Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, syyskuu 2019
Ratkaisuja

Helpompia tehtäviä

1. Funktio. Onko olemassa funktiota

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

jolle pätee

$$f(f(n)) = n,$$

mutta $f(n) \neq n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$? Luonnollisten lukujen joukkoon $\mathbb{N}$ luetaan tässä kuuluvaksi nolla ja positiiviset kokonaisluvut.

Ratkaisu. On olemassa, esimerkiksi funktio

$$f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{kun } n \text{ on pariton,} \\ n+1, & \text{kun } n \text{ on parillinen} \end{cases}$$

toteuttaa vaaditut ominaisuudet, sillä aina $n \neq n \pm 1$ ja toisaalta $f(f(n)) = n \pm 1 \mp 1 = n$.

2. Kelmit ja ritarit. Kelmien ja ritarien saari on ihmeellinen paikka. Kaikki sen asukkaat ovat joko kelmejä, jotka valehtelevat aina, tai ritareita, jotka puhuvat aina totta.

Tapasin kerran kelmien ja ritarien saarella veljekset. Kysyin vanhemmalta veljeltä, olivatko he molemmat ritareita. Sain vastauksen, mutta en osannut päätellä siitä vielä mitään varmaa. Kysyin sitten pikkuveljeltä, oliko vanhempi veli ritari. Vastauksen saatuani tiesin, mitä veljekset olivat.

Olivatko veljekset kelmejä vai ritareita?

Ratkaisu. Laaditaan taulukko eri vaihtoehdoista. Kukin vaihtoehto on omalla rivillään.

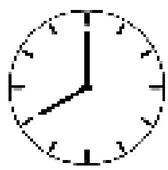
Vanhempi veli	Nuorempi veli	Vanhemman vastaus olisi
Ritari	Ritari	”Kyllä”
Ritari	Kelmi	”Ei”
Kelmi	Ritari	”Kyllä”
Kelmi	Kelmi	”Kyllä”

Koska kertoja ei tässä vaiheessa osaa päätellä veljesten rooleja, vastaus ei voinut olla ”Ei”. Hylätään se rivi ja jatketaan:

Vanhempi veli	Nuorempi veli	Vanhemman vastaus	Nuoremman vastaus
Ritari	Ritari	”Kyllä”	”Kyllä”
~~Ritari~~	~~Kelmi~~	~~”Ei”~~	~~”Ei”~~
Kelmi	Ritari	”Kyllä”	”Ei”
Kelmi	Kelmi	”Kyllä”	”Kyllä”

Koska kertoja tässä tilanteessa osasi päätellä veljesten roolit, täytyi nuoremman vastaus olla ”Ei”. (Muuten ei osattaisi valita ylimmän ja alimman rivin tapausten välillä.) Kolmas rivi on siis oikea, eli vanhempi on Kelmi ja nuorempi Ritari.

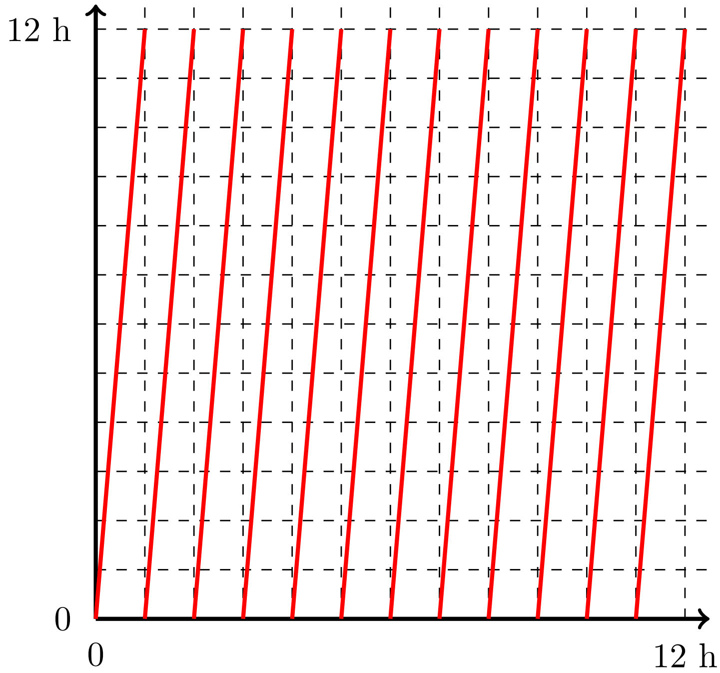
3. Muotikello. Sisustusliike myy tyylikästä kelloa, jonka tuntiviisari ja minuuttiviisari ovat identtiset. Yleensä kellonajan voi silti päätellä, esimerkiksi kuvassa kello on tasan kahdeksan.



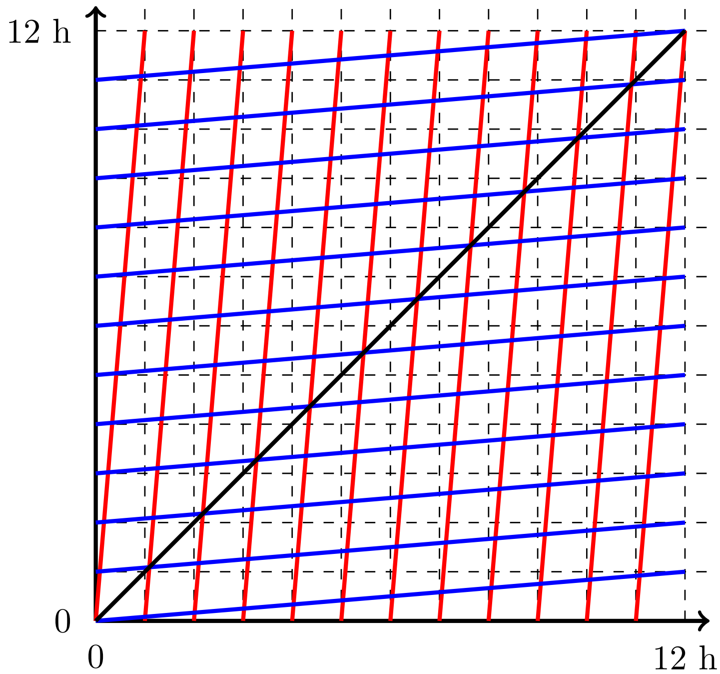
Onko vuorokaudessa hetkiä, jolloin kellonaikaa ei voi päätellä kelloa vilkaisemalla? Kuinka monta hetkeä? Viisarit liikkuvat tasaisesti.

Ratkaisu. Tarkastellaan kuvaajaa, jossa vaaka-askelilla on tuntiviisarin ja pystyakselilla minuuttiviisarin sijainti kellotaululla (välillä 0..12 h).

Keskiyöstä keskipäivään tuntiviisari käy läpi arvot 0..12 h kerran ja minuuttiviisari 12 kertaa. Kellotaulun sallitut tilat näkyvät kuvaajalla 12 punaisena janana.

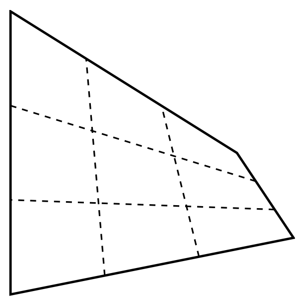


Toisaalta tilanne voisi olla myös peilikuva edellisestä kuviosta, jos viisarien roolista erehtyy (siniset janat alla).

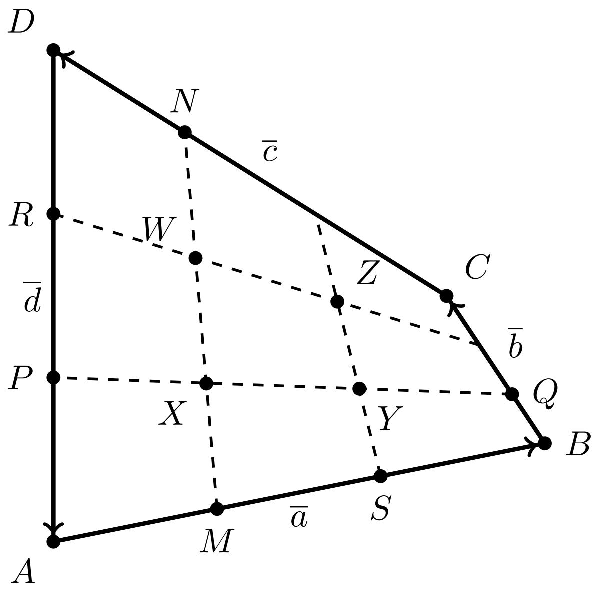


Kellonaika on mahdotonta päätellä vain ajanhetkinä, jolloin siniset ja punaiset janat leikkaavat. Jokainen sininen jana leikkaa jokaisen punaisen janan, joten leikkauspisteitä on $12 \cdot 12 = 144$. Diagonaalilla $y = x$ kellonajan voi kuitenkin päätellä, vaikka viisarien rooleja ei voikaan tunnistaa (viisarit ovat päällekkäin). Puolessa vuorokaudessa tällaisia hetkiä on 12 kappaletta, joten kysyttyjä aikoja jää $144 - 12 = 132$ kappaletta. Kokonaisessa vuorokaudessa on siis $2 \cdot 132 = 264$ ajanhetkeä, jolloin kellonaikaa ei voi päätellä.

4. Nelikulmiot. Kuperan nelikulmion sivut jaetaan kolmeen yhtä suureen osaan ja vastakkaisten sivujen jakopisteet yhdistetään niin, että nelikulmio jakautuu 9 alueeseen kuvan mukaisesti. Osoita, että keskimmäinen alue on pinta-alaltaan 1/9 alkuperäisen nelikulmion alasta.



Ratkaisu. Olkoot alkuperäisen nelikulmion kärjet A, B, C ja D; nimetään kuusi jakopistettä M, N, P, Q, R ja S kuvan mukaisesti; jakopisteitä yhdistävien janojen leikkauspisteet olkoot X, Y, Z ja W kuvan mukaisesti.



Osoitetaan ensin, että pisteet X, Y, Z ja W jakavat katkoviivalla merkityt janat suhteessa $1:3$. Tätä varten merkitään $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$, $\overline{CD} = \overline{c}$, $\overline{DA} = \overline{d}$. Symmetrian nojalla riittää osoittaa, että piste X jakaa janat MN ja PQ suhteessa $1:3$. Tehdään tämä osoittamalla, että vektorit $\overline{AM} + \frac{1}{3}\overline{MN}$ ja $\overline{AP} + \frac{1}{3}\overline{PQ}$ ovat samat. Lasketaan:

$$\begin{aligned}\overline{AM} + \frac{1}{3}\overline{MN} &= \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\overline{a} - \overline{d} - \frac{1}{3}\overline{c}\right)\\ &= \frac{2}{9}\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{d} - \frac{1}{9}\overline{c}.\end{aligned}$$

Vastaavasti

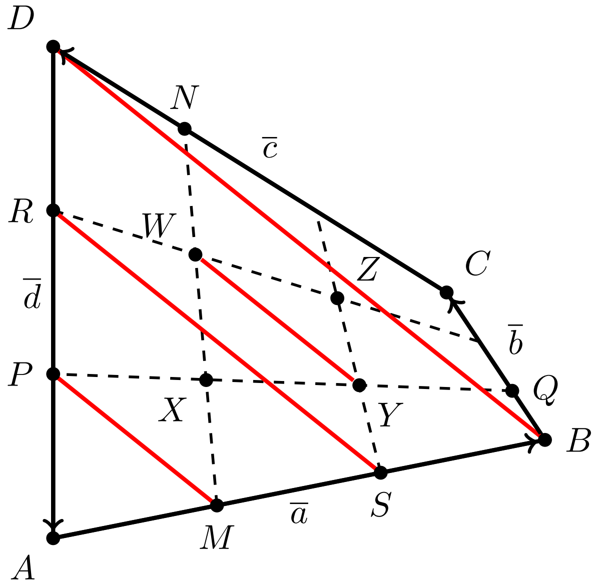
$$\begin{aligned}\overline{AP} + \frac{1}{3}\overline{PQ} &= -\frac{1}{3}\overline{d} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overline{d} + \overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}\right)\\ &= -\frac{2}{9}\overline{d} + \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{9}\overline{b}.\end{aligned}$$

Näiden erotus on

$$\begin{aligned}&\overline{AP} + \frac{1}{3}\overline{PQ} - \left(\overline{AM} + \frac{1}{3}\overline{MN}\right)\\ =&-\frac{2}{9}\overline{d} + \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{9}\overline{b} - \left(\frac{2}{9}\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{d} - \frac{1}{9}\overline{c}\right)\\ =&\frac{1}{9}\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}\right) = 0,\end{aligned}$$

sillä $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}$ muodostaa suljetun nelikulmion. Koska vektorit $\overline{AM} + \frac{1}{3}\overline{MN}$ ja $\overline{AP} + \frac{1}{3}\overline{PQ}$ ovat samat, piste X jakaa janat MN ja PQ suhteessa $1:3$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $WY \| BD$ ja $WY = \frac{1}{3}BD$.



Tämän voisi tehdä vektoreilla kuten edellä, mutta yhdenmuotoisilla kolmioilla perustelu on lyhyt: Kolmiot AMP, ASR ja ABD ovat yhdenmuotoisia mittakaavalla $1:2:3$ (sks). Toisaalta kolmiot ZWY ja ZRS ovat yhdenmuotoisia mittakaavalla $1:2$ (sks). Siis $WY \| BD$ ja $WY = \frac{1}{3}BD$. Vastaavasti XZ on yhdensuuntainen janan AC kanssa ja pituudeltaan siitä kolmannes.

Kuperan nelikulmion ala voidaan laskea kaavalla $A = d_1 d_2 \sin\alpha$, missä d_1 ja d_2 ovat nelikulmion lävistäjien pituudet ja α lävistäjien välinen kulma. Saadaan siis

$$A_{XYZW} = YW \cdot XZ \cdot \sin\alpha = \frac{1}{3}BD \cdot \frac{1}{3}AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{9}A_{ABCD},$$

minkä halusimme todistaa.

Huomionarvoista on, että vaikka nelikulmioilla $XYZW$ ja $ABCD$ on yhdensuuntaiset ja verrannolliset lävistäjät, nämä nelikulmiot eivät yleisessä tapauksessa ole yhdenmuotoisia.

5. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että $\sqrt{2}$ on lukujen $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a+2b}{a+b}$ välissä.

Ratkaisu. Jos $a \le b$, niin $\frac{a}{b} \le 1$ ja $\frac{a+2b}{a+b} = 1 + \frac{b}{a+b} \ge 1 + \frac{b}{2b} = \frac{3}{2}$. OK!

Oletetaan nyt $a > b$. Huomataan, että $\frac{a+2b}{a+b} = \frac{a}{b}$, kun $\sqrt{2}b = a$. Koska a ja b kokonaislukuja, yhtäsuuruus ei ole mahdollinen.

Jos $\sqrt{2}b > a$, niin $\frac{a}{b} < \sqrt{2}$ ja

$$\frac{a+2b}{a+b} = 1 + \frac{b}{a+b} > 1 + \frac{b}{\sqrt{2}b+b} = \sqrt{2}.$$

Jos taas $\sqrt{2}b < a$, niin $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$ ja

$$\frac{a+2b}{a+b} = 1 + \frac{b}{a+b} < 1 + \frac{b}{\sqrt{2}b+b} = \sqrt{2}.$$

6. Osoita, että $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ on irrationaalinen.

Ratkaisu. Tehdään oletus, että $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ on rationaalinen, eli

$$\sqrt{5} + \sqrt{6} = \frac{a}{b}$$

Neliöidään puolittain. Saadaan

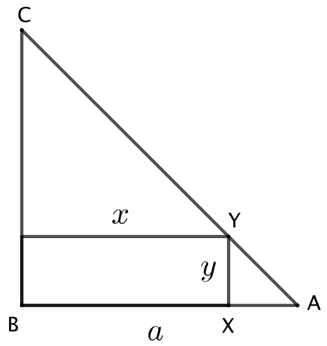
$$2\sqrt{30} = \frac{a^2}{b^2} - 11.$$

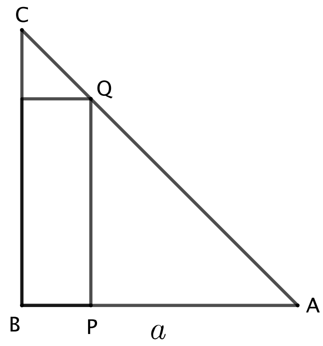
Siispä $\sqrt{30}$ on rationaalinen. Merkitään $\sqrt{30} = \frac{r}{s}$, missä r ja s ovat yhteistekijättömiä. Neliöiden: $30s^2 = r^2$, joten r^2 on parillinen. Siispä r on parillinen, joten r^2 on neljällä jaollinen. Koska 30 on parillinen, mutta ei neljällä jaollinen, on myös s^2 parillinen. Nyt r ja s eivät ole yhteistekijättömiä.

7. Kolmiossa $\triangle ABC$ on $\angle B = 90°$. Kolmion sisään voidaan asettaa (sama) suorakulmio sekä pystyettä vaakatasoon niin, että sen kaksi sivua ovat kolmion kateeteilla, yksi kärki pisteessä B ja sen kanssa vastakkainen kärki hypotenuusalla AC. Lisäksi on $AB = a$. Osoita, että suorakulmion piiri on $2a$.

Huomautus: Tarkasteltavan suorakulmion kaikki sivut eivät ole yhtä pitkät.

Ratkaisu.





Olkoon vaakasuuntaisessa tapauksessa $X \neq B$ suorakulmion toinen kärki sivulla AB ja Y suorakulmion kärki sivulla AC. Määritellään vastaavasti pystysuuntaisessa tapauksessa kärjet P ja Q. Merkitään lisäksi $BX = PQ = x$ ja $XY = BP = y$. Huomataan, että selvästi on $x < a$ ja $y < a$.

Koska kolmioilla $\triangle AXY$ ja $\triangle APQ$ pätee $\angle AXY = 90° = \angle APQ$ ja $\angle YXA = \angle CAB = \angle QAP$, niin kk-yhdenmuotoisuuslauseen nojalla kolmiot $\triangle AXY$ ja $\triangle APQ$ ovat yhdenmuotoisia. Siis on

$$\frac{a-x}{a-y} = \frac{y}{x}.$$

Näin ollen saadaan $x(a-x) = y(a-y)$. Lasketaan sulut auki, ryhmitellään termejä sopivasti ja saadaan $xa - ya = x^2 - y^2$ eli $a(x-y) = (x-y)(x+y)$. Koska $x \neq y$, niin on $a = (x+y)$ eli $2(x+y) = 2a$. Koska $2(x+y)$ on suorakulmion piiri, niin tämä todistaa väitteen.

8. Laske

$$\sum_{k=1}^{2000} \frac{\left(\frac{k}{2000}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{2000}\right)^2} + \sum_{k=1}^{2000} \frac{\left(\frac{2000}{2001-k}\right)^2}{1+\left(\frac{2000}{2001-k}\right)^2}.$$

Ratkaisu. (Viro 1998-1999, 11.-luokkalaisten sarja) *Vastaus: Kysytty tulos on* 2000.

Havaitaan ensinnäkin, että jälkimmäinen summa voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{k=1}^{2000} \frac{\left(\frac{2000}{2001-k}\right)^2}{1+\left(\frac{2000}{2001-k}\right)^2} = \sum_{k=1}^{2000} \frac{\left(\frac{2000}{k}\right)^2}{1+\left(\frac{2000}{k}\right)^2}.$$

Siispä tarkasteltava summa on

$$\sum_{k=1}^{2000} \frac{\left(\frac{k}{2000}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{2000}\right)^2} + \sum_{k=1}^{2000} \frac{\left(\frac{2000}{2001-k}\right)^2}{1+\left(\frac{2000}{2001-k}\right)^2} = \sum_{k=1}^{2000} \left(\frac{\left(\frac{k}{2000}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{2000}\right)^2} + \frac{\left(\frac{2000}{k}\right)^2}{1+\left(\frac{2000}{k}\right)^2} \right).$$

Merkitään $x = \frac{k}{2000}$. Halutaan tutkia, mitä summa

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

on.

Sievennetään ensin jälkimmäistä termiä. On

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Saadaan

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1.$$

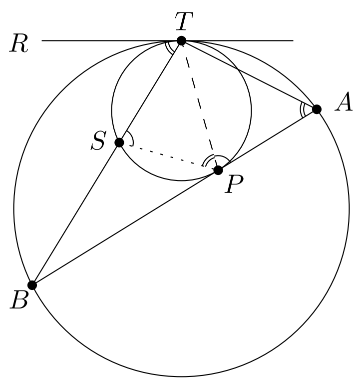
Täten tarkasteltava summa on

$$\sum_{k=1}^{2000} 1 = 2000.$$

Vastaus on siis 2000.

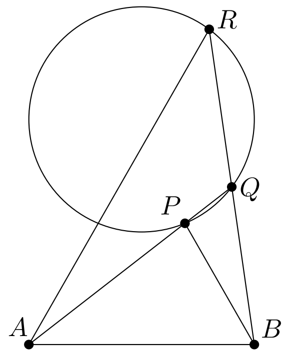
Vaikeampia tehtäviä

9. Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan sisäpuolisesti pisteessä T. Ulomman ympyrän sekantti AB on sisemmän ympyrän tangentti pisteessä P. Osoita, että suora TP puolittaa kulman $\angle ATB$.



Ratkaisu. Merkitään TR ympyröiden yhteistä tangettia pisteessä T. Kehäkulmalauseen mukaan $\angle SPT = \angle STR$ (pienemmässä ympyrässä) ja $\angle BTR = \angle BAT$ (isommassa ympyrässä). Koska suora AB on tangentti pisteessä P, kehäkulmalauseen mukaan $\angle TSP = \angle TPA$. Nyt $\triangle TSP \sim \triangle TPA$ (kaksi yhteistä kulmaa). Siksi $\angle PTS = \angle ATP$.

10. Pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' valitaan samalta puolelta janaa AB siten että kolmiot ABP, AQB, RAB, BAP', $BQ'A$ ja $R'BA$ ovat yhdenmuotoisia. Osoita, että pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' ovat samalla ympyrällä. Vihje: tarkastele pisteiden A ja B potenssia pisteiden P, Q ja R kautta kulkevan ympyrän suhteen.



Ratkaisu. Yhdenmuotoisuuksien perusteella $RB/AB = AB/QB$, josta $BQ \cdot BR = AB^2$. Samalla tavalla $AQ/AB = AB/AP$, josta $AP \cdot AQ = AB^2$.

Myös $R'A/AB = AB/Q'A$, josta $AQ' \cdot AR' = AB^2$ ja lisäksi $BQ'/AB = AB/BP'$, josta $BP' \cdot BQ' = AB^2$.

Nyt pisteen A potenssi ympyrän PQR suhteen on sama kuin ympyrän $P'Q'R$ suhteen ja piste A on ympyröiden radikaaliakselilla. Vastaava tulos pätee myös pisteelle B. Siksi suora AB on ympyröiden radikaaliakseli.

Mutta kun kaikki pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' sijaitsevat janan AB samalla puolella tämä on mahdollista vain jos ympyrät ovat samat (ja kaikilla tason pisteillä on radikaaliakselin pisteiden ominaisuus).

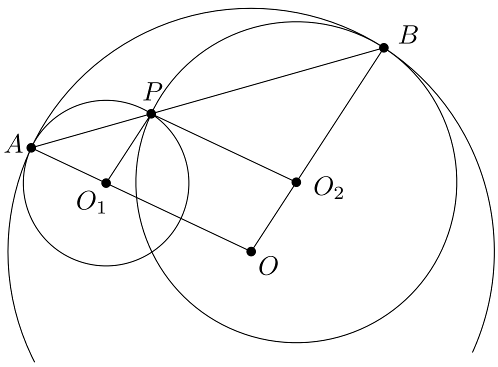
11. On annettu kaksi ympyrää, jotka leikkaavat pisteissä P ja Q. Konstruoi jana AB, joka kulkee pisteen P kautta ja jonka päätepisteet ovat ympyröiden kehillä (piste A toisella ympyrällä ja piste B toisella ympyrällä) siten, että tulo $AP \cdot PB$ saa suurimman mahdollisen arvonsa.

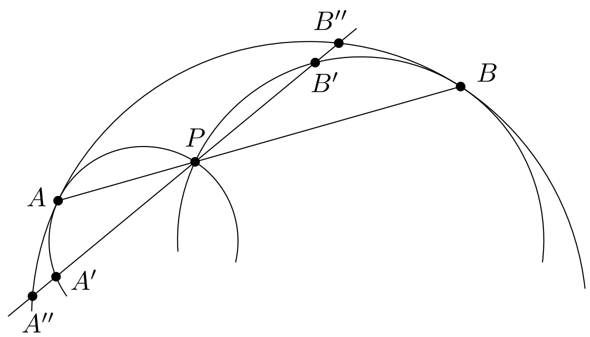
1. Piirrä ensin sellainen suurempi ympyrä, joka sivuaa ympyröitä ulkopuolisesti joissakin pisteissä A ja B niin, että piste P on janalla AB. (Ei onnistu, ellei suurempaa ympyrää ja pisteitä A ja B ole valittu tietyllä tavalla.)
2. Miksi nämä sivuamispisteet toteuttavat tehtävän ehdon?
3. Miten pisteet konstruoidaan? Eli miten harpilla ja viivottimella piirtämällä pisteet löydetään?

Ratkaisu.

1. Merkitään ympyröiden keskipisteitä O_1 ja O_2. Valitaan piste O siten, että PO_1OO_2 on suunnikas, jonka toinen lävistäjä on O_1O_2. Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde $O_1P + O_2P$. Tämä ympyrä sivuaa pienempiä ympyröitä pisteissä A ja B (sivuaa, ei leikkaa, siksi että A, O_1 ja O ovat samalla suoralla ja B, O_2 ja O ovat samalla suoralla). Nyt A, P ja B ovat myös samalla suoralla, sillä $\angle APB = \angle APO_1 + \angle O_1PO_2 + \angle O_2PB = \angle APO_1 + \angle PO_1A + \angle O_1AP = 180°$.
2. Pisteet A ja B toteuttavat tehtävän ehdon, sillä jos pisteen P kautta kulkeva suora leikkaa O_1 keskisen ympyrän pisteessä $A' \neq A$, O_2 keskisen ympyrän pisteessä $B' \neq B$ ja O keskisen ympyrän pisteissä A'' ja B'', pätee $PA \cdot PB = PA'' \cdot PB'' > PA' \cdot PB'$.
3. Ympyrän keskipiste konstruoidaan piirtämällä kaksi jännettä ja niille keskinormaalit. Keskinormaalien leikkauspiste on ympyrän keskipiste.

   Kun keskipisteet O_1 ja O_2 on konstruoitu, piirretään pisteeseen O_1 ympyrä, jonka säde on sama kuin on O_2 keskisen ympyrän säde. Lisäksi piirretään O_2 ympyrä, jonka säde on sama kuin on O_1 keskisen ympyrän säde. Näiden ympyröiden leikkauspiste on piste O.





12. Kuinka monella aakkostosta $\{0, 1, \ldots, 9\}$ muodostetulla 5 kirjaimen sanalla on (a) aidosti kasvava numerojärjestys, (b) aidosti kasvava tai aidosti laskeva numerojärjestys, (c) kasvava numerojärjestys, (d) kasvava tai laskeva numerojärjestys?

Ratkaisu. (a) Voimme järjestää minkä tahansa 5 eri kirjaimen sanan kasvavaan numerojärjestykseen. Koska järjestys on aidosti kasvava, sama numero ei esiinny kahdesti. Vaihtoehtoja valita 5 kirjainta on $\binom{10}{5} = 252$.
(b) $2 \cdot 252 = 504$.
(c) Voimme valita 5 kirjainta 10 kirjaimesta, kun sama kirjain voi toistua, $\binom{10+5-1}{5} = \binom{14}{5} = 2002$ eri tavalla.
(d) $2 \cdot 2002 - 10 = 3994$. Meidän on vähennettävä 10 sanaa, jotka ovat muotoa *aaaaa*, jotka ovat sekä kasvavia että laskevia.

13. Tarkastellaan kaikkia n kirjaimen sanoja, jotka muodostuvat kirjaimista $\{0, 1, 2, 3\}$. Kuinka monessa sanassa on parillinen lukumäärä a) nollia? b) nollia ja ykkösiä?

Ratkaisu. n-sanojen lukumäärä joukosta $\{0, 1, 2, 3\}$, joissa on parillinen määrä nollia, on

$$E_n = 3^n + \binom{n}{2}3^{n-2} + \binom{n}{4}3^{n-4} + \cdots$$

ja niiden, joissa on pariton määrä nollia, on

$$O_n = \binom{n}{1}3^{n-1} + \binom{n}{3}3^{n-3} + \cdots .$$

Lisäämällä ja vähentämällä saamme

$$E_n + O_n = (3+1)^n = 4^n$$

ja

$$E_n - O_n = (3-1)^n = 2^n.$$

Lisäämällä ja vähentämällä jälleen, saamme

$$2E_n = 4^n + 2^n \implies E_n = \frac{4^n + 2^n}{2}$$

ja

$$2O_n = 4^n - 2^n \implies O_N = \frac{4^n - 2^n}{2}.$$

14. Autossa on neljä rengasta. Laske, kuinka monella tavalla renkaiden järjestystä voidaan vaihtaa siten, että yksikän rengas ei ole alkuperäisellä paikallaan.

Ratkaisu. Tehtävä on esimerkki *derangement*-ongelmasta (tarkoittaa permutaatioita, joissa mikään objekti ei ole alkuperäisellä paikallaan, jolle voisi olla suomennos *kiintopisteetön permutaatio*). Tällaisten derangementien lukumäärä renkaidemme tapauksessa on

$$4! - \binom{4}{1}3! + \binom{4}{2}2! - \binom{4}{3}1! + \binom{4}{4}0! = 9.$$

Kaava on tulos, joka saadaan soveltamalla summan ja erotuksen periaatetta ongelmaan. Kaavan ensimmäinen termi on lukumäärä, joka kertoo kuinka monella tavalla 4 symbolia voidaan laittaa eri järjestykseen. Toinen termi on ”oikaisu”, jolla poistetaan ne permutaatiot, joilla ainakin 1 rengas pysyy paikallaan. Mutta koska permutaatiot, joilla 2 rengasta pysyy paikallaan, on nyt poistettu kahdesti, meidän pitää tehdä uusi ”oikaisu” varmistaaksemme, että näitä permutaatioita on 0. Tämä oikaisu synnyttää kolmannen termin. Jatkamalla kaavaa siten, että permutaatiot, joilla on 3 tai 4 kiintopistettä (= rengasta jotka pysyvät paikallaan permutaatiossa), lasketaan tasan 0 kertaa, saamme ylläannetun kaavan.

Tehtävä voidaan tietysti myös ratkaista käymällä mahdolliset vaihtoehdot läpi.

15. Kuinka monella tavalla voidaan n esineestä valita pariton lukumäärä esineitä?

Ratkaisu. Jos $n = 0$, tapoja ei ole yhtään. Muussa tapauksessa on olemassa bijektio alijoukkojen, joissa on parillinen määrä esineitä, ja alijoukkojen, joissa on pariton määrä esineitä, kanssa. Tarkastellaan jotakin alkiota, esim. 1. Olkoon A mikä tahansa alijoukko. Jos se sisältää alkion 1, niin liitämme siihen alijoukon $A \setminus \{1\}$. Jos se ei sisällä alkiota 1, niin liitämme siihen alijoukon $A \cup \{1\}$. Tämä bijektio todistaa, että tasan puolet kaikista 2^n alijoukosta sisältävät parittoman määrän alkioita, joten vastaus on 2^{n-1}.

16. Olkoon $1 \leq k \leq n$. Tarkastellaan kaikkia positiivisten kokonaislukujen äärellisiä jonoja, joiden summa on n. Oletetaan, että luku k esiintyy summassa $T(n,k)$ kertaa. Selvitä luvun $T(n,k)$ arvo.

Ratkaisu. Tarkastellaan riviä, jossa on n pistettä. Nämä pisteet muodostavat $(n-1)$ väliä. Voimme asettaa pystyviivoja näihin väleihin 2^{n-1} eri tavalla. Tällä tavalla saamme kaikki jonot, joiden summa on n. Löytääksemme luvun k esiintymisten lukumäärän luvussa $T(n,k)$ piirrämme ensin n pisteen jonon. Sen jälkeen pakkaamme k peräkkäistä pistettä suorakulmioon ja sijoitamme pystyviivat tämän suorakulmion vasemmalle ja oikealle puolelle.

$$\cdots|\cdot|\cdot|\boxed{\cdots}|\cdot\cdot \Leftrightarrow (3,1,1,\boxed{3},2).$$

1. tapaus. Pakatut pisteet eivät sisällä päätepistettä. Pakkaaminen voidaan suorittaa $(n-k-1)$ tavalla. Pakkaamattomien pisteiden välille jää $(n-k-2)$ väliä. Jokaiselle välille voidaan sijoittaa korkeintaan yksi pystyviiva; voimme asettaa pystyviivoja väleihin yhteensä 2^{n-k-2} tavalla. Siten saamme jonon, jossa on yksi pakattu k.

2. tapaus. Pakatut pisteet sisältävät päätepisteen. Tämä voi tapahtua kahdella tavalla, ja nyt on olemassa $(n-k-1)$ väliä, joihin voimme asettaa pystyviivat 2^{n-k-1} tavalla. Kokonaisuudessaan saamme

$$T(n,k) = (n-k-1)\cdot 2^{n-k-2} + 2\cdot 2^{n-k-1} = (n-k+3)\cdot 2^{n-k-2}.$$

Esimerkki: Kun $n=6, k=2$, niin kaava antaa $T(6,2)=28$. Kaikki jonot, joiden summa on 6, jotka sisältävät ainakin yhden luvun 2 ovat $(2,2,2)$, $(4,2)$, $(2,4)$, $(3,2,1)$ ja tämän permutaatiot, $(2,2,1,1)$ ja tämän permutaatiot, $(2,1,1,1,1)$ ja tämän permutaatiot. Kakkosten lukumäärä näissä jonoissa on $T(6,2) = 3+1+1+6+12+5 = 28$.

17. Etsi kaikki funktiot $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x^2+f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Ratkaisu. (APMO 2019) *Vastaus: Mahdolliset funktiot ovat $f(x)=0$ ja $f(x)=x^2$.*

Tutkitaan ensin, mitä saadaan funktioista selville sijoittamalla lukujen x ja y paikalle sopivia reaalilukuja. Sijoittamalla $x=y=0$ saadaan $3f(0)=0$ eli $f(0)=0$. Lisäksi, kun alkuperäiseen yhtälöön sijoitetaan $y=0$, niin saadaan edellisen havainnon nojalla, että on

$$f(x^2) = f(f(x)). \tag{1}$$

Sijoitetaan vielä alkuperäiseen yhtälöön $y=1$, saadaan $f(x^2+f(1)) = f(f(x)) + f(1) + 2f(x)$ ja edelleen

$$2f(x) = f(x^2+f(1)) - f(f(x)) - f(1).$$

Tästä seuraa, että on oltava

$$f(x) = f(-x) \tag{2}$$

kaikilla reaaliluvuilla x.

Edellä havaittiin, että $f(0)=0$. Lisäksi on helppo huomata sijoittamalla $f(x)=0$ alkuperäiseen funktionaaliyhtälöön, että $f(x)=0$ on yksi funktionaaliyhtälön ratkaisu. Kysymys kuuluukin, mitä tapahtuu, jos jollain reaaliluvulla $a\neq 0$ pätee $f(a)=f(0)=0$. Tai yleisemmin, mitä havaitaan, jos $f(a)=f(b)$ joillain reaaliluvuilla a ja b? Seuraava lemma antaa tähän kysymykseen vastauksen.

Lemma 1. *Olkoot $f(a)=f(b)$ joillain reaaliluvuilla a ja b. Tällöin on $f(xa)=f(xb)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Erityisesti, jos jollain reaaliluvulla $a\neq 0$ on $f(a)=0$, niin on $f(x)=0$ kaikilla reaaliluvuilla x.*

Todistus. Sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön vuorotellen $y=a$ ja $y=b$ sekä käytetään kaavan (1) tietoa

$$f(a^2) = f(f(a)) = f(f(b)) = f(b^2)$$

ja saadaan

$$2f(xa) = f(x^2 + f(a)) - f(f(x)) - f(a^2) = f(x^2 + f(b)) - f(f(x)) - f(b^2) = 2f(xb).$$

Täten on siis myös $f(xa) = f(xb)$. Näin ollen, jos on olemassa reaaliluku $a \neq 0$, jolle $f(a) = 0$, niin kaikilla reaaliluvuilla x pätee

$$f(x) = f(a \cdot \frac{x}{a}) = f(a) = 0.$$

Tämä on triviaali ratkaisu tehtävään ja väite on todistettu. □

Tutkitaan vielä, onko tehtävällä muita ratkaisuja kuin triviaaliratkaisu. Edellisen lemman nojalla voidaan olettaa, että jos $x \neq 0$, niin on $f(x) \neq 0$. Havaitaan ensin, että kaavan (1) nojalla alkuperäisen yhtälön oikea puoli on

$$f(x^2) + f(y^2) + 2f(xy).$$

Se pysyy muuttumattomana, kun muuttujat x ja y vaihdetaan keskenään. Näin ollen alkuperäisen yhtälön nojalla kaikilla reaaliluvuilla x ja y on oltava

$$f(x^2) + f(y^2) + 2f(xy) = f(x^2 + f(y)) = f(y^2 + f(x)). \tag{3}$$

Tätä tietoa käytetään useasti hyödyksi myöhemmin tässä ratkaisussa.

Koska ollaan kiinnostuneita niistä funktionaaliyhtälön ratkaisuista, joille pätee $f(x) \neq 0$ jollain reaaliluvulla $x \neq 0$, niin tutkitaan, mitä kaikkia ominaisuuksia näillä funktioilla on. Seuraavassa lemmassa todistetaan hyödyllinen ominaisuus, että funktionaaliyhtälön toteuttaville funktioille pätee $f(x) \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x.

Lemma 2. *Oletetaan, että $f(x) \neq 0$ jollain reaaliluvulla x. Osoitetaan, että $f(x) \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että on $f(s) = -t^2$ joillain nollasta eroavilla reaaliluvuilla s ja t. Asetetaan nyt yhtälöön (3) $x = s$ ja $y = t$, jolloin saadaan

$$f(s^2 + f(t)) = f(t^2 + f(s)) = f(0) = 0.$$

Koska tutkitaan funktionaaliyhtälön ei-triviaaliratkaisuja, niin lemman 1 nojalla on oltava

$$s^2 = -f(t). \tag{4}$$

Lisäksi kaavojen (2) ja (1) nojalla on

$$f(t^2) = f(-t^2) = f(f(s)) = f(s^2).$$

Sijoitetaan nyt yhtälöön (3) $x = \sqrt{s^2 + t^2}$ ja $y = s$, jolloin saadaan

$$f(s^2 + t^2) + 2f(s \cdot \sqrt{s^2 + t^2}) = f(s^2 + t^2 + f(s)) - f(s^2) = 0.$$

Vastaavasti yhtälöön (3) sijoitetaan $x = \sqrt{s^2 + t^2}$, $y = t$ ja kaavan (4) nojalla saadaan

$$f(s^2 + t^2) + 2f(t \cdot \sqrt{s^2 + t^2}) = f(s^2 + t^2 + f(t)) - f(t^2) = 0.$$

Näin ollen on oltava $f(s \cdot \sqrt{s^2 + t^2}) = f(t \cdot \sqrt{s^2 + t^2})$.

Sijoitetaan nyt lemman 1 lausekkeeseen $f(xa) = f(xb)$ luvut $a = s \cdot \sqrt{s^2 + t^2}$, $b = t \cdot \sqrt{s^2 + t^2}$ ja $x = \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}$. Saadaan yhtälöiden (4), (3) ja $-f(s) = f(t) = -s^2$ nojalla

$$0 = f(s^2 + f(s)) = 4f(s^2).$$

Tämä on ristriita, sillä on $s^2 > 0$. □

Tehdään vielä toinenkin hyödyllinen havainto funktionaaliyhtälön ei-triviaaliratkaisuihin liittyen. Tutkitaan, milloin on $f(x) = 1$.

Lemma 3. *Oletetaan, että $f(x) \neq 0$ jollain reaaliluvulla x. Jos $k > 0$, niin $f(k) = 1$ täsmälleen silloin, kun $k = 1$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että jollain reaaliluvulla $k > 0$ on $f(k) = 1$. Nyt havainnon (1) nojalla on $f(k^2) = f(f(k)) = f(1)$. Edelleen lemman 1 nojalla sijoituksella $a = k^2$, $b = 1$ ja $x = \frac{1}{k}$ on $f(k) = f(\frac{1}{k}) = 1$. Täten riittää tutkia tapaus $k \geq 1$.

Oletetaan seuraavaksi, että $k \geq 1$. Sovelletaan tulosta (3), kun $x = \sqrt{k^2 - 1}$ ja $y = k$ sekä muistetaan, että lemman 2 mukaan $f(z) \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla z. Saadaan

$$f(k^2 - 1 + f(k)) = f(k^2 - 1) + f(k^2) + 2f(k^2\sqrt{k^2 - 1}) \geq f(k^2 - 1) + f(k^2).$$

Täten on oltava $0 \geq f(k^2 - 1) \geq 0$. Lemman 1 nojalla on oltava $k^2 = 1$ eli $k = 1$, sillä $k > 0$.

On vielä osoitettava, että jos $k = 1$, niin on $f(k) = 1$. Oletetaan ensin, että on $f(1) = m \leq 1$. Täten vastaavalla tavalla kuin edellä voidaan asettaa yhtälöön (3) $x = \sqrt{1 - m}$ ja $y = 1$, jolloin saadaan

$$f(1 - m + f(1)) = f(1 - m) + f(1^2) + 2f(\sqrt{1 - m}) \geq f(1 - m) + f(1).$$

Tästä seuraa, että on $0 \geq f(1 - m) \geq 0$ eli $m = 1$. Jos taas on $f(1) = m \geq 1$, niin havaitaan, että kaavan (1) nojalla on

$$f(m) = f(f(1)) = f(1^2) = f(1) = m \leq m^2.$$

Tätä hyödyntämällä tehdään yhtälöön (3) sijoitus $x = \sqrt{m^2 - m}$, $y = m$ ja saadaan

$$f(m^2 - m + f(m)) = f(m^2 - m) + f(m^2) + f(m\sqrt{m^2 - m}) \geq f(m^2 - m) + f(m^2).$$

Saadaan $m^2 = m$ ja koska $m > 0$, niin on oltava $m = 1$. $\square$

On enää yhdistettävä todistetut asiat ja johdettava lopputulos. Tutkitaan ensin tapaus $x > 0$. Olkoon $f(x) = m$. Lemmojen 1 ja 2 mukaan on $m > 0$. Koska kaavan (1) nojalla on $f(x^2) = f(f(x))$, niin saadaan $f(x^2) = f(m)$. Täten lemmojen 1 ja 3 nojalla on

$$f\left(\frac{m}{x^2}\right) = f\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = f(1) = 1$$

eli $m = x^2$.

Oletetaan vielä, että on $x < 0$. Kaavan (2) ja edellisen kappaleen mukaan on $f(x) = f(-x) = (-x)^2 = x^2$. Täten $f(x) = x^2$ on ainoa mahdollinen ei-triviaaliratkaisu. Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön ja huomataan, että se toteuttaa yhtälön.

18. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla n pätee $\phi(n) + \sigma(n) \geq 2n$.

Ratkaisu. Idea: oletetaan, että epäyhtälö pätee arvolla $n = k$. Päteekö yhtälö myös arvolla $n = pk$, missä p on alkuluku? Tämä lähestymistapa on hyvä, koska ϕ- ja σ-funktioiden arvot riippuvat luvun alkutekijähajotelmasta.

Huomataan, että jos epäyhtälö pätee arvolla $n = k$, niin se pätee myös arvolla $n = pk$ kunhan $p \mid k$. Nimittäin, tällöin $\phi(pk) = \phi(k)p$ ja vastaavasti $\sigma(pk) \geq \sigma(k)p$. Täten epäyhtälön vasen puoli vähintään p-kertaistuu, kun vaihdetaan $n = k$ arvoon $n = pk$, ja oikea puoli p-kertaistuu, mikä todistaa väitteen.

Enää tulee siis osoittaa väite, kun n on ns. neliövapaa, eli ei jaollinen minkään alkuluvun neliöllä. Tämä on kohtalaisen helppoa: kirjoitetaan $n = p_1p_2 \cdots p_m$. Tällöin

$$\phi(n) + \sigma(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_m - 1) + (p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_m + 1).$$

Mitä tapahtuu, jos sulut kerrotaan auki? Molemmista tuloista saadaan ainakin luku $n = p_1p_2 \cdots p_m$. Lisäksi luku $\phi(n)$ antaa jotain termejä positiivisella merkillä ja jotain termejä negatiivisella merkillä. Kaikki negatiivismerkkiset termit tulee kuitenkin kumottua luvun $\sigma(n)$ tulomuodon termeistä. Tämän vuoksi $\phi(n) + \sigma(n)$ on vähintään $2p_1p_2 \cdots p_m = 2n$, mikä todistaa väitteen.

Huomautus: Tutkimalla hieman tarkemmin yhtäsuuruustapauksia saadaan, että yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $n = 1$ tai n on alkuluku.

19. Olkoon $d(n)$ positiivisen kokonaisluvun n tekijöiden määrä. Onko olemassa sellaista positiivista kokonaislukua $v > 1$, jolla yhtälöllä

$$a^b = b^{av}$$

on vähintään $2019 + d(v)$ eri positiivista kokonaislukuratkaisua (a, b)?

Ratkaisu. Tehtävänannon $2019+d(v)$ ei anna paljoa vihjeitä siitä, miten ongelma ratkeaa. Kannattaa siis vain aluksi tutkia, mitä yhtälöstä saa irti.

Jos on tietää ongelmaan "määritä yhtälön $a^b = b^a$ kaikki positiiviset kokonaislukuratkaisut a, b" ratkaisun, niin tietää, että tämän yhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa $a = c^n$ ja $b = c^m$ (mutta kaikki tätä muotoa olevat parit eivät ole ratkaisuja). Tätä ideaa voi soveltaa myös tähän tehtävään.

Olkoon siis (a, b) jokin ratkaisu yhtälölle $a^b = b^{av}$. Valitaan joku alkuluku p, ja olkoot $v_p(a) = x$ ja $v_p(b) = y$.[1] Tulee päteä $v_p(a^b) = v_p(b^{av})$, eli $bx = avy$, eli

$$\frac{x}{y} = \frac{av}{b}.$$

(Jos $y = 0$, niin $x = 0$, mutta tämä ei ole mielenkiintoinen tapaus.) Siis $\frac{x}{y}$ ei riipu valitusta alkuluvusta p. Tästä seuraa, että $a = c^n$ ja $b = c^m$ sopivilla c, n, m. (Tämän voi nähdä ottamalla yhtälöstä $a^b = b^{av}$ puolittain a-kantaisen logaritmin, mistä saadaan, että $\log_a(b)$ on rationaalinen.)

Sijoitetaan tämä yhtälöön $a^b = b^{av}$, jolloin saadaan

$$c^{nc^m} = c^{mvc^n}$$

eli

$$c^{m-n} = \frac{mv}{n}.$$

Haluamme siis valita kokonaisluvut m ja n niin, että $\frac{mv}{n}$ on jonkin kokonaisluvun c täydellinen $m-n$:s potenssi. Tämä onnistuu helpoimmin silloin, kun $m - n$ on pieni.

Jos $m - n = 1$, niin luvun $\frac{mv}{n} = v + \frac{v}{n}$ tulee olla kokonaisluku. Tästä saamme $d(v)$ ratkaisua (tämä selittää tehtävänannon mystisen $d(v)$-termin). Haluamme vielä kalastella jostain 2019 ratkaisua lisää.

Entä muut tapaukset? Kirjoitetaan $m - n = k$, eli $m = n + k$. Haluamme, että $\frac{mv}{n} = v + \frac{kv}{n}$ on jonkin kokonaisluvun täydellinen k:s potenssi. Tulomuoto auttaa hahmottamaan asiaa paremmin[2]: pätee $v + \frac{kv}{n} = v(1 + \frac{k}{n})$. Tulon toinen termi ei välttämättä ole kokonaisluku, mikä voi aiheuttaa ongelmia. Tämän ongelman voi kiertää koittamalla valita aina $n = 1$.

Tästä saamme strategian: koitamme valita luvun v niin, että arvoilla $k = 2, 3, \ldots, 2020$ voimme aina valita $n = 1$. Tätä varten haluamme, että $v(1 + \frac{k}{n}) = v(1 + k)$ on täydellinen potenssi kaikilla $k = 2, \ldots, 2020$. Huomataan, että tämä strategia ei aivan toimi: haluaisimme esimerkiksi, että $v(1 + 2) = 3v$ olisi neliö, ja $v(1 + 4) = 5v$ olisi täydellinen neljäs potenssi, mikä ei ole mahdollista.

Tämän ongelman voi kuitenkin kiertää: koitetaan valita $n = 1$, ja k käymään läpi ensimmäiset 2019 alkulukua. Olkoot nämä alkuluvut $p_1, \ldots, p_{2019}$.

Luku on täydellinen t:s potenssi täsmälleen silloin, kun kaikki sen alkutekijähajotelman eksponenteista ovat jaollisia t:llä. Jos siis tähtäämme siihen, että $v(1+p_i)$ on p_i:s täydellinen potenssi kaikilla $p_1, \ldots, p_{2019}$, niin haluamme kontrolloida luvun v alkutekijöiden eksponenttien jakojäännöksiä jaettaessa luvuilla p_i.

Tästä saammekin ratkaisun: jotta $v(1 + p_i)$ on p_i:s potenssi, niin haluamme $v_p(v) + v_p(1 + p_i) \equiv 0 \pmod{p_i}$ kaikilla p. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $v_p(v) \equiv -v_p(1 + p_i) \pmod{p_i}$. Jokaista alkulukua p kohden saamme siis 2019 eri yhtälöä vaihtamalla i:n arvoja. Kiinalaisen jäännöslauseen nojalla nämä voidaan yhdistää kirjoittamalla $v_p(v) \equiv C \pmod{T}$, missä C on jokin p:stä riippuva vakio ja T on lukujen $p_i, 1 \le i \le 2019$ tulo.

Huomaamme vielä, että vain äärellisen monella p voi päteä $v_p(1 + k) \neq 0$. Siis yllä määritelty C on 0 kaikilla paitsi äärellisen monella p. Nämä kongruenssiehdot voidaan siis toteuttaa jollain positiivisella kokonaisluvulla v. Tämä todistaa väitteen.

[1] Tässä $v_p(n)$ on suurin kokonaisluku e, jolla $p^e \mid n$. Esimerkiksi $v_5(50) = 2$.

[2] Siksi, että kysymykseen "milloin ab on täydellinen potenssi?" on paljon helpompi vastata kuin kysymykseen "milloin $a + b$ on täydellinen potenssi?". Toisin sanoen, täydelliset potenssit muodostavat *multiplikatiivisen rakenteen* eivätkä *additiivista rakennetta*.

Huomautus: Edellä ei todistettu, että kaikki näin saadut ratkaisut (n, m, c) oikeasti johtavat eri ratkaisuihin (a, b). Esimerkiksi jos $n = m = 2$ ja $c = 4$, niin tällä saadaan täsmälleen sama ratkaisu $a = b = 16$ kuin arvoilla $n = m = 4$, $c = 2$. Muodostetut ratkaisut kuitenkin ovat enintään yhtä paria lukuun ottamatta erisuuria (ja voisimme ottaa tarvittaessa 2020 alkulukua 2019 sijasta) – tämän tarkistaminen jätetään lukijalle. Tämän asian huomioiminen on hyvin tärkeää: on helppoa valita sellainen v, jolla yhtälölle $c^{m-n} = \frac{mv}{n}$ on riittävän paljon ratkaisuja (n, m, c), jotka eivät kuitenkaan anna eri ratkaisuja (a, b).

Huomautus: Toinen lähestymistapa käsitellessä ongelmaa "$v + \frac{kv}{n}$ on täydellinen k:s potenssi" voisi olla koittaa valita luku n hyvin suureksi, vaikkapa olemaan kokoluokkaa v. Tällöin haluaisimme, että $v + k$ on täydellinen k:s potenssi monella eri k. Tätä muotoa olevat ongelmat ovat kuitenkin hyvin vaikeita[3]: Catalanin konjektuuri sanoo, että ainoat peräkkäiset potenssit ovat 8 ja 9, ja tämä todistettiin vasta vuonna 2002. Tämän vuoksi n kannattaa mielummin valita hyvin pieneksi.

20. Olkoot x, y, m ja n ykköstä suurempia positiivisia kokonaislukuja. Olkoon $A = x^{x^{x^{\cdots}}}$, missä x esiintyy m kertaa. Olkoon vastaavasti $B = y^{y^{y^{\cdots}}}$, missä y esiintyy n kertaa. Oletetaan, että $A = B$. Osoita, että $m = n$.

Ratkaisu. Tietysti jos $A = B$ ja $m = n$, niin myös $x = y$.

Käytetään tehtävänannon operaatiolle (ns. tetraatiolle) seuraavaa notaatiota: $a_1 = a$, $a_2 = a^a$, $a_3 = a^{a^a}$, ja niin edelleen. Voimme myös määritellä $a_0 = 1$.

Kuten edellisen tehtävän ratkaisussa, saamme $x = z^a$ ja $y = z^b$ jollain kokonaisluvuilla $z, a, b \geq 1$. Voimme tietysti olettaa, että lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on 1. Nyt,

$$(z^a)_m = (z^b)_n,$$

mistä ottamalla puolittain z-kantainen[4] logaritmi saadaan

$$a \cdot (z^a)_{m-1} = b \cdot (z^b)_{n-1}.$$

Otetaan vielä toisen kerran z-kantainen logaritmi:

$$\log_z(a) + a \cdot (z^a)_{m-2} = \log_z(b) + b \cdot (z^b)_{n-2}.$$

Pointtina on, että nyt $\log_z(a) - \log_z(b)$ eli $\log_z(\frac{a}{b})$ on kokonaisluku, eli erityisesti todetaan, että se on rationaalinen. Oletimme, että a ja b ovat yhteistekijättömiä. Käyttäen tätä (ja vastaoletusta) ei ole vaikeaa todistaa, että $\log_z(\frac{a}{b})$ on rationaalinen vain silloin, kun joko $a = 1$ tai $b = 1$. Oletamme nojautuen symmetriaan, että $b = 1$. Koska $\log_z(\frac{a}{b}) = \log_z(a)$ on kokonaisluku, voidaan kirjoittaa $a = z^s$ jollain kokonaisluvulla s. Koitamme todistaa, että $a = 1$ eli $s = 0$, mistä saisimme $a = b$ ja siten $x = y$.

Sijoitetaan saadut tiedot yhtälöön $\log_z(a) + a \cdot (z^a)_{m-2} = \log_z(b) + b \cdot (z^b)_{m-2}$. Saadaan

$$s + z^s \cdot (z^{z^s})_{m-2} = z_{n-2}.$$

Nähdään siis, että s on muotoa $z^p - z^q$, missä p ja q saadaan edellisestä yhtälöstä. Yhtälön $a = z^s$ nojalla pätee $s \geq 0$, eli $p \geq q$. Täten $z^q \mid s = z^p - z^q$. Tutkimalla lukua q saadaan[5], että sen oikeastaan tulee olla vähintään s. Täten $z^s \mid s$, joten ainoa mahdollisuus on $s = 0$ (koska $z > 1$). Kuten aiemmin todettiin, olemme nyt valmiit, koska $s = 0 \implies a = b \implies x = y \implies m = n$.

Huomautus: Tehtävä on vaikea. Ideana ratkaisussa on todeta ensiksi tuttu väite $x = z^a$ ja $y = z^b$. Tämän on luonnollista ottaa puolittain z-kantainen logaritmi, jotta yhtälöä saadaan siistittyä. Tämän jälkeen tulee kuitenkin vaikea paikka: ei ole selvää, miten jatkaa.

Logaritmin avulla tunnetusti saadaan muutettua tuloja summiksi. Tässä tehtävässä logaritmin avulla saadaan sopivasti eroteltua erilaisia termejä potenssitorneista, ja tätä kautta saamme lisää tietoa. Tämän vuoksi toisen kerran logaritmin ottaminen ei ole mikään mahdoton idea (vaikkakin tähän päätyminen voi vaatia aikaa). Helpot huomiot antavat $a = 1$ tai $b = 1$, ja tämän jälkeen ongelma alkaa hajota käsiin: s saadaan esitettyä kahden z:n potenssitornin erotuksena, ja tämän jälkeen tehtävän saa kohtalaisen helposti maaliin.

[3] Jälleen syynä multiplikatiiviset ja additiivset rakenteet. Ns. Pillain konjektuuri sanoo, että kaikilla k on olemassa vain äärellisen monta täydellisten potenssien paria, joiden erotus on k, ja koska kyseessä on nimenomaan konjektuuri, niin ongelmaa ei ole vielä ratkaistu.

[4] $z > 1$.

[5] Koska $z^q = z^s \cdot (z^{z^s})_{m-2}$ määritelmän nojalla.