Miten geometriaa rakennetaan aukottomalla päättelyllä?

Matematiikkaa opiskellessasi olet luultavasti koko ajan tehnyt laskutehtäviä. Aikaisemmin ensimmäisten kouluvuosien matematiikkaa ei kutsuttukaan matematiikaksi, vaan *laskennoksi.* Geometriassakin lasketaan, esimerkiksi pituuksia, kulmia, pinta-aloja ja tilavuuksia. Geometrian olennainen piirre on kuitenkin *todistaminen*. Geometrian sisältö on aikojen kuluessa onnistuttu kiteyttämään muutamaan perustotuuteen (niitä kutsutaan usein *aksioomiksi*), ja kaikki muu geometrinen tieto voidaan päätellä eli *johtaa* näistä perustotuuksista ja *todistaa oikeaksi* niiden perusteella.

Alkuaan ajateltiin, että aksioomat ovat luonnonlakien kaltaisia välttämättömyyksiä, mutta myöhemmin on huomattu, että on mahdollista muodostaa erilaisia lähtöoletuskokoelmia ja päätyä sitten myös erilaisiin geometrian rakennelmiin. Tästä on kysymys esimerkiksi silloin, kun kuulet puhuttavan *euklidisesta* tai *epäeuklidisesta* geometriasta. Ei ole aina selvää, mikä näistä rakennelmista, jos mikään, vastaa todellisuutta.

Geometrista todistamista voidaan verrata peliin, jossa on tietyt säännöt. Niitä noudattaen voidaan päätyä mitä erilaisimpiin pelitilanteisiin, usein kiehtoviin. Geometrinen niin kuin muukin matemaattinen päättely voi edetä kahta erilaista tietä. *Suora todistus* lähtee oikeiksi tiedetyistä asioista, *oletuksista*, ja etenee päättelyaskelin kohti todistettavaa asiaa, *väitöstä*. Mutta on toinenkin mahdollisuus: voidaan ikään kuin harhauttaa pelissä. Kun jokin asia halutaan todistaa, oletetaankin, että asia olisi päinvastoin ja lähdetään tästä päättelemään. Jos tällaisesta *vastaoletuksesta* lähtevä päättely vie umpikujaan, eli *ristiriitaan* oletuksien ja todeksi tiedettyjen asioiden kanssa, voidaan olla varmoja, että vastaoletus oli väärä ja alun perin todistettavaksi haluttu asia on oikein. Tällaista päättelyä kutsutaan *epäsuoraksi todistamiseksi*. Geometrisissa todistuksissa niin kuin matematiikassa muutenkin se on aika tavallinen.

Emme tässä käy järjestelmällisesti rakentamaan geometriaa mistään perusoletuskokoelmasta. Mutta esitämme ketjun tehtäviä, joiden kautta muodostuu yksi keskeinen osa geometrian perusrakennelmaa, *kolmioiden yhtenevyyslauseet*. Ne ovat keskeinen osan geometrisen päättelyn "työkalupakkia" ja niiden avulla voidaan sitten todistaa ehkä yllättävämpiäkin tuloksia, joista enemmän toisaalla. Onko ketjumme aukoton? Ei toki täysin, mutta kuitenkin niin pitävä, että sen läpikäytyäsi olet saanut hyvän näytteen todistavan matematiikan luonteesta. Tehtävissä pyydetyt todistukset vaativat ehkä jonkin verran älynystyröiden hieromista. Niiden tekeminen onnistuu esimerkiksi annettuja vihjeitä seuraamalla. Todistuksen rakentelu kannattaa aina alkaa niin, että piirtää tilanteesta kuvan tai useampiakin.

Sanomme, että kolmiot ABC ja DEF ovat *yhteneviä*, jos niiden kaikki sivut ja kaikki kulmat ovat pareittain yhtä suuria, jos siis $AB = DE$, $BC = EF$, $CA = FD$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$ ja $\angle CAB = \angle FDE$.

Otamme peruslähtökohdaksemme seuraavan varsin ilmeiseltä näyttävän asia: Jos kolmioissa ABC ja DEF on $AB = DE$, $BC = EF$ ja $\angle ABC = \angle DEF$, niin kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä. Kutsumme tätä perusolettamusta yhtenevyysaksioomaksi **sks**, koska se kertoo, että sellaiset kolmiot, joissa on kaksi pareittain yhtä pitkää sivua (s, s) ja näiden sivujen välissä oleva yhtä suuri kulma (k), ovat yhteneviä.

Kolmioon liittyy luonnostaan kuusi suuretta: kolme sivua ja kolme kulmaa. Yhtenevissä kolmioissa kaikki kuusi suuretta ovat pareittain yhtä suuret. Kolmioiden yhtenevyystulosten merkitys on sinä, että kahden kolmion yhtenevyys voidaan varmistaa kolmion kolmen osan samuudesta. Sen jälkeen tiedetään, että loputkin kolmioiden osat ovat keskenään yhtä suuria, ja tätä tietoa puolestaan voidaan sitten edelleen käyttää hyödyksi.

Kolmioiden yhtenevyysominaisuuksien ketjun purkaminen kannattaa aloittaa erityisestä kolmiotyypistä, *tasakylkisistä kolmioista*.

Tehtävä 1. *Todista nojautuen vain perusolettamukseen sks, että jos kolmiossa ABC on $AB = AC$, niin $\angle ABC = \angle ACB$.*

Vihje: tarkastele kolmioita ABC ja ACB. – Tästä tuloksesta, jonka voi lyhyesti ilmaista sanoin ”tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret”, käytettiin ennen nimitystä *pons asinorum* eli *aasinsilta*. Ajateltiin kai, että ajattelukyvyiltään rajoittuneeksi mielletty aasi ei pystynyt estettä ylittämään eikä siis oikein päässyt geometrian vihreistä laitumista nauttimaan.

Kun tasakylkisten kolmioiden perusominaisuus on hallussa, voidaan perustella yhtenevyystilanne, jossa tunnettuina asioina on vain kolmioiden sivuja.

Tehtävä 2. *Todista nojautuen tehtävään 1 ja perusolettamukseen sks, että jos kolmioissa ABC ja DEF on $AB = DE$, $BC = EF$ ja $CA = FD$, niin ABC ja DEF ovat yhteneviä.*

Vihje: piirrä kolmioon ABC kiinni kolmion DEF kanssa yhtenevä kolmio GCB ja jana AG. – Tätä tulosta kutsutaan yhtenevyyslauseeksi **sss**.

Yhtenevyysaksioomassa sks kolmioiden yhtenevyys seuraa kolmioiden kahden sivun ja yhden kulman yhtä suuruudesta. Myös kahden kulman ja niiden välissä olevan sivun pareittainen yhtä suuruus riittää varmistamaan kolmioiden yhtenevyyden.

Tehtävä 3. *Todista, että jos kolmioissa ABC ja DEF on $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$ ja $\angle BCA = \angle EFD$, niin ABC ja DEF ovat yhteneviä.*

Vihje: Todista epäsuorasti: oleta, että $AB \neq ED$ ja johda ristiriita sks:n kanssa. – Tämä tulos tunnetaan nimellä yhtenevyyslause **ksk**. Miksi?

Kolme yhtenevyyden takaavaa osaa voivat myös sijaita niin, että kaksi samanlaista yhtä suurta osaa (kulmaa tai sivua) ovat vierekkäin, mutta kolmas osa ei ole näiden kahden välissä. Yhtenevyyslause, jossa lähtökohtana ovat kaksi vierekkäistä kulmaparia ja sivupari, joka on toista kulmaparia vastapäätä, vaatii hiukan esivalmisteluja.

Tehtävä 4. *Oletetaan, että $\angle ABC = \angle DEF$. Olkoot pisteet G ja H suorilla BS ja EF niin, että B on G:n ja C:n välissä ja E on H:n ja F:n välissä. Todista nojautuen yhtenevyysaksioomaan sks, että $\angle ABG = \angle DEH$.*

Vihje: voit olettaa, että $AB = DE$, $BC = EF$ ja $BG = EH$. Vertaile järjestyksessä kolmiopareja ABC ja DEF, AGC ja DHF sekä AGB ja DHE. – Kulmaa $\angle ABG$ sanotaan kulman $\angle ABC$ *vieruskulmaksi*. Tulos kertoo, että yhtä suurten kulmien vieruskulmat ovat yhtä suuret.

Edellisen ja seuraavan tehtävän sisältö perustellaan usein sanomalla, että ”vieruskulmien summa on 180°” ja suorittamalla kaksi vähennyslaskua. Mutta miten oikeastaan tiedämme kulman mittaluvun? Geometrian järjestelmän kannalta mittaaminen on huomattavasti vaikeampi ongelma kuin äkkipäätä luulisi. Tehtävien 4 ja 5 avulla onnistumme kiertämään tämän ongelman.

Tehtävä 5. *Olkoot D ja E sellaiset suorien AB ja BC pisteet, että B on A:n ja D:n välissä ja myös C:n ja E:n välissä. Todista, että $\angle ABC = \angle EBD$.*

Vihje: voit soveltaa tehtävän 4 tulosta. – Kulmat $\angle ABC$ ja $\angle EBD$ ovat *ristikulmia*. Olet todistanut, että ristikulmat ovat yhtä suuret.

Seuraavaa tehtävää emme oikeastaan tarvitse kolmioiden yhtenevyyslauseita varten. Mutta kun johduimme mainitsemaan kulman mittaamisen ongelmallisuuden, voimme pienellä vaivalla ottaa käyttöön *kohtisuoruuden* käsitteen mainitsematta mitään "90° kulmasta". Määrittelemme, että jokainen sellainen kulma, joka on yhtä suuri kuin vieruskulmansa, on *suora kulma*.

Tehtävä 6. *Todista, että jos $\angle ABD$ ja $\angle DEF$ ovat suoria kulmia, niin $\angle ABC = \angle DEF$.*

Vihje: epäsuora todistus. Jos $\angle ABC < \angle DEF$, kulmien yhtä suurien vieruskulmien suuruusjärjestys onkin toinen, eli $\angle ABC > \angle DEF$.

Rakennuksemme kaipaa vielä muutaman tukiosan. Yksi on tehtävän 1 sisältö toisin päin käännettynä. Kolmio, jossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, on tasakylkinen.

Tehtävä 7. *Todista sks:n ja tehtävän 1 avulla, että jos kolmiossa ABC on $\angle ABC = \angle BCA$, niin $AB = AC$.*

Vihje: Todista epäsuorasti; jos $AC < AB$, voit muodostaa janan AB osan $BD = AD$ ja tutkia kolmioita ACB ja DBC.

Tehtävä 8. *Todista sks:n ja tehtävien 7 ja 1 avulla, että janalla AB on piste C, jolle pätee $AC = CB$.* Janalla on siis *keskipiste*.

Vihje: muodosta tasakylkiset kolmiot ABD ja ABE eri puolille janaa AB, tutki kolmioita AED ja BDE sekä kolmioita ACD ja BCD, missä C on janojen AB ja DE leikkauspiste.

Tehtävä 9. *Todista sks:n ja tehtävien 5 ja 8 avulla, että kolmion yhden kulman vieruskulma on suurempi kuin kumpikaan kolmion kahdesta muusta kulmasta.*

Vihje: tarkastele kolmion ABC sivun AC keskipistettä D, hae puolisuoralta BDpiste E, jolle $BD = DE$. Tutki kolmioita ABD ja CED.

Nyt on koossa kaikki, mitä tarvitaa neljättä yhtenevyystulosta varten.

Tehtävä 10. *Kolmioissa ABC ja DEC on $AB = DE$, $\angle ABC = \angle DEF$ ja $\angle BCA = \angle EFD$. Todista sks:n ja tehtävän 8 avulla, että kolmiot ovat yhteneviä.*

Vihje: Epäsuora todistus. – Arvasit varmaan jo, että tämä tulos on yhtenevyyslause **kks**.

Viimeinen yhtenevyystulos koskee tilannetta, jossa kolmioilla on kaksi pareittain yhtä suurta sivua ja yksi yhtä suurten kulmien pari, mutta kulmat eivät ole sivuparien välissä vaan toista paria vastapäätä. Näistä ehdoista ei ihan seuraakaan kolmioiden yhtenevyys, mutta melkein.

Tehtävä 11. *Todista sks:n ja tehtävän 1:n avulla, että jos kolmioissa ABC ja DEF on $AB = DE$, $AC = EF$ ja $\angle ABC = \angle DEF$, niin joko ABC ja DEF ovat yhteneviä tai kulmat $\angle ACB$ ja $\angle DEF$ ovat toistensa vieruskulmia.*

Vihje: Erota puolisuoralta AB jana $AG = DF$. Vertaa kolmioita AGB ja EDF. Jos G ei ole sama kuin C, niin tutki kolmiota AGC. – Tätä tulosta sanotaan yhtenevyyslauseeksi **ssk**. Jotta sen perusteella voitaisiin varmistaa kolmioiden yhtenevyys, on tavalla tai toisella onnistuttava sulkemaan pois vieruskulmavaihtoehto. Eräs tilanne, jossa näin voidaankin tehdä, on se, jossa ssk-tilanteen ”k” on suora kulma.

Tehtävä 12. *Kolmioissa ABC ja DEF on $AB = DE$, $AC = DF$ ja kulmat $\angle ABC$ ja DEF ovat suoria. Todista, että kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä.*

Vihje: käytä tehtävän 9 tulosta ja sulje sen avulla pois ssk:n ”toistensa vieruskulmia” -vaihtoehto. – Tätä lausetta kutsutaan joskus *suorakulmaiseksi ssk:ksi.*