Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, lokakuu 2019
Ratkaisuja

Helpompia tehtäviä

1. Pingisturnaukseen osallistui 25 pelaajaa. Osoita, että turnauksen lopuksi niiden pelaajien määrä, jotka pelasivat parittoman määrän pelejä, oli parillinen.

Ratkaisu. Tämän todistuksen ideana on huomata, että pelaajien pelaamien pelien yhteismäärä voidaan laskea aina kahdella eri tavalla ja se on aina parillinen luku.

Olkoot pelaajien pelaamien pelien määrät $x_1, x_2, \ldots x_{25}$. Kun kaksi pelaajaa pelaavat toisiaan vastaan, kummankin pelattujen pelien määrä kasvaa yhdellä. Siispä luvun $S = \sum_{k=1}^{25} x_k$ on oltava parillinen. Jos nyt pariton määrä pelaajia pelasi parittoman määrän pelejä, niin summassa S täytyy olla parittoman monta paritonta termiä. Niiden summa on pariton. Lisäksi aina kahden parillisen luvun summa on parillinen sekä parittoman ja parillisen luvun summa pariton, joten luku S on pariton. Mutta tämä on ristiriita, sillä oli todettu, että luvun S on oltava parillinen. Siispä niiden pelaajien, jotka pelasivat parittoman määrän pelejä, määrä on parillinen.

2. (a) On annettu reaalilukujen kolmikko (x, y, z). Yhdellä askeleella kaksi kolmikon luvuista, olkoot ne a ja b, voidaan muuttaa luvuiksi $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ ja $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Voidaanko tällaisia askelia toistamalla muuttaa kolmikko $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ kolmikoksi $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$?

(b) Yhdellä askeleella $m \times n$-suklaalevy voidaan katkaista jotain riviä tai saraketta pitkin. Etsi pienin mahdollinen määrä askelia, joilla $m \times n$-suklaalevy voidaan jakaa 1×1-paloihin.

Ratkaisu. Molemmat seuraavista kohdista ratkeavat suoraan sopivan invariantin tai monoinvariantin avulla. Ensimmäisessä tapauksessa kolmikon lukujen neliöiden summa ja toisessa suklaalevyjen määrä kasvaa joka askeleella korkeintaan yhdellä. (a) *Vastaus: Kolmikkoa* $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ *ei voida muuttaa kolmikoksi* $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *annetuilla askelilla.*

Tarkastellaan lukua $S = x^2 + y^2 + z^2$. Osoitetaan, ettei luku S muutu, kun otetaan yksi askel. Voidaan olettaa, että askeleella valitaan muokattaviksi luvuiksi luvut x ja y; todistus etenee aivan samoin myös muissa tapauksissa. Nyt askeleen toteutuksen jälkeen luku S on

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + z^2 \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2}{2} + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Se ei siis muutu missään vaiheessa.

Jotta siis kolmikko $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ voidaan muuttaa kolmikoksi $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, on niillä oltava samat $x^2 + y^2 + z^2$ aluksi. Kuitenkin on

$$1^2 + \sqrt{2}^2 + (1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2 + 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 6 + 2\sqrt{2},$$

mutta

$$2^2 + \sqrt{2}^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4 + 2 + \frac{1}{2} = 6 + \frac{1}{2}.$$

ja $2\sqrt{2} \neq \frac{1}{2}$. Siis kolmikkoa $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ ei voida muuttaa kolmikoksi $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ annetuilla askelilla.

(b) *Vastaus: Pienin mahdollinen määrä askelia, joilla* $m \times n$*-suklaalevy saadaan jaettua* 1×1*-paloihin, on* $mn - 1$.

Yhdellä askeleella $k \times s$-suklaalevy jakautuu korkeintaan kahteen suklaalevyyn. Siispä kullakin askeleella saadaan korkeintaan yksi suklaalevy lisää. Koska lopuksi halutaan, että suklaalevyjä on mn

kappaletta (eli jokainen suklaapala muodostaa oman levynsä), niin tarvitaan ainakin $mn-1$ askelta. Osoitetaan vielä, että suklaalevy voidaan jakaa 1×1-paloihin $mn-1$ askeleella.

Jaetaan ensin $m \times n$-suklaalevy $m-1$ askeleella $1 \times n$-levyihin. Tämän jälkeen kukin näistä $1 \times n$-suklaalevystä, joita on m kappaletta, voidaan jakaa $n-1$ askeleella 1×1-paloihin. Yhteensä siis askelia on

$$m - 1 + m(n-1) = mn - 1.$$

Näin ollen pienin mahdollinen määrä askelia, joilla $m \times n$-suklaalevy saadaan jaettua 1×1-paloihin, on $mn-1$.

3. Joukko S koostuu avaruudessa $\mathbb{Z}^3$ olevan kuution seitsemästä kärjestä. Joukkoa S voidaan laajentaa peilaamalla joukon S piste A jonkin avaruuden $\mathbb{Z}^3$ pisteen $X \neq A$ suhteen. Onko mahdollista, että jossain vaiheessa myös alussa tarkastellun kuution kahdeksas kärki kuuluu joukkoon S?

Ratkaisu. Ei ole mahdollista, että kuution kahdeksas kärki kuuluisi joukkoon S.

Usein tehtävissä kannattaa ensin yrittää hieman yksinkertaistaa tehtävänantoa (mutta kuitenkin käyttää apuna yhtäpitävää tehtävänantoa) ja sitten todistaa väite sille. Tässä tehtävässä ideana on siirtää kuutiota sopivasti, jotta voidaan käyttää yksikkökuutiota. Tämän jälkeen vastaus saadaan, kun havaitaan, miten pisteet peilautuvat kuvauksissa.

On selvää, ettei kuution siirtäminen tai kiertäminen ruudukossa vaikuta ratkaisuun; jos nimittäin jossain tapauksessa tilanne on mahdollinen, niin voidaan toistaa vastaavat peilaukset myös toisessa kohtaa avaruutta $\mathbb{Z}^3$. Voidaan siis olettaa, että kuution seitsemän kärkeä, jotka kuuluvat joukkoon S, ovat $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$ ja $(1,1,0)$. Puuttuva kärki on täten $(1,1,1)$.

Peilataan nyt piste $X \in S$ jonkin pisteen $A \in \mathbb{Z}^3$ suhteen. Merkitään $X = (x_1, x_2, x_3)$ ja $A = (a_1, a_2, a_3)$ sekä olkoon peilauksen tuloksena saatu piste $X' = (x_1', x_2', x_3')$. Peilaus tarkoittaa, että piste X' on yhtä kaukana pisteestä A kuin piste X, pisteet X, A ja X' ovat samalla suoralla sekä piste X' on eri puolella pistettä A kuin X. Tarkasteltavan suoran pisteet (x,y,z) saadaan yhtälöistä

$$x = tx_1 + (1-t)a_1, \qquad y = tx_2 + (1-t)a_2, \qquad z = tx_3 + (1-t)a_3,$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Koska arvolla $t = 1$ saadaan piste X ja arvolla $t = 0$ piste A, niin arvolla $t = -1$ saadaan piste X'. Näin ollen on

$$X' = (-x_1 + 2a_1, -x_2 + 2a_2, -x_3 + 2a_3).$$

Siis on voimassa $X' \in \mathbb{Z}^3$, koska aluksi joukon S pisteet ovat avaruuden $\mathbb{Z}^3$ pisteitä ja peilaus tehdään myös tämän avaruuden pisteiden suhteen. Lisäksi luvut x_1', x_2' ja x_3' ovat samaa pariteettia kuin pisteet x_1, x_2 ja x_3 vastaavasti.

Edellisessä kappaleessa todettujen asioiden nojalla havaitaan, että jotta piste $(1,1,1)$ saataisiin jossain välissä kuulumaan joukkoon S, täytyisi joukossa S olla aluksi piste, jonka x-, y- ja z-koordinaatit olisivat kaikki parittomia. Tällaista pistettä ei kuitenkaan ole. Kahdeksas kärki ei siis voi mitenkään kuulua joukkoon S.

4. Riviin on kirjoitettu jokin määrä positiivisia kokonaislukuja. A valitsee toistuvasti kaksi vierekkäistä lukua x ja y, joille $x > y$ ja x on luvun y vasemmalla puolella, ja korvaa parin (x,y) joko parilla $(y+1, x)$ tai parilla $(x-1, x)$. Todista, että hän voi tehdä tämän vain äärellisen monta kertaa.

Ratkaisu. Tämä todistus perustuu siihen ideaan, ettei lukujen maksimi muutu missään vaiheessa.

Huomataan aluksi, että rivissä oleva suurin kokonaisluku, jota kutsutaan luvuksi M, ei millään askeleella muutu. Nimittäin, Jos jompi kumpi luvuista x tai y on M, niin sen on oltava x, sillä on $x > y$. Lisäksi, koska luvut ovat kokonaislukuja, niin $y + 1 \leq x$, joten jos on $x = M$, niin M on edelleen rivin maksimi korvauksen jälkeen. Muussa tapauksessa korvauksen jälkeenkin saatavat luvut ovat lukua M pienempiä, eikä maksimilukua ole muutettu, joten rivin maksimi ei muutu. Käytetään tätä tietoa apuna todistuksessa.

Olkoot rivissä olevat luvut vasemmalta oikealle $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Merkitään

$$S = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n.$$

Koska edellisessä kappaleessa todettiin, että rivin suurin arvo ei millään askeleella muutu, niin koko ajan on oltava

$$S \leq M(1 + 2 + \ldots + n) = M\frac{n(n+1)}{2}.$$

Osoitetaan, että luvun S arvo kasvaa joka askeleella. Täten koska luvulle S on edellä löydetty yläraja, niin korvausprosessin voi tehdä vain äärellisen monta kertaa.

Korvauksen jälkeen pari (a_i, a_{i+1}) muuttuu joka pariksi $(a_{i+1} + 1, a_i)$ tai pariksi $(a_i - 1, a_i)$. Ensimmäisessä tapauksessa uusi luvun S arvo on

$$\begin{aligned} S &= a_1 + 2a_2 + \ldots + (i-1)a_{i-1} \\ &\quad + i(a_{i+1} + 1) + (i+1)a_i \\ &\quad + (i+2)a_{i+2} + \ldots + na_n \\ &= a_1 + 2a_2 + \ldots + (i-1)a_{i-1} \\ &\quad + ia_i + (i+1)a_{i+1} + (a_i - a_{i+1}) + 1 \\ &\quad + (i+2)a_{i+2} + \ldots + na_n \\ &> a_1 + 2a_2 + \ldots + ia_i + (i+1)a_{i+1} + \ldots + na_n, \end{aligned}$$

sillä on $a_i > a_{i+1}$. Siis tällä askeleella luvun S arvoo kasvaa. Vastaavasti, koska on

$$i(x-1) + (i+1)x - (ix + (i+1)y) = i(x - 1 - y) + x - y > 0,$$

niin toisessakin korvauksessa luvun S arvo kasvaa. Täten väite on todistettu.

5. Olkoon AH tasasivuisen kolmion $\triangle ABC$ korkeusjana. Lisäksi olkoon I kolmion $\triangle ABH$ sisään piirretyn ympyrän keskipiste sekä pisteet L, K ja J kolmioiden $\triangle ABI$, $\triangle BCI$ ja $\triangle CAI$ sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. Kuinka suuri kulma $\angle KJL$ on?

Ratkaisu. Vastaus: Kulma $\angle KJL$ on $30°$.

Ratkaisun ideana on laskea mahdollisimman paljon eri kulmia ja hyödyntää peilausta määrittelemällä sen avulla uusia pisteitä. Riittävän pitkän työn jälkeen saadaan lopulta tulos. Koko ratkaisun ajan muistetaan, että kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste.

Ensin lasketaan kulmien $\angle ICB$ ja $\angle IKB$ suuruudet (niitä tarvitaan hiukan myöhemmin):

Lemma 1. *On $\angle ICB = 15°$ ja $\angle IKB = 97{,}5°$.*

Todistus. Koska K on kolmion $\triangle BCI$ sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja I on kolmion $\triangle ABH$ sisään piirretyn ympyrän keskipiste, niin on

$$\angle IKB = 180° - \angle BIK - \angle KBI = 180° - \frac{1}{2}\angle BIC - \frac{1}{2}\angle CBI.$$

Edelleen saadaan

$$\angle BIC = 180° - \angle CBI - \angle ICB.$$

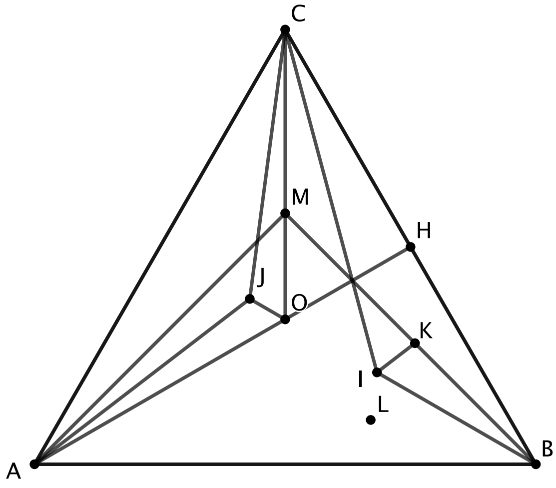
Lisäksi koska $AB = CB$ ja $\angle IBA = \angle CBA$, niin sks-yhtenevyyskriteerin nojalla on $\triangle AIB \cong \triangle CIB$ ja täten on

$$\angle ICB = \angle BAI = \frac{1}{2}\angle BAH = 15°.$$

Saadaan

$$\angle IKB = 90° + \frac{1}{2}\angle ICB = 90° + \frac{1}{2}\angle ICB = 97{,}5°.$$

□



Seuraavaksi ajatuksena on hyödyntää edellisen lemman tulosta ja peilauksella määriteltyä uutta pistettä. Olkoon nimittäin O kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste sekä M pisteen I peilaus suoran OA suhteen. Seuraava lemma kuvaa pisteiden K ja M yhteyttä sekä antaa hyödyllisen tuloksen kahden kulman yhtäsuuruudesta.

Lemma 2. *Piste K on suoralla BM ja $\angle JAM = \angle OAJ$.*

Todistus. Pisteen M määritelmästä seuraa, että se on kolmion ACH sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Siis on

$$\angle MCB = 30^\circ = \angle CBI$$

sekä pisteen M määritelmän nojalla $MC = BI$. Näin ollen sks-yhtenevyyskriteerin nojalla on $\triangle MCB \cong IBC$. Lemman 1 nojalla saadaan, että on $\angle CBM = \angle ICB = 15^\circ = \angle CBK$. Siis piste K on suoralla BM.

Vastaavilla yhtenevyyshuomioilla saadaan $\triangle MCB \cong MCA$. Täten $\angle MAC = 15^\circ$. Lisäksi on $\angle IAJ = \angle JAC$ ja $\angle BAI = \angle IAH = 15^\circ$. Saadaan

$$\angle JAM = \angle JAC - \angle MAC = \angle IAJ - 15^\circ = \angle IAJ - \angle IAH = \angle HAJ.$$

Tästä seuraa, että

$$\angle JAM = \angle HAJ = \frac{1}{2}\left(\angle BAC - \angle BAH - \angle MAC\right) = \frac{1}{2}\left(60^\circ - 30^\circ - 15^\circ\right) = 7{,}5^\circ.$$

Koska M on kolmion ACH sisään piirretyn ympyrän keskipiste, niin on oltava $\angle OAJ = 15^\circ - \angle JAM = 7{,}5^\circ = \angle JAM$. $\square$

On usein hyödyllistä löytää kuvioista jännenelikulmioita, sillä niiden avulla voidaan laskea useita kulmia. Seuraavassa lemmassa löydetäänkin yksi jännenelikulmio.

Lemma 3. *Nelikulmio $IJMK$ on jännenelikulmio.*

Todistus. Pisteiden I ja J määritelmien mukaan myös pisteet I, O ja J ovat samalla suoralla; janan AC keskinormaalilla. Näin ollen on

$$\angle COJ = \angle MOJ = \angle JOA.$$

Edelleen, lemman 2 nojalla tiedetään, että on $JAM = \angle OAJ$. Siispä J on kolmion $\triangle AMO$ sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Näin ollen lemman 1 avulla saadaan

$$\angle OJM = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle OAM = 180^\circ + 7{,}5^\circ = 97{,}5^\circ = \angle IKB.$$

Muistetaan vielä, että lemman 2 nojalla pisteet B, K ja M ovat samalla suoralla. Täten on $\angle OJM = \angle IJM$ ja $\angle IJM + \angle MKI = 180^\circ$. Siis nelikulmio $IJMK$ on jännenelikulmio. $\square$

Nyt on enää yhdistettävä saadut tulokset ja laskettava vastaus.

Pisteiden I ja M symmetrian nojalla on $\angle IMB = \angle CIM$. Tästä seuraa, että pätee $IM = MC = BI$. Tämän ja lemmojen 3 sekä 2 mukaan on

$$IJK = IMK = \angle IMB = \angle MBI = 15^\circ.$$

Edelleen, koska pisteet L ja K ovat symmetrisiä suoran BO suhteen, niin on $\angle KJL = 2\angle IJK = 30^\circ$.

6. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, (missä $\mathbb{N}_0$ on ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko) jotka toteuttavat ehdon $f(f(n)) = f(n) + 1$ kaikille $n \in \mathbb{N}_0$ ja joille lisäksi joukon $\{ f(0), f(1), f(2), \ldots \}$ pienin luku on 1. (PAMO 2002.1)

Ratkaisu. Olkoon x kokonaisluku, jolle $f(x) = 1$. Tällöin $f(f(x)) = f(1) = f(x) + 1 = 2$. Samoin $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ jne. ja $f(n) = n + 1$, kun $n > 0$. Tämä tarkoittaa kuitenkin, että kun $n > 0$, niin $f(n) > 1$. Tiedämme kuitenkin, että on olemassa ei-negatiivinen kokonaisluku x, jolle $f(x) = 1$. Koska tämä luku ei voi olla suurempi kuin nolla ja sen on oltava ei-negatiivinen, on oltava $x = 0$ ja $f(0) = 1$.

7. Olkoon $\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$. Etsi kaikki funktiot $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $f(n) < f(n + 1)$ kaikille $n \in \mathbb{N}_0$;
2. $f(2) = 2$;
3. $f(mn) = f(m)f(n)$ kaikille $m, n \in \mathbb{N}_0$. (PAMO 2003.1)

Ratkaisu. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2^n) = 2^n$, $f(2) < f(3) < f(4)$ joten $f(3) = 3$. Selvästi myös $f(n) \geq n$. Osoitamme, että $f(n) = n$. Teemme ensin vastaoletuksen; olkoon n_0 pienin kokonaisluku, jolle $f(n) > n$. Jos $n = 2N$, niin $f(n) = 2f(N) = 2N$; ristiriita. Jos taas $n = 2N + 1$, niin $f(2N) = 2f(N) = 2N < f(n) < f(2N + 2) = 2(N + 1)$ ja $f(n) = 2N + 1 = n$; ristiriita. Siten $f(n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$.

8. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon $f(x + y) \leq f(x) + f(y) \leq x + y$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}$. (PAMO 2008.1)

Ratkaisu. Sijoitus $x = y = 0$ antaa $f(0) = 0$. Sijoituksella $y = -x$ saamme, että $f(0) \leq f(x) + f(-x) \leq 0$ eli $f(x) = -f(-x)$; siten f on pariton funktio. Nyt $y = 0$ antaa epäyhtälön $f(x) \leq x$. Tämä kuitenkin tarkoittaa, että $-f(x) = f(-x) \leq -x$ eli $x \leq f(x)$. Siten on oltava $f(x) = x$.

9. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat yhtälön $f(x)f(y) + f(x + y) = xy$ kaikille reaaliluvuille x ja y. (PAMO 2013.2)

Ratkaisu. Funktio ei ole identtisesti nolla. Olkoon $x = a$ sellainen, että $f(a) \neq 0$ ja $y = 0$, jolloin $f(a)f(0) + f(a) = 0$, mistä $f(0) = -1$. Sijoitetaan $x = 1$ ja $y = -1$, jolloin $f(1)f(-1) - 1 = -1$, mistä $f(1)f(-1) = 0$.

Tapaus $f(1) = 0$: sijoitus $y = 1$, $x = z - 1$ antaa tuloksen $f(z) = z - 1$ kaikille z.
Tapaus $f(-1) = 0$: sijoitus $y = -1, x = z + 1$ antaa tuloksen $f(z) = -z - 1$ kaikille z.
Siten ainoat vaihtoehdot ovat $f(z) = z - 1$ ja $f(z) = -z - 1$, ja helposti tarkistamme, että nämä funktiot toteuttavat alkuperäisen ehdon.

10. (Kanadan IMO-valmennuskilpailu 1996). Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy.$$

Ratkaisu. Sijoitamme $x = y$, jolloin

$$c = f(f(0)) = f(x)^2 - x^2,$$

misä $f(x) = \pm\sqrt{x^2+c}$. Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön $x = y = 0$ saamme $\pm\sqrt{2c} = c$, mistä $c = 0$ tai $c = 2$. Kyseeseen tulevat vaihtoehdot $f(x)$ ja $f(x) = \sqrt{x^2+2}$. Tarkistus osoittaa, että vain $f(x) = x$ kelpaa.

11. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ehdot $f(x) \leq x$ ja $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Ratkaisu. Koska $f(0) \leq 0$ ja $f(0+0) \leq 2f(0)$, mistä $f(0) \geq 0$, niin $f(0) = 0$. Tästä saamme

$$0 = f(0) = f(x-x) \leq f(x) + f(-x) \leq x - x = 0,$$

mistä $f(x) = -f(-x)$ (funktio f on pariton). Koska $f(-x) \leq -x$, niin $-f(-x) \geq x$. Nyt

$$x \geq f(x) = -f(-x) \geq x,$$

mistä $f(x) = x$.

12. Onko mahdollista, että kokonaiskertoimisilla polynomeilla

$$ax^2 + bx + c \qquad \text{ja} \qquad (a+1)x^2 + (b+1)x + c + 1$$

on molemmilla kaksi kokonaislukujuurta?

Ratkaisu. Ei ole mahdollista. Oletetaan, että a on parillinen (tai vaihdetaan sen tilalle $-1-a$). Jos polynomin $ax^2 + bx + c$ juuret ovat kokonaislukuja, niin $a \mid b$ ja $a \mid c$, joten b ja c ovat parillisia. Mutta silloin polynomin $(a+1)x^2 + (b+1)x + c + 1$ kertoimet ovat parittomia, eikä sillä voi olla kokonaisjuuria, koska diskriminantti

$$(b+1)^2 - 4(a+1)(c+1) \equiv 5 \pmod 8$$

ei ole neliönjäännös.

Vaativampia tehtäviä

13. Pöydällä on rivissä n lappua, joiden toinen puoli on valkoinen ja toinen musta. Kustakin lapusta on valkoinen puoli näkyvillä. Jos mahdollista, niin yhdellä askeleella valitaan yksi lappu, jonka valkoinen puoli on näkyvillä ja joka ei ole rivin reunimmaisena, käännetään valitun lapun viereiset laput ja poistetaan valittu lappu. Osoita, että lopussa voi olla tasan kaksi lappua jäljellä jos ja vain jos $3 \nmid n-1$.

Ratkaisu. Tämän ratkaisun ideana on tehdä havaintoja niiden lappujen määristä, joista on musta puoli näkyvillä. Kun vielä löydetään sopiva invariantti, niin väite seuraa pienen työn jälkeen.

Kutsutaan selityksen yksinkertaistamisen takia sellaista lappua, josta on näkyvillä valkoinen puoli, *valkoiseksi*. Vastaavasti kutsutaan sellaista lappua, josta on musta puoli näkyvillä, *mustaksi*. Osoitetaan ensin, että luku $n-1$ ei voi olla kolmella jaollinen ja sitten, että kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla $n-1$ ei ole kolmella jaollinen, toteuttavat halutun ehdon.

Huomataan heti, että mustien lappujen määrä muuttuu aina parillisen luvun verran. Koska aluksi ei ole yhtään mustaa lappua, niin mustien lappujen määrä on koko ajan parillinen. Näin ollen, jos lopussa on vain kaksi lappua jäljellä, niin niiden kummankin on oltava valkoisia tai mustia.

Määritellään nyt jokaiselle valkoiselle lapulle *paino*. Olkoon k jonkin valkoisen lapun vasemmalla puolella olevien mustien lappujen lukumäärä. Tällöin valkoisen lapun paino on $(-1)^k$. Olkoon lisäksi S kaikkien valkoisten lappujen painojen summa. (Jos ei ole yhtään valkoista lappua, niin määritellään luvun S arvoksi nolla.) Aluksi on

$$S = \sum_{j=1}^{n} (-1)^0 = n.$$

Edellisessä kappaleessa tehtyjen havaintojen mukaan lopuksi on $S = 2$ tai $S = 0$. Tavoitteena on todistaa, että luku S tuottaa joka askeleen jälkeen saman jakojäännöksen kolmella jaettaessa. Tästä seuraa, että kolme ei voi jakaa lukua $n - 1$.

Kun valitun valkoisen lapun vasemmalla puolella on k mustaa lappua. Jos valitun valkoisen lapun viereiset laput ovat molemmat valkoisia, niin kunkin näiden kolmen valkoisista lapuista paino on $(-1)^k$. Kaikkien näiden lappujen painot poistetaan muutosta tehdessä. Lisäksi näiden lappujen vasemmalla puolella olevien valkoisten lappujen painot pysyvät muuttumattomina, sillä niiden vasemmalla puolella olevien lappujen määrä ei muutu. Lappujen oikealla puolella olevien valkoisten lappujen painot eivät myöskään muutu, sillä niiden vasemmalla puolella olevien mustien lappujen määrä muuttuu parillisen luvun verran. Tällä askeleella luku S muuttuu siis luvun $-3 \cdot (-1)^k$ verran eli ei muutu $\pmod 3$.

Vastaavasti nähdään, että jos valitun lapun viereiset laput ovat molemmat mustia, niin summa S muuttuu luvun

$$-(-1)^k + (-1)^{k-1} + (-1)^{k-1} = -3 \cdot (-1)^k$$

eli tässäkään tapauksessa $S \pmod 3$ ei muutu. Edelleen samalla päättelyllä havaitaan, että jos viereiset laput ovat musta ja valkoinen (jossain järjestyksessä), niin luku S muuttuu luvun

$$-(-1)^k + (-1)^{k-1} - (-1)^k = 3 \cdot (-1)^k$$

tai luvun

$$-(-1)^k - (-1)^k + (-1)^{k-1} = 3 \cdot (-1)^k$$

verran. Siis tässäkään tapauksessa $S \pmod 3$ ei muutu. Näin ollen $S \pmod 3$ on invariantti.

Kolmannessa kappaleessa todettiin, että aluksi on $S = n$ ja jos lopuksi on kaksi lappua jäljellä, niin on $S = 2$ tai $S = 0$. Tämä tarkoittaa, että $n \equiv 2 \pmod 3$ tai $n \equiv 0 \pmod 3$ eli $3 \nmid n - 1$. On vielä osoitettava, että kaikki luvut n, joilla $n - 1$ ei ole kolmella jaollinen, toteuttavat halutun ehdon.

Kun $n = 2$ tai $n = 3$, niin väite on selvä. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee jollain luvulla k, jolle pätee $3 \nmid k - 1$. Tarkastellaan nyt väitettä luvulla $k + 3 \geq 5$. Aluksi kaikki laput ovat valkoisia eli rivin oikea reuna on

$$\ldots vvvvv,$$

missä v tarkoittaa valkoista lappua ja m mustaa. Valitaan toiseksi viimeinen lappu oikealta ja askeleen jälkeen rivin oikea reuna näyttää seuraavalta:

$$\ldots vvmm.$$

Muuten rivi pysyy muuttumattomana. Valitaan nyt kolmanneksi viimeinen lappu ja saadaan rivin lopuksi

$$\ldots mvm$$

sekä lappurivi pysyy muuten muuttumattomana. Valitaan toiseksi viimeinen lappu ja rivin loppu on

$$\ldots vv.$$

Siis on saatu k lapusta koostuva rivi, jossa kaikki ovat valkoisia. Induktio-oletuksen mukaan askeleita toistamalla lopuksi voi olla tasan kaksi lappua jäljellä. Siispä tarkasteltava tilanne on mahdollinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, joille pätee $3 \nmid n - 1$.

14. Taululle on kirjoitettu 30 reaalilukua. Ne voi jakaa pareihin, joista kunkin summa on 1. Kun luvut jaetaan pareihin eri tavalla, huomataan että kunkin parin tulo, yhtä paria lukuunottamatta, on 1. Todista, että viimeisenkin parin tulo on 1.

Ratkaisu. Luvuista ja pareista muodostuu verkko, jonka kaaret voimme nimetä summa- ja tulokaariksi. Jokaisesta solmusta lähtee yksi summa- ja yksi tulokaari lukuunottamatta yhtä puuttuvaa tulokaarta. Havaitaan ensin, että jos jokin taulun luku on 0, siitä ei voi lähteä tulokaarta. Jos jokin luku on 1, siitä lähtevän summakaaren päässä on 0. Siten enintään neljä taulun luvuista voi olla 0 tai 1.

Lisätään verkkoon väliaikaisesti siitä puuttuva tulokaari. Koska verkossa on yhtä monta solmua ja kaarta, se koostuu erillisistä kehistä (sykleistä), joissa summa- ja tulokaaret vuorottelevat. Valitaan luku $x \notin \{0, 1\}$ ja seurataan sen kehää aloittaen summakaaresta:

$$x \to 1 - x \to \frac{1}{1-x} \to \frac{x}{x-1} \to \frac{x-1}{x} \to \frac{1}{x} \to x. \tag{1}$$

Siis kuuden kaaren päässä on yhtäsuuri luku. Jos se on sama kuin aloitussolmu, kehän pituus on kuusi, mutta muussakin tapauksessa kuuden monikerta. Mikään kehän luvuista ei ole 0 eikä 1.

Koska kaikki kehät mahdollisesti yhtä lukuunottamatta sisältävät kuudella jaollisen määrän solmuja ja koska solmuja on kaikkiaan 30, myös viimeinen kehä sisältää kuudella jaollisen määrän solmuja. Silloin se sisältää jonkin luvun $x \notin \{0, 1\}$, joten seuraamalla siitä kaaria kahteen suuntaan päädytään samanlaiseen kehään kuin (1). Siis puuttuvakin tulokaari yhdistää luvut, joiden tulo on 1.

15. Todista kolmion sivuille a, b ja c epäyhtälö

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \le 3.$$

Ratkaisu. Todistettavana on

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{\sqrt{-a+b+c}}{-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \le 3,$$

missä $\sum_{\text{cyc}}$ merkitsee syklistä summaa, jossa muuttujat vaihtavat paikkaa $a \mapsto b \mapsto c \mapsto a$.

Cauchy–Schwarzista saadaan

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{\sqrt{-a+b+c}}{-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \le \sqrt{3\sum_{\text{cyc}} \frac{-a+b+c}{(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}}. \tag{2}$$

Olkoon $w = \frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$, $x = w - \sqrt{a}$, $y = w - \sqrt{b}$ ja $z = w - \sqrt{c}$, tavoitteena sijoittaa nämä lausekkeeseen. Jensenistä ja kolmioepäyhtälöstä seuraa, että $x, y, z > 0$. Harrastetaan ensin hieman algebraa:

$$\begin{aligned}
4w^2 &= a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac} \\
4x^2 &= a+b+c-2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ac} && \text{vastaavasti } y^2,\ z^2 \\
4xy &= -a-b+c+2\sqrt{ab} && \text{vastaavasti } yz,\ xz \\
2x^2+2xy &= c + \sqrt{bc} - \sqrt{ac} \\
2xz-2yz &= -a+b - \sqrt{bc} + \sqrt{ac}
\end{aligned}$$

Siis epäyhtälön (2) oikea puoli on

$$\sqrt{3\sum_{\text{cyc}} \frac{2x^2+2xy+2xz-2yz}{4x^2}} = \sqrt{3\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2+xy+xz-yz}{2x^2}}.$$

Laventamalla y^2z^2:lla saadaan

$$\sqrt{3\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2y^2z^2+xy^3z^2+xy^2z^3-y^3z^3}{2x^2y^2z^2}} = \sqrt{3\frac{3x^2y^2z^2+\sum_{\text{cyc}}(xy^3z^2+xy^2z^3-y^3z^3)}{2x^2y^2z^2}}.$$

Tehdään vielä yksi sijoitus: $t = xy$, $u = yz$, $v = xz$. Riittää todistaa

$$\sum_{\text{cyc}}(t^2v + t^2u - t^3) \le 3tuv \qquad \text{eli} \qquad \sum_{\text{cyc}} t(t^2 - tv - tu + uv) \ge 0,$$

mutta tämä on Schurin epäyhtälö. Siis epäyhtälön (2) oikea puoli on $\le \sqrt{3\dfrac{6x^2y^2z^2}{2x^2y^2z^2}} = 3.$

16. Todista, että on olemassa sellaiset aidosti kasvavat kokonaislukujen jonot (a_n) ja (b_n), että $a_n(a_n+1)$ jakaa luvun (b_n^2+1) kaikilla n.

Ratkaisu. Jos c ja d ovat sellaiset luvut, että $d^2 \mid c^2+1$, asetetaan $b = c(d^2+1)+d^3$. Silloin

$$\begin{aligned}
&b^2+1 = c^2(d^2+1)^2 + 2cd^3(d^2+1) + d^6 + 1,\\
&b^2+1 \equiv c^2(0)^2 + 2cd^3(0) + (d^2+1)(d^4-d^2+1) \equiv 0 && \pmod{d^2+1},\\
&b^2+1 \equiv c^2(0^2+2\cdot 0+1) + 2cd\cdot 0\cdot d(d^2+1) + 0^3 + 1 = c^2+1 \equiv 0 && \pmod{d^2}.
\end{aligned}$$

Jos siis löydetään sopivat c ja d, voidaan asettaa $a = d^2$ ja $b = c(d^2+1)+d^3$.

Yritetään löytää luvut, joille $c^2+1 = 2d^2$. Yksi ratkaisu on $(c,d) = (7,5)$ mutta muita on vaikea löytää. Nyt kannattaa muistella Pellin yhtälöä, jolle saadaan yhdestä ratkaisusta äärettömän monta lineaarikombinaatioina. Jos (c,d) on ratkaisu, myös $(3c+4d, 2c+3d)$ on ratkaisu, sillä

$$\begin{aligned}
(3c+4d)^2+1 &= 9c^2+24cd+16d^2+1,\\
2(2c+3d)^2 &= 8c^2+24cd+18d^2,\\
\text{erotus} &= c^2-2d^2+1 = 0.
\end{aligned}$$

Saadaan siis kasvava jono $(7,5), (41,29), (239,169), \ldots$ ratkaisuja (c_n, d_n), joista saadaan aiemmin esitetyllä tavalla kasvavat jonot (a_n) ja (b_n).

17. Olkoon $\mathbb{R}_{\ge 0}$ ei-negatiivisten reaalilukujen joukko. Kun a ja b ovat positiivisia reaalilukuja, todista että funktionaaliyhtälöllä

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$.

Ratkaisu. Olkoot $u_0 = k$ ja $u_{n+1} = f(u_n)$. Silloin $u_{n+2} + au_{n+1} - b(a+b)u_n = 0$. Tämä on lineaarinen differenssiyhtälö, joten ratkaistaan ensin $\lambda^2 + a\lambda - b(a+b) = (\lambda - b)(\lambda + a + b) = 0$. Saadaan $\lambda = b$ tai $\lambda = -a-b$, joten differenssiyhtälön yleinen ratkaisu on $u_n = Pb^n + Q(-a-b)^n$. Siis $u_n/(a+b)^n = P\left(\frac{b}{a+b}\right)^n + Q(-1)^n$. Summa on positiivinen mutta ensimmäinen termi lähestyy rajatta nollaa, joten on oltava $Q = 0$. Lähtöarvosta $u_0 = k$ saadaan $P = k$, joten $f(k) = u_1 = bk$. On helppo tarkistaa, että $f(x) = bx$ ratkaisee yhtälön.

18. Olkoon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ funktio, jolla

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x))$$

kaikilla kokonaisluvuilla x ja y. Osoita, että f on rajoitettu, eli siis että on olemassa sellainen kokonaisluku M, että kaikilla x pätee $-M \le f(x) \le M$.

Ratkaisu. Toisin sanoen, $f(t-y) = f(y) - f(t)$ kaikilla $y \in \mathbb{Z}$ ja niillä t, jotka ovat f:n arvoja. Tutkitaan tämä muotoa tehtävästä, koska se on sievempi ja kuvaa paremmin sitä, mitä yhtälössä todella tapahtuu. Ratkaisun ajan t kuvaa aina jotain f:n arvoa.

Sijoittamalla tähän $y = t$ saadaan $f(0) = 0$, joten $t = 0$ on f:n arvo. Sijoittamalla tämä yhtälöön saadaan $f(-y) = f(y)$.

Yhtälö $f(t-y) = f(y) - f(t)$ voidaan siis kirjoittaa muodossa $f(y-t) = f(y) - f(t)$. Nähdään, että sijoituksella $y = 2t$ saadaan $f(2t) = 2f(t)$, sijoituksella $y = 3t$ saadaan $f(3t) = 3f(t)$, ja niin edelleen. Koska tehtävänannossa pyydettiin todistamaan, että f on rajoitettu, tulisi jotenkin saada todistettua, että $f(t) = 0$ kaikilla t.

Väitettä $f(t) = 0$ kaikilla t ei voi saada todistettua ilman ehtoa $f(-y) = f(y)$, koska ilman tätä lisäehtoa yhtälöllä $f(y-t) = f(y) - f(t)$ on muitakin ratkaisuja. Tämä antaakin vihjeen siitä, miten väitteen saa todistettua: vaihdellaan muuttujien merkkejä. Saamme

$$f(-y-t) = f(-y) - f(t) = f(y) - f(t) = f(y-t),$$

eli siis $f(-y-t) = f(y-t)$. Tästä voidaan viimeistellä vaikka tekemällä muuttujanvaihdon $y \to y+t$, jolloin saadaan $f(-y-2t) = f(y) = f(-y)$, eli f on jaksollinen jaksolla $2t$, kunhan $t \neq 0$. Toisaalta, jos emme voi valita muuta f:n arvojoukon alkioita kuin 0, niin f on nollafunktio. Oli miten oli, niin f on jaksollinen, ja täten rajoitettu: funktion arvothan määräytyvät suoraan luvuista $f(0), f(1), \ldots, f(T-1)$, missä T on jakson pituus.

Huomautus: Emme missään kohtaa todistaneet suoraan, että $f(t) = 0$ kaikilla t. Tämä kuitenkin johdatti oikeille jäljille ratkaisun suhteen.

19. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, joilla

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n ja m.

Ratkaisu. Jaollisuusehdon voi kirjoittaa monella eri tavalla: koska tutkimme kaikkea modulo $n+f(m)$, niin voimme esimerkiksi korvata tulosta $nf(m)$ termin $f(m)$ termillä $-n$, tai termin n termillä $-f(m)$. Saamme siis tehtävänannon ehtojen lisäksi ehdot

$$n + f(m) \mid f(n) - n^2$$

ja

$$n + f(m) \mid f(n) - f(m)^2.$$

Ensimmäisestä jaollisuusehdosta saadaan varsin helposti seuraava väite: jos jollain n pätee $f(n) \neq n^2$, niin f on rajoitettu. Nimittäin, jos $f(n) \neq n^2$, niin saamme $n + f(m) \mid f(n) - n^2 = k$ jollain $k \neq 0$, ja nyt m:n käydessä läpi kaikki positiiviset kokonaisluvut tulee f:n arvojen olla enintään $k - n$.

Toisaalta huomataan, että $f(n) = n^2$ kaikilla n on ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön: pätee $n+f(m) = n+m^2 \mid n(n+m^2) = f(n)+nf(m)$. Oletetaan nyt, että f ei ole funktio $f(x) = x^2$, minkä seurauksena f on rajoitettu.

Koska f on rajoitettu, yhtälöstä $n + f(m) \mid f(n) - f(m)^2$ seuraa valinnalla $n = m$ väite $n + f(n) \mid f(n) - f(n)^2$ ja täten kaikilla tarpeeksi suurilla n saadaan $f(n) - f(n)^2 = 0$, eli $f(n) = 1$. Enää pitää tutkia pienet arvot.

Oletetaan, että $f(m) \neq 1$ jollain m. Nyt tällä m pätee $n + f(m) \mid f(n) - f(m)^2 = f(n) - k$ jollain $k \neq 1$, mikä johtaa ristiriitaan suurilla n, onhan $f(n) - k = 1 - k \neq 0$ suurilla n.

Yhtälöllä on siis ratkaisut $f(n) = 1$ kaikilla n ja $f(n) = n^2$ kaikilla n. Nämä selvästi ovat ratkaisuja yhtälölle.

Kommentti: Jos tehtävän funktionaaliyhtälö on muotoiltu jaollisuusehtona, kannattaa jaollisuusehto usein sieventää, kuten tehtiin tässä. Tässä oikeastaan muotoiltiin annettu ehto kahtena eri hyödyllisenä jaollisuusehtona.

20. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Ratkaisu. Tehdään helppoja sijoituksia. Pieni kokeileminen kertoo, että saamme todistettua $f(0) = 0$: sijoitus $x = y = 1$ antaa $f(f(1)) = 0$ ja $x = 0, y = 1$ antaa $f(0) = 2f(0) + f(f(1))$, joten nämä yhdistämällä saadaan $f(0) = 0$.

Nyt sijoitus $y = 0$ antaa $f(x^2) = 0$ kaikilla x, eli f on nolla epänegatiivislla luvuilla. Samalla epäyhtälö sievenee muotoon

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(f(y)). \tag{3}$$

Koska f on nolla epänegatiivisilla luvuilla, on luontevaa tutkia lukujen x ja y eri merkkivaihtoehtoja. Sijoitetaan $y \geq 0$, jolloin saadaan $yf(x) = f(xy)$. Tämä on oikein hyvä ehto. Tähän $x = -1$ antaa $yf(-1) = f(-y)$, eli toisin sanoen f on lineaarinen negatiivisilla luvuilla.

Siispä kaikki f ovat 0 epänegatiivisilla luvuilla ja kx negatiivisilla luvuilla, missä k on jokin vakio. Enää tulee tutkia, ovatko kaikki tätä muotoa olevat funktiot ratkaisuja. Tutkitaan yhtälöä 3. Jos $y \geq 0$, niin yhtälö toteutuu (kuten edellä pääteltiin). Jos $x \geq 0$ ja $y < 0$, niin yhtälön 3 vasen puoli on $xf(y) = kxy$, ja oikea puoli on $f(xy)+f(f(y)) = kxy+f(f(y))$. Huomataan siis, että $f(f(y)) = 0$ kaikilla $y < 0$ (joten $f(f(y)) = 0$ kaikilla y). Koska $f(y) = ky$ kaikilla $y < 0$, tämä vaatii $k < 0$.

Tarkastellaan vielä tapausta $x < 0$ ja $y < 0$. Tällöin yhtälön 3 vasen puoli on $-xf(y) + yf(x) = -kxy + kxy = 0$ ja oikea puoli on 0. Täten yhtälön ratkaisut ovat kaikki funktiot, jotka ovat nolla epänegatiivisilla luvuilla ja joilla $f(x) = kx$ kaikilla $x < 0$, missä $k < 0$ on vakio.

Kommentti: Yllä esitetty ratkaisu perustuu valmennettavien lähettämiin ratkaisuihin. Toinen ratkaisu, joka tehtävän lähettäjällä oli mielessä, perustui aluksi yhtälön tutkimiseen tapauksessa $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ (koska tällöin eriskummallisesta itseisarvosta päästään eroon), ja hyödyntämällä yhtälön symmetriaa. Tässäkin ratkaisussa arvon $f(0)$ määrittäminen perustui pariin eri sijoitukseen. Ajatuksena on ”Yritetään saada parista eri paikasta jotain tietoa luvusta $f(0)$, niin eiköhän ongelma ratkea.” Tapoja tämän saavuttamiseksi on monia.

Vaikka yhtälöllä on omituisia ratkaisuja, ei niiden olemassaoloa tarvitse tiedostaa tehtävän ratkaisemiseksi. Toisaalta ei saa olla liian jääräpäinen: kun on saanut, että f on nolla epänegatiivisilla luvuilla ja lineaarinen negatiivisilla luvuilla, kannattaa vain rauhassa sijoittaa tämä funktio yhtälöön ja katsoa, mitä tapahtuu (eikä vain koettaa tehdä lisää sijoituksia sen todistamiseksi, että f on nollafunktio).

21. Todista, että yhtälöllä

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0$$

ei ole rationaaliratkaisuja.

Ratkaisu. Sijoitetaan $u = 2x + 3$, $v = 2y + 3$ ja $w = 2z + 3$. Saadaan

$$u^2 + v^2 + w^2 = 7.$$

On yhtäpitävää todistaa, että yhtälöllä

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7t^2$$

ei ole kokonaislukuratkaisuja, joilla $t \neq 0$. Jos näin olisi, valitaan ratkaisu, jolle $|t| + |x| + |y| + |z|$ on minimaalinen. Tarkastellaan modulo 8: $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7t^2$, mutta jokainen neliöluku on 0, 1 tai 4. Siten x, y, z ja t ovat kaikki parillisia, jolloin kaikki luvut voidaan jakaa kahdella ja saada pienempi itseisarvojen summa, mikä on ristiriita.

22. Etsi yhtälön

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$$

kokonaislukuratkaisut.

Ratkaisu. On oltava $y \geq 0$. Koska oikea puoli ei ole nolla, on oltava joko $|x| \geq |y| + 1$ tai $|x| \leq |y| - 1$. Kummassakin tapauksessa $(x^2 - y^2)^2 \geq (2y - 1)^2$, joten $(2y - 1)^2 \leq 1 + 16y$, mikä on mahdollista vain jos $y \leq 5$. Kokeilemalla kaikki mahdolliset y:n arvot saadaan ratkaisut

$$(\pm 1, 0), (\pm 4, 3), (\pm 4, 5).$$

23. $n \times n$-neliöruudukon ($n \geq 3$) vasen ja oikea reuna liimataan yhteen niin, että muodostuu lieriö. Osa ruuduista väritetään mustiksi. Todista, että on kaksi yhdensuuntaista n:n ruudun jonoa (vaaka- tai pystysuoria tai diagonaalisia) joissa on yhtä monta mustaa ruutua.

Ratkaisu. Oletetaan, että väite ei päde. Silloin jollakin vaakarivillä on joko 0 tai n mustaa ruutua; voidaan olettaa, että ruutuja on n. Silloin millään pysty- tai vinorivillä ei ole 0 mustaa ruutua, joten yhden rivin kumpaakin tyyppiä täytyy sisältää n mustaa ruutua, jolloin millään vaakarivilläkään ei voi olla 0 mustaa ruutua. Kaikenlaiset rivit sisältävät siis yhdestä n:ään mustaa ruutua.

Numeroidaan vaaka- ja pystyrivit järjestyksessä $1, \ldots, n$, missä kummassakin tapauksessa rivi 1 sisältää n mustaa ruutua (lieriö voidaan hyvin liimata toiseltakin sivulta, jolloin saadaan torus jota voidaan kääntää, niin että rivi saadaan haluttuun paikkaan). Silloin jokainen vinorivi, paitsi ne kaksi jotka kulkevat ruudun $(1,1)$ kautta, sisältää ainakin 2 mustaa ruutua, joten näillä kahdella vinorivillä ei voi olla muita mustia ruutuja kuin $(1,1)$. Jos n on pariton, mikään vaakarivi ei voi sisältää $n-1$ mustaa ruutua, koska se leikkaa kumpaakin mainituista vinoriveistä, mikä on ristiriita. Jos n on parillinen, ruudun $(1,1)$ kautta kulkevat vinorivit kohtaavat myös ruudussa $(n/2+1, n/2+1)$, ja sekä vaaka- että pystyrivin $n/2+1$ on oltava tätä ruutua lukuunottamatta mustia, koska mikään muu vaaka- tai pystyrivi ei voi sisältää $n-1$ mustaa ruutua. Mutta näiden mustien rivien takia mikään vaaka- tai pystyrivi ei voi sisältää vain yhtä mustaa ruutua, mikä on taas ristiriita.

24. Kolmion ABC sisäympyrän keskipiste on I ja sisäympyrä sivuaa kolmion sivuja AB, BC ja CA pisteissä K, M ja N. Mediaani BB_1 leikkaa janan KM pisteessä D. Osoita, että pisteet I, D ja N ovat samalla suoralla.

Ratkaisu. Olkoon L suorien IN ja KM leikkauspiste, jonka aiomme osoittaa olevan sama kuin D. Leikatkoon L:n kautta piirretty AC:n kanssa yhdensuuntainen suora suoria AB ja BC pisteissä A_1 ja C_1. Aiomme osoittaa, että $A_1L = LC_1$, mistä seuraa että L on mediaanilla BB_1.

Kulmat IKA_1 ja ILA_1 ovat suoria, joten löydetään jännenelikulmio A_1KLI. Siitä saadaan $\angle A_1LK = \angle A_1IK$. Symmetrisesti $\angle C_1LM = \angle C_1IM$. Ristikulmina $\angle A_1LK = \angle C_1LM$, joten $\angle A_1IK = \angle C_1IM$. Kolmioissa IMC_1 ja IKA_1 on lisäksi suora kulma ja yhtä pitkä sivu (sisäympyrän säde) joten ne ovat yhdenmuotoiset. Siis $IA_1 = IC_1$, joten $LA_1 = LC_1$, mistä todistus seuraa.