Harjoitustehtävät, tammikuu 2014, vaativammat

Mielellään paperille kirjoitetut vastaukset joko helmikuun valmennusviikonvaihteeseen Päivölään, tai samoihin aikoihin paperipostissa osoitteeseen `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu`. Jos haluat jättää vastauksia sähköpostitse, niin osoite on `matti.lehtinen@helsinki.fi`.

1. Määritä kaikki alkuluvut p, joille $5^p + 4p^4$ on neliöluku.

2. Määritä kaikki alkulukuparit (p, q), joille

$$p^q q^p = (2p + q + 1)(2q + p + 1).$$

3. Luvut $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $n \geq 3$, ovat eri suuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että joillain i ja j $k_i + k_j$ ei ole tekijänä missään luvuista $3k_1, 3k_2, \ldots, 3k_n$.

4. Yhdistyksellä on 11 toimikuntaa. Joka toimikunnassa on viisi jäsentä ja jokaisella kahdella toimikunnalla on yhteinen jäsen. Osoita, että jokin yhdistyksen jäsen kuuluu neljään toimikuntaan.

5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kuinka monelle jonon $(1, 2, \ldots, n)$ permutaatiolle $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ pätee $k|(2(x_1 + x_2 + \cdots + x_k))$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$?

6. Ryhmässä, jossa on k henkilöä, jotkin henkilöt tuntevat toisensa ja jotkin eivät tunne. Joka ilta jokin ryhmän jäsen kutsuu kaikki tuttavansa illalliselle ja esittelee keskenään tuntemattomat vieraat toisilleen. Oletetaan, että kun jokainen ryhmän jäsen on järjestänyt ainakin yhdet illalliset, joukossa on vielä jotkin kaksi henkilöä, jotka eivät ole tutustuneet. Osoita, että nämä henkilöt eivät tapaa toisiaan seuraavilla illallisilla.

7. Suorakulmiossa $ABCD$ on $BC = 2AB$. Olkoon E sivun BC keskipiste ja P jokin sivun AD sisäpiste. Olkoot vielä F ja G pisteen A kohtisuora projektio suoralle BP ja pisteen D kohtisuora projektio suoralle CP. Osoita, että $EFPG$ on jännenelikulmio.

8. Piste M on teräväkulmaisen kolmion ABC sivun AC sisäpiste ja N on sellainen puolisuoran AC piste, että $MN = AC$. Piste D on M:n kohtisuora projektio suoralla BC ja E on N:n kohtisuora projektio suoralla AB. Osoita, että kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste on kolmion BDE ympärysympyrällä.

9. Piste P on ympyrän Γ ulkopuolella ja PA, PB ovat Γ:n tangentteja, P ja Q sivuamispisteet. Olkoon M janan AP ja N janan AB keskipiste. Janan MN jatke leikkaa ympyrän Γ pisteessä C. Suora PC leikkaa Γ:n myös pisteessä D ja suora ND suoran PB pisteessä Q. Osoita, että $MNQP$ on vinoneliö.

10. Kolmio ABC on teräväkulmainen. Olkoot A', B' ja C' kärjistä A, B ja C piirrettyjen korkeusjanojen kantapisteet ja H korkeusjanojen leikkauspiste. Olkoon P janan AH keskipiste, Q suorien $B'P$ ja AB leikkauspiste ja R janojen $A'C'$ ja BB' leikkauspiste. Osoita, että $QR \perp BC$.

11. Kolmion sivut ovat a, b ja c. Mitä arvoja voi saada $\lfloor q \rfloor$, kun

$$q = \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{a^3+b^3+c^3}?$$

12. Osoita, että kaikille positiivisille reaaliluvuille x, y ja z pätee

$$\sqrt{x^2+z^2} \le \sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2}xy} + \sqrt{y^2+z^2-\sqrt{2}yz}.$$

13. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille on voimassa
(a) $f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y)$ kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$,
(b) $f(x) \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

14. Osoita, että ei-negatiivisille luvuille x, y, z pätee

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)} \ge \frac{xyz+1}{2}.$$

15. Määritellään lukujono (x_n) asettamalla

$$x_1 = 10^6, \qquad x_{n+1} = n\left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + n, \quad \text{kun} \quad n \ge 1.$$

Osoita, että jonolla (a_n) on ääretön aritmeettinen osajono (b_n).