HUHTIKUUN 2012 VAIKEAMMAT VALMENNUSTEHTäVäT

Ratkaisuja kaivataan toukokuun puoleen väliin mennessä osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Purpuripolku 7-9 B 10, 00420 Helsinki, tai ernvall@mappi.helsinki.fi. Kannattaa huomioida, että tehtävien taso on varsin vaihteleva, eivätkä ne missään nimessä ole vaikeusjärjestyksessä.

(1) Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla 3π on funktion $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{2009x}{n^2}$ jakso.

(2) Olkoon piste P kolmion ABC sisällä siten, että kulmat $\angle CBP$ ja $\angle PAC$ ovat yhtä suuret. Merkittäköön suoran AP ja jänteen BC leikkauspistettä kirjaimella D, sekä suoran BP ja jänteen ACleikkauspistettä kirjaimella E. Kolmioiden ADC ja BEC ympäripiirretyt ympyrät kohtaavat pisteissä C ja F. Osoita, että suora CP puolittaa kulman DFE.

(3) Olkoot a, b, c positiivisia lukuja. Todistettava

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{c}{2c^2+a^2+b^2} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

(4) Ratkaise yhtälöryhmä reaalilukujen joukossa:

$$\begin{cases} x^3 &= 2y^3+y-2 \\ y^3 &= 2z^3+z-2 \\ z^3 &= 2x^3+x-2. \end{cases}$$

(5) Olkoon O sellainen piste kolmion ABC sisällä, että $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$. Todista epäyhtälö

$$\frac{AO^2}{BC} + \frac{BO^2}{CA} + \frac{CO^2}{AB} \geq \frac{AO+BO+CO}{\sqrt{3}}.$$

(6) Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

(7) Luvun a kymmenjärjestelmäesitys on kirjoitettu kerran tai useita kertoja liitutaululle peräkkäin, ja tästä on saatu luvun a binääriesitys. Määritä luvun a mahdolliset arvot.

(8) Olkoot a, b, c kolmion sivut. Oletetaan, että ne toteuttavat ehdon $ab + bc + ca = 1$. Todista että

$$(a+1)(b+1)(c+1) < 4.$$

(9) Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y, joilla $x+y+1$ jakaa luvun $2xy$ ja $x+y-1$ jakaa luvun x^2+y^2-1.

(10) Funktio f on määritelty positiivisten kokonaislukujen joukossa seuraavasti: $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$, jos n on parillinen, $f(2n) = 2f(n)$, jos n on pariton, $f(2n+1) = 2f(n)+1$, jos n on parillinen ja $f(2n+1) = f(n)$, jos n on pariton. Määritä sellaisten positiivisten kokonaislukujen n lukumäärä, jotka ovat pienempiä kuin 2011, jotka toteuttavat ehdon $f(n) = f(2011)$.