Kirjevalmennus, tammi-/helmikuu 2017

Ratkaisuja

1. Taululla on luvut 18 ja 19. Yhdellä askeleella voit lisätä taululle luvun, joka on kahden aiemmin taululle kirjoitetun luvun summa. Voitko päästä äärellisellä määrällä askelia lukuun 1994?

Ratkaisu. Koska $1994 = 18 + 19 \cdot 104$, saamme $18 + 19 = 37$, $37 + 19 = 56, \ldots, 1975 + 19 = 1994$.

2. Jokaisessa 8×8-shakkilaudan ruudussa on kokonaisluku. Yhdellä siirrolla voit valita 3×3- tai 4×4-ruudukon ja lisätä sen jokaisen ruudun lukua yhdellä. Voitko aina päästä lopputulokseen, jossa jokainen shakkilaudan luku on jaollinen **a)** luvulla 2? **b)** luvulla 3?

Ratkaisu. a) Olkoon S kaikkien lukujen summa, lukuunottamatta kolmatta ja kuudetta riviä. $S \mod 2$ on invariantti. Jos aluksi $S \not\equiv 0 \mod 2$, niin laudalla pysyy ainakin yksi pariton luku.

b) Olkoon S kaikkien lukujen summa, lukuunottamatta neljättä ja kahdeksatta riviä. Tällöin $I \equiv S \mod 3$ on invariantti. Jos aluksi $I \not\equiv 0 \mod 3$, niin laudalla on aina lukuja, jotka eivät ole jaollisia luvulla 3.

3. Poistetaan luvusta 7^{1996} luvun ensimmäinen numero ja lisätään se jäljelle jääneeseen lukuun. Jatketaan näin, kunnes jäljellä on luku, jossa on 10 numeroa. Osoita, että tässä luvussa on ainakin kaksi samaa numeroa.

Ratkaisu. $7^3 = 1 \mod 9 \to 7^{1996} = 7^{3 \cdot 665} \cdot 7^1 \equiv 7^1 \mod 9$. Tämä jakojäännös pysyy invarianttina lukujen summaa laskettaessa. Lopussa kaikki luvut eivät voi olla eri suuria, sillä muutoin numeroiden summa olisi $0 + 1 + \cdots + 9 = 45$, joka on $0 \mod 9$.

4. Aloitetaan $m \times n$-ruudukosta, jonka jokaisessa ruudussa on kokonaisluku. Yhdellä siirrolla voit muuttaa kaikkien yhden sarakkeen tai yhden rivin lukujen etumerkkiä. Osoita, että voit saada ei-negatiivisen summan mille tahansa riville tai sarakkeelle.

Ratkaisu. Jos millä tahansa sarakkeella tai rivillä on negatiivinen summa, vaihdetaan tämän sarakkeen tai rivin etumerkit. Tällöin taulukossa olevien lukujen summa kasvaa jollakin kokonaisluvulla, joka on suurempi kuin 0. Summa ei voi kasvaa loputtomiin, joten lopuksi kaikilla riveillä ja sarakkeilla on oltava ei-negatiivinen summa.

5. Piste U on kolmion ABC sivulla BC siten, että AU on kolmion kulmanpuolittaja. Piste O on kolmion ympärysympyrän (eli ympäripiirretyn ympyrän) keskipiste. Osoita, että janan AU keskinormaali, suora AO ja pisteen U kautta kulkeva janan BC normaali leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

Ratkaisu. Piste K on pisteen U kautta kulkevan janan BC normaalin ja suoran AO leikkaupiste. Piste D on pisteestä A piirretyn korkeusjanan kantapiste suoralla BC ja piste A' on kolmion ABC ympärysympyrällä siten, että AA' on ympyrän halkaisija.

Nyt kolmiot ADC ja ABA' ovat yhdenmuotoiset, sillä $\measuredangle A'BA = 90^\circ$ halkaisijaa vastaavana kehäkulmana, $\measuredangle ADC = 90^\circ$ (AD on korkeusjana) ja $\measuredangle BA'A = \measuredangle BCA$ samaa kaarta vastaavina kehäkulmina.

Siksi myös $\measuredangle CAD = \measuredangle A'AB$. Kun AU on kulmanpuolittaja, voidaan kirjoittaa $\measuredangle DAU = \measuredangle CAU - \measuredangle CAD = \measuredangle UAB - \measuredangle OAB = \measuredangle UAO$.

Kun UK ja DA ovat yhdensuuntaisia (molemmat kohtisuorassa sivua BC vastaan), $\measuredangle DAU = \measuredangle KUA$. Nyt kolmio KUA on tasakylkinen ja sen kannan AU keskinormaali kulkee kärjen K kautta.

6. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

Ratkaisu. Kun $\measuredangle A'DH = 90^\circ$ pisteet $A'DH$ ovat sellaisella ympyrällä Γ, jonka halkaisija on $A'H$.

Olkoon piste E on pisteestä B piirretyn korkeusjanan kantapiste. Nyt kolmiot BCE ja $BA'X$ ovat yhdenmuotoiset ja $A'X \parallel CE \perp BE$. Siksi $\measuredangle HXA' = 90^\circ$ ja piste X on myös ympyrän Γ kehällä.

Olkoon piste F on pisteestä C piirretyn korkeusjanan kantapiste. Nyt kolmiot CFB ja CYA' ovat yhdenmuotoiset ja $A'Y \parallel BF \perp CF$. Siksi $\measuredangle HYA' = 90^\circ$ ja piste Y on myös ympyrän Γ kehällä.

7. Olkoon piste I kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste, piste X ympyrän sivuamispiste janalla BC ja piste Y ympyrän sivuamispiste janalla CA. Olkoon piste P suoran XY ja suoran AI leikkauspiste. Osoita, että $AI \perp BP$.

Ratkaisu. Kolmion kulmien summan perusteella $\measuredangle YPA = \measuredangle XYC - \measuredangle PAY$. Kolmio CYX on tasakylkinen, joten voidaan laskea $\measuredangle XYC - \measuredangle PAY = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\measuredangle C - \dfrac{1}{2}\measuredangle A = \dfrac{1}{2}\measuredangle B$. Siksi $\measuredangle XPI = \measuredangle XBI$ ja $BPXI$ on jännenelikulmio. Nyt $\measuredangle IPB = \measuredangle IXB = 90^\circ$.

8. Olkoon $0 \le r < 1$ rationaaliluku. Todista, että

$$r = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \ldots + \frac{a_n}{n!},$$

joillekin kokonaisluvuille $n, a_2, \ldots, a_n$, joille $n \ge 2$ ja $0 \le a_i < i$ kaikilla $2 \le i \le n$ ja lisäksi, että esitys on yksikäsitteinen.

Ratkaisu. Todistetaan ensin esityksen olemassaolo. Määritellään jokaisella rationaaliluvulle $0 \le r < 1$ luku $n(r)$ pienimpänä positiivisena kokonaislukuna, jolle $rn!$ on kokonaisluku. Jos luvun r nimittäjä on m, $rm!$ on kokonaisluku, joten tällaisia kokonaislukuja on epäilemättä olemassa, joten on niistä jokin myös pienin. Todistetaan väite induktiolle luvun $n(r)$ suhteen, tai vielä tarkemmin, todistetaan, että löytyy mainitunlainen esitys, jossa $n \le n(r)$. On siis todistettava, että

1. Väite pätee, jos $n(r) = 1$. Tämä on selvää, sillä tällöin on oltava $r = 0$.

2. Jos väite pätee kaikille luvuilla r, joille $n(r) < n$, se pätee myös jos $n(r) = n$. Oletetaan, että $n(r) = n$. Jakoyhtälön nojalla jollain epänegatiivisilla kokonaisluvuilla q ja $r < n$ pätee $rn! = qn + r$. Nyt $r = \frac{q}{n!} + \frac{r}{n!}$. Nyt luvulle $r' = \frac{q}{n!}$ pätee $n(r') \le n - 1$, joten sille löydetään induktio-oletuksen nojalla esitys

$$r' = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}.$$

Lisäämällä tähän termi $\frac{r}{n!}$ saamme esityksen

$$r = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{r}{n!}$$

Todistetaan sitten vielä, että esitys on yksikäsitteinen. Huomataan, että jos luvulla on mainitunlainen esitys, kaikilla k pätee

$$rk! = \frac{a_2k!}{2!} + \frac{a_3k!}{3!} + \frac{a_4k!}{4!} + \ldots \frac{a_kk!}{k!} + \frac{a_kk!}{(k+1)!} + \ldots \frac{a_nk!}{n!}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
& \frac{a_k k!}{(k+1)!} + \ldots + \frac{a_{n-1}k!}{(n-1)!} + \frac{a_n k!}{n!} \\
< \; & \frac{a_k k!}{(k+1)!} + \ldots + \frac{a_{n-1}k!}{(n-1)!} + \frac{nk!}{n!} \\
= \; & \frac{a_k k!}{(k+1)!} + \ldots + \frac{a_{n-2}k!}{(n-2)!} + \frac{(a_{n-1}+1)k!}{(n-1)!} \\
\leq \; & \frac{a_k k!}{(k+1)!} + \ldots + \frac{a_{n-2}k!}{(n-2)!} + \frac{(n-1)k!}{(n-1)!} \\
= \; & \frac{a_k k!}{(k+1)!} + \ldots + \frac{(a_{n-2}+1)k!}{(n-2)!} \\
\leq \; & 1,
\end{aligned}$$

joten $\lfloor rk! \rfloor = \frac{a_2 k!}{2!} + \frac{a_3 k!}{3!} + \frac{a_4 k!}{4!} + \ldots \frac{a_k k!}{k!}$. Oikein puolen viimeistä termiä kaikki termit ovat jaollisia luvulla k, joten luvun a_k on oltava luvun $\lfloor rk! \rfloor$ jakojäännös luvulla k jaettaessa. Erityisesti mahdollisia esityksiä on korkeintaan yksi.

9. Määritä kaikki (reaalikertoimiset) polynomit $P(x)$, joille

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x).$$

Ratkaisu. Olkoon a polynomin korkeimman asteen termin kerroin. Vertaamalla eri puolien polynomeja huomataan, että $a^2 = a$. Nyt joko $a = 0$ tai $a = 1$. Jos $a = 0$, polynomin on oltava nollapolynomi. Nollapolynomi toteuttaa myös selvästi yhtälön. Tutkitaan sitten tapausta $a = 1$.

Ideana on tutkia mitä nollakohtia polynomilla voi olla. Kirjoitetaan polynomi P muodossa $x^k Q$, missä $Q(0) \neq 0$, ja $k \geq 0$. Nyt yhtälö saa muodon

$$x^k Q(x)(2x^2)^k Q(2x^2) = (2x^3 + x)^k Q(2x^3 + x).$$

Kun $x \neq 0$, voimme jakaa potenssilla x^k ja saamme

$$(2x^2)^k Q(x) Q(2x^2) = (2x^2 + 1)^k Q(2x^3 + x).$$

Polynomien jatkuvuuden nojalla tämän yhtälön on kuitenkin pädettävä myös kun $x = 0$. Jos $k > 0$, yhtälön saa muodon $0 = Q(0)$, mikä on ristiriidassa oletuksemme kanssa. On siis oltava $k = 0$. Tällöin saadaan yhtälö $Q(0)^2 = Q(0)$, joten koska $Q(0) \neq 0$, $Q(0) = P(0) = 1$.

Nyt joko polynomin aste on 0, jolloin se on edellisen huomion nojalla vakiopolynomi 1 tai sillä on jokin kompleksinen juuri, α. Sijoittamalla α alkuperäiseen yhtälöön, huomataan, että $Q(2\alpha^3 + \alpha) = 0$, eli myös luku $2\alpha^3 + \alpha$ on polynomin juuri. Olkoon α_0 sitten polynomin joku itseisarvoltaan suurin juuri. Nyt siis myös $2\alpha_0^3 + \alpha_0$ on polynomin juuri, joten on oltava $|2\alpha_0^3 + \alpha_0| \leq |\alpha_0|$. Oletetaan ensin, että $|\alpha_0| \geq 1$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla

$$|2\alpha_0^3 + \alpha_0| = |\alpha_0||2\alpha_0^2 + 1| \geq |\alpha_0|[2|\alpha_0^2| - 1] \geq |\alpha_0|,$$

ja tässä voi päteä yhtäsuurus vain jos $|\alpha_0| = 1$ ja $|2\alpha_0^2 + 1| = 2|2\alpha_0^2| - 1 = 1$. Kolmio epäyhtälössä pätee yhtälö vain luvut $2\alpha_0^2 + 1$ ja -1 ovat “samansuuntaiset"eli toinen saadaan toisesta positiivisella reaaliluvulla kertomalla. Tämä tarkoittaa sitä, että α_0^2 on oltava negatiivinen reaaliluku, jolloin välttämättä $\alpha_0^2 = -1$, eli $\alpha_0 = \pm i$.

Koska $P(0) = 1$ on polynomien juurien tulo, ja kaikkien juurien itseisarvot ovat korkeintaa yksi, on kaikkien juurien itseisarvot tasan yksi. Huomasimme myös, että ainoat mahdolliset juuret ovat i ja $-i$.

Kirjoitetaan sitten polynomi P muodossa $(x^2+1)^k R(x)$, missä R on jokin polynomi, jolla ei ole juurina sekä lukua i ja $-i$. Alkuperäisestä polynomiyhtälöstä huomataan helposti, että jos kaksi polynomia toteuttaa yhtälön, niin toteuttaa niiden tulo. Helpohko lasku osoittaa myös, että polynomi x^2+1 toteuttaa yhtälön. Nimittäin

$$\begin{aligned}(x^2+1)((2x^2)^2+1) &= (x^2+1)(4x^4+1)\\ = 4x^6+4x^4+x^2+1 &= (2x^3+x)^2+1.\end{aligned}$$

Täten saamme yhtälön

$$(4x^6+4x^4+x^2+1)^k R(x)R(2x^2) = (4x^6+4x^4+x^2+1)^k R(2x^3+x).$$

Jakamalla lausekkeella $(4x^6+4x^4+x^2+1)^k$, joka ei ole nolla ainakaan reaaliluvuilla, saamme, että myös R toteuttaa alkuperäisen yhtälön. Toisaalta polynomin R on oltava vakio 1. Nimittäin jos R:llä olisi juuri, se olisi joko i tai $-i$. Jos juurena olisi i on myös $2i^3+i=-2i+i=-i$ juuri, vastoin oletusta. Samoin pätellään jos $-i$ on juuri. Polynomilla ei siis ole juuria, joten se on vakio, ja huomasimme jo aiemmin, että tämän vakion on oltava 1. Täten yhtälön ratkaisuina ovat vakiopolynomit 0 ja 1, sekä polynomit muotoa $(x^2+1)^k$ jollain positiivisella kokonaisluvulla k.

10. Olkoot a, b, c positiivisia reaalilukuja. Voidaanko kuution, jonka sivun pituus on $(a+b+c)$ jakaa kuuteen suorakulmaiseen särmiöön: kuutioihin, joiden sivujen pituudet ovat a, b ja c, ja kolmeen muotoa $(a+b)\times(b+c)\times(c+a)$ olevaan suorakulmaiseen särmiöön?

Ratkaisu. Ei. Ideana on, että ison $(a+b+c)$-särmäisen kuution tahkot koostuisivat tällöin pienten suorakulmaisten särmiöiden ja kuutioiden tahkoista. Ison kuution kokonaisala on

$$A_I = 6(a+b+c)^2 = 6(a^2+b^2+c^2)+12(ab+bc+ca).$$

Toisaalta kustakin pienemmästä särmiöstä korkeintaa puolet tahkoista ovat ison kuution tahkoina: pienten särmiöiden vastakkaiset tahkot voisivat yhtyä vain ison kuution vastakkaisiin tahkoihin, mutta ison kuution vastakkaisten tahkojen etäisyys on $(a+b+c)$, mikä on aidosti suurempaa kuin minkään pienen vastakkaisten tahkojen etäisyys. Täten pienet särmiöt voivat tahkoillaan "peittää" yhteensä korkeintaan vain puolet niiden kokonaisalasta.

Pienten särmiöiden kokonaisala on

$$\begin{aligned}A_P &= 6a^2+6b^2+6c^2\\ &+ 3[2(a+b)(b+c)+2(b+c)(c+a)+2(c+a)(a+b)]\\ &= 12a^2+12b^2+12c^2+18(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

Koska $A_P < 2A_I$, pienet särmiöt eivät riitä "peittämään" isoa kuutiota, joten jako on mahdoton.

11. Viisinumeroinen luku jaetaan luvulla 100. Merkitään termillä k jaon kokonaislukuosaa ja termillä o jakojäännöstä. Kuinka monta viisinumeroista lukua on olemassa siten, että $11 \mid (k+o)$?

Ratkaisu. On olemassaa 90000 viisinumeroista lukua (luvusta 10000 lukuun 99999). Asetetaan nämä 900 sarakkeeseen, joissa kussakin on 100 lukua seuraavasti, missä luku k saa arvot eri sarakkeissa luvusta 100 (vasemmalla) lukuun 999 (oikealla):

$$\begin{array}{ccccc}100\cdot100+0 & 100\cdot101+0 & 100\cdot102+0 & \cdots & 100\cdot999+0\\ 100\cdot100+1 & 100\cdot101+1 & 100\cdot102+1 & \cdots & 100\cdot999+1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 100\cdot100+99 & 100\cdot101+99 & 100\cdot102+99 & \cdots & 100\cdot999+99\end{array}$$

Jokaisessa sarakkeessa, jossa k ei ole jaollinen luvulla 11, löydämme 9 lukua, joiden jakojäännös o on sellainen, että $k + o$ on jaollinen luvulla 11. Jokaisessa sarakkeessa, jossa k on jaollinen luvulla 11, on 10 lukua, joiden jakojäännös o on sellainen, että $k + o$ on jaollinen luvulla 11. Tässä tapauksessa jakojäännös o voi olla jokin luvuista $0, 11, 22, \ldots, 99$.
Tarkistamme sitten, että on olemassa 81 saraketta, joissa jakaja k on jaollinen luvulla 11. Nämä ovat sarakkeet, joissa k on $110 = 11 \cdot 10$, $121 = 11 \cdot 11$, $132 = 11 \cdot 12$, ..., $990 = 11 \cdot 90$. Siten löytyy $900 - 81 = 819$ saraketta, joissa k ei ole jaollinen luvulla 11. Lopuksi on siis $81 \cdot 10 + 819 \cdot 9 = 8181$ sellaista viisinumeroista lukua, että $k + o$ on jaollinen luvulla 11.

12. $m \times n$-ruudukossa, missä $m \geq 4$, on krokotiileja. Krokotiili voi hyökätä kaikkiin samalla sarakkeella oleviin ruutuihin ja vierekkäisiin samalla rivillä oleviin ruutuihin (yhteensä $m + 2$ ruutuun). Mikä on pienin mahdollinen määrä krokotiileja, joita vaaditaan, jotta krokotiilit voivat hyökätä mihin tahansa ruudukon ruutuun?

Ratkaisu. Selvästi n krokotiilia riittää (yksi krokotiili joka sarakkeella). Osoitamme, että tarvitaan n krokotiilia hyökkäämään kaikkiin ruutuihin. Oletetaan aluksi, että $m \geq 5$. Oletetaan, että krokotiileja on niin vähän kuin mahdollista, ja valitaan tapaus, jossa on pienin mahdollinen määrä tyhjiä sarakkeita. Jos tyhjiä sarakkeita ei ole, on krokotiileja vähintään n kappaletta. Jos ruudukossa on tyhjä sarake, niin tämän sarakkeen kaikkien m ruudun vieressä on oltava krokotiili joko vasemmalla tai oikealla puolella. Poistetaan nämä krokotiilit ja asetetaan yksi krokotiili viiteen sarakkeeseen; valitsemaamme, sen vasemmalla ja oikealla puolella olevaan ja näiden vieressä oleviin sarakkeisiin. Nyt ruudukon kaikkiin ruutuihin voidaan hyökätä, mutta tyhjien sarakkeiden lukumäärä on pienentynyt yhdellä, mikä on ristiriita! Siten tarvitaan vähintään n krokotiiliä.
Oletetaan nyt, että $m = 4$. Valitaan taas tapaus, jossa on pienin määrä tyhjiä sarakkeita. Jos tyhjiä sarakkeita ei ole, on krokotiileja ainakin n kappaletta. Muussa tapauksessa tarkastellaan yhtä tyhjistä sarakkeista. Tämän sarakkeen vasemmalla ja oikealla puolella on yhteensä ainakin neljä krokotiilia; sarakkeesta kahden sarakkeen päässä vasemmalla ja oikealla olevat sarakkeet ovat tyhjät, muutoin pystymme siirtämään krokotiileja siten, että ne edelleen pystyvät hyökkäämään kaikkiin ruutuihin, mutta valitsemamme sarake ei ole enää tyhjä, mikä on ristiriidassa valitsemamme tapauksen kanssa, jossa on pienin mahdollinen määrä tyhjiä sarakkeita. Siten joka toinen sarake on tyhjä. Jokaisessa kahdessa peräkkäisessä sarakkeessa, jossa on krokotiileja, on oltava ainakin neljä krokotiiliä, jotta ne pystyvät hyökkäämään kaikkiin tyhjien sarakkeiden ruutuihin. Siten krokotiileja on yhteensä vähintään n kappaletta.

13. Joukko $\mathrm{M} = \{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$ jaetaan k osajoukkoon siten, että jos $a + b = n^2$ ($a, b \in \mathrm{M}$, $a \neq b$, n on kokonaisluku), niin a ja b kuuluvat eri osajoukkoihin. Määritä luvun k pienin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. 3. Vastaus: 3.
Huomaa, että luvut 6, 19 ja 30 kuuluvat eri alijoukkoihin, sillä $6 + 19 = 5^2$, $19 + 30 = 7^2$ ja $6 + 30 = 6^2$. Tästä seuraa, että alijoukkoja on vähintään 3. Toisaalta joukot voidaan osittaa seuraavalla tavalla: $\mathrm{M} = A \cup B \cup C$, missä

$$A = \{4k + 3 : 0 \leq k \leq 6\} \cup \{4k : 0 \leq k \leq 7\} \setminus \{12, 20, 28\},$$

$$B = \{4k + 1 : 0 \leq k \leq 7\} \cup \{4k + 2 : 0 \leq k \leq 7\} \setminus \{6, 14, 26\},$$

$$C = \{12, 20, 28, 6, 14, 26\}.$$

Koska 2 ja 3 eivät ole neliöjäännöksiä modulo 4, niin kahden luvun $(4k + 3, 4k + 3)$, $(4k + 3, 4k)$, $(4k + 1, 4k + 1)$ tai $(4k + 1, 4k + 2)$ summa ei voi olla neliöluku.

Riittää tarkistaa, että jos laskemme kahden luvun summan joukosta

$$\{4k : 0 \leq k \leq 7\} \setminus \{12, 20, 28\} = \{4, 8, 16, 24\},$$

$$\{4k + 2 : 0 \leq k \leq 7\} \setminus \{6, 14, 26\} = \{2, 10, 18, 22, 30\}$$

tai

$$\{12, 20, 28, 6, 14, 26\},$$

niin emme missään tapauksessa saa neliölukua.

14. $n \times n$-taulukko on *hyvä*, jos sen kaikki ruudut voidaan värittää kolmella värillä siten, että mille tahansa kahdelle riville ja kahdelle sarakkeelle 4 ruutua, jotka kuuluvat näistä sekä yhteen riviin että yhteen sarakkeeseen, eivät ole kaikki samanvärisiä.

a) Osoita, että on olemassa hyvä 9×9-ruudukko.

b) Osoita, että $n < 11$ mille tahansa hyvälle $n \times n$-taulukolle.

Ratkaisu. a) Kuvassa on tehtävän ratkaisu, kin $n = 0$; numerot 1, 2 ja 3 vastaavat eri värejä.

1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	2	2	3	3	3	1	1	1
3	3	3	1	1	1	2	2	2
1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	2	3	1	3	1	2
2	3	1	3	1	2	1	2	3
3	1	2	1	2	3	2	3	1

ratkaisu a)-tehtävään

b) Oletetaan, että on olemassa hyvä 11×11-taulukko. Tarkastellaan seuraavanlaista multiverkkoa (multiverkko on verkko, jossa kahden solmun välillä voi olla useampi kuin yksi särmä): taulukon sarakkeet ovat verkon solmuja, ja kaksi solmua on yhdistetty särmällä, joka on väritetty värillä i, jos on olemassa rivi, jolla kumpaankin sarakkeeseen kuuluva ruutu on väritety värillä i. Ehdosta seuraa, että mitkään kaksi solmua eivät voi olla yhdistettyjä kahdella samanvärisellä särmällä. Siten tietynvärisiä särmiä voi olla korkeintaan $11 \times 10/2 = 55$, joten särmiä voi yhteensä olla korkeintaan 165. Toisaalta mikä tahansa rivi tuottaa vähintään 15 särmää (luku $15 = 4 \cdot 3/2 + 4 \cdot 3/2 + 3 \cdot 3/2$ saadaan, kun rivillä on 4 ruutua ensimmäistä väriä, 4 ruutua toista väriä ja 3 ruutua kolmatta väriä; muutoin saadaan enemmän kuin 15 särmää). Tästä seuraa, että särmiä on vähintään $11 \cdot 15 = 165$. Siten on helppoa nähdä, että joka rivillä on tasan 4 ruutua yhtä väriä, 4 ruutua toista väriä ja 3 ruutua kolmatta väriä. Tästä seuraa, että mikä tahansa rivi tuottaa 6 särmää yhtä väriä, 6 särmää toista väriä ja 3 särmää kolmatta väriä. Siten kaikkien särmien lukumäärä on kolmella jaollinen, joten tämä luku ei voi olla 55, mikä on ristiriidassa aiemman päättelymme kanssa. Näin ollen $n < 11$.