# 1 Helmikuun 2012 helpot kirjevalmennustehtävät

Vastauksia voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen laurihallila@gmail.com, tai postitse osoitteeseen Kalliorinteenkuja 1, 02770 Espoo. Kysymyksiä tehtävistä voi esittää sähköpostitse.

1. Opettaja on valinnut sellaiset positiiviset kokonaisluvut $a$ ja $b$, että $\frac{a}{b} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ on kokonaisluku.
a) Sam väittää, että jokainen luvun $b$ alkulukutekijä on myös luvun $a$ tekijä. Osoita, että Sam on oikeassa.
b) Sam väittää, että $b \leq a$. Onko hän tällä kertaa oikeassa?

2. Etsi kaikki funktiot $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, jotka toteuttavat ehdon

$$f(x + f(y)) = x + f(f(y))$$

kaikille realliluvuille $x$ ja $y$, kun $f(2004) = 2005$.

3. Kutsumme lukukolmiota *ihmeelliseksi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:
i) Kaikki sen luvut ovat positiivisia kokonaislukuja, joista mitkään kaksi eivät ole samoja, ja
ii) kahden vierekkäisen luvut alle on kirjoitettu luku, joka saadaan, kun suurempi näistä jaetaan pienemmällä.
Alla on yksi ihmeellinen kolmio, jonka sivun pituus on 3. Etsi pienin mahdollinen luku, joka voi esiintyä sellaisen ihmeellisen kolmion suurimpana lukuna, jonka sivun pituus on 4.

```
21    84     7
   4     12
      3
```

4. Rein teki matematiikan kokeen, jossa oli algebran, geometrian ja logiikan tehtäviä. Katsottuaan tuloksia Rein havaitsi, että hän oli vastannut oikein 50% algebran tehtävistä, 70% geometrian tehtävistä ja 80% logiikan tehtävistä. Yhteensä Rein oli vastannut oikein 62% algebran ja logiikan tehtävistä ja 74% geometrian ja logiikan tehtävistä. Kuinka suureen määrään tehtävistä Rein vastasi oikein kokonaisuudessaan (prosentteina)?

5. Kuvaa luku

$$\sqrt[3]{1342\sqrt{167} + 2005}$$

muodossa, joka sisältää numeroiden lisäksi pelkästään plus-, vähennys-, kerto-, jakomerkkejä ja neliöjuuria (kaikkia merkkejä ei tarvitse käyttää).

6. Reaaliluvut $x$ ja $y$ toteuttavat ehdot

$$\begin{cases} \sin x + \cos y &= 1 \\ \cos x + \sin y &= -1 \end{cases}$$

Osoita, että $\cos 2x = \cos 2y$.

7. Olkoot $a$, $b$ ja $n$ sellaisiä kokonaislukuja, että $a + b$ on jaollinen luvulla $n$, ja $a^2 + b^2$ on jaollinen luvulla $n^2$. Osoita, että $a^m + b^m$ on jaollinen luvulla $n^m$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $m$.

8. Erään maan postitoimisto käyttää lähettejä kuljettamaan postin; jokaisen lähetin tehtävä on tuoda posti yhdestä kaupungista seuraavaan. Tiedetään, että mistä tahansa kaupungista voidaan lähettää postia pääkaupunkiin $P$. Jos millä tahansa kahdella kaupungilla $A$ ja $B$ toteutuu ehto, että jokainen mahdollinen reitti kaupungista $A$ pääkaupunkiin $P$ kulkee kaupungin $B$ kautta, kutsumme kaupunkia $B$ *tärkeämmäksi* kuin kaupunki $A$.
a) Osoita, että mille tahansa kolmelle eri kaupungille $A$, $B$ ja $C$, jos $B$ on tärkeämpi kuin $A$ ja $C$ on tärkeämpi kuin $B$, niin $C$ on tärkeämpi kuin $A$.
b) Osoita, että mille tahansa kolmelle kaupungille $A$, $B$ ja $C$, jos sekä $B$ että $C$ ovat tärkeämpiä kuin $A$, niin joko $C$ on tärkeämpi kuin $B$, tai $B$ on tärkeämpi kuin $C$.

9. Onko olemassa sellaista kokonaislukua $n > 1$, että

$$2^{2^n - 1} - 7$$

ei ole neliöluku?

10. Etsi kaikki reaalilukuparit $(a, b)$, joille polynomien $6x^2 - 24x - 4a$ ja $x^3 + ax^2 + bx - 8$ juuret ovat ei-negatiivisia reaalilukuja.