Huhtikuun 2014 valmennuskirje

Tehtävät eivät varsinaisesti ole vaikeusjärjestyksessä, mutta alkupään tehtävät ovat luultavasti helpompia kuin loppupään tehtävät. Ratkaisuita voi lähettää postitse osoitteeseen

Esa Vesalainen
Huddingenpolku 2A15
01600 Vantaa

tai sähköpostitse osoitteeseen esavesalainen@gmail.com. Tarkkaa palautusajankohtaa ei oikeastaan ole, mutta kannattaa huomata, että valmennusviikko on tänä vuonna poikkeuksellisen aikaisin. . .

1. Osoita, että
$$(1+\sin x)\,(1+\cos x) \leqslant \frac{3}{2}+\sqrt{2}$$
kaikilla reaaliluvuilla x.

2. Pöydällä on yksi kasa, jossa on 1001 kiveä. Jokaiselle pöydällä esiintyvälle kasalle (jossa on ainakin kolme kiveä) voi tehdä niin, että siitä poistaa yhden kiven ja sitten sen jakaa kahdeksi pienemmäksi kasaksi (joiden ei tarvitse olla yhtä suuria). Voiko tätä toimitusta toistamalla päästä tilanteeseen, jossa pöydällä on vain kolmen kiven kasoja?

3. Olkoon p pariton alkuluku. Osoita, että summa
$$1^{p^p}+2^{p^p}+3^{p^p}+\ldots+p^{p^p}$$
on jaollinen luvulla p.

4. Olkoot $a, b \in \,]0, \pi/2[$. Osoita, että
$$\frac{\sin^3 a}{\sin b}+\frac{\cos^3 a}{\cos b} \geqslant \frac{1}{\cos(a-b)}.$$

5. Osoita, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n pätee
$$n^n-1 \geqslant n^{(n+1)/2}\,(n-1)\,.$$

6. Muodostakoot k_1, k_2, ... sellaisen kasvavan positiivisten kokonaislukujen jonon, että $k_{n+2}+k_n > 2k_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että luku $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-k_n}$ on irrationaalinen.

7. Olkoot $a, b, c, d \in [0, \pi]$ sellaisia, että
$$\begin{cases} 2\cos a+6\cos b+7\cos c+9\cos d=0, \\ 2\sin a-6\sin b+7\sin c-9\sin d=0. \end{cases}$$
Osoita, että $3\cos(a+d)=7\cos(b+c)$.

8. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että yhtälön

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

ei-negatiivisten kokonaislukuratkaisuiden lukumäärä on $\binom{n+m-1}{m-1}$. (Tässä vasemman puolen termien järjestys otetaan huomioon.)

9. Olkoon $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että jokainen luvuista $a_1, a_2, \ldots$ on kokonaisluku.

10. Olkoot kolmion sivut a, b ja c, ja olkoon sen piirin puolikas 1. Osoita, että

$$1 < ab + bc + ca - abc \leqslant 1 + \frac{1}{27}.$$

11. Olkoot a, b ja c reaalilukuja, joille $abc \neq 0$, $a + b + c = 0$ ja $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$. Osoita, että

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}.$$

12. Etsi reaaliluvut x ja y, joille

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 9, \\ \left(x^{-1/3} + y^{-1/3}\right)\left(1 + x^{-1/3}\right)\left(1 + y^{-1/3}\right) = 18. \end{cases}$$