4. pohjoismainen kilpailu ??.??.1990

1. Olkoot m, n ja p parittomia positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että luku

$$\sum_{k=1}^{(n-1)^p} k^m$$

on jaollinen n:llä.

2. Olkoot a_1, a_2, $\ldots$, a_n reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}. \qquad (1)$$

Milloin (1):ssä vallitsee yhtäsuuruus?

3. Olkoon ABC kolmio ja P piste ABC:n sisällä. Oletetaan, että suora l, joka kulkee pisteen P kautta, mutta ei pisteen A kautta, leikkaa AB:n ja AC:n (tai niiden B:n ja C:n yli ulottuvat jatkeet) pisteissä Q ja R. Etsi sellainen suora l, että kolmion AQR piiri on mahdollisimman pieni.

4. Positiivisille kokonaisluvuille on sallittu kolme operaatiota f, g and h: $f(n) = 10n$, $g(n) = 10n + 4$ and $h(2n) = n$, ts. luvun loppuun saa kirjoittaa nollan tai nelosen ja parillisen luvun saa jakaa kahdella. Todista: jokaisen positiivisen kokonaisluvun voi konstruoida aloittamalla luvusta 4 ja suorittamalla äärellinen määrä operaatioita f, g ja h jossakin järjestyksessä.