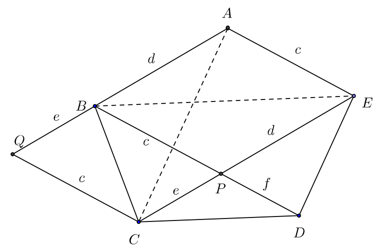
Matematiikan olympiavalmennus 2015 – toukokuun tehtävät

Ratkaisuja

1. *Kuperan viisikulmion jokainen lävistäjä on jonkin viisikulmion sivun suuntainen. Osoita, että jokaisessa tällaisessa parissa lävistäjän ja sivun pituuksien suhde on sama. Määritä tämä suhde.*



Ratkaisu. Olkoon $ABCDE$ tehtävän ehdon mukainen viisikulmio. Olkoon P lävistäjien BD ja CE leikkauspiste ja olkoon Q se puolisuoran AB piste, jolle $CQ \| BD$. Merkitään vielä $AB = d$, $AE = c$, $CP = e$ ja $PD = f$. Koska $ABPE$ ja $BQCP$ ovat suunnikkaita, niin $PE = d$ ja $QB = e$. Lasketaan $\dfrac{CE}{AB} = 1 + \dfrac{e}{d}$. Kolmiot CDP ja BEA ovat yhdenmuotoiset (sivut pareittain yhdensuuntaisia), joten $f = \dfrac{ce}{d}$. Kolmiot AQC ja EPD ovat myös yhdenmuotoisia, joten

$$\frac{c}{e+d} = \frac{f}{d} = \frac{ec}{d^2}.$$

Siis $e^2 + ed = d^2$. Suhde $\dfrac{e}{d} = x$ toteuttaa siis yhtälön $x^2 + x - 1 = 0$, joten

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vain +-merkki tulee kyseeseen. Siis

$$\frac{CE}{AB} = 1 + x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Koska suhde ei riipu pisteiden A, B, C, E asemasta, se on sama kaikille sivuille ja niiden suuntaisille lävistäjille. – Säännöllinen viisikulmio on yksi tehtävän ehdon toteuttavia viisikulmioita, ja edellä laskettu suhde on tunnetusti säännöllisen viisikulmion lävistäjän ja sivun pituuksien suhde. Jos tehtävän väite pitää paikkansa, niin kysytty suhde on varmasti se, minkä edellinen päättely tuotti.

2. *Olkoot n ja r positiivisia kokonaislukuja ja olkoon A jokin sellainen tason hilapisteiden (siis kokonaislukukoordinaattisten pisteiden) joukko, että jokainen r-säteinen (avoin[1]) ympyrä sisältää ainakin yhden A:n pisteen. Osoita, että jos A:n pisteet väritetään n:llä eri värillä, niin jotkin neljä samanväristä pistettä ovat suorakulmion kärjet.*

[1] Siis ympyrä, johon kuuluu sisäosa, muttei kehää.

Ratkaisu. Tarkastellaan neliötä Q, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, jonka sivu on $4nr^2$ ja jonka sivuilla ei ole hilapisteitä. Neliöön Q voidaan sijoittaa $(2nr)^2 = 4n^2r^2$ toisiaan peittämätöntä avointa ympyrää, joten neliössä on ainakin $4n^2r^2$ hilapistettä. Nämä hilapisteet sijaitsevat $4nr^2 - 1$:llä y-akselin suuntaisella janalla. Ainakin yhdellä tällaisella janalla on oltava enemmän kuin n hilapistettä, ja siis ainakin kaksi samanväristä pistettä. Nyt on mahdollista tarkastella kaikkia vierekkäisiä neliöitä Q. Niitä on äärettömän monta. Toisaalta tapoja sijoittaa samanväriset pisteet äärellisen monta pistettä sijaitsevaan joukkoon on äärellisen monta ja värejä on äärellisen monta. Joissain kahdessa neliössä on oltava samanväriset pisteet samoilla x-akselin suuntaisilla ja samoilla y-akselin suuntaisilla janoilla; nämä pisteet ovat suorakulmion kärjet.

3. *Olkoon $u(k)$ positiivisen kokonaisluvun k suurin pariton tekijä. Todista, että*

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{u(k)}{k} \geq \frac{2}{3}.$$

Ratkaisu. Olkoon $v(k) = \dfrac{k}{u(k)}$. Lukujen 1, 2, ..., 2^n joukossa on 1 luku k, jolla $v(k) = 2^n$. Luvut, joille $v(k) = 2^i$, $0 \leq i \leq n-1$, ovat $(2p-1)2^i$, $p = 1, 2, \ldots, 2^{n-i-1}$. Tehtävän summasta tulee mäin geometrisen jonon summa

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{u(k)}{k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{v(k)} = \frac{1}{4^n}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2^{n-1-i}}{2^{n+i}} = \frac{1}{4^n}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{4^i} = \frac{1}{4^n}+\frac{1}{2}\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) > \frac{2}{3}.$$

4. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Sanomme, että positiivinen kokonaisluku k toteuttaa ehdon C_n, jos on olemassa $2k$ eri positiivista kokonaislukua a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_k, b_k, niin, että summat $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, ..., $a_k + b_k$ ovat kaikki eri lukuja ja pienempiä kuin n.*

(a) Osoita, että jos k toteuttaa ehdon C_n, niin $k \leq \dfrac{2n-3}{5}$.

(b) Osoita, että luku 5 toteuttaa ehdon C_{14}.

(c) Osoita, että jos $\dfrac{2n-3}{5}$ on kokonaisluku, se toteuttaa ehdon C_n.

Ratkaisu. Oletetaan, että k toteuttaa ehdon C_n. Lukuja a_1, b_1, ..., b_k on $2k$ kappaletta, ja luvut ovat kaikki eri lukuja. Niiden summa on silloin ainakin $1+2+\cdots+2k = k(2k+1)$. Koska summia $a_1 + a_2$, ..., $a_k + b_k$ on k kappaletta ja ne ovat kaikki eri lukuja sekä $< n$, Summien summa on enintään $(n-1) + (n-2) + \cdots + (n-k) = kn - \dfrac{1}{2}k(k+1)$. Siis

$$k(2k+1) \leq kn - \frac{1}{2}k(k+1).$$

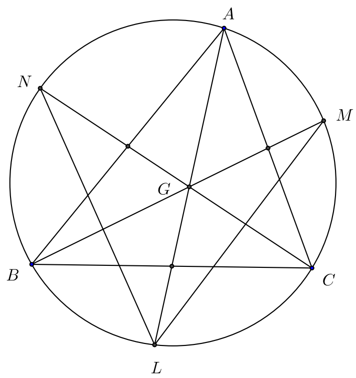
Tämä on helppo sieventää muotoon $5k + 3 \leq 2n$. (a) on todistettu.

Summat $9 = 2 + 7$, $10 = 6 + 4$, $11 = 10 + 1$, $12 = 9 + 3$, $13 = 8 + 5$ osoittavat, että $a_1 = 2$, $b_1 = 7$, $a_2 = 6$, $b_2 = 4$, $a_3 = 10$, $b_3 = 1$, $a_4 = 9$, $b_4 = 3$ ja $a_5 = 8$, $b_5 = 5$ ovat väitteen ”5 toteuttaa ehdon C_{14}” oikeaksi todistavia lukuja.

Olkoon sitten $k = \dfrac{2n-3}{5}$ kokonaisluku. Silloin $5k = 2n - 3$, joten k on pariton; lisäksi $n = \dfrac{5}{2}k + \dfrac{3}{2}$. Tarkastellaan lukuja 1, 2, …, $2k$. Nyt voidaan muodostaa parisummat $1 + 2k$ <3+(2k-1)¡ …¡ $k + \left(2k - \dfrac{k-1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}k + \dfrac{1}{2} = n - 1 < n$. Näitä on $\dfrac{k+1}{2}$ kappaletta. Muodostetaan vielä parisummat $2 + \left(2k - \dfrac{k+1}{2}\right) < 4 + \left(2k - \dfrac{k+3}{3}\right) < \ldots < (k-1) + \left(2k - \dfrac{k+(k-2)}{2}\right) = (k-1) + (k+1) = 2k$. Näitä on $k - 1$ kappaletta. Kaikissa parisummissa on eri yhteenlaskettavat ja kaikki summat ovat eri suuria. Siis k toteuttaa ehdon C_n.

5. *Olkoon ABC kolmio, joka ei ole tasakylkinen. Pisteistä A, B, C piirrettyjen keskijanojen jatkeet leikkaavat kolmion ympärysympyrän pisteissä L, M, N. Osoita, että jos $LM = LN$, niin $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.*

Ratkaisu. Olkoon G kolmion ABC painopiste. Koska kehäkulmina $\angle LNC = \angle LAC$ ja $\angle NLA = \angle NCA$, niin kolmiot AGC ja NGL ovat yhdenmuotoiset. Siis $\dfrac{LN}{CA} = \dfrac{LG}{CG}$. Vastaavasti yhdenmuotoisista kolmioista AGB ja MGL saadaan $\dfrac{LM}{BA} = \dfrac{LG}{BG}$. Jos $LM = LN$, niin $\dfrac{BA}{CA} = \dfrac{BG}{CG}$. Koska BG ja CG ovat kumpikin $\dfrac{2}{3}$ vastaavista kolmion keskijanoista, on $\dfrac{BA}{CA}$ sama kuin B:stä ja C:stä piirrettyjen keskijanojen pituuksien m_b ja m_c suhde. Mutta tunnetusti (suunnikaslauseen tai Stewartin lauseen perusteella)



$$4m_b^2 = 2 \cdot BA^2 + 2 \cdot BC^2 - AC^2 \quad \text{ja} \quad 4m_c^2 = 2CA^2 + 2CB^2 - AB^2.$$

Siis

$$\frac{BA^2}{CA^2} = \frac{2BA^2 + 2BC^2 - CA^2}{2CA^2 + 2CB^2 - BA^2}.$$

Tämä yhtälö sievenee muotoon $(CA^2 - BA^2)(CA^2 + BA^2 - 2BC^2) = 0$. Koska ABC ei ole tasakylkinen, niin tulon ensimmäinen tekijä ei ole 0. Siis jälkimmäinen on, ja väite on todistettu.

6. *Olkoon $x > 1$ reaaliluku, muttei kokonaisluku. Asetetaan $a_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x \lfloor x^n \rfloor$, kun $n = 1, 2, \ldots$. Osoita, että jono (a_n) ei ole jaksollinen.*

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: jono (a_n) on jaksollinen eli on olemassa p siten, että $a_{n+p} = a_n$ kaikilla n. Koska $x > 1$, niin $x^n \to \infty$ ja siis myös $\lfloor x^n \rfloor \to \infty$, kun $n \to \infty$. Tästä seuraa, että ainakin jollakin n on $\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor > 0$. Kun yhtälöstä $a_{n+p} = a_n$

ratkaistaan x, saadaan
$$x = \frac{\lfloor x^{n+p+1} \rfloor - \lfloor x^{n+1} \rfloor}{\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor}.$$

Luku x on siis kahden kokonaisluvun osamäärä, joten x on rationaaliluku. Lasketaan nyt "teleskooppinen" summa

$$\begin{aligned} s_m &= x^{p-1}a_{mp} + x^{p-2}a_{mp+1} + \cdots + xa_{mp+p-2} + a_{mp+p-1} \\ &= x^{p-1}\lfloor x^{mp+1} \rfloor - x^p \lfloor x^{mp} \rfloor + x^{p-2}\lfloor x^{mp+2} \rfloor - x^{p-1}\lfloor x^{mp+1} \rfloor + \cdots + \lfloor x^{mp+p} \rfloor - x\lfloor x^{mp+p-1} \rfloor \\ &= \lfloor x^{mp+p} \rfloor - x^p \lfloor x^{mp} \rfloor. \end{aligned}$$

Jos $a_{n+p} = a_n$ kaikilla n, niin $s_{m+1} = s_m$ kaikilla m. Merkitään vielä $y = x^p$ ja $b_m = \lfloor y^{m+1} \rfloor - \lfloor y^m \rfloor$. Silloin b_m on kokonaisluku ja $s_m = \lfloor y^{m+1} \rfloor - y\lfloor y^m \rfloor$, ja siitä, että $s_{m+1} = s_m$ seuraa, että $b_{m+1} = yb_m = \ldots = y^m b_1$. Nyt y on rationaaliluku, muttei kokonaisluku. Tarpeeksi suurilla m:n arvoilla $y^m b_1$ ei voi olla kokonaisluku. Tultiin ristiriitaan, joten oletus jonon (a_n) jaksollisuudesta ei voi pitää paikkaansa.

7. *Osoita, että jos $n \geq 71$, niin kuutio voidaan jakaa täsmälleen n:ksi pienemmäksi kuutioksi.*

Ratkaisu. Olkoon E sellaisten kokonaislukujen n joukko, joilla kuutio voidaan jakaa n:ksi kuutioksi. Todetaan, että jos $n \in E$, niin $n + 7 \in E$. Myös $n \in E \Rightarrow n + 19 \in E$ ja $n \in E \Rightarrow n + 37 \in E$. Yksi kuutioista voidaan nimittäin jakaa 27:ksi samankokoiseksi kuutioksi, jolloin kuutioiden lukumäärä kasvaa 26:lla ja näistä kahdeksasta voidaan koota yksi kuutio, jolloin kuutioiden lukumäärä vähenee seitsemällä; tai yksi kuutio voidaan jakaa 64:ksi smanakokoiseksi kuutioksi ja näistä 27 yhdistää yhdeksi kuutioksi. Yksi n:stä kuutiosta voidaan jakaa kahdeksaksi kuutioksi. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan $\{71, 72, 73, 74, 75, 76\} \subset E$. Mutta todellakin: koska $64 \in E$, niin $71 = 64 + 7 \in E$, ja koska $1 \in E$, niin $72 = 1+3\cdot 19+2\cdot 7 \in E$, $73 = 1+37+5\cdot 7 \in E$, $74 = 1+2\cdot 19+5\cdot 7 \in E$, $75 = 1 + 2 \cdot 39 \in E$, $76 = 1 + 19 + 8 \cdot 7 \in E$ sekä $77 = 1 + 4 \cdot 19 \in E$.

8. *Määritä kaikki alkuluvut p ja q, joille $a^{3pq} \equiv a \bmod 3pq$ kaikilla kokonaisluvuilla a.*

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $p \leq q$. Jos olisi $p = 2$, olisi $(a = 2)$ $2(2^{6q-1} - 1)$ jaollinen luvulla $6q$ ja $2^{6q-1} - 1$ jaollinen 3:lla. Mutta $2 \cdot 2^{6q-2} = 2 \cdot 4^{q-1} \equiv 2 \bmod 3$, joten $2^{6q-1} - 1$ ei ole jaollinen kolmella. Siis $2 < p$, ja sekä p että q ovat parittomia. Tehtävän ehto on voimassa myös, jos a on primitiivijuuri modulo p (ks. esim. `http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/primitiivijuuret.pdf`). Koska tällöin $a^x \equiv 1 \bmod p$ vain, kun x on $p-1$:n monikerta, on oltava $(p-1)|(3pq-1)$. $p-1$ on silloin myös luvun $3pq - 1 - 3q(p-1) = 3q - 1$ tekijä. Samoin nähdään, että $q - 1$ on luvun $3p - 1$ tekijä. Jos olisi $p = q$, niin $p - 1$ olisi luvun $3p - 1 - 3(p - 1) = 2$ tekijä, eli olisi $p = q = 3$. Mutta esimerkiksi $2^{26} = 2(2^5)^5 \equiv 2(5)^5 = 10(5^2)^2 \equiv 10(-2)^2 = 40 \equiv 13 \bmod 27$ ja $2^{27} \equiv -1 \bmod 27$, joten tehtävän ehto ei toteudu. On siis oltava $p < q$. Koska p ja q ovat parittomia, niin $p+2 \leq q$. Siis $3p+6 < 3q+1$ ja $3p-1 < 3q-6 < 3q-3$. Näin ollen kokonaisluku $\dfrac{3p-1}{q-1}$ on 1 tai 2. Jos se olisi 1, olisi $q = 3p$, eli q olisi yhdistetty luku.

Siis $3p-1=2q-2$ eli $2q=3p+1$. Koska toisaalta $p-1$ on luvun $3q-1=\frac{9p+1}{2}$ tekijä, se on myös luvun $9p+1-9(p-1)=10$ tekijä. Siis $p=3$ tai $p=11$. Jos $p=3$, niin $2q=10$ eli $q=5$. Mutta esimerkiksi $2^{3pq}=2^{45}=(2^5)^9\equiv(-13)^9\equiv 32\cdot 169^4\equiv 32\cdot 11^4=32\cdot 121^2\equiv 32\cdot 14^2=32\cdot 196\equiv 32\cdot 16=512=495+17=11\cdot 45+17\equiv 17 \bmod 45$. Siis $p\neq 3$. Jos $p=11$, niin $2q=34$ eli $q=17$. Osoitetaan nyt, että $a^{3\cdot 11\cdot 17}\equiv a \bmod (3\cdot 11\cdot 17)$ kaikilla a. Käytetään Fermat'n pientä lausetta. Jos a ei ole jaollinen 3:lla, niin $a^2\equiv 1 \bmod 3$, joten $a^{2k+1}\equiv a \bmod 3$ kaikilla a (toki myös, jos a on jaollinen 3:lla. Jos a ei ole jaollinen 11:llä, niin $a^{10}\equiv 1 \bmod 11$. Kaikilla a on siis $a^{3\cdot 11\cdot 17}=(a^{11})^{51}\equiv a^{51}=a(a^10)^5\equiv a \bmod 11$. Samoin $(a^{17})^{33}\equiv a^{33}=a(a^{16})^2\equiv a \bmod 17$. Luku $3^{3\cdot 11\cdot 17}-3$ on siis aina jaollinen sekä kolmella, 11:llä että 17:llä, joten $p=11$ ja $q=17$ ovat tehtävässä kysytty pari; muita ei ole.

9. *Olkoot x, y, z reaalilukuja. Osoita, että seuraavat ehdot (i) ja (ii) ovat yhtäpitäviä.*
(i) $x,\ y,\ z>0$ ja $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\le 1$.
(ii) Jokaiselle nelikulmiolle, jonka sivujen pituudet ovat a, b, c, d pätee $a^2x+b^2y+c^2z>d^2$.

Ratkaisu. Se, että ehdosta (i) seuraa ehto (ii) nähdään Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä tyypillisellä tavalla hyödyntämällä. Jos a, b, c, d ovat nelikulmion sivut, niin $d<a+b+c$, joten

$$\begin{aligned}d^2<(a+b+c)^2&=\left(a\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}}+b\sqrt{y}\frac{1}{\sqrt{y}}+c\sqrt{z}\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\\&\le(a^2x+b^2y+c^2z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le a^x+b^2y+c^2z.\end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että ehdosta (ii) seuraa (i). Osoitetaan ensin, että jos (ii) on voimassa, niin x, y ja z ovat positiivisia. Jos esimerkiksi olisi $x\le 0$, niin nelikulmio, jossa olisi $a=d=n$ ja $b=c=1$ toteuttaisi ehdon $y+z>(1-x)n^2$. Kun x, y, z ovat annettuja lukuja, tämä ei selvästi ole mahdollista riittävän suurilla n:n arvoilla. Siis $x>0$. Samoin nähdään, että $y>0$ ja $z>0$. Kaikilla tarpeeksi suurilla n:n arvoilla $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{z}$ ja $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{n}$ voivat olla nelikulmion sivujen pituudet. Siis

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x^2}x+\frac{1}{y^2}y+\frac{1}{z^2}z>\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{n}\right)^2$$

Kun tässä $n\to\infty$, saadaan

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$$

eli

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 1.$$

10. *Määritä $f(1)$, kun $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funktio, jolle pätee*
(a) f on aidosti kasvava;
(b) $f(x) > -\dfrac{1}{x}$ kaikilla $x > 0$;
(c) $f(x)f\left(f(x) + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ kaikilla $x > 0$.

Ratkaisu. Olkoon $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x}$. Ehdon (b) perusteella $g(x) > 0$. Ehdon (c) nojalla $f(g(x)) = \dfrac{1}{f(x)}$. Korvataan nyt ehdossa (c) x $g(x)$:llä. Saadaan

$$f(g(x))f\left(f(g(x)) + \frac{1}{g(x)}\right) = 1$$

eli

$$f(x) = f\left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x) + \dfrac{1}{x}}\right).$$

Ehdon (a) mukaan

$$x = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x) + \dfrac{1}{x}}.$$

$f(x)$ toteuttaa siis toisen asteen yhtälön

$$xf(x)^2 - f(x) - \frac{1}{x} = 0.$$

Ratkaisemalla tämä nähdään, että

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2x}.$$

Koska $x \mapsto \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\dfrac{1}{x}$ ei ole kasvava positiivisten lukujen joukossa, vain $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}$ on mahdollinen. Voidaan helposti tarkistaa, että se todella toteuttaa tehtävän kolme ehtoa. Siis $f(1) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

11. *Olkoon A sellaisten positiivisten kokonaislukujen joukko, jotka voidaan esittää muodossa $a^2 + 2b^2$, missä a ja b ovat kokonaislukuja ja $b \neq 0$. Osoita, että jos p on alkuluku ja $p^2 \in A$, niin $p \in A$.*

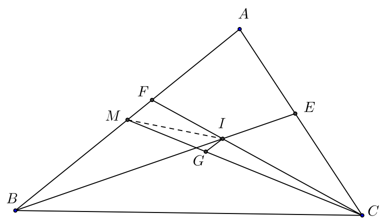
Ratkaisu. Lukua $2^2 = 4$ ei voi esittää muodossa $a^2 + 2b^2$, $b \neq 0$. Voidaan olettaa, että p on pariton alkuluku. Jos $p^2 \in A$ eli $p^2 = a^2 + 2b^2$, $b \neq 0$, niin a on pariton luku. Jos olisi $p \mid a$, olisi myös $p \mid b$, ja p^2 voitaisiin supistaa yhtälöstä $p^2 = a^2 + 2b^2$, ja tultaisiin ristiriitaan. Siis s.y.t.$(a, p) = 1$. Luku $2p = (p+a)+(p-a)$ on jaollinen lukujen parillisten lukujen $p - a$ ja $p + a$ suurimmalla yhteisellä tekijällä d. Tämä ei voi olla $2p$, koska silloin a olisi jaollinen p:llä. Siis s.y.t.$(p - a, p + a) = 2$, joten positiivisista luvuista $p - a$, $p + a$ toinen ei ole jaollinen neljällä. Voidaan olettaa, että tämä luku on $p - a$. Koska $2b^2 = p^2 - a^2 = (p - a)(p + a)$ ja s.y.t.$(a, p) = 2$, on $p - a = 2m^2$ ja $p + a = 4n^2$, missä m ja n ovat parittomia. Mutta nyt $2p = 2m^2 + 4n^2$ ja $p = m^2 + 2n^2$. Siis $p \in A$.

12. *Kolmion ABC sivut ovat a, b, c, I on sen sisäympyrän keskipiste, G painopiste ja r sisäympyrän säde.*

(a) Osoita, että kolmion CIG ala on $\frac{1}{6}|a-b|r$.

(b) Osoita, että jos $a = c+1$ ja $b = c-1$, niin $IG \| AB$. Määritä tässä tapauksessa janan IG pituus.

Ratkaisu. Merkitään kuvion $\mathcal{F}$ alaa $|\mathcal{F}|$:llä. Olkoon M sivun AB keskipiste ja E ja F pisteet, joissa kolmion kulmien puolittajat leikkaavat sivut AC ja AB. Nyt $|CIG| = \frac{2}{3}|CMI|$ ja



$$\frac{|CMI|}{|CMF|} = \frac{CI}{CF}.$$

Koska BI on kolmion BCF kulman B puolittaja ja CF on kolmion ABC kulman C puolittaja, on

$$\frac{CI}{CF} = \frac{a}{a+BF} = \frac{a}{a+\dfrac{a}{a+b}c} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Kun nämä yhdistetään, saadaan

$$|CIG| = \frac{2}{3}\frac{a+b}{a+b+c}|CMF|.$$

Mutta $|CMF| = \dfrac{MF}{c}|ABC|$ ja

$$MF = |BF - BM| = \left|\frac{a}{a+b}c - \frac{1}{2}c\right| = \frac{|a-b|}{2(a+b)}c.$$

Tunnetusti $|ABC| = \frac{1}{2}(a+b+c)r$. Siis todellakin

$$|CIG| = \frac{2}{3}\cdot\frac{CI}{CF}\cdot\frac{MF}{c}\cdot|ABC| = \frac{2}{3}\cdot\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{|a-b|}{2(a+b)}\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot r = \frac{|a-b|r}{6}.$$

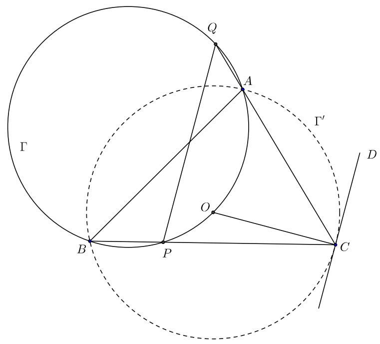
Jos $a = c-1$ ja $b = c+1$, niin

$$\frac{CI}{CF} = \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{2}{3} = \frac{CG}{CM}.$$

Kolmiot CGI ja CMF ovat yhdenmuotoiset, joten $GI \| MF$ eli $GI \| AB$. Kun edellä laskettuun MF:n lausekkeeseen sijoitetaan (b)-kohdan arvot, saadaan $MF = \frac{1}{2}$, joten $CI = \frac{2}{3}MF = \frac{1}{3}$.

13. *Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja O sen ympärysympyrän keskipiste. Suorat CA ja CB leikkaavat kolmion AOB ympärysympyrän myös pisteissä P ja Q. Osoita, että $PQ \perp CO$.*

Ratkaisu. Olkoon Γ kolmion AOB ympärysympyrä ja Γ' kolmion ABC ympärysympyrä. Puolisuorat CB ja CA leikkaavat Γ:n myös pisteissä P ja Q. Olkoon CD Γ':n tangentti. Siis $OC \perp CD$. Kehäkulmalause ympyrään Γ' sovitettuna antaa $\angle ACD = \angle ABC = \angle ABP$. Kehäkulmalause sovellettuna ympyrään Γ antaa edelleen $\angle ABP = \angle AQP$. Siis $\angle AQP = \angle ACD$. Tämä merkitsee sitä, että PQ ja CD ovat yhdensuuntaiset. Koska $OC \perp CD$, niin myös $OC \perp PQ$.



14. *Olkoon $n \geq 2$ annettu positiivinen kokonaisluku ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia lukuja, joiden summa on 1. Osoita, että aina. kun positiivisten lukujen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ summa on 1, pätee*

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}.$$

Milloin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Selvästi

$$2\sum_{i<j} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Kun tämä sijoitetaan todistettavaan epäyhtälöön, se sievenee muotoon

$$\frac{1}{n-1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1-a_i}. \tag{1}$$

Tavallisen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä tehtävän tempun avulla nähdään, että

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-a_i}}\sqrt{1-a_i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(1-a_i)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-a_i}.$$

Mutta luvuista a_i tehdyn oletuksen mukaan

$$\sum_{i=1}^{n}(1-a_i) = n - \sum_{i=1}^{n} a_i = n-1,$$

ja (1) seuraa. – Cauchyn–Schwarzin epäyhtälössä

$$\left(\sum_{i_1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

vallitsee tunnetusti yhtäsuuruus aina ja vain, kun $a_i = kb_i$ jollain k ja kaikilla i. Epäyhtälössä (1) vallitsee siis yhtäsuuruus aina ja vain, kun $x_i = k(1-a_i)$ jollain k ja kaikilla i.

15. *Määritä kaksi luvun* 2438100000001 *alkutekijää (ilman koneapua).*

Ratkaisu. Huomataan, että $243 = 3^5$ ja $81 = 3^4$. Tästä seuraa, että $2438100000001 = 300^5+300^4+1$. Yritetään jakaa polynomia $p(x) = x^5+x^4+1$ tekijöihin. Nyt $(x-1)p(x) = x^6-x^5+x^5-x^4+x-1 = x^6-x^4+x-1 = (x^6-1)-(x^4-x) = (x^3-1)(x^3+1)-x(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1)(x^3-x+1)$. Siis $p(x) = (x^2+x+1)(x^3-x+1)$. Etsitään nyt pienemmän luvun $300^2 + 300 + 1 = 90301 < 301^2$ tekijöitä. Kokeilu vaatisi pahimmassa tapauksessa noin 62:n 301:tä pienemmän alkuluvun läpikäymistä. Käytetään siksi hiukan lukuteorian koneistoa. Jos alkuluku p ei ole luvun 300 tekijä ja $300^2 + 300 + 1 \equiv 0 \bmod p$, niin myös $300^2 + 300(p + 1) + 1 \equiv 0 \bmod p$ ja

$$\left(300 + \frac{p+1}{2}\right)^2 \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{p^2 + 2p - 3}{4} \bmod p.$$

Edelleen luku $\frac{1}{4}(p^2 + 2p - 3)$ on siis neliönjäännös modulo p eli on olemassa y niin, että $y^2 = \frac{1}{4}(p^2+p-3)$. Mutta silloin $(2y)^2 \equiv p^2+p-3 \equiv -3 \bmod p$, joten -3 on neliönjäännös modulo p. Käytetään *Legendren symbolia* $\left(\frac{a}{b}\right)$, joka on $+1$, kun a on neliönjäännös modulo b, -1, kun a ei ole neliönjäännös modulo b, ja 0, kun a on jaollinen b:llä ja *neliönjäännösten vastavuoroisuuslausetta*, jonka mukaan parittomille alkuluvuille p ja q pätee

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

(Ks. `http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/laajalukuteoriamoniste.pdf`.) Legendren symbolille pätee

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right).$$

Siis

$$1 = \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right).$$

Tunnetusti $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Tästä ja vastavuoroisuuslauseesta saadaan nyt

$$\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{(p-1)(3-1)}{4}} = (-1)^{p-1} = 1.$$

Koska ainoa neliönjäännös modulo 3 on 1, niin $p \equiv 1 \bmod 3$. Havaitaan vielä, että $(300 + 1)^2 = 300^2 + 300 + 1 + 300 \equiv 300 \bmod p$. Siis myös 300 on neliönjäännös modulo p, ja

$$1 = \left(\frac{300}{p}\right) = \left(\frac{3 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^2\left(\frac{5}{p}\right)^2 = \left(\frac{3}{p}\right).$$

Mutta vastavuoroisuuslauseen mukaan

$$(-1)^{\frac{(p-1)(3-1)}{4}} = 1,$$

joten $\dfrac{p-1}{2}$ on parillinen ja siis $p \equiv 1 \bmod 4$. Nyt siis $p = 1 + 3a = 1 + 4b$ joillain a ja b. Silloin b on jaollinen kolmella, ja siis $p \equiv 1 \bmod 12$. Testataan siis alkulukuja, jotka ovat $\equiv 1 \bmod 12$. Jos $p = 13$, niin $300 \equiv 1 \bmod p$ ja $300^2 + 300 + 1 \equiv 3 \bmod p$. Jos $p = 37$, niin $300 \equiv 4 \bmod p$, $300^2 + 300 + 1 \equiv 21 \bmod p$. Jos $p = 61$, niin $300 \equiv -5 \bmod p$ ja $300^2 + 300 + 1 \equiv 21 \bmod p$. Mutta jos $p = 73$, niin $300 \equiv 8 \bmod p$ ja $300^2 + 300 + 1 \equiv 64 + 8 + 1 = 73 \equiv 0 \bmod p$. 73 on siis yksi kysytyistä alkutekijöistä. $\dfrac{90301}{73} = 1237$, ja jokainen luvun 1237 alkutekijä on luvun $300^2 + 300 + 1$ tekijä, siis luku, joka on $\equiv 1 \bmod 12$. Koska $37^2 = 1369$, ainoa mahdollinen alkutekijä olisi 13, mutta aikaisempi lasku jo osoittaa, että 13 ei tule kyseeseen. Siis 1237 on alkuluku, ja se kelpaa toiseksi tehtävän luvun alkutekijäksi.

[Jos kuitenkin turvautuu koneapuun, saa selville, että luvun 2438100000001 kanoninen alkutekijähajotelma on $73 \cdot 829 \cdot 1237 \cdot 32569$.]