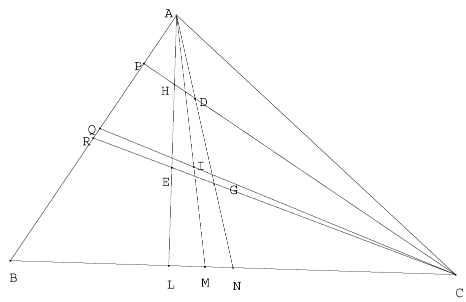
IMO-tason geometrisia epäyhtälöitä

Tähän kokoelmaan on poimittu muutamia Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävänvalinnan loppusuoralle, ns. lyhyelle listalle päässeitä tehtäviä, joita ei kuitenkaan ole itse kilpailussa käytetty. Tehtävien yhteinen piirre on se, että todistettavana on jokin epäyhtälö. Esitetyt ratkaisut perustuvat pääosin matematiikkaolympialasten tuomariston käytössä olleeseen aineistoon. Olisi yleensä hyvä, jos tie ratkaisun keksimiseen olisi osoitettavissa. Muutamat näistä tehtävistä – tai ratkaisuista – eivät tätä kriteeriä täytä. Ehkäpä siksikin ne ovat jääneet valitsematta olympialaisten lopulliseen tehtäväsarjaan.

Ellei erikseen muuta sanota, kolmion ABC sivut ovat $BC = a$, $CA = b$ ja $AB = c$ sekä kulmat $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$.

* * *

1. (Ehdokas 1990) Kolmion ABC kaikki sivut ovat eripituiset. Kolmion painopiste on G, sisään piirretyn ympyrän keskipiste I ja ortokeskus H. Osoita, että $\angle GIH > 90°$.



Ratkaisu. Oletetaan, että ABC on teräväkulmainen ja $a > b > c$. Olkoot L, M ja N korkeusjanan, kulmanpuolittajan ja keskijanan kantapisteet sivulla BC ja olkoot P, Q ja R vastaavat pisteet sivulla AC. Koska $a > c$ ja $b > c$, pisteet ovat järjestyksessä B, F, M, N, C ja A, P, Q, R, B. Leikatkoot AL ja CR pisteessä E ja AN ja CP pisteessä D. Mutta tästä seuraa, että I on nelikulmion $EGDH$ sisällä. Suorakulmaiset kolmiot APD ja CLE osoittavat, että kulmat HDG ja HEG ovat tylppiä. Siis nelikulmio $EGDH$ on sellaisen ympyrän sisällä, jonka halkaisija on HG. Mutta koska I on tämän ympyrän sisällä, on $\angle GIH$ myös tylppä. – Jos ABC on tylppäkulmainen ja $a > b > c$, niin I on edelleen kolmiossa AEG; koska nyt A on janalla EH, kolmio AEG sisältyy kolmioon HEG. Kulma HEG on tylppä (koska CLE on suorakulmainen kolmio. Kolmio HEG sisältyy HG-halkaisijaiseen ympyrään, ja loppupäätelmä on sama kuin edellä.

2. (Ehdokas 1993) Kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde on $R = 1$. Olkoon r kolmion sisään piirretyn ympyrän säde ja olkoon p kolmion ABC ortokolmion $A'B'C'$ sisään piirretyn ympyrän säde. Osoita, että

$$p \leq 1 - \frac{1}{3}(1 + r)^2.$$

Ratkaisu. Trigonometriaa. Osoitetaan ensin, että jokaisessa kolmiossa on

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}.$$

Todellakin: kosinilauseen perusteella

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{1}{2abc}(ab^2+ac^2-a^3+bc^2+a^2b-b^3+a^2c+b^2c-c^3)$$

ja koska kolmion alalle T pätee

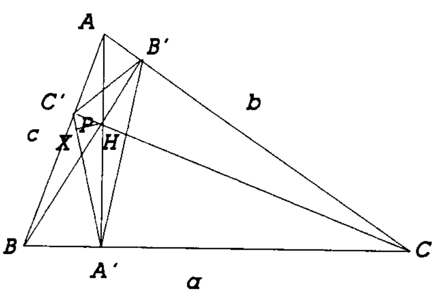
$$T=rs=\frac{abc}{4R}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

niin

$$1+\frac{r}{R}=1+\frac{4T^2}{sabc}=\frac{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$
$$=\frac{2abc+(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc}=\frac{2abc+(-(a+b)^2+c^2)(a+b-c)}{2abc}$$
$$=\frac{a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+bc^2-a^3-b^3-c^3}{2abc}.$$

Palautetaan mieliin ortokolmion perusominaisuus: kolmion korkeusjanat ovat ortokolmion kulmien puolittajia. Olkoon H kolmion ABC ortokeskus eli korkeusjanojen leikkauspiste. Koska kulmat $AB'B$ ja $AC'C$ ovat suoria, B' ja C' ovat AH-halkaisijaisen ympyrän pisteitä. Siis $\angle B'C'H=\angle B'AH$. Vastaavasti pisteet A', H, C' ja B ovat ympyrällä, joten $\angle HC'A'=\angle HBA'$. Mutta $\angle HAB'=90^\circ-\gamma=\angle HBA'$. Siis H on kulman $\angle B'C'A'$ puolittajalla.

Osoitetaan sitten, että $p=2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Olkoon X H:n kohtisuora projektio suoralle $A'C'$. Siis $p=HX$. Nyt $HA'=c\cos\beta\tan(90^\circ-\gamma)=c\cos\beta\cot\gamma$ ja koska $\angle C'A'H=\angle HA'B'=\angle HCB'=90^\circ-\alpha$, niin $p=HA'\sin(90^\circ-\alpha)=c\cos\beta\cot\gamma\cos\alpha=\dfrac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.



Osoitetaan sitten, että $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Todellakin:

$$2-2\cos^2\alpha-2\cos^2\beta-2\cos^2\gamma=-1-\cos(2\alpha)-\cos(2\beta)-\cos(2\gamma)$$
$$=\cos(180^\circ)+\cos(180^\circ-2\alpha)+\cos(180^\circ-2\beta)+\cos(180^\circ-2\gamma)$$
$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$=2\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)+2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla on

$$\frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\le\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma.$$

Siis

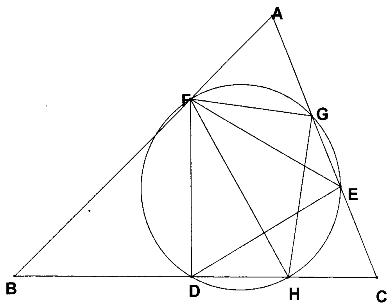
$$\frac{p}{R}+\frac{1}{3}\left(1+\frac{r}{R}\right)^2=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

joten todistus on valmis, kun otetaan huomioon oletus $R=1$

3. (Ehdokas 1993) Tasasivuisen kolmion kärjet D, E ja F ovat kolmion ABC sivuilla BC, CA ja AB, tässä järjestyksessä. Näiden sivujen pituudet ovat a, b ja c ja kolmion ABC ala on S. Todista, että

$$DE \geq \frac{2\sqrt{2}S}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}}.$$

Ratkaisu. Piirretään kolmion DEF ympäri ρ-säteinen ympyrä. Se leikkaa isomman kolmion sivut BC ja CA myös pisteissä H ja G. Ratkaisu on etupäässä lasku, jossa DE:n ja kolmion ABC sivujen välistä yhteyttä etsitään ρ:n ja HG:n kautta.



Jännenelikulmiosta $DEGF$ nähdään, että $\angle EGF = 120°$ ja kehäkulmista $\angle DHF$ ja $\angle DEF = 60°$, että $\angle FHC = 120°$. Nelikulmiosta $HCGF$ saadaan $\angle GFH = 120° - \gamma$. Merkitään $AF = x$. Sinilauseen nojalla $FG = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 60°}x = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}\sin\alpha$ ja vastaavasti $FH = \dfrac{2(c-x)}{\sqrt{3}}\sin\beta$. Kosinilauseesta saadaan

$$\begin{aligned} HG^2 &= \frac{4}{3}(x^2\sin^2\alpha + (c-x)^2\sin^2\beta - 2x(c-x)\sin\alpha\sin\beta\cos(120° - \gamma)) \\ &= \frac{4}{3}(Lx^2 - 2Mcx + Nc^2), \end{aligned}$$

missä $L = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(120° - \gamma)$, $M = \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos(120° - \gamma)$ ja $N = \sin^2\beta$. Arvioidaan nyt x:n toisen asteen polynomia standardimenetelmällä alaspäin:

$$HG^2 = \frac{4L}{3}\left(\left(x - \frac{Mc}{L}\right)^2 + \left(\frac{N}{L} - \frac{M^2}{L^2}\right)c^2\right) \geq \frac{4c^2}{3}\cdot\frac{NL - M^2}{L}.$$

Sovelletaan laajennettua sinilausetta kolmioihin DEF ja HGF, joilla on sama ympäri piirretty ympyrä; saadaan

$$\frac{HG}{\sin(120° - \gamma)} = 2\rho = \frac{DE}{\sin 60°}.$$

Siis

$$DE = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{HG}{\sin(120° - \gamma)}.$$

Käsitellään HG^2:n alarajan termejä. Ensinnäkin

$$\begin{aligned} NL - M^2 &= \sin^2\beta(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(120° - \gamma)) - (\sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos(120° - \gamma))^2 \\ &= \sin^2\alpha\sin^2\beta(1 - \cos^2(120° - \gamma)) = \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2(120° - \gamma). \end{aligned}$$

Toisaalta $\cos(120^\circ - \gamma) = -\dfrac{1}{2}\cos\gamma + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma$, joten $L = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Sovelletaan nyt laajennettua sinilausetta ja kosinilausetta kolmioon ABC (jonka ympäri piirretyn ympyrän säde on R). Saadaan

$$L = \frac{a^2 + b^2 - ab\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \sqrt{3}ab\sin\gamma}{4R^2} = \frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{8R^2}.$$

Sijoitetaan nämä DE^2:n lausekkeeseen:

$$\begin{aligned} DE^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{HG^2}{\sin^2(120^\circ-\gamma)} &\ge c^2\frac{NL - M^2}{L\sin^2(120^\circ-\gamma)} = \frac{c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\cdot 8R^2}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S} \\ &= \frac{2a^2b^2\sin^2\gamma}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S} = \frac{8S^2}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}. \end{aligned}$$

Väite on tämän kanssa yhtäpitävää. – Vuoden 1993 IMO:n tehtävänlaadintakomitea huomauttaa, että samansisältöisen väitteen elegantimpi formulointi olisi ollut

$$\frac{S}{S'} \le 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}\right),$$

missä S' on kolmion DEF ala.

4. (Ehdokas 1995) Tetraedrin $A_1A_2A_3A_4$ painopiste on G. Suora AG leikkaa tetraedrin ympäri piirretyn pallon myös pisteessä A_i'. Osoita, että

$$GA_1\cdot GA_2\cdot GA_3\cdot GA_4 \le GA_1'\cdot GA_2'\cdot GA_3'\cdot GA_4'$$

ja

$$\frac{1}{GA_1'} + \frac{1}{GA_2'} + \frac{1}{GA_3'} + \frac{1}{GA_4'} \le \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GA_2} + \frac{1}{GA_3} + \frac{1}{GA_4}.$$

Ratkaisu. Olkoon O tetraedrin ympäri piirretyn pallon keskipiste ja R sen säde sekä $OG = g$. Koska O, G, A_i ja A_i' ovat samassa tasossa, niin Pisteen potenssia koskevan lauseen perusteella

$$GA_i \cdot GA_i' = (R+g)(R-g) = R^2 - a^2. \tag{1}$$

Kun ensimmäinen epäyhtälö lavennetaan luvulla $GA_1\cdot GA_2\cdot GA_3\cdot GA_4$ ja otetaan (1) huomioon, saadaan ensimmäinen epäyhtälö yhtäpitävään muotoon

$$GA_1\cdot GA_2\cdot GA_3\cdot GA_4 \le (R^2 - g^2)^2. \tag{2}$$

Merkitään $OA_i = \overrightarrow{a_i}$, $OG = \overrightarrow{g}$. Painopisteen perusominaisuuden mukaisesti

$$\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{a_i} = 4\overrightarrow{g}.$$

Siis

$$GA_i^2 = (\overrightarrow{a}_i - \overrightarrow{g})^2 = R^2 + g^2 - 2\overrightarrow{a}_i \cdot \overrightarrow{g}$$

ja

$$\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 = 4R^2 + 4g^2 - 8g^2 = 4(R^2 - g^2). \tag{3}$$

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella siis

$$R^2 - g^2 \geq \sqrt[4]{GA_1^2 \cdot GA_2^2 \cdot GA_3^2 \cdot GA_4^2} = \sqrt{GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GA_4}.$$

Tämä on sama kuin (2), joten ensimmäinen epäyhtälö on todistettu.

Kun jälkimmäinen todistettavista epäyhtälöistä lavennetaan luvulla $R^2 - g^2$ ja otetaan huomioon (1), epäyhtälö saadaan yhtäpitävään muotoon

$$\sum_{i=1}^{4} GA_i \leq (R^2 - g^2) \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i}.$$

Yhtälön (3) perusteella on siis näytettävä, että

$$\sum_{i=1}^{4} GA_i \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} GA_i^2 \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i}.$$

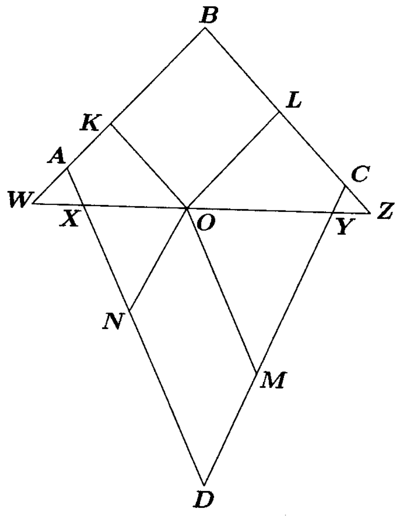
Käytetään Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä kahdesti:

$$\left(\sum_{i=1}^{4} 1 \cdot GA_i \right)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^{4} GA_i^2, \quad 16 = (1+1+1+1)^2 \leq \sum_{i=1}^{4} GA_i \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i}.$$

Siis

$$\sum_{i=1}^{4} GA_i \leq \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{4} GA_i \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i} \leq \frac{1}{4} \sum_{1=1}^{4} GA_i^2 \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i}.$$

5. (Ehdokas 1995) Kuperan nelikulmion $ABCD$ ala on S. Piste O on nelikulmion sisällä ja pisteet K, L, M ja N ovat nelikulmion sivujen AB, BC, CD ja DA pisteitä, tässä järjestyksessä. Todista, että jos $OKBL$ ja $OMDN$ ovat suunnikkaita ja S_1, S_2 niiden alat, niin $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.



Ratkaisu. Jos piste O on janalla AC, niin kolmiot ACB, AOK ja OCL ovat yhdenmuotoiset, samoin kolmiot ADC, ANO ja OMC. Koska $AC = AO+OC$ ja yhdenmuotoisten kolmioiden alat vastinsivut suhtautuvat kuten alojen neliöjuuret, on $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$. Oletetaan sitten, että O on samalla puolen suoraa AC kuin D. Merkitään O:n kautta kulkevan suoran ℓ ja suorien BA, AD, DC ja CB leikkauspisteitä kirjaimin W, X, Y ja Z, tässä järjestyksessä. Jos $W = X = A$, niin $\dfrac{OW}{OX} = 1$ ja $\dfrac{OZ}{OY} > 1$. Jos $Y = Z = C$, niin $\dfrac{OW}{OX} > 1$ ja $\dfrac{OZ}{OY} = 1$. Jos ℓ:ää kierretään pisteen O ympäri, löytyy sellainen asento, jossa $\dfrac{OW}{OX} = \dfrac{OZ}{OY}$. Sijoitetaan ℓ nyt tähän asentoon. Merkitään kuvioiden $KBLO$, $NOMD$, WKO, OLZ, ONX ja YMO aloja T_1, T_2, P_1, P_2, Q_1 ja Q_2, tässä järjestyksessä. Todistettavan väitteen kanssa yhtäpitävää on $T_1 + T_2 \geq 2\sqrt{S_1S_2}$. Kolmiot WBZ, WKO ja OLZ ovat yhdenmuotoiset. Siis

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} = \sqrt{P_1 + T_1 + P_2}\left(\frac{WO}{WZ} + \frac{OZ}{WZ}\right) = \sqrt{P_1 + T_1 + P_2}.$$

Tämä on yhtäpitävää yhtälön $T_1 = 2\sqrt{P_1P_2}$ kanssa. Vastaavasti osoitetaan, että $T_2 = 2\sqrt{Q_1Q_2}$. Koska $\dfrac{OW}{OZ} = \dfrac{OX}{OY}$, niin $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{OW^2}{OZ^2} = \dfrac{OX^2}{OY^2} = \dfrac{Q_1}{Q_2}$. Merkitään $k = \dfrac{Q_1}{P_1} = \dfrac{Q_2}{P_2}$. Nyt

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= 2\sqrt{P_1P_2} + 2\sqrt{Q_1Q_2} = 2(1+k)\sqrt{P_1P_2} = 2\sqrt{(1+k)P_1(1+k)P_2} \\ &= 2\sqrt{(P_1+Q_1)(P_2+Q_2)} \geq 2\sqrt{S_1S_2}. \end{aligned}$$

6. (Ehdokas 1997) Kuperassa kuusikulmiossa $ABCDEF$ on $AB = BC$, $CD = DE$ ja $EF = FA$. Osoita, että

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Ratkaisu. Merkitään $AC = a$, $CE = b$ ja $AE = c$. Sovelletaan Ptolemaioksen lausetta nelikulmioon $ACEF$. Sen mukaan $AC \cdot EF + CE \cdot AF \geq AE \cdot CF$, ja koska $EF = AF$, saadaan

$$\frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}.$$

Samoin saadaan

$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{c+a}, \quad \frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}.$$

Siis

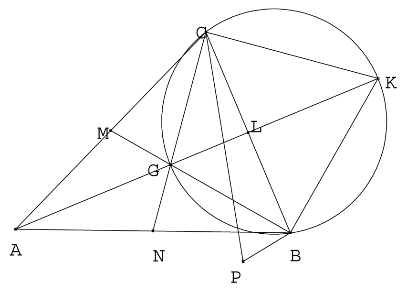
$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Tämän epäyhtälön oikea puoli on $\geq \frac{3}{2}$. Kyseessä on tunnettu epäyhtälö; sen voi todistaa helposti, kun kirjoittaa $a+b=x$, $c+a=y$ ja $b+c=z$. Silloin oikea puoli saa muodon

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}+\frac{y+z-x}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-3\right)\geq\frac{1}{2}(6-3)=\frac{3}{2}.$$

7. (Ehdokas 2001) Olkoon kolmion ABC painopiste G. Määritä tason ABC piste P niin, että $AP\cdot AG+BP\cdot BG+CP\cdot CG$ saa pienimmän arvonsa. Määritä tämä arvo kolmion ABC sivujen pituuksien funktiona.

Ratkaisu. Piirretään kolmion CGB ympäri ympyrä $\mathcal{Y}$. Mediaani AG leikkaa $\mathcal{Y}$:n myös pisteessä K. L, M ja N ovat sivujen BC, CA ja AB keskipisteet. Ristikulmien ja kehäkulmalauseen perusteella $\angle AGH=\angle CBK$, $\angle BGL=\angle BCK$ ja siis myös $\angle NGB=\angle BKC$. Sinilauseesta ja siitä, että $AN=NB$, $BL=LC$ seuraa



$$\frac{AG}{BG}=\frac{\sin(\angle AGN)}{\sin(\angle NGB)},\quad\frac{BG}{CG}=\frac{\sin(\angle LGB)}{\sin(\angle LGC)}.$$

Laajennettu sinilause ja kolmio BKC antavat toisaalta $BK=2R\sin(\angle KCB)=2R\sin(\angle LGB)$, $CK=2R\sin(\angle CBK)=2R\sin(\angle AGN)$, $BC=2R\sin(\angle BKC)=2R\sin(\angle NGB)$. Näistä seuraa

$$\frac{CG}{BK}=\frac{BG}{CK}=\frac{AG}{BC}.\tag{1}$$

Ptolemaioksen lauseen mukaan mielivaltaiselle tason pisteelle P on voimassa $PK\cdot BC\leq BP\cdot CK+BK\cdot CP$, ja yhtäsuuruus vallitsee aina ja vain, kun P on ympyrän $\mathcal{Y}$ kehällä. Yhtälön (1) perusteella on siis myös $PK\cdot AG\leq BP\cdot BG+CG\cdot CP$; kun tähän lisätään puolittain $AP\cdot AG$ ja otetaan huomioon kolmioepäyhtälö $AK\leq AP+PK$, saadaankin $AK\cdot AG\leq AP\cdot AG+BP\cdot BG+CP\cdot CG$. Epäyhtälössä on yhtäsuuruus, kun P on ympyrän $\mathcal{Y}$ kehällä ja P on janalla AK. Minimi saavutetaan siis, kun $P=G$. Minimi on

$$AG^2+BG^2+CG^2=\frac{(2b^2+2c^2-a^2)+(2c^2+2a^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)}{9}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

8. (Ehdokas 2001) Olkoon M kolmion ABC sisäpiste. Olkoon A' se sivun BC piste, jolle $MA' \perp BC$. Määritellään sivujen CA ja AB pisteet B' ja C' analogisesti. Olkoon

$$p(M) = \frac{MA' \cdot MB' \cdot MC'}{MA \cdot MB \cdot MC}.$$

Määritä M niin, että $p(M)$ saa suurimman mahdollisen arvonsa. Olkoon $\mu(ABC)$ tämä suurin arvo. Millä kolmioilla ABC $\mu(ABC)$ saa suurimman mahdollisen arvonsa?

Ratkaisu. Olkoon $\alpha_1 = \angle MAB$, $\alpha_2 = \angle MAC$, $\beta_1 = \angle MBC$, $\beta_2 = \angle MBA$, $\gamma_1 = \angle MCA$ ja $\gamma_2 = \angle MCB$. Nyt

$$\frac{MB' \cdot MC'}{MA^2}) = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2, \quad \frac{MC' \cdot MA'}{MB^2} = \sin\beta_1 \sin\beta_2, \quad \frac{MA' \cdot MB'}{MC^2} = \sin\gamma_1 \sin\gamma_2.$$

Siis $p(M)^2 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\gamma_1 \sin\gamma_2$. Mutta

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \le \frac{1}{2}(1 - \cos(x+y)) = \sin^2\frac{x+y}{2}.$$

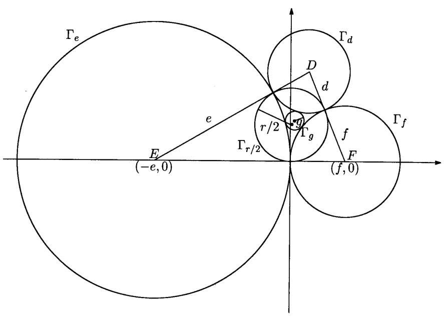
Yhtäsuuruus vallitsee, kun $x - y = 0$. Koska $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ jne., niin

$$p(M) \le \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Yhtäsuuruus vallitsee, kun $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ ja $\gamma_1 = \gamma_2$ eli silloin, kun M on ABC:n kulmanpuolittajien leikkauspiste. Siis $\mu(ABC) = \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$. Epäyhtälön (1) perusteella nähdään, että suuretta $\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$ voidaan aina kasvattaa, jos α, β ja γ eivät ole yhtä suuria. $\mu(ABC)$ on maksimaalinen tasasivuisille kolmioille ABC.

9. (Ehdokas 2003) Kolmion ABC piirin puolikas on s ja sisään piirretyn ympyrän säde r. Piirretään kolmion ulkopuolelle puoliympyrät, joiden halkaisijat ovat BC, CA ja AB. Sen ympyrän, joka sivuaa näitä kolmea puoliympyrää, säde on t. Osoita, että

$$\frac{s}{2} < t \le \frac{s}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r.$$



Ratkaisu. Olkoon O kolmea puoliympyrää sivuavan ympyrän $\mathcal{Y}$ keskipiste. Olkoot D, E ja F kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB keskipisteet, tässä järjestyksessä. Olkoot sitten D', E' ja F' pisteet, joissa $\mathcal{Y}$ sivuaa puoliympyröitä ja olkoot d', e' ja f' näiden puoliympyröiden säteet. Koska säteet ovat kolmion sivujen puolikkaita, $d' + e' + f' = s$ ja $d' = FE$, $e' = DF$ ja $f' = DE$. Sivuamisen vuoksi puoliympyröiden ja $\mathcal{Y}$:n yhteisiin pisteisiin piirretyt säteet ovat samoilla suorilla. DD', EE' ja FF' leikkaavat siis toisensa pisteessä O. Olkoon nyt

$$d = \frac{s}{2} - d' = \frac{-d' + e' + f'}{2}, \quad e = \frac{s}{2} - e' = \frac{d' - e' + f'}{2}, \quad f = \frac{s}{2} - f' = \frac{d' + e' - f'}{2}.$$

Piirretään kolmion ABC sisäpuolelle, sivuille BC, CA ja AB d-, e- ja f-säteiset puoliympyrät. Puoliympyrät sivuavat toisiaan, sillä $d + e = f' = DE$, $e + f = d' = FE$ ja $f + d = e' = DF$. Huomataan myös, että $d + e + f = \frac{s}{2}$. Jos olisi $t \le \frac{s}{2}$, olisi $t \le d + d'$, $t \le e + e'$ ja $t \le f + f'$. Silloin piste O olisi jokaisen pikkupuoliympyrän sisällä tai reunalla. Tämä on mahdotonta, koska ympyrät vain sisuvat tosiaan, eikä millään kahdella niistä ole yhteisiä sisäpisteitä. Tehtävän epäyhtälöistä vasemmanpuoleinen on siis tosi.

Merkitään $g = t - \frac{s}{2}$. Edellisen nojalla $g > 0$. Lisäksi $DO = t - d' = d + g$ ja vastaavasti $EO = e + g$ ja $FO = f + g$. Väitämme. että

$$\frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)^2. \tag{1}$$

Todistus: Jos kolmion PQR sivut ovat p, q ja r, niin kosinilauseen nojalla

$$\cos(\angle QPR) = \frac{-p^2 + q^2 + r^2}{2qr}$$

ja Heronin kaavan nojalla

$$\sin(\angle QPR) = \frac{\sqrt{(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)}}{2qr}.$$

Kolmiossa DEF on

$$\cos(\angle EDF) = \cos(\angle ODE + \angle ODF) = \cos(\angle ODE)\cos(\angle ODF) - \sin(\angle ODE)\sin(\angle ODF).$$

Kun tässä olevat kosinit ja sinit lausutaan edellä olevalla tavalla kolmioiden DEF, DEO ja DOF sivujen $d+e$, $e+f$, $f+d$; $d+e$, $e+g$, $d+g$; $d+g$, $f+g$, $f+d$ avulla, saadaan yksinkertaisten sievennysten jälkeen

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 + de + df - ef}{(d+e)(d+f)} \\ &= \frac{(d^2 + de + dg - eg)(d^2 + df + dg - fg)}{(d+g)^2(d+e)(d+f)} - \frac{4dg\sqrt{(d+e+g)(d+f+g)ef}}{(d+g)^2(d+e)(d+f)}, \end{aligned}$$

ja edelleen

$$(d+g)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right) - 2\left(\frac{d}{g} + 1 - \frac{g}{d}\right) = -2\sqrt{\frac{(d+e+g)(d+f+g)}{ef}}.$$

Kun tämä yhtälö korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)^2 &= 4\left(\frac{1}{de} + \frac{1}{df} + \frac{1}{dg} + \frac{1}{ef} + \frac{1}{eg} + \frac{1}{fg}\right) \\ &= 2\left(\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)^2 - \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2}\right)\right), \end{aligned}$$

mistä väite seuraakin.

Yhtälö (1) on $\frac{1}{g}$:n toisen asteen yhtälö. Ratkaistaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{g} &= \frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\sqrt{2\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right)^2-2\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}\right)}\\ &= \frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+2\sqrt{\frac{d+e+f}{def}}.\end{aligned}$$

Kolmion DEF ala on toisaalta $\frac{1}{4}$ kolmion ABC alasta eli $\frac{rs}{4}$, toisaalta Heronin kaavan mukaan (kolmion piirin puolikas on $\frac{s}{2}=d+e+f$ ja sen sivut ovat $d+e$, $e+f$ ja $f+d$) $\sqrt{(d+e+f)def}$. Siis

$$\frac{r}{2}=\frac{2}{s}\sqrt{(d+e+f)def}=\sqrt{\frac{def}{d+e+f}}. \tag{2}$$

Koska $t=g+\frac{s}{2}$, tehtävän oikeanpuoleinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$g+\frac{s}{2}\le\frac{s}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$$

eli

$$\frac{r}{2g}\ge\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Jos vielä merkitään $\frac{1}{d}=x$, $\frac{1}{e}=y$ ja $\frac{1}{f}=z$ ja otetaan käyttöön edellä laskettu $\frac{1}{g}$ sekä (2), saadaan

$$\frac{r}{2g}=\sqrt{\frac{def}{d+e+f}}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+2\sqrt{d+e+f<odef}\right)=\frac{x+y+z}{\sqrt{xy+yz+zx}}+2.$$

Todistettavaksi jää

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}\ge 3. \tag{3}$$

Mutta (3) on tosi, sillä

$$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+z-x)^2\right).$$

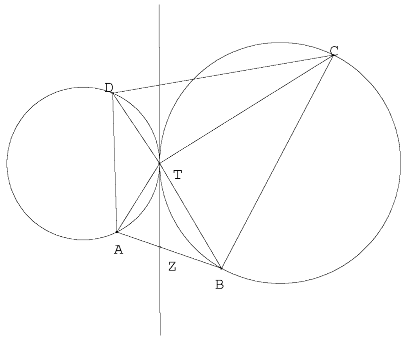
10. (Ehdokas 2006) Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio. Pisteiden A ja D kautta kulkeva ympyrä ja pisteiden B ja C kautta kulkeva ympyrä sivuavat toisiaan ulkopuolisesti nelikulmion sisäpisteessä P. Oletetaan, että

$$\angle PAB + \angle PDC \le 90^\circ \quad \text{ja} \quad \angle PBA + \angle PCD \le 90^\circ.$$

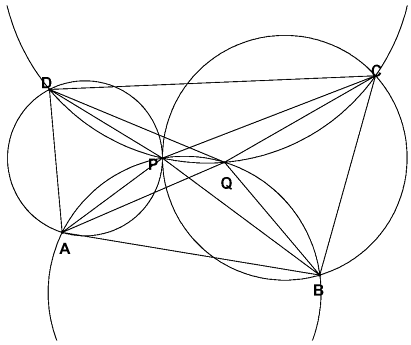
Osoita, että $AB + CD \ge BC + AD$.

Ratkaisu. Esitetään ensin seuraava huomio: jos T on nelikulmion $ABCD$ sisäpiste, niin ympyrät BCT ja DAT sivuavat toisiaan pisteessä T jos ja vain jos

$$\angle ADT + \angle BCT = \angle ATB. \tag{1}$$



Todellakin, jos ympyrät sivuavat pisteessä T ja jos niiden yhteinen tangentti leikkaa suoran AB pisteessä Z, niin $\angle ADT = \angle ATZ$ ja $\angle BCT = \angle BTZ$, joten $\angle ATB = \angle ATZ + \angle ZTB = \angle ADT + \angle BCT$. Kääntäen, jos (1) on voimassa, suoralta AB voidaan valita piste Z niin, että $\angle ADT = \angle ATZ$ ja $\angle BCT = \angle BTZ$. Edellinen yhtälö kertoo, että TZ on ympyrän DAT tangentti ja jälkimmäinen, että TZ on ympyrän BCT tangentti.



Siirrytään varsinaiseen todistukseen. Piirretään kolmioiden ABP ja CDP ympäri piirretyt ympyrät. Oletetaan, että ne leikkaavat myös pisteessä Q. Oletuksen nojalla A on ympyrän BCP ulkopuolella. Tästä seuraa, että $\angle BCP + \angle BAP < 180^\circ$, joka merkitsee, että C on ympyrän ABP ulkopuolella. Samoin D on ympyrän ABP ulkopuolella.

Pisteet P ja Q ovat siis samalla ympyrän DCP kaarista DC. Symmetrian vuoksi P ja Q ovat samalla ympyrän ABP kaarista AB. Tästä seuraa, että piste Q on joko kulman BPC tai kulman APD aukeamassa. Voidaan olettaa, että Q on kulman BPC aukeamassa. Tällöin

$$\angle AQD = \angle PQA + \angle PQD = \angle PBA + \angle PCD \le 90^\circ. \tag{1}$$

Jännenelikulmioissa $APQB$ ja $DPQC$ kulmat PAB ja PDC ovat tehtävän oletuksen mukaan teräviä. Nelikulmioiden kärjessä Q on siis tylpät kulmat. Tämä merkitsee, että piste Q on paitsi kulman BPC aukeamassa, myös kolmion BPC sisällä eli nelikulmion $ABCD$ sisällä. Samoin kuin (1), johdetaan

$$\angle BQC = \angle PAC + \angle PDC \le 90^\circ. \tag{2}$$

Koska $\angle PCQ = \angle PDQ$, saadaan

$$\angle ADQ + \angle BCQ = \angle ADP + \angle PDQ + \angle BCP - \angle PCQ = \angle ADP + \angle BCP.$$

Alussa esitetyn havainnon perusteella viimeinen summa on $\angle APB$. Koska $\angle AQB = \angle APB$, saadaan $\angle ADQ + \angle BCQ = \angle AQB$, ja alussa esitetyn havainnon perusteella ympyrät BCQ ja DAQ sivuavat toisiaan ulkopuolisesti pisteessä Q. (Tähän asti on oletettu, että $P \neq Q$, mutta jos $P = Q$, johtopäätös triviaalisti sama.

Tarkastellaan nyt puoliympyröitä, joiden halkaisijat ovat BC ja DA ja jotka on piirretty nelikulmion $ABCD$ sisäpuolelle (ne voivat osin mennä ulkopuolelle). Olkoot M ja N niiden keskipisteet. Epäyhtälöiden (1) ja (2) perusteella puoliympyrät ovat kokonaan ympyröiden BQC ja AQD sisällä. Koska viimemainitut ympyrät sivuavat toisiaan, puoliympyrät eivät mene päällekkäin. Siis $MN \geq \frac{1}{2}(BC + DA)$. Koska toisaalta $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$, niin kolmioepäyhtälön perusteella $MN \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$. Siis, niin kuin väitettiin, $AB + CD \geq BC + DA$.

11. (Ehdokas 2007) Määritä pienin reaaliluku k, jolla on seuraava ominaisuus:

Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio ja olkoot pisteet A_1, B_1, C_1 ja D_1 sivuilla AB, BC, CD ja DA, tässä järjestyksessä. Tarkastellaan kolmioiden AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1 ja DD_1C_1 aloja. Olkoon S kahden pienimmän alan summa. Olkoon S_1 nelikulmion $A_1B_1C_1D_1$ ala. Tällöin aina $kS_1 \geq S$.

Ratkaisu. Osoitetaan, että $k = 1$. Kutsutaan kolmioita AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1 ja DD_1C_1 reunakolmioiksi ja merkitään kuvion $\mathcal{F}$ alaa $|\mathcal{F}|$.

Osoitetaan ensin, että $k \geq 1$. Tätä varten konstruoidaan nelikulmioita $ABCD$ ja pisteistöjä A_1, B_1, C_1, D_1, joissa $\frac{S}{S_1}$ on mielivaltaisen lähellä ykköstä. Olkoon ABC tasasivuinen kolmio, jonka ala on 4. Olkoot A_1, B_1 ja K sen sivujen AB, BC ja CA keskipisteet. Valitaan suoralta BK ja piste D, läheltä K:ta ja niin, että K on B:n ja D:n välissä, ja janoilta AD ja DC pisteet D_1 ja C_1, läheltä D:tä. Silloin $|A_1B_1B| = 1$. Kun C_1, D_1 ja D lähestyvät pistettä K, niin $|A_1B - 1C_1D_1| \to |A_1KB_1| = 1$, $|AA_1D_1| \to |AA_1K| = 1$, $|B_1C_1C| \to |B_1KC| = 1$ ja $|DC_1D_1| \to 0$. Tällöin $S \to 1$, $S_1 \to 1$, joten $\frac{S}{S_1} \to 1$.

Osoitetaan, että aina $\frac{S}{S_1} \leq 1$. Todistetaan ensin

Apulause. Olkoot A_1, B_1 ja C_1 kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä, tässä järjestyksessä. Silloin $|A_1B_1C_1| \geq \min\{|AC_1B_1|, |BA_1C_1|, |CB_1A_1|\}$.

Todistus. Olkoot A', B' ja C' kolmion ABC sivujen keskipisteet. Oletetaan ensin, että pisteistä A_1, B_1, C_1 kaksi on jonkin kolmioista $AB'C'$, $CA'B'$, $BC'A'$ sivuilla; esimerkiksi B_1 janalla AB' ja C_1 janalla AC'. Leikatkoot AA_1 ja B_1C_1 pisteessä X ja olkoon $\angle AXB_1 = \angle C_1XA_1 = \phi$. Koska myös X on kolmion $AB'C'$ sisällä tai reunalla, $AX \leq XA_1$. Tällöin

$$\frac{|A_1B_1C_1|}{|AC_1B_1|} = \frac{\frac{1}{2}A_1X \cdot B_1C . \sin\phi}{\frac{1}{2}AX \cdot B_1C_1 \cdot \sin\phi} = \frac{A_1X}{AX} \geq 1.$$

Oletetaan sitten, että kolmioiden $AB'C'$, $CA'B'$, $BC'A'$ sivuilla on kullakin vain yksi pisteistä A_1, B_1, C_1. Olkoon esimerkiksi $BA_1 \le BA'$, $CB_1 \le CB'$ ja $AC_1 \le AC'$. Nyt B_1A_1 leikkaa AB:n jatkeen pisteessä Y. Siis $\dfrac{|A_1B_1C_1|}{|A_1B_1C'|} = \dfrac{C_1Y}{C'Y} \ge 1$. Samoin A_1C' ja CA: jatke leikkaavat pisteessä Z. Siis $\dfrac{|A_1B_1C'|}{|A_1B'C'|} = \dfrac{B_1Z}{B'Z} \ge 1$. Koska $A_1A' \| C'B'$, niin $|A_1B'C'| = |A'B'C'|$. Kaikkiaan siis $|A_1B_1C_1| \ge |A_1B_1C'| \ge |A_1B'C'| = |A'B'C'| = \dfrac{1}{4}|ABC|$. Kolmen kolmion AC_1B_1, BA_1C_1, CB_1A_1 alojen summa on siis enintään $\dfrac{3}{4}|ABC|$, joten niistä aloiltaan pienin on enintään $\dfrac{1}{4}|ABC| \le |A_1B - 1C_1|$.

Palataan sitten itse tehtävään. Annetaan nimityksiä nelikulmion $A_1B_1C_1D_1$ osakolmioille. Sanomme, että kolmio $A_1B_1C_1$ on *pieni*, jos se on molempia siihen rajoittuvia reunakolmioita BB_1A_1 ja CC_1B_1 pienempi. Muussa tapauksessa $A_1B_1C_1$ on *iso*. Samoin nimitetään kolmioita $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$ ja $D_1A_1B_1$. Jos nyt sekä $A_1B_1C_1$ että $C_1D_1A_1$ ovat isoja, niin $|A_1B_1C_1|$ on suurempi tai yhtä suuri kuin jonkin reunakolmion ala ja $|C_1D_1A_1|$ on suurempi tai yhtä suuri kuin jonkin toisen reunakolmion ala, jolloin $S_1 = |A_1B_1C_1| + |C_1D_1A_1| \ge S$. Samoin voidaan päätellä, jos sekä $B_1C_1D_1$ että $D_1A_1B_1$ ovat isoja.

Oletetaan sitten, että kummassakin edellä mainitussa parissa on ainakin yksi pieni kolmio. Voidaan olettaa, että $A_1B_1C_1$ ja $D_1A_1B_1$ ovat pieniä ja vielä että $|A_1B_1C_1| \le |D_1A_1B_1|$. Tällöin puolisuora D_1C_1 leikkaa suoran BC; olkoon leikkauspiste L. Nyt on kaksi mahdollisuutta:

1. tapaus. Puolisuora C_1D_1 leikkaa suoran AB jossain pisteessä K. Koska $A_1B_1C_1$ on pieni, $|A_1B_1C_1| < |CC_1B_1| < |LC_1B_1|$ ja $|A_1B_1C_1| < |BB_1A_1|$. Koska $D_1A_1B_1$ on pieni, $|A_1B_1C_1| \le |D_1A_1B_1| < |AA_1D_1| < |KA_1D_1| < |KA_1C_1|$. On saatu ristiriita apulauseen tuloksen kanssa, kun tarkastellaan kolmiota BKL.

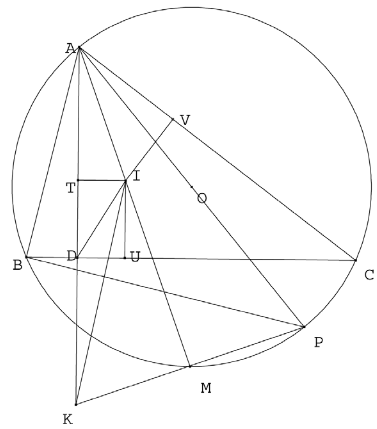
2. tapaus. Puolisuora C_1D_1 ei leikkaa suoraa AB. Nyt valitaan puolisuoralta BA piste K niin, että $|KA_1C_1| > |A_1B_1C_1|$ ja niin, että puolisuora KC_1 leikkaa suoran BC jossain pisteessä L. Koska puolisuora C_1D_1 ei leikkaa AB:tä, pisteet A ja D_1 ovat eri puolilla suoraa KL; tällöin A ja D ovat myös eri puolilla suoraa KL, mutta C on samalla puolella kuin A ja B. Nyt $|A_1B_1C_1| < |CC_1B_1| < |LC_1B_1|$ ja $|A_1B_1C_1| < |BB_1A_1|$. Saadaan jälleen ristiriita apulauseen tuloksen kanssa, kun sitä sovelletaan kolmioon BKL.

12. (Ehdokas 2007) Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC on $\beta > \gamma$. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I ja ympäri piirretyn ympyrän säde R. Pisteestä A piirretyn korkeusjanan kantapiste on D. Piste K on puolisuoralla AD ja $AK = 2R$. Suora DI leikkaa AC:n pisteessä E ja suora KI leikkaa BC:n pisteessä F. Osoita, että jos $IE = IF$, niin $\beta \le 3\gamma$.

Ratkaisu. Todistetaan ensin, että vaikka ei oletettaisikaan, että $IE = IF$, niin

$$\angle KID = \frac{1}{2}(\beta - \gamma). \tag{1}$$

Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän $\mathcal{Y}$ keskipiste. Piirretään $\mathcal{Y}$:n halkaisija AP. Olkoon M kulman BAC puolittajan ja $\mathcal{Y}$:n toinen leikkauspiste. Koska $AK = AP = 2R$, kolmion AKP on tasakylkinen. Koska $\angle ABP$ ja $\angle ADC$ ovat suoria kulmia, $\angle BAD = \angle BPC$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle PBC = \angle PAC$. Siis $\angle BAD = \angle PAC$, joten AM on myös $\angle KAP$:n puolittaja. Tästä seuraa, että M on KP:n keskipiste ja AM on janan KP keskinormaali.

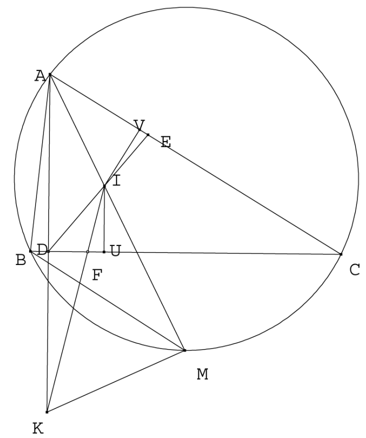


Olkoot T, U, V pisteen I kohtisuorat projektiot suorilla AK, BC, AC, tässä järjestyksessä. Koska $DUIT$ on suorakaide, $TD = IU = IV$. Nelikulmio $ATIV$ on jännenelikulmio. Siis $\angle VTI = \angle VAI = \angle BAM = \angle BPM$ ja $\angle IVT = \angle IAT = \angle PAM = \angle PBM$. Kolmiot TIV ja PMB ovat yhdenmuotoiset ja $\dfrac{IT}{IV} = \dfrac{MP}{MB}$. Tunnetusti $MC = MB = MI$ [Ensimmäinen yhtälö johtuu siitä, että M on kaaren BC keskipiste, jälkimmäinen siitä, että $\angle MBI = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \angle BIM$, joten MIB on tasakylkinen kolmio.] Siis

$$\frac{IT}{TD} = \frac{IT}{IV} = \frac{MP}{MB} = \frac{KM}{MI}.$$

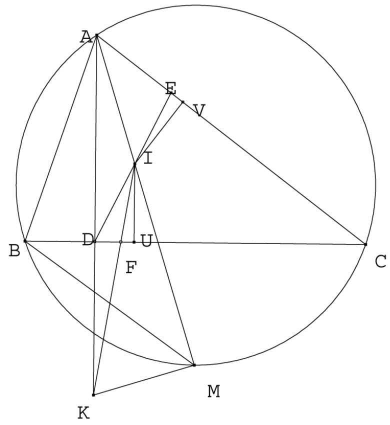
Suorakulmaiset kolmiot DIT ja IKM ovat siis yhdenmuotoisia. Siis $\angle KIM = \angle IDA$ ja $\angle KID = \angle MID - \angle KIM = (\angle IAD + \angle IDA) - \angle IDA = \angle IAD$. Suorakulmaisesta kolmiosta ADB saadaan viimein

$$\angle KID = \angle IAD =$$
$$\angle IAB - \angle BAD = \frac{1}{2}\alpha - (90^\circ - \beta)$$
$$= \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + \beta = \frac{1}{2}(\beta - \gamma).$$



Siirrytään todistamaan varsinaista väitettä. Nyt siis $IE = IF$. Koska $IU = IV$, suorakulmaiset kolmiot IEV ja IFU ovat yhteneviä ja $\angle IEV = \angle IFU$. Koska $\beta > \gamma$, U on janalla CD ja F janalla UD. Kulma $\angle IFC$ on siis terävä. Pisteiden A, C, V ja E järjestyksen suhteen on kaksi tapausta.

Jos E on pisteiden C ja V välissä, niin $\angle IFC = \angle IEA$. Tällöin $CEIF$ on jännenelikulmio ja $\angle FCE = 180° - \angle EIF = \angle KID$. Yhtälön (1) perusteella saadaan $\angle FCE = \gamma = \angle KID = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ja $\beta = 3\gamma$.



Muussa tapauksessa E on pisteiden A ja V välissä. Tällöin nelikulmio $CEIF$ on CI:n suhteen symmetrinen. Koska $\angle IEC = \angle IFC < 90°$, on $\angle FCE > 180° - \angle EIF = \angle KID$. Näin ollen $\angle FCE = \gamma > \angle KID = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ja $\beta < 3\gamma$.