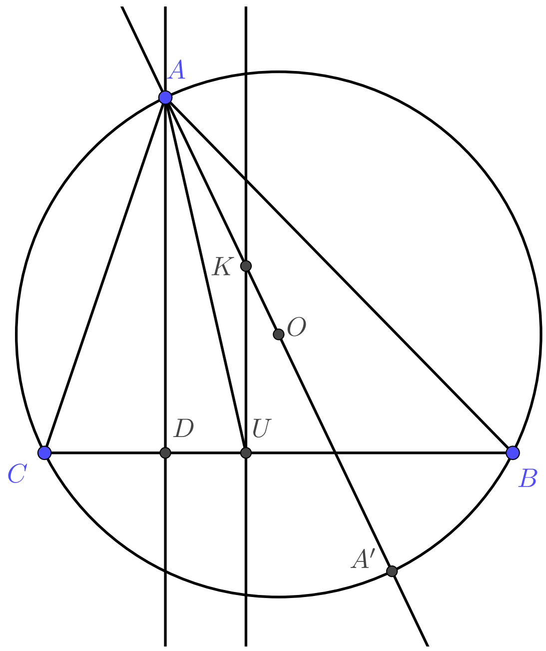
Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, tammikuu 2019
Ratkaisuja

Helpompia tehtäviä

1. Piste U on kolmion ABC sivulla BC siten, että AU on kolmion kulmanpuolittaja. Piste O on kolmion ympärysympyrän (eli ympäripiirretyn ympyrän) keskipiste. Osoita, että janan AU keskinormaali, suora AO ja pisteen U kautta kulkeva janan BC normaali leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

Ratkaisu. Piste K on pisteen U kautta kulkevan janan BC normaalin ja suoran AO leikkaupiste. Piste D on pisteestä A piirretyn korkeusjanan kantapiste suoralla BC ja piste A' on kolmion ABC ympärysympyrällä siten, että AA' on ympyrän halkaisija.



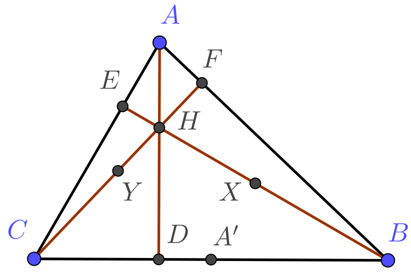
Nyt kolmiot ADC ja ABA' ovat yhdenmuotoiset, sillä $\measuredangle A'BA = 90°$ halkaisijaa vastaavana kehäkulmana, $\measuredangle ADC = 90°$ (AD on korkeusjana) ja $\measuredangle BA'A = \measuredangle BCA$ samaa kaarta vastaavina kehäkulmina.

Siksi myös $\measuredangle CAD = \measuredangle A'AB$. Kun AU on kulmanpuolittaja, voidaan kirjoittaa $\measuredangle DAU = \measuredangle CAU - \measuredangle CAD = \measuredangle UAB - \measuredangle OAB = \measuredangle UAO$.

Kun UK ja DA ovat yhdensuuntaisia (molemmat kohtisuorassa sivua BC vastaan), $\measuredangle DAU = \measuredangle KUA$. Nyt kolmio KUA on tasakylkinen ja sen kannan AU keskinormaali kulkee kärjen K kautta.

2. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

Ratkaisu. Koska $\measuredangle A'DH = 90°$, pisteet $A'DH$ ovat sellaisella ympyrällä Γ, jonka halkaisija on $A'H$.

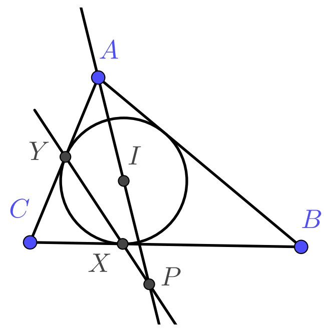


Olkoon piste E pisteestä B piirretyn korkeusjanan kantapiste. Nyt kolmiot BCE ja $BA'X$ ovat yhdenmuotoiset ja $A'X \parallel CE \perp BE$. Siksi $\measuredangle HXA' = 90°$ ja piste X on myös ympyrän Γ kehällä.

Olkoon piste F pisteestä C piirretyn korkeusjanan kantapiste. Nyt kolmiot CFB ja CYA' ovat yhdenmuotoiset ja $A'Y \parallel BF \perp CF$. Siksi $\measuredangle HYA' = 90°$ ja piste Y on myös ympyrän Γ kehällä.

3. Olkoon piste I kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste, piste X ympyrän sivuamispiste janalla BC ja piste Y ympyrän sivuamispiste janalla CA. Olkoon piste P suoran XY ja suoran AI leikkauspiste. Osoita, että $AI \perp BP$.

Ratkaisu. Kolmion kulmien summan perusteella
$\measuredangle YPA = \measuredangle XYC - \measuredangle PAY$. Kolmio CYX on tasakylkinen, joten voidaan laskea $\measuredangle XYC - \measuredangle PAY = 90° - \frac{1}{2}\measuredangle C - \frac{1}{2}\measuredangle A = \frac{1}{2}\measuredangle B$.



Siksi $\measuredangle XPI = \measuredangle XBI$ ja $BPXI$ on jännenelikulmio.

Nyt $\measuredangle IPB = \measuredangle IXB = 90°$.

4. Aino laskee kaikki kokonaisluvut luvusta 1 lukuun 100. Leo kopioi Ainon listan ja muuttaa siitä jokaisen numeron 2 numeroksi 1. Mikä luku saadaan kun vähennetään Ainon listan lukujen summasta Leon listan lukujen summa?

Ratkaisu. Kysytty luku on 110.

Jokaista Ainon listan lukua, jonka kymmeniä merkitsevä numero on 2, vastaa Leon listassa luku, jonka kymmeniä merkitsevä numero on 1. Tämä vastaa muutoksena kymmenellä vähentämistä. Vastaavasti, jos Ainon listassa luvun ykkösiä merkitsevä numero on 2, niin Leon listassa se on 1, mikä vastaa luvulla 1 vähentämistä. Muilta osin Leon lista on samanlainen kuin Ainon lista. Koska 2 esiintyy kymmenissä 10 kertaa ja ykkösissä 10 kertaa, niin kysytty erotus on $10 \cdot 10 + 10 = 110$.

5. Tulo $(8) \cdot (888 \ldots 8)$, jonka toisessa tekijässä on k numeroa, on kokonaisluku, jonka numeroiden summa on 1000. Mikä luku k on?

Ratkaisu. Tarkastellaan tuloa luvun k pienillä arvoilla. On voimassa

$$8 \cdot 8 = 64 \quad 8 \cdot 88 = 704 \quad 8 \cdot 888 = 7104 \quad 8 \cdot 8888 = 71104 \quad 8 \cdot 88888 = 711104.$$

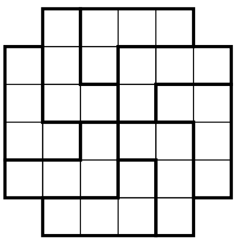
Koska aina seuraava tulo (yhden suuremmalla luvun k arvolla) saadaan kertomalla edellinen termi kymmenellä ja lisäämällä siihen 64, jolloin alku pysyy samana ja pääte muuttuu muotoon $040+64 = 104$, niin tulo $(8) \cdot (888 \ldots 8)$ on luku, jonka ensimmäinen numero on 7, seuraavat $k-2$ numeroa ovat ykkösiä ja lopussa on 04, kun $k \geq 3$. Halutaan siis löytää luku k, jolle $7+k-2+4 = 1000$ eli $k = 991$.

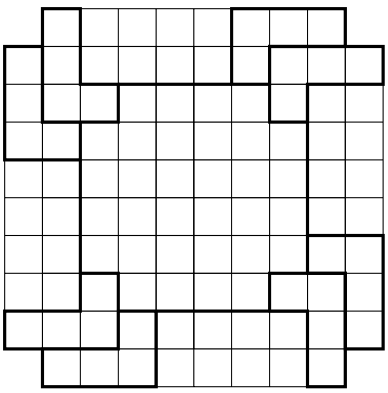
6. Eräässä kielessä on kaksi kirjainta. Kukin sana koostuu seitsemästä kirjaimesta, ja mitkä tahansa kaksi eri sanaa eroavat ainakin kolmessa eri kohdassa. Osoita, ettei kielessä voi olla yli 16 sanaa.

Ratkaisu. Voidaan ajatella sanoja seitsemän merkin merkkijonoina, jotka koostuvat merkeistä 0 ja 1. Tällaisia merkkijonoja on 2^7 kappaletta. Tarkastellaan nyt jotain kielen sanaa ja sellaisia sanoja, jotka eroavat sanasta täsmälleen yhden kirjaimen osalta. Yhteensä tarkasteltavia sanoja on siis kahdeksan. Kun valitaan mitkä tahansa kaksi näistä kahdeksasta sanasta, niin ne eroavat toisistaan enintään kahden kirjaimen verran. Siispä näistä kahdeksasta sanasta enintään yksi on tarkasteltavan kielen sana. Täten kielessä on enintään $\frac{2^7}{8} = 16$ sanaa.

7. Shakkilaudasta, jonka mitat ovat $n \times n$, on järsitty pois kaikki neljä kulmaa. Millä luvun n arvoilla voidaan lauta peittää L-kirjaimen muotoisilla neljästä ruudusta koostuvilla palikoilla?

Ratkaisu. Jos $n = 4k+2$, tämä onnistuu. Ensinnäkin tapaus $n = 6$ on helppo (vasen kuva), induktioaskeleen ottamiseksi laitetaan laatat nurkkiin oikean kuvan tavalla. Keskelle jää $4(k-1)+2$-kokoinen järsitty lauta, sivuille $2 \times 4(k-1)$-kokoiset alueet jotka on helppo täyttää laatoilla.





Jos n on pariton, on tilanne väistämättä mahdoton, koska jäljellä olevien ruutujen määrä on pariton.

Jos n on jaollinen neljällä, on tilanne jälleen mahdoton. Tämän näkee värittämällä laudan kahdella värillä riveittäin: ensimmäinen rivi valkoiseksi, toinen mustaksi, kolmas valkoiseksi, jne. Jokainen L-palikka peittää joko kolme mustaa ja yhden valkoisen ruudun, tai kolme valkoista ja yhden mustan ruudun. Koska mustia ja valkoisia ruutuja on yhtä paljon, näiden vaihtoehtojen täytyy toteutua keskenään yhtä monta kertaa. Siten väritettävien ruutujen lukumäärän $n^2 - 4$ on oltava kahdeksalla jaollinen, mikä ei pidä paikkaansa jos $4 \mid n$.

8. Sellaisen ruudukon, jonka koko on 25×25, jokaiseen ruutuun on kirjoitettu joko luku 1 tai -1. Olkoon i:nnen rivin lukujen tulo a_i ja j:nnen sarakkeen lukujen tulo b_j. Osoita, että

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_{25} + b_{25} \neq 0.$$

Ratkaisu. Huomataan ensin, että

$$a_1 a_2 \cdots a_{25} = b_1 b_2 \cdots b_{25},$$

joka on ruudukon kaikkien lukujen tulo. Oletetaan, että

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_{25} + b_{25} = 0.$$

Tällöin summassa pitää olla yhtä monta positiivista ja negatiivista termiä. Jos siis lukujen a_i joukossa on n negatiivista termiä, on lukujen b_i joukossa oltava $25 - n$ negatiivista termiä. Lukujen n ja $25 - n$ pariteetit ovat eri, joten toinen tuloista $a_1 a_2 \cdots a_{25}$ ja $b_1 b_2 \cdots b_{25}$ on negatiivinen ja toinen positiivinen. Tämä on mahdotonta. Väite on todistettu.

Vaativampia tehtäviä

9. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (n, m), joissa lukujen m ja n aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo ovat eri kaksinumeroisia lukuja, joissa on samat numerot.

Ratkaisu. Vastaus: $(n, m) = (98, 32)$ tai $(n, m) = (32, 98)$.

Olkoon $10a + b$ lukujen m ja n aritmeettinen keskiarvo, missä a ja b ovat välillä $[1, 9]$ olevia kokonaislukuja. Lisäksi haluttujen ehtojen nojalla $a \neq b$. Tällöin voidaan kirjoittaa $n = 10a + b + x$ ja $m = 10a + b - x$, missä x on kokonaisluku ja $|x| < 99$. Halutaan, että on voimassa

$$\sqrt{(10a + b + x)(10a + b - x)} = 10b + a.$$

Sieventämällä saadaan $x^2 = 99(a^2 - b^2)$. Siis luvun x^2 on oltava jaollinen luvulla 99 eli luvun x on oltava jaollinen luvuilla 3 ja 11. Voidaan siis kirjoittaa $x = 33z$, missä z on kokonaisluku. Saadaan

$$11z^2 = \frac{99 \cdot 11z^2}{99} = \frac{x^2}{99} = (a^2 - b^2) = (a - b)(a + b).$$

Siis termi $a - b$ tai termi $a + b$ on jaollinen luvulla 11. Koska on voimassa $17 \geq a + b \geq 3$, $8 \geq a - b \geq -8$ ja $a - b \neq 0$, niin ainoa vaihtoehto on $a + b = 11$. Tällöin on oltava $a - b = z^2$. Koska molemmat luvuista $a + b$ ja $a - b$ ovat joko parittomia tai parillisia, niin luvun $a - b$ ja täten luvun z^2 on oltava pariton. Siis on oltava $|z| = 1$, sillä jos $|z| \geq 3$, niin on $|x| \geq 99$. Täten saadaan $a - b = 1$ ja $x = \pm 33$. Koska lisäksi on $a + b = 11$, niin on oltava $a = 6$ ja $b = 5$ sekä $(n, m) = (98, 32)$ tai $(n, m) = (32, 98)$.

10. Tarkastellaan $m \times n$–ruudukkoa. Mikä on pienin mahdollinen määrä 1×1–ruutuja, jotka pitää peittää niin, että lopuissa ruuduissa ei ole tilaa kolmiruutuiselle L–palikalle?

Ratkaisu. Olkoot m ja n parillisia. Selvästi riittää värittää joka toinen sarake. Osoitetaan seuraavaksi, että pienempi määrä väritettyjä ruutuja ei riitä. Jaetaan ruudukko 2×2-ruudukoiksi. Jokaisesta sellaisesta pitää selvästi värittää vähintään kaksi ruutua. Homma on selvä.

Oletetaan nyt, että n on parillinen ja m pariton. Voidaan olettaa, että m on vaakarivien lukumäärä. Väritetään tällöin joka toinen vaakarivi alkaen toisesta. Väritettyjen ruutujen lukumäärä on siis $(m-1)n/2$. Osoitetaan, että vähempi ei riitä. Tämä nähdään huomaamalla, että ruudukosta voidaan rajata $(m - 1)n/4$ kappaletta 2×2-ruudukkoja (näihin ei tarvita kaikkia alkuperäisen ruudukon ruutuja). Näissä jokaisessa on vähintään kaksi väritettyä ruutua. Tämäkin tapaus on siis loppuun käsitelty.

Viimeinen tapaus. Sekä n että m parittomia. Oletetaan lisäksi $n \geq m$. Olkoon m jälleen vaakarivien lukumäärä. Osoitetaan, että yksi optimaalinen väritys on jälleen värittää $(m-1)/2$ vaakariviä, alkaen jälleen toisesta, eli väritettyjen ruutujen lukumäärä on taas $(m - 1)n/2$. Leikataan ruudukosta L-kirjaimen mallinen pala, niin, että jäljelle jää $(n - 2) \times (m - 2)$ ruudukko. L-kirjain voidaan jakaa $(m+n-6)/2$ kappaleeseen 2×2-ruudukoita sekä yhdeksi 3×3-ruudukoksi, josta puuttuu yksi kulma. 2×2-neliöistä on väritettävä vähintään $m + n - 6$ ruutua, ja järsitystä 3×3 ruudukosta puolestaan vähintään kolme ruutua. Induktio täydentää ratkaisun.

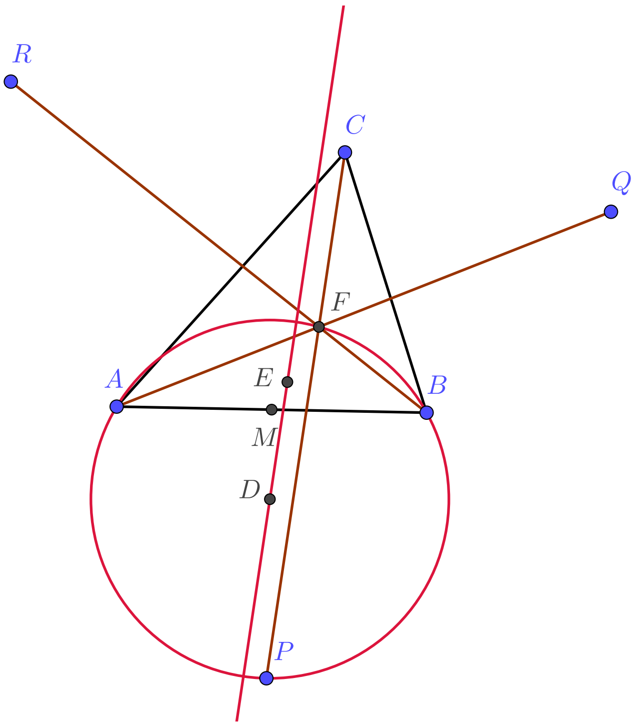
11. Positiiviset kokonaisluvut on väritetty mustiksi ja valkoisiksi. Kahden erivärisen luvun summa on musta ja tulo valkoinen. Mikä on kahden valkoisen luvun tulo? Määritä kaikki tällaiset väritykset.

Ratkaisu. Olkoot m ja n valkoisia. Osoitetaan, että mn on valkoinen. Olkoon k jokin musta luku. Silloin $m+k$ on musta, joten $mn+kn = (m+k)n$ on valkoinen ja kn on valkoinen. Jos mn on musta, niin $mn + kn$ on musta. Väite on todistettu.

Olkoon k pienin valkoinen luku. Aiemman perusteella myös luvun k monikerrat ovat valkoisia. Osoitetaan, että muita valkoisia lukuja ei ole. Olkoon n valkoinen. Luku n voidaan kirjoittaa muodossa $qk + r$, missä $0 \le r < q$. Jos $r \ne 0$, niin luku r on musta, koska k on pienin valkoinen luku. Olemme kuitenkin todistaneet, että qk on valkoinen. Siispä $qk + r$ on musta. Ristiriita. Siispä $r = 0$, eli täsmälleen luvun k monikerrat ovat valkoisia.

12. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja olkoon F sen Fermat'n piste. Osoita, että kolmioiden ABF, BCF ja CAF Eulerin suorat leikkaavat samassa pisteessä. (Fermat'n pisteen ja Eulerin suoran määritelmät: `https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/nimgeom.pdf`)

Ratkaisu. Olkoot P, Q ja R ne pisteet kolmion ABC ulkopuolella, joille BAP, CBQ ja ACR ovat tasasivuisia kolmioita. Tunnetusti F on janojen AQ, BR ja CP yhteinen piste. Tarkastetaan esimerkiksi kolmion ABF Eulerin suoraa. Olkoon M janan AB keskipiste. Eulerin suora kulkee kolmion ABF painopisteen E kautta ja kolmion ABF ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen D kautta. Mutta koska $APBF$ on jännenelikulmio (ks. tehtävässä mainitun monisteen todistusta), D on samalla kolmion BAP ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Koska BAP on tasasivuinen kolmio, D jakaa janan PM suhteessa $2:1$ samoin kuin E jakaa janan FM. Tästä seuraa, että $DE \parallel PF$. Mutta silloin DE jakaa myös janan CM suhteessa $2:1$ eli kulkee kolmion ABC painopisteen G kautta. Samoin nähdään, että muutkin tehtävän Eulerin suorat kulkevat pisteen G kautta.



13. Kuusikulmion $ABCDEF$ kärkipisteet ovat ympyrällä, jonka säde on r. Sivuista AB, CD ja EF jokaisen pituus on r. Todista, että muiden kolmen sivun keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion.

Ratkaisu. Olkoon ympyrän keskipiste O, ja olkoot sivujen BC, DE ja FA keskipisteet P, Q ja R. Valitaan O koordinaatiston origoksi, jolloin $P = \frac{1}{2}(B+C)$, $Q = \frac{1}{2}(D+E)$ ja $R = \frac{1}{2}(F+A)$.

Saadaan

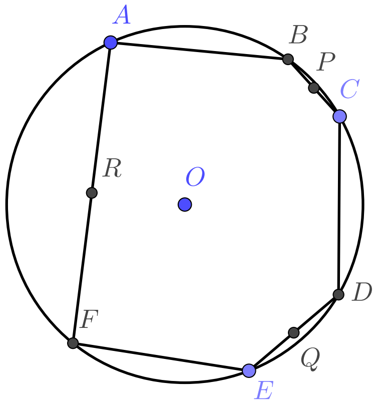
$$\overline{PQ} = Q - P = \frac{1}{2}(D + E - B - C).$$

Merkitään ρ:lla 60°:een vastapäiväistä kiertoa O:n ympäri. Oletusten nojalla $\rho(B) = A$ ja $\rho(D) = C$. Nelikulmion $OFE\rho(E)$ jokaisen sivun pituus on r, joten se on suunnikas ja $\rho(E) = \overline{O\rho(E)} = \overline{FE} = E - F$. Vastaavasti $\rho(C) = C - D$.

Vektorin $\overline{PQ}$ kuva tässä kierrossa on

$$\begin{aligned}\overline{\rho(P)\rho(Q)} &= \frac{1}{2}\Big(\rho(D) + \rho(E) - \rho(B) - \rho(C)\Big) = \frac{1}{2}(C + E - F - A - C + D)\\ &= \frac{1}{2}(D + E - F - A) = Q - R = \overline{RQ}.\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $PQ = QR$ ja $\angle PQR = 60°$, joten PQR on tasasivuinen kolmio.



14. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Lisäksi $f(2019) = 2019$. Ratkaise f.

Ratkaisu. Olkoon a mielivaltainen luku ja olkoon n mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Arvioidaan $f(a)$:n ja $f(2019)$:n erotusta jakamalla väli $[a, 2019]$ (tai $[2019, a]$) n:ään osaan, joista kunkin pituus on $d = \dfrac{1}{n}(a - 2019)$:

$$\begin{aligned} |f(a) - f(2019)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} f(2019 + kd) - f(2019 - (k-1)d) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left| f(2019 + kd) - f(2019 + (k-1)d) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} d^2 = \frac{(a-2019)^2}{n}. \end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, on $f(a) - f(2019) = 0$. Siis $f(a) = 2019$ kaikilla a.

15. Todista, että jos a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja, joille $abc \geq 2^9$, pätee epäyhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (abc)^{1/3}}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}}\right).$$

Ratkaisu. Jos voitaisiin olettaa $a, b, c \geq 2$, voitaisiin asettaa $a = e^{a_0}$ jne. ja soveltaa Jensenin epäyhtälöä. Funktio $x \mapsto 1/\sqrt{1 + \exp(x)}$ on kuitenkin konveksi vain, kun $x \geq \ln 2$.

Väite seuraa epäyhtälöistä

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}, \qquad x, y > 0,\ xy \geq 2^6, \tag{1}$$

ja

$$\frac{2}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2y}}}, \qquad x, y > 0,\ x^2y \geq 2^9. \tag{2}$$

Voidaan nimittäin olettaa, että $a \geq b \geq c$, jolloin $ab \geq 2^6$ (koska muuten $abc < 2^9$). Saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{ab}}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}},$$

joka on tehtävän väite.

Todistetaan epäyhtälö (1). Tarkastellaan funktiota $f(x) = 1/\sqrt{1+x} + 1/\sqrt{1+p/x}$, kun $x > 0$ ja $p \geq 2^6$. Funktion derivaatta on

$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x)^{3/2}} + \frac{p}{2(1+p/x)^{3/2}x^2}$$

ja

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{p}{2(1+p/x)^{3/2}x^2} \geq \frac{1}{2(1+x)^{3/2}} \iff p^2(1+x)^3 \geq x^4(1+p/x)^3 = x(x+p)^3$$

Tavoite on todistaa, että $f(x)$:n minimi on $x = \sqrt{p}$, joten erotetaan vasemman ja oikean puolen erotuksesta tekijäksi $p - x^2$:

$$\begin{aligned} &p^2(1+x)^3 - x(x+p)^3 = p^2(1+3x+3x^2+x^3) - x(x^3+3x^2p+3xp^2+p^3) \\ &\quad = -x^4 + (p^2-3p)x^3 + (3p^2-p^3)x + p^2 = (p-x^2)(x^2+(3p-p^2)x+p). \end{aligned}$$

Ensimmäisellä toisen asteen polynomilla on yksinkertainen juuri $\sqrt{p}$:ssä. Jälkimmäisellä toisen asteen polynomilla on kaksi reaalijuurta, jos $(3p-p^2)^2 > 4p$ eli $p^4 - 6p^3 + 9p^2 - 4p > 0$. Tämä toteutuu, jos esim. $p > 6$, koska silloin $p^4 - 6p^3 + 9p^2 - 4p > (p-6)p^3 + 9p(p-1) > 0$. Juurien summa on $p^2 - 3p > 0$ ja tulo on p. Tästä seuraa, että juuret ovat positiivisia ja $\sqrt{p}$:n eri puolilla. Olkoot juuret $\alpha \in (0, \sqrt{p})$ ja toinen $\beta \in (\sqrt{p}, \infty)$, jolloin polynomien tulon (ja siten derivaatan $f'(x)$) etumerkki on seuraava:

x	0		α		$\sqrt{p}$		β		∞
$p - x^2$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$x^2+(3p-p^2)x+p$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
tulo		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Siis f:llä on paikallinen minimi $\sqrt{p}$:ssä. Rajoilla $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ ja $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, joten $f(\sqrt{p}) = 2/\sqrt{1+\sqrt{p}}$ on globaali minimi, kunhan $p > 9$.

Todistetaan epäyhtälö (2). Tällä kertaa tarkastellaan funktiota $g(x) = 2/\sqrt{1+x} + 1/\sqrt{1+q/x^2}$, kun $q \geq 2^9$ ja $x > 0$. Derivaatta on

$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^{3/2}} + \frac{q}{(1+q/x^2)^{3/2}x^3} = \frac{-(x^2+q)^{3/2} + q(x+1)^{3/2}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+q}\,(x^3+x^2+qx+q)}$$

ja sillä on sama etumerkki kuin lausekkeella

$$q^{2/3}(x+1) - (x^2+q).$$

Tämän polynomin yksi juuri on $\sqrt[3]{q}$ ja toinen on $q^{2/3} - q^{1/3}$. Siten $g(x)$:llä on paikallinen minimi kohdassa $x = \sqrt[3]{q}$, ja koska $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1 \geq g(\sqrt[3]{q})$, kun $x \geq 2^9$, tämä on myös globaali minimi.

16. Etsi kaikki reaaliluvut $x, y, z \geq 1$, joille

$$\min(\sqrt{x+xyz}, \sqrt{y+xyz}, \sqrt{z+xyz}) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Ratkaisu. Olkoot $a, b, c \geq 0$ luvut, joille $x = 1 + a^2$, $y = 1 + b^2$ ja $z = 1 + c^2$. Voidaan olettaa, että c on luvuista pienin, jolloin tehtävän ehto on

$$(1+c^2)[1+(1+a^2)(1+b^2)] = (a+b+c)^2.$$

Cauchyn–Schwartzin epäyhtälö jonoille $(1, a+b)$ ja $(c, 1)$ on

$$(a+b+c)^2 \leq [1+(a+b)^2](1+c^2)$$

joten

$$(1+a^2)(1+b^2) \leq (a+b)^2,$$

mistä saadaan $(1-ab)^2 \leq 0$ eli $ab = 1$. Tällöin jälkimmäisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus, samoin Cauchyn–Schwartzin epäyhtälössä, joten $c(a+b) = 1$. Näistä tuloksista seuraa $c = 1/(a+b) < 1/b = a$ ja vastaavasti $c < b$, jolloin tehtävän ehto on voimassa.

Siis ratkaisut ovat

$$\{\, x, y, z \,\} = \left\{ 1+a^2, 1+\frac{1}{a^2}, 1+\left(\frac{a}{a^2+1}\right)^2 \right\}$$

kaikilla $a > 0$.