LOKA-/MARRASKUUN VALMENNUSTEHTÄVÄSARJA

Ratkaisuja kaivataan joulukuun alkuun mennessä osoitteeseen Neea Palojärvi, Matematik och Statistik, Åbo Akademi, Domkyrkotorget 1, 20500 Åbo, npalojar@abo.fi.

Helpommat tehtävät

(1) Jos puolikas työjoukkio tekee neljäsosan urakasta kolmasosassa päivää, niin kuinka monta työjoukkioita tarvitaan tekemään 15 urakkaa viidessä päivässä?

(2) Markolla on syntymäpäivä. Hän käy seuraavan keskustelun isänsä ja isoisänsä kanssa:
Isoisä: "No niin, nyt meidän kaikkien kolmen iät ovat alkulukuja."
Marko: "Ja viiden vuoden päästä meidän kaikkien kolmen iät ovat neliöitä."
Kuinka vanhoja ovat Marko, hänen isänsä ja isoisänsä?

(3) Osoita, että $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ on seitsemällä jaollinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

(4) Jos

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}$$

ja

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{1006} = 503^2,$$

niin määritä x_{1006}.

(5) Mikä on pienin määrä alkioita, joka joukosta $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ pitää poistaa niin, että jäljellä olevien alkioiden tulo on neliö?

(6) Määritä kaikki sellaiset reaaliluvut a, että yhtälöparilla

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = x^2 + y + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(7) Suorakulmion sivujen ja lävistäjien pituudet ovat kokonaislukuja. Osoita, että suorakulmion ala on kokonaisluku, joka on jaollinen luvulla 12.

(8) Pöydällä on 1001 kiveä yhdessä kasassa. Seuraavaa operaatiota suoritetaan yhden tai useampia kertoja: pöydältä valitaan jokin kasa, jossa on vähintään kaksi kiveä, siitä vähennetään yksi kivi, ja kyseisen kasan jäljelle jääneet kivet jaetaan kahdeksi kasaksi, joiden ei tarvitse olla yhtä suuret. Onko mahdollista, että jossakin vaiheessa pöydällä on vain sellaisia kasoja, jotka koostuvat kukin täsmälleen kolmesta kivestä?

(9) Olkoon n positiivien kokonaisluku. Osoita, että lukujen

$$\binom{2n+1}{1}, \binom{2n+1}{2}, \ldots, \binom{2n+1}{n-1}, \binom{2n+1}{n}$$

joukossa on pariton määrä parittomia lukuja.

(10) Yhdeksän kokonaisluvun alkutekijät ovat pienempiä kuin kuusi. Osoita, että lukujen joukossa on kaksi lukua, joiden tulo on neliö.

(11) Olkoot a ja b reaalilukuja. Osoita, että

$$a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geq 0.$$

Vaikeammat tehtävät

(1) Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille

$$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

(2) Osoita, että yhtälöllä $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ on äärettömän monta kokonaislukuratkaisua.

(3) Olkoot a, b ja c sellaisia ei-negatiivisia reaalilukuja, että $a + b + c = 3$. Osoita, että

$$\left(a^2 - ab + b^2\right)\left(b^2 - bc + c^2\right)\left(c^2 - ca + a^2\right) \leqslant 12.$$

(4) Olkoot a, b ja c keskenään erisuuria positiivisia kokonaislukuja ja olkoon k sellainen positiivinen kokonaisluku, että

$$ab + bc + ca \geq 3k^2 - 1.$$

Osoita, että

$$\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \geq abc + 3k.$$

(5) Olkoon k mielivaltainen epänegatiivinen kokonaisluku. Osoita, että voidaan löytää $4 \cdot 2^k$ keskenään erisuurta positiivista kokonaislukua, jotka ovat korkeintaan $5 \cdot 3^k$, ja joiden joukossa ei ole minkään aritmeettisen jonon kolmea peräkkäistä jäsentä.

(6) Olkoon $1 < r < 2$ rationaaliluku. Osoita, että on olemassa kolme positivista kokonaislukua k, m, n, joilla

$$r = \frac{k^3 + m^3}{k^3 + n^3}$$

(7) Olkoon a positiivinen reaaliluku ja olkoon $n \geq 2$ positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$a^n + 1 + a^{-n} \geq \frac{3}{2}(a + a^{-1}).$$

(8) Olkoot a, b ja c sellaisia reaalilukuja, että polynomin $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$ kaikki nollakohdat ovat reaalisia. Osoita, että $a^2 \geq 2b + 12$.

(9) Kolmiossa ABC pätee $|AB| = |AC|$ ja kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa jana AC pisteessä D. Oletetaan, että $|BC| = |BD| + |AD|$. Määritä kulmien koot.