Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, marraskuu 2020

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisut 29.11.2020 mennessä sähköpostilla.

Helpommat:	`n.palojarvi@gmail.com`
Vaativammat:	`esavesalainen@gmail.com`

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Helpompia tehtäviä

1. Kirjoitetaan positiivisia parillisia kokonaislukuja peräkkäin alkaen luvusta 2: $246810121416\ldots$. Lopetetaan, kun näin saatu pitkä luku on 2020 numeroa pitkä. Mikä on viimeinen siihen kirjoitettu luku? Esimerkiksi edellä on kirjoitettu luvun 12 ensimmäistä numeroa ja viimeinen kirjoitettu luku on 16.

2. Matilla on rautalanka, jonka pituus on 12. Mikä on pienin määrä palasia, joihin Matin täytyy leikata lanka, jotta hän voi rakentaa siitä kuution muotoisen kehikon, jonka sivun pituus on 1?

3. Jos $x + y = 4$ ja $xy = -12$, mitä on $x^2 + 5xy + y^2$?

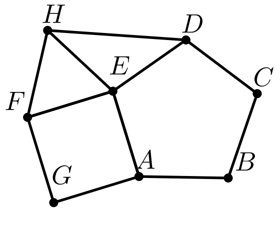
4. Positiivisen kokonaisluvun n kymmenjärjestelmäesityksessä on viisi numeroa. Siitä muodostetaan kuusinumeroiset luvut p lisäämällä loppuun numero 1 ja q lisäämällä alkuun numero 1. (Esimerkiksi jos $n = 12345$, niin $p = 123451$ ja $q = 112345$.) Jos $p = 3q$, selvitä mikä on n.

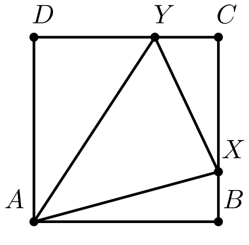
5. Antin, Brunon ja Cecilian ikien suhde oli 30 vuotta sitten $1 : 2 : 5$. Nyt Antin ja Brunon ikien suhde on $6 : 7$. Kuinka vanha Cecilia on?

6. Ratkaise reaaliluvuilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 - y^2 - z^2 = 2, \\ x - 3y^2 + z = 0. \end{cases}$$

7. Oheisessa kuviossa $ABCDE$ on säännöllinen viisikulmio (ts. kaikki sivut ovat keskenään yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria), $AEFG$ on neliö ja FEH on tasasivuinen kolmio. Kuinka suuri on kulma $\angle EHD$?





8. Pisteet X ja Y ovat neliön $ABCD$ sivujen BC ja CD sisäpisteitä. Kolmion AXY sivujen pituudet ovat $|XY| = 3$, $|AX| = 4$ ja $|AY| = 5$. Selvitä neliön $ABCD$ sivun pituus.

9. Olkoon $ABCD$ suunnikas ja M sellainen piste suunnikkaan diagonaalilla BD, että pätee $MD = 3BM$. Suorat AM ja BC leikkaavat pisteessä N. Mikä on kolmion MND alan suhde suunnikkaan $ABCD$ alaan?

10. Tasainen peili on kohtisuorassa xy-tasoa vastaan ja leikkaa sen suoraa L pitkin. Lasersäde lähtee origosta, osuu peiliin pisteessä $P = (-1, 5)$ ja heijastuu pisteeseen $Q = (24, 0)$. Määritä suoran L yhtälö.

11. Selvitä, onko luku $21^{39} + 39^{21}$ jaollinen luvulla 45.

12. Olkoon $f(n) = n^4 + 2n^3 - n^2 + 2n + 1$.

(a) Todista, että $f(n)$ voidaan esittää kahden kokonaiskertoimisen toisen asteen polynomin tulona.

(b) Selvitä kaikki kokonaisluvut n, joille $|f(n)|$ on alkuluku.

13. (a) Osoita, että tuhannen peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summa ei voi olla alkuluku.

(b) Määritä kaikki luvut k, joille jokin k:n peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summa on alkuluku.

Vaativampia tehtäviä

14. Ratkaise reaaliluvuilla yhtälö

$$x \cdot \lfloor x \cdot \lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor = 88,$$

missä $\lfloor a \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on enintään a, esim. $\lfloor 3.7 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.7 \rfloor = -4$ ja $\lfloor 6 \rfloor = 6$.

15. J on 14 erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukko. Osoita, että on olemassa luku k $(1 \leq k \leq 7)$ ja kaksi k-alkioista joukkoa $\{ a_1, a_2, \dots, a_k \} \subset J$, $\{ b_1, b_2, \dots, b_k \} \subset J$, joilla ei ole yhteisiä alkioita ja joille summat

$$A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} \quad \text{ja} \quad B = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_k}$$

eroavat toisistaan alle 0,001:llä, ts. $|A - B| < 0{,}001$.

16. Yksikköympyrään on piirretty useita jänteitä siten, ettei mikään ympyrän halkaisija leikkaa useampaa kuin neljää jännettä. Todista, että jänteiden pituuksien summa on enintään 13.

17. Kokoukseen osallistuu 50 tutkijaa, joista kukin on vaihtanut sähköposteja ainakin 25 muun kanssa. Todista, että kokouksessa on neljä tutkijaa, jotka voivat istua pyöreässä pöydässä sellaisessa järjestyksessä, että kukin on vaihtanut sähköposteja naapuriensa kanssa.

18. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio. Lisäksi olkoon M sellainen piste nelikulmion $ABCD$ sisällä, joka on yhtä kaukana suorista AB ja CD sekä yhtä kaukana suorista BC ja AD. Lisäksi oletetaan, että nelikulmion $ABCD$ ala on $MA \cdot MC + MB \cdot MD$. Todista, että $ABCD$ on jännenelikulmio.

19. Tetraedrin $ABCD$ sisään on piirretty pallo (joka sivuaa kutakin tetraedrin tahkoa). Sille on piirretty neljä sivuavaa tasoa, jotka ovat yhdensuuntaisia tetraedrin tahkojen kanssa ja jotka erottavat tetraedrista neljä pienempää tetraedria. Todista, että pienempien tetraedrien kaikkien 24 sivujen pituuksien summa on kaksi kertaa tetraedrin $ABCD$ sivujen pituuksien summa.

20. Ympyrän k ulkopuolella on piste A. Piirretään puolisuunnikas, jonka kärkipisteet ovat ympyrän k kehällä ja jonka ei-yhdensuuntaisten vastakkaisten sivujen jatkeet leikkaavat pisteessä A. Olkoon U puolisuunnikkaan lävistäjien leikkauspiste. Osoita, että kaikilla oletukset toteuttavilla puolisuunnikkailla saadaan sama piste U.

21. Olkoon O teräväkulmaisen kolmion ABC ympäryskeskus (ts. sen kärkipisteiden kautta kulkevan ympyrän keskipiste). Suora CO leikkaa ympyrän AOB pisteissä O ja C_1. Vastaavasti A_1 ja B_1 ovat suorien AO, BO ja ympyröiden BOC, AOC toiset leikkauspisteet. Todista, että

$$\frac{|AA_1|}{|OA_1|} + \frac{|BB_1|}{|OB_1|} + \frac{|CC_1|}{|OC_1|} \geq 4{,}5.$$

22. Kolmion ABC, jonka jokainen kulma on pienempi kuin $120°$, kärjen A vastaisen sivuympyrän keskipiste on O ja sivuympyrä sivuaa kolmion sivuja tai niiden jatkeita pisteissä $C_1 \in AB$, $A_1 \in BC$ ja $B_1 \in CA$ (missä merkintä $X \in YZ$ tarkoittaa, että piste X on suoralla YZ). Olkoot janojen AO, BO ja CO keskipisteet A_2, B_2 ja C_2. Osoita, että suorat A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_1 leikkaavat samassa pisteessä.

Kolmion ABC kärjen A vastainen sivuympyrä on ympyrä, joka sivuaa janaa BC, puolisuoraa AB janan AB jatkeella ja puolisuoraa AC janan AC jatkeella.