1) Vastaus: 10

Ratkaisu: Asetetaan luvut 1, 8, 17, 19, 6, 10, 15 ympyrän kehälle tässä järjestyksessä. Helposti nähdään, että kahden naapuriluvun summa on aina kokonaisluvun neliö, ja täten vähintään neljä näistä on poistettava. Toisaalta, tarkastellaan pareja (3,13), (12,4), (7,2), (14,11), (5,20), (16,9). Jokaisesta parista on ainakin toinen luku tuhottava. Täten on yhteensä poistettava vähintään kymmenen lukua. Toisaalta kymmenen luvun poisto riittää, sillä luvut 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 18, 19, 20 voidaan jättää.

2) Kertomalla epäyhtälön vasen puoli termillä $a\sqrt{3} + b\sqrt{5}$ saadaan $|a\sqrt{3} - b\sqrt{5}|(a\sqrt{3}+\sqrt{5}) = |3a^2-5b^2|$. Jos $|3a^2-5b^2| = 1$ joillekin kokonaisluvuille a ja b, niin joko $3a^2-5b^2 = 1$ tai $3a^2-5b^2=-1$. Ensimmäisessä tapauksessa pätee $3a^2 \equiv 1 \pmod 5$, mikä on mahdotonta, sillä $3a^2 \equiv 0$, jos $5|a$, ja $3a^2 \equiv 3 \pmod 5$, kun $a \equiv \pm 1 \pmod 5$ sekä $3a^2 \equiv 12 \equiv 2 \pmod 5$, kun $a \equiv \pm 2$. Toisessa tapauksessa pätee $-5b^2 \equiv 1 \pmod 3$, eli $5b^2 \equiv 1 \pmod 3$, mikä on mahdotonta, koska $5b^2 \equiv 0 \pmod 3$, kun $3|b$ ja $5b^2 \equiv 5 \equiv 2 \pmod 3$ muulloin.

Täten $|3a^2-5b^2| \neq 1$ kokonaisluvuilla a ja b. Ei myöskään voi pätea $3a^2-5b^2=0$ (koska tällöin olisi $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{3}{5}} \notin \mathbb{R}$). Täten $|3a^2-5b^2| \geq 2$ kaikille kokonaisluvuille a ja b. Siispä

$$|a\sqrt{3}-b\sqrt{5}| = \frac{|3a^2-5b^2|}{a\sqrt{3}+b\sqrt{5}} \geq \frac{2}{a\sqrt{3}+b\sqrt{5}} = \frac{4}{2a\sqrt{3}+2b\sqrt{5}} \geq \frac{4}{4a+5b}.$$

3. Olkoon I pisteiden C, M, N kautta kulkevan ympyrän Γ keskipiste, ja olkoon r sen säde. Olkoot P ja Q ne pisteet, joissa Γ leikkaa segmentit AI ja BI, ja olkoon H se piste, jossa pisteen I kautta kulkeva suoran AB kohtisuora leikkaa janan AB. Asetetaan $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $x = AP$, $y = BQ$ ja $\ell = IH$.

On selvää, että $\ell = r$, jos ja vain jos Γ sivuaa suoraa AB (sivuaminen tapahtuu pisteessä H) ja $c = AH + HB$. Pisteen potenssin mukaan

$$b \cdot \frac{b}{2} = x(x+2r), \quad a \cdot \frac{a}{2} = y(y+2r).$$

(Jälleen, jos H on sivulla AB, niin $c = AH + HB$,)

Nyt

$$c = \sqrt{(x+r)^2 - \ell^2} + \sqrt{(y+r)^2 - \ell^2} = \sqrt{x^2 + 2xr + r^2 - \ell^2} +$$
$$\sqrt{y^2 + 2yr + r^2 - \ell^2} = \sqrt{x(x+2r) + r^2 - \ell^2} + \sqrt{y(y+2r) + r^2 - \ell^2}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2}{2} + r^2 - \ell^2} + \sqrt{\frac{b^2}{2} + r^2 - \ell^2}.$$

On selvää, että jos $\ell > r$, niin $c < \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}$, ja jos $\ell < r$, niin $c > \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}$. Täten, $c = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}$, jos ja vain jos $\ell = r$, eli pisteiden C, M, N kautta kulkeva ympyrä sivuaa sivua AB.

4) Jos $a \neq 1$, niin on helppo huomata, että funktio $f(x) = \frac{2x^2-1}{a-1}$ toteuttaa yhtälön.
Toisaalta, jos $a=1$, niin tarkastellaan tehtävän yhtälöä $f(\sin x) + f(\cos x) = \cos 2x$, joka sijoituksen $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ jälkeen muuntuu muotoon
$$f(\cos x) + f(\sin x) = -\cos 2x,$$
eli $\cos 2x = -\cos 2x$ kaikilla reaaliluvuilla x, mikä on ristiriita.

5) Pätee
$$\frac{AP}{PH} = \frac{AC \cos \sphericalangle A}{AC \cos \sphericalangle A} = \frac{AC}{AC} = \frac{BC}{BC}$$
$$= \frac{BC \cos \sphericalangle B}{BC \cos \sphericalangle B} = \frac{BQ}{BH}.$$
Täten $AP \cdot BH = BQ \cdot AH$, kuten vaadittiin.

6 Ratkaisut ovat $(6,3)$, $(9,3)$, $(9,5)$ ja $(54,5)$.

Todistus. Kiinnitetylle n tehtävänannon yhtälö on yksikäsitteinen toisen asteen yhtälö muuttujalle m.

Kun $n \le 5$ tilanne on seuraavanlainen:

n	yhtälö	diskriminantti	kokonaislukuratkaisut
$n=0$	$m^2-m+2=0$	-7	ei ole
$n=1$	$m^2-3m+6=0$	-15	— " —
$n=2$	$m^2-7m+18=0$	-23	— " —
$n=3$	$m^2-15m+54=0$	9	$m=6$ ja $m=9$
$n=4$	$m^2-31m+162=0$	313	ei ole
$n=5$	$m^2-63m+486=0$	$2025=45^2$	$m=9$ ja $m=54$.

Osoitetaan, että ratkaisuja ei ole, kun $n \ge 6$.

Oletetaan, että (m,n) toteuttaa tehtävänannon yhtälön.

Koska $m \mid 2\cdot 3^n = m(2^{n+1}-1)-m^2$, pätee $m=3^p$, missä $0 \le p \le n$ tai $m = 2\cdot 3^q$, missä $0 \le q \le n$.

1) $m=3^p$. Kirjoitetaan $q=n-p$. Nyt $2^{n+1}-1 = m+\frac{2\cdot 3^n}{m} = 3^p+2\cdot 3^q$.

2) $m=2\cdot 3^q$. Kirjoitetaan $p=n-q$. Nyt $2^{n+1}-1 = m+\frac{2\cdot 3^n}{m} = 2\cdot 3^q+3^p$.

Siispä, molemmissa tapauksissa on löydettävä epänegatiiviset kokonaislukuratkaisut yhtälölle $3^p+2\cdot 3^q = 2^{n+1}-1$, $p+q=n$.

Osoitetaan seuraavaksi joitakin rajoja luvuille p ja q:

Edellisen yhtälön nojalla $3^p < 2^{n+1} = 8^{\frac{n+1}{3}} < 9^{\frac{n+1}{3}} = 3^{\frac{2(n+1)}{3}}$

ja $2\cdot 3^q < 2^{n+1} = 2\cdot 8^{n/3} < 2\cdot 9^{n/3} = 2\cdot 3^{2n/3} < 2\cdot 3^{\frac{2(n+1)}{3}}$.

Siispä, $p, q < \frac{2(n+1)}{3}$. Koska $p+q=n$, on päteltävä

$$\frac{n-2}{3} < p, q < \frac{2(n+1)}{3}. \quad (1)$$

Olkoon nyt $h = \min(p,q)$. Epäyhtälön (1) nojalla $h > \frac{n-2}{3}$, erityisesti $h > 1$ vasemmalla puolella yhtälön $3^p+2\cdot 3^q = 2^{n+1}-1$ termit ovat jaollisia luvulla 3^h, joten $9 \mid 3^h \mid 2^{n+1}-1$. Koska $\mathrm{ord}_9(2)=6$, $9 \mid 2^{n+1}-1$, jos ja vain jos $6 \mid n+1$. Kirjoitetaan $n+1=6r$, ja $2^{n+1}-1 = (4^{2r}+4^r+1)(2^r-1)(2^r+1)$. Nyt $3 \parallel 4^{2r}+4^r+1 = (4^r-1)^2+3\cdot 4^r$. Lisäksi $\mathrm{syt}(2^r-1, 2^r+1)=1$. On joko $3^{h-1} \mid 2^r-1$ tai $3^{h-1} \mid 2^r+1$. Joka tapauksessa $3^{h-1} \le 2^r+1$.

Nyt $3^{h-1} \le 2^r+1 \le 3^r = 3^{n+1/6}$, $\frac{n-2}{3}-1 < h-1 \le \frac{n+1}{6}$ [illegible] Ristiriita

7) a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c-2)$

$$= 3 + \frac{b+c-2}{a} + \frac{a+c-2}{b} + \frac{a+b-2}{c}$$

$$= 3 + \frac{b^2c + bc^2 - 2bc + a^2c + ac^2 - 2ac + a^2b + b^2a - 2ab}{abc}$$

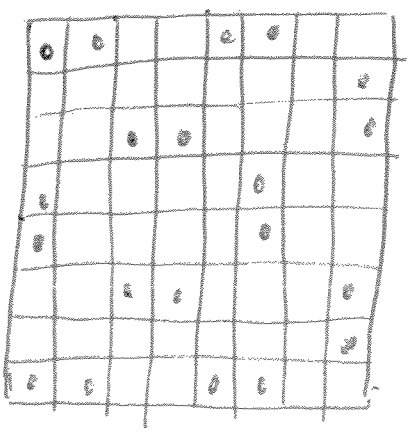
$$= 3 + \frac{b^2c + bc^2 - 2bc + a^2c + ac^2 - 2ac + a^2b + b^2a - 2ab + a^3 + b^3 + c^3 - a^2 - b^2 - c^2}{abc}$$

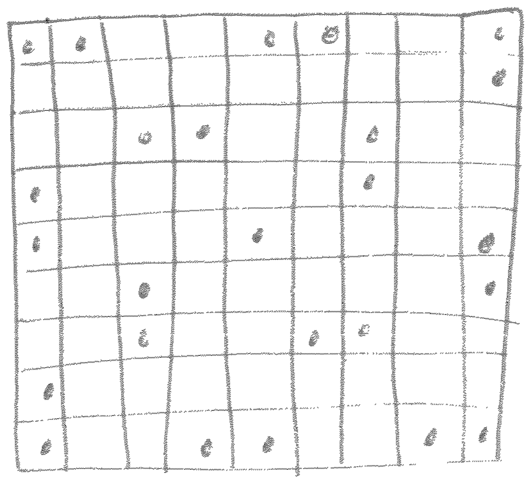
$$= 3 + \frac{(b^2+a^2+c^2)c + (c^2+a^2+b^2)b + (b^2+c^2+a^2)a - 2bc - 2ac - 2ab - a^2 - b^2 - c^2}{abc}$$

$$= 3 + \frac{(b+c+a)(b^2+c^2+a^2) - (a+b+c)^2}{abc} = 3 + \frac{(b+c+a)^2 - (a+b+c)^2}{abc} = 3$$

b) On verifioitavissa, että valinta $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2+\sqrt{6}}{4}$, $c = \frac{2-\sqrt{6}}{4}$ toteuttaa systeemin.

8) a) 48 b) 56. Merkitään sellaiset ruudut, joiden koppakuoriaisten on välttämätöntä mönkertää keskenään eri ruutuihin. 8 x 8 - ruudukossa tämä on 20 ruutua, ja 9 x 9 - ruudukossa 25 ruutua. Toisaalta havaitaan, että on mahdollista, että koppakuoriaiset mönkertävät täsmälleen näihin ruutuihin.





9) Vastaus: $f(x) = a$ ja $g(x) = a - ax$

kaikille $a \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu: Olkoon $a = f(0)$, $b = g(0)$. Yhtälön symmetrian vuoksi $x f(y) + g(x) = y f(x) + g(y)$.

Asetetaan $y = 0$, jolloin saadaan $g(x) = b - ax$

Nyt asetetaan $y = 1$, jolloin saadaan $f(x)$

$= (f(1) - a)x + a = a + cx$. Sijoittamalla nyt

$f(x)$ ja $g(x)$ tehtävänannon yhtälöön

saadaan $c = 0$ ja $b = a$.

10) Sellaisia lukuja ei ole.

Ratkaisu: Huomataan, että $m^2 + 25 \equiv m^2 + 1 \equiv 1$ tai

$2 \pmod 3$ ja $2011^x - 1007^y \equiv 1 - (-1)^y \equiv 0$ tai

$2 \pmod 3$. Täten y on pariton. Lisäksi

m on pariton, sillä $2011^x - 1007^y$ on parillinen.

Siispä, $m^2 + 25 \equiv 2 \pmod 4$. Saadaan

$2 \equiv 2011^x - 1007^y \equiv (-1)^x - (-1)^y \equiv (-1)^x + 1 \pmod 4$,

eli $(-1)^x \equiv 1 \pmod 4$, ja täten x on parillinen.

Lisäksi $2011^x \equiv (-1)^x \equiv 1 \pmod{503}$ ja $1007^y \equiv 1$

$\pmod{503}$. Tästä seuraa, että $2011^x - 1007^y$ on

jaollinen luvulla 503 ja $m^2 + 25$ on myös

jaollinen luvulla 503. Koska 503 on muotoa

$4k - 1$ oleva alkuluku, saadaan $503 \mid m$ ja

$503 \mid 5$, mikä on ristiriita.