Lokakuun 2012 vaikeat kirjevalmennustehtävät

Vastauksia voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen laurihallila@gmail.com, tai postitse osoitteeseen Lauri Hallila, Kalliorinteenkuja 1, 02770 Espoo. Vastaukset voi myös tuoda viikon 48 valmennustilaisuuteen Päivölään. Kysymyksiä tehtävistä voi esittää sähköpostitse.

1. Ratkaise yhtälö

$$(x^2 + y^2 - 4)^2(xy - 1)^2 + \sqrt{y^2 - x^2} = 0$$

reaalilukujen joukossa.

2. Etsi suurin kokonaisluku n, $n > 10$, jolla on seuraava ominaisuus: kun n jaetaan millä tahansa neliöluvulla lukujen 2 ja $n/2$ välillä, jakojäännös on pariton kokonaisluku.

3. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja $p(n)$ luvun n numeroiden tulo.
(a) Osoita, että $p(n) \leq n$.
(b) Etsi kaikki sellaiset luvut n, että

$$10p(n) = n^2 + 4n - 2005.$$

4. (a) Olkoot u, v, x, y positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} \geq \frac{4(uy + vx)}{(x + y)^2}.$$

(b) Olkoot a, b, c, d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a}{b + 2c + d} + \frac{b}{c + 2d + a} + \frac{c}{d + 2a + b} + \frac{d}{a + 2b + c} \geq 1.$$

5. Osoita, että positiivisille reaaliluvuille a, b, c pätee

$$\frac{a + b}{c^2} + \frac{b + c}{a^2} + \frac{c + a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

6. Olkoon a ja b kokonaislukuja. Osoita, että:
(a) 13 jakaa tasan luvun $2a + 3b$ jos ja vain jos 13 jakaa myös luvun $2b - 3a$;
(b) Jos 13 jakaa tasan luvun $a^2 + b^2$, niin 13 jakaa myös joko luvun $2a + 3b$ tai luvun $2b + 3a$.

7. Olkoon x_1, x_2, $\ldots$, x_n positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_1 + x_2} + \cdots + \frac{1}{1 + x_1 + \cdots + x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

8. Määritä yhtälön

$$3^x = 2^x y + 1$$

positiiviset kokonaislukuratkaisut.

9. Millä lukujen k ja d arvoilla yhtälöparilla

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 2 \\ y &= kx + d \end{aligned}$$

ei ole reaalilukuratkaisuja $(x,\, y)$?

10. Kuinka monella kokonaisluvulla a, missä $|a| \leq 2005$, yhtälöparilla

$$\begin{aligned} x^2 &= y + a \\ y^2 &= x + a \end{aligned}$$

on kokonaislukuratkaisuja?