Harjoitustehtävät, joulukuu 2013, helpommat

Mielellään paperille kirjoitetut vastaukset joko tammikuun valmennusviikonvaihteeseen Päivölään, tai samoihin aikoihin paperipostissa osoitteeseen `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu`. Jos haluat jättää vastauksia sähköpostitse, niin osoite on `matti.lehtinen@helsinki.fi`.

Tehtävät ovat erään pienehkön EU-maan lukion kansallisen matematiikkakilpailun tehtäviä runsaan kymmenen vuoden takaa.

1. Juna kulkee vakionopeudella tietyn matkan. Jos nopeutta lisättäisiin 10 km/h, matka taittuisi 40 minuuttia nopeammin. Jos nopeutta vähennettäisiin 10 km/h, matkaan kuluisi yksi tunti enemmän. Miten pitkästä matkasta on kysymys?

2. Neliön $ABCD$ sivun pituus on 2. Piste M on sivun BC keskipiste ja piste P on jokin sivun CD piste. Määritä murtoviivan APM lyhin mahdollinen pituus.

3. Vuoden joululahjaidea *BabyMath*-yritykseltä on yhdeksänosainen sarja tasan toistensa sisään mahtuvia vuorotellen kuution ja pallon muotoisia avattavia muovikoteloita. Uloin ja sisin kotelo on kuution muotoinen. Mikä on suurimman ja pienimmän kuution särmien pituuksien suhde?

4. Yhtälöllä $x^2 + (a-2)x - (a+3) = 0$ on kaikilla a:n arvoilla kaksi reaalilukuratkaisua x_1 ja x_2. Määritä a niin, että $x_1^2 + x_2^2$ on mahdollisimman pieni.

5. Erään kokonaisluvun x toisen potenssin x^2 toiseksi viimeinen numero on 7. Mikä on x^2:n viimeinen numero?

6. Osoita, että luku $n!$ ei millään n:n arvolla voi päättyä yhteentoista nollaan.

7. Olkoon $123456789101112\ldots998999$ luku, jonka saadaan kirjoittamalla $1, 2, 3, \ldots, 999$ peräkkäin. Mikä on luvun 2013. numero?

8. Määritä luonnollisten lukujen parit (x, y), jotka toteuttavat yhtälön

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 2013.$$

9. Ratkaise (reaalilukujen joukossa) yhtälö

$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3.$$

10. Kolmannen asteen polynomin $x^3 + 2x^2 - 3x - 5 = 0$ nollakohdat ovat a, b ja c. Määritä kolmannen asteen polynomi, jonka nollakohdat ovat $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ ja $\frac{1}{c}$.

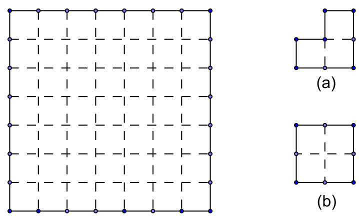
11. Positiivisille luvuille p ja q pätee $p+q=1$. Osoita, että

$$\frac{25}{2} \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

12. Määritä kaikki sellaiset viiden peräkkäisen kokonaisluvun jonot, joissa kolmen ensimmäisen luvun neliöitten (= toisten potenssien) summa on sama kuin kahden viimeisen luvun neliöitten summa.

13. Kuinka monta erilaista (ei keskenään yhtenevää) sellaista suorakulmaista kolmiota on, joissa toinen kateetti on 2014 ja toisenkin kateetin sekä hypotenuusan pituudet ovat kokonaislukuja?

14. 7×7 ruudukko leikataan paloiksi, jotka ovat joko kolmesta ruudusta muodostuvia L:n muotoisia paloja (a) tai neljästä ruudusta muodostuvia neliönmuotoisia paloja (b). Todista, että b-paloja on tasan yksi.



15. Tasossa on kuusi ympyrää, ja yhdenkään keskipiste ei ole toisen ympyrän sisällä. Osoita, että mikään tason piste ei kuulu kaikkiin kuuteen ympyrään.

16. Tanssisalin seinustalla istuu rinnakkain seitsemän herraa A, B, C, D, F ja G ja vastakkaisella seinustalla seitsemän daamia a, b, c, d, e, f ja g jossain järjestyksessä. Kun musiikki alkaa ja herrat kävelevät kumartamaan daameille, niin huomataan, että ainakin kaksi herraa kävelee yhtä pitkän matkan. Käykö aina näin? (Kuviossa on esimerkki, jossa $|Bb| = |Ee|$ ja $|Cc| = |Dd|$.)