Nimekästä geometriaa

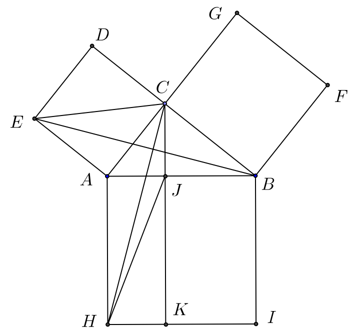
Matemaattisiin lauseisiin tai muihin tuloksiin viitataan usein henkilönnimin. Yleensä tällaiset asiat ovat jotenkin tärkeitä, ja niiden todistuksiin tutustuminen opettavaa.

Thaleen lause. *Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.* (*Thales Miletolainen*, n. 634 – n. 547 eaa)

Todistus. Jos AB on ympyrän halkaisija, O ympyrän keskipiste ja $C \neq A, B$ ympyrän kehän piste, niin kolmiot AOC ja COB ovat tasakylkisiä. Tästä seuraa $\angle BCA = \angle BCO + \angle OCA = \angle OBC + \angle CAO = \angle ABC + \angle CAB$. Mutta kolmion kulman vieruskulman suuruutta koskevan lauseen nojalla myös kulman $\angle BCO$ vieruskulma on $\angle CAB + \angle ABC$. Kulma, joka on vieruskulmansa suuruinen, on suora.

Pythagoraan lause. *Kolmion ABC kulma $\angle BCA$ on suora jos ja vain jos sivu AB kantana piirretyn neliön ala on sama kuin sivut AC ja BC kantoina piirrettyjen neliöiden yhteenlaskettu ala.* (*Pythagoras Samoslainen*, n. 569–475 eaa)

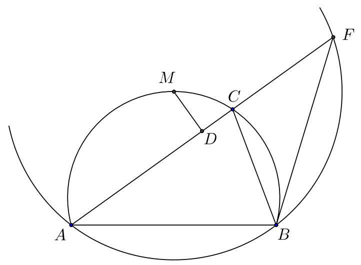
Todistus. Leikatkoon pisteestä C suoraa AB vastaan kohtisuoraan piirretty suora AB:n pisteessä J ja HI:n pisteessä K. On helppo nähdä, että kolmioilla EAC ja EAB on sama korkeus. Niillä on siis sama pinta-ala. Koska kulmat $\angle EAB$ ja $\angle CAH$ ovat suoran kulman ja kulman CAB summia, ne ovat yhtä suuret. Koska $ACDE$ ja $BAHI$ ovat neliöitä, $EA = AC$ ja $AB = AH$. Kolmiot EAB ja CAH ovat yhteneviä (sks). Kolmioilla AHC ja AHJ on sama korkeus. Nyt siis kolmiot EAC ja AHJ ovat sama-alaiset. Edelleen neliö $ACDE$ ja suorakaide $AHKJ$ ovat sama-alaiset. Samoin osoitetaan, että neliö $CBFG$ ja suorakaide $JKIB$ ovat sama-alaiset.



On vielä todistettava lauseen käänteinen puoli. Piirretään suorakulmainen kolmio BCD, $\angle BCD$ suora kulma ja $CD \cong CA$. Pythagoraan lauseesta seuraa, että BD:lle piirretyn neliön ala on BC:lle ja CD:lle piirrettyjen neliöiden alojen summa, ja oletuksesta, että BD:lle piirretty neliön ala on sama kuin AB:lle piirretyn neliön ala. Tästä päätellään, että $BD = AB$. Koska kolmiot ABC ja DBC ovat yhteneviä (sss), $\angle BCA = \angle BCD$ ja ABC on suorakulmainen.

Arkhimedeen lause eli **Katkaistun jänteen lause**. *ABC on kolmio, $AC > BC$, M puolittaa ABC:n ympäri piirretyn ympyrän kaaren $\overset{\frown}{ACB}$; D M:n kohtisuora projektio AC:llä. Silloin $AD = DC + CB$.* (*Arkhimedes Syrakusalainen*, 287–212 eaa)

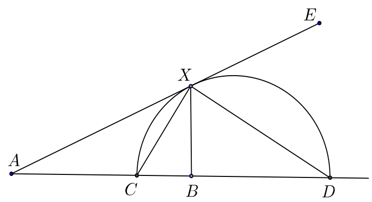
Todistus. Jatketaan kolmion sivua AC pisteeseen F niin, että $CF = CB$. Silloin kolmion CBF on tasakylkinen ja $\angle BCA = 2 \cdot \angle BFC$. Tarkastellaan pisteiden A, B ja F kautta kulkevaa ympyrää $\mathcal{Y}$. Sen keskipisteen on oltava janan AB keskinormaalilla ja kaarta AB vastaavan keskuskulman on oltava $2 \cdot \angle BFA = \angle BCA$. Mutta koska $ABCM$ on jännenelikulmio, $\angle AMB = \angle ACB$. Tästä seuraa, että M on $\mathcal{Y}$:n keskipiste. Mutta silloin M on janan AF keskinormaalilla ja D on janan AF keskipiste. Siis $AD = DF = DC + CF = DC + CB$.



Apollonioksen ympyrä. *Jos AB on jana ja k on positiivinen vakio, niin ne pisteet X, joille $\dfrac{AX}{BX} = k$, ovat sen ympyrän pisteet, jonka halkaisija on se suoran AB jana CD, jonka päätepisteet toteuttavat ehdon $\dfrac{AC}{BC} = k$ ja $\dfrac{AD}{BD} = k$.* (*Apollonios Pergalainen*, n. 262–190 eaa)

Todistus. Oletetaan ensin, että X toteuttaa ehdon

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}.$$



Olkoon E piste puolisuoralla AX janan AX ulkopuolella. Sovelletaan sinilausetta kolmioihin ACX ja CBX. Sen perusteella

$$\frac{AC}{\sin(\angle AXC)} = \frac{AX}{\sin(\angle ACX)}, \quad \frac{CB}{\sin(\angle CXB)} = \frac{BX}{\sin(\angle XCB)} = \frac{BX}{\sin(\angle ACX)}.$$

Koska $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AC}{CB}$, on oltava $\sin(\angle AXC) = \sin(\angle CXB)$ ja $\angle AXC = \angle CXB$. Sovelletaan sitten sinilausetta kolmioihin BDX ja ADX. Saadaan

$$\frac{BD}{\sin(BXD)} = \frac{BX}{\sin(BDX)}, \quad \frac{AX}{\sin(\angle ADX)} = \frac{AD}{\sin(\angle AXD)} = \frac{AD}{\sin(\angle EXD)}.$$

Koska $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AD}{BD}$, on oltava $\sin(\angle BXD) = \sin(\angle EXD)$ ja $\angle BXD = \angle EXD$. Mutta tästä seuraa, että $\angle CXD = \dfrac{1}{2} \cdot \angle AXE = 90^\circ$. Piste X on siis ympyrällä, jonka halkaisija on CD.

On vielä osoitettava, että kaikille CD-halkaisijaisen ympyrän pisteille X pätee $\dfrac{AX}{BX} = k$. Tehdään vastaoletus: jollekin ympyrän pisteelle X' on $\dfrac{AX'}{BX'} = k' \neq k$. Oleteaan, että $k' < k$. Jos C' ja D' ovat ne janan AB ja sen jatkeen pisteet, joille $\dfrac{AC'}{C'B} = k'$ ja $\dfrac{AD'}{BD'} = k'$, niin edellä osoitetun mukaan X' on ympyrällä, jonka halkaisija on $C'D'$. Nyt kuitenkin on oltava $AC' < AC$ ja $BC' > BC$. Toisaalta

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AB + BD}{BD} = 1 + \frac{AB}{BD}, \quad \frac{AD'}{BD'} = 1 + \frac{AB}{BD'}.$$

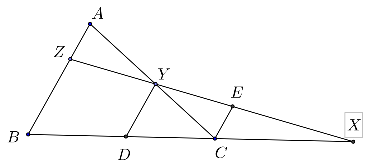
Tästä nähdään, että $BD' > BD$. Jana CD jää koonaan janan $C'D'$ sisään ja myös CD-halkaisijainen ympyrä $C'D'$-halkaisijaisen ympyrän sisään. Koska X' ei voi olla näillä kahdella erillisellä ympyrällä, vastaoletus on väärä. Samoin tietysti torjutaan mahdollisuus $k < k'$.

Menelaoksen lause. *Olkoon ABC kolmio ja olkoot X, Y ja Z suorien BC, CA, ja AB pisteitä niin, että pisteistä kaksi tai ei yhtään on kolmion ABC sivuilla. Pisteet X, Y ja Z ovat samalla suoralla jos ja vain jos*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

(Jos suoria pidetään suunnattuina ja käytetään myös etumerkillisiä pituuksia, yhtälön oikean puolen 1 korvataan -1:llä.) (*Menelaos Aleksandrialainen*, n. 70–130)

Todistus. Oletetaan, että X on sivun BC jatkeella, Y sivulla CA ja Z sivulla AB ja että XYZ on suora. Piirretään Y:n ja C:n kautta AB:n suntaiset suorat. Leikatkoon niistä edellinen suoran BC pisteessä D ja jälkimmäinen suoran XYZ pisteessä E. Kolmiot BXZ ja CXE ovat yhdenmuotoiset, joten



$$\frac{BX}{XC} = \frac{BZ}{CE}.$$

Samoin kolmiot AZY ja CEY ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{CY}{YZ} = \frac{EC}{AZ}.$$

Siis

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BZ}{CE} \cdot \frac{EC}{AZ} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Päättely on sanasta sanaan sama, jos Z on BA:n jatkeella ja Y on CA: jatkeella (tai jos CA vaihdetaan AC:ksi ja BA AB:ksi). Jos jokainen suorista AB, BC ja CA varustetaan suunnistuksella. Silloin (esimerkiksi) BX ja XC ovat samanmerkkiset täsmälleen silloin, kun X on janalla BC. Yhtälön (1) vasemman puolen tulon kolmesta tekijästä on silloin yksi tai kolme $= -1$, ja tulo on -1. – Lauseen käänteinen puoli: jos X, Y ja Z toteuttavat yhtälön (1) ja jos Y:n ja Z:n kautta kulkeva suora leikkaa suoran BC pisteessä X', niin jo todistetun alkuosan perusteella

$$\frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Siis

$$\frac{BX'}{X'C} = \frac{BX}{XC},$$

mistä seuraa $X' = X$ ja siten se, että XYZ on suora.

Heronin kaava. *Jos kolmion sivut ovat* a, b, c *ja* $2s = a + b + c$, *niin kolmion ala on* $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. (*Heron Aleksandrialainen*, n. 10–75)

Todistus. Olkoon sivua c vastassa oleva kolmion kulma γ. Käytetään hyväksi kolmion alan lauseketta $T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kaavaa $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma$, kosinilausetta, jonka mukaan $c^2 - a^2 - b^2 = 2ab\cos\gamma$ ja relaatioita $a + b + c = 2s$, $a + b - c = 2(s - c)$, $a - b + c = 2(s - b)$, $-a + b + c = 2(s - a)$. Lasketaan käyttäen useamman kerran hyväksi yhteyttä $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$:

$$\begin{aligned}16T^2 &= (4T)^2 = (2ab\sin\gamma)^2 = (2ab)^2 - (2ab\cos\gamma)^2 = (2ab)^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2\\ &= (2ab - c^2 + a^2 + b^2)(2ab + c^2 - a^2 - b^2) = ((a+b)^2 - c^2))(-(a-b)^2 + c^2)\\ &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 2s\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-a).\end{aligned}$$

Kun supistetaan 16:lla ja otetaan neliöjuuri, saadaan tulos.

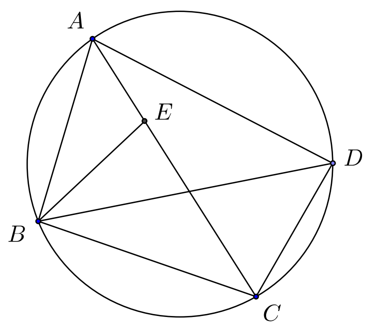
Ptolemaioksen lause *Kupera nelikulmio* $ABCD$ *on jännenelikulmio, jos ja vain jos*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

(*Klaudios Ptolemaios*, n. 85–165)

Todistus. Valitaan janalta AC piste E niin, että $\angle ABE = \angle DBC$. Koska $\angle BDC = \angle BAC$, kolmiot ABE ja DBC ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} \tag{1}$$



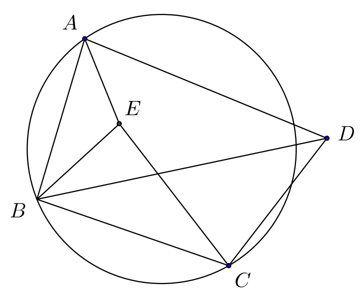
ja $\angle BEA = \angle BCD$. Koska $ABCD$ on jännenelikulmio, $\angle BEC = \angle BAD$. Myöskin $\angle BCA = \angle BDA$, joten kolmiot BCE ja BDA ovat yhdenmuotoiset. Siis

$$\frac{CE}{AD} = \frac{BC}{BD}. \tag{2}$$

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan $AB \cdot CD + BC \cdot AD = (AE + CE) \cdot BD = AC \cdot BD$.

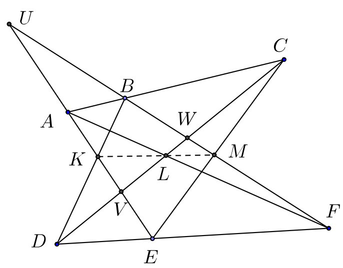
Lauseen toisen puolen osoittamiseksi lähdetään nelikulmiosta $ABCD$, joka ei ole jännenelikulmio. Piirretään kolmio ABE, joka on yhdenmuotoinen kolmion DBC kanssa. Yhtälö (1) on voimassa. Mutta nyt myös

$$\frac{BE}{BC} = \frac{AB}{BD}.$$



Koska $\angle ABE = \angle DBC$, myös $\angle ABD = \angle EBC$. Siis kolmiot BCE ja BDA ovat yhdenmuotoiset (sks). Yhtälö (2) on myös voimassa, joten $AB\cdot CD + BC\cdot AD = (AE + CE)\cdot BD$. Nyt kuitenkin $\angle BEA + \angle CEB = \angle BCD + \angle BAD \neq 180°$, koska $ABCD$ ei ole jännenelikulmio. AEC ei ole suora, joten $AE + EC > AC$. Siis $AB \cdot CD + BC \cdot AD > AC \cdot BD$.

Pappusin lause. *Jos A, B, C ovat samalla suoralla ja D, E, F samalla suoralla, niin suorien AE ja BD, AF ja CD sekä BF ja CE leikkauspisteet ovat samalla suoralla.* (*Pappus Aleksandrialainen* (n. 290 – n. 350)



Todistus. Olkoon K AE:n ja BD:n leikkauspiste, L AF:n ja CD:n leikkauspiste ja M BF:n ja CD:n leikkauspiste. Leikatkoot suorat AE ja BF pisteessä U ja olkoot V ja W näiden suorien ja CD:n leikkauspisteet. Sovelletaan Menelaoksen lausetta useampia kertoja kolmioon UVW. Suora ABC antaa

$$\frac{UA}{AV} \cdot \frac{VC}{CW} \cdot \frac{WB}{BU} = -1 \tag{1}$$

ja suora DEF

$$\frac{UE}{EV} \cdot \frac{VD}{DW} \cdot \frac{WF}{FU} = -1. \tag{2}$$

Suorista ALF, EMC ja DKB saadaan vastaavasti

$$\frac{UA}{AV} \cdot \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WF}{FU} = -1, \tag{3}$$

$$\frac{UE}{EV} \cdot \frac{VC}{CW} \cdot \frac{WM}{BM} = -1, \tag{4}$$

ja

$$\frac{UK}{KV} \cdot \frac{VD}{DW} \cdot \frac{WB}{BU} = -1. \tag{5}$$

Kun yhtälöt (3), (4) ja (5) kerrotaan keskenään ja jaetaan yhtälöiden (1) ja (2) tulolla, saadaan

$$-1 = \frac{\frac{UA}{AV} \cdot \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WF}{FU} \cdot \frac{UE}{EV} \cdot \frac{VC}{CW} \cdot \frac{WM}{BM} \cdot \frac{UK}{KV} \cdot \frac{VD}{DW} \cdot \frac{WB}{BU}}{\frac{UA}{AV} \cdot \frac{VC}{CW} \cdot \frac{WB}{BU} \cdot \frac{UE}{EV} \cdot \frac{VD}{DW} \cdot \frac{WF}{FU}} = \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UK}{KV}.$$

Menelaoksen lauseen käänteisen puolen perusteella L, K ja M ovat samalla suoralla.

Brahmaguptan kaava. *Jos jännenelikulmion sivut ovat a, b, c, d ja $2s = a + b + c + d$, niin jännenelikulmion ala on $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.* (*Brahmagupta*, 598–670)

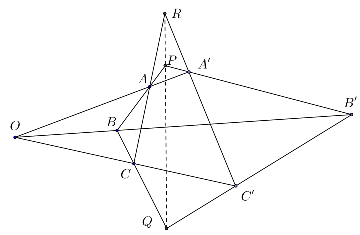
Todistus. Huomataan, että $-a + b + c + d = 2(s - a)$ jne. Olkoon sivujen a ja b välinen kulma γ ja sivujen c ja d välinen kulma δ. Kulmat γ ja δ ovat vieruskulmia (suplementtikulmia), joten niillä on sama sini ja itseisarvoltaan sama, mutta vastakkaismerkkinen kosini. Jännenelikulmion ala on $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma + \frac{1}{2}cd\sin\delta = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\gamma$. Olkoon e jännenelikulmion kulmia γ ja δ vastassa oleva lävistäjä. Kosinilauseen perusteella $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ ja $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\gamma$. Kun edellisistä yhtälöistä eliminoidaan e^2, saadaan $2(ab+cd)\cos\gamma = a^2+b^2-c^2-d^2$. Lasketaan hiukan samoin kuin Heronin kaavan todistuksessa:

$$
\begin{aligned}
16A^2 = (4A)^2 = (2ab\sin\gamma + 2cd\sin\delta)^2 = 4(ab+cd)^2\sin^2\gamma = 4(ab+cd)^2 - 4(ab+cd)^2\cos^2\gamma \\
= 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 \\
= (2(ab+cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2))(2(ab+cd) - (a^2+b^2-c^2-d^2)) \\
= ((a+b)^2-(c-d)^2)((c+d)^2-(a-b)^2) \\
= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b) = 2(s-d)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-a).
\end{aligned}
$$

Brahmaguptan kaava saadaan, kun yhtälö jaetaan puolittain 16:lla ja otetaan puolittain neliöjuuri.

Desargues'n lause. *Jos ABC ja $A'B'C'$ ovat kolmioita, niin suorat AA', BB' ja CC' leikkaavat toisensa samassa pisteessä jos ja vain jos suorien AB ja $A'B'$, BC ja $B'C'$ sekä CA ja $C'A'$ leikkauspisteet ovat samalla suoralla.* (*Girard Desargues*, 1591–1661)

Todistus. Olkoon O suorien AA', BB' ja CC' yhteinen leikkauspiste ja olkoot P, Q ja R AB:n ja $A'B'$:n, BC:n ja $B'C'$:n sekä CA:n ja $C'A'$:n leikkauspisteet. Sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon OBA ja suoraan $B'A'P$, kolmioon OCB ja $QC'B'$ sekä kolmioon OCA ja suoraan $RA'C'$. Saadaan



$$
\frac{OB'}{B'B}\cdot\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AA'}{A'O} = -1, \quad \frac{OC'}{C'C}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BB'}{B'O} = -1, \quad \frac{OC'}{C'C}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AA'}{A'O} = -1.
$$

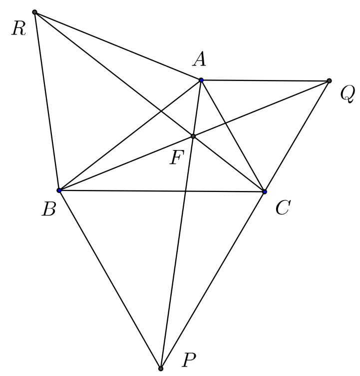
Kun yhtälöistä kaksi ensimmäistä kerrotaan keskenään ja jaetaan tulo kolmannella, saadaan

$$
\frac{BP}{PA}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{RA}{CR} = -1.
$$

Kun Menelaoksen lauseen käänteistä puolta sovelletaan kolmioon ABC, nähdään, että P, Q ja R ovat samalla suoralla. – Desarguesin lauseen käänteinen puoli todistuu edellisen perusteella. Jos R, P ja Q ovat samalla suoralla, niin suorien PA ja QC leikkauspiste B, suorien PA' ja QC' leikkauspiste B' ja suorien AA' ja CC' leikkauspiste (jota voi merkitä O:lla) ovat samalla suoralla. Siis AA', BB' ja CC' leikkaavat samassa pisteessä.

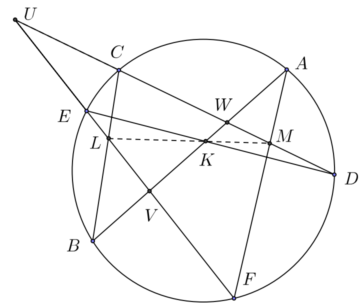
Fermat'n piste. *Jos kolmion ABC sivut kantoina piirretään kolmion ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot ARB, BPC ja CQA, niin janat AP, BQ ja CR kulkevat saman pisteen kautta.* (*Pierre de Fermat*, 1601–65)

Todistus. Olkoon F janojen BQ ja CR leikkauspiste. $60°$ kierto pisteen A ympäri vie R:n B:lle ja C:n Q:lle. Kierto vie siis janan RC janaksi BQ, ja $\angle QFC = \angle BFR = 60°$. Tästä seuraa, että F on kolmion ACQ ympärysympyrällä ja kolmion ARB ympärysympyrällä. Koska $\angle CFB = 360° - (\angle CFA + \angle AFB) = 360° - 2 \cdot 120° = 120°$, piste F on myös kolmion BPC ympärysympyrällä. Tästä seuraa edelleen, että $\angle BFP = \angle BCP = 60°$. Kulmat $\angle AFB$ ja $\angle BFP$ ovat siis vieruskulmia, joten F on myös suoralla AP.



Pascalin lause. *Jos ympyrän sisään piirretyn (ei välttämättä kuperan) kuusikulmion vastakkaiset sivut tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa, niin leikkauspisteet ovat samalla suoralla.* (*Blaise Pascal*, 1623–62)

Todistus. Todistus muistuttaa Desargues'n lauseen todistusta. Olkoon $ABCDEFA$ murtoviiva, jonka kaikki kärjet ovat samalla ympyrällä. Leikatkoot AB ja DE pisteessä K, BC ja DE pisteessä L ja CD ja FA pisteessä M. Leikatkoot suorat CD ja EF pisteessä U. AB ja EF pisteessä V ja AB ja CD pisteessä W. Sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon UVW ja suoriin BLC, EKD ja AMF. Saadaan



$$\frac{UL}{LV} \cdot \frac{VB}{BW} \cdot \frac{WC}{CU} = -1, \quad \frac{UE}{EV} \cdot \frac{VK}{KW} \cdot \frac{WD}{DU} = -1, \quad \frac{UF}{FV} \cdot \frac{VA}{AW} \cdot \frac{WM}{MU} = -1. \tag{1}$$

Pisteen potenssia ympyrän suhteen koskevan tunnetun tuloksen nojalla

$$\frac{(VB \cdot WC) \cdot (UE \cdot WD) \cdot (UF \cdot VA)}{(BW \cdot CU) \cdot (EV \cdot DU) \cdot (FV \cdot AW)} = \frac{VB \cdot VA}{EV \cdot FV} \cdot \frac{WC \cdot WD}{BW \cdot AW} \cdot \frac{UE \cdot UF}{CU \cdot DU} = 1.$$

Kun yhtälöt (1) kerrotaan keskenään, jää siis vain

$$\frac{UL}{LV} \cdot \frac{VK}{KW} \cdot \frac{WM}{MU} = -1.$$

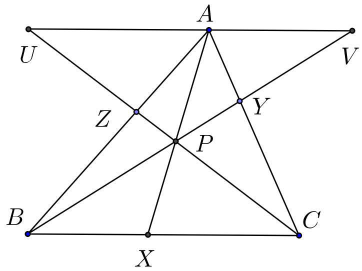
Kun Menelaoksen lauseen käänteispuolta sovelletaan kolmioon UVW ja pisteisiin L, K ja M, nähdään, että LKM on suora.

Cevan lause. *Jos X, Y ja Z ovat kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä, niin janat AX, BY ja CZ leikkaavat toisensa samassa pisteessä jos ja vain jos*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

($Giovanni\ Ceva$, 1674–1734)

Todistus. Todistetaan ensin lauseen ”vain jos” -osa. Oletetaan, että AX, BY ja CZ leikkaavat toisensa pisteessä P. Piirretään A:n kautta BC:n suuntainen suora. Leikatkoon suora BY sen pisteessä V ja suora CZ sen pisteessä U. Kolmiot BCY ja VAY ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis



$$\frac{CY}{YA} = \frac{BC}{AV}. \tag{1}$$

Kolmiot BCZ ja AUZ ovat yhdenmuotoisia (kk), Siis

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{AU}{BC}. \tag{2}$$

Kolmiot BXP ja VAP ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{BX}{AV} = \frac{PX}{PA}. \tag{3}$$

Kolmiot XCP ja AUP ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{XC}{AU} = \frac{PX}{PA}. \tag{4}$$

Yhtälöistä (3) ja (4) saadaan

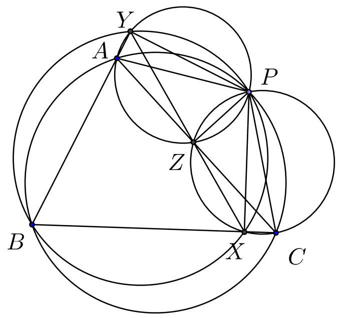
$$\frac{BX}{XC} = \frac{AV}{AU}. \tag{5}$$

Kerrotaan yhtälöt (5), (1) ja (2) puolittain. Saadaan

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{AV}{AU} \cdot \frac{BC}{AV} \cdot \frac{AU}{BC} = 1.$$

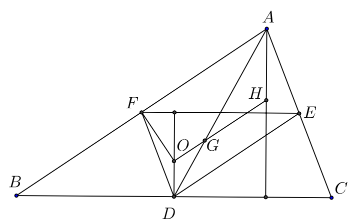
Todistetaan sitten lauseen käänteinen puoli tyypillisellä epäsuoralla päättelyllä. Olkoot X, Y ja Z lauseen mukaisia kolmion sivujen pisteitä niin, että $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$. Leikatkoot BY ja CZ pisteessä P. Piirretään puolisuora AP; leikatkoon se BC:n pisteessä X'. Jo todistetun lauseenpuolikkaan mukaan on $\frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$. Mutta tästä seuraa, että $\frac{BX'}{X'C} = \frac{BX}{XC}$. Koska vain yksi piste voi jakaa janan sisäpuolisesti annetussa suhteessa, on oltava $X' = X$. Mutta silloin jana $AX = AX'$ kulkee janojen BY ja CZ leikkauspisteen P kautta.

Simsonin suora. *Jos P on kolmion ABC ympärysympyrällä, niin P:n kohtisuorat projektiot suorilla AB, BC ja CA ovat samalla suoralla.* (*Robert Simson*, 1687–1768)



Todistus. Voidaan olettaa, että P on sillä kaarista AB, jolla B ei ole. Olkoot X, Y ja Z P:n kohtisuorat projektiot suorilla BC, CA ja AB. Koska kulmat BXP ja PZB ovat suoria, kulma XPZ on kulman ABC suplementtikulma. Myös kulma APC on kulman ABC suplementtikulma. Tästä seuraa, että $\angle APZ = \angle CPX$. Koska kulmat PYC ja PXC ovat suoria, $PYXC$ on jännenelikulmio ja $\angle CYX = \angle CPX = \angle APZ$. Mutta koska myös kulmat PZA ja PYA ovat suoria, $ZAYP$ on jännenelikulmio ja siis $\angle AYZ = \angle APZ$. Kaikkiaan siis $\angle XYC = \angle ZYA$. Jännenelikulmion kulmia tarkastelemalla on helppo vakuttua siitä, etä Z ja X eivät voi olla samalla puolella suoraa AC. Siis XYZ on suora.

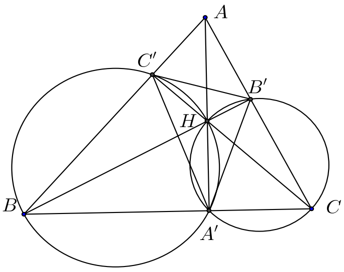
Eulerin suora. *Kolmion keskijanojen leikkauspiste, korkeusjanojen leikkauspiste ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ovat samalla suoralla.* (*Leonhard Euler*, 1707–83)



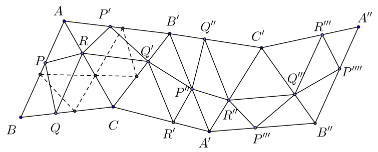
Todistus. Olkoon G kolmion ABC keskijanojen leikkauspiste, H sen korkeusjanojen leikkauspiste eli ortokeskus ja O sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste eli sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Olkoot vielä D, E ja F sivujen BC, CA ja AB keskipisteet. Osoitetaan kolmiot ODG ja HAG yhdenmuotoisiksi. Koska OD ja AH ovat molemmat kohtisuorassa suoraa BC vastaan, ne ovat yhdensuuntaiset. Tästä seuraa, että $\angle ODG = \angle HAG$. Kolmion keskijanojen tunnetun ominaisuuden perusteella $AG = 2 \cdot GD$. Kolmion tunnetun ominaisuuden mukaisesti EF, FD ja DE ovat kukin pituudeltaan puolet sivuista BC, CA ja AB ja näiden sivujen suuntaisia. Kolmio EFD on siis yhdenmuotoinen kolmion BCA kanssa, ja yhdenmuotoisuussuhde on $1 : 2$. Suorat DO, EO ja FO ovat kohtisuorassa kolmion BCA sivuja vastaan ja siis myös kohtisuorassa kolmion EFD sivuja vastaan. Ne ovat siis kolmion EFD korkeussuoria ja niiden yhteinen piste O on kolmion EFD ortokeskus. Kolmioiden EFD ja BCA yhdenmuotoisuussuhteesta seuraa, etta $AH = 2 \cdot DO$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot ODG ja HAG ovat yhdenmuotoisia (sks). Siis $\angle OGD = \angle HGA$. O, G ja H ovat siis samalla suoralla.

Fagnanon lause. *Ortokolmion*[1] *piiri on lyhin sellaisen kolmion piiri, jonka kärjet ovat annetun teräväkulmaisen kolmion sivuilla.* (*Giovanni Fagnano*, 1715–97)

[1] *Kolmion ortokolmio on se kolmio, jonka kärjet ovat kolmion korkeusjanojen kantapisteet.*



Todistus. Todistetaan ensin (tunnettu) aputulos: kolmion korkeusjanat ovat kolmion ortokolmion kulmanpuolittajia. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja $A'B'C'$ sen ortokolmio ja H korkeusjanojen leikkauspiste eli ortokeskus. Koska $\angle BC'H$ ja $\angle BA'H$ ovat suoria, $A'HC'B$ on jännenelikulmio. Samoin $A'CB'H$ on jännenelikulmio. Siis $\angle HA'C' = \angle HBC'$ ja $\angle HA'B' = \angle HCB'$. Mutta suorakulmaisista kolmioista ABB' ja $AC'C$ nähdään, että $\angle HBC' = \angle HCB'$, joten $A'A$ on kulman $\angle C'A'B'$ puolittaja.



Fagnanon lauseen todistamiseksi lähdetään kolmiosta ABC, jossa $\angle BAC = \alpha$ ja $\angle ABC = \beta$. Peilataan kolmio suoran AC yli kolmioksi ACB', tämä suoran $B'C$ yli kolmioksi $A'B'C$, tämä suoran $A'B'$ yli kolmioksi $A'C'B'$, tämä suoran $A'C'$ yli kolmioksi $A'B''C'$ ja tämä viimein suoran $B''C'$ yli kolmioksi $A''C'B''$. Tarkastellaan sivun AB muuttumista peilauksissa. Ensimmäisessä peilauksessa se kiertyy kulman 2α verran positiiviseen kiertosuuntaan, toisessa kulman 2β verran positiiviseen kiertosuuntaan, kolmannessa pysyy paikallaan, neljännessä kiertyy kulman 2α verran negatiiviseen kiertosuuntaan ja viidennessä kulman 2β verran negatiiviseen kiertosuuntaan. Tämä merkitsee sitä, että AB ja $A''B''$ ovat yhdensuuntaisia ja $ABB''A''$ on suunnikas. Jos P on sivun AB, Q sivun BC ja R sivun CA piste, niin kolmion PQR kuvat peräkkäisissä peilauksissa ovat kolmiot $P'RQ'$, $P''Q'R'$, $P''R''Q''$, $P'''Q'''R''$ ja $P''''Q'''R'''$. Murtoviivan $PRQ'P''R''Q'''P''''$ pituus on kaksi kolmion PQR piiriä, ja koska se yhdistää suunnikkaan $ABB''A''$ sivut AB ja $A''B''$, sen pituus on enintään AA''. Mutta jos PQR on kolmion ABC ortokolmio, niin R ja kolmioiden ABC ja ACB' B:stä ja B':sta piirretyt korkeusjanat ovat suoralla BB' ja aputuloksen nojalla $\angle PRB = \angle BRQ = \angle B'RQ'$. P, R ja Q' ovat siis samalla suoralla. Päättelyä jatkamalla nähdään, että tässä tapauksessa yllä mainittu murtoviiva onkin jana PP'''', ja että murtoviivan pituus on tasan AA'':n pituus.

Stewartin lause. *Olkoon X kolmion ABC sivun BC piste; olkoon $p = AX$, $m = BX$ ja $n = XC$. Silloin $a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n$.* (*Matthew Stewart*, 1717–85)

Todistus. Koska kulmat $BXA = \phi$ ja CXA ovat vieruskulmia, niiden kosinit ovat toistensa vastalukuja. Sovelletaan kosinilausetta kolmioihin ABX ja AXC. Saadaan

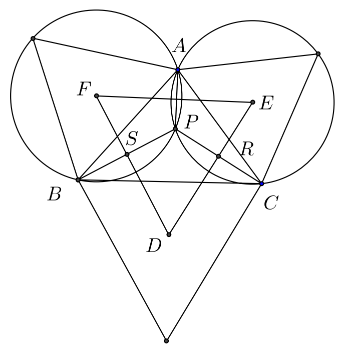
$$c^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\phi$$
$$b^2 = n^2 + p^2 + 2np\cos\phi.$$

Eliminoidaan näistä ϕ kertomalla edellinen yhtälö n:llä ja jälkimmäinen m:llä ja laskemalla yhteen. Kun vielä otetaan huomioon, että $m + n = a$, saadaan heti $b^2m + c^2n = m^2n + np^2 + mn^2 + mp^2 = mn(m + n) + p^2(m + n) = a(p^2 + mn)$.

Varignonin lause. *Nelikulmion (tai sulkeutuvan nelisivuisen murtoviivan) sivujen keskipisteet muodostavat suunnikkaan. Jos nelikulmio on kupera, suunnikkaan ala on puolet nelikulmion alasta.* (*Pierre Varignon*, 1654–1722)

Todistus. Jos M, N, P ja Q ovat sivujen AB, BC, CD ja DA keskipisteet, niin kolmiosta ABC saadaan $MN \| AC$ ja $MN = \frac{1}{2} \cdot AC$. Kolmiosta ADC saadaan samoin $PQ \| AC$ ja $PQ = \frac{1}{2} \cdot AC$. Nelikulmio, jolla on pari yhdensuuntaisia ja yhtä pitkiä vastakkaisia sivuja, on suunnikas. Jos $ABCD$ on kupera, niin kolmio MBN ala on $\frac{1}{4}$ kolmion ABC alasta ja kolmion PDQ ala on $\frac{1}{4}$ kolmion CDA alasta. Kolmioiden MBN ja PDQ ala on siis $\frac{1}{4}$ nelikulmion $ABCD$ alasta. Samoin nähdään, että kolmioiden QAM ja NCP ala on $\frac{1}{4}$ nelikulmion $ABCD$ alasta. Suunnikkaan $MNPQ$ ala on siis $ABCD$:n ala vähennettynä puolella $ABCD$:n alasta.

Napoleonin lause. *Kolmion sivut kantoina piirrettyjen tasasivuisten kolmioiden keskipisteet ovat tasasivuisen kolmion kärjet.* (*Napoleon Bonaparte* 1769–1821)

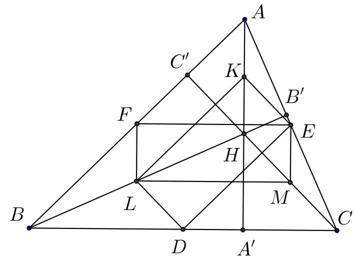


Todistus. Olkoot D, E ja F sivut BC, CA ja AB sivuina piirrettyjen, kolmion ABC ulkopuolelle piirrettyjen tasasivuisten kolmioiden keskipisteet. Leikatkoot ne tasasivuisten kolmioiden ympäri piirretyt ympyrät, joiden keskipisteet ovat E ja F, (myös) pisteessä P. Jännenelikulmioiden ominaisuuksien nojala $\angle CPA = 120°$ ja $\angle APB = 120°$. Mutta silloin myös $\angle BPC = 120°$, ja piste P on myös D-keskisellä tasasivuisen kolmion ympäri piirretyllä ympyrällä. Olkoot R ja S janojen PC ja PB keskipisteet. Koska FD on janan PB keskinormaali ja ED on janan PC keskinormaali, nelikulmiossa $PRDS$ on kaksi suoraa kulmaa ja yksi 120°:en kulma. Siis $\angle RDS = \angle FDE = 60°$. Samoin todistetaan, että kolmion FDE kaikki kulmat ovat 60°, joten FDE on tasasivuinen kolmio. – Todistus onnistuu suunnilleen samoin myös silloin, kun tasasivuiset kolmiot piirretään niin, että ne leikkaavat kolmiota ABC.

Lähes samalla vaivalla voi todistaa hiukan yleisemmän tuloksen.Jos kolmion sivuille piirretään kolme keskenään yhdenmuotoista kolmiota niin, että kolmioiden "ulostyöntyvät" kärjet eivät ole vastinkärkiä, niin kolmioiden ympärysympyröiden keskipisteet muodostavat kolmen edellisen kolmion kanssa yhdenmuotoisen kolmion.

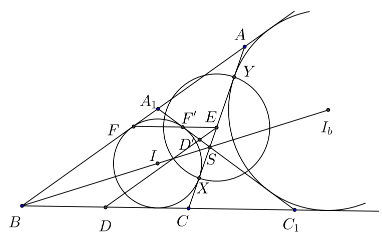
Feuerbachin ympyrä. *Kolmion sivujen keskipisteet, korkeusjanojen kantapisteet ja pisteet ja kolmion kärjet korkeusjanojen leikkauspisteeseen yhdistävien janojen keskipisteet ovat samalla ympyrällä. Tämä ympyrä sivuaa kolmion sisäympyrää ja kaikkia sivuympyröitä.* (*Karl Feuerbach*, 1800–34)

Todistus. Olkoon ABC kolmio, AA', BB' ja CC' sen korkeusjanat, D, E ja F sivujen BC, CA ja AB keskipisteet, H ortokeskus ja K, L ja M janojen AH, BH ja CH keskipisteet. Osoitetaan ensin, että A', B', C', D, E, F, K, L ja M ovat samalla ympyrällä. Kolmion sivujen keskipisteiden yhdistysjanan tunnetun ominaisuuden nojalla $FE = LM = \frac{1}{2} \cdot BC$ ja $FE \| LM$. $FLME$ on siis suunnikas. Lisäksi $FL \| AA' \perp BC \| LM$.



Itse asiassa $FLME$ on suorakaide. Samalla perusteella $LDEK$ on suorakaide. Näillä kahdella suorakaiteella on yhteinen lävistäjä LE, joten suorakaiteiden kärjet F, L, D, M, E ja K ovat kaikki ympyrällä, jonka halkaisja on LE. Myös toiset lävistäjät FM ja DK ovat tämän ympyrän halkaisijoita. A', B' ja C' ovat kukin kärkiä suorakulmaisissa kolmioissa, joiden hypotenuusat ovat luetellut kolme lävistäjää eli ympyrän halkaisijaa. Thaleen lauseen nojalla korkeusjanojen kantapisteetkin ovat samalla ympyrällä. Ympyrää kutsutaan mm. kolmion ABC *yhdeksän pisteen ympyräksi*.

Lauseessa väitetty sivuamisominaisuus on todistettavissa muutamien inversiokuvauksen ominaisuuksien avulla, jotka tässä oletetaan tunnetuiksi. Tarkastetaan kolmion ABC sisäympyrää Γ ja esimerkiksi kulman $\angle ABC$ aukeamassa olevaa sivuympyrää Γ_b. Olkoot X ja Y näiden ympyröiden ja sivun AC yhteiset pisteet. Jos kolmion sivut ovat a, b, c ja $2s = a + b + c$, niin (tunnetusti, tai helpon laskun avulla nähtävästi) $CX = AY = s - c$. Sivun AC keskipiste E on siis



myös janan XY keskipiste ja $XY = b - 2(s - c) = c - a$. Ympyröillä Γ ja Γ_b on yhteisinä tangentteina BA, BC ja AC; olkoot A_1 ja C_1 ne BA:n ja BC:n pisteet, joille A_1C_1:kin on ympyröiden yhteinen tangentti. Yhteiset tangentit ovat pareittain symmetrisiä ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevan suoran eli kulman $\angle ABC$ puolittajan suhteen. Siis AC:n ja A_1C_1:n leikkauspiste S on tällä kulmanpuolittajalla. Leikatkoot suorat DE ja FE A_1C_1:n pisteissä D' ja F'.

Tarkastellaan nyt ympyrää Ω, jonka keskipiste on E ja halkaisija XY. Ω leikkaa ympyrät Γ ja Γ_b kohtisuorasti. Inversiokuvaus Ω:ssa kuvaa silloin kummankin näistä ympyröistä itselleen. ABC:n yhdeksän pisteen ympyrä kulkee pisteiden D, E ja F kautta. Koska E on Ω:n keskipiste, yhdeksän pisteen ympyrän inversiokuva on suora. Osoitetaan, että tämä suora on suora $F'D'$ eli suora A_1C_1. Nähdään, että $AA_1 = C_1C = BA'BA_1 = BA - BC = c - a$. Koska S on kulman $\angle ABC$ puolittajalla, $SC = \dfrac{ab}{a+c}$, $SA = \dfrac{cb}{a+c}$ ja $ES = \dfrac{b}{2} - \dfrac{ab}{a+c} = \dfrac{b(c-a)}{2(c+a)}$. Kolmiot SEF' ja SCC_1 ovat yhdenmuotoisia, joten

$$F'E = \frac{CC_1 \cdot ES}{CS} = \frac{(c-a)^2}{2a}.$$

Nyt $FE = \frac{1}{2}a$, joten $EF \cdot EF' = \frac{(c-a)^2}{4}$. Siis F' on F:n kuva ympyrässä Ω tehtäväss'ä inversiossa. Aivan samoin näytetään, että D' on D:n kuva. Yhdeksän pisteen ympyrä kuvautuu siis suoraksi A_1B_1, joka sivuaa Γ:aa ja Γ_b:tä. Koska nämä kaksi ympyrää kuvautuvat inversiossa itselleen, myös yhdeksän pisteen ympyrä sivuaa Γ:aa ja Γ_b:tä.

Gergonnen piste. *Kolmion kärjet ja kolmion sisään piirretyn ympyrän ja kolmion sivujen sivuamispisteet yhdistävät janat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.* (*Joseph Diaz Gergonne*, 1771–1859)

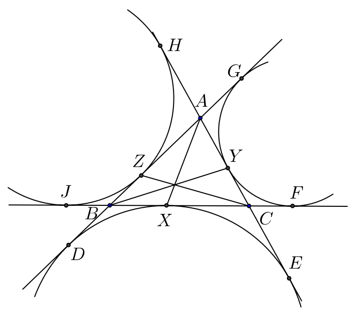
Todistus. Sivutkoon kolmion sisään piiretty ympyrä sivuja BC, CA ja AB pisteissä X, Y ja Z, tässä järjestyksessä. Koska AX ja AZ ovat ympyrän tangentteja, $AX = AZ$. Samoin $BX = BY$ ja $AY = AZ$. Mutta näin ollen

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AY}{BX} = 1.$$

Väite seuraa heti Cevan lauseesta.

Nagelin piste. *Kolmion kärjet ja kolmion sivuympyröiden ja kolmion sivujen sivuamispisteet yhdistävät janat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.* (*Christian Heinrich von Nagel*, 1803–82)

Todistus. Sivutkoot kolmion ABC sivuympyrät (ympyrät, jotka sivuavat yhtä kolmion sivua ja kahden muun jatketta) BC:tä pisteessä X, CA:ta pisteessä Y ja AB:tä pisteessä Z, olkoot D, E, F, G, H ja J pisteet, joissa sivuympyrät sivuavat puolisuoria AB, AC, BC, BA, CA ja CB, tässä järjestyksessä. Ympyrän tangenttien leikkauspisteen ja sivuamispisteiden väliset janat ovat yhtä pitkiä. Siis $BD = BX$ ja $CD = CX$ seka $AD = AE$. Tästä seuraa, että murtoviivat ABX ja ACX ovat yhtä pitkät ja edelleen se, että AD:n ja AE:n pituus on puolet kolmion ABC



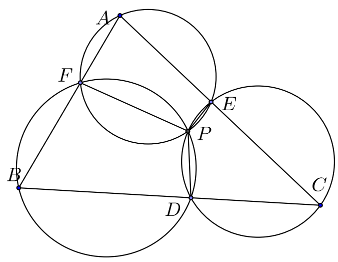
piiristä. Symmetrian vuoksi myös BF:n, BG:n, CH:n ja CJ:n pituus on sama. Mutta tästä seuraa, että $BX = BD = AG = AY$, $XC = CE = AH = AZ$ ja $BZ = BD = CF = CY$. Siis

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{AZ} \cdot \frac{BZ}{BX} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1.$$

Cevan lauseen nojalla AX, BY ja CZ kulkevat saman pisteen kautta.

Miquelin piste. *Olkoot D, E ja F kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä. Kolmioiden AFE, BDF ja CED ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat toisensa samassa pisteessä.* (*Auguste Miquel*, syntymä- ja kuolinvuosi tuntemattomat, julkaisuja 1836–46)

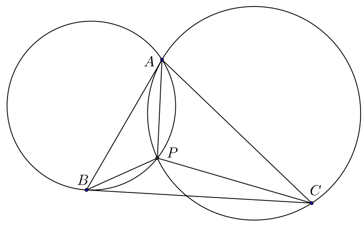
Todistus. Oletetaan, että kolmioiden BDF ja CED ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat toisensa pisteessä $P \neq D$. Jos P on kolmion ABC sisäpuolella, niin jännenelikulmioista $BDPF$ ja $CEPD$ saadaan $\angle FPE = 360^\circ - (180^\circ - \angle FBD) - (180^\circ - \angle DCE) = \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ - \angle EAF$. Nelikulmio $AFPE$ on siis jännenelikulmio. Mutta tämän nelikulmion ympäri piirretty ympyrä on on juuri kolmion AFE ympäri piirretty ympyrä, joka siis leikkaa kolmioiden BDF ja CED ympäri piirretyt ympyrät samassa pisteessä.



Jos P on kolmion ABC ulkopuolella, saadaan kehäkulmalauseesta vastaavasti $\angle FPE = \angle FPD + \angle DPE = \angle FPD + \angle DCE = \angle ABC + \angle ACB$, ja voidaan tehdä sama johtopäätös kuin edellä. Jos viimein D on kolmioiden BDF ja CED ympäri piirrettyjen ympyröiden sivuamispiste, molempien ympyröiden keskipisteet ovat janalla BC, kulmat BFD ja DEC ovat suoria ja AD on kolmion AFE ympäri piirretyn ympyrä halkaisija. Väite on tässäkin tapauksessa tosi.

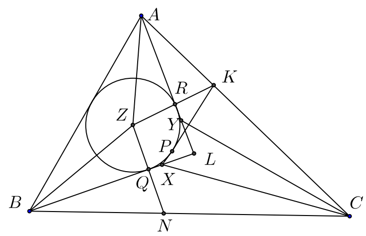
Brocardin piste. *Kolmiossa ABC on tasan yksi piste P, jolle $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$.* (*Henri Brocard*, 1845–1922)

Todistus. Oletetaan, että P olisi (jokin) lauseessa määritelty piste. Jos piiretään ympyrä $\mathcal{Y}_1$ A:n B:n ja P kautta, niin ympyrän kehäkulman PAB on oltava sama kuin $\angle PBC$. Tämä on mahdollista vain, jos BC on $\mathcal{Y}_1$:n tangentti. Samoin, jos piirretään ympyrä A:n C:n ja P:n kautta, niin ehto $\angle PCA = \angle PAB$ voi toteutua vain, jos AB on $\mathcal{Y}_2$:n tangentti. P:n ainoa mahdollinen sijainti on siis A:n ja B:n kautta piirretyn BC:n tangenttiympyrän ja A:n ja C:n kautta piirretyn AB:n tangenttiympyrän leikkauspiste. Tällaisia pisteitä on tasan yksi.



Morleyn lause. *Suorat, jotka jakavat kolmion kulmat kolmeen yhtä suureen osaan, leikkaavat toisensa tasasivuisen kolmion kärjissä.* (*Frank Morley*, 1860–1937)

Todistus. Kutsumme puolisuoria, jotka jakavat kulman kolmeen yhtä suureen osaan, *kolmijakajiksi*. Olkoon nyt ABC kolmio ja leikatkoot kulmien $\angle ABC$ ja $\angle BCA$ ne kolmijakajat, jotka ovat lähempänä sivua BC, pisteessä X, kulmien $\angle BCA$ ja $\angle CAB$ ne kolmijakajat, jotka ovat lähempänä sivua CA pisteessä Y ja kulmien $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ ne kolmijakajat, jotka ovat lähempänä sivua AB, pisteessä Z. Osoitetaan, että XYZ on tasasivuinen kolmio.



Leikatkoot suorat AY ja BX pisteessä L. Koska AZ ja BZ ovat kolmion ABL kulmanpuolittajia, tämän kolmion sisäympyrän Γ keskipiste on Z. Γ sivuaa AL:ää pisteessä R ja

BL:ää pisteessä Q. Olkoot vielä K ja N suorien ZR ja AC sekä ZQ ja BC leikkauspisteet. Pisteestä K Γ:lle piirretyn tangentin sivuamispiste olkoon P ja leikatkoon KP suoran BL pisteessä F. Koska AR on kulman $\angle ZAK$ puolittaja ja $ZR \perp AR$, niin $ZR = RK$ ja $ZP = 2 \cdot ZK$. Koska KZP on suorakulmainen kolmio, niin $\cos(\angle KZP) = \dfrac{1}{2}$ ja $\angle KZP = 60°$, $\angle ZKP = 30°$. Jos kolmion ABC kulmat ovat α, β ja γ, niin $\angle ABL = \dfrac{2}{3}\beta$ ja $\angle BAL = \dfrac{2}{3}\alpha$. Silloin $\angle ALB = 180° - \dfrac{2}{3}(\alpha + \beta)$ ja koska $ZQLR$ on jännenelikulmio, $\angle RZQ = \dfrac{2}{3}(\alpha+\beta) = 120° - \dfrac{2}{3}\gamma$. Koska BL on kulman $\angle ZBN$ puolittaja, kolmiot FQN ja FQZ ovat yhteneviä, joten $\angle FNQ = \angle FZQ = \dfrac{1}{2}\angle PZQ = \dfrac{1}{2}(\angle QZR - 60°) = 30° - \dfrac{1}{3}\gamma$. Kolmio ZNK on tasakylkinen. Siis $\angle ZNK = \angle ZKN = \dfrac{1}{2}(180° - \angle NZK) = \dfrac{1}{2}\angle QLR = 30° - \dfrac{1}{3}\gamma$. Siis $\angle FNK = \angle ZNK - \angle FNQ = \dfrac{2}{3}\gamma$ ja $\angle FKN = \angle ZKN - \angle ZKP = \dfrac{1}{3}\gamma$. Koska siis $\angle NCF = \angle NKF$, pisteet K, F, N ja C ovat samalla ympyrällä ja $\angle NCF = \angle NCX$. Tästä seuraa, että $F = X$. Pisteestä K Γ:lle piirretty tangentti kulkee X:n kautta. Samoin osoitetaan, että pisteestä N Γ:lle piirretty tangentti kulkee Y:n kautta. Symmetrian perusteella on nyt $\angle XZP = \angle XZQ = \angle RZY$. Mutta koska $\angle RZP = 60°$, on myös $\angle YZX = 60°$. Samoin todistetaan, että kolmion XYZ muutkin kulmat ovat $60°$, joten kolmio on tasasivuinen.