Epäyhtälöoppia matematiikkaolympialaisten tehtäviin

Jari Lappalainen
1999

Epäyhtälöitä reaaliluvuille

Cauchyn epäyhtälö

Kaikille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pätee Cauchyn epäyhtälö

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Epäyhtälö seuraa identiteetistä (nk. Cauchy–Lagrange-identiteetti)

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 =$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2 \geq 0.$$

Tästä huomataan, että yhtäsuuruus pätee vain jos $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n$ tai $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Esimerkkinä Cauchyn epäyhtälön käytöstä todistetaan aritmeettisen ja harmonisen keskiarvon välinen epäyhtälö: positiivisille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pätee

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \right)^{-1}. \tag{1}$$

Vasemmanpuoleinen lauseke on lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmeettinen keskiarvo ja oikeanpuoleinen lauseke harmoninen keskiarvo. Väite seuraa kirjoittamalla Cauchyn epäyhtälö luvuille $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}$ ja $\sqrt{1/a_1}, \sqrt{1/a_2}, \ldots, \sqrt{1/a_n}$ eli

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}).$$

Aritmeettis–geometrinen epäyhtälö

Kaikille ei–negatiivisille luvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pätee

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2 \cdots a_n},$$

missä yhtäsuuruus pätee kun $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Tämä todistetaan Jensenin epäyhtälöllä edempänä. Oikeanpuoleista lauseketta kutsutaan lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geometriseksi keskiarvoksi. Todistetaan (1) uudestaan aritmeettis–geometrisella epäyhtälöllä. Voidaan kirjoittaa

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2 \cdots a_n} =$$

$$= \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}}\right)^{-1} \geq n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)^{-1}.$$

Tämä on yhtäpitävää väitteen kanssa. Aritmeettis–geometrista epäyhtälöä sovellettiin ensin lukuihin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja sitten lukuihin $1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n$.

Toisena esimerkkinä osoitetaan, että ainakin toinen epäyhtälöistä

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leq 2^{-n}$$

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) \leq 2^{-n}$$

pätee, jos $a_i \in [0, 1]$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Vastaoletus on, ettei kumpikaan päde eli $a_1 a_2 \cdots a_n > 2^{-n}$ ja $(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 2^{-n}$. Kertomalla nämä keskenään päädytään ristiriitaan, sillä aritmeettis–geometrisen epäyhtälön nojalla

$$a_1 a_2 \cdots a_n (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) \leq$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1 - a_1 + 1 - a_2 + \ldots + 1 - a_n}{2n}\right)^{2n} = 2^{-2n}$$

eli alkuperäinen väite pitää paikkansa.

Jensenin epäyhtälö

Funktiota f sanotaan konveksiksi välillä $[a, b]$ jos funktion toinen derivaatta on positiivinen $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Konvekseille funktioille pätee nk. Jensenin epäyhtälö

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

kaikilla $x_i \in [a, b]$. Todistus sivuutetaan. Jensenin epäyhtälöllä voi todistaa esimerkiksi aritmeettis–geometrisen epäyhtälön. Valitaan $f(x) = -\log x$. Funktio f on konveksi, sillä $f''(x) = 1/x^2 > 0$. Kirjoitetaan nyt

$$-\log(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}) \leq -\frac{\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n}{n} =$$

$$= -\log \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Aritmeettis–geometrinen epäyhtälö seuraa tästä käyttämällä eksponenttifunktiota molempiin puoliin.

Symmetria

Lauseketta kutsutaan täydellisesti symmetriseksi, kun lausekkeen arvo ei muutu, vaikka mielivaltaiset kaksi sen muuttujista vaihdetaan keskenään. Esimerkkinä täydellisestä symmetriasta (a ja b vaihdettu)

$$ab + bc + ca \;\to\; ba + ac + cb$$

ja esimerkkinä lausekkeesta, jossa ei vallitse täydellinen symmetria (taas a ja b vaihdettu)

$$a^2b + b^2c + c^2a \;\to\; b^2a + a^2c + c^2b.$$

Jälkimmäisessäkin lausekkeessa on tiettyä säännöllisyyttä. Sitä kutsutaan kiertosymmetriseksi, sillä jos muuttujat vaihdetaan kiertäen (esimerkiksi $a \to b \to c \to a$) lausekkeen arvo ei muutu.

Symmetriatarkastelujen idea on, että jos lausekkeessa vallitsee täydellinen symmetria, saa vapaasti olettaa muuttujien suuruusjärjestyksen. Esimerkiksi Schurin epäyhtälö

$$a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-c)(b-a) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0$$

kaikille $a, b, c, n \geq 0$ on täydellisesti symmetrinen a:n, b:n ja c:n suhteen. Siispä saa olettaa $a \geq b \geq c$, mikä riittääkin epäyhtälön osoittamiseksi. Ensimmäinen ja kolmas yhteenlaskettava ovat positiivisia ja $a^n > b^n$ eli vasen puoli on positiivinen.

Jos lauseke on kiertosymmetrinen, voidaan valita joku muuttujista ja olettaa, että se on arvoltaan suurin (tai pienin). Muiden muuttujien suuruusjärjestuksestä ei nyt voi sanoa mitään.

Epäyhtälö

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a, \quad \text{kun} \quad a, b, c \geq 0 \tag{2}$$

ei ole täydellisesti symmetrinen, vaan kiertosymmetrinen. Voidaan olettaa, että a on suurin luvuista ja kirjoittaa epäyhtälö yhtäpitävästi

$$(a^2 - c^2)(a-b) + (c-b)^2(c+b) \geq 0,$$

joka on identtisesti tosi.

Suuruusjärjestysepäyhtälö

Kolmeen laatikkoon on laitettu eriarvoisia seteleitä. Yhdessä laatikossa on kymmenen euron seteleitä, yhdessä viisikymppisiä ja yhdessä satasia. Laatikoista tulee valita seteleitä siten, että yhdestä laatikosta otetaan kymmenen seteliä, toisesta seitsemän ja kolmannesta viisi seteliä. Miten valinta kannattaa suorittaa, jotta saisi mahdollisimman paljon rahaa? On selvää, että sadan eoron seteleitä kannattaa ottaa niin paljon kuin suinkin (kymmenen seteliä), sitten viisikymppisiä (seitsemän) ja pienin määrä (viisi seteliä) kannattaa jättää arvottomimmille kymmenen euron seteleille.

Vastaavasti jos tavoittelee mahdollisimman vähän rahaa, pitää ottaa eniten kymmenen euron seteleitä ja vähiten sadan euron seteleitä.

Kirjoitetaan tämä periaate epäyhtälöiden avulla. Otetaan käyttöön merkintä lukujen a_1, a_2, a_3 ja b_1, b_2, b_3 tulojen summalle

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{3}$$

Sovitaan, että alarivin lukujen keskinäistä järjestystä voi vaihdella. Miten alarivin luvut kannattaa järjestää, jotta lausekkeen 3 arvo on mahdollisimman suuri? Suuruusjärjestysepäyhtälö sanoo, että lausekkeen 3 arvo on mahdollisimman suuri silloin, kun **ylä- ja alarivin suuruusjärjestys on sama**. Toisin sanoen, jos b'_1, b'_2, b'_3 ovat luvut b_1, b_2, b_3 samassa järjestyksessä kuin luvut a_1, a_2, a_3, pätee

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{bmatrix}.$$

Esimerkiksi euroseteleiden tapauksessa

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 10 \\ 10 & 7 & 5 \end{bmatrix} = 1000 + 350 + 50 = 1400$$

on suurempi kuin mikään muun järjestyksen tulos, ja

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 10 \\ 5 & 7 & 10 \end{bmatrix} = 500 + 350 + 100 = 950$$

on pienempi kuin mikään muun järjestyksen tulos.

Suuruusjärjestysepäyhtälön todistaminen ei ole vaikeaa. Ensinnäkin, jos kaikki luvut ylärivillä tai alarivillä ovat yhtäsuuria, lukujen järjestyksellä ei ole merkitystä. Oletetaan siis, että ylä- ja alarivillä on erisuuria lukuja, ja tehdään vastaoletus: lauseke jossa rivien suuruusjärjestys ei ole sama

$$S_{21} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \end{bmatrix}$$

on suurempi kuin lauseke, jossa suuruusjärjestystä “korjataan” jostain kohtaa

$$S_{12} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Nyt on siis valittu joko $a_1 > a_2$ ja $b_1 > b_2$ tai $a_1 < a_2$ ja $b_1 < b_2$.

Ristiriitä seuraa helposti siitä, että

$$S_{21} - S_{12} = a_1b_2 + a_2b_1 - a_1b_1 - a_2b_2 = -(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) < 0.$$

Todistetaan esimerkkinä suuruusjärjestysepäyhtälön käytöstä epäyhtälö (2).

Ratkaisu menee näin. Koska luvuilla a, b, c ja a^2, b^2, c^2 on sama suuruusjärjestys (jos $a \geq b$ niin $a^2 \geq b^2$) voidaan kirjoittaa

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \end{bmatrix}.$$

Tämä on yhtäpitävästi $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$, ja todistus on valmis.

Tsebysevin epäyhtälö

Kaikille reaaliluvuille $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ ja $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ pätee

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

Epäyhtälö seuraa identiteetistä

$$\begin{gathered} 2\left[n\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\right] = \\ (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_1 - a_3)(b_1 - b_3) + \ldots + (a_1 - a_n)(b_1 - b_n) + \\ (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) + (a_2 - a_3)(b_2 - b_3) + \ldots + (a_2 - a_n)(b_2 - b_n) + \ldots \\ \ldots + (a_n - a_1)(b_n - b_1) + (a_n - a_2)(b_n - b_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) \geq 0. \end{gathered}$$

Esimerkkinä kirjoitetaan Tsebysevin epäyhtälö lukujoukoille $\{a, b, c\}$ ja $\{a^2, b^2, c^2\}$. Kuten edellä todettiin, on näillä joukoilla sama suuruusjärjestys, jos $a, b, c \geq 0$. Siispä

$$\frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

eli $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$.

Geometrisia epäyhtälöitä

Suurin kolmio

Olkoon annettu kolmion piiri $2p$, ja kysytään kuinka suuri voi olla pinta-ala. Entä millaisella kolmiolla tämä maksimi saavutetaan (jos saavutetaan)?

Käytetään Heronin kaavaa (19) ja aritmeettis-geometrista epäyhtälöä. Merkitään kolmion alaa T ja sivuja pituuksia a, b, c.

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p\left(\frac{3p-2p}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Yhtäsuuruus pätee jos $p-a = p-b = p-c$ eli tasasivuisen kolmion tapauksessa.

Kolmion sivujen pituuksiin liittyvät epäyhtälöt

Olkoot a, b, c kolmion sivujen pituudet. Osoita

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Kirjoitetaan epäyhtälö muotoon

$$a(b + c - a) + b(c + a - b) + c(a + b - c) > 0,$$

joka riittää, kun muistetaan kolmion sivujen pituuksille pätevät ehdot: $a+b-c > 0$, $b + c - a > 0$ ja $c + a - b > 0$. Joskus voi olla vaikea keksiä mihin muotoon epäyhtälö tulisi kirjoittaa, jotta näitä ehtoja voisi käyttää. Silloin saattaa olla apua muunnoksesta

$$\begin{aligned} a &= u + v \\ b &= v + t \\ c &= t + u \end{aligned}$$

ja sen käänteismuunnoksesta

$$\begin{aligned} t &= \frac{-a + b + c}{2} \\ u &= \frac{a - b + c}{2} \\ v &= \frac{a + b - c}{2}. \end{aligned}$$

Kolmion sivujen pituuksille asetetut ehdot muuntuvat helppokäytöiseen muotoon $t, u, v > 0$.

Esimerkiksi todistetaan, että kolmion sivujen pituuksille a, b, c pätee

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

Sijoitetaan edellisten muunnosten mukaan

$$2t2u2v \leq (u+v)(v+t)(t+u).$$

Tämä seuraa kertomalla keskenään epäyhtälöt $2\sqrt{uv} \leq u+v$, $2\sqrt{vt} \leq v+t$ ja $2\sqrt{tu} \leq t+u$, jotka ovat voimassa kaikille $t, u, v \geq 0$ aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan.

Kolmion kulmiin liittyvät epäyhtälöt

Merkitään kolmion kulmia α, β ja γ. Tunnetusti kolmion kulmien summa on $180°$, ja tätä tietoa voi käyttää hyväksi esimerkiksi Jensenin epäyhtälön avulla. Osoitetaan

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Käytetään Jensenin epäyhtälöä ja valitaan $f(x) = -\cos(x/2)$ (Funktion f on konveksi, sillä $f''(x) = \cos(x/2)/4 \geq 0$ kaikilla $x \in [0°, 180°]$)

$$\frac{-\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}}{3} \geq -\cos\left(\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

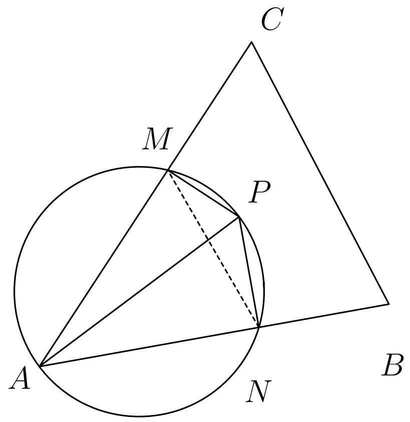
mistä väite seuraa.

Erdös–Mordell-epäyhtälö

Olkoon P piste kolmion ABC sisällä ja p_a, p_b ja p_c etäisyydestä pisteestä P kolmion kuhunkin sivuun. Erdös–Mordell-epäyhtälön mukaan pätee

$$PA + PB + PC \geq 2(p_a + p_b + p_c),$$

jossa yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos kolmio on tasasivuinen ja P on kolmion keskipiste.



Todistus: Valitaan pisteet L, M, N sivuilta AB, BC ,CA siten, että $PL \perp BC$, $PM \perp CA$ ja $PN \perp AB$. (Eli esimerkiksi $p_c = PN$.) Kosinilauseen (13) perusteella

$$MN = \sqrt{p_b^2 + p_c^2 - 2p_a p_b \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{p_b^2 + p_c^2 + 2p_a p_b \cos\alpha},$$

jossa $\alpha = \angle CAB$. Toisaalta sinilausetta (14) käyttäen

$$\frac{MN}{\sin\alpha} = 2R_{\triangle ANM} = PA.$$

Kirjoitetaan vastaavasti muille sivuille (β ja γ ovat muut kulmat) ja lasketaan

$$PA + PB + PC =$$

$$\frac{\sqrt{p_b^2 + p_c^2 + 2p_b p_c \cos\alpha}}{\sin\alpha} + \frac{\sqrt{p_c^2 + p_a^2 + 2p_c p_a \cos\beta}}{\sin\beta} + \frac{\sqrt{p_a^2 + p_b^2 + 2p_a p_b \cos\gamma}}{\sin\gamma} =$$

$$\frac{\sqrt{(p_b \sin\gamma + p_c \sin\beta)^2 + (p_b \cos\gamma - p_c \cos\beta)^2}}{\sin\alpha} +$$

$$\frac{\sqrt{(p_c \sin\alpha + p_a \sin\gamma)^2 + (p_c \cos\alpha - p_a \cos\gamma)^2}}{\sin\beta} +$$

$$\frac{\sqrt{(p_a \sin\beta + p_b \sin\alpha)^2 + (p_a \cos\beta - p_b \cos\alpha)^2}}{\sin\gamma} \geq$$

$$\frac{p_b \sin\gamma + p_c \sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{p_c \sin\alpha + p_a \sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{p_a \sin\beta + p_b \sin\alpha}{\sin\gamma} =$$

$$p_a \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + p_b \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right) + p_c \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) \geq$$

$$2p_a + 2p_b + 2p_c.$$

Viimeinen epäyhtälö seuraa identiteeteistä, jotka ovat muotoa

$$\left(\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}} - \sqrt{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}\right)^2 \geq 0.$$

Muuta

Olkoon a, b, c kuten edellä, R kolmion ympäripiirretyn ympyrän säde ja T kolmion pinta-ala. Osoita, että

$$4\sqrt{3}T \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2. \tag{5}$$

Epäyhtälön vasen puoli on itse asiassa olympiatehtävä vuodelta 1961 ja uudestaan sitä tarvittiin olympiatehtävässä vuonna 1991. Todistus menee helposti aiemmin todistetun epäyhtälön (4) ja Cauchyn epäyhtälön avulla.

$$T \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} \leq$$

$$\leq \frac{(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)}{12\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2).$$

Aloitetaan epäyhtälön (5) oikean puolen todistaminen tylppäkulmaisen kolmion tapauksesta. Olkoon $\angle C \geq 90^\circ$ ja c tätä vastaava sivu. Nyt pätee $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C \geq a^2 + b^2$ eli $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2c^2 \leq 8R^2$. Jos sitten kolmio on teräväkulmainen, pätee jokaiselle kolmion kulmalle $\alpha, \beta, \gamma \leq 90^\circ$. Kirjoitetaan epäyhtälö sinilauseen (14) avulla (esim. $a^2/R^2 = 4\sin^2\alpha$) muotoon

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq \frac{9}{4}.$$

Trigonometrisen identiteetin (12) perusteella

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Funktio $-\ln\cos x$ on konveksi välillä $[0^\circ, 90^\circ]$, joten Jensenin epäyhtälöstä

$$\frac{-\ln\cos\alpha - \ln\cos\beta - \ln\cos\gamma}{3} \geq -\ln\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = -\ln\cos 60^\circ = -\ln\frac{1}{2},$$

eli

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \frac{1}{8},$$

mistä väite seuraa.

Hyödyllisiä kaavoja

Trigonometrisia kaavoja:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \tag{6}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{7}$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \tag{8}$$

$$\sin(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z(\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z) \tag{9}$$

$$\cos(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z(1 - \tan x \tan y - \tan y \tan z - \tan z \tan x) \tag{10}$$

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z - \sin 2(x + y + z) = 4 \sin(x + y) \sin(y + z) \sin(z + x) \tag{11}$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + \cos 2(x + y + z) = 4 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(z + x) \tag{12}$$

Kolmioon liittyviä kaavoja; seuraavassa on käytetty merkintöjä a, b, c kolmion sivujen pituuksille, α, β, γ vastaisille kulmille, T kolmion pinta-alalle, $p = (a + b + c)/2$, R ympäripiirretyn ympyrän säteelle, r sisään piirretyn ympyrän säteelle ja ρ_a, ρ_b, ρ_c kolmiota ulkopuolisesti sivuavien ympyröiden säteille.

Kosinilause
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \tag{13}$$

Sinilause
$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \tag{14}$$

$$\frac{R + r}{R} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \tag{15}$$

$$\frac{p}{R} = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \tag{16}$$

$$\frac{T}{2R^2} = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \tag{17}$$

Pinta–alakaavoja
$$T = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \tag{18}$$

Heronin kaava
$$T = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \tag{19}$$

$$abc = 4TR \tag{20}$$

$$T = rp = \rho_a(p - a) = \rho_b(p - b) = \rho_c(p - c) \tag{21}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} \tag{22}$$

$$4R + r = \rho_a + \rho_b + \rho_c \tag{23}$$

http://www.math.helsinki.fi/~smy/olympia/