Tammi- ja helmikuun 2015 kirjevalmennustehtävät

Ratkaisuita toivotaan lähetettävän helmikuun loppuun mennessä Esa Vesalaiselle joko postitse osoitteeseen

Esa Vesalainen
Huddingenpolku 2A15
01600 Vantaa

tai sähköpostitse osoitteeseen esavesalainen@gmail.com, johon voi myös lähettää kysymyksiä tehtävistä.

Helpompia tehtäviä

Tehtävissä 1–4 iloa voi tuottaa minkä tahansa lukiokirjan lukuteorian osion lukeminen tai valmennuksen kotisivuilta materiaaliosiosta lukuteorian materiaalien lukeminen (alku Ernvall-Hytösen tai Lehtisen tiiviistä muistiinpanoista tai Vesalaisen pidemmistä).

1. Olkoon x sellainen luku, jonka kymmenjärjestelmäesitys on saatu kirjoittamalla $2n$ kertaa numero 4 peräkkäin. Luku n on jokin positiivinen kokonaisluku. Luku y on puolestaan sellainen, jonka kymmenjärjestelmäesitys on saatu kirjoittamalla n kertaa numero 8 peräkkäin. Osoita, että $x - y$ on neliö.

2. Onko sellaista luonnollista lukua n, että luvun $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ kymmenjärjestelmäesitys päättyy täsmälleen 11 nollaan?

3. Määritä sellaiset kokonaisluvut n, joilla $|2n^2 + 9n + 4|$ on alkuluku.

4. Etsi kaikki epänegatiivisten kokonaislukujen parit (a, b), jotka toteuttavat yhtälön

$$2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13.$$

Tehtävissä 5–9 on hyötyä Matti Lehtisen *Geometrian peruspaketista*, jossa on esitelty 43 geometrian peruslausetta. Peruspaketti löytyy valmennuksen sivuilta osoitteesta `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/geomperusp.pdf`.

5. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

6. Neljä suoraa, joista mitkään kaksi eivät ole yhdensuuntaiset, muodostavat neljä kolmiota. Osoita, että näiden kolmioiden ympäripiirretyt ympyrät kulkevat kaikki saman pisteen kautta.

7. Olkoon piste I kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste, piste X ympyrän sivuamispiste janalla BC ja piste Y ympyrän sivuamispiste janalla CA. Olkoon piste P suoran XY ja suoran AI leikkauspiste. Osoita, että $AI \perp BP$.

8. Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste ja piste E kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapiste. Olkoon kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O. Osoita, että $OC \perp DE$.

9. Neliössä $ABCD$ piste E on sivulla BC. Piste G on janojen AE ja BD leikkauspiste. Piste F valitaan sivulta CD siten, että $AE \perp FG$. Piste K valitaan janalta FG siten, että $AK = EF$. Osoita, että $\angle EKG = 45^\circ$.

Vaativampia tehtäviä

Tehtävät 10–13 liittyvät neliönjäännösten ja primitiivisten juurten teoriaan, joita on esitelty esimerkiksi valmennuksen kotisivuilta löytyvässä monisteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/laajalukuteoriamoniste.pdf`.

10. Olkoon p pariton alkuluku, ja olkoon N pienin positiivinen kokonaisluku, joka on neliönepäjäännös modulo p. Osoita, että $N < \sqrt{p} + 1$.

11. Olkoon p alkuluku, jolle $p \equiv 13$ tai $17 \pmod{20}$. Osoita, ettei ole olemassa positiivisia kokonaislukuja x, y ja z, jotka ratkaisisivat yhtälön

$$x^4 + py^4 = 25z^4.$$

12. Olkoon p alkuluku, jolle $p \equiv 1 \pmod{4}$, ja jolle $(p-1)/4$ on myös alkuluku. Osoita, että 2 on primitiivinen juuri modulo p.

13. Olkoon $N \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että on olemassa äärettömän monta sellaista alkulukua p, jolle pienin positiivinen primitiivinen juuri on suurempi kuin N.

14. Osoita, että jokaisesta päättymättömästä numeroiden $0, 1, 2, \ldots, 9$ jonosta voidaan valita joukko peräkkäisiä numeroita siten, että niiden muodostama luku on jaollinen luvulla 1991.

15. Valitaan lukujen $1, 2, 3, \ldots, 200$ joukosta mielivaltaisesti 101 lukua. Todista, että valittujen lukujen joukosta löytyy kaksi, joista toinen on jaollinen toisella.

16. Voiko shakkipelin ratsu kulkea 4×1995-ruudukon jokaisen ruudun läpi siten, että se käy jokaisessa ruudussa tasan kerran ja palaa sitten lähtöruutuunsa?

17. 17×17-ruudukon jokaiseen ruutuun kirjoitetaan yksi luvuista $1, 2, \ldots, 17$; jokainen näistä luvuista kirjoitetaan tasan 17 ruutuun. Todista, että ruudukosta löytyy rivi tai sarake, jolla on vähintään 5 eri lukua.

18. Ympyrässä, jonka säde on 10, on 122 pistettä (joko sisällä tai kehällä). Todista, että näistä löytyy kaksi pistettä, joiden välinen etäisyys on aidosti pienempi kuin 2.