Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, kesä 2020

Äskettäin harjoiteltiin ratkaisujen kirjoittamista. Kirjoittamisessa kehittyy, kun yrittää sopivan vaikeita tehtäviä ja saa ratkaisuistaan palautetta. Valmennuskirjeistä yritämme antaa hyödyllistä palautetta.

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 14.8.2020 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna tai sähköpostitse. Helpommat tehtävät: `n.palojarvi@gmail.com`, vaativammat: `olli.jarviniemi@gmail.com`.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Helpompia tehtäviä

1. Olkoon $x \geq 1$ reaaliluku. Kumpi luvuista on suurempi; $\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ vai $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$?

2. Kuinka montaa kokonaisluvuista $1, 2, 3 \ldots, 50$ ei voi kirjoittaa kolmen erisuuren kokonaisluvun $1, 2, 3, \ldots, 15$ summana?

3. Laatikossa on keltaisia, sinisiä ja punaisia palloja, kymmenen kutakin väriä. Kuinka monella eri tavalla pallot voidaan jakaa kymmenen ja 20 pallon ryhmiin niin, että kumpikin ryhmä sisältää ainakin yhden pallon kutakin väriä?

4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Järjestetään kokonaisluvut $1, 2, 3, \ldots, n$ jonoon niin, että kukin jonossa oleva luku on joko suurempi tai pienempi kuin kaikki edelliset luvut. Esimerkiksi siis jono 213 käy, sillä $3 > 2$, $3 > 1$ ja $1 < 2$. Sen sijaan jono 132 ei käy, sillä $2 > 1$, mutta $2 < 3$. Kuinka monella eri tavalla luvut voidaan järjestää halutulla tavalla?

5. Onko olemassa kolmio ABC, jonka ortokeskus H on kärjen C peilaus suoran AB suhteen?

6. Mikä on suurin kokonaisluku, joka jakaa luvun

$$(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$$

kaikilla positiivisilla, parillisilla kokonaisluvuilla n?

7. Etsi kaikki positiiviset reaaliluvut x, joilla $x^{x^{2020}} = 2020$.

8. Olkoot kolmiot ABC ja $A'B'C'$ tasasivuisia, joissa kärjet on nimetty vastapäivään kiertäen. Lisäksi olkoot P, Q ja R janojen AB', BC ja AC' keskipisteet. Osoita, että kolmio PQR on tasasivuinen.

9. Olkoon Q tason mielivaltainen piste ja M janan AB keskipiste. Osoita, että $|QA|^2 + |QB|^2 = 2|QM|^2 + |AB|^2/2$.

10. Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$. Osoita, että polynomia $(x-a)^2(x-b)^2 + 1$ ei voi esittää kahden kokonaislukukertoimisen polynomin tulona.

11. Olkoon $p(x)$ astetta neljä oleva polynomi, jonka johtavan termin kerroin on 1 ja jolle pätee $p(1) = 10$, $p(2) = 20$ ja $p(3) = 30$. Laske $p(12) + p(-8)$.

12. Etsi sellainen luku a, että -1 on polynomin $x^5 - ax^2 - ax + 1$ vähintään kertalukua kaksi oleva nollakohta.

Vaativampia tehtäviä

13. Etsi kaikki polynomit $p(x)$, joille $xp(x-1) = (x-26)p(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.

14. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa äärettömän monta sellaista alkulukua p, että jokainen luvuista a_i on neliönjäännös modulo p.

15. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joilla on seuraava ominaisuus: on olemassa äärettömän monta sellaista alkulukua p, että jokainen luvuista a_i on neliönepäjäännös modulo p.

16. Määritä kaikki kokonaisluvut a, b, c, d, e ja f, joilla yhtälöllä

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \equiv 0 \pmod p$$

on vähintään yksi ratkaisu (x, y) kaikilla tarpeeksi suurilla alkuluvuilla p.

17. Taikurien kerhohuoneella on runsaasti kolmenvärisiä hattuja, joiden väri ei näy hattua pitävälle henkilölle. Joku valitsee kolmelle taikurille (A, B ja C) hatut, jotka voivat olla minkä värisiä tahansa (kaikkiaan väriyhdistelmiä on siis 27). Taikuri A näkee taikurit B ja C, taikuri C näkee taikurit A ja B mutta taikuri A näkee vain taikurin C. Jokaisen taikurin pitää arvata oman hattunsa väri, ja heidän täytyy tehdä arvauksensa samanaikaisesti tietämättä toisten arvauksia. Taikurit voittavat, jos ainakin yksi arvauksista osuu oikeaan. He voivat sopia strategiastaan etukäteen ennen hattujen valitsemista. Onko taikureilla strategiaa, jolla he voittavat siitä riippumatta, miten hattujen värit valitaan?

Tässä ja seuraavassa tehtävässä etsitään vain deterministisiä strategioita. Strategian täytyy sisältää kullekin taikurille funktio, joka kuvaa taikurin näkemät hattujen värit arvaukseksi hänen oman hattunsa väristä.

18. Neljä taikuria, A, B, C ja D, seisovat suuren puun ympärillä siten, että kukin heistä näkee vain naapurinsa: A näkee B:n ja D:n, B näkee A:n ja C:n, C näkee B:n ja D:n ja D näkee A:n ja C:n. Joku on valinnut heille hatut samasta kolmivärisestä valikoimasta kuin edellisessä tehtävässä. Jokaisen taikurin pitää arvata oman hattunsa väri, ja heidän täytyy tehdä arvauksensa samanaikaisesti tietämättä toisten arvauksia. Taikurit voittavat, jos ainakin yksi arvauksista osuu oikeaan. He voivat sopia strategiastaan etukäteen ennen hattujen valitsemista. Onko taikureilla strategiaa, jolla he voittavat siitä riippumatta, miten hattujen värit valitaan?

19. Helminauhassa on 12 helmeä, joiden voidaan ajatella sijaitsevan säännöllisen 12-kulmion kärjissä. Selvitä, montako kolmesta mustasta ja yhdeksästä valkoisesta helmestä koostuvaa erilaista helminauhaa on. Kahta helminauhaa pidetään samanlaisina, jos yhden saa toisesta kiertämällä tai kääntämällä ympäri.

20. Montako erilaista tapaa on värittää kuution 12 särmää, kun kuusi särmää pitää värittää mustaksi ja kuusi valkoiseksi? Värityksiä pidetään samanlaisina, jos yhden saa toisesta kiertämällä kuutiota.

21. 9×9-ruudukosta on väritetty 46 ruutua punaisiksi. Osoita, että ruudukossa on 2×2-neliö, jonka ruuduista ainakin kolme on punaisia.

22. Olkoot A, B, C ja D neljä avaruuden pistettä, jotka eivät ole samassa tasossa. Janat AB, BC, CD ja DA ovat saman pallon tangentteja. Todista, että niiden neljä sivuamispistettä pallon kanssa ovat keskenään samassa tasossa.

23. Olkoon ABC kolmio. Olkoot F ja L kaksi sivun AC pistettä, joille $AF = LC < AC/2$. Laske $\angle FBL$, kun tiedetään, että $AB^2 + BC^2 = AL^2 + LC^2$.