

Syyskuun helpommat valmennustehtävät

Ratkaisuja pyydetään seuraavaan valmennusviikonloppuun 18.-20.10. mennessä. Ratkaisut voi tuoda valmennusviikonlopulle, lähettää postitse osoitteeseen Katja Kulmala, Pekankatu 5A 25, 00700 Helsinki, tai lähettää sähköpostitse osoitteeseen katja.kulmala@helsinki.fi.

1. Etsi kaikki funktiot f reaaliluvuilta itselleen, joille $f(f(x+y)) = f(x) + y$ kaikilla reaalilla x ja y .
2. Etsi kaikki parit (a, k) positiivisia kokonaislukuja, joille $a^2 + 5a = 6^k$.
3. Olkoot a_1, \dots, a_n annettuja reaalilukuja. Millä luvun x arvolla lauseke $(x - a_1)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ on minimissään?
4. Suorakulmion muotoisessa puutarhassa on suihkulähde, jonka etäisyydet kolmesta suorakulmion kärjestä ovat 5m, 5m ja 1m jossakin järjestyksessä. Mitkä ovat suihkulähteen mahdolliset etäisyydet neljännestä kärjestä?
5. Asetetaan suorakulmioon, jonka sivujen pituudet ovat 3 ja 4, kuusi pistettä. Osoita, että joidenkin kahden pisteen välinen etäisyys on enintään $\sqrt{5}$.
6. Olkoon ABC kolmio, jonka sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Tiedetään, että $AC = 2007$. Kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D . Oletetaan, että $AB = CD$. Määritä sivujen AB ja BC pituudet.
7. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joita ei voi esittää muodossa $2xy + x + y$ millään positiivisilla kokonaisluvuilla x ja y .
8. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että jos $2^n \times 2^n$ -shakkilaudasta poistetaan yksi ruutu, loput voidaan peittää L -kirjaimen muotoisilla kolmen

ruudun palikoilla.

9. Olkoon ABC kolmio, jonka ympäripiirretyn ympyrän keskipiste on O ja sisäänpiirretyn I . Oletetaan, että $\angle AIO = 90^\circ$ ja $\angle CIO = 45^\circ$. Määritä suhde $AB : BC : CA$.

10.(a) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että jonon

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots$$

kaikki jäsenet jostakin jäsenestä alkaen antavat saman jakojäännöksen jaettaessa luvulla n .

(b) Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n on olemassa kokonaisluku $m > 0$, jolle $2^m - m$ on jaollinen luvulla n .