Kotitehtävät, tammikuu 2011
Helpompi sarja

1. Kuinka moni luvun 3 viisinumeroinen monikerta päättyy numeroon 6?

Ratkaisu. Viisinumeroisia lukuja on $99999-9999 = 90000$, joista kolmen monikertoja on 30000. Kolmen monikertojen viimeiset numerot ovat $3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0$ (kukin edellistä kolmea suurempi modulo 10) ja sen jälkeen sama jakso toistuu, joten monikerroista joka kymmenes päättyy numeroon 6. Siten vastaus on 3000.

2. Olkoot a, b, c ja d reaaliluvut, joille $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ ja $ac + bd = 0$. Määritä $ab + cd$.

Ratkaisu. Kerrotaan yhtälö $0 = ac + bd$ puolittain lausekkeella $(ad + bc)$, jolloin saadaan

$$0 = (ac + bd)(ad + bc) = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) = ab + cd.$$

3. Todista, että kun $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$,

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Ratkaisu. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $0 < a \leq b \leq c$. Silloin

$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{a+b}.$$

Käytetään suuruusjärjestysepäyhtälöä: kun nämä kaksi kolmen luvun jonoa kerrotaan pareittain keskenään, tulojen summa on suurin kun parit valitaan suuruusjärjestyksen mukaisesti. Siis

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}$$

ja

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b}.$$

Laskemalla nämä epäyhtälöt puolittain yhteen saadaan tehtävän väite, joka tunnetaan *Nesbittin epäyhtälönä.*

4. 8×8-šakkilaudan poikki piirretään suora viiva. Viivan sanotaan halkaisevan ruudun, jos se kulkee ruudun sisäpisteen kautta. Mikä on suurin määrä ruutuja, jonka viiva voi halkaista?

Ratkaisu. Šakkilaudan sisällä on seitsemän vaaka- ja seitsemän pystyviivaa, jotka muodostuvat ruutujen reunoista. Kun kuljetaan yhdestä ruudusta toiseen mitä tahansa suoraa pitkin, on kuljettava ainakin yhden viivan yli. Koska piirretty suora voi ylittää kunkin näistä 14 viivasta enintään kerran, se voi halkaista enintään 15 ruutua. Tällainen suora on myös helppo löytää: siirretään diagonaalisuoraa puolen ruudun verran sivuun.

5. 8×8-šakkilaudalta valitaan kuusitoista ruutua siten, että jokaisessa sarakkeessa ja jokaisella rivillä on täsmälleen kaksi valittua ruutua. Todista, että valituille ruuduille voidaan asettaa kahdeksan valkeaa ja kahdeksan mustaa nappulaa siten, että jokaisessa sarakkeessa ja jokaisella rivillä on yksi valkoinen ja yksi musta nappula.

Ratkaisu. Asetetaan ensin valkea nappula jollekin valituista ruuduista. Sitten asetetaan musta nappula toiselle saman sarakkeen valitulle ruudulle, valkea nappula toiselle tämän nappulan rivin valitulle ruudulle, ja niin edelleen, vaihtaen aina nappulan väriä ja sitä, siirrytäänkö toiselle ruudulle sarakkeen vai rivin suunnassa. Täten edetessä päädytään lopulta ruutuun, jossa on jo nappula. Tämän täytyy olla ensimmäinen asetettu nappula, koska jokaiseen valittuun ruutuun pääsee vain kahta reittiä ja muiden asetettujen nappuloiden molemmat reitit on käytetty. Viimeinen asetettu nappula on välttämättä musta, koska sen ruudusta siirryttiin ensimmäisen nappulan ruutuun riviä pitkin.

Jos valittuja ruutuja on vielä tyhjinä, jatketaan asettelua mistä tahansa ruudusta. Näin jatkaessa ei voida törmätä aiemman kierroksen nappuloihin, koska jokaiseen valittuun ruutuun pääsee vain kahta reittiä. Näin jatkamalla saadaan jokainen ruutu täytettyä tehtävän ehtoa noudattaen.

6. Tavallisesta 52 kortin korttipakasta valitaan satunnaisesti kortti, sen maa kirjataan ylös ja kortti palautetaan pakkaan. Tämä toimenpide tehdään yhteensä seitsemän kertaa. Mikä on todennäköisyys, että kaikki neljä maata esiintyvät valittujen korttien joukossa?

Ratkaisu. Sellaisia maiden jonoja, joissa esiintyy vain yhtä maata, on neljä. Lasketaan, monessako jonossa esiintyy täsmälleen kahta maata. Jos maat ovat esimerkiksi hertta ja ruutu, kullekin seitsemästä kirjatusta maasta on kaksi vaihtoehtoa, joten jonoja on 2^7. Kaksi maata voidaan valita korttipakan neljästä maasta kuudella tavalla, mutta jos näillä tavoilla lasketut jonojen lukumäärät lasketaan yhteen, tullaan laskeneeksi liian monta kertaa ne jonot, joissa esiintyy vain yhtä maata. Esimerkiksi pelkästä hertasta koostuva jono tulee lasketuksi kolmeen kertaan: kerran silloin kun lasketaan hertasta ja ruudusta koostuvia jonoja, kerran silloin kun lasketaan hertasta ja rististä koostuvia jonoja ja kerran silloin kun lasketaan hertasta ja padasta koostuvia jonoja. Siten summasta on vähennettävä kolme kutakin neljää maata kohti. Siten täsmälleen kahdesta maasta koostuvia jonoja on $6 \cdot 2^7 - 12$.

Lasketaan vielä, monessako jonossa esiintyy enintään kolmea maata. Jos nämä kolme maata kiinnitetään, jonoja on 3^7, ja kolme maata voidaan valita neljällä tavalla (jättämällä pois yksi neljästä maasta). Jos lasketaan näiden jonojen lukumäärät yhteen, lasketaan liian monta kertaa sellaiset jonot, joissa esiintyy enintään kahta maata. Sellainen jono, joka koostuu pelkästään yhdestä maasta, tullaan laskeneeksi mukaan kolme kertaa, joten summasta on vähennettävä kutakin maata kohti kaksi, kaikkiaan kahdeksan. Sellainen jono, joka koostuu täsmälleen kahdesta maasta, tullaan laskeneeksi mukaan kaksi kertaa. Summasta on vähennettävä kutakin tällaista jonoa kohti yksi. Tulos on siis $4 \cdot 3^7 - (6 \cdot 2^7 - 12) - 8 = 7984$.

Enintään neljästä maasta koostuvia jonoja on 4^7, joten todennäköisyys saada kaikista neljästä maasta koostuva jono on

$$\frac{4^7 - 7984}{4^7} = \frac{8400}{16384} \approx 0{,}51.$$

7. Olkoon w_n niiden n-merkkisten kirjainjonojen lukumäärä, jotka koostuvat kirjaimista A, B ja C ja joissa on pariton määrä kirjainta A. Esitä w_n:lle laskentakaava.

Ratkaisu. Olkoon v_n niiden n-merkkisten kirjainjonojen lukumäärä, jotka koostuvat kirjaimista A, B ja C ja joissa on parillinen määrä kirjainta A. Nähdään, että $v_1 = 2$ (kirjainjonot "B" ja "C") ja $w_1 = 1$ (kirjainjono "A"). Koska kolmesta kirjaimesta koostuvia n:n mittaisia jonoja on kaikkiaan 3^n, on $w_n + v_n = 3^n$.

Kun lisätään kirjainjonon perään A, jonon A-kirjainten määrän parillisuus muuttuu. Kun lisätään B tai C, parillisuus ei muutu. Siten

$$w_{n+1} = 2w_n + v_n = 3^n + w_n.$$

Käyttämällä tätä tulosta rekursiivisesti saadaan

$$w_n = 1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$$

ja siitä geometrisen sarjan summan kaavalla

$$w_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

8. Teräväkulmaisen kolmion ABC sisällä on piste P, joka ei ole kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Todista, että janoista AP, BP ja CP ainakin yksi on pidempi ja ainakin yksi on lyhyempi kuin kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

Ratkaisu. Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja R sen säde. O on kolmion sisäpiste, mikä nähdään kehäkulmalauseesta. Piirretään janalle OP keskinormaali. Sen täytyy leikata kolmion ABC piiri kahdesti, ja enintään kerran kärkipisteessä. Siten sen täytyy leikata yksi kolmion sivuista, vaikkapa AB. Jos A on samalla puolella keskinormaalia kuin P, B on samalla puolella kuin O, jolloin $PA < OA = R = OB < PB$.

9. Ympyrät k_1 ja k_2 sivuavat toisiaan pisteessä P. Pisteen P kautta piirretään suora, joka leikkaa k_1:n lisäksi pisteessä A_1 ja k_2:n pisteessä A_2. Pisteen P kautta piirretään toinen suora, joka leikkaa k_1:n lisäksi pisteessä B_1 ja k_2:n pisteessä B_2. Todista, että kolmiot PA_1B_1 ja PA_2B_2 ovat yhdenmuotoiset.

Ratkaisu. Olkoot O_1 ja O_2 ympyröiden k_1 ja k_2 keskipisteet. Silloin

$$\angle O_1A_1P = \angle O_1PA_1 = \angle O_2PA_2 = \angle O_2A_2P,$$

joten kolmiot O_1A_1P ja O_2A_2P ovat yhdenmuotoiset (kk). Siten $\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{PO_1}{PO_2}$. Kolmiot $O_1B_!P$ ja O_2B_2P ovat samoin yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{PB_1}{PB_2} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{PA_1}{PA_2}.$$

Lisäksi $\angle A_1PB_1 = \angle A_2PB_2$, joten kolmiot PA_1B_1 ja PA_2B_2 ovat yhdenmuotoiset (sks).

10. Kolmion sivujen pituudet muodostavat aritmeettisen jonon, jonka peräkkäisten alkioiden erotus on d. Kolmion pinta-ala on T. Määritä kolmion kulmat ja sivujen pituudet. Esitä vastaus yleisessä tapauksessa ja laske sivujen ja kulmien likiarvot, kun $d = 1$ ja $T = 6$.

Ratkaisu. Sivujen pituudet ovat $a = b - d$, b ja $c = b + d$, missä $0 < d < b$. Käytetään Heronin kaavaa:

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

missä $2s = a + b + c$. Kaava sievenee muotoon

$$T^2 = \frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right)$$

eli

$$3(b^2)^2 - 12d^2b^2 - 16T^2 = 0.$$

Tämä on toisen asteen yhtälö muuttujalle b^2 ja sen ratkaisu on

$$b^2 = 2(d^2 + \sqrt{d^4 + 4T^2/3})$$

(toinen ratkaisu asettaisi b^2:n negatiiviseksi). Siten kolmion sivujen pituudet ovat

$$b = \sqrt{2(d^2 + \sqrt{d^4 + 4T^2/3})}, a = b - d, c = b + d.$$

Kahta pienintä sivua a ja b vastassa olevat kulmat α ja β ovat välttämättä teräviä, ja ne voidaan ratkaista pinta-alan avulla: $2T = bc\sin\alpha = ac\sin\beta$, joten $\sin\alpha = 2T/bc$ ja $\sin\beta = 2T/ac$. Kolmas kulma on $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

Kun $d = 1$ ja $T = 6$, saadaan $b = 4$, joten $a = 3$ ja $c = 5$. Kulmille pätee $\sin\alpha = 12/20 = 0{,}6$ ja $\sin\beta = 4/5 = 0{,}8$, joten $\alpha \approx 36{,}87°$ ja $\beta \approx 53{,}13°$. Kyseessä on Pythagoraan lauseen perusteella suorakulmainen kolmio, joten $\gamma = 90°$.