Matematikens olympiadträning: träningsuppgifter, december 2019

Också de enklare uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och går knappast att lösa utan viss möda. *Det lönar sig att försöka flitigt.* Även om man inte klarar av att lösa hela uppgiften, lär man sig mera av modellösningen om man funderat länge på uppgiften. Också i de enklare uppgifterna är det viktigt att motivera svaret och att inte bara räkna slutresultatet med t.ex. en miniräknare.

Vi är medvetna om att det finns många sidor på internet där man kan hitta lösningar – `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` torde höra till de mest kända. Att använda dem kan vara nyttigt och lärorikt, men det rekommenderas att du först försöker lösa uppgifterna på egen hand. Det torde också vara lärorikt att fundera på uppgifterna med andra, om det finns tillfälle för det. Åtminstone i Maunula lär det ha ordnats tillfällen där man kan lösa uppgifter i grupp.

Lagen väljs ut baserat på en helhetsbedömning, där man tar i betraktande de inlämnade uppgifterna och framgång i tävlingar och urvalsprov. Här syns resultaten av självständig övning.

Ibland förekommer det fel bland uppgifterna. Om upptäckta fel berättas på nätdsidan `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast 10.1.2020. Svaren kan överlämnas personligen, skickas per e-post eller per post. Enklare uppgifter: `npalojar@abo.fi` eller

Neea Palojärvi
Matematik och Statistik
Åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 Åbo,

svårare: `olli.jarviniemi@gmail.com` eller

Olli Järviniemi
Lontoonkatu 9 A29
00560 Helsinki

Notera vår integritetsdeklaration:
`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Enklare uppgifter

1. Det finns 16 bollar som väger $13, 14, 15, \dots, 28$ gram på bordet. Hitta de bollar som väger 13, 14, 27 ja 28 gram genom att göra högst 26 mätningar med en balansvåg.

2. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{2019} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

(b) Låt $a_1 = a_2 = 1$ och $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$ för alla $n \geq 3$. Bevisa att alla element i talföljden (a_n) är heltal.

3. I en parallelltrapets $ABCD$ gäller för de parallella sidorna AB och CD sekä att $AB + CD = AD$. Diagonalerna AD och BC skär i punkten E. Linjen som går genom punkten E och är parallell med sidan AB skär sträckan AD i punkten F. Bevisa att $\angle BFC = 90°$.

4. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel och $AB \neq AC$. Låt dessutom G vara triangelns ABC tyngdpunkt, M sidans BC mittpunkt, Γ en cirkel med mittpunkt G och radie GM, och N en skärningspunkt av cirkeln Γ och sträckan BC som inte är M. Låt S vara punktens A spegelbild i förhållande till punkten N.

Bevisa att sträckan GS är vinkelrätt mot sträckan BC.

5. I ett speciellt korgbollsspel kan man få antingen 3 eller 7 poäng för en korg. Vad är den största poängmängden som laget inte kan nå? Om också det andra laget kan få poäng, vilka värden kan skillnaden mellan lagens poäng vara? Hur blir det om poängen är 6 och 10?

6. Låt $A = 3^{105} + 4^{105}$. Bevisa att $7 \mid A$. Bestäm resten då A divideras med 11 och 13.

7. Bevisa att om n inte är ett primtal kan $2^n - 1$ inte heller vara det.

8. Bevisa att om n har en udda divisor kan $2^n + 1$ inte vara ett primtal.

9. Finns det oändligt många jämna positiva heltal k, så att för varje primtal p är $p^2 + k$ ett sammansatt tal?

10. Beteckna summan av talets n siffor i bas 10 med $S(n)$. Bestäm $S(S(S(4444^{4444})))$.

11. Bestäm alla primtal p och q med $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

12. På ett papper har ritats en kvadrat vars sida har längden 10. Två spelare ritar turvis en cirkel med diameter 1 inuti kvadraten. Cirklarna får inte överlappa, men de får röra varandras och kvadratens sidor. Vinnaren är den som kan rita den sista cirkeln som följer reglerna. Vilken spelare har en vinnarstrategi?

13. Det finns 30 stenar på bordet. Två spelare tar turvis $1-9$ stenar från bordet. Det är förbjudet att ta samma mängd stenar som den andra spelaren tog på sin senaste tur. Den som sist kan ta stenar utan att bryta mot reglerna vinner. Vilken spelare har en vinnarstrategi??

14. På bordet finns $2n+1$ stenar med $n \geq 3$. Två spelare avlägsnar stenar turvis. Stenarna avlägsnas på följande vis: spelaren delar stenarna i två högar med olika mängd stenar (båda högarna måste ha minst en sten) och avlägsnar den mindre högen. Vinnaren är den, som kan göra ett drag så att det finns högst k stenar kvar, där $2 \leq k < n$. För vilka värden på n och k har den spelare som börjar en vinnarstrategi?

Svårare uppgifter

I geometriuppgifterna kan man ha nytta av kännedom av projektiv geometri, som man kan lära sig exempelvis ur Olli Järviniemis OOOO-verk, som hittas på nätsidornas materialavdelning.

15. Låt P vara en punkt utanför cirkeln Γ. Två av cirkelns Γ tangenter går genom punkten P; dessa skär cirkeln i två punkter som vi kallar för A ja B. Låt C vara en punkt på den kortare bågen AB, och låt D vara sträckans PC och cirkelns Γ skärningspunkt. Låt ℓ vara den sträcka som går genom punkten B och som är likriktad med sträckan PA. Sträckan ℓ skär sträckorna AC i AD punkterna E och F. Bevisa att B är sträckans EF mittpunkt.

16. Kolmion ABC sivuaa kolmion sivuja BC, CA ja AB pisteissä A', B' ja C'. Sisäympyrän keskipisteestä I piirretty kohtisuora kolmion ABC kärjestä C piirretylle mediaanille leikkaa suoran $A'B'$ pisteessä K. Osoita, että $CK \parallel AB$.

17. Låt $ABCD$ vara en cyklisk fyrhörning, punkten M sidans CD mittpunkt och punkten N kolmion ABM ympärysympyrällä. Anta att $N \neq M$ och att $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. Bevisa att punkterna E, F och N befinner sig på samma linje, där E är linjernas AC och BD skärningspunkt och F är linjernas BC och DA skärningspunkt.

18. Bevisa att summan av kvadraterna av tre, fyra, fem eller sex konsekutiva heltal inte kan vara en kvadrat. Ge ett exempel på en summa av kvadraterna av elva konsekutiva heltal, som är en kvadrat.

19. De flesta positiva heltalen kan skrivas som summan av två eller fler konsekutiva heltal. Exempelvis är $24 = 7 + 8 + 9$ och $51 = 25 + 26$. Vi kallar ett positivt heltal *intressant,* om den inte kan skrivas som en sådan summa Bestäm alla intressanta tal.

20. Låt $S = \{105, 106, \ldots, 210\}$. Vilket är det minsta talet n så att varje mängd $T \subseteq S$ med n element innehåller två tal som inte är relativt prima?

21. Bevisa att om $ab = cd$, så är $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ett sammansatt tal.

22. Bevisa att olika gitterpunkter i planet (d.v.s. punkter med heltalskoordinater) ligger på olika avstånd från punkten $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$.

23. Om $n > 11$ är ett heltal, bevisa att $n^2 - 19n + 89$ inte är ett kvadrattal.

24. Bestäm siffran före och efter decimalkommat i talets $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2020}$ decimalexpansion.