Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, tammikuu 2019

Tehtävistä

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää tai pyytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ratkaisua ensin itse. Samaten tehtävien pohtiminen yhdessä muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, voi olla opettavaista.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa. Näissä näkyvät itsenäisen harjoittelun tulokset.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisujen palautus

Ratkaisuja toivotaan seuraavaan valmennusviikonloppuun 22.2.2019 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Matematik och Statistik
Åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 Åbo

Palautuspäivämääristä on usein jonkin verran joustettu, mutta tällä kertaa EGMO-joukkueen valinta täytyy tehdä jo seuraavan valmennusviikonlopun aikana. Siksi tässä tapauksessa aikaraja perjantai 22.2. on ehdoton (tasavertaisuussyistä myös niille, jotka eivät ole kelpoisia osallistumaan EGMO-kilpailuun).

Huomioi tietosuojalauseke:
`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Uutena kokeiluna myös viikkotehtävät:

`https://keskustelu.matematiikkakilpailut.fi/c/viikkotehtavat`

Helpompia tehtäviä

1. Piste U on kolmion ABC sivulla BC siten, että AU on kolmion kulmanpuolittaja. Piste O on kolmion ympärysympyrän (eli ympäripiirretyn ympyrän) keskipiste. Osoita, että janan AU keskinormaali, suora AO ja pisteen U kautta kulkeva janan BC normaali leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

2. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

3. Olkoon piste I kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste, piste X ympyrän sivuamispiste janalla BC ja piste Y ympyrän sivuamispiste janalla CA. Olkoon piste P suoran XY ja suoran AI leikkauspiste. Osoita, että $AI \perp BP$.

4. Aino laskee kaikki kokonaisluvut luvusta 1 lukuun 100. Leo kopioi Ainon listan ja muuttaa siitä jokaisen numeron 2 numeroksi 1. Mikä luku saadaan kun vähennetään Ainon listan lukujen summasta Leon listan lukujen summa?

5. Tulo $(8)\cdot(888\ldots8)$, jonka toisessa tekijässä on k numeroa, on kokonaisluku, jonka numeroiden summa on 1000. Mikä luku k on?

6. Eräässä kielessä on kaksi kirjainta. Kukin sana koostuu seitsemästä kirjaimesta, ja mitkä tahansa kaksi eri sanaa eroavat ainakin kolmessa eri kohdassa. Osoita, ettei kielessä voi olla yli 16 sanaa.

7. Shakkilaudasta, jonka mitat ovat $n \times n$, on järsitty pois kaikki neljä kulmaa. Millä luvun n arvoilla voidaan lauta peittaa L-kirjaimen muotoisilla neljästä ruudusta koostuvilla palikoilla?

8. Sellaisen ruudukon, jonka koko on 25×25, jokaiseen ruutuun on kirjoitettu joko luku 1 tai -1. Olkoon i. rivin lukujen tulo a_i ja j. sarakkeen lukujen tulo b_j. Osoita, että

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_{25} + b_{25} \neq 0.$$

Vaativampia tehtäviä

9. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (n, m), joissa lukujen m ja n aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo ovat eri kaksinumeroisia lukuja, joissa on samat numerot.

10. Tarkastellaan $m \times n$–ruudukkoa. Mikä on pienin mahdollinen määrä 1×1–ruutuja, jotka pitää peittää niin, että lopuissa ruuduissa ei ole tilaa kolmiruutuiselle L–palikalle?

11. Positiiviset kokonaisluvut on väritetty mustiksi ja valkoisiksi. Kahden erivärisen luvun summa on musta ja tulo valkoinen. Mikä on kahden valkoisen luvun tulo? Määritä kaikki tällaiset väritykset.

12. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja olkoon F sen Fermat'n piste. Osoita, että kolmioiden ABF, BCF ja CAF Eulerin suorat leikkaavat samassa pisteessä. (Fermat'n pisteen ja Eulerin suoran määritelmät: `https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/nimgeom.pdf`)

13. Kuusikulmion $ABCDEF$ kärkipisteet ovat ympyrällä, jonka säde on r. Sivuista AB, CD ja EF jokaisen pituus on r. Todista, että muiden kolmen sivun keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion.

14. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $|f(x) - f(y)| \le (x - y)^2$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Lisäksi $f(2019) = 2019$. Ratkaise f.

15. Todista, että jos a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja, joille $abc \ge 2^9$, pätee epäyhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (abc)^{1/3}}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}}\right).$$

16. Etsi kaikki reaaliluvut $x, y, z \ge 1$, joille

$$\min(\sqrt{x + xyz}, \sqrt{y + xyz}, \sqrt{z + xyz}) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$