

# Joulukuun helpommat valmennustehtävät

Ratkaisuja pyydetään seuraavaan valmennusviikonloppuun 9.-11.1. mennessä. Ratkaisut voi tuoda valmennusviikonlopulle tai lähettää postitse osoitteeseen Joni Teräväinen, Kalannintie 5, 00430 Helsinki tai lähettää sähköpostitse osoitteeseen joni.teravainen@helsinki.fi. Tehtävistä voi myös kysyä sähköpostitse. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

1. Olkoot  $a$  ja  $b$  reaalilukuja, joille  $a + b = 2$  ja  $ab = -1$ . Määritä  $a^{10} + b^{10}$ .
2. Suorakulmainen ruudukko koostuu  $a \times b$  yksikköneliöstä, missä  $a$  ja  $b$  ovat positiivisia kokonaislukuja. Ruudukossa on reunaruutuja tasan yksi kolmasosa kaikista ruuduista. Määritä lukujen  $a$  ja  $b$  mahdolliset arvot.
3. Pöydällä on 2014 kiveä. Kaksi pelaajaa poistaa pöydältä vuorollaan 1, 2, 3 tai 4 kiveä. Voittaja on viimeisen kiven poistanut pelaaja. Pystyykö aloittava pelaaja pakottamaan voiton itselleen?
4. Olkoon  $AB$  jana, jonka keskipiste on  $M$  ja olkoon  $Q$  mielivaltainen tason piste. Osoita, että  $QB^2 = 2QM^2 + \frac{1}{2}AB^2$ .
5. Olkoon  $x$  positiivinen reaaliluku. Osoita, että  $x^5 + x + 1 \geq 3x^2$ .
6. Määritä kaikki parit  $(a, b)$  luonnollisia lukuja, joille  $2^a + 2^b$  on neliöluku (neliöluvut ovat  $0^2, 1^2, 2^2, \dots$ ).
7. Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku. Shakkiturnauksessa on  $2n$  pelaajaa. Kuinka monta mahdollista aloituskierrosta on (aloituskierroksella kukin pelaaja pelaa tasan yhtä muuta vastaan)?
8. Olkoon  $ABCD$  neliö ja  $P$  piste sen sisällä siten, että  $PD = 1, PA = 2, PB = 3$ . Määritä kulma  $\angle APD$ .
9. Määritä kaikki alkuluvut  $p$  siten, että luvut  $p, p + a, p + 2a, p + 3a, \dots, p + 4a$  ovat kaikki alkulukuja jollakin positiivisella kokonaisluvulla  $a < 30$ .
10. Olkoot  $A_1, A_2, \dots, A_5$  viisi eri pistettä tasossa. Mikä on pienimmän syntyvän kulman  $\angle A_i A_j A_k$  ( $1 \leq i, j, k \leq 5, i \neq j, j \neq k, k \neq i$ ) suurin mahdollinen arvo?