Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, joulukuu 2017
Ratkaisuehdotuksia

Helpompia tehtäviä

1. Etsi kaikki reaaliluvut a, joille epäyhtälö

$$3x^2 + y^2 \geq -ax(x+y)$$

on voimassa kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Ratkaisu. Epäyhtälö $3x^2 + y^2 \geq -ax(x+y)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$x^2(3 + a - \frac{a^2}{4}) + (y + \frac{a}{2}x)^2 \geq 0.$$

Jos $3 + a - \frac{a^2}{4} \geq 0$, niin epäyhtälö on voimassa kaikilla reaaliluvuilla x ja y. Jos taas $3 + a - \frac{a^2}{4} < 0$, niiin valinnalla $x = 1$ ja $y = -\frac{a}{2}$ saadaan

$$x^2(3 + a - \frac{a^2}{4}) + (y + \frac{a}{2}x)^2 = 3 + a - \frac{a^2}{4} < 0.$$

Siis ei voi olla $3 + a - \frac{a^2}{4} < 0$. On oltava $3 + a - \frac{a^2}{4} \geq 0$ eli $-2 \leq a \leq 6$.

2. Olkoot a, b ja c jonkin kolmion sivujen pituudet. Osoita, että myös $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{b+c}$ ja $\dfrac{1}{c+a}$ ovat jonkin kolmion sivujen pituudet.

Ratkaisu. Luvut $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$ ja $\frac{1}{c+a}$ ovat jonkin kolmion sivujen pituudet täsmälleen silloin, kun niistä kahden pienimmän summa on suurempi kuin kolmas termi. Voidaan olettaa, että $a \leq b \leq c$ ja täten $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$. On osoitettava, että $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b}$. Kertomalla epäyhtälö puolittain luvulla $(a+b)(b+c)(c+a)$ saadaan yhtäpitävä väite

$$(a+b)(2a+b+2c) > (b+c)(c+a).$$

Koska a, b ja c ovat jonkin kolmion sivujen pituudet, niin $a + b > c$ ja täten

$$(a+b)(a+b+2c) > (b+c)(c+a).$$

Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$a^2 + ab + b^2 + (a+b)c - c^2 > 0.$$

Koska a, b ja c ovat jonkin kolmion sivujen pituudet, niin $a, b, c > 0$, $a + b > c$ ja täten

$$a^2 + ab + b^2 + (a+b)c - c^2 > 0 + c^2 - c^2 = 0.$$

3. Muodostetaan kirjaimista A, B ja C kuuden kirjaimen sana. Kirjain A valitaan todennäköisyydellä x, kirjain B todennäköisyydellä y ja kirjain C todennäköisyydellä z, missä $x + y + z = 1$. Millä todennäköisyyksillä x, y ja z sanan $BACBAB$ todennäköisyys on maksimaalinen?

Ratkaisu. Sana $BACBAB$ saadaan todennäköisyydellä x^2y^3z. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan

$$1 = x + y + z = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + z \geq 6\sqrt[6]{\frac{x^2y^3z}{2^2 \cdot 3^3}}$$

ja yhtäsuuruus on voimassa täsmälleen silloin, kun $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$. Siis sanan $BACBAB$ todennäköisyys on maksimaalinen, kun $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$ ja $z = \frac{1}{6}$.

4. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille $x + y + z = 3$. Osoita, että

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx.$$

Ratkaisu. Koska $3 = x + y + z$, niin

$$3(x + y + z) = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx).$$

Siis

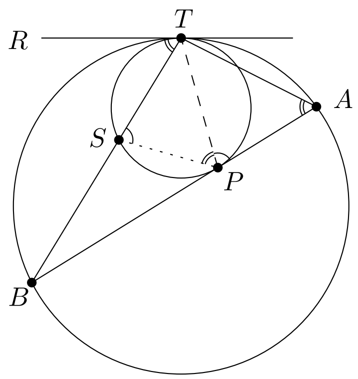
$$xy + yz + zx = \frac{1}{2}(3x - x^2 + 3y - y^2 + 3z - z^2).$$

Täten

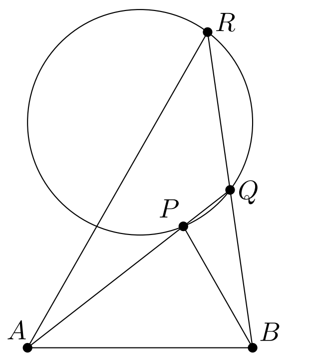
$$\begin{aligned}
&\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - xy - yz - zx \\
&\quad = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \frac{1}{2}(3x - x^2 + 3y - y^2 + 3z - z^2) \\
&\quad = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \sqrt{x}) + (\frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}y + \sqrt{y}) + (\frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{2}z + \sqrt{z}) \\
&\quad = \frac{1}{2}\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2(\sqrt{x} + 2) + \frac{1}{2}\sqrt{y}(\sqrt{y} - 1)^2(\sqrt{y} + 2) + \frac{1}{2}\sqrt{z}(\sqrt{z} - 1)^2(\sqrt{z} + 2) \\
&\quad \geq 0.
\end{aligned}$$

5. Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan sisäpuolisesti pisteessä T. Ulomman ympyrän sekantti AB on sisemmän ympyrän tangentti pisteessä P. Osoita, että suora TP puolittaa kulman $\angle ATB$.

Ratkaisu. Merkitään TR ympyröiden yhteistä tangettia pisteessä T. Kehäkulmalauseen mukaan $\angle SPT = \angle STR$ (pienemmässä ympyrässä) ja $\angle BTR = \angle BAT$ (isommassa ympyrässä). Koska suora AB on tangentti pisteessä P, kehäkulmalauseen mukaan $\angle TSP = \angle TPA$. Nyt $\triangle TSP \sim \triangle TPA$ (kaksi yhteistä kulmaa). Siksi $\angle PTS = \angle ATP$.



Tehtävä 5



Tehtävä 6

6. Pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' valitaan samalta puolelta janaa AB siten että kolmiot ABP, AQB, RAB, BAP', $BQ'A$ ja $R'BA$ ovat yhdenmuotoisia. Osoita, että pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' ovat samalla ympyrällä.

Ratkaisu. Yhdenmuotoisuuksien perusteella $RB/AB = AB/QB$, josta $BQ \cdot BR = AB^2$. Samalla tavalla $AQ/AB = AB/AP$, josta $AP \cdot AQ = AB^2$.

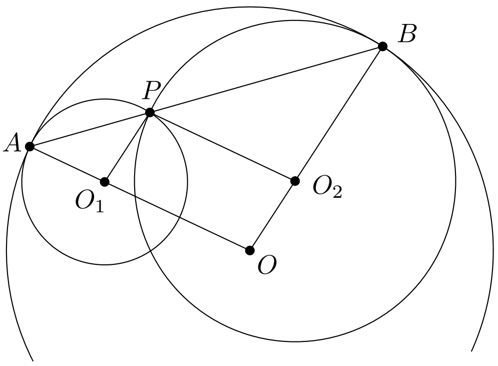
Myös $R'A/AB = AB/Q'A$, josta $AQ' \cdot AR' = AB^2$ ja lisäksi $BQ'/AB = AB/BP'$, josta $BP' \cdot BQ' = AB^2$.

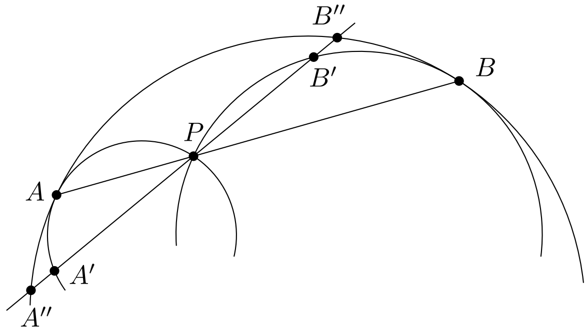
Nyt pisteen A potenssi ympyrän PQR suhteen on sama kuin ympyrän $P'Q'R$ suhteen ja piste A on ympyröiden radikaaliakselilla. Vastaava tulos pätee myös pisteelle B. Siksi suora AB on ympyröiden radikaaliakseli.

Mutta kun kaikki pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' sijaitsevat janan AB samalla puolella tämä on mahdollista vain jos ympyrät ovat samat (ja kaikilla tason pisteillä on radikaaliakselin pisteiden ominaisuus).

7. On annettu kaksi ympyrää, jotka leikkaavat pisteissä P ja Q. Konstruoi jana AB, joka kulkee pisteen P kautta ja jonka päätepisteet ovat ympyröiden kehillä (piste A toisella ympyrällä ja piste B toisella ympyrällä) siten, että tulo $AP \cdot PB$ saa suurimman mahdollisen arvonsa.

1. Piirrä ensin sellainen suurempi ympyrä, joka sivuaa ympyröitä ulkopuolisesti joissakin pisteissä A ja B niin, että piste P on janalla AB. (Ei onnistu, ellei suurempaa ympyrää ja pisteitä A ja B ole valittu tietyllä tavalla.)
2. Miksi nämä sivuamispisteet toteuttavat tehtävän ehdon?
3. Miten pisteet konstruoidaan? Eli miten harpilla ja viivottimella piirtämällä pisteet löydetään?





Ratkaisu.

1. Merkitään ympyröiden keskipisteitä O_1 ja O_2. Valitaan piste O siten, että PO_1OO_2 on suunnikas, jonka toinen lävistäjä on O_1O_2. Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde $O_1P + O_2P$. Tämä ympyrä sivuaa pienempiä ympyröitä pisteissä A ja B (sivuaa, ei leikkaa, siksi että A, O_1 ja O ovat samalla suoralla ja B, O_2 ja O ovat samalla suoralla). Nyt A, P ja B ovat myös samalla suoralla, sillä $\angle APB = \angle APO_1 + \angle O_1PO_2 + \angle O_2PB = \angle APO_1 + \angle PO_1A + \angle O_1AP = 180°$.
2. Pisteet A ja B toteuttavat tehtävän ehdon, sillä jos pisteen P kautta kulkeva suora leikkaa O_1 keskisen ympyrän pisteessä $A' \neq A$, O_2 keskisen ympyrän pisteessä $B' \neq B$ ja O keskisen ympyrän pisteissä A'' ja B'', pätee $PA \cdot PB = PA'' \cdot PB'' > PA' \cdot PB'$.
3. Ympyrän keskipiste konstruoidaan piirtämällä kaksi jännettä ja niille keskinormaalit. Keskinormaalien leikkauspiste on ympyrän keskipiste.

   Kun keskipisteet O_1 ja O_2 on konstruoitu, piirretään pisteeseen O_1 ympyrä, jonka säde on sama kuin on O_2 keskisen ympyrän säde. Lisäksi piirretään O_2 ympyrä, jonka säde on sama kuin on O_1 keskisen ympyrän säde. Näiden ympyröiden leikkauspiste on piste O.

Vaikeampia tehtäviä

8. Olkoot x, y ja z erisuuria positiivisia reaalilukuja, joille

$$x + \sqrt{y + \sqrt{z}} = z + \sqrt{y + \sqrt{x}}.$$

Osoita, että $xz < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{8}{3}}$.

Ratkaisu. Koska $x + \sqrt{y + \sqrt{z}} = z + \sqrt{y + \sqrt{x}}$, niin $x - z = \sqrt{y + \sqrt{x}} - \sqrt{y + \sqrt{z}}$. Täten

$$(x - z)\left(\sqrt{y + \sqrt{x}} + \sqrt{y + \sqrt{z}}\right) = \sqrt{x} - \sqrt{z}.$$

Koska x ja z ovat erisuuria positiivisia kokonaislukuja, niin edellinen yhtälö voidaan jakaa puolittain luvulla $\sqrt{x} - \sqrt{z}$. Saadaan, että

$$(\sqrt{x} + \sqrt{z})\left(\sqrt{y + \sqrt{x}} + \sqrt{y + \sqrt{z}}\right) = 1.$$

Toisaalta, koska luvut x, y, z ovat positiivisia, niin $\sqrt[4]{x} < \sqrt{y+\sqrt{x}}$ ja $\sqrt[4]{z} < \sqrt{y+\sqrt{z}}$. Siis

$$1 = (\sqrt{x}+\sqrt{z})\left(\sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y+\sqrt{z}}\right) > (\sqrt{x}+\sqrt{z})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{z}).$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan

$$(\sqrt{x}+\sqrt{z})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{z}) \geq 2\sqrt[4]{xz}\cdot 2\sqrt[8]{xz} = 4\sqrt[8]{(xz)^3}.$$

Näin ollen $xz < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{8}{3}}$.

9. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $m > n$ pätee

$$\text{pyj}(m,n) + \text{pyj}(m+1,n+1) > \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}.$$

Ratkaisu. Tunnetusti

$$\text{pyj}(m,n) + \text{pyj}(m+1,n+1) = \frac{mn}{\text{syt}(m,n)} + \frac{(m+)(n+1)}{\text{syt}(m+1,n+1)}.$$

Olkoon $m = n+k$, missä k on positiivinen kokonaisluku. Edellisen yhtälön oikea puoli on

$$> \frac{mn}{\text{syt}(n+k,n)} + \frac{mn}{\text{syt}(n+k+1,n+1)} = \frac{mn}{\text{syt}(k,n)} + \frac{mn}{\text{syt}(k,n+1)}.$$

Aritmeettis-geometrisen yhtälön mukaan edellinen lauseke on

$$\geq \frac{2mn}{\sqrt{\text{syt}(k,n)\cdot\text{syt}(k,n+1)}}.$$

Koska $\text{syt}(k,n)|n$, $\text{syt}(k,n+1)|n+1$ ja $\text{syt}(n,n+1) = 1$, niin

$$\text{syt}(\text{syt}(k,n),\text{syt}(k,n+1)) = 1.$$

Lisäksi, koska $\text{syt}(k,n)|k$ ja $\text{syt}(k,n+1)|k$, niin $\text{syt}(k,n)\cdot\text{syt}(k,n+1)|k$. Täten $\text{syt}(k,n)\cdot\text{syt}(k,n+1) \leq k$. Siis

$$\frac{2mn}{\sqrt{\text{syt}(k,n)\cdot\text{syt}(k,n+1)}} \geq \frac{2mn}{\sqrt{k}} = \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}.$$

10. Olkoon M jokin piste kolmion $\triangle ABC$ sisällä sekä pisteet A_1, B_1 ja C_1 pisteen M kohtisuorat projektiot sivuille BC, CA ja AB vastaavasti. Osoita, että

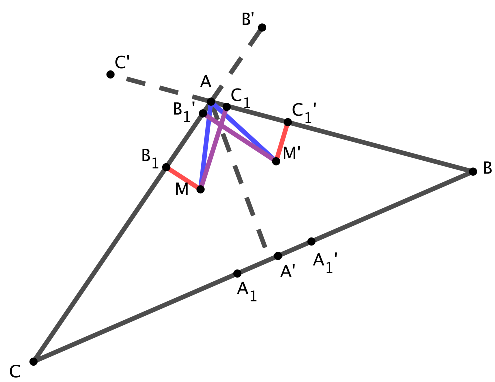
$$MA\cdot MB\cdot MC \geq (MA_1+MB_1)(MB_1+MC_1)(MC_1+MA_1).$$

Ratkaisu. Olkoot A', B' ja C' pisteiden A, B ja C kohtisuorat projektiot vastakkaiselle puolelle kolmiota (ks. kuva). Koska $MA + MA_1 \geq AA'$, niin

$$BC\cdot MA_1 + CA\cdot MB_1 + AB\cdot MC_1 = 2|\triangle ABC| = BC\cdot AA' \leq BC(MA+MA_1).$$

Täten $BC\cdot MA \geq CA\cdot MB_1 + AB\cdot MC_1$. Olkoon piste M' pisteen M peilaus kulman $\angle BAC$ puolittajan suhteen. Lisäksi olkoot pisteet A_1', B_1' ja C_1' pisteen M' kohtisuorat projektiot sivuille BC, CA ja AB vastaavasti. Nyt $MA = M'A$, $MB_1 = MC_1'$ ja $MC_1 = MB_1'$. Vastaavalla tavalla kuin edellä saadaan, että

$$BC\cdot MA \geq CA\cdot MC_1 + AB\cdot MB_1.$$



Siis

$$2BC\cdot MA \geq (AB+CA)(MB_1+MC_1).$$

Vastaava tarkastelu voidaan tehdä myös tuloille $CA\cdot MB$ ja $AB\cdot MC$, jolloin saadaan, että

$$\begin{aligned} &8\cdot AB\cdot BC\cdot CA\cdot MA\cdot MB\cdot MC \\ &\quad\geq (AB+CA)(AB+BC)(CA+BC)(MA_1+MB_1)(MB_1+MC_1)(MC_1+MA_1). \end{aligned}$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan edellisen epäyhtälön oikea puoli on

$$\geq 8\cdot AB\cdot BC\cdot CA\cdot(MA_1+MB_1)(MB_1+MC_1)(MC_1+MA_1).$$

Väite saadaan jakamalla luvulla $8\cdot AB\cdot BC\cdot CA$ puolittain.

11. Etsi kaikki jatkuvat funktiot f, jotka toteuttavat ehdon

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

Ratkaisu. Sijoittamalla $f(x) = g(x) - 1$ saamme yhtälön muotoon

$$g(x+y) = g(x)g(y).$$

Ottamalla logaritmi puolittain tästä yhtälöstä saamme

$$\ln \circ g(x+y) = \ln \circ g(x) + \ln \circ g(y).$$

Olkoon $\ln \circ g = h$. Tällöin $h(x+y) = h(x) + h(y) \Rightarrow h(x) = cx \Rightarrow ln \circ g(x) = cx$ ja

$$g(x) = e^{cx} = a^x.$$

Ratkaisu on siis $g(x) = a^x$ eli

$$f(x) = a^x - 1.$$

12. Mikä funktio toteuttaa ehdon $xf(x) + 2xf(-1) = -1$?

Ratkaisu. Korvaamme termin x termillä $-x$, jolloin saamme $-xf(-x) - 2xf(x) = -1$. Siten saamme kaksi yhtälöä funktioille $f(x)$ ja $f(-x)$. Ratkaisemalla funktion $f(x)$ suhteen saamme $f(x) = 1/x$.

13. Osoita, että on olemassa funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

i) $f \circ g = g \circ f$ (eli $f(g(x)) = g(f(x))$ kaikille x),

ii) $f \circ f = g \circ g$ ja

iii) $f(x) \neq g(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Funktiot

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 0 \\ 1, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

ja

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0 \\ -1, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

toteuttavat tehtävän ehdot.

14. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, että kaikille $x, y \in \mathbb{N}$ ja positiivisille kokonaisluvuille n pätee

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Ratkaisu. Tehtävän ehdosta saamme, että

$$f(x+y) - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = f(x) + f(y)$$

eli

$$f(x+y) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = f(x) + f(y) - x^n - y^n$$

eli

$$f(x+y) - (x+y)^n = f(x) - x^n + f(y) - y^n.$$

Olkoon $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\not{0}}$ kuvaus $f_1(x) = f(x) - x^n$. Tällöin

$$f_1(x+y) = f(x+y) - (x+y)^n = f(x) - x^n + f(y) - y^n = f_1(x) + f_2(x).$$

Induktiolla voimme osoittaa, että $f_1(nx) = nf_1(x)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Kun $x = 1$, saamme $f_1(n) = nf_1(1) = n\alpha$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, missä $\alpha = f_1(1)$. Siten $f(x) = x^n + \alpha x$.

15. On annettu funktio $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

i) $f(p) = 1$ kaikille alkuluvuille p,

ii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ kaikille $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Määritä pienin $n \geq 2016$, joka toteuttaa ehdon $f(n) = n$.

Ratkaisu. Osoitamme ensin, että alkuluvuille p ja positiivisille kokonaisluvuille k pätee $f(p^k) = kp^{k-1}$. Osoitamme tämän induktiolla luvun k suhteen. Kun $k = 1$, niin $f(p) = 1$, mikä on totta. Olkoon $l \geq 1$ ja oletetaan, että väite on todistettu, kun $k = l$. Tarkastellaan arvoa $k = l + 1$. Käytämme toista ominaisuutta arvoilla $x = p$ ja $y = p^l$:

$$f(p^{l+1}) = f(p \cdot p^l) = p^l \cdot f(p) + p \cdot f(p^l) = p^l + p \cdot lp^{l-1} = (l+1)p^l.$$

Tämä päättää induktion. Osoitamme nyt, että eri alkuluvuille $p_1, p_2, \ldots, p_t$ ja positiivisille kokonaisluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_t$ saamme

$$f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t}) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_t}{p_t} \right).$$

Osoitamme tämän induktiolla luvun t suhteen. Kun $t = 1$, saamme kaavan, jonka juuri todistimme. Olkoon nyt $r \geq 1$ ja olettakaamme, että väite on todistettu, kun $t = r$. Sovellamme toista ominaisuutta jälleen:

$$\begin{aligned}
&f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t} \cdot p_{r+1}^{a_{r+1}}) \\
&= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot f(p_{r+1}^{a_{r+1}}) + p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot p_r^{a_r}) \\
&= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot a_{r+1} p_{r+1}^{a_{r+1}-1} + p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_r}{p_r} \right) \\
&= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot \frac{a_{r+1}}{p_{r+1}} + p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_r}{p_r} \right) \\
&= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_r}{p_r} + \frac{a_{r+1}}{p_{r+1}} \right).
\end{aligned}$$

Tämä päättää induktion.
Kun $n > 1$, niin luvun $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t}$ (missä luvut p_i ovat eri alkulukuja), yhtälö $f(n) = n$ on ekvavalentti yhtälön

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_t}{p_t} \right) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t}$$

kanssa eli

$$\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_t}{p_t} = 1.$$

Kertomalla tämä puolittain luvulla $p_1 p_2 \cdots p_t$ saamme

$$a_1 p_2 p_3 \cdots p_t + a_2 p_1 p_3 \cdots p_t + \ldots + a_t p_1 p_2 \cdots p_{t-1} = p_1 p_2 \cdots p_t.$$

Oletetaan, että esim. p_1 on luvun n pienin alkutekijä. Kuten lausekkeessa yllä, p_1 jakaa oikean puolen ja jokaisen, paitsi mahdollisesti ensimmäisen, termin vasemmalla puolella. Mutta tällöin luvun p_1 pitää myös jakaa ensimmäinen termi. Koska $p_2, \ldots, p_t$ ovat kaikki alkulukuja, jotka eriävät luvusta p_1, tämä on vain mahdollista, jos $p_1 | a_1$. Erityisesti $a_1 \geq p_1$, mistä $\frac{a_1}{p_1} \geq 1$. Näemme nyt, että yhtäsuuruuden on pädettävä, joten $t = 1$, koska lukujen $\frac{a_i}{p_i}$ summa olisi muuten suurempi kuin 1. Siten $n = p^p$ jollekin alkuluvulle p.
Etsimme pienintä lukua $n \geq 2016$, joka on muotoa $n = p^p$. Koska $3^3 = 27$ ja $5^5 = 3125$, pienin n on 3125.

16. Luvut $1, 2, 3, \ldots, 100$ on kirjoitettu liitutaululle. Kerran minuutissa Antti valitsee taululta kaksi lukua A ja B, pyyhkii ne pois ja kirjoittaa tilalle yhden luvun $AB + A + B$. Mitä taululla nähdään lopuksi, kun jäljellä on vain yksi luku?

Ratkaisu. Koska $(A + 1)(B + 1) = (AB + A + B + 1)$, operaatio ei muuta tuloa $(N_i + 1)$, missä N_i ovat taululle kirjoitetut luvut. Siten lopullinen luku on $101! - 1$.

17. Suorakulmaisen laudan sivujen pituudet ovat M ja N. Lauta on kokonaan peitetty laatoilla, joiden muodot ovat 1×4 ja 2×2, eivätkä nämä laatat mene missään kohti toistensa päälle. Todista, että lautaa ei voida peittää samalla tavoin, jos yksi 2×2 -laatta vaihdetaan 1×4 -laataksi.

Ratkaisu. Kirjoitetaan laudan ruutuihin numeroita:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\
2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & \ldots \\
3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & \ldots \\
4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots
\end{array}$$

Jokaisen 1×4-laatan peittämien numeroiden summa on $10 \equiv 2 \pmod 4$ ja 2×2-laatan summa on $\equiv 0 \pmod 4$. Jos 2×2-laatta vaihdetaan 1×4-laataksi, vaihdetaan 1×4-laattojen lukumäärän parillisuus, jolloin kaikkien peitettyjen numeroiden summan jakojäännos modulo 4 vaihtuisi joko $0 \mapsto 2$ tai $2 \mapsto 0$, eikä koko laudan peittäminen ole enää mahdollista.

18. Kahdeksan pienen $1 \times 1 \times 1$ -kuution tahkot on maalattu valkoisiksi ja mustiksi siten, että täsmälleen puolet tahkoista on valkoisia. Siten valkoisia tahkoja on 24 ja mustia 24, mutta yksittäinen kuutio voi olla esimerkiksi kokonaan valkoinen. Todista, että kuutioista on mahdollista koota sellainen $2 \times 2 \times 2$ -kuutio, jonka ulkopinnan pinta-alasta tasan puolet on valkoista.

Ratkaisu. Tarkastellaan mielivaltaista $2 \times 2 \times 2$-kuutiota. Oletetaan, että pinnalla näkyviä valkoisia 1×1-tahkoja on enemmän kuin mustia. Siten jokin kuution ulkopinnalla näkyvä valkoinen tahko on sellainen, että sen $1 \times 1 \times 1$-kuutiossa sitä vastapäätä on musta tahko. (Muuten pikkukuutioissa olisi yhteensä enemmän kuin 24 valkoista tahkoa.) Tämän kuution voi kääntää niin, että tarkastellun valkoisen tahkon tilalle tulee musta tahko ja muut näkyvissä olevat tahkot pysyvät ennallaan. Tällöin näkyvissä oleva valkoinen pinta-ala pienenee yhden pikkukuution tahkon verran. Tätä operaatiota voidaan toistaa, kunnes näkyvissä oleva valkoinen pinta-ala on 12.