Toukokuun valmennustehtävien ratkaisut

1. **Ratkaisu 1.** Koska $(m,n)=1$ ((m,n) tarkoittaa suurinta yhteistä tekijää), niin myös $(2^m-1,2^n-1)=1$ tunnetun kaavan $(2^m-1,2^n-1)=2^{(m,n)}-1$ nojalla (tämän kaavan voi todistaa induktiolla $m+n$ suhteen). Siispä $2^m-1=m^k$ ja $2^n-1=n^k$. Erityisesti $m \mid 2^m-1$. Oletetaan, että $m>1$, ja olkoon p luvun m pienin alkutekijä. Tällöin $2^m \equiv 1 \pmod{p}$, mistä tunnetusti seuraa $m \mid p-1$. Täten $1<m\leq p-1$, joten luvulla m on jokin alkutekijä, joka on pienempi kuin p; ristiriita. Näin ollen $m=1$, ja samalla tavalla $n=1$. Tällöin kolmikot $(m,n,k)=(1,1,k)$ selvästi kelpaavat.

Ratkaisu 2. Kuten edellä, päädytään yhtälöön $2^m=m^k+1$. Jos k on parillinen, niin saadaan yhtälö muotoa $2^m=x^2+1$, ja koska 4 ei jaa x^2+1, on oltava $m=1$. Jos k on pariton, voidaan kirjoittaa $m^k+1=(m+1)(m^{k-1}-m^{k-2}+...-m+1)$, joten molemmat tulontekijät ovat kakkosen potensseja. Olkoon $m+1=2^a$. Tällöin $m\equiv -1 \pmod{2^a}$, joten $m^{k-1}-m^{k-2}+...-m+1\equiv k \pmod{2^a}$. Kuitenkin jos $m\geq 2, k\geq 2$, niin $m^{k-1}-m^{k-2}+...-m+1\geq m^2-m+1\geq m+1$, joten 2^a jakaa kyseisen luvun. Tämä tarkoittaa $k\equiv 0 \pmod{2^a}$, joten $k\geq m+1$. Tällöin saadaan $2^m\geq m^{m+1}+1$, mikä on selvästi mahdotonta. On siis oltava $k=1$ tai $m=1$. Jos $k=1$, niin $2^m-1=m$, ja tästä saadaan helposti $m=1$. Siispä $m=1$, ja samoin $n=1$, joten saadaan ratkaisut $(1,1,k)$.

2. (a) **Ratkaisu.** Merkitään symbolilla $\Omega(n)$ luvun n alkutekijöiden määrää moninkerrat mukaan laskien. Selvästi $\Omega(mn)=\Omega(m)+\Omega(n)$, joten $\Omega(P(x))$ on parillinen jos ja vain jos $\Omega(x+a)\equiv\Omega(x+b) \pmod{2}$. Tarkastellaan jonoja $(\Omega(n+1),\Omega(n+2),...,\Omega(n+2014))$ modulo 2 (eli jokainen koordinaatti otataan modulo 2). Eri jonoja on 2^{2014} ja jonoja yhteensä on äärettömän monta, joten löytyy kaksi eri lukua a ja b, joille $\Omega(a+j)\equiv\Omega(b+j) \pmod{2}$ kaikilla $j=1,...,2014$. Tämä tarkoittaakin, että $\Omega((x+a)(x+b))$ on parillinen, kun $x=1,...,2014$.

(b) **Ratkaisu.** Oletetaan, että $\Omega(P(n))$ on parillinen kaikilla $n\in\mathbb{Z}_+$ ja että $d=b-a>0$. Tällöin $\Omega(n(n+d))$ on parillinen kaikilla $n>a$. Erityisesti valitsemalla $n=kd$, $k\in\mathbb{Z}_+$, saadaan $\Omega(k(k+1)d^2)\equiv 0 \pmod{2}$ kaikilla riittävän suurilla k. Siten $\Omega(k)\equiv\Omega(k+1) \pmod{2}$ kaikilla riittävän suurilla k. Tämä tarkoittaisi, että $\Omega(k) \pmod{2}$ olisi vakio suurilla k, mutta tämä on mahdotonta, koska $\Omega(2k)=1+\Omega(k)$ kaikilla k. Siispä väite on todistettu.

3. **Ratkaisu.** Valinta $m=n=1$ antaa $f(1)^2+f(1)\mid 4$, joten $f(1)=1$. Valitaan sitten $m=1, n=p-1$, missä p on alkuluku. Saadaan $f(p-1)+1\mid p^2$ eli $f(p-1)=p-1$ tai $f(p-1)=p^2-1$. Jälkimmäisessä tapauksessa saadaan $f(p-1)^2+1\mid(1+(p-1)^2)^2$, mikä on mahdotonta, koska $(p^2-1)^2+1>(1+(p-1))^2$. Siispä $f(p-1)=p-1$. Olkoon n mielivaltainen. Pätee $f(n)+(p-1)^2\mid(n+(p-1)^2)^2$, joten $f(n)+(p-1)^2\mid(n-f(n))^2$, koska $n-f(n)\equiv f(n)+(p-1)^2 \pmod{f(n)+(p-1)^2}$. Kuitenkin jos p on riittävän suuri alkuluku, saadaan ristiriita, ellei $f(n)=n$. Siten $f(n)=n$ kaikilla n, ja tämä kelpaa.

4. **Ratkaisu.** Oletetaan, ettei mikään epäyhtälöistä päde. Tällöin $|ab-c|^2+|bc-a|^2+|ca-b|^2+6abc\geq 36$. Toisaalta vasen puoli on $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2$, joten $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2\geq 36$. Suuruusjärjestysepäyhtälön ja aritmeettis-kvadraattisen epäyhtälön nojalla seuraa $a^4+b^4+c^4+3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}\geq 36$. Oletettiin $a^4+b^4+c^4=27$, joten saatiin yhtälö $36\geq 36$. Siten yhtäsuuruuden on pädettävä käytetyissä epäyhtälöissä. Aritmeettis-kvadraattisessa epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus jos ja vain jos muuttujat ovat yhtä suuret, eli $a^2=b^2=c^2$. Tämä tarkoittaa $a^2=b^2=c^2=3$, mutta toisaalta on oltava $(abc)^2=\frac{9}{4}$, mikä

on ristiriita.

5. **Ratkaisu.** Oletetaan, että tällainen f olisi olemassa. Tällöin valinta $n = f(m)$ antaa $f(m+2013) = f(m)+2013$, ja induktiolla $f(2013m + r) = 2013m + f(r)$, kun $r = 0, 1, ..., 2012$. Merkitään vielä $f(r) = 2013k + \ell$, $0 \leq \ell \leq 2012$. Nyt $r + 2013 = f(f(r)) = f(2013k + \ell) = 2013k + f(\ell)$. Jos $k \geq 2$, vasen puoli on suurempi, eli ristiriita. Jos $k = 0$, niin $r + 2013 = f(\ell)$ ja $f(r) = \ell$. Jos taas $k = 1$, niin $r = f(\ell)$ ja $f(r) = \ell + 2013$. Lisäksi $r \neq \ell$. Nyt luvut $\{1, 2, ..., 2013\}$ jakautuvat pareihin (a, b), joille $f(a) = b$ ja $f(b) = a + 2013$ tai $f(b) = a$ ja $f(a) = b + 2013$. Jokainen jäsen esiintyy täsmälleen yhdessä parissa. koska jos olisi parit (a, b) ja (a, c), niin $b = f(a) = c$, ja samoin ei voi olla pareja (a, b) ja (a', b). Kuitenkin lukuja $1, 2, ..., 2013$ on pariton määrä; ristiriita.

6. **Ratkaisu.** Tehtävässä pitäisi olla maksimi minimin sijasta. Havaitaan, että jos vain yhdellä yhtälöistä $f(x) = s, s \in S$, on kokonaislukuratkaisu, niin saadaan yläraja $\deg(f)$ ratkaisujen määrälle. Oletetaan sitten, että ratkaisuja on ainakin kahdella eri $s_1, s_2 \in S$. Voidaan lisäksi olettaa, että s_1 on se S:n alkio, joilla on eninten vastaavia kokonaislukuratkaisuja. Olkoon yhtälöillä $f(x) = s_1, f(x) = s_2$ kokonaislukuratkaisuja k ja ℓ kappaletta vastaavasti. Tällöin $f(x) = (x-x_1)...(x-x_k)Q(x)+s_1 = (x-y_1)..(x-y_\ell)R(x)+s_2$ joillakin kokonaisluvuilla x_i ja y_i ja polynomeilla $Q, R \in \mathbb{Z}[x]$. Nyt erityisesti $s_2 = f(y_1) = (y_1-x_1)...(y_1-x_k)Q(y_1)+s_1$, joten $s_2 - s_1 = (y_1 - x_1)...(y_1 - x_k)Q(y_1)$. Koska luvut x_i ovat pareittain erisuuria, pätee $|y_1 - x_i| \geq 2$ paitsi korkeintaan kahdella i. Siten $s_2 - s_1 \geq 2^{k-2}$. Olkoon a_S joukon S lukujen suurin mahdollinen erotus. Saatiin $4a_S \geq 2^k$, joten $k \leq \log_2(4a_S)$. Luvun k maksimaalisuuden nojalla relaatiolla $f(x) \in S$ on enintään $k|S|$ ratkaisua. Ratkaisuja on siis enintään $\log_2(4a_S)|S|$, ja tämä on haluttu vakio C_S.

7. **Ratkaisu.** Olkoon n alkusi parillinen. Joukko $\{1, 2, ..., n\}$ voidaan osittaa $\frac{n}{2}$ osajoukoksi, joilla on sama summa: muodostetaan parit $\{1, n\}, \{2, n-1\}, ..., \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\}$. Tämä on suurin mahdollinen määrä osajoukkoja. Nimittäin jokaisen osajoukon (mahdollisesti yhtä poikkeusta lukuun ottamatta) pitää sisältää vähintään kaksi lukua, sillä joukon, joka sisältää luvun n, summa on vähintään n. Poikkeustapauksessa $\{n\}$ on eräs joukoista, joten joukkoja voi silloinkin muodostaa korkeintaan $1 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$.
Olkoon nyt n pariton. Osituksessa $\{n\}, \{1, n-1\}, \{2, n-2\}, ..., \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\}$ on $\frac{n+1}{2}$ joukkoa, joista kullakin on sama summa. Enempää joukkoja ei voi muodostaa, koska jälleen jokainen joukko, paitsi mahdollisesti yksi, sisältää ainakin kaksi alkiota. Vastaus on siis $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ molemmissa tapauksissa.

8. (a) **Ratkaisu.**Tulkitaan pöydän kortit binäärilukuna vasemmalta oikealle. Jokainen kultainen kortti vastaa ykköstä ja musta kortti nollaa. Alussa pöydällä on luku 11...1 (2009 ykköstä). Jokaisella askeleella luku pienenee, joten peli päättyy enintään 2^{2009} siirrossa.

(b) **Ratkaisu.** Jälkimmäinen pelaaja voittaa aina. Sanotaan, että kortti on *erityinen*, jos sen järjestysluku on $10, 60, 110, ..., 1960$. Erityisiä kortteja on 40. Jokaisella siirrolla täsmälleen yksi erityinen kortti muuttaa väriään. Alussa kultaisia erityisiä kortteja on 40, joten jokaisen ensimmäisen pelaajan siirron jälkeen kultaisia erityisiä on pariton määrä. Tämä tarkoittaa, että jälkimmäisellä pelaajalla on aina jäljellä jokin sallittu siirto, joten hän ei voi hävitä (kultaisen erityisen kortin voi kääntää, koska erityiset kortit eivät ole 50 viimeisen joukossa). Koska peli päättyy, jälkimminen pelaaja voittaa.

9. **Ratkaisu.** Oletetaan vastaväite. Tällöin luvut $S(a) \pmod{n!}$, missä a on joukon $\{1, 2, ..., n\}$ permutaatio, ovat kaikki eri lukuja. Koska permutaatiota on $n!$, tämä tarkoittaa, että $S(a) \pmod{n!}$ saa kaikki arvot $0, 1, ..., n! - 1$ tasan kerran. Siispä $\sum_a S(a) \equiv 0 + 1 + ... + (n! - 1) = \frac{(n!-1)(n!)}{2} \pmod{n!}$. Toisaalta permutaatioita, joille a_j saa tietyn arvon, on $(n-1)!$, joten

$$\sum_a S(a) = \sum_a \sum_{j=1}^{n} c_j a_j = \sum_{j=1}^{n} (n-1)!(c_j \cdot 1 + ... + c_j \cdot n) = (n-1)!(c_1 + ... + c_n) \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Koska $n > 1$ on pariton, luku $(n-1)!(c_1 + ... + c_n) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ on jaollinen luvulla $n!$. Kuitenkin luku $\frac{(n!-1)(n!)}{2}$

ei ole jaollinen luvulla $n!$, mikä on ristiriita, koska tulosten piti olla samat $\pmod{n!}$.

10. **Ratkaisu.** Tällaista kolmiota ei ole. Jos tällaisella kolmiolla olisi sivut a, b, c ja piirin puolikas $p = \frac{a+b+c}{2}$, niin Heronin kaavalla

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = 2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2.$$

Jos p ei ole kokonaisluku, eli se on muotoa $\frac{m}{2}$ jollakin parittomalla m, niin alan neliö ei myöskään ole kokonaisluku. Siispä p on kokonaisluku. Koska $p-a+p-b+p-c = p$, niin päädytään yhtälöön muotoa $xyz(x+y+z) = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$, missä $x \geq y \geq z$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Käymällä läpi eri vaihtoehdot luvuille x, y ja z nähdään, ettei tällaista kolmiota ole.

11. **Ratkaisu.** Olkoot F ja G janojen AB ja CD keskipisteet ja olkoon P samalla puolella janaa FG kuin B ja C. Pätee $PF \perp AB$, $PG \perp CD$ ja $\angle FEB = \angle ABE, \angle GEC = \angle DCE$. Tästä saadaan $\angle FPG = \angle FEG = 90° + \angle ABE + \angle DCE$. Koska kolmioiden ABP ja CDP alat ovat $FE \cdot FP$ ja $GE \cdot GP$, väite on $\frac{FE}{EG} = \frac{GP}{PF}$. Tämä taas on yhtäpitävää $EFG \sim PGF$ kanssa, ja tämä tarkoittaa, että $EFPG$ on suunnikas. Tämä puolestaan tarkoittaa $\angle EFP = \angle EGP$ eli $\angle ABE = \angle DCE$, ja tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $ABCD$ on jännenelikulmio.

12. **Ratkaisu.** Merkitään $AC = a, CE = b, EA = c$. Ptolemaioksen epäyhtälöllä $a \cdot EF + b \cdot AF \geq c \cdot CF$. Koska $EF = AF$, saadaan $\frac{AF}{CF} \geq \frac{c}{a+b}$. Symmetrian nojalla saadaan kaksi vastaavaa epäyhtälöä lisää, ja laskemalla ne yhteen seuraa

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{AD} + \frac{AF}{CF} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Nyt väite seuraa suoraan Nesbittin epäyhtälöstä, ja jos yhtäsuuruus pätee, niin $a = b = c$, joten $ABCDEF$ on säännöllinen kuusikulmio, ja tällöin yhtäsuuruus selvästi pätee.