Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, syyskuu 2018

Ratkaisuja toivotaan seuraavaan valmennusviikonloppuun 19.10.2018 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

> Neea Palojärvi
> Ratapihankatu 12 A 1
> 20100 Turku.

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. Sinnikäs yrittäminen kannattaa. Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Kilpailujoukkueisiin valinnan välttämätön (muttei riittävä) ehto on, että asianomainen on kilpailua edeltävänä aikana suorittanut merkittävän osan annetuista tehtävistä.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Uutena kokeiluna myös **viikkotehtävät:**

> `https://keskustelu.matematiikkakilpailut.fi/c/viikkotehtavat`

Kuhunkin näistä on vain viikko aikaa, ja palautus tapahtuu netissä. Heti palautusajan jälkeen tehtävästä voi keskustella keskustelupalstalla, jolloin tehtävästä ja ratkaisuyrityksestä oppiminen ei ole kiinni valmentajien aikatauluista. –Valmennusjaos käyttää kaikkea saatavilla olevaa informaatiota joukkueiden valitsemiseen, mutta viikkotehtävän painoarvo on ainakin aluksi pienempi kuin näiden valmennuskirjeiden.

Toivomme palautetta kokeilusta!

Helpompia tehtäviä

1. Suomessa postinumero koostuu viidestä kokonaisluvusta, jotka ovat väliltä $[0, 9]$. Valitaan satunnaisesti n suomalaista. Mikä on pienin luku n, jolla vähintään kahden ihmisen postinumeroiden ensimmäinen ja viimeinen numero ovat varmasti samat?

2. Luokassa on 33 oppilasta ja heidän ikiensä (vuosissa) summa on 430 vuotta. Onko luokassa varmasti 20 oppilasta, joiden ikien (vuosissa) summa on yli 260 vuotta?

3. Jalkapalloturnauksessa on ainakin kaksi joukkuetta ja kukin joukkue pelaa jokaista toista joukkuetta vastaan täsmälleen kerran. Yksikään peli ei pääty tasapeliin. Turnauksen jälkeen kukin joukkue kirjoittaa listan niistä joukkueista, jotka joukkue voitti tai jotka hävisivät jollekin sellaiselle joukkueelle, jonka joukkue voitti. Onko mahdollista, ettei minkään joukkueen lista sisällä kaikkia muita joukkueita?

4. Erään maan hallituksessa jokaisella ministerillä on enintään kolme vihollista. Kukaan ministeri ei voi olla itsensä vihollinen ja vihollisuus on molemminpuoleista. Osoita, että hallituksen ministerit voidaan jakaa kahteen joukkoon, jotka toteuttavat seuraavat kaksi ehtoa:

- Kukin ministeri kuuluu täsmälleen yhteen joukkoon.
- Jokaisella ministerillä on enintään yksi vihollinen hänen kanssaan samassa joukossa.

5. Neliön, jonka ala on 1, sisällä on kolmio. Oletetaan, että neliön keskipiste ei ole kolmion sisällä tai reunoilla. Osoita, että ainakin yhden kolmion sivuista pituus on alle 1.

6. Olkoon x reaaliluku, jolle $\sec x - \tan x = 2$. Laske $\sec x + \tan x$. (Sekantin määritelmä esim. `https://fi.wikipedia.org/wiki/Trigonometrinen_funktio`.)

7. Olkoon $0^\circ < \theta < 45^\circ$. Järjestä suuruusjärjestykseen luvut

$$t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta}, \quad t_2 = (\tan\theta)^{\cot\theta}, \quad t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta}, \quad t_4 = (\cot\theta)^{\cot\theta}.$$

8. Laske (s.o. esitä tarkkana lausekkeena, jossa ei esiinny trigonometrisia funktioita)

a) $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$;

b) $\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24}$;

c) $\cos 36° - \cos 72°$; ja

d) $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$.

9. Todista, että kokonaisluku n voidaan esittää kahden neliön summana, jos ja vain jos luku $2n$ voidaan esittää kahden neliön summana.

10. Olkoot a, b, c ja d sellaiset kokonaisluvut, että kaikille kokonaisluvuille m ja n yhtälöparilla

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

on kokonaislukuratkaisu (x, y). Todista, että $ad - bc = \pm 1$.

11. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että $a_1!a_2!\cdots a_n! < k!$, kun k on kokonaisluku, joka on suurempi kuin positiivisten kokonaislukujen $a_1 a_2, \ldots, a_n$ summa.

12. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n,$$

missä $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ on mikä tahansa positiivisten reaalilukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ permutaatio.

Vaativampia tehtäviä

13. Olkoot $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ja $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Osoita, että jokaista positiivista kokonaislukua m kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku k, että m jakaa luvun x_k.

14. Olkoon ABC kolmio, ja olkoon x ei-negatiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$a^x \cos A + b^x \cos B + c^x \cos C \leq \frac{1}{2}\big(a^x + b^x + c^x\big),$$

missä a on A:n vastaisen sivun pituus jne.

15. Olkoot x, y ja z reaalilukuja. Todista, että

a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ jos $x + y + z = xyz$;

b) $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ jos $0 < x, y, z < 1$ ja $xy + yz + zx = 1$.

16. Olkoot x, y ja z reaalilukuja, joille $x \geq y \geq z \geq \frac{\pi}{12}$ ja $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Etsi tulon $\cos x \sin y \cos z$ suurin ja pienin arvo.

17. Merkitään kolmion PQR sisäympyrän sädettä r_{PQR}. Todista, että jos $ABCDE$ on kupera jänneviisikulmio, $r_{ABC} = r_{AED}$ ja $r_{ABD} = r_{AEC}$, niin kolmiot ABC ja AED ovat yhtenevät.

18. Mikä on suurin mahdollinen määrä paloja, joihin pizza voidaan jakaa n suoralla leikkauksella?

19. Jokainen 9 suorasta jakaa neliön kahteen nelikulmioon, joiden pinta-alojen suhde on $2:3$. Osoita, että on olemassa piste, jossa ainakin kolme näistä suorista leikkaavat toisensa.

20. Voiko yksikkösäteisen kiekon (kehä mukaanlukien) pisteet jakaa kolmeen osajoukkoon siten, ettei missään osajoukoista ole kahta pistettä, joiden keskinäinen etäisyys on yksi?

21. Ratkaise positiivisilla kokonaisluvuilla

$$(x+1)^3 - x^3 = y^2.$$