20. 1.

Gymnasiets matematiktävling
Finaltävling

2017

1. När vi dividerar heltalet m (i divisionstrappa) med heltalet n får vi kvoten 22 och divisionsresten 5. När vi fortsätter dividerandet blir första decimalen i kvoten 4 och divisionsresten 2. Bestäm m och n.

2. Bestäm $x^2 + y^2$ och $x^4 + y^4$ när $x^3 + y^3 = 2$ och $x + y = 1$.

3. Vi undersöker de positiva heltalen m och n, för vilka $m > n$ medan det i slutet av talet

$$22\,220\,038^m - 22\,220\,038^n$$

finns åtta nollor. Visa att $n > 7$.

4. Låt m vara ett positivt heltal. Spelet HAUKKU(m) mellan två spelare Akseli och Elina löper på följande sätt: Akseli börjar spelet och spelarna väljer heltal turvis. I början är mängden av valbara heltal lika med mängden av de positiva faktorerna för talet m. Den spelare som står i tur väljer ett av de kvarvarande talen och då avlägsnas detta tal samt dess multipler från listan. Den spelare som måste välja talet 1 förlorar. Visa att den som börjar spelet d.v.s. Akseli har en vinststrategi i spelet HAUKKU(m) för alla $m \in \mathbb{Z}_+$.

5. Vi väljer godtyckligt två punkter A och B på en cirkels periferi så att AB inte utgör diameter i cirkeln. Tangenterna till cirkeln i punkterna A och B skär varandra i punkten T. Sedan väljer vi en diameter XY så att sträckorna AX och BY skär varandra. Låt denna skärningspunkt vara Q. Visa att punkterna A, B och Q ligger på den cirkel vars medelpunkt är T.

Tävlingstiden är **3 timmar.**
Räknare är inte tillåtna.
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och dina kontaktuppgifter (skolans namn, hemadress och e-postadress) tydligt på provpapperet.