

Matematiikan olympiavalmennus

Syyskuun 2014 helpommat valmennustehtävät

Palauta vastauksesi lokakuun valmennustilaisuuteen Päivölään tai lähetä ne osoitteella Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu lokakuun puoliväliin mennessä. Myös tehtävissä, jossa kysytään vain vastausta, vastaus on perusteltava! – Tehtävät ovat kahden Euroopan maan 7–9-luokkalaisten matematiikkakilpailuista, joten ne eivät liene aivan vaikeita.

1. Kuinka monen 2014-numeroisen positiivisen kokonaisluvun numeroiden summa on parillinen?

2. Määritä ne luonnolliset luvut n , joille luku $(n^2 + 85)^2 - (18n + 3)^2$ on alkuluku.

3. Montako jäsentä ainakin on yhdistyksessä, jossa tyttöjen osuus on enemmän kuin 43,5 %, mutta vähemmän kuin 43,6 %?

4. Kolmion sivujen pituudet ovat a , b ja c ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on R . Todista, että $a\sqrt{bc} \leq (b + c)R$. Voiko epäyhtälö olla yhtälö?

5. Määritä auki kirjoitetun luvun $7^{5^{5^5}}$ kaksi viimeistä numeroa.

6. Osoita, että

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{9999}{10000} < 0,01.$$

7. Kumpi on suurempi, positiivisten lukujen a ja b (aritmeettinen) keskiarvo, vai lukujen $x = \sqrt{ab}$ ja $y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ (aritmeettinen) keskiarvo?

8. Valitaan tasasivuisen kolmion ABC sivun AC jatkeelta piste D ja sivun BC jatkeelta piste E niin, että $BD = DE$. Todista, että $AD = CE$.

9. Ratkaise yhtälö

$$\frac{8}{x-8} + \frac{10}{x-6} + \frac{12}{x-4} + \frac{14}{x-2} = 4.$$

10. Luvut a ja b ovat rationaalilukuja. Olkoon $x = 8(a^4 + b^4 + (a - b)^4)$. Osoita, että \sqrt{x} on rationaaliluku.

11. Mikä on suurin määrä kolmialkioisia joukkoja, joista jokaisella kahdella on tasan yksi yhteinen alkio, mutta ei ole olemassa alkioita, joka kuuluisi kaikkiin joukkoihin?

12. Luvut p , q ja r ovat alkulukuja ja $p + q < 111$. Lisäksi

$$\frac{p + q}{r} = p - q + r.$$

Määritä tulon pqr suurin mahdollinen arvo.

13. Suorakulmion $ABCD$ sivuilta AD , AB ja BC valitaan pisteet P , Q ja R niin, että $AP = RC$. Todista, että murtoviiva PQR on ainakin yhtä pitkä kuin suorakulmion $ABCD$ lävistäjä.

14. Pelilauta on $n \times 2014$ -ruudukko. Pelin alussa pelimerkki on on laudan vasemman yläkulman ruudussa. Pelaajat A ja B siirtävät merkkiä vuorotellen jonkin määrän ruutuja joko oikealle pitkin sitä riviä, jolla merkki on tai alaspäin pitkin sitä saraketta, jolla merkki on. Pelin häviää se pelaaja, joka ei enää voi siirtää pelimerkkiä. Millä n :n arvoilla aloittava pelaaja A voi taata voiton itselleen?

15. Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanat ovat AA_1 , BB_1 ja CC_1 . Korkeusjanojen leikkauspiste on H . Olkoot M ja N janojen BC ja AH keskipisteet. Osoita, että MN on janan B_1C_1 keskinormaali.