7. pohjoismainen kilpailu ??.??.1993

1. Olkoon F kaikilla x, $0 \le x \le 1$, määritelty kasvava reaalilukuarvoinen funktio, joka toteuttaa ehdot

(i) $\quad F\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{F(x)}{2}$

(ii) $\quad F(1-x) = 1 - F(x)$.

Määritä $F\left(\dfrac{173}{1993}\right)$ ja $F\left(\dfrac{1}{13}\right)$.

2. r-säteisen ympyrän sisään on piirretty kuusikulmio. Kuusikulmion sivuista kaksi on pituudeltaan 1, kaksi pituudeltaan 2 ja viimeiset kaksi pituudeltaan 3. Osoita, että r toteuttaa yhtälön

$$2r^3 - 7r - 3 = 0.$$

3. Etsi kaikki yhtälöryhmän

$$\begin{cases} s(x) + s(y) = x \\ x + y + s(z) = z \\ s(x) + s(y) + s(z) = y - 4 \end{cases}$$

ratkaisut, kun x, y ja z ovat positiivisia kokonaislukuja ja $s(x)$, $s(y)$ ja $s(z)$ ovat x:n, y:n ja z:n kymmenjärjestelmäesityksien *numeroiden lukumäärät*.

4. Merkitään $T(n)$:llä positiivisen kokonaisluvun n kymmenjärjestelmäesityksen *numeroiden summaa*.

a) Etsi positiiviluku N, jolle $T(k \cdot N)$ on parillinen kaikilla k, $1 \le k \le 1992$, mutta $T(1993 \cdot N)$ on pariton.

b) Osoita, että ei ole olemassa positiivista kokonaislukua N, jolle $T(k \cdot N)$ olisi parillinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.