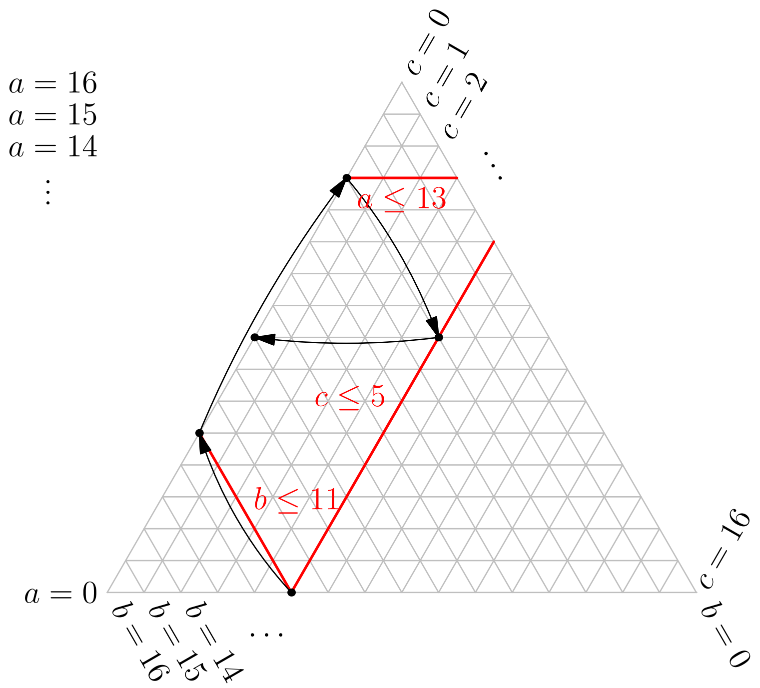
Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, toukokuu 2018
Ratkaisuehdotuksia

Helpompia tehtäviä

1. Kolmen rosvon joukko on varastanut 24 desilitran ruukun, joka on täynnä viiniä. Rosvot haluavat jakaa viinin keskenään tasan, mutta heillä on käytössään vain 13, 11 ja 5 desilitran vetoiset pullot. Miten he voivat jakaa viinin?

Ratkaisu. Kaadetaan ensin ruukusta 11 ja 5 desilitran pullot täyteen. Tällöin ruukkuun jää 8 desilitraa viiniä ja yksi rosvoista voi poistua ruukun kanssa. Tämän jälkeen kuvataan tilannetta järjestettynä kolmikkona, jossa luetellaan 13, 11 ja 5 desilitran pullojen viinimäärät. Alkutilanne on $(0, 11, 5)$ ja mahdolliset siirtymät ovat sellaisia, joissa yhdestä pullosta kaadetaan viiniä toiseen, kunnes ensimmäinen pullo tyhjenee tai toinen täyttyy. Siirtymillä $(0, 11, 5) \mapsto (5, 11, 0) \mapsto (13, 3, 0) \mapsto (8, 3, 5) \mapsto (8, 8, 0)$ saadaan viini jaettua 8 desilitran eriin.

Siirtymät voi olla helpompi löytää, kun piirtää tilanteesta kuvan. Oheisessa kuvassa kaikkia tapoja jakaa 16 desilitraa kolmeen astiaan kuvaa kolmion sisäpiste: etäisyys kolmion alareunasta on verrannollinen ensimmäisen astian sisältöön, etäisyys oikeasta reunasta toisen astian sisältöön ja etäisyys vasemmasta reunasta kolmannen astian sisältöön. (Nämä ovat ns. trilineaarisia koordinaatteja, joista voit lukea lisää vaikka Wikipediasta.) Astioiden tilavuuksia vastaavat epäyhtälöt on merkitty punaisella. Kun viiniä kaadetaan astiasta toiseen, siirrytään kolmion jonkin sivun suuntaisesti niin pitkälle kuin mahdollista, eli niin että kohdeastia täyttyy tai lähtöastia tyhjenee. Kuvioon piirretyt nuolet esittävät ratkaisun siirtymiä.



2. Selvitä yhtälön $x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$ juurten neliöiden summa käyttämättä laskinta.

Ratkaisu. Sovelletaan *Vietan kaavoina* tunnettua yhteyttä polynomin kerrointen ja sen juurten symmetristen polynomien välillä:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc,$$

joten juurten summa $a + b + c = -3$ ja niiden parittaisten tulojen summa $ab + bc + ca = -7$. Siten

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 3^2 + 14 = 23.$$

3. Todista, että mielivaltaisen nelikulmion sivujen keskipisteet ovat suunnikkaan kärkipisteet.

Ratkaisu. Olkoot nelikulmion kärkipisteet A, B, C ja D. Sivujen keskipisteet ovat $W = \frac{1}{2}(A+B)$, $X = \frac{1}{2}(B+C)$, $Y = \frac{1}{2}(C+D)$ ja $Z = \frac{1}{2}(D+A)$. Vektori $\overrightarrow{WX} = X - W = \frac{1}{2}(C-A)$ ja vektori $\overrightarrow{ZY} = Y - Z = \frac{1}{2}(C-A)$, joten sivut WX ja ZY ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset, mistä väite seuraa.

4. Olkoot x ja y positiivisia reaalilukuja, joille pätee $xy = 4$. Osoita, että

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}.$$

Millä lukujen x ja y arvoilla vallitsee yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Kerrotaan nimittäjät pois, jolloin epäyhtälö muuttuu ekvivalenttiin muotoon:

$$5(y+3+x+3) \leq 2(x+3)(y+3),$$

joka puolestaan on ekvivalentti epäyhtälön

$$5y+5x+30 \leq 2xy+6x+6y+18$$

kanssa, joka taas sievenee

$$x+y \geq 12-2xy = 12-8 = 4,$$

koska $xy = 4$. Mutta aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla tämä epäyhtälö on tosi.

5. Olkoot x ja y positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$4\left(x^9+y^9\right) \geq \left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)\left(x^4+y^4\right).$$

Ratkaisu. Todetaan ensin, että millä tahansa positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b pätee

$$2\left(x^{a+b}+y^{a+b}\right) \geqslant \left(x^a+y^a\right)\left(x^b+y^b\right),$$

sillä tämä epäyhtälö sievenee muotoon

$$\left(x^a-y^a\right)\left(x^b-y^b\right) \geqslant 0,$$

mikä puolestaan pitää paikkansa sen vuoksi, että joko $x = y$ ja vasen puoli on 0, tai $x \neq y$ ja vasemman puolen termit ovat välttämättä samanmerkkisiä. Todistettava epäyhtälö seuraa nyt arvioista

$$4\left(x^9+y^9\right) \geqslant 2\left(x^5+y^5\right)\left(x^4+y^4\right) \geqslant \left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)\left(x^4+y^4\right).$$

6. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Ratkaisu. Kertomalla kaiken auki ja ryhmittelemällä termit uudelleen epäyhtälö muuttuu muotoon

$$a(b-c)^2+b(c-b)^2+c(a-b)^2 \geq 0,$$

mikä varmasti pätee.

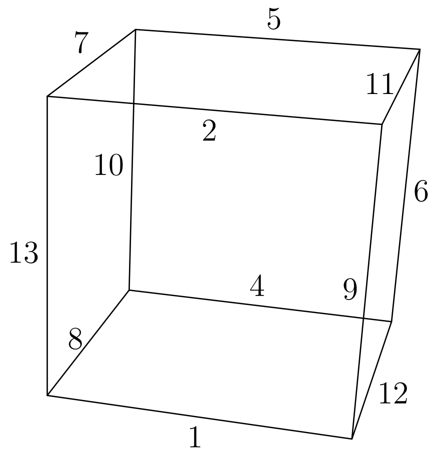
7. a) Numeroidaan kuution särmät luvuilla $1, 2, \ldots, 12$ niin, että kukin luvuista esiintyy täsmälleen yhden särmän yhteydessä. Tarkastellaan kuution kärjestä lähteviä särmiä. Kirjoitetaan kärkeen näissä särmissä olevien lukujen summa ja tehdään tämä jokaiselle kuution kärjelle. Onko mahdollista, että jokaisessa kuution kärjessä on sama luku?

b) Onko edellisen kohdan tilanne mahdollinen, jos jokin luvuista $1, 2, \ldots, 12$ korvataan luvulla 13?

Ratkaisu.

(a) Lasketaan kuution kärjissä olevien lukujen summa. Tällöin kussakin särmässä oleva luku lasketaan kahdesti. Siis kaikkien kärjissä olevien lukujen summa on $2 \cdot (1+2+\ldots+12) = 156$. Tämä ei kuitenkaan ole kahdeksalla jaollinen, joten kaikissa kuution kahdeksassa kärjessä ei voi olla samaa lukua.

(b) Tilanne on mahdollinen. Voidaan esimerkiksi poistaa luku 3 ja numeroida kuution särmät niin kuin oheisessa kuvassa on tehty. Jokaiseen kuution kärkeen tulee nyt luku 22.



8. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on yhtä monta kuudella jaollista ja kuudella jaotonta tekijää.

Ratkaisu. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $n = 2^a \cdot 3^b m$, missä a, b ja m ovat kokonaislukuja sekä $\mathrm{syt}(m, 6) = 1$. Koska jokaisella kokonaisluvulla on aina vähintään yksi tekijä, niin a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, sillä muuten luvulla n ei olisi yhtään kuudella jaollista tekijää. Riittää tarkastella vain luvun n positiivisia tekijöitä, sillä sillä on yhtä monta positiivista ja negatiivista tekijää. Täten voidaan olettaa, että myös luku m on positiivinen. Olkoon $\sigma(m)$ luvun m positiivisten tekijöiden lukumäärä. Tällöin luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärä on $(a+1)(b+1)\sigma(m)$. Näistä kuudella jaollisia ovat $ab\sigma(m)$ tekijää eli kuudella jaottomia ovat

$$(a+1)(b+1)\sigma(m) - ab\sigma(m) = (a+b+1)\sigma(m)$$

tekijää. Halutaan, että $ab\sigma(m) = (a+b+1)\sigma(m)$ eli $ab = a+b+1$. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $a(b-1) = b+1$. Ei voi olla $b = 1$, sillä saataisiin, että $0 = 2$, mikä ei ole mahdollista. Siis on oltava $b > 1$ ja $a = \frac{b+1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1}$. Koska a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, niin on oltava $b = 2$ tai $b = 3$, jolloin $a = 3$ tai $a = 2$. Siis kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on yhtä monta kuudella jaollista ja jaotonta tekijää, ovat muotoa $72m$ tai $108m$, missä m on kokonaisluku, jolla $\mathrm{syt}(m, 6) = 1$.

9. Selvitä kaikki funktiot, jotka toteuttavat ehdon $f(x)f(yf(x)) = f(y)$, kun f on kuvaus reaaliluvuilta reaaliluvuille.

Ratkaisu. Asettamalla $x = y = 0$ saadaan $f(0)^2 - f(0) = 0$ eli $f(0)(f(0)-1) = 0$ eli $f(0) = 0$ tai 1. Jos $f(0) = 1$, asettamalla $y = 0$ saadaan $f(x)f(0) = f(0)$ eli ratkaisu on vakiofunktio $f(x) = 1$. Jos $f(0) = 0$, asettamalla $x = 0$ saadaan $f(y) = 0f(0) = 0$ eli ratkaisu on vakiofunktio $f(x) = 0$.

Vaikeampia tehtäviä

10. Selvitä kaikki funktiot, jotka toteuttavat ehdon $f(x)f(yf(x)) = f(y)$, kun f on kuvaus positiivisilta reaaliluvuilta positiivisille reaaliluvuille ja surjektio.

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = z$. Tällöin $zf(zy) = f(y)$ eli $f(zy) = f(y)/z$. Merkitään $f(1) = c$, jolloin $f(z) = c/z$. Koska f on surjektio, saa z kaikki positiiviset kokonaislukuarvot, joten $f(x) = c/x$, missä c on mielivaltainen positiivinen reaaliluku. Kokeilemalla huomaamme, että nämä funktiot toteuttavat tehtävän ehdot.

11. Määritellään funktio f positiivisille kokonaisluvuille seuraavasti. Olkoon $f(1) = 1$ ja $f(2) = 3$. Kun $n \geq 3$, niin $f(n) = \max\{\, f(r) + f(n-r) \mid 1 \leq r \leq n-1 \,\}$. Selvitä, mikä ehto on lukuparin (a, b) toteutettava, jotta $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Ratkaisu. Kun lasketaan funktion f ensimmäisiä arvoja, näyttää siltä että $f(2k) = 3k$ ja $f(2k+1) = 3k+1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Todistetaan tämä induktiolla. Tapaus $k = 1$ on helppo, joten oletetaan että väittämä on todistettu, kun $k \leq m$.

Kun luku $2m+2$ positiivisten parillisten lukujen summana $2x + 2y$, induktio-oletuksen perusteella $f(2x) + f(2y) = 3(x+y) = 3(m+1)$. Kun sama luku kirjoitetaan positiivisten parittomien lukujen summana $2m+2 = (2u+1) + (2v+1)$,

$$f(2u+1) + f(2v+1) = (3u+1) + (3v+1) = 3(u+v) + 2 < 3(u+v+1) = 3(m+1),$$

joten $f(2(m+1)) = 3(m+1)$.

Tarkastellaan paritonta lukua $2m+3 = 2z + (2w+1)$. Sille

$$f(2z) + f(2w+1) = 3z + 3w + 1 = 3(z+w) + 1 = 3(m+1) + 1,$$

joten $f(2(m+1)+1) = 3(m+1) + 1$.

Yhtäsuuruus $f(a+b) = f(a) + f(b)$ toteutuu siis täsmälleen silloin, kun ainakin yksi luvuista a ja b on parillinen.

12. Olkoon $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$ funktio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $f(1) = 0$
- $f(p) = 1$ kaikilla alkuluvuilla p
- $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$

Määritä pienin kokonaisluku $n \geq 2015$, joka toteuttaa ehdon $f(n) = n$.

Ratkaisu. Todistetaan, että

$$f(q_1 q_2 \cdots q_s) = q_1 \cdots q_s \left(\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_s} \right),$$

kun luvut $q_1, \ldots, q_s$ ovat alkulukuja (eivät välttämättä erisuuria). Väite todistetaan induktiolla luvun s suhteen. Kun $s = 0$, muuttuu väite muotoon $f(1) = 0$, mikä on oletusten nojalla tosi. Oletetaan nyt, että väite pätee jollain luvun s arvolla. Nyt

$$\begin{aligned} f\big((q_1 q_2 \cdots q_s) q_{s+1}\big) &= q_{s+1} f(q_1 q_2 \cdots q_s) + q_1 q_2 \cdots q_s f(q_{s+1}) \\ &= q_1 \cdots q_{s+1} \left(\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_s} \right) + q_1 q_2 \cdots q_s \\ &= q_1 \cdots q_{s+1} \left(\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_{s+1}} \right). \end{aligned}$$

Tarkistetaan nyt, että näin määritelty funktio todella toteuttaa ehdot. Ensinnäkin $f(1) = 0$ ja $f(p) = p \cdot \dfrac{1}{p} = 1$ alkuluvuilla p. Lisäksi

$$\begin{aligned} f(p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_m) &= p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_m \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} \right) \\ &= p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_m \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} \right) + p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_m \left(\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} \right) \\ &= p_1 \cdots p_k f(q_1 \cdots q_m) + q_1 \cdots q_m f(p_1 \cdots p_k), \end{aligned}$$

joten saatu funktio toteuttaa tehtävänannon ehdot.

Olkoon luvun n alkutekijähajotelma $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, jolloin $f(n) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{p_j}$. Jos $f(n) = n$, on pädettävä $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{p_j} = 1$. Kirjoitetaan $\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha_j}{p_j} = \frac{a}{p_1 \cdots p_{k-1}}$, jolloin jos $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{p_j} = 1$, niin

$$\frac{a}{p_1 \cdots p_{k-1}} + \frac{a_j}{p_j} = 1 \quad \text{eli} \quad p_k a + a_k p_1 \cdots p_{k-1} = p_1 \cdots p_k.$$

Koska $\operatorname{syt}(p_k, p_1 \cdots p_{k-1}) = 1$, tulee päteä $p_k \mid a_k$, mutta koska $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{p_j} = 1$, tulee päteä $a_k \leq p_k$, eli $a_k = p_k$ ja $k = 1$. Siispä $f(n) = n$ jos ja vain jos $n = p^p$ jollakin alkuluvulla p. Koska $3^3 = 27 < 2015 < 5^5 = 3125$, on kysytty luku $n = 3125$.

13. Tarkastellaan positiivisten kokonaislukujen joukossa seuraavaa operaatiota: Luku esitetään jossain kannassa (eli b-järjestelmäesityksenä, missä b positiivinen kokonaisluku) sellaisella tavalla, että luvun esityksessä on tasan kaksi numeroa, ja kumpikin numeroista on nollasta poikkeava. Sen jälkeen numerot vaihdetaan, ja b-kantainen luku on uusi luku. Onko mahdollista tätä operaatiota toistamalla muuntaa mikä tahansa luku pienemmäksi kuin kymmenen?

Ratkaisu. Osoitetaan, että tämä on mahdollista osoittamalla, että mitä tahansa kymmentä suurempaa lukua voidaan aina pienentää.

Jos lähtökohtana on pariton luku 2k+1, niin kirjoitetaan tämä k-kantaisena: 21. Vaihdetaan nyt numerot: 12 on uuden luvun k-kantainen esitys, ja tämä on pienempi kuin alkuperäinen luku.

Jos lähtökohtana on parillinen luku $2k$, niin kirjoitetaan tämä $2k-2$-kantaisena, jolloin luvusta tulee 12, vaihdetaan numerot, saadaan 21, eli $2(2k-2)+1 = 4k-3$, joka voidaan kirjoittaa $k-1$-kantaisena: 41, jonka numerot vaihtamalla saadaan $k-1$-kantaisena esityksenä 14, joka vastaa lukua $k-1+4 = k+3$, joka on pienempi kuin luku $2k$, josta lähdettiin liikkeelle.

14. Olkoot a, b ja c reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdon $abc + a + c = b$. Määritä lausekkeen

$$P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$$

suurin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. Ehto on yhtäpitävä ehdon $b = \dfrac{a+c}{1-ac}$ kanssa. Tästä saattaa tulla mieleen, että jokin tangenttisijoitus voisi olla paikallaan. Sijoitetaan $A = \tan^{-1} a$ ja $C = \tan^{-1} c$, jolloin $b = \tan(A+C)$ ja

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2}{\tan^2 A + 1} - \frac{2}{\tan^2(A+C)+1} + \frac{3}{\tan^2 C + 1} \\
&= 2\cos^2 A - 2\cos^2(A+C) + 3\cos^2 C \\
&= (2\cos^2 A - 1) - (2\cos^2(A+C) - 1) + 3\cos^2 C \\
&= \cos(2A) - \cos(2A+2C) + 3\cos^2 C \\
&= 2\sin(2A+C)\sin C + 3\cos^2 C.
\end{aligned}$$

Asetetaan $u = |\sin C|$, jolloin tämän lausekkeen voidaan arvioida olevan korkeintaan

$$2u + 3(1-u^2) = -3u^2 + 2u + 3 = -3\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} \le \frac{10}{3}.$$

Tämä yhtäsuuruus saavutetaan, kun $\sin(2A+C) = 1$ ja $\sin C = \frac{1}{3}$, eli kun $(a,b,c) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ tai $(a,b,c) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Suurin arvo on siis $P = \dfrac{10}{3}$.

15. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}} \ge 4.$$

Ratkaisu. Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}}\right)^2 \cdot \Big((b+c)\left(a^2+bc\right) + (c+a)\left(b^2+ca\right) + (a+b)\left(c^2+ab\right)\Big) \\
&\qquad \ge (b+c+c+a+a+b)^3 = 8\,(a+b+c)^3.
\end{aligned}$$

Siten riittää osoittaa, että

$$\frac{8\,(a+b+c)^3}{2\Big(a^2\,(b+c) + b^2\,(c+a) + c^2\,(a+b)\Big)} \ge 4^2,$$

tai sievemmin, että

$$(a+b+c)^3 \ge 4\left(a^2\,(b+c) + b^2\,(c+a) + c^2\,(a+b)\right).$$

Mutta kertomalla vasen puoli auki ja sieventämällä tästä epäyhtälöstä tuleekin

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b,$$

mikä seuraa Schurin epäyhtälöstä, jonka mukaan

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b.$$

16. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \ge \frac{3}{8}.$$

Ratkaisu. Teemme ensin muuttujanvaihdot $x = b/a$, $y = c/b$ ja $z = a/c$, jolloin $xyz = 1$ ja meidän on osoitettava epäyhtälö

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+y}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+z}\right)^3 \ge \frac{3}{8}.$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\left(\frac{1}{1+t}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+t}\right)^3 + \frac{1}{8} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+t}\right)^2,$$

jokaisella positiivisella reaaliluvulla t. Siten

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^3+\left(\frac{1}{1+y}\right)^3+\left(\frac{1}{1+z}\right)^3\geq\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1+y}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1+z}\right)^2-\frac{3}{16}.$$

Riittää osoittaa, että

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+\left(\frac{1}{1+y}\right)^2+\left(\frac{1}{1+z}\right)^2\geq\frac{3}{4}.$$

Todetaan seuraavaksi, että

$$\left(\frac{1}{1+t}\right)^2+\left(\frac{1}{1+u}\right)^2\geq\frac{1}{1+tu}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla t ja u. Nimittäin, tämän epäyhtälön voi kirjoittaa muodossa

$$(1-tu)^2+tu\,(t-u)^2\geq 0.$$

Nyt voimme arvioida

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+\left(\frac{1}{1+y}\right)^2+\left(\frac{1}{1+z}\right)^2+\left(\frac{1}{1+1}\right)^2\geq\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+z}=\frac{1+z+1+xy}{1+z+xy+xyz}=1,$$

ja asia on selvä vähentämällä puolittain luku $1/4$.

17. Olkoot a, b, c, d ja e positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$(a+b+c+d+e)^3\geq 25\,(abc+bcd+cde+dea+eab)\,.$$

Ratkaisu. Oletamme aluksi, että $e\leq a$, $e\leq b$, $e\leq c$ ja $e\leq d$, jolloin erityisesti $a+d-e>0$. Lisäksi merkitsemme $S=(a+b+c+d)\,/4$. Nyt aritmeettis-geometrista epäyhtälöä käyttämällä

$$abc+bcd+cde+dea+eab=e\,(a+c)\,(b+d)+bc\,(a+d-e)\leq 4eS^2+\left(\frac{4S-e}{3}\right)^3.$$

Väite seuraa, jos voimme osoittaa jotenkin, että

$$25\left(4eS^2+\left(\frac{4S-e}{3}\right)^3\right)\leq(4S+e)^3\,.$$

Mutta tämän viimeisen voi kirjoittaa muodossa

$$\frac{4}{27}\,(e-S)^2\,(13e+32S)\geq 0$$

mikä selvästi pätee.

18. Olkoon f funktio rationaaliluvuilta reaaliluvuille. Oletetaan, että kaikilla rationaaliluvuilla r ja s luku $f(r+s)-f(r)-f(s)$ on kokonaisluku. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku q ja kokonaisluku p, joilla

$$\left|f\left(\frac{1}{q}\right)-p\right|\leq\frac{1}{2012}.$$

Ratkaisu. Olkoon $N=2012!$. Dirichlet'n approksimaatiolauseen mukaan on olemassa kokonaisluvut a ja b, $1\leq a\leq 2012$, joille

$$\left|af\left(\frac{1}{N}\right)-b\right|\leq\frac{1}{2012}.$$

Koska

$$f\left(\frac{a}{N}\right)-af\left(\frac{1}{N}\right)=\sum_{k=1}^{a-1}\left(f\left(\frac{1}{N}+\frac{a-k}{N}\right)-f\left(\frac{1}{N}\right)-f\left(\frac{a-k}{N}\right)\right),$$

niin oletuksen mukaan $f\left(\frac{a}{N}\right)$ ja $af\left(\frac{1}{N}\right)$ eroavat kokonaisluvun verran. Siis on olemassa kokonaisluku p, jolla

$$\left|f\left(\frac{a}{N}\right)-p\right|\leq\frac{1}{2012}.$$

Koska N on luvun a monikerta, niin on olemassa positiivinen kokonaisluku q, jolla $\dfrac{1}{q}=\dfrac{a}{N}$. Väite on siis todistettu.

19. Merkinnällä $\|P\|$ tarkoitetaan koordinaatistossa olevan pisteen P etäisyyttä lähimmästä kokonaislukupisteestä. Osoita, että on olemassa reaaliluku $L > 0$, joka toteuttaa seuraavan ehdon: Jokaista reaalilukua $l > L$ kohti on olemassa tasasivuinen kolmio ABC, jonka sivun pituus on l ja $\max\{\|A\|, \|B\|, \|C\|\} < 10^{-2017}$.

Ratkaisu. Olkoon $\epsilon = 10^{-2017}$. Lisäksi olkoon tasasivuisen kolmion kärjet $(0,0)$, $(2a, 2b)$ ja $(a - \sqrt{3}b, \sqrt{3}a + b)$, missä a ja b ovat reaalilukuja. Tässä kolmiossa jokaisen sivun pituus on $2\sqrt{a^2 + b^2}$. Merkitään reaaliluvun x etäisyyttä lähimmästä kokonaisluvusta merkinnällä $\|x\|$. Koska on voimassa

$$\|(2a, 2b)\| \leq 2\|a\| + 2\|b\|$$

ja

$$\|(a - \sqrt{3}b, \sqrt{3}a + b)\| \leq 2\|\sqrt{3}a\| + 2\|\sqrt{3}b\|,$$

niin riittää osoittaa, että

$$a^2 + b^2 = \frac{l^2}{4} \quad \text{ja} \quad \max\{\|a\|, \|b\|, \|\sqrt{3}a\|, \|\sqrt{3}b\|\} < \frac{\epsilon}{4}. \tag{1}$$

Olkoon S niiden ei-negatiivisten kokonaislukujen m joukko, joilla $\|\sqrt{3}m\| < \frac{\epsilon}{12}$. Osoitetaan, että riittävän suurella luvulla l on olemassa kokonaisluvut $m, n \in S$ ja reaaliluku α niin, että kun $a = m + \alpha$ ja $b = n$, väite on todistettu. Osoitetaan ensin, että näiden lukujen löytäminen riittää todistamaan väitteen.

Lemma 1. *Jos on olemassa kokonaisluvut $m, n \in S$ ja reaaliluku $\alpha \in [0, \frac{\epsilon}{12}]$, joilla $(m + \alpha)^2 + n^2 = \frac{l^2}{4}$, niin $a = m + \alpha$ ja $b = n$ toteuttavat kohdan (1) ehdot.*

Todistus. Selvästi, kun $a = m + \alpha$ ja $b = n$, niin kohdan (1) ensimmäinen ehto on voimassa. Toinen ehto taas seuraa kolmioepäyhtälöstä. Koska $m, n \in S$, niin $\|a\| = \|\alpha\| < \frac{\epsilon}{12}$, $\|b\| = 0$ ja $\|\sqrt{3}b\| < \frac{\epsilon}{12}$. Lisäksi kolmioepäyhtälön nojalla, koska $m \in S$ ja $\alpha \in [0, \frac{\epsilon}{12}]$

$$\|\sqrt{3}a\| = \|\sqrt{3}m + \sqrt{3}\alpha\| \leq \|\sqrt{3}m\| + \|\sqrt{3}\alpha\| < \frac{\epsilon}{12} + \frac{\epsilon}{4\sqrt{3}} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Siis kohdan (1) toinenkin ehto on voimassa. □

Etsitään ehdot toteuttavat luvut m, n ja α seuraavan lemman avulla.

Lemma 2. *On olemassa positiivinen kokonaisluku L, jolla L peräkkäisen ei-negatiivisen kokonaisluvun joukosta ainakin yksi kuuluu joukkoon S.*

Todistus. Väite seuraa Dirichlet'n approksimaatiolauseesta. □

Osoitetaan nyt, että lemmassa 1 määritellyt luvut m, n ja α ovat todella olemassa. Oletetaan nyt, että L_1 toteuttaa lemmassa 2 mainitun ehdon ja $\frac{l}{2} > L_1$ on riittävän suuri. Olkoon m suurin joukon S alkio, joka on korkeintaan $\frac{l}{2}$. Lemman 2 mukaan $m \geq \frac{l}{2} - L_1$ eli $\frac{l^2}{4} - m^2 \leq L_1 l$. Olkoon nyt n joukon S suurin alkio, joka on enintään $\frac{l^2}{4} - m^2$. (Tällainen on selvästi olemassa, sillä $\frac{l^2}{4} - m^2 \geq 0$ ja $0 \in S$.) Vastaavalla päättelyllä kuin edellä saadaan, että

$$0 \leq \frac{l^2}{4} - m^2 - n^2 \leq 2L_1\sqrt{L_1 l}. \tag{2}$$

Olkoon α reaaliluku, jolla $\frac{l^2}{4} = (m + \alpha)^2 + n^2$. Lausekkeen (2) vasemmanpuoleisimman epäyhtälön mukaan voidaan valita $\alpha \geq 0$. Edelleen epäyhtälön (2) mukaan

$$2m\alpha \leq 2m\alpha + \alpha^2 = \frac{l^2}{4} - m^2 - n^2 < 2L_1^2\sqrt{2l}$$

ja lisäksi on $m \geq \frac{l}{2} - L_1$. Koska $\lim\limits_{l \to \infty} \frac{L_1^2\sqrt{2l}}{\frac{l}{2} - L_1} = 0$, niin riittävän suurella l on $2L_1^2\sqrt{2l} < \frac{\epsilon}{12}$. Siis riittävän suurella luvulla l on olemassa kokonaisluvut $m, n \in S$ ja reaaliluku $\alpha \in [0, \frac{\epsilon}{12}]$, joilla $(m + \alpha)^2 + n^2 = \frac{l^2}{4}$. Täten lemman 1 nojalla väite on todistettu.

20. Kolmion ABC sisäympyrä sivuaa kolmion sivuja BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F, vastaavasti. Piste P on suoralla DE siten, että $AP \parallel DF$. Piste Q on suoralla DF siten, että $AQ \parallel DE$. Todista, että $PQ \parallel BC$.

Ratkaisu. Olkoon suorien AP ja BC leikkauspiste X ja suorien AQ ja BC leikkauspiste Y. Olkoon sisäympyrän keskipiste I. Koska $AY \parallel DE \perp CI$, kolmiot CAY ja CED ovat tasasivuisia, joten $AE = YD$. Vastaavasti $AF = XD$. Mutta $AE = AF$, joten $DX = DY$. Kolmiot QDY ja PXD ovat yhtenevät, koska niiden vastinsivut ovat yhdensuuntaiset ja $DX = DY$. Siten niiden suoraa BC vastaan kohtisuorat korkeusjanat ovat yhtä pitkät, joten $QP \parallel BC$.