Joulukuun 2012 Helpommat Kirjevalmennustehtävät.

Vastauksia tehtäviin voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen aleksis.koski@helsinki.fi, tai postitse osoitteeseen Aleksis Koski, Helsinginkatu 19 A 36, 00500 Helsinki. Kysymyksiä tehtävistä voi lähettää sähköpostitse.

1. Positiiviset reaaliluvut a, b, c, d toteuttavat yhtälöryhmät

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3$$
$$b^4 + c^4 + d^4 = 3a^4$$
$$c^5 + d^5 + a^5 = 3b^5.$$

Osoita, että $a = b = c = d$.

2. Olkoon 53 erisuuruista kolminumeroista positiivista kokonaislukua annettu. Osoita, että lukujen joukosta löytyy kolme, joiden numeroiden summa on sama.

3. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Tason jokainen piste väritetään joko siniseksi tai punaiseksi. Voidaanko väritys tehdä niin, että jokaisella 1-säteisellä ympyrällä on tasan yksi sininen piste? Entä tasan kaksi sinistä pistettä?

5. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut $n \geq 3$ joilla on seuraava ominaisuus. Kaikki n:n alkion aritmeettiset jonot $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joilla luku $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$ on rationaalinen, sisältävät ainakin yhden rationaalisen jäsenen.

6. Olkoon $\mathbb{R}_+$ positiivisten reaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ siten, että

$$(f(a) + f(b))(f(c) + f(d)) = (a + b)(c + d)$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a, b, c, d, joille $abcd = 1$.

7. Tasakylkisessä kolmiossa ABC kulma BAC on lisäksi suora. Piste D on sivulla BC siten, että $BD = 2 \cdot CD$. Piste E on pisteen B projektio suoralla AD. Selvitä kulma $\angle CED$.

8. Osoita, että lauseke

$$\frac{\mathrm{syt}(m, n)}{n} \binom{n}{m}$$

on kokonaisluku kaikilla positiivisten kokonaislukujen pareilla (m, n), missä $n \geq m \geq 1$.

9. Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja. Osoita, että pienin luvuista

$$a - b^2, b - c^2, c - d^2, \text{ ja } d - a^2$$

on pienempi tai yhtä suuri kuin $\frac{1}{4}$.

10. Polynomilla $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$ on n reaalista juurta. Lisäksi kertoimet $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ovat epänegatiivisia. Osoita, että $P(2) \geq 3^n$.