Vuoden 1992 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Tutkitaan arvoilla $t > 1$ määriteltyä funktiota f,

$$f(t) = t + \frac{3}{t-1} - 2\sqrt{t+2}.$$

Tehtävän yhtälö on muotoa

$$f(x) + f(y) + f(z) = 0.$$

Muotoillaan f:n lauseketta:

$$f(t) = \frac{1}{t-1}\left(t^2 - t + 3 - 2(t-1)\sqrt{t+2}\right) = \frac{1}{t-1}\left(t^2 - 2t + 1 + \left(\sqrt{t+2}\right)^2 - 2(t-1)\sqrt{t+2}\right)$$
$$= \frac{1}{t-1}\left(t - 1 - \sqrt{t+2}\right)^2.$$

Siis $f(t) \geq 0$ ja $f(t) = 0$ vain, kun $t > 1$ ja

$$t - 1 = \sqrt{t+2}$$

eli

$$t^2 - 3t - 1 = 0.$$

Ainoa ehdon täyttävä t on

$$t = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Tehtävän yhtälö voi siten toteutua ainoastaan silloin, kun

$$x = y = z = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

2. Tehdään vastaoletus: olkoon $g(x)$ astetta m, $1 \leq m < n$ oleva kokonaislukukertoiminen polynomi, jossa x:n kerroin on 1 ja olkoon

$$f(x) = g(x)h(x),$$

missä $h(x)$ on polynomi. Olkoot

$$g(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0,$$
$$h(x) = x^{n-m} + c_{n-m-1}x^{n-m-1} + \ldots + c_1x + c_0.$$

Jos kaikki kertoimet c_j eivät olisi kokonaislukuja, voitaisiin löytää suurin indeksi $j = k$, jolle c_k ei olisi kokonaisluku. Mutta silloin f:n astetta $k+m$ olevan termin kerroin – joka on kokonaisluku – olisi $c_k + b_{m-1}c_{k+1} + b_{m-2}c_{k+2} + \ldots b_{k-m}$. Koska summan yhteenlaskettavat ovat ensimmäistä lukuun ottamatta kokonaislukuja, summa ei ole kokonaisluku. Ristiriita osoittaa, että $h(x)$ on välttämättä myös kokonaislukukertoiminen polynomi. Koska

$$f(a_i) = g(a_i)h(a_i) = -1,$$

kun $i = 1, 2, \dots n$ ja sekä $g(a_i)$:t että $f(a_i)$:t ovat kokonaislukuja, on aina $g(a_i) = -f(a_i) = \pm 1$ ja siis $g(a_i) + h(a_i) = 0$. Mutta tämä merkitsee, että polynomilla $g(x) + h(x)$, jonka aste on $< n$, on n nollakohtaa. Polynomin täytyy olla identtisesti $= 0$ eli $g(x) = -h(x)$. Siis

$$f(x) = -g(x)^2 \le 0$$

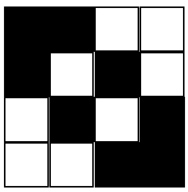
Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $f(x) \to +\infty$, kun $x \to +\infty$.

3. Jos kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on 1, niin kolmion piiri p ja ala A toteuttavat yhtälön $2A = p$. (Jaa kolmio kolmeksi kolmioksi, joiden yhteinen kärki on sisään piirretyn ympyrän keskipiste.) Tehtävänä on siis todistaa, että kolmioista, joiden sisään piirretyn ympyrän säde on 1, alaltaan pienin on tasasivuinen kolmio.

Väitteen todistus perustuu seuraavaan aputulokseen: Olkoot y_1 ja y_2 kaksi samakeskistä ympyrää. Oletetaan, että ympyrän y_2 jänteet AB ja CD leikkaavat pisteessä E ja sivuavat molemmat ympyrää y_1. Oletetaan ja että C on lyhemmällä kaarista AB. Silloin jänteiden ja ympyrän y_2 kaarien rajoittamat kuviot AEC ja DEB ovat yhtenevät. Todistus: Olkoon ympyröiden yhteinen keskipiste O ja jänteiden AB ja CD sekä ympyrän y_1 yhteiset pisteet F ja G. Selvästi kulman FOG suuruinen kierto vie janan CD janan AB päälle. Tästä seuraa, että kaaret AC ja BD ovat yhtä suuret ja vastaavat janat AC ja BD samoin. Kulmat EAO ja EDO ovat yhtä suuret, joten myös kulmat EAD ja EDA ovat yhtä suuret. Siis $ED = EA$. Kolmiot AEC ja DEB ovat siten yhtenevät (ssk), joten myös $CE = CB$.

Olkoon nyt ABC tasasivuinen kolmio, jonka sisään piirretyn ympyrän säde on 1 ja $A'B'C'$ mielivaltainen kolmio, jolla on sama sisään piirretty ympyrä. Olkoon y_2 kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Jos $A'B'C'$ ei ole tasasivuinen, ainakin yksi sen kärki on ympyrän y_2 ulkopuolella ja ainakin yksi kärki on ympyrän y_2 sisäpuolella. Kiertämällä kolmioita ja tarpeen mukaan nimeämällä uudelleen kärjet päästään tilanteeseen, jossa suorat AB ja $A'B'$ yhtyvät ja joko AC on $A'C'$:n osa tai $A'B'$ on AB:n osa. Kummassakin tapauksessa $A'B'C'$:n ala saadaan ABC:n alasta vähentämällä kaksi palaa, jotka ovat pienempiä kuin eräät aputuloksessa käsitellyn muotoiset "kolmiot" Δ_1 ja Δ_2 ja lisäämällä vastaavasti kaksi palaa, jotka molemmat ovat suurempia kuin aputuloksen mukaiset Δ_1:n ja Δ_2:n kanssa yhtenevät "kolmiot" Δ_1' ja Δ_2'.

4. Kun $n = 4$, konstruktio onnistuu:



Tarkastellaan tapausta $n = 5$: Voidaan olettaa, että 25:stä neliöstä ainakin 13 on mustia. Jos näistä viisi on jollakin vaakarivillä, lopuista kahdeksasta ainakin kaksi on samalla vaakarivillä. Näin syntyy suorakaide, jonka kaikki kärjet ovat mustia. Oletetaan, että mustista neliöistä neljä on jollakin vaakarivillä. Lopuista yhdeksästä täytyy joidenkin kolmen olla samalla vaakarivillä. Näistä ainakin kahden on oltava sellaisilla pystyriveillä, joilla on myös jotkin kaksi neljästä saman vaakarivin mustasta. Jos missään vaakarivissä ei ole enempää kuin kolme mustaa neliötä, on ainakin kolmella vaakarivillä oltava tasan kolme mustaa neliötä. Olkoot nämä rivit A, B ja C. Kutsutaan niitä pystyrivejä, joissa A-vaakarivin mustat neliöt ovat *mustiksi* ja loppuja kahta pystyriviä *valkoisiksi* pystyriveiksi. Jos B- tai C-rivillä on mustilla pystyriveillä ainakin kaksi mustaa neliötä, syntyy mustakärkinen suorakaide. Jos kummallakaan vaakariveistä B ja C ei mustilla pystyriveillä ole kuin enintään yksi musta neliö, ovat molempien vaakarivien valkeisiin pystyriveihin kuuluvat neliöt mustia. Taas syntyy mustakärkinen suorakaide!

Johtopäätös: $n = 4$ on suurin mahdollinen n.