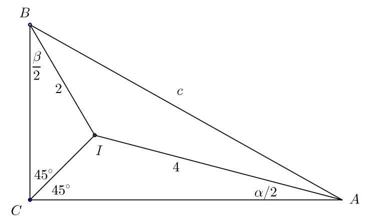
Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailu 2015

Avoimen sarjan tehtävät ja niiden ratkaisuja

1. *Olkoot a ja b peräkkäisiä kokonaislukuja, $c = ab$ ja $d = a^2 + b^2 + c^2$. a) Osoita, että $\sqrt{d}$ on kokonaisluku. b) Mitä voit sanoa luvun $\sqrt{d}$ parillisuudesta tai parittomuudesta?*

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $b = a + 1$. Silloin $d = a^2 + (a+1)^2 + (a(a+1))^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^4 + 2a^3 + a^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$. Toisaalta $(a^2 + a + 1)^2 = a^4 + a^2 + 1 + 2a^3 + 2a^2 + 2a = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$. d on siis neliöluku ja $\sqrt{d} = a^2 + a + 1$. $\left(a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.\right)$ Koska $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ ja joko a tai $a + 1$ on parillinen, niin $a(a+1)$ on parillinen ja $\sqrt{d}$ on pariton.

2. *Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteen etäisyydet kolmion terävien kulmien kärjistä ovat 2 ja 4. Laske hypotenuusan pituus (tarkka arvo).*

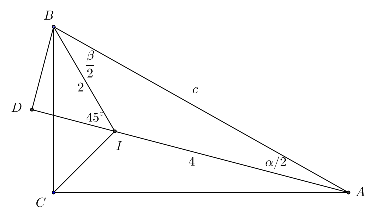


1. ratkaisu. Olkoon suorakulmainen kolmio ABC, sen hypotenuusa $c = AB$, $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$ ja I sisään piirretyn ympyrän keskipiste. I on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Sovelletaan (kolmion kulmasummasta välittömästi seuraavaa) tietoa, jonka mukaan kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, kolmioihin CAI ja BCI. Saadaan $\angle AIB = \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Koska ABC on suorakulmainen, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Siis $\angle AIB = 135^\circ$. Sovelletaan kosinilausetta kolmioon ABI. Koska $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, saadaan heti

$$c^2 = 4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 + 8\sqrt{2},$$

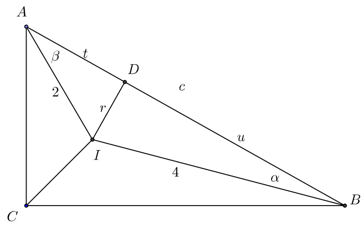
joten

$$c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$



2. ratkaisu. Olkoon D se piste kulman $\angle CAB$ puolittajalla AI, jolle $BD \perp AI$. Kolmion ABI kulman $\angle BIA$ vieruskulmana $\angle BID = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$. Kolmio IBD on siis tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa $BI = 2$. Siis $BD = DI = \sqrt{2}$. Suorakulmaisesta kolmiosta ABD saadaan Pythagoraan lauseen perusteella heti $c^2 = AB^2 = (4 + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 20 + 8\sqrt{2}$ ja $c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.

3. ratkaisu. (Kalevi Lyyra) Olkoon $IA = 2$, $IB = 4$, D ABC:n sisäympyrän ja AB:n sivuamispiste, $AD = u$, $BD = t$, $\angle IAB = \alpha$ ja $\angle IBA = \beta$. Suorakulmaisista kolmioista AID ja BID saadaan $r = 2\sin\alpha = 4\sin\beta$. Siis $\sin\alpha = 2\sin\beta$. Toisaalta $\alpha + \beta = 45°$, joten $2\sin\beta = \sin(45° - \beta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)$. Tästä ratkaistaan



$$\tan\beta = \frac{1}{1+2\sqrt{2}} = \frac{r}{t}, \qquad r = \frac{t}{1+2\sqrt{2}}.$$

Samoin johdetaan yhtälöt

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{r}{u}, \qquad r = \frac{u\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

Kun Pythagoraan lausetta sovelletaan kolmioihin AID ja BID, saadaan

$$4 = r^2 + u^2 = u^2\left(\frac{2}{(1+\sqrt{2})^2} + 1\right)$$

ja

$$16 = r^2 + t^2 = t^2\left(\frac{1}{(1+2\sqrt{2})^2} + 1\right).$$

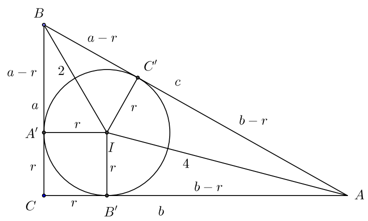
Tästä ratkaistaan

$$u = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}, \qquad t = \frac{2\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}},$$

ja edelleen

$$c = u + t = \frac{2(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}} = \frac{10+4\sqrt{2}}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

4. ratkaisu. Olkoon $BC = a$, $CA = b$, ABC:n sisäympyrän säde r ja sisäympyrän ja kolmion sivujen BC, CA, AB sivuamispisteet A', B', C'. Koska $A'CB'I$ on neliö, $A'C = CB' = r$. Koska ympyrän tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat yhtä pitkiä, on $BC' = BA' = a - r$ ja $C'A = B = b - r$. Siis $c = a + b - 2r$, joten



$$r = \frac{1}{2}(a+b-c), \quad a - r = \frac{1}{2}(a-b+c), \quad b - r = \frac{1}{2}(-a+b+c).$$

Suorakulmaisista kolmioista IAC' ja BIC' saadaan Pythagoraan lauseen nojalla

$$(-a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \tag{1}$$

ja
$$(a-b+c)^2+(a+b-c)^2 = 4\cdot 2^2 = 16. \tag{2}$$
Kun otetaan huomioon, että ABC on suorakulmainen, joten $a^2+b^2=c^2$, niin (1) ja (2) sievenevät muotoihin
$$4c^2-4ac=64, \qquad 4c^2-4bc=16.$$
Siis
$$a=\frac{c^2-16}{c}, \qquad b=\frac{c^2-4}{c}$$
Kun nämä a:n ja b:n arvot sijoitetaan Pythagoraan yhtälöön $a^2+b^2=c^2$, saadaan c:lle yhtälö
$$c^4-40c^2+272=0,$$
josta ratkaistaan
$$c^2=\frac{40\pm\sqrt{1600-4\cdot 272}}{2}=20\pm\sqrt{400-272}=20\pm\sqrt{128}=20\pm 8\sqrt{2}.$$
Kolmiosta ABI nähdään, että $c>4$, joten c^2:n lausekeessa vain $+$-merkki kelpaa. Siis
$$c=2\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$
5. ratkaisu. Käytetään samoja merkintöjä kuin edellä. Pythagoraan lause sovellettuina suorakulmaisiin kolmioihin $AC'I$, $AB'I$, $BC'I$, $BA'I$ antaa $AC'=AB'=\sqrt{16-r^2}$ ja $BC'=BA'=\sqrt{4-r^2}$. Yhtälö $a^2+b^2=c^2$ on siis
$$\left(r+\sqrt{4-r^2}\right)^2+\left(r+\sqrt{16-r^2}\right)^2=\left(\sqrt{4-r^2}+\sqrt{16-r^2}\right)^2.$$
Kun tässä suoritetaan neliöön korotukset ja sievennetään, saadaan, että r toteuttaa yhtälön
$$r\left(\sqrt{4-r^2}+\sqrt{16-r^2}\right)=-r^2+\sqrt{r^4-20r^2+64}.$$
Kun tämä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan, että r toteuttaa yhtälön
$$r^2\sqrt{r^4-20r^2+64}=r^4-10r^2+16.$$
Kun tämä vielä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan r:n toteuttamaksi yhtälöksi
$$17r^4-80r^2+64=0.$$
Tämä on tuntemattoman r^2 toisen asteen yhtälö, jolle voidaan suoraan kirjoittaa ratkaisu
$$r^2=\frac{80\pm\sqrt{6400-17\cdot 256}}{34}=\frac{40\pm 16\sqrt{2}}{17}.$$

Koska r on kolmion BIC' lyhempi kateetti, on oltava $r^2 < 2$. Vain

$$r^2 = \frac{40 - 16\sqrt{2}}{17}$$

voi tulla kyseeseen. Nyt

$$\begin{aligned} c = \sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2} &= \frac{\sqrt{28 + 16\sqrt{2}} + \sqrt{232 + 16\sqrt{2}}}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{58 + 4\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

– Tämä yllättävän erinäköinen ratkaisu on kuitenkin sama kuin edellisissä ratkaisuissa saatu $c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$, niin kuin selviää, kun korottaa molemmat lausekkeet neliöön ja tekee rutiinisievennykset.

6. ratkaisu. Käytetään samoja merkintöjä kuin 3. ratkaisussa. Koska $\sin\beta = 2\sin\alpha = 2\sin(45^\circ - \beta) = \sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)$, saadaan $(1 + \sqrt{2})\sin\beta = \sqrt{2}\cos\beta$, $(3 + 2\sqrt{2})\sin^2\beta = (3 + 2\sqrt{2})(1 - \cos^2\beta) = 2\cos^2\beta$, josta ratkaistaan

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Kun vastaavasti lähdetään yhtälöstä $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\beta = \frac{1}{2}\sin(45^\circ - \alpha)$ ja tehdään samat operaatiot kuin edellä, tullaan yhtälöön

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Nyt

$$c = 2\cos\alpha + 4\cos\beta = \frac{2\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Tämä jälleen aivan erinäköinen lauseke on kuitenkin sama kuin aikaisemmissa ratkaisuissa saatu c:n arvo.

3. *On annettuna* 41 *luvun joukko A. Tiedetään, että näistä jokaisen* 21*:n luvun summa on suurempi kuin muiden* 20*:n luvun summa. Montako negatiivista lukua joukossa A enintään voi olla?*

1. ratkaisu. Olkoon x mielivaltainen joukon A alkio. Jaetaan joukon $A \setminus \{x\}$ 40 alkiota kahdeksi 20-alkioiseksi joukoksi. Olkoot näiden joukkojen alkioiden summat S_1 ja S_2. Tehtävän ehdon perusteella $S_1 + x > S_2$ ja $S_2 + x > S_1$. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa $x > S_2 - S_1$ ja jälkimmäisestä $x > S_1 - S_2$. Siis $x > |S_1 - S_2| \geq 0$. Jokainen A:n alkio on siis positiivinen luku, joten negatiivisia lukuja A:ssa ei ole.

2. ratkaisu. A on joukko, joten sen alkiot ovat eri lukuja. Kirjoitetaan ne suuruusjärjestykseen $x_1 < x_2 < \ldots < x_{41}$. Jos joukossa A on negatiivisia lukuja, niin $x_1 < 0$. Silloin

$$\sum_{k=22}^{41} x_k < \sum_{k=1}^{21} x_k < \sum_{k=2}^{21} x_k < \sum_{k=22}^{41} x_k.$$

Tämä ei ole mahdollista, joten joukossa A ei ole negatiivisia lukuja.

4. *Käytössä on kolme kirjainta A, B ja C. Näistä voidaan muodostaa esimerkiksi neljän kirjaimen merkkijono $ABBA$. Kuinka monta merkkijonoa, joissa on n kirjainta ja joissa on parillinen määrä A-kirjaimia, voidaan muodostaa, kun n on positiivinen kokonaisluku?*

1. ratkaisu. Jonoja, joissa on $2k$, $k \geq 0$, A-kirjainta, on

$$\binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

kappaletta: paikat, joissa on A-kirjain voidaan valita yhtä monella tavalla kuin voidaan valita n-alkioisen joukon $2k$-alkioinen osajoukko. B- ja C-kirjaimille jää $n - 2k$ paikkaa, ja jokaiseen tällaiseen voidaan asettaa kumpi tahansa näistä kirjaimista, joten mahdollisuuksia on 2^{n-2k}. Kaikkiaan tehtävän mukaisia merkkijonoja on siis

$$2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \cdots$$

kappaletta. Mutta summa saadaan kirjoitettua suljettuun muotoon, kun huomataan, että

$$3^n = (2+1)^n = 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \cdots,$$
$$1 = (2-1)^n = 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} - \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} - \cdots.$$

Kun edelliset binomikehitelmät lasketaan yhteen, saadaan

$$3^n + 1 = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}.$$

Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis

$$\frac{1}{2}(3^n + 1).$$

2. ratkaisu. n-kirjaimisia sanoja on kaikkiaan 3^n kappaletta. Olkoon näistä S_n sellaisia, joissa on parillinen määrä A-kirjaimia ja T_n sellaisia, joissa on pariton määrä A-kirjaimia. Tarkastellaan sanoja, joissa on parillinen määrä A-kirjaimia. Jos sanan viimeinen kirjain on A, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on pariton määrä A-kirjaimia ja jos viimeinen kirjain on B tai C, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on parillinen määrä A-kirjaimia. Tästä seuraa

$$S_n = T_{n-1} + 2S_{n-1}. \tag{1}$$

Vastaavasti tarkastelemalla sanoja, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, tullaan yhtälöön

$$T_n = S_{n-1} + 2T_{n-1}. \tag{2}$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) vähennetään toisistaan, saadaan

$$S_n - T_n = S_{n-1} - T_{n-1}. \tag{3}$$

Nyt $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$ (parillinen määrä A-kirjaimia on sanoissa B ja C, pariton sanassa A) eli $S_1 - T_1 = 1$. Yhtälöstä (3) seuraa nyt yksinkertaisella induktiolla, että $S_n - T_n = 1$ kaikilla n. Koska $S_n + T_n = 3^n$, saadaan heti

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1).$$

3. ratkaisu. Pienillä n:n arvoilla tehdyt kokeilut antavat aiheen olettaa, että

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

ja

$$T_n = 3^n - S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Todistetaan tämä induktiolla. $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$. Oleteaan, että väite pätee n:n merkin pituisiin jonoihin. Jonot, joiden pituus on $n+1$ merkkiä ja joissa on parillinen määrä A-kijaimia, saadaan liittämällä n-pituisiin jonoihin, joissa on parillinen määrä A-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi B tai C, tai sellaisiin, joissa on pariton määrä A-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi A. Siis

$$S_{n+1} = 2S_n + T_n = 3^n + 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1).$$

Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.