

8. pohjoismainen kilpailu ???.1994

1. Olkoon O sisäpiste tasasivuisessa kolmiossa ABC , jonka sivun pituus on a . Suorat AO , BO ja CO leikkaavat kolmion sivut pisteissä A_1 , B_1 ja C_1 . Todista, että

$$|OA_1| + |OB_1| + |OC_1| < a.$$

2. Kutsumme äärellistä joukkoa S tason kokonaislukukoordinaattisia pisteitä *kaksinaapurijoukoksi*, jos jokaista S :n pistettä (p, q) kohden tasan kaksi pisteistä $(p+1, q)$, $(p, q+1)$, $(p-1, q)$, $(p, q-1)$ kuuluu S :ään. Millä kokonaisluvuilla n on olemassa kaksinaapurijoukko, jossa on tasan n pistettä?

3. Neliömuotoinen paperinpala $ABCD$ taitetaan taivuttamalla kärki D sivun BC pisteen D' päälle. Oletetaan, että AD siirtyy janan $A'D'$ päälle, ja että $A'D'$ leikkaa AB :n pisteessä E . Todista, että kolmion EBD' piiri on puolet neliön piiristä.

4. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $n < 200$, joille $n^2 + (n+1)^2$ on kokonaisluvun neliö.