Harjoitustehtävät, tammikuu 2013, vaativammat

Mielellään paperille kirjoitetut vastaukset joko helmikuun valmennusviikonvaihteeseen Päivölään, tai samoihin aikoihin paperipostissa osoitteeseen `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu`. Jos haluaa jättää vastauksia sähköpostissa, niin osoite on `matti.lehtinen@helsinki.fi`.

1. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$2f(xy) + 2f(xz) \geq 4f(x)f(yz) + 1$$

kaikilla reaaliluvuilla x, y, z.

2. Olkoon $P(x) = x^2 + x^0 + x^{12} + x^{n_1} + x^{n_2} + \cdots + x^{n_k} + x^{2012}$, missä $12 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < 2012$ ja n_i:t ovat kokonaislukuja. Osoita, että P:n reaaliset nollakohdat, jos niitä on, ovat enintään $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

3. Olkoon P n:nnen asteen polynomi ja olkoon $P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$ kaikilla x. Osoita, että P:llä ei ole reaalijuuria.

4. a, b, c ovat positiivisia lukuja. Osoita, että

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geq \frac{3}{8}.$$

5. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku, joka ei ole jaollinen 2012:lla. Olkoon $a_i = i + \frac{ni}{2012}$, $i = 1, 2, \ldots, 2011$ ja $b_j = j + \frac{2012j}{n}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Kun näiden jonojen jäsenet asetetaan kasvavaan järjestykseen, saadaan jono $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{2010+n}$. Osoita, että $c_{k+1} - c_k < 2$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, 2009 + n$.

6. 2013 lasta seisoo piirissä. Yksi aloittaa sanomalla ”yksi”, seuraava sanoo ”kaksi”, seuraava ”kolme”, seuraavaa taas ”yksi”, seuraava ”kaksi” jne. Jokainen, joka sanoo ”kaksi” tai ”kolme” joutuu heti poistumaan piiristä. Viimeiseksi piiriin jäänyt on voittaja. Kuka hän on?

7. Tason pistejoukolla S on seuraavat ominaisuudet: (1) Jokaisen kahden S:n pisteen välimatka on enintään 1. (2) Jokaista S:n pistettä A kohden on tasan kaksi sellaista S:n pistettä A' ja A'', joiden etäisyys A:sta on tasan 1. Kutsutaan näitä A:n *vieruspisteiksi*. (3) Jos $A, B \in S$ ja A', A'' ovat A:n vieruspisteet ja B', B'' ovat B:n vieruspisteet, niin $\angle A'AA'' = \angle B'BB''$. Voiko S:ssä olla 2012 pistettä? Voiko S:ssä olla 2021 pistettä?

8. 2012×2013-ruudukon ruudut indeksoidaan rivi- ja sarakenumeron osoittavin lukuparein (m, n), $1 \leq m \leq 2011$, $1 \leq n \leq 2012$. Ruudukon ruudut väritetään seuraavalla prosessilla. Ensin valitaan jotkin r ja s, $1 \leq r \leq 2010$, $1 \leq s \leq 2012$ ja väritetään ruudut (r, s), $(r+1, s+1)$ ja $(r+2, s+1)$. Sen jälkeen väritetään aina kerrallaan kolme samalla rivillä tai kolme samassa sarakkeessa olevaa vierekkäistä värittämätöntä ruutua. Voidaanko koko ruudukko värittää näin?

9. *Patera*-nimisessä maassa on 20 kaupunkia. Kaupunkien välistä lentoliikennettä hoitaa kaksi lentoyhtiötä: Valkosiivet ja Sinisiivet. Ne ovat jakaneet liikenteen seuraavasti:

(i) Jokaisen kahden kaupungin välillä on tasan yksi välilaskuton edestakainen yhteys, jota ylläpitää jompikumpi yhtiöistä.

(ii) Paterassa on kaksi kaupunkia, S ja B, joiden väliä ei voi matkustaa käyttämällä vain Valkosiipien lentoja.

Osoita, että minkä tahansa kahden Pateran kaupungin väliä voi matkustaa Sinisiivillä niin, että tarvitaan enintään yksi välilasku.

10. Eräässä maassa (ei kai Paterassa?) oli tuomioistuin. Päätuomari oli määrännyt tuomarien 23 tuolia sijoitettavaksi rinnakkain. Pitkien istuntojen aikana jotkin tuomarit poistuivat ja jotkut palasivat oikeussaliin. Oikeussaliin saapuvat tuomarit tulivat joko yksitellen tai pareittain, ja jos parina tulleista tuomareista jompikumpi joutui poistumaan, myös hänen parinsa poistui, mutta näitä tuomareita ei sen jälkeen pidetty parina. Päätuomari oli ohjeistanut oikeudenpalvelijan toimimaan niin, että aina kun pari saapui oikeussaliin, he istuutuvat vierekkäisille tuoleille. Osoita, että oikeudenpalvelija pystyi noudattamaan tätä määräystä, jos paikalla ei koskaan ollut enempää kuin 16 tuomaria.

11. Osoita, että kupera nelikulmio $ABCD$ on vinoneliö silloin ja vain silloin, kun kolmioiden ABC, BCD, CDA ja DAB sisäympyröillä on yhteinen piste.

12. Kolmiossa ABC $\angle ACB$ on tylppä. Piste D on C:n kohtisuora projektio suoralla AB, M on AB:n keskipiste, E sellainen sivun AC jatkeen piste, että $EM = BM$ ja F BC:n ja DE:n leikkauspiste. Oletetaan vielä, että $BE = BF$. Osoita, että $\angle CBE = 2 \cdot \angle ABC$.

13. Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC pisteet D, E ja F ovat pisteistä A, B ja C piirrettyjen korkeusjanojen kantapisteet. Kolmion ortokeskus on H. Osoita, että

$$\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2.$$

14. Kolmion ABC kärjet ovat xy-tason kokonaislukukoordinaattisia pisteitä, eikä kolmion piirillä ole muita tällaisia pisteitä. Kolmion sisällä on tasan yksi kokonaislukukoordinaattinen piste G. Osoita, että G on kolmion painopiste.

15. $ABCD$ on vinoneliö. Pisteet E, F, G, H ovat sellaisia sivujen AB, BC, CD, DA pisteitä, että EF ja GH ovat vinoneliön sisään piirretyn ympyrän tangentteja. Osoita, että $EH \| FG$.

16. Osoita, että on olemassa sellainen 2013 eri positiivisen luvun joukko, että mikään summa, jonka yhteenlaskettavat ovat joukon eri jäseniä, ei ole neliöluku, kuutioluku tai minkään kokonaisluvun korkeampi potenssi.

17. Osoita, että ei ole mahdollista muodostaa 4096 kappaletta 24 merkin pituista binäärijonoa (luvuista 0 ja 1 muodostuvaa jonoa), joista jokaiset kaksi poikkeaisivat toisistaan ainakin 8 merkin kohdalla.

18. Jokaiselle $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ määritellään $f(A) = A$:n suurin luku $-$ A:n pienin luku. Määritä lukujen $f(A)$ summa, kun A käy läpi kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukot.