Kirjevalmennus, huhti- ja toukokuu 2017

Ratkaisuja toivotaan toukokuun loppuun mennessä (tai 8.5 mennessä, jos haluaa, että ratkaisut vaikuttavat positiivisesti IMO-joukkuetta valittaessa) postitse osoitteeseen

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematik och statistik
Åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 Åbo

tai sähköpostitse osoitteeseen aernvall@abo.fi.

Helpompia tehtäviä

1. Olkoon D kolmion ABC sivun BC keskipiste. Todista, että

$$AD < \frac{AB + AC}{2}.$$

2. Millä kokonaisluvun n arvoilla Diofantoksen yhtälöllä

$$x + y + z = nxyz$$

on positiivisia kokonaislukuratkaisuja?

3. Etsi Diofantoksen yhtälön

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 3(x + y + z + w).$$

sellaiset positiiviset kokonaislukuratkaisut, joilla x, y, z ja w ovat erisuuria.

4. Osoita, että kokonaislukukertoimisille polynomeille pätee

$$(x-1)^2 \mid \left(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right).$$

5. Etsi sellaiset kokonaisluvut a, b ja c, että

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.

6. Olkoon $f(x)$ polynomi, jonka korkeimman asteen kerroin on 1 ja jonka kertoimet ovat kokonaislukuja. Osoita, että jos on olemassa neljä eri kokonaislukua a, b, c ja d, joilla $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$, niin ei ole olemassa kokonaislukua k, jolla $f(k) = 8$.

7. Polynomin $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ kertoimet ovat kokonaislukuja, ja polynomin arvo on jaollinen luvulla 7 kaikilla muuttujan x kokonaislukuarvoilla. Osoita, että $7 \mid a$, $7 \mid b$, $7 \mid c$, $7 \mid d$ ja $7 \mid e$.

8. Etsi kaikki reaalilukukertoimiset polynomit $f(x)$, joille

$$x\,f(x-1) = (x+1)\,f(x).$$

Vaativampia tehtäviä

9. Olkoon p alkuluku ja q ja n positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että Diofantoksen yhtälöllä

$$2^p + 3^p = q^n$$

ei ole ratkaisuja, kun $n > 1$ ja $q > 1$.

10. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio. Osoita, että kolmioiden ABC, BCD, CDA ja DAB sisäänpiirrettyjen ympyröiden keskipisteet K, L, M, N ovat suorakulmion kärjet.

11. Olkoot A, B, C ja D neljä avaruuden pistettä, jotka eivät ole samassa tasossa. Osoita, että

$$AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

12. Etsi kaikki nollasta poikkeavat reaaliluvut x ja y, jotka ratkaisevat yhtälöparin

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 9, \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18. \end{cases}$$

13. Osoita, että jos $a, b, c, d \in [0, \pi]$, ja

$$\begin{cases} 2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d = 0, \\ 2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d = 0, \end{cases}$$

niin $3\cos(a + d) = 7\cos(b + c)$.

14. Olkoot a, b ja c sellaisia reaalilukuja, ettei niistä minkään kahden summa ole nolla. Osoita, että

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5 - (a + b + c)^5}{a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3} \geqslant \frac{10}{9}(a + b + c)^2.$$

15. Olkoot a ja b erisuuria positiivisia reaalilukuja. Etsi kaikki positiiviset reaalilukuratkaisut yhtälöparille

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = ax - by, \\ x^2 - y^2 = \sqrt[3]{a^2 - b^2}. \end{cases}$$

16. Kutsumme kahta neliön muotoisen 4×4-ruudukon 1×1-ruutujen värjäystä *ekvivalenteiksi*, jos toisen värityksen voi muuttaa toiseksi kierroilla ja peilauksilla. Jos käytössä on kolme väriä, niin kuinka monella epäekvivalentilla tavalla ruudukon 16 ruutua voi värjätä?

17. Kutsumme kahta kuution särmien värjäystä *ekvivalenteiksi*, jos toisen voi muuttaa toiseksi kuutiota kiertämällä. Kuinka monella epäekvivalentilla tavalla kuution särmät voi värjätä, kun halutaan, että kuution 12 särmästä 6 värjätään valkeiksi ja 6 mustiksi?