Kirjevalmennus, tammi-/helmikuu 2017

Ratkaisuita toivotaan helmikuun loppuun mennessä postitse osoitteeseen

Lauri Hallila
Jussaarenkuja 5 J 104
00840 Helsinki

tai sähköpostitse osoitteeseen laurihallila@gmail.com.

Helpompia tehtäviä

1. Taululla on luvut 18 ja 19. Yhdellä askeleella voit lisätä taululle luvun, joka on kahden aiemmin taululle kirjoitetun luvun summa. Voitko päästä äärellisellä määrällä askelia lukuun 1994?

2. Jokaisessa 8×8-shakkilaudan ruudussa on kokonaisluku. Yhdellä siirrolla voit valita 3×3- tai 4×4-ruudukon ja lisätä sen jokaisen ruudun lukua yhdellä. Voitko aina päästä lopputulokseen, jossa jokainen shakkilaudan luku on jaollinen **a)** luvulla 2? **b)** luvulla 3?

3. Poistetaan luvusta 7^{1996} luvun ensimmäinen numero ja lisätään se jäljelle jääneeseen lukuun. Jatketaan näin, kunnes jäljellä on luku, jossa on 10 numeroa. Osoita, että tässä luvussa on ainakin kaksi samaa numeroa.

4. Aloitetaan $m \times n$-ruudukosta, jonka jokaisessa ruudussa on kokonaisluku. Yhdellä siirrolla voit muuttaa kaikkien yhden sarakkeen tai yhden rivin lukujen etumerkkiä. Osoita, että voit saada ei-negatiivisen summan mille tahansa riville tai sarakkeelle.

5. Piste U on kolmion ABC sivulla BC siten, että AU on kolmion kulmanpuolittaja. Piste O on kolmion ympärysympyrän (eli ympäripiirretyn ympyrän) keskipiste. Osoita, että janan AU keskinormaali, suora AO ja pisteen U kautta kulkeva janan BC normaali leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

6. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

7. Olkoon piste I kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste, piste X ympyrän sivuamispiste janalla BC ja piste Y ympyrän sivuamispiste janalla CA. Olkoon piste P suoran XY ja suoran AI leikkauspiste. Osoita, että $AI \perp BP$.

Vaativampia tehtäviä

8. Olkoon $0 \leq r < 1$ rationaaliluku. Todista, että

$$r = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \ldots + \frac{a_n}{n!},$$

joillekin kokonaisluvuille n, a_2, $\ldots$, a_n, joille $n \geq 2$ ja $0 \leq a_i < i$ kaikilla $2 \leq i \leq n$ ja lisäksi, että esitys on yksikäsitteinen.

9. Määritä kaikki (reaalikertoimiset) polynomit $P(x)$, joille

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x).$$

10. Olkoot a, b, c positiivisia reaalilukuja. Voidaanko kuution, jonka sivun pituus on $(a+b+c)$ jakaa kuuteen suorakulmaiseen särmiöön: kuutioihin, joiden sivujen pituudet ovat a, b ja c, ja kolmeen muotoa $(a+b) \times (b+c) \times (c+a)$ olevaan suorakulmaiseen särmiöön?

11. Viisinumeroinen luku jaetaan luvulla 100. Merkitään termillä k jaon kokonaislukuosaa ja termillä o jakojäännöstä. Kuinka monta viisinumeroista lukua on olemassa siten, että $11 \mid (k+o)$?

12. $m \times n$-ruudukossa, missä $m \geq 4$, on krokotiileja. Krokotiili voi hyökätä kaikkiin samalla sarakkeella oleviin ruutuihin ja vierekkäisiin samalla rivillä oleviin ruutuihin (yhteensä $m+2$ ruutuun). Mikä on pienin mahdollinen määrä krokotiileja, joita vaaditaan, jotta krokotiilit voivat hyökätä mihin tahansa ruudukon ruutuun?

13. Joukko $\mathrm{M} = \{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$ jaetaan k osajoukkoon siten, että jos $a + b = n^2$ ($a, b \in \mathrm{M}$, $a \neq b$, n on kokonaisluku), niin a ja b kuuluvat eri osajoukkoihin. Määritä luvun k pienin mahdollinen arvo.

14. $n \times n$-taulukko on *hyvä*, jos sen kaikki ruudut voidaan värittää kolmella värillä siten, että mille tahansa kahdelle riville ja kahdelle sarakkeelle 4 ruutua, jotka kuuluvat näistä sekä yhteen riviin että yhteen sarakkeeseen, eivät ole kaikki samanvärisiä.

- **a)** Osoita, että on olemassa hyvä 9×9-ruudukko.
- **b)** Osoita, että $n < 11$ mille tahansa hyvälle $n \times n$-taulukolle.