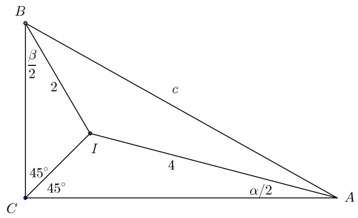
Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailu 2015

Avoimen sarjan tehtävien ratkaisuja

1. Voidaan olettaa, että $b = a+1$. Silloin $d = a^2+(a+1)^2+(a(a+1))^2 = a^2+a^2+2a+1+a^4+2a^3+a^2 = a^4+2a^3+3a^2+2a+1$. Toisaalta $(a^2+a+1)^2 = a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a = a^4+2a^3+3a^2+2a+1$. d on siis neliöluku ja $\sqrt{d} = a^2+a+1$. $\left(a^2+a+1 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0.\right)$ Koska $a^2+a+1 = a(a+1)+1$ ja joko a tai $a+1$ on parillinen, niin $a(a+1)$ on parillinen ja $\sqrt{d}$ on pariton.

2. Olkoon suorakulmainen kolmion ABC, sen hypotenuusa $c = AB$, $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$ ja I sisään piirretyn ympyrän keskipiste. I on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Sovelletaan (kolmion kulmasummasta välittömästi seuraavaa) tietoa, jonka mukaan kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, kolmioihin CAI ja BCI.



Saadaan heti $\angle AIB = \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Koska ABC on suorakulmainen, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Siis $\angle AIB = 135^\circ$. Sovelletaan kosinilausetta kolmioon ABI. Koska $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, saadaan heti

$$c^2 = 4^2 + 2^2 + 2\cdot 4\cdot 2\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 + 8\sqrt{2},$$

joten

$$c = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

3. Olkoon x mielivaltainen joukon A alkio. Jaetaan joukon $A\setminus\{x\}$ 40 alkiota kahdeksi 20-alkioiseksi joukoksi. Olkoot näiden joukkojen alkioiden summat S_1 ja S_2. Tehtävän ehdon perusteella $S_1 + x > S_2$ ja $S_2 + x > S_1$. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa $x > S_2 - S_1$ ja jälkimmäisestä $x > S_1 - S_2$. Siis $x > |S_1 - S_2| \geq 0$. Jokainen A:n alkio on siis positiivinen luku, joten negatiivisia lukuja A:ssa ei ole.

4. *1. ratkaisu.* Jonoja, joissa on $2k$, $k \geq 0$, **A**-kirjainta, on

$$\binom{n}{2k}2^{n-2k}$$

kappaletta: paikat, joissa on **A**-kirjain voidaan valita yhtä monella tavalla kuin voidaan valita n-alkioisen joukon $2k$-alkioinen osajoukko. **B**- ja **C**-kirjaimille jää $n-2k$ paikkaa, ja jokaiseen tällaiseen voidaan asettaa kumpi tahansa näistä kirjaimista, joten mahdollisuuksia on 2^{n-2k}. Kaikkiaan tehtävän mukaisia merkkijonoja on siis

$$2^n + \binom{n}{2}2^{n-2} + \binom{n}{4}2^{n-4} + \cdots$$

kappaletta. Mutta summa saadaan kirjoitettua suljettuun muotoon, kun huomataan, että

$$3^n = (2+1)^n = 2^n + \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2} + \binom{n}{3}2^{n-3} + \binom{n}{4}2^{n-4} + \cdots,$$
$$1 = (2-1)^n = 2^n - \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{2}2^{n-2} - \binom{n}{3}2^{n-3} + \binom{n}{4}2^{n-4} - \cdots.$$

Kun edelliset binomikehitelmät lasketaan yhteen, saadaan

$$3^n + 1 = 2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k}2^{n-2k}.$$

Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis

$$\frac{1}{2}(3^n + 1).$$

2. ratkaisu. n-kirjaimisia sanoja on kaikkiaan 3^n kappaletta. Olkoon näistä S_n sellaisia, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia ja T_n sellaisia, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia. Tarkastellaan sanoja, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Jos sanan viimeinen kirjain on **A**, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on pariton määrä **A**-kirjaimia ja jos viimeinen kirjain on **B** tai **C**, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Tästä seuraa

$$S_n = T_{n-1} + 2S_{n-1}. \tag{1}$$

Vastaavasti tarkastelemalla sanoja, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, tullaan yhtälöön

$$T_n = S_{n-1} + 2T_{n-1}. \tag{2}$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) vähennetään toisistaan, saadaan

$$S_n - T_n = S_{n-1} - T_{n-1}. \tag{3}$$

Nyt $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$ (parillinen määrä **A**-kirjaimia on sanoissa **B** ja **C**, pariton sanassa **A**) eli $S_1 - T_1 = 1$. Yhtälöstä (3) seuraa nyt yksinkertaisella induktiolla, että $S_n - T_n = 1$ kaikilla n. Koska $S_n + T_n = 3^n$, saadaan heti

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1).$$