Kirjevalmennus, huhti- ja toukokuu 2017

Ratkaisuja

1. Olkoon D kolmion ABC sivun BC keskipiste. Todista, että

$$AD < \frac{AB + AC}{2}.$$

Ratkaisu. Olkoon A' sellainen piste, että piste D on janan AA' keskipiste. Nelikulmio $ABA'C$ on suunnikas ja $AD = \frac{AA'}{2}$. Kolmiossa ABA' pätee $AA' < AB + BA'$. Koska $BA' = AC$ on väite todistettu.

2. Millä kokonaisluvun n arvoilla Diofantoksen yhtälöllä

$$x + y + z = nxyz$$

on positiivisia kokonaislukuratkaisuja?

Ratkaisu. Luvun n pitää olla positiivinen, koska $x, y, z > 0$. Olkoon $z = \max x, y, z$. Nyt

$$x + y + z \leq 3z.$$

Lisäksi

$$nxyz \geq nz,$$

joten

$$nz \leq nxyz = x + y + z \leq 3z,$$

eli $n \leq 3$.

Jos $n = 3$, niin $x = y = z = 1$ on ratkaisu. Jos $n = 2$, niin $z = 2, x = y = 1$ on ratkaisu. Jos $n = 1$, niin $x = 1, y = 2, z = 3$ on ratkaisu.

3. Etsi Diofantoksen yhtälön

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 3(x + y + z + w).$$

sellaiset positiiviset kokonaislukuratkaisut, joilla x, y, z ja w ovat erisuuria.

Ratkaisu. Koska x, y, z, w ovat erisuuria, voidaan ajatella, että pätee $x < y < z < w$. Nyt $y - x \geq 1$, $z \geq 3$, eli $3z \geq 9$ ja $w \geq 4$, eli $5w \geq 20$.

Nämä summaamalla saadaan

$$y - x + 3z + 5w \geq 1 + 9 + 20 = 30.$$

Summataan tämä epäyhtälö tehtävänannon yhtäöön:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 30 \leq 3(x + y + z + w) + y - x + 3z + 5w = 2x + 4y + 6z + 8w.$$

ja siirretään termit vasemmalle puolelle:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2x - 4y - 6z - 8w + 30 \leq 0.$$

Koska vasen puoli on ilmaistavissa muodossa

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2x - 4y - 6z - 8w + 30 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + (w-4)^2,$$

ja neliöt ovat aina epänegatiivisia, on ratkaisut löytyneet: $x = 1, y = 2, z = 3, w = 4$.

4. Osoita, että kokonaislukukertoimisille polynomeille pätee

$$(x-1)^2 \mid \left(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right).$$

Ratkaisu. Olkoon $f(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Tällöin $f(1) = n - (n+1) + 1 = 0$ ja $f'(1) = n(n+1) - (n+1)n = 0$, joten 1 on funktion $f(x)$ kaksinkertainen nollakohta, mistä väite seuraa.

5. Etsi sellaiset kokonaisluvut a, b ja c, että

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$.

Ratkaisu. $x+y = a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$. Sijoittamalla arvot $x = 1$, $x = 2$ ja $x = 3$ saamme $a = 3$, $b = -7$ ja $c = 4$.

6. Olkoon $f(x)$ polynomi, jonka korkeimman asteen kerroin on 1 ja jonka kertoimet ovat kokonaislukuja. Osoita, että jos on olemassa neljä eri kokonaislukua a, b, c ja d, joilla $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$, niin ei ole olemassa kokonaislukua k, jolla $f(k) = 8$.

Ratkaisu. Olkoon $g(x) = f(x) - 5$. Tällöin $x - a$, $x - b$, $x - c$ ja $x - d$ ovat funktion $g(x)$ tekijöitä. Siten voimme kirjoittaa funktion g muotoon $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)h(x)$. Jos r on sellainen kokonaisluku, että $f(r) = 8$, niin $g(r) = f(r) - 5 = 3$ eli $(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)h(r) = 3$. Vasen puoli on viiden sellaisen kokonaisluvun tulo, jossa ainakin neljä lukua ovat erillisiä. Oikealla puolella taas on korkeintaan kolme eri tekijää 1, -1 ja 3.

7. Polynomin $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ kertoimet ovat kokonaislukuja, ja polynomin arvo on jaollinen luvulla 7 kaikilla muuttujan x kokonaislukuarvoilla. Osoita, että $7 \mid a$, $7 \mid b$, $7 \mid c$, $7 \mid d$ ja $7 \mid e$.

Ratkaisu. $7 \mid f(x)$, $x = 0, 1, -1, 2, -2$. Siten $7 \mid e$, $7 \mid a+b+c+d$, $7 \mid a-b+c-d$, $7 \mid 16a+8b+4c+2d$, $7 \mid 16a-8b+4c-2d$. Näistä seuraa, että $7 \mid a+c$, $7 \mid b+d$, $7 \mid 4a+c$, $7 \mid 4b+d$, josta seuraa, että $7 \mid a, b, c, d$.

8. Etsi kaikki reaalilukukertoimiset polynomit $f(x)$, joille

$$x\,f(x-1) = (x+1)\,f(x).$$

Ratkaisu. Sijoittamalla $x = 0$ saamme $f(0) = 0$. Jos $f(n) = 0$, niin $f(n+1) = 0$, sillä $(n+1)f(n) = (n+2)f(n+1)$. Siten funktiolla $f(n)$ on äärettömän monta nollakohtaa, joten $f(x) \equiv 0$.

9. Olkoon p alkuluku ja q ja n positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että Diofantoksen yhtälöllä

$$2^p + 3^p = q^n$$

ei ole ratkaisuja, kun $n > 1$ ja $q > 1$.

Ratkaisu. Jos p on parillinen, niin $p = 2$ joten $2^p + 3^p = 4 + 9 = 13$. Ei ratkaisuja.

Siispä p on pariton. Koska

$$2^p + 3^p \equiv 2 \pmod{3},$$

on oltava, että n on pariton.

Tarkastellaan modulo 5:

$$2^p + 3^p = 0 \pmod{5},$$

joten $5 \mid q$. Tarkastellaan nyt modulo 25. Koska $25 \mid q^n$, on oltava myös, että $25 \mid (2^p + 3^p)$. Eulerin lauseen nojalla

$$2^{20} \equiv 3^{20} \equiv 1 \pmod{25},$$

joten $2^{20m+h} \equiv 2^h$ ja $3^{20m+h} \equiv 3^h$ modulossa 25 tarkasteltaessa. Riittää tarkastella arvot $m \in \{1, 3, 5, \ldots, 19\}$ (koska p pariton). Koska $2^{10+h} + 3^{10+h} \equiv$

$-(2^h+3^h)$ (mod25), riittää tarkastella vaihtoehdot $m = 1,3,5,7,9$ kun yritetään selvittää milloin 25 jakaa summan $2^p + 3^p$. Huomataan, että (kaikki tarkastelut modulo 25):

x	2^x	3^x	$2^x + 3^x$
1	2	3	5
3	8	2	10
5	7	18	0
7	3	12	15
9	12	8	20

Siispä $x = 5$, eli $2^x + 3^x$ on jaollinen luvulla 25, kun p on muotoa $20m + 5$ tai $20m + 15$. Koska p on alkuluku, on pädettävä $p = 5$. Tarkastetaan tämä tapaus:

$$2^5 + 3^5 = 275 = 5 \cdot 11,$$

joka ei ole haluttua muotoa.

10. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio. Osoita, että kolmioiden ABC, BCD, CDA ja DAB sisäänpiirrettyjen ympyröiden keskipisteet K, L, M, N ovat suorakulmion kärjet.

Ratkaisu. Saadaan

$$\angle AKB = 180^\circ - \frac{\angle}{2} - \frac{\angle ABC}{2} = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}$$

ja

$$\angle ANB)90^\circ + \frac{\angle ADB}{2}.$$

Koska $ABCD$ on jännenelikulmio, pätee $\angle ACB = \angle ADB$, joten $\angle AKB = \angle ANB$. Nelikulmio $ANKB$ on siis jännenelikulmio, joten

$$\angle NKB = 180^\circ - \angle BAN = 180^\circ - \frac{\angle A}{2}.$$

Vastaavasti

$$\angle BKL = 180^\circ - \frac{\angle C}{2},$$

joten

$$\angle NKL = 360^\circ - (\angle NKB + \angle BKL) = \frac{\angle A + \angle C}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

11. Olkoot A, B, C ja D neljä avaruuden pistettä, jotka eivät ole samassa tasossa. Osoita, että

$$AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Ratkaisu. Tarkastellaan palloa, joka kulkee pisteiden B, C ja D kautta, ja leikkaa janat AB, AC ja AD pisteissä B', C' ja D'. Pallon ja tason ABC leikkaus on ympyrä, joten nelikulmio $BB'C'C$ on syklinen. Kolmiot ABC ja $AC'B'$ ovat siis yhdenmuotoisia, joten

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Saadaan

$$B'C' = \frac{BC \cdot AB'}{AC}.$$

Vastaavasti kolmiot ABD ja $AD'B'$ ovat yhdenmuotoisia, joten

$$B'D' = \frac{BD \cdot AB'}{AD}.$$

Saadaan

$$\frac{B'C'}{B'D'} = \frac{BC \cdot AD}{AC \cdot BD}.$$

Vastaavasti

$$\frac{C'D'}{B'D'} = \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}.$$

Kolmiossa $A'B'C$ pätee $B'C' + C'D' > B'D'$, joten

$$\frac{BC \cdot AD}{AC \cdot BD} + \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} > 1,$$

josta seuraakin $AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BD$.

12. Etsi kaikki nollasta poikkeavat reaaliluvut x ja y, jotka ratkaisevat yhtälöparin

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 9, \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18. \end{cases}$$

Ratkaisu. Voimme kirjoittaa yhtälöparin uudelleen muuttujien $a = \sqrt[3]{x}$ ja $b = \sqrt[3]{y}$ avulla muodossa

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 9, \\ (a+b)(1+a)(1+b) = 18. \end{cases}$$

Voimme edelleen jatkaa kirjoittamalla yhtälöparin uudelleen muuttujien $\sigma = a + b$ ja $\tau = ab$ avulla muodossa

$$\begin{cases} \sigma\left(\sigma^2 - 3\tau\right) = 9, \\ \sigma(1 + \sigma + \tau) = 18. \end{cases}$$

Tästä seuraa, että

$$(\sigma + 1)^3 = \sigma^3 + 3\sigma^2 + 3\sigma + 1 = 9 + 54 + 1 = 64.$$

Siispä $\sigma + 1 = 4$ ja $\sigma = 3$. Nyt myös

$$3(1 + 3 + \tau) = 18,$$

joten $4 + \tau = 6$ ja $\tau = 2$. Koska nyt $a + b = 3$ ja $ab = 2$, ovat luvut a ja b yhtälön

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

ratkaisut. Mutta tämän yhtälön ratkaisut ovat $x = 1$ ja $x = 2$. Siten a ja b ovat jommassa kummassa järjestyksessä luvut 1 ja 2, ja siten saadaan ainoat mahdolliset ratkaisut

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = \dfrac{1}{8}, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{8}, \\ y = 1, \end{cases}$$

joista on helppo tarkistaa, että ne todella ovat ratkaisuja.

13. Osoita, että jos $a, b, c, d \in [0, \pi]$, ja

$$\begin{cases} 2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d = 0, \\ 2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d = 0, \end{cases}$$

niin $3\cos(a + d) = 7\cos(b + c)$.

Ratkaisu. Siirtämällä molemmissa yhtälöissä keskimmäiset tehtävät oikealle puolelle ja neliöimällä molemmat puolet saadaan

$$\begin{cases} 4\cos^2 a + 81\cos^2 d + 36\cos a\cos d = 36\cos^2 b + 49\cos^2 c + 84\cos b\cos c, \\ 4\sin^2 a + 81\sin^2 d - 36\sin a\sin d = 36\sin^2 b + 49\sin^2 c - 84\sin a\sin c. \end{cases}$$

Laskemalla nämä yhteen ja muistamalla, että $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, saadaan

$$4 + 81 + 36\cos(a+d) = 36 + 49 + 84\cos(b+c),$$

ja edelleen $3\cos(a+d) = 7\cos(b+c)$.

14. Olkoot a, b ja c sellaisia reaalilukuja, ettei niistä minkään kahden summa ole nolla. Osoita, että

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geqslant \frac{10}{9}(a+b+c)^2.$$

Ratkaisu. Aloitamme kirjoittamalla epäyhtälössä esiintyvät lausekkeet alkeellisten symmetristen polynomien

$$\sigma = a+b+c, \quad \tau = ab+bc+ca, \quad \text{ja} \quad \pi = abc$$

avulla. Luonnollisesti

$$(a+b+c)^2 = \sigma^2,$$

ja helposti näkee, että

$$(a+b+c)^3 - \left(a^3+b^3+c^3\right) = \sigma\tau - \pi.$$

Hieman työläämpää on todeta, että

$$(a+b+c)^5 - \left(a^5+b^5+c^5\right) = \sigma^3\tau - \sigma^2\pi - \sigma\tau^2 + \pi\tau = (\sigma\tau-\pi)\left(\sigma^2-\tau\right).$$

Todettakoon tässä kohtaa, että $\sigma\tau = \pi$ jos ja vain jos

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 0,$$

kuten helposti näkee. Täten tilanteessamme $\sigma\tau - \pi \neq 0$, ja todistettava epäyhtälö sievenee muotoon

$$\sigma^2 - \tau \geqslant \frac{2\sigma^2}{3},$$

ja edelleen muotoon $\sigma^2 \geqslant 3\tau$, ja lopuksi muotoon $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

15. Olkoot a ja b erisuuria positiivisia reaalilukuja. Etsi kaikki positiiviset reaalilukuratkaisut yhtälöparille

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = ax - by, \\ x^2 - y^2 = \sqrt[3]{a^2-b^2}. \end{cases}$$

Ratkaisu. Ilman yleisyyden menettämistä voimme olettaa, että $a > b$. Otamme samalla käyttöömme muuttujat $\xi = c+y$ ja $\eta = x-y$, sekä vakion $C = \sqrt[3]{a^2-b^2}$, jolloin yhtälöpari saa yhtäpitävän muodon

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = \dfrac{a-b}{C}\,\xi + \dfrac{a+b}{C}\,\eta, \\ \xi\eta = C. \end{cases}$$

Voimme edelleen kirjoittaa yhtälöparin yhtäpitävässä muodossa

$$\begin{cases} \frac{C^{3/2}\,\xi^{1/2}}{\eta^{3/2}} + \frac{C^{3/2}\,\eta^{1/2}}{\xi^{3/2}} = \frac{a-b}{\eta^{3/2}}\,\eta^{1/2} + \frac{a+b}{\xi^{3/2}}\,\xi^{1/2}, \\ \xi\eta = C. \end{cases}$$

Ensimmäisen yhtälön puolestaan voi kirjoittaa muodossa

$$\left(\sqrt{a+b}\,\xi^{1/2} - \sqrt{a-b}\,\eta^{1/2}\right)\left(\frac{\sqrt{a+b}}{\xi^{3/2}} - \frac{\sqrt{a-b}}{\eta^{3/2}}\right) = 0,$$

ja koska aina $\sqrt{a+b}\,\xi^{1/2} > \sqrt{a-b}\,\eta^{1/2}$, yksinkertaistuu yhtälöpari edelleen yhtäpitävään muotoon

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{\eta} = \dfrac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{a-b}}, \\ \xi\eta = \sqrt[3]{a+b}\,\sqrt[3]{a-b}, \end{cases}$$

jonka ainoa ratkaisu on tietenkin

$$\begin{cases} \xi = \sqrt[3]{a+b}, \\ \eta = \sqrt[3]{a-b}, \end{cases}$$

ja alkuperäisen yhtälöparin ainoa ratkaisu siten

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}}{2}, \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b}}{2}. \end{cases}$$

16. Kutsumme kahta neliön muotoisen 4×4-ruudukon 1×1-ruutujen värjäystä *ekvivalenteiksi*, jos toisen värityksen voi muuttaa toiseksi kierroilla ja peilauksilla. Jos käytössä on kolme väriä, niin kuinka monella epäekvivalentilla tavalla ruudukon 16 ruutua voi värjätä?

Ratkaisu. Neliön symmetrioita D_4 on kaikkiaan kahdeksan erilaista:

- neutraali symmetria e, joka pitää kaikki kärjet paikoillaan;
- 90° kierto r_1 vastapäivään;
- 180° kierto r_2;
- 270° kierto r_3 vastapäivään;
- peilaus v pystyakselin suhteen;
- peilaus h vaaka-akselin suhteen;
- peilaukset d_1 ja d_2 lävistäjien suhteen.

Tarkasteltavan 4×4-ruudukon 3-värityksiä on tietenkin $3^{4^2} = 3^{16}$ kappaletta, ja yllä mainitut symmetriat toimivat näiden väritysten joukossa ilmeisellä tavalla. Määrittelemme jokaiselle symmetrialle g kiintopisteiden joukon $F(g)$ niiden väritysten joukoksi, jotka säilyvät invariantteina symmetriassa g. Samoin väritykseen liittyvä rata koostuu niistä värityksistä, jotka saadaan siitä soveltamalla siihen eri symmetrioita. Radat osittavat kaikkien väritysten joukon. Olkoon ratojen lukumäärä k, joka samalla on vastaus tehtävän kysymykseen. Tavoitteemme on soveltaa Burnsiden–Frobeniusin lausetta, jonka mukaan

$$k = \frac{1}{\#D_4}\sum_{g\in D_4} \#F(g) = \frac{1}{8}\sum_{g\in D_4} \#F(g),$$

missä $\#A$ merkitsee joukon A elementtien lukumäärää.

Kaikki väritykset säilyvät invariantteina symmetriassa e, joten $\#F(e) = 3^{16}$.

Nimetään ruudukon ruudut ilmeisellä tavalla pareilla (i,j), missä $i,j \in \{1,2,3,4\}$. Nyt 90° kierrossa r_1 invariantteina säilyvät väritykset ovat sellaisia, joissa ruudut $(1,1)$, $(1,4)$, $(4,4)$ ja $(4,1)$ ovat keskenään samanvärisiä, joissa ruudut $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,3)$ ja $(3,1)$ ovat samanvärisiä, samoin ruudut $(1,3)$,

$(3,4)$, $(4,2)$ ja $(2,1)$, sekä ruudut $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$ ja $(3,2)$. Siten näissä värityksissä ruudut $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ ja $(2,2)$ voi värjätä vapaasti, jolloin muiden ruutujen väritykset määräytyvät symmetriasta r_1, ja on oltava $\#F(r_1) = 3^4$. Täysin samanlaisella argumentilla on $\#F(r_3) = 3^4$.

Symmetria r_2 voidaan käsitellä samanlaisella tavalla; kaikki 16 ruutua jakautuvat 8 pariksi, joista jokaisessa molemmat ruudut on väritettävä samalla värillä, jotta väritys olisi invariantti symmetriassa r_2. Siten $\#F(r_2) = 3^8$. Symmetriat v ja h voidaan käsitellä täysin samanlaisella argumentilla, jolloin saadaan $\#F(v) = \#F(h) = 3^8$.

Lopuksi, symmetriassa d_1 se lävistäjä (4 ruutua), jonka suhteen peilataan, säilyy muuttumattomana, eli nämä neljä ruutua voi värittää mielivaltaisesti, ja loput 12 ruutua jakautuvat 6 pariksi, joissa jokaisessa kumpikin ruutu on väritettävä samalla värillä. Siispä on oltava $\#F(d_1) = 3^{10}$. Ja luonnollisesti $\#F(d_2) = 3^{10}$, myös.

Nyt olemme käsitelleet kaikki symmetriat, ja voimme laskea

$$k = \frac{3^{16} + 2 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^8 + 2 \cdot 3^{10}}{8} = 5\,398\,083.$$

17. Kutsumme kahta kuution särmien värjäystä *ekvivalenteiksi*, jos toisen voi muuttaa toiseksi kuutiota kiertämällä. Kuinka monella epäekvivalentilla tavalla kuution särmät voi värjätä, kun halutaan, että kuution 12 särmästä 6 värjätään valkeiksi ja 6 mustiksi?

Ratkaisu. Kuution kiertoja on kaikkiaan 24 erilaista; nimittäin yhden kärjen voi kiertää yhdeksi kahdeksasta eri vaihtoehdosta, minkä jälkeen sen annetulle naapurille on olemassa kolme eri vaihtoehtoa. Kun nämä kaksi valintaa on tehty, on kuution kierto määrätty yksikäsitteisesti. Siten kiertoja on $3 \cdot 8 = 24$ kappaletta.

Voimme luokitella ja nimetä kierrot seuraavasti:

- Symmetria e, joka pitää kuution ennallaan;
- Kolme kiertoa $r_{f,90^\circ,1}$, $r_{f,90^\circ,2}$ ja $r_{f,90^\circ,3}$, jotka kiertävät 90° kahden vastakkaisen sivuparin keskipisteet yhdistävän suoran ympäri;
- Kolme kiertoa $r_{f,180^\circ,1}$, $r_{f,180^\circ,2}$ ja $r_{f,180^\circ,3}$, jotka kiertävät 180° kahden vastakkaisen sivuparin keskipisteet yhdistävän suoran ympäri;
- Kolme kiertoa $r_{f,270^\circ,1}$, $r_{f,270^\circ,2}$ ja $r_{f,270^\circ,3}$, jotka kiertävät 270° kahden vastakkaisen sivuparin keskipisteet yhdistävän suoran ympäri (tietenkin vastaavasti samaan suuntaan kuin kierrot $r_{f,90^\circ,1}$, $r_{f,90^\circ,2}$ ja $r_{f,90^\circ,3}$);
- Kuusi kiertoa $r_{e,1}$, $r_{e,2}$, $\ldots$, $r_{e,6}$, joista kukin vastaa 180° asteen kiertoa kahden vastakkaisen särmän keskipisteet yhdistävän suoran suhteen;
- Kahdeksan kiertoa $r_{v,1}$, $r_{v,2}$, $\ldots$, $r_{v,8}$, joista kukin kiertää 120° tai 240° astetta kaksi vastakkaista kärkeä yhdistävän lävistäjän ympäri.

Kaikkiaan erilaisia särmien värityksiä on $\binom{12}{6}$ erilaista (kun siis kuusi kärkeä on värjättävä valkeiksi ja kuusi mustiksi), ja yllä mainitut symmetriat toimivat väritysten yli ilmeisellä tavalla. Kuten edellisessä tehtävässä, merkitsemme niiden väritysten joukkoa, jotka säilyvät invariantteina symmetriassa g, symbolilla $F(g)$, ja merkitsemme tehtävässä kysyttyä ratojen lukumäärää k, jolloin jälleen Burnsiden–Frobeniusin lauseen nojalla

$$k = \frac{1}{24} \sum_g \#F(g),$$

missä summassa $\sum_g$ tietenkin summataan yllä mainittujen 24 eri symmetrian yli.

Luonnollisesti kaikki $\binom{12}{6}$ eri väritystä säilyvät invariantteina symmetriassa e, eli $F(e) = \binom{12}{6}$.

Jokaisessa värityksistä $r_{f,90°,i}$ ja $r_{f,270°,i}$, missä $i \in \{1,2,3\}$, särmät jakautuvat kolmeksi neljän värityksen joukoksi, joissa jokaisessa kaikki neljä särmää on väritettävä samalla värillä. Selvästi tällaisessa särmävärjäyksessä ei voi olla kuutta mustaa ja kuutta valkeaa särmää, eli on oltava $\#F(r_{f,90°,i}) = \#F(r_{f,270°,i}) = 0$.

Jokaiselle symmetrialle $r_{f,180°,i}$, missä $i \in \{1,2,3\}$, särmät jakautuvat kuudeksi pariksi, ja väritys on invariantti kyseisessä symmetriassa täsmälleen silloin kun jokaisen parin molemmat särmät väritetään samalla värillä. Tällaisia värityksiä on $\binom{6}{3}$ erilaista; valitaan kolme särmäparia, jotka väritetään valkealla, ja loput kolme särmäparia mustalla. Siten $\#F(r_{f,180°,i}) = \binom{6}{3}$.

Tarkastellaan sitten jotakin kiertoa $r_{e,i}$, missä $i \in \{1,2,\ldots,6\}$. Tässä kierrossa on kaksi särmää, sanokaamme e ja e', jotka eivät siirry, ja loput 10 särmää jakautuvat viideksi pariksi, joista jokaisessa kumpikin särmä on väritettävä samalla värillä. Jos e ja e' väritetään eri väreillä, niin kyseinen väritys ei voi olla sekä invariantti symmetriassa $r_{e,i}$ että sellainen että valkeita ja mustia särmiä on molempia kuusi. Särmät e ja e' voi värittää siis kahdella eri tavalla, ja sitten lopuista viidestä särmäparista kaksi on väritettävä samalla värillä, ja tämän voi tehdä $\binom{5}{2}$ eri tavalla. Siten $\#F(r_{e,i}) = 2\binom{5}{2}$.

Olkoon vielä $i \in \{1,2,\ldots,8\}$, ja tarkastellaan symmetriaa $r_{v,i}$. Tässä symmetriassa särmät jakautuvat neljäksi kolmen särmän joukoksi, joista jokaisessa kaikki kolme on väritettävä samalla värillä, jotta väritys olisi invariantti symmetriassa $r_{v,i}$. Jotta värityksessä olisi kuusi valkeaa ja kuusi mustaa särmää, on valittava kaksi kolmikkoa neljästä, minkä voi tehdä $\binom{4}{2}$ eri tavalla, ja väritettävä ne valkealla, ja väritettävä loput mustalla.

Lopuksi, yhdistetään yllä tehdyt havainnot, ja lasketaan, että

$$k = \frac{\binom{12}{6} + 3\binom{6}{3} + 6\cdot 2\binom{5}{2} + 8\binom{4}{2}}{24} = 48.$$