

## HUHTIKUUN 2012 HELPOMMAT VALMENNUSTEHTÄVÄT

Ratkaisuja kaivataan toukokuun puoleen väliin mennessä osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Purpuripolku 7-9 B 10, 00420 Helsinki, tai ernvall@mappi.helsinki.fi. Kannattaa huomioida, että tehtävien taso on varsin vaihteleva, eivätkä ne missään nimessä ole vaikeusjärjestyksessä.

- (1) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{9}{2(x+y)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3-y^2}. \end{cases}$$

- (2) Kumpi luvuista  $\sqrt{2008} + \sqrt{2008} + \sqrt{2009} + \sqrt{2009}$  vai  $\sqrt{2008} + \sqrt{2009} + \sqrt{2009} + \sqrt{2008}$  on suurempi?
- (3) Etsi pienin positiivinen kokonaisluku, jonka (kymmenjärjestelmäesityksen) numeroiden tulo on 5120.
- (4) Olkoot  $a, b, c$  positiivisia lukuja. Osoitettava

$$\frac{a}{3a^2 + b^2 + 2ac} + \frac{b}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c}{3c^2 + a^2 + 2bc} \leq \frac{3}{2(a+b+c)}.$$

- (5)  $2009 \times 2009$ -ruudukolla pelataan seuraavaa kahden hengen peliä: Pelaajat värittävät vuorotellen yhden ruudun yhden sivun keltaiseksi. Se, kumpi saa väritettyä jonkin  $1 \times 1$ -ruudun neljännen (eli viimeisen aiemmin värittämättömän) sivun keltaiseksi, on voittaja. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?
- (6) Kolmiossa  $ABC$  on pisteet  $D, E, F$  sivuilla  $AB, BC$  ja  $AC$  (tässä järjestyksessä) siten, että  $CD$  on kohtisuorassa sivua  $AB$  vastaan,  $DE$  on kohtisuorassa sivua  $BC$  vastaan ja  $DF$  on kohtisuorassa sivua  $AC$  vastaan. Osoita, että pisteet  $A, B, E$  ja  $F$  ovat samalla ympyrällä.
- (7) Etsi kaikki kokonaisluvut  $x$ , joilla  $9x^2 - 40x + 39$  on muotoa  $p^\alpha$ , missä  $p$  on alkuluku, ja  $\alpha$  epänegatiivinen kokonaisluku.
- (8) Olkoot  $a, b \in [-1, 1]$ . Todistettava

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leq 1.$$

- (9) Olkoon  $ABC$  kolmio, ja olkoon kulma  $\angle CAB$  suora. Piste  $L$  on sivulla  $BC$  pisteiden  $B$  ja  $C$  välissä. Pisteiden  $A, B, L$  kautta kulkeva ympyrä leikkaa suoran  $AC$  pisteessä  $M$  ja pisteiden  $C, A, L$  kautta kulkeva ympyrä leikkaa suoran  $AB$  pisteessä  $N$ . Osoita, että pisteet  $L, M$  ja  $N$  ovat samalla suoralla.
- (10) Onko mahdollista kirjoittaa luvut  $1, 2, \dots, 2009$  peräkkäin jossain järjestyksessä niin, että muodostuu jonkin kokonaisluvun neliö?