Kotitehtävät, joulukuu 2011
Helpompi sarja

Palauta ratkaisusi 13.1. mennessä valmennusviikonlopun yhteydessä tai postitse Jouni Seppäselle.
Tiedustelut: `jks@iki.fi`, 050–524 9019.

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2z \\ y^2 + z^2 &= 2x \\ z^2 + x^2 &= 2y \end{aligned}$$

reaaliluvuilla x, y ja z.

2. Olkoon a reaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$\lfloor a \rfloor = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor.$$

Tässä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin x.

3. Etsi kaikki positiivisten rationaalukujen parit (a, b), joille

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

4. Koodilukossa on kymmenen näppäintä $0, 1, \ldots, 9$. Se avataan näppäilemällä nelinumeroinen koodi (jonka numeroissa voi olla toistoja). Lukko aukeaa heti, kun oikea lukujono on syötetty peräkkäisillä näppäilyillä siitä riippumatta, mitä näppäimiä on painettu aiemmin. Jos koodi sattuisi olemaan 2011, lukko aukeaisi esimerkiksi näppäilysarjalla 45652032011 mutta ei sarjalla 20011. Mikä on lyhyin lukujono, jonka näppäileminen avaa lukon varmasti, on sen koodi mikä hyvänsä?

5. Olkoot $a \leq b \leq c$ suorakulmaisen kolmion sivut. Todista, että

$$a > 2(c - b).$$

6. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jossa $\angle A = 90°$. Olkoon M sivun AB keskipiste. Pisteen A kautta suoraa CM vastaan kohtisuoraan piirretty suora leikkaa sivun BC pisteessä P. Osoita, että $\angle AMC = \angle BMP$.

7. Olkoot x, y ja z positiivisia kokonaislukuja, joille $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Olkoon h lukujen suurin yhteinen tekijä. Todista, että $hxyz$ on kokonaisluvun neliö.

8. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $s = (a_1, a_2, \ldots, a_{2^n})$ jono ei-negatiivisia kokonaislukuja. Asetetaan $f(s) = (|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_{2^n} - a_1|)$. Merkitään f_k:lla funktiota f sovellettuna k kertaa, siis $f_1(s) = f(s)$ ja $f_{k+1}(s) = f(f_k(s))$, kun $k = 1, 2, \ldots$. Osoita, että näillä oletuksilla $f_k(s) = (0, 0, \ldots, 0)$ jollain k, mutta vastaava tulos ei välttämättä päde, jos jonon s pituus ei ole kahden potenssi.

9. Mille positiivisille kokonaisluvuille a ja b on

$$\frac{a^3 + b^3}{11}$$

alkuluvun potenssi?

10. Etsi kaikki kokonaisluvut $n > 1$, joilla on seuraava ominaisuus: luvun $n^6 - 1$ jokainen alkutekijä jakaa luvun $n^2 - 1$ tai $n^3 - 1$.