Toukokuun valmennustehtävät

Ratkaisuja pyydetään kesäkuun valmennukseen mennessä. Tehtävät ovat hyvää harjoittelua IMO:a varten, ja toisaalta ne huomioidaan ensi vuoden joukkuevalinnoissa. Ratkaisuja voi lähettää osoitteeseen Joni Teräväinen, Pekankatu 5 A25, 00700 Helsinki ja ratkaisuja tai kysymyksiä sähköpostilla osoitteiseen `joni.teravainen@helsinki.fi`. Jokaisesta aihepiiristä on kolme tehtävää.

1. Määritä kaikki kolmikot (m, n, k) positiivisia kokonaislukuja, joille m ja n ovat yhteistekijättömiä ja

$$\frac{2^m - 1}{2^n - 1} = \left(\frac{m}{n}\right)^k.$$

2. Positiivinen kokonaisluku n on *tasapainoinen*, jos se voidaan kirjoittaa parillisen määrän (ei välttämättä erisuuria) alkulukuja tulona. Olkoot a ja b kokonaislukuja, ja määritellään polynomi $P(x) = (x + a)(x + b)$.
(a) Osoita, että löytyy erisuuret a ja b siten, että luvut $P(1), P(2), ..., P(2014)$ ovat kaikki tasapainoisia.
(b) Osoita, että jos $P(n)$ on tasapainoinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, niin $a = b$.

3. Olkoon $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ funktio, jolle $f(m)^2 + f(n) \mid (m^2 + n)^2$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että $f(n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

4. Olkoot a, b, c reaalilukuja, joille $a^4 + b^4 + c^4 = 27$. Osoita, että jokin seuraavista epäyhtälöistä pätee:

$$|ab - c| < 3, \quad |bc - a| < 3, \quad |ca - b| < 3, \quad abc < \frac{3}{2}.$$

5. Onko olemassa funktiota $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, jolle $f(f(n)) = n + 2013$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$?

6. Olkoon S äärellinen joukko kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa vakio C_S, jolle pätee seuraavaa: Aina, kun $f(x)$ on ei-vakio kokonaislukukertoiminen polynomi, relaatio $f(x) \in S$ totetuu enintään $\min\{\deg f, C_S\}$ kokonaisluvulla x.

7. Olkoon n annettu positiivinen kokonaisluku. Määritä suurin positiivinen kokonaisluku k siten, että joukko $\{1, 2, ..., n\}$ voidaan osittaa k osajoukoksi, joista kunkin alkioiden summa on sama.

8. Pöydällä on rivissä 2009 korttia, joilla on kultainen ja musta puoli. Alussa kaikki kortit ovat kultainen puoli ylöspäin. Kaksi pelaajaa pelaavat seuraavaa peliä (pöydän samalla puolella). Vuorollaan pelaaja valitsee jotkin 50 peräkkäistä korttia, joista vasemmanpuoleisin on kultainen, ja kääntää ne ympäri. Pelaaja, joka tekee viimeisen laillisen siirron, voittaa.
(a) Osoita, että peli päätyy.
(b) Onko aloittavalla pelaajalla voittostrategia?

9. Olkoon $n > 1$ pariton positiivinen kokonaisluku ja $c_1, ..., c_n$ kokonaislukuja. Jokaiselle lukujen $1, 2, ..., n$ permutaatiolle $a = (a_1, ..., a_n)$ määritellään $S(a) = \sum_{j=1}^{n} c_j a_j$. Osoita, että on olemassa kaksi eri permutaatiota a ja b luvuille $1, 2, ..., n$ siten, että $n! \mid S(a) - S(b)$.

10. Onko olemassa kokonaislukusivuista kolmiota, jonka ala on 2014?

11. Konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on kohtisuorat lävistäjät. Sivujen AB ja CD keskinormaalit leikkaavat pisteessä P nelikulmion $ABCD$ sisällä. Osoita, että $ABCD$ on jännenelikulmio jos ja vain jos kolmioilla ABP ja CDP on samat alat.

12. Olkoon $ABCDEF$ konveksi kuusikulmio, jossa $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Osoita, että

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Milloin pätee yhtäsuuruus?