Harjoitustehtävät, syyskuu 2011. Helpommat

Ratkaisuja

1. *Ratkaise yhtälö*

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

Ratkaisu. Ratkaistaan yhtälö reaalilukujen joukossa. Jos yhtälöllä on ratkaisu x, niin $x \ge 0$. Jos $a = 0$, yhtälöllä on ratkaisu $x = 0$. Jos $0 < a < 1$, niin $\sqrt{a+x} \ge \sqrt{a} > a$, eikä yhtälön vasen puoli ole määritelty. Yhtälöllä voi olla ratkaisu vain, kun $a \ge 1$. Merkitään $\sqrt{a+x} = y$. Silloin x ja $y \ge 1$ toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} a-y=x^2 \\ a+x=y^2. \end{cases}$$

Kun edellinen yhtälö vähennetään jälkimmäisestä, saadaan $x+y = y^2-x^2 = (y+x)(y-x)$. Koska $x \ge 0$ ja $y \ge 1$, $x+y \ne 0$, joten $y - x = 1$ eli $a + x = y^2 = (1+x)^2 = 1+2x+x^2$. x toteuttaa siis toisen asteen yhtälön $x^2 + x + 1 - a = 0$. Koska $x \ge 0$, ainoa mahdollinen ratkaisu on

$$x=-\frac{1}{2}+\sqrt{a-\frac{3}{4}}.$$

On vielä tarkastettava, että tämä x todella toteuttaa yhtälön. Näin on, sillä jos

$$x=-\frac{1}{2}+\sqrt{a-\frac{3}{4}},$$

niin

$$a+x=a-\frac{1}{2}+\sqrt{a-\frac{3}{4}}=a-\frac{3}{4}+\sqrt{a-\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{a-\frac{3}{4}}\right)^2$$

ja

$$a-\sqrt{a+x}=a-\frac{1}{2}-\sqrt{a-\frac{3}{4}}=a-\frac{3}{4}-\sqrt{a-\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{a-\frac{3}{4}}\right)^2.$$

2. *Kun polynomi $P(x)$ jaetaan polynomilla $x-3$, saadaan jakojännös 6. Kun sama polynomi jaetaan polynomilla $x+3$, jakojäännös on 2. Mikä jakojäännös saadaan, kun $P(x)$ jaetaan polynomilla x^2-9?*

Ratkaisu. Tehtävän oletuksista seuraa, että $P(3) = 6$ ja $P(-3) = 2$. Jakoyhtälön perusteella $P(x) = (x^2-9)Q(x) + R(x)$, missä Q on jokin polynomi ja R polynomi, jonka aste on alempi kuin polynomin $x^2 - 9$ aste. Siis $R(x) = ax + b$, missä a ja b vakioita. Mutta $P(3) = 3a + b = 6$ ja $P(-3) = -3a + b = 2$. Siis $2b = 8$ ja $b = 4$. On oltava $a = \dfrac{2}{3}$.

3. *Määritä jakojäännös, kun polynomi*

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} + x^{729}$$

jaetaan polynomilla $x - 1$. Entä jos jakaja on $x^2 - 1$?

Ratkaisu. Koska $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} + x^{729} = (x-1) + (x^3-1) + (x^9-1) + (x^{27}-1) + (x^{81}-1) + (x^{243}-1) + (x^{729}-1) + 7$ ja jokainen polynomi $x^n - 1$ on jaollinen polynomilla $x - 1$, ensimmäinen kysytty jakojäännös on 7. Vastaavasti $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} + x^{729} = (x-x) + (x^3-x) + (x^9-x) + (x^{27}-x) + (x^{81}-x) + (x^{243}-x) + (x^{729}-x) + 7x = x\left((x^2-1) + (x^8-1) + (x^{26}-1) + (x^{80}-1) + (x^{242}-1) + (x^{728}-1)\right) + 7x$. Koska jokainen polynomi $x^{2n} - 1 = \left(x^2\right)^n - 1$ on jaollinen polynomilla $x^2 - 1$, jälkimmäinen jakojäännös on $7x$.

4. *Polynomi*

$$(1 + x - 2x^2 + 2x^3 - x^4)^{2011}(1 - 3x^2 + 3x^3 - x^4 + x^5)^{2012}$$

kirjoitetaan muotoon

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0.$$

Määritä n, a_n, a_0 ja kaikkien kertoimien summa $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

Ratkaisu. Tehtävän polynomi on kahden polynomin tulo. Edellisen polynomin korkeimman asteen termi on $\left(-x^4\right)^{2011} = -x^{8044}$ ja jälkimmäisen polynomin korkeimman asteen termi on $\left(x^5\right)^{2012} = x^{10060}$. Kun polynomit kerrotaan keskenään, tulon korkeimman asteen termi on $-x^{8044} \cdot x^{10060} = -x^{18104}$. Siis $n = 18104$ ja $a_{18104} = -1$. Polynomin kaikkien kertoimien summa on polynomin arvo, kun $x = 1$. Kummankin tulon tekijän arvo, kun $x = 1$, on 1. Kertoimien summa on siis 1. Vakiokerroin a_0 on polynomin arvo, kun x_0. Siis $a_0 = 1$.

5. *Todista: kun suoritetaan polynomien kertolasku*

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2010} + x^{2011})(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2010} - x^{2011}),$$

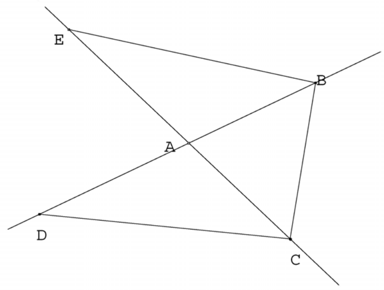
samanasteiset termit yhdistetään ja x:n potenssit asetetaan laskevaan astejärjestykseen, niin tuloksessa ei ole ollenkaan x:n parittomia potensseja.

Ratkaisu. Olkoot tehtävän polynomi $P(x)$ ja sen kaksi tekijää $Q(x)$ ja $R(x)$. Selvästi $Q(-x) = R(x)$ ja $R(-x) = Q(x)$. Siis $P(-x) = Q(-x)R(-x) = R(x)Q(x) = P(x)$. Olkoon toisaalta $P(x) = P_0(x) + P_1(x)$, missä $P_0(x)$ muodostuu P:n kaikista parillisasteisista termeistä ja $P_1(x)$ muodostuu kaikista P:n paritonasteisista termeistä. Silloin $P_0(-x) = P_0(x)$ ja $P_1(-x) = -P_1(x)$. Nyt $P_0(x) + P_1(x) = P(x) = P(-x) = P_0(-x) + P_1(-x) = P_0(x) - P_1(x)$. Siis $P_1(x) = -P_1(x)$ eli $P_1(x) = 0$.

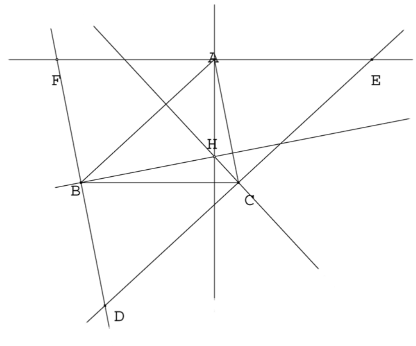
6. *Kahden muuttujan polynomi $f(x, y)$ on antisymmetrinen, jos $f(x, y) = -f(y, x)$ kaikilla reaaliluvuilla x, y. Osoita, että on olemassa kahden muuttujan polynomi $g(x, y)$, jolle pätee $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y.*

Ratkaisu. Olkoon x mielivaltainen. Oletuksesta seuraa $f(x, x) = -f(x, x)$ eli $f(x, x) = 0$. Olkoon y kiinteä luku. Edellisen perusteella muuttujan x polynomilla $f(x, y)$ on nollakohta, kun $x = y$. Siis $f(x, y) = (x - y)g_0(x, y)$, missä $g_0(x, y)$ on jokin x:n polynomi. Vaihtamalla x:n ja y:n roolit saadaan samoin, että jokaisella kiinteällä x:n arvolla $f(x, y) = (x - y)g_1(x, y)$, missä $g_1(x, y)$ on y:n polynomi. Edelleen kaikilla $x \neq y$ on $g_0(x, y) = g_1(x, y)$. [Jotta todistus olisi täydellinen, olisi vielä osoitettava, että $g(x, y) = g_0(x, y) = g_1(x, y)$ todella on *kahden muuttujan* polynomi. Tiedämme, että $g(x, y) = a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \cdots + a_1(y)x + a_0(y)$ ja $g(x, y) = b_m(x)y^m + b_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + b_1(x)y + b_0(x)$, missä $a_n(y), \ldots, a_0(y)$ ovat joitain y:n funktioita ja $b_m(x), \ldots, b_0(x)$ ovat joitain x:n funktioita. Annetaan x:lle $n+1$ kiinteää arvoa, esimerkiksi $x = 0, 1, \ldots, n$. Saadaan $n+1$ yhtälöä, joista jokaisen vasen puoli on jokin funktioiden $a_j(y)$, $j = 0, \ldots, n$ vakiokertoiminen lineaariyhdistely ja oikea puoli jokin y:n vakiokertoiminen polynomi. Kun yhtälöryhmästä ratkaistaan $a_j(y)$:t, niin jokainen tulee olemaan jokin y:n enintään astetta m oleva polynomi. Tämä riittää osoittamaan, että $g(x, y)$ todella on kahden muuttujan polynomi.]

7. *Todista, käyttämällä hyväksi vain yhtenevyyslakia sks, että kahden suoran leikatessa syntyvät ristikulmat ovat yhtä suuria.*



Ratkaisu. Tarkastellaan kulmaa $\angle BAC$. Voidaan olettaa, että $AB = AC$. Olkoot D ja E suorilla AB ja AC niin, että A on B:n ja D välissä ja myöskin C:n ja E:n välissä. Voidaan olettaa, että $AD = AE$. Osoitetaan ristikulmat $\angle DAC$ ja $\angle EAB$ yhtä suuriksi. Ensinnäkin kolmiot BAC ja CAB ovat yhtenevät (sks). Siis $\angle ABC = \angle ACB$ (tässä on tietysti kysymys siitä, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret). Tarkastetaan sitten kolmioita DBC ja ECB. Niissä on $BC = CB$, $BD = EC$ (pareittain yhtä pitkien janojen summat) ja $\angle DBC = \angle ECB$ (juuri edellä todistettu). Kolmiot DBC ja ECB ovat siis yhtenevät, joten $DC = EB$ ja $\angle DCB = \angle EBC$. Mutta silloin myös $\angle DCA = \angle EBA$ (yhtäsuurista kulmista vähennetään yhtä suuret kulmat). Nyt kolmioissa ACD ja ABE on kaksi yhtä pitkien sivujen paria ja niiden välissä yhtä suuret kulmat, joten kolmiot ovat yhteneviä. Mutta silloin $\angle DAC = \angle EAB$, ja todistus on valmis!



8. *Todista, että kolmion korkeussuorat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (Pistettä sanotaan kolmion ortokeskukseksi.)*

Ratkaisu. Yksinkertaisin todistus lienee se, joka käyttää hyväksi sitä, että kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tämähän nähdään todeksi seuraavasti: Olkoon sivujen AB ja BC keskinormaalien leikkauspiste O. Koska janan keskinormaalin jokainen piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä, $OA = OB$ ja $OB = OC$. Siis $OA = OC$, joten piste O on myös sivun AC keskinormaalin piste. Todistetaan sitten väite. Piirretään kolmion kärkien kautta kolmion vastakkaisten sivujen suuntaiset suorat. Ne leikkaavat pisteissä D, E ja F. Nimetään pisteet niin, että $DE\|BA$, $EF\|CB$ ja $FD\|AC$. Nelikulmiot $ABDC$ ja $ABCE$ ovat suunnikkaita (vastakkaiset sivuparit yhdensuuntaisia), joten $DC = BA = CE$. C on siis janan DE keskipiste. Janan DE keskinormaali on kohtisuorassa DE:tä vastaan mutta myös BA:ta vastaan. Se on siis kolmion ABC C:n kautta kulkeva korkeussuora. Vastaavasti kolmion DEF muiden sivujen keskinormaalit ovat ABC:n korkeussuoria. Koska DEF:n keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, samoin tekevät ABC:n korkeussuorat. (Miksi muuten tässä puhuttiin korkeussuorista eikä korkeusjanoista?)

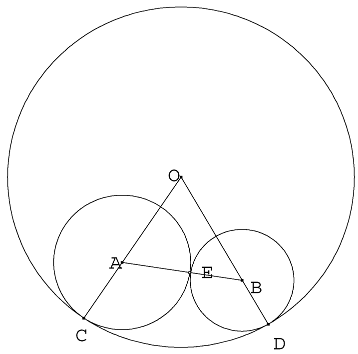
9. *Todista, että ympyrän kaikkien yhtä pitkien jänteiden keskipisteet ovat erään ympyrän kehällä.*

Ratkaisu. Olkoon AB r-säteisen ympyrän a-pituinen jänne ja C AB:n keskipiste. Jos ympyrän keskipiste on O, niin O on etäisyydellä r pisteistä A ja B, eli O on janan AB keskinonormaalilla. Siis $OC\perp AB$. Kun sovelletaan pythagoraan lausetta kolmioon OAC, saadaan $OC^2 = OA^2 - AC^2 = r^2 - \dfrac{a^2}{4}$. C:n etäisyys O:sta riippuu vain r:stä ja a:sta, muttei A:sta eikä B:stä. Kaikkien a-pituisten janojen keskipisteet ovat siis O-keskisellä ympyrällä, jonka säde on $\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}}$.

10. *Suora ℓ puolittaa kolmion ABC kulman $\angle ABC$ ja suora ℓ' puolittaa kulman $\angle ABC$ vieruskulman. Osoita, että $\ell\perp\ell'$.*

Ratkaisu. Olkoot kolmion kulmat tavan mukaisesti α, β ja γ. Kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summa. Kulman $\angle ABC$ vieruskulman puolikas on siis $\dfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$. Suorien ℓ ja ℓ' väliin jäävän kulman suuruus on siis $\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ eli puolet kolmion kulmien summasta; kyseinen kulma on siis $90°$.

11. *Erään ympyrän Γ sisään on piirretty kaksi ympyrää Γ_1 ja Γ_2. Γ sivuaa sekä Γ_1:tä että Γ_2:ta ja Γ_1 ja Γ_2 sivuavat toisiaan. Osoita, että ympyrän Γ halkaisija on yhtä pitkä kuin sen kolmion piiri, jonka kärjet ovat tehtävän kolmen ympyrän keskipisteet.*



Ratkaisu. Olkoot ympyröiden Γ, Γ_1 ja Γ_2 keskipisteet O, A ja B; olkoot C, D ja E ympyröiden Γ ja Γ_1; Γ ja Γ_2 sekä Γ_1 ja Γ_2 sivuamispisteet. Kun kaksi ympyrää sivuaa toisiaan pisteessä X, niin molemmilla ympyröillä on pisteessä X sama tangentti, joka on kohtisuorassa kummankin ympyrän pisteeseen X piirrettyä sädettä vastaan. Tästä seuraa, että ympyröiden keskipisteet ja sivuamispiste ovat samalla suoralla. Siis C on suoralla OA, D suoralla OB ja E suoralla AB. Koska Γ_1 ja Γ_2 ovat Γ:n sisällä, A on janalla OC ja B on janalla OD. E puolestaan on janalla AB. [Tehtävän sanamuodossa ei huomata kieltää mahdollisuutta, että Γ_1 ja Γ_2 sivuaisivat toisiaan sisäpuolisesti. Silloin olisi kuitenkin $B = C = E$ ja A, B ja O samalla suoralla; kolmio OAB surkastuisi janaksi.] Koska $AE = AC$ ja $BE = BD$, on $OC = OA + AE$ ja $OD = OB + BE$. Siis $OA + AB + BO = OC + OD$. Γ:n halkaisijan pituus on sama kuin Γ:n kahden säteen pituuden summa, joten todistus on valmis.

12. *Todista, että suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa.*

Ratkaisu. Olkoon $ABCD$ suunnikas. Kulmat $\angle DAB$ ja $\angle ABC$ ovat vieruskulmia; vieruskulmien kosinit ovat itseisarvoltaan samat, mutta vastakkaismerkkiset. Lisäksi $BC = AD$ ja $AB = DC$. Kosinilauseen perusteella saadaan siis $AC^2 + BD^2 = (AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC)) + (AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos(\angle DAB)) = AB^2 + BC^2 + AB^2 + AD^2 + 2(\cdot AB \cdot BC - AB \cdot AD)\cos(\angle DAB) = AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2$. [Tätä tulosta kutsutaan *suunnikaslauseeksi*.]