Matematiikan olympiavalmennus 2015 – helmikuun vaikeammat tehtävät

Ratkaisuja

1. *Olkoon $p \geq 1$ ja $x, y, z > 0$. Osoita, että*

$$\frac{1}{2}3^{2-p}(x+y+z)^{p-1} \leq \frac{x^p}{y+z} + \frac{y^p}{x+z} + \frac{z^p}{x+y}.$$

Ratkaisu. Sovelletaan oikeaan puoleen Tšebyševin epäyhtälöä. Voidaan olettaa, että $x \leq y \leq z$, jolloin $x+y \leq x+z \leq y+z$. Tšebyševin epäyhtälön perusteella

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^p}{y+z} + \frac{y^p}{x+z} + \frac{z^p}{x+y}\right) \geq \frac{1}{3}(x^p + y^p + z^p) \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right). \tag{1}$$

Funktio $f(x) = x^p$, $p > 1$, on alaspäin kupera. Jensenin epäyhtälön perusteella

$$\left(\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)\right)^p \leq \frac{1}{3}(x_1^p + x_2^p + x_3^p). \tag{2}$$

Harmonisen ja aritmeettisen keskiarvon epäyhtälön perusteella

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z}\right) \geq \frac{3}{(x+y)+(x+z)+(y+z)} = \frac{3}{2(x+y+z)}. \tag{3}$$

Kun epäyhtälön (1) oikean puolen tekijöitä arvioidaan alaspäin epäyhtälöiden (2) ja (3) mukaisesti ja hiukan sievennetään, saadaan väite.

2. *Olkoot luvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivisia, ja olkoon S niiden summa. Osoita, että*

$$\frac{n^2}{2n-1} \leq \frac{S}{2S-x_1} + \frac{S}{2S-x_2} + \cdots + \frac{S}{2S-x_n}.$$

Ratkaisu. Tunnetusti positiivisille luvuille a ja b pätee $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$. Jos a_1, a_2, …, a_n ovat positiivisia lukuja, niin

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) \geq n + \binom{n}{2}2 = n + n(n-1) = n^2.$$

(Yhtälö- ja epäyhtälöketjun toisessa lausekkeessa olevassa summassa on yhteenlaskettavia yhtä monta kuin on mahdollisuuksia valita kaksi eri indeksiä i ja j kaikkiaan n:n indeksin joukosta.) Kun tätä sovelletaan lukuihin $a_i = \dfrac{S}{2S - x_i}$, saadaan

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{S}{2S-x_i} \sum_{i=1}^n \frac{2S - x_1}{S}.$$

Mutta epäyhtälön oikean puolen toinen summa on $\dfrac{2nS - S}{S} = 2n - 1$, joten väite seuraa.

3. *a) Todista, että jos kolmion sivut ovat a, b, c, sivua avastaaava kulma on α ja kolmion ala on A, niin*

$$a^2 = (b-c)^2 + 4A\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

b) Osoita, että a)-kohdan merkintöjä käyttäen kolmioille pätee

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4\sqrt{3}A$$

Ratkaisu. Kosinilauseen perusteella

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) = (b-c)^2 + 4A\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Mutta kaksinkertaisen kulman kosinin ja sinin lausekkeiden avulla nähdään heti[1], että

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2},$$

ja a)-kohdan väite on todistettu.

Edellä tehty päättely voidaan toistaa kolmion muiden kulmien osalta. Kun syntyneet epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4A\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right).$$

Funktio $f(x) = \tan x$ on alaspäin kupera välillä $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, joten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\frac{1}{3}\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right) \geq \tan\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = \tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

b)-kohdan väite on todistettu.

4. *Olkoot $a, b, c > 0$, ja lisäksi pätee $a + b + c = abc$. Todista, että*

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

(Vihje: Voisivatko luvut a, b, c liittyä jotenkin kolmioon?)

---

[1] Myös valmennuksen sivuilla olevan trigonometriaesityksen kohta 15.

Ratkaisu. Kolmion kulmille α, β, γ pätee $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma$. (Tämä on helppo todistaa, ks. esim. valmennuksen sivuilla olevan trigonometriaesityksen kohta 21.) Jos nyt valitaan α ja β väliltä $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ niin, että $a = \tan\alpha$ ja $b = \tan\beta$, niin ehdosta $a+b+c = abc$ ja mainitusta kolmion ominaisuudesta seuraa, että $c = \tan\gamma$, missä α, β, γ ovat erään kolmion kulmat ja $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Mutta silloin

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = \cos\alpha$$

ja vastaavasti

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = \cos\beta, \quad \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \cos\gamma.$$

Funktio $f(x) = \cos x$ on ylöspäin kupera välillä $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, joten Jensenin epäyhtälön perusteella

$$\frac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \leq \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Väite seuraa.

5. *Olkoot* $a_0, \ldots, a_n$ *lukuja välillä* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *niin, että*

$$\tan\left(a_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(a_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \tan\left(a_n - \frac{\pi}{4}\right) \geq n - 1.$$

Osoita, että $\tan a_0 \tan a_1 \cdots \tan a_n \geq n^{n+1}$.

Ratkaisu. Merkitään $\tan a_i = x_i$ ja $\tan\left(a_i - \frac{\pi}{4}\right) = y_i$. Koska *tan* $\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, niin

$$y_i = \tan\left(a_i - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \tan a_i}{1 + \tan a_i} = \frac{1 - x_i}{1 + x_i}. \tag{1}$$

Koska y_i on välillä $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ olevan kulman tangentti, niin $|y_i| < 1$. Yhtälöstä (1) voidaan ratkaista

$$x_i = \frac{1 + y_i}{1 - y_i}.$$

Tutkitaan funktioa f,

$$f(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

On helppo laskea, että

$$f'(y) = \frac{2}{1-y^2} > 0, \quad f''(y) = \frac{4y}{(1-y^2)^2} > 0,$$

kun $y > 0$. Funktio f on siis kasvava ja positiivisten lukujen joukossa alaspäin kupera. Jos kaikki luvut y_i ovat positiivisia, väite seuraa heti Jensenin epäyhtälöstä. Sen mukaan

$$\ln\left(\left(\prod_{i=0}^{n} x_i\right)^{1/(1+n)}\right) = \frac{1}{1+n}\sum_{i=0}^{n}\ln x_i = \frac{1}{1+n}\sum_{i=0}^{n}\ln\left(\frac{1+y_i}{1-y_i}\right) = \frac{1}{1+n}\sum_{i=0}^{n} f(y_i)$$
$$\geq f\left(\frac{1}{1+n}\sum_{i=0}^{n} y_i\right) \geq f\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1+\dfrac{n-1}{n+1}}{1-\dfrac{n-1}{n+1}}\right) = \ln\frac{2n}{2} = \ln n.$$

Tämä on yhtäpitävää väitteen

$$\prod_{i=0}^{n} x_i \geq n^{n+1}$$

kanssa.

Edellinen päättely ei kuitenkaan sellaisenaan toimi, jos lukujen y_i joukossa on negatiivisia lukuja. Koska lukuja y_i on $n+1$ kappaletta, jokainen on ≥ 1 ja niiden summa on ainakin $n-1$, niin kuitenkin enintään yksi luvuista voi olla negatiivinen. Oletetaan, että $y_0 < -a \leq 0$. Silloin

$$x_0 = \frac{1-a}{1+a}$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \geq n-1+a.$$

Kun Jensenin epäyhtälöä sovelletaan samoin kuin edellä lukuihin y_1, y_2, …, y_n, saadaan

$$\ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}\right) > \ln\left(\frac{1+\dfrac{n-1+a}{n}}{1-\dfrac{n-1+a}{n}}\right) = \ln\left(\frac{2n-1+a}{1-a}\right).$$

Siis

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\frac{2n-1+a}{1-a}\right)^n$$

ja

$$\prod_{i=0}^{n} x_i \geq \frac{1-a}{1+a}\left(\frac{2n-1+a}{1-a}\right)^n = \frac{(2n-1+a)^n}{(1-a^2)(1-a)^{n-2}} \geq (2n-1)^n \tag{2}$$

(kun $n \geq 2$) On helppo osoittaa, että $(2n-1)^n \geq n^{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, samoin kuin se, että (2) pätee myös, kun $n = 1$.

6. *Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, joille kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee*

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

Ratkaisu. Osoitetaan, että ainoa ehdon toteuttava funktio on se f, jolle $f(n) = n$ kaikilla n. Havaitaan ensin, että jos joillain m ja n on $f(m) = f(n)$, niin $3m = 3n$ ja $m = n$. Funktio f on siis injektio. Koska $f(x) \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{Z}_+$, yhtälö $f(f(f(1))) + f(f(1)) + f(1) = 3$ on mahdollinen vain, jos $f(1) = 1$. Nyt $f(2) \neq f(1) = 1$. Summan $f(f(f(2))) + f(f(2)) + f(2)$ jokainen yhteenlaskettava on ≥ 2, joten summa on 6 vain, jos $f(2) = 2$. Sama päättely kelpaa induktioaskeleeksi: jos $f(k) = k$ kaikilla $k < n$, niin $f(m) \geq n$ kaikilla $m \geq n$, joten $f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$ vain, jos $f(n) = n$.

7. *Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$, joille kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ja*

$$f(n+1) - 3f(n) + f(n-1) = 2(-1)^n.$$

Ratkaisu. Koska jokainen $f(n+1)$ määräytyy yksikäsitteisesti luvuista $f(n)$ ja $f(n-1)$, funktio f on yksikäsitteisesti määrätty. Nopeasti voi laskea, että $f(2) = 1$, $f(3) = 4 = 2^2$, $f(4) = 9 = 3^2$, $f(5) = 25 = 5^2$, $f(6) = 64 = 8^2$ jne. Tämä antaa aiheen epäillä, että $f(n) = F_n^2$, missä F_n on n:s Fibonaccin luku ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.) Osoitetaan induktiolla, että näin on. On jo sanottu, että $f(1) = F_1^2$ ja $f(2) = F_2^2$. Koska sekä jono $(f(n))$ että F_n^2 määräytyvät yksikäsitteisesti jonon kahdesta ensimmäisestä jäsenestä, väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että

$$F_{n+1}^2 = 3F_n^2 - F_{n-1}^2 + 2(-1)^n$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. (1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$F_{n-1}^2 - 2(-1)^n = 3F_n^2 - (F_n + F_{n-1})^2 = 2F_n^2 - F_{n-1}^2 - 2F_nF_{n-1}$$

eli

$$F_n^2 - F_{n-1}^2 = F_nF_{n-1} - (-1)^n. \tag{2}$$

Osoitetaan (2) todeksi induktiolla. (2) pätee pienillä n:n arvoilla. Otetaan (2) induktio-oletukseksi ja osoitetaan, että induktioaskel on otettavissa:

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 - F_n^2 = (F_n + F_{n-1})^2 - F_n^2 = 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 = 2F_nF_{n-1} + F_n^2 - F_nF_{n-1} + (-1)^n \\ = F_nF_{n-1} + F_n^2 + (-1)^n = F_{n+1}F_n - (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Tämä on (2) niin, että n on korvattu $n+1$:llä. Jonot $(f(n))$ ja (F_n^2) ovat samat. Siis $f(n) = F_n^2$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

8. *Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, joille pätee*

$$f(f(x)) = 6x - f(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$.

Ratkaisu. Olkoon $a > 0$ mielivaltainen. Määritellään $b_0 = a$ ja jos $b_0, \ldots, b_{k-1}$ on määritelty, asetetaan $b_k = f(b_{k-1})$. Silloin mielivaltaisella indeksillä k pätee

$$b_{k+2} = 6b_k - b_{k+1}. \tag{1}$$

Jono (b_k) toteuttaa ensimmäisen asteen differenssiyhtälön. Yhtälön ratkaisemiseksi kokeillaan yritettä $b_k = x^k$. Se toteuttaa differenssiyhtälön, jos $x^{k+2} = 6x^k - x^{k+1}$ eli $x^2 + x - 6 = 0$. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat $x = -3$ ja $x = 2$. Jos c_1 ja c_2 ovat mielivaltaisia vakioita, niin luvut

$$b_k = c_1(-3)^k + c_2 2^k = (-3)^k \left(c_1 + c_2 \left(-\frac{2}{3} \right)^k \right)$$

ovat yhtälön (1) ratkaisuja. Ne ovat yhtälön ainoat ratkaisut, sillä jonon luvut määräytyvät b_0:sta ja b_1:stä ja yhtälön (2) c_1 ja c_2 voidaan sovittaa niin, että b_0 ja b_1 ovat oikein. Jos nyt $c_1 \neq 0$, niin tarpeeksi suurilla k:n arvoilla

$$c_1 + c_2 \left(-\frac{2}{3} \right)^k$$

on $\neq 0$ ja itseisarvoltaan samanmerkkinen kuin c_1. Tällöin joka toinen b_k olisi negatiivinen, mikä ei ole mahdollista, koska f saa vain positiivisia arvoja. Siis $c_1 = 0$ ja $b_k = 2x^k$. Erityisesti $b_1 = f(a) = 2a$. Koska a on mielivaltainen, funktion f on oltava $f(x) = 2x$. – Heti nähdään, että $f(x) = 2x$ myös toteuttaa tehtävän ehdon.

9. *Olkoon $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ kasvava funktio, jolle $f(mn) = f(m)f(n)$ kaikilla keskenään yhteistekijättömillä luvuilla m, $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että on olemassa kokonaisluku $\alpha \geqslant 0$ siten, että $f(n) = n^\alpha$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Ratkaisu. Olkoon $m \geq 2$ kokonaisluku ja olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, jolloin

$$f(m^n - 1) \geq f(m^n - m) = f\left((m-1)m^{n-1}\right) = f(m-1)\left(f(m)\right)^{n-1}$$

ja

$$f(m^n + 1) \leq f(m^n + m) = f\left((m+1)m^{n-1}\right) = f(m+1)\left(f(m)\right)^{n-1}.$$

Siispä

$$\left(f(m)\right)^{n-1} f(m-1) \leq f(m^n) \leq \left(f(m)\right)^{n-1} f(m+1).$$

Tavoitteemme on todistaa, että lausekkeen $\log f(m)/\log m$ arvo ei riipu muuttujan m arvosta. Teemme tämän osoittamalla, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x} = \frac{\log f(m)}{\log m},$$

missä $x \in \mathbb{Z}_+$. Kun tämä on tehty, voimme valita

$$\alpha = \lim_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x}.$$

Olkoon $x \geq 2$ mielivaltainen kokonaisluku ja olkoon y se yksikäsitteinen kokonaisluku, jolle

$$m^y \leqslant x < m^{y+1}.$$

Toisin sanoen, $y = \lfloor \log x / \log m \rfloor$. Nyt

$$(f(m))^{y-1} f(m-1) \leq f(m^y) \leq f(x) \leq f(m^{y+1}) \leq (f(m))^y f(m+1),$$

mistä seuraa, että

$$(y-1)\log f(m) + \log f(m-1) \leq \log f(x) \leq y \log f(m) + \log f(m+1)$$

ja

$$\frac{y-1}{\log x} \cdot \log f(m) + \frac{\log f(m-1)}{\log x} \leq \frac{\log f(x)}{\log x} \leq \frac{y}{\log x} \cdot \log f(m) + \frac{\log f(m+1)}{\log x}.$$

Tässä termit $\log f(m-1)/\log x$ ja $\log f(m+1)/\log x$ lähestyvät nollaa, kun $x \to \infty$, kun taas termit $(y-1)/\log x$ ja $y/\log x$ lähestyvät arvoa $1/\log m$. Viimeksi mainittu seuraa esimerkiksi siitä, että

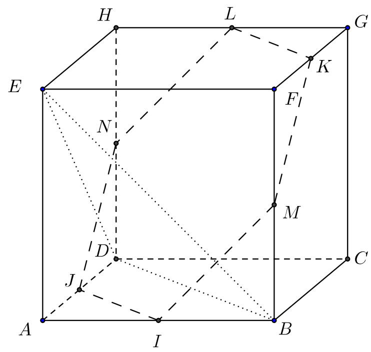
$$\left| \frac{y}{\log x} - \frac{1}{\log m} \right| = \left| \frac{1}{\log x} \left\{ \frac{\log x}{\log m} \right\} \right| \to 0, \quad \text{kun} \quad x \to \infty,$$

(missä on käytetty merkintää $\{c\} = c - \lfloor c \rfloor$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$) sillä onhan aina $\{c\} \in [0, 1[$. Tästä seuraa siis, että raja-arvo $\lim_{x\to\infty} \log f(x)/\log x$ on olemassa ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log f(x)}{\log x} = \frac{\log f(m)}{\log m},$$

joten olemme valmiit.

10. *Mitkä säännölliset monikulmiot ovat tason ja kuution mahdollisia leikkauksia?*



Ratkaisu. Tarkastellaan kuutiota $ABCDEFGH$. Janat BD, DE ja EB ovat jokainen kuution sivutahkojen lävistäjiä ja siis yhtä pitkiä. BDE on tasasivuinen kolmio. Luonnollisesti kuution ja tason leikkaus voi olla neliö. Olkoot sitten I ja J särmien AB ja AD keskipisteet ja K ja L särmien FG ja HG keskipisteet. Nyt $IJ \| BD \| FH \| KL$. Suorien IJ ja KL kautta voi siis asettaa tason. Se leikkaa BF:n ja HD näiden keskipisteissä M ja N. Kuusikulmion $IMKLNJ$ jokainen sivu on silloin puolet kuution sivutahkoneliön lävistäjästä, joten kuusikulmio on säännöllinen.
Jos taso leikkaa kuution niin, että syntynyt leikkauskuvio on viisikulmio, niin kaksi viisikulmion särmää on välttämättä kuution kahdessa yhdensuuntaisessa tasossa (laatikkoperiaate!). Särmät ovat silloin yhdensuuntaiset. Mutta säännöllisessä viisikulmiossa ei ole yhdensuuntaisia sivuja. Taso ei siis voi leikata kuutiota niin, että leikkauskuvio olisi säännöllinen viisikulmio. – Koska kuutiolla on kuusi sivutahkoa, kuution ja tason leikkauskuvio on enintään kuusikulmio.

11. *Olkoon P tetraedrin $ABCD$ sisäpiste ja olkoot x_1, x_2, x_3, x_4 P:n etäisyydet tasoista BCD, ACD, ABD, ABC sekä h_1, h_2, h_3, h_4 tetraedrin kärjistä A, B, C, D piirretyt korkeusjanat. Osoita, että*

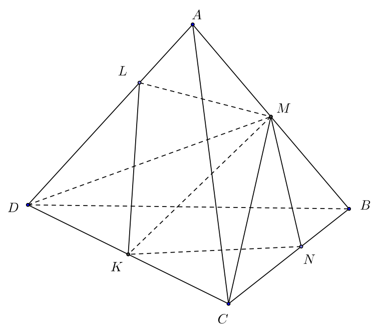
$$\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{h_i} = 1.$$

Ratkaisu. Kun P yhdistetään tetraedrin kärkiin, syntyy neljä tetraedria, joiden tilavuudet ovat $V_i = \frac{1}{3}x_iT_i$, missä T_i on sen $ABCD$:n sivutahkon ala, joka on sivutahkona myös i:nnessä P-kärkisessä tetraedrissa. Tetraedrin $ABCD$ tilavuus on $V = \frac{1}{3}h_iT_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Siis

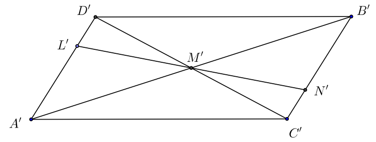
$$1 = \frac{V}{V} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V} = \sum_{i=1}^{4} \frac{V_i}{V} = \sum_{i=1}^{4} \frac{x_iT_i}{h_iT_i} = \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{h_i}.$$

12. *Olkoot M ja K tetraedrin $ABCD$ särmien AB ja CD keskipisteet. Osoita, että jokainen pisteiden M ja K kautta kulkeva taso jakaa $ABCD$:n kahdeksi tilavuudeltaan yhtä suureksi monitahokkaaksi.*

Ratkaisu. Olkoot L ja N ne pisteet, joissa tehtävän KM:n kautta kulkeva taso leikkaa särmät AD ja BC. Koska M on särmän AB keskipiste, pisteiden A ja B kohtisuora etäisyys tasosta MDC on sama. Taso MDC jakaa siis $ABCD$:n kahdeksi samatilavuuksiseksi tetraedriksi $ADCM$ ja $BDCM$. Tehtävän väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että taso $KLMN$ erottaa näistä samankokoisista tetraedreista samankokoiset tetraedrit $KCNM$ ja $KDML$. Verrataan tetraedreja $ABCD$ ja $MKCN$. Jälkimmäisen M:stä piirretty korkeus on puolet edellisen A:sta piirretystä korkeudesta ja koska K on DC:n keskipiste, $MKCN$:n sivutahkon KCN ala on $\frac{1}{2} \cdot \frac{CN}{CB}$ $ABCD$:n sivutahkosta BCD. Tetraedrien $MKCN$ ja $ABCD$ tilavuuksien suhde on siis $\frac{1}{4}\frac{CN}{CB}$. Aivan samoin osoitetaan, että tetraedrien $KDML$ ja $ABCD$ tilavuuksien suhde on $\frac{1}{4}\frac{DL}{DA}$. Tehtävän väitteen todistamiseksi riittää siis, kun osoitetaan, että $\frac{CN}{CB} = \frac{DL}{DA}$.



Tätä varten projisioidaan tetraedri $ABCD$ suoraa KM vastaan kohtisuoralle tasolle. Olkoon A:n projektio A' jne. Koska $K' = M'$, niin $A'M' = B'M'$ ja $D'M' = C'M'$. Tästä seuraa, että nelikulmio $A'D'B'C'$ on suunnikas. Koska LN ja KM ovat samassa tasossa, LN ja KM leikkaavat, joten $L'N'$ on



pisteen M' kautta kulkeva jana. Silloin kolmiot $M'L'D'$ ja $M'N'C'$ ovat yhteneviä (kks), joten $D'L' = C'N'$. $A'D'$ ja $C'B'$ ovat suunnikkaan vastakkaisina sivuina yhtä pitkät, joten $\dfrac{C'N'}{C'B'} = \dfrac{D'L'}{D'A'}$. Pituuksien suhteet säilyvät projektiossa, joten myös $\dfrac{CN}{CB} = \dfrac{DL}{DA}$, ja väite on todistettu.

13. *Olkoot a, b, c, d reaalilukuja ja $a + b + c = 0$. Osoita: A, B, C pisteitä avaruudessa, niin kaikki pisteet P, joille $a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 = d$, ovat samassa tasossa.*

Ratkaisu. Ratkaistaan tehtävä analyyttista geometriaa käyttäen. Olkoon $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ ja $C = (c_1, c_2, c_3)$ ja $P = (x, y, z)$. Tehtävän ehto on sama kuin

$$d = a\left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2\right) + b\left((x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + (z-b_3)^2\right) +$$
$$+c\left((x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 + (z-c_3)^2\right) = (a+b+c)(x^2+y^2+z^2) + 2(aa_1+bb_1+cc_1)x +$$
$$+2(aa_2+bb_2+cc_2)y + 2(ac_1+bc_2+cc_3)z + a(a_1^2+b_1^2+c_1^2) + b(a_2^2+b_2^2+b_3^2) + c(a_3^2+b_3^2+c_3^2).$$

Koska $a + b + c = 0$, tämä on muotoa $a'x + b'y + c'z = d'$, eli tason yhtälö.

14. *Olkoon $\mathcal{P}$ pallo ja pisteet A ja B sen ulkopuolella. Osoita, että ne pisteet, joissa A:sta ja B:stä $\mathcal{P}$:lle piirretyt tangentit voivat leikata, ovat kahdessa tasossa. [Vihje: edellisestä tehtävästä on hyötyä.]*

Ratkaisu. Olkoon O pallon $\mathcal{P}$ keskipiste ja r sen säde. Olkoon M jokin tehtävän mukainen tangenttien leikkauspiste. Sivutkoot AM ja BM palloa $\mathcal{P}$ pisteissä Q ja S. Silloin $MQ = MS = t$. Riippuen A:n B:n, $\mathcal{P}$:n ja M:n sijainneista toisiinsa nähden on $AM = AQ \pm t$ ja $BM = PS \pm t$. Jos $OA = a$ ja $OB = b$, on $AQ^2 = a^2 - r^2$ ja $BQ^2 = b^2 - r^2$. Lisäksi $OM^2 = r^2 + t^2$. Jos edellä molemmissa $\pm$-merkeissä on sama merkki, on

$$\sqrt{b^2-r^2}AM^2 - \sqrt{a^2-r^2}BM^2 + \left(\sqrt{a^2-r^2} - \sqrt{b^2-r^2}\right)OM^2 = d_1, \qquad (1)$$

missä d_1 riippuu vain a:sta, b:stä ja r:stä. Jos taas $\pm$-merkeissä on vastakkaiset merkit, on

$$\sqrt{b^2-r^2}AM^2 + \sqrt{a^2-r^2}BM^2 - \left(\sqrt{a^2-r^2} + \sqrt{b^2-r^2}\right)OM^2 = d_2, \qquad (2)$$

missä d_2 riippuu vain a:sta, b:stä ja r:stä. Kummassakin tapauksessa seuraa edellisen tehtävän tuloksesta, että pisteet M ovat yhtälöiden (1) tai (2) määräämissä tasoissa. (Molemmat tasot ovat kohtisuorassa tasoa OAB vastaan.)