Koe 9.9.2016

1. Määritä kaikki sellaiset alkuluvut p, q, r, $p < q < r$, joille $q - p$, $r - q$ ja $r - p$ ovat alkulukuja.

2. Ympyrät $\mathcal{Y}_1$ ja $\mathcal{Y}_2$, joiden keskipisteet ovat O_1 ja O_2, leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Pisteen A kautta kulkeva suora leikkaa $\mathcal{Y}_1$:n pisteessä C_1 ja $\mathcal{Y}_2$:n pisteessä C_2. Suorat C_1O_1 ja C_2O_2 leikkaavat pisteessä D. Osoita, että pisteet B, C_1, C_2 ja D ovat samalla ympyrällä.

3. Määritä kaikki funktiot $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, joille pätee

$$(1 + y)f(x + y) = f(xf(y))$$

kaikilla reaaliluvuilla x, $y \geq 0$.

4. Reaaliluvuille a, b, c on voimassa

$$(2b - a)^2 + (2b - c)^2 = 2(2b^2 - ac).$$

Osoita, että a, b ja c ovat jonkin aritmeettisen jonon kolme peräkkäistä jäsentä.

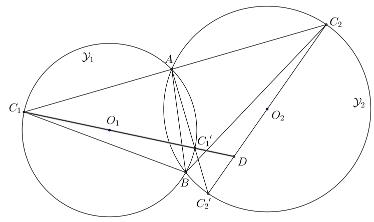
5. Millä $n \geq 3$ on olemassa n-kulmio, jonka jokainen sivu on yhdensuuntainen saman n-kulmion jonkin toisen sivun kanssa?

Koe 9.9.2016 – ratkaisuja

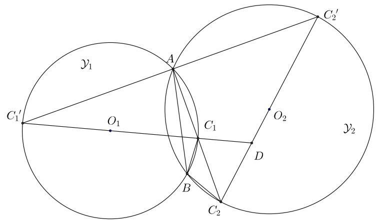
1. *Määritä kaikki sellaiset alkuluvut p, q, r, $p < q < r$, joiden erotusten itseisarvot ovat myös alkuluja.*

Ratkaisu. Koska q, $r > p \geq 2$, niin q ja r ovat parittomia. Silloin $r - q$ on parillinen alkuluku, joten $r = 2 + q$. Alkuluvut $r - p$ ja $q - p = r - p - 2$ eroavat toisistaan 2:lla, joten molempien on oltava parittomia. Koska r ja $r - p$ ovat parittomia, on p:n oltava parillinen. Siis $p = 2$. Nyt $q - 2 = q - p$, q ja $q + 2 = r$ ovat kaikki alkulukuja. Näistä kolmesta luvusta tasan yksi on kolmella jaollinen ja siis 3. Jos olisi $q = 3$, olisi $q - p = 1$, jos olisi $q + 2 = 3$, olisi $r = 3$. Ainoa mahdollisuus on $q - 2 = 3$ eli $q = 5$, $r = 7$. Heti nähdään, että välttämätön ehto $(p, q, r) = (2, 5, 7)$ on myös riittävä.

2. *Ympyrät $\mathcal{Y}_1$ ja $\mathcal{Y}_2$, joiden keskipisteet ovat O_1 ja O_2, leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Pisteen A kautta kulkeva suora leikkaa $\mathcal{Y}_1$:n pisteessä C_1 ja $\mathcal{Y}_2$:n pisteessä C_2. Suorat C_1O_1 ja C_2O_2 leikkaavat pisteessä D. Osoita, että pisteet B, C_1, C_2 ja D ovat samalla ympyrällä.*



Ratkaisu. Oletetaan ensin, että A on pisteiden C_1 ja C_2 välissä. Olkoot C_1C_1' ja C_2C_2' ympyröiden $\mathcal{Y}_1$ ja $\mathcal{Y}_2$ halkaisijat. Silloin $\angle C_1AC_1'$ ja $\angle C_2AC_2'$ ovat suoria kulmia, joten A, C_1' ja C_2' ovat samalla suoralla. Väitteen todistamiseksi riittää, kun osoitetaan, että $\angle C_1BC_2 = \angle C_1DC_2$. Mutta kehäkulmalausetta ja ristikulmien yhtäsuuruutta hyväksi käyttäen nähdään, että $\angle C_1BC_2 = \angle C_1BA + \angle ABC_2 = \angle C_1C_1'A + \angle AC_2'C_2 = \angle DC_1'C_2' + \angle C_1'C_2'D$. Kolmiossa $C_1'C_2'D$ kahden kulman summa on kolmannen vieruskulma. Siis todellakin $\angle C_1BC_2 = \angle C_1DC_2$.



Olkoon sitten A janan C_1C_2 ulkopuolella. Ei merkitse rajoitusta, jos oletetaan, että C_1 on janalla AC_2. Jos C_1' ja C_2' ovat edelleen sellaiset $\mathcal{Y}_1$:n ja $\mathcal{Y}_2$:n pisteet, että C_1C_1' ja C_2C_2' ovat ympyröiden halkaisijoita, niin $\angle C_1AC_1$ ja $\angle C_2AC_2' = \angle C_1AC_2'$ ovat suoria kulmia, joten A on suoralla $C_1'C_2'$. Koska $BC_2C_2'A$ on jännenelikulmio, $\angle BAC_1'$ ja $\angle C_2'C_2B = \angle DC_2B$ ovat vieruskulmia. Mutta $\angle C_1'AB = \angle C_1'C_1B$, joten myös $\angle C_1'C_1B$ ja $\angle DC_2B$ ovat vieruskulmia. Nelikulmio C_1BC_2D on siis jännenelikulmio, ja väite pitää myös tässä tapauksessa paikkansa.

3. *Määritä kaikki funktiot $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, joille pätee*

$$(1 + y)f(x + y) = f(xf(y)) \tag{1}$$

kaikilla x, $y \geq 0$.

Ratkaisu. Sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön (1). Saadaan heti

$$f(y) = \frac{f(0)}{y+1} \tag{2}$$

kaikilla $y \geq 0$. Sijoitetaan (2) yhtälöön (1). Saadaan

$$(y+1)\frac{f(0)}{x+y+1} = \frac{f(0)}{x\dfrac{f(0)}{y+1}+1}.$$

Yhtälön toteutuu, jos $f(0) = 0$. Jos $f(0) > 0$, yhtälö sievenee muotoon $x + y + 1 = xf(0) + y + 1$. Koska tämä on voimassa kaikilla $x > 0$, on oltava $f(0) = 1$. Yhtälön (1) voivat siis toteuttaa vain funktiot $f(x) = 0$ kaikilla x ja $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ kaikilla x. Heti nähdään, että ne myös toteuttavat yhtälön (1).

4. *Reaaliluvuille a, b, c on voimassa*

$$(2b-a)^2 + (2b-c)^2 = 2(2b^2 - ac).$$

Osoita, että a, b ja c ovat jonkin aritmeettisen jonon kolme peräkkäistä jäsentä.

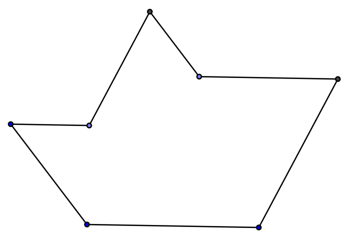
Ratkaisu. Kun yhtälöstä (1) poistetaan sulkeet, saadaan

$$0 = 4b^2 - 4ab + a^2 + 4b^2 - 4bc + c^2 - 4b^2 + 2ac = 4b^2 + (a+c)^2 + 4b(a+c) = (a+c-2b)^2.$$

Siis b on lukujen a ja c keskiarvo. Tämä todistaa väitteen.

5. *Millä $n \geq 3$ on olemassa n-kulmio, jonka jokainen sivu on yhdensuuntainen saman n-kulmion jonkin toisen sivun kanssa?*

Ratkaisu. Jos n on parillinen, säännöllinen n-kulmio toteuttaa ehdon. Kolmio ei toteuta ehtoa. Olkoon $n = 5$. Olkoon jos viisikulmion sivu s_1 on yhdensuuntainen sivun s_2 kanssa ja sivu s_3 yhdensuuntainen sivun s_4 kanssa, niin s_5 on yksi kolmesta keskenään yhdensuuntaisesta sivusta. Kolmesta viisikulmion sivusta kaksi on välttämättä vierekkäin, eli tehtävän mukaista aitoa viisikulmiota ei ole olemassa. Tehtävän mukaisia seitsenkulmioita voi rakentaa kuvan mukaisesti.



Mistä hyvänsä tehtävän ehdon täyttävästä n-kulmiosta voi muodostaa ehdon täyttävän $(n+2)$-kulmion korvaamalla jonkin kärjen kahdella sellaisella vierekkäisellä kärjellä, joissa kärkikulmien kyljet ovat korvattavan kärjen kärkikulman kylkien suuntaiset. Näin ollen erityisesti kaikilla parittomilla $n \geq 7$ vaadittu monikulmio on olemassa.