

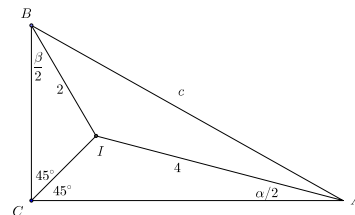
# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailu 2015

## Avoimen sarjan tehtävien ratkaisuja

1. Voidaan olettaa, että  $b = a + 1$ . Silloin  $d = a^2 + (a+1)^2 + (a(a+1))^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^4 + 2a^3 + a^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ . Toisaalta  $(a^2 + a + 1)^2 = a^4 + a^2 + 1 + 2a^3 + 2a^2 + 2a = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ .  $d$  on siis neliöluku ja  $\sqrt{d} = a^2 + a + 1$ . ( $a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ .)

Koska  $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$  ja joko  $a$  tai  $a+1$  on parillinen, niin  $a(a+1)$  on parillinen ja  $\sqrt{d}$  on pariton.

2. 1. *ratkaisu.* Olkoon suorakulmainen kolmio  $ABC$ , sen hypotenuusa  $c = AB$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle CAB = \alpha$  ja  $I$  sisään piirretyn ympyrän keskipiste.  $I$  on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Sovelletaan (kolmion kulmasummasta välittömästi seuraavaa) tietoa, jonka mukaan kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, kolmioihin  $CAI$  ja



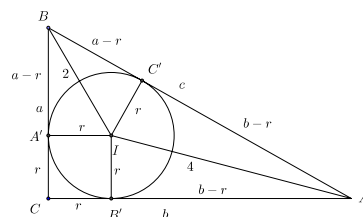
$BCI$ . Saadaan  $\angle AIB = \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ . Koska  $ABC$  on suorakulmainen,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Siis  $\angle AIB = 135^\circ$ . Sovelletaan kosinilauseetta kolmioon  $ABI$ . Koska  $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , saadaan heti

$$c^2 = 4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 + 8\sqrt{2},$$

joten

$$c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

2. *ratkaisu.* Olkoon  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $ABC$ :n sisäympyrän säde  $r$  ja sisäympyrän ja kolmion sivujen  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  sivuamispisteet  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Koska  $A'CB'I$  on neliö,  $A'C = CB' = r$ . Koska ympyrän tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat yhtä pitkiä, on  $BC' = BA' = a - r$  ja  $C'A = B'B = b - r$ . Siis  $c = a + b - 2r$ , joten



$$r = \frac{1}{2}(a + b - c), \quad a - r = \frac{1}{2}(a - b + c), \quad b - r = \frac{1}{2}(-a + b + c).$$

Suorakulmaisista kolmioista  $IAC'$  ja  $BIC'$  saadaan Pythagoraan lauseen nojalla

$$(-a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \quad (1)$$

ja

$$(a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 = 4 \cdot 2^2 = 16. \quad (2)$$

Kun otetaan huomioon, että  $ABC$  on suorakulmainen, joten  $a^2 + b^2 = c^2$ , niin (1) ja (2) sievenevät muotoihin

$$4c^2 - 4ac = 64, \quad 4c^2 - 4bc = 16.$$

Siis

$$a = \frac{c^2 - 16}{c}, \quad b = \frac{c^2 - 4}{c}$$

Kun nämä  $a$ :n ja  $b$ :n arvot sijoitetaan Pythagoraan yhtälöön  $a^2 + b^2 = c^2$ , saadaan  $c$ :lle yhtälö

$$c^4 - 40c^2 + 272 = 0,$$

josta ratkaistaan

$$c^2 = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 272}}{2} = 20 \pm \sqrt{400 - 272} = 20 \pm \sqrt{128} = 20 \pm 8\sqrt{2}.$$

Kolmiosta  $ABI$  nähdään, että  $c > 4$ , joten  $c^2$ :n lausekkeessa vain  $+$ -merkki kelpaa. Siis

$$c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

*3. ratkaisu.* Käytetään samoja merkintöjä kuin edellä. Pythagoraan lause sovellettuina suorakulmaisiin kolmioihin  $AC'I$ ,  $AB'I$ ,  $BC'I$ ,  $BA'I$  antaa  $AC' = AB' = \sqrt{16 - r^2}$  ja  $BC' = BA' = \sqrt{4 - r^2}$ . Yhtälö  $a^2 + b^2 = c^2$  on siis

$$\left(r + \sqrt{4 - r^2}\right)^2 + \left(r + \sqrt{16 - r^2}\right)^2 = \left(\sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2}\right)^2.$$

Kun tässä suoritetaan neliöön korotukset ja sievennetään, saadaan, että  $r$  toteuttaa yhtälön

$$r \left(\sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2}\right) = -r^2 + \sqrt{r^4 - 20r^2 + 64}.$$

Kun tämä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan, että  $r$  toteuttaa yhtälön

$$r^2 \sqrt{r^4 - 20r^2 + 64} = r^4 - 10r^2 + 16.$$

Kun tämä vielä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan  $r$ :n toteuttamaksi yhtälöksi

$$17r^4 - 80r^2 + 64 = 0.$$

Tämä on tuntemattoman  $r^2$  toisen asteen yhtälö, jolle voidaan suoraan kirjoittaa ratkaisu

$$r^2 = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 17 \cdot 256}}{34} = \frac{40 \pm 16\sqrt{2}}{17}.$$

Koska  $r$  on kolmion  $BIC'$  lyhempi kateetti, on oltava  $r^2 < 2$ . Vain

$$r^2 = \frac{40 - 16\sqrt{2}}{17}$$

voi tulla kyseeseen. Nyt

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2} = \frac{\sqrt{28 + 16\sqrt{2}} + \sqrt{232 + 16\sqrt{2}}}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{17}} \left( \sqrt{7 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{58 + 4\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

– Tämä yllättävän erinäköinen ratkaisu on kuitenkin sama kuin edellisissä ratkaisuisa saatu  $c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ , niin kuin selviää, kun korottaa molemmat lausekkeet neliöön ja tekee rutiinisievennykset.

**3. 1. ratkaisu.** Olkoon  $x$  mielivaltainen joukon  $A$  alkio. Jaetaan joukon  $A \setminus \{x\}$  40 alkioita kahdeksi 20-alkioiseksi joukoksi. Olkoot näiden joukkojen alkioden summat  $S_1$  ja  $S_2$ . Tehtävän ehdon perusteella  $S_1 + x > S_2$  ja  $S_2 + x > S_1$ . Edellisestä epäyhtälöstä seuraa  $x > S_2 - S_1$  ja jälkimmäisestä  $x > S_1 - S_2$ . Siis  $x > |S_1 - S_2| \geq 0$ . Jokainen  $A$ :n alkio on siis positiivinen luku, joten negatiivisia lukuja  $A$ :ssa ei ole.

**2. ratkaisu.**  $A$  on joukko, joten sen alkiot ovat eri lukuja. Kirjoitetaan ne suuruusjärjestykseen  $x_1 < x_2 < \dots < x_{41}$ . Jos joukossa  $A$  on negatiivisia lukuja, niin  $x_1 < 0$ . Silloin

$$\sum_{k=22}^{41} x_k < \sum_{k=1}^{21} x_k < \sum_{k=2}^{21} x_k < \sum_{k=22}^{41} x_k.$$

Tämä ei ole mahdollista, joten joukossa  $A$  ei ole negatiivisia lukuja.

**4. 1. ratkaisu.** Jonoja, joissa on  $2k$ ,  $k \geq 0$ , **A**-kirjainta, on

$$\binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

kappaletta: paikat, joissa on **A**-kirjain voidaan valita yhtä monella tavalla kuin voidaan valita  $n$ -alkioisen joukon  $2k$ -alkioinen osajoukko. **B**- ja **C**-kirjaimille jää  $n - 2k$  paikkaa, ja jokaiseen tällaiseen voidaan asettaa kumpi tahansa näistä kirjaimista, joten mahdollisuuksia on  $2^{n-2k}$ . Kaikkiaan tehtävän mukaisia merkkijonoja on siis

$$2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \dots$$

kappaletta. Mutta summa saadaan kirjoitettua suljettuun muotoon, kun huomataan, että

$$\begin{aligned} 3^n &= (2 + 1)^n = 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \dots, \\ 1 &= (2 - 1)^n = 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} - \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} - \dots. \end{aligned}$$

Kun edelliset binomikehitelmät lasketaan yhteen, saadaan

$$3^n + 1 = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}.$$

Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis

$$\frac{1}{2}(3^n + 1).$$

*2. ratkaisu.*  $n$ -kirjaimisia sanoja on kaikkiaan  $3^n$  kappaletta. Olkoon näistä  $S_n$  sellaisia, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia ja  $T_n$  sellaisia, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia. Tarkastellaan sanoja, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Jos sanan viimeinen kirjain on **A**, sen  $(n-1)$ :n ensimmäisen kirjaimen joukossa on pariton määrä **A**-kirjaimia ja jos viimeinen kirjain on **B** tai **C**, sen  $(n-1)$ :n ensimmäisen kirjaimen joukossa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Tästä seuraa

$$S_n = T_{n-1} + 2S_{n-1}. \quad (1)$$

Vastaavasti tarkastelemalla sanoja, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, tullaan yhtälöön

$$T_n = S_{n-1} + 2T_{n-1}. \quad (2)$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) vähennetään toisistaan, saadaan

$$S_n - T_n = S_{n-1} - T_{n-1}. \quad (3)$$

Nyt  $S_1 = 2$  ja  $T_1 = 1$  (parillinen määrä **A**-kirjaimia on sanoissa **B** ja **C**, pariton sanassa **A**) eli  $S_1 - T_1 = 1$ . Yhtälöstä (3) seuraa nyt yksinkertaisella induktiolla, että  $S_n - T_n = 1$  kaikilla  $n$ . Koska  $S_n + T_n = 3^n$ , saadaan heti

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1).$$

*3. ratkaisu.* Pienillä  $n$ :n arvoilla tehdyt kokeilut antavat aiheen olettaa, että

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

ja

$$T_n = 3^n - S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Todistetaan tämä induktiolla.  $S_1 = 2$  ja  $T_1 = 1$ . Oletetaan, että väite pätee  $n$ :n merkin pituisiin jonoihin. Jonot, joiden pituus on  $n+1$  merkkiä ja joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia, saadaan liittämällä  $n$ -pituisiin jonoihin, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi **B** tai **C**, tai sellaisiin, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi **A**. Siis

$$S_{n+1} = 2S_n + T_n = 3^n + 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1).$$

Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.