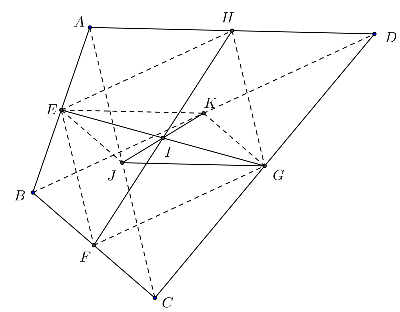
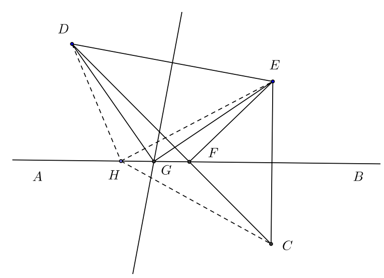
Matematiikan olympiavalmennus
Helmikuun tehtäväsarjan ratkaisuja

Helpohkot tehtävät

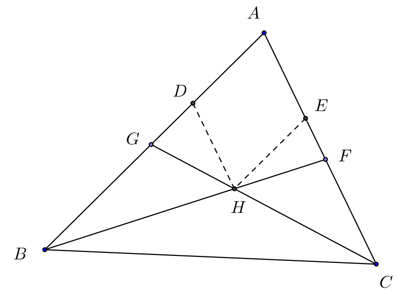
1 Olkoon $ABCD$ nelikulmio, E, F, G, H sen sivujen AB, BC, CD, DA keskipisteet ja I janojen EG ja FH leikkauspiste. Olkoot vielä J ja K janojen AC ja BD keskipisteet. Kolmion tunnetun ominaisuuden nojalla $EF \parallel AC \parallel GH$ ja $EF = \frac{1}{2}AC = GH$. Tästä seuraa, että $EFGH$ on suunnikas. (Olemme itse asiassa todistaneet *Varignonin lauseen*.) Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, joten I on janan EG keskipiste. Mutta aivan samoin kuin edellä, nähdään, että myös $EJGK$ on suunnikas. Senkin lävistäjät puolittavat toisensa, joten EG:n keskipiste I on myös janan JK keskipiste.



2 Ensimmäistä kysymystä varten tarkastellaan pisteen E peilikuvaa C suoran AB suhteen. Olkoon F AB:n ja CD:n leikkauspiste. Koska $FE = FC$, $DF + FE = DC$. Jos nyt H on mielivaltainen suoran AB piste, niin kolmioepäyhtälön perusteella $DH + HC \geq DC = DF + FE$. F on siis kysytty piste. Toiseen kysymykseen vastaamista varten tarkastellaan janan DE keskinormaalia. Se leikkaa AB:n pisteessä G. Keskinormaalin määritelmän mukaan $DG = EG$, joten $|DG - EG| = 0$. Muut kuin DE:n keskinormaalin pisteet ovat lähempänä jompaakumpaa pisteistä D ja E. G on siis ainoa toisen kysymyksen ehdon toteuttava piste.



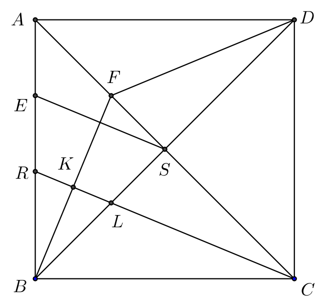
3 Piirretään H:n kautta AC:n ja AB:n suuntaiset suorat, jotka leikkaavat AB:n ja AC:n pisteissä D ja E. Silloin D on janalla AG ja E janalla AF, $ADHE$ on suunnikas ja $HE = AD$ sekä $HD = AE$. Nyt



$$\begin{aligned} AF + AG &= (AE + EF) + (AD + DG) \\ &= (HD + DG) + (HE + EF) \\ &> HG + HE. \end{aligned}$$

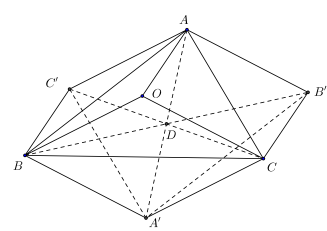
Epäyhtälö perustuu kolmioepäyhtälöön (ja siihen, että DGH ja EHF ovat aitoja kolmioita).

4 [Tehtävän alkuperäisessä tekstissä oli painovirhe. Todistettavan yhtälön pitäisi olla $AR = 2 \cdot SL$.] Piirretään S:n kautta CR:n suuntainen suora. Se leikkaa AB:n pisteessä E. Koska $KL \perp BF$, BF on kolmioiden BLR ja BSE korkeussuora. Suorakulmaiset kolmiot BFS ja DFS ovat yhteneviä (sks). Siis $\sphericalangle FBS = \sphericalangle SDF$, joten BF on kulman $\sphericalangle EBS$ puolittaja. Kolmio, jonka korkeusjana yhtyy kulmanpuolittajaan, on tasakylkinen. Siis



$BL = BR$, $BS = BE$ ja siis $SL = BS - BL = BE - BR = ER$. Mutta koska $SE \parallel CR$ ja S on AC:n keskipiste, niin E on AR:n keskipiste. Siis $AR = 2 \cdot ER = 2 \cdot SL$.

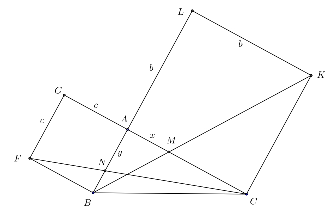
5 Koska $AB' \parallel OC \parallel BA'$ ja $AB' = OC = BA'$, nelikulmio $ABA'B'$ on suunnikas. Jos D on janojen AA' ja BB' leikkauspiste, niin suunnikkaan lävistäjien tutun ominaisuuden perusteella D on AA':n keskipiste. Mutta samoin kuin $ABA'B'$, myös $AC'A'C$ on suunnikas. Näin ollen CC' leikkaa AA':n AA':n keskipisteessä eli pisteessä D. Toisen väitteen todistamiseksi todetaan, että myös $BCB'C'$ on suunnikas. Tunnetusti suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa (ns. *suunnikaslause*, seuraa kosinilauseesta ja siitä, että suunnikkaan viereisissä kärjissä olevat kulmat ovat vieruskulmia, joiden kosinit ovat toistensa vastalukuja). Siis $AA'^2 + BB'^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot A'B'^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot OC^2$ ja vastaavasti $AA'^2 + CC'^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot OB^2$ ja $BB'^2 + CC'^2 = 2 \cdot BC^2 + 2 \cdot AO^2$. Väite saadaan, kun edelliset kolme yhtälöa lasketaan puolittain yhteen ja supistetaan kahdella.



6 Olkoon $AC = AL = LK = b$ ja $AB = AG = GF = c$; olkoon $AM = x$ ja $AN = y$. Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista BMA ja BKL saadaan

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{b+c}$$

ja vastaavasti kolmioista ANC ja GFC



$$\frac{y}{c} = \frac{b}{b+c}.$$

Siis

$$x = \frac{bc}{b+c} = y.$$

7 (a) Jos $n = jk$,

$$2^n - 1 = (2^j - 1)(1 + 2^j + 2^{2j} + \cdots + 2^{(k-1)j}).$$

(b) Jos $n = j(2k+1)$,

$$2^n + 1 = (2^j + 1)(1 - 2^j + 2^{2j} - \cdots + 2^{2kj}).$$

Huomaa vaihtelevat etumerkit.

8 (a) Jaetaan lauseke tekijöihin. Muutama tekijä löydetään havaitsemalla, että jos $n \in \{-1, 0, 1\}$, niin lauseke on nolla, ja loput keksitään binomin neliön kaavasta:

$$\begin{aligned} n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n-1)(n^3 + n^2 - 4n - 4) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2 - 4) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2). \end{aligned}$$

Lauseke on siis viiden peräkkäisen kokonaisluvun tulo. Näistä luvuista yksi on jaollinen viidellä ja ainakin yksi jaollinen kolmella. Ainakin kaksi lukua on jaollisia kahdella, ja näistä ainakin yksi jaollinen neljällä. Koska $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, on todistettu että se jakaa koko lausekkeen.

(b) Tarkastellaan 4:n potensseja modulo 9: $4 \equiv 4$, $4^2 \equiv 7$, $4^3 \equiv 1 \pmod 9$. Olkoon $n = 3k + p$, $0 \le p < 3$. Ensinnäkin $4^{3k+p} = (4^3)^k \cdot 4^p \equiv 1^k 4^p \pmod 9$ ja toiseksi $15n = 5 \cdot (9k + 3p) \equiv 15p \equiv -3p \pmod 9$. Kun $p = 0$, $4^n + 15n - 1 \equiv 1 + 0 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. Kun $p = 1$, $4^n + 15n - 1 \equiv 4 - 3 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. Kun $p = 2$, $4^n + 15n - 1 \equiv 7 - 6 - 1 \equiv 0 \pmod 9$.

9 Jos jokainen summa $\sigma(i)$ kirjoitetaan auki, luku d ($1 \le d \le n$) esiintyy $\lfloor n/d \rfloor$ kertaa, kerran jokaista sellaista monikertaansa kohti joka on enintään n. Merkintä $\lfloor \cdot \rfloor$ tarkoittaa pyöristystä lähimpään pienempään tai yhtäsuureen kokonaislukuun. Siis epäyhtälön vasen puoli on

$$\begin{aligned} &1 \cdot \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \cdot \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \cdots + n \cdot \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \\ &\qquad \le 1 \cdot \frac{n}{1} + 2 \cdot \frac{n}{2} + 3 \cdot \frac{n}{3} + \cdots + n \cdot \frac{n}{n} = n^2. \end{aligned}$$

Vaikeahkot tehtävät

1 Tapauksessa $p = 2$ on $w^n = 11$, joten $n = 1$. Tapauksessa $p = 5$ on $w^n = 275 = 5^2 \cdot 11$, joten $n = 1$.

Oletetaan, että p on muu pariton alkuluku. Vasen puoli on jaollinen 5:llä, joten w on jaollinen 5:llä. Jos $n > 1$, w^n on jaollinen 25:llä. Kun jaetaan vasen puoli $5 = 2 + 3$:lla, saadaan

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i 2^i 3^{p-1-i} = 2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + 2^{p-3} \cdot 3^2 - \cdots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1}.$$

Koska $3 \equiv -2 \pmod 5$, summan jokainen termi on $\equiv 2^{p-1} \pmod 5$. Koko summa on siis

$$\frac{2^p + 3^p}{2 + 3} \equiv p2^{p-1} \pmod 5.$$

Tämä ei ole jaollinen viidellä, kun $p \neq 5$.

2 Kirjoitetaan väite muotoon

$$\sqrt{7}n > m + \frac{1}{m}.$$

Tarkastellaan m:n neliötä modulo 7: se on joko 1, 2 tai 4, joten jos luku $7n^2 - m^2$ on positiivinen, se on vähintään 3 eli $\sqrt{7}n \geq \sqrt{m^2 + 3}$. Riittää todistaa $\sqrt{m^2 + 3} > m + 1/m$. Mutta $(m + 1/m)^2 = m^2 + m^{-2} + 2 \leq m^2 + 3$, missä yhtäsuuruus vallitsee vain jos $m = 1$, ja tässä tapauksessa $7n^2 - m^2 \geq 6$ eli aiempi epäyhtälö on aito.

3 Jos $2\sqrt{28n^2 + 1} + 2$ on kokonaisluku, juurrettava on parittoman luvun neliö, $28n^2 + 1 = (2m + 1)^2$. Järjestelemällä termejä uudelleen ja sieventämällä saadaan $7n^2 = m(m+1)$. Koska $\mathrm{syt}(m, m+1) = 1$, on oltava joko $m = 7s^2$ ja $m+1 = t^2$ tai $m = u^2$ ja $m+1 = 7v^2$. Jälkimmäisessä tapauksessa $7v^2 - u^2 = 1$, mikä on ristiriidassa edellisessä ratkaisussa todistetun epäyhtälön $7v^2 - u^2 \geq 3$ kanssa. Edellisessä tapauksessa tehtävän luku on $2(2m + 1) + 2 = 4(m + 1) = (2t)^2$.

4 Merkitään a_n:llä niiden joukon $\{0, \ldots, n - 1\}$ osajoukkojen lukumäärää, joissa ei ole peräkkäisiä alkioita, kun $n \in \mathbb{N}$. Jos $n = 0$ tai $n = 1$, missään osajoukossa ei ole peräkkäisiä alkioita, joten $a_0 = 2^0 = 1$ (tyhjä joukko kelpaa) ja $a_1 = 2^1 = 2$. Tapauksessa $n = 2$ joukko $\{0, 1\}$ itse on ainoa osajoukkonsa, jossa on peräkkäiset alkiot, joten $a_2 = 2^2 - 1 = 3 = a_0 + a_1$.

Osoitetaan, että rekursiokaava

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

pätee yleisesti, kun $n \in \mathbb{N}$. Olkoon siis $B \subseteq \{0, \ldots, n + 1\}$ joukko, johon ei kuulu peräkkäisiä kokonaislukuja. Käsitellään kaksi eri mahdollisuutta.

1) $n + 1 \notin B$, jolloin $B \subseteq \{0, \ldots, n\}$. Tällaisia joukkoja B on tietenkin a_{n+1} kappaletta.

2) $n+1 \in B$: Koska B:ssä ei saa olla peräkkäisiä alkioita, niin $n \notin B$. Huomataan, että $B \setminus \{n+1\} \subseteq \{0, \dots, n-1\}$ on yksi niistä $\{0, \dots, n-1\}$:n a_n osajoukosta, joissa ei ole peräkkäisiä alkioita. Kääntäen, jos joukossa $C \subseteq \{0, \dots, n-1\}$ ei ole peräkkäisiä alkiota, niin ei myöskään joukko $C \cup \{n+1\}$ ei sisällä sellaisia. Siis tällaisia tapauksia on a_n kappaletta.

Kaikkiaan saadaan $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Siis kysytynlaisia joukkojen lukumäärä a_n on Fibonaccin luku niin indeksoituna, että $a_0 = 1$ ja $a_1 = 2$.

5 [Tehtävän kysymys on virheellisesti asetettu: Pitäisi kysyä oikeiden vastausten lukumäärän *odotusarvoa*.] Paras mahdollinen arvaus on tietenkin arvata väriä sen mukaan, kummanvärisiä on enemmän. Määritetään oikeiden vastausten lukumäärä peruuttamalla, ts. merkitään $a_{m,n}$:llä oikeiden vastausten lukumäärän odotusarvoa tilannetta seuraavilla kierroksilla, kun jäljellä laatikossa on m sinistä ja n punaista palloa. Erityisesti määritelmän mukaan $a_{0,0} = 0$, sillä kun laatikko on tyhjä, jäljellä ei ole enää arvauksia. Huomataan myös, että $a_{m,n} = a_{n,m}$, kun $m, n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Tietenkin $a_{m,0} = m$, kun $m \in 1, 2, 3, 4$.

Muut lukumäärät saadaan rekursiokaavasta

$$a_{m,n} = \frac{m}{m+n}(1 + a_{m-1,n}) + \frac{n}{m+n}a_{m,n-1},$$

kun $m \geq n > 0$. Tämä kaava saadaan seuraavasti: Koska sinisiä palloja on vähintään yhtä monta laatikossa kuin punaisia, arvataan sinistä. Todennäköisyydellä $m/(m+n)$ nostettava pallo on sininen, jolloin oikeiden arvausten lukumäärä kasvaa yhdellä ja odotettavissa on $a_{m-1,n}$ oikeata arvausta, sillä sinisten pallojen lukumäärä on vähentynyt yhdellä. Vastaavasti todennäköisyydellä $n/(m+n)$ nostettava pallo on punainen, arvaus on väärä ja odotettavissa on $a_{m,n-1}$ oikeata arvausta.

Erityistapauksena rekursiokaavasta saadaan

$$a_{m,m} = \frac{1}{2}(1 + a_{m-1,m}) + \frac{1}{2}a_{m,m-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(a_{m,m-1} + a_{m,m-1}) = \frac{1}{2} + a_{m,m-1}.$$

Lasketaan nyt arvoja

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= \frac{1}{2} + a_{1,0} = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2},\\
a_{2,2} &= \frac{1}{2} + a_{2,1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot(1 + a_{1,1}) + \frac{1}{3}a_{2,0} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 2 = 2\frac{5}{6},\\
a_{3,1} &= \frac{3}{4}(1 + a_{2,1}) + \frac{1}{4}a_{3,0} = \frac{3}{4}(1 + 2\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{1}{4}\cdot(3 + 7 + 3) = 3\frac{1}{4},\\
a_{3,2} &= \frac{3}{5}(1 + a_{2,2}) + \frac{2}{5}a_{3,1} = \frac{3}{5}\cdot\frac{22}{6} + \frac{2}{5}\frac{13}{4} = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{23}{2} + \frac{13}{2}\right) = 3{,}6,\\
a_{3,3} &= \frac{1}{2} + a_{3,2} = 4{,}1,\\
a_{4,1} &= \frac{4}{5}(1 + a_{3,1}) + \frac{1}{5}a_{4,0} = 3{,}4 + 0{,}8 = 4{,}2,\\
a_{4,2} &= \frac{2}{3}(1 + a_{3,2}) + \frac{1}{3}a_{4,1} = \frac{2}{3} + 2{,}4 + 1{,}4 = 4\frac{7}{15},
\end{aligned}$$

$$a_{4,3} = \frac{4}{7}\cdot(1+a_{3,3}) + \frac{3}{7}a_{4,2} = \frac{4}{7}\cdot\frac{51}{10} + \frac{3}{7}\cdot\frac{67}{15} = \frac{102+67}{35} = 4\frac{29}{35},$$
$$a_{4,4} = \frac{1}{2} + 4\frac{29}{35} = 5\frac{23}{70}.$$

6 Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Tällöin joukon $\{0, \ldots, n-1\}$ $(n-1)$-osaisessa osituksessa on $n-2$ osaa, jotka ovat yksiöitä, ja yksi osa, jossa on kaksi alkiota. Tämä pari eli poikkeava osa määrä tällaisen osituksen täysin. Siis näitä osituksia on yhtä monta kuin joukosta $\{0, \ldots, n-1\}$ valittuja pareja eli

$$p(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

Luku $p(n, n-2)$ voidaan päätellä vastaavasti: Joukon $\{0, \ldots, n-1\}$ $(n-2)$-osaisessa osituksessa on joko yksi kolmen alkion osa ja kaikki muut ovat yksiöitä tai kaksi paria ja loput ovat yksiöitä. Edellisen kaltaisia osituksia on $\binom{n}{3}$ kappaletta, jälkimmäiset taas voidaan muodostaa niin, että valitaan ensin 4 alkiota ja jaetaan ne sitten pareiksi (3 eri tapaa). Siis

$$\begin{aligned} p(n, n-2) &= \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} = \frac{(n)_3}{3!} + 3\frac{(n)_4}{4!} \\ &= \frac{(n)_3}{4!}\cdot(4 + 3(n-3)) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}. \end{aligned}$$

(Tehtävän voi tietenkin ratkaista myös käyttämällä valmennusviikonloppuna esitettyä rekursiokaavaa ja induktiota.)

7 Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, missä $n \geq k$. Lasketaan joukon $\{0, \ldots, n-1\}$ niitten k-osaisten ositusten lukumäärä, joissa alkiot $0, \ldots, k-1$ ovat kaikki eri luokissa. Nämä pienet alkiot siis takaavat, että osituksessa todella on k osaa, ja kukin suuremmista alkioista kuuluu jonkin pienen alkion kanssa samaan osaan. Mutta toisaalta kunkin alkion $k, \ldots, n-1$ kohdalla voidaan tietenkin vapaasti valita, minkä alkion $l \in \{0, \ldots, k-1\}$ kanssa se on samassa osassa, joten tällaisia osituksia on k^{n-k} kappaletta ja

$$p(n) \geq p(n, k) \geq k^{n-k},$$

kun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

Olkoon $c > 1$. Valitaan $k \in \mathbb{Z}_+$ niin, että $k > c$. Tällöin $k/c > 1$, joten kun $m \in \mathbb{N}$ on riittävän suuri, niin $(k/c)^m > k^k$. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ saadaan siis

$$p(n) \geq k^{n-k} = k^{-k}\left(\frac{k}{c}\right)^n c^n \geq k^{-k}\left(\frac{k}{c}\right)^m c^n \geq c^n.$$

8 Olkoon $G = (V, E)$ tehtävän ehdon täyttävä verkko ja m sen särmien lukumäärä. Valitaan 5 alkion solmujoukko $A \subseteq V$ umpimähkään. Tällöin todennäköisyys, että yksittäinen G:n särmä on mukana indusoidussa aliverkossa $G|A$ on $\binom{5}{2}/\binom{9}{2} = 10/36 = 5/18$. Indusoidun aliverkon särmien lukumäärän odotusarvo on siten $5m/18$. Koska jokaisessa G:n viiden alkion indusoidussa aliverkossa on vähintään 2 särmää, myös tässä umpimähkään valitussa on, joten

$$5m/18 > 2 \text{ eli } m > 36/5 \text{ eli } m \geq 8.$$

Osoitetaan, että kahdeksankaan ei riitä. Oletetaan vastoin tätä, että G:ssä olisi vain kahdeksan särmää, vaikka se täyttäisi tehtävän ehdon. Ensiksi havaitaan, että G:ssä ei voi olla erillisiä solmuja eli solmuja, joista ei lähde särmiä. Jos nimittäin a olisi tällainen, niin G:n indusoidulla aliverkolla $G' = G - a = G|(V \setminus \{a\})$, joka siis saadaan G:stä poistamalla solmu a, olisi seuraava ominaisuus: Jos $B \subseteq V \setminus \{a\}$ ja $|B| = 4$, niin $G'|B$:ssä on vähintään kaksi särmää. Tämä siksi, että verkossa $G|(B \cup \{a\})$ tulee myös olla vähintään kaksi särmää. Samalla tavalla kuin yllä saadaan, että verkossa G' tulee olla vähintään

$$\left\lceil \frac{2\binom{8}{2}}{\binom{4}{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{56}{6} \right\rceil = 10$$

särmää, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että G:ssä on 8 särmää. Siis G:ssä ei ole erillisiä solmuja.

Seuraavaksi huomataan tutulla tavalla, että kun G:stä poistetaan mikä tahansa solmu a, niin $G - a$:ssa on vähintään

$$\left\lceil \frac{2\binom{8}{2}}{\binom{5}{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{56}{10} \right\rceil = 6$$

särmää, joten solmun a aste on korkeintaan kaksi. Koska G:ssä ei ole erillisiä solmuja, se koostuu siis erillisistä sykleistä ja poluista. Toisaalta k solmun polussa on $k-1$ särmää, kun taas syklissä on k särmää, joten koska G:ssä on 9 solmua ja 8 särmää, sen komponenteista täsmälleen yksi on polku. Koska syklissä on aina vähintään kolme solmua, syklejä on G:ssä korkeintaan kaksi.

Eri tapauksien tarkastelua helpottaa se, että p solmun polussa on $\lceil p/2 \rceil$ solmun riippumaton joukko ja s solmun syklissä vastaavasti $\lfloor s/2 \rfloor$ solmun riippumaton joukko. Lisäksi s solmun syklistä voidaan aina valita $\lceil s/2 \rceil$ solmua niin, että valittujen solmujen välillä on korkeintaan yksi särmä.

(a) Jos verkossa G ei ole syklejä lainkaan, niin G on itsessään polku ja siitä voidaan valita $\lceil 9/2 \rceil = 5$ solmun riippumaton joukko, mikä on vastoin oletusta.

(b) Oletetaan, että verkko G koostuu s solmun syklistä ja $9-s$ solmun riippumattomasta joukosta. Tällöin voidaan valita

$$\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{9-s}{2} \right\rceil = \frac{s}{2} + \frac{9-s}{2} + \frac{1}{2} = \frac{s+9-s+1}{2} = 5$$

solmun joukko A niin, että indusoidussa aliverkossa $G|A$ on yksi särmä, mikä on jälleen ristiriidassa oletuksen kanssa.

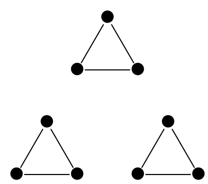
(c) Oletetaan lopuksi, että verkko G koostuu s_0 solmun ja s_1 solmun sykleistä sekä p solmun polusta. Voidaan olettaa, että jos ainakin toisen syklin koko on pariton, niin s_0 on pariton. Valitaan s_1 solmun syklistä $\lfloor s_1/2 \rfloor$ solmun riippumaton joukko A_1 ja polusta $\lceil p/2 \rceil$ solmun riippumaton joukko B sekä s_0 solmun syklistä $\lceil s_0/2 \rceil$ solmun joukko A_0 niin, että verkossa $G|A_0$ on vain yksi särmä. Merkitään $A = A_0 \cup A_1 \cup B$. Tällöin

$$|A| = \lceil s_0/2 \rceil + \lfloor s_1/2 \rfloor + \lceil p/2 \rceil \geq 5$$

ja $G|A$:ssa on yksi särmä, mikä on vastoin oletusta.

Siis tehtävän ehdon täyttävää 8-särmäistä verkkoa ei ole olemassa.

Osoitetaan vielä, että on olemassa 9 solmun 9-särmäinen verkko, joka toteuttaa tehtävän ehdon. Valitaan yksinkertaisesti verkoksi G kolmesta kolmiosta muodostuva verkko.



G

Mikä tahansa G:n viisisolmuinen indusoitu aliverkko sisältää joko kolmion tai kahdesta kolmiosta särmän, joten tehtävän ehto täyttyy.