31. 10.

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens grundserie

2018

Det finns uppgifter på två sidor; de sex första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. I slutet av år 2017 var förhållandet mellan elevantalet i gymnasiet A och gymnasiet B lika med a/b . Under år 2017 hade elevantalet i gymnasiet A ökat med 5 % medan det i B ökat med 10 %. I början av år 2017 hade förhållandet mellan elevantalet i gymnasium A och B varit

a) $\dfrac{95a}{90b}$ b) $\dfrac{105a}{110b}$ c) $\dfrac{22a}{21b}$ d) $\dfrac{19a}{18b}$

2. Vad kan man säga om det exakta värdet av uttrycket $k^{3x} - k^x$ när $k^{2x} = 16$ och $k > 0$?

a) Uppgiften kan inte lösas för svaret beror av värdet på talen x och k.
b) Uttryckets värde är 56.
c) Uttryckets värde är 60.
d) Svaret är ett irrationellt tal.

3. En kvadrat roterar 45° runt dess medelpunkt och då bildas en stjärnformig 16-hörning. Förhållandet mellan 16-hörningens och kvadratens omkretsar är

a) mindre än 1,5 b) $4 - 2\sqrt{2}$ c) $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

4. Vi studerar ekvationen

$$\frac{2x + a^2 - 3a}{x - 1} = a,$$

där den obekanta x inte är 1 och $a \in \mathbb{R}$ är en konstant. Vad kan man säga om lösningarna till ekvationen?

a) För lämpliga värden på parametern a kan ekvationen ha oändligt många lösningar.
b) Ekvationen går inte att lösa för alla värden på parametern a.
c) Ekvationen har alltid lösningar oberoende av värdet på parametern a.
d) Ekvationen har alltid tre lösningar.

5. Tio (olika) linjer delar in ett plan i ett antal områden och antalet kan variera beroende på hur linjerna är ritade. Vilka av följande kan vara möjliga antal av dessa områden?

a) 20 b) 9 c) 56 d) 32

6. En matematiskt störd groda gör i ett plan endast hopp med längden $\sqrt{5}$. Grodan lider av ett talteoretiskt syndrom som gör att hoppen endast kan sluta i punkter vars koordinater är heltal. Grodan startar från origo och återvänder till origo efter fyra hopp. På hur många sätt kan grodan göra en dylik serie på fyra hopp? Vad kan vi säga om antalet lösningar?

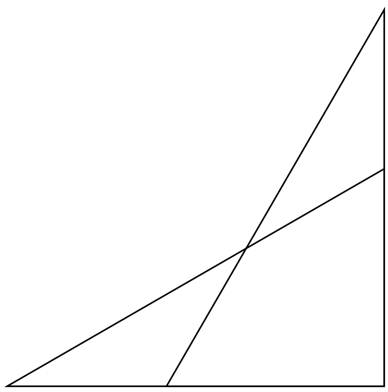
a) Grodan kan göra en serie med fyra hopp på över hundra sätt.
b) Antalet lösningar är delbart med åtta.
c) Antalet lösningar är delbart med fem.
d) Grodan kan göra en serie med fyra hopp på högst 80 sätt.

7. Lös den Diofantiska ekvationen

$$x^2 - y^2 = 2018$$

dvs ta reda på alla heltalspar (x, y) som satisfierar den nämnda ekvationen.

8. På bilden finns två rätvinkliga trianglar. I båda trianglarna är den kortare katetens längd 1 och den större av de spetsiga vinklarna 60 grader. Bestäm den gemensamma arean.



31. 10.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i grundserien

2018

Grundseriens flervalsuppgifter (de 6 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 7 och 8 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 7 och 8 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 7 och 8 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ______________________________

Skola : ______________________________

Hemadress : ______________________________

E-postadress : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

31. 10. 2018

Gymnasiets matematiktävling
starttävlingens mellanserie

Det finns uppgifter på två sidor; de tre första uppgifterna är flervalsuppgifter i vilka det finns 0–4 rätta svar.

1. I en aritmetisk talföljd finns ett jämnt antal element. Det första elementet är 1. Summan av de till ordningstalet jämna elementen är 210 och summan av de till ordningstalet udda elementen är 190. Då

a) finns det totalt 20 element i talföljden.
b) är differensen mellan två på varandra följande element 4.
c) är det sista elementet 38.
d) är det sista elementet 39.

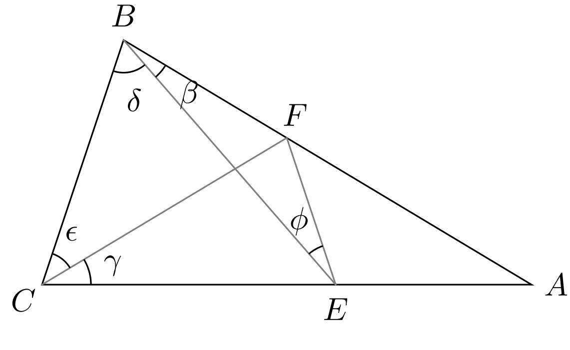
2. En kvadrat roterar 45° runt dess medelpunkt och då bildas en stjärnformig 16-hörning. Förhållandet mellan 16-hörningens och kvadratens omkretsar är

a) mindre än 1,5 b) $4 - 2\sqrt{2}$ c) $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$

3. Talen x och y är positiva heltal och talet $x^2 + 4y^2 + 1$ är ett primtal som är en faktor i talet $8xy + 2$. Vilka av följande påståenden är nödvändigtvis korrekta?

a) Talet x är jämnt.
b) Talet $8xy + 2$ är delbart med fem.
c) Kvoten $\dfrac{8xy+2}{x^2+4y^2+1}$ är mindre än fyra.
d) Talet y är jämnt.

4. I bilden (som inte är mätexakt) nedan har man ritat in en triangel ABC och några sträckor. Ytterligare vet vi om de betecknade vinklarna i figuren att $\beta = 20°$, $\gamma = 30°$, $\delta = 60°$ och $\epsilon = 50°$. Bestäm vinkeln ϕ i figuren.



5. Ta reda på alla heltalspar (x, y) för vilka gäller att

$$x^2 + xy + 2x + y = 100.$$

6. Man säger att man, på ett rutpapper med 5×5 rutor, har *fem kryss i följd* om dessa fyller en hel rad, kolumn eller någondera av diagonalerna. Bestäm det minsta antalet kryss med vilka du kan få till stånd ett sådant läge på rutpappret att fastän man skulle avlägsna vilket kryss som helst så skulle det fortfarande finnas fem kryss i följd på rutpappret.

31. 10.

Svarsblankett för flervals-uppgifterna i mellanserien

2018

Mellanseriens flervalsuppgifter (de 3 första uppgifterna) besvaras på denna svarsblankett. Svaren till de traditionella uppgifterna 4–6 kan skrivas på egna konceptark. Varje flervalsuppgift kan ha 0–4 rätta svar. Beteckna med ett + om svaret är rätt och med ett − om svaret är fel i motsvarande ruta. Rätt tecken ger en poäng medan fel tecken eller ett otydligt tecken ger noll poäng. Maximipoängen i uppgifterna 4–6 är 6p.

Provtiden är 120 minuter. **Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.** *Skriv även på svarspappren för uppgifterna 4–6 tydligt med textbokstäver ned ditt namn och din skola.*

Namn : ____________________________________

Skola : ____________________________________

Hemadress : ____________________________________

E-postadress : ____________________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

31. 10.

Gymnasiets matematiktävling starttävlingens öppna serie

2018

1. Lös den Diofantiska ekvationen

$$x^2 - y^2 = 2018$$

och ta reda på alla heltalspar (x, y) som satisfierar den nämnda ekvationen.

2. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel och anta att d är avståndet mellan punkten B och sidan AC. Bevisa att $|AB| = |AC|$ om och endast om det för varje punkt D på sidan BC gäller att $d = d_0 + d_1$ när d_0 är avståndet mellan D och AB och d_1 är avståndet mellan D och AC.

3. Vid ett runt bord sitter n stycken riddare. Var och en av dem har en lampa och en avbrytarknapp framför sig. När en riddare trycker på knappen ändras läget inte bara på hans egen lampa utan även på de två bredvidliggande lamporna, dvs. en lampa som är släckt börjar lysa och en lampa som brinner släcks. I början är vissa lampor släckta medan andra lampor lyser. Bestäm alla sådana heltal $n > 3$ att riddarna med någon knapptryckningskombination kan släcka alla lampor oberoende av hur läget i början ser ut.

4. Anta att $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion för vilken $f(150) = 25$ och

$$f(x) + f(2f(x)) = 100$$

för alla reella tal x. Bestäm alla möjliga värden för talet $f(100)$.

Tävlingstiden är **120 minuter.**
Räknare och tabellböcker är inte tillåtna.
Utför varje uppgift på en skild sida i ett konceptark.
Texta ditt namn och dina kontaktuppgifter (skolans namn, hemadress och e-postadress) tydligt på provpapperet.