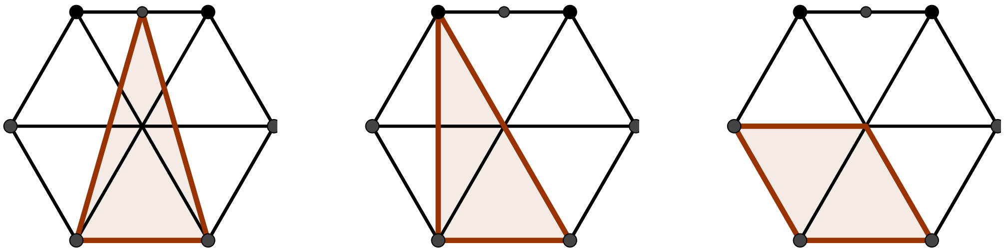
Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, joulukuu 2018
Ratkaisuja

Helpompia tehtäviä

1. $ABCDEF$ on säännöllinen kuusikulmio ja G on sivun AB keskipiste. Mikä on kuusikulmion $ABCDEF$ pinta-alan suhde kolmion GDE pinta-alaan?

Ratkaisu 1. Olkoot r ja a kuusikulmion säde ja apoteema (etäisyys G:stä kuusikulmion keskipisteeseen). Pythagoraan lauseesta saadaan $a = \frac{\sqrt{3}}{2}r$. Kuusikulmion pinta-ala on $6 \cdot \frac{1}{2} a \cdot r = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$. Kolmion GDE korkeus on $2a$, joten sen pinta-ala on $r \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2$. Pinta-alojen suhde on siis 3.

Ratkaisu 2. Todistus ilman sanoja:



2. Polynomille $f(x)$ pätee $f(5-x) = f(5+x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Yhtälöllä $f(x) = 0$ on neljä erisuurta reaalista ratkaisua. Selvitä ratkaisujen summa.

Ratkaisu. Tehtävän ehdon voi lausua myös muodossa "f on symmetrinen 5:n suhteen". Juuretkin ovat siten symmetriset 5:n suhteen, eli jos juuret ovat $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, niin $5 - x_1 = x_4 - 5$ ja $5 - x_2 = x_3 - 5$. Siten juurten summa on 20.

3. Tarkastellaan lukua

$$S = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots111}_{2002 \text{ numeroa}}.$$

(a) Mitkä ovat luvun S kymmenjärjestelmäesityksen viisi viimeistä numeroa?
(b) Montako kertaa numero 1 esiintyy luvun S kymmenjärjestelmäesityksessä?

Ratkaisu. (a) Kirjoitetaan

$$\begin{aligned} S &= 1 + (1+10) + (1+10+100) + \cdots + (1 + \cdots + 10^{2001}) \\ &= 2002 \cdot 1 + 2001 \cdot 10 + 2000 \cdot 100 + \cdots + 1 \cdot 10^{2001}. \end{aligned}$$

Koska kysyttiin vain viittä viimeistä numeroa, voidaan jättää huomiotta termit, jotka päättyvät vähintään viiteen nollaan. On siis laskettava

$$2002 \cdot 1 + 2001 \cdot 10 + 2000 \cdot 100 + 1999 \cdot 1000 + 1998 \cdot 10000.$$

Tästäkin voidaan jättää huomiotta numerot, jotka jäävät viiden viimeisen ulkopuolelle:

$$S \equiv 2002 + 20010 + 99000 + 80000 \equiv 1012 \pmod{100000}.$$

Siis viimeiset numerot ovat 01012.

(b) Koska ykkösistä koostuva luku on yhdeksäsosa yhdeksiköistä koostuvasta luvusta,

$$\begin{aligned} S &= 1 + 11 + 111 + \cdots + 111\ldots111 \\ &= \frac{1}{9}(10-1) + \frac{1}{9}(10^2-1) + \frac{1}{9}(10^3-1) + \cdots + \frac{1}{9}(10^{2002}-1) \\ &= \frac{1}{9}\Big((10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{2002}) - 2002\Big) \\ &= \frac{1}{9}\Big(\underbrace{111\ldots111}_{2002 \text{ numeroa}}0 - 2002\Big) = \frac{1}{9}\Big(\underbrace{111\ldots111}_{1998 \text{ numeroa}}09108\Big). \end{aligned}$$

Koska $111111111 = 9 \cdot 12345679$ ja 1998 on yhdeksällä jaollinen luku, osamäärän alku on jaksollinen: kustakin yhdeksän peräkkäisen ykkösen lohkosta tulee 12345679. Kaavoilla ilmaistuna

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{9}\Big(111111111 \cdot (10^5 + 10^{14} + \cdots + 10^{1994}) + 9108\Big) \\ &= \frac{1}{9} \cdot 111111111 \cdot (10^5 + 10^{14} + \cdots + 10^{1994}) + 1012 \\ &= 12345679 \cdot (10^5 + 10^{14} + \cdots + 10^{1994}) + 1012. \end{aligned}$$

Osamäärässä siis esiintyy 222 kertaa lukujono 12345679 (ensimmäistä lukuunottamatta alkunollan kera), joten kaikkiaan ykkösiä on 224.

4. Positiivisten kokonaislukujen jonolle $a_1, a_2, \ldots$ pätee $a_{a_n} + a_n = 2n$ kaikilla $n \geq 1$. Todista, että $a_n = n$ kaikilla n.

Ratkaisu. Käytetään induktiota. Tapauksessa $n = 1$ saadaan $a_{a_1} + a_1 = 2$, ja koska termit ovat positiivisia kokonaislukuja, on oltava $a_1 = a_{a_1} = 1$. Olkoon sitten $n \geq 1$ ja $a_k = k$ kaikille $k \leq n$. Olkoon $a_{n+1} = \ell$. Silloin

$$a_\ell + \ell = a_{a_{n+1}} + a_{n+1} = 2(n+1).$$

Jos $\ell \leq n$, niin $a_\ell = \ell$ induktiohypoteesin nojalla, jolloin

$$2(n+1) = a_\ell + \ell = \ell + \ell \leq 2n < 2(n+1),$$

joka on ristiriita. Jos taas $\ell > n+1$, niin yhtälöstä $a_\ell + \ell = 2(n+1)$ seuraa $a_\ell < n+1$. Induktiohypoteesista seuraa $a_{a_\ell} = a_\ell$ ja edelleen

$$2\ell = a_{a_\ell} + a_\ell = 2a_\ell < 2(n+1) < 2\ell,$$

taas ristiriita. Siis $\ell = n+1$, joten induktioväite on todistettu.

5. Olkoon $P(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Kokonaislukujonolle $x_1, x_2, \ldots$ pätee $x_1 = x_{2000} = 1999$ ja $x_{n+1} = P(x_n)$, kun $n \geq 1$. Laske

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{1999}}{x_{2000}}.$$

Ratkaisu. Määritellään $x_0 = x_{1999}$ ja $y_n = x_n - x_{n-1}$. Silloin

$$\sum_{i=1}^{1999} y_i = x_{1999} - x_0 = 0.$$

Oletetaan ensin, että $y_n \neq 0$ kaikilla n. Koska $P(x)$:n kertoimet ovat kokonaislukuja, $a - b \mid P(a) - P(b)$, kun a ja b ovat kokonaislukuja. Siten $y_n \mid y_{n+1}$ kaikilla n, joten $|y_1| \leq |y_2| \leq \cdots \leq |y_n| \leq \cdots$. Koska $|y_1| = |x_1 - x_{1999}| = |x_{2000} - x_{1999}| = |y_{2000}|$, itse asiassa $|y_n|$ on sama kaikilla n. Olkoon tämä yhteinen arvo $a > 0$ ja olkoon k niiden lukujen $y_1, \ldots, y_{1999}$ lukumäärä, joille $y_i = a$; silloin $1999 - k$ jonon lukua on $-a$. Siten

$$\sum_{i=1}^{1999} y_i = a(2k - 1999) \neq 0,$$

mikä on ristiriita aiemman kanssa.

Täten jollakin n on $y_n = 0$ eli $x_n = x_{n-1}$. Helpolla induktiolla saadaan $x_n = x_1 = 1999$ kaikilla n. Siis

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{1999}}{x_{2000}} = 1 + 1 + \cdots + 1 = 1999.$$

6. Todista:

$$\frac{x_1^3}{x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \cdots + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + 5} \leq \frac{3}{5},$$

kun $x_1, x_2, \ldots, x_6 \in [0, 1]$ ovat reaalilukuja.

Ratkaisu. Kukin vasemman puolen nimittäjä on vähintään $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 4$, joten vasen puoli on enintään

$$\frac{\sum_{i=1}^6 x_1^3}{\sum_{i=1}^6 x_i^5 + 4}.$$

Kun $y \geq 0$, aritmeettis–geometrisesta epäyhtälöstä saadaan

$$\frac{y^5 + y^5 + y^5 + 1 + 1}{5} \geq \sqrt[5]{y^5 \cdot y^5 \cdot y^5} = y^3$$

eli $3y^5 + 2 \geq 5y^3$. Siis

$$5\sum_{i=1}^{6} x_1^3 \leq \sum_{i=1}^{6}(3x_i^5 + 2) = 3\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^5 + 4\right),$$

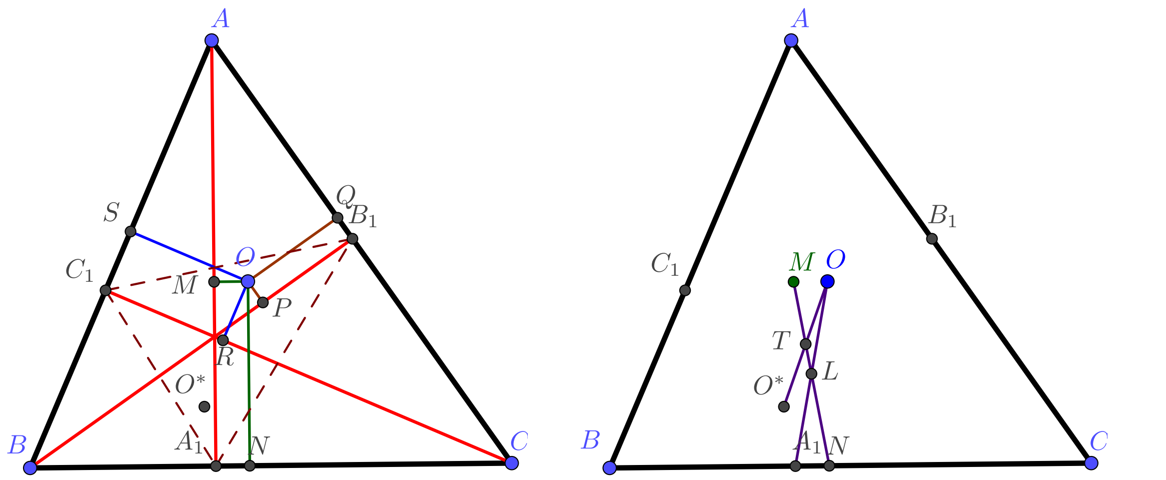
mistä väite seuraa.

7. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, AA_1, BB_1 ja CC_1 sen korkeusjanat ja O mielivaltainen kolmion $A_1B_1C_1$ sisäpiste. Olkoon

- M pisteen O projektio suoralle AA_1;
- N pisteen O projektio suoralle BC;
- P pisteen O projektio suoralle BB_1;
- Q pisteen O projektio suoralle CA;
- R pisteen O projektio suoralle CC_1; ja
- S pisteen O projektio suoralle AB.

Todista, että suorat MN, PQ ja RS leikkaavat yhdessä pisteessä.

Ratkaisu. Koska $\angle BB_1C = \angle BC_1C = 90°$, BCB_1C_1 on jännenelikulmio. Samoin ovat ACA_1C_1 ja ABA_1B_1. Siis $\angle B_1A_1A = \angle B_1BA = \angle ACC_1 = \angle AA_1C_1$, joten AA_1 on kulman $B_1A_1C_1$ puolittaja.



Olkoon O^* pisteen O isogonaalinen konjugaatti[1] kolmion $A_1B_1C_1$ suhteen. Silloin edellisen kulmanpuolittajatuloksen perusteella $\angle OA_1A = \angle AA_1O^*$. Koska OMA_1N on suorakulmio, tästä seuraa

$$\angle A_1MN = \angle OA_1M = \angle OA_1A = \angle AA_1O^*.$$

Siten $MN \parallel A_1O^*$.

[1] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Isogonaalinen_konjugaatti`

Olkoon L janojen OA_1 ja MN leikkauspiste. Silloin L on janan OA_1 keskipiste. Olkoon T janojen OO^* ja MN leikkauspiste. Koska $MN \parallel A_1O^*$, pätee

$$OT : TO^* = OL : LA_1 = 1 : 1.$$

Koska $OT = TO$, suora MN kulkee janan OO^* keskipisteen kautta.

Symmetrisesti voidaan todistaa, että suorat PQ ja RS kulkevat janan OO^* keskipisteen kautta. Siten nämä kolme suoraa leikkaavat tämän janan keskipisteessä.

8. Kun a on positiivinen kokonaisluku, määritellään jono $\langle a_n \rangle$ säännöillä $a_0 = a$ ja $a_n = a_{n-1} + 40^{n!}$, kun $n \geq 2$. Todista, että jokaisessa tällaisessa jonossa on äärettömän monta lukua, jotka ovat jaollisia 2009:llä.

Ratkaisu. Koska syt$(40, 2009) = 1$, on $40^{k \cdot \phi(2009)} \equiv 1 \pmod{2009}$. Kun $n > \phi(2009)$, eksponentti $n!$ on varmasti $\phi(2009)$:n monikerta, jolloin $a_{n+1} \equiv a_n + 1 \pmod{2009}$. Siten kaikki arvot modulo 2009 esiintyvät jaksollisesti, joten kaikki nämä arvot esiintyvät äärettömän usein. Tämä koskee myös arvoa 0, mistä väite seuraa.

9. Kirjoitetaan neliön kunkin sivun viereen positiivinen kokonaisluku punaisella värillä. Kirjoitetaan neliön kunkin kärkipisteen viereen vihreällä värillä viereisten punaisten lukujen tulo. Vihreiden lukujen summa on 40. Mitkä ovat mahdollisia punaisten lukujen summia?

Ratkaisu. Olkoot punaiset luvut järjestyksessä a, b, c ja d. Silloin vihreät luvut ovat ab, bc, cd ja da, jolloin

$$40 = ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d).$$

Voidaan olettaa, että $a + c \leq b + d$, jolloin mahdollisia arvoja tulon tekijöille ovat

$$(a + c, b + d) \in \{\, (1, 40), (2, 20), (4, 10), (5, 8) \,\}.$$

Ensimmäinen tapaus on mahdoton, koska kaikki luvut ovat vähintään 1. Summalle $a + b + c + d$ saadaan mahdolliset arvot 13, 14 ja 22.

Vaativampia tehtäviä

10. Olkoon x ja y ei-negatiivisia reaalilukuja. Todista epäyhtälö

$$(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4x^2y^2.$$

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

Ratkaisu. Jaetaan vasen puoli neljällä ja sovelletaan molempiin tekijöihin aritmeettis–geometrista epäyhtälöä:

$$\left(\frac{x + y^3}{2}\right)\left(\frac{x^3 + y}{2}\right) \geq \sqrt{xy^3}\sqrt{x^3y} = x^2y^2.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos molemmissa tekijöissä on yhtäsuuruus, eli $x = y^3 = (x^3)^3$. Näin on täsmälleen silloin, kun $x = y = 0$ tai $x = y = 1$.

11. Tarkstellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}$. Selvitä ne a:n arvot, joille epäyhtälö $|f(x)| \leq 1$ on tosi kaikilla $x \in [0, 1]$.

Ratkaisu. Todistetaan, että ratkaisu on

$$a \in \mathcal{A} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right].$$

Tarvitaan seuraavat funktion arvot:

$$f(0) = -a^2 - \frac{3}{4}, \quad f(1) = -a^2 - 2a + \frac{1}{4}, \quad f(a) = -2a^2 - \frac{3}{4}.$$

Jos $|a| > \frac{1}{2}$, niin $|f(0)| > (\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 1$, joten tehtävän epäyhtälö ei päde.

Jos $\frac{1}{2\sqrt{2}} < a \leq 1$, niin $a \in [0, 1]$ ja

$$|f(a)| > 2\Big(\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{3}{4} = 1,$$

joten tehtävän epäyhtälö ei taaskaan päde.

Enää on osoitettava, että epäyhtälö pätee, kun $a \in \mathcal{A}$. Havaitaan, että $f(x) = (x - a)^2 + f(a)$, joten funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on pisteessä $(a, f(a))$. Siis funktio voi saavuttaa tarkasteluvälin minimi- ja maksimiarvonsa vain pisteissä $x = 0$, $x = 1$ ja $x = a$ (jos $0 < a < 1$).

Olkoon a mielivaltainen luku välillä $\mathcal{A}$. Koska $|a| \leq \frac{1}{2}$,

$$|f(0)| \leq \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4} = 1.$$

Koska $a \geq -\frac{1}{2}$,

$$1 - f(1) = a^2 + 2a + \frac{3}{4} = \Big(a + \frac{3}{2}\Big)\Big(a + \frac{1}{2}\Big) \geq 0,$$

joten $f(1) \leq 1$. Koska $-\frac{5}{2} < a < \frac{1}{2}$,

$$f(1) - (-1) = -a^2 - 2a + \frac{5}{4} = \Big(\frac{5}{2} + a\Big)\Big(\frac{1}{2} - a\Big) > 0,$$

joten $f(1) > -1$. Siis $|f(1)| \leq 1$.

Jos $a \in [0, 1] \cap \mathcal{A} = [0, \frac{1}{2\sqrt{2}}]$,

$$|f(a)| = 2a^2 + \frac{3}{4} \leq 2\Big(\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{3}{4} = 1.$$

Siis $|f(x)| \leq 1$ kaikilla $x \in [0, 1]$.

12. Luonnolliset luvut $1, 2, \ldots, 100$ asetetaan mielivaltaiseen järjestykseen ympyrän kehälle. Kunkin kolmen peräkkäisen luvun summa lasketaan. Todista, että näiden summien joukossa on kaksi lukua, joiden erotus on suurempi kuin 2.

Ratkaisu. Jaetaan kaikki luvut ykköstä lukuunottamatta 33 erilliseen kolmen luvun lohkoon, jotka ovat ympyrän kehällä peräkkäisiä. Lohkoihin kuuluvien lukujen summa on $\sum_{i=2}^{100} = 5049$, joten lohkojen keskimääräinen summa on $5049/33 = 153$. Siten ainakin yksi lohkosumma, sanokaamme S, on vähintään 153.

Jaetaan seuraavaksi kaikki luvut sataa lukuunottamatta 33 erilliseen kolmen luvun lohkoon, jotka ovat ympyrän kehällä peräkkäisiä. Lohkoihin kuuluvien lukujen summa on $\sum_{i=1}^{99} = 4950$, joten lohkojen keskimääräinen summa on $4950/33 = 150$. Siten ainakin yksi lohkosumma, sanokaamme S', on enintään 150.

Koska $S - S' \geq 3$, todistus on valmis.

(Alkuperäisessä tehtävässä oli valitettava käännösvirhe: pyydettiin todistamaan, että joukossa on kaksi lukua, joiden erotus on enintään 2. Tällaisena tehtävä olisi kuulunut helpompien osastoon: pienin mahdollinen kolmen luvun summa on 6 ja suurin mahdollinen on 297. Muodostetaan kyyhkyslakat $\{6, 7, 8\}$, $\{9, 10, 11\}$, …, $\{294, 295, 296\}$ ja $\{297\}$. Näitä on 98 ja lohkosummia 100, joten ainakin yhteen kyyhkyslakkaan osuu ainakin kaksi summaa.)

13. Selvitä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$x \cdot f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot f(\{x\}) + \{x\} \cdot f(\lfloor x \rfloor)$$

kaikilla x, missä $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on enintään x, ja $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Ratkaisu. Ratkaisuja ovat vakiofunktiot. Jokainen vakiofunktio selvästi toteuttaa tehtävän funktionaaliyhtälön.

Olkoon f jokin ratkaisu, ja olkoon $C = f(0)$. Kun asetetaan $x = k =$ mielivaltainen nollasta eroava kokonaisluku, saadaan

$$kf(k) = kC + 0 \cdot f(k) = kC$$

eli $f(k) = C$. Samoin kaikille $x \in (0, 1)$ saadaan

$$xf(x) = 0 \cdot f(x) + xf(0) = xC$$

eli $f(x) = C$. Olkoon nyt x mielivaltainen nollasta eroava reaaliluku. Koska $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ ja $\{\, x \,\} \in (0, 1)$,

$$xf(x) = \lfloor x \rfloor \cdot C + \{\, x \,\} \cdot C = x \cdot C$$

eli $f(x) = C$. Siis f on vakiofunktio.

14. Etsi kolmannen asteen reaalikertoiminen polynomi, jonka juurista kukin on polynomin

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 9x + 9$$

yhden juuren neliö.

Ratkaisu. Olkoot u, v ja w polynomin P (kompleksiset) juuret. Koska $u+v+w = -9$, $uv+vw+wu = 9$ ja $uvw = -9$,

$$\begin{aligned}
u^2 + v^2 + w^2 &= (u + v + w)^2 - 2(uv + vw + wu) = 63,\\
u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 &= (uv + vw + wu)^2 - 2uvw(u + v + w) = -81,\\
u^2v^2w^2 &= (uvw)^2 = 81.
\end{aligned}$$

Siis vastaukseksi sopii

$$Q(x) = (x - u^2)(x - v^2)(x - w^2) = x^3 - 63x^2 - 81x - 81.$$

15. Kun $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ja $x = \sqrt[3]{abc}$, todista epäyhtälö

$$(a + b + x)^{-1} + (b + c + x)^{-1} + (c + a + x)^{-1} \le x^{-1}.$$

Ratkaisu. Kirjoitetaan $(a + b + x)^{-1} + (b + c + x)^{-1} + (c + a + x)^{-1} = O/N$, missä

$$\begin{aligned}
&O = 3x^2 + 4x(a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca),\\
&N = x^3 + 2x^2(a + b + c) + x\big(a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)\big)\\
&\qquad + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc.
\end{aligned}$$

Koska

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 = (a + b + c)(ab + bc + ca) - 2abc$$

ja $x^3 = abc$, voidaan nimittäjää sieventää:

$$N = 2x^2(a + b + c) + x\big(a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)\big) + (a + b + c)(ab + bc + ca) - 2abc.$$

Siis $N - xO = (a + b + c)\big((ab + bc + ca) - 2x^3\big) - 3x^3$. Aritmeettis–geometrisen epäyhtälön mukaan $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3x$ ja $ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3x^2$. Siten

$$O - xN \ge 3x(3x^2 - 2x^2) - 3x^3 = 0.$$

Tästä seuraa tarvittava tulos $\dfrac{O}{N} \le \dfrac{1}{x}$.

16. Tasasivuisen kolmion ABC sivu on 2. Osoita, että jos P on kolmion sisäympyrän mielivaltainen piste, niin $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 5$.

Ratkaisu. Olkoon BC x-akselin suuntainen sivu ja origo kolmion sisäkeskus. Kolmion korkeus on $\sqrt{3}$, joten kärkien koordinaatit ovat $A = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $B = \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ja $C = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Olkoon $P = (x, y)$ sisäympyrän mielivaltainen piste. Silloin $x^2+y^2 = \frac{1}{3}$ ja $PA^2+PB^2+PC^2 = x^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+(x+1)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(x-1)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3(x^2+y^2)+2+\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\cdot 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)y+(4+2)\frac{1}{3} = 1+2+2 = 5$.

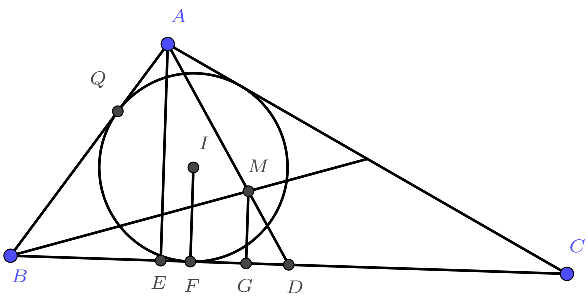
17. Pyöreän pöydän ympärillä istuu 2019 henkilöä. Heidät on numeroitu juoksevasti myötäpäivään. Numero 1 aloittaa sanomalla ”yksi”. Tämän jälkeen jokainen istuja sanoo järjestyksessä ”kaksi”, ”kolme”, ”yksi”, ”kaksi” jne. Jokainen, joka sanoo ”kaksi” tai ”kolme” poistuu heti. Minkänumeroinen istuja jää pöydän ääreen?

Ratkaisu. Jos pöydän ääressä olevien henkilöiden lukumäärä olisi 3^k, niin ensimmäisellä kierroksella poistuisi tasan $\frac{2}{3}\cdot 3^k$ henkilöä ja numero 1 saisi taas sanoa numeron 1. Näin ollen numero 1 olisi voittaja. Tästä seuraa, että voittaja on se, joka ensimmäisenä saa sanoa numeron 1 silloin, kun pöydän ääressä olevien henkilöiden määrä on kolmen potenssi. Nyt $3^6 = 729 < 2019 < 2187 = 3^7$. Kun joukosta on poistunut $2019 - 729 = 1290 = 2 \cdot 645$ oppilasta, jäljellä on 3^6 oppilasta ja tuolloin vuorossa on oppilas numero $3 \cdot 645 + 1 = 1936$. Hän jää viimeksi pöydän ääreen.

18. Kolmion ABC sivujen pituudet ovat a, b ja c. Kolmion ympäryskeskus on O ja sisäkeskus I, $I \neq O$. Olkoon vielä M ABC:n keskijanojen leikauspiste. Osoita, että $IM \perp BC$, jos ja vain jos $b = c$ tai $b + c = 3a$.

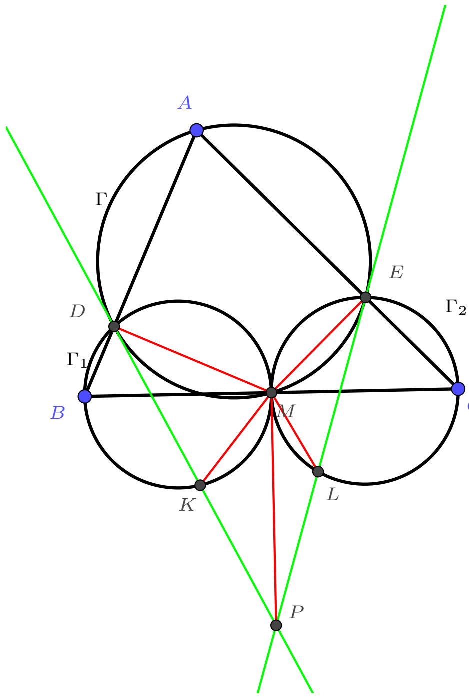
Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $b \geq c$. Olkoon A:sta piirretyn korkeusjanan kantapiste E, kolmion sisäympyrän ja sivun BC yhteinen piste F, kolmion painopisteen kohtisuora projektio sivulla AB G ja sivun BC keskipiste D. Olkoot P ja Q sisäympyrän ja sivujen AC ja AB sivuamispisteet. Siitä, että $BF = BQ$, $AQ = AP$ ja $CP = CF$ seuraa helposti $BF = \frac{1}{2}(a-b+c)$, joten $DF = \frac{a}{2} - BF = \frac{1}{2}(b-c)$. Olkoon $AE = h$.

Yhtälöistä $c^2 - BE^2 = h^2 = b^2 - (a - BE)^2$ saadaan $BE = \frac{1}{2a}({}^c2 - b^2 + a^2)$ ja $DE = \frac{1}{2}a - BE = \frac{1}{2a}(b^2 - c^2)$. Koska M jakaa janan AD niin, että $MD = \frac{1}{3}AD$, on $GD = \frac{1}{3}ED = \frac{1}{6a}(b^2-c^2)$. Nyt $IM \perp BC$ jos ja vain jos F ja G ovat sama piste. Tämä toteutuu jos ja vain jos $\frac{1}{2}(b-c) = \frac{1}{6a}(b^2 - c^2)$. Yhtälö toteutuu, jos $b = c$. Jos $b \neq c$, yhtälö toteutuu, kun $3a = b + c$.



19. Olkoon M kolmion ABC sivun BC keskipiste. Ympyrä Γ, jonka halkaisija on AM, leikkaa AB:n myös pisteessä D ja AC:n myös pisteessä E. Γ:n pisteisiin D ja E piirretyt tangentit leikkaavat pisteessä P. Osoita, että $PB = PC$.

Ratkaisu. Koska AM on Γ:n halkaisija, kulmat ADM ja AEM ovat suoria. Tästä seuraa, että ympyrät Γ_1 ja Γ_2, joiden halkaisijat ovat BM ja MC, kulkevat pisteiden D ja E kautta. Leikatkoon DP Γ_1:n pisteessä K ja EP Γ_2:n pisteessä L. Tarkastellaan kolmioita ABM ja DKM. Koska PD on Γ:n tangentti, kulmat DAM ja MDK ovat Γ:n samaa jännettä DM vastaavina kehäkulmina yhtä suuret. Kulmat ABM ja DKM puolestaan ovat Γ_1:n samaa jännettä DM vastaavina kehäkulmina yhtä suuret. Kolmiot ABM ja DKM ovat siis yhdenmuotoiset (kk). Aivan samoin nähdään, että kolmiot AMC ja EML ovat yhdenmuo- toiset. Mutta tästä seuraa, että $\angle KMD + \angle EML = \angle BMA + \angle AMC = 180°$. Koska ympyröillä Γ_1 ja Γ_2 on sama säde, janat DK ja EL ovat vieruskulmia vastaavina ympyrän jänteinä yhtä pitkät. Koska DP ja EP ovat ympyrän Γ tangentteina yhtä pitkät, on myös $PK = PL$.



Pisteellä P on siten sama potenssi ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 suhteen $PK \cdot PD = PL \cdot PE$. Osoitetaan, että PM on ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 yhteinen tangentti. Ellei näin olisi, suora PM leikkaisi Γ_1:n pisteissä X ja M ja Γ_2:n pisteissä Y ja M, ja M olisi X:n ja Y:n välissä. Pisteen P potenssille Γ_1:n ja Γ_2:n suhteen saataisiin lausekkeet $PX \cdot PM$ ja $PM \cdot PY$. Mutta nämä voivat olla samat vain, jos $X = Y = M$. Siis todellakin PM on ympyröiden tangentti, josta seuraa $PM \perp BC$. Koska M on BC:n keskipiste, PM on BC:n keskinormaali, joten $PB = PC$.

20. Olkoon X joukko, jossa on n alkiota, ja olkoot $A_1, \dots, A_m$ sen sellaisia osajoukkoja, että

(i) $|A_i| = 3$ kaikilla $i = 1, \dots, m$

(ii) $|A_i \cap A_j| \le 1$ kaikilla $i \neq j$.

Todista, että joukolla X on osajoukko, jossa on ainakin $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ alkiota ja jolla ei ole osajoukkonaan mitään joukoista A_i.

Ratkaisu. Olkoon E X:n maksimaalisen suuri osajoukko, jolla ei ole osajoukkonaan mitään joukoista A_i. Olkoon $|E| = p$. Tarkastellaan jotain $x \in X \setminus E$. Koska p on maksimaalinen, joukolla $E \cup \{x\}$ täytyy olla osajoukkonaan jokin joukko A_i. Valitaan jokin sellainen joukko ja kutsutaan sitä $A(x)$:ksi. Siis $A(x) \subseteq E \cup \{x\}$ ja $A(x) \nsubseteq E$, joten $x \in A(x)$. Olkoon $B(x) = A(x) \setminus \{x\}$. Silloin $B(x) \subseteq E$ ja $|B(x)| = 2$.

Olkoot $x, y \in X \setminus E$, $x \neq y$. Silloin

$$A(x) \cap A(y) = \big(B(x) \cup \{x\}\big) \cap \big(B(y) \cup \{y\}\big) = B(x) \cap B(y).$$

Jos $B(x) = B(y)$, niin $A(x) \cap A(y) = B(x) = B(y)$, jolloin $|A(x) \cap A(y)| = 2$, mikä on ristiriidassa tehtävän ehdon (ii) kanssa. Siten $B(x) \neq B(y)$.

Siten joukon E kaksialkioisten osajoukkojen lukumäärä on vähintään yhtä suuri kuin niiden joukon X alkioiden määrä, jotka eivät kuulu E:hen. Toisin sanottuna $\binom{p}{2} \ge n - p$. Siten $p(p+1) \ge 2n$ eli $(p + \frac{1}{2})^2 \ge 2n + \frac{1}{4}$. Siten

$$p + \frac{1}{2} \ge \sqrt{2n + \frac{1}{4}} > \sqrt{2n}.$$

Koska p on kokonaisluku, saadaan $p \ge \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$.