Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, syyskuu 2019

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa. Näissä näkyvät itsenäisen harjoittelun tulokset.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 18.10.2019 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Matematik och Statistik
Åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 Åbo

Huomioi tietosuojalauseke:
`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Helpompia tehtäviä

1. Funktio. Onko olemassa funktiota

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

jolle pätee

$$f(f(n)) = n,$$

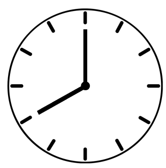
mutta $f(n) \neq n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$? Luonnollisten lukujen joukkoon $\mathbb{N}$ luetaan tässä kuuluvaksi nolla ja positiiviset kokonaisluvut.

2. Kelmit ja ritarit. Kelmien ja ritarien saari on ihmeellinen paikka. Kaikki sen asukkaat ovat joko kelmejä, jotka valehtelevat aina, tai ritareita, jotka puhuvat aina totta.

Tapasin kerran kelmien ja ritarien saarella veljekset. Kysyin vanhemmalta veljeltä, olivatko he molemmat ritareita. Sain vastauksen, mutta en osannut päätellä siitä vielä mitään varmaa. Kysyin sitten pikkuveljeltä, oliko vanhempi veli ritari. Vastauksen saatuani tiesin, mitä veljekset olivat.

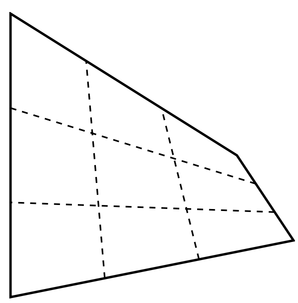
Olivatko veljekset kelmejä vai ritareita?

3. Muotikello. Sisustusliike myy tyylikästä kelloa, jonka tuntiviisari ja minuuttiviisari ovat identtiset. Yleensä kellonajan voi silti päätellä, esimerkiksi kuvassa kello on tasan kahdeksan.



Onko vuorokaudessa hetkiä, jolloin kellonaikaa ei voi päätellä kelloa vilkaisemalla? Kuinka monta hetkeä? Viisarit liikkuvat tasaisesti.

4. Nelikulmiot. Kuperan nelikulmion sivut jaetaan kolmeen yhtä suureen osaan ja vastakkaisten sivujen jakopisteet yhdistetään niin, että nelikulmio jakautuu 9 alueeseen kuvan mukaisesti. Osoita, että keskimmäinen alue on pinta-alaltaan 1/9 alkuperäisen nelikulmion alasta.



5. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että $\sqrt{2}$ on lukujen $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a+2b}{a+b}$ välissä.

6. Osoita, että $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ on irrationaalinen.

7. Kolmiossa $\triangle ABC$ on $\angle B = 90°$. Kolmion sisään voidaan asettaa (sama) suorakulmio sekä pystyettä vaakatasoon niin, että sen kaksi sivua ovat kolmion kateeteilla, yksi kärki pisteessä B ja sen kanssa vastakkainen kärki hypotenuusalla AC. Lisäksi on $AB = a$. Osoita, että suorakulmion piiri on $2a$.

8. Laske

$$\sum_{k=1}^{2000} \frac{\left(\frac{k}{2000}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{2000}\right)^2} + \sum_{k=1}^{2000} \frac{\left(\frac{2000}{2001-k}\right)^2}{1+\left(\frac{2000}{2001-k}\right)^2}.$$

Vaikeampia tehtäviä

9. Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan sisäpuolisesti pisteessä T. Ulomman ympyrän sekantti AB on sisemmän ympyrän tangentti pisteessä P. Osoita, että suora TP puolittaa kulman $\angle ATB$.

10. Pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' valitaan samalta puolelta janaa AB siten että kolmiot ABP, AQB, RAB, BAP', $BQ'A$ ja $R'BA$ ovat yhdenmuotoisia. Osoita, että pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' ovat samalla ympyrällä. Vihje: tarkastele pisteiden A ja B potenssia pisteiden P, Q ja R kautta kulkevan ympyrän suhteen.

11. On annettu kaksi ympyrää, jotka leikkaavat pisteissä P ja Q. Konstruoi jana AB, joka kulkee pisteen P kautta ja jonka päätepisteet ovat ympyröiden kehillä (piste A toisella ympyrällä ja piste B toisella ympyrällä) siten, että tulo $AP \cdot PB$ saa suurimman mahdollisen arvonsa.

1. Piirrä ensin sellainen suurempi ympyrä, joka sivuaa ympyröitä ulkopuolisesti joissakin pisteissä A ja B niin, että piste P on janalla AB. (Ei onnistu, ellei suurempaa ympyrää ja pisteitä A ja B ole valittu tietyllä tavalla.)
2. Miksi nämä sivuamispisteet toteuttavat tehtävän ehdon?
3. Miten pisteet konstruoidaan? Eli miten harpilla ja viivottimella piirtämällä pisteet löydetään?

12. Kuinka monella aakkostosta $\{0, 1, \ldots, 9\}$ muodostetulla 5 kirjaimen sanalla on (a) aidosti kasvava numerojärjestys, (b) aidosti kasvava tai aidosti laskeva numerojärjestys, (c) kasvava numerojärjestys, (d) kasvava tai laskeva numerojärjestys?

13. Tarkastellaan kaikkia n kirjaimen sanoja, jotka muodostuvat kirjaimista $\{0, 1, 2, 3\}$. Kuinka monessa sanassa on parillinen lukumäärä a) nollia? b) nollia ja ykkösiä?

14. Autossa on neljä rengasta. Laske, kuinka monella tavalla renkaiden järjestystä voidaan vaihtaa siten, että yksikään rengas ei ole alkuperäisellä paikallaan.

15. Kuinka monella tavalla voidaan n esineestä valita pariton lukumäärä esineitä?

16. Olkoon $1 \leq k \leq n$. Tarkastellaan kaikkia positiivisten kokonaislukujen äärellisiä jonoja, joiden summa on n. Oletetaan, että luku k esiintyy summassa $T(n, k)$ kertaa. Selvitä luvun $T(n, k)$ arvo.

17. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

18. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla n pätee $\phi(n) + \sigma(n) \geq 2n$.

19. Olkoon $d(n)$ positiivisen kokonaisluvun n tekijöiden määrä. Onko olemassa sellaista positiivista kokonaislukua $v > 1$, jolla yhtälöllä

$$a^b = b^{av}$$

on vähintään $2019 + d(v)$ eri positiivista kokonaislukuratkaisua (a, b)?

20. Olkoot x, y, m ja n ykköstä suurempia positiivisia kokonaislukuja. Olkoon $A = x^{x^{x^{\cdots}}}$, missä x esiintyy m kertaa. Olkoon vastaavasti $B = y^{y^{y^{\cdots}}}$, missä y esiintyy n kertaa. Oletetaan, että $A = B$. Osoita, että $m = n$.