**Matematiikan olympiavalmennus**
**Valmennustehtävät, lokakuu 2018**

Ratkaisuja toivotaan seuraavaan valmennusviikonloppuun 30.11.2018 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen


Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku.


Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. Sinnikäs yrittäminen kannattaa. Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Kilpailujoukkueisiin valinnan välttämätön (muttei riittävä) ehto on, että asianomainen on kilpailua edeltävänä aikana suorittanut merkittävän osan annetuista tehtävistä.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Uutena kokeiluna myös **viikkotehtävät:**

`https://keskustelu.matematiikkakilpailut.fi/c/viikkotehtavat`

Kuhunkin näistä on vain viikko aikaa, ja palautus tapahtuu netissä. Heti palautusajan jälkeen tehtävästä voi keskustella keskustelupalstalla, jolloin tehtävästä ja ratkaisuyrityksestä oppiminen ei ole kiinni valmentajien aikatauluista. –Valmennusjaos käyttää kaikkea saatavilla olevaa informaatiota joukkueiden valitsemiseen, mutta viikkotehtävän painoarvo on ainakin aluksi pienempi kuin näiden valmennuskirjeiden.

Toivomme palautetta kokeilusta!

## Helpompia tehtäviä

**1.** Onko oheinen neliö mahdollista täydentää taikaneliöksi, so. neliöksi, jossa esiintyy kerran jokainen luvuista 1, 2, ..., 16 ja jonka jokaisen vaakarivin, pystyrivin ja kummankin lävistäjän lukujen summa on sama?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | 12 |
| | 16 | 1 | 10 |
| | 2 | 15 | 8 |

**2.** Etsi kaikki positiiviset kolminumeroiset luvut $\overline{abc}$, joille pätee $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$. Viiva tarkoittaa tässä sitä, että kyse ei ole tulosta vaan kymmenjärjestelmän luvusta: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

**3.** Kolmion korkeusjanat ovat suorilla $y = x$, $y = -2x + 3$ ja $x = 1$. Yhden kärkipisteen koordinaatit ovat $(5, 5)$. Selvitä muiden kärkipisteiden koordinaatit.

**4.** Kolmella kappaleella on sama pinta-ala: kuutiolla, jonka särmän pituus on $a$, säännöllisellä nelitahokkaalla, jonka särmän pituus on $b$ ja säännöllisellä kahdeksantahokkaalla, jonka särmän pituus on $c$. Selvitä

$$\frac{\sqrt{bc}}{a}.$$

**5.** Kolmion sivujen pituudet ovat $a$, $b$ ja $c$. Kun

$$2a + 3b + 4c = 4\sqrt{2a-2} + 6\sqrt{3b-3} + 8\sqrt{4c-4} - 20,$$

todista että kolmio on suorakulmainen.

**6.** Kun $x$ on reaaliluku, merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin $x$, ja merkintä $\{x\}$ erotusta $x - \lfloor x \rfloor$. Etsi kaikki reaaliluvut $x$, joille $\lfloor x \rfloor \{x\} = x$.

**7.** Onko aritmeettisessa jonossa $7k+3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ äärettömän monta palindromilukua? (Esim. 12321 on palindromiluku, koska sen numerot ovat samat alusta loppuun ja lopusta alkuun lukien.)

**8.** Suljettu väli $[0, 1]$ jaetaan 999 punaisella pisteellä tuhanteen yhtä suureen osaan ja 1110 sinisellä pisteellä 1111 yhtä suureen osaan. Mikä on pienin punaisen ja sinisen pisteen välimatka? Kuinka moni punaisen ja sinisen pisteen pari on tämän minimaalisen välimatkan päässä toisistaan?

**9.** Olkoon $k$ ympyrä, jonka keskipiste on $O$, ja olkoon $AB$ ympyrän $k$ jänne, jonka keskipiste $M$ ei ole $O$. Puolisuora $OM$ leikkaa $k$:n pisteessä $R$. Olkoon $P$ piste lyhyemmällä kaarella $AR$, $Q$ suoran $PM$ ja ympyrän $k$ toinen leikkauspiste ja $S$ suorien $AB$ ja $QR$ leikkauspiste. Kumpi jana on pidempi, $RS$ vai $PM$?

**10.** Ratkaise kokonaislukujen joukossa yhtälö $7(x + y) = 3(x^2 - xy + y^2)$.

### Vaativampia tehtäviä

**11.** Etsi kaikki positiiviset luvut $x$, joille

$$x^{2\sin x - \cos 2x} < \frac{1}{x}.$$

**12.** Polynomista $P(x) = ax^2 - bx + c$ tiedetään, että $0 < |a| < 1$, $P(a) = -b$ ja $P(b) = -a$. Todista, että $|c| < 3$.

**13.** Määritellään ei-negatiivisille kokonaisluvuille funktio $t$ seuraavasti:

$$\begin{cases} t(0) = t(1) = 0, \\ t(2) = 1, \\ t(n) = \text{pienin positiivinen kokonaisluku, joka ei jaa } n\text{:ää, kun } n > 2. \end{cases}$$

Olkoon $T(n) = t(t(t(n)))$. Laske

$$T(1) + T(2) + \cdots + T(2018).$$

**14.** Tasossa on annettu yksikköympyrä $k$, jonka keskipiste on $K$, ja suora $e$. Pisteen $K$ projektio $e$:lle on $O$, ja $KO = 2$. Olkoon $\mathcal{H}$ niiden ympyröiden joukko, joiden keskipiste on suoralla $e$ ja jotka sivuavat ympyrää $k$ ulkopuolitse.

Todista, että on olemassa tason piste $P$ ja kulma $\alpha$, joille $\angle APB = \alpha$ kaikilla joukon $\mathcal{H}$ ympyröillä, missä $AB$ on suoralla $e$ sijaitseva ympyrän halkaisija. Määritä $\alpha$ ja $P$.

**15.** Akseli ja Elina pelaavat tennistä. He käyttävät yksinkertaistettua pistelaskua, jossa erän voittaa pelaaja, joka ensimmäiseksi voittaa vähintään neljä peliä ollessaan vähintään kahden pelin verran johdossa. Akseli voittaa kunkin pelin todennäköisyydellä $p \leq \frac{1}{2}$ riippumatta aiempien pelien tuloksista. Todista, että Akseli voittaa erän enintään todennäköisyydellä $2p^2$.

**16.** Muukalaisten planeetalla on $3 \cdot 2018!$ avaruusolentoa ja 2018 kieltä. Kukin avaruusolentojen pari puhuu keskenään tasan yhtä kieltä. Todista, että on olemassa kolme avaruusolentoa, jotka puhuvat kaikki keskenään samaa kieltä.

**17.** Ympyrän säde on $n$, ja sen sisällä on $4n$ yksikköjanaa. Kun $\ell$ on mielivaltainen suora, todista, että on olemassa suora $\ell'$, joka on joko $\ell$:n suuntainen tai sitä vastaan kohtisuora, ja joka leikkaa ainakin kahta annetuista yksikköjanoista.

**18.** Olkoot $a, b, c$ ja $d$ positiivisia reaalilukuja, joille $a + b + c + d = 1$. Todista, että

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}.$$

**19.** Olkoot $x, y$ ja $z$ positiivisia reaalilukuja, joille $x + y + z = 1$. Kun $n$ on positiivinen kokonaisluku, olkoon $S_n = x^n + y^n + z^n$. Olkoon edelleen $P = S_2 S_{2019}$ ja $Q = S_3 S_{2018}$.

(a) Määritä $Q$:n pienin mahdollinen arvo.

(b) Jos $x$, $y$ ja $z$ ovat kolme eri lukua, selvitä onko $P$ vai $Q$ suurempi.

**20.** Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio. Todista, että kolmioiden $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ ja $\triangle DAB$ ortokeskukset ovat $ABCD$:n kanssa yhdenmuotoisen nelikulmion kärkipisteet. Todista lisäksi, että samojen kolmioiden painopisteet ovat jännenelikulmion kärkipisteet. (Ortokeskus on korkeusjanojen tai niiden jatkeiden leikkauspiste, painopiste on keskijanojen leikkauspiste.)