

Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu



- 1. Suureen jänisjahtiin osallistui kettuja, susia ja karhuja. Metsästäjiä oli 45, ja saalis oli yhteensä 2008 jänistä. Jokainen kettu pyydysti 59 jänistä, jokainen susi 41 jänistä ja jokainen karhu 40 jänistä. Montako kettua, sutta ja karhua seurueessa oli?
- **2.** Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Suorat AI, BI ja CI leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän myös pisteissä D, E ja F (tässä järjestyksessä). Osoita, että AD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
- 3. Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$x^{2008} - y^{2008} = 2^{2009}.$$

(Diofantoksen yhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan yhtälön kokonaislukuratkaisujen määrittämistä.)

- **4.** Kahdeksan jalkapallojoukkuetta pelaa otteluita niin, ettei mikään pari pelaa kahta ottelua keskenään eikä mikään joukkuekolmikko kaikkia kolmea mahdollista ottelua. Mikä on suurin mahdollinen määrä otteluita?
- **5.** Jana I on kokonaan peitetty äärellisellä määrällä janoja. Osoita, että näistä janoista voidaan valita osajoukko S, jolla on seuraavat ominaisuudet:
- (1) millään kahdella S:ään kuuluvalla janalla ei ole yhteisiä pisteitä,
- (2) S:ään kuuluvien janojen yhteinen pituus on enemmän kuin puolet I:n pituudesta. Osoita, että väite ei pidä paikkaansa, jos jana I korvataan ympyrällä ja muut sanan "jana" esiintymät sanalla "ympyränkaari".

Laskuaikaa on 3 tuntia.

Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.

Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi.