Vuoden 1990 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Koska summan termien lukumäärä on tehtyjen oletusten perusteella parillinen, voidaan summa kirjoittaa muotoon

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)^p} (k^m + ((n-1)^p - k + 1)^m \, . \tag{1}$$

Koska m on pariton, jokaisen termin tekijänä on $k + (n-1)^p - k + 1 = (n-1)^p + 1$. Koska p on pariton, on vielä $(n-1)^p + 1 = (n-1) + 1^p$ jaollinen luvulla $(n-1) + 1 = n$. Siis n on muunnetun summan (1) jokaisen termin tekijä, joten summa on jaollinen n:llä.

2. Jos $0 \le x \le 1$, niin $x^{3/2} \le x$, ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $x = 0$ tai $x = 1$. Oletamme, että ainakin yksi $a_k \ne 0$. Asetetaan

$$x_k = \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2}.$$

Silloin $0 \le x_k \le 1$ ja edellä sanotun perusteella on

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} \right)^{3/2} \le \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} = 1.$$

Siis

$$\sum_{k=1}^n a_k^3 \le \left(\sum_{j_1}^n a_j^2 \right)^{3/2},$$

eli väitetty epäyhtälö. Yhtäsuuruus vallitsee, jos tasan yksi x_k on yksi ja muut ovat nollia, ts. jos tasan yksi $a_k > 0$ ja muut ovat nollia.

3. Olkoon

$$s = \frac{1}{2}(AR + RQ + QA).$$

Olkoon c se ympyrä, joka sivuaa QR:ää ja AR:n ja AQ:n jatkeita; olkoon I c:n keskipiste. Silloin $\angle QAI = \angle IAR = \dfrac{1}{2}\alpha$. Sivutkoon c RQ:ta, AQ:n jatketta ja AR:n jatketta pisteissä X, Y ja Z. Selvästikin

$$AQ + QX = AY = AZ = AR + RZ,$$

joten

$$AZ = AI \cos \frac{1}{2}\alpha = s.$$

Siten s ja kysytty piiri on pienin, kun AI on pienin. Tämä tapahtuu silloin, kun $X = P$. Kysytty suora on sen ympyrän P:hen asetettu tangentti, joka kulkee P:n kautta ja sivuaa AB:tä ja AC:tä.

4. Kaikki parittomat luvut n ovat muotoa $h(2n)$. Osoitetaan, että kaikki parilliset luvut saadaan luvusta 4 operaatioiden f, g ja h avulla. Tähän riittää, kun osoitetaan, että sopivasti valittu jono käänteisoperaatioita $F = f^{-1}$, $G = g^{-1}$ ja $H = h^{-1}$ tuottaa jokaisesta parillisesta luvusta pienemmän parillisen luvun tai luvun neljä. Operaatiota F voidaan soveltaa nollaan päättyviin lukuihin, operaatiota G neloseen päättyviin lukuihin, ja $H(n) = 2n$. Saadaan

$$\begin{gathered}
H(F(10n)) = 2n,\\
G(H(10n+2)) = 2n, \quad n \geq 1,\\
H(2) = 4,\\
H(G(10n+4)) = 2n,\\
G(H(H(10n+6))) = 4n+2,\\
G(H(H(H(10n+8)))) = 8n+6.
\end{gathered}$$

Kun näitä askelia toistetaan äärellinen määrä, päästään aina viimein neloseen.