Matematiikan olympiavalmennus

Toukokuun 2011 vaativa tehtäväsarja

1. Todista kaksipaikkaiselle Ramseyn funktiolle arvio

$$R(k,\ell) \le \binom{k+\ell}{k},$$

kun $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$.

2. Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$. Oletetaan, että ketkä tahansa kaksi ihmistä ovat joko ystäviä, vihollisia tai eivät tunne toisiaan. Osoita, että kun 27^k ihmistä kokoontuu, niin voidaan valita k ihmisen osajoukko, jotka ovat kaikki keskenään ystäviä, kaikki keskenään vihollisia tai jotka eivät lainkaan tunne toisiaan.

3. Esitä Δ-lemmalle eli auringonkukkalauseelle todistus, joka ei käytä Ramseyn lausetta.

4. Peterillä on paljon samankokoisia neliöitä, joista osa on mustia, osa valkeita. Peter haluaa koota neliöistään ison neliön, jonka sivun pituus on n pikkuneliön sivua, siten, että isossa neliössä ei ole *yhtään* sellaista pikkuneliöistä muodostuvaa suorakaidetta, jonka kaikki kärkineliöt olisivat samanvärisiä. Kuinka suuren neliön Peter pystyy tekemään?

5. Yhdeksän erimaalaista lehtimiestä osallistuu lehdistötilaisuuuteen. Kukaan heistä ei osaa puhua useampaa kuin kolmea kieltä, ja jokaiset kaksi osaavat jotakin yhteistä kieltä. Osoita, että lehtimiehistä ainakin viisi osaa puhua samaa kieltä.

6. Olympoksen jumalat Venus ja Mars leikittelevät jälleen ihmiskohtaloilla. He keräävät kokoon toisilleen ventovieraita ihmisiä ja arpovat kunkin ihmisparin kohdalla, tuleeko heistä ystäviä vai vihollisia (kummankin tapahtuman todennäköisyys on $\frac{1}{2}$). Näytä, että on olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että jos ihmisjoukossa on vähintään m henkeä, niin todennäköisyys, että jokaisella on ainakin yksi ystävä ja ainakin yksi vihollinen, on vähintään 0,99.

7. Kyllästyttyään umpimähkäisiin ihmissuhteisiin Venus ja Mars kehittävät seuraavanlaisen pelin, jonka säännöissä kiinnitetään vakiot n ja k. He kokoavat uuden n ventovieraan joukon. Jumalat valitsevat vuorotellen ihmispareja, ja Venus aloittaa. Jokaisella siirrollaan hän tekee valitsemistaan kahdesta ihmisestä ystävät, Mars vastaavasti viholliset, eikä samaa paria saa valita uudestaan. Venus voittaa pelin, jos hän onnistuu muodostamaan k ystävän ryhmän; Mars taas k vihollisen ryhmän syntyessä. Peli voi myös päättyä tasapeliin, jos parit loppuvat kesken eikä halutunlaisia ryhmiä ole syntynyt.

a) Miten käy, jos $n = 5$ ja $k = 2$?

b) Osoita, että parhaalla mahdollisella tavalla pelatessaan Venus ei häviä peliä, olivat vakiot $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ mitä tahansa.

c) Todista, että on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että Venus pystyy voittamaan pelin, jos tavoitteena on 4 ystävän ryhmän muodostaminen ($k = 4$).

8. Avaruudessa on annettuna yhdeksän pistettä, joista mitkään neljä eivät ole samassa tasossa. Pisteiden välisistä janoista täsmälleen n kappaletta on väritetty sinisiksi tai punaisiksi, ja loput ovat värittämättömiä. Määritä pienin n, jolle välttämättä jotkin kolme sinistä tai kolme punaista janaa muodostavat yksivärisen kolmion.

9. Määritellään jokaista $n \in \mathbb{N}$ vastaamaan äärellinen joukko $j(n)$ rekursiivisesti niin, että jos luvun n binääriesitys on $\sum_{i \in I} 2^i$, niin $j(n) = \{\, j(i) \mid i \in I \,\}$. Joukkoja $j(n)$ kutsutaan *perinnöllisesti äärellisiksi* joukoiksi, perinnöllisesti äärellisten joukkojen luokkaa merkitään HF:llä ja kuvauksen $j\colon \mathbb{N} \to \mathrm{HF}$ voidaan osoittaa olevan bijektio. Esimerkiksi $j(0) = \emptyset$, sillä $0 = \sum_{i \in \emptyset} 2^i$, $j(1) = j(2^0) = \{j(0)\} = \{\emptyset\}$, $j(2) = j(2^1) = \{j(1)\} = \{\{\emptyset\}\}$ ja $j(3) = j(2^1 + 2^0) = \{j(1), j(0)\} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$.

a) Laske $j(2011)$.

b) Todista, että

$$\binom{n}{k} \equiv 1 \pmod 2, \text{ jos ja vain jos } j(k) \subset j(n),$$

kun $k, n \in \mathbb{N}$.

10. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Laske sellaisten lukujen $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ lukumäärä, joille $\binom{n}{k}$ on pariton. Osoita, että tämä luku on kakkosen potenssi, ts. muotoa 2^p jollakin ei-negatiivisella luvulla p.

Kombinatoriikan opiskeluun sopivaa materiaalia

Kombinatoriikasta ei ole vaikeata löytää alkeisesityksiä, mutta luettelen muutamia, joita osaan kommentoida ja joiden laadun voin jossain määrin taata. Hyvin perusasioihin keskittyvä oppikirja on

Merikoski, Virtanen, Koivisto: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan.*

Suppeampi vastaavantasoinen esitys on

Heikki Junnila: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan*

Mikäli perusasioiden osaamista ei enää tarvitse paikkailla, voi tutustua suoraan esimerkiksi teokseen Heikki Junnila: *Diskreettiä matematiikkaa.* Kaksi edellistä teosta ovat verkosta saatavilla Heikki Junnilan kotisivulta http://www.helsinki.fi/~hjkjunni/, ks. tiedostoja `jdm.pdf` ja `dmbook.ps` (tätä tehtäväpaperia vastaavassa pdf-tiedostossa on myös hyperlinkit). Lisää kirjallisuutta on mainittu Helsingin yliopiston kurssin Diskreetti matematiikka II kurssisivulla, mainittakoon näistä Peter Cameronin *Combinatorics*, jonka sisältö on jollain lailla tenhoava.

Ratkaisut toivotaan palautettavan joko valmennusleirillä tai lähetettävän (toukokuun kuluessa) osoitteeseen

Kerkko Luosto
Koroistentie 4d A10
00280 Helsinki