Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, joulukuu 2019

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa. Näissä näkyvät itsenäisen harjoittelun tulokset.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 10.1.2020 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse tai postitse. Helpommat tehtävät: `npalojar@abo.fi` tai

Neea Palojärvi
Matematik och Statistik
Åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 Åbo,

vaativammat: `olli.jarviniemi@gmail.com` tai

Olli Järviniemi
Lontoonkatu 9 A29
00560 Helsinki

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Helpompia tehtäviä

1. Pöydällä on 16 palloa, joiden painot ovat $13, 14, 15, \ldots, 28$ grammaa. Etsi 13, 14, 27 ja 28 grammaa painavat pallot orsivaa'an avulla tekemällä yhteensä korkeintaan 26 punnitusta.

2. (a) Laske $\displaystyle\sum_{n=1}^{2019} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

(b) Olkoot $a_1 = a_2 = 1$ ja $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$ kaikilla $n \geq 3$. Osoita, että kaikki jonon (a_n) alkiot ovat kokonaislukuja.

3. Puolisuunnikkaan $ABCD$ yhdensuuntaiset sivut ovat AB ja CD sekä on voimassa $AB + CD = AD$. Diagonaalit AD ja BC leikkaavat pisteessä E. Suora, joka kulkee pisteen E kautta ja on yhdensuuntainen sivun AB kanssa, leikkaa janan AD pisteessä F. Osoita, että $\angle BFC = 90°$.

4. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio sekä $AB \neq AC$. Lisäksi olkoot G kolmion ABC painopiste, M sivun BC keskipiste, Γ G-keskeinen ympyrä, jonka säde on GM sekä N ympyrän Γ ja suoran BC pisteestä M eroava leikkauspiste. Edelleen, olkoon S pisteen A peilaus pisteen N suhteen.

Osoita, että suora GS on kohtisuorassa suoraa BC vasten.

5. Erikoisessa koripallopelissä voi saada korista joko 3 tai 7 pistettä. Mikä on suurin pistemäärä, jota joukkue ei voi saavuttaa? Jos toinenkin joukkue voi saada pisteitä, mitkä joukkueiden pistemäärien erotukset ovat mahdollisia? Entä jos pistemäärät ovatkin 6 ja 10?

6. Olkoon $A = 3^{105} + 4^{105}$. Todista, että $7 \mid A$. Selvitä A:n jakojäännös jaettaessa 11:llä ja 13:lla.

7. Osoita, että jos n ei ole alkuluku, niin $2^n - 1$ ei ole alkuluku.

8. Osoita, että jos luvulla n on pariton tekijä, niin $2^n + 1$ ei ole alkuluku.

9. Onko olemassa äärettömän monta sellaista parillista positiivista kokonaislukua k, että kaikilla alkuluvuilla p luku $p^2 + k$ on yhdistetty luku?

10. Merkitään luvun n 10-järjestelmäesityksen numeroiden summaa $S(n)$. Selvitä $S(S(S(4444^{4444})))$.

11. Etsi kaikki alkuluvut p ja q, joille $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

12. Paperille on piirretty neliö, jonka sivu on 10. Kaksi pelaajaa piirtää vuorotellen neliön sisään ympyrän, jonka halkaisija on 1. Ympyrät eivät saa mennä päällekkäin, mutta saavat sivuta toisiaan ja neliön sivuja. Voittaja on se, joka saa piirrettyä viimeisen sääntöjen mukaisen ympyrän. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

13. Pöydällä on 30 kiveä. Kaksi pelaajaa ottaa vuorollaan pöydältä $1 - 9$ kiveä. On kiellettyä ottaa samaa määrää kiviä kuin toinen pelaaja juuri otti edellisellä siirrollaan. Viimeisen laillisen siirron tekijä voittaa. Kummalla pelaajista on voittostrategia?

14. Pöydällä on $2n + 1$ kiveä, missä $n \geq 3$. Kaksi pelaajaa poistaa kiviä vuorotellen. Kivien poisto tapahtuu seuraavasti: pelaaja jakaa kivet kahteen lukumäärältää erisuureen kasaan (molemmissa kasoissa täytyy olla kiviä) ja poistaa niistä pienemmän pöydältä. Voittaja on se, jonka siirron jälkeen pöydällä on korkeintaan k kiveä, missä $2 \leq k < n$. Millä lukujen n ja k arvoilla aloittajalla on voittostrategia?

Vaativampia tehtäviä

Geometrian tehtävissä voi olla hyötyä projektiivisen geometrian tiedoista, joita voi hankkia esimerkiksi Olli Järviniemen OOOO-teoksesta, joka löytyy valmennuksen sivujen materiaaliosastosta.

15. Olkoon P piste ympyrän Γ ulkopuolella. Sivutkoon pisteestä P ympyrälle Γ piirretyt tangentit ympyrää pisteissä A ja B. Olkoon C piste lyhyemmällä kaarella AB, ja olkoon D suoran PC ja ympyrän Γ leikkauspiste. Olkoon ℓ se suora, joka kulkee pisteen B kautta ja joka on yhdensuuntainen suoran PA kanssa. Suora ℓ leikkaa suoria AC ja AD pisteissä E ja F. Osoita, että B on janan EF keskipiste.

16. Kolmion ABC sivuaa kolmion sivuja BC, CA ja AB pisteissä A', B' ja C'. Sisäympyrän keskipisteestä I piirretty kohtisuora kolmion ABC kärjestä C piirretylle mediaanille leikkaa suoran $A'B'$ pisteessä K. Osoita, että $CK \parallel AB$.

17. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio, piste M sivun CD keskipiste ja piste N kolmion ABM ympärysympyrällä. Oletetaan, että $N \neq M$ ja että $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. Osoita, että pisteet E, F ja N ovat samalla suoralla, missä E on suorien AC ja BD leikkauspiste ja F on suorien BC ja DA leikkauspiste.

18. Todista, että kolmen, neljän, viiden tai kuuden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa ei ole neliöluku. Anna esimerkki yhdentoista peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summasta, joka on neliöluku.

19. Useimmat positiiviset kokonaisluvut voidaan esittää kahden tai useamman peräkkäisen kokonaisluvun summana. Esimerkiksi $24 = 7 + 8 + 9$ ja $51 = 25 + 26$. Kutsumme positiivista kokonaislukua *kiintoisaksi,* jos sitä ei voi esittää tällaisena summana. Selvitä kaikki kiintoisat luvut.

20. Olkoon $S = \{ 105, 106, \ldots, 210 \}$. Mikä on pienin sellainen n, että jokainen n-alkioinen joukko $T \subseteq S$ sisältää kaksi lukua, jotka eivät ole suhteellisia alkulukuja?

21. Todista, että jos $ab = cd$, niin $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ on yhdistetty luku.

22. Todista, että tason eri hilapisteillä (so. kokonaislukukoordinaattisilla pisteillä) on eri etäisyydet pisteestä $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$.

23. Kun $n > 11$ on kokonaisluku, todista että $n^2 - 19n + 89$ ei ole neliöluku.

24. Selvitä luvun $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2020}$ kymmenjärjestelmäesityksessä desimaalipilkkua edeltävä ja sen jälkeinen numero.