Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, syyskuu 2018
Ratkaisuja

Helpompia tehtäviä

1. Onko oheinen neliö mahdollista täydentää taikaneliöksi, so. neliöksi, jossa esiintyy kerran jokainen luvuista 1, 2, ..., 16 ja jonka jokaisen vaakarivin, pystyrivin ja kummankin lävistäjän lukujen summa on sama?

			12
	16	1	10
	2	15	8

Ratkaisu. Koko neliön summa olisi $1 + 2 + \cdots + 16 = 16 \cdot 17/2 = 136$, joten kunkin rivin, sarakkeen ja lävistäjän summan on oltava 34. Täten saadaan pääteltyä, mitkä luvut välttämättä täydentävät kaksi viimeistä riviä, viimeinen sarake ja toisen lävistäjän. Tämän jälkeen myös toiseksi viimeinen sarake saadaan täytettyä, ja tulos näyttää tältä:

		13	6
		5	12
7	16	1	10
9	2	15	8

Jäljellä ovat 3, 4, 11 ja 14. Toisesta sarakkeesta puuttuvat luvut, joiden summa on 16, mutta sellaista lukuparia ei ole enää käytettävissä. Siten taikaneliöksi täydentäminen on mahdotonta.

2. Etsi kaikki positiiviset kolminumeroiset luvut $\overline{abc}$, joille pätee $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$. Viiva tarkoittaa tässä sitä, että kyse ei ole tulosta vaan kymmenjärjestelmän luvusta: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Ratkaisu. Sijoitetaan tehtävän yhtälöön annettu määritelmä:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 10a + c + 10b + c + 10c + a \\ 89a &= 10c + b = \overline{cb} \end{aligned}$$

Koska $89a$ on kaksinumeroinen luku, on oltava $a = 1$. Siten $\overline{cb} = 89$, joten $\overline{abc} = 198$.

3. Kolmion korkeusjanat ovat suorilla $y = x$, $y = -2x + 3$ ja $x = 1$. Yhden kärkipisteen koordinaatit ovat $(5, 5)$. Selvitä muiden kärkipisteiden koordinaatit.

Ratkaisu. Olkoot kolmion kärkipisteet $A = (5, 5)$, B ja C, ja korkeusjanojen kantapisteet samassa järjestyksessä D, E ja F. Koska piste A on annetuista suorista vain ensimmäisellä, korkeusjana AD on tällä suoralla. Voidaan olettaa, että BE on suoralla $y = -2x + 3$ ja CF suoralla $x = 1$.

Koska korkeusjanan BE kulmakerroin on -2, kolmion sivun AC kulmakerroin on $\frac{1}{2}$. Suoralla AC on yhtälö $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 5)$, joten koska pisteen C x-koordinaatti on 1, voidaan ratkaista piste $C = (1, 3)$.

Koska korkeusjana CF on pystysuora, kolmion sivu AB on vaakasuora ja sen yhtälö on $y = 5$. Koska piste B on myös suoralla $y = -2x + 3$, voidaan ratkaista $B = (-1, 5)$.

4. Kolmella kappaleella on sama pinta-ala: kuutiolla, jonka särmän pituus on a, säännöllisellä nelitahokkaalla, jonka särmän pituus on b ja säännöllisellä kahdeksantahokkaalla, jonka särmän pituus on c. Selvitä

$$\frac{\sqrt{bc}}{a}.$$

Ratkaisu. Kuutiolla on kuusi neliön muotoista tahkoa, joiden pinta-alat ovat yhteensä $6a^2$. Säännöllisellä nelitahokkaalla on neljä tahkoa, joista kukin on tasasivuinen kolmio, joten sen pinta-ala on $\sqrt{3}b^2$. Säännöllisellä kahdeksantahokkaalla on kahdeksan tahkoa, jotka ovat samoin tasasivuisia kolmioita, joten pinta-ala on $2\sqrt{3}c^2$. Siten $6a^2 = \sqrt{3}b^2 = 2\sqrt{3}c^2$, joten

$$\frac{b^2c^2}{a^4} = \frac{(6/\sqrt{3})a^2(6/(2\sqrt{3}))a^2}{a^4} = 6$$

ja $\dfrac{\sqrt{bc}}{a} = \sqrt[4]{6}$.

5. Kolmion sivujen pituudet ovat a, b ja c. Kun

$$2a + 3b + 4c = 4\sqrt{2a-2} + 6\sqrt{3b-3} + 8\sqrt{4c-4} - 20,$$

todista että kolmio on suorakulmainen.

Ratkaisu. Järjestellään yhtälöä ekvivalenttiin muotoon, jotta voidaan täydentää se neliöiksi:

$$\begin{aligned}
&2a + 3b + 4c = 4\sqrt{2a-2} + 6\sqrt{3b-3} + 8\sqrt{4c-4} - 20\\
&2a + 3b + 4c - 4\sqrt{2a-2} - 6\sqrt{3b-3} - 8\sqrt{4c-4} + 20 = 0\\
&(2a - 2 - 4\sqrt{2a-2} + 4) + (3b - 3 - 6\sqrt{3b-3} + 9) + (4c - 4 - 8\sqrt{4c-4} + 16) = 0\\
&(\sqrt{2a-2} - 2)^2 + (\sqrt{3b-3} - 3)^2 + (\sqrt{4c-4} - 4)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Koska neliöt ovat aina ei-negatiivisia, on kunkin niistä oltava 0. Siten $a = \frac{1}{2}(2^2+2) = 3$, $b = \frac{1}{3}(3^2+3) = 4$ ja $c = \frac{1}{4}(4^2+4) = 5$, joten $c^2 = a^2 + b^2$.

6. Kun x on reaaliluku, merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x, ja merkintä $\{x\}$ erotusta $x - \lfloor x \rfloor$. Etsi kaikki reaaliluvut x, joille $\lfloor x \rfloor \{x\} = x$.

Ratkaisu. Jos $x = 0$, $\lfloor x \rfloor \{x\} = 0 \cdot 0 = 0$.

Jos $x > 0$, $0 \le \lfloor x \rfloor \le x$ ja $0 \le \{x\} < 1$, joten $\lfloor x \rfloor \{x\} < x$ eikä x voi olla ratkaisu.

Jos $x < 0$, on olemassa kokonaisluku $k \ge 1$, jolle $-k \le x < -k+1$, toisin sanottuna $-k = \lfloor x \rfloor$. Siten $\{x\} = x + k$ ja $\lfloor x \rfloor \{x\} = -k(x+k)$. Yhtälö $\lfloor x \rfloor \{x\} = x$ saadaan yhtäpitävään muotoon $-k(x+k) = x \iff -(k+1)x = k^2 \iff x = -k^2/(k+1)$.

Ratkaisuja ovat siis luvut muotoa $-\dfrac{k^2}{k+1}$, missä k on ei-negatiivinen kokonaisluku.

7. Onko aritmeettisessa jonossa $7k+3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ äärettömän monta palindromilukua? (Esim. 12321 on palindromiluku, koska sen numerot ovat samat alusta loppuun ja lopusta alkuun lukien.)

Ratkaisu. Vastaus on myönteinen. Valitaan $k = 10^n - 1 = 999\ldots999$, jolloin $7k + 3 = 7 \cdot 10^n - 4 = 6999\ldots9996$.

8. Suljettu väli $[0, 1]$ jaetaan 999 punaisella pisteellä tuhanteen yhtä suureen osaan ja 1110 sinisellä pisteellä 1111 yhtä suureen osaan. Mikä on pienin punaisen ja sinisen pisteen välimatka? Kuinka moni punaisen ja sinisen pisteen pari on tämän minimaalisen välimatkan päässä toisistaan?

Ratkaisu. Olkoot punaiset pisteet $P_1, P_2, \ldots, P_{999}$ ja siniset pisteet $S_1, S_2, \ldots, S_{1110}$. Pisteiden P_j ja S_k etäisyys on

$$d = \left| \frac{j}{1000} - \frac{k}{1111} \right| = \left| \frac{1111j - 1000k}{1000 \cdot 1111} \right|.$$

Koska 1000 ja 1111 ovat suhteelliset alkuluvut, on $d = 0$ (yhtälöllä $1111j - 1000k = 0$ on ratkaisut $j = 1000p$, $k = 1111p$, mutta mikään niistä ei osu tehtävän yksikkövälille). Etsitään siis ratkaisua yhtälölle $|1111j - 1000k| = 1$ ehdoilla $1 \le j \le 999$ ja $1 \le k \le 1110$.

Tapaus 1: $1111j - 1000k = 1$. Olkoon $j = \overline{abc}$ (a, b ja c ovat j:n numerot). Koska $1111 \cdot \overline{abc} = 1000k + 1$, on $c = 1$ ja

$$\begin{aligned}
1111 \cdot \overline{ab1} - 1 &= 1000k\\
11110 \cdot \overline{ab} + 1110 &= 1000k\\
1111 \cdot \overline{ab} + 111 &= 100k,
\end{aligned}$$

joten $b = 9$, ja edelleen

$$\begin{aligned}
1111 \cdot \overline{a9} + 111 &= 100k\\
11110 \cdot a + 10110 &= 100k\\
1111 \cdot a + 1011 &= 10k,
\end{aligned}$$

mistä saadaan $a = 9$. Saatiin siis ratkaisu $j = 991$, $k = 1101$.

Tapaus 2: $1111j - 1000k = -1$. Olkoon taas $j = \overline{abc}$. Vastaavalla päättelyllä kuin tapauksessa 1 saadaan $c = 9$ ja $a = b = 0$, joten ratkaisu on $j = 9, k = 10$.

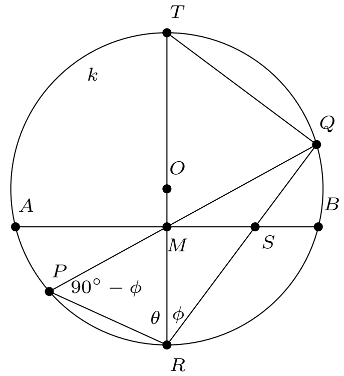
Pienin mahdollinen etäisyys on siis $\dfrac{1}{1111000}$ ja se saavutetaan vain kahdella pisteparilla, (P_{991}, S_{1101}) ja (P_9, S_{10}).

9. Olkoon k ympyrä, jonka keskipiste on O, ja olkoon AB ympyrän k jänne, jonka keskipiste M ei ole O. Puolisuora OM leikkaa k:n pisteessä R. Olkoon P piste lyhyemmällä kaarella AR, Q suoran PM ja ympyrän k toinen leikkauspiste ja S suorien AB ja QR leikkauspiste. Kumpi jana on pidempi, RS vai PM?

Ratkaisu. Jatketaan janaa RO kunnes se kohtaa k:n pisteessä T. Havaitaan, että $\angle RMS = \angle RQT = 90°$. Olkoon $\theta = \angle MRP$ ja $\phi = \angle MRS$. Silloin $RM = RS\cos\phi$ ja $\angle RPQ = \angle RTQ = 90° - \phi$. Sinilauseesta saadaan

$$\frac{PM}{\sin\theta} = \frac{RM}{\sin(90° - \theta)} = \frac{RM}{\cos\theta} = RS,$$

joten $PM = RS\sin\theta < RS$.



10. Ratkaise kokonaislukujen joukossa yhtälö $7(x+y) = 3(x^2 - xy + y^2)$.

Ratkaisu. Pieniä lukuja kokeilemalla löydetään pian ratkaisut $(0,0)$, $(5,4)$ ja $(4,5)$. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole.

Olkoon $(x,y) \neq (0,0)$ ratkaisu. Koska $x^2 - xy + y^2 > (x-y)^2 \geq 0$, on oltava $x + y > 0$. Koska 3 ja 7 ovat suhteelliset alkuluvut, $3 \mid x + y$. Olkoon $x + y = 3k$. Silloin $7k = 3(3k^2 - xy)$, joten $3 \mid k$ eli $9 \mid x + y$.

Toisaalta $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, joten $(x+y)^2 - 3xy \geq \frac{(x+y)^2}{4}$ ja $7(x+y) \geq \frac{3(x+y)^2}{4}$. Saadaan $x + y \leq \frac{28}{3}$.

Koska $x + y$ on 9:n monikerta ja $0 < x + y \leq \frac{28}{3}$, on oltava $x + y = 9$, joten $7 \cdot 9 = 3(9^2 - 3xy)$ ja $xy = 20$. Siten $\{\,x,y\,\} = \{\,4,5\,\}$.

Vaativampia tehtäviä

11. Etsi kaikki positiiviset luvut x, joille

$$x^{2\sin x - \cos 2x} < \frac{1}{x}.$$

Ratkaisu. Koska $x > 0$ ja $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, epäyhtälö saadaan ekvivalenttiin muotoon

$$x^{2\sin x(1+2\sin x)} < 1.$$

Olkoon $a = 2\sin x(1 + 2\sin x)$. Kun $x > 0$, epäyhtälö $x^a < 1$ on tosi jos ja vain jos

- joko $0 < x < 1$ ja $a > 0$
- tai $x > 1$ ja $a < 0$.

Jos $0 < x < 1$, niin $\sin x > 0$, joten ensimmäinen ehto toteutuu. Jos $x > 1$, niin toinen ehto toteutuu, jos ja vain jos $-1 < \sin x < 0$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jollakin kokonaisluvulla $k \geq 0$ pätee $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ ja $x \neq (2k + \frac{3}{2})\pi$. Siten ratkaisujoukko on avointen välien yhdiste:

$$x \in \Big(0,1\Big) \cup \Big(\pi, \frac{3\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\Big) \cup \Big(3\pi, \frac{7\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{7\pi}{2}, 4\pi\Big) \cup \Big(5\pi, \frac{11\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{11\pi}{2}, 6\pi\Big) \cup \cdots.$$

12. Polynomista $P(x) = ax^2 - bx + c$ tiedetään, että $0 < |a| < 1$, $P(a) = -b$ ja $P(b) = -a$. Todista, että $|c| < 3$.

Ratkaisu. Jos $a = b$, $P(x) = ax^2 - ax + c$ ja $-a = P(a) = a^3 - a^2 + c$, joten $|c| \leq |a| + |a^3| + |a^2| < 3$.

Oletetaan, että $a \neq b$. Silloin

$$-b = f(a) = a^3 - ab + c \qquad (1)$$

$$-a = f(b) = ab^2 - b^2 + c \qquad (2)$$

Vähennetään (1):stä (2):

$$\begin{aligned} a-b &= a(a^2-b^2)-b(a-b) \\ 1 &= a(a+b)-b \\ b(1-a) &= (a-1)(a+1) \\ b &= -(a+1). \end{aligned}$$

Nyt (2):sta saadaan

$$\begin{aligned} -a &= a(a+1)^2-(a+1)^2+c \\ c &= 1-a^2-a^3 \\ |c| &\le 1+|a|^2+|a|^3 < 3. \end{aligned}$$

13. Määritellään ei-negatiivisille kokonaisluvuille funktio t seuraavasti:

$$\begin{cases} t(0)=t(1)=0, \\ t(2)=1, \\ t(n)=\text{pienin positiivinen kokonaisluku, joka ei jaa } n\text{:ää, kun } n>2. \end{cases}$$

Olkoon $T(n)=t(t(t(n)))$. Laske

$$T(1)+T(2)+\cdots+T(2018).$$

Ratkaisu. Ensiksi havaitaan, että $T(n)=0$, jos $n=2$ tai jos n on pariton luku. Siten kysytty summa on $T(4)+T(6)+\cdots+T(2018)$.

Jos $n\in\mathcal{J}=\{4,6,\ldots,2018\}$ ja $3\nmid n$, niin $t(n)=3$ ja $T(n)=1$. Jaetaan loput joukosta $\mathcal{J}$ kahteen osaan, $\mathcal{J}_1=\{6,18,\ldots,6\cdot 335\}$ ja $\mathcal{J}_2=\{12,24,\ldots,6\cdot 336\}$. Jos $n\in\mathcal{J}_1$, $t(n)=4$ ja $T(n)=2$. Jos $n\in\mathcal{J}_2$, ja $5\nmid n$ tai $7\nmid n$, niin joko $t(n)=5$ tai $t(n)=7$, ja kummassakin tapauksessa $T(n)=1$. Muuten n on luvun $12\cdot 5\cdot 7=420$ monikerta, joille on helppo tarkistaa, että $T(420)=T(1260)=2$ ja $T(840)=T(1680)=1$.

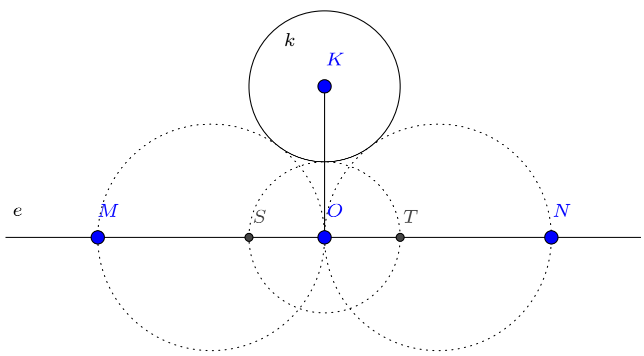
Kaikkiaan siis

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2018} T(n) &= \sum_{\substack{n=4\\ 2|n,3\nmid n}}^{2018} T(n)+\sum_{n\in\mathcal{J}_1} T(n)+\sum_{\substack{n\in\mathcal{J}_2\\ 35\nmid n}} T(n)+T(420)+T(840)+T(1260)+T(1680) \\ &= 672+168\cdot 2+164+2+1+2+1=1178. \end{aligned}$$

14. Tasossa on annettu yksikköympyrä k, jonka keskipiste on K, ja suora e. Pisteen K projektio e:lle on O, ja $KO=2$. Olkoon $\mathcal{H}$ niiden ympyröiden joukko, joiden keskipiste on suoralla e ja jotka sivuavat ympyrää k ulkopuolitse.

Todista, että on olemassa tason piste P ja kulma $\alpha>0$, joille $\angle APB=\alpha$ kaikilla joukon $\mathcal{H}$ ympyröillä, missä AB on suoralla e sijaitseva ympyrän halkaisija. Määritä α ja P.

Ratkaisu. (Tehtävästä oli unohtunut ehto $\alpha>0$, mutta suoran e pisteet ovat turhan triviaali ratkaisu.) Olkoot $M,N\in e$ pisteet, joille $OM=ON$ ja OM- ja ON-halkaisijaiset ympyrät kuuluvat $\mathcal{H}$:hon. Olkoon ST sen ympyrän halkaisija, jonka keskipiste on O ja joka kuuluu $\mathcal{H}$:hon.

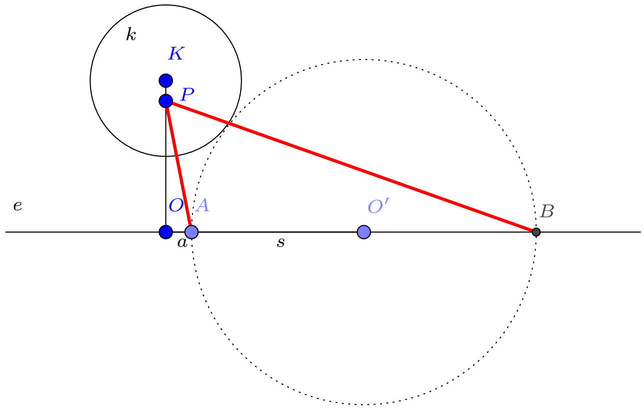


Jos kysytty piste P on olemassa, kolmio MPN on tasakylkinen, koska $\angle MPO = \angle NPA = \alpha$. Koska O on sivun MN keskipiste, P on suoralla KO.

Olkoon O_1 janan OM keskipiste ja olkoon $r = MO_1 = O_1O$. Kolmiossa KO_1O on $O_1O^2 + OK^2 = O_1K^2$, josta seuraa $r = \frac{3}{2}$.

Olkoon $OP = t$, jolloin kolmiossa PMO on $\tan\alpha = \frac{3}{t}$ ja kolmiossa SPO on $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{t}$. Kaavasta $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\alpha/2}{1-\tan^2\alpha/2}$ seuraa $\dfrac{3}{t} = \dfrac{2/t}{1-1/t^2} \iff \dfrac{3}{t} = \dfrac{2t}{t^2-1} \iff t^2 = 3$, joten on oltava $OP = \sqrt{3}$ ja $\alpha = 60°$.

Vielä on osoitettava, että ominaisuus on voimassa kaikille $\mathcal{H}$:n ympyröille. Olkoon siis $AB \subset e$ sellaisen ympyrän halkaisija. Voidaan olettaa, että A sijaitsee O:n ja B:n välissä. Olkoon $a = OA$, $s = AO'$ ja AB:n keskipiste O'.



Kolmiosta KOO' saadaan

$$OO'^2 + OK^2 = O'K'^2 \iff (a+s)^2 + 4 = (s+1)^2 \iff s = \frac{a^2+3}{2(1-a)}.$$

Siten $OB = a + 2\dfrac{a^2+3}{2(1-a)} = \dfrac{a+3}{1-a}$ ja

$$\begin{aligned}\tan\angle APB = \tan(\angle OPB - \angle OPA) = \frac{\tan\angle OPB - \tan\angle OPA}{1+\tan\angle OPB\cdot\tan\angle OPA} &= \frac{\frac{a+3}{\sqrt{3}(1-a)} - \frac{a}{\sqrt{3}}}{1+\frac{a(a+3)}{3(1-a)}} \\ &= \frac{a^2+3}{\sqrt{3}(1-a)}\cdot\frac{3(1-a)}{3+a^2} = \sqrt{3},\end{aligned}$$

joten $\angle APB = 60°$. Hyvin samanlaiset laskut seuraavat muista janan AB sijainneista.

15. Akseli ja Elina pelaavat tennistä. He käyttävät yksinkertaistettua pistelaskua, jossa erän voittaa pelaaja, joka ensimmäiseksi voittaa vähintään neljä peliä ollessaan vähintään kahden pelin verran johdossa. Akseli voittaa kunkin pelin todennäköisyydellä $p \le \frac{1}{2}$ riippumatta aiempien pelien tuloksista. Todista, että Akseli voittaa erän enintään todennäköisyydellä $2p^2$.

Ratkaisu. Olkoon $p_{i,j}$ todennäköisyys, että Akseli on voittanut täsmälleen i peliä, kun $i+j$ peliä on pelattu. Olkoon $q = 1-p$ Elinan voittotodennäköisyys, ja koska pian havaitaan, että $p_{i,j} \propto p^i q^j$, kirjoitetaan $p_{i,j} = c_{i,j}p^iq^j$. Kun $1 \le i,j \le 3$ ja kun $i = j \ge 4$, on $p_{i,j} = p_{i-1,j}p + p_{i,j-1}q$, joten

$$c_{i,j} = c_{i-1,j} + c_{i,j-1} \quad (1 \le i,j \le 3 \text{ tai } i,j \ge 4). \tag{3}$$

Sellaisia välitilanteita ei ole, joissa toinen pelaaja on voittanut neljä peliä ollessaan kaksi peliä johdossa, joten kun $j \ge 5$, on $p_{j-2,j} = p_{j-2,j-1}q = p_{j-2,j-2}q^2$ ja $p_{j,j-2} = p_{j-1,j-2}p = p_{j-2,j-2}p^2$. Siten

$$c_{j-2,j} = c_{j-2,j-1} = c_{j-2,j-2} = c_{j-1,j-2} = c_{j,j-2} \quad (j \ge 5). \tag{4}$$

Yhtälöillä (3) ja (4) voi nyt laskea kertoimet $c_{i,j}$. Ensimmäisiä kertoimia on seuraavassa taulukossa.

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		1	1	1	1				
1	1	2	3	4	4				
2	1	3	6	10	10				
3	1	4	10	20	20	20			
4	1	4	10	20	40	40	40		
5				20	40	80	80	80	
6					40	80	160	160	160
7						80	160	320	320
8							160	320	640

Taulukosta voi arvata ja induktiolla on helppo todistaa, että yhtälön (4) yhteinen arvo on $2^{j-3} \cdot 5$.

Siten Akseli voittaa todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} p_{4,0} + p_{4,1} + \sum_{i=4}^{\infty} p_{i,i-2} &= p^4 + 4p^4 q + 10p^4 q^2 \sum_{i=0}^{\infty} (2pq)^i = p^4(1+4q) + \frac{10p^4q^2}{1-2pq} \\ &= \frac{15p^4 - 34p^5 + 28p^6 - 8p^7}{1-2p+2p^2} = 2p^2 + \frac{-2p^2 + 4p^3 + 11p^4 - 34p^5 + 28p^6 - 8p^7}{1-2p+2p^2}. \end{aligned}$$

Viimeisen murtolausekkeen nimittäjä on positiivinen kaikilla reaalisilla p, joten riittää tarkastella sen osoittajaa. Arvataan, että arvoilla $p = 0$ ja $p = \frac{1}{2}$ on erityismerkitys, joten jaetaan niitä vastaavat tekijät pois.

$$\begin{aligned} -2p^2 + 4p^3 + 11p^4 - 34p^5 + 28p^6 - 8p^7 &= p^2(-2 + 4p + 11p^2 - 34p^3 + 28p^4 - 8p^5) \\ &= p^2(2p-1)(2 - 11p^2 + 12p^3 - 4p^4). \end{aligned}$$

Viimeisen sulkulausekkeen derivaatta $-2p(8p^2 - 18p + 11)$ on negatiivinen, kun $0 < p \leq 2$ (ja nolla kun $p = 0$), joten sen pienin arvo suljetulla välillä $p \in [0, \frac{1}{2}]$ saavutetaan, kun $p = \frac{1}{2}$. Tämä arvo on positiivinen, joten sulkulauseke on tällä välillä positiivinen ja koko tulo negatiivinen (ja päätepisteissä nolla). Siten Akselin voittotodennäköisyys on enintään $2p^2$.

16. Muukalaisten planeetalla on $3 \cdot 2018!$ avaruusolentoa ja 2018 kieltä. Kukin avaruusolentojen pari puhuu keskenään tasan yhtä kieltä. Todista, että on olemassa kolme avaruusolentoa, jotka puhuvat kaikki keskenään samaa kieltä.

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla $3n!$ olennolle ja n kielelle. Kun $n = 2$, olkoon avaruusolennot $A_1, \ldots, A_6$ ja kielet k_1 ja k_2. Kyyhkyslakkaperiaatteen mukaan ainakin kolme muukalaispareista (A_1, A_k) $(k = 2, \ldots, 6)$ puhuu samaa kieltä; oletetaan, että nämä ovat (A_1, A_2), (A_1, A_3) ja (A_1, A_4) ja että kieli on k_1. Jos pareista (A_2, A_3), (A_2, A_4) ja (A_3, A_4) jokin puhuu keskenään kieltä k_1, väite on todistettu; muuten kaikki nämä puhuvat keskenään kieltä k_2 ja väite on sittenkin todistettu.

Oletetaan, että väite on tosi, kun olentoja on $3n!$ ja kieliä n. Olkoot olennot $A_1, \ldots, A_m$, missä $m = 3(n+1)!$, ja kielet $k_1, \ldots, k_{n+1}$. Kyyhkyslakkaperiaatteen mukaan ainakin $\left\lceil \frac{m-1}{n+1} \right\rceil = 3n!$ pareista (A_1, A_k) $(k = 2, \ldots, m)$ puhuu samaa kieltä; oletetaan, että nämä ovat $(A_1, A_2), \ldots, A_1, A_{3n!+1})$ ja että kieli on k_1. Jos kaksi olennoista $A_2, \ldots, A_{3n!+1}$ puhuu keskenään kieltä k_1, väite on todistettu; muuten kaikki nämä olennot puhuvat keskenään enintään n:ää eri kieltä, jolloin väite seuraa induktio-oletuksesta.

17. Ympyrän säde on n, ja sen sisällä on $4n$ yksikköjanaa. Kun ℓ on mielivaltainen suora, todista, että on olemassa suora ℓ', joka on joko ℓ:n suuntainen tai sitä vastaan kohtisuora, ja joka leikkaa ainakin kahta annetuista yksikköjanoista.

Ratkaisu. Olkoot janat $k_1, \ldots, k_{4n}$, ja olkoot x_i ja y_i janan k_i projektiot suorille ℓ ja mielivaltaiselle (mutta kiinteälle) sitä vastaan kohtisuoralle suoralle $\ell_\perp$. Kolmioepäyhtälön perusteella

$$\sum_{i=1}^{4n} |x_i| + \sum_{i=1}^{4n} |y_i| \geq \sum_{i=1}^{4n} |k_i| = 4n.$$

Jos $\sum_{i=1}^{4n} |x_i| \geq 2n$, suoralla ℓ on piste P, joka kuuluu kahteen projektioon x_i. Silloin kohtisuora pisteen P kautta leikkaa kahta janaa. Jos taas $\sum_{i=1}^{4n} |y_i| \geq 2n$, suoralta $\ell_\perp$ voidaan valita vastaava piste Q, jonka kautta kulkee ℓ:n suuntainen suora, joka leikkaa kahta janaa.

18. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja, joille $a+b+c+d=1$. Todista, että

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}.$$

Ratkaisu. Jensenin epäyhtälöstä seuraa

$$\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4} \geq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

ja Tsebysevin epäyhtälöstä

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \geq \frac{a+b+c+d}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}.$$

Näistä saadaan yhdessä

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) = 4(a^3+b^3+c^3+d^3) + 2(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}.$$

19. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille $x+y+z=1$. Kun n on positiivinen kokonaisluku, olkoon $S_n = x^n+y^n+z^n$. Olkoon edelleen $P = S_2S_{2019}$ ja $Q = S_3S_{2018}$.

(a) Määritä Q:n pienin mahdollinen arvo.

(b) Jos x, y ja z ovat kolme eri lukua, selvitä onko P vai Q suurempi.

Ratkaisu. (a) Jensenin epäyhtälöstä seuraa kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 1$

$$\frac{x^k+y^k+z^k}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^k = \frac{1}{3^k} \quad \text{eli} \quad S_k \geq \frac{1}{3^{k-1}}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos $x=y=z=\frac{1}{3}$. Siten Q:n pienin mahdollinen arvo on $\dfrac{1}{3^{2019}}$.

(b) Todistetaan, että tehtävän oletuksilla

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} > \frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

Tämä seuraa siitä, että

$$\begin{aligned}
S_{n+1}S_{n-1} - S_n^2 &= (x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}) - (x^n+y^n+z^n)^2 \\
&= x^{n+1}(y^{n-1}+z^{n-1}) + y^{n+1}(z^{n-1}+x^{n-1}) + z^{n+1}(x^{n-1}+y^{n-1}) \\
&\quad - 2(x^ny^n+y^nz^n+z^nx^n) \\
&= \sum_{\text{syklinen}} (x^{n+1}y^{n-1}+x^{n-1}y^{n+1}-2x^ny^n) \\
&= \sum_{\text{syklinen}} x^{n-1}y^{n-1}(x-y)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Siten $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} > \dfrac{S_{m+1}}{S_m}$, kun $n > m \geq 2$. Erityisesti $\dfrac{S_{2019}}{S_{2018}} > \dfrac{S_3}{S_2}$ eli $P > Q$.

20. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio. Todista, että kolmioiden $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ ja $\triangle DAB$ ortokeskukset ovat $ABCD$:n kanssa yhdenmuotoisen nelikulmion kärkipisteet. Todista lisäksi, että samojen kolmioiden painopisteet ovat jännenelikulmion kärkipisteet. (Ortokeskus on korkeusjanojen tai niiden jatkeiden leikkauspiste, painopiste on keskijanojen leikkauspiste.)

Ratkaisu. Olkoot H, K, L ja M kolmioiden ABC, BCD, CDA ja DAB ortokeskukset ja olkoon O nelikulmion $ABCD$ ympäryskeskus. Olkoot U ja V pisteen O projektiot janoille AC ja BD, ja olkoon W sellainen piste, että $OVWU$ on suunnikas. Kolmion DAB tunnetun ominaisuuden* perusteella $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{OV}$, ja vastaavasti kolmiosta BCD saadaan $\overrightarrow{CK} = 2 \cdot \overrightarrow{OV}$. Siis $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CK}$ ja $AMKC$ on suunnikas. Koska U on AC:n keskipiste ja $\overrightarrow{UW} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$, W on janan CM keskipiste eli suunnikkaan $AMKC$ keskipiste.

Samalla tavalla osoitetaan, että $BHLD$ on suunnikas, jonka keskipiste on W. Siten nelikulmio $HKLM$ on nelikulmion $DABC$ kuva peilauksessa pisteen W suhteen, mikä todistaa ensimmäisen väitteen.

Eulerin suorasta tiedetään, että ympäryskeskukselle O, painopisteelle G ja ortokeskukselle H pätee $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$. Kolmioilla ABC jne. on sama ympäryskeskus O, joten niiden painopisteet ovat ortokeskusten H, K, L ja M kuvat homotetiassa, jonka keskipiste on O ja kerroin $\frac{1}{3}$. Koska $HKLM$ on jännenelikulmio ($ABCD$:n kanssa yhdenmuotoisena), niin on sen homotetiakuvakin.

* Todistus: Kolmion DAB keskijanojen leikkauspiste on symmetriasyistä $\frac{1}{3}(D+A+B)$, joten vektori pisteestä O tähän pisteeseen on $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. Eulerin suoraa koskevasta lauseesta seuraa, että vektori pisteestä O ortokeskukseen M on $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, joten $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$. Toisaalta $V = \frac{1}{2}(B+D)$, joten $\overrightarrow{OV} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$.