Harjoitustehtävät, tammikuu 2013, vaativammat

Ratkaisuja

1. *Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille*

$$2f(xy) + 2f(xz) \geq 4f(x)f(yz) + 1$$

kaikilla reaaliluvuilla x, y, z.

Ratkaisu. Kun sijoitetaan $x = y = z = 0$, saadaan epäyhtälö $4f(0) \geq 4f(0)^2 + 1$ eli $(2f(0)+1)^2 \leq 0$. Siis $f(0) = \frac{1}{2}$. Samoin, kun $x = y = z = 1$, niin $4f(1) \geq 4f(1)^2 + 1$ ja $f(1) = \frac{1}{2}$. Asetetaan sitten $y = z = 0$, x mielivaltainen. Silloin $4f(0) \geq 2f(x) + 1$ eli $1 \geq 2f(x)$ eli $f(x) \leq \frac{1}{2}$. Mutta jos $y = z = 1$ ja x on mielivaltainen, saadaan $4f(x) \geq 2f(x) + 1$ eli $f(x) \geq \frac{1}{2}$. Ainoa funktio, joka toteuttaa epäyhtälön, on vakiofunktio $f(x) = \frac{1}{2}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

2. *Olkoon $P(x) = x^2 + x^0 + x^{12} + x^{n_1} + x^{n_2} + \cdots + x^{n_k} + x^{2012}$, missä $12 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < 2012$ ja n_i:t ovat kokonaislukuja. Osoita, että P:n reaaliset nollakohdat, jos niitä on, ovat enintään $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.*

Ratkaisu. Selvästi $P(x) > 0$, kun $x \geq 0$. Olkoon sitten $x < 0$, $x \neq -1$. Silloin

$$P(x) > 1 + x + x^3 + \cdots + x^{2011} = 1 + \frac{x(1-x^{2012})}{1-x^2} = \frac{1 + x - x^2 - x^{2013}}{1-x^2}.$$

Koska $x^2 - x - 1 = 0$, kun $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, ja $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) > -1$, niin aina, kun $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) < x < 0$, $1 - x^2 > 0$, $-x^{2013} > 0$ ja $1 + x - x^2 > 0$. Siis voi olla $P(x) = 0$ vain, jos $x < \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

3. *Olkoon P n:nnen asteen polynomi ja olkoon $P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$ kaikilla x. Osoita, että P:llä ei ole reaalijuuria.*

Ratkaisu. Jos $P(x) = 0$ jollain $x \neq 0$, niin $P(2x^3 + x) = 0$. Jos $x > 0$, niin $2x^3 + x > x$, jos $x < 0$, niin $2x^3 + x < x$. P:llä ei voisi olla suurinta tai pienintä nollakohtaa. Kun polynomilla kuitenkin on enintään n nollakohtaa, positiivisten nollakohtien joukossa on suurin ja negatiivisten pienin. Oletus $P(x) = 0$, $x \neq 0$ johtaa siis ristiriitaan. On vielä torjuttava mahdollisuus $P(0) = 0$. Olkoon $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Olkoon k pienin indeksi, jolla $a_k \neq 0$. Nyt $P(x)P(2x^2) = a_n^2 2^n x^{3n} + \cdots + a_k^2 2^k x^{3k}$ ja $P(2x^3 + x) = a_n 2^n x^{3n} + \cdots + a_k x^k$. Koska polynomit ovat samat, niillä on sama alimmanasteinen termi. Siis $3k = k$ ja $k = 0$. Koska $a_0 \neq 0$, $P(0) \neq 0$.

4. *a, b, c ovat positiivisia lukuja. Osoita, että*

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geq \frac{3}{8}.$$

Ratkaisu. Merkitään $\dfrac{b}{a} = x$, $\dfrac{c}{b} = y$ ja $\dfrac{a}{c} = z$. Todistettava epäyhtälö on

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8},$$

kun $xyz = 1$. Alennetaan eksponenttia seraavalla tempulla: aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella

$$\frac{2}{(1+x)^3} + \frac{1}{2^3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)^6} \cdot \frac{1}{2^3}} = \frac{3}{2}\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Kun sama epäyhtälö sovelletaan todistettavan epäyhtälön vasemman puolen kuhunkin yhteenlaskettavaan ja sievennetään, saadaan todistettavaksi epäyhtälöksi

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Nyt tarvitaan vielä aputulos: kaikilla positiivisilla x ja y pätee

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}. \tag{1}$$

Epäyhtälö (1) pätee, koska raaka lasku osoittaa, että se on yhtäpitävä epäyhtälön $(1-xy)^2 + xy(x-y)^2 \geq 0$ kanssa. Kun epäyhtälöä (1) sovelletaan lukuihin $x = z$ ja $y = 1$, saadaan heti

$$\frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{1+z}.$$

Kaiken kaikkiaan siis

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+z} = \frac{1+z+1+xy}{1+z+xy+xyz} = 1.$$

(Muistetaan, että $xyz = 1$.) Väite seuraa.

5. *Olkoon $n > 1$ kokonaisluku, joka ei ole jaollinen 2012:lla. Olkoon $a_i = i + \dfrac{ni}{2012}$, $i = 1, 2, \ldots, 2011$ ja $b_j = j + \dfrac{2012j}{n}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Kun näiden jonojen jäsenet asetetaan kasvavaan järjestykseen, saadaan jono $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{2010+n}$. Osoita, että $c_{k+1} - c_k < 2$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, 2009 + n$.*

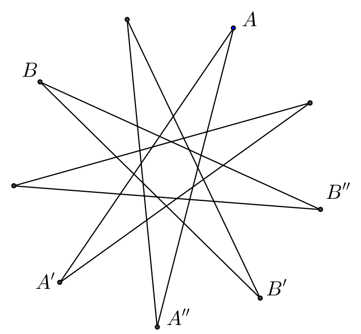
Ratkaisu. Jatketaan kumpaakin jonoa yhdellä termillä: $a_{2012} = 2012 + n$ ja $b_n = n + 2012 = a_{2012}$. Oletetaan, että $n < 2012$. Silloin $a_{i+1} - a_i = 1 + \dfrac{n}{2012} < 2$ kaikilla i ja $b_{i+1} - b_i = 1 + \dfrac{2012}{n} > 2$ kaikilla i. Jos c_k on jokin jonon (c_k) jäsen, on olemassa i siten, että $a_i \leq c_k < a_{i+1}$. Koska (b_i) jonon peräkkäisten termien väli on > 2, on oltava $c_{k+1} = a_{i+1}$. Mutta silloin $c_{k+1} - c_k \leq a_{i+1} - a_i < 2$. Jos $n > 2012$, sama päättely toimii, kun jonojen (a_i) ja (b_i) roolit vaihdetaan.

6. 2013 *lasta seisoo piirissä. Yksi aloittaa sanomalla "yksi", seuraava sanoo "kaksi", seuraava "kolme", seuraavaa taas "yksi", seuraava "kaksi" jne. Jokainen, joka sanoo "kaksi" tai "kolme" joutuu heti poistumaan piiristä. Viimeiseksi piiriin jäänyt on voittaja. Kuka hän on?*

Ratkaisu. Jos piirissä olevien lasten määrä olisi luvun 3 potenssi, 3^k, niin aloittaja A olisi voittaja: kierroksen aikana poistuisi tasan $\frac{2}{3} \cdot 3^k$ lasta ja jäljellä olisi 3^{k-1} lasta silloin, kun aloittaja jälleen olisi luvun sanomisen vuorossa. Nyt $3^6 = 27^2 = 729$ ja $3^7 = 2187$. Silloin, kun piiristä on poistunut $2013 - 729 = 1284$ lasta eli kun numeron on sanonut $3 \cdot \frac{1284}{2} = 1926$ lasta, jäljellä on 3^6 lasta ja vuorossa oleva lapsi sanoo ykkösen. Voittaja on siis piirissä paikalla 1927 seisova.

7. *Tason pistejoukolla S on seuraavat ominaisuudet:* (1) *Jokaisen kahden S:n pisteen välimatka on enintään 1.* (2) *Jokaista S:n pistettä A kohden on tasan kaksi sellaista S:n pistettä A' ja A'', joiden etäisyys A:sta on tasan 1. Kutsutaan näitä A:n vieruspisteiksi.* (3) *Jos A, $B \in S$ ja A', A'' ovat A:n vieruspisteet ja B', B'' ovat B:n vieruspisteet, niin $\angle A'AA'' = \angle B'BB''$. Voiko S:ssä olla* 2012 *pistettä? Voiko S:ssä olla* 2021 *pistettä?*

Ratkaisu. Jos pisteiden lukumäärä k on pariton, tehtävän mukainen joukko voi syntyä niin, että muodostetaan säännöllinen k-kulmio ja määritetään kunkin pisteen vieruspisteiksi kaksi pistettä vastapäätä symmetrisesti sijaitsevaa pistettä. Monikulmion koko voidaan helposti säätää sellaiseksi, että vieruspisteiden välinen etäisyys on vaadittu 1. Oheisessa kuvassa $k = 9$. Osoitetaan sitten, että pistejoukkoa ei ole olemassa, kun k on parillinen. Tätä varten osoitetaan ensin, että jokaisella kahdella vieruspisteitä yhdistävällä 1:n pituisella janalla on yhteinen piste. Vastaoletus: S:ssä on pisteet A, B, C, D niin että $AB = 1$, $CD = 1$ ja $AB \cap CD = \emptyset$. Jos nyt $ABCD$ on kupera nelikulmio, niin AC ja BD leikkaavat pisteessä E; silloin $AC+BD = AE+EB+EC+DE > AB+CD = 2$; ainakin toinen janoista AC ja BD on > 1, vastoin oletusta. Jos taas esimerkiksi D on kolmion ABC sisäpiste, niin ainakin toinen kulmista $\angle ADC$ ja $\angle BDC$ on tylppä. Koska $CD = 1$, niin joko AC tai BC on > 1; ristiriita taas.



Tehtävän mukaisen joukon pisteet muodostavat vieruspisteistä muodostuvia jonoja. Olkoon A, B, C, …, W, X, A tällainen. Jokainen ketjun peräkkäisiä pisteitä B, C, …, X yhdistävä jana leikkaa janan AB. X ja C ovat samalla puolella suoraa AB (muuten AX ja BC eivät leikkaisi) Janoja CD, DE, …, WX on siis oltava parillinen määrä (joka toinen ylittää AB:n toiselta, joka toinen toiselta puolelta). Janoja AB, …, XA on silloin pariton määrä. Jokainen sellainen vieruspisteiden jono, jossa AB ei ole mukana, synnyttää tilanteen, jossa AB ylitetään parillinen määrä kertoja. Tällaisissa jonoissa pitäisi olla parillinen määrä pisteitä, mutta edellä osoitetun mukaan tällainen ei ole mahdollista. Kaikki joukon S pisteet ovat siis yhdessä vieruspistejonossa, ja tässä jonossa on välttämättä pariton määrä pisteitä. S:ssä ei siis voi olla 2012 pistettä, mutta 2021 on mahdollinen pisteiden lukumäärä.

8. 2012×2013-*ruudukon ruudut indeksoidaan rivi- ja sarakenumeron osoittavin lukuparein*

$(m,\ n)$, $1 \le m \le 2012$, $1 \le n \le 2013$. Ruudukon ruudut väritetään seuraavalla prosessilla. Ensin valitaan jotkin r ja s, $1 \le r \le 2010$, $1 \le s \le 2012$ ja väritetään ruudut $(r,\ s)$, $(r+1,\ s+1)$ ja $(r+2,\ s+1)$. Sen jälkeen väritetään aina kerrallaan kolme samalla rivillä tai kolme samassa sarakkeessa olevaa vierekkäistä värittämätöntä ruutua. Voidaanko koko ruudukko värittää näin?

Ratkaisu. Tarkastellaan indeksejä s. Ensimmäisten väritettyjen ruutujen jälkimmäisten indeksien summa on $3s+2$. Sen jälkeen jokaisen yhdellä värityskerralla väritetyn ruutukolmikon jälkimmäisten indeksien summa on joko muotoa $3s$ (päällekkäiset ruudut) tai $3s+3$ (verekkäiset ruudut). Jos kaikki ruudut voitaisiin värittää tehtävässä esitetyllä tavalla, jälkimmäisten indeksien summa olisi $\equiv 2 \bmod 3$. Summa on kuitenkin $2012 \cdot 2013 \cdot 1007$, siis kolmella jaollinen luku. Ehdotettu väritystapa ei ole mahdollinen.

9. *Patera-nimisessä maassa on 20 kaupunkia. Kaupunkien välistä lentoliikennettä hoitaa kaksi lentoyhtiötä: Valkosiivet ja Sinisiivet. Ne ovat jakaneet liikenteen seuraavasti:*

(i) Jokaisen kahden kaupungin välillä on tasan yksi välilaskuton edestakainen yhteys, jota ylläpitää jompikumpi yhtiöistä.

(ii) Paterassa on kaksi kaupunkia, S ja B, joiden väliä ei voi matkustaa käyttämällä vain Valkosiipien lentoja.

Osoita, että minkä tahansa kahden Pateran kaupungin väliä voi matkustaa Sinisiivillä niin, että tarvitaan enintään yksi välilasku.

Ratkaisu. Olkoon P Pateran kaupunkien joukko ja olkoon V_S niiden kaupunkien joukko, joihin voi matkustaa kaupungista S käyttämällä vain Valkosiipien lentoja. Silloin $B \in P \setminus V_S$ ja $S \in V_S$, joten kumpikaan joukoista V_S ja $P \setminus V_S$ ei ole tyhjä. Jos $X \in V_S$ ja $Y \in P \setminus V_S$, niin X:n ja Y:n välillä ei ole Valkosiipien lentoa. (Jos olisi, niin S:stä pääsisi X:n kautta Valkosiipien lennoilla Y:hyn ja olisi $Y \in V_S$.) Tarkastellaan nyt mielivaltaista paria X, Y Pateran kaupunkeja. Jos $X \in V_S$ ja $Y \in P \setminus V_S$ tai $X \in P \setminus V_S$ ja $Y \in V_S$, niin ehdon (i) ja edellä esitetyn havainnon perusteella X:n ja Y:n välillä on suora Sinisiipien lento. Jos $X \in V_S$ ja $Y \in V_S$, niin sekä X:stä että Y:stä on suora yhteys B:hen Sinisiipien lennoilla, joten X:stä pääsee Y:hyn Sinisiipien lennoilla, yhdellä välilaskulla. Jos $X \in P \setminus V_S$ ja $Y \in P \setminus V_S$, niin molemmista kaupungeista on suora yhteys A:han Sinisiipien lennolla. Toisesta toiseen pääsee Sinisiivin yhdellä välilaskulla.

10. *Eräässä maassa (ei kai Paterassa?) oli tuomioistuin*[1]*. Päätuomari oli määrännyt tuomarien 23 tuolia sijoitettavaksi rinnakkain. Pitkien istuntojen aikana jotkin tuomarit poistuivat ja jotkut palasivat oikeussaliin. Oikeussaliin saapuvat tuomarit tulivat joko yksitellen tai pareittain, ja jos parina tulleista tuomareista jompikumpi joutui poistumaan, myös hänen parinsa poistui, mutta näitä tuomareita ei sen jälkeen pidetty parina. Päätuomari oli ohjeistanut oikeudenpalvelijan toimimaan niin, että aina kun pari saapui oikeussaliin, he istuutuvat vierekkäisille tuoleille. Osoita, että oikeudenpalvelija pystyi noudattamaan tätä määräystä, jos paikalla ei koskaan ollut enempää kuin 16 tuomaria.*

Ratkaisu. Numeroidaan istuimet 1:stä 23:een. Oikeudenpalvelija pitää huolta siitä, että yksin saliin tuleva tuomari ei istu paikoille 2, 5, 8, 11, 14, 17 tai 20. Yksin tuleville on siten

[1] Tehtävässä esiintyvän lukumäärän on innoittanut muinaisjuutalainen tuomioistuin (pieni) *Sanhedrin*, jossa on arveltu olleen 23 jäsentä.

16 mahdollista paikkaa. Oletetaan, että saliin saapuu pari. Se pääsee istumaan, ellei kolmen istuimen ryhmissä $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{10, 11, 12\}$, $\{13, 14, 15\}$, $\{16, 17, 18\}$, $\{19, 20, 21\}$ jokaisessa jo ole ainakin kaksi varattua istuinta ja ellei istuimista $\{22, 23\}$ ainakin toinen ole varattu. Mutta jos näin on, niin paikalla on jo ainakin 15 tuomaria ja saapuva pari tekisi tuomarien määrän ainakin 17:ksi. Jos tuomarien määrä ei ylitä 16:tta, kaikki pääsevät istumaan päätuomarin toivomalla tavalla.

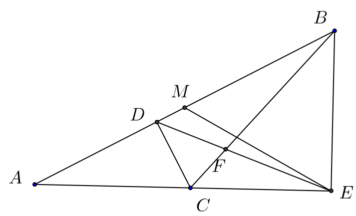
11. *Osoita, että kupera nelikulmio $ABCD$ on vinoneliö silloin ja vain silloin, kun kolmioiden ABC, BCD, CDA ja DAB sisäympyröillä on yhteinen piste.*

Ratkaisu. Jos $ABCD$ on vinoneliö, jokainen tehtävässä luetelluista neljästä kolmiosta on tasakylkinen. Jokaisen kolmioin kannan keskipiste on vinoneliön lävistäjien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion sisäympyrä sivuaa kantaa aina kannan keskipisteessä, joten tehtävässä mainituilla ympyröillä on yhteisenä pisteenä vinoneliön lävistäjien keskipiste.

Oletetaan sitten, että $ABCD$ on sellainen nelikulmio, että tehtävässä nimettyjen kolmioiden sisäympyröillä on yhteinen piste. Kolmioiden ABC ja CDA (sisäympyröiden) yhteinen piste voi olla vain janalla AC ja kolmioiden BCD ja DAB (sisäympyröiden) yhteinen piste voi olla vain janalla BD. Yhteisen pisteen on oltava lävistäjien leikkauspiste P. Osoitetaan, että lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Ellei näin olisi, voitaisiin olettaa, että $\angle APB > 90°$. Olkoot I ja I' kolmioiden ABC ja DAB sisäympyröiden keskipisteet. Koska $IP \perp AC$ ja $I'P \perp BD$, pisteet I ja I' ovat molemmat kolmion ABP sisäpisteitä, Silloin suorien BI ja AI' leikkauspiste E on myös kolmion ABP sisällä ja $\angle AEB > 90°$. Mutta silloin $\angle ABI + \angle BAI' < 90°$. Koska AI' ja BI ovat $\angle DAB$:n ja $\angle ABC$:n puolittajia, on $\angle DAB + \angle ABC < 180°$. Aivan samoin voidaan päätellä summasta $\angle BCD + \angle CDA$. Tullaan ristiriitaan sen kanssa, että nelikulmion $ABCD$ kulmien summa on $360°$. Nelikulmion $ABCD$ lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti. Edellisestä päättelystä seuraa myös, että kolmioiden sisäympyröiden keskipisteet ovat nelikulmion lävistäjillä. Mutta tämä tarkoittaa sitä, että kolmioissa kulmanpuolittajat ja korkeusjanat yhtyvät, joten kolmiot ovat tasakylkisiä ja $ABCD$ on vinoneliö.

12. *Kolmiossa ABC $\angle ACB$ on tylppä. Piste D on C:n kohtisuora projektio suoralla AB, M on AB:n keskipiste, E sellainen sivun AC jatkeen piste, että $EM = BM$ ja F BC:n ja DE:n leikkauspiste. Oletetaan vielä, että $BE = BF$. Osoita, että $\angle CBE = 2 \cdot \angle ABC$.*

Ratkaisu. Olkoon $\angle ABC = \beta$ ja $\angle FBE = 2\phi$. On osoitettava, että $\beta = \phi$. Koska $EM = BM = AM$, E on AB-halkaisijaisella ympyrällä. Siis $BE \perp AE$. Koska myös $CD \perp AB$, $BECD$ on jänenelikulmio. Siis $\angle CED = \angle CBE = \beta$. Koska $BE = BF$, $\angle FEB = 90° - \phi$. Mutta $\angle CED = 90° - \angle FEB$, joten $\beta = \phi$. [Olikohan tässä ratkaisu kulman ($\angle ABE$) kolmijako-ongelmaan?]



13. *Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC pisteet D, E ja F ovat pisteistä A, B ja C piirrettyjen korkeusjanojen kantapisteet. Kolmion ortokeskus on H. Osoita, että*

$$\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2.$$

Ratkaisu. Itse asiassa väite pätee mille tahansa kolmion pisteelle P, kun D, E ja F ovat pisteet, joissa suorat AP, BP ja CP leikkaavat kolmion sivut. Merkitään kolmion XYZ alaa $|XYZ|$. Koska kolmioilla ABC ja PBC on sama kanta, niin

$$\frac{AP}{AD} = \frac{AD - PD}{AD} = 1 - \frac{|PBC|}{|ABC|}.$$

Samoin saadaan

$$\frac{BP}{BE} = 1 - \frac{|PCA|}{|ABC|}, \quad \frac{CP}{CE} = 1 - \frac{|PAB|}{|ABC|}.$$

Kun edelliset kolme yhtälöä lasketaan puolittain yhteen, saadaan

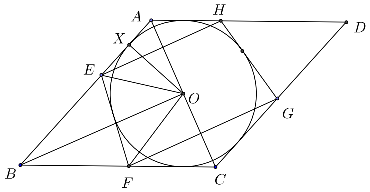
$$\frac{AP}{AD} + \frac{BP}{BE} + \frac{CP}{CF} = 3 - \frac{|PBC| + |PCA| + |PAB|}{|ABC|} = 3 - 1 = 2.$$

14. *Kolmion ABC kärjet ovat xy-tason kokonaislukukoordinaattisia pisteitä, eikä kolmion piirillä ole muita tällaisia pisteitä. Kolmion sisällä on tasan yksi kokonaislukukoordinaattinen piste G. Osoita, että G on kolmion painopiste.*

Ratkaisu. Tämä ilmeisen hankala väite on elegantisti todistettavissa *Pickin lauseen* (ks. http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/pick.pdf) avulla. Pickin lauseen mukaan sellaisen xy-tason monikulmion, jonka sisällä on s ja reunalla r kappaletta kokonaiskoordinaattista pistettä, ala on $T = s + \frac{1}{2}r - 1$. Pickin lauseen nojalla kolmion ABC ala on siis $\frac{3}{2}$ ja kunkin kolmion ABG, BCG ja CAG ala on $\frac{1}{2}$. Koska kolmioilla ABG ja ACG on yhteinen kanta AG, niillä on sama korkeus. Jos AG leikkaa BC:n pisteessä A', niin kolmioilla $BA'G$ ja $CA'G$ on yhteinen kanta ja sama korkeus; niillä on siis sama ala. Mutta tämä merkitsee myös sitä, että $BA' = A'C$, joten G on keskijanalla AA'. Samoin nähdään, että G on muillakin keskijanoilla, joten G on ABC:n painopiste.

2. ratkaisu. Ei merkitse rajoitusta, jos oletetaan, että $G = (0, 0)$. Olkoot kolmion kärjet $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$ ja $A_3 = (a_3, b_3)$. Tunnetusti janan A_1A_2 pisteet ovat kaikki pisteet $((1-t)a_1 + ta_2, (1-t)b_1 + tb_2)$, $0 \le t \le 1$; edelleen mielivaltainen kolmion piste eli janan A_1A_2 mielivaltaisen pisteen ja pisteen A_3 välisen janan mielivaltainen piste on $(u(1-t)a_1 + uta_2 + (1-u)a_3, u(1-t)b_1 + utb_2 + (1-u)b_3)$. Toisin kirjoitettuna tämä merkitsee, että kolmion $A_1A_2A_3$ pisteet ovat $(xa_1 + ya_2 + za_3, xb_1 + yb_2 + zb_3)$, missä $x + y + z = 0$ ja $x, y, z \in [0, 1]$; jos jokin luvuista x, y, z on nolla, piste on kolmion jollain sivulla; jos jokin luvuista on 1, piste on kolmion kärkipiste. Koska G on kolmion sisäpiste, joillain x, y, z on $xa_1+ya_2+za_3 = xb_1+yb_2+zb_3 = 0$. Tästä alkaen x, y, z ovat tämän ehdon toteuttavia lukuja. Väite on tosi, jos $x = y = z = \frac{1}{3}$. Pyritään todistamaan, etä näin todella on. Jos olisi $x \ge \frac{1}{2}$, olisi $y \le \frac{1}{2}$ ja $z \le \frac{1}{2}$ ja $2x-1+2y+2z = 1$. Piste $((2x-1)a_1+2ya_2+2za_3, (2x-1)b_1+2yb_2+2zb_3) = (-a_1 + 2(xa_1 + ya_2 + za_3), -b_1 + 2(xb_1 + yb_2 + zb_3)) = (-a_1, -b_1)$ olisi nyt kolmion $A_1A_2A_3$ kokonaislukukoorinaatinen piste. Oletuksen mukaan se voi olla vain jokin kolmion kärki tai piste G. Mutta se ei voi olla G eikä A_1, ja jos se olisi A_2 tai A_3, niin $G = (0, 0)$ olisi A_1A_2:n tai A_1A_3:n keskipiste, mikä sekin olisi vastoin oletusta. Siis ei ole $x \ge \frac{1}{2}$. Samoin todistetaan, että $y < \frac{1}{2}$ ja $z < \frac{1}{2}$. Mutta nyt luvut $1-2x$, $1-2y$, $1-2z$ kuluvat väliin $]0,\,1[$ ja niiden summa on 1. Piste $((1-2x)a_1+(1-2y)a_2+(1-2z)a_3,\ (1-2x)b_1+(1-2y)b_2+(1-2z)b_3) = (a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+b_3)$ on kolmion sisäpiste ja sillä on kokonaislukukoordinaatit. Se on siis G. Siis $\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3) = \frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3) = 0$, mikä tarkoittaa sitä, että G on kolmion painopiste.

15. *$ABCD$ on vinoneliö. Pisteet E, F, G, H ovat sellaisia sivujen AB, BC, CD, DA pisteitä, että EF ja GH ovat vinoneliön sisään piirretyn ympyrän tangentteja. Osoita, että $EH\|FG$.*



Ratkaisu. Osoitetaan kolmiot AEH ja CGF yhdenmuotoisiksi. Silloin $\angle AHE = \angle GFC$ ja koska $AH\|FC$, niin $EH\|FG$. Kolmioissa AEH ja CGE on joka tapauksessa $\angle EAH = \angle GCF$. Olkoon vinoneliön sisäympyrän keskipiste O. Vastinsivujen suhde tulee osoitetuksi samaksi, kun näytetään, että $AE \cdot FC = OA^2 = CG \cdot AH$. Osoitetaan, että $AE \cdot FC = OA^2$; jälkimmäinen yhtälö todistetaan samoin. Tavoite on osoittaa kolmiot OAE ja FCO yhdenmuotoisiksi. Koska ainakin $\angle OAE = \angle FCO$ (tasakylkinen kolmio BCA!), pyritään osoittamaan, että $\angle AOE = \theta = \angle CFO$. Jos X on sisäympyrän ja AB:n sivuamispiste, niin $\angle AOX = \frac{1}{2}\beta$ ($BO\perp OA$, koska vinoneliön lävistäjät ovat toisaan vastaan kohtisuorassa), $\angle AOX = \theta - \frac{1}{2}\beta$, $\angle XEO = 90^\circ - \theta + \frac{1}{2}\beta$, $\angle AEF = 180^\circ - 2\theta + \beta$ (EO on tangenttien EA ja EF välisen kulman puolittaja) ja $\angle BEF = 2\theta - \beta$. Siis $\angle BFE = 180^\circ - \beta - (2\theta - \beta) = 180^\circ - 2\theta$, $\angle EFC = 2\theta$ ja lopulta, niin kuin pyrittiinkin osoittamaan, $\angle CFO = \theta$ tangenttien FE ja FC välisen kulman puolittajana. Todistus onkin tällä valmis.

16. *Osoita, että on olemassa sellainen 2013 eri positiivisen luvun joukko, että mikään summa, jonka yhteenlaskettavat ovat joukon eri jäseniä, ei ole neliöluku, kuutioluku tai minkään kokonaisluvun korkeampi potenssi.*

Ratkaisu. Olkoon p alkuluku. Jokainen joukon $\{p,\,2p,\,\ldots,\,2013p\}$ alkioiden summa on muotoa ap; jos summa on neliö tai kokonaisluvun korkeampi potenssi, niin p on a:n tekijä. Mutta minkään osajoukon alkioiden summa ei ole suurempi kuin $(1+2+\cdots+2013)p = 2013\cdot 1007p = 2027091p$. Koska alkulukuja on äärettömän monta, on olemassa alkuluku $p > 2027091$. Tämä p ei ole minkään luvun $a \le 2027091$ tekijä.

17. *Osoita, että ei ole mahdollista muodostaa* 4096 *kappaletta* 24 *merkin pituista binäärijonoa (luvuista* 0 *ja* 1 *muodostuvaa jonoa), joista jokaiset kaksi poikkeaisivat toisistaan ainakin* 8 *merkin kohdalla.*

Ratkaisu. Kahden binäärijonon p ja q välimatkaksi $d(p,\,q)$ määritellään niiden merkkien lukumäärä, joissa jonot eroavat toisistaan. Osoitetaan, että välimatka toteuttaa "kolmioepäyhtälön" $d(p,\,q) \le d(p,\,r) + d(r,\,q)$. Jonot p ja r ovat samoja $24 - d(p,\,r)$ merkin kohdalla, ja r ja q eroavat näistä enintään $d(r,\,q)$ merkin kohdalla. p, q ja r ovat siis samoja ainakin $24 - d(p,\,r) - d(r,\,q)$ merkin kohdalla. p ja q voivat olla erilaisia enintään $24 - (24 - d(p,\,r) - d(r,\,q)) = d(p,\,r) + d(r,\,q)$ kohdalla. Jos p on jokin binäärijono, niin kaikki jonot q, joille $d(p,\,q) \le 4$, muodostavat p-keskisen 4-säteisen *pallon* $B_4(p)$. Olkoon nyt S sellainen binäärijonojen joukko, että jokaiset kaksi S:n alkiota eroavat toisistaan ainakin kahdeksan merkin kohdalla. Olkoot $p_1, p_2 \in S$. Jos $q \in B_4(p_1) \cap B_4(p_2)$, niin $d(p_1, p_2) \le d(p_1, q) + d(q, p_2) \le 4 + 4 = 8$. Koska $d(p_1, p_2) \ge 8$, on $d(p_1, p_2) = 8$ ja jos $p \in B_4(p_1) \cap B_4(p_2)$, niin $d(p_1, q) = d(p_2, q) = 4$. Kuinka moneen palloon $B_4(p)$, $p \in S$, jokin jono q voi kuulua? Koska q:ssa on 24 merkkiä ja kuuluessaan useampien pallojen leikkaukseen q eroaa pallon keskipistejonosta tasan neljän merkin kohdalla, se voi kuulua enintään kuuteen eri palloon $B_4(p)$, $p \in S$. Olkoon S:ssä $|S|$ alkiota. Yhdessä 4-säteisessä pallossa on $\binom{24}{0}+\binom{24}{1}+\binom{24}{2}+\binom{24}{3}+\binom{24}{4}$ jonoa. Koska S:n alkiot keskipisteinä olevissa 4-säteisissä palloissa olevien alkioiden määrä ei ylitä kaikkien jonojen määrää 2^{24} ja pallojen keskipisteistä etäisyydellä 4 olevat jonot ovat enintään kuudessa pallossa, on

$$|S| \cdot \left(\binom{24}{0}+\binom{24}{1}+\binom{24}{2}+\binom{24}{3}+\frac{1}{6}\binom{24}{4}\right) \le 2^{24}.$$

Sulkeissa oleva luku on $4096 = 2^{12}$. Siis $|S| \le 2^{12} = 4096$.

18. *Jokaiselle $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ määritellään $f(A) = A$:n suurin luku $-$ A:n pienin luku. Määritä lukujen $f(A)$ summa, kun A käy läpi kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukot.*

Ratkaisu. Olkoon M kaikkien joukon $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkojen suurimpien lukujen summa ja m vastaavasti pienimpien lukujen summa. Lukujen $f(A)$ summa on $M - m$. Yhden alkion joukoille A $f(A) = 0$. Jos $1 \le k \le n$, niin k on jokaisen joukon $k \cup B$, missä $B \subset \{k+1, k+2, \ldots, n\}$. Tällaisia joukkoja B on 2^{n-k}. Siis

$$m = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)2^k.$$

Lasketaan seuraavaksi, kuinka monella A on $f(A) = k \ge 1$. Jos jonkin tällaisen osajoukon pienin luku on a, sen suurin luku on $a + k \le n$. a:n valinnassa on siis $n - k$ vaihtoehtoa. Lukujen a ja $a + k$ välissä on $k - 1$ lukua, joten osajoukkoja, joille $f(A) = k$ on $(n-k)2^{k-1}$ kappaletta. Koska $f(A) \ge 1$ kaikilla S_n:n osajoukoilla, joissa on enemän kuin yksi alkio, ja tllaisia on $2^n - (n+1)$ kappaletta, niin

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)2^{k-1} = 2^n - (n+1),$$

josta seuraa

$$m = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)2^k = 2^{n+1} - n - 2.$$

Olkoon $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset S_n$. Jos määritellään $g(A) = \{n+1-a_1, n+1-a_2, \ldots, n+1-a_m\}$ saadaan selvästi S_n:n osajoukojen joukon bijektio itselleen. Lisäksi A:n maksimi on $g(A)$:n minimi ja kääntäen. A:n maksimin ja $g(A)$:n minimin summa on $n+1$. Koska S_n:llä on $2^n - 1$ epätyhjää osajoukkoa, $M + m = (n+1)(2^n - 1)$. Siis $M - m = M + m - 2m = (n+1)(2^n-1) - 2(2^{n+1} - n - 2) = (n-3) \cdot 2^n + n + 3$.

* * *

Tehtävät 1 – 8 ovat peräisin Vietnamin matematiikkaolympialaisista, 9, 10 ja 12 –14 Australian matematiikkaolympialaisista ja 11 sekä 15 – 18 Brasilian matematiikkaolympialaisista, eri vuosilta.