Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, syyskuu 2018
Ratkaisuja

Helpompia tehtäviä

1. Suomessa postinumero koostuu viidestä kokonaisluvusta, jotka ovat väliltä $[0, 9]$. Valitaan satunnaisesti n suomalaista. Mikä on pienin luku n, jolla vähintään kahden ihmisen postinumeroiden ensimmäinen ja viimeinen numero ovat varmasti samat?

Ratkaisu. Postinumeron ensimmäiselle ja viimeiselle numerolle on kummallekin 10 erilaista vaihtoehtoa. Siispä erilaisia ensimmäisen ja viimeisen numeron yhdistelmiä on $10 \cdot 10 = 100$. Näin ollen laatikkoperiaatteen nojalla kysytty luku on 101.

2. Luokassa on 33 oppilasta ja heidän ikiensä (vuosissa) summa on 430 vuotta. Onko luokassa varmasti 20 oppilasta, joiden ikien (vuosissa) summa on yli 260 vuotta?

Ratkaisu. Koska halutaan tutkia, onko mahdollista, että joidenkin oppilaiden ikien summa on yli jonkin luvun, on järkevä tutkailla, milloin tarkasteltava luku on mahdollisimman suuri. 20 oppilaan ikien summa on mahdollisimman suuri, kun he ovat luokan vanhimmat oppilaat.

Valitaan siis luokasta 20 vanhinta oppilasta. Tutkitaan, voiko heidän ikiensä summa olla korkeintaan 260 vuotta. Oletetaan, että näin olisi. Tarkastellaan vanhimmista 20 oppilaasta nuorinta oppilasta. Jos nuorin olisi vähintään 14 vuotta vanha, niin vanhimman 20 oppilaan yhteenlaskettu ikä olisi ainakin $20 \cdot 14 = 280$ vuotta. Siis nuorin vanhimmasta 20 oppilaasta on korkeintaan 13 vuotta vanha. Täten kaikki 13 nuorinta oppilasta ovat enintään 13 vuotta vanhoja. Siis, jos vanhimman 20 oppilaan yhteenlaskettu ikien summa on korkeintaan 260 vuotta, niin kaikkien oppilaiden ikien summa on korkeintaan $260 + 13 \cdot 13 = 429$. Mutta oletuksena oli, että oppilaiden ikien summa on 430 vuotta. Siis ei ole mahdollista, että 20 vanhimman oppilaan ikien summa olisi korkeintaan 260 vuotta. Siispä sen on oltava yli 260 vuotta ja täten luokassa on 20 oppilasta, joiden ikien summa on yli 260 vuotta.

3. Jalkapalloturnauksessa on ainakin kaksi joukkuetta ja kukin joukkue pelaa jokaista toista joukkuetta vastaan täsmälleen kerran. Yksikään peli ei pääty tasapeliin. Turnauksen jälkeen kukin joukkue kirjoittaa listan niistä joukkueista, jotka joukkue voitti tai jotka hävisivät jollekin sellaiselle joukkueelle, jonka joukkue voitti. Onko mahdollista, ettei minkään joukkueen lista sisällä kaikkia muita joukkueita?

Ratkaisu. Yritetään löytää sellainen joukkue, jolla on mahdollisimman monen muun joukkueen nimet listassa. Olkoon tämä joukkue A. (Joukkueen A valinta ei ole välttämättä yksikäsitteinen.) Oletetaan, että joukkueen B nimeä ei löydy joukkueen A listasta. Tällöin joukkueen A on täytynyt hävitä joukkueelle B. Täten joukkueen B on täytynyt voittaa joukkue A, joten joukkueen B listan täytyy sisältää joukkue A ja kaikki joukkueet, jotka ovat joukkueen A listassa. Siispä joukkueen B listassa on enemmän joukkueita kuin joukkueen B listassa. Tämä on kuitenkin ristiriidassa joukkueen A valinnan kanssa. Siispä ei ole mahdollista, että olisi joukkue B, jonka nimeä ei löydy joukkueen A listasta. Täten vastaus on, että kysytynlainen tilanne ei ole mahdollinen.

4. Erään maan hallituksessa jokaisella ministerillä on enintään kolme vihollista. Kukaan ministeri ei voi olla itsensä vihollinen ja vihollisuus on molemminpuoleista. Osoita, että hallituksen ministerit voidaan jakaa kahteen joukkoon, jotka toteuttavat seuraavat kaksi ehtoa:

- Kukin ministeri kuuluu täsmälleen yhteen joukkoon.
- Jokaisella ministerillä on enintään yksi vihollinen hänen kanssaan samassa joukossa.

Ratkaisu. Jaetaan ensin ministerit kahteen mielivaltaiseen joukkoon. Olkoot joukot $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ja $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, missä a_i ja b_i ovat ministereitä ja joukot voivat olla myös tyhjiä. Merkitään ministerin x kanssa samassa joukossa olivien hänen vihollistensa määrää merkinnällä $f(x)$. Lisäksi olkoon

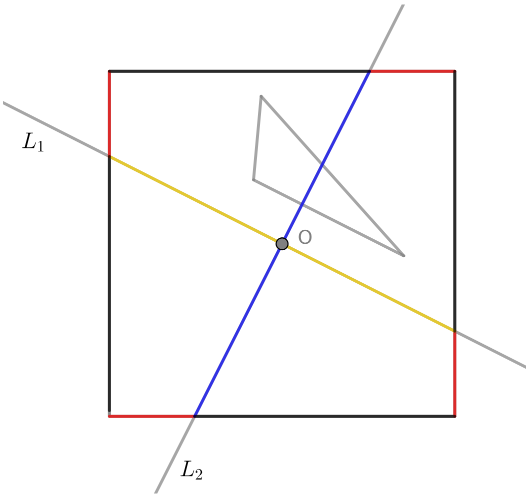
$$S(A) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i).$$

Jos kullakin ministerillä on enintään yksi vihollinen hänen kanssaan samassa joukossa, niin väite on todistettu. Oletetaan siis, että $|A| \geq 3$ ja vaikkapa henkilöllä a_1 on ainakin kaksi vihollista hänen kanssaan samassa joukossa. Jos nyt a_1 vaihtaa joukkoon B, niin luku $S(A)$ pienenee. Tehdään tämä kaikille joukon A alkioille, joilla on ainakin kaksi vihollista joukossa A. Nyt $S(A)$ pienenee joka askeleella. Toisaalta selvästi aina $S(A) \geq 0$, joten prosessi loppuu joskus. Näin ollen jossain vaiheessa joukossa A kellään ministerillä ei ole kuin enintään yksi vihollinen. Toisaalta joukossa A on oltava positiivinen määrä alkioita, sillä viimeisen henkilön poiston jälkeen sinne on täytynyt jäädä vähintään kaksi henkilöä. Nyt siis joukko A toteuttaa halutut ehdot.

Tehdään vielä vastaava prosessi joukolle B eli siirretään yksi kerrallaan sieltä joukkoon A kaikki ne ministerit, joilla on joukossa B vähintään kaksi vihollista. Havaitaan, että näillä henkilöillä voi olla enintään yksi vihollinen joukossa A, sillä oletusten mukaan kullakin ministerillä on enintään kolme vihollista. Siispä saadut lopulliset joukot A ja B toteuttavat halutut ehdot.

5. Neliön, jonka ala on 1, sisällä on kolmio. Oletetaan, että neliön keskipiste ei ole kolmion sisällä tai reunoilla. Osoita, että ainakin yhden kolmion sivuista pituus on alle 1.

Ratkaisu. Osoitetaan väite jakamalla neliö sopiviin osiin, joissa ainakin yhden sivun on oltava riittävän pienen alueen sisällä ja täten sen pituuden on oltava korkeintaan 1. Olkoon neliön keskipiste O. Piirretään pisteen O kautta suora L_1, joka on yhdensuuntainen kolmion sen sivun kanssa, joka on lähimpänä pistettä O. Piirretään sitten suora L_2, joka on kohtisuorassa suoraa L_1 vasten ja joka kulkee pisteen O kautta. Todetaan, että nämä suorat jakavat nelikulmion neljään yhtenevään nelikulmioon. Kierretään neliötä 180° vastapäivään. Tällöin neliön kärjet kuvautuvat vastakkaisiksi kärjiksi.



Lisäksi suoran L_1 ja neliön sivujen leikkauspisteet kuvautuvat toisikseen. Nimittäin leikkauspisteet pysyvät 180° kierrossa suoralla L_1 ja toisaalta niiden on oltava neliön sivuilla. Vastaavat päätelmät voidaan tehdä myös suoralle L_2. Siispä kuvassa samalla värillä (musta, punainen, sininen, keltainen) merkityt janat ovat yhtä pitkät ja neljän muodostuvan nelikulmion vastinkulmat ovat yhtä suuret.

Koska piste O ei ole kolmion sisällä tai reunoilla ja L_1 on yhdensuuntainen kolmion lähimmän sivun kanssa, niin kolmio voi olla korkeintaan kahden yhtenevistä nelikulmioista sisällä. Laatikkoperiaatteen nojalla vähintään kahden kolmion kärjen on oltava saman nelikulmion sisällä. Kussakin nelikulmiossa pisin kahden pisteen välinen etäisyys on vastakkaisista kärjistä pisin. Näiden kärkien väliset etäisyydet ovat

$$\sqrt{x^2 + (1-x)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(2x-1)^2 + \frac{1}{2}} \leq 1 \quad \text{ja} \quad \sqrt{y^2 + z^2} \leq \sqrt{2(\sqrt{2})^{-2}} = 1,$$

missä $x \in [0,1]$ on kuvan punaisen, y keltaisen ja z sinisen janan pituus. Siis kolmion sivun pituuden on oltava alle 1.

6. Olkoon x reaaliluku, jolle $\sec x - \tan x = 2$. Laske $\sec x + \tan x$.

Ratkaisu. Koska

$$\sec^2 x - \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\left(1 - \sin^2 x\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\cos^2 x\right) = 1,$$

niin $\sec x + \tan x = 1/(\sec x - \tan x) = \frac{1}{2}$.

7. Olkoon $0° < \theta < 45°$. Järjestä suuruusjärjestykseen luvut

$$t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta}, \quad t_2 = (\tan\theta)^{\cot\theta}, \quad t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta}, \quad t_4 = (\cot\theta)^{\cot\theta}.$$

Ratkaisu. Olennainen havainto on, että kun $0° < \theta < 45°$, $\cot\theta > 1 > \tan\theta > 0$. Kun $a > 1$, funktio $y = a^x$ on kasvava. , joten $t_3 < t_4$. Kun $0 < a < 1$, funktio $y = a^x$ on vähenevä. Siten $t_1 > t_2$. Edelleen $t_1 < 1 < t_3$, joten $t_2 < t_1 < t_3 < t_4$.

8. Laske (s.o. esitä tarkkana lausekkeena, jossa ei esiinny trigonometrisia funktioita)

a) $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$;

b) $\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24}$;

c) $\cos 36° - \cos 72°$; ja

d) $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$.

Ratkaisu. Palautetaan mieliin kaksinkertaisen kulman kaavat ja yhteen- ja vähennyslaskukaavat:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x},$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}.$$

(a) $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$.

(b) $\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24} = \left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{24} + \sin^2\frac{\pi}{24}\right) = 1\cdot\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

(c) $\cos 36° - \cos 72° = \frac{2(\cos 36°+\cos 72°)(\cos 36°-\cos 72°)}{2(\cos 36°+\cos 72°)} = \frac{2\cos^2 36° - 2\cos^2 72°}{2(\cos 36°+\cos 72°)} = \frac{\cos 72°+1-\cos 144°-1}{2(\cos 36°+\cos 72°)} = \frac{\cos 72°+\cos 36°}{2(\cos 36°+\cos 72°)} = \frac{1}{2}$.

(d) $8\sin 20°\sin 10°\sin 50°\sin 70° = 8\sin 20°\cos 80°\cos 40°\cos 20° = 4\sin 40°\cos 40°\cos 80°$
$= 2\sin 80°\cos 80° = \sin 160° = \sin 20°$, joten $\sin 10°\sin 50°\sin 70° = \dfrac{1}{8}$.

9. Todista, että kokonaisluku n voidaan esittää kahden neliön summana, jos ja vain jos luku $2n$ voidaan esittää kahden neliön summana.

Ratkaisu. Jos $n = a^2 + b^2$, niin $2n = (a+b)^2 + (a-b)^2$. Jos taas $2n = c^2 + d^2$, niin $c \equiv d \pmod 2$, jolloin $c \pm d$ ovat parillisia lukuja ja $n = (\frac{c+d}{2})^2 + (\frac{c-d}{2})^2$ on haettu esitys.

10. Olkoot a, b, c ja d sellaiset kokonaisluvut, että kaikille kokonaisluvuille m ja n yhtälöparilla

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

on kokonaislukuratkaisu (x, y). Todista, että $ad - bc = \pm 1$.

Ratkaisu. Jos esimerkiksi $a = 0$, mikä tahansa kokonaisluku m voidaan esittää muodossa $m = by$, joten $b = \pm 1$. Edelleen $c \mid cx = n - dy = n \mp dm$ kaikilla m ja n, joten myös $c = \pm 1$. Siis $ad - bc = \pm 1$. Sama idea toimii, jos b, c tai d on nolla.

Oletetaan, että $abcd \neq 0$. Olkoon $\Delta = ad - bc$. Jos $\Delta = 0$, olkoon $\lambda = c/a = d/b$, jolloin $n = cx + dy = \lambda(ax + by) = \lambda m$ kaikilla n ja m, mikä on selvästi mahdotonta. Siis $\Delta \neq 0$. Tehtävän yhtälöparin yksikäsitteinen rationaaliratkaisu on $x = (dm - bn)/\Delta$, $y = (an - cm)/\Delta$. Koska tämän on oltava kokonaislukuratkaisu, saadaan asettamalla $(m, n) = (1, 0)$ että d/Δ ja $-c/\Delta$ ovat kokonaislukuja, ja asettamalla $(m, n) = (0, 1)$ että $-b/\Delta$ ja a/Δ ovat kokonaislukuja. Siten $(d/\Delta)(a/\Delta) - (-b/\Delta)(-c/\Delta) = (ad - bc)/\Delta^2 = 1/\Delta$ on kokonaisluku, mikä on mahdollista vain jos $\Delta = \pm 1$.

11. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että $a_1!a_2!\cdots a_n! < k!$, missä k on kokonaisluku, joka on suurempi kuin positiivisten kokonaislukujen $a_1 a_2, \ldots, a_n$ summa.

Ratkaisu. Havaitaan, että luvut $a_1!a_2!\cdots a_n!$ ja $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)!$ ovat yhtä monen tekijän tuloja. Ensimmäiset a_1 tekijää ovat samat: $1, 2, \ldots, a_1$. Seuraavat a_2 tekijää ovat vasemmalla puolella $1, 2, \ldots, a_2$ ja oikealla puolella $a_1+1, a_1+2, \ldots, a_1+a_2$. Vastaavasti jokainen myöhempi tekijä oikealla on suurempi kuin vastaava tekijä vasemmalla puolella. Siten $a_1!a_2!\cdots a_n! \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)!$, ja koska $k! > (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)!$, väite on todistettu.

12. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n,$$

missä $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ on mikä tahansa positiivisten reaalilukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ permutaatio.

Ratkaisu. Jos $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, niin $\frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{1}{a_n}$, jolloin suuruusjärjestysepäyhtälön mukaan

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_n} = n.$$

Vaativampia tehtäviä

13. Olkoot $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ja $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Osoita, että jokaista positiivista kokonaislukua m kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku k, että m jakaa luvun x_k.

Ratkaisu. Havaitaan ensin, että voidaan asettaa $x_0 = 0$. Nyt siis x_0 on jaollinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla. Käytetään tätä hyödyksi.

Ajatuksena on löytää luku x_k, jonka jakojäännös luvulla m jaettaessa on sama kuin luvun x_0. Tämä tehdään tarkastelemalla riittävän monen luvun x_n jakojäännöksiä luvun m kanssa. Olkoon r_t jakojäännös, kun luku x_t jaetaan luvulla m ja $t = 0, 1, \ldots, m^3 + 2$. Tarkastellaan nyt kolmikoita

$$(r_0, r_1, r_2), (r_1, r_2, r_3), \ldots, (r_{m^3}, r_{m^3+1}, r_{m^3+2}).$$

Koska r_t voi saada m erisuurta arvoa, niin laatikkoperiaatteen nojalla vähintään kaksi kolmikoista ovat samat. Olkoon p pienin indeksi, jota kohti on olemassa luku q, jolle $(r_p, r_{p+1}, r_{p+2}) = (r_q, r_{q+1}, r_{q+2})$, missä $p < q \leq m^3$. Osoitetaan, että $p = 0$. Tästä nimittäin seuraa, että $r_q = r_p = 0$ ja m jakaa luvun x_q.

Tehdään vastaoletus, että $p \geq 1$. Määritelmän mukaan

$$r_{p-1} \equiv r_{p+2} - r_p r_{p+1} \pmod{m}$$

ja

$$r_{q-1} \equiv r_{p+2} - r_q r_{q+1} \pmod{m}.$$

Koska lisäksi $r_p = r_q$, $r_{p+1} = r_{q+1}$ ja $r_{p+2} = r_{q+2}$, niin $r_{p-1} = r_{q-1}$. Mutta nyt $(r_{p-1}, r_p, r_{p+1}) = (r_{q-1}, r_q, r_{q+1})$, mikä on ristiriidassa luvun p valinnan kanssa. Siispä vastaoletus on väärin ja on oltava $p = 0$, jolloin väite on todistettu.

14. Olkoon ABC kolmio, ja olkoon x ei-negatiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$a^x \cos A + b^x \cos B + c^x \cos C \leq \frac{1}{2}\big(a^x + b^x + c^x\big),$$

missä a on A:n vastaisen sivun pituus jne.

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $a \leq b \leq c$, jolloin $A \geq B \geq C$ ja $\cos A \geq \cos B \geq \cos C$. Suuruusjärjestysepäyhtälön mukaan

$$a^x \cos A + b^x \cos B + c^x \cos C \leq a^x \cos B + b^x \cos C + c^x \cos A,$$
$$a^x \cos A + b^x \cos B + c^x \cos C \leq a^x \cos C + b^x \cos A + c^x \cos B,$$

joten

$$3(a^x \cos A + b^x \cos B + c^x \cos C) \leq (a^x + b^x + c^x)(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Tunnetun tuloksen(*) mukaan $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + r/R$, missä r ja R ovat kolmion sisä- ja ympäryssäteet. Mutta tunnetusti(†) $r \leq 2R$, joten $1 + r/R \leq 3/2$, mistä väite seuraa.

(*) Ensinnäkin trigonometrian summa–tulokaavojen[1] perusteella

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

[1] `https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/trig.pdf` kohta 16 ja sen ilmeiset variaatiot kosinille

ja kaksinkertaisen kulman kaavan mukaan

$$1 - \cos C = 2\sin^2 \frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2},$$

joten

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right] = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Vielä paremmin tunnetun tuloksen[2] mukaan yhtälön (1) oikea puoli on r/R.

(†) Tätä on jossain kutsuttu Eulerin kolmioepäyhtälöksi. Kolmion sivujen keskipisteiden ympäryssäde on $R/2$, koska keskipisteiden muodostaman kolmion sivujen pituudet ovat puolet kolmion ABC sivujen pituuksista. Mutta keskipisteiden kautta kulkevan ympyrän (joka tunnetaan Feuerbachin ympyränä) voi kuvata sisäympyräksi kolmella homotetialla, joiden keskipisteet ovat A, B ja C ja homotetiakertoimet $0 < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 1$ (kukin pienentää ympyrää sivuamaan yhtä kolmion sivua).

15. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja. Todista, että

a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ jos $x + y + z = xyz$;

b) $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ jos $0 < x, y, z < 1$ ja $xy + yz + zx = 1$.

Ratkaisu.

(a) On olemassa teräväkulmainen kolmio ABC, jolle $\tan A = x$ jne. (Valitaan $A = \arctan x$ ja $B = \arctan y$, sitten kolmion kulmien tangentteja koskevan tuloksen[3] mukaan kolmannen kulman tangentin on oltava z.) Koska

$$\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} = \frac{\tan A}{\sec A} = \sin A,$$

todistettavaksi jää epäyhtälö

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Tämä seuraa esimerkiksi Jensenin epäyhtälöstä: sini on teräville kulmille konkaavi, joten

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

–Tehtäväpaperista oli kuitenkin unohtunut edellisen kannalta kriittinen sana "positiivisia". Jos esim. x on nolla tai negatiivinen, voidaan arvioida yksinkertaisesti

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq 2 < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Todistetaan ensin aputulos, että kaikille kolmioille pätee $xy + yz + zx = 1$, kun $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$ ja $z = \tan\frac{C}{2}$. Silloin voidaan taas tehdä trigonometrinen sijoitus.

Yhteen- ja vähennyslaskukaavojen mukaan

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} = \tan\frac{A+B}{2}\left(1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}\left(1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right).$$

Siis

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\cot\frac{C}{2}\left(1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right) \\ &= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1. \end{aligned}$$

---

[2] Ibid., kohta 20
[3] Ibid., kohta 21

Voidaan siis taas konstruoida kolmio, jossa $A = 2\arctan x$ jne. Kaksinkertaisen kulman tangentin kaavan soveltamisen jälkeen todistettavana on

$$\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3},$$

mihin päästään aiemman tuloksen ja aritmeettis-geometrisen epäyhtälön avulla:

$$\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C},$$

joten

$$\tan A \tan B \tan C \ge 3^{3/2} = 3\sqrt{3}.$$

16. Olkoot x, y ja z reaalilukuja, joille $x \ge y \ge z \ge \frac{\pi}{12}$ ja $x+y+z = \frac{\pi}{2}$. Etsi tulon $\cos x \sin y \cos z$ suurin ja pienin arvo.

Ratkaisu. Olkoon $p = \cos x \sin y \cos z$. Oletuksista seuraa, että $\sin(y-z) \ge 0$. Trigonometrian tulo–summakaavoilla saadaan

$$p = \frac{1}{2}\cos x[\sin(y+z) + \sin(y-z)] \ge \frac{1}{2}\cos x \sin(y+z) = \frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Nyt $x = \frac{\pi}{2} - (y+z) \le \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$. Siten p:n pienin mahdollinen arvo on $\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}$, joka toteutuu kun $x = \frac{\pi}{3}$ ja $y = z = \frac{\pi}{12}$. Toisaalta

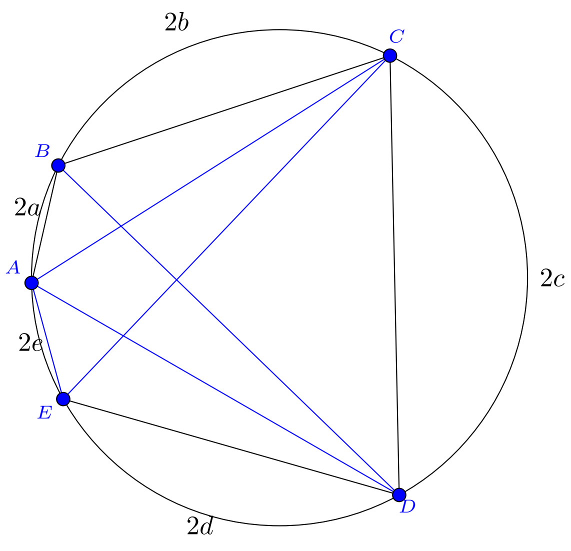
$$p = \frac{1}{2}\cos z[\sin(x+y) - \sin(x-y)] \le \frac{1}{2}\cos^2 z,$$

koska $\sin(x+y) = \cos z$. Kaksinkertaisen kulman kaavoilla saadaan

$$p \le \frac{1}{4}(1+\cos 2z) \le \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{8}.$$

Tämä toteutuu, kun $x = y = \frac{5\pi}{24}$ ja $z = \frac{\pi}{12}$.

17. Merkitään kolmion PQR sisäympyrän sädettä r_{PQR}. Todista, että jos $ABCDE$ on kupera jänneviisikulmio, $r_{ABC} = r_{AED}$ ja $r_{ABD} = r_{AEC}$, niin kolmiot ABC ja AED ovat yhtenevät.



Ratkaisu. Olkoon R jänneviisikulmion $ABCDE$ ympäryssäde. Tehtävän 14 ratkaisussa havaittiin, että jos r ja R ovat kolmion ABC sisä- ja ympäryssäteet,

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$$
$$= \cos A - \cos(A+C) + \cos C.$$

Olkoot $2a$, $2b$, $2c$, $2d$ ja $2e$ kaarien AB, BC, CD, DE ja EA mitat. Silloin $a+b+c+d+e = 180°$. Koska $r_{ABC} = r_{AED}$,

$$\cos a - \cos(a+b) + \cos b$$
$$= \cos d - \cos(d+e) + \cos e. \quad (2)$$

Koska $r_{ABD} = r_{AEC}$,

$$\cos a + \cos(b+c) + \cos(d+e) = \cos e + \cos(c+d) + \cos(a+b).$$

Kun yhtälöt vähennetään puolittain toisistaan, saadaan

$$\cos b + \cos(c+d) = \cos d + \cos(b+c)$$

eli tulo–summakaavojen avulla

$$2\cos\frac{b+c+d}{2}\cos\frac{b-c-d}{2} = 2\cos\frac{d+b+c}{2}\cos\frac{d-b-c}{2}.$$

Siis $\cos\dfrac{b-c-d}{2} = \cos\dfrac{d-b-c}{2}$ eli $b = d$. Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (2), saadaan

$$\cos a - \cos(a+b) = \cos e - \cos(e+b).$$

Tulo–summakaavoilla saadaan

$$2\cos\frac{a+e+b}{2}\cos\frac{a-e-b}{2} = 2\cos\frac{e+a+b}{2}\cos\frac{e-a-b}{2},$$

josta seuraa $a = e$. Koska $a = e$ ja $b = d$, kolmiot ABC ja AED ovat yhtenevät.

18. Mikä on suurin mahdollinen määrä paloja, joihin pizza voidaan jakaa n suoralla leikkauksella?

Ratkaisu. Kokeilemalla huomataan, että vastaus näyttää olevan $\frac{n(n+1)}{2}+1$. Todistetaan tämä induktiolla. Tapaus $n = 1$ on ilmeinen. Oletetaan, että k leikkausta jakaa pizzan enintään $\frac{k(k+1)}{2}+1$ palaan. Seuraava leikkaus tuottaa maksimaalisen monta uutta palaa, jos se leikkaa jokaisen aiemmista leikkaussuorista eri pisteessä. Ajatellaan, että viimeinen leikkaus on vaakasuora ja kulkee vasemmalta oikealle. Aina kun se kohtaa aiemman leikkaussuoran, vasemmalle jäävä pala jakautuu kahtia. Lisäksi kun suora kohtaa pizzan reunan, jakautuu vielä yksi pala. Uusia paloja on siis $k+1$, ja on helppo nähdä että $\frac{k(k+1)}{2}+1+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}+1$.

19. Jokainen 9 suorasta jakaa neliön kahteen nelikulmioon, joiden pinta-alojen suhde on $2:3$. Osoita, että on olemassa piste, jossa ainakin kolme näistä suorista leikkaa toisensa.

Ratkaisu. Ensiksi havaitaan, että suorat eivät voi leikata neliön $ABCD$ viereisiä sivuja, koska silloin saataisiin kolmio ja viisikulmio. Leikatkoon suora ℓ sivut BC ja AD pisteissä M ja N. Puolisuunnikkailla $ABMN$ ja $CDNM$ on yhteinen korkeus, joten niiden pinta-alojen suhde on sama kuin niiden keskijanojen pituuksien suhde. Siten suora MN jakaa janojen BC ja AD keskipisteiden yhdysjanan k suhteessa $2:3$. Mutta neliössä on vain neljä tällaista pistettä ja suoria on yhdeksän, joten ainakin yhden pisteen kautta kulkee kolme suoraa.

20. Voiko yksikkösäteisen kiekon (kehä mukaanlukien) pisteet jakaa kolmeen osajoukkoon siten, ettei missään osajoukoista ole kahta pistettä, joiden keskinäinen etäisyys on yksi?

Ratkaisu. (Baltian tie 1999) Olkoon piste O kiekon keskipiste ja pisteet $P_1,\ldots,P_6$ säännöllisen kuusikulmion kärjet kiekon kehällä. Ajatellaan tehtävän osajoukkoihin jakoa punaiseksi, siniseksi ja vihreäksi värittämisenä. Oletetaan, että O on punainen ja P_1, P_3 ja P_5 sinisiä ja P_2, P_4 ja P_6 vihreitä. Tarkastellaan P_1-keskistä ympyränkaarta pisteiden O ja P_2 kautta. Koska P_1 on sininen, ovat kaaren pisteet joko punaisia tai vihreitä. Vastaavasti P_3- ja P_5-keskisille ympyränkaarille. Tarkastellaan sitten O-keskistä ympyrää, jonka säde on $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Tämän ympyrän ja kolmen ympyränkaaren leikkauspisteet ovat kaikki punaisia tai vihreitä ja etäisyyden yksi päässä toisistaan. Tämä on ristiriita. Tehtävässä esitettyä jakoa ei voi tehdä.

21. Ratkaise ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla

$$(x+1)^3 - x^3 = y^2.$$

Ratkaisu. Yhtälö on yhtäpitävästi $3x^2+3x+1 = y^2$. Kerrotaan neljällä ja täydennetään neliöksi:

$$(2y)^2 - 3(2x+1)^2 = 1.$$

Tämä on Pellin yhtälö[4] muuttujille $u = 2y$ ja $v = 2x+1$. Sillä on minimiratkaisu $(u_0, v_0) = (2, 1)$, ja kaikki sen ratkaisut saadaan palautuskaavalla $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$, $v_{n+1} = u_n + 2v_n$ (yhtälöstä $u_n + v_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n$). Parillisuustarkastelusta kuitenkin seuraa, että vain joka toinen näistä kelpaa alkuperäisen yhtälön ratkaisuksi, joten kaava muuttuu muotoon $u_{n+1} = 7u_n + 12v_n$, $v_{n+1} = 4u_n + 7v_n$. Alkuperäisten muuttujien avulla ilmaistuna $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_{n+1} = 7x_n + 4y_n + 3$, $y_{n+1} = 12x_n + 7y_n + 6$.

[4] https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/pell.pdf