

VAIKEAMMAT VALMENNUSTEHTÄVÄT, HELMIKU 2013

Ratkaisuja voi lähettää huhtikuun alkuun mennessä osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Purpuripolku 7-9 B 10, 00420 Helsinki tai sähköisesti anne-maria.ernvall-hytönen@helsinki.fi. Aikaraja ei ole tarkka, ja yksittäisetkin ratkaisut kannattaa lähettää.

- (1) Ratkaise kokonaislukujen joukossa yhtälö $x^4 + x^2 = 7^z y^2$.
- (2) Mikä on funktion $f_k(x, y) = (x + y) - (x^{2k+1} + y^{2k+1})$ maksimiarvo?
- (3) Määritä kaikki sellaiset epänegatiivisten kokonaislukujen parit (a, b) , että $a^b + b$ jakaa luvun $a^{2b} + 2b$.
- (4) 2010 korttia on numeroitu luvuin $1, 2, \dots, 2010$. Kaikki ne kortit, joiden lukujen numeroiden summa on pariton valitaan. Mikä on valittujen korttien lukujen summa?
- (5) Positiiviset kokonaisluvut a, b ja c ovat pienempiä kuin luku 99 ja toteuttavat ehdon $a^2 + b^2 = c^2 + 99$. Määritä summan $a + b + c$ minimi ja maksimi.
- (6) Olkoon ABC kolmio, jonka kulma C on suora ja $AC = 1$. Mediaani AM leikkaa sisäänpiirretyn ympyrän pisteissä P ja Q niin, että $AP = QM$. Määritä pituus PQ .
- (7) Liitutaululle on kirjoitettu luvut $1, 2, \dots, 2010$. Kaksi lukua voidaan poistaa ja korvata epänegatiivisella erotuksellaan. Jos näin toimitaan uudestaan ja uudestaan, niin määritä ne luvut, jotka voivat jäädä viimeiseksi taululle.
- (8) Määritä funktiot $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, joilla

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{N}$, kun $10^6 - 10^{-6} < \frac{x}{y} < 10^6 + 10^{-6}$.

- (9) Luvut $1, 2, \dots, 2010$ on kirjoitettu jonoon. Kaksi pelaajaa kirjoittavat vuorotellen x tai \times lukujen väliin, kunnes kaikissa väleissä on jokin merkki. Ensimmäinen pelaaja voittaa, jos lausekkeen tulos on kolmella jaollinen. Toinen pelaaja voittaa muutoin. Etsi jommalle kummalle pelaajalle voittostrategia.
- (10) 100-numeroisilla luvuilla A ja B on kymmenjärjestelmäesityksessään vain numeroita 4 ja 7. Summalla $A + B$ on kymmenjärjestelmäesityksessään 101 numeroa, ja täsmälleen 20 niistä on nelosia, ja tasan 30 on yhdeksikköjä. Kuinka monta ykköstä voi luvun $A + B$ kymmenjärjestelmäesityksessä olla?