Joulukuun vaativammat valmennustehtävät – ratkaisut

1. **Tapa 1.** Pätee $z = x + y - 2$, joten $z^2 = (x + y - 2)^2 = x^2 + y^2$, josta sieventämällä seuraa $2xy - 4x - 4y + 4 = 0$. Siispä $(x-2)(y-2) = 2$. Tästä yhtälöstä saadaan suoraan $x = 3, y = 4$ tai $x = 0, y = 1$ jos oletetaan symmetrian nojalla $x \leq y$. Sijoittamalla lukujen x ja y arvot voidaan laskea z. Siispä $(x, y, z) = (0, 1, -1), (1, 0, -1), (3, 4, 5)$ tai $(4, 3, 5)$.

Tapa 2. Luvut x, y, z muodostavat Pythagoraan kolmikon. Tunnetusti kaikki Pythagoraan kolmikot saadaan kaavasta $x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = \pm(m^2 + n^2)$ joillakin $m, n \in \mathbb{Z}$, tai vaihtamalla muuttujien x ja y roolit. Nyt $m^2 - n^2 + 2mn = \pm(m^2 + n^2) + 2$, joten $n^2 = mn - 1$ tai $m^2 + mn = 1$. Näin ollen $n \mid 1$ tai $m \mid 1$ eli m tai n on ± 1. Jos $n = 1$, niin $m = 2$ ja jos $n = -1$, niin $m = -2$. Jos $m = \pm 1$, niin $n = 0$. Saadaan $x = 3, y = 4, z = 5$ tai $x = 1, y = 0, z = -1$ ja näiden symmetriset versiot, kuten aikaisemminkin.

2. Sovelletaan Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä jonoihin (a^2, b^2, c^2) ja (b, c, a). Tällöin väite seuraa. $\square$

3. Osoitetaan, että Bertta voittaa. Käytetään induktiota; tapaus $n = 2$ on selvä. Oletetaan tapaus n ja tarkastellaan tapausta $n + 1$. Jos Anna aloittaa positamalla vaakarivin, Bertta poistaa jonkiin pystyrivin, ja päin vastoin. Nyt yhden kierroksen jälkeen jäljellä on $(n + 1)^2 - 2(n + 1) + 1 = n^2$ tyhjää ruutua, joiden voidaan ajatella muodostavan $n \times n$-neliön (liimataan neljä muodostunutta osaa yhteen. Pois jätetetty rivi ja sarake eivät vaikuta peliin, koska ovat jo väritettyjä.) Induktio-oletuksen nojalla Bertta voittaa tällä uudella $n \times n$ laudalla, joten hän voittaa alun perinkin. $\square$

4. Todistetaan aluksi yläraja. Olkoon $a \geq b \geq c$, jolloin $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Kolmioepäyhtälöllä $b + c > a$, ja toisaalta $\alpha a + \beta b + \gamma c \leq (\alpha + \beta + \gamma)a = 180° \cdot a$, koska a on luvuista a, b, c suurin. Siten

$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} < \frac{180° a}{2a} = 90°.$$

Todistetaan sitten alaraja. Väite on

$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{3} \geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\frac{a+b+c}{3}.$$

Tämä seuraa suoraan Tsebyshevin epäyhtälöstä (jonka voi todistaa suuruusjärjestysepäyhtälöllä), koska α, β, γ ja a, b, c ovat samassa suuruusjärjestyksessä. $\square$

5. Olkoon $n = 6k+1$ jollakin kokonaisluvulla $k > 0$. Tällöin n on pariton ja $2^n + = 2^{6k+1} + 6k + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Siispä $2^n + n$ ei ole alkuluku näillä äärettömän monella n. $\square$

6. Osoitetaan aluksi, ettei jono a_n ei ole rajoitettu.

Tapa 1. Osoitetaan induktiolla $a_n > \frac{\sqrt{n}}{2}$, minkä jäkeen väite seuraa. Tapaus $n = 1$ on selvä. Jos oletetaan tapaus n, niin $a_{n+1} > \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{2}{\sqrt{n}}$, koska funktio $f(x) = x + \frac{1}{x}$ on aidosti kasvava, kun $x \geq 1$ (ja koska $a_1 = 1$, on $a_n > 1$ kaikilla $n > 1$). Epäyhtälö $\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{2}{\sqrt{n}} > \frac{\sqrt{n+1}}{2}$ saa neliöimällä muodon $n + 8 + \frac{16}{n} > n + 1$, joka on tosi. $\square$

Tapa 2. Oletataan, että a_n on rajoitettu. Tällöin on olemassa M siten, että $a_n < M$ kaikilla n mutta $a_n > M - \frac{1}{M}$ äärettömän monella n. Jos n on tällainen luku, pätee $a_{n+1} > M - \frac{1}{M} + \frac{1}{M} = M$; ristiriita oletukselle. $\square$

Tapa 3. Selvästi $a_{n+1} > a_n$ kaikilla n. Tunnetusti kasvava, rajoitettu jono reaalilukuja suppenee. Jos siis a_n on rajoitettu, on olemassa x, jolle $a_n \to x$ kun $n \to \infty$. Luvulle x on nyt pädettävä $x = x + \frac{1}{x}$; ristiriita. $\square$

Osoitetaan sitten, että $a_{100} < 15$.

On helpompaa osoittaa vahvempi tulos: $a_n < \frac{3}{2}\sqrt{n}$ kaikilla n. Kun $n = 1$ tai $n = 2$, tämä on selvää. Jos oletetaan tapaus n, niin $a_{n+1} < \frac{3}{2}\sqrt{n} + \frac{2}{3\sqrt{n}}$ (jälleen koska $f(x) = x + \frac{1}{x}$ on kasvava). Nyt riittää osoittaa $\frac{3}{2}\sqrt{n} + \frac{2}{3\sqrt{n}} < \frac{3}{2}\sqrt{n+1}$, eli yhtäpitävästi $\frac{9}{4}n + 2 + \frac{4}{9n} < \frac{9}{4}(n+1)$, joka pätee kun $n \geq 2$. $\square$

7. **Tapa 1.** Olkoon $M = \lfloor \sqrt[10]{n} \rfloor$. Kukin luvuista $r_1^{\beta_1}, r_2^{\beta_2}, ..., r_{11}^{\beta_{11}}$, missä r_i on i:s alkuluku suuruusjärjestyksessä, jakaa luvun n, kun $\beta_i = \lfloor \log_{r_i} M \rfloor$ ja

$M > 31$. Erityisesti $\beta_i \geq \frac{1}{10}\log_{r_i} n - 1$, kun n on riittävän suuri. Seuraa

$$n \geq 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot ... \cdot 31^{\beta_{11}} \geq n^{\frac{1}{10}} 2^{-1} \cdot n^{\frac{1}{10}} 3^{-1} \cdot ... \cdot n^{\frac{1}{10}} 31^{-1}$$

(31 on yhdestoista alkuluku). Siispä $n \geq n^{\frac{11}{10}} 2^{-1} \cdot ... \cdot 31^{-1}$, mikä on mahdotonta suurille n. $\square$

Tapa 2. Käytetään aikaisempia merkintöjä. Jos $n > 11^{10}$, niin lukujen $M, M-1, ..., M-10$ pienin yhteinen monikerta, sanotaan N, jakaa luvun n. Aritmetiikan peruslauseen nojalla lukujen $p_1^{a_1}...p_k^{a_k}$, $p_1^{b_1}...p_k^{b_k}$, $p_1^{c_1}...p_k^{c_k}$, ... pienin yhteinen monikerta on

$$p_1^{\max\{a_1,b_1,c_1,...\}}...p_k^{\max\{a_k,b_k,c_k,...\}},$$

kun $p_1, ..., p_k$ ovat erisuuria alkulukuja (eksponentit voivat olla nollia, eli luvuilla ei tarvitse olla samat alkutekijät). Nyt jos p^a on alkulukupotenssi ja $p > 11$, niin oletuksesta $p^a \mid M(M-1)...(M-10)$ seuraa $p^a \mid N$, koska 11 peräkkäisestä luvusta vain yksi voi olla jaollinen luvulla p. Jos taas $p \leq 11$, niin oletuksesta seuraa $p^{\max\{a-18,1\}} \mid N$, koska jokin luvuista $M, M-1, ..., M-10$ on jaollinen vähintään näin korkealla p:n potenssilla (siksi, että enintään kaksi niistä on jaollinen p^3:lla, enintään kolme jaollisia p^2:lla ja enintään kuusi jaollisia p:llä). Jos merkitään

$$M(M-1)...(M-10) = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} 7^{\alpha_4} 11^{\alpha_5} q_1^{\alpha_6} ... q_r^{\alpha_{r+5}},$$

missä $11 < q_1 < ... < q_r$ ovat alkulukuja, niin saadaan

$$N \geq 2^{\alpha_1-18} 3^{\alpha_2-18} 5^{\alpha_3-18} 7^{\alpha_4-18} 11^{\alpha_5-18} q_1^{\alpha_6} ... q_r^{\alpha_{r+5}} \geq \frac{M(M-1)...(M-10)}{(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11)^{18}}$$
$$> \frac{(M-10)^{11}}{(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11)^{18}}.$$

Koska $N \leq (M+1)^{10}$, saadaan ristriita, kun M on riittävän suuri. $\square$

Tapa 3. Sovelletaan Bertrandin postulaattia, jonka mukaan välillä $[x, 2x]$ on alkuluku kaikilla $x \geq 1$. Jos käytetään aikaisempia merkintöjä, N on vähintään alkulukujen $p \leq M$ tulo. Bertrandin postullatin mukaan tästä seuraa

$$N \geq \frac{M}{2} \cdot \frac{M}{2^2} \cdot ... \cdot \frac{M}{2^{11}} = \frac{M^{11}}{2^{66}},$$

kun $M \geq 2^{12}$ (eli n on riittävän suuri). Koska $N \leq (M+1)^{10}$, suurilla n saadaan ristiriita. $\square$

8. Olkoon M suorien AE ja OC leikkauspiste ja N suorien DE ja BC leikkauspiste. Kaaret AC ja AD ovat symmetrian nojalla yhtä pitkät. Siispä $\angle AEC = \angle AED$. Koska OCB on tasakylkinen kolmio, on $\angle AEC = \angle ABC, \angle ABC = \angle OCB$. Tästä seuraa $\angle AED = \angle OCB$ ja edelleen $\angle MEN = \angle MCN$. Täten $MNEC$ on jännenelikulmio, joten $\angle MNC = \angle MEC = \angle OBC$. Kolmiot MNC ja MEC ovat siis yhdenmuotoiset. Niistä saadaan verranto $\frac{1}{2} = \frac{CM}{CO} = \frac{CN}{NB}$, mikä todistaa väitteen. $\square$

9. Geometrisen sarjan summakaavalla ja aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + ... + x + 1 \geq nx^{\frac{(n-1)+...+1+0}{n}} = nx^{\frac{n-1}{2}},$$

kuten haluttiin. $\square$

10. Niitä joukkueita, joissa Matikkalaisia on k ja Fysiikkalaisia $N-k$, on $\binom{n}{k}\binom{n+1}{N-k}$. Niitä joukkueita, joissa $k > \frac{N}{2}$, eli Matikkalaisia on enemmän, on

$$\sum_{k>\frac{N}{2}} \binom{n}{k}\binom{n+1}{N-k} = \sum_{k>\frac{N}{2}} \binom{n}{k}\binom{n}{N-k} + \sum_{k>\frac{N}{2}} \binom{n}{k}\binom{n}{N-1-k}$$

Pascalin kolmiosta seuraavan binomikertoimien ominaisuuden nojalla. Lisäksi pätee

$$\sum_{k>\frac{m}{2}} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k} = \sum_{k<\frac{m}{2}} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k}$$

binomikertoimien symmetrian nojalla. Tehdään vielä yksi havainto: pätee

$$\sum_{k} \binom{n}{k}\binom{m}{N-k} = \binom{m+n}{N},$$

koska molemmat puolet laskevat, monellako tavalla $m+n$ objektista voi valita N kappaletta. Olkoon aluksi N parillinen. Tällöin haluttujen joukkueiden lukumääräksi saadaan

$$\frac{1}{2}\left(\binom{2n}{N} - \binom{n}{\frac{N}{2}}^2\right) + \frac{1}{2}\binom{2n}{N-1} = \frac{1}{2}\binom{2n+1}{N} - \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{N}{2}}^2.$$

Olkoon sitten N pariton. Nyt haluttuja joukkueita on

$$\frac{1}{2}\binom{2n+1}{N} - \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{N-1}{2}}^2.$$

Jakamalla tulokset kaikkien joukkueiden määrällä $\binom{2n+1}{N}$ saadaan kysytyksi todennäköisyydeksi

$$\frac{1}{2} - \frac{\binom{n}{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}^2}{2\binom{2n+1}{N}}.$$