

## Syyskuun vaativimmat valmennustehtävät

Ratkaisuja voi lähettää seuraavaan valmennusviikonloppuun mennessä sähköpostitse osoitteeseen `joni.p.teravainen@utu.fi` tai postitse osoitteeseen

**Joni Teräväinen**

Reelinkikatu 5A 26

20810 Turku.

Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

1. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut  $n$ , joille  $n + 5 \mid (n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$  ( $a \mid b$  tarkoittaa, että luku  $a$  jakaa luvun  $b$ ).

2. Suorakulmion sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Oletetaan, että sen piiri on yhtä suuri kuin sen ala. Määritä kaikki mahdolliset sivujen pituudet.

3. Osoita, että on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua, joita ei voi esittää muodossa  $x^2 - 2y^2$ , missä  $x$  ja  $y$  ovat kokonaislukuja.

4. Olkoot  $a, b, c$  ja  $d$  reaalilukuja, joille  $|a|, |b|, |c|, |d| \leq 1$ . Osoita, että

$$|ab - cd| \leq |a - c| + |b - d|.$$

5. Montako reaalijuurta on yhtälöllä  $x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 1$ ?

6. Olkoot  $x_0 = 1, x_1 = 3$  ja  $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ , kun  $n \geq 0$ . Osoita, että

$$(2 + \frac{1}{3})^n < x_n < (2 + \frac{2}{3})^n,$$

kun  $n \geq 2$ .

7. Monellako tavalla sanan "tehtävä"merkit voidaan järjestää?

8. Yksikköympyrän sisältä on valittu  $n$  pistettä. Osoita, että joidenkin kahden pisteen välinen etäisyys on enintään  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

9. Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 3 ja 4. Määritä sen kaikkien korkeusjanojen ja kulmanpuolittajien pituudet.

10. Kaksi ympyrää,  $O_1$  ja  $O_2$ , sivuavat pisteessä  $P$ . Suora  $\ell$  sivuaa ympyröitä  $O_1$  ja  $O_2$  pisteissä  $A$  ja  $B$  ( $O_1$  on ympyrällä  $A$  ja  $O_2$  ympyrällä  $B$ ). Suora  $AP$  leikkaa ympyrän  $O_2$  pisteessä  $C$ . Osoita, että  $BC$  ja  $\ell$  ovat kohtisuorassa.