

# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailu 2015

## Avoimen sarjan tehtävät ja niiden ratkaisuja

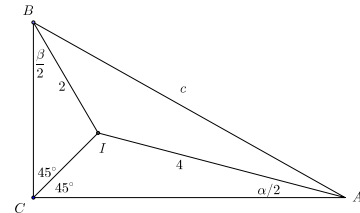
1. Olkoot  $a$  ja  $b$  peräkkäisiä kokonaislukuja,  $c = ab$  ja  $d = a^2 + b^2 + c^2$ . a) Osoita, että  $\sqrt{d}$  on kokonaisluku. b) Mitä voit sanoa luvun  $\sqrt{d}$  parillisuudesta tai parittomuudesta?

*Ratkaisu.* Voidaan olettaa, että  $b = a + 1$ . Silloin  $d = a^2 + (a + 1)^2 + (a(a + 1))^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^4 + 2a^3 + a^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ . Toisaalta  $(a^2 + a + 1)^2 = a^4 + a^2 + 1 + 2a^3 + 2a^2 + 2a = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ .  $d$  on siis neliöluku ja  $\sqrt{d} = a^2 + a + 1$ .

( $a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ .) Koska  $a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1$  ja joko  $a$  tai  $a + 1$  on parillinen, niin  $a(a + 1)$  on parillinen ja  $\sqrt{d}$  on pariton.

2. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteen etäisyydet kolmion terävien kulmien kärjistä ovat 2 ja 4. Laske hypotenuusan pituus (tarkka arvo).

1. *ratkaisu.* Olkoon suorakulmainen kolmio  $ABC$ , sen hypotenuusa  $c = AB$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle CAB = \alpha$  ja  $I$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste.  $I$  on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Sovelletaan (kolmion kulmasummasta välittömästi seuraavaa) tietoa, jonka mukaan kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, kolmioihin  $CAI$  ja



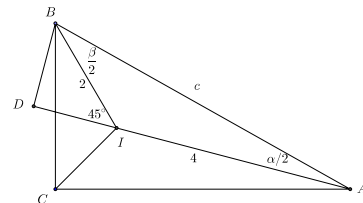
$BCI$ . Saadaan  $\angle AIB = \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ . Koska  $ABC$  on suorakulmainen,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Siis  $\angle AIB = 135^\circ$ . Sovelletaan kosinilauseetta kolmioon  $ABI$ . Koska  $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , saadaan heti

$$c^2 = 4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 + 8\sqrt{2},$$

joten

$$c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

2. *ratkaisu.* Olkoon  $D$  se piste kulman  $\angle CAB$  puolittajalla  $AI$ , jolle  $BD \perp AI$ . Kolmion  $ABI$  kulman  $\angle BIA$  vieruskulmana  $\angle BID = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$ . Kolmio  $IBD$  on siis tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa  $BI = 2$ . Siis  $BD = DI = \sqrt{2}$ . Suorakulmaisesta kolmiosta  $ABD$  saadaan Pythagoraan lauseen perusteella heti  $c^2 = AB^2 = (4 + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 20 + 8\sqrt{2}$  ja  $c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ .



3. ratkaisu. (Kalevi Lyyra) Olkoon  $IA = 2$ ,  $IB = 4$ ,  $D$   $ABC$ :n sisäympyrän ja  $AB$ :n sivuamispiste,  $AD = u$ ,  $BD = t$ ,  $\angle IAB = \alpha$  ja  $\angle IBA = \beta$ . Suorakulmaisista kolmioista  $AID$  ja  $BID$  saadaan  $r = 2 \sin \alpha = 4 \sin \beta$ . Siis  $\sin \alpha = 2 \sin \beta$ . Toisaalta  $\alpha + \beta = 45^\circ$ , joten  $2 \sin \beta = \sin(45^\circ - \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \beta - \sin \beta)$ . Tästä ratkaistaan

$$\tan \beta = \frac{1}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{r}{t}, \quad r = \frac{t}{1 + 2\sqrt{2}}.$$

Samoin johdetaan yhtälöt

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{r}{u}, \quad r = \frac{u\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Kun Pythagoraan lausetta sovelletaan kolmioihin  $AID$  ja  $BID$ , saadaan

$$4 = r^2 + u^2 = u^2 \left( \frac{2}{(1 + \sqrt{2})^2} + 1 \right)$$

ja

$$16 = r^2 + t^2 = t^2 \left( \frac{1}{(1 + 2\sqrt{2})^2} + 1 \right).$$

Tästä ratkaistaan

$$u = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}, \quad t = \frac{2\sqrt{2}(1 + 2\sqrt{2})}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}},$$

ja edelleen

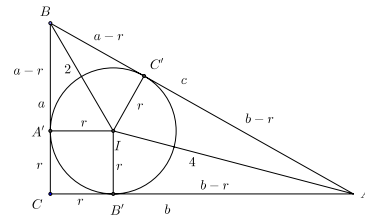
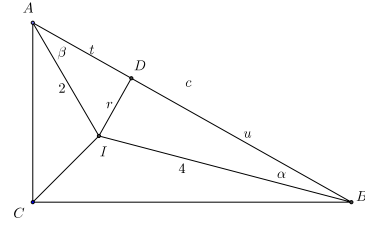
$$c = u + t = \frac{2(1 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(1 + 2\sqrt{2})}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} = \frac{10 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

4. ratkaisu. Olkoon  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $ABC$ :n sisäympyrän säde  $r$  ja sisäympyrän ja kolmion sivujen  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  sivuamispisteet  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Koska  $A'CB'I$  on neliö,  $A'C = CB' = r$ . Koska ympyrän tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat yhtä pitkiä, on  $BC' = BA' = a - r$  ja  $C'A = B = b - r$ . Siis  $c = a + b - 2r$ , joten

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c), \quad a - r = \frac{1}{2}(a - b + c), \quad b - r = \frac{1}{2}(-a + b + c).$$

Suorakulmaisista kolmioista  $IAC'$  ja  $BIC'$  saadaan Pythagoraan lauseen nojalla

$$(-a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \quad (1)$$



ja

$$(a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 = 4 \cdot 2^2 = 16. \quad (2)$$

Kun otetaan huomioon, että  $ABC$  on suorakulmainen, joten  $a^2 + b^2 = c^2$ , niin (1) ja (2) sievenevät muotoihin

$$4c^2 - 4ac = 64, \quad 4c^2 - 4bc = 16.$$

Siis

$$a = \frac{c^2 - 16}{c}, \quad b = \frac{c^2 - 4}{c}$$

Kun nämä  $a$ :n ja  $b$ :n arvot sijoitetaan Pythagoraan yhtälöön  $a^2 + b^2 = c^2$ , saadaan  $c$ :lle yhtälö

$$c^4 - 40c^2 + 272 = 0,$$

josta ratkaistaan

$$c^2 = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 272}}{2} = 20 \pm \sqrt{400 - 272} = 20 \pm \sqrt{128} = 20 \pm 8\sqrt{2}.$$

Kolmiosta  $ABI$  nähdään, että  $c > 4$ , joten  $c^2$ :n lausekkeessa vain  $+$ -merkki kelpaa. Siis

$$c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

*5. ratkaisu.* Käytetään samoja merkintöjä kuin edellä. Pythagoraan lause sovellettuina suorakulmaisiin kolmioihin  $AC'I$ ,  $AB'I$ ,  $BC'I$ ,  $BA'I$  antaa  $AC' = AB' = \sqrt{16 - r^2}$  ja  $BC' = BA' = \sqrt{4 - r^2}$ . Yhtälö  $a^2 + b^2 = c^2$  on siis

$$\left(r + \sqrt{4 - r^2}\right)^2 + \left(r + \sqrt{16 - r^2}\right)^2 = \left(\sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2}\right)^2.$$

Kun tässä suoritetaan neliöön korotukset ja sievennetään, saadaan, että  $r$  toteuttaa yhtälön

$$r \left(\sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2}\right) = -r^2 + \sqrt{r^4 - 20r^2 + 64}.$$

Kun tämä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan, että  $r$  toteuttaa yhtälön

$$r^2 \sqrt{r^4 - 20r^2 + 64} = r^4 - 10r^2 + 16.$$

Kun tämä vielä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan  $r$ :n toteuttamaksi yhtälöksi

$$17r^4 - 80r^2 + 64 = 0.$$

Tämä on tuntemattoman  $r^2$  toisen asteen yhtälö, jolle voidaan suoraan kirjoittaa ratkaisu

$$r^2 = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 17 \cdot 256}}{34} = \frac{40 \pm 16\sqrt{2}}{17}.$$

Koska  $r$  on kolmion  $BIC'$  lyhempi kateetti, on oltava  $r^2 < 2$ . Vain

$$r^2 = \frac{40 - 16\sqrt{2}}{17}$$

voi tulla kyseeseen. Nyt

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2} = \frac{\sqrt{28 + 16\sqrt{2}} + \sqrt{232 + 16\sqrt{2}}}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{17}} \left( \sqrt{7 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{58 + 4\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

– Tämä yllättävän erinäköinen ratkaisu on kuitenkin sama kuin edellisissä ratkaisuihin saatu  $c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ , niin kuin selviää, kun korottaa molemmat lausekkeet neliöön ja tekee rutiinisievennykset.

*6. ratkaisu.* Käytetään samoja merkintöjä kuin 3. ratkaisussa. Koska  $\sin \beta = 2 \sin \alpha = 2 \sin(45^\circ - \beta) = \sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)$ , saadaan  $(1 + \sqrt{2}) \sin \beta = \sqrt{2} \cos \beta$ ,  $(3 + 2\sqrt{2}) \sin^2 \beta = (3 + 2\sqrt{2})(1 - \cos^2 \beta) = 2 \cos^2 \beta$ , josta ratkaistaan

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Kun vastaavasti lähdetään yhtälöstä  $\sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(45^\circ - \alpha)$  ja tehdään samat operaatiot kuin edellä, tullaan yhtälöön

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Nyt

$$c = 2 \cos \alpha + 4 \cos \beta = \frac{2 \left( \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Tämä jälleen aivan erinäköinen lauseke on kuitenkin sama kuin aikaisemmissa ratkaisuihin saatu  $c$ :n arvo.

**3.** On annettuna 41 luvun joukko  $A$ . Tiedetään, että näistä jokaisen 21:n luvun summa on suurempi kuin muiden 20:n luvun summa. Montako negatiivista lukua joukossa  $A$  enintään voi olla?

*1. ratkaisu.* Olkoon  $x$  mielivaltainen joukon  $A$  alkio. Jaetaan joukon  $A \setminus \{x\}$  40 alkioita kahdeksi 20-alkioiseksi joukoksi. Olkoot näiden joukkojen alkioiden summat  $S_1$  ja  $S_2$ . Tehtävän ehdon perusteella  $S_1 + x > S_2$  ja  $S_2 + x > S_1$ . Edellisestä epäyhtälöstä seuraa  $x > S_2 - S_1$  ja jälkimmäisestä  $x > S_1 - S_2$ . Siis  $x > |S_1 - S_2| \geq 0$ . Jokainen  $A$ :n alkio on siis positiivinen luku, joten negatiivisia lukuja  $A$ :ssa ei ole.

2. *ratkaisu.*  $A$  on joukko, joten sen alkiot ovat eri lukuja. Kirjoitetaan ne suuruusjärjestykseen  $x_1 < x_2 < \dots < x_{41}$ . Jos joukossa  $A$  on negatiivisia lukuja, niin  $x_1 < 0$ . Silloin

$$\sum_{k=22}^{41} x_k < \sum_{k=1}^{21} x_k < \sum_{k=2}^{21} x_k < \sum_{k=22}^{41} x_k.$$

Tämä ei ole mahdollista, joten joukossa  $A$  ei ole negatiivisia lukuja.

4. Käytössä on kolme kirjainta  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Näistä voidaan muodostaa esimerkiksi neljän kirjaimen merkkijono  $ABBA$ . Kuinka monta merkkijonoa, joissa on  $n$  kirjainta ja joissa on parillinen määrä  $A$ -kirjaimia, voidaan muodostaa, kun  $n$  on positiivinen kokonaisluku?

1. *ratkaisu.* Jonoja, joissa on  $2k$ ,  $k \geq 0$ ,  $A$ -kirjainta, on

$$\binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

kappaletta: paikat, joissa on  $A$ -kirjain voidaan valita yhtä monella tavalla kuin voidaan valita  $n$ -alkioisen joukon  $2k$ -alkioinen osajoukko.  $B$ - ja  $C$ -kirjaimille jää  $n - 2k$  paikkaa, ja jokaiseen tällaiseen voidaan asettaa kumpi tahansa näistä kirjaimista, joten mahdollisuuksia on  $2^{n-2k}$ . Kaikkiaan tehtävän mukaisia merkkijonoja on siis

$$2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \dots$$

kappaletta. Mutta summa saadaan kirjoitettua suljettuun muotoon, kun huomataan, että

$$\begin{aligned} 3^n &= (2 + 1)^n = 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \dots, \\ 1 &= (2 - 1)^n = 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} - \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} - \dots. \end{aligned}$$

Kun edelliset binomikehitelmät lasketaan yhteen, saadaan

$$3^n + 1 = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}.$$

Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis

$$\frac{1}{2}(3^n + 1).$$

2. *ratkaisu.*  $n$ -kirjaimisia sanoja on kaikkiaan  $3^n$  kappaletta. Olkoon näistä  $S_n$  sellaisia, joissa on parillinen määrä  $A$ -kirjaimia ja  $T_n$  sellaisia, joissa on pariton määrä  $A$ -kirjaimia. Tarkastellaan sanoja, joissa on parillinen määrä  $A$ -kirjaimia. Jos sanan viimeinen kirjain on  $A$ , sen  $(n - 1)$ :n ensimmäisen kirjaimen joukossa on pariton määrä  $A$ -kirjaimia ja jos

viimeinen kirjain on  $B$  tai  $C$ , sen  $(n-1)$ :n ensimmäisen kirjaimen joukossa on parillinen määrä  $A$ -kirjaimia. Tästä seuraa

$$S_n = T_{n-1} + 2S_{n-1}. \quad (1)$$

Vastaavasti tarkastelemalla sanoja, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, tullaan yhtälöön

$$T_n = S_{n-1} + 2T_{n-1}. \quad (2)$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) vähennetään toisistaan, saadaan

$$S_n - T_n = S_{n-1} - T_{n-1}. \quad (3)$$

Nyt  $S_1 = 2$  ja  $T_1 = 1$  (parillinen määrä  $A$ -kirjaimia on sanoissa  $B$  ja  $C$ , pariton sanassa  $A$ ) eli  $S_1 - T_1 = 1$ . Yhtälöstä (3) seuraa nyt yksinkertaisella induktiolla, että  $S_n - T_n = 1$  kaikilla  $n$ . Koska  $S_n + T_n = 3^n$ , saadaan heti

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1).$$

*3. ratkaisu.* Pienillä  $n$ :n arvoilla tehdyt kokeilut antavat aiheen olettaa, että

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

ja

$$T_n = 3^n - S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Todistetaan tämä induktiolla.  $S_1 = 2$  ja  $T_1 = 1$ . Oletetaan, että väite pätee  $n$ :n merkin pituisiin jonoihin. Jonot, joiden pituus on  $n+1$  merkkiä ja joissa on parillinen määrä  $A$ -kirjaimia, saadaan liittämällä  $n$ -pituisiin jonoihin, joissa on parillinen määrä  $A$ -kirjaimia, viimeiseksi merkiksi  $B$  tai  $C$ , tai sellaisiin, joissa on pariton määrä  $A$ -kirjaimia, viimeiseksi merkiksi  $A$ . Siis

$$S_{n+1} = 2S_n + T_n = 3^n + 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1).$$

Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.