

Matematiikan kirjevalmennus, vaikeampi sarja, joulukuu 2016

Ratkaisuja voi lähettää osoitteeseen laurihallila@gmail.com tai
Lauri Hallila, Jussaarenkuja 5 J 104, 00840 Helsinki

1. Muodostetaan potenssien sarja

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$$

määrittelemällä $a_0 = 1$ ja $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Osoita, että sarja a_n on aidosti kasvava ja aina pienempi kuin 2.

2. Tarkastellaan kaikkia joukon $1, 2, \dots, N$ alijoukkoja, jotka eivät sisällä yhtään vierekkäisiä alkioita (sellaisia, joiden erotus on 1). Osoita, että näiden kaikkien alijoukkojen alkioden tulojen neliöiden summa on $(N+1)! - 1$. (Esim. $N = 3$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + (1 \cdot 3)^2 = 23 = 4! - 1$).
3. 51 pientä hyönteistä laitetaan yksikköneliön sisään. Osoita, että millä tahansa hetkellä neliössä on ainakin kolme hyönteistä, jotka voidaan peittää ympyrällä, jonka säde on $1/7$.
4. 17×17 -ruudukkoon kirjoitetaan luku $1 - 17$ jokaiseen ruutuun; jokainen luku kirjoitetaan tasan 17 eri ruutuun. Osoita, että voidaan löytää sellainen rivi tai sarake, jolla on ainakin 5 eri lukua.
5. Osoita, että suuntaamattomassa verkossa on aina parillinen määrä solmuja, joiden aste (solmusta lähtevien särmien lukumäärä) on pariton.
6. Osoita kaksinkertaisen laskemisen menetelmällä, että

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} = 2^{n-r} \binom{n}{n-r}.$$

7. Etsi kaikki yhtälön a) $x^2 - 3y^2 = 17$, b) $2xy + 3y^2 = 24$ kokonaislukuratkaisut.
8. Etsi yhtälön $x + y = x^2 - xy + y^2$ kokonaislukuratkaisut.
9. Etsi kaikki yhtälön $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$ kokonaislukuratkaisut.
10. Osoita, että yhtälöllä $y^2 = x^3 + 7$ ei ole kokonaislukuratkaisuja.