Pelit matematiikan opetuksessa

Vadim Kulikov

Helsingin Yliopisto Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Epsilonit kirjaa tutkimassa, 28.01.2012

- pärjääminen edellyttää ongelmanratkaisukykyä,
- mukaan tempaisevia, hauska pelata,
- yhden oivalluksen pelejä,
- opeteltavan asian hallitseminen on suoraan verrannollinen voittomahdollisuuksiin.
- pelejä, joita pelatessa oppii uusia matemaattisia rakenteita
- pelejä, joita ei ole tarkoitettu pelattavaksi.

- pärjääminen edellyttää ongelmanratkaisukykyä,
- mukaan tempaisevia, hauska pelata,
- yhden oivalluksen pelejä,
- opeteltavan asian hallitseminen on suoraan verrannollinen voittomahdollisuuksiin.
- pelejä, joita pelatessa oppii uusia matemaattisia rakenteita
- pelejä, joita ei ole tarkoitettu pelattavaksi.

- pärjääminen edellyttää ongelmanratkaisukykyä,
- mukaan tempaisevia, hauska pelata,
- yhden oivalluksen pelejä,
- opeteltavan asian hallitseminen on suoraan verrannollinen voittomahdollisuuksiin.
- pelejä, joita pelatessa oppii uusia matemaattisia rakenteita
- pelejä, joita ei ole tarkoitettu pelattavaksi.

- pärjääminen edellyttää ongelmanratkaisukykyä,
- mukaan tempaisevia, hauska pelata,
- yhden oivalluksen pelejä,
- opeteltavan asian hallitseminen on suoraan verrannollinen voittomahdollisuuksiin.
- pelejä, joita pelatessa oppii uusia matemaattisia rakenteita
- pelejä, joita ei ole tarkoitettu pelattavaksi.

- pärjääminen edellyttää ongelmanratkaisukykyä,
- mukaan tempaisevia, hauska pelata,
- yhden oivalluksen pelejä,
- opeteltavan asian hallitseminen on suoraan verrannollinen voittomahdollisuuksiin.
- pelejä, joita pelatessa oppii uusia matemaattisia rakenteita
- pelejä, joita ei ole tarkoitettu pelattavaksi

- pärjääminen edellyttää ongelmanratkaisukykyä,
- mukaan tempaisevia, hauska pelata,
- yhden oivalluksen pelejä,
- opeteltavan asian hallitseminen on suoraan verrannollinen voittomahdollisuuksiin.
- pelejä, joita pelatessa oppii uusia matemaattisia rakenteita
- pelejä, joita ei ole tarkoitettu pelattavaksi.

- pärjääminen edellyttää ongelmanratkaisukykyä,
- mukaan tempaisevia, hauska pelata,
- yhden oivalluksen pelejä,
- opeteltavan asian hallitseminen on suoraan verrannollinen voittomahdollisuuksiin.
- pelejä, joita pelatessa oppii uusia matemaattisia rakenteita
- pelejä, joita ei ole tarkoitettu pelattavaksi.

Millaisia ei?

- joissa pärjääminen edellyttää samojen harjoitusten tekemisen kuin läksynä on muutenkin,
- liian helppoja.

Millaisia ei?

- joissa pärjääminen edellyttää samojen harjoitusten tekemisen kuin läksynä on muutenkin,
- liian helppoja.

Millaisia ei?

- joissa pärjääminen edellyttää samojen harjoitusten tekemisen kuin läksynä on muutenkin,
- liian helppoja.

Opettajalla on mielessä lukujono, esimerkiksi

Opettajalla on mielessä lukujono, esimerkiksi

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256

(helppo)

Opettajalla on mielessä lukujono, esimerkiksi

$$2,4,8,16,32,64,128,256 \qquad \qquad \text{(helppo)}$$

Opettajalla on mielessä lukujono, esimerkiksi

$$2,4,8,16,32,64,128,256$$
 (helppo)
 $1,3,7,15,31,63,127,255$ (keskitaso)
 $2,1,3,4,7,11,18,29$ (vaikeahko)

Opettajalla on mielessä lukujono, esimerkiksi

opettaja piirtää taululle n viivaa (n = lukujonon pituus) ja oppilaat arvaavat.

Opettajalla on mielessä lukujono, esimerkiksi

opettaja piirtää taululle n viivaa (n = lukujonon pituus) ja oppilaat arvaavat.

"Yhden oivalluksen peli"



$$x = 13 - y$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

2

$$x = 13 - y$$

x = 0

2

$$x = 13 - y$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$+1, +2$$

$$x = 13 - y$$

 $x = 0 + 2$
 $y = 0$
 $+ 1, +2$

$$x = 13 - y$$

$$x = 0 + 2$$

$$y = 0 + 1$$

$$\underline{+1}, +2$$

$$x = 13 - y$$

 $x = 0 + 2 + 2$
 $y = 0 + 1$
 $+ 1, +2$

$$x = 13 - y$$

 $x = 0 + 2 + 2$
 $y = 0 + 1 + 2$
 $+1, +2$

$$x = 13 - y$$

 $x = 0 + 2 + 2 + 1$
 $y = 0 + 1 + 2$
 $+1, +2$

$$x = 13 - y$$

$$x = 0 + 2 + 2 + 1$$

$$y = 0 + 1 + 2 + 2$$

$$+ 1, +2$$

$$x = 13 - y$$
 $x = 0 + 2 + 2 + 1 + 2$
 $y = 0 + 1 + 2 + 2$
 $+ 1, +2$

$$x = 13 - y$$

$$x = 0 + 2 + 2 + 1 + 2$$

$$y = 0 + 1 + 2 + 2 + 1$$

$$+1, +2$$

$$x = 13 - y$$

$$x = 0 + 2 + 2 + 1 + 2 = 7$$

$$y = 0 + 1 + 2 + 2 + 1 = 6$$

$$+1, +2$$

$$x = 13 - y$$

$$x = 0 + 2 + 2 + 1 + 2 = 7$$

$$y = 0 + 1 + 2 + 2 + 1 = 6$$

$$+1, +2$$

Peli on isomorfinen erään NIM-pelin kanssa.

Vaikeampi esimerkki

$$x^2 + 480 < 44x$$

$$+1, +2, -1, \cdot 2, \cdot \frac{1}{2}$$

Vaikeampi esimerkki

$$x^2 + 480 < 44x$$

$$+1, +2, -1, \cdot 2, \cdot \frac{1}{2}$$

Vaikeampi esimerkki

$$x^{2} + 480 < 44x$$

$$+1, +2, -1, \cdot 2, \cdot \frac{1}{2}$$

Pelit matematiikassa -kurssi

Pidin Ressun lukiossa syksyllä 2010. Kurssin rakenne:

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

Pelit matematiikassa -kurssi

Pidin Ressun lukiossa syksyllä 2010. Kurssin rakenne:

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

Pelit matematiikassa -kurssi

Pidin Ressun lukiossa syksyllä 2010. Kurssin rakenne:

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä

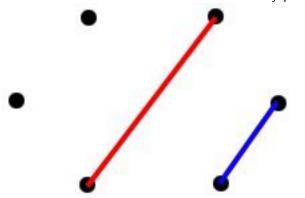
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tulœkses⊕a ja≣ → ∢ ≣ → ១٩℃

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



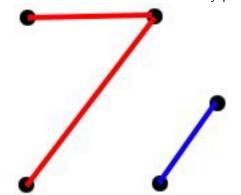
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tulœksessa ja ≥ → ≥ ⊃٩℃

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



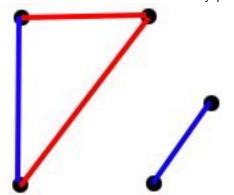
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tulœksessa ja≅ → ⋅ ≅ → ≥ ∽ ۹ €

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



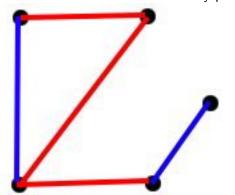
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tulœksessa ja ≥ → ≥ ∞ q œ

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



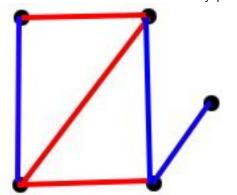
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tulœksessa ja ≥ → ≥ ∞ q œ

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



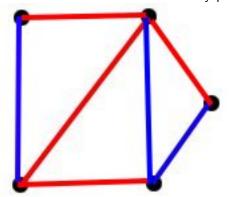
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tulœksessa ja ≥ → ≥ ∞ q œ

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



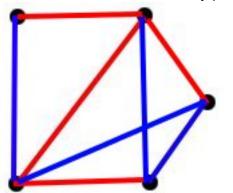
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



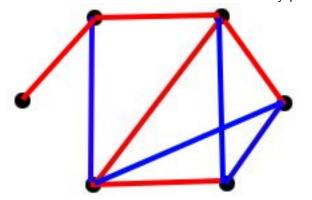
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



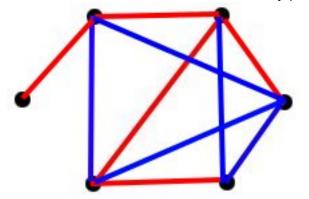
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja
 Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä=on√hteys→ ♣ → ♣ → ◆◆

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



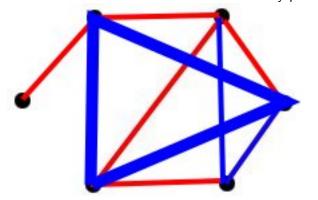
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja
 Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä=on√hteys→ ♣ → ♣ → ◆◆

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja
 Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä=on√hteys→ ♣ → ♣ → ◆◆

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä

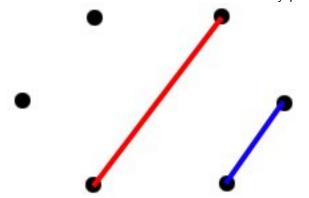
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



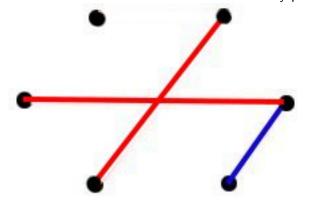
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



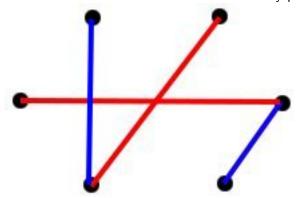
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



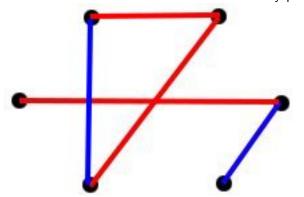
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



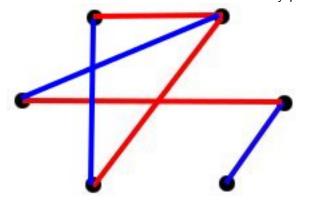
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



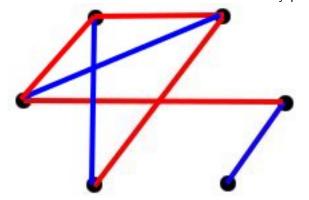
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



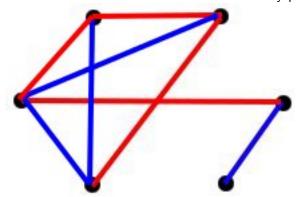
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



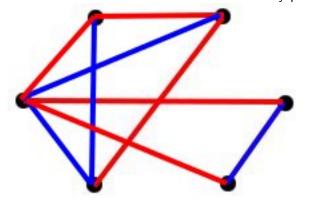
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



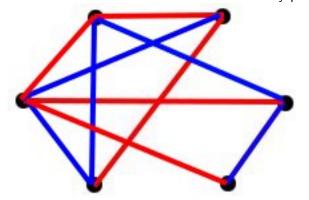
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



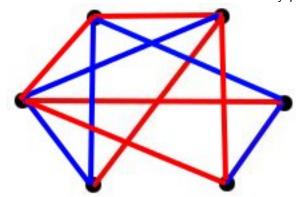
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



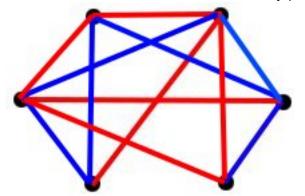
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



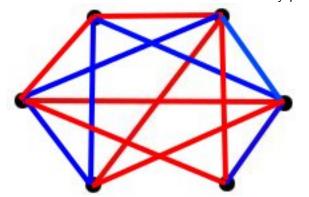
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



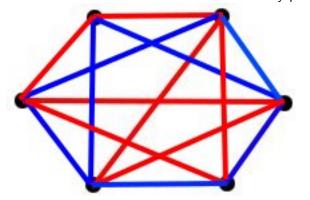
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja
 Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä=on√hteys→ ♣ → ♣ → ◆◆

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



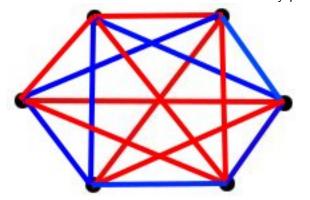
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



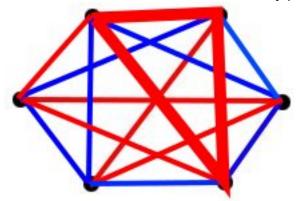
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



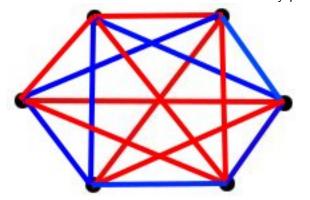
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä



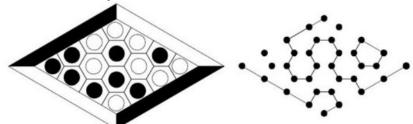
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys.
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys.
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys.
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.



- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys.
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

- Yksinkertaisia pelejä: Niukka, Nim, Chomp
- Tutustuttiin verkkoteoriaan. Pelattiin Ramsey-peliä
- ...ja todistettiin, että R(3) = 6.
- Havaittiin, että Ramseyn todistetussa tuloksessa ja Ramseyn-pelin determinoituvuuden välillä on yhteys.
- Määriteltiin Hex ja todistettiin, että se on determinoitu.
- Todistettiin sen avulla Brouwerin kiintopistelause.
- Todistettiin sen avulla Nashin tasapainon olemassaolo sekastrategiapeleissä (käsiä heilutellen helpossa erikoistapauksessa).

Punasilmäiset ja vihreäsilmäiset

Saarella asuu *n* punasilmäistä ja *n* vihreäsilmäistä. Kukaan asukas ei tiedä omaa silmiensä väriä. Saarella on laki: jos selvittää oman silmiensä värin, joutuu *seuraavana päivänä* muuttamaan saarelta pois. Kukaan ei halua muuttaa saarelta pois, eivätkä he paljasta toisilleen toisten silmien värejä. Asukkaat ovat kuitenkin hyvin päättelykykyisiä.

Eräänä päivänä saarelle saapuu ulkopuolinen, joka kerää kaikki asukkaat yhteen ja julistaa "Saarella on ainakin yksi punasilmäinen".

Hattuongelmat

Esimerkiksi: Jonossa on n vankia ja jokaisen päähän laitetaan valkoinen tai musta hattu. Vankilan johtaja aloittaa kyselyn jonon lopusta. Vangit saavat sopia strategian etukäteen.

Pienin luku -peli

Jokainen pelaaja valitsee positiivisen kokonaisluvun. Pienin toistumaton luku voittaa.