Epäyhtälöitä edistyneemmille

Niko Vuokko, 2007

Lähteenä tässä esityksessä on pidetty kirjaa
G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya: Inequalities.

1 Merkintöjä

Käytetään merkintää $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Keskitytään puhumaan ei-negatiivisten reaalilukujen jonoista, joissa on pääsääntöisesti aina n lukua, esimerkiksi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Lisäksi puhutaan pelkästään äärellisistä summista, tosin kaikki tulokset saadaan todistettua myös vastaaville sarjoille ja integraaleille, kunhan suppenemisongelmilta vältytään. Summa- ja tulomerkinnöistä jätetään usein indeksit ja rajat merkitsemättä ja viitataan pelkkään jonoon a (tai (a)), jonka alkioilla operoidaan. Esimerkiksi

$$\sum a = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \sum(ab + c) = \sum_{i=1}^{n}(a_i b_i + c_i).$$

Epäyhtälöissä korostetaan niiden aitoutta mainitsemalla yhtäsuuruusehdot poikkeustapauksina. Itse yhtäsuuruusehtoja ei todisteta, mutta ne ovat poikkeuksetta helposti nähtävissä oikeiksi lauseiden todistuksista jo tunnettuja yhtäsuuruusehtoja hyväksi käyttämällä.

Epäyhtälöä kutsutaan homogeeniseksi, jos kertomalla sen kaikki muuttujat (eli jonojen alkiot) samalla vakiolla ei muuta epäyhtälöä oleellisesti mitenkään. Siis Cauchyn epäyhtälö

$$\left(\sum ab\right)^2 \leq \sum a^2 \sum b^2$$

on homogeeninen astetta 2 molempien jonojen a ja b suhteen, sillä niiden vakiokertoimet supistuvat pois ja jokaisen alkion kertominen w:llä vastaa koko epäyhtälön kertomista w^2:lla. Sen sijaan Jensenin epäyhtälö konveksille funktiolle f

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}\right)$$

selvästikään ei ole homogeeninen, kunhan f on valittu tarpeeksi kierosti (tarkemmin sanottuna f ei saa olla potenssi- tai logaritmifunktio kuten myöhemmin nähdään). Cauchyn epäyhtälö on homogeeninen myös itse summien suhteen, koska siinä jokainen summamerkki voidaan kertoa samalla vakiolla vaikuttamatta itse epäyhtälöön. Täten Cauchyssa voidaan siirtyä käyttämään yhtä hyvin keskiarvoja:

$$\left(\frac{1}{n}\sum ab\right)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\sum a^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum b^2\right).$$

Lisätään mukaan vielä jonojen alkioille painot $p_i > 0$, joiden jonoa merkitään jälleen kirjaimella p. Jos erityisesti halutaan käyttää painoja, joiden summa on 1, niin käytetään p:n sijasta jonoa q: $\sum q = 1$. Kaikissa käsiteltävissä tilanteissa lausekkeet tulevat olemaan nollannen asteen homogeenisia painojen suhteen (eli painojen suuruusluokka ei vaikuta lausekkeiden kokoon), minkä vuoksi nämä kaksi erilaista painojärjestelmää ovat vaihdettavissa keskenään kaikkialla.

2 Käsitteitä ja perusominaisuuksia

Merkitään lukujen (a) tuttuja peruskeskiarvoja

$$\begin{aligned}
&\text{aritmeettinen keskiarvo:} && A(a) = \frac{\sum pa}{\sum p} && \text{tai} && \sum qa,\\
&\text{geometrinen keskiarvo:} && G(a) = \left(\prod a^p\right)^{1/\sum p} && \text{tai} && \prod a^q,\\
&\text{harmoninen keskiarvo:} && H(a) = \frac{\sum p}{\sum \frac{p}{a}} && \text{tai} && \frac{1}{\sum \frac{q}{a}}.
\end{aligned}$$

Näissä merkinnöissä (ja tulevissa) jätetään painot merkitsemättä esiin yksinkertaisuuden vuoksi. Luonnollisesti yksittäisessä epäyhtälössä painojen tulee olla samat epäyhtälön molemmilla puolilla. Tavanomaisiin keskiarvoihin päästään tässä valitsemalla kaikiksi p-painoiksi 1 tai vastaavasti kaikiksi q-painoiksi $1/n$.

Määritelmä 2.1. Lukujen a potenssikeskiarvo reaaliluvulle r on lauseke

$$M_r(a) = \left(\sum qa^r\right)^{1/r} \quad \text{tai} \quad \left(\frac{\sum pa^r}{\sum p}\right)^{1/r}.$$

Jos $r < 0$ ja jokin $a_i = 0$, niin määritellään $M_r(a) = 0$.

Välittömästi havaitaan, että itse asiassa $A(a) = M_1(a)$ ja $H(a) = M_{-1}(a)$. Seuraavat perusyhtälöt ovat syiltään selviä:

$$M_r(a) = (A(a^r))^{1/r} \qquad G(a) = e^{A(\log a)} \tag{2.1}$$

$$M_{-r}(a) = \frac{1}{M_r(1/a)} \qquad M_{rs}(a) = (M_s(a^r))^{1/r} \tag{2.2}$$

$$M_r(ka) = kM_r(a) \qquad G(ka) = kG(a). \tag{2.3}$$

Lemma 2.2. *Kaikille a ja r on voimassa epäyhtälö $\min a < M_r(a) < \max a$ paitsi kun kaikki a:t ovat yhtäsuuria tai $r < 0$ ja jokin a on nolla (jolloin ainakin toinen epäyhtälön puolista muuttuu yhtälöksi).*
Vastaavat ehdot huomioon ottaen on voimassa myös $\min a < G(a) < \max a$.

Todistus. Oletetaan, että annetut yhtäsuuruusehdot eivät päde. Yhtälö $\sum q(a - A(a)) = 0$ on ilmeisesti voimassa. Oletuksen perusteella summassa on kuitenkin nollasta poikkeavia termejä, josta väite heti seuraa, kun $r = 1$. Sama yhtälö voidaan esittää myös luvuille (a^r), josta yleinen väite seuraa kohdan (2.1) avulla.

Geometriselle keskiarvolle väite seuraa aivan samalla tavalla lähtemällä yhtälöstä $\prod(a/G(a))^q = 1$. □

Todistetaan seuraavaksi väite, jota edellisistä kohdista on jo voitu ennakoida.

Lemma 2.3. *Geometrinen keskiarvo voidaan määritellä ja tullaan määrittelemään nollantena potenssikeskiarvona:*

$$\lim_{r \to 0} M_r(a) = G(a).$$

Todistus. Oletetaan a:t positiivisiksi. Käyttämällä asymptoottisia arvioita $a^r = 1 + r \log a + \mathcal{O}(r^2)$ ja $\log(1 + r) = r + \mathcal{O}(r^2)$, kun $r \approx 0$, saadaan

$$\begin{aligned} M_r(a) &= \exp\left(\frac{1}{r}\log \textstyle\sum qa^r\right) = \exp\left(\frac{1}{r}\log\left(1 + r\textstyle\sum q\log a + \mathcal{O}(r^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(\textstyle\sum q \log a + \mathcal{O}(r)\right) \to \textstyle\prod a^q \overset{(2.1)}{=} G(a), \text{ kun } r \to 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.4. *Myös seuraavat raja-arvot ovat voimassa:*

$$\lim_{r\to\infty} M_r(a) = \max a$$
$$\lim_{r\to-\infty} M_r(a) = \min a.$$

TODISTUS. Olkoon a_k suurin luvuista a. Ensimmäinen väite seuraa heti epäyhtälöstä $q^{1/r}a_k \leq M_r(a) \leq a_k$. Toinen väite seuraa tästä käyttämällä kohtaa (2.2). □

Ottamalla huomioon normaalin aritmeettis-geometris-harmonisen AGH-epäyhtälön olemme nyt jo on osoittaneet toteen erikoisen epäyhtälöketjun $M_{-\infty} \leq M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_\infty$, kunhan painoja ei käytetä. Kuten myöhemmin nähdään, tämä ketju yleistyy potenssikeskiarvojen yleiseksi suuruusjärjestykseksi kaikille luvuille r.

3 Tuloksia potenssikeskiarvoista

Aloitetaan todistamalla ensin erikoistapaus potenssikeskiarvojen suuruusjärjestyksestä.

Lemma 3.1. *Jos $r > 0$, niin $M_r(a) < M_{2r}(a)$ paitsi kun kaikki a:t ovat samoja.*

TODISTUS. Kirjoitetaan väite auki muotoon $(\sum pa^r)^2 < \sum p \sum pa^{2r}$. Tämä on kuitenkin vain Cauchyn epäyhtälö lukujonoille $\sqrt{p}$ ja $\sqrt{p}a^r$. □

Seuraavaksi todetaan AGH-epäyhtälö todeksi myös yleisten painojen tapauksessa.

Lause 3.2 (AGH). *$A(a) > G(a) > H(a)$ paitsi kun kaikki a:t ovat samoja.*

TODISTUS. Oletetaan, että kaikki a:t eivät yhdy. Edellisten lemmojen 3.1 ja 2.3 perusteella saadaan $A(a) = M_1(a) > M_{1/2}(a) > M_{1/4}(a) > \cdots > \lim_{m\to\infty} M_{2^{-m}}(a) = G(a)$. Yhtälöiden (2.2) perusteella saadaan tästä epäyhtälön toinen puoli: $H(a) = A(1/a)^{-1} < G(1/a)^{-1} = G(a)$. □

Seuraavalle Hölderin epäyhtälölle esitetään kaksi eri muotoa, joista toinen korostaa silmää miellyttävää symmetriaa ja teorian yhtenäisyyttä toisen keskittyessä käytännöllisyyteen.

Lause 3.3 (Hölderin epäyhtälö). *Olkoon käytössä m kappaletta n:n pituisia jonoja $(a), (b), \ldots, (l)$. Tällöin*

$$G(a) + G(b) + \cdots + G(l) < G(a + b + \cdots + l)$$

paitsi kun kaikki jonot ovat suhteellisia keskenään (eli $(a) = k_{ab}(b)$ kaikilla eri jonopareilla) tai $\exists k \in [n] : a_k = b_k = \cdots = l_k = 0$.

Toisin: Valitaan mielivaltaiset luvut $\alpha, \beta, \ldots, \lambda > 0$, joille pätee $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1$. Tällöin

$$\sum a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda < (\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta \cdots (\sum l)^\lambda$$

paitsi kun kaikki jonot ovat suhteellisia keskenään tai jokin jonoista on nollajono.

Todistus. Todetaan ensin näiden kahden eri muodon ekvivalenttius. Ajatellaan muuttujakasaumaa matriisimuodossa

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{matrix}$$

Ensimmäisessä esitysmuodossa lukujonot luetaan riveittäin kuten helposti nähdään. Toisaalta lukemalla tätä matriisia lukujonojen kannalta sarakkeittain saadaan toisen muodon muuttujavalinnat täsmäämään.

Todistetaan väitteen toinen muoto AGH:n 3.2 avulla käyttämällä kreikkalaisia kirjaimia $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ painoina:

$$\begin{aligned} \frac{\sum a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda}{(\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta \cdots (\sum l)^\lambda} &= \sum \left(\frac{a}{\sum a}\right)^\alpha \left(\frac{b}{\sum b}\right)^\beta \cdots \left(\frac{l}{\sum l}\right)^\lambda \\ &< \sum \left(\alpha \frac{a}{\sum a} + \beta \frac{b}{\sum b} + \cdots + \lambda \frac{l}{\sum l}\right) = \alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1. \end{aligned}$$

□

Huomautus 3.4. Miten sitten muistaa tämäkin epäyhtälö? Apuun tässä tulee luova mielikuvitus ja Jensenin epäyhtälö. Geometrinen keskiarvohan vastaa logaritmifunktiota (kuten aritmeettinen identiteettifunktiota ja harmoninen käänteisluvun ottoa) potenssikeskiarvoissa. Logaritmi on konkaavi funktio, jolle kirjoitettuna Jensenin epäyhtälössä erikseen laskettujen arvojen keskiarvo on yhteisestä pisteestä otettua arvoa pienempi. Eli erikseen on heikkoa olla. Näin on nyt mukavasti myös tilanne Hölderin epäyhtälössä.

Määritellään kaikille reaaliluvuille $k \neq 0, 1$ konjugaattiluku $k' = k/(k-1)$. Parempi tapa tarkastella konjugaattisuutta on käyttää yhtälöä

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1.$$

Hölderin epäyhtälöstä seuraa myös seuraava Cauchyn epäyhtälön yleistys.

Seuraus 3.5. *Olkoon k reaaliluku, $k \neq 0, 1$ ja k' sen konjugaatti. Vaaditaan lisäksi, että jono (ab) ei ole nollajono. Tällöin voimassa ovat epäyhtälöt*

$$\begin{aligned} \textstyle\sum ab &< (\textstyle\sum a^k)^{1/k}(\textstyle\sum b^{k'})^{1/k'} \quad (k > 1) \quad \textit{ja} \\ \textstyle\sum ab &> (\textstyle\sum a^k)^{1/k}(\textstyle\sum b^{k'})^{1/k'} \quad (k < 1). \end{aligned}$$

Näissä on voimassa yhtäsuuruus, jos jonot (a^k) ja $(b^{k'})$ ovat suhteellisia.

TODISTUS. (i) Valitaan Hölderin epäyhtälössä 3.3 $\alpha = 1/k$ ja $\beta = 1/k'$, kun $k > 1$.
(ii) Oletetaan sitten $0 < k < 1$, jolloin $k' < 0$. Määritellään $l = 1/k, u = (ab)^k, v = b^{-k}$, jolloin myös $l > 1, k' = -kl, ab = u^l, a^k = uv, b^{k'} = v^{l'}$. Näin väite saadaan muunnettua tapaukseksi (i) muuttujilla u, v, l.
(iii) Tapaus $k < 0$ muuttuu tapaukseksi (ii) vaihtamalla k:n ja k':n rooleja.
□

Todistetaan seuraavaksi jo edellä mainostettu potenssikeskiarvojen suuruusjärjestys.

Lause 3.6. *Olkoon $r < s$. Tällöin potenssikeskiarvoille on voimassa järjestys*

$$M_r(a) < M_s(a)$$

paitsi kun kaikki a:t ovat samoja tai kun $s \leq 0$ ja jokin luvuista a on nolla.

Todistus. Oletetaan ensin $0 < r < s$ ja kirjoitetaan $r = s\alpha$, missä siis $0 < \alpha < 1$. Merkitään $pa^s = u$ ja $p = v$, jolloin $v > 0$ ja $pa^{s\alpha} = (pa)^{s\alpha}p^{1-\alpha} = u^\alpha v^{1-\alpha}$. Siispä Hölderin epäyhtälön 3.3 perusteella on voimassa

$$\sum pa^r = \sum u^\alpha v^{1-\alpha} < \left(\sum u\right)^\alpha \left(\sum v\right)^{1-\alpha} = \left(\sum pa^s\right)^\alpha \left(\sum p\right)^{1-\alpha},$$

josta väite heti seuraakin pienellä manipulaatiolla. Kaikki muut tapaukset muuntuvat tähän ensimmäiseen helposti potenssikeskiarvon määritelmän ja kohdan (2.2) avulla. □

Luonnollinen kysymys Hölderin epäyhtälön ensimmäistä muotoa katsottaessa on, miten tämä epäyhtälö siirtyy yleisiin potenssikeskiarvoihin. Siinä missä geometriselle keskiarvolle Jensen-analogiassa pohdittiin logaritmia tarkastellaan nyt potenssikeskiarvon taustalla olevaa funktiota x^r. Tämä funktio on konveksi, kun $r \geq 1$ ja konkaavi, kun $0 < r < 1$. Tämän perusteella voitaisiin ehkä arvata vastaavan epäyhtälön olevan voimassa yleisillä potenssikeskiarvoilla Jensen-analogian kertoessa epäyhtälön suunnan. Näin asia todella onkin, tosin negatiivisilla r:n arvoilla esiintyy kauneusvirhe suunnan pysyessä konkaavien funktioiden kaltaisena, vaikka x^r on tällöin konveksi.

Lause 3.7 (Minkowskin epäyhtälö). *Oletetaan, että $r \neq 1$. Tällöin voimassa ovat seuraavat epäyhtälöt:*

$$M_r(a) + M_r(b) + \cdots + M_r(l) > M_r(a + b + \cdots + l) \quad (r > 1) \qquad \textit{ja}$$
$$M_r(a) + M_r(b) + \cdots + M_r(l) < M_r(a + b + \cdots + l) \quad (r > 1)$$

paitsi kun kaikki lukujonot ovat suhteellisia keskenään tai $r \leq 0$ ja jollain k:n arvolla $a_k = b_k = \cdots = l_k = 0$.

Todistus. Arvolla $r = 1$ epäyhtälöt jäävät pelkiksi identiteeteiksi. Hölderin epäyhtälö sen sijaan on erikoistapaus $r = 0$. Epäyhtälöt ovat tosia myös arvoilla $r = \infty$ ja $-\infty$, vaikkakin silloin yhtäsuuruusehdot muuntuvat hieman.

Yksinkertaistetaan merkintöjä valitsemalla $a+b+\cdots+l = s$ ja $M_r(s) = S$. Alustetaan todistusta hajottamalla s:n määritelmän avulla:

$$\begin{aligned} S^r &= \sum qs^r = \sum qas^{r-1} + \sum qbs^{r-1} + \cdots + \sum qls^{r-1} \\ &= \sum(q^{1/r}a)(q^{1/r}s)^{r-1} + \sum(q^{1/r}b)(q^{1/r}s)^{r-1} + \cdots + \sum(q^{1/r}l)(q^{1/r}s)^{r-1}. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $r > 1$. Käytetään epäyhtälöä 3.5 arvolla $k = r$ jokaiseen edellisen summakehitelmän summaan erikseen. Kannattaa muistaa, että $r - 1 = r/r'$, missä r' on siis r:n konjugaatti. Seuraavassa epäyhtälössä tunnistetaan yhteiseksi tekijäksi $(\sum qs^r)^{1/r'} = S^{r-1}$:

$$S^r \leq (\sum qa^r)^{1/r}(\sum qs^r)^{1/r'} + \cdots = S^{r-1}\left((\sum qa^r)^{1/r} + \dots\right).$$

Väite seuraa, kun ylimääräiset S:t supistetaan pois.

Tapauksissa $0 < r < 1$ ja $r < 0$ väite todistetaan aivan identtisellä tavalla, ainoana erona on valita lemmassa 3.5 alempi epäyhtälö, $r = k < 1$. $\square$

Minkowskin epäyhtälölle voidaan antaa vielä joitain erikoistapauksia ja vaihtoehtoisia esitysasuja.

Seuraus 3.8. *Valitaan $r \neq 0, 1$. Tällöin*

$$\begin{aligned}
(\textstyle\sum(a + b + \cdots + l)^r)^{1/r} &< (\textstyle\sum a^r)^{1/r} + \cdots + (\textstyle\sum l^r)^{1/r} \quad (r > 1) \quad \textit{ja} \\
(\textstyle\sum(a + b + \cdots + l)^r)^{1/r} &> (\textstyle\sum a^r)^{1/r} + \cdots + (\textstyle\sum l^r)^{1/r} \quad (r < 1)
\end{aligned}$$

paitsi kun kaikki lukujonot ovat suhteellisia keskenään tai $r \leq 0$ ja jollain k:n arvolla $a_k = b_k = \cdots = l_k = 0$.

Seuraus 3.9. *Olkoon $r > 0$ ja $r \neq 1$. Tällöin*

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum(a + b + \cdots + l)^r &> \textstyle\sum a^r + \sum b^r + \cdots + \sum l^r \quad (r > 1) \quad \textit{ja} \\
\textstyle\sum(a + b + \cdots + l)^r &< \textstyle\sum a^r + \sum b^r + \cdots + \sum l^r \quad (0 < r < 1)
\end{aligned}$$

paitsi kun jokaisesta joukosta $J_k = \{a_k, b_k, \dots l_k\}$ kaikki alkiot yhtä lukuunottamatta ovat nollia.

Huomautus 3.10. Hölderin epäyhtälö voidaan geometrisesti mieltää tiedoksi siitä, että vektorien sisätulo on aina enintään niiden pituuksien tulo. Minkowskin epäyhtälö sen sijaan on itse asiassa vain n-ulotteisen avaruuden kolmioepäyhtälö yleisen L^r-normin suhteen (L^2-normi on tavanomainen euklidinen etäisyys).

4 Summat

Määritelmä 4.1. Määritellään lukujonon (a) potenssisumma

$$S_r(a) = (\sum a^r)^{1/r},$$

kaikille positiivisille reaaliluvuille r.

Selvästikin voimassa on yhteys

$$S_r(a) = n^{1/r} M_r(a), \tag{4.1}$$

kun potenssikeskiarvossa valitaan yksikköpainot.

Lemma 4.2. *On voimassa raja-arvot*

$$\lim_{r\to\infty} S_r(a) = \max a, \qquad \lim_{r\to-\infty} S_r(a) = \min a \quad \textit{ja}$$

$$\lim_{r\to 0} S_r(a) = \infty \ \ \textit{paitsi kun vain yksi luvuista } a \textit{ poikkeaa nollasta.}$$

Todistus. Ensimmäiset kaksi väitettä seuraavat suoraan yhteydestä (4.1) ja lemmasta 2.4. Tunnetusti $a^r \to 1$, kun $r \to 0$. Niinpä $\sum a^r$ lähestyy nollasta poikkeavien lukujen lukumäärää > 1 ja sen $1/r$:nnes potenssi lähestyy ääretöntä. □

Todistetaan seuraavaksi summien suuruusjärjestykselle tulos, jota myös kutsutaan hämäävästi Jensenin epäyhtälöksi.

Lause 4.3. *Olkoon* $0 < r < s$. *Summille on kaikilla jonoilla* (a) *voimassa järjestys*

$$S_s(a) < S_r(a)$$

paitsi kun kaikki luvut a ovat yhtä lukuun ottamatta nollia. Järjestys on siis kääntynyt potenssikeskiarvoihin verrattuna.

Todistus. Väitteen epäyhtälö on homogeeninen a:n suhteen, joten voidaan olettaa, että $\sum a^r = 1$. Siispä $a^r \le 1$, josta seuraa $a^s \le a^r \le 1$ $(r < s)$ ja $\sum a^s \le \sum a^r = 1$. □

Tämän uuden työkalun avulla Hölderin epäyhtälöä voidaan yleistää yleisempiin painoihin.

Lause 4.4. *Olkoon $\alpha, \beta, \dots, \lambda > 0$ mielivaltaisia, joille pätee $\alpha+\beta+\cdots+\lambda > 1$. Tällöin*

$$\textstyle\sum a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda < (\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta \cdots (\sum l)^\lambda$$

paitsi seuraavissa tapauksissa:

(i) jokin jonoista on nollajono.

(ii) on olemassa $k \in [n]$: jokaisen jonon k:nnes alkio on jonon ainoa nollasta poikkeava alkio.

Todistus. Palautetaan ongelma Hölderin epäyhtälön tilanteeseen merkitsemällä $\alpha = k\alpha', \beta = k\beta', \dots, \lambda = k\lambda'$, missä siis $k = \alpha + \beta + \cdots + \lambda$. Kirjoitetaan vielä lisäksi $a^k = A, b^k = B, \dots, l^k = L$. Tällöin Hölderiä 3.3 ja lausetta 4.3 käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}\textstyle\sum a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda &= \textstyle\sum A^{\alpha'} B^{\beta'} \cdots L^{\lambda'} < (\sum A)^{\alpha'} (\sum B)^{\beta'} \cdots (\sum L)^{\lambda'} \\ &= \textstyle(\sum a^k)^{\alpha/k} (\sum b^k)^{\beta/k} \cdots (\sum l^k)^{\lambda/k} < (\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta \cdots (\sum l)^\lambda,\end{aligned}$$

missä viimeinen arvio seuraa epäyhtälöstä $k > 1$. □

4.1 Painotetut summat

Määritelmä 4.5. Määritellään lukujen a painotetuksi potenssisummaksi

$$I_r(a) = (\textstyle\sum p a^r)^{1/r},$$

missä luvut p ovat siis mitä tahansa positiivisia painoja.

Valitsemalla kaikiksi painoiksi 1 päädytään summiin, valitsemalla painoiksi $1/n$ päädytään potenssikeskiarvoihin. Niinpä painotetuille summille ei voida potenssisummien ja potenssikeskiarvojen tapaan osoittaa suuruusjärjestystä.

Summien ja keskiarvojen välillä tapahtuvaa epäyhtälön kääntymistä voidaan kuitenkin valottaa tarkemmin painotettujen yleisten summien avulla. Tuloksesta huomataan myös, että potenssikeskiarvot ja potenssisummat ovat tietyssä mielessä ääritapauksia järjestettävistä käsitteistä.

Lause 4.6. *1. Olkoon $0 < r < s$.*

$$\forall (a), (p) : I_r(a) < I_s(a) \iff \textstyle\sum p \leq 1.$$

Tässä on voimassa yhtäsuuruus, kun (a) *on nollajono tai* $\sum p = 1$ *ja kaikki* a*:t ovat samoja.*
2. Olkoon $0 < r < s$.

$$\forall (a), (p) : I_s(a) < I_r(a) \iff \forall k \in [n] : p_k \geq 1.$$

Tässä on voimassa yhtäsuuruus, kun (a) *on nollajono tai kun* a_k *on ainoa nollasta poikkeava* a *ja* $p_k = 1$.
Muissa tapauksissa (painoille) ei siis ole olemassa aina vallitsevaa suuruusjärjestystä.

TODISTUS. Ensimmäinen väite, $\Rightarrow$: Valitaan jonoksi (a) ykkösjono, jolloin $I_r(a) = (\sum p)^{1/r}$, joten epäyhtälön oikeellisuutta varten tulee olla voimassa $\sum p \leq 1$.
$\Leftarrow$: Kirjoitetaan $r = s\alpha, 0 < \alpha < 1$, jolloin

$$\sum pa^r = \sum (pa^s)^\alpha p^{1-\alpha} < (\sum pa^s)^\alpha (\sum p)^{1-\alpha} \leq (\sum pa^s)^\alpha$$

Hölderin epäyhtälön perusteella.
Toinen väite, $\Rightarrow$: Valitaan $a_k = 1$ ja muut a:t nolliksi. Tällöin $I_r(a) = p_k^{1/r}$, joten tulee olla $p_k \geq 1$.
$\Leftarrow$: Kirjoitetaan $s = r\beta, \beta > 1$ ja oletetaan homogeenisuuden perusteella $\sum pa^r = 1$. Siispä $pa^r \leq 1$ ja

$$\sum pa^s = \sum (pa^r)^\beta p^{1-\beta} \leq \sum (pa^r)^\beta < \sum pa^r.$$

□

5 Konveksit funktiot ja keskiarvot

Määritelmä 5.1. Funktiota $\phi : A \to \mathbb{R}$, missä A on $\mathbb{R}$:n avoin väli kutsutaan konveksiksi funktioksi, kun

$$\forall a, b \in A : \frac{\phi(a) + \phi(b)}{2} \geq \phi\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Funktio ϕ on konkaavi, kun $-\phi$ on konveksi, ts. konkaaville funktiolle yllä oleva epäyhtälö pätee käännetyllä merkillä.

Voimme turvallisin mielin heti alkuun olettaa, että käyttämämme konveksit ja konkaavit funktiot ovat koko tarkasteluvälillä jatkuvia funktioita. Epäjatkuvat konveksit funktiot nimittäin ovat epäjatkuvia ja rajoittamattomia kaikilla reaalilukuväleillä eikä niitä voida edes konstruoida ilman valinta-aksioomaa.

Tämän lisäksi seuraavassa keskitytään pelkästään (tarkastelujoukossa) monotonisiin konvekseihin funktioihin. Tämä on kuitenkin vain tietyissä kohdissa tarvittava yksinkertaistus, joka varmistaa käänteisfunktioiden olemassaolon.

Lemma 5.2. *Derivoituvalle funktiolle ϕ*

$$\phi \text{ on konveksi } \Leftrightarrow \forall x \in A : \phi''(x) \geq 0.$$

TODISTUS. $\Rightarrow$: Olkoon $x \in A$, $h = k > 0$ ja valitaan $a = x + k + h, b = x$. Konveksiuden määritelmästä, h:n ja k:n positiivisuudesta sekä ϕ:n jatkuvuudesta saadaan

$$\begin{aligned}0 &\leq \frac{\phi(x+k+h) + \phi(x) - \phi(x+h) - \phi(x+k)}{hk} \\ &= \frac{\frac{\phi(x+k+h)-\phi(x+k)}{h} - \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}}{k} \xrightarrow{h\to 0+} \frac{\phi'(x+k) - \phi'(x)}{k} \xrightarrow{k\to 0+} \phi''(x).\end{aligned}$$

Muut tapaukset, joissa esimerkiksi $k < 0$ saadaan aivan samoin.

$\Leftarrow$: Valitaan mielivaltaiset $a, b \in A$ ja merkitään $c = (a+b)/2$. Taylorin sarjan Lagrangen jäännöstermiä käyttämällä

$$\exists r \in [a, c] \cup [c, a] : \phi(a) = \phi(c) + (a-c)\phi'(c) + (a-c)^2\phi''(r)/2.$$

Kirjoitetaan tämä sama kehitelmä myös b:lle ja summataan ne yhteen:

$$\phi(a) + \phi(b) = 2\phi(c) + (a-c)^2\phi''(r_a)/2 + (b-c)^2\phi''(r_b)/2 \geq 2\phi(c).$$

□

5.1 Keskiarvot konvekseille funktioille

Todistetaan ensin lämmittelynä Jensenin epäyhtälö yleisille painoille.

Lause 5.3 (Jensenin epäyhtälö). *Konveksille funktiolle ϕ, kaikille jonoille (a) (määrittelyjoukossa) ja kaikille painoille (q), $\sum q = 1$ on voimassa epäyhtälö*

$$\phi(\textstyle\sum qa) < \sum q\phi(a)$$

paitsi kun ϕ on lineaarinen koko välillä $[\min a, \max a]$.

Todistus. Todistetaan väite ensin painoille $q = 1/n$ käänteisellä induktiolla. Oletetaan, että väite pätee näille painoille, kun $n = 2^k$ (alkuaskel $k = 1$ tunnetaan todeksi jo). Tällöin

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{\sum a}{n}\right) &= \phi\left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)\\
&\le \frac{\phi\left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right) + \phi\left(\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}{2}\\
&\le \frac{\phi(a_1) + \cdots + \phi(a_{2^{k+1}})}{2^{k+1}} = \frac{\sum \phi(a)}{n}.
\end{aligned}$$

Tämän jälkeen osoitetaan vielä, että jos väite pätee painoille $q = 1/n$ tapauksessa $n = k$, niin se pätee myös tapauksessa $n = k - 1$. Yritetään osoittaa väite todeksi luvuille $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$:

$$\begin{aligned}
\phi(A(a)) &= \phi\left(\frac{(k-1)A(a) + A(a)}{k}\right) = \phi\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + A(a)}{k}\right)\\
&\le \frac{\phi(a_1) + \phi(a_2) + \ldots \phi(a_{k-1}) + \phi(A(a))}{k},
\end{aligned}$$

josta väite tapauksessa $n = k - 1$ seuraa turhat $A(a)$:t poistamalla.

Rationaalisiin painoihin epäyhtälössä päästään monistamalla jonon lukuja sopivissa mittasuhteissa. Yleisten reaalilukupainojen tapaus voidaan todistaa raja-arvojen avulla, koska ϕ on jatkuva funktio. □

Katsotaanpa vielä tarkemmin tavanomaisia potenssikeskiarvoja. Yleisesti ajatellen niissä siirrytään ensin toisenlaiseen avaruuteen ottamalla kaikista luvuista r:nnes potenssi, näistä keskiarvo ja lopulta palataan tavanomaiseen avaruuteen ottamalla $1/r$:nnes potenssi eli alkuperäisen muunnosoperaation käänteisoperaatio. Tämä voidaan välittömästi yleistää.

Määritelmä 5.4. Funktioon ϕ, jolle on olemassa käänteisfunktio ϕ^{-1}, liittyvä keskiarvo määritellään lausekkeena

$$M_\phi(a) = \phi^{-1}\sum q\phi(a).$$

Potenssikeskiarvot ovat siis itse asiassa vain potenssifunktioihin liittyviä yleisiä funktiokeskiarvoja (geometrisen keskiarvon kohdalla logaritmifunktio käsitetään nollannen potenssin funktioksi). Potenssikeskiarvoille tunnetusti oli voimassa siis potenssi suuruusjärjestyksen mukainen suuruusjärjestys. Ainakin positiivisten ja negatiivisten potenssien kesken tämä voidaan sanoa myös konveksiuden avulla. Mitä suurempi funktion potenssi on, sitä jyrkemmin se humpsahtaa äärettömiin ja on siis sitä konveksimpi. Niinpä näin heuristisesti voisi toivoa, että ylipäätäänkin funktioiden välillä on ominaisuus, jonka mukaan kahdesta funktiosta konveksimpaan liittyvä keskiarvo olisi suurempi näiden funktioiden keskiarvoista.

Tämä konjektuuri ei kuitenkaan ole aivan helposti formalisoitavissa. Esimerkiksi konkaavin logaritmifunktion rooli konveksien funktioiden keskellä on hieman häiritsevää (tosin se johtuu vain negatiivisten potenssien vähenevyydestä). Jensenin epäyhtälö osoittautuu kuitenkin lopulta koko ratkaisun avaimeksi.

5.2 Keskiarvojen ominaisuuksia

Ensiksi tulee todeta keskiarvojen ekvivalenssiluokkien koostumus, kuten aina algebrallisissa struktuureissa.

Lemma 5.5. *Kahden jatkuvan ja monotonisen funktion keskiarvot yhtyvät kaikkialla jos ja vain jos toinen funktioista on toisen lineaarimuunnos. Toisin sanoen*

$$\forall (a),(q): \quad M_\phi(a) = M_\psi(a) \iff \exists \alpha \neq 0, \beta : \phi = \alpha\psi + \beta.$$

Todistus. $\Leftarrow$:

$$\phi(M_\phi(a)) = \sum q(\alpha\psi(a)+\beta) = \alpha\sum q\psi(a)+\beta = \alpha\psi(M_\psi(a))+\beta = \phi(M_\psi(a)).$$

$\Rightarrow$: Kuulukoon $[H,K]$ tarkasteluväliin ja valitaan oletetussa yhtälössä $n = 2, a_1 = H, a_2 = K, H < t < K, q_1 = (K-t)/(K-H)$ ja $q_2 = (t-H)/(K-H)$. Merkitään tällöin eri puolten yhteistä arvoa x:llä:

$$\begin{aligned} x &= \psi^{-1}\left(\frac{K-t}{K-H}\psi(H) + \frac{t-H}{K-H}\psi(K)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\frac{K-t}{K-H}\phi(H) + \frac{t-H}{K-H}\phi(K)\right). \end{aligned}$$

Tällöin t:n liikkuessa välillä $[H,K]$ myös x saa kaikki arvot väliltä $[H,K]$, sillä ϕ ja ψ ovat jatkuvia funktioita. Niinpä yhtälön vasen puoli

$$\frac{K-t}{K-H}\psi(H) + \frac{t-H}{K-H}\psi(K) = \psi(x)$$

on voimassa koko välillä $x \in [H,K]$ ja määrittelee pisteiden $\psi(H)$ ja $\psi(K)$ välisen janan. Yksinkertaisella manipulaatiolla voidaan laskea

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{K-t}{K-H}\phi(H) + \frac{t-H}{K-H}\phi(K) \\ &= \frac{\psi(K)-\psi(x)}{\psi(K)-\psi(H)}\phi(H) + \frac{\psi(x)-\psi(H)}{\psi(K)-\psi(H)}\phi(K) = \alpha\psi(x) + \beta, \end{aligned}$$

missä α ja β eivät riipu x:stä. Täten $x = \phi^{-1}(\alpha\psi(x) + \beta)$ kaikilla $x \in [H,K]$. $\square$

Lause 5.6. *Olkoon ϕ jatkuva positiivisten reaalilukujen joukossa ja oletetaan, että kaikilla $(a), (q)$ ja $k > 0$ on voimassa*

$$kM_\phi(a) = M_\phi(ka).$$

Tällöin $M_\phi(a) = M_r(a)$ jollain $r \in \mathbb{R}$, joten potenssikeskiarvot ovat ainoat normaalin lukukeskiarvon tavoin käyttäytyvät (tässä siis homogeeniset) keskiarvot.

Todistus. Aivan ensin tulee huomata, että väite EI sano, että ϕ olisi jokin potenssifunktio. Edellisen lemman 5.5 perusteella voidaan kuitenkin sanoa, että ϕ on jokin potenssifunktion lineaarimuunnos.

Välittömästi todetaan, että väitteen yhtälö on voimassa kaikille potenssikeskiarvoille eli kun $\phi(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$. Lemman 5.5 perusteella voidaan olettaa, että $\phi(1) = 0$. Merkitään $\psi(x) = \phi(kx)$, jolloin $M_\phi(a) = k^{-1}M_\phi(ka) =$

$M_\psi(a)$. Täten lemman perusteella saadaan funktioiden α ja β avulla kuitenkin $\phi(kx) = \alpha(k)\phi(x) + \beta(k), \alpha(k) \neq 0$ ja $\beta(k) = \phi(k)$ (sijoita $x = 1$). Merkitään k:n tilalle y ja sijoitetaan tämä viimeinen tieto $\phi(kx)$:n yhtälöön:

$$\phi(xy) = \alpha(y)\phi(x) + \phi(y)$$

kaikilla $x, y > 0$. Vastaavasti toki myös

$$\phi(xy) = \alpha(x)\phi(y) + \phi(x),$$

joten näistä kahdesta yhdistelemällä saadaan

$$\frac{\alpha(x) - 1}{\phi(x)} = \frac{\alpha(y) - 1}{\phi(y)}.$$

Tässä yhtälössä toisella puolella on pelkän x:n funktio ja oikealla puolella pelkän y:n funktio, joten yhtälön puolien tulee olla vakioita kaikilla $x, y > 0$, mistä seuraa

$$\alpha(y) = c\phi(y) + 1$$

ja

$$\phi(xy) = c\phi(x)\phi(y) + \phi(x) + \phi(y).$$

Pilkotaan ongelma nyt paloihin:
(1) Olkoon $c = 0$. Tällöin yhtälö muuttuu muotoon $\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$, jonka ainoa jatkuva ratkaisu on $\phi(x) = C \log x$. Siis $M_\phi(a) = CG(a)$.
(2) Olkoon $c \neq 0$. Merkitään $f(x) = c\phi(x) + 1$, jolloin pienellä tarkastelulla nähdään yhtälön muuttuvan miellyttävämpään muotoon

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Tämän ainoa ratkaisu on $f(x) = x^r, r \neq 0$, joten

$$\phi(x) = \frac{x^r - 1}{c}$$

ja $M_\phi(a) = M_r(a)$. □

Lause 5.7. *Kahden jatkuvan ja aidosti monotonisen funktion keskiarvoille $M_\phi(a)$ ja $M_\psi(a)$, kaikille (a) ja kaikille (q) on voimassa*

$$M_\psi(a) \leq M_\phi(a)$$

jos ja vain jos funktio

$$\rho = \phi \circ \psi^{-1}$$

on konveksi ja ϕ on kasvava tai ρ on konkaavi ja ϕ on vähenevä.

TODISTUS. Selvästi myös ρ on monotoninen ja jatkuva. Kirjoitetaan lisäksi vielä esiin apumuunnos $x = \psi(a), a = \psi^{-1}(x)$. Sijoitetaan tämä muunnos jonon (a) tilalle väitteessä, jolloin päästään yhtäpitävään muotoon

$$\psi^{-1}\left(\sum qx\right) \leq \phi^{-1}\left(\sum q\rho(x)\right).$$

Ottamalla tässä molemmista puolista $\phi(\cdot)$ päädytään ekvivalenttiin Jensenin epäyhtälön muotoon. Tämä todistaa väitteen, kun muistetaan, että vähenevän funktion käyttäminen epäyhtälöön kääntää epäyhtälön merkin. $\square$

Kuten potenssikeskiarvojen yhteydessä mainitusta analogiasta Jensenin epäyhtälöön voitaisiin arvata, myös Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöillä on yleisiä funktioita varten räätälöidyt yleistykset. Ne jätetään kuitenkin tästä esityksestä pois lievän häiriintyneisyytensä ja vaikean soveltamisensa vuoksi.