

1 Joulukuun 2010 kirjevalmennustehtävät – vaikeat

Ratkaisuja voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen laurihallila@gmail.com, tavallisella postilla Lauri Hallila, Kalliorinteenkuja 1, 02770 Espoo, tai palauttaa seuraavan valmennusviikonlopun aikana.

1. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joilla on olemassa tasan $2n$ sellaista positiivisten kokonaislukujen paria (a, b) , joilla $1 \leq a < b \leq n$ ja b jakaa a :n.

2. Kutsutaan positiivista kokonaislukua *maagiseksi*, jos luvun numeroiden summa on sama kuin luvun numeroiden tulo.

a Osoita, että kaikille $n = 1, 2, \dots, 10$ on olemassa maaginen luku, jossa on tasan n numeroa.

b Osoita, että on olemassa äärettömän monta maagista lukua.

3. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen kolmikot (x, y, z) , jotka toteuttavat ehdon $99x + 100y + 101z = 2009$.

4. Osoita, että positiivisille reaalityluvulle a, b ja c pätee

$$\frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3} > 8abc,$$

kun $a \neq b \neq c$.

5. Tarkastellaan kaikkia n kirjaimen sanoja, jotka muodostuvat kirjaimista $\{0, 1, 2, 3\}$. Kuinka monessa sanassa on parillinen lukumäärä a) nollia? b) nollia ja ykkösiä?

6. Lotossa luvuista $\{1, 2, \dots, 49\}$ valitaan 6 lukua. Kuinka moni näistä 6 luvun joukoista on sellaisia, joissa esiintyy kaksi peräkkäistä lukua?

7. Olkoon n sellainen ei-negatiivinen kokonaisluku, että $3^n + 3^{n+1} + \dots + 3^{2n}$ ei ole neliöluku. Osoita, että n on neljällä jaollinen.

8. Etsi kaikki sellaiset reaalityluvut a , että polynomilla $x^3 + ax - 2(a + 4)$ on tasan kaksi reaalityuurta.

9. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}$.

a Osoita, että $f(0) = 0$.

b Etsi $f(1994)$.

10. Olkoon \mathbb{N} kaikkien positiivisten kokonaislukujen joukko. Tarkastellaan funktioita $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, joille $f(n) \geq 2$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja

$$f(n) + f(n + 2) = f(n + 4)f(n + 6) - 1997.$$

a Etsi $f(1997)$ ja $f(1999)$, kun $f(1) = 2$.

b Kuvaile kaikki annetut ehdot toteuttavat funktiot.