Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, huhtikuu 2018
Ratkaisuehdotuksia

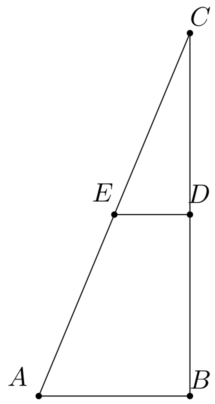
1. Olkoon ABC kolmio, missä $\angle ABC = 90°$, $AC = 26$ ja $BC = 24$. Olkoon piste D sivulla BC pisteiden B ja C välissä. Lisäksi olkoon E sellainen piste, jolle $\angle CDE = 90°$, $\angle ECD = \angle BCA$ ja $CE = 13$. Laske AE.

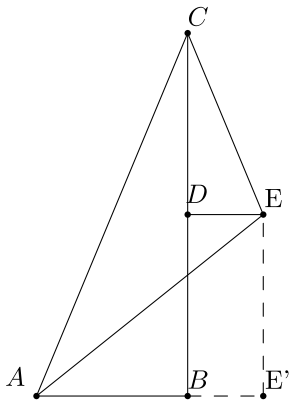
Ratkaisu. Koska kolmioilla ABC ja EDC on kaksi yhtäsuurta kulmaa, niin ne ovat yhdenmuotoiset. Vastinsivuina saadaan

$$\frac{CD}{24} = \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{2}$$

eli $CD = 12$. Pythagoraan lauseen nojalla $DE = 5$ ja $AB = 10$. Edelleen pisteen D sijainnin takia $BD = BC - CD = 12$. Koska piste D on sivulla BC pisteiden B ja C välissä sekä $\angle ECD = \angle BCA$, niin E on joko sivulla AC tai kolmion ABC ulkopuolella (ks. kuva). Jos E on sivulla AC, niin

$$AE = AC - CE = 26 - 13 = 13.$$





Oletetaan nyt, että piste E on kolmion ABC ulkopuolella. Olkoon E' pisteen E projektio suoralle AB. Jana AE on kolmion $AE'E$ hypotenuusa, joten sen pituus saadaan laskettua tarkastelemalla kolmioa $AE'E$. Koska $\angle CDE = 90°$, niin $EE' = BD = 12$. Edelleen,

$$AE' = AB + BE' = AB + DE = 10 + 5 = 15.$$

Täten

$$AE = \sqrt{AE'^2 + EE'^2} = \sqrt{15^2 + 12^2} = 3\sqrt{41}.$$

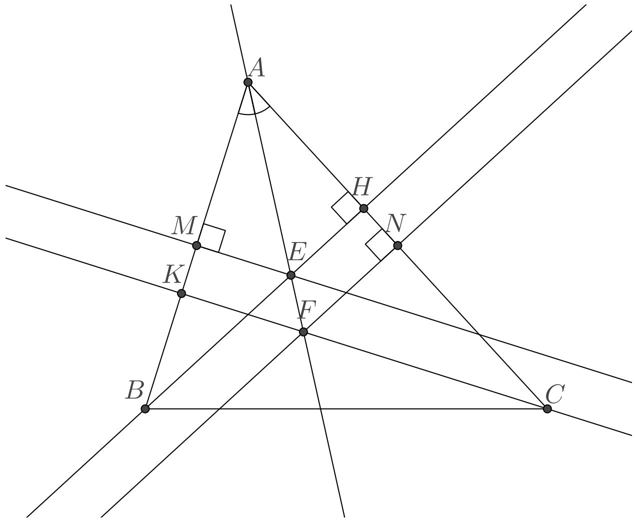
Siis $AE = 13$ tai $AE = 3\sqrt{41}$ riippuen pisteen E sijainnista.

2. Kolmiossa ABC kulman $\angle A$ puolittaja, janan AB keskinormaali ja kärjestä B piirretty korkeusjana leikkaavat pisteessä E. Osoita, että kulman $\angle A$ puolittaja, janan AC keskinormaali ja kärjestä C piirretty korkeusjana leikkaavat samassa pisteessä.

Ratkaisu. Olkoot M ja N sivujen AB ja AC keskipisteet vastaavasti sekä suoran BE leikkauspiste suoran AC kanssa H. Merkitään kulman A puolittajan ja janan AC keskinormaalin leikkauspistettä kirjaimella F. Olkoon suorien CF ja AB leikkauspiste K. Tavoitteena on osoittaa, että CK on kohtisuorassa janaa AB vastaan, jolloin väite on todistettu. Koska $\angle HAE = \angle EAM$ ja $\angle EHA = 90° = \angle AME$, niin $\triangle AEH \sim \triangle AEM$. Edelleen, koska $BM = MA$ ja $\angle EMB = 90° = AME$, niin $\triangle AEM \sim \triangle BEM$. Siis $\angle BEM = \angle MEA = \angle AEH$. Koska $\angle BEM + \angle MEA + \angle AEH = 180°$, niin $\angle BEM = 60°$. Täten $\angle MAE = \angle EAH = 30°$. Koska $\angle CNF = 90° = FNA$ ja $CN = NA$, niin $\triangle AFN \sim \triangle CFN$. Näin ollen $\angle FCN = \angle NAF = 30°$. Siis

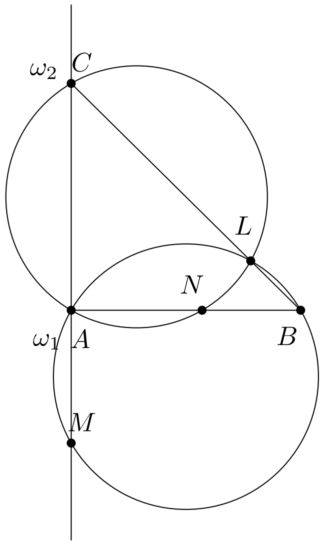
$$\angle CKA = 180° - \angle CAK - \angle KCA = 90°$$

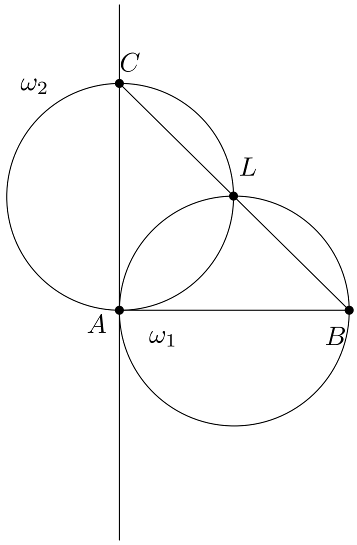
eli CK on kärkeä C vastaava korkeusjana.



3. Olkoon kolmiossa ABC kulma $\angle CAB$ suora. Lisäksi olkoon piste L sivulla BC pisteiden B ja C välissä. Merkitään pisteiden A, B ja L sekä A, C ja L kautta kulkevia ympyröitä merkinnöillä ω_1 ja ω_2 vastaavasti. Ympyrät ω_1 ja ω_2 leikkaavat suorat AC ja AB pisteissä M ja N vastaavasti. Osoita, että L, M ja N ovat samalla suoralla.

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että AB ei ole ympyrän ω_2 tangentti eli $A \neq N$. Koska $ACLN$ on jännenelikulmio ja $\angle CAN = 90°$, niin NC on pisteiden A, C, L ja N kautta kulkevan ympyrän halkaisija ja $\angle NLC = 90°$. Vastaavasti saadaan, että $\angle BLM = 90°$. Täten $\angle MLC = 180° - \angle BLM = 90°$. Siis $\angle NLC = \angle MLC$ eli L, M ja N ovat samalla suoralla.



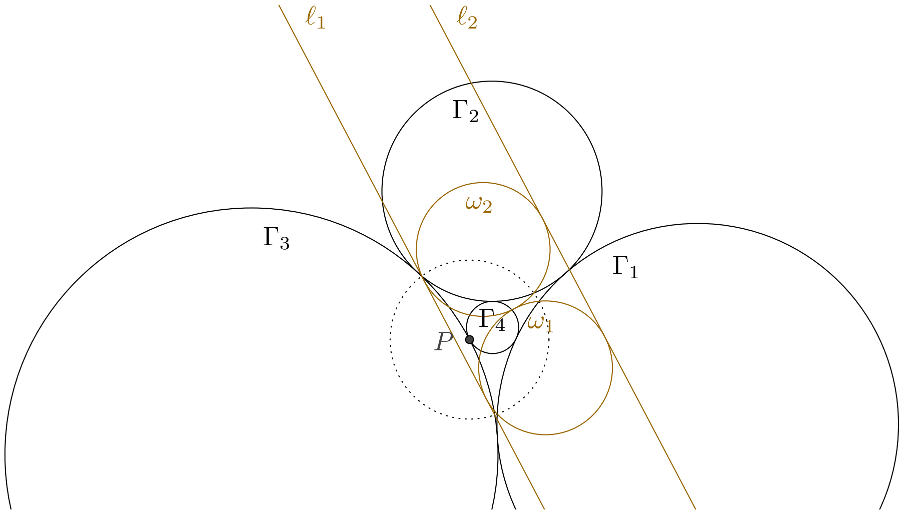


Tarkastellaan vielä tapausta, missä AB on ympyrän ω_2 tangentti (eli $A = N$) ja todistetaan väite osoittamalla, että $M = N$. Koska AC on kohtisuorassa sivua AB vasten, niin AC on ympyrän ω_2 halkaisija ja $\angle ALC = 90°$. Edelleen $\angle BLA = 90°$ ja täten AB on ympyrän ω_1 halkaisija. Näin ollen AC on ympyrän ω_1 tangentti ja $M = A$. Koska kaksi pistettä ovat aina samalla suoralla, niin pisteet $M = N = A$ ja L ovat samalla suoralla.

4. Erisäteiset ympyrät Γ_1, Γ_2, Γ_3 ja Γ_4 sivuavat toisiaan pareittain ulkoisesti. Todista, että on olemassa ympyrä ω, joka sivuaa ympyröitä Γ_1 ja Γ_2 ja leikkaa ympyröitä Γ_3 ja Γ_4 kohtisuorasti.

Ratkaisu. Tehdään inversio ympyröiden Γ_3 ja Γ_4 sivuamispisteen P suhteen (mielivaltaisella säteellä). Inversiossa Γ_3 ja Γ_4 kuvautuvat yhdensuuntaisiksi suoriksi ℓ_1 ja ℓ_2 ja ympyrät Γ_1 ja Γ_2 ympyröiksi ω_1 ja ω_2 (katso kuva). Nimittäin Γ_1 ja Γ_2 eivät voi kulkea pisteen P kautta, sillä ympyrät Γ_1, Γ_2, Γ_3 ja Γ_4 sivuavat toisiaan ulkoisesti. Koska ympyrät ω_1 ja ω_2 sivuavat suoria ℓ_1 ja ℓ_2, ne ovat suorien välissä ja samansäteisiä. Ne sivuavat myös toisiaan; olkoon niiden yhteinen tangentti tämän sivuamispisteen kautta suora ℓ. Koska ympyröiden ω_1 ja ω_2 keskipisteiden kautta kulkeva suora on yhdensuuntainen suorien ℓ_1 ja ℓ_2 kanssa, suora ℓ leikkaa suorat ℓ_1 ja ℓ_2 kohtisuorasti.

Kun tehdään uudestaan inversio pisteen P kautta, suora ℓ kuvautuu ympyräksi ω, jolla on mainitut ehdot. Todistetaan ensin, että käyrä on ympyrä (eikä suora). Tätä varten riittää osoittaa, että suora ei kulje pisteen P kautta. Mutta tällöinhän ympyrät ω_1 ja ω_2 olisivat yhtä kaukana pisteestä P, joten myös niiden inversiokuvilla, ympyröillä Ω_1 ja Ω_2, olisi sama säde, vastoin oletusta. Nyt kuvaympyrä ω sivuaa edelleen ympyröiden ω_1 ja ω_2 kuvia, ympyröitä Γ_1 ja Γ_2. Lisäksi se leikkaa kohtisuorasti suorien ℓ_1 ja ℓ_2 kuvat, ympyrät Γ_3 ja Γ_4. Olemme siis valmiit.



5. Kuusitahokkaan eli heksaedrin kahdeksasta kärjestä seitsemän on samalla pallolla. Todista, että myös kahdeksas kärki on tällä pallolla.

Ratkaisu. Olkoon Q heksaedrin kärki, jota ei oletettu samalla ympyrälle ja olkoon P vastakkainen kärki. Olkoot heksaedrin muut kärjet A, B, C ja D, E, F siten, että AP, BP ja CP ovat heksaedrin särmiä ja parit (A, D) ja (B, E) ja (C, F) ovat muut heksaedrin vastakkaiset kärkiparit.

Tehdään inversio (mielivaltaisella säteellä) pisteen P kautta. Oletuksen nojalla tässä inversiossa pisteet A, B, C, D, E ja F kuvautuvat samalle tasolle $\mathcal{T}$ pisteiksi A', B', C', D', E', F'. Olemme valmiit, jos pystymme osoittamaan, että myös pisteen Q kuvapiste on tällä tasolla. Koska pisteet P, A, B, F ovat samalla tasolla ja nelikulmio $PAFB$ on konveksi, F' on janalla $A'B'$. Vastaavasti pisteet D' ja E' ovat janoilla $B'C'$ ja $C'A'$. Piste Q on tasojen AEF, BFD ja CFE leikkaspiste, joten Q' on pistenelikoiden (P, A', E', F'), (P, B', F', D') ja (P, C', F', E') kautta kulkevien pallojen leikkauspiste. Olkoot ω_A, ω_B ja ω_C edellämainittujen pallojen leikkausympyrät tason $\mathcal{T}$ kanssa. Rittää osoitaa, että ω_A, ω_B ja ω_C leikkaavat samassa pisteessä, sillä tämä leikkauspiste on Q'.

Mutta nyt olemme palauttaneet ongelman klassiseen tasogeometrian ongelmaan:

Lemma. Olkoon XYZ kolmio ja X', Y', Z' sivujen YZ, ZX ja XY pisteitä. Nyt kolmioiden $XY'Z'$, $YZ'X'$ ja $ZX'Y'$ ympäripiirretyt ympyrät ω_X, ω_Y ja ω_Z kulkevat saman pisteen kautta.

Todistus. Olkoon W ympyröiden ω_X ja ω_Y leikkauspiste. Koska X, Y', Z' ja W ovat samalla ympyrällä, $\angle Y'WZ' = 180° - \angle Z'XY' = 180° - \angle YXZ$. Samoin $\angle Z'WX' = 180° - \angle ZYX$. Siis $\angle X'WY' = 360° - \angle Y'WZ' - \angle Z'WX' = \angle YXZ + \angle ZYX = 180° - \angle XZY = 180° - \angle Y'ZX'$, joten piste W on myös ympyrällä ω_Z.

6. ABC on kolmio ja I sen sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Suora BI leikkaa sivun AC pisteessä D ja suora CI sivun AB pisteessä E. Suora AI leikkaa suoran DE pisteessä P. Oletetaan, että $PD = PI$. Laske kulma ACB.

Ratkaisu. Merkitään tavanomaiseen tapaan kolmion sivuja kirjaimilla a, b ja c ja kulmia kirjaimilla α, β ja γ. Kolmion PID tasakylkisyyden nojalla $\angle AID = \angle EDI$. Helposti nähdään, että $\angle AID = \angle ABI + \angle BAI = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, joten $\angle EDI = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Edelleen

$$\angle IED = 180° - \angle EDI - \angle DIE = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} - \left(180° - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

ja

$$\begin{aligned}\angle DEA = 180° - \angle EAD - \angle ADE &= 180° - \alpha - (180° - \angle EDI - \angle BDC) \\ &= -\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2} + (180° - \gamma - \beta/2) = 180° - \gamma - \alpha/2.\end{aligned}$$

Sovelletaan sinilausetta kolmioihin AED ja CED:

$$\frac{ED}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\gamma + \alpha/2)} \qquad \text{ja} \qquad \frac{ED}{DC} = \frac{\sin(\gamma/2)}{\sin \frac{\gamma - \alpha}{2}}.$$

Kulmanpuolittajalauseen nojalla $DC/AD = a/c$, joten

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin(\gamma/2)\sin(\gamma+\alpha/2)}.$$

Siis

$$\sin(\gamma/2)\sin(\gamma+\alpha/2) = \sin\gamma\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} = 2\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

mistä saadaan jakamalla $\sin(\gamma/2)$:lla

$$\sin(\gamma+\alpha/2) = 2\cos(\gamma/2)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} = \sin(\gamma-\alpha/2) - \sin(\alpha/2)$$

missä jälkimmäinen yhtäsuuruus saadaan sinin summa- ja erotuskaavojen avulla: $\sin(\phi+\psi) = \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$ ja $\sin(\phi-\psi) = \sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi$, joten $\sin(\phi+\psi) - \sin(\phi-\psi) = 2\cos\phi\sin\psi$. Täten

$$\sin(\alpha/2) = \sin(\gamma-\alpha/2) - \sin(\gamma+\alpha/2) = -2\cos\gamma\sin(\alpha/2),$$

joten $\cos\gamma = -1/2$ eli $\gamma = 120°$.

7. Olkoon c positiivinen kokonaisluku. Tason hilapisteet (parit (n,m), $n,m \in \mathbb{Z}$) väritetään c:llä värillä. Todista, että kaikilla $k \geq 1$ löytyy luvut $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ ja $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ siten, että pisteet (a_i, b_j) ovat samanvärisiä kaikilla $1 \leq i, j \leq k$.

Ratkaisu. Kiinnitetään $k \geq 1$ ja olkoon $N := c(k-1)+1$. Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla kaikilla $i \geq 1$ löytyy jokin väri c_i, jolle hilapisteistä $(i,1), (i,2), \ldots, (i,N)$ vähintään k on väritetty värillä c_i. Olkoon sitten $M = c^N(k-1)+1$. Koska jonoja $((i,1),(i,2),\ldots,(i,N))$ voi värittää vain c^N tavalla, kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla löytyy luvut $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ siten, että pisteiden (a_i, j) ja $(a_{i'}, j)$ värit ovat samat kaikilla $1 \leq i, j \leq k$ ja $1 \leq j \leq N$. Mutta nyt aiemman huomion nojalla löytyy $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$, joille pisteiden (a_i, b_j) ja $(a_i, b_{j'})$ värit ovat samat kaikilla $1 \leq i, j, j' \leq k$, joten kaikki pisteet (a_i, b_j) ovat samanvärisiä kunhan $1 \leq i, j \leq k$. Olemme valmiit.

8. Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ äärellinen jono positiivisia kokonaislukuja. Todista, että jollain $n \geq k$ jonoa voidaan jatkaa erisuurilla luvuilla $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ siten, että

$$a_i \mid (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

kaikilla $1 \leq i \leq n$.

Ratkaisu. Olkoon $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Kirjoitetaan osamäärät $\frac{p_i}{q_i} = \frac{S}{a_i}$, missä parit p_i, q_i ovat yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Jos $q_i = 1$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, olemme valmiit; jonoa ei tarvitse jatkaa yhtään.

Olkoon q suurin lukujen $q_1, q_2, \ldots, q_k$ alkutekijä ja $\alpha > 0$ tämän alkutekijän suurin eksponentti. Todistetaan väite induktiolla ensisijaisesti q:n suhteen ja toissijaisesti luvun α suhteen. Toisin sanoen todistetaan seuraava ehto: väite pätee kun lukujen $q_1, q_2, \ldots, q_k$ suurin alkutekijä on q ja q:n suurin eksponentti on α, kunhan se pätee aina kun suurin alkutekijä on q ja q:n suurin eksponentti on pienempi kuin α, tai kun suurin alkutekijä on pienempi kuin q. Jatketaan jonoa luvulla $(q-1)S$. Uuden lukujonon lukujen summa on qS. Koska

$$\frac{S}{a_i} = \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_i}{q_i' q^{\alpha_i}},$$

joillain $\alpha_i \leq \alpha$ ja luvuilla q_i', joiden kaikki alkutekijät ovat pienempiä kuin q, on

$$\frac{qS}{a_i} = \frac{p_i}{q_i' q^{\alpha_i - 1}}.$$

Siis kaikissa uuden jono alkupään osamäärissä esiintyy nimittäjässä alkulukuja korkeintaa q, ja q korkeintaan $\alpha - 1$ kertaa. Lisäksi

$$\frac{qS}{(q-1)S} = \frac{q}{q-1},$$

joten sama pätee jonon viimeiselle luvulle. Siis uusi jono toteuttaa induktio-oletuksemme ehdot, ja olemme valmiit.

9. Olkoot a_1 ja a_2 positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon kaikilla $n \geq 2$ luku a_{n+1} yhtä suurempi kuin summan $a_n + a_{n-1}$ suurin pariton tekijä. Osoita, että jono $a_1, a_2, \ldots$ on jostain alkiostaan lähtien jaksollinen. Missä tapauksissa jono on jaksollinen jo ensimmäisestä alkiostaan lähtien?

Ratkaisu. Merkitään a^*:llä luvun a suurinta paritonta tekijää. Jonon määräävä sääntö on siis

$$a_{n+1} = 1 + (a_n + a_{n-1})^*. \tag{1}$$

Jaksollisuuden osoittamiseksi on todistettava, että joillakin m, n pätee $m > n$, $a_m = a_n$ ja $a_{m+1} = a_{n+1}$. Todistamme neljä apulausetta, jotka pätevät jokaiselle jonolle, joka noudattaa sääntöä (1).

L1. Luku a_n on parillinen, kun $n \geq 3$. Tämä seuraa heti säännöstä (1).

L2. Epäyhtälö $a_n \leq \max(a_{n-1}, a_{n-2})$ pätee, kun $n \geq 5$.

Todistus. Koska a_{n-1} ja a_{n-2} ovat L1:n nojalla parillisia,

$$a_n = 1 + (a_{n-1} + a_{n-2})^* \leq 1 + \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \leq 1 + \max(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Saatu yläraja on pariton ja a_n on parillinen, joten pätee myös $a_n \leq \max(a_{n-1} + a_{n-2})$.

L2:sta seuraa, että jonossa on suurin alkio, joten se on jaksollinen.

L3. On olemassa sellainen luku n_0, että jokaiselle $n \geq n_0$

$$\max(a_{n-1}, a_{n-2}) = \max(a_n, a_{n-1}).$$

Todistus. Kun $n \geq 4$, olkoon $b_n = \max(a_n, a_{n-1})$. L2:n nojalla $a_n \leq b_{n-1}$ kaikilla $n \geq 5$, ja koska $a_{n-1} \leq b_{n-1}$, $b_n \leq b_{n-1}$. Luonnollisten lukujen jono $b_4, b_5, \ldots$ on siis vähenevä, joten se on jostain alkiostaan lähtien vakio.

L4. Kun $n \geq n_0$, seuraava väite pätee: jos $a_n > a_{n+1}$, niin $a_n - a_{n+1} = 2$.

Todistus. Jos $a_n > a_{n+1}$, niin L1:n perusteella $a_n \geq a_{n+1} + 2$. L3:n nojalla $a_n = a_{n+2}$, joten säännöstä (1) seuraa $a_n = 1 + (a_n + a_{n+1})^*$. Siis $a_n - 1$ jakaa luvun $a_n + a_{n+1}$, joten $a_n + a_{n+1} \geq 2(a_n - 1)$. Siis $a_n \leq a_{n+1} + 2$.

Jokaiselle jonolle pätee nyt jompikumpi seuraavista, missä edelleen n_0 on L3:n luku:

(i) $a_n \leq a_{n+1}$ kaikilla $n \geq n_0$,

(ii) jollain $n \geq n_0$ pätee $a_n > a_{n+1}$.

Tapauksessa (i) L3:sta seuraa induktiolla, että $a_n = a_{n_0}$ kaikilla $n \geq n_0$. Olkoon $c = a_{n_0}$. Mahdolliset c:n arvot saadaan yhtälöstä $c = 1 + (2c)^*$. Koska $(2c)^* = c^*$, saadaan $c^* = c - 1$, joten $c = 2$. Siis jono on muotoa

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, 2, 2, 2, \ldots . \tag{2}$$

Tapauksessa (ii) epäyhtälöstä $a_n > a_{n+1}$ seuraa L4:n nojalla, että $a_n = 2d$ ja $a_{n+1} = 2d - 2$ jollain $d > 1$. Säännön (1) avulla saadaan

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= 1 + (2d + 2d - 2)^* = 1 + (2d - 1) = 2d, \\
a_{n+3} &= 1 + (2d - 2 + 2d)^* = 2d, \\
a_{n+4} &= 1 + (2d + 2d)^* = 1 + d^*.
\end{aligned}$$

Koska $2d > 1 + d \geq 1 + d^*$ kaikilla $d > 1$, tästä seuraa $a_{n+3} > a_{n+4}$. Jälleen L4:n perusteella $a_{n+3} - a_{n+4} = 2$ eli $2d - (1 + d^*) = 2$, joten $2d - 3 = d^* \leq d$ ja siis $d \leq 3$. Jos $d = 2$, jono on muotoa

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 4, 2, 4, 4, 2, 4, \ldots, \tag{3}$$

ja jos $d = 3$, muotoa

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 6, 4, 6, 6, 4, 6, \ldots . \tag{4}$$

On todistettu, että jokainen jono on muotoa (2), (3) tai (4). Siis heti ensimmäisestä alkiostaan jaksolliset jonot ovat täsmälleen ne, jotka alkavat jollain pareista $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$ ja $(6, 6)$.

10. Etsi kaikki polynomit $P(x)$, joiden kertoimet ja nollakohdat ovat reaalilukuja ja jotka toteuttavat yhtälön

$$P(x^2-1) = P(x)P(-x). \tag{5}$$

Ratkaisu. Jos a on polynomin P juuri, yhtälön (5) nojalla myös a^2-1 on juuri. Siis jokainen jonon

$$a,\ a^2-1,\ (a^2-1)^2-1,\ \ldots \tag{6}$$

alkio on P:n juuri, mikä on mahdollista vain, jos jonossa on äärellinen määrä alkioita. Yksinkertaisimmassa tapauksessa $a^2-1=a$, mistä saadaan ratkaisut $a=\phi=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ja $a=\psi=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Silloin $P(x)$ on jaollinen $(x-\phi)$:llä tai $(x-\psi)$:llä.

Seuraava tutkittava tapaus on

$$\begin{aligned}(a^2-1)^2-1&=a\\ a^4-2a^2-a&=0\\ a(a+1)(a^2-a-1)&=0\\ a(a+1)(a-\phi)(a-\psi)&=0.\end{aligned}$$

Saadaan uudet ratkaisut $a=0$ ja $a=-1$. Jos $P(0)=0$, niin $P(-1)=P(0^2-1)=P(0)P(-0)=0$ ja jos $P(-1)=0$, niin $P(0)=P((-1)^2-1)=P(-1)P(1)=0$. Jos siis joko $P(0)=0$ tai $P(-1)=0$, niin $x(x+1)\mid P(x)$. Osoitetaan, että tässä ovat olennaisesti kaikki ratkaisut.

Väite. Yhtälön (5) kaikki ratkaisut ovat vakio 0 ja kaikki polynomit $P_{j,k,l}$,

$$P_{j,k,l}(x)=(x^2+x)^j(x-\phi)^k(x-\psi)^l,$$

missä $j,k,l\in\mathbb{N}$.

Todistus. On helppo tarkistaa, että kaikki väitetyt ratkaisut ovat ratkaisuja. Olkoon siis P polynomi, joka toteuttaa yhtälön (5), ei kuitenkaan vakio 0. Jos $P(x)=Q(x)R(x)$ kaikilla x, ja sekä P että Q toteuttavat yhtälön (5), selvästi myös R toteuttaa sen. Siksi voidaan olettaa, ettei P ole jaollinen millään polynomilla $P_{j,k,l}$ (paitsi $P_{0,0,0}$:lla). Nähdään, kuten edellä, että jos jompikumpi luvuista 0 ja -1 on P:n nollakohta, toinenkin on, jolloin $P_{1,0,0}$ jakaa P:n. Samoin ϕ ja ψ eivät voi olla P:n nollakohtia.

Jos P ei ole vakio, sillä on nollakohtia; olkoon a_0 sen pienin nollakohta. Jos $a_0>\phi$, $a_0^2-a_0-1>0$ eli $a_0^2-1>a_0$, jolloin jono (6) on aidosti kasvava, mikä on mahdotonta. Jos taas $\psi<a_0<\phi$, niin $a_0^2-a_0-1<0$ eli $a_0^2-1<a_0$, mikä on ristiriidassa a_0:n minimaalisuuden kanssa. Siis $a_0<\psi$. Koska $(x-a_0)\mid P(x)$, $(x^2-1-a_0)\mid P(x^2-1)=P(x)P(-x)$. Koska P:n juuret ovat reaalisia, $P(x)P(-x)$ ja siis myös x^2-1-a_0 jakautuu ensimmäisen asteen tekijöihin, joten $a_0+1\geq 0$. Siis $-1<a_0<\psi$. Jonon (6) kolmas alkio on

$$(a_0^2-1)^2-1=a_0+a_0(a_0-1)(a_0-\phi)(a_0-\psi).$$

Tulon tekijöistä kolme on negatiivisia, joten alkio on pienempi kuin a_0, mikä on jälleen ristiriita a_0:n valinnan kanssa. Siis P on vakiopolynomi, ja yhtälöstä (5) nähdään, että P on joko 0 tai $1=P_{0,0,0}$.

11. Olkoon $0<a<1/4$. Etsi yhtälön

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$$

reaalijuuret.

Ratkaisu. Kirjoitetaan $x^2+2ax+\dfrac{1}{16}=y$ ja $-a+\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}=y_1$. Tällöin $x=y_1^2+2ay_1+\dfrac{1}{16}$, mikä on samaa muotoa kuin y:n riippuvuus x:stä. Jos piirretään y:n ja y_1:n kuvaajat x:n funktioina, käyrät ovat symmetriset suoran $y=x$ suhteen. Täten yhtälön $y=y_1$ ratkaisemiseksi riittää ratkaista yhtälö $y=x$. Tämä on helppo toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat

$$x=\frac{1-2a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1}{16}}.$$

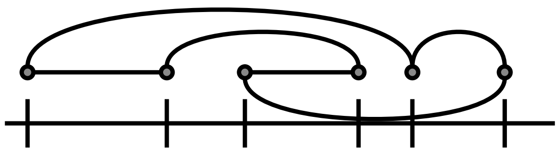
Kun $0<a<1/4$, ratkaisut ovat reaaliset ja toteuttavat alkuperäisen yhtälön.

12. Olkoot $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ reaalilukuja. Järjestä ne jonoksi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ siten, että summa

$$(b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n)^2 + (b_n - b_1)^2$$

on mahdollisimman pieni.

Ratkaisu. Piirretään lukusuoralle lukuja $a_1, \ldots, a_n$ vastaavat pisteet $A_1, \ldots, A_n$. Merkitään d_{k-1}:llä janaa $A_{k-1}A_k$. Tehtävän summa on janojen $B_1B_2, \ldots, B_{n-1}B_n$ pituuksien neliöiden summa, kun merkitään B_k:lla lukua b_k vastaavaa pistettä. Kutsutaan näitä janoja selvyyden vuoksi *kaariksi.* Seuraavassa esimerkkikuvassa kaaret on piirretty kaareviksi, jotta ne erottuvat toisistaan:



Kaaret muodostavat suljetun käyrän, joka peittää koko janan A_1A_n. Siten jokainen janoista d_k tulee peitettyä ainakin kahdesti. Kun summa kirjoitetaan janojen d_k pituuksien avulla, se sisältää ainakin termit $2d_1^2, \ldots, 2d_{n-1}^2$. Tarkastellaan janoja d_{k-1} ja d_k: on selvästi mahdotonta, että kaikilla d_k:n peittävillä kaarilla on päätepisteenä A_k (muuten a_k olisi pienin luvuista, mutta $a_{k-1} < a_k$), joten täytyy olla kaari, joka peittää sekä d_{k-1}:n että d_k:n. Mutta silloin tehtävän summa sisältää myös termin $2d_{k-1}d_k$. Summa on siis vähintään

$$2(d_1^2 + \cdots + d_{n-1}^2) + 2(d_1d_2 + \ldots d_{n-2}d_{n-1}).$$

Järjestys voidaan myös valita niin, että tämä alaraja saavutetaan: jos n on parillinen, sopiva järjestys on

$$a_1, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, \ldots, a_5, a_3,$$

ja jos pariton, sopiva järjestys on

$$a_1, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \ldots, a_5, a_3.$$