Harjoitustehtävät, tammikuu 2014, helpommat. Ratkaisuja

1. *Todista, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla on*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Ratkaisu. Kaikilla $k > 1$ on

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Tehtävän epäyhtälön vasen puoli on siis pienempi kuin

$$1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{k},$$

ja väite on todistettu. [Summan tarkka arvo on tunnetusti $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$.]

2. *Osoita, että* $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ *on jaollinen* $(a + b + c)$*:llä.*

1. ratkaisu. Tulkitaan lauseke c:n polynomiksi $P(c)$. Jaollisuus toteutuu, jos $P(-(a + b)) = 0$. Lasketaan. Koska $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, saadaan todellakin $P(-(a + b)) = 4a^2(a+b)^2 - (a^2 - b^2 + (a+b)^2)^2 = 4a^2(a+b)^2 - (a+b)^2(a-b+a+b)^2 = (a+b)^2(4a^2 - 4a^2)$.

2. ratkaisu. Selvästi $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2 = (2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2)$. Mutta $2ac + a^2 + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c - b)(a + b + c)$. $a + b + c$ on siis luvun $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ tekijä.

3. *Osoita: jos* $n \geq 1$ *on kokonaisluku, niin*

$$\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} \geq (n!)^{2/n}.$$

1. ratkaisu. Sovelletaan geometrisen ja aritmeettisen keskiarvon välistä epäyhtälöä ja peräkkäisten kokonaislukujen summan kaavaa:

$$(n!)^{(2/n)} = \left((n!)^{(1/n)}\right)^2 \leq \left(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{n}.$$

Mutta

$$\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}n^2 - \frac{1}{12} \geq 0$$

kaikilla $n \geq 1$, joten väite on todistettu.

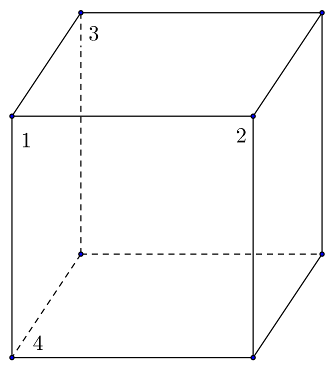
2. ratkaisu. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä voi käyttää yhdessä peräkkäisten kokonaislukujen neliöiden summan tunnetun lausekkeen kanssa:

$$(n!)^{2/n} = \left(\prod_{k=1}^{n} k^2\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}.$$

4. *Todista: jos yksikköneliön sisällä on yhdeksän pistettä, niin niistä voidaan aina valita kolme kolmion kärjiksi niin, että kolmion ala on vähemmän kuin* $\frac{1}{8}$.

Ratkaisu. Jaetaan yksikköneliö neljäksi yhteneväksi neliöksi. Näiden ala on $\frac{1}{4}$. Ainakin yhdessä näistä pikkuneliöistä on ainakin kolme annetuista pisteistä, sisäpisteinä tai reunalla. (laatikkoperiaate!). Osoitetaan sitten, että jos neliöstä valitaan kolme pistettä, A, B, C kolmion kärjiksi, kolmion ABC ala on enintään puolet neliön alasta. (Asia tuntuu itsestään selvältä, mutta perustelu on syytä esittää.) Jos kolmion sisältä valitaan mielivaltainen piste P, niin puolisuorat PA, PB ja PC leikkaavat neliön piirin pisteissä A', B' ja C'. Kolmio ABC on kokonaan kolmion $A'B'C'$ sisällä. Jos pisteistä A', B', C' kaksi, esimerkiksi A' ja B', ovat samalla neliön sivulla PQ ja kolmas on vastakkaisella sivulla, niin kolmio $A'B'C'$ on on kokonaan kolmion PQC' sisällä, ja kolmion PQC' ala on tasan puolet neliön alasta. Jos A' ja B' ovat neliön sivulla PQ ja C' on sivulla QR, niin $A'B'C'$ on kolmion PQR sisällä; PQR:n ala on puolet neliön alasta. Jos viimein A', B', C' ovat neliön eri sivuilla PQ, QR ja RS, niin neliön kärjen S etäisyys $A'B'$:sta on suurempi kuin C':n etäisyys tästä suorasta. Kolmion $A'B'C'$ ala on siis pienempi kuin kolmion $A'B'S$. Edelleen B':n etäisyys suorasta $A'S$ on suurempi kuin B':n, joten kolmion $A'B'S$ ala on pienempi kuin kolmion $A'RS$; viime mainitun kolmion ala on puolet neliön alasta. Edellisistä tarkasteluista seuraa, että neliön sisällä olevan kolmion ala on tasan puolet neliön alasta vain silloin, kun kolmion kärjistä kaksi on neliön kärkiä. Käsillä olevassa tehtävässä kaikki pisteet olivat neliön sisäpuolella. Niinpä niistä vain yksi (neliön keskipiste) voi olla muodostettujen kärkenä muodostetuissa neljässä pikkuneliössä. Neliössä olevat kolme pistettä muodostavat siis kolmion, jonka ala on aidosti pienempi kuin puolet pikkuneliön alasta eli alle $\frac{1}{8}$.

5. *Onko mahdollista numeroida kuution kahdeksan kärkeä numeroin* 1, 2, …, 8 *niin, että jokaisen särmän päissä olevien numeroiden summa on eri?*



Ratkaisu. Eipä ole. Jokaisessa kuution kärjessä yhtyy kolme särmää. Jos lasketaan yhteen kunkin särmän päissä olevat luvut, summan on oltava $3\cdot(1+2+\cdots+8) = 12\cdot 9 = 108$. Särmän päissä olevien lukujen summat ovat väliltä $[1+2,\ 7+8] = [3,\ 15]$. Mahdollisia summia on siis 13; jos kaikki summat ovat eri suuret, näistä 13:sta puuttuu vain yksi. Koska

$$\sum_{k=3}^{15} k = \frac{15 \cdot 16}{2} - 1 - 2 = 120 - 3 = 117 = 108 + 9,$$

tämä puuttuva on 9. Nyt summa 3 saadaan särmästä, jonka päissä ovat 1 ja 2 ja summa 4 särmästä, jonka päissä ovat 1 ja 3. Nyt 2 ja 3 eivät ole saman särmän päissä, joten summa 5 tulee särmästä, jonka päissä ovat 1 ja 4. Mutta summaa 6 ei voi muodostaa: se liittyisi joko kärkien 1 ja 5 tai 2 ja 4 väliseen särmään, mutta tällaista särmää ei ole.

6. *Laatikossa on 10 punaista ja 5 mustaa palloa. Monellako eri tavalla laatikosta voidaan ottaa viisi palloa, joista ainakin kolme on punaisia?*

Ratkaisu. Tehtävän teksti ei tarkenna, ovatko samanväriset pallot identtisiä vai toisistaan erottuvia. Edellisessä tapauksessa tapoja olisi tietysti vain kolme: otetaan kolme punaista ja kaksi mustaa, neljä punaista ja yksi musta tai viisi punaista. Jos pallot erottuvat toisistaan, niin tapoja ottaa kolme punaista ja kolme mustaa on

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 120 \cdot 10 = 1200,$$

eli kymmenalkioisen joukon kolmialkioisten osajoukkojen määrä kerrottuna viisialkioisen joukon kaksialkioisten osajoukkojen määrällä. Vastaavasti tapoja ottaa neljä punaista ja yksi musta on

$$\binom{10}{4} \cdot 5 = 210 \cdot 5 = 1050$$

ja tapoja ottaa viisi punaista on

$$\binom{10}{5} = 252.$$

Eri tapoja on siis kaikkiaan $1200 + 1050 + 252 = 2502$ kappaletta.

7. *Kuinka monelle positiivisten kokonaislukujen parille* (a, b) *pätee*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2014}?$$

Ratkaisu. Lukujen a ja b on toteutettava yhtälö $ab = 2014(a+b)$ eli $(a-2014)(b-2014) = 2014^2$. Nyt $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ on luvun 2014 jako alkutekijöihin. Luvulla $2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$ on $3^3 = 27$ tekijää (kaikki luvut $2^\alpha \cdot 19^\beta \cdot 53^\gamma$, missä $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 2$). Jokainen niistä voi olla $a - 2014$, ja jos $a - 2014$ on kiinnitetty, $b - 2014$ määräytyy yksikäsitteisesti. Kysyttyjä pareja on siis 27.

8. *Antti, Benjamin ja Cecil pelaavat kolmisin jalkapalloa seuraavasti. Kaksi pelaajaa on kentällä ja kolmas on maalissa. Kenttäpelaajat yrittävät maalia, ja se pelaaja, joka onnistuu tekemään maalin, siirtyy maalivahdiksi, jonka jälkeen jatketaan. Pelin jälkeen ilmeni, että Antti oli ollut 12 kertaa ja Benjamin 21 kertaa kentällä ja Cecil oli ollut 8 kertaa maalissa. Kuka teki kuudennen maalin?*

Ratkaisu. Kun Antti on ollut kentällä, niin maalissa on ollut jompikumpi toisista pelaajista. Näin ollen Benjamin oli maalissa neljästi. Pelejä oli siis yhteensä $21 + 4 = 25$ kappaletta. Koska Antti oli kentällä 12 pelissä, hän on ollut maalissa 13 pelissä eli yli puolessa pelejä. Koska pelaaja ei voi olla maalissa kahdessa peräkkäisessä pelissä, Antti on ollut maalissa joka toisessa pelissä ja siis kaikissa peleissä, joiden järjestysnumero on pariton. Antti oli maalissa seitsemännessä pelissä, joten hän teki maalin kuudennessa pelissä.

9. *Antti ajeli kouluun pyörällä nopeudella* 8 km/h *ja kotiin* 10 km/h*. Kotona hän huomasi unohtaneensa kirjansa kouluun, joten hän ajoi koululle* 16 km/h *ja palasi kotiin päin samalla nopeudella. Puolimatkassa pyörän kumi kuitenkin puhkesi, ja Antti talutti pyörän kotiin nopeudella* 4 km/h*. Mikä oli Antin keskinopeus näillä matkoilla?*

Ratkaisu. Olkoon matka Antin kotoa kouluun a km. Antin kulkema matka oli $4a$. Aikaa kului kaikkiaan

$$t = \frac{a}{8} + \frac{a}{10} + \frac{a}{16} + \frac{a}{2 \cdot 16} + \frac{a}{2 \cdot 4} = \frac{71}{160}a$$

tuntia. Keskinopeus oli siis $\dfrac{4 \cdot 160}{71} = \dfrac{640}{71} = 9\,\dfrac{1}{71}$ km/h.

10. *Osoita, että mikään seuraavan taulukon luku ei ole kokonaisluvun neliö:*

11	111	1111	11111	...
22	222	2222	22222	...
33	333	3333	33333	...
44	444	4444	44444	...
55	555	5555	55555	...
66	666	6666	66666	...
77	777	7777	77777	...
88	888	8888	88888	...
99	999	9999	99999	...

Ratkaisu. Kokonaisluvun neliö voi päättyä numeroihin 1 (1^2, 9^2), 4 (2^2, 8^2), 5 (5^2), 6 (4^2, 6^2), 9 (3^3, 7^2) tai 0 (0^2). Kokonaisluvun neliö neljällä jaettuna antaa jakojäännöksen 1 tai 0. Jakojäännös on sama kuin luvun kahden viimeisen numeron muodostaman luvun jakojäännös. Nyt 11:n jakojäännös on 3, 55:n 3, 66:n 2 ja 99:n 3. On vielä torjuttava mahdollisuus, että $44\ldots4$ olisi neliöluku. Jos se olisi, se olisi parillisen luvun $2k$ neliö $4k^2$. Mutta silloin olisi $11\ldots1 = k^2$. Tämä on jo havaittu mahdottomaksi.

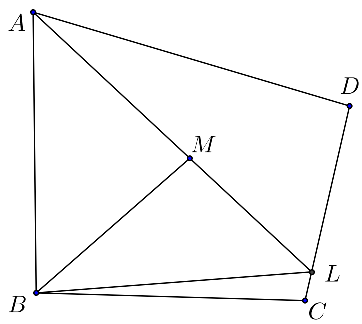
11. *a) Piste M on kuperan nelikulmion $ABCD$ sisällä. Osoita, että*

$$MA + MB < AD + DC + CB.$$

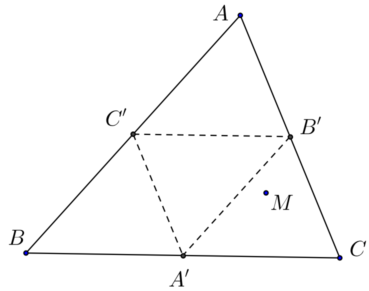
b) Piste M on kolmion ABC sisällä. Olkoon $x = \min\{MA, MB, MC\}$. Osoita, että

$$x + MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

Ratkaisu. a) Käytetään kolmioepäyhtälöä eli tietoa, jonka mukaan kolmion kahden sivun pituuksien summa on aina suurempi kuin kolmannen sivun pituus. Suora AM leikkaa joko nelikulmion sivun BC tai CD. Oletetaan, että se leikkaa sivun CD pisteessä L. Silloin $MA+MB < MA+ML+LB < AL+LB < AD+DL+LC+CB = AD+DC+CB$. Jos taas suora AM leikkaa sivun BC, on vastaavasti $MA + MB < MA + ML + LB = AL + LB < AD + DL + LB < AD + DC + CL + LB = AD + DC + CB$.



b) Olkoon A', B', C' kolmion sivujen BC, CA, AB keskipisteet. Silloin $A'B' = \dfrac{1}{2}AB$, $B'C' = \dfrac{1}{2}BC$ ja $C'A' = \dfrac{1}{2}CA$. Piste M kuuluu ainakin kahteen nelikulmioista $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CAC'A'$. Voidaan olettaa, että M kuuluu kahteen viimeksimainittuun. Todistetun a-kohdan perusteella $BM + MC < BC' + C'B' + B'C$ ka $AM + MC < AC' + C'A' + A'C$. Kun epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen ja otetaan huomioon edellä esitetyt kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävien janojen pituudet, saadaan $MA + MB + MC + MC < BC' + C'B' + B'C + AC' + C'A' + A'C = (BC' + C'A) + (C'B' + A'C) + (B'C + C'A') = AB + BC + CA$. Nyt $x \le MC$, ja todistus on valmis.



12. *Käytetyn auton nelinumeroinen hinta on näyttölaitteessa digitaalisin numeroin. Kun myyjä ei huomaa, asiakas kääntää näytön ylösalaisin, jolloin hinta putoaa* 1626 *euroa. Mikä oli alkuperäinen hinta?*

Numerot 0, 1, 2, 5, 6, 8 ja 9 ovat janoista kokoonpantuina digitaalisina numeroina käännettävissä. Jos merkitään numeron x ”käännettyä” arvoa $f(x)$:llä, niin $f(6) = 9$, $f(9) = 6$ ja $f(x) = x$, kun x saa muut mahdolliset arvot. Oletetaan, että alkuperäinen hinta on $1000A + 100B + 10C + D$, missä A, B, C, $D \in \{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9\}$. Uusi hinta on $1000f(D) + 100f(C) + 10f(B) + f(A)$. Ei voi olla $A = 0$ eikä $D = 0$, koska vanhan ja uuden hinnan ero on yli 1000. Koska ero ei pääty nollaan, $D \ne f(A)$ käännettynä. Jotta hintaero olisi 1626, on oltava $A - f(D) = 1$ tai $A - f(D) = 2$. Tarkastellaan mahdollisia tapauksia: Jos $A = 1$, niin olisi oltava $D = 0$. Tämä ei käy. Jos $A = 2$, niin olisi oltava $D = 1$, mutta tämä ei sovi yhteen sen kanssa, että hintaero päättyy numeroon 6. Jos $A = 5$, olisi oltava $f(D) = 4$ tai $f(D) = 3$, mutta 3 ja 4 eivät tule kysymykseen. Jos $A = 6$, niin on oltava $f(D) = 5 = D$. Hintaerolle saadaan ehto $6005+100B+10C-(5009+100f(C)+10f(B)) = 996+100(B-f(C))+10(C-f(B) = 1626$ eli $100(B - f(C)) + 10(C - f(B)) = 630$. Tämä toteutuu, jos $B = f(B)$ ja $C = f(C)$ sekä $B - C = 7$. Saadaan ratakaisu $B = 8$, $C = 1$ eli alkuperäinen hinta on 6815. Jos $A = 8$, on oltava $f(D) = 6$, $D = 9$; ei ratlkaisua. Jos $A = 9$, on $f(D) = D = 8$; ei ratkaisua. Alkuperäinen hinta oli siis 6815 euroa ja näyttö kääntämällä saatu huijaushinta 5189 euroa.

13. *Nelikulmion Q peräkkäisten sivujen pituudet ovat järjestyksessä a, b, c ja d. Osoita, että Q:n ala on enintään $\frac{1}{2}(ac+bd)$.*

1. ratkaisu. Jos nelikulmio $ABCD$ ei ole kupera, jos esimerkiksi D on kolmion ABC sisällä, niin D:n peilaus suorassa AC tuottaa kuperan nelikulmion $ABCD'$, jonka sivut ovat samat kuin nelikulmion $ABCD$, mutta jonka ala on suurempi. Voidaan siis olettaa, että Q on kupera nelikulmio. Olkoon $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ ja $DA = d$. Jos D'' on piste, jonka etäisyydet A:sta ja C:stä ovat c ja d, niin kolmiot ACD ja ACD'' ovat yhteneviä ja siis sama-alaisia. Nelikulmioilla $ABCD$ ja $ABCD''$ on sama ala, mutta siinä a ja c sekä b ja d ovat vierekkäisiä sivuja. Jos $\angle D''AB = \alpha$ ja $\angle BCD'' = \gamma$, niin nelikulmion $ABCD''$ ala on kolmioiden ABD'' ja BCD'' alojen summa eli

$$\frac{1}{2}(ac\sin\alpha + bd\sin\gamma) \le \frac{1}{2}(ac+bd),$$

koska $\sin\alpha \le 1$ ja $\sin\gamma \le 1$.

2. ratkaisu. Todetaan samoin kuin edellisessä ratkaisussa, että riittää, kun todistetaan väite kuperille nelikulmioille $ABCD$. Kolmioiden ABC ja ACD alojen summa on $\frac{1}{2}AC(h_1+h_2)$, missä h_1 ja h_2 ovat kolmioiden kärjistä B ja D yhteiselle kannalle AC piirretyt korkeusjanat. Nyt $h_1+h_2 \le BD$. Nelikulmion ala on siis pienempi kuin $\frac{1}{2}AC\cdot BD$. Mutta tunnetun Ptolemaioksen lauseen mukaan nelikulmion lävistäjien tulo on pienempi tai yhtä suuri kuin nelikulmion vastakkaisten sivujen pituuksien tulojen summa; yhtäsuuruus vallitsee, kun nelikulmio on jännenelikulmio. Väitös seuraa tästä heti.

14. *Luvussa $n = 111\ldots11222\ldots225$ on 2014 ykköstä ja 2015 kakkosta. Osoita, että $n = k^2$, missä k on kokonaisluku.*

Ratkaisu. Luku n voidaan ajatella kolmen luvun summaksi $a+b+c$, missä luku a muodostuu 4030 ykkösestä, luku b muodostuu 2016 ykkösestä ja $c = 3$. Siis

$$n = \frac{10^{4030}-1}{9} + \frac{10^{2016}-1}{9} + 3 = \frac{1}{9}(10^{4030} + 2\cdot 5\cdot 10^{2015} + 25) = \left(\frac{10^{2015}+5}{3}\right)^2.$$

Sulkeissa olevan luvun osoittajan numeroiden summa on 6, joten osoittaja on jaollinen kolmella. n on siis kokonaisluvun neliö.

15. *Olkoon $f(x) = 2x$ ja $g(x) = x-3$. Olkoon $x_0 = 11$ ja x_{k+1} joko $f(x_k)$ tai $g(x_k)$. Määritä pienin n, jolla x_n voi olla 25. Todistus!*

Ratkaisu. Kahdeksanjäseninen ehdon toteuttava jono on 11, 8, 5, 10, 7, 14, 28, 25. Osoitetaan, että se on lyhin mahdollinen. Koska 25 on pariton, on oltava $x_n = g(x_{n-1})$. Siis $x_{n-1} = 28$. Osoitetaan, että $n-1 < 6$ ei ole mahdollista. Huomataan, että $11 \equiv$

2 mod 3. Funktio g ei muuta luvun jakojäännöstä mod 3, mutta f muuttaa 1:n 2:ksi ja 2:n 1:ksi. Koska $28 \equiv 1 \mod 3$, funktiota f on käytettävä pariton määrä kertoja. Jos f on käytössä vain kerran, $x_k \leq 22$ kaikilla k. Jos f olisi käytössä viisi kertaa, g:tä ei käytettäisi ollenkaan, ja f_5 olisi $32 \cdot 11$, mikä on mahdotonta. Oletetaan siten, että funktiota g käytettäisiin enintään kahdesti. Silloin f_5 olisi ainakin $(11-6) \cdot 2^8 = 40$. Siis sekä f:ää että g:tä on täytynyt käyttää ainakin kolmesti, ja $n-1 \geq 6$. Todistus on valmis.