Matematiikan olympiavalmennus 2015 – helmikuun helpommat tehtävät

Vastaukset seuraavaan valmennusviikonvaihteeseen Päivölään tai osoitteeseen `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu` tai sähköpostitse `matti.lehtinen@spangar.fi`. – Jos haluat, että ratkaisusi otetaan huomioon, kun valitaan Suomen edustajia kevään Pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun, lähetä vastauksesi niin, että ne ovat perillä viimeistään 9.3.

1. Määritä kolmiot, joiden kulmille α, β, γ pätee $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1$.

2. Kolmion kulmat ovat α, β, γ. Määritä lausekkeen $\sin^2\alpha + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$ suurin mahdollinen arvo.

3. ABC on suorakulmainen kolmio. Piste F on kateetilla AC ja E hypotenuusalla AB; suora FE ja puolisuora CB leikkaavat pisteessä D. Määritä pisteen E etäisyys x suorasta AC kulmien $\alpha = \angle BAC$ ja $\beta = \angle DFC$ ja hypotenuusien $AB = c$ ja $FD = d$ funktiona.

4. On annettu suunnikas. Määritä pienin mahdollinen vinoneliö, jonka jokainen kärki on yhdellä suunnikkaan sivuista.

5. Osoita, että kolmiossa kärkeä C vastassa olevan sivuympyrän säde on $r_c = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, missä R on kolmion ympärysympyrän säde ja α, β, γ kolmion kulmat.

6. Todista, että jos x, y, z ovat positiivisia lukuja, niin

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \ge \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}.$$

7. Luvut x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, toteuttavat ehdon $0 \le x_i < 1$. Todista, että

$$2^{n-1}(1 + x_1x_2\cdots x_n) \ge (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n).$$

8. Olkoon $x > 0$ ja n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{1 - x^{2n+1}}{1-x} \ge (2n+1)x^n.$$

9. Olkoon a, b, c, d positiivisia lukuja. Osoita, että

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} + \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} + \frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a} + \frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \ge a+b+c+d.$$

10. Todista, että kaikilla reaaliluvuilla x, y, z pätee

$$x^4(1+y^4) + y^4(1+z^4) + z^4(1+x^4) \ge 6x^2y^2z^2.$$

11. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$, joille kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$f(f(n)) = n + 1.$$

12. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(xf(y)) = xy.$$

13. Määritellään jono a_1, a_2, a_3, $\ldots$ positiivisia reaalilukuja asettamalla $a_1 = 1$ ja

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$$

jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että luvut a_1, a_2, $\ldots$ ovat kaikki kokonaislukuja.

14. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille pätee

$$2f(x) + f(-x) = x^3$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.