

## ENSIMMÄINEN KIRJEVALMENNUSTEHTÄVÄSARJA

Tämä tehtäväsarja on lähetetty alueellisessa seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailussa hyvin menestyneille. Muutkin peruskoululaiset voivat halutessaan osallistua valmennukseen ratkomalla tehtäviä. Tarkoitus on pyrkiä ratkaisemaan mahdollisimman monta tehtävää ja lähettää ratkaisut osoitteeseen

Jaakko Seppälä  
Kanavaharjunkatu 3 A 15  
70840 Kuopio

tai sähköpostilla osoitteeseen

jaakko.j.seppala@gmail.com

**Pyydämme lähettämään meille sähköpostiosoitteesi tulevia tehtäväsarjoja varten.**

Tehtävien on tarkoitus olla haastavia, ja niissä on tarkoituksella käsitteitä, joita ei koulussa ole vielä välttämättä opittu. Tarkoitus on hakea informaatiota ja oppia uusia asioita tehtäviä ratkoessa. Ei myöskään kannata huolestua, vaikkei niistä saisikaan kovin montaa ratkaistua. Muutama yritelmäkin kannattaa lähettää. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä. Ratkaisuihin kaivataan ennen kaikkea perusteluja ja ideoita.

Matematiikan olympiavalmennuksella on kotisivut osoitteessa

<https://matematiikkakilpailut.fi>

Kysymyksiä voi lähettää yllä mainittuun sähköpostiosoitteeseen.

Vastauksia lähettäviä pyydämme tutustumaan tietosuojalausekkeeseen:

<https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/>

1. Jos  $x + 2y = 84 = y + 2x$ , niin mitä on  $x + y$ ?
2. Jos  $a = 2^{2011} + 2^{-2011}$  ja  $b = 2^{2011} - 2^{-2011}$ , niin mitä on  $a^2 - b^2$ ?
3. Osoita, että  $4^{2n} - 1$  on jaollinen luvuilla 3 ja 5 kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$ .
4. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla  $x$  ja  $y$  pätee

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

5. Miten monella lukua 999 pienemmällä positiivisella kokonaisluvulla on numero 1 kymmenjärjestelmäesityksessä?
6. Mikä on luvun  $x$  arvo, jos

$$4^{20} + 4^{20} = 2^x?$$

7. a) Laske

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100.$$

- b) Laske

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199.$$

**8.** Sievennä

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{99}\right)\left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

**9.** Etsi luvut  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , kun tiedetään, että

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \quad \text{ja} \quad abc = 1620.$$

**10.** Olkoon  $r$  reaaliluku. Mitkä seuraavista ovat varmasti suurempia kuin  $r$ ?

$$r + 1, \quad 2r, \quad r^{100} \quad \text{ja} \quad r^2 + 1.$$

**11.** Tavallisesta  $8 \times 8$ -shakkilaudasta on järsitty pois kaksi vastakkaista kulmaa. Osoita, että shakkilautaa ei voida peittää  $1 \times 2$ -dominonappuloilla.

**12.** Kahdeksan opiskelijaa istuu pyöreän pöydän ympärillä. Jokaisen ikä on kahden viereisen opiskelijan ikien keskiarvo. Osoita, että opiskelijat ovat samanimkisiä.