Tammikuun 2012 helpommat kirjevalmennustehtävät

Mieluiten käsin puhtaaksikirjoitetut ratkaisut voi lähettää helmikuun loppuun mennessä osoitteeseen

Esa Vesalainen
Huddingenpolku 2A15
01600 Vantaa

Kysymyksiä voi esittää sähköpostitse osoitteeseen

esavesalainen@gmail.com

1. Kuinka monta on sellaisia 7-numeroisia luonnollisia lukuja, jotka eivät ala numerolla 1 eivätkä pääty numeroon 1?

2. Olkoon $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ n kirjaimen joukko. Kutsumme *sanaksi* mitä tahansa m peräkkäisen joukosta C valitun kirjaimen jonoa, joka ei ala eikä pääty kirjaimella c_1 ja missä $m \leqslant n$.

Kuinka monta tällaista sanaa voimme muodostaa joukon C kirjaimista?

3. Etsi kaikki kaksinumeroiset luonnolliset luvut a, joille löytyy positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille

$$2^{x+y} = 2^x + 2^y + a.$$

4. Olkoon kolmion piirin puolikas p ja olkoon sen sisäänpiirretyn ympyrän säde r. Osoita, että $p \geqslant 3\sqrt{3}\,r$. Milloin tässä vallitsee yhtäsuuruus?

5. Olkoot x, y ja z sellaisia kokonaislukuja, että $x^2+y^2=z^2$. Osoita, että $3 \mid xy$ ja että $5 \mid xyz$.

6. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$, ja oletetaan, että

$$(2b-a)^2 + (2b-c)^2 = 2\left(2b^2 - ac\right).$$

Osoita, että luvut a, b ja c ovat jonkin aritmeettisen jonon kolme peräkkäistä elementtiä.

7. Kolmion $\triangle ABC$ sivujen BC, CA ja AB keskipisteet ovat L, M ja N, tässä järjestyksessä. Osoita, että

$$\widehat{LAC} = \widehat{ABM} \text{ jos ja vain jos } \widehat{ANC} = \widehat{ALB}.$$

8. Etsi kaikki alkuluvut p, q ja r, joille $p > q > r$ ja joille myös luvut $p-q$, $p-r$ ja $q-r$ ovat alkulukuja.

9. Olkoon $\triangle ABC$ teräväkärkinen kolmio, olkoot D ja E sen kärjistä A ja B piirrettyjen korkeusjanojen kannat, olkoot A' ja B' janojen AD ja BE keskipisteet, olkoon X suorien CA' ja BE leikkauspiste, ja olkoon Y suorien CB' ja AD leikkauspiste. Osoita, että pisteet A', B', X ja Y ovat saman ympyrän kehällä.

10. Olkoot a, b ja c sellaisia reaalilukuja, että $abc \neq 0$, $a+b+c=0$ ja $a^3+b^3+c^3 = a^5+b^5+c^5$. Osoita, että

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{6}{5}.$$