International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Finnish**

Day: **1**

Maanantai, 18. heinäkuuta 2011

Tehtävä 1. Olkoon $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ neljästä erisuuresta positiivisesta kokonaisluvusta koostuva joukko, jonka alkioiden summasta $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ käytetään merkintää s_A. Olkoon n_A niiden parien (i, j) lukumäärä, joilla $1 \leq i < j \leq 4$ ja $a_i + a_j$ jakaa luvun s_A. Etsi kaikki sellaiset neljän erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukot A, jotka saavuttavat suurimman mahdollisen arvon n_A.

Tehtävä 2. Olkoon $\mathcal{S}$ vähintään kahdesta pisteestä koostuva äärellinen joukko tasossa. Oletetaan, että mitkään kolme joukon $\mathcal{S}$ pistettä eivät ole samalla suoralla. Kutsutaan *tuulimyllyksi* prosessia, joka alkaa suoralla ℓ, joka kulkee yksittäisen pisteen $P \in \mathcal{S}$ kautta. Suora pyörii myötäpäivään *kierron keskipisteen* P ympäri kunnes se törmää johonkin toiseen joukkoon $\mathcal{S}$ kuuluvaan pisteeseen. Nyt tämä piste Q alkaa toimia kierron keskipisteenä, ja suora pyörii myötäpäivään pisteen Q ympäri kunnes se törmää jälleen joukon $\mathcal{S}$ pisteeseen. Tämä prosessi jatkuu loputtomasti.
Osoita, että voidaan valita sellainen $P \in \mathcal{S}$ ja pisteen P kautta kulkeva suora ℓ, että näistä aloitettu tuulimylly käyttää jokaista joukon $\mathcal{S}$ pistettä kierron keskipisteenä äärettömän monta kertaa.

Tehtävä 3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty reaalilukujen joukossa, ja joka toteuttaa ehdon

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y. Osoita, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \leq 0$.

Tiistai, 19. heinäkuuta 2011

Tehtävä 4. Olkoon $n > 0$ kokonaisluku. Käytössämme on orsivaaka ja n painoa, joiden painot ovat $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Meidän tulee asettaa painot yksitellen vaa'alle siten, että oikea vaakakuppi ei ole koskaan painavampi kuin vasen vaakakuppi. Joka vaiheessa valitaan yksi jäljellä olevista painoista ja asetetaan se joko vasempaan tai oikeaan vaakakuppiin, kunnes kaikki painot ovat vaa'alla.
Määritä kuinka monella tavalla tämä voidaan tehdä.

Tehtävä 5. Olkoon f funktio kokonaislukujen joukolta positiivisten kokonaislukujen joukkoon. Oletetaan, että millä tahansa kahdella kokonaisluvulla m ja n erotus $f(m)-f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m-n)$. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla m ja n, joilla $f(m) \leq f(n)$ pätee, että $f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m)$.

Tehtävä 6. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka ympäri piirretty ympyrä on Γ. Olkoon suora ℓ ympyrän Γ tangentti, ja olkoot ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c suorat, jotka on saatu peilaamalla suora ℓ suorien BC, CA ja AB suhteen tässä järjestyksessä. Osoita, että suorien ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c määrittelemän kolmion ympäri piirretty ympyrä tangenteeraa ympyrää Γ.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen