Matematikens olympiadträning: träningsuppgifter, januari 2020

Också de enklare uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och går knappast att lösa utan viss möda. *Det lönar sig att försöka flitigt.* även om man inte klarar av att lösa hela uppgiften, lär man sig mera av modellösningen om man funderat länge på uppgiften. Också i de enklare uppgifterna är det viktigt att motivera svaret och att inte bara räkna slutresultatet med t.ex. en miniräknare.

Vi är medvetna om att det finns många sidor på internet där man kan hitta lösningar – `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` torde höra till de mest kända. Att använda dem kan vara nyttigt och lärorikt, men det rekommenderas att du först försöker lösa uppgifterna på egen hand. Det torde också vara lärorikt att fundera på uppgifterna med andra, om det finns tillfälle för det. åtminstone i Maunula lär det ha ordnats tillfällen där man kan lösa uppgifter i grupp.

Ibland förekommer det fel bland uppgifterna. Om upptäckta fel berättas på nätsidan
`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Svaren kan överlämnas personligen, skickas per e-post eller per post. Enklare uppgifter: `npalojar@abo.fi` eller

Neea Palojärvi
Matematik och Statistik
åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 åbo,

svårare: `olli.jarviniemi@gmail.com` eller

Olli Järviniemi
Lontoonkatu 9 A29
00560 Helsinki

Lagen väljs ut baserat på en helhetsbedömning, där man tar i betraktande de inlämnade uppgifterna och framgång i tävlingar och urvalsprov. Här syns resultaten av självständig övning.

Notera vår integritetsdeklaration:
`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Enklare uppgifter

1. I en mystisk räknemaskin finns en knapp $*$ som fungerar på följande vis:

- Knappen tredubblar udda tal.
- Knappen halverar jämna tal.

Om man börjar med talet fem och trycker på knappen 2020 gånger, vilket tal får man?

2. I en matematiktävling finns 90 flervalsuppgifter. För rätt svar får man fem poäng och för fel svar -1 poäng. En elev svarade på alla frågor. Bevisa att hennes poängmängd kan vara -78 poäng, men inte 116 poäng.

3. Kvadraten $PQRS$ har ritats inuti den spetsvinkliga triangeln ABC. Kvadraten $PQRS$ har sidlängden 4 cm, dess spetsar P och Q är på sidan AB, spetsen R på sidan BC och spetsen S på sidan AC. Om sidan AB har längden 8 cm, vad är triangelns $\triangle ABC$ area?

4. Lös följande ekvationssystem bland de reella talen:

$$\begin{cases} xy = z \\ yz = x \\ zx = y. \end{cases}$$

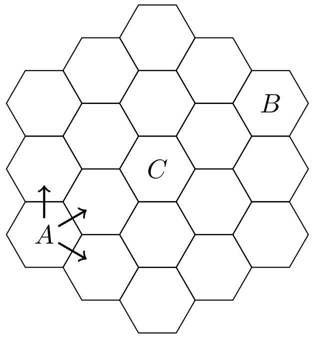
5. Hur många av mängdens $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ delmängder är inte delmängder av mängderna $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ eller $\{4, 5, 6, 7, 8\}$?

6. Utanför triangeln ABC ritas en kvadrat som har sträckan AB som en av sina sidor. Dessutom ritas en annan kvadrat som har sträckan BC som en av sina sidor. Bevisa att dessa kvadraters mittpunkter och sträckans CA mittpunkt bildar en tasasivuisen suorakulmaisen kolmion.

7. Antag att H är skärningspunkten av höjder hos triangeln ABC, punkt A' är medelpunkten hos sträckan BC, punkt X medelpunkten hos höjden till hörnet B, punkt Y medelpunkten hos höjden till hörnet C och D den punkten där höjden till hörnet A skär linjen BC. Bevisa att punkterna X, Y, D, H och A' ligger på en cirkel.

8. Antag att i triangel ABC punkt D är den punkten där höjden till hörnet A skär linjen BC och att punkten E är den punkten där höjden till hörnet B skär linjen AC. Medelpunkten till trianglens ABC omskrivna cirkel är O. Bevisa att $OC \perp DE$.

9. I sexhörnsrutsystemet bredvid skall man komma från rutan A till B utan att gå via rutan C. Man får gå endast i pilarnas riktning, en ruta åt gången. Hur många olika rutter finns det?



Svårare uppgifter

10. Två cirklar i rummet sägs tangera varandra om de har en gemensam punkt och en gemensam tangent som går genom den här punkten. Tre cirklar i rummet tangerar parvis varandra i tre olika punkter. Bevisa att cirklarna antingen befinner sig på samma plan eller på ytan av samma klot.

11. Låt P vara ett icke-konstant polynom med heltalskoefficienter. Bevisa att det finns ett n så att talet $P(n)$ har minst 2020 olika primtalsfaktorer.

12. Bestäm alla heltal m så att kongruensekvationen $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ har en lösning.

13. Låt P vara ett icke-konstant polynom med heltalskoefficienter. Bevisa att det finns ett heltal k och en oändlig följd av heltal $a_1, a_2, \ldots$, så att $P(a_i) \neq 0$ för alla i och

$$\mathrm{syt}(P(a_i), P(a_j)) \leq k$$

för alla $i \neq j$.

14. Låt P vara ett icke-konstant polynom med heltalskoefficienter. Vi säger att primtalet p är *bra*, om följande påstående gäller för alla positiva heltal k: ekvationen $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ har lika många (sinsemellan icke-kongruenta) lösningar som ekvationen $P(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$. Bevisa att av följande påstående är det exakt ett som gäller.

1. P är delbart med kvadraten av något icke-konstant polynom.
2. Alla utom ett ändligt antal primtal p är bra.

15. $2n$ lag deltog i en turnering som tog $2n - 1$ dagar. Varje par av två lag spelade mot varandra exakt en gång, och varje dag spelades exakt n spel. Det förekom inga jämna spel, utan varje spel slutade i att någotdera lag vann. Bevisa att man för varje dag kan välja ett lag som vann ett spel den dagen, så att inget lag väljs två gånger.

16. Fem cirklar i planet har den egenskapen att vilka som helst fyra av dem har en gemensam punkt. Bevisa att all fem cirklar har en gemensam punkt.

17. Bevisa att det inte är möjligt att välja fler än n sidor och diagonaler i en konvex n-gon på ett sådant sätt att varje par av valda sträckor har en gemensam punkt.