Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, toukokuu 2018

Ratkaisuja toivotaan elokuun loppuun mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku.

Matematiikkaolympialaisiin valitun joukkueen on tietenkin syytä harjoitella mahdollisimman paljon ennen olympialaisia, esimerkiksi näillä tai muilla tehtävillä. Valmennuksessa jatkaville tehtävien ratkominen katsotaan eduksi tulevissa joukkuevalinnoissa.

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. Sinnikäs yrittäminen kannattaa. Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän.

Helpompia tehtäviä

1. Kolmen rosvon joukko on varastanut 24 desilitran ruukun, joka on täynnä viiniä. Rosvot haluavat jakaa viinin keskenään tasan, mutta heillä on käytössään vain 13, 11 ja 5 desilitran vetoiset pullot. Miten he voivat jakaa viinin?

2. Selvitä yhtälön $x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$ juurten neliöiden summa käyttämättä laskinta.

3. Todista, että mielivaltaisen nelikulmion sivujen keskipisteet ovat suunnikkaan kärkipisteet.

4. Olkoot x ja y positiivisia reaalilukuja, joille pätee $xy = 4$. Osoita, että

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}.$$

Millä lukujen x ja y arvoilla vallitsee yhtäsuuruus?

5. Olkoot x ja y positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$4\left(x^9 + y^9\right) \geq \left(x^2 + y^2\right)\left(x^3 + y^3\right)\left(x^4 + y^4\right).$$

6. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$9\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) \geq 8\,(a+b+c)\,(ab+bc+ca).$$

7. a) Numeroidaan kuution särmät luvuilla $1, 2, \ldots, 12$ niin, että kukin luvuista esiintyy täsmälleen yhden särmän yhteydessä. Tarkastellaan kuution kärjestä lähteviä särmiä. Kirjoitetaan kärkeen näissä särmissä olevien lukujen summa ja tehdään tämä jokaiselle kuution kärjelle. Onko mahdollista, että jokaisessa kuution kärjessä on sama luku?

b) Onko edellisen kohdan tilanne mahdollinen, jos jokin luvuista $1, 2, \ldots, 12$ korvataan luvulla 13?

8. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on yhtä monta kuudella jaollista ja kuudella jaotonta tekijää.

9. Selvitä kaikki funktiot, jotka toteuttavat ehdon $f(x)f(yf(x)) = f(y)$, kun f on kuvaus reaaliluvuilta reaaliluvuille.

Vaikeampia tehtäviä

10. Selvitä kaikki funktiot, jotka toteuttavat ehdon $f(x)f(yf(x)) = f(y)$, kun f on kuvaus positiivisilta reaaliluvuilta positiivisille reaaliluvuille ja surjektio.

11. Määritellään funktio f positiivisille kokonaisluvuille seuraavasti. Olkoon $f(1) = 1$ ja $f(2) = 3$. Kun $n \geq 3$, niin $f(n) = \max\{\, f(r) + f(n-r) \mid 1 \leq r \leq n-1 \,\}$. Selvitä, mikä ehto on lukuparin (a,b) toteutettava, jotta $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

12. Olkoon $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$ funktio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $f(1) = 0$
- $f(p) = 1$ kaikilla alkuluvuilla p
- $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$

Määritä pienin kokonaisluku $n \geq 2015$, joka toteuttaa ehdon $f(n) = n$.

13. Tarkastellaan positiivisten kokonaislukujen joukossa seuraavaa operaatiota: Luku esitetään jossain kannassa (eli b-järjestelmäesityksenä, missä b positiivinen kokonaisluku) sellaisella tavalla, että luvun esityksessä on tasan kaksi numeroa, ja kumpikin numeroista on nollasta poikkeava. Sen jälkeen numerot vaihdetaan, ja b-kantainen luku on uusi luku. Onko mahdollista tätä operaatiota toistamalla muuntaa mikä tahansa luku pienemmäksi kuin kymmenen?

14. Olkoot a, b ja c reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdon $abc + a + c = b$. Määritä lausekkeen

$$P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$$

suurin mahdollinen arvo.

15. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}} \geq 4.$$

16. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geq \frac{3}{8}.$$

17. Olkoot a, b, c, d ja e positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$(a+b+c+d+e)^3 \geq 25\,(abc + bcd + cde + dea + eab)\,.$$

18. Olkoon f funktio rationaaliluvuilta reaaliluvuille. Oletetaan, että kaikilla rationaaliluvuilla r ja s luku $f(r+s) - f(r) - f(s)$ on kokonaisluku. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku q ja kokonaisluku p, joilla

$$\left| f\left(\frac{1}{q}\right) - p \right| \leq \frac{1}{2012}.$$

19. Merkinnällä $\|P\|$ tarkoitetaan koordinaatistossa olevan pisteen P etäisyyttä lähimmästä kokonaislukupisteestä. Osoita, että on olemassa reaaliluku $L > 0$, joka toteuttaa seuraavan ehdon: Jokaista reaalilukua $l > L$ kohti on olemassa tasasivuinen kolmio ABC, jonka sivun pituus on l ja $\max\{\|A\|, \|B\|, \|C\|\} < 10^{-2017}$.

20. Kolmion ABC sisäympyrä sivuaa kolmion sivuja BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F, vastaavasti. Piste P on suoralla DE siten, että $AP \parallel DF$. Piste Q on suoralla DF siten, että $AQ \parallel DE$. Todista, että $PQ \parallel BC$.