Harjoitustehtävät, syyskuu 2011. Haastavammat

Tehtävät 1–6 ovat muuten vain mukavia algebran tehtäviä, tehtävät 7–13 erään matematiikkaolympialaisissa yleensä aika hyvin menestyvän maan kaksipäiväisten kansallisten olympialaisten tehtävät jonkin vuoden takaa. Ratkaise tehtävistä niin monta kuin kykenet/ehdit (mutta muista, että sitä, osaako ratkaista tehtävän, ei huomaa yhdellä tai kahdella silmäyksellä). Tuo ratkaisusi mukanasi viikon 42 lopun valmennustapahtumaan tai postita ne viimeistään samoihin aikoihin osoitteella **Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu**. Jos osaat käyttää jotain ohjelmistoa, jolla voi tuottaa matemaattista tekstiä ja kuvia, voit lähettää ratkaisusi myös sähköpostilla osoitteeseen **matti.lehtinen@helsinki.fi**.

1. Osoita, että polynomia $P(x, y) = x^{2011}y^{2011} + 1$ ei voi kirjoittaa muotoon $Q(x)R(y)$, missä Q ja R ovat yhden muuttujan polynomeja.

2. Toisen asteen polynomi $P(x) = ax^2 + bc + c$ on sellainen, että yhtälöllä $P(x) = x$ ei ole reaalilukuratkaisuja. Osoita, ettei myöskään yhtälöllä $P(P(x)) = x$ ole reaalilukuratkaisuja.

3. Olkoot a ja b polynomin $x^2 - 6x + 1$ nollakohdat. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla n luku $a^n + b^n$ on viidellä jaoton kokonaisluku.

4. Polynomi P toteuttaa ehdon $xP(x - 1) = (x - 13)P(x)$ kaikilla x. Määritä P.

5. Luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat keskenään eri suuria kokonaislukuja. Osoita, että polynomia

$$(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$$

ei voi kirjoittaa kahden ei-vakion kokonaislukukertoimisen polynomin tuloksi.

6. Määritä ne alkulukukolmikot (a, b, c), joille pätee $a(b - c) = b + c$.

7. Määritä funktiot $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x) + \frac{1}{2x} f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = 1$$

kaikilla $x \neq 0, 1$.

8. Kolmiossa ABC on $\angle BCA = 2 \cdot \angle ABC$. Kolmion sisällä on piste D, jolle pätee $BD = DC$ ja $AD = AC$. Osoita, että $\angle BAC = 3 \cdot \angle BAD$.

9. Olkoon

$$P(x) = x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

missä kaikki kertoimet a_k ovat kokonaislukuja. Olkoon $Q(x) = P(x)^2 - 25$. Osoita, että polynomilla Q on korkeintaan 2011 eri kokonaislukunollakohtaa.

10. Pyöräilykilpailu televisioitiin. Jo lähdössä Vikman polkaisi kärkeen, ja häntä seurasivat heti Viklund ja Vikberg. Nämä kolme olivat koko matkan muiden kilpailijoiden edellä. Heidän keskinäinen järjestyksensä vaihteli, mutta he eivät missään vaiheessa olleet kaikki kolme rinta rinnan. Juuri loppukirin aikaan ukkonen katkaisi televisiolähetyksen, ja kun yhteys palasi, kilpailu oli ohi. Turhautuneet katsojat saivat tietää vain, että johtopaikka vaihtoi omistajaa 19 kertaa ja kolmas sija 17 kertaa sekä sen, että Viklund jäi kolmanneksi. Kuka voitti ja miksi?

11. AD on kolmion ABC keskijana. Piste E on puolisuoralla AD niin, että $CE \perp AD$. Lisäksi $\angle ACE = \angle ABC$. Todista, että $AB = AC$ tai $\angle BAC$ on suora.

12. Lukujono (a_n) määritellään ehdoilla $a_1 = 0$ ja kaikilla $i \geq 1$ a_{i+1} on joko $a_1 + 1$ tai $-a_i - 1$. (Eräs tällainen jono voisi alkaa 0, 1, 2, 3, -4, -3, 2, -3, $\ldots$) Osoita, että jonon n:n ensimmäisen termin aritmeettinen keskiarvo on vähintään $-\frac{1}{2}$, kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

13. Tarkastellaan mitä hyvänsä n-kirjaimista ($n \geq 1$) merkkijonoa, jossa on esiintyy enintään 10 eri merkkiä (kuten MATEMATIIKKAKULTAMITALI!!???). Todista, että jonon kukin merkki voidaan korvata yhdellä numerolla niin, että eri merkkejä vastaavat eri numerot, ensimmäinen numero ei ole 0 ja syntyvä n-numeroinen luku on jaollinen yhdeksällä.