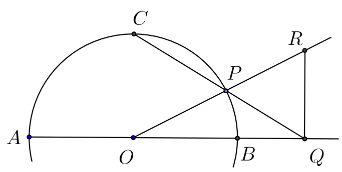
Pohjoismaisten matematiikkakilpailujen tehtävät ja ratkaisut 1995 – 2015

Tehtävät

9. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 15.3.1995

1995.1. Olkoon AB O-keskisen ympyrän halkaisija. Valitaan ympyrän kehältä piste C siten, että OC ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Olkoon P mielivaltainen (lyhemmän) kaaren BC piste ja leikatkoot suorat CP ja AB pisteessä Q. Valitaan R AP:ltä niin, että RQ ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Osoita, että $|BQ| = |QR|$.



1995.2. Viestit koodataan käyttäen vain nollista ja ykkösistä koostuvia jonoja. Vain sellaisia jonoja, joissa esiintyy enintään kaksi peräkkäistä ykköstä tai nollaa saa käyttää. (Esimerkiksi jono 011001 on sallittu, mutta 011101 ei ole.) Määritä kaikkien tasan 12 merkistä koostuvien jonojen lukumäärä.

1995.3. Olkoon $n \geq 2$ ja olkoot $x_1, x_2, \ldots x_n$ reaalilukuja, joille on voimassa $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 0$ ja $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Olkoon $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Osoita, että

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{1}$$

Selvitä, milloin (1):ssä vallitsee yhtäsuuruus.

1995.4. Osoita, että on olemassa äärettömän monta keskenään epäyhtenevää kolmiota T, joille pätee

(i) Kolmion T sivujen pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja.

(ii) T:n pinta-ala on kokonaisluku.

10. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 11.4.1996

1996.1. Todista, että on olemassa 1996:lla jaollinen kokonaisluku, jonka kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa on 1996.

1996.2. Määritä kaikki reaaliluvut x, joille

$$x^n + x^{-n}$$

on kokonaisluku kaikilla kokonaisluvuilla n.

1996.3. Ympyrä, jonka halkaisija on kolmion ABC kärjestä A piirretty korkeusjana, leikkaa kolmion sivun AB pisteessä D ja sivun AC pisteessä E ($A \neq D$, $A \neq E$). Osoita, että kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion ADE kärjestä A piirretyllä korkeusjanalla tai sen jatkeella.

1996.4. Reaaliarvoinen funktio f on määritelty positiivisten kokonaislukujen joukossa, ja positiivinen kokonaisluku a toteuttaa ehdot

$$f(a) = f(1995), \qquad f(a+1) = f(1996), \qquad f(a+2) = f(1997)$$
$$f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1} \quad \text{kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla } n.$$

(i) Osoita, että $f(n+4a) = f(n)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

(ii) Määritä pienin mahdollinen a.

11. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 9.4.1997

1997.1. Jos A on joukko, jonka alkiot ovat seitsemän positiivista lukua, niin kuinka monta A:n alkioista muodostuvaa kolmikkoa (x, y, z), missä $x < y$ ja $x + y = z$, on enintään olemassa?

1997.2. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio. Oletetaan, että nelikulmion sisällä on piste P, jolle kolmioiden ABP, BCP, CDP ja DAP alat ovat samat. Osoita, että nelikulmion lävistäjistä ainakin toinen jakaa toisen kahteen yhtä pitkään osaan.

1997.3. Olkoot A, B, C ja D neljä eri pistettä tasossa. Janoista AB, AC, AD, BC, BD ja CD kolmen pituus on a. Muiden kolmen pituus on b, missä $b > a$. Määritä osamäärän $\frac{b}{a}$ kaikki mahdolliset arvot.

1997.4. Olkoon f ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa $\{0, 1, 2, \ldots\}$ määritelty funktio, jolle pätee

$$f(2x) = 2f(x), \quad f(4x+1) = 4f(x) + 3 \quad \text{ja} \quad f(4x-1) = 2f(2x-1) - 1.$$

Osoita, että f on injektio, ts. että jos $f(x) = f(y)$, niin $x = y$.

12. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 2.4.1998

1998.1. Määritä kaikki rationaalilukujen joukossa määritellyt rationaalilukuarvoiset funktiot f, jotka toteuttavat yhtälön $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)+2f(y)$ kaikilla rationaaliluvuilla x ja y.

1998.2. Olkoot C_1 ja C_2 kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Olkoon S C_1:n keskipiste ja T C_2:n keskipiste. Olkoon P janan AB jokin sellainen piste, että $|AP| \neq |BP|$ ja $P \neq A$, $P \neq B$. Piirretään P:n kautta SP:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_1:n leikkauspisteitä C:llä ja D:llä. Piirretään samoin P:n kautta TP:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_2:n leikkauspisteitä E:llä ja F:llä. Osoita, että C, D, E ja F ovat erään suorakaiteen kärkipisteet.

1998.3. (a) Millä positiivisilla luvuilla n on olemassa jono $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, joka sisältää kunkin luvuista $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ tasan kerran ja jolle $x_1+x_2+\cdots+x_k$ on jaollinen k:lla jokaisella $k = 1, 2, \ldots, n$?

(b) Onko olemassa päättymätön jono $x_1, x_2, x_3, \ldots$, joka sisältää jokaisen positiivisen kokonaisluvun tasan kerran ja jolle $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ on jaollinen k:lla kaikilla positiivisilla luvuilla k?

1998.4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Laske sellaisten lukujen $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ lukumäärä, joille $\binom{n}{k}$ on pariton. Osoita, että tämä luku on kakkosen potenssi, ts. muotoa 2^p jollakin ei-negatiivisella luvulla p.

13. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 15.4.1999

1999.1. Ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktio f toteuttaa ehdon

$$f(n) = \begin{cases} f(f(n+11)), & \text{jos } n \leq 1999 \\ n-5, & \text{jos } n > 1999. \end{cases}$$

Etsi yhtälön $f(n) = 1999$ kaikki ratkaisut.

1999.2. Ympyrän sisään piirretyn seitsenkulmion kaikki sivut ovat eripituisia. Kuinka monta $120°$:een kulmaa tällaisessa seitsenkulmiossa voi enintään olla?

1999.3. Äärettömän kokonaislukutason $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ muodostavat kaikki pisteparit $(x,\ y)$, missä x ja y ovat kokonaislukuja. Olkoot a ja b ei-negatiivisia kokonaislukuja. Sanomme $(a,\ b)$-ratsun siirroksi siirtymistä pisteestä $(x,\ y)$ mihin hyvänsä pisteistä $(x \pm a,\ y \pm b)$ tai $(x \pm b,\ y \pm a)$. Määritä kaikki luvut a ja b, joilla on mahdollista päästä kiinteästä aloituspisteestä lähtien jokaiseen kokonaislukukoordinaattiseen tason pisteeseen $(a,\ b)$-ratsun siirtoja käyttämällä.

1999.4. Olkoot $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ positiivisia reaalilukuja ja $n \geq 1$. Osoita, että

$$n\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}\right)\left(n + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Milloin vallitsee yhtäsuuruus?

14. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 30.3.2000

2000.1. Monellako tavalla luku 2000 voidaan kirjoittaa kolmen positiivisen, ei välttämättä eri suuren kokonaisluvun summana? (Summia $1+2+3$, $3+1+2$ jne. pidetään samoina.)

2000.2. Henkilöt $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{n-1},\ P_n$ istuvat pöydän ympärillä tässä järjestyksessä, ja jokaisella on jokin määrä kolikoita. Alussa P_1:llä on yksi kolikko enemmän kuin P_2:lla, P_2:lla yksi kolikko enemmän kuin P_3:lla jne., aina P_{n-1}:een asti, jolla on yksi kolikko enemmän kuin P_n:llä. Sitten P_1 antaa P_2:lle yhden kolikon, tämä puolestaan antaa P_3:lle kaksi kolikkoa jne., aina P_n:ään asti, joka antaa P_1:lle n kolikkoa. Kolikkojen antamista jatketaan samalla tavalla: P_1 antaa $n+1$ kolikkoa P_2:lle, P_2 antaa $n+2$ kolikkoa P_3:lle;

tällä tavoin prosessi jatkuu, kunnes jollakin henkilöistä ei enää ole riittävästi kolikkoja, ts. hän ei kykene antamaan pois yhtä kolikkoa enemmän kuin oli juuri saanut. Sillä hetkellä kun prosessi päättyy, havaitaan, että pöydän ääressä on kaksi naapurusta, joista toisella on tasan viisi kertaa niin paljon kolikkoja kuin toisella. Määritä pöydän ääressä istuvien ihmisten lukumäärä ja pöydän ympärillä kiertävien kolikkojen yhteismäärä.

2000.3. Kolmiossa ABC kulman B puolittaja leikkaa AC:n D:ssä ja kulman C puolittaja leikkaa AB:n E:ssä. Kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa pisteessä O. Lisäksi $OD = OE$. Todista, että joko ABC on tasakylkinen tai $\angle BAC = 60°$.

2000.4. Reaaliarvoinen funktio f on määritelty, kun $0 \le x \le 1$. Lisäksi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ja

$$\frac{1}{2} \le \frac{f(z) - f(y)}{f(y) - f(x)} \le 2$$

kaikille $0 \le x < y < z \le 1$, joille $z - y = y - x$. Osoita, että

$$\frac{1}{7} \le f\left(\frac{1}{3}\right) \le \frac{4}{7}.$$

15. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 29.3.2001

2001.1. Olkoon A äärellinen kokoelma sellaisia koordinaattitason neliöitä, että jokaisen A:han kuuluvan neliön kärkipisteet ovat muotoa (m, n), $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ ja $(m+1, n+1)$ joillain kokonaisluvuilla m ja n. Osoita, että on olemassa sellainen A:n osakokoelma B, että B:hen kuuluu ainakin 25 % A:n neliöistä, mutta millään kahdella B:n neliöllä ei ole yhteistä kärkipistettä.

2001.2. Olkoon f rajoitettu reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla x ehdon

$$f\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x) + f\left(x + \frac{5}{6}\right).$$

Osoita, että f on jaksollinen. (Funktio f on rajoitettu, jos on olemassa luku L siten, että $|f(x)| < L$ kaikilla reaaliluvuilla x. Funktio f on jaksollinen, jos on olemassa positiivinen luku k siten, että $f(x + k) = f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.)

2001.3. Määritä yhtälön

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$$

reaalisten juurten lukumäärä.

2001.4. Olkoon $ABCDEF$ kupera kuusikulmio, jossa kukin lävistäjistä AD, BE ja CF jakaa kuusikulmion kahdeksi nelikulmioksi, joiden alat ovat yhtä suuret. Osoita, että AD, BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

16. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 4.4.2002

2002.1. Puolisuunnikas $ABCD$, missä AB ja CD ovat yhdensuuntaiset ja $AD < CD$, on piirretty ympyrän c sisään. Olkoon DP AC:n suuntainen ympyrän jänne. Oletetaan, että pisteeseen D piirretty c:n tangentti leikkaa suoran AB pisteessä E ja että PB ja DC leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $EQ = AC$.

2002.2. Kahteen maljaan on sijoitettu yhteensä N palloa, jotka on numeroitu 1:stä N:ään. Yksi pallo siirretään maljasta toiseen. Tällöin kummassakin maljassa olevissa palloissa olevien lukujen keskiarvo kasvaa samalla määrällä, joka on x. Mikä on x:n suurin mahdollinen arvo?

2002.3. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reaalilukuja ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kaikki eri lukuja. Osoita, että jos kaikki tulot

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \cdots (a_i + b_n),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, ovat keskenään yhtä suuria, niin myös kaikki tulot

$$(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \cdots (a_n + b_j),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, ovat keskenään yhtä suuria.

2002.4. Eva, Per ja Anna leikittelevät taskulaskimillaan. He valitsevat eri kokonaislukuja ja tarkistavat, ovatko ne jaollisia 11:llä vai eivät. He tutkivat vain sellaisa yhdeksännumeroisia lukuja, joissa esiintyvät kaikki numerot 1, 2, ..., 9. Anna väittää, että jos tällainen luku valitaan umpimähkään, niin todennäköisyys, että se olisi jaollinen 11:llä, on tasan 1/11. Eva on toista mieltä: hänen mielestään todennäköisyys on alle 1/11. Perin mielestä todennäköisyys on yli 1/11. Kuka on oikeassa?

17. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 3.4.2003

2003.1. 10-riviselle 14-sarakkeiselle šakkilaudalle asetetaan kiviä. Asettelun jälkeen havaitaan, että kullakin rivillä ja kullakin sarakkeella on pariton määrä kiviä. Näytä, että mustilla ruuduilla on parillinen määrä kiviä, kun ruudut on väritetty tavanomaisesti mustiksi ja valkoisiksi. Huomaa, että yhdellä ruudulla voi olla useampia kiviä.

2003.2. Etsi kaikki kokonaislukukolmikot, joille

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2003.$$

2003.3. Tasasivuisen kolmion $\triangle ABC$ sisällä on piste D, jolle pätee $\angle ADC = 150°$. Todista, että kolmio, jonka sivut ovat $|AD|$, $|BD|$ ja $|CD|$, on välttämättä suorakulmainen.

2003.4. Olkoon $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nollasta poikkeavien reaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, joille

$$f(x) + f(y) = f(xy\,f(x + y)),$$

kun $x, y \in \mathbb{R}^*$ ja $x + y \neq 0$.

18. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 1.4.2004

2004.1. 27 palloa, jotka on numeroitu numeroin 1:stä 27:ään, on sijoitettu punaiseen, siniseen ja keltaiseen maljaan. Mitkä ovat punaisessa maljassa olevien pallojen mahdolliset lukumäärät, kun tiedetään, että punaisessa, sinisessä ja keltaisessa maljassa olevien pallojen numeroiden keskiarvot ovat 15, 3 ja 18?

2004.2. Olkoon $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, ja $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, kun $n = 1, 2, \ldots$, Fibonaccin lukujono. Osoita, että on olemassa aidosti kasvava päättymätön aritmeettinen kokonaislukujono, jonka yksikään luku ei kuulu Fibonaccin jonoon.

[Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.]

2004.3. Olkoon x_{11}, x_{21}, …, x_{n1}, $n > 2$, kokonaislukujono. Oletetaan, että luvut x_{i1} eivät kaikki ole samoja. Jos luvut x_{1k}, x_{2k}, …, x_{nk} on määritelty, niin asetetaan

$$x_{i,k+1} = \frac{1}{2}(x_{ik} + x_{i+1,k}),\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad x_{n,k+1} = \frac{1}{2}(x_{nk} + x_{1k}).$$

Osoita, että jos n on pariton, niin jollakin j, k, x_{jk} ei ole ole kokonaisluku. Päteekö tämä myös silloin, kun n on parillinen?

2004.4. Olkoot a, b ja c kolmion sivujen pituudet ja olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Osoita, että

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}.$$

19. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 5.4.2005

2005.1. Määritä kaikki ne positiiviset kokonaisluvut k, joiden kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden tulo on

$$\frac{25}{8}k - 211.$$

2005.2. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq a + b + c.$$

2005.3. 2005 nuorta istuu suuren pyöreän pöydän ympärillä. Nuorista enintään 668 on poikia. Sanomme, että tytön G asema on vahva, jos tarkasteltaessa G:stä alkaen kuinka monen hyvänsä vierekkäin istuvan nuoren joukkoa kumpaan tahansa suuntaan, niin on näissä joukoissa on aina aidosti enemmän tyttöjä kuin poikia (G on itse mukana laskussa). Osoita, että olivat tytöt ja pojat missä järjestyksessä tahansa, joku tyttö on aina vahvassa asemassa.

2005.4. Ympyrä $\mathcal{C}_1$ on ympyrän $\mathcal{C}_2$ sisäpuolella, ja ympyrät sivuavat toisiaan pisteessä A. A:n kautta kulkeva suora leikkaa $\mathcal{C}_1$:n myös pisteessä B ja $\mathcal{C}_2$:n myös pisteessä C. Ympyrän $\mathcal{C}_1$ pisteeseen B piirretty tangentti leikkaa $\mathcal{C}_2$:n pisteissä D ja E. Pisteen C kautta kulkevat ympyrän $\mathcal{C}_1$ tangentit sivuavat $\mathcal{C}_1$:tä pisteissä F ja G. Osoita, että pisteet D, E, F ja G ovat samalla ympyrällä.

20. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 30.3.2006

2006.1. Pisteet B ja C sijaitsevat kahdella pisteestä A lähtevällä puolisäteellä niin, että $AB+AC$ on vakio. Osoita, että on olemassa piste $D \neq A$, niin että kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä kulkee D:n kautta kaikilla pisteiden B ja C valinnoilla.

2006.2. Reaaliluvut x, y ja z eivät kaikki ole samoja ja ne toteuttavat yhtälöt

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k.$$

Määritä kaikki mahdolliset k:n arvot.

2006.3. Positiivisten kokonaislukujen jonon $\{a_n\}$ määrittelevät ehdot

$$a_0 = m \qquad \text{ja} \qquad a_{n+1} = a_n^5 + 487 \quad \text{kaikilla} \quad n \geq 0.$$

Määritä kaikki sellaiset m:n arvot, joilla jonoon kuuluu mahdollisimman monta neliölukua.

2006.4. 100×100-šakkilaudan neliöt väritetään 100:lla eri värillä. Kuhunkin ruutuun käytettään vain yhtä väriä ja joka väriä käytetään tasan sataan ruutuun. Osoita, että laudalla on jokin vaaka- tai pystyrivi, jonka ruutuihin on käytetty ainakin kymmentä väriä.

21. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 29.3.2007

2007.1. Etsi *yksi* yhtälön

$$x^2 - 2x - 2007y^2 = 0$$

positiivinen kokonaislukuratkaisu.

2007.2. On annettu kolmio, suora ja kolme suorakaidetta, joiden yksi sivu on annetun suoran suuntainen, niin, että suorakaiteet peittävät kokonaan kolmion sivut. Todista, että suorakaiteet peittävät kokonaan kolmion sisäosan.

2007.3. Taululle on kirjoitettu luku 10^{2007}. Anne ja Berit pelaavat peliä, jossa pelaaja tekevät vuorotellen yhden seuraavista operaatioista:

(i) Pelaaja korvaa taululla olevan luvun x kahdella ykköstä suuremmalla kokonaisluvulla a ja b niin, että $x = ab$.

(ii) Pelaaja poistaa taululla olevista kahdesta samasta luvusta toisen tai molemmat.

Se pelaaja, joka ei voi tehdä kumpaakaan näistä vuorollaan, häviää pelin. Kummalla pelaajalla on voittostrategia, jos Anne aloittaa pelin?

2007.4. Pisteen A kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä B ja C niin, että B on A:n ja C:n välissä. Pisteestä A piirretään ympyrälle kaksi tangenttia, jotka sivuavat ympyrää pisteissä S ja T. Olkoon P suorien AC ja ST leikkauspiste. Osoita, että $AP/PC = 2 \cdot AB/BC$.

22. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 31.3.2008

2008.1. Määritä kaikki sellaiset reaaliluvut A, B ja C, joille on olemassa jokin reaalilukuarvoinen funktio f, joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla x ja y yhtälön

$$f(x + f(y)) = Ax + By + C.$$

2008.2. Pyöreän pöydän ympärillä istuu $n \geq 3$ eriministä ihmistä. Sanomme, että mitkä tahansa kaksi näistä, A ja B, muodostavat *dominoivan parin*, jos

(1) M ja N eivät istu vierekkäin, ja
(2) ainakin toisella M:n ja N:n välisellä pöydänympäryksen osalla istuu vain ihmisiä, joiden nimet ovat aakkosjärjestyksessä M:n ja N:n nimien jäljessä.

Määritä dominoivien parien pienin mahdollinen lukumäärä.

2008.3. Olkoon ABC kolmio ja olkoon D sivun BC ja E sivun CA piste niin, että AD ja BE ovat kolmion ABC kulmanpuolittajia. Olkoot F ja G sellaisia kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteitä, että AF ja DE ovat yhdensuuntaisia ja FG ja BC ovat yhdensuuntaisia. Osoita, että

$$\frac{AG}{BG} = \frac{AB + AC}{AB + BC}.$$

2008.4. Kahden peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun kuution erotus on neliöluku n^2, missä n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että n on kahden neliöluvun summa.

23. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 2.4.2009

2009.1. Kolmion sisältä valitaan piste P. P:n kautta piirretään kolme kolmion sivujen suuntaista suoraa. Ne jakavat kolmion kolmeksi pienemmäksi kolmioksi ja kolmeksi suunnikkaaksi. Olkoon f kolmen pienen kolmion yhteenlasketun alan ja koko kolmion alan suhde. Osoita, että $f \geq \dfrac{1}{3}$, ja määritä ne pisteet P, joille $f = \dfrac{1}{3}$.

2009.2. Haalistuneelta paperinpalalta voidaan vaivoin lukea seuraavat merkinnät:

$$(x^2 + x + a)(x^{15} - \ldots) = x^{17} + x^{13} + x^5 - 90x^4 + x - 90.$$

Jotkin osat ovat häipyneet näkyvistä, erityisesti vasemman puolen ensimmäisen tekijän vakiotermi ja toisen tekijän loppuosa. Olisi mahdollista selvittää kokonaan toinen tekijä, mutta kysytään vain, mikä on vakiotermi a. Oletetaan, että kaikki tehtävässä esiintyvät polynomit ovat kokonaislukukertoimisia.

2009.3. Taululle on kirjoitettu kokonaisluvut 1, 2, 3, 4 ja 5. Lukuja voidaan muuttaa niin, että pyyhitään pois luvut a ja b ja kirjoitetaan niiden sijaan luvut $a + b$ ja ab. Onko mahdollista toistamalla tätä operaatiota päästä tilanteeseen, jossa kolme viidestä taululla olevasta luvusta on 2009?

2009.4. Turnaukseen osallistuu 32 kilpailijaa. Kaikki ovat pelikyvyiltään erilaisia ja kaksinkamppailussa parempi aina voittaa. Osoita, että kulta-, hopea- ja pronssimitalien voittajat voidaan ratkaista 39 ottelun perusteella.

24. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 13.4.2010

2010.1. Kuvaus $f : Z_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ on kasvava ja toteuttaa kaikilla keskenään jaottomilla positiivisilla kokonaisluvuilla m ja n yhtälön $f(mn) = f(m)f(n)$. Tässä $\mathbb{Z}_+$ on positiivisten kokonaislukujen joukko. Osoita, että $f(8)f(13) \geq (f(10))^2$

.

2010.2. Kolmella ympyrällä Γ_A, Γ_B ja Γ_C on yhteinen leikkauspiste O. Ympyröiden Γ_A ja Γ_B toinen leikkauspiste on C, ympyröiden Γ_A ja Γ_C vastaavasti B sekä ympyröiden Γ_C ja Γ_B edelleen A. Suora AO leikkaa ympyrän Γ_A pisteessä $X \neq O$. Suora BO leikkaa ympyrän Γ_B pisteessä $Y \neq O$, ja suora CO ympyrän Γ_C pisteessä $Z \neq O$. Todista, että

$$\frac{|AY||BZ||CX|}{|AZ||BX||CY|} = 1.$$

2010.3. Lauralla on edessään 2010 lamppua yhdistettynä 2010 nappikatkaisimeen. Hän haluaisi tuntea jokaista katkaisinta vastaavan lampun. Selvittääkseen tämän hän seuraa, mitkä lamput syttyvät, kun Risto painaa joitakin katkaisimia. (On myös mahdollista, ettei hän paina yhtäkään katkaisimista.) Risto painaa katkaisimia aina samanaikaisesti, joten lamputkin syttyvät samanaikaisesti.

a) Jos Risto valitsee painettavat katkaisimet, kuinka monta erilaista katkaisinkombinaatiota hän voi enintään painaa, ennen kuin Laura osaa liittää katkaisimet oikeisiin lamppuihin?

b) Jos Laura valitsee katkaisinkombinaatiot, mikä on pienin määrä kombinaatioita, joiden avulla hän pystyy selvittämään, miten katkaisimet liittyvät lamppuihin?

2010.4. Kutsuttakoon positiivista kokonaislukua *yksinkertaiseksi*, jos sen tavanomaisessa kymmenjärjestelmäesityksessä ei ole muita numeroita kuin nollia ja ykkösiä. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku k, jolle pätee, että jokainen positiivinen kokonaisluku n voidaan kirjoittaa muodossa $n = \pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_k$, jossa $a_1, \ldots, a_k$ ovat yksinkertaisia.

25. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 4.4.2011

2011.1. Olkoot $a_0, a_1, \ldots, a_{1000}$ numeroita. Voiko 1001-numeroisten lukujen $a_0a_1 \ldots a_{1000}$ ja $a_{1000}a_{999} \ldots a_0$ summassa olla vain parittomia numeroita?

2011.2. Oletetaan, että kolmiossa ABC on $AB = AC$. Olkoon D sivun AB jatkeella, niin että A on D:n ja B välissä, ja E sivulla BC niin, että suorat CD ja AE ovat yhdensuuntaisia. Todista, että $CD \geq \frac{4h}{BC} \cdot CE$, missä h on kolmion ABC A:sta piirretyn korkeusjanan pituus. Milloin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

2011.3. Määritä kaikki funktiot f, joille

$$f(f(x) + y) = f\left(x^2 - y\right) + 4yf(x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

2011.4. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Tarkastellaan murtolukuja $\frac{1}{ab}$, missä a ja b ovat yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja, $a < b \leq n$ ja $a + b > n$. Osoita, että kaikkien tällaisten murtolukujen summa on $\frac{1}{2}$.

26. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 27.3.2012

2012.1. Reaaliluvuille a, b, c pätee $a^2 + b^2 = 2c^2$ ja $a \neq b$, $c \neq -a$, $c \neq -b$. Osoita, että

$$\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)}$$

on kokonaisluku.

2012.2. Piste P on se kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän piste, joka puolittaa kaarista BC sen, jolla piste A ei ole. Piirretään P:n kautta AB:n suuntainen suora ℓ. Olkoon k pisteen B kautta kulkeva ympyrä, joka sivuaa suoraa ℓ pisteessä P. Olkoon Q ympyrän k ja suoran AB toinen leikkauspiste. (Ellei toista leikkauspistettä ole, niin $Q = B$.) Todista, että $AQ = AC$.

2012.3. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku n, jolle on olemassa n (ei välttämättä eri suurta) kokonaislukua $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $1 \leq x_k \leq n$, kun $1 \leq k \leq n$, joille pätee

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 \cdots x_n = n!,$$

mutta $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \{1, 2, \ldots, n\}$.

2012.4. Taululle on kirjoitettu luku 1. Sen jälkeen taululle kirjoitetaan vaiheittain lisää lukuja seuraavasti: kussakin vaiheessa jokainen taululla oleva luku a korvataan luvuilla $a-1$ ja $a+1$; jos taululle ilmestyy luku 0, se pyyhitään pois. Jos jokin luku ilmestyy taululle useammin kuin kerran, kaikki esiintymät jätetään taululle. Siten vaiheessa 0 taululla on luku 1, vaiheessa 1 luku 2, vaiheessa 2 luvut 1 ja 3, vaiheessa 3 luvut 2, 2 ja 4 jne. Montako lukua taululla on vaiheessa n?

27. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 8.4.2013

2013.1. Olkoon $(a_n)_{n\geq 1}$ lukujono, jonka määrittelevät ehdot $a_1 = 1$ ja

$$a_{n+1} = \left\lfloor a_n + \sqrt{a_n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

kaikilla $n \geq 1$; $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x. Määritä kaikki $n \leq 2013$, joille a_n on neliöluku.

2013.2. Jalkapalloturnaukseen osallistuu n joukkuetta, $n \geq 4$, ja jokainen joukkue pelaa tasan kerran jokaista muuta vastaan. Oletetaan, että turnauksen päätyttyä joukkueiden pisteet muodostavat aritmeettisen jonon, jossa jokainen joukkue on saanut yhden pisteen enemmän kuin järjestyksessä seuraava. Määritä pienimmän pistemäärän saaneen joukkueen suurin mahdollinen pistemäärä, kun pisteet jaetaan jalkapallossa tavallisella tavalla (ottelun voittaja saa kolme pistettä ja häviäjä nolla, ja tasapelissä molemmat joukkueet saavat yhden pisteen).

2013.3. Määritellään jono $(n_k)_{k\geq 0}$ asettamalla $n_0 = n_1 = 1$, $n_{2k} = n_k + n_{k-1}$ ja $n_{2k+1} = n_k$, kun $k \geq 1$. Olkoon vielä $q_k = n_k/n_{k-1}$ kaikilla $k \geq 1$. Osoita, että jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy tasan kerran jonossa $(q_k)_{k\geq 1}$.

2013.4. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja H sen sisäpiste. Olkoot H_c ja H_b pisteen H kuvat peilauksissa yli suorien AB ja AC, tässä järjestyksessä, ja olkoot H_c' ja H_b' H:n kuvat peilauksissa yli AB:n ja AC:n keskipisteiden. Osoita, että pisteet H_b, H_b', H_c ja H_c' ovat samalla ympyrällä jos ja vain jos ainakin kaksi niistä yhtyy tai jos H on kolmion ABC kärjestä A piirretyllä korkeusjanalla.

28. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 31.3.2014

2014.1. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (missä $\mathbb{N}$ on luonnollisten lukujen joukko, johon kuuluu 0), joille pätee

$$f(x^2) - f(y^2) = f(x+y)f(x-y)$$

kaikilla x, $y \in \mathbb{N}$, joilla $x \geq y$.

2014.2 Määritä tasasivuisen kolmion kaikki sellaiset sisäpisteet, joiden etäisyys yhdestä kolmion sivusta on niiden kolmion kahdesta muusta sivusta mitattujen etäisyyksien geometrinen keskiarvo. [Lukujen x ja y geometrinen keskiarvo on $\sqrt{xy}$.]

2014.3. Määritä kaikki ei-negatiiviset kokonaisluvut a, b, c, joille

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{2014}.$$

2014.4. Pelilautana on $n \times n$ -šakkilauta. Pelin alussa joka ruudulla on 99 kiveä. Pelaajat A ja B valitsevat vuorotellen jonkin laudan vaaka- tai pystyrivin ja poistavat jokaisesta valitun rivin ruudusta yhden kiven. Pelaaja saa valita sellaisen rivin, jonka jokaisessa ruudussa on ainakin yksi kivi. Se pelaaja, joka ei voi valita tällaista riviä, häviää pelin. Pelaaja A aloittaa. Määritä kaikki ne luvut n, joilla hänellä on voittostrategia.

29. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 24.3.2015

2015.1. Olkoon ABC kolmio ja Γ ympyrä, jonka halkaisija on AB. Kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa Γ:n (myös) pisteessä D kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa Γ:n (myös) pisteessä E. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa BC:tä pisteessä F ja AC:tä pisteessä G. Osoita, että D, E, F ja G ovat samalla suoralla.

2015.2. Määritä alkuluvut p, q, r, kun tiedetään, että luvuista pqr ja $p+q+r$ toinen on 101 kertaa toinen.

2015.3. Olkoon $n > 1$ ja olkoon $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ polynomi, jolla on n reaalista nollakohtaa (moninkertaiset nollakohdat laskettuina kertalukunsa ilmoittaman määrän kertoja). Määritellään polynomi q asettamalla

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2015} p(x+j).$$

Tiedetään, että $p(2015) = 2015$. Todista, että q:lla on ainakin 1970 eri nollakohtaa $r_1, \ldots, r_{1970}$, niin että $|r_j| < 2015$ kaikille $j = 1, \ldots, 1970$.

2015.4. Tietosanakirjassa on 2000 numeroitua osaa. Osat on pinottu numerojärjestykseen niin, että osa numero 1 on päällimmäisenä ja osa numero 2000 pohjimmaisena. Pinolle voidaan tehdä kahdenlaisia toimenpiteitä:

(i) Jos n on parillinen, voidaan ottaa n päällimmäistä osaa ja siirtää ne järjestystä muuttamatta pinon alimmaisiksi.

(ii) Jos n on pariton, voidaan ottaa pinon n päällimmäistä osaa, vaihtaa niiden järjestys päinvastaiseksi ja laittaa ne uudelleen pinon päällimmäisiksi.

Kuinka moneen eri järjestykseen pino voidaan saattaa toistamalla näitä kahta toimenpidettä?

Ratkaisuja

1995.1. *1. ratkaisu.* Piirretään PB. Puoliympyrän sisältämää kehäkulmaa koskevan lauseen nojalla $\angle RPB = \angle APB = 90°$. Täten P ja Q ovat molemmat ympyrällä, jonka halkaisija on BR. Koska $\angle AOC = 90°$, $\angle RPQ = \angle CPA = 45°$. Siis myös $\angle RBQ = 45°$, ja RBQ on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, eli $|BQ| = |QR|$.

2. ratkaisu. Asetetaan $O = (0, 0)$, $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, $P = (t, u)$, $t > 0$, $u > 0$, $t^2 + u^2 = 1$. Suoran CP yhtälö on $y - 1 = \dfrac{u-1}{t}x$. Näin ollen $Q = \left(\dfrac{t}{1-u}, 0\right)$ ja $|BQ| = \dfrac{t}{1-u} - 1 = \dfrac{t+u-1}{1-u}$. Toisaalta suoran AP yhtälö on $y = \dfrac{u}{t+1}(x+1)$, joten pisteen R y-koordinaatti ja samalla $|QR|$ on $\dfrac{u}{t+1}\left(\dfrac{t}{1-u} + 1\right) = \dfrac{ut + u - u^2}{(t+1)(1-u)} = \dfrac{ut + u - 1 + t^2}{(t+1)(1-u)} = \dfrac{u+t-1}{1-u}$. Väite on todistettu.

1995.2. *1. ratkaisu.* Olkoon S_n $2n$-numeroisten hyväksyttyjen jonojen joukko. Jaetaan S_n osajoukoiksi A_n, B_n, C_n ja D_n, joiden alkioina ovat yhdistelmiin 00, 01, 10, ja 11 päättyvät jonot. Merkitään joukon S_n alkioiden lukumäärää x_n:llä, A_n:n alkioiden lukumäärää a_n:llä, B_n:n b_n:llä, C_n:n c_n:llä ja D_n:n d_n:llä. Lasketaan x_6. Koska $S_1 = \{00, 01, 10, 11\}$, $x_1 = 4$ ja $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$. Jokainen A_{n+1}:n alkio saadaan joko B_n:n tai D_n:n alkiosta lisäämällä loppuun 00. Siis $a_{n+1} = b_n + d_n$. Vastaavasti B_{n+1}:n alkiot saadaan B_n:n, C_n:n ja D_n:n alkioista liittämällä loppuun 01, ja kääntäen. Siis $b_{n+1} = b_n + c_n + d_n$. Samoin nähdään oikeiksi palautuskaavat $c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$ ja $d_{n+1} = a_n + c_n$. Siis $a_{n+1} + d_{n+1} = (b_n + d_n) + (a_n + c_n) = x_n$ ja $x_{n+1} = 2a_n + 3b_n + 3c_n + 2d_n = 3x_n - (a_n + b_n) = 3x_n - x_{n-1}$. Lähtemällä alkuarvoista $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$ saadaan $a_2 = d_2 = 2$, $b_2 = c_2 = 3$, $x_2 = 10$. Näin ollen $x_3 = 26$, $x_4 = 3 \cdot 26 - 10 = 68$, $x_5 = 3 \cdot 68 - 26 = 178$ ja $x_6 = 3 \cdot 178 - 68 = 466$.

2. ratkaisu Jokainen tapa kirjoittaa luku 12 ykkösien ja kakkosien summana vastaa tasan kahta hyväksyttävää jonoa (eri yhteenlaskettavien järjestykset lasketaan erikseen). Summia, joissa on 12 ykköstä on 1, summia, joissa on yksi kakkonen ja 10 ykköstä on $\binom{11}{10}$ jne. Hyväksyttäviä jonoja on yhteensä

$$2 \cdot \sum_{k=0}^{6} \binom{12-k}{2k} = 2 \cdot (1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1) = 466.$$

1995.3. Merkitään I:llä niiden indeksien i joukkoa, joille $x_i \geq 0$, ja J:llä niiden indeksien i joukkoa, joille $x_i < 0$. Oletetaan, että $M < \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Silloin $I \neq \{1, 2, \ldots, n\}$, koska muutoin pätisi $|x_i| = x_i \leq \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ jokaiselle i ja olisi $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \dfrac{1}{n-1} \leq 1$. Siis

$\sum_{i\in I} x_i^2 < (n-1)\cdot \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n}$ ja $\sum_{i\in I} x_i < (n-1)\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}} = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$. Koska

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i\in I} x_i - \sum_{i\in J} |x_i|,$$

on oltava $\sum_{i\in J} |x_i| \le \sum_{i\in I} x_i < \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$ and $\sum_{i\in J} x_i^2 \le \left(\sum_{i\in J} |x_i|\right)^2 < \dfrac{n-1}{n}$. Mutta silloin

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i\in I} x_i^2 + \sum_{i\in J} x_i^2 < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1,$$

ja on tultu ristiriitaan. – Yhtäsuuruuden $M = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ mahdollisuuden toteamiseksi valitaan $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ja $x_n = -\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (n-1)\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} = 0$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (n-1)\cdot\frac{1}{n(n-1)} + \frac{n-1}{n} = 1.$$

On vielä näytettävä, että yhtäsuuruuteen ei päästä kuin edellä esitellyssä tapauksessa. Olkoon siis $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, kun $i = 1, \ldots, p$, $x_i \ge 0$, kun $i \le q$, ja $x_i < 0$, kun $q+1 \le i \le n$. Samoin kuin yllä saadaan

$$\sum_{i=1}^{q} x_i \le \frac{q}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad \sum_{i=q+1}^{n} |x_i| \le \frac{q}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad \sum_{i=q+1}^{n} x_i^2 \le \frac{q^2}{n(n-1)},$$

joten

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \frac{q+q^2}{n^2-n}.$$

On helppo nähdä, että $q^2+q < n^2+n$, kun $n \ge 2$ ja $q \le n-2$, mutta $(n-1)^2+(n-1) = n^2-n$. Välttämätöntä sille, että $M = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ on siis se, että jonossa on vain yksi negatiivinen termi. Mutta jos positiivisissa termeissä on yksikin, joka on $< M$, on

$$\sum_{i=1}^{n} < \frac{q+q^2}{n(n-1)},$$

joten tehtävän ehdot eivät toteudu. Yhtäsuuruus on siis voimassa vain, kun $n-1$ luvuista x_i on $\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ ja viimeinen $\dfrac{1-n}{\sqrt{n(n-1)}}$.

1995.4. Olkoon $n \geq 3$ ja olkoot $n-1$, n, $n+1$ kolmion sivut. Kolmion piirin puolikas on $\frac{3n}{2}$. Heronin kaavan perusteella kolmion ala on

$$T = \sqrt{\frac{3n}{2} \cdot \left(\frac{3n}{2} - n + 1\right)\left(\frac{3n}{2} - n\right)\left(\frac{3n}{2} - n - 1\right)} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(n^2 - 4)}.$$

Jos $n = 4$, niin $T = 6$. On siis olemassa ainakin yksi vaaditunkaltainen kolmio. Olkoon n parillinen luku ja olkoon $\frac{3}{4}(n^2 - 4)$ neliöluku. Asetetaan $m = n^2 - 2 > n$. Silloin myös m on parillinen ja $m^2 - 4 = (m+2)(m-2) = n^2(n^2 - 4)$. Näin ollen $\frac{3}{4}(m^2 - 4)$ on sekin neliöluku. Lisäksi $T = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(m^2 - 4)}$ on kokonaisluku. Väite on todistettu.

1996.1. Luvun 1996 numeroiden summa on 25 ja luvun $2 \cdot 1996 = 3992$ numeroiden summa on 23. Koska $1996 = 78 \cdot 25 + 46$, luku, joka saadaan kirjoittamalla peräkkäin 78 1996:tta ja 2 3992:ta toteuttaa tehtävän ehdon. [$3 \cdot 1996 = 5998$; luvun 5988 numeroiden summa on 30. $1996 = 65 \cdot 30 + 46$, joten $39923992\underbrace{5988\ldots5988}_{65\text{ kpl}}$ on myös kelvollinen vastaus, selvästi pienempi kuin edellinen.]

1996.2. Merkitään $f_n(x) = x^n + x^{-n}$. $f_n(0)$ ei ole määritelty millään n:n arvolla, joten on oltava $x \neq 0$. Koska $f_0(x) = 2$ kaikilla $x \neq 0$, tutkittavaksi jää, millä $x \neq 0$ $f_n(x)$ on kokonaisluku kaikilla $n > 0$. Koska

$$x^n + x^{-n} = (x^1 + x^{-1})(x^{n-1} + x^{1-n}) - (x^{n-2} + x^{2-n}),$$

niin jos $x^1 + x^{-1}$ on kokonaisluku, niin $x^n + x^{-n}$ on kokonaisluku kaikilla $n \geq 2$. x:n tulee siis toteuttaa ehto

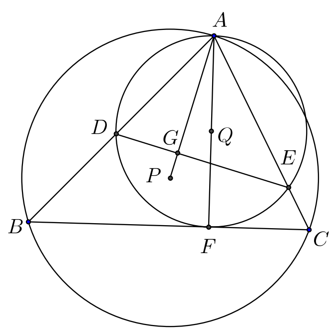
$$x^1 + x^{-1} = m,$$

missä m on kokonaisluku. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1},$$

ne ovat reaalisia, kun $m \neq -1, 0, 1$.

1996.3. Olkoon AF kolmion ABC korkeusjana. Voidaan olettaa, että kulma ACB on terävä. Suorakulmaisista kolmioista ACF ja AFE saadaan $\angle AFE = \angle ACF$. Kehäkulmalauseen perusteella edelleen $\angle ADE = \angle AFE = \angle ACB$. Kolmiot ABC ja AED ovat näin ollen yhdenmuotoiset. Jos P ja Q ovat kolmioiden ABC ja AED ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet, niin $\angle BAP = \angle EAQ$. Jos kolmion AED korkeusjana on AG, niin $\angle DAG = \angle CAF$. Mutta tästä seuraa, että $\angle BAP = \angle DAG$, eli P on korkeussuoralla AG.



1996.4. (i) Käytetään toistuvasti kaavaa $f(n+a) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$:

$$f(n+2a) = f((n+a)+a) = \frac{\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1} - 1}{\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1} + 1} = -\frac{1}{f(n)},$$

$$f(n+4a) = f((n+2a)+2a) = -\frac{1}{-\dfrac{1}{f(n)}} = f(n).$$

(ii) Jos $a = 1$, niin $f(1) = f(a) = f(1995) = f(3 + 498 \cdot 4a) = f(3) = f(1+2a) = -\dfrac{1}{f(1)}$, mikä on mahdotonta, koska $f(1)$:n ja $\dfrac{1}{f(1)}$ merkki on sama. Siis $a \neq 1$.

Jos $a = 2$, saadaan $f(2) = f(a) = f(1995) = f(3 + 249 \cdot 4a) = f(3) = f(a+1) = f(1996) = f(4 + 249 \cdot 4a) = f(4) = f(2+a) = \dfrac{f(2)-1}{f(2)+1}$ eli $f(2)^2 + f(2) = f(2) - 1$. Tällä toisen asteen yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja. Siis $a \neq 2$.

Jos $a = 3$, niin f voidaan konstruoida valitsemalla $f(1)$, $f(2)$ ja $f(3)$ mielivaltaisesti ja laskemalla f:n muut arvot palautuskaavasta $f(n+3) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$. $a = 3$ on siten pienin mahdollinen a:n arvo. Tarkistetaan, että näin määritelty f toteuttaa tehtävän ehdot.

Ensinnäkin konstruktion perusteella

$$f(n+a) = f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}.$$

Edelleen (i):n perusteella

$$f(n+12) = f(n+4a) = f(n),$$

joten

$$f(a) = f(3) = f(3 + 166 \cdot 12) = f(1995),$$

$$f(a+1) = f(4) = f(4 + 166 \cdot 12) = f(1996),$$

$$f(a+2) = f(5) = f(5 + 166 \cdot 12) = f(1997),$$

kuten pitää.

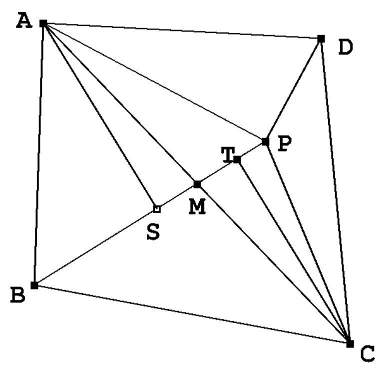
Jos $f(n) = -1$, $f(n+3)$ ei ole määritelty. Jos $f(n) = 0$, $f(n+3) = -1$ ja $f(n+6)$ ei ole määritelty. Jos $f(n) = 1$, $f(n+3) = 0$ ja $f(n+9)$ ei ole määritelty. On siis valittava $f(1)$, $f(2)$ ja $f(3)$ eri suuriksi kuin -1, 0, 1.

1997.1. Olkoot $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_7$ joukon A alkiot. Jos $(a_i,\, a_j,\, a_k)$ on tehtävän mukainen kolmikko, niin $a_i < a_j < a_i + a_j = a_k$. Pareja $(a_i,\, a_j)$, joille pätee $a_i + a_j = a_k$ on enintään $k - 1$ kappaletta. Pareja, joille lisäksi pätee $a_i < a_j$, on enintään $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ kappaletta. Pareja on siis enintään

$$\sum_{k=3}^{7}\left[\frac{k-1}{2}\right] = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$$

kappaletta. Arvo 9 saavutetaan, kun $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$, sillä tässä tapauksessa kolmikot (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (1, 6, 7), (2, 3, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 7) ja (3, 4, 7) täyttävät tehtävän ehdot.

1997.2. Oletamme ensin, että P ei ole lävistäjällä AC ja että suora BP leikkaa lävistäjän AC pisteessä M. Olkoot S ja T pisteistä A ja C suoralle BP piirrettyjen kohtisuorien ja suoran BP leikkauspisteet. Koska kolmioilla APB ja CBP on sama ala, on $AS = CT$. Jos $S \neq T$, niin suorakulmaiset kolmiot ASM ja CTM ovat yhtenevät (kks tai ksk), joten $AM = CM$. Jos taas $S = T$, on $AC \perp PB$ ja $S = M = T$, jolloin myös $AM = CM$. Joka tapauksessa M on lävistäjän AC keskipiste. Täsmälleen samoin todistetaan, että suora DP leikkaa AC:n tämän keskipistessä eli pisteessä M. Siis toisaalta B, M ja P, toisaalta D, M ja P ovat samalla suoralla. Siis M on suoralla DB, eli lävistäjä BD jakaa lävistäjän AC kahteen yhtä suureen osaan.



Oletamme sitten, että P on lävistäjällä AC. Silloin P on AC:n keskipiste. Jos P ei ole lävistäjällä BD, päätellään samoin kuin edellä, että AC jakaa BD:n kahteen yhtä suureen osaan. Jos P taas on myös lävistäjällä BD, se on molempien lävistäjien yhteinen keskipiste.

1997.3. Jos kolmella a:n pituisella janalla on sama kärki, esim. A, niin kolme muuta pistettä sijaitsevat A-keskisellä a-säteisellä ympyrällä ja ovat b-sivuisen tasasivuisen kolmion kärkinä. Tällöin A on kolmion BCD keskipiste, ja

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}b} = \sqrt{3}.$$

Oletetaan sitten, että pisteestä A lähtee ainakin yksi a:n pituinen ja ainakin yksi b:n pituinen jana. Oletetaan, että $AB = a$, $AD = b$. Ei ole mahdollista, että joka pisteestä lähtisi vain yksi a:n pituinen jana (a:n pituisten janojen lukumäärä on puolet pisteistä lähtevien

a:n pituisten janojen lukumäärästä, koska jokainen jana tulee lasketuksi molempien päätepisteidensä kohdalla). Voidaan siis olettaa, että A:sta lähtee toinenkin a:n pituinen jana, AC. Jos nyt olisi $BC = a$, olisi ABC tasasivuinen kolmio ja D olisi samalla etäisyydellä b sen kaikista kärjistä. Tämä ei voi tulla kyseeseen, koska $b > a$. Siis $BC = b$. Janoista CD ja BD toisen pituus on a. Voimme olettaa, että tämä jana on DC. Janat DC ja AB ovat joko eri tai samalla puolella suoraa AC. Jälkimmäisessä tapauksessa $ABCD$ on suunnikas, jonka kaksi sivuparia on a:n pituisia, kaksi b:n pituisia ja lävistäjien pituudet ovat a ja b. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa $(a^2 + b^2)$ on sama kuin sivujen neliöiden summa $(2a^2 + 2b^2)$. Voimme siis olettaa, että $BACD$ on kupera nelikulmio. Olkoon $\angle ABC = \alpha$ ja $\angle ADB = \beta$. Tasakylkisestä kolmiosta saadaan esimerkiksi $\angle CBD = \beta$, ja erityisesti kolmiosta ABD $2\alpha + 2\beta + \beta = \pi$ sekä $\angle CDA = \alpha$, $\angle DCB = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$, $\angle CAD = \alpha$. Kolmiosta ADC saadaan näin ollen $\alpha + \alpha + \alpha + \frac{1}{2}(\pi - \beta) = \pi$. Kun ratkaistaan, saadaan $\alpha = \frac{1}{5}\pi = 36°$. Kolmiosta ABC saadaan nyt sinilauseen avulla

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 108°}{\sin 36°} = \frac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

(Itse asiassa a on nyt säännöllisen viisikulmion sivu ja b sen lävistäjä.) – Toinen tapa löytää suhde $\frac{b}{a}$ on tarkastella puolisuunnikasta $CDBA$, jossa $CD \| AB$; jos E on pisteen B kohtisuora projektio janalla CD, niin $CE = b - \dfrac{1}{2}(b-a) = \dfrac{1}{2}(b+a)$, ja suorakulmaisesta kolmiosta BCE ja DCE saadaan $CE^2 = b^2 - \left(\dfrac{b+a}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$, joka sievenee muotoon $b^2 - ab - a^2 = 0$ ja edelleen $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{5+1}{2}}$.

1997.4. Kun x on parillinen, niin $f(x)$ on parillinen, kun x on pariton, niin $f(x)$ on pariton. Lisäksi, jos $x \equiv 1 \mod 4$, niin $f(x) \equiv 3 \mod 4$ ja jos $x \equiv 3 \mod 4$, niin $f(x) \equiv 1 \mod 4$. Selvästi $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6$ ja $f(3) = 5$. Todistetaan seuraava väite. Jos $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$, kun $x, y < k$, niin $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$, kun $x, y < 2k$. Oletetaan siis, että x ja y ovat pienempiä kuin $2k$ ja että $f(x) = f(y)$. Jos nyt $f(x)$ on parillinen, niin $x = 2t$, $y = 2u$, ja $2f(t) = 2f(u)$. Koska t ja u ovat pienempiä kuin k, on $t = u$, joten $x = y$. Oletetaan sitten, että $f(x) \equiv 1 \mod 4$. Silloin $x \equiv 3 \mod 4$; $x = 4u - 1$, ja $f(x) = 2f(2u-1) - 1$. Vastaavasti $y = 4t - 1$ ja $f(y) = 2f(2t-1) - 1$. Lisäksi $2u - 1 < \frac{1}{2}(4u-1) < k$ ja $2t - 1 < k$, joten $2u - 1 = 2t - 1$, $u = t$ ja $x = y$. Jos viimein $f(x) \equiv 3 \mod 4$, niin $x = 4u + 1$, $y = 4t + 1$, $u < k$, $t < k$, $4f(u) + 3 = 4f(t) + 3$, $u = t$, $x = y$. Koska kaikille x ja y on olemassa n siten, että suurempi luvuista x ja y on $< 2^n \cdot 3$, edellinen päättely osoittaa, että $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

1998.1. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $x = y = 0$, saadaan $2f(0) = 4f(0)$, joten $f(0) = 0$. Olkoon sitten $y = nx$, missä n on luonnollinen luku. Nyt saadaan

$$f((n+1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n-1)x).$$

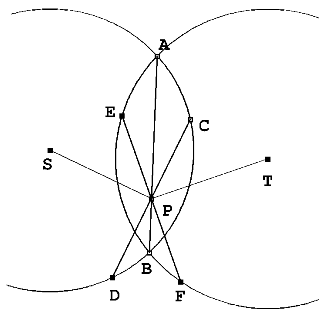
Tästä saadaan $f(2)x = 2f(x) + 2f(x) - f(0) = 4f(x)$, $f(3x) = 2f(x) + 2f(2x) - f(x) = 9f(x)$, Todistetaan, että $f(nx) = n^2 f(x)$. Käytetään induktiota. Kaava on tosi, kun

$n = 1$. Oletetaan, että $f(kx) = k^2 f(x)$, kun $k \leq n$. Tällöin

$$f((n+1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n-1)x) = (2 + 2n^2 - (n-1)^2)f(x) = (n+1)^2 f(x).$$

Siis $f(nx) = n^2 f(x)$. Kun $x = 1/q$, $f(1) = f(qx) = q^2 f(x)$, joten $f(1/q) = f(1)/q^2$. Tästä seuraa $f(p/q) = p^2 f(1/q) = (p/q)^2 f(1)$, joten $f(x) = ax^2$ jollekin rationaaliluvulle a. Kääntäen, jos $f(x) = ax^2$, niin $f(x+y)+f(x-y) = a(x+y)^2 + a(x-y)^2 = 2ax^2 + 2ay^2 = 2f(x) + 2f(y)$. Näin ollen $f(x) = ax^2$ on yhtälön ratkaisu.

1998.2. Kun lasketaan pisteen P potenssi ympyröiden C_1 ja C_2 suhteen, saadaan $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF$. Koska SP on kohtisuorassa jännettä CD vastaan, P:n on oltava CD:n keskipiste, joten $PC = PD$. Samoin saadaan $PE = PF$. Kaiken kaikkiaan $PC = PD = PE = PF = \sqrt{PA \cdot PB}$. Näin ollen pisteet C, D, E ja F ovat kaikki P-keskisellä ympyrällä, jonka halkaisijoita ovat CD ja EF. Thaleen lauseen perusteella kulmat $\angle ECF$, $\angle CFD$ jne. ovat kaikki suoria. $CDEF$ on siis suorakaide.



1998.3. (a) Oletetaan, että $x_1, \ldots, x_n$ on tehtävässä vaadittu jono. Silloin $x_1 + \cdots + x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Tämä summa on jaollinen n:llä, mikä on mahdollista vain, kun n on pariton, jolloin $\dfrac{(n+1)}{2}$ on kokonaisluku. Jos $n = 2m$, niin $\dfrac{n(n+1)}{2} = m(2m+1) = 2m^2 + m \equiv m \bmod 2m$. Oletetaan nyt, että $n = 2m+1 > 1$. Vaaditaan, että $n - 1 = 2m$ on tekijänä luvussa $x_1 + \cdots + x_{n-1}$. Koska $x_1 + \cdots + x_{n-1} = (m+1)(2m+1) - x_n =\equiv m+1-x_n \bmod 2m$, ja $1 \leq x_n \leq n$, niin $x_n = m+1$. Seuraavaksi vaaditaan, että $n - 2 = 2m - 1$ on tekijänä luvussa $x_1 + \cdots + x_{n-2}$. Koska $x_1 + \cdots + x_{n-2} = (m+1)(2m+1) - x_n - x_{n-1} \equiv m + 1 - x_{n-1} \bmod 2m - 1$ ja $-m \leq m + 1 - x_{n-1} \leq m$, on $x_{n-1} = m + 1 \bmod 2m - 1$. Jos $n > 3$ eli $m \geq 1$, on $x_{n-1} = m + 1 = x_n$, mikä on ristiriita. Siis $n = 1$ ja $n = 3$ ovat ainoat mahdollisuudet. Jos $n = 1$, $x_1 = 1$ on kelvollinen jono. Jos $n = 3$, on oltava $x_3 = 2$. x_1 ja x_2 ovat 1 ja 3 kummassa tahansa järjestyksessä.

(b) Olkoon $x_1 = 1$. Määritellään jono palautuskaavan avulla. Oletetaan, että $x_1, \ldots, x_{n-1}$ on valittu ja että näiden lukujen summa on A. Olkoon m pienin positiivinen kokonaisluku, jota ei vielä ole käytetty. Jos asetetaan $x_{n+1} = m$, x_n:llä on kaksi rajoitusta:

$$A + x_n \equiv 0 \bmod n \quad \text{ja} \quad A + x_n + m \equiv 0 \bmod n+1.$$

Koska n ja $n+1$ ovat yhteistekijättömiä, on olemassa y, jolle pätee $y \equiv -A \bmod n$, $y \equiv -A - m \bmod n+1$ ("kiinalainen jäännöslause") Jos y:hyn lisätään tarpeeksi suuri $n(n+1)$:n monikerta, saadaan luku, jota ei vielä ole käytetty jonoon. Täten jonoa voidaan aina jatkaa kahdella termillä, ja se tulee sisältämään jokaisen kokonaisluvun.

1998.4. Kun kirjoitetaan Pascalin kolmio mod 2:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&0&&1&&&&\\
&&&1&&1&&1&&1&&&\\
&&1&&0&&0&&0&&1&&\\
&1&&1&&0&&0&&1&&1&\\
1&&0&&1&&0&&1&&0&&1,
\end{array}$$

havaitaan, että rivi 1 sisältää kaksi rivin 0 kopiota, rivit 2 ja 3 sisältävät kaksi rivien 1 ja 2 kopiota jne.

Pascalin kolmion perusominaisuudesta $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$ seuraa, että jos rivin k kaikki luvut ovat $\equiv 1 \mod 2$, niin rivillä $k+1$ tasan ensimmäinen ja viimeinen luku on $\equiv 1 \mod 2$. Jos k:nnella rivillä vain ensimmäinen ja viimeinen luku ovat $\equiv 1 \mod 2$, niin rivit k, $k+1, \ldots, 2k-1$ muodostuvat kahdesta rivien 0, 1, $\ldots k-1$ kopiosta. Koska rivillä 0 on luku 1, rivi 1 on kahden ykkösen muodostama, 2 ja 3 ovat kahden rivien 0 ja 1 muodostaman kolmion kopioita jne. Tästä päätellään induktiolla, että kaikilla k rivi 2^k-1 muodostuu pelkistä ykkösistä (siinä on kaksi kopiota rivistä $2^{k-1}-1$ ja rivi $2^1-1=0$ on pelkkä ykkönen). Täten rivi 2^k muodostuu nollista ja päissä olevista ykkösistä. Tästä seuraa edelleen, että rivit 2^k, 2^k+1, ... $2^{k+1}-1$ ovat kaksi kopiota riveistä 0, 1, $\ldots 2^k-1$. Olkoon N_n rivin, $n = 2^k+m$, $m < 2^k$, parittomien lukujen määrä. Silloin $N_1 = 2$ ja $N_n = 2N_m$. Siis N_n on aina kakkosen potenssi. Todetaan vielä, että $N_n = 2^p$, missä p on n:n binääriesityksen ykkösten lukumäärä $y(n)$. Koska $N_0 = 1 = 2^{y(0)}$, kaava pätee, kun $n = 0$. Luvun $n = 2^k+m$ binääriesityksessä on yksi ykkönen enemmän kuin luvun m binääriesityksessä. Toisaalta $N_n = 2N_m = 2\cdot 2^{y(m)} = 2^{y(m)+1} = 2^{y(n)}$.

On vielä osoitettava, että $\binom{2^k}{p} \equiv 1$ vain, kun $p = 0$ tai $p = 2^k$. Tämä seuraa esimerkiksi siitä, että $\binom{2^k-1}{p} \equiv 1$ kaikilla p, mikä taas seuraa edellisestä induktiosta.

1999.1. Jos $n \geq 2005$, niin $f(n) = n-5 \geq 2000$. Olkoon $1 \leq k \leq 4$. Silloin

$$2000-k = f(2005-k) = f(f(2010-k)) = f(1999-k) = f(f(2004-k)) = f(1993-k).$$

Sijoitetaan $k = 1$. Saadaan $1999 = f(2004) = f(1998) = f(1992)$. Lisäksi $1995 = f(2000) = f(f(2005)) = f(1994)$ ja $f(1993) = f(f(2004)) = f(1999) = f(f(2010)) = f(2005) = 2000$. On siis osoitettu, että $2000-k = f(1999-k)$, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ja $2000-k = f(1993-k)$, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Osoitetaan, että $f(6n+1-k) = 2000-k$, kun $n \leq 333$ ja $0 \leq k \leq 5$. Tämä on jo näytetty toteen, kun $n = 333$ ja $n = 332$. Oletetaan, että väite pätee, kun $n = m+2$ ja $n = m+1$. Silloin $f(6m+1-k) = f(f(6m+12-k)) = f(f(6(m+2)+1-(k+1)) = f(2000-k-1) = f(1999-k) = 2000-k$, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ja $f(6m+1-5) = f(6m-4) = f(f(6m+7)) = f(f(6(m+1)+1)) = f(2000) = 1995 = 2000-5$. Siis väite pätee, kun $n = m$. Kaiken kaikkiaan siis $1999 = 2000-1 = f(6n)$, jos ja vain jos $n = 1, 2, \ldots, 334$.

1999.2. On helppo antaa esimerkkejä vaaditunlaisista seitsenkulmioista $ABCDEFG$, joissa kaksi kulmaa on $120°$. Nämä kaksi kulmaa eivät kuitenkaan voi liittyä seitsenkulmion viereisiin kärkiin: tällainen konfiguraatio olisi symmetrinen kärkien välisen sivun keskinormaalin suhteen, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että seitsenkulmion kaikki sivut ovat eripituisia. Jos $120°$ kulmia olisi kolme, niiden tulisi sijaita (esim.) kärjissä A, C ja E. Koska $120°$ kehäkulmaa vastaa $240°$ keskuskulma, kaaret GAB, BCD ja DEF ovat kukin $360° - 240° = 120°$. Koska kaaret ovat erillisiä, ne peittävät koko ympyrän, joten $F = G$, ja seitsenkulmio surkastuu kuusikulmioksi. $120°$ kulmia voi siis olla enintään kaksi.

1999.3. Jos lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on d, niin origosta voidaan päästä vain pisteisiin, joiden koordinaatit ovat jaollisia d:llä. On oltava $d = 1$. Jos $a + b$ on parillinen, niin kaikki pisteet (x, y), joihin origosta pääsee, ovat sellaisia, että $x + y$ on parillinen. Osoitetaan, että jos $d = 1$ ja $a + b \equiv 1 \mod 2$, niin kaikkiin pisteisiin pääsee. Voidaan olettaa, että $a \geq 1$ ja $b \geq 1$, sillä jos $ab = 0$, voi olla $d = 1$ vain jos toinen luvuista a, b on nolla ja toinen 1. Näillä luvuilla kaikkiin pisteisiin pääseminen onnistuu. Koska $d = 1$, on olemassa positiiviset luvut r ja s siten, että joko $ra - sb = 1$ tai $sb - ra = 1$. Oletetaan, että $ra - sb = 1$. Jos tehdään r siirtoa $(x, y) \to (x + a, y + b)$ ja r siirtoa $(x, y) \to (x + a, y - b)$, tullaan pisteestä (x, y) pisteeseen $(x + 2ra, y)$. Jos tämän jälkeen tehdään s siirtoa $(x, y) \to (x - b, a)$ ja s siirtoa $(x, y) \to (x - b, -a)$, tullaan pisteeseen $(x + 2ra - 2sb, y) = (x + 2, y)$. Samoin voidaan konstruoida siirtosarjat pisteestä (x, y) pisteisiin $(x - 2, y)$, $(x, y + 2)$, $(x, y - 2)$. Origosta päästään siis kaikkiin pisteisiin, joiden molemmat koordinaatit ovat parillisia. Luvuista a, b tasan toinen on pariton; olkoon $a = 2k + 1$, $b = 2m$. Siirto $(x, y) \to (x + a, y + b) = (x + 1 + 2k, y + 2m)$, jota seuraa k siirtosarjaa $(x, y) \to (x - 2, y)$ ja m siirtosarjaa $(x, y) \to (x, y - 2)$, johtaa pisteeseen $(x + 1, y)$. Samalla tavalla päästään pisteestä (x, y) pisteisiin $(x - 1, y)$ ja $(x, y \pm 1)$. Näin ollen origosta pääsee kaikkiin pisteisiin.

1999.4. Todistettava epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{1 + a_1} + \cdots + \frac{1}{1 + a_n} \leq \frac{n\left(\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right)}{n + \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Tämä on edelleen yhtäpitävä epäyhtälön

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a_1^{-1}} + 1} + \cdots + \frac{1}{\dfrac{1}{a_n^{-1}} + 1} \leq \frac{n}{\dfrac{1}{\dfrac{a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}} + 1} eqno(1)$$

kanssa. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{x} + 1} = \frac{x}{1 + x}.$$

Osoitetaan, että f on ylöspäin kupera eli että

$$tf(x) + (1 - t)f(y) < f(tx + (1 - t)y)$$

kaikilla $t \in (0,\, 1)$. Epäyhtälö

$$t\frac{x}{1+x} + (1-t)\frac{y}{1+y} < \frac{tx+(1-t)y}{1+tx+(1-t)y}$$

sievenee muotoon

$$t^2(x-y)^2 < t(x-y)^2,$$

koska $0 < t < 1$, jälkimmäinen epäyhtälö on tosi. [Toinen tapa:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = -\frac{2}{(1+x)^3} < 0.$$

Jos toinen derivaatta on negatiivinen, funktion kuvaaja on ylöspäin kupera.] Ylöspäin kuperalle funktiolle pätee

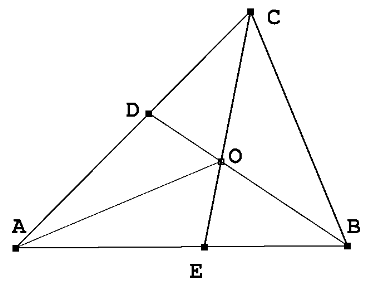
$$\frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)) \le f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

ja tässä yhtäsuuruus vain, jos $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Näin ollen (1) on tosi, ja yhtäsuuruus vallitsee, kun kaikki a_i:t ovat yhtä suuria.

2000.1. Olkoon x kolmen eri yhteenlaskettavan summien lukumäärä ja y kahden eri yhteenlaskettavan summien lukumäärä. Tarkastellaan riviä, jossa on 3999 numeroitua laatikkoa ja jokaisessa paritonnumeroisessa laatikossa on punainen pallo. Jokainen tapa sijoittaa kaksi sinistä palloa parillisnumeroisiin laatikkoihin tuottaa 2000:n jaon kolmeksi yhteenlaskettavaksi. Tapoja sijoittaa siniset pallot on $\binom{1999}{2} = 999 \cdot 1999$. Mutta on $3! = 6$ eri sijoittelua, jotka tuottavat saman 2000:n jaon kolmeksi eri yhteenlaskettavaksi ja $\frac{3!}{2} = 3$ eri jakoa, jotka tuottavat saman 2000 jaon, jossa eri suuria yhtyeenlaskettavia on kaksi. Koska 2000 ei ole jaollinen kolmella, kaikki sijoittelut antavat joko kolme tai kaksi eri suurta yhteenlaskettavaa. Siis $6x + 3y = 1999 \cdot 999$. Mutta $y = 999$, koska summassa kaksi kertaa esiintyvän yhteenlaskettavan arvo voi olla mikä hyvänsä luvuista $1,\, 2,\, \ldots 999$. Ratkaisemalla edellinen yhtälö saadaan $x = 998 \cdot 333$, joten $x + y = 1001 \cdot 333 = 333333$.

2000.2. Oletetaan, että P_n:llä on alkuaan m kolikkoa. Silloin P_{n-1}:llä on $m+1$ kolikkoa, $\ldots$ ja P_1:llä $m+n-1$ kolikkoa. Joka siirrossa henkilö saa k kolikkoa ja antaa pois $k+1$ kolikkoa, joten hän menettää yhteensä yhden kolikon. Ensimmäisen kierroksen jälkeen, kun P_n on antanut n kolikkoa P_1:lle, P_n:llä on $m-1$ kolikkoa, P_{n-1}:llä m kolikkoa jne., kahden kierroksen jälkeen P_n:llä on $m-2$ kolikkoa, P_{n-1}:llä $m-1$ kolikkoa jne. Näin voidaan jatkaa m:n kierroksen ajan, jonka jälkeen P_n:llä ei ole rahaa, P_{n-1}:llä on yksi kolikko jne. Kierroksella $m+1$ jokainen, jolla on kolikoita, voi ottaa niitä vastaan ja antaa edelleen kuten aikaisemminkin. Rahaton P_n ei voi enää antaa pois kolikoita. Hän saa $n(m+1)-1$ kolikkoa P_{n-1}:ltä, muttei voi antaa $n(m+1)$:ää kolikkoa p_1:lle. P_{n-1}:llä ei ole kolikoita ja P_1:llä on $n-2$ kolikkoa. Ainoa naapuruspari, joista toisella voi olla 5 kertaa niin monta kolikkoa kuin toisella, on $(P_1,\, P_n)$. Koska $n - 2 < n(m+1) - 1$, on oltava $5(n-2) = n(m+1) - 1$ eli $n(4-m) = 9$. Koska $n > 1$, on oltava $n = 3$, $m = 1$

tai $n = 9$, $m = 3$. Kokeilemalla nähdään, että molemmat vaihtoehdot ovat mahdollisia. Ensimmäisessä tapauksessa kolikoiden määrä on $3+2+1 = 6$, toisessa $11+10+\cdots+3 = 63$.



2000.3. Tarkastellaan kolmioita AOE ja AOD. Niissä on kaksi keskenään yhtä suurta sivuparia ja toista vastinsivuparia vastassa olevat kulmat ovat yhtä suuret. Tällöin joko AOE ja AOD ovat yhteneviä tai $\angle AEO = 180^\circ - \angle ADO$. Edellisessä tapauksessa $\angle BEO = \angle CDO$, joten kolmiot EBO ja DCO ovat yhteneviä. Tällöin siis $AB = AC$. Jälkimmäisessä tapauksessa merkitään kolmion ABC kulmia 2α:lla, 2β:lla, ja 2γ:lla ja kulmaa AEO δ:lla. Kolmion kulman vieruskulmaa koskevan lauseen nojalla saadaan $\angle BOE = \angle DOC = \beta+\gamma$, $\delta = 2\beta+\gamma$ ja $180^\circ - \delta = \beta + 2\gamma$. Kun nämä yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $3(\beta + \gamma) = 180^\circ$ eli $\beta + \gamma = 60^\circ$. Kun tämä yhdistetään yhtälöön $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$, saadaan $2\alpha = 60^\circ$.

2000.4. Merkitään $f\left(\frac{1}{3}\right) = a$ ja $f\left(\frac{2}{3}\right) = b$. Kun sovelletaan tehtävän epäyhtälöä arvoilla $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ ja $z = 1$ sekä $x = 0$, $y = \frac{1}{3}$ ja $z = \frac{2}{3}$, saadaan

$$\frac{1}{2} \le \frac{1-b}{b-a} \le 2, \qquad \frac{1}{2} \le \frac{b-a}{a} \le 2$$

Jos olisi $a < 0$, olisi $b - a < 0$ ja siis $b < 0$. Lisäksi olisi $1 - b < 0$ eli $b > 1$. Samanlaiseen ristiriitaan johtaisi oletus $b - a < 0$. Siis $a > 0$ ja $b - a > 0$, joten

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\right) \le a \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\right)$$

eli $a \le 2b - 2a$, $b - a \le 2a$, $b - a \le 2 - 2b$ ja $1 - b \le 2b - 2a$. Näistä yhtälöistä 1. ja 3. antavat $3a \le 2b$ ja $3b \le 2 + a$, joista eliminoimalla b saadaan $3a \le \frac{4}{3} + \frac{2a}{3}$, $a \le \frac{4}{7}$. Yhtälöistä 4. ja 2. antavat vastaavasti $1 + 2a \le 3b$ ja $b \le 3a$, joista $1 \le 7a$, $\frac{1}{7} \le a$. [Rajoja voidaan parantaa – tarkat ala- ja ylärajat olisivat $\frac{4}{27}$ ja $\frac{76}{135}$.]

2001.1. Jaetaan taso ensin kahdeksi joukoksi sijoittamalla y-akselin suuntaiset neliövyöt vuorotellen kumpaankin joukkoon, valkoisiin V ja mustiin M Joukoista $A \cap V$ ja $A \cap M$ ainakin toinen sisältää ainakin puolet joukon A neliöistä. Olkoon tämä joukko A_1. Jaetaan ne neliövyöt, jotka sisältävät A_1:n kahdeksi joukoksi E ja F niin, että kumpaankin joukkoon tulee joka toinen vyön neliö. Kummassakaan joukossa olevilla neliöillä ei ole yhtään yhteistä pistettä muiden samaan joukkoon kuuluvien neliöiden kanssa. Nyt ainakin toisessa joukoista $E \cap A_1$, $F \cap A_1$ on ainakin puolet joukon A_1 neliöistä ja siten ainakin neljäsosa joukon A neliöistä. Tämä joukko kelpaa joukoksi B.

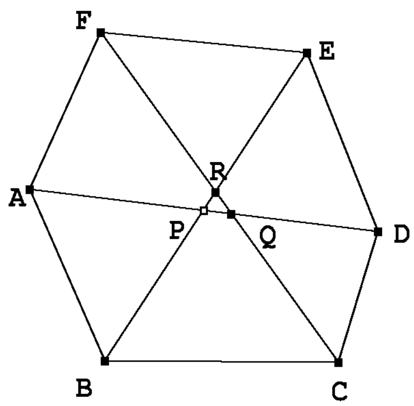
2001.2. Olkoon $g(6x) = f(x)$. Silloin g on rajoitettu ja $g(t+2) = f\left(\frac{t}{6} + \frac{1}{3}\right)$, $g(t+3) = f\left(\frac{t}{6} + \frac{1}{2}\right)$, $g(t+5) = f\left(\frac{t}{6} + \frac{5}{6}\right)$ ja $g(t+2)+g(t+3) = g(t)+g(t+5)$, $g(t+5)-g(t+3) = g(t+2)-g(t)$ kaikilla reaaliluvuilla t. Mutta silloin $g(t+12)-g(6) = g(t+12)-g(t+10)+g(t+10)-g(t+8)+g(t+8)-g(t+6) = g(t+9)-g(t+7)+g(t+7)-g(t+5)+g(t+5)-g(t+3) = g(t+6)-g(t+4)+g(t+4)-g(t+2)+g(t+2)-g(t) = g(t+6)-g(t)$. Induktiolla nähdään, että $g(t+6n)-g(t) = n(g(t+6)-g(0))$. Ellei ole $g(t+6)-g(t) = 0$ kaikilla reaaliluvuilla t, johdutaan ristiriitaan sen kanssa, että g on rajoitettu. Päätellään, että f on jaksollinen ja että ainakin eräs jakso on 1.

2001.3. Koska

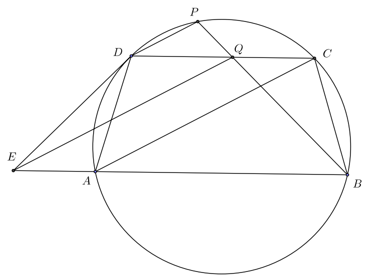
$$\begin{aligned}x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}\\ = x(x-1)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4) + \frac{5}{2}\end{aligned}$$

ja $x(x-1) \geq 0$, kun $x \leq 0$ ja $x \geq 1$, näillä x:n arvoilla yhtälöllä ei ole ratkaisuja. Jos $0 < x < 1$, niin $0 > x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ ja $x^6+2x^4+3x+4 < 1+2+3+4 = 10$. Lausekkeen arvo on nyt suurempi kuin $-\frac{1}{4}\cdot 10 + \frac{5}{2} = 0$, joten näilläkään x:n arvoilla yhtälöllä ei ole ratkaisua.

2001.4. Kuvion alaa merkitään $|\cdot|$. Leikatkoot AD ja BE pisteessä P, AD ja CF pisteessä Q ja BE ja CF pisteessä R. Oletetaan, että P, Q ja R ovat eri pisteitä. Ei merkitse rajoitusta, kun oletetaan, että P on B:n ja R:n ja Q C:n ja R:n välissä. Koska $|ABP|$ ja $|DEP|$ eroavat kumpikin $\frac{1}{2}|ABCDEF|$:sta määrällä $|BCDP|$, ABP:llä ja DEP:llä on sama ala. Koska $\angle APB = \angle DPE$, on $AP\cdot BP = DP\cdot EP = (DQ+QP)(ER+RP)$. Samoin $CQ\cdot DQ = (AP+PQ)(FR+RQ)$ ja $ER\cdot FR = (CQ+QR)(BP+PR)$. Kun edelliset kolme yhtälöä kerrotaan keskenään, saadaan $AB\cdot BP\cdot CQ\cdot DQ\cdot ER\cdot FR = DQ\cdot ER\cdot AP\cdot FR\cdot CQ\cdot BP+$ positiivisia termejä, jotka sisältävät PQ:n, QR:n ja PR:n. Tämä on ristiriita. Siis P:n, Q:n ja R:n on oltava yksi ja sama piste.



2002.1. Koska $AD < CD$, $\angle PDC = \angle DCA < \angle DAC$. Tästä seuraa, että kaari CP on pienempi kuin kaari CD, joten P on sillä kaarista CD, joka ei sisällä A:ta ja B:tä. Osoitetaan, että kolmiot ADE ja CBQ ovat yhtenevät. Ympyrän sisään piirrettynä puolisuunnikkaana $ABCD$ on tasakylkinen (koska $AB \| CD$, niin $\angle BAC = \angle DCA$, siis $BC = AD$). Koska $DP \| AC$, niin $\angle PDC = \angle CAB$. Mutta $\angle EDA = \angle CAB$ (yhtä suurta kaarta vastaavat kehäkulmat) ja $\angle PBC = \angle PDC$ (samasta syystä). Siis $\angle EDA = \angle QBC$. Koska $ABCD$ on jännenelikulmio, on $\angle EAD = 180° - \angle DAB = \angle DCB$. Siis $\angle EAD = \angle QCB$. Kolmiot ADE ja CBQ ovat siis yhtenevät (ksk). Mutta silloin $EA = QC$. Koska lisäksi $EA \| QC$, niin $EACQ$ on suunnikas. Suunnikkaan vastakkaisina sivuina AC ja EQ ovat yhtä pitkät.



2002.2. Olkoon siinä maljassa, josta pallo siirretään, alkuaan n palloa ja olkoon niissä olevien lukujen summa a. Olkoon vastaavasti m toisen uurnan pallojen määrä ja b palloissa olevien lukujen summa. Jos q on siirrettävässä pallossa oleva luku, niin tehtävän ehdoista seuraa

$$\begin{cases} \dfrac{a-q}{n-1} = \dfrac{a}{n} + x, \\ \dfrac{b+q}{m+1} = \dfrac{b}{m} + x \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} a = nq + n(n-1)x \\ b = mq - m(m+1)x. \end{cases}$$

Koska $n + m = N$ ja $a + b = \dfrac{1}{2}N(N+1)$, saadaan

$$\frac{1}{2}N(N+1) = Nq + x(n^2 - m^2 - N) = Nq + xN(n - m - 1)$$

ja $q = \frac{1}{2}(N+1) - x(n-m-1)$, $b = \dfrac{1}{2}m(N+1) - xmn$. Nyt $b \geq 1+2+\cdots+m = \dfrac{1}{2}m(m+1)$. Siis $\dfrac{1}{2}(N+1) - xn = \dfrac{1}{2}(m+n+1) - xn \geq \dfrac{1}{2}(m+1)$ eli $\dfrac{n}{2} - xn \geq 0$. Siis $x \leq \dfrac{1}{2}$. Yhtäsuuruus $x = \dfrac{1}{2}$ saavutetaan, kun ensimmäisessä maljassa ovat pallot numerot $m+1$, $m+2$, ..., N ja jälkimmäisessä pallot 1, 2, ..., m ja kun $q = m + 1$.

2002.3. Olkoon $P(x) = (x + b_1)(x + b_2)\cdots(x + b_n)$. Olkoon $P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_n) = d$. Silloin a_1, a_2, ..., a_n ovat n:nnen asteen polynomin $P(x) - d$ nollakohdat. Siis $P(x) - d = c(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$. Koska $P(x)$:n ja $P(x) - d$:n n:nnen asteen termit ovat samat, on oltava $c = 1$. Nyt $P(-b_j) = 0$ kaikilla b_j. Siis kaikilla j on

$$-d = (-b_j - a_1)(-b_j - a_2)\cdots(-b_j - a_n) = (-1)^n(a_1 + b_j)(a_2 + b_j)\cdots(a_n + b_j),$$

mistä väite seuraakin.

2002.4. Kirjoitetaan tarkasteltavat luvut $n = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \cdots + 10^8a_8$ muotoon

$$\begin{aligned} &a_0 + (11-1)a_1 + (99+1)a_2 + (1001-1)a_3 + (9999+1)a_4 + (100001-1)a_5 \\ &\quad +(999999+1)a_6 + (10000001-1)a_7 + (99999999+1)a_8 \\ &\quad = (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8) + 11k \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_8) - 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) + 11k = 44 + 1 + 11k - 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7). \end{aligned}$$

Luku n on jaollinen 11:llä silloin ja vain silloin, kun $2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) - 1$ on jaollinen 11:llä. Olkoon $s = a_1 + a_3 + a_5 + a_7$. Silloin $1 + 2 + 3 + 4 = 10 \le s \le 6 + 7 + 8 + 9 = 30$ ja $19 \le 2s - 1 \le 59$. Ainoat 11:llä jaolliset parittomat luvut halutulta väliltä ovat 33 ja 55, joten $s = 17$ tai $s = 28$. Jos $s = 17$, joukon $A = \{a_1, a_3, a_5, a_7\}$ pienin alkio on 1 tai 2 $(3 + 4 + 5 + 6 = 18)$. Käymällä läpi eri mahdollisuudet nähdään, että eri joukkoja A on 9: $\{2, 4, 5, 6\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{2, 3, 4, 8\}$, $\{1, 4, 5, 7\}$, $\{1, 3, 6, 7\}$, $\{1, 3, 5, 8\}$, $\{1, 3, 4, 9\}$, $\{1, 2, 6, 8\}$ ja $\{1, 2, 5, 9\}$. Kun $s = 28$, A:n suurimman alkion on oltava 9 $(5+6+7+8 = 26)$ ja toiseksi suurimman 8 $(5 + 6 + 7 + 9 = 27)$. Ainoat mahdollisuudet ovat $\{4, 7, 8, 9\}$ ja $\{5, 6, 8, 9\}$. Eri tapoja valita joukko A on $\binom{9}{4} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4} = 126$ kappaletta. Näistä 11:llä jaolliseen lukuun johtavia on edellisen mukaan $9 + 2 = 11$. Todennäköisyys, että valittu luku olisi jaollinen 11:llä on siis $\dfrac{11}{126} < \dfrac{11}{121} = \dfrac{1}{11}$.

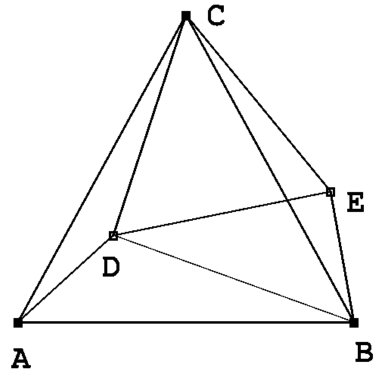
2003.1. Koska rivien tai sarakkeiden keskinäisen järjestyksen vaihto ei vaikuta rivien tai sarakkeiden kivilukumääriin eikä myöskään mustilla ruuduilla olevien kivien lukumääriin, voidaan rivit ja sarakkeet järjestää niin, että ruudukon vasemman yläkulman ja oikean alakulman 5×7-osasuorakulmiot ovat mustia ja muut kaksi samankokoista osasuorakulmiota valkoisia. Jos nyt mustilla ruuduilla olisi pariton määrä kiviä, jommassakummassa mustassa suorakaiteessa olisi pariton määrä kiviä ja toisessa parillinen. Koska kivien määrä on kaikkiaan parillinen, olisi toisessa valkeassa suorakaiteessa pariton ja toisessa parillinen määrä kiviä. Mutta nyt syntyisi joko viiden rivin tai seitsemän sarakkeen joukko, jossa olisi parillinen määrä kiviä. Tämä taas ei ole mahdollista, koska jokaisessa rivissä ja jokaisessa sarakkeessa on pariton määrä kiviä, joten parittomalla määrällä sarakkeita tai rivejä on pariton määrä kiviä.

2003.2. Tunnetun kaavan (jonka voi keksiä esim. toteamalla, että jos vasemmanpuoleinen lauseke on x:n polynomi, niin $x = -(y + z)$ on sen nollakohta) mukaan

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= (x + y + z)\frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2}. \end{aligned}$$

Tulon jälkimmäinen tekijä on ei-negatiivinen. Kokeilemalla nähdään, että 2003 on alkuluku. Tehtävän ratkaisuluvut toteuttavat siis joko ehdon $x + y + z = 1$ ja $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 4006$ tai $x + y + z = 2003$ ja $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2$. Koska neliöluvut antavat kolmella jaettaessa jakojäännöksen 0 tai 1. edellisessä tapauksessa tasan kaksi neliöistä $(x - y)^2$, $(y - z)^2$ ja $(z - x)^2$ on kolmella jaollisia. Tämä on selvästi mahdotonta. On siis oltava $x + y + z = 2003$ ja $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2$. Tämä onnistuu silloin ja vain silloin, kun neliöistä yksi on $= 0$ ja kaksi on $= 1$. Luvuista kahden on oltava samoja ja yhden erottava näistä yhdellä. Helposti nähdään, että luvuista kahden on oltava $= 668$ ja yhden $= 667$. Alkuperäiseen yhtälöön sijoittamalla nähdään, että tämä välttämätön ratkaisuehto on myös riittävä.

2003.3. Kierretään kuviota vastapäivään $60°$ pisteen C ympäri. Koska ABC on tasasivuinen, $\angle BAC = 60°$, joten A kuvautuu B:ksi. Olkoon D:n kuva E. Kierron ominaisuuksien takia $AD = BE$ ja $\angle BEC = 150°$. Koska kolmio DEC on tasasivuinen, $DE = DC$ ja $\angle DEC = 60°$. Mutta näin ollen $\angle DEB = 150° - 60° = 90°$. Tehtävän janojen pituiset janat ovat suorakulmaisen kolmion DBE sivut.



2003.4. Tehtävän yhtälöstä seuraa, kun $x \neq y$,

$$f(y) + f(x-y) = f(y(x-y)f(x)).$$

Koska $f(y) \neq 0$, ei voi olla $f(x-y) = f(y(x-y)f(x))$ eikä siis $x - y = y(x-y)f(x)$. Millään $x \neq y$ ei siis saa olla $yf(x) = 1$. Tästä seuraa, että on oltava $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On helppo nähdä, että funktio f, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, todella toteuttaa tehtävän ehdon.

2004.1. Olkoot pallojen lukumäärät punaisessa maljassa P, sinisessä S ja keltaisessa K. Keskiarvoehdosta seuraa, että $S \leq 5$ (palloja, joiden numero on < 3 on enintään kaksi, joten palloja, joiden numero on > 3, voi olla enintään 2). P, S ja K toteuttavat yhtälöt

$$P + S + K = 27$$

$$15P + 3S + 18K = \sum_{j=1}^{27} j = 14 \cdot 27 = 378.$$

Kun näistä eliminoidaan S, saadaan $4P + 5K = 99$. Kokeilemalla huomataan, että yhtälön toteuttavat positiiviset kokonaislukuparit ovat $(P, K) = (21, 3)$, $(16, 7)$, $(11, 11)$, $(6, 15)$ ja $(1, 19)$. Kaksi viimeistä ei kuitenkaan toteuta ehtoa $S = 27 - (P + K) \leq 5$. On vielä tarkistyettava, että kolme ensimmäistä ovat mahdollisia. Tapauksessa $P = 21$, voidaan valita punaiseen maljaan pallot 5, 6, ..., 25, siniseen 2, 3 ja 4; tapauksessa $P = 16$ punaiseen 7, 8, ..., 14, 16, 17, ..., 23, siniseen 1, 2, 4 ja 5 seka tapauksessa $P = 11$ punaiseen 10, 11, ...20, siniseen 1, 2, 3, 4, 5. Punaisessa maljassa voi siis olla 21, 16 tai 11 palloa.

2004.2. Fibonaccin jono on muodostamisperiaatteensa mukaisesti jaksollinen modulo kokonaisluku, kaikilla kokonaisluvuilla. Joillakin kokonaisluvuilla jaksoon eivät kuulu kaikki mahdolliset jakojäännökset. Esimerkiksi modulo 11 jono on 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, ... Jonossa ei ole esimerkiksi lukua 4. Näin ollen mikään luku, joka on muotoa $4 + 11k$ ei ole Fibonaccin luku; tässä onkin kysytynlainen aritmeettinen jono.

2004.3. Lasketaan ensimmäistä indeksiä modulo n, ts. $x_{1k} = x_{n+1,k}$. Olkoon $M_k = \max_j x_{jk}$ ja $m_k = \min_j x_{jk}$. Selvästi (M_k) on vähenevä ja (m_k) kasvava jono. Lisäksi $M_{k+1} = M_k$ vain, jos $x_{jk} = x_{j+1,k} = M_k$ jollain j:n arvolla. Jos tasan p peräkkäistä lukua $x_{jk} = M_k$, niin tasan $p-1$ peräkkäistä lukua $x_{j,k+1} = M_k = M_{k+1}$. Näin ollen äärellisen monen askelen jälkeen tullaan tilanteeseen $M_{k+1} < M_k$. Vastaavasti $m_{k+1} > m_k$ joillain k. Jos kaikkien jonojen kaikki luvut olisivat kokonaislukuja, myös kaikki m_k:t ja M_k:t olisivat kokonaislukuja. Äärellisen askelmäärän jälkeen $m_k = M_k$, ja kaikki luvut x_{jk} ovat samoja. Tällöin on oltava $x_{1,k-1} + x_{2,k-1} = x_{2,k-1} + x_{3,k-1} = \cdots = x_{n-1,k-1} + x_{n,k-1} = x_{n,k-1} + x_{1,k-1}$. Jos n on pariton, on $x_{1,k-1} = x_{3,k-1} = \cdots = x_{n,k-1}$ ja $x_{1,k-1} = x_{n-1,k-1} = \cdots = x_{2,k-1}$. Mutta samoin olisivat kaikki luvut $x_{j,k-2}$ samoja ja edelleen kaikki luvut $x_{j,1}$ samoja. Jos n on parillinen, kaikki $x_{i,k}$:t voivat olla kokonaislukuja: olkoon esimerkiksi $x_{1,1} = x_{3,1} = \cdots = x_{n-1,1} = 0$, $x_{2,1} = x_{4,1} = \cdots = x_{n,1} = 2$. Silloin jokainen $x_{j,k} = 1$, $k \geq 2$.

2004.4. *1. ratkaisu.* Tunnetun (Eulerin) lauseen nojalla kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r ja ympäri piirretyn ympyrän säde R toteuttavat epäyhtälön $2r \leq R$ (Itse asiassa kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteiden etäisyys d toteuttaa yhtälön $d^2 = R(R-2r)$). Kolmion ala A voidaan lausua toisaalta muodossa

$$A = \frac{r}{2}(a+b+c),$$

toisaalta sinilauseen avulla muodossa

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{4}\frac{abc}{R}.$$

Näin ollen

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{2A}{r} \cdot \frac{1}{4RA} = \frac{1}{2rR} \geq \frac{1}{R^2}.$$

2. ratkaisu. Olkoot $a \leq b \leq c$. Silloin $b = a + x$ ja $c = a + x + y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Nyt $abc - (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = a(a+x)(a+x+y) - (a-y)(a+2x+y)(a+y) = ax^2 + axy + ay^2 + 2xy^2 + y^3 \geq 0$. Siis $abc(a+b+c) \geq (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 16A^2$. Viimeinen yhtälö perustuu Heronin kaavaan. Kun tähän sijoitetaan $A = \dfrac{abc}{4R}$ (vrt. 1. ratkaisu), saadaan sievennyksen jälkeen

$$a+b+c \geq \frac{abc}{R^2},$$

josta väite seuraa.

2005.1. Olkoon

$$a = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k, \qquad 0 \leq a_k \leq 9, \text{ kun } 0 \leq k \leq n-1, \ 1 \leq a_n \leq 9.$$

Asetetaan

$$f(a) = \prod_{k=0}^{n} a_k.$$

Koska

$$f(a) = \frac{25}{8}a - 211 \geq 0,$$

niin $a \geq \frac{8}{25} \cdot 211 = \frac{1688}{25} > 66$. Koska $f(a)$ on kokonaisluku ja 8:n ja 25:n suurin yhteinen tekijä on 1, niin $8 \mid a$. Toisaalta

$$f(a) \leq 9^{n-1}a_n \leq 10^n a_n \leq a.$$

Siis

$$\frac{25}{8}a - 211 \leq a$$

eli $a \leq \frac{8}{17} \cdot 211 = \frac{1688}{17} < 100$. Ainoat 66:n ja 100:n välissä olevat 8:n monikerrat ovat 72, 80, 88 ja 96. Kokeillaan niitä: $25 \cdot 9 - 211 = 14 = 7 \cdot 2$, $25 \cdot 10 - 211 = 39 \neq 8 \cdot 0$, $25 \cdot 11 - 211 = 64 = 8 \cdot 8$, and $25 \cdot 12 - 211 = 89 \neq 9 \cdot 6$. 72 ja 88 ovat siis ainoat ratkaisut.

2005.2. *1. ratkaisu.* Käytetään raakaa voimaa. Kun yhtälön lausekkeet tehdään samannimisiksi, sulkeet poistetaan ja samanmuotoiset termit yhdistetään, epäyhtälö saadaan yhtäpitäväksi epäyhtälön

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & 2a^4+2b^4+2c^4+a^3b+a^3c+ab^3+b^3c+ac^3+bc^3-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2-2abc^2-2ab^2c-2a^2bc \\
&= a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 + c^4 + a^4 - 2a^2c^2 \\
&+ab(a^2 + b^2 - 2c^2) + bc(b^2 + c^2 - 2a^2) + ca(c^2 + a^2 - 2b^2) \\
&= (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \\
&+ab(a - b)^2 + bc(b - c)^2 + ca(c - a)^2 + ab(2ab - 2c^2) + bc(2bc - 2a^2) + ca(2ca - 2b^2)
\end{aligned}$$

kanssa. Oikean puolen kuusi ensimmäistä termiä ovat ei-negatiivisia ja viimeiset kolme voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}
&2a^2b^2 - 2abc^2 + 2b^2c^2 - 2a^2bc + 2c^2a^2 - 2ab^2c \\
&= a^2(b^2 + c^2 - 2bc) + b^2(a^2 + c^2 - 2ac) + c^2(a^2 + b^2 - 2ab) \\
&= a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Tehtävän epäyhtälö on siis tosi.

2. ratkaisu . Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$2\left(a^2(a + b)(a + c) + b^2(b + c)(b + a) + c^2(c + a)(c + b)\right) \geq (a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)$$

kanssa. Tämän epäyhtälön vasen puoli voidaan jakaa tekijöihin $2(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)$. Koska $a + b + c$ on positiivinen, epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + abc) \geq (a + b)(b + c)(c + a) \tag{1}$$

kanssa. Kun oikeasta puolesta poistetaan sulkeet ja vähennetään $2abc$, saadaan epäyhtälö

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2b + b^2c + c^2a) + (a^2c + b^2a + c^2b),$$

joka edelleen on alkuperäisen epäyhtälön kanssa yhtäpitävä. Mutta nyt voidaan kahdesti käyttää tunnettua epäyhtälöä

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x \quad \text{eli} \quad x^2(x-y) + y^2(y-z) + z^2(z-x) \geq 0, \tag{2}$$

ja todistus on valmis. [Epäyhtälön (2) todistus: Voidaan olettaa, että $x \geq y$, $x \geq z$. Jos $y \geq z$, kirjoitetaan $z - x = z - y + y - z$, jolloin saadaan alkuperäisen kanssa yhtäpitävä ja tosi epäyhtälö $(y^2 - z^2)(y-z) + (x^2 - z^2)(x-y) \geq 0$. Jos $z \geq y$, kirjoitetaan puolestaan $x - y = x - z + z - y$, jolloin saadaan $(x^2 - z^2)(x-z) + (x^2 - y^2)(z-y) \geq 0$.]

3. ratkaisu. Epäyhtälö on symmetrinen a:n b:n ja c:n suhteen. Voidaan siis olettaa, että $a \geq b \geq c$. Siis

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}.$$

Tšebuševin epäyhtälön perusteella on

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right). \tag{1}$$

Käytetään sitten potenssikeskiarvoepäyhtälöä, jonka perusteella saadaan.

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2.$$

Siis

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq \frac{2}{9}(a+b+c)^2\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right). \tag{2}$$

On vielä osoitettava, että

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9. \tag{3}$$

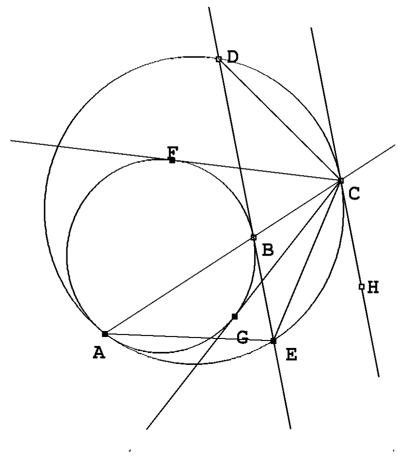
Mutta tämä seuraa harmonisen ja aritmeettisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä

$$\frac{3}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3},$$

kun $x = a+b$, $y = b+c$, $z = c+a$.

2005.3. Olkoon tyttöjen lukumäärä t ja poikien p. Sanotaan, että tytön asema on *aika vahva myötäpäivään*, jos hänestä myötäpäivään laskettuna tyttöjen luku on aina suurempi kuin poikien luku. Tyttö, jonka vasemmalla puolella on poika, ei ole aika vahvassa asemassa. Toisaalta pari, joka koostuu tytöstä ja tätä heti seuraavasta pojasta ei vaikuta siihen, ovatko muut tytöt aika vahvassa asemassa. Voimme siis poistaa kaikki tällaiset parit. Jäljelle jää ainakin $t - p$ tyttöä, jotka kaikki ovat (myötäpäivään) aika vahvassa asemassa. Samanlainen lasku vastapäivään, osoittaa, että ainakin $t - p$ tyttöä on aika vahvassa asemassa vastapäivään. Koska tehtävän luvuin $t > 2p$ eli $2(t-p) > t$, ainakin yksi tyttö on aika vahvassa asemassa molempiin suuntiin. Tällainen tyttö on vahvassa asemassa.

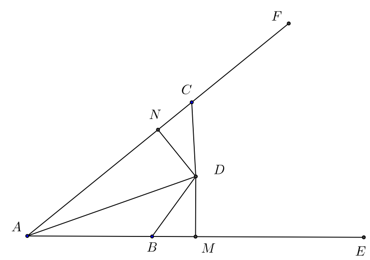
2005.4. Piirretään ympyrän $\mathcal{C}_2$ tangentti CH pisteeseen C. Tangentin ja jänteen välistä kulmaa koskevan lauseen nojalla kulmat ABH ja ACH ovat molemmat yhtä suuria kuin BA:n ja ympyröiden pisteeseen A piirretyn yhteisen tangentin välinen kulma. Kulmat ABH ja ACH ovat siis yhtä suuret, ja $CH \| BE$. Mutta tästä seuraa, että C on kaaren DE keskipiste. Tästä seuraa edelleen, että kulmat CEB ja BAE ovat yhtä suuret, ja $CE = CD$. Koska kolmioissa AEC ja CEB on myös yhteinen kulma ECB, ne ovat yhdenmuotoiset. Siis



$$\frac{CB}{CE} = \frac{CE}{AC},$$

ja $CB \cdot AC = CE^2 = CD^2$. Mutta pisteen potenssia ympyrän suhteen koskevan lauseen perusteella $CB \cdot CA = CG^2 = CF^2$. Olemme todistaneet, että $CD = CE = CF = CG$, joten pisteet D, E, F ja G ovat samalla C-keskisellä ympyrällä.

2006.1 Olkoot E ja F ne puolisuorien AB ja AC pisteet, joille $AE = AF = AB + AC$. Olkoon M ja N janonen AE ja AF keskipisteet ja D janojen AE ja AF keskinormaalien leikkauspiste. D ei riipu B:n ja C:n sijainnista, vain suureesta $AB+AC$. Koska $AB = CF$, on $BM = NC$. Suorakulmaisissa kolmioissa AMD ja AND on $AM = AN$, joten kolmiot ovat yhtenevät (suorakulmainen ssk). Siis $DM = DN$. Mutta silloin myös suorakulmaiset kolmiot BMD ja CND ovat yhenevät (sks). Täten $\angle ACP = \angle PBM$. Nelikulmiossa $ABDC$ on C-kärjen kulma yhtä suuri kuin B-kärjen kulman vieruskulma, joten $ABCD$ on jännenelikulmio.



2006.2. Olkoon (x, y, z) yhtälöryhmän ratkaisu. Koska

$$x = k - \frac{1}{y} = \frac{ky-1}{y} \quad \text{ja} \quad z = \frac{1}{k-y},$$

on

$$\frac{1}{k-y} + \frac{y}{ky-1} = k,$$

mikä sievenee muotoon

$$(1-k^2)(y^2 - ky + 1) = 0.$$

Siis joko $|k| = 1$ tai

$$k = y + \frac{1}{y}.$$

Jälkimmäinen vaihtoehto sijoitettuna alkuperäisiin yhtälöihin antaa heti $x = y$ ja $z = y$. Ainoa mahdollisuus on $k = \pm 1$. Jos $k = 1$, esimerkiksi $x = 2$, $y = -1$ ja $z = \frac{1}{2}$ on ryhmän ratkaisu, jos $k = -1$, kelpaavat äskeisten vastaluvut. Ainoat mahdolliset k:n arvot ovat siis 1 ja -1.

2006.3. Tarkastellaan lauseketta $x^5 + 487$ modulo 4. Selvästi $x \equiv 0 \Rightarrow x^5 + 487 \equiv 3$, $x \equiv 1 \Rightarrow x^5 + 487 \equiv 0$; $x \equiv 2 \Rightarrow x^5 + 487 \equiv 3$ ja $x \equiv 3 \Rightarrow x^5 + 487 \equiv 2$. Tunnetusti neliöluuvt ovat $\equiv 0$ tai $\equiv 1 \mod 4$. Jos tutkittavassa jonossa on parillinen neliöluku, kaikki loput jonon luvut ovat joko $\equiv 2$ tai $\equiv 3 \mod 4$, eivätkä siis neliölukuja. Jos jonossa on pariton neliöluku, sitä seuraava jonon luku voi olla parillinen neliöluku, mutta kaikki loput jonon luvut ovat ei-neliölukuja. Jonossa voi siis olla enintään kaksi neliölukua. Tällöin ensimmäinen neliöluku on samalla jonon ensimmäinen luku, sillä mikään jonossa toista lukua seuraava luku ei toteuta ehtoa $x \equiv 1 \bmod 4$. Etsitään sellaiset luvut k^2, että $k^{10} + 487 = n^2$. Koska 487 on alkuluku, on oltava $n - k^5 = 1$ ja $n + k^5 = 487$ eli $n = 244$ ja $k = 3$. Tehtävän ainoa ratkaisu on siis $m = 3^2 = 9$.

2006.4. Olkoon R_i i:nnen vaakarivin ruutujen väritykseen käytettyjen värien määrä ja C_j j:nnen pystyrivin ruutujen väritykseen käytettyjen värien määrä. Olkoon r_k niiden vaakarivien määrä, joilla esiintyy väri k ja olkoon c_k niiden pystyrivien määrä, joilla esiintyy väri k. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella $r_k + c_k \ge 2\sqrt{r_k c_k}$. Koska väri k esiintyy enintään c_k kertaa jokaisella niistä r_k:sta pystyrivistä, joilla se esiintyy, niin $c_k r_k$ on $\ge$ kuin värin k esiintymien kokonaismäärä, joka on 100. Siis $r_k + c_k \ge 20$. Summassa $\sum_{i=1}^{100} R_i$ jokainen väri k antaa kontribuution r_k kertaa ja summassa $\sum_{j=1}^{100} C_j$ jokainen väri k antaa kontribuution c_k kertaa. Näin ollen

$$\sum_{i=1}^{100} R_i + \sum_{j=1}^{100} C_j = \sum_{k=1}^{100} r_k + \sum_{k=1}^{100} c_k = \sum_{k=1}^{100} (r_k + c_k) \ge 2000.$$

Mutta jos 200 positiivisen kokonaisluvun summa on ainakin 2000, niin ainakin yksi yhteenlaskettava on ainakin 10. Väite on todistettu.

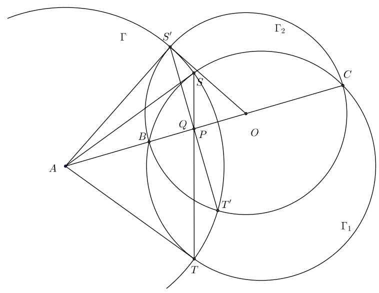
2007.1. Yhtälö on sama kuin

$$x(x-2) = 223 \cdot (3y)^2.$$

Kokeilemalla todetaan, että 223 on alkuluku. Jotta yhtälöllä olisi kokonaislukuratkaisu, on joko luvun x tai luvun $x - 2$ tekijänä oltava 223. Kokeillaan $x - 2 = 223$. Silloin $x = 225 = 15^2$ ja $x(x-2) = 223 \cdot (3 \cdot 5)^2$. Saadaan siis ratkaisu $(x, y) = (225, 5)$.

2007.2. Valitaan mielivaltainen kolmion sisäpiste P. Piirretään P:n kautta annetun suoran suuntainen suora ja annettua suoraa vastaan kohtisuora suora. Ne leikkaavat kolmion sivut pisteissä A, B, C ja D. Koska nämä neljä pistettä kukin kuuluvat johonkin tehtävän kolmesta suorakaiteesta, ainakin yksi suorakaiteista, erimerkiksi R, sisältää pisteistä kaksi, esimerkiksi pisteet A ja B. Jos A, B ja P ovat samalla suoralla, jana AB kuuluu kokonaan suorakaiteeseen R ja siten myös piste P kuuluu R:ään. Jos $\angle APB$ on suora kulma, niin murtoviiva APB, jonka sivut ovat R:n sivujen suuntaisia, kuuluu kokonaan suorakaiteeseen R. Siis P kuuluu R:ään.

2007.3. Anne voi ensimmäiseksi siirrokseen korvata 10^{2007} luvuilla 2^{2007} ja 5^{2007}. Induktiolla nähdään, että Anne voi pelata niin, että hänen siirtonsa jälkeen taululla ovat luvut 2^{α_1}, 2^{α_2}, $\ldots$, 2^{α_k} ja 5^{α_1}, 5^{α_2}, $\ldots$, 5^{α_k}. Ensimmäisen siirron jälkeen näin on. Jos asetelma on tällainen, Berit voi poistaa luvun p^{α_j} tai kirjoittaa luvun p^{α_j} paikalle luvut $p^{\alpha'_j}$ ja $p^{\alpha_j-\alpha'_j}$. Silloin Anne voi aina tehdä joko siirron, jossa $(7-p)^{\alpha_j}$ poistetaan tai $(7-p)^{\alpha_j}$ korvataan luvuilla $(7-p)^{\alpha'_j}$ ja $(7-p)^{\alpha_j-\alpha'_j}$. Annen siirron jälkeen tilanne on jälleen samanlainen kuin ennen Beritin ja Annen siirtoja. Anne ei siis voi hävitä. Että Anne myös varmasti voittaa, nähdään siitä, että jokainen luvun poisto pienentää taululla olevien lukujen summaa, ja koska $(a-1)(b-1) = ab-(a+b)+1$, niin $ab > a+b$ paitsi jos $a = b = 2$. Luvun jakaminen kahden luvun tuloksi siis myös pienentää summaa. Jokaisessa Annen ja Beritin siirtoparissa taululla olevien lukujen summa pienenee, joten peli ei voi jatkua mielivaltaisen pitkään. Annella on siis voittostrategia.



2007.4. Olkoot Γ_1 tehtävän ympyrä ja Γ_2 ympyrä, jonka halkaisija on BC. Olkoot A:sta Γ_2:lle piirrettyjen tangenttien sivuamispisteet S' ja T' ja Q janojen ST ja $S'T'$ leikkauspiste. Lasketaan pisteen A potenssi ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 suhteen: $AS^2 = AT^2 = AB\cdot AC = AS'^2 = AT'^2$. Pisteet S, T, S' ja T' ovat siis samalla A-keskisellä ympyrällä Γ. Olkoon Q janojen ST ja $S'T'$ leikkauspiste. Pisteen Q potenssi Γ:n suhteen on $QS\cdot QT = QS'\cdot QT'$. Mutta näistä yhtä suurista tuloista edellinen on Q:n potenssi Γ_1:n suhteen ja jälkimmäinen Q:n potenssi Γ_2:n suhteen. Pisteet, joilla on sama potenssi kahden eri ympyrän suhteen, muodostavat ympyröiden *radikaaliakselin*; jos ympyrät leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä, radikaaliakseli on näiden pisteiden kautta kulkeva suora. Piste Q on siis suoralla AB ja suoralla ST, joten $Q = P$. Olkoon nyt Γ_2:n säde r ja keskipiste O ja olkoon $AO = a$ ja $PO = b$. Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista AOS' ja $OS'P$ saadaan

$$\frac{r}{a} = \frac{b}{r}$$

eli $ab = r^2$. Nyt

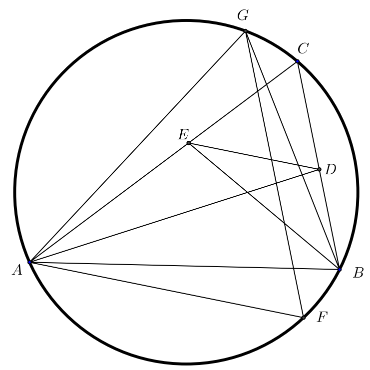
$$\frac{AP}{PC} = \frac{a-b}{b+r} = \frac{a^2-ab}{ab+ar} = \frac{a^2-r^2}{r^2+ar} = \frac{a-r}{r} = \frac{AB}{\dfrac{BC}{2}} = 2\frac{AB}{BC}.$$

2008.1. Olkoot f, A, B ja C tehtävän mukaisia. Olkoon z jokin reaaliluku. Asetetaan $x = z - f(0)$ ja $y = 0$. Silloin $f(z) = f(z - f(0) + f(0)) = A(z - f(0)) + B\cdot 0 + C = Az - Af(0) + C$. On siis olemassa luvut a ja b niin, että $f(z) = az + b$ kaikilla reaaliluvuilla z. Täten $Ax + By + C = f(x + f(y)) = a(x + f(y)) + b = ax + a(ay + b) + b = ax + a^2y + (a+1)b$.

Mahdollisia kolmikkoja (a, B, C) ocat siis kolmikot (a, a^2, c), missä c on mielivaltainen ja $a \neq -1$ on mielivaltainen, sekä $(-1, 1, 0)$.

2008.2. Osoitetaan induktiolla, että dominoivia pareja on vähintään $n-3$ kappaletta. Jos $n = 3$, jokaiset kaksi henkilöä istuvat vierekkäin, joten dominoivien parien määrä on $0 = 3-3$. Oletetaan, että kun henkilöitä on n, dominoivia pareja on ainakin $n-3$. Olkoon pöydän ääressä $n+1$ henkilöä. Jos aakkosissa viimeinen istujista, sanokaamme Z, poistuu, Z:n kahta puolta istuneet henkilöt, jotka muodostivat dominoivan parin, eivät enää ole dominoiva pari. Jokainen muu dominoiva pari on edelleen dominoiva, sillä tällaisen parin dominoivuus on perustunut siihen, että heidän välissään on muitakin aakkosissa myöhempiä kuin Z. Koska n:n istujan joukossa oli ainakin $n-3$ dominoivaa parin, on $n+1$:n istujan joukossa ainakin $n-3+1 = (n+1)-3$ dominoivaa paria. – Toisaalta, koska sama prosessi, aakkosissa viimeisen poistuminen joukosta, vähentää dominoivia pareja tasan yhdellä ja 3:n joukossa ei ole dominoivia paareja, on dominoivien parien määrän oltava tasan $n-3$, eli $n-3$ on todella dominoivien parien pienin mahdollinen määrä.

2008.3. Koska $FG \| BC$, $\angle FGB = \angle GBC$; kehäkulmalauseesta seuraa nyt, että $\angle GAC = \angle BAF$ ja siis $\angle GAB = \angle CAF = \angle CED$, (koska $ED \| AF$). Lisäksi kehäkulmalauseen nojalla $\angle AGB = \angle ACB$. Siis kolmiot ABG ja EDC ovat yhdenmuotoiset. Koska AD on kulman CAB puolittaja,



$$DC = \frac{AC}{AC+AB} \cdot BC.$$

koska BE on kulman ABC puolittaja,

$$EC = \frac{BC}{AB+BC} \cdot AC.$$

Mutta väite seuraa nyt edellä todistetusta kolmioiden yhdenmuotoisuudesta:

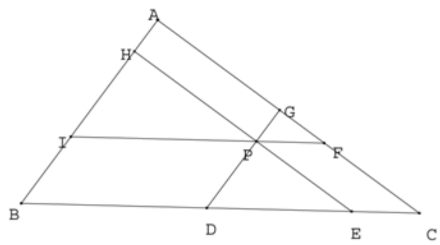
$$\frac{AG}{BG} = \frac{EC}{DC} = \frac{AC+AB}{AB+BC}.$$

– Tämä kuvion perusteella ilmeinen todistus on kuitenkin sikäli puutteellinen, että se olettaa, että $\angle AGB = \angle ACB$, mikä taas edellyttää, että G ja C ovat samalla puolella suoraa AB. On siis todistettava, etä näin todella on. Oletetaan ensin, että $BC = a < b = AC$. Merkitään $\angle BAF = x$. Jos $x < \gamma = \angle BCA$, niin F on kaarella AC eri puolella suoraa AB kuin C; tällöin G tulee olemaan samalla puolen suoraa AB kuin C. Merkitään vielä $AB = c$, $\angle CAB = \alpha$ ja $\angle ABC = \beta$. Kolmiosta EDC saadaan sinilauseen nojalla

$$\frac{\sin(\angle CED)}{\sin(\angle EDC)} = \frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\beta-x)} = \frac{DC}{EC} = \frac{a+c}{b+c} < 1.$$

Koska kaavassa esiintyvä x:n funktio on kasvava, x on pienempi kuin yhtälön $\sin(\alpha+x) = \sin(\beta-x)$ ratkaisu $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$. On helppo nähdä, että $\frac{1}{2}(\beta-\alpha) < \gamma$. Jos $b \leq a$, on torjuttava pisteen F joutuminen sille kaarista AC, joka on eri puolella suoraa AC kuin B; tätä varten riittää osoittaa, että $\angle FAB < \alpha$. Todistus voidaan suorittaa samalla tekniikalla kuin tapauksessa $a < b$.

2008.4. Oletamme, että $(m+1)^3 - m^3 = n^2$. Silloin n on pariton ja $4(3m^2+3m+1) = (2n)^2$ ja $3((2m)^2 + 2 \cdot 2m + 1) = (2n)^2 - 1$ eli $3(2m+1)^2 = (2n-1)(2n+1)$. Jos parittomilla luvuilla $2n-1$ ja $2n+1$ olisi yhteinen tekijä, se olisi lukujen erotuksen 2 tekijä ja siis 2. Yhteisiä tekijöitä ei ole, joten toinen luvuista on parittoman luvun neliö ja toinen jaettuna 3:lla on neliö. Jos olisi $2n+1 = (2t+1)^2$, olisi $2n = 4t^2 + 4t$, ja n olisi parillinen. Siis on oltava $2n - 1 = (2t+1)^2$ eli $n = 2t^2 + 2t + 1 = t^2 + (t+1)^2$.



2009.1. Olkoon kolmio ABC ja leikatkoot P:n kautta piirretyt suorat kolmion sivut pisteissä D ja E, F ja G sekä H ja I. Kolmiot ABC, DEP, PFG ja IPH ovat kaikki yhdenmuotoisia ja $BD = IP$, $EC = PF$. Jos $BC = a$, $IP = a_1$, $DE = a_2$ ja $PF = a_3$, niin $a_1 + a_2 + a_3 = a$. Koska yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on vastinsivujen suhteen neliö, niin kolmioiden alat ovat ka^2, ka_1^2, ka_2^2 ja ka_3^2, missä k on kolmioiden muodosta riippuva verrannollisuuskerroin. Mutta näin ollen

$$f = \frac{ka_1^2 + ka_2^2 + ka_3^2}{ka^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{(a_1 + a_2 + a_3)^2}.$$

On tunnettua, että aritmeettinen keskiarvo on pienempi tai yhtä suuri kuin kuin neliöllinen keskiarvo eli

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{9} \le \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3},$$

ja keskiarvot ovat samat jos ja vain jos $a_1 = a_2 = a_3$ [Jos halutaan, todistus: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2bc + 2ca \Rightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \ge a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$; ensimmäisessä epäyhtälössä ja kaikissa seuraavissakin on yhtäsuuruus, jos ja vain jos $a = b = c$.] Mutta tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $f \ge \dfrac{1}{3}$.

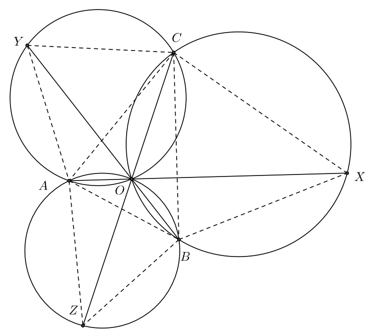
Yhtäsuuruustilanteessa on siis $a_1 = a_2 = a_3$. Kolme pikkukolmiota ovat yhteneviä. Silloin myös $CF = FG = GA$ ja $AH = HI = IB$. Koska kolmiot AIF ja ABC ovat yhdenmuotoisia ja P on IF:n keskipiste, AP:n jatke puolittaa sivun BC. P on siis kolmion ABC A:sta piirretyn keskijanan piste. Mutta aivan samoin se on B:stä ja C:stä piirrettyjen keskijanojen piste. Se on siis ABC:n keskijanojen leikkauspiste.

2009.2. Olkoon vasemman puolen ensimmäinen tekijä $P(x)$, tonen tekijä $Q(x)$ ja oikea puoli $R(x)$. Todetaan, että $P(0) = P(-1) = a$ ja $R(0) = -90$ ja $R(-1) = -180 - 4 = -184$. Nyt $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ ja $184 = 2^3 \cdot 23$. Koska a on sekä luvun 90 että luvun 184 tekijä, on oltava $a = \pm 1$ tai $a = \pm 2$. Jos olisi $a = 1$, olisi $P(1) = 3$. Toisaalta $R(1) = 4 - 180 = -176$. $R(1)$:n numeroiden summa on 14, joten $R(1)$ ei ole jaollinen 3:lla. Siis $a \neq 1$. Jos $a = -2$, niin $P(1) = 0$, mutta $R(1) = -176$. Siis $a \neq -2$. On helppo huomata, että $R(x) = (x^4+1)(x^{13}+x-90)$. Jos $a = -1$, niin $P(2) = 5$, mutta $2^4+1 = 17$ ja $2^{13}+2-90 = 8\cdot 1024+2-90$, mistä helposti näkee, että luku ei ole jaollinen viidellä. Koska siis $R(2)$ ei ole jaollinen viidellä, $a \neq 1$. Ainoaksi mahdollisuudeksi jää, että $a = 2$. [Voidaan osoittaa, että $Q(x) = (x^4+1)(x^{11}-x^{10}-x^9+3x^8-x^7-5x^6+7x^5+3x^4-17x^3+11x^2+23x-45$.]

2009.3. Kuvatunlainen lukujen muuttaminen joko vähentää taululla olevien parittomien lukujen määrää tai pitää sen ennallaan (jos a ja b ovat parittomia, niin $a+b$ on parillinen ja ab pariton; jos a on pariton ja b parillinen, $a+b$ on pariton ja ab parillinen, ja jos a ja b ovat molemmat parillisia, niin myös ab ja $a+b$ ovat). Lisäksi operaatio kasvattaa lukuja tai pitää toisen ennallaan (jos toinen luvuista a, b on 1). Jotta taululle saataisiin kolme lukua 2009, ei missään vaiheessa voida operoida kahdella parittomalla luvulla. Oletetaan, että vaadittu tilanne olisi saavutettavissa. Ensimmäiseksi taululle kirjoitetun luvun 2009 on silloin oltava $a+b$. Tällöin joko $ab > 2009$ tai $ab = 2008$. Jälkimmäisessä tapauksessa luku 1 on pyyhitty pois, ja lukua 2008 ei siten voi käyttää uuden luvun 2009 synnyttämiseen. Kummassakin tapauksessa taululla on enää kolme sellaista lukua, joista voi muodostaa uuden luvun 2009. Olkoon nyt c ja d sellaiset kaksi näistä, että $c+d = 2009$. Jälleen joko $cd > 2009$ tai $cd = 2008$, ja ykkönen pyyhkiytyy pois, eikä cd ole enää käytettävissä. Koska lukuja on viisi, ja neljä niistä on sellaisia, että niistä ei halutulla tavalla voi muodostaa lukua 2009, kolmatta lukua 2009 ei voi muodostaa. Haluttuun tilanteeseen ei siis päästä.

2009.4. Kultamitalisti selviää viidellä ottelukierroksella. Ensimmäisellä kierroksella on 16 ottelua, näiden voittajien kesken 8, sitten 4, 2 ja 1 eli yhteensä 31 ottelua. Nyt toiseksi paras on jollain kierroksella hävinnyt voittajalle. Olkoot $V_1, V_2, \ldots, V_5$ voittajan vastustajat eri kierroksilla. Jos nyt V_1 ja V_2 ottelevat, voittaja ottelee V_3:n kanssa jne., niin neljän ottelun perusteella on saatu selville hopeamitalisti. Pronssimitalistin on ollut hävittävä vain voittajalle tai hopeamitalistille (ei hän muuten olisi kolmanneksi paras). Jos hopeamitalisti on V_k, niin tämä on voittanut $k-1$ kertaa ennen kuin on kohdannut voittajan kierroksella k. V_k on lisäksi voittanut hopeamitaliotteluissa $5-k$ vastustajaa $V_{k+1}, \ldots, V_5$ ja jos $k > 1$, yhden vastustajan V_j, $j < k$. Kolmanneksi parhaan tilalle on siis tarjolla $k-1+5-k = 4$ tai $4+1 = 5$ ehdokasta. Jälleen enintään neljä ottelua tarvitaan näistä parhaan selvittämiseksi. Otteluita tarvitaan siis enintään $31+4+4 = 39$.

2010.1 Koska f on kasvava, $f(7)f(13) = f(7\cdot 13) = f(91) \geq f(90) = f(9\cdot 10) = f(9)f(10)$. Samoin $f(8)f(9) = f(8\cdot 9) = f(72) \geq f(70) = f(7\cdot 10) = f(7)f(10)$. Koska f saa vain positiivisia arvoja, Siis $f(7)f(13)f(8)f(9) \geq f(9)f(10)f(7)f(10)$. Kun tämä epäyhtälö jaetaan puolittain luvulla $f(7)f(9)$, saadaan väite.



2010.2. *1. ratkaisu.* Olkoon $\angle AOY = \alpha$, $\angle AOZ = \beta$ ja $\angle ZOB = \gamma$. Silloin $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Lisäksi $\angle BOX = \alpha$ (ristikulmat) ja $\angle ACY = \alpha = \angle BCX$ (kehäkulmat); $\angle COX = \beta$ (ristikulmat), $\angle ABZ = \beta = \angle CBX$ (kehäkulmat); $\angle COY = \gamma$ (ristikulmat); $\angle BAZ = \gamma = \angle CAY$. Jokaisessa kolmioista CYA, CBX ja ZBA on nyt kaksi kulmaa joukosta $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Silloin kolmannenkin on oltava kyseisen joukon kolmas kulma. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisuudesta seuraa

$$\frac{AY}{CY} = \frac{AB}{BZ}, \quad \frac{CX}{BX} = \frac{AZ}{AB}.$$

Siis

$$\frac{AY}{AZ} \cdot \frac{BZ}{BX} \cdot \frac{CX}{CY} = \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{AZ}{AB} \cdot \frac{BZ}{AZ} = 1.$$

2. ratkaisu. Olkoot kulmat α, β ja γ niin kuin ensimmäisessä ratkaisussa ja olkoot ympyröiden Γ_A, Γ_B ja Γ_C säteet R_A, R_B ja R_C. Laajennetun sinilauseen perusteella $AY = 2R_B \sin\alpha$, $BZ = 2R_C \sin\gamma$, $CX = 2R_A \sin\beta$, $AZ = 2R_C \sin\beta$, $BX = 2R_A \sin\alpha$ ja $CY = 2R_B \sin\gamma$. Kun nämä sijoitetaan tehtävän lausekkeeseen, nähdään heti, että lausekkeen arvo on 1.

2010.3. Jos Risto valitsee kaksi lamppua, jotka hän joka kerta sytyttää, hän voi käydä läpi kaikki muiden lamppujen kytkinten 2^{2008} asentoa ilman, että Laura saa tietää kahden lampun tilanteesta. Sen jälkeen hän voi jättää molemmat lamput sammuksiin ja taas käydä läpi muiden lamppujen 2^{2008} eri asentoa. Tämän jälkeen Riston on valittava jokin sellainen yhdistelmä, jossa vain toinen valituista lampuista palaa, ja nyt Laura saa tietää näiden lamppujen tilan. Mutta läpikäydyissä tapauksissa on esiintynyt jokaisen muun lampun kohdalla tilanne, jossa vain se on sytytettynä; näin Laura on saanut tietää kaikkien lamppujen ja kytkinten yhteyden kaikkiaan $2^{2009}+1$:n sytytyskerran aikana. Toisaalta Risto voi salata jonkin lampun ja kytkimen yhteyden vain, jos lamppu käyttäytyy kaikissa painallusyhdistelmissä samoin kuin jokin toinen lamppu. Erilaisia painallusyhdistelmiä, joissa kaksi lamppua käyttäytyy samoin, on $2 \cdot 2^{2008}$. Näin ollen $2^{2009} + 1$:n painallusyhdistelmän jälkeen Laura tietää kaikki yhteydet.

Jos Laura saa valita kytkimet, hän jakaa ne ensin kahteen yhtä suureen luokkaan A_1 ja A_2 ja painaa luokkaan A_1 kuuluvia kytkimiä. Nyt hän jakaa A_1:n ja A_2:n (lähes) yhtä suuriin luokkiin A_{11}, A_{12}; A_{21}, A_{22} ja painaa luokkiin A_{11} ja A_{21} kuuluvia kytkimiä. Nyt hän on saanut tietää kuhunkin luokan kytkimiin kuuluvat syttyvät lamput. Laura jatkaa samalla tavalla ja saa selville aina pienemmistä kytkinjoukoista niihin kuuluvat syttyvät lamput. Koska $2^{11} = 2048 > 2010$, yhdennentoista jaon luokat ovat enintään yhden kytkimen muodostamia; nyt Laura tietää jokaiseen kytkimeen kuuluvat lamput. Siten Laura selviää 11 valinnalla. – Kymmenen valintaa ei riitä, koska kahden lampun erottaminen toisistaan on mahdollista vain, jos niihin liittyvät kytkimet ovat jossain painelussa eri joukoissa, toinen "painetuissa", toinen "ei painetuissa". 2^k:n painelun jälkeen suurimmassa sellaisessa joukossa, jonka kytkimet ovat joka painalluksessa olleet samassa tilassa (painettuina tai ei-painettuina), on ainakin $\lceil 2010/2^k \rceil$ alkiota; kun $k = 10$, tämä luku on 2.

2010.4. Jos $m = \sum_{k=0}^{n} t_k 10^k$, $0 \le t_k \le 9$, on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin voidaan valita yksinkertaiset luvut $s_1, s_2, \ldots, s_9$ niin, että $s_p = \sum_{k=0}^{n} e_k 10^k$ ja $e_k = 1$, kun $p \le t_k$ ja $e_k = 0$, kun $p > t_k$. Summassa $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_9$ jokaisen 10 potenssin kerroin on t_k, joten $s = m$. Vaadittu esitys syntyy siis aina ainakin 9:llä yksinkertaisella luvulla.

Osoitetaan sitten, että on olemassa lukuja, joita ei voi esittää vähemmällä kuin yhdeksällä yksinkertaisella luvulla. Olkoon esimerkiksi

$$m = 10203040506070809 = \sum_{k=1}^{9} k10^{18-2k}.$$

Oletetaan, että $m = s_1 + s_2 + \cdots + s_j - s_{j+1} - \cdots - s_n = b_1 - b_2$, missä $n < 9$, jokainen s_i on yksinkertainen, b_1 positiivisten ja b_2 negatiivisten termien summa. Luvun b_1 kaikki numerot ovat $\le j$ ja luvun b_2 kaikki numerot ovat $\le n - j$. Nyt $b_1 = m + b_2$. Ajatellaan viimeinen yhteenlasku suoritettavaksi tavallisena allekkain yhteenlaskuna ja katsotaan sitä saraketta, jossa on luvun m numero $j + 1$. Sen alapuolella on luvun b_2 numero x. Koska $n \le 8$, näiden numeroiden oikealla puolella on luku, joka on pienempi kuin

$$10^{15-2j} + 8\sum_{k=0}^{15-2j} 10^k < 9\sum_{k=0}^{15-2j} 10^k.$$

Muistinumeroa ei siis tule, ja $j + 1 + x \ge 10$ Siis $x \ge 9 - j$. Koska $x \le n - j$, on $n \ge 9$, mikä on ristiriidassa oletuksen $n < 9$ kanssa. Siis oletus $n < 9$ on hylättävä, ja on tullut todistetuksi, että kaikkia lukuja ei voida esittää alle yhdeksän yksinkertaisen luvun avulla.

2011.4. Osoitetaan, että vastaus on kielteinen. Käytetään selvyyden vuoksi lukua, jonka numerot ovat vasemmalta oikealle $n_0, n_1, \ldots, n_k$, tavanomaista merkintää $\overline{n_0 n_1 \ldots n_k}$. Olkoon

$$\overline{a_0 a_1 \ldots a_{1000}} + \overline{a_{1000} a_{999} \ldots a_0} = \overline{s_{1001} s_{1000} \ldots s_1 s_0},$$

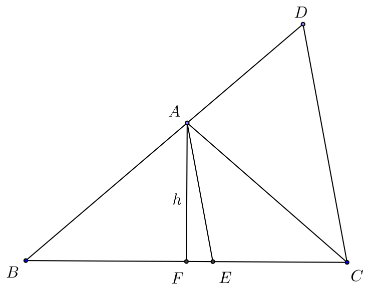
Ratkaisun ymmärtää helpommin, jos hahmottaa yhteenlaskun allekkain suoritettuna:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_{500} & \cdots & a_{1000-i} & \cdots & a_{999} & a_{1000} \\
 & a_{1000} & a_{999} & \cdots & a_{1000-i} & \cdots & a_{500} & \cdots & a_i & \cdots & a_1 & a_0 \\
\hline
s_{1001} & s_{1000} & s_{999} & \cdots & s_{1000-i} & \cdots & s_{500} & \cdots & s_i & \cdots & s_1 & s_0
\end{array}$$

missä s_{1001} voi olla 0. Nyt $s_i = a_{1000-i} + a_i + b_{1000-i}$, missä $b_{1000-i} \in \{0, 1, -10, -9\}$. (Ajatellaan yhteenlaskemista allekkain ja muistinumeroa). Tehdään vastaoletus, jonka mukaan jokainen s_i on pariton. Osoitetaan induktiolla, että tällöin $a_{1000-2i} + a_{2i}$ on pariton, kun $i = 1, 1, \ldots, 250$. Tästä seuraa ristiriita, koska $a_{1000-2\cdot 250} + a_{2\cdot 250} = 2 \cdot a_{500}$. Rakennetaan induktio. Koska $s_0 = a_{1000} + a_0$ tai $s_0 = a_{1000} + a_0 - 10$, $a_{1000} + a_0$ on pariton. Induktio pääsee siis alkuun. Oletetaan sitten, että $a_{1000-2i} + a_{2i}$ on pariton jollain i, $0 \le i \le 249$. Koska $s_{1000-2i}$ on pariton, vaihtoehdot $s_{1000-2i} = a_{2i} + a_{1000-2i} + 1$ ja $s_{1000-2i} = a_{2i} + a_{1000-2i} - 9$ eivät tule kysymykseen, ts. sarake numero $1000 - 2i - 1$

oikealta ei tuota muistinumeroa. Siis $a_{1000-2i-1} + a_{2i+1} \le 9$. Mutta tästä seuraa, ettei myöskään sarake $2i+1$ oikealta tuota muistinumeroa. Jos olisi $a_{1000-(2i+1)} + a_{2i+1} \ge 10$, olisi oltava $a_{1000-(2i+1)} + a_{2i+1} = 10$, jolloin olisi $s_{2i+1} = 0$ eli parillinen. Siis $s_{2i+2} = a_{1000-2(i+1)} + a_{2(i+1)}$, joten $a_{1000-2(i+1)} + a_{2(i+1)}$ on pariton, ja induktioaskel on otettu.

2011.2. Koska $AE \| DC$, kolmiot ABE ja DBC ovat yhdenmuotoisia. Siis



$$CD = \frac{BC}{BE} \cdot AE$$

ja

$$CD = \frac{AE \cdot BC}{BE \cdot CE} \cdot CE. \tag{1}$$

Jos AF on kolmion korkeusjana, niin $AE \ge AF = h$, ja yhtäsuuruus vallitsee silloin, kun $E = F$. Koska ABC on tasakylkinen, F on sivun BC keskipiste. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella

$$BE \cdot CE \le \left(\frac{BE + EC}{2}\right)^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2,$$

ja yhtäsuuruus vallitsee, kun E on BC:n keskipiste eli F. Kun saadut arviot sijoitetaan epäyhtälöön (1), saadaan väite; lisäksi on havaittu, että yhtäsuuruus on yhtäpitävää sen kanssa, että $E = F$

2011.3. Koska yhtälö

$$f(f(x) + y) = f\left(x^2 - y\right) + 4yf(x) \tag{1}$$

on voimassa, kun $y = x^2$ ja kun $y = -f(x)$, saadaan $f\left(f(x) + x^2\right) = f(0) + 4x^2 f(x)$ ja $f(0) = f\left(x^2 + f(x)\right) - 4f(x)^2$, joista seuraa $x^2 f(x) = f(x)^2$ kaikilla x. Jokaisella x on siis $f(x) = 0$ tai $f(x) = x^2$. Erityisesti $f(0) = 0$. Osoitetaan, että jos $f(a) \ne 0$ jollain $a \ne 0$, niin $f(x) \ne 0$ kaikilla $x \ne 0$. Nyt $f(a) = a^2$. Yhtälöstä (1) seuraa $f(a^2 + y) = f(a^2 - y) + 4a^2 y$ kaikilla y. Jos jollain $y \ne 0$ olisi $f(a^2 - y) = 0$, olisi $f(a^2 + y) = 4a^2 y \ne 0$. Silloin olisi $f(a^2 + y) = (a^2 + y)^2 = 4a^2 y$ eli $(a^2 - y)^2 = 0$. Tämä merkitsee sitä, että $f(x) = 0$ vain, kun $x = 0$. Kaiken kaikkiaan yhtälön (1) toteuttaa siis kaksi funktiota: $f(x) = 0$ kaikilla x tai $f(x) = x^2$ kaikilla x.

2011.4. Olkoon tehtävässä nimetty summa S_n. Todistetaan väite induktiolla n:n suhteen. Kun $n = 2$, ainoat tehtävän ehdon toteuttavat luvut ovat $a = 1$ ja $b = 2$, joten $S_2 = \dfrac{1}{2}$. Oletetaan, että $S_{n-1} = \dfrac{1}{2}$ jollain $n > 2$. Ne termit, jotka ovat summassa S_{n-1}, mutta eivät ole summassa S_n ovat yhteistekijättömiä lukuja a, b, joille pätee $0 < a < b \le n-1$ ja $a + b = n$. Summaan S_n mutta ei summaan S_{n-1} puolestaan kuuluvat luvut $\dfrac{1}{an}$, missä $0 < a < n$ ja a ja n ovat yhteistekijättömiä. Merkitään lukujen x ja y suurinta yhteistä tekijää tavan mukaan (x, y). Induktioaskel $S_{n-1} = S_n$ tulee otetuksi, kun todistetaan, että S_{n-1}:stä S_n:ään siryttäessä otetaan pois ja lisätään yhtä paljon eli että

$$\sum_{\substack{0<a<n/2\\(a,\,n-a)=1}} \frac{1}{n(a-n)} = \sum_{\substack{0<a<n\\(a,\,n)=1}} \frac{1}{an}.$$

Mutta jos $(a, n) = 1$, niin $(n-a, n) = 1$. Oikean puolen summan termit voidaan ryhmitellä niin, että yhdistetään $\dfrac{1}{an}$ ja $\dfrac{1}{(n-a)n}$. Mutta

$$\frac{1}{an} + \frac{1}{(n-a)n} = \frac{n-a+a}{a(n-a)n} = \frac{1}{a(n-a)}.$$

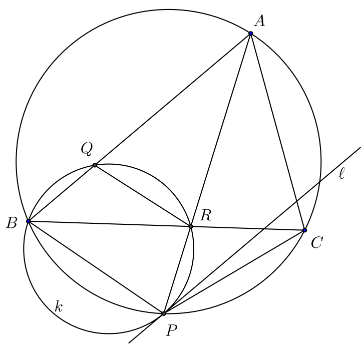
Kaikki oikean puolen termit parittuvat näin, koska jos n on parillinen n ja $\dfrac{n}{2}$ eivät ole yhteistekijättömiä.

2012.1. Tehtävässä annetusta ehdosta seuraa $-b^2 = a^2 - 2c^2$ ja $2a^2 - b^2 - c^2 = 3(a^2 - c^2) = 3(a+c)(a-c)$. Näin ollen tutkittava lauseke supistuu muotoon

$$\frac{3(a-c)(2a+b+c)}{(a-b)(b+c)}.$$

Lasketaan osoittaja: $3(a-c)(2a+b+c) = 3(a^2+ab+2ac-ac-bc-2c^2) = 3(ab+ac-bc-b^2)$; jälkimmäisen yhtäsuuruuden kohdalla on jälleen käytetty hyväksi tietoa $a^2 - 2c^2 = b^2$. Mutta $ab + ac - bc - b^2 = (a-b)(b+c)$. Tehtävän lausekkeen arvo on siis aina 3.

2012.2. *1. ratkaisu.* Olkoon kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä Γ ja kolmion ABC kulmat α, β ja γ. Olkoon R BC:n ja AP:n leikkauspiste. Koska P on kaaren BC keskipiste, $\angle QAR = \angle QAP = \angle CAP = \angle CAR = \dfrac{\alpha}{2}$. Ympyrän k pisteeseen P piirretty halkaisija on kohtisuorassa ℓ:ää ja siis AQ:ta vastaan, joten $PB = PQ$ ja siis $\angle BQP = \angle QBP$. Mutta ympyrän Γ kehäkulmina $\angle PCB = \angle PAC$. Siis $\angle BQB = \angle QBP = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$. Kolmion ABR kulman vieruskulmana myös $\angle ARC = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$. Ristikulmien yhtäsuuruuteen yhdistettynä saadaan $\angle PRB = \angle PQB$. Piste R on siis ympyrällä k. Koska siis $BPRQ$ on jännenelikulmio, on $\angle ARQ = \angle QBP = \angle ARC$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot AQR ja ACR ovat yhteneviä (ksk), joten $AQ = AC$.



2. ratkaisu. Osoitetaan niin kuin edellä, että $PQ = PB = PC$. Koska $\angle QAP = \angle CAP$, kolmioissa APQ ja APC on kaksi yhtä pitkää sivua ja kaksi yhtä suurta kulmaa. Koska $ABPC$ on jännenelikulmio, kulman PBQ vieruskulma, joka on yhtä suuri kuin kulman PQB vieruskulma, on kulman ACP suuruinen. Kolmiot APQ ja APC ovat siis yhteneviä (ssk), ja $AQ = AC$.

2012.3. Jos n on alkuluku, jonkun luvuista x_k on oltava n. Jos n toteuttaa tehtävän ehdon, niin silloin myös $n-1$ toteuttaa tehtävän ehdon. Pienin n ei siis ole alkuluku. Huomataan, että $4+4+9 = 17 = 3+6+8$ ja $4\cdot 4\cdot 9 = 2^4\cdot 3^2 = 3\cdot 6\cdot 8$ Joukko $\{1, 2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9\}$ toteuttaa tehtävän ehdon. Osoitetaan, että kun $n = 8$, haluttua joukkoa ei löydy. Jos tällainen joukko olisi olemassa, jokin sen luvuista olisi 5 ja jokin 7. Olisi siis 6 lukua x_k, $1 \le x_k \le 8$, joiden tulo on $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8 = 2^7\cdot 3^2$ ja summa $36-12 = 24$. Luvuissa on parillinen määrä parittomia ja parillinen määrä parillisia lukuja. Jos parillisia lukuja olisi vain kaksi, niistä suurempi olisi $\ge 2^4$. Parillisia lukuja on siis ainakin neljä ja parittomia enintään kaksi. Jos kaikki kuusi lukua ovat parillisia, yhden on oltava 4, kahden 6 ja kolmen 2, joilloin lukujen smma on 22. Jos luvuista kaksi on parittomia, ne ovat 1 ja 1 tai 1 ja 3 tai 3 ja 3. Ensimmäisessä tapauksessa parilliset luvut voivat olla vain 4, 6, 6, 8, ja lukujen summa on 26. viimeisessä tapauksessa parilliset luvut ovat ovat joko 2, 4, 4, 4 tai 2, 2, 4, 8. Ensimmäisessä tapauksessa lukujen summa on 20, jälkimmäisessä 22. Jos viimein parittomat luvut ovat 1 ja 3, niin parilliset ovat joko 6, 4, 4, 4; summa 22, tai 2, 6, 4, 8, summa 24, mutta $\{x_1, \ldots, x_8\} = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Todetaan vielä, että jos tehtävän minaisuus on jollain luvulla n, se on kaikilla n:ää suuremmilla luvuilla. Siis ominaisuutta ei ole luvuilla $n \le 8$, ja tehtävässä kysytty pienin luku on 9.

2012.4. *1. ratkaisu.* Olkoon $f(k)$ taululla olevien lukujen määrä k:n vaiheen jälkeen. Siis $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 6$ jne. Kaikki syntyvät luvut ovat muotoa $1\pm1\pm1\ldots\pm1$, missä n:nnen vaiheen jälkeen $\pm$-merkkejä on n kappaletta. Operaatio ±1 muuttaa luvun parillisuuden. Tästä seuraa, että parittoman vaihemäärän jälkeen taululla on vain parillisia lukuja ja seuraavassa vaiheessa lukujen määrä kaksinkertaistuu: $f(2n) = 2f(2n-1)$. Määritetään $f(2n)$. Vaiheessa $2n$ taululla ovat kaikki ne luvut, joiden lausekkeessa $1\pm1\pm1\pm\ldots\pm1$ vasemmalta laskien $+$-merkkien määrä on aina suurempi tai yhtä suuri kuin $-$-merkkien. Sanomme, että tällaisessa jonossa plussat ovat voitolla. Osoitetaan, että tällaisten jonojen lukumäärä on sama kuin sellaisten jonojen, joissa on yhtä monta $+$- ja $-$-merkkiä. Lasketaan, kuinka monta ykköstä taululla on vaiheen $2n$ jälkeen. Ykköset ovat syntyneet $\pm$-jonoista, joissa on yhtä monta $+$:aa ja $-$:ta ja $+$:t ovat voitolla. Jos merkkien järjestystä ei otettaisi huomioon, jonoja olisi $\dbinom{2n}{n}$. Sellainen jono, jossa $+$:t eivät ole voitolla, voidaan muuttaa jonoksi, jossa on $n+1$ $+$:aa, kun lasketaan alusta ensimmäinen sellainen osajono, jossa miinuksia on enemmän, ja vaihdetaan sinä kaikki merkit. Kääntäen jokaisesta jonosta, jossa on $n+1$ $+$:aa ja $n-1$ $-$:ta, saadaan sellainen jono, jossa kumpaakin merkkiä on yhtä paljon, mutta $+$:t eivät ole voitolla, kun alusta lasketaan ensimmäinen osajono, jossa $+$:ia on enemmän, ja käännetään merkit. Koska jonoja, joissa on $n+1$ $+$:aa on $\binom{2n}{n+1}$ kappaletta, vaiheen $2n$ jälkeen taululla on

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

ykköstä. Mutta tämä merkitsee, että

$$f(2n+1) = 2f(2n) - \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1}.$$

Osoitetaan vielä induktiolla, että

$$f(2n) = \binom{2n}{n}, \quad f(2n+1) = \binom{2n+1}{n}. \tag{1}$$

Tämä on totta esimerkiksi, kun $n = 1$. Jos (1) pätee, niin

$$f(2n+2) = 2f(2n+1) = \frac{2(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)n!(n+1)!} = \binom{2n+2}{n+1}$$

ja

$$f(2(n+1)+1) = 2f(2(n+1)) - \binom{2(n+1)}{n+1} + \binom{2(n+1)}{n+2} = \binom{2n+3}{n+2}$$

Pascalin kolmion perusominaisuuden nojalla.

2. ratkaisu. (Janne Hannikaisen kilpailuratkaisusta mukailtu.) Koska tehtävässä kuvatussa prosessissa parillisissa vaiheissa taululla on vain parittomia ja parittomissa vaiheissa parillisia lukuja ja vaiheessa n taulun suurin luku on $n+1$, niin vaiheessa n taululla on lukuja $n+1-2j$, $k = 0, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Olkoon $f(n, j)$ luvun $n+1-2j$ lukumäärä taululla vaiheessa n ja $F(n, k) = f(n, 0) + f(n, 1) + \ldots + f(n, k-1)$ eli taululla olevia k:ta suurinta lukuarvoa edustavien lukujen määrä. Silloin $F(n, 1) = f(n, 0) = 1$ kaikilla n ja tehtävässä kysytty luku on $F\left(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$. Osoitetaan, että

$$F(n, k) = \binom{n}{k-1} \tag{1}$$

kaikilla n ja k, $1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Tämä on selvästi totta, kun $n = 0, 1, 2, 3$. Oletetaan, että (1) on totta jollain n. Jos n on parillinen, $n = 2m$, taululla on vain parittomia lukuja ja vaiheessa $n + 1 = 2m + 1$ taululla on yhtä monta eri lukuarvoa kuin edellisessä vaiheessa. Vaiheen $2m + 1$ k suurinta lukua syntyvät vaiheen $2m$ k:sta suurimmasta luvusta, joihin kuhunkin on lisätty 1 ja vaiheen $2m$ $k - 1$:stä suurimmasta luvusta, joista jokaisesta on vähennetty 1. Siis

$$F(n+1, k) = F(n, k) + F(n, k-1) = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} = \binom{n+1}{k-1}. \tag{2}$$

Jos n on pariton, $n = 2m+1$, taululla on vain parillisia lukuja, $m+1$:tä eri lukuarvoa. Kun $k \le m+1$, vaiheen $2m+2$ k suurinta lukua syntyvät samoin kuin siirryttäessä vaiheesta $2m$ vaiheeseen $2m + 1$, joten (1) pätee. Lisäksi vaiheen $2m + 2$ $m + 2$:n suurimman lukuarvon lukujen määrä (eli kaikkien lukujen) saadaan kertomalla vaiheen $2m + 1$ lukujen määrä $F(2m + 1, m + 1)$ kahdella. Siis

$$F(2m+2, m+2) = 2F(2m+1, m+1) = 2\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+2}{m+1},$$

eli (2) pätee nytkin. Todistus on valmis.

2013.1. Lukujonon ensimmäiset termit on helppo laskea: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_6 = 10$, $a_7 = 13$, $a_8 = 17$, $a_9 = 21$, $\ldots$. Näyttäisi siis siltä, että $a_{2n} = n^2 + 1$ ja $a_{2n+1} = n^2 + n + 1$. Osoitetaan induktiolla, että näin todella on. Näin on, kuten edellä todettiin, pienillä n:n arvoilla, joten induktio pääsee alkuun. Oletetaan, että jollain k on $a_{2k} = k^2 + 1$. Koska

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 + k + \frac{1}{4} > k^2 + 1$$

, on $k < \sqrt{k^2+1} < k + \frac{1}{2}$ ja

$$a_{2k+1} = \left\lfloor k^2 + 1 + \sqrt{k^2+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor = k^2 + k + 1.$$

Oletetaan, että jollain k on $a_{2k+1} = k^2 + k + 1$. Koska

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 + k + \frac{1}{4} < k^2 + k + 1,$$

on $\sqrt{k^2 + k + 1} > k + \frac{1}{2}$. Siis

$$a_{2k+2} = k^2 + k + 1 + k + 1 = (k+1)^2 + 1.$$

Induktio on valmis. Mutta tästä seuraa, että a_{2n} on aina yhtä suurempi kuin jokin neliöluku ja a_{2n+1} on peräkkäisten neliölukujen n^2 ja $(n+1)^2$ välissä. a_n on neliöluku vain, kun $n = 1$.

2013.2. Kun joukkueita on n, pelejä on $\binom{n}{2}$. Jos peleistä v päättyy voittoon ja $t = \binom{n}{2} - v$ tasapeliin, pisteitä jaetaan $3v + 2t = v + 2\binom{n}{2}$. kappaletta. Jos viimeiseksi jäänyt joukkue saa k pistettä, niin sarjan päättyessä tehtävässä esitetyllä tavalla pisteitä on jaettu $nk + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = nk + \frac{(n-1)n}{2} = nk + \binom{n}{2}$ kappaletta. On siis oltava $nk = v + \binom{n}{2}$. Koska $v \le \binom{n}{2}$, $nk \le 2\binom{n}{2} = (n-1)n$ ja $k \le n-1$. Jos olisi $k = n-1$ olisi $v = \binom{n}{2}$. Tällöin kaikki ottelut päättyisivät voittoon ja kaikkien joukkueiden pistemäärät olisivat jaollisia kolmella. Siis $k \le n-2$. Osoitetaan, että kaikilla n on mahdollista, että $k = n-2$. Osoitetaan ensin, että näin voi olla, kun $n = 4$. Olkoot joukkueet A, B, C ja D. Jos ottelut päättyvät seuraavasti (pystysarakkeessa kunkin joukkueen vaakarivillä olevaa joukkuetta vastaan saadusta ottelusta saama pistemäärä):

$$\begin{array}{ccccc} & A & B & C & D \\ A & - & 0 & 1 & 1 \\ B & 3 & - & 1 & 0 \\ C & 1 & 1 & - & 1 \\ D & 1 & 3 & 1 & - \end{array},$$

niin A saa 5, B 4, C 3 ja D 2 pistettä. Oletetaan sitten, että jokin n:n joukkueen sarja on päättynyt niin, että joukkueiden pistemäärät ovat $n-2$, $n-1$, $\ldots$, $2n-3$. Silloin otteluista on voittoon päättynyt

$$n(n-2)-\binom{n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

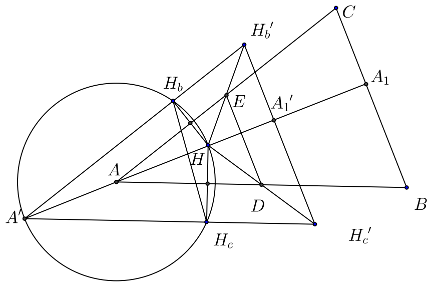
kappaletta. Liitetään sarjaan uusi joukkue X ja osoitetaan, että sen ottelut muiden n:n joukkueen kanssa voivat päättyä niin, että kaikkien joukkueiden pistemäärät muodostavat jonon $n-1$, n, $\ldots$, $2n-1$. Koska voittoon on nyt päättynyt

$$\frac{(n+1)(n-2)}{2}=\frac{n^2-n-2}{2}$$

ottelua, eli $n-1$ enemmän kuin n:n joukkueen tapauksessa, X:n otteluista tasan yksi saa päättyä tasapeliin. X:n pistemäärän on oltava $3p+1$ jollain p. Jos joukkueilla A, B ja C on alkuaan y, $y+1$ ja $y+2$ pistettä, niin sen jälkeen kun X on hävinnyt A:lle ja B:lle ja voittanut C:n, joukkueilla on $y+4$, $y+3$ ja $y+2$ pistettä. Jos nyt n on kolmella jaollinen, X voi pelata alkuperäisen sarjataulukon $n-3$:a joukkuetta vastaan edellä kuvatulla tavalla ja saada näiltä aina kolmea joukketta kohden kolme pistettä eli yhteensä $n-3$ pistett. Näiden joukkueiden pisteet muodostavat aritmeettisen jonon $n+3$:sta $2n-1$:een. Olkoot sitten A, B ja C taulukon kolme viimeista joukkuetta. Niillä on siis pisteet $n-2$, $n-1$ ja n. Jos X pelaa tasan A:n kanssa, voittaa C:n ja häviää B:lle, niin A:n, B:n ja C:n pisteet tulevat olemaan $n-1$, $n+2$ ja n. X:n pistemääräksi tulee $(n-3)+3+1=n+1$. Jos $n \equiv 1 \bmod 3$, $n=3p+1$, niin X voi pelata taulukon $3p$:tä ensimmäistä joukkuetta vastaan kuvatulla tavalla ja saada näiltä $3p$ pistettä; näiden joukkueiden pisteet muodostavat pelien jälkeen aritmeettisen jonon $n+1$:stä $2n-1$:een. Jos X pelaa tasan taulukon viimeisen joukkueen kanssa, X:n pistemääräksi tulee $3p+1=n$ ja viimeisen joukkueen pistemääräksi $n-1$. Jos viimein $n \equiv 2 \bmod 3$, $n=3p+2$, X voi saada taulukon $3p$:ltä ensimmäiseltä joukkueelta $3p$ pistettä. Jos X häviää taulukon viimeiselle ja pelaa tasan viimeistä edellisen joukkueen kanssa, näiden joukkueiden pisteiksi tulevat $n+1$ ja n, ja X:n pisteiksi $3p+1=n-1$. Aritmeettinen jono syntyy taas. Induktioaskel on otettu ja väite todistettu.

2013.3. Jonon määritelmän mukaan $n_{2k}=n_k+n_{k-1}=n_{2k+1}+n_{2(k-1)+1}=n_{2k-1}+n_{2k+1}$. Jokainen parillisindeksinen termi on siis suurempi kuin jonossa seuraava termi. Todistetaan tehtävän väite epäsuorasti. Oletetaan, että jonossa (q_n) ei ole kaikkia positiivisia rationaalilukuja. Silloin kaikki positiivisten kokonaislukujen parit $(p,\,q)$ eivät esiinny jonossa (n_k) peräkkäisinä jäseninä. Olkoon t pienin kokonaisluku, jolle on olemassa jokin pari $(p,\,q)$, missä $p+q=t$ ja p ja q eivät ole jonon peräkkäisiä jäseniä. Oletetaan, että $p>q$. Silloin p:n olisi tullut olla parillisindeksinen termi, joten jonossa ei ole peräkkäisiä termejä $p-q$, p, q mutta ei myöskään peräkkäisiä termejä $p-q$, q. Mutta koska $p-q+q=p<t$, saatiin ristiriita. Jos $q>p$, saadaan samanlainen ristiriita. Kaikki positiiviset rationaaliluvut ovat jonossa (q_n). On vielä osoitettava, että kukin luku on jonossa vain kerran. Osoitetaan ensin, että jonossa (n_k) kahden peräkkäisen luvun suurin yhteinen tekijä on 1; ts. jonon peräkkäiset luvut eivät voi muodostaa murtolukua, jonka voisi supistaa. Jos $(p,\,q)$ olisi jonossa ensimmäinen tällainen pari, niin ja p olisi luvuista suurempi, sillä olisi parillinen indeksi, ja jonossa vierekkäiset paritonindeksiset luvut olisivat $p-q$ ja q. Mutta silloin jo $(p-q,\, q)$ olisi pari, jota voitaisiin supistaa, ja se esiintyisi jonossa aikaisemmin. Jos jonossa (n_k) esiintyisi jokin kahden peräkkäisen luvun pari kahdesti, jokin pari $(p,\, q)$ olisi ensimmäinen toistuva, Jos olisi $p > q$, niin pari $(p-q,\, q)$ toistuisi myös ja esiintyisi jonossa aikaisemmin. Vastaava päättely toimii myös, jos $p < q$.

2013.4. Olkoot D ja E AB:n ja AC:n keskipisteet. Kolmio ADE on kolmion ABC kanssa yhdenmuotoinen suhteessa 1 : 2. Homotetia, jonka keskus on H kerroin 2 vie janan DE janaksi $H_c'H_b'$ ja AD:n ja AE:n AB:n ja AC:n suuntaisille suorille, jotka kulkevat H_c:n ja H_b:n kautta. Jos suorien leikkauspiste on A', niin syntynyt kolmio $A'H_c'H_b'$ on kolmion ABC kanssa yhtenevä ja sivuiltaan yhdensuuntainen. Jos H on kolmion ADE korkeusjanalla, H on myös $A'H_c'H_b'$ korkeusjanalla. Koska $HH_c \perp H_cH_c'$ ja $HA_1' \perp H_c'H_b'$,



$HH_cH_c'A_1'$ on jännenelikulmio. Silloin $\angle H_cHA = \angle H_cH_c'A_1'$. Mutta myös $A'H_cHH_b$ on jännenelikulmio ja $A'H$ on tämän nelikulmion ympärysympyrän halkaisja. Siis $\angle A'H_bH_c = \angle A'HH_c$. Mutta nyt on nähty, että nelikulmiossa $H_cH_c'H_b'H_b$ vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia, joten nelikulmio on jännenelikulmio.

Oletetaan sitten, että $H_cH_c'H_b'H_b$ on jännenelikulmio. Jos A_1' on sellainen $H_c'H_b'$:n piste, että $HA_1 \perp H_c'H_b'$ niin kulman H_cHA_1' vieruskulma on yhtä suuri kuin $\angle H_cH_c'A_1'$ ja siis yhtä suuri kuin $\angle A'H_bH_c$. Mutta tämä merkitsee sitä, että suora $A_1'H$ kulkee pisteen A' kautta, mistä seuraa, että H on kolmion ADE ja siten myös kolmion ABC korkeusjanalla.

2014.1. Havaitaan heti, että ainakin funktiot $f(x) = x$ ja $f(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$ ovat tehtävän ratkaisuja. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $x = y = 0$, saadaan $0 = f(0)^2$. Siis välttämättä $f(0) = 0$. Kun sijoitetaan vain $y = 0$, saadaan $f(x^2) = (f(x))^2$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Erityisesti $f(1) = f(1)^2$, joten on oltava $f(1) = 0$ tai $f(1) = 1$.

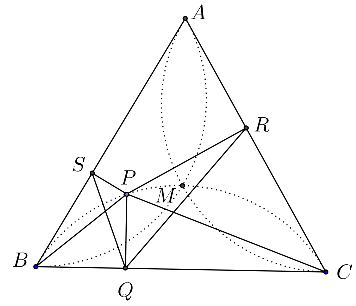
Oletetaan, että $f(1) = 0$. Silloin

$$(f(x+1))^2 - (f(x))^2 = f\left((x+1)^2\right) - f\left(x^2\right) = f(2x+1)f(1) = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Koska $f(0) = 0$, niin $f(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$.

Oletetaan, että $f(1) = 1$. Olkoon $f(2) = a$. Silloin $a^2 - 1 = f(2)^2 - f(1)^2 = f\left(2^2\right) - f\left(1^2\right) = f(3)f(1) = f(3)$. Koska $f(4) = f\left(2^2\right) = (f(2))^2 = a^2$, niin $(a^2-1)^2 - 1 = f\left(3^2\right) - f\left(1^2\right) = f(4)f(2) = a^2 \cdot a$ eli $a^4 - 2a^2 = a^3$. Joko $a = 0$ tai $a^2 - 2 = a$. Koska $a \geq 0$, jälkimmäisen yhtälön toteuttaa vain $a = 2$. Jos olisi $a = 0$, olisi $f(3) = -1$. Koska tämä ei ole sallittua, on oltava $f(2) = 2$ ja $f(3) = 2^2 - 1 = 3$. Nyt voidaan osoittaa induktiolla, että $f(n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos nimittäin $f(n) = n$ kaikilla $k \leq n$, ja $k \geq 2$, niin $k^2 - 1 = f(k)^2 - f(1)^2 = f(k^2) - f(1^2) = f(k+1)f(k-1) = f(k+1)(k-1)$, josta seuraa $f(k+1) = k+1$.

2014.2. Olkoon ABC tasasivuinen kolmio, P sen sisäpiste ja Q, R, S P:n kohtisuorat projektiot sivuilla BC, CA, AB. Silloin $ASPR$, $BQPS$ ja $CRPQ$ ovat jännenelikulmioita, ja koska kolmion kulmat ovat $60°$, niin $\angle RPS = \angle SPQ = \angle QPR = 120°$. Oletetaan, että PQ on PS:n ja PR:n geometrinen keskiarvo. Silloin



$$\frac{PS}{PQ} = \frac{PQ}{PR}.$$

Mutta tästä seuraa, että kolmiot PSQ ja PQR ovat yhdenmuotoisia (sks). Siis $\angle PSQ = \angle PQR$ ja $\angle PQS = \angle PRQ$. Jännenelikulmioista $BQPS$ ja $CRPQ$ nähdään, että $\angle PBQ = \angle PSQ$ ja $\angle PCQ = \angle PRQ$. Mutta koska $\angle SPQ = 120°$, niin $\angle PBQ + \angle PCQ = \angle PSQ + \angle PQS = 180° - \angle SPQ = 60°$. Siis myös $\angle BPC = 120°$. P sijaitsee sillä ympyrän kaarella, jolta BC näkyy $120°$:een kulmassa. Tämä kaari sisältää kolmion ABC keskipisteen M. Päättely on helposti käännettävissä: jos P on tämän ympyrän kaaren piste, niin kolmiot PSQ ja PQR ovat yhdenmuotoiset (kk), ja

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{PQ}{PR}.$$

Jos PS on PQ:n ja PR:n geometrinen keskiarvo, P on pisteiden A, B, M määräämällä kaarella ja jos PR on PS:n ja PQ:n geometrinen keskiarvo, P on pisteiden A, C, M määräämällä kaarella. Näillä kaarilla olevilla pisteillä on toisaalta tehtävän mukainen keskiarvo-ominaisuus.

2014.3. Osoitetaan ensin, että jos kahden ei-negatiivisen kokonaisluvun x ja y neliöjuurien summa on rationaaliluku, niin molemmat kokonaisluvut ovat neliölukuja. Olkoon siis $\sqrt{x} + \sqrt{y} = q \in \mathbb{Q}$. Jos $q = 0$, $x = y = 0$. Jos $q > 0$, niin $x + y + 2\sqrt{xy} = q^2$ Siis $\sqrt{xy}$ on rationaaliluku. Se on mahdollista vain, jos xy on neliöluku, $xy = z^2$. Silloin $x = \dfrac{z^2}{y}$ ja $q = \dfrac{z}{\sqrt{y}} + \sqrt{y}$. Mutta silloin $\sqrt{y} = \dfrac{z+y}{q} \in \mathbb{Q}$. Mutta tämä on mahdollista vain, jos y on neliöluku. Silloin myös x on neliöluku.

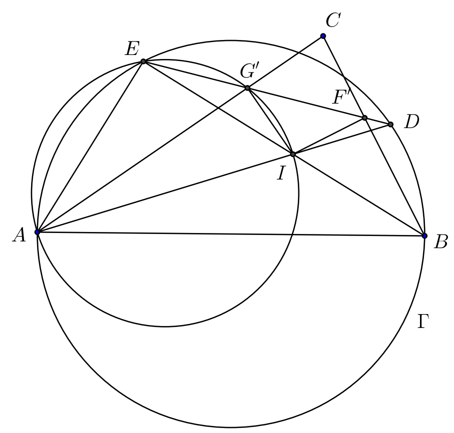
Tehtävän yhtälöstä seuraa $a + b + 2\sqrt{ab} = 2014 + c - 2\sqrt{2014c}$. Siis $\sqrt{ab} + \sqrt{2014c} \in \mathbb{Q}$. Edellä todistetun mukaan tämä on mahdollista vain, jos ab ja $2014c$ ovat neliölukuja. Koska $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, on oltava $c = 2014m^2$ jollain kokonaisluvulla m. Samalla päättelyllä saadaan $a = 2014k^2$ ja $b = 2014l^2$. Mutta nyt $k + m + l = 1$, joten luvuista k, m, l tasan yksi on $= 1$ ja kaksi muuta ovat $= 0$. Kolmikko (a, b, c) on siis joko $(2014, 0, 0)$, $(0, 2014, 0)$ tai $(0, 0, 2014)$.

2014.4. Osoitetaan, että A:lla on voittostrategia, jos ja vain jos n on pariton. Osoitetaan ensin, että riippumatta siitä, miten A ja B pelaavat, lauta on tyhjä, silloin kun peli päättyy. Olkoon (i, j) ruutu, joka on i:nessä vaaka- ja j:nnessä pystyrivissä. Tehdään vastaoletus: laudalla on jokin ei-tyhjä ruutu (a, b) tilanteessa, jossa peli päättyy. Silloin a:nnessa vaakarivissä on jokin tyhjä ruutu (a, c) ja b:nnessä pystyrivissä on jokin tyhjä ruutu (d, b).

Oletetaan, että i:s vaakarivi on valitu r_i kertaa ja j:s pystyrivi s_j kertaa silloin, kun peli päättyy. Nyt $r_a + s_b < 99$, $r_a + s_c = 99$ ja $r_d + s_b = 99$. Siis $r_d + s_c > 99$. Tämä on mahdotonta, koska ruudusta (d, c) on ollut alussa 99 kiveä, joten siitä on voitu ottaa kivi vain 99 kertaa.

Peli päättyy siis $\dfrac{99 \cdot n^2}{99} = n^2$ pelivuoron jälkeen, koska joka vuorolla poistuu 99 kiveä. Jos n on pariton, A voittaa riippumatta siitä, miten hän pelaa, koska A:n noston jälkeen on nostoja on tehty pariton määrä ja B:n noston jälkeen parillinen määrä. Jos n on parillinen, niin B voittaa aina.

2015.1. Suora ED leikkaa BC:n pisteessä F' ja AC:n pisteessä G'. Suorat AD ja BE leikkaavat toisensa kolmion ABC sisäympyrän keskipisteessä I. Pyritään osoittamaan, että $IG' \perp AC$ ja $IF' \perp BC$. Silloin G' ja F' ovat kolmion ABCn AC ja BC sivuamispisteet ja siis $G' = G$ sekä $F' = F$. Osoitetaan, että A, I, G' ja E ovat samalla ympyrällä. Tähän riittää, jos nähdään, että $\angle IAG' = \angle IEG'$. Mutta näin todella on, sillä AD on kulman $\angle CAB$ puolittaja, joten $\angle G'AI = \angle CAD = \angle DAB = \angle DEB = \angle G'EI$. Yhtälöketjun toiseksi viimeinen yhtäsuuruus perustuu kehäkulmalauseeseen sovellettuna ympyrään Γ. Koska AB on ympyrän Γ halkaisija, $\angle AEB$ on suora kulma. Mutta kun kehäkulmalausetta sovelletaan ympyrään $AIG'E$, nähdään, että $\angle AG'I = \angle AEI = \angle AEB$. Kulma $\angle AG'I$ on siis myös suora, joten $G' = G$. Aivan samoin nähdään, että $F' = F$. Koska G' ja F' ovat suoralla ED, ovat G ja F myös tällä suoralla, ja väite on todistettu.



2. ratkaisu. (Luetaan edellistä kuvaa niin, että F' ja G' ovat sivuamispisteet F ja G.) Koska kulmat $\angle AEI = \angle AEB$ ja $\angle AGI$ ovat suoria kulmia, $AIGE$ on jännenelikulmio. Siis $\angle BEG = \angle IEG = \angle IAG = \angle DAC = \angle DAB = \angle BED$. Mutta tämä merkitsee, että G ja D ovat samalla E:n kautta kulkevalla suoralla. Samoin osoitetaan, että F ja E ovat samalla D:n kautta kulkevalla suoralla. Siis G ja F ovat suoralla ED.

2015.2. Olkoon luvuista p, q, r suurin m. Koska jokainen luvuista on ≥ 2, niin $p+q+r \leq 3m$ ja $pqr \geq 4m$. Kysyttyjen lukujen summa on siis aina pienempi kuin niiden tulo. Luvut toteuttavat siis yhtälön $pqr = 101(p+q+r)$. Luku 101 on alkuluku. luvuista p, q, r ainakin yhden on oltava 101. Oletetaan, että $r = 101$. Silloin $pq = p + q + 101$ eli $(p-1)(q-1) = 102$. Luku 102 voidaan jakaa tekijöihin seuraavilla tavoilla: $102 = 1 \cdot 102 = 2 \cdot 51 = 3 \cdot 34 = 6 \cdot 17$. Joukko $\{p, q\}$ voi siis olla $\{2, 103\}$, $\{3, 52\}$, $\{4, 35\}$, $\{7, 18\}$. Mutta ainoa vaihtoehto, jossa sekä p että q ovat alkulukuja, on $\{2, 103\}$ Tehtävän ainoa ratkaisu on $\{p, q, r\} = \{2, 101, 103\}$.

2015.3. Merkitään $h_j(x) = p(x+j)$. Tarkastellaan polynomia h_{2015}. Sillä on samoin kuin p:llä n reaalista nollakohtaa s_1, s_2, $\ldots$, s_n. Lisäksi $h_{2015}(0) = p(2015) = 2015$. Vietan kaavojen mukaan polynomin nollakohtien tulo on polynomin nollannen asteen termi tai sen vastaluku. Siis $|s_1 s_2 \cdots s_n| = 2015$. Koska $n \geq 2$, ainakin yhdelle s_j pätee $|s_j| \leq$

$\sqrt{2015} < \sqrt{2025} = 45$. Merkitään tätä s_j:tä symbolilla m. Kaikilla $j = 0, 1, \ldots, 2014$ on $h_{2015-j}(m + j) = p(m + j + 2015 - j) = p(m + 2015) = h_{2015}(m) = 0$. Siis luvut $m, m + 1, \ldots, m + 2014$ ovat kaikki polynomin q nollakohtia. Koska $0 \leq |m| < 45$, niin ehdon $|m + j| < 2015$ toteuttaa ainakin 1970 eri lukua j, $0 \leq j \leq 2014$, joten väite on todistettu.

2015.4. Osoitetaan induktiolla, että jos järjestetyssä jonossa voi vaihtaa kahden peräkkäisen alkion paikan, niin siinä voi vaihtaa kahden mielivaltaisen alkion paikan niin, että muut alkiot pysyvät paikoillaan. Jos vaihdettavat alkiot ovat peräkkäin, asia on selvä. Oletetaan, että väite pätee, aina kun vaihdettavien alkioiden etäisyys on k askelta. Jos a ja b ovat alkioita, joiden etäisyys on $k + 1$ askelta (a ennen b:tä) ja c on a:sta seuraava alkio, niin induktio-oletuksen mukaan voidaan tehdä seuraavat vaihdot $\ldots, a, c, \ldots, b, \ldots \to \ldots, a, b, \ldots, c, \ldots \to \ldots, b, a, \ldots, c, \ldots \to \ldots, b, c, \ldots, a, \ldots$, missä kolmella pisteellä merkityissä paikoissa olevat alkiot pysyvät paikoillaan, samoin kuin c.

Jos mielivaltaiset kaksi jonon alkiota voidaan vaihtaa muita alkioita siirtämättä, jono voidaan saattaa mihin tahansa järjestykseen. Ensimmäiseksi haluttu alkio voidaan vaihtaa paikalleen. Jos k ensimmäistä on jo saatu paikoilleen, niin $k+1$:lle paikalle haluttava ei ole k:n ensimmäisen joukossa. Se voidaan siis vaihtaa paikalleen sekoittamatta jo paikoilleen asetettujen alkioiden järjestystä.

Osoitetaan nyt, että jokaiset peräkkäisissä parittomissa paikoissa olevat osat voidaan vaihtaa keskenään, niin että kaikki muut osat pysyvät paikoillaan. Pinon päällimmäisen ja kolmannen osan voi näin vaihtaa, soveltamalla operaatiota (ii) kolmeen päällimmäiseen osaan. Sijoilla $2n + 1$ ja $2n + 3$ olevat osat voi vaihtaa soveltamalla ensin operaatiota (i) niin, että $2n$ päällimmäistä osaa siirtyvät järjestyksensä säilyttäen pinon alimmaisiksi, sitten soveltamalla operaatiota (ii) kolmeen päällimmäiseen osaan ja viimein soveltamalla operaatiota (i) $2000-2n$:ään päällimmäiseen osaan, jolloin pohjalla olleet $2n$ osaa palaavat alkuperäisille paikoilleen ja alun perin pohjalla olleet $2000 - 2n$ osaa palaavat muuten alkuperäisille paikoilleen, paitsi paikoilla $2n+1$ ja $2n+3$ olleet osat ovat vaihtaneet paikkaa. Edellä esitettyjen yleisten tulosten perusteella on nyt selvää, että kaikki paritonnumeroiset osat voidaan operaatioilla (i) ja (ii) saada mihin tahansa järjestykseen niin, että parillisnumeroiset osat pysyvät paikoillaan.

Osoitetaan vielä, että myös parillisnumeroiset osat voidaan samalla tavalla saada mihin tahansa järjestykseen. Paikoilla 2 ja 4 olevat osat voidaan vaihtaa tekemällä operaatio (ii) pinon viiteen ylimpään osaan. Silloin paikoilla 1 ja 5 olevat osat vaihtavat paikkaa, mutta edellä osoitetun perusteella ne saadaan palautettua paikoilleen operaatioita (i) ja (ii) yhdistelemällä. Peräkkäisillä paikoilla $2n$ ja $2n+2$ ($n > 1$) olevat osat voidaan vaihtaa tekemällä ensin operaatio (i) $2n-2$:een päällimmäiseen osaan. Silloin paikoilla $2n$ ja $2n+2$ olevat osat siirtyvät paikoille 2 ja 4, ja ne voidaan vaihtaa muuttamatta muiden osien paikkaa. Operaatio (i) sovellettuna $2000 - (2n - 2)$:een päällimmäiseen osaan palauttaa kaikki osat alkuperäisille paikoilleen, lukuun ottamatta paikoilla $2n$ ja $2n + 2$lleita osia, jotka ovat vaihtaneet paikkaa. Kaikki parillisnumeroisilla paikoilla olevat osat voidaan siis saada operaatioilla (i) ja (ii) mielivaltaiseen järjestykseen, puuttumatta parittomilla paikoilla oleviin osiin.

Eri järjestyksiä on siis yhteensä $(1000!)^2$.