1. Tarkastellaan positiivisella kokonaisluvulla n lukujen $1, 2, \ldots 2n$ jakamista kahden alkion osajoukkoihin $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Joukon P_i alkioiden tulo olkoon p_i. Osoita, että

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. Kokonaislukujonoa $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kutsutaan eksaktiksi, jos $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$ kun $n > m$. Osoita, että on olemassa eksakti jono, jolla $a_1 = 1$ ja $a_2 = 0$ ja määritä a_{2007}.

3. Olkoot F, G, H polynomeja, joiden kertoimet ovat reaalisia, ja joiden aste on korkeintaan $2n + 1$, ja jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

1. Kaikilla reaalisilla x pätee
$$F(x) \leq G(x) \leq H(x).$$
2. On olemassa erisuuret reaaliluvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ joilla
$$F(x_i) = H(x_i) \quad \text{kun } i = 1, 2, \ldots, n.$$
3. On olemassa reaaliluku x_0, joka eroaa luvuista $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja jolla
$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Osoita, että $F(x) + H(x) = 2G(x)$ pätee kaikilla reaaliluvuilla x.

4. Olkoot $a_1, a_2, \ldots a_n$ positiivisia reaalilukuja ja olkoon $S = a_1 + a_2 + \cdots a_n$. Osoita, että

$$(2S + n)\left(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots a_na_1\right) \geq 9\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)^2.$$

5. Funktio f on määritelty kaikkien nollasta poikkeavien reaalilukujen joukossa ja saa kaikki reaalilukuarvot paitsi arvon 1. Tiedetään myös, että

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

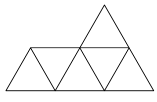
kaikilla $x, y \neq 0$ ja

$$f\left(f(x)\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

kaikilla $x \notin \{0, 1\}$. Määritä kaikki nämä ehdot toteuttavat funktiot f.

6. Freddy kirjoittaa luvut $1, 2, \ldots, n$ ylös jossakin järjestyksessä. Sitten hän tekee listan pareista (i, j), missä $1 \leq i < j \leq n$ ja i. luku on suurempi kuin j. luku hänen permutaatiossaan. Tämän jälkeen Freddy toistaa seuraavaa proseduuria kun se on mahdollinen: valitse pari (i, j) listalta, vaihda i. ja j. luku permutaatiossa, poista (i, j) listalta. Osoita, että Freddy voi valita parit sellaisessa järjestyksessä, että kun prosessi loppuu, niin luvut permutaatiossa on järjestetty nousevasti.

7. *Viritys* koostuu kuudesta tasasivuisesta kolmiosta, niin kuin alla olevassa kuvassa on esitetty, joiden sivun pituus on 1. Määritä kaikki mahdolliset kokonaisluvut n, joilla tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on n, voidaan täysin peittää virityksillä (peilaukset ja käännöt on sallittu, mutta kaksi viritystä ei saa mennä päällekkäin).



8. Kutsutaan kokonaislukujoukkoa A *eristämättömäksi*, jos kaikilla $a \in A$ vähintään yksi luvuista $a-1$ ja $a+1$ myös kuuluu joukkoon A. Osoita, että on olemassa $(n+4)^2$ viiden alkion eristämätöntä joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkoa.

9. Yhteisön pitää äänestää kuvernöörien muodostama hallitys. Jokainen yhteisön jäsen on valinnut 10 kandidaattia mutta hän on onnellinen, jos vähintään yksi tulee valituksi hallitukseen. Jokaisella kuudella yhteisön jäsenellä on olemassa hallitus, joka koostuu kahdesta jäsenestä, ja joka saa kaikki nämä kuusi jäsentä onnellisiksi. Osoita, että on olemassa kymmenen hengen hallitus, joka saa koko yhteisön onnelliseksi.

10. 18×18-laudalla kaikki ruudut voivat olla mustia tai valkoisia. Aluksi kaikki ruudut on väritetty valkoisiksi. Voimme suorittaa seuraavan operaation: valitse yksi sarake tai rivi ja vaihda väri kaikista tämän sarakkeen tai rivin ruuduista. Onko mahdollista toistaa tätä operaatiota niin, että saavutetaan lauta, jolla on täsmälleen 16 mustaa ruutua?

11. AD, BE ja CF ovat kolmion ABC korkeusjanat. Pisteet P, Q, R ja S toteuttavat seuraavat ehdot

1. P on ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.
2. Kaikki janat PQ, QR ja RS ovat yhtä pitkiä kuin kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde.
3. Suunnistettu jana PQ on samansuuntainen kuin suunnistettu jana AD. Vastaavasti QR on samansuuntainen kuin BE ja RS on samansuuntainen kuin CF.

Osoita, että S on kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

12. Olkoon M kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän sillä kaarella $\widehat{AB}$, jolla ei ole pistettä C. Oletetaan, että psteen M projektiot suorille AB ja BC ovat kolmion sivuilla, eikä niiden jatkeilla. Merkitään näitä projektioita X:llä ja Y:llä tässä järjestyksessä. Olkoot K ja N janojen AC ja XY keskipisteet. Osoita, että $\angle MNK = 90^o$.

13. Olkoot $t_1, t_2, \ldots, t_k$ eri suoria tasossa, ja olkoon $k > 1$. Osoita, että on olemassa pisteet P_i suorilla t_i, $I = 1, \ldots, k$ joilla P_{i+1} on pisteen P_i projektio suoralle t_{i+1}, kun $1 = 1, \ldots, k-1$ ja P_1 on pisteen P_k projektio suoralla t_1.

14. Konveksissa nelikulmiossa $ABCD$ pätee $\angle ADC = 90^o$. Olkoot E ja F pisteen B projektioita suorille AD ja AC tässä järjestyksessä. Oletetaan, että F on pisteiden A ja C välissä, että A on pisteiden D ja E välissä, ja että suora EF kulkee janan BD kesipisteen kautta. Osoita, että nelikulmio $ABCD$ voidaan piirtää ympyrälle.

15. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa sivua AC pisteessä D. Toinen ympyrä kulkee pisteen D kautta ja sivuaa suoria BC ja BA, jälkimmäistä pisteessa A. Määritä suhde AD/DC.

16. Olkoot a ja b rationaalilukuja, joilla $s = a + b = a^2 + b^2$. Osoita, että s voidaan esittää rationaalilukuna jonka nimittäjällä ei ole yhteisiä tekijöitä luvun 6 kanssa.

17. Olkoot x, y, z positiivisia kokonaislukuja, joilla $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ on kokonaisluku. Olkoon d lukujen x, y ja z suurin yhteinen tekijä. Osoita, että $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

18. Olkoot a, b, c, d nollasta poikkeavia kokonaislukuja, joilla ainoa yhtälön

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

toteuttava kokonaislukunelikkö (x, y, z, t) on $x = y = z = t = 0$. Seuraako tästä, että lukujen a, b, c, d merkit ovat samat?

19. Olkoot r ja k positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon luvun r kaikki alkutekijät suurempia kuin 50.

Positiivista kokonaislukua, jonka kymmenjärjestelmäesityksessä on vähintään k numeroa (ilman edessä olevia nollia) kutsutaan *kieroutuneeksi*, jos jokainen k peräkkäisen numeron jono muodostaa luvun (jossa on mahdollisesti alussa nollia), joka on luvun r monikerta.

Osoita, että jos on olemassa äärettömän monta kieroutunutta lukua, niin $10^k - 1$ on kieroutunut.

20. Olkoot a ja b, positiivisia kokonaislukuja, joilla $b < a$ ja luku $a^3 + b^3 + ab$ on jaollinen luvulla $ab(a-b)$. Osoita, että ab on kokonaisluvun kuutio.

Sallittu aika: 4 ½ tuntia.