Matematiikan olympiavalmennus

Harjoitustehtävät, marras–joulukuu 2015 – ratkaisuja

1. *Määritä luvun*

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \cdots + 2^{5^{1991}}$$

kaksi viimeistä numeroa.

Ratkaisu. Osoitetaan, että kaikki luvut muotoa 2^{5^k} ovat muotoa $100p+32$. Käytetään induktiota. Kun $k=1$, niin $2^5=32$. Oletetaan, että $2^{5^k}=100p+32$. Tällöin binomikaavan mukaan

$$2^{5^{k+1}} = \left(2^{5^k}\right)^5 = (100p+32)^5 = 100q + 32^5$$

ja

$$\begin{aligned}(30+2)^5 &= 30^5 + 5\cdot 30^4 \cdot 2 + 10 \cdot 30^3 \cdot 4 + 10 \cdot 30^2 \cdot 8 + 5 \cdot 30 \cdot 16 + 32 \\ &= 100r + 32.\end{aligned}$$

Siten tehtävän summan kaksi viimeistä numeroa ovat luvun $1991 \cdot 32$ kaksi viimeistä numeroa. Koska $91 \cdot 32 = 3200 - 9 \cdot 32 = 2912$, niin ratkaisuksi saadaan 12.

2. *Osoita, että $n!$ ei ole jaollinen luvulla 2^n.*

Ratkaisu. Selvitetään, kuinka monta lukua 2 enintään on luvun $n!$ alkulukuhajotelmassa. Jokainen parillinen luku, joka on $\leq n$, tuottaa yhden kakkosen. Sen lisäksi jokainen 4:llä jaollinen luku tuottaa yhden uuden kakkosen, jokainen 8:lla jaollinen luku yhden uuden kakkosen jne. Näin ollen 2 esiintyy $n!$:n alkulukuhajotelmassa kaikkiaan

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \cdots$$

kertaa. Mutta edellinen summa on päättyvä, joten se on pienempi kuin $n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = n$.

3. *Osoita, että luku $\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ ei ole alkuluku.*

Ratkaisu. Tunnetusti

$$\frac{x^5-1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Edellisen yhtälön oikean puolen polynomi on hahmoltaan $(x^2+ax+1)^2$. Kokeillaan, mitä olisi $x^4+x^3+x^2+x+1-(x^2+ax+1)^2$ sopivalla a:n valinnalla: $x^4+x^3+x^2+x+1-(x^2+ax+1)^2 = (1-2a)x^3 - (a^2+1)x^2 + (1-2a)x$. Kun $a=3$, tämä on $-5x(x^2+2x+1) = -5x(x+1)^2$. Siis

$$\frac{x^5-1}{x-1} = (x^2+3x+1)^2 - 5x(x+1)^2.$$

Jos nyt $x = 5^{25}$, niin $5x = x^{26} = \left(x^{13}\right)^2$ ja näin ollen $\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ on kahden neliöluvun erotus. Se voidaan siis jakaa kahdeksi tekijäksi, joista kumpikaan ei ole 1.

4. *Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n, jolle $999999 \cdot n = 111 \cdots 11$.*

Ratkaisu. Koska luku on jaollinen 9:llä vain, jos sen numeroiden summa on jaollinen 9:llä, tehtävän yhtälön oikealla puolella olevassa luvussa on oltava 9:llä jaollinen määrä ykkösiä. Se on silloin muotoa $\frac{1}{9}(10^{9k}-1)$ oleva luku. Tämän luvun on oltava jaollinen myös luvulla $10^6 - 1$. Näin on ainakin silloin, kun k parillinen luku, $k = 2m$. Silloin $9k = 18m$ ja $10^{18m} - 1 = (10^6)^{3m} - 1 = (10^6)^{3m-1} + (10^6)^{3m-2} + \cdots + 10^6 + 1$. Tässä luvussa on $3m$ ykköstä ja nollia. Pienin m, jolla luku on jaollinen 9:llä, on 3. Silloin $9k = 18m = 54$. Vahva ehdokas pienimmäksi tehtävän ehdon täyttäväksi luvuksi on siis

$$n = \frac{10^{54} - 1}{9 \cdot (10^6 - 1)}.$$

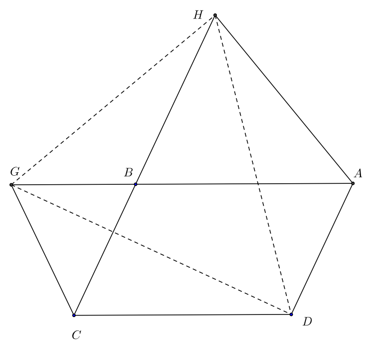
Koska $10^6 - 1 = (10^3+1)(10^3-1)$ ja $10^3+1 = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, on luvun $\frac{1}{9}(10^{9k}-1)$ oltava jaollinen 11:llä. Koska luku kirjoitetaan $9k$:lla ykkösellä ja luku on jaollinen 11:llä vain, jos sen parittomissa paikoissa olevien numeroiden ja parillisissa paikoissa olevien numeroiden summan erotus on 11:llä jaollinen, $10^{9k} - 1$ voi olla jaollinen luvulla $10^6 - 1$ vain, jos k on parillinen. Edellä saatu vahva ehdokas on siis todellakin tehtävässä haettu luku. Auki kirjoitettuna

$$n = 111\,111\,222\,222\,333\,333\,444\,444\,555\,555\,666\,666\,777\,777\,888\,889.$$

5. *Osoita, että jos n on kahden neliöluvun summa, niin myös $2n$ on kahden neliöluvun summa.*

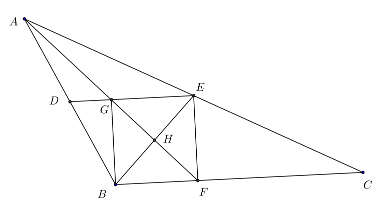
Ratkaisu. Olkoon $n = a^2 + b^2$. Silloin $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2n$.

6. *Suunnikkaassa $ABCD$ kulma $\angle BAD$ on terävä. Piste $G \neq B$ on suoralla AB niin, että $BC = CG$ ja piste $H \neq B$ on suoralla BC niin, että $AB = AH$. Osoita, että kolmio DGH on tasakylkinen.*



Ratkaisu. Väite $DH = DG$ tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että kolmiot AHD ja CDG ovat yhteneviä. Tasakylkisillä kolmioilla AHB ja CBG on ristikulmina yhtä suuret kantakulmat $\angle ABH = \angle CBG$. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset, joten $\angle BAH = \angle BCG$. Suunnikkaassa $ABCD$ on $\angle DAB = \angle BCD$. Siis $\angle DAH = \angle GCD$. Lisäksi $AH = AB = CD$ ja $DA = CB = CG$. Siis $AHD \cong CDG$ (sks).

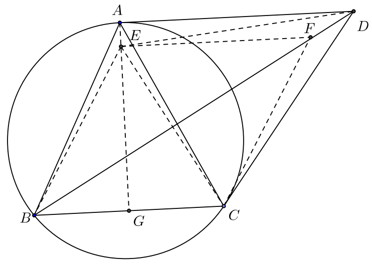
7. *Kolmion ABC kulma $\angle ABC$ on tylppä. Sivun AB keskipiste on D ja sivun AC keskipiste on E. Olkoon vielä F se sivun BC piste, jolle $EF \perp BC$ ja G se janan DE piste, jolle $BG \perp DE$. Osoita, että pisteet A, F ja G ovat samalla suoralla jos ja vain jos $CF = 2 \cdot BF$.*



Ratkaisu. Koska D ja E ovat sivujen AB ja AC keskipisteet, $DE \| BF$. Nelikulmio $BFEG$ on siis suorakulmio. Suorakulmion lävistäjät puolittavat toisensa leikkauspisteessään H. Oletetaan nyt, että A, G ja F ovat samalla suoralla. Piste H on silloin myös tällä suoralla. Tarkastellaan kolmiota ABE. Pisteet D ja H ovat tämän kolmion sivujen keskipisteitä, joten AH ja ED ovat kolmion keskijanoja. Siten G on keskijanojen leikkauspiste, ja $GE = 2 \cdot DG$. Mutta kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävän janan tunnetun ominaisuuden mukaan (kolmiot ABF ja AFC) $BF = 2 \cdot DG$ ja $FC = 2 \cdot GE$. On siis $FC = 2 \cdot BF$. – Oletetaan sitten, että $FC = 2 \cdot BF$. Silloin suora AF leikkaa DE:n sellaisessa pisteessä G', että $G'E = 2 \cdot DG'$. Tämän pisteen on oltava kolmion ABE keskijanojen leikkauspiste. G' on siis suoralla AH. Pisteet A, H ja F ovat samalla suoralla. Mutta G on varmasti suoralla HF. Näin ollen $G = G'$, ja väite on todistettu.

8. *Tasakylkisessä kolmiossa ABC on $AB = AC$. Kolmion ympärysympyrän pisteisiin A ja C piirretyt tangentit leikkaavat pisteessä D ja $\angle DBC = 30°$. Osoita, että ABC on tasasivuinen.*

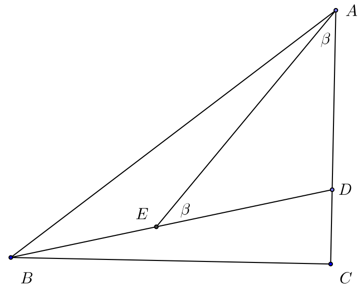
Ratkaisu. Todistetaan epäsuorasti. Oletetaan, että ABC ei ole tasasivuinen. Piirretään tasasivuiset kolmiot BCE ja ECF. niin, että E ja A ovat samalla puolella suoraa BC ja F ja D samalla puolella suoraa EC. Oletuksen mukaan $E \neq A$. Koska kolmiot BCF ja BEF ovat yhteneviä (sss), $\angle CBF = \angle EBF = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$. Siis B, F ja D ovat samalla suoralla ja $\angle CFD = \angle EFD$. Kolmiot DFC ja DFE ovat yhteneviä (sks), joten $CD = ED$. Mutta koska AD ja CD ovat ABC:n ympärysympyrän tangentteja, on myös $AD = CD$. Siis $AD = ED$. Mutta ABC:n ympärysympyrän keskipiste on BC:n keskinormaalilla AG samoin kuin piste E. Siis $AD \perp AE$. Suorakulmaisesta kolmiosta EDA nähdään, että $AD < ED$. Tultiin ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä, ja ABC on tasasivuinen.



9. *Suorakulmaisen kolmion ABC kärjessä C oleva kulma on suora. Olkoot D piste sivulla AC ja E piste janalla BD niin, että $\angle ABC = \angle DAE = \angle AED$. Osoita, että $BE = 2 \cdot CD$.*

Ratkaisu. Merkitään $\angle ABC = \beta = \angle AED = \angle EAD$. Silloin $\angle CAB = 90° - \beta$ ja $\angle EAB = 90° - 2\beta$. Lisäksi $\angle BEA = 180° - \beta$. Nyt voidaan käyttää sinilausetta kolmioon ABE. Saadaan

$$BE = \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle AEB} \cdot AB = \frac{\sin(90° - 2\beta)}{\sin(180° - \beta} \cdot AB = \frac{\cos(2\beta)}{\sin \beta} \cdot AB.$$



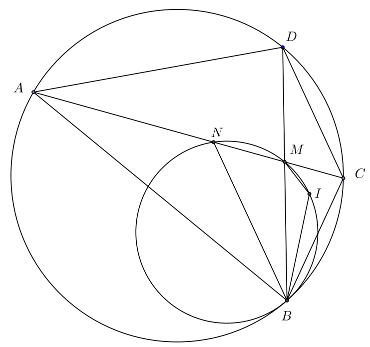
CD puolestaan voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiosta DBC. Siinä (kolmion AED perusteella) on $\angle CDB = 2\beta$. Koska $BC = AB \cdot \cos \beta$, niin

$$DC = BC \cdot \cot(2\beta) = AB \cdot \cos(\beta) \cot(2\beta).$$

Kun saadut tulokset yhdistetään ja otetaan huomioon että $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ja $\sin(2x) = \sin x \cos x$, niin nähdään, että

$$\frac{BE}{CD} = \frac{\dfrac{\cos(2\beta)}{\sin\beta}}{\cot(2\beta)\cos\beta} = \frac{\sin(2\beta)}{\sin\beta\cos\beta} = 2.$$

10. *Jännenelikulmiossa $ABCD$ on $AD = BD$. Jännenelikulmion lävistäjät leikkaavat pisteessä M. Suora AC leikkaa ympyrän, joka kulkee B:n, M:n ja kolmion BCM sisäympyrän keskipisteen kautta, (myös) pisteessä N. Osoita, että $AN \cdot NC = CD \cdot BN$.*



Ratkaisu. Pyritään osoittamaan kolmiot DBC ja ABN yhdenmuotoisiksi. Samaa kaarta vastaavina kehäkulmina $\angle CDB = \angle CAB = \angle NAB$. Olkoon I kolmion BCM sisäympyrän keskipiste eli kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Jännenelikulmion $NBMI$ perusteella $\angle BNA = \angle BIM = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BMC + \angle MBC) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle DMA + \angle DAM) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADM) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADM$. Edelleen $\angle CNB = 180^\circ - \angle BIM = 90^\circ - \frac{1}{2}ADM$. Mutta koska DAB on tasakylkinen kolmio, on myös $\angle DAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ADM$. Koska $\angle ADB = \angle ACB = \angle NCB$, kolmiot DAB ja CNB ovat yhdenmuotoisia. Kolmio CNB on siis myös tasakylkinen, joten $CN = CB$. Palataan kolmioihin DCB ja ANB. Jännenelikulmiosta $ABCD$ saadaan $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle CNB = \angle ANB$. Kolmiot DCB ja ANB ovat yhdenmuotopisia (kk). Siis

$$\frac{NA}{NB} = \frac{DC}{CB} = \frac{DC}{CN}.$$

Väite seuraa.

11. *Kokouksen osanottajat kättelevät toisiaan summittaisesti ennen kokouksen alkua.*

a) Osoita, että 6 hengen kokoontuessa voidaan valikoida 3 hengen ryhmä, jonka jäsenet joko kaikki ovat kätelleet toisiaan tai kukaan ei ole kätellyt ketään muuta ryhmän jäsentä.

b) Pitääkö väite enää paikkansa, jos 6 korvataan 5:llä, mutta 3 säilyy ennallaan?

Ratkaisu. a) Kättelytilanne voidaan mallintaa täydellisenä verkkona, jonka kuusi solmua ovat osanottajat. Väritetään kahden osanottajan välinen särmä punaiseksi, jos osanottajat ovat kätelleet, muuten siniseksi. Tarkastetaan yhtä solmua A. Siitä lähtee viisi särmää. Näistä ainakin kolme on samanvärisiä; esimerkiksi AB, AC ja AD. Jos särmistä BC, CD ja DB ainakin yksi, esimerkiksi BC, on samanvärinen kuin AB, niin AB, AC ja BC ovat samanvärisiä. Sen mukaan, onko AB sininen tai punainen, niin A, B ja C muodostavat kättelemättömän tai kätelleen kolmen osanottajan ryhmän. Jos taas BC, CD ja BD ovat kaikki erivärisiä kuin AB, niin B, C ja D muodostavat – AB:n väristä riippuvasti – joko kätelleiden tai kättelemättömien ryhmän.

b) Väite ei pidä paikkaansa, jos osanottajia on vain viisi, esimerkiksi A, B, C, D, E. Jos kättelijäparit ovat AB, BC, CD, DE ja EA, niin jokaiseen kolmen osanottajan joukkoon sattuu joko kaksi kättelijäparia ja yksi kättelemätön tai yksi kättelijäpari ja kaksi kättelemätöntä. (Tilanteen verkko voidaan mallintaa viisikulmiona $ABCDE$, jonka sivut edustavat kättelyjä ja lävistäjät kättelemättömyyksiä.)

12. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $A_0, \ldots, A_{n-1} \subset \mathbb{N}$ eri joukkoja. Osoita, että on olemassa sellainen äärellinen $B \subset \mathbb{N}$, että $A_0 \cap B, \ldots, A_{n-1} \cap B$ ovat eri joukkoja ja joukossa B on enintään $n-1$ alkiota.*

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla n:n suhteen. Kun $n = 1$, joukoksi B voidaan valita $\emptyset$.

Oletetaan sitten, että väite pätee kaikilla $s \in \mathbb{Z}_+$, $s < n$, ja osoitetaan, että se pätee n:lle. Koska A_0 ja A_{n-1} ovat eri joukkoja, on olemassa sellainen alkio c, joka kuuluu tasan toiseen joukoista A_0 ja A_{n-1}: siis joko $c \in A_0 \setminus A_{n-1}$ tai $c \in A_{n-1} \setminus A_0$. Olkoot nyt $A_{i_0}, \ldots, A_{i_{k-1}}$ ne joukoista A_i, joille $c \in A_i$ ja $A_{j_0}, \ldots, A_{j_{\ell-1}}$ ne joukoista A_j, joille $c \notin A_j$. Silloin $k+\ell = n$ sekä $k < n$. $\ell < n$ (koska joukot A_0 ja A_{n-1} kuuluvat kumpikin edellisistä ryhmistä vain toiseen). Induktio-oletuksen mukaan on olemassa enintään $k-1$ alkiota sisältävä joukko B' ja enintään $\ell - 1$ alkiota sisältävä joukko B'', joille $A_{i_0} \cap B', \ldots, A_{i_{k-1}} \cap B'$ ovat keskenään eri joukkoja ja $A_{j_0} \cap B'', \ldots, A_{j_{\ell-1}} \cap B''$ ovat myös keskenään eri joukkoja. Valitaan $B = B' \cup B'' \cup \{c\}$. Joukossa B on enintään $(k-1)+(\ell-1)+1 = k+\ell-1 = n-1$ alkiota ja joukot $A_0 \cap B, \ldots, A_{n-1} \cap B$ ovat keskenään eri joukkoja.

13. *Aritmeettiseksi jonoksi kutsutaan jonoa, jossa peräkkäisten alkioiden erotus on aina sama. Siis äärellinen aritmeettinen jono on muotoa $(a,\, a+d, \ldots, a+(k-1)d)$ joillakin a, $d \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N}$, ja ääretön muotoa $(a,\, a+d,\, a+2d, \ldots)$ joillakin a, $d \in \mathbb{R}$. Osoita, että on olemassa sellainen joukko A luonnollisia lukuja, että kumpikaan joukoista A ja $\mathbb{N} \smallsetminus A$ ei sisällä ääretöntä toistotonta ($d \neq 0$) aritmeettista jonoa.*

Ratkaisu. Olkoon

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty}]10^{2k},\, 10^{2k+1}] = \{1, 2, , \ldots, 9, 10, 101, \ldots, 1000, 10001, \ldots\}.$$

Silloin

$$\mathbb{N} \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty}]10^{2k-1},\, 10^{2k}].$$

Jos aritmeettisen jonon termien erotus on d, niin jollain n on $d < 10^n$. Koska A ja sen komplementti muodostuvat peräkkäisistä luonnollisten lukujen jaksoista, joiden väliin jää jaksoja, joiden pituus ylittää jokaisen kymmenen potenssin, jonon termejä jää välttämättä sekä joukon A että sen komplementin ulkopuolelle.

14. *Olkoon G kuuden solmun verkko. Osoita, että G:ssä tai sen komplementtiverkossa $\overline{G}$ on neljän solmun sykli. [Verkon $G = (V, E)$ komplementtiverkko on $\overline{G} = (V,\, E')$, missä*

$$E' = \{\{x,\, y\} \mid x,\, y \in V,\, x \neq y, \{x,\, y\} \notin E\},$$

ts. komplementtiverkossa solmuparin välillä on särmä täsmälleen silloin, kun alkuperäisessä verkossa ei ole särmää.]

Ratkaisu. Koska G:ssä on kuusi solmua, joko G:ssä tai $\overline{G}$:ssä on kolmen solmun klikki. Symmetrian vuoksi oletetaan, että $K = \{a, b, c\}$ on G:n kolmen solmun klikki. Jos nyt jostakin $x \in V \setminus K$ lähtee kaksi särmää K:hon, esimerkiksi $\{x, a\}$ ja $\{x, b\}$, syntyy neljän solmun sykli, esimerkissä (x, a, c, b, x). Oletetaan sitten, että jokaisesta $x \in V \setminus K$ lähtee särmä enintään yhteen K:n solmuun. Nyt on mahdollista, että kahdesta $V \setminus K$:n solmusta x ja y lähtee särmä samaan K:n solmuun, esimerkiksi a:han. Silloin mikään särmistä $\{x, b\}$, $\{b, y\}$, $\{y, c\}$ ja $\{c, x\}$ ei kuulu E:hen, ja (x, b, y, c, x) on $\overline{G}$:n sykli. Samoin, jos yksi $V \setminus K$:n solmu ei ole ollenkaan yhteydessä K:hon ja kaksi muuta ovat yhteydessä enenintään yhteen K:n solmuun, nähdään helposti, että $\overline{G}$:ssä on neljän solmun sykli. Tutkimatta on vielä tilanne, jossa jokainen K:n solmu on yhteydessä tasan yhteen $V \setminus K$:n solmuun. Voidaan olettaa, että $\{\{a, x\}, \{b, y\}, \{c, z\}\} \subset E$. Jos jokin $V \setminus K$:n solmupari, esim. $\{x, y\}$ on E:ssä, niin G:ssä on sykli, esimerkissä (x, a, c, b, y, x); jos taas mitään kahta $V \setminus K$:n solmuparia ei yhdistä särmä, niin $\overline{G}$:ssä on esimerkiksi sykli (b, x, y, z, b).

15. *Osoita, että Ramseyn funktiolle pätee* $R(4) = 18$.

Ratkaisu. Valmennusviikonlopun aikana todistettiin, että $R(4, 3) = 9$. Tästä saadaan heti arvio

$$R(4) = R(4, 4) \leq R(4, 3) + R(3, 4) = 2\,R(4, 3) = 18.$$

Väite tulee todistetuksi, jos voidaan osoittaa, että $R(4) > 17$. Riittää siis, että konstruoidaan verkko, jossa on 17 solmua, mutta jossa ei ole neljän solmun klikkiä eikä neljän solmun riippumatonta joukkoa. Tällainen verkko on $P = (V, E)$, missä $V = \{0, 1, \ldots, 16\}$ ja

$$E = \{\{x, y\} \subset V | x \neq y, \exists k \in \mathbb{Z}(x - y \equiv k^2 \bmod 17)\}.$$

(Tämä on ns. 17 solmun *Payleyn verkko.*) Ehdon "jollakin $k \in \mathbb{Z}$ pätee $x - k \equiv k^2 \bmod 17$" voi lukea myös "$x - y$ on neliönjäännös $\bmod 17$". Ehto on symmetrinen, sillä jos $x - y \equiv k^2 \bmod 17$, niin $y - x \equiv -k^2 \equiv 16k^2 = (4k)^2 \bmod 17$. Nollasta eroavat neliönjäännökset modulo 17 ovat ±1, ±2, ±4 ja ±8, sillä $(\pm1)^2 = 1$, $(\pm2)^2 = 4$, $(\pm3)^2 = 9 \equiv -8 \bmod 17$, $(\pm4)^2 = 16 \equiv -1 \bmod 17$, $(\pm5)^2 = 25 \equiv 8 \bmod 17$, $(\pm6)^2 = 36 \equiv 2 \bmod 17$, $(\pm7)^2 = 49 \equiv -2 \bmod 17$ ja $(\pm8)^2 = 64 \equiv -4 \bmod 17$.

Verkko P voidaan visualisoida säännöllisenä 17-kulmiona $\{v_0, v_1, \ldots, v_{16}$, jonka ympärysympyrän pituus on 17 ja jossa kahta solmua yhdistää särmä silloin ja vain silloin, kun solmujen välisen kaaren pituus on 1, 2, 4 tai 8. Osoitetaan nyt, että P:ssä ei ole neljän solmun klikkiä. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan tällainen klikki $K = \{a, b, c, d\}$ olisi olemassa; solmut on lueteltu ympyrän kehällä vastapäivään. Merkitään solmujen välisten kaarten pituuksia symboleilla δ_a, δ_b, δ_c, δ_d. Luvut ovat neliönjäännöksiä $\bmod 17$, eli

$$\{\delta_a, \delta_b, \delta_c, \delta_d\} \subset \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}.$$

On siis

$$\begin{cases} b \equiv a + \delta_a \bmod 17 \\ c \equiv b + \delta_b \bmod 17 \\ d \equiv c + \delta_c \bmod 17 \\ a \equiv d + \delta_d \bmod 17 \end{cases}$$

Tietenkin $\delta_a + \delta_b + \delta_c + \delta_d = 17$. Koska $15 + 3 \cdot 1 = 18 > 17$ ja $4 \cdot 4 = 16 < 17$, on δ-lukujen joukossa oltava jokin luvuista 8, 9, 13. Summan 17 voi muodostaa (järjestystä huomioon ottamatta) vain kolmella tavalla: $17 = 13+2+1+1 = 9+4+2+2 = 8+4+4+1$. Jotta K olisi klikki, olisi kahden vierekkäisen kaaren pituuden oltava myös neliönjäännös mod 17. Ensimmäisessä tapauksessa kahden vierekkäisen kaaren pituuksien summien joukossa on 14, toisessa 6 ja kolmannessa 5; mikään näistä ei ole neliönjäännös mod 17. P:ssä ei myöskään voi olla neljän solmun riippumatonta joukkoa. P:n komplementtiverkossa $\overline{P}$ solmujen välisten kaarten pituudet ovat epäneliönjäännöksiä mod 17 eli kuuluvat joukkoon $\{3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$. Ainoa tapa muodostaa näistä summa 17 on $3+3+5+6$, mutta koska $3+5 = 8$ on neliönjäännös mod 17, ei $\overline{P}$:ssä ole neljän solmun klikkiä mikä on sama asia kuin että P:ssä ei ole neljän solmun vapaata joukkoa.

16. *Olympoksen jumalat Venus ja Mars leikittelevät jälleen ihmiskohtaloilla. He keräävät kokoon toisilleen ventovieraita ihmisiä ja arpovat kunkin ihmisparin kohdalla, tuleeko heistä ystäviä vai vihollisia (kummankin tapahtuman todennäköisyys on $\frac{1}{2}$). Näytä, että on olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että jos ihmisjoukossa on vähintään m henkeä, niin todennäköisyys, että jokaisella on ainakin yksi ystävä ja ainakin yksi vihollinen, on vähintään 0,99.*

Ratkaisu. Oletetaan, että $m \geq 2$. Olkoon I sellainen m:n ihmisen joukko, joiden kohtalolla Venus ja Mars leikittelevät. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka ilmoittaa sellaiset $x \in I$ lukumäärän, joilla on pelkästään ystäviä tai pelkästään vihollisia. Jokaisella $x \in I$ pätee

$$P(x\text{:llä on vain ystäviä tai vain vihollisia}) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = 2^{2-m}.$$

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E(X) = \sum_{x \in I} P(x\text{:llä on vain ystäviä tai vain vihollisia}) = m \cdot 2^{2-m}.$$

Koska X:n arvot ovat luonnollisia lukuja,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{m} k \cdot P(X = k) \geq 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X > 0) = P(x > 0).$$

Toisaalta $X = 0$ on tapahtuma ”jokaisella on ystäviä ja vihollisia”. Siis

$$P(X = 0) = 1 - P(X > 0) \geq 1 - E(X) = 1 - m \cdot 2^{2-m}.$$

Jos $m < n$, niin

$$m \cdot 2^{-m} - n \cdot 2^{-n} > (m - n)2^{-n} > 0.$$

Kun $m \geq 13$, niin

$$m \cdot 2^{2-m} \leq 13 \cdot 2^{2-13} = 13 \cdot 2^{-11} < \frac{13}{2048} < \frac{1}{100},$$

joten $P(x = 0) > 1 - \dfrac{1}{100} = 0{,}99$.

17. *Kyllästyttyään umpimähkäisiin ihmissuhteisiin Venus ja Mars kehittävät seuraavanlaisen pelin, jonka säännöissä kiinnitetään vakiot n ja k. He kokoavat uuden n ventovieraan joukon. Jumalat valitsevat vuorotellen ihmispareja, ja Venus aloittaa. Jokaisella siirrollaan hän tekee valitsemistaan kahdesta ihmisestä ystävät, Mars vastaavasti viholliset, eikä samaa paria saa valita uudestaan. Venus voittaa pelin, jos hän onnistuu muodostamaan k ystävän ryhmän; Mars taas k vihollisen ryhmän syntyessä. Peli voi myös päättyä tasapeliin, jos parit loppuvat kesken eikä halutunlaisia ryhmiä ole syntynyt.*

a) Miten käy, jos $n = 5$ ja $k = 2$?

b) Osoita, että parhaalla mahdollisella tavalla pelatessaan Venus ei häviä peliä, olivat vakiot $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ mitä tahansa.

c) Todista, että on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että Venus pystyy voittamaan pelin, jos tavoitteena on 4:n ystävän ryhmän muodostaminen ($k = 4$).

Ratkaisu. a) Tehtävänannossa tapahtui virhe. Kun $k = 2$, Venus voi tietysti jo ensimmäisellä vuorollaan muodostaa ystäväparin ja voittaa. Tarkoitus oli tutkia tapausta $k = 3$. Ratkaistaan se. Olkoon Venuksella ja Marsilla käytössään viiden hengen joukko $\{A, B, C, D, E\}$. Venus aloittaa tekemällä ihmisistä A ja B ystävät. Marsilla on nyt kaksi mahdollista etenemistietä. Hän voi tehdä toisesta ystäväparin $\{A, B\}$ jäsenestä, esimerkiksi A:sta jonkin kolmannen, esimerkiksi C:n vihollisen. Venus vastaa tähän tekemällä A:sta ja D:stä ystävät ja uhkaamalla näin muodostaa ystäväkolmikon $\{A, B, D\}$. Tällöin Marsin on pakko tehdä B:stä ja D:stä viholliset. Mutta kun Venus nyt tekee A:sta ja E:stä ystävät, niin marsin valinnasta riippumatta Venus saa seuraavalla vuorollaan muodostetuksi joko ystäväkolmikon $\{A, B, E\}$ tai $\{A, D, E\}$. Jos taas Mars vastaa Venuksen ensimmäiseen siirtoon (siis $\{A, B\}$ ystäväpari) muodostamalla vihollisparin Venuksen valitsemaan pariin kuulumattomista, esimerkiksi C:sta ja D:stä, niin Venuksen toinen ystäväpari on $\{A, E\}$. Nyt Marsin on muodostettava vihollispari $\{B, E\}$. Jos Venus nyt muodostaa ystävaparin $\{A, C\}$, Marsin on vastattava vihollisparilla $\{C, E\}$, jolloin Venus pääsee muodostamaan ystäväkolmikon $\{A, B, C\}$.

b) Tällaisissa äärellisissä peleissä on aina jommallakummalla pelaajalla voittostrategia tai sitten kummallakin on häviämättömyysstrategia, jolloin peli päättyy parhaalla mahdollisella tavalla pelattaessa tasapeliin. Osoitetaan, että Venuksella on aina häviämättömyysstrategia. Vastaoletus: Marsilla on voittostrategia. Venus muodostaa nyt oman strategiansa seuraavasti. Hän valitsee ensimmäisellä siirrolla umpimähkäisen parin ja alkaa sitten pelata Marsin strategian mukaisesti. Venus siis kuvittelee olevansa Mars ja kuvittelee Marsin olevan Venus. Jos Marsin voittostrategia antaa Venukselle siirron, jonka hän on jo tehnyt, niin Venus valitsee taas ystäväparin mielivaltaisesti. Koska Venus kopioi Marsin voittostrategiaa, niin hän voittaa; ylimääräinen siirto ei mitenkään voi haitata. Mutta Marsikin voittaa voittostrategiallaan, joten on päädytty ristiriitaan. Vastaoletus on siis väärä. Venuksella on häviämättömyysstrategia.

c) Valitaan $n = 18$. Edellisen kohdan perusteella Venuksella on häviämättömyysstrategia. Mars ei siis voi voittaa. Näin ollen joko Venus voittaa, ennen kuin kaikki parit on käytetty, tai sitten kaikki parit tulevat valituiksi. Koska $R(4) = 18$, Venuksen ja Marsin käsittelemässä ihmisjoukossa on välttämättä joko neljan henegen ystäväjoukko tai neljän hengen vihollisjoukko. Koska Venus on noudattanut häviämättömyysstrategiaansa, vihollisjoukko ei ole mahdollinen, joten Venus voittaa.

18. *Osoita, että luvulla* 2^n+1 *ei ole alkulukutekijöita muotoa* $8k-1$*, missä* n*,* $k \in \mathbb{Z}_+$*.*

Ratkaisu. Tehdään se vastaoletus, että olisi olemassa alkuluku p ja positiivinen kokonaisluku n siten, että $p \equiv -1 \pmod 8$ ja $p \mid (2^n+1)$. Jos n olisi parillinen, olisi $\left(2^{n/2}\right)^2 \equiv 2^n \equiv -1 \pmod p$, eli olisi oltava $p \equiv 1 \pmod 4$, mikä antaisi ristiriidan. Täten luvun n on oltava pariton. Nyt $\left(2^{(n+1)/2}\right)^2 \equiv 2^n \cdot 2 \equiv -2 \pmod p$, eli $1 = (-2/p)_L = (-1/p)_L(2/p)_L$, missä $(\cdot/\cdot)_L$ merkitsee Legendren symbolia. Mutta koska $p \equiv -1 \pmod 4$, on $(-1/p)_L = -1$, ja koska $p \equiv -1 \pmod 8$, on $(2/p)_L = 1$, mikä antaa välittömästi ristiriidan.

19. *Olkoon* $n \in \mathbb{Z}_+$ *sellainen positiivinen kokonaisluku, että* 3^n-1 *on jaollinen luvulla* 2^n-1*. Osoita, että on oltava* $n=1$*.*

Ratkaisu. Tehdään se vastaoletus, että on olemassa kokonaisluku $n > 1$, jolle pätee $(2^n-1) \mid (3^n-1)$. Jos luku n olisi parillinen, olisi luku 2^n-1 kolmella jaollinen, mikä on selvästi mahdotonta. Täten luvun n on oltava pariton.

Koska nyt siis $2^n \equiv 0 \pmod 4$ ja $2^n \equiv 2 \pmod 3$, on oltava $2^n \equiv 8 \pmod{12}$. Jokainen alkuluku $p > 3$ on joko $\equiv \pm 1 \pmod{12}$ tai $\equiv \pm 5 \pmod{12}$. Alkulukujen, jotka ovat $\equiv \pm 1 \pmod{12}$, tulo on välttämättä $\equiv \pm 1 \pmod{12}$. Koska $2^n-1 \equiv 7 \pmod{12}$, on luvulla 2^n-1 oltava alkulukutekijä p, jolle $p \equiv \pm 5 \pmod{12}$.

Olkoon sitten h sellainen kokonaisluku, että $3h \equiv 1 \pmod p$. Koska $3^n \equiv 1 \pmod p$, ja n on pariton, on $3 \equiv h^{n-1} \equiv (h^{(n-1)/2})^2 \pmod p$ eli $(3/p)_L = 1$, missä $(\cdot/\cdot)_L$ on Legendren symboli.

Jos $p \equiv +5 \pmod{12}$, niin $p \equiv 1 \pmod 4$ ja $p \equiv 2 \pmod 3$, eli $1 = (3/p)_L = (p/3)_L = -1$. Toisaalta, jos $p \equiv -5 \pmod{12}$, niin $p \equiv 3 \pmod 4$ ja $p \equiv 1 \pmod 3$, eli $1 = (3/p)_L = -(p/3)_L = -1$. Koska molemmat tapaukset $p \equiv \pm 5 \pmod{12}$ johtavat ristiriitaan, olemme valmiit.

20. *Osoita, että yhtälöryhmällä*

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= y^5 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 &= z^2 \\ x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 &= t^3 \end{aligned}$$

on äärettömän monta ratkaisua, joissa x_1*,* x_2*,* x_3*,* x_4*,* y*,* z *ja* t *ovat positiivisia kokonaislukuja.*

Ratkaisu. Valitaan $a = 1^2+2^2+3^2+4^2$, $b = 1^3+2^3+3^3+4^3$ ja $c = 1^5+2^5+3^5+4^5$, ja tehdään yrite $x_1 = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, $x_2 = 2a^\alpha b^\beta c^\gamma$, $x_3 = 3a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ja $x_4 = 4a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Näille muuttujien arvoille on

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= a^{2\alpha+1} b^{2\beta} c^{2\gamma}, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 &= a^{3\alpha} b^{3\beta+1} c^{3\gamma}, \\ x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 &= a^{5\alpha} b^{5\beta} c^{5\gamma+1}. \end{aligned}$$

Yhtälöryhmälle saadaan siis ratkaisu, kunhan α, β ja γ voidaan valita niin, että

$$\begin{aligned} 2\alpha + 1 \equiv 2\beta \equiv 2\gamma \equiv 0 \pmod 5, \\ 3\alpha \equiv 3\beta + 1 \equiv 3\gamma \equiv 0 \pmod 2, \\ 5\alpha \equiv 5\beta \equiv 5\gamma + 1 \equiv 0 \pmod 3. \end{aligned}$$

Mutta tällaiset luvut voi kiinalaisen jäännöslauseen nojalla valita äärettömän monella eri tavalla.

21. *Etsi kokonaisluku n, jolle n on luvun $2^n + 2$ tekijä ja $100 < n < 1997$.*

Ratkaisu. Osoittautuu, että voimme valita $n = 2 \cdot 11 \cdot 43$. Mutta selittäkäämme hieman, miten tähän ehkä saattaisi päätyä.

Ensinnäkin luku n ei voi olla pariton. Nimittäin, jos n olisi pariton, olisi oltava $n \mid \left(2^{n-1} + 1\right)$, ja olisi se muotoa $2^r k + 1$ olevien alkulukujen tulo, missä k on pariton ja $r \in \mathbb{Z}_+$. Valitaan se luvun n alkulukutekijä $p = 2^r k + 1$, jolle r on pienin mahdollinen. Tällöin luvun n kaikki alkulukutekijät ovat $\equiv 1 \pmod{2^r}$, eli myös $n \equiv 1 \pmod{2^r}$. Voimme siis kirjoittaa $n = 2^r m + 1$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$. Mutta nyt olisi $-1 \equiv (-1)^k \equiv 2^{(n-1)k} \equiv 2^{2^r km} \equiv 2^{(p-1)m} \equiv 1^m \equiv 1 \pmod p$.

Täten luvun n on oltava parillinen. Eräs yksinkertainen mahdollinen tekijöihinjako luvulle n olisi silloin $n = 2p$, missä p on pariton alkuluku. Valitettavasti vain tämä ei käy, sillä Fermat'n pienen lauseen nojalla olisi oltava $2^{2p} + 2 \equiv 2^2 + 2 \equiv 6 \pmod p$, eli voisi olla vain $p = 3$, mutta tällöin n olisi liian pieni.

Kokeillaan sitten lukua muotoa $n = 2pq$, missä p ja q ovat eri parittomia alkulukuja. Nyt p ja q jakavat molemmat luvut $2^{2pq-1}+1$. Jos h ja k ovat kokonaislukuja siten, että $2h \equiv 1 \pmod p$ ja $2k \equiv 1 \pmod q$, niin nyt on oltava $-2 \equiv (h^{pq-1})^2 \pmod p$ ja $-2 \equiv (k^{pq-1})^2 \pmod q$. Koska nyt $(-2/p)_L = (-2/q)_L = +1$, on kummankin luvuista p ja q oltava $\equiv 1$ tai $3 \pmod 8$, kuten voi helposti tarkistaa siitä, että $(-1/p)_L = \pm 1$ sen mukaan, onka $p \equiv \pm 1 \pmod 4$, ja $(2/p)_L = +1$ jos $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, ja $(2/p)_L = -1$ jos $p \equiv \pm 5 \pmod 8$.

Lisäksi on oltava $p \mid (2^{2q-1}+1)$ ja $q \mid (2^{2p-1}+1)$. Jos olisi $p = 3$, niin olisi $q \mid (2^5+1) = 33$, eli olisi oltava $q = 11$, mutta nyt olisi $n = 66 < 100$. Siis $p \neq 3$ ja samoin $q \neq 3$. Siis on oltava $p \geqslant 11$ ja $q \geqslant 11$. Yritetään selvitä valinnalla $p = 11$ ja $q > 11$. Selvästi on oltava $q \leqslant 1997/33 < 61$. Siis on oltava $q \in \{17, 19, 41, 43, 59\}$. Jotta ehto $11 \mid (2^{22q-1} + 2)$, tai siis $11 \mid (2^{2q-1} + 1)$ pätisi, voisimme käyttää sitä tietoa, että $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$, eli olisi mukavaa, jos $2q - 1 \equiv 5 \pmod{10}$, eli $q \equiv 3 \pmod{10}$. Yllä luetelluista vaihtoehdoista täsmälleen $q = 43$ on tällainen.

Eli yritteemme on nyt $n = 2 \cdot 11 \cdot 43 = 946$. Tämä luku toteuttaa halutut ehdot, kunhan vain tarkistetaan, että $43 \mid (2^{2 \cdot 11 - 1} + 1)$. Mutta $(2/43)_L = -1$, eli Eulerin kriteerin vuoksi $2^{21} \equiv -1 \pmod{43}$, ja olemme valmiit.

22. *Olkoon a positiivinen kokonaisluku, joka ei ole neliöluku. Osoita, että on olemassa äärettömän monta alkulukua p, joille ei löydy kokonaislukua x niin, että $x^2 \equiv a \pmod p$.*

Ratkaisu. Voidaan luonnollisesti olettaa, että a on neliövapaa luku, jolloin luku a voidaan kirjoittaa pareittain erisuurten alkulukujen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tulona, missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Oletetaan ensin, että a on pariton. Varmasti on olemassa kokonaisluku b niin, että $(b/p_1)_L = -1$, missä $(\cdot/\cdot)_L$ on Legendren symboli. Kiinalaisen jäännöslauseen nojalla on olemassa kokonaisluku K niin, että

$$K \equiv 1 \pmod 4, \quad K \equiv b \pmod{p_1}, \quad K \equiv 1 \pmod{p_2},$$
$$K \equiv 1 \pmod{p_3}, \quad \ldots, \quad K \equiv 1 \pmod{p_n}.$$

Dirichlet'n kuuluisan lauseen nojalla löytyy nyt äärettömän monta alkulukua P niin, että $P \equiv K \pmod{4p_1p_2\cdots p_n}$. Erityisesti nyt siis tällaiselle alkuluvulle pätee

$$\left(\frac{a}{P}\right)_L = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_1}{P}\right)_L = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{P}{p_i}\right)_L = \left(\frac{b}{p_1}\right)_L \prod_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{p_i}\right)_L = (-1)\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1 = -1,$$

missä $(\cdot/\cdot)_L$ on Legendren symboli.

Oletetaan sitten seuraavaksi, että a on parillinen, jolloin voimme olettaa, että $p_1 = 2$. Kiinalaisen jäännöslauseen nojalla on olemassa kokonaisluku K siten, että

$$K \equiv 5 \pmod 8, \quad K \equiv 1 \pmod{p_1},$$
$$K \equiv 1 \pmod{p_2}, \quad \ldots, \quad K \equiv 1 \pmod{p_n},$$

ja Dirichlet'n lauseen nojalla on olemassa äärettömän monta alkulukua P niin, että $P \equiv K \pmod{8p_1p_2\cdots p_n}$. Tällaiselle alkuluvulle tietenkin pätee

$$\left(\frac{a}{P}\right)_L = \left(\frac{2}{P}\right)_L \prod_{i=2}^{n}\left(\frac{p_i}{P}\right)_L = (-1)\cdot \prod_{i=2}^{n}\left(\frac{P}{p_i}\right)_L = -\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{p_i}\right)_L = -1.$$

23. *Olkoon S kaikkien sellaisten järjestettyjen kolmikkojen (a_1, a_2, a_3) joukko, missä $1 \le a_1, a_2, a_3 \le 10$. Jokainen S:ään kuuluva kolmikko synnyttää lukujonon, jonka määrittelee sääntö $a_n = a_{n-1}|a_{n-2} - a_{n-3}|$, kun $n \ge 4$. Osoita, että näiden jonojen joukossa on tasan 494 sellaista, joissa $a_n = 0$ jollain n.*

Ratkaisu. Jos jonossa on kaksi peräkkäistä samaa lukua tai kaksi lukua, joiden erotus on 1, niin jonossa on 0 (ja kaikki tätä nollaa seuraavat jonon jäsenet ovat nollia. Kolmikkoja (a_1, a_2, a_3), joissa $a_1 = a_2$, on 100 kappaletta (a_1:llä 10 vaihtoehtoa, samoin a_3:lla. Kolmikkoja , joissa $a_2 = a_3$ on samoin 100 kappaletta. Tällöin ne 10 kolmikkoa, joissa $a_1 = a_2 = a_3$ on laskettu kahdesti. Sellaisia eri kolmikkoja, joissa kaksi ensimmäistä tai kaksi viimeistä ovat samoja, on siis 190 kappaletta. Lasketaan sitten kaikki jonot, joissa $|a_1 - a_2| = 1$ ja $a_3 \ne a_2$. Jos Jos $a_1 \ne 1, 10$, mahdollisia pareja (a_1, a_2) kaksi. Lisäksi tulevat parit (1, 2) ja (10, 9). Kuhunkin pariin liitetään sellaiset a_3, joissa $a_3 \ne a_2$. Aikaisemmin mukaan laskemattomia nollajonon tuottavia kolmikkoja tulee näin $(16+2)\cdot 9 = 262$ kappaletta. Aikaisemmin mukaan laskemattomia kolmikkoja, joissa $|a_2 - a_3| = 1$ liittyy pareihin $(a_2, a_3) = (1, 2)$ ja $(a_2, a_3) = (10, 9)$ 8 kappaletta ja muihin 16 pariin 7 kappaletta. Tällaisia nollajonon tuottavia kolmikkoja on siis $16 \cdot 7 + 16 = 128$. Jos $|a_1 - a_2| = 2$

ja $a_3 = 1$, niin $a_4 = 2$ ja $a_6 = a_5|a_4 - a_3| = a_5$, josta seuraa $a_8 = 0$. Aikaisemmin mukaan laskemattomia kolmikkoja, joissa ehto $|a_1 - a_2| = 2$ ja $a_3 = 1$ toteutuu, on yhteensä 14 kappaletta. Koska $190 + 262 + 128 + 14 = 494$, väite on todistettu, jos näytetään, että muita nollajonon tuottavia kolmikkoja (a_1, a_2, a_3) ei ole. Osoitetaan induktiolla, että jos $|a_1 - a_2| > 1$, $|a_2 - a_3| > 1$ ja $a_3 > 1$, niin kaikilla $n \ge 4$ on $a_n \ge 2a_{n-1}$ ja $a_n \ge 2$. Väite on tosi, kun $n = 4$ ja $n = 5$. Silloin $a_6 = a_5(a_4 - a_3) \ge a_5 a_3 \ge 2a_5$. Väite on siis tosi myös, kun $n = 6$. Jos väite nyt pätee, kolmella peräkkäisellä n:n arvolla, esimerkiksi, kun $n = k-2$, $k-1$, k, niin $a_{k+1} = a_k(a_{k-1} - a_{k-2}) \ge a_k a_{k-2} \ge 2a_k$. Väite pätee siis kaikilla $n \ge 4$, joten jonossa (a_k) ei ole nollia.

24. *Tarkastellaan kaikkia joukon $\{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$ 1000-alkioisia osajoukkoja. Valitaan jokaisesta sellaisesta pienin alkio. Kaikkien näiden pienimpien alkioiden aritmeettinen keskiarvo on $\frac{p}{q}$, missä p ja q ovat yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että $p + q = 431$.*

Ratkaisu. Osajoukkoja on kaikkiaan $\binom{2015}{1000}$ kappaletta. Pienimpinä alkioina tulevat kysymykseen luvut 1, 2, ..., 1016. Pienin alkio on 1 $\binom{2014}{999}$:ssä joukossa, 2 $\binom{2013}{999}$:ssä joukossa jne. Pienimpien alkioiden summa on siis

$$S = \sum_{k=1}^{1016} k\binom{2015-k}{999}.$$

Tämä summa voidaan kirjoittaa myös kaksinkertaisena summana

$$S = \sum_{j=0}^{1015}\sum_{k=0}^{j}\binom{999+k}{999}.$$

Mutta tunnetusti

$$\sum_{n=k}^{m}\binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1}$$

(helppo induktiotodistus). Siis itse asiassa

$$S = \sum_{j=0}^{1015}\binom{1000+j}{1000} = \binom{2016}{1001}.$$

Nyt pienimpien alkioiden aritmeettinen keskiarvo on

$$\frac{\binom{2016}{1001}}{\binom{2015}{1000}} = \frac{2016}{1001} = \frac{288}{143}.$$

Viimeistä lukua ei voi supistaa, joten todellakin $p + q = 288 + 143 = 431$.

25. *Osoita, että kun kulmat mitataan asteissa, niin*

$$\prod_{k=1}^{45} \frac{1}{\sin^2(2k-1)} = 2^{89}.$$

Ratkaisu. Olkoon tehtävässä kysytty tulo x ja olkoon

$$y = \prod_{k=1}^{45} \sin^2(2k) = \prod_{k=1}^{44} \sin^2(2k).$$

Silloin

$$xy = \prod_{k=1}^{89} \sin^2 k.$$

Koska $\sin^2 45° = \frac{1}{2}$, $\sin(90° - x) = \cos x$ ja $2\sin x \cos x = \sin 2x$, on

$$xy = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{4} 4\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2\cdot 2^{88}}\prod_{k=1}^{44} \sin^2(2k) = \frac{1}{2^{89}y}.$$

Väite seuraa, kun supistetaan y:llä.