Matematiikan olympiavalmennus

Toukokuun 2012 helpommat valmennustehtävät – ratkaisuja

1. *Määritä sellaisen kolmion ala, jonka kaksi kulmaa ovat* $60°$ *ja* $45°$ *ja jonka pisimmän sivun pituus on 1.*

Ratkaisu. Olkoon kolmio ABC ja $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 45°$. Silloin $\angle BCA = 75°$ ja AB on kolmion pisin sivu. Olkoon $CD = h$ kolmion korkeusjana. Koska DBC ja DCA ovat suorakulmaisia kolmioita, $\angle BCD = 45°$, ja $\angle ADC = 30°$. Nyt DBC on tasakylkinen, joten $DB = CD = h$. Toisaalta $AD = \dfrac{h}{\tan 60°} = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$. Nyt $1 = AD + DB = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) h$. Kolmion ala on $\dfrac{1}{2}h = \dfrac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.

2. *Osoita: jos* $n > 3$*, niin lukujen* n, $n+1$, $\ldots$, $n+5$ *joukossa on enintään kaksi alkulukua.*

Ratkaisu. Jos luku 6:lla jaettaessa antaa parillisen jakojäännöksen tai jakojäännöksen 3, se ei ole alkuluku. Kuuden peräkkäisen luvun jakojäännökset kuudella jaettaessa ovat jossain järjestyksessä 0, 1, 2, 3, 4 ja 5. Vain ne, joiden jakojäännös on 1 tai 5 voivat olla alkulukuja (vaikkeivät ne välttämättä ole).

3. *Olkoon* P *jokin kolmion* ABC *piirin piste. Selvitä, miten löydetään sellainen kolmion piirin piste* Q*, että jana* PQ *jakaa kolmion kahdeksi sama-alaiseksi monikulmioksi.*

Ratkaisu. *1. ratkaisu.* Voidaan olettaa, että P on sivulla AB ja että $PB = m < n = AP$. Kolmioiden APC ja PBC alojen suhde on $n : m$. Olkoon Q sellainen sivun AC piste, että kolmion APQ ala on sama kuin kolmioiden CQP ja PBC alojen summa. Silloin $|PBC| = |APQ| - |CQP|$ ja

$$\frac{|APQ| + |CQP|}{|APQ| - |CQP|} = \frac{n}{m}.$$

Tästä yhtälöstä ratkaistaan

$$\frac{|CQP|}{|APQ|} = \frac{n-m}{n+m}.$$

Piste Q on siis se sivun AC piste, joka jakaa janan CA suhteessa $(n-m) : (n+m)$. Piste Q voidaan konstruoida esimerkiksi jatkamalla janaa AB pisteeseen D niin, että $BD = AP - BP$, piirtämällä CD ja B:n kautta CD:n suuntainen suora. Sen ja AC:n leikkauspiste on Q.

2. ratkaisu. Olkoot ABC ja P niin kuin edellä. Olkoon E janan AB keskipiste. Kolmion CEB ala on puolet komion ABC alasta. Piirretään E:n kautta PC:n suuntainen suora. Se leikkaa AC:n pisteessä Q. $QEPC$ on puolisuunnikas. Puolisuunnikkaan lävistäjät jakavat synnyttävät kolmiot EPQ ja ECQ; nämä kolmiot ovat sama-alaiset. Mutta tästä seuraa, että kolmion CEB ja nelikulmion $PBCQ$ alat ovat samat. Q on siis kysytty piste.

4. *Piste O keskipisteenä piirretty ympyrä Γ ja kaksi pistettä A ja B on annettu. Tiedetään lisäksi, että suora AB leikkaa Γ:n, muttei kulje pisteen O kautta. Määritä näiden tietojen perusteella suoran AB ja ympyrän Γ leikkauspisteet pelkästään harppia apuna käyttäen.*

Ratkaisu. Piirretään A keskipisteenä ympyrä Γ_A pisteen O kautta ja B keskipisteenä ympyrä Γ_B pisteen O kautta. Koska A, B ja O eivät ole samalla suoralla, ympyröillä Γ_A ja Γ_B on O:n lisäksi toinen yhteinen piste P. Nyt A ja B ovat janan OP keskinormaalin pisteitä. Piirretään P keskipisteenä ympyrä Γ', jonka säde on sama kuin Γ:n säde. Ympyrät Γ ja Γ' leikkaavat pisteissä X ja Y, jotka myös ovat OP:n keskinormaalin pisteitä. X ja Y ovat kysytyt suoran AB ja ympyrän Γ yhteiset pisteet.

5. *Määritä kaikki ne positiiviset kokonaisluvut n, joille $2^n + 1$ on jaollinen kolmella. Perustele!*

Ratkaisu. *Ratkaisu 1.* Koska $2 \equiv -1 \bmod 3$, niin $2^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \bmod 3$. Kun n on pariton, $(-1)^n + 1 = 0$ ja kun n on parillinen, niin $(-1)^n + 1 = 2$. $2^n + 1$ on jaollinen kolmella, jos ja vain jos n on pariton.

Ratkaisu 2. Induktiotodistus: $2^1 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5 = 3 + 2$. Oletetaan, että $2^n + 1$ on jaollinen 3:lla eli $2^n = 3k - 1$. Silloin $2^{n+2} + 1 = 4(3k - 1) + 1 = 3(4k - 1)$. Näin ollen kaikilla parittomilla n $2^n + 1$ on jaollinen kolmella. Oletetaan, että $2^n + 1 = 3k + 2$ eli $2^n = 3k + 1$. Silloin $2^{n+2} + 1 = 4(3k + 1) + 1 = 3k + 3 + 2 = 3(k + 1) + 2$. Siis jokaisella parillisella n $2^n + 1$ on kolmella jaoton.

6. *Todista, että ympyrän sisään piirretty puolisuunnikas on tasakylkinen.*

Ratkaisu. Puolisuunnikkaassa $ABCD$ on kaksi yhdensuuntaista sivua. Olkoot ne AB ja DC. Piirretään AC. AB:n ja DC:n yhdensuuntaisuudesta seuraa $\angle BAC = \angle ACD$. Jos A, B, C ja D ovat ympyrän kehän pisteitä, niin yhtäsuuria kehäkulmia vastaavat yhtä suuret kaaret $\overset{\frown}{BC}$ ja $\overset{\frown}{AD}$. Mutta silloin myös jänteet BC ja AD ovat yhtä pitkät, joten $ABCD$ on tasakylkinen puolisuunnikas.

7. *Ympyrän sisään piirretyn monikulmion kaikki kulmat ovat keskenään yhtä suuret, mutta sivujen joukossa on ainakin kaksi eripituista. Osoita, että monikulmion sivujen lukumäärä on parillinen.*

Ratkaisu. Olkoot A, B, C ja D neljä monikulmion vierekkäistä kärkeä ja O monikulmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Kolmiot OAB, OBC ja OCD ovat tasakylkisiä. Siis $\angle OBC = \angle OCB$, ja koska $\angle ABC = \angle BCD$, niin $\angle ABO = \angle OCD$. Mutta tästä seuraa, että tasakylkiset kolmiot OAB ja OCD ovat yhteneviä (kks). Siis $AB = CD$. Monikulmion jokaisen sivun kaksi viereistä sivua ovat yhtä pitkät. Jos monikulmion sivujen määrä olisi pariton, tästä seuraisi, että monikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, vastoin oletusta. Sivujen määrä on siis parillinen.

8. *Positiivisella kokonaisluvulla n on m kappaletta tekijöitä. Osoita, että tekijöiden tulo on $\sqrt{n^m}$.*

Ratkaisu. Jos luku n ei ole neliö, sen tekijät voidaan yhdistää pareiksi $d, \dfrac{n}{d}$, missä $d < \sqrt{n}$. Näitä pareja on $m/2$ kappaletta, joten kaikkien tekijöiden tulo on $n^{m/2} = \sqrt{n^m}$. Jos

$n = k^2$, saadaan vastaavasti $\dfrac{m-1}{2}$ paria d, $\dfrac{n}{d}$, joiden tulo on n sekä tekijä $k = \sqrt{n}$. Tekijöiden tulo on jälleen $n^{(m-1)/2} \cdot n^{1/2} = n^{m/2}$.

9. *Putki, joka on ainakin 18 m pitkä, sahataan palasiksi. Palasia voidaan myydä ainoastaan seuraavin ehdoin: 5 m pala maksaa 4 euroa, 7 m pala 8 euroa, 11 m pala 13 euroa ja 13 m pala 16 euroa. Putki paloitellaan niin, että osista saatava hinta on mahdollisimma suuri. Osoita, että mikään pala ei ole 5 m pituinen.*

Ratkaisu. Jokainen pari (5, 13) voidaan korvata paremmin tuottavalla parilla (7, 11) ja jokainen pari (5, 7) voidaan korvata paremmin tuottavalla palalla 11. Jokainen pari (5, 7), (5, 13) voidaan korvata paremmilla pareilla, joissa esiintyy 7:n ja 11:n mittaisia paloja. Jos yhdistelmässä on vielä viiden mittaisia paloja, niin kolme sellaista voidaan korvata yhdellä 13:n mittaisella palalla. Jos ”ylimääräisiä” viiden mittaisia paloja on kaksi, on mukana myös yksi 11:n mittainen; kaksi viiden mittaista ja yksi 11:n mittainen pala on korvattavissa parilla (7, 13). Jos ”ylimääräisiä” viiden paloja on tasan yksi, mukana on oltava kaksi 11:n mittaista. Tällöin parempi hinta saadaan kahdesta 13:n mittaisesta palasta.

10. *Määritä ne positiiviset kokonaisluvut n, joille $n^2 + 15n$ on neliöluku.*

Ratkaisu. Jos $n^2 + 15n$ on neliöluku, niin se on jonkin n:ää suuremman luvun neliö. On siis kokonaisluku x, jolle $n^2+15n = (n+x)^2 = n^2+2nx+x^2$ ja siis $0 < x^2 = (15-2x)n$. Siis $2x < 15$ ja $1 \le x \le 7$. Kun kokeillaan peräkkäin x:n arvot yhdestä seitsemään, huomataan, että kun $x \in \{1, 2, 4\}$ ei saada ratkaisua, mutta x:n arvoja 3, 5, 6 ja 7 vastaavat tehtävän ehdon toteuttavat n:n arvot 1, 5, 12 ja 49.

11. *Olkoon ℓ suora ja A ja B kaksi (ℓ:n sisältävän tason) pistettä, jotka eivät ole suoralla ℓ. Määritä ne ℓ:n pisteet C, joille AC:n ja ℓ:n välinen kulma on $\angle ACB$.*

Ratkaisu. Käytetään hyväksi tietoa, jonka mukaan ympyrän ulkopuolisesta pisteestä ympyrälle piirretyt tangentit muodostavat kulman, jonka puolittaja kulkee ympyrän keskipisteen kautta. Jos piirretään A keskipisteenä ympyrä Γ, joka sivuaa suoraa ℓ ja tälle ympyrälle B:n kautta tangentit, niin sellainen tangentin ja ℓ:n leikkauspiste C, jolle tangentin ja Γ:n sivuamispiste on B:n ja C:n välissä, on kysytty piste C. Tällaisia pisteitä voi olla yksi tai kaksi.

12. *Kolmion yhden sivun pituus on enintään* 1*, toisen sivun pituus enintään* 2 *ja kolmannen enintään* 3*. Määritä tällaisen kolmion suurin mahdollinen ala.*

Ratkaisu. Olkoon kolmio ABC ja $AB \le 1$, $BC \le 2$. Tällaisen kolmion ala on $\dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC) \le \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin(90^\circ) = 1$. Maksimi saavutetaan, kun $AB = 1$, $BC = 2$ ja $\angle ABC = 90^\circ$. Tällaisessa kolmiossa on myös $AC = \sqrt{5} < 3$. Kysytty suurin ala on siis 1.

13. *Kuperan nelikulmion lävistäjät jakavat nelikulmion neljäksi kolmioksi. Kolmen näistä alat ovat A_1, A_2 ja A_3. Määritä nelikulmion ala.*

Ratkaisu. Nimitetään kolmioita niiden aloilla. Olkoon neljännen kolmion ala A_4. Voidaan olettaa, että kolmiot kiertävät lävistäjien leikkauspisteen vastapäivään järjestyksessä A_1, A_2, A_3 ja A_4. Kolmioilla A_1 ja A_2 on sama korkeus samoin kuin kolmioilla A_4 ja A_3; kolmoilla A_1 ja A_4 on sama kanta, samoin kolmioilla A_2 ja A_3. Tästä seuraa, että

$$\frac{A_4}{A_3} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{eli} \quad A_4 = \frac{A_1 A_3}{A_2}.$$

Nelikulmion ala on siis

$$A_1 + A_2 + A_3 + \frac{A_1 A_3}{A_2} = \frac{1}{A_2}(A_1 A_2 + A_2^2 + A_2 A_3 + A_1 A_3) = \frac{(A_1 + A_2)(A_3 + A_2)}{A_2}.$$

14. *Olkoon $f(x) = x^{1/2}$ ja $g(x) = \dfrac{32x + 17}{48}$. Määritä ne luvut x, $\dfrac{1}{4} \le x \le 1$, joille $f(x)$:n ja $g(x)$:n erotus on mahdollisimman suuri.*

Ratkaisu. Kirjoitetaan $g(x) - f(x)$ muotoon, jossa esiintyy erotuksen neliö:

$$g(x) - f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{17}{48} - \sqrt{x} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{48}.$$

Kun $x = \dfrac{9}{16}$, $g(x) - f(x) = -\dfrac{1}{48}$. Kun $x = \dfrac{1}{4}$ tai $x = 1$, niin $g(x) - f(x) = \dfrac{1}{48}$. Nämä kolme x:n arvoa ovat tehtävän ratkaisut.

15. *Tiedämme, että eräässä viiden henkilön ryhmässä vallitsee seuraava tilanne: jos jotkin kaksi ryhmän jäsentä eivät tunne toisiaan, niin he tuntevat yhteensä ainakin viisi ryhmän jäsentä (kun molempien tuttavat lasketaan kahdesti). Osoita, että ryhmän jäsenet voidaan asettaa istumaan pyöreän pöydän ympärille niin, että jokainen tuntee vierustoverinsa.*

Ratkaisu. Olkoot ryhmän jäsenet A, B, C, D, E. Jos joku ryhmän jäsen, esimerkiksi A ei tunne kolmea muuta, esimerkiksi B:tä, C:tä ja D:tä, niin A:n ja B:n tuttavuuksia voi olla yhteensä neljä $((A, E), (B, C), (B, D), (B, E))$. Oletetaan, että jokin ryhmän jäsen, esimerkiksi A, ei tunne kahta muuta, esimerkiksi B:tä ja C:tä. Koska A ei tunne B:tä, pareista (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E) ainakin viiden on oltava tuttavuuspareja. Koska A ei tunne C:tä, sekä A että B tuntevat E:n ja D:n ja B tuntee C:n. Koska A ei tunne C:tä, niin samoin perustein C tuntee E:n ja D:n. Kelvollinen istumajärjestys on siis esimerkiksi $ADBCE(A)$. Oletetaan sitten, että kaikki ryhmän jäsenet tuntevat ainakin kolme muuta ryhmän jäsentä, mutta ainakin jotkin kaksi eivät tunne toisiaan. Oletetaan, että A ei tunne B:tä. Sekä A että B tuntevat kaikki muut ja C tuntee ainakin toisen D:stä ja E:stä, esimerkiksi C:n. Esimerkiksi $AEBCD(A)$ on sallittu istumajärjestys. Jos kaikki jäsenet tuntevat toisensa, kaikki istumajärjestykset ovat mahdollisia.

16. *Piste P on säännöllisen monikulmion $\mathcal{M}$ sisäpuolella. Osoita että P:n kaikkien $\mathcal{M}$:n sivujen kautta kulkevista suorista laskettujen etäisyyksien summa on riippumaton P:n sijainnista.*

Ratkaisu. Olkoon säännöllisen monikulmion $A_1A_2\dots A_n$ sivun pituus a ja olkoon P:n etäisyys sivun A_iA_{i+1} ($A_{n+1} = A_1$) sisältävästä suorasta d_i. Silloin kolmion A_iPA_{i+1} ala on $\frac{1}{2}d_ia$ ja koko monikulmion ala S on kaikkien kolmioiden A_iPA_{i+1} alojen summa eli

$$S = \frac{1}{2}(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)a.$$

Mutta tästä nähdään, että $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ on P:n paikasta riippumaton luku.

17. *Erään saariryhmän jokaisen kahden saaren välillä on joko lentoyhteys tai laivayhteys. Osoita, että on mahdollista käydä kaikilla saarilla niin, että käyttää vain lentoyhteyksiä tai vain laivayhteyksiä.*

Ratkaisu. Todistetaan induktiolla saariryhmän saarien lukumäärän n suhteen. Jos $n = 2$, matksustus on selvästi mahdollinen. Oletetaan, että n:n saaren ryhmän $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ asia järjestyy; voidaan olettaa, että matkustus on mahdollista lentäen. Liitetään ryhmään uusi saari S_{n+1}. Jos S_{n+1}:n ja jonkin S_k:n, $1 \le k \le n$, välillä on lentoyhteys, kaikille sarille, myös S_{n+1}:lle, pääsee lentäen. Jos taas S_{n+1}:stä ei ole lentoyhteyttä yhteenkään saarista S_k, $1 \le k \le n$, S_{n+1}:stä on laivayhteys jokaiseen muuhun saareen S_k. Jokaisesta saaresta jokaiseen toiseen pääsee nyt laivalla S_{n+1}:n kautta.

18. *On annettu suorat ℓ ja ℓ' sekä suoran ℓ piste A, joka ei ole suoralla ℓ'. Selvitä, miten konstruoidaan ympyrä, jonka keskipiste on suoralla ℓ, joka kulkee A:n kautta ja joka sivuaa suoraa ℓ'.*

Ratkaisu. Jos $\ell \| \ell'$, niin etsityn ympyrän säde on sama kuin suorien ℓ ja ℓ' välinen etäisyys d; ympyrän keskipiste on siis jompikumpi niistä ℓ:n pisteistä O, joille $OA = d$. Jos ℓ ja ℓ' leikkaavat, niin kysytyn ympyrän tangentteja ovat ℓ' ja A:n kautta kulkeva ℓ:n normaali n. Ympyrän keskipiste on jompikumpi suorien ℓ' ja n muodostamien kulmien puolittajan ja ℓ:n leikkauspisteistä.

19. *Osoita, että $k(n - k + 1) \ge n$, kun $1 \le k \le n$. Osoita, että $\sqrt[n]{n!} \ge \sqrt{n}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.*

Ratkaisu. Koska $k(n - k + 1) - n = (k - 1)n - k(k - 1) = (k - 1)(n - k) \ge 0$, väitetty epäyhtälö on tosi. Jos n on parillinen, $n = 2m$, niin $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n = (1 \cdot n)(2 \cdot n - 1) \cdots (m \cdot (n - m + 1) \ge n^m = n^{n/2}$. Kun yhtälön molemmat puolet korotetaan potenssiin $1/n$, saadaan väite. Jos n on pariton, $n = 2m + 1$, saadaan vastaavasti $n! = (1 \cdot n)(2 \cdot n - 1) \cdots (m \cdot n - m + 1) \cdot (m + 1) \ge n^m(m + 1)$. Mutta koska $(m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1 \ge 2m + 1$, niin $m + 1 \ge \sqrt{n}$. Siis $n! \ge n^{(2m+1)/2} = n^{n/2}$. Väite saadaan taas korottamalla yhtälön molemmat puolet potenssiin $1/n$.

20. *Onko yhtälöllä $16 + 4x = y^2 - x^2$ positiivisia kokonaislukuratkaisuja?*

Ratkaisu. Ei ole. Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $(x + 2)^2 = y^2 - 12$ kanssa. Jos tällä yhtälöllä on positiivinen kokonaislukuratkaisu (x, y), niin sen vasen puoli on ainakin 9, joten $y^2 > 21$ eli $y \ge 5$. Yhtälö on edelleen sama kuin $12 = y^2 - (x + 2)^2 = (y + x + 2)(y - x - 2)$. Koska oikean puolen ensimmäinen tekijä on vähintään 8, sen on oltava 12. Siis $y - x - 2 = 1$. Kun yhtälöt $y + x + 2 = 12$ ja $y - x - 2 = 1$ lasketaan puolittain yhteen, saadaan $2y = 13$, mikä on mahdotonta jos y on kokonaisluku.