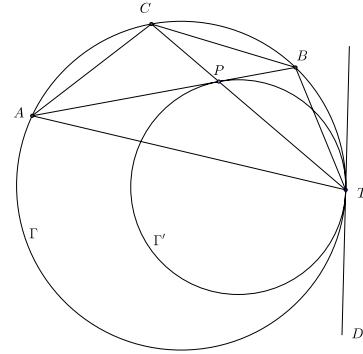


Matematiikan olympiavalmennus 2015 – syyskuun tehtävät

Ratkaisuja

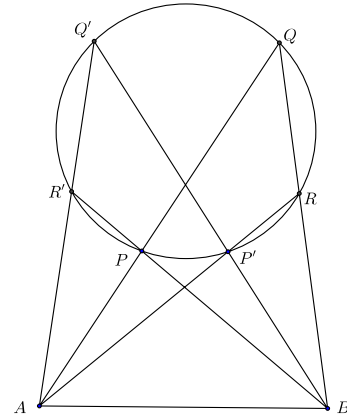
1. Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan sisäpuolisesti pisteessä T . Ulomman ympyrän sekantti AB on sisemmän ympyrän tangentti pisteessä P . Osoita, että suora TP puolittaa kulman $\angle ATB$.

Ratkaisu. Olkoon ulompi ympyrä Γ ja sisempi Γ' . Leikatkaa suora TP Γ :n myös pisteessä C ja olkoon D jokin Γ :n ja Γ' :n yhteisen tangentin piste, joka on eri puolella suoraa TP kuin B . Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan kolmiot ATP ja CTB yhdenmuotoisiksi. Koska Γ :n samaa kaarta vastaavina kehäkulmina $\angle BCT = \angle BAT = \angle PAT$, tarvitsee vain osoittaa, että $\angle APT = \angle CBT$. Mutta Γ' :n samaa kaarta vastaavina tangentin ja sekantin välisinä kulmina $\angle PAT = \angle DTP$ ja ympyrän Γ samaa kaarta vastaavina sekantin ja tangentin välisenä kulmana ja kehäkulmana $\angle DTP = \angle DTC = \angle TBC$. Kolmiot ATP ja CTP ovat todellakin yhdenmuotoiset (kk), ja $\angle ATP = \angle CTB = \angle PTB$.



2. Pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' valitaan samalta puolelta janaa AB siten että kolmiot $ABP, AQB, RAB, BAP', BQ'A$ ja $R'BA$ ovat yhdenmuotoisia. Osoita, että pisteet P, Q, R, P', Q' ja R' ovat samalla ympyrällä.

Ratkaisu. Pisteiden P, Q ja R kautta voidaan piirtää ympyrä Γ . Koska $ABP \sim AQB$, on $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AQ}$ eli $AP \cdot AQ = AB^2$. Koska $BAP' \sim RAB$, on $\frac{AP'}{AB} = \frac{AB}{AR}$ eli $AR \cdot AP' = AB^2$. Siis $AP \cdot AQ = AR \cdot AP'$. Jos suora AR leikkaa Γ :n myös pisteessä P'' , niin $AP \cdot AQ = AR \cdot AP''$. Tämä on mahdollista vain, jos $P' = P''$. Yhdenmuotoisuuksista $ABP \sim R'BA$ ja $RAB \sim AQB$ saadaan samoin $BR \cdot BQ = BP \cdot BR'$ ja $R' \in \Gamma$. Viimein $Q' \in \Gamma$ seuraa esimerkiksi kolmioiden $R'BA$ ja $BQ'A$ yhdenmuotoisuudesta ja siitä, että R' on ympyrän Γ piste: on nimittäin $\frac{AR'}{AB} = \frac{AB}{AQ'}$ eli $AQ' \cdot AR' = AB^2 = AP \cdot AQ$.



3. On annettu kaksi ympyrää, jotka leikkaavat pisteissä P ja Q . Konstruoi jana AB , joka

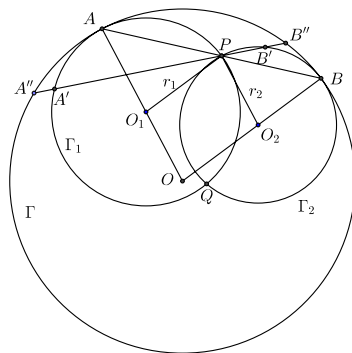
kulkee pisteen P kautta ja jonka päätepisteet ovat ympyröiden kehillä (piste A toisella ympyrällä ja piste B toisella ympyrällä) siten, että tulo $AP \cdot PB$ saa suurimman mahdollisen arvonsa.

(a) Piirrä ensin sellainen suurempi ympyrä, joka sivuaa ympyröitä ulkopuolisesti joissakin pisteissä A ja B niin, että piste P on janalla AB . (Ei onnistu, ellei suurempaa ympyrää ja pisteitä A ja B ole valittu tietyllä tavalla.)

(b) Miksi nämä sivuamispisteet toteuttavat tehtävän ehdon?

(c) Miten pisteet konstruoidaan? Eli miten harpilla ja viivottimella piirtämällä pisteet löydetään?

Ratkaisu. (a)-kohdan mukainen jana AB on todella maksimaalinen. Olkoot tehtävän toisensa leikkaavat ympyrät Γ_1 ja Γ_2 ja niitä pisteissä A ja B ulkopuolisesti sivuava ympyrä Γ . Jos $A'B'$ on jokin muu P :n kautta kulkeva jana ja A' on ympyrällä Γ_1 ja B' on ympyrällä Γ_2 , niin suora $A'B'$ leikkaa ympyrän Γ pisteissä A'' ja B'' niin, että $A''P > A'P$ ja $PB'' > PB'$. Piste P potenssi ympyrän Γ suhteen on $AP \cdot PB = A''P \cdot PB'' > A'P \cdot PB'$.

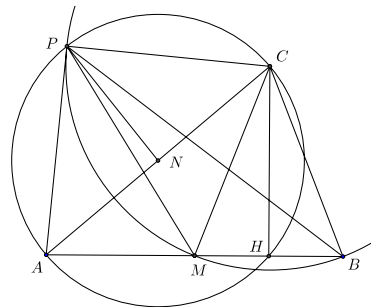


Miten sitten A ja B löydetään? Olkoot O_1 ja O_2 Γ_1 :n ja Γ_2 :n keskipisteet ja r_1, r_2 säteet. Täydennetään kolmio PO_1O_2 suunnikkaaksi PO_1OO_2 . Leikatkoon puolisuora OO_1 Γ_1 :n pisteessä A ja puolisuora OO_2 Γ_2 :n pisteessä B . Silloin $OA = OB = r_1 + r_2$. Koska A, O_1 ja O ovat samalla suoralla, O -keskisellä A :n ja B :n kautta kulkevalla ympyrällä Γ on yhteinen tangentti ympyrän Γ_1 kanssa ja samanlaisin perustein myös ympyrän Γ_2 kanssa. On vielä osoitettava, että AB kulkee P :n kautta. Koska PO_1OO_2 on suunnikas, $\angle PO_1O = \angle OO_2P$. Näistä edellinen kulma on tasakylkisen kolmion O_1PA kantakulmien summa, jälkimmäinen taas tasakylkisen kolmion O_2BP kantakulmien summa. Kolmioiden kantakulmat ovat siis yhtä suuret. Koska $\angle AO_1P = \angle O_1PO_2$ ($AO \parallel O_2P$), kulmien $\angle APO_1, \angle O_1P_2$ ja $\angle O_2PB$ summa on sama kuin kolmion AO_1P kulmien summa eli 180° . Siis todellakin P on janalla AB . – Se, miten A ja B löytyy harppia jaa viivoitinta käyttäen, selviää yllä kirjoitetusta.

4. Teräväkulmaisessa kolmiossa CH on korkeusjana ja $AH = 3 \cdot HB$. Sivujen AB ja AC keskipisteet ovat M ja N . Olkoon sitten P se eri puolella suoraa AC kuin B oleva piste, jolle $NP = NC$ ja $PC = CB$. Osoita, että $\angle APM = \angle PBA$.

Ratkaisu. H on janan MB keskipiste. Kolmiot CHB ja CHM ovat siis yhteneviä (sks), ja $CM = CB$. Piste M on siis samalla C -keskisellä CB -säteisellä ympyrällä kuin B ja P . Kehäkulmalauseen perusteella $\angle MPB =$

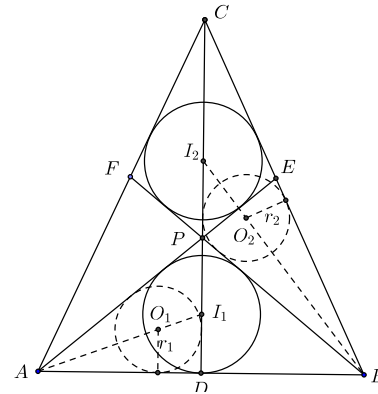
$\frac{1}{2} \cdot \angle MCB = \angle HCB$. Koska N on janan AC keskipiste, A, P ja C ovat samalla CN -säteisellä ympyrällä. AC on ympyrän halkaisija, joten $\angle APC = 90^\circ$. Siis $90^\circ = \angle APM +$



$\angle MPB + \angle BPC$. Suorakulmaisesta kolmiosta BCH saadaan myös $90^\circ = \angle ABP + \angle PBC + \angle HCB$. Koska $\angle HCB = \angle MPB$ ja, koska CPB on tasakylkinen kolmio, $\angle PBC = \angle CPB$, on oltava $\angle APM = \angle PBA$.

5. Tasakylkisen kolmion ABC kanta on AB . Kolmion korkeusjanan CD piste P on valittu niin, että kun AP leikkaa BC :n pisteessä E ja BP AC :n pisteessä F , niin kolmion ABP sisäympyrän säde on sama kuin nelikulmion $CFPE$ sisäympyrän säde. Todista, että kolmioiden ADP ja BCP sisäympyröillä on sama säde.

Ratkaisu. Olkoon I_1 kolmion ABP ja I_2 nelikulmion $CFPE$ sisäympyrän keskipiste. Koska jälkimmäinen ympyrä on samalla kolmion BCF sisäympyrä, I_2 on kulman $\angle FBE$ puolittajalla. Suorakulmaisista kolmioista, joiden yhtenä kateettina on ym. sisäympyröiden säde ja yhtenä kulmaparina $\angle API$, $\angle CPE$ nähdään heti, että $PI_1 = PI_2$. Koska kolmioilla AI_1P ja BI_2P on sama kanta ja sama korkeus $AD = BD$, niillä on sama ala. Olkoot nyt O_1 ja O_2 kolmioiden ADP ja BCP sisäympyröiden keskipisteet ja r_1 , r_2 näiden ympyröiden säteet. Pisteet O_1 ja O_2 ovat kulmien $\angle BAE$ ja $\angle FBC$ puolittajilla eli janoilla AI_1 ja BI_2 . Kolmion AI_1P ala on kolmioiden AO_1P ja



O_1I_1P alojen summa, eli $\frac{1}{2}(AP + PI_1)r_1$. Kolmion BI_2P ala puolestaan on kolmioiden PBO_2 ja PO_2I_2 alojen summa, eli $\frac{1}{2}(BP + PI_2)r_2$. Koska $AP = BP$ ja $PI_1 = PI_2$, on oltava $r_1 = r_2$.

6. Määritä kaikki kokonaislukukolmikot (a, b, c) , joille $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a + b + c)$.

Ratkaisu. Koska $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 2c + 3 = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2$, tehtävän ehdon toteuttavat kolmikot toteuttavat myös ehdon $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 = 3$. Lukujen $|a - 1|$, $|b - 1|$, $|c - 1|$ on oltava ≤ 1 , mutta niistä mikään ei voi olla 0. Ratkaisuja ovat siis kaikki ne kahdeksan kolmikkoa (a, b, c) joissa jokainen luvuista a, b, c on 0 tai 2.

7. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (m, n) , joille $m! = n^2 - 12$.

Ratkaisu. Olkoon (m, n) tällainen pari. Pienin n , jolle $n^2 - 12 > 0$, on 4. Koska $2! = 2$, on oltava $m \geq 3$. Siis $m!$ on jaollinen 3:lla. Tällöin myös n^2 on jaollinen kolmella ja myös 9:llä. Mutta $n^2 - 12$ ei ole jaollinen 9:llä, joten $m!$:kaan ei ole. Näin ollen $m < 6$. Koska $3! + 12 = 18$, $4! + 12 = 36 = 6^2$ ja $5! + 12 = 132$ vain $m = 4$, $n = 6$ ovat mahdollisia.

8. Piin tasavallassa on käytössä kahdenlaisia kolikoita, joiden arvot ovat 2015 ja 2016 yksikköä. Onko näillä rahoilla mahdollista maksaa kymmenen miljoonaa yksikköä maksava tutkimuslaboratorio, kun vaihtorahan antaminen ei ole sallittua?

Ratkaisu. Jotta maksaminen onnistuisi, on oltava ei-negatiiviset kokonaisluvut a ja b , jotka toteuttavat yhtälön $2016a + 2015b = 10^7 = 10^7(2016 - 2015)$. On siis oltava $(10^7 -$

$a \cdot 2016 = (b + 10^7) \cdot 2015$. Peräkkäisten kokonaislukujen 2015 ja 2016 suurin yhteinen tekijä on 1. $10^7 - a$ on siis luvun 2015 monikerta ja $b + 10^7$ on luvun 2016 monikerta; lisäksi on oltava $a = 10^7 - 2015t$ ja $b = 2016t - 10^7$ samalla kokonaisluvulla t . Ehdoista $a \geq 0$, $b \geq 0$ seuraa

$$\frac{10^7}{2016} \leq t \leq \frac{10^7}{2015}$$

eli $4960 < t < 4963$. Mahdolliset arvot $t = 4961$ ja $t = 4962$ kelpaavat: jos $t = 4961$, niin $a = 3585$ ja $b = 1376$; $3585 \cdot 2016 + 1376 \cdot 2015 = 10^7$; jos $t = 4962$, niin $a = 1570$ ja $b = 3392$; $1570 \cdot 2016 + 3392 \cdot 2015 = 10^7$.

2. ratkaisu. Olkoon n kokonaisluku. Tarkastellaan 2016 lukua n , $n - 2015$, $n - 2 \cdot 2015$, \dots , $n - 2015 \cdot 2015$. Jos jotkin kaksi näistä, esimerkiksi $n - 2015i$ ja $n - 2015j$, olisivat kongruentteja modulo 2016, olisi joillain $i - j$ jaollinen 2016:lla. Koska $|i - j| \leq 2015$, tämä on mahdollista vain, jos $i = j$. Luvuista tasan yksi on siis jaollinen 2016:lla: $n - 2015k = 2016m$. Jos $n \geq 2015^2$, niin $m \geq 0$. Koska $2015^2 < 3000^2 = 9 \cdot 10^6 < 10^7$, niin 10^7 voidaan kirjoittaa muodossa $2015k + 2016m$, missä k ja m ovat positiivisia kokonaislukuja.

3. ratkaisu (Jesse Nieminen). On ratkaistava yhtälö

$$10^7 = 2016x + 2015y = 2015(x + y) + x.$$

Mutta $10^7 = 4962 \cdot 2015 + 1570$. Voidaan siis valita $x = 1570$ ja $y = 4962 - 1570 = 3392$.

9. Osoita, että on olemassa kokonaisluku $r \geq 1$ ja tason pisteet $P_0, P_1, \dots, P_{2015}$, siten että jokaisen pisteistä P_1, \dots, P_{2015} etäisyys pisteestä P_0 on tasan r ja jokaisen pisteen P_i x - ja y -koordinaatti ovat kokonaislukuja.

Ratkaisu. Tarkastellaan pisteitä $(x_k, y_k) = (2^{2k} - 1, 2^{k+1})$. Jos r_k on tällaisen pisteen etäisyys origosta, niin $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 = 2^{4k} - 2^{2k+1} + 1 + 2^{2k+2} = 2^{4k} + 2^{2k+1} + 1 = (2^{2k} + 1)^2$. r_k on siis kokonaisluku $2^{2k} + 1$. Jos a on positiivinen kokonaisluku, niin pisteen (ax_k, ay_k) etäisyys origosta on kokonaisluku ar_k . Osoitetaan, että kaikki pisteet (x_k, y_k) ovat eri origon kautta kulkevilla suorilla. Ellei näin olisi, olisi joillain k, m , $k < m$,

$$\frac{2^{k+1}}{2^{2k} - 1} = \frac{2^{m+1}}{2^{2m} - 1}$$

eli $2^{2m} - 1 = 2^{m-k}(2^{2k} - 1)$. Tämä on mahdotonta, koska edellisen yhtälön vasen puoli olisi pariton, oikea taas parillinen. Olkoon nyt $r = r_1 r_2 \cdots r_{2015}$ ja $a_k = \frac{r}{r_k}$. Pisteet $(a_k x_k, a_k y_k)$ ovat kaikki eri origon kautta kulkevilla suorilla, joten ne ovat eri pisteitä, ja jokaisen etäisyys origosta on $a_k r_k = r$.

2. ratkaisu. Osoitetaan induktiolla, että on ainakin n eri kokonaislukuparia (a_i, b_i) , joille $a_i^2 + b_i^2 = 5^{2n}$. Koska $3^2 + 4^2 = 5^2$, väite pätee, kun $n = 1$. Oletetaan, että se pätee, kun $n = k$. Jos $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ ovat lukupareja, joille $a_i^2 + b_i^2 = 5^{2k}$ ja $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ sekä $b_i \leq a_i$ kaikilla i , niin pareille $(5a_i, 5b_i)$ pätee $(5a_i)^2 + (5b_i)^2 = 5^{2(k+1)}$. Tarvitaan vielä yksi uusi pari (a_{k+1}, b_{k+1}) , jolle $a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 = 5^{2(k+1)}$. Käytetään hyväksi identiteettiä $5^2(a^2 + b^2) = (4^2 + 3^2)(a^2 + b^2) = (4a + 3b)^2 + (4a - 3b)^2$. Jos nyt kaikki parit

$(4a_i + 3b_i, 4a_i - 3b_i)$ ovat parien $(5a_i, 5b_i)$ joukossa, on jonon (a_i) kasvavuuden perusteella $4a_i + 3b_i = 5a_i$. Erityisesti $3b_1 = a_1$, ja $5^{2k} = 9b_1^2 + b_1^2 = 10b_1^2$. Tässä vasen puoli on pariton ja oikea parillinen. Ristiriita osoittaa, että löytyy ainakin $k + 1$ eri paria (a'_i, b'_i) , joille $a_i'^2 + b_i'^2 = 5^{2(k+1)}$, ja induktio on valmis. Tehtävän väite saadaan, kun asetetaan $n = 2015$.

10. Osoita, että mistä tahansa 18 peräkkäisestä luvusta, joista jokainen on ≥ 18 , voidaan valita jokin luku, jolla on vähintään kolme eri alkutekijää.

Ratkaisu. Kuuden pienimmän luvun joukossa on yksi kuudella jaollinen; olkoon se x . Silloin myös $x + 6$ ja $x + 12$ ovat joukossa ja myös näillä on kaksi alkutekijää 2 ja 3. Oletetaan, että luvulla x on kaksi alkutekijää; siis $x = 2^a 3^b$. Jos $a \geq 2$ ja $b \geq 2$, niin $x + 6 = 6(2^{a-1}3^{b-1} + 1)$. Jälkimmäinen tekijä on ≥ 7 eikä ole jaollinen 2:lla eikä 3:lla. Luvulla $x + 6$ on siis ainakin kolme eri alkutekijää. Jos $x = 2 \cdot 3^b$, $b > 1$, niin $x + 12 = 6(3^{b-1} + 2)$. Jälkimmäinen tekijä on pariton eikä se ole jaollinen 3:lla. joten sillä on alkutekijä, joka ei ole 2 eikä 3. Jos viimein $x = 2^a \cdot 3$, $a > 1$, niin $a \geq 3$ ja luvuista $x + 3$ ja $x - 3$ tasan toinen on jaollinen 9:llä. Siis myös luvuista $x + 6$ ja $x + 12$ tasan toinen on jaollinen 9:llä. Nyt $x + 6 = 6(2^{a-1} + 1)$ ja $x + 12 = 12(2^{a-2} + 1)$ Kummassakin tapauksessa sulkeissa oleva tekijä on pariton ja > 1 ja tasan toisessa tapauksessa tekijä on kolmella jaollinen. Ainakin toisella luvuista $x + 6$ ja $x + 12$ on ainakin kolme alkutekijää.

11. Osoita, että jokainen positiivinen kokonaisluku $n \geq 1000$ voidaan kirjoittaa muodossa $n = abc + def$, missä $a, b, c, d, e, f \geq 2$ ovat kokonaislukuja.

Ratkaisu. Jos luku n on muotoa $2^3k + 3^3m = 8k + 27m$ joillain positiivisilla kokonaisluvuilla k ja m , niin $n = 2 \cdot 2 \cdot 2k + 3 \cdot 3 \cdot 3m$, eli vaadittua muotoa. Osoitetaan, että jokainen $n \geq 1000$ on tällaista muotoa. On nimittäin $1 = 3 \cdot 27 - 10 \cdot 8$ ja siis $n = (3n+8t) \cdot 27 - (10n+27t) \cdot 8$ kaikilla t . Jotta olisi $3n+8t > 0$ on oltava $t > -\frac{3}{8}n = -\frac{81n}{8 \cdot 27}$ ja jotta olisi $-(10n+27t) > 0$ on oltava $t < -\frac{10}{27}n = -\frac{80n}{8 \cdot 27}$. Näiden t :n ylä- ja alarajojen erotus on $\frac{n}{8 \cdot 27}$. Kun $n > 8 \cdot 27 = 216$, erotus on suurempi kuin 1, joten näillä n :n arvoilla – ja siis varmasti silloin, kun $n \geq 1000$ – on olemassa positiiviset kokonaisluvut k ja m , joiden avulla tehtävässä vaadittu esitys on muodostettavissa.

12. Osoita, että yhtälöllä

$$(12x^2 + yz)(12y^2 + zx)(12z^2 + xy) = 2015x^2y^2z^2$$

ei ole ratkaisua (x, y, z) , jossa $x > 0$, $y > 0$ ja $z > 0$.

Ratkaisu. Olkoot x, y, z positiivisia. Tulkitaan tehtävän yhtälön vasemman puolen kolme tekijää 13:n yhteenlaskettavan summiksi. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella

$$12x^2 + yz \geq 13(x^{24}yz)^{1/13}, \quad 12y^2 + zx \geq 13(y^{24}zx)^{1/13}, \quad 12z^2 + xy \geq 13(z^{24}xy)^{1/13}.$$

Kun edelliset epäyhtälöt kerrotaan keskenään, saadaan $(12x^2 + yz)(12y^2 + zx)(12z^2 + xy) \geq 13^3 x^2 y^2 z^2 = 2197 x^2 y^2 z^2 > 2015 x^2 y^2 z^2$. Tehtävän yhtälöllä ei siis ole ratkaisua.

13. Osoita, että kaikilla positiiviluvuilla a ja b pätee

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}.$$

Ratkaisu. Havaitaan, että

$$2(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{2(a+b)^2}{ab} = 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 4.$$

Merkitään $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Todistettava epäyhtälö saa muodon

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt[3]{2x^3 + \frac{2}{x^3} + 4}$$

eli

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^3 \leq 2 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + 4.$$

Merkitään vielä $x + \frac{1}{x} = t$, jolloin

$$t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

ja siis

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t.$$

[Tämä keino on usein hyödyllinen!] Lisäksi $t = x + \frac{1}{x} \geq 2$. Epäyhtälö on näillä merkinnöillä sama kuin $t^3 \leq 2t^3 - 6t + 4$ eli $t^3 - 6t + 4 \geq 0$. Heti nähdään, että kun $t = 2$, edellinen kolmannen asteen polynomi saa arvon 0; $t^3 - 6t + 4$ on siis jaollinen polynomilla $t - 2$. Jakokulmassa saadaan heti $t^3 - 6t + 4 = (t - 2)(t^2 + 2t - 2)$. [Tai tutkitaan funktiota $f(t) = t^3 - 6t + 4$. Pätee $f(2) = 0$ ja $f'(t) = 3(t^2 - 2) > 0$, kun $t \geq 2$; siis $f(t) > 0$, kun $t > 2$.] Kun $t \geq 2$, $t^2 + 2t - 2 \geq 4 + 4 - 2 > 0$. Epäyhtälö on siis tosi.

14. Olkoon $P(x)$ toisen asteen polynomi. Tiedetään, että yhtälön $P(x^2 + 4x - 7) = 0$ yksi juuri on 1 ja ainakin yksi juuri on kaksoisjuuri. Määritä yhtälön kaikki juuret.

Ratkaisu. Koska $0 = P(1^2 - 4 \cdot 1 - 7) = P(-2)$ ja P on toisen asteen polynomi, on oltava $P(x) = a(x + 2)(x - p)$ joillain vakioilla a ja p . Siis $P(x^2 + 4x - 7) = a(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 7 + p) = a(x - 1)(x + 5)(x^2 + 4x - p - 7)$. Tehtävän ehdot täyttyvät, jos yhtälöllä $x^2 + 4x - p - 7 = 0$ on juurena 1 tai -5 , tai jos sillä on kaksoisjuuri. Koska $x^2 + 4x + p - 7 = (x + 2)^2 - p - 11$, jälkimmäinen tapaus tulee kyseeseen, kun $p = -11$. Silloin kysytyt juuret ovat 1, -5 , -2 . Koska yhtälön $x^2 + 4x - p - 7 = 0$ juurien summa on 4, niin jos jompikumpi luvuista 1, -5 on yhtälön juuri, on toinenkin. Tällöin $p = -2$ ja yhtälöllä $P(x^2 + 4x - 7) = 0$ on juurina 1 ja -5 , molemmat kaksoisjuuria.

15. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (m, n) , joille $m:n$ ja $n:n$ aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo ovat samoilla numeroilla kirjoitettavia eri suuria kaksinumeroisia lukuja.

Ratkaisu. Olkoon $10a+b$ $m:n$ ja $n:n$ aritmeettinen keskiarvo. Voidaan olettaa, että $m \leq n$. Silloin $m = 10a + b - x$ ja $n = 10a + b + x$ jollain kokonaisluvulla $x > 0$, ja $mn = ((10a + b) - x)((10a + b) + x) = (10b + a)^2$ eli $(10a + b)^2 - x^2 = (10b + a)^2$ ja $x^2 = (10b + a + 10a + b)(10a + b - (10b + a)) = 11(a + b) \cdot 9(a - b) = 99(a^2 - b^2)$. Koska x on kokonaisluku, x ja myös x^2 on jaollinen 11:llä ja siis $(a - b)(a + b)$ on jaollinen 11:llä. Koska $1 \leq a - b \leq 8$, on $a + b = 11$. Siten $a - b$ on neliöluku. Mahdollisia ovat vain $a - b = 1$ ja $a - b = 4$. Jos $a - b = 1$, on $a = 6$ ja $b = 5$, $x^2 = 9 \cdot 11^2$, $x = 33$ ja saadaan ratkaisu $m = 65 - 33 = 32$, $n = 65 + 33 = 98$. Jos olisi $a - b = 4$, olisi $2a = (a + b) + (a - b) = 15$, mikä on mahdotonta, koska 15 on pariton. Ainoat ratkaisut (m, n) ovat siis $(32, 98)$ ja $(98, 32)$.

16. Määritellään lukujono (x_n) asettamalla

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_n + 5, \quad \text{kun } n \geq 1. \end{cases}$$

(Jono alkaa siis $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $x_3 = 41$, ...) Määritä kaikki kokonaislukuparit $\{a, b\}$, joille $x_a x_b$ on neliöluku.

Ratkaisu. Selvästi $\{1, 2\}$ on kysytynlainen pari. Osoitetaan, että se on ainoa. Jos $a < b$, eivätkä x_a ja x_b ole neliölukuja, niin $x_a x_b$ voi olla neliöluku vain, jos x_a :lla ja x_b :llä on yhteisiä tekijöitä. Luku x_b on muotoa $kx_a + 5$. $x_b:n$ ja $x_a:n$ yhteiset tekijät ovat luvun 5 tekijöitä; ainoa mahdollinen yhteinen tekijä on 5. Mutta x_1 ei ole jaollinen 5:llä, ja jos x_1, x_2, \dots, x_n ei ole jaollinen 5:llä, $x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_n + 5$ ei ole jaollinen 5:llä. $x_a x_b$ voi olla neliöluku vain, jos x_a ja x_b ovat neliölukuja. Olkoon $n \geq 3$. Koska $x_n - 5 = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$, $x_{n+1} = (x_n - 5)x_n + 5$. Tarkastetaan sitä, voiko olla $x^2 - 5x + 5 = y^2$ eli $4y^2 = 4x^2 - 20x + 20 = (2x - 5)^2 - 5$. Edellinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $(2x - 5 + 2y)(2x - 5 - 2y) = 5$. Edellinen yhtälö voi toteutua vain, jos $2x - 5 - 2y = -5$, $2x - 5 + 2y = -1$ eli $x = 1$ ja $y = 1$ tai $2x - 5 - 2y = 1$ ja $2x - 5 + 2y = 5$ eli $x = 4$ ja $y = 1$. Koska jono (x_n) on kasvava, $x_n \neq 4$, kun $n > 1$. Jonossa ei voi olla neliölukuja, kun $n \geq 3$.