

## VUODENVAIHTTEEN 2010–2020 VALMENNUSTEHTÄVÄSARJA

Muista, että tärkeintä on perustella ja kirjoittaa kaikki välivaiheet. Pelkkä vastaus ei siis ole riittävä, vaan paljon tärkeämpää kuin saada oikea vastaus on näyttää miten siihen oikeaan vastaukseen on päästy. Ratkaisuja toivotaan tammikuun puoliväliin mennessä postitse osoitteeseen

Akseli Jussinmäki  
Hämeentie 94 B 45  
00550 Helsinki

tai sähköpostitse osoitteeseen

akseliju@kase.fi.

Työn iloa ja hyvää uutta vuotta!

1. Jos  $x + 2y = 84 = y + 2x$ , niin mitä on  $x + y$ ?
2. Kaksi eri lukua on valittu satunnaisesti joukosta  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Millä todennäköisyydellä niiden summa on suurempi kuin niiden tulo?
3. Jos  $a = 2^{2011} + 2^{-2011}$  ja  $b = 2^{2011} - 2^{-2011}$ , niin mitä on  $a^2 - b^2$ ?
4. Osoita, että  $4^{2n} - 1$  on jaollinen luvulla 15 kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$ .
5. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla  $x$  ja  $y$  pätee

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

6. Miten monella lukua 999 pienemmällä positiivisella kokonaisluvulla on numero 1 kymmenjärjestelmäesityksessä?
7. Mikä on luvun  $x$  arvo, jos

$$4^{20} + 4^{20} = 2^x?$$

8. Kahden tasakylkisen kolmion kannat ovat pituudeltaan 1. Niiden kärkikulmat ovat  $30^\circ$  ja  $60^\circ$ . Määritä alojen suhde.
9. Mikä on luvun  $2^{2011} + 3^{2011}$  viimeinen numero?

10. a) Laske

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100.$$

- b) Laske

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199.$$

11. Sievennä

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{99}\right)\left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

12. Etsi luvut  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , kun tiedetään, että

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \quad \text{ja} \quad abc = 1620.$$

13. Olkoon  $r$  reaaliluku. Mitkä seuraavista ovat varmasti suurempia kuin  $r$ ?

$$r + 1, \quad 2r, \quad r^{100} \quad \text{ja} \quad r^2 + 1.$$

14. Tavallisesta  $8 \times 8$ -shakkilaudasta on järsitty pois kaksi vastakkaista kulmaa. Osoita, että shakkilautaa ei voida peittää  $1 \times 2$ -dominonappuloilla.

15. Kahdeksan opiskelijaa istuu pyöreän pöydän ympärillä. Jokaisen ikä on kahden viereisen opiskelijan ikien keskiarvo. Osoita, että opiskelijat ovat samanimkisiä.