Matematiikan olympiavalmennus

Syyskuun 2014 vaativammat valmennustehtävät, ratkaisuja

1. *Onko olemassa ehdot*

$$a+b+c=d \quad \text{ja} \quad \frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}$$

toteuttavia reaalilukuja a, b, c, d?

Ratkaisu. Tällaisia lukuja ei ole olemassa. Jos olisi, jälkimmäisestä yhtälöstä seuraisi

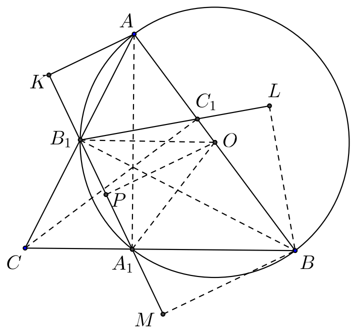
$$\frac{cd+bd+ad}{abcd}=\frac{bc+ac+ab}{abcd}$$

eli $ab+bc+ca-ad-bd-cd=0$. Toisaalta tehtävän ensimmäisestä yhtälöstä seuraisi $0=(a+b+c-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+bc+ac-ad-bd-cd)$. Siis olisi $a^2+b^2+c^2+d^2=0$ ja $a=b=c=d=0$, mikä taas ei ole mahdollista tehtävän toisen yhtälön vuoksi.

2. *Reaaliluvuille a ja b pätee $a^{2014}+b^{2014}=a^{2016}+b^{2016}$. Osoita, että $a^2+b^2\le 2$.*

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että a ja b ovat ei-negatiivisia. Jos $b=0$ tai $b=1$, on oltava $a=1$ tai $a=0$, ja epäyhtälö pätee. Sama tilanne, jos $a=0$ tai $a=1$. Jos $a=b$, yhtälö pätee vain, kun $a=1$; nytkin epäyhtälö on voimassa. Oletetaan sitten, että $b<a$ ja $a\ne 1$. Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $a^{2014}(a^2-1)=b^{2014}(1-b^2)$. Jos $a>1$, on $a^2-1<1-b^2$ eli $a^2+b^2<2$. Jos $a<1$, on $b<a<1$, joten $b^2<a^2<1$ ja $a^2+b^2<2$.

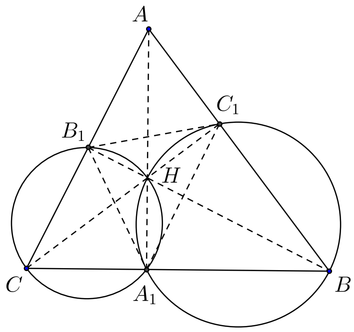
3. *Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanat ovat AA_1, BB_1 ja CC_1. Piste K on A:n kohtisuora projektio suoralla A_1B_1 ja piste L on B:n kohtisuora projektio suoralla B_1C_1. Osoita, että $A_1K=B_1L$.*



Ratkaisu. Kunnetun geometrian tuloksen mukaan teräväkulmaisen kolmion korkeusjanat ovat kulmanpuolittajia kolmion ortokolmiossa, eli kolmiossa, jonka kärjet ovat alkuperäisen kolmion korkeusjanojen kantapisteet. Siten B_1B on kulman $\angle A_1B_1C_1$ puolittaja. Olkoon M se suoran A_1B_1 piste, jolle $BM\perp A_1B_1$. Edellä viitatun tuloksen perusteella suorakulmaiset kolmiot B_1MB ja B_1LB ovat yhtenevät (kks), joten $B_1L=B_1M$. Todistettava väite on siis $A_1K=B_1M$ eli $B_1K=A_1M$. Olkoon O AB:n keskipiste ja P se A_1B_1:n piste, jolle $OP\perp A_1B_1$. Piirretään ympyrä, jonka halkaisija on AB. Ympyrän keskipiste on O, ja koska kulmat $\angle AA_1B$ ja BB_1A ovat suoria, pisteet A_1 ja B_1 ovat tällä ympyrällä. Siis $OA_1=OB_1$ ja suorakulmaiset kolmiot OPA_1 ja OPB_1 ovat yhteneviä (ssk), joten P on A_1B_1:n keskipiste. Puolisuunnikkaasta $AKMB$

nähdään, että koska $OP \| AK$ ja O on AB:n keskipiste, niin P on KM:n keskipiste. Näin ollen $A_1M = PM - PA_1 = PK - PB_1 = B_1K$, ja väite on todistettu.

Todistetaan vielä täydellisyyden vuoksi ratkaisun alussa mainittu ratkaisun kannalta olennainen tulos. Olkoon H kolmion teräväkulmaisen ABC korkeusjanojen AA_1, BB_1 ja CC_1 leikkauspiste. Osoitetaan, että $\angle B_1A_1A = \angle AA_1C$. Ympyrä, jonka halkaisija on CH, sisältää Thaleen lauseen nojalla pisteet A_1 ja B_1. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle B_1A_1A = \angle B_1A_1H = \angle B_1CH = \angle ACC_1$. Aivan samoin nähdään, että $\angle AA_1C_1 = \angle B_1BA$. Mutta ACC_1 ja ABB_1 ovat suorakulmaisia kolmioita, joilla on yhteinen terävä kulma $\angle CAB$. Siis $\angle ACC_1 = \angle B_1BA$, joten myös $\angle B_1A_1A = \angle AA_1C_1$.



4. *Kuperan 11-kulmion lävistäjät väritetään eri väreillä. Sanomme, että kaksi väriä leikkaa toisensa, jos on olemassa näillä väreillä väritetyt lävistäjät, joilla on yhteinen sisäpiste. Kuinka monta väriä enintään voidaan käyttää, jos jokaiset kaksi väriä leikkaavat toisensa?*

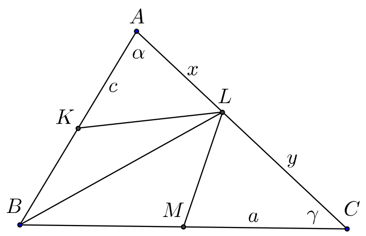
Ratkaisu. Lävistäjiä on kaikkiaan $\binom{11}{2} - 11 = 44$ kappaletta. Jos värejä olisi ainakin 23, olisi väreistä ainakin yksi sellainen, jolla on väritetty vain yksi lävistäjä. Sen tulisi leikata ainakin 22:ta eriväristä lävistäjää. Mutta annettua lävistäjää leikkaavien lävistäjien lukumäärä on $a \cdot b$, missä a ja b ovat lävistäjän eri puolilla olevien kärkien määrät. Mutta $a + b = 9$ ja $|a - b| \geq 1$; korottamalla yhtälö ja epäyhtälö toiseen potenssiin ja vähentämällä ne toisistaan nähdään, että $ab \leq 20$. Värejä voi olla enintään 22. Osoitetaan, että lävistäjät voidaan värittää 22:lla värillä niin, että tehtävän ehdot täyttyvät. Numeroidaan 11-kulmion kärjet 1:stä 11:een. Nimetään lävistäjät päätepisteidensä mukaan, esimerkiksi $2-7$. Voidaan olettaa, että 11-kulmio on säännöllinen. Seuraava väritys 22:lla värillä täyttää tehtävän ehdot, koska jokaisen väritetyn lävistäjäparin päätepisteet kattavat yli puolet 11-kulmion ympärysympyrän kehästä. Kahden eri parin lävistäjät näin ollen välttämättä leikkaavat:

1 :	$1-7$	$2-11$;	2 :	$2-8$	$3-1$;	3 :	$3-9$	$4-2$;
4 :	$4-10$	$5-3$;	5 :	$5-11$	$6-4$;	6 :	$6-1$	$7-5$;
7 :	$7-2$	$8-6$;	8 :	$8-3$	$9-7$;	9 :	$9-4$	$10-8$;
10 :	$10-5$	$11-9$;	11 :	$11-6$	$1-10$;	12 :	$2-6$	$5-8$;
13 :	$3-7$	$6-9$;	14 :	$4-8$	$7-10$;	15 :	$5-9$	$8-11$;
16 :	$6-10$	$9-1$;	17 :	$7-11$	$10-2$;	18 :	$8-1$	$11-3$;
19 :	$9-2$	$1-4$;	20 :	$10-3$	$2-5$;	21 :	$11-4$	$3-6$;
22 :	$1-5$	$4-7$.						

(Kun säännöllisessä 11-kulmion lävistäjillä on neljä mahdollista pituutta, niin edellisen värityksen konstruoinnin voi hahmottaa niin, että väreillä 1 – 11 on väritetty pareja, joissa on pisin ja lyhin lävistäjä, ja väreillä 12 – 22 pareja, joissa on toiseksi pisin ja kolmanneksi pisin lävistäjä.)

5. *Kolmiossa ABC on $AB + BC = 2 \cdot AC$. Kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa AC:n pisteessä L, ja K ja M ovat sivujen AB ja CB keskipisteet. Määritä kulman $\angle KLM$ suuruus kulman $\angle ABC = \beta$ funktiona.*

Ratkaisu. Olkoon $AK = c$, $CM = a$, $AL = x$ ja $LC = y$. Tehtävän ehdosta ja siitä, että BL on kulmanpuolittaja, seuraavat yhtälöt



$$x + y = a + c$$
$$\frac{x}{y} = \frac{c}{a}.$$

Näistä ratkaistaan heti $x = c$, $y = a$. Kolmiot AKL ja CLM ovat siis tasakylkisiä. Jos $\angle CAB = \alpha$ ja $\angle BCA = \gamma$, niin $\angle ALK = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ja $\angle CLM = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Siis

$$\angle KLM = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma\right) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta.$$

6. *Taululle on kirjoitettu ilmaus $* * * \cdots *$, niin että tähtösiä on pariton määrä. Andrei ja Olga pyyhkivät vuorotellen yhden tähden pois ja korvaavat sen numerolla; ensimmäisen tähden paikalle ei kuitenkaan saa laittaa numeroa 0. Andrei aloittaa. Jos lopulta syntynyt luku osoittautuu 11:llä jaolliseksi, Andrei voittaa. Muussa tapauksessa voittaja on Olga. Kummalla pelaajista on voittostrategia?*

Ratkaisu perustuu tietysti siihen, että luku on jaollinen 11:llä täsmälleen silloin, kun $S_1 - S_2$ on jaollinen 11:llä, kun S_1 on niiden numeroiden, joiden järjestysluku luvun 10-järjestelmäesityksessä on pariton, summa, ja S_2 on loppujen numeroiden eli niiden, joiden järjestysluku on parillinen, summa. Näin ollen Olga voittaa, kun pelaa seuraavasti: aina kun Andrei kirjoittaa jonoon numeron, Olga kirjoittaa saman numeron jonkin sellaisen tähden paikalle, jonka järjestysnumero on parillinen, jos Andrei kirjoitti parittoman järjestysnumeron omaavalle paikalle ja päinvastoin. Jos nyt Andrein viimeinen siirto on ensimmäisen tähden korvaaminen numerolla d, $1 \leq d \leq 9$, $S_1 - S_2 = d$, ja Olga voittaa. Jos taas Andrei sijoittaa jollain muulla kuin viimeisellä siirrollaan ensimmäisen tähden paikalle numeron d, niin Olga asettaa seuraavalla vuorollaan johonkin parillisen järjestysluvun omaavaan paikkaan numeron $d-1$. Tämän jälkeen Olga pelaa samoin kuin edellä. Ennen Andrein viimeistä siirtoa $S_1 - S_2 = 1$ ja Andrein viimeisen siirron jälkeen $S_1 - S_2 = d+1$; mutta $1 \leq d+1 \leq 10$, joten $S_1 - S_2$ ei ole jaollinen 11:llä.

7. *Määritä ne positiiviset kokonaisluvut n, joille $(n+1)! - n$ on jaollinen luvulla $n! + n + 1$.*

Ratkaisu. Jos $(n+1)! - n$ on jaollinen luvulla $n! + n + 1$, niin myöskin erotus

$$(n+1)(n! + n + 1) - ((n+1)! - n) = (n+1)^2 + n$$

on jaollinen luvulla $n! + n + 1$. Mutta tällöin $(n+1)^2 + n \geq n! + (n+1)$ eli $n^2 + 2n \geq n!$. Mutta jos $n > 4$, niin $n! \geq 2n(n-1) = n^2 + n^2 - 2n > n^2 + 4n - 2n = n^2 + 2n$. On siis oltava $n \leq 4$. Kun tarkistetaan tapaukset $n = 1, 2, 3, 4$, nähdään heti, että vain $n = 4$ toteuttaa tehtävän ehdon.

8. *Määritä kaikki kokonaisluvut $n \geq 2014$, joilla on se ominaisuus, että kuutio voidaan jakaa n:ksi pienemmäksi kuutioksi.*

Ratkaisu. Kuution jako n:ksi kuutioksi onnistuu kaikilla riittävän suurilla n:n arvoilla, ja n on varmasti riittävän suuri, jos se on ≥ 2014. Jos kuutio on jaettu k:ksi kuutioksi, se voidaan jakaa $(k+7)$:ksi kuutioksi, kun jaetaan yksi osakuutio sen kaikki särmät puolittamalla kahdeksaksi kuutioksi. Jos $0 \leq a \leq 6$ ja kuutio on jaettu $(7k+a)$:ksi osakuutioksi, se voidaan siis kaikilla $k_1 > k$ jakaa $(7k_1+a)$:ksi osakuutioksi. Kuutio voidaan jakaa $7^3 = 343$ osakuutioksi. Siis se voidaan jakaa jokaisella 7:llä jaollisella n, $n \geq 343$, n:ksi osakuutioksi. Kuutio voidaan jakaa 27:ksi osakuutioksi jakamalla kaikki särmät kolmeen yhtä suureen osaan. Koska $27 = 3 \cdot 7 + 6$, kuutio voidaan jakaa n:ksi osakuutioksi aina, kun $n \geq 27$ ja $n \equiv 6 \mod 7$. Kun jaetaan kuutio ensin 27:ksi osaksi ja sitten yksi vielä 27:ksi, saadaan $53 = 7 \cdot 7 + 4$ osakuutiota. Jako onnistuu kaikilla $n \geq 53$, $n \equiv 4 \mod 7$. Jako, jossa syntyy $53 + 26 = 79 = 11 \cdot 7 + 2$ osakuutiota onnistuu, samoin, jos osakuutioiden määrä on $79 + 52 = 131 = 18 \cdot 7 + 5$, $131 + 26 = 157 = 22 \cdot 7 + 3$ ja $157 + 26 = 183 = 26 \cdot 7 + 1$. Kaikki mahdolliset 7:n jakojäännökset saavutetaan selvästi vähemmillä jako-osilla kuin 2014, joten jako voidaan varmasti tehdä kaikilla $n \geq 2014$.

9. *Määritä suurin n, jolla on seuraava ominaisuus. On olemassa n:n positiivisen kokonaisluvun joukko, jonka luvuista tasan yksi on jaollinen n:llä, tasan kaksi jaollisia $(n-1)$:llä, $\ldots$, tasan $n-1$ jaollisia 2:lla (ja kaikki n jaollisia 1:llä).*

Ratkaisu. $n = 5$ on mahdollinen: $\{60, 12, 6, 2, 1\}$ on esimerkki, joka osoittaa tämän. Osoitetaan, että ehdot täyttävää joukkoa ei voi muodostaa, jos $n \geq 6$. Jos tällainen joukko olisi jollain $n \geq 6$, se olisi olemassa myös, kun $n = 6$. Joukossa olisi tuolloin viisi parillista ja neljä kolmella jaollista lukua. Ainakin kaksi joukon luvuista olisi kuudella jaollisia. Mutta ehto vaatii, että joukossa on vain yksi kuudella jaollinen luku, joten on tultu ristiriitaan.

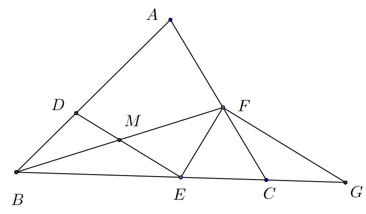
10. *Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, joille pätee*

$$f(n+1)f(n+2) = (f(n))^2$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu. On selvää, että kaikki vakiofunktiot toteuttavat funktionaaliyhtälön. Oletetaan, että f ei ole vakiofunktio. Koska f saa vain ei-negatiivisia kokonaislukuarvoja, joku sen arvoista, sanokaamme $f(k) = a$, on pienin. Olkoon vielä $k = k_0$ pienin k, jolla f saa pienimmän arvonsa. Silloin $f(k_0+1)f(k_0+2) = f(k_0)^2 = a^2$, mistä seuraa $f(k_0+1) = f(k_0+2) = a$ ja induktiolla $f(n) = a$ kaikilla $n \geq k_0$. Koska f ei ole vakiofunktio, $k > 0$. Nyt kuitenkin $f(k_0-1)^2 = f(k_0)f(k_0+1) = a^2$, joten $f(k_0-1) = a$. Tämä on ristiriidassa luvun k_0 määritelmän kanssa. f on siis vakiofunktio.

11. *Olkoon E jokin kolmion ABC sivun BC piste, joka on lähempänä C:tä kuin B:tä. Selvitä, miten voidaan harppi- ja viivoitintempuin löytää kolmion ABC sivujen AB ja AC pisteet D ja F niin, että kulma $\angle DEF$ on suora ja DE leikkaa BF:n sen keskipisteessä M.*



Ratkaisu. Oletetaan konstruktio suoritetuksi. Olkoon M janan BF keskipiste. Valitaan BC:n jatkeelta G niin, että $BE = EG$. Silloin ME on kolmion BGF sivujen BG ja BF keskipisteitä yhdistävä jana, joten $ME \| FG$. Koska $\angle DEF$ on suora, on myös $\angle EFG$ suora. Mutta se merkitsee, että F on EG-halkaisijaisen ympyrän piste. Konstruktio voidaan siis tehdä seuraavasti. Määritetään G piirtämällä ympyrä, jonka keskipiste on E ja joka kulkee B:n kautta. Etsitään janan EG keskipiste ja piirretään ympyrä, jonka halkaisija on EG. Se leikkaa AC:n pisteessä F. Haetaan BF:n keskipiste M. Piirretään suora EM. Se leikkaa AB:n pisteessä D. – Se, että konstruktio on oikea, on tullut jo alussa perustelluksi.

12. *Onko olemassa positiivisten kokonaislukujen geometrista jonoa $b_0, b_1, \ldots, b_{2014}$, jossa kaikilla i luvussa b_i on yksi numero enemmän kuin luvussa b_{i-1} (10-järjestelmä!) ja jonka suhdeluku ei ole 10?*

Ratkaisu. Konstruoidaan ehdon täyttävä jono $b_0, b_1, \ldots, b_n$ mielivaltaisella n:n arvolla. Asetetaan $b_0 = 10^{kn}$ ja määritetään k myöhemmin. Jonon peräkkäisten termien suhteen on oltava lähellä lukua 10. Asetetaan suhteeksi

$$q = \frac{10^{k+1} + 1}{10^k}.$$

Silloin jonon m:s jäsen on $b_m = b_0 q^m = 10^{k(n-m)}(10^{k+1} + 1)^m$. Jotta tehtävän ehto toteutuisi, on kaikilla $m = 0, 1, \ldots, n$ oltava

$$10^{kn+m} \le 10^{k(n-m)}(10^{k+1} + 1)^m < 10^{kn+m+1}.$$

Selvästikin vasemmanpuoleinen epäyhtälö on tosi kaikilla k: arvoilla:

$$10^{kn+m} = 10^{kn-km} \cdot 10^{m(k+1)} < 10^{k(n-m)} \left(10^{k+1} + 1\right)^m = b_m. \tag{1}$$

Oikeanpuoleinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälöiden

$$(10^{k+1} + 1)^m < 10^{km+m+1}, \quad \left(1 + \frac{1}{10^{k+1}}\right)^m < 10.$$

Jos $m \le 10^{k+1}$, niin

$$\left(1 + \frac{1}{10^{k+1}}\right)^m \le \left(1 + \frac{1}{10^{k+1}}\right)^{10^{k+1}}.$$

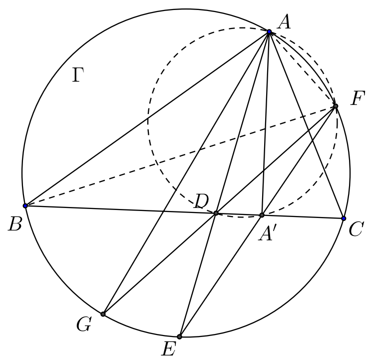
Osoitetaan, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla q on $\left(1 + \dfrac{1}{q}\right)^q < 3 < 10$. [Tämä on osa siitä päättelystä, joka tehdään, kun todistetaan, että

$$\lim_{q \to \infty} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q = e.]$$

Binomikaavan mukaan on
$$\left(1+\frac{1}{q}\right)^q = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \frac{1}{q^p}.$$
Mutta
$$\begin{aligned}\binom{q}{p}\frac{1}{q^p} = \frac{q(q-1)\cdots(q-p+1)}{p!q^p} &= \frac{1}{p!}\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{p}\right)\right)\\ &< \frac{1}{p!} \le \frac{1}{2^p}.\end{aligned}$$
Siis
$$\left(1+\frac{1}{q}\right)^q \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}} < 3.$$
Kun siis $n \le 10^{k+1}$, niin oikeanpuoleinen epäyhtälöistä (1) toteutuu. – Kun $n = 2014$, voidaan valita $k = 3$, jolloin $b_0 = 10^{3\cdot 2014} = 10^{6042}$ ja $q = \dfrac{1001}{1000}$.

13. *Kolmion ABC ympärysympyrä on Γ. Kolmion korkeusjana on AA'. Kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa BC:n pisteessä D ja Γ:n myös pisteessä E. Suora EA' leikkaa Γ:n myös pisteessä F. Suora FD leikkaa Γ:n myös pisteessä G. Osoita, että AG on Γ:n halkaisija.*

Ratkaisu. Osoitetaan, että $\angle EAF = \angle FA'C$. Koska AE on kulman $\angle BAC$ puolittaja, $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$. Kolmiosta $A'FB$ saadaan kolmion kulman vieruskulmaa koskevan lauseen nojalla $\angle FA'C = \angle FBA' + \angle BFA'$. Kulman $\angle FA'C$ suuruus on siis puolet kaaren $\overset{\frown}{FC} + \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{FC} + \overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{EF}$ suuruudesta, samoin kuin kulman $\angle EAF$:kin. Mutta tämä merkitsee, että $ADA'F$ on jännenelikulmio. Koska $\angle DA'A$ on suora, on myös $\angle GFA = \angle DFA$ suora. Thaleen lauseen (käänteisen puolen) nojalla AG on Γ:n halkaisija.



14. *Luvut p, q ja r ovat alkulukuja. Tiedetään, että $pq+1$, $pr+1$ ja $qr-p$ ovat neliölukuja. Osoita, että myös $p+2qr+2$ on neliöluku.*

Ratkaisu. Olkoon $pq+1 = a^2$, $pr+1 = b^2$. Silloin $pq = (a+1)(a-1)$ ja $pr = (b+1)(b-1)$. Ensimmäinen yhtälö tarkoittaa joko sitä, että $a-1 = 1$ ja $a+1 = pq$ eli $pq = 3$, mikä ei ole mahdollista, tai sitä, että $\{p, q\} = \{a-1, a+1\}$. Toinen yhtälö johtaa vastaavasti johtopäätökseen $\{p, r\} = \{b-1, b+1\}$. Saadaan kaksi mahdollisuutta: a) p on keskimmäinen kolmesta peräkkäisestä parittomasta luvusta, jotka kaikki ovat alkulukuja. Koska kolmesta peräkkäisestä parittomasta luvusta yksi on jaollinen kolmella, on oltava $p = 5$ ja $\{q, r\} = \{3, 7\}$. Tällöin $p+2qr+2 = 49 = 7^2$. b) $q = r = p \pm 2$. Selvästi q on pariton. Oletetaan ensin, että $q = p-2$. Silloin $qr - p = q^2 - q - 2 = c^2$ jollain positiivisella kokonaisluvulla c. Mutta $c < q$, joten $c^2 \le (q-1)^2 = q^2 - 2q + 1$. Tällöin $q \le 3$, joten $q = 3$. Kolmikko $(p, q, r) = (5, 3, 3)$ toteuttaa tehtävän ehdon: $p+2qr+2 = 25$. Jos taas $q = r = p+2$ saadaan samoin kuin yllä $q^2 - q + 2 = c^2$, josta seuraa ristiriita $q \le -1$.

15. *Pekan pitää arvata positiivinen kokonaisluku n. Hän tietää, että luvulla n on tasan 250 positiivista kokonaislukutekijää $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{250} = n$. Kun Pekka kertoo indeksin j, $1 \le j \le 249$, hänelle kerrotaan d_j. Jos Pekalle on jo kerrottu d_j, hänelle ei kuitenkaan kerrota lukua d_{250-j}. Kuinka monella arvauksella Pekka pystyy aina päättelemään luvun n?*

Ratkaisu. Osoitetaan, että Pekka tietää luvun n, kun hänelle kerrotaan d_{248} ja d_{249}. Jos d_{248} ei ole luvun d_{249} tekijä, niin lukujen pienin yhteinen monikerta m on suurempi kuin d_{249}. Mutta $m \le n$, joten on oltava $m = n$. Jos taas $d_{249} = kd_{248}$ jollain $k \ne 1$, niin

$$d_3 = \frac{n}{d_{248}} = \frac{kn}{d_{249}} = kd_2 > k.$$

Koska k on n:n tekijä, on oltava $k = d_2$.

On vielä osoitettava, että yksi arvaus ei riitä. Olkoot p ja q, $2 < p < q$, alkulukuja. Luvulla $n = pq^{124}$ on tasan 250 tekijää

$$1 < p < q < pq < q^2 < \ldots < pq^k < q^{k+1} < \ldots < q^{124} < pq^{124} = n.$$

Saadakseen tietoa n:stä Pekka tarvitsee p:n, joten hänen on pyydettävä saada tietää d_j jollain parillisella j. Mutta jos $q < p^2$, myös luvulla $p^{124}q$ on 250 tekijää

$$1 < p < q < p^2 < pq < p^3 < \ldots < p^{122}q < p^{123}pq < p^{124}q = n.$$

Saadakseen tietää n:n pekka tarvitsee q:n, joka esiintyy vain paritonindeksisissä tekijöissä. Pekan olisi siis saatava tietää sekä parillis- että paritonindeksinen luku, joten yksi arvaus ei riitä.