Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, joulukuu 2020

Uutta: mukana on monivalintatehtäviä, joihin ei pyydetä perusteluja, vaan niihin vastaamiseen riittää kirjainrivi.

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella – poikkeuksena uudet monivalintatehtävät.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 15.1.2021 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna tai sähköpostitse. Vastausosoitteet kussakin osiossa.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Huomioi tietosuojalauseke:
`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Monivalintatehtäviä

Lähetä pelkkä vastausrivi ja nimesi osoitteeseen `jks@iki.fi`.

1. Janan AB pituus on 3 cm. Pisteestä C tiedetään, että $\angle ACB = 60°$. Millainen kuvio muodostuu pisteen C kaikista mahdollisista sijainneista?

(A) suora

(B) kolmio

(C) kaksi ympyränkaarta

(D) ellipsi

2. Ympyrän jänteet AB ja CD leikkaavat ympyrän ulkopuolella pisteessä X. Olkoon O ympyrän keskipiste. Kuinka suuri on $\angle AXC$?

Ympyrän jänteet AB ja CD leikkaavat ympyrän ulkopuolella pisteessä X. Olkoon O ympyrän keskipiste. Kuinka suuri on AXC?

(A) $\angle AXC = \angle AOC + \angle BOD$.

(B) $\angle AXC$ on puolet kulmien AOC ja BOD erotuksesta.

(C) $\angle AXC = \angle AOC$

(D) $\angle AXC = \angle BOD - \frac{1}{2}\angle AXC$.

3. Kolmiossa ABC on $AC = BC$ ja $\angle BCA = 40°$. Olkoon ω ympyrä, joka kulkee kolmion ABC kaikkien kärkien kautta. Lisäksi olkoon D sellainen piste ympyrän ω ulkopuolella, että se on samalla puolella sivua AC kuin piste B sekä pätee $\angle DCB = 90°$ ja $BC = CD$. Suora DA leikkaa ympyrän ω pisteen A lisäksi pisteessä E. Kuinka suuri on $\angle ECB$?

(A) $\angle ECB = 45°$

(B) $\angle ECB = 60°$

(C) $\angle ECB = 40°$

(D) Tehtävässä annetut tiedot eivät riitä kulman määrittämiseen.

4. Ympyrän säde on 7 cm ja pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä 5 cm. Olkoon AB ympyrän jänne, joka kulkee pisteen P kautta. Tiedetään, että $|PA| = 3$ cm. Määritä AB.

(A) 6 cm

(B) 7 cm

(C) 9 cm

(D) 11 cm

5. Pisteestä A ympyrälle piirretty tangentti sivuaa ympyrää pisteessä E. Tiedetään, että $|AE| = 3\sqrt{2}$. Toinen pisteen A kautta piirretty suora leikkaa ympyrän pisteissä B ja C. Tiedetään, että $|AB| = |BC|$. Määritä $|AC|$.

(A) 6

(B) 9

(C) $3\sqrt{3}$

(D) $3\sqrt{2}$.

6. Ympyrän säde on 6 cm ja pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä 9 cm. Pisteestä P†piirretään suora, joka leikkaa ympyrän pisteissä A ja B. Tiedetään, että $|AB| = |PA|$. Määritä $|PB|$.

(A) 9 cm

(B) $\sqrt{51}$ cm

(C) $3\sqrt{10}$ cm

(D) $8\sqrt{7}$ cm

7. Piparkakkutalon sabluuna piirretään käyttäen harppia, kulmaviivotinta sekä laskinta. Taloon halutaan tehdä ympyräsegmentin mallinen ikkuna, jonka leveys on 6cm ja korkeus 2cm. Kuinka pitkä säde sinun pitää ottaa harpista?

(A) 4 cm

(B) $\frac{13}{4}$ cm

(C) 5 cm

(D) $\frac{11}{2}$ cm

8. Kaksi ympyrää on osittain päällekkäin. Ne leikkaavat pisteissä A ja B. Toisen ympyrän säde on 5 ja toisen 10. Ympyröiden keskipisteiden etäisyys on 12. Laske $|AB|$. (Ohje: yhdistä pisteet A ja B, sekä ympyröiden keskipisteet, laske näiden janojen leikkauspisteiden suhteen pisteen potensseja, muodosta yhtälöryhmä ja ratkaise.)

(A) 7 cm

(B) $\sqrt{87}$

(C) $\frac{\sqrt{1071}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{974}}{5}$

Helpompia tehtäviä

Lähetä perustellut ratkaisut osoitteeseen `n.palojarvi@gmail.com`. Muista mainita viestissä nimesi.

9. Kilpamatematiikassa on tyypillistä esimerkiksi todistaa, että pisteet ovat samalla suoralla tai ympyrällä tai että suorat leikkaavat samassa pisteessä. Tässä tehtävässä on tavoitteena harjoitella tällaisten tilanteiden tunnistamista.

Tarkastellaan seuraavaa tilannetta: Olkoot ABC kolmio, P, Q ja R sivujen AB, BC ja AC keskipisteet sekä O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Esitä todistuksineen annettujen pisteiden avulla

(a) kolme pistettä, jotka ovat samalla suoralla, mutta eivät muodosta kolmion ABC sivua;

(b) kolme suoraa, jotka leikkaavat samassa pisteessä;

(c) neljä pistettä, jotka ovat samalla ympyrällä.

10. Tasossa on kaksi ympyrää, Γ_1 ja Γ_2, joista keskipisteet ovat O_1 ja O_2 tässä järjestyksessä. Piste O_1 on ympyrän Γ_2 ulkopuolella ja piste O_2 ympyrän Γ_1 ulkopuolella. Ympyrät leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä ja toinen näistä pisteistä on P. Lisäksi suora O_1P leikkaa ympyrän Γ_2 pisteessä R ja suora O_2P ympyrän Γ_1 pisteessä S.

Osoita, että pisteet R, S, O_1 ja O_2 ovat samalla ympyrällä.

11. Olkoon kolmiossa ABC kulma $\angle CAB$ suora. Lisäksi olkoon piste L sivulla BC pisteiden B ja C välissä. Merkitään pisteiden A, B ja L sekä A, C ja L kautta kulkevia ympyröitä merkinnöillä ω_1 ja ω_2 vastaavasti. Ympyrät ω_1 ja ω_2 leikkaavat suorat AC ja AB pisteissä M ja N vastaavasti.

Osoita, että L, M ja N ovat samalla suoralla.

12. Olkoon ABC kolmio ja X piste kolmion sisältä. Suorat AX, BX ja CX kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän kärkien lisäksi pisteissä P, Q ja R tässä järjestyksessä. Valitaan jokin sellainen piste U janalta XP, että se on aidosti pisteiden X ja P välissä. Oletetaan, että sellainen pisteen U kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran AB kanssa, leikkaa janan XQ pisteessä V. Vastaavasti oletetaan, että sellainen pisteen U kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran CA kanssa, leikkaa janan XR pisteessä W.

Osoita, että pisteet V, W, Q ja R ovat samalla ympyrällä.

13. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että kun $x + \dfrac{1}{x}$ on kokonaisluku, niin myös $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ on kokonaisluku.

14. Ratkaise positiivisilla reaaliluvuilla yhtälö $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$.

15. Sievennä siten, että nimittäjäksi tulee rationaaliluku: $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

16. Pisteet A ja B ovat paraabelilla $y = 2x^2 + 4x - 2$. Janan AB keskipiste on origo. Selvitä janan pituus.

17. Olkoon $a = \log_{125} 2$ ja $b = \log_9 25$. Kirjoita $\log_8 9$ lukujen a ja b lausekkeena.

18. Mikä on pienin luvun 15 monikerta, jonka kymmenjärjestelmäesitys koostuu vain numeroista 0, 4 ja 7, joista kukin esiintyy yhtä monta kertaa?

19. Olkoon $x = a + b - c$, $y = a + c - b$ ja $z = b + c - a$, missä a, b ja c ovat alkulukuja. Jos $x^2 = y$ ja $\sqrt{z} - \sqrt{y}$ on alkuluvun neliö, mitkä ovat mahdollisia tulon abc arvoja?

Vaativampia tehtäviä

Lähetä perustellut ratkaisut osoitteeseen `anne-maria.ernvall-hytonen@helsinki.fi`. Muista mainita viestissä nimesi.

20. Olkoot pisteet L, M ja N kolmion ABC kärkiä A, B ja C vastaavien korkeusjanojen kantapisteet tässä järjestyksessä. Osoita, että pisteiden A, B ja C kautta kulkevat suorat, jotka ovat kohtisuorassa suoria MN, LN ja LM vastaan tässä järjestyksessä, leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

21. Olkoon $f(x)$ polynomi, jonka aste on vähintään 2. Määritellään polynomien jono $g_i(x)$ seuraavasti: $g_1(x) = f(x)$, $g_{n+1}(x) = f(g_n(x))$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Olkoon r_n polynomin $g_n(x)$ nollakohtien keskiarvo. Tiedetään, että $r_{19} = 99$. Selvitä r_{99}.

22. Etsi kaikki funktiot f rationaaliluvuilta reaaliluvuille, joille pätee

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$$

kaikilla rationaaliluvuilla x, y.

23. Olkoot R ja r kolmion ABC ympärys- ja sisäsäde ja R' ja r' kolmion $A'B'C'$ ympärys- ja sisäsäde. Todista, että jos $\angle C = \angle C'$ ja $Rr' = R'r$, kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

24. Olkoon $f(x)$ funktio, jolle pätee $|f(m+n) - f(m)| \leq \dfrac{n}{m}$ kaikilla rationaaliluvuilla n ja m. Todista, että kaikille luonnollisille luvuille k pätee

$$\sum_{i=1}^{k} \left| f(2^k) - f(2^i) \right| \leq \frac{k(k-1)}{2}.$$

25. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $2^n - 1$ on kolmella jaollinen ja $\dfrac{2^n - 1}{3}$ on luvun $4m^2 + 1$ tekijä jollakin kokonaisluvulla m.

❦ ❦ ❦

Valmennusviikonloppuna tarkasteltiin verkkoihin liittyviä Tutten polynomeja. Kertauksena: kun G on suuntaamaton verkko, jonka jokainen kaari on joko silta tai silmukka ja jossa on a siltaa ja b silmukkaa, $T_G(x, y) = x^a y^b$. Jos verkon G kaari e ei ole silta eikä silmukka, tarkastellaan verkkoja $G - e$ (kaari e poistetaan) ja G/e (kaari e kutistetaan) ja asetetaan $T_G(x, y) = T_{G-e}(x, y) + T_{G/e}(x, y)$.

26. Verkon G suuntaus (jokaiselle kaarelle valitaan suunta) on syklitön, jos siinä ei ole suunnattuja syklejä. Todista, että G:n syklittömien suuntausten lukumäärä on $T_G(2, 0)$.

Vihje: Todista, että väite pätee verkoille, joiden kaaret ovat siltoja tai silmukoita, ja että syklittömien suuntausten lukumäärä noudattaa samaa rekursiokaavaa kuin Tutten polynomi.

27. Todista $T_G(x, y)$:n määritelmän perusteella, että $T_G(2, 0) = (-1)^n \chi_G(-1)$, missä n on verkon G solmujen lukumäärä ja χ_G on G:n kromaattinen polynomi. Johda tämän avulla ratkaisu valmennusviikonloppuna käsiteltyyn tehtävään: kaksijakoisen verkon syklittömien suuntausten lukumäärä ei ole kolmella jaollinen.

28. Todista, että verkon G metsien lukumäärä on $T_G(2, 1)$. Verkon G metsä on verkko, jolla on samat solmut kuin G:llä, osajoukko G:n kaarista eikä yhtään sykliä tai silmukkaa.