Vuoden 1991 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Osoitetaan ensin, että kaikki luvut 2^{5^k} ovat muotoa $100p+32$. Tämä nähdään induktiolla: kun $k=1$ asia on selvä ($2^5=32$). Oletetaan, että $2^{5^k}=100p+32$. Silloin

$$2^{5^{k+1}}=\left(2^{5^k}\right)^5=(100p+32)^5=100q+32^5$$

ja

$$(30+2)^5=30^5+5\cdot 30^4\cdot 2+10\cdot 30^3\cdot 4+10\cdot 30^2\cdot 8+5\cdot 30\cdot 16+32=100r+32.$$

Tehtävän summan kaksi viimeistä numeroa ovat samat kuin luvun $1991\cdot 32$ kaksi viimeistä numeroa eli 12.

2. Kolmion ABF ala ei riipu pisteen F valinnasta. Merkitään DE:n ja AF:n leikkauspistettä P:llä ja BF:n ja CE:n leikkauspistettä Q:lla. Kysytty ala maksimoituu, kun kolmioiden AEP ja EBQ yhteenlaskettu ala minimoituu. Merkitään vielä puolisuunnikkaan korkeutta h:lla, kolmioiden AEP ja EBQ korkeuksia h_1:llä ja h_2:lla sekä janojen AE, EB ja CD sekä DF pituuksia a:lla, b:llä, c:llä ja x:llä. Koska kolmiot AEP ja FDP ovat yhdenmuotoiset ja samoin BQE ja FQC, saadaan

$$\frac{h_1}{a}=\frac{h-h_1}{x}\qquad\text{ja}\qquad\frac{h_2}{b}=\frac{h-h_2}{c-x}.$$

Näistä ratkaistaan

$$h_1=\frac{ha}{a+x}\qquad\text{ja}\qquad h_2=\frac{hb}{b+c-x}.$$

Kolmioiden yhteenlaskettu ala on

$$\frac{h}{2}\left(\frac{a^2}{a+x}+\frac{b^2}{b+c-x}\right).$$

Tehtävä on siten minimoida funktio

$$f(x)=\frac{a^2}{a+x}+\frac{b^2}{b+c-x},$$

kun $0\le x\le c$. Lasketaan derivaatta

$$f'(x)=-\frac{a^2}{(a+x)^2}+\frac{b^2}{(b+c-x)^2}$$

ja toinen derivaatta

$$f''(x)=\frac{2a^2}{(a+x)^3}+\frac{2b^2}{(b+c-x)^3}.$$

Koska toinen derivaatta on positiivinen, kun $0 \le x \le c$, ensimmäinen derivaatta kasvaa aidosti. $f'(x) = 0$ vain, kun $x = \dfrac{ac}{a+b} = x_0$. Tästä seuraa, että f vähenee, kun $x < x_0$, ja kasvaa, kun $x > x_0$, joten f:n minimi saavutetaan vain, kun $x = x_0$ eli kun

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{a+b}.$$

Tämä merkitsee, että tehtävän ratkaisee se piste F, joka jakaa sivun DC samassa suhteessa kuin E jakaa sivun AB.

3. Koska

$$\frac{1}{j^2} < \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j},$$

niin

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j^2} < \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{k-1}.$$

Tästä saadaan arvolla $k = 6$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} = \frac{2389}{3600} < \frac{2}{3}.$$

4. Olkoon $f(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \ldots + a_d$. Oletetaan, että f:llä on jokin kokonainen nollakohta m. Silloin $f(x) = (x-m)g(x)$, missä g on polynomi. Jos $g(x) = b_0x^{d-1} + b_1x^{d-2} + \ldots + b_{d-1}$, niin $a_0 = b_0$ ja $a_k = b_k - mb_{k-1}$, $1 \le k \le d-1$. Siten b_0 on kokonaisluku ja myös muut b_k:t ovat kokonaislukuja. Koska $f(j)$ on jaoton k:lla k:lla peräkkäisellä j:n arvolla, niin k peräkkäistä kokonaislukua $j - m$ ($j = n$, $n+1$, $\ldots$, $n+k-1$) ovat myös k:lla jaottomia. Tämä on ristiriita, sillä k:sta peräkkäisestä kokonaisluvusta aina tasan yksi on k:lla jaollinen! f:llä ei voi olla kokonaislukunollakohtaa.