

Epäyhtälöverryttely

Seuraavassa tarkoituksena on hieman pohjustaa viikonlopun epäyhtälöohjelmaa.

Alakerta

Tutustu monisteesta

<http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/vaderlind.pdf>

siihen, mitä sanovat

- aritmeettis-geometrinen epäyhtälö (sivu 2), ja
- suuruusjärjestysepäyhtälö (sivut 5–6)

ja pohdi sitten seuraavia ongelmia:

1. Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2, \quad a + 4b \geq 4\sqrt{ab}, \quad \text{ja} \quad (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4.$$

2. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a, \quad a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab,$$

ja

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Yläkerta

Tutustu monisteesta

<http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/vaderlind.pdf>

siihen, mitä sanovat

- potenssikeskiarvojen epäyhtälö (sivut 13–14), ja
- Schurin epäyhtälö (sivut 14–15),

ja pohdi sitten seuraavia ongelmia:

1. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2 \geq 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3).$$

2. Kun x on reaaliluku, määrittelemme $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$. Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$\cosh^n((n+1)x) \geq \cosh^{n+1}(nx).$$