

## LOKAKUUN VALMENNUSTEHTÄVÄSARJA

Ratkaisuaikaa on seuraavaan valmennusviikonloppuun asti, eli marraskuun loppuun. Ratkaisut voi palauttaa kenelle tahansa valmennusjaostosta valmennuksessa tai sitten lähettää minulla postissa osoitteeseen Alströmergatan 29, 11247 Stockholm, Sweden tai sähköpostilla hytonen at kth.se.

Vaikka kaikkea ei saisi ratkaistua, niin yksittäisetkin ratkaisut kannattaa lähettää, sillä ne vaikuttavat joukkuevalintoihin. Muutaman päivän myöhästymisestä ei pidä huolestua: myöhässä saapunut, jopa vähän virheellinen ratkaisu on parempi kuin ei ratkaisua lainkaan.

Onnea matkaan!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, 041-5228141

- (1) Todista, että jos  $p \geq 5$  on alkuluku, niin  $p^2 - 1$  on jaollinen luvulla 24.
- (2) Viimeaikoina on uutisoitu jännittävästä sattumasta israelilaisessa lotossa. Saman kuukauden aikana tuli kaksi kertaa sama lottorivi. Israelilainen lottorivi koostuu kuudesta satunnaisesti arvotusta luvusta (jotka ovat kaikki erisuuria). Koska en tiedä kovinkaan paljon israelilaisesta lotosta, tehdäänpä hieman oletuksia, eli että lotto on alkanut vuoden 1980 alussa, ja että kaikki arvotut luvut ovat väliltä  $1, \dots, 40$ . Jotta laskut pysyvät järjellisinä, yksinkertaistetaan hieman maailmaa, eli päätetään, että kuukausi koostuu neljästä viikosta ja vuosi 12 kuukaudesta.
  - (a) Laske nyt todennäköisyys, että viimeistään lokakuussa 2010 tulee kaksi samaa lottoriviä saman kuukauden aikana.
  - (b) Laske lisäksi se ajankohta, jolloin on vähintään  $1/2$  todennäköisyys sille, että viimeistään silloin tulee saman kuukauden aikana kahdesti sama lottorivi.
- (3) Olkoot  $0 \leq x, y \leq 9$  kokonaislukuja. Tarkastellaan viisinumeroista lukua, jonka kymmenjärjestelmäesitys on  $65x1y$ . Onko tämä luku joskus jaollinen luvulla 12? Jos on, niin milloin?
- (4) Ratkaise yhtälö  $\sqrt{19-x} + \sqrt{97+x} = 14$ .
- (5)  $x + y = 26$ ,  $x^3 + y^3 = 5408$ . Laske  $x^2 + y^2$ .
- (6) Määritä sellaiset kokonaisluvut  $n$ , joilla luku  $\frac{n+98}{n+19}$  on kokonaisluku.
- (7) Onko olemassa sellaista luonnollista lukua  $n$ , että luvun  $(2 + \sqrt{2})^n$  etäisyys lähimpään kokonaislukuun on pienempi kuin 0,000001?
- (8) Osoita, että kaikilla luonnollisilla luvuilla  $n$  luku  $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$  on pariton.
- (9) Kutsutaan *kokonaiseksi kolmioksi* sellaista kolmiota, jonka kaikki sivut ovat kokonaislukuja. Etsi kaikki kokonaiset kolmiot, joiden ympäryys on sama kuin pinta-ala.
- (10) Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä

$$\sin x = \frac{x}{100}?$$

- (11) Osoita, että jos  $x_1$  ja  $x_2$  ovat yhtälön  $x^2 - 6x + 1 = 0$  ratkaisut, niin  $x_1^n + x_2^n$  on kaikilla luonnollisilla luvuilla  $n$  kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla 5.