

Verryytelytehtäviä yläkerran funktionaaliyhtälöitä varten

Seuraavissa tarkoituksena on hieman pohjustaa yläkerran funktionaaliyhtälöiden ohjelmaa.

1. Etsi kaikki funktiot $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joille

$$f(x) + y = f(x + y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Etsi kaikki funktiot $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, joille $f(0) = 1$ ja

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n,$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. [Vihje: induktio on tässä iloinen asia.]

3. Ota selville (tai kertaakaan), millaisia ovat ne jatkuvat funktiot $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jotka toteuttavat Cauchyn funktionaaliyhtälön

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.