Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, helmikuu 2020

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 3.4.2020 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna tai sähköpostitse. Helpommat tehtävät: `npalojar@abo.fi`, vaativammat: `olli.jarviniemi@gmail.com`.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Helpompia tehtäviä

Parissa seuraavista tehtävistä saattaa olla hyötyä, jos on tutustunut äärettömän laskeutumisen periaatteeseen tai niin kutsuttuun ”Lifting the exponent”-lemmaan.

1. Kuinka moni luvun 3 positiivisista, parillisista monikerroista on neliöluku ja pienempi kuin 2020?

2. Määritellään

$$P(x) = (x - 1^2)(x - 2^2) \cdots (x - 100^2).$$

Kuinka monella kokonaisluvulla n pätee $P(n) \leq 0$?

3. Etsi yhtälön $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ kaikki ei-negatiiviset kokonaislukuratkaisut.

4. Ympyrä, jonka halkaisija on AB, leikkaa vinoneliön $ABCD$ sivun BC pisteessä K. Ympyrä, jonka halkaisija on AD, leikkaa vinoneliön $ABCD$ sivun CD pisteessä L. Jos on $\angle AKL = \angle ABC$, niin osoita, että vinoneliön $ABCD$ kulmista kaksi ovat $60°$ ja kaksi $120°$.

5. Etsi kaikki alkuluvut p, joita kohti on olemassa positiiviset kokonaisluvut x, y ja n, joilla pätee

$$x^3 + y^3 = p^n.$$

6. Mille $a \in \mathbb{R}$ polynomin $x^2 - (a-2)x - a - 1$ nollakohtien neliöiden summa on pienin mahdollinen?

7. Polynomin $x^3 + px^2 + qx + r$ juuret ovat x_1, x_2, x_3, missä $p, q, r \in \mathbb{R}$ ovat kiinnitettyjä reaalilukuja. Etsi polynomi, jonka juuret ovat x_1^2, x_2^2 ja x_3^2.

8. Olkoon p positiivinen reaaliluku. Ratkaise reaalilukujen joukossa yhtälö

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x.$$

9. Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisten reaalilukujen jono. Todista, että jollakin k:n arvolla on

$$\frac{k(k+1)}{a_k} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

10. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$a^3 + b^3 + c^3 + 15abc \leq 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

11. Matemaattisessa kokouksessa on $n > 3$ matemaatikkoa kolmesta eri maasta. Kokouksen aikana m eri matemaatikkoparia keskustelee, missä $6m < n^2 - 3n$. Todista, että kokouksessa on samasta maasta saapuneiden matemaatikkojen pari, joka ei keskustele.

12. Olkoot AA_1 ja CC_1 teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanoja. Sivulta AC valitaan sellainen piste K, että janan A_1K keskipiste on korkeusjanalla CC_1 ja janan C_1K keskipiste on korkeusjanalla AA_1. Todista, että $\angle ABC \geq 60°$.

13. Kuinka monta hilapistettä (pistettä, joiden koordinaatit ovat kokonaislukuja) on origokeskisen pallon pinnalla, kun pallon säde on 30?

Vaativampia tehtäviä

14. Olkoon $ABCDEF$ kuusikulmio, jonka kärkipisteet ovat ympyrän kehällä ja jolle $AB = BC$, $CD = DE$ ja $EF = AF$. Osoita, että janat AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä.

15. Olkoon O teräväkulmaisen kolmion ABC ympärysympyrän keskipiste. Olkoot D, E ja F kärjistä A, B ja C piirrettyjen korkeusjanojen kantapisteet ja olkoon M janan BC keskipiste. X on janojen AD ja EF leikkauspiste, AO leikkaa janaa BC pisteessä Y ja Z on janan XY keskipiste. Osoita, että A, Z ja M ovat samalla suoralla.

16. Olkoon I kolmion ABC sisäympyrän keskipiste. Olkoon K se piste kolmion ABC ympärysympyrällä, jolla $\angle AKI = 90°$. Olkoon D kolmion ABC sisäympyrän sivuamispiste janan BC kanssa ja olkoon M suoran AI leikkauspiste kolmion ABC ympärysympyrän kanssa. Osoita, että K, D ja M ovat samalla suoralla.

17. Olkoon $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2020})$ positiivisten kokonaislukujen jono. Olkoon m niiden kolmialkioisten osajonojen (a_i, a_j, a_k) lukumäärä, joille $1 \leq i < j < k \leq 2020$, $a_j = a_i + 1$ ja $a_k = a_j + 1$. Mikä on suurin mahdollinen m:n arvo, kun A voi olla mikä tahansa oletukset täyttävä jono?

18. Kutsutaan *k-klikiksi* sellaista k:n henkilön joukkoa, jossa jokainen kahden henkilön pari tuntee toisensa. Eräiden juhlien osanottajista (joita on enemmän kuin kaksi) jokainen kahden 3-klikin pari sisältää ainakin yhden yhteisen henkilön, eikä 5-klikkejä ole. Todista, että juhlissa on sellaiset kaksi henkilöä, että heidän poistuttuaan ei ole jäljellä yhtään 3-klikkiä.

19. Kolmen ei-negatiivisen kokonaisluvun $x < y < z$ sanotaan muodostavan *historiallisen joukon*, jos $\{ z-y, y-x \} = \{ 1917, 2020 \}$. Osoita, että kaikkien ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko voidaan esittää pareittain erillisten historiallisten joukkojen yhdisteenä.

20. Etsi kaikki sellaiset äärelliset lukujonot $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, että kaikilla j, $0 \leq j \leq n$, luku x_j on luvun j esiintymien lukumäärä jonossa.

21. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Nollien ja ykkösten jono on *tasapainoinen*, jos siinä on n nollaa ja n ykköstä. Kaksi tasapainoista jonoa a ja b ovat *naapureita*, jos b saadaan a:sta siirtämällä yksi jonon alkio eri paikkaan. Esimerkiksi jos $n = 4$, jonot 01101001 ja 00110101 ovat naapureita, koska jälkimmäinen saadaan edellisestä siirtämällä yksi nolla jonon alkuun. Todista, että on olemassa sellainen tasapainoisten jonojen joukko S, että S:ssä on enintään $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ jonoa ja jokainen tasapainoinen jono joko kuuluu S:ään tai sillä on S:ään kuuluva naapuri.