Ratkaisuja toivotaan lokakuun loppuun mennessä postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku

tai sähköpostitse osoitteeseen npalojar@abo.fi.

Syyskuun 2017 helpompia kirjevalmennustehtäviä

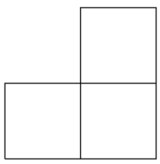
1. Olkoon $ABC-DEF-GHIJ$ jokin puhelinnumero, missä jokainen kirjain kuvaa eri numeroa. Lisäksi luvut D, E ja F ovat peräkkäisiä parillisia lukuja, luvut G, H, I ja J peräkkäisiä parittomia lukuja sekä on voimassa $A > B > C$, $D > E > F$, $G > H > I > J$ ja $A + B + C = 9$. Mikä puhelinnumero on?

2. Valitaan 20 erisuurta kokonaislukua väliltä $[1, 69]$ ja lasketaan niiden parittaiset erotukset. Osoita, että näiden erotusten joukossa on aina olemassa vähintään neljä erotusta, joiden arvot ovat samat.

3. Osoita, että $\binom{2n}{n} < 2^{2n-2}$ kaikilla kokonaisluvuilla $n \geqslant 5$.

4. Oletetaan, että ympyrän ω sisällä on säännöllinen n-kulmiota ($n \geqslant 3$). Tämän n-kulmion yksi sivu on erään ympyrän ω sisään piirretyn kolmion $\triangle ABC$ sivu AB. Lisäksi kolmiossa $\triangle ABC$ on voimassa $AC = BC$ ja kaikkien kolmion kulmien suuruudet ovat (asteina) positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että n on jokin luvuista $3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45$ tai 90.

5. Tarkastellaan $2^n \times 2^n$-kokoista ruudukkoa, josta on poistettu yksi ruutu ja $n \geqslant 1$ on kokonaisluku. Osoita, että tämä voidaan aina peittää kuvanmukaisilla kolmen ruudun palikoilla.



6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Laske $\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})^2 \rfloor$. (Merkinnällä $\lfloor x \rfloor$ tarkoitetaan suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin luku x.)

7. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja

$$f(n) = n(n+1)(2n+1)\cdots(2017n+1).$$

Osoita, että lukujen $f(1), f(2), \ldots, f(2017)$ suurin yhteinen tekijä on $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2017$, missä on otettu lukua 2018 pienempien alkulukujen tulo.

8. Olkoon (x, y, z) yhtälön $x^2 + y^2 = z^2$ kokonaislukuratkaisu. Osoita, että ainakin yksi luvuista x, y ja z on jaollinen kolmella, ainakin yksi on jaollinen neljällä ja ainakin yksi on jaollinen viidellä.

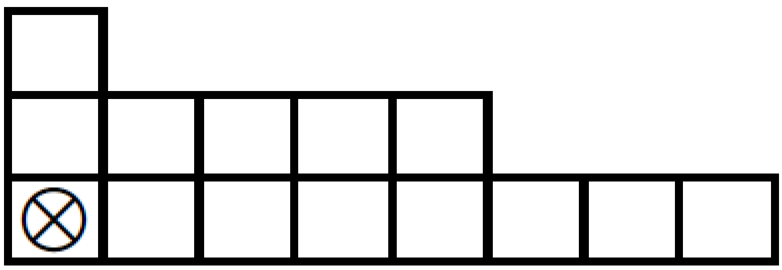
9. Osoita, että jos $m \mid (m-1)! + 1$, niin luvun m on oltava alkuluku.

10. Osoita, että kun $n > 11$, niin $n^2 - 19n + 89$ ei ole neliö.

Syyskuun 2017 haastavampia kirjevalmennustehtäviä

11. Pöydällä on kaksi laatikkoa. Aluksi toisessa on m pelimerkkiä ja toisessa n pelimerkkiä. Merkitään tällaista tilaa parilla (m, n), missä $m > 0$ ja $n > 0$. Kaksi pelaajaa siirtävät vuorotellen. Siirto koostuu yhden laatikon tyhjentämisestä ja toisen laatikon sisällön jakamisesta laatikoihin siten, että kummassakin laatikossa on vähintään yksi pelimerkki. Lopputila on $(1, 1)$. Pelaaja, joka siirtää viimeisenä, voittaa. Etsi kaikki tilat, joissa aloittaja häviää.

12. Kaksi pelaajaa pelaavat peliä kuvan muotoisella laudalla. Siirto koostuu ruudun valitsemisesta, jonka jälkeen tämä ruutu ja sen oikealla puolella ja yläpuolella olevat ruudut poistetaan. Pelaaja, jonka on otettava viimeinen ruutu, häviää. Voittaako aloittaja tällä laudalla? Jos, niin mikä on hänen aloitussiirtonsa?



13. Pinossa on n tikkua. Aloittava pelaaja voi poistaa niin monta tikkua kuin haluaa, kunhan hän ottaa vähintään yhden tikun eikä poista koko pinoa (paitsi jos jäljellä on 1 tikku). Sen jälkeen pelaajat vuorottelevat siten, että seuraava pelaaja ei saa ottaa enempää tikkuja kuin edellinen pelaaja otti edellisellä siirrollaan. Pelaaja, joka ottaa viimeisen tikun, voittaa. Mikä on paras mahdollinen siirto aloittajalle, kun $n = 44$? Millä luvun n arvoilla on sille pelaajalle, joka ei aloita, olemassa voittostrategia?

14. Olkoon $P(n)$ niiden toisen asteen polynomien $p(x) = ax^2 + bx + c$ lukumäärä, joiden nollakohdat ovat kokonaislukuja, ja joiden kertoimet a, b ja c kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\}$. Osoita, että $n < P(n) < n^2$, kun $n \geqslant 4$.

15. Olkoon G tason niiden pisteiden (x, y) joukko, joilla x ja y ovat kokonaislukuja ja $1 \leqslant x, y \leqslant 2011$. Joukon G osajoukkoa S kutsutaan suunnikkaattomaksi, jos minkään kunnollisen suunnikkaan kaikki kärjet eivät ole joukossa S. Määritä suurimman mahdollisen suunnikkaattoman osajoukon koko. (Huom. suunnikas on kunnollinen, jos sen kaikki kärjet eivät ole samalla suoralla.)

16. Määritä ne reaaliluvut m? joilla epäyhtälö $(x^2+y^2)^3 > m(x^3+y^3)^2$ pätee kaikilla reaalisilla positiivisilla x ja y.

17. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Määritellään funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + (1-x)^n}.$$

Todista, että kaikilla $0 \leqslant x \leqslant 1$ pätee

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

18. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja siten, että $a+b+c = 1$. Todista, että

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

19. Olkoon $p > 2017$ alkuluku. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja siten, että $p|(a+b)$, mutta $p^2 \quad ||(a+b)$. Jos $p^2|(a^{2017} + b^{2017})$, etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut $n \leqslant 2017$, joilla $p^n|(a^{2017} + b^{2017})$.