Syyskuun vaikeammat valmennustehtävät
Ratkaisut

1. Kahden ympyrän keskipisteet ovat O_1 ja O_2 ja säteet r ja R vastaavasti. Oletetaan, että ympyrät leikkaavat kahdessa eri pisteessä A ja B ja että $O_1O_2 = 1$. Määritä kolmioiden O_1AB ja O_2AB pinta-alojen suhde.

Ratkaisu. Olkoon P kohtisuorien suorien O_1O_2 ja AB leikkauspiste. Olkoon $O_1P = s_1, O_2P = s_2$. Pythagoraan lauseella $PA^2 = r^2 - s_1^2 = R^2 - s_2^2$. Toisaalta $s_1 + s_2 = 1$. Nyt

$$s_1 + s_2 = 1s_1^2 - s_2^2 = (s_1 - s_2)(s_1 + s_2) = s_1 - s_2 = r^2 - R^2.$$

Tästä $s_1 = \frac{r^2-R^2+1}{2}, s_2 = \frac{R^2-r^2+1}{2}$. Koska alojen suhde on $\frac{\frac{1}{2}s_1SAB\cdot}{\frac{1}{2}s.2AB} = \frac{s_1}{s_2}$, vastaus on $\frac{r^2-R^2+1}{R^2-r^2+1}$.

2. Etsi kaikki parit (m, n) positiivisia kokonaislukuja, joille $2^m - 1 \mid 2^n + 1$.

Ratkaisu. Koska $2^m - 1 \mid 2^{2n} - 1$, niin $m \mid 2n$, sillä $(a^k - 1, a^\ell - 1) = a^{(k,\ell)} - 1$. Jos m on pariton niin $m \mid n$, joten $2^m - 1 \mid 2^n - 1$ ja $2^m - 1 \mid 2^n + 1$. Siispä $m = 1$, jolloin n on mielivaltainen. Jos m on parillinen, niin $\frac{m}{2} \mid n$, joten $2^{\frac{m}{2}} \mid 2^n - 1$. Toisaalta sama luku jakaa luvun 2^n+1 koska $\frac{m}{2} \mid m$. Näin ollen $m = 2$. Silloin n kelpaa jos ja vain jos n on pariton.

3. Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Montako tornin reittiä on $n \times n$-shakkilaudan vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan seuraavilla ehdoilla:

- torni liikkuu joka siirrolla ylös tai oikealle ja
- torni ei kulje laudan keskiruutujen kautta (parillisilla n keskiruutuja on neljä ja parittomilla n yksi) ja
- reittejä pidetään samoina, jos ne kulkevat täsmälleen samojen ruutujen kautta?

Ratkaisu. Jokainen tornin polku on $2n-2$ askeleen pituinen, ja askeleista $n-1$ otetaan ylös ja $n - 1$ oikealle. Koska $2n - 2$ kohdasta voidaan valita $n - 1$ kohtaa, joissa mennään ylös, $\binom{2n-2}{n-1}$ tavalla, tornin polkuja on kokonaisuudessaan näin monta. Pitää vähentää ne polut, jotka päätyvät keskiruutuihin. Oletetaan aluksi, että n on pariton. Vasemmasta alakulmasta pääsee keskiruutuun $\binom{2m-2}{m-1}$ sallitulla tavalla, missä $m = \frac{n+1}{2}$ (koska se vastaa $m \times m$-laudan tilannetta). Edelleen keskiruudusta voi jatkaa yhtä monella polulla. Vastaus on siis

$$\binom{2n-2}{n-1} - \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}^2.$$

Olkoon sitten n parillinen. Merkitään keskiruutuja kirjaimilla A, B, C, D, missä A on lähinnä vasenta alakulmaa ja D lähinnä oikeaa yläkulmaa. Taas tornin reittejä on kokonaisuudessaan $\binom{2n-2}{n-1}$. Näistä pitää vähentää polut, jotka päätyvät ruutuun A, ruutuun B päätyvät polut ja ruutuun C päätyvät polut (ruutuun D ei voi päätyä osumatta johonkin näistä). Kuitenkin pitää lisätä ne polut, jotka kulkevat sekä A ja B tai A ja C kautta. Ruutuun A päätyviä polkuja on $\binom{2m-2}{m-1}$, missä $m = \frac{n}{2}$. Edelleen sieltä lähtee $\binom{2m}{m}$ polkua. Ruutuun B päätyy $\binom{2m-1}{m}$ polkua, koska kyseisestä ruudusta alakulmaan on matkaa $2m-1$ askelta, ja näistä m otetaan ylös ja $m-1$ oikealle, joten valintojen määrä on edellä mainittu luku. Vastaavasti ruudusta B lähtee $\binom{2m-1}{m}$ polkua. Ruudun C tilanne on symmetrinen. Polkuja, jotka kulkevat A:n kautta B :hen on yhtä monta kuin polkuja A:han eli $\binom{2m-2}{m-1}$. Ruudusta B voidaan jatkaa $\binom{2m-1}{m}$ tavalla. Polkuja A:n ja C :n kautta on yhtä monta. Vastaus on siis

$$\binom{2n-2}{n-1} - \binom{n-2}{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}} - 2\binom{n-1}{\frac{n}{2}}^2 + 2\binom{n-2}{\frac{n-2}{2}}\binom{n-1}{\frac{n}{2}}.$$

4. Olkoot $a, b, c > 0$. Osoita, että $(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})^2 \geq (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$.

Ratkaisu: Pitää osoittaa, että $(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})^2 \geq 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$. Jos merkitään $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$, niin $xyz = 1$ ja pitää osoittaa $(x+y+z)^2 \geq 3 + x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3(xyz)^{\frac{2}{3}} + \sum_{cyc} x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} + xy + yz + zx$. Sieventämällä pitää osoittaa, että $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq 3(xyz)^{\frac{2}{3}} + \sum_{cyc} x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}$. Aritmeettis-geometrisella saadaan $xy + yz + zx \geq 3(xyz)^{\frac{2}{3}}$. Lisäksi $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}z^2 \geq x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}$. Summaamalla syklisesti yhteen saadaan väite (viimeisimmän epäyhtälöarvion saa näppärämmin painotetulla AG:llä).

5. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $\angle ABC = \angle ACB$. Olkoon sen ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O ja korkeusjanojen leikkauspiste H. Osoita, että pisteiden B, O ja H kautta kulkevan ympyrän keksipiste on suoralla AB.

Ratkaisu. Olkoon E sivun BC keskipiste. Todistetaan ensin, että ABC on tasakylkinen ja sitten, että pisteet A, H, O, E ovat samalla suoralla (argumentti toimii riippumatta pisteiden H ja O järjestyksestä suoralla). Olkoon D pisteiden B, O, H kautta kulkevan ympyrän ja sivun AB leikkauspiste. Thaleen lauseella riittää osoittaa $\angle BOD = 90\circ$. Tunnetusti pisteet O ja H ovat toistensa peilikuvia peilattaessa kulman ABC puolittajan yli. Siten $\angle ABH = \angle CBO := \alpha$. Kehäkulmalauseella myös $\angle DOH = \alpha$. Suoarkulmaisesta kolmiosta BEO saadaan $\angle BEO = 90° - \alpha$. Nyt $\angle BOD = 180° - \angle BOE - \angle DOH = 180° - (90° - \alpha) - \alpha = 90°$, mikä piti todistaa. Huomaa, että tehtävä ei ole mielekäs, jos ABC on tasasivuinen; tällöinhän $O = H$.

6. Olkoon $x \geq 3$ kokonaisluku ja $n = x^6 - 1$. Oletetaan, että alkuluvulle p ja kokoaisluvulle $k \geq 0$ pätee $p^k \mid n$. Osoita, että $p^{3k} < 8n$.

Ratkaisu. Olkoon aluksi $p > 3$. Voidaan kirjoittaa $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$. Jos $d \mid x - 1, d \mid x + 1$, niin $d \mid 2$. Jos $d \mid x \pm 1$ eli $x \equiv \pm 1 \pmod{d}$, niin $x^2 \pm x + 1 \equiv 2 \pm 1 \not\equiv 0 \pmod{d}$ paitsi jos $d = 3$ tai $d = 1$. Lisäksi jos $d \mid x^2 - x + 1, d \mid x^2 + x + 1$, niin $d \mid 2x$, joten $\frac{d}{2} \mid x$, mistä $\frac{d}{2} \mid x^2 + x$. Siispä $d = 1$ tai $d = 2$. Siispä kaikkien neljän tulontekijän pareittaiset sytit ovat ≤ 3. Erityisesti $p > 3$ jakaa vain yhden tulontekijän. Siispä $p^k \leq x^2 + x + 1$, joten $p^{3k} \leq (x^2 + x + 1)^3 \leq (2x^2 - 2)^3 = 8(x^2 - 1)^6 < 8(x^6 - 1) = 8n$, kun $x \geq 3$. Jos $p = 3$, niin p^{k-1} jakaa jonkin tulontekijän. Helposti nähdään, että 9 ei jaa lukuja $x^2 \pm x + 1$. Lisäksi enintään kaksi tulontekijää voi ola kolmella jaollisia. Siispä $p^k \leq 3(x+1)$, joten $p^{3k} \leq 27(x + 1)^3 < 8(x - 1)^6$, kun $2(x - 1)^2 > 3(x + 1)$, mikä pätee, kun $x \geq 4$. Siispä tällöin myös $p^{3k} < 8(x^6 - 1) = 8n$. Tapaus $x = 3$ on helppo tarkistaa, koska silloin 3 ei ole tekijä. Olkoon sitten $p = 2$. Helposti nähdään, että 2 ei jaa $x^2 \pm x + 1$. Siispä $p^{k-1} \leq x + 1$, joten $p^k \leq 2(x + 1)$. Koska erityisesti $p^k < 3(x + 1)$, äskeinen päättely pätee.

7. Taululle on kirjoitettu $n \geq 2$ reaalilukua. Pelaajat A ja B pelaavat peliä vuorotellen; A aloittaa. Vuorollaan pelaaja valitsee taululta kaksi reaalilukua a ja b, pyyhkii ne ja kirjoittaa tilalle luvut $\frac{2(a+b)}{3}$ ja $\frac{2(a-b)}{3}$. Pelaajan B tavoite on saavuttaa tilanne, jossa kaikkien taulun lukujen itseisarvo on alle $\frac{1}{100}$. Pystyykö B välttämättä saavuttamaan tavoitteensa?

Ratkaisu. Olkoon S_k lukujen neliöiden summa k kierroksen jälkeen. Koska $a^2 + b^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 > \left(\frac{a+b}{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\frac{3}{2}}\right)^2$, niin S_k on vähenevä jono (eli S_k on semi-invariantti). Pelaaja B pelaa seuraavasti: hän valitsee aina taulun kaksi suurinta lukua. Tällöin $S_{k+1} = S_k - a^2 - b^2 + \left(\frac{a+b}{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\frac{3}{2}}\right)^2 = S_k - \frac{a^2+b^2}{9} \leq S_k - \frac{\frac{2}{n}S_k}{9} = (1 - \frac{1}{18n})S_k$, missä n on taulun lukujen määrä (lukujen a ja b maksimaalisuutta käytettiin). Siispä $S_k \leq (1 - \frac{1}{18n})^k S_0 < 10^{-4}$ riittävän suurella k. Tässä vaiheessa B onsaavuttanut tavoitteensa, koska jos lukujen neliöiden summa on alle 10^{-4}, kaikki luvut ovat itseisarvoltaan alle $\frac{1}{100}$.

8. Olkoon P kolmion ABC sisäpiste siten, että $\angle ABP = \angle PCA$. Olkoon Q sellainen piste, että $PBQC$ on suunnikas. Todista, että $\angle QAB = \angle CAP$.

Ratkaisu. Olkoon R sellainen piste, että $APBR$ on suunnikas. Tällöin $AB||BP||CQ$. Olkoot D sivun AB keskipiste ja E sivun BC keskipiste. Nyt kolmiosta ABC saadaan $AC||DE$. Koska suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, niin D on janan RP keskipiste ja E on janan QP keskipiste. Siten komiosta RPQ saadaan $DE||RQ$. Yhdistämällä kaksi viimeistä havaintoa saadaan $AC||RQ$. Yhdistettäessä tämä alun huomioon $AR||CQ$ saadaan, että $ACQR$ on suunnikas. Käyttämällä tietoa suunnikkaan kulmista (suunnikkaassa $XYZW$ on $\angle XYW = \angle ZWY$ ja $\angle WXY = \angle WZY$) ja tehtävän kulmaoletusta saadaan $\angle ABQ = \angle ACQ = \angle ARQ$. Siten $ARBQ$ on jännenelikulmio. Nyt kehäkulmalauseella $\angle QAB = \angle BRQ = \angle CAP$. Viimeinen yhtäsuuruus pätee, koska $BR||AP$ ja $RQ||AC$. Väite seuraa.

9. Osoita, ettei ole olemassa funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f(\frac{x+y}{2}) + |x-y|$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Ratkaisu. Selvästi funktio $f(x)$ toteuttaa epäyhtälön jos ja vain jos $f(x)+c$ toteuttaa, missä c on vakio. Voidaan siis olettaa $f(0) = 0$. Sijoituksella $y = 0$ saadaan $f(x) \geq 2f(\frac{x}{2}) + |x|$. Tämä epäyhtälö sanoo myös $f(\frac{x}{2}) \geq 2f(\frac{x}{4}) + |\frac{x}{2}|$. Siispä $f(x) \geq 4f(\frac{x}{4}) + 2|x|$. Induktiolla saadaan helposti $f(x) \geq 2^n f(\frac{x}{2^n}) + 2^{n-1}$. Jos $x = 1$, saadaan $f(1) \geq 2^n f(\frac{1}{2^n}) + 2^{n-1}$. Koska $f(1)$ ei voi olla mieleivaltaisen suuri, pätee $f(\frac{1}{2^n}) < 0$ kaikilla riittävän suurilla n. Toisaalta sijoituksella $x = -1$ saadaan $f(-1) \geq 2^n f(\frac{-1}{2^n}) + 2^{n-1}$, joten myös $f(\frac{-1}{2^n}) > 0$ riittävän suurilla n. Mutta toisaalta $\frac{f(\frac{1}{2^n})+f(\frac{-1}{2^n})}{2} \geq \frac{1}{2^{n-1}} > 0$, mikä on ristiriita.

10. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, joille $f(n!) = f(n)!$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $a-b \mid f(a)-f(b)$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}_+$, kun $a \neq b$.

Ratkaisu. Selvästi funktiot $f(n) = n$, $f(n) = 1$ ja $f(n) = 2$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ kelpaavat. Osoitetaan, ettei muita ole. Koska $f(1)! = f(1)$, niin $f(1)$ on 1 tai 2. Osoitetaan, että jos $f(n) = c$ äärettömän monella n, niin $f(n) = c$ kaikilla n. Jos näin on, niin $a - b \mid f(a) - c$ kaikilla niillä $b \neq a$, joille $f(b) = c$ (äärettömän monessa tapauksessa). Siispä luvulla $f(a)-c$ on mielivaltaisen suuria jakajia, joten $f(a) = c$ kaikilla a. Seuraavaksi olkoon p pariton alkuluku. Wilsonin lauseella $(p-1)! \equiv -(p-2)! \equiv -1 \pmod p$, joten $p \mid (p-2)! - 1$. Nyt pätee $p \mid (p-2)!-1 \mid f((p-2)!) - f(1) = f(p-2)! - f(1)$. Jos olisi $f(p-2) \geq p$, niin $f(p-2)! \equiv 0 \pmod p$, joten $p \mid f(1)$. Kuitenkin $f(1)$ on 1 tai 2, ristiriita. Siispä $f(p-2) \leq p-1$. Jos $f(p-2) = p-1$, niin $p \mid (p-1)! - 1$, mikä on ristirita Wilsonin lauseelle. Siispä $f(p-2) \leq p-2$. Toisaalta $p-3 \mid f(p-2) - f(1)$, joten joko $f(p-2) \geq p-3+f(1) \geq p-2$ tai $f(p-2) = f(1)$. Alkulukuja on äärettömän monta, ja äärettömän monelle p on pädettävä ensimmäinen vaihtehto; muutoin f on vakio aikaisemman havainnon nojalla. Siispä $f(p-2) = p-2$ äärettömän monella alkuluvulla p. Jos $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $f(p-2) = p-2$, niin $n-p-2 \mid f(n) - f(p-2) = f(n) - p - 2$. Siten $f(n) \equiv n \pmod{|n-p-2|}$. Koska modulus saadaan mieleivaltaisen suureksi valitsemalla p riittävän suureksi, seuraa $f(n) = n$ kaikilla n.