Harjoitustehtävät, loka–marraskuu 2010. Vaativammat

Aktiivisuus, vastausten määrä ja laatu on yksi olennaisesti huomioon otettavista tekijöistä valittaessa kilpailujoukkueita. Harjoitustehtävien tavoite on tehtävien ratkaisemisen ohella opetella kirjoittamaan ratkaisuja ymmärrettävästi. Kirjoittakaa siis ratkaisunne paperille ja tuokaa ne seuraavaan valmennusviikonloppuun tai lähettäkää ne paperin alalaidassa olevaan osoitteeseen. Sähköinen lähettäminen on mahdollinen (`matti.lehtinen@helsinki.fi`), mutta ei ensisijainen vaihtoehto. Ei haittaa, jos kaikki tehtävät eivät ratkea!

1. Määrittäkää kaikki positiiviset kokonaisluvut, joille kertolaskun

$$\underbrace{11\ldots1}_{m\text{kpl}}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n\text{kpl}}$$

tulos on palindromiluku [numerot samassa järjestyksessä vasemmalta oikealle ja oikealta vasemmalle].

2. A ja B tapasivat uudenvuoden päivänä vuonna 1953. A kertoi B¿lle, että hänen ikänsä (vuosina) on sama kuin hänen syntymävuotensa numeroiden summa. Hetken kuluttua B onnitteli A:ta. Miksi? Milloin A oli syntynyt.

3. M on janan AB piste. $AMCD$ ja $MBFE$ ovat neliöitä samalla puolen suoraa AB. Osoittakaa, että neliöiden ympäri piirretyllä ympyrällä ja suorilla AE ja BC on yhteinen leikkauspiste.

4. Profeetta *Mysticior* lähetti seuraajilleen 10000-kirjaimisen merkkijonon, jonka muodostui vain kirjaimista A ja Ω. Kannattajat johtuivat päättelemään, että jonon jokainen k:sta peräkkäisestä merkistä koostuva osa on ennussana, $k = 1, 2, \ldots, 10000$. Lisäksi pääteltiin, että 3:n merkin pituisia ennussanoja on enintään 7. Mikä on suurin mahdollinen määrä profeetan viestiin sisältyviä 10 merkin pituisia ennussanoja?

5. Olkoon $x_0 = x$ ja

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Määrittäkää x_{2010}.

6. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $|f(x) - f(y)| \le (x - y)^2$ kaikilla $x, y \in R$. Lisäksi $f(2010) = 2010$. Määrittäkää f.

7. Olkoon $ABCD$ suunnikas. Selvittäkää, millainen on pinta-alaltaan pienin sellainen vinoneliö, jonka kaikki kärjet ovat suunnikkaan sivuilla.

8. *Liisa* ja *Pekka* pelaavat seuraavaa peliä: Pekka valitsee rationaaliluvun $a \neq 2010$ ja lmoittaa sen Liisalle. Sitten Liisa valitsee rationaaliluvun $b \neq 2010$ ja ilmoittaa sen Pekalle. Pekka muodostaa toisen asteen yhtälön, jonka kertoimet ovat jossain järjestyksessä 2010, a ja b. Liisa voittaa, jos yhtälöllä on kaksi eri suurta rationaalista juurta, Pekka voittaa muussa tapauksessa. Osoittakaa, että Liisa voi aina valita lukunsa niin, että hän voittaa.

9. Osoittakaa (muodostamatta itse desimaalikehitelmää), että luvun $\sqrt{2}$ desimaalikehitelmässä miljoonannen ja kolmannenmiljoonannen desimaalin välissä on ainakin yksi nollasta eroava numero.

10. Sovitaan, että kuperan nelikulmion sivuun liittyvä *korkeussuora* on sivua vastaan kohtisuora ja vastakkaisen sivun keskipisteen kautta kulkeva suora. Osoittakaa, että nelikulmion korkeussuorat leikkaavat toisensa samassa pisteessä jos ja vain jos nelikulmio on jännenelikulmio.

11. Kuinka pitkä on lyhin mahdollinen venymättömästä narusta tehty silmukka, jonka läpi voidaan pujottaa säännöllinen tetraedri, jonka särmän pituus on a?

12. Määrittäkää kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee $2f(x) = xy + f(xf(y) + f(x))$ kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$.

13. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja olkoon F sen *Fermat'n piste* eli se piste, jolle $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°$. Osoittakaa, että kolmioiden ABF, BCF ja CAF Eulerin suorat [suorat, jotka kulkevat kolmion korkeusjanojen leikkauspisteen ja keskijanojen leikkauspisteen kautta] leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

14. Määritellään jokaiselle joukon $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukolle A funktio f asettamalla $f(A)$:ksi A:n suurimman ja pienimmän luvun erotus. Laskekaa $\sum_{A \subset S_n} f(A)$.

15. Olkoon $f(n)$ luvun n suurin alkutekijä. Osoittakaa, että äärettömän monelle positiiviselle kokonaisluvulle n on voimassa $f(n) < f(n+1) < f(n+2)$.