Harjoitustehtävät, helmi–maaliskuu 2011. Vaativammat

Aktiivisuus, vastausten määrä ja laatu on yksi olennaisesti huomioon otettavista tekijöistä valittaessa kilpailujoukkueita. Harjoitustehtävien tavoite on tehtävien ratkaisemisen ohella opetella kirjoittamaan ratkaisuja ymmärrettävästi. Kirjoittakaa siis ratkaisunne paperille ja tuokaa ne seuraavaan valmennusviikonloppuun tai lähettäkää ne paperin alalaidassa olevaan osoitteeseen. Sähköinen lähettäminen on mahdollinen (`matti.lehtinen@helsinki.fi`), mutta ei ensisijainen vaihtoehto. Ei haittaa, jos kaikki tehtävät eivät ratkea!

1. Yhdeksän matemaatikkoa tapaa toisensa kongressissa. Kukaan heistä ei osaa useampaa kuin kolmea kieltä. He toteavat kuitenkin, että jokaisesta kolmesta matemaatikosta ainakin kaksi osaa puhua samaa kieltä. Osoita, että matemaatikkojen joukossa on kolme sellaista, jotka kaikki osaavat puhua samaa kieltä.

2. Olkoon a_n luvun $1 + 2 + \cdots + n$ viimeinen numero (kun summa kirjoitetaan 10-järjestelmässä tavalliseen tapaan. Laske $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2011}$.

3. Tasasivuisen kolmion ABC sivu on 2. Osoita, että jos P on kolmion sisään piirretyn ympyrän mielivaltainen piste, niin $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 5$.

4. 4×7 ruudukon jokainen ruutu on väritetty siniseksi tai punaiseksi. Osoita, että jonkin ruudukon ruuduista muodostuvan suorakaiteen kärkiruudut ovat samanvärisiä. Osoita, että näin ei tarvikse olla, jos ruudukko on kokoa 4×6.

5. Olkoot $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ n positiivista reaalilukua. Olkoon

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x + a_k},$$

kun $x \notin \{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\}$. Määritä niiden reaaliakselin välien, joilla $f(x) > 1$, yhteinen pituus.

6. Pyöreän pöydän ympärillä istuu 2011 (!) henkilöä. Heidät on numeroitu juoksevasti myötäpäivään. Numero 1 aloittaa sanomalla ”yksi”. Tämän jälkeen jokainen istuja sanoo järjestyksessä ”kaksi”. ”kolme”, ”yksi”, ”kaksi” jne. Jokainen, joka sanoo ”kaksi” tai ”kolme” poistuu heti. Minkänumeroinen istuja jää pöydän ääreen?

c/o Dos. Matti Lehtinen
Taskilantie 30 A
90580 OULU

puh. (08) 554 6683
040 583 0678

Pankki
Nordea FI68 1019 3000 2059 98

7. Jonon $(a_k)_{k\geq 1}$ jäsenet ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja toteuttavat ehdon $a_k \geq a_{2k} + a_{2k+1}$ kaikilla k. Osoita, että kaikilla n jonossa on n peräkkäistä nollaa. Anna esimerkki ehdon täyttävästä jonosta, jossa on äärettömän monta positiivista termiä.

8. a, b ja c ovat kokonaislukuja. a on parillinen ja b on pariton. Osoita, että jos n on positiivinen kokonaisluku, on olemassa positiivinen kokonaisluku x siten, että $ax^2 + bx + c$ on jaollinen luvulla 2^n.

9. Kokonaislukuparien joukossa märitelty reaaliarvoinen funktio f toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:
(i) $f(x, y)f(y, z)f(z, x) = 1$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
(ii) $f(x + 1, x) = 2$ kaikilla $x \in \mathbb{Z}$.
Määritä f.

10. Kolmion ABC sivujen pituudet ovat a, b ja c. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O ja sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I, $I \neq O$. Olkoon vielä M ABC:n keskijanojen leikauspiste. Osoita, että $IM \perp BC$, jos ja vain jos $b = c$ tai $b+c = 3a$.

11. Olkoon M kolmion ABC sivun BC keskipiste. Ympyrä Γ, jonka halkaisija on AM, leikkaa AB:n myös pisteessä D ja AC:n myös pisteessä E. Γ:n pisteisiin D ja E piirretyt tangentit leikkaavat pisteessä P. Osoita, että $PB = PC$.

12. Määritellään lukujono $(a_n)_{n\geq 0}$ asettamalla $a_0 = 1$ ja $a_1 = 3$ sekä

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + 9a_n, & \text{jos } n \text{ on parillinen} \\ 9a_{n+1} + 5a_n, & \text{jos } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Osoita, että luku

$$\sum_{k=2011}^{2016} a_k^2$$

on jaollinen 20:llä.

13. $ABCDEFG$ on säännöllinen 7-kulmio, jonka sivun pituus on 1. Osoita, että

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1.$$

14. Tasossa on $3n$ pistettä $(n > 1)$ siten, että mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla ja jokaisen kahden pisteen välimatka on enintään 1. Osoita, että on olemassa n kolmiota, joista millään kahdella ei ole yhteisiä pisteitä, niin että jokainen edellä mainituista $3n$:stä pisteestä on tasan yhden kolmion kärki ja kolmioiden yhteen laskettu pinta-ala on pienempi kuin $\frac{1}{2}$.

15. Yksikkökuutiossa on 75 pistettä. Osoita, että jonkin näistä pisteistä muodostuvan kolmion ala on enintään $\frac{7}{72}$.