Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, huhtikuu 2019

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, voi olla opettavaista.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa. Näissä näkyvät itsenäisen harjoittelun tulokset.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 10.5.2019 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Matematik och Statistik
Åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 Åbo

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Uutena kokeiluna myös viikkotehtävät: `https://keskustelu.matematiikkakilpailut.fi/c/viikkotehtavat`

Helpompia tehtäviä

Joissakin näistä saattaa auttaa Vietan kaavoihin[1] tutustuminen.

1. Tasoon piirretään 10 ympyrää. Todista, että on olemassa kaksi ympyrää, jotka koskettavat yhtä montaa muuta ympyrää.

2. 10 henkilöä matkustaa bussilla. Osoita, että heidän joukosta löytyy joko 3 henkilöä, jotka kaikki tuntevat toisensa, tai 4 henkilöä, joista ketkään kaksi eivät tunne toisiaan.

3. 6 joukkuetta osallistuu turnaukseen, jossa kukin joukkue pelaa kaikkia muita vastaan. Todista, että turnauksen lopussa löytyy kaksi sellaista joukkuetta, että jokainen neljästä muusta joukkueesta on hävinnyt ainakin toiselle näistä kahdesta joukkueesta.

4. 1000 tiedemiestä kokoontuu konferenssiin. Kyselyn lopuksi ilmoitettiin, että jos kellään kahdella tiedemiehellä oli yhteinen tuttu konferenssissa, niin heillä on eri määrä tuttuja konferenssin osallistujien joukossa. Tämän lisäksi löytyy ainakin kaksi tiedemiestä, jotka tuntevat toisensa.

Osoita, että on mahdollista löytää tiedemies, jolla on tasan yksi tuttu konferenssissa.

5. 17 tiedemiestä kirjoittaa kirjeitä toisilleen; jokainen tiedemies kirjoittelee kunkin muun 16 tiedemiehen kanssa. He käsittelevät vain kolmea eri tutkimusalaa kirjeissään; jokainen tiedemiespari kirjoittelee keskenään vain yhdestä alasta. Osoita, että voidaan löytää kolme tiedemiestä, jotka kirjoittelevat keskenään samasta aiheesta.

6. Määritä polynomin

$$P(x) = (4x^5 - 3x^3 - 2x + 1)^{1000000}$$

kerrointen summa sekä vakiotermi.

7. Osoita, että lukujonon $x_1 = 9$ ja $x_{n+1} = 9^{x_n}$ kolmannen ja neljännen jäsenen jakojäännös on sama sadalla jaettaessa. Määritä tämä jakojäännös. (Älä käytä laskinta.)

8. Osoita, että jos α ja β ovat polynomin $x^2 + px + 1$ juuret ja γ ja δ polynomin $x^2 + qx + 1$ juuret, niin

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2.$$

9. Olkoon $a + 1 = b + 2 = c + 3 = d + 4 = a + b + c + d + 5$. Laske $a + b + c + d$.

[1] `https://fi.wikipedia.org/wiki/Vietan_kaavat`

10. a) Olkoot p, q ja r polynomin $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ nollakohdat. Laske $(p+1)(q+1)(r+1)$.

b) Yksi polynomin $x^3 + px^2 + qx + r$ nollakohdista on kahden muun summa. Osoita, että

$$p^3 - 4pq + 8r = 0.$$

11. Olkoon

$$P(x) = x^{2016} + a_1 x^{2015} + a_2 x^{2014} + \ldots + a_{2015} x + a_{2016}$$

astetta 2016 oleva polynomi, jonka kertoimet a_j ($j = 1, 2, \ldots, 2016$) kuuluvat joukkoon $\{-1, 1\}$. Osoita, että polynomilla $P(x)$ on alle 2016 erisuurta reaalijuurta.

Vaativampia tehtäviä

12. Etsi kaikki reaalikertoimiset polynomit p, jotka toteuttavat yhtälön

$$p(2p(x)) = 2p(p(x)) + 2p(x)^2$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

13. Olkoon $p(x, y)$ sellainen kahden muuttujan reaalikertoiminen polynomi, että aina kun $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että $x + y = x' + y'$, niin pätee $p(x, y) = p(x', y')$. Todista, että on olemassa yhden muuttujan reaalikertoiminen polynomi q, siten että $p(x, y) = q(x + y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

14. Etsi kaikki reaalikertoimiset polynomit p, jotka toteuttavat yhtälön

$$p(x^2 + x + 1) = p(x)p(x+1)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

15. Olkoon $X \subset \mathbb{Z}_+$, jolla on seuraavat kaksi ominaisuutta:

1. Jos $n \in X$ ja $m \mid n$, niin myös $m \in X$.
2. On olemassa $C \in \mathbb{N}$, siten että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ainakin yksi luvuista $n, n+1, \ldots, n+C$ kuuluu joukkoon X.

Todista, että on olemassa $a, d \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $an + d \in X$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

16. Kerkolla on $n \times n$-shakkilauta, jonka ruuduista osa on merkitty. Kerkko huomaa, että hän voi asetella laudalle n tornia täsmälleen yhdellä tavalla siten, että mitkään kaksi tornia eivät uhkaa toisiaan, ja mikään torneista ei ole merkityllä ruudulla. Kuinka monta merkittyä ruutua laudalla vähintään on?

17. Olkoot x, y ja z ei-negatiivisia reaalilukuja, joille $x + y + z = 1$. Todista

$$x^2 y + y^2 z + z^2 x \leq \frac{4}{27}.$$

18. Tarkastellaan puoliympyrää, jonka lävistäjä on AB ja keskipiste O. Suora ℓ leikkaa suoran AB pisteessä M ja puoliympyrän pisteissä C ja D, joille $|MC| > |MD|$ ja $|MB| < |MA|$. Kolmioiden AOC ja BOD ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat pisteissä O ja K. Osoita, että $\angle MKO = 90°$.

19. Olkoon kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste I ja sen sivuamispisteet D, E ja F sivuilla BC, CA ja AB. Olkoon M pisteen D projektio suoralle EF, P janan DM keskipiste ja H kolmion BIC korkeusjanojen leikkauspiste. Todista, että suora PH kulkee janan EF keskipisteen kautta.

Kun $G = (V, E)$ on verkko ja $a \in V$ sen solmu, merkitään $G-a$:lla verkkoa, joka saadaan poistamalla G:stä solmu a, eli tarkemmin verkkoa (V_0, E_0), missä $V_0 = V \setminus \{ a \}$ ja $E_0 = \{ \{ x, y \} \in E \mid x, y \neq a \}$.

Verkkojen $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ sanotaan olevan *samahtavia*, jos on olemassa sellainen bijektio $f : V \to V'$, että kaikilla $x \in V$ pätee $G - x \cong G' - f(x)$. Verkko G on *rekonstruoituva*, jos jokainen G:n kanssa samahtava verkko G' on itse asiassa isomorfinen G:n kanssa.

Lisäys 20.4.2019: seuraavissa kolmessa tehtävässä oletetaan, että verkon solmujen määrä ei ole 2.

20. Osoita, että korkeintaan 5 solmun verkot ovat rekonstruoituvia.

21. Todista, että äärelliset epäyhtenäiset verkot ovat rekonstruoituvia.

22. Todista, että säännölliset verkot ovat rekonstruoituvia.

23. Tarkastellaan 9×9-ruudukkoa. Kutsutaan sen ruutuja *naapureiksi*, jos niillä on yhteinen sivu. Väritetään ruudukon ruudut mustiksi ja valkoisiksi niin, että kunkin ruudun naapureista suurin osa on vastakkaisvärisiä ruudun itsensä kanssa, ts. jos ruutu on valkoinen, niin sillä on enemmän mustia kuin valkoisia naapureita, ja jos musta, niin sillä on enemmän valkoisia kuin mustia naapureita.

Määritä valkoisten ja mustien ruutujen lukumäärien suurin mahdollinen erotus.

24. Tasossa on 5 pistettä, joiden muodostamat $\binom{5}{3} = 10$ kolmiota ovat kaikki alaltaan vähintään 2. Osoita, että jonkin niistä pinta-ala on vähintään 3.

25. Eräässä n pelaajan shakkiturnauksessa kukin pelasi kerran kutakin toista pelaajaa vastaan. Turnauksen päätyttyä havaittiin, että jokaisesta 4 pelaajan joukosta pystyttiin valitsemaan pelaaja, jonka jokainen peli kolmea muuta vastaan päättyi eri tavalla, ts. yksi voittoon, yksi tasapeliin ja yksi tappioon. Huomattiin myös, että kyseessä oli suurin mahdollinen turnaus, jolla oli tämä ominaisuus. Todista, että $6 \leq n \leq 9$.