

**Kotitehtävät, tammikuu 2011**  
**Helpompi sarja**

Palauta ratkaisusi 25.2. mennessä valmennusviikonlopun yhteydessä tai postitse Jouni Seppäselle. Arvostelussa kiinnitetään erityistä huomiota ratkaisujen esitystapaan: kirjoita selvästi ja perustele jokainen päättelyvaihe. Tiedustelut: jks@iki.fi, 050-524 9019.

1. Kuinka moni luvun 3 viisinumeroinen monikerta päättyy numeroon 6?
2. Olkoot  $a, b, c$  ja  $d$  reaaliluvut, joille  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$  ja  $ac + bd = 0$ . Määritä  $ab + cd$ .
3. Todista, että kun  $a > 0$ ,  $b > 0$  ja  $c > 0$ ,

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

4.  $8 \times 8$ -šakkilaudan poikki piirretään piirretään suora viiva. Viivan sanotaan halkaisevan ruudun, jos se kulkee ruudun sisäpisteen kautta. Mikä on suurin määrä ruutuja, jonka viiva voi halkaista?
5.  $8 \times 8$ -šakkilaudalta valitaan kuusitoista ruutua siten, että jokaisessa sarakkeessa ja jokaisella rivillä on täsmälleen kaksi valittua ruutua. Todista, että valituille ruuduille voidaan asettaa kahdeksan valkeaa ja kahdeksan mustaa nappulaa siten, että jokaisessa sarakkeessa ja jokaisella rivillä on yksi valkoinen ja yksi musta nappula.
6. Tavallisesta 52 kortin korttipakasta valitaan satunnaisesti kortti, sen maa kirjataan ylös ja kortti palautetaan pakkaan. Tämä toimenpide tehdään yhteensä seitsemän kertaa. Mikä on todennäköisyys, että kaikki neljä maata esiintyvät valittujen korttien joukossa?
7. Olkoon  $w_n$  niiden  $n$ -merkkisten kirjainjonojen lukumäärä, jotka koostuvat kirjaimista  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ja joissa on pariton määrä kirjainta  $A$ . Esitä  $w_n$ :lle laskentakaava.
8. Teräväkulmaisen kolmion  $ABC$  sisällä on piste  $P$ , joka ei ole kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Todista, että janoista  $AP$ ,  $BP$  ja  $CP$  ainakin yksi on pidempi ja ainakin yksi on lyhyempi kuin kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.
9. Ympyrät  $k_1$  ja  $k_2$  sivuavat toisiaan pisteessä  $P$ . Piste  $P$  kautta piirretään suora, joka leikkaa  $k_1$ :n lisäksi pisteessä  $A_1$  ja  $k_2$ :n pisteessä  $A_2$ . Piste  $P$  kautta piirretään toinen suora, joka leikkaa  $k_1$ :n lisäksi pisteessä  $B_1$  ja  $k_2$ :n pisteessä  $B_2$ . Todista, että kolmiot  $PA_1B_1$  ja  $PA_2B_2$  ovat yhdenmuotoiset.
10. Kolmion sivujen pituudet muodostavat aritmeettisen jonon, jonka peräkkäisten alkioiden erotus on  $d$ . Kolmion pinta-ala on  $T$ . Määritä kolmion kulmat ja sivujen pituudet. Esitä vastaus yleisessä tapauksessa ja laske sivujen ja kulmien likiarvot, kun  $d = 1$  ja  $T = 6$ .