Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävät ja ratkaisut 1995 – 2014

Tehtävät

36. IMO, Toronto 1995

1995.1. Olkoot A, B, C ja D neljä eri pistettä suoralla, tässä järjestyksessä. Ympyrät, joiden halkaisijat ovat AC ja BD leikkaavat toisensa pisteissä X ja Y. Suorat XY ja BC leikkaavat toisensa pisteessä Z. Piste P on mielivaltainen suoran XY piste, $P \neq Z$. Suora CP leikkaa AC-halkaisijaisen ympyrän pisteissä C ja M ja suora BP leikkaa BD-halkaisijaisen ympyrän pisteissä B ja N. Osoita, että suorat AM, DN ja XY kulkevat saman pisteen kautta.

1995.2. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja ja olkoon $abc = 1$. Osoita, että

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

1995.3. Määritä kaikki sellaiset kokonaisluvut $n > 3$, joille on olemassa n tason pistettä $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ja reaaliluvut $r_1, r_2, \ldots, r_n$ siten, että seuraavat ehdot ovat samanaikaisesti voimassa:

(i) Mitkään kolme pisteistä A_1, A_2, ..., A_n eivät ole samalla suoralla.

(ii) Kaikilla i, j, k $(1 \leq i < j < k \leq n)$ kolmion $A_iA_jA_k$ ala on $r_i + r_j + r_k$.

1995.4. Määritä suurin x_0, jolle on olemassa positiiviset reaaliluvut x_0, x_1, ..., x_{1995}, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(i) $x_0 = x_{1995}$;

(ii) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

1995.5. Olkoon $ABCDEF$ kupera kuusikulmio ja $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ sekä $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Olkoot G ja H kaksi kuusikulmion sisäpistettä, jotka on valittu niin, että $\angle AGB = \angle DHE = 120°$. Osoita, että

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

1995.6. Olkoon p pariton alkuluku. Määritä joukon $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ kaikkien sellaisten osajoukkojen A lukumäärä, joille on voimassa

(i) A:ssa on tasan p alkiota ja

(ii) A:n alkioiden summa on jaollinen p:llä.

37. IMO, Mumbai 1996

1996.1. Suorakaiteen muotoinen pelilauta $ABCD$, missä $|AB| = 20$ ja $|BC| = 12$, on jaettu 20×12:ksi yksikköneliöksi. Olkoon r positiivinen kokonaisluku. Laudalla voidaan siirtää kolikkoa neliöstä toiseen jos ja vain jos neliöiden keskipisteiden etäisyys on $\sqrt{r}$. Tehtävänä on löytää jono siirtoja, joilla kolikko voidaan siirtää neliöstä, jonka kärki on A neliöön, jonka kärki on B.

(a) Osoita, että tehtävää ei voida suorittaa, jos r on jaollinen 2:lla tai 3:lla.

(b) Osoita, että tehtävä voidaan suorittaa, jos $r = 73$.

(c) Osoita, että tehtävä on mahdoton, jos $r = 97$.

1996.2. Olkoon P kolmion ABC sisäpiste ja olkoon $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Olkoot D ja E kolmioiden APB ja APC sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. Osoita, että AP, BD ja CE kulkevat saman pisteen kautta.

1996.3. Olkoon $\mathbf{S} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot f, jotka on määritelty joukossa $\mathbf{S}$ ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\mathbf{S}$ ja jotka toteuttavat yhtälön

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

kaikilla joukon $\mathbf{S}$ alkioilla m ja n.

1996.4. Positiiviset kokonaisluvut a ja b on valittu niin, että luvut $15a + 16b$ ja $16a - 15b$ ovat molemmat positiivisten kokonaislukujen neliöitä. Määritä näistä neliöistä pienemmän pienin mahdollinen arvo.

1996.5. Olkoon $ABCDEF$ kupera kuusikulmio ja olkoon AB ED:n kanssa yhdensuuntainen, BC FE:n kanssa yhdensuuntainen ja CD AF:n kanssa yhdensuuntainen. Olkoot R_A, R_C ja R_E kolmioiden FAB, BCD ja DEF ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet ja p kuusikulmion piiri. Todista, että

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

1996.6. Olkoot n, p ja q positiivisia kokonaislukuja ja $n > p + q$. Olkoot x_0, x_1, $\ldots$ x_n kokonaislukuja, joille ovat voimassa seuraavat ehdot:

(a) $x_0 = x_n = 0$;

(b) kaikille kokonaisluvuille i, $1 \leq i \leq n$, pätee joko $x_i - x_{i-1} = p$ tai $x_i - x_{i-1} = -q$.

Osoita, että on olemassa indeksipari (i, j), $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$, jolle pätee $x_i = x_j$.

38. IMO, Mar del Plata 1997

1997.1. Tason kokonaislukukoordinaattiset pisteet ovat yksikköneliöiden kärkiä. Neliöt on väritetty vuorotellen mustiksi ja valkeiksi (šakkilaudan tapaan). Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota, jonka kärkien koordinaatit ovat kokonaislukuja, jonka kateettien pituudet ovat m ja n ja jonka kateetit sijaitsevat neliöiden sivuilla. Olkoon S_1 kolmion mustan osan ala ja S_2 kolmion valkean osan ala. Olkoon

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|.$$

(a) Laske $f(m, n)$ kaikille positiivisille kokonaisluvuille m, n, jotka ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia.

(b) Todista, että $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max(m, n)$ kaikilla m ja n.

(c) Osoita, että ei ole olemassa vakiota C, jolle $f(m, n) < C$ kaikilla m ja n.

1997.2. Kulma A on pienin kolmion ABC kulmista. Pisteet B ja C jakavat kolmion ympäri piirretyn ympyrän kahdeksi kaareksi. Olkoon U sisäpiste sillä B:n ja C:n välisellä kaarella, jolla A ei ole. Janan AB keskinormaali leikkaa suoran AU pisteessä V ja janan AC keskinormaali leikkaa suoran AU pisteessä W. Suorat BV ja CW leikkaavat toisensa pisteessä T. Osoita, että

$$AU = TB + TC.$$

1997.3. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdot

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

ja

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2}, \quad \text{kun} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Osoita, että on olemassa jonon $x_1, x_2, \ldots, x_n$ permutaatio $y_1, y_2, \ldots, y_n$, jolle pätee

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

1997.4. Kutsumme $n \times n$-neliömatriisia (neliömäistä lukutaulukkoa) *hopeamatriisiksi*, jos sen alkiot kuuluvat joukkoon $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ ja jos jokaisella $i = 1, 2, \ldots, n$ matriisin i:nnen vaakarivin ja i:nnen pystyrivin alkioiden yhdiste sisältää S:n kaikki alkiot. Osoita, että

(a) kun $n = 1997$, hopeamatriiseja ei ole olemassa;

(b) hopeamatriiseja on olemassa äärettömän monella n:n arvolla.

1997.5. Määritä kaikki kokonaislukuparit (a, b), $a \geq 1$, $b \geq 1$, jotka toteuttavat yhtälön

$$a^{b^2} = b^a.$$

1997.6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Eri tapoja kirjoittaa n luvun 2 sellaisten potenssien summana, joiden eksponentti on ei-negatiivinen kokonaisluku, olkoon $f(n)$ kappaletta. Esityksiä, jotka eroavat toisistaan vain yhteenlaskettavien järjestyksen suhteen, pidetään samoina. Esimerkiksi $f(4) = 4$, koska 4 voidaan esittää seuraavilla neljällä tavalla: 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$. Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla $n \geq 3$ pätee

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

39. IMO, Taipei 1998

1998.1. Kuperan nelikulmion $ABCD$ lävistäjät AC ja BD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja nelikulmion vastakkaiset sivut AB ja DC eivät ole yhdensuuntaiset. Oletamme, että AB:n ja DC:n keskinormaalien leikkauspiste P on $ABCD$:n sisäpuolella. Todista, että nelikulmion $ABCD$ ympäri voidaan piirtää ympyrä, jos ja vain jos kolmioilla ABP ja CDP on sama pinta-ala.

1998.2. Kilpailussa on a kilpailijaa ja b tuomaria, missä $b \geq 3$ on pariton kokonaisluku. Jokainen tuomari arvostelee jokaisen kilpailijan suorituksen joko hyväksytyksi tai hylätyksi. Olkoon k sellainen luku, että jokaiset kaksi tuomaria ovat samaa mieltä enintään k:n kilpailijan suorituksista. Todista, että

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

1998.3. Olkoon $d(n)$ positiivisen kokonaisluvun n positiivisten tekijöiden (1 ja n mukaan lukien) lukumäärä. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut k, joille pätee

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

jollakin kokonaisluvulla n.

1998.4. Määritä kaikki positiiviset kokonaislukuparit (a, b), joille $ab^2 + b + 7$ on luvun $a^2b + a + b$ tekijä.

1998.5. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän ja kolmion sivujen BC, CA ja AB sivuamispisteet ovat K, L ja M, tässä järjestyksessä. Pisteen B kautta kulkeva MK:n suuntainen suora leikkaa suorat LM ja LK pisteissä R ja S. Osoita, että $\angle RIS$ on terävä.

1998.6. Tarkastellaan kaikkia positiivisten kokonaislukujen joukossa $\mathbb{N}^+$ määriteltyjä funktioita f, joiden arvot ovat positiivisia kokonaislukuja ja jotka toteuttavat ehdon

$$f\left(t^2 f(s)\right) = s\left(f(t)\right)^2$$

kaikilla s, $t \in \mathbb{N}^+$. Määritä $f(1998)$:n pienin mahdollinen arvo.

40. IMO, Bukarest 1999

1999.1. Määritä kaikki äärelliset tasojoukot S, joissa on vähintään kolme pistettä ja jotka täyttävät seuraavan ehdon: kun A ja B ovat joukon S kaksi eri pistettä, joukko S on symmetrinen janan AB keskinormaalin suhteen.

1999.2. Olkoon n kiinteä kokonaisluku, jolle $n \geq 2$. (a) Määritä pienin sellainen vakio C, että kaikilla reaalisilla $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ pätee epäyhtälö

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4 .$$

(b) Määritä, milloin yhtäsuuruus on voimassa, kun C on kuten yllä.

1999.3. Tarkastellaan $n \times n$-lautaa, missä n on kiinteä positiivinen parillinen kokonaisluku. Lauta koostuu n^2 yksikköruudusta. Kahden eri ruudun sanotaan olevan vierekkäiset, jos niillä on yhteinen sivu. Laudan N ruutua merkitään niin, että jokaisen laudan (merkityn tai merkitsemättömän) ruudun vieressä on vähintään yksi merkitty ruutu. Määritä luvun N pienin mahdollinen arvo.

1999.4. Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen parit (n, p), että p on alkuluku, $n \leq 2p$ ja $(p-1)^n + 1$ on jaollinen luvulla n^{p-1}.

1999.5. Ympyrät Γ_1 ja Γ_2 sisältyvät ympyrään Γ ja sivuavat ympyrää Γ eri pisteissä M ja N. Ympyrä Γ_1 kulkee ympyrän Γ_2 keskipisteen kautta. Ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 leikkauspisteiden kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän Γ pisteissä A ja B. Suorat MA ja MB leikkaavat ympyrän Γ_1 pisteissä C ja D. Todista, että suora CD sivuaa ympyrää Γ_2.

1999.6. Määritä kaikki sellaiset kuvaukset $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että jokaisella $x, y \in \mathbb{R}$ on voimassa yhtälö

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x\,f(y) + f(x) - 1.$$

41. IMO, Taejon 2000

2000.1. Ympyrät Γ_1 ja Γ_2 leikkaavat toisensa pisteissä M ja N. Olkoon l se Γ_1:n ja Γ_2:n yhteinen tangentti, joka on lähempänä M:ää kuin N:ää. Suora l sivuaa Γ_1:tä pisteessä A ja Γ_2:ta pisteessä B. Pisteen M kautta kulkeva l:n suuntainen suora leikkaa ympyrän Γ_1 myös pisteessä C ja ympyrän Γ_2 myös pisteessä D. Suorat CA ja DB leikkaavat pisteessä E; suorat AN ja CD leikkaavat pisteessä P; suorat BN ja CD leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $EP = EQ$.

2000.2. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja ja olkoon $abc = 1$. Todista, että

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

2000.3. Olkoon $n \geq 2$ positiivinen kokonaisluku. Vaakasuoralla suoralla on n kirppua, jotka eivät kaikki ole samassa pisteessä. Olkoon λ positiivinen reaaliluku. Määritellään *siirtymä* seuraavasti: valitaan jotkin kaksi kirppua, jotka ovat pisteissä A ja B, A B:n vasemmalla puolella; annetaan A:ssa olevan kirpun hypätä siihen B:n oikealla puolella olevaan suoran pisteeseen C, jolle $BC/AB = \lambda$. Määritä kaikki sellaiset λ:n arvot, joilla kaikki kirput voivat siirtyä mistä hyvänsä alkuasemasta minkä hyvänsä pisteen M oikealle puolelle äärellisen monen siirtymän avulla.

2000.4. Taikurilla on sata korttia, jotka on numeroitu 1:stä 100:aan. Taikuri sijoittaa kortit kolmeen rasiaan, punaiseen, valkoiseen ja siniseen, niin että joka rasiassa on ainakin yksi kortti. Eräs katsojista valitsee rasioista kaksi, ottaa kummastakin rasiasta yhden kortin ja kertoo valituissa korteissa olevien numeroiden summan. Kuultuaan summan taikuri ilmoittaa, mistä rasiasta ei ole otettu kortteja. Monellako tavalla kortit voidaan sijoittaa rasioihin niin, että kuvattu temppu aina onnistuu? (Kahta sijoittelua pidetään eri sijoitteluina, jos niissä ainakin yksi kortti on eri rasiassa.)

2000.5. Selvitä, onko olemassa positiivista kokonaislukua n, jolle n on jaollinen tasan 2000:lla eri alkuluvulla ja $2^n + 1$ on jaollinen n:llä.

2000.6. Olkoot AD, BE ja CF teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanat. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa sivuja BC, CA ja AB pisteissä G, H ja J, tässä järjestyksessä. Olkoot suorat a, b ja c suorien EF, FD ja DE peilikuvat suorien HJ, JG ja GH yli suoritetuissa peilauksissa (tässä järjestyksessä). Todista, että a, b ja c määrittävät kolmion, jonka kärjet ovat kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän kehällä.

42. IMO, Washington D.C. 2001

2001.1. Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC on O ympäripiiretyn ympyrän keskipiste ja AP korkeusjana. Lisäksi $\angle C \geq \angle B + 30°$. Todista, että $\angle A + \angle COP < 90°$.

2001.2. Todista, että kaikille positiivisille luvuille a, b ja c pätee

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

2001.3. Matematiikkakilpailuun osallistui 21 poikaa ja 21 tyttöä. Osoittautui, että

(a) kukin kilpailija ratkaisi enintään kuusi tehtävää ja

(b) jokaista pojan ja tytön muodostamaa paria kohden oli ainakin yksi tehtävä, jonka molemmat ratkaisivat.

Osoita, että kilpailussa oli ainakin yksi tehtävä, jonka oli ratkaissut ainakin kolme tyttöä ja kolme poikaa.

2001.4. Olkoon $n > 1$ pariton kokonaisluku ja olkoot $c_1, c_2, \ldots, c_n$ kokonaislukuja. Jos $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ on jonon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatio, niin merkitään

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i.$$

Todista, että on olemassa $\{1, 2, \ldots, n\}$:n permutaatiot $a \neq b$, joille $S(a) - S(b)$ on jaollinen luvulla $n!$.

2001.5. Kolmiossa ABC on $\angle BAC = 60°$. Piste P on $\angle BAC$:n puolittajan ja BC:n leikkauspiste ja Q $\angle ABC$:n puolittajan ja AC:n leikkauspiste. Lisäksi $AB + BP = AQ + QB$. Määritä kolmion ABC kulmien suuruudet.

2001.6. Olkoot a, b, c ja d, $a > b > c > d$, positiivisia kokonaislukuja. Olkoon

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Osoita, että $ab + cd$ ei ole alkuluku.

43. IMO, Glasgow, 2002

2002.1. Olkoon S kaikkien ei-negatiivisten kokonaislukujen h, k, joille pätee $h + k < n$, muodostamien parien (h, k) joukko. Jokainen S:n alkio väritetään punaiseksi tai siniseksi niin, että jos (h, k) on punainen ja $h' \leq h$, $k' \leq k$, niin (h', k') on myös punainen. Joukon S osajoukko on tyyppiä 1, jos siinä on n sinistä paria, joissa on eri ensimmäinen jäsen ja tyyppiä 2, jos siinä on n sinistä paria, joissa on eri toinen jäsen. Osoita, että S:llä on yhtä monta tyypi 1 ja tyypin 2 osajoukkoa.

2002.2. BC on O-keskisen ympyrän halkaisija. A on mielivaltainen ympyrän kehän piste siten, että kulma $AOC > 60°$. Jänne EF on janan AO keskinormaali. D on pienemmän kaaren AB keskipiste. O:n kautta piirretty AD:n suuntainen suora leikkaa AC:n pisteessä J. Osoita, että J on kolmion CEF sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

2002.3. Määritä kaikki kokonaislukujen $m > 2$, $n > 2$ parit, joille $k^n + k^2 - 1$ on luvun $k^m + k - 1$ tekijä äärettömän monella kokonaisluvulla k.

2002.4. Kokonaisluvun $n > 1$ positiiviset tekijät ovat $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ (siis $d_1 = 1$ ja $d_k = n$). Olkoon $d = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$. Osoita, että $d < n^2$ ja määritä ne luvut n, joille d on n^2:n tekijä.

2002.5. Määritä kaikki reaalimuuttujan reaaliarvoiset funktiot f, joille $(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu)$ kaikilla x, y, u ja v.

2002.6. Tasoon on piirretty $n \geq 2$ ympyrää niin, että mikään suora ei leikkaa useampia kuin kahta näistä ympyröistä. Ympyröiden keskipisteet ovat O_1. $O_2, \ldots, O_n$. Osoita, että

$$\sum_{i<j} \frac{1}{O_iO_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

44. IMO, Tokio 2003

2003.1. Olkoon joukon $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ osajoukossa A tasan 101 alkiota. Todista, että joukossa S on sellaiset luvut $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$, että joukot

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 100,$$

ovat pareittain yhteisalkiottomia.

2003.2. Määritä kaikki ne positiivisten kokonaislukujen parit (a, b), joille

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

on positiivinen kokonaisluku.

2003.3. Kuperan kuusikulmion jokaisella kahdella vastakkaisella sivulla on seuraava ominaisuus: sivujen keskipisteiden etäisyys on $\sqrt{3}/2$ kertaa sivujen pituuksien summa. Osoita, että kuusikulmion kulmat ovat yhtä suuria.

2003.4. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio. Olkoot P, Q ja R pisteen D kohtisuorat projektiot suorilla BC, CA ja AB, tässä järjestyksessä. Osoita, että $PQ = QR$, jos ja vain jos kulmien $\angle ABC$ ja $\angle ADC$ puolittajien leikkauspiste on suoralla AC.

2003.5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot x_1, x_2, …, x_n reaalilukuja, joille pätee $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

(a) Osoita, että

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

(b) Osoita, että edellisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos x_1, x_2, …, x_n on aritmeettinen jono.

2003.6. Olkoon p alkuluku. Osoita, että on olemassa sellainen alkuluku q, että $n^p - p$ ei millään kokonaisluvulla n ole jaollinen q:lla.

45. IMO, Ateena 2004

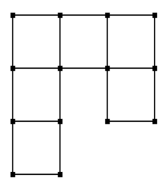
2004.1. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja $AB \neq AC$. Ympyrä, jonka halkaisija on BC, leikkaa sivun AB pisteessä M ja sivun AC pisteessä N. Olkoon O sivun BC keskipiste. Kulmien BAC ja MON puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä R. Todista, että kolmioiden BMR ja CNR ympäri piirretyllä ympyröillä on yhteinen piste, joka on sivulla BC.

2004.2. Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit $P(x)$, jotka toteuttavat yhtälön

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2\,P(a+b+c)$$

kaikilla ehdon $ab + bc + ca = 0$ toteuttavilla reaaliluvuilla a, b ja c.

2004.3. Olkoon *koukku* oheisen kuvion mukaisesti kuudesta yksikköneliöstä muodostuva kuvio tai mikä hyvänsä tästä kuviosta kierroilla tai peilauksilla muodostuva kuvio. Määritä kaikki $m \times n$-suorakaiteet, jotka voidaan peittää koukuilla niin, että suorakaide peittyy aukottomasti eivätkä koukut peitä toisiaan, mutta mikään koukku ei peitä suorakaiteen ulkopuolista aluetta.



2004.4. Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku ja olkoot t_1, t_2, ..., t_n positiivisia reaalilukuja, joille on voimassa

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Osoita, että t_i, t_j, t_k ovat kaikilla i, j, k, $1 \leq i < j < k \leq n$, kolmion sivujen pituuksia.

2004.5. Kuperan nelikulmion $ABCD$ lävistäjä BD ei ole kulman ABC eikä kulman CDA puolittaja. Piste P on nelikulmion $ABCD$ sisällä ja toteuttaa ehdot

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{ja} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Todista, että $ABCD$ on jännenelikulmio, jos ja vain jos $AP = CP$.

2004.6. Positiivista kokonaislukua kutsutaan *vuorottelevaksi*, jos sen kymmenjärjestelmäesityksessä jokaisesta kahdesta peräkkäisestä numerosta toinen on parillinen ja toinen pariton. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on vuorotteleva monikerta.

46. IMO, Mérida 2005

2005.1. Tasasivuisen kolmion ABC sivuilta valitaan kuusi pistettä: A_1 ja A_2 sivulta BC, B_1 ja B_2 sivulta CA ja C_1 sekä C_2 sivulta AB. Pisteet muodostavat kuperan kuusikulmion $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, jonka sivut ovat yhtä pitkiä. Osoita, että suorat A_1B_2, B_1C_2 ja C_1A_2 leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

2005.2. Kokonaislukujonossa a_1, a_2, ... on äärettömän monta positiivista ja äärettömän monta negatiivista jäsentä. Oletetaan, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n lukujen a_1, a_2, ..., a_n jakojäännökset n:llä jaettaessa ovat n eri lukua. Osoita, että jokainen kokonaisluku esiintyy tässä jonossa täsmälleen kerran.

2005.3. Positiiviset reaaliluvut x, y ja z toteuttavat ehdon $xyz \geq 1$. Todista, että

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

2005.4. Tarkastellaan kaavan

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

määrittelemää lukujonoa a_1, a_2, ... Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla ei ole yhteistä tekijää jonon minkään luvun kanssa.

2005.5. Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ sivut BC ja AD ovat yhtä pitkät mutta erisuuntaiset. Olkoon E sivun BC ja F sivun AD sisäpiste ja olkoon $BE = DF$. Suorat AC ja BD leikkaavat pisteessä P, suorat BD ja EF leikkaavat pisteessä Q ja suorat EF ja AC leikkaavat pisteessä R. Tarkastellaan kaikkia kolmioita PQR, kun E ja F liikkuvat. Osoita, että näiden kolmioiden ympäri piirretyillä ympyröillä on P:n lisäksi toinenkin yhteinen piste.

2005.6. Matematiikkakilpailussa oli 6 tehtävää. Mitkä tahansa kaksi näistä tehtävistä ratkaisi yli $\frac{2}{5}$ kilpailijoista. Kukaan kilpailijoista ei ratkaissut kaikkia kuutta tehtävää. Osoita, että ainakin kaksi kilpailijoista ratkaisi tasan 5 tehtävää.

47. IMO, Ljubljana 2006

2006.1. Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Kolmion sisäpiste P toteuttaa ehdon

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Osoita, että $AP \geq AI$ ja että yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $P = I$.

2006.2. Kutsumme säännöllisen 2006-kulmion P lävistäjää *hyväksi janaksi*, jos sen päätepisteet jakavat P:n piirin kahteen osaan, joista kumpikin koostuu parittomasta määrästä P:n sivuja. Myös P:n sivuja pidetään *hyvinä janoina*. Monikulmio P jaetaan kolmioiksi 2003:lla lävistäjällä, jotka eivät leikkaa toisiaan P:n sisällä. Määritä sellaisten jaossa syntyvien tasakylkisten kolmioiden, joiden sivuista kaksi on hyviä janoja, suurin mahdollinen lukumäärä.

2006.3. Määritä pienin reaaliluku M, jolle epäyhtälö

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

toteutuu kaikilla reaaliluvuilla a, b ja c.

2006.4. Määritä kaikki kokonaislukuparit (x, y), jotka toteuttavat yhtälön

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

2006.5. Kokonaislukukertoimisen polynomin P aste on n, $n > 1$. Olkoon k mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan polynomia

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

missä P esiintyy k kertaa. Todista, että on olemassa enintään n kokonaislukua t, joille pätee $Q(t) = t$.

2006.6. Liitetään jokaiseen kuperan monikulmion P sivuun b suurimman sellaisen kolmion ala, joka on kokonaan P:n sisällä ja jonka yksi sivu on b. Osoita, että kaikkiin P:n sivuihin liitettyjen alojen summa on ainakin kaksi kertaa P:n ala.

48. IMO, Hanoi 2007

2007.1 On annettu reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Jokaiselle i, $1 \leq i \leq n$, määritellään

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}.$$

Olkoon

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Osoita, että mielivaltaisille reaaliluvuille $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ pätee

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Osoita, että on olemassa reaaliluvut $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, joille epäyhtälössä $(*)$ vallitsee yhtäsuuruus.

2007.2 Pisteet A, B, C, D ja E sijaitsevat niin, että $ABCD$ on suunnikas ja $BCED$ on jännenelikulmio. Suora ℓ kulkee pisteen A kautta. Oletetaan, että ℓ leikkaa janan DC sen sisäpisteessä F ja suoran BC pisteessä G. Oletetaan, että $EF = EG = EC$. Todista, että ℓ on kulman DAB puolittaja.

2007.3 Matematiikkakilpailun osallistujista jotkut ovat toistensa ystäviä; ystävyys on aina molemminpuolista. Sanomme, että jokin kilpailijoiden joukko on *klikki*, jos kaikki sen jäsenet ovat toistensa ystäviä. (Erityisesti joukot, joissa on vähemmän kuin kaksi alkiota, ovat klikkejä.) Sanomme klikin jäsenten lukumäärää klikin *kooksi*.

Tiedetään, että tässä kilpailussa klikkien suurin koko on parillinen. Todista, että kilpailijat voidaan jakaa kahteen huoneeseen niin, että suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki on samankokoinen kuin suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki.

2007.4 Kolmion ABC kulman BCA puolittaja leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä R, kolmion sivun BC keskinormaalin pisteessä P ja sivun AC keskinormaalin pisteessä Q. Sivun BC keskipiste on K ja sivun AC keskipiste on L. Osoita, että kolmioilla RPK ja RQL on sama ala.

2007.5 Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Todista, että jos luku $4ab - 1$ on luvun $(4a^2 - 1)^2$ tekijä, niin $a = b$.

2007.6 Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan kolmiulotteisen avaruuden $(n+1)^3 - 1$ pistettä sisältävää joukkoa

$$S = \{(x,\, y,\, z) \mid x,\, y,\, z \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, n\},\, x + y + z > 0\}\,.$$

Mikä on pienin määrä tasoja, joiden yhdiste sisältää joukon S pisteet, muttei pistettä $(0,\, 0,\, 0)$?

49. IMO, Madrid 2008

2008.1. Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste on H. Pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun BC keskipiste, leikkaa suoran BC pisteissä A_1 ja A_2. Vastaavasti pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun CA keskipiste, leikkaa suoran CA pisteissä B_1 ja B_2, ja pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun AB keskipiste, leikkaa suoran AB pisteissä C_1 ja C_2. Osoita, että pisteet A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 ja C_2 ovat samalla ympyrällä.

2008.2. (a) Todista, että

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

kaikille reaaliluvuille x, y ja z, jotka ovat eri suuria kuin 1 ja joille pätee $xyz = 1$.

(b) Osoita, että äärettömän monella rationaalilukukolmikolla x, y, z, missä kaikki luvut ovat eri suuria kuin 1 ja $xyz = 1$, edellisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus.

2008.3. Osoita, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua n, jolle luvulla $n^2 + 1$ on lukua $2n + \sqrt{2n}$ suurempi alkutekijä.

2008.4. Määritä kaikki funktiot $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (f on siis positiivisten reaalilukujen joukossa määritelty funktio, jonka arvot ovat positiivisia reaalilukuja), joille pätee

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla w, x, y ja z, jotka toteuttavat ehdon $wx = yz$.

2008.5. Olkoot n ja k, $k \geq n$, positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon $k - n$ parillinen. Olkoon annettuna $2n$ lamppua, jotka on varustettu numeroin $1, 2, \ldots, 2n$ ja joista jokainen voi *palaa* tai olla *pimeänä*. Aluksi kaikki lamput ovat pimeinä. Tarkastellaan askelista koostuvia jonoja. Jokaisella askeleella jonkin lampun tila vaihdetaan päinvastaiseksi (lamppu sytytetään tai sammutetaan).

Olkoon N kaikkien sellaisten k:sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput $1, \ldots, n$ palavat ja lamput $n+1, \ldots, 2n$ ovat pimeinä.

Olkoon M kaikkien sellaisten k:sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput $1, \ldots, n$ palavat ja lamput $n+1, \ldots, 2n$ ovat pimeinä, mutta lamppuja $n+1, \ldots, 2n$ ei ole kertaakaan sytytetty.

Määritä suhde N/M.

2008.6. Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ on $BA \neq BC$. Kolmioiden ABC ja ADC sisään piirretyt ympyrät ovat ω_1 ja ω_2. Oletetaan, että on olemassa ympyrä ω, joka sivuaa puolisuoraa BA eri puolella A:ta kuin B ja puolisuoraa BC eri puolella C:tä kuin B ja joka myös sivuaa suoria AD ja CD. Osoita, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste on ympyrällä ω.

50. IMO, Bremen 2009

2009.1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) joukon $\{1, \ldots, n\}$ eri lukuja niin, että $a_i(a_{i+1} - 1)$ on jaollinen n:llä, kun $i = 1, \ldots, k-1$. Osoita, että $a_k(a_1 - 1)$ ei ole jaollinen n:llä.

2009.2. Olkoon ABC kolmio ja O sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Piste P on sivun CA sisäpiste ja piste Q sivun AB sisäpiste. Pisteet K, L ja M ovat janojen BP, CQ ja PQ keskipisteet, tässä järjestyksessä, ja Γ on pisteiden K, L ja M kautta kulkeva ympyrä. Oletetaan, että suora PQ on ympyrän Γ tangentti. Osoita, että $OP = OQ$.

2009.3. Oletetaan, että $s_1, s_2, s_3, \ldots$ on aidosti kasvava positiivisten kokonaislukujen jono ja että molemmat osajonot

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{ja} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

ovat aritmeettisia jonoja. Osoita, että myös jono $s_1, s_2, s_3, \ldots$ on aritmeettinen jono.

2009.4. Olkoon ABC kolmio, jossa $AB = AC$. Kulmien CAB ja ABC puolittajat leikkaavat sivut BC ja CA pisteissä D ja E, tässä järjestyksessä. Olkoon K kolmion ADC sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Oletetaan, että $\angle BEK = 45°$. Määritä $\angle CAB$:n kaikki mahdolliset arvot.

2009.5. Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen joukossa määritellyt funktiot f, joiden arvot ovat positiivisia kokonaislukuja ja joilla on seuraava ominaisuus: kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b on olemassa (ei-surkastunut) kolmio, jonka sivujen pituudet ovat

$$a, \quad f(b) \quad \text{ja} \quad f(b+f(a)-1).$$

2009.6. Olkoot a_1, a_2, ..., a_n keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja ja olkoon M joukko, jonka alkiot ovat $n-1$ positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Heinäsirkka hyppelee reaaliakselilla. Se lähtee origosta ja tekee n hyppyä oikealle. Hyppyjen pituudet ovat a_1, a_2, ..., a_n jossain järjestyksessä. Osoita, että heinäsirkka voi järjestää hyppynsä niin, ettei se milloinkaan osu pisteeseen, jonka koordinaatti on joukossa M.

51. IMO, Astana 2010

2010.1. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille yhtälö

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$

pätee kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x.)

2010.2. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja Γ kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Suora AI leikkaa Γ:n pisteessä $D \neq A$. Olkoon F sellainen sivun BC piste ja E sellainen kaaren BDC piste, että $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Olkoon vielä G janan IF keskipiste. Todista, että suorien DG ja EI leikkauspiste on ympyrällä Γ.

2010.3. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen jonot a_1, a_2, ..., joille $(a_m+n)(m+a_n)$ on neliöluku kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m, n.

2010.4. Piste P on kolmion ABC sisäosan piste. Suorat AP, BP ja CP leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän myös pisteissä K, L ja M, tässä järjestyksessä. Ympäri piirretyn ympyrän pisteeseen C piirretty tangentti leikkaa suoran AB pisteessä S. Todista, että jos $SC = SP$, niin $MK = ML$.

2010.5. Kuusi kolikkopinoa S_1, ..., S_6 on asetettu vierekkäin. Aluksi joka pinossa on yksi kolikko. On mahdollista suorittaa kahdenlaisia siirtoja.

Siirto 1: Jos pinossa S_j, missä $1 \le j \le 5$, on ainakin yksi kolikko, on sallittua poistaa kolikko pinosta S_j ja lisätä kaksi kolikkoa pinoon S_{j+1}.

Siirto 2: Jos pinossa S_k, missä $1 \le k \le 4$, on ainakin yksi kolikko, on sallittua poistaa pinosta S_k yksi kolikko ja vaihtaa pinot S_{k+1} ja S_{k+2} keskenään.

Selvitä, onko näitä siirtoja toistamalla mahdollista saavuttaa tilanne, jossa viisi ensimmäistä pinoa ovat tyhjiä ja kuudennessa pinossa on $2010^{2010^{2010}}$ kolikkoa.

2010.6. Olkoot a_1, a_2, ..., a_s positiivisia reaalilukuja. Kun $n > s$, määritellään

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}.$$

Todista, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut ℓ ja N, $\ell \leq s$, niin että $a_n = a_{n-\ell} + a_\ell$ kaikilla $n \geq N$.

52. IMO, Amsterdam 2011

2011.1. Olkoon $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ joukko, jonka alkioina on neljä eri suurta positiivista kokonaislukua. Joukon alkioiden summaa $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ merkitään S_A:lla. Olkoon n_A niiden parien (i, j) lukumäärä, joille $1 \leq i < j \leq 4$ ja $a_i + a_j$ on S_A:n tekijä. Määritä kaikki sellaiset neljän eri suuren kokonaisluvun joukot A, joille n_A on mahdollisimman suuri.

2011.2. Tason äärellisessä joukossa $\mathcal{S}$ on ainakin kaksi pistettä jä mitkään kolme $\mathcal{S}$:n pistettä eivät ole samalla suoralla. Seuraavaa prosessia kutsutaan *tuulimyllyksi*. Alkutilanteessa suora ℓ kulkee joukkoon yhden joukon $\mathcal{S}$ pisteen P kautta. Se kiertyy myötäpäivään *kierron keskipisteen* P ympäri, kunnes se kohtaa jonkin toisen joukkoon $\mathcal{S}$ kuuluvan pisteen Q. Pisteestä Q tulee nyt kierron koskipiste, ja suora kiertyy Q:n ympäri myötäpäivään, kunnes se jälleen kohtaa jonkin $CalS$:n pisteen. Prosessi jatkuu loputtomasti.

Osoita, että on mahdollista valita $P \in \mathcal{S}$ ja P:n kautta kulkeva suora ℓ niin, että näistä aloitettu tuulimylly käyttää jokaista $\mathcal{S}$:n pistettä kierron keskipisteenä äärettömän monta kertaa.

2011.3. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y. Osoita, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \leq 0$.

2011.4. Olkoon $n > 0$ kokonaisluku. Käytössä on kaksivartinen vaaka ja n punnusta, joiden massat ovat $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Punnukset on asetettava yksitellen vaa'alle niin, että oikea vaakakuppi ei koskaan paina enempää kuin vasen vaakakuppi. Joka vaiheessa valitaan yksi jäljellä olevista punnuksista ja se asetetaan joko vasempaan tai oikeaan vaakakuppiin, kunnes kaikki punnukset ovat vaa'alla.

Määritä, kuinka monella eri tavalla tämä voidaan tehdä.

2011.5. Funktio f on määritelty kokonaislukujen joukossa ja sen arvot ovat positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että jokaisella kahdella kokonaisluvulla m ja n erotus $f(m) - f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m - n)$. Osoita, että kaikilla sellaisilla kokonaisluvuilla m ja n, joilla $f(m) \leq f(n)$, $f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m)$.

2011.6. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä on Γ. Suora ℓ on ympyrän Γ tangentti ja suorat ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c ovat suoran ℓ kuvat peilauksissa yli suorien BC, CA ja AB, tässä järjestyksessä. Osoita, että suorien ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c määrittelemän kolmion ympäri piirretty ympyrä sivuaa ympyrää Γ.

53. IMO, Mar del Plata 2012

2012.1. Kolmion ABC kärkeä A vastassa olevan sivuympyrän keskipiste on J. Sivuympyrän ja sivun BC sivuamispiste on M. Ympyrä sivuaa suoraa AB pisteessä K ja suoraa

AC pisteessä L. Suorien LM ja BJ leikkauspiste on F ja suorien KM ja CJ leikkauspiste on G. Olkoon vielä S suorien AF ja BC ja T suorien AG ja BC leikkauspiste. Todista, että M on janan ST keskipiste.

(Kolmion ABC kärkeä A vastassa oleva *sivuympyrä* on ympyrä, joka sivuaa janaa BC, puolisuoraa AB janan AB jatkeella ja puolisuoraa AC janan AC jatkeella.)

2012.2. Olkoon $n \geq 3$ ja olkoot $a_2, a_3, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja, joille pätee $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Todista, että

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

2012.3. *Valehteluleikki* on peli, jossa on kaksi pelaajaa A ja B. Pelin säännöt perustuvat positiivisiin kokonaislukuihin k ja n, jotka ovat molempien pelaajien tiedossa.

Pelin alussa A valitsee kokonaisluvut x ja N, $1 \leq x \leq N$. A pitää luvun x salassa, mutta ilmoittaa B:lle rehellisesti luvun N. B pyrkii saamaan tietoa luvusta x tekemällä A:lle kysymyksiä. Jokaisessa kysymyksessä hän esittää jonkin positiivisten kokonaislukujen joukon S (samaa joukkoa on voitu käyttää jo aikaisemmassa kysymyksessä) ja kysyy A:lta, kuuluuko x joukkoon S. B voi tehdä niin monta kysymystä kuin haluaa. A:n on heti vastattava jokaiseen B:n kysymykseen joko *kyllä* tai *ei*, mutta hän voi valehdella niin usein kuin haluaa. Ainoa rajoitus on, että jokaisen $k+1$:n peräkkäisen vastauksen joukossa on oltava ainakin yksi rehellinen. Kysyttyään niin monta kysymystä kuin on halunnut, B ilmoittaa positiivisten kokonaislukujen joukon X, jossa on enintään n alkiota. Jos x kuuluu joukkoon X, B voittaa. Muussa tapauksessa hän häviää. Todista, että

1. jos $n \geq 2^k$, niin B:llä on voittostrategia;
2. jokaista tarpeeksi suurta k:ta kohden on olemassa sellainen $n \geq 1{,}99^k$, että B:llä ei ole voittostrategiaa.

2012.4. Määritä kaikki ne funktiot $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, joille pätee

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \; = \; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

kaikille sellaisille kokonaisluvuille a, b, c, joilla $a + b + c = 0$. (Tässä $\mathbb{Z}$ tarkoittaa kokonaislukujen joukkoa.)

2012.5. Kolmiossa ABC on $\angle BCA = 90°$ ja D on C:stä piirretyn korkeusjanan kantapiste. Olkoon X janan CD sisäpiste. Olkoon K se janan AX piste, jolle $BK = BC$ ja L se janan BX piste, jolle $AL = AC$. Olkoon M AL:n ja BK:n leikkauspiste. Osoita, että $MK = ML$.

2012.6. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille on olemassa sellaiset ei-negatiiviset kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$, että

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

54. IMO, Santa Marta 2013

2013.1 Todista, että jokaista positiivisten kokonaislukujen paria k ja n kohden on olemassa k sellaista positiivista kokonaislukua $m_1, m_2, \ldots, m_k$, (jotka eivät välttämättä ole eri lukuja, että

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

2013.2 4027 tason pisteen asetelmaa kutsutaan *kolumbialaiseksi*, jos se koostuu 2013 punaisesta ja 2014 sinisestä pisteestä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Taso jaetaan useaksi alueeksi piirtämällä joukko suoria. Suorien joukko on *suopea* kolumbialaiselle asetelmalle, jos seuraavat kaksi ehtoa täyttyvät:

- mikään suora ei kulje minkään asetelman pisteen kautta;
- missään alueessa ei ole erivärisiä asetelman pisteitä.

Etsi pienin sellainen k, että jokaista 4027 pisteen kolumbialaista asetelmaan kohden on olemassa tälle asetelmalle suopea k:n suoran sijoittelu.

2013.3 Kolmion ABC kärjen A vastainen sivuympyrä sivutkoon sivua BC pisteessä A_1. Määriteltäköön sivun CA piste B_1 ja sivun AB piste C_1 vastaavasti käyttämällä kärkien B ja C vastaisia sivuympyröitä. Oletetaan, että kolmion $A_1B_1C_1$ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste sijaitsee kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä. Todista, että kolmio ABC on suorakulmainen.

Kolmion ABC kärjen A vastainen sivuympyrä on ympyrä, joka sivuaa janaa BC, puolisuoraa AB janan AB jatkeella ja puolisuoraa AC janan AC jatkeella. Kärkien B ja C vastaiset sivuympyrät määritellään vastaavasti.

2013.4 Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka korkeusjanojen leikkauspiste on H, ja olkoon W sivun BC piste, joka sijaitsee aidosti pisteiden B ja C välissä. Pisteet M ja N olkoot kärjistä B ja C lähtevien korkeusjanojen kannat. Merkitään ω_1:llä kolmion BWN ympäri piirrettyä ympyrää, ja olkoon X ympyrän ω_1 se piste, jolle WX on ympyrän ω_1 halkaisija. Merkitään ω_2:lla vastaavasti kolmion CWM ympäri piirrettyä ympyrää, ja olkoon Y se ympyrän ω_2 piste, jolle WY on ympyrän ω_2 halkaisija. Todista, että X, Y ja H ovat samalla suoralla.

2013.5 Olkoon $\mathbb{Q}_{>0}$ positiivisten rationaalilukujen joukko. Olkoon $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ kuvaus, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa:

(i) kaikilla $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ pätee $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
(ii) kaikilla $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ pätee $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$;
(iii) on olemassa rationaaliluku $a > 1$, jolle $f(a) = a$.

Todista, että jokaisella $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ pätee $f(x) = x$.

2013.6 Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Tarkastellaan ympyrää, jolle on merkitty $n+1$ pistettä tasaisin välein. Tarkastellaan pisteiden kaikkia mahdollisia nimeämisiä luvuilla $0, 1, \ldots, n$, missä kutakin lukua käytetään täsmälleen kerran; tällaisia nimeämisiä pidetään samoina, jos ne voidaan saada toisistaan ympyrän kierrolla. Nimeämistä kutsutaan *kauniiksi*, jos a:ksi ja d:ksi nimettyjen pisteiden välinen jänne ei leikkaa b:ksi ja c:ksi nimettyjen pisteiden välistä jännettä, kun neljälle nimelle $a < b < c < d$ pätee $a+d = b+c$.

Olkoon M kauniiden nimeämisten lukumäärä, ja olkoon N niiden positiivisten kokonaislukujen järjestettyjen parien $(x,\, y)$ lukumäärä, joille $x+y \le n$ ja s.y.t.$(x,\, y) = 1$. Todista, että

$$M = N + 1.$$

55. IMO, Kapkaupunki 2013

2014.1. Olkoon $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ päättymätön jono positiivisia kokonaislukuja. Todista, että on olemassa yksi ja vain yksi kokonaisluku $n \ge 1$, jolle pätee

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \le a_{n+1}.$$

2014.2. Olkoon $n \ge 2$ kokonaisluku. Tarkastellaan $n \times n$ -šakkilautaa, jonka n^2 yksikköneliötä muodostavat. Kutsutaan n:n laudalla olevan tornin asetelmaa *rauhalliseksi*, jos laudan jokaisella vaaka- ja pystyrivillä on tasan yksi torni. Määritä suurin sellainen positiivinen kokonaisluku k, jolle jokaista rauhallista n:n tornin asetelmaa kohden on olemassa $k \times k$ -neliö, jonka yhdessäkään sen k^2:sta yksikköneliöstä ei ole tornia.

2014.3. Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ on $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Piste H on pisteen A kohtisuora projektio suoralla BD. Piste S on sivulla AB ja piste T on sivulla AD niin, että H on kolmion SCT sisällä ja

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Todista, että suora BD on kolmion TSH ympäri piirretyn ympyrän tangentti.

2014.4. Pisteet P ja Q ovat teräväkulmaisen kolmion ABC sivulla BC niin, että $\angle PAB = \angle BCA$ ja $\angle CAQ = \angle ABC$. Piste M on suoralla AP ja piste N on suoralla AQ niin, että P on janan AM keskipiste ja Q on janan AN keskipiste. Todista, että suorien BM ja CN leikkauspiste on kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä.

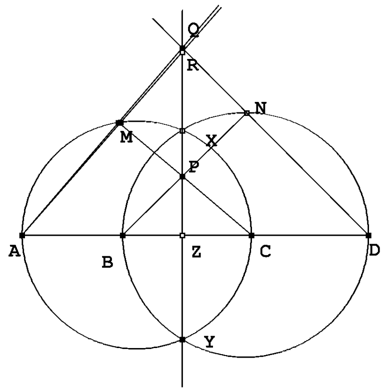
2014.5. Kapkaupungin Pankki laskee liikkeelle kolikkoja, joiden arvo on $\frac{1}{n}$, kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Tarkastellaan äärellistä kokoelmaa tällaisia kolikkoja (joiden ei tarvitse olla keskenään eriarvoisia), jonka yhteisarvoarvo on enintään $99 + \frac{1}{2}$. Todista, että kokoelma voidaan jakaa sataan tai vähempään osaan, joista jokaisen arvo on enintään 1.

2014.6. Joukko tason suoria on *yleisessä asemassa*, jos mitkään kaksi eivät ole yhdensuuntaisia eivätkä mitkään kolme kulje saman pisteen kautta. Yleisessä asemassa oleva suorajoukko leikkaa tason alueiksi, joista jotkin ovat pinta-alaltaan äärellisiä; kutsutaan näitä joukon *äärellisiksi alueiksi*. Todista, että kaikilla riittävän suurilla n:n arvoilla on mahdollista värittää jokaisesta yleisessä asemassa olevassa n:n suoran joukosta ainakin $\sqrt{n}$ suoraa sinisiksi niin, että suorajoukon minkään äärellisen alueen reuna ei ole kokonaan sininen.

Huomautus: Todistukset, joissa $\sqrt{n}$:n tilalla on $c\sqrt{n}$, saavat pisteitä sen mukaan, mikä on vakion c arvo.

Ratkaisuja

1995.1. Olkoon Q suorien DN ja XY leikkauspiste ja olkoon R suorien AM ja XY leikkauspiste. Koska $\angle AMC = 90° = \angle AZP$, niin kolmiot PCZ, CAM ja RAZ ovat suorakulmaisia. Lisäksi kolmioilla on pareittain yhteinen kulma. Kolmiot, erityisesti PCZ ja RAZ, ovat siis yhdenmuotoisia. Samoin nähdään, että kolmiot PBZ ja QDZ ovat yhdenmuotoisia. Siis



$$\frac{ZP}{CZ} = \frac{AZ}{ZR} \quad \text{ja} \quad \frac{ZP}{BZ} = \frac{DZ}{ZQ}.$$

Mutta jos lasketaan pisteen Z potenssi molempien tehtävässä esiintyvien ympyröiden suhteen, saadaan

$$AZ \cdot CZ = ZX \cdot ZY = BZ \cdot DZ.$$

Siis $ZP{\cdot}ZR = CZ{\cdot}AZ = BZ{\cdot}DZ = ZP{\cdot}ZQ$. Kun supistetaan ZP:llä, saadaan $ZR = ZQ$. Koska R ja Q ovat samalla puolella suoraa AD, on oltava $R = Q$. – Huomattakoon, että päättely ei riipu siitä, onko P janalla XY vai sen ulkopuolella. (*Tuomas Korppi, Jukka Suomela, Toni Leppäkorpi*)

1995.2. Merkitään $x = \dfrac{1}{a}$, $y = \dfrac{1}{b}$ ja $z = \dfrac{1}{c}$. Silloin $xyz = 1$ ja

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2} = \frac{x^3yz}{y+z} + \frac{xy^3z}{x+z} + \frac{xyz^3}{x+y} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Voidaan olettaa, että $x \leq y \leq z$, jolloin myös $\dfrac{1}{y+z} \leq \dfrac{1}{z+x} \leq \dfrac{1}{x+y}$. Käytetään ensin Tšebyševin epäyhtälöä, jonka mukaan $3\left(\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{x+y} + \dfrac{z^2}{x+y}\right) \geq (x^2 + y^2 + z^2)\left(\dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{x+z} + \dfrac{1}{x+y}\right)$, ja sitten aritmeettisen ja harmonisen keskiarvon välistä epäyhtälöä, jonka mukaan $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{x+z} + \dfrac{1}{x+y}\right) \geq \dfrac{3}{y+z+x+z+x+y} = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x+y+z} = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}}$. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella edelleen $\dfrac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \dfrac{3}{x+y+z}$. Näin on päästy epäyhtälöön

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{9}{2}\frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}.$$

Tehtävän epäyhtälöön päästään tästä käyttämällä nimittäjään Cauchyn – Schwarzin epäyhtälöä muodossa $(x+y+z)^2 = (1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z)^2 \leq (1+1+1)(x^2+y^2+z^2) = 3(x^2+y^2+z^2)$. (*Uoti Urpala*)

1995.3. Havaitaan heti, että jos $n = 4$, pisteet A_1, A_2, A_3 ja A_4, jotka ovat sellaisen neliön kärjet, jonka ala on $6a$, toteuttavat tehtävän ehdot, kun kaikki r_i:t ovat $= a$. Todistetaan sitten, että vaadittuja pisteitä ei ole, jos $n = 5$. Jos pisteet A_1, A_2, A_3 ja A_4 ovat kuperan nelikulmion kärjet ja nelikulmion ala on A, niin $A = (r_1 + r_2 + r_3) + (r_1 + r_3 + r_4) = (r_1 + r_2 + r_4) + (r_2 + r_3 + r_4)$, mistä seuraa $r_2 + r_4 = r_1 + r_3$. Oletetaan nyt, että pisteet $A_1, \ldots A_5$ ja luvut $r_1, \ldots, r_5$ toteuttaisivat tehtävän ehdot. Pisteet voivat sijaita tasossa kolmella eri tavalla:

1°. Pisteet ovat kuperan viisikulmion kärjet. Silloin jokaiset neljä pisteistä ovat kuperan nelikulmion kärjet, ja edellä todistettua relaatiota hyväksi käyttäen saadaan $r_2 + r_5 = r_1 + r_3 = r_2 + r_4$, $r_1 + r_4 = r_2 + r_5 = r_1 + r_3$ jne., ja näistä $r_5 = r_4 = r_3 = r_2 = r_1$. Tämä merkitsee, että kolmiot $A_1A_2A_3$ ja $A_1A_2A_4$ ovat yhtä suuret. Viisikulmion kuperuuden vuoksi A_4 ja A_3 ovat samalla puolella suoraa A_1A_2. Koska myös kolmiot $A_3A_4A_2$ ja $A_3A_4A_5$ ovat yhtä suuret, A_5 on yhtä etäällä suorasta A_3A_4 kuin A_2. Jos pisteet olisivat samalla puolella suoraa A_3A_4, A_5, A_1 ja A_2 olisivat samalla suoralla. Siis A_5 on kaksi kertaa niin kaukana suorasta A_1A_2 kuin A_3. Tämä on selvästi ristiriidassa sen kanssa, että kolmioilla $A_1A_2A_3$ ja $A_1A_2A_5$ on sama ala.

2°. Neljä pisteistä, esim. $A_1, \ldots, A_4$ ovat kuperan nelikulmion kärjet ja viides on tämän nelikulmion sisällä. Pisteiden numerointi voidaan valita niin, että A_5 on kolmion $A_2A_4A_1$ sisällä. Kun sovelletaan alussa todistettua yhtälöä kuperiin nelikulmioihin $A_1A_2A_3A_4$ ja $A_5A_2A_3A_4$, saadaan $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 = r_5 + r_3$, eli $r_1 = r_5$. Tämä merkitsee, että kolmioilla $A_2A_4A_1$ ja $A_2A_4A_5$ on sama ala, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että piste A_5 on kolmion $A_2A_4A_1$ sisällä.

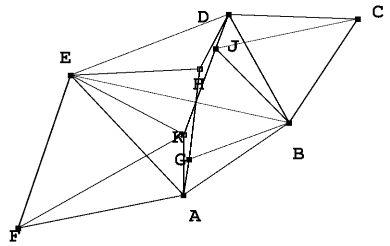
3°. Mitkään neljä pistettä eivät ole kuperan nelikulmion kärjet. Silloin pisteistä löytyy kolme sellaista, esim. A_1, A_2 ja A_3, että kaksi muuta pistettä ovat näiden kolmen pisteen muodostaman kolmion sisäpisteitä. Numerointi voidaan tehdä niin, että lisäksi A_5 on kolmion $A_1A_2A_4$ sisällä. Kun kolmion $A_1A_2A_3$ ala lasketaan kahdella eri tavalla, saadaan $r_1 + r_2 + r_3 = (r_1 + r_2 + r_5) + (r_2 + r_3 + r_5) + (r_3 + r_1 + r_5)$, eli $r_5 = -\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$. Täsmälleen samoin saadaan $r_4 = -\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$. Siis kolmioilla $A_1A_2A_5$ ja $A_1A_2A_4$ on sama ala, mikä on mahdotonta samoin perustein kuin kohdassa 2°.

Jos $n > 5$, voidaan aina valita viisi pistettä ja rajoittaa tarkastelu niihin. Tehtävällä ei siis ole muita ratkaisuja kuin $n = 4$. (*Tuomas Korppi*)

1995.4. Kun x_i ratkaistaan yhtälöstä (ii), saadaan kaksi ratkaisua, $x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}}$ ja $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$. Induktiivisesti todetaan, että jokainen x_i on muotoa $2^k x_0^{\pm 1}$, missä k on kokonaisluku; siirtyminen luvusta x_{i-1} lukuun x_i aiheuttaa joko k:n pienenemisen yhdellä tai sekä k:n että x_0:n eksponentin muuttumisen vastaluvukseen. Jos x_0:sta x_{1995}:een siirryttäessä olisi tehty parillinen määrä käänteislukuoperaatioita, olisi $|k|$:ta jouduttu muuttamaan pariton määrä kertoja. Silloin olisi $x_{1995} = 2^{2\ell+1}x_0$, eikä voisi olla $x_{1995} = x_0$. Käänteislukuoperaatioita on siis ollut pariton määrä, ja $x_{1995} = 2^{2\ell}x_0^{-1} = x_0$, josta $x_0 = 2^\ell$. Koska käänteisoperaatioita on ollut ainakin yksi, on 2ℓ enintään 1994. Siis $x_0 \le 2^{997}$. Helposti nähdään, että jos $x_0 = 2^{997}$, niin jono, jossa $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$, kun $i = 1, 2, \ldots, 1994$ ja

$x_{1995} = \dfrac{1}{x_{1994}}$, toteuttaa tehtävän ehdot. Suurin x_0 on siis 2^{1995}. (*Toni Leppäkorpi*)

1995.5. Havaitaan, että kolmiot BCD ja AEF ovat tasasivuisia. Näin ollen $BA = BC = BD$ ja $DE = EA = EF$. Kolmiot ABE ja DBE ovat yhtenevät, joten $BDEA$ on symmetrinen suoran BE suhteen. Olkoot J ja K pisteiden G ja H kuvat peilauksessa yli suoran BE. Silloin $GH = JK$, $AG = DJ$, $GB = JB$, $DH = AK$ ja $HE = KE$. Pisteet A, B ja G ovat sellaisen ympyrän kehällä, jonka keskipisteestä jana AB näkyy 120°:n kulmassa (kehäkulmaa 120° vastaa keskuskulma 240° = 360° − 120°).



Peilauksessa tämän ympyrän keskipiste kuvautuu kolmion BCD keskipisteeksi, sillä jana BD näkyy pisteestä C 60°:n kulmassa. On tunnettua, että mielivaltaiselle pisteelle J tasasivuisen kolmion BCD ympäri piirretyn ympyrän kaarella BD pätee $CJ = BJ + DJ$. (Todistus: Valitaan CJ:ltä piste L niin, etä JLD on tasasivuinen kolmio. Silloin $\angle CDL = 60° - \angle LDB = \angle BDJ$. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle JBD = \angle JCD$. Koska $BD = CD$, kolmiot CDL ja BDJ ovat yhtenevät (ksk). Siis $CL = BJ$ ja $LJ = LD = JD$ ja $CJ = CL + LJ = BJ + DJ$.) Samoin nähdään, että $FK = EK + AK$. Nyt saadaan $AG+GB+GH+DH+HE = BJ+DJ+JK+AK+EK = CJ+JK+KF \geq CF$, sillä jana CF on enintään yhtä pitkä kuin mikä tahansa pisteet C ja F yhdistävä murtoviiva. (*Jouni Seppänen*)

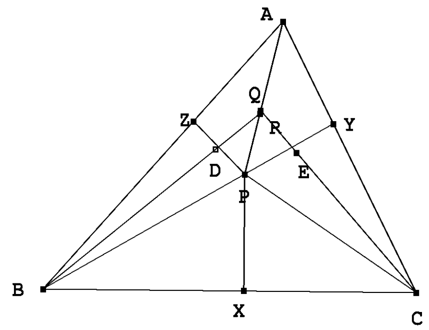
1995.6. Joukot $\{1, 2, \ldots, p\}$ ja $\{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$ toteuttavat ehdot: ensimmäisen alkioiden summa on $\dfrac{p(p+1)}{2}$ ja jälkimmäisen $\dfrac{p(p+1)}{2} + p^2$. Tarkastellaan muita p-alkioisia osajoukkoja; niitä on $\dbinom{2p}{p} - 2$. Merkitään joukon A alkioiden summaa symbolilla $g(A)$. Osoitetaan, että jokaista r, $0 \leq r < p$ kohden on yhtä monta osajoukkoa A, jolle $g(A) \equiv r \bmod p$. Tästä seuraa erityisesti, että osajoukkoja, joille $g(A) \equiv 0 \bmod p$, on $\dfrac{1}{p}\left(\dbinom{2p}{p} - 2\right) + 2$ kappaletta. Tämän osoittamiseksi tarkastellaan p-alkioisten osajoukkojen S joukossa määriteltyä funktiota f, joka määritellään seuraavasti: jos $n \geq p+1$, niin $n \in S \Leftrightarrow n \in f(S)$, jos $2 \leq n \leq p$, niin $n-1 \in S \Leftrightarrow n \in f(S)$ ja $p \in S \Leftrightarrow 1 \in f(S)$. Jos joukossa S on m alkiota, jotka ovat $\leq p$, niin $g(f(S)) = g(S) + m \bmod p$. Lisäksi $f^p(S) = S$ aina kun S:ssä on m, $1 \leq m \leq p-1$ alkiota, jotka ovat $\leq p$. Tästä seuraa, että f on bijektio. Koska p on alkuluku, kongruenssiyhtälöllä $mx \equiv q \bmod p$ on yksikäsitteinen ratkaisu r. Tarkastellaan joukkoja, joilla tasan m luvuista $1, 2, \ldots, p$ kuuluu joukkoon S. Tällaiselle joukolle $g(S) \equiv 0$ jos ja vain jos $g(f^r(S)) \equiv q$. Näin saadaan yksikäsitteinen vastaavuus niiden joukkojen, joille $g(S) \equiv 0$, ja niiden joukkojen, joille $g(S) \equiv q$, kanssa. Tällaisia joukkoja on siis yhtä paljon. (*Uoti Urpala*)

1996.1. Siirrytään tarkastelemaan pisteiden (i, j), $0 \leq i \leq 19$, $0 \leq j \leq 11$, muodostamaa hilaa $\mathcal{A}$. Tehtävä on löytää siirrot, joilla päästään pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(0, 19)$. Siirrot ovat muotoa $(x, y) \to (x+a, y+b)$, missä $a^2+b^2 = r$. (a) Jos r on parillinen, niin a ja b ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia. Siis $a+b$ on aina parillinen. Pisteestä

$(x,\,y)$, jossa $x+y$ on parillinen (kuten $(0,\,0)$) ei voi päästä pisteeseen $(x',\,y')$, missä $x'+y'$ on pariton (kuten $(0,\,19)$). Jos r on jaollinen kolmella, sekä a:n että b:n tulee olla jaollisia kolmella. (Jos x ei ole jaollinen kolmella, niin $x^2 \equiv 1 \bmod 3$.) Koska 19 ei ole jaollinen kolmella, tehtävä ei onnistu. (b) Olkoon $r = 73 = 8^2 + 3^2$. Merkitään a:lla, b:llä, c:llä ja d:llä siirtojen $\pm(8,\,3)$, $\pm(8,\,-3)$, $\pm(3,\,8)$ ja $\pm(3,\,-8)$ lukumäärää (a on tarkemmin sanoen siirtojen $(8,\,3)$ ja $(-8,\,-3)$ lukumäärien erotus.) Onnistuneessa siirtosarjassa on oltava $8(a+b)+3(c+d) = 19$ ja $3(a-b)+8(c-d) = 0$. Eräs nämä ehdot toteuttava ratkaisu olisi $(a+b,\,c+d) = (2,\,1)$, $(a-b,\,c-d) = (2,\,-1)$ eli $a = -3$, $b = 5$, $c = 2$, $d = -1$. Yritetään ratkaisua kolmella muotoa $(-8,\,-3)$, viidellä muotoa $(8,\,-3)$, kahdella muotoa $(3,\,8)$ ja yhdellä muotoa $(-3,\,8)$ olevalla siirrolla. Osoittautuu, että $(0,\,0) \to (3,\,8) \to (11,\,5) \to (19,\,2) \to (16,\,10) \to (8,\,7) \to (0,\,4) \to (8,\,1) \to (11,\,9) \to (3,\,6) \to (11,\,3) \to (19,\,0)$ on kelvollinen siirtojono. (c) Olkoon $r = 97$. Ainoa mahdollisuus kirjoittaa 97 kahden neliön summaksi on $9^2 + 4^2$. Jaetaan hila $\mathcal{A}$ kahdeksi joukoksi $\mathcal{B} = \{(i,\,j) \mid 0 \le i \le 19,\ 4 \le j \le 7\}$, $\mathcal{C} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Selvästi jokainen siirto $(\pm 9,\,\pm 4)$ johtaa joukosta $\mathcal{B}$ joukkoon $\mathcal{C}$ ja päinvastoin, kun taas jokainen muotoa $(\pm 4,\,\pm 9)$ oleva siirto johtaa joukosta $\mathcal{C}$ joukkoon $\mathcal{C}$. Edellisen tyypin siirrot muuttavat x-koordinaatin parillisuuden, joten niitä pitäisi olla pariton määrä. Mutta koska lähtöpiste on $\mathcal{C}$:ssä, jokainen tällainen siirtosarja johtaa joukon $\mathcal{B}$ pisteeseen. Tapauksessa $r = 97$ siirtoja ei voi tehdä vaaditulla tavalla.

1996.2. Olkoot X, Y ja Z pisteen P kohtisuorat projektiot sivuilla BC, CA ja AB. Nelikulmio $AZPY$ on jännenelikulmio ja PA nelikulmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, joten laajennettu sinilause sovellettuna kolmioon AZY antaa

$$\frac{YZ}{\sin A} = PA.$$



Samoin

$$\frac{ZX}{\sin B} = PB, \quad \frac{XY}{\sin C} = PC.$$

Jännenelikulmioista ja kolmion kulmien summalauseesta saadaan myös

$$\angle XYZ = \angle XYP + \angle PYZ = \angle BCP + \angle PAB = \angle APC - \angle ABC.$$

Vastaavasti $\angle YZX = \angle BPA - \angle ACB$. Tehtävän oletuksen perusteella $\angle XYZ = \angle XZY$, joten kolmio XYZ on tasakylkinen, $XY = XZ$. Laajennettu sinilause kolmioihin BXZ ja CYX sovellettuna antaa $PB \sin B = PC \sin C$. Tästä ja sinilauseesta kolmioon ABC sovellettuna seuraa $PB \cdot AC = PC \cdot AB$ eli

$$\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}.$$

Olkoot Q ja R pisteet, joissa BD ja CE leikkaavat AP:n. Kulmanpuolittajalause ja edellinen yhtälö osoittavat, että

$$\frac{PQ}{QA} = \frac{PR}{RQ},$$

joten $Q = R$.

1996.3. Nollafunktio $f(x) = 0$ kaikilla x on yksi ratkaisu. Sijoittamalla $m = n = 0$ funktionaaliyhtälöön saadaan $f(0) = 0$ ja $f(f(n)) = f(n)$ kaikilla n. Tutkittava funktionaaliyhtälö on siis

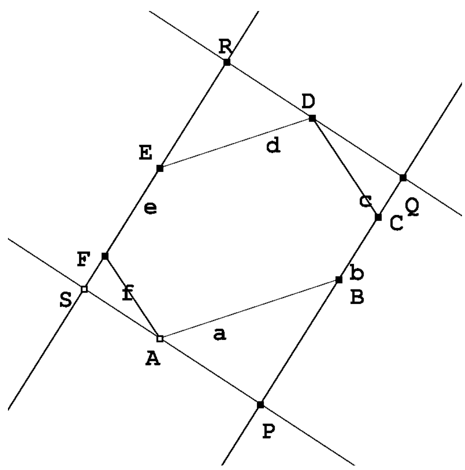
$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n).$$

Jos f ei ole identtisesti nolla, on olemassa lukuja x, joille $f(x) = x$; näitä kutsutaan f:n kiintopisteiksi. Olkoon a pienin tällainen luku. Induktiolla näytetään, että $f(ka) = ka$ kaikilla $k \geq 1$: oletetaan, että $f(ka) = ka$, $k \geq 1$. Silloin $f(a + ka) = f(a + f(ka)) = f(a)+f(ka) = (1+k)a$. Jos $a = 1$, $f(n) = n$ kaikilla n. Oletetaan, että $a > 1$. Osoitetaan, että kaikki f:n kiintopisteet ovat muotoa ka. Olkoon $b > a$ mielivaltainen kiintopiste. On olemassa q ja r, $0 \leq r < a$, siten, että $b = r + qa$. Nyt $r + qa = b = f(b) = f(r + qa) = f(r + f(qa)) = f(r) + f(qa) = f(r) + qa$, joten $r = f(r)$. Koska $r < a$, on oltava $r = 0$. Koska aikaisemmin sanotun mukaan kaikki luvut $f(n)$ ovat kiintopisteitä, on olemassa luvut $n_0 = 0$, n_1, n_2, $\dots$, n_{a-1} siten, että $f(i) = n_i a$, $0 \leq i < a$. Jos $n > a$, niin $n = ka + i$, $0 \leq i < a$. Silloin $f(n) = f(i + ka) = n_i a + ka$. Olkoot toisaalta a, ja jos $a > 1$, n_1, n_2, $\dots$, n_{a-1} mielivaltaisia ei-negatiivisia kokonaislukuja. Asetetaan $n_0 = 0$ ja mielivaltaiselle $n = ka + i$, $0 \leq k$, $0 \leq i < a$ $f(n) = (k + n_i)a$. Osoitetaan, että näin määritelty f toteuttaa funktionaaliyhtälön. Olkoon $n = ka + i$, $m = la + j$. Silloin todellakin $f(m + f(n)) = f(la + j + ka + n_i a) = (l + k + n_i)a + n_j a = f(m) + f(n)$.

1996.4. Olkoon $15a + 16b = r^2$ ja $16a - 15b = s^2$. Silloin $r^4 + s^4 = (15a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2) = 13 \cdot 37 \cdot (a^2 + b^2)$. Kokeilemalla (riittää, kun tutkitaan tapaukset $1 \leq r \leq 6$) nähdään helposti, että jos r ei ole 13:lla jaollinen, niin r^4 on kongruentti 1:n, 3:n tai 9:n kanssa modulo 13. $r^4 + s^4$ on kongruentti 0:n kanssa modulo 13 vain, jos sekä r että s ovat jaollisia 13:lla. Samoin kokeilemalla (tapaukset $1 \leq r \leq 18$) nähdään, että $r^4 \equiv 1, 16, 7, 34, 33, 1, 33, 26, 12, 10, 26, 16, 34, 10, 9, 9, 12, 7 \bmod 37$. Nähdään heti, että $r^4 + s^4$ on jaollinen 37:llä vain, jos sekä r että s ovat jaollisia 37:llä. Siis $r \geq 481$ ja $s \geq 481$. Kun asetetaan $a = 481 \cdot 31$ ja $b = 481$, nähdään, että $r = 481$ voidaan saavuttaa. Kysytty pienin neliö on siis 481^2.

1996.5. Oletuksen mukaisista yhdensuuntaisuusehdoista seuraa, että $\angle BAF = \angle EDC = \alpha$, $\angle CBA = \angle FED = \beta$ ja $\angle AFE = \angle DCB = \gamma$. Laajennetun sinilauseen perusteella

$$2R_A = \frac{BF}{\sin\alpha}, \quad 2R_C = \frac{BD}{\sin\gamma}, \quad 2R_E = \frac{DF}{\sin\beta}. \qquad (1)$$



Olkoot P ja S A:n kohtisuorat projektiot suorilla BC ja FE ja Q ja R vastaavasti D:n kohtisuorat projektiot näillä suorilla. Merkitään kuusikulmion sivujen AB, BC, CD, DE, EF ja FA pituuksia kirjaimilla a, b, c, d, e ja f. Silloin $PS = a\sin\beta + f\sin\gamma = QR = d\sin\beta + c\sin\gamma$, ja

$$2\,BF \geq (a\sin\beta + f\sin\gamma) + (c\sin\gamma + d\sin\beta).$$

Samoin

$$2\,DB \ge (c\sin\alpha + b\sin\beta) + (f\sin\alpha + e\sin\beta),$$
$$2\,FD \ge (e\sin\gamma + d\sin\alpha) + (b\sin\gamma + a\sin\alpha).$$

Kun tämä yhdistetään epäyhtälöihin (1) ja otetaan huomioon epäyhtälö $x + x^{-1} \ge 2$, saadaan, niin kuin pitääkin,

$$4(R_A + R_C + R_E) \ge a\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) + b\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + \ldots + f\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)$$
$$\ge 2(a + b + \ldots + f) = 2p.$$

1996.6. Voidaan olettaa, että p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä: jos olisi $(p,\,q) = d > 0$, niin voitaisiin siirtyä tarkastelemaan lukuja $p' = p/d$, $q' = q/d$ ja $x_i' = x_i/d$. Jos indeksejä i, joilla $x_i - x_{i-1} = p$ on k kappaletta, niin indeksejä i, joilla $x_i - x_{i-1} = -q$, on $n - k$ kappaletta. On oltava $kp = (n-k)q$, ja koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, on $k = aq$ ja $(n-k) = ap$ jollakin a. Tästä seuraa, että $n = a(p+q)$; koska $n > p + q$, on $a \ge 2$.

Merkitään $y_i = x_{i+p+q} - x_i$, $0 \le i \le n-p-q$. Jos jokin $y_i = 0$, todistus on valmis. Muussa tapauksessa tarkastellaan lukuja $x_{i+1} - x_i$, $x_{i+2} - x_{i+1}$, $\ldots$, $x_{i+p+q} - x_{i+p+q-1}$. Näistä r kappaletta olkoon $= p$ ja $p + q - r$ kappaletta olkoon $= -q$. Siis $y_i = rp - (p+q-r)q = (p+q)(r-q)$. Toisaalta $y_{i+1} - y_i = (x_{i+p+q+1} - x_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i)$ on joko 0 tai $\pm(p+q)$. Koska

$$y_0 + y_{p+q} + y_{2(p+q)} + \ldots + y_{n-p+q} = x_n - x_0 = 0,$$

ei ole mahdollista, että kaikki $y_{l(p+q)}$:t olisivat positiivisia tai kaikki negatiivisia. Luvuista $y_{l(p+q)}$ jotkin kaksi vierekkäistä ovat siten erimerkkisiä. Koska $y_{l(p+q)}$:t ovat $(p+q)$:n kerrannaisia, ja kahden vierekkäisen erotus on itseisarvoltaan $p + q$, on jonkin y_i:n oltava nolla.

1997.1. (a) Voimme olettaa, että kolmion kärjet ovat $(0,\,0)$, $(0,\,m)$ ja $(m,\,n)$. Oletetaan nyt ja myöhemmin, että neliö, jonka keskipiste on $\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$, on musta. Tällöin mustia ovat täsmälleen ne neliöt, joiden keskipiste on $\left(\frac{1}{2} + k,\,\frac{1}{2} + j\right)$, missä $k + j$ on parillinen. Täydennetään kolmio suorakaiteeksi, jonka neljäs kärki on $(0,\,n)$. Jos m ja n ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia, 180°:n kierto kolmioiden yhteisen hypotenuusan keskipisteen ympäri kuvaa kolmion toisikseen, jokaisen valkean neliön valkeaksi neliöksi ja jokaisen mustan neliön mustaksi neliöksi. Mustan ja valkean alan erotus on kummassakin kolmiossa sama. Jos mn on parillinen, suorakaiteessa on yhtä monta valkeaa neliötä kuin mustaa, joten kummassakaan kolmiossa ei voi olla toista väriä enemmän kuin toista. Tässä tapauksessa $S_1 - S_2 = 0 = f(m,\,n)$. Jos mn on pariton, on suorakaiteessa mustia ruutuja yksi enemmän kuin valkoisia. Tässä tapauksessa $|S_1 - S_2| = \dfrac{1}{2}$.

(b) Oletetaan, että n on pariton, m parillinen. Kolmiossa, jonka kärjet ovat $(0, 0)$, $(m, 0)$ ja $(m, n-1)$ on valkoisen ja mustan osan ala sama (tämä pätee myös, kun $n = 1$). Mustan tai valkean ylimäärä sisältyy siten kokonaan kolmioon, jonka kärjet ovat $(0, 0)$, $(m, n-1)$ ja (m, n). Tämän kolmion ala on $\frac{1}{2}m \le \frac{1}{2}\max(m, n)$.

(c) Arvioidaan itseisarvoa $|S_1 - S_2|$ tapauksessa, jossa m on parillinen ja $n = m + 1$. Aikaisemman perusteella tiedetään, että $|S_1 - S_2|$ on sama kuin mustan ja valkean alan erotus kolmiossa T, jonka kärjet ovat $(0, 0)$, (m, m) ja $(m, m+1)$. Suora $y = \frac{m+1}{m}x$ leikkaa suorat $x = k$ ja $y = k$ pisteissä $x = \frac{(m+1)k}{m}$ ja $y = \frac{mk}{m+1}$. Tämän perusteella on helppo laskea, että suorien $x = k$ ja $x = k+1$ väliin jäävän T:n valkean osan ala on

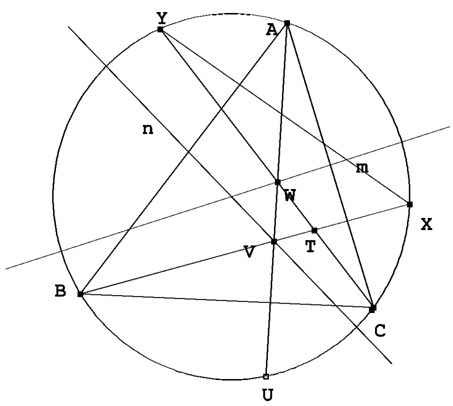
$$\frac{1}{2}\left(k - \frac{mk}{m+1}\right)\left(\frac{(m+1)k}{m} - k\right) = \frac{k^2}{2m(m+1)}.$$

T:n valkean osan kokonaisala on siis

$$\frac{1}{2m(m+1)}\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{2m+1}{12} < \frac{m}{6}$$

(koska $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$). Mustaa alaa on siis oltava enemmän kuin $\frac{m}{3}$, joten mustan ja valkean alan erotus on suurempi kuin $\frac{m}{6}$. Tämä on suurempi kuin mikä hyvänsä C, kun m on tarpeeksi suuri.

1997.2. Koska A on ABC:n kulmista pienin, AC:n keskinormaali leikkaa myös sivun AB ja AB:n keskinormaali sivun AC. Tästä seuraa, että pisteet V ja W ovat kolmion ABC sisäpisteitä ja T samoin. Leikatkoon suora BT kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä X ja suora CT pisteessä Y. Koska AC:n keskinormaali n on ympyrän halkaisija, peilaus n:ssä vie janan AU janaksi CY (A peilautuu C:ksi, W pysyy paikallaan, ja U:n kuva on CW:n ja ympyrän leikkauspiste, siis Y. Siis $AU = YC$. Samoin osoitetaan (peilataan AB:n keskinormaalissa m), että $AU = BX$. Tästä seuraa, että kolmiot BCX ja YXC ovat yhtenevät (yhteinen sivu XC ja $\angle CBX = \angle XYC$). Siis $XY = BC$. Edelleen kolmiot BCT ja YXT ovat yhtenevät (kks). Siis $YT = BT$ ja $AU = YC = YT + TC = BT + TC$.



1997.3. Olkoon $p = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ mielivaltainen jonon $p_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ permutaatio. Merkitään $s(p) = y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n$. Jos p' on se p_0:n permutaatio, jossa alkiot ovat täsmälleen käänteisessä järjestyksessä, niin $|s(p_0) + s(p')| = |(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) +$

$(x_n + 2x_{n-1} + \cdots + nx_1)| = (n+1)|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = n+1$. Jos jompikumpi luvuista $|s(p_0)|$, $|s(p')|$ on $\le \dfrac{n+1}{2}$, tehtävä on ratkaistu. Ellei näin ole, $s(p_0)$ ja $s(p')$ ovat erimerkkiset. Permutaatio p_0 voidaan muuntaa permutaatioksi p' tekemällä ketju peräkkäisiä muunnoksia, joissa kahden vierekkäisen alkion paikka vaihdetaan: vaihdetaan esim. ensin x_1 ja x_2, sitten x_1 ja x_3, jne., kunnes x_1:n ja x_n:n vaihdon jälkeen x_1 on viimeisenä, siirretään sitten x_2 samalla menetelmällä toiseksi viimeiseksi jne. Jos $p_i = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ja $p_{i+1} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ovat permutaatioita, joissa $y_k = z_{k+1}$, $y_{k+1} = z_k$ ja $y_j = z_j$, kun $j \ne k$, $k+1$, niin $|s(p_i) - s(p_{i+1})| = |ky_k + (k+1)y_{k+1} - kz_k - (k+1)z_{k+1}| = |y_{k+1} - y_k| \le |y_k| + |y_{k+1}| \le n+1$. Jos nyt $p_0, p_1, \ldots, p_m = p'$ on ketju permutaatioita, jossa kaksi peräkkäistä saadaan toisistaan kahden vierekkäisen alkion vaihdolla, niin luvut $s(p_0)$, $s(p_1)$, $\ldots$, $s(p_m)$ eroavat toisistaan kukin enintään määrällä $n+1$, mutta $s(p_0)$ ja $s(p_m)$ ovat suljetun välin $I = \left[-\dfrac{n+1}{2}, \dfrac{n+1}{2}\right]$ eri puolilla sijaitsevia lukuja. Ainakin jonkin luvuista $s(p_i)$ on siten kuuluttava väliin I.

1997.4. (a) Olkoon $n > 1$ mielivaltainen ja olkoon $A = (a_{ij})$ $n \times n$-hopeamatriisi. A:n päälävistäjällä on enintään n eri alkiota, joten on olemassa $x \in S$, joka ei ole A:n päälävistäjällä. Sanomme i:nnen vaaka- ja i:nnen pystyrivin yhdistettä *ristiksi* i. Olkoon $x = a_{ij}$. Sanomme, että x *liittää* ristin i ja ristin j. Koska x esiintyy jokaisessa ristissä vain kerran, x ei voi liittää ristiä i mihinkään muuhun ristiin. Toisaalta x liittää jokaisen ristin johonkin toiseen. Tästä seuraa, että ristien määrä hopeamatriisissa on aina parillinen; 1997 puolestaan on pariton.

(b) Matriisi

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

on 2×2-hopeamatriisi. Olkoon A_n $n \times n$-hopeamatriisi. Olkoon B_n matriisi, joka saadaan lisäämällä $2n$ jokaiseen A:n alkioon, ja olkoon C_n matriisi, joka saadaan B_n:stä korvaamalla jokainen B_n:n päälävistäjän alkio luvulla $2n$. Tällöin

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & A_n \end{pmatrix}$$

on $2n \times 2n$-hopeamatriisi. Jos nimittäin $i \le n$, niin A_{2n}:n ristissä i ovat ensinnäkin kaikki luvut $1, 2, \ldots 2n-1$ (A_n:n osuus); $1 + 2n, 2 + 2n, \ldots, 2n - 1 + 2n = 2(2n) - 1$ (B_n:n ja C_n:n alkiot, jotka ovat muotoa A_n:n alkio $+\ 2n$) sekä $2n$ (C_n:n lävistäjäalkio). Näin ollen $n \times n$ hopeamatriiseja on olemassa ainakin kaikilla $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ [Hopeamatriisinimityksen innoittajina olivat Argentiina ja Mar del Plata: hopea on latinaksi *argentum* ja espanjaksi *plata*]

1997.5. Olkoot a ja b tehtävän yhtälön toteuttavia kokonaislukuja. Luvuilla a ja b on samat alkutekijät: $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$, α_i, $\beta_i \ge 1$. Koska yhtälön molempien puolien alkutekijöihin jako on sama, on oltava $\alpha_i b^2 = \beta_i a$ kaikilla i. Siis

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{a}{b^2} = k$$

kaikilla i. Tästä seuraa, että $a = b^k$ ja edelleen $kb^2 = b^k$ ja $k = b^{k-2}$. Koska a ja b ovat kokonaislukuja, k on rationaaliluku. Kokonaisluvun ratonaalilukueksponenttinen potenssi on rationaalinen vain, kun eksponentti on kokonaisluku. Siis k on kokonaisluku. Jos $k = 1$, niin $b = 1$ ja $a = 1$. Jos $k = 2$, saadaan $2 = b^0 = 1$. Siis $k \neq 2$. Jos $k = 3$, saadaan $3 = b^1 = b$, $a^9 = 3^a$, josta $a = 3^3 = 27$. Jos $k = 4$, saadaan $4 = b^2$, $b = 2$, $a^4 = 4^a$, $a = 2^4 = 16$. Kun $k \geq 5$, yhtälöllä $k = b^{k-2}$ ei ole ratkaisuja, koska $k < 2^{k-2}$, kun $k \geq 5$.

1997.6. Havaitaan helposti, että $f(2n) = f(2n+1)$, koska

$$2n = \sum a_i 2^{b_i} \Leftrightarrow 2n + 1 = \sum a_i 2^{b_i} + 1.$$

Vastaavasti jokainen $2n$:n esitys joko sisältää ykkösiä, ja tällaisia esityksiä on täsmälleen yhtä paljon kuin $2n-1$:n esityksiä, tai sitten se ei sisällä yhtään ykköstä, jolloin kahdella jakamalla saadaan aina n:n esitys ja kääntäen. Siis $f(2n) = f(2n-1) + f(n) = f(2n-2) + f(n)$. Selvästi $f(1) = 1$. Määritellään $f(0) = 1$. f on ei-vähenevä. Nyt $f(0) + f(1) + \ldots f(n) = f(0) + (f(2) - f(0)) + \ldots + (f(2n) - f(2n-2)) = f(2n)$, joten $f(2n) < 2 + (n-1)f(n) < nf(n)$, kun $n \geq 2$. Siis $f(2^n) \leq 2^{n-1}f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} f(2^{n-2}) \leq 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} f(2) = 2^{(n-1)n/2} \cdot 2 < 2^{n^2/2}$, kun $n \geq 3$.

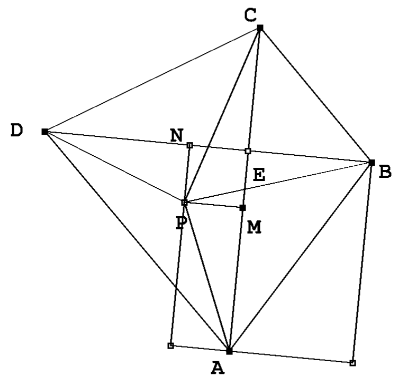
Vasemmanpuoleisen epäyhtälön todistamiseksi havaitaan, että kun a ja b ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia ja $b \geq a$, niin

$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a). \tag{1}$$

Näin on varmasti, jos a ja b ovat parillisia; jos ne ovat parittomia, $b = 2j-1$, $a = 2i-1$, $j \geq i$, niin vasen puoli on $f(j)$ ja oikea $f(i)$, ja väite seuraa f:n kasvavuudesta. Olkoot nyt $r \geq k \geq 1$ ja r parillinen; sijoitetaan kaavaan (1) peräkkäin $a = r-j$, $b = r+j$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ ja lasketaan epäyhtälöt puolittain yhteen; saadaan $f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1)$ ja (koska r on parillinen) $f(r+k) + f(r-k+1) \geq 2f(r)$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, r$. Kun nämä r epäyhtälöä lasketaan yhteen, saadaan $f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) \geq 2rf(r)$ eli $f(4r) - 1 \geq 2rf(r)$, $f(4r) > 2rf(r)$ kaikilla parillisilla $r \geq 2$.Erityisesti $f(2^m) \geq 2^{m-1}f(2^{m-2})$, kun $m \geq 3$. Jos m on parillinen, saadaan $f(2^m) > 2^{(m-1)+(m-3)+\ldots+1} f(1) = 2^{m^2/4}$. Jos m on pariton, saadaan vastaavasti $f(2^n) > 2^{(n^2-1)/4} f(2) = 2^{(n^2-1)/4+1} > 2^{n^2/4}$.

1998.1. Olkoon E AC:n ja BD:n leikkauspiste ja M, N P:n projektiot AC:llä ja BD:llä. Kolmion APB ala on

$$AE \cdot BN - \frac{1}{2}(AE \cdot EB + AM \cdot EN + ME \cdot NB) = \frac{1}{2}(AM \cdot BN + EM \cdot EN).$$



Samoin saadaan kolmion CPD alaksi $\frac{1}{2}(MC \cdot ND + EM \cdot EN)$. Kolmioiden alojen erotus on $\frac{1}{2}(AM \cdot BN - MC \cdot ND)$. Oletetaan, että $ABCD$ on jännenelikulmio. Silloin piste P on $ABCD$:n ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja pisteet M ja N ovat jänteiden AC ja BD keskipisteet. Edellä laskettu kolmioiden alojen erotus on 0. Oletetaan toisaalta, että kolmioiden alat ovat yhtä suuret eli että $AM \cdot BN = MC \cdot ND$. Oletetaan, että $AP > PC$. Silloin $AM > MC$, ja koska $PB > PD$, niin myös $BN > ND$. Mutta nyt olisi $AM \cdot BN > MC \cdot ND$. Vastaavasti oletus $AP < PC$ johtaa ristiriitaan. Siis $AP = PC$, eli nelikulmion kaikki kärjet ovat yhtä etäällä pisteestä P, joten $ABCD$ on jännenelikulmio.

1998.2. Lasketaan kahdella tavalla sellaisten tilanteiden lukumäärä, joissa kaksi tuomaria antaa jollekin kilpailijalle saman arvostelun. Jos kilpailija saa x hyväksyntää ja $b - x$ hylkäystä, pareja, joilta hän saa saman arvostelun, on

$$\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2} = \frac{x(x-1) + (b-x)(b-x-1)}{2} = x(x-b) + \frac{b^2-b}{2} \geq \frac{b^2-b}{2} - \frac{b^2-1}{4}$$
$$= \frac{(b-1)^2}{4}$$

kappaletta (x voi olla vain kokonaisluku, joten lauseke minimoituu, kun $x = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}$). Jonkin tuomariparin johonkin kilpailijaan kohdistamia samanlaisia arvosteluja on siis ainakin

$$\frac{a(b-1)^2}{4}$$

kappaletta. Toisaalta tämä luku ei voi ylittää tuomariparien määrää $\binom{b}{2}$ kerrottuna k:lla. Siis

$$k\frac{b}{2} = \frac{kb(b-1)}{2} \geq \frac{a(b-1)^2}{4},$$

mikä on yhtäpitävää väitöksen kanssa.

1998.3. Jos $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$, missä $p_1 < p_2 < \ldots < p_j$ ovat alkulukuja, niin $d(n) = (k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_j+1)$ ja $d(n^2) = (2k_1+1)(2k_2+1)\cdots(2k_j+1)$. Jos $d(n^2)/d(n) = k$ on kokonaisluku, niin k on välttämättä pariton. Osoitetaan, että jokaisella parittomalla k:lla on esitys $\frac{d(n^2)}{d(n)}$. Koska $d(1) = d(1^2) = 1$, luvulla 1 on tämä ominaisuus. Osoitetaan että jos luvulla x on esitys $d(n^2)/d(n)$, niin jokaisella luvulla 2^kx-1 on tällainen esitys. Olkoon

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = x.$$

Olkoon p alkuluku, joka ei ole n:n tekijä. Silloin

$$\frac{d(p^{(x-1)2}n^2)}{d(p^{x-1}n)} = \frac{(2x-1)x}{x} = 2x-1.$$

Väite on tosi, kun $k=1$. Jos $k>1$, valitaan

$$m = p_1^{2^{k-1}3x-2}p_2^{2^{k-2}3^2}\cdots p_{k-1}^{2\cdot 3^{k-1}x-2}p_k^{3^{k-1}x-1}n,$$

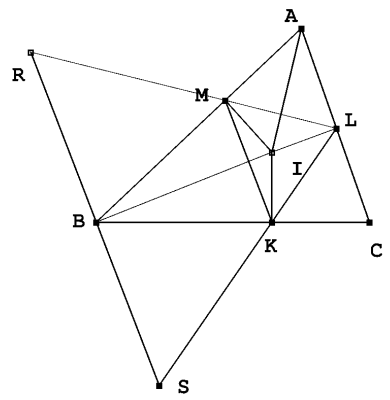
missä p_1, p_2 ..., p_n ovat eri alkulukuja, jotka eivät ole n:n tekijöitä. Tällöin

$$\frac{d(m^2)}{d(m)} = \frac{2^k3x-3}{2^{k-1}3x-1}\frac{2^{k-1}3^2x-3}{2^{k-2}3^2x-1}\cdots\frac{2^23^{k-1}x-3}{2\cdot 3^{k-1}x-1}\frac{2\cdot 3^{k-1}x-1}{3^{k-1}x}x = 2^kx-1.$$

Nyt on helppo todistaa induktiolla, että jokaisella parittomalla luvulla on haluttu esitys. Jos se on kaikilla parittomilla luvuilla $< n$, niin kirjoitetaan $n = 2^kx-1$, missä $x < n$ on pariton luku; väite seuraa edellä sanotusta.

1998.4. Jos ab^2+b+7 on luvun a^2b+a+b tekijä, niin se on myös luvun $b(a^2b+a+b)-a(ab^2+b+7) = b^2-7a$ tekijä. Koska $ab^2+b+7 \ge b^2-7a$, niin $ab^2+b+7|b^2-7a$ vain, jos $b^2-7a \le 0$. Jaollisuus on voimassa, jos $b^2-7a=0$. Koska a ja b ovat kokonaislukuja, on oltava $b=7k$, $a=7k^2$. Tämä on ratkaisu jokaisella $k\in\mathbb{N}^+$. Jos $b^2-7a<0$, ab^2+b+7 on tekijä positiivisessa luvussa $7a-b^2 \le 7a$. Selvästikin tämä voi olla mahdollista vain, jos $b=1$ tai jos $b=2$. Tapaus $b=1$: $a+8|7a-1$. Koska $7a-1 = 7(a+8)-57$, on luvun $a+8$ oltava jokin 57:n tekijä. Koska $57 = 3\cdot 19$, luvut $a=49$ ja $a=11$ ovat mahdollisia; ne myös toteuttavat tehtävän ehdon. Tapaus $b=2$: $4a+9|7a-4$; nyt $4(7a-4) = 7(4a+9)-79$. Alkuluku 79 ei ole muotoa $4a+9$, joten tässä tapauksessa ei saada ratkaisuja.

1998.5. Olkoot kolmion ABC kulmat 2α, 2β ja 2γ. Tarkastellaan kolmion MRB kulmia. Jännenelikulmiosta $AMIL$ nähdään, että $\angle LMI = \alpha$. Tästä seuraa, että $\angle RMB = 90^\circ - \alpha$. Vastaavasti nähdään, että $\angle RBM = 90^\circ - \beta$, joten $\angle MRB = 90^\circ - \gamma$. Edelleen $\angle RBI$ on suora. Sinilauseen nojalla



$$BR = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}MB.$$

Symmetrian vuoksi kolmiosta BKS saadaan samoin

$$BS = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}KB = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}MB.$$

Käytetään nyt Pythagoraan lausetta suorakulmaisiin kolmioihin IBR ja IBS ja kosinilausetta kolmioon RSI:

$$
\begin{aligned}
&2\cos(\angle RIS)\cdot IR\cdot IS = IR^2 + IS^2 - RS^2\\
&= (BI^2 + BR^2) + (BI^2 + BS^2) - (BR + BS)^2 = 2BI^2 - 2BM^2.
\end{aligned}
$$

Koska BIM on suorakulmainen kolmio, viimeinen erotus on $2\cdot MI^2$ ja siis positiivinen. Siis kulman RIS kosini on positiivinen, joten kulma on terävä.

1998.6. Olkoon $f(1) = a$. Silloin $f(f(s)) = f(1^2f(s)) = sf(1)^2 = a^2s$ ja $f(at^2) = f(t^2f(1)) = f(t)^2$. Edelleen $(f(s)f(t))^2 = f(s)^2f(at^2) = f(s^2f(f(at^2))) = f(s^2a^2(at^2)) = f(a(ats)^2) = f(ast)^2$. Siis $f(s)f(t) = f(ast)$ ja edelleen $af(t) = f(at)$, $af(st) = f(ast) = f(s)f(t)$. Tästä seuraa induktiolla, että $f(s)^k = a^{k-1}f(s^k)$. Osoitetaan, että $a|f(s)$. Jos p on alkuluku ja α suurin kokonaisluku, jolla $p^\alpha|a$, β suurin kokonaisluku, jolla $p^\beta|f(s)$, niin $p^{(k-1)\alpha}$ on suurin p:n potenssi, joka on a^{k-1}:n tekijä ja $p^{k\beta}$ suurin p:n potenssi, joka on $f(s)^k$:n tekijä. Siis $(k-1)\alpha \le k\beta$. Tämä epäyhtälö toteutuu kaikilla k, joten on oltava $\alpha \le \beta$. Olkoon nyt $g(s) = \dfrac{1}{a}f(s)$. Silloin $g(a) = \dfrac{1}{a}f(f(1)) = \dfrac{a^2}{a} = a$, $a^2g(st) = af(st) = f(s)f(t) = a^2g(s)g(t)$ eli $g(st) = g(s)g(t)$. Lisäksi $a^2g(g(s)) = ag(a)g(g(s)) = ag(ag(s)) = ag(f(s)) = f(f(s)) = a^2s$. Siis $g(g(s)) = s$. Siis $g(t^2g(s)) = g(t^2)g(g(s)) = sg(t)^2$. Siis g toteuttaa saman funktionaaliyhtälön kuin f; $f(1998)$:n pienintä arvoa etsittäessä voitaan näin ollen rajoittua funktioihin f, joille $f(1) = 1$, ts. tyyppiä g oleviin funktioihin. Osoitetaan, että $g(p)$ on alkuluku, jos p on alkuluku. Olkoon $g(p) = uv$. Silloin $g(u)g(v) = g(uv) = g(g(p)) = p$, joten esimerkiksi $g(v) = 1$. Mutta $v = g(g(v)) = g(1) = 1$. Tämä on mahdollista kaikille $g(p)$:n tekijöihin jaoille vain, jos $g(p)$ on alkuluku. g:n multiplikatiivisuuden perusteella $g(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}) = g(p_1^{\alpha_1})g(p_2^{\alpha_2})\cdots g(p_k^{\alpha_k})$. Ehdon $g(g(s)) = s$ nojalla g on injektio ja saa siis eri alkuluvuilla eri arvot. Siis $g(1998) = g(2\cdot 3^3\cdot 37) = g(2)g(3)^3g(37)$ on mahdollisimman pieni, kun $g(3) = 2$, $g(2) = 5$ ja $g(37) = 3$; tällöin $g(1998) = 120$. Toisaalta voidaan määritellä ehdot toteuttava g asettamalla $g(2) = 5$, $g(3) = 2$, $g(37) = 3$, $g(5) = 37$ ja $g(p) = p$, jos p on alkuluku, joka ei ole 2, 3, 5 eikä 37. Kysytty pienin arvo on siis 120.

1999.1. Olkoon S tehtävän ehdon täyttävä joukko ja monikulmio $S' = A_1A_2\ldots A_n$ pienin S:n sisältävä kupera joukko. Monikulmion kärjet ovat S:n pisteitä. Jos l on S:n symmetria-akseli, l on myös S':n symmetria-akseli, ja jokainen peilaus, jossa S kuvautuu itselleen, kuvaa myös S':n itselleen.. Oletetaan, että jokin S:n piste B olisi S':n sisällä. Silloin peilaus, jossa $A_1 \mapsto B$ ei kuvaisi S':a itselleen. Siis $S' = S$. Mitkään kolme S:n pistettä eivät ole samalla suoralla. Jos X, Y ja Z olisivat kolme tällaista pistettä ja l ja m janojen XY ja YZ keskinormaalit, niin peilaukset P_l ja P_m suorien l ja m yli kuvaisivat S:n itselleen. Toisaalta yhdistetty kuvaus $P_m\circ P_l$ on translaatio, jossa $X \mapsto Z$. Mutta joukko, joka kuvautuu translaatiossa itselleen, ei voi olla äärellinen. Peilaus, jossa $A_1 \mapsto A_3$ pitää välttämättä pisteen A_2 paikallaan. Mutta tästä seuraa, että $A_1A_2 = A_2A_3$, ja symmetrian nojalla kaikki monikulmion sivut ovat yhtä pitkiä. Olkoon nyt $n \ge 4$. Peilaus, jossa $A_1 \mapsto A_4$ kuvaa A_2:n A_3:lle. Mutta välttämättä $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4$. Siis S on säännöllinen n-kulmio. – On selvää, että jokainen säännöllinen n-kulmio toteuttaa tehtävän ehdon.

1999.2. Merkitään

$$S = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$
$$T = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Silloin yksinkertaisen arvion ja aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella saadaan

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j(x_i^2 + x_j^2) \le \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_jS = \frac{1}{2}S\cdot 2\sum_{i<j} x_ix_j \le \frac{1}{2}\left(\frac{S + 2\sum_{i<j} x_ix_j}{2}\right)^2 = \frac{T^4}{8}.$$

(*Kiinan olympiajoukkueen jäsenen Ruochuan Liun ratkaisu.*)

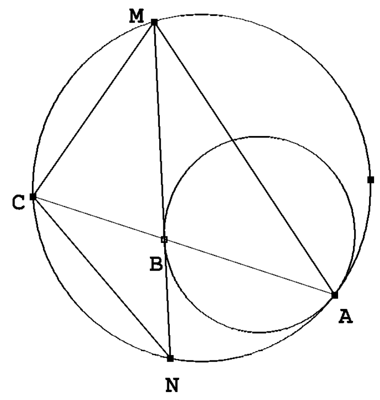
1999.3. Olkoon $n = 2k$. Reunaan rajoittuvat $4(n-1)$ ruutua olkoot valkoisia, näihin rajoittuvat $4(n-3)$ ruutua mustia, seuraavat $4(n-5)$ valkoisia jne. Valkoisten ruutujen määrä on joko $4(n-1+n-5+\cdots+1) = 4\frac{n}{2}\frac{n+2}{4} = 2k(k+1)$ (jos k on pariton) tai $4(n-1+n-5+\cdots+3) = 4\frac{n+2}{2}\frac{n}{4} = 2k(k+1)$ (jos k on parillinen. Koska jokaisella ruudulla on naapurina tasan kaksi valkoista ruutua, on merkittävä ainakin $k(k+1)$ ruutua, jotta jokaisella valkoisella ruudulla olisi merkitty naapuri. Merkittävien ruutujen määrä on siis ainakin $k(k+1)$. Aletaan nyt merkitä valkoisia ruutuja siten, että jokaisen valkoisen renkaan vasemman yläkulman kaksi vierekkäistä ruutu merkitään, seuraavat kaksi jätetään merkitsemättä, seuraavat kaksi merkitään jne. Näin jokainen valkoinen ruutu on merkityn ruudun vieressä. Mutta myös jokainen musta ruutu on merkityn ruudun vieressä: mustan renkaan vasen yläkulma on ulkopuolisen valkean renkaan toisen merkityn ruudun vieressä, myötäpäivään seuraavat kaksi sisäpuolisen valkean renkaan kahden ensimmäisen merkityn ruudun vieressä jne. (*Australian olympiajoukkueen jäsenen George Chun ratkaisu.*)

1999.4. Parit $(1, p)$ ja $(2, 2)$ toteuttavat tehtävän ehdon. Muissa ratkaisuissa on oltava $p \ge 3$. Koska $(p-1)^n + 1$ on pariton, n on pariton ja siis $n < 2p$. Olkoon q n:n pienin alkutekijä. q on pariton. Koska $q|(p-1)^n$, niin $(p-1)^n \equiv -1 \mod q$. Toisaalta n:llä ja $q-1$:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, joten on olemassa kokonaisluvut x ja y, joille $xn + y(q-1) = 1$. Siis $p - 1 \equiv (p-1)^{xn}\cdot(p-1)^{y(q-1)} \mod q$. Mutta yllä olevan perusteella tulon edellinen tekijä on kongruentti $(-1)^k$:n ja Fermat'n pienen lauseen nojalla jälkimmäinen puolestaan kongruentti 1:n kanssa. Koska q on pariton, k on pariton. Siis $p - 1 \equiv -1 \mod q$. Mutta tämä merkitsee, että p on jaollinen q:lla, joten $p = q$. Edelleen $p|n$, ja koska $n < 2p$, $n = p$. Luku p toteuttaa näin ollen ehdon $p^{p-1}|(p-1)^p + 1$. Mutta

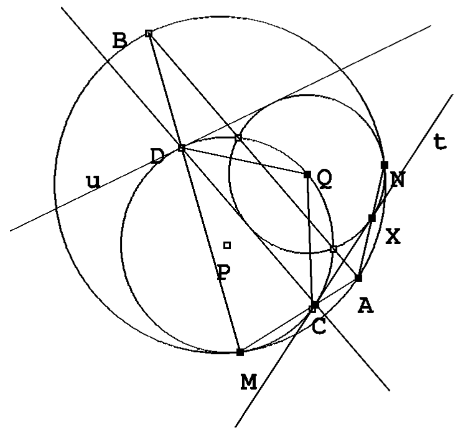
$$(p-1)^p + 1 = \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}(-1)^jp^{p-j} = p^2\left(\sum_{j=0}^{p-2}\binom{p}{j}(-1)^jp^{p-j-2} + 1\right).$$

Koska sulkulauseke ei ole jaollinen p:llä, $p - 1 \le 2$ eli $p \le 3$. $n = p = 3$ toteuttaa ehdon. Ratkaisuja ovat siis parit $(2, 2)$, $(3, 3)$ ja $(1, p)$, p alkuluku.

1999.5. Todistetaan ensin aputulos: Jos y on ympyrä, y_1 toinen ympyrä, joka sivuaa y:tä sisäpuolisesti pisteessä A, NM y:n jänne, joka sivuaa y_1:tä pisteessä B ja C sen y:n kaaren keskipiste, joka ei sisällä A:ta, niin A, B ja C ovat samalla suoralla ja $CA \cdot CB = CM^2$. Todistus perustuu A-keskiseen homotetiaan, joka vie y_1:n y:ksi ja NM:n NM:n suuntaiseksi y:n tangentiksi; tämän tangentin sivuamispiste on C, joten C on B:n kuva A-keskisessä homotetiassa. Koska C on kaaren MN keskipiste, kulmat $\angle CMB = \angle CNM$ ja $\angle CAM$ ovat yhtä suuret. Siis kolmiot ACM ja MCB ovat yhdenmuotoiset, mistä seuraa $CA \cdot CB = CM^2$.



Olkoot nyt P ja Q Γ_1:n ja Γ_2:n keskipisteet ja t, u ympyröiden yhteiset tangentit. Aputuloksen perusteella tangenttien Γ:sta leikkaamien kaarien (joilla Γ:n ja Γ_1:n ja Γ_2:n sivuamispisteet eivät ole) keskipisteillä on sama potenssi Γ_1:n ja Γ_2:n suhteen. Pisteet, joilla on sama potenssi kahden toisiaan leikkaavan ympyrän suhteen ovat ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran (eli ympyröiden *radikaaliakselin*) pisteet. Tästä seuraa, että mainitut kaarien keskipisteet ovat A ja B. Aputuloksen perusteella edelleen C ja D ovat Γ_1:n ja t:n sekä u:n sivuamispisteet. Jos H on M-keskinen homotetia, joka kuvaa Γ_1:n Γ:ksi, niin CD kuvautuu H:ssa AB:ksi. Siis $AB \| CD$, $CD \perp PQ$ ja Q on Γ_1:n kaaren CD keskipiste. Olkoon X t:n ja Γ_2:n sivuamispiste. Silloin $\angle XCQ = \angle DCQ$. Q on siis kulman XCD puolittajalla. Mutta tästä seuraa, että CD on Γ_2:n tangentti.



1999.6. Olkoon A $\mathbb{R}$:n kuva kuvauksessa f. Olkoon $a = f(0)$. Siis

$$f(-a) = f(a) + a - 1.$$

Tästä nähdään, että $c \neq 0$. Jos $x = f(y)$, niin

$$a = f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1,$$

joten

$$f(x) = \frac{1+a}{2} - \frac{1}{2}x^2$$

kaikilla $x \in A$. Osoitetaan, että jokainen reaaliluku voidaan kirjoittaa kahden A:han kuuluvan luvun erotuksena: jos tehtävän ehtoon asetetaan $y = 0$, saadaan

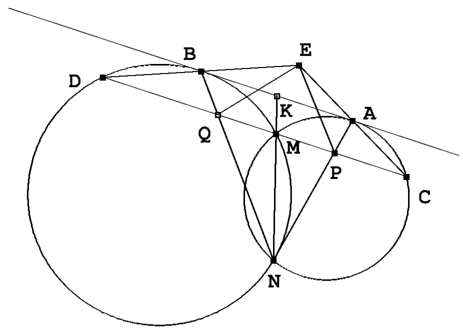
$$f(x - a) - f(x) = f(a) + ax - 1.$$

Koska $a \neq 0$, lukujen $f(x-a)-f(x)$ joukko on koko reaalilukujen joukko. Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on siis luvut y_1, $y_2 \in A$ siten, että $x = y_2 - y_1$. Alkuperäisen ehdon perusteella

$$f(x) = f(y_2 - y_1) = f(y_1) + y_1y_2 + f(y_2) - 1$$
$$= \frac{1}{2}(1+a) - \frac{y_1^2}{2} + y_1y_2 + \frac{1}{2}(1+a) - \frac{y_2^2}{2} - 1 = a - \frac{(y_2-y_1)^2}{2} = a - \frac{x^2}{2}.$$

On oltava $\frac{1}{2}(a+1) = a$ eli $a = 1$. Ainoa mahdollinen funktio on siis $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. – On helppo tarkistaa, että se myös on ratkaisu.

2000.1. Olkoon K suorien AB ja MN leikkauspiste. Lasketaan K:n potenssi molempien ympyröiden suhteen: $AK^2 = KM \cdot KN = BK^2$. Siis $AK = BK$. Koska $PQ \| AB$, on myös M janan PQ keskipiste. Väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että $EM \perp PQ$. Mutta $\angle EAB = \angle ECM = \angle BAM$ ja $\angle EBA = \angle EDM = \angle ABM$. Suorat AE ja BE ovat suorien AM ja BM peilikuvia suorassa AB, joten E ja M ovat toistensa peilikuvia. Siis $EM \perp AB$, joten $EM \perp PQ$.



2000.2. Koska $abc = 1$, voidaan valita positiiviset reaaliluvut x, y ja z niin, että

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z} \quad \text{ja} \quad c = \frac{z}{x}.$$

Epäyhtälö saa muodon

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \le xyz.$$

Vasemman puolen kolmesta tekijästä enintään yksi on negatiivinen, koska jokaisen kahden summa on positiivinen. Jos yksi tekijä on negatiivinen, epäyhtälö toteutuu. Jos kaikki tekijät ovat positiivisia, voidaan käyttää aritmeettis-geometrista epäyhtälöä:

$$\sqrt{(x-y+z)(x+y-z)} \le \frac{1}{2}(x-y+z+x+y-z) = x$$
$$\sqrt{(x+y-z)(y+z-x)} \le \frac{1}{2}(x+y-z+y+z-x) = y$$
$$\sqrt{(x-y+z)(z+y-x)} \le \frac{1}{2}(x-y+z+z+y-x) = z$$

Kun nämä epäyhtälöt kerrotaan keskenään, saadaan väitetty epäyhtälö.

2000.3. Muodostetaan siirtymäjono niin, että äärimmäisenä vasemmalla oleva kirppu hyppää äärimmäisenä oikealla olevan kirpun yli. Olkoon D_k suurin kirppujen välinen etäisyys ja d_k pienin kirppujen välinen etäisyys k:n siirtymän jälkeen. Selvästi $D_k \ge (n-1)d_k$. $k+1$:nen siirto tuottaa kirppujen välisen etäisyyden $\lambda D_k \ge \lambda(n-1)d_k$, joka on samalla pienin hypänneen kirpun ja muiden kirppujen etäisyyksistä. Tästä seuraa, että $d_{k+1} \ge \min\{d_k, \lambda(n-1)d_k$. Jos $\lambda(n-1) \ge 1$, jokaisen siirron jälkeen vasemmanpuoleisin kirppu on siirtynyt ainakin d_0:n verran oikealle, joten äärellisen monen siirtymän jälkeen kaikki kirput ovat pisteen M oikealla puolella.

Olkoon sitten $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$. Voidaan olettaa, että alussa vasemmanpuoleinen kirppu on origossa. Olkoon k:nnen siirtymän jälkeen kirppujen sijaintien summa s_k ja äärimmäisenä oikealla olevan kirpun sijainti w_k. Silloin $s_k \le nw_k$. Jos $k+1$:ssä siirtymässä kirppu siirtyy pisteestä, jonka koordinaatti on a pisteeseen, jonka koordinaatti on c ylittäen kirpun pisteessä B, jonka koordinaatti on b, niin $s_{k+1} = s_k - a + c$ ja $c - b = \lambda(b-a) = \lambda(b-c+c-a)$, joten $c - a = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}(c-b)$. Siis

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b).$$

Jos $w_{k+1} = c$, niin $b \le w_k$, joten

$$s_{k+1} - s_k \ge \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k).$$

Sama epäyhtälö on tosi myös, jos $c \le w_k$, koska tällöin oikea puoli on 0 ja vasen $c - a > 0$. Mutta tämä merkitsee, että

$$\frac{1+\lambda}{\lambda}w_k - s_k \ge \frac{1+\lambda}{\lambda}w_{k+1} - s_{k+1}$$

kaikilla k. Jokainen $\dfrac{1+\lambda}{\lambda}w_k - s_k$ on pienempi kuin jokin vakio G. Mutta koska $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$, on $\dfrac{1+\lambda}{\lambda} > n$. Siis

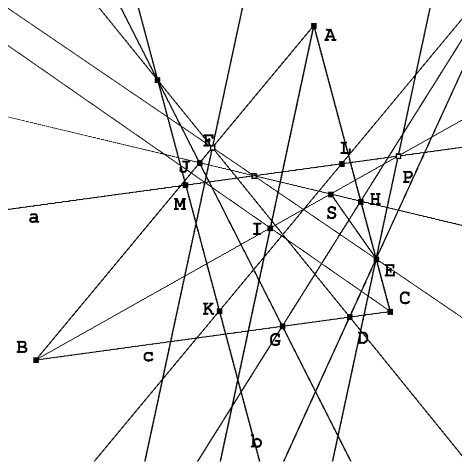
$$\left(\frac{1+\lambda}{\lambda} - n\right)w_k < \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} - n\right)w_k + (nw_k - s_k) = \frac{1+\lambda}{\lambda}w_k - s_k \le G.$$

Mutta tämä merkitsee, että $\{w_k\}$ on rajoitettu jono; oli alkuasetelma mikä hyvänsä, oikeanpuoleisin kirppu ei pääse mielivaltaisen kauas.

2000.4. Oletetaan, että kolme peräkkäisnumeroista korttia i, $i+1$ ja $i+2$ ovat eri laatikoissa, esim. i punaisessa, $i+1$ valkoisessa ja $i+2$ sinisessä. Koska $i + (i+3) = (i+1) + (i+2)$ ja $(i-1) + (i+2) = i + (i+1)$ on i:nnen ja $i+3$:nnen kortin samoin kuin $i-1$:sen ja $i+2$:sen kortin oltava samoissa laatikoissa. Prosessia voidaan jatkaa kumpaankin suuntaan, ja päädytään siihen, että kortit 1, 2 ja 3 ovat erivärisissä laatikoissa; näiden korttien sijoitus määrää kaikki muut. Eri tapoja sijoittaa kortit 1, 2 ja 3 on 6. Oletetaan sitten, että ei ole kolmea peräkkäisnumeroista korttia, jotka olisi sijoitettu erivärisiin laatikkoihin. Olkoon esimerkiksi kortti 1 punaisessa laatikossa. Olkoon i pienin ei-punaisessa laatikossa oleva kortti. Oletetaan, että i on valkoisessa laatikossa. Olkoon vielä k pienin sinisessä laatikossa oleva kortti. Koska peräkkäisnumeroiset kortit eivät ole erivärisissä laatikoissa, on oltava $i + 1 < k$. Koska $i + k = (i-1) + (k+1)$, kortin $k+1$ on oltava punaisessa laatikossa. Mutta $i + (k+1) = (i+1) + k$, joten kortin $i+1$ on oltava sinisessä laatikossa, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että k on pienin sinisessä laatikossa oleva kortti. Ristiriita vältty vain, jos $k = 100$. Koska $(i-1) + 100 = i + 99$, 99 on valkoisessa laatikossa. Osoitetaan vielä, että jos $1 < t < 99$, niin t on valkoisessa laatikossa. Jos t olisi punaisessa, olisi $t + 99 = (t - 1) + 100$. Tämä merkitsee, että $t - 1$ olisi sinisessä laatikossa, mikä ei ole mahdollista, koska pienin sinisen laatikon kortti on 100. Sijoittelu, jossa 1 on punaisessa laatikossa, 100 sinisessä ja muut valkoisessa, toimii: jos summa on ≤ 100, korttia ei ole otettu sinisestä laatikosta, jos se on 101, ei valkoisesta, ja jos yli 101, ei punaisesta. – Eri tapoja yhdistää värit ja kortit on jälleen 6.

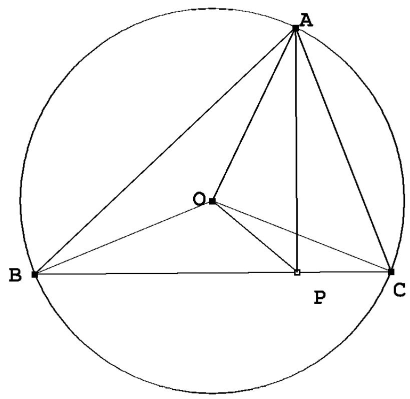
2000.5. Todistetaan yleisempi tulos: Jokaista positiivista kokonaislukua k kohden on olemassa positiivinen kokonaisluku $n = n(k)$ siten, että $2^n + 1$ on jaollinen n:llä, 3 on n:n tekijä ja n on jaollinen tasan k:lla ei alkuluvulla. Todistetaan väite induktiolla. Nojaudutaan seuraavaan aputulokseen, joka todistetaan ensin: Jokaista positiivista kokonaislukua $a > 2$ kohden on olemassa alkuluku p siten, että p on tekijänä $a^3 + 1$:ssä muttei $a + 1$:ssä. Oletetaan, että a on luku, jolle tämä ei päde. Koska $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$, jokainen luvun $a^2 - a + 1$ alkutekijä on $a + 1$:n tekijä. Koska $a^2 - a + 1 = (a + 1)(a - 2) + 3$, vain 3 voi olla $a^2 - a + 1$:n alkutekijä, joten $a^2 - a + 1$ on kolmen potenssi. Mutta $a + 1$ ja myös $a - 2 = a + 1 - 3$ ovat jaollisia 3:lla. Tästä seuraa, että $a^2 - a + 1$ on jaollinen 3:lla, muttei 9:llä. Siis $a^2 - a + 1 = 3$, mikä ei ole mahdollista, jos $a > 2$. Aputulos on todistettu. Siirrytään sitten varsinaiseen induktiotodistukseen. Jos $k = 1$, luvuksi $n = n(1)$ käy 3. Oletamme, että jollekin $k \geq 1$ on olemassa $n = n(k) = 3^q \cdot t$, $q \geq 1$ ja t jaoton kolmella, niin että $2^n + 1$ on jaollinen n:llä ja n:llä on k eri alkutekijää. Silloin n on pariton, mistä seuraa, että $2^{2n} - 2^n + 1 \equiv 1^n - (-1)^n + 1 \equiv 0 \mod 3$. Koska $2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$, $2^{3n} + 1$ on jaollinen luvulla $3n$. Aputuloksen mukaan on olemassa pariton kokonaisluku p, joka on tekijänä luvussa $2^{3n} + 1$ muttei luvussa $2^n + 1$. Luvulla $n(k + 1) = 3pn(k)$ on $k + 1$ eri alkutekijää. $(2^{3n})^p + 1$ on jaollinen sekä $3n$:llä että p:llä, joten $n(k + 1)$ on kelvollinen luku ja induktioaskel on otettu.

2000.6. Olkoot K, L ja M pisteiden G, H ja J kuvat peilauksissa kolmion ABC kulmien A, B ja C puolittajissa. Koska kulmanpuolittajat ovat sisään piirretyn ympyrän halkaisijoita, pisteet K, L ja M ovat ABC:n sisään piirretyllä ympyrällä. Osoitetaan, että suoran EF peilikuva a suoran HJ suhteen kulkee pisteen L kautta. Symmetrian nojalla tästä seuraa, että KLM on tehtävässä määrätty kolmio. Pisteet H ja E ovat samalla puolella suoraa BI, H lähempänä BI:tä kuin E. Oletetaan, että myös C on samalla puolella suoraa BI kuin nämä (todistus on muunnettavissa tapaukseen, jossa näin ei ole). Olkoot kolmion ABC kulmat 2α, 2β ja 2γ.



Osoitetaan, että pisteen E peilikuva suorassa HJ on suoralla BI. Olkoon ℓ suoran HJ normaali, joka kulkee pisteen E kautta. Olkoon P ℓ:n ja BI:n leikkauspiste ja olkoon S HJ:n ja BI:n leikkauspiste. Piste S on janalla BP ja janalla HJ. Osoitetaan, että $\angle PSE = 2\angle PSH$. Kolmion kulman vieruskulmalauseen nojalla ja koska $AI \perp HJ$, $\angle PSH = \angle BSJ = \angle AJS - \angle JBS = (90° - \alpha) - \beta = \gamma$. Koska G ja J ovat symmetrisiä suoran BI suhteen, $\angle BSG = \angle BSJ = \gamma$. Kulma $BGS = 90° + \alpha$, joten S ja C ovat samalla puolella suoraa GI. Koska $\angle ISG = \angle ICG$, $IGCS$ on jännenelikulmio. Tästä seuraa, että $\angle ISC = \angle IGC = 90°$. Mutta tästä seuraa, että $BCES$ on jännenelikulmio. Siis $\angle PSE = 180° - \angle BSE = \angle BCE = 2\gamma = 2\angle PSH$. Tästä seuraa, että P on suoralla a. Edellä suoritettu päättely osoittaa lisäksi, että $\angle BPH = \angle SEH = \beta$, koska P ja E ovat peilikuvia suoran HJ suhteen ja koska $BCES$ on jännenelikulmio. Koska L on H:n peilikuva BI:ssä, $\angle BPL = \angle BPH = \beta = \angle CBP$. Siis $PL \| BC$. Koska P on suoralla a, on todistettava, että $a \| BC$. Jos $\beta = \gamma$, näin on laita. Olkoon $\beta \neq \gamma$. Olkoot D ja E suoran BC ja suorien EF ja HJ leikkauspisteet. (D ja E ovat BC:llä samalla puolella C:tä.) Koska $\angle BCF = 90° - 2\beta$ ja $\angle CBE = 90 - 2\gamma$ ja koska $\angle CFE = \angle CBE$ ($BCEF$ on jännenelikulmio), on $\angle BDF = 2\gamma - 2\beta$. Koska $\angle HJI = \alpha$ ja $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, on $\angle BEJ = 180° - 2\beta - 90° - \alpha = \gamma - \beta$. Tästä seuraa, että suorien EF ja HJ välinen kulma on $\gamma - \beta$ ja a on BC:n suuntainen. Todistus on valmis.

2001.1. Olkoon $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ ja $AO = BO = CO = R$. Koska $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 180° - 2 \cdot \angle OCP$, $\angle BAC + \angle OCP = 90°$. Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että $\angle POC < \angle OCP$. Tätä varten riittää, että osoitetaan, että $PC < OP$. Suorakulmaisista kolmioista ABP ja ACP sekä sinilauseesta saadaan



$$\begin{aligned} BP - PC &= AB\cos\beta - AC\cos\gamma \\ &= 2R(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta) = 2R\sin(\gamma - \beta). \end{aligned}$$

Mutta oletusten perusteella $30° \leq \gamma - \beta < 90°$, joten $BP - PC \geq R$ eli $R + PC \leq BP$. Kolmioepäyhtälön ja kolmion ABC teräväkulmaisuuden perusteella $BP < BO + OP = R + OP$, josta haluttu epäyhtälö $PC < OP$ seuraakin.

2001.2. Koska epäyhtälön vasen puoli on pysyy samana, jos (a, b, c) korvataan (ka, kb, kc):llä, voidaan olettaa, että $abc = 1$. On siis osoitettava, että

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{8}{a^3}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{8}{b^3}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{8}{c^3}}} \geq 1.$$

On siis todistettava, että

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geq 1,$$

kun $xyz = 1$. Tämä tulee todistetuksi, jos löydetään c siten, että

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}} \geq \frac{x^c}{x^c + y^c + z^c}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+8y}} \geq \frac{y^c}{x^c + y^c + z^c}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geq \frac{z^c}{x^c + y^c + z^c}.$$

Riittää, kun todistetaan epäyhtälöistä ensimmäinen. Mutta koska

$$y^c + z^c = \left(y^{c/2} - z^{c/2}\right)^2 + 2(yz)^{c/2} \geq \frac{2}{x^{c/2}},$$

riittää, kun löydetään c, jolle

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}} \geq \frac{x^c}{x^c + 2x^{-c/2}} = \frac{1}{1+2x^{-3c/2}} = \frac{1}{1+2x^d}$$

eli $1 + 8x \leq (1 + 2x^d)^2$. Tämän epäyhtälön molemmat puolet ovat samat, kun $x = 1$. Derivaattojen tarkastelu pisteessä $x = 1$ osoittaa, että $d = \frac{2}{3}$ on hyvä ehdokas eksponentiksi. On vielä todistettava, että $1 + 8x \leq (1 + 2x^{2/3})^2$ eli

$$x \leq \frac{1}{2}(x^{2/3} + x^4).$$

Mutta tämä nähdään heti todeksi aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella.

2001.3. Olkoon P tehtävien joukko, G ja B kilpailuun osallistuneiden tyttöjen ja poikien joukot ja $G(p)$, $B(p)$ tehtävän $p \in P$ ratkaisseiden tyttöjen ja poikien joukot. Olkoot vielä $P(g)$ ja $P(b)$ niiden tehtävien joukot, jotka $g \in G$ tai $b \in B$ ratkaisi. Olkoon $|A|$ äärellisen joukon A alkioiden lukumäärä. Oletetaan, että jokaiselle $p \in P$ joko $|G(p)| < 3$ tai $|B(p)| < 3$. Tarkastellaan 441-ruutuista 21×21-ruudukkoa, jonka rivit edustavat tyttöjä ja sarakkeet poikia. Väritetään ruudut seuraavasti: ruutua (g, p) kohden valitaan $p \in P(g) \cap P(g)$. Väritetään ruutu punaiseksi, jos $|G(p)| < 3$, muuten mustaksi. (Jos (g, p) on punainen, $|G(p)| \geq 3$ ja $|B(p)| < 3$.) Ruuduista ainakin 221 on toista väriä, ja koska $\left\lceil \frac{221}{21} \right\rceil = 11$, jossakin rivissä on ainakin 11 mustaa neliötä tai jossain sarakkeessa on ainakin 11 punaista neliötä. Oletetaan, että tyttöä g vastaavalla rivillä on ainakin 11 mustaa neliötä. Silloin ruudun väritykseen käytetyn tehtävän oli ratkaissut enintään kaksi poikaa. g:n on täytynyt ratkaista ainakin 6 eri tehtävää. Mutta g on ratkaissut enintään 6 tehtävää. Mutta näin ollen g on ratkaissut tasan kuusi tehtävää, ja jokaisen niistä on ratkaissut enintään kaksi poikaa. Yhdeksän poikaa ei ole ratkaissut yhtään samaa tehtävää kuin g. Sama ristiriita johdetaan, jos jossain sarakkeessa on ainakin 11 punaista neliötä.

2001.4. Oletetaan, että millään $b \neq c$ ei ole $S(b) \equiv S(c) \bmod n!$. Lasketaan summa $\sum S(a)$ yli kaikkien permutaatioiden a ja johdetaan ristiriita summan $n!$:lla jaollisuudesta. Summassa jokaisen k_j tulee kerrotuksi $(n-1)!$ kertaa jokaisella luvuista $1, 2, \ldots, n$. k_j:n kerroin summassa on siten

$$(n-1)!\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}(n+1)!.$$

Koska sama pätee joka kertoimelle,

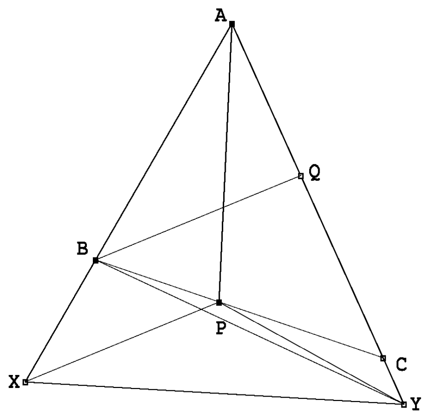
$$\sum S(a) = \frac{1}{2}(n+1)!\sum_{j=1}^{n} k_j. \tag{1}$$

Jos mitkään kaksi lukua $S(a)$ eivät ole kongruentit modulo $n!$, lukujen $S(a)$ jakojäännökset $n!$:lla jaettaessa ovat $0, 1, 2, \ldots, n! - 1$. Siis

$$\sum S(a) \equiv \frac{1}{2}(n! - 1)n! \bmod n!.$$

Jos n on parillinen, niin (1):ssä esiintyvä summa on $n!$:n monikerta. Koska $n! - 1$ on pariton, $\frac{(n!-1)n!}{2}$ ei ole $n!$:n monikerta.

2001.5. Merkitään kolmion ABC kulmia tavanomaisesti α:lla, β:lla ja γ:lla. Jatketaan AB:tä pisteeseen X siten, että $AX = AB + BP$ ja kiinnitetään Y suoralla AC niin, että AXY on tasasivuinen. Kolmio BXP on tasakylkinen, ja koska $\angle PBX = 180° - \beta$, $\angle BXP = \beta/2$. Koska $AQ + QY = AB + BX = AB + BP = AQ + QB$, niin $QY = QB$ ja siis $\angle QBY = \angle QYB$. Koska kolmion AXY on tasasivuinen ja AP on kulman CAB puolittaja, $PY = PX$. Osoitetaan, että B, P ja Y ovat samalla suoralla. Ellei näin ole, kolmio BPY on oikea kolmio. Nyt $\angle PBQ = \angle PXB = \angle PYQ = \beta/2$. Näistä seuraa $\angle YBP = \angle PYB$ ja $PY = PB$ ja siis $PX = PY = PB = BX$. Kolmio BPX on siis tasasivuinen, joten



$\beta/2 = 60°$ ja $\alpha + \beta = 180°$. Koska tämä ei ole mahdollista, BPY on degeneroitunut. Mutta tällöin $Y = C$. Koska kolmio BCQ on tasakylkinen, $120° - \beta = \gamma = \beta/2$, joten $\beta = 80°$ ja $\gamma = 40°$.

2001.6. Tehdään vastaoletus: $ab + cd$ on alkuluku. Nyt

$$ab + cd = (a + d)c + (b - c)a = mn,$$

missä $n = \text{s.y.t.}(a + d,\, b - c)$. Joko $m = 1$ tai $n = 1$. Oletetaan, että $m = 1$. Silloin

$$n = ab + cd > ab + cd - (a - b + c + d) = (a + d)(c - 1) + (b - c)(a + 1) > 0.$$

Koska $(a+d)(c-1)+(b-c)(a+1)$ on jaollinen n:llä, se on $\geq n$. Johdutaan siis ristiriitaan $n > n$. Oletetaan sitten, että $n = 1$. Sijoitetaan $ac + bd = (a + d)b - (b - c)a$ tehtävän yhtälöön $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$; saadaan

$$(a + d)(a - c - d) = (b - c)(b + c + d).$$

Koska $n = 1$, on olemassa positiivinen kokonaisluku k, jolle pätee

$$\begin{aligned} a - c - d &= k(b - c),\\ b + c + d &= k(a + d). \end{aligned}$$

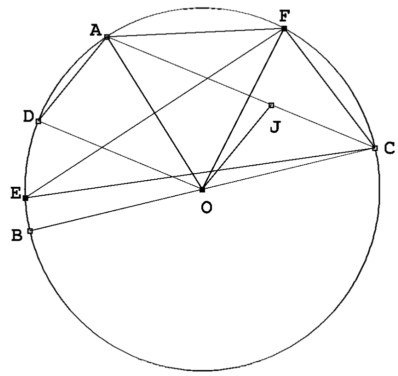
Kun nämä yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $a+b = k(a+b-c+d)$ ja $k(c-d) = (k - 1)(a + b)$. Jos $k = 1$, saadaan $c = d$, mikä ei ole tehtävän oletusten mukaista. Jos $k \geq 2$, niin

$$2 \geq \frac{k}{k-1} = \frac{a+b}{c-d} > 2.$$

Jälleen ristiriita. Oletus, että $ab + cd$ on alkuluku, johtaa aina ristiriitaan, joten se on väärä.

2002.1. Merkitään a_i:llä niiden S:n sinisten alkioiden (h, k) lukumäärää, joilla $h = i$ ja olkoon b_i niiden S:n alkioiden (h, k) lukumäärä, joille $k = i$. Tyyppiä 1 olevien S:n osajoukkojen lukumäärä on $a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$ ja tyyppiä 2 olevien osajoukkojen lukumäärä on $b_0 b_1 \cdots b_{n-1}$. Väite tulee todistetuksi, jos voidaan osoittaa, että jonoissa $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ja $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ eli a-jonossa ja b-jonossa on samat luvut, mahdollisesti eri järjestyksessä. Olkoon nyt c_i suurin k, jolle (i, k) on punainen. Jos (i, k) on sininen kaikilla k, asetetaan $c_i = -1$. Jos $i < j$ ja (j, c_j) on punainen, niin myös (i, c_j) on punainen, joten $c_j \le c_i$. Koska (i, k) on punainen kaikilla $k \le c_i$ ja (i, k) on sininen kaikilla $k > c_i$, niin jono c_0, $c_1, \ldots, c_{n-1}$, c-jono, määrittää täysin S:n alkioiden värityksen. Tarkastellaan nyt S:n sijasta joukkoa S_i, jonka c-jono on $c_0, c_1, \ldots, c_i, -1, \ldots, -1$. Siis $S_{n-1} = S$. Olkoon vielä S_{-1} joukko, jonka c-jono on $-1, -1, \ldots, -1$; tässä joukossa kaikki alkiot ovat sinisiä. Osoitetaan, että S_{-1}:n a-jonossa ja b-jonossa on samat alkiot ja että jos näin on joukossa S_i, niin samoin on joukossa S_{i+1}. Joukon S_0 a- ja b-jonot ovat molemmat $n-1, n-2, \ldots$, $2, 1$. Joukon S_i i ensimmäistä a-jonon lukua ovat samat kuin S:n a-jonon i ensimmäistä lukua ja $a_{i+1} = n - i - 1$, $a_{i+2} = n - i - 2$ jne. Joukossa S_{i+1} alkioiden väritys on muuten sama kuin joukossa S_i, mutta alkiot $(i+1, 0), (i+1, 1), \ldots (i+1, c_{i+1})$ ovat S_i:ssä sinisiä ja S_{i+1}:ssä punaisia. Siis S_{i+1}:ssä $a_{i+1} = (n-i-1)-(c_{i+1}+1) = n-i-c_{i+1}-2$. Muuten S_i:n ja S_{i+1}:n a-jonot ovat samat. Joukossa S_i ovat b_{c_i+1}, b_{c_i+2} jne. samat kuin joukon S b-jonon vastaavat luvut. Sen sijaan $b_0 = n - i - 1$, $b_1 = n - i - 2, \ldots, b_{c_i} = n - i - c_i - 1$. Siirryttäessä joukosta S_i joukkoon S_{i+1} luvut $b_0, \ldots, b_{c_{i+1}}$ pienenevät kukin yhdellä ja muut b-jonon luvut pysyvät ennallaan. Jonosta siis poistuu $n - i - 1$ ja tulee tilalle $n - i - c_{i+1} - 2$. b-jonon muutos on tasan sama kuin a-jonon, joten a- ja b-jonon lukujen tulo on S_{i+1}:ssä sama. Induktioperiaatteen nojalla näin on myös joukossa $S_{n-1} = S$.

2002.2. Koska $FA = FO = AO$, $\angle AOF = 60° < \angle AOC$. Puolisuora CA on puolisuorien CF ja CE välissä. Koska $\angle BOD = \frac{1}{2} \cdot \angle BOA = \angle BCA$, $OD \| CA$. Nelikulmio $ADOJ$ on siis suunnikas. Siis $AJ = OD = FA$. Tästä seuraa, että J on samalla puolella suoraa EF kuin C, ja siis kolmion ECF sisällä. Pisteet F, J, O ja E ovat kaikki A-keskisellä ympyrällä. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle EFJ = \frac{1}{2} \cdot \angle EAJ$. Mutta kehäkulmalause alkuperäiseen ympyrään sovellettuna antaa $\angle EAJ = \angle EAC = \angle EFC$. Piste J on siis kulman EFC puolittajalla. Mutta A on kaaren EF keskipiste, joten J on myös kulman ECF puolittajalla. Se on siis kolmion ECF sisään piirretyn ympyrän keskipiste.



2002.3. Jotta tehtävässä kuvattu tilanne voisi ilmetä, on oltava $m > n$. Olkoot $q(x)$ ja $r(x)$ kokonaislukukertoimisia polynomeja, joille $x^m + x - 1 = q(x)(x^n + x^2 - 1) + r(x)$ ja $r(x)$:n aste on $< n$. Nyt luku $x^n + x^2 - 1$ on $r(x)$:n tekijä äärettömän monella kokonaisluvulla x. Mutta kaikilla tarpeeksi suurilla luvuilla $x^n + x^2 - 1 > r(x)$. Siis on oltava $r(x) = 0$, joten $x^m + x - 1 = q(x)(x^n + x^2 - 1)$. Mutta $x^m + x - 1 = x^{m-n}(x^n + x^2 - 1) - x^{m+2-n} + x^{m-n} + x - 1 = x^{m-n}(x^n + x^2 - 1) + (1 - x)(x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1)$. Näin ollen $x^n + x^2 - 1$ on myös polynomin $x^{m-n+1} + x^{m-n} - 1$ tekijä. Siis $m - n + 1 \geq n$ eli $m \geq 2n-1$. Edelleen x^n+x^2-1 on polynomin $x^{m-n+1}+x^{m-n}-1-x^{m-2n+1}(x^n+x^2-1) = x^{m-n} - x^{m-2n+3} + x^{m-2n+1} - 1 = x^{m-2n+3}(x^{n-3} - 1) + (x^{m-2n+1} - 1)$ tekijä. Jos $n > 3$ ja $m > 2n - 1$, viimeinen polynomi on aidosti negatiivinen kaikilla $x \in (0, 1)$. Toisaalta Bolzanon lauseen nojalla x^n+x^2-1:llä on nollakohta välillä $(0, 1)$. Siis ainoa mahdollisuus on $n = 3$ ja $m = 5$. Koska $x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$, $n = 3$ ja $m = 5$ on ratkaisu.

2002.4. Koska $d_1d_k = n$, $d_2d_{k-1} = n$ jne. ja $d_j \geq j$ kaikilla j, niin $d_1 \leq \frac{n}{1}$, $d_2 \leq \frac{n}{2}$, $\ldots$, $d_{k+1-j} \leq \frac{n}{j}$, $\ldots$ Siis

$$d \leq \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^2}{2 \cdot 3} + \cdots.$$

Mutta

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots = 1.$$

Siis $d < n^2$. Epäyhtälö on aito, koska d on äärellinen summa. Jos n on alkuluku, $d = 1 \cdot n$, ja d on n^2:n tekijä. Olkoon sitten n yhdistetty luku ja olkoon p n:n pienin alkutekijä. Silloin $d_{k-1} = \frac{n}{p}$ ja $d > d_{k-1}d_k = \frac{n^2}{p}$. Mutta n^2:n pienin ykköstä suurempi tekijä on p, joten jos d on n^2:n tekijä, niin $d \leq \frac{n^2}{p}$. Siis d ei ole n^2:n tekijä, jos n on yhdistetty luku.

2002.5. Sijoitetaan yhtälöön $x = y$ ja $u = v = 0$. Saadaan $4f(0)f(x) = 2f(0)$. Siis joko $f(0) = 0$ tai $f(x) = \frac{1}{2}$. Funktio $f(x) = \frac{1}{2}$ toteuttaa yhtälön. Oletetaan sitten, että $f(0) = 0$. Asetetaan $x = u = 1$ ja $y = v = 0$. Saadaan $f(1)^2 = f(1)$. Siis $f(1) = 0$ tai $f(1) = 1$. Oletetaan, että $f(1) = 0$. Asetetaan $u = v = 1$, $y = 0$. Saadaan $0 = 2f(x)$. Funktio $f(x) = 0$ toteuttaa selvästi yhtälön. Oletetaan sitten, että $f(1) = 1$. Sijoitetaan $x = 0$, $u = v = 1$. saadaan $2f(y) = f(-y) + f(y)$ eli $f(-y) = f(y)$. Riittää siis, että määritetään $f(x)$:n arvot, kun $x > 0$. Todistetaan induktiolla, että $f(n) = n^2$ kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla n. Väite on tosi, kun $n = 0$ ja $n = 1$. Oletetaan, että se on tosi arvoilla $n - 1$ ja n. Asetetaan $x = n$, $y = u = v = 1$. Saadaan $2(f(n) + 1) = f(n - 1) + f(n + 1)$ eli $2n^2 + 2 = (n - 1)^2 + f(n + 1)$. Tämä sievenee muotoon $f(n + 1) = (n + 1)^2$, ja induktioaskel on otettu. Olkoon sitten $x = n$, $u = \frac{m}{n}$, $y = v = 0$. Saadaan $f(n)f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)$ eli $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m^2}{n^2}$. Kaikilla rationaaliluvuilla q on siis $f(q) = q^2$. Asetetaan nyt $x = u$, $y = v = 0$. Saadaan $f(x)^2 = f(x^2)$. Siis $f(x) \geq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x. Asetetaan $u = y$, $v = x$. saadaan $(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2)$ eli $f(x^2 + y^2) = f(x)^2 + 2f(x)f(y) + f(y)^2 \geq f(x)^2 = f(x^2)$. Tästä nähdään, että f on kasvava positiivisten lukujen joukossa. Jos x on mielivaltainen reaaliluku, sitä voidaan approksimoida alhaalta ja ylhäältä x:ää kohti suppenevilla rationaalilukujonoilla r_n ja q_n. Siis $r_n^2 = f(r_n) \leq f(x) \leq f(q_n) = q_n^2$. Tästä seuraa, että $f(x) = x^2$.

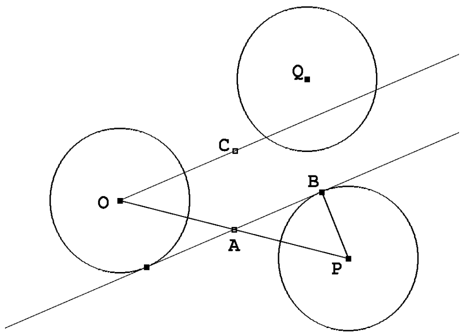
2002.6. Tarkastellaan ensin kahta yksikköympyrää, Γ_1 ja Γ_2; näiden keskipisteet ovat O ja P. Olkoot O:n kautta piirrettyjen Γ_2:n tangenttien sivuamispisteet X ja Y. $\sin(\angle POX) =$

$\frac{1}{OP}$, joten $\angle YOX > \frac{2}{OP}$. Γ_2 "varaa" kulman $\angle YOX$ ja sen ristikulman; jos suora ei saa leikata Γ_1:stä, Γ_2:sta ja kolmannesta ympyrästä kuin kahta, kolmannen ympyrän on oltava kokonaan mainittujen kahden kulman ulkopuolella. Tehtävän merkinnöin

$$\sum_{i \neq j} \frac{2}{O_iO_j} < \pi$$

kaikilla i.

Tarkastellaan sitten kolmea yksikköympyrää Γ_1, Γ_2 ja Γ_3, jotka sijaitsevat niin, että mikään suora ei leikkaa niistä kaikkia kolmea; ympyröiden keskipisteet ovat O, P ja Q. Jos A on OP:n keskipiste ja A:n kautta piirretty Γ_1:n ja Γ_2:n yhteinen tangentti sivuaa Γ_2:ta pisteessä B. Olkoon $OC \| AB$. Jos piste Q olisi kulman $\angle POC$ aukeamassa, jokin suora leikkaisi kaikki kolme ympyrää. Siis $\angle POQ > \angle PAB$. Mutta $\sin(\angle PAB) = \frac{2}{OP}$, joten $\angle POQ > \frac{2}{OP}$. Symmetrian perusteella on myös $\angle POQ > \frac{2}{OQ}$.



Tarkastellaan n:ää pistettä O_i. Näistä jotkin m, $m \leq n$, muodostavat kuperan m-kulmion, ja loput ovat tämän monikulmion sisäpisteitä. Oletetaan mukavuuden vuoksi, että O_n, O_1 ja O_2 ovat m-kulmion vierekkäisiä kärkiä ja että $\angle O_mO_1O_2$ on $n-2$:n kulman $\angle O_{i+1}O_1O_i$, $i = 2, 3, \ldots n-1$ summa. Jokainen näistä on edellisen tarkastelun mukaan ainakin suurempi luvuista $\frac{2}{O_1O_i}$, $\frac{2}{O_1O_2}$. Siis

$$\sum_{j=2}^{n}{}' \frac{2}{O_1O_j} < \angle O_nO_1O_2,$$

missä vasemmanpuoleisessa summassa on $n-2$ termiä; esimerkiksi pienin $\frac{2}{O_1O_j}$ voidaan jättää pois. Koska kuperan m-kulmion kulmien summa on $(m-2)\pi$, saadaan toistamalla päättely eri kärkien kohdalla

$$\sum_{i \neq j}{}' \frac{2}{O_iO_j} < (m-2)\pi.$$

Summassa ovat mukana kaikki muut kunkin kärkipisteen ja muiden pisteiden etäisyydet paitsi jokaisen i:n kohdalta puuttuu se j, jolle O_iO_j on suurin. Monikulmion sisäpisteissä pätee alussa johdettu arvio. Kun nämä yhdistetään, saadaan

$$S' = \sum_{i \neq j}{}' \frac{2}{O_iO_j} < (n-2)\pi.$$

Summasta puuttuvien termien huomioon ottamiseksi havaitaan, että tiettyjä summassa mukana olevia $n-2$:ta termiä kohden on ehkä lisättävä yksi, joka on kaikkia näitä pienempi. Lopullinen summa on siis enintään

$$S' + \frac{1}{n-2}S' = \frac{n-1}{n-2}S'.$$

Siis

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{O_iO_j} < (n-1)\frac{\pi}{2}.$$

Tässä summassa jokainen etäisyys esiintyy kahdesti, joten

$$\sum_{i<j} \frac{1}{O_1O_2} < (n-1)\frac{\pi}{4}.$$

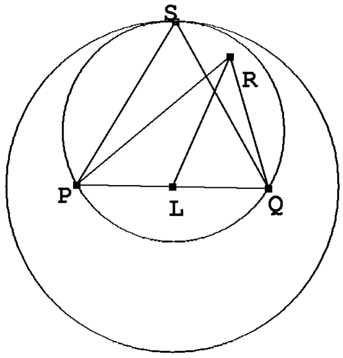
2003.1. Tarkastellaan joukkoa $D = \{x - y \mid x,\, y \in A\}$. Joukossa D on enintään $101 \cdot 100 + 1 = 10101$ alkiota. Jos $t \in A_i \cap A_j$, niin $t = x + t_i = y + t_j$, joten $t_i - t_j \in D$. Jos voidaan valita 100 lukua t_i, niin, että mikään $t_i - t_j$ ei ole joukossa D, tehtävä on suoritettu. Valitaan t_1 mielivaltaisesti. Oletetaan, että on jo valittu luvut $t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_k$, $k \leq 99$. Jokainen jo valittu luku x estää valitsemasta seuraavaksi mitään joukon $x + D = \{x + y \mid y \in D\}$ alkiota. Kiellettyjä alkioita on siis enintään $10101k \leq 99 \cdot 10101 = 999999$. $k + 1$:nen alkio voidaan siis valita.

2003.2. Tehtävän yhtälöstä nähdään heti, että jos $b = 1$, jokainen parillinen a toteuttaa yhtälön, ja että jos $b = 2a$, yhtälö toteutuu. Oletetaan siis, että $b > 1$ ja että $2a \neq b$. Oletetaan, että $a^2 = k(2ab^2 - b^3 + 1)$, missä k on positiivinen kokonaisluku. Silloin $2ab^2 - b^3 + 1 > 0$ eli $a > \frac{b}{2} - \frac{1}{2b^2} \geq \frac{b}{2} - \frac{1}{8}$ eli $2a > b - \frac{1}{4}$. Siis $2a \geq b$, ja koska $2a \neq b$, $2a > b$. Koska $k \geq 1$, $a^2 \geq b^2(2a - b) + 1 > b^2$, ja $a > b$. Luku a toteuttaa toisen asteen yhtälön $a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0$. Jos tällä yhtälöllä on kokonaislukujuuri a_1, sen toinenkin juuri on kokonaisluku, koska $a_1 + a_2 = 2kb^2$. Juurista suurempi, sanokaamme a_1, on $\geq kb^2 > 0$. Koska juurien tulo on $k(b^3 - 1)$, pienempikin juuri on positiivinen. Yhtälön molemmat juuret ovat alkuperäisen tehtävän ratkaisujen a-lukuja. Lisäksi

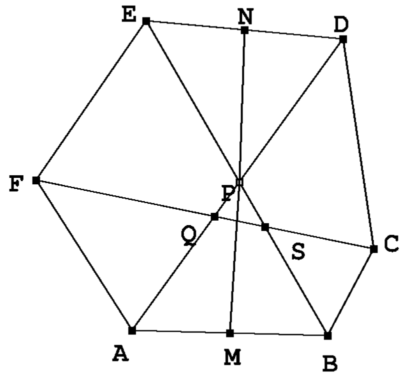
$$a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b.$$

Alussa tehdyistä oletuksista seuraa, että on oltava $b = 1$ tai $a_2 = \frac{b}{2}$, ja jälkimmäisessä tapauksessa b:n on oltava parillinen: $b = 2c$. Lisäksi on oltava $k = \frac{b^2}{4}$ ja $a_1 = \frac{b^4}{2} - \frac{b}{2} = 8c^4 - c$. Mahdollisia ratkaisuja on siis kaikkiaan kolme sarjaa: $(a,\, b) = (2c,\, 1)$, $(a,\, b) = (c,\, 2c)$ ja $(a,\, b) = (8c^4 - c,\, 2c)$, missä c on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku.

2003.3. Todetaan ensin, että jos kolmiossa PQR L on sivun PQ keskipiste ja $\angle QRP \geq 60°$, niin $RL \leq \frac{\sqrt{3}}{2}PQ$, ja yhtäsuuruus vallitsee vain, kun kolmio PQR on tasasivuinen. Jos nimittäin PQS on tasasivuinen kolmio ja S ja R ovat samalla puolella suoraa PQ, niin R on kolmion PQS ympäri piirretyn ympyrän sisällä. Tämä ympyrä puolestaan on L-keskisen S:n kautta kulkevan ympyrän sisäpuolella ja $LS = \frac{\sqrt{3}}{2}PQ$.



Olkoon nyt $ABCDEF$ tehtävän kuusikulmio. Tarkastellaan sen lävistäjiä AD, BE ja CF. Niiden leikkauspisteet muodostavat (mahdollisesti pisteeksi surkastuneen) kolmion. Siten ainakin kahden lävistäjän välinen kulma on $\geq 60°$. Olkoot nämä lävistäjät esimerkiksi AD ja BE. Olkoot M ja N AB:n ja DE:n keskipisteet ja olkoon P AD:n ja BE:n leikkauspiste. Kolmioepäyhtälön ja tehtävän oletuksen perusteella on

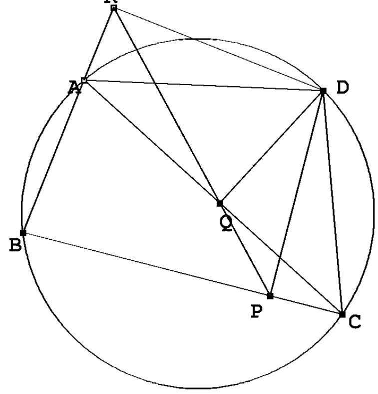


$$MN \leq MP + PN \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) = MN.$$

Alussa tehdyn havainnon perusteella kolmioiden ABP ja DEP on oltava tasasivuisia. Lävistäjä CF leikkaa ainakin toisen lävistäjistä AD, BE ainakin $60°$:een kulmassa. Olkoon se AD ja olkoon leikkauspiste Q. Toistamalle edellinen päättely nähdään, että kolmiot AFQ ja CDQ ovat tasasivuisia. Mutta nyt myös CF:n ja BE:n välinen kulma on $60°$. Olkoon näiden lävistäjien leikkauspiste R. Samoin kuin edellä nähdään, että myös BCR ja EFR ovat tasasivuisia kolmioita. On siis todistettu, että jokainen kuusikulmion kulmista on $120°$.

2003.4. Simsonin lauseesta seuraa, että P, Q ja R ovat samalla suoralla. Koska kulmat $\angle DPC$ ja $\angle DQC$ ovat suoria, pisteet D, Q, C ja P ovat samalla ympyrällä. Siis $\angle QCD = \angle QPD$. Samoin $\angle QAD = \angle QRD$. Kolmiot ACD ja RPD ovat siis yhdenmuotoiset. Samalla tavoin johdetaan yhdenmuotoisuudet $DAB \sim DQP$ ja $DBC \sim DRQ$. Näin ollen

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP}.$$



Mutta myös

$$\frac{DR}{DB} = \frac{RQ}{BC}, \quad \frac{DP}{DB} = \frac{QP}{BA}.$$

Siis

$$\frac{DA}{DC} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}.$$

Siis $PQ = QR$, jos ja vain jos

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}.$$

Mutta kulman $\angle ABC$ puolittaja jakaa AC:n suhteessa $\dfrac{BA}{BC}$ ja kulman $\angle ADC$ puolittaja jakaa AC:n suhteessa $\dfrac{AD}{DC}$. Jakopisteet yhtyvät, jos ja vain jos $PQ = QR$.

2003.5. Tehtävän epäyhtälö ei muutu, jos jokaiseen x_i:hin lisätään sama vakio. Voidaan siis olettaa, että $\sum_{i,j} x_i = 0$. Selvästi

$$\sum_{i,j=1}^{n} |x_j - x_i| = 2\sum_{i<j}(x_j - x_i).$$

Oikean puolen summassa x_i esiintyy $i-1$ kertaa ja $-x_i$ $n-i$ kertaa. Summa on siis

$$\sum_{i=1}^{n}(2i - n - 1)x_i,$$

joten

$$\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| = 2\sum_{i=1}^{n}(2i - n - 1)x_i.$$

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön perusteella

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \le 4\sum_{i=1}^{n}(2i - n - 1)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i - (n+1))^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(4i^2 - 4i(n+1) + (n+1)^2\right)\\ &= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)^2\\ = n(n+1)\left(\frac{2}{3}(2n+1) - 2(n+1) + (n+1)\right) &= n(n+1)\frac{n-1}{3} = \frac{1}{3}n(n^2-1),\end{aligned}$$

joten

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2 \le \frac{4}{3}n(n^2-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Toisaalta alussa tehdyn oletuksen perusteella

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}x_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j + n\sum_{j=1}^{n}x_j^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Siis todellakin

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2 \le \frac{2}{3}(n^2-1)\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2.$$

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön yhtäsuuruusehdosta seuraa, että yhtäsuuruus vallitsee, kun $x_i = a(2i-n-1)$ kaikilla i. Tällöin (x_i) on aritmeettinen jono. Olkoon toisaalta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmeettinen jono, jonka summa on 0 ja erotus d. Silloin $x_i = x_1+(i-1)d = \frac{d}{2}\left(2i+\frac{2x_1}{d}-2\right)$. Mutta tehdyn oletuksen mukaan $-x_1 = x_n = x_1+(n-1)d$, joten $2x_1 = (1-n)d$. Siis $x_i = \frac{d}{2}(2i-n-1)$, ja yhtäsuuruus vallitsee.

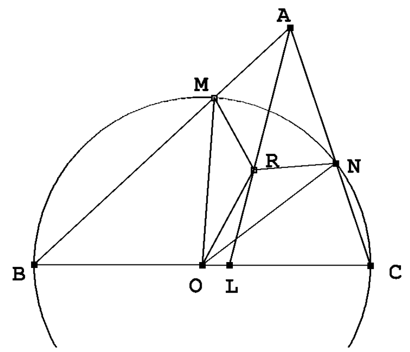
2003.6. Koska

$$s = \frac{p^p-1}{p-1} = 1+p+p^2+\cdots+p^{p-1} \equiv p+1 \bmod p^2,$$

luvulla s on ainakin yksi alkutekijä q, joka ei ole kongruentti luvun 1 kanssa modulo p^2. Väitetään, että q:lla on tehtävässä vaadittu ominaisuus. Vastaoletuksena oletamme, että jollain kokonaisluvulla n on $n^p \equiv p \bmod q$. Koska q on luvun p^p-1 tekijä, on $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 \bmod q$. Koska q on alkuluku, $n^{q-1} \equiv 1 \bmod q$. Eukleideen algoritmin avulla nähdään, että jos d on p^2:n ja $q-1$:n suurin yhteinen tekijä, niin $n^d \equiv 1 \bmod q$. Luku p^2 ei ole luvun $q-1$ tekijä. Lukujen $q-1$ ja p^2 suurin yhteinen tekijä voi olla 1 tai p. Tästä seuraa, että $n^p \equiv 1 \bmod q$. Näin ollen $p \equiv 1 \bmod q$. Siis $1+p+\cdots+p^{p-1} \equiv p \bmod q$. Koska q on luvun $1+p+\cdots+p^{p-1}$ tekijä, $p \equiv 0 \bmod q$. Johduttiin ristiriitaan, joten vastaoletuksen täytyy olla väärä.

2004.1. Koska $BCNM$ on jännenelikulmio,

$$\angle MNA = 180^\circ - \angle CNM = \angle ABC.$$



Samoin $\angle AMN = \angle ACB$. Oletuksesta seuraa, että $\angle ABC \ne \angle ACB$, joten $\angle AMN \ne \angle ANM$. Kolmio OMN on tasakylkinen, joten kulman $\angle MON$ puolittaja on myös sivun MN keskinormaali. Siis $MR = NR$. Kolmioissa AMR ja ANR on kaksi paria yhtä pitkiä sivuja ja yksi pari yhtä suuria kulmia. Koska kulmat $\angle AMN$ ja $\angle ANM$ ovat eri suuria, mutta $\angle NMR = \angle MNR$, on $\angle AMR \neq \angle ANR$. Yhtenevyyslauseen ssk perusteella on siis $\angle AMR = 180^\circ - \angle ANR$. Tämä merkitsee, että $AMRN$ on jännenelikulmio. Tästä puolestaan seuraa, että $\angle MRA = \angle MNA$ ja $\angle ARN = \angle AMN$. Leikatkoon AR sivun BC pisteessä L. Kolmiosta ABL saadaan $\angle ALC = \angle ABC + \angle BAL$ ja kolmiosta AMR samoin $\angle RMB = \angle MRA + \angle RAM$. Edellä sanotun perusteella kulmat $\angle ALC$ ja $\angle RMB$ ovat samat. Tämä merkitsee, että $MBLR$ on jännenelikulmio. Aivan samoin todistetaan, että $NRLC$ on jännenelikulmio. Sivun BC piste L on siis molempien kolmioiden MBR ja NRC yhteinen piste.

2004.2. Osoitetaan, että kysytyt polynomit ovat $P(x) = a_4x^4 + a_2x^2$, missä a_4 ja a_2 ovat mielivaltaisia reaalilukuja. Koska $a = b = c = 0$ toteuttaa tehtävässä annetun ehdon, on $3P(0) = 2P(0)$ eli $P(0) = 0$. Edelleen kaikilla x luvut $a = x$, $b = c = 0$ toteuttavat annetun ehdon, joten $P(x) + P(-x) = 2P(x) = 0$. Siis $P(x) = P(-x)$. Polynomissa, joka on samalla parillinen funktio, kaikkien x:n parittomien potenssien kertoimet ovat nollia. Tehtävän ehdon toteuttavia lukukolmikkoja on äärettömän paljon: jos $(a,\,b,\,c)$ toteuttaa yhtälön, myös $(ta,\,tb,\,tc)$ toteuttaa sen kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Esimerkiksi $(1,\,2,\,-\frac{2}{3})$ toteuttaa ehdon ja siten kaikki lukukolmikot $(3t,\,6t,\,-2t)$. Siis $P(-3t) + P(8t) + P(-5t) = 2P(7t)$ kaikilla $t \in R$. Kaksi polynomia on identtisesti samoja vain, jos niiden kaikki kertoimet ovat samoja. Jos siis $P(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots$, niin $a_{2k}(3^{2k} + 8^{2k} + 5^{2k}) = 2 \cdot 7^{2k}a_{2k}$. Nyt $3^2+8^2+5^2 = 98 = 2\cdot 7^2$ ja $3^4+8^4+5^4 = 4802 = 2\cdot 7^4$. Mutta $8^6-2\cdot 7^6 = 2(2^{17}-49^3) > 2(128\cdot 1000-125000) > 0$, ja kun $k \geq 8$, niin $8^k - 2\cdot 7^k = (7+1)^k - 2\cdot 7^k > 7^k + k\cdot 7^{k-1} - 2\cdot 7^k > 0$. Ainoat polynomit, jotka voivat toteuttaa ehdon, ovat polynomit $P(x) = a_2x^2 + a_4x^4$. On vielä osoitettava, että kaikki tällaiset polynomit toteuttavat tehtävän ehdot. Jos $P_1(x)$ ja $P_2(x)$ ovat tehtävän ehdot täyttäviä polynomeja, niin $\alpha P_1(x) + \beta P_2(x)$ ovat myös tehtävän ehdot täyttäviä polynomeja kaikilla $\alpha,\,\beta \in \mathbb{R}$. Riittää siis, että todetaan polynomien x^2 ja x^4 toteuttavan tehtävän ehdot. Jos $ab + bc + ca = 0$, niin $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4(ab + bc + ca) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$ ja $2(a + b + c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ca) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Polynomi x^2 toteuttaa tehtävän ehdon. Samoin ehdoin $2(a+b+c)^4 = 2(a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4) + 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ ja $(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 = 2(a^4+b^4+c^4) - 4(a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+ac^3+a^3c) + 6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. On siis näytettävä, että $2(a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + ac^3 + a^3c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Mutta $0 = (ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2(ab^2c + a^2bc + abc^2)$. Onkin siis näytettävä, että $a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+ac^3+a^3c+ab^2c+a^2bc+abc^2 = 0$. Mutta $a^3b+a^2bc = a^2(ab+bc) = -a^3c$, $b^3c + ab^2c = b^2(bc + ca) = -ab^3$ ja $ac^3 + abc^2 = c^2(ca + ab) = -bc^3$. Kun nämä sijoitetaan edelliseen lausekkeeseen, nähdään, että yhtälö toteutuu. Siis x^4 toteuttaa yhtälön, ja väite on todistettu.

2004.3. Osoitetaan, että peitto on mahdollinen jos ja vain jos luvuista m ja n yksi on jaollinen kolmella ja yksi neljällä eikä kumpikaan luvuista m, n ole 1, 2 tai 5. Oletetaan ensin, että jokin $m \times n$-suorakaide on peitetty koukuilla. Jokaista koukkua A kohden on yksi ja vain yksi koukku B, joka peittää koukun A sisään jäävän "poukaman". A ja B voivat yhdistyä vain kahdella eri tavalla, joko 3×4-suorakaiteeksi tai ei-konveksiksi kahdeksankulmioksi, jonka sivut ovat 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2. Kummassakin kuviossa on 12 neliötä, joten peitto voi onnistua vain, jos mn on jaollinen 12:lla. Osoitetaan, että joko m tai n on jaollinen 4:llä. Ellei näin ole, sekä m että n ovat parillisia. Numeroidaan rivit ja sarakkeet ja kirjoitetaan luku 1 jokaiseen sellaiseen ruutuun, jonka rivi- ja sarakenumeroista tasan toinen on neljällä jaollinen ja 2 jokaiseen sellaiseen ruutuun, jonka sekä rivi- että sarakenumero on neljällä jaollinen. Koska rivejä ja sarakkeita on parillinen määrä, koko ruudukkoon kirjoitettujen lukujen summa on parillinen. Toisaalta 3×4-suorakaiteeseen kirjoitettujen lukujen summa voi olla vain 3 tai 7 ja edellä kuvattuun kahdeksankulmaiseen koukkuyhdistelmään kirjoitettujen lukujen summa voi olla vain 5 tai 7. Tästä seuraa, että koukkupareja on oltava parillinen määrä, josta puolestaan seuraa, että mn on jaollinen 24:llä. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että kumpikaan luvuista m ja n ei olisi jaollinen neljällä. On selvää, että kumpikaan luvuista m ja n ei voi olla 1 tai 2. Myöskään 5 ei tule kyseeseen, kuten helposti nähdään, jos yritetään sijoittaa koukkuja viiden neliön pituiselle sivulle.

On vielä osoitettava, että esitetyt välttämättömät ehdot ovat riittäviä. Jos $3 \mid m$ ja $4 \mid n$ tai $4 \mid m$ ja $3 \mid n$, asia on triviaali: 3×4-suorakaiteet riittävät. Jos $12 \mid m$ ja $n \notin \{1, 2, 5\}$, $3 \not| n$, $4 \not| n$, niin $n = 3a + 4b$ joillain positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b (riittää, kun havaitaan, että 7, 11, 13, 14, 17 ja 19 ovat tätä muotoa). $m \times n$ suorakaide voidaan jakaa $m \times 3a$- ja $m \times 4b$-suorakaiteiksi, jotka voidaan peittää 3×4-suorakaiteilla.

2004.4. Symmetrian perusteella riittää, kun osoitetaan, että $t_1 < t_2 + t_3$. On voimassa

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} t_i^{-1} = n + t_1\left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + \frac{1}{t_1}(t_2 + t_3) + \sum_{\substack{1 \le i < j \le n \\ (i,\, j) \ne (1,\, 2),\, (1,\, 3)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right).$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella

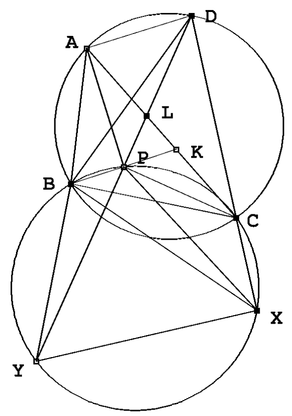
$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \ge \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}, \quad t_2 + t_3 \ge 2\sqrt{t_2 t_3} \quad \text{ja} \quad \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \ge 2.$$

Oletuksen perusteella on siis, kun merkitään $a = t_1/\sqrt{t_2 t_3}$,

$$n^2 + 1 > n + \frac{2t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + \frac{2\sqrt{t_2 t_3}}{t_1} + 2\left(\binom{n}{2} - 2\right) = 2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4.$$

a toteuttaa toisen asteen epäyhtälön $2a + 2/a - 5 < 0$, jonka ratkaisujoukko on $(1/2,\, 2)$. Siis $t_1 < 2\sqrt{t_2 t_3} \le t_2 + t_3$.

2004.5. Voidaan olettaa, että P on kolmiossa BCD ja kolmiossa ABC. Oletetaan ensin, että $ABCD$ on jännenelikulmio. Leikatkoon BP AC:n pisteessä K ja DP AC:n pisteessä L. Tehtävän oletuksesta ja kehäkulmalauseen seurauksista $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle BDA$ seuraa, että kolmiot ABD, KBC ja LCD ovat yhdenmuotoiset. Tästä seuraa $\angle PLK = \angle PKL$, joten $PK = PL$. Myös kolmiot ADL ja BDC ovat yhdenmuotoisia. Siis



$$\frac{AL}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{KC}{BC}.$$

Siis $AL = KC$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot ALP ja CKP ovat yhteneviä (sks). Siis $AP = CP$.

Oletetaan sitten, että $AP = PC$. Oletetaan, että kolmion BCP ympäri piirretty ympyrä leikkaa suoran DC myös pisteessä X ja suoran PD myös pisteessä Y. Silloin $\angle PXC = \angle PBC = \angle ABP$. Tästä seuraa, että kolmioit ABD ja PXD ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AD}{PD} = \frac{BD}{DX}.$$

Tästä seuraa, että kolmiot PDA ja XDB ovat yhdenmuotoisia (sks), joten

$$\frac{BX}{AP} = \frac{BD}{AD} = \frac{XD}{PD}. \tag{1}$$

Koska $PYXC$ on jännenelikulmio, $\angle PYX = \angle PCD$. Kolmiot DPC ja DXY ovat siis yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{YX}{CP} = \frac{XD}{PD}. \tag{2}$$

Koska $AP = PC$, yhtälöistä (1) ja (2) seuraa $BX = YX$. Näin ollen $\angle DCB = \angle DCP + \angle PCB = \angle PYX + \angle PYB = \angle XYB = \angle XBY = \angle XPY = \angle PDX + \angle PXD = \angle ADB + \angle ABD = 180^\circ - \angle DAB$. Edellisen yhtälöketjun ensimmäisen ja viimeisen kulman yhtäsuuruus osoittaa, että $ABCD$ on jännenelikulmio.

2004.6. Jos luku päättyy nollaan ja sen toiseksi viimeinen numero on parillinen, luvulla ei ole vuorottelevaa monikertaa. Osoitetaan, että kaikilla muilla luvuilla, siis luvuilla, jotka eivät ole jaollisia 20:llä, sellainen on. Merkitään numeroin a_k, a_{k-1}, ..., a_1 kirjoitettavaa lukua $\overline{a_k a_{k+1} \ldots a_1}$. Merkintä $u^k \| a$ tarkoittaa, että $u^k \mid a$, mutta $u^{k+1} \not| a$. Osoitetaan ensin, että kaikilla luvun 2 potensseilla on vuorotteleva monikerta, jonka numeroiden lukumäärä on parillinen. Tähän riittää, jos voidaan konstruoida päättymätön jono väliin $[0, 9]$ kuuluvia kokonaislukuja a_n niin, että $a_n \equiv n + 1 \bmod 2$, $2^{2n-1} \| \overline{a_{2n-1} a_{2n-2} \ldots a_1}$ ja $2^{2n+1} \| \overline{a_{2n} a_{2n-1} \ldots a_1}$ kaikilla n. Aloitetaan konstruktio luvuista $a_1 = 2$ ja $a_2 = 7$. Oletetaan, että jono on jo konstruoitu lukuun a_{2n} asti. Asetetaan $a_{2n+1} = 4$. Koska $2^{2n+2} \| 4 \cdot 10^{2n}$ ja $2^{2n+1} \| \overline{a_{2n} a_{2n-1} \ldots a_1}$, niin $2^{2n+1} \| \overline{a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_1}$. Merkitään $\overline{a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_1} = 2^{2n+1} A$, missä A on pariton luku. Luvun a_{2n+2} on nyt oltava pariton ja on oltava $2^{2n+3} \| \overline{a_{2n+2} a_{2n+1} \ldots a_1} = a_{2n+2} \cdot 10^{2n+1} + \overline{a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_1} = 2^{2n+1}(a_{2n+2} 5^{2n+1} + A)$. Tämä toteutuu, jos $5a_{2n+2} + A \equiv 4 \bmod 8$. Lineaarisella kongruenssiyhtälöllä on ratkaisu a_{2n+2}; ratkaisu voidaan aina valita joukosta $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$. Konstruktiota voidaan siis jatkaa.

Osoitetaan sitten, että jokaisella muotoa $2 \cdot 5^n$ olevalla luvulla on vuorotteleva monikerta, jossa on parillinen määrä numeroita. Tähän riittää, että konstruoidaan päättymätön jono väliin $[0, 9]$ kuuluvia kokonaislukuja b_n, joille $b_n \equiv n + 1 \bmod 2$ ja $2 \cdot 5^n | \overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1}$ kaikilla n. Aloitetaan asettamalla $b_1 = 0$, $b_2 = 5$. Oletetaan, että luvut b_1, b_2, $\ldots b_n$ on jo määritelty ja olkoon $\overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1} = 5^q B$, missä B ei ole jaollinen viidellä ja $q \geq n$. Luvun b_{n+1} on toteutettava $b_{n+1} \equiv n + 2 \bmod 2$, ja 5^{n+1}:n on oltava luvun $\overline{b_{n+1} b_n \ldots b_1} = b_{n+1} 10^n + \overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1} = 5^n (b_{n+1} 2^n + 5^{q-n} B)$ tekijä. Luvun $b_n 2^n + 5^{q-n} B$ on oltava viidellä jaollinen. Kiinalaisen jäännöslauseen nojalla kongruenssiparilla

$$\begin{cases} x \equiv 2^n (n+1) \bmod 2^{n+1} \\ x \equiv -5^{q-n} B \bmod 5 \end{cases}$$

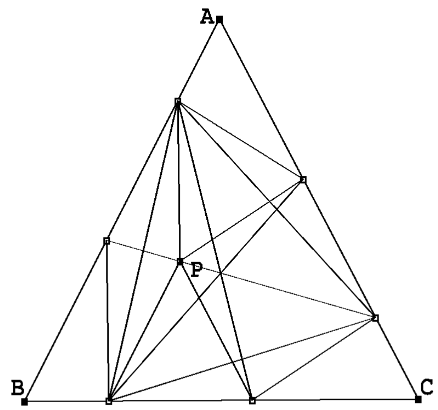
on ratkaisu x. Lisäksi $x = 2^n y$, missä y on kokonaisluku. Kongruenssiparilla

$$\begin{cases} y \equiv n + 1 \bmod 2 \\ 2^n y + 5^{q-n} B \equiv 0 \bmod 5 \end{cases}$$

on siis ratkaisu y. Ratkaisu voidaan aina valita joukosta $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Siirrytään sitten yleisen luvun $n = 2^\alpha 5^\beta k$, missä k ei ole jaollinen kahdella eikä viidellä. Jos $20 \not| n$, niin $2^\alpha 5^\beta$ on joko kahden tai viiden potenssi tai muotoa $2 \cdot 5^\beta$.Edellä sanotun perusteella $2^\alpha 5^\beta$:lla on kaikissa näissä tapauksissa vuorotteleva monikerta M, jonka numeroiden määrä on parillinen, $2m$. Kaikilla $p > 1$ luku $C_p M$, missä $C_p = 1 + 10^{2p} + 10^{4p} + \cdots + 10^{(p-1)2m}$ on $2^\alpha 5^\beta$:n vuorotteleva monikerta. Luvuista C_p jotkin kaksi, esimerkiksi C_{p_1} ja C_{p_2}, ovat laatikkoperiaatteen perusteella kongruentteja modulo k. Mutta $C_{p_2} - C_{p_1} = C_{p_2 - p_1} 10^{p_1 2m}$, joten $k | C_{p_2 - p_1}$. Luku $C_{p_2 - p_1} M$ on siten luvun $n = 2^\alpha 5^\beta k$ vuorotteleva monikerta.

2005.1. Olkoon P se kolmion ABC sisäpiste, jolle $A_1 A_2 P$ on tasasivuinen kolmio. Koska $A_2 P \| B_1 B_2$, $A_1 P C_1 C_2$ on suunnikas; koska $A_2 B_1 = B_1 B_2$, $B_2 P A_2 B_1$ on vinoneliö. Samoin perustein $A_1 P C_1 C_2$ on vinoneliö. Mutta tästä seuraa, että $B_2 C_1 P$ on tasasivuinen kolmio. Mutta tämä merkitsee, että $\angle A_1 A_2 B_1 = 60^\circ + \angle P A_2 B_1 = 60^\circ + \angle B_1 B_2 P = \angle B_1 B_2 C_1$. Kolmiot $A_1 A_2 B_1$ ja $B_1 B_2 C_1$ ovat siis yhteneviä tasakylkisiä kolmioita ja $A_1 B_1 = B_1 C_1$. Symmetrian vuoksi on oltava $C_1 A_1 = A_1 B_1$ ja kolmion $C_1 C_2 A_1$ yhtenevä kolmioiden $A_1 A_2 B_1$ ja $B_1 B_2 C_1$ kanssa. Mutta tästä seuraa, että $B_1 C_2$, $C_1 A_2$ ja $A_1 B_2$ yhtyvät kolmion $A_1 B_1 C_1$ korkeusjanoihin, ja leikkaavat toisensa samassa pisteessä.



2005.2. Kaikille indekseille $i < j$ pätee $a_i \neq a_j$; ellei näin olisi, jaettaessa lukuja a_1, a_2, $\ldots$, a_j j:llä saataisiin enintään $j-1$ eri jakojäännöstä. Havaitaan myös, että jos $i < j \leq k$, niin $|a_i - a_j| \leq k - 1$. Jos olisi $m = |a_i - a_j| \geq k$, lukujen a_i ja a_j jakojäännökset m:llä jaettaessa olisivat samat. Olkoon nyt $k \geq 1$ mielivaltainen. Olkoon a_{i_k} pienin ja a_{j_k} suurin luvuista a_1, a_2, $\ldots$, a_k. Silloin $a_{j_k} - a_{i_k} \leq k - 1$; koska luvut a_1, $\ldots$, a_k ovat eri lukuja, on $a_{j_k} - a_{i_k} \geq k - 1$. Siis $a_{j_k} - a_{i_k} = k - 1$, joten luvut a_1, a_2, $\ldots$, a_k ovat kaikki lukujen a_{i_k} ja a_{j_k} väliset luvut. Olkoon nyt x mielivaltainen kokonaisluku. Koska tehtävän jonossa on äärettömän monta negatiivisstä lukua, siinä on luku $a_i \leq x$. Koska jonossa on äärettömän monta positiivista lukua, siinä on luku $a_j \geq x$. Jos $k \geq i$, $k \geq j$, niin edellä sanotun perusteella x on lukujen a_1, a_2, $\ldots$, a_k joukossa.

2005.3. *1. ratkaisu.* Kun tehtävän epäyhtälö kirjoitetaan muotoon

$$\frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq \frac{x^5}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5}{z^5 + x^2 + y^2}$$

ja epäyhtälön molemmille puolille lisätään

$$\frac{y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{z^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2}{z^5+x^2+y^2},$$

todistettava epäyhtälö saadaan yhtäpitävään muotoon

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{y^5+z^2+x^2}+\frac{1}{z^5+x^2+y^2}\right)\le 3.$$

Kun sovelletaan Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöä ja ehtoa $xyz \ge 1$, saadaan

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\ge \left(x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}}+y^2+z^2\right)^2 \ge (x^2+y^2+z^2)^2$$

eli

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Kun tämä ja siitä kiertovaihtelulla saatavat epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen,saadaan

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\le 2+\frac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+z^2}.$$

Tunnetusti $x^2+y^2+z^2 \ge yz+zx+xy$, joten todistus on valmis.

2. ratkaisu. (Moldovalaisen *Boreico Iurien* erikoispalkinnolla palkittu ratkaisu.) Kaikilla x pätee

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{x^5-x^2}{x^5+(y^2+z^2)x^3}.$$

Jos nimittäin $x \ge 1$, vasemman puolen nimittäjä on suurempi kuin oikean puolen ja epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, jos taas $x < 1$, epäyhtälön molemmat puolet ovat negatiivisia ja oikean puolen nimittäjä on pienempi kuin vasemman puolen. Siis

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{x^2+x^{-1}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Koska vastaavat epäyhtälöt ovat voimassa kiertovaihtelun jälkeen, todistettavaksi epäyhtälöksi jää

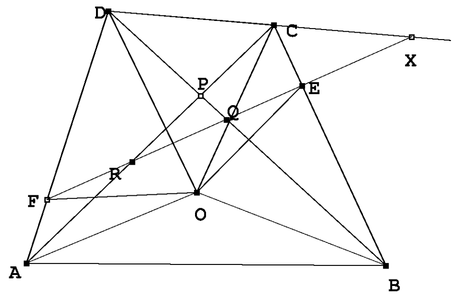
$$x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=yz+zx+xy,$$

mikä on tunnetusti totta.

2005.4. Riittää, kun osoitetaan, että jokainen alkuluku on tekijänä jossain luvuista a_n. Koska $a_2 = 4+9+36-1 = 48$, ainakin alkuluvut 2 ja 3 ovat tällaisia alkulukuja. Olkoon sitten $p > 3$ mielivaltainen alkuluku. Lasketaan modulo p. Fermat'n pienen lauseen nojalla $2^{p-1} \equiv 1$, $3^{p-1} \equiv 1$ ja $6^{p-1} \equiv 1$. Siis $6 = 3+2+1 \equiv 3\cdot 2^{p-1}+2\cdot 3^{p-1}+6^{p-1} =$

$6(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2})$. Koska 6:lla ja p:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, $2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2} \equiv 1$, joten $a_{p-2} = 2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1$ on jaollinen p:llä.

2005.5. Olkoon O janojen AC ja BD keskinormaalien leikkauspiste. Osoitetaan, että jokaisen kolmion PQR ympäri piirretty ympyrä kulkee pisteen O kautta. Kolmioissa AOD ja COB on $AD = BC$, $OA = OC$ ja $OD = OB$. Kolmiot ovat siis yhteneviä. Suoritetaan kierto pisteen O ympäri niin, että OB kiertyy OD:ksi. Silloin kolmio OBC kiertyy kolmioksi ODA. Koska $BE = DF$, piste E kiertyy pisteeksi F. Siis $OE = OF$ ja kulmat $\angle FOE$, $\angle DOB$ ja $\angle AOC$ ovat yhtä suuret (kiertokulman suuruiset). Kolmiot EOF, BOD ja COA ovat siis yhdenmuotoisia tasakylkisiä kolmioita. Siis



$$\frac{AC}{BD} = \frac{OC}{OB}. \tag{1}$$

Oletetaan ensin, että EF ei ole AB:n tai CD:n suuntainen. Oletetaan esimerkiksi, että suora EF leikkaa suoran CD pisteessä X. Sovelletaan Menelaoksen lausetta suoraan FE ja kolmioihin ACD, BCD. Saadaan

$$\frac{AR}{RC}\cdot\frac{CX}{XD}\cdot\frac{DF}{FA} = 1, \qquad \frac{DQ}{QB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CX}{XD} = 1,$$

joista

$$\frac{AR}{RC} = \frac{AF}{FD}\cdot\frac{DX}{XC} = \frac{CE}{EB}\cdot\frac{DX}{XC} = \frac{DQ}{QB}.$$

Samaan tulokseen päädytään, jos tarkastellaan EF:n ja AB:n leikkaamista. Jos taas $EF \| AB$ ja $EF \| CD$, $ABCD$:n on oltava tasasivuinen puolisuunnikas ja E:n ja F:n sen sivujen keskipisteitä. Tällöin triviaalisti

$$\frac{AR}{RC} = \frac{DQ}{QB}.$$

Yhtälöistä (1) ja

$$\frac{RC}{QB} = \frac{AR}{DQ} = \frac{AC-RC}{DB-QB}$$

ratkaistaan

$$\frac{RC}{QB} = \frac{OC}{OB}$$

Kolmiot OBQ ja OCR ovat yhdenmuotoiset (sks), joten $\angle CRO = \angle OQB$. Nelikulmiossa $PROQ$ ovat vastakkaiset kulmat vieruskulmia, joten nelikulmio on jännenelikulmio. Nelikulmion ympäri piirretty ympyrä on samalla kolmion PRQ ympäri piirretty ympyrä, joten todistus on valmis.

2005.6. Olkoon kilpailijoita n kappaletta. Olkoon N järjestettyjen parien (K, T), missä K on kilpailija ja T on tehtävä, jonka K ratkaisi, lukumäärä. Tehtäväpareja on $\binom{6}{2} = 15$ kappaletta. Koska jokaisen parin ratkaisi yli $\frac{2}{5}$ kilpailijoista,

$$N \geq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n + 3. \tag{1}$$

Olkoon tasan viisi tehtävää ratkaisseiden kilpailijoiden lukumäärä k. Näistä kukin on ratkaissut $\binom{5}{2} = 10$ tehtäväparia, mutta muut $n - k$ kilpailijaa enintään $\binom{4}{2} = 6$ tehtäväparia. Siis

$$N \leq 10k + 6(n-k) = 6n + 4k. \tag{2}$$

Siis $6n + 3 \leq 6n + 4k$, joten $k \geq 1$. Jos $2n + 1$ ei ole jaollinen 5:llä, $2n + 1$ kaavassa (1) voidaan korvata luvulla $2n+2$, jolloin N:n alarajaksi tulee $6n+6$. Tällöin $k \geq 2$. Jos taas joku kilpailija ratkaisi enintään 3 tehtävää, yläraja kaavassa (2) pienenee 3:lla, ja saadaan taas $k \geq 2$.

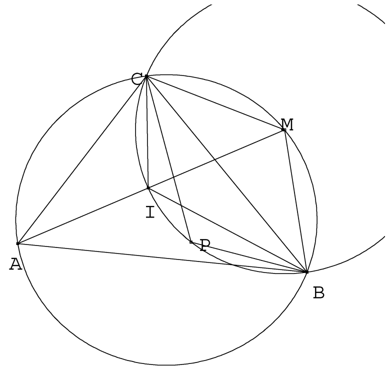
Tarkasteltavaksi jää tapaus, jossa $5|(2n + 1)$ ja kaikki kilpailijat ratkaisivat vähintään 4 tehtävää. Johdetaan ristiriita oletuksesta $k = 1$. Viisi tehtävää ratkaissut on voittaja. Nyt $N = 10 + 6(n-1) = 6n + 4$. Sanomme, että tehtäväpari on helppo, jos sen kummankin tehtävän ratkaisi yli $\frac{2n+1}{5}$ kilpailijaa. Jos helppoja tehtäväpareja olisi enemmän kuin yksi, olisi

$$N \geq 13 \cdot \frac{2n+2}{5} + 2\left(\frac{2n+1}{5} + 1\right) = 6n + 5.$$

Helppoja tehtäväpareja on siis enintään yksi. Jos helpon tehtäväparin tehtävät olisi ratkaissut yli $\frac{2n+1}{5} + 1$ kilpailijaa, olisi

$$N \geq 14 \cdot \frac{2n+1}{5} + \left(\frac{2n+1}{5} + 2\right) = 6n + 5.$$

Olkoon T_0 se tehtävä, jota 5 tehtävää ratkaissut ei osannut. Lasketaan parien (K, T_0) lukumäärä M. Tehtävä on mukana viidessä parissa, joista enintään yksi on helppo. Siis $M = 5 \cdot \frac{2n+1}{5} = 2n + 1$ tai $M = 2n + 2$. Jos T_0:n ratkaisi m kilpailijaa, niin kukin näistä ratkaisi kolme muuta tehtävää eli kolme paria, joissa T_0 on toinen osapuoli. Siis $M = 3m$. Siis joko $2n + 1 \equiv 0$ tai $2n + 1 \equiv -1 \mod 3$. Olkoon sitten $T_1 \neq T_0$, missä T_1 ei ole mahdollisen helpon tehtäväparin osapuoli. Olkoon L parien (K, T_1) lukumäärä. Silloin $L = 2n + 1$. Olkoon l niiden kilpailijoiden, jotka ratkaisivat T_1:n, mutta eivät viittä tehtävää, lukumäärä. Silloin $L = 4 + 3l$, koska voittaja ratkaisi T_1:n ja neljä muuta tehtävää, muut T_1:n ratkaisseet kolme muuta tehtävää. Mutta tämä merkitsee, että $2n + 1 \equiv 1 \mod 3$. Oletus $k = 1$ on kaikissa tapauksissa johtanut ristiriitaan, joten se on hylättävä. Siis $k \geq 2$.



2006.1. Olkoon $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ ja $\angle BCA = \gamma$. Koska $\angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = \beta + \gamma$, on tehtävän ehdon perusteella $\angle PBC + \angle PCB = (\beta + \gamma)/2$, joten $\angle BPC = 180^\circ - (\beta+\gamma)/2)$. Mutta selvästi myös $\angle BIC = 180^\circ - (\beta+\gamma)/2$. Pisteet P ja I ovat siis samalla, pisteiden B ja C kautta kulkevalla ympyrän kaarella, eli piste P on kolmion BCI ympäri piirretyllä ympyrällä. Olkoon M kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän kaaren BC keskipiste. Silloin $MB = MC$. Kolmion ABI kulman vieruskulmana $\angle MIB = \alpha/2 + \beta/2$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle CBM = \alpha/2$. Siis $\angle IBM = \alpha/2 + \beta/2 = \angle MIB$. Kolmio MIB on siis tasakylkinen, $MI = MB$. Mutta tämä merkitsee, että M on kolmion BIC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Kolmiosta APM saadaan nyt $AP + PM \geq AM = AI + IM = AI + PM$, joten $AP \geq AI$. Yhtäsuuruuden välttämätön ja riittävä ehto on, että P on janalla AM eli että $P = I$.

2006.2. Sanomme tasakylkistä kolmiota, jossa on kaksi hyvää janaa sivuina, *tasahyväksi*. Tasahyviä kolmioita voi olla ainakin 1003: jos yhdistetään P:n joka toinen kärki lävistäjillä, syntyy 1003 tasahyvää kolmiota ja säännöllinen 1003-kulmio. Se voidaan jakaa mielivaltaisesti 1000:lla lävistäjällä kolmioiksi.

Osoitetaan sitten, että 1003 on suurin tasahyvien kolmioiden määrä. Osoitetaan induktiolla, että jos AB on jokin P:n halkaisija ja $\mathcal{L}$ lyhempi A:n ja B:n rajoittamista P:n piirin osista, ja että jos $\mathcal{L}$ koostuu n:stä P:n sivusta, niin sellaisia tasahyviä kolmioita, joiden kärjet ovat murtoviivan $\mathcal{L}$ kärkiä, on enintään $\frac{n}{2}$ kappaletta. Väitteen totuus on ilmeinen, jos $n = 2$ tai $n = 3$. Oletetaan, että se pätee kaikilla $n < k$ ja että $\mathcal{L}$ kosstuu k:sta P:n sivusta. Olkoon PQ pisin sellaisen tasahyvän kolmion sivu, jonka kärjet ovat murtoviivalla $\mathcal{L}$. (Jos tällaisia kolmioita ei ole, väite on ilmeinen.) Olkoon PQS kyseinen tasahyvä kolmio. Koska $\mathcal{L}$ on lyhempi murtoviivoista AB, kaikki kolmiot, joiden kärjet ovat $\mathcal{L}$:llä, ovat joko tylppä- tai suorakulmaisia. Tästä seuraa, että S on PQS:n huippu. Voimme olettaa, että A, P, S, Q ja B seuraavat toisiaan tässä järjestyksessä. Pisteet jakavat $\mathcal{L}$:n neljäksi murtoviivaksi $\mathcal{L}_{AP}$, $\mathcal{L}_{PS}$, $\mathcal{L}_{SQ}$ ja $\mathcal{L}_{QB}$, joista kaksi voi surkastua vain yhdeksi pisteeksi. Koska P:n jakoon käytetyt lävistäjät eivät leikkaa toisiaan P:n sisällä ja koska PQ oli pisin $\mathcal{L}$:ään sisältynyt tasahyvän kolmion sivu, kaikkien $\mathcal{L}$:n tasahyvien kolmioiden, paitsi PQS:n, kaikki kärjet ovat jossakin $\mathcal{L}$:n neljästä jako-osasta. Niihin voidaan soveltaa induktio-oletusta. Lisäksi PS ja PQ ovat hyviä janoja, joten sovellettaessa induktio-oletusta $\mathcal{L}_{PS}$:ään ja $\mathcal{L}_{SQ}$:hun jää epäyhtälön puolikkaiden eroksi parittomuuden takia kummassakin tapauksessa ainakin $\frac{1}{2}$. Nämä puolikkaat kattavat kolmion PQS, joten yhteen laskien väite pätee $\mathcal{L}$:ään.

Olkoon nyt XY pisin P:n jaossa käytetty lävistäjä ja $\mathcal{L}_{XY}$ lyhempi X:n ja Y:n rajaamista P:n piirin osista. Olkoon Z se jakoon kuuluvan kolmion XYZ kärki, joka ei ole murtoviivalla $\mathcal{L}_{XY}$. Kolmion XYZ kaikki kulmat ovat teräviä tai suoria: $\angle YZX$, koska $\mathcal{L}_{XY}$ on murtoviivoista P:n piiriin kuuluvista murtoviivoista $X \ldots Y$ lyhempi ja muut kaksi kulmaa siksi, että XY on kolmion XYZ pisin sivu. Määritellään kuten aikaisemmin murtoviivat $\mathcal{L}_{XZ}$ ja $\mathcal{L}_{ZY}$. Kaikkien tasahyvien kolmioiden kärkien, paitsi mahdollisesti XYZ:n, tulee kuulua tasan yhteen paloista $\mathcal{L}_{XY}$, $\mathcal{L}_{XZ}$ ja $\mathcal{L}_{ZY}$. Niihin voidaan soveltaa induktio-oletusta. Jos XYZ ei ole tasahyvä, todistus on valmis. Jos XYZ on tasahyvä, mainituissa paloissa on kaksi, joiden sivujen määrä on pariton, ja joille tasahyvien kolmioiden lukumäärän arvio ei ole tarkka. Kuten edellä, nämä epäyhtälöiden puolien erotukset, jotka ovat ainakin $\frac{1}{2}$, kattavat kolmion XYZ.

2006.3. Tarkastellaan tehtävän epäyhtälön vasemmalla puolella itseisarvomerkkien välissä olevaa lauseketta a:n kolmannen asteen polynomina. Siinä kolmannen asteen termin kerroin on $b-c$. Jos $a=b$ tai $a=c$, polynomin arvo on 0. Myös $-(b+c)b((b+c)^2-b^2)+bc(b^2-c^2)-c(b+c)(c^2-(b+c)^2) = (b+c)(-2b^2c-bc^2+b^2c-bc^2+2bc^2+b^2c) = 0$, joten $-(b+c)$ on polynomin kolmas nollakohta. Kyseinen polynomi on siis $(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)$. Tehtävän epäyhtälö on

$$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \le M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Epäyhtälö on symmetrinen, joten voimme olettaa, että $a \le b \le c$. Tällöin

$$|(a-b)(b-c)| = (b-a)(c-b) \le \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4}, \tag{1}$$

ja yhtäsuuruus on voimassa, kun $b-a=c-b$ eli kun $2b=a+c$. Lisäksi

$$\left(\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2 \le \frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2}$$

eli

$$3(c-a)^2 \le 2\left((b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\right), \tag{2}$$

missä yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $b-a=c-b$ eli $2b=a+c$. Kun (1) ja (2) yhdistetään ja käytetään aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä yhtälöä, saadaan

$$\begin{aligned}
|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| &\le \frac{1}{4}|(c-a)^3(a+b+c)| = \frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \\
&\le \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2\left((b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\right)}{3}\right)^3(a+b+c)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3(a+b+c)^2}\right)^2 \\
&\le \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right)^2 = \frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2+b^2+c^2)^2.
\end{aligned}$$

Tehtävän epäyhtälö toteutuu siis, kun $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$, ja epäyhtälö on yhtälö, kun $2b=a+c$ ja

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2.$$

Kun viimeiseen yhtälöön sijoitetaan $b = \dfrac{a+c}{2}$, se saa muodon $2(c-a)^2 = 9(a+c)^2$. Yhtäsuuruusehdot ovat siis $2b = a+c$ ja $(c-a)^2 = 18b^2$. jos $b = 1$, ehdot toteutuvat, kun $a = 1 - \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ ja $c = 1 + \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$. Täten $M = \dfrac{9\sqrt{2}}{32}$ on todellakin pienin ehdon toteuttava M.

2006.4. Todetaan, että yhtälöllä ei ole ratkaisuja (x, y), missä $x < 0$. Jos $x \le -2$, $2^x + 2^{2x+1}$ ei ole kokonaisluku, ja jos $x = -1$, yhtälön vasen puoli on 2, joka puolestaan ei ole kokonaisluvun neliö. Jos (x, y) on ratkaisu, niin myös $(x, -y)$ on ratkaisu. Selvästi $(0, 2)$ ja $(0, -2)$ ovat ratkaisuja. Voidaan olettaa, että $x \ge 1$ ja $y^2 \ge 11$ eli $y > 3$. y on pariton luku, joten $y \ge 5$. Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$2^x(2^{x+1} + 1) = (y-1)(y+1)$$

kanssa. Parillisista luvuista $y-1$ ja $y+1$ tasan toinen on jaollinen 4:llä. Jos tämä luku on $y-1$, niin $y = 2^{x-1}u + 1$, missä u on pariton luku. Siis $2^x(2^{x+1}+1) = 2^{2x-2}u^2 + 2^x u$ eli $2^{x-2}u^2 + u = 2^{x+1} + 1$. Tällöin $1 - u = 2^{x-2}(u^2 - 8)$. Siis $u^2 - 8 \le 0$, joka on mahdollista vain, kun $u = 1$. Ristiriita osoittaa, että $y-1$ ei ole neljällä jaollinen. Jäljelle jää mahdollisuus $y + 1 = 2^{x-1}u$. Samoin kuin edellä saadaan nyt $1 + u = 2^{x-2}(u^2-8) \ge 2(u^2-8)$ eli $2u^2 - u - 17 \le 0$. Tästä seuraa $u \le 3$. $u = 1$ ei ole mahdollista. Sen sijaan $u = 3$ antaa ratkaisun $x = 4$ ja $y = 23$. Ainoat ratkaisut ovat siis $(0, \pm 2)$ ja $(4, \pm 23)$.

2006.5 Jos jokainen ehdon $Q(x) = x$ toteuttava luku toteuttaa myös ehdon $P(x) = x$, väite on tosi, koska n:nnen asteen polynomilla $P(x) - x$ on enintään n nollakohtaa. Oletetaan siis, että on olemassa luku x_0, jolle $Q(x_0) = x_0$, mutta $P(x_0) \ne x_0$. Jos nyt $x_1 = P(x_0)$, $x_2 = P(x_1)$, $\ldots$, niin $x_k = P(x_{k-1}) = Q(x_0) = x_0$. Jos u ja v ovat mielivaltaisia kokonaislukuja, niin luku $P(u) - P(v)$ on jaollinen luvulla $u - v$ (koska $u^j - v^j$ on kaikilla j jaollinen $(u-v)$:llä). Näin ollen $x_{j+1} - x_j = P(x_j) - P(x_{j-1}$ on jaollinen $(x_j - x_{j-1})$:llä. Jonossa

$$x_0 - x_1, \quad x_1 - x_2, \quad \ldots, \quad x_{k-1} - x_k, \quad x_k - x_{k+1} = x_0 - x_1$$

jokainen jäsen on jaollinen edellisellä. Tämä on mahdollista vain, jos jonon kaikkien jäsenten itseisarvo on sama; itseisarvo ei ole 0, koska $x_1 \ne x_0$. Jos x_m on luvuista x_0, $\ldots$, x_k pienin, niin on oltava $x_{m-1} - x_m = -(x_m - x_{m+1})$. Siis $x_{m-1} = x_{m+1}$, $x_{m+2} = P(x_{m+1}) = P(x_{m-1}) = x_m$ jne. Jono x_0, x_1, $\ldots$, x_k on siis vuorotteleva ja koostuu vain kahdesta eri luvusta. Jokainen ehdon $Q(x) = x$ toteuttava luku toteuttaa myös ehdon $P(P(x)) = x$. On osoitettava, että tällaisia lukuja on enintään n kappaletta.

Olkoon nyt a ehdon $P(P(a)) = a$ toteuttava luku ja olkoon $b = P(a) \ne a$. Silloin $P(b) = a$. Olkoon vielä c jokin ehdon $P(P(c)) = c$ toteuttava luku ja $d = P(c)$, $c = P(d)$. (On mahdollista, että $c = d$.) Aikaisemmin esitetyn mukaan $c - a$ ja $d - b$ ovat toistensa tekijöitä samoin kuin $c - b$ ja $d - a$. Siis

$$c - b = \pm(d-a), \quad c - a = \pm(d-b).$$

Jos molemmissa edellisissä yhtälöissä olisi $+$-merkki, niistä seuraisi puolittain vähentämällä $a - b = b - a$ eli $a = b$. Koska $a \ne b$, on ainakin toisessa yhtälössä $-$-merkki. Tämä yhtälö olisi silloin $a + b = c + d$ eli $a + b - c - P(c) = 0$. Mutta tämä merkitsee, että jokainen yhtälön $P(P(x)) = x$ toteuttava luku toteuttaa yhtälön $a+b-x-P(x) = 0$ eli on n:nnen asteen polynomin $P(x)+x-a-b$ nollakohta (myös a ja b toteuttavat yhtälön). Näitä nollakohtia on enintään n kappaletta.

2006.6. Osoitetaan ensin, että jos kuperan $2n$-kulmion Q ala on S, niin jokin Q:n sivu ja Q:n kärki muodostavat kolmion, jonka ala on ainakin $\frac{1}{n} \cdot S$. Sanomme niitä Q:n lävistäjiä, joiden päätepisteet jakavat Q:n piirin murtoviivoiksi, joissa on n sivua, Q:n *päälävistäjiksi.* Jos $b = AB$ on Q:n sivu, niin päälävistäjät AA' ja BB' leikkaavat pisteessä C. Merkitään kolmiota ABC symbolilla Δ_b. Väitämme, että kun b käy läpi kaikki $2n$-kulmion Q sivut, niin kolmiot Δ_b peittävät koko monikulmion Q. Jokainen jonkin päälävistäjän piste on jonkin kolmion Δ_b sivun piste. Olkoon X sellainen Q:n piste, joka ei ole millään päälävistäjällä. Tulkitaan päälävistäjät suunnatuiksi janoiksi ja oletetaan, että X on AA':n vasemmalla puolellla. Tarkastellaan päälävistäjiä AA', BB', CC', $\ldots$, missä A, B, C, $\ldots$ ovat Q:n peräkkäiset kärjet A:sta lukien A:n oikealla puolella. Päälävistäjäjonon n:s jäsen on päälävistäja $A'A$, jonka oikealla puolella X on. Tästä seuraa, että Q:lla on sivu KL niin, että X on KK':n vasemmalla, mutta LL':n oikealla puolella. Mutta nyt X:n on oltava kolmiossa $\Delta_{K'L'}$. – Vastaava päättely toimii luonnollisesti myös, jos X on AA':n vasemmalla puolella. Kolmiot Δ_b peittävät siis koko Q:n. Tästä seuraa laatikkoperiaatteen nojalla, että on olemassa sivut $b = AB$ ja $b' = A'B'$ niin, että kolmioiden Δ_b ja $\Delta_{b'}$ yhteen laskettu ala on ainakin $\frac{1}{n}S$. Leikatkoot AA' ja BB' pisteessä Y. Oletetaan, että $BY \ge B'Y$. Silloin

$$|ABA'| = |ABY| + |YBA'| \ge |ABY| + |YA'B'| \ge \frac{1}{n}S.$$

Aputulos on todistettu.

Tarkastellaan nyt tehtävän n-kulmiota P. olkoot sen sivut b_1, b_2, $\ldots$, b_n ja olkoon S_i suurimman sellaisen P:hen sisältyvän kolmion, jonka yksi sivu on b_i, ala. Tehdään vastaoletus

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{S} < 2.$$

Tällöin on olemassa rationaaliluvut q_i niin, että

$$q_i > \frac{S_i}{S}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{n} q_i = 2.$$

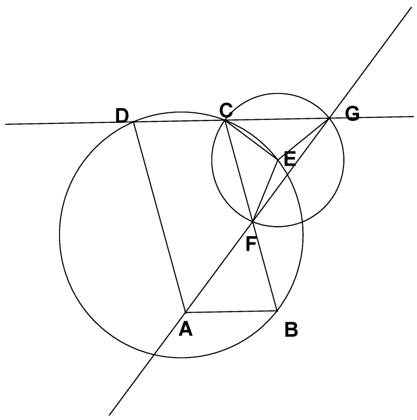
Kirjoitetaan $q_i = \frac{k_i}{m}$, missä m on murtolukujen q_i nimittäjien pienin yhteinen monikerta. Lukujen k_i summa on $2m$. Jaetaan nyt jokainen P:n sivu b_i k_i:hin yhtä suureen osaan. Syntyy kupera $2m$-kulmio Q (jonka jotkut kulmat ovat 180°). Aputuloksen mukaan Q:lla on sivu b ja kärki H, jotka muodostavat kolmion, jonka ala on $\ge \frac{1}{m}S$. b on erään P:n sivun b_i osa. Kolmion, jonka määrittävät b ja H, ala on $\ge k_i \cdot \frac{1}{n}S = q_iS > S_i$. Tämä on ristiriidassa luvun S_i määritelmän kanssa. Vastaoletus on siis väärä ja tehtävän väite todistettu.

2007.1. Olkoon k jokin sellainen indeksi, jolle $d = d_k$. Olkoon k_1 ja $k_2 \geq k_1$ sellaiset indeksit, joille $d_k = a_{k_1} - a_{k_2}$. Jos $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, niin $x_{k_1} \leq x_{k_2}$. Jos $a_{k_1} - x_{k_1} \geq \frac{d}{2}$, niin $(*)$ pätee. Oletetaan, että $a_{k_1} - x_{k_1} \leq \frac{d}{2}$. Mutta silloin

$$x_{k_2} - a_{k_2} \geq x_{k_1} - a_{k_1} + d \geq -\frac{d}{2} + d = \frac{d}{2}.$$

Väite (a) on todistettu. Kohdassa (b) vaadittu jono voidaan rakentaa esimerkiksi seuraavasti. Olkoon $x_1 = a_1 - \frac{d}{2}$ ja olkoon x_k suurempi luvuista x_{k-1} ja $a_k - \frac{d}{2}$. Silloin $x_{k-1} \leq x_k$ kaikilla k. Olkoon m mielivaltainen indeksi. Jos $x_m = a_m - \frac{d}{2}$, niin $|x_m - a_m| \leq \frac{d}{2}$. Jos $x_m > a_m - \frac{d}{2}$, niin $x_m = x_{m-1}$. Olkoon nyt p pienin indeksi, jolle $x_m = x_p$. Silloin $x_p = a_p - \frac{d}{2}$ ja, koska $p < m$, $x_m - a_m = a_p - \frac{d}{2} - a_m \leq d - \frac{d}{2} = d$. Siis $|a_m - x_m| \leq \frac{d}{2}$. Nämä epäyhtälöt osoittavat, että epäyhtälössä $(*)$ vallitsee jonolle (x_k) yhtäsuuruus.

2007.2. Riittää, että osoitetaan $CF = CG$, koska tällöin $\angle FAD = \angle FGC = \angle CFG = \angle BAF$. Tehdään vastaoletus $CF < GC$. Olkoot K ja L pisteen E kohtisuorat projektiot janoilla CF ja CG. Silloin $KF < CL$. Koska FC ja GC ovat E-keskisen ympyrän jänteitä, on $EL < EK$. Koska $BCED$ on jännenelikulmio, $\angle CBE = \angle CDE$. Suorakulmaiset kolmiot BEL ja DEK ovat yhdenmuotoiset, joten $DK > BL$. Näin ollen $DF = DK - KF > BL - CL = BC = AD$. Mutta tämä on ristiriidassa sen kanssa, että kolmiot ADF ja GCF ovat yhdenmuotoiset ja $CF < CG$. Ehdosta $CF > GC$ johdetaan ristiriita samoin.



2. ratkaisu (Suomen joukkueen jäsen Sebastian Dumitrescu). Kolmiot ABG, FCG ja FDA ovat yhdenmuotoisia. Koska $AD = BC$ ja $AB = DC$, saadaan

$$\frac{BC}{DF} = \frac{BG}{DC}. \tag{1}$$

Lasketaan pisteiden B ja D potenssi E-keskisen ja pisteet F, C ja G sisältävän ympyrän suhteen. Saadaan $BC \cdot BG = BE^2 - EC^2$ ja $DF \cdot DC = DE^2 - EF^2$. Kun yhtälöt jaetaan puolittain ja otetaan huomioon (1), saadaan

$$\frac{BC^2}{DF^2} = \frac{BE^2 - EC^2}{DE^2 - EF^2}. \tag{2}$$

Kosinilause sovellettuna kolmioihin EBC ja EDF antaa $BE^2 - EC^2 = BC(2 \cdot BE\cos(\angle CBE))$ ja $DE^2 - EF^2 = DF(2 \cdot DE\cos(\angle EDF) - DF)$. Sijoitetaan edelliset lausekkeet kaavaan (2), joka sievenee muotoon

$$\frac{BC}{DF} = \frac{2 \cdot BE \cdot \cos(\angle CBE) - BC}{2 \cdot DE \cdot \cos(\angle EDF) - DF}. \tag{3}$$

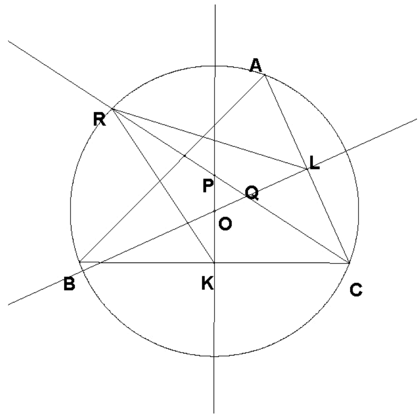
Mutta koska $BCED$ on jännenelikulmio, $\angle EDF = \angle EDC = \angle CBE$. (3) sievenee siten muotoon

$$\frac{BC}{DF} = \frac{BE}{DE}.$$

Tästä ja juuri havaitusta kulmien yhtäsuuruudesta seuraa, että kolmiot BCE ja DFE ovat yhdenmuotoiset. Koska kolmioissa on yhtä pitkät sivut EF ja EC, kolmiot ovat yhtenevät. Siis $DF = BC = AD$, joten $\angle DAF = \angle DFA = \angle FAB$.

2007.3. Merkitään $|E|$:lla joukon E alkioiden lukumäärää. Merkitään huoneissa olevien kilpailijoiden joukkoja symboleilla A ja B ja merkitään vastaavasti huoneessa olevan suurikokoisimman klikin kokoa $c(A)$:lla ja $c(B)$:llä. Olkoon M jokin klikki, jonka koko on suurin mahdollinen. Olkoon $|M| = 2m$. Sijoitetaan aluksi kaikki M:n jäsenet huoneeseen A ja kaikki muut kilpailijat huoneeseen B. Silloin $c(A) = |M| \geq c(B)$. Jos $c(A) = c(B)$, vaadittu sijoittelu on tehty. Jos $c(A) > c(B)$, siirretään yksi henkilö huoneesta A huoneeseen B. Tällöin $c(A)$ pienenee yhdellä ja $c(B)$ joko säilyy ennallaan tai kasvaa yhdellä. Jatketaan siirtoja, kunnes $c(A) \leq c(B) \leq c(A) + 1$. Tällöin $c(A) = |A| \geq m$. Merkitään $c(A) = k$. Jos nyt $c(A) = c(B)$, jako on valmis. Oletetaan, että $c(B) = c(A) + 1$. Jos nyt B-huoneessa on kilpailija $x \in M$ ja klikki C, jolle $|C| = k + 1$ ja $x \notin C$, niin siirretään x huoneeseen A. Silloin $c(A) = k + 1 = |C| = c(B)$, ja jako on suoritettu. Ellei tällaista kilpailijaa ole, niin jokainen $x \in B \cap M$ kuuluu jokaiseen sellaiseen klikkiin $C \subset B$, jolle $|C| = k + 1$. Valitaan nyt jokin tällainen klikki ja siirretään siitä yksi kilpailija, joka ei kuulu M:ään, A-huoneeseen. Toistetaan askel niin monta kertaa kuin se on mahdollista. Joka siirrossa $c(B)$ pienenee enintään yhdellä. Viimeisen mahdollisen siirron jälkeen $c(B) = k$. Tarkastellaan nyt tilannetta. A:ssa on yhä klikki $A \cap M$, joten $c(A) \geq k$. Olkoon Q mielivaltainen A:n klikki. Jos $x \in Q$, niin joko $x \in A \cap M$, jolloin x on jokaisen $B \cap M$:n jäsenen ystävä, tai x on siirretty sellaisesta B:n klikistä, joka sisälsi $B \cap M$:n, jolloin x myös on jokaisen $B \cap M$:n jäsenen ystävä. Siis $Q \cup (B \cap M)$ on klikki. Mutta M on suurikokoisin klikki, joten $|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|$. Siis $|Q| \leq |A \cap M| = k$. Siis $c(A) \leq k$. Siis $c(A) = k$, ja haluttu jako on suoritettu.

2007.4. Olkoon $\angle BCA = 2\gamma$. Kolmion RPK sivua RP vastaan piirretyn korkeusjanan pituus on $KC \cdot \sin\gamma$ ja kolmion RQL sivua RQ vastaan piirretyn korkeusjanan pituus on $LC \cdot \sin\gamma$. Väite tulee todistetuksi, jos saadaan osoitettua $RP \cdot KC = RQ \cdot LC$. Olkoon O kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste eli keskinormaalien leikkauspiste.



Suorakulmaisista kolmioista CPK ja CQL nähdään heti, että $\angle KPC = \angle LQC = \angle OQP$. Kolmio OQP on siis tasakylkinen. (Jos $Q = P = O$, tehtävän väite pätee triviaalisti.) Tästä seuraa, että pisteillä P ja Q on sama potenssi kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän suhteen ja edelleen, että $RP \cdot PC = CQ \cdot QR$. Tämä on mahdollista vain, jos $RP = QC$ ja $RQ = PC$. Mutta yhdenmuotoisista kolmioista PKC ja QLC saadaan

$$\frac{QC}{LC} = \frac{PC}{KC},$$

joten väite on tosi.

2007.5. Tehdään vastaoletus: oletetaan, että on olemassa vastaesimerkkipari $(a,\, b)$, niin että $a \neq b$ ja $4ab-1$ on luvun $(4a^2-1)^2$ tekijä. Koska $4ab \equiv 1 \bmod (4ab-1)$, niin $(4ab)^2 \equiv 1 \bmod (4ab-1)$ ja $(4b^2-1)^2 \equiv (4b^2-(4ab)^2) = 16b^2(4a^2-1) \equiv 0 \bmod (4ab-1)$. Siis myös pari $(b,\, a)$ on vastaesimerkkipari. Voidaan siis olettaa, että on olemassa vastaesimerkkipari $(a,\, b)$ niin, että $a < b$. Olkoon nyt

$$r = \frac{4a^2-1}{4ab-1}.$$

Silloin

$$r \equiv (-r)(-1) \equiv (-r)(4ab-1) \equiv -(4a^2-1)^2 \equiv -1 \bmod (4a).$$

Siis $r = 4ac-1$ jollain positiivisella kokonaisluvulla c. Mutta r on luvun $4a^2-1$ aito tekijä, joten $r < 4a^2-1$. Siis $c < a$. Tämä merkitsee, että $(a,\, c)$ on myös vastaesimerkkipari ja $c < a$. Tarkastellaan nyt kaikkia vastaesimerkkipareja. Jollakin parilla $(a,\, b)$ lauseke $2a+b$ saa pienimmän mahdollisen arvonsa. Jos $a > b$, niin $2b+a < 2a+b$. Kuitenkin myös $(b,\, a)$ on vastaesimerkkipari. Jos $a < b$, on olemassa vastaesimerkkipari $(a,\, c)$, jolle $c < a$. Selvästi $2a+c < 2a+b$. Kummassakin tapauksessa tullaan ristiriitaan $2a+b$:n minimaalisuuden kanssa. Vastaesimerkkipareja ei siis voi olla olemassa.

2007.6. Tasot, joiden yhtälöt ovat $x+y+z = k$, $k = 1, \ldots, 3n$, sisältävät kaikki S:n pisteet, mutta $(0,\, 0,\, 0)$ ei kuulu mihinkään niistä. Näitä tasoja on $3n$ kappaletta. Osoitetaan, että vähemmillä tasoilla peitto ei onnistu. Jos peittävien tasoja on m kappaletta ja niiden yhtälöt ovat $T_k(x,\, y,\, z) = a_kx + b_ky + c_kz - 1 = 0$, $k = 1, \ldots, m$, niin polynomi

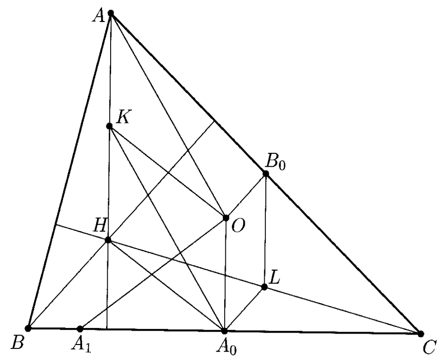
$$P(x,\, y,\, z) = \prod_{k=1}^{m} T_k(x,\, y,\, z)$$

saa arvon 0 aina kun $(x,\, y,\, z) \in S$, mutta $P(0,\, 0,\, 0) = (-1)^m \neq 0$. Polynomin aste on m. Osoitetaan, että $m \geq 3n$.

Tarkastellaan ensin kahden muuttujan polynomia $P(x, y)$, jolle $P(x, y) = 0$, kun x tai y on jokin luvuista $0, 1, \dots, n$, mutta $(x, y) \neq (0, 0)$, ja jolle $P(0, 0) \neq 0$. Olkoon $S(y) = y(y-1)(y-2)\cdots(y-n)$ ja olkoon $R(x, y)$ polynomi, joka saadaan jakojäännökseksi, kun $P(x, y)$ jaetaan $S(y)$:llä: $P(x, y) = Q(x, y)S(y) + R(x, y)$. Nyt $R(x, y)$:n aste y:n suhteen on $< S(y)$:n aste. Lisäksi $R(x, y) = P(x, y)$, kun $x, y \in \{0, 1, \dots, n\}$. Siis $R(x, y) = R_n(x)y^n + R_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + R_0(x)$. Polynomi $R(0, y)$ saa arvon 0, kun $y = 1, \dots, n$, mutta $R(0, 0) \neq 0$. Siis $R(0, y)$:n aste on $\geq n$. Tästä seuraa, että $R_n(0) \neq 0$. Olkoon sitten $x \in \{1, \dots, n\}$. y:n n:nnen asteen polynomi $R(x, y) = 0$, kun $y = 0, 1, \dots, n$, joten polynomi on identtisesti 0. Siis myös $R_n(x) = 0$, kun $x \in \{1, \dots, n\}$. Koska $R_n(x)$ ei ole nollapolynomi, sen asteen on oltava $\geq n$. Mutta tämä merkitsee, että $R(x, y)$:n ja siis myös $P(x, y)$:n aste kahden muuttujan polynomina on $\geq 2n$.

Nyt todistetun perusteella voidaan osoittaa, että kolmen muuttujan polynomin $P(x, y, z)$, jolle $P(x, y, z) = 0$, kun $(x, y, z) \in S$, mutta $P(0, 0, 0) \neq 0$, aste on $\geq 3n$. Päättely on aivan sama kuin edellä (ja voitaisiin kiteyttää induktioaskeleeksi). Muodostetaan $P(x, y, z)$:n jakojäännös $R(x, y, z)$ modulo $S(z) = z(z-1)\cdots(z-n)$. R:n aste z.n suhteen on $\leq n$ ja R saa saman arvon kuin P kaikissa niissä pisteissä (x, y, z), joissa $x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}$. Jos kirjoitetaan $R(x, y, z) = R_n(x, y)z^n + \cdots + R_0(x, y)$, niin $R(0, 0, z)$ ei ole nollapolynomi, mutta kuitenkin polynomi, jolla on ainakin n nollakohtaa; siis $R_n(0, 0) \neq 0$. Jos $(x, y) \neq (0, 0)$, mutta $x, y \in \{0, 1, \dots, n\}$, niin $R(x, y, z)$ on z:n n:nnen asteen polynomi, jolla on $n+1$ nollakohtaa. Se on siis identtisesti nolla, joten $R_n(x, y) = 0$. Mutta aikaisemmin todistetun perusteella $R_n(x, y)$:n on oltava ainakin astetta $2n$. Siis $R(x, y, z)$ ja myös $P(x, y, z)$ on kolmen muuttujan polynomina ainakin astetta $3n$. Ratkaisu on valmis.

2008.1 Olkoon A_0 sivun BC keskipiste ja B_0 sivun AC keskipiste. Ainoa piste, joka voi olla tehtävässä vaaditun ympyrän keskipiste, on janojen A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2 keskinormaalien leikkauspiste. Sanotut keskinormaalit ovat myös kolmion sivujen keskinormaaleja, ja ne leikkaavat kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteessä O. Olkoon kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde R. Koska $A_0H = A_0A_1$, Pythagoraan lauseesta saadaan



$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2. \qquad (1)$$

Olkoot K ja L janojen AH ja CH keskipisteet. Kolmioista BCH ja CAH saadaan $A_0L \| BH$ ja $B_0L \| AH$. Koska $BH \perp AC$ ja $OB_0 \perp AC$, niin $A_0L \| OB_0$. Vastaavasti $B_0L \| OA_0$. Nelikulmio A_0LB_0O on siis suunnikas, joten $OA_0 = B_0L = KH$. Koska $KH \| OA_0$, HA_0OK on suunnikas. Samoin KA_0OA on suunnikas. Siis $A_0K = OA = R$. Sovelletaan suunnikaslausetta suunnikkaaseen HA_0OK; saadaan

$$2(OA_0^2 + A_0H^2) = OH^2 + A_0K^2 = OH^2 + R^2. \qquad (2)$$

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan heti $OA_1^2 = \dfrac{1}{2}(OH^2 + R^2)$. Tiedetään, että $OA_1 = OA_2$.

Toisaalta sama lasku antaa saman arvon suureille OB_1^2 ja OC_1^2 ja $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$. Kysytyt pisteet ovat siis kaikki samalla O-keskisellä ympyrällä.

2008.2. (a) Tehdään muuttujanvaihto

$$\frac{x}{x-1} = a, \quad \frac{y}{y-1} = b, \quad \frac{z}{z-1} = c$$

eli

$$x = \frac{a}{a-1}, \quad y = \frac{b}{b-1}, \quad z = \frac{c}{c-1}.$$

On siis todistettava, että $a^2+b^2+c^2 \ge 1$, kun $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$, kun $a, b, c \ne 1$. Mutta viimeinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälöiden

$$\begin{aligned} a+b+c-1 &= ab+bc+ca, \\ 2(a+b+c-1) &= (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2), \\ a^2+b^2+c^2-2 &= (a+b+c)^2 - 2(a+b+c), \\ a^2+b^2+c^2-1 &= (a+b+c-1)^2 \ge 0. \end{aligned}$$

Väite on siis tosi.

(b) Edellisen yhtälöketjun viimeinen yhtälö osoittaa, että alkuperäisessä yhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a^2+b^2+c^2 = a+b+c = 1$. Koska $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$, yhtäsuuruuden ehto on yhtälöiden $a+b+c = 1$ ja $ab+bc+ca = 0$ yhtäaikainen voimassaolo, sekä $a, b, c \ne 1$. Kun yhtälöistä eliminoidaan c, saadaan $a^2+ab+b^2 = a+b$. Tulkitaan tämä b:n toisen asteen yhtälöksi. Yhtälön diskriminantti on $D = (a-1)^2 - 4a(a-1) = (1-a)(1+3a)$. Saamme rationaalisia ratkaisuja, jos valitsemme a:n niin, että $1-a$ ja $1+3a$ ovat rationaaliluvun neliöitä; tällöin diskriminantti ja b ovat myös rationaalisia ja samoin $c = 1-a-b$. Asetetaan $a = \dfrac{k}{m}$, missä k ja m ovat kokonaislukuja. Jos $m = k^2-k+1$, niin $m-k = (k-1)^2$ ja $m+3k = (k+1)^2$. Tällöin $D = \dfrac{(k^2-1)^2}{m^2}$, $b = \dfrac{1}{2m}(m-k \pm (k^2-1))$ ja $c = \dfrac{1-k}{m}$. Kun $k \ne 1$, niin $a, b, c \ne 1$. Kun k käy läpi luonnolliset luvut > 1, saadaan tällä tavoin äärettömän monta yhtälön $a^2+b^2+c^2 = 1$ toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa (a, b, c) ja samoin äärettömän monta tehtävän yhtälön toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa (x, y, z).

2008.3. Tarkastellaan kokonaislukua $k \ge 20$. Olkoon p jokin luvun $(k!)^2+1$ alkutekijä. Silloin $p > 20$ ja luvuilla p ja $k!$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Olkoon $x \equiv k! \bmod p$ ja $0 < x < p$. Jos $p/2 > x$, niin $p - x < p/2$ ja $p - x \equiv -k! \bmod p$. Joka tapauksessa on olemassa n, $0 < n < p/2$ niin, että $n^2 \equiv (k!)^2 \equiv -1 \bmod p$. p on siis luvun n^2+1 tekijä. Tästä seuraa edelleen $(p-2n)^2 = p^2 - 4pn + 4n^2 \equiv 4n^2 \equiv -4 \bmod p$. Siis $(p-2n)^2 \ge p-4$ eli $p \ge 2n + \sqrt{p-4} > 2n + \sqrt{2n}$, jos $p > 20$, sillä tällöin $p - 4 \ge 2n + \sqrt{p-4} - 4 > 2n$. On vielä osoitettava, että ehdon täyttäviä lukuja n on äärettömän monta. Olkoon n ja p edellä tuotetut luvut. Olkoon q jokin luvun $(p^2)!+1$ alkutekijä. Samoin kuin edellä löydetään n', $n' < q/2$, niin että q on n'^2+1:n tekijä ja $q > 2n' + \sqrt{2n'}$. Toisaalta $n'^2+1 > q > p^2 > 4n^2 > n^2+1$, joten $n' > n$. Jokaista ehdon täyttävää kokonaislukua kohden löytyy siis suurempi ehdon täyttävä kokonaisluku, joten ehdon täyttäviä kokonaislukuja on äärettömän monta.

2008.4. Olkoon f jokin ehdon toteuttava funktio. Asettamalla $w = x = y = z = 1$ saadaan

$$\frac{2f(1)^2}{2f(1)} = 1,$$

josta seuraa $f(1) = 1$. Olkoon sitten $w > 0$, $x = 1$, $y = z = \sqrt{w}$. Nyt

$$\frac{f(w)^2 + 1}{2f(w)} = \frac{w^2 + 1}{2w}.$$

Yhtälö sievenee muotoon

$$(wf(w) - 1)(f(w) - w) = 0.$$

Siis joko $f(w) = w$ tai $f(w) = \frac{1}{w}$. On ilmeistä, että funktiot $f(x) = x$ ja $f(x) = \frac{1}{x}$ (kaikilla $x > 0$) toteuttavat yhtälön. Osoitetaan, että muita yhtälön toteuttavia funktioita ei ole. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan tällainen funktio f olisi olemassa. Silloin olisi olemassa positiiviset luvut a ja b, a, $b \neq 1$, niin että $f(a) = \frac{1}{a}$ ja $f(b) = b$. Asetetaan $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$. Saadaan

$$\frac{\frac{1}{a^2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

eli

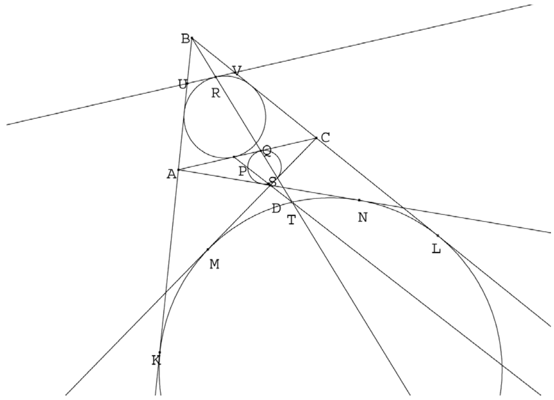
$$f(ab) = \frac{ab(a^{-2} + b^2)}{a^2 + b^2}.$$

Mutta $f(ab)$ on joko ab tai $\frac{1}{ab}$. Edellisessä tapauksessa on oltava $a^{-2} = a^2$ eli $a = 1$. Jälkimmäisessä tapauksessa $a^2b^2(a^{-2} + b^2) = a^2 + b^2$, josta seuraa $b = 1$. Kumpikin vaihtoehto johti ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä.

2008.5. Sanomme, että jono, jolla päästään alkutilasta tehtävän lopputilaan, on sallittu jono, ja sallittu jono, jolla päästään lopputilaan niin, että minkään lampun $n + 1, \ldots, 2n$ tilaa ei muuteta, on rajoitettu jono. Rajoitettuja jonoja on olemassa, koska on mahdollista sytyttää kukin lampuista $1, \ldots, n$ ja sen jälkeen sytyttää ja sammuttaa lamppua 1 $\frac{1}{2}(k-n)$ kertaa. Tarkastellaan nyt mielivaltaista rajoitettua jonoa X ja mielivaltaista lamppua p, $1 \leq p \leq n$. Oletetaan, että jonossa tämän lampun tilaa on muutettu k_p kertaa; k_p on pariton. Valitaan mielivaltainen parillinen määrä jonon sellaisia askelia, joissa lampun p tilaa vaihdetaan ja korvataan jokainen askeleella, jossa lampun $n+p$ tilaa vaihdetaan. Täten saadaan $2^{k_p - 1}$ jonoa, joiden askeleet yhtyvät jonon X askeliin muuten kuin valittujen p:n tilaa muuttavien askelten kohdalla. (k_p-alkioisella joukolla on $2^{k_p - 1}$ parillisalkioista osajoukkoa.) Samalla tavalla voidaan jokaiseen lamppuun $1, \ldots, n$ liittyvät tilanvaihdot siirtää lampun $n + 1, \ldots 2n$ tilanvaihdoiksi. Rajoitettuun jonoon X liittyy tällä tavoin $2^{k_1 - 1} \cdot 2^{k_2 - 1} \cdots 2^{k_n - 1} = 2^{k-n}$ erilaista sallittua jonoa.

Osoitetaan kääntäen, että jokainen sallittu jono Y saadaan rajoitetusta jonosta kuvatulla tavalla: korvataan jokainen lampun $q > n$ tilan muuttava Y:n askel lampun $q - n$ tilan muuttavalla askeleella. Näin saadaan eräs rajoitettu jono X. Koska jonossa Y lamppujen $q > n$ tilaa on muutettu parillinen määrä kertoja, jonon Y ja jonon X lopputilat ovat samat. Selvästi Y saadaan X:stä edellä kuvatulla menetelmällä. Jokaista rajoitettua jonoa kohden on siis tasan 2^{k-n} samaan lopputilaan johtavaa sallittua jonoa. Siis $N/M = 2^{k-n}$.

2008.6. Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 välisen homotetiakuvauksen homotetiakeskus on ympyrällä ω. Osoitetaan ensin, että ympyrän ω olemassa olo asettaa rajoituksen nelikulmion $ABCD$ muodolle. Olkoot ympyrän ω ja suorien BA, BC, CD ja AD sivuamispisteet K. L, M ja N. Nyt $AB + AD = (BK - AK) + (AN - DN) = BL - AN + AN - DM = BL - (CM - CD) = BL - CL + CD = BC + CD$.



Olkoon nyt P ympyrän ω_1 ja sivun AC yhteinen piste; olkoon R ympyrän ω_1 P:n kautta piirretyn halkaisijan toinen päätepiste ja Q BR:n ja AC:n leikkauspiste. Olkoot vielä U ja V R:n kautta piirretyn ω_1:n tangentin ja suorien BA ja BC leikkauspisteet. B-keskinen homotetia, joka kuvaa UV:n janaksi AC, kuvaa ympyrän ω_1, joka on kolmion BUV sivuun UV liittyvä sivuympyrä, kolmion BAC sivuun AC liittyväksi sivuympyräksi. Q on näin ollen viimemainitun sivuympyrän ja sivun AC yhteinen piste. On helppo nähdä (ja tunnettua), että kolmion XYZ sisään piirretyn ympyrän sivuamispisteen etäisyys kolmion kärjestä X on sama kuin sivuun XY liittyvän sivuympyrän sivuamispisteen etäisyys kärjestä Y. Näin ollen $AP = CQ$.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän sivuamispisteen ja kolmion kärjen etäisyys on laskettavissa tunnetun (ja helposti johdettavan) kaavan avulla. Sen mukaan $AP = \dfrac{1}{2}(AB + AC - BC)$. Vastaavasti kolmion ADC sisään piirretyn ympyrän ja sivun AC yhteiselle pisteelle Q' saadaan $CQ' = \dfrac{1}{2}(AC + CD - AD)$. Koska edellä sanotun mukaan tehtävän nelikulmiolle pätee $AB - BC = CD - AD$, on $CQ' = AP = CQ$. Q on siis ympyrän ω_2 ja suoran AC yhteinen piste. Vastaavalla tavalla nähdään, että ympyrän ω_2 pisteeseen Q piirretyn halkaisijan toinen päätepiste S , D ja P ovat samalla suoralla.

Olkoon sitten T ympyrän ω AC:n suuntaisen tangentin sivuamispiste (tarkemmin sanoen se niistä, joka on lähempänä suoraa AC). Homotetia, jonka keskus on B ja homotetiasuhde $\dfrac{BT}{PR}$ kuvaa ympyrän ω_1 ympyräksi ω. B, R, Q ja T ovat siis samalla suoralla. Vastaavasti homotetia, jonka keskus on D ja homotetiasuhde $-\dfrac{DT}{DS}$ kuvaa ympyrän ω_2 ympyräksi ω. P, S, D ja T ovat siis samalla suoralla. Mutta koska ympyröiden ω_1 ja ω_2 halkaisijat PR ja SQ ovat yhdensuuntaiset, ne kuvautuvat toisilleen T-keskisessä homotetiassa. Tästä seuraa, että itse ympyrät ω_1 ja ω_2 kuvautuvat toisilleen tässä homotetiassa. Mutta tällöin T:n on oltava ympyröiden yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste, ja todistus on valmis.

2009.1. Tehtävän oletuksen perusteella

$$a_i a_{i+1} \equiv a_i \bmod n,$$

kun $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Siis

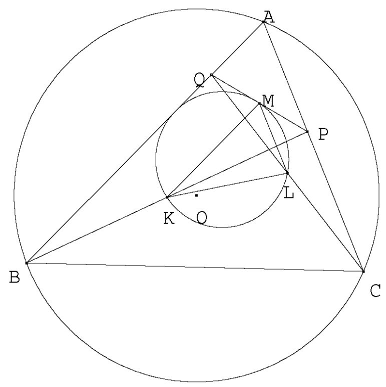
$$a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_1 \cdots a_{k-1} \equiv \cdots \equiv a_1 \bmod n.$$

Tehdään vastaoletus $a_k a_1 \equiv a_k \bmod n$. Silloin

$$a_1 \equiv a_1 \cdots a_{k-1} a_k = a_k a_1 \cdots a_{k-1} \equiv a_k a_1 \cdots a_{k-2} \equiv \cdots \equiv a_k a_1 \equiv a_k \bmod n.$$

Mutta $a_1, a_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, joten on oltava $a_1 = a_k$. Oletuksen mukaan a_1 ja a_k ovat eri lukuja. Vastaoletus johti ristiriitaan, joten se on väärä.

2009.2. Koska M ja L ovat kolmion CQP sivujen keskipisteet, $ML \| PC$. Siis $\angle LMP = \angle MPA$. Koska QP on ympyrän Γ tangentti, $\angle LMP = \angle MKL$. Siis $\angle MKL = \angle QPA$. Vastaavasti osoitetaan, että $\angle MLK = \angle AQP$. Kolmiot AQP ja MLK ovat siis yhdenmuotoiset. Siis



$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{QB}{PC}.$$

Mutta tämä merkitsee, että $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$. Pisteiden P ja Q potenssit kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän suhteen on siis samat. Molemmat pisteet ovat näin ollen samalla etäisyydellä ympyrän keskipisteestä O.

2009.3. Olkoon aritmeettisen jonon (s_{s_n}) peräkkäisten termien erotus D. Merkitään $d_n = s_{n+1} - s_n$. Osoitetaan, että d_n on vakio. Osoitetaan ensin, että luvut d_n ovat rajoitettuja. Koska (s_n) on kasvava kokonaislukujono, $d_n \geq 1$ kaikilla n. Siis

$$d_n = s_{n+1} - s_n \leq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_{n+1}-1} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D.$$

Siitä, että jono (d_n) on rajoitettu, seuraa, että on olemassa

$$m = \min\{d_n \mid n = 1, 2, \ldots\}, \quad M = \max\{d_n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $m = M$. Tehdään vastaoletus $m < M$. Jollain n on $m = d_n = s_{n+1} - s_n$. Nyt

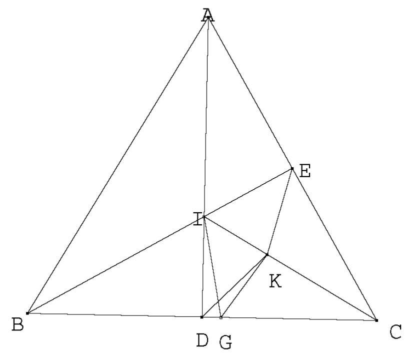
$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+m-1} \leq nM, \tag{1}$$

koska summassa on m termiä ja niistä jokainen on $\le M$. Jollain n' on $d_{n'} = M$. Samoin kuin edellä saadaan

$$D = s_{s_{n'}+M} - s_{s_{n'}} = d_{s_{n'}} + d_{s_{n'}+1} + \cdots + d_{s_{n'}+M-1} \ge Mm. \qquad (2)$$

Siis $D = mM$ ja jos $d_n = m$, niin $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{n+1}-1} = M$ ja vastaavasti jos $d_n = M$, niin $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{n+1}-1} = m$. Kaikille n pätee $s_n \ge s_1 + (n-1) \ge n$. Jos $d_n = m$, on oltava $s_n > n$. Jos nimittäin olisi $s_n = n$, olisi $m = d_n = d_{s_n} = M$, mikä olisi ristiriidassa oletuksen $m < M$ kanssa. Samoin, jos $d_n = M$, niin $d_{s_n} = m$ ja $s_n > n$. On siis olemassa aidosti kasvava jono n_1, n_2, ..., jolle $d_{s_{n_1}} = M$, $d_{s_{n_2}} = m$, $d_{s_{n_3}} = M$, $d_{s_{n_4}} = m$ jne. Mutta jono d_{s_1}, d_{s_2}, ... on aritmeettisten jonojen s_{s_1+1}, s_{s_2}, ... ja s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, ... termien erotusjono ja siis myös aritmeettinen jono. Sillä voi olla ei-kasvava ja ei-vähenevä osajono vain, jos se on vakiojono. Ei siis voi olla $m < M$, ja todistus on valmis.

2009.4. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Koska kolmio ABC on tasakylkinen, $AD \perp BC$. Siis $\angle IDK = 45°$. Olkoon G pisteen E peilikuva peilauksessa yli suoran CI. Koska CI on kulman BCA puolittaja, G on puolisuoralla CB. Jos $G = D$, jana EI on peilautunut janaksi DI, joten $\angle IEC = 90°$. Mutta silloin kolmion ABC B:stä piirretyt korkeusjana ja kulmanpuolittaja yhtyvät, ja $BC = BA$. Kolmio on tasasivuinen ja $\angle BAC = 60°$. Oletetaan sitten, että $G \ne D$ ja että G on D:n ja C:n välissä. Nyt $\angle IGK = \angle IEK = \angle BEK$. Jos $\angle BEK$



$= 45°$, niin $\angle IGK = \angle IDK$. Pisteet I, D, G ja K ovat samalla ympyrällä. Tällöin $\angle EIK = \angle GIK = \angle GDK = 45°$, $\angle BIC = 180° - \angle EIK = 135°$, $2 \cdot \angle BCI = 45°$, $2 \cdot \angle BCA = 90°$ ja $\angle BAC = 90°$. Jos G olisi B:n ja D:n välissä, olisi samoin $\angle EIK = \angle GIK = 180° - \angle GDK = 180° - 135° = 45°$, ja saataisiin $\angle BAC = 90°$. (Voidaan kuitenkin helposti osoittaa, että G ei voi olla janalla BD.) Kulman $\angle BAC$ ainoat mahdolliset arvot ovat siis $60°$ ja $90°$. On vielä varmimstettava, että näillä arvoilla todellakin $\angle BEK = 45°$. Olkoon $\angle BAC = 60°$. Silloin $BE \perp AC$ ja peilaus yli IC:n kuvaa D:n E:lle. Koska $\angle IDK = 45°$, on $\angle IEK = 45°$. Olkoon $\angle BAC = 90°$. Silloin $\angle AIE = \angle BID = \angle BEA = 90° - 22{,}5°$ ja $\angle EIK = 180° - 2 \cdot \angle BID = 45°$. Kolmio AIE on tasakylkinen, joten peilauksessa yli AK:n I ja E vastaavat toisiaan. Siis $\angle IEK = \angle EIK = 45°$.

2009.5. Osoitetaan, että tehtävän ainoa ratkaisu on funktio $f(x) = x$. Varmistutaan ensin, että tämä funktio kelpaa. Olkoon siis $f(x) = x$ ja olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Kolmion sivujen pituuksiksi ovat tarjolla a, b ja $c = a + b - 1$. Nyt $c < a + b$, mutta $c \ge a \ge 1$ ja $c \ge b \ge 1$. Silloin $c > |a - b|$, joten kolmio, jonka sivut ovat a, b ja c on olemassa.

Osoitetaan sitten, että $f(x) = x$ on ainoa ratkaisu. Tähän päästään soveltamalla toistuvasti kolmioepäyhtälöä, jonka mukaan kolmion kahden sivun pituuksien summa on aidosti suurempi kuin kolmas sivu. Osoitetaan ensin epäsuorasti, että $f(1) = 1$. Jos olisi

$f(1) = 1+m > 1$, muodostaisi kaikilla a kolmikko 1, $f(a)$, $f(a+m)$ kolmion sivujen pituudet. Silloin olisi $f(a)-1 < f(a+f(1)-1) < f(a)+1$. Koska f:n arvot ovat kokonaislukuja, on välttämättä $f(a+f(1)-1) = f(a)$ kaikilla a. Jos olisi $f(1)-1 = m > 0$, f voisi saada enintään m eri arvoa $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(m)$, ja jokin niistä olisi suurin; olkoon tämä suurin M. Mutta silloin ei olisi kolmiota, jonka sivut olisivat $2M$, $f(b)$ ja $f(b+f(2M)-1)$. Onkin oltava $m = 0$ eli $f(1) = 1$.

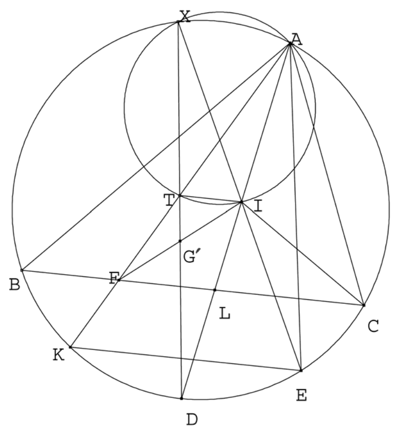
Osoitetaan seuraavaksi, että f on niin sanottu *involuutio* eli että $f(f(a)) = a$ kaikilla a. Tämä seuraa siitä, että a, $1 = f(1)$ ja $f(1 + f(a) - 1) = f(f(a))$ ovat kolmion sivut. Involuutiokuvaukset ovat niin sanottuja injektioita: ne saavat eri pisteissä eri arvot. Jos nimittäin $f(a) = f(b)$, niin $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Käytretään hyväksi tätä ominaisuutta.

Koska f on injektio, $f(2) \neq 1$, joten $f(2) = 1 + c$, missä $c \geq 1$. Jos b on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin 2, $f(b)$ ja $f(b + f(2) - 1) = f(b + c)$ ovat kolmion sivut, joten $f(b)-2 < f(b+c) < f(b)+2$ tai $f(b)-1 \leq f(b+c) \leq f(b)+1$. Koska $f(b+c) \neq f(b)$, niin $f(b + c) = f(b) \pm 1$. Koska $f(1 + c) = f(f(2)) = 2$, $f(1 + 2c) = f(1 + c) \pm 1 = 2 \pm 1$. Injektiivisyyden vuoksi ei voi olla $f(1 + 2c) = 1$. Siis $f(1 + 2c) = 3$. Induktiolla nähdään helposti, että $f(1 + kc) = k + 1$ kaikilla luonnollisilla luvuilla k. Jos olisi $c > 1$, olisi $f(c) = f(1 + kc)$ jollain luonnollisella luvulla k. Tämä on mahdotonta, joten on oltava $c = 1$. Tästä seuraa, että $f(1 + k) = 1 + k$ kaikilla $k \geq 0$.

2009.6. Olkoon heinäsirkan hyppyjärjestys $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, jos sen peräkkäisten hyppyjen pituudet ovat a_{i_1}, a_{i_2}, $\ldots$, a_{i_n}. Todistetaan väite induktiolla. Väite on ilmeisen tosi, kun $n = 1$. Olkoon $n > 1$ ja olkoon väite tosi kaikilla n:ää pienemmillä kokonaisluvuilla. Voidaan olettaa, että annetut luvut toteuttavat ehdon $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Olkoon $d = \min M$. Tarkastellan tilannetta sen mukaan, onko $d < a_n$ vai $d \geq a_n$. Oletetaan ensin, että $d < a_n$. Induktio-oletuksen mukaan heinäsirkka pystyy hyppimään $n-1$:llä hypyllä pisteestä a_n pisteeseen s. Kun sarjaan liitetään hyppy origosta a_n:ään, saadaan vaadittu hyppysarja. Olkoon sitten $a_n = d$. Tarkastellaan n:ää joukkoa, joista jokaisella kahdella on epätyhjä leikkaus: $\{a_n\}$, $\{a_1, a_1 + a_n\}$, $\{a_2, a_2 + a_n\}$, $\ldots$, $\{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$. Koska M:ssä on $n - 1$ alkiota, ainakin yksi joukoista ei sisällä yhtään M:n alkiota. Olkoon se $\{a_i, a_i + a_n\}$. Joukossa $M \cap [a_i + a_n, s]$ on enintään $n - 3$ alkiota, koska d, $a_n < a_i + a_n$. Induktio-oletuksen perusteella heinäsirkka voi hypellä pisteestä $a_i + a_n$ (joka ei kuulu joukkoon M) pisteeseen s käyttäen kaikkia muita hypyn pituuksia kuin a_i ja a_n. Jos nyt ensimmäinen hyppy on a_i ja toinen a_n ja sitten tehdään mainitut $n - 3$ hyppyä, saadan vaadittu sarja. Oletetaan sitten, että $d > a_n$. Olkoon $M' = M \setminus \{d\}$. Induktio-oletuksen perusteella heinäsirkka voi hyppiä pisteestä a_n pisteeseen s käymättä joukon M' pisteissä. Olkoon hyppyjärjestys $(i_1, \ldots, i_{n-1})$. Jos tämä reitti ei käy pisteessä d (tällöin on $d > a_n$), niin $(n, i_1, \ldots, i_{n-1})$ on kelvollinen hyppyjärjestys. Muussa tapauksessa voidaan olettaa, että heinäsirkka osuu d:hen hypyllä i_j. Nyt $(i_1, i_2, \ldots, i_j, n, i_{j+1}, \ldots, i_{n-1})$ on myös hyppyjärjestys, joka välttää muut M:n pisteet kuin d:n. Koska $a_{j+1} < a_n$, järjestys $(i_1, i_2, \ldots, i_j, i_{j+1}, n, \ldots, i_{n-1})$ välttää myös d:n. Todistus on valmis.

2010.1. Osoitetaan, että ratkaisuja ovat kaikki funktiot $f(x) = C$, missä C on vakio ja $C = 0$ tai $1 \leq C < 2$, ja vain ne. On helppo nähdä, että nämä funktiot toteuttavat tehtävän ehdon. Oletetaan sitten, että f on jokin tehtävän toteuttava funktio. Jos tehtävän ehtoon sijoitetaan $x = 0$, sadaan $f(0) = f(0)\lfloor f(y)\rfloor$. Jos $f(0) = C \neq 0$, on $\lfloor f(y)\rfloor = 1$ kaikilla y, joten tehtävän ehdoksi saadaan $f(\lfloor x\rfloor y) = f(x)$. Kun tähän sijoitetaan $y = 0$, saadaan $f(x) = C$ kaikilla x. Edelleen on oltava $\lfloor f(y)\rfloor = \lfloor C\rfloor = 1$, joten $1 \leq C < 2$. Olkoon sitten että $f(0) = 0$. Osoitetaan, että nyt $f(x) = 0$ kaikilla x. Tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Oletetaan ensin, että $f(t) \neq 0$ jollain t, $0 < t < 1$. Sijoitetaan tehtävän yhtälöön $x = t$. Saadaan $0 = f(0) = f(t)\lfloor f(y)\rfloor$, joten $\lfloor f(y)\rfloor = 0$ kaikilla y. Jos nyt sijoitetaan $x = 1$ ja $y = t$ tehtävän yhtälöön, saadaan $f(t) = 0$, eli ristiriita. Oletetaan sitten, että $f(z) \neq 0$ jollain z. On olemassa kokonaisluku N siten, että $0 < u = \dfrac{z}{N} < 1$. Nyt $f(z) = f(Nu) = f(\lfloor N\rfloor u) = f(N)f(u) = 0$. Oletus $f(z) \neq 0$ johti ristiriitaan. Siis $f(x) = 0$ kaikilla x, jos $f(0) = 0$.

2010.2. Leikatkoon EI Γ:n myös pisteessä X. Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että G on suoralla DX ja edelleen, jos osoitetaan, että suoran DX ja suoran IF leikkauspiste G' on samalla janan IF keskipiste. On siis osoitettava, että $IG' = G'F$. Kun sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon AIF, nähdään, että



$$\frac{G'F}{G'I} \cdot \frac{DI}{AD} \cdot \frac{TA}{TF} = 1.$$

On siis osoitettava, että

$$\frac{FT}{AT} = \frac{ID}{AD}.$$

Olkoon AF:n ja Γ:n toinen leikkauspiste K. Tehtävän oletuksen nojalla kaaret BK ja CE ovat yhtä suuret. Siis $KE \| BC$. Tehtävän oletuksen nojalla $\angle KAD = \angle DAE$, joten kehäkulmalauseen perusteella $\angle DXE = \angle DAE = \angle KAD$. Tästä seuraa, että $TIAX$ on jännenelikulmio. Siis $\angle ITA = \angle IXA = \angle EKA$, joten $TI \| KE \| BC$. Tästä seuraa

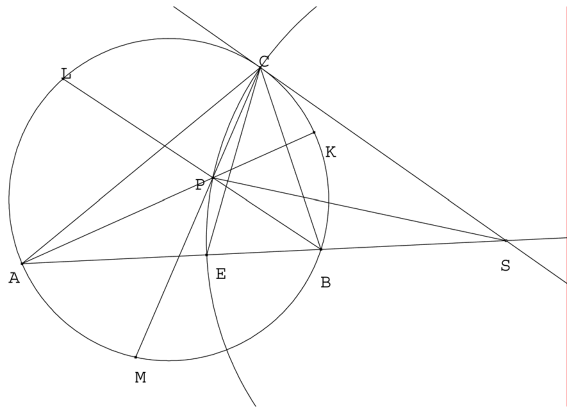
$$\frac{FT}{AT} = \frac{LI}{AI}.$$

Koska CI on kulman BCA puolittaja, $\dfrac{LI}{AI} = \dfrac{CL}{AC}$. Koska AD on kulman BAC puolittaja, $\angle DCB = \angle DAB = \angle DAC$, joten kolmiot ADC ja CDL ovat yhdenmuotoiset (kk). Yhdenmuotoisuudesta seuraa $\dfrac{CL}{AC} = \dfrac{CD}{AD}$. Väitteen todistus on valmis, kun kodetaan, että $CD = ID$. Tämä seuraa siitä, että kulmat DIC ja DCI ovat molemmat samoja kuin kolmion ABC kulmien A ja C puolikkaiden summa, joten DCI on tasakylkinen kolmio.

2010.3. Osoitetaan, että ratkaisuiksi käyvät ainoastaan ja vain funktiot $g(n) = n+c$, missä c on ei-negatiivinen kokonaisluku. On selvää, että nämä funktiot toteuttavat tehtävän ehdon, sillä $(g(m) + n)(g(n) + m) = (m + c + n)(n + c + m) = (m + n + c)^2$. Sen osoittamiseksi, että muita ratkaisuja ei ole, todistetaan ensin aputulos: jos $g(k) - g(\ell)$

on jaollinen alkuluvulla p, niin $k-\ell$ on jaollinen p:llä. Tämän todistamiseksi oletetaan ensin, että $g(k)-g(\ell)$ on jaollinen p^2:lla eli että $g(\ell)=g(k)+p^2a$ jollain kokonaisluvulla a. Valitaan jokin p:llä jaoton kokonaisluku D, joka on suurempi kuin suurempi luvuista $g(\ell)$ ja $g(k)$ ja asetetaan $n=pD-g(k)$. Nyt luvut $n+g(k)=pD$ ja $n+g(\ell)=pD+(g(\ell)-g(k))=p(D+pa)$ ovat jaollisia p:llä mutteivät p^2:lla. Jos nyt g toteuttaa tehtävän ehdon, $(g(k)+n)(g(n)+k)$ ja $(g(\ell)+n)(g(n)+\ell)$ ovat neliölukuja, jotka ovat jaollisia p:llä ja siis myös p^2:lla. Koska $g(k)+n$ ja $g(\ell)+n$ eivät ole jaollisia p^2:lla, on lukujen $g(n)+k$ ja $g(n)+\ell$ oltava jaollisia p:llä. Silloin myös niiden erotus $k-\ell$ on jaollinen p:llä. Jos taas $g(k)-g(\ell)$ on jaollinen p:llä muttei p^2:lla, valitaan D niin muin edellä ja asetetaan $n=p^3D-g(k)$. Silloin $g(k)+n=p^3D$ on jaollinen p^3:lla, muttei p^4:llä ja $g(\ell)+n=p^3D+(g(\ell)-g(k)$ on jaollinen p:llä muttei p^2:lla. Samoin kuin edellä, tästä päätellään, että $g(n)+\ell$ ja $g(n)+k$ ovat p:llä jaollisia, joten niiden erotus $k-\ell$ on jaollinen p:llä. Aputulos on todistettu.

Palataan varsinaiseen todistukseen. Oletetaan, että $g(k)=g(\ell)$ joillain k, ℓ. Silloin $k-\ell$ on jaollinen jokaisella alkuluvulla p. Tämä on mahdollista vain, jos $k-\ell=0$. g on siis injektio. Tarkastellaan sitten lukuja $g(k)$ ja $g(k+1)$. Jos olisi $|g(k+1)-g(k)|\geq 2$, luvulla $(k+1)-k=1$ olisi alkutekijä $p\geq 2$. On siis oltava $|g(k+1)-g(k)|=1$. Olkoon $f(2)-f(1)=q=\pm 1$. Osoitetaan induktiolla, että $g(n)=g(1)+q(n-1)$. Tämä pitää paikkansa, kun $n=1$ ja $n=2$. Jos $g(k)=g(1)+q(k-1)$, kun $k\leq n$, niin $g(n+1)=g(1)+q(k-1)\pm 1$. Koska $g(n+1)\neq g(n-1)=g(1)+q(n-2)$, on oltava $g(n+1)=g(1)+nq$, ja induktiotodistus on valmis. Koska $0<g(n)=g(1)+(n-1)q$ kaikilla n, ei voi olla $q=-1$. Siis $g(n)=g(1)+(n-1)=n+g(1)-1$. g on siis välttämättä tehtävässä esitettyä muotoa.



2010.4. Voidaan olettaa, että $AC>BC$, jolloin S on puolisuoralla AB. Kehäkulmia tarkastelemalla huomataan, että kolmiot PKM ja PCA ovat yhdenmuotoiset. Siis $\dfrac{PM}{MK}=\dfrac{PA}{AC}$. Samoin kolmiot PLM ja PCB ovat yhdenmuotoiset, joten $\dfrac{PM}{ML}=\dfrac{PB}{BC}$. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan $\dfrac{PA}{AC}=\dfrac{PB}{BC}$ eli

$$\frac{PA}{PB}=\frac{CA}{CB}. \tag{1}$$

Olkoon E kulman ACB puolittajan ja sivun AB leikkauspiste. Ne pisteet X, joille $\dfrac{XA}{XB}=\dfrac{CA}{CB}$ ovat tunnetusti *Apolloniuksen ympyrällä* eli ympyrällä, joka kulkee pisteiden C ja E kautta ja jonka keskipiste on suoralla AB. Osoitetaan, että S on tämän ympyrän keskipiste. Koska $\angle CAB=\angle BCS$ (kehäkulma ja jänteen ja tangentin välinen kulma) ja

$\angle ACE = \angle ECB$, niin $\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS$ eli kolmio SCE on tasakylkinen. Siis S on Apolloniuksen ympyrän keskipiste. Koska $SP = SC$, P on Apolloniuksen ympyrällä ja (1) toteutuu.

2010.5. Osoitetaan, että vaadittu siirtosarja on olemassa. Merkintä $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ tarkoittaa, että jos joissakin vierekkäisissä laatikoissa on $a_1, \ldots, a_n$ kolikkoa, niin jollakin sallittujen siirtojen äärellisellä jonolla on mahdollista päästä tilanteeseen, jossa näissä laatikoissa on $a'_1, \ldots a'_n$ kolikkoa, ja muiden laatikkojen sisältö on pysynyt samana.

Osoitetaan ensin, että $(a, 0, 0) \to (0, 2^a, 0)$ kaikilla $a > 0$. Tätä varten osoitetaan induktiolla, että $(a, 0, 0) \to (a-k, 2^k, 0)$ kaikilla k, $1 \le k \le a$. Kun $k = 1$, käytetään siirtoa 1: $(a, 0, 0) \to (a-1, 2, 0)$. Olkoon sitten $k < a$; oletetaan, että $(a, 0, 0) \to (a-k, 2^k, 0)$. Siirron 1 tekeminen laatikkoon, jossa on 2^k kolikkoa 2^k kertaa (parillinen määrä!) osoittaa, että $(a-k, 2^k, 0) \to (a-k, 0, 2^{k+1})$. Kun nyt sovelletaan siirtoa 2 ensimmäiseen laatikkoon, saadaan $(a-k, 0, 2^{k+1}) \to (a-(k+1), 2^{k+1}, 0)$. Väite on todistettu.

Merkitään $P_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$, kun potenssitornissa on n kakkosta. Osoitetaan, että $(a, 0, 0, 0) \to (0, P_a, 0, 0)$ kaikilla $a > 0$. Tämä tulee osoitetuksi, kun näytetään induktiolla, että $(a, 0, 0, 0) \to (a-k, P_k, 0, 0)$ kaikilla k, $1 \le k \le a$. Induktion aluksi kelpaa siirron 1 avulla saatava $(a, 0, 0, 0) \to (a-1, 2, 0, 0)$. Oletetaan, että väite on tosi jollain $k < a$. Samoin kuin ensimmäisen väitteen todistuksessa ja käyttämällä sitä hyväksi saadaan $(a-k, P_k, 0, 0) \to (a-k, 0, 2^{P_k}, 0) = (a-k, 0, P_{k+1}, 0) \to (a-(k+1), P_{k+1}, 0, 0)$, ja väite on todistettu.

Sovelletaan nyt siirtoa 1 laatikkoon B_5 ja sitten siirtoa 2 laatikkoihin B_4, B_3, B_2 ja B_1 ja sovelletaan sitten kahdesti edellä todistettua toista aputulosta. Saadaan

$$\begin{aligned}(1, 1, 1, 1, 1, 1) &\to (1, 1, 1, 1, 0, 3) \to (1, 1, 1, 0, 3, 0) \to (1, 1, 0, 3, 0, 0)\\ \to (1, 0, 3, 0, 0, 0) &\to (0, 3, 0, 0, 0) \to (0, 0, P_3, 0, 0, 0) \to (0, 0, 0, P_{16}, 0, 0),\end{aligned}$$

sillä $P_3 = 2^{2^2} = 16$. Nyt laatikossa B_4 on jo liikaakin kolikkoja, koska $2010^{2010^{2010}} < (2^{11})^{2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} < 2^{(2^{11})^{2011}} < 2^{2^{2^{15}}} < P_{16}$. Nyt laatikon B_4 sisältöä voi pienentää siirron 2 avulla, kunnes se on yksi neljäsosa vaaditusta. Soveltamalla siirtoa 1 toistuvasti B_4:ään päästään tilanteeseen, jossa muut rasiat ovat tyhjiä, mutta B_5:ssä on puolet vaaditusta määrästä, ja soveltamalla siirtoa 1 riittävän monta kertaa rasiaan B_5 viimein tilanteeseen, jossa B_6:ssa on vaadittava määrä kolikkoja ja muut rasiat ovat tyhjiä.

2010.6. Olkoon $n > s$. Silloin $a_n = a_{j_1} + a_{j_2}$, missä $j_1 + j_2 = n$. Jos esimerkiksi $j_1 > s$, päättely voidaan toistaa. Lopulta a_n voidaan purkaa muotoon $a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}$, missä $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$, $1 \le i_j \le s$. Voidaan lisäksi olettaa, että joidenkin kahden indeksin, esimerkiksi i_1:n ja i_2:n summa on $> s$ (viimeinen hajotus). Oletetaan sitten, että indeksit $i_1, \ldots i_k$ toteuttavat ehdot $1 \le i_j \le s$, $i_1 + \cdots + i_k = n$, $i_1 + i_2 > s$. Sanomme nämä ehdot toteuttavaa indeksijoukkoa kelvolliseksi. Merkitään $s_j = i_1 + i_2 + \ldots + i_j$. Silloin $a_n = a_{s_k} \ge a_{s_{k-1}} + a_{i_k} \ge a_{s_{k-2}} + a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \ge \ldots \ge a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$. Kaikkiaan siis on todistettu, että $a_n = \max\{a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \mid i_1, \ldots, i_k \text{ on kelvollinen}\}$.

Olkoon sitten $m = \max_{1 \le i \le s} \dfrac{a_i}{i}$. Olkoon $\ell < s$ jokin indeksi, jolle $m = \dfrac{a_\ell}{\ell}$. Olkoon $n > s^2\ell + 2s$. Puretaan a_n summaksi $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}$ kuten edellä. Koska $i_j \le s$,

$n = i_1 + \cdots + i_k \le ks$. Siis $k \ge \dfrac{n}{s} \ge s\ell + 2$. Oletetaan, että mikään indekseistä $i_3, \ldots i_k$ ei ole ℓ. Laatikkoperiaatteen nojalla ainakin jokin indeksi $j \ne \ell$ esiintyy indeksien $i_3, \ldots,$ i_k joukossa ainakin ℓ kertaa. Poistetaan jonosta $(i_1, \ldots, i_k)$ ℓ j:n esiintymää ja laiteaan tilalle j ℓ:n esiintymää. Saadaan uusi kelvollinen indeksijoukko $(i_1, i_2, i'_3, \ldots, i'_{k'})$. Edellä todistetun maksimaalisuusominaisuuden perusteella

$$a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \ge a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \cdots + a'_{i_{k'}}.$$

Kun epäyhtälöstä sievennetään pois samat yhteenlaskettavat, jää jäljelle epäyhtälö $\ell a_j \ge ja_\ell$. Koska $\dfrac{a_\ell}{\ell} \ge \dfrac{a_j}{j}$, on oltava $\ell a_j = ja_\ell$. Siis itse asiassa

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \cdots + a'_{i_{k'}}.$$

Kun $n > s^2\ell + 2s$, a_n voidaan siis purkaa summaksi $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$, jossa ainakin yksi yhteenlaskettava on a_ℓ. Voidaan olettaa, että tämä on viimeinen. Mutta nyt $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ on kelvollinen indeksijoukko, kun n korvataan $n-\ell$:llä. Edellä todisteun maksimaalisuusominaisuuden nojalla $a_{n-\ell} + a_\ell \ge (a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k-1}}) + a_\ell = a_n$. a_n:n perusominaisuuden mukaan $a_n \ge a_{n-\ell} + a_\ell$. Siis todellakin $a_n = a_{n-\ell} + a_\ell$ kaikilla $n \ge s^2\ell + 2s$.

2011.1. Joukolla $\{1, 2, 3, 4\}$ on 6 kaksialkioista osajoukkoa. Varmasti siis $n_A \le 6$. Mutta jos jokin A:n kahden eri alkion a_i, a_j summa on tekijänä luvussa S_A, se on tekijänä myös luvussa $S_A - (a_i + a_j)$, joka on A:n kahden muun alkion summa. Voidaan olettaa, että $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Koska $a_3 + a_4 > a_1 + a_2$ ja $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$, summat $a_3 + a_4$ ja $a_2 + a_4$ eivät voi olla luvun S_A tekijöitä. Siis $n_A \le 4$.

Osoitetaan, että $n_A = 4$ on mahdollista. Katsotaan ensin välttämättömiä seurauksia oletuksesta $n_A = 4$. Jos $n_A = 4$, kaikki muut A:n kahden eri alkion sumat kuin summat kuin $a_3 + a_4$ ja $a_2 + a_4$ ovat S_A:n tekijöitä. Erityisesti silloin $a_1 + a_4$ on luvun $a_2 + a_3$ tekijä ja $a_2 + a_3$ on luvun $a_1 + a_4$ tekijä. Tämä on mahdollista vain, jos $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ ja $S_A = 2(a_2 + a_3)$. Merkitään $a_1 + a_2 = x$ ja $a_1 + a_3 = y$. Silloin $S_A = 2(x + y - 2a_1)$. Koska y on S_A:n tekijä, se on luvun $2(x - 2a_1) = 2(a_2 - a_1) > 0$ tekijä. Koska $y > x$, $y > x - 2a_1$. Jos luku on toisen luvun tekijä ja enemmän kuin puolet tästä luvusta, luvut ovat yhtä suuret. Siis $y = 2(x - 2a_1) = 2(a_2 - a_1)$. Toisaalta $x = a_1 + a2$ on luvun $2(y - 2a_1) = 2(2a_2 - 4a_1) = 4(a_1 + a_2) - 12a_1$ tekijä, joten se on luvun $12a_1$ tekijä. Mutta tiedetään, että $x < y$ eli $a_1 + a_2 < 2(a_2 - a_1) = 2(a_1 + a_2) - 4a_1$, joten $a_1 + a_2 > 4a_1$. Tämä merkitsee, että vain yhtälöt $a_1 + a_2 = 6a_1$ ja $a_1 + a_2 = 12a_1$ eli $a_2 = 5a_1$ ja $a_2 = 11a_1$ ovat mahdollisia. Koska $a_3 = y - a_1 = 2a_2 - 3a_1$, edellinen vaihtoehto johtaa tilanteeseen $a_3 = 7a_1$ ja $a_4 = 11a_1$, jälkimmäinen tilanteeseen $a_3 = 19a_1$, $a_4 = 29a_1$. Välittömästi voidaan tarkastaa, että jos a on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, joukot $A = \{a, 5a, 7a, 11a\}$ ja $A = \{a, 11a, 19a, 29a\}$ toteuttavat tehtävän ehdon. Ne ovat siis tehtävässä kysytyt joukot.

2011.2. Oletetaan ensin, että joukossa $\mathcal{S}$ on $2n + 1$ pistettä. Valitaan pisteistä yksi, esimerkiksi A, ja asetetaan A:n kautta suora ℓ_0 niin, että suoran molemmilla puolilla on n A:n pistettä. Alkutilanteessa $\ell = \ell_0$. Kiinnitetään suoran ℓ suunta; silloin voidaan puhua ℓ:n oikeasta ja vasemmasta puolesta. Kun ℓ kiertyy A:n ympäri, se kohtaa ensin joko jonkin alkuaan ℓ:n oikealla puolella olevan pisteen B; kun ℓ on kiertynyt vielä vähän B:n ympäri, mutta ei ole vielä osunut mihinkään uuteen $\mathcal{S}$:n pisteeseen, A on muuttunut ℓ:n oikean puolen pisteeksi, mutta muut pisteet ovat edelleen sillä puolen ℓ:ää, missä olivat alkutilanteessa. Jos taas ℓ kohtaa ensin jonkin vasemmalla puolellaan olevan pisteen C, niin (kun on kierretty vielä vähän C:n ympäri) A on muuttunut ℓ:n vasemman puolen pisteeksi. Kaikkiaan siis aina silloin, kun ℓ koskettaa vain yhtä $\mathcal{S}$:n pistettä, ℓ:n molemmilla puolilla on yhtä monta $\mathcal{S}$:n pistettä. Piste siirtyy ℓ:n puolelta toiselle tasan silloin, kun se on kierron keskipisteenä. Koska S on äärellinen joukko, ℓ:n suunta (jonkin kiinteän referenssin, esimerkiksi kahden annetun $\mathcal{S}$:n pisteen kautta kulkevan suoran suhteen), muttuu kulmalla, jonka suuruudella on positiivinen alaraja. Tämä merkitsee, että äärellisen monen askeleen jälkeen ℓ on tehnyt $180°$ kierron. Voidaan että, tällöin ℓ koskee vain yhtä $\mathcal{S}$: pistettä (ellei näin ole, voidaan tarkastella alkutilannetta, jossa ℓ:naento hiukan muutetaan). Olkoon ℓ_1 se suora, jonka päällä $180°$ kiertynyt ℓ on. Silloin $\ell_1 \| \ell_0$. Kummankin suoran ℓ_0 ja ℓ_1 kummallakin puolella on n joukon $\mathcal{S}$ pistettä. Tästä seuraa, että suorien välissä ei ole yhtään $\mathcal{S}$ pistettä ja jokainen alussa ℓ:n vasemmalla puolella ollut piste on siirtynyt ℓ:n oikealle puolelle ja päin vastoin. Kierron keskipiste on jälleen A ja jokaisen $\mathcal{S}$:n on täytynyt olla ainakin kerran kierron keskipisteenä. Prosessi toistuu samana äärettömän monta kertaa, joten jokainen piste on ärettömän monta kertaa kierron keskipisteenä.

Olkoon sitten $\mathcal{S}$:ssä $2n$ pistettä. Olkoon $A \in \mathcal{S}$ ja olkoon ℓ_0 sellainen A:n kautta kulkeva (suunnalla varustettu) suora, että ℓ_0:n vasemmalla puolella on n ja oikealla puolella $n-1$ pistettä. Kun tilanteesta $\ell = \ell_0$ on edetty tilanteeseen $\ell = \ell_1$, missä ℓ_1 koskettaa joukkoa $\mathcal{S}$ pisteessä B, $\ell_1 \| \ell_0$, mutta ℓ_1 ja ℓ_0 ovat vastakkaissuuntaiset, niin ℓ_1:n vasemmalla puolella on edelleen n ja oikealla puolella $n-1$ pistettä. Tämä on mahdollista vain, jos B on ℓ_0:n vasemmalla puolella ja A on ℓ_1:n vasemmalla puolella ja jokainen muu ℓ_0:n vasemmalla puolella oleva piste on ℓ_1:n oikealla puolella sekä jokainen ℓ_0:n oikealla puolella oleva piste on ℓ_1:n vasemmalla puolella. Jokainen $\mathcal{S}$:n piste on ollut ainakin keran kierron keskipiste. Kun ℓ kiertyy seuraavat $180°$, se on taas ℓ_0:n päällä, ja kierros alkaa uudelleen; se voidaan toistaa äärettömän monta kertaa.

2011.3. Sijoitetaan $x = 0$ tehtävän epäyhtälöön. Saadaan $f(y) \le yf(0) + f(f(0))$ kaikilla y. Valitaan x ja y niin, että $x + y = f(0)$. Kun sovelletaan tehtävän epäyhtälöä ja juuri johdettua epäyhtälöä, saadaan

$$f(f(0)) \le (f(0) - x)f(x) + f(f(x)) \le (f(0) - x)f(x) + f(x)f(0) + f(f(0)),$$

mikä sievenee muotoon $0 \le (2f(0)-x)f(x)$. Tästä seuraa, että $f(x) \ge 0$ kaikilla $x < 2f(0)$. Osoitetaan, että $f(x) \le 0$ kaikilla x. Ellei näin olisi, olisi jollain a $f(a) > 0$. Silloin olisi $f(y + a) \le yf(a) + f(f(a))$ eli $f(y + a) < 0$, kun $y < -f(f(a))/f(a)$. Molemmat kaksi edellistä väittämää eivät selvästikään voi toteutua. Siis $f(x) \le 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koksa silloin myös $f(f(x)) \le 0$ kaikilla x, saadaan tehtävän epäyhtälöstä

$$f(x + y) \le yf(x). \tag{1}$$

Koska $f(x) \ge 0$ tarpeeksi pienillä x ja toisaalta $f(x) \le 0$ kaikilla x, on olemassa lukuja x, joille $f(x) = 0$. Olkoon x tällainen ja olkoon $y = 0$. Tehtävän epäyhtälö antaa nyt $0 = f(x) \le f(f(x)) = f(0)$. Koska $f(0) \le 0$, on oltava $f(0) = 0$. Olkoon nyt $x < 0$, joloin

$-x > 0$. Epäyhtälöstä (1) saadaan $0 = f(0) = f(x - x) \leq -xf(x)$. Tämä merkitsee, että $f(x) \geq 0$, eli koska $f(x) \leq 0$, $f(x) = 0$. Väite on todistettu.

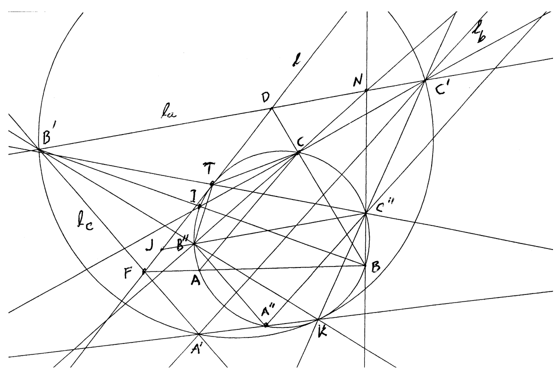
2011.4. Olkoon x_n sijoittelujen määrä. Selvästi $x_1 = 1$: ainoa punnus voidaan asettaa vain vasempaan kuppiin. Olkoon sitten käytössä n punnusta. Punnukset, joiden paino on $2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$, voidaan sijoitella x_{n-1}:llä eri tavalla. Kevein punnus voidaan sijoittaa ennen muita punnuksia, minkä tahansa kahden muun punnuksen välissä tai kaikkien muiden punnusten jälkeen. Jos kevein sijoitetaan ensimmäisenä, se voidaan asettaa vain vasempaan vaakakuppiin. Jos se sijoitetaan missä muussa tahansa vaiheessa, vasen vaakakuppi painaa ainakin kaksi yksikköä enemmän kuin oikea, ja yhden painoinen punnus voidaan sijoittaa kumpaan tahansa kuppiin. Jokaista painavampien punnusten sijoittelua kohden keveimmällä punnuksella on siten $1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ eri mahdollisuutta. Tämä merkitsee, että $x_n = (2n-1)x_{n-1}$. Kun otetaan huomioon $x_1 = 1$, saadaan $x_n = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$. (Tätä lukua merkitään joskus symbolilla $(2n-1)!!$.)

2011.5. Todistettavaa on vain niissä tapauksissa, joissa $f(m) \neq f(n)$. Oletetaan, että $f(m) < f(n)$. Oletuksen mukaan positiivinen luku $f(n) - f(m)$ on jaollinen luvulla $f(n - m)$. Koska $f(m) > 0$, $f(n-m) \leq f(n) - f(m) < f(n)$. Siis

$$-f(n) < -f(m-n) < f(m) - f(m-n) < f(m) < f(n). \tag{1}$$

Koska $f(n) = f(m-(m-n))$, tehtävän oletuksesta seuraa, että $f(m) - f(m-n)$ on jaollinen $f(n)$:llä. Epäyhtälöiden (1) mukaan tämä on mahdollista vain, jos $f(m) - f(m-n) = 0$ eli $f(m-n) = f(m)$. Mutta tehtävän oletuksesta seuraa nyt, että $f(n) - f(m)$ on jaollinen $f(m)$:llä. Tästä taas seuraa, että $f(n)$ on jaollinen $f(m)$:llä.

2011.6. Todistus on varsin mutkikas ja siinä nojaudutaan tunnettuun, muttei ihan alkeelliseen *Pascalin lauseeseen*. Pascalin lause kertoo, että jos A, B, C, D, E ja F ovat saman ympyrän pisteitä missä tahansa järjestyksessä, niin suorien BC ja EF leikkauspiste Q, suorien CD ja FA leikkauspiste P ja suorien DE ja AB leikkauspiste R ovat samalla suoralla.



Olkoon A' ℓ_b:n ja ℓ_c:n leikkauspiste, B' ℓ_c:n ja ℓ_a:n leikkauspiste ja C' ℓ_b:n ja ℓ_a:n leikkauspiste ja olkoon Γ' kolmion $A'B'C'$ ympäri piirretty ympyrä. Olkoon T Γ:n ja ℓ:n sivuamispiste. Olkoot A'', B'' ja C'' ne Γ:n pisteet, joille A, B ja C ovat kaarien TA'', TB'' ja TC'' keskipisteet. Tehtävän väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että kolmiot $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ ovat homoteettiset ja että homotetiakeskus on ympyrällä Γ.

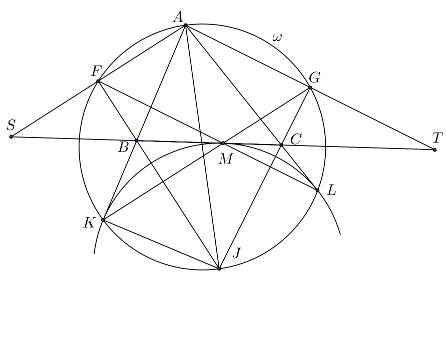
Osoitetaan ensin, että kolmioiden $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset. Osoitetaan, että $B'C' \| B''C''$; muilla sivupareilla todistus menee periaatteessa samoin. Olkoon J $B''C''$:n ja ℓ:n leikkauspiste, F AB:n ja ℓ:n leikkauspiste ja D BC:n ja ℓ:n leikkauspiste. Jos, kuten kuvassa, J on janalla TF, niin kehäkulmalauseseen ja pisteiden B'' ja C'' määritelmään sekä siihen, että ℓ_a on ℓ:n kuva peilauksessa yli suoran BC nojautuen saadaan $\angle FJC'' = \angle JTC'' + \angle JC''T = \angle JTC'' + \angle B''BT = (180^\circ - \angle DTC'') +$

$(180° - 2 \cdot \angle TB''B) = 360° - 2 \cdot (\angle DTC + \angle TB''B) = 2 \cdot (180° - \angle TB''B) - 2\angle DTC = 2 \cdot \angle TCB - 2 \cdot \angle DTC = 2 \cdot \angle TDC = \angle TDC'$. Siis $B''C'' \| B'C'$. Kolmiot, joiden sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset, ovat homoteettisia.

Osoitetaan seuraavaksi, että suorien BC'' ja CB'' leikkauspiste N on suoralla ℓ_a. Koska C on kaaren TC'' keskipiste, BC on kulman TBN puolittaja, joten BC'' ja BT ovat toistensa kuvia peilauksessa yli BC:n. Koska B on kaaren TBB'' keskipiste, $\angle B''CB = \angle TB''B = 180° - \angle TCB = \angle TCD$. Suorat TC ja $B''C$ ovat toistensa kuvia peilauksessa yli BC:n. Suorien BT ja $B''T$ leikkauspiste T, joka on suoralla ℓ, kuvautuu siis peilauksessa suorien BC'' ja CB'' leikkauspisteeksi N, jonka on oltava ℓ:n kuvasuoralla ℓ_a.

Olkoon sitten I suorien BB' ja CC' leikkauspste. Osoitetaan, että I on ympyrällä Γ. Tätä varten pyritään osoittamaan, että $\angle CIB = \angle CAB$. Tähän taas riittää, jos osoitetaan, että $\angle BB'C' + \angle CC'B = \angle CAB$. Osoitetaan tämä. Koska FB on kulman TFA' puolittaja ja DB on kulman TDC' puolittaja (suorien ℓ_c ja ℓ_a määrittelyn mukaan), B on kolmion $B'FD$ kahden kulman vieruskulman puolittajilla ja siten kolmion kolmannen kulman puolittajalla. Kolmion kulmien summan kaavasta saadaan nyt $\angle BDF + \angle BFD - \angle DB'B = 90°$. Tästä seuraa $\angle C'B'B = \angle DB'B = \angle BDF + \angle BFD - 90° = 90° - \angle ABC$. Vastaavasti, jos G on CC':n ja ℓ:n leikkauspiste, C on kolmion CDG kulmanpuolittajien leikkauspiste, ja $\angle CDG + \angle DGC + \angle DC'C = 90°$. Silloin $\angle B'C'C = 90° - (\angle CDG + \angle DGC) = 90° - \angle ACB$. Kaikkiaan siis $\angle C'BB + \angle B'C'C = 180° - (\angle ABC + \angle ACB) = \angle CAB$. I on siis ympyrällä Γ. – (Edellisen päättelyn yksityiskohdat voivat muuttua T:n sijainnin mukaan.)

Olkoon nyt K suoran $B'B''$ ja Γ:n leikkauspiste. Pyritään osoittamaan, että K on sen homotetian keskus, joka kuvaa kolmion $A''B''C''$ kolmiolle $A'B'C'$. Sovelletaan Pascalin lausetta ympyrän Γ pisteisiin K, I, B, C, B'' ja C''. Pascalin lauseen mukaan suorien $B''K$ ja BI leikkauspiste B', suorien $B''C$ ja BC'' leikkauspiste N sekä suorien IC ja KC'' leikkauspiste ovat samalla suoralla. Mutta suora $B'N$ on suora ℓ_a, ja ℓ_a:n ja IC:n leikkauspiste on C'. Siis K on suoralla $C'C''$. Mutta tämä merkitsee, että K on todellakin kolmiot $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ yhdistävän homotetian homotetiakeskus, ja väite on todistettu.



2012.1. Olkoot kolmion kulmat α, β ja γ ja olkoon ω ympyrä, jonka halkaisija on AJ. Koska kulmat $\angle JKA$ ja $\angle JLA$ ovat suoria, niin K ja L ovat tällä ympyrällä. Koska BM ja BK ovat sivuympyrän tangentteja, $BK = BM$ ja koska BJ on kulman $\angle KBM$ puolittaja, $BJ \perp KM$ ja $\angle MBJ = 90° - \frac{1}{2}\beta$ sekä $\angle BMK = \frac{1}{2}\beta$. Vastaavasti $\angle CML = \frac{1}{2}\gamma$. Siis $\angle MFB + \frac{1}{2}\gamma = 90° - \frac{1}{2}\beta$. Tästä seuraa, että $\angle LFJ = \angle MFB = 90° - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}\alpha = \angle JAL$. Viimeinen yhtälö seuraa siitä, että AJ on kulman $\angle BAC$ puolittaja. Kehäkulmalauseen perusteella F on ympyrällä ω ja symmetrian vuoksi myös G. Koska AJ on ω:n halkaisija, $\angle AFJ = 90°$. Kolmiot AFB ja SFB ovat yhteneviä (ksk), joten $AK = SM$. Samoin osoitetaan, että $AL = TM$. Nyt sivuympyrän tangentteina AK ja AL ovat yhtä pitkät, joten $SM = TM$.

2012.2. Valitaan positiivinen luku x_1 ja määritellään luvut $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ niin, että $a_k = \dfrac{x_k}{x_{k-1}}$, kun $k = 2, 3, \ldots, n-1$ ja $a_n = \dfrac{x_1}{x_{n-1}}$. Todistettava epäyhtälö saa muodon

$$(x_1 + x_2)^2(x_2 + x_3)^2 \cdots (x_{n-1} + x_1)^n > n^n x_1^2 x_2^3 \cdots x_{n-1}^n. \tag{1}$$

Sovelletaan jokaiseen vasemman puolen tulon tekijään aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon epäyhtälöä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2)^2 &\geq 2^2 x_1 x_2 \\
(x_2 + x_3)^2 &= \left(2\left(\frac{x_2}{2}\right) + x_3\right)^3 \geq 3^3 \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 x_3 \\
(x_3 + x_4)^2 &= \left(3\left(\frac{x_2}{3}\right) + x_4\right)^4 \geq 4^4 \left(\frac{x_3}{3}\right)^3 x_4 \\
&\cdots \\
(x_{n-1} + x_1)^n &= \left((n-1)\left(\frac{x_{n-1}}{n-1}\right) + x_1\right)^n \geq n^n \left(\frac{x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} x_1.
\end{aligned}$$

Kun edelliset epäyhtälöt kerrotaan puolittain keskenään, saadaan (1), kuitenkin niin, että yhtäsuuruuskin olisi mahdollinen. Yhtäsuuruus toteutuu kuitenkin vain, jos $x_1 = x_2$, $x_2 = 2x_3, \ldots, x_{n-1} = (n-1)x_1$ eli $x_1 = (n-1)!x_1$. Koska $x_1 > 0$ ja $n \geq 3$, tämä ei ole mahdollista. Epäyhtälö on aito.

2012.3. Oletamme, että B on määrittänyt joukon T, jossa on m alkiota ja johon x kuuluu. Pelin alussa $T = \{1, 2, \ldots, N\}$. Osoitetaan, että jos $m > 2^k$, B löytää alkion $y \in T$ siten, että $y \neq x$. Näin B:llä on yhtä alkiota pienempi joukko. B voi toistaa menettelyn, kunnes $m \leq 2^k \leq n$ ja siten voittaa pelin. Koska vain T:n koko on olennainen, voidaan olettaa, että $T = \{0, 1, \ldots, 2^k, \ldots m-1\}$. B kysyy nyt $k+1$ kertaa, onko $x = 2^k$. Jos A vastaa joka kerran *ei*, vastauksista ainakin yksi on tosi, joten $x \neq 2^k$. Ellei tapahdu, niin kuin edellä on kuvattu, B lopettaa kysymyksen "$x = 2^k$?" esittämisen silloin, kun A vastaa ensimmäisen kerran "kyllä". Sen sijaan B esittää seuraavat k kysymystä: "onko x:n binaariesityksen i:s numero 0" ($i = 1, 2, \ldots, k$). Muodostetaan luku y, $0 \leq y \leq 2^{k-1}$, jonka binaariesitys muodostuu niistä luvuista, jotka ovat A:n vastausten komplementeista (mukaan lukien se *kyllä*, joka laukaisi kysymyssarjan. Jos olisi $x = y$, A olisi valehdellut $k+1$ kertaa peräkkäin. Siis $y \neq x$, ja T:tä voidaan pienentää.

Osoitetaan että jos $1 < c < 2$ ja $n = \lfloor (2-c)c^{k+1} \rfloor - 1$, niin A voi pelata niin, että B ei pysty takaamaan voittoa. Huomataan, että jos $1{,}99 < c < 2$, niin $\lfloor (2-c)c^{k+1} \rfloor - 1 \geq 1{,}99^k$ tarpeeksi suurilla k:n arvoilla (koska $\lim_{k\to\infty} \dfrac{1{,}99^k}{c^k} = 0$). A:n strategia on seuraava. Hän valitsee luvun $N = n+1$ ja luvun x, $1 \leq x \leq N$, mielivaltaisesti. A kutsuu B:n kysymykseen antamaansa vastausta i-yhteensopimattomaksi, jos se on ollut *kyllä*, mutta $i \neq S$ tai jos se on ollut *ei*, mutta $i \in S$. Jokaisen vastauksensa kohdalla A laskee, kuinka monta peräkkäistä i-yhteensopimatonta vastausta hän on antanut kullakin arvolla

$i = 1, 2, \ldots, n+1$. Olkoon tämä lukumäärä m_i. A tarkastelee suuretta

$$C = \sum_{i=1}^{n+1} c^{m_i}.$$

Kuhunkin B:n kysymykseen A vastaa niin, että C saa mahdollisimman pienen arvon. Osoitetaan, että tällöin aina $C < c^{k+1}$. Jos näin on, mikään eksponentti m_i ei saa suurempaa arvoa kuin k. A ei siis anna minkään i:n suhteen i-yhteensopimatonta vastausta enempää kuin k kertaa peräkkäin. Erityisesti tämä pätee, kun $i = x$, joten A ei valehtele kysymyksen $x \in S$ kohdalla useammin kuin k kertaa peräkkäin. Strategia ei riipu luvusta x, joten B ei saa sitä koskevaa informaatiota lainkaan, eikä näin ollen omista voittostrategiaa.

On vielä todistettava, että $C < c^{k+1}$ on aina voimassa. Alussa $m_i = 0$ kaikilla i, joten summa on $n+1$; kosta $1 < c < 2$ ja $n = \lfloor (2-c)c^{k+1} \rfloor - 1$, väite pätee. Oletetaan, että $C < c^{k+1}$ jonkin kysymyksen jälkeen ja että B:n kysymys on ”$x \in S$?” jollekin joukolle S. Sen mukaan vastaako A *kyllä* tai *ei*, C saa joko arvon

$$C_1 = \sum_{i \in S} 1 + \sum_{i \notin S} c^{m_1+1}$$

tai arvon

$$C_2 = \sum_{i \notin S} 1 + \sum_{i \in S} c^{m_1+1}$$

Nyt luvuista C_1 ja C_2 pienempi on enintään yhtä suuri kuin lukujen keskiarvo

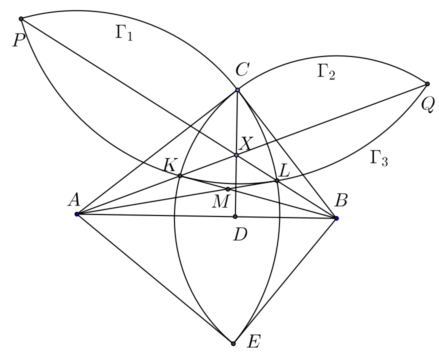
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(C_1 + C_2) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in S}(1 + c^{m_i+1}) + \sum_{i \notin S}(c^{m_i+1} + 1)\right) = \frac{1}{2}(cC + n + 1)\\ &< \frac{1}{2}c^{k+2} + (2-c)c^{k+1} = c^{k+1}.\end{aligned}$$

Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.

2012.4. Jos tehtävän yhtälöön sijoitetaan $a = b = c = 0$, saadaan $3f(0)^2 = 6f(0)^2$. Siis $f(0) = 0$. Jos nyt yhtälöön sijoitetaan $b = -a$ ja $c = 0$, saadaan $(f(a) - f(-a))^2 = 0$. f on siis parillinen funktio. Sijoitetaan yhtälöön nyt $b = a$ ja $c = -2a$. Saadaan $2f(a)^2 + f(2a)^2 = 2f(a)^2 + 4f(a)f(2a)$. Siis joko $f(2a) = 0$ tai $f(2a) = 4f(a)$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$. Jos $f(r) = 0$ jollain $r \geq 1$, niin sijoitus $b = r$, $c = -a - r$ johtaa yhtälöön $(f(a+r) - f(a))^2 = 0$. Tällöin f on jaksollinen ja jakso on r. Jos erityisesti $f(1) = 0$, niin f on identtisesti 0. Oletetaan jatkossa, että $f(1) = k \neq 0$. Nyt edellä sanotun perusteella $f(2) = 0$ tai $f(2) = 4k$. Jos $f(2) = 0$, f on jaksollinen ja jaksona 2. Tällöin $f(a) = 0$, jos a on parillinen ja $f(a) = k$, jos a on pariton. Tällainen funktio selvästi toteuttaa tehtävän ehdon: jos a, b, c ovat kaikki parillisia, yhtälö on $0 = 0$ ja jos luvuista kaksi, esimerkiksi b ja c ovat parittomia, kolmas on parillinen, ja yhtälö on $k^2 + k^2 = 2k^2$. Oletetaan nyt, että $f(2) = 4k$. Nyt joko $f(4) = 0$ tai $f(4) = 16k$. Jos $f(4) = 0$, f on jaksollinen, jaksona 4. Siis $f(a) = 0$, kun $a \equiv 0 \mod 4$, $f(a) = f(-1) = f(1) = k$, kun $a \equiv \pm 1 \bmod 4$ ja $f(a) = 4k$, kun $a \equiv 2 \bmod 4$. Osoitetaan, että tällainen funktio toteuttaa tehtävän ehdon. Jos $a+b+c=0$ ja b ja c ovat parittomia, niin a voi olla neljällä jaollinen tai $\equiv 2 \bmod 4$. Edellisessä tapauksessa yhtälö on $0^2 + 2k^2 = 2k^2$, jälkimmäisessä $16k^2+2k^2 = 8k^2+2k^2+8k^2$. Jos a, b, c ovat kaikki parillisia, niin joko kaikki ovat neljällä jaollisia tai tasan yksi on. Kummassakin tapauksessa yhtälö toteutuu.

Jäljellä on vielä tapaus $f(4) = 16$. Osoitetaan, että tällöin $f(3) = 9k$. Tämä seuraa tehtävän yhtälöstä sijoituksilla $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ ja $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$. Edellinen johtaa yhtälöön $f(3)^2 - 10kf(3) + 9k^2 = 0$, jonka ratkaisut ovat $f(3) = k$ ja $f(3) = 9k$, jälkimmäinen puolestaan yhtälöön $f(3)^2-34kf(3)+225k^2 = 0$, jonka ratkaisut ovat $f(3) = 9k$ ja $f(3) = 25k$. Siis todellakin $f(3) = 9k$. Osoitetaan nyt induktiolla, että $f(x) = kx^2$ kaikilla kokonaisluvuilla x. Asia tiedetään jo luvuille $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Oletetaan että väite pätee kokonaisluvuilla $x \le n$. Sijoitukset $a = n$, $b = 1$, $c = -n-1$ ja $a = n-1$, $b = 2$ ja $c = -n-1$ johtavat toisen asteen yhtälöihin, joista edellisen ratkaisut ovat $f(n+1) = k(n+1)^2$ ja $f(n+1) = k(n-1)^2$, jälkimmäisen $f(n+1) = k(n+1)^2$, $f(n+1) = k(n-3)^2$. Koska $n \ne 2$, $(n-1)^2 \ne (n-3)^2$. Siis välttämättä $f(n+1) = k(n+1)^2$ ja $f(x) = kx^2$ kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla x. f:n parillisuuden takia sama yhtälö pätee myös negatiivisilla x. On vielä tarkistettava, että tämäkin funktio todella on ratkaisu. Se seuraa yhtälöstä $a^2 + b^4 + (a+b)^4 = 2a^2b^2 + 2a^2(a+b)^2 + 2b^2(a+b)^2$, jonka päteminen todistetaan suoraan sieventämällä.

2012.5. Olkoon AEB ABC:n kanssa suoran AB suhteen symmetrinen suorakulmainen kolmio. Olkoot Γ_1 ja Γ_2 ympyrät, joiden keskipisteet ovat A ja B ja joille C, L, E ja C, K, E ovat kehäpisteitä. Leikatkoot puolisuorat AX ja BX nämä ympyrät (myös) pisteissä P ja Q. AC on Γ_2:n tangentti ja BC on Γ_1:n tangentti. Lasketaan pisteen X potenssi ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 suhteen: $XK \cdot XQ = XC \cdot XE = XL \cdot XP$. Tästä seuraa, että piste Q on pisteiden K, L ja P kautta kulkevalla ympyrällä. Olkoon tämä ympyrä Γ_3. Lasketaan pisteen A potenssi ympyrän Γ_2 suhteen; saadaan $AC^2 = AK \cdot AQ$. Koska $AL = AC$, on myös $AL^2 = AK \cdot AQ$. Tästä seuraa, että AL on Γ_3:n tangentti. Vastaavasti osoitetaan, että BK on Γ_3:n tangentti. Mutta näin ollen MK ja ML ovat kaksi pisteestä M Γ_3:lle piirrettyä tangenttia ja siis yhtä pitkät.



2012.6. Jos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{3^{a_i}} = 1,$$

niin $\sum_{i=1}^{n} i3^{b_i} = 3^a$ jollain ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla b_i ja a. Tästä seuraa $\dfrac{n(n+1)}{2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \equiv 1 \bmod 2$. Viimeinen ehto toteutuu, kun kumpikaan luvuista n, $n+1$ ei ole jaollinen 4:llä, eli kun $n \equiv 1 \bmod 4$ tai $n \equiv 2 \bmod 4$.

Osoitetaan, että tämä välttämätön ehto on myös riittävä. Kutsumme jonoa $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *mahdolliseksi*, jos on olemassa ei-negatiiviset kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joille

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{a_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{3^{a_i}} = 1.$$

Jos nyt b_k on jokin mahdollisen jonon termi ja jos u ja v ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, joille pätee $u + v = 3b_k$, niin jono $b_1, \ldots, b_{k-1}, u, v, b_{k+1}, \ldots, b_n$ on mahdollinen jono. Tämä seuraa siitä, että

$$\frac{u}{3^{a_k+1}} + \frac{v}{3^{a_k+1}} = \frac{b_k}{3^{a_k}} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2^{a_k+1}} + \frac{1}{2^{a_k+1}} = \frac{1}{2^{a_k}}.$$

Kääntäen, jos mahdollisen jonon kaksi termiä u ja v korvataan uudella termillä $\dfrac{u+v}{3}$ ja näin saadaan mahdollinen jono, niin alkuperäinenkin jono on mahdollinen. Merkitään symbolilla α_n jonoa $1, 2, \ldots, n$. Oletetaan, että $n \equiv 1, 2 \bmod 4$ ja muunnetaan jono jonoksi α_1 $n-1$:llä muunnoksella $\{u, v\} \mapsto \dfrac{1}{3}(u+v)$. Jono α_1 on mahdollinen; vastaava eksponenttien jono on $\alpha_1 = 0$. Huomattakoon, että jos jonossa ovat luvut m ja $2m$, niin voidaan aina tehdä muunnos $\{m, 2m\} \mapsto m$. Termit $2m$ voidaan siis jättää huomiotta.

Olkoon $n \geq 16$. Osoitetaan, että α_n voidaan palauttaa jonoksi α_{n-12} 12 muunnoksella. Olkoon $n = 12k + r$, $k \geq 1$ ja $0 \leq r \leq 11$. Jos $0 \leq r \leq 5$, niin jonon α_n 12 viimeistä termiä voidaan osittaa kahdeksi yksittäiseksi luvuksi $12k-6$, $12k$ ja viideksi pariksi $\{12k-6-i, 12k-6+i\}$, $i = 1, \ldots, 5-r$, ja $\{12k-j, 12k+j\}$, $j = 1, \ldots, r$. (Jos $r = 0$ tai $r = 5$, pareja on vain yhtä lajia.) Koska $12k-6 = 2(6k-3)$ ja $12k = 2(6k)$, $12k-6$ ja $12k$ voidaan poistaa. Operaatiot $\{12k-j, 12k+j\} \mapsto 8k$ ja $\{12k-6-i, 12k-6+i\} \mapsto 8k$ muuntavat 10 termiä viideksi termiksi $8k$, $8k-4$. Havaitaan, että $4k$ kuuluu jonoon α_{n-12}. Epäyhtälö $4k \leq n-12 = 12k+r$ on yhtäpitävä ehdon $8k \geq 12-r$ kanssa; tämä on totta, kun $r = 4$ ja $r = 5$. Jos taas $r \leq 3$, niin ehdosta $n \geq 16$ seuraa $k \geq 2$, ja ehto $8k \geq 12-r$ on voimassa. Siis α_n voidaan korvata jonolla α_{n-12}. Jos $6 \leq r \leq 11$, menetellään analogisesti. Jonon α_n 12 suurinta lukua jaetaan yksilöiksi $\{12k\}$ ja $\{12k+6\}$ ja pareiksi $\{12k-i, 12k+i\}$, $i = 1, \ldots, 11-r$, ja $\{12k+6-j, 12k+6+j\}$, $j = 1, \ldots, r-6$. Yksiköt ovat jonon kaksi kertaa niin suuria kuin jotkin jonon pienemmät jäsenet ja ne voidaan siis poistaa. Muunnokset $\{12k-i, 12k+i\} \mapsto 8k$ ja $\{12k+6-j, 12k+6+j\} \mapsto 8k+4$ muuttavat 10 lukua viideksi. Koska $k \geq 1$ ja $r \geq 6$, niin $4k+2 \leq n-12$. Syntyneet viisi lukua ovat jonossa α_{n-12} olevien lukujen kaksinkertoja ja ne voidaan poistaa. α_n voidaan nytkin korvata jonolle α_{n-12}. Kun tällainen 12:lla pienentäminen tehdään riittävän monta kertaa ja otetaan huomioon $n \equiv 1, 2 \bmod 4$, todetaan, että ongelmaksi jää jonon α_n mahdollisuuden tarkistaminen, kun $n \in \{2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\}$. Tapaukset $n = 2, 6, 10, 14$ voidaan unohtaa, koska jonon suurin termi on parillinen ja siis kaksi kertaa niin suuri kuin jokin jonon aikaisempi jäsen. Tapaus $n = 5$ selvitetään muunnoksilla $\{4, 5\} \mapsto 3$, $\{3, 3\} \mapsto 2$, jonka jälkeen jonon kakkoset voidaan poistaa. Tapauksessa $n = 9$ voidaan poistaa 6 ja sitten tehdä muunnokset $\{5, 7\} \mapsto 4$, $\{4, 8\} \mapsto 4$, $\{3, 9\} \mapsto 4$. Nyt ensin 4:t ja sitten 2 voidaan poistaa. Tapaus $n = 13$ palautuu tapaukseen $n = 10$, kun tehdään muunnos $\{11, 13\} \mapsto 8$ ja poistetaan 8 ja 12. Todistus on valmis.

2013.1 Osoitetaan väite todeksi induktiolla k:n suhteen. Kaikilla n on

$$1 + \frac{2^1 - 1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Tehdään sitten induktio-oletus, jonka mukaan tehtävässä oleva yhtälö saadaan toteutumaan arvolla n. Induktioaskel $k \to k+1$ tehdään eri tavoin sen mukaan, onko n pariton vai parillinen. Edellisessä tapauksessa $\dfrac{n+1}{2}$ on kokonaisluku. Voidaan kirjoittaa

$$1 + \frac{2^{k+1} - 1}{n} = \frac{n + 2^{k+1} - 1}{n} = \frac{(n+1)(n + 2^{k+1} - 1)}{n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\dfrac{n-1}{2} + 2^k}{\dfrac{n+1}{2}}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\dfrac{n+1}{2} + 2^k - 1}{\dfrac{n+1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2^k - 1}{\dfrac{n+1}{2}}\right).$$

Tulon jälkimmäinen tekijä on induktio-oletuksen mukaan k:n muotoa $1 + \dfrac{1}{a}$ olevan luvun tekkijä, joten koko tulo on $(k+1)$:n samanmuotoisen luvun tulo. Jos n on parillinen, kirjoitetaan vastaavasti

$$1 + \frac{2^{k+1} - 1}{n} = \frac{n + 2^{k-1} - 1}{n} = \frac{(n + 2^{k+1} - 1)(n + 2^{k+1} - 2)}{n(n + 2^{k+1} - 2)}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n + 2^{k+1} - 2}\right)\left(1 + \frac{2(2^k - 1)}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n + 2^{k+1} - 2}\right)\left(1 + \frac{2^k - 1}{\dfrac{n}{2}}\right).$$

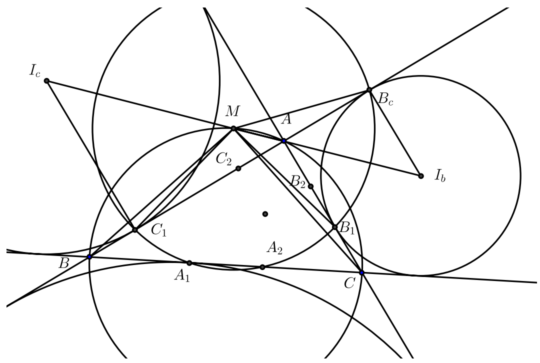
Johtopäätös on sama kuin parittoman n:n tapauksessa. Väite on todistettu.

2013.2 Osoitetaan ensin induktiolla, että jos "asetelmassa" on pariton määrä pisteitä $2n+1$, niin n:llä suoralla voidaan muodostaa suopea sijoittelu, riippumatta siitä, kuinka suuri osuus pisteistä on sinisiä.

Jos $n = 1$, näin selvästi on. Oletaan, että jokaiseen $2n-1$ pisteen asetelmaan liittyy suopea $n-1$:n suoran sijoittelu. Olkoon sitten asetelmassa $2n+1$ pistettä. Tarkastellaan niiden *konveksia verhoa*. [Se on pienin monikulmio, joka sisältää kaikki pisteet. Äärellisen pistejoukon E konveksin verhon voi ajatella syntyvän niin, että tarkastellaan ensin jotakin mielivaltaista suoraa ℓ, jonka määrittämistä puolitasoista toiseen E kokonaan sisältyy. Kaikista ℓ:n suuntaisista ja E:n pisteiden kautta kulkevista suorista jotkin kaksi ovat sellaisia, että kaikki E:n pisteet ovat joko suoralla tai toisessa suoran määrittämistä puolitasoista. Jos suoralla on ainakin kaksi E:n pistettä, näistä kaksi äärimmäistä ovat konveksin verhon kärkipisteitä. Jos suoralla on vain yksi E:n piste A, tarkastellaan A:n ja E:n muiden pisteiden kautta kulkevia suoria. Näistä jotkin kaksi ovat sellaisia, että kaikki E:n pisteet ovat joko suoralla tai kokonaan toisessa suoran määrittämistä puolitasoista. A ja suoralla kauimpana A:sta oleva E:n piste ovat konveksin verhon kärkiä.] Jos konveksin verhon kärkipisteissä on kaksi vierekkäistä samanväristä, A ja B, on olemassa AB:n suuntainen suora ℓ, jonka toisella puolella ovat A ja B ja toisella puolella $2n-1$ asetelman pistettä. Induktio-oletuksen mukaan nämä voidaan jakaa $n-1$:llä suoralla niin, että joka alueessa on vain yhdenvärisiä pisteitä. Pisteet A ja B ovat joko samassa tai eri alueissa; alueissa joissa ne ovat, ei ole muita sijoittelun pisteitä, joten sijoittelu on suopea. Oletetaan sitten, että kaikki konveksin vierekkäiset kärkipisteet ovat erivärisiä. Valitaan niistä jälleen kaksi A ja B. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa $n-1$:n suoran suopea sijoittelu, joka jakaa loput $2n-1$ pistettä alueisiin, joissa kussakin on vain yhdenvärisiä asetelman pisteitä. Jos A ja B ovat samassa alueessa, niin tässä alueessa on vain joko A:n tai B:n värisiä asetelman pisteitä. Suora, joka erottaa erivärisen pisteen muista täydentää sijoittelun halutuksi. Jos A ja B ovat eri alueissa, niin AB:n suuntainen suora erottaa ne muista asetelman pisteistä alueisiin, joissa sanotut pisteet ovat alueen ainoat pisteet. Induktioaskel on otettu. Tehtävän luvuin 2013 suoraa riittää aina.

Osoitetaan vielä, että on tilanteita, joissa tarvitaan 2013 suoraa. Tarkastellaan 4026 pistettä ympyrän kehällä, vuorotellen sinisiä ja punaisia (ja yksi sininen piste jossakin). Sijoittelussa, joka on suopea tälle asetelmalle täytyy olla jokaista kahta vierekkäistä pistettä kohden suora, joka leikkaa pisteiden välisen janan ja siis myös niiden välisen kaaren. Suorien ja ympyrän leikkauspisteitä on oltava ainakin 4026, ja koska suora leikkaa ympyrän enintään kahdessa pisteessä, suoria on oltava ainakin 2013.

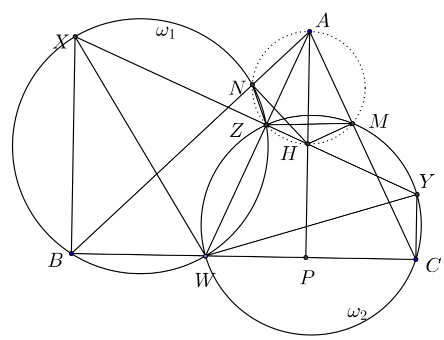
2013.3 Olkoot kolmion ABC sivut a, b, c, kulmat α, β, γ, sen sivuympyröiden keskipisteet I_a, I_b, I_c ja A_2, B_2, C_2 ABC:n sisäympyrän ja kolmion sivujen sivuamispisteet. Olkoon vielä B_c piste, jossa I_b-keskinen sivuympyrä sivuaa puolisuoraa BA ja $2p = a+b+c$. Koska kolmion $A_1B_1C_1$ ympärysympyrän keskipiste on kolmion ulkopuolella, kolmio on tylppäkulmainen. Voidaan olettaa, että $\angle C_1A_1B_1$ on tylppä. Kolmion $A_1B_1C_1$ ympärysympyrän keskipiste on silloin samalla kolmion ABC ympärysympyrän kaarella kuin A. Olkoon M tämän kaaren keskipiste. Osoitetaan, että M on kolmion $A_1B_1C_1$ ympärysympyrän keskipiste. On tunnettua (ja helppo todistaa) että pisteet A_1, B_1, C_1 ovat kolmion ABC piirin puolittajia, ts. $AB + BA_1 = AC + CA_1$ jne. Siis esimerkiksi $BC_1 = CB_1 = p - a$. Koska M on kaaren $\overset{\frown}{BAC}$ keskipiste, M on janan BC keskinormaalilla. Lisäksi $\angle MBC_1 = \angle MBA = \angle MCA = \angle MCB_1$. Kolmiot MBC_1 ja MCB_2 ovat yhteneviä (sks), joten $MB_1 = MC_1$. Koska kolmion $A_1B_1C_1$ ympärysympyrän keskipisteen tiedetään olevan kaarella $\overset{\frown}{BAC}$, keskipiste on todellakin M.



Koska $BA_1 = p - c = CA_2$, kolmiot MBA_1 ja MCA_2 ovat yhteneviä. Siis $MA_2 = MA_1$, joten piste A_2 on kolmion $A_1B_1C_1$ ympärysympyrällä. Osoitetaan sitten, että myös piste B_c on tällä ympyrällä. Osoitetaan ensin, että M on janalla I_bI_c. Tämä tulee osoitetuksi, jos näytetään, että $\angle BAM$ ja $\angle BAI_c$ ovat vieruskulmia. Todellakin: $\angle BAM = \angle BCM =$

$\dfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$ ja $\angle BAI_b = \alpha + \dfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$, joten $\angle BAM + \angle BAI_b = \alpha+\beta+\gamma = 180°$. Koska kulman ja sen vieruskulman puolittajat ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, A, B, C ovat kolmion $I_aI_bI_c$ korkeusjanojen kantapisteet. Kolmion ABC ympärysympyrä on näin ollen kolmion $I_aI_bI_c$ yhdeksän pisteen ympyrä, joka tunnetusti kulkee sivujen keskipisteiden kautta. M on siis janan I_bI_c keskipiste. Koska $I_cC_1 \perp AB \perp I_bB$, M on suorien I_cC_1 ja I_bB_c suunatisella suoralla, yhtä etäällä molemmista suorista. Mutta tämä merkitsee sitä, että M on janan B_cC_1 keskinormaalilla, joten $MB_c = MC_1 = A_1B_1C_1$:n ympärysympyrän säde. Tarkastellaan nyt pisteen B potenssia $A_1B_1C_1$:n ympärysympyrän suhteen. Pätee $BA_1 \cdot BA_2 = BC_1 \cdot BB_c$. Nyt $BA_1 = p - c$ ja tunnetusti (tai helposti todistettavasti) $BA_2 = p - b$. Lisäksi $BB_c = p$. Siis $(p-c)(p-b) = p(p-a)$. Tämä yhtälö sievenee muotoon $b^2 + c^2 - a^2 = 0$. Pythagoraan lauseen käänteislauseen perusteella kolmio ABC on siis suorakulmainen.

2013.4 Olkoot kolmion ABC kulmat α, β, γ. Olkoon Z ympyröiden ω_1 ja ω_2 toinen leikkauspiste. Koska WX ja WY ovat ω_1:n ja ω_2:n halkaisijat, kulmat $\angle WZX$ ja $\angle WZY$ ovat suoria. X, Z ja Y ovat siis samalla suoralla. Jännenelikulmioista $BWZN$ ja $WCMZ$ saadaan kulmaksi NZM $\angle NBW + \angle WCM = \beta + \gamma$. Kulma $\angle NZM$ on siis kulman $\angle MAN = \alpha$ vieruskulma, joten Z on pisteiden A, N, M kautta kulkevalla ympyrällä. Koska $\angle ANH$ ja $\angle AMH$ ovat suoria kulmia, myös H on tällä ympyrällä ja AH on ympyrän halkaisija. Mutta silloin $\angle AZH$ on suora kulma.



Osoitetaan vielä, että myös $\angle AZX$ on suora. Tämä seuraa kehäkulmlauseen ja kulmien $\angle AHN$ ja $\angle ABC$ yhtäsuuruuden vuokis siitä, että $\angle AZX = \angle AZN + \angle NZX = \angle AHN + \angle XBN = \angle ABC + \angle XBN = \angle XBW$.Siis H on samalla suoralla kuin Z, X, Y, ja väite on todistettu.

2013.5 Koska $a = f(a) = f(a \cdot 1) \le f(a)f(1) = af(1)$, niin $f(1) \ge 1$. Tästä seuraa induktiolla, että $f(k) \ge k$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k: jos $f(k) \ge k$, niin $f(k+1) \ge f(k) + f(1) \ge k+1$. Jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, niin $m \le f(m) = f\left(n \cdot \dfrac{m}{n}\right) \le f(n)f\left(\frac{m}{n}\right)$. Tästä seuraa, että $f(x) > 0$ kaikilla positiivisilla rationaaliluvuilla. Ehdosta (ii) seuraa nyt, että f on kasvava funktio. Erityisesti $a^2 = f(a)^2 \ge f(a^2)$, ja induktiolla nähdään, että yleisesti $f(a^k) \le a^k$. Samoin induktiolla nähdään, että $f(ka) \ge kf(a)$ kaikilla positiiviisilla kokonaisluvuilla k. Osoitetaan nyt, että itse asiassa $f(ka) = ka$ kaikilla k. Todistetaan epäsuorasti: oletetaan, että jollain m on $f(ma) - ma = t > 0$. Jos nyt n on sellainen kokonaisluku, että $nt > a$, niin

$$f(nma) \ge nf(ma) = nma + nt > nma + a.$$

Koska $a > 1$, on olemassa sellainen kokonaisluku p, että $\lfloor a^p \rfloor > nm$. Silloin

$$\begin{aligned} a^{p+1} &\ge f(a^{p+1}) \ge f\left(\lfloor a^p \rfloor a\right) = f\left((\lfloor a^p \rfloor - nm)a + nma\right) \ge f((\lfloor a^p \rfloor - nm)a) + f(nma) \\ &> (\lfloor a^p \rfloor - nm)a + nma + a = a\left(\lfloor a^p \rfloor\right) + 1), \end{aligned}$$

eli $a^p > \lfloor a^p \rfloor + 1$. Tämä ei ole mahdollista, joten vastaoletus oli virheellinen. Siis $f(ka) = ka$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

Koska a on rationaaliluku, $a = \dfrac{p}{q}$ joillain positiivisilla kokonaisluvuilla p ja q. Jos $k = nq$, niin $f(np) = f\left(k\dfrac{p}{q}\right) = f(ka) = ka = np$. Toisaalta $f(np) \geq pf(n)$. Siis $n \geq f(n)$. Koska, niin kuin alussa huomautettiin, $f(n) \geq n$, on oltava $f(n) = n$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Oletetaan sitten, että jollain rationaaliluvulla x olisi $f(x) - x = u > 0$. Jos n on sellainen kokonaisluku, että nx on kokonaisluku, on $nx = f(nx) \geq nf(x) > nx + nu$. Ristiriita; siis mainitunlaista rationaalilukua x ei ole olemassa, joten $f(x) \leq x$ kaikilla x.

On vielä torjuttava mahdollisuus $f(y) < y$ jollain rationaaliluvulla y. Jos n on sellainen kokonaisluku, että ny on kokonaisluku, niin $ny = f(ny) \leq f(n)f(y) = nf(y) < ny$. Ristiriita taas. Todistus on valmis.

2013.6 Puhutaan "nimeämisen" sijaan "numeroinnista". Sellaisia lukupareja $(x,\, y)$, joilla s.y.t.$(x,\, y) = 1$ ja $x + y \leq n$ on tasan yhtä monta kuin sellaisia lukupareja $(z,\, y)$, missä $1 \leq y < z \leq n$. Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että yhtä lukuunottamatta jokainen kaunis numerointi vastaa yksikäsitteisesti tällaista lukuparia. Konstruoidaan siis jokaista paria $(z,\, y)$ kohden kaunis numerointi ja osoitetaan, että näin syntyvät kaikki kauniit numeroinnit.

Olkoon $S_n = \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ ja olkoot pisteiden numerot myötäpäivään $a_0 = 0$, $a_1,\, \ldots,\, a_n$. Olkoon kaikilla $k \in S_n$ $f(k)$ se yksikäsitteinen luku, jolle $a_{f(k)} = k$; sanomme, että $f(k)$ on k:n *indeksi*. Merkintä $i \prec j$ tarkoittaa samaa kuin $f(i) < f(j)$; tällöin siis "i on ennen j:tä". Numerointi on kaunis, jos ja vain jos aina kun $a \prec b \prec c \prec d$, on $a + d \neq b + c$.

Huomataan, että jos $a_1 = 1$, niin $a_j = j$ kaikilla j. Ellei näin olisi, olisi $i + 1 \prec i$ jollain i ja siis $0 \prec 1 \prec i + 1 \prec i$ ja $0 + (i + 1) = 1 + i$. Oletetaan sitten, että $a_1 \neq 1$. Tehtävän väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että kaikki muut kauniit numeroinnit saadaan seuraavasti. Olkoon $(z,\, y)$ sellainen järjestetty lukupari, että $1 \leq y < z \leq n$ ja s.y.t.$(x,\, y) = 1$. Kaikilla $i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, z - 1$ asetetaan

$$E_i = \{k \mid 0 \leq k \leq n \text{ ja } k \equiv yi \bmod z\}.$$

Tämän jälkeen annetaan pisteille ensin E_0:n numerot suuruusjärjestyksessä, sitten E_1:n jne. Todetaan, että aina $a_0 = 0$ ja $a_1 = z$. [Jos esimerkiksi $y = 3$, $z = 5$, $n = 23$, numerointi on 0, 5, 10, 15, 20, 3, 8, 13, 18, 23, 1, 6, 11, 16, 21, 4, 9, 14, 19, 2, 7, 12, 17, 22.]

Osoitetaan, että näin syntyvät numeroinnit ovat kauniita. Ellei näin olisi, löytyisi luvut $a,\, b,\, c,\, d$ niin, että $a \prec b \prec c \prec d$ ja $a + c = b + d$. Tällöin $a \in E_{i_1}$, $b \in E_{i_2}$, $c \in E_{i_3}$ ja $d \in E_{i_4}$, missä $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4 < z$. Koska s.y.t.$(y,\, z) = 1$, tästä seuraa $i_1 + i_3 \equiv i_2 + i_4 \bmod z$. Mutta $(i_2 + i_4) - (i_1 + i_3) = i_4 - i_1 - (i_3 - i_2) \leq i_4 - i_1 \leq z - 1$, joten $i_1 + i_3 = i_2 + i_4$. Tämä on mahdollista vai, jos $i_1 = i_2$ ja $i_3 = i_4$. Koska numeroinnissa on noudatettu suuruusjärjestystä E_{i_1}:ssä ja E_{i_3}:ssa, on $a < b$ ja $c < d$, joten onkin $a + c < b + d$. Ristiriita osoittaa, että jokainen kuvatulla tavalla synnytetty numerointi on kaunis.

Osoitetaan sitten, että kaikki kauniit numeroinnit on tuotettu kuvatulla tavalla. Tehdään induktio n:n suhteen. Kun $n = 3$, mahdolliset parit (z, y) ovat $(3, 1)$, $(3, 2)$ ja $(2, 1)$. Ne tuottavat triviaalia numerointia lukuun ottamatta kaikki kauniit numeroinnit, 0, 3, 1, 2, 0, 3, 2, 1 ja 0, 2, 1, 3. Oletetaan nyt, että menetelmä tuottaa kaikki k:n pisteen kauniit numeroinnit, kun $k \le n$. Tarkastellaan jotain $(n+1)$:n pisteen numerointia $a_0 = 0, a_1, \ldots, a_n$, missä $a_1 > 1$. Olkoon $a_1 = z$. Tarkastellaan erikseen tapauksia $a_1 = n$ ja $a_1 < n$. Olkoon siis $a_1 = z = n$. Asetetaan $y = a_2$. Osoitetaan, että $a_{k+1} \equiv ky \bmod z$. Väitetään, että jos näin ei olisi, olisi olemassa i ja j niin, että $y \prec i \prec j$ ja $i - j \equiv y \bmod n$. Silloin olisi joko $i - j = y$ tai $j - i = n - y$. Koska $0 \prec y \prec i \prec j$, edellinen vaihtoehto ei käy, koska $n \prec y \prec i \prec j$, jälkimmäinen vaihtoehtokaan ei käy. Todistetaan nyt esitetty väite. Jos s.y.t.$(y, z) = 1$, väite on triviaalisti tosi, koska lukujen ky jakojäännökset $\bmod z$ ovat kaikki eri suuria. Jos taas s.y.t.$(y, z) > 1$ eikä väitteen mukaisia lukuja i ja j ole olemassa, niin $1 \prec 1 + y \prec 1 + 2y \prec \ldots$ (luvut $\bmod z$) Jono palaa jossain vaiheessa 1:een, mikä on ristiriita.

Tarkastellaan sitten sellaisia numerointeja, joissa $a_1 \ne n$. Poistetaan piste, jolla on numero n. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa jokin n:n pisteen kaunis numerointi, joka noudattaa esitettyä konstruktiota joillain (z, y). Pyritään osoittamaan, että tällaiseen numerointiin voidaan liittää piste, jonka numero on n vain yhdellä tavalla niin, että numerointi on kaunis ja sellainen, joka perustuu pariin (z, y) yllä kuvatulla tavalla, ja jossa siis $a_1 = z$. Olkoon $n \equiv ky \bmod z$, $0 \le k < z$. Osoitetaan, että n on sijoitettava lukujen $n - z$ ja joukon E_{k+1} pienimmän alkion v väliin. Huomataan, että $v \equiv n + y \bmod z$. Osoitetaan ensin, että on oltava $n - z \prec n$. Koska $a_0 = 0$ ja $a_1 = z$, on $z \prec n$. Jos $n = 2z$, ei voi olla $n \prec n - z$ ($[0, n]$ ja $[z, n - z]$ leikkaisivat). Jos $n \ne 2z$, sekä n että $n - z$ ovat ympyrän kehällä 0:n ja z:n jälkeen, ja $n - z$:n on edellettävä n:ää. Osoitetaan sitten, että n on sijoitettava välittömästi n:n jälkeen. Käsitellään eri mahdollisuudet. Jos $k = z - 1$, niin $n - z \equiv (z - 1)y \bmod z$ on E_{z-1}:n suurin alkio ja siis numeroinnin viimeinen; silloin n voidaan sijoittaa vain $n - z$:n ja 0:n väliin. Jos sitten $k = 0$ eli $n \equiv 0 \bmod z$, niin $n = tz$ ja $t \ge 2$. Nyt $v = y$. Koska $(t - 1)z \prec y \prec y \prec z + y$, niin n on sijoitettava $(t - 1)z$:n ja $z + y$:n väliin. n:ää ei kuitenkaan voi sijoittaa y:n jälkeen, koska $n - y \in E_{z-1}$ ja näin sekä y että n ovat 0:n ja $(n - y)$:n välissä. Oletetaan sitten, että $n = tz + u$, misstä $t \ge 1$ ja $0 < u < z$; myös $0 < v < z$. Edellä tehdystä huomautuksesta seuraa, että joko $v = u + y$ tai $v + z = u + y$. Jos $v = u + y$, niin $tz \prec y \prec v, n$ (koska y seuraa heti tz:aa). Jos $v + z = u + y$, niin $n - z \prec v \prec v + z$, joten n on sijoitettava $(n - z)$:n ja $(v + z)$:n väliin. Koska $n - v = (t + 1)z - y$, niin $n - v$ on numeroinnin viimeinen. Siis $0 \prec n, v \prec n - v$, joten on oltava $n \prec v$.

Induktioaskel on nyt otettu, ja väite todistettu.

2014.1. Merkitään kaikilla $n \ge 1$

$$d_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - na_n.$$

Silloin jokainen d_n on kokonaisluku, ja $d_1 = a_0 > 0$. Nyt $d_n > 0$ tasan niillä n, joilla tehtävän epäyhtälöistä vasemmanpuolinen on tosi. Toisaalta

$$na_{n+1} - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = (n + 1)a_{n+1} - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1}) = -d_{n+1},$$

joten tehtävän oikeanpuoleinen epäyhtälö on tosi niillä n, joilla $d_{n+1} \le 0$. Osoitetaan, että (d_n) on aidosti vähenevä jono:

$$d_n - d_{n+1} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - na_n - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1}) - (n+1)a_{n+1} = n(a_{n+1} - a_n) > 0,$$

koska (a_n) on kasvava jono. Aidosti vähenevä kokonaislukujono, jonka ensimmäinen jäsen on positiivinen, "ohittaa" nollan tasan kerran, ts. on olemassa yksi ja vain yksi n, jolle $d_n > 0 \ge d_{n+1}$; todistus on valmis.

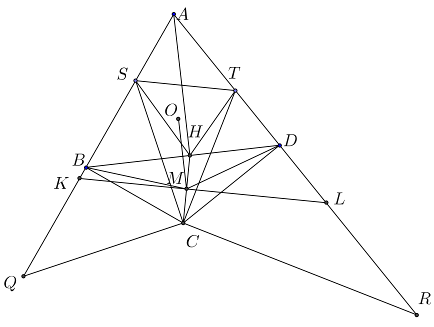
2014.2. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Osoitetaan, että jos $n > m^2$, niin jokainen rauhallinen asetelma sallii tyhjän $m \times m$ -neliön. Olkoon siis annettuna jokin rauhallinen tornien asettelu. Jollakin rivillä R on silloin torni, joka on rivin vasemmanpuolimmaisessa ruudussa. Valitaan jotkin m allekkaista riviä niin, että R on näiden joukossa. Riveillä on kaikkiaan m tornia. Poistetaan näistä riveistä $n - m^2 > 0$ vasemmanpuolimmaista saraketta. Näiden sarakkeiden mukana laudalta poistuu ainakin yksi torni. Jäljelle jää $m^2 \times m$ -suorakaide, jossa on enintään $m - 1$ tornia. Suorakaide voidaan jakaa m:ksi $m \times m$ -neliöksi, joista ainakin yksi on tyhjä.

Olkoon nyt $m^2 = n$. Osoitetaan, että laudalle voidaan laatia rauhallinen asetelma, joka ei jätä yhtään $m \times m$ -neliötä tyhjäksi. Numeroidaan laudan rivit ja sarakkeet 0:sta $(m^2 - 1)$:een ja nimetään kukin ruutu parina (r, s), missä r on sen rivin ja s sen sarakkeen numero. Sijoitetaan tornit ruutuihin $(im + j, jm + i)$, $i, j = 0, 1, \ldots, m - 1$. Silloin joka rivillä ja joka sarakkeessa on tasan yksi torni. Osoitetaan, että jokainen $m \times m$ -neliö sisältää yhden tornin. Olkoon A tällainen neliö. Olkoon sen alimman rivin numero $pm + q$, missä $0 \le p, q \le m - 1$. A:n riveillä olevat tornit ovat sarakkeissa $qm + p$, $(q + 1)m + p, \ldots, (m - 1)m + p, p + 1, m + (p + 1), \ldots, (q - 1)m + (p + 1)$. Luvuista pienin on $p + 1$ ja suurin $(m - 1)m + p$. Pienin luku on enintään $m - 1$ (jos $p = m - 1$, niin $q = 0$ ja listan pienin luku on $qm + p = m - 1$) ja suurin ainakin $(m - 1)m$; kahden peräkkäisen luvun erotus on enintään m. Siten jossain A:han kuuluvista m:stä vierekkäisestä sarakkeesta on torni.

Olkoon sitten $m^2 > n$. Konstruoidaan edellä olevan mukaisesti rauhallinen asetelma $m^2 \times m^2$ -neliöön ja poistetaan siitä $m^2 - n$ alinta riviä ja vesemmanpuoleista saraketta. Syntyvä $n \times n$ -neliö ei sisällä tyhjiä $m \times m$-neliöitä, mutta siihen jää tyhjiä rivejä ja sarakkeita. Niitä on yhtä monta, joten ne voidaan liittää pareittain toisiinsa. Kunkin tällaiseen pariin kuuluvan rivin ja sarakeen leikkauspisteeseen voidaan sijoittaa torni; näin täydentyy rauhallinen asetelma.

Yhteenvetona edellisestä saadaan, että tehtävässä kysytty k on $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

2014.3. Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että kolmion TSH ympärysympyrän keskipiste on janalla AH. Aloitetaan valitsemalla puolisuorilta AB ja AD pisteet Q ja R niin, että kulmat $\angle SCQ$ ja $\angle TCR$ ovat suoria. Kolmiosta SQC ja tehtävän ehdosta saadaan $\angle SQC = 90° - \angle QSC = 90° - \angle CSB = 180° - \angle CHS$. Tämä merkitsee sitä, että $SQCH$ on jännenelikulmio. Kosta $\angle SCQ$ on suora, SQ on kolmion SCH ympärysympyrän halkaisija, ja ympärysympyrän keskipiste K, joka on samalla janan SH



keskinormaalin piste, on janalla AQ. Aivan samoin nähdään, että kolmion THC ympärysympyrän keskipiste L, joka on janan TH keskinormaalilla, on janalla AR. Osoitetaan, että janojen SH ja TH keskinormaalit leikkaavat suoralla AH. Nämä keskinormaalit ovat samalla kolmioiden AKH ja AHL kulmien $\angle AKH$ ja $\angle ALH$ puolittajia. Edellinen niistä leikkaa siis AH:n pisteessä, joka jakaa AH:n suhteessa $\frac{AK}{KH}$, jälkimmäinen pisteessä, joka jakaa AH:n suhteessa $\frac{AL}{LH}$.

Yhtälön

$$\frac{AK}{KH} = \frac{AL}{LH} \tag{1}$$

todistamiseksi piirretään jana KL; se leikkaa janan HC pisteessä M. Koska K ja L ovat nelikulmioiden $SQCH$ ja $THCR$ ympärysympyröiden keskipisteitä, $KH = KC$ ja $LH = LC$. KL on siis janan HC keskinormaali ja M sen keskipiste. Olkoon O nelikulmion $ABCD$ ympärysympyrän keskipiste. Koska nelikulmion B- ja D-kärjissä on suorat kulmat, AC on ympyrän halkaisija. O on siis janan AC ja M janan HC keskipiste. Kolmiosta ACH saadaan nyt $MO \| AH$ ja edelleen $OH \perp BD$. Koska $BO = DO$, OM on janan BD keskinormaali ja siis $BM = DM$. Kulmat $\angle KBM$ ja $\angle BMC$ ovat suoria. Nelikulmio $BKCM$ on siis jännenelikulmio ja KC on tämän nelikulmion ympärysympyrän halkaisija. Samoin perustein $MCLD$ on jännenelikulmio ja LC sen ympärysympyrän halkaisija. Sinilauseen nojalla

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\sin(\angle ALK)}{\sin(\angle AKL)}. \tag{2}$$

Sovelletaan (laajennettua) sinilausetta edelleen nelikumioiden $BKCM$ ja $MCLD$, jolloin saadaan

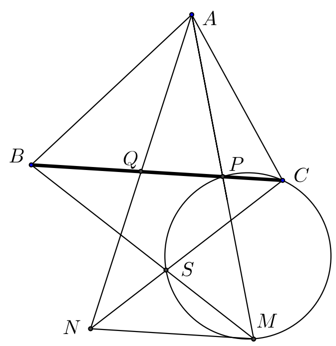
$$\sin(\angle ALK) = \frac{DM}{CL}, \quad \sin(\angle AKL) = \frac{BM}{CK}.$$

Kun otetaan huomioon $BM = DM$ ja (2), saadaan

$$\frac{AK}{AL} = \frac{CK}{CL}.$$

Mutta $CK = KH$ ja $CL = LH$, joten (1) pitää paikkansa ja väite on todistettu.

2014.4. Olkoon BM:n ja CN:n leikkauspiste S. Olkoot tavalliseen tapaan α, β, γ kolmion ABC kulmat. Kolmiot BAC, AQC ja BPA ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis $\angle APQ = \alpha$. Yhdenmuotoisuudesta seuraa



$$\frac{BP}{PM} = \frac{BP}{AP} = \frac{AQ}{QC} = \frac{NQ}{QC}$$

ja $\angle BPA = \angle AQC$ ja edelleen $\angle BPM = \angle NQC = \angle SCP$. Tästä seuraa, että $CPSM$ on jännenelikulmio ja $\angle MSC = \angle MPC = \angle APQ = \alpha$. Nelikulmio $ABSC$ on siis jännenelikulmio.

2014.5. Jos useiden kolikoiden yhteisarvo on $\frac{1}{k}$ jollain positiivisella kokonaisluvulla k, ne voidaan korvata yhdellä kolikolla, jonka arvo on $\frac{1}{k}$. Jos näin syntynyt uusi kokoelam voidaan jakaa tehtävässä esitetyllä tavalla, myös alkuperäinen kokoelma voidaan jakaa niin. Kun tämä sulauttaminen on tehty mahdollisimman monta kertaa, ollaan tilanteessa, jossa jokaista parillista k:ta kohden on enintään yksi kolikko, jonka arvo on $\frac{1}{k}$ (koska kaksi voitaisiin sulauttaa yhteen) ja jokaista paritonta k kohden on enintään $k - 1$ kolikkoa, jonka arvo on $\frac{1}{k}$. Selvästi jokainen kolikko, jonka arvo on 1, muodostaa oman ryhmänsä. Jos tällaisia kolikkoja on d kappaletta, jäljelle jää rahaa $100 - \frac{1}{2} - d$:n verran, ja summa koostuu kolikoista, joiden arvo on $\leq \frac{1}{2}$. Ryhmitellään kolikot nyt seuraavasti: kaikille $k = 1, 2, \ldots, 100 - d$ asetetaan kolikot, joiden arvo on $\frac{1}{2k-1}$ tai $\frac{1}{2k}$ samaan ryhmään G_k. Ryhmässä G_k olevien kolikkojen arvo ei ole suurempi kuin

$$(2k - 2) \cdot \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} < 1.$$

Erityisesti ryhmässä G_1 olevien kolikkojen arvo on 0 tai $\frac{1}{2}$. Jäljellä ovat kolikot, joiden arvo on pienempi kuin $\frac{1}{2(100-d)}$. Ryhmissä G_k olevien kolikkojen arvo on yhteensä enintään

$$\frac{1}{2} + (99 - d) = 100 - d - \frac{1}{2}.$$

Ainakin yhden ryhmän kolikkojen arvo on enintään

$$\frac{100 - d - \frac{1}{2}}{100 - d} = 1 - \frac{1}{2(100-d)}.$$

Tähän ryhmään voidaan sijoittaa kolikko, jonka arvo on $\frac{1}{2(100-d)}$. Näin jatkamalla saadaan "pienet kolikotkin" sijoitetuiksi.

2014.6. Olkoon L tarkasteltava suorajoukko ja $\mathcal{F}$ siihen liittyvä äärellisten alueiden joukko. Valitaan jokin sellainen L:n osajoukko S, että jos S:ään kuuluvat suorat on väritetty sinisiksi, yhdenkään $\mathcal{F}$:ään kuuluvan alueen reuna ei ole kokonaan sininen, mutta jos $S \subset S'$, $S \neq S'$, ja S':n suorat ovat sinisiä, jonkin $\mathcal{F}$:ään kuuluvan alueen reuna on kokonaan sininen. Olkoon S:ssä olevien suorien lukumäärä k. Väritetään loput $n - k$ suoraa punaisiksi. Sanomme, että kahden L:än suoran leikkauspiste on sininen, jos se on kahden sinisen suoran leikkauspiste. Piste on punainen, jos se on sinisen ja punaisen suoran leikkauspiste. Sinisten pisteiden lukumäärä on $\binom{k}{2}$. Olkoon ℓ jokin punainen suora. On olemassa jokin $A \in \mathcal{F}$, jonka ainoa punainen sivu on suoralla ℓ (muuten S:ään voitaisiin lisätä yksi suora). Olkoot A:n kärjet positiiviseen kiertosuuntaan nimettyinä p, p', s_1, $\ldots s_t$ niin, että p, $p' \in \ell$, mutta s_1, $\ldots$, s_t ovat sinisiä pisteitä. Liitetään suoraan ℓ pari $(p,\ s_1)$. Todetaan, että mielivaltaiseen punaisen ja sinisen pisteen pariin $(p,\ s)$ voidaan liittää enintään yksi suora ℓ, koska p ja s ovat peräkkäiset kärjet positiivisessa kiertosuunnassa enintään yhden alueen reunalla.

Väitetään, että jokaiseen siniseen pisteeseen liittyy enintään kaksi punaista suoraa. Jos näin on, niin

$$n - k \leq 2\binom{k}{2} = k^2 - k$$

eli $n \leq k^2$, ja väite on todistettu. Tehdään vastaoletus: johonkin siniseen pisteeseen s liittyy kolme punaista suoraa ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Sinisestä pisteestä s lähtee neljä puolisuoraa, niiden sinisten suorien osat, joiden leikkauspiste s on. Näistä kolmella on punainen piste p_i, joka kuuluu syhteen suorista ℓ_i, $i = 1,\ 2,\ 3$. Voidaan olettaa, että p_2 ja p_3 ovat samalla s:n kautta kulkevalla sinisellä suoralla ja p_1 on toisella. Olkoon A se alue, joka liittää s:n ja p_1:n. Alueen reunalla on positiiviseen kiertosuuntaan kierrettäessä tasan yksi punainen piste p_1:n ja s:n välissä. Sen on oltava p_2 tai p_3. Voidaan olettaa, että se on p_2. Mutta silloin A on kolmio sp_1p_2. Kolmion ainoa punainen sivu on p_1p_2; sen on kuuluttava suoraan ℓ_1. Mutta silloin pisteen p_2 kautta kulkee kolme suoraa: yksi sininen, ℓ_1 ja ℓ_2. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi, ja todistus on valmis.