Syyskuun vaativammat valmennustehtävät

Ratkaisuja voi lähettää seuraavaan valmennusviikonloppuun mennessä sähköpostitse osoitteeseen `joni.p.teravainen@utu.fi` tai postitse osoitteeseen

`Joni Teräväinen`
`Reelinkikatu 5A 26`
`20810 Turku`.

Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

1. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, jotka ovat neliölukuja ja joiden kymmenjärjestelmäesitys sisältää korkeintaan kaksi nollasta poikeavaa numeroa (toisin sanoen, jos kymmenjärjestelmäesityksen pituus on d, siinä on vähintään $d-2$ nollaa).

2. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Sanotaan, että positiivinen kokonaisluku n on k-jaollinen, jos pätee

$$m \mid n,\ m+1 \mid n+1,\ \ldots,\ m+k-1 \mid n+k-1$$

jollakin $m \geq 1$, $m \neq n$. Osoita, että jokaisella k on olemassa k-jaollinen luku.

3. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n luvun $n!^{n!^{n!}} - 1$ pienin alkutekijä on pienin lukua n suurempi alkuluku.

4. Anna esimerkki ei-vakiosta kokonaislukukertoimisesta polynomista, jolla on nollakohtana luku $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

5. Määritellään kaksi lukujonoa asettamalla $x_0 = a, y_0 = b$ ja

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n, \\ y_{n+1} &= y_n - x_n, \end{aligned}$$

kun $n \geq 0$. Määritä ne parit (a, b) reaalilukuja, joille ainakin toinen jonoista x_n ja y_n on rajoitettu (Jonon a_n sanotaan olevan rajoitettu, jos on olemassa M, jolle $|a_n| \leq M$ kaikilla n).

6. Määritä kaikki parit (C, D) reaalilukuja, joille pätee seuraavaa. Kaikilla $n \geq 1$ ja millä tahansa jonolla $a_1, \ldots, a_n$ reaalilukuja pätee

$$(a_1^2 + Ca_1 + D) \cdots (a_n^2 + Ca_n + D) \geq (a_1 \cdots a_n)^2 + C(a_1 \cdots a_n) + D.$$

7. Olkoon $F(n)$ lukumäärä niille n merkin jonoille, joissa kukin merkki on a tai b ja mitkään neljä peräkkäistä merkkiä eivät ole $abba$. Osoita, että

$$F(n) = 2F(n-1) - F(n-3) + F(n-4),$$

kun $n \geq 5$.

8. Olkoon $n \geq 1$, ja olkoon T joukko, joka koostuu n tason pisteestä. Osoita, että on olemassa ympyrä, jonka sisäpuolella on vähintään $\frac{n-1}{2}$ joukon T pistettä ja ulkopuolella vähintään $\frac{n-1}{2}$ joukon T pistettä (ympyrän kehäpisteet eivät ole ympyrän sisä- eivätkä ulkopuolella).

9. Kahdella toisiaan sivuavalla ympyrällä O_1 ja O_2 on yhteinen tangentti, joka sivuaa niitä pisteissä A ja B vastaavasti. Olkoon AP ympyrän O_1 halkaisija ja oletetaan, että ympyrän O_2 tangentti pisteen P kautta sivuaa ympyrää O_2 pisteessä Q. Osoita, että $AP = PQ$.

10. Olkoon $ABPC$ suunnikas, jossa ABC on teräväkulmainen kolmio. Kolmion ABC ympärysympyrä kohtaa suoran CP myös pisteessä Q. Osoita, että $PQ = AC$ jos ja vain jos $\angle BAC = 60°$.