Olympiavalmennus: Kotitehtäviä epäyhtälöistä ja geometriasta

Lauri Hallila & Antti Honkela, Tammikuu 2016 Vastauksia voi lähettää osoitteeseen laurihallila@gmail.com tai Lauri Hallila, Jussaarenkuja 5 J 104, 00840 Helsinki

1. Olkoon $a, b, c > 0$. Osoita, että

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2. Olkoon $a_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, n$. Todista, että

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

3. Todista, että kaksi kolmiota, joiden sivut ovat a, b, c ja a_1, b_1, c_1 ovat samanlaiset jos ja vain jos

$$\sqrt{aa1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

4. Todista, että jos $a, b, c > 0$ ja $a + b + c = 1$, niin

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

5. Olkoon $x_i > 0$ kaikille $i = 1, \ldots, n$. Todista, että

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}.$$

6. Näytä, että säännöllisen viisikulmion ympäri piirretyn ympyrän kaarella BC sijaitsevalle pisteelle P pätee

$$PA + PD = PB + PC + PE.$$

7. Esitä jännenelikulmion lävistäjien pituuksien suhde nelikulmion sivujen pituuksien avulla.

8. Suunnikkaan $ABCD$ sisältä valitaan piste P siten, että kulmat APB ja CPD ovat suplementtikulmia. Todista, että

$$AB \cdot AD = BP \cdot DP + AP \cdot CP.$$

9. Olkoon K suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusan AB keskipiste ja olkoon M sellainen piste janalla BC, että $|BM| = 2|MC|$. Todista, että $\angle MAB = \angle MKC$.

10. A-kärkisen terävän kulman α sivuilla on pisteet D ja E siten, että $|AD| = m$ ja $|AE| = n$. Pisteiden D ja E kautta piirretään vastaavia kulman kylkiä vastaan kohtisuorat suorat. Olettaen, että näiden leikkauspiste F sijaitsee kulman α sisällä, osoita että

$$\frac{|DF|}{|EF|} = \frac{n - m\cos\alpha}{m - n\cos\alpha}.$$

11. Olkoon $ABCDEF$ kupera kuusikulmio, jolle kolmioiden $\triangle BCD$, $\triangle DEF$ ja $\triangle FAB$ pinta-alat ovat yhtä suuret. Oletetaan, että $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ ja $\angle B + \angle D + \angle F = 360°$. Näytä, että kuusikulmiolla on sisäpiste O ja kolme sellaista kärkeä, että pisteestä O näihin kärkiin piirretyt janat jakavat kuusikulmion kolmeen pinta-alaltaan yhtäsuureen osaan.

12. Tasossa on annettu tylppä kulma $\angle AKS$. Konstruoi kolmio $\triangle ABC$ siten, että sen sivu BC sijaitsee suoralla KS keskipisteenään S, ja piste K on sivun BC ja vastakkaisen kulman $\angle BAC$ puolittajan leikkauspiste.