Lokakuun 2014 helpommat valmennustehtävät

Ratkaisuja voi lähettää joulukuun alkuun asti osoitteeseen Jesse Jääsaari, Kristianinkatu 3 A 11, 00170 Helsinki, tai sähköisesti osoitteeseen jesse.jaasaari@helsinki.fi. Tehtävistä voi esittää kysymyksiä sähköpostitse.

1. Mikä on suurin positiivinen kokonaisluku n, jolla $n^3 + 100$ on jaollinen luvulla $n + 10$?

2. Olkoon $ABCD$ puolisuunnikas, jossa $AB||CD$. Olkoon lisäksi lävistäjien AC ja BD leikkauspiste P. Merkitään kolmion ΔXYZ alaa suureella $[XYZ]$. Todista, että pätee $[PAB] + [PCD] > [PBC] + [PDA]$.

3. Suorakaidetta sanotaan *hajotettavaksi*, jos se voidaan peittää kahdella tai useammalla neliöllä, joiden sivun pituudet ovat kokonaislukuja, siten, että tällaisessa peitossa pienin neliöistä esiintyy täsmälleen yhden kerran (muita samankokoisia neliöitä voi olla useita). Määritä pinta-alaltaan pienin mahdollinen hajotettava suorakaide.

4. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio, jossa $AD = BD = CD$ ja $\angle ADB = \angle DCA$, $\angle CBD = \angle BAC$. Määritä nelikulmion $ABCD$ kulmien suuruudet.

5. Merkitään positiivisen kokonaisluvun n nollasta poikkeavien numeroiden tuloa suureella $p(n)$ (esim. $p(9) = 9$, $p(125) = 10$, ja $p(203) = 6$). Olkoon $S = p(1) + p(2) + \cdots + p(999)$. Mikä on luvun S suurin alkutekijä?

6. Yksikköneliön sisään on piirretty ympyröitä, joiden säteiden summa on suurempi kuin $5/9$. Osoita, että on olemassa jonkin neliön sivun suuntainen suora, joka leikkaa ainakin kahta piirretyistä ympyröistä.

7. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $a_1, ..., a_n$ reaalilukuja väliltä $[-1/2, 1/2]$. Tiedetään, että jos mikä tahansa luvuista a_i poistetaan, niin jäljelle jääneiden lukujen summa on kokonaisluku. Osoita, että $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

8. Määritä kaikki reaalilukuparit (a, b), joilla $a + b = 1$ ja $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^4$.

9. Pisteet P ja Q sijaitsevat suunnikkaan $ABCD$ sivuilla BC ja CD siten, että $BP = DQ$. Osoita, että suorien BQ ja DP leikkauspiste sijaitsee kulman $\angle BAD$ puolittajalla.

10. Olkoon $n \geq 2$ positiivinen kokonaisluku ja olkoot $a_1, a_2, ..., a_n$ positiivisia kokonaislukuja, joiden summa on parillinen ja joille pätee $a_i \leq i$ kaikilla $i = 1, 2, ..., n$. Todista, että on mahdollista valita etumerkit lausekkeessa $\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ siten, että tulokseksi saadaan nolla.