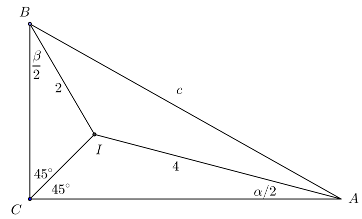
Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailu 2015

Avoimen sarjan tehtävien ratkaisuja

1. Voidaan olettaa, että $b = a+1$. Silloin $d = a^2+(a+1)^2+(a(a+1))^2 = a^2+a^2+2a+1+a^4+2a^3+a^2 = a^4+2a^3+3a^2+2a+1$. Toisaalta $(a^2+a+1)^2 = a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a = a^4+2a^3+3a^2+2a+1$. d on siis neliöluku ja $\sqrt{d} = a^2+a+1$. $(a^2+a+1 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0.)$ Koska $a^2+a+1 = a(a+1)+1$ ja joko a tai $a+1$ on parillinen, niin $a(a+1)$ on parillinen ja $\sqrt{d}$ on pariton.

2. *1. ratkaisu.* Olkoon suorakulmainen kolmio ABC, sen hypotenuusa $c = AB$, $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$ ja I sisään piirretyn ympyrän keskipiste. I on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Sovelletaan (kolmion kulmasummasta välittömästi seuraavaa) tietoa, jonka mukaan kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, kolmioihin CAI ja



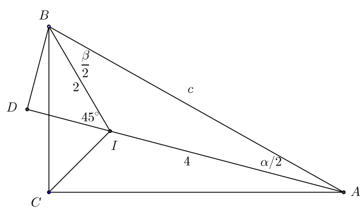
BCI. Saadaan $\angle AIB = \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Koska ABC on suorakulmainen, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Siis $\angle AIB = 135^\circ$. Sovelletaan kosinilausetta kolmioon ABI. Koska $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, saadaan heti

$$c^2 = 4^2 + 2^2 + 2\cdot 4\cdot 2\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 + 8\sqrt{2},$$

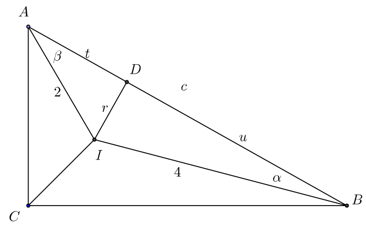
joten

$$c = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

2. ratkaisu. Olkoon D se piste kulman $\angle CAB$ puolittajalla AI, jolle $BD \perp AI$. Kolmion ABI kulman $\angle BIA$ vieruskulmana $\angle BID = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$. Kolmio IBD on siis tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa $BI = 2$. Siis $BD = DI = \sqrt{2}$. Suorakulmaisesta kolmiosta ABD saadaan Pythagoraan lauseen perusteella heti $c^2 = AB^2 = (4+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 20 + 8\sqrt{2}$ ja $c = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.



3. ratkaisu. (Kalevi Lyyra) Olkoon $IA = 2$, $IB = 4$, D ABC:n sisäympyrän ja AB:n sivuamispiste, $AD = u$, $BD = t$, $\angle IAB = \alpha$ ja $\angle IBA = \beta$. Suorakulmaisista kolmioista AID ja BID saadaan $r = 2\sin\alpha = 4\sin\beta$. Siis $\sin\alpha = 2\sin\beta$. Toisaalta $\alpha + \beta = 45°$, joten $2\sin\beta = \sin(45° - \beta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta - \sin\beta)$. Tästä ratkaistaan



$$\tan\beta = \frac{1}{1+2\sqrt{2}} = \frac{r}{t}, \qquad r = \frac{t}{1+2\sqrt{2}}.$$

Samoin johdetaan yhtälöt

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{r}{u}, \qquad r = \frac{u\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

Kun Pythagoraan lausetta sovelletaan kolmioihin AID ja BID, saadaan

$$4 = r^2 + u^2 = u^2\left(\frac{2}{(1+\sqrt{2})^2} + 1\right)$$

ja

$$16 = r^2 + t^2 = t^2\left(\frac{1}{(1+2\sqrt{2})^2} + 1\right).$$

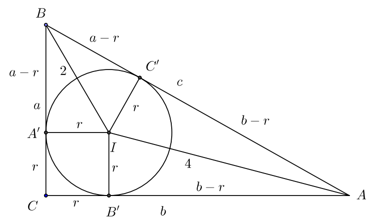
Tästä ratkaistaan

$$u = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}, \qquad t = \frac{2\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}},$$

ja edelleen

$$c = u + t = \frac{2(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}} = \frac{10+4\sqrt{2}}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

4. ratkaisu. Olkoon $BC = a$, $CA = b$, ABC:n sisäympyrän säde r ja sisäympyrän ja kolmion sivujen BC, CA, AB sivuamispisteet A', B', C'. Koska $A'CB'I$ on neliö, $A'C = CB' = r$. Koska ympyrän tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat yhtä pitkiä, on $BC' = BA' = a - r$ ja $C'A = B = b - r$. Siis $c = a + b - 2r$, joten



$$r = \frac{1}{2}(a+b-c), \quad a - r = \frac{1}{2}(a-b+c), \quad b - r = \frac{1}{2}(-a+b+c).$$

Suorakulmaisista kolmioista IAC' ja BIC' saadaan Pythagoraan lauseen nojalla

$$(-a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \qquad (1)$$

ja

$$(a-b+c)^2+(a+b-c)^2=4\cdot 2^2=16. \tag{2}$$

Kun otetaan huomioon, että ABC on suorakulmainen, joten $a^2+b^2=c^2$, niin (1) ja (2) sievenevät muotoihin

$$4c^2-4ac=64, \qquad 4c^2-4bc=16.$$

Siis

$$a=\frac{c^2-16}{c}, \qquad b=\frac{c^2-4}{c}$$

Kun nämä a:n ja b:n arvot sijoitetaan Pythagoraan yhtälöön $a^2+b^2=c^2$, saadaan c:lle yhtälö

$$c^4-40c^2+272=0,$$

josta ratkaistaan

$$c^2=\frac{40\pm\sqrt{1600-4\cdot 272}}{2}=20\pm\sqrt{400-272}=20\pm\sqrt{128}=20\pm 8\sqrt{2}.$$

Kolmiosta ABI nähdään, että $c>4$, joten c^2:n lausekkeessa vain $+$-merkki kelpaa. Siis

$$c=2\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

5. ratkaisu. Käytetään samoja merkintöjä kuin edellä. Pythagoraan lause sovellettuina suorakulmaisiin kolmioihin $AC'I$, $AB'I$, $BC'I$, $BA'I$ antaa $AC'=AB'=\sqrt{16-r^2}$ ja $BC'=BA'=\sqrt{4-r^2}$. Yhtälö $a^2+b^2=c^2$ on siis

$$\left(r+\sqrt{4-r^2}\right)^2+\left(r+\sqrt{16-r^2}\right)^2=\left(\sqrt{4-r^2}+\sqrt{16-r^2}\right)^2.$$

Kun tässä suoritetaan neliöön korotukset ja sievennetään, saadaan, että r toteuttaa yhtälön

$$r\left(\sqrt{4-r^2}+\sqrt{16-r^2}\right)=-r^2+\sqrt{r^4-20r^2+64}.$$

Kun tämä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan, että r toteuttaa yhtälön

$$r^2\sqrt{r^4-20r^2+64}=r^4-10r^2+16.$$

Kun tämä vielä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan r:n toteuttamaksi yhtälöksi

$$17r^4-80r^2+64=0.$$

Tämä on tuntemattoman r^2 toisen asteen yhtälö, jolle voidaan suoraan kirjoittaa ratkaisu

$$r^2=\frac{80\pm\sqrt{6400-17\cdot 256}}{34}=\frac{40\pm 16\sqrt{2}}{17}.$$

Koska r on kolmion BIC' lyhempi kateetti, on oltava $r^2 < 2$. Vain

$$r^2 = \frac{40 - 16\sqrt{2}}{17}$$

voi tulla kyseeseen. Nyt

$$\begin{aligned} c = \sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2} &= \frac{\sqrt{28 + 16\sqrt{2}} + \sqrt{232 + 16\sqrt{2}}}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{17}} \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{58 + 4\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

– Tämä yllättävän erinäköinen ratkaisu on kuitenkin sama kuin edellisissä ratkaisuissa saatu $c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$, niin kuin selviää, kun korottaa molemmat lausekkeet neliöön ja tekee rutiinisievennykset.

6. ratkaisu. Käytetään samoja merkintöjä kuin 3. ratkaisussa. Koska $\sin\beta = 2\sin\alpha = 2\sin(45° - \beta) = \sqrt{2}(\cos\beta - \sin\beta)$, saadaan $(1 + \sqrt{2})\sin\beta = \sqrt{2}\cos\beta$, $(3 + 2\sqrt{2})\sin^2\beta = (3 + 2\sqrt{2})(1 - \cos^2\beta) = 2\cos^2\beta$, josta ratkaistaan

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Kun vastaavasti lähdetään yhtälöstä $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\sin\beta = \dfrac{1}{2}\sin(45° - \alpha)$ ja tehdään samat operaatiot kuin edellä, tullaan yhtälöön

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Nyt

$$c = 2\cos\alpha + 4\cos\beta = \frac{2\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Tämä jälleen aivan erinäköinen lauseke on kuitenkin sama kuin aikaisemmissa ratkaisuissa saatu c:n arvo.

3. *1. ratkaisu.* Olkoon x mielivaltainen joukon A alkio. Jaetaan joukon $A \setminus \{x\}$ 40 alkiota kahdeksi 20-alkioiseksi joukoksi. Olkoot näiden joukkojen alkioiden summat S_1 ja S_2. Tehtävän ehdon perusteella $S_1 + x > S_2$ ja $S_2 + x > S_1$. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa $x > S_2 - S_1$ ja jälkimmäisestä $x > S_1 - S_2$. Siis $x > |S_1 - S_2| \geq 0$. Jokainen A:n alkio on siis positiivinen luku, joten negatiivisia lukuja A:ssa ei ole.

2. ratkaisu. A on joukko, joten sen alkiot ovat eri lukuja. Kirjoitetaan ne suuruusjärjestykseen $x_1 < x_2 < \ldots < x_{41}$. Jos joukossa A on negatiivisia lukuja, niin $x_1 < 0$. Silloin

$$\sum_{k=22}^{41} x_k < \sum_{k=1}^{21} x_k < \sum_{k=2}^{21} x_k < \sum_{k=22}^{41} x_k.$$

Tämä ei ole mahdollista, joten joukossa A ei ole negatiivisia lukuja.

4. *1. ratkaisu.* Jonoja, joissa on $2k$, $k \geq 0$, **A**-kirjainta, on

$$\binom{n}{2k}2^{n-2k}$$

kappaletta: paikat, joissa on **A**-kirjain voidaan valita yhtä monella tavalla kuin voidaan valita n-alkioisen joukon $2k$-alkioinen osajoukko. **B**- ja **C**-kirjaimille jää $n-2k$ paikkaa, ja jokaiseen tällaiseen voidaan asettaa kumpi tahansa näistä kirjaimista, joten mahdollisuuksia on 2^{n-2k}. Kaikkiaan tehtävän mukaisia merkkijonoja on siis

$$2^n + \binom{n}{2}2^{n-2} + \binom{n}{4}2^{n-4} + \cdots$$

kappaletta. Mutta summa saadaan kirjoitettua suljettuun muotoon, kun huomataan, että

$$\begin{aligned} 3^n = (2+1)^n &= 2^n + \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2} + \binom{n}{3}2^{n-3} + \binom{n}{4}2^{n-4} + \cdots, \\ 1 = (2-1)^n &= 2^n - \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2} - \binom{n}{3}2^{n-3} + \binom{n}{4}2^{n-4} - \cdots. \end{aligned}$$

Kun edelliset binomikehitelmät lasketaan yhteen, saadaan

$$3^n + 1 = 2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}.$$

Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis

$$\frac{1}{2}(3^n+1).$$

2. ratkaisu. n-kirjaimisia sanoja on kaikkiaan 3^n kappaletta. Olkoon näistä S_n sellaisia, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia ja T_n sellaisia, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia. Tarkastellaan sanoja, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Jos sanan viimeinen kirjain on **A**, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on pariton määrä **A**-kirjaimia ja jos viimeinen kirjain on **B** tai **C**, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Tästä seuraa

$$S_n = T_{n-1} + 2S_{n-1}. \tag{1}$$

Vastaavasti tarkastelemalla sanoja, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, tullaan yhtälöön

$$T_n = S_{n-1} + 2T_{n-1}. \tag{2}$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) vähennetään toisistaan, saadaan

$$S_n - T_n = S_{n-1} - T_{n-1}. \tag{3}$$

Nyt $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$ (parillinen määrä **A**-kirjaimia on sanoissa **B** ja **C**, pariton sanassa **A**) eli $S_1 - T_1 = 1$. Yhtälöstä (3) seuraa nyt yksinkertaisella induktiolla, että $S_n - T_n = 1$ kaikilla n. Koska $S_n + T_n = 3^n$, saadaan heti

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1).$$

3. ratkaisu. Pienillä n:n arvoilla tehdyt kokeilut antavat aiheen olettaa, että

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

ja

$$T_n = 3^n - S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Todistetaan tämä induktiolla. $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$. Oleteaan, että väite pätee n:n merkin pituisiin jonoihin. Jonot, joiden pituus on $n + 1$ merkkiä ja joissa on parillinen määrä **A**-kijaimia, saadaan liittämällä n-pituisiin jonoihin, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi **B** tai **C**, tai sellaisiin, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi **A**. Siis

$$S_{n+1} = 2S_n + T_n = 3^n + 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1).$$

Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.