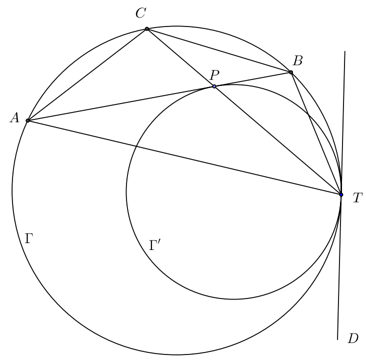
# Matematiikan olympiavalmennus 2015 – syyskuun tehtävät

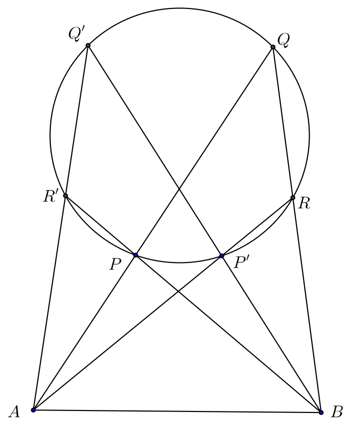
## Ratkaisuja

**1.** *Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan sisäpuolisesti pisteessä $T$. Ulomman ympyrän sekantti $AB$ on sisemmän ympyrän tangentti pisteessä $P$. Osoita, että suora $TP$ puolittaa kulman $\angle ATB$.*




**Ratkaisu.** Olkoon ulompi ympyrä $\Gamma$ ja sisempi $\Gamma'$. Leikatkoon suora $TP$ $\Gamma$:n myös pisteessä $C$ ja olkoon $D$ jokin $\Gamma$:n ja $\Gamma'$:n yhteisen tangentin piste, joka on eri puolella suoraa $TP$ kuin $B$. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan kolmiot $ATP$ ja $CTB$ yhdenmuotoisiksi. Koska $\Gamma$:n samaa kaarta vastaavina kehäkulmina $\angle BCT = \angle BAT = \angle PAT$, tarvitsee vain osoittaa, että $\angle APT = \angle CBT$. Mutta $\Gamma'$:n samaa kaarta vastaavina tangentin ja sekantin välisinä kulmina $\angle APT = \angle DTP$ ja ympyrän $\Gamma$ samaa kaarta vastaavina sekantin ja tangentin välisenä kulmana ja kehäkulmana $\angle DTP = \angle DTC = \angle TBC$. Kolmiot $ATP$ ja $CTB$ ovat todellakin yhdenmuotoiset (kk), ja $\angle ATP = \angle CTB = \angle PTB$.

**2.** *Pisteet $P$, $Q$, $R$, $P'$, $Q'$ ja $R'$ valitaan samalta puolelta janaa $AB$ siten että kolmiot $ABP$, $AQB$, $RAB$, $BAP'$, $BQ'A$ ja $R'BA$ ovat yhdenmuotoisia. Osoita, että pisteet $P$, $Q$, $R$, $P'$, $Q'$ ja $R'$ ovat samalla ympyrällä.*



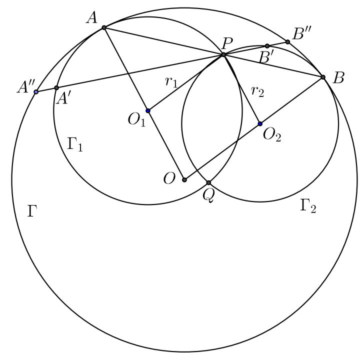

**Ratkaisu.** Pisteiden $P$, $Q$ ja $R$ kautta voidaan piirtää ympyrä $\Gamma$. Koska $ABP \sim AQB$, on $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AB}{AQ}$ eli $AP \cdot AQ = AB^2$. Koska $BAP' \sim RAB$, on $\dfrac{AP'}{AB} = \dfrac{AB}{AR}$ eli $AR \cdot AP' = AB^2$. Siis $AP \cdot AQ = AR \cdot AP'$. Jos suora $AR$ leikkaa $\Gamma$:n myös pisteessä $P''$, niin $AP \cdot AQ = AR \cdot AP''$. Tämä on mahdollista vain, jos $P' = P''$. Yhdenmuotoisuuksista $ABP \sim R'BA$ ja $RAB \sim AQB$ saadaan samoin $BR \cdot BQ = BP \cdot BR'$ ja $R' \in \Gamma$ Viimein $Q' \in \Gamma$ seuraa esimerkiksi kolmioiden $R'BA$ ja $BQ'A$ yhdenmuotoisuudesta ja siitä, että $R'$ on ympyrän $\Gamma$ piste: on nimittäin $\dfrac{AR'}{AB} = \dfrac{AB}{AQ'}$ eli $AQ' \cdot AR' = AB^2 = AP \cdot AQ$.

**3.** *On annettu kaksi ympyrää, jotka leikkaavat pisteissä $P$ ja $Q$. Konstruoi jana $AB$, joka* *kulkee pisteen $P$ kautta ja jonka päätepisteet ovat ympyröiden kehillä (piste $A$ toisella ympyrällä ja piste $B$ toisella ympyrällä) siten, että tulo $AP \cdot PB$ saa suurimman mahdollisen arvonsa.*

*(a) Piirrä ensin sellainen suurempi ympyrä, joka sivuaa ympyröitä ulkopuolisesti joissakin pisteissä $A$ ja $B$ niin, että piste $P$ on janalla $AB$. (Ei onnistu, ellei suurempaa ympyrää ja pisteitä $A$ ja $B$ ole valittu tietyllä tavalla.)*

*(b) Miksi nämä sivuamispisteet toteuttavat tehtävän ehdon?*

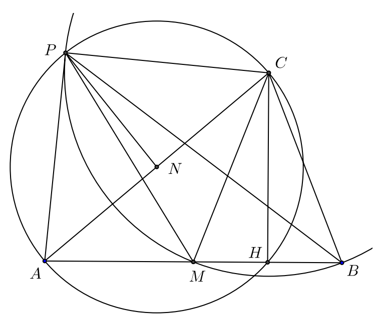
*(c) Miten pisteet konstruoidaan? Eli miten harpilla ja viivottimella piirtämällä pisteet löydetään?*




**Ratkaisu.** (a)-kohdan mukainen jana $AB$ on todella maksimaalinen. Olkoot tehtävän toisensa leikkaavat ympyrät $\Gamma_1$ ja $\Gamma_2$ ja niitä pisteissä $A$ ja $B$ ulkopuolisesti sivuava ympyrä $\Gamma$. Jos $A'B'$ on jokin muu $P$:n kautta kulkeva jana ja $A'$ on ympyrällä $\Gamma_1$ ja $B'$ on ympyrällä $\Gamma_2$, niin suora $A'B'$ leikkaa ympyrän $\Gamma$ pisteissä $A''$ ja $B''$ niin, että $A''P > A'P$ ja $PB'' > PB'$. Pisteen $P$ potenssi ympyrän $\Gamma$ suhteen on $AP \cdot PB = A''P \cdot PB'' > A'P \cdot PB'$.

Miten sitten $A$ ja $B$ löydetään? Olkoot $O_1$ ja $O_2$ $\Gamma_1$:n ja $\Gamma_2$:n keskipisteet ja $r_1$, $r_2$ säteet. Täydennetään kolmio $PO_1O_2$ suunnikkaaksi $PO_1OO_2$. Leikatkoon puolisuora $OO_1$ $\Gamma_1$:n pisteessä $A$ ja puolisuora $OO_2$ $\Gamma_2$:n pisteessä $B$. Silloin $OA = OB = r_1 + r_2$. Koska $A$, $O_1$ ja $O$ ovat samalla suoralla, $O$-keskisellä $A$:n ja $B$:n kautta kulkevalla ympyrällä $\Gamma$ on yhteinen tangentti ympyrän $\Gamma_1$ kanssa ja samanalaisin perustein myös ympyrän $\Gamma_2$ kansssa. On vielä osoitettava, että $AB$ kulkee $P$:n kautta. Koska $PO_1OO_2$ on suunnikas, $\angle PO_1O = \angle OO_2P$. Näistä edellinen kulma on tasakylkisen kolmion $O_1PA$ kantakulmien summa, jälkimmäinen taas tasakylkisen kolmion $O_2BP$ kantakulmien summa. Kolmioiden kantakulmat ovat siis yhtä suuret. Koska $\angle AO_1P = \angle O_1PO_2$ $(AO \| O_2P)$, kulmien $\angle APO_1$, $\angle O_1P_2$ ja $\angle O_2PB$ summa on sama kuin kolmion $AO_1P$ kulmien summa eli $180°$. Siis todellakin $P$ on janalla $AB$. – Se, miten $A$ ja $B$ löytyy harppia jaa viivoitinta käyttäen, selviää yllä kirjoitetusta.

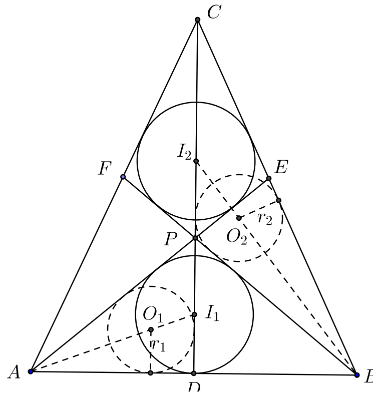
**4.** *Teräväkulmaisessa kolmiossa $CH$ on korkeusjana ja $AH = 3 \cdot HB$. Sivujen $AB$ ja $AC$ keskipisteet ovat $M$ ja $N$. Olkoon sitten $P$ se eri puolella suoraa $AC$ kuin $B$ oleva piste, jolle $NP = NC$ ja $PC = CB$. Osoita, että $\angle APM = \angle PBA$.*




**Ratkaisu.** $H$ on janan $MB$ keskipiste. Kolmiot $CHB$ ja $CHM$ ovat siis yhteneviä (sks), ja $CM = CB$. Piste $M$ on siis samalla $C$-keskisellä $CB$-säteisellä ympyrällä kuin $B$ ja $P$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle MPB = \dfrac{1}{2} \cdot \angle MCB = \angle HCB$. Koska $N$ on janan $AC$ keskipiste, $A$, $P$ ja $C$ ovat samalla $CN$-säteisellä ympyrällä. $AC$ on ympyrän halkaisija,joten $\angle APC = 90°$. Siis $90° = \angle APM +$

$\angle MPB + \angle BPC$. Suorakulmaisesta kolmiosta $BCH$ saadaan myös $90^\circ = \angle ABP + \angle PBC + \angle HCB$. Koska $\angle HCB = \angle MPB$ ja, koska $CPB$ on tasakylkinen kolmio, $\angle PBC = \angle CPB$, on oltava $\angle APM = \angle PBA$.

**5.** *Tasakylkisen kolmion $ABC$ kanta on $AB$. Kolmion korkeusjanan $CD$ piste $P$ on valittu niin, että kun $AP$ leikkaa $BC$:n pisteessä $E$ ja $BP$ $AC$:n pisteessä $F$, niin kolmion $ABP$ sisäympyrän säde on sama kuin nelikulmion $CFPE$ sisäympyrän säde. Todista, että kolmioiden $ADP$ ja $BCP$ sisäympyröillä on sama säde.*




**Ratkaisu.** Olkoon $I_1$ kolmion $ABP$ ja $I_2$ nelikulmion $CFPE$ sisäympyrän keskipiste. Koska jälkimmäinen ympyrä on samalla kolmion $BCF$ sisäympyrä, $I_2$ on kulman $\angle FBE$ puolittajalla. Suorakulmaisista kolmioista, joiden yhtenä kateettina on ym. sisäympyröiden säde ja yhtenä kulmaparina $\angle API$, $\angle CPE$ nähdään heti, että $PI_1 = PI_2$. Koska kolmioilla $AI_1P$ ja $BI_2P$ on sama kanta ja sama korkeus $AD = BD$, niillä on sama ala. Olkoot nyt $O_1$ ja $O_2$ kolmioiden $ADP$ ja $BCP$ sisäympyröiden keskipisteet ja $r_1$, $r_2$ näiden ympyröiden säteet. Pisteet $O_1$ ja $O_2$ ovat kulmien $\angle BAE$ ja $\angle FBC$ puolittajilla eli janoilla $AI_1$ ja $BI_2$. Kolmion $AI_1P$ ala on kolmioiden $AO_1P$ ja $O_1I_1P$ alojen summa, eli $\dfrac{1}{2}(AP + PI_1)\,r_1$. Kolmion $BI_2P$ ala puolestaan on kolmioiden $PBO_2$ ja $PO_2I_12$ alojen summa, eli $\dfrac{1}{2}(BP + PI_2)\,r_2$. Koska $AP = BP$ ja $PI_1 = PI_2$, on oltava $r_1 = r_2$.

**6.** *Määritä kaikki kokonaislukukolmikot $(a, b, c)$, joille $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a + b + c)$.*

**Ratkaisu.** Koska $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 2c + 3 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2$, tehtävän ehdon toteuttavat kolmikot toteuttavat myös ehdon $(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 3$. Lukujen $|a-1|$, $|b-1|$, $|c-1|$ on oltava $\le 1$, mutta niistä mikään ei voi olla 0. Ratkaisuja ovat siis kaikki ne kahdeksan kolmikkoa $(a, b, c)$ joissa jokainen luvuista $a$, $b$, $c$ on 0 tai 2.

**7.** *Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit $(m, n)$, joille $m! = n^2 - 12$.*

**Ratkaisu.** Olkoon $(m, n)$ tällainen pari. Pienin $n$, jolle $n^2 - 12 > 0$, on 4. Koska $2! = 2$, on oltava $m \ge 3$. Siis $m!$ on jaollinen 3:lla. Tällöin myös $n^2$ on jaollinen kolmella ja myös 9:llä. Mutta $n^2 - 12$ ei ole jaollinen 9:llä, joten $m!$:kaan ei ole. Näin ollen $m < 6$. Koska $3! + 12 = 18$, $4! + 12 = 36 = 6^2$ ja $5! + 12 = 132$ vain $m = 4$, $n = 6$ ovat mahdollisia.

**8.** *Piin tasavallassa on käytössä kahdenlaisia kolikoita, joiden arvot ovat* 2015 *ja* 2016 *yksikköä. Onko näillä rahoilla mahdollista maksaa kymmenen miljoonaa yksikköä maksava tutkimuslaboratorio, kun vaihtorahan antaminen ei ole sallittua?*

**Ratkaisu.** Jotta maksaminen onnistuisi, on oltava ei-negatiiviset kokonaisluvut $a$ ja $b$, jotka toteuttavat yhtälön $2016a + 2015b = 10^7 = 10^7(2016 - 2015)$. On siis oltava $(10^7 -$

$a) \cdot 2016 = (b + 10^7) \cdot 2015$. Peräkkäisten kokonaislukujen 2015 ja 2016 suurin yhteinen tekijä on 1. $10^7 - a$ on siis luvun 2015 monikerta ja $b + 10^7$ on luvun 2016 monikerta; lisäksi on oltava $a = 10^7 - 2015t$ ja $b = 2016t - 10^7$ samalla kokonaisluvulla $t$. Ehdoista $a \geq 0$, $b \geq 0$ seuraa

$$\frac{10^7}{2016} \leq t \leq \frac{10^7}{2015}$$

eli $4960 < t < 4963$. Mahdolliset arvot $t = 4961$ ja $t = 4962$ kelpaavat: jos $t = 4961$, niin $a = 3585$ ja $b = 1376$; $3585 \cdot 2016 + 1376 \cdot 2015 = 10^7$; jos $t = 4962$, niin $a = 1570$ ja $b = 3392$; $1570 \cdot 2016 + 2292 \cdot 2015 = 10^7$.

**2. ratkaisu.** Olkoon $n$ kokonaisluku. Tarkastellaan 2016 lukua $n$, $n - 2015$, $n - 2 \cdot 2015$, $\ldots$, $n - 2015 \cdot 2015$. Jos jotkin kaksi näistä, esimerkiksi $n - 2015i$ ja $n - 2015j$, olisivat kongruentteja modulo 2016, olisi joillain $i - j$ jaollinen 2016:lla. Koska $|i - j| \leq 2015$, tämä on mahdollista vain, jos $i = j$. Luvuista tasan yksi on siis jaollinen 2016:lla: $n - 2015k = 2016m$. Jos $n \geq 2015^2$, niin $m \geq 0$. Koska $2015^2 < 3000^2 = 9 \cdot 10^6 < 10^7$, niin $10^7$ voidaan kirjoittaa muodossa $2015k + 2016m$, missä $k$ ja $m$ ovat positiivisia kokonaislukuja.

**3. ratkaisu.** (Jesse Nieminen). On ratkaistava yhtälö

$$10^7 = 2016x + 2015y = 2015(x + y) + x.$$

Mutta $10^7 = 4962 \cdot 2015 + 1570$. Voidaan siis valita $y = 1570$ ja $x = 4962 - 1570 = 3392$.

**9.** *Osoita, että on olemassa kokonaisluku $r \geq 1$ ja tason pisteet $P_0$, $P_1$, $\ldots$, $P_{2015}$, siten että jokaisen pisteistä $P_1$, $\ldots$, $P_{2015}$ etäisyys pisteestä $P_0$ on tasan $r$ ja jokaisen pisteen $P_i$ $x$- ja $y$-koordinaatti ovat kokonaislukuja.*

**Ratkaisu.** Tarkastellaan pisteitä $(x_k, y_k) = (2^{2k} - 1, 2^{k+1})$. Jos $r_k$ on tällaisen pisteen etäisyys origosta, niin $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 = 2^{4k} - 2^{2k+1} + 1 + 2^{2k+2} = 2^{4k} + 2^{2k+1} + 1 = (2^{2k} + 1)^2$. $r_k$ on siis kokonaisluku $2^{2k} + 1$. Jos $a$ on positiivinen kokonaisluku, niin pisteen $(ax_k, ay_k)$ etäisyys origosta on kokonaisluku $ar_k$. Osoitetaan, että kaikki pisteet $(x_k, y_k)$ ovat eri origon kautta kulkevilla suorilla. Ellei näin olisi, olisi joillain $k$, $m$, $k < m$,

$$\frac{2^{k+1}}{2^{2k} - 1} = \frac{2^{m+1}}{2^{2m} - 1}$$

eli $2^{2m} - 1 = 2^{m-k}(2^{2k} - 1)$. Tämä on mahdotonta, koska edellisen yhtälön vasen puoli olisi pariton, oikea taas parillinen. Olkoon nyt $r = r_1 r_2 \cdots r_{2015}$ ja $a_k = \dfrac{r}{r_k}$. Pisteet $(a_k x_k, a_k y_k)$ ovat kaikki eri origon kautta kulkevilla suorilla, joten ne ovat eri pisteitä, ja jokaisen etäisyys origosta on $a_k r_k = r$.

**2. ratkaisu.** Osoitetaan induktiolla, että on ainakin $n$ eri kokonaislukuparia $(a_i, b_i)$, joille $a_i^2 + b_i^2 = 5^{2n}$. Koska $3^2 + 4^2 = 5^2$, väite pätee, kun $n = 1$. Oletetaan, että se pätee, kun $n = k$. Jos $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, $\ldots$, $(a_k, b_k)$ ovat lukupareja, joille $a_i^2 + b_i^2 = 5^{2k}$ ja $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ sekä $b_i \leq a_i$ kaikilla $i$, niin pareille $(5a_i, 5b_i)$ pätee $(5a_i)^2 + (5b_i)^2 = 5^{2(k+1)}$. Tarvitaan vielä yksi uusi pari $(a_{k+1}, b_{k+1})$, jolle $a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 = 5^{2(k+1)}$. Käytetään hyväksi identiteettiä $5^2(a^2 + b^2) = (4^2 + 3^2)(a^2 + b^2) = (4a + 3b)^2 + (4a - 3b)^2$. Jos nyt kaikki parit

$(4a_i+3b_i,\ 4a_i-3b_i)$ ovat parien $(5a_i,\ 5b_i)$ joukossa, on jonon $(a_i)$ kasvavuuden perusteella $4a_i+3b_i=5a_i$. Erityisesti $3b_1=a_1$, ja $5^{2k}=9b_1^2+b_1^2=10b_1^2$. Tässä vasen puoli on pariton ja oikea parillinen. Ristiriita osoittaa, että löytyy ainakin $k+1$ eri paria $(a_i',\ b_i')$, joille $a_i'^2+b_i'^2=5^{2(k+1)}$, ja induktio on valmis. Tehtävän väite saadaan, kun asetetaan $n=2015$.

**10.** *Osoita, että mistä tahansa* 18 *peräkkäisestä luvusta, joista jokainen on* $\geq 18$, *voidaan valita jokin luku, jolla on vähintään kolme eri alkutekijää.*

**Ratkaisu.** Kuuden pienimmän luvun joukossa on yksi kuudella jaollinen; olkoon se $x$. Silloin myös $x+6$ ja $x+12$ ovat joukossa ja myös näillä on kaksi alkutekijää 2 ja 3. Oletetaan, että luvulla $x$ on kaksi alkutekijää; siis $x=2^a3^b$. Jos $a\geq 2$ ja $b\geq 2$, niin $x+6=6(2^{a-1}3^{b-1}+1)$. Jälkimmäinen tekijä on $\geq 7$ eikä ole jaollinen 2:lla eikä 3:lla. Luvulla $x+6$ on siis ainakin kolme eri alkutekijää. Jos $x=2\cdot 3^b$, $b>1$, niin $x+12=6(3^{b-1}+2)$. Jälkimmäinen tekijä on pariton eikä se ole jaollinen 3:lla. joten sillä on alkutekijä, joka ei ole 2 eikä 3. Jos viimein $x=2^a\cdot 3$, $a>1$, niin $a\geq 3$ ja luvuista $x+3$ ja $x-3$ tasan toinen on jaollinen 9:llä. Siis myös luvuista $x+6$ ja $x+12$ tasan toinen on jaollinen 9:llä. Nyt $x+6=6(2^{a-1}+1)$ ja $x+12=12(2^{a-2}+1)$ Kummassakin tapauksessa sulkeissa oleva tekijä on pariton ja $>1$ ja tasan toisessa tapauksessa tekijä on kolmella jaollinen. Ainakin toisella luvuista $x+6$ ja $x+12$ on ainakin kolme alkutekijää.

**11.** *Osoita, että jokainen positiivinen kokonaisluku* $n\geq 1000$ *voidaan kirjoittaa muodossa* $n=abc+def$, *missä* $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f\geq 2$ *ovat kokonaislukuja.*

**Ratkaisu.** Jos luku $n$ on muotoa $2^3k+3^3m=8k+27m$ joillain positiivisilla kokonaisluvuilla $k$ ja $m$, niin $n=2\cdot 2\cdot 2k+3\cdot 3\cdot 3m$, eli vaadittua muotoa. Osoitetaan, että jokainen $n\geq 1000$ on tällaista muotoa. On nimittäin $1=3\cdot 27-10\cdot 8$ ja siis $n=(3n+8t)\cdot 27-(10n+27t)\cdot 8$ kaikilla $t$. Jotta olisi $3n+8t>0$ on oltava $t>-\dfrac{3}{8}n=\dfrac{81n}{8\cdot 27}$ ja jotta olisi $-(10n+27t)>0$ on oltava $t<-\dfrac{10}{27}n=-\dfrac{80n}{8\cdot 27}$. Näiden $t$:n ylä- ja alarajojen erotus on $\dfrac{n}{8\cdot 27}$. Kun $n>8\cdot 27=216$, erotus on suurempi kuin 1, joten näillä $n$:n arvoilla – ja siis varmasti silloin, kun $n\geq 1000$ – on olemassa positiiviset kokonaisluvut $k$ ja $m$, joiden avulla tehtävässä vaadittu esitys on muodostettavissa.

**12.** *Osoita, että yhtälöllä*

$$(12x^2+yz)(12y^2+zx)(12z^2+xy)=2015x^2y^2z^2$$

*ei ole ratkaisua* $(x,\ y,\ z)$, *jossa* $x>0$, $y>0$ *ja* $z>0$.

**Ratkaisu.** Olkoot $x$, $y$, $z$ positiivisia. Tulkitaan tehtävän yhtälön vasemman puolen kolme tekijää 13:n yhteenlaskettavan summiksi. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella

$$12x^2+yz\geq 13(x^{24}yz)^{1/13},\quad 12y^2+zx\geq 13(y^{24}zx)^{1/13}\quad 12z^2+xy\geq 13(z^{24}xy)^{1/13}.$$

Kun edelliset epäyhtälöt kerrotaan keskenään, saadaan $(12x^2+yz)(12y^2+zx)(12z^2+xy)\geq 13^3x^2y^2z^2=2197x^2y^2z^2>2015x^2y^2z^2$. Tehtävän yhtälöllä ei siis ole ratkaisua.

**13.** *Osoita, että kaikilla positiiviluvuilla $a$ ja $b$ pätee*

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \le \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

**Ratkaisu.** Havaitaan, että

$$2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{2(a+b)^2}{ab} = 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4.$$

Merkitään $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Todistettava epäyhtälö saa muodon

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt[3]{2x^3 + \frac{2}{x^3} + 4}$$

eli

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 \le 2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 4.$$

Merkitään vielä $x + \frac{1}{x} = t$, jolloin

$$t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

ja siis

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t.$$

[Tämä keino on usein hyödyllinen!] Lisäksi $t = x + \frac{1}{x} \ge 2$. Epäyhtälö on näillä merkinnöillä sama kuin $t^3 \le 2t^3 - 6t + 4$ eli $t^3 - 6t + 4 \ge 0$. Heti nähdään, että kun $t = 2$, edellinen kolmannen asteen polynomi saa arvon 0; $t^3 - 6t + 4$ on siis jaollinen polynomilla $t - 2$. Jakokulmassa saadaan heti $t^3 - 6t + 4 = (t-2)(t^2 + 2t - 2)$. [Tai tutkitaan funktiota $f(t) = t^3 - 6t + 4$. Pätee $f(2) = 0$ ja $f'(t) = 3(t^2 - 2) > 0$, kun $t \ge 2$; siis $f(t) > 0$, kun $t > 2$.] Kun $t \ge 2$, $t^2 + 2t - 2 \ge 4 + 4 - 2 > 0$. Epäyhtälö on siis tosi.

**14.** *Olkoon $P(x)$ toisen asteen polynomi. Tiedetään, että yhtälön $P(x^2+4x-7) = 0$ yksi juuri on 1 ja ainakin yksi juuri on kaksoisjuuri. Määritä yhtälön kaikki juuret.*

**Ratkaisu.** Koska $0 = P(1^2 - 4\cdot 1 - 7) = P(-2)$ ja $P$ on toisen asteen polynomi, on oltava $P(x) = a(x+2)(x-p)$ joillain vakioilla $a$ ja $p$. Siis $P(x^2+4x-7) = a(x^2+4x-5)(x^2+4x-7+p) = a(x-1)(x+5)(x^2+4x-p-7)$. Tehtävän ehdot täyttyvät, jos yhtälöllä $x^2+4x-p-7 = 0$ on juurena 1 tai $-5$, tai jos sillä on kaksoisjuuri. Koska $x^2+4x+p-7 = (x+2)^2 - p - 11$, jälkimmäinen tapaus tulee kyseeseen, kun $p = -11$. Silloin kysytyt juuret ovat $1, -5, -2$. Koska yhtälön $x^2+4x-p-7 = 0$ juurien summa on 4, niin jos jompikumpi luvuista $1, -5$ on yhtälön juuri, on toinenkin. Tällöin $p = -2$ js yhtälöllä $P(x^2+4x-7) = 0$ on juurina 1 ja $-5$, molemmat kaksoisjuuria.

**15.** *Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit* $(m, n)$*, joille* $m$*:n ja* $n$*:n aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo ovat samoilla numeroilla kirjoitettavia eri suuria kaksinumeroisia lukuja.*

**Ratkaisu.** Olkoon $10a+b$ $m$:n ja $n$:n artimeettinen keskiarvo. Voidan olettaa, että $m \le n$. Silloin $m = 10a + b - x$ ja $n = 10a + b + x$ jollain kokonaisluvulla $x > 0$, ja $mn = ((10a + b) - x)((10a + b) + x) = (10b + a)^2$ eli $(10a + b)^2 - x^2 = (10b + a)^2$ ja $x^2 = (10b + a + 10a + b)(10a + b - (10b + a)) = 11(a + b) \cdot 9(a - b) = 99(a^2 - b^2)$. Koska $x$ on kokonaisluku, $x$ ja myös $x^2$ on jaollinen 11:llä ja siis $(a-b)(a+b)$ on jaollinen 11:llä. Koska $1 \le a - b \le 8$, on $a + b = 11$. Siten $a - b$ on neliöluku. Mahdollisia ovat vain $a - b = 1$ ja $a - b = 4$. Jos $a - b = 1$, on $a = 6$ ja $b = 5$, $x^2 = 9 \cdot 11^2$, $x = 33$ ja saadaan ratkaisu $m = 65 - 33 = 32$, $n = 65 + 33 = 98$. Jos olisi $a - b = 4$, olisi $2a = (a + b) + (a - b) = 15$, mikä on mahdotonta, koska 15 on pariton. Ainoat ratkaisut $(m, n)$ ovat siis $(32, 98)$ ja $(98, 32)$.

**16.** *Määritellään lukujono* $(x_n)$ *asettamalla*

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_n + 5, \quad \text{kun } n \ge 1. \end{cases}$$

*(Jono alkaa siis* $x_1 = 4$*,* $x_2 = 9$*,* $x_3 = 41$*, ...) Määritä kaikki kokonaislukuparit* $\{a, b\}$*, joille* $x_a x_b$ *on neliöluku.*

**Ratkaisu.** Selvästi $\{1, 2\}$ on kysytynlainen pari. Osoitetaan, että se on ainoa. Jos $a < b$, eivätkä $x_a$ ja $x_b$ ole neliölukuja, niin $x_a x_b$ voi olla neliöluku vain, jos $x_a$:lla ja $x_b$:llä on yhteisiä tekijöitä. Luku $x_b$ on muotoa $kx_a + 5$. $x_b$:n ja $x_a$:n yhteiset tekijät ovat luvun 5 tekijöitä; ainoa mahdollinen yhteinen tekijä on 5. Mutta $x_1$ ei ole jaollinen 5:llä, ja jos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ei ole jaollinen 5:llä, $x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_n + 5$ ei ole jaollinen 5:llä. $x_a x_b$ voi olla neliöluku vain, jos $x_a$ ja $x_b$ ovat neliölukuja. Olkoon $n \ge 3$. Koska $x_n - 5 = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$, $x_{n+1} = (x_n - 5)x_n + 5$. Tarkastetaan sitä, voiko olla $x^2 - 5x + 5 = y^2$ eli $4y^2 = 4x^2 - 20x + 20 = (2x - 5)^2 - 5$. Edellinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $(2x - 5 + 2y)(2x - 5 - 2y) = 5$. Edellinen yhtälö voi toteutua vain, jos $2x - 5 - 2y = -5$, $2x - 5 + 2y = -1$ eli $x = 1$ ja $y = 1$ tai $2x - 5 - 2y = 1$ ja $2x - 5 + 2y = 5$ eli $x = 4$ ja $y = 1$. Koska jono $(x_n)$ on kasvava, $x_n \ne 4$, kun $n > 1$. Jonossa ei voi olla neliölukuja, kun $n \ge 3$.