Syyskuun 2012 vaativammat kirjevalmennustehtävät

Ratkaisuita voi lähettää lokakuun loppuun mennessä osoitteeseen

Esa Vesalainen
Huddingenpolku 2A15
01600 Vantaa

tai sähköpostitse osoitteeseen

esavesalainen@gmail.com

minne voi myös lähettää kysymyksiä tehtävistä.

1. Osoita, että kaikille reaaliluvuille a, b ja c pätee

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leqslant a^2+b^2+c^2+2(a-b+1).$$

2. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille

$$6x^2y^2-4y^2=2012-3x^2.$$

3. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ joukkoja. Määrittelemme jokaiselle joukon $\{1,2,\ldots,n\}$ osajoukolle X joukon

$$N(X)=\big\{i\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus X \;\big|\; A_i\cap A_j\neq\emptyset \text{ jokaisella } j\in X\big\}.$$

Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla $m\in\{3,4,\ldots,n-2\}$ löytyy sellainen joukon $\{1,2,\ldots,n\}$ osajoukko X, jolle $\#X=m$ ja $\#N(X)\neq 1$.

4. Olkoon $\triangle ABC$ teräväkärkinen kolmio, ja olkoon H sen sivulta BC löytyvä pisteestä A piirretyn korkeusjanan kantapiste. Olkoon piste D sivulla AB, ja olkoon piste E sivulla AC. Olkoot lisäksi F ja G pisteiden D ja E projektiot suoralle BC. Oletetaan, että suorat DG, EF ja AH leikkaavat samassa pisteessä. Olkoon vielä P pisteen E projektio suoralle DH. Todista, että $\widehat{APE}=\widehat{CPE}$.

5. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ joille

$$f\Big(x+f\big(y+f(z)\big)\Big)=y+f(x+z)$$

kaikilla $x,y,z\in\mathbb{Q}$.

6. Tarkastellaan polynomia muotoa $f(x)=(x+d_1)(x+d_2)\cdots(x+d_9)$, missä d_1, d_2, …, d_9 ovat pareittain erisuuria kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku N siten, että jokaisella kokonaisluvulla $x\geqslant N$ luvulla $f(x)$ on alkulukutekijä joka on isompi kuin 22.

7. Olkoon polynomin $P(x)$ kertoimet positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$P(1)\,P(xy)\geqslant P(x)\,P(y)$$

kaikilla reaaliluvuilla $x\geqslant 1$ ja $y\geqslant 1$.

8. Olkoon O kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, ja sijaitkoot piste D sivulla BC niin, että AD puolittaa kulman $\widehat{BAC}$. Olkoon ℓ se suora, joka kulkee pisteen O kautta ja on yhdensuuntainen suoran AD kanssa. Osoita, että ℓ kulkee kolmion $\triangle ABC$ ortokeskuksen kautta jos ja vain jos $AB = AC$ tai $\widehat{BAC} = 120°$.

9. Etsi suurin mahdollinen määrä kuninkaita, jotka voi asettaa 12×12-shakkilaudalle siten, että jokainen kuningas uhkaa täsmälleen yhtä muuta kuningasta.

10. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jolle $AB \neq AC$ ja $\widehat{CBA} \neq 90°$. Olkoon I sen sisään piirretyn ympyrän keskipiste, olkoot D, E ja F pisteen I projektiot suorille BC, CA ja AB, vastaavasti. Olkoon S suorien AB ja DI leikkauspiste, olkoon T suoran DE ja suoran DF pisteen F kautta piirretyn normaalin leikkauspiste, ja olkoon R suorien ST ja EF leikkauspiste. Merkitään tällöin kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretyn ympyrän ja sen ympyrän, jonka eräs halkaisija on IR, sitä leikkauspistettä, joka on eri puolella suoraa IR kuin piste A on, symbolilla P_{ABC}.

Olkoon $\triangle XYZ$ tasakylkinen kolmio, jolle $XZ = YZ > XY$, ja olkoon W sellainen sivun YZ piste, jolle $WY < XY$. Osoita, että pisteille $K = P_{YXW}$ ja $L = P_{ZXW}$ pätee $2\,KL \leqslant XY$.