Joulukuun vaativammat valmennustehtävät

Ratkaisuja pyydetään seuraavaan valmennusviikonloppuun 9.-11.1. mennessä. Ratkaisut voi tuoda valmennusviikonlopulle tai lähettää postitse osoitteeseen Joni Teräväinen, Kalannintie 5, 00430 Helsinki tai lähettää sähköpostitse osoitteeseen joni.teravainen@helsinki.fi. Tehtävistä voi myös kysyä sähköpostitse. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

1. Määritä kaikki kolmikot (x, y, z) kokonaislukuja, joille pätee $x^2 + y^2 = z^2$ ja $x + y = z + 2$.

2. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Osoita, että

$$(a^2b + b^2c + c^2a)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4).$$

3. Olkoon $n \geq 2$ positiivinen kokonaisluku. Anna ja Bertta pelaavat seuraavaa peliä $n \times n$-shakkilaudalla. Anna aloittaa ja valitsee laudan jonkin rivin tai sarakkeen ja maalaa sen. Seuraavaksi Bertta valitsee jonkin rivin tai sarakkeen ja maalaa sen (ei haittaa, vaikka osa rivin tai sarakkeen ruuduista olisi jo maalattu, kunhan kaikki eivät ole). Sitten on taas Annan vuoro, ja peli jatkuu näin, kunnes kaikki laudan ruudut on maalattu. Voittaja on viimeisen ruudun maalannut pelaaja. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

4. Olkoot kolmion ABC sivujen BC, AC ja AB pituudet a, b ja c ja niiden vastaisten kulmien suuruudet α, β ja γ (asteissa). Osoita, että

$$60^\circ \leq \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} < 90^\circ.$$

5. Osoita, että on olemassa äärettömän monta paritonta positiivista kokonaislukua n, joilla $2^n + n$ ei ole alkuluku.

6. Määritellään jono $a_1, a_2, ...$ reaalilukuja asettamalla $a_1 = 1$ ja

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

jokaisella kokonaisluvulla $n \geq 1$. Onko jono $a_1, a_2, ...$ rajoitettu? Osoita, että $a_{100} < 15$.

7. Osoita, että on olemassa vain äärellisen monta positiivista kokonaislukua n siten, että n on jaollinen jokaisella välin $[1, \sqrt[10]{n}]$ kokonaisluvulla.

8. Ympyrän, jonka keskipiste on O, jänne CD ja halkaisija AB ovat kohtisuorassa. Jänne AE puolittaa säteen OC. Osoita, että jänne DE puolittaa jänteen BC.

9. Olkoon $x \neq 1$ positiivinen reaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} \geq n x^{\frac{n-1}{2}}.$$

10. Olkoot N ja n positiivisia kokonaislukuja, joille $2n + 1 > N$. Matikkalan koulussa on n oppilasta ja Fysiikkalan koulussa $n + 1$ oppilasta. Heistä valitaan satunnaisesti N hengen kilpailujoukkue. Mikä on todennäköisyys, että Matikkalan koulusta valitaan enemmän kilpailijoita kuin Fysiikkalan koulusta?