1 Joulukuun 2010 kirjevalmennustehtävät – helpot

Ratkaisuja voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen laurihallila@gmail.com, tavallisella postilla Lauri Hallila, Kalliorinteenkuja 1, 02770 Espoo, tai palauttaa seuraavan valmennusviikonlopun aikana.

1. Luokassa on 25 oppilasta. Todista, että ainakin kahdella oppilaalla on sama määrä ystäviä tässä luokassa (tehtävässä pätee, että jos A on B:n ystävä, niin myös B on A:n ystävä).

2. 6 ihmistä matkustaa bussilla. Todista, että heidän joukostaan voi löytää joko 3 henkilöä, jotka kaikki tuntevat toisensa, tai 3 sellaista henkilöä, joista ketkään kaksi ei tunne toisiaan.

3. $3x4$-ruudukossa on 7 pistettä. Osoita, että on olemassa kaksi pistettä, joiden etäisyys toisistaan on korkeintaan $\sqrt{5}$.

4. $3x4$-ruudukossa on 6 pistettä. Osoita, että on olemassa kaksi pistettä, joiden etäisyys toisistaan on korkeintaan $\sqrt{5}$.

5. Ympyrällä on kuusi pistettä. Pisteillä on numerot $1, 0, 1, 0, 0, 0$ (tässä järjestyksessä), kun ympyrä käydään läpi vastapäivään. Kahden vierekkäisen pisteet luvut voidaan tehdä yhtä suuremmiksi. Onko mahdollista saavuttaa näillä lisäyksillä tila, jossa jokaisessa pisteessä on sama numero?

6. n henkilöä istuu pyöreän pöydän ääressä. Kuinka moni $n!$ eri istumajärjestyksestä ovat toisistaan erillisiä (eli kuinka monta eri järjestystä on joissa naapuruussuhteet ovat erilaisia)?

7. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (m, n), joilla mxn on suorakulmio, ja niiden ruutujen lukumäärä, jotka koeskettavat suorakulmion reunaa, on sama, kuin niiden ruutujen lukumäärä, jotka eivät kosketa suorakulmion reunaa.

8. Opettaja pyytää Artoa valitsemaan luvun 2009^{10} positiivisia tekijöitä siten, että mikään valituista luvuista ei jaa toista valittua lukua. Kuinka monta tekijää Arto voi enintään valita?

9. Olkoon kolmion kulmat x, y ja z (asteina).

   a Osoita, että jos $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ ja $\frac{z}{x}$ ovat kaikki rationaalilukuja, niin myös x, y ja z ovat rationaalilukuka.

   b Osoita, että jos tasan yksi luvuista $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ ja $\frac{z}{x}$ on rationaaliluku, niin luvut x, y ja z ovat irrationaalilukuja.

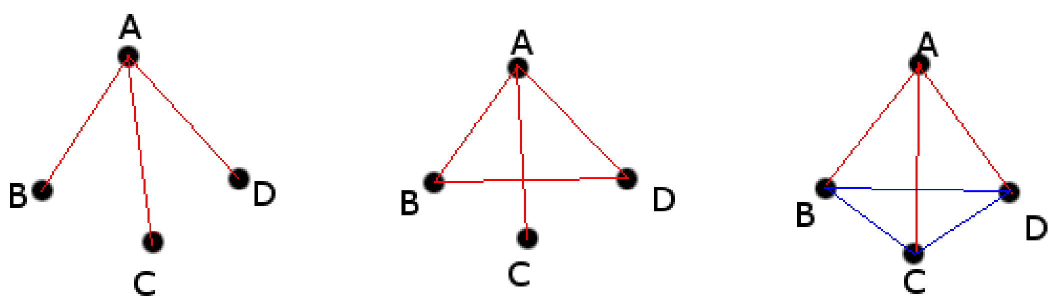
10. Olkoon $n > 18$ positiivinen kokonaisluku siten, että $n - 1$ ja $n + 1$ ovat kumpikin alkulukuja. Osoita, että luvulla n on vähintään 8 eri positiivista tekijää.

1 12/2010 kirjevalmennustehtävien ratkaisut – helpot

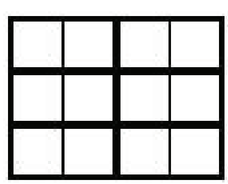
1. Yksittäisellä oppilaalla voi olla 0-24 ystävää; ainoa asetelma, jossa millään kahdella oppilaalla ei ole yhtä montaa ystävää, on sellainen, jossa yhdellä oppilaalla on 0 ystävää, yhdellä 1, yhdellä 2, ..., yhdellä 23 ystävää ja viimein yhdellä oppilaalla 24 ystävää. Tämä ei ole kuitenkaan mahdollista; jos yhdellä oppilaalla on 24 ystävää, niin hän on kaikkien muiden ystävä, jolloin ei ole olemassa oppilasta, jolla olisi 0 ystävää.

2. Merkitään ihmisiä verkon *solmuilla* (kuvassa pisteinä). Jos kaksi ihmistä tuntevat toisensa, piirretään näiden välille sininen *särmä* (kuvassa viiva pisteiden välissä); jos he eivät tunne toisiaan, piirretään heidän välille punainen särmä. Tällä tavalla jokainen pistepari on yhdistetty joko sinisellä tai punaisella viivalla.

Tarkastellaan nyt mielivaltaista solmua A. Siitä lähtee 5 särmää. Laatikkoperiaatteen nojalla näistä löytyy joko 3 sinistä tai 3 punaista särmää. Oletetaan, että löytyy 3 punaista särmää (sinisten särmien tapaus menee samalla tavalla). Tarkastellaan näiden kolmen särmän päässä olevia solmuja B, C ja D. Jos näistä jotkin kaksi on yhdistetty punaisella särmällä, niin löydämme "punaisen kolmion", kolme ihmistä, jotka eivät tunne toisiaan. Muussa tapauksessa taas solmut B, C ja D ovat yhdistettyjä toisiinsa sinisillä särmillä, ja muodostavat kolmen ihmisen joukon, joista kaikki tuntevat toisensa.

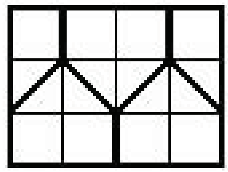


3. Tarkastellaan kuvaa. Kuudesta suorakulmiosta ainakin yhteen tulee kaksi tai enemmän pistettä.



Koska suorakulmion diagonaalin päätepisteet ovat suorakulmion sisällä kauimpana toisistaan olevat pisteet ja diagonaalin pituus on $\sqrt{5}$ (Pythagoraan lause), niin nämä pisteet ovat etsimämme pisteet.

4. Nyt emme voi enää jakaa suorakulmiota samalla tavalla kuin edellisessä tehtävässä. Tarkastellaan allaolevaa kuvaa, jossa suorakulmio on jaettu viiteen osaan.



Kuudesta pisteesta ainakin kaksi on samassa osassa. Jälleen yhdessä osassa kahden pisteen välinen etäisyys voi olla korkeintaan $\sqrt{5}$ (tarkista, että mikään sivu tai diagonaali ei ylitä pituutta $\sqrt{5}$!), niin nämä kaksi pistettä ovat etsimämme pisteet.

5. n ihmistä voidaan järjestää $n!$ eri tavalla. Koska ihmiset ovat nyt kuitenkin pöydän ympärillä, niin kiertämällä pöydän istujia myötä- tai vastapäivään tai peilaamalla paikat vastakkaisiksi istujien keskinäinen järjestys ei muutu. Jos yhdestä järjestyksestä ei saa toista kiertämällä tai peilaamalla, niin kyseessä on oleellisesti eri järjestys. Siten meillä on $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$ erillistä järjestelyä, kun $n > 2$.

6. oletetaan, että luvut $a_1, \ldots, a_6$ ovat tämänhetkiset numerot. Tällöin $I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ on *invariantti* eli muuttumaton luku. Alussa $I = 2$ ja aina kun lukuja lisätään, tämä numero pysyy samana. Toivotussa lopputilassa $I = 0$, mutta tätä ei koskaan saavuteta.

7. Vastaus: $(5, 12)$, $(6, 8)$, $(8, 6)$, $(12, 5)$.
Ratkaisu: Voimme jättää väliin tapaukset $m = 1$ ja $n = 1$, sillä tällöin kaikki yksikköneliöt ovat ulkoreunalla. Oletetaan nyt, että $m \geq 2$, $n \geq 2$. On olemassa $2m + 2n - 4$ yksikköneliötä, jotka koskettavat ulkoreunaa, joten jäljellejäävien yksikköneliöiden lukumäärä on $mn-2m-2n+4$. Tehtävän vaatimuksen mukaan pitää olla $2m + 2n - 4 = mn - 2m - 2n + 4$, mistä saamme $(m - 4)(n - 4) = 8$. Koska $m - 4 \geq -2$ ja $n - 4 \geq -2$, niin voimme eliminoida parit $\{-1, -8\}$ ja $\{-2, -4\}$ luvun 8 tekijäpareina. Jäljellejäävät tekijäparit $\{1, 8\}$ ja $\{2, 4\}$ antavat yllämainitut neljä ratkaisua.

8. Vastaus: 11.
Ratkaisu: Koska $2009 = 7^2 \cdot 41$, missä 7 ja 41 ovat alkulukuja, niin voimme ilmaista kaikki luvun 2009^{10} alkutekijät muodossa $7^n \cdot 41^m$, missä $0 \leq n \leq 20$ ja $0 \leq m \leq 10$. Koska luvulle m on 11 mahdollista vaihtoehtoa, Arno voi valita korkeintaan 11 tekijää. Muutoin kahdella annetuista tekijöistä olisi sama eksponentti m, ja luvuista se, jolla on pienempi eksponentti n, jakaisi toisen.

9. a) Huomaamme, että

$$\frac{180}{x} = \frac{x + y + z}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}. \qquad (1)$$

Oletetaan, että $\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}}$ ja $\frac{z}{x}$ ovat rationaalisia. Yhtälön (1) perusteella $\frac{180}{x}$ on kolmen rationaaliluvun summa, ja siten rationaalinen. Siten x on rationaaliluku.

Todistus luvuille y ja z menee samalla tavalla.
b) Olettamme, että esim. $\frac{x}{y}$ (ja siten myös $\frac{y}{x}$) on rationaalinen ja $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ (ja siten myös $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$) ovat irrationaalisia. Yhtälö (1) tällöin kuvaa luvun $\frac{180}{x}$ kahden irrationaalisen ja yhden rationaaliluvun summana. Siten $\frac{180}{x}$ on irrationaalinen, ja siten myös luku x. Koska $\frac{x}{y}$ on rationaalinen, niin y:n pitää olla irrationaalinen. Oletetaan nyt, että z on rationaalinen, jolloin myös $x+y = 180-z$ on rationaalinen. Tällöin $\frac{x+y}{z}$ on murtoluku, jossa osoittaja on rationaaliluku ja nimittäjä on irrationaaliluku, joten luku itse on irrationaalinen. Mutta toisaalta $\frac{x+y}{y} = \frac{x}{y}+1$ kahden rationaaliluvun summana on rationaalinen; mutta tämä on ristiriita. Siten myös luvun z pitää olla irrationaalinen.

10. Koska kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta $n-1, n, n+1$ ensimmäinen ja viimeinen ovat alkulukuja, niin luvun n pitää olla jaollinen sekä luvuilla 2 ja 3. Siten $1, 2, 3$ ja 6 ovat kaikki luvun n tekijöitä. Luku $n > 18 = 3 \cdot 6$. Jos $n = 5 \cdot 6 = 30$, niin saamme neljä lisätekijää $5, 10, 15$ ja 30 Voimme sivuuttaa luvut $n = 4 \cdot 6 = 24$ ja $n = 6 \cdot 6 = 36$, sillä $24+1$ ja $36-1$ eivät ole alkulukuja. Lopuksi, jos $n > 6 \cdot 6$, niin $6 < \frac{n}{6}$, joten luvulla n on neljä tekijää lisää, luvut $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{6}$, jotka ovat kaikki suurempia kuin 6.