## HEINäKUUN 2012 HELPOMMAT

Ratkaisuja kaivataan syyskuun alkuun mennessä osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Purpuripolku 7-9 B 10, 00420 Helsinki tai ernvall@mappi.helsinki.fi. Tehtävät eivät ole hankaluus-, helppous- tai viehättävyysjärjestyksessä.

(1) Painosarjasta tiedetään, että se sisältää viisi pareittain eripainoista painoa. Lisäksi tiedetään, että mitkä tahansa kaksi painoa valitaankaan, löytyy toiset kaksi, joiden yhteenlaskettu paino on täsmälleen sama on kahden valitun painon yhteenlaskettu paino. Kuinka monta painoa sarjassa vähintään on?

(2) Millä positiivisilla kokonaisluvuilla $2n+1$ jakaa $n$ ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summan?

(3) Olkoot $a, b \geq 0$. Osoita, että

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{a(a+b)^3}+b\sqrt{a^2+b^2}\right) \leq 3(a^2+b^2),$$

ja että yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $a=b$.

(4) Reaalilukujen jono $(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$ toteuttaa ehdon $a_{n+1}$ toteuttaa ehdon $a_{n+1} = a_n(a_n+2)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Mitä arvoja voi $a_{2004}$ saada?

(5) Olkoot $a_1 < a_2 < a_2 < \dots$ jono parittomia positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että kaikilla $n$ löytyy $k$, jolla $a_1+a_2+\cdots+a_n \leq k^2 \leq a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}$.

(6) Etsi kaikki luvun $a$ arvot, joilla yhtälöllä

$$4^x-(a^2+3a-2)2^x+3a^3-2a^2=0$$

on täsmälleen yksi ratkaisu.

(7) Olkoon $\mathbb{R}^+$ positiivisten reaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R}^x \to \mathbb{R}$, joilla

$$y^2 f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(8) Etsi positiiviset kokonaisluvut $n$, joilla

$$\frac{n^1}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}$$

on kokonaisluku.

(9) Olkoot $a, b, c$ positiivisia reaalilukuja, joilla pätee $abc \geq 1$. Osoita, että

$$a^3+b^3+c^3 \geq ab+bc+ca.$$

(10) Laske yhtälön

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2004$$

reaaliratkaisujen summa.