

## Lokakuun 2012 helpot kirjevalmennustehtävät

Vastauksia voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen laurihallila@gmail.com, tai postitse osoitteeseen Lauri Hallila, Kalliorinteenkuja 1, 02770 Espoo. Ratkaisuja voi myös tuoda seuraavaan viikonloppuvalmennukseen Päivölään. Kysymyksiä tehtävistä voi esittää sähköpostitse.

1. Etsi kaikki positiiviset reaaliluvut  $x$ , jotka toteuttavat yhtälön  $x^x \sqrt[x]{x} = (x \sqrt[x]{x})^x$ .

2. Etsi kaikki funktiot  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$yf(x) + xf(y) = (x + y)f(x + y).$$

3. Määritä kaikki reaaliluvut  $x$  ja  $y$ , joille  $x^3 - y^3 = 7(x - y)$  ja  $x^3 + y^3 = 5(x + y)$ .

4. Olkoon  $\mathbb{R}_+$  kaikkien positiivisten reaalilukujen joukko. Määrittele kaikki funktiot  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , joille  $x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x)y)$  pätee kaikille positiivisille reaaliluvuille  $x$  ja  $y$ .

5. Määritä kaikki positiiviset kokonaislukuparit  $(m, n)$ , joille  $m^2 - 4n$  ja  $n^2 - 4m$  ovat neliölukuja.

6. Paulilla ja Jennillä on kummallakin kokonaislukumäärä euroja.

Pauli sanoo Jennille: ”Jos annat minulle 3 euroa, niin minulla on  $n$  kertaa niin paljon kuin sinulla.”

Jenni sanoo Paulille: ”Jos annat minulle  $n$  euroa, niin minulla on 3 kertaa niin paljon kuin sinulla.”

Olettaen että nämä väittämät pitävät paikkansa ja  $n$  on positiivinen kokonaisluku, mitkä ovat luvun  $n$  mahdolliset arvot?

7. Määrittele pienin luonnollinen luku  $n$ , jolle pätee seuraava ehto:

Riippumatta siitä, miten joukon  $\{1, 2, \dots, n\}$  alkiot väritetään sinisiksi tai punaisiksi, joukosta löytyy aina sellaiset (ei välttämättä toisistaan eroavat) samalla värillä väritetyt kokonaisluvut  $x, y, z, w$ , että  $x + y + z = w$ .

8. Olkoon luvut  $p, p + d, p + 2d, p + 3d, p + 4d, p + 5d$  ja  $p + 6d$  alkulukuja, missä  $p$  ja  $d$  ovat positiivisia kokonaislukuja. Määritä luvun  $p + 6d$  pienin mahdollinen arvo.

9. Osoita, että epäyhtälöt

$$(n + 830)^{2005} < n \cdot (n + 1) \cdot \dots \cdot (n + 2004) < (n + 1002)^{2005}$$

pätevät kaikille kokonaisluvuille  $n \geq 2005$ .

10. Määritä kaikki sellaisten positiivisten kokonaislukukolmikoiden  $(a, b, c)$  joukko, joille  $a + b + c$  on lukujen  $a, b$  ja  $c$  pienin yhteinen jaettava.