Harjoitustehtävät, tammikuu 2013, helpommat

1. *Osoita, että jos x ja y ovat reaalilukuja ja $0 \le x \le 1$ ja $0 \le y \le 1$, niin*

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \le 1.$$

Ratkaisu. Lauseke on symmetrinen x:n ja y:n suhteen, joten voidaan olettaa, että $x \le y$. Silloin

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \le \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+x} = \frac{x+y}{1+x} \le \frac{x+1}{1+x} = 1.$$

2. *Askartelukerhossa on 40 lasta. Itse kullakin on joitakin nauloja, ruuveja ja pultteja. Tasan 15 lapsella on eri määrä nauloja ja pultteja ja tasan 10 lapsella on yhtä monta naulaa ja ruuvia. Osoita, että ainakin 15 lapsella on eri määrä ruuveja ja pultteja.*

Ratkaisu. Lapsia, joilla on sama määrä nauloja ja pultteja, on $40 - 15 = 25$. Näistä enintään kymmenellä on sama määrä nauloja ja ruuveja. Lopuilla ainakin 15:llä on eri määrä nauloja ja ruuveja ja siis myös eri määrä ruuveja ja pultteja.

3. *Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC M ja N ovat sivujen AB ja AC keskipisteet ja P on jokin sivun BC piste. Osoita, että $(MB - MP)(NC - NP) \le 0$.*

Ratkaisu. Piirretään korkeusjana AD. Thaleen lauseen nojalla D on ympyröillä, joiden halkaisijat ovat AB ja AC. Siis $MD = MB$ ja $ND = NC$. Jos $P = D$, $(MB - MP)(NC - NP) = 0$. Jos P on janalla BD, niin $\angle MPB > \angle MDP = \angle MBP$, josta seuraa $MB > MP$, ja $\angle NPC < \angle NDC = \angle NCP$, josta seuraa $NP > NC$. Siis $(MB - MP)(NC - NP) < 0$. Jos P on janalla DC, päättely menee samoin.

4. *Tavalliseen tapaan väritetyn 8×8-ruutuisen šakkilaudan rivejä vaihdetaan keskenään ja sarakkeita vaihdetaan keskenään. Päästäänkö näin tilanteeseen, jossa laudan vasen puoli koostuu mustista ja oikea valkoisista ruuduista?*

Ratkaisu. Jos kaksi saraketta vaihdetaan keskenään, sarakkeissa olevien mustien ruutujen lukumäärä ei muutu. Jos kaksi riviä vaihdetaan keskenään, niin sarakkeessa oleva musta ruutu saattaa vaihtua valkoiseksi, mutta samalla valkea ruutu muuttuu mustaksi. Sarakkeessa olevien mustien ja valkoisten ruutujen lukumäärä ei siis muutu. Tehtävässä ehdotetussa tilanteessa olisi joidenkin sarakkeiden mustien ruutujen lukumäärä neljä kuitenkin muuttunut kahdeksaksi tai nollaksi.

5. *Oletetaan, että luku $2^m + 3^n$ on jaollinen viidellä. Osoita, että $2^n + 3^m$ on myös jaollinen viidellä.*

Ratkaisu. Koska $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ jne, huomataan, että 2^m:n viimeinen numero toistuu neljän jaksoissa. Samoin $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$ jne.; 3^n:n viimeinen numero toistuu myös neljän jaksoissa. Huomataan, että $2^m + 3^n$ voi olla jaollinen viidellä vain seuraavissa tilanteissa: 1) $m = 4k+1$ ja $n = 4p+1$. Silloin myös $2^n + 3^m$ on jaollinen viidellä. 2) $m = 4k+2$ ja $n = 4p$. Silloin myös $2^n + 3^m$ on jaollinen viidellä. 3) $m = 4k$ ja $n = 4p+2$. Silloin myös $2^n + 3^m$ on jaollinen viidellä. 4) $m = 4k+3$ ja $n = 4k+3$. Silloinkin $2^n + 3^m$ on jaollinen viidellä.

6. *Kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ on $AB = A'B'$, $\angle CAB = \angle C'A'B' = 60°$ ja $\angle ABC + \angle A'B'C' = 180°$. Osoita, että*

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A'C'}.$$

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että AB ja A_1B_1 ovat sama jana ja että C ja C_1 ovat eri puolilla suoraa $AB = A_1B_1$. Silloin $\angle ABC$ ja $\angle ABC_1$ ovat vieruskulmia, joten C, B, C_1 ovat samalla suoralla. Kolmiossa AC_1C on $\angle CAC_1 = 120°$. Kolmion AC_1C ala on siis $\frac{1}{2}AC_1 \cdot AC \cdot \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}AC_1 \cdot AC$. Toisaalta kolmion AC_1C ala on kolmioiden ABC ja ABC_1 alojen summa eli $\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 60° + \frac{1}{2}AB \cdot AC_1 \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}(AB \cdot AC + AB \cdot AC_1)$. Haluttu tulos saadaan, kun yhtälö $AC \cdot AC_1 = AB \cdot AC + AB \cdot AC_1$ jaetaan puolittain tulolla $AB \cdot AC \cdot AC_1$.

7. *Osoita, että jos m ja n ovat kokonaislukuja ja $m > 1$, niin luku $m^4 + 4n^4$ ei ole alkuluku. Osoita vielä, että luku $3^{4^5} + 4^{5^6}$ voidaan kirjoittaa kahden sellaisen luvun tuloksi, joista molemmissa on ainakin 2013 numeroa.*

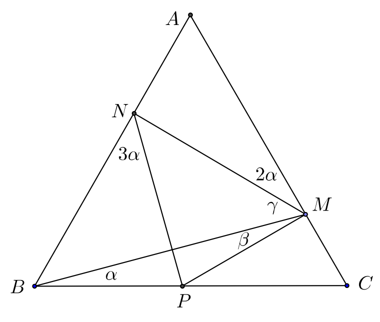
Ratkaisu. Ensimmäinen väite seuraa siitä, että $m^4 + 4n^4 + 4m^2n^2 - 4m^2n^2 = (m^2 + 2n^2)^2 - (2mn)^2 = (m^2 + 2n^2 + 2mn)(m^2 + 2n^2 - 2mn)$ ja että tekijöistä pienempi eli $m^2 + 2n^2 - 2mn = n^2 + (m-n)^2 > 1$. (Lauseke olisi tasan 1, jos olisi $n = 1$ ja $m = n$; koska $m > 1$ tämä ei ole mahdollista.) [Tämä tekijöihin jako tunnetaan *Sophie Germainin identiteettinä*; Germain (1776–1831) oli ensimmäisiä merkittäviä naispuolisia matemaatikkoja.]

Toisen väitteen todistamiseksi havaitaan, että $5^6 - 1 = 4 \cdot 3906$. Edellisen tekijöihinjaon mukaan

$$3^{4^5} + 4^{5^6} = \left(\left(3^{256} - 4^{3906}\right)^2 + \left(4^{3906}\right)^2\right)\left(\left(3^{256} + 4^{3906}\right)^2 + \left(4^{3906}\right)^2\right).$$

Pienempi tekijä on suurempi kuin $4^{3906} > 4^{3900} = 2^{7800} > 1000^{780} = 10^{2340}$. Luvussa on enemmän kuin 2013 numeroa.

8. *Kolmio ABC on tasasivuinen. Kolmion sivuilta AC, AB ja BC on valittu pisteet M, N ja P niin, että seuraavat ehdot toteutuvat: $\angle CBM = \frac{1}{2}\angle AMN = \frac{1}{3}\angle BNP$ ja $\angle CMP = 90°$. Osoita, että kolmio NMB on tasakylkinen ja määritä kulman $\angle CBM$ suuruus.*



Ratkaisu. Jos $\angle CBM = \alpha$, niin $\angle AMN = 2\alpha$ ja $\angle BNP = 3\alpha$. Merkitään $\angle PMB = \beta$ ja $\angle BMN = \gamma$. Koska $\angle CMP = 90°$ ja $\angle PCM = 60°$, $\angle MPC = 30°$. Toisaalta kolmiosta BPM nähdään, että $\angle MPC = \alpha + \beta$. Koska $\angle PMC = \beta + \gamma + 2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha + \gamma) = 90°$, $\alpha + \gamma = 60°$ ja $\angle BMN = \gamma = 60° - \alpha = \angle NBM$. Tästä seuraa, että kolmio NMB on tasakylkinen. [Tässä ei ole ollenkaan vielä tarvittu tietoa kulman $\angle BNP$ suuruudesta.] Todistetaan epäsuorasti, että $\alpha = 15°$. Kolmiosta ANM saadaan $\angle MNB = 2\alpha + 60°$, joten $\angle MNP = 60° - \alpha$. Kolmioissa NBP ja NMP on $NB = NM$ (alussa todistetun perusteella) ja yhteinen sivu NP. Jos $\alpha > 15°$, niin $\angle BNP > \angle MNP$ ja $BP > PM$. Mutta kolmiosta BMP saadaan silloin $\alpha < \beta = 30° - \alpha$ eli $\alpha < 15°$. Ristiriita! Oletus $\alpha > 15°$ johtaa samalla tavalla ristiriitaan. Siis $\alpha = 15°$.

9. *Tiedetään, että $a < b < c$. Osoita, että yhtälöllä*

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

on tasan kaksi juurta x_1 ja x_2, ja että ne voidaan nimetä niin, että $a < x_1 < b < x_2 < c$.

Ratkaisu. Tehtävän yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$f(x) = (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b) = 0, \quad x \neq a,\, b,\, c,$$

kanssa. Nyt $f(a) = (a-b)(a-c) > 0$, $f(b) = (b-c)(b-a) < 0$, $f(c) = (c-a)(c-b) > 0$. Tästä seuraa, että on ainakin yksi x_1, $a < x_1 < b$, niin että $f(x_1) = 0$, ja ainakin yksi x_2, $b < x_2 < c$, niin että $f(x_2) = 0$. Koska f on toisen asteen polynomifunktio, sillä on enintään kaksi nollakohtaa. Siis $f(x) \neq 0$, kun $x \notin \{x_1, x_2\}$, ja x_1 ja x_2 ovat tehtävän yhtälön ainoat juuret.

10. *Luonnollisista luvuista k, m, n tiedetään, että k^3 on jaollinen m:llä, m^3 on jaollinen n:llä ja n^3 on jaollinen k:lla. Osoita, että $(k + 2m + 3n)^{13}$ on jaollinen luvulla kmn.*

Ratkaisu. Kun $(k + 2m + 3n)^{13}$ kirjoitetaan auki, saadaan summa, jonka termit ovat muotoa $ak^b m^c n^d$, missä $b + c + d = 13$. Jokainen sellainen termi, jossa mikään luvuista b, c, d ei ole nolla, on jaollinen luvulla kmn. Olkoon sitten $d = 0$. Jos $c \geq 4$, niin $k^b m^c = k^b m^{c-3} m^3$. Koska m^3 on jaollinen n:llä, nin $k^b m^c$ on jaollinen kmn:llä. Jos $0 < c \leq 3$, niin $b \geq 10$. Silloin $k^b m^c = k^9 k^{b-9} m^c$. Nyt $k^9 = (k^3)^3$ on jaollinen n:llä, joten $k^b m^c$ on jaollinen kmn:llä. Symmetrian perusteella kaikki ne termit $k^b m^c n^d$, joissa yksi luvuista b, c, d on 0, ovat jaollisia kmn:llä. On vielä tutkittava termit, joissa kaksi luvuista b, c, d on nolla. Nyt esimerkiksi $k^{13} = k \cdot k^3 \cdot k^9$; toinen tekijä on jaollinen m:llä ja kolmas tekijä on jaollinen m^3:lla ja siis n:llä. Siis k^{13} on jaollinen kmn:llä.

11. *Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaksi funktiota, ja olkoon $f(g(x)) = g(f(x)) = -x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että f ja g ovat parittomia funktioita. Keksi esimerkki tällaisesta funktioparista f, g.*

Ratkaisu. Koska $f(g(x)) = -x$, niin $g(f(g(x))) = g(-x)$ kaikilla x. Toisaalta, koska $g(f(x)) = -x$, niin $g(f(g(x))) = -g(x)$ kaikilla x. Siis $g(-x) = -g(x)$ kaikilla x. Tasan sama päättely osoittaa, että myös f on pariton funktio. Jos $f(x) = x$ ja $g(x) = -x$, niin $f(g(x)) = f(-x) = -x$ ja $g(f(x)) = g(x) = -x$. Nämä f ja g kelpaavat siis kysytyksi esimerkiksi.

12. *Osoita, että yhtälöllä*

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 4x\rfloor + \lfloor 8x\rfloor + \lfloor 16x\rfloor + \lfloor 32x\rfloor = n$$

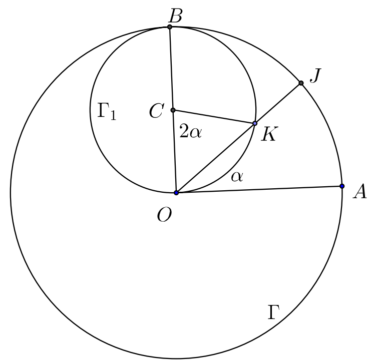
on ratkaisuja aina ja vain, kun $n = 63k + j$, *missä* k *on kokonaisluku ja* $j \in \{1, 3, 7, 15, 31\}$. *(*$\lfloor x\rfloor$ *on suurin kokonaisluku, joka on* $\le x$*.)*

Ratkaisu. Merkitään

$$f(x) = \lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 4x\rfloor + \lfloor 8x\rfloor + \lfloor 16x\rfloor + \lfloor 32x\rfloor.$$

Olkoon k kokonaisluku. Jos $k \le x < k + \frac{1}{32}$, niin $f(x) = 63k$. Jos $k + \frac{1}{32} \le x < k + \frac{1}{16}$, niin $32k + 1 \le 32x < 32k + 2$, ja $f(x) = 63k + 1$. Samalla periaatteella saadaan, että $f(x) = 63k + 3$, kun $k + \frac{1}{16} \le x < k + \frac{1}{8}$, $f(x) = 63k + 7$, kun $k + \frac{1}{8} \le x < k + \frac{1}{4}$, $f(x) = 63k + 15$, kun $k + \frac{1}{4} \le x < k + \frac{1}{2}$ ja $f(x) = 63k + 31$, kun $k + \frac{1}{2} \le x < k + 1$.

13. *Jänis juoksee pitkin ympyrän kehää vakionopeudella. Koira lähtee juoksemaan ympyrän keskipisteestä koko ajan suoraan kohti jänistä samalla nopeudella. Saako koira jäniksen kiinni ja jos saa, niin missä?*



Ratkaisu. Olkoon jäniksen ympyrän Γ keskipiste O ja olkoot A ja B kaksi Γ:n kehän pistettä niin, että $\angle AOB$ on suora kulma. Piirretään ympyrä Γ_1, jonka halkaisija on OB. Silloin OA on sen tangentti. Jos J on Γ:n piste ja JO leikkaa Γ_1:n pisteessä K, niin keskuskulma $\angle OCK = 2 \cdot \angle AOJ$. Koska Γ:n säde on kaksi kertaa Γ_1:n säde, Γ:n kaari AJ ja Γ_1:n kaari OK ovat yhtä pitkät. Jos koiran ja jäniksen juoksunopeudet ovat samat, niin K on koiran ja J jäniksen paikka; koira saa jäniksen kiinni pisteessä B.

14. *Voiko luku kaksinkertaistua, jos sen ensimmäinen numero siirretään viimeiseksi numeroksi (siis jos esim.* $4876 \to 8764$ *– nyt ainakaan ei kaksinkertaistunut)?*

Ratkaisu. Jos $x = a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$ olisi tällainen luku, olisi $a_{n-1}10^n + a_{n-2}10^{n-1} + \cdots + 10a_0 + a_n = 2(a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0)$. Olkoon $y = x - a_n10^n$. Edellinen yhtälö saa muodon $10y + a_n = 2(a_n10^n + y)$ eli $8y = (2\cdot 10^n - 1)a_n$. Parittomalla luvulla $2\cdot 10^n - 1$ ja 8:lla ei ole yhteisiä tekijöitä. Siis a_n on jaollinen 8:lla. Koska $1 \le a_n \le 9$, on oltava $a_n = 8$. Siis $y = 2 \cdot 10^n - 1$. Toisaalta $y < 10 \cdot 10^{n-1}$. Ristiriita osoittaa, että tehtävässä kuvailtua lukua ei ole olemassa.

15. *Rakennusyhtiö tekee 2013 km pituista moottoritietä. Sopimuksen mukaan ensimmäisessä kuussa pitää valmistua kilometri tietä ja jos jonkin kuukauden alussa tietä on valmiina* k *kilometriä, niin kyseisessä kuussa on valmistuttava* $\frac{1}{k^3}$ *kilometriä. Tuleeko tie koskaan valmiiksi?*

Ratkaisu. Olkoon x_j se määrä tietä, joka on valmistunut j:ssä kuukaudessa. Siis $x_1 = 1$ ja $x_{j+1} \geq x_j + \frac{1}{x_j^3}$. Jos tie ei valmistuisi koskaan, olisi $x_j < 2013$ kaikilla j. Mutta silloin olisi $x_{j+1} \geq x_j + \frac{1}{2013^3}$ kaikilla j ja joka kuukausi valmistuisi ainakin $\frac{1}{2013^3}$ kilometriä tietä. Mutta tämä merkitsisi, että $x_{2013^4} > 2013$. Saatiin ristiriita. Siis oletus, että tie ei valmistuisi koskaan, ei ole oikea.

16. *Itseään leikkaamaton murtoviiva koostuu kahdekasta janasta. Murtoviivan kaikki kärjet ovat erään kuution kärkiä. Osoita, että ainakin yksi murtoviivan osajana on kuution särmä.*

Ratkaisu. Jana, jonka kärjet ovat kuution kärkiä, on joko kuution särmä, kuution sivutahkon lävistäjä tai kuution avaruuslävistäjä. Kaksi saman sivutahkon lävistäjää leikkaa toisensa ja kaikki kolme avaruuslävistäjää leikkaavat toisensa kuution keskipisteessä. Murtoviivan kahdeksasta toisiaan leikkaamattomasta janasta enintään kuusi voi siis olla kuution kuuden sivutahkon lävistäjiä ja enintään yksi voi olla avaruuslävistäjä. Ainakin yhden janan on oltava kuution särmä.

* * *

Tehtävät 1, 2, 4, 9, 10, 15 ja 16 ovat venäläisiä, tehtävät 3, 5 – 8 ja 11 romanialaisia ja tehtävät 12 – 14 intialaisia.