

HEINÄKUUN 2012 VAIKEAMMAT

Ratkaisuja kaivataan syyskuun alkuun mennessä osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Purpuripolku 7-9 B 10, 00420 Helsinki tai ernvall@mappi.helsinki.fi. Tehtävät eivät ole hankaluus-, helppous- tai viehättävyyssjärjestyksessä.

- (1) Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Määritä ensimmäinen desimaali desimaalipilkun jälkeen luvun $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n}$ kymmenjärjestelmäesityksessä.
- (2) Annettu puoliympyrä C , jonka halkaisija on AB . Ympyrät S , S_1 ja S_2 sivuavat sekä puoliympyrää C että halkaisijaa AB . Lisäksi ympyrä S sivuaa ympyröitä S_1 ja S_2 . Olkoot r, r_1, r_2 ympyröiden S, S_1, S_2 säteet tässä järjestyksessä. Todista, että

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}.$$

- (3) Positiiviset kokonaisluvut toteuttavat yhtälön

$$c(ac + 1)^2 = (5c + 2b)(2c + b).$$

Osoita, että jos c on pariton, niin se on neliö.

- (4) Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$y^2(x^2 + y^2 - 2xy - x - y) = (x + y)^2(x - y).$$

- (5) Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen kolmikot (a, b, c) , joilla $a \leq b \leq c$, $\text{syty}(a, b, c) = 1$ ja $a^3 + b^3 + c^3$ on jaollinen luvuilla a^2b , b^2c ja c^2a .
- (6) Etsi funktiot $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joilla

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

kaikilla $x, y \in (R)$.

- (7) Olkoon O teräväkulmaisen kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän keskipiste, ja leikatkoot suorat AO ja BC pisteessä K ,. Sivuilta AB ja AC on valittu pisteet L ja M , joilla $|KL| = |KB|$ ja $|KM| = |KC|$. Osoita, että janat LM ja BC ovat yhdensuuntaiset.
- (8) Olkoon

$$f(m) = \sum_{k=1}^m (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2m+1}.$$

Millä positiivisilla kokonaisluvuilla m luku $f(m)$ on rationaalinen.

- (9) Etsi kaikki luonnolliset luvut n , joilla luvun $\text{pyj}(1, 2, \dots, n)$ positiivisten jakajien lukumäärä on 2^k jollakin epänegatiivisella kokonaisluvulla k .
- (10) Kutsutaan konveksia monitahokasta jalkapalloksi, jos sen kaikki tahkot ovat säännöllisiä viisikulmioita tai kuusikulmioita, ja jos jokaisen viisikulmiotahkon kaikki naapurit ovat kuusikulmioita. Kuinka monta viisikulmio- ja kuusikulmiotahkoa voi olla jalkapallolla?