Lokakuun 2014 vaikeammat valmennustehtävät

Ratkaisuja voi lähettää joulukuun alkuun asti osoitteeseen Jesse Jääsaari, Kristianinkatu 3 A 11, 00170 Helsinki, tai sähköisesti osoitteeseen jesse.jaasaari@helsinki.fi. Tehtävistä voi esittää kysymyksiä sähköpostitse.

1. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$, joille pätee

- $f(n)$ on neliöluku kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.
- $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

2. Olkoot x ja y erisuuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että

$$\frac{x^2 + 4xy + y^2}{x^3 - y^3}$$

ei ole kokonaisluku.

3. Olkoot a, b, c pareittain erisuuria positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3} > 8abc.$$

4. Määritä kaikki alkuluvut p siten, että luvulla p^2+11 on tasan kuusi tekijää (mukaanlukien 1 ja luku itse).

5. Piste D sijaitsee kolmion ΔABC sivulla BC ja piste E sivulla AC siten, että $BD = AE$. Kolmioiden ΔADC ja ΔBEC ympäripiirrettyjen ympyröiden keskipisteiden kautta kulkeva suora leikkaa suorat AC ja BC pisteissä K ja L. Todista, että $KC = LC$.

6. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja, joilla luku ab jakaa luvun $a^2 + b^2 + 1$. Osoita, että

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = 3.$$

7. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Todista, että jos $\frac{b^n - 1}{b - 1}$ on alkuluvun potenssi jollakin luonnollisella luvulla b, niin n on alkuluku.

8. Olkoon $n \geq 3$. Sammakko hyppii reaaliakselilla aloittaen pisteestä 0 ja tekemällä n hyppyä joiden pituudet ovat 1,2,...,n jossakin järjestyksessä. Jos sammakko päätyy pisteeseen $a \leq 0$, niin seuraavaksi sammakko hyppää oikealle. Mikäli sammakko päätyy pisteeseen $a > 0$, niin seuraava hyppy suuntautuu vasemmalle. Määritä suurin $k \in \mathbb{N}$ siten, että sammakko voi järjestää hyppynsä niin, että se ei koskaan päädy pisteisiin 1,2,...,k.

9. Olkoon kolmion ΔABC ympäripiirretty ympyrä Γ, ja olkoon sen sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I. Suorat AI, BI, CI leikkaavat ympyrän Γ pisteissä D, E, F. Ympyrälle Γ pisteisiin F, D, E piirretyt tangentin leikkaavat suorat AI, BI, CI pisteissä R, S, T. Todista, että

$$AR \cdot BS \cdot CT = ID \cdot IE \cdot IF.$$

10. Tarkastellaan 10×10-ruudukkoa. Jokaisella siirrolla valitaan neljä ruutua, jotka sijaitsevan kahden rivin ja kahden sarakkeen leikkauksessa, ja väritetään ne. Siirto voidaan tehdä vain jos ainakin yksi näistä ruuduista on ennestään värittämätön. Mikä on suurin määrä siirtoja, jolla ruudukko voidaan värittää kokonaan?