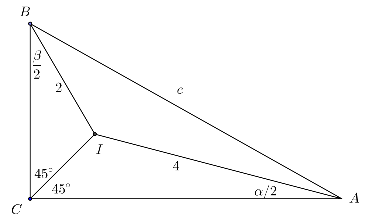
Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailu 2015

Avoimen sarjan tehtävien ratkaisuja

1. Voidaan olettaa, että $b = a+1$. Silloin $d = a^2+(a+1)^2+(a(a+1))^2 = a^2+a^2+2a+1+a^4+2a^3+a^2 = a^4+2a^3+3a^2+2a+1$. Toisaalta $(a^2+a+1)^2 = a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a = a^4+2a^3+3a^2+2a+1$. d on siis neliöluku ja $\sqrt{d} = a^2+a+1$. ($a^2+a+1 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$.) Koska $a^2+a+1 = a(a+1)+1$ ja joko a tai $a+1$ on parillinen, niin $a(a+1)$ on parillinen ja $\sqrt{d}$ on pariton.

2. *1. ratkaisu.* Olkoon suorakulmainen kolmio ABC, sen hypotenuusa $c = AB$, $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$ ja I sisään piirretyn ympyrän keskipiste. I on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Sovelletaan (kolmion kulmasummasta välittömästi seuraavaa) tietoa, jonka mukaan kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, kolmioihin CAI ja



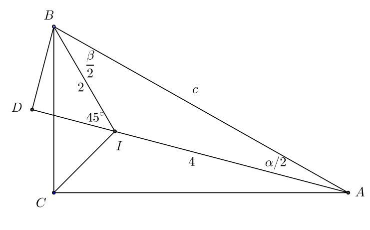
BCI. Saadaan $\angle AIB = \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(45° + \frac{\beta}{2}\right) = 90° + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Koska ABC on suorakulmainen, $\alpha + \beta = 90°$. Siis $\angle AIB = 135°$. Sovelletaan kosinilausetta kolmioon ABI. Koska $\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, saadaan heti

$$c^2 = 4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 + 8\sqrt{2},$$

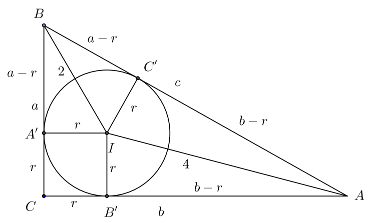
joten

$$c = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

2. ratkaisu. Olkoon D se piste kulman $\angle CAB$ puolittajalla AI, jolle $BD \perp AI$. Kolmion ABI kulman $\angle BIA$ vieruskulmana $\angle BID = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45°$. Kolmio IBD on siis tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa $BI = 2$. Siis $BD = DI = \sqrt{2}$. Suorakulmaisesta kolmiosta ABD saadaan Pythagoraan lauseen perusteella heti $c^2 = AB^2 = (4+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 20 + 8\sqrt{2}$ ja $c = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.



3. ratkaisu. Olkoon $BC = a$, $CA = b$, ABC:n sisäympyrän säde r ja sisäympyrän ja kolmion sivujen BC, CA, AB sivuamispisteet A', B', C'. Koska $A'CB'I$ on neliö, $A'C = CB' = r$. Koska ympyrän tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat yhtä pitkiä, on $BC' = BA' = a - r$ ja $C'A = B = b - r$. Siis $c = a + b - 2r$, joten



$$r = \frac{1}{2}(a + b - c), \quad a - r = \frac{1}{2}(a - b + c), \quad b - r = \frac{1}{2}(-a + b + c).$$

Suorakulmaisista kolmioista IAC' ja BIC' saadaan Pythagoraan lauseen nojalla

$$(-a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \tag{1}$$

ja

$$(a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 = 4 \cdot 2^2 = 16. \tag{2}$$

Kun otetaan huomioon, että ABC on suorakulmainen, joten $a^2 + b^2 = c^2$, niin (1) ja (2) sievenevät muotoihin

$$4c^2 - 4ac = 64, \qquad 4c^2 - 4bc = 16.$$

Siis

$$a = \frac{c^2 - 16}{c}, \qquad b = \frac{c^2 - 4}{c}$$

Kun nämä a:n ja b:n arvot sijoitetaan Pythagoraan yhtälöön $a^2 + b^2 = c^2$, saadaan c:lle yhtälö

$$c^4 - 40c^2 + 272 = 0,$$

josta ratkaistaan

$$c^2 = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 272}}{2} = 20 \pm \sqrt{400 - 272} = 20 \pm \sqrt{128} = 20 \pm 8\sqrt{2}.$$

Kolmiosta ABI nähdään, että $c > 4$, joten c^2:n lausekeessa vain $+$-merkki kelpaa. Siis

$$c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

4. ratkaisu. Käytetään samoja merkintöjä kuin edellä. Pythagoraan lause sovellettuina suorakulmaisiin kolmioihin $AC'I$, $AB'I$, $BC'I$, $BA'I$ antaa $AC' = AB' = \sqrt{16 - r^2}$ ja $BC' = BA' = \sqrt{4 - r^2}$. Yhtälö $a^2 + b^2 = c^2$ on siis

$$\left(r + \sqrt{4 - r^2}\right)^2 + \left(r + \sqrt{16 - r^2}\right)^2 = \left(\sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2}\right)^2.$$

Kun tässä suoritetaan neliöön korotukset ja sievennetään, saadaan, että r toteuttaa yhtälön

$$r\left(\sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2}\right) = -r^2 + \sqrt{r^4 - 20r^2 + 64}.$$

Kun tämä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan, että r toteuttaa yhtälön

$$r^2\sqrt{r^4-20r^2+64}=r^4-10r^2+16.$$

Kun tämä vielä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan r:n toteuttamaksi yhtälöksi

$$17r^4-80r^2+64=0.$$

Tämä on tuntemattoman r^2 toisen asteen yhtälö, jolle voidaan suoraan kirjoittaa ratkaisu

$$r^2=\frac{80\pm\sqrt{6400-17\cdot 256}}{34}=\frac{40\pm 16\sqrt{2}}{17}.$$

Koska r on kolmion BIC' lyhempi kateetti, on oltava $r^2<2$. Vain

$$r^2=\frac{40-16\sqrt{2}}{17}$$

voi tulla kyseeseen. Nyt

$$\begin{aligned}c=\sqrt{4-r^2}+\sqrt{16-r^2}&=\frac{\sqrt{28+16\sqrt{2}}+\sqrt{232+16\sqrt{2}}}{\sqrt{17}}\\&=\frac{2}{\sqrt{17}}\left(\sqrt{7+4\sqrt{2}}+\sqrt{58+4\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

– Tämä yllättävän erinäköinen ratkaisu on kuitenkin sama kuin edellisissä ratkaisuissa saatu $c=2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$, niin kuin selviää, kun korottaa molemmat lausekkeet neliöön ja tekee rutiinisievennykset.

3. *1. ratkaisu.* Olkoon x mielivaltainen joukon A alkio. Jaetaan joukon $A\setminus\{x\}$ 40 alkiota kahdeksi 20-alkioiseksi joukoksi. Olkoot näiden joukkojen alkioiden summat S_1 ja S_2. Tehtävän ehdon perusteella $S_1+x>S_2$ ja $S_2+x>S_1$. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa $x>S_2-S_1$ ja jälkimmäisestä $x>S_1-S_2$. Siis $x>|S_1-S_2|\geq 0$. Jokainen A:n alkio on siis positiivinen luku, joten negatiivisia lukuja A:ssa ei ole.

2. ratkaisu. A on joukko, joten sen alkiot ovat eri lukuja. Kirjoitetaan ne suuruusjärjestykseen $x_1<x_2<\ldots<x_{41}$. Jos joukossa A on negatiivisia lukuja, niin $x_1<0$. Silloin

$$\sum_{k=22}^{41}x_k<\sum_{k=1}^{21}x_k<\sum_{k=2}^{21}x_k<\sum_{k=22}^{41}x_k.$$

Tämä ei ole mahdollista, joten joukossa A ei ole negatiivisia lukuja.

4. *1. ratkaisu.* Jonoja, joissa on $2k$, $k \geq 0$, **A**-kirjainta, on

$$\binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

kappaletta: paikat, joissa on **A**-kirjain voidaan valita yhtä monella tavalla kuin voidaan valita n-alkioisen joukon $2k$-alkioinen osajoukko. **B**- ja **C**-kirjaimille jää $n - 2k$ paikkaa, ja jokaiseen tällaiseen voidaan asettaa kumpi tahansa näistä kirjaimista, joten mahdollisuuksia on 2^{n-2k}. Kaikkiaan tehtävän mukaisia merkkijonoja on siis

$$2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \cdots$$

kappaletta. Mutta summa saadaan kirjoitettua suljettuun muotoon, kun huomataan, että

$$\begin{aligned} 3^n = (2+1)^n &= 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \cdots, \\ 1 = (2-1)^n &= 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} - \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} - \cdots. \end{aligned}$$

Kun edelliset binomikehitelmät lasketaan yhteen, saadaan

$$3^n + 1 = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}.$$

Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis

$$\frac{1}{2}(3^n + 1).$$

2. ratkaisu. n-kirjaimisia sanoja on kaikkiaan 3^n kappaletta. Olkoon näistä S_n sellaisia, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia ja T_n sellaisia, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia. Tarkastellaan sanoja, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Jos sanan viimeinen kirjain on **A**, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on pariton määrä **A**-kirjaimia ja jos viimeinen kirjain on **B** tai **C**, sen $(n-1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on parillinen määrä **A**-kirjaimia. Tästä seuraa

$$S_n = T_{n-1} + 2S_{n-1}. \tag{1}$$

Vastaavasti tarkastelemalla sanoja, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, tullaan yhtälöön

$$T_n = S_{n-1} + 2T_{n-1}. \tag{2}$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) vähennetään toisistaan, saadaan

$$S_n - T_n = S_{n-1} - T_{n-1}. \tag{3}$$

Nyt $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$ (parillinen määrä **A**-kirjaimia on sanoissa **B** ja **C**, pariton sanassa **A**) eli $S_1 - T_1 = 1$. Yhtälöstä (3) seuraa nyt yksinkertaisella induktiolla, että $S_n - T_n = 1$ kaikilla n. Koska $S_n + T_n = 3^n$, saadaan heti

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1).$$

3. ratkaisu. Pienillä n:n arvoilla tehdyt kokeilut antavat aiheen olettaa, että

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

ja

$$T_n = 3^n - S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Todistetaan tämä induktiolla. $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$. Oleteaan, että väite pätee n:n merkin pituisiin jonoihin. Jonot, joiden pituus on $n+1$ merkkiä ja joissa on parillinen määrä **A**-kijaimia, saadaan liittämällä n-pituisiin jonoihin, joissa on parillinen määrä **A**-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi **B** tai **C**, tai sellaisiin, joissa on pariton määrä **A**-kirjaimia, viimeiseksi merkiksi **A**. Siis

$$S_{n+1} = 2S_n + T_n = 3^n + 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1).$$

Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.