Matematiikan olympiavalmennus

Syyskuun 2014 helpommat valmennustehtävät, ratkaisuja

1. *Kuinka monen 2014-numeroisen positiivisen kokonaisluvun numeroiden summa on parillinen?*

Ratkaisu. 2014-numeroisen luvun ensimmäinen numero on jokin numeroista 1, 2, ..., 8 tai 9 ja jokainen lopuista 2013:sta jokin numeroista 0, 1, 2, ..., 8 tai 9. Tällaisia lukuja on siis $9 \cdot 10^{2013}$. Toinen tapa laskea tämä: pienin 2014-numeroinen luku on 10^{2013} (ykkönen ja 2013 nollaa, suurin $10^{2014} - 1$ (2014 yhdeksikköä). 2014-numeroisia lukuja on siis $10^{2014} - 1 - (10^{2013} - 1)) = 10^{2013} \cdot (10 - 1) = 9 \cdot 10^{2013}$. Mieleen tulee heti ajatus, että parillisen ja parittoman numerosumman omaavia lukuja on yhtä monta, jolloin tehtävässä kysytty luku olisi $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^{2013} = 45 \cdot 10^{2012}$. Mutta onko varmasti niin, että molempia lajeja on yhtä monta? On, sillä jokainen 2014-numeroinen luku saadaan liittämällä johonkin 2013-numeroiseen lukuun n viimeiseksi numeroksi 0, 1, ..., 8 tai 9. Riippumatta siitä, onko n:n numerosumma parillinen vai pariton, tasan puolella syntyneistä luvuista on parillinen numerosumma. (Yksinumeroisissa luvuissa on viisi sellaista, joissa numerosumma on pariton ja neljässä summa on parillinen. Edellinen päättely osoittaa, että kun $k \geq 2$, niin k-numeroisista luvuista tasan puolessa on parillinen numerosumma.

2. *Määritä ne luonnolliset luvut n, joille luku $(n^2 + 85)^2 - (18n + 3)^2$ on alkuluku.*

Ratkaisu. Koska $(n^2 + 85)^2 - (18n + 3)^2 = (n^2 + 85 - 18n - 3)(n^2 + 85 + 18n + 3) = (n^2 - 18n + 82)(n^2 + 18n + 88) = ((n - 9)^2 + 1)((n + 9)^2 + 7)$, niin tehtävän luku voi olla alkuluku vain, kun edellisen tulon positiivisista tekijöistä pienempi = 1; tämä tapahtuu silloin ja vain silloin, kun $n = 9$. Luku on tällöin $18^2 + 7 = 331$; kokeilu lukua $\sqrt{331} < 19$ pienemmillä alkuluvuilla osoittaa helposti, että 331 todella on alkuluku.

3. *Montako jäsentä ainakin on yhdistyksessä, jossa tyttöjen osuus on enemmän kuin 43,5 %, mutta vähemmän kuin 43,6 %?*

Ratkaisu. Jos yhdistyksessä on n jäsentä ja näistä m on tyttöjä, niin tehtävän tieto kertoo, että

$$\frac{435}{1000} < \frac{m}{n} < \frac{436}{1000}.$$

On siis löydettävä mahdollisimman pienet m ja n, joille $435n < 1000m < 436n$ tai mahdollisimman pieni n, jolle $435n$ on alle täyden tuhannen, mutta $435n + n$ yli täyden tuhannen. Nyt $3 \cdot 435 = 1305$ ja $4 \cdot 435 = 1740$, joten $40 \cdot 435 = 17400$. Siten $39 \cdot 435 = 16965$ ja $39 \cdot 455 + 39 = 17004$. $n = 39$ ja $m = 17$ toteuttavat siis tehtävän ehdon, mutta ovatko ne pienimmät kokonaisluvut, joilla on tämä ominaisuus? Jos jollakin murtoluvulla $\frac{p}{q}$, $q < n$, olisi ominaisuus

$$\frac{435}{1000} < \frac{p}{q} < \frac{436}{1000},$$

olisi oltava

$$\left|\frac{17}{39}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{1000}.$$

Silloin olisi oltava

$$|17q-39p|<\frac{39q}{1000}<\frac{39^2}{1000}<2$$

eli $17q-39p=\pm 1$. (Koska 39 on alkuluku ja q:lla ja p:llä ei ole yhteisiä tekijöitä $17q-39p\neq 0$.) Milloin $17q-39p=\pm 1$? Käytetään Eukleideen algoritmia: $39=2\cdot 17+5$, $17=3\cdot 5+2$, $5=2\cdot 2+1$. Siis $1=5-2\cdot(17-3\cdot 5)=39-2\cdot 17-2(17-3\cdot(39-2\cdot 17))=39\cdot 7-17\cdot 16$. Kuitenkin $\dfrac{7}{16}=0{,}4375>0{,}436$, joten $\dfrac{7}{16}$ ei kelpaa. Toisaalta $-1=39\cdot(-7)-17\cdot(-16)=39\cdot(-7+17)-17\cdot(-16+39)=39\cdot 10-17\cdot 23$. Mutta $\dfrac{10}{23}<0{,}4348<0{,}435$, joten myöskään ehdokas $\dfrac{10}{23}$ ei kelpaa. Kysytty n on siis todella 39.

4. *Kolmion sivujen pituudet ovat a, b ja c ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on R. Todista, että $a\sqrt{bc}\leq(b+c)R$. Voiko epäyhtälö olla yhtälö?*

Ratkaisu. Jos O on kolmion ABC ympärysympyrän keskipiste ja $BC=a$, niin kolmiosta BCO nähdään heti, että $a<2R$. Jos O on janalla BC, niin $a=2R$. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön nojalla $\sqrt{bc}\leq\frac{b+c}{2}$; tässä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $b=c$. Siis

$$a\sqrt{bc}\leq 2R\sqrt{bc}\leq R(b+c).$$

Yhtäsuuruuden ehdot toteutuvat, kun BC on kolmion ympärysympyrän halkaisija ja $b=c$. Tällöin kolmio ABC on tasakylkinen suorakulmainen kolmio.

5. *Määritä auki kirjoitetun luvun $7^{5^{5^5}}$ kaksi viimeistä numeroa.*

Ratkaisu. Koska $7^2=49=50-1$, niin $7^4=(50-1)^2=2500-100+1=2401$. Nyt $5^{5^5}=(4+1)^{5^5}=4m+1$ jollain m. Siis $7^{5^{5^5}}=7^{4m+1}=7\cdot(7^4)^m=7\cdot(2400+1)^m=7\cdot(100\cdot n+1)$ jollain n. Kysytyt kaksi viimeistä numeroa ovat 0 ja 7. (Luvulla 7^k on vain neljä mahdollista kahden viimeisen numeron paria, 01, 07, 49 ja 43, sen mukaan onko k:n jakojäännös neljällä jaettaessa 0, 1, 2 tai 3.)

6. *Osoita, että*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{9999}{10000}<0{,}01.$$

Ratkaisu. Jos n on todistettavan epäyhtälön vasemman puolen luku, niin

$$\begin{aligned}n^2&=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdots\left(\frac{9999}{10000}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{9999}{10000}\cdot\frac{10000}{10001}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{9999}{10001}=\frac{1}{10001}<\frac{1}{10000}=\frac{1}{100^2}.\end{aligned}$$

Lukua n^2 arvioidaan siis ylöspäin, niin, että ylärajasta muodostuu ”teleskooppinen” tulo, jossa melkein kaikki supistuu pois.

7. *Kumpi on suurempi, positiivisten lukujen a ja b (aritmeettinen) keskiarvo, vai lukujen $x = \sqrt{ab}$ ja $y = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (aritmeettinen) keskiarvo?*

Ratkaisu. Osoitetaan, että luvuista edellinen on ainakin yhtä suuri kuin jälkimmäinen, eli että

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \tag{1}$$

Epäyhtälö (1) on yhtäpitävä epäyhtälön

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq ab + \frac{1}{2}(a^2+b^2) + 2\sqrt{\frac{a^3b+ab^3}{2}}$$

eli

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \geq 4\sqrt{\frac{a^3b+ab^3}{2}} = \sqrt{8a^3b + 8ab^3} \tag{2}$$

kanssa. Epäyhtälö (2) voidaan vielä korottaa puolittain neliöön, ja saadaan sen kanssa yhtäpitävä epäyhtälö

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \geq 8a^3b + 8ab^3$$

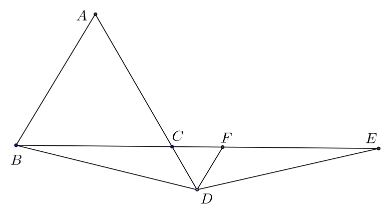
eli

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \geq 0.$$

Mutta viimeisen epäyhtälön vasen puoli on ei-negatiivinen luku $(a-b)^4$, joten epäyhtälö on tosi; yhtäsuuruus on voimassa aina ja vain, kun $a = b$.

8. *Valitaan tasasivuisen kolmion ABC sivun AC jatkeelta piste D ja sivun BC jatkeelta piste E niin, että $BD = DE$. Todista, että $AD = CE$.*

Ratkaisu. Koska kolmio DEB on tasakylkinen, niin $\angle CBD = \angle DEC$. Erotetaan BC:n jatkeelta jana $CF = CD$. Silloin kolmio CDF on tasakylkinen, mutta koska $\angle FCD = 60°$, kolmio on tasakulmainen ja siis tasasivuinen. Siis $DC = CF$. Lisäksi $\angle DCB = \angle DFE = 120°$, joten kolmiot BDC ja EFD ovat yhteneviä (kks). Siis $EF = BC = AC$ ja $AD = AC + CD = EF + CF = EC$.



9. *Ratkaise yhtälö*

$$\frac{8}{x-8} + \frac{10}{x-6} + \frac{12}{x-4} + \frac{14}{x-2} = 4.$$

Ratkaisu. Ratkaistava yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$\begin{aligned}0 = \frac{8}{x-8} - 1 + \frac{10}{x-6} - 1 + \frac{12}{x-4} - 1 + \frac{14}{x-2} - 1 &= \frac{16-x}{x-8} + \frac{16-x}{x-6} + \frac{16-x}{x-4} + \frac{16-x}{x-2} \\ &= (16-x)\left(\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-2}\right) \\ &= (16-x)(2x-10)\left(\frac{1}{(x-8)(x-2)} + \frac{1}{(x-6)(x-4)}\right) \\ &= \frac{(16-x)(2x-10)(2x^2-20x+40)}{(x-8)(x-2)(x-6)(x-4)}.\end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisuja ovat siis $x = 16$, $x = 5$ ja yhtälön $x^2 - 10x + 20 = 0$ ratkaisut $x = 5 \pm \sqrt{5}$.

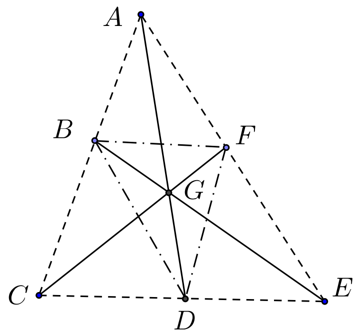
10. *Luvut a ja b ovat rationaalilukuja. Olkoon $x = 8\left(a^4 + b^4 + (a-b)^4\right)$. Osoita, että $\sqrt{x}$ on rationaaliluku.*

Ratkaisu. Jotta $\sqrt{x}$ olisi rationaaliluku, x:n on oltava rationaaliluvun neliö eli toinen potenssi. Näin todella on, sillä

$$\begin{aligned}x = 16a^4 + 16b^4 - 32a^3b + 48a^2b^2 - 32ab^3 &= 16(a^4 + b^4 + a^2b^2 - 2a^2(ab) - 2(ab)b^2 + 2a^2b^2) \\ &= \left(4(a^2 + b^2 - ab)\right)^2.\end{aligned}$$

11. *Mikä on suurin määrä kolmialkioisia joukkoja, joista jokaisella kahdella on tasan yksi yhteinen alkio, mutta ei ole olemassa alkiota, joka kuuluisi kaikkiin joukkoihin?*

Ratkaisu. Tällaisia joukkoja voi olla ainakin 7. Asian voi hahmottaa oheisesta kuvasta, jossa alkiot ovat pisteitä ja joukot ovat alkioita yhdistäviä janoja tai murtoviivoja. Joukot ovat $\{A, B, C\}$, $\{C, D, E\}$, $\{A, E, F\}$, $\{A, D, G\}$, $\{C, F, G\}$, $\{B, E, G\}$ ja $\{B, D, F\}$. Osoitetaan, että tällaisia joukkoja ei voi olla enempää. Vastaoletus: on ainakin 8 joukkoa, joilla on tehtävässä kuvatut ominaisuudet. Olkoon $\mathcal{J} = \{X, Y, Z\}$ jokin niistä. Silloin muita joukkoja on ainakin 7. Ainakin kolmella näistä, esimerkiksi joukoilla $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ on sama yhteinen alkio joukon



$\{X, Y, Z\}$ kanssa; voidaan olettaa, että tämä alkio on X. X on silloin jokaisen kahden näistä joukoista yhteinen alkio, eikä kumpikaan alkioista Y ja Z kuulu mihinkään näistä kolmesta joukosta. On olemassa joukko $\mathcal{J}_4$, johon X ei kuulu. Silloin $\mathcal{J}$:n ja $\mathcal{J}_4$:n yhteinen alkio on Y tai Z. Voidaan olettaa, että se on Y. Nyt $\mathcal{J}_4$:llä on yhteinen alkio jokaisen joukon $\mathcal{J}_i$, $i = 1, 2, 3$, kanssa. Koska alkio ei voi olla X eikä Y, alkio on $\mathcal{J}_4$:n kolmas alkio. Mutta nyt tämä alkio on yhteinen joukoille $\mathcal{J}_i$, joilla siis tulee olemaan useampia kuin yksi yhteinen alkio. Ristiriita.

12. *Luvut p, q ja r ovat alkulukuja ja $p + q < 111$. Lisäksi*

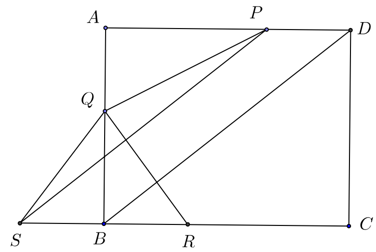
$$\frac{p+q}{r} = p - q + r.$$

Määritä tulon pqr suurin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. Tehtävän yhtälön yhtäpitävä muoto on $q(r+1) + p(1-r) = r^2$. Jos r on pariton, niin yhtälön vasen puoli on parillinen ja oikea pariton. Siis on oltava $r = 2$. Kun tämä sijoitetaan tehtävän yhtälöön, nähdään, että $3q - p = 4$. Tämän mukaan p kasvaa, kun q kasvaa, ja tulon $pqr = 2pq$ suurin arvo saadaan, kun q on mahdollisimman suuri. Ehdosta $111 > p + q = 4q - 4$ seuraa $q < 29$. q:n suurin mahdollinen arvo olisi 23, mutta $3 \cdot 23 - 4 = 65$, joka ei ole alkuluku. Seuraavaksi suurin q mahdollinen arvo on 19; $3 \cdot 19 - 4 = 53$, ja 53 on alkuluku. Tulon pqr suurin mahdollinen arvo on siis $2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$.

13. *Suorakulmion $ABCD$ sivuilta AD, AB ja BC valitaan pisteet P, Q ja R niin, että $AP = RC$. Todista, että murtoviiva PQR on ainakin yhtä pitkä kuin suorakulmion $ABCD$ lävistäjä.*

Ratkaisu. Olkoon S se suoran BC piste, jolle $PS \| BD$. Silloin nelikulmion $PSBD$ vastakkaiset sivut ovat keskenään yhdensuuntaisia, joten nelikulmio on suunnikas. Siis $SB = PD = AD - AP = BC - RC = BR$. Kolmioissa QSB ja QRB on silloin $\angle QBS = \angle QBR$, $QB = QB$ ja $SB = RB$. Kolmiot ovat yhteneviä (sks), joten $QS = QR$. Murtoviivat PQR ja PQS ovat siis yhtä pitkät, ja selvästi PQS on pitempi kuin $PS = BD$.



14. *Pelilauta on $n \times 2014$-ruudukko. Pelin alussa pelimerkki on on laudan vasemman yläkulman ruudussa. Pelaajat A ja B siirtävät merkkiä vuorotellen jonkin määrän ruutuja joko oikealle pitkin sitä riviä, jolla merkki on tai alaspäin pitkin sitä saraketta, jolla merkki on. Pelin häviää se pelaaja, joka ei enää voi siirtää pelimerkkiä. Millä n:n arvoilla aloittava pelaaja A voi taata voiton itselleen?*

Ratkaisu. Voittava pelaaja on se, joka pystyy siirtämään pelimerkin oikean alakulman ruutuun. Aloittava pelaaja A voi aina voittaa, kun $n \neq 2014$. Ensimmäisellä siirrollaan hän työntää pelimerkin sille vinoriville, joka kulkee oikean alakulman kautta. Jos toinen pelaaja B voi siirtää, niin hänen siirtonsa vie merkin välttämättä pois tältä vinoriviltä. A voi seuraavalla siirrolla taas palauttaa merkin kyseiselle vinoriville, ja viimein voittaa. Jos $n = 2014$, B voittaa samalla strategialla, sillä merkki on aluksi kriittisellä vinorivillä, josta A:n ensimmäinen siirto vie sen pois.

15. *Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanat ovat AA_1, BB_1 ja CC_1. Korkeusjanojen leikkauspiste on H. Olkoot M ja N janojen BC ja AH keskipisteet. Osoita, että MN on janan B_1C_1 keskinormaali.*

Ratkaisu. Koska kulmat $\angle BB_1C$ ja $\angle BC_1C$ ovat suoria, pisteet B_1 ja C_1 ovat sen ympyrän kehällä, jonka halkaisija on BC (Thaleen lause). Koska M on janan BC keskipiste, M on tämän ympyrän keskipiste, joten $MB_1 = MC_1$. Aivan samoin perustein B_1 ja C_1 ovat myös N-keskisen ympyrän pisteitä, joten $NB_1 = NC_1$. MN on todellakin janan B_1C_1 keskinormaali.