Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, helmikuu 2018
Ratkaisuehdotuksia

Helpompia tehtäviä

1. Mikä on suurin positiivinen kokonaisluku n, jolle $n^3 + 100$ on jaollinen $n + 10$:llä?

Ratkaisu. Jaetaan polynomi toisella: $n^3 + 100 = (n + 10)(n^2 - 10n + 100) - 900$. Jos $n + 10 \mid n^3 + 100$, niin $n + 10 \mid (n + 10)(n^2 - 10n + 100) - (n^3 + 100) = 900$. Suurin n, jolle tämä pätee, on 890.

2. a) Olkoon $n > 2$ kokonaisluku. Todista, että murtoluvuista

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

parillinen lukumäärä on supistumattomia.

b) Osoita, että murtoluku $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ on supistumaton, kun n on positiivinen kokonaisluku.

Ratkaisu. a) Jos murtoluku $\dfrac{k}{n}$ on supistumaton, myös $\dfrac{n-k}{n}$ on supistumaton. Näin jonon supistumattomat murtoluvut saadaan pareiksi, paitsi mahdollisesti keskimmäinen. Mutta murtoluku $\dfrac{n/2}{n}$ supistuu muotoon $\dfrac{1}{2}$.

b) Käytetään Eukleideen algoritmia:

$$\mathrm{syt}(12n + 1, 30n + 2) = \mathrm{syt}(6n, 12n + 1) = \mathrm{syt}(6n, 1) = 1.$$

Ensimmäisessä vaiheessa käytetään yhtälöä $30n + 2 = 2(12n + 1) + 6n$.

3. Osoita, että

$$2 \cdot 3^n \leq 2^n + 4^n, \ n = 1, 2, \ldots$$

Osoita lisäksi, että epäyhtälö on aito, kun $n \neq 1$.

Ratkaisu. Tapaukset $n = 1$ ja $n = 2$ on helppo tarkistaa: $2 \cdot 3 = 2 + 4$ ja $2 \cdot 3^2 = 18 < 20 = 2^2 + 4^2$. Todistetaan tapauksessa $n \geq 3$ vahvempi epäyhtälö $2 \cdot 3^n < 4^n$. Kun $n = 3$, epäyhtälö saa muodon $2 \cdot 27 < 64$, joka on tosi. Loppu suujuu induktiolla: jos epäyhtälö on todistettu jollekin n:n arvolle, se on tosi $n + 1$:lle, koska $2 \cdot 3^{n+1} = 3(2 \cdot 3^n) < 3(4^n) < 4^{n+1}$.

4. Olkoot a, b, c positiivisia lukuja. Osoita, että

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1\right)^2 \geq (2a + b + c)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

ja että epäyhtälössä on yhtäsuuruus jos ja vain jos $a = b = c$.

Ratkaisu. Otetaan käyttöön lyhennysmerkintä

$$\sum_{\circlearrowleft} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b),$$

ts. summataan lausekkeen kaikki kolme muunnelmaa, jotka saadaan vaihtamalla syklisesti arvot $a \mapsto b \mapsto c \mapsto a$. Kun vasen puoli kerrotaan auki, saadaan

$$X = \sum_{\circlearrowleft} \left(\frac{a^2}{b^2} + 2\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}\right) + 1$$

ja kun oikea puoli kerrotaan auki, saadaan

$$Y = 2\frac{a}{b} + 2\frac{a}{c} + 2\frac{b}{a} + 2\frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 6.$$

Puolten erotus on

$$X - Y = \left(\sum_{\circlearrowleft} \frac{a^2}{b^2}\right) + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 5.$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = 2$$

ja

$$\sum_{\circlearrowleft} \frac{a^2}{b^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}} = 3,$$

joten $X - Y \geq 0$. Tässä epäyhtälössä on yhtäsuuruus, jos ja vain jos $a = b = c$, ja tällöin on samoin myös edellisessä epäyhtälössä.

5. A ja B leipovat maanantaina kakkuja. A leipoo kakun joka viides päivä ja B leipoo kakun joka toinen päivä. Kuinka monen päivän jälkeen he molemmat leipovat seuraavan kerran kakun maanantaina?

Ratkaisu. Aina seitsemän päivän välein on maanantai. Koska $\text{pyj}(2, 5, 7) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, niin A ja B leipovat seuraavan kerran molemmat kakun maanantaina 70 päivän jälkeen.

6. Onko mahdollista, ettei vuoden minkään kuun ensimmäinen päivä ole maanantai?

Ratkaisu. Numeroidaan viikonpäivät luvun 7 jakojäännösten mukaan; olkoon maanantai 0, tiistai 1 ja niin edelleen, jolloin sunnuntai on 6. Tiedetään, että tammi-, maalis-, touko-, heinä-, elo-, loka- ja joulukuussa on 31 päivää, huhti-, kesä-, syys- ja marraskuussa 30 päivää sekä helmikuussa 29 tai 28 päivää riippuen siitä, onko karkausvuosi vai ei. Aina seitsemän päivän välein viikonpäivä on sama. Olkoon vuoden ensimmäinen viikonpäivä x. Nyt voidaan kuukausien päivien lukumäärien perusteella kirjoittaa taulukko kunkin kuukauden ensimmäisistä päivistä tammikuusta lokakuuhun. Koska taulukossa esiintyvät sekä karkausvuoden että ei karkausvuoden tapauksissa kaikki viikonpäivät $x, x + 1, \ldots, x + 6$, niin ensimmäisen päivän on jossain kuussa oltava maanantai. Ei siis ole mahdollista, että minkään kuun ensimmäinen päivä ei olisi maanantai.

Kuukausi	Karkausvuosi	Ei-karkausvuosi
Tammikuu	x	x
Helmikuu	$x+3$	$x+3$
Maaliskuu	$x+4$	$x+3$
Huhtikuu	x	$x+6$
Toukokuu	$x+2$	$x+1$
Kesäkuu	$x+5$	$x+4$
Heinäkuu	x	$x+6$
Elokuu	$x+3$	$x+2$
Syyskuu	$x+6$	$x+5$
Lokakuu	$x+1$	x

7. Positiivisten kokonaislukujen jonossa termi saadaan lisäämällä edelliseen termiin sen suurin numero. Mikä on suurin mahdollinen määrä peräkkäisiä parittomia lukuja, joita jonossa voi olla?

Ratkaisu. Jotta jonon termi ja sitä seuraava termi olisivat molemmat parittomia, on termin viimeisen numeron oltava pariton ja suurimman numeron parillinen. Näin ollen tarkasteltavassa termissä on oltava vähintään kaksi numeroa. Siis luvun suurin numero voi muuttua enintään yhdellä, kun termiin lisätään sen suurin numero. Nyt pariton jono päättyy, kun suurin numero kasvaa yhdellä, sillä suurin numero muuttuu parittomaksi. Näin ollen peräkkäisten parittomien lukujen jonossa niiden suurimman numeron on oltava sama. Täten myös peräkkäisten parittomien lukujen erotuksten on oltava vakio. Koska $5n$ on jaollinen luvulla 10 kaikilla parillisilla kokonaisluvuilla n, niin korkeimman termin on viimeistään viiden peräkkäisen parittoman termin jälkeen kasvettava yhdellä. Siis parittomia termejä on enintään 5 peräkkäin. Tämä on mahdollista esimerkiksi jonolla $807, 815, 823, 831, 839$. Näin ollen vastaus on 5.

8. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen luvulla 24. Osoita, että luvun $n-1$ positiivisten tekijöiden summa on myös jaollinen luvulla 24.

Ratkaisu. Olkoon d luvun $n-1$ positiivinen tekijä. Koska n on jaollinen luvulla 24, niin $n-1 = 24m-1$ jollain positiivisella kokonaisluvulla m. Lisäksi $n-1$ ei voi olla olla neliöluku, koska $n-1 \equiv -1 \pmod 4$ ja neliöt ovat 0 tai 1 $\pmod 4$. Siis d ja $\frac{n-1}{d}$ ovat erisuuria lukuja sekä ne molemmat ovat luvun $n-1$ tekijöitä. Suoraan laskemalla saadaan, että $d + \dfrac{n-1}{d} = \dfrac{d^2-1+24m}{d}$. Osoitetaan, että tämä luku on jaollinen 24:llä, mistä väite seuraa. Koska $\mathrm{syt}(d,24) = 1$, niin $\dfrac{d^2-1+24m}{d}$ on jaollinen luvulla 24 täsmälleen silloin, kun $d^2-1 = (d-1)(d+1)$ on jaollinen luvulla 24. Luku d on luvun $n-1$ tekijänä pariton, joten sekä lukujen $d-1$ että $d+1$ on oltava parillisia ja täsmälleen toinen niistä on jaollinen luvulla 4. Täten $(d-1)(d+1)$ on jaollinen luvulla 8. Edelleen, koska d on luvun $n-1$ tekijä, niin se ei voi olla kolmella jaollinen. Siis $d-1$ tai $d+1$ on kolmella jaollinen eli $(d-1)(d+1)$ on jaollinen luvulla 3. Siis $(d-1)(d+1)$ on jaollinen luvulla 24. Täten luvun n tekijöiden summa voidaan laskea yhdistelemällä tekijöitä pareihin, joiden summat ovat aina jaollisia luvulla 24. Siis myös kaikkien tekijöiden summa on jaollinen luvulla 24.

9. Välitunnilla n lasta istuu ympyrässä opettajan ympärillä ja pelaa peliä. Pelissä opettaja kiertää ympyrää myötäpäivään ja antaa oppilaille karkkeja seuraavan säännön mukaisesti: Ensin opettaja antaa jollekin oppilaista karkin. Sitten hän hyppää yhden oppilaan yli ja antaa seuraavalle oppilaalle karkin, sitten hän hyppää kahden oppilaan yli ja antaa karkin, seuraavaksi kolmen oppilaan yli ja niin edelleen. Etsi kaikki luvut n, joilla lopulta, mahdollisesti monen kierroksen jälkeen, jokaisella lapsella on ainakin yksi karkki.

Ratkaisu. Numeroidaan oppilaat $1, 2, \ldots, n$ niin, että ensimmäisenä karkin saava on 1, hänen vasemmalla puolellaan oleva 2 ja niin edelleen kunnes kaikki on numeroitu. Olkoon $f(k) = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Nyt $f(k) \pmod n$ kertoo, kuka oppilaista saa k:ntena karkin. Halutaan, että kaikki luvut $1, 2, 3, \ldots, n$ esiintyvät jossain vaiheessa $f(k)$:n arvoina modulo n.

Tarkastellaan ensin tapausta, että n on pariton. Selvästi $n = 1$ käy. Oletetaan, että $n > 1$. Nyt

$$f(k+n) = \frac{(k+n)(k+n+1)}{2} = \frac{n(2k+n+1) + k(k+1)}{2} \equiv f(k) \pmod n.$$

Näin ollen kaikki oppilaat voivat saada karkin vain, jos luvut $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ kuuluvat eri jäännösluokkiin modulo n. Mutta $f(n-k) \equiv f(k) \pmod n$, joten eri luokkiin kuuluvia arvoja on enintään $\dfrac{n+1}{2} < n$. Täten parittomista luvun n arvoista ainoastaan $n = 1$ kelpaa.

Kun n on parillinen, niin $f(k+2n) \equiv f(k) \pmod n$. Täten riittää tarkastella vain funktion $f(k)$ ensimmäistä $2n$ arvoa. Lisäksi $f(2n-1-k) \equiv f(k) \pmod n$ ja $f(2n-1) \equiv 0 \pmod n$, joten kaikki oppilaat saavat karkin jos ja vain jos $f(1), f(2), \ldots, f(n-1)$ kuuluvat eri jäännösluokkiin, eikä yksikään niistä ole 0. Osoitetaan, että $n = 2^m$ jollain positiivisella kokonaisluvulla m. Osoitetaan ensin, että kaikki luvut $n = 2^m$ käyvät ratkaisuiksi. Jos $f(r) \equiv f(s) \pmod n$ joillain $0 < r, s < n$, niin

$$(r-s)(r+s+1) \equiv 0 \pmod n.$$

Mutta $r-s$ ja $r+s+1$ ovat eri pariteettia ja kumpikin niistä on pienempi kuin n. Siis ei ole mahdollista, että $f(r) \equiv f(s) \pmod n$. Täten $n = 2^m$ käy ratkaisuksi. Osoitetaan vielä, ettei muita ratkaisuja parillisella n ole. Oletetaan, että $m \mid n$ ja n toteuttaa halutut ehdot. Jos nyt $f(k) \equiv a \pmod n$, niin $f(k) \equiv a \pmod m$ eli myös luku m toteuttaa halutut ehdot. Mutta parittomat luvut $m \neq 1$ eivät edellisen kappaleen mukaan käy. Siis luvun n on oltava luvun 2 potenssi.

Halutut ehdot toteuttavat luvut ovat 2^m, missä m on ei-negatiivinen kokonaisluku.

10. Yksi Eulerin konjektuureista kumottiin 1960-luvulla, kun kolme amerikkalaista matemaatikkoa osoitti, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolle

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5.$$

Etsi luku n.

Ratkaisu. Fermat'n pienen lauseen mukaan kaikille kokonaisluvuilla x pätee $x^5 \equiv x \pmod 5$ ja $x^5 \equiv x \pmod 3$. Täten on oltava

$$n \equiv 3 + 0 + 4 + 2 \equiv 4 \pmod 5$$

ja

$$n \equiv 1 + 2 + 0 + 0 \equiv 0 \pmod 3.$$

Lisäksi selvästi $n > 133$. Täten $n = 144$ tai $n \geq 174$. Kun $n \geq 174$, niin

$$\begin{aligned} n^5 &\geq 174^5 \\ &= 133^5 + 5 \cdot 133^4 \cdot 41 + 10 \cdot 133^3 \cdot 41^2 + 10 \cdot 133^2 \cdot 41^3 + 5 \cdot 133 \cdot 41^4 + 41^5 \\ &> 133^5 + 110^5 + 84^5 + 10 \cdot 133^2 \cdot 41^3 + 5 \cdot 133 \cdot 41^4 + 27^5 \\ &> 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5. \end{aligned}$$

Siis $n = 144$.

Vaikeampia tehtäviä

11. Olkoot a, b, c, d positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq 2abcd - 1.$$

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $a \geq b \geq c \geq d$. Huomataan aluksi, että koska luvut ovat positiivisia kokonaislukuja, niille pätee $2a - 1 \geq a$ jne. Lisäksi jos $b \geq 2$, niin

$$2a - 1 \geq \frac{3}{2}a \quad \text{ja} \quad 2b - 1 \geq \frac{3}{2}.$$

Tällöin voidaan arvioida

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq \frac{3}{2}a\,\frac{3}{2}bcd = \frac{9}{4}abcd > 2abcd > 2abcd - 1.$$

Tämä osa väitettä on todistettu. Oletetaan nyt, että ehto $b \geq 2$ ei päde, eli $b = c = d = 1$. Nyt

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) = 2a - 1 = 2abcd - 1.$$

Väite on todistettu.

12. Olkoot x, y, z reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdot $x + y \geq 2z$ ja $y + z \geq 2x$. Osoita, että

$$5(x^3 + y^3 + z^3) + 12xyz \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)$$

ja että yhtäsuuruus vallitsee jos ja vain jos $x + y = 2z$ tai $y + z = 2x$.

Ratkaisu. Merkitään $m = \dfrac{x+y+z}{3}$. Nyt

$$27m^3 = (x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y+z)(xy+yz+xz) - 3xyz.$$

Tarkastellaan vasemman ja oikean puolen erotusta:

$$\begin{aligned} &5(x^3 + y^3 + z^3) + 12xyz - 3(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) \\ &= 2(x^3 + y^3 + z^3) - \big(3(xy(x+y) + xz(z+x) + yz(y+z)\big) + 12xyz \\ &= 2(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x+y+z)(xy+xz+yz) + 21xyz \\ &= 2(x+y+z)^3 - 9(x+y+z)(xy+yz+xz) + 27xyz \\ &= -27\big(-2m^3 + m(xy+yz+zx) - xyz\big) \\ &= -27\big(m^3 - m^2(x+y+z) + m(xy+yz+zx) - xyz\big) \\ &= -27(m-x)(m-y)(m-z). \end{aligned}$$

Koska $3(m-z) = x + y - 2z \geq 0$, $3(m-x) = y + z - 2x \geq 0$ ja $3(m-y) = x + z - 2y \leq 0$, pätee

$$5(x^3 + y^3 + z^3) + 12xyz - 3(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = -27(m-x)(m-y)(m-z) \geq 0,$$

kuten vaadittu. Yhtäsuuruus vallitsee vain, jos vähintään yksi tulontekijöistä on nolla. Koska $x, z \leq m \leq y$, täytyy pätee $x = z = m$ jos $y = m$, eli joka tapauksessa yhtäsuuruus vallitsee silloin, jos $x = m$ tai $z = m$. Ensimmäinen ehto on yhtäpitävä ehdon $y + z = 2x$ kanssa ja toinen ehto ehdon $y + x = 2z$ kanssa.

13. Osoita, että jos x ja y ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$(x+y)^5 \geq 12xy(x^3+y^3)$$

ja että vakio 12 on paras mahdollinen (eli jos se se korvataan jollain suuremmalla vakiolla, niin on olemassa positiiviset luvut x ja y, joilla epäyhtälö ei päde).

Ratkaisu. Huomataan aluksi, että tekijä $(x+y)$ löytyy molemmilta puolilta. Jos siis $x=-y$, on epäyhtälössä yhtäsuuruus (molemmat puolet ovat nollia). Oletetaan nyt, että $x \neq -y$ ja jaetaan tekijä $(x+y)$ pois, jolloin jäljelle jää väitteeksi

$$(x+y)^4 \geq 12xy(x^2-xy+y^2).$$

Kerrotaan auki. Väite muuttuu muotoon

$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \geq 12x^3y-12x^2y^2+12xy^3,$$

joka puolestaan sievenee muotoon

$$x^4-8x^3y+18x^2y^2-8y^3x+y^4 \geq 0,$$

ja edelleen epäyhtälöksi

$$(x^2-4xy+y^2)^2 \geq 0,$$

joka on selvästi tosi.

Jos vakio olisi suurempi kuin 12, merkitään $12+a$ $(a>0)$, muuttuisi epäyhtälö muotoon

$$(x^2-4xy+y^2)^2-axy(x^2+y^2-xy) \geq 0.$$

Kun $x^2-4xy+y^2=0$, ja $x,y>0$, eli $x=y(1+\sqrt{3})$, on jälkimmäinen termi nollasta poikkeava ja etumerkin ansiosta negatiivinen. Väite ei päde.

14. Kuusitiellä on n asukasta ja m kerhoa. Minkään kerhon jäsenmäärä ei ole kuudella jaollinen. Toisaalta minkä tahansa kahden kerhon yhteisten jäsenten määrä on kuudella jaollinen. Todista, että $m \leq 2n$.

Ratkaisu. Jaetaan kerhot kahteen ryhmään: (A) kerhot joiden jäsenmäärä on kahdella jaoton; (B) muut kerhot. Ryhmään (B) kuuluvan kerhon jäsenmäärä on selvästi kolmella jaoton. Todistetaan, että kummassakin ryhmässä on enintään n kerhoa. Riittää todistaa kaikille alkuluvuille p, että jos on olemassa k kerhoa, joissa jäsenmäärä on p:llä jaoton, ja jos minkä tahansa kahden näistä kerhoista yhteisten jäsenten määrä on p:llä jaollinen, niin $k \leq n$. Tämä tehtiin alkuluvulle $p=2$ valmennusviikonloppuna, ja todistus yleistyy seuraavalla tavalla mielivaltaiselle alkuluvulle p.

Olkoot $v_1,\ldots,v_k$ kerhojen karakteristiset vektorit, ts. v_j on n:n mittainen vektori, jonka i:s alkio on 1 jos henkilö i kuuluu kerhoon j, muuten 0. Todistetaan, että vektorit ovat lineaarisesti riippumattomat rationaalilukujen kunnan $\mathbb{Q}$ yli. Jos vektorien lineaarikombinaatio rationaalisilla nollasta eroavilla kertoimilla $r_1,\ldots,r_k$ on nolla eli

$$r_1v_1+\cdots+r_kv_k=0,$$

voidaan yhtälö ensin kertoa kerrointen nimittäjien pienimmällä yhteisellä monikerralla, jolloin saadaan kokonaislukukertoimet, ja sitten jakaa näiden suurimmalla yhteisellä tekijällä, jolloin saadaan

$$r_1'v_1+\cdots+r_k'v_k=0,$$

missä $r_1',\ldots,r_k'$ ovat kokonaislukuja, joista ainakin yksi on p:llä jaoton; olkoon tämä r_j'.

Tarkastellaan nyt lineaarikombinaation sisätuloa v_j:n kanssa:

$$r_1'(v_1,v_j)+\cdots+r_k'(v_k,v_j)=0.$$

Kaikki termit lukuunottamatta $r_j'(v_j,v_j)$:tä ovat jaollisia p:llä, mutta $r_j'(v_j,v_j)$ ei ole. Silloin summa ei voi olla 0, mikä on ristiriita. Koska vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, niitä voi olla enintään n.

15. $A_1, \dots, A_m$ ovat joukon $\{1, 2, \dots, n\}$ aitoja osajoukkoja, ja millä tahansa eri luvuilla $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ on täsmälleen yksi A_k, joka sisältää molemmat. Todista, että $m \geq n$.

Ratkaisu. Todistus on helppo seuraus valmennustapahtumassa esitetystä Fisherin epäyhtälöstä: jos on annettu m epätyhjää n-alkioisen joukon osajoukkoa, joista millä tahansa kahdella on tasan yksi yhteinen alkio, niin $m \leq n$.

Tarkastellaan joukkoa, jonka alkiot ovat $A_1, \dots, A_m$ ja sen osajoukkoja $S_1, \dots, S_n$, missä S_j sisältää ne A_i:t, jotka sisältävät j:n. Kahdella eri j, k leikkaus $S_j \cap S_k$ on niiden A_i:den joukko, jotka sisältävät sekä j:n että k:n, ja tehtävän mukaan on tasan yksi sellainen A_i. Siten Fisherin epäyhtälön ehto täyttyy, mistä seuraa $n \leq m$.

16. Määritä kaikki parit (x, y) kokonaislukuja, joille $x^2 = y(2x - y) + 1$.

Ratkaisu. Muokataan ehto yhtäpitävään muotoon:

$$x^2 = y(2x - y) + 1 \iff x^2 - 2xy + y^2 = 1 \iff (x - y)^2 = 1 \iff y = x \pm 1.$$

Siis ratkaisuja ovat kaikki parit $(x, x + 1)$ ja $(x, x - 1)$.

17. Määritä kaikki parit (x, y) positiivisia kokonaislukuja, joille $x^y = y^x$.

Ratkaisu. Symmetrian nojalla riittää etsiä parit, joille $x \geq y$. Jos $x = y$, yhtälö on selvästi voimassa, joten oletetaan, että $x > y$. Korottamalla yhtälö puolittain potenssiin $\dfrac{1}{xy}$ saadaan sille yhtäpitävä muoto $x^{1/x} = y^{1/y}$. Olkoon $f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Tällä funktiolla on derivaatta $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \dfrac{\ln x}{x} = x^{1/x} \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Tapaus 1: $y \geq 3$. Kun $x \geq 3 > e$, pätee $1 - \ln x < 0$, joten $f'(x) < 0$ eli f on aidosti vähenevä välillä $[e, \infty)$. Siis kun $x > y \geq 3$, on $f(3) \leq f(y) < f(x)$. Siis $x = y$ on ainoa ratkaisu tässä tapauksessa.

Tapaus 2: $y = 2$. Jos $x \geq 5$, niin $f(x) \leq f(5) < f(4) = 4^{1/4} = 2^{1/2} = f(2)$. jolloin ratkaisuja ei ole. Jos $x = 4$, yhtälö on voimassa, ja jos $x = 3$, ei ole.

Tapaus 3: $y = 1$. Tällöin yhtälö on $x^1 = 1^x$, joten $x = 1$ on ainoa ratkaisu.

Ratkaisuja ovat siis $(2, 4)$, $(4, 2)$ ja (x, x) kaikilla x.

18. Määritä kaikki parit (p, q) alkulukuja, joille $p \mid 2q + 1$ ja $q \mid 2p + 1$.

Ratkaisu. Symmetrian nojalla oletetaan, että $p \geq q$. Koska $p \mid 2q + 1$, on $pk = 2q + 1$ jollain k.

Tapaus 1: $q = 2$. Tällöin $p \mid 5$, joten $p = 5$, mutta $q \nmid 2 \cdot 5 + 1$, joten ei saatu ratkaisua. Oletetaan seuraavissa tapauksissa, että molemmat alkuluvut ovat parittomia.

Tapaus 2: $k \geq 5$. Tällöin ehdoista seuraa $p \leq \dfrac{2q + 1}{5}$. Kun sijoitetaan tämä epäyhtälöön $q \leq 2p + 1$, saadaan $q \leq 2\dfrac{2q + 1}{5} + 1$ eli $q \leq 3$. Mutta $2q + 1 \leq 7$ ei voi olla pk, missä $k \geq 5$.

Tapaus 3: $k = 2$ **tai** $k = 4$. Saadaan $p \equiv 2q + 1 \equiv 1 \pmod 2$, mikä on ristiriita.

Tapaus 4: $k = 3$. Nyt $q \mid 2p + 1 \iff q \mid 2\dfrac{2q + 1}{3} + 1 \implies q \mid 4q + 5 \implies q = 5$. Mutta silloin $p = \dfrac{11}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Tapaus 5: $k = 1$. Nyt $q \mid 2p + 1 \iff q \mid 2(2q + 1) + 1 = 4q + 3 \iff q \mid 3 \iff q = 3$. Saadaan $q = 3$, $p = 7$.

Ainoat ratkaisut ovat siis $(3, 7)$ ja $(7, 3)$.

19. Olkoot x, y ja z kokonaislukuja, joille $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$. Osoita, että $x = y = z = 0$.

Ratkaisu. Käytetään äärettömän laskeutumisen periaatetta. Oletetaan, että yhtälölle on ratkaisu (x, y, z). Tarkastellaan yhtälöä modulo 4: parillisen luvun neliö on neljällä jaollinen ja pariton luku on 1 modulo 4, joten jos kaikki kolme lukua ovat parittomia, niiden summa ei voi olla 2 modulo 4. Siten ainakin yksi luku on parillinen, mutta silloin $2xyz \equiv 0 \pmod 4$ ja kaikkien lukujen on oltava parillisia. Asetetaan $x = 2x'$, $y = 2y'$ ja $z = 2z'$, jolloin

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 4x'y'z'.$$

Tarkastelu modulo 4 osoittaa taas, että kaikkien lukujen on oltava parillisia. Asetetaan $x' = 2x''$, $y' = 2y''$ ja $z' = 2z''$, jolloin

$$(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2 = 8x''y''z''.$$

Näin jatkamalla saadaan tulos, että kaikilla k luvut $x/2^k$, $y/2^k$ ja $z/2^k$ ovat kokonaislukuja, mikä on mahdollista vain jos $x = y = z = 0$.

20. Sanotaan, että kolmio on *täydellinen*, jos sen sivujen pituudet ovat kokonaislukuja ja sen piiri on yhtäsuuri kuin sen ala. Määritä kaikki täydelliset kolmiot.

Ratkaisu. Tehdään ensin muuttujanvaihto, joka on joskus hyödyllinen kolmiotehtävissä: olkoot u, v ja w etäisyydet kolmion kärjistä sisäympyrän tangeerauspisteisiin. Symmetrian nojalla etäisyys pisteestä A kumpaakin viereiseen tangeerauspisteeseen on sama, samoin muista kärkipisteistä. Saadaan yhtälöt $a = v + w$, $b = w + u$ ja $c = u + v$, joista voidaan ratkaista $u = \frac{1}{2}(b + c - a)$ jne. Koska sivujen pituudet ovat kokonaislukuja, u, v ja w ovat positiivisia rationaalilukuja, joiden nimittäjä on enintään 2. Kolmion piiri on näiden muuttujien avulla ilmaistuna $2(u+v+w)$ ja pinta-ala Heronin kaavan mukaan $\sqrt{(u + v + w)uvw}$. Jos nämä ovat yhtäsuuret, pätee

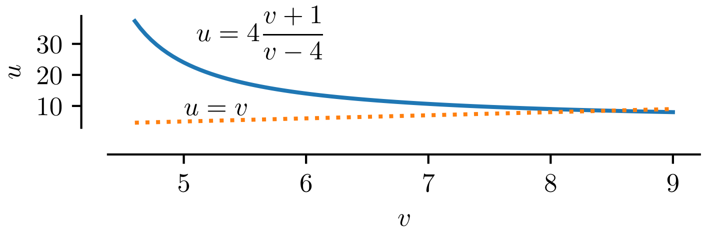
$$uvw = 4(u + v + w). \tag{1}$$

Todistetaan ensin, että u, v ja w ovat kokonaislukuja. Jos esimerkiksi u olisi kokonaisluku mutta v ei, sivunpituus $c = u + v$ ei olisi kokonaisluku. Jos taas mikään luvuista u, v ja w ei olisi kokonaisluku, yhtälön (1) vasen puoli ei olisi kokonaisluku mutta oikea puoli olisi.

Voidaan olettaa, että $u \geq v \geq w$. Jaetaan tarkastelu tapauksiin pienimmän pituuden w mukaan.

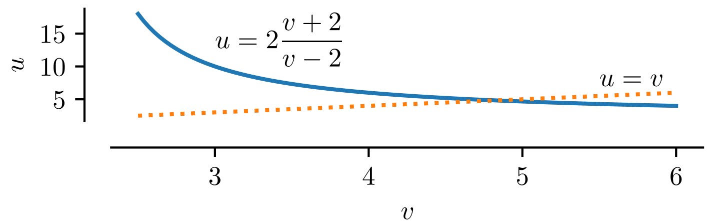
Tapaus 1: $w = 1$**.** yhtälöstä (1) ratkaistaan $u = 4(v + 1)/(v - 4)$. Jaetaan tarkastelu alitapauksiin v:n arvon mukaan. On oltava $4 < v < 9$, jotta u on positiivinen ja vähintään yhtä suuri kuin v. Alitapauksista saadaan seuraavat arvot u:lle, joista vain kolme on kokonaislukuja.

w	v	u
1	5	24
1	6	14
1	7	32/3
1	8	9



Tapaus 2: $w = 2$**.** Saadaan $u = 2(v + 2)/(v - 2)$. On oltava $2 < v < 5$.

w	v	u
2	3	10
2	4	6



Tapaus 2: $w = 3$**.** Saadaan $u = 2(v + 2)/(v - 2)$. On oltava $2 < v < 5$. Millään näistä arvoista ei saada kokonaisratkaisua.

Tapaus 3: $w \geq 4$**.** Koska $v \geq w \geq 4$,

$$u = 4\frac{v + w}{vw - 4} \leq 4\frac{v + w}{16 - 4} = \frac{1}{3}(v + w) \leq \frac{2}{3}v < v,$$

joten ehdot täyttäviä ratkaisuja ei ole.

Kaikkiaan saatiin viisi ratkaisua. Kun siirrytään muuttujista u, v ja w takaisin sivujen pituuksiin, saadaan kolmiot $(6, 25, 29)$, $(7, 15, 20)$, $(9, 10, 17)$, $(5, 12, 13)$ ja $(6, 8, 10)$.