Harjoitustehtävät, syys–lokakuu 2010. Vaativammat – ratkaisuja

1. Määritä kaikki reaalilukuparit (x, y), joille $x^3 + y^3 = 7$ ja $xy(x + y) = -2$.

Ratkaisu. [Paperiversiossa tehtävässä oli harmillinen kirjoitusvirhe, joka ei muuttanut itse tehtävän ratkaisun kulkua, mutta kylläkin teki ratkaisussa esiintyvät luvut hankalammiksi.] Yhtälöitä hetken katselemalla tunnistaa seuraavan aloituksen: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 7 - 6 = 1$. Siis $x + y = 1$ ja $xy = -2$. x on toisen asteen yhtälön $x - \dfrac{2}{x} = 1$ eli $x^2 - x - 2 = 0$ juuri, siis $x = 2$ tai $x = -1$. Vastaavat y:n arvot ovat $y = -1$ ja $y = 2$. [”Virheellisessä” versiossa jälkimmäinen yhtälö oli $xy(x + y) = 2$. Johdutaan yhtälöön $(x + y)^3 = 13$, $x + y = \sqrt[3]{13}$. Yhtälön ratkaisut ovat sievennysten jälkeen $x = \dfrac{1}{26}(13\sqrt[3]{13} \pm 13^{\frac{5}{6}}\sqrt{5})$; Vastaavat y:n arvot ovat samat, mutta $\pm$ korvatuna $\mp$:llä.]

2. n:s *kolmioluku* T_n on lukujen $1, 2, \ldots, n$ summa. Määritä kaikki kolmiolukujen parit (T_n, T_m), joille $T_n - T_m = 2011$.

Ratkaisu. On etsittävä yhtälön $n(n + 1) - m(m + 1) = 2 \cdot 2011$ kokonaislukuratkaisuja. Mutta $n(n + 1) - m(m + 1) = (n - m)(n + m + 1)$. Tämän tulon tekijöiden summa on $2n + 1$ eli pariton, joten luvuista $n - m$ ja $n + m + 1$ toinen on parillinen ja toinen pariton. Lisäksi $n - m$ on luvuista pienempi. Jää kaksi mahdollisuutta: joko $n - m = 1$ ja $n + m + 1 = 4022$ tai $n - m = 2$ ja $n + m + 1 = 2011$. Edellinen johtaa (triviaaliin) ratkaisuun $n = 2011$, $m = 2010$, jälkimmäinen ratkaisuun $n = 1006$, $m = 1004$. Kysytyt parit ovat $(T_{2011}, T_{2010}) = (2023066, 2013055)$ ja $(T_{1006}, T_{1004}) = (506521, 504510)$.

3. Määritä toisen asteen polynomi f, jolla on seuraava ominaisuus: jos x on kokonaisluku, joka kirjoitetaan k:lla numerolla 5, niin $f(x)$ on kokonaisluku, joka kirjoitetaan $2k$:lla numerolla 5. (Esimerkiksi $f(5555) = 55555555$.)

Ratkaisu. Oletetaan, että $f(x) = ax^2 + bx + c$. Silloin

$$\begin{aligned} f(5) &= 25a + 5b + c = 55 \\ f(55) &= 3025a + 55b + c = 5555 \\ f(555) &= 308025a + 555b + c = 555555. \end{aligned}$$

Yhtälöryhmästä ratkaistaan kohtalaisen helposti $a = \dfrac{9}{5}$, $b = 2$, $c = 0$. Jos vaadittu polynomi on olemassa, sen on oltava $f(x) = \dfrac{9}{5}x^2 + 2x = x\left(\dfrac{9}{5}x + 2\right)$. Osoitetaan, että saadulla f:llä on vaadittu ominaisuus. Luku, joka kirjoitetaan k:lla viitosella on

$$5(1 + 10 + \cdots + 10^{k-1}) = 5\frac{10^k - 1}{10 - 1} = \frac{5}{9}(10^k - 1),$$

ja luku, joka kirjoitetaan $2k$:lla viitosella siis $\frac{5}{9}(10^{2k} - 1)$. Nyt todellakin $f\left(\dfrac{5}{9}(10^k - 1)\right) = \dfrac{5}{9}(10^k - 1)\left(\dfrac{9}{5} \cdot \dfrac{5}{9}(10^k - 1) + 2\right) = \dfrac{5}{9}(10^k - 1)(10^k + 1) = \dfrac{5}{9}(10^{2k} - 1)$.

4. Kolmion sivut ovat a, b ja c ja sen ympäri piirretyn ympyrän säde on R. Osoita, että

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\ge\frac{1}{R^2}.$$

Ratkaisu. [Tehtävä on sattuu olemaan vuoden 2004 Pohjoismaisesta matematiikkakilpailusta. Valmennuksen verkkosivuilla olevasta koosteesta sille löytyy kaksikin eri ratkaisua.] Laajennetun sisnilauseen perusteella kolmion ala on $T=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{abc}{4R}$. Heronin kaavan perusteella siis

$$\frac{1}{R^2}=\frac{16T^2}{abc}=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(abc)^2}.$$

On siis osoitettava, että

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}\ge\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(abc)^2}$$

eli $(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)\le abc$. Todistetaan tämä epäyhtälö aritmeettis-geometrisen epäyhtälön avulla:

$$\begin{aligned}&(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)\\&=\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\\&\le\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}\cdot\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}\cdot\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}=bca.\end{aligned}$$

5. Määritä

$$\sum_{k=0^\circ}^{90^\circ}\cos^2 k.$$

Ratkaisu. Koska $\cos^2 k^\circ+\cos^2(90^\circ-k^\circ)=\cos^2 k^\circ+\sin^2 k^\circ=1$, kun $0^\circ\le k^\circ\le 44^\circ$, ja $\cos^2 45^\circ=\frac{1}{2}$, summa on $45+\frac{1}{2}=\frac{91}{2}$.

6. Positiivisesta kokonaisluvusta vähennetään summa, jonka yhtenlaskettavina ovat luvussa esiintyvät numerot kukin korotettuna parittomaan, ei välttämättä samaan potenssiin. Osoita, että syntyvä luku on aina jaollinen kolmella. (Esimerkiksi $4321-(4^5+3^3+2^7+1^5)=3141=3\cdot 1047$.)

Ratkaisu. Todetaan, että $a^{2n+1}\equiv a \bmod 3$ kaikilla kokonaisluvuilla a. Asia on ilmeinen, jos a on jaollinen 3:lla tai jos $a\equiv 1 \bmod 3$. Jos $a\equiv 2\equiv -1$, niin $a^{2n+1}\equiv(-1)^{2n+1}=-1\equiv 2 \bmod 3$. Olkoon nyt

$$N=\sum_{k=0}^{n-1}d_k10^k$$

n-numeroinen kokonaisluku ja olkoot $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ parittomia positiivisia kokonaislukuja. Silloin $d_k 10^k \equiv d_k \bmod 3$ ja alussa sanotun perusteella $d_k^{p_k} \equiv d_k \bmod 3$. Siis

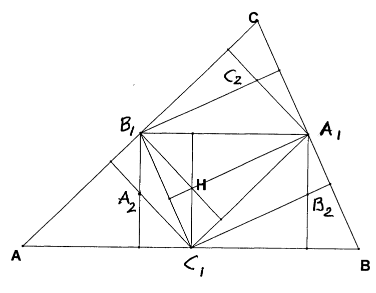
$$N \equiv \sum_{k=0}^{n-1} d_k \equiv \sum_{k=0}^{n-1} d_k^{p_k}.$$

7. Kolmion ABC sisällä on samasäteiset ympyrät $\mathcal{Y}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, niin että kukin ympyröistä $\mathcal{Y}_i$, $i = 1, 2, 3$, sivuaa kahta kolmion sivua (kukin eri sivuparia) ja $\mathcal{Y}_4$ sivuaa kolmea muuta ympyrää. Osoita, että ympyrän $\mathcal{Y}_4$ keskipiste on kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla.

Ratkaisu. Väite todistuu näppärästi homotetiakuvausten avulla. Olkoon tehtävässä määriteltyjen ympyröiden säde ρ ja olkoon kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r. Olkoon I ABC:n sisään piirretyn ympyrän kskipiste ja olkoon O_i $\mathcal{Y}_i$:n keskipiste. Oletetaan, että $\mathcal{Y}_1$ sivuaa AB:tä ja AC:tä, $\mathcal{Y}_2$ BC:tä ja BA:ta ja $\mathcal{Y}_3$ CA:ta ja CB:tä Nyt $\mathcal{Y}_1$ on ABC:n sisään piirretyn ympyrän kuva homotetiassa, jonka keskus on A ja suurennussuhde $k = \dfrac{\rho}{r}$. Silloin $AO_1 = k \cdot AI$ ja $IO_1 = (1-k)IA$. Vastaavasti $IO_2 = (1-k)IB$ ja $IO_3 = (1-k)IC$. Mutta tämähän tarkoittaa, että kolmio $O_1O_2O_3$ on kolmion ABC kuva homotetiassa, jonka keskus on I ja suurennussuhde on $1-k$. Kolmion $O_1O_2O_3$ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on piste, joka on yhtä etäällä pisteistä O_1, O_2 ja O_3. Tämä piste on O_4, sillä se on etäisyydellä 2ρ kustakin kolmesta em. pisteestä. Mutta homotetia, joka kuvaa ABC:n $O_1O_2O_3$:ksi kuvaa myös ABC:n ympäri piirretyn ympyrän $O_1O_2O_3$:n ympäri piirretyksi ympyräksi. ABC:n ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja O_4 ovat siis samalla I:n kautta kulkevalla suoralla.

8. Teräväkulmaisen kolmion ABC sivujen keskipisteet ovat A_1, A_2 ja A_3. Leikatkoot näistä pisteistä kolmion muita sivuja vastaan piirretyt kohtisuorat toisensa pisteissä A_2, B_2 ja C_2 (niin että $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ on kuusikulmio). Osoita, että kuusikulmion $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ ala on puolet kolmion ABC alasta.

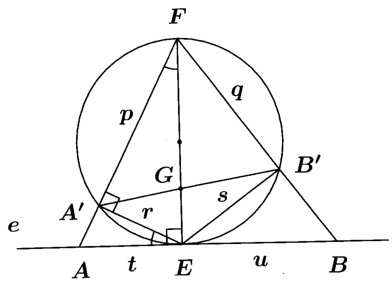
Ratkaisu. Kuusikulmio koostuu ABC:n kanssa yhdenmuotoisesta kolmiosta $A_1B_1C_1$, jonka ala on neljäsosa kolmion ABC alasta, ja kolmioista $A_1C_2B_1$, $B_1A_2C_1$ sekä $C_1B_2A_1$. Olkoon H kolmion $A_1B_1C_1$ korkeusjanojen leikkauspiste eli ortokeskus. Nyt $B_1A_{||}HC_1$ ja $C_1A_2||HB_1$. $A_2C_1HB_1$ on siis suunnikas ja B_1C_1 suunnikkaan lävistäjä. Vastaavasti $B_2A_1HC_1$ ja $C_2B_1HA_1$ ovat suunnikkaita ja C_1A_1 sekä A_1B_1 niiden lävistäjiä. Mutta tämä merkitsee sitä, että lueteltujen kolmen kolmion ala on sama kuin kolmion $A_1B_1C_1$ ala. Kaikkiaan kuusikulmion $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ ala on kaksi kolmion $A_1B_1C_1$ alaa eli puolet kolmion ABC alasta.



9. EF on ympyrän Γ halkaisija ja e on E:n kautta piirretty Γ:n tangentti. Olkoon k vakio ja olkoot A ja B eri puolilla sijaitsevia e:n pisteitä, joille $AE \cdot EB = k$. Leikatkoot AF ja

BF Γ:n myös pisteissä A' ja B'. Osoita, että kaikki janat $A'B'$ kulkevat saman pisteen kautta.

Ratkaisu. Olkoon G EF:n ja $A'B'$:n leikkauspiste. Osoitetaan, että G ei riipu pisteiden A ja B valinnasta, kunhan ne vain toteuttavat tehtävän ehdon. Merkitään $AE = t$, $EB = u$, $A'F = p$, $B'F = q$, $A'E = r$ ja $B'E = s$. Silloin $tu = k$. Kulmat AEF ja $EA'F$ ovat suoria. Tällöin kolmiot $FA'E$ ja $EA'A$ ovat yhdenmuotoisia. Siis $\dfrac{r}{t} = \dfrac{p}{EF}$. Vastaavasti $\dfrac{s}{u} = \dfrac{q}{EF}$. Kun yhtälöt kerrotaan keskenään ja otetaan huomioon $tu = k$, saadaan



$$\frac{rs}{k} = \frac{pq}{EF^2}.$$

Kolmioilla $A'B'F$ ja $B'A'E$ on yhteinen kanta $A'B'$ ja kolmioiden tätä kantaa vastaan piirretyt korkeusjanat suhtautuvat toisiinsa kuten FG ja GE. Kolmioiden aloilla on siis sama suhde. Toisaalta kolmioiden huippukulmien $A'FB'$ ja $A'EB'$ summa on $180°$, joten kulmilla on sama sini ja kolmioiden kaksinkertaiset alat ovat $pq\sin(\angle A'FB')$ ja $rs\sin(\angle A'FB')$. Siis

$$\frac{FG}{GE} = \frac{pq}{rs} = \frac{k}{EF^2}.$$

G ei siis riipu A:n ja B:n asemasta; kaikki janat $A'B'$ kulkevat G:n kautta.

10. Luvuille x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pätee $0 < x_i < 1$. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + (n-1)x_i} \le 1.$$

Ratkaisu. Jos $0 < x \le 1$, niin $\dfrac{1}{x} - 1 \ge 0$. Silloin

$$\frac{x}{1 + (n-1)x} = \frac{1}{\dfrac{1}{x} + n - 1} \le \frac{1}{n}.$$

Tehtävän summan jokainen yhteenlaskettava on siis enintään $\dfrac{1}{n}$, joten summa on ≤ 1.

11. Olkoon (f_i), $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ Fibonaccin jono. Osoita, että on olemassa aidosti kasvava aritmeettinen jono positiivisia kokonaislukuja, jonka yksikään luku ei ole Fibonaccin jonon luku.

Ratkaisu. [Myös tämä tehtävä on Pohjoismaisen matematiikkakilpailun tehtävä vuodelta 2004, ja sen eräs ratkaisu löytyy valmennuksen verkkosivuilla olevasta koosteesta.] Tarkastetaan Fibonaccin jonoa modulo 8. Se on 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, ... Kohdasta 1, 1, eteenpäin jono jatkuu jälleen samana. Huomataan, että jonossa ei ole yhtään lukua 4 eikä yhtään lukua 6. Aritmeettisilla jonoilla $8k + 4$ tai $8k + 6$ ei siis ole yhtään yhteistä alkiota Fibonaccin jonon kanssa.

12. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy) \tag{1}$$

kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Tämän funktionaaliyhtälötehtävän ratkaisu on melko monivaiheinen.

Yhtälöä (1) tarkastelemalla näkee heti, että funktiot $f(x) = x$, $f(x) = 0$ kaikilla x ja $f(x) = 2$ kaikilla x toteuttavat yhtälön (1). Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Kun sijoitetaan $x = y = 0$ yhtälöön (1), saadaan $f(0)^2 = 2f(0)$. Siis $f(0) = 0$ tai $f(0) = 2$. Oletetaan, että $f(0) = 2$. Sijoitetaan $y = 0$ yhtälöön (1). Saadaan $f(x) = 2$ kaikilla x. Oletetaan siis, että $f(0) = 0$. Olkoon $f(1) = a$. Sijoitetaan (1):een $x = 1$ ja $y = -1$ ja ratkaistaan $f(-1) = \dfrac{a}{a-2}$. (Jos olisi $a = 2$, saataisiin myös $a = 0$; siis $a \neq 2$.)

Sijoitetaan nyt yhtälöön (1) peräkkäin (x, y):n paikalle $(x-1, 1)$, $(1-x, -1)$ ja $(-x, 1)$. Saadaan yhtälöt

$$f(x) + (a-2)f(x-1) = a, \tag{2}$$

$$f(-x) + \frac{2}{a-2}f(1-x) - f(x-1) = \frac{a}{a-2} \tag{3}$$

ja

$$f(1-x) + (a-2)f(-x) = a. \tag{4}$$

Kun (2):sta ja (4):stä ratkaistaan $f(x-1)$ ja $f(1-x)$ ja sijoitetaan (3):een, saadaan

$$f(x) - (a-2)f(-x) = 0. \tag{5}$$

Kun tässä vaihdetaan x ja $-x$ saadaan vielä

$$f(-x) + (a-2)f(x) = 0. \tag{6}$$

Jos $|a-2| \neq 1$, niin yhtälöiden (5) ja (6) ainoa ratkaisu on $f(x) = 0$. Oletetaan, että $a = 3$. Yhtälöstä (2) saadaan $f(x+1) + f(x) = 3 = f(x) + f(x-1)$ eli $f(x) = f(x-2)$. Siis $f(2) = 0$ ja $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Sijoitetaan $(x, y) = \left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ yhtälöön (1). Saadaan $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3$, eli ristiriita. Siis $a \neq 3$.

On vielä selvitettävä tapaus $a = 1$. Tämä johtaa tavanomaiseen tarkasteluun, jonka lopputulos on, että $f(x) = x$ kaikilla reaaliluvuilla x. Ensinnäkin yhtälön (2) perusteella $f(x+1) = f(x) + 1$ kaikilla x. Induktiolla saadaan tästä $f(x+n) = f(x) + n$ kaikilla kokonaisluvuilla n ja erityisesti $f(n) = n$ kaikilla kokonaisluvuilla n. Kun yhtälöön (1) sijoitetaan $y = n$, saadaan $f(nx) = nf(x)$ ja jos $r = \dfrac{m}{n}$, niin $mf(x) = f(mx) = f(n(rx)) = nf(rx))$ eli $f(rx) = rf(x)$ kaikilla rationaaliluvuilla r ja reaaliluvuilla x. Erityisesti $f(r) = r$ kaikilla rationaaliluvuilla. Rationaaliluvuista reaalilukuihin päästäksemme toteamme ensin, että jos yhtälöön (1) sijoitetaan $y = x$, se antaa $f(x)^2 = f(x^2)$. Tästä seuraa, että $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 0$. Ja koska $f(-x) = -f(x)$, niin $f(x) \leq 0$, kun $x \leq 0$. Jos nyt x on mielivaltainen reaaliluku ja $r < x$ on rationaaliluku, niin $f(x) = f(x - r + r) = f(x-r) + r \geq r$. Vastaavasti, jos $s > x$ on rationaaliluku, niin $f(x) = f(x - s + s) = f(x-s) + s \leq s$. Nämä epäyhtälöt ovat mahdollisia vain, jos $f(x) = x$.

13. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot A, B ja C n-alkioisia mutta yhteisalkiottomia joukkoja, joille $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, 3n\}$. Osoita, että joillekin kolmelle luvulle $x \in A$, $y \in B$ ja $z \in C$ pätee, että yksi luvuista on kahden muun summa.

Ratkaisu. Sanomme, että kolmikko (a, b, c), $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ on *sopiva*, jos luvuista yksi on kahden muun summa. Oletetaan, että sopivaa kolmikkoa ei ole olemassa. Voidaan olettaa, että $1 \in A$. Oletetaan, että pienin luku, joka ei kuulu A:han on $k \in B$. Osoitetaan ensin, että jos $x \in C$, niin $x - 1 \in A$. Ellei näin olisi, olisi olemassa $x \in C$, jolle $x - 1 \notin A$. Jos olisi $x - 1 \in B$, $(1, x - 1, x)$ olisi sopiva, vastoin oletusta. Siis olisi oltava $x - 1 \in C$. Tällöin $x - 1 > k$. Oletusten mukaan $k - 1 \in A$ ja $k \in B$. Koska $(k - 1, x - k, x - 1)$ ja $(x - k, k, x)$ eivät ole mahdollisia kolmikkoja, ei voi olla $x - k \in A$ eikä $x - k \in B$. Siis $x - k \in C$. Myöskään $(x - k - 1, k, x - 1)$ ja $(1, x - k - 1, x - k)$ eivät ole mahdollisia, joten $x - k - 1 \notin A, B$. Siis $x - k - 1 \in C$. Mutta saman päättelyn voi nyt soveltaa x:n sijasta lukuun $x - k$. Saadaan, siis, että $(x - k) - k$ ja $x - k - k - 1$ kuuluvat joukkoon C. Induktiolla nähdään sitten, että $x - ik$ ja $x - ik - 1$ ovat joukossa C kaikilla i, joilla luvut ovat positiivisia. Mutta jollain i:n arvolla ainakin toinen luvuista on $\leq k$, ja luvun tulisi kuulua joukkoon A tai B. Ristiriita osoittaa, että $x \in C \Rightarrow x - 1 \in A$. Jos nyt $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, niin $A = \{c_1 - 1, c_2 - 1, \ldots, c_n - 1\}$. Jokin A:n alkioista on 1, joten jokin C:n alkio on 2. Mutta $2 \leq k$, joten $2 \in A$ tai $2 \in B$. Ristiriita; oletus, että sopivia kolmikkoja ei olisi olemassa on väärä. Siis niitä on.

14. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Olkoon p sellainen alkuluku, että n on $p - 1$:n tekijä ja p on luvun $n^3 - 1$ tekijä. Osoita, että $4p - 3$ on neliöluku.

Ratkaisu. Koska n on $p - 1$:n tekijä, $n \leq p - 1$ ja $p \equiv 1 \mod n$. Selvästi $n - 1 < p$, ja koska p on alkuluku, $n - 1$:llä ja p:llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Koska p on luvun $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$ tekijä, sen on oltava luvun n^2+n+1 tekijä. Siis $n^2+n+1 = kp$. Lisäksi $k \equiv kp \equiv 1 \mod n$. Koska

$$k = \frac{n^2 + n + 1}{p} \leq \frac{n^2 + n + 1}{n + 1} < n + 1,$$

on oltava $k = 1$ ja $p = n^2 + n + 1$. Siis $4p - 3 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$.

15. Polynomille $P(x)$ pätee $P(n) > n$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Jokainen positiivinen kokonaisluku m on jonkin luvuista $P(1)$, $P(P(1))$, $P(P(P(1))), \ldots$ tekijä. Osoita, että $P(x) = x + 1$.

Ratkaisu. Selvästi P ei voi olla vakiopolynomi. Koska P saa positiivisia arvoja kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla, P:n korkeimman asteen termin kertoimen on oltava positiivinen. Merkitään $P_1(x) = P(x)$ ja $P_{n+1}(x) = P(P_n(x))$. Jos $P(x) = x+b$, b kokonaisluku, niin $P(1) = 1 + b > 1$, joten $b > 1$. Induktiolla nähdään, että $P_n(x) = x + nb$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n ja reaaliluvuilla x. Siis $P_n(1) = 1 + nb$ kaikilla n. Jos $b \geq 2$, todetaan, että mikään luvuista $P_n(1)$ ei ole jaollinen b:llä. Toisaalta, jos $b = 1$, jonossa $P_1(1)$, $P_2(1)$, $\ldots$ ovat kaikki ykköstä suuremmat kokonaisluvut. $P(x) = x + 1$ siis toteuttaa tehtävän ehdot. On vielä suljettava pois vaihtoehdot $P(x) = ax + b$, $a > 1$, ja P polynomi, jonka aste on ≥ 2. Jos ensiksikin $P(x) = 2x + b$, niin $P(1) = 2 + b > 1$, joten

$b \geq 0$. Jos $P(x) = 2x$, niin $P_n(x) = 2^n x$ ja $P_n(1) = 2^n$. Jonossa $P_n(1)$ ei ole kaikilla luvuilla jaollisia lukuja. Jos $P(x) = 2x + b$, $b \geq 1$, $P(x) = ax + b$, missä $a \geq 3$ tai jos P:n aste on ainakin 2, niin $P(n) > 2n$ kaikilla tarpeeksi suurilla n, sanokaamme kun $n > 2N$. Koska $P_n(1)$ on kasvava lukujono, $P_k(1) > N$ jollain k. Asetetaan $r = P_k(1)$. Silloin $P(r) > 2r$. Asetetaan $m = P(r) - r > r$. Osoitetaan, että mikään luvuista $P_n(1)$ ei ole jaollinen m:llä. Ainakaan mikään luvuista $P_n(1)$, $n \leq k$ ei ole, koska nämä luvut ovat $\leq r$. Nyt $P_{k+1}(r) = P(r) = m + r \equiv r \bmod m$. Edelleen, jos $P_i(1) \equiv r \bmod m$, niin $P_{i+1}(1) = P(P_i(1)) \equiv P(r) = P(P_k(1)) = P_{k+1}(1) \equiv r \bmod m$. Induktiolla nähdään siis, että $P_i(1) \equiv r \bmod m$ kaikilla $i \geq k + 1$. Mikään $P_n(1)$ ei ole jaollinen m:llä. Väite on todistettu.