Suomen matemaattinen yhdistys ry.
Valmennusjaosto

Harjoitustehtävät, helmi–maaliskuu 2011. Helpommat

Aktiivisuus, vastausten määrä ja laatu on yksi olennaisesti huomioon otettavista tekijöistä valittaessa kilpailujoukkueita. Harjoitustehtävien tavoite on tehtävien ratkaisemisen ohella opetella kirjoittamaan ratkaisuja ymmärrettävästi. Kirjoittakaa siis ratkaisunne paperille ja tuokaa ne seuraavaan valmennusviikonloppuun tai lähettäkää ne paperin alalaidassa olevaan osoitteeseen. Sähköinen lähettäminen on mahdollinen (`matti.lehtinen@helsinki.fi`), mutta ei ensisijainen vaihtoehto. Ei haittaa, jos kaikki tehtävät eivät ratkea!

1. Kaikki maailman ihmiset ovat kätelleet muita ihmisiä jonkin määrän kertoja. Todista, että sellaisia ihmisä, jotka ovat kätelleet muita ihmisiä parittoman määrän kertoja, on parillinen määrä.

2. Päättele laskulaitteisiin turvautumatta, kumpi luvuista 31^{11} ja 17^{14} on suurempi.

3. Reaaliluvut x, y ja z toteuttavat yhtälön

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1.$$

Osoita, että

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0.$$

4. Funktiolle f pätee $f(x)+4f(1-x)=x^2-3x+5$ kaikilla reaaliluvuilla x. Määritä f.

5. Määritä kaikki funktiot $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, joille $f(2011)=1$ ja $f(x)f(y)=f(x-y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoon

$$A=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}.$$

Osoita, että jonossa A, $2A$, $4A$, $8A$, $\ldots$, 2^nA, $\ldots$ on ainakin yksi kokonaisluku.

7. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusa on AB. Ympyrä, jonka halkaisija on AC, leikkaa AB:n myös pisteessä D. Tämän ympyrän pisteeseen D piirretty tangentti leikkaa BC:n pisteessä E Osoita, että kolmio DEB on tasakylkinen.

c/o Dos. Matti Lehtinen
Taskilantie 30 A
90580 OULU

puh. (08) 554 6683
040 583 0678

Pankki
Nordea FI68 1019 3000 2059 98

8. Todista, että kolmiossa enintään yksi korkeusjana on pidempi kuin se sivu, jota vastaan kohtisuorassa kyseinen korkeusjana on.

9. 20 luokkatoveria lähti kesälomalle. Jokainen lähetti postikortin kymmenelle luokkatoverilleen. Osoita, että ainakin kaksi lähetti kortin toinen toisilleen.

10. Ratkaise yhtälö

$$x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$$

11. Kolmen ympyrän keskipisteet ovat samalla suoralla; yksi ympyröistä sivuaa kahta muuta ulkopuolisesti. Ympyröiden säteet ovat a, b ja c. On olemassa ympyrä, joka sivuaa kaikkia kolmea näistä annetuista ympyröistä. Määritä sen säde (a:n, b:n ja c:n funktiona).

12. Määritä kaikki kolmikot (x, y, z), jotka toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 90 \\ (y+z)(x+y+z) = 105 \\ (z+x)(x+y+z) = 255. \end{cases}$$

13. Numerot 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 voidaan kirjoittaa $7! = 5040$ eri järjestykseen. Jos nämä tulkitaan luvuiksi ja laitetaan suuruusjärjestykseen alkaen luvusta 1234567, niin mikä on 2011. luku?

14. Kokoukseen osallistuneista tutkijoista osa oli ennestään tuttuja. Osoittautui, että kokouksessa ei ollut ketään kahta tutkijaa, joilla olisi ollut osallistujien joukossa yhtä monta tuttua ja joilla olisi ollut joku yhteinen tuttava. Osoita, että kokouksen osallistujissa oli ainakin yksi sellainen, jolla oli tasan yksi tuttava.

15. Kokouksessa oli $2n$ osallistujaa ja jokainen tunsi ainakin puolet läsnäolijoista. Osoita, että osallistujien joukossa oli neljä sellaista, jotka voitiin asettaa istumaan pyöreän pöydän ympärille niin, että istujan kummallakin puolella oli hänen tuttavansa.