Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, joulukuu 2019
Ratkaisuja

Helpompia tehtäviä

1. Pöydällä on 16 palloa, joiden painot ovat $13, 14, 15, \ldots, 28$ grammaa. Etsi 13, 14, 27 ja 28 grammaa painavat pallot orsivaa'an avulla tekemällä yhteensä korkeintaan 26 punnitusta.

Ratkaisu. Ratkaisuidea perustuu niihin huomioihin, että $16 = 2^4$ on luvun kaksi potenssi, joten palloja voidaan helposti jakaa pareihin. Lisäksi ratkaisussa hyödynnetään tietoa pallojen painoista.

Etsitään ensin kevyin pallo. Jaetaan pallot kahdeksaan pariin, jolloin kahdeksalla punnituksella saadaan selville kunkin parin kevyin pallo. Jaetaan nyt nämä kunkin parin kevyimmät pallot neljään pariin ja neljällä punnituksella saadaan selville kunkin parin kevyin pallo. Edelleen nämä neljä palloa jaetaan kahteen pariin ja kahdella punnituksella selvitetään kummankin parin kevyin pallo. Näistä kahdesta pallosta kevyempi on 13 grammaa painava pallo. Yhteensä punnituksia tehtiin $8 + 4 + 2 + 1 = 15$.

Edellisestä prosessin avulla saadaan myös selville 14 grammaa painava pallo. Nimittäin se on jokin niistä neljästä pallosta, jotka olivat kevyimmän pallon pareina punnituksissa. Näistä neljästä pallosta löydetään kevyin jakamalla ne ensin kahteen kahden pallon pariin, valitsemalla palloista kevyimmät ja sitten niistä kevyin.

Seuraavaksi etsitään 28 grammaa painava pallo. Huomataan, että se on ainoa pallo, joka painaa enemmän kuin kaksi kevyintä palloa yhteensä. Edelleen ensimmäisissä kahdeksassa punnituksessa, kun selvitettiin 13 grammaa painavaa palloa, 28 grammaa painavan pallon täytyi olla painavimpien pallojen joukossa. Vertaamalla näitä palloja kahteen kevyimpään palloon saadaan kahdeksalla punnituksella 28 grammaa painava pallo selville.

Huomataan vielä, että 27 grammaa painava pallo on ainoa pallo, joka painaa yhtä paljon kuin kaksi kevyintä palloa yhteensä. Jos siis edellisessä kahdeksassa punnituksessa jokin pallo painoi yhtä paljon kuin kaksi kevyintä palloa yhteensä, niin sen täytyy olla 27 grammaa painava pallo. Muussa tapauksessa 27 grammaa painava pallo kuului ensimmäisessä kahdeksassa punnituksessa kevyimpien pallojen joukkoon. Tämä on mahdollista vain, jos se oli aluksi 28 grammaa painavan pallon pari. Näin ollen, kun tiedetään, mikä pallo painaa 28 grammaa, tiedetään myös varmasti, mikä pallo painaa 27 grammaa. Tämän selvittämiseksi ei tarvittu lisää punnituksia.

On siis löydetty 13, 14, 27 ja 28 grammaa painavat pallot. Yhteensä punnituksia tehtiin (korkeintaan) $15 + 3 + 8 = 26$.

2. (a) Laske $\displaystyle\sum_{n=1}^{2019} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

(b) Olkoot $a_1 = a_2 = 1$ ja $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$ kaikilla $n \geq 3$. Osoita, että kaikki jonon (a_n) alkiot ovat kokonaislukuja.

Ratkaisu. (a) Vastaus: Tulos on $\frac{1\,375\,775\,539}{24\,763\,959\,720}$.

Koska tarkasteltava summa näyttää aluksi melko monimutkaiselta, niin yritetään muuttaa se johonkin sellaiseen muotoon, jota on helpompi käsitellä. Osoittajassa esiintyy neljän peräkkäisen luvun tulo. Koska summan peräkkäisissä termeissä on osoittajassa paljon samoja lukuja, niin ehkä ne pystytään jotenkin kirjoittamaan toistensa avulla. Näin ollen lausekkeen voisi ehkä kirjoittaa teleskooppisummana eli sellaisena summana, jossa kaikki muut paitsi ensimmäinen ja viimeinen termi kumoavat toisensa.

Pidetään edellinen ratkaisuidea mielessä ja kirjoitetaan

$$\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}
&3\sum_{n=1}^{2019}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&\quad=\sum_{n=1}^{2019}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).
\end{aligned}$$

Havaitaan, että jos termissä esiintyy luku $\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ negatiivisella etumerkillä, niin seuraavassa termissä se esiintyy positiivisella etumerkillä. Siispä summasta jää jäljelle vain ensimmäisen summattavan ensimmäinen termin ja viimeisen summattavan viimeinen termi. Se on siis

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{1\cdot(1+1)(1+2)}-\frac{1}{(2019+1)(2019+2)(2019+3)}\\
&=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2020\cdot 2021\cdot 2022}\\
&=\frac{2020\cdot 2021\cdot 337-1}{2020\cdot 2021\cdot 2022}\\
&=\frac{1\,375\,775\,539}{8\,254\,653\,240}.
\end{aligned}$$

Koska kysytty summa on tämä jaettuna kolmella, niin saadaan

$$\sum_{n=1}^{2019}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1\,375\,775\,539}{3\cdot 8\,254\,653\,240}=\frac{1\,375\,775\,539}{24\,763\,959\,720}.$$

(b) Tehtävänannossa on annettu jonon (a_n) termeille kaava, jossa aina jaetaan jollain luvulla. Koska halutaan osoittaa, että kaikki jonon luvut ovat kokonaislukuja, niin tämä on aika ikävä muotoilu. Tämän takia yritetään kirjoittaa jonon termit sellaisessa muodossa, josta heti näkee, että niiden kaikkien on oltava kokonaislukuja. Tämä toteutuu, jos jonon jäsen pystytään kirjoittamaan edellisten termien summan/tulon avulla niin, että siinä esiintyy vain kokonaislukuja. Siksi yritetään ensin löytyy tämä sopiva vakio muokkaamalla jonon määrittämää kaavaa sopivaan muotoon.

Selvästi jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat kokonaislukuja. Kolmas jäsen on $a_3 = 1^2 + 2 = 3$ ja neljäs on $a_4 = 3^2 + 2 = 11$. Kirjoitetaan

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 2 \tag{1}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 3$. Näin ollen myös saadaan, että

$$a_{n+1} a_{n-1} = a_n^2 + 2 \tag{2}$$

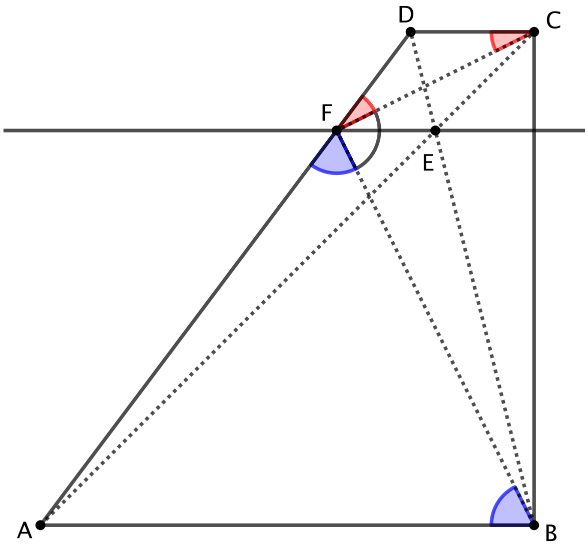
kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 3$. Vähennetään yhtälö (1) yhtälöstä (2) ja saadaan

$$a_{n+1}a_{n-1} - a_n a_{n-2} = a_n^2 - a_{n-1}^2 \quad \text{eli} \quad \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-2}+a_n}{a_{n-1}}.$$

Siispä osamäärä $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}$ on vakio kaikilla $n \geq 3$. Sijoituksella $n = 3$ saadaan, että vakio on $\frac{1+11}{3} = 4$. Tämä tarkoittaa, että $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$, kun $n \geq 3$. Näin ollen koska alussa on todettu, että kolme ensimmäistä termiä ovat kokonaislukuja, niin myös loppujen on oltava.

3. Puolisuunnikkaan $ABCD$ yhdensuuntaiset sivut ovat AB ja CD sekä on voimassa $AB + CD = AD$. Diagonaalit AC ja BD leikkaavat pisteessä E. Suora, joka kulkee pisteen E kautta ja on yhdensuuntainen sivun AB kanssa, leikkaa janan AD pisteessä F. Osoita, että $\angle BFC = 90°$.

Ratkaisu.



Koska suorat AB ja EF ovat yhdensuuntaiset, niin $\triangle ABD \sim \triangle FED$. Täten $\frac{DF}{FA} = \frac{DE}{EB}$. Edelleen, koska suorat CD ja AB ovat yhdensuuntaiset, niin $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ ja täten $\frac{DE}{EB} = \frac{CD}{AB}$. On saatu $\frac{DF}{FA} = \frac{CD}{AB}$.

Lisätään edellisen yhtälön molemmille puolille luku 1 ja saadaan

$$\frac{AD}{FA} = \frac{FA + DF}{FA} = \frac{AB + CD}{AB}.$$

Oletuksen mukaan on $AD = AB + CD$ eli saadaan $FA = AB$. Tästä seuraa, että $DF = CD$. Siis on $\angle AFB = \angle FBA$ ja $\angle CFD = \angle DCF$. Täten on

$$\begin{aligned}\angle AFB &= 90° - \frac{\angle BAF}{2},\\ \angle CFD &= 90° - \frac{\angle FDC}{2}.\end{aligned}$$

Yhdistetään nyt edelliset tiedot. Saadaan

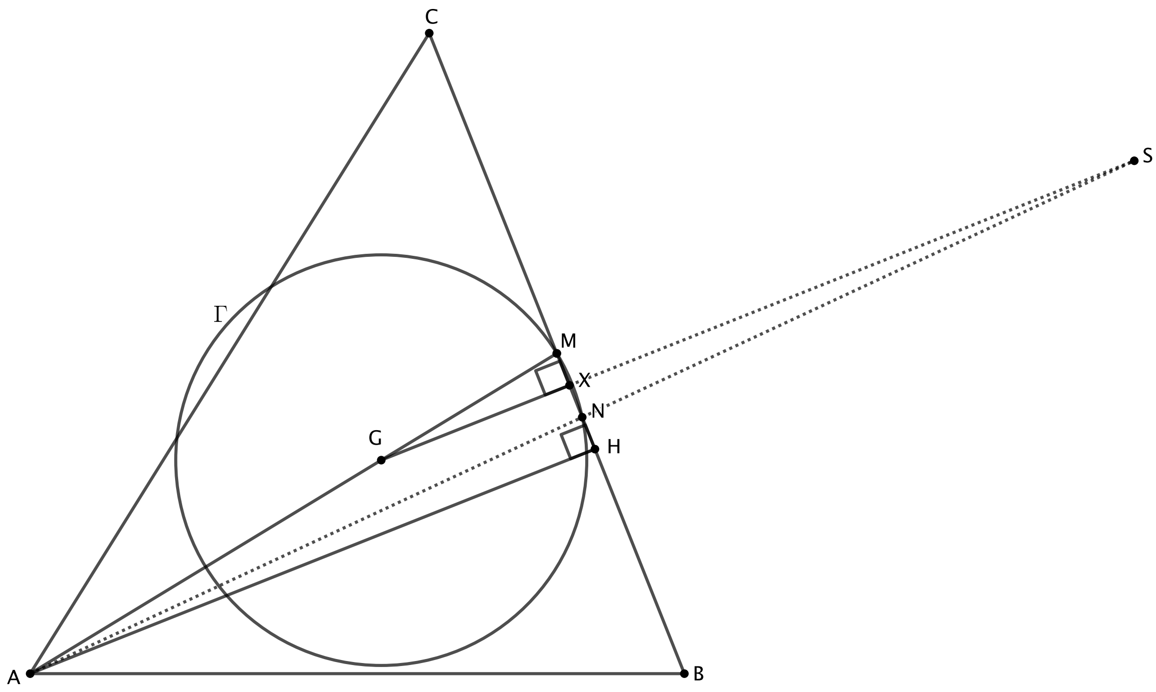
$$\begin{aligned}\angle BFC &= 180° - \angle AFB - \angle CFD\\ &= 180° - \left(90° - \frac{\angle BAF}{2}\right) - \left(90° - \frac{\angle FDC}{2}\right)\\ &= \frac{\angle BAF + \angle FDC}{2}\\ &= 90°,\end{aligned}$$

sillä suorat AB ja CD ovat yhdensuuntaiset.

4. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio sekä $AB \neq AC$. Lisäksi olkoot G kolmion ABC painopiste, M sivun BC keskipiste, Γ G-keskeinen ympyrä, jonka säde on GM sekä N ympyrän Γ ja suoran BC pisteestä M eroava leikkauspiste. Edelleen, olkoon S pisteen A peilaus pisteen N suhteen.

Osoita, että suora GS on kohtisuorassa suoraa BC vasten.

Ratkaisu. Ratkaisuidea perustuu siihen huomioon, että tiedetään kuviosta löytyvän tiettyjä suoria kulmia sekä tiettyjen janojen suhteet ovat tunnettuja. Kun nämä tiedot yhdistää, saa väitteen todistettua.



Olkoon X janan MN keskipiste. Koska ympyrän Γ säteinä $GM = GN$, niin kolmio $\triangle GMN$ on tasakylkinen ja täten suora GX on kohtisuorassa suoraa BC vasten. Osoitetaan, että myös suora XS on kohtisuorassa suoraa BC vasten. Tästä nimittäin seuraa, että pisteet G, X ja S ovat samalla suoralla eli suora GS on kohtisuorassa suoraa BC vasten.

Seuraavaksi hyödynnetään tunnettuja suoria kulmia. Kolmion korkeusjanahan on aina määritelmänsä mukaan kohtisuorassa sivua/sivun jatketta vastaan. Olkoon siis H kolmion $\triangle ABC$ kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste suoralla BC. Koska pisteet A, G ja M ovat samalla suoralla ja $\angle MHA = 90° = \angle MXG$, niin suorat AH ja GX ovat yhdensuuntaiset sekä on $\angle HAM = \angle XGM$. Siis kk-yhdenmuotoisuuskriteerin nojalla $\triangle AHM \sim GXM$. Tästä seuraa, että koska AM on kolmion mediaani, niin $AM = 3GM$ ja täten $HM = 3XM$. Koska X on janan MN keskipiste, niin saadaan $NX = XM = NH$.

Nyt enää yhdistetään edellä todistetut tulokset siihen tietoon, että piste S on pisteen A peilaus pisteen N suhteen. Peilauksen takia $AN = SN$. Lisäksi ristikulmina kulmat $\angle ANH$ ja $\angle SNX$ ovat yhtä suuret. Lisäksi edellisessä kappaleessa todettiin, että $NX = NH$. Täten sks-yhtenevyyskriteerin nojalla $\triangle AHN \cong \triangle SXN$. Täten $\angle NXS = \angle NHA = 90°$. Toisen kappaleen nojalla tämä todistaa väitteen.

5. Erikoisessa koripallopelissä voi saada korista joko 3 tai 7 pistettä. Mikä on suurin pistemäärä, jota joukkue ei voi saavuttaa? Jos toinenkin joukkue voi saada pisteitä, mitkä joukkueiden pistemäärien erotukset ovat mahdollisia? Entä jos pistemäärät ovatkin 6 ja 10?

Ratkaisu. Kokeilemalla pieniä yhdistelmiä huomataan, että pistemäärää 13 on mahdoton saavuttaa. Todistetaan, että kaikki pistemäärät $n \geq 14$ ovat saavutettavissa. Tarkastellaan n:ää modulo 3:

- Jos $n \equiv 0 \pmod 3$, pistemäärä saavutetaan $n/3$ kolmen pisteen korilla.
- Jos $n \equiv 1 \pmod 3$, $n - 7 \equiv n - 1 \equiv 0 \pmod 3$, joten pistemäärä saavutetaan $(n-1)/3$ kolmen ja yhdellä seitsemän pisteen korilla.
- Jos $n \equiv 2 \pmod 3$, $n - 14 \equiv n - 2 \equiv 0 \pmod 3$, joten pistemäärä saavutetaan $(n-1)/3$ kolmen ja kahdella seitsemän pisteen korilla.

Joukkueiden pistemäärän erotus voi saada kaikki sellaiset arvot n, joille Diofantoksen yhtälöllä $3x + 7y = n$ on ratkaisu. Koska $\text{syt}(3, 7) = 1$, ratkaisu on aina olemassa. Sellaiseksi kelpaa esimerkiksi $x = -2n$, $y = n$.

Jos pistemäärät ovat 6 ja 10, mitään paritonta pistemäärää ei voi saavuttaa, koska $\text{syt}(6, 10) = 2$, joten suurinta saavuttamatonta pistemäärää ei ole olemassa. Pistemäärien erotus voi olla mikä tahansa parillinen luku.

6. Olkoon $A = 3^{105} + 4^{105}$. Todista, että $7 \mid A$. Selvitä A:n jakojäännös jaettaessa 11:llä ja 13:lla.

Ratkaisu. Koska $A = (3+4)(3^{104} - 3^{103} \cdot 4 + 3^{102} \cdot 4^2 - \cdots - 3 \cdot 4^{103} + 4^{104})$, A on jaollinen seitsemällä.

Tarkastellaan kolmen ja neljän potensseja modulo 11 ja 13:

i	3^i mod 11	3^i mod 13	4^i mod 11	4^i mod 13
1	3	3	4	4
2	9	9	5	3
3	5	1	9	12
4	4		3	9
5	1		1	10
6				1

Kunkin sarakkeen laskeminen voidaan lopettaa, kun löytyy ykkönen, koska voidaan päätellä, että $3^{5n+k} = (3^5)^n 3^k \equiv 1^n 3^k \pmod{11}$ jne. Siten

$$3^{105} = (3^5)^{21} \equiv 1 \pmod{11} \qquad \text{ja} \qquad 4^{105} = (4^5)^{21} \equiv 1 \pmod{11},$$

joten $A \equiv 2 \pmod{11}$ ja

$$3^{105} = (3^3)^{35} \equiv 1 \pmod{13} \qquad \text{ja} \qquad 4^{105} \equiv (-1)^{35} \equiv -1 \pmod{13},$$

joten $A \equiv 0 \pmod{13}$.

7. Osoita, että jos n ei ole alkuluku, niin $2^n - 1$ ei ole alkuluku.

Ratkaisu. Jos $n = rs$, niin $2^n - 1 = (2^r)^s - 1^s$, ja $a^s - b^s$ on jaollinen $a - b$:llä. Tekijöihinjako $a^s - a^s = (a-b)(a^{s-1} + a^{s-2}b + \cdots + ab^{s-2} + b^{s-1})$ on helppo tarkistaa:

$$(a-b) \cdot \sum_{j=0}^{s-1} a^j b^{s-1-j} = \sum_{j=0}^{s-1} a^{j+1} b^{s-1-j} - \sum_{j=0}^{s-1} a^j b^{s-j} = \sum_{j=1}^{s} a^j b^{s-j} - \sum_{j=0}^{s-1} a^j b^{s-j} = a^s - b^s.$$

8. Osoita, että jos luvulla n on pariton tekijä, niin $2^n + 1$ ei ole alkuluku.

Ratkaisu. Jos $n = rs$, niin $2^n + 1 = (2^r)^s + 1^s$, ja $a^s + b^s$ on jaollinen $a + b$:llä, kun s on pariton. Tekijöihinjako on

$$a^s + a^b = (a+b)(a^{s-1} - a^{s-2}b + \cdots - ab^{s-2} + b^{s-1}) = (a+b) \sum_{j=0}^{s-1} a^j (-b)^{s-1-j}.$$

9. Onko olemassa äärettömän monta sellaista parillista positiivista kokonaislukua k, että kaikilla alkuluvuilla p luku $p^2 + k$ on yhdistetty luku?

Ratkaisu. Kyllä on. Tapaus $p = 2$ on helppo: $p + k$ on parillinen ja siten yhdistetty luku kaikilla parillisilla k. Tapauksessa $p = 3$ huomataan, että $p^2 + k \equiv 0 \pmod{5}$ jos $k \equiv 1 \pmod{5}$, joten $p^2 + k$ on viidellä jaollinen, kun $k = 6, 16, 26, \ldots$.

Olkoon $p > 3$. Silloin $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, joten jos $k \equiv 2 \pmod{3}$, on $p^2 + k \equiv 0 \pmod{3}$. Aiemmista luvuista k joka kolmas on $\equiv 2 \pmod{3}$: $k = 26, 56, 86, \ldots$. Näitä lukuja k on siis äärettömän monta.

Päättelyä voi suoraviivaistaa kiinalaisella jäännöslauseella: etsitään lukuja k, joille

$$\begin{cases} k \equiv 0 \pmod{2}, \\ k \equiv 2 \pmod{3} \text{ ja} \\ k \equiv 1 \pmod{5}. \end{cases}$$

Ratkaisu löytyy modulo $\operatorname{pyj}(2,3,5) = 30$, ja helposti nähdään että se on $k \equiv 26 \pmod{30}$.

10. Merkitään luvun n 10-järjestelmäesityksen numeroiden summaa $S(n)$. Selvitä $S(S(S(4444^{4444})))$. (IMO 1975)

Ratkaisu. Luvun 4444^{4444} 10-järjestelmäesityksessä on vähemmän numeroita kuin luvun 10000^{4444}, ja jokainen numero on enintään 9, joten

$$S(4444^{4444}) < 9 \cdot 4 \cdot 4444 = 159984.$$

Mahdollisista luvuista suurin numeroiden summa on luvulla 99999, joten

$$S(S(4444^{4444})) \leq 45.$$

Näiden lukujen numerosummista suurin on 12.

Tutkitaan lukuja tunnetun yhdeksällä jaollisuussäännön avulla:

$$4444^{4444} \equiv S(4444)^{4444} = 16^{4444} \equiv 7^{4444} \pmod 9.$$

Koska $7^2 \equiv 4$ ja $4^2 \equiv 7$, $7^{4444} \equiv 7$ ja edelleen $S(S(S(4444^{4444}))) \equiv 7 \pmod 9$, joten vastaus on 7.

11. Etsi kaikki alkuluvut p ja q, joille $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

Ratkaisu. Ratkaisuja ovat $(p, q) = (3, 3)$, $(3, 13)$, $(13, 3)$. Nämä on helppo tarkistaa ratkaisuiksi: $5^3 - 2^3 = 117 = 3^2 \cdot 13$ ja $5^{13} - 2^{13} = (5 - 2) \cdot (\dots)$.

Todistetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $p \leq q$. Koska $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ on pariton luku, $3 \leq p \leq q$.

Jos alkuluku k jakaa erotuksen $5^k - 2^k$, niin $3 = 5 - 2 \equiv 5^k - 2^k \pmod k$ Fermat'n pienen lauseen perusteella. Koska myös $0 \equiv 5^k - 2^k \pmod k$, on oltava $k = 3$.

Olkoon $p > 3$. Tapaus $p = 5$ on mahdoton, koska 5 ei voi jakaa kumpaakaan tulon tekijää. Yllä saadun tuloksen perusteella $p \mid 5^q - 2^q$ eli $5^q \equiv 2^q \pmod p$. Fermat'n pienen lauseen perusteella $5^{p-1} \equiv 2^{p-1} \pmod p$. Siten*

$$5^{\mathrm{syt}(p-1,q)} \equiv 2^{\mathrm{syt}(p-1,q)} \pmod p.$$

Koska $q \geq p$ on alkuluku, $\mathrm{syt}(p - 1, q) = 1$. Mutta silloin saatiin kongruenssi $5 \equiv 2 \pmod p$, jolloin on $p = 3$ vastoin oletusta.

On siis oltava $p = 3$. Jos $q > 3$, niin $q \mid 5^p - 2^p = 3^2 \cdot 13$, joten $q = 13$.

* Tunnettu apulause: kun $\mathrm{syt}(a, m) = \mathrm{syt}(b, m) = 1$, $a^x \equiv b^x \pmod m$ ja $a^y \equiv b^y \pmod m$, niin $a^{ux} b^{vy} \equiv a^{vy} b^{ux} \pmod m$ kaikilla positiivisilla luvuilla u, v. Koska $\mathrm{syt}(a, m) = \mathrm{syt}(b, m) = 1$, seuraa $a^{ux-vy} \equiv b^{ux-vy} \pmod m$, jos $ux - vy > 0$. Valitaan u ja v Bézout'n identiteetin avulla sellaisiksi, että $ux - vy = \mathrm{syt}(x, y)$, jolloin $a^{\mathrm{syt}(x,y)} \equiv b^{\mathrm{syt}(x,y)} \pmod m$.

12. Paperille on piirretty neliö, jonka sivu on 10. Kaksi pelaajaa piirtää vuorotellen neliön sisään ympyrän, jonka halkaisija on 1. Ympyrät eivät saa mennä päällekkäin, mutta saavat sivuta toisiaan ja neliön sivuja. Voittaja on se, joka saa piirrettyä viimeisen sääntöjen mukaisen ympyrän. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

Ratkaisu. Aloittaja voittaa pelaamalla ensimmäisen ympyrän neliön keskelle ja peilaamalla tämän jälkeen vastustajansa siirrot. Peilaaminen onnistuu aina, sillä kuvio pysyy neliön keskipisteen suhteen symmetrisenä.

13. Pöydällä on 30 kiveä. Kaksi pelaajaa ottaa vuorollaan pöydältä 1 – 9 kiveä. On kiellettyä ottaa samaa määrää kiviä kuin toinen pelaaja juuri otti edellisellä siirrollaan. Viimeisen laillisen siirron tekijä voittaa. Kummalla pelaajista on voittostrategia?

Ratkaisu. Olkoon ensimmäisenä pelaava Anna ja toisena pelaava Bella. Anna voittaa ottamalla ensimmäisellä siirrolla 8 kiveä. Annan tavoite on jättää Bellan vuorolle tilanne, jossa pöydässä on joko 11 tai 16 kiveä.

Jos pöydällä on 11 kiveä Bellan vuoron alussa, Bella häviää. Jos hän nimittäin ottaa 2 kiveä tai enemmän, Anna voittaa heti seuraavalla siirrolla. Jos taas Bella ottaa yhden, jäljelle jää 10 kiveä. Kymmenestä kivestä Anna ottaa 5, eikä Bella voi ottaa samaa määrää. Anna voittaa seuraavalla siirrolla.

Anna siis aloittaa pelin ottamalla 8 kiveä, jolloin Bellan vuoron alussa kiviä on 22. Jos Bella ottaa 2 kiveä tai enemmän, Anna voi seuraavalla siirrollaan varmistaa kivien määräksi 11, ja Bella häviää.

Bellan ainoa toivo on siis ottaa 22 kivestä vain yksi. Annalle jää 21 kiveä, joista hän ottaa 5 kappaletta (muuten Bella jättää vuoronsa jälkeen pöydälle 11 kiviä). Bellan vuorolle jää siis 16 kiveä.

Jos Bella ottaa 16 kivestä 1, 2, 3 tai 4 kappaletta, Anna ottaa vastaavasti 4, 3, 2 tai 1 ja Bellalle jää taas 11 kiveä, mikä tietää häviötä. Jos Bella taas ottaa 7 tai 9 kiveä, Anna voittaa heti ottamalla loput kivet. Jos Bella ottaa 6 kiveä, jäljellä jää 10, jolloin Anna voittaa, kuten edellä pohdittiin. Jäljellä jää siis Bellan vaihtoehto ottaa 16 kivestä 8. Tähän Anna voi vastata ottamalla 8 kivestä 4 kappaletta, jolloin Bella häviää seuraavalla siirrolla, otti hän sitten 2 kiveä (Anna ottaa yhden kiven ja peli päättyy) tai 1 tai 3 kiveä (Anna ottaa loput). Anna voittaa siis varmasti ottamalla aluksi 8 kiveä.

Oheisessa taulukossa on vielä merkittynä keskeiset siirrot sen mukaan, kuinka monta kiveä vuoron alussa on jäljellä.

Anna					30				
					↓				
Bella					22				
				↙		↘			
Anna			alle 21				21		
			↓				↓		
Bella			11				16		
		↙	↓				↓		
Anna	10		alle 10				8		
	↓		↓				↓		
Bella	5		0				4		
	↓					↙		↘	
Anna	alle 5				1 tai 3				2
	↓				↓				↓
Bella	0				0				1

14. Pöydällä on $2n+1$ kiveä, missä $n \geq 3$. Kaksi pelaajaa poistaa kiviä vuorotellen. Kivien poisto tapahtuu seuraavasti: pelaaja jakaa kivet kahteen lukumäärältää erisuureen kasaan (molemmissa kasoissa täytyy olla kiviä) ja poistaa niistä pienemmän pöydältä. Voittaja on se, jonka siirron jälkeen pöydällä on korkeintaan k kiveä, missä $2 \leq k < n$. Millä lukujen n ja k arvoilla aloittajalla on voittostrategia?

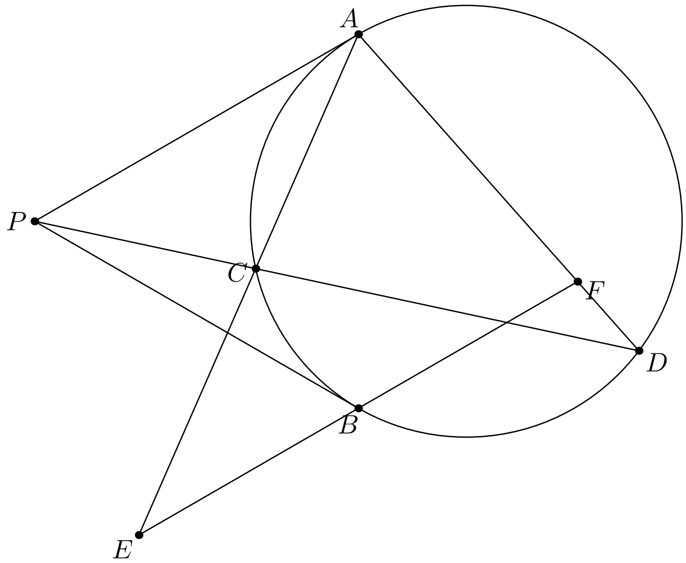
Ratkaisu. Aloittaja voittaa kaikilla lukujen n ja k arvoilla, kun $2 \leq k < n$. Peli ei voi päättyä tasan, sillä kivien määrä vähenee joka siirrolla, kunnes luku $k \geq 2$ saavutetaan. Jommallakummalla pelaajista täytyy siis olla voittostrategia kullakin yhdistelmällä n, k.

Strategian varastus -argumentti osoittaa, ettei toisena pelaavalla voi olla voittostrategiaa: Jos nimittäin olisi, sen pitäisi toimia myös tapauksessa, jossa aloittaja ottaa ensimmäisellä siirrollaan yhden kiven. Tällöin kiviä olisi jäljellä $2n$, joten toisena pelaavan voittavan siirron tulisi olla poistaa $b \leq n-1$ kiveä. Jos tämä olisi voittava strategia, aloittaja olisi voinut pelata tätä strategiaa itse poistamalla aloitusvuorollaan $b+1$ kiveä. (Tämä olisi ollut sääntöjen mukainen siirto, sillä $b+1 \leq n$, eli alle puolet pöydällä alussa olleista kivistä.) Toisena pelaavalla ei siis voi olla voittostrategiaa, joten ensimmäisenä pelaavalla on.

Vaativampia tehtäviä

15. Olkoon P piste ympyrän Γ ulkopuolella. Sivutkoon pisteestä P ympyrälle Γ piirretyt tangentit ympyrää pisteissä A ja B. Olkoon C piste lyhyemmällä kaarella AB, ja olkoon D suoran PC ja ympyrän Γ leikkauspiste. Olkoon ℓ se suora, joka kulkee pisteen B kautta ja joka on yhdensuuntainen suoran PA kanssa. Suora ℓ leikkaa suoria AC ja AD pisteissä E ja F. Osoita, että B on janan EF keskipiste.

Ratkaisu.



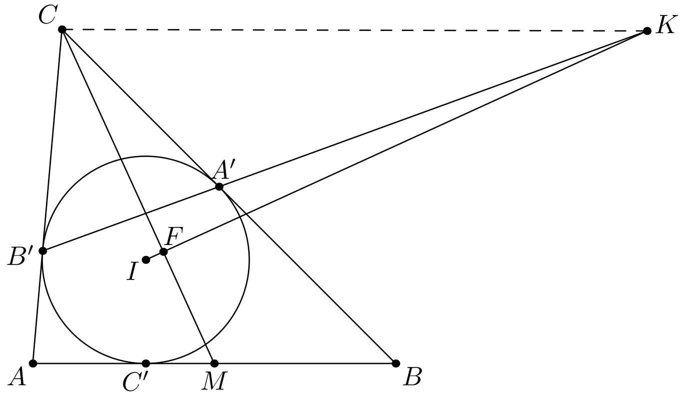
Käytämme OOOO-teoksessa esitettyjä projektiivisen geometrian tuloksia, ja $XY \cap ZW$ merkitsee suorien XY ja ZW leikkauspistettä. Nelikulmio $ABCD$ on harmoninen, joten ottamalla perspektiivi suoralle EF saadaan

$$-1 = (A, B; C, D) \stackrel{A}{=} (AP \cap EF, B, E, F).$$

Oletuksen nojalla $AP \| EF$, joten $AP \cap EF$ on piste äärettömyydessä. Täten B on janan EF keskipiste.

16. Kolmion ABC sivuaa kolmion sivuja BC, CA ja AB pisteissä A', B' ja C'. Sisäympyrän keskipisteestä I piirretty kohtisuora kolmion ABC kärjestä C piirretylle mediaanille leikkaa suoran $A'B'$ pisteessä K. Osoita, että $CK \parallel AB$.

Ratkaisu.



Kuvan piste F on pisteen I projektio mediaanille CM.

Naiivi kulmanjahtaus ei tunnu toimivan: piste K on vaikea, ja sen määrittelemiseen on käytetty mediaania CM. Mediaanit tunnetusti eivät sovi hyvin yhteen kulmaehtojen kanssa. (Kulmaa $\angle MCB$ ei voi esittää kolmion ABC kulmien avulla ilman trigonometriaa tai muuta vastaavaa.)

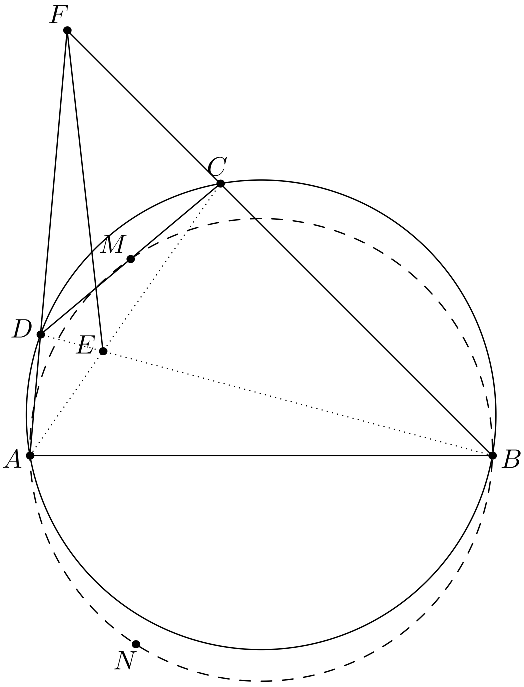
Käytämme OOOO-teoksessa esitettyjä projektiivisen geometrian tuloksia, ja $XY \cap ZW$ merkitsee suorien XY ja ZW leikkauspistettä. Pätee

$$(A, B; M, CK \cap AB) \overset{C}{=} (B', A'; A'B' \cap CM, K),$$

joten $CK \cap AB$ on piste äärettömyydessä jos ja vain jos $(B', A'; A'B' \cap CM, K) = -1$. Huomataan, että $\angle CFK = 90°$, joten $B', A', A'B' \cap CM$ ja K muodostavat harmonisen nelikon jos ja vain jos $\angle B'FC = \angle CFA'$. Jälkimmäinen ehto seuraa huomaamalla, että $CF'IFA'$ on jänneviisikulmio, jonka halkaisija on CI ja jossa $CB' = CA'$.

17. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio, piste M sivun CD keskipiste ja piste N kolmion ABM ympärysympyrällä. Oletetaan, että $N \neq M$ ja että $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. Osoita, että pisteet E, F ja N ovat samalla suoralla, missä E on suorien AC ja BD leikkauspiste ja F on suorien BC ja DA leikkauspiste.

Ratkaisu.



Käytämme OOOO-teoksessa esitettyjä projektiivisen geometrian tuloksia, ja $XY \cap ZW$ merkitsee suorien XY ja ZW leikkauspistettä.

Tehtävän kriittinen huomio on, että CD ja EF leikkaavat kolmion ABM ympärysympyrällä. Tätä ei ole helppo huomata. Hyvän kuvan piirtäminen auttaa tällaisten huomioiden tekemistä.

Todistetaan tämä. Ideana on laskea sivujen pituudet ja käyttää pisteen potenssia. Olkoot $T = FE \cap CD$, $G = AB \cap CD$ ja $H = FE \cap AB$. Merkitään $x = GD, y = TD$ ja $z = TC$.

Tiedämme, että $(A, B; G, H) = -1$, joten ottamalla perspektiivin pisteestä F saamme

$$(D, C; G, T) = -1.$$

Täten

$$\frac{GD}{GC} = \frac{TD}{TC}$$

eli

$$\frac{x}{x + y + z} = \frac{y}{z}.$$

Tämän voi kirjoittaa muodossa $xz = y(x + y + z)$.

Haluamme todistaa, että

$$GD \cdot GC = GT \cdot GM,$$

koska tällöin pisteen potenssilla pätisi $GA \cdot GB = GD \cdot GC = GT \cdot GM$, ja $ATMB$ olisi jänneneli-kulmio. Todistettava väite on siis

$$x(x+y+z) = (x+y)(x+\frac{y+z}{2}).$$

Sievennetään:

$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= (x+y)(x+\frac{y+z}{2}) \Leftrightarrow \\ x^2+xy+xz &= x^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xz+xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}yz \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}xz &= \frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}yz \Leftrightarrow \\ xz &= y(x+y+z). \end{aligned}$$

Tämän tiesimmekin jo, joten aputulos on todistettu.

Väite seuraakin tästä. Pätee

$$-1 = (A,B;M,N) \stackrel{T}{=} (A,B;G,TN\cap AB).$$

Toisaalta tiedämme, että $(A,B;G,EF\cap AB) = -1$. Täten $EF\cap AB = TN\cap AB$, joten E, F ja N ovat samalla suoralla.

Kommentti: Tehtävän selvästi vaikein vaihe on huomata, että T on kolmion AMB ympärysympyrällä. Todistus eteni melko suoraviivaisesti käyttäen harmonisilla nelikoilla saatavia pituusehtoja. Motivaatio käyttää pituusehtoja on se, ettei tehtävässä ole kovin paljoa järkeviä kulmia koskevia osia. Lisäksi annettu ehto on käytännössä $(A,B;M,N) = -1$, joten harmonisten nelikoiden käyttäminen on hyvin perusteltua.

Tarinan opetus on siis: geometrian tehtävissä on tärkeää piirtää hyvä kuva. Mallikuvia voi tietysti tehdä monta, ja kaikkien niistä ei tarvitse olla hyviä, mutta vähintään yksi hyvä kuva tulee piirtää. Lisälukemista aiheesta löytyy Evan Chenin materiaalista Some Notes on Constructing Diagrams (linkki: `https://web.evanchen.cc/handouts/Constructions/Constructions.pdf`).

18. Todista, että kolmen, neljän, viiden tai kuuden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa ei ole neliöluku. Anna esimerkki yhdentoista peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summasta, joka on neliöluku.

Ratkaisu. Merkitään $s(n,k) = n^2+(n+1)^2+\cdots+(n+k-1)^2$, siis k:n peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa alkaen luvusta n.

Koska $s(n-1,3) = (n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = 3n^2+2 \equiv 2 \pmod 3$ mutta 2 on neliönepäjäännös modulo 3, luku ei ole neliöluku.

Vastaavasti $s(n,4) = 4(n^2+3n+3)+2 \equiv 2 \pmod 4$ mutta 2 on neliönepäjäännös modulo 4; ja $s(n-2,5) = 5(n^2+2) \equiv n^2+2 \equiv 2$ tai $3 \pmod 4$ mutta 2 ja 3 ovat neliönepäjäännöksiä modulo 4. Edelleen $s(n-2,6) = 6n(n+1)+19 \equiv 3 \pmod 4$, koska $n(n+1)$ on parillinen, mutta 3 on neliönepäjäännös modulo 4.

Tarkastellaan lukua $s(n-5,11) = 11(n^2+10)$. Jotta tämä on neliöluku, on oltava $n^2+10 \equiv 0 \pmod{11}$ eli $n = 11m\pm1$. Silloin $s(n-5,11) = 11\big((11m\pm1)^2+10\big) = 11^2(11m^2\pm2m+1) = 11^2\big(10m^2+(m\pm1)^2\big)$. Kokeilemalla löytyy $m=2$, jolle $10m^2+(m+1)^2 = 49 = 7^2$, jota vastaa $s(18,11) = 77^2$.

19. Useimmat positiiviset kokonaisluvut voidaan esittää kahden tai useamman peräkkäisen kokonaisluvun summana. Esimerkiksi $24 = 7+8+9$ ja $51 = 25+26$. Kutsumme positiivista kokonaislukua *kiintoisaksi,* jos sitä ei voi esittää tällaisena summana. Selvitä kaikki kiintoisat luvut.

Ratkaisu. Kiintoisia ovat kahden potenssit: $n = 2^k$, kun $k \geq 0$.

Olkoon n epäkiintoisa luku. Silloin

$$n = m+(m+1)+\cdots+(m+k) = \frac{(k+1)(2m+k)}{2}. \tag{3}$$

Koska $k+1 \not\equiv 2m+k \pmod 2$, jompikumpi näistä luvuista on pariton kolmea suurempi luku, joten n:llä on pariton kolmea suurempi tekijä. Siten kaikki kahden potenssit ovat kiintoisia.

On todistettava, että muut luvut eivät ole kiintoisia. Olkoon $n = 2^h \ell$, missä $h \geq 0$ ja $\ell > 1$ on pariton. Jos $2^{h+1} < \ell$, voidaan asettaa yhtälössä (3)

$$k = 2^{h+1} - 1 \quad \text{ja} \quad m = \frac{\ell - k}{2} = \frac{\ell + 1 - 2^{h+1}}{2}.$$

Jos taas $2^{h+1} > \ell$, voidaan asettaa

$$k = \ell - 1 \quad \text{ja} \quad m = \frac{2^{h+1} - k}{2} = \frac{2^{h+1} + 1 - \ell}{2}.$$

Kummassakin tapauksessa n on epäkiintoisa.

20. Olkoon $S = \{\, 105, 106, \ldots, 210 \,\}$. Mikä on pienin sellainen n, että jokainen n-alkioinen joukko $T \subseteq S$ sisältää kaksi lukua, jotka eivät ole suhteellisia alkulukuja?

Ratkaisu. Pienin n on 26.

Selvitetään ensin joukon S alkuluvut. Merkitään A_k:lla joukon S lukuja, jotka ovat k:n monikertoja ja A:lla joukon S lukuja, jotka ovat jaollisia vähintään yhdellä luvuista $k \in P = \{\, 2, 3, 5, 7, 11 \,\}$. Käytetään summan ja erotuksen periaatetta:

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \bigcup_{k \in P} \right| = \sum_{k \in P} |A_k| - \sum_{i<j,\, i,j \in P} |A_i \cap A_j| + \ldots \\ &= (53 + 36 + 22 + 16 + 10) - (18 + 11 + 8 + 5 + 8 + 6 + 3 + 4 + 2 + 1) \\ &\quad + (4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 + 0) - 1 + 0 \\ &= 137 - 66 + 16 - 1 + 0 = 86. \end{aligned}$$

Lisäksi S:ssä on yhdistetty luku $13^2 = 169$, mutta suurempia laskematta jääneitä 13:n monikertoja ei ole. Siten joukossa S on 87 yhdistettyä lukua ja 19 alkulukua.

Kun valitaan 26 lukua joukosta S, mukana on ainakin 7 yhdistettyä lukua, ja näistä ainakin 6 kuuluu joukkoon A. Siten niistä ainakin kaksi kuuluu samaan joukkoon A_k ($k \in P$), jolloin niillä on yhteinen tekijä k eivätkä ne ole suhteellisia alkulukuja.

Todistetaan esimerkillä, että 25 lukua ei riitä. Valitaan kaikki joukon S 19 alkulukua ja lisäksi luvut

$$11^2, 5^3, 2^7, 3^2 \cdot 17, 13^2, 7 \cdot 29.$$

Helposti nähdään, että joukon luvut ovat pareittain suhteellisia alkulukuja.

21. Todista, että jos $ab = cd$, niin $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ on yhdistetty luku.

Ratkaisu. Jos $a = 0$, niin voi olla esim. $b = c = 1$ ja $d = 0$, jolloin neliöiden summa on 2, joka on alkuluku. Lisätään siis tehtävään oletus, että mikään luvuista ei ole nolla.

Supistetaan tehtävän murtoluvut: olkoot x ja y sellaiset luonnolliset luvut, että $\frac{x}{y} = \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ ja $\mathrm{syt}(x, y) = 1$, ja olkoot u ja v sellaiset luvut, että $a = ux$, $c = uy$, $d = vx$ ja $b = vy$. Silloin

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (ux)^2 + (vy)^2 + (uy)^2 + (vx)^2 = (u^2 + v^2)(x^2 + y^2).$$

Tulon kumpikin tekijä on suurempi kuin 1, joten kyseessä on yhdistetty luku.

22. Todista, että tason eri hilapisteillä (so. kokonaislukukoordinaattisilla pisteillä) on eri etäisyydet pisteestä $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$.

Ratkaisu. Oletetaan, että

$$(a-\sqrt{2})^2 + (b-\frac{1}{3})^2 = (c-\sqrt{2})^2 + (d-\frac{1}{3})^2$$

hilapisteillä (a, b) ja (c, d). Kerrotaan auki ja järjestellään termit:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + \frac{2}{3}(d-b) = 2\sqrt{2}(a-c).$$

Koska vasen puoli on rationaalinen, niin on oikeakin puoli, joten $a = c$. Siten $b^2 - d^2 - \frac{2}{3}(b-d) = 0$ eli $(b-d)(b+d-\frac{2}{3}) = 0$. Koska $b+d$ on kokonaisluku, on oltava $b = d$ ja hilapisteet ovat samat.

23. Kun $n > 11$ on kokonaisluku, todista että $n^2 - 19n + 89$ ei ole neliöluku.

Ratkaisu. Osoitetaan, että kyseinen luku on kahden peräkkäisen neliöluvun välissä:

$$(n-10)^2 = n^2 - 20n + 100 = n^2 - 19n + 89 - (n-11)$$

ja

$$(n-9)^2 = n^2 - 18n + 81 = n^2 - 19n + 89 + (n-8)$$

, joten kun $n > 11$,

$$(n-10)^2 < n^2 - 19n + 89 < (n-9)^2.$$

24. Selvitä luvun $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2020}$ kymmenjärjestelmäesityksessä desimaalipilkkua edeltävä ja sen jälkeinen numero.

Ratkaisu. Luku on $\ldots 7{,}9 \ldots$.

Muutetaan lauseketta hieman:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2020} = (5+2\sqrt{6})^{1010}.$$

Tähän voidaan soveltaa ns. konjugaattitemppua:

$$(5+2\sqrt{6})^{1010} + (5-2\sqrt{6})^{1010} = r + s\sqrt{6} + r - s\sqrt{6} = 2r,$$

missä r ja s ovat kokonaislukuja. Koska $0 < 5 - 2\sqrt{6} < 1$, $(5-2\sqrt{6})^{1010}$ on hyvin pieni positiivinen luku ja kysytty desimaalipilkun jälkeinen numero on 9. Pilkkua edeltävä numero löydetään laskemalla $2r - 1 \bmod 10$. Binomikaavan mukaan

$$(5+2\sqrt{6})^{1010} = \sum_{j=0}^{1010} \binom{1010}{j} 5^j (2\sqrt{6})^{1010-j},$$

joten

$$r = \sum_{j=0}^{505} \binom{1010}{2j} 5^{2j} (2\sqrt{6})^{1010-2j} = \sum_{j=0}^{505} \binom{1010}{2j} 25^j 24^{505-j}.$$

Kun $0 < j < 505$, $25^j 24^{505-j} \equiv 0 \pmod{10}$, joten

$$r \equiv 24^{505} + 25^{505} \equiv 4^{505} + 5^{505} \equiv 4 + 5 = 9 \pmod{10}.$$

Siten desimaalipilkkua edeltävä numero on $2r - 1 \equiv 7$.