Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, joulukuu 2017

Ratkaisuja toivotaan loppiaiseen mennessä postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku

tai sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi`.

Jaottelu helpompiin ja vaikeampiin tehtäviin vastaa joulukuun valmennusviikonlopun aiheita ala- ja yläkerrassa.

Helpompia tehtäviä

1. Etsi kaikki reaaliluvut a, joille epäyhtälö

$$3x^2 + y^2 \geq -ax(x + y)$$

on voimassa kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

2. Olkoot a, b ja c jonkin kolmion sivujen pituudet. Osoita, että myös $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{b+c}$ ja $\dfrac{1}{c+a}$ ovat jonkin kolmion sivujen pituudet.

3. Muodostetaan kirjaimista A, B ja C kuuden kirjaimen sana. Kirjain A valitaan todennäköisyydellä x, kirjain B todennäköisyydellä y ja kirjain C todennäköisyydellä z, missä $x + y + z = 1$. Millä todennäköisyyksillä x, y ja z sanan $BACBAB$ todennäköisyys on maksimaalinen?

4. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille $x + y + z = 3$. Osoita, että

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx.$$

5. Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan sisäpuolisesti pisteessä T. Ulomman ympyrän sekantti AB on sisemmän ympyrän tangentti pisteessä P. Osoita, että suora TP puolittaa kulman $\angle ATB$.

6. Pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' valitaan samalta puolelta janaa AB siten että kolmiot ABP, AQB, RAB, BAP', $BQ'A$ ja $R'BA$ ovat yhdenmuotoisia. Osoita, että pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' ovat samalla ympyrällä.

Vihje: tarkastele pisteiden A ja B potenssia pisteiden P, Q ja R kautta kulkevan ympyrän suhteen.

7. On annettu kaksi ympyrää, jotka leikkaavat pisteissä P ja Q. Konstruoi jana AB, joka kulkee pisteen P kautta ja jonka päätepisteet ovat ympyröiden kehillä (piste A toisella ympyrällä ja piste B toisella ympyrällä) siten, että tulo $AP \cdot PB$ saa suurimman mahdollisen arvonsa.

1. Piirrä ensin sellainen suurempi ympyrä, joka sivuaa ympyröitä ulkopuolisesti joissakin pisteissä A ja B niin, että piste P on janalla AB. (Ei onnistu, ellei suurempaa ympyrää ja pisteitä A ja B ole valittu tietyllä tavalla.)
2. Miksi nämä sivuamispisteet toteuttavat tehtävän ehdon?
3. Miten pisteet konstruoidaan? Eli miten harpilla ja viivottimella piirtämällä pisteet löydetään?

Vaikeampia tehtäviä

8. Olkoot x, y ja z erisuuria positiivisia reaalilukuja, joille

$$x + \sqrt{y + \sqrt{z}} = z + \sqrt{y + \sqrt{x}}.$$

Osoita, että $xz < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{8}{3}}$.

9. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $m > n$ pätee

$$\text{pyj}(m, n) + \text{pyj}(m + 1, n + 1) > \frac{2mn}{\sqrt{m - n}}.$$

10. Olkoon M jokin piste kolmion $\triangle ABC$ sisällä sekä pisteet A_1, B_1 ja C_1 pisteen M kohtisuorat projektiot sivuille BC, CA ja AB vastaavasti. Osoita, että

$$MA \cdot MB \cdot MC \geq (MA_1 + MB_1)(MB_1 + MC_1)(MC_1 + MA_1).$$

11. Etsi kaikki jatkuvat funktiot f, jotka toteuttavat ehdon

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

12. Mikä funktio toteuttaa ehdon $xf(x) + 2xf(-1) = -1$?

13. Osoita, että on olemassa funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

i) $f \circ g = g \circ f$ (eli $f(g(x)) = g(f(x))$ kaikille x),

ii) $f \circ f = g \circ g$ ja

iii) $f(x) \neq g(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

14. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, että kaikille $x, y \in \mathbb{N}$ ja positiivisille kokonaisluvuille n pätee

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

15. On annettu funktio $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

i) $f(p) = 1$ kaikille alkuluvuille p,

ii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ kaikille $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Määritä pienin $n \geq 2016$, joka toteuttaa ehdon $f(n) = n$.

16. Luvut $1, 2, 3, \ldots, 100$ on kirjoitettu liitutaululle. Kerran minuutissa Antti valitsee taululta kaksi lukua A ja B, pyyhkii ne pois ja kirjoittaa tilalle yhden luvun $AB + A + B$. Mitä taululla nähdään lopuksi, kun jäljellä on vain yksi luku?

17. Suorakulmaisen laudan sivujen pituudet ovat M ja N. Lauta on kokonaan peitetty laatoilla, joiden muodot ovat 1×4 ja 2×2, eivätkä nämä laatat mene missään kohti toistensa päälle. Todista, että lautaa ei voida peittää samalla tavoin, jos yksi 2×2 -laatta vaihdetaan 1×4 -laataksi.

18. Kahdeksan pienen $1 \times 1 \times 1$ -kuution tahkot on maalattu valkoisiksi ja mustiksi siten, että täsmälleen puolet tahkoista on valkoisia. Siten valkoisia tahkoja on 24 ja mustia 24, mutta yksittäinen kuutio voi olla esimerkiksi kokonaan valkoinen. Todista, että kuutioista on mahdollista koota sellainen $2 \times 2 \times 2$ -kuutio, jonka ulkopinnan pinta-alasta tasan puolet on valkoista.