Kesän 2019 kirjevalmennustehtäviä

Ratkaisuja toivotaan elokuun loppuun mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen

npalojar@abo.fi tai postitse osoitteeseen
Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku.

Matematiikkaolympialaisiin valitun joukkueen on tietenkin syytä harjoitella mahdollisimman paljon ennen olympialaisia, esimerkiksi näillä tai muilla tehtävillä. Valmennuksessa jatkaville tehtävien ratkominen katsotaan eduksi tulevissa joukkuevalinnoissa.

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. Sinnikäs yrittäminen kannattaa. Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän.

Joissakin seuraavissa tehtävissä saattaa olla apua primitiivisten juurten tuntemisesta. Niihin voi tutustua esimerkiksi Esa Vesalaisen kirjoittaman monisteen "Lyhyt johdatus alkeelliseen lukuteoriaan" [1] luvun 4 avulla.

Helpompia tehtäviä

1. Positiivisten kokonaislukujen jonon kolme ensimmäistä termiä ovat $2018, 121$ ja 16. Seuraava termi saadaan aina laskemalla edellisen termin numeroiden summa ja korottamalla saatu luku toiseen potenssiin. Mikä on jonon 2018. termi?

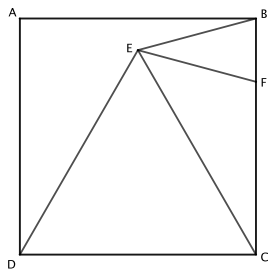
2. Onko olemassa positiivista kokonaislukua n, jolla on tasan 9 positiivista tekijää siten, että nämä tekijät voidaan asettaa 3×3-ruudukkoon siten, että jokaisen rivin, sarakkeen ja diagonaalin lukujen tulo on sama?

3. Eräänä vuonna ensimmäinen päivä tammikuuta ei ollut viikonloppuna, mutta viimeinen päivä joulukuuta oli. Koulu alkoi 15. päivä elokuuta. Mikä viikonpäivä tämä oli?

4. Juku teki matematiikkapiirissään seuraavan konjektuurin: jos kahden luvun x ja y, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä, tulo on jaollinen joillakin kokonaisluvuilla a ja b, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä, niin ainakin toinen luvuista x ja y on jaollinen joko luvulla a tai b. Päteekö tämä konjektuuri?

5. Kuten kuvassa, nelikulmio $ABCD$ on neliö, piste F on sivulla BC ja piste E neliön $ABCD$ sisällä. Kolmio DEC on tasasivuinen ja on $EB = EF$. Kuinka

[1] `https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/laajalukuteoriamoniste.pdf`



suuri kulma $\angle CEF$ on?

6. Selvitä kaikki vaihtoehdot: kuinka monta terävää kulmaa voi olla konveksissa monikulmiossa?

7.

(a) Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että luku $n^3 - n$ on jaollinen kuudella.

(b) Etsi kaikki kokonaisluvut x, jotka toteuttavat kongruenssiyhtälön $29x^{33} \equiv 27 \pmod{11}$.

8. Ratkaise yhtälö $x^2(2-x)^2 = 1 + 2(1-x)^2$.

9. Nelinumeroisella luvulla $ABCD$ on seuraava ominaisuus:

$$ABCD = A \times BCD + ABC \times D.$$

Mikä on luvun $ABCD$ pienin mahdollinen arvo?

10. Aliisa pelaa kolikoilla seuraavaa peliä laatikoita A ja B käyttäen: Aluksi laatikossa A on n kolikkoa ja laatikko B on tyhjä. Yhdellä askeleella Aliisa voi siirtää yhden kolikon laatikosta A laatikkoon B tai poistaa laatikosta A k kolikkoa, missä k on laatikossa B olevien kolikoiden lukumäärä. Aliisa voittaa pelin, kun laatikko A on tyhjä.

(a) Osoita, että jos laatikossa A on aluksi 6 kolikkoa, niin Aliisa pystyy voittamaan neljällä askeleella.

(b) Aluksi laatikossa A on 2018 kolikkoa. Mikä on pienin määrä askelia, joka tarvitaan, jotta Aliisa voittaa pelin?

Vaikeampia tehtäviä

1. Olkoot M ja N kolmion ABC sisäpisteet, joille $\angle MAB = \angle NAC$ ja $\angle MBA = \angle NBC$. Todista, että

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

2. Olkoon $ABCD$ neliö, jonka keskipiste on O. Sivun AD suuntainen suora O:n kautta leikkaa sivut AB ja CD pisteissä M ja N, ja eräs sivun AB suuntainen suora leikkaa lävistäjän AC pisteessä P. Todista, että

$$OP^4 + \left(\frac{MN}{2}\right)^4 = MP^2 \cdot NP^2.$$

3. Todista positiivisille luvuille a_1, a_2, a_3 ja a_4 epäyhtälö

$$2 \leq \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \frac{a_3}{a_4+a_1} + \frac{a_4}{a_1+a_2}.$$

4. Olkoon $p \geq 3$ alkuluku. Määritellään

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \quad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

missä $\{x\} = x - [x]$ on luvun x murto-osa. Määritä $f(p)$.

5. Etsi kaikki kaksinumeroiset kokonaisluvut $n = 10a + b$ ($a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$), jotka jakavat luvun $k^a - k^b$ kaikilla kokonaisluvuilla k.

6. Etsi kaikki reaaliset funktiot $f(x)$, jotka on määritelty välillä $(-1, 1)$ ja jotka ovat tällä välillä jatkuvia sekä on voimassa

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}, \quad (x, y, x+y \in (-1, 1)).$$

7. Seitsemän oppilasta tekee matematiikan kokeen. Jokaisen tehtävän suhteen löytyi korkeintaan kolme oppilassta, joka ratkaisi tehtävän. Jokaista oppilasparia kohden löytyy ainakin yksi tehtävä, jonka kumpikin ratkaisi. Määritä todistuksen kera, mikä on pienin mahdollinen määrä tehtäviä kokeessa.

8. 5×5-ruudukon jokaisessa yksikköruudussa on lamppu, joka on pois päältä. Jos kosketamme lamppua, niin kyseinen lamppu ja kaikki sen viereisissä ruuduissa olevat lamput vaihtavat tilaansa. Kun on suoritetty tietty määrä lamppujen kosketuksia, niin tasan yksi lamppu on päällä. Selvitä kaikki ruudut, joissa tämä lamppu voi olla.
Huomautus: vierekkäisen ruudut ovat niitä, joilla on yhteinen sivu.

9. Kaksi reaalilukujen sarjaa $x_1, x_2, \ldots$ ja $y_1, y_2, \ldots$ määritellään seuraavasti:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \qquad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}$$

ja

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$$

kaikille $n \geq 1$. Osoita, että $2 < x_n y_n < 3$ kaikille $n > 1$.

10. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut k, joille seuraava ehto pätee: jos $F(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi, joka toteuttaa ehdon

$$0 \leq F(c) \leq k, \text{ kun } c = 0, 1, \ldots, k+1,$$

niin $F(0) = F(1) = \ldots = F(k+1)$.