Matematiikan olympiavalmennus

Toukokuun 2012 vaativammat valmennustehtävät, ratkaisuja

1. *Suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusalle piirretty korkeus on h, pyöräytetään suoran kulman kärjen kautta kulkevan ja hypotenuusan suuntaisen suoran ympäri. Kateettien muodostaman pyärähdyspinnan ala on k kertaa hypotenuusan muodostaman pyörähdyspinnan ala. Määritä kolmion sivujen pituudet. Millä k:n arvoilla tehtävällä on ratkaisu?*

Ratkaisu. Olkoon suorakulmaisen kolmion hypotenuusa c ja kateetit a ja b. Voidaan olettaa, että $a \geq b$. Hypotenuusa synnyttää h-säteisen lieriön, jonka vaipan ala on $2\pi hc$, kateetit kartioita, joiden yhteinen vaipan ala on $\pi h(a+b)$. On siis oltava $a+b=2kc$. Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista saadaan heti $\dfrac{h}{a}=\dfrac{b}{c}$ eli $ab=hc$. Tästä ja Puthagoraan lauseesta seuraa $4k^2c^2=(a+b)^2=c^2+2hc$ ja

$$c=\frac{2h}{4k^2-1}.$$

Koska $c>0$, välttämätön ratkaisun ehto on $k>\dfrac{1}{2}$. Edelleen

$$(a-b)^2=c^2-2hc=\frac{8h^2(1-2k^2)}{(4k^2-1)^2},$$

joten toinen välttämätön ratkaisun ehto on $k \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Kun nyt $a+b$ ja $a-b$ tunnetaan, on helppo ratkaista

$$a=\frac{h(2k+\sqrt{2-4k^2})}{4k^2-1} \quad \text{ja} \quad b=\frac{h(2k-\sqrt{2-4k^2})}{4k^2-1}.$$

Kun $k>\dfrac{1}{2}$, niin $b>0$; ehto $\dfrac{1}{2} \leq k < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ on myös riittävä ehto ratkaisun olemassaololle.

2. *Osoita, että jos a, b ja c ovat eri kokonaislukuja, niin $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$ on jaollinen luvulla $5(a-b)(b-c)(c-a)$.*

Ratkaisu. Jos $c-b=x$ ja $a-c=y$, niin $x+y=a-b$. Tällöin $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5 = (x+y)^5-x^5-y^5 = 5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4 = 5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3) = 5xy(x+y)(x^2-xy+y^2+2xy)$. Väite seuraa.

3. *Reaaliluvuille p, q, c ja x pätee $p^2+q^2=1$ ja $p\sin x+q\cos x=c$. Määritä $\tan\dfrac{x}{2}$. Millä c:n arvoilla tehtävällä on ratkaisu?*

Ratkaisu. Jos $t = \tan\dfrac{x}{2}$, niin

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{ja} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{1}$$

(Nämä ovat tunnettuja, esimerkiksi trigonometristen funktioiden integraalifunktioita määritettäessä tarpeellisia kaavoja; helppoja todistaa.) Lisäksi $x \neq \pi + 2n\pi$ (koska $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$ ei ole määritelty). Ei siis voi olla $-q = c$. Kun yhtälöt (1) sijoitetaan yhtälöön $p\sin x + q\cos x = c$ ja sievennetään, saadaan t:lle ehto

$$(c+q)t^2 - 2pt + c - q = 0.$$

Tästä ratkaistaan

$$t = \frac{p \pm \sqrt{1-c^2}}{c+q}.$$

4. *Määritä yhtälöryhmän*

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = y, \quad \frac{2y^2}{1+y^2} = z, \quad \frac{2z^2}{1+z^2} = x$$

reaalilukuratkaisut.

Ratkaisu. Ryhmällä ei voi olla ratkaisuja, joissa jokin tuntemattomista olisi negatiivinen. Jos jokin tuntemattomista on 0, kaikki ovat. Yksi ratkaisu on siis $(x,\, y,\, z) = (0,\, 0,\, 0)$. Olkoot sitten kaikki tuntemattomat positiivisia. Jos $(x,\, y,\, z)$ on ryhmän ratkaisu, niin

$$(2x)(2y)(2z) = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2). \tag{1}$$

Mutta $2t \le 1 + t^2$ kaikilla t ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $t = 1$. (1) toteutuu vain, kun $x = y = z = 1$. Toinen ratkaisu on siis $(x,\, y,\, z) = (1,\, 1,\, 1)$. Muita ei ole.

5. *a on mielivaltainen reaaliluku. Ratkaise yhtälö $2x^3+(a-2)x^2-(a-2)x+a = 0$. Määritä ne luvut a, joille yhtälön kahden ratkasun summa on yhtä suuri kuin kolmas ratkaisu.*

Ratkaisu. Yhtälön vasen puoli saadaan jaetuksi tekijöihin: $2x^3+(a-2)x^2-(a-2)x+a = 2x(x^2-x+1) + a(x^2-x+1) = (2x+a)(x^2-x+1)$. Tästä saadaan yhttälön ratkaisut $x_1 = -\dfrac{a}{2}$ ja $x_{2,\,3} = \dfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Jos (niin kuin voisi olettaa) tehtävän a on realiluku, vain x_1 voi olla kahden muun juuren summa; tämä tapahtuu, kun $a = -2$. Ellei tätä oletusta tehdä, niin myös luvut $a = \pm 2i\sqrt{3}$ toteuttavat tehtävän ehdon.

6. *Kuriton poika on lainannut luvatta veneen ja soutanut pyöreän lammen keskelle. Hän huomaa veneen pyylevän omistajan odottavan rannalla. Poika pystyy soutamaan 2 km/h ja juoksemaan 12 km/h. Omistaja pystyy juoksemaan 8 km/h. Osoita, että poika pystyy soutamaan rannalle niin, että veneen omistaja ei saa häntä kiinni.*

Ratkaisu. Olkoon lammen säde r (km). Lammen reunaa juoksevan veneenomistajan kulanopeus on $\dfrac{8}{2\pi r}$. Jos poika soutaa etäisyydelle a lammen keskipistestä ja alkaa soutaa pitkin a-säteistä ympyrää, hänen kulmanopeutensa on $\dfrac{2}{2\pi a}$. Kun $a < \dfrac{r}{4}$, pojan kulmanopeus on suurempi kuin omistajan, joten hän pystyy soutamaan paikkaan, jossa lammen keskipiste on hänen ja omistajan välisellä janalla. Kun poika nyt soutaa kohti lähintä rannan pistettä, hän tarvitsee siihen ajan $\dfrac{(1-a)r}{2}$ ja omistaja juostakseen samaan pisteeseen ajan $\dfrac{\pi r}{8}$. Jos $a > 1 - \dfrac{\pi}{4} > 0{,}2$, poika ehtii lähimpään rannan pisteeseen ennen omistajaa ja pääsee pakoon.

7. *Kuution sisään on asetettu säännöllinen oktaedri (kärjet kuution sivutahkojen kekipisteissä) ja kuutio on asetettu toisen säännöllisen oktaedrin sisään (kuution kärjet oktaedrin sivutahkojen keskipisteissä). Määritä oktaedrien tilavuuksien suhde.*

Ratkaisu. Olkoon kuution särmä 1. Sen sisään piirretyn oktaedrin särmä on silloin $\dfrac{b}{\sqrt{2}}$. Lasketaan kuution ja oktaedrin keskipisteen etäisyys oktaedrin sivutahkosta. Sivutahko on tasasivuinen kolmio, jonka särmä on $\dfrac{b}{\sqrt{2}}$. Tämä kolmio ja neliön keskipiste muodostavat tetraedrin, jonka kolme muuta sivua ovat pituudeltaan $\dfrac{b}{2}$. Sivutahkon korkeusjanan pituus on $\dfrac{b}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Sivutahkon keskipisteen etäisyys kärjestä on $\dfrac{2}{3}$ tästä eli $\dfrac{b\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$. Pythagoraan lauseen perusteella neliön keskipisteen etäisyys oktaedrin sivutahkosta on

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{b}{2\sqrt{3}}.$$

Vastaava etäisyys kuution ympäri piirretylle oktaedrille on puolet kuution lävistäjästä, eli $\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Etäisyyksien suhde on $1 : 3$, joten oktaedrien tilavuuksien suhde on $1 : 27$.

8. *Kolmion piirin puolikas on p, ympäri piirretyn ympyrän säde R ja sisään piirretyn ympyrän säde r. Osoita, että kolmio on suorakulmainen silloin ja vain silloin, kun $p = 2R + r$.*

Ratkaisu. Olkoon kolmio suorakulmainen, c hypotenuusa ja kateetit a ja b. Thaleen lauseen perusteella $c = 2R$. Sisään piirretyn ympyrän sivuamispisteet jakavat kateetit osiin r, $a - r$ ja r, $b - r$. Koska ympyrän ulkopuolisesta pisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat yhtä pitkiä, jokaisessa kolmiossa, muissakin kuin suorakulmaisissa, on $p = r + b - r + a - r = a + b - r$ ja $c = a + b - 2r$. Toisaalta $2R = c = (a - r) + (b - r)$, josta $2R + r = a + b - r = p$. Olkoon sitten kolmiossa, jonka sivut ovat a, b, c, voimassa $2R + r = p = a + b - r$. Silloin $c = (a - r) + (b - r) = 2R$. Sivun c keskipiste on silloin kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, ja c:tä vastassa olevan kolmion kulma on suora.

9. *Polynomeilla $f(x) = ax^2+bx+c$ ja $g(x) = px^2+qx+r$ on yhteinen nollakohta u. Tutki, milloin osamäärällä $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ on raja-arvo, kun $x \to u$, ja määritä tämä raja-arvo kertoimien a, b, c, p, q, r funktiona.*

Ratkaisu. On käsiteltävä erikseen tapaukset, joissa sekä f että g ovat toista astetta ja tapaukset, joissa toinen tai jompikumpi on ensimmäistä astetta. Oletetaan, että f ja g ovat toista astetta. Silloin $x-u$ on $f(x)$:n ja $g(x)$:n tekijä ja

$$f(x) = (x-u)(a(x+u)+b), \quad g(x) = (x-u)(p(x+u)+q).$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan $2pu+q \in \{\sqrt{q^2-4pr}, -\sqrt{q^2-4pr}\}$. Jos $q^2-4pr \neq 0$, on siis

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2au+b}{2pu+q} \in \left\{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{q^2-4pr}}, -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{q^2-4pr}}\right\}.$$

Jos $q^2-4pr = 0$, mutta $b^2-4ac \neq 0$, u on g:n kaksinkertainen nollakohta, mutta ei f:n. Kysyttyä raja-arvoa ei ole olemassa. Jos sekä $q^2-4pr = 0$ että $b^2-4ac = 0$, u on molempien funktioiden kaksinkertainen nollakohta ja

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u}\frac{a(x-u)^2}{p(x-u)^2} = \frac{a}{p}.$$

Samanlaisilla tarkasteluilla saadaan vielä, että jos f on toista astetta ja g ensimmäistä ja $q \neq 0$, niin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \in \left\{\frac{1}{q}\sqrt{b^2-4ac}, -\frac{1}{q}\sqrt{b^2-4ac}\right\},$$

jos f on ensimmäistä ja g toista astetta ja $q^2-4pr \neq 0$, niin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \in \left\{\frac{b}{\sqrt{q^2-4pr}}, -\frac{b}{\sqrt{q^2-4pr}}\right\},$$

ja jos sekä f että g ovat ensimmäistä astetta ja $q \neq 0$, niin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{q}.$$

10. *Laske kaikkien muotoa $\dfrac{1}{m^n}$, m, $n \geq 2$, olevien lukujen summa.*

Ratkaisu. Kiinteällä m summa $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{m^n}$ on geometrinen sarja, ja sen summa on $\dfrac{\frac{1}{m^2}}{1-\frac{1}{m}} = \dfrac{1}{m(m-1)}$. Mutta

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right) = 1,$$

sillä sarja on ns. teleskooppinen sarja.

11. *Jonon a_1, a_2, a_3, … kaksi ensimmäistä jäsentä a_1 ja a_2 ovat positiivisia lukuja ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ kaikilla $n > 2$. Osoita, että mikään jonon jäsen ei ole sama kuin jonon joidenkin kahdeksan peräkkäisen jäsenen summa.*

Ratkaisu. Jono on selvästi aidosti kasvava. Tarkastetaan joitakin jonon kahdeksaa peräkkäistä termiä a_k, a_{k+1}, …, a_{k+7}. Olkoon S niiden summa. Silloin $S > a_{k+6} + a_{k+7} = a_{k+8}$. Toisaalta $S = a_{k+2} + a_{k+4} + a_{k+6} + a_{k+8} < a_{k+3} + a_{k+4} + a_{k+6} + a_{k+8} = a_{k+5} + a_{k+6} + a_{k+8} = a_{k+7} + a_{k+8} = a_{k+9}$. S on siis jonon kahden peräkkäisen termin a_{k+8} ja a_{k+9} välissä. S ei voi olla mikään jonon (a_n) termi.

12. *Ellipsin $x^2 + 4y^2 = 12$ polttopisteet ovat F_1 ja F_2. Määritä ne ellipsin pisteet P, joille kolmion F_1F_2P ympäri piirretyn ympyrän säde on mahdollisimman pieni.*

Ratkaisu. Tehtävän ellipsi on

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1,$$

joten sen isoakseli on $a = 2\sqrt{3}$ ja pikkuakseli on $b = \sqrt{3}$. Koska ellipsin polttosäteiden eli ellipsin pisteen ja polttopisteen etäisyyksien summa on $2a$, niin pisteen $(0,\ b)$ etäisyys polttopisteistä on a. Tästä saadaan polttopisteiden $(\pm c,\ 0)$ x-koordinaatiksi $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$. Tehtävän ellipsille on siis $c = 3$. Pisteiden F_1 ja F_2 etäisyys on 6, joten kolmion F_1F_2P ympäri piirretyn ympyrän säde on ainakin 3. Ne pisteet $P = (x,\ y)$, joille tämä minimi saavutetaan, toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + 4y^2 = 12. \end{cases}$$

Pisteitä on neljä; ne ovat $(x,\ y) = (\pm 2\sqrt{2},\ \pm 1)$.

13. *Määritä ne luvut a, joille yhtälön $x^3 - ax + 1 = 0$ kaikki ratkaisut ovat reaalisia.*

Ratkaisu. Tarkastellaan funktiota f, $f(x) = x^3 - ax + 1$. Jos $a < 0$, f on aidosti kasvava, joten yhtälöllä $f(x) = 0$ on tasan yksi reaalijuuri. Jos juuri b olisi f:n kolminkertainen nollakohta, olisi $f(x) = (x - b)^3$, mikä selvästi on mahdotonta. Jos $a = 0$, $f(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Yhtälön kolmesta juuresta kaksi on yhtälön $x^2 - x + 1 = 0$ juuria; ne eivät ole reaalisia. Olkoon sitten $a > 0$. Tarkastetaan f:n derivaattaa f', $f'(x) = 3x^2 - a$. f on kasvava, kun $|x| > \sqrt{\frac{a}{3}}$ ja vähenevä, kun $|x| < \sqrt{\frac{a}{3}}$. Lisäksi $f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = 1 + \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} > 0$. f saa minimiarvonsa, kun $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$; minimi on $1 - \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}$. Yhtälöllä on vain reaalijuuria tasan silloin, kun tämä minimiarvo on ei-positiivinen eli kun $1 - \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} < 0$. Tämä toteutuu, kun $a \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

14. *Kuninkaan valtakunta on neliön muotoinen ja neliön sivu on* 2 *km. Eräänä päivänä kello* 11.55 *kuningas päättää pitää juhlat linnassaan kaikille valtakuntansa asukkaille samana iltana kello* 19*. Hän lähettää sanansaattajansa matkaan kello* 12*. Kuninkaan alamaiset auttavat mielellään sanansaattajaa. Miten viisas sanansaattaja organisoi tiedonlevityksen, niin että kaikki ehtivät juhlaan, kun alamaiset pystyvät kävelemään nopeudella* 3 *km/h?*

Ratkaisu. Sanansaattaja jakaa valtakunnan neljäksi yhtä suureksi neliöksi. Olkoot ne lueteltuina "vasemmasta alakulmasta" alkaen vastapäivään I, II, III ja IV. Oletetaan, että sanansaattaja on aluksi neliössä I. Oletetaan, että neliössä II on kansalainen A, neliössä III kansalainen B ja neliössä IV kansalainen C. Sanansaattaja kulkee kansalaisen A luo, kertoo tilanteen ja jatkaa kansalisen C luo, kertoo tilanteen ja palaa lähtöneliöönsä. Pikkuneliön lävistäjä on $\sqrt{2}$ km, joten sanansaattaja on A:n luona ennen kello 13:a, C:n luona ennen kello 14:ää ja lähtöpaikassaan ennen kello 15:ttä. A puolestaan lähtee tiedon saatuaan B:n luo, tapaa tämän ennen kello 14:ää ja on palannut lähtöpaikalleen ennen kello 15:ttä. Kolmen tunnin kuluessa on siis jokaisessa ruudussa yksi henkilö, joka tietää juhlasta. Jos jossain ruudussa ei ole ketään, sanansaattaja ehtii kolmessa tunnissa tavoittaa kahdessa muussa ruudussa olevan kansalaisen. Jaetaan nyt neliöt neljäksi pienemmäksi neliöksi. Toistamalla sama prosessi päästään tilanteeseen, jossa jokaisessa pienemmässä neliössä (jossa ylipäänsä on joku) on joku, joka tietää juhlasta. Aikaa tähän toiseen vaiheeseen kuluu vähemmän kuin puolitoista tuntia, koska ruudut ovat mittasuhteiltaan puolet isommista. Prosessia jatkamalla kaikki kansalaiset ovat saneet tietää juhlasta ajassa, joka on pienempi kuin $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = 6$ tuntia, siis ennen kello 18:aa. Koska jokaisella kansalaisella on matkaa linnaan vähemmän kuin 3 km, kaikki ehtivät määräajaksi linnaan (tässä ei ehkä kylläkään kaikille jää aikaa pukeutumiseen ja ehostukseen).

15. *Olkoot a, b, c kolme eri suurta kokonaislukua ja p kokonaislukukertoiminen polynomi. Osoita: jos $p(a) = p(b) = p(c) = 1$, niin yhtälön $p(x) = 0$ ratkaisut eivät ole kokonaislukuja.*

Ratkaisu. Olkoon $q(x) = p(x) - 1$. Silloin $q(a) = q(b) = q(c) = 0$ ja $q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)r(x)$, missä r on jokin kokonaislukukertoiminen polynomi. Jos $p(x_0) = 0$, niin $-1 = (x_0 - a)(x_0 - b)(x_0 - c)r(x_0)$. Jos x_0 on kokonaisluku, $x_0 - a$, $x_0 - b$ ja $x_0 - c$ ovat kaikki kokonaislukuja ja itseisarvoltaan yksi. Ainakin kaksi luvuista on silloin samoja. Tämä merkitsee, että ainakin kaksi luvuista a, b, c on samoja, vastoin oletusta. Siis x_0 ei ole kokonaisluku.

16. 8×8*-šakkilaudalle asetetaan* $+$*-merkin muotoisia, viidestä ruudusta koottuja laattoja. Montako laattaa laudalle voidaan asettaa niin, että mitkään kaksi laattaa eivät mene päällekkäin?*

Ratkaisu. Laudan reunojen ruuturiveistä voi jokaisesta enintään kaksi tulla peitetyksi. Peitetyksi voi siis tulla enintään $6^2 + 4 \cdot 2 = 44$ ruutua. Koska jokainen laatta peittää viisi ruutua, enintään kahdeksan laattaa mahtuu laudalle. Kahdeksan todella mahtuu: jos noudatetaan šakkilaudan ruutujen numerointia, voidaan laatat sijoittaa esimerkiksi niin, että ristien keskimmäiset ruudut ovat laudan ruuduissa b2, f2, d3, g4, b5, e5, d7 ja g7.

17. *Pelaajat A ja B pelaavat seuraavaa peliä* 10×10*-laudalla. Alussa pelimerkki on laudan vasemman alakulman ruudussa. Pelaajat siirtävät pelimerkkiä vuorotellen. A aloittaa. Sallitut siirrot ovat ruudusta sen oikealla puolella olevaan ruutuun, sen yläpuolella olevaan ruutuun tai kulmittain ylä- ja oikealla puolella olevaan ruutuun. Pelaaja, joka siirtää pelimerkin laudan oikean yläkulman ruutuun, voittaa. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?*

Ratkaisu. Varustetaan ruudut koordinaatein $(x,\,y)$ niin, että vasen alakulma on $(1,\,1)$ ja oikea yläkulma $(10,\,10)$. Jos pelimerkki on ruudussa $(2x,\,2y)$, niin sen voi siirtää vain rutuun, jossa toinen tai molemmat koordinaatit ovat parittomia. Jos merkki on ruudussa, jossa ainakin yksi koordinaatti on pariton, sen voi siirtää ruutuun, jossa molemmat koordinaatit ovat parillisia. Ensimmäinen pelaaja voi siirtää merkin ruutuun $(2,\,2)$ ja sen jälkeen aina ruutuun, jossa molemmat koordinaatit ovat parillisia. Toinen pelaja joutuu aina siirtämään ruutuun, jossa ainakin toinen koordinaatti on pariton. Toinen pelaaja ei siis voi koskaan siirtää ruutuun $(10,\,10)$. Jokaisesta muusta ruudusta kuin ruudusta $(10,\,10)$ voi tehdä sallittuja siirtoja, joten peli ei voi päättyä muualle kuin ruutuun $(10,\,10)$. Ensimmäisellä pelaajalla on siis kuvatunlainen voittostrategia.

18. *Tetraedrin $ABCD$ särmien AB ja CD suuntainen taso on näiden särmien välissä. Missä tason tulisi sijaita, jotta sen ja tetraedrin sivutahkojen leikkausjanojen muodostaman monikulmion ala olisi mahdollisimman suuri?*

Ratkaisu. Merkitään tehtävän tason τ ja särmien AD, BD, BC ja AC leikkauspisteet P, Q, R ja S. Silloin tason ABD suorat AB ja PQ ovat yhdensuuntaiset, samoin tason ABC suorat AB ja SR. Siis $PQ \| SR$. Samoin osoitetaan, että $PS \| QR$. Leikkauskuvio $PQRS$ on siis suunnikas. Koska $PQ \| AB$ ja $QR \| DC$, niin $\angle PQR$ riippuu vain suorien AB ja DC välisestä kulmasta, mutta ei tason τ sijainnista. Suunnikkaan ala riippuu vain tulosta $PQ \cdot QR$. Jos $BQ = k \cdot BD$, niin $PQ = (1-k) \cdot AB$ ja $QR = k \cdot DC$. $PQ \cdot QR$ on suurin mahdollinen, kun $k(1-k)$ on suurin mahdollinen. Koska $k(1-k) = \frac{1}{4} - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2$, $k(1-k)$ on suurin mahdollinen, kun $k = \frac{1}{2}$. Tason τ tulee siis sijaita yhtä etäällä särmistä AB ja CD.

19. *Pöydällä on kolikkoja, jotka on jaettu muutamiin kasoihin. Valitaan jokin kasa, jossa on ainakin kolme kolikkoa, poistetaan yksi kolikko ja jaetaan loput kahdeksi kasaksi. Jos aluksi on vain yksi kasa, jossa on 2012 kolikkoa, niin voidaanko tällaisia operaatioita toistamalla päästä tilanteeseen, jossa pöydällä on vain sellaisia kasoja, joissa on kolme kolikkoa jokaisessa?*

Ratkaisu. Oletetaan, että haluttuun tilanteeseen on päästy k:n askeleen jälkeen. Koska joka askeleella kolikkojen määrä vähenee yhdellä, $2012 - k = 3p$. Koska joka askeleella kasojen määrä lisääntyy yhdellä, $1 + k = p$. Siis $2012 = 3(1+k) + k$ eli $4k = 2009$. Ristiriita! Tehtävässä ehdotettu lopputulos ei ole mahdollinen.

20. *Olkoon $T_1T_2T_3$ kolmio. Olkoon T_4 janan T_1T_2 keskipiste, T_5 janan T_2T_3 keskipiste, T_6 janan T_3T_4 keskipiste jne.; T_{n+2} siis janan T_nT_{n-1} keskipiste. Pisteiden T_n muodostama jono suppenee kohti erästä pistettä T (tätä ei tarvitse nyt todistaa!). Miten T on konstruoitavissa, kun T_1, T_2 ja T_3 tunnetaan?*

Ratkaisu. Olkoon $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{T_1T_3} = \overrightarrow{b}$. Silloin $\overrightarrow{T_1T} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$ joillain x ja y. Koska samaan pisteeseen T päädytään algebrallisesti saman prosessin kautta, kun lähdetään kolmiosta $T_2T_3T_4$, on $\overrightarrow{T_2T} = x\overrightarrow{T_2T_3} + y\overrightarrow{T_2T_4}$. Mutta $\overrightarrow{T_2T} = \overrightarrow{T_2T_1} + \overrightarrow{T_1T}$, $\overrightarrow{T_2T_3} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ ja $\overrightarrow{T_2T_4} = -\frac{1}{2}a$. Siis

$$-\overrightarrow{a} + x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} = x(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) - \frac{1}{2}y\overrightarrow{a}.$$

Koska $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ eivät ole yhdensuuntaisia, on oltava $-1 + x = -x - \frac{1}{2}y$ ja $y = x$. Siis $x = y = \frac{2}{5}$. Piste T löytyy siis, kun $T_1T_2T_3$ täydennetään suunnikkaaksi $T_1T_2UT_3$ ja etsitään piste, joka jakaa janan T_1U suhteessa $2 : 3$.