Matematiikan olympiavalmennus: malliratkaisuja, tammikuu 2020

Helpompia tehtäviä

1. Mystisessä laskimessa on nappi $*$, joka toimii seuraavasti:

- Jos näytöllä on pariton luku, niin napin painaminen muuttaa luvun kolminkertaiseksi.
- Jos näytöllä on parillinen luku, niin napin painaminen puolittaa luvun.

Aluksi näytöllä on luku viisi. Tämän jälkeen nappia painetaan 2020 kertaa. Mikä luku saadaan?

Ratkaisu. Vastaus: Lopuksi näytöllä on luku $3^{2020} \cdot 5$.

Jos näytöllä on aluksi pariton luku, niin se ei muutu koskaan parilliseksi, sillä sitä kerrotaan aina vain parittomalla luvulla. Aluksi näytöllä on luku viisi, mikä on pariton luku. Siispä lopuksi näytöllä oleva luku on $3^{2020} \cdot 5$.

2. Matematiikkakilpailussa on 90 monivalintatehtävää. Oikeasta vastauksesta saa viisi ja väärästä -1 pistettä. Oppilas vastasi kaikkiin kysymyksiin. Osoita, että hänen pistemääränsä voi olla -78 pistettä, mutta ei 116 pistettä.

Ratkaisu. Ratkaisuidea perustuu siihen, että selvitetään, kuinka moneen tehtävään oppilaan täytyi vastata oikein saadakseen tietyn pistemäärän ja muistetaan, että tämä luku on kokonaisluku. Olkoon siis n niiden tehtävien lukumäärä, joihin oppilas vastasi oikein. Tällöin hänen yhteispistemääränsä on $5n - (90 - n) = 6n - 90$. Kun ratkaistaan yhtälö $6n - 90 = -78$, niin nähdään, kuinka moneen tehtävään oppilas vastasi oikein, kun hänen pistemääränsä oli 78. Saadaan $6n = -78 + 90 = 12$ eli $n = 2$. Näin ollen -78 on mahdollinen pistemäärä, sillä se saavutetaan täsmälleen kahdella oikealla vastauksella.

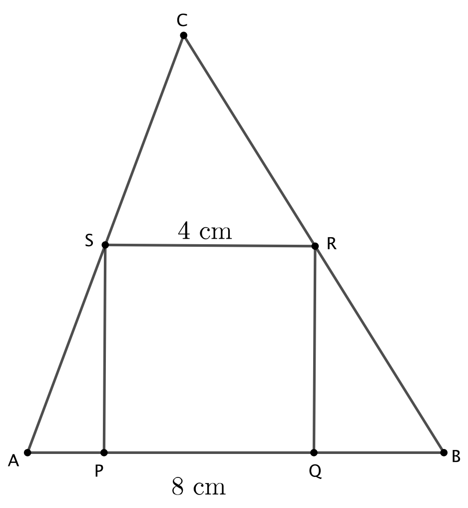
Tarkastellaan vielä yhtälöä $6n - 90 = 116$ eli $6n = 206$. Luku 206 ei ole jaollinen luvulla 3, sillä $2 + 0 + 6 = 8$ eli kolmella jaoton luku. Siispä myöskään kuusi ei jaa lukua 206, eikä n voi näin ollen olla kokonaisluku. Täten 116 ei ole mahdollinen pistemäärä.

3. Neliö $PQRS$ on piirretty teräväkulmaisen kolmion $\triangle ABC$ sisään. Neliön $PQRS$ sivun pituus on 4 cm, kärjet P ja Q ovat sivulla AB, kärki R sivulla BC ja kärki S sivulla AC. Jos sivun AB pituus on 8 cm, niin mikä on kolmion $\triangle ABC$ ala?

Ratkaisu. Vastaus: Kolmion $\triangle ABC$ *pinta-ala on* 32 cm^2.

Tapa 1: Tehtävässä esiintyy yhdensuuntaisia sivuja ja niiden pituuksia. Onkin luonnollista pyrkiä selvittämään pinta-ala etsimällä yhdenmuotoisia kuvioita.

Koska neliön vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset sekä pisteet P ja Q ovat sivulla AB, niin saadaan $SR \parallel AB$. Täten on $\angle BAC = \angle RSC$ ja $\angle CBA = \angle CRS$. Siis kk-yhdenmuotoisuuskriteerin nojalla $\triangle ABC \sim \triangle SRC$.



Tehtävänannon mukaan vastinsivujen suhde on $\frac{SR}{AB} = \frac{4 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{1}{2}$. Tästä seuraa, että kolmion $\triangle SRC$ sivua SR vastaava korkeusjana on puolet kolmion $\triangle ABC$ sivua AB vastaavasta korkeusjanasta. Siispä neliön $PQRS$ korkeus on puolet kolmion $\triangle ABC$ sivua AB vastaavasta korkeusjanasta. Koska neliön $PQRS$ korkeus on 4 cm, niin kolmion $\triangle ABC$ sivua AB vastaava korkeusjana on $2 \cdot 4$ cm $=$ 8 cm. Siis kolmion $\triangle ABC$ pinta-ala on $\frac{8 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2} = 32 \text{ cm}^2$.

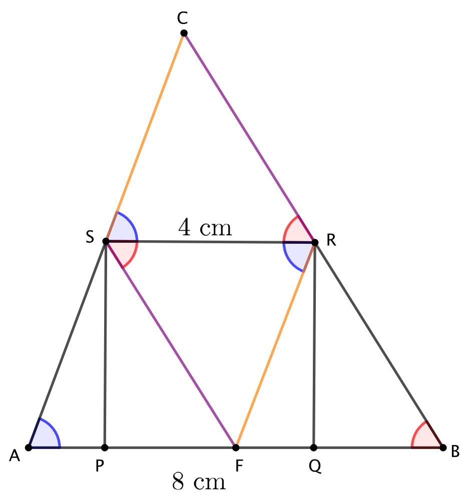
Tapa 2: Ratkaisun ideana on, että jaetaan kuvio sellaisiin osiin, joiden pinta-alat osataan laskea. Merkitään $\angle BAC = \alpha$ ja $\angle CBA = \beta$. Todetaan aluksi, että koska neliön sivut ovat yhdensuuntaiset, niin

$$\angle RSC = \angle BAC = \alpha \quad \text{ja} \quad \angle CRS = \angle CBA = \beta. \tag{1}$$

Olkoon nyt F sivun AB keskipiste. Havaitaan, että $AP = FQ$. Nimittäin on

$$AP = AF - FP = 4 \text{ cm} - FP = PQ - FP = FQ.$$

Nyt siis on $AP = FQ$ ja $PS = QR$. Täten Pythagoraan lauseen nojalla $AS = FR$. Koska lisäksi $AF = 4$ cm $= RS$, niin nelikulmio $AFRS$ on suunnikas. Vastaavasti voidaan todeta, että nelikulmio $FBRS$ on suunnikas.



Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Näin ollen siis suunnikkasta $AFRS$ ja $FBRS$ nähdään kaavan (1) nojalla

$$\angle SRF = \angle FAS = \alpha \quad \text{ja} \quad \angle FSR = \angle RBF = \beta.$$

Näin ollen on

$$\angle FSC = \angle FSR + \angle RSC = \beta + \alpha = \angle CRS + \angle SRF = \angle CRF.$$

Kolmioista $\triangle CSR$ ja $\triangle FRS$ nähdään myös, että

$$\angle SCR = 180^\circ - \alpha - \beta = \angle RFS.$$

Siis myös nelikulmio $CSFR$ on suunnikas, sillä sen vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Suunnikkaassa vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät eli on $CS = FR$ ja $CR = FS$. Näin ollen kolmio $\triangle FRS$ on kolmio $\triangle CSR$ ”käännettynä neliön sisään”. Niiden pinta-alat ovat siis samat.

Nyt on jaettu kuvio sellaisiin osiin, joiden pinta-alat osataan laskea. Nimittäin on

$$\begin{aligned}|\triangle ABC| &= |\triangle AFS| + |\triangle FRS| + |\triangle BRF| + |\triangle CSR| \\ &= |\triangle AFS| + 2|\triangle FRS| + |\triangle BRF|.\end{aligned}$$

Kunkin edellisistä kolmioista kanta on 4 cm ja korkeus 4 cm. Siispä edellinen lauseke on

$$= 4 \cdot \frac{4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} = 32 \text{ cm}^2.$$

4. Ratkaise seuraava yhtälöryhmä reaalilukujen joukossa:

$$\begin{cases} xy = z \\ yz = x \\ zx = y. \end{cases}$$

Ratkaisu. Vastaus: Yhtälöryhmän ratkaisut ovat

$$(x, y, z) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1) \quad \textit{ja} \quad (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Havaitaan ensinnäkin, että mitkä tahansa kaksi muuttujista voidaan vaihtaa keskenään ja silti yhtälöryhmä pysyy samana. Täten siis, kun halutaan tarkastella, mitä tapahtuu, kun jokin luvuista x, y tai z on nolla, niin riittää tarkastella tapausta $x = 0$. Tällöin ensimmäisen yhtälön mukaan on oltava $z = 0$ ja toisen $y = 0$. Tällöin myös keskimmäinen yhtälö toteutuu. Siispä $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ on yksi yhtälöryhmän ratkaisu. Voidaan lisäksi loppuratkaisun ajan olettaa, ettei yksikään luvuista x, y tai z ole nolla.

Koska yhtälöryhmän yhtälöiden vasemmalla puolella esiintyy muuttujien tuloja sekä oikealla puolella kertaalleen muuttujat, niin tulee mieleen kertoa vasemmat ja oikeat puolet keskenään. Näin saadaan $x^2y^2z^2 = xyz$. Koska $xyz \neq 0$, niin sillä voidaan jakaa edellinen yhtälö puolittain, jolloin saadaan $xyz = 1$. Edelleen, koska $xy \neq 0$, niin saadaan $z = \frac{1}{xy}$.

Sijoitetaan $z = \frac{1}{xy}$ alkuperäiseen yhtälöryhmään ja saadaan

$$\begin{cases} xy &= \frac{1}{xy} \\ \frac{1}{x} &= x \\ \frac{1}{y} &= y \end{cases}.$$

Kahdesta viimeisestä yhtälöstä saadaan $x = \pm 1$ ja $y = \pm 1$. Näistä saatavat kaikki neljä kombinaatiota toteuttavat myös ensimmäisen yhtälön. Näin ollen kaavan $z = \frac{1}{xy}$ nojalla tarkasteltavan yhtälöryhmän ratkaisuja saattavat olla myös ratkaisun $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ lisäksi

$$(x, y, z) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1).$$

Sijoittamalla nämä alkuperäiseen yhtälöryhmään nähdään, että nämä kaikki todella toteuttavat sen.

5. Kuinka monta sellaista joukon $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ osajoukkoa on, jotka eivät ole joukon $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ tai joukon $\{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$ osajoukkoja?

Ratkaisu. Vastaus: Kysyttyjen joukkojen lukumäärä on 196.

Tapa 1: Joukolla $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ on 2^8 osajoukkoa, sillä kukin sen kahdeksasta alkiosta voidaan valita joko kuuluvan tai ei kuuluvan osajoukkoon. Joukoilla $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ taas on 2^5 osajoukkoa kummallakin. Toisaalta joukoilla $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ on täsmälleen kaksi yhteistä alkiota; luvut 4 ja 5. Siis niiden yhteisten osajoukkojen on oltava joukon $\{4, 5\}$ osajoukkoja. Näitä on 2^2 kappaletta. Kysytty joukkojen lukumäärä on siis

$$2^8 - 2^5 - 2^5 + 2^2 = 2^2\left(2^6 - 2 \cdot 2^3 + 1\right) = 4 \cdot (64 - 16 + 1) = 4 \cdot 49 = 196.$$

Tapa 2: Ratkaisun pääideana on, että tarkastelu jaetaan tapauksiin osajoukon koon mukaan. Tämä nimittäin selkeyttää niitä tarkasteluja, voiko osajoukko olla myös joukon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tai joukon $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ osajoukko.

Joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ osajoukossa on $0, 1, \ldots, 7$ tai 8 alkiota. Mikään niistä osajoukoista, joissa on kuusi, seitsemän tai kahdeksan alkiota ei ole kummankaan joukoista $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tai $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ osajoukko, sillä edelliset joukot ovat vain viiden alkion joukkoja. Joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kuuden, seitsemän tai kahdeksan alkion osajoukkoja on yhteensä

$$\binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 28 + 8 + 1 = 37,$$

sillä kahdeksasta alkiosta valitaan kuusi, seitsemän tai kahdeksan.

Tarkastellaan nyt, kuinka monta halutunlaista, enintään viiden alkion osajoukkoa joukolla on. Jaetaan tarkastelu tapauksiin osajoukon koon mukaan.

Tarkastellaan ensin viiden alkion osajoukkoja. Näistä kaikki muut paitsi joukot $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ kelpaavat. Yhteensä siis halutunlaisia viiden alkion osajoukkoja on

$$\binom{8}{5} - 2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} - 2 = 56 - 2 = 54.$$

Tutkitaan nyt neljän alkion osajoukkoja. Yhteensä joukolla $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ on $\binom{8}{4}$ neljän alkion osajoukkoa. Joukoilla $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ taas on kummallakin $\binom{5}{4}$ neljän alkion osajoukkoa, jotka luonnollisesti ovat myös joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ osajoukkoja. Näistä mitkään kaksi eivät ole samoja, sillä joukoilla $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ on vain kaksi yhteistä alkiota. Halutunlaisia neljän alkion osajoukkoja on siis

$$\binom{8}{4} - \binom{5}{4} - \binom{5}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} - 5 - 5 = 70 - 10 = 60.$$

Aivan vastaavalla tavalla kuin neljän alkion osajoukkoja tarkastellessa, voidaan todeta, että halutunlaisia kolmen alkion osajoukkoja on

$$\binom{8}{3} - \binom{5}{3} - \binom{5}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} - 2 \cdot 10 = 56 - 20 = 36.$$

Tutkitaan nyt halutunlaisten kahden alkion osajoukkojen lukumäärää. Kaiken kaikkiaan joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kahden alkion osajoukkoja on $\binom{8}{2}$, joukon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\binom{5}{2}$ ja joukon $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ $\binom{5}{2}$. Joukoilla $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ on kaksi yhteistä alkiota, joten niillä on tasan yksi yhteinen kahden alkion osajoukko. Saadaan siis halutunlaisten kahden alkion osajoukkojen lukumääräksi

$$\binom{8}{2} - \binom{5}{2} - \binom{5}{2} + 1 = 28 - 10 - 10 + 1 = 9.$$

Kukin joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ yhden tai nollan alkion osajoukoista koostuu vain yhdestä luvusta $1, 2, \ldots, 8$ tai on tyhjä joukko. Kukin näistä osajoukoista on myös joukon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tai joukon $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ osajoukko. Siispä näistä tapauksista ei saada yhtään lisää halutunlaisia osajoukkoja.

Yhteensä haluttuja osajoukkoja on siis

$$37 + 54 + 60 + 36 + 9 = 196.$$

Tapa 3: Huomataan, että kussakin mahdollisessa osajoukossa on oltava sekä alkio joukosta $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ että joukosta $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Lisäksi mahdollinen joukko ei voi olla joukon $\{4, 5\}$ osajoukko. Koska luvut 4 ja 5 ovat molemmissa joukoissa, niin ne eivät vaikuta tarkasteluun. Ts. jos löydetään jokin mahdollinen joukko, niin lukujen 4 tai 5 lisääminen siihen joukkoon ei muuta tilannetta. Kaikki mahdolliset joukot saadaan siis, kun valitaan vähintäänkin yksi alkio sekä joukosta $\{1, 2, 3\}$ että joukosta $\{6, 7, 8\}$ sekä kerrotaan lopputulos neljällä (lisätään molemmat luvuista $4, 5$, vain toinen tai ei kumpaakaan). (Huomionarvoista on, että joukoissa $\{1, 2, 3\}$ ja $\{6, 7, 8\}$ on yhteensä kuusi alkiota. Näin ollen löydettyyn mahdolliseen joukkoon voidaan aina lisätä nolla, yksi tai kaksi alkiota.)

Sekä joukosta $\{1, 2, 3\}$ että joukosta $\{6, 7, 8\}$ voi valita ainakin yhden alkion $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 3 + 1 = 7$ eri tavalla. Näin ollen kaikkien halutunlaisten osajoukkojen lukumäärä on $4 \cdot 7 \cdot 7 = 196$.

6. Kolmion ABC ulkopuolelle piirretään neliö, jonka sivuista yksi on jana AB. Lisäksi piirretään toinen neliö, jonka sivuista yksi on jana BC. Osoita, että näiden neliöiden keskipisteet ja janan CA keskipiste muodostavat tasasivuisen suorakulmaisen kolmion.

Ratkaisu. Olkoon piste P tehtävän neliöiden ympäripiirrettyjen ympyröiden leikkauspiste ($\neq B$). Kun kehäkulma on puolet keskuskulmasta $\angle APB = 135°$ ja $\angle BPC = 135°$. Siksi $\angle CPA = 90°$ eli piste P on sellaisen ympyrän kehällä, jonka halkaisija on CA.

Merkitään neliöiden keskipisteitä O_1 ja O_2 ja sivun CA keskipistettä M. Merkitään janojen AP ja O_1M leikkauspistettä X, janojen PB ja O_1O_2 leikkauspistettä Y ja janojen O_2M ja PC leikkauspistettä Z.

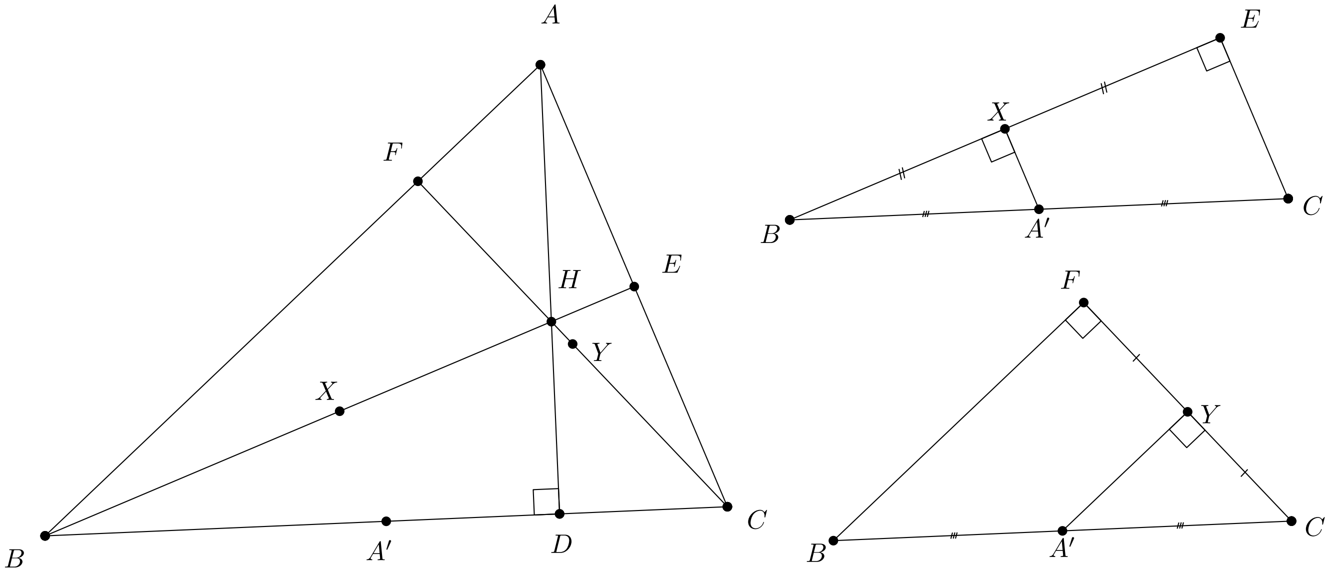
Koska toisiaan leikkaavien ympyröiden keskipisteiden välinen jana on ympyröiden yhteisen jänteen keskinormaali tiedetään että $AP \perp O_1M$, $BP \perp O_1O_2$ ja $CP \perp O_2M$.

Nelikulmion kulmien astelukujen summa on $360°$ eli kun nelikulmioissa O_1YPX, O_2ZPY ja $MXPZ$ tiedetään kolme kulmaa, voidaan neljäs laskea.

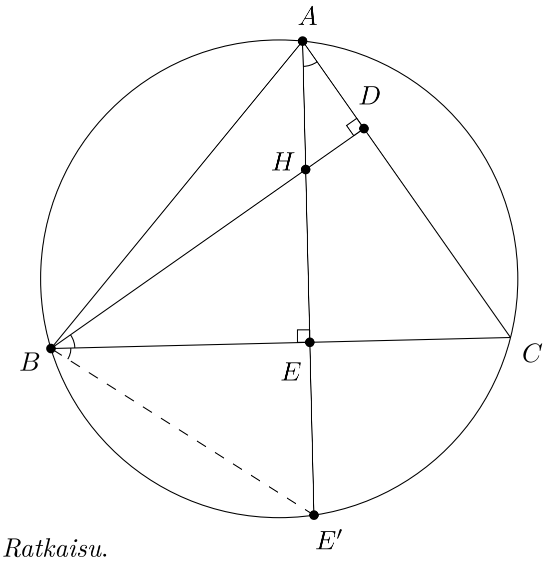
Nyt $\measuredangle O_2MO_1 = \measuredangle XMZ = 360° - 90° - 90° - 90° = 90°$ ja $\measuredangle O_2O_1M = \measuredangle YO_1X = 360° - 135° - 90° - 90° = 45°$. Tämä on yhtäpitävä tehtävän väitteen kanssa.

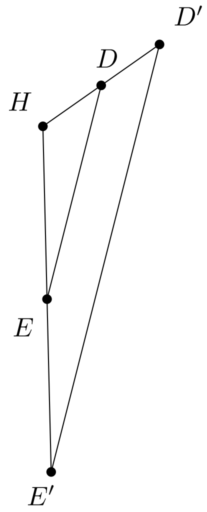
7. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

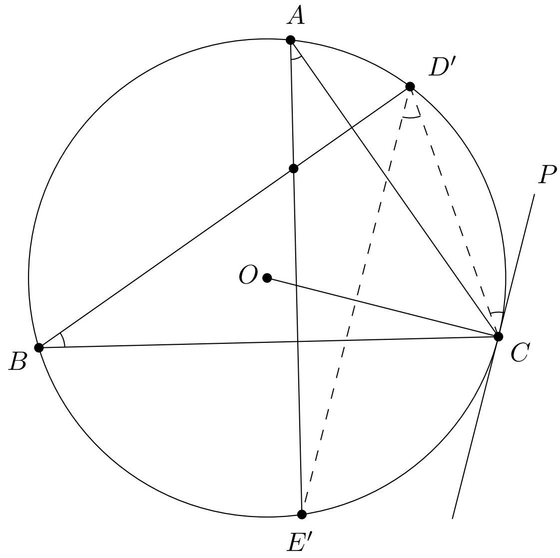
Ratkaisu. Kolmion $A'DH$ ympäripiirretyn ympyrän halkasija on jana $A'H$. Merkitään kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapistettä E ja kärjestä C lähtevän korkeusjanan kantapistettä F. Koska jana XA' on janan EC kuva homotetiakuvauksessa $B\left(\frac{1}{2}\right)$, kulma EXA' on suora. Siksi myös piste X on ympyrällä, jonka halkaisija on $A'H$. Samoin, kun jana YA' on janan FB kuva homotetiakuvauksessa $C\left(\frac{1}{2}\right)$, kulma $A'YF$ on suora. (Jos perustelu homotetiakuvauksen avulla tuntuu vaikealta, voit myös ajatella, että isompi ja pienempi kolmio ovat yhdenmuotoiset ja isompi on kaksi kertaa pienemmän kokoinen.) Siksi myös piste Y on ympyrällä, jonka halkaisija on $A'H$.



8. Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste ja piste E kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapiste. Olkoon kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O. Osoita, että $OC \perp DE$.







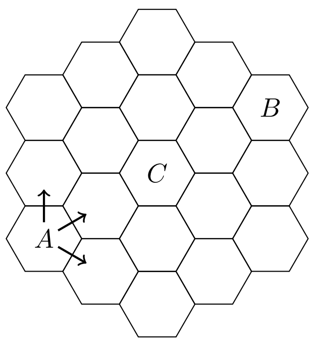
Ratkaisu.
Jatketaan korkeusjanoja AD ja BE niin, että ne leikkaavat kolmion ympäripiirretyn ympyrän kehän pisteissä D' ja E'. Osoitetaan ensin aputulos $HE = EE'$. Kahden yhtäsuuren vastinkulman perusteella (ristikulmat $\measuredangle DHA = \measuredangle BHE$ ja $\measuredangle ADH = \measuredangle HEB = 90°$) kolmiot HDA ja HEB ovat yhdenmuotoisia. (Katso vasemmanpuoleista kuvaa.) Siksi myös $\measuredangle HAD = \measuredangle EBH$. Toisaalta kaarta $E'C$ vastaavina kulmina $\measuredangle E'AC = \measuredangle E'BC$. Nyt kolmiot BEH ja BEE' ovat yhtenevät. (Perustelu ksk: niillä on kaksi yhteistä vastinkulmaa ja yksi yhteinen vastinsivu.) Siksi $HE = EE'$.

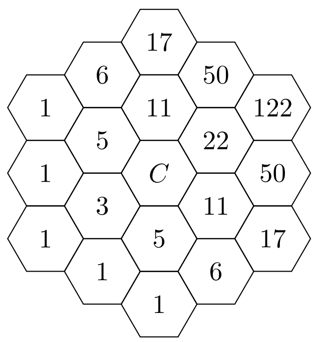
Vastaavan päättelyn perusteella $HD = DD'$. Pisteen H keskisen homotetian perusteella $DE \parallel D'E'$. (Katso keskimmäistä kuvaa.)

Säde OC on kohtisuorassa ympyrän kehän pisteen C kautta kulkevaa tangenttia CP vastaan. Tangentin kehäkulmalauseen perusteella kaarta CD' vastaavina kehäkulmina $\measuredangle PCD' = \measuredangle CBD'$. Edellisen kohdan mukaan $\measuredangle CBD' = \measuredangle E'AC$. Kaarta $E'C$ vastaavina kehäkulmina $\measuredangle E'AC = \measuredangle CD'E'$. Siksi $D'E' \parallel CP$.

Nyt $OC \perp CP \parallel D'E' \parallel DE$.

9. Oheisessa kuusikulmioruudukossa on kuljettava ruudusta A ruutuun B kulkematta ruudun C kautta. Ainoastaan nuolten suuntiin saa kulkea, yksi ruutu kerrallaan. Montako mahdollista kulkureittiä on?





Ratkaisu. Kirjoitetaan ruutuun A ensin luku 1. Sitten toistetaan seuraavaa: valitaan ruutu, jonka kaikissa tulosuunnissa oleviin naapureihin on kirjoitettu luku, ja kirjoitetaan tähän ruutuun näiden lukujen summa. Näin saadaan ruudukko täytettyä luvuilla, jotka kertovat kuinka monella tavalla kuhunkin ruutuun voidaan kulkea. Ruudusta B voidaan lukea lopputulos: 122.

Vaativampia tehtäviä

10. Kahden avaruudessa sijaitsevan ympyrän sanotaan sivuavan toisiaan, jos niillä on yhteinen piste ja tämän pisteen kautta kulkeva yhteinen tangentti. Avaruudessa on kolme ympyrää, jotka sivuavat pareittain toisiaan kolmessa eri pisteessä. Todista, että ympyrät ovat joko samassa tasossa tai saman pallon pinnalla.

Ratkaisu. Kutsutaan ympyrän *akseliksi* suoraa, joka kulkee sen keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa ympyrän tasoa vastaan. Huomaa, että akselin jokainen piste on samalla etäisyydellä ympyrän kaikista pisteistä.

Tarkastellaan kahta toisiaan sivuavaa ympyrää. Niiden akselit sijaitsevat tasossa, joka on kohtisuorassa yhteistä tangenttia vastaan ja kulkee sivuamispisteen kautta. Siten akselit ovat joko yhdensuuntaiset tai leikkaavat toisensa. Jos akselit ovat yhdensuuntaiset, ympyrät sijaitsevat samassa tasossa. Jos niillä on leikkauspiste, se on vakioetäisyydellä kummankin ympyrän kaikista pisteistä, koska ympyröidellä on yhteinen piste.

Tarkastellaan nyt kolmea pareittain toisiaan sivuavaa ympyrää. Jos ensimmäiset kaksi ovat keskenään samassa tasossa ja jälkimmäiset kaksi keskenään samassa tasossa, kaikki ympyrät ovat samassa tasossa. Jos ensimmäiset kaksi ovat pallon S pinnalla ja jälkimmäiset kaksi tasossa tai eri pallon pinnalla, tämä taso tai pallo leikkaa palloa S täsmälleen keskimmäisen ympyrän pisteissä. Siten ensimmäisen ja kolmannen ympyrän sivuamispiste on toisella ympyrällä. Koska toisella ympyrällä on tasan yksi yhteinen piste sekä ensimmäisen että kolmannen ympyrän kanssa, kaikki ympyrät sivuavat toisiaan samassa pisteessä, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että ympyrät sivuavat toisiaan eri pisteissä.

11. Olkoon P epävakio kokonaislukukertoiminen polynomi. Osoita, että on olemassa sellainen kokonaisluku n, että luvulla $P(n)$ on vähintään 2020 eri alkutekijää.

Ratkaisu. Todistetaan ensiksi seuraava väite: on olemassa äärettömän monta alkulukua p niin, että yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod p$ on ratkaisu. (Tätä tulosta kutsutaan Schurin lauseeksi.)

Schurin lauseen idea on matkia Eukleideen todistusta[1] alkulukujen äärettömyydelle. Alkulukujen tapaus vastaakin tapausta $P(x) = x$. Yleinen tapaus vaatii hieman enemmän teknisten yksityiskohtien miettimistä, mutta todistuksen pohjimmainen idea on sama. (Alla esitetty todistus ei myöskään ole ainoa tapa todistaa väitettä.)[2]

Selvästi Schurin lause pätee, jos $P(0) = 0$, joten alla oletetaan, että $P(0) \neq 0$.

Tehdään vastaoletus, jolloin vain äärellisen moni eri alkuluku jakaa minkään luvuista $P(1), P(2), \ldots$. Olkoot nämä alkuluvut $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Olkoon a_i sellainen kokonaisluku, että $p_i^{a_i}$ ei jaa lukua $P(0)$. Määritellään

$$b_m = m \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$$

kaikilla $m > 0$. Koska $p_i^{a_i} \mid b_m$, pätee $P(b_m) \equiv P(0) \not\equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ kaikilla i. Tämä rajoittaa luvun $P(b_m)$ itseisarvoa: luvun $P(b_m)$ alkutekijät ovat joitain luvuista $p_1, \ldots, p_n$, ja niiden eksponentit ovat alle $a_1, \ldots, a_n$, joten

$$|P(b_m)| < p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}.$$

Toisaalta, kun lukua m kasvatetaan, niin luvut b_m lähestyvät ääretöntä ja myös $|P(b_m)|$ lähestyy ääretöntä (koska P on epävakio). Tämä on ristiriita.

Väite seuraa Schurin lauseesta seuraavasti. Olkoot $p_1, p_2, \ldots, p_{2020}$ jotkin eri alkuluvut, joilla yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p_i}$ on ratkaisu. Olkoon x_i jokin yhtälön $P(x) \equiv 0 \pmod{p_i}$ ratkaisu. Kiinalaisen jäännöslauseen nojalla on olemassa sellainen x, jolla $x \equiv x_i \pmod{p_i}$ kaikilla i, ja tällä x pätee $P(x) \equiv P(x_i) \equiv 0 \pmod{p_i}$ kaikilla i. Täten tämä x kelpaa tehtävänannon mukaiseksi kokonaisluvuksi.

[1] Oletetaan, että alkulukuja on vain äärellisen monta. Kerrotaan ne keskenään ja lisätään tulokseen yksi. Tämä uusi luku ei voi olla jaollinen millään alkuluvulla, mutta jokaisella ykköstä suuremmalla luvulla on vähintään yksi alkutekijä – ristiriita. Siis alkulukuja on äärettömän monta.

[2] Toinen tapa on tehdä vastaoletus: näitä alkulukuja on vain äärellisen monta, sanotaan n kappaletta. Tutkitaan niiden kokonaislukujen määrää, jotka ovat enintään x ja joilla on enintään n alkutekijää. Tämän määrän voi osoittaa kasvavan paljon hitaammin kuin niiden lukujen määrän, jotka ovat muotoa $P(k)$, missä $1 \leq P(k) \leq x$. Tästä seuraa ristiriita.

Kommentti: Schurin lause on hyvin uskottava tulos, ja se onkin hyvä tietää. Tehtävän loppuosa on varsin rutiininomainen: lukuteoriassa voi monesti yhdistää yksittäisten alkulukujen muodostamia ehtoja. (Tätä aihetta on käsitelty esimerkiksi OOOO-kirjassa.) Kiinalainen jäännöslause on perusväline tämän toteuttamiseen.

12. Määritä kaikki kokonaisluvut m, joilla kongruenssiyhtälöllä $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ on ratkaisu.

Ratkaisu. Vastaus: yhtälöllä $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ on ratkaisu jos ja vain jos m ei ole jaollinen neljällä ja luvulla m ei ole alkutekijöitä muotoa $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Todistus: Ensinnäkin huomataan, että yhtälöllä $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ on ratkaisu jos ja vain jos yhtälöllä $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^k}$ on ratkaisu kaikilla alkuluvun potensseilla p^k, jotka jakavat luvun m. Väite pätee oikeastaan millä tahansa kokonaislukukertoimisella polynomilla P polynomin $x^2 + 1$ paikalla. Tämä on (vrt. edellisen ratkaisun viimeistely) seuraus kiinalaisesta jäännöslauseesta: Olkoon $m = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$. Oletetaan, että yhtälöillä $P(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{k_i}}$ on ratkaisut $x_1, \ldots, x_n$. Kiinalaisen jäännöslauseen nojalla on olemassa sellainen x, jolla $x \equiv x_i \pmod{p_i^{k_i}}$ kaikilla i, ja tällä x pätee $P(x) \equiv P(x_i) \equiv 0 \pmod{p_i^{k_i}}$ kaikilla i, joten $P(x) \equiv 0 \pmod{m}$.

Tutkimme siis ongelmaa enää vain alkuluvun potensseilla. Tunnetusti yhtälöllä $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ on ratkaisu luvun p ollessa alkuluku jos ja vain jos $p = 2$ tai $p \equiv 1 \pmod{4}$.[3] Selvästi yhtälöllä $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ ei ole ratkaisuja.

Enää tulee todistaa, että yhtälöllä $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^k}$ on olemassa ratkaisu, kun $k \geq 1$ ja $p \equiv 1 \pmod{4}$ on alkuluku. Todistuksen ideana on "korottaa" ratkaisuja: ratkaisusta arvolla $k = e$ saadaan ratkaisu arvolle $k = e + 1$. Todistusta ei kirjoiteta yksityiskohtaisesti tähän näkyviin, koska se löytyy OOOO-kirjasta. (Katso lukuteorian lisätehtävien toinen tehtävä.)

13. Olkoon P epävakio kokonaislukukertoiminen polynomi. Osoita, että on olemassa kokonaisluku k ja ääretön kokonaislukujen jono $a_1, a_2, \ldots$, joilla $P(a_i) \neq 0$ kaikilla i ja

$$\mathrm{syt}(P(a_i), P(a_j)) \leq k$$

kaikilla $i \neq j$.

Ratkaisu. Ideana on, että valittuamme luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ voimme valita luvun a_{n+1} niin, että sytit pysyvät pienenä. Toistamalla tätä saadaan haluttu jono. Idean voi toteuttaa esimerkiksi seuraavasti.

Jos $P(0) = 0$, voimme tutkia polynomia $Q(x) = P(x + c)$ polynomin P sijasta, missä c on mielivaltaisen suuri vakio, koska tämä vain vastaa lukujonon a_i siirtämistä. Nyt $Q(0) = P(c) \neq 0$ kun c on riittävän suuri.

Oletetaan siis $P(0) \neq 0$. Osoitetaan, että voimme valita tehtävään $k = |P(0)|$. Oletetaan, että olemme jo valinneet luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ niin, että

$$\mathrm{syt}(P(a_i), P(a_j)) \leq |P(0)|$$

kaikilla $1 \leq i, j \leq n$, joilla $i \neq j$. Valitaan

$$a_{n+1} = P(a_1)P(a_2) \cdots P(a_n).$$

Nyt

$$P(a_{n+1}) \equiv P(0) \pmod{P(a_i)}$$

kaikilla $1 \leq i \leq n$. Tästä seuraa $\mathrm{syt}(P(a_i), P(a_{n+1}) \leq |P(0)|$, ja olemme valmiit.

Kommentti: Ratkaisun voi motivoida tutkimalla ensiksi tapausta $P(x) = x^2 + 1$. Ei ole kovin vaikeaa nähdä, että ottamalla sopiva edellisten arvojen $P(a_i)$ tulo luvuksi a_{n+1} sytit saadaan pidettyä pienenä, päteehän $\mathrm{syt}(n, (mn)^2 + 1) = 1$, kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Ratkaisun yleistäminen mille tahansa polynomille ei ole tästä enää kovin vaikeaa.

---

[3] Eräs todistus etenee seuraavasti: Olkoon g primitiivijuuri modulo p. Jos $p \equiv 1 \pmod{4}$, niin $x = g^{\frac{p-1}{4}}$ on ratkaisu: Pätee $x^4 = g^{p-1} = 1$, joten $x^4 \equiv 1 \pmod{p}$. Siis $(x^2 - 1)(x^2 + 1) \equiv 0 \pmod{p}$. Ei päde $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, koska $x^2 \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ ja g on primitiivijuuri. Tapauksen $p \equiv 3 \pmod{4}$ voi hoitaa vastaavasti vastaoletuksella olettaen, että $(g^k)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

14. Olkoon P epävakio kokonaislukukertoiminen polynomi. Alkulukua p sanotaan *hyväksi*, jos kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k pätee seuraava väite: yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ on yhtä monta (keskenään epäkongruenttia) ratkaisua kuin yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$. Todista, että seuraavista ehdoista pätee täsmälleen yksi.

1. P on jaollinen jonkin epävakion polynomin neliöllä.
2. Kaikki paitsi äärellisen moni alkuluku p on hyvä.

Ratkaisu. Tehtävä on valittu demonstroimaan kokonaislukukertoimisiin polynomeihin liittyvää neljää perustulosta: Bezout'n lemma, Gaussin lemma, Henselin lemma ja Schurin lause. Näitä aiheita käsitellään OOOO-kirjan päivitetyssä versiossa, mutta tässä on tiivistelmä tuloksista:

- Bezout'n lemma (polynomeille) sanoo, että mikäli A ja B ovat yhteistekijättömiä[4] kokonaislukuekertoimisia polynomeja, niin on olemassa kokonaislukukertoimiset polynomit X ja Y, joilla $A(x)X(x) + B(x)Y(x)$ on nollasta eroava vakiopolynomi N. Tämän seurauksena saadaan seuraava tulos: on olemassa vain äärellisen monta alkulukua p, joilla on olemassa kokonaisluku x, jolla $p \mid A(x)$ ja $p \mid B(x)$ (koska tällöin $p \mid A(x)X(x) + B(x)Y(x) = N$). Siis yhteistekijättömät polynomit eivät tässä mielessä kommunikoi keskenään.
- Gaussin lemma sanoo, että mikäli kokonaislukukertoimisen polynomin voi esittää kahden epävakion rationaalikertoimisen polynomin tulona, niin sen voi esittää kahden epävakion kokonaislukukertoimisen polynomin tulona. Täten jaettaessa polynomeja tekijöihin tekijät voidaan valita kokonaislukukertoimisiksi.
- Henselin lemma sanoo, että mikäli $P(a) \equiv 0 \pmod{p}$ ja $P'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$ (missä a on mielivaltainen kokonaisluku, p alkuluku ja P' on kokonaislukukertoimisen polynomin P derivaatta), niin yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ on täsmälleen yksi ratkaisu x, jolla $x \equiv a \pmod{p}$, kaikilla $k \geq 1$. (Tulosta kannattaa ajatella niin, että yhtälön $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ratkaisusta $x = a$ ”nostetaan” ratkaisu yhtälölle $P(x) \equiv 0 \pmod{p^2}$, ja että tämän voi tehdä vain yhdellä tavalla.)
- Schurin lause sanoo, että yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ on ratkaisu äärettömän monella alkuluvulla p, kun P on epävakio polynomi.

Sitten itse ratkaisuun.

Tutkitaan ensiksi sellaisia polynomeja P, jotka ovat jaottomia (eli joita ei voi esittää kahden epävakion rationaalilukukertoimisen polynomin tulona). Nyt jos $P(a) \equiv 0 \pmod{p}$ ja $P'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$, Henselin lemma kertoo, että yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ on täsmälleen yksi sellainen ratkaisu x, jolla $x \equiv a \pmod{p}$. Täten p on hyvä, kunhan ehdot $P(a) \equiv 0 \pmod{p}$ ja $P'(a) \equiv 0 \pmod{p}$ eivät toteudu samanaikaisesti. Mutta Bezout'n lemman (polynomiversion) nojalla on olemassa kokonaislukukertoimiset polynomit X ja Y, joilla

$$P(x)X(x) + P'(x)Y(x) = N,$$

missä $N \neq 0$ on kokonaisluku. Tästä seuraa, että mikä tahansa alkuluku p, jolla $p \nmid N$, on hyvä, koska muutoin $p \mid P(a), P'(a)$ ja täten $p \mid P(a)X(a) + P'(a)Y(a) = N$ vastoin oletusta.

Todistetaan sitten, että väite pätee myös, jos P jakautuu polynomien tuloksi. Ideana on muodostaa ”alkutekijähajotelma” polynomille P. Kirjoitetaan

$$P(x) = Q_1(x)Q_2(x)\cdots Q_k(x),$$

missä Q_i ovat jaottomia polynomeja. Haluamme yhdistää ”samat alkuluvut”: nykyinen esitys olisi kuin luvun 72 esittäisi alkulukujen tulona muodossa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, mutta haluamme esittää sen mieluummin muodossa $2^3 \cdot 3^2$.

Oletetaan siis, että on olemassa jotkin i ja j $(i \neq j)$, joilla polynomit Q_i ja Q_j eivät ole yhteistekijättömiä. Oletetaan vaikka $i = 1$ ja $j = 2$. Koska Q_1 ja Q_2 ovat jaottomia, tarkoittaa tämä, että

[4] Eli ei ole olemassa epävakiota polynomia C, joka jakaa molemmat polynomeista A ja B.

$Q_1(x) = r \cdot Q_2(x)$ jollain rationaaliluvulla r.[5] Voidaan siis kirjoittaa $a \cdot Q_1(x) = b \cdot Q_2(x)$ joillain kokonaisluvuilla a ja b. Nyt pätee

$$aP(x) = bQ_1(x)^2 Q_3(x) Q_4(x) \cdots Q_k(x).$$

Voimme vastaavasti yhdistellä muita pareja. Lopulta päädymme tilanteeseen

$$c_1 P(x) = c_2 R_1(x)^{e_1} R_2(x)^{e_2} \cdots R_m(x)^{e_m},$$

missä R_i ovat jaottomia kokonaislukukertoimisia polynomeja, jotka ovat keskenään yhteistekijättömiä, ja c_1 ja c_2 ovat nollasta eroavia kokonaislukuja. Olemme siis saaneet muodostettua alkutekijähajotelman polynomille P.

Tutkitaan nyt yhtälöä

$$P(x) \equiv 0 \pmod{p^k}.$$

Olkoon p niin iso, ettei se jaa kokonaislukuja c_1 ja c_2. Valitaan p lisäksi niin isoksi, ettei ole olemassa indeksejä $i \neq j$ ja kokonaislukua n niin, että $p \mid R_i(n), R_j(n)$. Tämä on mahdollista Bezout'n lemman nojalla. Vielä viimeinen ehto: p valitaan niin suureksi, että se on hyvä jokaiselle polynomille R_i.

Nyt $P(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ tarkoittaa,[6] että

$$R_1(x)^{e_1} R_2(x)^{e_2} \cdots R_k(x)^{e_k} \equiv 0 \pmod{p^k}.$$

Luvun p valinnan nojalla nyt pätee $R_i(x)^{e_i} \equiv 0 \pmod{p^k}$ jollain i. Jos $e_i = 1$, niin tällä yhtälöllä on luvun p hyvyyden (polynomin R_i suhteen) vuoksi yhtä monta ratkaisua kuin yhtälöllä $R_i(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Tästä seuraa, että mikäli $e_i = 1$ kaikilla i, niin kaikki paitsi äärellisen moni alkuluku on hyvä polynomin P suhteen. Tällöin P ei myöskään ole jaollinen minkään epävakion polynomin neliöllä.

Jos taas $e_i > 1$ jollain i, niin Schurin lauseen nojalla on olemassa äärettömän monta p niin, että yhtälöllä $R_i(x) \equiv 0 \pmod{p}$ on ratkaisu. Tällöin yhtälöllä $R_i(x)^{e_i} \equiv 0 \pmod{p^2}$ on vähintään p erisuurta ratkaisua. Koska yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ on (Lagrangen lauseen nojalla) enintään $\deg(P)$ ratkaisua,[7] ei p voi olla hyvä, jos $p > \deg(P)$ ja yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p^2}$ on vähintään p ratkaisua.

Väite seuraa tästä.

Kommentti: Ratkaisu koostui kolmesta osasta. Ensiksi osoitettiin väite jaottomille P. Tämän jälkeen rakennettiin yleiselle P "alkutekijähajotelma". Lopuksi alkutekijähajotelmaa käytettiin ongelman redusoimiseksi jaottomien polynomien tapaukseen.

Kolmannessa osassa on oleellista, että eri alkutekijät ovat toisistaan riippumattomia. Tässä ratkaisussa tällä tarkoitetaan, että $p \nmid \mathrm{syt}(R_i(x), R_j(x))$ kaikilla kokonaisluvuilla x, kun p on riittävän suuri alkuluku. Tämä seuraa Bezout'n lemmasta.

Aiemmissa tehtävissä käsiteltiin yhtälöiden $P(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ ratkaisujen yhdistämistä, kun alkuluvun potenssit p^k vaihtelevat. Nyt käsittelemme "duaaliongelmaa": yhtälön $R_1(x)R_2(x) \cdots R_m(x) \pmod{p^k}$ ratkaisujen pitäisi olla rakentua yksittäisten yhtälöiden $R_i(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ ratkaisuista.

Menetelmä on ideana hyvin yksinkertainen, vaikkakin tekniset yksityiskohdat eivät ole helppoja. Kun yksityiskohdat on kerran miettinyt läpi, saa argumentin kuitenkin palautettua helposti mieleen.

Lisäksi menetelmän opettelun on vaivan arvoinen. Tutkitaan seuraavaa ongelmaa:[8] "P on kokonaislukukertoiminen polynomi, jolla $P(n)$ on kokonaisluvun neliö kaikilla kokonaisluvuilla n. Osoita, että P on jonkin polynomin neliö, eli $P(x) = Q(x)^2$ jollain polynomilla Q." Tulos vaikuttaa ilmeiseltä, mutta tehtävään on hyvin monenlaisia lähestymistapoja, jotka eivät oikein toimi. Ratkaisu tippuu kuitenkin noudattamalla yllä esitetyn ratkaisun menetelmää: jaottomille P väite seuraa Henselin lemmasta,[9] ja tutkimalla alkutekijähajotelmaa saadaan helposti, että jokaisen polynomin P alkutekijän eksponentin tulee olla parillinen.

---

[5] Oletuksen nojalla on olemassa polynomi D, joka jakaa polynomit Q_1 ja Q_2. Koska Q_1 on jaoton, on tämä mahdollista vain, jos $D = Q_1 r_1$ jollain rationaaliluvulla r_1. Vastaavasti Q_2:lle.

[6] Tämä implikaatio toimii tietysti myös toiseen suuntaan, mikä on oleellista ratkaisujen laskemisen kannalta.

[7] Olettaen, että p ei jaa jokaista polynomin P kertoimista. Tämä kuitenkin tapahtuu vain äärellisen monella p.

[8] Tämä ongelma löytyy OOOO-kirjan uudesta versiosta.

[9] Oletetaan, että $P(n) \equiv 0 \pmod{p}$. Oletuksen nojalla nyt $P(n) \equiv 0 \pmod{p^2}$. Tästä seuraa, että yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p^2}$ on p kertaa enemmän ratkaisuja kuin yhtälöllä $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Tämä on ristiriidassa tehtävän tuloksen kanssa, kun P on jaoton polynomi (ja tämän tapauksen todistus perustuu Henselin lemmaan).

Kokonaislukukertoimiset polynomit eivät siis eroa paljoakaan kokonaisluvuista. Syy tähän on yksinkertainen: Lukuteoria perustuu paljolti Bezout'n lemmaan ja siitä saatavaan aritmetiikan peruslauseeseen. Nämä tulokset toimivat miltei samalla tavalla kokonaisluvuilla ja polynomeilla. Tästä seuraa, että myös monet muut tulokset yleistyvät. Esimerkiksi kiinalainen jäännöslause toimii myös polynomeilla: jos $M_1, M_2, \ldots, M_m$ ovat yhteistekijättömiä polynomeja ja $R_1, R_2, \ldots, R_m$ ovat mielivaltaisia polynomeja, niin on olemassa sellainen polynomi X, jolla $M_i|X - R_i$.

15. $2n$ joukkuetta osallistui turnajaisiin, joissa kesti $2n - 1$ päivää. Jokainen kahden joukkueen pari pelasi keskenään täsmälleen kerran, ja joka päivä pelattiin täsmälleen n peliä. Tasapelejä ei ollut, vaan jokainen peli päättyi jommankumman joukkueen voittoon. Todista, että voidaan valita kullekin päivälle yksi sinä päivänä pelin voittanut joukkue niin, että mitään joukkuetta ei valita kahdesti.

16. Tasossa on viisi ympyrää, joista kullakin neljällä on yhteinen piste. Todista, että kaikilla viidellä ympyrällä on yhteinen piste.

17. Todista, että kuperassa n-kulmiossa ei voida valita enempää kuin n sivua ja lävistäjää siten, että kaikilla valittujen janojen pareilla on yhteinen piste.