Matematiikan olympiavalmennus 2015 – syyskuun tehtävät

Vastaukset seuraavaan valmennusviikonvaihteeseen Päivölään tai osoitteeseen `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu` tai sähköpostitse `matti.lehtinen@spangar.fi`.

1. Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan sisäpuolisesti pisteessä T. Ulomman ympyrän sekantti AB on sisemmän ympyrän tangentti pisteessä P. Osoita, että suora TP puolittaa kulman $\angle ATB$.

2. Pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' valitaan samalta puolelta janaa AB siten että kolmiot ABP, AQB, RAB, BAP', $BQ'A$ ja $R'BA$ ovat yhdenmuotoisia. Osoita, että pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' ovat samalla ympyrällä. Vihje: tarkastele pisteiden A ja B potenssia pisteiden P, Q ja R kautta kulkevan ympyrän suhteen.

3. On annettu kaksi ympyrää, jotka leikkaavat pisteissä P ja Q. Konstruoi jana AB, joka kulkee pisteen P kautta ja jonka päätepisteet ovat ympyröiden kehillä (piste A toisella ympyrällä ja piste B toisella ympyrällä) siten, että tulo $AP \cdot PB$ saa suurimman mahdollisen arvonsa.

(a) Piirrä ensin sellainen suurempi ympyrä, joka sivuaa ympyröitä ulkopuolisesti joissakin pisteissä A ja B niin, että piste P on janalla AB. (Ei onnistu, ellei suurempaa ympyrää ja pisteitä A ja B ole valittu tietyllä tavalla.)

(b) Miksi nämä sivuamispisteet toteuttavat tehtävän ehdon?

(c) Miten pisteet konstruoidaan? Eli miten harpilla ja viivottimella piirtämällä pisteet löydetään?

4. Teräväkulmaisessa kolmiossa CH on korkeusjana ja $AH = 3 \cdot HB$. Sivujen AB ja AC keskipisteet ovat M ja N. Olkoon sitten P se eri puolella suoraa AC kuin B oleva piste, jolle $NP = NC$ ja $PC = CB$. Osoita, että $\angle APM = \angle PBA$.

5. Tasakylkisen kolmion ABC kanta on AB. Kolmion korkeusjanan CD piste P on valittu niin, että kun AP leikkaa BC:n pisteessä E ja BP AC:n pisteessä F, niin kolmion ABP sisäympyrän säde on sama kuin nelikulmion $CFPE$ sisäympyrän säde. Todista, että kolmioiden ADP ja BCP sisäympyröillä on sama säde.

6. Määritä kaikki kokonaislukukolmikot $(a,\, b,\, c)$, joille $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a + b + c)$.

7. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit $(m,\, n)$, joille $m! = n^2 - 12$.

8. Piin tasavallassa on käytössä kahdenlaisia kolikoita, joiden arvot ovat 2015 ja 2016 yksikköä. Onko näillä rahoilla mahdollista maksaa kymmenen miljoonaa yksikköä maksava tutkimuslaboratorio, kun vaihtorahan antaminen ei ole sallittua?

9. Osoita, että on olemassa kokonaisluku $r \geq 1$ ja tason pisteet $P_0, P_1, \ldots, P_{2015}$, siten että jokaisen pisteistä $P_1, \ldots, P_{2015}$ etäisyys pisteestä P_0 on tasan r ja jokaisen pisteen P_i x- ja y-koordinaatti ovat kokonaislukuja.

10. Osoita, että mistä tahansa 18 peräkkäisestä luvusta, joista jokainen on ≥ 18, voidaan valita jokin luku, jolla on vähintään kolme eri alkutekijää.

11. Osoita, että jokainen positiivinen kokonaisluku $n \geq 1000$ voidaan kirjoittaa muodossa $n = abc + def$, missä $a, b, c, d, e, f \geq 2$ ovat kokonaislukuja.

12. Osoita, että yhtälöllä

$$(12x^2 + yz)(12y^2 + zx)(12z^2 + xy) = 2015x^2y^2z^2$$

ei ole ratkaisua (x, y, z), jossa $x > 0$, $y > 0$ ja $z > 0$.

13. Osoita, että kaikilla positiiviluvuilla a ja b pätee

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

14. Olkoon $P(x)$ toisen asteen polynomi. Tiedetään, että yhtälön $P(x^2 + 4x - 7) = 0$ yksi juuri on 1 ja yksi juuri on kaksoisjuuri. Määritä yhtälön kaikki juuret.

15. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (m, n), joille m:n ja n:n aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo ovat samoilla numeroilla kirjoitettavia eri suuria kaksinumeroisia lukuja.

16. Määritellään lukujono (x_n) asettamalla

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_n + 5, \quad \text{kun } n \geq 1. \end{cases}$$

(Jono alkaa siis $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $x_3 = 41$, $\ldots$) Määritä kaikki kokonaislukuparit $\{a, b\}$, joille $x_a x_b$ on neliöluku.