Baltian Tie 2012 – ratkaisuja

1. *Luvut* 1, 2, ..., 360 *ositetaan yhdeksäksi peräkkäisten kokonaislukujen osajoukoksi, ja näissä joukoissa olevien lukujen summat järjestetään* 3×3*-taulukoksi. Onko mahdollista, että näin syntyvä taulukko on taikaneliö?*

Huomautus: Taikaneliö on neliön muotoinen lukutaulukko jossa jokaisen rivin, jokaisen sarakkeen ja kummankin lävistäjän lukujen summat ovat kaikki keskenään yhtä suuria.

Ratkaisu. Jos

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

on taikaneliö, niin

$$\begin{matrix} pa+q & pb+q & pc+q \\ pd+q & pe+q & pf+q \\ pg+q & ph+q & pi+q \end{matrix}$$

on taikaneliö kaikilla p ja q. Esimerkiksi

$$A = \begin{matrix} 7 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \end{matrix}$$

on taikaneliö. Nyt tehtävän yhdeksän joukkoa ovat $\{40k+1, 40k+2, \ldots, 40k+40\}$, $k = 0, 1, \ldots, 8$. Tällaisen joukon lukujen summa on $40^2k + \frac{1}{2}40 \cdot 41 = 1600k + 820$. Taikaneliön A ja aluksi esitetyn huomion perusteella summien taulukko

$$\begin{matrix} 1600\cdot 7+820 & 820 & 1600\cdot 5+820 \\ 1600\cdot 2+820 & 1600\cdot 4+820 & 1600\cdot 6+820 \\ 1600\cdot 3+820 & 1600\cdot 8+820 & 1600+820 \end{matrix}$$

on taikaneliö, joten vastaus tehtävän kysymykseen on myönteinen.

2. *Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Osoita, että*

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leqslant 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Ratkaisu. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $a \le b \le c$. Silloin $\max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} = c-a$ ja todistettava epäyhtälö on $3(ab+bc+ca+c-a-1) \le (a+b+c)^2$. Merkitään $a = b-x$ ja $c = b+y$, missä x ja y ovat ei-negatiivisia lukuja. Todistettava epäyhtälö on näillä merkinnöillä $3(b^2 - bx + b^2 + by + b^2 - bx + by - xy + x + y - 1) \le (3b + y - x)^2 = 9b^2 + 6b(y-x) + y^2 - 2xy + x^2$. Koska vasen puoli on $9b^2 + 6b(y-x) - 3xy - 3x - 3y + 3$, todistettavaksi epäyhtälöksi jää $0 \le y^2+x^2+xy-3x-3y+3 = (y-1)^2+(x-1)^2+xy-x-y+1 = (y-1)^2+(x-1)^2+(y-1)(x-1)$. Viimeinen lauseke on tulon $(y-1)(x-1)$ merkistä riippuen suurempi tai yhtä suuri kuin joko $(y-1)^2+(x-1)^2-2(y-1)(x-1) = (y-x)^2$ tai $(y-1)^2+(x-1)^2+2(y-1)(x-1) = (y+x-2)^2$. Epäyhtälö pitää siis paikkansa.

3. *a) Todista, että yhtälöllä*

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

missä $\lfloor x \rfloor$ *tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka ei ole suurempi kuin* x*, on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu jokaisella kahden peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun määräämällä välillä.*

b) Osoita, ettei mikään tämän yhtälön positiivisista reaalilukuratkaisuista ole rationaalinen.

Ratkaisu. a) Olkoon x annettu positiivinen luku, $\lfloor x \rfloor = k \geq 0$ ja $x = k + y$, missä $0 \leq y < 1$. Tehtävän yhtälö $k\big((k+y)^2 + 1\big) = (k+y)^3$ voidaan kirjoittaa muotoon $k + (k+y)^3 - y(k+y)^2 = (k+y)^3$ eli

$$y(k+y)^2 = k. \tag{1}$$

Funktio $y \mapsto y(k+y)^2$ on jatkuva ja aidosti kasvava ja se saa arvon $0 \leq k$, kun $y = 0$ ja arvon $(k+1)^2 > k$, kun $y = 1$. On siis tasan yksi ehdon $0 \leq y < 1$ toteuttava luku y, jolle $y(k+y)^2 = k$.

b) Tehtävän yhtälöllä ei ole ei-negatiivisia kokonaislukuratkaisuja. Jos sillä olisi ei-negatiivinen rationaalilukuratkaisu, niin yhtälön (1) toteuttaisi rationaaliluku $y = \dfrac{m}{n}$, missä m ja n olisivat yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Mutta silloin olisi $m(kn+m)^2 = kn^3$ eli $m^3 + n(2km + k^2m) = kn^3$. Koska m:llä ja n:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, tämä on mahdotonta.

4. *Osoita, että äärettömän monella kokonaislukuparilla* $(a,\, b)$ *yhtälön*

$$x^{2012} = ax + b$$

ratkaisujen joukosta löytyy kaksi eri reaalilukua, joiden tulo on 1.

Ratkaisu. Olkoon $m > 2$ kokonaisluku. Silloin yhtälön $x^2 - mx + 1 = 0$ juuret ovat eri suuria positiivisia lukuja. (Lukujen tulo on 1 ja summa on $m > 0$, joten luvut ovat positiivisia; yhtälön diskriminantti on $m^4 - 4 > 0$, joten juuret ovat eri suuria.) Polynomien jakoyhtälön perusteella $x^{2012} = Q(x)(x^2 - mx + 1) + R(x)$, missä $R(x)$ on enintään astetta 1 oleva polynomi. Siis $R(x) = a_m x + b_m$, ja polynomi $x^{2012} - a_m x - b_m$ on jaollinen polynomilla $x^2 - mx + 1$. Sen nollakohtien (eli yhtälön $x^{2012} = a_m x + b_m$ juurien) joukossa ovat siis yhtälön $x^2 - mx + 1 = 0$ molemmat eri juuret, siis kaksi lukua, joiden tulo on 1.

On vielä osoitettava, että pareja $(a_m,\, b_m)$ löytyy äärettömän monta, kun m saa kaikki kokonaislukuarvot > 2. Ensinnäkin, jos $k \neq m$, niin yhtälöiden $x^2 - kx + 1 = 0$ ja $x^2 - mx + 1 = 0$ juuret ovat eri lukuja. Jos yhtälöillä olisi yhteinen juuri x_1, niin x_1 toteuttaisi yhtälön $(k - m)x_1 = 0$. Olisi $x_1 = 0$, mutta 0 ei ole minkään yhtälön $x^2 - mx + 1 = 0$ juuri. Polynomilla $x^{2012} - ax - b$ on enintään 2012 eri nollakohtaa, joten on enintään 1006 sellaista m:n arvoa, jolla $x^{2012} - ax - b$ on jaollinen polynomilla $x^2 - mx + 1$. Sama pari $(a_m,\, b_m)$ voi liittyä enintään 1006:een eri m:n arvoon. Pareja $(a_m,\, b_m)$ on siis äärettömän monta.

5. *Etsi kaikki funktiot* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *joille pätee*

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy)) \tag{1}$$

kaikilla reaaliluvuilla x *ja* y.

Ratkaisu. Osoitetaan, että yhtälön (1) toteuttaa vain identtinen nollafunktio.

Kun yhtälöön (1) sijoitetaan $y = 0$, saadaan $f(f(1)) = 0$. Kun nyt sijoitetaan yhtälöön (1) $x = 0$, saadaan $f(y) = f(-y)$ kaikilla y. f:n on siis oltava parillinen funktio. Kun yhtälöön (1) sijoitetaan $x = 1$, saadaan $f(1+y) = f(1-y)+f(f(1-y))$. Mutta parillisuuden vuoksi $f(1-y)+f(f(1-y)) = f(-1-y) = f(1-y-2)$. Kun merkitään $1-y = z$, nähdään, että $f(f(z)) = f(z-2)-f(z)$ kaikilla z. Siis myös $f(f(-z)) = f(-z-2)-f(-z)$. Mutta koska f on parillinen, on myös $f(f(z)) = f(z+2)-f(z)$ eli $f(z+2) = f(z-2)$ kaikilla z. Kun siis yhtälöön (1) sijoitetaan $y = 2$, saadaan $f(f(1-2x)) = 0$ kaikilla x. Mutta tämä merkitsee, että $f(f(x)) = 0$ kaikilla x. Yhtälö (1) saa nyt muodon $f(x+y) = f(x-y)$ kaikilla x, y. Erityisesti $f(2x) = f(0)$ kaikilla x, joten f on vakiofunktio. Koska $f(f(x)) = 0$, ainoa mahdollinen $f(0)$:n arvo on 0.

6. *Pöydällä on* 2012 *lamppua. Kaksi henkilöä pelaavat seuraavanlaista peliä. Vuorossa oleva pelaaja painaa jonkin lampun katkaisijaa, mutta näin syntyvä asetelma ei ole saanut esiintä aiemmin pelin aikana. Pelaaja, joka ei voi enää tehdä laillista siirtoa, häviää. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?*

Ratkaisu. Aloittava pelaaja voittaa, jos hän valitsee yhden lampun ja joka vuorollaan painaa tämän lampun katkaisijaa. Olkoot aloittajan valitseman lampun kaksi mahdollista tilaa a_1 ja a_2. Muilla lampuilla on on kaikkiaan 2^{2011} eri tilaa, joita voi merkitä $t_1, t_2, \ldots$. Kaikkien lamppujen tilan ilmaisee pari (a_i, t_j). Voidaan olettaa, että pelin alussa lamput ovat tilassa (a_1, t_1). Alittajan vuoron jälkeen tila on (a_2, t_1). Toinen pelaaja ei voi painaa aloittajan lampun katkaisijaa, koska se johtaisi jo käytettyyn tilaan (a_1, t_1). Hänen vuoronsa jälkeen ollaan siis tilassa (a_2, t_2), $t_2 \neq t_1$. Aloittajan vuoron jälkeen tila on (a_1, t_2). Toinen pelaaja ei voi palata tilaan t_1, joten hänen vuoronsa jälkeen ollaan tilassa (a_1, t_3), $t_3 \neq t_1, t_2$. Aloittajan vuoron jälkeen tilanne on (a_2, t_3). Toisen pelaajan vuoron jälkeen tilanne on (a_2, t_4), $t_4 \neq t_1, t_2, t_3$. Nämä päättelyaskeleet voidaan helposti muotoilla induktiotodistukseksi sille, että aloittaja voi aina vuorollaan painaa valitsemansa lampun katkaisijaa ja toisen pelaajan on aina painettava sellaista katkaisijaa, joka synnyttää aikaisemmin esiintymättömän yhdistelmän. Toiselta pelaajalta loppuvat mahdollisuudet 2^{2011} vuoron jälkeen, joten hän häviää pelin.

7. 2012×2012-*ruudukon oikeasta ylänurkasta vasempaan alanurkkaan kulkevan lävistäjän jotkin ruudut on merkitty. Nurkkaruutuja ei ole merkitty. Ruudukon jokaiseen ruutuun kirjoitetaan kokonaisluku seuraavalla tavalla. Ruudukon ylimmän rivin ja vasemman puoleisimman sarakkeen ruutuihin kirjoitetaan luku yksi. Merkittyihin ruutuihin kirjoitetaan kuhunkin nolla. Jokaiseen muuhun ruutuun kirjoitetaan sen yläpuolella ja vasemmalla olevien naapuriruutujen lukujen summa. Osoita, ettei oikeasta alanurkasta voi löytyä luvulla* 2011 *jaollista lukua.*

Ratkaisu. Ruudukon ruuduissa olevat luvut kertovat, kuinka monta erilaista oikealle ja alas suuntautuvaa ja merkityt ruudut ohittavaa kulkureittiä (jossa siis siirrytään ruudusta sen oikealla puolella tai sen alapuolella olevaan ruutuun) vasemman yläkulman ruudusta kyseiseen ruutuun on. Jos jätetään huomiotta merkittyihin ruutuihin liittyvä ehto, niin reittejä vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan on $\binom{4022}{2011}$. Mutta 2011 on alkuluku, joten se esiintyy tekijänä tasan kahdesti luvun $\binom{4022}{2011} = \frac{4022!}{(2011!)^2}$ osoittajassa ja nimittäjässä. $\binom{4022}{2011}$ ei siis ole jaollinen 2011:llä. Sellaisia reittejä, jotka kulkevat jonkin merkityn ruudun kautta, on $\binom{2011}{k}^2$, missä k on merkityn ruudun järjestysluku jommastakummasta kulmaruudusta laskettuna. Selvästi tämä luku on jaollinen 2011:llä. Oikeassa alakulmassa on näin ollen luku, joka on 2011:llä jaoton luku vähennettynä joillakin 2011:llä jaollisilla luvuilla. Luku itse on silloin jaoton luvulla 2011.

8. *On annettu suunnistettu verkko, joka ei sisällä suunnistettuja syklejä, ja jossa jokaisen polun särmien lukumäärä on enintään* 99*. Osoita, että on mahdollista värittää verkon särmät kahdella värillä siten, että jokaisessa yksivärisessä polussa on enintään* 9 *särmää.*

Ratkaisu. Annetaan jokaiselle verkon solmulle A luku $n(A)$, joka on pisimmän tähän solmuun päättyvän suunnistetun polun särmien lukumäärä. Jokaisessa solmussa on silloin jokin luvuista 0, 1, ..., 99. Jokainen särmä yhdistää solmun, jossa on pienempi luku solmuun, jossa on suurempi luku (jos verkossa on särmä $\overrightarrow{AB}$, niin B:hen päättyy ainakin $(n(A)+1)$:stä särmästä muodostuva suunnattu polku). Olkoon $n(A)$:n kymmenjärjestelmäesitys $n(A) = x_A \cdot 10 + y_A$. Väritetään nyt $\overrightarrow{AB}$ siniseksi, jos $x_A = x_B$, ja muussa tapauksessa punaiseksi. Kaikki verkon särmät tulevat väritetyiksi jommallakummalla värillä. Sinisissä poluissa peräkkäisille särmille A, B pätee $y_A < y_B$ ja punaisissa poluissa $x_A < x_B$. Niin sinisissä kuin punaisissakaan poluissa ei voi olla enempää särmiä kuin on numeroita 1, 2, ..., 9.

9. *Kaikkiin* 5×5*-ruudukon ruutuihin on kirjoitettu luku nolla. Voimme yksi kerrallaan ottaa jonkin ruudun ja sen naapuriruudut (joilla on yhteinen sivu sen kanssa), ja kasvattaa kaikkien niiden sisältämiä lukuja yhdellä. Onko mahdollista saada aikaan ruudukko, jonka jokaisessa ruudussa on luku* 2012*?*

Ratkaisu. Tällainen ei ole mahdollista. Muodostetaan lukuruudukko, jossa jokaisessa ruudussa ja sen naapuriruuduissa olevien lukujen summa on 22. Tällainen on esimerkiksi ruudukko

$$\begin{array}{ccccc} 8 & 7 & 5 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 10 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 7 & 8 \end{array}.$$

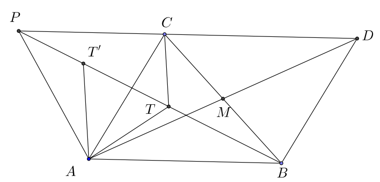
Havaitaan, että ruudukon lukujen summa on 138. Tarkastellaan nyt lukua, joka saadaan, kun jokaisessa täytettävän ruudukon ruudussa oleva luku kerrotaan yllä olevan ruudukon vastaavassa ruudussa olevalla luvulla ja kaikki 25 näin saatua lukua lasketaan yhteen. Alkutilanteessa summa on 0. Jokainen tehtävän mukainen ykkösen lisääminen vierekkäisiin ruutuihin lisää summa 22:lla, joten kyseinen summa on aina 22:lla ja siis myös 11:llä jaollinen. Jos kaikissa ruuduissa olisi luku 2012, summa olisi $138 \cdot 2012$. Helposti nähdää, että tulon kumpikaan tekijä ei ole jaollinen 11:lla.

10. *Henkilöt A ja B pelaavat seuraavaa peliä. Ennen kuin peli alkaa, A valitsee 1000 paritonta alkulukua (joiden ei tarvitse olla eri suuria), ja sitten B valitsee niistä puolet ja kirjoittaa ne tyhjälle liitutaululle. Vuorossa oleva pelaaja valitsee positiivisen kokonaisluvun n, pyyhkii taululta jotkin alkuluvut p_1, p_2, $\ldots$, p_n ja kirjoittaa niiden tilalle luvun $p_1p_2\cdots p_n - 2$ alkulukutekijät. (Jos jokin alkuluku esiintyy alkutekijähajotelmassa useamman kerran, niin se myös kirjoitetaan taululle yhtä monta kertaa kuin se tekijähajotelmassa esiintyy.) Pelaaja A aloittaa, ja se pelaaja, jonka siirto jättää jäljelle vain tyhjän liitutaulun, häviää. Osoita, että toisella pelaajista on voittostrategia, ja selvitä kummalla.*

Huomautus: Koska luvulla 1 ei ole alkulukutekijöitä, on yksittäisen luvun 3 poistaminen sallittua.

Ratkaisu. Pelaajalla A on voittostrategia. Sanomme, että alkuluku p on $+$-luku, jos $p \equiv 1 \bmod 4$ ja $-$-luku, jos $p \equiv -1 \bmod 4$. Hän voi valita 1000 $+$-lukua. Pelin alkaessa taululla on silloin 500 $+$ lukua. Olkoon P taululla olevien $-$-lukujen lukumäärän parillisuus. Pelin alkaessa P on parillinen. Nyt $+$-luvun alkulukuhajotelmassa parillinen määrä $-$-lukuja ja $-$-luvun alkulukuhajotelmassa on pariton määrä $-$-lukuja. Näin ollen alkulukujen p_1, p_2, $\ldots$, p_n joukossa olevien $-$-lukujen määrän parillisuus ja luvun $p_1p_2\cdots p_n - 2$ alkutekijöiden joukossa olevien $-$-lukujen määrän parillisuus ovat vastakkaisia. Jokaisessa siirrossa P muuttuu vastakkaiseksi, joten jokaisen A:n siirron jälkeen P on pariton. A ei voi hävitä. Jokaisessa siirrossa taululla olevien lukujen tulo pienenee ($p_1p_2\cdots p_n$ korvautuu $(p_1p_2\cdots p_n - 2)$:lla), joten peli lopulta päättyy, ja A voittaa.

11. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa $\angle A = 60^\circ$. Piste T sijaitsee kolmion sisällä siten, että $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Olkoon M janan BC keskipiste. Osoita, että $TA + TB + TC = 2AM$.*



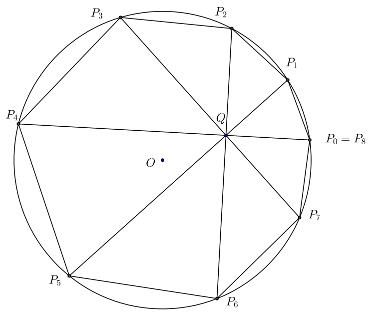
Ratkaisu. [Ratkaisun löytymisen kannalta on etua, jos muistaa, että tehtävän piste T on kolmion ABC *Fermat'n piste.* Täydennetään kolmio ABC suunnikkaaksi $ABDC$. Silloin $AD = 2AM$. Olkoon P sellainen piste, että ACP on tasasivuinen kolmio, joka ei peitä kolmiota ABC. Osoitetaan, että $TA + TB + TC = BP$. Tätä varten muodostetaan tasasivuinen kolmio ATT'. Nyt $\angle TAC = 60^\circ - \angle T'AC = \angle PAC$. Koska $AC = AP$ ja $AT = AT'$, kolmiot ATC ja $AT'P$ ovat yhteneviä (sks). Siis $\angle AT'P = 120^\circ$. Kaikkiaan siis P, T', T ja B ovat samalla suoralla, ja $BP = BT + TT' + T'P = BT + TA + TC$. Kulmat $\angle PAB$ ja $\angle ABD$ ovat 120° ja $PA = AC = BD$ kolmiot ABP ja ADB ovat siis yhteneviä (sks), joten $AD = BP$, ja todistus on valmis.

12. *Olkoot P_0, P_1, $\ldots$, $P_8 = P_0$ ympyrän kehän peräkkäisiä pisteitä, ja olkoon piste Q monikulmion $P_0P_1\ldots P_7$ sisällä siten, että $\angle P_{i-1}QP_i = 45^\circ$ kun $i = 1, \ldots, 8$. Osoita, että* *summa*

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i{}^2$$

on pienimmillään täsmälleen silloin kun piste Q on ympyrän keskipiste.

Ratkaisu. Kosinilauseesta saadaan heti $P_{i-1}P_i^2 = QP_{i-1}^2 + QP_i^2 - \sqrt{2}QP_{i-1}QP_i$. Lisäksi $0 \le (QP_{i-1} - QP_i)^2$, joten $QP_{i-1}QP_i \le \frac{1}{2}\left(QP_{i-1}^2 + QP_i^2\right)$. Yhtäsuuruus on voimassa vain, jos $QP_{i-1} = QP_i$. Kun nämä havainnot sovitetaan tehtävän minimoitavaan lausekkeeseen, saadaan



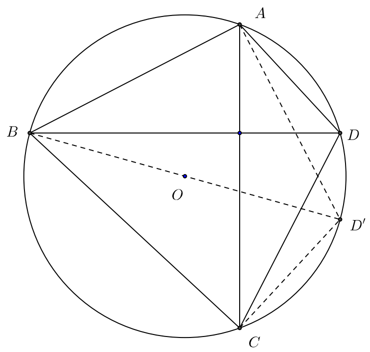
$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i{}^2 \ge (2-\sqrt{2})\sum_{i=1}^{8} QP_i^2. \tag{1}$$

Yhtäsuuruus vallitsee silloin ja vain silloin, kun kaikki QP_i:t ovat yhtä suuria eli silloin, kun Q on tehtävän ympyrän keskipiste. Todistus on valmis, jos vielä osoitetaan, että epäyhtälön (1) oikea puoli saa pienimmän arvonsa, kun Q on ympyrän keskipiste.

Mutta itse asiassa tämä oikea puoli on riippumaton Q:sta. Pythagoraan lauseen nojalla nimittäin

$$\sum_{i=1}^{8} QP_i^2 = P_0P_2^2 + P_4P_6^2 + P_1P_3^2 + P_5P_7^2.$$

Nelikulmiot $P_0P_2P_4P_6$ ja $P_1P_3P_5P_7$ ovat jännenelikulmioita, joiden lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Jos $ABCD$ on tällainen jännenelikulmio, niin $\angle ABD + \angle BAC = 90°$. Valitaan kaarelta $\overset{\frown}{CDA}$ piste D' niin, että $AD' = CD$ ("peilataan kolmio ACD AC:n keskinormaalin yli"). Silloin $\angle CAD' = \angle ACD = \angle ABC$ ja $\angle BAD' = 90°$, joten BD' on ympärysympyrän halkaisija. Mutta silloin Pythagoraan lauseen nojalla $AB^2 + CD^2 = AB^2 + AD'^2 = BD'^2$. Siis

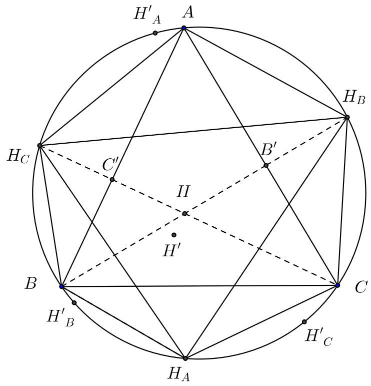


$$\sum_{i=1}^{8} QP_i^2 = 2d^2,$$

missä d on tehtävän ympyrän halkaisija.

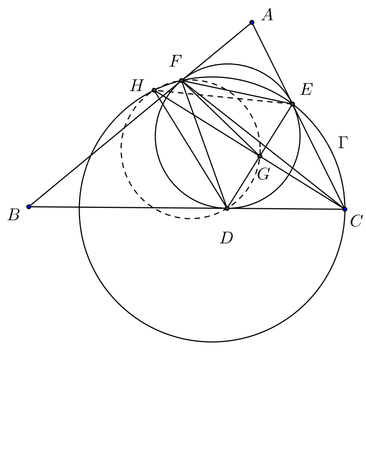
13. *Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, ja olkoon H sen ortokeskus. Kärjistä A, B ja C piirretyt korkeusjanat leikkaavat ympäripiirretyn ympyrän pisteiden A, B ja C ohella myös pisteissä H_A, H_B ja H_C, tässä järjestyksessä. Osoita, ettei kolmion $H_AH_BH_C$ ala voi olla suurempi kuin kolmion ABC ala.*

Ratkaisu. Koska kolmio ABC on teräväkulmainen, H on kolmion sisällä. Tunnetusti H:n peilikuvat H_A, H_B, H_C suorien BC, CA, AB suhteen ovat kolmion ABC ympärysympyrällä. [Todistus: Olkoot esimerkiksi B' ja C' ABC:n B:sta ja C:stä piirrettyjen korkeusjanojen kantapisteet. Nelikulmiossa $AC'HB'$ on kaksi suoraa kulmaa, joten se on jännenelikulmio. Kulmat $\angle B'AC'$ ja $\angle C'HB'$ ovat suplementtikulmia. Mutta $\angle BH_AC = \angle BHC = \angle C'HB'$. Siis myös $\angle BAC$ ja $\angle BH_AC$ ovat suplementtikulmia, joten ABH_AC on jännenelikulmio.] Kuusikulmion $AH_CBH_ACH_B$ ala on tasan kaksi kertaa kolmion ABC ala. [Kolmiot AH_CB ja AHB jne. ovat yhteneviä.] On siis osoitettava, että kolmion $H_AH_BH_C$ on enintään puolet kuusikulmion $AH_CBH_ACH_B$ alasta. Tämä tulee todistetuksi, jos voidaan osoittaa, että kolmioiden AH_CHB, $BHAH_C$ ja CH_BH_A yhteenlaskettu ala on suurempi tai yhtä suuri kuin kolmion $H_AH_BH_C$ ala. Koska $AH_C = AH = AH_B$, AH_CHB on tasakylkinen; samoin ovat muutkin kaksi luetelluista kolmioista. Jos $H_AH_BH_C$ on teräväkulmainen, sen ortokeskuksen H' peilaukset H'_A, H'_B ja H'_C yli suorien H_BH_C, H_CH_A ja H_AH_B ovat ABC:n ympärysympyrällä ja kolmion $H_AH_BH_C$ ala on sama kuin kolmioiden $H_CH_BH'_A$, $H_AH_CH'_B$ ja $H_AH_BH'_C$ alojen summa. Kukin näistä kolmioista on alaltaan enintään yhtä suuri kuin vastaava samakantainen tasakylkinen kolmio (H_CH_BA jne.), joten väite on todistettu. Jos sitten $H_AH_BH_C$ ei ole teräväkulmainen, voidaan olettaa, että $\angle H_AH_BH_C$ on tylppä. Silloin kolmio $H_AH_BH_C$ on enintään yhtä suuri alaltaan kuin H_AH_CB yksinään, ja väitteen totuus on ilmeinen.



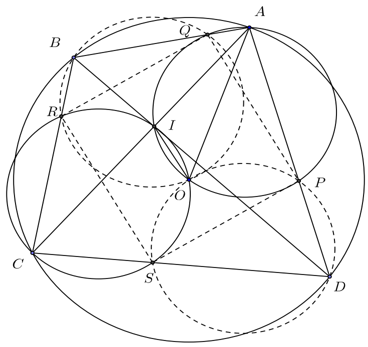
14. *Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa sivuja BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F, tässä järjestyksessä. Olkoon G janan DE keskipiste. Osoita, että $\angle EFC = \angle GFD$.*

Ratkaisu. Olkoon Γ kolmion CEF ympärysympyrä. Suora CG leikkaa Γ:n myös pisteessä H. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle EFC = \angle EHC$. Koska CG on tasakylkisen kolmion CED korkeusjana, E ja D ovat toistensa peilikuvia suoran GC suhteen, joten $\angle EHC = \angle GHD$. Koska AE on kolmion ABC sisäympyrän tangentti, niin $\angle AEF = \angle FDE$ ja siis $\angle FDE = 180° - \angle CEF$. Mutta ympyrän Γ jännenelikulmiosta $FHCE$ saadaan $\angle FHC = 180° - \angle FEC$. Siis $\angle FHC = \angle FHG = \angle FDE = \angle FDG$. Tästä seuraa, että pisteet F, H, D, G ovat samalla ympyrällä, joten $\angle GFD = \angle GHD$. Yllä on jo todistettu, että $\angle GHD = \angle EFC$, joten todistus on valmis.



15. *Jännenelikulmion $ABCD$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O sijaitsee kyseisen ne-*

likulmion sisällä, mutta ei sen lävistäjällä AC. Nelikulmion lävistäjät leikkaavat pisteessä I. Kolmion AOI ympäripiirretty ympyrä leikkaa sivua AD pisteessä P ja sivua AB pisteessä Q; kolmion COI ympäripiirretty ympyrä leikkaa sivua CB pisteessä R ja sivua CD pisteessä S. Osoita, että $PQRS$ on suunnikas.



Ratkaisu. Todistus perustuu siihen, että ympyrät AQP, CSR, BRQ ja DPA ovat samasäteiset. Koska AC ei ole $ABCD$:n ympärysympyrän halkaisija, tasan toinen kulmista $\angle ABC$ ja $\angle CDA$ on tylppä. Voidaan olettaa, että $\angle ABC$ on tylppä. Koska $AQIO$ on jännenelikulmio, $\angle QAI = \angle QOI$. Vastaavasti $\angle RCI = \angle ROI$. Näin ollen $\angle QOR = \angle QOI + \angle ROI = \angle QAI + \angle RCI = \angle BAC + \angle BCA = 180° - \angle ABC = 180° - \angle QBR$. Siis $QBRO$ on jännenelikulmio. Samoin osoitetaan, että $POSD$ on jännenelikulmio. Koska OAB on tasakylkinen kolmio, $\angle OBA = \angle BAO$. Kulma $\angle OBA = \angle OBQ$ on ympyrän $BROQ$ kehäkulma ja $\angle BAO = \angle QAO$ on ympyrän $AQIO$ kehäkulma. Molempia vastaa sama jänne OQ. Tästä seuraa, että molemmilla ympyröillä on sama säde. Samalla tavalla osoitetaan, että kaikkien neljän ympyrän AQP, BRQ, CSR ja DPS säde on sama. Mutta nyt SP on viimeksi mainitun ympyrän kehäkulmaakulmaa $\angle SPD = \angle CDA$ vastaava jänne ja RQ samasäteisen ympyrän BRQ kehäkulmaa $\angle RBQ = \angle CBA = 180° - \angle CDA$ vastaava jänne. Tästä seuraa, että $SP = RQ$. samoin osoitetaan– samasäteisten ympyröiden AQP ja CSR avulla – että $RS = QP$. $PQRS$ on siis todella suunnikas.

16. *Olkoot n, m ja k positiivisia kokonaislukuja, joille $(n-1)n(n+1) = m^k$. Osoita, että $k = 1$.*

Ratkaisu. Luvuilla n ja $(n-1)(n+1)$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Lukujen tulo voi olla jonkin lukun k:s potenssi vain, jos molemmat ovat k:nsia potensseja. Mutta jos $n = a^k$ ja $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 = b^k$, niin $b^k = \left(a^2\right)^k - 1$. Mutta kahden kokonaisluvun k:nsien potenssien erotus voi olla 1 vain, jos $k = 1$.

17. *Merkitköön $d(n)$ luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärää. Etsi kaikki kolmikot (n, k, p), joissa n ja k ovat positiivisia kokonaislukuja ja p on alkuluku, ja joille*

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Ratkaisu. Luvun n tekijöiden määrä on parillinen aina ja vain, kun n ei ole neliöluku. Luvun n $\sqrt{n}$:ää pienemmät tekijät voidaan nimittäin asettaa yksikäsitteiseen vastaavuuteen $\sqrt{n}$:ää suurempien tekijöiden kanssa; tekijöiden joukossa on vielä $\sqrt{n}$ täsmälleen silloin, kun n on neliöluku. Tästä seuraa, että $n^{d(n)}$ on aina neliöluku. Olkoon siis $n^{d(n)} = m^2$. Tehtävässä etsitään ehdon $m^2 - 1 = (m-1)(m+1) = p^k$ toteuttavia lukuja. On oltava $m > 1$. Jos $m = 2$, on oltava $p^k = 3$ eli $p = 3$, $k = 1$ ja $n = 2$. Jos $m > 2$, luvut $m - 1$

ja $m+1$ ovat molemmat luvun p^k tekijöitä, joten molemmat ovat alkuluvun p potensseja. Ainoa mahdollisuus on $p = 2$, $m - 1 = 2$, $m + 1 = 4$, $m = 3$, $n^{d(n)} = 3^2 = 9$. On oltava $n = 3$. Tehtävän ratkaisukolmikot $(n,\ k,\ p)$ ovat siis $(2,\ 1,\ 3)$ ja $(3,\ 3,\ 2)$.

18. *Etsi kaikki kokonaislukukolmikot* $(a,\ b,\ c)$, *joille* $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

Ratkaisu. Osoitetaan, että tällaisia kolmikkoja ei ole. Tehtävän yhtälön oikea puoli on jaollinen neljällä. Koska parittomien lukujen neliöt ovat $\equiv 1 \bmod 4$, lukujen a, b, c joukossa ei ole parittomia. On siis $a = 2x$, $b = 2y$ ja $c = 2z$, missä x, y, z ovat kokonaislukuja. Tehtävän yhtälö on neljällä jaettuna $x^2 + y^2 + z^2 = 5030503$. Katsotaan tätä modulo 8: oikea puoli on $\equiv 7 \bmod 8$, mutta koska neliöluvut ovat $\equiv 0$, $\equiv 1$ tai $\equiv 4 \bmod 8$, ei kolmen neliön summa voi olla $\equiv 7 \bmod 8$.

19. *Osoita, että luku* $n^n + (n+1)^{n+1}$ *on yhdistetty äärettömän monella positiivisella kokonaisluvulla* n.

Ratkaisu. Tarkastellaan lukuja $n = 6k+4$. Silloin $n \equiv 1 \bmod 3$ ja $n+1 \equiv 2 \equiv -1 \bmod 3$. Lisäksi $n + 1 = 6k + 5$ on pariton. Siis $n^n + (n+1)^{n+1} \equiv 1 + (-1)^{n+1} = 0 \bmod 3$. Luku on siis jaollinen kolmella eli yhdistetty.

20. *Etsi kaikki yhtälön* $2x^6 + y^7 = 11$ *kokonaislukuratkaisut.*

Ratkaisu. Ratkaisuja ei ole. On keksittävä moduli, joka osoittaa yhtälön mahdottomaksi. Luonnollinen yrite on $m = 6 \cdot 7 + 1 = 43$. Jonkin verran työtä tehden huomaa, että kuudensien potenssien $\bmod 43$ joukko on $\{0,\ 1,\ 4,\ 11,\ 16,\ 21,\ 32,\ 41\}$ ja seitsemänsien potenssien joukko $\{0,\ 1,\ 6,\ 7,\ 36,\ 37,\ 42\}$. Modulo 43 luku $2x^6$ kuuluu siis joukkoon $\{0,\ 2,\ 8,\ 22,\ 27,\ 32,\ 39,\ 42\}$ ja luku $11 - y^7$ joukkoon $\{4,\ 5,\ 10,\ 11,\ 12,\ 17,\ 18\}$. Koska joukot ovat erilliset, yhtälöllä ei ole ratkaisua.