Kotitehtävät, tammikuu 2011
Vaikeampi sarja

Palauta ratkaisusi 25.2. mennessä valmennusviikonlopun yhteydessä tai postitse Jouni Seppäselle. Arvostelussa kiinnitetään erityistä huomiota ratkaisujen esitystapaan: kirjoita selvästi ja perustele jokainen päättelyvaihe. Tiedustelut: `jks@iki.fi`, 050–524 9019.

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} w+x+y+z &= 4, \\ wx+wy+wz+xy+xz+yz &= 2, \\ wxy+wxz+wyz+xyz &= -4, \\ wxyz &= -1. \end{aligned}$$

2. P on neljännen asteen reaalikertoiminen polynomi, jonka nollakohdat ovat reaalisia ja muodostavat aritmeettisen jonon. Todista, että P:n derivaatan nollakohdat muodostavat aritmeettisen jonon.

3. Etsi kaikki reaalikertoimiset polynomit P, joille

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1)$$

kaikilla reaaliluvuilla x.

4. Todista, että yhtälöistä

$$\begin{aligned} x^2-3xy+2y^2+x-y &= 0 \\ x^2-2xy+y^2-5x+7y &= 0 \end{aligned}$$

seuraa yhtälö

$$xy-12x+15y = 0.$$

5. Millä n:n ja p:n positiivisilla kokonaislukuarvoilla yhtälöparilla

$$\begin{aligned} x+py &= n, \\ x+y &= p^z \end{aligned}$$

on ratkaisu (x, y, z) positiivisten kokonaislukujen joukossa?

6. Osoita, että kun x, y, z ja α ovat ei-negatiivisia reaalilukuja,

$$x^\alpha(x-y)(x-z) + y^\alpha(y-x)(y-z) + z^\alpha(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Osoita, että yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos joko $x = y = z$ tai luvuista x, y ja z kaksi on yhtäsuuria ja kolmas on nolla.

7. Todista, että jos $0 < m = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = M < \infty$ ja $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ovat ei-negatiivisia lukuja, joiden summa on 1,

$$\Big(\sum_{j=1}^n p_j x_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j \frac{1}{x_j}\Big) \leq \frac{\mu^2}{\gamma^2},$$

missä $\mu = (m+M)/2$ ja $\gamma = \sqrt{mM}$.

8. Todista, että kun $0 \le x, y, z \le 1$,

$$\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x+y} + x^2(y^2-1)(z^2-1) \le 2.$$

9. Onko olemassa funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(g(x)) = x^2 \qquad \text{ja} \qquad g(f(x)) = x^4$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$?

10. Kolmion pinta-ala T ja kulma γ on annettu. Määritä sivut a ja b niin, että kulman γ vastainen sivu c on mahdollisimman lyhyt.