Harjoitustehtävät, tammikuu 2013, helpommat

Mielellään paperille kirjoitetut vastaukset joko helmikuun valmennusviikonvaihteeseen Päivölään, tai samoihin aikoihin paperipostissa osoitteeseen `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu`. Jos haluat jättää vastauksia sähköpostitsea, niin osoite on `matti.lehtinen@helsinki.fi`.

1. Osoita, että jos x ja y ovat reaalilukuja ja $0 \le x \le 1$ ja $0 \le y \le 1$, niin

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \le 1.$$

2. Askartelukerhossa on 40 lasta. Itse kullakin on joitakin nauloja, ruuveja ja pultteja. Tasan 15 lapsella on eri määrä nauloja ja pultteja ja tasan 10 lapsella on yhtä monta naulaa ja ruuvia. Osoita, että ainakin 15 lapsella on eri määrä ruuveja ja pultteja.

3. Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC M ja N ovat sivujen AB ja AC keskipisteet ja P on jokin sivun BC piste. Osoita, että $(MB - MP)(NC - NP) \le 0$.

4. Tavalliseen tapaan väritetyn 8×8-ruutuisen šakkilaudan rivejä vaihdetaan keskenään ja sarakkeita vaihdetaan keskenään. Päästäänkö näin tilanteeseen, jossa laudan vasen puoli koostuu mustista ja oikea valkoisista ruuduista?

5. Oletetaan, että luku $2^m + 3^n$ on jaollinen viidellä. Osoita, että $2^n + 3^m$ on myös jaollinen viidellä.

6. Kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ on $AB = A'B'$, $\angle CAB = \angle C'A'B' = 60°$ ja $\angle ABC + \angle A'B'C' = 180°$. Osoita, että

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A'C'}.$$

7. Osoita, että jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja ja $m > 1$, niin luku $m^4 + 4n^4$ ei ole alkuluku. Osoita vielä, että luku $3^{4^5} + 4^{5^6}$ voidaan kirjoittaa kahden sellaisen luvun tuloksi, joista molemmissa on ainakin 2013 numeroa.

8. Kolmio ABC on tasasivuinen. Kolmion sivuilta AC, AB ja BC on valittu pisteet M, N ja P niin, että seuraavat ehdot toteutuvat: $\angle CBM = \frac{1}{2}\angle AMN = \frac{1}{3}\angle BNP$ ja $\angle CMP = 90°$. Osoita, että kolmio NMB on tasakylkinen ja määritä kulman $\angle CBM$ suuruus.

9. Tiedetään, että $a < b < c$. Osoita, että yhtälöllä

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

on tasan kaksi juurta x_1 ja x_2, ja että ne voidaan nimetä niin, että $a < x_1 < b < x_2 < c$.

10. Luonnollisista luvuista k, m, n tiedetään, että k^3 on jaollinen m:llä, m^3 on jaollinen n:llä ja n^3 on jaollinen k:lla. Osoita, että $(k + 2m + 3n)^{13}$ on jaollinen luvulla kmn.

11. Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaksi funktiota, ja olkoon $f(g(x)) = g(f(x)) = -x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että f ja g ovat parittomia funktioita[1]. Keksi esimerkki tällaisesta funktioparista f, g.

12. Osoita, että yhtälöllä

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor = n$$

on ratkaisuja aina ja vain, kun $n = 63k+j$, missä k on kokonaisluku ja $j \in \{1, 3, 7, 15, 31\}$. ($\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on $\leq x$.)

13. Jänis juoksee pitkin ympyrän kehää vakionopeudella. Koira lähtee juoksemaan ympyrän keskipisteestä koko ajan suoraan kohti jänistä samalla nopeudella. Saako koira jäniksen kiinni ja jos saa, niin missä?

14. Voiko luku kaksinkertaistua, jos sen ensimmäinen numero siirretään viimeiseksi numeroksi (siis jos esim. 4876 → 8764 – nyt ainakaan ei kaksinkertaistunut)?

15. Rakennusyhtiö tekee 2013 km pituista moottoritietä. Sopimuksen mukaan ensimmäisessä kuussa pitää valmistua kilometri tietä ja jos jonkin kuukauden alussa tietä on valmiina k kilometriä, niin kyseisessä kuussa on valmistuttava $\dfrac{1}{k^3}$ kilometriä. Tuleeko tie koskaan valmiiksi?

16. Itseään leikkaamaton murtoviiva koostuu kahdekasta janasta. Murtoviivan kaikki kärjet ovat erään kuution kärkiä. Osoita, että ainakin yksi murtoviivan osajana on kuution särmä.

[1] Funktio F on *pariton*, jos F:n määrittelyjoukko D on sellainen, että $x \in D \Rightarrow -x \in D$ kaikilla $x \in D$ ja $F(-x) = -F(x)$ kaikilla $x \in D$.