Joulukuun helpommat valmennustehtävät – ratkaisut

1. **Tapa 1.** Olkoon $x_n = a^n + b^n$, kun $n = 0, 1, 2, \ldots$. Auki kertomalla havitaan kaava

$$a^{n+2} + b^{n+2} = (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n).$$

Koska $a + b = 2$ ja $ab = -1$, saadaan $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$. Tästä reukrsiokaavasta voidaan laskea vain peruslaskutoimitusten avulla $x_{10} = 6726$.

Tapa 2. Kaikilla x pätee $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = x^2 - 2x - 1$. Siispä a ja b ovat yhtälön $x^2 - 2x - 1$ ratkaisut, eli $1 \pm \sqrt{2}$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Vastaus on siis $(1+\sqrt{2})^{10} + (1-\sqrt{2})^{10}$. Keromalla auki binomikaavalla se sievenee muotoon

$$\begin{aligned}&2 \cdot \sqrt{2}^{10} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \sqrt{2}^{8} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \sqrt{2}^{6} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \sqrt{2}^{4} \\ &+ 2 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \sqrt{2}^{2} + 2 = 6726,\end{aligned}$$

koska joka toinen termi kumoutuu binomikaavassa.

2. Reunaruutuja on $2a + 2b - 4$, ja ruutuja on yhteensä ab. Saadaan yhtälö $ab = 3(2a + 2b - 4)$ eli $ab - 6a - 6b + 12 = 0$. Tämän voi jakaa tekijöihin: $(a-6)(b-6) = 24$. Luvun 24 positiiviset ja negatiiviset tekijät ovat $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$. Luvut $a - 6$ ja $b - 6$ ovat siis joitain näistä luvuista, ja koska $a, b > 0$, ne ovat itse asiassa joitain luvuista $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 6, 12, 24$. Kahden negatiivisen luvun tulo tästä joukosta ei voi olla 24, joten $a - 6$ ja $b - 6$ ovat joitain luvuista $1, 2, 3, 4, 6, 12, 24$. Siispä ratkaisuiksi saadaan $\{a, b\} = \{7, 30\}, \{8, 18\}, \{9, 14\}, \{10, 12\}$.

3. Jälkimmäinen pelaaja pystyy pakottamaan voiton itselleen. Jos aloittava pelaaja ottaa jollain siirrolla k kiveä, hän ottaa $5 - k$ kiveä. Näin ollen toisella pelaajalla on joka kierroksen alussa viidellä jaollinen määrä kiviä. Voittaakseen on päästävä tilanteeseen, jossa oman vuoron alussa on $1, 2, 3$

tai 4 kiveä. Aloittaja ei siis pääse tähän tilanteeseen, joten jälkimmäinen pelaaja pääsee siihen ja voittaa.

4. Olkoon $\alpha = \angle MBA$. Kosinilauseella $QA^2 = QB^2 + AB^2 - 2QB \cdot AB \cos\alpha$ ja $QM^2 = QB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - QB \cdot AB \cos\alpha$. Nyt $QA^2 - 2QM^2 = -QB^2 + \frac{AB^2}{2}$, ja väite seuraa. $\square$

5. **Tapa 1.** Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$x^5 + x + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^5 \cdot x \cdot 1} = 3x^2,$$

kun $x \geq 0$. $\square$

Tapa 2. Tarkastellaan polynomia $P(x) = x^5 + x + 1 - 3x^2$. Pätee $P(1) = 0$, joten $P(x) = (x-1)Q(x)$ jollakin toisella polynomilla $Q(x)$. Jakokulmassa saadaan $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 1$. Edelleen $Q(1) = 0$, joten $Q(x) = (x-1)R(x)$ jollakin polynomilla $R(x)$. Jakokulmassa saadaan $R(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$. Näin ollen

$$x^5 + x + 1 - 3x^2 = (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + 3x + 1) \geq 0$$

kun $x \geq 0$. $\square$

6. Symmetrian nojalla riittää tarkastella tapauksia $a \leq b$. Oletetaan aluksi, että a on pariton, santoaan $a = 2k+1$. Tällöin yhtälö $2^a + 2^b = x^2$ sievenee muotoon $2 + 2^{b-2k-1} = \left(\frac{x}{2^k}\right)^2$. Nyt luku $2 + 2^{b-2k-1}$ on parillinen muttei neljällä jaollinen, mikä on mahdotonta neiöluvulle. Siispä a on parillinen, sanotaan $a = 2k$. Tällöin $1 + 2^{b-2k} = \left(\frac{x}{2^k}\right)^2$. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $\left(\frac{x}{2^k} + 1\right)\left(\frac{x}{2^k} - 1\right) = 2^{b-2k}$. Aritmetiikan peruslauseen nojalla on nyt oltava

$$\frac{x}{2^k} + 1 = 2^\ell, \quad \frac{x}{2^k} - 1 = 2^{\ell'}$$

jollakin kokonaisluvuilla $\ell, \ell' \geq 0$, joille $\ell + \ell' = b$. Vähentämällä yhtälöt saadaan $2^\ell - 2^{\ell'} = 2$. Ainoat kakkosen potenssit, joiden erotus on 2, ovat 4 ja 2. Siten $\ell = 2, \ell' = 1$ ja $x = 3 \cdot 2^k$. Tällöin $b = \ell + \ell' + 2k = 2k + 3$. Mahdolliset ratkaisut ovat siis $a = 2k, b = 2k+3$ ja ne, joissa a ja b vaihtavat paikkoja. Nämä tosiaan kelppavat, koska $2^{2k} + 2^{2k+3} = (3 \cdot 2^k)^2$.

7. **Tapa 1.** Kiinnitetään yksi pelaaja, sanotaan A. A:lle voi valita parin $2n-1$ tavalla. Kiinnitetään jäljelle jääneistä jokin pelaaja B. Hänelle voi

valita parin $2n-3$ tavalla. Jatketaan tällä tavalla. Aloituskierrosten lukumäärä saadaan kertomalla eri vaiheiden lukumäärät, eli se on $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot ... \cdot 1$.

Tapa 2. Pelaajista voidaan muodostaa pari $\binom{2n}{2}$ tavalla. Lopuista pelaajista voidaan muodostaa pari $\binom{2n-2}{2}$ tavalla jne.. Aloituskierroksia on siis yhteensä

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}...\binom{2}{2} = \frac{2n(2n-1)(2n-3)(2n-4)...\cdot 2\cdot 1}{2^n}$$
$$= (2n-1)(2n-3)...\cdot 1.$$

8. Sovelletaan neliöön 90 asteen kiertoa pisteen A suhteen. Tällöin pisteet A, B, C, D, P kuvautuvat pisteiksi A', B', C', D', P'. Janat AP ja AP' ovat kohtisuorat ja yhtä pitkät. Siispä $\angle APP' = 45°$. Koska $AP = 2$, pätee $PP' = \sqrt{2}$. Koska $\sqrt{2}^2 + 1 = \sqrt{3}^2$, suorat PP' ja PD ovat kohtisuorassa. Siten $\angle APD = \angle APP' + \angle P'PD = 135°$.

9. Jos a on pariton, niin $p = 2$. Silloin kuitenkin $p + 2a$ on parillinen ja suurempi kuin 2 eli ei alkuluku. Siispä a on parillinen. Jos a on jaoton kolmella, niin jokin luvuista $p + 2a, p + 3a, p + 4a$ on jaollinen kolmella. Nämä luvut ovat suurempi kuin 3, joten tämäkään tapaus ei käy. Luku a on siis jaolinen kolmella. Jos luku a on jaollinen myös viidellä, on $a \geq 30$. Oletetaan siis, että a on jaoton viidellä. Tällöin yksi luvuista $p, p + a, ..., p + 4a$ on jaollinen viidellä. Koska nämä luvut ovat alkukukuja, sen on oltava ensimmäinen niistä, eli $p = 5$. Kun $p = 5$, niin vainta $a = 6$ tosiaan tuottaa alkuluvut $5, 11, 17, 23, 29$. Vastaus on siis $p = 5$.

10. Tarkastellaan suurinta kuperaa monikulmiota, jonka kärjet ovat joukosta A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (tätä sanotaan joukon konveksiverhoksi). Jos kyseinen monikulmio on viisikulmio, niin kuviossa on viisi kulmaa, joiden summa on $\frac{3}{2} \cdot 360° = 540°$. Siipä jokin näistä kulmista on enintään $\frac{540}{5} = 108$ astetta. Olkoon tämän kulma arvoltaan α. Kuviosta löytyy kolme kulmaa, joiden summa on α, joten jokin niistä on enintään $\frac{\alpha}{3} \leq 36°$. Oletetaan seuraavaksi, että suurin kupera monikulmio on nelikulmio. Tällöin vaikkapa pisteet A_1, A_2, A_3, A_4 muodostavat kuperan nelikulmion, jonka sisällä A_5 on. Tarkastellaan nejää kulmaa, joiden kärki on A_5. Niiden summa on $360°$, joten jokin niistä on vähintään $90°$. Olkoon $\angle A_1A_5A_4 \geq 90°$. Nyt kolmiossa $A_1A_4A_5$ on jokin kulma, jonka arvo on enintään $45°$. Olkoon lopuksi suurin kupera monikumio kolmio. Tällöin vaikkapa A_4 ja A_5 ovat kolmion $A_1A_2A_3$ sisällä. Tarkastellaan kulmia, joiden kärki on A_4 ja sivupisteet joukosta A_1, A_2, A_3.

Näiden kulmien summa on $360°$, joten jonkin niistä arvo on $\beta \geq 120°$. Sanotaan vaikkapa $\angle A_1A_4A_2 = \beta$. Nyt kolmiossa $A_1A_2A_4$ on yksi kulma, jonka arvo on vähintään $120°$. Siispä jonkin sen kulman arvo on enintään $30°$. Kaikissa tapauksissa siis pinenin kuma on enintään $45°$. Tämä arvo saavutetaan, kun $A_1A_2A_3A_4$ on neliö ja A_5 sen keskipiste.