

Harjoitustehtävät, syyskuu 2011. Helpommat

Ratkaise tehtävistä niin monta kuin kykenet/ehdit (mutta muista, että sitä, osaako ratkaista tehtävän, ei huomaa yhdellä tai kahdella silmäyksellä). Tuo ratkaisusi mukanasasi viikon 42 lopun valmennustapahtumaan tai postita ne viimeistään samoihin aikoihin osoitteella **Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu**. Jos osaat käyttää jotain ohjelmistoa, jolla voi tuottaa matemaattista tekstiä ja kuvia, voit lähettää ratkaisusi myös sähköpostilla osoitteeseen **matti.lehtinen@helsinki.fi**.

1. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$$

2. Kun polynomi $P(x)$ jaetaan polynomilla $x - 3$, saadaan jakojäännös 6. Kun sama polynomi jaetaan polynomilla $x + 3$, jakojäännös on 2. Mikä jakojäännös saadaan, kun $P(x)$ jaetaan polynomilla $x^2 - 9$?

3. Määritä jakojäännös, kun polynomi

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} + x^{729}$$

jaetaan polynomilla $x - 1$. Entä jos jakaja on $x^2 - 1$?

4. Polynomi

$$(1 + x - 2x^2 + 2x^3 - x^4)^{2011}(1 - 3x^2 + 3x^3 - x^4 + x^5)^{2012}$$

kirjoitetaan muotoon

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0.$$

Määritä n , a_n , a_0 ja kaikkien kertoimien summa $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

5. Todista: kun suoritetaan polynomien kertolasku

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2010} + x^{2011})(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2010} - x^{2011}),$$

samanasteiset termit yhdistetään ja x :n potenssit asetetaan laskevaan astejärjestykseen, niin tuloksessa ei ole ollenkaan x : parittomia potensseja.

6. Kahden muuttujan polynomi $f(x, y)$ on *antisymmetrinen*, jos $f(x, y) = -f(y, x)$ kaikilla reaaliluvuilla x, y . Osoita, että on olemassa kahden muuttujan polynomi $g(x, y)$, jolle pätee $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y .

7. Todista, käyttämällä hyväksi **vain** yhtenevyyslakia sks, että kahden suoran leikatessa syntyvät ristikulmat ovat yhtä suuria.

8. Todista, että kolmion korkeussuorat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (Pistettä sanotaan kolmion *ortokeskukseksi*.)

9. Todista, että ympyrän kaikkien yhtä pitkien jänneiden keskipisteet ovat erään ympyrän kehällä.

10. Suora ℓ puolittaa kolmion ABC kulman $\angle ABC$ ja suora ℓ' puolittaa kulman $\angle ABC$ vieruskulman. Osoita, että $\ell \perp \ell'$.

11. Erään ympyrän Γ sisään on piirretty kaksi ympyrää Γ_1 ja Γ_2 . Γ sivuaa sekä Γ_1 :tä että Γ_2 :tä ja Γ_1 ja Γ_2 sivuavat toisiaan. Osoita, että ympyrän Γ halkaisija on yhtä pitkä kuin sen kolmion piiri, jonka kärjet ovat tehtävän kolmen ympyrän keskipisteet.

12. Todista, että suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa.