Syyskuun helpommat valmennustehtävät
Ratkaisut

1. Etsi kaikki funktiot f reaaliluvuilta itselleen, joille $f(f(x)) + y = f(x) + f(f(y))$ kaikilla reaalisilla x ja y.

Ratkaisu: Sijoituksella $x = y$ saadaan $f(f(x)) + x = f(x) + f(f(x))$ kaikilla x, joten $f(x) = x$ kaikilla x. Tämä tosaan kelpaa.

2. Etsi kaikki parit (a, k) positiivisia kokonaislukuja, joille $a^2 + 5a = 6^k$.

Ratkaisu: Koska $a(a + 5) = 6^k$ ja enintään toinen luvuista $a, a + 5$ on parillinen ja eneintään toinen kolmella jaollinen, niin aritmetiikan peruslauseella $a = 2^k, a + 5 = 3^k$ tai $a = 1, a + 5 = 6^k$. Siis joko $3^k - 2^k = 5$, mistä $k = 2$ tai $6^k = 6$, mistä $k = 1$. Ratkaisuiksi saadaan $(1, 1), (4, 2)$.

3. Olkoot $a_1, ..., a_n$ annettuja reaalilukuja. Millä luvun x arvolla lauseke $(x - a_1)^2 + ... + (x - a_n)^2$ on minimissään?

Ratkaisu: Koska $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2-4ac}{4a^2}$, niin toisen asteen polynomi on minimissään kohdassa $x = \frac{-b}{2a}$. Toisen asteen polynomi $nx^2 - 2(a_1 + ... + a_n)x + (a_1^2 + ... + a_n^2)$ on siis minimissään kohdassa $x = \frac{a_1+...+a_n}{n}$.

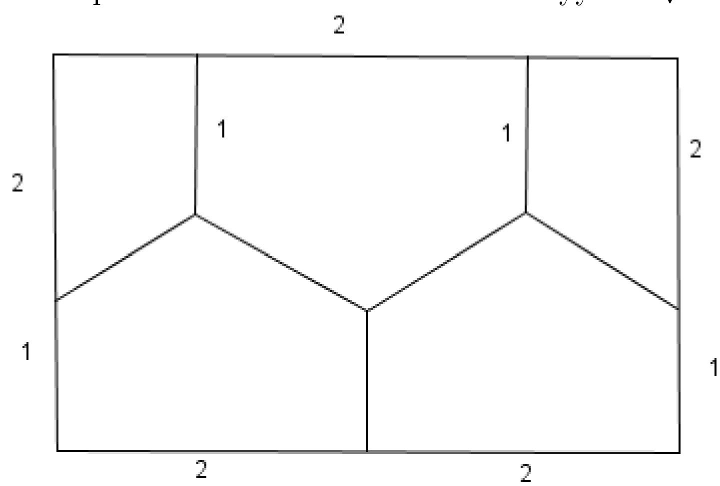
4. Suorakulmion muotoisessa puutarhassa on suihkulähde, jonka etäisyydet kolmesta suorakulmion kärjestä ovat 5m, 5m ja 1m jossakin järjestyksessä. Mitkä ovat suihkulähteen mahdolliset etäisyydet neljännestä kärjestä?

Ratkaisu. Olkoon suihkulähde origo O ja koordinaattiakselit suorakulmion sivujen suuntaiset. Tällöin voidaan merkitä $A = (a, b), B = (c, b), C = (c, d), D = (a, d)$. Nyt etäisyyksien neliöt kolmesta kärjestä ovat $a^2 + b^2, b^2 + c^2, c^2+d^2$. Neljäs etäisyys toiseen on siis $d^2+a^2 = (a^2+b^2)-(b^2+c^2)+(c^2+d^2)$. Tulos on $5^2 - 5^2 + 1 = 1$ tai $5^2 - 1^2 + 5^2 = 49$. Neljäs etäisyys on siis $1m$

tai $7m$. On helppo nähdä, että nämä kelpaavat (tässä todistuksessa pätevät ekvivalenssit).

5. Asetetaan suorakulmioon, jonka sivujen pituudet ovat 3 ja 4, kuusi pistettä. Osoita, että joidenkin kahden pisteen välinen etäisyys on enintään $\sqrt{5}$.

Ratkaisu. Jaetaan 3×4-suorakaide kuvan mukaisesti viiteen osaan. Tällöin johonkin osaan tulee ainakin kaksi pistettä. Kuitenkin selvästi missä tahansa osassa pisteiden suurin mahdollinen etäisyys on $\sqrt{5}$.



6. Olkoon ABC kolmio, jonka sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Tiedetään, että $AC = 2007$. Kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D. Oletetaan, että $AB = CD$. Määritä sivujen AB ja BC pituudet.

Ratkaisu. Merkitään $AB = CD = x$ ja $BD = y$. Kulmanpuolittajalausella $\frac{x}{2007} = \frac{y}{x}$, joten $x^2 = 2007y$. Kolmioepäyhtälön nojalla $2007 + x > x + y$, joten $2007 > y$. Nyt koska x ja y ovat kokonaislukuja, seuraa $y = 223$ tai $y = 223 \times 4$. Ensimmäisessä tapauksessa $AB = x = 669$ ja $BC = x + y = 892$, ja kolmioepäyhtälö toteutuu. Toisessa tapauksessa $AB = x = 1338$ ja $BC = x + y = 2230$, ja kolmioepäyhtälö taas toteutuu.

7. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joita ei voi esittää muodossa $2xy + x + y$ millään positiivisilla kokonaisluvuilla x ja y.

Esitystä $n = 2xy + x + y$ ei ole jos ja vain jos esitystä $2n+1 = 4xy+2x+2y+1 = (2x+1)(2y+1)$ ei ole. Näin käy jos ja vain jos $2n+1 = p$ eli $n = \frac{p-1}{2}$, missä p on pariton alkuluku.

8. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että jos $2^n \times 2^n$-shakkilaudasta poistetaan yksi ruutu, loput voidaan peittää L-kirjaimen muotoisilla kolmen ruudun palikoilla.

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Tapauksessa $n = 1$ väite on selvä. Oletetaan tapaus n ja todistetaan tapaus $n+1$. Kun $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-laudalta poistetaan yksi ruutu, lauta jakautuu neljään osaan: kolmeen $2^n \times 2^n$ neliöön ja yhteen $2^n \times 2^n$ neliöön, josta puuttuu yksi ruutu. Induktio-oletuksen nojalla tämä neljäs neliö voidaan peittää L-kirjaimen muotoisilla palikoilla. Jos asetetaan laudalle sellainen kolmen ruudun L-kirjaimen mutoinen palikka, joka peittää yhden ruudun kustakin $2^n \times 2^n$ osalaudasta, jäljelle jäävät osat voidaan peittää palikoilla induktio-oletuksen nojalla.

9.Tehtävän kulmaoletuksista seuraa $\angle ABC = 180° - 2(180^{circ} - 135°) = 90°$, joten Thaleen lauseella O on janan AC keskipiste. Olkoon D suorien AI ja BC leikkauspiste. Tällöin $ICO \cong ICD$, joten $DC = CO = \frac{1}{2}AC$. Kun yhdistetään tämä kulmanpuolittajalauseeseen, saadaan $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2}$, joten $BD = \frac{1}{2}AB$. Nyt $2BC = 2(BD + DC) = AB + AC$. Siten AB, BC ja AC muodostavat aritmeettisen jonon. Suora lasku Pythagoraan lauseen avulla osoittaa, että ainoa suorakulmainen kolmio, jossa sivujen pituudet ovat aritmeettisessa jonossa, on sellainen, jossa $AB = 3\ell, BC = 4\ell, AC = 5\ell$. Siispä $AB : BC : CA = 3 : 4 : 5$.

10.(a) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että jonon

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$$

kaikki jäsenet jostakin jäsenestä alkaen antavat saman jakojäännöksen jaettaessa luvulla n.
(b) Osoita, että kaikilla positiivisilla kokoansiluvuilla n on olemassa kokonaisluku $m > 0$, jolle $2^m - m$ on jaollinen luvulla n.

Ratkaisu: (a) Olkoon $n = 2^a n'$, missä n' on pariton. Riittää osoittaa, että jakojäännökset ovat vakioita sekä $\pmod{2^a}$ että $\pmod{n'}$ kiinalaisella jäännöslauseella. Modulo 2^a kaikii riittävän suuret termit ovat selmästi vakioita. Jos n' on pariton, Eulerin lauseen nojalla luku $2^x \pmod{n'}$ riippuu ainoastaan luvusta $x \pmod{\varphi(n')}$. Lisäksi 2^{2^x} riippuu ainoastaan luvusta $x \pmod{\varphi(\varphi(n'))}$ jne. Koska $\varphi(m) \leq m-1$ kun $m > 1$, löytyy M, jolle $\varphi(...\varphi(\varphi(n')))) = 1$ (sovellettu M kertaa). Kun ekspionenttitornissa on ainakin M eksponenttia, jonon k:s jäsen riippuu ainoastaan luvusta $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ $\pmod 1$. ($k-M$ kertaa). Tämä on tietysti aina sama, joten eksponenttitorni $\pmod{n'}$ ei enää muutu.

(b) Olkoon m se jäännösluokka $\pmod n$, johon edellinen eksponenttitorni vakiintuu. Koska k:s ja $k+1$:s termi ovat samat $\pmod n$ suurilla k, saadaan $2^m \equiv m \pmod n$.