# Kesän valmennustehtäväsarja
# Ratkaisuja

**Helpompia tehtäviä**

**1.** Olkoot yhtälön $x^2+(p^2+1)x+p=2$ ratkaisut $x_1$ ja $x_2$, ja olkoot ne nollasta poikkeavia sekä erisuuria. Määritä kaikki parametrin $p$ arvot, joilla

$$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}.$$

**Ratkaisu.** Yhtälöstä $x^2+(p^2+1)x+p-2=0$ seuraa, että

$$x_1+x_2=-p^2-1, \quad \text{and} \quad x_1x_2=p-2.$$

Lisäksi

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(p^2+1)^2-2(p-2).$$

Erityisesti, koska $x_1 \neq 0$ ja $x_2 \neq 0$, on oltava $p \neq 2$. Monimutkaisempi yhtälö sievenee muotoon

$$2x_1^2-x_1+2x_2^2-x_2=x_1^2x_2^2+55,$$

mistä edelleen seuraa, että

$$2(p^2+1)^2-4(p-2)+p^2+1=p^2-4p+4+55,$$

ja edelleen, että

$$2(p^2+1)^2=50, \quad \text{eli} \quad (p^2+1)^2=25.$$

Nyt $p^2+1=\pm5$, ja koska $p^2+1>0$, on oltava $p^2+1=5$ ja $p^2=4$, eli $p=\pm2$. Koska $p \neq 2$, on oltava $p=-2$.

Lopuksi, olkoon $p=-2$, jolloin $x_1$ ja $x_2$ ratkaisevat yhtälön $x^2+5x-4=0$. Tällöin $x_1+x_2=-5$ ja $x_1x_2=-4$, ja

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=25+8=33,$$

eli

$$\frac{2x_1-1}{x_2}+\frac{2x_2-1}{x_1}=\frac{2(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{2\cdot 33+5}{-4}=-\frac{71}{4},$$

ja

$$x_1x_2+\frac{55}{x_1x_2}=-4-\frac{55}{4}=-\frac{71}{4},$$

eli arvo $p=-2$ on halutunlainen.

**2.** Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut $x$ ja $y$, joilla

$$(x^2+y)(y^2+x)$$

on jonkin alkuluvun viides potenssi.

**Ratkaisu.** Olkoon siis

$$(x^2+y)(y^2+x)=p^5,$$

missä $p$ on alkuluku. Jos olisi $x=y$, olisi

$$p^5=(x^2+x)^2,$$

mikä on selvästi mahdotonta, eli on oltava $x\neq y$. Symmetrian perusteella voimme olettaa, että $x<y$.

Todetaan seuraavaksi, että koska lauseke $t^2-t$ kasvaa kun $t>1/2$ (lausekkeen derivaatta on tällöin $2t-1>0$), on oltava

$$x^2-x<y^2-y, \quad \text{eli} \quad x^2+y<y^2+x.$$

Toisaalta, varmasti $x^2+y\geqslant 1+1>1$.

Yksikäsitteisen tekijöihinjaon nojalla $x^2+y$ on jokin alkuluvun $p$ potenssi. Jos olisi $x^2+y=p$, niin olisi $y^2+x=p^4$, mutta toisaalta olisi myös $y<p$, jolloin $y^2<p^2$, ja

$$y^2+x<p^2+p<2p^2\leqslant p^3<p^4,$$

mikä on ristiriita. Siis on oltava $x^2+y\geqslant p^2$. Toisaalta, jos olisi $x^2+y>p^2$, niin olisi $y^2+x<p^3$, mikä on mahdotonta, koska $x^2+y<y^2+x$.

Olemme päätelleet, että on oltava $x^2+y=p^2$, jolloin on oltava $y^2+x=p^3$. Koska $y=p^2-x^2$, ratkaisee $x$ yhtälön

$$x^4-2p^2x^2+p^4+x=p^3.$$

Ensinnäkin, tästä seuraa, että

$$x\mid p^3\,(p-1)\,, \quad \text{ja edelleen, että} \quad x\mid (p-1)\,.$$

Toisaalta, yhtälöstä seuraa, että

$$2p^2x^2>p^4-p^3,$$

eli

$$x^2>\frac{p\,(p-1)}{2}>\left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

eli $x>(p-1)/2$, ja on oltava $x=p-1$. Koska $x^2+y=p^2$, on myös oltava $y=2p-1$.

Lopuksi, koska nyt

$$(2p-1)^2+(p-1)=p^3,$$

ratkaisee $p$ yhtälön

$$p^3-4p^2+3p=0,$$

jonka ratkaisut ovat $p=0$, $p=1$ ja $p=3$. Täten alkuluvun $p$ ainoa mahdollinen arvo on $p=3$, ja tämä on kelvollinen arvo, koska

$$2^2+5=9=3^2 \quad \text{ja} \quad 2+5^2=27=3^3.$$

Kysytyt lukuparit $\langle x,y\rangle$ ovat siis $\langle 2,5\rangle$ ja $\langle 5,2\rangle$.

**3.** Etsi kaikki reaaliluvut $a$ ja $b$, joilla yhtälöparilla

$$\begin{cases} x + a = y + b \\ x^2 - a = 2y \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $(x_0, y_0)$, ja tämä ratkaisu toteuttaa ehdon $x_0^{10} + y_0^{10} = 1025$.

**Ratkaisu.** Ensimmäinen yhtälö määrää tasossa suoran, jonka kulmakerroin on 1, ja toinen yhtälö määrää tasossa ylöspäin avautuvan paraabelin. Yhtälöparilla on yksikäsitteinen ratkaisu jos ja vain jos suora sivuaa paraabelia. Ainoa $x$-koordinaatin arvo, jolle tämä on mahdollista on se, jolla funktion $(x^2 - a)/2$ derivaatta on yhtä kuin e.m. kulmakerroin 1. Mutta derivaatta on vain $x$, eli sivuamispisteen on oltava $x_0 = 1$, $y_0 = 1 + a - b$.

Toisaalta, sivuamispisteen on oltava $x_0 = 1$, $y_0 = (1^2 - a)/2 = (1 - a)/2$, eli on oltava

$$1 + a - b = 1/2 - a/2, \quad \text{eli} \quad 1 + 3a = 2b.$$

Yhtälöstä $x_0^{10} + y_0^{10} = 1025$ seuraa, että $y_0^{10} = 1024 = 2^{10}$, eli on oltava $y_0 = \pm 2$. Siis on oltava $1 + a - b = \pm 2$. Plusmerkin vallitessa on

$$\begin{cases} 3a - 2b = -1, \\ a - b = 1, \end{cases} \qquad \text{eli} \qquad \begin{cases} a = -3, \\ b = -4. \end{cases}$$

Miinusmerkin vallitessa on

$$\begin{cases} 3a - 2b = -1, \\ a - b = -3, \end{cases} \qquad \text{eli} \qquad \begin{cases} a = 5, \\ b = 8. \end{cases}$$

Toisaalta, näillä kahdella parilla pisteet $\langle 1, 1 + a - b\rangle = \langle 1, (1 - a)/2\rangle$ ovat samat (eli suora sivuaa paraabelia), ja $1^{10} + ((1 - a)/2)^{10} = 1025$, kuten vaadittiin.

**4.** Kolmiossa $ABC$, jossa $AB > BC$, piste $K$ on sivulla $AB$ niin, että $AK = BC + BK$. Suora $\ell$, joka kulkee pisteen $K$ kautta on kohtisuorassa janaan $AB$. Osoita, että suora $\ell$, sivun $AC$ puolittaja ja kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaavat samassa pisteessä.

**Ratkaisu.** Tehtävänannossa oli valitettavasti virhe: viimeisen suoran olisi pitänyt olla kulman $\angle ABC$ ulkokulman puolittaja, eikä kulman puolittaja. Esitetään siis ratkaisu tehtävälle niin kuin sen olisi pitänyt olla.

Olkoon piste $C'$ janalla $AB$ niin, että $BC = BC'$. Silloin kulman $\angle ABC$ ulkokulman puolittaja on kohtisuorassa janan $CC'$ keskinormaalia vasten. Koska $AK = BC + BK = BC' + BK = KC'$, on suora $\ell$ kohtisuorassa janan $AC'$ keskinormaalia vasten. Täten $\ell$, janan $AC$ keskinormaali ja kulman $\angle ABC$ ulkokulman puolittaja ovat kolmion $AC'C$ sivujen keskinormaalit, ja täten leikkaavat samassa pisteessä.

**5.** Olkoot $a$, $b$, $c$ ja $d$ reaalilukuja. Osoita, että pienin luvuista

$$a - b^2, \quad b - c^2, \quad c - d^2 \quad \text{ja} \quad d - a^2$$

on enintään $1/4$.

**Ratkaisu.** Jos kaikki neljä lukua olisivat suurempia kuin 1/4, niin olisi

$$a - b^2 + b - c^2 + c - d^2 + d - a^2 > 1.$$

Kertomalla yhtälö puolittain luvulla 4 ja ryhmittelemällä termejä uudelleen saadaan

$$\begin{aligned} 0 &> 4a^2 - 4a + 1 + 4b^2 - 4b + 1 + 4c^2 - 4c + 1 + 4d^2 - 4d + 1 \\ &= (2a-1)^2 + (2b-1)^2 + (2c-1)^2 + (2d-1)^2, \end{aligned}$$

mikä on mahdotonta, koska reaalilukujen neliöiden summa ei koskaan voi olla negatiivinen.

**6.** Olkoot $a$ ja $b$ reaalilukuja. Jos $a+b=4$ ja $a^2+b^2=14$, niin mitä on $a^3+b^3$?

**Ratkaisu.** Todetaan ensiksi, että

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2+b^2) = 4^2 - 14 = 2,$$

eli $ab = 1$. Nyt voimme laskea suoraan, että

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 4^2 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 64 - 12 = 52.$$

**7.** Olkoon $ABCDE$ säännöllinen viisikulmio, ja leikatkoot suorat $AB$ ja $DE$ pisteessä $F$. Selvitä kolmion $\triangle BEF$ kulmat.

**Ratkaisu.** Jakamalla viisikulmio kolmeksi kolmioksi, nähdään, että sen kulmien summa on $3 \cdot 180° = 540°$. Säännöllisen viisikulmion yksi kulma on siis viidesosa tästä, eli $108°$. Kolmio $\triangle ABE$ on tasakylkinen ja sen huippukulma on $\angle BAE = 108°$, joten sen molemmat kantakulmat ovat

$$\angle EBA = \angle AEB = \frac{180° - 108°}{2} = \frac{72°}{2} = 36°.$$

Samassa hengessä kolmio $\triangle FAE$ on tasakylkinen ja sen kantakulma on

$$\angle EAF = \angle AEF = 180° - \angle BAE = 180° - 108° = 72°,$$

eli sen huippukulma on

$$\angle BFE = 180° - 2 \cdot 72° = 180° - 144° = 36°.$$

Nyt voimme todeta, että kolmio $\triangle BEF$ on tasakylkinen, sen kantakulmien suuruus on $36°$ ja pisteessä $E$ sijaitsevan huippukulman $72° + 36° = 108°$.

**8.** Kolmion ympäripiirretty ympyrä peilataan yhden kolmion sivun suhteen. Osoita, että peilikuvaympyrä kulkee kolmion korkeusjanojen leikkauspisteen kautta.

**Ratkaisu.** Olkoot alkuperäinen kolmio $\triangle ABC$, sen ympäripiirretty ympyrä $\Gamma$, ympyrän $\Gamma$ peilikuva suoran $BC$ suhteen $\Gamma'$, pisteen $A$ peilikuva suoran $BC$ suhteen $A'$, joka tietenkin sijaitsee peilikuvaympyrällä $\Gamma'$, ja kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanojen leikkauspiste $H$.

Olkoot pisteen $H$ projektiot suorille $AB$ ja $AC$ pisteet $X$ ja $Y$. Koska $HX \perp AB$ ja $HY \perp AC$, on nelikulmio $AXHY$ jännenelikulmio, ja siten

$$\angle YHX = 180^\circ - \angle BAC.$$

Koska $\angle BHC = \angle YHX$ ja $\angle CA'B = \angle BAC$, on

$$\angle CA'B + \angle BHC = 180^\circ,$$

eli nelikulmio $A'BHC$ on jännenelikulmio. Lopuksi, koska pisteet $A'$, $B$ ja $C$ ovat ympyrällä $\Gamma'$, myös pisteen $H$ on oltava.

**9.** Olkoon $n \geqslant 2$ kokonaisluku. Laske

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin kx \cos(n-k)x.$$

**Ratkaisu.**

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \sin kx \cos(n-k)x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\sin kx \cos(n-k)x + \sin(n-k)x \cos kx) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sin nx = \frac{n-1}{2} \sin nx. \end{aligned}$$

**10.** Olkoot $\alpha$ ja $\beta$ reaalilukuja väliltä $]0, \pi/2[$, ja oletetaan, että

$$\cos^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

Osoita, että $\alpha + \beta = \pi/2$.

**Ratkaisu.** Muokataan ensin annetun ehdon lausekkeita:

$$\begin{aligned} 4 \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta = 2 \sin\alpha \cos\alpha \cdot 2 \sin\beta \cos\beta &= \sin 2\alpha \sin 2\beta \\ = \cos^2(\alpha - \beta) &= (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)^2, \end{aligned}$$

mistä seuraa pienellä sieventämisellä, että

$$(\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)^2 = 0,$$

ja edelleen, että $\cos^2(\alpha + \beta) = 0$, eli $\cos(\alpha + \beta) = 0$. Lopuksi, koska tietenkin $0 < \alpha + \beta < \pi$, ja kosinin ainoa nollakohta välillä $]0, \pi[$ on $\pi/2$, on oltava $\alpha + \beta = \pi/2$.

**11.** Kolmion sivujen pituudet ovat $a$, $b$ ja $c$. Selvitä, milloin myös $a^2$, $b^2$ ja $c^2$ ovat jonkin kolmion sivujen pituudet.

**Ratkaisu.** Olkoot alkuperäisen kolmion kulmat tavalliseen tapaan $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$. Luvut $a^2$, $b^2$ ja $c^2$ ovat kolmion sivujen pituudet täsmälleen silloin kun

$$a^2 + b^2 > c^2, \quad b^2 + c^2 > a^2 \quad \text{ja} \quad c^2 + a^2 > b^2.$$

Nämä puolestaan pitävät paikkaansa jos ja vain jos

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} > 0, \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > 0, \quad \text{ja} \quad \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} > 0.$$

Mutta kosinilauseen nojalla nämä viimeiset ehdot sanovat täsmälleen, että

$$\cos\alpha > 0, \quad \cos\beta > 0 \quad \text{ja} \quad \cos\gamma > 0,$$

mitkä puolestaan pitävä paikkaansa täsmälleen silloin kun $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$ ovat kaikki teräviä kulmia.

Täten $a^2$, $b^2$ ja $c^2$ ovat kolmion sivut täsmälleen silloin kun alkuperäinen kolmio on teräväkulmainen.

### Vaikeampia tehtäviä

**12.** Määritellään positiiviselle kokonaisluvulle $n$ luku $a_n$ seuraavasti: $a_n = 0$, jos luvulla $n$ on parillinen määrä lukua 2007 suurempia tekijöitä ja $a_n = 1$, jos luvulla $n$ on pariton määrä lukua 2007 suurempia tekijöitä. Onko luku $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ rationaalinen?

**Ratkaisu.** Osoitetaan, että luku $\alpha$ on irrationaalinen. Tehdään vastaoletus: luku $\alpha$ on rationaalinen. Nyt jono $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ on jaksollinen jostain pisteestä lähtien. On siis olemassa positiiviset kokonaisluvut $k_0$ ja $T$ niin, että kaikilla $k > k_0$ pätee $a_k = a_{k+T}$. Valitse positiivinen kokonaisluku $m$, jolla $mT > k_0$ ja $mT$ on neliö. Jos $T = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_2}$, niin $m = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$, missä $\alpha_i + \beta_i$ on parillinen kaikilla $i = 1, 2, \ldots, s$ ja luvut $\beta_i$ ovat riittävän suuria positiivisia kokonaislukuja. Valitaan alkuluku $p > 2007$ niin, että $p \neq p_i$, kun $i = 1, 2, \ldots, s$. Koska $pmT - mT$ on jaollinen luvulla $T$, pätee $a_{mT} = a_{pmT}$. Olkoon luvun $k$ tekijöiden määrä $\tau(k)$ ja olkoon $f(k)$ luvun $k$ niiden tekijöiden määrä, jotka ovat suurempia kuin luku 2007. Nyt pätee $f(pmT) = f(mT) + \tau(mT)$, ja koska $\tau(mT)$ on pariton, huomataan, että luvuista $f(pmT)$ ja $f(mT)$ toisen on oltava parillinen ja toisen pariton. Tämä on kuitenkin ristiriita. Vastaoletus oli siis väärä ja alkuperäinen väite oikea.

**13.** Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut $n$, joilla pätee, että jos $a, b, c \geqslant 0$ ja $a + b + c = 3$, niin $abc(a^n + b^n + c^n) \leqslant 3$.

**Ratkaisu.** Kun $n \geq 3$, epäyhtälö ei päde yleisesti. Tämä nähdään valitsemalla $a = 2$ ja $b = c = \frac{1}{2}$.

Kun $n = 1$, epäyhtälö muuttuu muotoon $abc \leq 1$, mikä on yhtäpitävää aritmeettis-geometrisen epäyhtälön kanssa.

Jäljellä on siis tapaus $n = 2$. Kirjoitetaan $ab+bc+ac = x$. Silloin $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2x = 9 - 2x$. Lisäksi pätee epäyhtälö

$$x^2 = (ab+bc+ac)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 9abc$$

(tämän voi todistaa helposti esimerkiksi suuruusjärjestysepäyhtälöllä). Siispä $x^2 \geq 9abc$. Alkuperäinen epäyhtälö on siis yhtäpitävä epäyhtälön

$$abc(9-2x) \leq 3,$$

mikä pätee, jos todistetaan vahvempi epäyhtälö $(9-2x)x^2 \leq 27$. Tämä on kuitenkin yhtäpitävää epäyhtälön $(2x+3)(x-3)^2 \geq 0$, mikä on selvästi tosi, sillä $x$ on epänegatiivinen.

**14.** Olkoon $a_1 > \frac{1}{12}$ ja $a_{n+1} = \sqrt{(n+2)a_n + 1}$, kun $n \geqslant 1$. Osoita, että

1. $a_n > n - \frac{2}{n}$,
2. jono $b_n = 2^n \left(\frac{a_n}{n} - 1\right)$ suppenee $(n = 1, 2, \ldots)$.

**Ratkaisu.**

1. Käytetään induktiota. Ensinnäkin $a_1 > \frac{1}{12} > \frac{19}{243}$, ja täten $a_2 > \sqrt{3 \cdot \frac{19}{243} + 1} = \frac{10}{9}$ sekä $a_3 > \sqrt{4 \cdot \frac{10}{9} + 1} = \frac{7}{3}$, joten väite on ok, kun $n = 1, 2, 3$. (Tällä arvioinnilla ja lukujen korvaamisella ei ollut mitään muuta tarkoitusta kuin pitää neliöjuuret miellyttävinä laskea päässä/käsin, eli ei mitään syvällistä merkitystä.

   Tehdään nyt induktio-oletus: $a_n > n - \frac{2}{n}$ jollakin $n \geq 3$. Nyt

   $$a_{n+1} > \sqrt{(n+2)\left(n - \frac{2}{n}\right) + 1},$$

   eli kunhan olemme osoittaneet, että

   $$\sqrt{(n+2)\left(n - \frac{2}{n}\right) + 1} \geq n + 1 - \frac{2}{n+1},$$

   niin olemme valmiit. Tämä epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

   $$n^2 + 2n - 2 - \frac{4}{n} + 1 \geq \left(n + 1 - \frac{2}{n+1}\right)^2$$

   kanssa, ja tämä epäyhtälö puolestaan supistuu muotoon

   $$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n}.$$

   Kun $n \geq 3$, pätee tämä epäyhtälö varmasti. Todistus on valmis.

2. Tarkastellaan ensin tilanne $a_1 = 1$. Tällöin $a_n = n$ kaikilla $n$, joten $b_n = 2^n \left(\frac{a_n}{n} - 1\right) = 0$.

   Jos $a_n < 1$, niin induktiolla voidaan osoittaa, että $a_n < n$, joten $b_n < 0$. Todistetaan, että tällöin $b_n < b_{n+1}$. Tämä väite on yhtäpitävä väitteen $\frac{a_n - n}{2n} < \frac{a_{n+1} - n - 1}{n+1}$ kanssa. Oikeaa puolta voidaan edelleen muokata seuraavasti:

   $$\frac{a_{n+1} - n - 1}{n+1} = \frac{a_{n+1}^2 - (n+1)^2}{(n+1)(a_{n+1} + n + 1)} = \frac{(n+2)a_n + 1 - (n+1)^2}{(n+1)(a_{n+1} + n + 1)}$$
   $$= \frac{(n+2)(a_n - n)}{(n+1)(a_{n+1} + n + 1)}.$$

   Riittää siis osoittaa, että

   $$\frac{1}{2n} > \frac{n+2}{(n+1)(a_{n+1} + n + 1)},$$

eli

$$(n+1)a_{n+1} > 2n(n+2) - (n+1)^2 = (n+1)^2 - 2,$$

mutta tämä onkin totta ensimmäisen kohdan perusteella. Vastaavasti voidaan myös osoittaa, että jos $a_n > 1$, niin luvut $b_n$ ovat positiivisia, ja lisäksi $b_{n+1} < b_n$.

Täten jono $b_n$ on rajoitettu ja monotoninen ja täten suppeneva.

**15.** Ratkaise yhtälöryhmä kokonaislukujen joukossa:

$$\begin{cases} 3a^4 + 2b^3 = c^2, \\ 3a^6 + b^5 = d^2. \end{cases}$$

**Ratkaisu.** Osoitetaan, että ainoa ratkaisu on $a = b = c = d = 0$. Tämä on selvästi yhtälöparin ratkaisu, ja voimme siirtyä muiden ratkaisujen etsimiseen.

On helppo havaita hyvin alkeellisilla jaollisuustarkasteluilla, että mikäli yksi luvuista on nolla, niin kaikkien muidenkin on oltava. Voidaan siis olettaa, että mikään luvuista ei ole nolla.

Summataan nyt yhtälöt yhteen. Saadaan

$$c^2 + d^2 = 3(a^4 + a^6) + 2b^3 + b^5 = 3(a^4 + a^6) + b^3(b-1)(b+3),$$

joten yhtälön oikea puoli on jaollinen kolmella. Täten myös vasen puoli on jaollinen kolmella. Siis molempien lukujen $c$ ja $d$ pitää olla jaollisia kolmella. Alkuperäisiin yhtälöihin sijoittamalla havaitsemme, että kolme jakaa myös luvut $a$ ja $b$. Kirjoitetaan $a = 3^\alpha a_1$, $b = 3^\beta b_1$, $c = 3^\gamma c_1$ ja $d = 3^\delta d_1$. Lisäksi $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 1$ ja $3 \nmid a_1, b_1, c_1, d_1$.

Nyt yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{cases} 3^{4\alpha+1}a_1^4 + 3^{3\beta}2b_1^3 = 3^{2\gamma}c_1^2, \\ 3^{6\alpha+1}a_1^6 + 3^{5\beta}b_1^5 = 3^{2\delta}d_1^2. \end{cases}$$

Seuraavaksi tarvitaan tietoa, että jos $3^k p + 3^\ell q = 3^m r$ ja $3 \nmid p, q, r$, niin ainakin kahden luvuista $k, \ell, m$ on oltava samat. Täten on pädettävä $4\alpha+1 = 3\beta$ tai $3\beta = 2\gamma$ tai $4\alpha + 1 = 2\gamma$ (mahdoton parillisuuden ja parittomuuden nojalla) sekä $6\alpha + 1 = 5\beta$ tai $5\beta = 2\delta$ tai $6\alpha + 1 = 2\delta$ (mahdoton parittomuuden ja parillisuuden nojalla).

Tapaus $4\alpha + 1 = 3\beta$ ja $6\alpha + 1 = 5\beta$ on selvästi mahdoton.

Tapaus $4\alpha + 1 = 3\beta$ ja $5\beta = 2\delta$ on mahdoton, sillä ensimmäinen yhtälö vaatii, että luku $\beta$ on pariton, toinen taas parillinen. Vastaavasti mahdoton on myös $3\beta = 2\gamma$ ja $6\alpha + 1 = 5\beta$. Siispä $3\beta = 2\delta$ ja $5\beta = 2\delta$. Nyt yhtälöpari muuttuu muotoon

$$\begin{cases} 3^{4\alpha+1-2\gamma}a_1^4 + 2b_1^3 = c_1^2, \\ 3^{6\alpha+1-2\delta}a_1^6 + b_1^5 = d_1^2, \end{cases}$$

ja koska $4\alpha + 1 - 2\gamma > 0$ ja $6\alpha + 1 - 2\delta > 0$, yhtälöt yhteenlaskemalla saadaan $3 \mid c_1, d_1$, mikä on ristiriita. Todistus on valmis.

**16.** Olkoot $a$ ja $b$ erisuuria positiivisia reaalilukuja. Etsi kaikki positiivisten reaalilukujen parit $(x, y)$, jotka ratkaisevat yhtälöparin

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = ax - by, \\ x^2 - y^2 = \sqrt[3]{a^2 - b^2}. \end{cases}$$

**Ratkaisu.** Koska $a \neq b$, myös $x \neq y$. Eliminoidaan yhtälöistä ensin $a$. Jälkimmäisen yhtälön voi kirjoittaa muodossa

$$(x^2 - y^2)^3 = a^2 - b^2,$$

mistä seuraa, että

$$a^2 x^2 = b^2 x^2 + x^2 (x^2 - y^2)^3.$$

Ensimmäisen yhtälön voi kirjoittaa muodossa

$$ax = by + (x^4 - y^4),$$

mistä seuraa, että

$$a^2 x^2 = b^2 y^2 + 2by(x^4 - y^4) + (x^4 - y^4)^2.$$

Ottamalla erotukset lausekkeen $a^2 x^2$ arvoista näemme, että

$$b^2 (x^2 - y^2) - 2by(x^4 - y^4) + x^2 (x^2 - y^2)^3 - (x^4 - y^4)^2 = 0,$$

tai yksinkertaisemmin, että

$$b^2 - 2by(x^2 + y^2) - y^2 (x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) = 0.$$

Tästä on suoraviivaista ratkaista luvun $b$ mahdolliset arvot:

$$b = y\left(x^2 + y^2 \pm 2x^2\right).$$

Edelleen yhtälöstä $ax = by + (x^4 - y^4)$ seuraa, että

$$a = x\left(x^2 + y^2 \pm 2y^2\right),$$

missä $\pm$-merkki valitaan samoin kuin luvun $b$ lausekkeessakin.

Jos $\pm$-merkiksi valitaan $-$-merkki, niin silloin luvut

$$a = x(x^2 - y^2), \quad \text{ja} \quad b = y(y^2 - x^2)$$

olisivat erimerkkisiä, mikä on mahdotonta. Siispä

$$a = x^3 + 3xy^2 \quad \text{ja} \quad b = 3x^2 y + y^3.$$

Koska nyt $a \pm b = (x \pm y)^3$, on $x \pm y = \sqrt[3]{a \pm b}$, mistä seuraa, että ainoa mahdollinen ratkaisu on

$$x = \frac{\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}}{2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{\sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b}}{2}.$$