Matematiikan olympiavalmennus

Harjoitustehtävät, marras–joulukuu 2015

Tuo ratkaisusi seuraavaan valmennusviikonvaihteeseen, lähetä ne postitse osoitteeseen Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu tai lähetä sähköpostitse osoitteeseen `matti.lehtinen@spangar.fi`.

Helpompia geometrian ja lukuteorian tehtäviä

1. Määritä luvun

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \cdots + 2^{5^{1991}}$$

kaksi viimeistä numeroa.

2. Osoita, että $n!$ ei ole jaollinen luvulla 2^n.

3. Osoita, että luku $(5^{125} - 1)/(5^{25} - 1)$ ei ole alkuluku.

4. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n, jolle $999999 \cdot n = 111 \cdots 11$.

5. Osoita, että jos n on kahden neliöluvun summa, niin myös $2n$ on kahden neliöluvun summa.

6. Suunnikkaassa $ABCD$ kulma $\angle BAD$ on terävä. Piste $G \neq B$ on suoralla AB niin, että $BC = CG$ ja piste $H \neq B$ on suoralla BC niin, että $AB = AH$. Osoita, että kolmio DGH on tasakylkinen.

7. Kolmion ABC kulma $\angle ABC$ on tylppä. Sivun AB keskipiste on D ja sivun AC keskipiste on E. Olkoon vielä F se sivun BC piste, jolle $EF \perp BC$ ja G se janan DE piste, jolle $BG \perp DE$. Osoita, että pisteet A, F ja G ovat samalla suoralla jos ja vain jos $CF = 2 \cdot BF$.

8. Tasakylkisessä kolmiossa ABC on $AB = AC$. Kolmion ympärysympyrän pisteisiin A ja C piirretyt tangentit leikkaavat pisteessä D ja $\angle DBC = 30°$. Osoita, että ABC on tasasivuinen.

9. Suorakulmaisen kolmion ABC kärjessä C oleva kulma on suora. Olkoot D piste sivulla AC ja E piste janalla BD niin, että $\angle ABC = \angle DAE = \angle AED$. Osoita, että $BE = 2 \cdot CD$.

10. Jännenelikulmiossa $ABCD$ on $AD = BD$. Jännenelikulmion lävistäjät leikkaavat pisteessä M. Suora AC leikkaa ympyrän, joka kulkee B:n, M:n ja kolmion BCM sisäympyrän keskipisteen kautta, (myös) pisteessä N. Osoita, että $AN \cdot NC = CD \cdot BN$.

Vaativampia kombinatoriikan ja lukuteorian tehtäviä

11. Kokouksen osanottajat kättelevät toisiaan summittaisesti ennen kokouksen alkua.

a) Osoita, että 6 hengen kokoontuessa voidaan valikoida 3 hengen ryhmä, jonka jäsenet joko kaikki ovat kätelleet toisiaan tai kukaan ei ole kätellyt ketään muuta ryhmän jäsentä.

b) Pitääkö väite enää paikkansa, jos 6 korvataan 5:llä, mutta 3 säilyy ennallaan?

12. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $A_0, \ldots, A_{n-1} \subset \mathbb{N}$ eri joukkoja. Osoita, että on olemassa sellainen äärellinen $B \subset \mathbb{N}$, että $A_0 \cap B, \ldots, A_{n-1} \cap B$ ovat eri joukkoja ja joukossa B on enintään $n-1$ alkiota.

13. *Aritmeettiseksi jonoksi* kutsutaan jonoa, jossa peräkkäisten alkioiden erotus on aina sama. Siis äärellinen aritmeettinen jono on muotoa $(a, a+d, \ldots, a+(k-1)d)$ joillakin $a, d \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N}$, ja ääretön muotoa $(a, a+d, a+2d, \ldots)$ joillakin $a, d \in \mathbb{R}$. Osoita, että on olemassa sellainen joukko A luonnollisia lukuja, että kumpikaan joukoista A ja $\mathbb{N} \smallsetminus A$ ei sisällä ääretöntä toistotonta ($d \neq 0$) aritmeettista jonoa.

14. Olkoon G kuuden solmun verkko. Osoita, että G:ssä tai sen komplementtiverkossa $\overline{G}$ on neljän solmun sykli. [Verkon $G = (V, E)$ *komplementtiverkko* on $\overline{G} = (V, E')$, missä

$$E' = \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y, \{x, y\} \notin E\},$$

ts. komplementtiverkossa solmuparin välillä on särmä täsmälleen silloin, kun alkuperäisessä verkossa ei ole särmää.]

15. Osoita, että Ramseyn funktiolle pätee $R(4) = 18$.

16. Olympoksen jumalat Venus ja Mars leikittelevät jälleen ihmiskohtaloilla. He keräävät kokoon toisilleen ventovieraita ihmisiä ja arpovat kunkin ihmisparin kohdalla, tuleeko heistä ystäviä vai vihollisia (kummankin tapahtuman todennäköisyys on $\frac{1}{2}$). Näytä, että on olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että jos ihmisjoukossa on vähintään m henkeä, niin todennäköisyys, että jokaisella on ainakin yksi ystävä ja ainakin yksi vihollinen, on vähintään 0,99.

17. Kyllästyttyään umpimähkäisiin ihmissuhteisiin Venus ja Mars kehittävät seuraavanlaisen pelin, jonka säännöissä kiinnitetään vakiot n ja k. He kokoavat uuden n ventovieraan joukon. Jumalat valitsevat vuorotellen ihmispareja, ja Venus aloittaa. Jokaisella siirrollaan hän tekee valitsemistaan kahdesta ihmisestä ystävät, Mars vastaavasti viholliset, eikä samaa paria saa valita uudestaan. Venus voittaa pelin, jos hän onnistuu muodostamaan k ystävän ryhmän; Mars taas k vihollisen ryhmän syntyessä. Peli voi myös päättyä tasapeliin, jos parit loppuvat kesken eikä halutunlaisia ryhmiä ole syntynyt.

a) Miten käy, jos $n = 5$ ja $k = 2$?

b) Osoita, että parhaalla mahdollisella tavalla pelatessaan Venus ei häviä peliä, olivat vakiot $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ mitä tahansa.

c) Todista, että on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että Venus pystyy voittamaan pelin, jos tavoitteena on 4:n ystävän ryhmän muodostaminen ($k = 4$).

Seuraavat tehtävät liittyvät kiinalaiseen jäännöslauseeseen sekä neliönjäännösten kauniiseen teoriaan, joihin molempiin voi tutustua vaikkapa monisteesta

`http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/laajalukuteoriamoniste.pdf.`

18. Osoita, että luvulla $2^n + 1$ ei ole alkulukutekijöitä muotoa $8k - 1$, missä $n, k \in \mathbb{Z}_+$.

19. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ sellainen positiivinen kokonaisluku, että $3^n - 1$ on jaollinen luvulla $2^n - 1$. Osoita, että on oltava $n = 1$.

20. Osoita, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y^5 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = z^2 \\ x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = t^3 \end{cases}$$

on äärettömän monta ratkaisua, joissa x_1, x_2, x_3, x_4, y, z ja t ovat positiivisia kokonaislukuja.

21. Etsi kokonaisluku n, jolle n on luvun $2^n + 2$ tekijä ja $100 < n < 1997$.

22. Olkoon a positiivinen kokonaisluku, joka ei ole neliöluku. Osoita, että on olemassa äärettömän monta alkulukua p, joille ei löydy kokonaislukua x niin, että $x^2 \equiv a \pmod{p}$.

Seuraavat tehtävät ovat 27.11. ”vaativamman bingon” inspiroimia.

23. Olkoon S kaikkien sellaisten järjestettyjen kolmikkojen (a_1, a_2, a_3) joukko, missä $1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 10$. Jokainen S:ään kuuluva kolmikko synnyttää lukujonon, jonka määrittelee sääntö $a_n = a_{n-1}|a_{n-2} - a_{n-3}|$, kun $n \geq 4$. Osoita, että näiden jonojen joukossa on tasan 494 sellaista, joissa $a_n = 0$ jollain n

24. Tarkastellaan kaikkia joukon $\{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$ 1000-alkioisia osajoukkoja. Valitaan jokaisesta sellaisesta pienin alkio. Kaikkien näiden pienimpien alkioiden aritmeettinen keskiarvo on $\frac{p}{q}$, missä p ja q ovat yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että $p + q = 431$.

25. Osoita, että kun kulmat mitataan asteissa, niin

$$\prod_{k=1}^{45} \frac{1}{\sin^2(2k-1)} = 2^{89}.$$