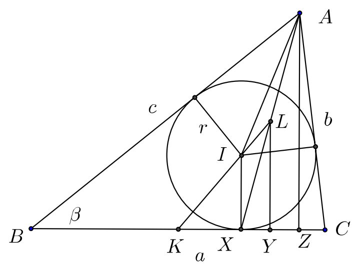
Harjoitustehtävät, joulukuu 2013, (ehkä vähän) vaativammat

Ratkaisuja

1. *Viisinumeroinen luku* $\overline{a679b}$ *on jaollinen 72:lla. Määritä* a *ja* b.

Ratkaisu. Luvun on oltava jaollinen 8:lla ja 9:llä. Koska luku on jaollinen kahdeksalla jos ja vain jos sen kolmen viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen 8:lla, on oltava $b = 2$. Koska luku on jaollinen 9:llä jos ja vain jos sen numeroiden summa on jaollinen 9:llä, ja koska $6 + 7 + 9 + 2 = 24$, on oltava $a = 3$. Todellakin $36792 = 511 \cdot 72$.

2. *Kolmion* ABC *sisäympyrä* Γ *sivuaa kolmion sivua* BC *pisteessä* X. *Osoita, että* Γ*:n keskipiste on* AX*:n ja* BC*:n keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla.*



Ratkaisu. Olkoon I sisäympyrän keskipiste, r sen säde, K BC:n keskipiste, L AX:n keskipiste ja Y ja Z pisteiden L ja A kohtisuorat projektiot sivulla BC. Olkoot vielä kolmion sivut a, b, c ja $\angle ABC = \beta$. Jos $b = c$, väite on triviaali. Voidaan olettaa, että $c > b$. Väitteen todistamiseksi riittää nyt, että osoitetaan suhteet $KX : XI$ ja $KY : YL$ yhtä suuriksi. Selvästi $BZ = c\cos\beta$. Tunnetusti $BX = \frac{1}{2}(a - b + c)$ [Helppo lasku, joka perustuu siihen, että tangenttien leikkauspisteen ja sivuamispisteiden väliset janat ovat yhtä pitkät.] Koska Y on janan XZ keskipiste, $BY = \frac{1}{4}(a - b + c + 2c\cos\beta)$. Siis $KY = BY - BK = \frac{1}{4}(-a - b + c + 2c\cos\beta)$. Kolmion ala on tunnetusti $T = rp$, missä $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. [Jaa kolmio kolmeksi osakolmioksi, joilla I on yhteinen kärki ja r jokaisen korkeus.] Toisaalta $T = \frac{1}{2}a \cdot AZ = a \cdot LY$, koska $AZ = 2 \cdot LY$. Siis $LY = \frac{pr}{a}$. Näin ollen

$$\frac{KY}{LY} = \frac{a(-a - b + c) + 2ac\cos\beta}{4rp}.$$

Kosinilauseen nojalla $2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$. Kun tämä otetaan huomioon, saadaan

$$\frac{KY}{LY} = \frac{-a^2 - ab + ac + a^2 + c^2 - b^2}{4rp} = \frac{a(c - b) + (c + b)(c - b)}{4rp} = \frac{2p(c - b)}{4rp} = \frac{c - b}{2r}.$$

Mutta $KX = BX - BK = \frac{1}{2}(c - b)$, joten myös

$$\frac{KX}{XI} = \frac{c - b}{2r},$$

ja väite on todistettu.

3. *Osoita, että jos x, y, z ovat ≥ 0, niin*

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Osoita edelleen, että kaikille reaaliluvuille a, b, c pätee

$$a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2 \geq 2(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3).$$

Ratkaisu. Olkoon $f(x, y, z) = x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)$. Selvästi funktion f arvo on sama kaikilla muuttujien x, y, z permutaatioilla. Voidaan siis olettaa, että $x \geq y \geq z$. f:n lausekkeen viimeinen yhteenlaskettava on yhden ei-negatiivisen ja kahden ei-positiivisen luvun tulona ei-negatiivinen, joten $f(x, y, z) \geq (x-y)(x(x-z) - y(y-z)) \geq (x-y)y((x-z)-(y-z)) = y(x-y)^2 \geq 0$. Toisen väitteen todistamiseksi hyödynnämme jo todistettua epäyhtälöä $f(x, y, z) \geq 0$. Kun f:n lausekkeesta poistetaan sulkeita, saadaan

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y).$$

Sijoitetaan $x = a^2$ $y = b^2$ ja $z = c^2$ ja otetaan huomioon $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2+c^2 \geq 2bc$ ja $c^2+a^2 \geq 2ca$. Väite seuraa välittömästi.

4. *Luvut x ja y toteuttavat yhtälöt $x^2-3yx+9=0$ ja $y^2+y=1$.*

a) Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n on

$$x^n = a_n + b_n x + c_n y + d_n xy,$$

missä a_n, b_n, c_n, d_n ovat kokonaislukuja.

b) Osoita, että $x^5 = 243$.

c) Osoita, että jos $5|n$, niin

$$x^{n-1}+3x^{n-2}+3^2x^{n-3}+\cdots+3^{n-2}x+3^{n-1} = 0.$$

Ratkaisu. Todistetaan väite a) induktiolla. Selvästi $x^1 = x$ on haluttua muotoa: $b_1 = 0$, $a_1 = c_1 = d_1 = 0$. Oletetaan sitten, että $x^n = a_n+b_nx+c_ny+d_nxy$ joillain kokonaisluvuilla a_n, b_n, c_n, d_n. Kun otetaan huomioon, että $x^2 = 3xy-9$ ja $y^2 = 1-y$, saadaan $x^{n+1} = x(a_n+b_nx+c_ny+d_nxy) = a_nx+b_n(3xy-9)+c_nxy+d_n(3xy-9)y = -9b_n+a_nx-9d_ny+(3b_n+c_n)xy+3d_n(1-y)x = -9b_n+(a_n+3d_n)x-9d_ny+(3b_n+c_n-3d_n)xy$. Tämä on vaadittua muotoa, $a_{n+1} = -9b_n$, $b_{n+1} = a_n+3d_n$, $c_{n+1} = -9d_n$ ja $d_{n+1} = 3b_n+c_n-3d_n$.

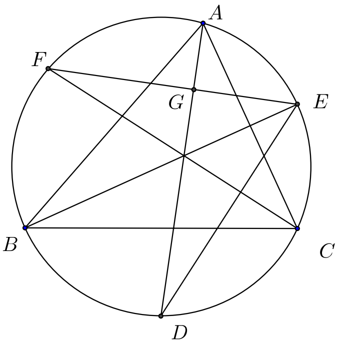
Väitteen b) todistamiseksi riittää laskea kertoimet a_5, b_5, c_5, d_5. Saadaan järjestyksessä $a_2 = -9$, $b_2 = 0$, $c_2 = 0$, $d_2 = 3$; $a_3 = 0$, $b_3 = 0$, $c_3 = -27$, $d_3 = -9$; $a_4 = 0$, $b_4 = -27$, $c_4 = 81$, $d_4 = 0$ ja $a_5 = 243$, $b_5 = 0$, $c_5 = 0$, $d_5 = 0$. Siis todellakin $x^5 = 243$.

Väitteen c) todistamiseksi huomataan ensin, että tehtävässä esiintyvä polynomi on itse asiassa

$$\frac{x^n - 3^n}{x - 3}.$$

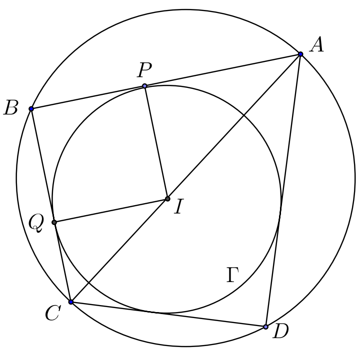
Jos $n = 5k$, niin edellisen kohdan perusteella $x^n - 3^n = (x^5)^k - (3^5)^k = 243^k - 243^k = 0$.

5. *Kolmion ABC kärjistä A, B, C piirretyt kulmanpuolittajat leikkaavat kolmion ympärysympyrän myös pisteissä D, E, F. Osoita, että $AD \perp EF$.*



Ratkaisu. Olkoot kolmion ABC kulmat α, β, γ. Olkoon G AD:n ja FE:n leikkauspiste. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle GDE = \angle ABE = \frac{1}{2}\beta$, $\angle BED = \angle BAD = \frac{1}{2}\alpha$ ja $\angle BEF = \angle BCF = \frac{1}{2}\gamma$. Sovelletaan lausetta kolmion kulman vieruskulman suuruudesta kolmioon GDE. Saadaan $\angle AGE = \angle GDE + \angle DEG = \frac{1}{2}(\beta + \alpha + \gamma) = 90°$.

6. *Jännenelikulmiolla $ABCD$ on sisäympyrä (ympyrä, joka sivuaa sen kaikkia sivuja). Lävistäjä AC jakaa $ABCD$:n kahdeksi sama-alaiseksi kolmioksi. Osoita, että $AB = AD$ ja $BC = BD$. Oletetaan, että $AB = 3 \cdot BC$ ja että $ABCD$:n sisäympyrän säde on r. Osoita, että nelikulmion ala on $\frac{16}{3}r^2$.*



Ratkaisu. Oletuksen mukaan $ABCD$ on ympyrän ympärysnelikulmio. Siis $AB + CD = BC + DA$. Koska $ABCD$ on jännenelikulmio, $\angle ABC$ ja $\angle CDA$ ovat vieruskulmia; niillä on sama sini. Kolmioiden ABC ja CDA kaksinkertaiset alat ovat $AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC)$ ja $CD \cdot DA \cdot \sin(\angle CDA)$. Siis $AB \cdot BC = CD \cdot DA$ eli

$$\frac{AB + CD}{CD} = \frac{AB}{CD} + 1 = \frac{DA}{BC} + 1 = \frac{DA + BC}{BC}.$$

Siis $CD = BC$ ja $AB = AD$. Kolmiot ABC ja ADC ovat siis yhteneviä (sss), joten $\angle ABC = \angle CDA$. Kun kulmat toisaalta ovat vieruskulmiakin, ne ovat suoria. Lisäksi AC on kulman $\angle BAD$ puolittaja, joten jännenelikulmion sisäympyrän Γ keskipiste I on janalla AC. Jälkimmäisen väitteen todistamiseksi merkitään P:llä ja Q:lla Γ:n ja AB:n sekä BC:n sivuamispisteitä. Nyt $IPBQ$ on neliäö, sillä siinä on kolme suoraa kulmaa $\angle IPB$, $\angle PBQ$, $\angle BQI$ ja yhtä pitkät viereiser sivut $IP = IQ = r$. Kolmiot ABC ja IQC ovat yhdenmuotoiset (kk), joten $IQ : QC = AB : BC = 3$. Tästä seuraa, että $BC = BQ + QC = r + \frac{1}{3}r = \frac{4}{3}r$ ja $AB = 3 \cdot BC = 4r$. Kolmion ABC ala on siis $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}r \cdot 4r$

ja nelikulmion $ABCD$ ala kaksi kertaa ABC:n ala eli $\dfrac{16}{3}r^2$.

7. *Säännöllisen n-kulmion $\mathcal{P}_n$ ympäri piirretyn ympyrän säde on 1. Olkoon*

$$L_n = \{d \in \mathbb{R} | d \text{ on } \mathcal{P}_n\text{: n kahden kärjen välinen etäisyys}\}.$$

Määritä

$$\sum_{d \in L_n} d^2.$$

Ratkaisu. Olkoon kysytty summa S. Olkoon n-kulmio $A_1A_2\ldots A_n$ ja olkoon O sen keskipiste. Olkoon $\overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{OA_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Kun vektorit $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{e_n}$ asetetaan peräkkäin, saadaan säännöllinen n-kulmio. Siis

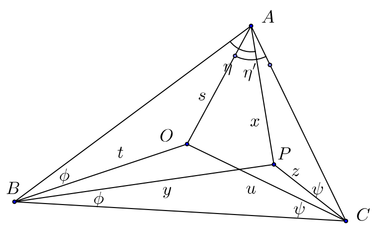
$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{0}.$$

Lasketaan kärjestä A_1 alkavien lävistäjien pituuksien neliöiden summa. Se on

$$\sum_{k=1}^{n} |\overrightarrow{e_k} - \overrightarrow{e_1}|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{e_k} - \overrightarrow{e_1}) \cdot (\overrightarrow{e_k} - \overrightarrow{e_1}) = \sum_{k=1}^{n} (|\overrightarrow{e_k}|^2 + |\overrightarrow{e_1}|^2) - 2\overrightarrow{e_1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{e_k}\right) = 2n.$$

Jos n on parillinen, edellisessä summassa ovat kaikki monikulmion kärkien väliset eri etäisyydet kahdesti, paitsi pisimmän etäisyyden neliö 2^2, joka esiintyy vain kerran. Siis $2S = 2n + 4$ ja $S = n + 2$. Jos S on pariton, summassa esiintyvät kaikki monikulmion kärkien väliset etäsiyydet kahdesti. Tässä tapauksessa siis $S = n$.

8. *Pisteet O ja P ovat sellaiset kolmion ABC sisäpisteet, että $\angle ABO = \angle CBP$ ja $\angle BCO = \angle ACP$. Osoita, että $\angle CAO = \angle BAP$.*



Ratkaisu. Olkoot kolmion kulmat α, β, γ, $\angle ABO = \angle CBP = \phi$, $\angle BCO = \angle ACP = \psi$, $\angle CAO = \eta'$ ja $\angle BAP = \eta$. Olkoot vielä $AP = x$, $BP = y$, $CP = z$ ja $AO = s$, $BO = t$, $CO = u$. Kolmioista ABO, BCO, CAO saadaan sinilauseen perusteella

$$\frac{s}{\sin\phi} = \frac{t}{\sin(\alpha - \eta')}, \quad \frac{t}{\sin\psi} = \frac{u}{\sin(\beta - \phi)}, \quad \frac{u}{\sin\eta'} = \frac{s}{\sin(\gamma - \psi)},$$

joista

$$1 = \frac{s}{t} \cdot \frac{t}{u} \cdot \frac{u}{s} = \frac{\sin\phi \sin\psi \sin\eta'}{\sin(\alpha - \eta')\sin(\beta - \phi)\sin(\gamma - \psi)}.$$

Kolmioista ABP, BCP, CAP saadaan vastaavasti

$$1 = \frac{\sin\eta \sin\phi \sin\psi}{\sin(\alpha - \eta)\sin(\beta - \phi)\sin(\gamma - \psi)}.$$

Edellisistä yhtälöistä voidaan helposti ratkaista $\sin\eta\sin(\alpha - \eta') = \sin\eta'\sin(\alpha - \eta)$ ja edelleen, sinin vähennyslaskukaavaa soveltamalla, $0 = \sin\eta\cos\eta' - \sin\eta'\cos\eta = \sin(\eta - \eta')$. Koska η, $\eta' < 180°$, on $\eta = \eta'$, ja väite on todistettu.

9. *Olkoon* $f(n)$ *jonon* $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$ n*:n ensimmäisen jäsenen summa. Osoita, että* $f(s+t) - f(s-t) = st$ *kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla* s, t, $s > t$.

Ratkaisu. Jos n on parillinen, $n = 2k$, niin

$$f(n) = (0 + 1 + \cdots + k - 1) + (1 + 2 + \cdots + k) = \frac{(k-1)k + k(k+1)}{2} = k^2 = \frac{n^2}{4}.$$

Jos n on pariton, $n = 2k + 1$, niin

$$f(n) = (0 + 1 + \cdots + k) + (1 + 2 + \cdots + k) = k(k+1) = \frac{n^2 - 1}{4}.$$

Koska $s+t-(s-t) = 2t$, $s+t$ ja $s-t$ ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia. Jos ne ovat molemmat parillisia, $f(s+t) - f(s-t) = \frac{1}{4}((s+t)^2 - (s-t)^2) = st$, jos molemmat parittomia, niin $f(s+t) - f(s-t) = \frac{1}{4}((s+t)^2 - 1 - ((s-t)^2 - 1)) = st$.

10. *Reaaliluvuille* x, y, z *pätee* $x+y+z = 5$ *ja* $xy+yz+xz = 3$. *Osoita, että* $-1 \le z \le \frac{13}{3}$.

Ratkaisu. Koska $(x+y)^2 = (5-z)^2$ ja $xy = 3 - z(x+y) = 3 - z(5-z) = z^2 - 5z + 3$, niin $0 \le (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = (5-z)^2 - 4(3-5z+z^2) = -3z^2+10z+13 = (-3z+13)(z+1)$. Tulon tekijöiden on oltava samanmerkkisiä; tämä toteutuu, kun $-1 \le z \le \frac{13}{3}$.

11. *Jokainen erään ympyrän kehällä sijaitsevien* 9 *pisteen välisistä* 36 *janasta on väritetty punaiseksi tai siniseksi. Oletetaan, että jokaisessa kolmiossa, jonka määrittää kolme näistä yhdeksästä pisteestä, on ainakin yksi punainen sivu. Osoita, että joidenkin neljän pisteen väliset kuusi janaa ovat kaikki punaisia.*

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että jokin piste A on yhdistetty neljään muuhun pisteeseen B_1, B_2, B_3, B_4 sinisin janoin. Koska jokaisessa kolmiossa AB_iB_j on ainakin yksi punainen jana, kaikki pisteitä B_1, B_2, B_3, B_4 yhdistävät $\binom{4}{2} = 6$ janaa ovat punaisia.Oleteaan sitten, että kaikista pisteistä lähtevistä kahdeksasta janasta ainakin viisi on punaista. Kun lasketaan kaikista pisteistä lähtevien punaisten janojen lukumäärä, tulos on parillinen luku, koska jokainen jana lasketaan kahdesti. Koska $9 \cdot 5$ on pariton, on oltava ainakin yksi piste A, josta lähtee kuusi punaista janaa AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5, AB_6. Viidestä janasta A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6 ainakin kolme on samaa väriä. Olkoot ne A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4. Jos väri on sininen, niin A_2A_3, A_2A_4 ja A_3A_4 ovat punaisia, joten neljän pisteen A, A_2, A_3, A_4 väliset janat ovat kaikki punaisia. Jos väri on punainen, niin tarkastetaan kolmiota $A_2A_3A_4$. Siinä on ainakin yksi punainen sivu, esimerkiksi A_2A_3. Silloin kaikki pisteiden A, A_1, A_2, A_3 väliset janat ovat punaisia.

12. *Osoita, että luku* $\binom{2p}{p} - 2$ *on jaollinen* p*:llä aina, kun* p *on alkuluku.*

Ratkaisu.

$$\binom{2p}{p} - 2 = \frac{2p(2p-1)\cdots(p+1) - 2p!}{p!}$$

$$= \frac{2}{(p-1)!}\left[(p-1)+p)((p-2)+p)\cdots(1+p) - (p-1)(p-2)\cdots 2\right].$$

Koska edellisen yhtälön oikean puolen ensimmäisen ja toisen tulon tekijät ovat järjestyksessä kongruentteja $\mod p$, tulot ovat kongruentteja, ja hakasuluissa oleva erotus on jaollinen p:llä. Koska p on alkuluku, se ei ole tekijänä luvussa $(p-1)!$. Siis p on tekijänä luvussa $\binom{2p}{p} - 2$.

13. *Positiivisen kokonaisluvun n tekijät ovat $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Määritä ne n, joille $n = d_6^2 + d_7^2 - 1$.*

Ratkaisu. [Tehtävän ratkaisu on pitkä ja kömpelö. Keksiikö joku suoremman? – Tehtävä on esitetty Australian matematiikkaolympialaisissa vuonna 1985, ja toisesta ratkaisusta päätellen ilmeisesti keksitty edellisenä vuotena. Kukaan ei ollut osannut sitä kilpailussa ratkaista.] Jos luvuilla d_6 ja d_7 olisi yhteinen tekijä, se olisi sekä luvun n että luvun $n+1$ tekijä. Luvuilla ei siis ole yhteisiä tekijöitä. Huomataan, että d_6 on luvun $d_7^2 - 1 = (d_7+1)(d_7-1)$ tekijä ja että d_7 on luvun $d_6^2 - 1 = (d_6+1)(d_6-1)$ tekijä. Oletetaan, että $d_6 = ab$ ja $d_7 = cd$, $1 < a < b$, $1 < c < d$. Silloin luvut 1, a, b, c ja d ovat n:n tekijöitä, ja jokainen niistä on $< d_6$. Myös ac on n:n tekijä; ac ei ole kumpikaan luvuista d_6 tai d_7. Jos olisi $ac > d_7 = cd$, olisi $a > d$ ja $b > a > d$ ja $d_6 > d_7$. Siis $ac < d_6$, eikä d_6 olisi n:n tekijöistä kuudes. Siis ainakin toinen luvuista d_6 ja d_7 on joko alkuluku p tai alkuluvun p neliö p^2. Nähdään, että $p > 2$. Jos d_7 on p tai p^2, d_7:llä ja joko (d_6-1):llä tai (d_6+1):llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Koska $d_6 < d_7$, $d_7|(d_6+1)$, ja $d_7 = d_6 + 1$. Jos taas d_6 on p tai p^2, d_6:lla ja joko (d_7-1):llä tai (d_7+1):llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Jos $d_6|(d_7-1)$, niin $d_7 = kp+1$ tai $d_7 = kp^2+1$ jollain $k \geq 1$. Oletetaan ensin, että $d_7 = kp+1$. Koska d_7 on p^2-1:n tekijä, $p^2 - 1 = m(kp+1)$. Silloin p on luvun $m-1$ tekijä, joten $p \leq m+1$. Toisaalta

$$p = \frac{mk \pm \sqrt{(mk)^2 + 4(m+1)}}{2} > mk.$$

Tämä on mahdollista vain, jos $k = 1$ ja $d_7 = p+1 = d_6+1$ Olkoon sitten $d_7 = kp^2+1$ jollain $k \geq 1$. Tämä ei ole mahdollista, koska d_7 on luvun $p^2 - 1 < kp^2 + 1 = d_7$ tekijä. Olisi vielä mahdollista, että d_6 on luvun $d_7 + 1$ tekijä. Tarkastellaan ensin tapaus $d_6 = p$. Silloin $d_7 = kp - 1$ jollain $k \geq 1$. Koska $d_7 > p = d_6$, niin $k > 1$. Koska d_7 on luvun $p^2 - 1$ tekijä, niin $k \leq p$. Nyt $(p+1)(p-1) = p^2 - 1 = m(kp-1)$. Koska $kp - 1 > p - 1$, niin $m < p+1$ eli $m - 1 < p$. Toisaalta p on luvun $m-1$ tekijä, joten $p \leq m-1$. Ristiriita osoittaa, että p ei voi olla d_7+1:n tekijä. Vielä on mahdollisuus $d_6 = p^2$ ja p^2 d_7+1:n tekijä. Silloin olisi $d_7 = kp^2 - 1$ jollain $k \geq 1$ ja $kp^2 - 1$ olisi p^2-1:n tekijä. Tällöin olisi $k = 1$ ja $d_7 < p^2 = d_6$.

Edellisten tarkastelujen tulos on, että riippumatta siitä, onko d_6 vai d_7 alkuluku tai alkuluvun neliö, on oltava $d_7 = d_6 + 1$. Siis $n = d_6^2 + (d_6+1)^2 - 1 = 2d_6^2 + 2d_6 = 2d_6(d_6+1)$.

Edellä olevan perusteella joko $n = 2p(p+1)$, $n = 2(p-1)p$ tai $n = 2(p^2-1)p^2$. Oletetaan, että $n = 2p(p \pm 1)$ jollain alkuluvulla $p > 2$. Silloin luvulla $2(p+1)$ on viisi lukua p pienempää tekijää, ja tekijöinä ovat ainakin luvut 1, 2 ja 4, joten, koska $p+1 > 4$, $p+1 = 2^3$, $p+1 = 2^4$, $p+1 = 2^5$ tai $p+1 = 2s$ tai $= 4s$, missä s on pariton. Jos $p \pm 1 = 8$, n:llä on vain kolme p:tä pienempää tekijää. Jos $p+1 = 2^4$, p ei ole alkuluku. Jos $p+1 = 32$, niin saadaan ratkaisu $n = 2 \cdot 31 \cdot 32 = 1884$. Jos $p+1 = 2s$, ja s on ainakin kahden eri parittoman luvun tulo, niin niin n:llä olisi ainakin kuusi p:tä pienempää tekijää. Siis s:n olisi oltava alkuluku tai alkuluvun neliö. Jos s olisi alkuluku, olisi $n = 4ps$, ja sen p:tä pienemmät tekijät olisivat enintään 1, 2, 4, ja s. Jos $p+1 = 2s^2$, olisi $n = 4ps^2$, ja p:tä pienempiä tekijöitä olisi kuusi: 1, 2, 4, s, $2s$ ja s^2. Jos $p+1 = 4s$, niin 1, 2, 4, 8, s ja $2s$ olisivat p:tä pienempiä n:n tekijöitä.

Olkoon sitten $n = 2p(p-1)$ jollain alkuluvulla p. n:n tekijöitä ovat jälleen ainakin 1, 2 ja 4. Luvulla $p-1$ on oltava viisi sitä itseään pienempää tekijää. Ei ole mahdollista, että ne olisivat vain kahden potensseja (olisi $p-1 = 32$, $p = 33$; ei alkuluku). Samoin kuin edellä, todetaan, että on oltava $n = 4ps$, $= 8ps$ tai $= 4ps^2$ ja että mikään näistä ei täytä tehtävän ehtoa.

On vielä mahdollisuus $n = 2(p^2-1)p^2$. Luvulla n on viisi p^2-1:tä pienempää tekijää; niitä ovat ainakin 1, 2, 4, p, $2p$, $p-1$ ja $p+1$. Tämä on mahdollista vain, jos $p-1 = 2$ ja $p+1 = 4$ eli $p = 3$, $p^2 = 9$ ja $n = 2 \cdot 89 = 144$.

Tehtävällä on siis kaksi ratkaisua, $n = 144$ ja $n = 1984$.

14. *Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit $f(x)$, joille*

$$f(x)f(x+1) = f(x^2+x+1).$$

Ratkaisu. Jos f on vakiopolynomi, $f(x) = C$, niin $C^2 = C$, joten $C = 0$ tai $C = 1$. Oletetaan sitten, että f ei ole vakiopolynomi. Osoitetaan, että f:llä ei ole reaalijuuria. Jos sillä olisi sellaisia, olisi jokin niistä, sanokaamme a, suurin. Silloin olisi $f(a^2+a+1) = 0$, ja $a^2+a+1 > a$, eli a ei olisikaan suurin juuri. Koska polynomilla f ei ole nollakohtia, sen asteluku on parillinen, $2n$. Jos $f(x) = a_{2n}x^{2n} + \cdots$, niin $a_{2n}^2 x^{4n} + \cdots = a_{2n}x^{4n} + \cdots$. Koska $a_{2n} \neq 0$, on oltava $a_{2n} = 1$.

Kokeillaan polynomia $f(x) = x^2 + c$. Jotta se toteuttaisi tehävän yhtälön, on oltava $(x^2+c)((x+1)^2+1) = (x^2+x+1)^2 + c$ eli $(2c+1)x^2 + 2cx + c^2 + c = 3x^2 + 2x + 1 + c$. Yhtälö toteutuu identtisesti jos ja vain jos $c = 1$. Osoitetaan sitten, että $f(x) = (x^2+1)^n$ totetuttaa yhtälön kaikilla n. Yhtälön vasen puoli on nimittäin $(x^2+1)^n((x+1)^2+1)^n = ((x^2+1)(x^2+2x+2))^n = (x^4+2x^3+3x^2+2x+2)^n$ ja oikea puoli $((x^2+x+1)^2+1)^n = (x^4+2x^3+3x^2+2x+2)^n$. Osoitetaan vielä, ei ole muita ratkaisuja. Koska raktaisupolynomi on parillista astetta ja korkeimman x:n potenssin kerroin on yksi, muu kuin $(x^2+1)^n$-tyyppinen ratkaisu olisi $f(x) = (x^2+1)^n + g(x)$, missä g on astetta $m < 2n$ oleva polynomi. Kun f sijoitetaan tethtävän yhtälöön ja otetaan huomioon, että $(x^n+1)^n$ toteuttaa yhtälön, saadaan $(x^2+1)^n g(x+1) + ((x+1)^2+1)^n g(x) = g(x^2+x+1) - g(x)g(x+1)$. Yhtälön vasemman puolen polynomin aste on $2n+m$ ja oikean puolen $\leq 2m < 2n+m$. Ristiriita osoittaa, että muita ratkaisuja ei ole.

15. *Oletetaan, että*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Osoita, että

$$\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}=\frac{1}{(a+b+c)^5}.$$

Ratkaisu. Yhtälöstä

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

seuraa

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}=-\frac{a+b}{c(a+b+c)}.$$

Jos $a+b=0$, niin $\dfrac{1}{b^5}=-\dfrac{1}{a^5}$, ja väitetty yhtälö pätee triviaalisti. Oletetaan sitten, että $a+b\neq 0$. Silloin $-ab=c(a+b+c)$ eli $c^2+(a+b)c+ab=0$ eli $(c+a)(c+b)=0$. Mutta sekä $c=-a$ että $c=-b$ johtavat väitettyyn yhtälöön samoin kuin $a+b=0$.