HELPOMMAT VALMENNUSTEHTÄVÄT, HELMIKUU 2013

Ratkaisuja voi lähettää huhtikuun alkuun mennessä osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Purpuripolku 7-9 B 10, 00420 Helsinki tai sähköisesti anne-maria.ernvall-hytönen@helsinki.fi. Aikaraja ei ole tarkka, ja yksittäisetkin ratkaisut kannattaa lähettää.

(1) Olkoon x pienin positiivinen kokonaisluku, josta tiedetään, että $2x$ on jonkin kokonaisluvun neliö, $3x$ on jonkin kokonaisluvun kuutio ja $5x$ on jonkin kokonaisluvun viides potenssi. Etsi pienin tällainen x.

(2) Olkoot p ja q reaalilukuja, joilla yhtälöllä

$$x^2 + px + q = 0$$

on kaksi erisuurta reaalista ratkaisua x_1 ja x_2. Seuraavat ehdot pätevät:

(a) Luvut x_1 ja x_2 eroavat yhdellä.

(b) Luvut p ja q eroavat yhdellä.

Osoita, että p, q, x_1 ja x_2 ovat kokonaislukuja.

(3) Olkoot x ja μ positiivisia reaalilukuja, joilla pätee

$$x + y + xy = 3.$$

Osoita, että

$$x + y \geq 2.$$

Milloin päteee yhtäsuuruus?

(4) Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jolla $AC = BC$, ja olkoon piste P ympäripiirretyn ympyrän sillä kaarella CA, jolla piste B ei ole. Olkoot E ja F pisteen C ortogonaaliprojektiot suorille AP ja BP tässä järjestyksessä. Osoita, etä AE ja BF ovat yhtä pitkät.

(5) Listassa on 21 lukua. Jos u, v, w ovat peräkkäiset luvut, niin $v = \frac{2uw}{uw}$. Listan ensimmäinen luku on 100 ja viimeinen 101. Mikä on 15. luku?

(6) Olkoot $p_1, p_2, \ldots, p_{42}$ alkulukuja, kaikki keskenään erisuuria. Osoita, että luku

$$\sum_{j=1}^{42} \frac{1}{p_j^2 + 1}$$

ei voi olla minkään kokonaisluvun neliön käänteisluku.

(7) Ratkaise yhtälöryhmä reaalilukujen joukossa

$$2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128$$
$$(xy^2 + z^4)^3 = 4 + (xy^2 - z^4)^2.$$

(8) Olkoon k ympyrä, jonka keskipiste on M. T on piste ympyrän kehällä, ja t ympyrän k tangentti pisteessä T. P on piste tangentilla t, ja pätee $P \neq T$, ja g on suora, jolla on piste P, mutta kuitenkin $g \neq t$. Suoralla g on ympyrän k kanssa yhteiset

pisteet U ja V, $U \neq V$, ja piste S on keskipiste sillä kaarella UV, jolla ei ole pistettä T. Q on pisteen P kanssa symmetrinen suoran TS suhteen. Osoita, että $QTUV$ on puolisuunnikas.

(9) Määritellään positiivisten kokonaislukujen jono seuraavasti: $a_1 = 1$ ja a_{n+1} on pienin kokonaisluku, jolla toteutuu

$$\text{pyj}(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) > \text{pyj}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Mitkä luvut ovat jonossa?

(10) Kutsutaan kolmen luvun joukkoa *aritmeettiseksi*, jos jokin sen alkioista on kahden muun aritmeettinen keskiarvo. Kutsutaan joukkoa *harmoniseksi*, jos jokin sen alkioista on kahden muun harmoninen keskiarvo. Kuinka monta sellaista kolmen alkion osajoukkoa on joukolla

$$\{z \text{ kokonaisluku, -2011<z<2011}\},$$

että joukko on sekä aritmeettinen että harmoninen?