LOKA-/MARRASKUUN VALMENNUSTEHTÄVÄSARJA

Ratkaisuja kaivataan joulukuun alkuun mennessä osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Matematik och Statistik, Åbo Akademi, Domkyrkotorget 1, 20500 Åbo

Helpommat tehtävät

(1) Neliön sivun pituus on 60. Neliön sisällä on 121 eri pistettä. Osoita, että jotkin kolme pisteistä muodostavat kolmion, jonka ala on korkeintaan 30.

(2) Joukko M koostuu kaikista luvuista, jotka ovat muotoa $\frac{n}{2}+\frac{m}{5}$ joillakin kokonaisluvuilla $0 \leq m, n \leq 100$. Mikä on joukon M alkioiden summa?

(3) Osoita, että luku $m^2 - m + 1$ on aina joukon $M = \{n^2 + n + 1 : \ n \in \mathbb{N}\}$ alkio.

(4) Osoita, että jos p on neliö, niin on olemassa positiiviset kokonaisluvut r ja q, joilla

$$p^2 + p + 1 = (r^2 + r + 1)(q^2 + q + 1)$$

(5) Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut m, joilla

$$\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{m + 2011}\}$$

(Huom: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, eli luvun x murto-osa.)

(6) Etsi kaikki nelinumeroiset neliöt, jotka ovat muotoa $\overline{aabb}$ (kymmenjärjestelmäesitys).

(7) Osoita, että kahden muotoa $a^2 - 5b^2$ olevan luvun tulo on myös tätä muotoa.

(8) Määritä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2a^2 - 2ab + b^2 = a \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 = b \end{cases}$$

kaikki reaaliset ratkaisut.

(9) Suorakulmion sivut ja lävistäjät ovat kokonaislukuja. Osoita, että suorakulmion ala on luvulla 12 jaollinen kokonaisluku.

(10) Vladimir kirjoittaa luvut 1 ja 2 liitutaululle. Sitten hän toistaa uudestaan ja uudestaan seuraavaa operaatiota: Hän kirjoittaa seuraavaksi luvuksi aina kahden edellisen luvun neliöiden summan. Todista, että Vladimir ei tule koskaan kirjoittamaan kolmella tai seitsemällä jaollista lukua taululle.

(11) Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n ja m, joilla $n \mid (2m-1)$ ja $m \mid (2n-1)$.

Vaikeammat tehtävät

(1) Jos

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \cdots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}$$

ja

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{1006} = 503^2,$$

niin mitä on x_{1006}?

(2) Säännöllisen monikulmion $A_1A_2\dots A_n$ ulkopuolelta valitaan piste B niin, että A_1A_2B on tasasivuinen kolmio. Määritä kaikki luvut n, joilla B, A_2 ja A_3 ovat jonkin säännöllisen monikulmion peräkkäiset sivut.

(3) Positiiviset kokonaisluvut a, b, c, d toteuttavat ehdot $a+b=c$ ja $a+d=2c$. Osoita, että on olemassa suorakulmainen kolmio, jonka sivut ovat kokonaislukuja, ja jonka ala on $abcd$.

(4) Polynomin $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$ nollakohdat ovat reaalisia. Osoita, että $a^2 \geq 2b + 12$.

(5) Määritä kaikki parametrin a arvot, joilla yhtälöparilla

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = x^2 + y + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu (x, y).

(6) Olkoot a, b, c keskenään erisuuria positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon k positiivinen kokonaisluku, jolla

$$ab + bc + ca \geq 3k^2 - 1.$$

Osoita, että

$$\frac{1}{3}\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq abc + 3k.$$

(7) 1000×1000-ruudukon jokainen ruutu on musta tai valkoinen. Mustien ja valkoisten ruutujen lukumäärän erotus on 2012. Osoita, että on olemassa 2×2-ruudukko, jossa on pariton määrä valkoisia ruutuja.

(8) Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

(9) Olkoon k epänegatiivinen kokonaisluku. Osoita, että voidaan löytää $4 \cdot 2^k$ keskenään erisuurta positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole suurempi kuin $5 \cdot 3^k$, ja joista mitkään kolme eivät ole aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä.

(10) Kuinka monella tavalla luku $\frac{2011}{2010}$ voidaan esittää kahden muotoa $\frac{n+1}{n}$ olevan luvun tulona, missä n on positiivinen kokonaisluku, ja tekijöiden järjestyksellä ei ole väliä?