Matematiikan olympiavalmennus
Helmikuun tehtäväsarja

Helpohkoja tehtäviä

1 Osoita, että nelikulmion vastakkaisten sivujen keskipisteet yhdistävien janojen leikkauspiste on nelikulmion lävistäjien keskipisteet yhdistävällä janalla.

2 Pisteet E ja D ovat samalla puolella suoraa AB. Etsi suoran AB pisteet F ja G niin, että $DF + EF$ on pienin mahdollinen ja $|DG - EG|$ on pienin mahdollinen.

3 Olkoot F ja G kolmion ABC sivujen AC ja AB pisteitä. Janat BF ja CG leikkaavat pisteessä H. Osoita, että $AF + AG > HF + HG$.

4 $ABCD$ on neliä ja S sen lävistäjien leikkauspiste. Kulman $\angle DBA$ puolittaja leikkaa janan AC pisteessä F. Olkoon K pisteen C kohtisuora projektio suoralla BF ja leikatkoon suora CK DB:n pisteessä L ja AB:n pisteessä R. Osoita, että $AR = 2 \cdot CL$.

5 Olkoon ABC kolmio ja O jokin tämän kolmion sisäpiste. Muodostetaan suunnikkaat $AOBC'$, $BOCA'$ ja $COAB'$. Osoita, että janat AA', BB' ja CC' leikkaavat toisensa samassa pisteessä ja että $AA'^2+BB'^2+CC'^2 = AB^2+BC^2+CA^2+AO^2+BO^2+CO^2$.

6 Suorakulmaisen kolmion ABC suoran kulman kärki on A. Piirretään kolmion ulkopuolelle neliöt $BAGF$ ja $ACKL$. Suora BK leikkaa sivun AC pisteessä M ja suora CF sivun AB pisteessä N. Osoita, että $AM = AN$.

7 Todista, että

a) jos n ei ole alkuluku, $2^n - 1$ ei ole alkuluku;

b) jos n:llä on pariton tekijä, $2^n + 1$ ei ole alkuluku.

8 Todista, että

a) 120 jakaa luvun $n^5 - 5n^3 + 4n$;

b) 9 jakaa luvun $4^n + 15n - 1$.

9 Merkitään $\sigma(n)$:llä positiivisen kokonaisluvun n tekijöiden summaa. Todista, että

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n) \leq n^2.$$

Vaikeahkoja tehtäviä

1 Olkoon p alkuluku ja w ja n sellaiset kokonaisluvut, että $2^p + 3^p = w^n$. Todista, että $n = 1$.

2 Todista, että jos positiivisille kokonaisluvuille m ja n on $\sqrt{7} - m/n > 0$, niin

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}.$$

3 Olkoon n kokonaisluku. Todista, että jos luku $2\sqrt{28n^2+1} + 2$ on kokonaisluku, se on neliöluku.

4 Määritä joukon $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ niiden osajoukkojen lukumäärä, joissa ei ole peräkkäisiä kokonaislukuja alkioina.

5 Laatikossa on aluksi 4 sinistä ja 4 valkoista palloa. Laatikosta nostetaan yksitellen umpimähkäisessä järjestyksessä kaikki pallot ylös, kunnes laatikko on tyhjä. Ennen kutakin nostoa nostettavan pallon väri arvataan sillä perusteella, että tiedetään, kuinka monta kummankinväristä palloa on laatikossa jäljellä. Mikä on oikeiden vastausten lukumäärä, kun käytetään parhaita mahdollisia arvauksia?

6 Merkitään $p(n, k)$:lla joukon $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ k-osaisten ositusten lukumäärää. Laske $p(n, n-1)$ ja $p(n, n-2)$, kun $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

7 Merkitään $p(n)$:llä joukon $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ ositusten lukumäärää. Olkoon $c > 1$. Todista, että melkein kaikille $n \in \mathbb{N}$ (eli äärellisen monta poikkeusta lukuun ottamatta kaikille $n \in \mathbb{N}$) pätee

$$p(n) > c^n.$$

8 Olkoon G 9 solmun verkko, jonka jokaisessa 5 solmun indusoidussa aliverkossa on vähintään 2 särmää. Kuinka monta särmää verkossa G on vähintään?

Ratkaisuja voi lähettää mieluiten sähköpostitse Kerkko Luostolle osoitteeseen

`Kerkko.Luosto@uta.fi`

tai kirjeitse osoitteeseen Talvitie 1d, 33900 Tampere. Vastauksia toivotaan 15. 4. mennessä.