Matematiikan olympiavalmennus
Lokakuun 2011 tehtäväsarja

Seuraavat tehtävät on valikoitu kirjan **Pranesachar, Venhatachala, Yogananda:** *Problem primer for the Olympiad* luvusta Number Theory.

1. Määrää kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (m, n), joille $2^m + 3^n$ on kokonaisluvun neliö.

2. Todista, että $n^4 + 4^n$ ei ole alkuluku millään $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

3. Olkoot a, b ja c yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että jos $1/a + 1/b = 1/c$, niin $a + b$ on kokonaisluvun neliö.

4. Osoita, että on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolle $n!$ päättyy täsmälleen 1993 nollaan.

5. Määritä jakojäännös, kun 2^{1990} jaetaan kokonaisluvulla 1990.

6. Määritä parit $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, joille $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.

7. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille n ei ole kokonaisluvun neliö ja $\lfloor \sqrt{n} \rfloor^3 \mid n^2$.

8. a) Määritä $\{\, n \in \mathbb{N} \mid 3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1 \,\}$.
b) Todista, että 3^{n+2} ei jaa lukua $2^{3^n} + 1$ millään positiivisella kokonaisluvulla n.

9. Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään $s(n)$:llä sellaisten $(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ lukumäärää, että $1/x + 1/y = 1/n$. Esimerkiksi $s(2) = 3$. Määritä $\{\, n \in \mathbb{Z}_+ \mid s(n) = 5 \,\}$.

10. Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään $A(n) = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. Määritä $A = \{\, n \in \mathbb{Z}_+ \mid A(n) \text{ parillinen} \,\}$ ja $B = \{\, n \in \mathbb{Z}_+ \mid 4 \mid A(n) \,\}$.

Tämän tehtäväsarjan vastaukset mieluiten 3. 12. mennessä osoitteeseen

Kerkko Luosto
Koroistentie 4d A10
00280 Helsinki