

Harjoitustehtävät, tammikuu 2014, helpommat

Mielellään paperille kirjoitetut vastaukset joko helmikuun valmennusviikonvaihteeseen Päivölään, tai samoihin aikoihin paperipostissa osoitteeseen **Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu**. Jos haluat jättää vastauksia sähköpostitse, niin osoite on matti.lehtinen@helsinki.fi.

1. Todista, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla on

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

2. Osoita, että $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ on jaollinen $(a + b + c)$:llä.

3. Osoita: jos $n \geq 1$ on kokonaisluku, niin

$$\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} \geq (n!)^{2/n}.$$

4. Todista: jos yksikköneliön sisällä on yhdeksän pistettä, niin niistä voidaan aina valita kolme kolmion kärjiksi niin, että kolmion ala on vähemmän kuin $\frac{1}{8}$.

5. Onko mahdollista numeroida kuution kahdeksan kärkeä numeroin $1, 2, \dots, 8$ niin, että jokaisen särmän päissä olevien numeroiden summa on eri?

6. Laatikossa on 10 punaista ja 5 mustaa palloa. Monellako eri tavalla laatikosta voidaan ottaa viisi palloa, joista ainakin kolme on punaisia?

7. Kuinka monelle positiivisten kokonaislukujen parille (a, b) pätee

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2014}?$$

8. Antti, Benjamin ja Cecil pelaavat kolmisin jalkapalloa seuraavasti. Kaksi pelaajaa on kentällä ja kolmas on maalissa. Kenttäpelaajat yrittävät maalialia, ja se pelaaja, joka onnistuu tekemään maalin, siirtyy maalivahdiksi, jonka jälkeen jatketaan. Pelin jälkeen ilmeni, että Antti oli ollut 12 kertaa ja Benjamin 21 kertaa kentällä ja Cecil oli ollut 8 kertaa maalissa. Kuka teki kuudennen maalin?

9. Antti ajeli kouluun pyörällä nopeudella 8 km/h ja kotiin 10 km/h. Kotona hän huomasi unohtaneensa kirjansa kouluun, joten hän ajoi koululle 16 km/h ja palasi kotiin samalla nopeudella. Puolimatassa pyörän kumi kuitenkin puhkesi, ja Antti talutti pyörän kotiin nopeudella 4 km/h. Mikä oli Antin keskinopeus näillä matkoilla?

10. Osoita, että mikään seuraavan taulukon luku ei ole kokonaisluvun neliö:

11	111	1111	11111	...
22	222	2222	22222	...
33	333	3333	33333	...
44	444	4444	44444	...
55	555	5555	55555	...
66	666	6666	66666	...
77	777	7777	77777	...
88	888	8888	88888	...
99	999	9999	99999	...

11. a) Piste M on kuperan nelikulmion $ABCD$ sisällä. Osoita, että

$$MA + MB < AD + DC + CB.$$

b) Piste M on kolmion ABC sisällä. Olkoon $x = \min\{MA, MB, MC\}$. Osoita, että

$$x + MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

12. Käytetyn auton nelinumeroisen hinta on näyttölaitteessa digitaalisin numeroin. Kun myyjä ei huomaa, asiakas kääntää näytön ylösalaisin, jolloin hinta putoaa 1626 euroa. Mikä oli alkuperäinen hinta?

13. Nelikulmion Q peräkkäisten sivujen pituudet ovat järjestyksessä a, b, c ja d . Osoita, että Q :n ala on enintään $\frac{1}{2}(ac + bd)$.

14. Luvussa $n = 111 \dots 11222 \dots 225$ on 2014 ykköstä ja 2015 kakkosta. Osoita, että $n = k^2$, missä k on kokonaisluku.

15. Olkoon $f(x) = 2x$ ja $g(x) = x - 3$. Olkoon $x_0 = 11$ ja x_{k+1} joko $f(x_k)$ tai $g(x_k)$. Määritä pienin n , jolla x_n voi olla 25. Todistus!