Harjoitustehtävät, syys–lokakuu 2010. Helpommat

Ratkaisuja

1. Kellon minuutti- ja tuntiosoittimet ovat tasan suorassa kulmassa kello 9.00. Milloin ne ovat seuraavan kerran tasan suorassa kulmassa?

Ratkaisu. Kellotaulua kokeilemalla voi päätellä, että kuvattu tapahtuma on vähän jälkeen kello 9.30:n. Lasketaan tarkemmin. Tuntiosoitin tekee yhden kierroksen 12 tunnissa eli 720 minuutissa. x:ssä minuutissa tuntiosoitin tekee $\frac{x}{720}$ kierrosta. Minuuttiosoitin tekee yhden kierroksen 60 minuutissa ja x:ssä minuutissa $\frac{x}{60}$ kierrosta. Jos x on se minuuttimäärä, jonka kuluttua osoittimet ovat taas suorassa kulmassa, niin minutiosoitin on kiertynyt x:ssä minuutissa tasan puoli kierrosta enemmän kuin tuntiosoitin. Siis

$$\frac{x}{60} = \frac{1}{2} + \frac{x}{720}.$$

Tästä ratkaistaan $x = \frac{360}{11} = 32\,\frac{8}{11}$. Osoittimet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan taas 32 ja 8/11 minuuttia yli yhdeksän. (Likiarvo: kello 9.32.43,6).

2. Tasasivuisen kolmion I korkeus on tasasivuisen kolmion II sivu, tasasivuisen kolmion II korkeus on tasasivuisen kolmion III sivu ja tasasivuisen kolmion III korkeus on tasasivuisen kolmion IV sivu. Kolmion I ala on 2. Määritä kolmion IV ala.

Ratkaisu. Tasasivuisen kolmion korkeus on (esimerkiksi Pythagoraan lauseen perusteella) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ kertaa kolmion sivu. Koska yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on vastinsivujen suhteen neliö, kolmion II ala on $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$, tasasivuisen kolmion III ala on $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$ ja tasasivuisen kolmion IV ala on $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{32}$.

3. Neliön ala on 3 pinta-alan yksikköä ja kuution tilavuus on 5 tilavuusyksikköä. Selvitä (laskinta käyttämättä!), kumpi on pitempi, neliön sivu vai kuution särmä.

Ratkaisu. Olkoon neliön sivu n ja kuution särmä k. Silloin $n^2 = 3$ ja $k^3 = 5$. Siis $n^6 = 3^3 = 27$ ja $k^6 = 5^2 = 25$. Selvästi $n > k$.

4. Positiivisen kokonaisluvun viimeinen numero on 6. Muodostetaan luvusta uusi luku siirtämällä 6 alkuun; esimerkiksi 3146:sta tulisi näin 6314. Määritä pienin kokonaisluku, joka tasan nelinkertaistuu tässä muunnoksessa.

Ratkaisu. Rakennetaan luku ”numero kerrallaan”, kärsivällisesti. Oletetaan, että luku on n-numeroinen. Silloin se on muotoa $10x+6$, missä x on $n-1$-numeroinen luku. Lisäksi $4(10x+6) = 6\cdot 10^{n-1}+x$ eli $39x+24 = 6\cdot 10^{n-1}$ eli $13x+8 = 2\cdot 10^{n-1}$. Kolmen kertotaulusta nähdään, että x:n viimeisen numeron on oltava 4. $13 \cdot 4 + 8 = 60$ ei ole muotoa $2 \cdot 10^{n-1}$.

Siis $x = 10y + 4$, missä y on $n-2$-numeroinen luku, ja $13(10y + 4) + 8 = 2 \cdot 10^{n-1}$ eli $13y + 6 = 2 \cdot 10^{n-2}$. Nyt y:n viimeisen numeron on oltava 8. Koska $13 \cdot 8 + 6 = 110$, on oltava $y = 10z + 8$, missä z on $n-3$-numeroinen luku. Sijoitetaan tämä yhtälöön $13y + 6 = 2 \cdot 10^{n-2}$; saadaan $13z + 11 = 2 \cdot 10^{n-3}$. z:n viimeisen numeron on oltava 3, mutta $13 \cdot 3 + 11 = 50 \neq 2 \cdot 10^{n-3}$. Siis $z = 10t + 3$; ja samoin kuin edellä saadaan, että on oltava $13t + 5 = 2 \cdot 10^{n-4}$. t:n vimeinen numero on 5, mutta $13 \cdot 5 + 5 = 70$. Siis $t = 10u + 5$ ja $13u + 7 = 2 \cdot 10^{n-5}$. Tämähän toteutuu, kun $u = 1$ ja $n - 5 = 1$. Pienin ehdon toteuttava luku on siis 153846.

5. Positiivinen luku x on aina muotoa $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, missä $\lfloor x \rfloor$, x:n kokonaisosa, on suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin kuin x, ja $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ on x:n desimaali- tai murto-osa. Esimerkiksi $\lfloor 3{,}14159 \rfloor = 3$ ja $\{3{,}14159\} = 0{,}14159$. Määritä kaikki positiiviset luvut x, joille $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ ja x muodostavat a) aritmeettisen, b) geometrisen jonon. [a_1, a_2, a_3 on *aritmeettinen jono*, jos $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ ja *geometrinen jono*, jos $\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_2}{a_1}$.]

Ratkaisu. a) Jos $0 < x < 1$, niin $\lfloor x \rfloor = 0$ ja $x = \{x\}$. Kolme lukua, joista kaksi on samoja, eivät voi muodostaa aritmeettista jonoa. Olkoon sitten $1 \le x$. Silloin $\{x\} < 1 \le \lfloor x \rfloor \le x$. Jotta luvut muodostaisivat aritmeettisen jonon, on oltava $x - \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor - \{x\}$. Koska $x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$, saadaan yhtälö $2\{x\} = \lfloor x \rfloor$. Koska yhtälön vasen puoli on pienempi kuin 2 ja oikea puoli on kokonaisluku, joka on ≥ 1, yhtälön ainoa ratkaisu on $\{x\} = \dfrac{1}{2}$, $\lfloor x \rfloor = 1$. Ainoa ehdon täyttävä luku on $\dfrac{3}{2}$.

b) Samoin kuin edellä, torjutaan mahdollisuus $0 < x < 1$. Olkoon siis $1 \le x$. Nyt jälleen $\{x\} < \lfloor x \rfloor \le x$, joten $\{x\}$:n on oltava jonon pienin ja x:n suurin jäsen. Lisäksi $\{x\} > 0$ (muussa tapauksessa jonon kaikki jäsenet, myös x, olisivat nollia). On oltava

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{\{x\}} = \frac{x}{\lfloor x \rfloor} = \frac{\lfloor x \rfloor + \{x\}}{\lfloor x \rfloor} = 1 + \frac{\{x\}}{\lfloor x \rfloor}.$$

Merkitään $t = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{\{x\}}$. t on yhtälön $t = 1 + t^{-1}$ eli $t^2 - t - 1 = 0$ juuri. Tämän yhtälön ratkaisut ovat

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vain positiivinen ratkaisu tulee kysymykseen. Koska

$$\lfloor x \rfloor < \frac{\lfloor x \rfloor}{\{x\}} = 1 + \frac{\{x\}}{\lfloor x \rfloor} \le 1 + \{x\} < 2,$$

ainoa mahdollisuus on, että $\lfloor x \rfloor = 1$. Näin ollen, kun tehdään vakiosievennykset, saadaan

$$x = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

eli kultaisen leikkauksen suhdeluku.

6. Suorakulmaisen särmiön muotoisen astian korkeus on 40 cm, ja sen pohja on neliö $ABCD$, jonka sivu on 60 cm. Astiassa on vaakasuoralla lattialla ja siinä on vettä 15 cm syvyydeltä. Astiaa kallistetaan varovasti niin, että sivu AD pysyy lattialla ja sivu AB muodostaa 60° kulman lattiaan nähden. Osa vedestä valuu pois. Kuinka syvää vesi on, kun astia lasketaan takaisin alkuperäiseen asentoonsa?

Ratkaisu. Pituuden, pinta-alan ja tilavuuden mittayksiköt olkoot cm, cm^2 ja cm^3. Astiassa on vettä $60^2 \cdot 15 = 54000$. Kallistetussa asennossa pisteen Brkeus lattiasta on $60 \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 60$ ja astian ylälaidan alimman osan $40 \cdot \sin 30^\circ$. Näin olen kallistetussa asennossa (jos vettä todella on niin paljon, että sitä valuu laidan yli), vesi on tilassa, jonka muoto on suora prisma, jonka korkeus on 60 ja jonka pohja on suorakulmainen kolmio, jonka toinen kylki on 40 ja toinen $\tan 30^\circ \cdot 40$. Kolmion ala on $\dfrac{1}{2}40^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot 800$ ja prisman tilavuus $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot 800 \cdot 60 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot 48000$. Tämä on selvästi vähemmän kuin alkuperäinen vesimäärä, joten vettä todellakin on valunut pois. Veden korkeus, kun astia palautetaan alkuperäiseen asentoon, on $\dfrac{48000}{\sqrt{3} \cdot 60^2} = \dfrac{40}{3\sqrt{3}}$, likimäärin 7,7.

7. Sanomme, että positiivisten kokonaislukujen pari $(m,\, n)$ *synnyttää neliöt*, jos sekä $m+n$ että mn ovat neliölukuja. Esimerkiksi $(5,\, 20)$ synnyttää neliöt, koska $5 + 20 = 25 = 5^2$ ja $5 \cdot 20 = 100 = 10^2$. Osoita, että jos $(m,\, n)$ synnyttää neliöt, niin kumpikaan luvuista m ja n ei ole 3.

Ratkaisu. Todistetaan epäsuorasti, eli tehdään vastaoletus, jonka mukaan $(3,\, n)$ synnyttäisi neliöt. (Symmetrian vuoksi on samantekevää, oletetaanko $m = 3$ vai $n = 3$.) Silloin olisi olemassa positiiviset kokonaisluvut x ja y niin, että $x^2 = n + 3$ ja $y^2 = 3n$. Viimeisestä yhtälöstä seuraisi, että y^2 on jaollinen kolmella. Koska 3 on alkuluku, tämä on mahdollista vain, jos y on jaollinen kolmella, eli $y = 3u$. Siis $3n = 9u^2$ eli $n = 3u^2$. Mutta $x^2 = n + 3 = 3u^2 + 3$, joten x^2 ja siis myös x on jaollinen kolmella: $x = 3v$. Siis $9v^2 = x^2 = 3u^2 + 3$ eli $3v^2 = u^2 + 1$. Nyt u ei voi olla jaollinen kolmella, joten $u = 3t \pm 1$. Tästä seuraa $u^2 = 9t^2 \pm 6t + 1 = 3w + 1$. Lopulta $3v^2 = 3w + 1 + 1 = 3w + 2$. On päädytty ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä ja väite oikea.

8. Ratkaise reaaliluvut x ja y yhtälöparista

$$\begin{cases} 2(x+y-2) = y(x-y+2) \\ x^2(y-1) + y^2(x-1) = xy - 1. \end{cases}$$

Ratkaisu. Kun jälkimmäinen yhtälö kirjoitetaan esimerkiksi x:n alenevien potenssien mukaan, saadaan $(y-1)x^2 + (y^2 - y)x - y^2 + 1 = 0$ eli $(y-1)(x^2 + yx - y - 1) = 0$. Kun viimeisen yhtälön vasemman puolen jälkimmäinen tekijä kirjoitetaan y:n alenevien potenssien mukaan, siitä tulee $(x-1)y + x^2 - 1 = (x-1)(y+x+1)$. Yhtälöryhmän jälkimmäinen yhtälö on siis $(x-1)(y-1)(x+y+1) = 0$ ja se toteutuu silloin ja vain silloin, kun ainakin joku yhtälöistä $x = 1$, $y = 1$ tai $x + y = -1$ toteutuu. Olkoon nyt $x = 1$. Yhtälöistä ensimmäinen on tällöin $2(y-1) = y(-y+3)$ eli $y^2 - y - 2 = 0$ eli $(y-2)(y+1) = 0$.

Ratkaisuja ovat $y = 2$ ja $y = -1$. Olkoon sitten $y = 1$. Ensimmäinen yhtälö on nyt $2(x-1) = x+1$ eli $x = 3$. Olkoon viimein $x+y = -1$. Sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön $y = -x-1$. Siitä tulee silloin $-6 = -(x+1)(2x+3)$ eli $2x^2+5x-3 = 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaan ratkaisut ovat $x = -3$ ja $x = \frac{1}{2}$. Vastaavat y:n arvot ovat 2 ja $-\frac{3}{2}$. Kaikkiaan yhtälöparille saatiin viisi ratkaisua $(x,\, y)$: $(1,\, 2)$, $(1,\, -1)$, $(3,\, 1)$, $(-3,\, 2)$ ja $\left(\frac{1}{2},\, -\frac{3}{2}\right)$.

9. Kirjoitetaan positiiviset kokonaisluvut spiraaliksi:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 2 & 11 \\ 5 & 4 & 3 & 12 \\ & \ldots & 14 & 13 \end{array}$$

Selvitä, missä sijaitsee luku 2010 lukuun 1 nähden. Esimerkiksi luvun 10 sijainti on yksi askel ylös ja kaksi oikealle 1:stä.

Ratkaisu. Ilmoitetaan pisteen paikka spiraalissa koordinaatein $(x,\, y)$, missä x ilmaisee vaakasuoran ja y pystysuoran etäisyyden ykkösestä. Jos spiraalia jatketaan vähän, nähdään, että sen keskiosa on

$$\begin{array}{ccccc} 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 20 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 19 & 6 & 1 & 2 & 11\,. \\ 18 & 5 & 4 & 3 & 12 \\ 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{array}$$

Oikeassa yläkulmassa, pisteessä, jonka koordinaatit ovat $(2,\, 2)$, on luku $25 = 5^2$. Pisteessä $(1,\, 1)$ puolestaan on $9 = 3^2$, sekin parittoman luvun neliö. Osoitetaan induktiolla, että pisteessä $(n,\, n)$ oleva luku on aina $(2n+1)^2$. Pisteestä $(n,\, n)$ pisteeseen $(n+1,\, n+1)$ kuljettaessa otetaan ensin yksi askel oikealle, sitten n askelta alas (ykkösen tasolle), sitten vielä $n+1$ askelta alas, $2n+2$ askelta vasemmalle, $2n+2$ askelta ylös ja $2n+2$ askelta oikealle, kaikkiaan siis $8(n+1)$ askelta. Mutta $(2(n+1)+1)^2-(2n+1)^2 = 4n^2+12n+9-4n^2-4n-1 = 8(n+1)$. Jos pisteessä $(n,\, n)$ on $(2n+1)^2$, niin pisteessä $(n+1,\, n+1)$ on oltava $(2(n+1)+1)^2$. Etsitään lähellä lukua 2010 oleva parittoman kokonaisluvun neliö. Nyt $2025 = 45^2 = (2\cdot 22+1)^2$. Luku 2025 on siis pisteessä $(22,\, 22)$. 2010 on tästä 15 askelta vasemmalle, eli pisteessä $(7,\, 22)$.

10. Kuinka monessa kokonaisluvussa väliltä 1 – 10000 esiintyy ainakin kerran numero 7?

Ratkaisu. Lasketaan, kuinka monessa luvussa ei ole ollenkaan numeroa 7. Voidaan ajatella, että tarkastellaan neljästä merkistä koostuvia jonoja; kukin merkki on jokin kymmenestä numerosta. Jonoista 9000 on sellaisia, jotka eivät ala seitsemällä. Näistä 9/10 eli 8100 on sellaisia, joiden toinen merkki ei ole 7. Näistä 9/10 eli 7290 on sellaisia, joiden kolmas merkki ei ole 7. Näistä 9/10 eli 6561 on sellaisia, joiden neljäskään merkki ei ole 7. Näin ollen on $10000 - 6561 = 3439$ lukua, joissa on ainakin yksi seitsemäinen.

11. Määritä tulon
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2010^2}\right)$$
arvo muodossa $\frac{a}{b}$, a ja b positiivisia kokonaislukuja.

Ratkaisu. Tulon tekijät ovat muotoa
$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$
Jokaisen tekijän osoittaja supistaa vasemmanpuoleisen tekijän nimittäjää ja oikeanpuoleisen tekijän nimittäjää. Vain ensimmäisen ja viimeisen tekijän nimittäjä eivät supistu kokonaan; ensimmäisen tekijän osoittaja on $(2-1)(2+1)$, ja supistumatta jää $2-1=1$; viimeisen tekijän osoittajasta $(2010-1)(2010+1)$ jää supistumatta 2011. Kysytty muoto on siis $\frac{2011}{2\cdot 2010}=\frac{2011}{4020}$.

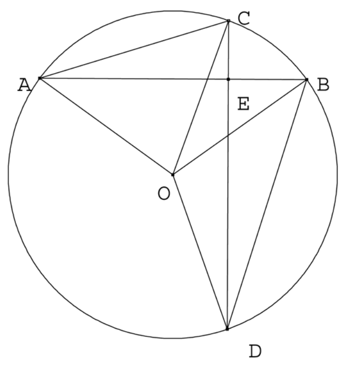
12. Osoita, että yhtälö $(x+y)^4=x^4+y^4$ ei toteudu millään nollasta eroavilla reaaliluvuilla x, y.

Ratkaisu. Jos yhtälö toteutuisi ja olisi $xy\neq 0$, olisi $4x^3y+6x^2y^2+4xy^3=0$ eli $2x^2+3xy+2y^2=0$. Asetetaan $t=\frac{x}{y}$. t toteuttaisi yhtälön $2t^2+3t+2=0$. Yhtälön diskriminantti on kuitenkin $9-4\cdot 2\cdot 2<0$, joten sillä ei ole reaalisia ratkaisuja.

13. Šakkipelin ratsun siirto on kaksi ruutua johonkin laudan reunojen määräämistä suunnista ja yksi ruutu tätä suuntaa vastaan kohtisuoraan suuntaan. Määritä, kuinka moneen ruutuun ratsun siirto voi keskimäärin päätyä a) 8×8-laudalla, b) $n\times n$-laudalla.

Ratkaisu. Selvitetään ensin yleinen tapaus, eli b-kohta. Oletetaan, että $n\geq 4$. Katsotaan ensin, miten ratsu lähtee laudan uloimman kehän ruuduista. Laudan neljästä kulmaruudusta ratsu pääsee kahteen eri ruutuun. Kulmaruutujen viereisistä 8 ruudusta ratsu pääsee kolmeen eri ruutuun. Muista laudan reunan $4(n-4)$:stä ruudusta ratsu pääsee neljään eri ruutuun. Jos tarkastellaan laudan toiseksi ulointa kehää, niin sen kustakin neljästä kulmaruudusta ratsu pääsee neljään eri ruutuun ja muista $4(n-4)$:stä ruudusta kuuteen eri ruutuun. Sisemmistä $(n-4)^2$ ruudusta ratsu pääsee kahdeksaan eri ruutuun. Kysytty keskiarvo on
$$\frac{4\cdot 2+8\cdot 3+4(n-4)\cdot 4+4\cdot 4+4(n-4)\cdot 6+(n-4)^2\cdot 8}{n^2}=\frac{8n^2-24n+16}{n^2}.$$
Kun $n=8$, luku on $\frac{21}{4}$. – Oletuksen $n\geq 4$ avulla saatu keskiarvon lauseke on oikea myös, kun $n=1$, 2 tai 3: kun $n=1$ tai $n=2$, $8n^2-24n+16=0$, mikä vastaa sitä, että ratsu ei kykene liikkumaan 1×1- tai 2×2-laudalla. 3×3-laudalla ratsu voi siirtyä kahteen ruutuun kaikista muista paitsi keskimmäisestä ruudusta. Keskiarvo on siis $\frac{8\cdot 2}{9}$. Mutta myös $8n^2-24n+16=9$, kun $n=3$.

14. Ympyrän keskipiste on O ja sen jänteet AB ja CD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja leikkaavat toisensa. Osoita, että $\angle AOD + \angle BOC = 180°$.



1. ratkaisu. Olkoon E AB:n ja CD:n leikkauspiste. Koska kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta, $\angle AOD = \angle ACD + \angle ABD$ ja $\angle BOC = \angle BDC + \angle BAC$. Mutta kolmiot CAE ja DBE ovat suorakulmaisia, joten $\angle ACD + \angle BAC = \angle ACE + \angle EAC = 90°$ ja $\angle ABD + \angle BDC = \angle EBD + \angle BDE = 90°$. Kaikkiaan siis $\angle AOD + \angle BOC = \angle ACD + \angle ABD + \angle BDC + \angle BAC = 180°$.

2. ratkaisu (Janika Tang, Helsingin matematiikkalukio). Koska kolmio CEB on suorakulmainen, kaaria AC ja BD vastavien kehäkulmien $\angle ABC$ ja $\angle BCD$ summa on $90°$. Vastaavien keskuskulmien $\angle AOB$ ja $\angle BOD$ summa on siis $180°$. Väite seuraa heti.

15. Pyöreän kartonkilevyn säde on 10 cm. Kartongista poistetaan sektori, jonka keskuskulma on α (radiaania). Lopusta kartongista muodostetaan kartio. Määritä kartion tilavuus α:n funktiona.

Ratkaisu. Tämä on suoraviivainen laskutehtävä. Kartonkikiekon ympärysmitta on 20π ja sektorin kaaren pituus 10α. Poiston jälkeen ympärystä jää $10(2\pi - \alpha)$. Tämä on sama kuin $2\pi r$, missä r on kartion pohjaympyrän säde. Siis $r = \dfrac{5}{\pi}(2\pi - \alpha) = 10 - \dfrac{5\alpha}{\pi}$. Kartion sivuviivan pituus on kartonkikiekon säde 10, joten kartion korkeus on $h = \sqrt{10^2 - r^2} = \dfrac{5}{\pi}\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}$. Koska kartion tilavuus on $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, saadaan kysytyksi tilavuudeksi $\dfrac{125(2\pi - \alpha)^2}{3\pi^2}\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}$.