Vuoden 1993 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Ehdon (i) perusteella $F(0) = \frac{1}{2}F(0)$, joten $F(0) = 0$. Ehdon (ii) perusteella $F(1) = 1 - F(0) = 1$. Edelleen $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ja $F\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Koska F on kasvava, tämä on mahdollista vain, jos $F(x) = \frac{1}{2}$ kaikilla $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Kysytyistä funktionarvoista ensimmäisen määrittämiseksi käytetään ehtoja (i) ja (ii) siten, että funktion argumentti saadaan yksikön keskimmäiseen kolmannekseen:

$$F\left(\frac{173}{1993}\right) = \frac{1}{2}F\left(\frac{519}{1993}\right) = \frac{1}{4}F\left(\frac{1557}{1993}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - F\left(\frac{436}{1993}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}F\left(\frac{1308}{1993}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right.$$
$$= \frac{3}{16}.$$

Jälkimmäisen arvon laskemiseksi käytetään ehtoja (i) ja (ii) sellaisen yhtälön muodostamiseksi, josta tuntematon voidaan ratkaista.

$$F\left(\frac{1}{13}\right) = 1 - F\left(\frac{12}{13}\right) = 1 - 2F\left(\frac{4}{13}\right) = 1 - 2\left(1 - F\left(\frac{9}{13}\right)\right)$$
$$= 2F\left(\frac{9}{13}\right) - 1 = 4F\left(\frac{3}{13}\right) - 1 = 8F\left(\frac{1}{13}\right) - 1.$$

Tästä ratkaistaan

$$F\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{7}.$$

2. Yhdistetään kuusikulmion kärjet ympyrän keskipisteeseen. Tällöin syntyy kolmen kokoisia keskuskulmia α, vastaamaan jänteitä, joiden pituus on 1, β vastaamaan jänteitä, joiden pituus on 2 ja γ vastaamaan jänteitä, joiden pituus on 3. Selvästi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Siirretään kuusikulmion kolme eripituista sivua vierekkäin. Silloin syntyy nelikulmio $ABCD$, jossa AB on ympyrän halkaisija $2r$, $BC = 1$, $CD = 2$ ja $DA = 3$. Olkoon O ympyrän keskipiste. Nyt $\angle COB = \alpha$ ja $\angle CAB = \frac{\alpha}{2}$. Lisäksi $\angle CDB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Merkitään $AC = x$. Silloin $x^2 + 1 = 4r^2$ ja

$$x^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3\cos\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 13 + 12\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Toisaalta

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2r}.$$

Kun tämä sijoitetaan x^2:n lausekkeeseen, saadaan

$$4r^2 = x^2 + 1 = 14 + 12 \cdot \frac{1}{2r}$$

eli

$$2r^3 - 7r - 3 = 0.$$

3. Ensimmäisen yhtälön perusteella $x \geq 2$ ja ensimmäisen sekä kolmannen perusteella

$$s(z) = y - x - 4. \tag{1}$$

Täten $y \geq x + 5 \geq 7$. Kun (1) sijoitetaan toiseen yhtälöön, saadaan $z = 2y - 4$. Nyt $s(z) \leq s(2y) \leq s(y) + 1$ ja $s(x) \leq s(y)$ joten viimeisen yhtälön perusteella $3s(y) + 1 \geq y - 4$ eli

$$y \leq 3s(y) + 5.$$

Koska

$$10^{s(y)-1} \leq y,$$

tämä epäyhtälö voi toteutua vain, jos $s(y) = 1$ tai $s(y) = 2$. Jos $s(y) = 1$, niin $y \leq 3 + 5 = 8$, joten $y = 7$ tai $y = 8$. Jos olisi $y = 7$, olisi $x = 2$ ja $z = 10$. Silloin olisi $x + y + s(z) = 2 + 7 + 2 = 9 \neq z$. Siis jos $s(y) = 1$, niin $y = 8$. Kolmikko $(x, y, z) = (2, 8, 12)$ toteuttaa kaikki yhtälöt. Jos $s(y) = 2$, niin $y = 10$ tai $y = 11$. Jos $y = 10$, niin $z = 16$ ja $x \leq 5$. Ei voi olla $s(x) + s(y) + s(z) = y - 4 = 6$. Jos $y = 11$, niin $x \leq 6$ ja $z = 18$. Nytkään kolmas tehtävän yhtälö ei toteudu. $(2, 8, 12)$ on ainoa ratkaisu.

4. a) Jos s on n-numeroinen luku ja $m = 10^{n+r}s + s$, niin $T(km)$ on parillinen ainakin niin kauan, kun $ks < 10^{n+r}$, koska luvussa km esiintyvät samat numerot kahdesti (ja välissä on mahdollisesti nollia). Valitaan $N = 5018300050183$ eli $s = 50183$. Nyt $1992 \cdot s = 99964536$, joten $T(kN)$ on parillinen kaikilla $k \leq 1992$. Mutta $1993 \cdot s = 100014719$, $1993 \cdot N = 10001472000017719$, ja $T(1993 \cdot N)$ on pariton.

b) Oletetaan, että N on positiivinen, kokonaisluku, jolla $T(kN)$ on parillinen kaikilla k. Tarkastellaan ensin tapausta $N = 2m$. Nyt $T(km) = T(10km) = T(5kN)$. Viimeinen luku on parillinen kaikilla k, joten $T(km)$ on parillinen kaikilla k. Toistamalla tarpeen mukaan päättely, todetaan, että on olemassa pariton N, jolle $T(kN)$ on parillinen kaikilla k. Oletetaan sitten, että $N = 10r + 5$. Silloin $T(k(2r+1)) = T(10k(2r+1)) = T(2kN)$, joten myös luvulla $\frac{N}{5} = 2r + 1$ on väitetty ominaisuus. Päättelyä tarpeen mukaan toistamalla voidaan rajoittua tapaukseen, jossa N on pariton ja jaoton viidellä. Olkoon nyt $N = 10r + 9$,

$$N = a\underbrace{x\ldots x}_{k \text{ kpl}}b9.$$

Jos $b < 9$, niin luvun $10^{n+2}N + N$ esitys on $ax\ldots x(b+1)(a-1)x\ldots x9$, joten $T(10^{n+2}N + N) = 2T(N) - 9$ eli pariton. Jos N loppuu kahteen yhdeksikköön, niin $11N$ loppuu numeroihin 89, ja siihen voidaan soveltaa edellistä päättelyä. Jos N päättyy ykköseen, kolmoseen tai seitsemään, niin $9N$, $3N$ tai $7N$ päättyy 9:ään, ja edellistä päättelyä voidaan taas soveltaa.