Valmennustehtävät, lokakuu 2013
Helpompi sarja

Palauta ratkaisut 1. 12. 2013 mennessä tuomalla ne valmennusviikonloppuun tai sähköpostitse (esim. skannattuina) osoitteeseen `jks@iki.fi`. Sähköpostitse voi kysyä lisätietoja, ja mahdollisista tarkennuksista tai korjauksista ilmoitetaan valmennuksen kotisivuilla osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/valmennus/`.

1. Etsi kaikki reaalikertoimiset polynomit f, joille

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

kaikilla reaalikertoimisilla polynomeilla g ja kaikilla reaaliluvuilla x.

2. Todista positiivisille reaaliluvuille x ja y epäyhtälö

$$x^{2013}y + xy^{2013} \le x^{2014} + y^{2014}.$$

3. Saarella oli viisi merirosvoa ja apina. Merirosvot olivat saaneet päivän aikana saaliikseen paljon kolikoita. Yöllä yksi merirosvoista heräsi ja päätti kätkeä osansa saaliista. Hän jakoi kolikot viiteen kasaan ja huomasi, että yksi jäi yli; sen hän heitti apinalle ja vei oman osansa piiloon. Sitten heräsi toinen merirosvo ja ensimmäisestä tietämättä jakoi kolikot viiteen kasaan, ja taas jäi yli yksi kolikko, jonka hän heitti apinalle ja vei yhden kasan omaan piiloonsa. Lopuille merirosvoille kävi samoin: kukin heräsi, piilotti viidesosan jäljellä olevasta saaliista ja heitti jakojäännökseksi jääneen yhden kolikon apinalle. Seuraavana päivänä merirosvot jakoivat lopun saaliin viiteen osaan, ja taas jäi yksi kolikko yli. Mikä on pienin mahdollinen määrä kolikoita alkuperäisessä saaliissa?

4. Šakkilaudalta on valittu 16 ruutua, jokaiselta riviltä ja jokaisesta sarakkeesta kaksi. Todista, että valittuihin ruutuihin voidaan asettaa kahdeksan valkeaa ja kahdeksan mustaa sotilasta siten, että jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa on yksi kumpaakin väriä.

5. Tarkastellaan $m \times n$–ruudukkoja, joiden jokaiseen ruutuun on kirjoitettu numero 0 tai 1. Montako sellaista ruudukkoa on, joissa jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen summa on parillinen?

6. Ratkaise kokonaislukuyhtälö

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

7. Onko olemassa positiivista kokonaislukua, jonka kaikki alkutekijät kuuluvat joukkoon $\{2, 3, 5, 7\}$ ja jonka viimeiset numerot ovat 11? Jos on, etsi pienin tällainen luku. Jos ei, todista, ettei sellaista ole.

8. Onko olemassa äärettömän monta kokonaislukua, joiden neliö päättyy numeroihin 444?

9. Todista, että missä tahansa kolmiossa enintään yksi sivu voi olla lyhyempi kuin sen vastaisesta kärjestä piirretty korkeusjana.

10. Pisteiden A ja B etäisyys toisistaan on 1. Etsi ne suoran AB pisteet P, joille $\dfrac{1}{1+AP} + \dfrac{1}{1+BP}$ on maksimaalinen.

Valmennustehtävät, lokakuu 2013
Vaikeampi sarja

Palauta ratkaisut 1. 12. 2013 mennessä tuomalla ne valmennusviikonloppuun tai sähköpostitse (esim. skannattuina) osoitteeseen `jks@iki.fi`. Sähköpostitse voi kysyä lisätietoja, ja mahdollisista tarkennuksista tai korjauksista ilmoitetaan valmennuksen kotisivuilla osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/valmennus/`.

1. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Etsi suurin 3:n potenssi, joka jakaa luvun $10^k - 1$.

2. Olkoon a positiivinen kokonaisluku. Todista, että on olemassa yksikäsitteinen pari (x, y) positiivisia kokonaislukuja, joille $x + \frac{1}{2}(x + y - 1)(x + y - 2) = a$.

3. Etsi kaikki kolmioluvut, jotka ovat myös neliölukuja.
(Kolmiolukuja ovat 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $\ldots$, ja neliölukuja $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $\ldots$.)

4. Tarkastellaan kolmiota ABC, jonka kulmille α, β, γ (kärjissä A, B, C) pätee $\alpha \le \beta \le \gamma$. Mikä ehto pitää asettaa kulmille, jotta on mahdollista suunnata valonsäde pisteestä C sivua AB kohti, se voi heijastua siitä sivulle BC ja siitä pisteeseen A?

5. Kuusikulmion $ABCDEF$ kärkipisteet ovat ympyrällä, jonka säde on r. Sivuista AB, CD ja EF jokaisen pituus on r. Todista, että muiden kolmen sivun keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion.

6. Kahden pelaajan pelissä yhdistetään $m \times n$–hilan hilapisteitä. Vuorollaan kumpikin pelaaja piirtää janan, joka yhdistää kaksi hilapistettä kulkematta minkään muun hilapisteen kautta ja leikkaamatta aiemmin piirrettyjä janoja. Viimeisen janan piirtäjä voittaa. Kummalla pelaajalla on voittostrategia ja millainen se on?

7. 10×10–ruudukon ruuduista osa on aluksi valkeita ja osa mustia. Jokaisella aikayksiköllä maalataan mustiksi sellaiset valkeat ruudut, joilla oli edellisellä aikayksiköllä vähintään kaksi mustaa naapuria (ruutua, jolla on yhteinen sivu). Onko sellaista väritystä, jossa mustia ruutuja on

(a) yhdeksän

(b) kymmenen

ja josta aloitettaessa koko ruudukko muuttuu lopulta mustaksi?

8. Onko olemassa funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille $f(g(x)) = x^2$ ja $g(f(x)) = x^4$?

9. Todista, että jos a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja, joille $abc \ge 2^9$, pätee epäyhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (abc)^{1/3}}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}}\right).$$

10. Etsi kaikki reaaliluvut $x, y, z \ge 1$, joille

$$\min(\sqrt{x + xyz}, \sqrt{y + xyz}, \sqrt{z + xyz}) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$