Harjoitustehtävät, tammikuu 2014, vaativammat, ratkaisuja

1. *Määritä kaikki alkuluvut p, joille $5^p + 4p^4$ on neliöluku.*

Ratkaisu. Jos $5^p + 4p^4 = k^2$, niin $5^p = (k - 2p^2)(k + 2p^2)$. Silloin on oltava $k - 2p^2 = 5^a$ ja $k + 2p^2 = 5^b$. $0 \le a < b$, $a + b = p$. Kun yhtälöt vähennetään toisistaan, saadaan $4p^2 = 5^a(5^{b-a} - 1)$. Jos $a > 0$, niin p^2 on jaollinen viidellä; koska p on alkuluku, niin $p = 5$. Jos $a = 0$, niin $k = 2p^2 + 1$ ja $5^p = 1 + 4p^2$. Selvästi $p = 2$ ja $p = 3$ eivät toteuta yhtälöä. Jos $p \ge 5$, niin $5^p \ge p^5 > 4p^4 > 4p^2$, joten $5^p \ne 1 + 4p^2$. Ainoa tehtävän ratkaisu on siis $p = 5$. [Miksi on $5^p \ge p^5$? Ainakin siksi, että jos

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

niin

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0,$$

kun $x > e$, joten

$$\frac{\ln 5}{5} \ge \frac{\ln p}{p}, \quad p \ln 5 \ge 5 \ln p, \quad 5^p \ge p^5.$$

Keksiikö joku todistuksen, jossa ei käytetä differentiaalilaskentaa?]

2. *Määritä kaikki alkulukuparit* $(p,\, q)$, *joille*

$$p^q q^p = (2p + q + 1)(2q + p + 1).$$

Ratkaisu. Jos p ja q ovat molemmat parittomia, niin yhtälön vasemmalla puolella on pariton ja oikealla puolella parillinen luku. Luvuista p ja q ainakin toisen on oltava 2; symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $q = 2$. Yhtälö on silloin $2^p p^2 = (2p + 3)(p + 5)$. Nyt alkuluku p on tekijänä luvussa $2p + 3$, jolloin sen on oltava 3, ja yhtälö toteutuu, tai luvussa $p + 5$, jolloin olisi oltava $p = 5$. Silloin $2p + 3 = 13$, eikä yhtälö toteudu. Ainoat yhtälön toteuttavat alkulukuparit $(p,\, q)$ ovat siis $(2,\, 3)$ ja $(3,\, 2)$.

3. *Luvut $k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n$, $n \ge 3$, ovat eri suuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että joillain i ja j $k_i + k_j$ ei ole tekijänä missään luvuista $3k_1,\, 3k_2,\, \ldots,\, 3k_n$.*

Ratkaisu. Tehtävässä oli tarkoitus olla mukana vaatimus $i \ne j$. Ilman tätä ratkaisuksi kelpaa sellainen $k_i + k_i$, jolle k_i on jaollinen mahdollisimman korkealla 2:n potenssilla 2^p. (Jos kaikki k_i:t ovat parittomia, mikä tahanasa i käy.) Silloin $k_i + k_i = 2k_i$ on jaollinen 2^{p+1}:llä, mutta mikään $3k_j$ ei ole.

Todistetaan, että aina on myös olemassa tehtävän ehdon toteuttavat k_i ja k_j, $i \ne j$. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan on olemassa sellainen joukko $\{k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n\}$, missä jokainen $k_i + k_j$ on tekijänä jossain luvussa $3k_m$. Voidaan olettaa, että $k_1 > k_2 > \cdots > k_n$. Tarkastellaan eri tapauksia sen mukaan onko k_2 pienempi, sama tai suurempi kuin $\frac{1}{2}k_1$.

Olkoon siis ensin $k_2 < \frac{1}{2}k_1$. Silloin $k_1 + k_2 > 3k_2$, joten $k_1 + k_2$ ei voi olla luvun $3k_2$ eikä siis minkään pienemmän luvun $3k_m$ tekijä. Lisäksi $k_1 < k_1 + k_2 < \frac{3}{2}k_1$, joten $k_1 + k_2$ ei ole myöskään luvun $3k_1$ tekijä. Jos $k_2 = \frac{1}{2}k_1$, tarkastellaan lukua k_3. Nyt $k_1 < k_1 + k_3 < \frac{3}{2}k_1$, joten $k_1 + k_3$ ei ole $3k_1$:n tekijä. Lisäksi $\frac{3}{2}k_2 = k_1 < k_1 + k_3$ ja $k_1 + k_3 < k_1 + k_2 = 3k_2$. Siis $k_1 + k_3$ ei ole $3k_2$:n tekijä. Kun $j > 2$, niin $k_1 + k_3 \geq 3k_3 > 3k_j$, joten $k_1 + k_3$ ei ole $3k_j$:n tekijä. Olkoon sitten $k_2 > \frac{1}{2}k_1$. Olkoon k_m pienin sellainen jonon luku, jolle pätee $k_m > \frac{1}{2}k_1$. Silloin $k_1 + k_m > \frac{3}{2}k_1$. Jos nyt $k_1 + k_m$ on jonkin $3k_j$:n tekijä, niin on oltava $k_1 + k_m = 3k_j$. Mutta silloin $k_j = \frac{1}{3}(k_1 + k_m) > \frac{1}{2}a_1$. Koska k_m oli pienin ehdon $k_m > \frac{1}{2}k_1$ toteuttava jonon luku, on $k_j \geq k_m$. Mutta toisaalta $k_j = \frac{1}{3}(k_1 + k_m) < \frac{1}{3}(2k_m + k_m) = k_m$. Tultiin ristiriitaan. Vastaoletus on väärä.

4. *Yhdistyksellä on* 11 *toimikuntaa. Joka toimikunnassa on viisi jäsentä ja jokaisella kahdella toimikunnalla on yhteinen jäsen. Osoita, että jokin yhdistyksen jäsen kuuluu neljään toimikuntaan.*

Ratkaisu. Todistetaan epäsuorasti. Oletetaan siis, että kukaan ei kuulu neljään toimikuntaan. Olkoon T jokin toimikunta. Siinä on viisi jäsentä, joista jokainen kuuluu enintään kolmeen toimikuntaan. Koska T:llä ja jokaisella muulla kymmenellä toimikunnalla on yhteinen jäsen, jokainen T:n jäsenen on kuuluttava kahteen muuhun toimikuntaan. Sama pätee jokaisen toimikunnan jokaiseen jäseneen. Jokaisella toimikuntiin kuuluvalla jäsenellä on siten kolme jäsenyyttä. Mutta jäsenyyksiä on kaikkiaan $5 \cdot 11 = 55$ kappaletta. Koska 55 ei ole jaollinen kolmella, syntyy ristiriita, joka osoittaa vastaoletuksen vääräksi.

5. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kuinka monelle jonon* $(1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ *permutaatiolle* $(x_1,\, x_2 \ldots,\, x_n)$ *pätee* $k|(2(x_1 + x_2 + \cdots + x_k))$ *kaikilla* $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$*?*

Ratkaisu. Olkoon $f(n)$ niiden $(1,\, 2,\, \ldots,\, n)$:n permutaatioiden määrä, joille ehto toteutuu. Selvästi $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ ja $f(3) = 6$. Jos käy läpi kaikki jonon $(1,\, 2,\, 3,\, 4)$ permutaatiot, huomaa, että $f(4) = 12$. Osoitetaan induktiolla, että $f(n) = 3 \cdot 2^{n-2}$, kun $n \geq 3$. Koska $2(1+2+\cdots+n) = n(n+1)$, ehto toteutuu aina, kun $k = n$. Kun $k = n-1$, niin ehto on, että luvun $n(n+1) - 2a_n$ on olkava jaollinen $n-1$:llä. Nyt $n(n+1) = ((n-1)+1)((n-1)+2)$, joten $n(n+1) \equiv 2 \mod n-1$. On siis oltava $2a_n \equiv 2 \mod (n-1)$ eli joko $2a_n = 2$, $2a_n = n+1$ tai $2a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$. Permutaation viimeinen luku voi olla 1, n tai $\frac{1}{2}(n+1)$. Jos viimeinen luku on n, niin edetävät luvut voidaan permutoida $f(n-1)$:llä tavalla. Jos viimeinen luku on 1, tarkastellaan lukuja $b_m = a_m - 1$, $1 \leq m \leq n-1$. Luvut b_m toteuttavat summaehdon jos ja vain jos luvut a_m toteuttavat sen (k:n b-luvun summa eroaa k:n a-luvun summasta k:lla, joka on k:lla jaollinen). Näin ollen luvut $a_1,\, \ldots,\, a_{n-1}$ voidaan nytkin permutoida $f(n-1)$:llä tavalla niin, että tehtävän ehto täyttyy. Oletetaan sitten, että $a_n = \frac{1}{2}(n+1)$. Silloin n:n on oltava pariton. Mutta jos $k = n-2$, niin

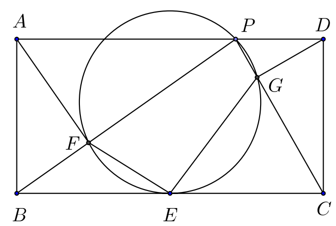
$$2\sum_{j=1}^{n-2} a_j = n(n+1) - (n+1) - 2a_{n-1} \equiv 3 - 2a_{n-1} \bmod (n-2).$$

Jotta summa olisi jaollinen $(n-2)$:lla on oltava $2a_{n+1} \in \{3, n+1, 2n-1, \}$. Näistä luvuista vain $n+1$ on parillinen, joten $a_{n-1} = \frac{1}{2}(n+1) = a_n$. Ristiriita osoittaa, että $a_n \neq \frac{1}{2}(n+1)$. Siis $a_n = 1$ tai $a_n = n$, ja $f(n) = 2f(n-1)$. Koska $f(3) = 6 = 3\cdot 2^{3-1}$, induktio lähtee oikein liikkeelle ja todistus on valmis.

6. *Ryhmässä, jossa on k henkilöä, jotkin henkilöt tuntevat toisensa ja jotkin eivät tunne. Joka ilta jokin ryhmän jäsen kutsuu kaikki tuttavansa illalliselle ja esittelee keskenään tuntemattomat vieraat toisilleen. Oletetaan, että kun jokainen ryhmän jäsen on järjestänyt ainakin yhdet illalliset, joukossa on vielä jotkin kaksi henkilöä, jotka eivät ole tutustuneet. Osoita, että nämä henkilöt eivät tapaa toisiaan seuraavilla illallisilla.*

Ratkaisu. Muodostetaan ryhmän jäsenistä verkko, jonka solmut ovat ihmiset ja solmujen välissä on särmä, jos ihmiset tuntevat toisensa. Tarkastellaan kahta henkilöä H_0 ja H_n. Oletetaan, että verkossa on ketju $H_1H_2\ldots H_n$; voidaan olettaa, että ketju on lyhin mahdollinen H_1:n ja H_n:n välillä. Kun H_j, $1 \le j \le n$ järjestää kutsut. hän kutsuu tuttavansa H_{j-1}:n ja H_{j+1}:n ja esittelee nämä toisilleen. Tämän jälkeen H_0:n ja H_n:n yhdistävä ketju lyhenee: särmät $H_{j-1}H_j$ ja H_jH_{j+1} korvautuvat särmällä $H_{j-1}H_{j+1}$. Koska kaikki ryhmän jäsenet ovat vuorollaan isäntiä, jokainen henkilö H_j, $1 \le j \le n-1$ toimii joskus isäntänä, ja ketju $H_0H_1\ldots H_n$ supistuu särmäksi H_0H_n. Mutta tämä tarkoittaa, että jos H_0 ja H_n eivät ole tavanneet yksilläkään kutsuilla, ketjua $H_0H_1\ldots H_n$ ei ole, eli H_0 ja H_n ovat erillisissä verkon osissa. He eivät näin ollen tule koskaan esitellyiksi toisilleen.

7. *Suorakulmiossa $ABCD$ on $BC = 2AB$. Olkoon E sivun BC keskipiste ja P jokin sivun AD sisäpiste. Olkoot vielä F ja G pisteen A kohtisuora projektio suoralle BP ja pisteen D kohtisuora projektio suoralle CP. Osoita, että $EFPG$ on jännenelikulmio.*



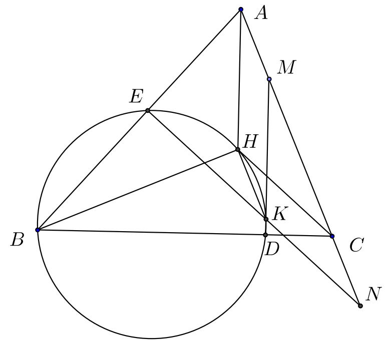
Ratkaisu. Väite tulee todisteuksi, kun osoitetaan, että kolmioilla PFE ja PEG on sama ympärysympyrä. Suorakulmaiset kolmiot PAB ja AFB ovat yhdenmuotoiset. Siis

$$\frac{BP}{BA} = \frac{BA}{BF}$$

eli $BF\cdot BP = BA^2$. Mutta $BA = BE$, joten $BF\cdot BP = BE^2$. Pisteen potenssia koskevien tulosten perusteella tämä merkitsee sitä, että BE on kolmion PFE tangentti. Aivan sama tarkastelu näyttää, että CE on kolmion PEG ympärysympyrän tangentti. Molempien ympyröiden keskipisteet ovat janan BC keskinormaalilla ja molemmat ympyrät kulkevat pisteiden P ja E kautta. Ne ovat siis sama ympyrä.

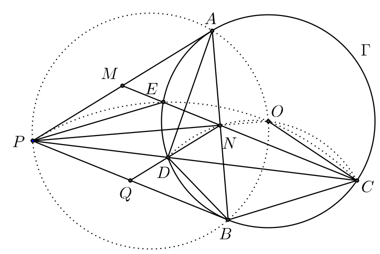
8. *Piste M on teräväkulmaisen kolmion ABC sivun AC sisäpiste ja N on sellainen puolisuoran AC piste, että $MN = AC$. Piste D on M:n kohtisuora projektio suoralla BC ja E on N:n kohtisuora projektio suoralla AB. Osoita, että kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste on kolmion BDE ympärysympyrällä.*

Ratkaisu. Olkoon kolmion korkeusjanojen leikkauspiste H ja olkoon suorien MD ja NE leikkauspiste K. Koska $KE \perp BE$ ja $KD \perp BD$, niin D ja E ovat ympyrällä, jonka halkaisija on BK. Siis K on kolmion BDE ympärysympyrän piste. Koska $AH \| MD$ ja $CH \| NK$, $\angle CAH = \angle NMD$ ja $\angle ACH = \angle MNK$. Lisäksi $AC = MN$, mistä seuraa, että kolmiot AHC ja MKN ovat yhteneviä (ksk). Silloin H ja K ovat yhtä etäällä suorasta AC, eli $HK \| AC$. Mutta $BH \perp AC$, joten $BH \perp HK$. Siis H on BK-halkaisijaisen ympyrän piste eli kolmion BDE ympärysympyrän piste.



9. *Piste P on ympyrän Γ ulkopuolella ja PA, PB ovat Γ:n tangentteja, P ja Q sivuamispisteet. Olkoon M janan AP ja N janan AB keskipiste. Janan MN jatke leikkaa ympyrän Γ pisteessä C. Suora PC leikkaa Γ:n myös pisteessä D ja suora ND suoran PB pisteessä Q. Osoita, että $MNQP$ on vinoneliö.*

Ratkaisu. Havaitaan heti, että $MN \| PB$. Kolmio PBA on tasakylkinen, joten PN on sen korkeusjana. Näin ollen APN on suorakulmainen kolmio ja M sen ympärysympyrän keskipiste. Siis $MN = MP$. Jotta $MNQP$ saataisiin osoitetuksi vinoneliöksi, on vielä näytettävä, että $PM \| QN$. Olkoon E MN:n ja Γ:n toinen leikkauspiste ja O Γ:n keskipiste. Lasketaan pisteen M potenssi Γ:n suhteen: $ME \cdot MC = MA^2 = MP^2$. Siis



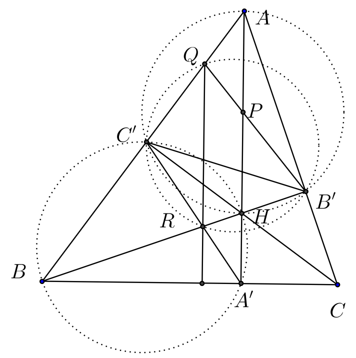
$$\frac{ME}{MP} = \frac{MP}{MC}.$$

Kolmiot MPE ja MCP ovat yhdenmuotoisia (ssk). Siis $\angle MPE = \angle MCP$. Pisteet A, P, B ja O ovat samalla ympyrällä ja AB on jänteenä sekä tässä ympyrässä että ympyrässä Γ. Käytetään taas hyödyksi pisteen potenssia: $NC \cdot NE = NA \cdot NB = NO \cdot NP$. Mutta tästä seuraa, että P, E, O ja C ovat samalla ympyrällä ja siis $\angle NPE = \angle OPE = \angle ECO = \angle NCO$. Suorakulmaiset kolmiot APN ja POA ovat yhdenmuotoiset. Siis $PA^2 = PN \cdot PO$. Kun pisteen P potenssi lasketaan ympyrän Γ suhteen, saadaan toisaalta $PA^2 = PD \cdot PC$. Mutta tämä merkitsee, että D, C, O ja N ovat samalla ympyrällä. Siis (jännenelikulmion ominaisuudet!) $\angle PNQ = \angle DCO = \angle PCM + \angle NCO = \angle MPE + \angle NPE = \angle MPN$. Tämä osoittaa, että $PM \| QN$.

10. *Kolmio ABC on teräväkulmainen. Olkoot A', B' ja C' kärjistä A, B ja C piirrettyjen korkeusjanojen kantapisteet ja H korkeusjanojen leikkauspiste. Olkoon P janan AH keski-*

piste, Q suorien $B'P$ ja AB leikkauspiste ja R janojen $A'C'$ ja BB' leikkauspiste. Osoita, että $QR \perp BC$.

Ratkaisu. Koska kolmio AHB' on suorakulmainen, hypotenuusan AH keskipiste P on kolmion ympärysympyrän keskipiste. Merktään $\angle PB'H = \alpha$. Kolmio PHB' on siis tasakylkinen joten $\angle PHB' = \alpha = \angle A'HB$. Nelikulmio $BA'HC'$, jossa on kaksi vastakkaista suoraa kulmaa, on jännenelikulmio. Kun katsotaan sen ympärysympyrää, nähdään, että $\angle A'C'B = \alpha$. Mutta nyt nelikulmiossa $QC'RB'$ ovat kärjen B' kulma ja kärjen C' kulman vieruskulma yhtä suuret, joten nelikulmio on sekin jännenelikulmio. Siis $\angle C'QR = \angle C'B'R = \angle C'B'H$. Mutta myös $AC'HB'$ on jännenelikulmio, ja sen ympärysympyrästä nähdään, että $\angle C'B'H = \angle C'AH$. Koska siis $\angle C'QR = \angle C'AH$, $QR \| AH$; koska $AH \perp BC$, on myös $QR \perp BC$.



11. *Kolmion sivut ovat a, b ja c. Mitä arvoja voi saada $\lfloor q \rfloor$, kun*

$$q = \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{a^3+b^3+c^3}?$$

Ratkaisu. Kun kolmio on tasasivuinen, $q = 3 = \lfloor q \rfloor$. Osoitetaan, että $q \le 3$ kaikille kolmioille. $q \le 3$ on yhtäpitävä epäyhtälön

$$3(a^3+b^3+c^3) \ge (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) = a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$$

eli epäyhtälön

$$\begin{aligned} &2a^2+2b^2+2c^2-(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)\\ &= a^2(a-b)+a^2(a-c)+b^2(b-a)+b^2(b-c)+c^2(c-a)+c^2(c-b)\\ &= (a^2-b^2)(a-b)+(a^2-c^2)(a-c)+(b^2-c^2)(b-c) \ge 0 \end{aligned}$$

kanssa. Viimeinen epäyhtälö on tosi, koska ennen $\ge$-merkkiä olevat kolme yhteenlaskettavaa ovat kaikki ei-negatiivisia. Osoitetaan sitten, että kaikilla kolmioilla $q > 2$ eli

$$2(a^3+b^3+c^3) < (a^2+b^2+c^2)(a+b+c).$$

Kun tästä poistetaan sulkeita, tullaan yhtäpitävään epäyhtälöön

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-a^3-b^3-c^3 > 0$$

eli $a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c) > 0$. Tämä epäyhtälö on tosi, koska a, b ja c ovat kolmion sivuja ja toteuttavat siis kolmioepäyhtälön. $\lfloor q \rfloor$:n mahdollisia arvoja ovat siis 2 ja 3. – Jos asetetaan esimerkiksi $a = 1$, $b = c = 2$, saadaan $q = \dfrac{45}{17} < 3$. On siis olemassa kolmioita, joille $q < 3$, ja arvo $\lfloor q \rfloor = 2$ on myös mahdollinen.

12. *Osoita, että kaikille positiivisille reaaliluvuille x, y ja z pätee*

$$\sqrt{x^2+z^2} \le \sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2}xy} + \sqrt{y^2+z^2-\sqrt{2}yz}.$$

Ratkaisu. Koska $\sqrt{2} = 2\cos 45°$, epäyhtälön oikean puolen neliöjuurilausekkeet edustavat (kosinilauseen nojalla) sivujen BC ja CD pituuksia kolmioissa ABC ja CBD, joissa $\angle ABC = \angle BCD = 45°$, ja $BA = x$, $BC = y$ ja $BD = z$. Silloin ABD on suorakulmainen kolmio ja $AD = \sqrt{x^2+z^2}$. Kolmioepäyhtälön nojalla $AD \le AC + CD$.

13. *Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille on voimassa*
(a) $f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y)$ *kaikilla* x, $y \in \mathbb{R}$,
(b) $f(x) \ge 0$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Kun yhtälöön (a) sijoitetaan $x = y$, saadaan $f(2x) = f(0)(f(2x) + f(-2x))$. Kun sijoitetaan $x = 0$, saadaan $f(0) = 2f(0)^2$. Siis $f(0) = 0$ tai $f(0) = \frac{1}{2}$. Jos $f(0) = 0$, $f(2x) = 0$ kaikilla x. Jos $f(0) = \frac{1}{2}$, niin $f(2x) = \frac{1}{2}(f(2x) + f(-2x))$ eli $f(2x) = -f(2x)$ kaikilla x. Kun yhtälöön (a) sijoitetaan $x = 0$, saadaan nyt $\frac{1}{2} = f(0) = f(y)^2 + f(-y)^2 = 2f(y)^2$. Siis $f(y)^2 = \frac{1}{4}$; koska $f(y) \ge 0$, on oltava $f(y) = \frac{1}{2}$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$.

14. *Osoita, että ei-negatiivisille luvuille x, y, z pätee*

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)} \ge \frac{xyz+1}{2}.$$

Ratkaisu. Johdetaan ensin kätevä aputulos: jos t on mielivaltainen reaaliluku, niin

$(1+t^3)(1+t)^3+(1-t)^3(1-t^3) = (1+t)^3+(1-t)^3+t^3((1+t)^3-(1-t)^3) = 2+6t^2+t^3(6t+2t^3) = 2+6t^2+6t^4+$

Koska $(1-t)^3$ ja $1-t^3$ ovat kaikilla t samanmerkkiset, on

$$(1+t^2)^3 \ge \frac{1}{2}(1+t)^3(1+t^3)$$

eli

$$\frac{1+t^2}{1+t} \ge \sqrt[3]{\frac{1+t^3}{2}}.$$

Tämän perusteella

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)} \ge \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3)}.$$

Mutta $(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3) = 1+x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3z^3$ ja aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon epäyhtälöiden perusteella $x^3+y^3+z^3 \ge 3xyz$ ja $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \ge 3x^2y^2z^2$. Siis $(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3) \ge 1+3xyz+3x^2y^2z^2+x^3+y^3+z^3 = (1+xyz)^3$. Väite seuraa.

15. *Määritellään lukujono* (x_n) *asettamalla*

$$x_1 = 10^6, \qquad x_{n+1} = n\left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + n, \quad \text{kun} \quad n \geq 1.$$

Osoita, että jonolla (a_n) *on ääretön aritmeettinen osajono* (b_n).

Muodostetaan uusi jono $y_n = \dfrac{1}{n}x_{n+1}$;

$$y_n = \left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + 1.$$

Silloin y_n:t ovat kokonaislukuja ja

$$\begin{aligned} y_{n+1} = \left\lfloor \frac{x_{n+1}}{n+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{ny_n}{n+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor y_n - \frac{y_n}{n+1} \right\rfloor + 1 = y_n + \left\lfloor -\frac{y_n}{n+1} \right\rfloor + 1 \\ \leq y_n - 1 + 1 = y_n. \end{aligned}$$

Jonon (y_n) termit eivät kasva. Tästä seuraa, että jostain indeksin n arvosta n_0 alkaen termit ovat samoja; olkoon tämä yhteinen arvo y. Mutta jos $m > m_0$, niin $x_{m+1} - x_m = my_m - (m-1)y_{m-1} = y$. Jonon (x_n) ”loppupää” on siis aritmeetinen jono. [Numerolaskut osoittavat, että $x_{m+1} - x_m = 1129$, kun $m \geq 1132$.]