

21. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

29. maaliskuuta 2007

Työaika 4 tuntia. Joka tehtävän maksimipistemäärä on 5. Vain kirjoitus- ja piirustusvälineiden käyttö on sallittu.

Tehtävä 1.

Etsi *yksi* yhtälön

$$x^2 - 2x - 2007y^2 = 0$$

positiivinen kokonaislukuratkaisu.

Tehtävä 2.

On annettu kolmio, suora ja kolme suorakaidetta, joiden yksi sivu on annetun suoran suuntainen, niin, että suorakaiteet peittävät kokonaan kolmion sivut. Todista, että suorakaiteet peittävät kokonaan kolmion sisäosan.

Tehtävä 3.

Taululle on kirjoitettu luku 10^{2007} . Anne ja Berit pelaavat peliä, jossa pelaaja tekevät vuorotellen yhden seuraavista operaatioista:

- (i) Pelaaja korvaa taululla olevan luvun x kahdella ykköistä suuremmalla kokonaisluvulla a ja b niin, että $x = ab$.
- (ii) Pelaaja poistaa taululla olevista kahdesta samasta luvusta toisen tai molemmat.

Se pelaaja, joka ei voi tehdä kumpaakaan näistä vuorollaan, häviää pelin. Kummalla pelaajalla on voittostrategia, jos Anne aloittaa pelin?

Tehtävä 4.

Pisteen A kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä B ja C niin, että B on A :n ja C :n välissä. Pisteestä A piirretään ympyrälle kaksi tangenttia, jotka sivuaavat ympyrää pisteissä S ja T . Olkoon P suorien AC ja ST leikkauspiste. Osoita, että $AP/PC = 2 \cdot AB/BC$.