Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävien ratkaisuja 1959–1974

Useimmat tässä koosteessa esitetyt ratkaisut perustuvat vuonna 1975 julkaistuun kokoelmaan *Kansainväliset matematiikkaolympialaiset*.

59.1. *Olkoon n mielivaltainen luonnollinen luku. Osoita, että murtolukua*

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

ei voi supistaa.

Ratkaisu. Murtolukua voi supistaa vain, jos osoittajalla ja nimittäjällä on ykköstä suurempi yhteinen tekijä. Etsitään lukujen $21n+4$ ja $14n+3$ suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmin avulla:

$$\begin{aligned} 21n+4 &= 1\cdot(14n+3)+(7n+1),\\ 14n+3 &= 2\cdot(7n+1)+1. \end{aligned}$$

Osoittajan ja nimittäjän suurin yhteinen tekijä on siis 1, joten murtolukua ei voi supistaa.

59.2. *Millä reaaliluvuilla x ovat voimassa yhtälöt*

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2},\\ &\text{b)} \qquad \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1,\\ &\text{c)} \qquad \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2, \end{aligned}$$

kun neliöjuuret ovat ei-negatiivisia?

Ratkaisu. Jotta juurilausekkeet olisivat reaalisia, on oltava $2x-1\ge 0$ ja $x-\sqrt{2x-1}\ge 0$. Edellinen epäyhtälö on tosi, kun $x\ge\frac{1}{2}$ ja kun $x\ge 0$, jälkimmäinen epäyhtälö on sama kuin $x^2\ge 2x-1$ eli $(x-1)^2\ge 0$ ja siis tosi. Tehtävän yhtälöiden vasemman puolen neliö on

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}\right)^2 &= 2x+2\sqrt{x^2-(2x-1)}\\ &= 2\left(x+|x-1|\right)=\begin{cases}2 & \text{kun } x\le 1,\\ 4x-2 & \text{kun } x>1.\end{cases} \end{aligned}$$

a) Kun $\frac{1}{2}\le x\le 1$, yhtälö toteutuu. Kun $x>1$, $4x+2>2$, eikä yhtälö toteudu.

b) Yhtälö ei toteudu millään x:n arvolla.

c) Yhtälö toteutuu, kun $4x+2=4$ eli kun $x=\frac{3}{2}$.

59.3. *Olkoon x kulma (so. reaaliluku). Olkoot a, b ja c mielivaltaisia reaalilukuja. Luku $\cos x$ toteuttaa toisen asteen yhtälön*

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0.$$

Johda sellainen toisen asteen yhtälö, jonka toteuttaa luku $\cos 2x$. Vertaa näitä yhtälöitä tapauksessa $a = 4$, $b = 2$ ja $c = -1$.

Ratkaisu. Tunnetusti

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1).$$

Jos $y = \cos(2x)$, niin y toteuttaa jommankumman yhtälöistä

$$\frac{1}{2}a(y+1) \pm b\sqrt{\frac{1}{2}(y+1)} + c = 0$$

ja siis joka tapauksessa yhtälön

$$\left(\frac{1}{2}a(y+1)^2 + c\right)^2 = b^2\frac{y+1}{2}$$

eli

$$\frac{a^2}{4}y^2 + \frac{1}{2}\left(a^2 + 2ac - b^2\right)y + \frac{1}{4}\left(a^2 + 4ac + 4c^2 - 2b^2\right) = 0. \tag{1}$$

Jos $a = 4$, $b = 2$ ja $c = -1$, (1) on $4y^2 + 2y - 1 = 0$ eli $ay^2 + by + c = 0$. Tässä tapauksessa $\cos x$ ja $\cos(2x)$ toteuttavat aina saman toisen asteen yhtälön.

59.4. *Konstruoi suorakulmainen kolmio, kun sen hypotenuusa c tunnetaan ja kun hypotenuusaa vastaan piirretty keskijana on kateettien geometrinen keskiarvo.*

Ratkaisu. Thaleen lauseesta seuraa, että suorakulmaisen kolmion hypotenuusaa vastaan piirretty keskijana on kolmion ympärysympyrän säde ja hypotenuusa on ympärysympyrän halkaisija. Jos konstruoitavan kolmion kateetit ovat a ja b, seuraa oletuksista ja Pythagoraan lauseesta, että

$$\begin{cases} ab = \frac{1}{4}c^2 \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$

Siis

$$\begin{cases} (a+b)^2 = \frac{3}{2}c^2 \\ (a-b)^2 = \frac{1}{2}c^2 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{\frac{3}{2}}c \\ a - b = \frac{1}{\sqrt{2}}c. \end{cases}$$

Näistä ratkaistaan

$$a = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})c.$$

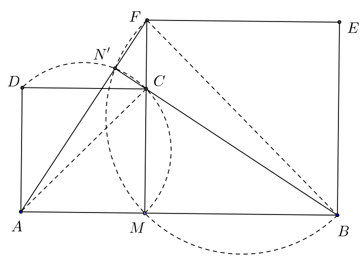
Jana $\sqrt{3}c$ voidaan konstruoida piirtämällä suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on $2c$ ja toinen kateetti c; Pythagoraan lauseen perusteella toinen kateetti on $\sqrt{3}c$. Jana, jonka pituus on $\sqrt{6}c = \sqrt{2}(\sqrt{3}c)$ on sellaisen neliön lävistäjä, jonka sivu on $\sqrt{3}c$. Samoin saadaan jana $\sqrt{2}$ sellaisen neliön lävistäjänä, jonka sivu on c. a löytyy puolittamalla janan $(\sqrt{6} + \sqrt{2})c$ puolikas. Tehtävän suorakulmainen kolmion suoran kulman kärki saadaan viimein puoliympyrän, jonka halkaisija on c ja halkaisijan päätepiste keskipisteenä piirretyn a-säteisen ympyrän leikkauspisteenä.

59.5. *Janalta AB valitaan sisäpiste M ja janat AM ja MB sivuina piirretään neliöt $AMCD$ ja $MBEF$ samalle puolelle suoraa AB. Neliöiden ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet ovat P ja Q, ja ympyrät leikkaavat toisensa pisteissä M ja N. Suorat AF ja BC leikkaavat toisensa pisteessä N'.*

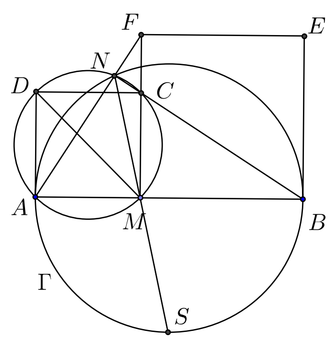
a) *Osoita, että $N = N'$.*

b) *Osoita, että riippumatta pisteen M valinnasta suora MN kulkee erään kiinteän pisteen kautta.*

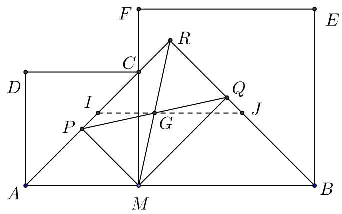
c) *Määritä janan PQ keskipisteiden joukko, kun M liikkuu janalla AB.*



Ratkaisu. a) Koska $AM = MC$, $MF = MB$ ja kulmat $\angle AMF$ ja $\angle CMB$ ovat suoria, kolmiot AMF ja CMB ovat yhteneviä (sks). Siis $\angle ABN' = \angle ABC = \angle AFM$, joten kolmiot ABN' ja AFM ovat yhdenmuotoisia (kk) ja edelleen $\angle AN'B$ ja siis myös $\angle FN'B$ ovat suoria kulmia. Näin ollen N' on sekä ympyrällä, jonka halkaisija on AC että ympyrällä, jonka halkaisija on FB. Mutta näiden ympyröiden yhteiset pisteet ovat N ja M.



b) Sovelletaan kehäkulmalausetta neliön $AMCD$ ympärysympyrään. Sen perusteella $\angle MNC = \angle MDC = 45°$. Koska $N = N'$ ja $\angle AN'B$ on suora, N on ympyrällä Γ, jonka halkaisija on AB. Leikatkoon NM tämän ympyrän myös pisteessä S. Koska $\angle BNS = \angle MNC = 45°$, piste S ei riipu M:n sijainnista janalla AB. S on kaaren $\overset{\frown}{AB}$ keskipiste.



c) Riippumatta M:n sijainnista puolisuorat AP ja BQ muodostavat $45°$:een kulmat suoran AB suhteen. Olkoon R näiden puolisuorien leikkauspiste. Selvästi $PM \| QR$ ja $MQ \| PR$. Siis $PMQR$ on suunnikas. Koska suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, PQ:n keskipiste G on myös RM:n keskipiste. Kun M käy läpi janan AB pisteet G käy läpi janan IJ pisteet, missä I ja J ovat janojen AR ja BR keskipisteet.

59.6. *On annettu tasot P ja Q, joiden leikkaussuora on ℓ. Tason P piste A ja tason Q piste C eivät kumpikaan ole suoralla ℓ. On konstruoitava tasakylkinen puolisuunnikas $ABCD$ niin, että AB ja CD ovat yhdensuuntaiset ja että $ABCD$:n sisään voidaan piirtää ympyrä. Pisteen B tulee sijaita tasossa P ja pisteen D tasossa Q.*

Ratkaisu. Olkoot ℓ_A ja ℓ_C sellaiset tasojen P ja Q suorat, että $\ell_A \| \ell_C$ ja $A \in \ell_A$, $C \in \ell_C$. Nyt pisteen B on oltava suoralla ℓ_A ja pisteen D suoralla ℓ_C. Tehtävää voidaan siis tarkastella konstruktiona suorien ℓ_A ja ℓ_C määrittämässä tasossa τ. Nelikulmion $ABCD$ sisään voidaan piirtää ympyrä aina ja vain, kun

$$AB + CD = BC + DA. \tag{1}$$

Ajatellaan tehtävä ratkaistuksi. Olkoon A' A:n kohtisuora projektio suoralla ℓ_C ja C' C:n kohtisuora projektio suoralla ℓ_A. Olkoon $AC' = A'C = a$, $AA' = CC' = b$ ja $C'B = A'D = x$. Ehto (1) on nyt $(a+x)+(a-x) = 2\sqrt{x^2+b^2}$ eli $x^2 = a^2 - b^2$. Tehtävällä on ratkaisu, kun $a > b$. x voidaan konstruoida tunnetuista a:sta ja b:stä Pythagoraan lauseen avulla.

60.1. *Määritä kaikki sellaiset kolminumeroiset luvut, että kun ne jaetaan 11:llä, saadaan luku, joka on sama kuin alkuperäisen luvun numeroiden neliöiden summa.*

Ratkaisu. Jos luku $100x + 10y + z$, $1 \le x \le 9$, $0 \le y, z \le 9$, on jaollinen 11:llä, niin $x - y + z = 11k$. Koska $-8 \le x - y + z \le 18$, $k = 0$ tai $k = 1$. Jos $k = 0$, niin $y = x + z$. Nyt x:n ja z:n on toteuttava yhtälö

$$110x + 11z = 11(x^2 + (x+z)^2 + z^2) = 22(x^2 + xz + z^2)$$

eli

$$10x + z = 2(x^2 + xz + z^2).$$

Luvun z on oltava parillinen, $z = 2t$. Edellinen yhtälö saa muodon $5x + t = x^2 + 2tx + 4t^2$ eli $x^2 + (2t-5)x + t(4t-1) = 0$. Jotta yhtälöllä olisi reaalisia ratkaisuja x, on oltava $(2t-5)^2 > 4t(4t-1)$ eli $12t^2 + 16t - 25 < 0$. Epäyhtälön vasen puoli on kasvava t:n funktio ja > 0, kun $t = 1$. Siis $t = 0$ on ainoa mahdollinen; silloin $z = 0$, $10x = 2x^2$ eli $x = 5$ ja $y = x + z = 5$. Luku 550 toteuttaa tehtävän ehdon.

Tarkastetaan sitten mahdollisuus $k = 1$. Nyt $y = x + z - 11$, ja tehtävän yhtälö on

$$100x + 10(x + z - 11) + z = 11(x^2 + (x + z - 11)^2 + z^2).$$

Se sieventyy muotoon

$$2x^2 + 2z^2 + 2xz - 32x - 23z + 131 = 0.$$

Nähdään, että luvun z on oltava pariton. Olkoon $z = 2t+1$. Yhtälö sieventyy nyt muotoon

$$x^2 + (2t - 15)x + 4t^2 - 19t + 55 = 0.$$

Yhtälöllä on reaalisia ratkaisuja vain, jos

$$(2t - 15)^2 \geq 4(4t^2 - 19t + 55)$$

eli jos

$$0 \geq 12t^2 - 16t - 5.$$

Ei-negatiivisista kokonaisluvuista t tämän epäyhtälön toteuttavat vain $t = 0$ ja $t = 1$. Jos olisi $t = 0$ eli $z = 1$, niin $y = x + z - 11 = x - 10$; koska $x \leq 9$ ja $y \geq 0$, tämä ei ole mahdollista. Jos $t = 1$ eli $z = 3$, x toteuttaa yhtälön $x^2 - 13x + 40 = 0$. Siis on oltava $x = 5$ tai $x = 8$. $x = 5$, $z = 3$ johtaisi siihen, että $y = x + z - 11 = -3$. Mutta $x = 8$, $y = 0$, $z = 3$ on kelvollinen yhdistelmä: 803 on toinen yhtälön ratkaisu.

60.2. *Millä x:n arvoilla on voimassa epäyhtälö*

$$\frac{4x^2}{\left(1 - \sqrt{1 + 2x}\right)^2} < 2x + 9\ ?$$

Ratkaisu. Jotta neliöjuuri olisi reaalinen ja epäyhtälön vasen puoli määritelty, on oltava $1 + 2x \geq 0$ eli $x \geq -\frac{1}{2}$ ja $x \neq 0$. Koska

$$\frac{4x^2}{\left(1 - \sqrt{1 + 2x}\right)^2} = \frac{4x^2\left(1 + \sqrt{1 + 2x}\right)^2}{(1 - (1 + 2x))^2} = \left(1 + \sqrt{1 + 2x}\right)^2,$$

tehtävän epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$1 + 2\sqrt{1 + 2x} + 1 + 2x < 2x + 9$$

eli epäyhtälön

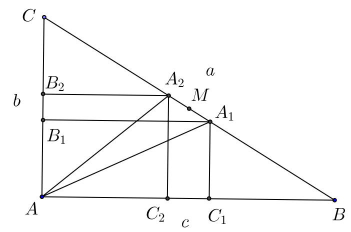
$$\sqrt{1 + 2x} < \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{49}{4}}$$

kanssa. Viimeinen epäyhtälö toteutuu, kun $1 + 2x < \frac{49}{4}$ eli kun $x < \frac{45}{8}$. Epäyhtälön ratkaisuja ovat siis kaikki reaaliluvut x, joille pätee $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ tai $0 < x < \frac{45}{8}$.

60.3. *On annettu suorakulmainen kolmio ABC, jonka hypotenuusa BC on jaettu n:ään yhtä suureen osaan (n on pariton luku). Oletetaan, että hypotenuusan keskipisteen sisältävä osajana näkyy pisteestä A kulmassa α. Olkoon a kolmion hypotenuusa ja h sitä vastaava korkeus. Osoita, että*

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

Ratkaisu. Kolmion ABC sivut ovat $AB = c$, $BC = a$ ja $CA = b$, sivun BC keskipiste on M ja $n = 2k+1$. Jos A_1A_2 on se BC:n n:stä jakovälistä, johon M kuuluu ja A_1 on B:n ja M:n välissä, niin $\angle A_2AA_1 = \alpha$ ja $BA_1 = CA_2 = \dfrac{k}{n}a$ ja $BA_2 = CA_1 = \dfrac{k+1}{n}$. Olkoot vielä B_1 ja B_2 A_1:n ja A_2:n kohtisuorat projektiot sivulla AC ja C_1 ja C_2 A_1:n ja A_2:n kohtisuorat projektiot sivulla AB. (Kuvassa $n = 7$.) Nyt $AB_1 = \dfrac{k}{n}c$, $AB_2 = \dfrac{k+1}{n}c$, $AC_1 = \dfrac{k+1}{n}b$ ja $AC_2 = \dfrac{k}{n}b$. Siis



$$\tan(\angle A_2AB) = \frac{k+1}{k}\frac{b}{c}, \quad \tan(\angle A_1AB) = \frac{k}{k+1}\frac{b}{c}$$

ja

$$\tan\alpha = \tan(\angle A_2AB - \angle A_1AB) = \frac{\tan(\angle A_2AB) - \tan(A_1AB)}{1 + \tan(A_2AB)\tan(A_1AB)}$$

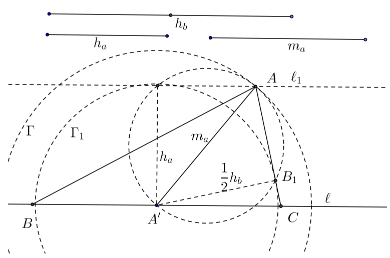
$$= \frac{\left(\dfrac{k+1}{k} - \dfrac{k}{k+1}\right)\dfrac{b}{c}}{1 + \dfrac{b^2}{c^2}} = \frac{\left((k+1)^2 - k^2\right)bc}{k(k+1)(b^2+c^2)}.$$

Kun otetaan huomioon Pythagoraan lause $b^2+c^2 = a^2$ ja se että $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1 = n$ ja $2k(2k+2) = (n-1)(n+1) = n^2-1$, saadaan

$$\tan\alpha = \frac{4nbc}{(n^2-1)a^2}.$$

On helppo nähdä (vaikkapa laskemalla kolmion ala kahdella tavalla), että $bc = ah$. Kun tämä sijoitetaan edelliseen yhtälöön, saadaan väite.

60.4. *Konstruoi kolmio ABC, kun tunnetaan h_a, h_b ja m_a. (h_a ja h_b ovat sivuja a ja b vastaavat korkeudet ja m_a sivua a vastaava korkeus.)*

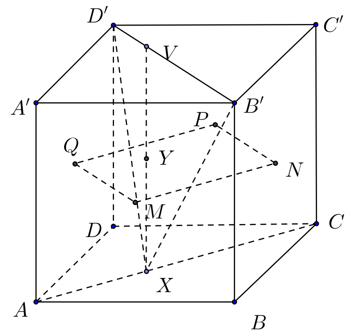


Ratkaisu. Valitaan jokin piste A' sivun BC keskipisteeksi ja A':n kautta kulkeva suora ℓ suoraksi, jolla B ja C ovat. Piste A on nyt ℓ:n suuntaisella ja etäisyydellä h_a ℓ:sta olevalla suoralla ℓ_1 ja A'-keskisellä m_a-säteisellä ympyrällä Γ; molemmat voidaan piirtää ja valita jokin niiden yhteinen piste pisteeksi A. (On oltava $h_a \leq m_a$.) Koska B:n etäisyys suorasta AC on h_b ja A' on janan BC keskipiste, pisteen A' etäisyys suorasta AC on $\dfrac{1}{2}h_b$. Suoran AC on siis oltava A'-keskisen ja $\dfrac{1}{2}h_b$-säteisen ympyrän Γ_1 tangentti. Koska $AB_1 \perp A'B_1$, tangentin sivuamispiste B_1 on AA'-halkaisijaisen ympyrän ja Γ_1:n leikkauspiste. Se voidaan piirtää, jos $m_a > \dfrac{1}{2}h_b$. Kolmion kärki C on suorien AB_1 ja ℓ leikkauspiste ja kärki B se ℓ:n piste, jolle A' on BC:n keskipiste.

60.5. *On annettu kuutio $ABCDA'B'C'D'$.*

a) Määritä janojen XV keskipisteiden joukko, kun X käy läpi janan AC ja V janan $B'D'$ pisteet.

b) Määritä janojen XV niiden pisteiden Z joukko, jotka toteuttavat ehdon $ZV = 2 \cdot XZ$.



Ratkaisu. a) Olkoot M, N, P ja Q kuution tahkojen $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, ja $DAA'D'$ keskipisteet. Taso $\tau = MNPQ$ on suorien AC ja $B'D'$ suuntainen ja yhtä etäällä molemmista. Janojen XV keskipisteet Y ovat kaikki tässä tasossa. Osoitetaan, että ne ovat juuri neliön $MNPQ$ pisteet. Taso ACB' leikkaa tason τ pistkin suoraa MN ja taso ACD' pistkin suoraa QP. Kolmion $B'D'X$ sivujen $B'X$ ja $D'X$ keskipisteet X_1 ja X_2 ovat suoralla MN ja QP. Koska janan XV keskipiste Y on janalla X_1X_2, se on suorien MN ja QP välissä. Samoin osoitetaan, että Y on suorien MQ ja NP välissä. Se on siis neliössä $MNPQ$. Kääntäen, jos Y on jokin neliön $MNPQ$ piste, niin Y on jollakin janalla X_1X_2, missä X_1 on janalla MN ja X_2 janalla PQ, ja $X_1X_2 \| QM \| B'D'$. Yhdensuuntaisten suorien X_1X_2 ja $B'D'$ määrittämä taso leikkaa suoran AC jossain janan AC pisteessä X. Suora XY leikkaa $D'B'$:n jossain pisteessä V. Nyt Y on janan XV keskipiste.

b) Olkoot M', N', P' ja Q' pisteet, jotka jakavat janat AB', CB', CD' ja AD' suhteessa $1:2$. Aivan samoin kuin a-kohdassa nähdään, että kysytty joukko on suorakulmio $M'N'P'Q'$.

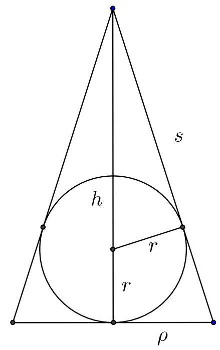
60.6. *On annettu ympyräkartio, kartion sisään piirretty pallo ja pallon ympäri piirretty lieriö, jonka pohja on samassa tasossa kuin kartion pohja. Kartion tilavuus on V_1 ja lieriön V_2.*

a) Osoita, että ei voi olla $V_1 = V_2$.

b) Määritä pienin luku k, jolle on voimassa $V_1 = kV_2$, ja konstruoi tätä tapausta vastaava kartion huippukulma.

Ratkaisu. Olkoon kartion korkeus on h, sivuviiva s ja pohjan säde ρ ja kartion sisään piirretyn pallon säde r. Kartion korkeussuoraa pitkin tehdystä tasoleikkauksesta nähdään heti, että

$$\frac{\rho}{s} = \frac{r}{h-r}.$$



Tästä ratkaistaan

$$r = \frac{\rho h}{\rho + s} = \frac{h}{1+x},$$

kun merkitään $\frac{s}{\rho} = x$. Nyt $V_1 = \frac{1}{3}\pi h \rho^2$ ja $V_2 = 2r \cdot \pi r^2$, joten

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h\rho^2}{6r^3} = \frac{h\rho^2}{\dfrac{6h^3}{(1+x)^3}} = \frac{\rho^2(1+x)^3}{h^2} = \frac{(1+x)^3}{6(x^2-1)} = \frac{(1+x)^2}{6(x-1)},$$

sillä $h^2 = s^2 - \rho^2 = \rho^2(x^2-1)$. Jos olisi $V_1 = V_2$, olisi siis $1 + 2x + x^2 = 6x - 6$; tällä toisen asteen yhtälöllä ei kuitenkaan ole reaalisia juuria.

b) Suhde $\frac{V_1}{V_2}$ minimoituu silloin, kun $\frac{(1+x)^2}{x-1}$ minimoituu. Koska

$$\frac{(1+x)^2}{x-1} = \frac{(2+(x-1))^2}{x-1} = (x-1) + 4 + \frac{4}{x-1} = \left(\sqrt{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x-1}}\right)^2 + 8,$$

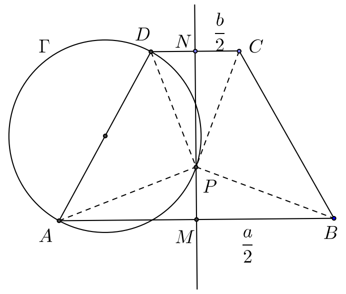
funktion pienin arvo saadaan, kun $x - 1 = 2$ eli $3 = x = \frac{s}{\rho}$. Tämän perusteella voidaan helposti konstruoida kysytty huippukulma.

60.7. *On annettu tasakylkinen puolisuunnikas, jonka kannat ovat a ja b ja korkeus h.*

a) *Konstruoi sellainen puolisuunnikkaan symmetria-akselin piste P, josta molemmat puolisuunnikkaan kyljet näkyvät suorassa kulmassa.*

b) *Määritä tämän pisteen etäisyys jommastakummasta puolisuunnikkaan kannasta.*

c) *Milloin konstruointi on mahdollinen? (Tarkastele mahdollisia tilanteita.)*



Ratkaisu. Pisteet, joista jana näkyy suorassa kulmassa, ovat ympyrällä, jonka halkaisija on kyseinen jana. Olkoon $ABCD$ tasakylkinen puolisuunnikas, $BC = AD$, ja olkoon $AB = a$, $CD = b$. Leikatkoon puolisuunnikkaan symmetria-akseli AB:n pisteessä M ja CD:n pisteessä N. Jos nyt AD-halkaisijaisella ympyrällä Γ ja suoralla MN on yhteinen piste P, se on vaadittu. Kolmiot APD ja BPC ovat symmetrian perusteella yhteneviä ja $\angle APD$ on suora. Siis myös $\angle BPC$ on suora, ja puolisuunnikkaan molemmat kyljet näkyvät P:stä suorassa kulmassa.

b) Olkoon puolisuunnikkaan korkeus $MN = h$ ja $PN = x$. Suorakulmaisissa kolmioissa PMB ja CNP on $\angle MBP = \angle NPC$ (vastinkyljet kohtisuorassa toisiaan vastaan.) Kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk). Siis

$$\frac{PN}{NC} = \frac{BM}{MP} \qquad \text{eli} \qquad \frac{x}{\frac{1}{2}b} = \frac{\frac{1}{2}a}{h-x}.$$

x toteuttaa siis toisen asteen yhtälön

$$x^2 - hx + \frac{1}{4}ab = 0;$$

$$x = \frac{1}{2}\left(h \pm \sqrt{h^2 - ab}\right).$$

c) Pythagoraan lauseesta saadaan

$$AD^2 = h^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2$$

Janan AD keskipisteen etäisyys suorasta MN on $\frac{1}{4}(a+b)$. Γ ja MN leikkaavat, jos ja vain jos

$$\frac{1}{4}(a+b) \le \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2}.$$

Epäyhtälö sieventyy muotoon $h^2 \ge ab$.

61.1. *Ratkaise yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2, \end{cases}$$

kun a ja b ovat eri lukuja. Mikä ehto a:n ja b:n tulee täyttää, jotta x, y ja z olisivat positiivisia ja eri suuria?

Ratkaisu. Kun kolmas yhtälö kahdella kerrottuna lisätään toiseen, saadaan $(x+y)^2 = z^2 + b^2$. Ensimmäisen yhtälön mukaan $(x+y)^2 = (a-z)^2$, joten on oltava $a^2 - 2az = b^2$. Jos $a = 0$, on $b = 0$, ja toisen yhtälön perusteella $x = y = z = 0$ on ryhmän ainoa ratkaisu. Oletetaan siis, että $a \neq 0$. Silloin

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Kun tämä sijoitetaan ensimmäiseen ja kolmanteen yhtälöön, saadaan x:lle ja y:lle välttämätön ehto

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{a^2 + b^2}{2a} \\ \quad xy = \left(\dfrac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2. \end{cases}$$

Kun tämä tavanomainen toisen asteen yhtälöpari ratkaistaan, saadaan

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4a}\left(a^2 + b^2 \pm \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}\right) \\ y = \dfrac{1}{4a}\left(a^2 + b^2 \mp \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}\right), \end{cases}$$

missä ylemmät ja alemmat etumerkit vastaavat toisiaan. Kokeilemalla nähdään heti, että saatu välttämätön ehto on myös riittävä, ts. saadut x, y, z toteuttavat tehtävän yhtälöryhmän.

Ratkaisu on reaalinen, jos $10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 \geq 0$. Tavanomaisella toisen asteen polynomin tarkastelulla nähdään, että ehto toteutuu, jos ja vain jos

$$\frac{1}{3} \leq \frac{b^2}{a^2} \leq 3.$$

Jotta ratkaisut olisivat positiivisia, on välttämättä oltava $a > 0$ ja $a > |b|$. Tällöin myös $(a^2 + b^2)^2 - (10a^2b^2 - 3a^2 - 3b^2) = 4(a^2 - b^2)^2 > 0$, joten ehto on myös riittävä. Ehdon vallitessa on myös $x \neq y$; koska z on x:n ja y:n geometrinen keskiarvo, on vielä $x \neq z \neq y$. Välttämätön ja riittävä ehto sille, että ratkaisut olivat positiivisia ja keskenään eri suuria, on siis $|b| < a < \sqrt{3}|b|$.

61.2. *Kolmion pinta-ala on A ja sen sivujen pituudet ovat a, b ja c. Osoita, että on voimassa epäyhtälö*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4A\sqrt{3}.$$

Millä ehdoilla vallitsee yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Merkitään $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$. Heronin kaavan $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ perusteella

$$\begin{aligned} 16A^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(2ab - (a^2 + b^2 - c^2)) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4). \end{aligned}$$

Aritmeettisen ja neliöllisen keskiarvon epäyhtälön nojalla

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \le \sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}$$

eli

$$a^4+b^4+c^4 \ge \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Siis

$$16A^2 \le (a^2+b^2+c^2) - \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Tämä on yhtäpitävää väitteen kanssa. – Aritmeettisen ja neliöllisen keskiarvon välisen epäyhtälön yhtäsuuruusehto on keskiarvon muodostavien lukujen yhtäsuuruus. Epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus, kun kolmio on tasasivuinen.

61.3. *Ratkaise yhtälö* $\cos^n x - \sin^n x = 1$, *missä* n *on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku.*

Ratkaisu. Jos n on parillinen, niin $\cos^n x \le 1$ ja $\sin^n x \ge 0$, joten yhtälö toteutuu vain, kun $|\cos x| = 1$ ja $\sin x = 0$ eli kun $x = m\pi$, m kokonaisluku. Jos n on pariton ja x yhtälön ratkaisu, niin

$$\cos^n x = 1 + \sin^n x \ge 0 \quad \text{ja} \quad \sin^n x = \cos^n x - 1 \le 0,$$

joten

$$\cos^n x - \sin^n x = |\cos x|^n + |\sin x|^n = 1.$$

Mutta jos $0 < |\cos x| < 1$ ja $0 < |\sin x| < 1$, niin

$$|\cos x|^n + |\sin x|^n < \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

kun $n > 2$ ja

$$|\cos x| + |\sin x| = |\cos x|(1 + |\tan x|) = \frac{1 + |\tan x|}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \sqrt{\frac{1 + 2|\tan x| + \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}} > 1.$$

Ratkaisuja on vain, kun $\cos x = 1$ ja $\sin x = 0$ eli kun $x = 2m\pi$ tai kun $\cos x = 0$ ja $\sin x = -1$ eli $x = -\frac{1}{2}\pi + 2m\pi$. – Saadut välttämättömät ratkaisun ehdot ovat selvästi myös riittäviä.

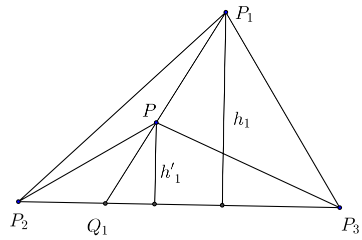
61.4. *On annettu kolmio* $P_1P_2P_3$ *ja sen sisäpiste* P. *Suorat* P_1P, P_2P *ja* P_3P *leikkaavat sivut* P_2P_3, P_3P_1 *ja* P_1P_2 *pisteissä* Q_1, Q_2 *ja* Q_3. *Osoita, että suhteiden*

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2} \text{ ja } \frac{P_3P}{PQ_3}$$

joukossa on ainakin yksi, joka ei ole suurempi kuin 2 ja ainakin yksi, joka ei ole pienempi kuin 2.

Ratkaisu. Olkoon T kolmion $P_1P_2P_3$ ala ja T_1, T_2, T_3 kolmioiden PP_2P_3, PP_3P_1 ja PP_1P_2 alat. Olkoon h_i kolmion $P_1P_2P_3$ P_i:stä piirretty korkeusjana ja h_i' kolmion PP_jP_k, $j \neq i \neq k$, P:stä piirretty korkeusjana. Silloin

$$\frac{h_i'}{h_i} = \frac{PQ_i}{P_iQ_i} = \frac{PQ_i}{PP_i + PQ_i} = \frac{1}{1 + \dfrac{PP_i}{PQ_i}}.$$



Samakantaisten kolmioiden $P_iP_jP_k$ ja PP_jP_k alojen suhde on niiden korkeusjanojen suhde. Näin ollen

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1 + \dfrac{PP_i}{PQ_i}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{h_i'}{h_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{T_i}{T} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T} = 1.$$

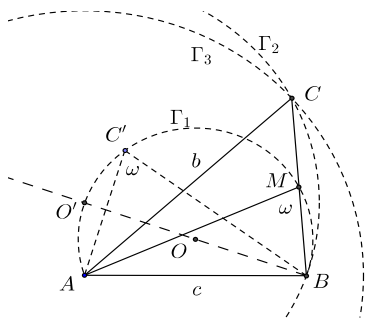
Mutta tämä on mahdollista vain, jos edellisen yhtälöketjun ensimmäisen summan kolmesta yhteenlaskettavasta ainakin yksi on $\geq \dfrac{1}{3}$ ja ainakin yksi on $\leq \dfrac{1}{3}$. Toisin sanoen ainakin yksi luvuista $\dfrac{PP_i}{PQ_i}$ on enintään 2 ja ainakin yksi ainakin 2.

61.5. *On konstruoitava kolmio ABC, kun tunnetaan sivujen AC ja AB pituudet b ja c sekä kulman $\angle AMB$, missä M on sivun BC keskipiste, suuruus ω. Oletetaan, että $\omega < 90°$. Osoita, että tehtävä voidaan ratkaista silloin ja vain silloin, kun*

$$b \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b.$$

Missä tapauksessa edellisessä epäyhtälössä on voimassa yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Aloitetaan konstruktio janasta $AB = c$. Piste M on sillä ympyrällä Γ_1, josta AB näkyy kulmassa ω. Ympyrän Γ_1 voi piirtää esimerkiksi pirtämällä ensin jonkin kolmion ABC', jossa $\angle BC'A = \omega$ ja sitten tälle ympärysympyrän. Olkoon O Γ_1:n keskipiste. Nyt piste C on puolisuoralla BM ja $BC = 2 \cdot BM$. C on siis M:n kuva B-keskisessä homotetiakuvauksessa, jonka suurennussuhde on 2. Tällaisessa kuvauksessa O kuvautuu puolisuoran BO ja ympyrän Γ_1 leikkauspisteeksi O' ja Γ_1 O'-keskiseksi ympyräksi Γ_2; C on tällä ympyrällä. C on myös A-keskisellä b-säteisellä ympyrällä Γ_3, joten C on Γ_2:n ja Γ_3:n leikkauspiste. Kolmio ABC on konstruoitu.



Konstruktio onnistuu vain, jos Γ_2 ja Γ_3 leikkaavat toisensa. Tällöin on oltava $c < b$ ja

$b \leq AO' + O'B$. Suorakulmaisessa kolmiossa $O'AB$ on $\angle BO'A = \omega$, joten on oltava

$$b \leq c\cot\omega + \frac{c}{\sin\omega} = c\frac{\cos\omega + 1}{\sin\omega} = \frac{2c\cos^2\left(\frac{1}{2}\omega\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\omega\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)} = \frac{c}{\tan\left(\frac{1}{2}\omega\right)}.$$

Yhtäsuuruuden ehto on esimerkiksi se, että b on sama kuin kolmion $O'AB$ kateettien summa.

61.6. *On annettu taso ε ja kolme pistettä A, B ja C, jotka ovat samalla puolella tasoa ε, mutta eivät ole samalla suoralla. Pisteiden A, B ja C kautta kulkeva taso ei ole tason ε suuntainen. Olkoot A', B' ja C' tason ε mielivaltaisia pisteitä. Janojen AA', BB' ja CC' keskipisteet ovat L, M ja N, ja kolmion LMN painopiste on G. (Ne pisteet A', B' ja C', joille LMN ei ole aito kolmio, jätetään ottamatta huomioon.) Määritä pisteiden G joukko, kun A', B' ja C' liikkuvat toisistaan riippumatta tasossa ε.*

Ratkaisu. Sijoitetaan origo O tasoon ε. Merkitään pisteen X paikkavektoria $\vec{r}_X$:llä. Pisteiden silloin

$$\vec{r}_L = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_{A'}), \quad \vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_{B'}) \quad \text{ja} \quad \vec{r}_N = \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_{C'}).$$

Kolmion LMN painopisteen G paikkavektori on

$$\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_L + \vec{r}_M + \vec{r}_N) = \frac{1}{6}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_c) + \vec{v},$$

missä

$$\vec{v} = \frac{1}{6}(\vec{r}_{A'} + \vec{r}_{B'} + \vec{r}_{C'})$$

on tason ε suuntainen vektori. Piste G on siis aina tasossa ε_1, joka on tason ε suuntainen ja kulkee sen pisteen G' kautta, jonka paikkavektori on $\vec{r}_{G'} = \frac{1}{6}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$. Koska kolmion ABC painopisteen P paikkavektori on $\vec{r}_P = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$, $\vec{r}_{G'} = \frac{1}{2}\vec{r}_P$.

Osoitetaan vielä, että kaikki tason ε_1 pisteet G ovat jonkin kolmion LMN painopisteitä. Olkoon siis $\vec{r}_G = \vec{r}_{G'} + \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{r}_P + \vec{v}$, missä $\vec{v}$ on jokin tason ε vektori. Olkoon P' se ε:in piste, jolle $\vec{r}_{P'} = 2\vec{v}$. Olkoon vielä $\vec{u} = \overrightarrow{P'P} = -2\vec{v}+\vec{r}_P$. Olkoot sitten A', B', C' ne ε-tason pisteet, joissa pisteiden A, B, C kautta kulkevat PP':n suuntaiset suorat leikkaavat ε:in. Silloin $\vec{r}_A = \vec{r}_{A'} + t_A\vec{u}$, $\vec{r}_B = \vec{r}_{B'} + t_B\vec{u}$, $\vec{r}_C = \vec{r}_{C'} + t_C\vec{u}$ joillain positiivisilla reaaliluvuilla t_A, t_B, t_C. Koska

$$\vec{r}_P = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) = \frac{t_A + t_B + t_C}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{r}_{A'} + \vec{r}_{B'} + \vec{r}_{C'})$$

ja summan jälkimmäinen vektori on tason ε suuntainen, on oltava $t_A + t_B + t_C = 3$ ja

$$\frac{1}{3}(\vec{r}_{A'} + \vec{r}_{B'} + \vec{r}_{C'}) = 2\vec{v}.$$

Kolmion LMN painopiste on G'', missä

$$\vec{r}_{G''} = \frac{1}{3}(\vec{r}_{A'} + \frac{1}{2}t_A\vec{u} + \vec{r}_{B'} + \frac{1}{2}t_B\vec{u} + \vec{r}_{C'} + \frac{1}{2}t_C\vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{r}_{A'} + \vec{r}_{B'} + \vec{r}_{C'})$$
$$= -\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r}_P + \vec{r}_{A'} + \vec{r}_{B'} + \vec{r}_{C'}) = \frac{1}{2}\vec{r}_p + v = \vec{r}_G.$$

Tason ε_1 mielivaltainen piste on siis erään kolmion LMN painopiste.

62.1. *Määritä pienin luonnollinen luku n, jolla on seuraavat ominaisuudet:*
a) Sen kymmenjärjestelmäesityksen viimeinen numero on 6.
b) Kun tämä viimeinen numero 6 pyyhitään pois ja kirjoitetaan muiden muuttumattomina säilyneiden numeroiden eteen, saadaan luku $4n$.

Ratkaisu. Olkoon $n = 10x+6$, missä x on jokin k-numeroinen luku. Silloin $6\cdot 10^{k+1}+x = 4n = 40x + 24$ eli

$$10^{k+1} - 4 = \frac{13}{2}x.$$

Luvun $10^{k+1} - 4 = 99\ldots 96$ on oltava jaollinen 13:lla. Etsitään pienin 10:n potenssi, joka on $\equiv 4 \bmod 13$. Kun lasketaan modulo 13, niin $10 \equiv -3$, $10^2 \equiv 9 \equiv -4$, $10^3 \equiv 12 \equiv -1$, $10^4 \equiv (-3)\cdot(-1) = 3$ ja $10^5 \equiv -9 \equiv 4$. Etsitty luku on siis $n = 153846$.

62.2. *Määritä kaikki reaaliluvut x, jotka toteuttavat epäyhtälön*

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu. Jotta juurilausekkeet olisivat reaalisia, on oltava $3 - x \geq 0$ ja $x + 1 \geq 0$ eli $-1 \leq x \leq 3$. Epäyhtälön vasen puoli on positiivinen vain, jos $3-x > x+1$ eli $x < 1$. Kun $-1 \leq x < 1$, tehtävän epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\left(\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}\right)^2 > \frac{1}{4}$$

eli

$$\frac{15}{4} > 2\sqrt{(3-x)(x+1)}$$

kanssa. Koska tämän epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, saadaan yhtäpitävä epäyhtälö korottamalla edellinen epäyhtälö puolittain toiseen potenssiin. Sievennyksen jälkeen tämä epäyhtälö on

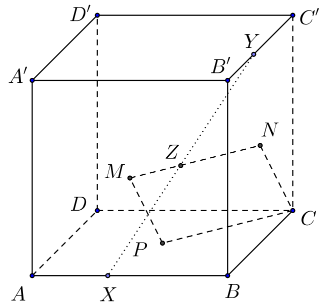
$$x^2 - 2x + \frac{33}{64} > 0.$$

Tämän tavanomaisen toisen asteen epäyhtälön ratkaisuja ovat ne x, joille

$$x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \quad \text{tai} \quad x > 1 + \frac{1}{8}\sqrt{31}.$$

Alkuperäisen epäyhtälön toteuttavat kaikki ne reaaliluvut x, joille on voimassa $-1 \leq x < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31}$.

62.3. *On annettu kuutio $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ ja $A'B'C'D'$ ovat vastakkaisia sivutahkoja ja AA', BB', CC' sekä DD' yhdensuuntaisia särmiä). Piste X liikkuu tasaisella nopeudella pitkin neliön $ABCD$ piiriä kirjainten osoittamassa järjestyksessä ja piste Y liikkuu samalla nopeudella pitkin neliön $B'C'CB$ piiriä. Kumpikin piste lähtee liikkeelle samalla hetkellä alkupisteistä A ja B'. Määritä janan XY keskipisteen ura.*



Ratkaisu. Valitaan ajan ja pituuden yksiköt niin, että kuution särmän pituus on 1 ja pisteen nopeus on 1. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{k}$. Jos $\overrightarrow{AX} = \vec{u}$ ja $\overrightarrow{AY} = \vec{v}$ ja janan XY keskipiste on Z sekä $\overrightarrow{AZ} = \vec{w}$, niin tehtävässä kuvailtu pisteiden liike on seuraava:

	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{w}$
$0 \le t \le 1$	$t\vec{i}$	$\vec{i} + \vec{k} + t\vec{j}$	$\frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{t}{2}(\vec{i} + \vec{j})$
$1 \le t \le 2$	$\vec{i} + (t-1)\vec{j}$	$\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \vec{k} - (t-1)\vec{k}$	$\vec{i} + \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k}) + \frac{t-1}{2}(\vec{j} - \overrightarrow{k})$
$2 \le t \le 3$	$\vec{i} + \vec{j} - (t-2)\vec{j}$	$\vec{i} + \vec{j} - (t-2)\vec{j}$	$\vec{i} + \vec{j} - \frac{t-2}{2}(\vec{i} + \vec{j})$
$3 \le t \le 4$	$\vec{j} - (t-3)\vec{j}$	$\vec{i} + (t-3)\vec{k}$	$\frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) - \frac{t-3}{2}(\vec{j} - \vec{k})$

Piste Z kiertää siis murtoviivan, jonka kärkipisteisiin A:sta piirretyt vektorit ovat $\frac{1}{2}(\vec{i}+\vec{k})$, $\vec{i} + \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{i} + \vec{j}$ ja $\frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j})$. Pisteet ovat M, N, C ja P, missä M on neliön $ABB'A'$, N neliön $B'BCC'$ ja P neliön $ABCD$ keskipiste.

62.4. *Ratkaise täydellisesti yhtälö*

$$\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1.$$

Ratkaisu. Koska $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x \sin^2 x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, ratkaistava yhtälö on sama kuin

$$\cos^2 x + 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 + 16\cos^6 x - 24\cos^4 x + 9\cos^2 x = 1$$

eli

$$16\cos^6 x - 20\cos^4 x + 6\cos^2 x = 0.$$

Yhtälö pätee, jos $\cos^2 x = 0$ eli jos $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, k kokonaisluku, tai jos

$$8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0.$$

Tuntemattoman $\cos^2 x$ toisen asteen yhtälöstä ratkaistaan

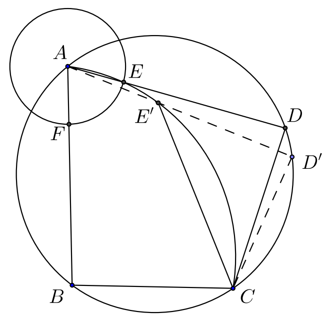
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}.$$

Yhtälön ratkaisuja ovat siis myös

$$x = \frac{1}{4}\pi + \frac{k}{2}\pi, \quad \text{ja} \quad x = \pm\frac{1}{6}\pi + k\pi,$$

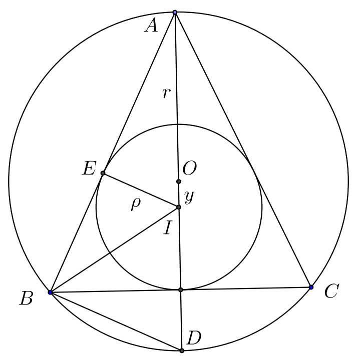
k kokonaisluku.

62.5. *Ympyrän kehällä K on annettu kolme pistettä A, B ja C. Konstruoi sellainen kehän K piste D, että $ABCD$ on tangenttinelikulmio.*



Ratkaisu. Nelikulmio $ABCD$ on tangenttinelikulmio, jos ja vain jos $AB + CD = BC + AD$. Jos $AB = BC$, piste D on kolmion ABC ympärysympyrän kaarista $\overset{\frown}{AC}$ se, jolla B ei ole, keskipiste. Voidaan olettaa, että $AB > BC$. Pisteen D tulee toteuttaa ehto $AD - CD = AB - BC$. Jos konstruktio on suoritettu ja E on se AD:n piste, jolle $ED = DB$, niin kolmio CDE on tasakylkinen ja $AE = AB - BC$. Kolmion CDE kantakulma $\angle DEC$ määräytyy yksikäsitteisesti kulmasta $\angle CDA$ ja viimemainittu kulma taas – koska $ABCD$ on jännenelikulmio – kulmasta $\angle ABC$. Konstruktio voidaan nyt tehdä seuraavasti. Valitaan jokin kolmion ABC ympärysympyrän kaaren $\overset{\frown}{AC}$ piste D'. Olkoon E' se janan AD' piste, jolle $D'E' = D'C$. Silloin $CD'E'$ on tasakylkinen ja $\angle AE'C = \angle AEC$. Piirretään kolmion ACE' ympärysympyrä. Nyt E on se tämän ympyrän kaaren $\overset{\frown}{AE'C}$ piste, jolle $AE = AB - BC$. Jos F on se janan AB piste, jolle $BF = BC$, niin E on A-keskisellä F:n kautta kulkevalla ympyrällä. Kun E on löydetty, D saadaan puolisuoran AE ja kolmion ABC ympärysympyrän leikkauspisteenä.

62.6. *Tasakylkisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on r ja sisään piirretyn ympyrän säde on ρ. Todista, että ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys on $\sqrt{r(r-2\rho)}$.*



Ratkaisu. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, $AB = AC$. Olkoon ABC:n sisäympyrän keskipiste I ja ympärysympyrän O. Ympärysympyrän A:sta piirretyn halkaisijan toinen päätepiste on D. Silloin $AI = r \pm y$ ja $ID = r \mp y$, missä ylemmät ja alemmat etumerkit liittyvät toisiinsa. Joka tapauksessa siis $AI \cdot ID = r^r - y^2$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle BDA = \angle BCA$ ja kolmion ABI kulman vieruskulmana $\angle BID = \angle ABI + \angle IAB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle CAB)$ (AI ja BI ovat kolmion kulmanpuolittajia). Kolmion kulmasummalauseen perusteella on oltava $\angle IBD =$

$\frac{1}{2}(\angle ABC + \angle CAB)$. Kolmio BDI on siis tasakylkinen, $ID = BD$. Suorakulmaisesta kolmiosta ABD saadaan $BD = 2r\sin(\angle BAD)$ ja jos E on I:n kohtisuora projektio sivulle AB, niin suorakulmaisesta kolmiosta AEI vastaavasti

$$\rho = \frac{AI}{\sin(\angle BAD)}.$$

Siis $AI\cdot ID = AI\cdot BD = 2\rho r$, ja väite seuraa. [Tehtävä on erikoistapaus tunnetusta Eulerin lauseesta, jonka mukaan tehtävän tulos pätee mille tahansa kolmiolle. Sama todistus toimii yleisessä tapauksessa pienin muutoksin.]

62.7. *On annettu tetraedri $SABC$, jolla on seuraava ominaisuus: on olemassa viisi palloa, joista jokainen sivuaa särmiä SA, SB, SC, AB, BC ja CA tai niiden jatkeita.*

a) Todista, että tetraedri on säännöllinen

b) Todista, että jokaista säännöllistä tetraedria kohden on olemassa viisi kuvatun kaltaista palloa.

Ratkaisu. a) Koska on enintään yksi pallo, joka sivuaa tetradrin kolmen särmän jatkeita ja kolmea muuta särmää, yksi viidestä pallosta, sanokaamme $\mathcal{P}_0$, sivuaa jokaista tetraedrin kuutta särmää. Olkoon $\mathcal{P}_S$ se palloista, joka sivuaa särmien SA, SB ja SC jatkeita. Pallon $\mathcal{P}_0$ ja tetraedrin sivutahkojen leikkaukset ovat sivutahkokolmioiden sisäympyröitä. Pallon $\mathcal{P}_S$ ja tason ABC leikkaus on kolmion ABC sisäympyrä ja saman pallon ja tason SAB leikkaus on kolmion SAB sivua AB ja sivujen SA ja SB jatkeita sivuava sivuympyrä. Nyt kolmioiden ABC ja SAB sisäympyrät sivuavat sivua AB samassa pisteessä (joka on $\mathcal{P}_0$:n ja AB:n sivuamispiste ja kolmion SAB mainittu sivuympyrä ja kolmion ABC sisäympyrä sivuavat toisiaan samassa pisteessä (joka on $\mathcal{P}_S$:n ja AB:n sivuamispiste. Tästä seuraa, että kolmion SAB sisäympyrä ja kärkeen S liittyvä sivuympyrä sivuavat AB:tä samassa pisteessä P. Olkoon $SA = b$, $SB = a$, $AB = s$ ja $2p = a + b + s$. Tunnetusti (ja niin kuin on helppo laskea) $BP = p - a$, jos P:tä pidetään sisäympyrän sivuamispisteenä ja $BP = p - b$, jos P:tä pidetään sivuympyrän sivuamispisteenä. Siis $b = a$, eli kolmio SAB on tasakylkinen. Sama tarkastelu voidaan tehdä minkä tahansa kahden tetraedrin samasta kärjestä lähtevän särmän suhteen, joten kaikki särmät ovat yhtä pitkiä ja tetraedri on säännöllinen.

b) Säännöllisen tetraedrin painopiste G on yhtä etäällä tetraedrin kärjistä, ja on helppo nähdä, että se on myös yhtä etäällä tetraedrin särmistä; painopisteen kohtisuorat projektiot särmillä ovat särmien keskipisteitä. Pallo $\mathcal{P}_0$, jonka keskipiste on G ja joka sisältää särmien keskipisteet, on pallo, joka sivuaa kaikkia tetraedrin kuutta särmää. Homotetia, jonka keskus on tasasivuisen kolmion kärki ja suurennuskerroin 3, kuvaa kolmion sisäympyrän sivuympyräksi. Täten homotetia, jonka keskus on mikä hyvänsä säännöllisen tetraedrin neljästä kärjestä ja suurennuskerroin 3, kuvaa $\mathcal{P}_0$:n palloksi, joka sivuaa tetraedrin kolmea särmää ja kolmen muun jatkeita. Vaadittuja palloja on siis viisi.

63.1. *Määritä kaikki reaaliluvut x, jotka toteuttavat yhtälön*

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

missä p on reaalinen parametri.

Ratkaisu. Oletetaan, että x on yhtälön ratkaisu. Silloin $|x| \geq 1$ ja

$$x^2 + p + 4(x^2 - 1) + 2\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = x^2$$

ja

$$16(x^2 - p)(x^2 - 1) = \left(4(x^2 - 1) - p\right)^2.$$

Viimeinen yhtälö sievenee edelleen muotoon

$$8(2 - p)x^2 = (p - 4)^2.$$

Siis $p < 2$ ja

$$x = \pm\frac{4 - p}{\sqrt{8(2 - p)}}.$$

Koska alkuperäisen yhtälön vasen puoli on ei-negatiivinen, vain $+$-merkki on mahdollinen. On vielä tarkastettava, onko saatu välttämätön ehto riittävä. Kun $x = \dfrac{4 - p}{\sqrt{8(2 - p)}}$, on

$$x^2 - p = \frac{(4 - p)^2 - 16p + 8p^2}{8(2 - p)} = \frac{(3p - 4)^2}{8(2 - p)} \quad \text{ja} \quad x^2 - 1 = \frac{(4 - p)^2 - 16 + 8p}{8(2 - p)} = \frac{p^2}{8(2 - p)}.$$

Tehtävän yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$|3p - 4| + 2|p| = 4 - p$$

kanssa. Kun $p < 0$, yhtälö on $-5p + 4 = 4 - p$ ja siis epätosi. Kun $0 \leq p \leq \dfrac{4}{3}$, yhtälö on $-3p + 4 + 2p = 4 - p$ ja siis tosi. Kun $\dfrac{4}{3} < p < 2$, yhtälö on $3p - 4 + 2p = 4 - p$ eli $3p = 4$ ja siis epätosi. Yhtälöllä on siis ratkaisu vain, kun $0 \leq p \leq \dfrac{4}{3}$, ja ratkaisu on $x = \dfrac{4 - p}{\sqrt{8(2 - p)}}$.

63.2. *Määritä niiden avaruuden pisteiden joukko, jotka ovat sellaisen suoran kulman kärkiä, jonka toinen kylki kulkee annetun pisteen A kautta ja jonka toisella kyljellä on ainakin yksi yhteinen piste annetun janan BC kanssa.*

Ratkaisu. Olkoot $\mathcal{P}_1$ ja $\mathcal{P}_2$ pallot, joiden halkaisijat ovat AB ja AC. Väitetään, etä kysytty joukko on näiden palojen yhdiste, josta on poistettu ne pisteet, jotka ovat molempien pallojen sisäpisteitä. Olkoon ℓ mielivaltainen pisteen A kautta kulkeva suora. Suoralla ℓ on kaksi (erikoistapauksessa yksi) normaalitasoa, joista toinen sisältää B:n ja toinen C:n. Olkoon B_1C_1 näiden tasojen väliin jäävä ℓ:n osajana. Jos X on janan B_1C_1 piste, niin X:n kautta kulkeva ℓ:n normaalitaso leikkaa janan BC pistessä X_1. Kulma $\angle AXX_1$ on suora kulma. Jos X on sellainen ℓ:n piste, että X ei ole janalla B_1C_1, niin X:n kautta asetettu ℓ:n normaalitaso ei leikkaa janaa BC. Suoralla ℓ olevat tehtävän ehdon täytävät pisteet ovat janan B_1C_1 pisteet. Thaleen lauseen perusteella B_1 on pallon $\mathcal{P}_1$ ja C_1 pallon $\mathcal{P}_2$ pinnalla. Oletetaan, että A ei ole janalla B_1C_1; voidaan olettaa, että C_1 on B_1:n ja A:n välissä. Silloin jana B_1A kuuluu palloon $\mathcal{P}_1$, muttei palloon $\mathcal{P}_2$ ja jana C_1A sekä palloon $\mathcal{P}_1$ että palloon $\mathcal{P}_2$. Jos taas B_1 on C_1:n ja A:n välissä, jaja B_1C_1 kuuluu palloon $\mathcal{P}_2$ ja vain siihen. Jos A on B_1:n ja C_1:n välissä, nin jana B_1A kuuluu vain palloon $\mathcal{P}_1$ ja jana AC_1 vain palloon $\mathcal{P}_2$. Kaikki tehtävän ehdon toteuttavat pisteet kuuluvat siis toiseen vain toiseen palloista $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$.

Olkoon sitten Y mielivaltainen piste, joka kuuluu tasan toiseen näistä palloista, sanokaamme palloon $\mathcal{P}_1$. Suora $AY = \ell$ leikkaa pallon $\mathcal{P}_1$ (myös) pisteessä B_1 ja pallon $\mathcal{P}_2$ (myös) pisteessä C_1, ja $\angle AB_1B$ sekä $\angle AC_1C$ ovat suoria kulmia. Oletuksesta seuraa, että Y on janalla B_1C_1. Y:n kautta asetettu suoran ℓ normaalitaso on silloin B_1:n ja C_1 kautta asetettujen ℓ:n normaalitasojen välissä, ja leikkaa janan BC jossain pisteessä Y_1. Silloin $\angle AYY_1$ on suora kulma, joten Y kuuluu tehtävässä määriteltyyn joukkoon.

63.3. *Olkoot a_1, a_2, ..., a_n peräkkäiset sivut sellaisessa n-kulmiossa, jonka sisäkulmat ovat yhtä suuret. Oletetaan, että $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$. Todista, että $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Ratkaisu. Oletetaan, että sivujen numerointi on tehty niin, että indeksi kasvaa positiiviseen kiertosuuntaan. Jos n-kulmio asetetaan xy-tasoon niin, että sivu, jonka pituus on a_1, on x-akselilla, niin sivu, jonka pituus on a_k on suoralla, joka on saatu kiertamällä x-akselia positiiviseen kiertosuuntaan kulman $\dfrac{k-1}{n}\cdot 2\pi$ verran. Sivun päätepisteiden y-koordinaattien erotus on $a_k \sin\left(\dfrac{k-1}{n}\cdot 2\pi\right)$. Koska monikulmio on umpinainen, y-koordinaattien erotusten summa on 0.

Oletetaan ensin, että n on parillinen, $n = 2m$. Silloin

$$\sin\left(\frac{k+m}{n}\cdot 2\pi\right) = \sin\left(\frac{k}{n}\cdot 2\pi + \pi\right) = -\sin\left(\frac{k}{n}\cdot 2\pi\right),$$

joten

$$0 = \sum_{k=1}^{2m} a_k \sin\left(\frac{k-1}{n}\cdot 2\pi\right) = \sum_{k=1}^{m}(a_k - a_{k+m})\sin\left(\frac{k-1}{n}\cdot 2\pi\right).$$

Yhtälön oikean puolen summan kaikki yhteenlaskettavat ovat ei-negatiivisia, joten ne ovat nollia. Siis $a_2 = a_{2+m}$ ja $a_m = a_{2m}$. Tämä on mahdollista vain, jos $a_2 = a_3 = \cdots = a_{2m}$.

63.4. *Etsi kaikki luvut x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, jotka toteuttavat yhtälöt*

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5, \end{cases}$$

missä y on parametri.

Ratkaisu. Kun ryhmän yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, nähdään, että ratkaisun on toteutettava yhtälö

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = y(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

Yhtälö toteutuu, jos $y = 2$ tai $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0$. Oletetaan, että $y = 2$. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että luvuista x_i pienin on x_1. Silloin $x_3 = x_2 + (x_2 - x_1) \geq x_2$,

$x_4 = x_3 + (x_3 - x_2) \geq x_3$, $x_5 = x_4 + (x_4 - x_3) \geq x_4$ ja $x_1 = x_5 + (x_5 - x_4) \geq x_5$. On siis oltava $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. On selvää, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ viisikko (x, x, x, x, x) on yhtälöryhmän ratkaisu. Olkoon sitten $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$. Silloin $-x_1 = x_2+x_3+x_4+x_5 = y(x_3+x_5)$ ja toisaalta $-x_1 = x_3-yx_2$. Siis $(1-y)x_3 = y(x_2+x_4) = y^2x_3$. Samoin nähdään, että jokainen x_i toteuttaa yhtälön $(1-y)x = y^2x$. Jos $1 - y \neq y^2$ eli $y \neq -\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$, niin $(0, 0, 0, 0, 0)$ on ryhmän ainoa ratkaisu. Oletetaan sitten, että $1-y = y^2$. Jos x_3 ja x_5 valitaan mielivaltaisesti, niin x_1, x_2 ja x_4 määräytyvät yksikäsitteisesti yhtälöistä $x_1 = -y(x_3 + x_4)$, $x_2 = yx_3 - x_4$ ja $x_5 = -x_3 + yx_4$. On vielä tarkistettava, että viisikko $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ toteuttaa tehtävän yhtälöryhmän ensimmäisen, toisen ja viidennen yhtälön. Todellakin: $x_5 + x_2 = (-1 + y)(x_3 + x_4) = -y^2(x_3 + x_4) = yx_1$, $x_1+x_3 = (1-y)x_3-yx_4 = y^2x_3-yx_4 = y(yx_3-x_4) = yx_2$ ja $x_4+x_1 = (1-y)x_4-yx_3 = y^2x_4 - yx_3 = y(-x_3 + yx_4) = yx_5$.

63.5. *Todista, että*

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu. Koska $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, niin

$$2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)$$
$$= \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{14}.$$

Väite seuraa.

63.6. *Oppilaat A, B, C, D ja E ottivat osaa kilpailuun. Eräs katsoja veikkasi, että he sijoittuisivat järjestyksessä A, B, C, D, E. Hän ei kuitenkaan arvannut oikein yhdenkään kilpailijan sijoitusta eikä myöskään yhtään peräkkäistä paria. Toinen katsoja veikkasi järjestykseksi D, A, E, C, B. Tämä oli parempi arvaus, sillä siinä oli kahden kilpailijan sijoitus arvattu oikein ja samoin kaksi peräkkäistä paria oli oikein. Mikä oli oikea järjestys?*

Ratkaisu. Jonossa D, A, E, C, B on kolmen kirjaimen paikkaa muutettava oikean järjestyksen saamiseksi. Jonossa olevat peräkkäiset parit ovat (D, A), (A, E), (E, C) ja (C, B). Jos näistä kaksi peräkkäistä ovat oikeassa järjestyksessä ja oikeilla paikoillaan, niin oikeaan järjestykseen pääsemiseksi tarvittaisiin enintään kahden kirjaimen vaihto, jos taas kaksi peräkkäistä olisivat oikeassa järjestyksessä, mutteivät oikeilla paikoilla, pitäisi ainakin neljän kirjaimen paikkaa muuttaa. Oikeassa järjestyksessä olevat parit ovat siis joko (1) (D, A) ja (E, C) tai (2) (D, A) ja (C, B) tai (3) (A, E) ja $/C, B)$. Tarkastellaan tapaukset. (1) Ainoa mahdollinen kolmen kirjaimen siirto antaa järjestyksen D, A, B, E, C. Peräkkäinen pari (A, B) ei kuitenkaan ole sallittu. (2) Koska E ei saa olla viimeinen, E, D, A, C, B on ainoa mahdollinen järjestys se toteuttaa tehtävän ehdon. (3) Ainoa mahdollinen järjestys on on A, E, D, C, B. A ei kuitenkaan saa olla ensimmäinen kirjain.

64.1. *a) Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille luku $2^n - 1$ on jaollinen seitsemällä.*

b) Todista, että luku $2^n + 1$ ei millään positiivisella kokonaisluvulla n ole jaollinen seitsemällä.

Ratkaisu. Koska $2^3 = 8 \equiv 1 \bmod 7$, niin kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k ja kaikilla $m = 0, 1, 2$ on $2^{3k+m} \equiv 2^m \bmod 7$. Siis $2^n - 1$ on jaollinen 7:llä aina ja vain, kun n on jaollinen kolmella, mutta $2^n + 1 \bmod 7$ on joko 2, 3 tai 5, joten $2^n + 1$ ei milloinkaan ole jaollinen 7:llä.

64.2. *Olkoot a, b ja c kolmion sivujen pituudet. Osoita, että*

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Ratkaisu. Epäyhtälön molemmat puolet ovat invariantteja muuttujien kiertovaihtelun suhteen. Voidaan siis olettaa, että a on muuttujista pienin ja $b = a + x$, $c = a + y$, missä x ja y ovat positiivisia lukuja. Nyt

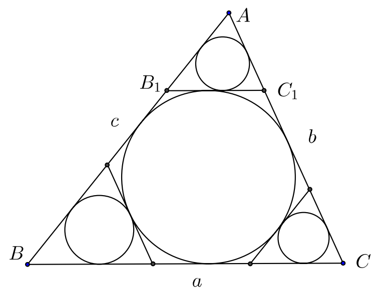
$$\begin{gathered} 3abc - a^2(b+c-a) - b^2(a+c-b) - c^2(a+b-c) \\ = 3a(a+x)(a+y) - a^2(a+x+y) - (a+x)^2(a-x+y) - (a+y)^2(a+x-y) \\ = a(a^2+ax+ay+xy-a^2-ax-ay) + (a+x)(a^2+ay-a^2+ax-ay-ax+x^2-xy) + \\ +(a+y)(a^2+ax-a^2-ax+ay-ay-xy+y^2) = axy + (a+x)(x^2-xy) + \\ +(a+y)(y^2-xy) = a(x^2-xy+y^2) + x^3 - x^2y + y^3 - xy^2 \geq (x^2-y^2)(x-y) \geq 0, \end{gathered}$$

koska $x^2 - xy + y^2 \geq (x-y)^2 \geq 0$ ja $(x^2-y^2)(x-y) \geq 0$ kahden samanmerkkisen luvun tulona. [Oletusta siitä, että a, b, c ovat kolmion sivujen pituudet ei tarvittu muuhun kuin siihen, että $a > 0$.]

64.3. *Kolmion ABC sivujen pituudet ovat a, b ja c. Tarkastellaan kolmion sisään piirrettyä ympyrää ja sen niitä tangentteja, jotka ovat kolmion sivujen suuntaisia. Tangentit erottavat kolmiosta ABC kolme uutta kolmiota. Piirretään jokaiseen näistä jälleen sisään piirtretty ympyrä. Laske kaikkien neljän ympyrän pinta-alojen summa.*

Ratkaisu. Olkoon tavan mukaan $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ja olkoon kolmion ABC sisäympyrän ala S. Jos r on kolmion ABC sisäympyrän säde, niin kolmion ABC ala on tunnetusti $T = rp$. Heronin kaavan perusteella $T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, joten

$$S = \pi r^2 = \pi \frac{T^2}{p^2} = \pi \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}.$$



Jos sisäympyrän sivun BC suuntainen tangentti leikkaa AB:n ja AC:n pisteissä B_1 ja C_1, niin kolmiot AB_1C_1 ja ABC ovat yhdenmuotoiset. Jos yhdenmuotoisuussuhde on k, niin kolmion AB_1C_1 sisäympyrän ala on k^2S. Mutta BCC_1B_1 on tangenttinelikulmio, joten $BC + C_1B_1 = CC_1 + B_1B$ eli $a + ka = (1-k)(b+c)$. Tästä ratkaistaan

$$k = \frac{b+c-a}{a+b+c} = \frac{p-a}{p}.$$

Kun sama tarkastelu tehdään kolmion kahdessa muussa kärjessä, saadaan kysytyn neljän ympyrän alojen summaksi

$$\left(1+\frac{(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2}{p^2}\right)S = \frac{4p^2-2p(a+b+c)+a^2+b^2+c^2}{p^2}S$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{p^2}S = \pi(a^2+b^2+c^2)\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}.$$

64.4. *Jokainen 17 tiedemiehestä on kirjeenvaihdossa jokaisen muun kanssa. Kirjeenvaihdossa käsitellään vain kolmea aihetta ja jokaiset kaksi tiedemiestä käsittelevät keskinäisessä kirjeenvaihdossaan vain yhtä aihetta. Osoita, että tiedemiesten keskuudessa on kolme, jotka käsittelevät keskinäisessä kirjeenvaihdossaan vain yhtä aihetta.*

Ratkaisu. Olkoot tiedemiesten käsittelemät aiheet a, b ja c. Olkoon A yksi tiedemiehistä. Laatikkoperiaatteesta seuraa, että muissa tiedemiehissä on ainakin kuusi, jotka käsittelevät A:n kanssa samaa aihetta, esimerkiksi aihetta a. Jos jotkin kaksi näistä, sanokaamme B ja C, käsittelevät keskinäisessä kirjeenvaihdossaan myös aihetta a, A, B, C on tehtävässä väitetty kolmikko. Ellei tällaista paria B, C ole, kaikki kuusi käsittelevät keskinäisessä kirjeenvaihdossaan aihetta b tai aihetta c. Olkoon B yksi näistä kuudesta. Laatikkoperiaatteen nojalla muissa viidessä on ainakin kolme, jotka käsittelevät B:n kanssa samaa aihetta, esimerkiksi aihetta b. Jos näiden kolmen joukossa on kaksi, esimerkiksi C ja D, jotka myös käsittelevät aihetta b, niin B, C, D on haluttu kolmikko. Ellei tällaista paria ole, kaikki kolme käsittelevät keskinäisessä kirjeenvaihdossaan aihetta c ja muodostavat siis halutun kolmikon.

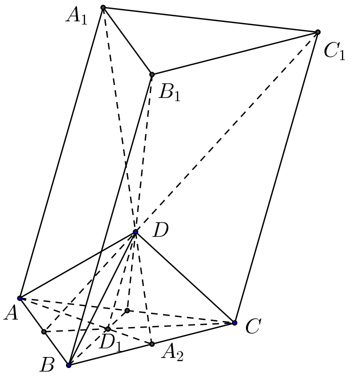
64.5. *On annettu viisi tason pistettä: Pisteitä yhdistävien suorien joukossa ei ole yhdensuuntaisia, kohtisuoria eikä yhtyviä. Piirretään jokaisesta pisteestä kohtisuorat niitä suoria vastaan, jotka yhdistävät pareittain neljää muuta pistettä. Kuinka monta leikkauspistettä näillä suorilla voi enintään olla (lukuun ottamatta annettuja viittä pistettä)?*

Ratkaisu. Olkoot annetut pisteet A, B, C, D, E. Tapoja yhdistää neljä pistettä suorilla on $\binom{4}{2} = 6$. Jos jokainen A:n kautta piirretty kohtisuora leikkaisi jokaisen B:n kautta piirretyn kohtisuoran, leikkauspisteitä olisi $6^2 = 36$ kappaletta. Kuitenkin A:sta ja B:stä suorille CD, DE ja CE piirretyt kohtisuorat ovat pareittain yhdensuuntaisia, joten A:sta ja B:stä piirretyillä kohtisuorilla voi olla enintään 33 leikkauspistettä. Viidestä pisteestä voidaan muodostaa $\binom{5}{2} = 10$ paria, joten leikkauspisteitä voi olla enintään 330 kappaletta. Mutta koska pisteestä P suoralle QR piirretty kohtisuora on kolmion PQR korkeussuora ja kolmion korkeussuorat leikkaavat samassa pisteessä, jokaista pisteistä muodostettua kolmiota kohden on poistettava kaksi leikkauspistettä. Kolmioita on $\binom{5}{3} = 10$ kappaletta; leikkauspisteitä voi siis olla enintään $330 - 20 = 310$.

On vielä osoitettava, että jollakin pisteviisikolla todella saadaan 310 leikkauspistettä. Tähän riittää se, että mitkään sellaiset kolme suoraa, jotka eivät ole jonkin pisteistä A, B, C, D, E muodostuvan kolmion korkeussuoria, eivät leikkaa toisiaan samassa pisteessä. Oletetaan, että jotkin suoria AB, BC ja AC vastaan kolmesta pisteestä piirretyt kohtisuorat leikkaavat samassa pisteessä ja että ainakin yksi niistä pisteistä, joista kohtisuorat piirretään, ei ole kolmion ABC kärki; olkoon tämä piste esimerkiksi D ja olkoon D:stä piirretty AC:tä vastaan kohtisuora suora yksi niistä kolmesta suorasta, jotka leikkaavat samassa pisteessä. Jos D:n kautta piirretyltä AC:n suuntaiselta suoralta valitaan piste $D' \neq D$, niin D':sta AC:lle piirretty kohtisuora leikkaa kaksi muuta kohtisuoraa kahdessa eri pisteessä. Koska kohtisuorien leikkauspisteet ovat pisteiden A, B, C, D, E koordinaattien jatkuvia funktioita, niin valitsemalla D' kyllin läheltä D:tä voidaan taata, että mitkään muut kohtisuorien leikkauspisteet eivät yhdy, kun D korvataan D':lla. Prosessia jatkamalla voidaan vapautua mahdollisista kolmen kohtisuoran yhteisistä pisteistä ja päästä tilanteeseen, jossa leikkauspisteitä on tasan 310. [Matematiikkaolympialaisten tuomaristo oli hyväksynyt nekin vastaukset, joissa tätä 310 leikkauspisteen olemassa olon tarkastelua ei tehty.]

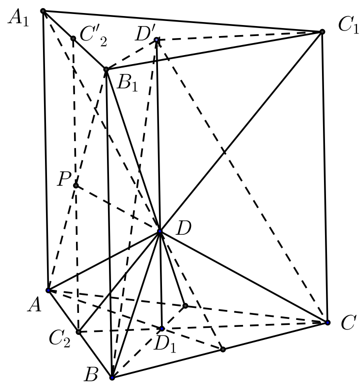
64.6. *a) On annettu tetraedri $ABCD$. Yhdistetään kärki D sivutahkon ABC painopisteeseen D_1. Kärkien A, B ja C kautta kulkevat DD_1:n suuntaiset suorat leikkaavat mainittuja kärkiä vastassa olevien sivutahkojen tasot pisteissä A_1, B_1 ja C_1. Todista, että tetraedrin $ABCD$ tilavuus on kolmannes tetraedrin $A_1B_1C_1D_1$ tilavuudesta.*

b) Päteekö väite silloinkin, kun D_1 on sivutahkon ABC mielivaltainen piste?



Ratkaisu. a) Olkoot AA_2, BB_2 ja CC_2 kolmion ABC keskijanat. Pisteet D ja A_2 ovat tasossa ADD_1 ja tasossa BCD, joten näiden tasojen yhteinen suora on DA_2. Koska A_1 on myös molemmissa tasoissa, A_1 on suoralla DA_2. Tason ADD_1 kolmiot DD_1A_2 ja A_1AA_2 ovat yhdenmuotoiset. Koska $AA_2 = 3 \cdot D_1A_2$, on $AA_1 = 3 \cdot DD_1$. Samoin osoitetaan, että $BB_1 = CC_1 = 3 \cdot DD_1$. Nelikulmiot ABB_1A_1, BCC_1B_1 ja CAA_1C_1 ovat siis suunnikkaita. Siis $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$ ja $C_1A_1 = CA$. Kolmiot ABC ja $A_1B_1C_1$ ovat yhteneviä ja tasot ABC ja $A_1B_1C_1$ yhdensuuntaisia. Koska D jakaa tasot yhdistävän janan A_1A_2 suhteessa $2:1$, se jakaa myös D:n kautta kulkevan molempia tasoja vastaan kohtisuoran janan samassa suhteessa. Tetraedreilla $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ on siis yhtenevät pohjat, mutta jälkimmäisen korkeus on kolme kertaa edellisen korkeus. Väite seuraa.

b) Väite on tosi myös, kun D_1 on mielivaltainen kolmion ABC piste. Olkoon D_1' suoran DD_1 ja tason $A_1B_1C_1$ leikkauspiste. Osoitetaan, että tetraedreilla $A_1B_1C_1D_1$ ja $ABCD_1'$ on sama tilavuus. Tätä varten tarkastellaan ensin tetraedreja $BCD_1'D_1$ ja $B_1C_1D_1D_1'$. Molempien kannat CD_1D_1' ja $C_1D_1D_1'$ ovat samassa tasossa ja kärjet B ja B_1 ovat tämän tason suuntaisella suoralla. Tetraedreilla on siis sama korkeus. Tetraedrien kannoilla on sama pinta-ala, sillä ne ovat kolmioita, joilla on sama kanta D_1D_1' ja korkeutena suoran CC_1 etäisyys yhdensuuntaisesta suorasta D_1D_1'. Tetraedrien $BCD_1'D_1$ ja $B_1C_1D_1D_1'$ tilavuus on sama. Samoin osoitetaan, että tetraedrien $ABD_1'D_1$ ja $A_1B_1D_1D_1'$ sekä $CAD_1'D_1$ ja $C_1A_1D_1D_1'$ tilavuudet ovat samat. Mutta tetraedri $ABCD_1'$ koostuu tetraedreista $BCD_1'D_1$, ABD_1D_1' ja $CAD_1'D_1$ ja tetratedri $A_1B_1C_1D_1$ koostuu tetraedreista $B_1C_1D_1D_1'$, $A_1B_1D_1D_1'$ ja $C_1A_1D_1D_1'$, joten tetraedrien $ABCD_1'$ ja $A_1B_1C_1D_1$ tilavuus on sama.



On vielä osoitettava, että $D_1D_1' = 3 \cdot DD_1$. Olkoon C_2 puolisuoran CD_1 ja janan AB leikkauspiste ja P suoran CD ja tason ABB_1 leikkauspiste. Koska pisteet A, P ja B_1 ovat sekä tasossa ABB_1 että tasossa ADC (B_1:hän määriteltiin niin!), P on suoralla AB_1. Samoin nähdään, että P on suoralla A_1B. P on siis puolisuunnikkaan ABB_1A_1 lävistäjien leikkauspiste. Leikatkoon taso CDC_2 janan A_1B_1 pisteessä C_2'. Koska P on sekä suoralla CD että tasossa ABB_1, P on janalla C_2C_2'. Tunnetusti puolisuunnikkaan lävistäjien leikkauspiste on itsensä kautta kulkevan, puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen suunkaisen ja puolisuunnikkaan kylkiä yhdistävän janan keskipiste. Siis $C_2P = PC_2'$. Olkoon D_2 suoran C_1P ja janan DD_1' leikkauspiste. Heti nähdään, että $D_1'D_2 = D_2D$. Toisaalta D on puolisuunnikkaan PC_2CC_1 lävistäjien leikkauspiste, joten $D_2D = DD_1$. Siis $D_1D_1' = D_1'D_2 + D_2D + DD_1 = 3 \cdot DD_1$. Todistus on valmis.

65.1. *Määritä kaikki välin $0 \le x \le 2\pi$ luvut x, jotka toteuttavat epäyhtälöt*

$$2\cos x \le \left|\sqrt{1+\sin(2x)} - \sqrt{1-\sin(2x)}\right| \le \sqrt{2}.$$

Ratkaisu. Oikeanpuoleinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$1+\sin(2x)+1-\sin(2x) - 2\sqrt{(1-\sin(2x))(1+\sin(2x)} \le 2$$

eli epäyhtälön

$$-2|\cos(2x)| \le 0$$

kanssa. Se toteutuu siis kaikilla x. Vasemmanpuoleinen epäyhtälö on varmasti voimassa, kun $\cos x \le 0$ eli kun $\frac{1}{2}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$. Kun $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ tai $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$, epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $4\cos^2 x \le 2 - 2|\cos(2x)|$ eli

$$2\cos(2x) \le -2|\cos(2x)|$$

kanssa. Tämä epäyhtälö on voimassa silloin, kun $\cos(2x) \le 0$ eli kun $\frac{1}{4}\pi \le x \le \frac{3}{4}\pi$ tai $\frac{5}{4}\pi \le x \le \frac{7}{4}\pi$. Kaikkiaan vasemmapuoleinen epäyhtälö (ja siis molemmat epäyhtälöt) pätee, kun $\frac{1}{4}\pi \le x \le \frac{7}{4}\pi$.

65.2. *On annettu yhtälöryhmä*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

jonka kertoimet täyttävät seuraavat ehdot:

a) a_{11}, a_{12} ja a_{13} ovat positiivisia;
b) kaikki muut kertoimet ovat negatiivisia;
c) jokaisessa yhtälössä kertoimien summa on positiivinen.

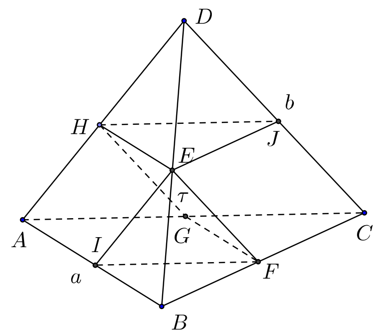
Todista, että $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ on ryhmän ainoa ratkaisu.

Ratkaisu. Olkoon (x_1, x_2, x_3) jokin yhtälöryhmän ratkaisu. Jos jokin $x_i \ne 0$, niin suurin luvuista $|x_1|$, $|x_2|$, $|x_3|$ on positiivinen. Voidaan olettaa, että tämä suurin luku on $|x_1|$. Mutta päädytään ristiriitaan:

$$\begin{aligned} 0 = a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_3} + a_{13}\frac{x_3}{x_1} &\ge a_{11} - |a_{12}|\frac{|x_2|}{|x_1|} - |a_{13}|\frac{|x_3|}{|x_1|} \\ &\ge a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}| = a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0. \end{aligned}$$

65.3. *On annettu tetraedri $ABCD$. Särmän AB pituus on a ja särmän CD pituus on b. AB:n ja CD:n määräämien ristikkäisten suorien etäisyys on d ja näiden suorien välinen kulma on ω. Tetraedri jaetaan särmien AB ja CD suuntaisella tasolla τ kahdeksi osaksi. Laske näiden osien tilavuuksien suhde, kun tiedetään, että suoran AB ja tason τ etäisyyden suhden suoran CD ja tason τ etäisyyteen on k.*

Ratkaisu. Olkoot tason τ ja tetraedrin särmien BD, BC, CA ja AD leikkauspisteet E, F, G ja H. EF ja GH ovat DC:n suuntaisia ja FG sekä HE AB:n suuntaisia. Nelikulmio $EFGH$ on siis suunnikas. Tason τ ja suorien AB ja CD etäisyyksien suhteesta tehdyn oletuksen nojalla



$$\frac{BE}{ED} = k.$$

Yhdenmuotoisista kolmioista BFE ja BCD sekä HED ja ABD saadaan

$$EF = \frac{k}{k+1}DC = \frac{kb}{k+1} \quad \text{ja} \quad EH = \frac{1}{k+1}AB = \frac{a}{k+1}.$$

Kulma $\angle FEH$ tai sen vieruskulma $= \omega$, joten suunnikkaan $EFGH$ ala on

$$\frac{kab\sin\omega}{(k+1)^2}.$$

Jaetaan viisitahokas $ABEFGH$ tason ACD suuntaisella tasolla suuntaissärmiöksi $AIEFGH$ ja tetraedriksi $EIBF$ ja viisitahokas $CDEFGH$ samoin tason ABC suuntaisella tasolla suuntaissärmiöksi $CJEFGH$ ja tetraedriksi $DHEJ$. Tason τ etäisyys suorasta AB on $\dfrac{k}{k+1}d$ ja suorasta CD on $\dfrac{1}{k+1}d$. Suuntaissärmiöiden $AIEFGH$ ja $CJEFGH$ tilavuudet ovat

$$\frac{k^2abd\sin\omega}{2(k+1)^3} \quad \text{ja} \quad \frac{kabd\sin\omega}{2(k+1)^3}.$$

Tetraedrit $EIBF$ ja $DHEJ$ ovat yhdenmuotoisia tetraedrin $ABCD$ kanssa, ja yhdenmuotoisuussuhteet ovat

$$\frac{k}{k+1} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{k+1}.$$

Tetraedin $ABCD$ tilavuus V toteuttaa siis yhtälön

$$V = \frac{k(k+1)abd\sin\omega}{2(k+1)^3} + \frac{k^3+1}{(k+1)^3}V.$$

Näistä ratkaistaan

$$V = \frac{1}{6}abd\sin\omega.$$

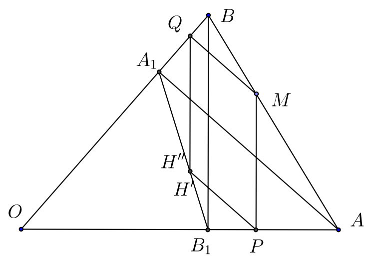
Näistä ratkaistaan tehtävässä kysytty suhde:

$$\frac{\left(\dfrac{k^2}{2(k+1)^3} + \dfrac{k^3}{6(k+1)^3}\right)abd\sin\omega}{\left(\dfrac{k}{2(k+1)^3} + \dfrac{1}{6(k+1)^3}\right)abd\sin\omega} = \frac{k^2(3+k)}{3k+1}.$$

65.4. *Määritä neljä lukua x_1, x_2, x_3, x_4 niin, että jokainen yhden luvun ja kolmen muun luvun tulon summa on 2.*

Ratkaisu. Jos luvuista jokin, esimerkiksi x_1, olisi 0, niin olisi $x_2 = x_3 = X_4 = 2$ ja $x_1 + x_2x_3x_4 = 8 \neq 2$. Siis kaikki luvut ovat $\neq 0$. Olkoon $y = x_1x_2x_3x_4$. Jokainen luvuista x_i toteuttaa toisen asteen yhtälön $x_i^2 + y = 2x_i$. Koska toisen asteen yhtälöllä on enintään kaksi ratkaisua, lukujen x_i joukossa on enintään kaksi eri suurta. Jos nyt luvut ovat kaikki yhtäsuuria, $x_i = x$ kaikilla i, niin $x + x^3 = 2$. Kasvava funktio $x \mapsto x + x^3$ saa arvon 2 vain, kun $x = 1$. Selvästi $(1, 1, 1, 1)$ on tehtävän ehdon toteuttava nelikkö. Olkoon sitten $x_1 = x \neq x_2 = x_3 = x_4 = z$. Silloin $x + z^3 = 2 = z + xz^2$, joten $x - z = z^2(x - z)$ ja $z^2 = 1$. Ei voi olla $z = 1$, koska tällöin olisi myös $x = 1$. On siis oltava $z = -1$, $x = 3$. Neliköt $(3, -1, -1, -1)$, $(-1, 3, -1, -1)$, $(-1, -1, 3, -1)$ ja $(-1, -1, -1, 3)$ toteuttavat tehtävän ehdon. Olkoon sitten $x_1 = x_2 = x \neq x_3 = x_4 = z$. x ja z toteuttavat nyt yhtälöt $x + xz^2 = 2$ ja $z + x^2z = 2$. On siis oltava $x - z + xz(z - x) = 0$ eli $xz = 1$ ja $x + z + (xz)(x + z) = 4$. Siis $x + z = 2$ ja $x + \dfrac{1}{x} = 2$ eli $(x - 1)^2 = 0$. Silloin $x = 1$ ja $z = 1$, mikä on vastoin oletusta.

65.5. *On annettu kolmio OAB, jonka kulman $\angle AOB$ suuruus on ω ($\omega < 90°$). Mielivaltaisesta kolmion OAB pisteestä M piirretään sivun OA normaali MP ja sivun OB normaali MQ. Kolmion OPQ korkeusjanojen leikkauspiste on H. Määritä pisteen H ura*[1]*, kun piste M liikkuu*
a) janalla AB;
b) kolmion OAB sisällä.



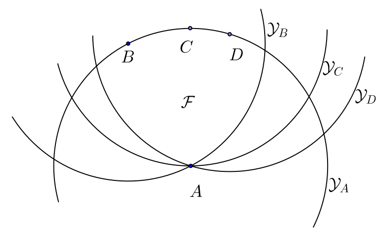
Ratkaisu. a) Olkoot AA_1 ja BB_1 kolmion OAB korkeusjanoja. Osoitetaan, että kysytty ura on jana A_1B_1. Leikatkoon kolmion OPQ P:stä piirretty korkeusjana janan A_1B_1 pisteessä H' ja Q:sta piirretty korkeusjana pisteessä H''. Koska $PH' \| AA_1 \| MQ$ ja $QH'' \| BB_1 \| MP$, niin

$$\frac{A_1H'}{H'B_1} = \frac{B_1P}{PA} = \frac{BM}{MA} = \frac{BQ}{QA_1} = \frac{A_1H''}{H''B_1}.$$

Siis $H' = H'' = H$. Toisaalta, jos lähdetään mielivaltaisesta janan A_1B_1 pisteestä H, piirretään sen kautta kolmion OAB sivuja OA ja OB vastaan kohtisuorat, jotka leikkaavat OB:n ja OA:n pisteissä Q ja P, ja pisteiden P ja Q kautta OA:ta ja OB:tä vastaan kohtisuorat, jotka leikkaavat AB:n pisteissä M' ja M'', voidaan samoin kuin edellä todistaa, että $M' = M''$. Jokainen janan A_1B_1 piste saadaan siis kuvatulla tavalla jostain janan AB pisteestä.

b) Mielivaltainen kolmion OAB sisäpiste M on jollain AB:n suuntaisella sivut OA ja OB yhdistävällä janalla $A'B'$. Soveltamalla a-kohdan päättelyä kolmioon $OA'B'$ nähdään, että H on janalla $A_1'B_1'$, missä A_1' ja B_1' ovat kolmion $OA'B'$ korkeusjanojen kantapisteitä. Kysytty uran muodostavat siis kolmion OA_1B_1 pisteet.

65.6. *On annettu $n \geq 3$ tason pistettä. Olkoon d näiden pisteiden suurin keskinäinen etäisyys. Sellaisia näiden pisteiden välisiä janoja, joiden pituus on d, kutsutaan pistejoukon halkaisijoiksi. Osoita, että halkaisijoita on korkeintaan n kappaletta.*



Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että joko jokainen joukon piste on tasan kahden halkaisijan päätepiste tai ainakin yksi piste on enintään yhden halkaisijan päätepiste. Asia on selvä, jos mikään joukon piste ei ole useamman kuin kahden halkaisijan päätepiste. Oletetaan sitten, että jokin piste, esimerkiksi A, kuuluu kolmeen halkaisijaan AB, AC ja AD. Pisteet B, C, D ovat silloin A-keskisellä ympyrällä $\mathcal{Y}_A$, ja kaarien $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ ja $\overset{\frown}{BD}$ suuruus on enintään $60°$. Tämä on mahdollista vain, jos yksi pisteistä, esimerkiksi C on kahden muun määrittämällä (pienemmällä) kaarella. Olkoot $\mathcal{Y}_B$ ja $\mathcal{Y}_D$ B-

[1] *Ura* on käytöstä poistunut geometrian termi. ”Ehdon $\mathcal{P}$ toteuttavien pisteiden ura” tarkoittaa samaa kuin ”niiden pisteiden joukko, jotka toteuttavat ehdon $\mathcal{P}$”.

ja D-keskiset d-säteiset ympyrät. Kaikkien joukon pisteiden tulee olla kuulua ympyröiden $\mathcal{Y}_A$, $\mathcal{Y}_B$ ja $\mathcal{Y}_D$ rajoittamaan kuvioon $\mathcal{F}$. Mutta kaikki pisteet, jotka ovat sellaisen halkaisijan päätepisteitä, jonka toinen päätepiste on C, ovat C-keskisellä d-säteisellä ympyrällä $\mathcal{Y}_C$. Tämän ympyrän ainoa kuvioon $\mathcal{F}$ kuuluva piste on A, joten C on vain yhden halkaisijan päätepiste.

Todistetaan tehtävän väite induktiolla. Jos $n = 3$, väite pätee, sillä kolmella pisteellä on tasan kolme yhdistysjanaa. Oletetaan, että väite pätee, kun $n = k \geq 3$. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ $k + 1$ tason pistettä. Jos jokin pisteistä, esimerkiksi A_{k+1}, on enintään yhden halkaisijan päätepiste, joukolla $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$ on enintään yksi halkaisija enemmän kuin joukolla $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, jolla induktio-oletuksen mukaan on enintään k halkaisijaa. Jos taas jokainen joukon $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$ piste on tasan kahden halkaisijan päätepiste, halkaisijoitakin on tasan $k + 1$ kappaletta.

66.1. *Matematiikkakilpailussa oli kolme tehtävää A, B ja C. Kilpailijoista 25 ratkaisi ainakin yhden tehtävän. Niiden kilpailijoiden joukossa, jotka eivät ratkaisseet tehtävää A, oli kaksi kertaa niin paljon sellaisia, jotka ratkaisivat tehtävän B kuin niitä, jotka ratkaisivat tehtävän C. Kilpailijoita, jotka ratkaisivat vain tehtävän A oli yksi enemmän kuin muita tehtävän A ratkaisseita. Kuinka moni ratkaisi tehtävän B, kun puolet niistä, jotka ratkaisivat vain yhden tehtävän, ei ratkaissut tehtävää A?*

Ratkaisu. Olkoon n_A niiden kilpailijoiden lukumäärä, jotka ratkaisivat vain tehtävän A, n_{AB} niiden kilpailijoiden lukumäärä, jotka ratkaisivat vain tehtävät A ja B jne. Tehtävän ehtojen perusteella voidaan kirjoittaa seuraavat yhtälöt

$$n_A + n_B + n_C + n_{AB} + n_{BC} + n_{AC} + nABC = 25, \tag{1}$$

$$n_B + n_{BC} = 2(n_C + n_{BC}), \tag{2}$$

$$n_A = n_{AB} + n_{AC} + n_{ABC} + 1 \tag{3}$$

ja

$$n_A = n_B + n_C.$$

Yhtälöistä (1) ja (3) seuraa

$$2n_A + n_B + n_C + n_{BC} = 26.$$

un tähän sijoitetaan yhtälöistä (2) ja (4) ratkaistut n_{BC} ja n_A, saadaan $4n_B + n_C = 26$. Luvun $26 - n_C$ on oltava neljällä jaollinen. Yhtälön (2) perusteella luvun $n_B - 2n_C$ on oltava ei-negatiivinen. Helposti nähdään, että ainoa mahdollinen pari (n_B, n_C) on $(6, 2)$. – On vielä tarkistettava, että $n_B = 6$ on mahdollinen. Kun $n_B = 6$ ja $n_C = 2$, niin yhtälöt (2) ja (4) toteutuvat, kun $n_A = 8$ ja $n_{BC} = 2$. Yhtälöt (1) ja (3) toteutuvat, jos lukujen n_{AB}, n_{AC}, n_{ABC} summa on 7.

66.2. *Todista, että jos kolmion sivuille a, b ja c ja niitä vastaaville kulmille α, β ja γ pätee yhtälö*

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}\,(a\tan\alpha + b\tan\beta),$$

niin kolmio on tasakylkinen.

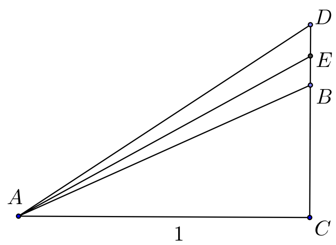
Ratkaisu. Koska $\tan\frac{\gamma}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}$, tehtävän yhtälö on sama kuin

$$(a+b)\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = a\tan\alpha + b\tan\beta$$

eli

$$a\left(\tan\frac{\alpha+\beta}{2} - \tan\alpha\right) = b\left(\tan\beta - \tan\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{1}$$

Voidaan olettaa, että $a \le b$ eli $\alpha \le \beta$. Jos β olisi tylppä, olisi yhtälön (1) vasen puoli positiivinen ja oikea puoli negatiivinen. Siis β on terävä kulma. Oletetaan, että $\alpha < \beta$. Tarkastellaan suorakulmaisia kolmioita ACB, ACE, ACD, missä suora kulma on kärjessä C, $AC = 1$ ja $\angle CAB = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ ja $\angle CAE = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Kolmiossa BAD on silloin AE kulman $\angle BAD$ puolittaja ja $BA < DA$, joten $BE < ED$. Siis



$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} - \tan\alpha < \tan\beta - \tan\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{2}$$

Mutta tämä on ristiriidassa yhtälön (1) kanssa. Siis $\alpha = \beta$, joten tehtävän kolmio on tasakylkinen. [Epäyhtälö (2) saadaan tietysti myös analyysin keinoin. Jos $f(x) = \tan x$, niin $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ on välillä $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kasvava. Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) = f'(\xi_1)\frac{\beta-\alpha}{2} \quad \text{ja} \quad f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f'(\xi_2)\frac{\beta-\alpha}{2},$$

missä $\xi_1 < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2$, joten (2) seuraa.]

66.3. *Osoita, että säännöllisen tetraedrin ympäri piirretyn pallon keskipisteen ja tetraedrin kärkien välisten etäisyyksien summa on pienempi kuin minkä tahansa avaruuden pisteen ja tetraedrin kärkien välisten etäisyyksien summa.*

Ratkaisu. Todetaan ensin, että jos säännöllisen tetraedrin $ABCD$ korkeus on h ja mielivaltaisen avaruuden pisteen P etäisyydet tetraedrin sivutahkojen tasoista ovat h_1, h_2, h_3, h_4, niin $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \ge h$. h_1, h_2, h_3, h_4 ovat nimittäin tetraedrien $PABC$, $PBCD$, $PCDA$ ja $PDAB$ korkeudet, ja näiiden tetraedrien tilavuuksien summa on joko $ABCD$:n tilavuus (jos P on $ABCD$:n sisällä tai reunalla) tai suurempi (jos P on $ABCD$:n ulkopuolella). Jos $ABCD$:n sivutahkojen ala on S, on siis

$$\frac{1}{3}h_1S + \frac{1}{3}h_2S + \frac{1}{3}h_3S + \frac{1}{3}h_4S \ge \frac{1}{3}hS,$$

mistä väite seuraa. Muodostetaan uusi säännöllinen tetraedri $A'B'C'D'$ niin, että $A'B'C'$ on ABC:n suuntainen ja A on $A'B'C'$:n painopiste jne. Olkoon h $A'B'C'D'$:n korkeus ja M $ABCD$:n ympäri piirretyn pallon keskipiste. Silloin $MA+MB+MC+MD=h$. Olkoon sitten $P\neq M$ mielivaltainen piste. Janoista PA, PB, PC ja PD vähintään kolme on aidosti pitempiä kuin P:n kohtisuora etäisyys tasoista $A'B'C'$ jne. Siis $PA+PB+PC+PD>h$. Väite on todistettu.

66.4. *Todista, että jokaiselle luonnolliselle luvulle n ja jokaiselle reaaliluvulle $x\neq\dfrac{m\pi}{2^k}$, $k=0,1,\ldots,n$; m kokonaisluku, pätee*

$$\frac{1}{\sin(2x)}+\frac{1}{\sin(4x)}+\cdots+\frac{1}{\sin(2^nx)}=\cot x-\cot(2^nx).$$

Ratkaisu. Jos $x\neq m\dfrac{\pi}{2}$, m kokonaisluku, niin

$$\cot x-\cot(2y)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}=\frac{2\cos^2x-\cos(2x)}{\sin(2x)}=\frac{1}{\sin(2x)}.$$

Tämä on tehtävän väite, kun $n=1$. Tehdään induktio-oletus

$$\frac{1}{\sin(2x)}+\frac{1}{\sin(2^2x)}+\cdots+\frac{1}{\sin(2^{k-1}x)}=\cot x-\cot(2^{k-1}x),\tag{1}$$

$k\geq 2$. Olkoon vielä $x\neq m\dfrac{\pi}{2^j}$, $j=0,1,\ldots,k$; m kokonaisluku. Silloin $2^{k-1}x\neq m\dfrac{\pi}{2}$, joten edellä osoitetun perusteella

$$\frac{1}{\sin\left(2(2^{k-1}x\right)}=\cot(2^{k-1}x)-\cot(2^kx).\tag{2}$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) lasketaan puolittain yhteen, saadaan tehtävän kaava tilanteessa $n=k$. Induktioperiaatteen nojalla kaava on tosi kaikilla n.

66.5. *Ratkaise yhtälöryhmä*

$$\begin{cases}|a_1-a_2|\,x_2+|a_1-a_3|\,x_3+|a_1-a_4|\,x_4=1\\ |a_2-a_1|\,x_1+|a_2-a_3|\,x_3+|a_2-a_4|\,x_4=1\\ |a_3-a_1|\,x_1+|a_3-a_2|\,x_2+|a_3-a_4|\,x_4=1\\ |a_4-a_1|\,x_1+|a_4-a_2|\,x_2+|a_4-a_3|\,x_3=1,\end{cases}$$

kun a_1, a_2, a_3 ja a_4 ovat annettuja toisistaan eroavia reaalilukuja.

Ratkaisu. Ei merkitse olennaista rajoitusta, jos oletetaan, että $a_1>a_2>a_3>a_4$. Ratkaistava yhtälöryhmä on nyt

$$\begin{cases}(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1\\ (a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1\\ (a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1\\ (a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_3)x_3=1,\end{cases}\tag{1}$$

Kun ryhmän peräkkäiset yhtälöt vähennetään toisistaan, saadaan ryhmä muotoon

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)(x_2 + x_3 + x_4 - x_1) = 0 \\ (a_2 - a_3)(x_3 + x_4 - x_1 - x_2) = 0 \\ (a_3 - a_4)(x_4 - x_1 - x_2 - x_3) = 0, \end{cases}$$

ja koska $a_i > a_{i+1}$, edelleen muotoon

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Ryhmän (2) kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä seuraa $x_2 = 0$ ja kahdesta viimeisestä yhtälöstä $x_3 = 0$. Ryhmän (1) ensimmäisestä ja viimeisestä yhtälöstä saadaan sitten

$$x_1 = x_4 = \frac{1}{a_1 - a_4}.$$

Kokeilemalla nähdään heti, että saadut välttämättömät ehdot ovat myös riittäviä. – Jos luovutaan lukujen a_i järjestyksestä tehdystä oletuksesta, ratkaisu voidaan ilmoittaa niin, että kun a_n on suurin ja a_m pienin luvuista a_i, niin $x_n = x_m = \dfrac{1}{a_n - a_m}$ ja $x_j = 0$, kun $j \notin \{n, m\}$.

66.6. *Kolmion ABC sivuilta AB, BC ja CA valitaan kultakin sisäpiste. Olkoot nämä pisteet M, K ja L. Todista, että kolmioiden MAL, KBM ja LCK joukossa on ainakin yksi, jonka ala ei ole suurempi kuin neljäsosa kolmion ABC alasta.*

Ratkaisu. Olkoon kolmion ABC ala T. Jos piste M jakaa sivun AB suhteessa $t : (1-t)$, piste K sivun BC suhteessa $u : (1-u)$ ja piste L sivun CA suhteessa $v : (1-v)$, niin kolmioiden AML, BKM ja CLK alat ovat $t(1-v)S$, $(1-t)uS$ ja $(1-u)vS$. Jos $t(1-v) \le \dfrac{1}{4}$ tai $(1-t)u \le \dfrac{1}{4}$, niin haluttu kolmio on löytynyt. Oletetaan siis, että

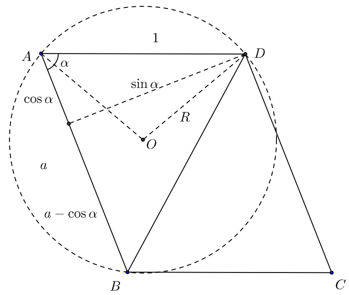
$$t(1-v) > \frac{1}{4} \quad \text{ja} \quad (1-t)u > \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Kun $0 < x < 1$, niin tunnetusti $x(1-x) \le \dfrac{1}{4}$. Epäyhtälöistä (1) seuraa $u(1-v)t(1-t) > \dfrac{1}{16}$ ja siis $u(1-v) > \dfrac{1}{4}$. Koska $u(1-u)v(1-v) \le \dfrac{1}{16}$, on oltava $v(1-u) < \dfrac{1}{4}$. Kolmion CLK ala on nyt vähemmän kuin neljäsosa kolmion ABC alasta.

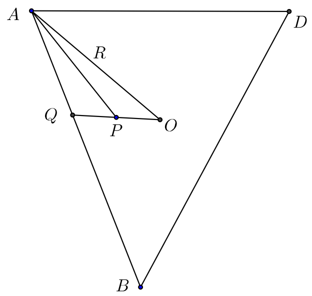
67.1. *Suunnikkaassa $ABCD$ kolmio ABD on teräväkulmainen, $AB = a$, $AD = 1$ ja $\angle BAD = \alpha$. Ympyröiden K_A, K_B, K_C ja K_D keskipisteet ovat suunnikkaan kärjet ja ympyröiden säde on 1. Todista, että ympyrät peittävät suunnikkaan silloin ja vain silloin, kun*

$$a \le \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

Ratkaisu. Symmetrian perusteella ympyrät K_A, K_B ja K_D peittävät kolmion ABD silloin ja vain silloin, kun ympyrät K_B, K_C ja K_D peittävät kolmion BCD. Voidaan rajoittua tarkastelemaan kolmiota ABD. Koska ABD on teräväkulmainen, sen ympärysympyrän keskipiste O on kolmion sisäpiste. Olkoon R ympärysympyrän säde. Jotta ympyröiden K_A, K_B, K_D yhdiste peittäisi pisteen O, on oltava $R \le 1$. Toisaalta, jos P on mielivaltainen kolmion ABD piste, niin P:n etäisyys ainakin yhdestä kolmion kärjestä on enintään R.



[Miksi? Jos P on jollain janoista OA, OB, OD, asia on selvä. Ellei näin ole, puolisuora OP leikkaa jonkin kolmion sivuista, esimerkiksi AB:n, pisteessä Q. Kulmista $\angle AQO$, $\angle BQO$ ainakaan toinen, sanokaamme $\angle AQO$, ei ole terävä. Kolmiosta AQP nähdään, että kulman $\angle APQ$ vieruskulma $\angle APO$ on kulmaa $\angle AQP$ suurempi ja siis tylppä. Tylppäkulmaisessa kolmiossa APO tylppää kulmaa vastaava sivu AO on pisin sivu. Siis $AP < R$.]



Tehtävän ehto toteutuu siis aina ja vain, kun $R \le 1$. Kolmio AOD on tasakylkinen, ja sen kylkien pituus on R. Nyt $R \le 1$, jos ja vain jos $\angle AOD \ge 60°$. Mutta $\angle ABD$ on sellainen kolmion ABD ympärysympyrän kehäkulma, jota vastaava keskuskulma on $\angle AOD$. Tehtävän ehto toteutuu, jos ja vain jos $\angle ABD \ge 30°$. Nyt

$$\cot(\angle ABD) = \frac{a - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

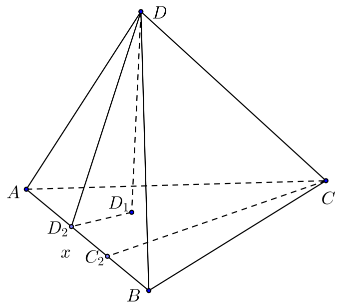
ja $\cot 30° = \sqrt{3}$. Koska terävän kulman kotangentti vähenee kulman kasvaessa, on siis oltava

$$\frac{a - \cos\alpha}{\sin\alpha} \le \sqrt{3}.$$

Tämä on sama epäyhtälö kuin tehtävän väitteessä esiintyvä.

67.2. *Tetraedrissa on yhden ja vain yhden särmän pituus suurempi kuin 1. Osoita, että tetraedrin tilavuus on pienempi tai yhtä suuri kuin* $\frac{1}{8}$.

Ratkaisu. Olkoon CD se tetraedrin särmä, jonka pituus on > 1. Olkoon $AB = x \le 1$. Olkoon DD_1 tetraedrin korkeusjana, DD_2 kolmion ABD korkeusjana ja CC_2 kolmion ABC korkeusjana. Tetraedrin tilavuus on



$$V = \frac{1}{3}DD_1 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot CC_2 \le \frac{x}{6}DD_2 \cdot CC_2.$$

Janoista AD_2 ja D_2B ainakin toinen on $\ge \frac{1}{2}x$. Voidaan olettaa, että se on D_2B. Koska $BD \le 1$, suorakulmaisesta kolmiosta BDD_2 saadaan

$$DD_2^2 = BD^2 - D_2B^2 \le 1 - \frac{1}{4}x^2.$$

Samoin perustein saadaan

$$CC_2^2 \le 1 - \frac{1}{4}x^2.$$

Siis

$$V \le \frac{x}{6}\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right).$$

Nyt

$$\frac{1}{8} - V \ge \frac{1}{8} - \frac{x}{6} + \frac{x^3}{24} = \frac{1}{24}(x^3 - 4x + 3).$$

Mutta $x^3 - 4x + 3 = (x-1)(x^2 + x - 3)$, ja molemmat tekijät ovat ei-positiivisia, kun $0 < x \le 1$. Siis $V \le \frac{1}{8}$.

67.3. *Olkoot k, m ja n positiivisia kokonaislukuja ja $m+k+1$ alkuluku, joka on suurempi kuin $n+1$. Merkitsemme $c_s = s(s+1)$. Todista, että tulo*

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\cdots(c_{m+n} - c_k)$$

on jaollinen tulolla $c_1c_2\cdots c_n$.

Ratkaisu. Jos $m+1 \le k \le m+n$, niin jollain j on $c_{m+j} - c_k = 0$, ja väite pätee. Muussa tapauksessa kaikki tulon

$$P = \prod_{j=1}^{n}(c_{m+j} - c_k)$$

tekijät ovat samanmerkkisiä. Oletetaan ensin, $k \le m$ eli että tekijät ovat kaikki positiivisia. Nyt $c_{m+j} - c_k = (m+j)(m+j+1) - k(k+1) = (m+j)^2 - k^2 + m + j - k = (m+j-k)(m+j+k+1)$. Siis

$$P = \prod_{j=1}^{n}(m+j-k)\prod_{j=1}^{n}(m+j+k+1) = \frac{(m-k+n)!}{(m-k)!} \cdot \frac{(m+n+k+1)!}{(m+n+1)!}.$$

P:n pitäisi olla jaollinen tulolla

$$Q = \prod_{j=1}^{n} c_j = n!(n+1)!.$$

Mutta

$$\frac{P}{Q} = \frac{(m-k+n)!}{(m-k)!n!} \cdot \frac{(m+n+k+1)!}{(m+k+1)!(n+1)!} = \binom{m-k+n}{n} \cdot \frac{(m+n+k+1)!}{(m+k+1)!(n+1)!}.$$

Oletuksen mukaan $n+1 < m+k+1$. Alkuluku $m+k+1$ ei siis ole tekijänä luvussa $(m+k)!(n+1)!$. Koska $m+k+1 < m+n+k+1$, luku on tekijänä tulossa $(m+n+k+1)!$. Siis

$$\frac{(m+n+k+1)!}{(m+k+1)!(n+1)!} = \frac{1}{m+k+1}\binom{m+n+k+1}{m+k}$$

on kokonaisluku, ja väite on todistettu. Jos $m+n < k$, niin voidaan tarkastella tuloa

$$P' = \prod_{j=1}^{n} (c_k - c_{m+j}).$$

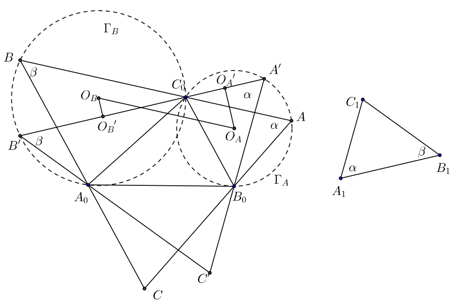
Samoin kuin käsitellyssä tapauksessa saadaan

$$\frac{P'}{Q} = \binom{k-m-1}{n} \cdot \frac{(m+n+k+1)!}{(m+k+1)!(n+1)!},$$

ja lopputarkastelu on sama kuin jo käsitellyssä tapauksessa.

67.4. *On annettu teräväkulmaiset kolmiot $A_0B_0C_0$ ja $A_1B_1C_1$. Konstruoi kolmion $A_0B_0C_0$ ympäri piirretty kolmio ABC, joka on yhdenmuotoinen kolmion $A_1B_1C_1$ kanssa (kärjet A_1 ja A, B_1 ja B sekä C_1ja C vastaavat toisiaan) niin, että AB kulkee pisteen C_0, BC pisteen A_0 ja CA pisteen B_0 kautta. Konstruoi lisäksi se kolmioista ABC, jonka ala on mahdollisimman suuri.*

Ratkaisu. Olkoon $\angle B_1A_1C_1 = \alpha$ ja $\angle A_1B_1C_1 = \beta$. Yksi kolmion $A_1B_1C_1$ kanssa yhdenmuotoinen kolmio $A'B'C'$ saadaan, kun piirretään pisteen A_0 kautta suoran B_1C_1 suuntainen suora, pisteen B_0 kautta suoran A_0C_0 suuntainen suora ja pisteen C_0 kautta suoran A_0B_0 suuntainen suora; suorien leikkauspisteet ovat A', B', C'. Piirretään kolmioiden A_0C_0B' ja $B_0A'C_0$ ympärysympyrät Γ_B ja Γ_A. Olkoot O_B ja O_A näiden ympyröiden keskipisteet. Jos nyt piirretään pisteen C_0 kautta suora, joka leikkaa Γ_B:n ja Γ_A:n pisteissä B



ja A (kolmion $A_0B_0C_0$ ulkopuolella), ja jos suorat BA_0 ja AB_0 leikkaavat pisteessä C, niin kolmion ABC kulmat ovat samat kuin kolmion $A'B'C'$ kulmat, ja siis $ABC \sim A_1B_1C_1$. Kolmion ABC ala on verrannollinen sivun AB pituuden toiseen potenssiin. Ala on siis suurin, kun AB on mahdollisimman pitkä. Olkoot O'_A ja O'_B pisteiden O_A ja O_B kohtisuorat projektiot suoralla AB. Koska $O_AO'_A$ ja $O_BO'_B$ ovat janojen AC_0 ja BC_0 keskinormaaleja, $AB = 2 \cdot O'_AO'_B$. Mutta $O'_AO'_B \le O_AO_B$, ja $O'_AO'_B = O_AO_B$ täsmälleen silloin, kun $O'_AO'_B \| O_AO_B$. Kolmion ABC on siis alaltaan suurin, kun suora AB on se C_0:n kautta kulkeva suora, joka on O_AO_B:n suuntainen.

67.5. *Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_8$ reaalilukuja, jotka eivät kaikki ole nollia. Tarkastellaan lukujonoa (c_n), missä*

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_8, \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2, \\ &\ldots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \\ &\ldots \end{aligned}$$

Tiedetään, että $c_n = 0$ äärettömän monella n:n arvolla. Määritä kaikki luvut n, joille $c_n = 0$.

Ratkaisu. Tarpeen mukaan indeksointia muuttamalla ja vastalukuihin siirtymällä päästään olettamaan, että $a_1 \neq 0$ ja $a_1 \ge |a_2| \ge \ldots \ge |a_8|$. Koska $c_{2k} \ge a_1^{2k} > 0$, c_n voi olla nolla vain, jos n on pariton. Osoitetaan, että itse asiassa $c_n = 0$ kaikilla parittomilla n. Olkoon r suurin indeksi, jolla $a_1 = |a_2| = \ldots = |a_r|$. Oletetaan vielä, että luvuista $a_1, \ldots, a_r$ s kappaletta on $= a_1$ ja $r - s$ kappaletta $= -a_1$. Kun $j > r$, niin

$$\frac{|a_j|}{a_1} < 1,$$

joten on olemassa sellainen n_0, että kun $n \ge n_0$, niin

$$\frac{|a_j|^n}{a_1^n} < \frac{1}{8}$$

kaikilla $j > r$. Jos nyt $n \ge n_0$ on pariton, niin

$$\begin{aligned} |c_n| &= |sa_1^n - (r-s)a_1^n + a_{r+1}^n + \cdots + a_8^n| = a_1^n \left| 2s - r + \frac{a_{r+1}^n}{a_1^n} + \cdots + \frac{a_8^n}{a_1^n} \right| \\ &\ge a_1^n \left(|2s - r| - \frac{|a_{r+1}|^n}{a_1^n} - \cdots - \frac{|a_8|^n}{a_1^n} \right) \ge a_1^n \left(|2s - r| - (8 - r)\frac{1}{8} \right). \end{aligned}$$

Jos $2s - r \neq 0$, niin $c_n \neq 0$ kaikilla $n \ge n_0$. Silloin ei voi olla $c_n = 0$ äärettömän monella n. Näin ollen $2s = r$. Jos $r = 8$, todistus on valmis. Jos $r < 8$, niin kaikilla parittomilla n on

$$c_n = a_{r+1} + \cdots + a_8,$$

ja joka tapauksessa $r \ge 2$. Edellinen päättely voidaan toistaa, tarvittaessa kolmesti, ja lopputulos on, että luvut a_j ovat pareittain toistensa vastalukuja, joten $c_n = 0$ kaikilla parittomilla n.

67.6. *Urheilukilpailuissa jaettiin m mitalia n:n päivän aikana. Ensimmäisenä päivänä jaettiin yksi mitali ja $\frac{1}{7}$ jäljelle jääneistä, toisena päivänä kaksi mitalia ja $\frac{1}{7}$ jäljelle jääneistä jne. Viimeisenä päivänä jaettiin tasan n mitalia, eikä yhtään jäänyt jäljelle. Montako päivää kilpailut kestivät ja montako mitalia kaikkiaan jaettiin?*

Ratkaisu. Jos x_k on k:tena päivänä jaettavien mitalien määrä, niin

$$x_k = k + \frac{1}{7}\left(m - k - \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right), \quad x_{k+1} = k + 1 + \frac{1}{7}\left(m - k - 1 - \sum_{j=1}^{k} x_j\right).$$

Tästä saadaan

$$x_{k+1} - x_k = 1 - \frac{1}{7}x_k - \frac{1}{7}$$

eli

$$x_k = \frac{7}{6}(x_{k+1} - 1.$$

Koska $x_n = n$, on siis $x_{n-1} = \frac{7}{6}n - 1$, $x_{n-2} = \frac{7}{6}\left(\frac{7}{6}n - 1\right) - 1$ jne.; Yksinkertainen induktio ja geometrisen jonon summan lauseke osoittavat, että

$$x_{n-j} = \left(\frac{7}{6}\right)^j n - \left(\frac{7}{6}\right)^{j-1} - \left(\frac{7}{6}\right)^{j-2} - \cdots - 1 = \left(\frac{7}{6}\right)^j (n-6) + 6.$$

Koska mitaleja jaettiin kaikkiaan m kappaletta, on

$$m = \sum_{j=0}^{n-1} x_{n-j} = (n-6)\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{7}{6}\right)^j + 6n = (n-6)\frac{\left(\frac{7}{6}\right)^n - 1}{\frac{7}{6} - 1} + 6n = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}} + 6^2.$$

(Viimeinen yhtälö perustuu rutiinisievennyksiin.) Koska m on kokonaisluku, on luvun $n-6$ oltava jaollinen luvulla 6^{n-1}. Koska oletuksista seuraa, että $n > 1$, on oltava $n = 6$ ja $m = 36$. Todellakin: jos kuuden päivän aikana jaetaan kuusi mitalia joka päivä, tehtävän ehdot täyttyvät.

68.1. *Todista, että on olemassa (yhtenevyyttä vaille) yksikäsitteinen kolmio, jonka sivujen mittaluvut ovat peräkkäisiä kokonaislukuja ja jonka yksi kulma on kaksi kertaa niin suuri, kuin toinen kolmion muista kulmista.*

Ratkaisu. Olkoon $k \geq 2$ kokonaisluku ja kolmion sivut $a = k - 1$, $b = k$ ja $c = k + 1$ sekä vastaavat kulmat α, β, γ. Silloin $\alpha < \beta < \gamma$, ja joko $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 180° - 3\alpha$; $\gamma = 2\alpha$, $\beta = 180° - 3\alpha$ tai $\gamma = 2\beta$, $\alpha = 180° - 3\beta$. Käytetään sinilausetta ja identiteettejä $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, $\sin(3x) = \sin x(4\cos^2 x - 1)$.

Ensimmäinen vaihtoehto antaa

$$\frac{\sin\alpha}{k-1} = \frac{\sin(2\alpha)}{k} = \frac{\sin(3\alpha)}{k+1}$$

ja mainittujen identiteettien soveltamisen jälkeen

$$\frac{1}{k-1} = \frac{2\cos\alpha}{k} = \frac{4\cos^2\alpha - 1}{k+1}.$$

kun yhtälöistä eliminoidaan $\cos\alpha$, saadaan

$$\frac{k+1}{k-1} = \frac{k^2}{(k-1)^2} - 1,$$

mikä sievenee edelleen muotoon $k^2 = 2k$. Ratkaisu $k = 2$ ei kelpaa, sillä silloin olisi $\cos\alpha = 1$ eli $\alpha = 0$. Ensimmäinen vaihtoehto ei viis ole mahdollinen.

Sinilause toisessa vaihtoehdossa on

$$\sin\alpha_k - 1 = \frac{\sin(2\alpha)}{k+1} = \frac{\sin(3\alpha)}{k}.$$

Samoin kuin edellä se johtaa yhtälöön

$$\frac{k}{k-1} = \frac{(k+1)^2}{(k-1)^2} - 1$$

ja edelleen yhtälöön $k^5 = 5k$. Jos kolmion sivut ovat $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, voidaan kosinilauseen avulla varmistaa, että $\gamma = 2\alpha$. Saatiin ratkaisu.

Kolmas vaihtoehto merkitsee yhtälöä

$$\frac{\sin(3\beta)}{k-1} = \frac{\sin\beta}{k} = \frac{\sin(2\beta)}{k+1}.$$

Se johtaa yhtälöihin

$$\frac{k-1}{k} = \frac{(k+1)^2}{k^2} - 1$$

ja $k^2 - 3k + 1 = 0$. Tällä yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisuja, joten kolmas vaihtoehto ei johda ratkaisuun.

68.2. *Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut x, joiden kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden tulo on $x^2 - 10x - 22$.*

Ratkaisu. Koska luvun numeroiden tulo on positiivinen, on oltava $x^2 - 10x - 22 > 0$. Siis

$$x > \frac{100 + \sqrt{100 + 88}}{2} > 5 + \frac{13}{2} > 11.$$

Olkoon luku $(n+1)$-numeroinen ja olkoon sen ensimmäinen numero a. Silloin x:n numeroiden tulo on silloin enintään $a \cdot 9^n < a \cdot 10^n \le x$. Siis $x^2 - 11x + 22 \le 0$ eli

$$x \le \frac{11 + \sqrt{121 + 88}}{2} < \frac{11}{2} + \frac{15}{2} = 13.$$

Ainoa mahdollisuus on $x = 12$. Todellakin $12^2 - 10 \cdot 12 - 22 = 2 = 1 \cdot 2$, joten $x = 12$ on tehtävän ratkaisu.

68.3. *Yhtälöryhmässä*

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \dots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

a, b ja c ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$. Osoita, että ryhmällä
a) ei ole reaalisia ratkaisuja, jos $(b-1)^2 - 4ac < 0$,
b) on täsmälleen yksi ratkaisu, jos $(b-1) - 4ac = 0$,
c) on useampia kuin yksi ratkaisu, jos $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

Ratkaisu. Olkoon $p(x) = ax^2 + (b-1)x + c$. $(b-1)^2 - 4ac$ on silloin p:n diskriminantti. Vähennetään yhtälöryhmän k:nnesta yhtälöstä puolittain x_k kaikilla $k = 1, 2, \dots, n$. Yhtälöryhmä saa silloin muodon

$$\begin{cases} p(x_k) = x_{k+1} - x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ p(x_n) = x_1 - x_n. \end{cases}$$

Jos $(b-1)^2 - 4ac < 0$, niin $p(x)$ olisi joko kaikilla x positiivinen tai kaikilla x negatiivinen. Joka tapauksessa kaikki erotukset $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, $\dots$, $x_n - x_{n-1}$ ja $x_1 - x_n$ olisivat samanmerkkisiä. Tämä johtaa ristiriitaan $x_1 \neq x_1$. Jos $(b-1)^2 - 4ac = 0$, niin p:llä on tasan yksi nollakohta t ja muut p:n saamat arvot ovat joko kaikki negatiivisia tai kaikki positiivisia. Saadaan samanlainen ristiriita kuin edellä, paitsi jos $x_1 = x_2 = \dots = x_n = t$; tämä on yhtälöryhmän ainoa ratkaisu. Jos viimein p:n diskriminantti on positiivinen, p:llä on kaksi eri nollakohtaa t_1 ja t_2. Yhtälöryhmän ratkaisuja ovat tällöin ainakin $x_k = t_1$ kaukilla k ja $x_k = t_2$ kaikilla k.

68.4. *Todista, että jokaisella tetraedrilla on ainakin yksi kärki, josta lähtevien särmien pituiset janat voivat olla kolmion sivuina.*

Ratkaisu. Tarkastellaan tetraedria $ABCD$. Voidaan olettaa, attä AD on sen pisin särmä. silloin varmasti

$$\begin{aligned} AD + BD &> DC, \\ AD + DC &> BD, \\ AD + AC &> AB, \\ AD + AB &> AC. \end{aligned}$$

Kolmioista ABD ja ACD saadaan $AB + BD > AD$ ja $AC + DC > AD$. Kun nämä epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $AB + AC + BD + DC > 2 \cdot AD$. Mutta tämä merkitsee, että ainakin toinen epäyhtälöistä

$$AB + AC > AD, \quad BD + DC > AD$$

on voimassa. Jos se on edellinen, niin ratkaisun alun neljän epäyhtälön ryhmän kahdesta viimeisestä epäyhtälöstä seuraa, että AB, AC ja AD voivat olla kolmion sivut. Jos se on jälkimmäinen, niin ratkaisun alun neljän epäyhtälön ryhmän kahdesta viimeisestä epäyhtälöstä seuraa, että AD, BD ja CD on vastaava ominaisuus.

68.5. *Olkoon a positiivinen vakio ja f reaalilukujen joukossa määritelty reaaliarvoinen funktio, joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla x ehdon*

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Todista, että f on jaksollinen, ts. että on olemassa $b > 0$ siten, että $f(x+b) = f(x)$ kaikilla x. Anna tapauksessa $a = 1$ esimerkki funktiosta f, joka ei ole identtisesti vakio.

Ratkaisu. Voidaan valita $b = 2a$. Pätee nimittäin, koska $f(x) \geq \dfrac{1}{2}$,

$$f(x+2a) = f\left((x+a)+a\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f(x+a)^2}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \left(\frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} + f(x) - f(x)^2\right)}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f(x)^2} = \frac{1}{2} + \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = f(x).$$

Tarkastellaan funktiota g, $g(x) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{x - x^2}$. Pätee $g(1) = \dfrac{1}{2}$ ja $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$. Jos siis esimerkiksi $f(x) = \dfrac{1}{2}$, kun $2n \leq x < 2n+1$ ja $f(x) = 1$, kun $2n+1 \leq x < 2n$, kaikilla kokonaisluvuilla n, niin f ei ole vakio ja toteuttaa tehtävän ehdon parametrin a arvolla 1.

68.6. *Olkoon $\lfloor x \rfloor$ suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x. Laske summa*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

missä n on positiivinen kokonaisluku.

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor. \qquad (1)$$

Olkoon $x = k + y$, missä k on kokonaisluku ja $0 \leq y < 1$. Jos $y < \dfrac{1}{2}$, niin $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = k$ ja $\lfloor 2x \rfloor = 2k$. Selvästi (1) pätee, Jos $\dfrac{1}{2} \leq y$, niin $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = k+1$, $\lfloor 2x \rfloor = 2k+1$, ja (1) pätee. On olemassa luku k_n siten, että $2^{k_n} > n$. Kun $k \geq k_n$, on

$$\frac{n+2^k}{2^{k+1}} < 1,$$

joten $\left\lfloor \dfrac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = 0$, kun $k \geq k_n$. Tehtävän sarja supistuu äärelliseksi summaksi, joka aputuloksen avulla vielä muuttuu helposti laskettavaksi teleskooppiseksi summaksi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{k_n-1} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{k_n-1} \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$
$$= \sum_{k=0}^{k_n-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) = \lfloor n \rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{k_n}} \right\rfloor = \lfloor n \rfloor = n.$$

69.1. *Todista, että on olemassa äärettömän monta luonnollista lukua a, jolla on seuraava ominaisuus: luku $z = n^4 + a$ ei millään luonnollisella luvulla n ole alkuluku.*

Ratkaisu. Jos $a = 4k^4$ jollain kokonaisluvulla $k \geq 2$, niin

$$n^4 + a = n^4 + 4k^4 = n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 = \left(n^2 + 2k^2\right)^2 - (2nk)^2$$
$$= \left(n^2 + 2k^2 - 2nk\right)\left(n^2 + 2k^2 + 2nk\right) = \left((n-k)^2 + k^2\right)\left((n+k)^2 + k^2\right).$$

Viimeisen tulon tekijöistä pienempi on ainakin k^2 ja siis suurempi kuin 1. $n^4 + a$ on yhdistetty luku. [Yllä oleva luvun $x^4 + 4k^4$ tekijöihin jako tunnetaan *Sophie Germainin identiteettinä.*]

69.2. *Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalisia vakioita, x reaalilukumuuttuja ja*

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{2^2}\cos(a_3 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x).$$

Osoita: jos $f(x_1) = f(x_2) = 0$, niin $x_1 - x_2 = m\pi$, missä m on kokonaisluku.

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että f ei ole nollafunktio. Koska nimittäin

$$f(x) \geq \cos(a_1 + x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} > \cos(a_1 + x) - 1,$$

on ainakin $f(-a_1) > 0$. Kosinin yhteenlaskukaavan perusteella

$$f(x) = \cos x \left(\cos a_1 + \frac{1}{2}\cos a_2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n \right) +$$
$$+ \sin x \left(\sin a_1 + \frac{1}{2}\sin a_2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n \right) = a\cos x + b\sin x$$

joillain reaaliluvuilla a ja b. Koska f ei ole identtisesti nolla, on $a^2 + b^2 > 0$. Tunnetulla tavalla voidaan nyt kirjoittaa

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x \right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+y),$$

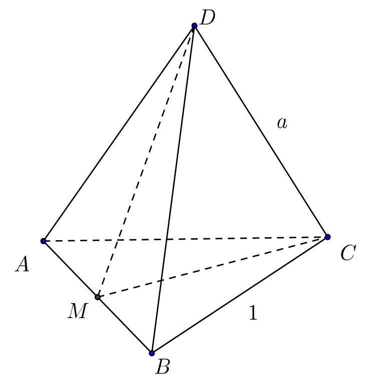
missä y on valittu niin, että

$$\sin y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Jos nyt $f(x_1) = f(x_2) = 0$, niin $x_1 + y$ ja $x_2 + y$ ovat molemmat luvun π monikertoja, joten niiden erotus $x_1 - x_2$ on myös π:n monikerta.

69.3. *Määritä jokaista k:n arvoa 1, 2, 3, 4 ja 5 kohden se välttämätön ja riittävä ehto, joka positiivisen luvun a tulee täyttää, jotta olisi olemassa tetraedri, jossa on k a:n pituista ja $6-k$ ykkösen pituista särmää.*

Ratkaisu. Riittää, että todistetaan väite oikeaksi, kun $k \in \{1, 2, 3\}$. Yksinkertainen yhdenmuotoisuusmuunnos palauttaa tapaukset $k=4$ ja $k=5$ tapauksiin $k=2$ ja $k=1$.



Olkoon $k=1$. Oletetaan, että tetaredrissa $ABCD$ on $CD=a$ ja muut särmät $=1$. Jos M on AB:n keskipiste, niin tasasivuisista kolmioista ABC ja ABD saadaan $DM = CM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. kolmion MCD kolmas sivu CD on silloin enintään $\sqrt{3}$. Toisaalta $a < \sqrt{3}$ on riittävä ehto vaaditunlaisen tetraedrin olemassaololle. Jos tasasivuiset, $1-$ *sivuiset* kolmiot ABC ja ABD "saranoidaan" toisiinsa pitkin janaa AB, niin kärjet C ja D ovat M:n kautta kulkevassa AB:n keskinormaalitasossa M-keskisellä ympyrällä, jonka halkaisija on $\sqrt{3}$. Jos $a < \sqrt{3}$, Pisteet C ja D voidaan aina valita tältä ympyrältä niin, että $CD=a$ ja kolmio MCD on aito. Tällöin tetraedri $ABCD$ on vaaditunlainen.
Jos $k=2$, on kaksi mahdollisuutta. Joko a:n pituiset särmät lähtevät samasta kärjestä tai niillä ei ole yhteisiä pisteitä. Tarkastellaan ensin edellistä tapausta. Oletetaan, että $AD = BD = a$ ja muiden särmien pituus on 1. Jos nyt M on sivun AB keskipiste, niin

$$DM = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}, \quad CM = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Kolmiosta MCD saadaan nyt välttämätön ehto

$$1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} < \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} < 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

joka sievenee muotoon

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

On helppo päätellä samoin kuin edellä, että ehto on myös riittävä. Olkoon sitten tetraedrissa $ABCD$ $AB = CD = a$ ja muut särmät $=1$. Kolmiossa MCD on nyt

$$CM = DM = \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}.$$

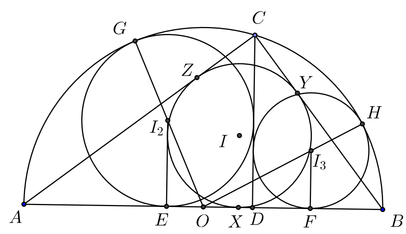
Näin ollen on oltava

$$2\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2} > a$$

eli $a < \sqrt{2}$. Ehto on myös riittävä. Koska $\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{3}}$, tapauksen $k=2$ välttämätön ja riittävä ehto on $a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Kun $k = 3$, tetraedri voidaan konstruoida kaikilla a. Jos $a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, voidaan valita tetraedrin pohjaksi tasasivuinen kolmio ABC, jonka kaikki sivut ovat $= 1$ ja valita kolmion tason siltä normaalisuoralta, joka kulkee kolmion keskipisteen kautta piste D, jonka etäisyys kaikista kolmion kärjistä on a. Jos $a < \sqrt{3}$, tehdään edellä mainittu konstruktio käyttämällä a:n sijalla lukua a^{-1} ja pienentämällä sitten syntynyttä tetraedria kertoimella a.

69.4. *Olkoon AB puoliympyrän γ halkaisija ja C jokin γ:n piste ($A \neq C \neq B$). C:n kohtisuora projektio janalla AB on D. Olkoon γ_1 kolmion ABC sisään piirretty ympyrä, γ_2 ympyrä, joka sivuaa γ:aa ja janoja AD sekä DC, ja γ_3 ympyrä, joka sivuaa γ:aa ja janoja BD sekä DC. Todista, että ympyröillä γ_1, γ_2 ja γ_3 on AB:n lisäksi toinenkin yhteinen tangentti.*



Ratkaisu. Olkoot O γ:n, I γ_1:n, I_2 γ_2:n ja I_3 γ_3:n keskipisteet ja R, r, r_2 ja r_3 samassa järjestyksessä näiden ympyröiden säteet. Olkoot vielä X, E ja F pisteet, joissa γ_1, γ_2 ja γ_3 sivuavat janaa AB. Pisteet ovat samalla ympyröiden kohtisuorat projektiot janalla AB. Sivutkoon vielä γ_1 BC:tä pisteessä Y ja AC:tä pisteessä Z ja olkoot G ja H pisteet, joissa γ_2 ja γ_3 sivuavat puoliympyrää γ. Voidaan olettaa, että O on janalla AD. Merkitään vielä $OD = d$.

Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että I, I_2 ja I_3 ovat samalla suoralla. Silloin peilaus tämän suoran yli pitää ympyrät γ_1, γ_2 ja γ_3 muuttumattomina, mutta kuvaa niiden yhteisen tangentin AB toiseksi yhteiseksi tangentiksi. Nyt I on suoralla I_2I_3 varmasti, jos I on janan I_2I_3 keskipiste. Tämä taas toteutuu, jos r on r_2:n ja r_3:n keskiarvo ja X on janan EF keskipiste. Todistetaan, että näin on. Todistuksessa käytetään toistuvasti hyödyksi tietoa, jonka mukaan ympyrän tangenttien leikkauspisteen ja sivuamispisteiden väliset janat ovat yhtä pitkiä.

Koska $\angle BCA$ on suora, $CZIY$ on neliö ja siis $CZ = CH = r$. Jos $AC = b$ ja $BC = a$, niin $2R = AB = AX + XR = AZ + BY = (b - r) + (c - r)$. Siis

$$r = \frac{1}{2}(a + b) - R.$$

Suorakulmaisesta kolmiosta DCO saadaan $CD^2 = R^2 - d^2$ ja tämän jälkeen suorakulmaisista kolmioista CAD ja BCD

$$b^2 = 2R^2 + 2RD, \quad a^2 = 2R^2 - 2Rd.$$

Janojen $OG = OI_2 + I_2G = \sqrt{r_2^2 + (r_2 - d)^2} + r_2 = R$ ja $OH = OI_3 + I_3H = \sqrt{r_3^2 + (r_3 + d)^2} + r_3 = R$ avulla saadaan toisen asteen yhtälöt pituuksille r_2 ja r_3; ratkaisuiksi saadaan

$$r_2 = -R + d + \sqrt{2R^2 - 2Rd} = -R + d + a, \quad r_3 = -R - d + \sqrt{2R^2 + 2Rd} = -R - d + b.$$

Nyt $r_2 + r_3 = -2R + a + b = 2r$. Ensimmäinen keskiarvoehto täyttyy. Toinenkin täyttyy, sillä $AE + AF = AD - r_2 + AD + r_3 = 2R + 2d + R - d - a - R - d + b = 2R - a + b = 2(b - r) = 2 \cdot AZ = 2 \cdot AX$.

69.5. *On annettu $n > 4$ tason pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että on olemassa ainakin $\binom{n-3}{2}$ kuperaa nelikulmiota, joiden kärjet ovat annettujen pisteiden joukossa.*

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että tehtävän ehdot täyttävästä viiden pisteen joukosta $\{A, B, C, D, E\}$ voidaan valita kuperan nelikulmion kärjet. Jos $ABCD$ on kupera nelikulmio, asia on selvä. Ellei näin ole, pisteistä voidaan valita kolme, esimerkiksi A, B, C, niin , että D on kolmion ABC sisäpiste. Jos myös E on kolmion sisäpiste, se on sisäpiste tasan yhdessä kolmioista ABD, BCD, CAD, esimerkiksi kolmiossa ABD. Jos nyt E on samassa CD määrittämistä puolitasoista kuin A, niin $AEDC$ on kupera nelikulmio, päinvastaisessa tapauksessa taas $CDEB$ on sellainen. E voi sijaita kolmion ABC ulkopuolella yhdessä sellaisista äärettömistä alueista, joita rajoittaa yksi kolmion sivu ja kahden muun jatkeet, esimerkiksi alueessa, jota rajoittaa jana BC ja janojen AB ja AC jatkeet. Jos E on siinä AD:n määrittämässä puolitasossa, jossa B on , niin $ABED$ on kupera nelikulmio, päinvastaisessa tapauksessa taas $ADEC$ on sellainen. E voi viimein sijaita jonkin kolmion kulman ristikulman aukeamassa, esimerkiksi kulman $\angle ABC$ ristikulman. Jällen sen mukaan kummassa DB:n määräämistä puolitasoista E sijaitsee, joko $AEBD$ tai $CDBE$ on kupera nelikulmio.

Olkoon sitten $n > 4$ mielivaltainen. Tehtävän pistejoukolla on $\binom{n}{5}$ 5-alkioista osajoukkoa, ja jokaiseen liittyy ainakin yksi kupera nelikulmio. Tietty kupera nelikulmio voi liittyä enintään $(n-4)$:ään eri viiden pisteen joukkoon. (Tällaisessa joukossa ovat aina nelikulmion neljä kärkeä, ja viides piste voidaan valita $(n-4)$:llä eri tavalla.) Eri nelikulmioiden määrä on siis ainakin $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$. On vielä osoitettava, että kun $n \geq 5$, niin

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5} \geq \binom{n-3}{3}.$$

Tarkastellaan suhdetta

$$f(n) = \frac{\binom{n}{5}}{(n-4)\binom{n-3}{2}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}.$$

Silloin $f(5) = 1$ ja

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{(n+1)(n-4)}{(n-2)(n-3)} = \frac{n^2-(3n+4)}{n^2-(5n-6)}.$$

Koska $5n - 6 - (3n + 4) = 2n - 10 \geq 0$, kun $n \geq 5$, $f(n)$ ei vähene, kun n kasvaa, joten $f(n) \geq 1$ kaikilla $n \geq 3$.

69.6. *Osoita, että jos $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$ ja $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, niin*

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Ilmoita välttämätön ja riittävä ehto yhtäsuuruuden voimassaololle.

Ratkaisu. Merkitään $D_1 = x_1y_1 - z_1^2$, $D_2 = x_2y_2 - z_2^2$. Muokataan ja arvioidaan todistettavan epäyhtälön vasemman puolen nimittäjää:

$$\begin{aligned}
(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2 &= D_1+D_2+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2\\
&= \left(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\right)^2 - 2\sqrt{D_1D_2}+\frac{x_1}{x_2}x_2y_2+\frac{x_2}{x_1}x_1y_1-2z_1z_2\\
&= \left(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\right)^2 - 2\sqrt{D_1D_2}+\frac{x_1}{x_2}\left(D_2+z_2^2\right)+\frac{x_2}{x_1}\left(D_1+z_1^2\right)-2z_1z_2\\
&= \left(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\right)^2 - 2\sqrt{D_1D_2}+\frac{x_1}{x_2}D_2+\frac{x_2}{x_1}D_1+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1\right)^2\\
&= \left(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}D_2}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}D_1}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1\right)^2 \ge \left(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella on

$$\sqrt{\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}} \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{D_1D_2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}\right).$$

Niinpä

$$\frac{8}{\left(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2}\right)^2} \le \frac{2}{\sqrt{D_1D_2}} \le \frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2},$$

ja väite seuraa. Yhtäsuuruus viimeisessä epäyhtälössä on vain silloin, kun $D_1 = D_2$, ja aikaisemmassa nimittäjän arviossa silloin, kun

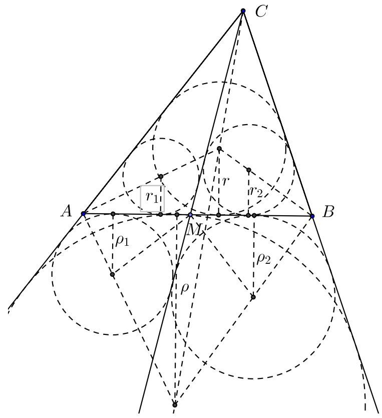
$$\frac{x_1}{x_2}D_2 = \frac{x_1}{x_2}D_1, \qquad \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2 = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1.$$

Yhtäsuuruus vallitsee siis silloin ja vain silloin, kun $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ja $z_1 = z_2$.

70.1. *Olkoon M mielivaltainen kolmion ABC sivun AB sisäpiste, r_1, r_2 ja r kolmioiden AMC, BMC ja ABC sisään piirrettyjen ympyröiden säteet sekä ρ_1, ρ_2 ja ρ jotka sivuavat AM:ää sekä CA:n ja CM:n jatkeita; MB:tä sekä CM:n ja CB:n jatkeita ja AB:tä ja CA:n ja CB jatkeita. Todista, että*

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

Käytetään trigonometriaa. Olkoot kolmion kulmat $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ ja olkoon $\angle AMC = \delta$. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Siis



$$AB = r\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right).$$

Kolmion sen sivuympyrän, joka sivuaa AB:tä, keskipiste kulmien $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ vieruskulmien puolittajien leikkauspiste. Kulman ja sen vieruskulman puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja $\cot(90^\circ - x) = \tan x$. Niinpä sivun AB pituudeksi saadaan myös

$$AB = \rho\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right).$$

Koska $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, on siis

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\tan\dfrac{\alpha}{2} + \tan\dfrac{\beta}{2}}{\dfrac{1}{\tan\dfrac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\tan\dfrac{\beta}{2}}} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}.$$

Aivan samoin saadaan

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\delta}{2}, \qquad \frac{r_2}{\rho_2} = \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{180^\circ - \delta}{2}.$$

Koska

$$\tan\frac{180^\circ - \delta}{2} = \cot\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\tan\dfrac{\delta}{2}},$$

saadaan todellakin

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{\rho}.$$

70.2. *On annettu luonnolliset luvut a, b ja n, $a > 1$, $b > 1$ ja $n > 1$. Olkoot A_{n-1} ja A_n a-kantaisen lukujärjestelmän lukuja ja B_{n-1} ja B_n b-kantaisen lukujärjestelmän lukuja. Lukujen A_{n-1} ja A_n esitykset a-järjestelmässä ovat*

$$A_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0, \qquad A_n = x_nx_{n-1}\ldots x_0$$

ja lukujen B_{n-1} ja B_n esitykset b-järjestelmässä ovat

$$B_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0, \qquad B_n = x_nx_{n-1}\ldots x_0$$

$(x_n \neq 0 \neq x_{n-1})$. Osoita, että epäyhtälö

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$$

on voimassa silloin ja vain silloin, kun $a > b$.

Ratkaisu. Merkitään

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j, \quad g(t) = f(t) + x_n t^n.$$

Silloin $A_{n-1} = f(a)$, $B_{n-1} = f(b)$, $A_n = g(a)$ ja $B_n = g(b)$. On osoitettava, että

$$\frac{f(a)}{g(a)} < \frac{f(b)}{g(b)}$$

silloin ja vain silloin, kun $a > b$. Koska

$$\frac{g(t)}{f(t)} = 1 + \frac{x_n t^n}{f(t)},$$

jää osoitettavaksi epäyhtälöiden $a > b$ ja

$$\frac{a^n}{f(a)} > \frac{b^n}{f(b)}$$

yhtäpitävyys. Mutta

$$f(a)f(b)\left(\frac{a^n}{f(a)} - \frac{b^n}{f(b)}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j a^n b^j - \sum_{j=0}^{n-1} x_j a^j b^n = \sum_{j=0}^{n-1} x_j a^j b^j \left(a^{n-j} - b^{n-j}\right).$$

Viimeinen summa on positiivinen, jos ja vain jos $a > b$.

70.3. *Olkoon (a_n) reaalilukujono, jolle on voimassa $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ ja (b_n) kaavan*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}},$$

$n = 1, 2, \ldots$, avulla määritelty lukujono. Todista, että

a) $0 \leq b_n \leq 2$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

b) Jokaista lukua c, $0 \leq c < 2$, kohden on olemassa sellainen lukujono (a_n), että siitä muodostetussa lukujonossa (b_n) on $b_n > c$ äärettömän monella indeksin n arvolla.

Ratkaisu. a) Koska b_n määrittelevän summan yhteenlaskettavat ovat ei-negatiivisia, $b_n \geq 0$ kaikilla n. Yläraja saadaan muotoilemalla summaa ja ottamalla huomioon jonon (a_n) kasvavuus. Päästään lopulta teleskooppiseen summaan:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k-1}}{a_{k-1}} - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} + \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{2a_{k-1}}{\sqrt{a_k a_{k-1}}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2.$$

b) Jos $a_n = a^{2n}$, niin

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{a^k} = \frac{a^2-1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}} = \frac{a+1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right).$$

Siis $b_n > c$, kun

$$1 - \frac{1}{a^n} > \frac{ca^2}{a+1}.$$

Jos $a > 1$, niin edellisen epäyhtälön vasen puoli tulee mielivaltaisen lähelle lukua 1, kun n on tarpeeksi suuri. Jos siis $a > 1$ voidaan valita niin, että

$$\frac{ca^2}{a+1} < 1,$$

niin jono $(a_n) = (a^{2n})$ toteuttaa tehtävän ehdon. Mutta $c < 2$ ja

$$\lim_{a\to 1} = \frac{a+1}{a^2} = 2,$$

joten tällainen valinta on aina mahdollinen.

70.4. *Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla on seuraava ominaisuus: Joukko $\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5\}$ voidaan jakaa kahdeksi yhteisalkiottomaksi epätyhjäksi joukoksi siten, että kummankin joukon alkioiden tulo on sama.*

Ratkaisu. Tällaisia lukuja ei ole. Jos sellaiset luvut olisivat, niin jokaisen luvun jokainen alkutekijä olisi myös jonkin toisen alkutekijä. Luvuista suurimman ja pienimmän erotus on 5, joten lukujen alkutekijöinä voisivat olla vain 2, 3 ja 5. Koska 5 voi olla yhtä aikaa vain lukujen n ja $n+5$ alkutekijä, lukujen $n+1$, $n+2$, $n+3$ ja $n+4$ alkutekijöitä olisivat 2 ja 3. Koska luvuista kaksi on parittomia, näiden on oltava luvun 3 potensseja. Mutta ainoa 3:n potenssit, joiden erotus on 2, ovat $3^0 = 1$ ja $3^1 = 3$. Mutta silloin $n+1 = 1$ tai $n+2 = 1$, joten $n \leq 0$ eikä n ole positiivinen luku.

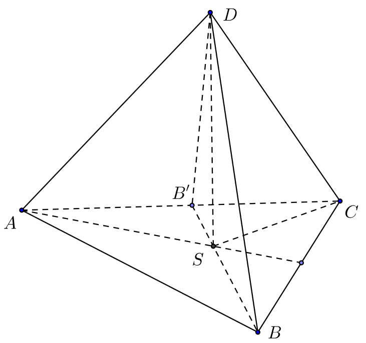
70.5. *Tetraedrissa $ABCD$ on $\angle BDC$ suora kulma. Pisteen D kohtisuora projektio tasolle ABC on kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste. Osoita, että*

$$(AB + BC + AC)^2 \leq 6\left(AD^2 + BD^2 + CD^2\right).$$

Mille tetraedrille on voimassa yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Osoitetaan Pythagoraan lausetta toistuvasti käyttämällä, että

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 2\left(AD^2 + BD^2 + CD^2\right). \quad (1)$$



Kolmiot ADS, BDS, BCD ja DCS ovat nimittäin suorakulmaisia, joten

$$\begin{aligned} & AD^2 + BD^2 - AB^2 \\ =& AS^2 + DS^2 + BC^2 - DC^2 - AB^2 \\ =& AB^2 + BC^2 - CS^2 - AB^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Olkoon vielä B' kolmion ABC B:stä piirretyn korkeusjanan kantapiste. Silloin myös kulma $\angle DB'A$ on suora. (Tämä seuraa esimerkiksi siitä, että DSn kohtisuorassa tasoa ABC vastaan, jollon B' kautta kulkeva DS:n suuntainen suora ℓ on myös. Siis AC on kohtisuorassa kahta tason DBB' suoraa, nimittäin BB':a ja ℓ:ää vastaan. Silloin AC on tason DBB' normaali, ja AC on kohtisuorassa kaikkia tason DBB' suoria, myös suoraa $B'D$ vastaan.) Suorakulmaisista kolmioista ABB', BCB', ASB', CSB' saadaan nyt nyt yhtälön (2) oikealla puolella oleville neliöille

$$BC^2 = B'C^2 + BB'^2, \quad AB^2 = AB'^2 + BB'^2, \quad AS^2 = AB'^2 + B'S^2, \quad CS^2 = B'C^2 + B'S^2.$$

Kun nämä sijoitetaan yhtälöön (2), saadaan

$$AD^2 + BD^2 - AB^2 = 0. \quad (3)$$

Koska B ja C ovat samanlaisessa asemassa, voidaan aivan samoin johtaa yhtälö

$$AD^2 + CD^2 - AC^2 = 0. \quad (4)$$

Yhtälöistä (3) ja (4) sekä kolmion BCD suorakulmaisuudesta seuraavasta yhtälöstä $BD^2 + DC^2 - BC^2 = 0$ seuraa nyt (1).

Sovelletaan nyt yhtälön (1) vasempaan puoleen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä. Sen mukaan

$$(AB + BC + AC)^2 \le \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)\left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right) = 3\left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right).$$

Väitös seuraa.

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön yhtäsuuruusehto (tässä tapauksessa) on $AB = BC = AC$. Kolmion ABC on siis oltava tasasivuinen. Jotta S yhtyisi kolmion ABC keskipisteeseen, on kolmioiden ABD, BDC ja CDA oltava tasakylkisiä ja myös suorakulmaisia. Kolmioista DBS ja $DB'S$ voidaan helposti laskea, että $DS = \dfrac{1}{\sqrt{6}}AB$.

70.6. *On annettu 100 tason pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Tarkastelemme kaikkia kolmioita, joiden kärjet ovat annettujen pisteiden joukossa. Osoita, että näistä kolmioista korkeintaan 70 % on teräväkulmaisia.*

Ratkaisu. Olkoon E sellainen tason äärellinen pistejoukko, jonka mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla. Merkitään $k(E)$:llä niiden kolmioiden lukumäärää, joiden kärjet kuuluvat joukkoon E, ja $t(E)$:llä niiden teräväkulmaisten kolmioiden lukumäärää, joiden kärjet kuuluvat joukkoon E. Osoitetaan, että jos on olemassa luku a, niin että $t(E) \leq ak(E)$ kaikilla joukoilla E, joissa on n alkiota, niin $t(F) \leq ak(F)$ kaikilla joukoilla, joissa on $n+1$ alkiota. Olkoon siis $F = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}\}$. Olkoon $F_m = F \setminus \{P_m\}$, $m = 1, 2, \ldots, n+1$. Kolmion $P_iP_jP_k$ kärjet kuuluvat kaikkiin joukkoihin F_m, lukuun ottamatta joukkoja F_i, F_j, F_k. Tästä seuraa

$$\sum_{m=1}^{n+1} t(F_m) = (n-2)t(F), \quad \sum_{m=1}^{n+1} k(F_m) = (n-2)k(F).$$

Koska jokaisessa joukossa F_m on n alkiota, $t(F_m) \leq ak(F_m)$, $m = 1, 2, \ldots, n+1$. Mutta silloin myös $t(F) \leq ak(F)$.

Jos joukossa E on neljä pistettä, niin $k(E) = 4$. Jos pisteet ovat kuperan nelikulmion kärjet, niin tämän nelikulmion kulmista ainakin yksi on ainakin $90°$, joten $t(E) \leq 3$. Jos taas pisteistä yksi on muiden kolmen muodostaman kolmion sisäpiste, kolmioista, joiden kärkenä tämä piste on, enintään yksi on teräväkulmainen. Nytkin siis $k(E) \leq 3$. Jos F on viiden pisteen joukko, niin $k(F) = \binom{5}{3} = 10$. Alussa todistetun perusteella $t(F) \leq \frac{3}{4}k(F) = \frac{15}{2}$. Mutta $t(F)$ on kokonaisluku, joten $t(F) \leq 7$. Induktiolla nähdään nyt, että kaikilla $n \geq 5$ on n-alkioiselle joukolle E aina $t(E) \leq \frac{7}{10}k(E)$. Tämä on totta silloinkin, kun $n = 100$.

71.1. *Olkoon $n > 2$ luonnollinen luku. Osoita, että seuraava väite on tosi silloin ja vain silloin, kun $n = 3$ tai $n = 5$: Jos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat mielivaltaisia reaalilukuja, niin*

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\cdots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\cdots(a_2 - a_n) + \cdots$$
$$\cdots + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) \geq 0.$$

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että epäyhtälön ei tarvitse olla voimassa, kun $n \neq 3, 5$. Jos n on parillinen, voidaan valita $a_1 = -1$ ja $a_k = 0$, kun $k > 1$. Epäyhtälön vasen puoli on silloin $(-1)^{n-1} = -1$. Jos n on pariton ja $n \geq 7$, voidaan valita $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 1$ ja $a_k = 2$, kun $k > 4$. Epäyhtälön vasemman puolen summan ainoa nollasta poikkeava termi on silloin

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5)\cdots(a_4 - a_n) = (-1)^{n-4} = -1.$$

Jos $n = 3$, saadaan heti

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_2a_3 - a_3a_1 = \frac{1}{2}\left((a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2\right) \geq 0.$$

Olkoon sitten $n = 5$. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_5$. Silloin $a_1 - a_k \geq a_2 - a_k \geq 0$, kun $k \geq 3$, joten

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geq 0.$$

Samoin $0 \geq a_4 - a_k \geq a_5 - a_k$, kun $k \leq 3$, joten

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \geq 0.$$

Viimein $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) \geq 0$, koska tulon kaksi ensimmäistä tekijää ovat ei-positiivisia ja kaksi jälkimmäistä ei-negatiivisia. Koko epäyhtälön vasemman puolen summa on siis ≥ 0.

71.2. *On annettu kupera monitahokas P_1, jolla on tasan yhdeksän kärkeä $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Olkoon P_j se monitahokas, joka saadaan P_1:stä sellaisella yhdensuuntaissiirrolla, jossa piste A_1 siirtyy pisteeseen A_j. Osoita, että vähintään kahdella monitahokkaista $P_1, P_2, \ldots, P_9$ on yhteinen sisäpiste.*

Ratkaisu. Muodostetaan P kanssa suhteessa $1 : 2$ homoteettinen monitahokas niin Q, että homotetiakeskus on A_1. Osoitetaan, että jokainen P_j sisältyy monitahokkaaseen Q. Valitaan mielivaltainen $j > 1$ ja mielivaltainen $Y \in P_j$. Silloin on olemassa $X \in P_1$ niin, että XY ja A_1A_j ovat yhdensuuntaiset ja samanpituiset. A_1A_jYX on siis suunnikas. Suunnikkaan lävistäjien keskipiste Z on sekä janan A_1Y että XA_j keskipiste. Koska P on kupera, janan XA_j keskipiste kuuluu P:hen. Mutta ratkaisun alussa määritellyssä homotetiassa Z kuvautuu pisteeksi Y. Siis $Y \in Q$. Olkoon V monitahokkaan P_1 tilavuus. Monitahokkaan Q tilavuus on silloin $2^3V = 8V$, ja koska jokainen $P_j \subset Q$, niin monitahokkaiden yhdisteen tilavuus on $\leq 8V$. Jokaisen monitahokkaan P_j tilavuus on V. Jos niillä ei olisi yhteisiä sisäpisteitä, niin niiden yhdisteen tilavuus olisi $9V$. Monitahokkailla on siis oltava yhteistä sisäosaa.

71.3. *Osoita, että lukujono $(2^n - 3)$ sisältää äärettömän osajonon, jonka jäsenet ovat keskenään yhteistekijättömiä.*

Ratkaisu. Esimerkiksi $2^3 - 3 = 5$ ja $2^4 - 3 = 13$ ovat yhteistekijättömiä. Oletetaan, että on olemassa luvut $n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ niin, että lukujen $2^{n_i} - 3$ ja $2^{n_j} - 3$ suurin yhteinen tekijä on 1, kaikilla $0 \leq i < j \leq k$. Merkitään

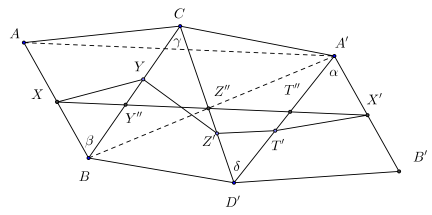
$$s = (2^{n_0} - 3)(2^{n_1} - 3) \cdots (2^{n_k} - 3).$$

Tarkastellaan nyt lukuja 2^j, $0 \leq j \leq s$. Lukuja on $s+1$ kappaletta, joten joillakin kahdella on sama jakojäännös s:llä jaettaessa. Olkoot ne 2^a ja 2^b, $a > b$. Silloin $2^b\left(2^{a-b} - 1\right) = ps$ jollain p, ja koska s on pariton, s on luvun $2^{a-b} - 1$ tekijä; soos $2^{a-b} - 1 = qs$ jollaain $q \geq 1$. Mutta silloin $2^{a-b+2} = 4qs + 4$ ja $2^{a-b+2} - 3 = 4qs + 1$. Luvuilla s ja $2^{a-b+2} - 3$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Lisaäksi $2^{a-b+2} - 3 > 2^{a-b} + 1 \geq s$, joten varmasti $a - b + 2 > n_k$. Voidaan valita $n_{k+1} = a - b + 2$. Prosessia jatkamalla saadaan tehtävässä kysytty ääretön osajono.

71.4. *Tetraedrin $ABCD$ kaikki sivutahkot ovat teräväkulmaisia kolmioita. Olkoon $\angle BAD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ ja $\angle ADC = \delta$. Tarkastellaan umpinaisia murtoviivoja $XYZTX$, missä X, Y, Z ja T ovat särmien AB, BC, CD ja DA sisäpisteitä. Osoita:*

a) Jos $\alpha + \gamma \neq \beta + \delta$, niin murtoviivojen joukossa ei ole lyhintä.

b) Jos $\alpha+\gamma = \beta+\delta$, on olemassa äärettömän monta lyhintä murtoviivaa. Niistä jokaisen pituus on $2 \cdot AC \cdot \sin\dfrac{\omega}{2}$, missä $\omega = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$.



Ratkaisu. "Levitetään" tetraedri tasoon ABC piirtämällä kolmiot $CBD' \cong CBD$, $CD'A' \cong CDA$ ja $A'D'B' \cong ADB$. Olkoot Z', T', X' ne janojen CD', $A'D'$, $A'B'$ pisteet, joille $CZ' = CZ$, $A'T' = AT$ ja $A'X' = AX$. Murtoviivat $XYZTX$ ja $XYZ'T'X'$ ovat silloin yhtä pitkät. Suora $A'B'$ saadaan suorasta AB suorittamalla (jos pisteiden nimeäminen on tehty niin kuin kuviossa) kulman β suuruinen kierto negatiiviseen kiertsuuntaan pisteen B ympäri, sitten γ:n suuruinen kierto positiiviseen suuntaan pisteen C ynpäri, sitten δ:n suuruinen kierto pisteen D' ympäri negatiiviseen suuntaan ja viimein α:n suuruinen kierto positiiviseen suuntaan pisteen A' ympäri. Näin ollen $AB \| A'B'$ vain, jos $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Pisteet X, Y, Z', T', X' ovat janojen AB, BC, CD', $D'A'$, $A'B'$ sisäpisteitä. Jos AB ja $A'B'$ leikkaavat, on aina mahdollista suorittaa pienentävä homotetiakuvaus leikkauspiste keskipisteenä niin, että pisteiden X, Y, Z', T', X' kuvapisteet ovat yhä janoilla AB, BC, CD', $D'A'$, $A'B'$. Tässä tapauksessa jokaista tehtävän ehdon täyttävää murtoviivaa kohden on olemassa lyhempi ehdon täyttävä murtoviiva, joten lyhintä murtoviivaa ei ole olemassa.

On vielä osoitettava, että jos $\alpha+\gamma = \beta+\delta$ eli $AB \| A'B'$, niin lyhyin murtoviiva on olemassa. Koska $BD'A'C$ on kupera nelikulmio, CD':n ja $A'B$:n leikkauspiste Z'' on janalla CD'. Z'' on samalla suunnikkaan $ABB'A'$ lävistäjän piste, joten Z'':n kautta piirretty AA':n suuntainen suora leikkaa AB:n ja $A'B'$:n. Leikkauspisteille X ja X' pätee $AX = A'X'$. Koska $ABD'C$ ja $D'B'A'C$ ovat kuperia, janat XZ'' ja $Z''X'$ leikkaavat janat BC ja $A'D'$ pisteissä Y'' ja T''. Selvästi $XY + YZ' + Z'T' + T'X' \geq XX' = XY'' + Y''Z'' + Z''T'' + T''X'$. Janaa XX' voidaan siirtää yhdensuuntaissiirolla ainakin jonkin verran, joten lyhimpiä murtoviiva on äärettömän monta.

Lyhimmän murtoviivan pituus on janan AA' pituus eli $2 \cdot AC \cdot \sin\left(\dfrac{1}{2} \cdot \angle ACA'\right)$. Viisikulmion $AXX'A'C$ kulmien summa on $540°$ ja $\angle AXX' + \angle XX'A' = 180°$. Siis $\angle ACA' = 360° - \omega$ ja $\sin\left(\dfrac{1}{2} \cdot \angle ACA'\right) = \sin\left(180° - \dfrac{1}{2}\omega\right) = \sin\left(\dfrac{1}{2}\omega\right)$. Todistus on valmis.

71.5. *Osoita, että jokaista positiivista kokonaislukua m kohden on olemassa tason äärellinen pistejoukko S_m, jolla on seuraava ominaisuus: Jos A kuuluu joukkoon S_m, niin tasan m:n S_m:n pisteen etäisyys A:sta on 1.*

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että jokaista luonnollista lukua $n \geq 2$ kohden on olemassa sellaiset n vektoria $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$, että jokaisen pituus on $\frac{1}{2}$ ja jos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on joukko lukuja, joista jokainen on joko 0, -2 tai 2, niin vektorin

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \overrightarrow{u}_k$$

ei ole nollavektori eikä yksikkövektori. Jos $n = 2$, voidaan vektoreiksi $\overrightarrow{u}_1$ ja $\overrightarrow{u}_k$ valita mitkä tahansa ei-yhdensuuntaiset $\frac{1}{2}$-pituiset vektorit. Oletetaan, että ehdon täyttävät vektorit $\overrightarrow{u}\_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_k$ ovat olemassa, kun $k \geq 2$. Vektorin $\overrightarrow{u}_{k+1}$ tulee olla pituudeltaan $\frac{1}{2}$, ja aina, kun $c_i \in \{-2, 0, 2\}$ ja $\sum |c_i| \geq 4$, on oltava

$$\left| \sum_{i=1}^{k+1} c_i \overrightarrow{u}_i \right| \neq 0, 1.$$

Ehdot eivät selvästikään sulje pois kaikkia $\frac{1}{2}$-pituisia vektoreita, joten $\overrightarrow{u}_{k+1}$ voidaan valita.

Olkoon nyt $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ edellä konstruoitu n:n vektorin joukko. Joukoksi S_m valitaan ne 2^m pistettä, joiden paikkavektorit ovat

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \overrightarrow{u}_k,$$

kaikilla $b_k = \pm 1$. Jos nyt P on jokin S_m:n piste ja P:n paikkavektori on

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \overrightarrow{u}_k$$

ja Q on jokin toinen S_m:n piste, ja Q:n paikkavektori on

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \overrightarrow{u_k},$$

niin

$$|P - Q| = \left| \sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k) \overrightarrow{u}_k \right|.$$

Koska $|a_k - b_k| \in \{0, 2\}$, $|P - Q| = 1$ täsmälleen silloin, kun luvuista $a_k - b_k$ tasan yksi on nollasta eroava. Tällaisia lukuja on tasan m kappaletta.

71.6. *Olkoon $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, matriisi, jonka alkiot ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja. Matriisilla A on seuraava ominaisuus: jos $a_{ij} = 0$, niin*

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj} \geq n.$$

Osoita, että matriisin kaikkien alkioiden summa on ainakin $\dfrac{1}{2}n^2$.

Ratkaisu. Olkoon S matriisin kaikkien alkioiden summa ja olkoon p pienin yhden vaaka- tai pystyrivin alkioiden summista. Jos $p \geq \dfrac{n}{2}$, niin $S \geq \dfrac{1}{2}n^2$. Oletetaan siis, että $p < \dfrac{1}{2}n$. Voidaan olettaa, että ensimmäisen vaakarivin alkioiden summa on p ja että ensimmäisen vaakarivin q ensimmäistä alkiota ovat positiivisia ja loput $n - q$ nollia. Oletuksen mukaan silloin $(n - q)$:n viimeisen pystyrivin alkioiden summa on $\geq (n - q)n - (n - q)p$. p:n minimiominaisuudesta seuraa toisaalta, että q:n ensimmäisen pystyrivin alkioiden summa on ainakin pq. Koska matriisin alkiot ovat ensimmäisen rivin q nollasta eroavaa alkiota ovat kukin ≥ 1, on oltava $q \leq p$. Siis

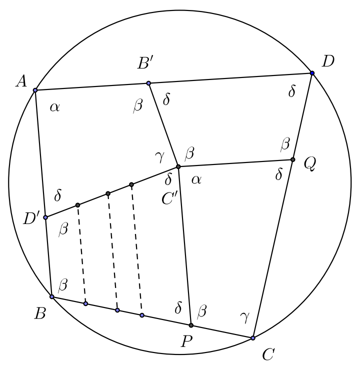
$$S \geq (n - q)n - (n - q)p + pq = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(n - 2p)(n - 2q) \geq \frac{1}{2}n^2.$$

72.1. *On annettu kymmenen kaksinumeroisen keskenään eri suuren kokonaisluvun joukko. Osoita, että joukolla on kaksi yhteisalkiotonta osajoukkoa, joiden alkioiden summa on sama.*

Ratkaisu. Joukon alkiot ovat ehdon $10 \leq x \leq 99$ toteuttavia lukuja. Jokaisen osajoukon alkioiden summa on siis pienempi kuin 990. Joukolla on aitoja osajoukkoja $2^{10} - 2 = 1022$ kappaletta. Osajoukoissa on siis sellaisia, joiden alkioiden summa on sama. Jos kahdella sellaisella eri osajoukolla, joiden alkioiden summa on sama, on yhteisiä alkioita, niin joukoilla, jotka saadaan poistamalla yhteiset alkiot molemmista joukoista, on edelleen sama alkioiden summa.

72.2. *Osoita, että seuraava väite pitää paikkansa jokaiselle $n \geq 4$: Jokainen sellainen nelikulmio, jonka ympäri voidaan piirtää ympyrä, voidaan jakaa n:ksi osanelikulmioksi, joiden ympäri voidaan piirtää ympyrä.*

Ratkaisu. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio, α, β, γ ja δ sen kulmat. Jännenlikulmion perusominaisuuden nojalla $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Jaetaan $ABCD$ ensin neljäksi jännenelikulmioksi seuraavasti. Valitaan sivuilta AB ja AD pisteet D' ja B' ja piirretään B':sta ja D':sta puolisuorat, jotka muodostavat AD:n ja AB:n kanssa kulmat β ja δ. Kun pisteet valitaan tarpeeksi läheltä pistettä A, niin mainittujen puolisuorien leikkauspiste C' on $ABCD$:n sisällä. Piirretään vielä C':n kautta AB:n ja AD:n suuntaiset suorat. Edellen valitsemalla B' ja D' tarpeeksi läheltä pistettä A voidaan varmistua siitä, että mainituista suorista ensim-



mäinen leikkaa sivun BC sen sisäpisteessä P ja jälkimmäinen sivun AD sen sisäpisteessä Q. Nelikulmion $AB'C'D'$ kulmat ovat samat kuin nelikulmoin $ABCD$. Se on siis jännenelikulmio. Yhdensuuntaisuuden perusteella $\angle C'PC = \angle ABC = \beta$ ja vastaavasti $\angle CQC' = \delta$. Nelikulmion $C'PCQ$ kulmat ovat siis myös samat kuin nelikumion $ABCD$, joten $C'PCQ$ on jännenelikulmio. Puolisuunnikkaassa $BPC'D'$ on $\angle PC'D' = \angle AD'C' = \delta = 180° - \beta$, joten puolisuunnikas on jännenelikulmio. Samoin nähdään, että puolisuunnikas $C'QDB'$ on jännenelikulmio. $ABCD$ on siis jaettu neljäksi jännenelikulmioksi. Nyt jokainen puolisuunnikkaan ei-yhdensuuntaisia sivuja yhdistävä yhdensuuntaisten sivujen suuntainen jana jakaa puolisuunnikkaan kahdeksi sellaiseksi puolisuunnikkaaksi, jonka kulmat ovat samat kuin alkuperäisen puolisuunnikkaan. $ABCD$:n jako n:ksi puolisuunnikkaaksi onnistuu siis esimerkiksi piirtämällä puolisuunnikkaaseen $BPC'D'$ tarpeellinen määrä AB:n suuntaisia BP:n ja $D'C'$:n yhdistäviä janoja.

72.3. *Olkoot m ja n mielivaltaisia ei-negatiivisia kokonaislukuja. Osoita, että luku*

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

on kokonaisluku. (Huom. $0! = 1$.)

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla. Tehtävässä esiintyvä luku on kokonaislukujen m ja n funktio $a(m,\, n)$. Huomataan, että kaikilla m on

$$a(m,\, 0) = \binom{2m}{m}.$$

Koska binomikertoimet ovat kokonaislukuja, jokainen $a(m,\, 0)$ on kokonaisluku. Suora lasku osoittaa, että

$$a(m+1,\, n-1) + a(m,\, n) = \frac{(2m+2)!(2n-2)!}{(m+1)!(n-1)!(m+n)!} + \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$
$$= \frac{(2m+2)(2m+1)n + (m+1)(2n)(2n-1)}{n(m+1)(m+n)} \cdot \frac{(2m)!(2n-2)!}{m!(n-1)!(m+n-1)!}$$
$$= 4\frac{(2m)!(2n-2)!}{m!(n-1)!(m+n-1)!} = 4a(m,\, n-1).$$

Siis $a(m,\, n) = 4a(m,\, n-1) - a(m+1,\, n-1)$. Koska jokainen $a(m,\, 0)$ on kokonaisluku, on jokainen $a(m,\, 1)$ kokonaisluku. Jos jokainen $a(m,\, n-1)$ on kokonaisluku, niin jokainen $a(m,\, n)$ on kokonaisluku. Induktioperiaatteen nojalla tehtävän väite on tosi.

72.4. *Määritä kaikki epäyhtälöryhmän*

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \le 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \le 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \le 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \le 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \le 0, \end{cases}$$

missä $x_i > 0$, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 5$, ratkaisut $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5)$.

Ratkaisu. Jos $x > 0$ on mielivaltainen, niin (x, x, x, x, x) on yhtälöryhmän ratkaisu. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Jos tällainen ratkaisu $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ kuitenkin olisi olemassa, niin ainakin yksi seuraavista ehdoista olisi voimassa: $x_1 \neq x_3$, $x_3 \neq x_5$, $x_5 \neq x_2$, $x_2 \neq x_4$ tai $x_4 \neq x_1$. Koska epäyhtälöryhmä on symmetrinen indeksien kiertovaihtelun suhteen, voidaan olettaa, että ryhmällä on ratkaisu, jossa $x_3 \neq x_5$. Voidaan vielä olettaa, että $x_3 < x_5$, koska aina, kun $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ on ratkaisu, myös viisikko $\left(x_1^{-1}, x_2^{-1}, x_3^{-1}, x_4^{-1}, x_5^{-1}\right)$ on ratkaisu. Tarkastellaan erikseen tapaukset $x_1 \leq x_2$ ja $x_1 > x_2$. Edellisessä tapauksessa tehtävän epäyhtälöistä ensimmäisessä vasemman puolen tekijöistä ensimmäisen on oltava ei-positiivinen ja jälkimmäisen ei-negatiivinen. Siis $x_1^2 \leq x_3x_5 < x_5^2$, joten $x_1x_3 < x_5^2$, ja $x_3^2 < x_3x_5 \leq x_2^2$. Tehtävän neljännestä epäyhtälöstä seuraa nyt $x_4^2 \leq x_1x_3 < x_5x_3 \leq x_2x_5$, joten kolmannen epäyhtälön perusteella $x_3x_5 < x_2x_5 \leq x_4^2$. Syntyi ristiriita. Olisi siis oltava $x_2 < x_1$. Tässä tapauksessa tehtävän ensimmäisestä epäyhtälöstä seuraa $x_1^2 \geq x_3x_5$ ja $x_2^2 \leq x_3x_5$. Toisen epäyhtälön perusteella on oltava $x_4x_1 \leq \max\{x_2^2, x_3^2\} \leq x_3x_5$ ja neljännen epäyhtälön perusteella puolestaan $x_4x_2 \geq \min\{x^5, x_1^2\} \geq x_3x_5$. Täten $x_1 \leq x_2$, eli päinvastoin kuin oletettiin. Kaikkiaan oletus siitä, että epäyhtälöryhmän ratkaisussa jotkin kaksi tuntematonta olisivat eri lukuja, on johtnut ristiriitaan.

72.5. *Olkoot f ja g välillä $(-\infty, +\infty)$ määriteltyjä funktioita, jotka toteuttavat kaikilla x ja y yhtälön*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y).$$

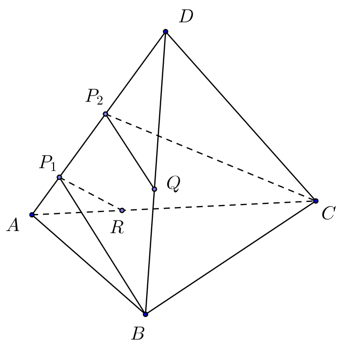
Osoita, että jos $f(x)$ ei ole identtisesti 0 ja jos $|f(x)| \leq 1$ kaikilla x, niin $|g(y)| \leq 1$ kaikilla y.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus $|g(y)| > 1$ jollain y. On olemassa x, jolle $f(x) \neq 0$. Silloin

$$(1 + |g(y)|)|f(x)| < 2|f(x)||g(y)| = |f(x+y) + f(x-y)| \leq |f(x+y)| + |f(x-y)|.$$

Ainakin toinen luvuista $|f(x+y)|$, $|f(x-y)|$ on silloin suurempi kuin $\dfrac{1}{2}(1+|g(y)|)|f(x)| > |f(x)| > 0$. Voidaan olettaa, että tämä luku on $|f(x+y)|$. Merkitään $a = \dfrac{1}{2}(1+|g(y)|$. Siis $a > 1$. Mutta jos nyt x korvataan luvulla $x+y$, ja huomataan, että $|f(x+y)| > |f(x)|$, niin sama päättely kuin edellä antaa $|f(x+2y)| > a|f(x+y)| > a^2|f(x)|$. Prosessia voidaan jatkaa, ja saadaan $|f(x+ny)| > a^n|f(x)|$. Koska $a > 1$, a^n on tarpeeksi suurilla n:n arvoilla suurempi kuin kiinteä luku $|f(x)|^{-1}$. Ei siis voi olla $|f(x+ny)| \leq 1$ kaikilla n, joten vastaoletus johti ristiriitaan tehtävän oletusten kanssa. Tehtävän väite on siis tosi.

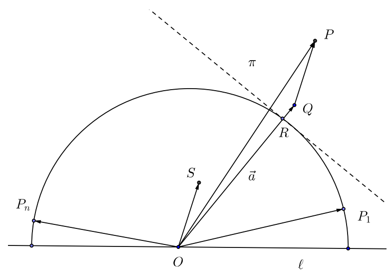
72.6. *On annettu neljä eri yhdensuuntaista tasoa. Osoita, että on olemassa sellainen säännöllinen tetraedri, että jokaisella annetuista tasoista on yksi tetraedrin kärki.*



Ratkaisu. Olkoot annetut neljä tasoa τ_1, τ_2, τ_3, τ_4. Voidan olettaa, että kolme viimeistä tasoa ovat samassa τ_1:n rajaamassa puoliavaruudessa ja että τ_1:n normaali leikkaa tasot indeksien numerojärjestyksessä. Olkoon d_i tasojen τ_i ja τ_{i+1} välinen etäisyys. Jos nyt $ABCD$ on mielivaltainen säännöllinen tetraedri, voidaan valita särmältä AD pisteet P_1 ja P_2, jotka jakavat särmän suhteessa $d_1 : d_2 : d_3$, särmältä BD piste Q, joka jakaa sen suhteessa $d_2 : d_3$ ja vielä särmältä AC piste R, joka jakaa sen suhteessa $d_1 : d_2$. Nyt kolmiot P_1BD ja P_2QD ovat yhdenmuotoisia (sks), samoin kuin kolmiot ARP_1 ja ACP_2. Edellisestä yhdenmuotoisuudesta seuraa $P_1B \| P_2D$, jälkimmäisestä $P_1R \| P_2C$. Tasoilla BRP_1 ja QCP_2 on siis kaksi paria yhdensuuntaisia suoria, joten tasot ovat yhdensuuntaiset. Kun vielä tetraedrin kärkien A ja D kautta asetetaan näiden kahden tason kanssa yhdensuuntaiset tasot, on löydetty neljä yhdensuuntaista tasoa, joista kukin sisältää yhden tetraedrin $ABCD$ kärjistä ja joiden etäisyyksien suhde on $d_1 : d_2 : d_3$. On olemassa sellainen avaruuden yhdenmuotoisuuskuvaus, joka vie nämä neljä tasoa tasoiksi τ_1, τ_2, τ_3, τ_4. Tetraedri, jonka kärjet ovat $ABCD$:n kärkien kuvat tässä kuvauksessa, on tehtävässä vaadittu tetraedri.

73.1. *Olkoon piste O suoralla ℓ ja olkoot $\overrightarrow{OP}_1$, $\overrightarrow{OP}_2$, ..., $\overrightarrow{OP}_n$ yksikkövektoreita. Oletetaan lisäksi, että kaikki pisteet P_i sijaitsevat ℓ:n sisältävässä tasossa suoran ℓ samalla puolella. Osoita, että jos n on pariton, niin*

$$|\,\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP} + \cdots + \overrightarrow{OP}_n\,| \geq 1.$$



Ratkaisu. Todistetaan väite oikeaksi induktiolla. Se on selvästi tosi, kun $n = 1$. Olkoon $n \geq 3$. Oletetaan, että väite pätee $(n-3)$:lle vektorille. Olkoot pisteet P_1, P_2, ..., P_n tässä järjestyksessä suoran ℓ rajoittamalla O-keskisellä 1-säteisellä puoliympyränkaarella $\mathcal{K}$. Olkoon vielä

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OP}_2 + \overrightarrow{OP}_3 + \cdots \overrightarrow{=P}_{n-1}.$$

Induktio-oletuksen nojalla $|\overrightarrow{a}| \geq 1$. Olkoon Q sellainen piste, että $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OQ}$. Janalla OQ ja kaarella $\mathcal{K}$ on yhteinen piste R, ja Q on siinä puolitasossa π, jonka rajaa $\mathcal{K}$:n R:n kautta kulkeva tangentti ja jossa O ei ole. Vektori $\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_n = \overrightarrow{OS}$, missä S on kulman $\angle P_1OP_n$ puolittajalla. Tästä seuraa, että $\angle SOQ$ on terävä kulma. Nyt $\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP} + \cdots + \overrightarrow{OP}_n = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$, missä $QP \| OS$. Selvästi myös piste S on puolitasossa π, ja siis etäämpänä pisteesto O kuin puoliympyrä $\mathcal{K}$. Induktioaskel on otettu.

73.2. *Selvitä, onko kolmiulotteisessa avaruudessa olemassa sellainen äärellinen pistejoukko M, jonka pisteet eivät ole samassa tasossa, että jos A, $B \in M$, on olemassa C, $D \in M$ niin, että suorat AB ja CD ovat yhdensuuntaiset, mutta eivät ole sama suora.*

Ratkaisu. Helpon esimerkin tällaisesta joukosta muodostaa kuution särmien keskipisteiden joukko. Jos suora AB ei sisällä kuution keskipistettä M, C ja D voidaan valita A:n ja B:n peilikuviksi M:n suhteen. Jos AB kulkee M:n kautta, CD voidaan valita neljällä eri tavalla kuution AB:n suuntaisilta sivutahkoilta.

73.3. *Olkoot a ja b sellaisia reaalilukuja, että yhtälöllä*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

on ainakin yksi reaalinen juuri. Määritä summan $a^2 + b^2$ pienin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. Koska $x = 0$ ei toteuta tehtävän yhtälöä, yhtälön juuret ovat samat, kuin yhtälön

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$$

juuret. Koska $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$, tehtävän yhtälöllä voi olla reaalijuuria vain, jos toisen asteen yhtälöllä

$$y^2 + ay + b - 2 = 0$$

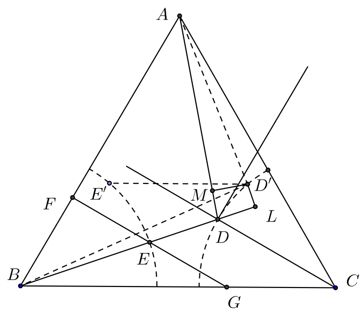
on ainakin yksi ratkaisu y, jolle $|y| \geq 2$. Yhtälön ratkaisut ovat

$$y = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 8}\right).$$

Jotta olisi $|y| \geq 2$, on oltava joko $a > 0$ ja $a + \sqrt{a^2 - 4b + 8} \geq 4$ tai $a \leq 0$ ja $-a + \sqrt{a^2 - b + 8} \geq 4$. Edellisestä ehdosta seuraa, että on oltava $a \geq 0$ ja $2a - b \geq 2$, jälkimmäisestä $a \leq 0$ ja $2a + b \leq -2$. Suorien $2a - b = 2$ ja $2a + b = -2$ etäisyys ab-tason origosta on $\frac{2}{\sqrt{5}}$; piste (a, b) kuuluu kummassakin tarkasteltavassa tapauksessa puolitasoon, johon origo ei kuulu ja jota rajoittaa jompikumpi mainituista suorista. Siis välttämätön ratkaisun olemassaolon ehto on $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$. Osoitetaan, että se on riittävä: jos $a = -\frac{4}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$, niin $a^2 + b^2 = \frac{4}{5}$ ja $x = 1$ on tehtävän yhtälön ratkaisu.

73.4. *Sotilaan on varmistettava, että eräässä tasasivuisen kolmion muotoisessa alueessa tai sen reunalla ei ole miinoja. Miinaharavan varsi on niin pitkä, että hän ylettyy sillä itsestään etäisyydelle, joka on puolet kolmion korkeudesta. Sotilas lähtee liikkeelle kolmion kärjestä. Mikä on lyhin tie, jota kulkien hän voi tutkia koko alueen?*

Ratkaisu. Olkoon tehtävän kolmio ABC ja h sen korkeus. Voidaan olettaa, että sotilas lähtee liikkeelle kärjestä A. Hänen on varmasti käytävä C- ja B-keskisillä $\frac{h}{2}$-säteisillä ympyränkaarilla k_C ja k_B. Osoitetaan ensin, että jos D' on kaaren k_C kiinteä ja E' kaaren k_B liikkuva piste, niin $D'E'$ on lyhin silloin, kun E' on janalla BD'. Tämä seuraa siitä, että $D'E' = D'E' + E'B - E'B \geq DB - \frac{h}{2}$, ja yhtäsuuruus on voimassa silloin ja vain silloin, kun E' on janalla



BS'. Olkoon sitten D k_C:n ja kulman $\angle BCA$ puolittajan leikkauspiste. Osoitetaan, että $AD + DB \leq AD' + D'B$ kaikilla k_C:n pisteillä D'. Voidaan valita D' samalta puolelta suoraa CD kuin A. Olkoot L ja M pisteen D' kohtisuorat projektiot suorilla BD ja AD. Koska kolmio ABD on tasakylkinen, kulman $\angle MDL$ puolittaja on AB:n suuntainen ja kohtisuorassa CD:tä vastaan. Mainittu kulmanpuolittaja on siis k_C:n tangentti. Tästä seuraa, että $\angle LDD' < \angle MDD'$ ja edelleen (kulmien kosinit!) $MD < DL$. Suorakulmaisista kolmioista $D'AM$ ja $D'BL$ nähdään, että $AD' > AM$ ja $D'B > BL$. Siis

$$AD'+BD' > AM+BL = (AD-MD)+(BD+DL) = AD+BD+(DL-MD) > AB+BD.$$

Olkoon E BD:n ja k_B:n leikkauspiste. On vielä osoitettava, että kolmion jokainen piste on enintään etäisyydellä $\frac{h}{2}$ jostain murtoviivan ADE pisteestä. Leikatkoon E:n kautta piirretty DC:n suuntainen suora AB:n pisteessä F ja CB:n pisteessä G. Koska D on kolmion ABC C:stä piirretyn korkeusjanan keskipiste, niin murtoviivan mielivaltaisen pisteen kautta piirretty CD:n suuntainen suora leikkaa AF:n ja joko AC:n tai CG:n pisteissä, joiden etäisyys P:stä on enintään $\frac{h}{2}$. Sotilas voi siis tutkia nelikulmion $AFGC$ murtoviivalta ADE. Mutta kolmion FBG jokaisen kärjen etäisyys E:stä on enintään $\frac{h}{2}$, joten tämä kolmio voidaan tutkia pisteestä E.

73.5. *On annettu epätyhjä joukko G funktioita f, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Joukolla G on seuraavat ominaisuudet:*

(1) Jos $f, g \in G$, niin $g \circ f \in G$ ($(g \circ f)(x) = g(f(x))$).

(2) Jos $f \in G$, niin myös käänteisfunktio $f^{-1} \in G$ (jos $f(x) = ax + b$, niin $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$).

(3) Jokaista $f \in G$ kohden on olemassa x_f siten, että $f(x_f) = x_f$. Osoita, että on olemassa k, jolle $f(k) = k$ kaikilla $f \in G$.

Ratkaisu. Oletetaan seuraavassa, että kaikki mainitut funktiot kuuluvat joukkoon G. Jos $f(x) = x + b$, niin ehdon (3) perusteella on oltava $b = 0$. Funktiolle $f(x) = x$ x_f:ksi käy jokainen reaaliluku. Jäljelle jäävät funktiot $f(x) = ax + b$, missä $a \neq 1$. Olkoon siis $f_1(x) = ax + b$ ja $f_2(x) = ax + b'$. Silloin $f_1^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$ ja $\left(f_2 \circ f_1^{-1}\right)(x) =$

$a\left(\frac{1}{a}(x-b)\right)+b' = x-b+b'$. On siis oltava $b = b'$ eli b on a:n funktio. Funktion $f(x) = ax+b$ kiintopiste x_f on ehdon $ax_f + b = x_f$ toteuttava piste eli piste $x_f = \frac{b}{1-a}$. Osoitetaan, että x_f on jokaisen G:hen kuuluvan funktion kiintopiste. Tarkastellaan funktioita $f(x) = ax+b$ ja $g(x) = cx+d$. Nyt $(f\circ g)(x) = a(cx+d)+b = acx+ad+b$ ja $(g\circ f)(x) = c(ax+b)+d = acx+bc+d$. Edellä sanotusta seuraa, että $ad+b = bc+d$ eli

$$x_f = \frac{b}{1-a} = \frac{d}{1-c} = x_g.$$

73.6. *Olkoot* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *positiivisia lukuja ja* $0 < q < 1$. *Etsi* n *reaalilukua* $b_1, b_2, \ldots, b_n$*, joille pätee*

a) $a_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$;

c) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

Ratkaisu. Valitaan kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$

$$b_k = a_1q^{k-1} + a_2q^{k-2} + \cdots + a_k + a_{k+1}q + \cdots + a_nq^{n-k}.$$

Silloin varmasti $b_k > a_k$ kaikilla k, joten ehto a) täyttyy. Ehdon b) tarkastelemiseksi lasketaan $qb_k - b_{k+1}$ ja $qb_{k+1} - b_k$. Saadaan

$$\begin{aligned} qb_k - b_{k+1} &= \left(a_1q^k + a_2q^{k-1} + \cdots + a_kq + a_{k+1}q^2 + \cdots + a_n^{n-(k-1)}\right) \\ &\quad - \left(a_1q^k + a_2q^{k-1} + \cdots + a_{k+1} + a_{k+2}q + \cdots + a_nq^{n-(k+1)}\right) \\ &= \left(q^2-1\right)\left(a_{k+1} + \cdots + a_nq^{n-k-1}\right) < 0. \end{aligned}$$

Samoin nähdään, että $qk_{k+1} - b_k < 0$. Kaikkiaan siis

$$q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q},$$

ja ehto b) täyttyy. Kun termejä sopivasti järjestetään, nähdään vielä, että

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &< \sum_{k=1}^n a_k + 2\sum_{j=1}^{n-1}\left(q_j\sum_{k=1}^n a_k\right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{j=0}^n q^j + \sum_{j=1}^n q^j\right) \\ &< \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{j=0}^\infty q^j + \sum_{j=1}^\infty q^j\right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q}\right) \\ &= \frac{1+q}{1-q}\sum_{k=1}^n a_k. \end{aligned}$$

Siis myös ehto c) toteutuu.

74.1. *Henkilöt A, B ja C pelaavat seuraavaa peliä. Kolmelle kortille on kullekin merkitty eri kokonaisluku. Näille luvuille p, q ja r pätee $0 < p < q < r$. Kortit sekoitetaan ja jokaiselle pelaajalle jaetaan yksi kortti. Sen jälkeen kullekin pelaajalle annetaan niin monta kuulaa kuin kortissa oleva luku osoittaa. Kortit kerätään pois, mutta kuulat jäävät pelaajille. Pelikierros käydään läpi ainakin kahdesti. Viimeisen kierroksen jälkeen A:lla on 20, B:llä 10 ja C:llä 9 kuulaa. B sai viimeisellä kierroksella r kuulaa. Kuka sai ensimmäisellä kierroksella q kuulaa?*

Ratkaisu. Olkoon $n > 2$ pelikierrosten lukumäärä. Silloin $n(p+q+r) = 20+10+9 = 39$. Koska $p+q+r \geq 1+2+3 = 6$, on oltava $n = 3$ ja $p+q+r = 13$. Jos olisi $r = 4$, olisi $p+q+r \leq 12$. Siis $r \geq 5$. Koska B sai viimeisellä kierroksella r kuulaa ja B kokonaiskuulamäärä on $10 < p+q+r$, hän sai sai kahdella ensimmäisellä kierroksella vähemmän kuin $p+q$ kuulaa. B sai siis molemmilla ensimmäisillä kierroksilla p kuulaa. A:n kuulamäärä on suurempi kuin $p+q+r$ ja lisäksi kolmella jaoton. Jos hän olisi saanut jommallakummalla ensimmäisistä kierroksista muun määrän kuulia kuin r, hänen kokonaiskuulamääränsä olisi enintään $2q + r = p+q+r+(q-p) = 13+q-p$. Silloin olisi $q - p = 20 - 13 = 7$ joten olisi oltava $q \geq 8$ ja $q + r \geq 8 + 9 = 17$. Pelaaja A sai siis ensimmäisellä kierroksella r kuulaa, joten q kuulaa sillä kierroksella sai C.

74.2. *Osoita, että silloin ja vain silloin, kun*

$$\sin A \sin B \leq \sin^2 \frac{C}{2},$$

on kolmion ABC sivulla AB sellainen piste D, että CD on AD:n ja DB:n geometrinen keskiarvo.

Ratkaisu. Oletetaan, että $CD^2 = AD \cdot DB$. Jos $\angle ACD = \gamma_1$ ja $\angle DCB = \gamma_2$, niin sinilauseesta ja kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavoista saadaan heti

$$1 = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{DB}{CD} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin A}\frac{\sin\gamma_2}{\sin B} = \frac{\frac{1}{2}\left(\cos(\gamma_1-\gamma_2) - \cos(\gamma_1+\gamma_2)\right)}{\sin A \sin B}$$
$$\leq \frac{\frac{1}{2}(1-\cos C)}{\sin A \sin B} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}C}{\sin A \sin B}.$$

Oletetaan sitten, että tehtävän epäyhtälö on voimassa. Jos määritellään

$$f(x) = \frac{\cos x - \cos C}{2\sin A \sin B},$$

niin f on jatkuva, $f(C) = 0$ ja

$$f(0) = \frac{1-\cos C}{2\sin A \sin B} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}C}{\sin A \sin B} \geq 1.$$

On siis olemassa jokin x, $0 \leq x \leq C$, jolle $f(x) = 1$. Nyt $\gamma_1 = \frac{1}{2}(x+C) < C$. Jos piirretään suora, joka kulkee C:n kautta, muodostaa suoran CA kanssa kulman γ_1 ja leikkaa sivun AB pisteessä D, niin toistamalla edellä esitetty sinilauseeseen perustuva lasku nähdään, että CD todellakin on AD:n ja DB:n geometrinen keskiarvo.

74.3. *Osoita, että luku*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+2} 2^{3k}$$

ei ole jaollinen 5:llä, oli n mikä luonnollinen luku hyvänsä.

Ratkaisu. Tehtävän summassa esiintyy "joka toinen" binomikerroin. Pyritään summaan, jossa ovat "peräkkäiset" binomikertoimet. Merkitään

$$x = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+2} 2^{3k} = 2^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{\frac{3}{2}(2k+1)},$$

$$y = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^{3k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^{\frac{3}{2}2k}.$$

Nyt binomikaavan nojalla

$$2^{\frac{3}{2}}x + y = \left(2^{\frac{3}{2}} + 1\right)^{2n+1} \quad \text{ja} \quad 2^{\frac{3}{2}}x - y = \left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)^{2n+1}.$$

Kun edelliset yhtälöt kerrotaan puolittain, saadaan

$$8x^2 - y^2 = (8-1)^{2n+1} = 7^{2n+1}.$$

Nyt $7 \equiv 2 \bmod 5$, $7^2 \equiv -1 \bmod 5$, joten $7^{2n+1} \equiv \pm 2 \bmod 5$. Koska y^2 on aina 0 tai ± 1 mod 5, ei voi olla $8x^2 \equiv 0 \bmod 5$. Siis x^2 ja edelleen x on viidellä jaoton.

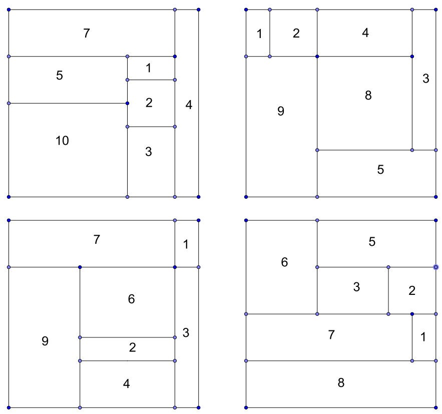
74.4. *8×8-ruutuinen šakkilauta jaetaan p:ksi suorakaiteeksi niin, että laudan ruudut säilyvät kokonaisina. Jako toteuttaa seuraavat ehdot.*

1) Jokaisessa suorakaiteessa on yhtä monta valkoista ja mustaa ruutua.

2) Jos a_i on i:nnen suorakaiteen valkoisten ruutujen määrä, niin $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.

Etsi suurin p:n arvo, jolla jako on mahdollinen. Määritä kaikki tähän p:n arvoon liittyvät jonot $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Ratkaisu. Koska šakkilaudassa on 32 valkoista ruutua, $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 32$. Toisaalta $a_k \geq k$ kaikilla k, joten $a_1 + a_2 + \cdots + a_p \geq \frac{1}{2}p(p+1)$. Täten suurin mahdollinen p:n arvo on 7. Luku 32 voidaan kirjoittaa seitsemän eri positiivisen kokonaisluvun summaksi viidellä eri tavalla:



$$1+2+3+4+5+6+11,$$
$$1+2+3+4+5+7+10,$$
$$1+2+3+4+5+8+9,$$
$$1+2+3+4+6+7+9,$$
$$1+2+3+5+6+7+8,$$

Ensimmäistä summaa vastaavaa jakoa ei voi tehdä, joska se edellyttäisi suorakaidetta, jossa on 22 ruutua; tällainen suorakaide voi olla vain 2×11- tai 1×22-suorakaide, jollainen ei mahdu 8×8-laudalle. Sen sijaan neljään viimeiseen summaan liittyvät jaot ovat mahdollisia, mikä huomataan helposti kokeilemalla, esimerkiksi oheisen muvan mukaisesti.

74.5. *Määritä kaikki mahdolliset lausekkeen*

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

arvot, kun a, b, c, d ovat positiivisia reaalilukuja.

Ratkaisu. Selvästi

$$1 = \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} < S$$
$$< \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2.$$

Osoitetaan vielä, että S voi saada välin $]1, 2[$ jokaisen luvun arvokseen. Kun $a = b$ ja $c = d$, niin

$$S = \frac{2a}{2a+c} + \frac{2c}{a+2c}.$$

Olkoon c mielivaltainen. Kun $a = c$, $S = \frac{4}{3}$. Kun $a \to 0$, niin $S \to 1$. Jatkuvana a:n funktiona S saa kaikki välin $\left]0, \frac{4}{3}\right]$ arvot. Olkoon sitten $a = c$ ja $b = d$. Silloin

$$S = \frac{2a}{a+2b} + \frac{2b}{2a+b}.$$

Olkoon b mielivaltainen. Kun $a = b$, $S = \frac{4}{3}$. Kun $a \to 0$, niin $S \to 2$. Jatkuvana a:n funktiona S saa kaikki välin $\left[\frac{4}{3}, 2\right[$ arvot.

74.6. *Olkoon P kokonaislukukertoiminen polynomi, joka ei ole vakio. Oletetaan, että on olemassa täsmälleen $n(P)$ kokonaislukua k, joille $P(k)^2 = 1$. Osoita, että*

$$n(P) - \deg(P) \le 2,$$

kun $\deg(P)$ on polynomin P asteluku.

Ratkaisu. Koska P ei ole vakio, sen aste on ainakin 1. Polynomien nollakohtien määrä ei ole suurempi kuin sen aste. Toisaalta $\deg(P^2) = 2\deg(P)$. Jos nyt $\deg(P) \le 2$, niin

$$n(P) \le \deg(P^2) = 2\deg(P) \le \deg(P) + 2,$$

joten väite on triviaalisti totta, kun polynomi on ensimmäistä tai toista astetta. Oletetaan siis nyt, että $\deg(P) \ge 3$ ja että jollain polynomilla $n(P) > \deg(P) + 2$. Koska lukuja x, joilla $P(x) = 1$, on enintään $\deg(P)$ kappaletta, on olemassa ainakin kolme lukua x, joille $P(x) = -1$. Olkoon b yksi näistä. Voidaan olettaa, että $b = 0$. (Ellei näin ole, tarkastellaan polynomia $P_1(x) = P(x+b)$, jonka aste on sama kuin P:n ja jolle $n(P_1) = n(P)$.) Jos nyt $P(x) = 1$, jos ja vain jos $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$, niin

$$P(x) - 1 = Q(x)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m),$$

missä Q on myös kokonaislukukertoiminen polynomi. Kun edelliseen yhtälöön sijoitetaan $x = 0$, saadaan

$$-2 = (-1)^m Q(0) k_1 k_2 \cdots k_m.$$

Luvut $|k_j|$ ovat enintään 2, ja vain yksi voi on $= 2$. Siis on oltava $m \le 3$. Aivan samoin päätellään, että yhtälöllä $P(x) = -1$ on enintään kolme eri juurta. Siis $n(P) \le 6$ ja $\deg(P) + 2 < 6$. On siis oltava $\deg(P) = 3$. Polynomin P muodon on oltava $P(x) = c(x^2 - 1)(x - 2a) + 1$, missä $a = 1$ tai $a = -1$. Lisäksi $-1 = P(0) = 2ac + 1$, joten $ac = -1$ ja $c = -a$. Yhtälö $P(x) = -1$ on silloin sama kuin yhtälö $ax^3 - 2x^2 - ax = 0$. Tämän yhtälön ratkaisut ovat $x = 0$ ja

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{a}.$$

Jälkimmäiset ratkaisut eivät ole kokonaislukuja, joten vastaoletus johti ristiriitaan ja on siis väärä.