**Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, syyskuu 2020**

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 16.10.2020 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna tai sähköpostitse. Helpommat tehtävät: `n.palojarvi@gmail.com`, vaativammat: `anne-maria.ernvall-hytonen@helsinki.fi`.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

## Helpompia tehtäviä

**1.** Laske, kuinka monta sellaista kasvavaa lukujonoa on, jotka täyttävät seuraavat kolme ehtoa:

- Jonossa on seitsemän alkiota.
- Jonon alkiot ovat $1, 2, 3, 4$ ja $5$ jossain järjestyksessä.
- Kukin luvuista $1, 2, 3, 4, 5$ esiintyy luvuista vähintään kerran lukujonossa.

**2.** Tasasivuisen kolmion sisään on piirretty neliö (”sisään piirtäminen” tarkoittaa, että neliön kaikki kärjet ovat kolmion sivuilla). Selvitä neliön pinta-alan suhde kolmion pinta-alaan.

**3.** Luku on palindromi, jos se on sama oikealta vasemmalle luettuna. Esimerkiksi 2002 on palindromi. Montako palindromia on välillä $1 \ldots 99999$? Perustele!

**4.** Tarkastellaan funktiota $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$, joka on määritelty kun $x \neq -\frac{3}{2}$. Millä luvun $c$ arvoilla pätee $f(f(x)) = x$ kaikille määrittelyjoukon arvoille $x$?

**5.** Kahden luvun kuutioiden summa on 5 ja neliöiden summa on 3. Selvitä lukujen summa.

**6.** Yhtälön $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$ ratkaisut ovat $a$, $b$ ja $c$, ja yhtälön $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ ratkaisut ovat $a + b$, $b + c$ ja $c + a$. Selvitä $t$:n arvo.

**7.** Matemaatikkojen tapaamisessa yksi matemaatikko huomautti toiselle: ”Meitä on paikalla yhdeksän vähemmän kuin kaksinumeroisen lukumäärämme numeroiden tulo.” Montako matemaatikkoa oli paikalla?

**8.** Ratkaise reaaliluvuilla $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 1$.

**9.** Kaksi samansäteistä ympyrää kulkee toistensa keskipisteiden kautta. Mikä on ympyröiden muodostaman kuvion pinta-ala ja piiri?

**10.** Jaetaan $8 \times 8$-šakkilauta $p$:hen erilliseen suorakulmioon niin, että seuraavat ehdot täyttyvät:

- Jokaisessa suorakulmiossa on yhtä monta mustaa ja valkoista ruutua.
- Missään kahdessa suorakulmiossa ei ole keskenään yhtä monta ruutua.

Mikä on suurin $p$:n arvo, jolla jako on mahdollinen? Selvitä myös, mitkä ovat kaikki mahdolliset tavat jakaa šakkilauta tällä $p$:n arvolla.

**11.** Koulun käytävällä on 1024 suljettua lokeroa, jotka on numeroitu $1, \ldots, 1024$. Oppilas maleksii käytävässä, avaa lokeron 1, ohittaa lokeron 2, avaa lokeron 3, ja jatkaa avaten aina joka toisen lokeron, kunnes hän päätyy käytävän loppuun. Sitten hän kääntyy ympäri, avaa ensimmäisen löytämänsä suljetun lokeron ja taas vuorotellen ohittaa ja avaa suljettuja lokeroita. Oppilas jatkaa maleksimista edestakaisin, kunnes hän on avannut kaikki lokerot. Mikä on viimeisenä avatun lokeron numero?

### Vaativampia tehtäviä

**12.** Kutsutaan kokonaislukua $n$ *mielenkiintoiseksi*, jos luku 2018 jakaa luvun $d(n)$ (joka on luvun $n$ positiivisten tekijöiden lukumäärä). Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut $k$, että on olemassa ääretön aritmeettinen jono, jossa peräkkäisten termien erotus on $k$ ja jonka kaikki termit ovat mielenkiintoisia.

**13.** Korttipakassa osa korteista on kuvapuoli alaspäin. Voidaan ottaa kuinka monta tahansa peräkkäistä korttia, kunhan niistä ylin ja alin ovat kuvapuoli alaspäin, kääntää poistetut kortit ja palauttaa pakkaan samaan kohtaan josta ne poistettiin. Todista, että lopuksi kaikkien korttien kuvapuoli on ylöspäin.

**14.** Kuution jokaiseen kärkipisteeseen on kirjoitettu joko $+1$ tai $-1$ ja kuution jokaiselle tahkolle on kirjoitettu sen kärkipisteiden lukujen tulo. Voiko näiden neljäntoista luvun summa olla 0?

**15.** On $n$ tyyppiä karkkia, kutakin $k$ kappaletta. Karkit jaetaan $k$:lle lapselle, kullekin $n$ karkkia. Jos lapsilla $A$ ja $B$ on kummallakin karkki, jonka tyyppistä toisella ei ole, he voivat vaihtaa nämä karkit keskenään. Onko aina mahdollista suorittaa sellaiset vaihdot, että lopuksi jokaisella lapsella on kaikentyyppisiä karkkeja?

**16.** Etsi kaikki sellaiset reaalilukuparit $(a, b)$, että polynomien $6x^2 - 24x - 4a$ ja $x^3 + ax^2 + bx - 8$ kaikki juuret ovat ei-negatiivisia reaalilukuja.

**17.** Mille kokonaisluvuille $a$ on olemasssa kaksi eri äärellistä lukujonoa $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ ja $j_1 < \cdots < j_\ell$, jotka koostuvat positiivisista kokonaisluvuista ja joille

$$(a^{i_1} + 1)(a^{i_2} + 1) \cdots (a^{i_k} + 1) = (a^{j_1} + 1)(a^{j_2} + 1) \cdots (a^{j_\ell} + 1)?$$

**18.** Reaaliluvut $x$ ja $y$ toteuttavat ehdot

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos x + \sin y = -1. \end{cases}$$

Todista, että $\cos 2x = \cos 2y$.

**19.** Reaalikertoiminen polynomi $p(x)$ on *almerialainen*, jos se on muotoa

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + a$$

ja jos sen nollakohdat ovat kolme positiivista reaalilukua, jotka muodostavat aritmeettisen jonon. Etsi kaikki almerialaiset polynomit $p(x)$, joille $p(7/4) = 0$.

**20.** Määritellään lukujono $\big(f(n)\big)_{n=1}^{\infty}$ seuraavasti:

- $f(1) = 1$.
- Jos $n$ on parillinen, $f(n) = f(n/2)$.
- Jos $n > 1$ on pariton ja $f(n-1)$ on pariton, $f(n) = f(n-1) - 1$.
- Jos $n > 1$ on pariton ja $f(n-1)$ on parillinen, $f(n) = f(n-1) + 1$.

a) Laske $f(2^{2020} - 1)$.
b) Todista, että $\big(f(n)\big)_{n=1}^{\infty}$ ei ole jaksollinen, ts. ei ole olemassa sellaisia positiivisia kokonaislukuja $t$ ja $n_0$, että $f(n + t) = f(n)$ kaikilla $n \geq n_0$.

**21.** Teräväkulmaisen kolmion $ABC$ sivun $AB$ keskipiste on $M$ ja pisteestä $A$ piirretty korkeusjana kohtaa sivun $BC$ pisteessä $P$. Todista, että jos $AC + BC = \sqrt{2}AB$, niin kolmion $BMP$ ympäri piirretty ympyrä sivuaa suoraa $AC$.

**22.** Kun $S$ on kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ äärellinen osajoukko, määritellään $d_2(S)$ ja $d_3(S)$ seuraavasti:

- $d_2(S)$ on niiden alkioiden $a \in S$ lukumäärä, joille on olemassa sellaiset $x, y \in \mathbb{Z}$, että $x^2 - y^2 = a$.
- $d_3(S)$ on niiden alkioiden $a \in S$ lukumäärä, joille on olemassa sellaiset $x, y \in \mathbb{Z}$, että $x^3 - y^3 = a$.

a) Olkoon $m$ kokonaisluku ja $S = \{m, m+1, \ldots, m+2019\}$. Todista, että

$$d_2(S) > \frac{13}{7} d_3(S).$$

(b) Olkoon $n$ positiivinen kokonaisluku ja olkoon $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Todista, että on olemassa sellainen luku $N$, että jos $n > N$,

$$d_2(S_n) > 4 d_3(S_n).$$