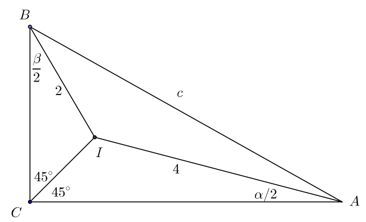
Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailu 2015

Avoimen sarjan tehtävien ratkaisuja

1. Voidaan olettaa, että $b = a+1$. Silloin $d = a^2+(a+1)^2+\big(a(a+1)\big)^2 = a^2+a^2+2a+1+a^4+2a^3+a^2 = a^4+2a^3+3a^2+2a+1$. Toisaalta $(a^2+a+1)^2 = a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a = a^4+2a^3+3a^2+2a+1$. d on siis neliöluku ja $\sqrt{d} = a^2+a+1$. $\left(a^2+a+1 = \left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4} > 0.\right)$ Koska $a^2+a+1 = a(a+1)+1$ ja joko a tai $a+1$ on parillinen, niin $a(a+1)$ on parillinen ja $\sqrt{d}$ on pariton.

2. *1. ratkaisu.* Olkoon suorakulmainen kolmio ABC, sen hypotenuusa $c = AB$, $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$ ja I sisään piirretyn ympyrän keskipiste. I on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Sovelletaan (kolmion kulmasummasta välittömästi seuraavaa) tietoa, jonka mukaan kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, kolmioihin CAI ja BCI. Saadaan $\angle AIB = \left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right) + \left(45^\circ + \dfrac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Koska ABC on suorakulmainen, $\alpha+\beta = 90^\circ$. Siis $\angle AIB = 135^\circ$. Sovelletaan kosinilausetta kolmioon ABI. Koska $\cos 135^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, saadaan heti

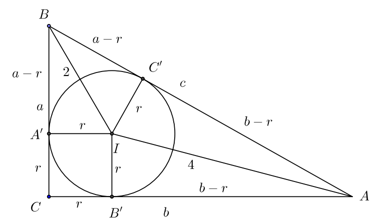


$$c^2 = 4^2+2^2+2\cdot 4\cdot 2\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20+8\sqrt{2},$$

joten

$$c = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

2. ratkaisu. Olkoon $BC = a$, $CA = b$, ABC:n sisäympyrän säde r ja sisäympyrän ja kolmion sivujen BC, CA, AB sivuamispisteet A', B', C'. Koska $A'CB'I$ on neliö, $A'C = CB' = r$. Koska ympyrän tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat yhtä pitkiä, on $BC' = BA' = a-r$ ja $C'A = B = b-r$. Siis $c = a+b-2r$, joten



$$r = \frac{1}{2}(a+b-c), \quad a-r = \frac{1}{2}(a-b+c), \quad b-r = \frac{1}{2}(-a+b+c).$$

Suorakulmaisista kolmioista IAC' ja BIC' saadaan Pythagoraan lauseen nojalla

$$(-a+b+c)^2+(a+b-c)^2 = 4\cdot 4^2 = 64 \tag{1}$$

ja

$$(a-b+c)^2+(a+b-c)^2=4\cdot 2^2=16. \tag{2}$$

Kun otetaan huomioon, että ABC on suorakulmainen, joten $a^2+b^2=c^2$, niin (1) ja (2) sievenevät muotoihin

$$4c^2-4ac=64, \qquad 4c^2-4bc=16.$$

Siis

$$a=\frac{c^2-16}{c}, \qquad b=\frac{c^2-4}{c}$$

Kun nämä a:n ja b:n arvot sijoitetaan Pythagoraan yhtälöön $a^2+b^2=c^2$, saadaan c:lle yhtälö

$$c^4-40c^2+272=0,$$

josta ratkaistaan

$$c^2=\frac{40\pm\sqrt{1600-4\cdot 272}}{2}=20\pm\sqrt{400-272}=20\pm\sqrt{128}=20\pm 8\sqrt{2}.$$

Kolmiosta ABI nähdään, että $c>4$, joten c^2:n lausekeessa vain +-merkki kelpaa. Siis

$$c=4\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

3. Olkoon x mielivaltainen joukon A alkio. Jaetaan joukon $A\setminus\{x\}$ 40 alkiota kahdeksi 20-alkioiseksi joukoksi. Olkoot näiden joukkojen alkioiden summat S_1 ja S_2. Tehtävän ehdon perusteella $S_1+x>S_2$ ja $S_2+x>S_1$. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa $x>S_2-S_1$ ja jälkimmäisestä $x>S_1-S_2$. Siis $x>|S_1-S_2|\geq 0$. Jokainen A:n alkio on siis positiivinen luku, joten negatiivisia lukuja A:ssa ei ole.

4. *1. ratkaisu.* Jonoja, joissa on $2k$, $k\geq 0$, **A**-kirjainta, on

$$\binom{n}{2k}2^{n-2k}$$

kappaletta: paikat, joissa on **A**-kirjain voidaan valita yhtä monella tavalla kuin voidaan valita n-alkioisen joukon $2k$-alkioinen osajoukko. **B**- ja **C**-kirjaimille jää $n-2k$ paikkaa, ja jokaiseen tällaiseen voidaan asettaa kumpi tahansa näistä kirjaimista, joten mahdollisuuksia on 2^{n-2k}. Kaikkiaan tehtävän mukaisia merkkijonoja on siis

$$2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}+\binom{n}{4}2^{n-4}+\cdots$$

kappaletta. Mutta summa saadaan kirjoitettua suljettuun muotoon, kun huomataan, että

$$3^n=(2+1)^n=2^n+\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{2}2^{n-2}+\binom{n}{3}2^{n-3}+\binom{n}{4}2^{n-4}+\cdots,$$
$$1=(2-1)^n=2^n-\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{2}2^{n-2}-\binom{n}{3}2^{n-3}+\binom{n}{4}2^{n-4}-\cdots.$$

Kun edelliset binomikehitelmät lasketaan yhteen, saadaan

$$3^n + 1 = 2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}.$$

Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis

$$\frac{1}{2}(3^n + 1).$$

2. ratkaisu. n-kirjaimisia sanoja on kaikkiaan 3^n kappaletta. Olkoon näistä S_n sellaisia, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia ja T_n sellaisia, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia. Tarkastellaan sanoja, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Jos sanan viimeinen kirjain on **A**, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on pariton määrä **A**-kirjaimia ja jos viimeinen kirjain on **B** tai **C**, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Tästä seuraa

$$S_n = T_{n-1} + 2S_{n-1}. \tag{1}$$

Vastaavasti tarkastelemalla sanoja, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, tullaan yhtälöön

$$T_n = S_{n-1} + 2T_{n-1}. \tag{2}$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) vähennetään toisistaan, saadaan

$$S_n - T_n = S_{n-1} - T_{n-1}. \tag{3}$$

Nyt $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$ (parillinen määrä **A**-kirjaimia on sanoissa **B** ja **C**, pariton sanassa **A**) eli $S_1 - T_1 = 1$. Yhtälöstä (3) seuraa nyt yksinkertaisella induktiolla, että $S_n - T_n = 1$ kaikilla n. Koska $S_n + T_n = 3^n$, saadaan heti

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1).$$

3. ratkaisu. Pienillä n:n arvoilla tehdyt kokeilut antavat aiheen olettaa, että

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

ja

$$T_n = 3^n - S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Todistetaan tämä induktiolla. $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$. Oleteaan, että väite pätee n:n merkin pituisiin jonoihin. Jonot, joiden pituus on $n+1$ merkkiä ja joissa on parillinen määrä **A**-kijaimia, saadaan liittämällä n-pituisiin jonoihin, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi **B** tai **C**, tai sellaisiin, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi **A**. Siis

$$S_{n+1} = 2S_n + T_n = 3^n + 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) = \frac{3}{2}\cdot 3^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1).$$

Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.