Harjoitustehtävät, huhtikuu 2011. Vaativammat

Tämänkertaiset valmennustehtävät on laatinut Alexey Kirichenko. Ne ovat tässä suomeksi ja englanniksi. Lähettäkää vastauksenne toukokuun puoleen väliin mennessä Alexeylle osoitteeseen Kivenlahdenkatu 5 c 27, 02320 Espoo tai tuokaa ne joukkueen valmennus. ja valintaviikolle Päivölään. Alexeyn on helpompi saada selvää englanninkielisistä vastauksista, mutta voitte toki kirjoittaa suomeksi.

1. Janat AC ja BD leikkaavat pisteessä M, $AB = CD$ ja $\angle ACD = 90°$. Todista, että $MA \le MD$.

2. Kokoukseen saapui 125 matemaatikkoa, ja jokaisella oli tasan 10 tuttavaa osallistujien joukossa. Ensimmäisen kokouspaivän jälkeen jotkut osallistujat poistuivat, ja kävi ilmi, että jokaisella jäljelle jääneellä oli edelleen yhtä monta tuttavaa muiden osallistujien joukossa. Todista, että poistuneiden joukossa oli sellaisia, jotka tunsivat toisensa.

3. Yhdeksän tasan metrin mittaista keppiä katkaistaan kukin 17 palaksi.

(a) Osoita, että palojen joukossa on kolme sellaista, joista voidaan muodostaa kolmio.

(b) Osoita, että palojen joukossa on yhdeksän sellaista, joista voidaan koota kolme kolmiota.

4. Mikä on suurin määrä positiivisia kokonaislukuja, joilla on se ominaisuus, että jokaisen kolmen luvun summa on alkuluku?

5. Todista, että ei ole olemassa neljää eri toisen asteen polynomia $x^2 + a_ix + b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, niin että jokaisen kahden summalla olisi tasan yksi nollakohta. (Ts. jos polynomeilla on viimeksi mainittu ominaisuus, jotkin polynomeista ovat samoja.)

6. Šakkiratsu voi liikkua laudalla kahdeksaan eri suuntaan. Ratsu lähtee ruudusta D4, käy kaikissa laudan ruuduissa ja palaa ruutuun D4. Osoita, että ratsun siirrot tapahtuivat ainakin viiteen eri suuntaan.

7. 40×40-lauta peitetään 400:lla 1×4-nelikulmiolla. Jos nelikulmio on "vaakasuorassa" kirjoitetaan siihen sen rivin numero, jolla se on, ja jos se on "pystysuorassa" kirjoitetaan sen sarakkeen numero, jossa se on. (Rivit ja sarakkeet on numeroitu 1:stä 40:een.) Osoita, että kaikkien nelikulmioihin kirjoitettujen lukujen summa on jaollinen 4:llä.

8. Luvut $x_1, \ldots, x_{10}$ ovat kaikkien luvuista $a_1, \ldots, a_5$ muodostettujen parien summat, mutta emme tiedä, mikä luku vastaa mitäkin paria. Selvitä, miten luvut $a_1, \ldots, a_5$ voidaan määrittää, kun $x_1, \ldots, x_{10}$ tunnetaan.

9. Valitaan pisteet D, E ja F kolmion ABC sivuilta AB, AC ja BC niin, että $BF = 2\,CF$, $CE = 2\,AE$ ja $\angle DEF = 90°$. Todista, että $\angle ADE = \angle EDF$.

10. On 30 korttia, ja jokaiseen on kirjoitettu yksi reaaliluku (sama luku voi esiintyä useammin kuin kerran). Tiedämme, että kortit voidaan jakaa 15 pariksi niin, että jokaisen parin lukujen smma on 1. Osoittautuu, että kortit voidaan myös jakaa 15 pariksi niin, että jokaisessa parissa yhtä lukuun ottamatta lukujen tulo on 1. Todista, että tämän viimeisenkin parin lukujen tulo on 1.

1. Segments AC and BD intersect at point M, $AB = CD$, and $\angle ACD = 90°$. Prove that $MA \le MD$.

2. To a conference, 125 mathematicians came, and each of them had exactly 10 acquaintances among the participants. After the first day, some participants left, and it turned out that among all the remaining ones, everybody still had the same number of acquaintances. Prove that some of the mathematicians who left knew each other.

3. There are 9 sticks and each of them is exactly 1 meter long. Every stick was broken into 17 pieces.
(a) Prove that it is possible to select three pieces that can form a triangle.
(b) Prove that it is possible to select nine pieces that can be used to compose three triangles.

4. What is the maximum number of positive integers that we can select in such a way that sum of any three of them is a prime number?

5. Prove that there do not exist four distinct quadratic polynomials $x^2 + a_i x + b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, such that sum of any two of them has exactly one root. (In other words, if the last condition holds, some of the polynomials are equal.)

6. A chess knight can move in eight possible directions. It started from the field D4, visited each field on the chessboard exactly once, and returned to D4. Prove that the knight made moves in at least five different directions.

7. A board 40 x 40 is covered by 400 rectangles 1 x 4. In each "horizontal" rectangle, we write the number of a row the rectangle resides in, and in each "vertical" rectangle, we write the number of its column (the rows and columns are numbered from 1 to 40). Prove that the sum of all the written numbers is divisible by 4.

8. $x_1, \ldots, x_{10}$ are the sums of all the possible pairs of numbers $a_1, \ldots, a_5$, but we don't know which sum corresponds to which pair. Show that given $x_1, \ldots, x_{10}$, it is possible to reconstruct $a_1, \ldots, a_5$.

9. In a triangle ABC, points D, E, and F are chosen on the sides AB, AC, and BC respectively, so that $BF = 2\, CF$, $CE = 2\, AE$, and $\angle DEF = 90°$. Prove that $\angle ADE = \angle EDF$.

10. There are 30 cards, with one real number written on each (some of the numbers may be equal). We know that the cards can be split into 15 pairs so that the sum of the numbers of each pair is 1. It turns out that it is also possible to split the cards into pairs so that the product of the numbers of each pair, except for one pair, is equal to 1. Prove that the product in the remaining pair is also 1.