Baltian Tie -kilpailujen tehtävät 1990–2015

90.1. Kokonaisluvut 1, 2, ..., n kirjoitetaan ympyrään, ei välttämättä suuruusjärjestykseen. Mikä on vierekkäisten lukujen erotusten itseisarvojen summan pienin mahdollinen arvo?

90.2. Numeroidaan ruutupaperin neliöt seuraavan kaavion mukaisesti:

n							
...							
4	10	14					
3	6	9	13				
2	3	5	8	12			
1	1	2	4	7	11		
	1	2	3	4	5	...	m

Etsi sellainen kahden muuttujan m ja n polynomi $p(m, n)$, että luku $p(m, n)$ on sama kuin ruutuun, jonka koordinaatit ovat (m, n), kirjoitettu luku.

90.3. Olkoon $a_0 > 0$, $c > 0$ ja

$$a_{n+1} = \frac{a_n + c}{1 - a_n c}, \quad n \geq 0.$$

Voivatko luvut $a_0, a_1, \ldots, a_{1989}$ olla positiivisia, mutta $a_{1990} < 0$?

90.4. Osoita, että kaikille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pätee

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i + j - 1} \geq 0.$$

90.5. Olkoon $*$ operaatio, joka liittää jokaiseen reaalilukupariin reaaliluvun (esim. $a*b = a + b^2 - 17$). Keksi yhtälö, joka on tosi kaikille muuttujan arvoille siinä tapauksessa, että operaatio $*$ on vaihdannainen ja liitännäinen, mutta joka voi olla epätosi muulloin.

90.6. Olkoon $ABCD$ nelikulmio, $AD = BC$, $\angle A + \angle B = 120°$ ja olkoon P sellainen piste nelikulmion ulkopuolelta, että kolmio DPC on tasasivuinen. Todista, että myös kolmio APB on tasasivuinen.

90.7. Kuperan viisikulmion $ABCDE$ sivun AB keskipiste yhdistetään janalla kolmion CDE keskijanojen leikkauspisteeseen, sivun BC keskipiste kolmion DEA keskijanojen leikkauspisteeseen jne. Osoita, että näin syntyvät viisi janaa leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

90.8. On tunnettua, että kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän mielivaltaisesta pisteestä P suorille AB, BC ja CA piirrettyjen kohtisuorien kantapisteet ovat samalla suoralla, ns. Simpsonin suoralla. Osoita, että ympyrän halkaisijan päätepisteisiin P_1 ja P_2 liittyvät Simsonin suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

90.9. Ellipsin sisään on piirretty kaksi yhtenevää kolmiota. Ovatko ne välttämättä symmetrisiä joko ellipsin akselin tai sen keskipisteen suhteen?

90.10. Suoralla t on yksikköjana AB. Janaa siirretään tasossa niin, että se pysyy t:n suuntaisena, eivätkä A:n ja B:n piirtämät käyrät leikkaa toisiaan; jana palaa lopulta suoralle t. Kuinka kaukana A voi olla alkuasemastaan?

90.11. Todista, että kokonaislukukertoimisen polynomin kokonaislukunollakohta ei voi olla itseisarvoltaan suurempi kuin polynomin kertoimien suurin itseisarvo.

90.12. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Todista, että luku $25m + 3n$ on jaollinen 83:lla, jos ja vain jos $3m + 7n$ on jaollinen 83:lla.

90.13. Todista, että yhtälöllä $x^2 - 7y^2 = 1$ on äärettömän monta ratkaisua luonnollisten lukujen parien joukossa.

90.14. Onko olemassa 1990 keskenään yhteistekijätöntä lukua siten, että kaikki ainakin kahden tällaisen luvun summat ovat yhdistettyjä lukuja?

90.15. Todista, että yksikään luvuista

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

ei ole kokonaisluvun kuutio.

90.16. Piirretään suljettu murtoviiva ruutupaperin viivoja käyttäen. Murtoviivan jokaisen sivun pituus on ruudun sivun pariton monikerta. Todista, että sivujen määrä on jaollinen neljällä.

90.17. Kahdessa kasassa on makeisia, toisessa 72 ja toisessa 30 kappaletta. Kaksi oppilasta ottaa vuorotellen makeisia jommastakummasta kasasta. Otettujen makeisien määrän on oltava toisessa kasassa olevien makeisten määrän monikerta. Kumpi oppilas, pelin aloittaja vai toinen, voi aina olla varma, että hän pystyy ottamaan toisen kasan viimeisen makeisen?

90.18. Positiiviset luvut 1, 2, ..., 100, 101 kirjoitetaan 101×101-ruudukkoon niin, että jokainen luku toistetaan 101 kertaa. Todista, että ruudukossa on yksi pysty- tai vaakarivi, jossa on ainakin 11 eri lukua.

90.19. Valitaan joukon $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ osajoukkoja niin, että minkä tahansa kahden valitun osajoukon leikkaus on joko yksi luku tai koostuu useasta peräkkäisestä luvusta. Mikä on osajoukkojen suurin mahdollinen lukumäärä?

90.20. Keksi uusi kilpailutehtävä ja sen ratkaisu.

91.1. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n, jolla on seuraava ominaisuus: mille tahansa n:lle eri kokonaisluvulle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erotuksien $a_i - a_j$, $i < j$, tulo on jaollinen 1991:llä.

91.2. Todista, että yhtälöllä $102^{1991} + 103^{1991} = n^m$, $m \geq 2$, ei ole positiivista kokonaislukuratkaisua.

91.3. Myytävänä on 20 kissaa, joiden hinnat ovat välillä 12 \$ – 15 \$ sekä 20 säkkiä, joiden hinnat ovat 10 sentistä 1 \$:iin (kaikki hinnat ovat eri suuria ja yhden sentin monikertoja). Todista, että kaksi poikaa, Jussi ja Pekka, voivat kumpikin ostaa kissan säkissä samalla rahamäärällä.

91.4. Olkoon p kokonaislukukertoiminen polynomi, jolle pätee $p(-n) < p(n) < n$ jollekin kokonaisluvulle. Todista, että $p(-n) < -n$.

91.5. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. – Todista, että

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

91.6. Olkoon $[x]$ suurin kokonaisluku, joka on $\leq x$ ja $\{x\} = x - [x]$. Ratkaise yhtälö

$$[x] \cdot \{x\} = 1991x.$$

91.7. Olkoot A, B ja C teräväkulmaisen kolmion kulmat. Todista oikeaksi epäyhtälö

$$\sin A + \sin B > \cos A + \cos B + \cos C.$$

91.8. Olkoot a, b, c, d ja e eri suuria reaalilukuja. Todista että yhtälöllä

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)+(x-a)(x-b)(x-c)(x-e)+\\&(x-a)(x-b)(x-d)(x-e)+(x-a)(x-c)(x-d)(x-e)+\\&(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)=0\end{aligned}$$

on neljä eri suurta reaalilukuratkaisua.

91.9. Määritä yhtälön

$$ae^x = x^3$$

ratkaisujen x lukumäärä.

91.10. Laske $\sin 3°$:n arvo rationaalisten ja juurilausekkeiden avulla.

91.11. Kaikki positiiviset luvut 1:stä 1 000 000:aan jaetaan kahteen joukkoon sen mukaan, onko luvun numeroiden summa pariton vai parillinen. Kummassa joukossa on useampia alkioita?

91.12. Kuperan 1991-kulmion kärjet numeroidaan 1:stä 1991:een. Monikulmion kaikki sivut ja lävistäjät väritetään sinisiksi tai punaisiksi. Todista, että jos kärkien numerointia muutetaan mielivaltaisesti, on olemassa k ja l siten, että k:lla ja l:llä merkittyjen kärkien välinen jana on samanvärinen ennen ja jälkeen numeroinnin muuttamisen.

91.13. Tasasivuinen kolmio on jaettu 25:ksi yhteneväksi kolmioksi, jotka on numeroitu 1:stä 25:een. Todista, että kolmioiden joukossa on kaksi sellaista, joilla on yhteinen sivu ja joiden numeroiden erotus on suurempi kuin 3.

91.14. Linnassa on saleja ja n ovea. Jokainen ovi johtaa salista toiseen tai ulos. Joka salissa on ainakin kaksi ovea. Ritari astuu linnaan. Hän voi kulkea mistä tahansa ovesta paitsi siitä, jonka läpi hän on viimeksi kulkenut. Keksi metodi, jolla ritari voi päästä ulos käymättä useammassa kuin $2n$:ssä salissa (jokainen sali lasketaan niin monta kertaa kuin siinä käydään).

91.15. Šakkilaudan ruutuihin on kirjoitettu mielivaltaisia kokonaislukuja. Kuningas on laudalla. Se alkaa siirtyä, ja joka kerta käydessään jossain ruudussa se lisää ruudussa olevaa lukua 1:llä. Onko mahdollista, että šakkilaudalle voidaan näin saada

a) vain parillisia lukuja;
b) vain 3:lla jaollisia lukuja;
c) kaikkiin ruutuihin sama luku?

91.16. Ympyrät $O_1(r_1)$ ja $O_2(r_2)$ sivuavat toisiaan ulkopuolisesti, ja l on niiden yhteinen tangentti. Ympyrä $O_3(r_3)$ sivuaa molempia edellisiä ympyröitä ja suoraa l, ja $r_3 < \min(r_1, r_2)$. Todista, että

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

91.17. Oletetaan, että avaruuden koordinaattitasot ovat heijastavia. Valonsäde lankeaa yhdelle niistä. Selvitä, miten lopulta heijastuneen säteen suunta riippuu alkuperäisen säteen suunnasta.

91.18. Onko mahdollista sijoittaa kaksi kolmiopohjaista pyramidia, joiden tilavuus on $\frac{1}{2}$, toisiaan leikkaamatta palloon, jonka säde on 1?

91.19. Työnnetään kolmea toisiaan ulkopuolisesti sivuavaa ympyrää hiukan lähemmäksi niin, että syntyy kolme paria ympyröiden keskinäisiä leikkauspisteitä. Olkoot A_1, B_1 ja C_1 näin syntyneet ulommat leikkauspisteet ja A_2, B_2 ja C_2 vastaavat sisemmät leikkauspisteet. Todista, että

$$A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_1C_2 \cdot C_1B_2 \cdot B_1A_2.$$

91.20. Pisteet $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$ ovat funktion $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$, kuvaajalla siten, että $2 \cdot OA = AB$ (O on origo). Olkoon C janan AB keskipiste. Osoita, että x-akselin ja säteen OC välinen kulma on kolmasosa x-akselin ja säteen OA välisestä kulmasta.

92.1. Olkoot p ja q kaksi peräkkäistä paritonta alkulukua. Todista, että $p+q$ on ainakin kolmen (ei välttämättä eri suuren) ykköstä suuremman positiivisen kokonaisluvun tulo.

92.2. Merkitään $d(n)$:llä positiivisen kokonaisluvun kaikkien positiivisten tekijöiden (mukaan lukien 1 ja n) lukumäärää. Todista, että $\frac{n}{d(n)}$ on kokonaisluku äärettömän monella n.

92.3. Etsi päättymätön aritmeettinen jono, jonka termit eivät ole samoja ja jonka yksikään termi ei ole kahden positiiviluvun neliöiden eikä kuutioiden summa.

92.4. Onko mahdollista piirtää kuusikulmio, jonka kärjet ovat tason kokonaislukukoordinaattisissa pisteissä, siten, että kuusikulmion sivujen neliöt ovat kuusi peräkkäistä kokonaislukua?

92.5. Oletetaan, että $a^2+b^2+(a+b)^2 = c^2+d^2+(c+d)^2$. Todista, että $a^4+b^4+(a+b)^4 = c^4+d^4+(c+d)^4$.

92.6. Todista, että 99:n luvun $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}$, $k = 2, 3, \ldots, 100$, tulo on suurempi kuin $\dfrac{2}{3}$.

92.7. Olkoon $a = \sqrt[1992]{1992}$. Kumpi luvuista

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}} \qquad \text{vai} \quad 1992,$$

missä ”potenssitornissa” on 1992 a:ta, on suurempi?

92.8. Määritä kaikki kokonaisluvut x, jotka toteuttavat yhtälön

$$2^x(4-x) = 2x + 4.$$

92.9. Polynomin $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ kertoimille on voimassa $b < 0$ ja $ab = 9c$. Todista, että polynomilla on kolme erisuurta reaalijuurta.

92.10. Määritä kaikki neljännen asteen polynomit $p(x)$, joille seuraavat neljä ehtoa toteutuvat:

(i) $p(x) = p(-x)$ kaikilla x,
(ii) $p(x) \geq 0$ kaikilla x,
(iii) $p(0) = 1$,
(iv) $p(x)$:llä on tasan kaksi ehdon $|x_1 - x_2| = 2$ toteuttavaa lokaalia minimipistettä x_1 ja x_2.

92.11. Olkoon $\mathbb{Q}^+$ positiivisten rationaalilukujen joukko. Osoita, että on olemassa yksi ja vain yksi funktio $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) jos $0 < q < \dfrac{1}{2}$, niin $f(q) = 1 + f\left(\dfrac{q}{1-2q}\right)$,
(ii) jos $1 < q \leq 2$, niin $f(q) = 1 + f(q-1)$,
(iii) $f(q) \cdot f\left(\dfrac{1}{q}\right) = 1$ kaikilla $q \in \mathbb{Q}^+$.

92.12. Olkoon $\mathbb{N}$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Olkoon $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektio (jokainen $a \in \mathbb{N}$ on $\phi(n)$ jollain $n \in \mathbb{N}$ ja jos $n \neq m$, niin $f(n) \neq f(m)$). Oletetaan, että on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = L.$$

Mitkä ovat L:n mahdolliset arvot?

92.13. Osoita, että kaikille positiivisille luvuille $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ pätee epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geq \frac{4n^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2}.$$

92.14. Eräässä maassa on äärellinen määrä kaupunkeja. Tiet kaupunkien välillä ovat yksisuuntaisia. Jos tarkastellaan mitä hyvänsä kahta kaupunkia, niin toiseen niistä pääsee teitä pitkin toisesta. Todista, että maassa on kaupunki, josta voi päästä teitä pitkin kaikkiin muihin kaupunkeihin.

92.15. Noakin olisi sijoitettava 8 erilajista eläintä neljään arkin häkkiin, kaksi kuhunkin. Osoittautuu, että jokaisella näistä eläimistä on toisten eläinten joukossa enintään kolme sellaista, joiden kanssa ne eivät voi mennä samaan häkkiin. Osoita, että vaaditunlainen jako on tehtävissä.

92.16. Kuperan monitahokkaan kaikki sivutahkot ovat suunnikkaita. Voiko monitahokkaalla olla tasan 1992 sivutahkoa?

92.17. Nelikulmio $ABCD$ on piirretty 1-säteisen ympyrän sisään niin, että lävistäjä AC on ympyrän halkaisija ja lävistäjä BD on yhtä pitkä kuin AB. Lävistäjien leikkauspiste on P. Tiedetään, että PC:n pituus on $\frac{2}{5}$. Kuinka pitkä on sivu CD?

92.18. Osoita, että kolmiossa, joka ei ole tylppäkulmainen, kolmion piiri on aina suurempi kuin kaksi kertaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija.

92.19. Ympyrät C_1 ja C_2 sivuavat sisäpuolisesti ympyrää C pisteissä A ja B. Olkoon t ympyröiden C_1 ja C_2 sellainen yhteinen tangentti, jonka samalla puolella molemmat ympyrät ovat; sen ja ympyröiden sivuamispisteet ovat D ja E. Suorien AD ja BE leikkauspiste on F. Osoita, että F on ympyrällä C.

92.20. Olkoot $a \le b \le c$ suorakulmaisen kolmion sivut, $2p$ sen piiri ja S sen ala. Osoita, että $p(p-c) = (p-a)(p-b) = S$

93.1. Määritä kaikki sellaiset kolminumeroiset luvut $a_1a_2a_3$, $a_3a_2a_1$, missä a_1 ja a_2 ovat eri suuria ja nollasta eroavia numeroita, joiden neliöt ovat viisinumeroiset luvut $b_1b_2b_3b_4b_5$ ja $b_5b_4b_3b_2b_1$.

93.2. Onko olemassa positiivisia lukuja $a > b > 1$ siten, että jokaista positiivilukua k kohden on olemassa n, jolle $an + b$ on jonkin positiivisen kokonaisluvun k:s potenssi?

93.3. Nimitämme positiivista kokonaislukua mielenkiintoiseksi, jos se on kahden (eri tai yhtä suuren) alkuluvun tulo. Kuinka monta peräkkäistä mielenkiintoista lukua voi enintään olla?

93.4. Määritä kaikki kokonaisluvut n, joille

$$\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$$

on kokonaisluku.

93.5. Osoita, että

$$n^{12} - n^8 - n^4 + 1$$

on kaikilla parittomilla positiivisilla kokonaisluvuilla jaollinen 2^9:llä.

93.6. Oletamme, että funktiot f ja g on määritelty kaikilla x, $2 < x < 4$, ja että ne toteuttavat ehdot $2 < f(x) < 4$, $2 < g(x) < 4$, $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ ja $f(x) \cdot g(x) = x^2$ kaikilla x, $2 < x < 4$. Todista, että $f(3) = g(3)$.

93.7. Ratkaise kokonaislukujen joukossa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 4^x \\ x + y + z = 20. \end{cases}$$

93.8. Laske kaikkien sellaisten kokonaislukujen summa, joiden numerot muodostavat joko aidosti kasvavan tai aidosti vähenevän lukujonon.

93.9. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^5 = y + y^5 \\ y^5 = z + z^5 \\ z^5 = t + t^5 \\ t^5 = x + x^5. \end{cases}$$

93.10. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ kaksi äärellistä jonoa, jotka sisältävät $2n$ eri reaalilukua. Kun jonot kirjoitetaan suuruusjärjestykseen, ne ovat a_1', a_2',..., a_n' ja b_1', b_2',..., b_n'. Osoita, että

$$\max_{1 \le i \le n} |a_i - b_i| \ge \max_{1 \le i \le n} |a_i' - b_i'|.$$

93.11. Tasasivuinen kolmio on jaettu n^2:ksi yhteneväksi tasasivuiseksi kolmioksi. Yhden pikkukolmion kärjessä on kärpänen, toisen pikkukolmion kärjessä hämähäkki. Vuoron perään kumpikin siirtyy johonkin olinpaikkansa viereiseen pikkukolmion kärkeen. Osoita, että hämähäkki voi aina saada kärpäsen kiinni.

93.12. Eräässä kuningaskunnassa on 13 kaupunkia. Eräiden kaupunkiparien välillä on suora molemminpuolinen linja-auto-, juna- tai lentokoneyhteys. Kuinka monta yhteyttä vähintään tarvitaan, jotta – valittiinpa mitkä hyvänsä kaksi kulkutapaa – jokaisesta kaupungista olisi yhteys jokaiseen toiseen kaupunkiin käyttäen vain näitä kahta kuljetusmuotoa.

93.13. Tasasivuinen kolmio ABC on jaettu 100:ksi yhteneväksi tasasivuiseksi kolmioksi. Mikä on suurin määrä pienten kolmioiden kärkiä, joka voidaan valita niin, että mitkään kaksi niistä eivät ole minkään kolmion ABC sivun suuntaisella suoralla?

93.14. Neliö jaetaan 16:ksi yhteneväksi neliöksi; tällöin syntyy 25 eri neliön kärkeä. Kuinka monta kärkeä on ainakin poistettava näiden kärkien joukosta, jotta mitkään neljä jäljelle jääneistä pisteistä eivät olisi sellaisen neliön kärkiä, jonka sivut ovat alkuperäisen neliön sivujen suuntaiset?

93.15. Kahden arpakuution jokaiselle sivulle on kirjoitettu jokin positiivinen kokonaisluku. Arpoja heitetään ja ylöspäin jääneiden sivujen luvut lasketaan yhteen. Voidaanko nopan sivujen luvut valita niin, että mahdollisia summia olisivat 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ja 13, ja kaikki olisivat yhtä todennäköisiä?

93.16. Kaksi r-säteistä ympyrää on tasossa leikkaamatta toisiaan. Suora leikkaa ensimmäisen ympyrän pisteissä A ja B ja toisen pisteissä C ja D niin, että $|AB| = |BC| = |CD| = 14$ cm. Toinen suora leikkaa ympyrät pisteissä E, F ja G, H niin, että $|EF| = |FG| = |GH| = 6$ cm. Määritä ympyröiden säde r.

93.17. Tarkastellaan kolmea tason suoraa, joista mitkään kaksi eivät ole yhdensuuntaisia. Kutakin suoraa pitkin liikkuu piste. Pisteiden nopeudet ovat eri suuret mutta nollasta eroavat, ja liikkeen ajatellaan jatkuneen äärettömän kauan ja jatkuvan äärettömän kauan. Voidaanko suorat, pisteiden nopeudet ja sijainnit jonakin hetkenä määrittää niin, että pisteet eivät koskaan ole olleet eivätkä koskaan tule olemaan samalla suoralla?

93.18. Kolmiossa ABC on $|AB| = 15$, $|BC| = 12$ ja $|AC| = 13$. Olkoon mediaanin AM ja kulmanpuolittajan BK leikkauspiste O ($M \in BC$, $K \in AC$). Oletamme, että $OL \perp AB$, missä $L \in AB$. Todista, että $\angle OLK = \angle OLM$.

93.19. O-keskisen ympyrän sisään on piirretty kupera nelikulmio $ABCD$. Kulmat AOB, BOC, COD ja DOA ovat (jossakin järjestyksessä) samat kuin nelikulmion $ABCD$ kulmat. Todista, että $ABCD$ on neliö.

93.20. Olkoon Q yksikkökuutio. Sanomme, että tetraedri on *hyvä*, jos sen kaikki särmät ovat yhtä pitkät ja kaikki kärjet ovat kuution Q pinnalla. Määritä kaikki hyvien tetraedrien mahdolliset tilavuudet.

94.1. Olkoon $a \circ b = a + b - ab$. Määritä kaikki kokonaislukukolmikot (x, y, z), joille pätee $(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0$.

94.2. Olkoot a_1, a_2, …, a_9 mielivaltaisia ei-negatiivisia lukuja, joille pätee $a_1 = a_9 = 0$ ja joista ainakin yksi on nollasta eroava. Todista, että ainakin yhdelle i, $2 \le i \le 8$, pätee epäyhtälö $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$. Pysyykö väite totena, jos luku 2 vaihdetaan viimeisessä epäyhtälössä luvuksi 1,9?

94.3. Määritä lausekkeen

$$xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

suurin arvo.

94.4. Onko olemassa kokonaislukua n, jolle $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ on rationaaliluku?

94.5. Olkoon $p(x)$ sellainen kokonaislukukertoiminen polynomi, että yhtälöillä $p(x) = 1$ ja $p(x) = 3$ on molemmilla kokonaislukuratkaisuja. Voiko yhtälöllä $p(x) = 2$ olla kaksi eri kokonaislukuratkaisua?

94.6. Todista, että jokainen supistumaton murtoluku $\frac{p}{q}$, missä p ja q ovat positiivisia kokonaislukuja ja q on pariton, on sama kuin murtoluku $\frac{n}{2^k - 1}$ joillain positiivisilla kokonaisluvuilla n ja k.

94.7. Olkoon $p > 2$ alkuluku ja $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^3} = \frac{m}{n}$, missä m ja n ovat yhteistekijättömiä. Osoita, että m on p:n monikerta.

94.8. Osoita, että mielivaltaista kokonaislukua $a \ge 5$ kohden on olemassa kokonaisluvut b ja c, $c \ge b \ge a$, siten, että a, b ja c ovat suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet.

94.9. Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen parit (a, b), joille $2^a + 3^b$ on kokonaisluvun neliö.

94.10. Kuinka moni positiivinen kokonaisluku täyttää seuraavat kolme ehtoa:
(a) luvun kaikki numerot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
(b) kahden peräkkäisen numeron erotuksen itseisarvo on aina 1;
(c) luvussa on 1994 numeroa?

94.11. Olkoot NS ja EW ympyrän $\mathcal{C}$ kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa halkaisijaa. Suora l sivuaa ympyrää $\mathcal{C}$ pisteessä S. Olkoot A ja B kaksi halkaisijan EW suhteen symmetristä $\mathcal{C}$:n pistettä. Merkitään l:n ja suorien NA ja NB leikkauspisteitä A':lla ja B':lla. Osoita, että $|SA'| \cdot |SB'| = |SN|^2$.

94.12. Kolmion $A_1A_2A_3$ sisään piirretty ympyrä sivuaa sivuja A_2A_3, A_3A_1 ja A_1A_2 pisteissä S_1, S_2 ja S_3. Olkoot O_1, O_2 ja O_3 kolmioiden $A_1S_2S_3$, $A_2S_3S_1$ ja $A_3S_1S_2$ sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. Todista, että suorat O_1S_1, O_2S_2 ja O_3S_3 leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.

94.13. Määritä pienin sellainen luku a, että neliö, jonka sivu on a, voi sisältää viisi 1-säteistä ympyräkiekkoa, joista millään kahdella ei ole yhteisiä sisäpisteitä.

94.14. Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat ja niiden vastaisten sivujen pituudet a, b ja c. Todista epäyhtälö

$$a \cdot \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + b \cdot \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right) + c \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 2 \cdot \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right) .$$

94.15. Onko olemassa kolmio, jonka kaikkien sivujen ja korkeusjanojen pituudet ovat kokonaislukuja ja jonka piirin pituus on 1995?

94.16. Ihmeiden Saarella asuvat siilit. Jokainen siili koostuu kolmesta yksikköjanasta, joilla on yhteinen päätepiste ja joiden väliset kulmat ovat 120°. Oletamme, että kaikki siilit ovat litteinä saaren tasossa eivätkä kosketa toisiaan. Todista, että Ihmeiden Saarella on äärellinen määrä siilejä.

94.17. Erään kuningaskunnan hallitsija on päättänyt rakentaa 25 uutta kaupunkia 13:lle asumattomalle saarelle niin, että joka saarelle tulee ainakin yksi kaupunki. Jokaisen kahden eri saarilla sijaitsevan kaupungin välille perustetaan suora lauttayhteys. Määritä lauttayhteyksien pienin mahdollinen lukumäärä.

94.18. Tasossa on annettuna n $(n > 2)$ suoraa. Mitkään kaksi suorista eivät ole yhdensuuntaiset ja mitkään kolme eivät leikkaa samassa pisteessä. Jokainen suorien leikkauspiste on varustettu kokonaisluvulla 1:n ja $n-1$:n väliltä. Osoita, että numerointi voidaan suorittaa siten, että jokaisen suoran leikkauspisteissä ovat kaikki luvut 1:stä $n-1$:een, silloin ja vain silloin, kun n on parillinen.

94.19. Ihmeiden Saaren tiedustelupalvelulla on Tartossa 16 vakoojaa. Jokainen heistä valvoo muutamia työtovereitaan. Tiedetään, että jos vakooja A valvoo vakoojaa B, niin B ei valvo A:ta. Lisäksi tiedetään, että jokaiset kymmenen vakoojaa voidaan numeroida niin, että ensimmäinen vakooja valvoo toista vakoojaa, toinen valvoo kolmatta, ... ja kymmenes valvoo ensimmäistä. Todista, että jokaiset yksitoista vakoojaa voidaan myös numeroida vastaavalla tavalla.

94.20. Tasasivuinen kolmio on jaettu 9 000 000:ksi yhdenmuotoiseksi tasasivuiseksi kolmioksi sivujen suuntaisilla suorilla. Jokaisen pikkukolmion kärki on väritetty yhdellä kolmesta väristä. Osoita, että on olemassa kolme samanväristä pistettä, jotka ovat kärkinä kolmiossa, jonka sivut ovat alkuperäisen kolmion sivujen suuntaiset.

95.1. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen kolmikot (x, y, z), jotka toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x^2 = 2(y+z) \\ x^6 = y^6 + z^6 + 31(y^2+z^2). \end{cases}$$

95.2. Olkoot a ja k positiivisia kokonaislukuja ja olkoon $a^2 + k$ luvun $(a-1)a(a+1)$ tekijä. Osoita, että $k \geq a$.

95.3. Positiiviset kokonaisluvut a, b ja c ovat pareittain yhteistekijättömiä, a ja c ovat parittomia ja luvut toteuttavat yhtälön $a^2 + b^2 = c^2$. Osoita, että $b + c$ on kokonaisluvun neliö.

95.4. John on vanhempi kuin Mary. John huomaa, että kun hän vaihtaa ikänsä molemmat numerot keskenään, hän saa tulokseksi Maryn iän. Lisäksi ikien neliöiden erotus on kokonaisluvun neliö. Miten vanhoja John ja Mary ovat?

95.5. Olkoot $a < b < c$ kolme positiivista kokonaislukua. Todista, että minkä hyvänsä $2c$:n peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun joukossa on kolme eri lukua x, y ja z siten, että abc on xyz:n tekijä.

95.6. Todista, että positiivisille luvuille a, b, c ja d pätee

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4.$$

95.7. Todista, että $\sin^3 18° + \sin^2 18° = \dfrac{1}{8}$.

95.8. Reaaliluvut a, b ja c toteuttavat epäyhtälöt $|a| \geq |b+c|$, $|b| \geq |c+a|$ ja $|c| \geq |a+b|$. Todista, että $a + b + c = 0$.

95.9. Todista, että

$$\frac{1995}{2} - \frac{1994}{3} + \frac{1993}{4} - \ldots - \frac{2}{1995} + \frac{1}{1996} = \frac{1}{999} + \frac{3}{1000} + \ldots + \frac{1995}{1996}.$$

95.10. Määritä kaikki nollasta eroavien reaalilukujen joukossa määritellyt reaaliarvoiset funktiot f, joille pätee

(a) $f(1) = 1$,

(b) $f\left(\dfrac{1}{x+y}\right) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ kaikilla nollasta eroavilla luvuilla x, y ja $x + y$,

(c) $(x+y)f(x+y) = xy\, f(x)f(y)$ kaikilla nollasta eroavilla luvuilla x, y ja $x + y$.

95.11. Kuinka monella tavalla joukko $\{1, 2, \ldots, 1995\}$ voidaan jakaa kolmeksi epätyhjäksi osajoukoksi, joista mikään ei sisällä kahta peräkkäistä kokonaislukua?

95.12. Olkoon 19 palloa sijoitettuna 95 laatikkoon umpimähkäisesti. Sijoitetaan kuusi uutta palloa laatikkoihin, kukin eri laatikkoon. Voidaanko tätä operaatiota tarpeeksi monta kertaa toistamalla päästä tilanteeseen, jossa jokaisessa laatikossa on yhtä monta palloa?

95.13. Tarkastellaan seuraavaa kahden pelaajan peliä. Pöydällä on joukko pikkukiviä. Pelaajat tekevät siirtonsa vuorotellen. Siirto tarkoittaa, että pöydältä otetaan x kiveä, missä x on minkä hyvänsä positiivisen kokonaisluvun neliö. Pelaaja, joka ei voi tehdä siirtoa, häviää pelin. Osoita, että on olemassa äärettömän monta alkutilannetta, joista lähtien toisena siirtävä pelaaja voi voittaa riippumatta siitä, miten hänen vastustajansa pelaa.

95.14. Äärettömällä kolmioidulla paperiarkilla on n kirppua. Kirput ovat aluksi eri pikkukolmioissa, jotka kaikki sisältyvät n^2:sta pikkukolmiosta koostuvaan tasasivuiseen kolmioon. Jokainen kirppu hyppää kerran sekunnissa kolmiostaan yhteen kolmesta naapuripikkukolmiosta kuvan osoittamalla tavalla. Millä positiivisilla kokonaisluvuilla n on olemassa alkutilanne, josta kaikki kirput voivat äärellisen hyppymäärän jälkeen päästä yhteen ja samaan pikkukolmioon?

95.15. Olkoon annettu $(2n+1)$-kulmio. Osoita, että tämän monikulmion kärjet ja sivujen keskipisteet voidaan numeroida käyttäen kaikkia lukuja $1, 2, \ldots, 4n+2$ niin, että kuhunkin monikulmion sivuun liittyvien kolmen luvun summa on sama.

95.16. Olkoon l kolmion ABC kulman C vieruskulman puolittaja. Janan AB keskipisteen O kautta piirretty l:n suuntainen suora leikkaa suoran AC pisteessä E. Määritä $|CE|$, kun $|AC| = 7$ ja $|CB| = 4$.

95.17. Osoita, että on olemassa sellainen luku α, että mielivaltaiselle kolmiolle ABC pätee

$$\max\{h_A, h_B, h_C\} \le \alpha \cdot \min\{m_A, m_B, m_C\},$$

missä h_A, h_B ja h_C ovat kolmion ABC korkeusjanojen pituudet ja m_A, m_B ja m_C sen keskijanojen pituudet. Määritä α:n pienin mahdollinen arvo.

95.18. Olkoon M kolmion ABC sivun AC keskipiste ja olkoon H kärjestä B piirretyn korkeusjanan kantapiste. Olkoot P ja Q pisteiden A ja C kohtisuorat projektiot kulman B puolittajalla. Osoita, että pisteet H, P, M ja Q ovat samalla ympyrällä.

95.19. Seuraavaa konstruktiota käytetään avaruuslentäjien koulutuksessa: $2R$-säteinen ympyrä C_2 pyörii pitkin toisen nR-säteisen (n on kokonaisluku ja suurempi kuin 2) kiinteän ympyrän C_1 sisäpuolta. Avaruuslentäjä on kiinnitettynä kolmanteen R-säteiseen ympyrään C_3, joka pyörii ympyrän C_2 sisäpuolella niin, että ympyröiden C_2 ja C_3 sivuamispiste on aina maksimietäisyydellä ympyröiden C_1 ja C_2 sivuamispisteestä. Kuinka monta kierrosta (kiinteän maan suhteen) avaruuslentäjä tekee yhdessä ympyrän C_3 kanssa, kun ympyrä C_2 tekee yhden täyden kierroksen ympyrän C_1 ympäri?

95.20. Osoita, että jos kuperan viisikulmion kaikkien kärkipisteiden molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja, niin viisikulmion ala on vähintään $\frac{5}{2}$.

96.1. Olkoot α ja β mitkä tahansa kaksi kulmaa, joiden kyljet sisältävät säännöllisen 1996-kulmion lävistäjän. Todista, että $\dfrac{\alpha}{\beta}$ on rationaaliluku.

96.2. Piste P on janalla AB ja $PQ \perp AB$. Ympyrä C sivuaa sisäpuolisesti puoliympyrää, jonka halkaisija on AB ja ulkopuolisesti puoliympyrää, jonka halkaisija on PB sekä vielä suoraa PQ. Ympyrän C ala on 9π ja AB-halkaisijaisen puoliympyrän se osa, joka ei kuulu AP- eikä PB-säteisiin puoliympyröihin eikä ympyrään C, on alaltaan 39π. Määritä janan AB pituus.

96.3. Olkoon $ABCD$ yksikköneliö ja olkoot P ja Q sellaisia tason pisteitä, että Q on kolmion BPC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja D on kolmion PQA ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Etsi kaikki janan PQ mahdolliset pituudet.

96.4. $ABCD$ on puolisuunnikas ($AD \| BC$). P on sellainen suoran AB piste, että $\angle CPD$ on suurin mahdollinen. Q on sellainen suoran CD piste, että $\angle BQA$ on suurin mahdollinen. Olettaen, että P on janalla AB osoita, että $\angle CPD = \angle BQA$.

96.5. Olkoon $ABCD$ ympyrän sisään piirretty konveksi nelikulmio, ja olkoot r_a, r_b, r_c, r_d kolmioiden BCD, ACD, ABD, ABC sisään piirrettyjen ympyröiden säteet. Osoita, että $r_a + r_c = r_b + r_d$.

96.6. Olkoot a, b, c ja d sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $ab = cd$. Osoita, että $a + b + c + d$ ei ole alkuluku.

96.7. Kokonaislukujono a_1, a_2, $\ldots$, on sellainen, että $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja kun $n \geq 1$,

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & \text{jos } a_n a_{n+1} \text{ on parillinen,} \\ a_{n+1} - a_n, & \text{jos } a_n a_{n+1} \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Osoita, että kaikilla n:n arvoilla $a_n \neq 0$.

96.8. Tutkitaan jonoa $x_1 = 19$, $x_2 = 95$, $x_{n+2} = \text{pyj}(x_{n+1}, x_n) + x_n$, kun $n > 1$ ($\text{pyj}(a, b)$ on a:n ja b:n pienin yhteinen monikerta). Etsi lukujen x_{1995} ja x_{1996} suurin yhteinen tekijä.

96.9. Olkoot n ja k kokonaislukuja, $1 < k \leq n$. Etsi joukko A, joka koostuu n:stä kokonaisluvusta, ja kokonaisluku b, niin että seuraavat ehdot täyttyvät:

(i) Yksikään $k - 1$:n A:n eri alkion tulo ei ole jaollinen b:llä.
(ii) Jokainen k:n A:n eri alkion tulo on jaollinen b:llä.
(iii) Jos a ja a' ovat A:n alkioita, niin a' ei ole jaollinen a:lla.

96.10. Merkitään $d(n)$:llä positiivisen kokonaisluvun n eri suurten positiivisten tekijöiden lukumäärää (mukaan lukien 1 ja n). Olkoot $a > 1$ ja $n > 0$ sellaisia kokonaislukuja, että $a^n + 1$ on alkuluku. Todista, että $d(a^n - 1) \geq n$.

96.11. Reaaliluvuilla x_1, x_2, $\ldots$, x_{1996} on seuraava ominaisuus: jos W on mikä tahansa toisen asteen polynomi, niin ainakin kolme luvuista $W(x_1)$, $W(x_2)$, $\ldots$, $W(x_{1996})$ on yhtä suuria. Osoita, että ainakin kolme luvuista a_1, x_2, $\ldots$, x_{1996} on yhtä suuria.

96.12. Olkoon S kokonaislukujoukko, joka sisältää luvut 0 ja 1996. Oletetaan myös, että S sisältää jokaisen sellaisen polynomin juuret, jonka kertoimet sisältyvät S:ään ja joka ei ole identtisesti nolla. Osoita, että S sisältää luvun -2.

96.13. Etsi kaikki a) parilliset, b) parittomat funktiot f, jotka toteuttavat kaikilla kokonaisluvuilla ehdon $f(x) = f(x^2 + x + 1)$.

96.14. Funktion $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ (missä $n > 1$)kuvaaja leikkaa suoran $y = b$ pisteissä B_1, B_2, $\ldots$, B_n (vasemmalta oikealle) ja suoran $y = c$ ($c \neq b$) pisteissä C_1, C_2, $\ldots$, C_n (vasemmalta oikealle). Olkoon P suoran $Y = c$ piste, joka sijaitsee pisteen C_n oikealla puolella. Laske summan $\cot(\angle B_1C_1P) + \cot(\angle B_2C_2P) + \cdots + \cot(\angle B_nC_nP)$ arvo.

96.15. Mille positiivisille reaaliluvuille a, b pätee epäyhtälö

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \geq x_1^a x_2^b x_3^a + x_2^a x_3^b x_4^a + \cdots + x_n^a x_1^b x_2^a$$

kaikille kokonaisluvuille $n > 2$ ja kaikille positiivisille reaaliluvuille x_1, x_2, $\ldots$, x_n?

96.16. Kaksi pelaajaa merkitsee vuorotellen äärettömän neliöruudukon vielä merkitsemättömiä ruutuja. Toinen käyttää merkkiä $\times$, toinen merkkiä $\circ$. Ensimmäinen, joka täyttää 2×2-neliön omilla merkeillään, voittaa. Voiko aloittava pelaaja aina voittaa?

96.17. Käyttäen kutakin kahdeksasta numerosta 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 tasan kerran muodostetaan kolminumeroinen luku A, kaksinumeroiset luvut B ja C ($B < C$) ja yksinumeroinen luku D. Lisäksi pätee, että $A + D = B + C = 143$. Monellako tavalla luvut voidaan valita?

96.18. Olympialaisten tuomaristossa on 30 jäsentä. Jokaisen tuomariston jäsenen mielestä osa hänen kollegoistaan on päteviä ja osa epäpäteviä. Nämä mielipiteet eivät muutu. Jokaisen istunnon alussa pidetään äänestys jokaisen jäsenen pätevyydestä. Sen jälkeen tuomaristosta erotetaan ne jäsenet, jotka eivät ole päteviä tuomariston aidon enemmistön (yli puolet) mielestä. Osoita, että korkeintaan 15 istunnon jälkeen tuomariston kokoonpano ei enää muutu. (Huomaa, että kukaan ei äänestä omasta pätevyydestään.)

96.19. Neljässä kasassa on tulitikkuja, yhdessä 38, toisessa 45, kolmannessa 61 ja neljännessä 70. Vuorollaan kumpikin kahdesta pelaajasta A ja B valitsee jotkin kaksi kasaa ja ottaa toisesta kasasta positiivisen määrän tikkuja ja toisestakin kasasta positiivisen määrän tikkuja. Jos pelaaja ei voi tehdä näin, hän häviää pelin. A aloittaa pelin. Kummalla pelaajista on voittostrategia?

96.20. Onko mahdollista jakaa positiiviset kokonaisluvut kahteen erilliseen joukkoon A ja B, joille

(i) mitkään kolme A:n alkiota eivät muodosta aritmeettista jonoa, ja
(ii) B:n luvuista ei voi muodostaa kasvavaa ääretöntä aritmeettista jonoa?

97.1. Määritä kaikki reaaliarvoiset reaalilukufunktiot f, jotka eivät ole nollafunktioita ja joille

$$f(x)f(y) = f(x - y)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

97.2. Olkoon a_1, a_2, a_3, $\ldots$ jono positiivisia kokonaislukuja. Jokainen positiivinen kokonaisluku esiintyy jonossa täsmälleen kerran. Osoita, että on olemassa kokonaisluvut l ja m, $1 < l < m$, siten, että $a_1 + a_m = 2a_l$.

97.3. Olkoon $x_1 = 1$ ja $x_{n+1} = x_n + \left\lfloor \dfrac{x_n}{n} \right\rfloor + 2$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tässä $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x. Määritä x_{1997}.

97.4. Todista, että lukujen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmeettiselle keskiarvolle a pätee

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2 \le \frac{1}{2}(|x_1 - a| + \cdots + |x_n - a|)^2.$$

97.5. Positiivisten kokonaislukujen jonossa $u_0, u_1, \ldots$ luku u_0 on mielivaltainen ja jokaisella ei-negatiivisella kokonaisluvulla n pätee

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}u_n, & \text{kun } u_n \text{ on parillinen,} \\ a + u_n, & \text{kun } u_n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

missä a on pariton kiinteä kokonaisluku. Todista, että jono on jostain jäsenestään alkaen jaksollinen.

97.6. Etsi kaikki ei-negatiivisten lukujen kolmikot $(a, b\cdot)$, joille pätee $z \ge b \ge c$ ja

$$1 \cdot a^3 + 9 \cdot b^2 + 9 \cdot c + 7 = 1997.$$

97.7. Olkoot P ja Q kokonaislukukertoimisia polynomeja. Oletetaan, että kokonaisluvut a ja $a + 1997$ ovat polynomin P nollakohtia ja $Q(1998) = 2000$. Osoita, että yhtälöllä $Q(P(x)) = 1$ ei ole kokonaislukuratkaisuja.

97.8. Kun lukuun 1996 lisätään luku 1997, niin ensin lasketaan yhteen 6 ja 7. Tulokseksi saadaan 13. Tällöin 3 kirjoitetaan yhteenlaskurivin alle ja 1 kirjoitetaan seuraavaan sarakkeeseen muistinumeroksi. Näin jatkaen huomataan, että tarvitaan kaikkiaan kolme muistinumeroa:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 1996 \\ +\underline{1997} \\ 3993 \end{array}$$

Onko olemassa sellaista positiivista kokonaislukua k, että lukujen $1996 \cdot k$ ja $1997 \cdot k$ yhteenlaskussa ei tarvita muistinumeroita?

97.9. Maailmanpallon maailmat on numeroitu $1, 2, 3, \ldots$. Jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n taikuri Gandalf voi siirtyä vapaasti maailmojen n, $2n$ ja $3n+1$ välillä. Voiko Gandalf siirtyä mistä tahansa maailmasta mihin tahansa maailmaan?

97.10. Osoita, että mistä tahansa 79 peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun jonosta löytyy luku, jonka kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa on jaollinen luvulla 13.

97.11. Kahdella yhdensuuntaisella suoralla on samassa järjestyksessä pisteet $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ja $B_1, B_2, B_3 \ldots$, ja pisteille pätee $|A_iA_{i+1}| = 1$ ja $|B_iB_{i+1}| = 2$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Olkoon $\angle A_1A_2B_1 = \alpha$. Laske $\angle A_1B_1A_2 + \angle A_2B_2A_3 + \angle A_3B_3A_4 + \cdots$.

97.12. Kaksi ympyrää $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ leikkaavat pisteissä P ja Q. Pisteen P kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän $\mathcal{C}_1$ pisteessä A ja ympyrän $\mathcal{C}_2$ pisteessä B. Olkoon X janan AB keskipiste. Suora QX leikkaa ympyrän $\mathcal{C}_1$ pisteessä Y ja ympyrän $\mathcal{C}_2$ pisteessä Z. Osoita, että X on janan YZ keskipiste.

97.13. Samalla suoralla oleville (eri) pisteille A, B, C, D ja E pätee $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Piste F ei ole tällä suoralla. Olkoon G kolmion ADF ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja H kolmion BEF ympäri piirretyn ympyrän keskipiste: Osoita, että suorat GH ja FC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

97.14. Kolmiossa ABC on $|AC|^2$ $|BC|^2$:n ja $|AB|^2$:n aritmeettinen keskiarvo. Osoita, että $\cot^2 B \geq \cot A \cot C$.

97.15. Teräkulmaisen kolmion ABC kulmien $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle C$ puolittajat leikkaavat kolmion ympäri piirretyn ympyrä pisteissä A_1, B_1 ja C_1, tässä järjestyksessä. Piste M on suorien AB ja B_1C_1 leikkauspiste ja N on suorien BC ja A_1B_1 leikkauspiste. Osoita, että MN kulkee kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipisteen kautta.

97.16. Kaksi pelaajaa pelaa 5×5 -šakkilaudalla seuraavaa peliä: Ensimmäinen pelaaja asettaa ratsun jollekin ruudulle. Tämän jälkeen pelaajat siirtävät ratsua šakin sääntöjen mukaan (jälkimmäinen pelaaja aloittaa siirtelyn). Ratsua ei saa siirtää ruutuun, jossa se on jo ollut. Pelaaja, joka ei enää voi siirtää, häviää pelin. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

97.17. Suorakaiteen voi jakaa n:ksi samankokoiseksi neliöksi. Saman suorakaiteen voi jakaa myös $n + 76$:ksi pienemmäksi samankokoiseksi neliöksi. Määritä n.

97.18. Osoita, että on olemassa kaksi toisiaan mahdollisesti leikkaavaa ääretöntä ei-negatiivisten kokonaislukujen joukkoa A ja B, joille pätee, että jokainen ei-negatiivinen kokonaisluku voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $n = a + b$, missä $a \in A$ ja $b \in B$. Osoita, että tällaisista joukoista toinen sisältää vain jonkin kokonaisluvun k monikertoja.

97.19. Metsässä on n eläintä ($n \geq 3$). Kukin eläin elää omassa luolassaan. Jokaisesta luolasta on polku jokaiseen muuhun luolaan. Ennen kuin metsänkuningas valitaan, jotkin eläimet kampanjoivat ehdokkuutensa puolesta. Jokainen kampanjoiva eläin käy kunkin toisen eläimen luona täsmälleen kerran, käyttää aina polkua siirtyessään luolasta toiseen, ei koskaan poikkea polulta toiselle siirtyessään luolasta toiseen ja palaa kampanjansa päätyttyä omaan luolaansa. Kutakin polkua käyttää vain yksi kampanjoiva eläin. Osoita, että jokaisella alkuluvulla n suurin mahdollinen kampanjoivien eläinten määrä on $\dfrac{n-1}{2}$. Etsi suurin mahdollinen kampanjoivien eläinten lukumäärä, kun $n = 9$.

97.20. Rivissä on 12 korttia. Kortteja on kolmenlaisia: joko molemmat puolet ovat valkoisia, molemmat ovat mustia tai toinen puoli on valkoinen ja toinen musta. Aluksi korteista yhdeksän on musta puoli ylöspäin. Sitten kortit 1 – 6 käännetään, jonka jälkeen neljän kortin musta puoli on ylöspäin. Sitten kortit 4 – 9 käännetään, jonka jälkeen kuuden kortin musta puoli on ylöspäin. Lopuksi käännetään kortit 1 – 3 ja 10 – 12, ja nyt viiden kortin musta puoli on ylöspäin. Kuinka monta kunkin lajin korttia on pöydällä?

98.1. Etsi kaikki kahden muuttujan funktiot f, joiden muuttujat x, y ja arvot $f(x, y)$ ovat positiivisia kokonaislukuja ja jotka toteuttavat seuraavat ehdot (kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x ja y):

$$\begin{gathered} f(x, x) = x, \\ f(x, y) = f(y, x), \\ (x+y)f(x, y) = yf(x, x+y). \end{gathered}$$

98.2. Positiivisten kokonaislukujen kolmikko (a, b, c) on *kvasipythagoralainen*, jos on olemassa kolmio, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c ja jonka sivun c vastainen kulma on $120°$. Todista, että jos (a, b, c) on kvasipythagoralainen kolmikko, niin luvulla c on lukua 5 suurempi alkutekijä.

98.3. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukuparit x, y, jotka toteuttavat yhtälön $2x^2+5y^2 = 11(xy-11)$.

98.4. Olkoon P kokonaislukukertoiminen polynomi. Oletetaan, että jokaisella $n = 1, 2, 3, \ldots, 1998$ luku $P(n)$ on kolminumeroinen positiivinen kokonaisluku. Todista, että polynomilla P ei ole kokonaislukujuuria.

98.5. Olkoon a pariton ja b parillinen numero. Todista, että jokaista positiivista kokonaislukua n kohti on olemassa luvulla 2^n jaollinen positiivinen kokonaisluku, jonka kymmenjärjestelmäesityksessä esiintyy vain numeroita a and b.

98.6. Olkoon P kuudennen asteen polynomi ja a ja b reaalilukuja, joille $0 < a < b$. Oletetaan, että $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$ ja $P'(0) = 0$. Osoita, että $P(x) = P(-x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.

98.7. Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille $f(x) + f(y) = f(f(x)f(y))$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

98.8. Olkoon $P_k(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}$. Osoita, että

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

98.9. Reaaliluvuille α, β pätee $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Luvut γ ja δ määritellään ehdoilla:

(i) $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ ja $\tan\gamma$ on lukujen $\tan\alpha$ ja $\tan\beta$ aritmeettinen keskiarvo;

(ii) $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{1}{\cos\delta}$ on lukujen $\frac{1}{\cos\alpha}$ ja $\frac{1}{\cos\beta}$ aritmeettinen keskiarvo. Osoita, että $\gamma < \delta$.

98.10. Olkoon $n \geq 4$ parillinen kokonaisluku. Säännöllinen n-kulmio ja säännöllinen $(n-1)$-kulmio on piirretty yksikköympyrän sisään. Jokaisesta n-kulmion kärjestä mitataan etäisyys lähimpään $(n-l)$-kulmion kärkeen ympyrän kehää pitkin. Olkoon S näiden n:n etäisyyden summa. Osoita, että S riippuu vain luvusta n, ei monikulmioiden keskinäisestä sijainnista.

98.11. Olkoot a, b ja c kolmion sivujen pituudet. Olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Osoita, että

$$R \geq \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}.$$

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

98.12. Kolmiolle ABC pätee $\angle BAC = 90°$. Piste D on sivulla BC ja toteuttaa ehdon $\angle BDA = 2\angle BAD$. Osoita, että

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}\right).$$

98.13. Kuperan viisikulmion $ABCDE$ sivut AE ja BC ovat yhdensuuntaisia ja $\angle ADE = \angle BDC$. Lävistäjät AC ja BE leikkaavat pisteessä P. Osoita, että $\angle EAD = \angle BDP$ ja $\angle CBD = \angle ADP$.

98.14. Kolmiolle ABC pätee $AB < AC$. Pisteen B kautta kulkeva sivun AC suuntainen suora leikkaa kulman $\angle BAC$ vieruskulman puolittajan pisteessä D. Pisteen C kautta kulkeva sivun AB suuntainen suora kohtaa saman kulmanpuolittajan pisteessä E. Piste F on sivulla AC ja toteuttaa ehdon $FC = AB$. Osoita, että $DF = FE$.

98.15. Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC piste D on pisteestä A sivulle BC piirretyn korkeusjanan kantapiste. Piste E on janalla AD ja toteuttaa ehdon

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Piste F on pisteestä D sivulle BE piirretyn korkeusjanan kantapiste. Osoita, että $\angle AFC = 90°$.

98.16. Voiko 13×13-šakkilaudan peittää neljälläkymmenelläkahdella 4×1-laatalla niin, että vain šakkilaudan keskiruutu jää peittämättä? (Oletetaan, että jokainen laatta peittää täsmälleen neljä šakkilaudan ruutua.)

98.17. Olkoot n ja k positiivisia kokonaislukuja. Käytössä on nk (samankokoista) esinettä ja k laatikkoa, joista kuhunkin mahtuu n esinettä. Jokainen esineistä väritetään yhdellä k:sta eri väristä. Osoita, että esineet voidaan pakata laatikoihin niin, että jokaiseen laatikoista tulee enintään kahden eri värin esineitä.

98.18. Määritä kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut n, että on olemassa joukko S, jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) S koostuu n:stä positiivisesta kokonaisluvusta, jotka kaikki ovat pienempiä kuin 2^{n-1};
(ii) Jos A ja B ovat joukon S eri osajoukkoja, niin joukon A alkioiden summa on eri kuin joukon B alkioiden summa.

98.19. Tarkastellaan kahden joukkueen välistä pöytätennisottelua; kummassakin joukkueessa oli 1000 pelaajaa. Jokainen pelaaja pelasi täsmälleen yhden pelin kutakin toisen joukkueen pelaajaa vastaan (pöytätenniksessä ei ole tasapelejä). Todista, että on olemassa sellaiset kymmenen saman joukkueen jäsentä, että jokainen toisen joukkueen jäsenistä hävisi ainakin yhden pelin näitä kymmentä pelaajaa vastaan.

98.20. Positiivisen kokonaisluvun m sanotaan peittävän luvun 1998, jos 1, 9, 9, 8 esiintyvät, tässä järjestyksessä, luvun m numeroina. (Esimerkiksi 2**1**5**99**36**98** peittää luvun 1998, mutta 213326798 ei.) Olkoon $k(n)$ niiden positiivisten kokonaislukujen lukumäärä, jotka peittävät luvun 1998 ja joissa on tasan n nollasta poikkeavaa numeroa ($n \geq 5$). Mikä on jakojäännös, kun luku $k(n)$ jaetaan luvulla 8?

99.1. Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} abc + ab + bc + ca + a + b + c &= 1 \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d &= 9 \\ cda + cd + da + ac + c + d + a &= 9 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b &= 9 \end{aligned}$$

reaaliset ratkaisut.

99.2. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla on seuraava ominaisuus: luvun n kuutiojuuri saadaan poistamalla n:n kymmenjärjestelmäesityksestä kolme viimeistä numeroa.

99.3. Etsi kaikki kokonaisluvut $n \geq 3$ niin, että epäyhtälö

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq 0$$

toteutuu kaikilla reaaliluvuilla a_l, a_2, $\ldots$ a_n, joille pätee $a_1 + \cdots + a_n = 0$.

99.4. Olkoon kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x ja y

$$f(x, y) = \min\left(x, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Osoita, että on olemassa sellaiset x_0 ja y_0, että $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ kaikilla positiivisilla x ja y. Laske $f(x_0, y_0)$.

99.5. Piste (a, b) on ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Tähän pisteeseen piirretty ympyrän tangentti kohtaa paraabelin $y = x^2 + 1$ tasan yhdessä pisteessä. Etsi kaikki mahdolliset pisteet a, b).

99.6. Mikä on pienin määrä siirtoja, joilla ratsu pääsee yhdestä $n \times n$-šakkilaudan kulmasta vastakkaiseen kulmaan, kun $n \geq 4$?

99.7. Kahta 8×8-šakkilaudan ruutua sanotaan naapureiksi, jos niillä on yhteinen sivu tai kulma. Voiko kuningas käydä jostain ruudusta lähtien kaikissa ruuduissa tasan kerran siten, että ensimmäistä siirtoa lukuun ottamatta kuningas siirtyy aina ruutuun, jolle pätee: ruudulla on parillinen määrä sellaisia naapureita, joissa kuningas on jo ollut?

99.8. On annettu 1999 kolikkoa, joista mitkään kaksi eivät ole samanpainoisia. Käytettävissä on kone, joka kertoo yhdellä operaatiolla, mikä kolmesta kolikosta on painoltaan keskimmäinen. Osoita, että painojärjestyksessä tuhannes kolikko voidaan löytää enintään 1 000 000 operaatiolla, mutta minkään muun kolikon sijalukua painojärjestyksessä ei voida selvittää tällä koneella.

99.9. Kuutio, jonka särmä on 3, jaetaan 27 yksikkökuutioksi. Luvut 1, 2, ..., 27 sijoitetaan mielivaltaisesti yksikkökuutioihin, yksi kuhunkin kuutioon. Muodostetaan kaikki 27 rivisummaa (kolmen luvun summia on yhdeksän kolmessa suunnassa). Kuinka moni näistä 27 summasta voi enintään olla pariton?

99.10. Voiko yksikkösäteisen kiekon (kehä mukaan lukien) pisteet jakaa kolmeen osajoukkoon siten, ettei missään osajoukoista ole kahta pistettä, joiden keskinäinen etäisyys on yksi?

99.11. Olkoon tasossa neljä pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että on olemassa sellainen ympyrä, että pisteistä kolme on ympyrän kehällä ja neljäs joko ympyrän kehällä tai sen sisäpuolella.

99.12. Kolmiolle ABC pätee $2AB = AC+BC$. Osoita, että kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste, ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja sivujen AC ja BC keskipisteet ovat samalla ympyrällä.

99.13. Kolmion ABC kulmien $\angle A$ ja $\angle B$ puolittajat kohtaavat sivut BC ja CA pisteissä D ja E, tässä järjestyksessä. Lisäksi $AE + BD = AB$. Määritä kulma $\angle C$.

99.14. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jossa $AB = AC$. Pisteet D ja E ovat sivuilla AB ja AC, tässä järjestyksessä. Pisteen B kautta kulkeva ja sivun AC suuntainen suora leikkaa suoran DE pisteessä F. Pisteen C kautta kulkeva ja sivun AB suuntainen suora leikkaa suoran DE pisteessä G. Osoita, että

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{AD}{AE},$$

missä $[PQRS]$ on nelikulmion $PQRS$ pinta-ala.

99.15. Olkoon ABC kolmio, jossa $\angle C = 60°$ ja $AC < BC$. Piste D on sivulla BC ja sille pätee $BD = AC$. Jatketaan sivua AC pisteeseen E, jolle $AC = CE$. Osoita, että $AB = DE$.

99.16. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku k, joka voidaan esittää muodossa $k = 19^n - 5^m$. Tässä n ja m ovat positiivisia kokonaislukuja.

99.17. Onko olemassa sellaista äärellistä kokonaislukujonoa $c_1, \ldots, c_n$, että luvut $a + c_1, \ldots, a + c_n$, ovat alkulukuja useammalla kuin yhdellä mutta ei äärettömän monella kokonaisluvulla a?

99.18. Olkoon m sellainen positiivinen kokonaisluku, että $m \equiv 2 \bmod 4$. Osoita, että m voidaan kirjoittaa enintään yhdellä tavalla muodossa $m = ab$, missä a ja b ovat sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m + 1}}$.

99.19. Osoita, että on olemassa äärettömän monta parillista positiivista kokonaislukua k, joille $p^2 + k$ on yhdistetty luku kaikilla alkuluvuilla p.

99.20. Olkoot a, b, c ja d sellaisia alkulukuja, että $a > 3b > 6c > 12d$ ja $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Määritä lausekkeen $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ mahdolliset arvot.

2000.1. Olkoon K kolmion ABC sisäpiste. Olkoot M ja N sellaiset pisteet, että M ja K ovat suoran AB vastakkaisilla puolilla ja N ja K ovat suoran BC vastakkaisilla puolilla. Oletetaan edelleen, että, $\angle MAB = \angle MBA = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC = \angle KCA$. Osoita, että $MBNK$ on suunnikas.

2000.2. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jossa $\angle CAB = 90°$. Sivun AB keskipiste on M. A:n kautta kulkeva suoran CM normaali leikkaa sivun BC pisteessä P. Todista, että

$$\angle AMC = \angle BMP.$$

2000.3. Kolmiossa ABC pätee $\angle CAB = 90°$ ja $AB \neq AC$. Pisteet D, E ja F sijaitsevat sivuilla BC, CA ja AB tässä järjestyksessä sillä tavoin, että $AFDE$ on neliö. Todista, että suora BC, suora FE ja kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteeseen A piirretty tangentti leikkaavat samassa pisteessä.

2000.4. Kolmion ABC kulma $\angle CAB = 120°$. Pisteet K ja L sijaitsevat sivuilla AB ja AC tässä järjestyksessä. Olkoot BKP ja CLQ kolmion ABC ulkopuolisia tasasivuisia kolmioita. Todista, että $PQ \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + AC)$.

2000.5. Kolmiossa ABC

$$\frac{BC}{AB - BC} = \frac{AB + BC}{AC}.$$

Laske $\angle CAB : \angle BCA$.

2000.6. Pertti johtaa yksityishotellia. Hän väittää, että aina kun hotellissa on $n \geq 3$ asukasta, heistä on mahdollista valita kaksi, joilla on muiden asukkaiden joukossa yhtä monta tuttavaa ja yhteinen tuttava tai yhteinen tuntematon henkilö. Millä luvun n arvoilla Pertti on oikeassa? (Tuttavuus on aina molemminpuolista.)

2000.7. 40×50-kontrollitaulun jokainen painike on joko päällä tai poissa päältä. Kun painiketta painetaan, sen ja jokaisen muun samalla rivillä tai sarakkeella olevan painikkeen tila muuttuu. Todista, että kontrollitaulun tilan voi muuttaa ”kaikki pois päältä” -tilasta ”kaikki päällä” -tilaan painikkeiden peräkkäisillä painalluksilla. Määritä pienin määrä painalluksia, jolla tämä voidaan tehdä.

2000.8. Neljätoista ystävää tapasi juhlissa. Yksi näistä, Pertti, halusi lähteä nukkumaan aikaisin. Hän hyvästeli 10 ystävistään, mutta unohti hyvästellä 3 ja lähti nukkumaan. Hetken kuluttua hän palasi juhliin, hyvästeli jälleen 10 ystävistään (mutta ei välttämättä samoja kuin edellisellä kerralla) ja meni nukkumaan. Myöhemmin Pertti palasi takaisin useita kertoja ja hyvästeli joka kerta 10 ystävistään. Kun hän oli hyvästellyt jokaisen ystävistään ainakin kerran, hän ei enää palannut takaisin. Aamulla Pertti tajusi, että hän ei ollut hyvästellyt keitään kahta ystävistään yhtä monta kertaa. Kuinka monta kertaa vähintään Pertti palasi juhliin?

2000.9. Sammakko hyppelee $2k \times 2k$-šakkilaudalla, joka koostuu yksikköruuduista. Sammakon loikat ovat pituudeltaan $\sqrt{1 + k^2}$ yksikköä, ja ne ulottuvat ruudun keskipisteestä toisen ruudun keskipisteeseen. Jotkin m laudan ruuduista on merkitty $\times$:llä ja ne ruudut, joihin sammakko voi loikata $\times$:llä merkityistä ruuduista, on merkitty $\circ$:llä (riippumatta siitä, onko niihin jo merkitty $\times$ vai ei). Olkoon n $\circ$:llä merkittyjen ruutujen lukumäärä. Todista, että $n \geq m$.

2000.10. Liitutaululle on kirjoitettuna kaksi positiivista kokonaislukua. Aluksi toinen niistä on 2000 ja toinen pienempi kuin 2000. Jos liitutaululle kirjoitettujen lukujen aritmeettinen keskiarvo m on kokonaisluku, seuraava operaatio on sallittu: toinen luvuista pyyhitään pois ja korvataan luvulla m. Osoita, ettei tätä operaatiota voi tehdä enempää kuin kymmenen kertaa peräkkäin. Esitä esimerkki tapauksesta, jolloin operaatio voidaan tehdä kymmenen kertaa peräkkäin.

2000.11. Positiivisten kokonaislukujen jonolle $a_1, a_2, \ldots$ pätee kaikilla m ja n seuraava: jos m on luvun n tekijä ja $m < n$, niin a_m on luvun a_n tekijä ja $a_m < a_n$. Määritä luvun a_{2000} pienin mahdollinen arvo.

2000.12. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sellaisia positiivisia kokonaislukuja, ettei niistä mikään ole toisen alkuosa (esimerkiksi 12 on lukujen $\underline{12}$, $\underline{12}5$ ja $\underline{12}405$ alkuosa). Todista, että

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 3.$$

2000.13. Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellainen kokonaislukujen aritmeettinen jono, että ia_i kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ja $n \nmid a_n$. Todista, että n on alkuluvun potenssi.

2000.14. Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut n, että n on yhtä suuri kuin 100 kertaa positiivisten tekijöidensä lukumäärä.

2000.15. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, joka ei ole jaollinen kahdella eikä kolmella. Todista, että kaikilla kokonaisluvuilla k luku $(k+1)^n - k^n - 1$ on jaollinen luvulla k^2+k+1.

2000.16. Todista, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

2000.17. Etsi seuraavan yhtälöryhmän kaikki reaaliset ratkaisut:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ xy + yz + zt + tx = 4 \\ xyz + yzt + ztx + txy = 3 \\ xyzt = -1. \end{cases}$$

2000.18. Määritä kaikki positiiviset reaaliluvut x ja y, jotka toteuttavat yhtälön

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot \left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right).$$

2000.19. Olkoon $t \geq \dfrac{1}{2}$ reaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$t^{2n} \geq (t-1)^{2n} + (2t-1)^n.$$

2000.20. Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään

$$x_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)(4n+1)}{(2n)(2n+2)\cdots(4n-2)(4n)}.$$

Todista, että $\dfrac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \dfrac{2}{n}$.

2001.1. Koetta varten laadittiin 8 tehtävää. Kukin opiskelija sai niistä 3. Ketkään kaksi opiskelijaa eivät saaneet enempää kuin yhden yhteisen tehtävän. Mikä on suurin mahdollinen opiskelijoiden määrä?

2001.2. Olkoon $n \geq 2$ positiivinen kokonaisluku. Tutki, onko joukolla $\{1, 2, 3, \ldots\}$ n pareittain erillistä epätyhjää osajoukkoa siten, että jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan yhdellä ja vain yhdellä tavalla ilmaista korkeintaan n:n kokonaisluvun, joista kukin kuuluu eri osajoukkoon, summana.

2001.3. Luvut 1, 2, ..., 49 on sijoitettu 7×7-ruudukkoon, ja jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen lukujen summa on laskettu. Muutamat näistä 14 summasta ovat parittomia ja loput parillisia. Olkoon A kaikkien parittomien summien summa ja B kaikkien parillisten summien summa. Onko mahdollista, että luvut oli sijoitettu ruudukkoon siten, että $A = B$?

2001.4. Olkoot p ja q kaksi eri alkulukua. Todista, että

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{1}{2}(p-1)(q-1).$$

(Tässä $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x.)

2001.5. Annetut 2001 ympyrän kehän pistettä on kukin väritetty joko punaiseksi tai vihreäksi. Kaikki pisteet väritetään samanaikaisesti uudelleen seuraavalla tavalla: Jos pisteen P molemmat viereiset pisteet ovat samanvärisiä kuin P, P:n väri pysyy samana; muuten P:n väri vaihtuu vastakkaiseksi. Aloittamalla värityksestä F_1 päädytään värityksiin $F_2, F_3, \ldots$ toistamalla tätä uudelleenväritystä. Osoita, että on olemassa luku $n_0 \leq 1000$ siten, että $F_{n_0} = F_{n_0+2}$. Onko väite totta myös jos luku 1000 korvataan luvulla 999?

2001.6. Pisteet A, B, C, D ja E ovat ympyrän c kehällä tässä järjestyksessä. Lisäksi $AB \parallel EC$ ja $AC \parallel ED$. Ympyrän c pisteeseen E piirretty tangentti leikkaa suoran AB pisteessä P. Suorat BD ja EC leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $|AC| = |PQ|$.

2001.7. $ABCD$ on suunnikas. Pisteen A kautta kulkeva ympyrä leikkaa janat AB, AC ja AD näiden sisäpisteissä M, K, N, tässä järjestyksessä. Todista, että

$$|AB| \cdot |AM| + |AD| \cdot |AN| = |AK| \cdot |AC|.$$

2001.8. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio ja N sivun BC keskipiste. Olkoon vielä $\angle AND = 135°$. Osoita, että

$$|AB| + |CD| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |BC| \geq |AD|.$$

2001.9. Olkoon $ABCD$ vinoneliö. Määritä niiden vinoneliön sisällä sijaitsevien pisteiden P joukko, joille pätee $\angle APD + \angle BPC = 180°$.

2001.10. Kolmion ABC kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D. Määritä kolmion ABC kulmat, kun $|BD| \cdot |CD| = |AD|^2$ ja $\angle ADB = 45°$.

2001.11. Reaaliarvoinen funktio f on määritelty positiivisten kokonaislukujen joukossa. Kaikille kokonaisluvuille $a > 1$, $b > 1$ pätee

$$f(ab) = f(d)\left(f\left(\frac{a}{d}\right) + f\left(\frac{b}{d}\right)\right),$$

missä $d = \mathrm{syt}(a,\, b)$. Määritä $f(2001)$:n kaikki mahdolliset arvot.

2001.12. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja, joille $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 3$ ja $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^5 = 5$. Osoita, että $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i > 3/2$.

2001.13. Olkoon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jono reaalilukuja, jolle pätee $a_0 = 1$ ja $a_n = a_{\lfloor 7n/9 \rfloor} + a_{\lfloor n/9 \rfloor}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku k siten, että $a_k < \dfrac{k}{2001!}$.
(Myös tässä $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x.)

2001.14. Pakassa on $2n$ korttia. Jokaiseen korttiin on kirjoitettu jokin reaaliluku x, $1 \le x \le 2$. (Eri korteissa voi olla eri lukuja.) Näytä, että kortit voidaan jakaa kahteen pinoon siten, että niissä oleviin kortteihin kirjoitettujen lukujen summat s_1 ja s_2 toteuttavat epäyhtälön

$$\frac{n}{n+1} \le \frac{s_1}{s_2} \le 1.$$

2001.15. Olkoon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jono positiivisia reaalilukuja, joille pätee $i \cdot a_i^2 \ge (i+1) \cdot a_{i-1}a_{i+1}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Olkoot x ja y positiivisia reaalilukuja, ja olkoon $b_i = xa_i + ya_{i-1}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla $i \ge 2$ pätee $i \cdot b_i^2 > (i+1) \cdot b_{i-1}b_{i+1}$.

2001.16. Olkoon f positiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty reaaliarvoinen funktio, joka toteuttaa seuraavan ehdon: kaikilla $n > 1$ on olemassa n:n alkutekijä p, jolle $f(n) = f(n/p) - f(p)$. Määritä $f(2002)$, kun $f(2001) = 1$.

2001.17. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista että joukosta $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ voidaan valita vähintään $2^{n-1} + n$ lukua siten, että $x + y$ ei ole $x \cdot y$:n tekijä millään kahdella valitulla luvulla x ja y, $x \ne y$.

2001.18. Olkoon a pariton kokonaisluku. Osoita, että luvuilla $a^{2^n} + 2^{2^n}$ ja $a^{2^m} + 2^{2^m}$ ei ole yhteisiä tekijöitä millään positiivisilla kokonaisluvuilla n ja m, $n \ne m$.

2001.19. Mikä on pienin pariton positiivinen kokonaisluku, jolla on yhtä monta positiivista tekijää kuin luvulla 360?

2001.20. Kokonaislukujono (a, b, c, d) voidaan muuntaa jonoiksi

$$(c,\, d,\, a,\, b), \quad (b,\, a,\, d,\, c), \quad (a + nc,\, b + nd,\, c,\, d), \quad (a + nb,\, b,\, c + nd,\, d),$$

missä n on mielivaltainen kokonaisluku. Voiko jonosta $(1, 2, 3, 4)$ saada jonon $(3, 4, 5, 7)$ toistamalla tällaisia muunnoksia?

2002.1. Ratkaise reaalilukuyhtäloryhmä

$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1. \end{cases}$$

2002.2. Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja, joille

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= -2, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd &= 0. \end{aligned}$$

Todista, että ainakin yksi luvuista a, b, c, d on korkeintaan -1.

2002.3. Etsi kaikki reaalilukujonot $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots$, joille

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$$

pätee kaikilla kokonaisluvuilla m, $n \ge 0$.

2002.4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i)^2 < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

pätee kaikilla epänegatiivisilla reaaliluvuilla x_1, x_2, $\ldots$, x_n, joille $x_l + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

2002.5. Etsi kaikki positiiviset rationaalilukuparit (a, b), joille

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

.

2002.6. Seuraavaa lautapasianssia pelataan yksikköruuduista koostuvalla suorakulmaisella $m \times n$-laudalla, missä m, $n \ge 2$. Ensiksi torni sijoitetaan jollekin ruudulle. Jokaisella siirrolla tornia voidaan siirtää mielivaltainen määrä ruutuja vaaka- tai pystysuuntaan, ja lisäksi jokaisen siirron täytyy olla myötäpäivään kohtisuorassa edelliseen siirtoon nähden. (Esim. vasempaan suuntautuvan siirron jälkeen seuraava on ylöspäin, sitten oikealle jne.) Milla lukujen m ja n arvoilla on mahdollista, että torni käy jokaisessa laudan ruudussa täsmälleen kerran ja palaa aloitusruutuunsa? (Tornin sanotaan käyvän vain niissä ruuduissa, joihin se pysähtyy, ei niissä, joiden kautta se kulkee.)

2002.7. Tasoon on piirrettynä n kuperaa nelikulmiota, jotka jakavat tason alueisiin. (Alueista yksi on ääretön.) Määritä, mikä on suurin mahdollinen määrä tällaisia alueita.

2002.8. Olkoon P $n \ge 3$ tasopisteen joukko, missä mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla. Kuinka monella eri tavalla voidaan valita sellainen $\binom{n-1}{2}$ kolmion joukko T, että kolmioiden kärjet ovat kaikki joukossa P ja että jokaisella joukon T kolmiolla on sivu, joka ei ole joukon T minkään toisen kolmion sivu?

2002.9. Kaksi taikuria esittää seuraavan tempun. Ensimmäinen taikuri poistuu huoneesta. Toinen taikureista tarttuu 100 kortin pakkaan, jonka kortit on merkitty luvuilla 1, 2, ..., 100, ja pyytää kutakin kolmesta katselijasta valitsemaan vuorollaan kortin pakasta. Tämä taikuri näkee, minkä kortin kukin katselijoista valitsee. Tämän jälkeen hän lisää valittuihin kortteihin yhden kortin jäljellejääneestä pakasta. Katselijat sekoittavat nämä kortit, kutsuvat ensimmäisen taikurin sisään ja antavat hänelle nämä 4 korttia. Ensimmäinen taikuri katsoo 4 korttia ja ”arvaa”, minkä kortin valitsi ensimmäinen, minkä toinen ja minkä kolmas katselija. Todista, että taikurit voivat suoriutua tempusta.

2002.10. Olkoon N positiivinen kokonaisluku. Kaksi pelaajaa pelaa seuraavaa peliä. Ensimmäinen pelaaja kirjoittaa listan korkeintaan luvun 25 suuruisia positiivisia kokonaislukuja, jotka eivät välttämättä ole eri lukuja ja joiden summa on vähintään 200. Toinen pelaajista voittaa, jos hän voi valita listan luvuista jotkin, joiden summa S toteuttaa ehdon $200 - N \leq S \leq 200 + N$. Mikä on pienin sellainen luvun N arvo, että toisella pelaajalla on voittostrategia?

2002.11. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tasoon on piirretty n pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla ja joiden välisistä etäisyyksistä mitkään kaksi eivät ole samat. Yhdistetään kukin piste vuorollaan janoilla kahteen sitä lähimpään pisteeseen. (Aiemmin piirrettyjä janoja ei pyyhitä pois.) Todista, ettei pisteiden joukossa ole sellaista, josta kulkisi jana yli 11 muuhun pisteeseen.

2002.12. S on neljän eri tasopisteen joukko. Jokaisella pisteellä $X \in S$ voidaan nimetä loput pisteet Y:ksi, Z:ksi ja W:ksi siten, että

$$|XY| = |XZ| + |XW|.$$

Todista, että kaikki neljä pistettä ovat samalla suoralla.

2002.13. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $\angle BAC > \angle BCA$, ja olkoon D sellainen sivun AC piste, että $|AB| = |BD|$. Olkoon edelleen F kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän sellainen piste, että suora FD on kohtisuorassa sivua BC vastaan ja pisteet F ja B ovat suoran AC eri puolilla. Todista, että suora FB ja sivu AC ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

2002.14. Olkoot L, M ja N sellaiset pisteet kolmion ABC sivuilla AC, AB ja BC, että BL on kulman $\angle ABC$ puolittaja ja janoilla AN, BL ja CM on yhteinen piste. Todista, että jos $\angle ALB = \angle MNB$, niin $\angle LNM = 90°$.

2002.15. Hämähäkki ja kärpänen istuvat kuution pinnalla. Kärpänen haluaa, että lyhin polku siitä hämähäkkiin kuution pintaa pitkin on niin pitkä kuin mahdollista. Onko kärpäsen aina parasta olla hämähäkkiä vastapäisessä pisteessä? (”Vastapäinen” tarkoittaa ”symmetrinen kuution keskipisteen suhteen”.)

2002.16. Etsi kaikki epänegatiiviset kokonaisluvut m, joille

$$a_m = \left(2^{2m+1 Asennansen.}\right)^2 + 1$$

on jaollinen korkeintaan kahdella eri alkuluvulla.

2002.17. Osoita, että jono

$$\binom{2002}{2002}, \binom{2003}{2002}, \binom{2004}{2002}, \ldots,$$

tarkasteltuna modulo 2002, on jaksollinen.

2002.18. Etsi kaikki kokonaisluvut $n > 1$, joilla luvun $n^6 - 1$ alkutekijät ovat luvun $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$ tekijöitä.

2002.19. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että yhtälöllä

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

ei ole positiivisia rationaalilukuratkaisuja x, y.

2002.20. Onko olemassa ääretöntä epävakiota aritmeettista jonoa, jonka jokainen termi on muotoa a^b, missä a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja ja $b \geq 2$?

2003.1. Olkoon $\mathbb{Q}^+$ positiivisten rationaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{Q}^+ \to Q^+$ jotka toteuttavat kaikilla $x \in Q^+$ ehdot

(1) $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$,

(2) $\left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x) = f(x + 1)$.

2003.2. Todista, että yhtälön

$$x^3 + px + q = 0$$

kaikki reaalilukuratkaisut toteuttavat epäyhtälön $4qx \leq p^2$.

2003.3. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille $xyz = 1$. Todista, että

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) \geq 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right).$$

2003.4. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{2a}{a^2 + bc} + \frac{2b}{b^2 + ca} + \frac{2c}{c^2 + ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

2003.5. Jono a_n määritellään seuraavasti: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$ ja $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$, kun $n \geq 2$. Todista, että kun $n \geq 1$, pätee

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) < \left(2 + \sqrt{2}\right) a_1 a_2 \cdots a_n.$$

2003.6. Olkoot $n \geq 2$ ja $d \geq 1$ kokonaislukuja, joille $d|n$, ja olkoot x_1, x_2, $\ldots$, x_n reaalilukuja, joille $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Todista, että on olemassa ainakin $\binom{n-1}{d-1}$ tapaa valita d indeksiä $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_d \leq n$ siten, että $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_d} \geq 0$.

2003.7. Olkoon X joukon $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ osajoukko, jolla on seuraava ominaisuus: jos $a, b \in X$, $a \neq b$, niin $a \cdot b \notin X$. Mikä on joukon X suurin mahdollinen koko?

2003.8. Pöydällä on 2003 karkkia. Kaksi pelaajaa syö karkkeja vuorotellen. Vuorollaan pelaaja voi syödä joko yhden karkin tai puolet jäljellä olevista karkeista ("pienemmän puolikkaan", jos karkkien määrä on pariton); ainakin yksi karkki on aina syötävä. Viimeisen karkin syöjä häviää. Kummalla pelaajalla – aloittajalla vai toisella – on voittostrategia?

2003.9. Tiedetään, että n on positiivinen kokonaisluku, $n \leq 144$. Luvun selvittämiseksi sallitaan kymmenen kysymystä muotoa "onko n pienempi kuin a?" Kysymyksiin vastataan viipeellä: kysymyksen i vastaus annetaan vasta sitten, kun kysymys $i + 1$ on esitetty, kun $i = 1, 2, \ldots, 9$. Kymmenennen kysymyksen vastaus annetaan heti, kun kysymys on esitetty. Etsi strategia, jolla luvun n voi selvittää.

2003.10. Tason *hilapiste* on piste, jonka molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja. Neljän pisteen (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ *keskiö* on piste $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}\right)$. Olkoon n suurin luonnollinen luku, jolla on seuraava ominaisuus: tasossa on n eri hilapistettä, joista minkään neljän keskiö ei ole hilapiste. Todista, että $n = 12$.

2003.11. Onko mahdollista valita tasosta 1000 pistettä siten, että pisteiden välisistä etäisyyksistä ainakin 6000 on yhtä suuria?

2003.12. Olkoon $ABCD$ neliö. Olkoon M sivun BC sisäpiste ja N sivun CD sisäpiste, joille $\angle MAN = 45°$. Todista, että kolmion AMN ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on suoralla AC.

2003.13. Olkoon $ABCD$ suorakulmio, jossa $BC = 2 \cdot AB$. Olkoon E sivun BC keskipiste ja P sivun AD mielivaltainen sisäpiste. Olkoon F pisteen A projektio suoralle BP ja G pisteen D projektio suoralle CP. Todista, että pisteet E, F, P ja G ovat saman ympyrän kehällä.

2003.14. Olkoon ABC mielivaltainen kolmio ja olkoot AMB, BNC ja CKA sen ulkopuolelle piirrettyjä tasasivuisia kolmioita. Janan MN keskipisteen kautta piirretään normaali suoralle AC, ja samoin janojen NK ja KM keskipisteiden kautta piirretään normaalit suorille AB ja BC. Todista, että nämä kolme normaalia leikkaavat samassa pisteessä.

2003.15. Olkoon P jännenelikulmion lävistäjien AC ja BD leikkauspiste. Pisteen P kautta piirretty ympyrä koskettaa sivua CD sen keskipisteessä M ja leikkaa janat BD ja AC pisteissä Q ja R. Olkoon S janan BD sellainen piste, että $BS = DQ$. Pisteen S kautta piirretty AB:n suuntainen suora leikkaa suoran AC pisteessä T. Todista, että $AT = RC$. (Jännenelikulmion kärjet sijaitsevat saman ympyrän kehällä.)

2003.16. Etsi kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen parit (a, b), että $a - b$ on alkuluku ja ab on kokonaisluvun neliö.

2003.17. Positiivisen kokonaisluvun n kaikki positiiviset tekijät on tallennettu taulukkoon kasvavassa järjestyksessä. Marin täytyy kirjoittaa ohjelma, joka kertoo mistä tahansa annetusta luvun n tekijästä $d > 1$, onko se alkuluku. Olkoon n:llä k sellaista tekijää, jotka eivät ole suurempia kuin d. Mari väittää, että näistä tekijöistä riittää tarkistaa ensimmäiset $\lceil k/2 \rceil$: jos niiden joukosta löytyy d:n yhtä suurempi tekijä, d on yhdistetty luku, muuten d on alkuluku. Onko Mari oikeassa?

2003.18. Jokainen kokonaisluku on väritetty täsmälleen yhdellä väreistä SININEN, VIHREÄ, PUNAINEN ja KELTAINEN. Voidaanko tämä tehdä niin, että jos kokonaisluvut a, b, c ja d eivät ole kaikki nollia ja ovat samanvärisiä, niin $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

2003.19. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että jos a^3+b^3 on kokonaisluvun neliö, niin $a + b$ ei ole kahden eri alkuluvun tulo.

2003.20. Positiivisen kokonaisluvun n kaikkien n:ää pienempien positiivisten tekijöiden summan ja tällaisten tekijöiden lukumäärän summa on n. Osoita, että $n = 2m^2$ jollakin kokonaisluvulla m.

2004.1. . Epänegatiivisten kokonaislukujen jono a_l , a_2 , a_3 , ... toteuttaa ehdot

(1) $a_n + a_{2n} \geq 3n$,

(2) $a_{n+l} + n \leq 2\sqrt{a_n \cdot (n+1)}$

kaikilla indeksien arvoilla $n = 1, 2, \ldots$

(a) Todista, että epäyhtälö $a_n \geq n$ pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

(b) Anna esimerkki ehdot (1) ja (2) toteuttavasta positiivisten kokonaislukujen jonosta.

2004.2. Olkoon $P(x)$ polynomi, jonka kertoimet ovat epänegatiivisia. Osoita, että jos $P\left(\frac{1}{x}\right) P(x) \geq 1$, kun $x = 1$, niin sama epäyhtälö on voimassa kaikilla positiivisilla luvuilla x.

2004.3. Olkoot p, q ja r posiitivisia lukuja ja n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että jos $pqr = 1$, niin

$$\frac{1}{p^n + q^n + 1} + \frac{1}{q^n + r^n + 1} + \frac{1}{r^n + p^n + 1} \leq 1.$$

2004.4. Reaalilukujen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmeettinen keskiarvo on X. Osoita, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku K, että jokaisen jonon $(x_1, x_2, \ldots, x_K)$, $(x_2, x_3, \ldots, x_K)$, $(x_3, \ldots, x_K)$, $\ldots$, (x_{K-1}, x_K) ja (x_K) aritmeettinen keskiarvo on pienempi tai sama kuin X.

2004.5. Määritä, mitä arvoja voi saada kokonaisluvuille k määritelty funktio

$$f(k) = (k)_3 + (2k)_5 + (3k)_7 - 6k,$$

missä $(k)_{2n+1}$ on se luvun $2n + 1$ monikerta, joka on lähinnä lukua k.

2004.6. Kuution kullekin tahkolle on kirjoitettu positiivinen kokonaisluku. Jokaista kuution kärkeä kohti lasketaan kolmella viereisellä tahkolla sijaitsevien lukujen tulo. Näiden tulojen summa on 1001. Mikä on tahkoilla sijaitsevien kuuden luvun summa?

2004.7. Etsi kaikki sellaiset ainakin kaksialkioiset kokonaislukujoukot X, että kaikilla $m, n \in X$, missä $n > m$, on olemassa $k \in X$, jolle $n = mk^2$.

2004.8. Olkoon $f(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi, joka ei ole vakio. Todista, että on olemassa sellainen kokonaisluku n, että luvulla $f(n)$ on vähintään 2004 eri alkutekijää.

2004.9. Olkoon S joukko, jossa on $n-1$ luonnollista lukua ($n \geq 3$). Tässä joukossa on kaksi alkiota, joiden erotus ei ole jaollinen luvulla n. Todista, että on mahdollista valita joukon S epätyhjä osajoukko, jonka alkioiden summa on jaollinen luvulla n.

2004.10. Onko olemassa päättymätön alkulukujen jono $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, jolle $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n?

2004.11. Annettuna on $m \times n$-taulukko lukuja $+1$ ja -1. Aluksi taulukossa on vain yksi -1, kaikki muut taulukkoalkiot ovat lukuja $+1$. Yhdellä kerralla taulua saa muuttaa niin, että jokin luvuista -1 muutetaan luvuksi O ja samalla viereiset luvut kerrotaan luvulla -1. (Viereisiä alkioita ovat ne, jotka ovat suoraan yläpuolella, alapuolella, vasemmalla tai oikealla.) Etsi kaikki (m, n), joilla mikä tahansa alkuehdon täyttävä taulukko voidaan muuntaa tällaisilla muunnoksilla vain nollia sisältäväksi taulukoksi riippumatta siitä, miten -1 aluksi sijaitsee.

2004.12. Rivissä on $2n$ eri lukua. Yhdellä siirrolla voidaan joko vaihtaa kaksi lukua keskenään tai kierrättää kolmea lukua syklisesti (valitaan luvut a, b ja c sekä korvataan b luvulla a, c luvulla b ja a luvulla c.) Mikä on pienin mahdollinen määrä siirtoja, joka aina riittää lukujen järjestämiseen kasvavaan järjestykseen?

2004.13. Euroopan unionin 25 jäsenmaata muodostavat seuraavien sääntöjen mukaisesti toimivan komitean: 1) Komitea kokoontuu päivittäin. 2) Jokaisessa kokouksessa ainakin yhden jäsenmaan on oltava edustettuna. 3) Missään kahdessa kokouksessa ei ole edustettuna täsmälleen samoja jäsenmaita. 4) n:nnessä kokouksessa läsnä olevien maiden joukossa on jokaisella $k < n$ oltava ainakin yksi, joka oli läsnä myös k:nnessa kokouksessa. Kuinka monena päivänä komitea voi kokoontua?

2004.14. Kasalla tarkoitetaan neljän tai useamman pähkinän joukkoa. Kaksi pelaajaa pelaa seuraavaa peliä. Aluksi heillä on yksi kasa, jossa on $n \geq 4$ pähkinää. Siirto tarkoittaa, että pelaaja valitsee yhden kasan ja jakaa sen kahdeksi epätyhjäksi joukoksi (joiden ei välttämättä tarvitse olla kasoja, vaan ne voivat sisältää mielivaltaisen määrän pähkinöitä.) Pelaajat siirtävät vuorotellen, ja jos pelaaja ei voi siirtää, hän häviää. Millä luvuilla n aloittavalla pelaajalla on voittostrategia?

2004.15. Ympyrän kehä on jaettu 13 kaareen, jotka on numeroitu järjestyksessä yhdestä kolmeentoista. Viisi kirppua A, B, C, D ja E istuvat kaarilla 1, 2, 3, 4 ja 5. Kirppu saa hypätä vain kaarelle, joka on jompaankumpaan suuntaan viiden kaaren päässä lähtökaaresta. Vain yksi kirppu voi hypätä kerrallaan, eikä kaksi kirppua voi sijaita samalla kaarella. Muutamien hyppyjen jälkeen kirput ovat jälleen kaarilla 1, 2, 3, 4 ja 5, mutta mahdollisesti eri järjestyksessä kuin aluksi. Mitkä järjestykset ovat mahdollisia?

2004.16. Piste P on kiinteän ympyrän ulkopuolella. P:n kautta piirretään ympyrälle sekantti, joka leikkaa ympyrän pisteissä A ja B sekä tangentti, joka sivuaa ympyrää pisteessä C. Piste C on samalla puolella P:n ja ympyrän keskipisteen kautta kulkevaa suoraa kuin A ja B. Pisteen C kohtisuora projektio P:n ja ympyrän keskipisteen kautta kulkevalla suoralla on Q. Osoita että QC puolittaa kulman $\angle AQB$.

2004.17. Suorakaiteen sivujen pituudet ovat 3 ja 4. Valitaan jokaiselta sivulta umpimähkäinen sisäpiste. Olkoot x, y, z ja u sen nelikulmion sivut, jonka kärjet ovat valitut neljä pistettä. Osoita, että $25 \le x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \le 50$.

2004.18. Kolmion ABC kärjestä A alkava puolisuora leikkaa sivun BC pisteessä X ja kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteessä Y. Osoita, että

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{XY} \ge \frac{4}{BC}.$$

2004.19. Kolmion ABC sivun BC keskipiste on D. Sivun BC pisteelle M pätee $\angle BAM = \angle DAC$. AB leikkaa kolmion CAM ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä L ja AC leikkaa kolmion BAM ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä K. Todista, että $KL \| BC$.

2004.20. Ympyrän kaarilla w_1, w_2 ja w_3 on samat päätepisteet A ja B ja kaikki ovat samalla puolella suoraa AB; w_2 on w_1:n ja w_3:n välissä. Kaksi B:stä alkavaa puolisuoraa leikkaavat kaaret, toinen pisteissä M_1, M_2 ja M_3 , toinen pisteissä K_1, K_2 ja K_3. Osoita, että

$$\frac{M_l M_2}{M_2 M_3} = \frac{K_1 K_2}{K_2 K_3}.$$

2005.1. Olkoon a_0 positiivinen kokonaisluku. Määritellään jono $\{a_n\}_{n\ge 0}$ seuraavasti: Jos

$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i,$$

missä c_i:t ovat kokonaislukuja ja $0 \le c_i \le 9$, niin

$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$

Voidaanko a_0 valita siten, että kaikki termit jonossa ovat erisuuria?

2005.2. Olkoot α, β ja γ kulmia, joille pätee $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 90°$ ja $\sin\alpha + \sin\beta + sin\gamma = 1$. Osoita, että

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2 \ge \frac{3}{8}.$$

2005.3. Määritellään jono $\{a_k\}_{k\ge 1}$ seuraavasti: $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$ ja

$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}},$$

kun $k \ge 1$. Osoita, että

$$\frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \frac{1}{a_3a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98}a_{100}} < 4.$$

2005.4. Etsi kolme eri reaalikertoimista polynomia $P(x)$, joilla $P(x_2 + 1) = P(x)^2 + 1$ kaikilla reaalisilla x.

2005.5. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Osoita, että

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

2005.6. Olkoot K ja N positiivisia kokonaislukuja, joilla $1 \leq K \leq N$. N:stä erilaisesta kortista koostuvaa pelikorttipakkaa sekoitetaan toistuvasti muuntamalla päinvastaiseksi päällimmäisten K:n kortin järjestys ja siirtämällä ne pakan pohjalle. Osoita, että pienin määrä toistoja, joiden jälkeen pakka on jälleen alkuperäisessä järjestyksessään, on korkeintaan $4 \cdot N^2/K^2$.

2005.7. Taulukossa on n riviä, missä $n > 2$, ja 6 saraketta. Jokaiseen soluun on kirjoitettu joko 0 tai 1. Kaikki rivit ovat keskenään erilaisia. Jos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ja $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ ovat taulukon rivejä, niin myös $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$ on taulukon rivi. Osoita, että taulukossa on sarake, jonka luvuista vähintään puolet on nollia.

2005.8. Tarkastellaan yksikköruuduista muodostuvaa 25×25-ruudukkoa. Piirretään punaisella kynällä mielivaltaisen kokoisten neliöiden reunaviivoja ruudukon viivoja myöten. Mikä on pienin määrä neliöitä, joka pitää piirtää, jotta kaikki ruudukon viivat tulisi väritettyä?

2005.9. Suorakulmio on jaettu 200×3-ruudukoksi. Osoita, että erilaisia tapoja jakaa suorakulmio 1×2-suorakulmioihin on kolmella jaollinen määrä.

2005.10. Olkoon $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ja olkoon M niiden luvun m positiivisten tekijöiden joukko, joilla on täsmälleen kaksi alkutekijää. Määritä pienin kokonaisluku n, jolla on seuraava ominaisuus: Minkä tahansa joukon M n:n luvun joukossa on 3 lukua a, b ja c, jotka toteuttavat ehdon $a \cdot b \cdot c = m$.

2005.11. Pisteet D ja E ovat kolmion ABC sivuilla BC ja AC ja toteuttavat ehdon $BD = AE$. Kolmioiden ADC ja BEC ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet yhdistävä suora leikkaa suorat AC ja BC pisteissä K ja L. Osoita, että $KC = LC$.

2005.12. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio ja $BC = AD$. Pisteet M ja N ovat janojen AB ja CD keskipisteet. Suorat AD ja BC leikkaavat suoran MN pisteissä P ja Q. Osoita, että $CQ = DP$.

2005.13. Mikä on pienin määrä $\sqrt{2}$-säteisiä ympyröitä, joka tarvitaan peittämään suorakulmio, jonka suuruus on

(a) 6×3?
(b) 5×3?

2005.14. Kolmion ABC mediaanit leikkaavat pisteessä M. Olkoot D ja E kaksi suoran BC eri pistettä, joilla $DC = CE = AB$ ja olkoot P ja Q pisteitä janoilla BD ja BE siten, että $2BP = PD$ ja $2BQ = QE$. Määritä $\angle PMQ$.

2005.15. Suorat e ja f ovat kohtisuorassa toisiaan vasten ja leikkaavat toisensa pisteessä H. Pisteet A ja B ovat suoralla e ja pisteet C ja D suoralla f. A, B, C, D ja H ovat keskenään eri pisteitä. Kohtisuorassa AC:ta vastaan ovat suora b, joka kulkee pisteen B, ja suora d, joka kulkee pisteen D kautta. Kohtisuorassa BD:tä vastaan ovat suora a, joka kulkee pisteen A ja suora c, joka kulkee pisteen C kautta. Suorat a ja b leikkaavat pisteessä X ja c ja d leikkaavat pisteessä Y. Osoita, että XY kulkee pisteen H kautta.

2005.16. Olkoon p alkuluku ja n positiivinen kokonaisluku. Olkoon q luvun $(n+1)^p - n^p$ positiivinen tekijä. Osoita, että $q-1$ on jaollinen luvulla p.

2005.17. Jono $\{x_n\}_{n\geq 0}$ määritellään seuraavasti: $x_0 = a$, $x_l = 2$ ja $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-i} - x_{n-2} + 1$, kun $n > 1$. Etsi kaikki kokonaisluvut a, joilla $2x_{3n} - 1$ on kokonaisluvun neliö kaikilla $n \geq 1$.

2005.18. Olkoot x ja y positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että $z = 4xy/(x+y)$ on pariton kokonaisluku. Osoita, että luvulla z on ainakin yksi tekijä, joka voidaan kirjoittaa muodossa $4n-1$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla n.

2005.19. Onko mahdollista löytää 2005 keskenään eri suurta positiivista kokonaisluvun neliötä, joiden summa on myös kokonaisluvun neliö?

2005.20. Etsi kaikki kokonaisluvut $n = p_1p_2\cdots p_k$, jotka ovat luvun $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$ tekijöitä, kun $p_lp_2\cdots p_k$ on luvun n hajotelma alkutekijöihin (jotka eivät välttämättä ole eri suuria).

2006.1. Reaalilukujonolle a_1, a_2 a_3, ... pätee

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2},$$

kun $n = 2, 3, 4, \ldots$. Kuinka monta peräkkäistä positiivista lukua jonossa voi enintään olla?

2006.2. Oletetaan, etta reaaliluvuille $a_i \in [-2, 17]$, $i = 1, 2, \ldots, 59$, pätee $a_l + a_2 + \cdots + a_{59} = 0$. Osoita, että

$$a_l^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006.$$

2006.3. Osoita, että jokaista reaalikertoimista polynomia $P(x)$ kohden on olemassa positiivinen kokonaisluku m ja reaalikertoimiset polynomit $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_m(x)$ siten, että

$$P(x) = (P_1(X))^3 + (P_2(X))^3 + \cdots + (P_m(X))^3.$$

2006.4. Olkoot a, b, c, d, e ja f ei-negatiivisia eaalilukuja, joille pätee $a+b+c+d+e+f = 6$. Määritä luvun

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

suurin mahdollinen arvo ja kaikki ne kuusikot (a, b, c, d, e, f), joilla tämä suurin arvo saavutetaan.

2006.5. Ajoittain epäluotettava professori on käsittelee viimeisessä kirjassaan erästä binääristä laskutoimitusta $*$. Kun tätä laskutoimitusta sovelletaan mihin hyvänsä kahteen kokonaislukuun, tulos on kokonaisluku. Laskutoimituksen tiedetään toteuttavan seuraavat kaksi aksioomaa:

a) $x * (x * y) = y$ kaikille $x, y \in \mathbb{Z}$;
b) $(x * y) * y = x$ kaikille $x, y \in \mathbb{Z}$.

Kirjassaan professori väittää, että

1. Laskutoimitus $*$ on vaihdannainen: $x * y = y * x$ kaikille $x,\ y \in \mathbb{Z}$.
2. Laskutoimitus $*$ on liitännäinen: $(x * y) * z = x * (y * z)$ kaikille $x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}$.

Mitkä näistä väitteistä seuraavat edellä mainituista aksioomista?

2006.6. Määritä, kuinka monta alkiota on enintään seuraavat ehdot täyttävässä positiivisten kokonaislukujen joukossa:

1. Luvut kirjoitetaan joukkoon $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ kuuluvilla numeroilla.
2. Kukin numero esiintyy samassa luvussa korkeintaan kerran.
3. Jokaisen luvun numerot ovat nousevassa suuruusjärjestyksessä.
4. Jokaisella kahdella luvulla on ainakin yksi yhteinen numero (mahdollisesti eri paikassa).
5. Mikään numero ei esiinny kaikissa luvuissa.

2006.7. Valokuvaaja otti kuvia juhlassa, johon osallistui 10 ihmistä. Jokainen 45 mahdollisesta ihmisparista esiintyi tasan yhdessä kuvassa, ja joka kuvassa esiintyy kaksi tai kolme ihmistä. Montako kuvaa valokuvaaja ainakin otti?

2006.8. Laitoksen johtaja on havainnut laitoksessaan kuusi salaliittoa, joista jokaisessa on mukana tasan kolme henkilöä. Osoita, että johtaja voi jakaa laitoksensa kahdeksi laboratorioksi niin, että mikään salaliittolaisryhmä ei kuulu kokonaan samaan laboratorioon.

2006.9. Säännöllisen viisikulmion joka kärkeen liitetään reaaliluku. Seuraavaa operaatiota voidaan toistaa: valitaan jotkin kaksi vierekkäistä kärkeä ja korvataan niissä olevat luvut lukujen aritmeettisella keskiarvolla. Onko aina mahdollista päätyä tilanteeseen, jossa kaikki viisi lukua ovat nollia, jos lähdetään tilanteesta, jossa kärkiin sijoitettujen viiden luvun summa on nolla?

2006.10. 162 plusmerkkiä ja 144 miinusmerkkiä on sijoitettu 30×30-taulukkoon niin, että kussakin rivissä ja sarakkeessa on enintään 17 merkkiä. (Missään taulukon ruudussa ei ole enempää kuin yksi merkki.) Lasketaan jokaista plusmerkkiä kohden samalla rivillä olevien miinusmerkkien lukumäärä ja jokaista miinusmerkkiä kohden samassa sarakkeessa olevien plusmerkkien lukumäärä. Määritä näiden lukujen summan maksimiarvo.

2006.11. Kolmion korkeusjanojen pituudet ovat 12, 15 ja 20. Mikä on kolmion ala?

2006.12. Olkoon ABC kolmio, B_1 sivun AB keskipiste ja C_1 sivun AC keskipiste. Olkoon $P \neq A$ kolmioiden ABC_1 ja AB_1C ympäri piirrettyjen ympyröiden leikkauspiste. Olkoon $P_l \neq A$ suoran AP ja kolmion AB_1C_1 ympäri piirretyn ympyrän leikkauspiste. Todista, että $2AP = 3AP_1$.

2006.13. Piste D on kolmion ABC sivulla AB ja piste E on kolmion sivulla AC. Suorat BE ja CD leikkaavat pisteessä F. Todista, että jos

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA,$$

niin pisteet A, D, F ja E ovat samalla ympyrällä.

2006.14. Pallon pinnalta on valittu 2006 pistettä. Todista, että pinta voidaan jakaa 2006:ksi yhteneväksi palaksi, joista jokaiseen kuuluu sisäpisteenä tasan yksi valituista pisteistä.

2006.15. Kolmion ABC keskijanat leikkaavat toisensa pisteessä M. Pisteen M kautta kulkeva suora t leikkaa kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteissä X ja Y niin, että A ja C ovat t:n samalla puolella. Todista, että $BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$.

2006.16. Onko olemassa neljä eri positiivista kokonaislukua niin, että kun minkä tahansa kahden niistä tuloon lisätään 2006, saadaan neliöluku?

2006.17. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $3^n + 1$ on jaollinen n^2:lla.

2006.18. Jos n on positiivinen kokonaisluku, merkitään a_n:llä luvun $n^{(n^n)}$ viimeistä numeroa. Todista, että jono (a_n) on jaksollinen ja määritä jonon lyhimmän jakson pituus.

2006.19. Onko olemassa positiivisten kokonaislukujen jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jossa kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n jokaisen n:n peräkkäisen luvun summa on jaollinen luvulla n^2?

2006.20. 12-numeroinen luku, jossa esiintyy vain numeroita 1, 5 ja 9, on jaollinen 37:11ä. Todista, että luvun numeroiden summa ei ole 76.

2007.1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan joukon $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jakamista kaksialkioisiksi osajoukoiksi $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Joukon P_i alkioiden tulo olkoon p_i. Osoita, että

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2007.2. Kokonaislukujonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kutsutaan *eksaktiksi*, jos $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$, kun $n > m$. Osoita, että on olemassa eksakti jono, jossa $a_1 = 1$ ja $a_2 = 0$, ja määritä a_{2007}.

2007.3. Olkoot F, G, H polynomeja, joiden kertoimet ovat reaalilukuja, joiden aste on korkeintaan $2n + 1$ ja jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) Kaikilla reaaliluvuilla x pätee

$$F(x) \le G(x) \le H(x).$$

(2) On olemassa erisuuret reaaliluvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ joilla

$$F(x_i) = H(x_i) \quad \text{kun } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(3) On olemassa reaaliluku x_0, joka eroaa luvuista $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja jolle

$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Osoita, että $F(x) + H(x) = 2G(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.

2007.4. Olkoot a_1, a_2, $\dots$ a_n positiivisia reaalilukuja ja olkoon $S = a_1 + a_2 + \cdots a_n$. Osoita, että

$$(2S + n)\,(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots a_na_1) \ge 9\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

2007.5. Funktio f on määritelty kaikkien nollasta poikkeavien reaalilukujen joukossa ja se saa kaikki reaalilukuarvot paitsi arvon 1. Tiedetään myös, että

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

kaikilla x, $y \neq 0$ ja

$$f\left(f(x)\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

kaikilla $x \notin \{0,\, 1\}$. Määritä kaikki nämä ehdot toteuttavat funktiot f.

2007.6. Freddy kirjoittaa luvut 1, 2, $\dots$, n jossakin järjestyksessä. Sitten hän muodostaa listan pareista $(i,\, j)$, missä $1 \le i < j \le n$ ja i:s luku on suurempi kuin j:s luku hänen kirjoittamassaan permutaatiossa. Tämän jälkeen Freddy toistaa seuraavaa toimenpidettä niin kauan kuin se on mahdollinen: valitaan pari $(i,\, j)$ listalta, vaihdetaan i:s ja j:s luku permutaatiossa, poistetaan $(i,\, j)$ listalta. Osoita, että Freddy voi valita parit sellaisessa järjestyksessä, että kun prosessi loppuu, niin luvut permutaatiossa ovat nousevassa järjestyksessä.

2007.7. *Viritys* koostuu oheisen kuvan mukaisesti kuudesta tasasivuisesta kolmiosta, joiden sivun pituus on 1. Määritä kaikki mahdolliset kokonaisluvut n, joilla tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on n, voidaan täysin peittää virityksillä (peilaukset ja kierrot ovat sallittuja, mutta kaksi viritystä ei saa mennä päällekkäin).

2007.8. Kutsutaan kokonaislukujoukkoa A *eristämättömäksi*, jos kaikilla $a \in A$ vähintään yksi luvuista $a-1$ ja $a+1$ myös kuuluu joukkoon A. Osoita, että on olemassa tasan $(n-4)^2$ viiden alkion eristämätöntä joukon $\{1, 2, \dots, n\}$ osajoukkoa.

2007.9. Yhdistys äänestää itselleen hallituksen. Jokainen yhdistyksen jäsen on valinnut 10 ehdokasta, mutta hän on tyytyväinen, jos vähintään yksi tulee valituksi hallitukseen. Jokaista kuutta yhdistyksen jäsentä kohden on olemassa kahden hengen hallitus, johon kaikki nämä kuusi jäsentä ovat tyytyväisiä. Osoita, että on olemassa kymmenen hengen hallitus, johon koko yhdistys on tyytyväinen.

2007.10. 18×18-ruudukkossa kaikki ruudut voivat olla mustia tai valkoisia. Aluksi kaikki ruudut on väritetty valkoisiksi. Voimme suorittaa seuraavan operaation: valitaan yksi sarake tai rivi ja vaihdetaan väri kaikkien sen ruutujen väri. Onko mahdollista toistaa tätä operaatiota niin, että tuloksena on ruudukko, jossa on täsmälleen 16 mustaa ruutua?

2007.11. AD, BE ja CF ovat kolmion ABC korkeusjanat. Pisteet P, Q, R ja S toteuttavat seuraavat ehdot

(1) P on kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

(2) Kaikki janat PQ, QR ja RS ovat yhtä pitkiä kuin kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde.

(3) Suunnistettu jana PQ on samansuuntainen kuin suunnistettu jana AD. Vastaavasti QR on samansuuntainen kuin BE ja RS on samansuuntainen kuin CF.

Osoita, että S on kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

2007.12. Olkoon M kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän sillä kaarella AB, jolla piste C ei ole. Oletetaan, että pisteen M projektiot suorilla AB ja BC ovat kolmion sivuilla, eikä niiden jatkeilla. Merkitään näitä projektioita X:llä ja Y:llä tässä järjestyksessä. Olkoot K ja N janojen AC ja XY keskipisteet. Osoita, että $\angle MNK = 90°$.

2007.13. Olkoot $t_1, t_2, \ldots, t_k$ eri suoria avaruudessa, ja olkoon $k > 1$. Osoita, että on olemassa pisteet P_i suorilla t_i, $i = 1, \ldots, k$, niin että P_{i+1} on pisteen P_i projektio suoralla t_{i+1}, kun $1 = 1, \ldots, k-1$, ja P_1 on pisteen P_k projektio suoralla t_1.

2007.14. Kuperassa eli konveksissa nelikulmiossa $ABCD$ on $\angle ADC = 90°$. Olkoot E ja F pisteen B projektiot suorilla AD ja AC, tässä järjestyksessä. Oletetaan, että F on pisteiden A ja C välissä, että A on pisteiden D ja E välissä ja että suora EF kulkee janan BD keskipisteen kautta. Osoita, että nelikulmion $ABCD$ ympäri voidaan piirtää ympyrä.

2007.15. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa sivua AC pisteessä D. Toinen ympyrä kulkee pisteen D kautta ja sivuaa suoria BC ja BA, jälkimmäistä pisteessä A. Määritä suhde AD/DC.

2007.16. Olkoot a ja b rationaalilukuja, joilla $s = a + b = a^2 + b^2$. Osoita, että s voidaan esittää rationaalilukuna jonka nimittäjällä ei ole yhteisiä tekijöitä luvun 6 kanssa.

2007.17. Olkoot x, y, z positiivisia kokonaislukuja, joilla $\dfrac{x+1}{y} + \dfrac{y+1}{z} + \dfrac{z+1}{x}$ on kokonaisluku. Olkoon d lukujen x, y ja z suurin yhteinen tekijä. Osoita, että $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

2007.18. Olkoot a, b, c, d nollasta poikkeavia kokonaislukuja, joilla ainoa yhtälön

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

toteuttava kokonaislukunelikkö (x, y, z, t) on $x = y = z = t = 0$. Seuraako tästä, että luvut a, b, c ja d ovat samanmerkkisiä?

2007.19. Olkoot r ja k positiivisia kokonaislukuja, ja olkoot luvun r kaikki alkutekijät suurempia kuin 50. Kutsumme positiivista kokonaislukua, jonka kymmenjärjestelmäesityksessä on vähintään k numeroa (ilman edessä olevia nollia) *kieroutuneeksi*, jos jokainen k:n peräkkäisen numeron jono muodostaa luvun (jossa on mahdollisesti alussa nollia), joka on luvun r monikerta. Osoita, että jos on olemassa äärettömän monta kieroutunutta lukua, niin $10^k - 1$ on kieroutunut.

2007.20. Olkoot a ja b, positiivisia kokonaislukuja, joille $b < a$ ja luku $a^3 + b^3 + ab$ on jaollinen luvulla $ab(a - b)$. Osoita, että ab on kokonaisluvun kuutio.

2008.1. Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit $p(x)$, joilla

$$p\left((x+1)^3\right) = (p(x) + 1)^3$$

ja $p(0) = 0$.

2008.2. Osoita, että jos reaaliluvut a, b ja c toteuttavat yhtälön $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, niin

$$\frac{a^2}{2 + b + c^2} + \frac{b^2}{2 + c + a^2} + \frac{c^2}{2 + a + b^2} \geq \frac{(a + b + c)^2}{12}.$$

Milloin yhtäsuuruus pätee?

2008.3. Onko olemassa sellainen kulma $\alpha \in]O, \pi/2[$, että $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ ovat jossakin järjestyksessä aritmeettisen jonon peräkkäisiä termejä?

2008.4. Polynomin P kertoimet ovat kokonaislukuja, ja $P(x) = 5$ viidellä eri kokonaisluvulla x. Osoita, ettei millään kokonaisluvulla x voi olla $-6 \leq P(x) \leq 4$ tai $6 \leq P(x) \leq 16$.

2008.5. Romeolla ja Julialla on kummallakin säännöllinen tetraedri. Tetraedrien kussakin kärjessä on positiivinen reaaliluku. He liittävät jokaiseen särmään sen kahden kärjen lukujen tulon. Sitten he kirjoittavat jokaiselle tahkolle sen kolmen särmän lukujen summan. Romeon tetraedrin tahkoille kirjoitetut neljä lukua osoittautuvat samoiksi kuin Julian tetraedrin tahkoille kirjoitetut neljä lukua. Seuraako tästä, että Romeon tetraedrin kärkien neljä lukua ovat samat kuin Julian tetraedrin kärkien neljä lukua?

2008.6. Etsi kaikki äärelliset positiivisten kokonaislukujen joukot, joissa on vähintään kaksi alkiota ja jotka toteuttavat seuraavan ehdon: jos kaksi lukua a ja b ($a > b$) kuuluvat joukkoon, niin myös $\dfrac{b^2}{a - b}$ kuuluu joukkoon.

2008.7. Kuinka moni positiivisten kokonaislukujen pari (m, n), jossa $m < n$, toteuttaa yhtälön

$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}?$$

2008.8. Tarkastellaan positiivisten kokonaislukujen joukkoa A, jonka pienin alkio on 1001 ja jonka kaikkien alkioiden tulo on kokonaisluvun neliö. Mikä on pienin mahdollinen joukon A suurimman alkion arvo?

2008.9. Positiiviset kokonaisluvut a ja b toteuttavat yhtälön

$$a^b - b^a = 1008.$$

Osoita, että a ja b ovat kongruentteja keskenään modulo 1008.

2008.10. Olkoon $S(n)$ positiivisen kokonaisluvun n numeroiden summa. Määritä lausekkeen $\dfrac{S(n)}{S(16n)}$ suurin mahdollinen arvo.

2008.11. Tarkastellaan joukon $\{1, 2, \ldots, 169\}$ osajoukkoa A, jossa on 84 alkiota ja jonka minkään kahden alkion summa ei ole 169. Osoita, että A sisältää kokonaisluvun neliön.

2008.12. Koululuokalla on $3n$ lasta. Jokaiset kaksi lasta tekevät yhteisen lahjan täsmälleen yhdelle muulle lapselle. Osoita, että kaikilla parittomilla n seuraava tilanne on mahdollinen: jokaiselle kolmen lapsen A, B ja C ryhmälle pätee, että jos A ja B tekevät lahjan C:lle, niin A ja C tekevät lahjan B:lle.

2008.13. Tulevaa kansainvälistä matematiikkakilpailua varten osallistujamaita pyydettiin valitsemaan yhdeksästä kombinatoriikan ongelmasta omat suosikit kilpailutehtäviksi. Ottaen huomioon kuinka hankalaa yksimielisyyteen pääseminen yleensä on, kukaan ei ollut yllättynyt, kun kävi nain:

- Jokainen maa äänesti täsmälleen kolmea tehtävää.
- Jokaiset kaksi maata äänestivät eri tehtäväjoukkoja.
- Millä tahansa kolmella maalla on jokin tehtävä, jota mikään maista ei äänestänyt.

Mikä on suurin mahdollinen osallistujamaiden lukumäärä?

2008.14. Onko mahdollista rakentaa $4\times4\times4$-kuutio kuvan mukaisista, neljästä yksikkökuutiosta koostuvista palikoista?

2008.15. $n \times n$-ruudukolle asetetaan kaksi vierekkäistä ruutua peittäviä 1×2-dominoita siten, että ne eivät koske toisiinsa (edes kulmissa) ja että niiden peittämä ala on 2008. Etsi pienin n, jolla tämä onnistuu.

2008.16. Olkoon $ABCD$ suunnikas. Ympyrä, jonka halkaisija on AC, leikkaa suoran BD pisteissä P ja Q. Pisteen C kautta piirretty suoraa AC vastaan kohtisuora suora leikkaa suorat AB ja AD pisteissä X ja Y. Osoita, että pisteet P, Q, X ja Y ovat samalla ympyrällä.

2008.17. Olkoot a, b, c ja d annetun ympyrän sisään piirretyn nelikulmion sivut. Osoita, että tulo $(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$ saavuttaa maksiminsa, kun nelikulmio on neliö.

2008.18. Olkoon AB ympyrän S halkaisija ja L pisteeseen A piirretty tangentti. Olkoon lisäksi c kiinnitetty positiivinen reaaliluku. Tarkastellaan kaikkia suoran L pistepareja X ja Y, jotka sijaitsevat pisteen A eri puolilla, niin että $|AX| \cdot |AY| = c$. Suorat BX ja BY leikkaavat ympyrän S pisteissä P ja Q. Osoita, että kaikki tällaiset suorat PQ kulkevat saman pisteen kautta.

2008.19. Yksikköhalkaisijaisen ympyrän sisään piirretään jänteitä. Niiden pituuksien summa on yli 19. Osoita, että ympyrällä on halkaisija, joka leikkaa ainakin seitsemää jännettä.

2008.20. Olkoon piste M janalla BC ja piste N janalla AB, niin että AM ja CN ovat kolmion ABC kulmanpuolittajia. Lisäksi

$$\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA}.$$

Osoita, että kolmio ABC on tasakylkinen.

2009.1. Astetta $n \geq 2$ olevalla polynomilla $p(x)$ on täsmälleen n reaalista juurta, joista osa voi olla moninkertaisia. Tiedämme, että termin x^n kerroin on 1, että kaikki juuret ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin 1 ja että $p(2) = 3^n$. Mitä arvoja $p(1)$ voi saada?

2009.2. Ei-negatiiviset kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ toteuttavat epäyhtälön

$$a_1(a_1 - 1) \cdots (a_1 - 20) + a_2(a_2 - 1) \cdots (a_2 - 20) + \cdots + a_{100}(a_{100} - 1) \cdots (a_{100} - 20) \\ \leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 79.$$

Osoita, että $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} \leq 9900$.

2009.3. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on mahdollista valita kertoimet $c_k \in \{-1, 1\}$, $1 \leq k \leq n$, siten, että

$$0 \leq \sum k = 1^n c_k \cdot k^2 \leq 4.$$

2009.4. Määritä kaikki kokonaisluvut $n > 1$, joilla epäyhtälö

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})x_n$$

pätee kaikilla reaaliluvuilla $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2009.5. Olkoon $f_0 = f_1 = 1$ ja $f_{i+1} + f_i$, kun $i \geq 0$. Ratkaise yhtälö

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}$$

reaalilukujen joukossa.

2009.6. Olkoot a ja b sellaisia kokonaislukuja, että yhtälöllä $x^3 - ax^2 - b = 0$ on kolme kokonaislukujuurta. Osoita, että $b = dk^2$, missä d ja k ovat kokonaislukuja ja d on luvun a tekijä.

2009.7. Olkoon p alkuluku ja a, b ja c kokonaislukuja. Oletetaan, että

$$6 \mid p + 1, \quad p \mid a + b + c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Osoita, että p on lukujen a, b ja c tekijä.

2009.8. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla joukko

$$\{n, n + 1, n + 2, \ldots, n + 8\}$$

voidaan jakaa kahteen osaan niin, että ensimmäisen osan alkioiden tulo on sama kuin toisen osan alkioiden tulo.

2009.9. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $2^{n+1} - n^2$ on alkuluku.

2009.10. Olkoon $d(k)$ positiivisen kokonaisluvun k positiivisten tekijöiden lukumäärä. Osoita, että on olemassa äärettömän paljon positiivisia kokonaislukuja M, joita ei voi esittää muodossa

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$

millään positiivisella kokonaisluvulla n.

2009.11. Olkoon M kolmion ABC sivun AC keskipiste. K on piste puolisuoralla BA eri puolella pistettä A kuin B. Suora KM leikkaa sivun BC pisteessä L. Piste P on janalla BM niin, että PM on kulman LPK puolittaja. Suora ℓ kulkee pisteen A kautta ja on yhdensuuntainen suoran BM kanssa. Osoita, että pisteen M kohtisuora projektio suoralle ℓ on suoralla PK.

2009.12. Nelikulmiossa $ABCD$ on $AB \| CD$ ja $AB = 2 \cdot CD$. Suora ℓ on kohtisuorassa suoraa CD vastaan ja kulkee pisteen C kautta. Ympyrä, jonka keskipiste on D ja säde DA, leikkaa suoran ℓ pisteissä P ja Q. Osoita, että $AP \perp BQ$.

2009.13. Piste H on kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste ja janat AD, BE ja CF ovat kolmion korkeusjanat. Pisteet I_1, I_2 ja I_3 ovat kolmioiden EHF, FHD ja DHE sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet, tässä järjestyksessä. Osoita, että suorat AI_1, BI_2 ja CI_3 leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

2009.14. Millä $n \geq 2$ on mahdollista löytää n pareittain epäyhdenmuotoista kolmiota Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n niin, että jokainen niistä voidaan jakaa n:ksi pareittain epäyhdenmuotoiseksi kolmioksi, joista jokainen on yhdenmuotoinen yhden kolmioista Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n kanssa?

2009.15. Yksikköneliö on jaettu m:ksi nelikulmioksi Q_1, Q_2, ..., Q_m. Olkoon S_i nelikulmion Q_i kaikkien sivujen neliöiden summa, $i = 1, 2, \ldots, m$. Osoita, että

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_m \geq 4.$$

2009.16. *Trondheimilainen n-hoipertelu* on kävely, joka lähtee pisteestä $(0, 0)$, ei leikkaa itseään ja päätyy pisteeseen $(2n, 0)$. Lisäksi hoipertelija pysyy koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä ja jokainen askel on jokin vektoreista $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$. (Kuvassa on esitetty kaikki trondheimilaiset 2-hoipertelut.) Kuinka monta trondheimilaista n-hoipertelua on olemassa?

2009.17. Etsi suurin n, jolla on olemassa n eri suurta kokonaislukua, joista yksikään ei ole jaollinen 7:llä, 11:llä eikä 13:lla, mutta minkä tahansa kahden luvun summa on jaollinen ainakin yhdellä luvuista 7, 11 ja 13.

2009.18. Olkoon $n > 2$ kokonaisluku. Eräässä maassa on n kaupunkia ja jokaisen kahden välissä on suora tie. Jokaisella tiellä on numero, joka on joukkoon $\{1, 2, \ldots, m\}$ kuuluva luku (kahdella tiellä voi olla sama numero). Kaupungin *tärkeysindeksi* on on sinne johtavien teiden numeroiden summa. Etsi pienin m, jolla kaikilla kaupungeilla voi olla eri tärkeysindeksi.

2009.19. Kahdeksan hengen juhlissa jokaiset kaksi osallistujaa joko tuntevat toisensa tai eivät tunne toisiaan. Jokainen tuntee täsmälleen kolme muuta. Voivatko seuraavat ehdot toteutua yhtä aikaa:

- missä tahansa kolmen hengen joukossa on ainakin kaksi, jotka eivät tunne toisiaan;
- missä tahansa neljän hengen joukossa on ainakin kaksi, jotka tuntevat toisensa?

2009.20. Tulevaisuuden Baltian Tie -kaupungissa on 16 sairaalaa. Joka yö täsmälleen neljä niistä päivystää. Voiko päivystysaikataulun järjestää niin, että 20 yön jälkeen mitkä tahansa kaksi sairaalaa olivat samassa päivystysvuorossa täsmälleen kerran?

2010.1. Etsi kaikki reaalilukuneliköt (a, b, c, d), jotka toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2010} = 3a \\ (a+c+d)^{2010} = 3b \\ (a+b+d)^{2010} = 3c \\ (a+b+c)^{2010} = 3d \end{cases}$$

2010.2. Olkoon x reaaliluku, jolle $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Todista, että

$$\cos^2(x)\cot(x) + \sin^2(x)\tan c \geq 1.$$

2010.3. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ ykköstä suurempia reaalilukuja. Oletetaan, että kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ pätee $|x_i - x_{i+1}| < 1$. Osoita, että

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

2010.4. Etsi kaikki sellaiset reaalikertoimiset polynomit $P(x)$, että kaikilla kokonaisluvuilla x pätee

$$(x - 2010)P(x + 67) = xP(x).$$

2010.5. Merkitään $\mathbb{R}$:llä kaikkien reaalilukujen joukkoa. Etsi kaikki kuvaukset $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y),$$

kun $x, y \in \mathbb{R}$.

2010.6. $n \times n$-ruudukko on väritetty n:llä värillä niin, että pääviistorivi (ylävasemmalta alaoikealle) on väritetty ensimmäisellä värillä, sen viereiset kaksi viistoriviä toisella värillä, seuraavat kaksi viistoriviä (yksi ylempi ja yksi alempi) kolmannella jne. Siis kulmaruuduista kaksi (yläoikea ja alavasen) väritetään n:nnellä värillä. Tiedetään, että on mahdollista sijoittaa laudalle n tornia niin, että ne eivät uhkaa toisiaan ja mitkään kaksi tornia eivät sijaitse samanvärisillä ruuduilla. Todista, että $n \equiv 0 \pmod 4$ tai $n \equiv 1 \pmod 4$.

2010.7. Maassa on muutama kaupunki, joista yksi on pääkaupunki. Minkä tahansa kahden kaupungin A ja B välillä on olemassa suora lento kaupungista A kaupunkiin B ja kaupungista B kaupunkiin A, ja lisäksi nämä lennot ovat samanhintaisia. Oletetaan, että kaikki kiertomatkat, jotka laskeutuvat täsmälleen kerran kuhunkin kaupunkiin, maksavat yhtä paljon. Todista, että kaikki kiertomatkat, jotka jättävät pääkaupungin väliin ja käyvät täsmälleen kerran kaikissa muissa kaupungeissa, maksavat yhtä paljon.

2010.8. 30 jäsenen klubissa jokaisella jäsenellä on aluksi hattu. Eräänä päivänä kukin jäsen lähettää hattunsa jollekin toiselle jäsenelle (jäsenet saattavat vastaanottaa useamman kuin yhden hatun). Todista, etä on olemassa sellainen 10 jäsenen ryhmä, että kukaan ryhmän jäsenistä ei ole saanut keltään toiselta ryhmän jäseneltä hattua.

2010.9. Kasassa on 1000 tulitikkua. Kaksi pelaajaa ottaa kasasta vuorollaan yhdestä viiteen tulitikkua. Lisäksi on sallittua korkeintaan kymmenellä vuorolla ottaa kasasta kuudeskin tikku. Esimerkiksi ensimmäinen pelaaja voi tehdä seitsemän tällaista poikkeussiirtoa ja toinen pelaaja kolme poikkeussiirtoa, eikä sen jälkeen poikkeussiirtoja sallita. Viimeisen tulitikun ottava voittaa. Määritä, kummalla pelaajista on voittostrategia.

2010.10. Olkoon n kokonaisluku, $n \geq 3$. Tarkastellaan kuperan n-kulmion kaikkia jakoja kolmioiksi $(n-3)$:lla toisiaan leikkaamattomalla lävistäjällä. Tarkastellaan edelleen näiden kolmioiden värityksiä mustiksi ja valkoisiksi niin, että kolmiot, joilla on yhteinen sivu, ovat erivärisiä. Määritä mustien kolmioiden pienin mahdollinen lukumäärä.

2010.11. Olkoon $ABCD$ neliö sekä S sen lävistäjien AC ja BD leikkauspiste. Ympyrä k kulkee pisteiden A ja C sekä ympyrä k' pisteiden B ja D kautta. Ympyrät k ja k' leikkaavat toisensa tasan kahdessa eri pisteessä P ja Q. Osoita, että S on PQ:lla.

2010.12. Olkoon $ABCD$ puolisuunnikas, joka ei ole suunnikas.

a) Osoita, että puolisuunnikkaan sivujen AB, BC, CD ja DA pituudet (tässä jarjestyksessä) eivät muodosta aritmeettista jonoa.

b) Osoita, että on olemassa puolisuunnikas $ABCD$, jonka sivujen pituudet AB, BC, CD ja DA muodostavat aritmeettisen jonon, kun pituuksien järjestystä saa vaihtaa.

2010.13. Teräkulmaisessa kolmiossa ABC jana CD on korkeusjana ja H korkeusjanojen leikkauspiste. Määritä kaikki mahdolliset kulman CAB arvot, kun oletetaan, että kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste sijaitsee suoralla, joka sisältää kulman DHB puolittajan.

2010.14. Olkoot kolmion ABC kaikki kulmat teräviä. Olkoon D sellainen sivulla AC ja E sellainen sivulla BC oleva piste, että A, B, D ja E ovat samalla ympyrällä. Oletetaan edelleen, että ympyrä, joka kulkee pisteiden D, E ja C kautta, leikkaa sivun AB kahdessa pisteessä X ja Y. Osoita, että janan XY keskipiste on C:stä piirretyn korkeusjanan kantapiste AB:llä.

2010.15. Pisteet M ja N valitaan kolmion ABC kulmanpuolittajalta AL siten, että $\angle ABM = \angle ACN = 23^\circ$. X on sellainen piste kolmion sisällä, että $|BX| = |CX|$ ja $\angle BXC = 2 \cdot \angle BML$. Määritä $\angle MXN$.

2010.16. Kun k on positiivinen kokonaisluku, merkitään $d(k)$:lla luvun k positiivisten tekijöiden lukumäärää (esim. $d(12) = 6$). Olkoon $s(k)$ luvun k numeroiden summa (esim. $s(12) = 3$). Positiivinen kokonaisluku n on *viihdyttävä*, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku k, jolle $d(k) = s(k) = n$. Mikä on pienin viihdyttävä pariton kokonaisluku, joka on suurempi kuin 1?

2010.17. Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut n, että luvun n^2 kymmenjärjestelmäesitys koostuu pelkästään parittomista kokonaisluvuista.

2010.18. Olkoon p alkuluku. Jokaisella k, $1 \leq k \leq p-1$, on olemassa yksikäsitteinen kokonaisluku, jota merkitään k^{-1}, jolle $1 \leq k^{-1} \leq p-1$ ja $k^{-1} \cdot k \equiv 1(\mod p)$. Todista, että jono

$$1^{-1}, \quad 1^{-1}+2^{-1}, \quad 1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}, \quad \ldots, \quad 1^{-1}+2^{-1}+\cdots+(p-1)^{-1}$$

(yhteenlasku modulo p) sisältää korkeintaan $(p+1)/2$ eri lukua.

2010.19. Millä k:n arvoilla n olemassa k eri alkulukua p_1, p_2, …, p_k, joille

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2 = 2010?$$

2010.20. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille on olemassa sellainen ääretön positiivisten kokonaislukujen $\mathbb{Z}_+$ osajoukko A, että kaikilla eri luvuilla $a_1, \ldots, a_n \in A$ luvut $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ja $a_1 \cdots a_n$ ovat yhteistekijättömiä.

2011.1. Reaaliluvut x_1, …, x_{2011} toteuttavat yhtälöt

$$x_1 + x_2 = 2x_1', \quad x_2 + x_3 = 2x_2', \quad \ldots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x_{2011}',$$

missä $x_1', x_2', \ldots, x_{2011}'$ on jonon $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ permutaatio. Todista, että $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2011}$.

2011.2. Funktio $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ toteuttaa kaikilla kokonaisluvuilla x ja y yhtälön

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Osoita, että f on rajoitettu, ts. että on olemassa sellainen vakio C, että $-C < f(x) < C$ kaikilla kokonaisluvuilla x.

2011.3. Epänegatiivisten kokonaislukujen jono a_1, a_2, a_3, … on sellainen, että a_{n+1} on luvun $a_n^n + a_{n-1}$ viimeinen numero kaikilla $n > 2$. Pitääkö aina paikkansa, että jollakin n_0 jono a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, … on jaksollinen?

2011.4. Olkoot a, b, c ja d epänegatiivisia reaalilukuja ja $a + b + c + d = 4$. Todista, että

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}.$$

2011.5. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka toteuttaa ehdon

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

kaikilla reaaliluvuilla x. Määritä $f(0)$.

2011.6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että niiden suorien lukumäärä, jotka kulkevat origon ja täsmälleen yhden toisen pisteen (x, y) kautta, missä x ja y ovat kokonaislukuja, $0 \leq x \leq n$ ja $0 \leq y \leq n$, on vähintään $n^2/4$.

2011.7. Tarkastellaan 15-alkioista joukkoa $T = \{10a + b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a < b \leq 6\}$. Olkoon S joukon T osajoukko, jossa kaikki kuusi numeroa $1, 2, \ldots, 6$ esiintyvät mutta joka ei sisällä kolmikkoa, jossa esiintyisivät kaikki nämä 6 numeroa. Määritä joukon S suurin mahdollinen koko.

2011.8. Greifswaldissa on koulut A, B ja C, joista kutakin käy ainakin yksi oppilas. Kustakin oppilaskolmikosta, joista yksi käy koulua A, toinen koulua B ja kolmas koulua C, jotkin kaksi tuntevat toisensa ja jotkin kaksi eivät tunne toisiaan. Todista, että ainakin yksi seuraavista pätee:

– Jokin koulun A oppilas tuntee kaikki koulun B oppilaat.
– Jokin koulun B oppilas tuntee kaikki koulun C oppilaat.
– Jokin koulun C oppilas tuntee kaikki koulun A oppilaat.

2011.9. Väritetään $m \times n$-ruudukon ruudut mustiksi ja valkoisiksi. Värityksen sanotaan olevan *pätevä*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

- Kaikki reunaruudut ovat mustia.
- Mitkään neljä 2×2-ruudukon muodostavaa ruutua eivät ole samanvärisiä.
- Mitkään neljä 2×2-ruudukon muodostavaa ruutua eivät ole niin väritetyt, että vain kulmittain toisiaan koskettavat ruudut ovat samanvärisiä.

Millä $m \times n$-ruudukoilla, jossa $m, n \geq 3$, on olemassa pätevä väritys?

2011.10. Kaksi pelaajaa pelaa seuraavaa kokonaislukupeliä. Aluksi luku on 2011^{2011}, ja pelaajat siirtävät vuorotellen. Jokaisella siirrolla lukua voi vähentää kokonaisluvulla, joka on vähintään 1 ja korkeintaan 2010, tai luvun voi jakaa 2011:llä ja pyöristää alaspäin lähimpään kokonaislukuun. Pelaaja, joka ensimmäisenä päätyy epäpositiiviseen kokonaislukuun, voittaa. Kummalla pelaajista on voittostrategia?

2011.11. Olkoot AB ja CD ympyrän $\mathcal{C}$ kaksi halkaisijaa ja P $\mathcal{C}$:n mielivaltainen piste. Olkoot R ja S pisteestä P AB:lle ja CD:lle piirrettyjen kohtisuorien kantapisteet. Osoita, että janan RS pituus ei riipu pisteen P valinnasta.

2011.12. Olkoon P sellainen neliön $ABCD$ sisäpiste, että $PA : PB : PC$ on $1 : 2 : 3$. Määritä $\angle BPA$.

2011.13. Olkoon E kuperan nelikulmion $ABCD$ sisäpiste. Piirretään nelikulmion ulkopuolelle kolmiot ABF, BCG, CDH ja DAI siten, että $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ ja $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Olkoot P, Q, R ja S pisteen E projektiot suorilla AB, BC, CD ja DA, tässä järjestyksessä. Todista, että jos $PQRS$ on jännenelikulmio, niin

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC\,.$$

2011.14. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F, tässä järjestyksessä. Olkoon G se sisään piirretyn ympyrän piste, jolle FG on ympyrän halkaisija. Suorat EG ja FD leikkaavat pisteessä H. Todista, että $CH \parallel AB$.

2011.15. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio, jossa $\angle ADB = \angle BDC$. Oletetaan, että sivun AD piste E toteuttaa yhtälön

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Osoita, että $\angle EBA = \angle DCB$.

2011.16. Olkoon a kokonaisluku. Määritellään jono $x_0, x_1, \ldots$ asettamalla $x_0 = a$, $x_1 = 3$ ja

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3,$$

kun $n > 1$. Määritä suurin kokonaisluku k_a, jolla on olemassa sellainen alkuluku p, että p^{k_a} jakaa luvun $x_{2011} - 1$.

2011.17. Määritä kaikki sellaiset positiviset kokonaisluvut d, että jos d jakaa kokonaisluvun n, niin d jakaa myös jokaisen kokonaisluvun m, jonka numerot ovat jossain järjestyksessä samat kuin luvun n numerot.

2011.18. Määritä kaikki alkulukuparit (p, q), joille sekä $p^2 + q^3$ että $q^2 + p^3$ ovat kokonaisluvun neliöitä.

2011.19. Olkoon $p \neq 3$ alkuluku. Osoita, että on olemassa toistoton positiivisten kokonaislukujen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ aritmeettinen jono, jonka jäsenten tulo on kokonaisluvun kuutio.

2011.20. Kokonaislukua $n \geq 1$ kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos sillä on parillinen määrä eri alkutekijöitä. Todista, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua n, että täsmälleen kaksi luvuista n, $n+1$, $n+2$ ja $n+3$ on tasapainoisia.

2012.1. Luvut $1, 2, \ldots, 360$ ositetaan yhdeksäksi osajoukoksi peräkkäisiä kokonaislukuja, ja näissä joukoissa olevien lukujen summat järjestetään 3×3-taulukoksi. Onko mahdollista, että näin syntyvä taulukko on taikaneliö?

Huomautus: Taikaneliö on neliön muotoinen lukutaulukko jossa jokaisen rivin, jokaisen sarakkeen ja kummankin lävistäjän lukujen summat ovat kaikki keskenään yhtä suuria.

2012.2. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Osoita, että

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leqslant 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

2012.3. a) Todista, että yhtälöllä

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

missä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka ei ole suurempi kuin x, on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu jokaisella kahden peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun määräämällä välillä.

b) Osoita, ettei mikään tämän yhtälön positiivisista reaalilukuratkaisuista ole rationaalinen.

2012.4. Osoita, että äärettömän monella kokonaislukuparilla (a, b) yhtälön

$$x^{2012} = ax + b$$

ratkaisujen joukosta löytyy kaksi eri reaalilukua, joiden tulo on 1.

2012.5. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x + y) = f(x - y) + f(f(1 - xy))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

2012.6. Pöydällä on 2012 lamppua. Kaksi henkilöä pelaa seuraavanlaista peliä. Vuorossa oleva pelaaja painaa jonkin lampun katkaisijaa, mutta näin syntyvä asetelma ei ole saanut esiintyä aiemmin pelin aikana. Pelaaja, joka ei voi enää tehdä laillista siirtoa, häviää. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

2012.7. 2012×2012-ruudukon oikeasta ylänurkasta vasempaan alanurkkaan kulkevan lävistäjän jotkin ruudut on merkitty. Nurkkaruutuja ei ole merkitty. Ruudukon jokaiseen ruutuun kirjoitetaan kokonaisluku seuraavalla tavalla. Ruudukon ylimmän rivin ja vasemman puoleisimman sarakkeen ruutuihin kirjoitetaan luku yksi. Merkittyihin ruutuihin kirjoitetaan kuhunkin nolla. Jokaiseen muuhun ruutuun kirjoitetaan sen yläpuolella ja vasemmalla olevien naapuriruutujen lukujen summa. Osoita, ettei oikeasta alanurkasta voi löytyä luvulla 2011 jaollista lukua.

2012.8. On annettu suunnistettu verkko, joka ei sisällä suunnistettuja syklejä, ja jossa jokaisen polun särmien lukumäärä on enintään 99. Osoita, että on mahdollista värittää verkon särmät kahdella värillä siten, että jokaisessa yksivärisessä polussa on enintään 9 särmää.

2012.9. Kaikkiin 5×5-ruudukon ruutuihin on kirjoitettu luku nolla. Voimme yksi kerrallaan ottaa jonkin ruudun ja sen naapuriruudut (joilla on yhteinen sivu sen kanssa), ja kasvattaa kaikkien niiden sisältämiä lukuja yhdellä. Onko mahdollista saada aikaan ruudukko, jonka jokaisessa ruudussa on luku 2012?

2012.10. Henkilöt A ja B pelaavat seuraavaa peliä. Ennen kuin peli alkaa, A valitsee 1000 paritonta alkulukua (joiden ei tarvitse olla erisuuria), ja sitten B valitsee niistä puolet ja kirjoittaa ne tyhjälle liitutaululle. Vuorossa oleva pelaaja valitsee positiivisen kokonaisluvun n, pyyhkii taululta jotkin alkuluvut $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ja kirjoittaa niiden tilalle luvun $p_1 p_2 \cdots p_n - 2$ alkulukutekijät. (Jos jokin alkuluku esiintyy alkutekijähajotelmassa useamman kerran, niin se myös kirjoitetaan taululle yhtä monta kertaa kuin se tekijähajotelmassa esiintyy.) Pelaaja A aloittaa, ja se pelaaja, jonka siirto jättää jäljelle vain tyhjän liitutaulun, häviää. Osoita, että toisella pelaajista on voittostrategia, ja selvitä kummalla.

Huomautus: Koska luvulla 1 ei ole alkulukutekijöitä, on yksittäisen luvun 3 poistaminen sallittua.

2012.11. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa $\angle A = 60°$. Piste T sijaitsee kolmion sisällä siten, että $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Olkoon M janan BC keskipiste. Osoita, että $TA + TB + TC = 2AM$.

2012.12. Olkoot P_0, P_1, ..., $P_8 = P_0$ ympyrän kehän peräkkäisiä pisteitä, ja olkoon piste Q monikulmion $P_0P_1 \dots P_7$ sisällä siten, että $\angle P_{i-1}QP_i = 45^\circ$ kun $i = 1, \dots, 8$. Osoita, että summa

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i^2$$

on pienimmillään täsmälleen silloin, kun piste Q on ympyrän keskipiste.

2012.13. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, ja olkoon H sen ortokeskus. Kärjistä A, B ja C piirretyt korkeusjanat leikkaavat ympäri piirretyn ympyrän pisteiden A, B ja C ohella myös pisteissä H_A, H_B ja H_C, tässä järjestyksessä. Osoita, ettei kolmion $\triangle H_AH_BH_C$ ala voi olla suurempi kuin kolmion $\triangle ABC$ ala.

2012.14. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa sivuja BC, CA ja AB pisteissä D, E ja F, tässä järjestyksessä. Olkoon G janan DE keskipiste. Osoita, että $\angle EFC = \angle GFD$.

2012.15. Jännenelikulmion $ABCD$ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O sijaitsee kyseisen nelikulmion sisällä, mutta ei sen lävistäjällä AC. Nelikulmion lävistäjät leikkaavat pisteessä I. Kolmion AOI ympäri piirretty ympyrä leikkaa sivun AD pisteessä P ja sivun AB pisteessä Q; kolmion COI ympäri piirretty ympyrä leikkaa sivun CB pisteessä R ja sivun CD pisteessä S. Osoita, että $PQRS$ on suunnikas.

2012.16. Olkoot n, m ja k positiivisia kokonaislukuja, joille $(n-1)n(n+1) = m^k$. Osoita, että $k = 1$.

2012.17. Merkitköön $d(n)$ luvun n positiivisten tekijöiden lukumäärää. Etsi kaikki kolmikot (n, k, p), joissa n ja k ovat positiivisia kokonaislukuja ja p on alkuluku, ja joille

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

2012.18. Etsi kaikki kokonaislukukolmikot (a, b, c), joille $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

2012.19. Osoita, että luku $n^n + (n+1)^{n+1}$ on yhdistetty äärettömän monella positiivisella kokonaisluvulla n.

2012.20. Etsi kaikki yhtälön $2x^6 + y^7 = 11$ kokonaislukuratkaisut.

2013.1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Oletetaan, että n lukua valitaan taulukosta

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

niin, että miltään sarakkeelta tai riviltä ei ole valittu kahta lukua. Määritä näiden n:n luvun suurin mahdollinen tulo.

2013.2. Olkoot k ja n positiivisia kokonaislukuja ja $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n$ keskenään eri suuria kokonaislukuja. Kokonaislukukertoimiselle polynomille P pätee

$$P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_k) = 54$$

ja

$$P(y_1) = P(y_2) = \cdots = P(y_n) = 2013.$$

Määritä lausekkeen kn suurin mahdollinen arvo.

2013.3. Merkitään reaalilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{R}$. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niin, että

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

2013.4. Todista, että seuraava epäyhtälö pätee kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x, y, z:

$$\frac{x^3}{y^2+z^2} + \frac{y^3}{z^2+x^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

2013.5. Luvut 0 ja 2013 kirjoitetaan kuution vastakkaisiin kärkiin. Jäljellä oleviin kuuteen kärkeen kirjoitetaan jotkin reaaliluvut. Jokaiseen kuution särmään kirjoitetaan sen päätepisteissä olevien lukujen erotus. Milloin särmille kirjoitettujen lukujen neliöiden summa on pienin mahdollinen?

2013.6. Joulupukilla on ainakin n lahjaa n:lle lapselle. Jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i:s lapsi pitää $x_i > 0$ eri lahjasta. Oletetaan, että

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

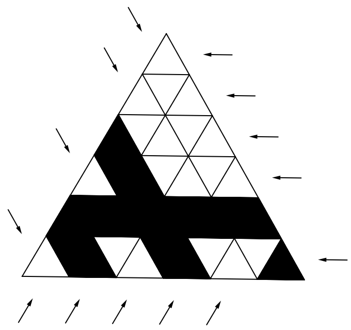
Todista, että joulupukki voi antaa jokaiselle lapselle lahjan, josta tämä pitää.

2013.7. Liitutaululle on kirjoitettu positiivinen kokonaisluku. Pelaajat A ja B pelaavat seuraavaa peliä: vuorollaan pelaaja valitsee taululla olevan luvun n tekijän m, jolle $1 < m < n$, ja korvaa luvun n luvulla $n - m$. Pelaaja A aloittaa ja pelaajat vuorottelevat. Pelaaja, joka ei voi siirtää, häviää. Millä ensimmäisillä luvuilla pelaajalla B on voittostrategia?

2013.8. Saunassa on n huonetta, joissa on rajattomasti tilaa. Yhdessäkään huoneessa ei voi olla samanaikaisesti miestä ja naista. Lisäksi miehet haluavat saunoa samassa huoneessa vain sellaisten miesten kanssa, joita eivät tunne, ja naiset haluavat saunoa samassa huoneessa vain sellaisten naisten kanssa, joita tuntevat. Etsi suurin luku k, jolle k aviopaaria voi käydä saunassa yhtä aikaa olettaen, että kaksi miestä tuntee toisensa, jos ja vain jos heidän vaimonsa tuntevat toisensa.

2013.9. Maassa on 2014 lentokenttää, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Kahden lentokentän välillä on suora lento, jos ja vain jos näiden lentokenttien välinen suora jakaa maan kahteen osaan, joissa kummassakin on 1006 lentokenttää. Osoita, ettei ole olemassa kahta lentokenttää niin, että toisesta pääsee toiseen lentoreittiä, joka kulkee jokaisen 2014 lentokentän kautta täsmälleen kerran.

2013.10. Valkoinen tasasivuinen kolmio jaetaan n^2 yhtä suureen pienempään kolmioon suorilla, jotka ovat yhdensuuntaisia kolmion sivujen kanssa. Kutsutaan kolmiojonoksi kaikkia kolmioita, jotka ovat kahden vierekkäisen yhdensuuntaisen suoran välissä. Erityisesti alkuperäisen kolmion kärjessä oleva kolmio on myös kolmiojono. Väritetään kaikki kolmiot mustiksi käyttämällä seuraavanlaisia operaatioita: valitaan kolmiojono, jossa on ainakin yksi valkoinen kolmio ja väritetään se mustaksi (mahdollinen tilanne tapauksessa $n = 6$ neljän operaation jälkeen on esitetty oheisessa kuvassa; nuolet kuvaavat mahdollisia seuraavia operaatioita tässä tilanteessa). Määritä väritykseen tarvittavien operaatioiden pienin ja suurin mahdollinen määrä.



2013.11. Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC, jossa $AC > AB$, D on pisteen A projektio sivulla BC. Olkoot E ja F pisteen D projektiot sivuilla AB ja AC. Olkoon G suorien AD ja EF leikkauspiste. Olkoon H suoran AD ja kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän toinen leikkauspiste. Todista, että

$$AG \cdot AH = AD^2.$$

2013.12. Olkoon $ABCD$ puolisuunnikas, jossa $AB \| CD$. Oletetaan, että kolmion BCD ympäri piirretty ympyrä leikkaa suoran AD pisteessä E, $E \neq A$, D. Todista, että suora BC sivuaa kolmion ABE ympäri piirrettyä ympyrää.

2013.13. Tetraedrin kaikki tahkot ovat suorakulmaisia kolmioita. Tiedetään, että kolmella sen särmistä on sama pituus s. Määritä tetraedrin tilavuus.

2013.14. Samasäteiset ympyrät α ja β leikkaavat kahdessa pisteessä, joista toinen on P. Olkoot A ja B pisteestä P piirrettyjen halkaisijoiden toiset päätepisteet ympyröillä α ja β, tässä järjestyksessä. Kolmas samasäteinen ympyrä kulkee pisteen P kautta ja leikkaa ympyrät α ja β pisteissä X ja Y, tässä järjestyksessä. Osoita, että suorat XY ja AB ovat yhdensuuntaiset.

2013.15. Tasoon on piirretty neljä samankeskistä ympyrää, joiden säteet muodostavat aidosti kasvavan aritmeettisen jonon. Todista, että ei ole olemassa sellaista neliötä, että kukin näistä ympyröistä sisältäisi tasan yhden neliön kärjen.

2013.16. Kutsutaan positiivista kokonaislukua n *miellyttäväksi*, jos on olemassa kokonaisluku k, $1 < k < n$, siten että

$$1 + 2 + \cdots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \cdots + n.$$

Onko olemassa miellyttävää lukua N, jolle pätee

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4?$$

2013.17. Olkoot c ja $n > c$ positiivisia kokonaislukuja. Maryn opettaja kirjoittaa taululle n positiivista kokonaislukua. Pitääkö paikkansa kaikilla n ja c, että Mary voi aina valita opettajan kirjoittamille luvuille järjestyksen $a_1, , \ldots, a_n$ niin, että syklinen tulo $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdots (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$ on kongruentti toisen luvuista 0 tai c kanssa modulo n?

2013.18. Määritä kaikki kokonaislukuparit (x, y), joille $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

2103.19. Olkoon $a_0 = a > 0$ kokonaisluku ja $a_n = 5a_{n-1} + 4$ kaikilla $n \geq 1$. Voidaanko a valita niin, että a_{54} on luvun 2013 monikerta?

2013.20. Määritä kaikki polynomit f, joiden kertoimet ovat epänegatiivisia kokonaislukuja siten, että kaikilla alkuluvuilla p ja positiivisilla kokonaisluvuilla n on olemassa alkuluku q ja positiivinen kokonaisluku m siten, että $f(p^n) = q^m$.

2014.1. Osoita, että

$$\cos(56°) \cdot \cos(2 \cdot 56°) \cdot \cos(2^2 \cdot 56°) \cdot \ldots \cdot \cos(2^{23} \cdot 56°) = \frac{1}{2^{24}}.$$

2014.2. Olkoot $a_0, a_1, \ldots, a_N$ reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdon $a_0 = a_N = 0$, ja joille

$$a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = a_i^2,$$

kun $i = 1, 2, \ldots, N - 1$. Osoita, että $a_i \leq 0$, kun $i = 1, 2, \ldots, N - 1$.

2014.3. Positiiviset reaaliluvut a, b, c toteuttavat ehdon $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Todista epäyhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

2014.4. Etsi kaikki reaaliluvuilla määritellyt ja reaaliarvoiset funktiot f, joille

$$f(f(y)) + f(x - y) = f(xf(y) - x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x, y.

2014.5. Jos positiiviset reaaliluvut a, b, c, d toteuttavat yhtälöt

$$a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc \qquad \text{ja} \qquad a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

niin määritä lausekkeen $\frac{ab+cd}{ad+bc}$ kaikki mahdolliset arvot.

2014.6. Kuinka monella tavalla voidaan maalata rivissä olevat 16 istuinta vihreiksi ja punaisiksi niin, että peräkkäisten yhdellä värillä maalattujen istuinten määrä on aina pariton?

2014.7. Olkoon $p_1, p_2, \ldots, p_{30}$ lukujen 1, 2, ..., 30 permutaatio. Kuinka monelle tällaiselle permutaatiolle pätee yhtälö

$$\sum_{k=1}^{30} |p_k - k| = 450?$$

2014.8. Albert ja Betty pelaavat seuraavat peliä. Punaisessa kulhossa on 100 sinistä palloa ja sinisessä kulhossa 100 punaista palloa. Jokaisella vuorolla pelaajan täytyy tehdä yksi seuraavista siirroista:

a) Ottaa kaksi punaista palloa sinisestä kulhosta ja laittaa ne punaiseen kulhoon.

b) Ottaa kaksi sinistä palloa punaisesta kulhosta ja laittaa ne siniseen kulhoon.

c) Ottaa kaksi eriväristä palloa yhdestä kulhosta ja heittää ne pois.

Pelaajat vuorottelevat ja Albert aloittaa. Se pelaaja voittaa, joka ensimmäisenä ottaa viimeisen punaisen pallon sinisestä kulhosta tai viimeisen sinisen pallon punaisesta kulhosta. Selvitä kummalla pelaajalla on voittostrategia.

2014.9. Mikä on pienin mahdollinen määrä ruutuja, jotka voi merkitä $n \times n$-ruudukolle niin, että kaikilla $m > \frac{n}{2}$ kaikkien $m \times m$-aliruudukkojen molemmat lävistäjät sisältävät jonkin merkityn ruudun?

2014.10. Maassa on 100 lentokenttää. Super-Air operoi suorin lennoin joidenkin lentokenttäparien väliä (molempiin suuntiin). Lentokentän *liikenneindeksi* on niiden lentokenttien määrä, joihin on suora Super-Airin lento. Uusi lentoyhtiö Concur-Air ryhtyy liikennöimään kahden lentokentän väliä jos ja vain jos niiden liikenneindeksien summa on vähintään 100. Havaitaan, että Concur-Airin lennoilla voi tehdä maanympärysmatkan laskeutuen jokaiselle kentälle täsmälleen kerran. Osoita, että myös Super-Airin lennoilla voi tehdä maanympärysmatkan laskeutuen jokaiselle kentälle täsmälleen kerran.

2014.11. Olkoon Γ teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Pisteen C kautta kulkeva sivun AB normaali leikkaa sivun AB pisteessä D ja ympyrän Γ myös pisteessä E. Kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä F ja ympyrän Γ myös pisteessä G. Suora GD leikkaa ympyrän Γ myös pisteessä H, ja suora HF leikkaa ympyrän Γ myös pisteessä I. Osoita, että $AI = EB$.

2014.12. Olkoon annettu kolmio ABC. Olkoon M sivun AB keskipiste ja olkoon T kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän sen kaaren BC keskipiste, joka ei sisällä pistettä A. Olkoon K piste kolmion ABC sisällä siten, että $MATK$ on tasakylkinen puolisuunnikas, jossa $AT \| MK$. Osoita, että $AK = KC$.

2014.13. Olkoot neliön $ABCD$ kärjet ympyrällä ω ja olkoon P ympyrän ω lyhyemmän kaaren AB jokin piste. Olkoot $CP \cap BD = R$ ja $DP \cap AC = S$. Osoita, että kolmioiden ARB ja DSR alat ovat yhtä suuret.

2014.14. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio, jossa BD puolittaa kulman ABC. Kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä leikkaa sivun AD pisteessä P ja sivun CD pisteessä Q. Pisteen D kautta kulkeva sivun AC suuntainen suora leikkaa suoran BC pisteessä R ja suoran BA pisteessä S. Osoita, että pisteet P, Q, R ja S ovat samalla ympyrällä.

2014.15. Kuperan nelikulmion $ABCD$ kulmien A ja C summa on pienempi kuin $180°$. Osoita, että

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC < AC(AB + AD).$$

2014.16. Selvitä, onko $712! + 1$ alkuluku.

2014.17. Onko olemassa pareittain erisuuria rationaalilukuja x, y ja z, joille

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = 2014?$$

2014.18. Olkoon p alkuluku, ja olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kuinka monta sellaista nelikkoa $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ on, missä $a_i \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$, kun $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, ja joille

$$p^n \mid (a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1)?$$

2014.19. Olkoot m ja n keskenään yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Etsi lausekkeen

$$\text{s.y.t.}(2^m - 2^n,\ 2^{m^2+mn+n^2} - 1)$$

kaikki mahdolliset arvot.

2014.20. Tarkastellaan sellaista positiivisten kokonaislukujen jonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jolle kaikilla $k \geq 2$ pätee

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2015^i},$$

missä 2015^i on suurin luvun 2015 potenssi, joka on luvun $a_k + a_{k-1}$ tekijä. Osoita, että jos kyseinen jono on jaksollinen, niin sen jakson pituus on jaollinen kolmella.

2015.1. Tasasivuinen kolmio jaetaan n^2:ksi pienemmäksi yhteneväksi tasasivuiseksi kolmioksi ($n \geq 2$). Määritä kaikki tavat, joilla jokaiseen kolmion kärkipisteeseen (pisteitä on $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$) voidaan kirjoittaa reaaliluku siten, että kolmen tällaisen luvun summa on nolla silloin, kun niitä vastaavat pisteet muodostavat kolmion, jonka sivut ovat yhdensuuntaiset alkuperäisen ison kolmion sivujen kanssa.

2015.2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $a : 1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ reaalilukuja, joille pätee $0 \leq a_i \leq 1$, kun $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Osoita, että

$$(1 - a_1^n)(1 - a_2^n) \cdots (1 - a_n^n) \leq (1 - a_1 a_2 \cdots a_n)^n.$$

2015.3. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Etsi kaikki ei-vakiot reaalilukukertoimiset polynomit $P(x)$, joille on voimassa kaikilla reaaliluvuilla x yhtälö

$$P(x)P(x^2)P(x^3) \cdots P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$

2015.4. Perhe käyttää vain kolmenvärisiä vaatteita: punaisia, sinisiä ja vihreitä. Jokaiselle värille on oma pyykkikorinsa, ja kaikki pyykkikorit ovat samanlaisia. Ensimmäisen viikon alussa kaikki pyykkikorit ovat tyhjiä. Joka viikko perheessä syntyy 10 kg pyykkiä (mutta eri värien osuus vaihtelee). Pyykki lajitellaan ensin värin mukaan pyykkikoreihin ja sitten painavimman korin pyykki pestään. (Jos painavimpia koreja on useita, vain yhden pyykki pestään.) Mikä on pienin mahdollinen pyykkikorin kapasiteetti, jos halutaan, että pyykkikorien tila aina riittää?

2015.5. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat kaikilla reaaliluvuilla x ja y yhtälön

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y)).$$

2015.6. Kaksi pelaajaa pelaa seuraavanlaista peliä vuorosiirroin. Aluksi on kaksi kasaa, joista toisessa on 10 000 ja toisessa 20 000 pelimerkkiä. Siirrolla pelaaja poistaa minkä tahansa positiivisen määrän merkkejä yhdestä pinosta tai poistaa $x > 0$ pelimerkkiä toisesta pinosta ja $y > 0$ pelimerkkiä toisesta pinosta, missä $x + y$ on jaollinen luvulla 2015. Pelaaja häviää, jos hän ei pysty tekemään siirtoa. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

2015.7. Hienostuneessa naisten teeseurassa on sata jäsentä. Jokainen jäsen on juonut (yksityisesti) teetä täsmälleen 56 seuran muun jäsenen kanssa. Johtokunnassa on 50 naista. He ovat kaikki juoneet teetä keskenään. Osoita, että seuran jäsenistä voidaan jakaa kahdeksi ryhmäksi niin, että kummankin ryhmän sisällä jokainen nainen on juonut teetä kaikkien muiden ryhmän jäsenten kanssa.

2015.8. New Yorkin suorakulmainen katuverkko on inspiroinut *Manhattan-etäisyyden*. Pisteiden (a, b) ja (c, d) Manhattan-etäisyydeksi määritellään luku

$$|a - c| + |b - d|.$$

Kuinka monta pistettä enintään on sellaisessa joukossa, jonka pisteiden välillä on vain kahta eri suurta Manhattan-etäisyyttä?

2015.9. Olkoon $n > 2$ kokonaisluku. Korttipakassa on $\frac{n(n-1)}{2}$ korttia, ja ne on numeroitu

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}.$$

Kaksi korttia muodostaa *maagisen parin*, jos niiden numerot ovat peräkkäiset ta jos niiden numerot ovat 1 ja $\frac{n(n-1)}{2}$. Millä luvuilla n kortit voidaan jakaa n:ään pinoon niin, että minkä tahansa kahden pinon korttien joukossa on täsmälleen yksi maaginen pari?

2015.10. Joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkoa S kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos kaikilla $a \in S$ on olemassa $b \in S$ niin, että $\frac{a+b}{2} \in S$.

a) Olkoon $k > 1$ kokonaisluku ja olkoon $n = 2^k$. Osoita, että jokainen joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukko S on tasapainoinen, kun $|S| > \frac{3n}{4}$.

b) Onko olemassa lukua $n = 2^k$, missä $k > 1$ on kokonaisluku, niin että jokainen joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukko S on tasapainoinen, jos $|S| > \frac{2n}{3}$?

2015.11. Suunnikkaan $ABCD$ lävistäjät leikkaavat toisensa pisteessä E Kulmien $\angle DAE$ ja $\angle EBC$ puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä F. Lisäksi tiedetään, että $ECFD$ on suunnikas. Määritä suhde $AB : AD$.

2015.12. Ympyrä kulkee kolmion ABC kärjen B kautta ja leikkaa kolmion sivun AB pisteessä K ja sivun BC pisteessä L. Lisäksi tämä ympyrä sivuaa janaa AC sen keskipisteessä M. Piste N on sillä ympyrän kaarella $\widehat{BL}$, jolla piste K ei ole, siten että $\angle LKN = \angle ABC$. Lisäksi tiedetään, että kolmio CKN on tasasivuinen. Määritä $\angle BAC$.

2015.13. Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä B piirretyb korkeusjanan kantapiste ja $AB = 1$. Kolmion BCD sisäympyrän keskipiste on sama kuin kolmion ABC keskijanojen leikkauspiste. Laske sivujen AC ja BC pituudet.

2015.14. Olkoon AD ei-tasakylkisen kolmion ABC korkeusjana. Olkoon M sivun BC keskipiste ja N pisteen M kuva peilauksessa pisteen D yli. Kolmion AMN ympärysympyrä leikkaa janan AB pisteessä $P \neq A$ ja janan AC pisteessä $Q \neq A$. Osoita, että suorat AN, BQ ja CP kulkevat saman pisteen kautta.

2015.15. Kolmiossa ABC kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa suoran BC pisteessä D ja kulman $\angle BAC$ vieruskulman puolittaja leikkaa suoran BC pisteessä E. Olkoon piste $F \neq A$ suoran AD ja kolmion ABC ympärysympyrän leikkauspiste. Olkoon O kolmion ABC ympärysympyrän keskipiste ja D' pisteen D kuva peilauksessa yli pisteen O. Osoita, että $\angle D'FE = 90°$.

2015.16. Olkoon $P(n)$ luvun n suurin alkutekijä. Millä kokonaisluvuilla $n \geq 2$ pätee

$$P(n) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = P(n+1) + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor?$$

2015.17. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille luku $n^{n-1} - 1$ on jaollinen luvulla 2^{2015}, mutta ei luvulla 2^{2016}.

2015.18. Olkoon $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ astetta $n \geq 1$ oleva polynomi, jolla on n kokonaislukunollakohtaa (jotka eivät välttämättä ole eri suuria). Tiedetään, että on olemassa alkuluvut p_0, p_1, ..., p_{n-1} niin, että kaikilla $i = 0, 1, \ldots, n-1$ luku a_i on luvun p_i potenssi. Etsi luvun n kaikki mahdolliset arvot.

2015.19. Kolme pareittain eri suurta kokonaislukua a, b, c toteuttaa ehdot

$$a \mid (b-c)^2, \quad b \mid (c-a)^2 \quad \text{ja} \quad c \mid (a-b)^2.$$

Lisäksi s.y.t.$(a, b, c) = 1$. Osoita että ei ole olemassa aitoa kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat a, b, c.

2015.20. Jos n on kokonaisluku, astetaan A_n sellaisten positiivisten kokonaislukujen m lukumääräksi, joiden jonkin ei-negatiivisen monikerran etäisyys luvusta n on sama kuin luvun n^3 etäisyys lähimpään luvun m ei-negatiiviseen monikertaan. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla A_n on pariton. (Lukujen a ja b etäisyys on $|a-b|$.)