Harjoitustehtävät, helmi–maaliskuu 2011. Vaativammat

Ratkaisuja

1. *Yhdeksän matemaatikkoa tapaa toisensa kongressissa. Kukaan heistä ei osaa useampaa kuin kolmea kieltä. He toteavat kuitenkin, että jokaisesta kolmesta matemaatikosta ainakin kaksi osaa puhua samaa kieltä. Osoita, että matemaatikkojen joukossa on kolme sellaista, jotka kaikki osaavat puhua samaa kieltä.*

Ratkaisu. Olkoot matemaatikot A, B, C, D, E, F, G, H ja I. Tehdään vastaoletus: enintään kaksi matemaatikkoa osaa puhua mitään yhteistä kieltä. Olkoon A jokin matemaatikoista. Koska A osaa enintään kolmea kieltä, on enintään kolme matemaatikkoa, B, C ja D, joiden kanssa A voi puhua. Matemaatikko E pystyy puhumaan enintään kolmen joukkoon $\{B, C, D\}$ kuuluvan matematikon kanssa ja enintään kolmen joukkoon $\{F, G, H, I\}$ kuuluvan matematikon kanssa. Viimeisessä joukossa on silloin ainakin yksi matemaatikko, esimerkiksi I, joka ei pysty keskustelemaan A:n eikä E:n kanssa. Mutta joukossa $\{A, E, I\}$ on tehtävän ehdon mukaan oltava ainakin kaksi keskenään keskustelemaan kykenevää matemaatikkoa. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi.

2. *Olkoon a_n luvun $1 + 2 + \cdots + n$ viimeinen numero (kun summa kirjoitetaan 10-järjestelmässä tavalliseen tapaan. Laske $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2011}$.*

Ratkaisu. Tiedetään, että $a_n \equiv \dfrac{n(n+1)}{2} \bmod 10$. Jos $m \equiv n \bmod 20$, niin $m(m+1) \equiv n(n+1) \bmod 20$ ja $\dfrac{m(m+1)}{2} \equiv \dfrac{n(n+1)}{2} \bmod 10$. Lasketaan $a_n \bmod 20$, kun $1 \le n \le 20$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	3	6	0	5	1	8	6	5	5	6	8	1	5	0	6	3	1	0	0

Tästä voidaan laskea, että $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 70 = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+19}$ kaikilla k. Nyt $2011 = 100 \cdot 20 + 11$. Koska $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 46$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2011} = 100 \cdot 70 + 46 = 7046$.

3. *Tasasivuisen kolmion ABC sivu on 2. Osoita, että jos P on kolmion sisään piirretyn ympyrän mielivaltainen piste, niin $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 5$.*

Ratkaisu. Ratkaisuksi käy suora lasku. Sijoitetaan kolmio ABC koordinaatistoon niin, että BC on x-akselin suuntainen ja origo on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Koska ABC on tasasivuinen, sen korkeus on $\sqrt{3}$. Tästä saadaan helposti kärkien koordinaatit: $A = \left(0, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $B = \left(-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ja $C = \left(1, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Olkoon nyt $P = (x, y)$ kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän piste. Silloin $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}$ ja

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = x^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (x+1)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (x-1)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 =$$

$$3(x^2 + y^2) + 2 + \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2 \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)y + (4+2) \cdot \frac{1}{3} = 1 + 2 + 2 = 5.$$

4. 4×7 *ruudukon jokainen ruutu on väritetty siniseksi tai punaiseksi. Osoita, että jonkin ruudukon ruuduista muodostuvan suorakaiteen kärkiruudut ovat samanvärisiä. Osoita, että näin ei tarvitse olla, jos ruudukko on kokoa* 4×6.

Ratkaisu. Osoitetaan, että väite pätee jo 3×7-ruudukossa. Jokaisessa ruudukon seitsemässä sarakkeessa on joko enemmän sinisiä ruutuja tai enemmän punaisia ruutuja. Sarakkeissa on silloin ainakin neljä sellaista, joissa tiettyä väriä on enemmän; olkoon se punainen. Jos jossain sarakkeessa on pelkkiä punaisia ruutuja, niin se ja mikä hyvänsä muu näistä neljästä sarakkeesta on pari, jossa on pelkkiä punaisia ruutuja kahdella vaakarivillä. Jos kaikissa sarakkeissa on myös sininen ruutu, niin jossain kahdessa sarakkeessa sininen ruutu on samalla vaakarivillä. Näissä sarakkeissa on silloin suorakulmion kärkiruuduiksi kelpaavat kaksi punaista ruutua samoilla vaakariveillä. – Esimerkiksi järjestys

$$\begin{matrix} p & p & p & s & s & s \\ p & s & s & s & p & p \\ s & p & s & p & s & p \\ s & s & p & p & p & s \end{matrix}$$

osoittaa, että 4×6-ruudukossa ei aina ole mahdollista muodostaa suorakaidetta, jonka kärkiruudut olisivat samaa väriä.

5. *Olkoot* $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ n *positiivista reaalilukua. Olkoon*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x + a_k},$$

kun $x \notin \{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\}$. *Määritä niiden reaaliakselin välien, joilla* $f(x) > 1$, *yhteinen pituus.*

Ratkaisu. Kun $x < -a_n$, $f(x) < 0$. f ei ole märitelty pisteissä $-a_j$ ja $\lim_{x \to a_j -} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a_j +} f(x) = +\infty$. f on jokaisella välillä $(-a_j, -a_{j-1})$ vähenevä samoin kuin joukoissa $(-\infty, -a_n)$ ja $(-a_1, \infty)$. Lisäksi $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Tästä seuraa, että yhtälöllä $f(x) = 1$ on jokaisella välillä $(-a_j, -a_{j-1})$, $j = 2, 3 \ldots, n$ tasan yksi ratkaisu x_j ja joukossa $(-a_1, \infty)$ yksi ratkaisu x_1 ja että $f(x) > 1$ jos ja vain jos $x \in (-a_j, x_j)$ jollain $j = 1, 2, \ldots, n$. Tarkastellaan yhtälöä $f(x) = 1$. Kun tästä yhtälöstä poistetaan nimittäjät ja termit kerätään samalle puolelle, saadaan n:nnen asteen polynomiyhtälö, joka on muotoa $x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots = 0$. Yhtälön juurien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ summa on siis 0. Täten tehtävässä kysyttyjen välien yhteinen pituus on

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - (-a_j)) = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

6. *Pyöreän pöydän ympärillä istuu 2011 (!) henkilöä. Heidät on numeroitu juoksevasti myötäpäivään. Numero 1 aloittaa sanomalla ”yksi”. Tämän jälkeen jokainen istuja sanoo järjestyksessä ”kaksi”. ”kolme”, ”yksi”, ”kaksi” jne. Jokainen, joka sanoo ”kaksi” tai ”kolme” poistuu heti. Minkänumeroinen istuja jää pöydän ääreen?*

Ratkaisu. Jos pöydän ääressä olevien henkilöiden lukumäärä olisi 3^k, niin ensimmäisellä kierroksella poistuisi tasan $\frac{2}{3} \cdot 3^k$ henkilöä ja numero 1 saisi taas sanoa numeron 1. Näin ollen numero 1 olisi voittaja. Tästä seuraa, että voittaja on se, joka ensimmäisenä saa sanoa numeron 1 silloin, kun pöydän ääressä olevien henkilöiden määrä on kolmen potenssi. Nyt $3^6 = 729 < 2011 < 2187 = 3^7$. Kun joukosta on poistunut $2011 - 729 = 1282 = 2 \cdot 641$ oppilasta, jäljellä on 3^6 oppilasta ja tuolloin vuorossa on oppilas numero $3 \cdot 641 + 1 = 1924$. Hän jää viimeksi pöydän ääreen.

7. *Jonon $(a_k)_{k \ge 1}$ jäsenet ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja toteuttavat ehdon $a_k \ge a_{2k} + a_{2k+1}$ kaikilla k. Osoita, että kaikilla n jonossa on n peräkkäistä nollaa. Anna esimerkki ehdon täyttävästä jonosta, jossa on äärettömän monta positiivista termiä.*

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että jonossa on ainakin yksi nolla. Ellei näin olisi, olisi kaikilla n $a_1 \ge a_2 + a_3 \ge a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \ge a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} \ge \ldots \ge a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \ge 2^n$, mikä on mahdotonta. Jos sitten $a_k = 0$ jollain k, saadaan samalla tavoin $0 \ge a^{2^n k} + a^{2^n k+1} + \cdots + a_{2^n k + 2^n - 1}$, joten jonossa on kaikilla n jaksoja, joissa on 2^n nollaa. Mutta jono, jossa $a_n = 0$ paitsi jos $n = 2^k$, ja $a_{2^k} = 1$, kaikilla k, toteuttaa tehtävän ehdon. Jos n ei ole kahden potenssi, niin kumpikaan luvuista $2n$ ja $2n+1$ ei ole kahden potenssi. Jos taas $n = 2^k$, niin $a_n = a_{2n} = 1$ ja $a_{2n+1} = 0$. Jono todellakin toteuttaa tehtävän ehdon.

8. *a, b ja c ovat kokonaislukuja. a on parillinen ja b on pariton. Osoita, että jos n on positiivinen kokonaisluku, on olemassa positiivinen kokonaisluku x siten, että $ax^2 + bx + c$ on jaollinen luvulla 2^n.*

Ratkaisu. Olkoon $P(x) = ax^2 + bx + c$. Todistetaan induktiolla. Olkoon k_0 mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Varmasti $2^0 | P(k_0)$. Oletetaan, että jollakin $n \ge 0$ on olemassa positiivinen kokonaisluku k_n siten, että $2^n | P(k_n)$. Jos $2^{n+1} | P(k_n)$, voidaan asettaa $k_{n+1} = k_n$. Oletetaan sitten, että $P(k_n) = 2^n d$, missä d on pariton luku. Nyt $P(x) - P(k_n) = (x - k_n)((a(x + k_n) + b)$. Koska a on parillinen ja b pariton, niin $a(x + k_n) + b)$ on pariton luku. Olkoon e mielivaltanen pariton luku. Asetetaan $k_{n+1} = k_n + 2^n e$. Silloin $P(k_{n+1}) - P(k_n) = 2^n e((a(k_{n+1} + k_n) + b)$ ja $P(k_{n+1}) = 2^n(d + e((a(k_{n+1} + k_n) + b)$. Koska 2^n:n kerroin oikealla puolella on kahden parittoman luvun summa, $P(k_{n+1})$ on jaolinen 2^{n+1}:llä. Induktioaskel on otettu, väite todistettu.

9. *Kokonaislukuparien joukossa märitelty reaaliarvoinen funktio f toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:*
(i) $f(x, y)f(y, z)f(z, x) = 1$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
(ii) $f(x + 1, x) = 2$ kaikilla $x \in \mathbb{Z}$.
Määritä f.

Ratkaisu. Kun ehtoon (1) asetetaan $x = y = z$, saadaan $f(x, x)^3 = 1$ eli $f(x, x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{Z}$. Kun ehtoon (1) sijoitetaan $x = z$, saadaan nyt $f(x, y)f(y, x) = 1$ eli $f(x, y) = \dfrac{1}{f(y, x)}$ kaikilla $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Siis

$$f(x, z) = \frac{1}{f(z, x)} = f(x, y)f(y, z) = \frac{f(x, y)}{f(z, y)}.$$

Sovelletan tätä ehtoon (ii):

$$2 = f(x+1,\,x) = \frac{f(x+1,\,y)}{f(x,\,y)}.$$

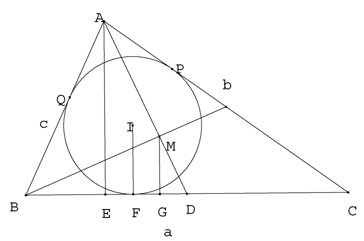
Mutta tämä voidaan kirjoittaa

$$\frac{f(x,\,y)}{2^x} = \frac{f(x+1,\,y)}{2^{x+1}}.$$

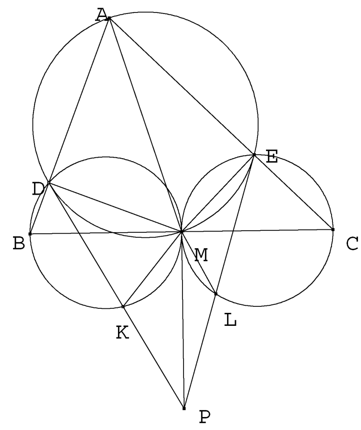
Lausekkeen $\dfrac{f(x,\,y)}{2^x}$ arvo on siis vakio kaikilla $x \in \mathbb{Z}$, eli se riippuu vain y:stä. Koska $f(y,\,y) = 1$, arvo on $\dfrac{1}{2^y}$. Siis $f(x,\,y) = 2^x \cdot \dfrac{1}{2^y} = 2^{x-y}$. – Tämä on välttämätön ehto $f(x,\,y)$:lle. Helposti nähdään, että $f(x,\,y) = 2^{x-y}$ toteuttaa alkuperäiset ehdot.

10. *Kolmion ABC sivujen pituudet ovat a, b ja c. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O ja sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I, $I \neq O$. Olkoon vielä M ABC:n keskijanojen leikauspiste. Osoita, että $IM \perp BC$, jos ja vain jos $b = c$ tai $b+c = 3a$.*

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $b \geq c$. Olkoon A:sta piirretyn korkeusjanan kantapiste E, kolmion sisään piirretyn ympyrän ja sivun BC yhteinen piste F, kolmion painopisteen kohtisuora projektio sivulla AB G ja sivun AB keskipiste D. Olkoot P ja Q sisään pirretyn ympyrän ja sivuje AC ja AB sivuamispisteet. Sitä, että $BF = BQ$, $AQ = AP$ ja $CP = CF$ seuraa helposti $BF = \dfrac{1}{2}(a - b + c)$, joten $DF = \dfrac{a}{2} - BF = \dfrac{1}{2}(b - c)$. Olkoon $AE = h$. Yhtälöistä $c^2 - BE^2 = h^2 = b^2 - (a - BE)^2$ saadaan $BE = \dfrac{1}{2a}(c^2 - b^2 + a^2)$ ja $DE = \dfrac{1}{2}a - BE = \dfrac{1}{2a}(b^2 - c^2)$. Koska M jakaa janan AD niin, että $MD = \dfrac{1}{3}AD$, on $GD = \dfrac{1}{3}ED = \dfrac{1}{6a}(b^2 - c^2)$. Nyt $IM \perp BC$ jos ja vain jos F ja G ovat sama piste. Tämä toteutuu jos ja vain jos $\dfrac{1}{2}(b - c) = \dfrac{1}{6a}(b^2 - c^2)$. Yhtälö toteutuu, jos $b = c$. Jos $b \neq c$, yhtälö toteutuu, kun $3a = b + c$.



11. *Olkoon M kolmion ABC sivun BC keskipiste. Ympyrä Γ, jonka halkaisija on AM, leikkaa AB:n myös pisteessä D ja AC:n myös pisteessä E. Γ:n pisteisiin D ja E piirretyt tangentit leikkaavat pisteessä P. Osoita, että $PB = PC$.*



Ratkaisu. Koska AM on Γ:n halkaisija, kulmat ADM ja AEM ovat suoria. Tästä seuraa, että ympyrät Γ_1 ja Γ_2, joiden halkaisijat ovat BM ja MC, kulkevat pisteiden D ja E kautta. Leikatkoon DP Γ_1:n pisteessä K ja EP Γ_2:n pisteessä L. Tarkastellaan kolmioita ABM ja DKM. Koska PD on Γ:n tangentti, kulmat DAM ja MDK ovat Γ:n samaa jännettä DM vastaavina kehäkulmina yhtäö suuret. Kulmat ABM ja DKM puolestaan ovat Γ_1:n samaa jännettä DM vastaavina kehäkulmina yhtä suuret. Kolmiot ABM ja DKM ovat siis yhdenmuotoiset (kk). Aivan samoin nähdään, että kolmiot AMC ja EML ovat yhdenmuotoiset. Mutta tästä seuraa, että $\angle KMD + \angle EML = \angle BMA + \angle AMC = 180°$. Koska ympyröillä Γ_1 ja Γ_2 on sama säde, janat DK ja EL ovat vieruskulmia vastaavina ympyrän jänteinä yhtä pitkät. Koska DP ja EP ovat ympyrän Γ tangentteina yhtä pitkät, on myös $PK = PL$. Pisteellä P on siten sama potenssi ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 suhteen $PK \cdot PD = PL \cdot PE$. Osoitetaan, että PM on ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 yhteinen tangentti. Ellei näin olisi, suora PM leikkaisi Γ_1:n pisteissä X ja M ja Γ_2:n pisteissä Y ja M, ja M olisi X:n ja Y:n välissä. Pisteen P potenssille Γ_1:n ja Γ_2:n suhteen saataisiin lausekkeet $PX \cdot PM$ ja $PM \cdot PY$. Mutta nämä voivat olla samat vain, jos $X = Y = M$. Siis todellakin PM on ympyröiden tangentti, josta seuraa $PM \perp BC$. Koska M on BC:n keskipiste, PM on BC:n keskinormaali, joten $PB = PC$.

12. *Määritellään lukujono $(a_n)_{n\geq 0}$ asettamalla $a_0 = 1$ ja $a_1 = 3$ sekä*

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + 9a_n, & \text{jos } n \text{ on parillinen} \\ 9a_{n+1} + 5a_n, & \text{jos } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Osoita, että luku

$$\sum_{k=2011}^{2016} a_k^2$$

on jaollinen 20:llä.

Ratkaisu. Koska

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + 9a_n = a_{n+1} + a_n + 8a_n, & \text{jos } n \text{ on parillinen} \\ 9a_{n+1} + 5a_n = a_{n+1} + a_n + 8a_{n+1} + 4a_n, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

$a_{n+2} \equiv a_{n+1} + a_n \bmod 4$. Olkoon $a_n \equiv b_n \bmod 4$, missä $0 \leq b_n \leq 3$. Silloin $b_0 = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 0$, $b_3 = 3$, $b_4 = 3$, $b_5 = 2$, $b_6 = 1$, $b_7 = 3$ jne. Jono (b_n) on selvästi jaksollinen niin, että kaikilla k ja kaikilla $i = 0, 1, \ldots, 5$ on $b_{i+6k} = b_i$. Lisäksi

$$\sum_{i=0}^{5} b_i^2 = 32 \equiv 0 \bmod 4.$$

Silloin myös

$$\sum_{i=2011}^{2016} a_i^2 \equiv \sum_{i=0}^{5} b_i^2 \equiv 0 \bmod 4.$$

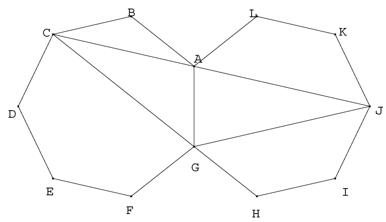
Tehtävän summa on siis ainakin neljällä jaollinen. On vielä osoitettava, että summa on jaollinen myös viidellä. Koska $a_{2n+3} = 9a_{2n+2} + 5a_{2n+2}$, niin $a_{2n+3} + a_{2n+2} \equiv 0 \bmod 5$. Siis $a_{2n+3}^2 \equiv (-a_{2n+2})^2 = a_{2n+2}^2 \bmod 5$. Koska $a_{2n+4} = a_{2n+3} + 9a_{2n+2}$, $a_{2n+4} - a_{2n+3} + a_{2n+2} \equiv a_{2n+4} + 2a_{2n+2} \equiv 0 \bmod 5$. Tästä saadaan $a_{2n+4}^2 \equiv (-2a_{2n+2})^2 = 4a_{2n+2}^2 \equiv -a_{2n+2}^2 \equiv -a_{2n+3}^2 \bmod 5$ eli $a_{2n+3}^2 + a_{2n+4}^2 \equiv 0 \bmod 5$. Jonossa toisiaan seuraavien parittoman ja parillisen termin neliöiden summa on siis jaollinen viidellä. Tästä seuraa heti, että

$$\sum_{i=2011}^{2016} a_i^2$$

on jaollinen myös viidellä.

13. *$ABCDEFG$ on säännöllinen 7-kulmio, jonka sivun pituus on 1. Osoita, että*

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1.$$



Ratkaisu. Peilataan $ABCDEFG$ yli suoran AG seitsenkulmioksi $AGHIJKL$. Selvästi (ajatellaan seitsenkulmioiden ympäri piirrettyjä ympyröitä!) $\angle CAG = \frac{4}{7} \cdot 180^\circ$ ja $\angle GAJ = \frac{3}{7} \cdot 180^\circ$. Siis $\angle CAJ = 180^\circ$ eli C, A ja J ovat samalla suoralla. Edelleen $CG = GJ = AD$ ja $\angle BCA = \angle ACG$. Kolmiot ABC ja CGJ ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CJ}{CG} = \frac{AC + AD}{AD}.$$

Näin ollen

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{AC + AD}{AC \cdot AD} = \frac{1}{AB}.$$

Mutta $AB = 1$, ja väite on todistettu.

14. *Tasossa on $3n$ pistettä ($n > 1$) siten, että mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla ja jokaisen kahden pisteen välimatka on enintään 1. Osoita, että on olemassa n kolmiota, joista millään kahdella ei ole yhteisiä pisteitä, niin että jokainen edellä mainituista $3n$:stä pisteestä on tasan yhden kolmion kärki ja kolmioiden yhteen laskettu pinta-ala on pienempi kuin $\frac{1}{2}$.*

Ratkaisu. Olkoot pisteet P_1, P_2, $\ldots$, P_{3n}. Piirretään suora ℓ niin, että kaikki pisteet P_i ovat samalla puolella suoraa ℓ ja ℓ ei ole yhdensuuntainen minkään suoran P_iP_j kanssa. (Viimeksi mainituja suoria on äärellinen määrä, joten tällainen ℓ voidaan piirtää. Olkoon d_i pisteen P_i etäisyys suorasta ℓ. Jos olisi $d_i = d_j$ jollain $i \neq j$, olisi $\ell \| P_iP_j$. Pisteet P_i voidaan siis numeroida niin, että $0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{3n}$. Piirretään jokaisen pisteen P_{3j+1}, $0 \leq j \leq n-1$ kautta suora $\ell_j \| \ell$ ja pisteen P_{3n} kautta suora $\ell_n \| \ell$. Olkoon a_j suorien ℓ_{j+1} ja ℓ_j etäisyys. Jokainen kolmio $P_{3j+1}P_{3j+2}P_{3j+3}$ sisältyy suorakaiteeseen, jonka toiset sivut ovat suorilla ℓ_{j+1} ja ℓ_j ja toiset sivut kulkevat kolmion kahden kärjen kautta ja ovat kohtisuorassa suoraa ℓ vastaan. Kolmiota $P_{3n-2}P_{3n-1}P_{3n}$ lukuun ottamatta jokaisen kolmion $P_{3j+1}P_{3j+2}P_{3j+3}$ ala on aidosti pienempi kuin puolet tällaisen suorakaiteen alasta. Suorakaiteen ℓ-suorien suuntaisten sivujen pituus on pienempi kuin niiden kolmion kärkipisteiden etäisyys, joiden kautta suorakaiteen ℓ:ää vastaan kohtisuorat sivut kulkevat ja suorakaiteen ℓ:ää vasaan kohtisuorien sivujen pituus on e_j. Suorakaiteen ala on siis $\leq e_j$ Lukujen e_j summa puolestaan on enintään pisteen P_1 ja P_{3n} etäisyys, joka on ≤ 1. Yhdistämällä havainnot, saadaan kolmioiden $P_{3i+1}P_{3i+2}P_{3i+3}$, $i = 0, 1 \ldots, 3n-1$ alojen summaksi luku, joka on aidosti pienempi kuin puoli.

15. *Yksikkökuutiossa on* 75 *pistettä. Osoita, että jonkin näistä pisteistä muodostuvan kolmion ala on enintään* $\dfrac{7}{72}$.

Ratkaisu. Jos kahden tason τ_1 ja τ_2 välinen kulma on α ja tasossa τ_1 on kuvio, jonka ala on S, niin tämän kuvion tasossa τ_2 olevan kohtisuoran projektion ala on $S\cos\alpha$. Jos tason τ yksikkönormaalivektori on $\overrightarrow{n} = n_1\overrightarrow{i} + n_2\overrightarrow{j} + n_3\overrightarrow{k}$, niin $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{k} = n_3$, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{j} = n_2$ ja $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{i} = n_1$ ovat tason τ ja xy-tason, xz-tason ja yz-tason välisten kulmien kosinit. Koska $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = |\overrightarrow{n}|^2 = 1$, niin tasossa τ olevan kuvion alan S ja sen koordinaattitasoilla olevien projektioiden pinta-alojen S_1, S_2 ja S_3 välillä valitsee yhteys $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. Ajatellaan nyt kolmiota, joka on kokonaan sellaisen suorakulmaisen särmiön sisällä, jonka särmät ovat a, b ja c. Kolmion projektiot kullekin särmiön sivutahkolle ovat enintään puolet sivutahkon alasta. Kolmion alalle S pätee näin ollen epäyhtälö

$$S^2 \leq \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Yksikkökuutio voidaan jakaa 36:ksi suorakulmaiseksi särmiöksi, joiden särmät ovat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{6}$. Koska $2 \cdot 36 = 72 < 75$, ainakin yhdessä näistä särmiöistä on ainakin kolme annetuista pisteistä. Ne muodostavat kolmion, jonka ala yllä sanotun perusteella on enintään

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\cdot 6}\right)^2} = \frac{7}{72}.$$