Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, tammikuu 2020

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 21.2.2020 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna tai (sähkö-)postitse.

Helpommat tehtävät: `npalojar@abo.fi` tai

Neea Palojärvi
Matematik och Statistik
Åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 Åbo,

vaativammat: `olli.jarviniemi@gmail.com` tai

Olli Järviniemi
Lontoonkatu 9 A29
00560 Helsinki

Palautuspäivämääristä on usein jonkin verran joustettu, mutta tällä kertaa EGMO-joukkueen valinta täytyy tehdä jo seuraavan valmennusviikonlopun aikana. Siksi tässä tapauksessa aikaraja perjantai 21.2. on ehdoton (tasavertaisuussyistä myös niille, jotka eivät ole kelpoisia osallistumaan EGMO-kilpailuun).

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Huomioi tietosuojalauseke:
`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Helpompia tehtäviä

1. Mystisessä laskimessa on nappi $*$, joka toimii seuraavasti:

- Jos näytöllä on pariton luku, niin napin painaminen muuttaa luvun kolminkertaiseksi.
- Jos näytöllä on parillinen luku, niin napin painaminen puolittaa luvun.

Aluksi näytöllä on luku viisi. Tämän jälkeen nappia painetaan 2020 kertaa. Mikä luku saadaan?

2. Matematiikkakilpailussa on 90 monivalintatehtävää. Oikeasta vastauksesta saa viisi ja väärästä -1 pistettä. Oppilas vastasi kaikkiin kysymyksiin. Osoita, että hänen pistemääränsä voi olla -78 pistettä, mutta ei 116 pistettä.

3. Neliö $PQRS$ on piirretty teräväkulmaisen kolmion $\triangle ABC$ sisään. Neliön $PQRS$ sivun pituus on 4 cm, kärjet P ja Q ovat sivulla AB, kärki R sivulla BC ja kärki S sivulla AC. Jos sivun AB pituus on 8 cm, niin mikä on kolmion $\triangle ABC$ ala?

4. Ratkaise seuraava yhtälöryhmä reaalilukujen joukossa:

$$\begin{cases} xy = z \\ yz = x \\ zx = y. \end{cases}$$

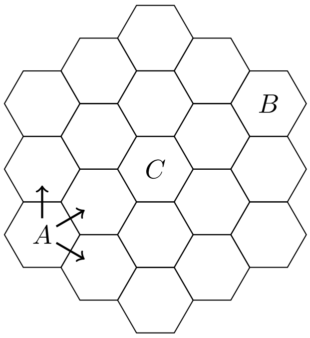
5. Kuinka monta sellaista joukon $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ osajoukkoa on, jotka eivät ole joukon $\{1,2,3,4,5\}$ tai joukon $\{4,5,6,7,8\}$ osajoukkoja?

6. Kolmion ABC ulkopuolelle piirretään neliö, jonka sivuista yksi on jana AB. Lisäksi piirretään toinen neliö, jonka sivuista yksi on jana BC. Osoita, että näiden neliöiden keskipisteet ja janan CA keskipiste muodostavat tasakylkisen suorakulmaisen kolmion.

7. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

8. Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste ja piste E kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapiste. Olkoon kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O. Osoita, että $OC \perp DE$.

9. Oheisessa kuusikulmioruudukossa on kuljettava ruudusta A ruutuun B kulkematta ruudun C kautta. Ainoastaan nuolten suuntiin saa kulkea, yksi ruutu kerrallaan. Montako mahdollista kulkureittiä on?



Vaativampia tehtäviä

10. Kahden avaruudessa sijaitsevan ympyrän sanotaan sivuavan toisiaan, jos niillä on yhteinen piste ja tämän pisteen kautta kulkeva yhteinen tangentti. Avaruudessa on kolme ympyrää, jotka sivuavat pareittain toisiaan kolmessa eri pisteessä. Todista, että ympyrät ovat joko samassa tasossa tai saman pallon pinnalla.

11. Olkoon P epävakio kokonaislukukertoiminen polynomi. Osoita, että on olemassa sellainen kokonaisluku n, että luvulla $P(n)$ on vähintään 2020 eri alkutekijää.

12. Määritä kaikki kokonaisluvut m, joilla kongruenssiyhtälöllä $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ on ratkaisu.

13. Olkoon P epävakio kokonaislukukertoiminen polynomi. Osoita, että on olemassa kokonaisluku k ja ääretön kokonaislukujen jono $a_1, a_2, \ldots$, joilla $P(a_i) \neq 0$ kaikilla i ja

$$\operatorname{syt}(P(a_i), P(a_j)) \leq k$$

kaikilla $i \neq j$.

14. Olkoon P epävakio kokonaislukukertoiminen polynomi. Alkulukua p sanotaan *hyväksi*, jos kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k pätee seuraava väite: yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ on yhtä monta (keskenään epäkongruenttia) ratkaisua kuin yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$. Todista, että seuraavista ehdoista pätee täsmälleen yksi.

1. P on jaollinen jonkin epävakion polynomin neliöllä.
2. Kaikki paitsi äärellisen moni alkuluku p on hyvä.

15. $2n$ joukkuetta osallistui turnajaisiin, joissa kesti $2n - 1$ päivää. Jokainen kahden joukkueen pari pelasi keskenään täsmälleen kerran, ja joka päivä pelattiin täsmälleen n peliä. Tasapelejä ei ollut, vaan jokainen peli päättyi jommankumman joukkueen voittoon. Todista, että voidaan valita kullekin päivälle yksi sinä päivänä pelin voittanut joukkue niin, että mitään joukkuetta ei valita kahdesti.

16. Tasossa on viisi ympyrää, joista kullakin neljällä on yhteinen piste. Todista, että kaikilla viidellä ympyrällä on yhteinen piste.

17. Todista, että kuperassa n-kulmiossa ei voida valita enempää kuin n sivua ja lävistäjää siten, että kaikilla valittujen janojen pareilla on yhteinen piste.