Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, helmikuu 2019

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, voi olla opettavaista.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa. Näissä näkyvät itsenäisen harjoittelun tulokset.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan seuraavaan valmennusviikonloppuun 5.4.2019 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Matematik och Statistik
Åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 Åbo

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Uutena kokeiluna myös viikkotehtävät: `https://keskustelu.matematiikkakilpailut.fi/c/viikkotehtavat`

Helpompia tehtäviä

1. Mikä numero on satojen kohdalla luvussa $(20! - 15!)$? (Kun n on positiivinen kokonaisluku, niin merkinnällä $n!$ tarkoitetaan lukua $n \cdot (n-1) \cdots 1$. Esimerkiksi on $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.)

2. Tarkastellaan oheista 3×3-taulukkoa. Jos taulukossa on n lukua, joiden suurin yhteinen tekijä on täsmälleen n, niin yhdellä askeleella niiden kaikkien paikat voidaan vaihtaa niin, etteivät mitkään näistä n luvusta ole enää samalla paikalla kuin ennen askeleen ottoa. Esimerkiksi taulukossa lukujen 4 ja 6 paikat voidaan vaihtaa keskenään, sillä $\text{syt}(4, 6) = 2$. Voidaanko näitä askeleita toistamalla saada aikaan taulukko, joka on alkuperäisen taulukon peilikuva diagonaalin $1, 8, 20$ suhteen? Entäpä, onko tämä mahdollista toisen diagonaalin suhteen?

1	3	4
6	8	9
10	12	20

3. Kokonaisluku A koostuu 600 kutosesta ja jostain määrästä nollia. Voiko luku A olla neliöluku?

4. Osoita, että minkä tahansa 23 erisuuren kokonaisluvun joukosta löytyy vähintään kaksi eri lukua, joiden neliöiden erotus on jaollinen luvulla 100.

5. Kukin positiivisista kokonaisluvuista $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on pienempi kuin 1951. Kuitenkin minkä tahansa kahden edellisen luvun pienin yhteinen jaettava on suurempi kuin 1951. Osoita, että

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

6. Oletetaan, että m on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin 1000, ja että murtolukua $\dfrac{m+4}{m^2+7}$ ei voi sieventää. Montako mahdollista m:n arvoa on?

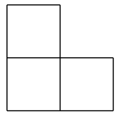
7. *[Uniikit erot]* Joukossa on 8 eri luonnollista lukua, jotka eivät ole suurempia kuin 15. Osoita, että näiden lukujen erotusten joukosta löytyy ainakin kolme samaa lukua.

8. *[Liikaa kuninkaita]* Mikä on suurin mahdollinen määrä kuninkaita, joka voidaan asettaa shakkilaudalle siten, että mitkään kaksi eivät uhkaa toisiaan?[1]

[1] normaali shakkilauta on 8×8 ruutua, ja kuningas uhkaa kaikkia viereisiä ruutuja, mukaan lukien vinottain

9. *[Liikaa rahaa]* Pudotamme sattumanvaraisesti 51 pisteen kokoista kolikkoa neliöön, jonka sivu on 1 metri. Osoita, että on aina mahdollista peittää ainakin kolme kolikkoa neliönmuotoisella paperinpalalla, jonka koko on 20cm $\times$ 20cm!

10. Mikä on pienin mahdollinen määrä 'kulmia' (ks. kuvaa), jotka voidaan leikata 8×8-ruudukosta siten, että ei ole mahdollista leikata yhtään uutta kulmaa kyseisestä ruudukosta?



11. Mikä on suurin mahdollinen määrä lähettejä, joita voi asettaa shakkilaudalle siten, että mitkään kaksi eivät uhkaa toisiaan (oletamme tässä, että samanväriset lähetit uhkaavat toisiaan)?

Vaativampia tehtäviä

12. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja, joille $a+b+c+d=1$. Todista, että

$$6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) \geq \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\frac{1}{8}.$$

13. Laske seuraavan lausekkeen arvo:

$$\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{1}{1+2^2+2^4}+\frac{1}{1+3^2+3^4}+\cdots+\frac{1}{1+100^2+100^4}.$$

14. Todista, että jos konveksi viisikulmio täyttää seuraavat ehdot, se on säännöllinen viisikulmio:

1. kaikki viisikulmion sisäkulmat ovat yhtäsuuret,
2. kaikki viisikulmion sivujen pituudet ovat rationaalilukuja.

15. Olkoon $PBCD$ suorakulmio ja DP sen ympäripiirretyn ympyrän kaari, joka ei sisällä suorakulmion muita kärkipisteitä, ja olkoon A tämän kaaren piste. Piirretään A:n kautta suora, joka on yhdensuuntainen sivun DP kanssa; olkoon tämän suoran ja suoran BP leikkauspiste Z. Olkoon F suorien AB ja DP leikkauspiste ja Q suorien ZF ja DC leikkauspiste. Osoita, että suorat AQ ja BD ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

16. Polynomin ax^3+bx^2+cx+d kertoimet ovat kokonaislukuja, ad on pariton ja bc on parillinen. Osoita, että ainakin yksi polynomin nollakohta on irrationaalinen.

17. Olkoon $\frac{3}{4}<a<1$. Osoita, että yhtälöllä

$$x^3(x+1)=(x+a)(2x+a)$$

on neljä eri reaalilukuratkaisua. Määritä nämä.

18. Määritä kaikki kahden positiivisen kokonaisluvun funktiot f, joille

$$f(x,x)=x, f(x,y)=f(y,x) \quad \text{ja} \quad (x+y)f(x,y)=yf(x,x+y).$$

19. Määritä rationaalilukukolmikko (a,b,c), jolle pätee

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

20. Luvut x,y,z ja w toteuttavat yhtälöt

$$\frac{x^2}{2^2-1^2}+\frac{y^2}{2^2-3^2}+\frac{z^2}{2^2-5^2}+\frac{w^2}{2^2-7^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{4^2-1^2}+\frac{y^2}{4^2-3^2}+\frac{z^2}{4^2-5^2}+\frac{w^2}{4^2-7^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{6^2-1^2}+\frac{y^2}{6^2-3^2}+\frac{z^2}{6^2-5^2}+\frac{w^2}{6^2-7^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{8^2-1^2}+\frac{y^2}{8^2-3^2}+\frac{z^2}{8^2-5^2}+\frac{w^2}{8^2-7^2}=1.$$

Määritä $x^2+y^2+z^2+w^2$.

21. Määritä kaikki funktiot $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, joille pätee

$$f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y.$$