

## 6. pohjoismainen kilpailu ???.1992

1. Määritä kaikki ne yhtä suuremmat reaalityöt  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1} = 2 \left( \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2} \right).$$

2. Olkoon  $n > 1$  kokonaisluku ja olkoot  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  eri kokonaislukua. Todista, että polynomi

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n) - 1$$

*ei ole jaollinen* millään kokonaislukukertoimisella polynomilla, jonka aste on suurempi kuin nolla mutta pienempi kuin  $n$  ja jonka korkeimman  $x$ :n potenssin kerroin on 1.

3. Todista, että kaikista kolmioista, joiden sisään piirretyn ympyrän säde on 1, pienin *piiri* on tasasivuisella kolmiolla.

4. Peterillä on paljon samankokoisia neliöitä, joista osa on mustia, osa valkeita. Peter haluaa koota neliöistään ison neliön, jonka sivun pituus on  $n$  pikkuneliön sivua, siten, isossa neliössä ei ole *yhtään* sellaista pikkuneliöstä muodostuvaa suorakaidetta, jonka kaikki kärkineliöt olisivat samanvärisiä. Kuinka suuren neliön Peter pystyy tekemään?