Kesän 2019 kirjevalmennustehtävien ratkaisuja

Helpompien tehtävien ratkaisut

1. Positiivisten kokonaislukujen jonon kolme ensimmäistä termiä ovat $2018, 121$ ja 16. Seuraava termi saadaan aina laskemalla edellisen termin numeroiden summa ja korottamalla saatu luku toiseen potenssiin. Mikä on jonon 2018. termi?

Ratkaisu. Vastaus: Jonon 2018. *termi on* 256.
Tarkastellaan jonon ensimmäisiä termejä. Neljäs termi on $(1+6)^2 = 49$, viides $(4+9)^2 = 169$, kuudes $(1+6+9)^2 = 256$ ja seitsemäs $(2+5+6)^2 = 169$. Siis viidennestä termistä lähtien joka toinen termi on 169 ja joka toinen 256. Koska kuudes termi on 256 ja 2018 on parillinen luku, niin jonon 2018. termi on luku 256.

2. Onko olemassa positiivista kokonaislukua n, jolla on tasan 9 positiivista tekijää siten, että nämä tekijät voidaan asettaa 3×3-ruudukkoon siten, että jokaisen rivin, sarakkeen ja diagonaalin lukujen tulo on sama?

Ratkaisu.
Ratkaisu 1. Luvulla 36 on 9 positiivista jakajaa $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$. Olkoon ensinnäinen rivi $18, 1, 12$, toinen rivi $4, 6, 9$ ja kolmas rivi $3, 36, 2$. Tällöin jokaisen rivin, sarakkeen ja diagonaalin tulo on 216.

Ratkaisu 2. Jokaista alkulukua p kohti luvulla p^8 on tasan 9 jakajaa $p^0, p^1, \dots, p^8$. On tunnettua, että luvut $1 - 9$ voidaan sijoittaa 3×3-ruudukkoon jossa jokaisen rivin, sarakkeen ja diagonaalin summa on sama. Vähentämällä 1 jokaisesta luvusta pienennämme jokaisen rivin, sarakkeen ja diagonaalin summaa kolmella. Korvaamalla jokainen luku i luvulla p^i saamme sellaisen lukujen p^8 muodostelman ruudukkoon, että jokaisen rivin, sarakkeen ja diagonaalin tulot ovat samat.
Huomautus. On olemassa muitakin sopivia esimerkkejä. Voidaan osoittaa, että kullekin positiiviselle kokonaisluvulle n, jolla on tasan 9 positiivista jakajaa, ne voidaan sijoittaa 3×3-ruudukkoon, jossa jokaisen rivin, sarakkeen ja diagonaalin tulot ovat samat. Tarkastellaan luvun jakajien kaavaa

$$\delta(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_k).$$

Jotta saamme 9 jakajaa, meillä on kaksi vaihtoehtoa: a) $k = 1$ ja $1 + \alpha_1 = 0$, jolloin $n = p^8$ jollekin alkuluvulle p ja jakajat ovat $p^0, p^1, \dots, p^8$; b) $k = 2$ ja $1 + \alpha_1 + 1 + \alpha_2 = 3$, jolloin $n = p^2q^2$ joillekin eri alkuluvuille p ja q ja jakajat ovat $1, p, p^2, q, pq, p^2q, q^2, pq^2, p^2q^2$. Sijoittamalla luvut seuraavasti, saamme tuloiksi ensimmäisessä tapauksessa p^12 ja toisessa p^3q^3 joka suuntaan.

p^3	p^8	p^1		pq^2	1	p^2q
p^2	p^2	p^6		p^2	pq	q^2
p^7	p^0	p^5		q	p^2q^2	p

3. Eräänä vuonna ensimmäinen päivä tammikuuta ei ollut viikonloppuna, mutta viimeinen päivä joulukuuta oli. Koulu alkoi 15. päivä elokuuta. Mikä viikonpäivä tämä oli?

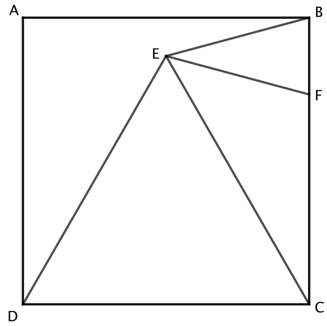
Ratkaisu. Vastaus: Koulu alkaa maanantaina.
Vuodessa on 365 tai 366 päivää. Jos vuodessa on 365, niin tammikuun ensimmäisen päivän ja

joulukuun viimeisen päivän välillä on $364 = 7 \cdot 52$ yötä eli ne ovat sama viikonpäivä. Oletusten mukaan vuodessa on siis täytynyt olla 366 päivää eli kyseessä on karkausvuosi. Tällöin tammikuun ensimmäinen ja joulukuun viimeinen päivä ovat viikonpäivinä peräkkäiset. Ehtojen mukaan siis tammikuun ensimmäisen päivän on oltava perjantai ja joulukuun viimeisen lauantai. Koska karkausvuonna tammikuun ensimmäisen ja elokuun 15. päivän välillä on $31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 14 = 227 = 7 \cdot 32 + 3$ yötä, niin koulu alkaa maanantaina.

4. Juku teki matematiikkapiirissään seuraavan konjektuurin: jos kahden luvun x ja y, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä, tulo on jaollinen joillakin kokonaisluvuilla a ja b, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä, niin ainakin toinen luvuista x ja y on jaollinen joko luvulla a tai b. Päteekö tämä konjektuuri?

Ratkaisu. Olkoon $x = 20$, $y = 21$, $a = 14$, $b = 15$. Tällöin luvuilla x ja y ei ole yhteisiä tekijöitä, sillä ne ovat peräkkäisiä lukuja. Samoin a ja b ovat yhteistekijättömiä. Tulo $xy = 420$ on jaollinen luvulla $ab = 210$, mutta kumpikaan luvuista 20 ja 21 ei ole jaollinen luvulla 14 eikä luvulla 15. Siten konjektuuri ei päde.

5. Kuten kuvassa, nelikulmio $ABCD$ on neliö, piste F on sivulla BC ja piste E neliön $ABCD$ sisällä. Kolmio DEC on tasasivuinen ja on $EB = EF$. Kuinka suuri kulma $\angle CEF$ on?



Ratkaisu. Vastaus: On $\angle CEF = 45°$.
Koska kolmio DEC on tasasivuinen, niin $\angle ECD = 60°$. Siis $\angle BCE = 90° - \angle ECD = 30°$. Edelleen, koska kolmio DEC on tasasivuinen, niin on $CE = CD$ ja koska $ABCD$ on neliö, niin on $CD = BC$. Täten kolmio BCE on tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma on $30°$. Siis on

$$\angle CEB = \angle EBC = \frac{180° - \angle BCE}{2} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

Edelleen, koska on $EB = EF$, niin saadaan $\angle BFE = \angle EBF = \angle EBC$ ja

$$\angle FEB = 180° - \angle EBF - \angle BFE = 180° - 2\angle EBC = 180° - 2 \cdot 75° = 30°.$$

Siis on

$$\angle CEF = \angle CEB - \angle FEB = 75° - 30° = 45°.$$

6. Selvitä kaikki vaihtoehdot: kuinka monta terävää kulmaa voi olla konveksissa monikulmiossa?

Ratkaisu. Vastaus: $0, 1, 2, 3$.
Neliöllä on 0 terävää kulmaa, nelikulmiolla, jonka kaksi vierekkäistä kulmaa ovat suoria ja muut eivät, on 1 terävä kulma, tylppäkulmaisella kolmiolla on 2 terävää kulmaa ja teräväkulmaisella kolmiolla 3.
Osoitamme, että 4 tai suurempi määrä teräviä kulmia ei ole mahdollista. Kulkemalla konveksin

monikulmion käännymme kulmissa vain yhteen suuntaan (esim. vasemmalle) ja saavutttuamme lähtöpisteeseen olemme kääntyneet 360°. Terävässä kulmassa suunta muuttuu enemmän kuin 90° (sunnan vaihto vastaa ulkoisen kulman kokoa, joka on tylppä tässä tapauksessa). Siten, jos monikulmiossa olisi 4 tai enemmän terävää kulmaa, kääntymisten kokonaissumma olisi suurempi kuin 360°.

7.

(a) Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että luku $n^3 - n$ on jaollinen kuudella.

(b) Etsi kaikki kokonaisluvut x, jotka toteuttavat kongruenssiyhtälön $29x^{33} \equiv 27 \pmod{11}$.

Ratkaisu.

(a) Koska $6 = 2 \cdot 3$, niin riittää osoittaa, että $n^3 - n$ on jaollinen luvuilla kaksi ja kolme. Havaitaan, että on
$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1).$$
Tarkasteltava luku on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo. Kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta ainakin yksi on jaollinen luvulla kaksi ja tasan yksi luvulla kolme. Täten tarkasteltava luku on jaollinen kuudella. □

(b) *Vastaus: Ratkaisut ovat* $x \equiv 6 \pmod{11}$.
Halutaan ratkaista kongruenssi $7x^{33} \equiv 5 \pmod{11}$. Luku 7 on primitiivinen juuri $\pmod{11}$, sillä on $\varphi(11) = 10$, $7^2 \equiv 5 \pmod{11}$ ja $7^5 \equiv -1 \pmod{11}$. Kaikki luvun 11 yhteistekijättömät luvut $\pmod{11}$ voidaan siis kirjoittaa muodossa 7^k, missä k on kokonaisluku. Koska 11 on alkuluku, niin havaitaan, että tarkasteltavan kongruenssin ratkaisut x ovat yhteistekijättömiä luvun 11 kanssa. Voidaan kirjoittaa $x \equiv 7^k \pmod{11}$ ja saadaan ratkaistava kongruenssiyhtälö muotoon $7^{1+33k} \equiv 7^2 \pmod{11}$. Edelleen on oltava $1 + 33k \equiv 2 \pmod{10}$. Tämä on totta täsmälleen silloin, kun $3k \equiv 1 \pmod{10}$ eli $-3k \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$. Siis on
$$k \equiv -3 \equiv 7 \pmod{10}.$$
Täten on
$$x \equiv 7^k \equiv 7^7 \equiv 6 \pmod{11}.$$

8. Ratkaise yhtälö $x^2(2-x)^2 = 1 + 2(1-x)^2$.

Ratkaisu. Olkoon $y = 1 - x$. Tällöin $x(2-x) = (1-y)(1+y) = 1 - y^2$ ja siten ekvivalentti versio yhtälöstä on $(1-y^2)^2 = 1 + 2y^2$ eli $y^4 = 4y^2$. Siten $y = 0, \pm 2$ ja $x = -1, 1, 3$. Vaihtoehtoisesti annettu yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $x^2(2-x)^2 - 1 = 2(1-x)^2$. Käyttämällä kahden neliön erotusta saamme tällöin
$$(x(2-x) - 1)(x(2-x) + 1) = 2(1-x)^2$$
eli
$$(1-x)^2(x^2 - 2x - 1) = 2(1-x)^2.$$
Siten yksi ratkaisu on $x = 1$ ja muut ovat toisen asteen yhtälön $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ juuret, eli $x = -1$ ja $x = 3$.

9. Nelinumeroisella luvulla $ABCD$ on seuraava ominaisuus:

$$ABCD = A \times BCD + ABC \times D.$$

Mikä on luvun $ABCD$ pienin mahdollinen arvo?

Ratkaisu. Selvittääksemme pienimmän luvun kokeilemme $A = 1$. Annettu yhtälö tulee muotoon $1BCD = BCD + 1BC \times D$, joten $1000 = 1BC \times D$. Tämä tarkoittaa sitä, että D on luvun $1000 = 2^3 \times 5^3$ jakaja ja siten $D \in \{1, 2, 4, 5, 8\}$, sillä D on yksinumeroinen luku. Toisaalta koska $1BC < 200$, niin $1000 < 200 \times D$, joten $D > 5$. Siten on oltava $D = 8$, jotta ratkaisu voisi olla olemassa. Koska $1000/8 = 125$, huomaamme, että saamme ratkaisun, kun $B = 2$ ja $C = 5$. Siten pienin mahdollinen arvo on 1258.

10. Aliisa pelaa kolikoilla seuraavaa peliä laatikoita A ja B käyttäen: Aluksi laatikossa A on n kolikkoa ja laatikko B on tyhjä. Yhdellä askeleella Aliisa voi siirtää yhden kolikon laatikosta A laatikkoon B tai poistaa laatikosta A k kolikkoa, missä k on laatikossa B olevien kolikoiden lukumäärä. Aliisa voittaa pelin, kun laatikko A on tyhjä.

(a) Osoita, että jos laatikossa A on aluksi 6 kolikkoa, niin Aliisa pystyy voittamaan neljällä askeleella.

(b) Aluksi laatikossa A on 2018 kolikkoa. Mikä on pienin määrä askelia, joka tarvitaan, jotta Aliisa voittaa pelin?

Ratkaisu.

(a) Aliisa voi siirtää ensin kahdesti yhden kolikon laatikosta A laatikkoon B. Sitten hän voi poistaa kahdesti laatikosta A kaksi kolikkoa. Tällä tavoin laatikko A tyhjenee neljällä askeleella. $\square$

(b) *Vastaus: Pienin määrä askelia, jolla Aliisa voittaa pelin, on* 89.

Kutsutaan operaatiota, jossa Aliisa siirtää yhden kolikon laatikosta A laatikkoon B, operaatioksi 1. Lisäksi kutsutaan sitä operaatiota, jossa laatikosta A poistetaan k kolikkoa, operaatioksi 2.

Aliisan on joka tapauksessa aloitettava operaatiosta 1, sillä aluksi laatikko B on tyhjä. Tarkastellaan tilannetta, jossa Aliisa toteuttaa ensin x kertaa operaation 1. (Tässä on $1 \leq x \leq 2018$.) Tämän jälkeen Aliisa toistaa operaatiota 2 y kertaa. (On $0 \leq y \leq 2017$.) Näin hän on poistanut yhteensä $x + yx = x(y+1)$ kolikkoa laatikosta A. Havaitaan lisäksi, että jos peräkkäiset Aliisa on ensin toistanut operaation 1 ja seuraavaksi operaation 2 ja nämä vaihdetaan toisin päin, niin Aliisa poistaa yhden kolikon vähemmän laatikosta A. Täten toistamalla x kertaa operaatiota 1 ja y kertaa operaatiota 2 Aliisa voi poistaa minkä tahansa kokonaislukumäärän väliltä $[x, x(y+1)]$ verran kolikoita laatikosta A. Lisäksi havaitaan, että kun $x = 45$ ja $y = 44$, niin $x(y+1) = 2025 > 2018 > 45$. Siispä Aliisa joutuu käyttämään enintään 89 askelta voittoon. Tämä voidaan osoittaa vielä eksplisiittisesti: Jos Aliisa toistaa ensin 38 kertaa operaatiota 1, sitten operaation 2, sitten operaation 1 seitsemän kertaa ja lopuksi operaation kaksi 43, niin laatikko A tyhjenee 89 askeleella.

Seuraavaksi halutaan osoittaa, ettei laatikkoa saa tyhjennettyä korkeintaan 88 askeleella. Olkoon $S = x + y$. Tarkastellaan funktiota

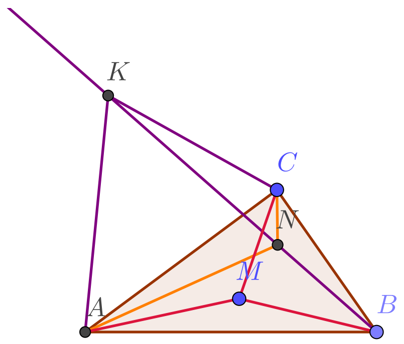
$$f_S(x) = x(y+1) = x(S - x + 1) = (S+1)x - x^2.$$

Jos luku S on kiinteä, niin funktio $f_S(x)$ saa maksimiarvonsa pisteessä $x = \frac{S+1}{2}$. Maksimiarvo on $\frac{(S+1)^2}{4}$. Tehdään vastaoletus, että on $S \leq 88$. Tällöin on $f_S(x) \leq \left(\frac{89}{2}\right)^2 < 2018$. Tämä on ristiriita, sillä tällöin laatikkoa A ei saa tyhjennettyä S askeleella. Siis Aliisa tarvitsee voittoon vähintään 89 askelta.

Vaikeampien tehtävien ratkaisut

1. Olkoot M ja N kolmion ABC sisäpisteet, joille $\angle MAB = \angle NAC$ ja $\angle MBA = \angle NBC$. Todista, että

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$



Ratkaisu. Olkoon K puolisuoran BN se piste, jolle $\angle KCB = \angle AMB$. Koska $\angle AMB > \angle ACB$, piste K on kolmion ABC ulkopuolella. Koska $\angle MBA = \angle CBN = \angle CBK$, kolmiot ABM ja KBC ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{AB}{BK} = \frac{BM}{BC} = \frac{AM}{CK}. \tag{1}$$

Edelleen, koska $\angle KBA = \angle CBM$ ja $AB/KB = BM/BC$, kolmiot ABK ja MBC ovat yhdenmuotoiset. Siten

$$\frac{AB}{BM} = \frac{BK}{BC} = \frac{AK}{CM}. \tag{2}$$

Siis $\angle NKC = \angle BAM = \angle NAC$, joten pisteet A, N, C ja K ovat samalla ympyrällä. Ptolemaioksen lauseen mukaan $AC \cdot NK = AN \cdot CK + CN \cdot AK$ eli

$$AC(BK - BN) = AN \cdot CK + CN \cdot AK. \tag{3}$$

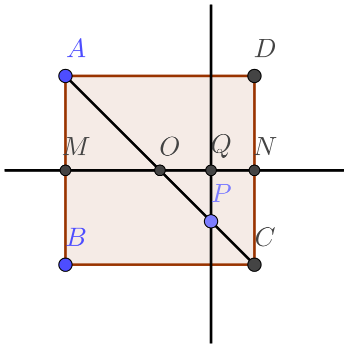
Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa $CK = AM \cdot BC/BM$, $AK = AB \cdot CM/BM$ ja $BK = AB \cdot BC/BM$. Kun nämä sijoitetaan yhtälöön (3), saadaan

$$AC \cdot \left(\frac{AB \cdot BC}{BM} - BN\right) = \frac{AN \cdot AM \cdot BC}{BM} + \frac{CN \cdot AB \cdot CM}{BM}$$

josta sieventämällä seuraa tehtävän väite.

2. Olkoon $ABCD$ neliö, jonka keskipiste on O. Sivun AD suuntainen suora O:n kautta leikkaa sivut AB ja CD pisteissä M ja N, ja eräs sivun AB suuntainen suora leikkaa lävistäjän AC pisteessä P. Todista, että

$$OP^4 + \left(\frac{MN}{2}\right)^4 = MP^2 \cdot NP^2.$$



Ratkaisu. Olkoon Q tehtävässä mainitun "erään sivun AB suuntaisen suoran" ja suoran MN leikkauspiste. Merkitään $OM = a$ ja $OQ = x$. Silloin

$$OP = x\sqrt{2}, \qquad MP^2 = (a \pm x)^2 + x^2, \qquad NP^2 = (a \mp x)^2 + x^2.$$

Siten

$$\begin{aligned} MP^2 \cdot NP^2 &= \left(2x^2 + a^2 + 2ax\right)\left(2x^2 + a^2 - 2ax\right) \\ &= \left(2x^2 + a^2\right)^2 - 4a^2x^2 \\ &= 4x^4 + a^4 = OP^4 + \left(\frac{MN}{2}\right)^4. \end{aligned}$$

3. Todista positiivisille luvuille a_1, a_2, a_3 ja a_4 epäyhtälö

$$2 \le \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_1 + a_2}.$$

Ratkaisu. Sovelletaan Jensenin epäyhtälöä funktiolle $f(x) = 1/x$. Merkitään $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $p_j = a_j/S$, $x_1 = a_2 + a_3$, $x_2 = a_3 + a_4$, $x_3 = a_4 + a_1$, $x_4 = a_1 + a_2$ ja $C = a_1/x_1 + a_2/x_2 + a_3/x_3 + a_4/x_4$. Jensenin epäyhtälön mukaan

$$\sum_{j=1}^{4} p_j f(x_j) \ge f\left(\sum_{j=1}^{4} p_j x_j\right)$$

eli

$$\frac{C}{S} \ge \frac{S}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4}$$

eli

$$C \ge \frac{S^2}{D},$$

missä $D = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$. Riittää todistaa, että $S^2/D \ge 2$, mutta

$$S^2 - 2D = (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 \ge 0.$$

4. Olkoon $p \geq 3$ alkuluku. Määritellään

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \quad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

missä $\{x\} = x - [x]$ on luvun x murto-osa. Määritä $f(p)$.

Ratkaisu. Vastaus: Jos on $p \nmid 120$, niin $f(p) = \frac{1}{2}$ ja jos on $p \mid 120$, niin $f(p) = \frac{1}{2p}$.
Ensimmäinen havainto on, että $(p-k)^{120} \equiv k^{120} \pmod{p}$. Täten ja koska p on pariton kokonaisluku, on

$$2F(p) = 2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^{120} \pmod{p}.$$

Edelleen, koska $\mathrm{syt}(2,p) = 1$, niin luvulla 2 on olemassa käänteisalkio $\pmod{p}$ ja saadaan

$$F(p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} k^{120} \pmod{p}. \tag{4}$$

Tarkastellaan väitettä nyt kahdessa tapauksessa sen mukaan jakaako luku $p-1$ luvun 120 vai ei.

Olkoon g primitiivinen juuri $\pmod{p}$. Jos $p-1 \nmid 120$, niin on $g^{120} \not\equiv 1 \pmod{p}$ ja $g^{120(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$. Täten kaavan (4) nojalla on

$$F(p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} g^{120k} = \frac{g^{120}\left(g^{120(p-1)} - 1\right)}{2\left(g^{120} - 1\right)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Tässä tapauksessa siis on $f(p) = \frac{1}{2}$.

Jos $p-1 \mid 120$, niin on $p \in \{3,5,7,11,13,31,41,61\}$ ja $g^{120} \equiv 1 \pmod{p}$. Saadaan

$$F(p) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} g^{120k} = \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

Täten on

$$f(p) = \frac{1}{2} - \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2p}.$$

5. Etsi kaikki kaksinumeroiset kokonaisluvut $n = 10a + b$ ($a, b \in \{0,1,\ldots,9\}$, $a \neq 0$), jotka jakavat luvun $k^a - k^b$ kaikilla kokonaisluvuilla k.

Ratkaisu. Vastaus: Kysytyt kaksinumeroiset kokonaisluvut ovat $11, 22, 33, \ldots, 99$, $15, 28$ ja 48.
Kun $a = b$, niin väite pätee selvästi eli luvut $n = 11, 22, \ldots, 99$ käyvät. Oletetaan nyt, että on $a \neq b$. Olkoon p jokin alkuluku, joka jakaa luvun n ja g primitiivinen juuri $\pmod{p}$. Tällöin ehdosta $p \mid (g^a - g^b)$ seuraa $g^{|a-b|} \equiv 1 \pmod{p}$. Koska p on primitiivinen juuri $\pmod{p}$, niin on oltava $p - 1 \mid |a-b| \leq 9$. Täten on oltava $p = 1, 3, 5$ tai 7. Muistetaan, että luku p jakaa luvun n.

Jos $p = 7$, niin luvun n on oltava seitsemällä jaollinen ja toisaalta on oltava $6 \mid |a-b|$. Siis on oltava $n = 28$. Koska kaikilla kokonaisluvulla k pätee $k^2 \equiv k^8 \pmod{4}$ ja Fermat'n pienen lauseen nojalla on myös voimassa $k^2 \equiv k^8 \pmod{7}$, niin $n = 28$ käy ratkaisuksi.

Vastaavalla tavalla saadaan, että kun $p = 5$, niin on oltava $n = 15$ tai $n = 40$. Fermat'n pienen lauseen nojalla $k \equiv k^5 \pmod{3}$ ja $k \equiv k^5 \pmod{5}$. Siis luku $n = 15$ käy ratkaisuksi. Selvästi $n = 40$ ei käy ratkaisuksi, sillä esimerkiksi on voimassa $2^4 = 16 \not\equiv 1 \pmod{40}$.

Aivan vastaavalla tavalla voidaan käydä läpi tapaukset $p = 3$ ja $p = 2$. Näistä saadaan vain ratkaisu $n = 48$.

6. Etsi kaikki reaaliset funktiot $f(x)$, jotka on määritelty välillä $(-1,1)$ ja jotka ovat tällä välillä jatkuvia sekä on voimassa

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}, \quad (x, y, x+y \in (-1,1)).$$

Ratkaisu. (IMO longlist 1977) *Vastaus: Ratkaisut ovat* $f(x) = \tan(ax)$, *missä* a *on reaaliluku ja* $|a| \leq \frac{\pi}{2}$

Sijoitetaan $x = y = 0$ ja saadaan $f(0) = \frac{2f(0)}{1-f(0)^2}$. Tämä sievenee muotoon $f(0)(f(0)^2+1) = 0$. Koska $f(0) \in (-1,1)$, niin on oltava $f(0) = 0$.

Olkoon $g(x) = \arctan f(x)$. Tarkasteltava funktionaaliyhtälö on siis

$$\tan g(x+y) = \frac{\tan g(x) + \tan g(y)}{1 - \tan g(x) \tan g(y)} = \tan(g(x)+g(y)).$$

Täten on oltava

$$g(x+y) = g(x) + g(y) + k(x,y)\pi,$$

missä $k(x,y)$ on kokonaislukufunktio. Koska $k(x,y)$ on jatkuva ja $k(0,0) = 0$, sillä $f(0) = 0$, niin on oltava $k(x,y) = 0$. Välillä $(-1,1)$ saadaan siis

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Tämä on Cauchyn yhtälö, jonka ratkaisut ovat muotoa $g(x) = ax$, missä $a \in \mathbb{R}$. Edelleen, ehdosta $g(x) \in (-\pi, \pi)$ seuraa, että on oltava $|a| \leq \frac{\pi}{2}$.

Saadaan $f(x) = \tan(ax)$. Kun tämä sijoitetaan alkuperäisen funktionaaliyhtälön vasemmalle puolelle, saadaan $f(x+y) = \tan(a(x+y))$ ja oikealle puolelle

$$\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} = \frac{\tan(ax) + \tan(ay)}{1 - \arctan(ax)\tan(ay)} = \tan(a(x+y)).$$

Siis kaikki löydetyt funktiot käyvät ratkaisuiksi.

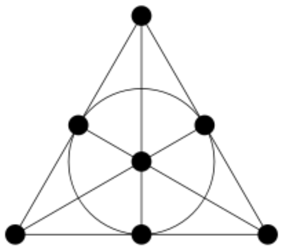
7. Seitsemän oppilasta tekee matematiikan kokeen. Jokaisen tehtävän suhteen löytyi korkeintaan kolme oppilasta, joka ratkaisi tehtävän. Jokaista oppilasparia kohden löytyy ainakin yksi tehtävä, jonka kumpikin ratkaisi. Määritä todistuksen kera, mikä on pienin mahdollinen määrä tehtäviä kokeessa.

Ratkaisu. Oletetaan, että meillä on n tehtävää. Olkoon T niiden parien (P,S) lukumäärä, joissa P on tehtävä ja S on niiden opiskelijaparien joukko, joista kumpikin ratkaisi tehtävän P. Koska jokaisen ongelman ratkaisi korkeintaan 3 oppilasta, niin $T \leq \binom{3}{2}n = 3n$. Toisaalta koska on olemassa tällainen pari (P,S) jokaista opiskelijaparia kohti, niin $T \geq \binom{7}{2} = 21$. Siten $3n \geq 21$, joten $n \geq 7$. Osoitamme sitten, että tällainen $n = 7$ voidaan saavuttaa. Merkitään tehtävät numeroilla $1, 2, \ldots, 7$ ja olkoon jokainen seuraavista joukoista niiden ongelmien joukko, jotka yksittäinen opiskelija ratkaisi:

$$\{1,2,3\}, \{1,4,7\}, \{1,5,6\}, \{2,5,7\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}, \{3,6,7\}.$$

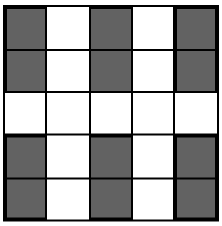
Siten pienin mahdollinen tehtävien lukumäärä kokeessa on 7.

Huomautus: Vaikka konstruktio voidaan muodostaa yrityksen ja erehdyksen kautta, sitä voidaan motivoida Fanon tasolla, joka on kuvattu alla. Jokainen solmu kuvaa ongelmaa ja jokainen särmä (mukaan lukien keskiympyrä) kuvaa oppilasta, joka ratkaisi ongelmat, joiden läpi särmä kulkee.

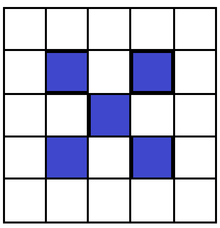


8. 5×5-ruudukon jokaisessa yksikköruudussa on lamppu, joka on pois päältä. Jos kosketamme lamppua, niin kyseinen lamppu ja kaikki sen viereisissä ruuduissa olevat lamput vaihtavat tilaansa. Kun on suoritetty tietty määrä lamppujen kosketuksia, niin tasan yksi lamppu on päällä. Selvitä kaikki ruudut, joissa tämä lamppu voi olla.
Huomautus: vierekkäisen ruudut ovat niitä, joilla on yhteinen sivu.

Ratkaisu. Tarkastellaan seuraavaa laudan väritystä:



Huomaamme, että koskettamalla mitä tahansa lamppua vaihdamme vain parillisen lukumäärän lamppuja tilaa väritetyissä ruuduissa. Siten jos vain yksi lamppu on päällä, niin se ei voi olla missään näistä ruuduista. Kääntämällä väritystä 90 astetta ympäri olemme eliminoineet muut vaihtoehdot paitsi seuraavat ruudut:



Jättääksemme tasan yhden näistä lampuista päälle, näytämme ruudut, joita on kosketettava.

	×	×		
×			×	
×			×	×
	×	×	×	
		×		

×		×	×	
×				×
	×	×		×
		×		
			×	×

Tässä ongelmassa kosketettavien lamppujen löytäminen siten, että vain yksi lamppu jää jäljelle, on melko vaikeaa. Tämä johtuu siitä, että ainoa tapa selvittää ne on yrittämällä eri vaihtoehtoja.

9. Kaksi reaalilukujen sarjaa $x_1, x_2, \ldots$ ja $y_1, y_2, \ldots$ määritellään seuraavasti:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \qquad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}$$

ja

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

kaikille $n \geq 1$. Osoita, että $2 < x_n y_n < 3$ kaikille $n > 1$.

Ratkaisu. Ratkaisu 1. Olkoon $z_n = 1/y_n$ ja huomataan, että rekursio termille y_n on sama kuin

$$z_{n+1} = z_n + \sqrt{1 + z_n^2}.$$

Huomaamme myös, että $z_2 = \sqrt{3} = x_1$; koska x_i:t ja z_i:t toteuttavat saman rekursion, niin $z_n = x_{n-1}$ kaikille $n > 1$. Siten

$$x_n y_n = \frac{x_n}{z_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Huomataan, että

$$\sqrt{1 + x_{n-1}^2} > x_{n-1}.$$

Siten $x_n > 2x_{n-1}$ ja $x_n y_n > 2$, mikä on halutun epäyhtälön alaraja. Koska luvut x_n ovat kasvavia, kun $n > 1$, niin

$$x_{n-1}^2 \geq x_1^2 = 3 > \frac{1}{3},$$

mistä seuraa, että

$$2x_{n-1} > \sqrt{1 + x_{n-1}^2}.$$

Siten $3x_{n-1} > x_n$, mistä seuraa halutun epäyhtälön yläraja.

Ratkaisu 2. Sijoittamalla $x_n = \cot \theta_n$, kun $0 < \theta_n < 90^\circ$, saamme

$$x_{n+1} = \cot \theta_n + \sqrt{1 + \cot^2 \theta_n} = \cot \theta_n + \csc \theta_n = \cot\left(\frac{\theta_n}{2}\right).$$

Koska $\theta_1 = 30^\circ$, niin $\theta_n = \frac{30^\circ}{2^{n-1}}$. Vastaavat laskelmat osoittavat, että

$$y_n = \tan(2\theta_n) = \frac{2 \tan \theta_n}{1 - \tan^2 \theta_n}.$$

Tästä seuraa, että

$$x_n y_n = \frac{2}{1 - \tan^2 \theta_n}.$$

Koska $\tan \theta_n \neq 0$, niin $\tan^2 \theta_n$ on positiivinen ja $x_n y_n > 2$. Koska $n > 1$, niin $\theta_n < 30°$ ja

$$\tan^2 \theta_n < \frac{1}{3},$$

joten $x_n y_n < 3$.

10. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut k, joille seuraava ehto pätee: jos $F(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi, joka toteuttaa ehdon

$$0 \leq F(c) \leq k, \text{ kun } c = 0, 1, \ldots, k+1,$$

niin $F(0) = F(1) = \ldots = F(k+1)$.

Ratkaisu. Väite pätee jos ja vain jos $k \geq 4$. Aloitamme osoittamalla, että se pätee kaikille $k \geq 4$. Tarkastellaan mitä tahansa kokonaislukukertoimista polynomia $F(x)$, joka toteuttaa epäyhtälön $0 \leq F(c) \leq k$ kaikille $c \in \{0, 1, \ldots, k+1\}$. Huomaamme ensin, että $F(k+1) = F(0)$ sillä $F(k+1) - F(0)$ on luvun $k+1$ monikerta, jonka itseisarvo ei ole suurempi kuin k. Siten

$$F(x) - F(0) = x(x - k - 1)G(x), \tag{5}$$

missä $G(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi. Siten

$$k \geq |F(c) - F(0)| = c(k + 1 - c)|G(c)|$$

kaikille $c \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Epäyhtälö $c(k+1-c) > k$ pätee jokaiselle $c \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$, sillä se on ekvivalentti ehdon $(c-1)(k-c) > 0$ kanssa. Huomaa, että joukko $\{2, 3, \ldots, k-1\}$ on epätyhjä kun $k \geq 3$ ja mille tahansa luvulle c tässä joukossa, epäyhtälöstä (5) seuraa, että $|G(c)| < 1$. Koska $G(c)$ on kokonaisluku, niin $G(c) = 0$. Siten

$$F(x) - F(0) = x(x-2)(x-3)\cdots(x-k+1)(x-k-1)H(x), \tag{6}$$

missä $H(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi. Viedäksemme todistuksen loppuun riittää osoitaa, että $H(1) = H(k) = 0$. Huomaa, että kun $c = 1$ tai $c = k$, yhtälöstä (6) seuraa, että

$$k \geq |F(c) - F(0)| = (k-2)! \cdot k \cdot |H(c)|.$$

Kun $k \geq 4$, niin $(k-2)! > 1$. Siten $H(c) = 0$. Olemme nyt osoittaneet, että väite pätee mille tahansa $k \geq 4$. Todistus kuitenkin vaatii myös pienempien lukujen k läpikäynnin. Tarkemmin, jos $F(x)$ toteuttaa annetun ehdon, niin 0 ja $k+1$ ovat $F(x)$:n ja $F(0)$:n juuria mille tahansa $k \geq 1$; jos $k \geq 3$, niin myös luvun 2 on oltava $F(x) - F(0)$:n juuri. Ottamalla tämän huomioon ei ole vaikeaa löytää vastaesimerkkejä:

$$F(x) = x(2 - x), \text{ kun } k = 1,$$

$$F(x) = x(3 - x), \text{ kun } k = 2,$$

$$F(x) = x(4 - x)(x - 2)^2, \text{ kun } k = 3.$$