Vuoden 1994 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Olkoot H_A, H_B ja H_C pisteen O kohtisuorat projektiot sivuilla BC, CA ja AB. Koska $60^\circ < \angle OA_1B < 120^\circ$, niin

$$|OH_A| = |OA_1|\sin(\angle OA_1B) > |OA_1|\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vastaavasti

$$|OH_B| > |OB_1|\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ja} \quad |OH_C| > |OC_1|\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Jos kolmion ABC ala lausutaan tavallisella kaavalla ja toisaalta osakolmioiden ABO, BCO ja CAO (joilla kaikilla on sama kanta a) alojen summana, saadaan

$$|OH_A| + |OH_B| + |OH_C| = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Väite seuraa heti.

2. Selvästi pisteet (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) muodostavat kaksinaapurijoukon (2NJ). Myös jokaisella parillisella luvulla$n = 2k \geq 8$ joukko $S = \{(0,\,0), \ldots, (k-2,\,0), (k-2,\,1), (k-2,\,2), \ldots, (0,\,2), (0,\,1)\}$ on 2NJ. Osoitetaan, että muilla n:n arvoilla ei ole olemassa 2NJ:ja.

Olkoon S 2NJ ja olkoon S:ssä n pistettä. Liitetään jokainen S:n piste kahteen naapuriinsa yksikköjanalla. Syntyvien kuvioiden tulee olla suljettuja murtoviivoja, koska päättyvän murtoviivan pää olisi piste, jolla on vain yksi naapuri. Murtoviivoissa on yhteensä n janaa (joka pisteestä lähtee kaksi janaa, joten pisteistä lähtee yhteensä $2n$ janaa; jos lähtevät janat lasketaan, tulee jokainen jana lasketuksi kahdesti). Murtoviivoissa olevien janojen määrä on parillinen: kun murtoviiva kierretään ympäri, on otettava yhtä monta askelta vasemmalle kuin oikealle ja yhtä monta alas kuin ylös). Siis n on välttämättä parillinen. Selvästi $n \neq 2$.

On vielä näytettävä, että $n \neq 6$. Voidaan olettaa, että $(0,\,0) \in S$. Nyt on symmetriasyistä olennaisesti vain kaksi mahdollisuutta: a) $(-1,\,0) \in S$ ja $(1,\,0) \in S$ tai b) $(1,\,0) \in S$ ja $(0,\,1) \in S$. Tapauksessa a) on $(0,\,1) \notin S$ ja $(0,\,-1) \notin S$. Koska S:n pisteet $(-1,\,0)$, $(0,\,0)$ ja $(1,\,0)$ kuuluvat johonkin suljettuun murtoviivaan, tämän murtoviivan on kierrettävä joko pisteen $(0,\,1)$ tai $(0,\,-1)$ ympäri. Kummassakin tapauksessa murtoviivassa on ainakin 8 janaa. Tapauksessa b) $(1,\,1) \notin S$ (S:n tulisi koostua murtoviivasta, jossa on neljä janaa ja murtoviivasta, jossa on kaksi janaa; viimemainittu on mahdoton)ja $(-1,\,0) \notin S$, $(0,\,-1) \notin S$. Pisteet $(1,\,0)$, $(0,\,0)$ ja $(0,\,1)$ sisältävä murtoviiva joko kiertää pisteen $(1,\,1)$, jolloin siinä on ainakin 8 janaa, tai kiertää pisteet $(-1,\,0)$ ja $(0,\,-1)$, jolloin siinä on ainakin 10 janaa. Siis $n = 6$ johtaa aina ristiriitaan.

3. Taitos synnyttää tasakylkisen puolisuunnikkaan $ADD'A'$. Symmetrian perusteella kärjen D kohtisuora etäisyys sivusta $A'D'$ on sama kuin kärjen D' kohtisuora etäisyys sivusta AD eli sama kuin neliön sivu a. Suora $A'D'$ on siten D-keskisen a-säteisen ympyrän tangentti, samoin kuin suorat AB ja BC. Jos ympyrän ja $A'D'$:n sivuamispiste on F, niin $AE = EF$ ja $FD' = D'C$. Siis

$$AB + BC = AE + EB + BD' + D'C = ED' + EB + BD',$$

eli väite.

4. Etsitään yhtälön

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+p)^2, \quad p \geq 2$$

kokonaislukuratkaisut. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaan

$$n = p - 1 + \sqrt{2p(p-1)} \geq 2(p-1).$$

Koska $n < 200$, $p \leq 100$. Lisäksi luvun $2p(p-1)$ on oltava kokonaisluvun neliö. Jos p on pariton, p:llä ja $2(p-1)$:llä ei voi olla yhteisiä tekijöitä. Silloin sekä p:n että $2(p-1)$:n on oltava kokonaisluvun neliöitä. Ainoat mahdollisuudet ovat $p = 9$, $p = 25$, $p = 49$ ja $p = 81$. Vastaavat luvut $2(p-1)$ ovat 16, 48, 96 ja 160. Näistä vain 16 on neliö. Saadaan yksi ratkaisu $n = 8 + \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 8} = 20$, $20^2 + 21^2 = 841 = 29^2$. Jos p on parillinen, niin luvuilla $2p$ ja $p-1$ ei ole yhteisiä tekijöitä, joten molemmat ovat neliöitä. Luvun $2p$ mahdolliset arvot ovat 4, 16, 36, 64, 100, 144 ja 196. Vastaavat luvun $p-1$ arvot ovat 1, 7, 31, 49, 71 ja 97. Saadaan kaksi ratkaisua $n = 1 + 2 = 3$, $3^2 + 4^2 = 5^2$ ja $n = 49 + 70 = 119$, $119^2 + 120^2 = 169^2$.