

Matematiikan olympiavalmennus 2015 – huhtikuun tehtävät

Vastaukset osoitteella Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu tai sähköpostitse `matti.lehtinen@spangar.fi`.

1. Olkoon $n > 1$ pariton kokonaisluku, ja $k = (n - 1)/2$. Todista, että lukujonossa

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{k}$$

on pariton määrä parittomia lukuja.

2. Kuinka moni lukua 2015 pienempi positiivinen kokonaisluku on jaollinen 3:lla tai 4:llä mutta ei 5:llä?

3. Hämähäkillä on kahdeksan jalkaa ja kutakin jalkaa varten sukka ja kenkä. Monessako järjestyksessä se voi pukea sukat ja kengät, kun kuhunkin jalkaan on puettava sukka ennen kenkää?

4. Määritellään funktio f rationaaliluvuille kaavalla $f(m/n) = mn$, missä m/n on rationaaliluvun täysin supistettu muoto, eli m ja n ovat kokonaislukuja, joiden suurin yhteinen tekijä on 1. Kuinka monelle rationaaliluvulle r , $0 < r < 1$, on $f(r) = 20$?

5. 7×7 -shakkilaudan ruuduista kaksi väritetään keltaisiksi ja loput vihreiksi. Lautaa tasossa kiertämällä saatavia väriytyksiä pidetään samoina. Montako erilaista väritystä on olemassa?

6. Olkoot A ja B joukkoja, joiden leikkaus on tyhjä ja joiden yhdiste on positiivisten kokonaislukujen joukko. Todista, että kaikilla kokonaisluvuilla n on olemassa erisuuret $a, b > n$, joille

$$\text{joko } \{a, b, a + b\} \subseteq A \quad \text{tai} \quad \{a, b, a + b\} \subseteq B.$$

7. Sanotaan, että positiivisten kokonaislukujen joukolla on kolmio-ominaisuus, jos siinä on kolme eri lukua, jotka ovat mahdolliset kolmion sivun pituudet (kolmiolla on oltava positiivinen pinta-ala). Peräkkäisten kokonaislukujen joukon $\{4, 5, 6, \dots, n\}$ kaikilla kymmenalkioisilla osajoukoilla on kolmio-ominaisuus. Mikä on suurin mahdollinen n :n arvo?

8. Merkitään Fibonaccin lukuja $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, jne. Todista, että jos m on n :n tekijä, niin F_m on F_n :n tekijä.

9. $ABCD$ on suorakulmio ja P mielivaltainen tason piste. Osoita, että $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

10. Jänne-likulmion lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Osoita, että jos neli-likulmion lävistäjien leikkauspisteen kautta kulkeva suora on kohtisuorassa jotain jänne-likulmion sivua vastaan, niin se puolittaa jänne-likulmion vastakkaisen sivun.

11. Kolmiot ARB , BPC ja CQA on piirretty kolmion ABC ulkopuolelle. Lisäksi $\angle ARB + \angle BPC + \angle CQA = 180^\circ$. Osoita, että kolmioiden ARB , BPC ja CQA ympärysympyrät leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

12. Tarkastellaan kolmioon ABC ja pisteeseen P liittyviä Simsonin suoria. Milloin Simsonin suora on suora AB ?

13. Olkoot ℓ ja ℓ' pisteisiin P ja P liittyvät (kolmion ABC) Simsonin suorat. Osoita, että ℓ :n ja ℓ' :n välinen kulma on puolet kaaresta $\widehat{PP'}$ (kun kaari mitataan kulmayksiköin).

14. Osoita: nelikulmion vastakkaisten sivujen keskipisteiden kautta kulkevat suorat ja nelikulmion lävistäjien keskipisteiden kautta kulkevat suorat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

15. Määritä kaikki ne positiivisten kokonaislukujen parit (a, b) , joille $a^a = b^{4b}$.

16. Mille positiivisille kokonaisluvuille n pätee $n \mid (a^8 - 1)$ kaikilla kokonaisluvuilla a , jotka ovat yhteistekijättömiä luvun n kanssa?

17. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joille luvulla n^2 on jokin tekijä, joka kuuluu väliin $[n - \sqrt{n}, n[$.

18. Olkoon p alkuluku. Osoita, että luvun $2^p - 1$ kaikki alkutekijät ovat vähintään $2p + 1$:n suuruisia. Päättele tästä, että on olemassa äärettömän monta alkulukua