

Matematiikan olympiavalmennus: Kotitehtäviä geometriasta ja polynomeista

Antti Honkela & Jari Lappalainen, Tammikuu 2016. Ratkaisuja voi lähettää osoitteeseen laurihallila@gmail.com tai Lauri Hallila, Jussaareнкуja 5 J 104, 00840 Helsinki

1. Kolmion ABC ulkopuolelle piirretään neliö, jonka sivuista yksi on jana AB . Lisäksi piirretään toinen neliö, jonka sivuista yksi on jana BC . Osoita, että näiden neliöiden keskipisteet ja janan CA keskipiste muodostavat tasasivuisen suorakulmaisen kolmion.
2. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.
3. Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste ja piste E kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapiste. Olkoon kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O . Osoita, että $OC \perp DE$.
4. Näytä, ettei ole olemassa kokonaislukukertoimista polynomia p , jolle $p(1) = 4$ ja $p(4) = 9$.
5. Määritä yhtälön

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$$

kaikki ratkaisut, joille $0 \leq x, y, z \leq 1$.

6. Olkoon P paritonasteinen polynomi, joka toteuttaa identiteetin

$$P(x^2 - 1) = P(x)^2 - 1.$$

Osoita että $P(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

7. Olkoon p reaalityö. Määritä yhtälön

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$$

ratkaisut x_1, x_2, x_3 , kun tiedetään niiden muodostavan aritmeettisen jonon.

8. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Osoita, että kaikille positiivisille luvuille a, b, c ja kaikille epänegatiivisille kokonaisluvuille p pätee epäyhtälö

$$a^{p+2} + b^{p+2} + c^{p+2} \geq a^p bc + b^p ca + c^p ab.$$

10. Olkoon (a_n) aritmeettinen jono, johon kuuluvat luvut 1 ja $\sqrt{2}$. Osoita, että mitkään kolme jonon termiä eivät muodosta geometristä jonoa.