Matematiikan olympiavalmennus

Huhtikuun 2013 helppo tehtäväsarja

1. Olkoon kolmion piirin pituus p. Osoita, että kolmion keskijanojen pituuksien summa on välillä $]3p/4,\ p[$. Ovatko nämä parhaat mahdolliset rajat?

2. Ratkaise yhtälö
$$\lfloor x^2 - 2x \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor - 2\lfloor x \rfloor.$$

3. Avaruudessa sijaitsee 100 suoraa, joista jokaisella kahdella on yhteinen piste, mutta mitkään kolme eivät sijaitse samassa tasossa. Osoita, että kaikilla suorilla on yksi yhteinen piste.

4. Olkoon annettu n numeroa a_1:stä a_n:ään tietyssä järjestyksessä. Onko olemassa sellaista luonnollista lukua, jolla neliöjuurensa desimaaliesityksessä heti pilkun oikealla puollla seuravat juuri nämä numerot annetussa järjestyksessä?

5. Onko yhtälöllä $x^2 + xy + y^2 = 2$ rationaalilukuratkaisuja?

6. Suorakulmaisen huoneen lattian päällystämiseen käytetään kahdenlaisia levyjä; toiset ovat muotoa 2 kertaa 2 ja toiset muotoa 4 kertaa 1. Todosta, että päällystäminen ei ole mahdollista, jos halutaan käyttää toisia levyjä yksi vähemmän ja toisia yksi enemmän.

7. Olkoot x_1 ja x_2 yhtälön $x^2-px+1 = 0$ juuret ja olkoot y_1 ja y_2 yhtälön $x^2-Px+1 = 0$ juuret. Ilmaise tulo
$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_2)$$
lukujen p ja P avulla.

8. Osoita, että on olemassa kokonaislukukertoiminen polynomi Q, joka ei ole nollapolynomi ja jolle
$$Q(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0.$$

9. Osoita, että on olemassa sellainen vakio M, että seuraava on voimassa: Kun P toisen asteen polynomi, jolle $P(-1), P(0), P(1) \in [-1, 1]$, niin $|P(x)| \leq M$, kun $|x| \leq 1$.

Mikä on vakion M pienin mahdollinen arvo?

10. Olkoon $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pätee $\sqrt{2n} \leq a_n \leq \sqrt{3n}$.

Ratkaisut toivotaan lähetettävän Kukan päivään 13. 5. mennessä osoitteeseen

Kerkko Luosto
Talvitie 1D
33900 Tampere