Suomen matemaattinen yhdistys ry.
Valmennusjaosto

Harjoitustehtävät, syys–lokakuu 2010. Helpommat

Harjoitustehtävien yksi tavoite on opetella kirjoittamaan ratkaisuja ymmärrettävästi. Kirjoittakaa siis ratkaisunne paperille ja tuokaa ne seuraavaan valmennusviikonloppuun tai lähettäkää ne paperin alalaidassa olevaan osoitteeseen. Ei haittaa, jos kaikki tehtävät eivät ratkea!

1. Kellon minuutti- ja tuntiosoittimet ovat tasan suorassa kulmassa kello 9.00. Milloin ne ovat seuraavan kerran tasan suorassa kulmassa?

2. Tasasivuisen kolmion I korkeus on tasasivuisen kolmion II sivu, tasasivuisen kolmion II korkeus on tasasivuisen kolmion III sivu ja tasasivuisen kolmion III korkeus on tasasivuisen kolmion IV sivu. Kolmion I ala on 2. Määritä kolmion IV ala.

3. Neliön ala on 3 pinta-alan yksikköä ja kuution tilavuus on 5 tilavuusyksikköä. Selvitä (laskinta käyttämättä!), kumpi on pitempi, neliön sivu vai kuution särmä.

4. Positiivisen kokonaisluvun viimeinen numero on 6. Muodostetaan luvusta uusi luku siirtämällä 6 alkuun; esimerkiksi 3146:sta tulisi näin 6314. Määritä pienin kokonaisluku, joka tasan nelinkertaistuu tässä muunnoksessa.

5. Positiivinen luku x on aina muotoa $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, missä $\lfloor x \rfloor$, x:n kokonaisosa, on suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin kuin x, ja $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ on x:n desimaali- tai murto-osa. Esimerkiksi $\lfloor 3{,}14159 \rfloor = 3$ ja $\{3{,}14159\} = 0{,}14159$. Määritä kaikki positiiviset luvut x, joille $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ ja x muodostavat a) aritmeettisen, b) geometrisen jonon. [a_1, a_2, a_3 on *aritmeettinen jono*, jos $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ ja *geometrinen jono*, jos $\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_2}{a_1}$.]

6. Suorakulmaisen särmiön muotoisen astian korkeus on 40 cm, ja sen pohja on neliö $ABCD$, jonka sivu on 60 cm. Astiassa on vaakasuoralla lattialla ja siinä on vettä 15 cm syvyydeltä. Astiaa kallistetaan varovasti niin, että sivu AD pysyy lattialla ja sivu AB muodostaa $60°$ kulman lattiaan nähden. Osa vedestä valuu pois. Kuinka syvää vesi on, kun astia lasketaan takaisin alkuperäiseen asentoonsa?

7. Sanomme, että positiivisten kokonaislukujen pari (m, n) *synnyttää neliöt*, jos sekä $m+n$ että mn ovat neliölukuja. Esimerkiksi $(5, 20)$ synnyttää neliöt, koska $5 + 20 = 25 = 5^2$ ja $5 \cdot 20 = 100 = 10^2$. Osoita, että jos (m, n) synnyttää neliöt, niin kumpikaan luvuista m ja n ei ole 3.

c/o Dos. Matti Lehtinen
Taskilantie 30 A
90580 OULU

puh. (08) 554 6683
040 583 0678

Pankki
Nordea 101930-205998

8. Ratkaise reaaliluvut x ja y yhtälöparista

$$\begin{cases} 2(x+y-2) = y(x-y+2) \\ x^2(y-1) + y^2(x-1) = xy - 1. \end{cases}$$

9. Kirjoitetaan positiiviset kokonaisluvut spiraaliksi:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 2 & 11 \\ 5 & 4 & 3 & 12 \\ & \ldots & 14 & 13 \end{array}$$

Selvitä, missä sijaitsee luku 2010 lukuun 1 nähden. Esimerkiksi luvun 10 sijainti on yksi askel ylös ja kaksi oikealle 1:stä.

10. Kuinka monessa kokonaisluvussa väliltä 1 – 10000 esiintyy ainakin kerran numero 7?

11. Määritä tulon

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2010^2}\right)$$

arvo muodossa $\frac{a}{b}$, a ja b positiivisia kokonaislukuja.

12. Osoita, että yhtälö $(x+y)^4 = x^4+y^4$ ei toteudu millään nollasta eroavilla reaaliluvuilla x, y.

13. Šakkipelin ratsun siirto on kaksi ruutua johonkin laudan reunojen määräämistä suunnista ja yksi ruutu tätä suuntaa vastaan kohtisuoraan suuntaan. Määritä, kuinka moneen ruutuun ratsun siirto voi keskimäärin päätyä a) 8×8-laudalla, b) $n \times n$-laudalla.

14. Ympyrän keskipiste on O ja sen jänteet AB ja CD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja leikkaavat toisensa. Osoita, että $\angle AOD + \angle BOC = 180°$.

15. Pyöreän kartonkilevyn säde on 10 cm. Kartongista poistetaan sektori, jonka keskuskulma on α (radiaania). Lopusta kartongista muodostetaan kartio. Määritä kartion tilavuus α:n funktiona.