

1 Helmikuun 2012 vaikeat kirjevalmennustehtävät

Vastauksia voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen laurihallila@gmail.com, tai postitse osoitteeseen Kalliorinteenkuja 1, 02770 Espoo. Kysymyksiä tehtävistä voi esittää sähköpostitse.

1. Selvitä kaikkien sellaisten päättymättömien aritmeettisten jonojen lukumäärä, joissa luvut 1 ja 2005 ovat ensimmäisten kymmenen luvun joukossa.

2. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen kolmikot (a, b, c) , joille pätee

$$abc + ab + c = a^3.$$

3. Etsi luku

$$\left[\frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^{100}}{100!} \right].$$

Luku $[x]$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka ei ole lukua x suurempi.

4. Osoita, että

$$n\sqrt{2005} - m > \frac{1}{90n}$$

kaikille positiivisille kokonaisluvuille m ja n .

5. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joita kohti on olemassa alkuluvut p ja q siten, että $p + 2 = q$ ja luvut $2^n + p$ ja $2^n + q$ ovat myös alkulukuja.

6. Osoita, että

$$\frac{1}{2n} < \{n\sqrt{7}\} < 1 - \frac{1}{6n}$$

mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle n ($\{x\} = x - [x]$).

7. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jotka toteuttavat yhtälön

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n)$$

kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$.

8. Osoita, että mille tahansa positiivisille reaaliluvuille a ja b pätee

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right) \left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right) \left(2b + \frac{1}{2}\right).$$

9. Luvut a, b, c ja d toteuttavat ehdon

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d = 4(\sin a \sin b \sin c \sin d - \cos a \cos b \cos c \cos d),$$

missä $0 < a, b, c, d < \pi/2$. Etsi kaikki mahdolliset summan $a + b + c + d$ arvot.

10. a) Funktio $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ toteuttaa ehdon $f(n) = f(n + f(n))$ mille tahansa luonnolliselle luvulle n . Osoita, että jos funktion f arvojen lukumäärä on äärellinen, niin f on jaksollinen funktio.

b) Anna esimerkki ei-jaksollisesta funktiosta $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, jolle $f(n) = f(n + f(n))$ mille tahansa luonnolliselle luvulle n .