Huhtikuun 2014 valmennuskirje
Ratkaisuita

1. Osoita, että

$$(1+\sin x)(1+\cos x) \leqslant \frac{3}{2}+\sqrt{2}$$

kaikilla reaaliluvuilla x.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}(1+\sin x)(1+\cos x) &\leqslant \frac{(1+\sin x)^2+(1+\cos x)^2}{2} \\ &= \frac{2+2\sin x+2\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x}{2} = \frac{3}{2}+\sin x+\cos x \\ &= \frac{3}{2}+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{3}{2}+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

2. Pöydällä on yksi kasa, jossa on 1001 kiveä. Jokaiselle pöydällä esiintyvälle kasalle (jossa on ainakin kolme kiveä) voi tehdä niin, että siitä poistaa yhden kiven ja sitten sen jakaa kahdeksi pienemmäksi kasaksi (joiden ei tarvitse olla yhtä suuria). Voiko tätä toimitusta toistamalla päästä tilanteseen, jossa pöydällä on vain kolmen kiven kasoja?

Ratkaisu. Alussa kivien ja kasojen lukumäärien summa on $1001+1=1002$. Sallitussa operaatiossa kivien lukumäärä pienenee yhdellä ja kasojen lukumäärä kasvaa yhdellä. Siten kivien ja kasojen lukumäärien summa säilyy muuttumattomana. Jos olisi mahdollista päästä tilanteeseen, jossa jokaisesssa kasassa olisi kolme kiveä, olisi kivien ja kasojen yhteenlaskettu lukumäärä neljällä jaollinen, mutta $1002 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod 4$.

3. Olkoon p pariton alkuluku. Osoita, että summa

$$1^{p^p}+2^{p^p}+3^{p^p}+\ldots+p^{p^p}$$

on jaollinen luvulla p.

Ratkaisu. Fermat'n pienen lauseen nojalla $a^p \equiv a \pmod p$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$. Siispä

$$1^p+2^p+\ldots+p^p \equiv 1+2+\ldots+p \equiv p\cdot\frac{p+1}{2} \equiv 0 \pmod p.$$

Samassa hengessä, jos jollakin $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$1^{p^\alpha}+2^{p^\alpha}+\ldots+p^{p^\alpha} \equiv 0 \pmod p,$$

niin myös

$$\begin{aligned}1^{p^{\alpha+1}}+2^{p^{\alpha+1}}+\ldots+p^{p^{\alpha+1}} &= \left(1^{p^\alpha}\right)^p+\left(2^{p^\alpha}\right)^p+\ldots+\left(p^{p^\alpha}\right)^p \\ &\equiv 1^{p^\alpha}+2^{p^\alpha}+\ldots+p^{p^\alpha} \equiv 0 \pmod p.\end{aligned}$$

4. Olkoot $a, b \in \,]0, \pi/2[$. Osoita, että

$$\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b} \geqslant \frac{1}{\cos(a-b)}.$$

Ratkaisu. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\cos(a-b)\left(\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b}\right) &= (\sin a \sin b + \cos a \cos b)\left(\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b}\right) \\ &\geqslant \sqrt{\sin a \sin b} \cdot \sqrt{\frac{\sin^3 a}{\sin b}} + \sqrt{\cos a \cos b} \cdot \sqrt{\frac{\cos^3 a}{\cos b}} = \sin^2 a + \cos^2 a = 1.\end{aligned}$$

5. Osoita, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n pätee

$$n^n - 1 \geqslant n^{(n+1)/2}(n-1).$$

Ratkaisu. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\frac{n^n-1}{n-1} &= 1 + n + n^2 + \ldots + n^{n-1} \geqslant n\sqrt[n]{1 \cdot n \cdot n^2 \cdot \ldots \cdot n^{n-1}} \\ &= n \cdot \left(n^{(n-1)n/2}\right)^{1/n} = n^{(n+1)/2}.\end{aligned}$$

6. Muodostakoot $k_1, k_2, \ldots$ sellaisen kasvavan positiivisten kokonaislukujen jonon, että $k_{n+2} + k_n > 2k_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että luku $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-k_n}$ on irrationaalinen.

Ratkaisu. Kyseinen luku kuuluu välille $]0, 1[$, ja sen desimaalikehitelmässä esiintyy numero 1 kohdissa $k_1, k_2, \ldots$, ja muut desimaalit ovat nollia. Koska $k_{n+2} - k_{n+1} > k_{n+1} - k_n$, ykkösten välissä esiintyvät nollien rivit pitenevät. Desimaalikehitelmä ei siis voi olla jaksollinen, ja se ei tietenkään ole äärellisen mittainen, ja siksi kyseessä olevan luvun on oltava irrationaalinen.

7. Olkoot $a, b, c, d \in [0, \pi]$ sellaisia, että

$$\begin{cases} 2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d = 0, \\ 2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d = 0. \end{cases}$$

Osoita, että $3\cos(a+d) = 7\cos(b+c)$.

Ratkaisu. Ensinnäkin

$$\begin{cases} 2\cos a + 9\cos d = -6\cos b - 7\cos c, \\ 2\sin a - 9\sin d = 6\sin b - 7\sin c. \end{cases}$$

Neliöimällä puolittain saadaan

$$\begin{cases} 4\cos^2 a + 81\cos^2 d + 36\cos a\cos d = 36\cos^2 b + 49\cos^2 c + 84\cos b\cos c, \\ 4\sin^2 a + 81\sin^2 d - 36\sin a\sin d = 36\sin^2 b + 49\sin^2 c - 84\sin b\sin c. \end{cases}$$

Laskemalla nämä yhteen saadaan

$$4 + 81 + 36(\cos a\cos d - \sin a\sin d) = 36 + 49 + 84(\cos b\cos c - \sin b\sin c),$$

mikä sievenee muotoon

$$36\cos(a+d) = 84\cos(b+c).$$

Jakamalla puolittain luvulla 12 saadaan haluttu lopputulos.

8. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että yhtälön

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

ei-negatiivisten kokonaislukuratkaisuiden lukumäärä on $\binom{n+m-1}{m-1}$. (Tässä vasemman puolen termien järjestys otetaan huomioon.)

Ratkaisu. Kun $m = 1$, on ratkaisuita selvästi täsmälleen yksi kappale, ja kaikeksi onneksi $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n}{0} = 1$. Oletetaan sitten, että jollakin $m \in \mathbb{Z}_+$ ratkaisuiden lukumäärä tosiaan on $\binom{n+m-1}{m-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, ja tarkastellaan sitten yhtälön

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m + x_{m+1} = n$$

ratkaisuiden lukumäärää jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$.

Luvulle x_{m+1} on täsmälleen $n + 1$ eri mahdollista arvoa 0, 1, 2, $\ldots$, n, ja kullakin näistä muut tuntemattomat ratkaisevat yhtälön

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n - x_{m+1}.$$

Kun $x_{m+1} = n$, on ratkaisuita tälle täsmälleen yksi, eli $\binom{1+m-1}{1+m-1}$ kappaletta. Muutoin niitä on $\binom{n-x_{m+1}+m-1}{m-1}$ kappaletta. Ratkaisuita on siis yhteensä

$$\begin{aligned}
\binom{1+m-1}{m} + \binom{1+m-1}{m-1} &+ \binom{2+m-1}{m-1} + \ldots + \binom{n+m-1}{m-1} \\
&= \binom{1+m-1}{m} + \binom{2+m-1}{m-1} + \ldots + \binom{n+m-1}{m-1} \\
&= \binom{2+m-1}{m} + \ldots + \binom{n+m-1}{m-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \binom{n+m}{m}
\end{aligned}$$

kappaletta ja olemme valmiit.

9. Olkoon $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että jokainen luvuista a_1, a_2, $\ldots$ on kokonaisluku.

Ratkaisu. Rekursioyhtälöstä seuraa, että

$$a_{n+1}^2 + 4a_n^2 - 4a_n a_{n+1} = 3a_n^2 - 2,$$

eli

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 - 4a_n a_{n+1} = -2.$$

Koska myös

$$a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 - 4a_{n+1} a_{n+2} = -2,$$

on

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 - 4a_{n+1} a_{n+2} + 4a_n a_{n+1} = 0,$$

ja edelleen

$$(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n) = 0.$$

Koska jono a_1, a_2, $\ldots$ on aidosti kasvava, on oltava

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$$

Lopuksi, koska $a_1 = 1$ ja $a_2 = 3$, tästä seuraa haluttu väite.

10. Olkoot kolmion sivut a, b ja c, ja olkoon sen piirin puolikas 1. Osoita, että

$$1 < ab + bc + ca - abc \leqslant 1 + \frac{1}{27}.$$

Ratkaisu. Koska $a+b+c=2$, voi todistettavat epäyhtälöt kirjoittaa muodossa

$$0 < 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc \leqslant \frac{1}{27},$$

eli muodossa

$$0 < (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant \frac{1}{27}.$$

Jos jokin kolmion sivuista olisi pituudeltaan vähintään 1, niin muiden kahden sivun pituuksien summa olisi enintään 1, vastoin kolmioepäyhtälöitä. Siispä on oltava $a < 1$, $b < 1$ ja $c < 1$. Tästä seuraa välittömästi vasemmanpuoleinen epäyhtälö, ja oikeanpuoleinen seuraa nyt aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä:

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant \left(\frac{1-a+1-b+1-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{3-2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

11. Olkoot a, b ja c reaalilukuja, joille $abc \neq 0$, $a+b+c=0$ ja $a^3+b^3+c^3 = a^5+b^5+c^5$. Osoita, että

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{6}{5}.$$

Ratkaisu. Todetaan ensiksi, että

$$0 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),$$

eli

$$a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca),$$

ja että

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right) = 0,$$

eli

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc.$$

Ymmärtääksemme viidensiä potensseja, laskekaamme ensin

$$\begin{aligned} 0 &= (a+b+c)^5 \\ &= a^5+b^5+c^5+5\left(a^4b+a^4c+ab^4+b^4c+ac^4+bc^4\right) \\ &\quad + 20\left(a^3bc+ab^3c+abc^3\right) + 20\left(a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2\right), \end{aligned}$$

ja koska

$$\begin{aligned} &a^5+b^5+c^5+5\left(a^4b+a^4c+ab^4+b^4c+ac^4+bc^4\right) \\ &\quad = -4\left(a^5+b^5+c^5\right)+5\left(a^4+b^4+c^4\right)(a+b+c) \\ &\quad = -4\left(a^5+b^5+c^5\right), \end{aligned}$$

tästä seuraa, että

$$a^5+b^5+c^5 = 5abc\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right).$$

Nyt siis

$$\frac{3}{5} = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

eli

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}.$$

12. Etsi reaaliluvut x ja y, joille

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 9, \\ \left(x^{-1/3} + y^{-1/3}\right)\left(1 + x^{-1/3}\right)\left(1 + y^{-1/3}\right) = 18. \end{cases}$$

Ratkaisu. Aloitetaan kirjoittamalla $a = x^{-1/3}$ ja $b = y^{-1/3}$, jolloin yhtälöryhmä muuttuu muotoon

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 9, \\ (a+b)(1+a)(1+b) = 18. \end{cases}$$

Kirjoittamalla edelleen $\sigma = a + b$ ja $\mu = ab$, yhtälöryhmä muuttuu helpommin hallittavaan muotoon

$$\begin{cases} \sigma\left(\sigma^2 - 3\mu\right) = 9, \\ \sigma(1 + \sigma + \mu) = 18. \end{cases}$$

Edelleen,

$$\begin{cases} \sigma^3 - 3\sigma\mu = 9, \\ 3\sigma^2 + 3\sigma + 3\sigma\mu = 54. \end{cases}$$

Laskemalla nämä yhteen saadaan

$$\sigma^3 + 3\sigma^2 + 3\sigma = 63,$$

tai yksinkertaisemmin $(\sigma + 1)^3 = 64$. On oltava $\sigma + 1 = 4$, eli $\sigma = 3$. Sijoittamalla tämä yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön saadaan

$$27 - 9\mu = 9, \quad \text{eli} \quad \mu = 2.$$

Yhtälöparilla

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ ab = 2, \end{cases}$$

on täsmälleen kaksi ratkaisua, nimittäin

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

Eli alkuperäisen ongelman ainoat mahdolliset ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1/8, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = 1/8, \\ y = 1. \end{cases}$$

Lopuksi, koska $1 + 8 = 9$ ja $(1+2)(1+1)(1+2) = 18$, nämä molemmat tosiaan ovat ratkaisuita.