Joulukuun 2012 Vaikeammat Kirjevalmennustehtävät.

Vastauksia tehtäviin voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen aleksis.koski@helsinki.fi, tai postitse osoitteeseen Aleksis Koski, Helsinginkatu 19 A 36, 00500 Helsinki. Kysymyksiä tehtävistä voi lähettää sähköpostitse.

1. Olkoon $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $xyz = 1$. Osoita, että

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z.$$

2. Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, olkoon $f(n)$ niiden luvun n tekijöiden lukumäärä, joiden kymmenjärjestelmäesitys päättyy lukuun 1 tai 9. Vastaavasti olkoon $g(n)$ niiden tekijöiden lukumäärä, joiden esitys päättyy lukuun 3 tai 7. Osoita, että $f(n) \geq g(n)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

3. Olkoon ABC kolmio. Piste I on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste, ja ympyrä sivuaa sivuja BC, CA, AB pisteissä D, E, F vastaavasti. P on suoran AD ja kolmion sisään piirretyn ympyrän toinen leikkauspiste. Lisäksi M on janan EF keskipiste. Osoita, että nelikulmio $PIMD$ on jännenelikulmio.

4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Etsi kaikkien positiivisten kokonaislukuparien (a, b) lukumäärä, joille

$$(4a-b)(4b-a) = 2010^n.$$

5. Olkoon $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ positiivisia reaalilukuja siten, että $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Osoita, että

$$\sqrt{ab+c} + \sqrt{bc+a} + \sqrt{ca+b} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

6. Eräät 25 ihmistä päättävät muodostaa useita ryhmiä. Jokaisessa ryhmässä on viisi jäsentä, ja jokaisella kahdella ryhmällä on enintään yksi yhteinen jäsen. Etsi suurin mahdollinen määrä muodostuneita ryhmiä perusteluineen.

7. Olkoon D kolmion ABC sivun BC keskipiste, ja olkoon E pisteen C projektio suoralle AD. Oletetaan, että kulmat $\angle ABC$ ja $\angle ACE$ ovat yhtä suuria. Osoita, että kolmio ABC on tasakylkinen tai suorakulmainen.

8. Olkoon $a_1, \ldots, a_{100}$ ja $b_1, \ldots, b_{100}$ jotkin 200 erisuurta reaalilukua. Rakennetaan 100×100-ruudukko jossa luku $a_i + b_j$ on i:nnellä rivillä ja j:nnellä sarakkeella. Oletetaan, että jokaisen sarakkeen lukujen tulo on 1. Osoita, että jokaisen rivin lukujen tulo on -1.

9. Olkoon n sellainen kokonaisluku että $2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ on kokonaisluku. Osoita, että $2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ on tällöin neliöluku.

10. Kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$ on, kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja ja $m, n < 2012$?