HELMIKUUN 2014 VALMENNUSTEHTÄVÄT

HELPOMPI JA VAIKEAMPI SARJA

Tällä kertaa sekä helpompi että vaikeampi sarja on yhtenä tehtäväsettinä. Luonnollisestikin on täysin ok keskittyä vain helpompiin tai vaikeampiin tehtäviin. Oleellista on kuitenkin huomata se, että valmennustehtäväaktiivisuudella on huomattava paino kutsuttaessa kilpailijoita toukokuun valmennusviikolle (jonka aikana valitaan IMO-joukkue): Mikäli ratkaisuja tai edes yhtä ainutta rehellistä ratkaisuyritystä tähän sarjaan ei tule, on hyvin hankala saada kutsu valmennusviikolle.

Ratkaisuja kaivataan huhtikuun puoleen väliin mennessä osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, PL 68, 00014 Helsingin yliopisto. Mahdollisista epäselvyyksistä tehtävissä voi kysyä soittamalla 041-5228141.

Helpommat tehtävät

(1) Etsi kaikki sellaiset parametrin b arvot, että ainakin toinen funktioista $f_1(x) = x^2 + 2011x + b$ ja $f_2(x) = x^2 - 2011x + b$ on positiivinen kaikilla reaalisilla x.

(2) Osoita, että on olemassa äärettömän paljon neliöitä, jotka voidaan kirjoittaa muodossa $2^n + 2^m$, missä n ja m ovat keskenään erisuuria positiivisia kokonaislukuja.

(3) Kolmiopohjaisen särmiön kärkiin kirjoitetaan luvut $1, 2, 3, 4, 5, 6$, ja sitten särmille niiden lukujen summa, jotka ovat särmän päissä olevissa kärjissä. Onko luvut mahdollista kirjoittaa kärjille niin, että kaikki summat särmillä ovat erisuuret?

(4) Olkoot x_1, x_2, x_3 kolme keskenään erisuurta reaalilukua. Oletetaan lisäksi, että x_2 ja x_3 ovat polynomin $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$ juuret, x_3 ja x_1 ovat polynomin $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ juuret ja x_1 ja x_2 ovat polynomin $f_3(x) = x^2 + p_3x + q_3$ juuret. Onko polynomilla

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

aina reaalisia juuria?

(5) Muokataan nyt edellistä tehtävää pikkuisen: Olkoot x_1, x_2, x_3 kolme keskenään erisuurta reaalilukua. Oletetaan lisäksi, että x_2 ja x_3 ovat polynomin $f_1(x) = a_1x^2 + p_1x + q_1$ juuret, x_3 ja x_1 ovat polynomin $f_2(x) = a_2x^2 + p_2x + q_2$ juuret ja x_1 ja x_2 ovat polynomin $f_3(x) = a_3x^2 + p_3x + q_3$ juuret. Onko polynomilla

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

aina reaalisia juuria?

(6) Etsi kaikki alkulukuparit (a, b), joilla $a^b b^a + 1$ on alkuluku.

(7) Kuinka monta sellaista jakajaa on luvulla n^2, kun $n = 11^{2011} \cdot 2011^{11}$, jotka ovat pienempiä kuin n, ja jotka eivät ole luvun n jakajia?

(8) Epänegatiiviset luvut a, b, c toteuttavat epäyhtälön

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq a + b + c.$$

Todista, että

$$ab + bc + ca \leq a + b + c.$$

(9) Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n, jolla luku $n^3 + n^2 + 330n + 330$ on jaollinen luvulla 2011.

(10) Kolmion ABC ympäri on piirretty ympyrä, jonka tangentit pisteissä A ja B leikkaavat pisteessä T. Pisteen T kautta on piirretty janan AC suuntainen suora, joka leikkaa suoran BC pisteessä D. Osoita, että $AD = CD$.

(11) Kutsutaan positiivista kokonaislukua kaksoseksi, jos sillä on kaksi positiivista tekijää, joiden erotus on kaksi. Määritä, onko ensimmäisten 20112012 positiivisen kokonaisluvun joukossa enemmän kaksosia vai lukuja, jotka eivät ole kaksosia.

Vaikeammat tehtävät

(1) Paperille on piirretty puolisuunnikas $ABCD$. Sen yhdensuuntaiset sivut ovat $BC = a$ ja $AD = 2a$. Käytä pelkkää viivotinta (sellaista, jossa ei ole mittalukuja, eli jolla voi vain piirtää suoria viivoja, mutta ei mitata mitään) piirtääksesi kolmion, jonka ala on sama kuin puolisuunnikkaan ala.

(2) Olkoot a, b ja c epänegatiivisia reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdon $a + b + c \leq 2$. Osoita, että

$$ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 2.$$

(3) Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdot

(a) kaikilla reaalisilla x ja y pätee

$$f(2x) = f(x + y)f(y - x) + f(x - y)f(-x - y)$$

(b) $f(x) \geq 0$ kaikilla x.

(4) Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$y^k = x^2 + x,$$

kun $k>1$ on positiivinen kokonaisluku.

(5) Etsi kaikki alkuluvut p, q ja r, joilla

$$p(p + 1) + q(q + 1) + r(r + 1).$$

(6) Kolme ympyrää sivuaa toisiaan ulkopuolisesti. Niiden halkaisijat A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2 ovat yhdensuuntaisia. Todista, että suorat A_1B_2, B_1C_2 ja C_1A_2 leikkaavat samassa pisteessä.

(7) Olkoon $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ luvun n alkutekijähajotelma. Kirjoitetaan $T(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$. Olkoot a, b, c, d keskenään erisuuria epänegatiivisia kokonaislukuja. Osoita, että jos luku $ac + bd$ jakaa luvun $ab + cd$, niin $T(ab + cd) \geq 3$.

(8) Ratkaise yhtälö

$$\cos \pi x = \left\lfloor \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

missä $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin luku x.

(9) Kolmiossa ABC piste M on sivun BC keskipiste, ja sivulta AB on valittu piste N niin, että $NB = 2AN$. Jos $\angle CAB = \angle CMN$, niin määritä $\frac{|AC|}{|BC|}$.

(10) Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$(x + y)^3 = (x - y - 6)^2$$

positiivisten kokonaislukujen joukossa.