Matematiikan olympiavalmennus

Syyskuun 2014 vaativammat valmennustehtävät

Palauta vastauksesi lokakuun valmennustilaisuuteen Päivölään tai lähetä ne osoitteella `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 a, 90580 Oulu` lokakuun puoliväliin mennessä. Myös tehtävissä, jossa kysytään vain vastausta, vastaus on perusteltava! – Tehtävät ovat erään hyvin matematiikkakilpailuissa menestyvän Euroopan maan kilpailutehtäviä, eivät ihan huipulta kuitenkaan.

1. Onko olemassa ehdot

$$a+b+c=d \quad \text{ja} \quad \frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}$$

toteuttavia reaalilukuja a, b, c, d?

2. Reaaliluvuille a ja b pätee $a^{2014}+b^{2014}=a^{2016}+b^{2016}$. Osoita, että $a^2+b^2 \le 2$.

3. Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanat ovat AA_1, BB_1 ja CC_1. Piste K on A:n kohtisuora projektio suoralla A_1B_1 ja piste L on B:n kohtisuora projektio suoralla B_1C_1. Osoita, että $A_1K = B_1L$.

4. Kuperan 11-kulmion lävistäjät väritetään eri väreillä. Sanomme, että kaksi väriä leikkaa toisensa, jos on olemassa näillä väreillä väritetyt lävistäjät, joilla on yhteinen sisäpiste. Kuinka monta väriä enintään voidaan käyttää, jos jokaiset kaksi väriä leikkaavat toisensa?

5. Kolmiossa ABC on $AB+BC = 2\cdot AC$. Kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa AC:n pisteessä L, ja K ja M ovat sivujen AB ja CB keskipisteet. Määritä kulman $\angle KLM$ suuruus kulman $\angle ABC = \beta$ funktiona.

6. Taululle on kirjoitettu ilmaus $***\cdots*$, niin että tähtösiä on pariton määrä. Andrei ja Olga pyyhkivät vuorotellen yhden tähden pois ja korvaavat sen numerolla; ensimmäisen tähden paikalle ei kuitenkaan saa laittaa numeroa 0. Andrei aloittaa. Jos lopulta syntynyt luku osoittautuu 11:llä jaolliseksi, Andrei voittaa. Muussa tapauksessa voittaja on Olga. Kummalla pelaajista on voittostrategia?

7. Määritä ne positiiviset kokonaisluvut n, joille $(n+1)!-n$ on jaollinen luvulla $n!+n+1$.

c/o Dos. Matti Lehtinen
Taskilantie 30 a
90580 OULU

puh. (08) 554 6683
040 583 0678

Pankki
Nordea FI68 1019 3000 2059 98

8. Määritä kaikki kokonaisluvut $n \geq 2014$, joilla on se ominaisuus, että kuutio voidaan jakaa n:ksi pienemmäksi kuutioksi.

9. Määritä suurin n, jolla on seuraava ominaisuus. On olemassa n:n positiivisen kokonaisluvun joukko, jonka luvuista tasan yksi on jaollinen n:llä, tasan kaksi jaollisia $(n-1)$:llä, $\ldots$, tasan $n-1$ jaollisia 2:lla (ja kaikki n jaollisia 1:llä).

10. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, joille pätee

$$f(n+1)f(n+2) = (f(n))^2 .$$

11. Olkoon E kolmion jokin ABC sivun BC piste, joka on lähempänä C:tä kuin B:tä. Selvitä, miten voidaan harppi- ja viivoitintempuin löytää kolmion ABC sivujen AB ja AC pisteet D ja F niin, että kulma $\angle DEF$ on suora ja DE leikkaa BF:n sen keskipisteessä M.

12. Onko olemassa positiivisten kokonaislukujen geometrista jonoa b_0, b_1, $\ldots$, b_{2014}, jossa kaikilla i luvussa b_i on yksi numero enemmän kuin luvussa b_{i-1} (10-järjestelmä!), ja jonka suhdeluku ei ole 10?

13. Kolmion ABC ympärysympyrä on Γ. Kolmion korkeusjana on AA'. Kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa BC:n pisteessä D ja Γ:n myös pisteessä E. Suora EA' leikkaa Γ:n myös pisteessä F. Suora FD leikkaa Γ:n myös pisteessä G. Osoita, että AG on Γ:n halkaisija.

14. Luvut p, q ja r ovat alkulukuja. Tiedetään, että $pq+1$, $pr+1$ ja $qr-p$ ovat neliölukuja. Osoita, että myös $p+2qr+2$ on neliöluku.

15. Pekan pitää arvata positiivinen kokonaisluku n. Hän tietää, että luvulla n on tasan 250 positiivista kokonaislukutekijää $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{250} = n$. Kun Pekka kertoo indeksin j, $1 \leq j \leq 249$, hänelle kerrotaan d_j. Jos Pekalle on jo kerrottu d_j, hänelle ei kuitenkaan kerrota lukua d_{250-j}. Kuinka monella arvauksella Pekka pystyy aina päättelemään luvun n?