöön, saadaan  $f(t) = 0$ , eli ristiriita. Oletetaan sitten, että  $f(z) \neq 0$  jollain  $z$ . On olemassa kokonaisluku  $N$  siten, että  $0 < u = \frac{z}{N} < 1$ . Nyt  $f(z) = f(Nu) = f(\lfloor N \rfloor u) = f(N)f(u) = 0$ . Oletus  $f(z) \neq 0$  johti ristiriitaan. Siis  $f(x) = 0$  kaikilla  $x$ , jos  $f(0) = 0$ .

**2010.2.** Leikatkoon  $EI$   $\Gamma$ :n myös pisteessä  $X$ . Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että  $G$  on suoralla  $DX$  ja edelleen, jos osoitetaan, että suoran  $DX$  ja suoran  $IF$  leikkauspiste  $G'$  on samalla janan  $IF$  keskipiste. On siis osoitettava, että  $IG' = G'F$ . Kun sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon  $AIF$ , nähdään, että

$$\frac{G'F}{G'I} \cdot \frac{DI}{AD} \cdot \frac{TA}{TF} = 1.$$

On siis osoitettava, että

$$\frac{FT}{AT} = \frac{ID}{AD}.$$



Olkoon  $AF$ :n ja  $\Gamma$ :n toinen leikkauspiste  $K$ . Tehtävän oletuksen nojalla kaaret  $BK$  ja  $CE$  ovat yhtä suuret. Siis  $KE \parallel BC$ . Tehtävän oletuksen nojalla  $\angle KAD = \angle DAE$ , joten kehäkulmalauseen perusteella  $\angle DXE = \angle DAE = \angle KAD$ . Tästä seuraa, että  $TIAX$  on jännenelikulmio. Siis  $\angle ITA = \angle IXA = \angle EKA$ , joten  $TI \parallel KE \parallel BC$ . Tästä seuraa

$$\frac{FT}{AT} = \frac{LI}{AI}.$$

Koska  $CI$  on kulman  $BCA$  puolittaja,  $\frac{LI}{AI} = \frac{CL}{AC}$ . Koska  $AD$  on kulman  $BAC$  puolittaja,  $\angle DCB = \angle DAB = \angle DAC$ , joten kolmiot  $ADC$  ja  $CDL$  ovat yhdenmuotoiset (kk). Yhdenmuotoisuudesta seuraa  $\frac{CL}{AC} = \frac{CD}{AD}$ . Väitteen todistus on valmis, kun kodetaan, että  $CD = ID$ . Tämä seuraa siitä, että kulmat  $DIC$  ja  $DCI$  ovat molemmat samoja kuin kolmion  $ABC$  kulmien  $A$  ja  $C$  puolikkaiden summa, joten  $DCI$  on tasakylkinen kolmio.

**2010.3.** Osoitetaan, että ratkaisuiksi käyvät ainoastaan ja vain funktiot  $g(n) = n + c$ , missä  $c$  on ei-negatiivinen kokonaisluku. On selvää, että nämä funktiot toteuttavat tehtävän ehdon, sillä  $(g(m) + n)(g(n) + m) = (m + c + n)(n + c + m) = (m + n + c)^2$ . Sen osoittamiseksi, että muita ratkaisuja ei ole, todistetaan ensin aputuloksena: jos  $g(k) - g(\ell)$



$\angle ACE = \angle ECB$ , niin  $\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS$  eli kolmio  $SCE$  on tasakylkinen. Siis  $S$  on Apolloniuksen ympyrän keskipiste. Koska  $SP = SC$ ,  $P$  on Apolloniuksen ympyrällä ja (1) toteutuu.

**2010.5.** Osoitetaan, että vaadittu siirtosarja on olemassa. Merkintä  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$  tarkoittaa, että jos joissakin vierekkäisissä laatikoissa on  $a_1, \dots, a_n$  kolikkoa, niin jollakin sallittujen siirtojen äärellisellä jonolla on mahdollista päästä tilanteeseen, jossa näissä laatikoissa on  $a'_1, \dots, a'_n$  kolikkoa, ja muiden laatikkojen sisältö on pysynyt samana.

Osoitetaan ensin, että  $(a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0)$  kaikilla  $a > 0$ . Tätä varten osoitetaan induktiolla, että  $(a, 0, 0) \rightarrow (a - k, 2^k, 0)$  kaikilla  $k, 1 \leq k \leq a$ . Kun  $k = 1$ , käytetään siirtoa 1:  $(a, 0, 0) \rightarrow (a - 1, 2, 0)$ . Olkoon sitten  $k < a$ ; oletetaan, että  $(a, 0, 0) \rightarrow (a - k, 2^k, 0)$ . Siirron 1 tekeminen laatikkoon, jossa on  $2^k$  kolikkoa  $2^k$  kertaa (parillinen määrä!) osoittaa, että  $(a - k, 2^k, 0) \rightarrow (a - k, 0, 2^{k+1})$ . Kun nyt sovelletaan siirtoa 2 ensimmäiseen laatikkoon, saadaan  $(a - k, 0, 2^{k+1}) \rightarrow (a - (k + 1), 2^{k+1}, 0)$ . Väite on todistettu.

Merkitään  $P_n = 2^{2^{\dots^2}}$ , kun potenssitornissa on  $n$  kakkosta. Osoitetaan, että  $(a, 0, 0, 0) \rightarrow (0, P_a, 0, 0)$  kaikilla  $a > 0$ . Tämä tulee osoitetuksi, kun näytetään induktiolla, että  $(a, 0, 0, 0) \rightarrow (a - k, P_k, 0, 0)$  kaikilla  $k, 1 \leq k \leq a$ . Induktion aluksi kelpaa siirron 1 avulla saatava  $(a, 0, 0, 0) \rightarrow (a - 1, 2, 0, 0)$ . Oletetaan, että väite on tosi jollain  $k < a$ . Samoin kuin ensimmäisen väitteen todistuksessa ja käyttämällä sitä hyväksi saadaan  $(a - k, P_k, 0, 0) \rightarrow (a - k, 0, 2^{P_k}, 0) = (a - k, 0, P_{k+1}, 0) \rightarrow (a - (k + 1), P_{k+1}, 0, 0)$ , ja väite on todistettu.

Sovelletaan nyt siirtoa 1 laatikkoon  $B_5$  ja sitten siirtoa 2 laatikkoihin  $B_4, B_3, B_2$  ja  $B_1$  ja sovelletaan sitten kahdesti edellä todistettua toista aputulosta. Saadaan

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 1, 1) &\rightarrow (1, 1, 1, 1, 0, 3) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 3, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 3, 0, 0) \\ &\rightarrow (1, 0, 3, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 3, 0, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, P_3, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0, P_{16}, 0, 0), \end{aligned}$$

sillä  $P_3 = 2^{2^2} = 16$ . Nyt laatikossa  $B_4$  on jo liikaakin kolikkoja, koska  $2010^{2010^{2010}} < (2^{11})^{2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} < 2^{(2^{11})^{2011}} < 2^{2^{2^{15}}} < P_{16}$ . Nyt laatikon  $B_4$  sisältöä voi pienentää siirron 2 avulla, kunnes se on yksi neljäsosa vaaditusta. Soveltamalla siirtoa 1 toistuvasti  $B_4$ :ään päästään tilanteeseen, jossa muut rasiat ovat tyhjiä, mutta  $B_5$ :ssä on puolet vaaditusta määrästä, ja soveltamalla siirtoa 1 riittävän monta kertaa rasiaan  $B_5$  viimein tilanteeseen, jossa  $B_6$ :ssa on vaadittava määrä kolikkoja ja muut rasiat ovat tyhjiä.

**2010.6.** Olkoon  $n > s$ . Silloin  $a_n = a_{j_1} + a_{j_2}$ , missä  $j_1 + j_2 = n$ . Jos esimerkiksi  $j_1 > s$ , päättely voidaan toistaa. Lopulta  $a_n$  voidaan purkaa muotoon  $a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}$ , missä  $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n, 1 \leq i_j \leq s$ . Voidaan lisäksi olettaa, että joidenkin kahden indeksin, esimerkiksi  $i_1$ :n ja  $i_2$ :n summa on  $> s$  (viimeinen hajotus). Oletetaan sitten, että indeksit  $i_1, \dots, i_k$  toteuttavat ehdot  $1 \leq i_j \leq s, i_1 + \dots + i_k = n, i_1 + i_2 > s$ . Sanomme nämä ehdot toteuttavaa indeksijoukkoa kelvolliseksi. Merkitään  $s_j = i_1 + i_2 + \dots + i_j$ . Silloin  $a_n = a_{s_k} \geq a_{s_{k-1}} + a_{i_k} \geq a_{s_{k-2}} + a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \geq \dots \geq a_{i_1} + \dots + a_{i_k}$ . Kaikkiaan siis on todistettu, että  $a_n = \max\{a_{i_1} + \dots + a_{i_k} \mid i_1, \dots, i_k \text{ on kelvollinen}\}$ .

Olkoon sitten  $m = \max_{1 \leq i \leq s} \frac{a_i}{i}$ . Olkoon  $\ell < s$  jokin indeksi, jolle  $m = \frac{a_\ell}{\ell}$ . Olkoon  $n > s^2\ell + 2s$ . Puretaan  $a_n$  summaksi  $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}$  kuten edellä. Koska  $i_j \leq s$ ,

$n = i_1 + \dots + i_k \leq ks$ . Siis  $k \geq \frac{n}{s} \geq s\ell + 2$ . Oletetaan, että mikään indekseistä  $i_3, \dots, i_k$  ei ole  $\ell$ . Laatikopperiaatteen nojalla ainakin jokin indeksi  $j \neq \ell$  esiintyy indeksien  $i_3, \dots, i_k$  joukossa ainakin  $\ell$  kertaa. Poistetaan jonosta  $(i_1, \dots, i_k)$   $\ell$   $j$ :n esiintymää ja laiteaan tilalle  $j$   $\ell$ :n esiintymää. Saadaan uusi kelvollinen indeksijoukko  $(i_1, i_2, i'_3, \dots, i'_{k'})$ . Edellä todistetun maksimaalisuusominaisuuden perusteella

$$a_{i_1} + \dots + a_{i_k} \geq a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \dots + a'_{i_{k'}}.$$

Kun epäyhtälöstä sievennetään pois samat yhteenlaskettavat, jää jäljelle epäyhtälö  $\ell a_j \geq j a_\ell$ . Koska  $\frac{a_\ell}{\ell} \geq \frac{a_j}{j}$ , on oltava  $\ell a_j = j a_\ell$ . Siis itse asiassa

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \dots + a'_{i_{k'}}.$$

Kun  $n > s^2\ell + 2s$ ,  $a_n$  voidaan siis purkaa summaksi  $a_{i_1} + \dots + a_{i_k}$ , jossa ainakin yksi yhteenlaskettava on  $a_\ell$ . Voidaan olettaa, että tämä on viimeinen. Mutta nyt  $(i_1, \dots, i_{k-1})$  on kelvollinen indeksijoukko, kun  $n$  korvataan  $n - \ell$ :llä. Edellä todistetuun maksimaalisuusominaisuuden nojalla  $a_{n-\ell} + a_\ell \geq (a_{i_1} + \dots + a_{i_{k-1}}) + a_\ell = a_n$ .  $a_n$ :n perusominaisuuden mukaan  $a_n \geq a_{n-\ell} + a_\ell$ . Siis todellakin  $a_n = a_{n-\ell} + a_\ell$  kaikilla  $n \geq s^2\ell + 2s$ .

**2011.1.** Joukolla  $\{1, 2, 3, 4\}$  on 6 kaksialkioista osajoukkoa. Varmasti siis  $n_A \leq 6$ . Mutta jos jokin  $A$ :n kahden eri alkion  $a_i, a_j$  summa on tekijänä luvussa  $S_A$ , se on tekijänä myös luvussa  $S_A - (a_i + a_j)$ , joka on  $A$ :n kahden muun alkion summa. Voidaan olettaa, että  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ . Koska  $a_3 + a_4 > a_1 + a_2$  ja  $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$ , summat  $a_3 + a_4$  ja  $a_2 + a_4$  eivät voi olla luvun  $S_A$  tekijöitä. Siis  $n_A \leq 4$ .

Osoitetaan, että  $n_A = 4$  on mahdollista. Katsotaan ensin välttämättömiä seurauksia oletuksesta  $n_A = 4$ . Jos  $n_A = 4$ , kaikki muut  $A$ :n kahden eri alkion summat kuin summat  $a_3 + a_4$  ja  $a_2 + a_4$  ovat  $S_A$ :n tekijöitä. Erityisesti silloin  $a_1 + a_4$  on luvun  $a_2 + a_3$  tekijä ja  $a_2 + a_3$  on luvun  $a_1 + a_4$  tekijä. Tämä on mahdollista vain, jos  $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$  ja  $S_A = 2(a_2 + a_3)$ . Merkitään  $a_1 + a_2 = x$  ja  $a_1 + a_3 = y$ . Silloin  $S_A = 2(x + y - 2a_1)$ . Koska  $y$  on  $S_A$ :n tekijä, se on luvun  $2(x - 2a_1) = 2(a_2 - a_1) > 0$  tekijä. Koska  $y > x$ ,  $y > x - 2a_1$ . Jos luku on toisen luvun tekijä ja enemmän kuin puolet tästä luvusta, luvut ovat yhtä suuret. Siis  $y = 2(x - 2a_1) = 2(a_2 - a_1)$ . Toisaalta  $x = a_1 + a_2$  on luvun  $2(y - 2a_1) = 2(2a_2 - 4a_1) = 4(a_1 + a_2) - 12a_1$  tekijä, joten se on luvun  $12a_1$  tekijä. Mutta tiedetään, että  $x < y$  eli  $a_1 + a_2 < 2(a_2 - a_1) = 2(a_1 + a_2) - 4a_1$ , joten  $a_1 + a_2 > 4a_1$ . Tämä merkitsee, että vain yhtälöt  $a_1 + a_2 = 6a_1$  ja  $a_1 + a_2 = 12a_1$  eli  $a_2 = 5a_1$  ja  $a_2 = 11a_1$  ovat mahdollisia. Koska  $a_3 = y - a_1 = 2a_2 - 3a_1$ , edellinen vaihtoehto johtaa tilanteeseen  $a_3 = 7a_1$  ja  $a_4 = 11a_1$ , jälkimmäinen tilanteeseen  $a_3 = 19a_1$ ,  $a_4 = 29a_1$ . Välittömästi voidaan tarkastaa, että jos  $a$  on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, joukot  $A = \{a, 5a, 7a, 11a\}$  ja  $A = \{a, 11a, 19a, 29a\}$  toteuttavat tehtävän ehdon. Ne ovat siis tehtävässä kysytyt joukot.

**2011.2.** Oletetaan ensin, että joukossa  $\mathcal{S}$  on  $2n + 1$  pistettä. Valitaan pisteistä yksi, esimerkiksi  $A$ , ja asetetaan  $A$ :n kautta suora  $\ell_0$  niin, että suoran molemmilla puolilla on  $n$   $A$ :n pistettä. Alkutilanteessa  $\ell = \ell_0$ . Kiinnitetään suoran  $\ell$  suunta; silloin voidaan puhua  $\ell$ :n oikeasta ja vasemmasta puolesta. Kun  $\ell$  kiertyy  $A$ :n ympäri, se kohtaa ensin joko jonkin

alkuaan  $\ell$ :n oikealla puolella olevan pisteen  $B$ ; kun  $\ell$  on kiertynyt vielä vähän  $B$ :n ympäri, mutta ei ole vielä osunut mihinkään uuteen  $\mathcal{S}$ :n pisteeseen,  $A$  on muuttunut  $\ell$ :n oikean puolen pisteeksi, mutta muut pisteet ovat edelleen sillä puolen  $\ell$ :ää, missä olivat alkutilanteessa. Jos taas  $\ell$  kohtaa ensin jonkin vasemmalla puolella olevan pisteen  $C$ , niin (kun on kierretty vielä vähän  $C$ :n ympäri)  $A$  on muuttunut  $\ell$ :n vasemman puolen pisteeksi. Kaikkiaan siis aina silloin, kun  $\ell$  koskettaa vain yhtä  $\mathcal{S}$ :n pistettä,  $\ell$ :n molemmilla puolilla on yhtä monta  $\mathcal{S}$ :n pistettä. Piste siirtyy  $\ell$ :n puolelta toiselle tasan silloin, kun se on kierron keskipisteenä. Koska  $\mathcal{S}$  on äärellinen joukko,  $\ell$ :n suunta (jonkin kiinteän referenssin, esimerkiksi kahden annetun  $\mathcal{S}$ :n pisteen kautta kulkevan suoran suhteen), muttuu kulmalla, jonka suuruudella on positiivinen alaraja. Tämä merkitsee, että äärellisen monen askeleen jälkeen  $\ell$  on tehnyt  $180^\circ$  kierron. Voidaan että, tällöin  $\ell$  koskee vain yhtä  $\mathcal{S}$ :n pistettä (ellei näin ole, voidaan tarkastella alkutilannetta, jossa  $\ell$ :naento hiukan muutetaan). Olkoon  $\ell_1$  se suora, jonka päällä  $180^\circ$  kiertynyt  $\ell$  on. Silloin  $\ell_1 \parallel \ell_0$ . Kummankin suoran  $\ell_0$  ja  $\ell_1$  kummallakin puolella on  $n$  joukon  $\mathcal{S}$  pistettä. Tästä seuraa, että suorien välissä ei ole yhtään  $\mathcal{S}$  pistettä ja jokainen alussa  $\ell$ :n vasemmalla puolella ollut piste on siirtynyt  $\ell$ :n oikealle puolelle ja päin vastoin. Kierron keskipiste on jälleen  $A$  ja jokaisen  $\mathcal{S}$ :n on täytynyt olla ainakin kerran kierron keskipisteenä. Prosessi toistuu samana äärettömän monta kertaa, joten jokainen piste on äärettömän monta kertaa kierron keskipisteenä.

Olkoon sitten  $\mathcal{S}$ :ssä  $2n$  pistettä. Olkoon  $A \in \mathcal{S}$  ja olkoon  $\ell_0$  sellainen  $A$ :n kautta kulkeva (suunnalla varustettu) suora, että  $\ell_0$ :n vasemmalla puolella on  $n$  ja oikealla puolella  $n - 1$  pistettä. Kun tilanteesta  $\ell = \ell_0$  on edetty tilanteeseen  $\ell = \ell_1$ , missä  $\ell_1$  koskettaa joukkoa  $\mathcal{S}$  pisteessä  $B$ ,  $\ell_1 \parallel \ell_0$ , mutta  $\ell_1$  ja  $\ell_0$  ovat vastakkaisuuntaiset, niin  $\ell_1$ :n vasemmalla puolella on edelleen  $n$  ja oikealla puolella  $n - 1$  pistettä. Tämä on mahdollista vain, jos  $B$  on  $\ell_0$ :n vasemmalla puolella ja  $A$  on  $\ell_1$ :n vasemmalla puolella ja jokainen muu  $\ell_0$ :n vasemmalla puolella oleva piste on  $\ell_1$ :n oikealla puolella sekä jokainen  $\ell_0$ :n oikealla puolella oleva piste on  $\ell_1$ :n vasemmalla puolella. Jokainen  $\mathcal{S}$ :n piste on ollut ainakin keran kierron keskipiste. Kun  $\ell$  kiertyy seuraavat  $180^\circ$ , se on taas  $\ell_0$ :n päällä, ja kierros alkaa uudelleen; se voidaan toistaa äärettömän monta kertaa.

**2011.3.** Sijoitetaan  $x = 0$  tehtävän epäyhtälöön. Saadaan  $f(y) \leq yf(0) + f(f(0))$  kaikilla  $y$ . Valitaan  $x$  ja  $y$  niin, että  $x + y = f(0)$ . Kun sovelletaan tehtävän epäyhtälöä ja juuri johdettua epäyhtälöä, saadaan

$$f(f(0)) \leq (f(0) - x)f(x) + f(f(x)) \leq (f(0) - x)f(x) + f(x)f(0) + f(f(0)),$$

mikä sievenee muotoon  $0 \leq (2f(0) - x)f(x)$ . Tästä seuraa, että  $f(x) \geq 0$  kaikilla  $x < 2f(0)$ . Osoitetaan, että  $f(x) \leq 0$  kaikilla  $x$ . Ellei näin olisi, olisi jollain  $a$   $f(a) > 0$ . Silloin olisi  $f(y + a) \leq yf(a) + f(f(a))$  eli  $f(y + a) < 0$ , kun  $y < -f(f(a))/f(a)$ . Molemmat kaksi edellistä väittämää eivät selvästikään voi toteutua. Siis  $f(x) \leq 0$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Koska silloin myös  $f(f(x)) \leq 0$  kaikilla  $x$ , saadaan tehtävän epäyhtälöstä

$$f(x + y) \leq yf(x). \quad (1)$$

Koska  $f(x) \geq 0$  tarpeeksi pienillä  $x$  ja toisaalta  $f(x) \leq 0$  kaikilla  $x$ , on olemassa lukuja  $x$ , joille  $f(x) = 0$ . Olkoon  $x$  tällainen ja olkoon  $y = 0$ . Tehtävän epäyhtälö antaa nyt  $0 = f(x) \leq f(f(x)) = f(0)$ . Koska  $f(0) \leq 0$ , on oltava  $f(0) = 0$ . Olkoon nyt  $x < 0$ , jolloin

$-x > 0$ . Epäyhtälöstä (1) saadaan  $0 = f(0) = f(x - x) \leq -xf(x)$ . Tämä merkitsee, että  $f(x) \geq 0$ , eli koska  $f(x) \leq 0$ ,  $f(x) = 0$ . Väite on todistettu.

**2011.4.** Olkoon  $x_n$  sijoittelujen määrä. Selvästi  $x_1 = 1$ : ainoa punnus voidaan asettaa vain vasempaan kuppiin. Olkoon sitten käytössä  $n$  punnusta. Punnukset, joiden paino on  $2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ , voidaan sijoitella  $x_{n-1}$ :llä eri tavalla. Kevein punnus voidaan sijoittaa ennen muita punnuksia, minkä tahansa kahden muun punnuksen välissä tai kaikkien muiden punnusten jälkeen. Jos kevein sijoitetaan ensimmäisenä, se voidaan asettaa vain vasempaan vaakakuppiin. Jos se sijoitetaan missä muussa tahansa vaiheessa, vasen vaakakuppi painaa ainakin kaksi yksikköä enemmän kuin oikea, ja yhden painoinen punnus voidaan sijoittaa kumpaan tahansa kuppiin. Jokaista painavampien punnusten sijoittelua kohden keveimmällä punnuksella on siten  $1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$  eri mahdollisuutta. Tämä merkitsee, että  $x_n = (2n-1)x_{n-1}$ . Kun otetaan huomioon  $x_1 = 1$ , saadaan  $x_n = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$ . (Tätä lukua merkitään joskus symbolilla  $(2n-1)!!$ .)

**2011.5.** Todistettavaa on vain niissä tapauksissa, joissa  $f(m) \neq f(n)$ . Oletetaan, että  $f(m) < f(n)$ . Oletuksen mukaan positiivinen luku  $f(n) - f(m)$  on jaollinen luvulla  $f(n-m)$ . Koska  $f(m) > 0$ ,  $f(n-m) \leq f(n) - f(m) < f(n)$ . Siis

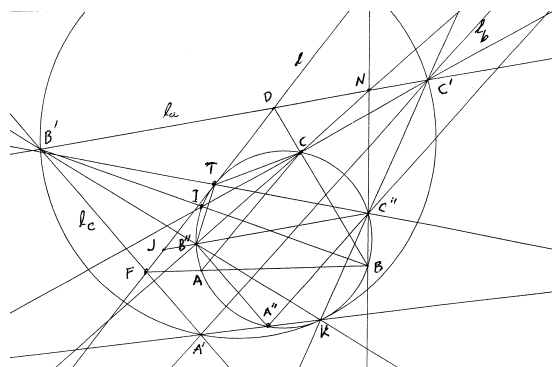
$$-f(n) < -f(m-n) < f(m) - f(m-n) < f(m) < f(n). \quad (1)$$

Koska  $f(n) = f(m-(m-n))$ , tehtävän oletuksesta seuraa, että  $f(m) - f(m-n)$  on jaollinen  $f(n)$ :llä. Epäyhtälöiden (1) mukaan tämä on mahdollista vain, jos  $f(m) - f(m-n) = 0$  eli  $f(m-n) = f(m)$ . Mutta tehtävän oletuksesta seuraa nyt, että  $f(n) - f(m)$  on jaollinen  $f(m)$ :llä. Tästä taas seuraa, että  $f(n)$  on jaollinen  $f(m)$ :llä.

**2011.6.** Todistus on varsin mutkikas ja siinä nojaututaan tunnettuun, muttei ihan alkeelliseen *Pascalin lauseeseen*. Pascalin lause kertoo, että jos  $A, B, C, D, E$  ja  $F$  ovat saman ympyrän pisteitä missä tahansa järjestyksessä, niin suorien  $BC$  ja  $EF$  leikkauspiste  $Q$ , suorien  $CD$  ja  $FA$  leikkauspiste  $P$  ja suorien  $DE$  ja  $AB$  leikkauspiste  $R$  ovat samalla suoralla.

Olkoon  $A'$   $\ell_b$ :n ja  $\ell_c$ :n leikkauspiste,  $B'$   $\ell_c$ :n ja  $\ell_a$ :n leikkauspiste ja  $C'$   $\ell_b$ :n ja  $\ell_a$ :n leikkauspiste ja olkoon  $\Gamma'$  kolmion  $A'B'C'$  ympäri piirretty ympyrä. Olkoon  $T$   $\Gamma$ :n ja  $\ell$ :n sivuamispiste. Olkoot  $A'', B''$  ja  $C''$  ne  $\Gamma$ :n pisteet, joille  $A, B$  ja  $C$  ovat kaarien  $TA'', TB''$  ja  $TC''$  keskipisteet. Tehtävän väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että kolmiot  $A'B'C'$  ja  $A''B''C''$  ovat homoteettiset ja että homotetiakeskus on ympyrällä  $\Gamma$ .

Osoitetaan ensin, että kolmioiden  $A'B'C'$  ja  $A''B''C''$  sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset. Osoitetaan, että  $B'C' \parallel B''C''$ ; muilla sivupareilla todistus menee periaatteessa samoin. Olkoon  $J$   $B''C''$ :n ja  $\ell$ :n leikkauspiste,  $F$   $AB$ :n ja  $\ell$ :n leikkauspiste ja  $D$   $BC$ :n ja  $\ell$ :n leikkauspiste. Jos, kuten kuvassa,  $J$  on janalla  $TF$ , niin kehäkulmalauseeseen ja pisteiden  $B''$  ja  $C''$  määritelmään sekä siihen, että  $\ell_a$  on  $\ell$ :n kuva peilauksessa yli suoran  $BC$  nojautuen saadaan  $\angle FJC'' = \angle JTC'' + \angle JCT'' = \angle JTC'' + \angle B''BT = (180^\circ - \angle DTC'') +$







yhteneviä (ksk), joten  $AK = SM$ . Samoin osoitetaan, että  $AL = TM$ . Nyt sivu ympyrän tangentteina  $AK$  ja  $AL$  ovat yhtä pitkät, joten  $SM = TM$ .

**2012.2.** Valitaan positiivinen luku  $x_1$  ja määritellään luvut  $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$  niin, että  $a_k = \frac{x_k}{x_{k-1}}$ , kun  $k = 2, 3, \dots, n-1$  ja  $a_n = \frac{x_1}{x_{n-1}}$ . Todistettava epäyhtälö saa muodon

$$(x_1 + x_2)^2(x_2 + x_3)^2 \cdots (x_{n-1} + x_1)^n > n^n x_1^2 x_2^3 \cdots x_{n-1}^n. \quad (1)$$

Sovelletaan jokaiseen vasemman puolen tulon tekijään aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon epäyhtälöä seuraavasti:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 &\geq 2^2 x_1 x_2 \\ (x_2 + x_3)^2 &= \left(2 \left(\frac{x_2}{2}\right) + x_3\right)^2 \geq 3^2 \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 x_3 \\ (x_3 + x_4)^2 &= \left(3 \left(\frac{x_3}{3}\right) + x_4\right)^2 \geq 4^2 \left(\frac{x_3}{3}\right)^3 x_4 \\ &\vdots \\ (x_{n-1} + x_1)^n &= \left((n-1) \left(\frac{x_{n-1}}{n-1}\right) + x_1\right)^n \geq n^n \left(\frac{x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} x_1. \end{aligned}$$

Kun edelliset epäyhtälöt kerrotaan puolittain keskenään, saadaan (1), kuitenkin niin, että yhtäsuuruuskin olisi mahdollinen. Yhtäsuuruus toteutuu kuitenkin vain, jos  $x_1 = x_2$ ,  $x_2 = 2x_3$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} = (n-1)x_1$  eli  $x_1 = (n-1)!x_1$ . Koska  $x_1 > 0$  ja  $n \geq 3$ , tämä ei ole mahdollista. Epäyhtälö on aito.

**2012.3.** Oletamme, että  $B$  on määrittänyt joukon  $T$ , jossa on  $m$  alkioita ja johon  $x$  kuuluu. Pelin alussa  $T = \{1, 2, \dots, N\}$ . Osoitetaan, että jos  $m > 2^k$ ,  $B$  löytää alkion  $y \in T$  siten, että  $y \neq x$ . Näin  $B$ :llä on yhtä alkioita pienempi joukko.  $B$  voi toistaa menettelyn, kunnes  $m \leq 2^k \leq n$  ja siten voittaa pelin. Koska vain  $T$ :n koko on olennainen, voidaan olettaa, että  $T = \{0, 1, \dots, 2^k, \dots, m-1\}$ .  $B$  kysyy nyt  $k+1$  kertaa, onko  $x = 2^k$ . Jos  $A$  vastaa joka kerran *ei*, vastauksista ainakin yksi on tosi, joten  $x \neq 2^k$ . Ellei tapahdu, niin kuin edellä on kuvattu,  $B$  lopettaa kysymyksen ” $x = 2^k$ ?” esittämisen silloin, kun  $A$  vastaa ensimmäisen kerran ”kyllä”. Sen sijaan  $B$  esittää seuraavat  $k$  kysymystä: ”onko  $x$ :n binaariesityksen  $i$ :s numero 0” ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Muodostetaan luku  $y$ ,  $0 \leq y \leq 2^{k-1}$ , jonka binaariesitys muodostuu niistä luvuista, jotka ovat  $A$ :n vastausten komplementeista (mukaan lukien se *kyllä*, joka laukaisi kysymyssarjan. Jos olisi  $x = y$ ,  $A$  olisi valehdellut  $k+1$  kertaa peräkkäin. Siis  $y \neq x$ , ja  $T$ :tä voidaan pienentää.

Osoitetaan että jos  $1 < c < 2$  ja  $n = \lfloor (2-c)c^{k+1} \rfloor - 1$ , niin  $A$  voi pelata niin, että  $B$  ei pysty takaamaan voittoa. Huomataan, että jos  $1,99 < c < 2$ , niin  $\lfloor (2-c)c^{k+1} \rfloor - 1 \geq 1,99^k$  tarpeeksi suurilla  $k$ :n arvoilla (koska  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1,99^k}{c^k} = 0$ ).  $A$ :n strategia on seuraava. Hän valitsee luvun  $N = n + 1$  ja luvun  $x$ ,  $1 \leq x \leq N$ , mielivaltaisesti.  $A$  kutsuu  $B$ :n kysymykseen antamaansa vastausta  $i$ -yhteensopimattomaksi, jos se on ollut *kyllä*, mutta  $i \neq S$  tai jos se on ollut *ei*, mutta  $i \in S$ . Jokaisen vastauksensa kohdalla  $A$  laskee, kuinka monta peräkkäistä  $i$ -yhteensopimatonta vastausta hän on antanut kullakin arvolla

$i = 1, 2, \dots, n + 1$ . Olkoon tämä lukumäärä  $m_i$ .  $A$  tarkastelee suuretta

$$C = \sum_{i=1}^{n+1} c^{m_i}.$$

Kuhunkin  $B$ :n kysymykseen  $A$  vastaa niin, että  $C$  saa mahdollisimman pienen arvon. Osoitetaan, että tällöin aina  $C < c^{k+1}$ . Jos näin on, mikään eksponentti  $m_i$  ei saa suurempaa arvoa kuin  $k$ .  $A$  ei siis anna minkään  $i$ :n suhteen  $i$ -yhteensopimatonta vastausta enempää kuin  $k$  kertaa peräkkäin. Erityisesti tämä pätee, kun  $i = x$ , joten  $A$  ei valehtelee kysymyksen  $x \in S$  kohdalla useammin kuin  $k$  kertaa peräkkäin. Strategia ei riipu luvusta  $x$ , joten  $B$  ei saa sitä koskevaa informaatiota lainkaan, eikä näin ollen omista voittostrategiaa.

On vielä todistettava, että  $C < c^{k+1}$  on aina voimassa. Alussa  $m_i = 0$  kaikilla  $i$ , joten summa on  $n + 1$ ; koska  $1 < c < 2$  ja  $n = \lfloor (2 - c)c^{k+1} \rfloor - 1$ , väite pätee. Oletetaan, että  $C < c^{k+1}$  jonkin kysymyksen jälkeen ja että  $B$ :n kysymys on " $x \in S$ ?" jollekin joukolle  $S$ . Sen mukaan vastaako  $A$  *kyllä* tai *ei*,  $C$  saa joko arvon

$$C_1 = \sum_{i \in S} 1 + \sum_{i \notin S} c^{m_i+1}$$

tai arvon

$$C_2 = \sum_{i \notin S} 1 + \sum_{i \in S} c^{m_i+1}$$

Nyt luvuista  $C_1$  ja  $C_2$  pienempi on enintään yhtä suuri kuin lukujen keskiarvo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(C_1 + C_2) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i \in S} (1 + c^{m_i+1}) + \sum_{i \notin S} (c^{m_i+1} + 1) \right) = \frac{1}{2}(cC + n + 1) \\ &< \frac{1}{2}c^{k+2} + (2 - c)c^{k+1} = c^{k+1}. \end{aligned}$$

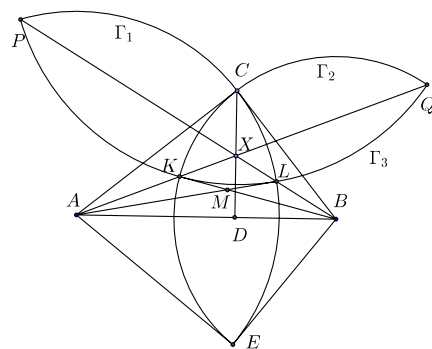
Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.

**2012.4.** Jos tehtävän yhtälöön sijoitetaan  $a = b = c = 0$ , saadaan  $3f(0)^2 = 6f(0)^2$ . Siis  $f(0) = 0$ . Jos nyt yhtälöön sijoitetaan  $b = -a$  ja  $c = 0$ , saadaan  $(f(a) - f(-a))^2 = 0$ .  $f$  on siis parillinen funktio. Sijoitetaan yhtälöön nyt  $b = a$  ja  $c = -2a$ . Saadaan  $2f(a)^2 + f(2a)^2 = 2f(a)^2 + 4f(a)f(2a)$ . Siis joko  $f(2a) = 0$  tai  $f(2a) = 4f(a)$  kaikilla  $a \in \mathbb{Z}$ . Jos  $f(r) = 0$  jollain  $r \geq 1$ , niin sijoitus  $b = r$ ,  $c = -a - r$  johtaa yhtälöön  $(f(a + r) - f(a))^2 = 0$ . Tällöin  $f$  on jaksollinen ja jakso on  $r$ . Jos erityisesti  $f(1) = 0$ , niin  $f$  on identtisesti 0. Oletetaan jatkossa, että  $f(1) = k \neq 0$ . Nyt edellä sanotun perusteella  $f(2) = 0$  tai  $f(2) = 4k$ . Jos  $f(2) = 0$ ,  $f$  on jaksollinen ja jaksona 2. Tällöin  $f(a) = 0$ , jos  $a$  on parillinen ja  $f(a) = k$ , jos  $a$  on pariton. Tällainen funktio selvästi toteuttaa tehtävän ehdon: jos  $a, b, c$  ovat kaikki parillisia, yhtälö on  $0 = 0$  ja jos luvuista kaksi, esimerkiksi  $b$  ja  $c$  ovat parittomia, kolmas on parillinen, ja yhtälö on  $k^2 + k^2 = 2k^2$ . Oletetaan nyt, että  $f(2) = 4k$ . Nyt joko  $f(4) = 0$  tai  $f(4) = 16k$ . Jos  $f(4) = 0$ ,  $f$  on jaksollinen, jaksona 4. Siis  $f(a) = 0$ , kun  $a \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $f(a) = f(-1) = f(1) = k$ ,

kun  $a \equiv \pm 1 \pmod{4}$  ja  $f(a) = 4k$ , kun  $a \equiv 2 \pmod{4}$ . Osoitetaan, että tällainen funktio toteuttaa tehtävän ehdon. Jos  $a + b + c = 0$  ja  $b$  ja  $c$  ovat parittomia, niin  $a$  voi olla neljällä jaollinen tai  $\equiv 2 \pmod{4}$ . Edellisessä tapauksessa yhtälö on  $0^2 + 2k^2 = 2k^2$ , jälkimmäisessä  $16k^2 + 2k^2 = 8k^2 + 2k^2 + 8k^2$ . Jos  $a, b, c$  ovat kaikki parillisia, niin joko kaikki ovat neljällä jaollisia tai tasan yksi on. Kummassakin tapauksessa yhtälö toteutuu.

Jäljellä on vielä tapaus  $f(4) = 16$ . Osoitetaan, että tällöin  $f(3) = 9k$ . Tämä seuraa tehtävän yhtälöstä sijoituksilla  $a = 1, b = 2, c = -3$  ja  $a = 1, b = 3, c = -4$ . Edellinen johtaa yhtälöön  $f(3)^2 - 10kf(3) + 9k^2 = 0$ , jonka ratkaisut ovat  $f(3) = k$  ja  $f(3) = 9k$ , jälkimmäinen puolestaan yhtälöön  $f(3)^2 - 34kf(3) + 225k^2 = 0$ , jonka ratkaisut ovat  $f(3) = 9k$  ja  $f(3) = 25k$ . Siis todellakin  $f(3) = 9k$ . Osoitetaan nyt induktiolla, että  $f(x) = kx^2$  kaikilla kokonaisluvuilla  $x$ . Asia tiedetään jo luvuille  $x = 0, 1, 2, 3, 4$ . Oletetaan että väite pätee kokonaisluvuilla  $x \leq n$ . Sijoitukset  $a = n, b = 1, c = -n - 1$  ja  $a = n - 1, b = 2$  ja  $c = -n - 1$  johtavat toisen asteen yhtälöihin, joista edellisen ratkaisut ovat  $f(n + 1) = k(n + 1)^2$  ja  $f(n + 1) = k(n - 1)^2$ , jälkimmäisen  $f(n + 1) = k(n + 1)^2$ ,  $f(n + 1) = k(n - 3)^2$ . Koska  $n \neq 2, (n - 1)^2 \neq (n - 3)^2$ . Siis välttämättä  $f(n + 1) = k(n + 1)^2$  ja  $f(x) = kx^2$  kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla  $x$ .  $f$ :n parillisuuden takia sama yhtälö pätee myös negatiivisilla  $x$ . On vielä tarkistettava, että tämäkin funktio todella on ratkaisu. Se seuraa yhtälöstä  $a^2 + b^4 + (a + b)^4 = 2a^2b^2 + 2a^2(a + b)^2 + 2b^2(a + b)^2$ , jonka päteminen todistetaan suoraan sieventämällä.

**2012.5.** Olkoon  $AEB$   $ABC$ :n kanssa suoran  $AB$  suhteen symmetrinen suorakulmainen kolmio. Olkoot  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$  ympyrät, joiden keskipisteet ovat  $A$  ja  $B$  ja joille  $C, L, E$  ja  $C, K, E$  ovat kehäpisteitä. Leikatko puolisuurat  $AX$  ja  $BX$  nämä ympyrät (myös) pisteissä  $P$  ja  $Q$ .  $AC$  on  $\Gamma_2$ :n tangentti ja  $BC$  on  $\Gamma_1$ :n tangentti. Lasketaan pisteen  $X$  potenssi ympyröiden  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$  suhteen:  $XK \cdot XQ = XC \cdot XE = XL \cdot XP$ . Tästä seuraa, että piste  $Q$  on pisteiden  $K, L$  ja  $P$  kautta kulkevalla ympyrällä. Olkoon tämä ympyrä  $\Gamma_3$ . Lasketaan pisteen  $A$  potenssi ympyrän  $\Gamma_2$  suhteen; saadaan  $AC^2 = AK \cdot AQ$ . Koska  $AL = AC$ , on myös  $AL^2 = AK \cdot AQ$ . Tästä seuraa, että  $AL$  on  $\Gamma_3$ :n tangentti. Vastaavasti osoitetaan, että  $BK$  on  $\Gamma_3$ :n tangentti. Mutta näin ollen  $MK$  ja  $ML$  ovat kaksi pisteestä  $M$   $\Gamma_3$ :lle piirrettyä tangenttia ja siis yhtä pitkät.



**2012.6.** Jos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{3^{a_i}} = 1,$$

niin  $\sum_{i=1}^n i3^{b_i} = 3^a$  jollain ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla  $b_i$  ja  $a$ . Tästä seuraa  $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^n i \equiv 1 \pmod{2}$ . Viimeinen ehto toteutuu, kun kumpikaan luvuista  $n, n + 1$  ei ole jaollinen 4:llä, eli kun  $n \equiv 1 \pmod{4}$  tai  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

Osoitetaan, että tämä välttämätön ehto on myös riittävä. Kutsumme jonoa  $b_1, b_2, \dots, b_n$  *mahdolliseksi*, jos on olemassa ei-negatiiviset kokonaisluvut  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , joille

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}} = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{3^{a_i}} = 1.$$

Jos nyt  $b_k$  on jokin mahdollisen jonon termi ja jos  $u$  ja  $v$  ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, joille pätee  $u + v = 3b_k$ , niin jono  $b_1, \dots, b_{k-1}, u, v, b_{k+1}, \dots, b_n$  on mahdollinen jono. Tämä seuraa siitä, että

$$\frac{u}{3^{a_k+1}} + \frac{v}{3^{a_k+1}} = \frac{b_k}{3^{a_k}} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2^{a_k+1}} + \frac{1}{2^{a_k+1}} = \frac{1}{2^{a_k}}.$$

Kääntäen, jos mahdollisen jonon kaksi termiä  $u$  ja  $v$  korvataan uudella termillä  $\frac{u+v}{3}$  ja näin saadaan mahdollinen jono, niin alkuperäinenkin jono on mahdollinen. Merkitään symbolilla  $\alpha_n$  jonoa  $1, 2, \dots, n$ . Oletetaan, että  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  ja muunnetaan jono jonoksi  $\alpha_1$   $n-1$ :llä muunnoksella  $\{u, v\} \mapsto \frac{1}{3}(u+v)$ . Jono  $\alpha_1$  on mahdollinen; vastaava eksponenttien jono on  $\alpha_1 = 0$ . Huomattakoon, että jos jonossa ovat luvut  $m$  ja  $2m$ , niin voidaan aina tehdä muunnos  $\{m, 2m\} \mapsto m$ . Termit  $2m$  voidaan siis jättää huomiotta.

Olkoon  $n \geq 16$ . Osoitetaan, että  $\alpha_n$  voidaan palauttaa jonoksi  $\alpha_{n-12}$  12 muunnoksella. Olkoon  $n = 12k + r$ ,  $k \geq 1$  ja  $0 \leq r \leq 11$ . Jos  $0 \leq r \leq 5$ , niin jonon  $\alpha_n$  12 viimeistä termiä voidaan osittaa kahdeksi yksittäiseksi luvuksi  $12k-6$ ,  $12k$  ja viideksi pariiksi  $\{12k-6-i, 12k-6+i\}$ ,  $i = 1, \dots, 5-r$ , ja  $\{12k-j, 12k+j\}$ ,  $j = 1, \dots, r$ . (Jos  $r = 0$  tai  $r = 5$ , pareja on vain yhtä lajia.) Koska  $12k-6 = 2(6k-3)$  ja  $12k = 2(6k)$ ,  $12k-6$  ja  $12k$  voidaan poistaa. Operaatiot  $\{12k-j, 12k+j\} \mapsto 8k$  ja  $\{12k-6-i, 12k-6+i\} \mapsto 8k$  muuntavat 10 termiä viideksi termiksi  $8k, 8k-4$ . Havaitaan, että  $4k$  kuuluu jonoon  $\alpha_{n-12}$ . Epäyhtälö  $4k \leq n-12 = 12k+r$  on yhtäpitävä ehdon  $8k \geq 12-r$  kanssa; tämä on totta, kun  $r = 4$  ja  $r = 5$ . Jos taas  $r \leq 3$ , niin ehdosta  $n \geq 16$  seuraa  $k \geq 2$ , ja ehto  $8k \geq 12-r$  on voimassa. Siis  $\alpha_n$  voidaan korvata jonolla  $\alpha_{n-12}$ . Jos  $6 \leq r \leq 11$ , menetellään analogisesti. Jonon  $\alpha_n$  12 suurinta lukua jaetaan yksilöiksi  $\{12k\}$  ja  $\{12k+6\}$  ja pareiksi  $\{12k-i, 12k+i\}$ ,  $i = 1, \dots, 11-r$ , ja  $\{12k+6-j, 12k+6+j\}$ ,  $j = 1, \dots, r-6$ . Yksiköt ovat jonon kaksi kertaa niin suuria kuin jotkin jonon pienemmät jäsenet ja ne voidaan siis poistaa. Muunnokset  $\{12k-i, 12k+i\} \mapsto 8k$  ja  $\{12k+6-j, 12k+6+j\} \mapsto 8k+4$  muuttavat 10 lukua viideksi. Koska  $k \geq 1$  ja  $r \geq 6$ , niin  $4k+2 \leq n-12$ . Syntyneet viisi lukua ovat jonossa  $\alpha_{n-12}$  olevien lukujen kaksinkertoja ja ne voidaan poistaa.  $\alpha_n$  voidaan nytkin korvata jonolle  $\alpha_{n-12}$ . Kun tällainen 12:lla pienentäminen tehdään riittävän monta kertaa ja otetaan huomioon  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ , todetaan, että ongelmaksi jää jonon  $\alpha_n$  mahdollisuuden tarkistaminen, kun  $n \in \{2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\}$ . Tapaukset  $n = 2, 6, 10, 14$  voidaan unohtaa, koska jonon suurin termi on parillinen ja siis kaksi kertaa niin suuri kuin jokin jonon aikaisempi jäsen. Tapaus  $n = 5$  selvitetään muunnoksilla  $\{4, 5\} \mapsto 3$ ,  $\{3, 3\} \mapsto 2$ , jonka jälkeen jonon kakkoset voidaan poistaa. Tapauksessa  $n = 9$  voidaan poistaa 6 ja sitten tehdä muunnokset  $\{5, 7\} \mapsto 4$ ,  $\{4, 8\} \mapsto 4$ ,  $\{3, 9\} \mapsto 4$ . Nyt ensin 4:t ja sitten 2 voidaan poistaa. Tapaus  $n = 13$  palautuu tapaukseen  $n = 10$ , kun tehdään muunnos  $\{11, 13\} \mapsto 8$  ja poistetaan 8 ja 12. Todistus on valmis.

**2013.1.** Osoitetaan väite todeksi induktiolla  $k$ :n suhteen. Kaikilla  $n$  on

$$1 + \frac{2^1 - 1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Tehdään sitten induktio-oletus, jonka mukaan tehtävässä oleva yhtälö saadaan toteutumaan arvolla  $n$ . Induktioaskel  $k \rightarrow k + 1$  tehdään eri tavoin sen mukaan, onko  $n$  pariton vai parillinen. Edellisessä tapauksessa  $\frac{n+1}{2}$  on kokonaisluku. Voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2^{k+1} - 1}{n} &= \frac{n + 2^{k+1} - 1}{n} = \frac{(n+1)(n + 2^{k+1} - 1)}{n \left( \frac{n+1}{2} \right)} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \frac{\frac{n-1}{2} + 2^k}{\frac{n+1}{2}} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \frac{\frac{n+1}{2} + 2^k - 1}{\frac{n+1}{2}} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n+1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Tulon jälkimmäinen tekijä on induktio-oletuksen mukaan  $k$ :n muotoa  $1 + \frac{1}{a}$  olevan luvun tekijä, joten koko tulo on  $(k+1)$ :n samanmuotoisen luvun tulo. Jos  $n$  on parillinen, kirjoitetaan vastaavasti

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2^{k+1} - 1}{n} &= \frac{n + 2^{k+1} - 1}{n} = \frac{(n + 2^{k+1} - 1)(n + 2^{k+1} - 2)}{n(n + 2^{k+1} - 2)} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{n + 2^{k+1} - 2} \right) \left( 1 + \frac{2(2^k - 1)}{n} \right) = \left( 1 + \frac{1}{n + 2^{k+1} - 2} \right) \left( 1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n}{2}} \right). \end{aligned}$$

Johtopäätös on sama kuin parittoman  $n$ :n tapauksessa. Väite on todistettu.

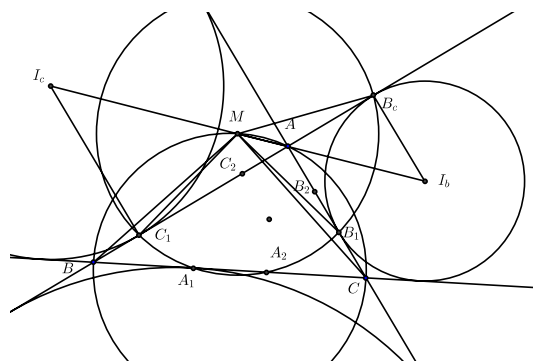
**2013.2.** Osoitetaan ensin induktiolla, että jos ”asetelmassa” on pariton määrä pisteitä  $2n + 1$ , niin  $n$ :llä suoralla voidaan muodostaa suojea sijoittelu, riippumatta siitä, kuinka suuri osuus pisteistä on sinisiä.

Jos  $n = 1$ , näin selvästi on. Oletetaan, että jokaiseen  $2n - 1$  pisteen asetelmaan liittyy suojea  $n - 1$ :n suoran sijoittelu. Olkoon sitten asetelmassa  $2n + 1$  pistettä. Tarkastellaan niiden *konveksia verhoa*. [Se on pienin monikulmio, joka sisältää kaikki pisteet. Äärellisen pistejoukon  $E$  konveksin verhon voi ajatella syntyvän niin, että tarkastellaan ensin jotakin mielivaltaista suoraa  $\ell$ , jonka määrittämistä puolitasoista toiseen  $E$  kokonaan sisältyy. Kaikista  $\ell$ :n suuntaisista ja  $E$ :n pisteiden kautta kulkevista suorista jotkin kaksi ovat sellaisia, että kaikki  $E$ :n pisteet ovat joko suoralla tai toisessa suoran määrittämistä puolitasoista. Jos suoralla on ainakin kaksi  $E$ :n pistettä, näistä kaksi äärimmäistä ovat konveksin verhon kärkipisteitä. Jos suoralla on vain yksi  $E$ :n piste  $A$ , tarkastellaan  $A$ :n ja  $E$ :n muiden pisteiden kautta kulkevia suoria. Näistä jotkin kaksi ovat sellaisia, että kaikki  $E$ :n pisteet ovat joko suoralla tai kokonaan toisessa suoran määrittämistä puolitasoista.  $A$  ja suoralla kauimpana  $A$ :sta oleva  $E$ :n piste ovat konveksin verhon kärkiä.] Jos

konveksin verhon kärkipisteissä on kaksi vierekkäistä samanväristä,  $A$  ja  $B$ , on olemassa  $AB$ :n suuntainen suora  $\ell$ , jonka toisella puolella ovat  $A$  ja  $B$  ja toisella puolella  $2n - 1$  asetelman pistettä. Induktio-oletuksen mukaan nämä voidaan jakaa  $n - 1$ :llä suoralla niin, että joka alueessa on vain yhdenvärisiä pisteitä. Pisteet  $A$  ja  $B$  ovat joko samassa tai eri alueissa; alueissa joissa ne ovat, ei ole muita sijoittelun pisteitä, joten sijoittelu on suojea. Oletetaan sitten, että kaikki konveksin vierekkäiset kärkipisteet ovat erivärisiä. Valitaan niistä jälleen kaksi  $A$  ja  $B$ . Induktio-oletuksen mukaan on olemassa  $n - 1$ :n suoran suojea sijoittelu, joka jakaa loput  $2n - 1$  pistettä alueisiin, joissa kussakin on vain yhdenvärisiä asetelman pisteitä. Jos  $A$  ja  $B$  ovat samassa alueessa, niin tässä alueessa on vain joko  $A$ :n tai  $B$ :n värisiä asetelman pisteitä. Suora, joka erottaa erivärisen pisteen muista täydentää sijoittelun halutuksi. Jos  $A$  ja  $B$  ovat eri alueissa, niin  $AB$ :n suuntainen suora erottaa ne muista asetelman pisteistä alueisiin, joissa sanotut pisteet ovat alueen ainoat pisteet. Induktioaskel on otettu. Tehtävän luvuin 2013 suoraa riittää aina.

Osoitetaan vielä, että on tilanteita, joissa tarvitaan 2013 suoraa. Tarkastellaan 4026 pistettä ympyrän kehällä, vuorotellen sinisiä ja punaisia (ja yksi sininen piste jossakin). Sijoittelussa, joka on suojea tälle asetelmalle, täytyy olla jokaista kahta vierekkäistä pistettä kohden suora, joka leikkaa pisteiden välisen janan ja siis myös niiden välisen kaaren. Suorien ja ympyrän leikkauspisteitä on oltava ainakin 4026, ja koska suora leikkaa ympyrän enintään kahdessa pisteessä, suoraa on oltava ainakin 2013.

**2013.3.** Olkoot kolmion  $ABC$  sivut  $a, b, c$ , kulmat  $\alpha, \beta, \gamma$ , sen sivuympyröiden keskipisteet  $I_a, I_b, I_c$  ja  $A_2, B_2, C_2$   $ABC$ :n sisäympyrän ja kolmion sivujen sivuamispisteet. Olkoon vielä  $B_c$  piste, jossa  $I_b$ -keskinen sivuympyrä sivuaa puolisuoraa  $BA$  ja  $2p = a + b + c$ . Koska kolmion  $A_1B_1C_1$  ympärysympyrän keskipiste on kolmion ulkopuolella, kolmio on tylppäkulmainen. Voidaan olettaa, että  $\angle C_1A_1B_1$  on tylppä. Kolmion  $A_1B_1C_1$  ympärysympyrän keskipiste on silloin samalla kolmion  $ABC$  ympärysympyrän



kaarella kuin  $A$ . Olkoon  $M$  tämän kaaren keskipiste. Osoitetaan, että  $M$  on kolmion  $A_1B_1C_1$  ympärysympyrän keskipiste. On tunnettua (ja helppo todistaa) että pisteet  $A_1, B_1, C_1$  ovat kolmion  $ABC$  piirin puolittajia, ts.  $AB + BA_1 = AC + CA_1$  jne. Siis esimerkiksi  $BC_1 = CB_1 = p - a$ . Koska  $M$  on kaaren  $\widehat{BAC}$  keskipiste,  $M$  on janan  $BC$  keskinormaalilla. Lisäksi  $\angle MBC_1 = \angle MBA = \angle MCA = \angle MCB_1$ . Kolmiot  $MBC_1$  ja  $MCB_2$  ovat yhteneviä (sks), joten  $MB_1 = MC_1$ . Koska kolmion  $A_1B_1C_1$  ympärysympyrän keskipisteen tiedetään olevan kaarella  $\widehat{BAC}$ , keskipiste on todellakin  $M$ .

Koska  $BA_1 = p - c = CA_2$ , kolmiot  $MBA_1$  ja  $MCA_2$  ovat yhteneviä. Siis  $MA_2 = MA_1$ , joten piste  $A_2$  on kolmion  $A_1B_1C_1$  ympärysympyrällä. Osoitetaan sitten, että myös piste  $B_c$  on tällä ympyrällä. Osoitetaan ensin, että  $M$  on janalla  $I_bI_c$ . Tämä tulee osoitetuksi, jos näytetään, että  $\angle BAM = \angle BCM =$



eli  $a^p > \lfloor a^p \rfloor + 1$ . Tämä ei ole mahdollista, joten vastaoletus oli virheellinen. Siis  $f(ka) = ka$  kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $k$ .

Koska  $a$  on rationaaliluku,  $a = \frac{p}{q}$  joillain positiivisilla kokonaisluvuilla  $p$  ja  $q$ . Jos  $k = nq$ ,

niin  $f(np) = f\left(k\frac{p}{q}\right) = f(ka) = ka = np$ . Toisaalta  $f(np) \geq pf(n)$ . Siis  $n \geq f(n)$ .

Koska, niin kuin alussa huomautettiin,  $f(n) \geq n$ , on oltava  $f(n) = n$  kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$ . Oletetaan sitten, että jollain rationaaliluvulla  $x$  olisi  $f(x) - x = u > 0$ . Jos  $n$  on sellainen kokonaisluku, että  $nx$  on kokonaisluku, on  $nx = f(nx) \geq nf(x) > nx + nu$ . Ristiriita; siis mainitunlaista rationaalilukua  $x$  ei ole olemassa, joten  $f(x) \leq x$  kaikilla  $x$ .

On vielä torjuttava mahdollisuus  $f(y) < y$  jollain rationaaliluvulla  $y$ . Jos  $n$  on sellainen kokonaisluku, että  $ny$  on kokonaisluku, niin  $ny = f(ny) \leq f(n)f(y) = nf(y) < ny$ . Ristiriita taas. Todistus on valmis.

**2013.6.** Puhutaan ”nimeämisen” sijaan ”numeroinnista”. Sellaisia lukupareja  $(x, y)$ , joilla s.y.t. $(x, y) = 1$  ja  $x + y \leq n$  on tasan yhtä monta kuin sellaisia lukupareja  $(z, y)$ , missä  $1 \leq y < z \leq n$ . Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että yhtä lukuunottamatta jokainen kaunis numerointi vastaa yksikäsitteisesti tällaista lukuparia. Konstruoidaan siis jokaista paria  $(z, y)$  kohden kaunis numerointi ja osoitetaan, että näin syntyvät kaikki kauniit numeroinnit.

Olkoon  $S_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  ja olkoot pisteiden numerot myötäpäivään  $a_0 = 0, a_1, \dots, a_n$ . Olkoon kaikilla  $k \in S_n$   $f(k)$  se yksikäsitteinen luku, jolle  $a_{f(k)} = k$ ; sanomme, että  $f(k)$  on  $k$ :n *indeksi*. Merkintä  $i \prec j$  tarkoittaa samaa kuin  $f(i) < f(j)$ ; tällöin siis ” $i$  on ennen  $j$ :tä”. Numerointi on kaunis, jos ja vain jos aina kun  $a \prec b \prec c \prec d$ , on  $a + d \neq b + c$ .

Huomataan, että jos  $a_1 = 1$ , niin  $a_j = j$  kaikilla  $j$ . Ellei näin olisi, olisi  $i + 1 \prec i$  jollain  $i$  ja siis  $0 \prec 1 \prec i + 1 \prec i$  ja  $0 + (i + 1) = 1 + i$ . Oletetaan sitten, että  $a_1 \neq 1$ . Tehtävän väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että kaikki muut kauniit numeroinnit saadaan seuraavasti. Olkoon  $(z, y)$  sellainen järjestetty lukupari, että  $1 \leq y < z \leq n$  ja s.y.t. $(x, y) = 1$ . Kaikilla  $i = 0, 1, 2, \dots, z - 1$  asetetaan

$$E_i = \{k \mid 0 \leq k \leq n \text{ ja } k \equiv yi \pmod{z}\}.$$

Tämän jälkeen annetaan pisteille ensin  $E_0$ :n numerot suuruusjärjestyksessä, sitten  $E_1$ :n jne. Todetaan, että aina  $a_0 = 0$  ja  $a_1 = z$ . [Jos esimerkiksi  $y = 3, z = 5, n = 23$ , numerointi on 0, 5, 10, 15, 20, 3, 8, 13, 18, 23, 1, 6, 11, 16, 21, 4, 9, 14, 19, 2, 7, 12, 17, 22.]

Osoitetaan, että näin syntyvät numeroinnit ovat kauniita. Ellei näin olisi, löytyisi luvut  $a, b, c, d$  niin, että  $a \prec b \prec c \prec d$  ja  $a + c = b + d$ . Tällöin  $a \in E_{i_1}, b \in E_{i_2}, c \in E_{i_3}$  ja  $d \in E_{i_4}$ , missä  $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4 < z$ . Koska s.y.t. $(y, z) = 1$ , tästä seuraa  $i_1 + i_3 \equiv i_2 + i_4 \pmod{z}$ . Mutta  $(i_2 + i_4) - (i_1 + i_3) = i_4 - i_1 - (i_3 - i_2) \leq i_4 - i_1 \leq z - 1$ , joten  $i_1 + i_3 = i_2 + i_4$ . Tämä on mahdollista vai, jos  $i_1 = i_2$  ja  $i_3 = i_4$ . Koska numeroinnissa on noudatettu suuruusjärjestystä  $E_{i_1}$ :ssä ja  $E_{i_3}$ :ssa, on  $a < b$  ja  $c < d$ , joten onkin  $a + c < b + d$ . Ristiriita osoittaa, että jokainen kuvatulla tavalla synnytetty numerointi on kaunis.



Osoitetaan sitten, että kaikki kauniit numeroinnit on tuotettu kuvatulla tavalla. Tehdään induktio  $n$ :n suhteen. Kun  $n = 3$ , mahdolliset parit  $(z, y)$  ovat  $(3, 1)$ ,  $(3, 2)$  ja  $(2, 1)$ . Ne tuottavat triviaalia numerointia lukuun ottamatta kaikki kauniit numeroinnit,  $0, 3, 1, 2, 0, 3, 2, 1$  ja  $0, 2, 1, 3$ . Oletetaan nyt, että menetelmä tuottaa kaikki  $k$ :n pisteen kauniit numeroinnit, kun  $k \leq n$ . Tarkastellaan jotain  $(n + 1)$ :n pisteen numerointia  $a_0 = 0, a_1, \dots, a_n$ , missä  $a_1 > 1$ . Olkoon  $a_1 = z$ . Tarkastellaan erikseen tapauksia  $a_1 = n$  ja  $a_1 < n$ . Olkoon siis  $a_1 = z = n$ . Asetetaan  $y = a_2$ . Osoitetaan, että  $a_{k+1} \equiv ky \pmod{z}$ . Väitetään, että jos näin ei olisi, olisi olemassa  $i$  ja  $j$  niin, että  $y \prec i \prec j$  ja  $i - j \equiv y \pmod{n}$ . Silloin olisi joko  $i - j = y$  tai  $j - i = n - y$ . Koska  $0 \prec y \prec i \prec j$ , edellinen vaihtoehto ei käy, koska  $n \prec y \prec i \prec j$ , jälkimmäinen vaihtoehtokaan ei käy. Todistetaan nyt esitetty väite. Jos s.y.t. $(y, z) = 1$ , väite on triviaalisti tosi, koska lukujen  $ky$  jakojäännökset  $\pmod{z}$  ovat kaikki eri suuria. Jos taas s.y.t. $(y, z) > 1$  eikä väitteen mukaisia lukuja  $i$  ja  $j$  ole olemassa, niin  $1 \prec 1 + y \prec 1 + 2y \prec \dots \pmod{z}$  Jono palaa jossain vaiheessa 1:een, mikä on ristiriita.

Tarkastellaan sitten sellaisia numerointeja, joissa  $a_1 \neq n$ . Poistetaan piste, jolla on numero  $n$ . Induktio-oletuksen mukaan on olemassa jokin  $n$ :n pisteen kaunis numerointi, joka noudattaa esitettyä konstruktiota joillain  $(z, y)$ . Pyritään osoittamaan, että tällaiseen numerointiin voidaan liittää piste, jonka numero on  $n$  vain yhdellä tavalla niin, että numerointi on kaunis ja sellainen, joka perustuu pariin  $(z, y)$  yllä kuvatulla tavalla, ja jossa siis  $a_1 = z$ . Olkoon  $n \equiv ky \pmod{z}$ ,  $0 \leq k < z$ . Osoitetaan, että  $n$  on sijoitettava lukujen  $n - z$  ja joukon  $E_{k+1}$  pienimmän alkion  $v$  väliin. Huomataan, että  $v \equiv n + y \pmod{z}$ . Osoitetaan ensin, että on oltava  $n - z \prec n$ . Koska  $a_0 = 0$  ja  $a_1 = z$ , on  $z \prec n$ . Jos  $n = 2z$ , ei voi olla  $n \prec n - z$  ( $[0, n]$  ja  $[z, n - z]$  leikkaisivat). Jos  $n \neq 2z$ , sekä  $n$  että  $n - z$  ovat ympyrän kehällä  $0:n$  ja  $z:n$  jälkeen, ja  $n - z:n$  on edellettävä  $n$ :ää. Osoitetaan sitten, että  $n$  on sijoitettava välittömästi  $n:n$  jälkeen. Käsitellään eri mahdollisuudet. Jos  $k = z - 1$ , niin  $n - z \equiv (z - 1)y \pmod{z}$  on  $E_{z-1}$ :n suurin alkio ja siis numeroinnin viimeinen; silloin  $n$  voidaan sijoittaa vain  $n - z:n$  ja  $0:n$  väliin. Jos sitten  $k = 0$  eli  $n \equiv 0 \pmod{z}$ , niin  $n = tz$  ja  $t \geq 2$ . Nyt  $v = y$ . Koska  $(t - 1)z \prec y \prec y \prec z + y$ , niin  $n$  on sijoitettava  $(t - 1)z:n$  ja  $z + y:n$  väliin.  $n$ :ää ei kuitenkaan voi sijoittaa  $y:n$  jälkeen, koska  $n - y \in E_{z-1}$  ja näin sekä  $y$  että  $n$  ovat  $0:n$  ja  $(n - y):n$  välissä. Oletetaan sitten, että  $n = tz + u$ , misstä  $t \geq 1$  ja  $0 < u < z$ ; myös  $0 < v < z$ . Edellä tehdystä huomautuksesta seuraa, että joko  $v = u + y$  tai  $v + z = u + y$ . Jos  $v = u + y$ , niin  $tz \prec y \prec v$ ,  $n$  (koska  $y$  seuraa heti  $tz$ :aa). Jos  $v + z = u + y$ , niin  $n - z \prec v \prec v + z$ , joten  $n$  on sijoitettava  $(n - z):n$  ja  $(v + z):n$  väliin. Koska  $n - v = (t + 1)z - y$ , niin  $n - v$  on numeroinnin viimeinen. Siis  $0 \prec n, v \prec n - v$ , joten on oltava  $n \prec v$ .

Induktioaskel on nyt otettu, ja väite todistettu.

**2014.1.** Merkitään kaikilla  $n \geq 1$

$$d_n = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) - na_n.$$

Silloin jokainen  $d_n$  on kokonaisluku, ja  $d_1 = a_0 > 0$ . Nyt  $d_n > 0$  tasan niillä  $n$ , joilla tehtävän epäyhtälöistä vasemmanpuolinen on tosi. Toisaalta

$$na_{n+1} - (a_0 + a_1 + \dots + a_n) = (n + 1)a_{n+1} - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n+1}) = -d_{n+1},$$

joten tehtävän oikeanpuoleinen epäyhtälö on tosi niillä  $n$ , joilla  $d_{n+1} \leq 0$ . Osoitetaan, että  $(d_n)$  on aidosti vähenevä jono. Koska  $(a_n)$  on kasvava, on todellakin

$$d_n - d_{n+1} = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) - na_n - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n+1}) + (n+1)a_{n+1} = n(a_{n+1} - a_n) > 0.$$

Aidosti vähenevä kokonaislukujono, jonka ensimmäinen jäsen on positiivinen, ”ohittaa” nollan tasan kerran, ts. on olemassa yksi ja vain yksi  $n$ , jolle  $d_n > 0 \geq d_{n+1}$ ; todistus on valmis.

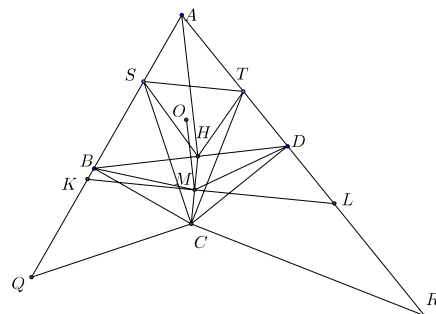
**2014.2.** Olkoon  $m$  positiivinen kokonaisluku. Osoitetaan, että jos  $n > m^2$ , niin jokainen rauhallinen asetelma sallii tyhjän  $m \times m$  -neliön. Olkoon siis annettuna jokin rauhallinen tornien asettelu. Jollakin rivillä  $R$  on silloin torni, joka on rivin vasemmanpuolimmaisessa ruudussa. Valitaan jokin  $m$  allekkaista riviä niin, että  $R$  on näiden joukossa. Riveillä on kaikkiaan  $m$  tornia. Poistetaan näistä riveistä  $n - m^2 > 0$  vasemmanpuolimmaista saraketta. Näiden sarakkeiden mukana laudalta poistuu ainakin yksi torni. Jäljelle jää  $m^2 \times m$  -suorakaide, jossa on enintään  $m - 1$  tornia. Suorakaide voidaan jakaa  $m$ :ksi  $m \times m$  -neliöksi, joista ainakin yksi on tyhjä.

Olkoon nyt  $m^2 = n$ . Osoitetaan, että laudalle voidaan laatia rauhallinen asetelma, joka ei jätä yhtään  $m \times m$  -neliötä tyhjäksi. Numeroidaan laudan rivit ja sarakkeet 0:sta  $(m^2 - 1)$ :een ja nimetään kukin ruutu parina  $(r, s)$ , missä  $r$  on sen rivin ja  $s$  sen sarakkeen numero. Sijoitetaan tornit ruutuihin  $(im + j, jm + i)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, m - 1$ . Silloin joka rivillä ja joka sarakkeessa on tasan yksi torni. Osoitetaan, että jokainen  $m \times m$  -neliö sisältää yhden tornin. Olkoon  $A$  tällainen neliö. Olkoon sen alimman rivin numero  $pm + q$ , missä  $0 \leq p, q \leq m - 1$ .  $A$ :n riveillä olevat tornit ovat sarakkeissa  $qm + p, (q + 1)m + p, \dots, (m - 1)m + p, p + 1, m + (p + 1), \dots, (q - 1)m + (p + 1)$ . Luvuista pienin on  $p + 1$  ja suurin  $(m - 1)m + p$ . Pienin luku on enintään  $m - 1$  (jos  $p = m - 1$ , niin  $q = 0$  ja listan pienin luku on  $qm + p = m - 1$ ) ja suurin ainakin  $(m - 1)m$ ; kahden peräkkäisen luvun erotus on enintään  $m$ . Siten jossain  $A$ :han kuuluvista  $m$ :stä vierekkäisestä sarakkeesta on torni.

Olkoon sitten  $m^2 > n$ . Konstruoidaan edellä olevan mukaisesti rauhallinen asetelma  $m^2 \times m^2$  -neliöön ja poistetaan siitä  $m^2 - n$  alinta riviä ja vasemmanpuoleista saraketta. Syntyvä  $n \times n$  -neliö ei sisällä tyhjiä  $m \times m$  -neliöitä, mutta siihen jää tyhjiä rivejä ja sarakkeita. Niitä on yhtä monta, joten ne voidaan liittää pareittain toisiinsa. Kunkin tällaiseen pariin kuuluvan rivin ja sarakkeen leikkauspisteeseen voidaan sijoittaa torni; näin täydentyy rauhallinen asetelma.

Yhteenvetona edellisestä saadaan, että tehtävässä kysytty  $k$  on  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

**2014.3.** Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että kolmion  $TSH$  ympärysympyrän keskipiste on janalla  $AH$ . Aloitetaan valitsemalla puolisuorilta  $AB$  ja  $AD$  pisteet  $Q$  ja  $R$  niin, että kulmat  $\angle SCQ$  ja  $\angle TCR$  ovat suoria. Kolmiosta  $SQC$  ja tehtävän ehdosta saadaan  $\angle SQC = 90^\circ - \angle QSC = 90^\circ - \angle CSB = 180^\circ - \angle CHS$ . Tämä merkitsee sitä, että  $SQCH$  on jännenelikulmio. Kosta  $\angle SCQ$  on suora,  $SQ$  on kolmion  $SCH$  ympärysympyrän halkaisija, ja ympärysympyrän keskipiste  $K$ , joka on samalla janalla  $SH$



keskinormaalin piste, on janalla  $AQ$ . Aivan samoin nähdään, että kolmion  $THC$  ympärysympyrän keskipiste  $L$ , joka on janan  $TH$  keskinormaalilla, on janalla  $AR$ . Osoitetaan, että janojen  $SH$  ja  $TH$  keskinormaalit leikkaavat suoralla  $AH$ . Nämä keskinormaalit ovat samalla kolmioiden  $AKH$  ja  $AHL$  kulmien  $\angle AKH$  ja  $\angle ALH$  puolittajia. Edellinen niistä leikkaa siis  $AH$ :n pisteessä, joka jakaa  $AH$ :n suhteessa  $\frac{AK}{KH}$ , jälkimmäinen pisteessä, joka jakaa  $AH$ :n suhteessa  $\frac{AL}{LH}$ .

Yhtälön

$$\frac{AK}{KH} = \frac{AL}{LH} \quad (1)$$

todistamiseksi piirretään jana  $KL$ ; se leikkaa janan  $HC$  pisteessä  $M$ . Koska  $K$  ja  $L$  ovat nelikulmioiden  $SQCH$  ja  $THCR$  ympärysympyröiden keskipisteitä,  $KH = KC$  ja  $LH = LC$ .  $KL$  on siis janan  $HC$  keskinormaaliksi ja  $M$  sen keskipiste. Olkoon  $O$  nelikulmion  $ABCD$  ympärysympyrän keskipiste. Koska nelikulmion  $B$ - ja  $D$ -kärjissä on suorat kulmat,  $AC$  on ympyrän halkaisija.  $O$  on siis janan  $AC$  ja  $M$  janan  $HC$  keskipiste. Kolmiosta  $ACH$  saadaan nyt  $MO \parallel AH$  ja edelleen  $OH \perp BD$ . Koska  $BO = DO$ ,  $OM$  on janan  $BD$  keskinormaaliksi ja siis  $BM = DM$ . Kulmat  $\angle KBM$  ja  $\angle BMC$  ovat suoria. Nelikulmio  $BKCM$  on siis jännekelikulmio ja  $KC$  on tämän nelikulmion ympärysympyrän halkaisija. Samoin perustein  $MCLD$  on jännekelikulmio ja  $LC$  sen ympärysympyrän halkaisija. Sinilauseen nojalla

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\sin(\angle ALK)}{\sin(\angle AKL)}. \quad (2)$$

Sovelletaan (laajennettua) sinilauseetta edelleen nelikulmioiden  $BKCM$  ja  $MCLD$ , jolloin saadaan

$$\sin(\angle ALK) = \frac{DM}{CL}, \quad \sin(\angle AKL) = \frac{BM}{CK}.$$

Kun otetaan huomioon  $BM = DM$  ja (2), saadaan

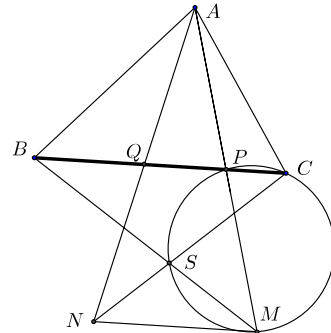
$$\frac{AK}{AL} = \frac{CK}{CL}.$$

Mutta  $CK = KH$  ja  $CL = LH$ , joten (1) pitää paikkansa ja väite on todistettu.

**2014.4.** Olkoon  $BM$ :n ja  $CN$ :n leikkauspiste  $S$ . Olkoot tavalliseen tapaan  $\alpha, \beta, \gamma$  kolmion  $ABC$  kulmat. Kolmiot  $BAC$ ,  $AQC$  ja  $BPA$  ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis  $\angle APQ = \alpha$ . Yhdenmuotoisuudesta seuraa

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BP}{AP} = \frac{AQ}{QC} = \frac{NQ}{QC}$$

ja  $\angle BPA = \angle AQC$  ja edelleen  $\angle BPM = \angle NQC = \angle SCP$ . Tästä seuraa, että  $CPSM$  on jännekelikulmio ja  $\angle MSC = \angle MPC = \angle APQ = \alpha$ . Nelikulmio  $ABSC$  on siis jännekelikulmio.



**2014.5.** Jos useiden kolikoiden yhteisarvo on  $\frac{1}{k}$  jollain positiivisella kokonaisluvulla  $k$ , ne voidaan korvata yhdellä kolikolla, jonka arvo on  $\frac{1}{k}$ . Jos näin syntynyt uusi kokoelma voidaan jakaa tehtävässä esitetyllä tavalla, myös alkuperäinen kokoelma voidaan jakaa niin. Kun tämä sulauttaminen on tehty mahdollisimman monta kertaa, ollaan tilanteessa, jossa jokaista parillista  $k$ :ta kohden on enintään yksi kolikko, jonka arvo on  $\frac{1}{k}$  (koska kaksi voitaisiin sulauttaa yhteen) ja jokaista paritonta  $k$  kohden on enintään  $k - 1$  kolikkoa, jonka arvo on  $\frac{1}{k}$ . Selvästi jokainen kolikko, jonka arvo on 1, muodostaa oman ryhmänsä. Jos tällaisia kolikkoja on  $d$  kappaletta, jäljelle jää rahaa  $100 - \frac{1}{2} - d$ :n verran, ja summa koostuu kolikoista, joiden arvo on  $\leq \frac{1}{2}$ . Ryhmitellään kolikot nyt seuraavasti: kaikille  $k = 1, 2, \dots, 100 - d$  asetetaan kolikot, joiden arvo on  $\frac{1}{2k-1}$  tai  $\frac{1}{2k}$  samaan ryhmään  $G_k$ . Ryhmässä  $G_k$  olevien kolikkojen arvo ei ole suurempi kuin

$$(2k - 2) \cdot \frac{1}{2k - 1} + \frac{1}{2k} < 1.$$

Erityisesti ryhmässä  $G_1$  olevien kolikkojen arvo on 0 tai  $\frac{1}{2}$ . Jäljellä ovat kolikot, joiden arvo on pienempi kuin  $\frac{1}{2(100-d)}$ . Ryhmissä  $G_k$  olevien kolikkojen arvo on yhteensä enintään

$$\frac{1}{2} + (99 - d) = 100 - d - \frac{1}{2}.$$

Ainakin yhden ryhmän kolikkojen arvo on enintään

$$\frac{100 - d - \frac{1}{2}}{100 - d} = 1 - \frac{1}{2(100 - d)}.$$

Tähän ryhmään voidaan sijoittaa kolikko, jonka arvo on  $\frac{1}{2(100-d)}$ . Näin jatkamalla saadaan ”pienet kolikotkin” sijoitetuiksi.

**2014.6.** Olkoon  $L$  tarkasteltava suorajoukko ja  $\mathcal{F}$  siihen liittyvä äärellisten alueiden joukko. Valitaan jokin sellainen  $L$ :n osajoukko  $S$ , että jos  $S$ :ään kuuluvat suorat on väritetty sinisiksi, yhdenkään  $\mathcal{F}$ :ään kuuluvan alueen reuna ei ole kokonaan sininen, mutta jos  $S \subset S'$ ,  $S \neq S'$ , ja  $S'$ :n suorat ovat sinisiä, jonkin  $\mathcal{F}$ :ään kuuluvan alueen reuna on kokonaan sininen. Olkoon  $S$ :ssä olevien suorien lukumäärä  $k$ . Väritetään loput  $n - k$  suoraa punaisiksi. Sanomme, että kahden  $L$ :än suoran leikkauspiste on sininen, jos se on kahden sinisen suoran leikkauspiste. Piste on punainen, jos se on sinisen ja punaisen suoran leikkauspiste. Sinisten pisteiden lukumäärä on  $\binom{k}{2}$ . Olkoon  $\ell$  jokin punainen

suora. On olemassa jokin  $A \in \mathcal{F}$ , jonka ainoa punainen sivu on suoralla  $\ell$  (muuten  $S$ :ään voitaisiin lisätä yksi suora). Olkoot  $A$ :n kärjet positiiviseen kiertosuuntaan nimettyinä  $p, p', s_1, \dots, s_t$  niin, että  $p, p' \in \ell$ , mutta  $s_1, \dots, s_t$  ovat sinisiä pisteitä. Liitetään suoraan  $\ell$  pari  $(p, s_1)$ . Todetaan, että mielivaltaiseen punaisen ja sinisen pisteen pariin  $(p, s)$  voidaan liittää enintään yksi suora  $\ell$ , koska  $p$  ja  $s$  ovat peräkkäiset kärjet positiivisessa kiertosuunnassa enintään yhden alueen reunalla.

Väitetään, että jokaiseen siniseen pisteeseen liittyy enintään kaksi punaista suoraa. Jos näin on, niin

$$n - k \leq 2 \binom{k}{2} = k^2 - k$$

eli  $n \leq k^2$ , ja väite on todistettu. Tehdään vastaoletus: johonkin siniseen pisteeseen  $s$  liittyy kolme punaista suoraa  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ . Sinisestä pisteestä  $s$  lähtee neljä puolisuoraa, niiden sinisten suorien osat, joiden leikkauspiste  $s$  on. Näistä kolmella on punainen piste  $p_i$ , joka kuuluu syhteen suorista  $\ell_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Voidaan olettaa, että  $p_2$  ja  $p_3$  ovat samalla  $s$ :n kautta kulkevalla sinisellä suoralla ja  $p_1$  on toisella. Olkoon  $A$  se alue, joka liittää  $s$ :n ja  $p_1$ :n. Alueen reunalla on positiiviseen kiertosuuntaan kierrettäessä tasan yksi punainen piste  $p_1$ :n ja  $s$ :n välissä. Sen on oltava  $p_2$  tai  $p_3$ . Voidaan olettaa, että se on  $p_2$ . Mutta silloin  $A$  on kolmio  $sp_1p_2$ . Kolmion ainoa punainen sivu on  $p_1p_2$ ; sen on kuuluttava suoraan  $\ell_1$ . Mutta silloin pisteen  $p_2$  kautta kulkee kolme suoraa: yksi sininen,  $\ell_1$  ja  $\ell_2$ . Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi, ja todistus on valmis.