

SYYSKUUN 2012 HELPOMMAT KIRJEVALMENNUSTEHTÄVÄT

Ratkaisuita voi lähettää lokakuun loppuun mennessä osoitteeseen

Esa Vesalainen
Huddingenpolku 2A15
01600 Vantaa

tai sähköpostitse osoitteeseen

esavesalainen@gmail.com

minne voi myös lähettää kysymyksiä tehtävistä.

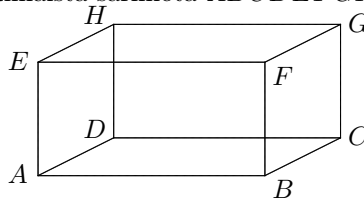
1. Olkoot a , b , c ja d neljä kokonaislukua, joille

$$7a + 8b = 14c + 28d.$$

Osoita, että ab on jaollinen luvulla 14.

2. Etsi kaikki kokonaisluvut n , joille $n^2 + 5n + 1$ on neliöluku.

3. Tarkastellaan suorakulmaista särmiötä $ABCDEFGH$.



- a) Jos $ABCDEFGH$ on kuutio, kuinka suuri on kulma \widehat{FCH} ?
 - b) Voiko särmien pituudet valita niin, että $\widehat{FCH} = 45^\circ$?
4. Kahdella tasasivuisella kolmiolla $\triangle ABC$ ja $\triangle ABD$ (missä $C \neq D$) on yhteinen sivu AB . Sivujen AC ja BC keskipisteet ovat E ja F . Todista, että janat DE ja DF pilkkovat sivun AB kolmeen yhtä pitkään osaan.
 5. Postinkantajalla on n pakettia, joiden painot ovat $1, 2, 3, \dots, n-1$ ja n . Hän haluaa jakaa ne kolmeen yhtä painavaan rykelmään. Onko se mahdollista kun
 - a) $n = 2011$?
 - b) $n = 2012$?
 6. Etsi kaikki alkuluvut p , q ja r , joille $pq + qr + rp + 1 = pqr$.
 7. Olkoot a ja b kaksi kokonaislukua joiden erotus on kolmella jaollinen.
 - a) Onko luku $\frac{2}{3}(a^2 + ab + b^2)$ aina kahden kokonaisluvun neliöiden summa?
 - b) Onko se aina kolmen kokonaisluvun neliöiden summa?
 8. Etsi kaikki funktiot $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joille

$$f(x + y f(x)) = f(x f(y)) - x + f(y + f(x))$$
 kaikilla reaaliluvuilla x ja y .
 9. Etsi reaaliluvut x , joille $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 1$.
 10. Millä reaaliluvuilla x luku $\sqrt[3]{4 + 4x}$ on suurempi kuin luku $1 + \sqrt[3]{x}$?