Harjoitustehtävät, huhtikuu 2011. Helpommat

Tämänkertaiset valmennustehtävät on laatinut Alexey Kirichenko. Ne ovat tässä suomeksi ja englanniksi. Lähettäkää vastauksenne toukokuun puoleen väliin mennessä Alexeylle osoitteeseen Kivenlahdenkatu 5 c 27, 02320 Espoo. Alexeyn on helpompi saada selvää englanninkielisistä vastauksista, mutta voitte toki kirjoittaa suomeksi.

1. x ja y ovat välin $[0,\,1]$ reaalilukuja. Todista, että $x^4 + y^4 + (x-y)^6 \leq 2$.

2. Kokoukseen saapui 125 matemaatikkoa, ja jokaisella oli tasan 10 tuttavaa osallistujien joukossa. Ensimmäisen kokouspäivän jälkeen jotkut osallistujat poistuivat, ja kävi ilmi, että jokaisella jäljelle jääneellä oli edelleen yhtä monta tuttavaa muiden osallistujien joukossa. Todista, että poistuneiden joukossa oli sellaisia, jotka tunsivat toisensa.

3. Yhdeksän tasan metrin mittaista keppiä katkaistaan kukin 17 palaksi. Osoita, että palojen joukossa on kolme sellaista, joista voidaan muodostaa kolmio.

4. Mikä on suurin määrä positiivisia kokonaislukuja, joilla on se ominaisuus, että jokaisen kolmen luvun summa on alkuluku?

5. Nalle Puhilla on 8 hunajapurnukkaa. Purnukoiden painot ovat 1 kg, 2 kg, $\ldots$, 8 kg ja jokaiseen purnukkaan on kirjoitettu sen paino. Joku on laittanut yhteen purnukkaan kilon juustoa. Nalle Puh tahtoisi tietää, missä purnukassa juusto on (poistamatta hunajaa). Nallella on vaaka, jolla voi selvittää vain sen, kummassa vaakakupissa on painavampi esine tai ovatko esineet samanpainoiset. Miten Nalle voi ratkaista ongelmansa vain kahdella punnituksella? (Vaakakuppeihin voi tietysti laittaa kerralla useampia purnukoita).

6. Kolmion ABC sivulta BC valitaan pisteet M ja N niin, että $CM = MN = NB$. Piste K on sivulla AB niin, että KN ja BC ovat kohtisuorassa. Osoittautuu, että kolmion ABC ala on 4,5 kertaa kolmion AMK ala. Osoita, että kolmio ABC on tasakylkinen.

7. Osoita, että ei ole mahdollista määritellä funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niin, että kaikille kokonaisluvuille olisi voimassa $f(-x^2 + 3x + 1) = (f(x))^2 + 2$.

8. Positiivisella kokonaisluvulla n on kaksi eri tekijää a ja b, joille pätee $(a-1)(b+2) = n-2$. Todista, että $2n$ on kokonaisluvun neliö.

9. Onko mahdollista sijoittaa luvut, $-11, -10, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 14$ kuution kärkille, särmille ja sivutahkoille niin, että jokaisella särmällä on luku, joka on särmän päätepitsissä olevien lukujen summa ja jokaisella sivutahkolla on luku, joka on tahkoa reunustavillä saärmillä olevien lukujen summa? (Kärkiä on 8, särmiä 12 ja tahkoja 6, joten lukuja käytetään 26 kappaletta.)

10. Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ on $\angle B = \angle C$ ja $CD = 2 \cdot AB$. Piste X on valittu sivulta BC niin, että $\angle BAX = \angle CDA$. Todista, että $AX = AD$.

1. x and y are two real numbers in [0, 1]. Prove that $x^4 + y^5 + (x - y)^6 \le 2$.

2. To a conference, 125 mathematicians came, and each of them had exactly 10 acquaintances among the participants. After the first day, some participants left, and it turned out that among all the remaining ones, everybody still had the same number of acquaintances. Prove that some of the mathematicians who left knew each other.

3. There are 9 sticks and each of them is exactly 1 meter long. Every stick was broken into 17 pieces. Prove that it is possible to select three pieces that can form a triangle.

4. What is the maximum number of positive integers that we can select in such a way that sum of any three of them is a prime number?

5. Winnie-the-Pooh has 8 jars of honey with the weights of 1 kg, 2 kg, …, 8 kg, and on each jar, its weight is written. Someone put a 1 kg piece of cheese in one of the jars, and Winnie wants to find out where the cheese is (not removing the honey). He has a scales that can only show whether the two sides have equal weight or which side is heavier. How can Winnie solve his problem in only two weighting operations? It is, of course, possible to place several jars on each side of the scales.

6. On side BC of triangle ABC, we select points M and N such that $CM = MN = NB$. Point K is selected on side AB so that KN is perpendicular to BC. It turned out that the area of triangle ABC is 4.5 times greater than the area of triangle AMK. Prove that triangle ABC is isosceles.

7. Prove that it is impossible to define function f mapping all the real numbers to real numbers in such a way that for any integer x we have
$f(-x^2 + 3x + 1) = (f(x))^2 + 2$.

8. Positive integer n has two distinct divisors a and b such that $(a - 1)(b + 2) = n - 2$. Prove that $2n$ is a square of a positive integer.

9. Is it possible to place numbers (–11), (–10), …, (–1), 0, 1, 2, …, 14 to the vertices, edges, and faces of a cube in such a way that the number on each edge is equal to the sum of the numbers in the edge's endpoints, and the number on each face is equal to the sum of the numbers on the four edges of that face? (We have 8 vertices, 12 edges, and 6 faces, and exactly 26 numbers to use.)

10. In convex quadrilateral $ABCD$, we have $\angle B = \angle C$ and $CD = 2\,AB$. Point X is selected on side BC so that $\angle BAX = \angle CDA$. Prove that $AX = AD$.