Harjoitustehtävät, helmi–maaliskuu 2011. Helpommat

Ratkaisuja

1. *Kaikki maailman ihmiset ovat kätelleet muita ihmisiä jonkin määrän kertoja. Todista, että sellaisia ihmisiä, jotka ovat kätelleet muita ihmisiä parittoman määrän kertoja, on parillinen määrä.*

Ratkaisu. Numeroidaan maailman ihmiset 1:stä n:ään. Olkoon ihmisen numero k kättelyjen määrä a_k. Summa $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ on parillinen, koska jokainen kättely on mukana kahdessa luvussa a_1 ja a_j. Koska parillisten lukujen summa on parillinen, täytyy kaikkien parittomien lukujen a_k summan ola myös parillinen. Mutta jos lasketaan yhteen pariton määrä parittomia lukuja, saadaan tulokseksi pariton luku. Parittomia lukuja on siis oltava parillinen määrä.

2. *Päättele laskulaitteisiin turvautumatta, kumpi luvuista* 31^{11} *ja* 17^{14} *on suurempi.*

Ratkaisu. Koska $31^{11} = (2^5 - 1)^{11} < (2^5)^{11} = 2^{55}$ ja $17^{14} = (2^4 + 1)^{14} > (2^4)^{14} = 2^{56}$, jälkimmäinen luku on suurempi.

3. *Reaaliluvut* x, y *ja* z *toteuttavat yhtälön*

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1. \tag{1}$$

Osoita, että

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0. \tag{2}$$

Ratkaisu. Kerrotaan yhtälö (1) ensin x:llä, sitten y:llä ja myös z:lla. Lasketaan saadut kolme yhtälöä yhteen. Silloin saadaan

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} = x + y + z - \frac{x(y+z)}{y+z} - \frac{y(x+z)}{x+z} - \frac{z(x+y)}{x+y} = 0.$$

2. ratkaisu, "raaka voima". Yhtälö (1) on yhtäpitävä yhtälön $x(z+x)(x+y) + y(y+z)(x+y) + z(y+z)(x+y) = (x+y)(y+z)(x+z)$ kanssa eli yhtälön $x^2z + x^3 + xyz + x^2y + xy^2 + y^2z + xyz + y^3 + z^3 + yz^2 + xz^2 + xyz = xyz + x^2y + xz^2 + x^2z + y^2z + xy^2 + yz^2 + xyz$ kanssa. Mutta viimeinen yhtälö sievenee muotoon $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0$. Kun yhtälön (2) vasemman puolen lausekkeesta poistetaan nimittäjät, jää $x^2(z+x)(x+y) + y^2(y+z)(x+y) + z^2(y+z)(z+x) = x^4 + x^3z + x^3y + x^2yz + y^4 + xy^3 + y^3z + xy^2z + z^4 + xz^3 + yz^3 + xyz^2$. Sijoitetaan tähän xyz:n paikalle $-x^3 - y^3 - z^3$. Saadaan $x^4 + x^3z + x^3y - x(x^3 + y^3 + x^3) + y^4 + xy^3 + y^3z - y(x^3 + y^3 + z^3) + z^4 + xz^3 + yz^3 - z(x^3 + y^3 + z^3)$. Kun poistetaan sulkeet ja yhdistetään samanmuotoiset termit, huomataan, että lausekkeen arvo on 0.

4. *Funktiolle f pätee*

$$f(x) + 4f(1-x) = x^2 - 3x + 5 \tag{1}$$

kaikilla reaaliluvuilla x. Määritä f.

Ratkaisu. Jos $x = 1 - y$, niin $1 - x = 1 - (1 - y) = y$. Kaikilla reaaliluvuilla on siis oltava voimassa

$$f(1-x) + 4f(x) = (1-x)^2 - 3(1-x) + 5 = x^2 + x + 3. \tag{2}$$

Eliminoidaan yhtälöistä (1) ja (2) $f(1-x)$. Saadaan $-15f(x) = -3x^2 - 7x - 7$. f:n lausekkeen on siis välttämättä oltava $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{7}{15}x + \frac{7}{15}$. On vielä varmistettava, että tämä f todella toteuttaa yhtälön (1). Rutiinilasku osoittaa, että näin todella käy.

5. *Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille $f(2011) = 1$ ja $f(x)f(y) = f(x-y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y.*

Ratkaisu. Oletetaan, että $f(x) = 0$ jollain x. Silloin myös $1 = f(2011) = f(x - (x - 2011)) = f(x)f(x - 2011) = 0$, mikä on ristiriita. Siis $f(x) \neq 0$ kaikilla x. Sijoitetaan tehtävän yhtälöön $x = 2y$. Silloin $f(2y)f(y) = f(y)$, joten $f(x) = f(2y) = 1$.

6. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoon*

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}.$$

Osoita, että jonossa A, $2A$, $4A$, $8A$, $\ldots$, $2^n A$, $\ldots$ on ainakin yksi kokonaisluku.

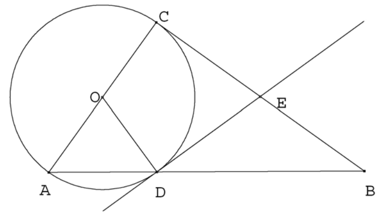
Ratkaisu. Selvästi $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n n!$ ja $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = (2n)!$. Siis

$$A = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Koska binomikerroin $\binom{2n}{n}$ on kokonaisluku, $2^k A$ on kokonaisluku aina, kun $k \geq 2n$.

7. *Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusa on AB. Ympyrä, jonka halkaisija on AC, leikkaa AB:n myös pisteessä D. Tämän ympyrän pisteeseen D piirretty tangentti leikkaa BC:n pisteessä E Osoita, että kolmio DEB on tasakylkinen.*

Ratkaisu. Olkoon O janan AC keskipiste. Koska A ja D ovat samalla O-keskisellä ympyrällä, $OA = OB$. Kolmio OAB on tasakylkinen, joten $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$. Koska ympyrän tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä ympyrän sädettä vastaan, $\angle ODE = 90°$. Siis $\angle EDB = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Mutta koska ABC on suorakulmainen, myös $\angle ABC = 90° - \alpha$. Kolmiossa DBE on siis kaksi yhtä suurta kulmaa, joten se on tasakylkinen: $DE = BE$.



8. *Todista, että kolmiossa enintään yksi korkeusjana on pidempi kuin se sivu, jota vastaan kohtisuorassa kyseinen korkeusjana on.*

Ratkaisu. Koska kolmion korkeusjana on lyhin kolmion kärkeä ja vastakkaisen sivun sisältävän suoran yhdistävistä janoista, se on enintään yhtä pitkä kuin kumpikaan samasta kärjestä lähtevä kolmion sivu. Olkoot kolmion sivut a, b ja c ja niitä vastassa olevat korkeusjanat h_a, h_b ja h_c. Tehdään vastaoletus $h_a > a$ ja $h_b > b$. Voidaan olettaa, että $h_a \geq h_b$. Mutta edellä sanotun perusteella $b \geq h_a$. Siis $b \geq h_b$, toisin kuin vastaoletuksessa oletettiin. Vastaoletus on siis väärä. Kaksi korkeusjanaa ei voi kumpikin olla vastinsivuaan pitempi.

9. 20 *luokkatoveria lähti kesälomalle. Jokainen lähetti postikortin kymmenelle luokkatoverilleen. Osoita, että ainakin kaksi lähetti kortin toinen toisilleen.*

Ratkaisu. Piirretään 20×20-ruudukko ja nimetään sen vaaka- ja pystyrivit oppilaiden mukaan. Merkitään ruutuun rasti, jos ruudun vaakarivin oppilas lähetti kortin ruudun pystyrivin oppilaalle. Koska oppilaat eivät lähetä kortteja itselleen, mahdollisia ruutuja on $20 \cdot 19$ kappaletta. Jos ei ole tilannetta, jossa oppilas A lähettäisi kortin oppilaalle B ja B lähettäisi kortin A:lle, niin A-rivin ja B-sarakkeen ja B-rivin ja A-sarakkeen ruuduista enintään toisessa olisi rasti. Rasteja olisi siis enintään $10 \cdot 19 = 190$ kappaletta. Mutta kun kukin 20:stä oppilaasta lähettää kortin 10:lle toiselle, rasteja on $20 \cdot 10 = 200$. On siis useampiakin oppilaspareja, jotka lähettävät kortin toinen toiselleen.

10. *Ratkaise yhtälö*

$$x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$$

Ratkaisu. Tämä on yksi esimerkki usein esiintyvästä yhtälötyypistä. Selvästikään $x = 0$ ei ole ratkaisu. Silloin yhtälön ratkaisut ovat samat kuin yhtälön $x^2 + x - 10 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Merkitään $x + \frac{1}{x} = t$. Silloin $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, eli $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Kun x korvataan t:llä, ratkaistava yhtälö saa muodon $t^2 + t - 12 = 0$. Tämän yhtälön ratkaisut ovat $t = 3$ ja $t = -4$. Alkuperäisen yhtälön ratkaisut saadaan ratkaisemalla toisen asteen yhtälöt $x + \frac{1}{x} = 3$ eli $x^2 - 3x + 1 = 0$ ja $x + \frac{1}{x} = -4$ eli $x^2 + 4x + 1 = 0$. Edellisen yhtälön ratkaisut ovat $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$, jälkimmäisen $x = -2 \pm \sqrt{3}$.

11. *Kolmen ympyrän keskipisteet ovat samalla suoralla; yksi ympyröistä sivuaa kahta muuta ulkopuolisesti. Ympyröiden säteet ovat a, b ja c. On olemassa ympyrä, joka sivuaa kaikkia kolmea näistä annetuista ympyröistä. Määritä sen säde (a:n, b:n ja c:n funktiona).*

Ratkaisu. Oletetaan, että kahta muuta ympyrää ulkopuolisesti sivuavan ympyrän säde on c. Oletetaan myös, että tämän ympyrän keskipiste on origossa ja että kaikkien ympyröiden keskipisteet ovat x-akselilla. Silloin keskipisteet ovat (esimerkiksi) $O_a = (a - c, 0)$, $O_c = (0, 0)$ ja $O_b = (c - b, 0)$. Olkoon kaikkia kolmea ympyrää sivuavan ympyrän keskipiste

$O = (x, y)$ ja säde r. Nyt $OO_a = a + r$, $OO_b = b + r$ ja $OO_c = c - r$. x, y ja r toteuttavat siis yhtälöryhmän

$$\begin{cases} (x - (a - c))^2 + y^2 = (a + r)^2 \\ (x - (c - b))^2 + y^2 = (b + r)^2 \\ x^2 + y^2 = (c - r)^2. \end{cases}$$

Kun kolmas yhtälö sijoitetaan kahteen ensimmäiseen, jää x:lle ja r:lle toteutettavaksi yhtälöpari

$$\begin{cases} -2x(a - c) + (a - c)^2 + (c - r)^2 = (a + r)^2 \\ -2x(c - b) + (c - b)^2 + (c - r)^2 = (b + r)^2 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} -2x(a - c) + (a - c)^2 = a^2 - c^2 + 2(a + c)r \\ -2x(c - b) + (c - b)^2 = b^2 - c^2 + 2(b + c)r. \end{cases}$$

Kun näistä eliminoidaan normaaliin tapaan x ja ratkaistaan r, saadaan

$$r = \frac{c(c - a)(c - b)}{c^2 - ab}.$$

12. *Määritä kaikki kolmikot* (x, y, z), *jotka toteuttavat yhtälöryhmän*

$$\begin{cases} (x + y)(x + y + z) = 90 \\ (y + z)(x + y + z) = 105 \\ (z + x)(x + y + z) = 255. \end{cases}$$

Ratkaisu. Koska $x + y + z \neq 0$, kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $105x + 105y = 90y + 90z$ eli $7x + y - 6z = 0$. Ensimmäisestä ja kolmannesta yhtälöstä saadaan vastaavasti $11x + 17y - 6z = 0$ ja kahdesta viimeisestä $7x - 17y - 10z = 0$. Yhtälöstä $7x + y = 11x + 17y$ saadaan $x = -4y$ ja yhtälöstä $6z = 7(-4y) + y$ saadaan $z = -\frac{9}{2}y$. Näin ollen $x + y + z = -3y - \frac{9}{2}y = -\frac{15}{2}y$. Ensimmäisestä tehtävän yhtälöstä tulee nyt välttämätön ehto y:lle: $90 = (x + y)(x + y + z) = (-3y)\left(-\frac{15}{2}y\right)$ eli $y^2 = 4$. On oltava $y = \pm 2$. Vastaavat x:n ja z:n arvot ovat $x = \mp 8$, $z = \mp 9$. Mahdolliset kolmikot ovat $(x, y, z) = (-8, 2, -9)$ ja $(x, y, z) = (8, -2, 9)$. Nämä kolmikot myös toteuttavat alkuperäiset yhtälöt, mikä sijoittamalla heti huomataan.

13. *Numerot* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *voidaan kirjoittaa* $7! = 5040$ *eri järjestykseen. Jos nämä tulkitaan luvuiksi ja laitetaan suuruusjärjestykseen alkaen luvusta* 1234567*, niin mikä on* 2011*. luku?*

Ratkaisu. Kullakin numerolla alkavia lukuja on $6! = 720$ kappaletta, kullakin numeroparilla alkavia lukuja $5! = 120$ kappaletta jne. Nyt $2011 = 2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1!$. 2011:nnen luvun ensimmäinen numero 3, toinen numero viides joukosta $\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ eli 6, kolmas numero neljäs joukosta $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ eli 5, neljäs numero neljäs joukosta $\{1, 2, 4, 7\}$ eli 7, viides ensimmäinen joukosta $\{1, 2, 4\}$ eli 1, kuudes toinen joukosta $\{2, 4\}$ eli 4 ja viimeinen sitten 2. Luku on siis 3657142.

14. *Kokoukseen osallistuneista tutkijoista osa oli ennestään tuttuja. Osoittautui, että kokouksessa ei ollut ketään kahta tutkijaa, joilla olisi ollut osallistujien joukossa yhtä monta tuttua ja joilla olisi ollut joku yhteinen tuttava. Osoita, että kokouksen osallistujissa oli ainakin yksi sellainen, jolla oli tasan yksi tuttava.*

Ratkaisu. Koska ainakin joillakin osallistujilla on tuttavia, on osallistujien joukossa joku tai joitakin osallistujia, joilla on osallistujien joukossa suurin määrä tuttavia. Olkoon A tällainen henkilö. Oletetaan, että A:lla on n tuttavaa. Millään kahdella näistä n:stä ei ole samaa määrää tuttavia, koska kummallakin on yhteinen tuttava, nimittäin A. Nyt A:n tuttavien tuttavien lukumäärät ovat ehdon $1 \leq k \leq n$ toteuttavia lukuja. Koska lukuja on n kappaletta, täytyy joukossa olla kaikki luvut yhdestä n:ään. Jollakin A:n tuttavalla on siis vain yksi tuttava (joka on A).

15. *Kokouksessa oli* $2n$ *osallistujaa ja jokainen tunsi ainakin puolet läsnäolijoista. Osoita, että osallistujien joukossa oli neljä sellaista, jotka voitiin asettaa istumaan pyöreän pöydän ympärille niin, että istujan kummallakin puolella oli hänen tuttavansa.*

Ratkaisu. Jos kaikki kokouksen osallistujat tuntevat toisensa, niin ketkä tahansa neljä osallistujaa kelpaavat. Oletetaan sitten, että joukossa on kaksi, A ja B, jotka eivät tunne toisiaan. Kumpikin näistä tuntee kuitenkin ainakin n osallistujaa, ja näistä yksikään ei ole A tai B. Koska $n + n > 2n - 2$, täytyy A:lla ja B:llä olla ainakin kaksi yhteistä tuttavaa. Laitetaan nämä pöytään A:n ja B:n väliin, ja haluttu asetelma on saatu.