Matematiikan kirjevalmennuksen helpomman sarjan ratkaisut, joulukuu 2016

1. Epäyhtälöistä $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$ ja $(c-a)^2 \geq 0$ saadaan kertomalla neliöt auki ja jakamalla kukin epäyhtälö puolittain kahdella epäyhtälöt $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$, $\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$ ja $\frac{c^2+a^2}{2} \geq ac$. Yhdistämällä nämä epäyhtälöt saamme epäyhtälön $1 = a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.
Epäyhtälö $ab+bc+ca \geq -1/2$ seuraa epäyhtälöstä

$$0 \leq (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 1+2(ab+bc+ca).$$

2. Ratkaisu 1. Käytämme induktiota: kun $n=1$, niin $1+a_1 = \frac{2^1}{1+1}(1+a_1)$, joten epäyhtälö pätee.
Oletetaan sitten, että epäyhtälö pätee jollakin arvolla n. Tällöin induktio-oletuksen perusteella

$$\begin{aligned}(1+a_1)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1}) &\geq \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+\ldots+a_n)(1+a_{n+1}).\\ &= \frac{2^n}{n+1}\left(1+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}+\frac{a_{n+1}(a_1+\ldots+a_n)}{1+a_1+\ldots+a_{n+1}}\right)\\ &= \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1})\left(1+\frac{a_{n+1}(a_1+\ldots+a_n)}{1+a_1+\ldots+a_{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Koska oikeanpuoleisin termi

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+a_1+\ldots+a_{n+1}+a_{n+1}(a_1+\ldots+a_n)}{1+a_1+\ldots+a_{n+1}}\right) &\geq \left(\frac{1+a_1+\ldots+a_{n+1}+a_{n+1}(a_1+\ldots+a_n)}{n+2}\right)\\ &\geq \frac{n+2+n}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2},\end{aligned}$$

niin oikealle puolelle saadaan alaraja

$$\frac{2^n\cdot 2}{n+1}\frac{n+1}{n+2}(1+a_1+\ldots+a_{n+1}) = \frac{2^{n+1}}{(n+1)+1}(1+a_1+\ldots+a_{n+1}),$$

ja tehtävä on todistettu.
Ratkaisu 2. Tehtävä voidaan todistaa seuraavalla päättelyketjulla:

$$\begin{aligned}(1+a_1)\cdots(1+a_n) &= 2^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{a_i}{2}\right) = 2^n\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a_i-1}{2}\right)\\ &\geq 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}+\cdots+\frac{a_n-1}{2}\right)\\ &\geq 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n-1}{n+1}+\right)\\ &= \frac{2^n}{n+1}(n+1+a_1-1+\cdots+a_n-1)\\ &= \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+\cdots+a_n).\end{aligned}$$

3. Ratkaisu 1. Funktio $f(x) = x\ln x$ on konveksi avoimella välillä $(0,\infty)$, sillä $f'(x) = \ln x + 1$ ja $f''(x) = \frac{1}{x}+1 > 0$, kun $x > 0$. Jensenin epäyhtälön perusteella

$$\frac{a\ln a}{3}+\frac{b\ln b}{3}+\frac{c\ln c}{3} \geq \frac{a+b+c}{3}\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

eli

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq (a+b+c) \ln \frac{a+b+c}{3}.$$

Korottamalla tämä luvun e potenssiin saamme epäyhtälön

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

Käyttämällä nyt oikeaan puoleen aritmeettis-geometrista epäyhtälöä saamme

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \geq \left(\sqrt[3]{abc}\right)^{a+b+c} = (abc)^{\frac{a+b+c}{3}},$$

ja tehtävä on ratkaistu.
Ratkaisu 2. Todistettava epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq \frac{a+b+c}{3} \cdot \ln(abc)$$

kanssa, mikä taas voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{3} \geq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3},$$

missä jälkimmäinen epäyhtälö pätee Tsebysevin epäyhtälön nojalla (voimme olettaa, että $a \leq b \leq c$, jolloin myös $\ln a \leq \ln b \leq \ln c$.

4. Sijoitamme $x = y$, jolloin

$$c = f(f(0)) = f(x)^2 - x^2.$$

Tästä saamme $f(x) = \pm\sqrt{x^2 - c}$. Lähtöarvoilla $x = y = 0$ saamme yhtälön $\pm\sqrt{2c} = c$, minkä ratkaisut ovat $c = 0$ ja $c = 2$. Siten vaihtoehdot ovat $f(x) = x$ ja $f(x) = \sqrt{x^2+2}$. Tarkistuksella huomaamme, että $f(x) = x$ on ainoa vaihtoehto.

5. Kaikki funktiot muotoa $f(x) = kx^2$, $k \in \mathrm{Q}$ toteuttavat yhtälön. Tarkistamme, että tällaiset funktiot toteuttavat tehtävän ehdot:

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= k(x+y)^2 + k(x-y)^2 = && (1)\\ &= kx^2 + 2kxy + y^2 + kx^2 - 2kxy + y^2 = && (2)\\ &= 2kx^2 + 2ky^2 = && (3)\\ &= 2f(x) + 2f(y). && (4)\\ & && (5) \end{aligned}$$

Osoitamme nyt, että muita ratkaisuja ei ole. Sijoitus $x = y = 0$ antaa tuloksen $2f(0) = 4f(0)$, mistä seuraa $f(0) = 0$. Todistamme induktiolla, että kaikille $n \in \mathrm{N}$ ja $z \in \mathrm{Q}$ pätee $f(nz) = n^2 f(z)$. Kun $n = 0$ ja $n = 1$, väite pätee. Olkoon $n \geq 2$. Oletamme, että väite pätee arvoilla $n-2$ ja $n-1$. Sijoittamalla $x = (n-1)z$ ja $y = z$ saamme

$$f(nz) + f((n-2)z) = 2f((n-1)z) + 2f(z),$$

mistä

$$\begin{aligned} f(nz) &= 2f((n-1)z) + 2f(z) - f((n-2)z) = && (6)\\ &= 2(n-1)^2(z) + 2f(z) - (n-2)^2 f(z) = && (7)\\ &= (2n^2 - 4n + 2 + 2 - n^2 + 4n - 4)f(z) = && (8)\\ &= n^2 f(z). && (9) \end{aligned}$$

Sijoittamalla tehtävän yhtälöön $x = 0$ saamme

$$f(y) + f(-y) = 2f(0) + 2f(y) = 2f(y),$$

joten $f(y) = f(-y)$. Siten f on parillinen funktio ja $f(pz) = p^2 f(z)$ pätee kaikille kokonaisluvuille p.
Olkoon nyt $f(1) = k$. Tällöin mielivaltaiselle kokonaisluvulle p pätee $f(p) = kp^2$. Mielivaltaiselle rationaaliluvulle $(p \in \mathrm{Z}, q \in \mathrm{N} \setminus \{0\})$ saamme

$$kp^2 = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = q^2 \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) = q^2 f(x),$$

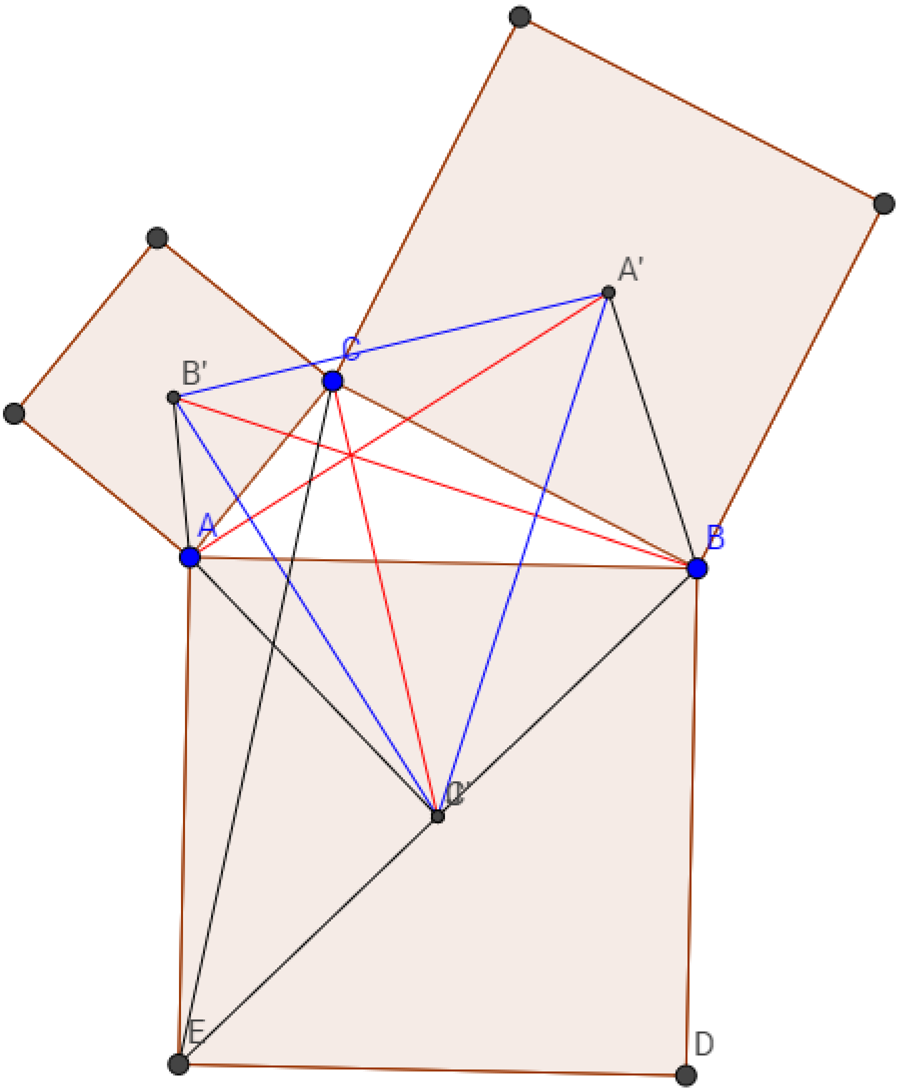
mistä seuraa $f(x) = k \cdot \frac{p^2}{q^2} = kx^2$.

6. $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, $f'(x) = 3x^2 + 2px + q$. Kriittiset pisteet ovat yhtälön $f'(x) = 0$ ratkaisut. Niistä saamme $3x = -p \pm \sqrt{p^2 - 3q}$. Kun $p^2 < 3q$, ei kriittisiä pisteitä ole, jolloin $f(x)$ on aidosti monotoninen, eikä sillä voi olla kolmea nollapistettä. Sille, että yhtälöllä on kolme nollapistettä, $p^2 \geq 3q$ on välttämätön, mutta ei välttämättä riittävä ehto.

7. Huomaamme, että yhtälöllä on nollakohta $z = -1$ ja se on jaollinen polynomilla $z + 1$. Ottamalla tämän polynomin yhteiseksi tekijäksi saamme $(z+1)(4z^{10} - 21z^8 + 17z^6 + 17z^4 - 21z^2 + 4) = 0$. Ensimmäinen tekijä on nolla, kun $z_1 = -1$. Sijoittamalla $u = z + 1/z$ saamme toisen tekijän muotoon $u(4u^4 - 41u^2 + 100) = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = -5/2$, $u_3 = 5/2$, $u_4 = 2$, $u_5 = -2$. Sijoittamalla nämä yhtälöön $z^2 - uz + 1 = 0$ saamme kaikki 11 juurta: $z_1 = -1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = -2$, $z_5 = -1/2$, $z_6 = 2$, $z_7 = 1/2$, $z_8 = z_9 = 1$, $z_{10} = z_{11} = -1$.

8. Jaamme puolittain lausekkeella a^2x^2: $(x/a - a/x)^2 - 3(x/a - a/x) + 2 = 0$. Tästä toisen asteen yhtälöstä saamme ratkaisuiksi $x/a - a/x = 2$ ja $x/a - a/x = 1$, ja kertomalla nämä puolittain termillä ax saamme toisen asteen yhtälöt $x^2 - 2ax - a^2 = 0$ ja $x^2 - ax - a^2 = 0$, joiden ratkaisut ovat $x_{1,2} = a(1 \pm \sqrt{2})$ ja $x_{3,4} = a\left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2$.

9. Piirretään jana AB sivuna neliö ABDE (ks. kuva seuraavalla sivulla). Kolmiot AB'C' ja EAC ovat selvästi yhdenmuotoisia. Lisäksi EAC on AB'C' kierrettynä 45° myötäpäivään, ja sen sivut ovat kooltaan $\sqrt{2}$ kertaa kolmion $AB'C'$ vastaavat sivut. Siten jana EC vastaa janaa B'C', jota on kierretty 45° ja pituus muunnettu kertoimella $\sqrt{2}$.
Edelleen kolmiot BEC ja BAA' ovat yhdenmuotoisia, ja BAA' on BEC kierrettynä 45° myötäpäivään ja sen sivut ovat kooltaan $1/\sqrt{2}$ kertaa kolmion BEC vastaavat sivut. Siten ollen AA' vastaa janaa EC, jota on kierretty 45° myötäpäivään ja pituus muunnettu kertoimella $1/\sqrt{2}$.
Yhdistämällä nämä huomiot huomaamme, että $AA' \perp B'C'$, ja lisäksi nämä janat ovat yhtä pitkät. Vastaavalla päättelyllä huomaamme, että $BB' \perp A'C'$ ja $CC' \perp A'B'$. Siten janat AA', BB' ja CC' ovat kolmion A'B'C' korkeusjanojen muodostamilla suorilla, jotka tunnetusti leikkaavat toisensa samassa pisteessä.



10. Merkitsemme kolmion ABC alaa $|ABC|$. Kolmion kulmanpuolittaja AD jakaa vastapäisen janan BC suhteessa $|AB|/|AC|$, joten $|BD|/|DC| = q/p$. Koska $s.y.t.(q,p) = 1$, niin $s.y.t.(q, q+p) = 1$, joten $|ABD| = \frac{q}{q+p}|ABC|$. Koska $|AM| = |MD|$, niin $|AD| = 2|AM|$ ja pisteen D etäisyys suorasta AB on kaksi kertaa pisteen M etäisyys suorasta AB. Siten $|ABD| = 2|AMB|$. Yhdistämällä tämä aiempaan yhtälöön saamme

$$|ABM| = \frac{1}{2}\frac{q}{q+p}|ABC|.$$

Koska $s.y.t.(m,n) = 1$, niin $s.y.t.(m, m+n) = 1$, joten

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AP|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{q}.$$

Toisaalta

$$|ABP| = \frac{|AP|}{|AC|} \cdot |ABC| = \frac{n}{m+n} \cdot |ABC|.$$

Koska piste M on kulman A puolittajalla, on sen etäisyys suorista AC ja AB sama. Siten

$$|ABM| = \frac{|AB|}{|AB| + |AP|} \cdot |ABP| = \frac{1}{1 + \frac{|AP|}{|AB|}} \cdot |ABP| = \frac{1}{1 + \frac{|AP|}{|AB|}} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot |ABC|.$$

Yhdistämällä alan $|ABM|$ lausekkeet saamme

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{q+p} = \frac{1}{1+\frac{|AP|}{|AB|}} \cdot \frac{n}{m+n},$$

tai ottamalla näiden käänteisluvut

$$\frac{2(q+p)}{q} = \left(1+\frac{|AP|}{|AB|}\right) \cdot \frac{m+n}{n} = \left(1+\frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{q}\right) \cdot \frac{m+n}{n} = \frac{m+n}{n} + \frac{p}{q}.$$

Yksinkertaistamalla saadaan

$$1+\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$$

eli

$$\frac{p+q}{q} = \frac{m}{n}.$$

Koska $s.y.t.(m,n)=1$ ja $s.y.t.(p+q,q)=1$, niin $m+n=p+q+q=p+2q$.