Huhtikuun 2015 tehtävät – ratkaisuja

1. *Olkoon $n > 1$ pariton kokonaisluku, ja $k = (n-1)/2$. Todista, että lukujonossa*

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k}$$

on pariton määrä parittomia lukuja.

Ratkaisu. Koska

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n,$$

niin

$$\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} = 2^n - 2.$$

Mutta koska $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$, on

$$\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j} + \sum_{j=k+1}^{n-1} \binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j} + \sum_{j=k+1}^{n-1} \binom{n}{n-j} = 2\sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j},$$

koska viimeistä yhtäsuuruusmerkkiä edeltävissä summissa ovat samat luvut vastakkaisissa järjestyksissä. Siis

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j} = 2^{n-1} - 1.$$

Jos summa on pariton, siinä on oltava pariton määrä parittomia yhteenlaskettavia.

2. *Kuinka moni lukua 2015 pienempi positiivinen kokonaisluku on jaollinen 3:lla tai 4:llä mutta ei 5:llä?*

Ratkaisu. Koska $2015 = 3\cdot 671 + 2 = 4\cdot 503 + 3 = 12\cdot 167 + 8$, vaaditunkokoisia kolmella tai neljällä jaollisia lukuja on $671 + 503 - 167 = 1007$ kappaletta. Näistä on poistettava kaikki 15:llä tai 20:llä jaolliset luvut. Koska $2015 = 15\cdot 134 + 5 = 20\cdot 100 + 15 = 60\cdot 33 + 35$, tällaisia on $134 + 100 - 33 = 201$ kappaletta. Kysytynlaisia lukuja on siis yhteensä $1007 - 201 = 806$ kappaletta.

3. *Hämähäkillä on kahdeksan jalkaa ja kutakin jalkaa varten sukka ja kenkä. Monessako järjestyksessä se voi pukea sukat ja kengät, kun kuhunkin jalkaan on puettava sukka ennen kenkää?*

Ratkaisu. Tehtävän tekstin voi melko helposti tulkita eri tavoin. Yksi mahdollisuus on ajatella pukemisen tulosta ja olettaa, että kengät ja sukat ovat yksilöitävissä, mutta että jokainen kenkä tai sukka voi olla missä hyvänsä jalassa. Hämähäkki laittaa ensin joka jalkaan sukan ja sitten joka jalkaan kengän. Sukat voi pukea $8! = 40320$ eri järjestykseen, ja kengät samoin. Eri tapoja pukea sukat ja kengät on siis $(8!)^2 = 1625702400$ kappaletta.

Yksi (ja mahdollisesti tehtävän laatijan alkuaan tarkoittama) mahdollisuus on tulkita kysymys pukemisprosessin vaihtoehtoisia tapoja koskevaksi. Laitetaan kahdeksan sukkaa ja kahdeksan kenkää niin, että sukka edeltää kenkää. Jos sukkia ja kenkiä ei ole yksilöity, jokaista pukemista voi kuvata pisteet $(0,\,0)$ ja $(8,\,8)$ yhdistävällä suunnatulla murtoviivalla, jossa jokainen sivu on pisteitä $(n,\,m)$ ja $(n+m,\,m)$ tai $(n,\,m)$ ja $(n,\,m+1)$ yhdistävä jana ja joka kulkee kokonaan suoran $y = x$ alapuolella. Montako tällaista on? Ratkaistaan tehtävä yleisesti. Haetaan siis sellaisten kokonaislukukoordinaattisia pisteitä yhdistävistä yksikköjanoista muodostuvien $2n$-osaisten murtoviivojen lukumäärää, jotka yhdistävät pisteen $(0,\,0)$ pisteeseen $(n,\,n)$ ja kulkevat suoran $y = x$ alapuolella. Jos viimeinen ehto jätetään huomiotta, murtoviivoja on $\binom{2n}{n}$. Näistä olisi poistettava kaikki ne, jotka eivät kulje suoran $y = x$ alapuolella; kutsutaan niitä huonoiksi murtoviivoiksi. Jokainen huono murtoviiva koskettaa suoraa $y = x + 1$. Jos huono murtoviiva koskettaa tätä suoraa ensi kerran pisteessä $(k,\,k+1)$, niin peilataan murtoviivan origosta tähän pisteeseen johtava osuus suorassa $y = x + 1$. Origon peilikuva on $(-1,\,1)$, joten huono murtoviiva muuntuu pisteitä $(-1,\,1)$ ja $(n,\,n)$ yhdistäväksi murtoviivaksi. Toisaalta jokainen pisteitä $(-1,\,1)$ ja $(n,\,n)$ yhdistävä murtoviiva kohtaa suoran $y = x+1$ ensi kerran jossain pisteessä $(k,\,k+1)$, ja samanlainen peilaus muuttaa sen huonoksi murtoviivaksi $(0,\,0)$:sta $(n,\,n)$:ään. Huonoja murtoviivoja on siis yhtä monta kuin on murtoviivoja $(-1,\,1)$:stä $(n,\,n)$:ään. Mutta näitä on $\binom{2n}{n-1}$ kappaletta. Murtoviivoja, jotka eivät ole huonoja, on siis

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Kun $n = 8$, saadaan haluttujen murtoviivojen lukumääräksi 1430.

Muita tulkintamahdollisuuksia on. Joka jalalle oma kenkä? Kengät ja sukat erilaisia, mutta sopivat eri jalkoihinkin? Vasempaan jalkaan ei sovi oikean jalan kenkä, jne.?

4. *Määritellään funktio f rationaaliluvuille kaavalla $f(m/n) = mn$, missä m/n on rationaaliluvun täysin supistettu muoto, eli m ja n ovat kokonaislukuja, joiden suurin yhteinen tekijä on 1. Kuinka monelle rationaaliluvulle r, $0 < r < 1$, on $f(r) = 20!$?*

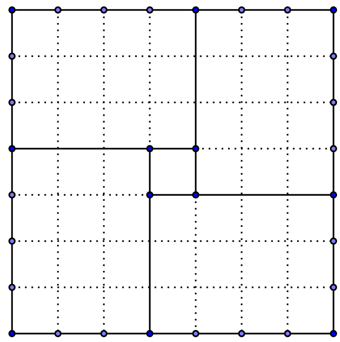
Ratkaisu. On helppo laskea, että $20! = 2^{18}\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$ eli kahdeksan alkulukupotenssin tulo. Koska m/n on supistetussa muodossa, m ja n ovat joukon $E = \{2^{18},\,3^8,\,5^4,\,7^2,\,11,\,13,\,17,\,19\}$ eri alkioiden tuloja, ja jokainen E:n alkio on joko m:n tai n:n tekijä. Luvut r ovat siis muotoa

$$r = 2^{18a_1}3^{8a_2}5^{4a_3}7^{2a_4}11^{a_5}13^{a_6}17^{a_7}19^{a_8},$$

missä $a_i \in \{-1,\,1\}$. Tällaisia lukuja on kaikkiaan 2^8. Jos $r > 1$, niin $1/r < 1$. Luvut voidaan näin muodostaa pareiksi, joissa tasan toinen luku on < 1. (Mikään r ei ole 1.) Ehdon toteuttavia lukuja $r < 1$ on siis $2^7 = 128$ kappaletta.

5. 7×7*-shakkilaudan ruuduista kaksi väritetään keltaisiksi ja loput vihreiksi. Lautaa tasossa kiertämällä saatavia värityksiä pidetään samoina. Montako erilaista väritystä on olemassa?*

Ratkaisu. Jaetaan ruudukko viideksi alueeksi, joista yksi käsittää keskimmäisen ruudun ja muut ovat 3×4-suorakaiteita. Laudan kierto $90°$:een monikerran verran vie suorakaiteet toisille suorakaiteille. Jos nyt toinen keltainen ruutu on keskimmäinen ruutu, erilaisia värityksiä syntyy jokaisesta toisen keltaisen ruudun sijoittamisesta yhteen neljästä suorakaiteesta, esimerkiksi oikean alakulman suorakaiteeseen. Mahdollisuuksia on yhtä monta kuin suorakaiteessa on ruutuja, eli 12. Jos keskimmäinen ruutu on vihreä, tarkastellaan eri tapauksia. Jos molemmat keltaiset ovat samassa suorakaiteessa, niin voidaan ajatella, että tämä suorakaide on oikean alakulman suorakaide. Siihen keltaiset ruudut voi sijoittaa $\binom{12}{2} = 66$ eri tavalla. Jos keltaiset ruudut ovat vierekkäisissä suorakaiteissa, eri tapoja sijoittaa ne on $12 \cdot 12 = 144$. Jos keltaiset ruudut ovat vastakkaisissa suorakaiteissa, esimerkiksi oikeassa alakulmassa ja vasemmassa yläkulmassa, eri sijoittelumahdollisuuksia on taas 12^2, mutta $180°$ kierto muuttaa aina kaksi sijoittelua toisikseen. Eri sijoitteluja tässä tapauksessa on siis 72 kappaletta. Kaikkiaan mahdollisuuksia on $12 + 66 + 144 + 72 = 294$ kappaletta.



6. *Olkoot A ja B joukkoja, joiden leikkaus on tyhjä ja joiden yhdiste on positiivisten kokonaislukujen joukko. Todista, että kaikilla kokonaisluvuilla n on olemassa erisuuret a, $b > n$, joille*

$$\text{joko} \quad \{\, a, b, a+b \,\} \subseteq A \quad \text{tai} \quad \{\, a, b, a+b \,\} \subseteq B.$$

Ratkaisu. Jos toinen joukoista, vaikkapa B, on äärellinen, niin siinä on suurin alkio k, ja kaikilla a, $b > k$ on $\{\, a,\ b,\ a+b \,\} \subset A$. Oletetaan sitten, että kumpikaan joukoista A ja B ei ole rajoitettu. Jos n on annettu, A:sta voi valita kolme lukua x, y, z, joille $n < x < 2x < y < z$ ja $y - x > n$. Jos jokin luvuista $x+y$, $x+z$, $y+z$ kuuluu A:han, niin haluttu kolmialkioinen A:han sisältyvä joukko on löytynyt. Ellei näin ole, kaikki kolme lukua kuuluvat joukkoon B. Jos nyt $y - x \in B$, niin kolmikko $y-x$, $x+z$, $x+y$ sisältyy joukkoon B. Jos viimein $y - x \in A$, niin kolmikko $y-x$, x, y sisältyy A:han.

7. *Sanotaan, että positiivisten kokonaislukujen joukolla on kolmio-ominaisuus, jos siinä on kolme eri lukua, jotka ovat mahdolliset kolmion sivun pituudet (kolmiolla on oltava positiivinen pinta-ala). Peräkkäisten kokonaislukujen joukon $\{\, 4,\ 5,\ 6,\ \ldots,\ n \,\}$ kaikilla kymmenalkioisilla osajoukoilla on kolmio-ominaisuus. Mikä on suurin mahdollinen n:n arvo?*

Ratkaisu. Kymmenalkioisen joukolla $\{4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, 254\}$ ei ole kolmio-ominaisuutta. Jos sen alkioita merkitään $a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}$ ja otetaan niistä mitkä tahansa kolme, $a_i < a_j < a_k$, niin $a_i + a_j \le a_{j-1} + a_j = a_{j+1} \le a_k$, joten a_i, a_j ja a_k eivät voi olla kolmion sivujen pituuksia. Suurin mahdollinen n:n arvo on siis ≤ 254. Osoitetaan sitten, että joukon $E = \{4, 5, \ldots, 253\}$ jokaisella kymmenalkioisella osajoukolla on kolmio-ominaisuus. Epäsuora todistus palautuu edelliseen: oletetaan, että E:n osajoukolla $\{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ ei ole kolmio-ominaisuutta. Nyt $a_1 \geq 4$ ja $a_2 \geq 5$, joten on oltava $a_3 \geq 4+5 = 9$, $a_4 \geq 5+9 = 14$ jne. Jatkamalla tätä "Fibonacci-henkistä" prosessia saadaan $a_{10} \geq 254$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $a_{10} \in E$. Vastaoletus on väärä, joten kysytty n:n suurin mahdollinen arvo on 253.

8. *Merkitään Fibonaccin lukuja $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, jne. Todista, että jos m on n:n tekijä, niin F_m on F_n:n tekijä.*

Ratkaisu. Täydennetään Fibonaccin jono asettamalla $F_0 = 0$. Olkoon $m \geq 1$ annettu. Todistetaan ensin induktiolla n:n suhteen, että

$$F_{m+n} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}. \tag{1}$$

Kun $n = 1$, asia on selvä. Jos (1) pätee, kun $n \leq k$, niin $F_{m+k+1} = F_{m+k} + F_{m+k-1} = F_{k+1}F_m + F_kF_{m-1} + F_kF_m + F_{k-1}F_{m-1} = (F_{k+1} + F_k)F_m + (F_k + F_{k-1})F_{m-1} = F_{k+2}F_m + F_{k+1}F_{m-1}$. Induktioaskel on otettu. Oleteaan nyt, että $m \mid n$ ja $m < n$. (Tapauksessa $m = n$ ei ole mitään todistettavaa.) Silloin yhtälössä (1) voidaan n korvata luvula $n - m$, ja (1) saa muodon $F_n = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1}$. Kun kaavaa (1) sovelletaan edellisen lausekkeen viimeisen yhteenlaskettavan tekijään F_{m-n}, saadaan F_n lausuttua summana, jonka kaksi yhteenlaskettavaa ovat F_m:n monikertoja ja yksi F_{n-2m}:n monikerta. Kun prosessia toistetaan kaikkiaan n/m kertaa, saadaan F_n lausutuksi summana, jonka jokainen yhteenlaskettava on F_m:n monikerta (ja yksi F_{n-n}:n monikerta, mutta $F_0 = 0$.) Siis todellakin F_n on jaollinen F_m:llä.

9. *$ABCD$ on suorakulmio ja P mielivaltainen tason piste. Osoita, että $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.*

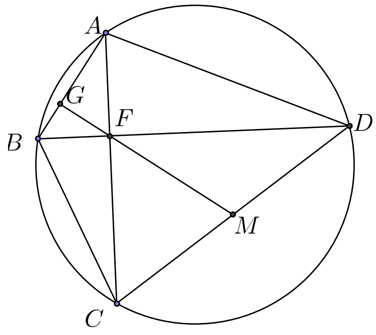
Ratkaisu. Todistettava yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $PA^2 - PD^2 = PB^2 - PC^2$ kanssa. Leikatkoon AB:n suuntainen P:n kautta kulkeva suora suoran AD pisteessä Q ja suoran BC pisteessä R. Pythagoraan lause sovellettuna toisaalta kolmioihin PAQ ja PDQ, toisaalta kolmioihin PBR ja PCR antaa $PA^2 - PD^2 = AQ^2 - QD^2 = (AQ + QD)(AQ - QD)$ ja $PB^2 - PC^2 = BR^2 - RC^2 = (BR + RC)(BR - RC)$. Riippuen siitä, ovatko pisteet Q ja R janoilla AD ja BC vai niiden ulkopuolella, joko $AQ + QD = AD = BC = BR + RC$ ja $|AQ - QD|$ sekä $|BR - RC|$ ovat yhtä pitkien janojen erotuksia tai $|AQ - QD| = AD = BC = |BR - RC|$ ja $AQ + QD$ sekä $BR + RC$ ovat yhtä pitkien janojen summia. Kummassakin tapauksessa tehtävän väite tulee todistetuksi.

2. ratkaisu. Koordinaadisto vvoidaan sijoittaa niin, että akselit ovat suorakulmion sivujen suuntaisia ja $A = (a, b)$, $B = (a, -b)$, $C = (-a, -b)$, $D = (-a, b)$ joillain reaaliluvuilla a, b. Mutta nyt $PA^2 + PC^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (x + a)^2 + (y + b)^2$ ja $PB^2 + PD^2 = (x - a)^2 + (y + b)^2 + (x + a)^2 + (y - b)^2$. Väite on tosi.

10. *Jännenelikulmion lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Osoita, että jos nelikulmion lävistäjien leikkauspisteen kautta kulkeva suora on kohtisuorassa jotain jännenelikulmion sivua vastaan, niin se puolittaa jännenelikulmion vastakkaisen sivun.*

Ratkaisu. Olkoon tehtävän jännenelikulmio $ABCD$ ja olkoon F sen lävistäjien AC ja BD leikkauspiste. Olkoon G se sivun AB piste, jolle $AB \perp FG$. Leikatkoon suora FG

janan CD pisteessä M. Kulman $\angle BFG$ kyljet ovat pareittain kohtisuorassa kulman $\angle CAB$ kylkiä vastaan. Siis $\angle BFG = \angle CAB$. Mutta $\angle BFG = \angle DFM$ (ristikulmat) ja $\angle CAB = \angle CDB$ (kehäkulmat). Siis $\angle DFM = \angle BDC = \angle FDM$. Tästä seuraa, että kolmio MDF on tasakylkinen; $DM = FM$. Koska kolmio CDF on suorakulmainen, $\angle MFD = 90° - \angle DFM = 90° - \angle FDM = \angle MCF$. Myös kolmio MFC on siis tasakylkinen. Siis $CM = FM = MD$. Piste M puolittaa janan CD.



11. *Kolmiot ARB, BPC ja CQA on piirretty kolmion ABC ulkopuolelle. Lisäksi $\angle ARB + \angle BPC + \angle CQA = 180°$. Osoita, että kolmioiden ARB, BPC ja CQA ympärysympyrät leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

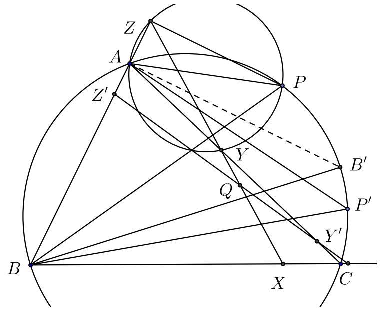
Ratkaisu. Kolmioiden ARB ja BPC ympärysympyrät leikkaavat toisensa pisteen B ohella myös pisteessä X. Jännenelikulmioista $RBXA$ ja $PCXB$ nähdään heti, että $\angle ACX = \angle ARB + \angle BPC = 180° - \angle CQA$. Tästä seuraa, että $QAXC$ on jännenelikulmio. Sen ympärysympyrä on sama kuin kolmion CQA ympärysympyrä. Piste X kuuluu siis kaikkien kolmen tehtävässä mainitun kolmion ympärysympyröihin.

12. *Tarkastellaan kolmioon ABC ja pisteeseen P liittyviä Simsonin suoria. Milloin Simsonin suora on suora AB?*

Ratkaisu. Jotta tehtävän tilanne voisi vallita, on pisteen P kohtisuorien projektioiden suorille AC ja BC oltava suoralla AB. Tämä on mahdollista vain, jos projektiopisteet ovat A ja B. Mutta silloin $PBCA$ on jännenelikulmio, jossa kulmat $\angle PBC$ ja $\angle PAC$ ovat suoria kulmia. Tämä taas on mahdollista vain, jos PC on kolmion ABC ympärysympyrän halkaisija. Sama menee toisinpäin myös: jos CP on ympärysympyrän halkaisija, P:n määräämä Simsonin suora on AB.

13. *Olkoot ℓ ja ℓ' pisteisiin P ja P' liittyvät (kolmion ABC) Simsonin suorat. Osoita, että ℓ:n jaℓ':n välinen kulma on puolet kaaresta $\overset{\frown}{PP'}$ (kun kaari mitataan kulmayksiköin).*

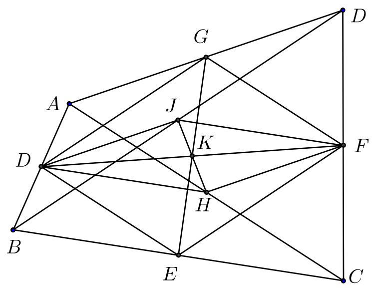
Ratkaisu. Olkoon BB' ABC:n ympärysympyrän halkaisija. Oletetaan, että P on kaarella $\overset{\frown}{AB'}$ ja P' kaarella $\overset{\frown}{B'C}$. Muut tilanteet voi käsitellä periaatteessa samoin. P:n projektiot suorilla BC, CA ja AB ovat X, Y ja Z ja P':n projektiot suorilla AC ja AB ovat Y' ja Z'. Simsonin suorat $\ell = XYZ$ ja $\ell' = Y'Z'$ leikkaavat toisensa pisteessä Q. Kolmiosta YQY' nähdään, että ℓ:n ja ℓ':n välinen kulma on $\angle XQY' = \angle QYY' + \angle QY'Y$. Koska kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta tai kaaresta kulma-



mitassa ilmaistuna, väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $\angle QYY' = \angle PBB'$ ja $\angle QY'Y = \angle B'BP'$. Todistetaan yhtälöistä edellinen; jälkimmäisen todistus on sama. Ensinnäkin $\angle QYY' = \angle AYZ$ (ristikulmat). Pisteet A, Z, P ja Y ovat samalla AP-halkaisijaisella ympyrällä. Siis $\angle AYZ = \angle APZ$. Mutta kulma $\angle BAB'$ on suora, joten $AB' \| ZP$. Tästä seuraa, että $\angle APZ = \angle PAB' = \angle PBB'$, joten olemme valmiit.

14. *Osoita: nelikulmion vastakkaisten sivujen keskipisteiden kautta kulkevat suorat ja nelikulmion lävistäjien keskipisteiden kautta kulkeva suora leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Ratkaisu. Olkoon $ABCD$ nelikulmio, sen sivujen AB, BC, CD, DA keskipisteet D, E, F, , G ja lävistäjien AC ja BD keskipisteet H ja J. Käytetään toistuvasti tietoa, jonka mukaan kolmion sivujen keskipisteet yhdistävä jana on kolmion kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaa puolet tästä. Siis $DE \| AC \| GF$ ja $DE = GF$. Siis $DEFG$ on suunnikas. Samoin $HF \| AD \| DJ$ ja $HF = DJ$, joten myös $DHFJ$ on suunnikas. Suunnikkaan $DEFH$ tunnetun ominaisuuden perusteella suorien DF ja GE leikkauspiste on janan DF keskipiste. Mutta DF:n keskipiste on myös suunnikkaan $DHFJ$ lävistäjien leikkauspiste. Tämän suunnikkaan toinen lävistäjä on JH, joten väite on todistettu.



15. *Määritä kaikki ne positiivisten kokonaislukujen parit (a, b), joille $a^a = b^{4b}$.*

Ratkaisu. Jos $a = 1$ tai $b = 1$, niin selvästi $(a, b) = (1, 1)$ on ainoa ratkaisu. Olkoot sitten $a, b > 1$. Aritmetiikan peruslauseen nojalla voidaan kirjoittaa $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$,ja $b = q_1^{\beta_1} \cdots q_\ell^{\beta_\ell}$, missä $p_1 < ... < p_k$ ja $q_1 < ... < q_\ell$ ovat alkulukuja ja $\alpha_i, \beta_i > 0$ ovat kokonaislukuja. Kun verrataan lukujen a^a ja b^{4b} alkutekijähajotelmia, nähdään, että $k = \ell$ ja $p_i = q_i$ kaikilla i. Vertaamalla luvun p_i eksponentteja kummallakin puolella saadaan lisäksi $a\alpha_i = b\beta_i$ kaikilla i eli $\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{b}{a}$. Koska $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ ei riipu indeksistä i, seuraa $\alpha_i \geq \beta_i$ kaikilla i tai $\alpha_i \leq \beta_i$ kaikilla i. Siis $a \mid b$ tai $b \mid a$. Koska $a > b$, on $a = kb$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla k. Kun tämä sijoitetaan yhtälön $a^a = b^{4b}$, seuraa $(kb)^k = b^4$. On siis oltava $k < 4$ ja $k \neq 1$. Jos $k = 2$, saadaan $b = 2$, jolloin $a = 4$. Jos $k = 3$, saadaan $b = 3^3$, jolloin $a = 3^4$. Mahdolliset ratkaisut ovat siis $(a, b) = (1, 1)$, $(4, 2)$, $(81, 27)$. Kun ne sijoitetaan yhtälöön, nähdään, että ne kelpaavat.

16. *Mille positiivisille kokonaisluvuille n pätee $n|(a^8 - 1)$ kaikilla kokonaisluvuilla a, jotka ovat yhteistekijättömiä luvun n kanssa?*

Ratkaisu. Selvästi $n = 1$ kelpaa, joten oletetaan $n > 1$. Olkoon p alkuluku, jolle $p^\alpha \mid n, p^{\alpha+1} \nmid n$. Tällöin $a^8 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ aina, kun $p \nmid a$ ja s.y.t.$(a, \frac{n}{p^\alpha}) = 1$. Koska luvut p^α ja $\frac{n}{p^\alpha}$ ovat yhteistekijättömiä, jokainen jäännösluokka modulo p^α sisältää luvun, joka on yhteistekijätön luvun $\frac{n}{p^\alpha}$ kanssa (tämän näkee esimerkiksi kiinalaisella jäännöslauseella avulla). Siispä $a^8 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ aina kun $p \nmid a$. Jos $p \neq 2$, niin $p \mid 2^8 - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, joten $p \in \{3, 5, 17\}$. Koska $17 \nmid 3^8 - 1$, ei voi olla $p = 17$. Näin ollen $p \in \{2, 3, 5\}$.

Jos $p = 3$ tai $p = 5$, ei voi olla $p^2 \mid 2^8 - 1$. Lisäksi $2^6 \nmid 3^8 - 1$, joten luvun n täytyy olla muotoa $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, missä $a \le 5$ ja $b, c \le 1$. Selvästi $a^8 \equiv 1 \pmod 3$, kun $3 \nmid a$ ja $a^8 \equiv 1 \pmod 5$, kun $5 \nmid a$. Samoin $a^8 \equiv 1 \pmod{32}$, kun $2 \nmid a$. Siten arvot $n = 3$, $n = 5$ ja $n = 32$ kelpaavat. Koska nämä ovat yhteistekijättömiä lukuja, tarkasteltava kongruenssi toteutuu myös modulo niiden tulo $3 \cdot 5 \cdot 32 = 480$. Tästä seuraa, että jokainen luvun 480 tekijä kelpaa luvun n arvoksi. Vastaus on siis $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, missä $a \in \{0, 1, \ldots, 5\}, b \in \{0, 1\}$ ja $c \in \{0, 1\}$.

17. *Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille luvulla n^2 on jokin tekijä, joka kuuluu väliin $[n - \sqrt{n}, n[$.*

Ratkaisu. Tapaus $n = 1$ ei kelpaa, joten voidaan olettaa $n > 1$. Oletetaan, että $n - h \mid n^2$ ja $0 \le h \le \sqrt{n}$. Koska $n - h \mid n^2 - h^2$, saadaan $n - h \mid h^2$. Jos $n - h \ne h^2$, niin

$$n - \sqrt{n} \le n - h \le \frac{h^2}{2} \le \frac{n}{2},$$

mikä on ristiriita, kun $n \ge 5$. Täten $n \in \{2, 3, 4\}$ tai $n = h^2 + h$ jollakin h. Helposti nähdään, että $n = 2$ ja $n = 4$ kelpaavat ja $n = 3$ ei kelpaa. Lisäksi kaikki luvut muotoa $n = h^2 + h$ kelpaavat, koska $h^2 \mid (h^2 + h)^2$ ja $h^2 \in [h^2 + h - \sqrt{h^2 + h}, h^2 + h[$. Vastaus on siis $n = h^2 + h$ jollakin $h \in \mathbb{Z}_+$ tai $n = 4$ (luku 2 on muotoa $h^2 + h$).

18. *Olkoon $p > 2$ alkuluku. Osoita, että luvun $2^p - 1$ kaikki alkutekijät ovat vähintään $2p + 1$:n suuruisia. Päättele tästä, että on olemassa äärettömän monta alkulukua.*

Ratkaisu. [Tehtävästä oli alkuun unohtunut ehto $p > 2$.] Olkoon q alkuluku, jolle $2^p \equiv 1 \pmod q$. Olkoon d pienin positiivinen luku, jolle $2^d \equiv 1 \pmod q$ (tätä sanotaan luvun 2 kertaluvuksi modulo q). Pätee $d \mid p$, koska muutoin $p = ad + r$ jollakin $0 < r < d$, ja tällöin

$$1 \equiv 2^p \equiv 2^{ad} \cdot 2^r \equiv 2^r \pmod q,$$

mikä on ristiriita luvun d minimaalisuudelle. Samoin nähdään $d \mid q - 1$, koska jos $q - 1 = ad + r$, $0 < r < d$, niin Fermat'n pienellä lausella

$$1 \equiv 2^{q-1} \equiv 2^{ad} \cdot 2^r \equiv 2^r \pmod q,$$

ja tämä on taas ristiriita. Koska $d \mid p$ ja $2 \not\equiv 1 \pmod q$, täytyy olla $d = p$. Siis $p \mid q - 1$. Koska $p \ne 2$ ja $q - 1$ on parillinen, pätee $2p \mid q - 1$, joten $q \ge 2p + 1$, kuten haluttiin.

Päätellään nyt alkulukujen äärettömyys. Jos alkulukuja olisi vain äärellinen määrä, olisi olemassa suurin alkuluku, sanotaan P. Kuitenkin luvulla $2^P - 1$ on alkutekijä, joka on suurempi kuin P, ja tämä on ristiriita.

Tehtävien 15 – 18 ratkaisut kirjoitti Joni Teräväinen, muut Matti Lehtinen.