Tammikuun 2012 helpommat kirjevalmennustehtävät

1. Kuinka monta on sellaisia 7-numeroisia luonnollisia lukuja, jotka eivät ala numerolla 1 eivätkä pääty numeroon 1?

Ratkaisu. Kaikki sellaiset luvut voivat alkaa kahdeksalla eri numerolla ja päättyä yhdeksällä eri numerolla. Muut viisi numeroa voidaan kukin valita kymmenellä eri tavalla. Siten vastaus on $8 \cdot 10^5 \cdot 9 = 7200000$.

2. Olkoon $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ n kirjaimen joukko. Kutsumme *sanaksi* mitä tahansa m peräkkäisen joukosta C valitun kirjaimen jonoa, joka ei ala eikä pääty kirjaimella c_1 ja missä $m \leqslant n$.

Kuinka monta tällaista sanaa voimme muodostaa joukon C kirjaimista?

Ratkaisu. Olkoon $W(\ell)$ (missä $\ell \leqslant m$ on positiivinen kokonaisluku) ℓ kirjaimen mittaisten sanojen lukumäärä. On helppo nähdä, että $W(1) = n-1$, $W(2) = (n-1)^2$, ja että $W(\ell) = (n-1)^2\, n^{\ell-2}$ jokaisella $3 \leqslant \ell \leqslant m$. Kysytty lukumäärä on

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{m} W(\ell) &= (n-1) + (n-1)^2 + \sum_{\ell=3}^{m} (n-1)^2\, n^{\ell-2} = n - 1 + (n-1)^2 \sum_{\ell=0}^{m-2} n^{\ell} \\ &= n - 1 + (n-1)^2 \cdot \frac{n^{m-1}-1}{n-1} = (n-1) + (n-1)\big(n^{m-1}-1\big) \\ &= n - 1 + n^m - n - n^{m-1} + 1 = n^m - n^{m-1} = n^{m-1}\,(n-1)\,.\end{aligned}$$

3. Etsi kaikki kaksinumeroiset luonnolliset luvut a, joille löytyy positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille

$$2^{x+y} = 2^x + 2^y + a.$$

Ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälö muodossa

$$(2^x - 1)(2^y - 1) = a + 1.$$

Olemme siis oikeastaan kiinnostuneita löytämään ne positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille vasemman puolen lauseke on välillä $[11, 100]$. Se hoituu helpoiten taulukoimalla. Symmetrisyyden nojalla riittää tarkastella vain pareja joille pätee $x \geqslant y$. Seuraavassa taulukossa on lausekkeen $(2^x - 1)(2^y - 1)$ arvoja:

$y \setminus x$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	7	**15**	**31**	**63**	127
2		9	**21**	**45**	**93**	189	
3			**49**	105			

Relevantit arvot on vahvennettu ja kertovat, että kelvolliset luvun a arvot 14, 20, 30, 44, 48, 62 ja 92.

4. Olkoon kolmion piirin puolikas p ja olkoon sen sisäänpiirretyn ympyrän säde r. Osoita, että $p \geqslant 3\sqrt{3}\, r$. Milloin tässä vallitsee yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Kolmion pinta-ala on pr ja käyttämällä Heronin kaavaa ja kolmen muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä saamme:

$$p^2 r^2 = p\,(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{3^3}.$$

Jakamalla puolittain piirin puolikkaan neliöllä ja ottamalla puolittain neliöjuuret näemme, että

$$r \leqslant \sqrt{\frac{p^2}{3^3}} = \frac{p}{3\sqrt{3}}.$$

Yhtäsuuruus vallitsee täsmälleen silloin kun $p - a = p - b = p - c$, eli täsmälleen silloin kun $a = b = c$.

5. Olkoot x, y ja z sellaisia kokonaislukuja, että $x^2+y^2=z^2$. Osoita, että $3 \mid xy$ ja että $5 \mid xyz$.

Ratkaisu. Hyödynnämme niitä helposti tarkistettavissa olevia tosiasioita, että jokainen neliöluku on $\equiv 0$ tai $1 \pmod 3$, ja että jokainen neliöluku on $\equiv 0, 1$ tai $-1 \pmod 5$.

Jos olisi $3 \nmid xy$, niin olisi $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 3$, jolloin olisi myös $z^2 \equiv x^2+y^2 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod 3$, mikä on mahdotonta, ja ensimmäinen väite on todistettu.

Jos $5 \mid xy$, toinen väite pitää varmasti paikkaansa. Oletetaan siis, että on $5 \nmid xy$. Nyt kumpikin luvuista x^2 ja y^2 on kongruentti toisen luvuista ± 1 kanssa modulo 5. Jos olisi $x^2 \equiv y^2 \pmod 5$, niin olisi

$$z^2 \equiv x^2+y^2 \equiv \pm 1 \pm 1 \equiv \pm 2 \pmod 5,$$

mikä on mahdotonta. Siis lukujen x^2 ja y^2 on oltava keskenään epäkongruentteja modulo 5, eli on oltava $z^2 \equiv \pm 1 \mp 1 \equiv 0 \pmod 5$. Siis $5 \mid z^2$ ja edelleen $5 \mid z$.

6. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$, ja oletetaan, että

$$(2b-a)^2 + (2b-c)^2 = 2\left(2b^2 - ac\right).$$

Osoita, että luvut a, b ja c ovat jonkin aritmeettisen jonon kolme peräkkäistä elementtiä.

Ratkaisu. Kun neliöt kerrotaan auki, saadaan yhtälö

$$4b^2 + a^2 + c^2 - 4ab - 4bc + 2ac = 0.$$

Mutta nyt

$$(a-2b-c)^2 = 0,$$

eli $a-2b+c=0$, ja $a-b=b-c$.

7. Kolmion $\triangle ABC$ sivujen BC, CA ja AB keskipisteet ovat L, M ja N, tässä järjestyksessä. Osoita, että

$$\widehat{LAC} = \widehat{ABM} \text{ jos ja vain jos } \widehat{ANC} = \widehat{ALB}.$$

Ratkaisu. Olkoon G kolmion $\triangle ABC$ painopiste.

Koska $NL \parallel AC$, on aina $\widehat{LAC} = \widehat{ALN}$, eli $\widehat{LAC} = \widehat{ABM}$ jos ja vain jos $\widehat{ALN} = \widehat{ABM}$. Nyt $\widehat{ALN} = \widehat{ABM}$ jos ja vain jos nelikulmio $BNGL$ on jännenelikulmio.

Toisaalta $\widehat{ANC} = \widehat{ALB}$ jos ja vain jos $\widehat{BNG} + \widehat{GLB} = 180°$, eli täsmälleen silloin kun $BNGL$ on jännenelikulmio, ja olemme valmiit.

8. Etsi kaikki alkuluvut p, q ja r, joille $p > q > r$ ja joille myös luvut $p-q$, $p-r$ ja $q-r$ ovat alkulukuja.

Ratkaisu. Koska $r \geqslant 2$, ovat alkuluvut p ja q parittomia. Nyt $p-q$ on parillinen alkuluku, ja siis yhtä kuin kaksi. Luvut $p-r$ ja $q-r$ eroavat kahdella ja ovat siis samaa parillisuutta. Koska ne kuitenkin ovat erisuuria, on niiden molempien oltava parittomia. Täten r on parillinen ja $r=2$.

Nyt luvut $q-2$, q ja $q+2$ ovat kaikki alkulukuja. Ainakin yksi niistä on jaollinen kolmella, ja jokainen niistä on vähintään kolme. Täten $q-2=3$ ja päättelemme, että $q=5$ ja $p=7$.

Näin saatu alkulukukolmikko $\langle p, q, r\rangle$ toteuttaa vaaditut ehdot, sillä erotukset $7-5=2$, $7-2=5$ ja $5-2=3$ ovat kaikki alkulukuja.

9. Olkoon $\triangle ABC$ teräväkärkinen kolmio, olkoot D ja E sen kärjistä A ja B piirrettyjen korkeusjanojen kannat, olkoot A' ja B' janojen AD ja BE keskipisteet, olkoon X suorien CA' ja BE leikkauspiste, ja olkoon Y suorien CB' ja AD leikkauspiste. Osoita, että pisteet A', B', X ja Y ovat saman ympyrän kehällä.

Ratkaisu. Kolmiot $\triangle ADC$ ja $\triangle BEC$ ovat yhdenmuotoiset, mistä seuraa helposti, että $\widehat{BB'C} = \widehat{CA'A}$. Nyt todistus jakautuu kahteen osaan sen mukaan, leikkaavatko janat $A'X$ ja $B'Y$ vai eivät. Edellisessä tapauksessa kulmat $\widehat{XA'Y}$ ja $\widehat{XB'Y}$ ovat toistensa vieruskulmia ja $A'XB'Y$ on jännenelikulmio. Jälkimmäisessä tapauksessa $\widehat{XA'Y} = \widehat{XB'Y}$ ja pisteet A', B', X ja Y ovat saman ympyrän kehällä kehäkulmalauseen nojalla.

10. Olkoot a, b ja c sellaisia reaalilukuja, että $abc \neq 0$, $a + b + c = 0$ ja $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$. Osoita, että

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}.$$

Ratkaisu. Koska

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\big(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\big) = 0,$$

on $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Nyt

$$\begin{aligned}
3abc &= a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5 \\
&= \big(a^2 + b^2 + c^2\big)\big(a^3 + b^3 + c^3\big) \\
&\quad - \big(a^2b^3 + a^2c^3 + b^2a^3 + b^2c^3 + c^2a^3 + c^2b^3\big) \\
&= 3abc\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \big(a^2b^2\,(a + b) + a^2c^2\,(a + c) + b^2c^2\,(b + c)\big) \\
&= 3abc\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \big(a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2\big) \\
&= 3abc\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + abc\,(ab + bc + ca)\,.
\end{aligned}$$

Täten

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - \frac{ab + bc + ca}{3}.$$

Mutta $2\,(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - \big(a^2 + b^2 + c^2\big) = -\big(a^2 + b^2 + c^2\big)$, ja siten

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6},$$

eli $\frac{5}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 1$, eli

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}.$$