# Harjoitustehtävät, joulukuu 2013, (ehkä vähän) vaativammat

Mielellään paperille kirjoitetut vastaukset joko tammikuun valmennusviikonvaihteeseen Päivölään, tai samoihin aikoihin paperipostissa osoitteeseen `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu`. Jos haluat jättää vastauksia sähköpostitse, niin osoite on `matti.lehtinen@helsinki.fi`.

Tehtävät ovat erään kaukaisen maan kansallisen matematiikkakilpailun tehtäviä melkein kolmenkymmenen vuoden takaa.

**1.** Viisinumeroinen luku $\overline{a679b}$ on jaollinen 72:lla. Määritä $a$ ja $b$.

**2.** Kolmion $ABC$ sisäympyrä $\Gamma$ sivuaa kolmion sivua $BC$ pisteessä $X$. Osoita, että $\Gamma$:n keskipiste on $AX$:n ja $BC$:n keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla.

**3.** Osoita, että jos $x$, $y$, $z$ ovat $\geq 0$, niin

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geq 0.$$

Osoita edelleen, että kaikille reaaliluvuille $a$, $b$, $c$ pätee

$$a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2\geq 2(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3).$$

**4.** Luvut $x$ ja $y$ toteuttavat yhtälöt $x^2-3yx+9=0$ ja $y^2+y=1$.

a) Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n$ on

$$x^n=a_n+b_nx+c_ny+d_nxy,$$

missä $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$ ovat kokonaislukuja.

b) Osoita, että $x^5=243$.

c) Osoita, että jos $5|n$, niin

$$x^{n-1}+3x^{n-2}+3^2x^{n-3}+\cdots+3^{n-2}x+3^{n-1}=0.$$

**5.** Kolmion $ABC$ kärjistä $A$, $B$, $C$ piirretyt kulmanpuolittajat leikkaavat kolmion ympärysympyrän myös pisteissä $D$, $E$, $F$. Osoita, että $AD\perp EF$.

**6.** Jännenelikulmiolla $ABCD$ on sisäympyrä (ympyrä, joka sivuaa sen kaikkia sivuja). Lävistäjä $AC$ jakaa $ABCD$:n kahdeksi sama-alaiseksi kolmioksi. Osoita, että $AB=AD$ ja $BC=BD$. Oletetaan, että $AB=3\cdot BC$ ja että $ABCD$:n sisäympyrän säde on $r$. Osoita, että nelikulmion ala on $\dfrac{16}{3}r^2$.

**7.** Säännöllisen $n$-kulmion $\mathcal{P}_n$ ympäri piirretyn ympyrän säde on 1. Olkoon

$$L_n=\{d\in\mathbb{R}|d \text{ on } \mathcal{P}_n\text{: n kahden kärjen välinen etäisyys}\}.$$

Määritä

$$\sum_{d\in L_n}d^2.$$

**8.** Pisteet $O$ ja $P$ ovat sellaiset kolmion $ABC$ sisäpisteet, että $\angle ABO = \angle CBP$ ja $\angle BCO = \angle ACP$. Osoita, että $\angle CAO = \angle BAP$.

**9.** Olkoon $f(n)$ jonon 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ... $n$:n ensimmäisen jäsenen summa. Osoita, että $f(s+t) - f(s-t) = st$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $s$, $t$, $s > t$.

**10.** Reaaliluvuille $x$, $y$, $z$ pätee $x+y+z = 5$ ja $xy+yz+xz = 3$. Osoita, että $-1 \le z \le \dfrac{13}{3}$.

**11.** Jokainen erään ympyrän kehällä sijaitsevien 9 pisteen välisistä 36 janasta on väritetty punaiseksi tai siniseksi. Oletetaan, että jokaisessa kolmiossa, jonka määrittää kolme näistä yhdeksästä pisteestä, on ainakin yksi punainen sivu. Osoita, että joidenkin neljän pisteen väliset kuusi janaa ovat kaikki punaisia.

**12.** Osoita, että luku $\dbinom{2p}{p} - 2$ on jaollinen $p$:llä aina, kun $p$ on alkuluku.

**13.** Positiivisen kokonaisluvun $n$ tekijät ovat $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Määritä ne $n$, joille $n = d_6^2 + d_7^2 - 1$.

**14.** Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit $f(x)$, joille

$$f(x)f(x+1) = f(x^2+x+1).$$

**15.** Oletetaan, että

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Osoita, että

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} = \frac{1}{(a+b+c)^5}.$$