Matematiikan olympiavalmennus

Toukokuun 2012 vaativammat (mutta silti aika helpot) valmennustehtävät

Ratkaisut kesäkuun loppuun mennessä osoitteeseen Matti Lehtinen, Taskilantie 30a, 90580 Oulu tai `matti.lehtinen@helsinki.fi`. Jos haluat palautetta, etkä ole varma, että ML muistaa osoitteesi, niin liitä ratkaisuihisi yhteystietojasi.

1. Suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusalle piirretty korkeus on h, pyöräytetään suoran kulman kärjen kautta kulkevan ja hypotenuusan suuntaisen suoran ympäri. Kateettien muodostaman pyärähdyspinnan ala on k kertaa hypotenuusan muodostaman pyörähdyspinnan ala. Määritä kolmion sivujen pituudet. Millä k:n arvoilla tehtävällä on ratkaisu?

2. Osoita, että jos a, b ja c ovat eri kokonaislukuja, niin $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$ on jaollinen luvulla $5(a-b)(b-c)(c-a)$.

3. Reaaliluvuille p, q, c ja x pätee $p^2+q^2=1$ ja $p\sin x+q\cos x=c$. Määritä $\tan\dfrac{x}{2}$. Millä c:n arvoilla tehtävällä on ratkaisu?

4. Määritä yhtälöryhmän

$$\frac{2x^2}{1+x^2}=y,\quad \frac{2y^2}{1+y^2}=z,\quad \frac{2z^2}{1+z^2}=x$$

reaalilukuratkaisut.

5. a on mielivaltainen reaaliluku. Ratkaise yhtälö $2x^3+(a-2)x^2-(a-2)x+a=0$. Määritä ne luvut a, joille yhtälön kahden ratkasun summa on yhtä suuri kuin kolmas ratkaisu.

6. Kuriton poika on lainannut luvatta veneen ja soutanut pyöreän lammen keskelle. Hän huomaa veneen pyylevän omistajan odottavan rannalla. Poika pystyy soutamaan 2 km/h ja juoksemaan 12 km/h. Omistaja pystyy juoksemaan 8 km/h. Osoita, että poika pystyy soutamaan rannalle niin, että veneen omistaja ei saa häntä kiinni.

7. Kuution sisään on asetettu säännöllinen oktaedri (kärjet kuution sivutahkojen kekipisteissä) ja kuutio on asetettu toisen säännöllisen oktaedrin sisään (kuution kärjet oktaedrin sivutahkojen keskipisteissä). Määritä oktaedrien tilavuuksien suhde.

8. Kolmion piirin puolikas on p, ypäri piirretyn ympyrän säde R ja sisään piirretyn ympyrän säde r. Osoita, että kolmio on suorakulmainen silloin ja vain silloin, kun $p=2R+r$.

9. Polynomeilla $f(x)=ax^2+bx+c$ ja $g(x)=px^2+qx+r$ on yhteinen nollakohta u. Tutki, milloin osamäärällä $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ on raja-arvo, kun $x\to u$, ja määritä tämä raja-arvo kertoimien a, b, c, p, q, r funktiona.

10. Laske kaikkien muotoa $\frac{1}{m^n}$, m, $n \geq 2$, olevien lukujen summa.

11. Jonon a_1, a_2, a_3, ... kaksi ensimmäistä jäsentä a_1 ja a_2 ovat positiivisia lukuja ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ kaikilla $n > 2$. Osoita, että mikään jonon jäsen ei ole sama kuin jonon joidenkin kahdeksan peräkkäisen jäsenen summa.

12. Ellipsin $x^2 + 4y^2 = 12$ polttopisteet (ota selvää ellipsistä, jos et jo tiedä!) ovat F_1 ja F_2. Määritä ne ellipsin pisteet P, joille kolmion F_1F_2P ympäri piirretyn ympyrän säde on mahdollisimman pieni.

13. Määritä ne luvut a, joille yhtälön $x^3 - ax + 1 = 0$ kaikki ratkaisut ovat reaalisia.

14. Kuninkaan valtakunta on neliön muotoinen ja neliön sivu on 2 km. Eräänä päivänä kello 11.55 kuningas päättää pitää juhlat linnassaan kaikille valtakuntansa asukkaille samana iltana kello 19. Hän lähettää sanansaattajansa matkaan kello 12. Kuninkaan alamaiset auttavat mielellään sanansaattajaa. Miten viisas sanansaattaja organisoi tiedonlevityksen, niin että kaikki ehtivät juhlaan, kun alamaiset pystyvät kävelemään nopeudella 3 km/h?

15. Olkoot a, b, c kolme eri suurta kokonaislukua ja p kokonaislukukertoiminen polynomi. Osoita: jos $p(a) = p(b) = p(c) = 1$, niin yhtälön $p(x) = 0$ ratkaisut eivät ole kokonaislukuja.

16. 8×8-shakkilaudalle asetetaan +-merkin muotoisia, viidestä ruudusta koottuja laattoja. Montako laattaa laudalle voidaan asettaa niin, että mitkään kaksi laattaa eivät mene päällekkäin?

17. Pelaajat A ja B pelaavat seuraavaa peliä 10×10-laudalla. Alussa pelimerkki on laudan vasemman alakulman ruudussa. Pelaajat siirtävät pelimerkkiä vuorotellen. A aloittaa. Sallitut siirrot ovat ruudusta sen oikealla puolella olevaan ruutuun, sen yläpuolella olevaan ruutuun tai kulmittain ylä- ja oikealla puolella olevaan ruutuun. Pelaaja, joka siirtää pelimerkin laudan oikean yläkulman ruutuun, voittaa. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

18. Tetraedrin $ABCD$ särmien AB ja CD suuntainen taso on näiden särmien välissä. Missä tason tulisi sijaita, jotta sen ja tetraedrin sivutahkojen leikkausjanojen muodostaman monikulmion ala olisi mahdollisimman suuri?

19. Pöydällä on kolikkoja, jotka on jaettu muutamiin kasoihin. Valitaan jokin kasa, jossa on ainakin kolme kolikkoa, poistetaan yksi kolikko ja jaetaan loput kahdeksi kasaksi. Jos aluksi on vain yksi kasa, jossa on 2012 kolikkoa, niin voidaanko tällaisia operaatioita toistamalla päästä tilanteeseen, jossa pöydällä on vain sellaisia kasoja, joissa on kolme kolikkoa jokaisessa?

20. Olkoon $T_1T_2T_3$ kolmio. Olkoon T_4 janan T_1T_2 keskipiste, T_5 janan T_2T_3 keskipiste, T_6 janan T_3T_4 keskipiste jne.; T_{n+2} siis janan T_nT_{n-1} keskipiste. Pisteiden T_n muodostama jono suppenee kohti erästä pistettä T (tätä ei tarvitse nyt todistaa!). Miten T on konstruoitavissa, kun T_1, T_2 ja T_3 tunnetaan?