

## Nimekästä geometriaa

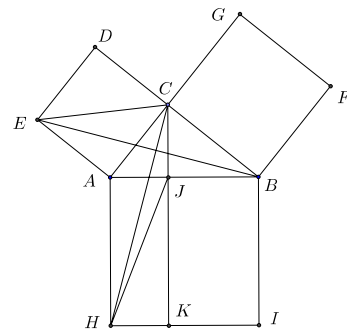
Matemaattisiin lauseisiin tai muihin tuloksiin viitataan usein henkilönnimin. Yleensä tällaiset asiat ovat jotenkin tärkeitä, ja niiden todistuksiin tutustuminen opettavaa.

**Thaleen lause.** *Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.* (*Thales Miletolainen*, n. 634 – n. 547 eaa)

**Todistus.** Jos  $AB$  on ympyrän halkaisija,  $O$  ympyrän keskipiste ja  $C \neq A, B$  ympyrän kehän piste, niin kolmiot  $AOC$  ja  $COB$  ovat tasakylkisiä. Tästä seuraa  $\angle BCA = \angle BCO + \angle OCA = \angle OBC + \angle CAO = \angle ABC + \angle CAB$ . Mutta kolmion kulman vieruskulman suuruutta koskevan lauseen nojalla myös kulman  $\angle BCO$  vieruskulma on  $\angle CAB + \angle ABC$ . Kulma, joka on vieruskulmansa suuruinen, on suora.

**Pythagoraan lause.** *Kolmion  $ABC$  kulma  $\angle BCA$  on suora jos ja vain jos sivu  $AB$  kantana piirretyn neliön ala on sama kuin sivut  $AC$  ja  $BC$  kantoina piirrettyjen neliöiden yhteenlaskettu ala.* (*Pythagoras Samoslainen*, n. 569–475 eaa)

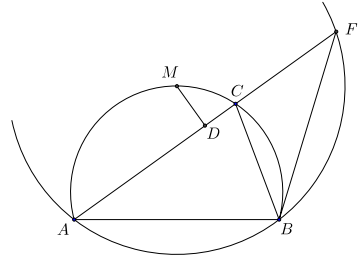
**Todistus.** Leikatkoon pisteestä  $C$  suoraa  $AB$  vastaan kohtisuoraan piirretty suora  $AB$ :n pisteessä  $J$  ja  $HI$ :n pisteessä  $K$ . On helppo nähdä, että kolmioilla  $EAC$  ja  $EAB$  on sama korkeus. Niillä on siis sama pinta-ala. Koska kulmat  $\angle EAB$  ja  $\angle CAH$  ovat suoran kulman ja kulman  $CAB$  summia, ne ovat yhtä suuret. Koska  $ACDE$  ja  $BAHI$  ovat neliöitä,  $EA = AC$  ja  $AB = AH$ . Kolmiot  $EAB$  ja  $CAH$  ovat yhteneviä (sks). Kolmioilla  $AHC$  ja  $AHJ$  on sama korkeus. Nyt siis kolmiot  $EAC$  ja  $AHJ$  ovat sama-alaiset. Edelleen neliö  $ACDE$  ja suorakaide  $AHKJ$  ovat sama-alaiset. Samoin osoitetaan, että neliö  $CBFG$  ja suorakaide  $JKIB$  ovat sama-alaiset.



On vielä todistettava lauseen käänteinen puoli. Piirretään suorakulmainen kolmio  $BCD$ ,  $\angle BCD$  suora kulma ja  $CD \cong CA$ . Pythagoraan lauseesta seuraa, että  $BD$ :lle piirretyn neliön ala on  $BC$ :lle ja  $CD$ :lle piirrettyjen neliöiden alojen summa, ja oletuksesta, että  $BD$ :lle piirretty neliön ala on sama kuin  $AB$ :lle piirretyn neliön ala. Tästä päätellään, että  $BD = AB$ . Koska kolmiot  $ABC$  ja  $DBC$  ovat yhteneviä (sss),  $\angle BCA = \angle BCD$  ja  $ABC$  on suorakulmainen.

**Arkhimedeen lause eli Katkaistun jängteen lause.**  *$ABC$  on kolmio,  $AC > BC$ ,  $M$  puolittaa  $ABC$ :n ympäri piirretyn ympyrän kaaren  $\widehat{ACB}$ ;  $D$   $M$ :n kohtisuora projektio  $AC$ :llä. Silloin  $AD = DC + CB$ .* (*Archimedes Syrakusalainen*, 287–212 eaa)

**Todistus.** Jatketaan kolmion sivua  $AC$  pisteeseen  $F$  niin, että  $CF = CB$ . Silloin kolmion  $CBF$  on tasakylkinen ja  $\angle BCA = 2 \cdot \angle BFC$ . Tarkastellaan pisteiden  $A$ ,  $B$  ja  $F$  kautta kulkevaa ympyrää  $\mathcal{Y}$ . Sen keskipisteen on oltava janan  $AB$  keskinormaalilla ja kaarta  $AB$  vastaavan keskuskulman on oltava  $2 \cdot \angle BFA = \angle BCA$ . Mutta koska  $ABCM$  on jännelikulmio,  $\angle AMB = \angle ACB$ . Tästä seuraa, että  $M$  on  $\mathcal{Y}$ :n keskipiste. Mutta silloin  $M$  on janan  $AF$  keskinormaalilla ja  $D$  on janan  $AF$  keskipiste. Siis  $AD = DF = DC + CF = DC + CB$ .



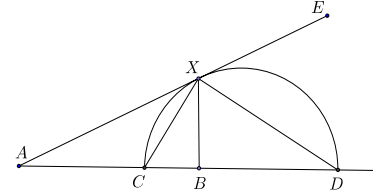
**Apollonioksen ympyrä.** Jos  $AB$  on jana ja  $k$  on positiivinen vakio, niin ne pisteet  $X$ , joille  $\frac{AX}{BX} = k$ , ovat sen ympyrän pisteet, jonka halkaisija on se suoran  $AB$  jana  $CD$ , jonka päätepisteet toteuttavat ehdon  $\frac{AC}{BC} = k$  ja  $\frac{AD}{BD} = k$ . (Apollonios Pergalainen, n. 262–190 eaa)

**Todistus.** Oletetaan ensin, että  $X$  toteuttaa ehdon

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}.$$

Olkoon  $E$  piste puolisuoralla  $AX$  janan  $AX$  ulkopuolella. Sovelletaan sinilauseita kolmioihin  $ACX$  ja  $CBX$ . Sen perusteella

$$\frac{AC}{\sin(\angle AXC)} = \frac{AX}{\sin(\angle ACX)}, \quad \frac{CB}{\sin(\angle CXB)} = \frac{BX}{\sin(\angle XCB)} = \frac{BX}{\sin(\angle ACX)}.$$



Koska  $\frac{AX}{BX} = \frac{AC}{CB}$ , on oltava  $\sin(\angle AXC) = \sin(\angle CXB)$  ja  $\angle AXC = \angle CXB$ . Sovelletaan sitten sinilauseita kolmioihin  $BDX$  ja  $ADX$ . Saadaan

$$\frac{BD}{\sin(\angle BXD)} = \frac{BX}{\sin(\angle BDX)}, \quad \frac{AX}{\sin(\angle ADX)} = \frac{AD}{\sin(\angle AXD)} = \frac{AD}{\sin(\angle EXD)}.$$

Koska  $\frac{AX}{BX} = \frac{AD}{BD}$ , on oltava  $\sin(\angle BXD) = \sin(\angle EXD)$  ja  $\angle BXD = \angle EXD$ . Mutta tästä seuraa, että  $\angle CXD = \frac{1}{2} \cdot \angle AXE = 90^\circ$ . Piste  $X$  on siis ympyrällä, jonka halkaisija on  $CD$ .

On vielä osoitettava, että kaikille  $CD$ -halkaisijaisen ympyrän pisteille  $X$  pätee  $\frac{AX}{BX} = k$ .

Tehdään vastaoletus: jollekin ympyrän pisteelle  $X'$  on  $\frac{AX'}{BX'} = k' \neq k$ . Oletetaan, että  $k' < k$ . Jos  $C'$  ja  $D'$  ovat ne janan  $AB$  ja sen jatkeen pisteet, joille  $\frac{AC'}{C'B} = k'$  ja  $\frac{AD'}{BD'} = k'$ ,

niin edellä osoitetun mukaan  $X'$  on ympyrällä, jonka halkaisija on  $C'D'$ . Nyt kuitenkin on oltava  $AC' < AC$  ja  $BC' > BC$ . Toisaalta

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AB + BD}{BD} = 1 + \frac{AB}{BD}, \quad \frac{AD'}{BD'} = 1 + \frac{AB}{BD'}.$$

Tästä nähdään, että  $BD' > BD$ . Jana  $CD$  jää koonaan janan  $C'D'$  sisään ja myös  $CD$ -halkaisijainen ympyrä  $C'D'$ -halkaisijaisen ympyrän sisään. Koska  $X'$  ei voi olla näillä kahdella erillisellä ympyrällä, vastaoletus on väärä. Samoin tietysti torjutaan mahdollisuus  $k < k'$ .

**Menelaoksen lause.** Olkoon  $ABC$  kolmio ja olkoot  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  suorien  $BC$ ,  $CA$ , ja  $AB$  pisteitä niin, että pisteistä kaksi tai ei yhtään on kolmion  $ABC$  sivuilla. Pisteet  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  ovat samalla suoralla jos ja vain jos

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

(Jos suoria pidetään suunnattuina ja käytetään myös etumerkillisiä pituuksia, yhtälön oikean puolen 1 korvataan  $-1$ :llä.) (Menelaos Aleksandrialainen, n. 70–130)

**Todistus.** Oletetaan, että  $X$  on sivun  $BC$  jatkeella,  $Y$  sivulla  $CA$  ja  $Z$  sivulla  $AB$  ja että  $XYZ$  on suora. Piirretään  $Y$ :n ja  $C$ :n kautta  $AB$ :n suntaiset suorat. Leikatkoon niistä edellinen suoran  $BC$  pisteessä  $D$  ja jälkimmäinen suoran  $XYZ$  pisteessä  $E$ . Kolmiot  $BXZ$  ja  $CXE$  ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{BX}{XC} = \frac{BZ}{CE}.$$

Samoin kolmiot  $AZY$  ja  $CEY$  ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{CY}{YZ} = \frac{EC}{AZ}.$$

Siis

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BZ}{CE} \cdot \frac{EC}{AZ} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

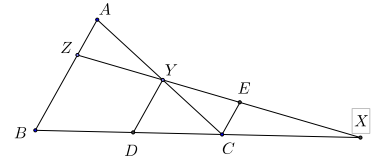
Päätely on sanasta sanaan sama, jos  $Z$  on  $BA$ :n jatkeella ja  $Y$  on  $CA$ :n jatkeella (tai jos  $CA$  vaihdetaan  $AC$ :ksi ja  $BA$   $AB$ :ksi). Jos jokainen suorista  $AB$ ,  $BC$  ja  $CA$  varustetaan suunnistuksella. Silloin (esimerkiksi)  $BX$  ja  $XC$  ovat samanmerkkiset täsmälleen silloin, kun  $X$  on janalla  $BC$ . Yhtälön (1) vasemman puolen tulon kolmesta tekijästä on silloin yksi tai kolme  $= -1$ , ja tulo on  $-1$ . – Lauseen käänteinen puoli: jos  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  toteuttavat yhtälön (1) ja jos  $Y$ :n ja  $Z$ :n kautta kulkeva suora leikkaa suoran  $BC$  pisteessä  $X'$ , niin jo todistetun alkuosan perusteella

$$\frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Siis

$$\frac{BX'}{X'C} = \frac{BX}{XC},$$

mistä seuraa  $X' = X$  ja siten se, että  $XYZ$  on suora.



**Heronin kaava.** Jos kolmion sivut ovat  $a, b, c$  ja  $2s = a + b + c$ , niin kolmion ala on  $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ . (Heron Aleksandrialainen, n. 10–75)

**Todistus.** Olkoon sivua  $c$  vastassa oleva kolmion kulma  $\gamma$ . Käytetään hyväksi kolmion alan lauseketta  $T = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ , kaavaa  $\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma$ , kosinilauseetta, jonka mukaan  $c^2 - a^2 - b^2 = 2ab \cos \gamma$  ja relaatioita  $a + b + c = 2s$ ,  $a + b - c = 2(s - c)$ ,  $a - b + c = 2(s - b)$ ,  $-a + b + c = 2(s - a)$ . Lasketaan käyttäen useamman kerran hyväksi yhteyttä  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ :

$$\begin{aligned} 16T^2 &= (4T)^2 = (2ab \sin \gamma)^2 = (2ab)^2 - (2ab \cos \gamma)^2 = (2ab)^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2 \\ &= (2ab - c^2 + a^2 + b^2)(2ab + c^2 - a^2 - b^2) = ((a + b)^2 - c^2)((-a - b)^2 + c^2) \\ &= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = 2s \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - a). \end{aligned}$$

Kun supistetaan 16:lla ja otetaan neliöjuuri, saadaan tulos.

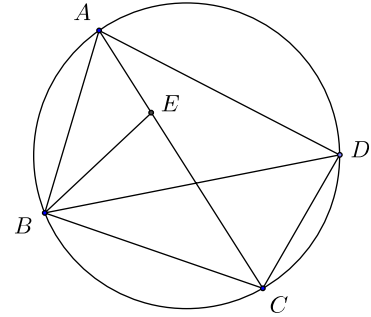
**Ptolemaioksen lause** Kupera nelikulmio  $ABCD$  on jännenelikulmio, jos ja vain jos

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

(Klaudios Ptolemaios, n. 85–165)

**Todistus.** Valitaan janalta  $AC$  piste  $E$  niin, että  $\angle ABE = \angle DBC$ . Koska  $\angle BDC = \angle BAC$ , kolmiot  $ABE$  ja  $DBC$  ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} \quad (1)$$



ja  $\angle BEA = \angle BCD$ . Koska  $ABCD$  on jännenelikulmio,  $\angle BEC = \angle BAD$ . Myöskin  $\angle BCA = \angle BDA$ , joten kolmiot  $BCE$  ja  $BDA$  ovat yhdenmuotoiset. Siis

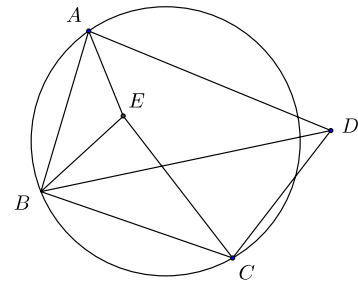
$$\frac{CE}{AD} = \frac{BC}{BD}. \quad (2)$$

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan  $AB \cdot CD + BC \cdot AD = (AE + CE) \cdot BD = AC \cdot BD$ .

Lauseen toisen puolen osoittamiseksi lähdetään nelikulmiosta  $ABCD$ , joka ei ole jännenelikulmio. Piirretään kolmio  $ABE$ , joka on yhdenmuotoinen kolmion  $DBC$  kanssa. Yhtälö (1) on voimassa. Mutta nyt myös

$$\frac{BE}{BC} = \frac{AB}{BD}.$$

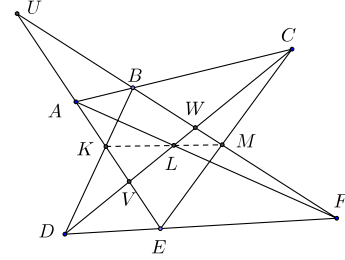
Koska  $\angle ABE = \angle DBC$ , myös  $\angle ABD = \angle EBC$ . Siis kolmiot  $BCE$  ja  $BDA$  ovat yhdenmuotoiset (sks). Yhtälö (2) on myös voimassa, joten  $AB \cdot CD + BC \cdot AD = (AE + CE) \cdot BD$ . Nyt kuitenkin  $\angle BEA + \angle CEB = \angle BCD + \angle BAD \neq 180^\circ$ , koska  $ABCD$  ei ole jännenelikulmio.  $AEC$  ei ole suora, joten  $AE + EC > AC$ . Siis  $AB \cdot CD + BC \cdot AD > AC \cdot BD$ .



**Pappusin lause.** Jos  $A, B, C$  ovat samalla suoralla ja  $D, E, F$  samalla suoralla, niin suorien  $AE$  ja  $BD$ ,  $AF$  ja  $CD$  sekä  $BF$  ja  $CE$  leikkauspisteet ovat samalla suoralla. (*Pappus Aleksandrialainen* (n. 290 – n. 350))

**Todistus.** Olkoon  $K$   $AE$ :n ja  $BD$ :n leikkauspiste,  $L$   $AF$ :n ja  $CD$ :n leikkauspiste ja  $M$   $BF$ :n ja  $CE$ :n leikkauspiste. Leikatkoot suorat  $AE$  ja  $BF$  pisteessä  $U$  ja olkoot  $V$  ja  $W$  näiden suorien ja  $CD$ :n leikkauspisteet. Sovelletaan Menelaoksen lausetta useampia kertoja kolmioon  $UVW$ . Suora  $ABC$  antaa

$$\frac{UA}{AV} \cdot \frac{VC}{CW} \cdot \frac{WB}{BU} = -1 \quad (1)$$



ja suora  $DEF$

$$\frac{UE}{EV} \cdot \frac{VD}{DW} \cdot \frac{WF}{FU} = -1. \quad (2)$$

Suorista  $ALF$ ,  $EMC$  ja  $DKB$  saadaan vastaavasti

$$\frac{UA}{AV} \cdot \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WF}{FU} = -1, \quad (3)$$

$$\frac{UE}{EV} \cdot \frac{VC}{CW} \cdot \frac{WM}{BM} = -1, \quad (4)$$

ja

$$\frac{UK}{KV} \cdot \frac{VD}{DW} \cdot \frac{WB}{BU} = -1. \quad (5)$$

Kun yhtälöt (3), (4) ja (5) kerrotaan keskenään ja jaetaan yhtälöiden (1) ja (2) tulolla, saadaan

$$-1 = \frac{\frac{UA}{AV} \cdot \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WF}{FU} \cdot \frac{UE}{EV} \cdot \frac{VC}{CW} \cdot \frac{WM}{BM} \cdot \frac{UK}{KV} \cdot \frac{VD}{DW} \cdot \frac{WB}{BU}}{\frac{UA}{AV} \cdot \frac{VC}{CW} \cdot \frac{WB}{BU} \cdot \frac{UE}{EV} \cdot \frac{VD}{DW} \cdot \frac{WF}{FU}} = \frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UK}{KV}.$$

Menelaoksen lauseen käänteisen puolen perusteella  $L$ ,  $K$  ja  $M$  ovat samalla suoralla.

**Brahmaguptan kaava.** Jos jänneleikikulmion sivut ovat  $a, b, c, d$  ja  $2s = a + b + c + d$ , niin jänneleikikulmion ala on  $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ . (*Brahmagupta*, 598–670)

**Todistus.** Huomataan, että  $-a + b + c + d = 2(s - a)$  jne. Olkoon sivujen  $a$  ja  $b$  välinen kulma  $\gamma$  ja sivujen  $c$  ja  $d$  välinen kulma  $\delta$ . Kulmat  $\gamma$  ja  $\delta$  ovat vieruskulmia (suplementtikulmia), joten niillä on sama sini ja itseisarvoltaan sama, mutta vastakkaismerkkinen kosini. Jänneleikikulmion ala on  $A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma + \frac{1}{2}cd \sin \delta = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin \gamma$ . Olkoon  $e$  jänneleikikulmion kulmia  $\gamma$  ja  $\delta$  vastassa oleva lävistäjä. Kosinilauseen perusteella  $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  ja  $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta = c^2 + d^2 + 2cd \cos \gamma$ . Kun edellisistä

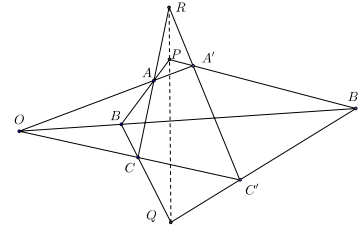
yhtälöistä eliminoidaan  $e^2$ , saadaan  $2(ab + cd) \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ . Lasketaan hiukan samoin kuin Heronin kaavan todistuksessa:

$$\begin{aligned}
 16A^2 &= (4A)^2 = (2ab \sin \gamma + 2cd \sin \delta)^2 = 4(ab + cd)^2 \sin^2 \gamma = 4(ab + cd)^2 - 4(ab + cd)^2 \cos^2 \gamma \\
 &= 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\
 &= (2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2))(2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)) \\
 &= ((a + b)^2 - (c - d)^2)((c + d)^2 - (a - b)^2) \\
 &= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b) = 2(s - d) \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - a).
 \end{aligned}$$

Brahmaguptan kaava saadaan, kun yhtälö jaetaan puolittain 16:lla ja otetaan puolittain neliöjuuri.

**Desargues'n lause.** Jos  $ABC$  ja  $A'B'C'$  ovat kolmioita, niin suorat  $AA'$ ,  $BB'$  ja  $CC'$  leikkaavat toisensa samassa pisteessä jos ja vain jos suorien  $AB$  ja  $A'B'$ ,  $BC$  ja  $B'C'$  sekä  $CA$  ja  $C'A'$  leikkauspisteet ovat samalla suoralla. (Girard Desargues, 1591–1661)

**Todistus.** Olkoon  $O$  suorien  $AA'$ ,  $BB'$  ja  $CC'$  yhteinen leikkauspiste ja olkoot  $P$ ,  $Q$  ja  $R$   $AB$ :n ja  $A'B'$ :n,  $BC$ :n ja  $B'C'$ :n sekä  $CA$ :n ja  $C'A'$ :n leikkauspisteet. Sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon  $OBA$  ja suoraan  $B'A'P$ , kolmioon  $OCB$  ja  $QC'B'$  sekä kolmioon  $OCA$  ja suoraan  $RA'C'$ . Saadaan



$$\frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AA'}{A'O} = -1, \quad \frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CQ}{QB} \cdot \frac{BB'}{B'O} = -1, \quad \frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} = -1.$$

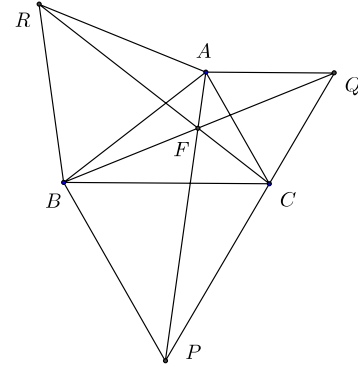
Kun yhtälöistä kaksi ensimmäistä kerrotaan keskenään ja jaetaan tulo kolmannella, saadaan

$$\frac{BP}{PA} \cdot \frac{CQ}{QB} \cdot \frac{RA}{CR} = -1.$$

Kun Menelaoksen lauseen käännteistä puolta sovelletaan kolmioon  $ABC$ , nähdään, että  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  ovat samalla suoralla. – Desarguesin lauseen käännteinen puoli todistuu edellisen perusteella. Jos  $R$ ,  $P$  ja  $Q$  ovat samalla suoralla, niin suorien  $PA$  ja  $QC$  leikkauspiste  $B$ , suorien  $PA'$  ja  $QC'$  leikkauspiste  $B'$  ja suorien  $AA'$  ja  $CC'$  leikkauspiste (jota voi merkitä  $O$ :lla) ovat samalla suoralla. Siis  $AA'$ ,  $BB'$  ja  $CC'$  leikkaavat samassa pisteessä.

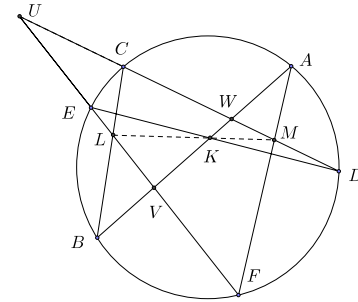
**Fermat'n piste.** Jos kolmion  $ABC$  sivut kantoina piirretään kolmion ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot  $ARB$ ,  $BPC$  ja  $CQA$ , niin janat  $AP$ ,  $BQ$  ja  $CR$  kulkevat saman pisteen kautta. (Pierre de Fermat, 1601–65)

**Todistus.** Olkoon  $F$  janojen  $BQ$  ja  $CR$  leikkauspiste.  $60^\circ$  kierto pisteen  $A$  ympäri vie  $R$ :n  $B$ :lle ja  $C$ :n  $Q$ :lle. Kierto vie siis janan  $RC$  janaksi  $BQ$ , ja  $\angle QFC = \angle BFR = 60^\circ$ . Tästä seuraa, että  $F$  on kolmion  $ACQ$  ympärysympyrällä ja kolmion  $ARB$  ympärysympyrällä. Koska  $\angle CFB = 360^\circ - (\angle CFA + \angle AFB) = 360^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 120^\circ$ , piste  $F$  on myös kolmion  $BPC$  ympärysympyrällä. Tästä seuraa edelleen, että  $\angle BFP = \angle BCP = 60^\circ$ . Kulmat  $\angle AFB$  ja  $\angle BFP$  ovat siis vieruskulmia, joten  $F$  on myös suoralla  $AP$ .



**Pascalin lause.** Jos ympyrän sisään piirretyn (ei välttämättä kuperan) kuusikulmion vastakkaiset sivut tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa, niin leikkauspisteet ovat samalla suoralla. (Blaise Pascal, 1623–62)

**Todistus.** Todistus muistuttaa Desargues'n lauseen todistusta. Olkoon  $ABCDEF$  murtoviiva, jonka kaikki kärjet ovat samalla ympyrällä. Leikatkaa  $AB$  ja  $DE$  pisteessä  $K$ ,  $BC$  ja  $EF$  pisteessä  $L$  ja  $CD$  ja  $FA$  pisteessä  $M$ . Leikatkaa suorat  $CD$  ja  $EF$  pisteessä  $U$ .  $AB$  ja  $EF$  pisteessä  $V$  ja  $AB$  ja  $CD$  pisteessä  $W$ . Sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon  $UVW$  ja suoriin  $BLC$ ,  $EKD$  ja  $AMF$ . Saadaan



$$\frac{UL}{LV} \cdot \frac{VB}{BW} \cdot \frac{WC}{CU} = -1, \quad \frac{UE}{EV} \cdot \frac{VK}{KW} \cdot \frac{WD}{DU} = -1, \quad \frac{UF}{FV} \cdot \frac{VA}{AW} \cdot \frac{WM}{MU} = -1. \quad (1)$$

Pisteen potenssia ympyrän suhteen koskevan tunnetun tuloksen nojalla

$$\frac{(VB \cdot WC) \cdot (UE \cdot WD) \cdot (UF \cdot VA)}{(BW \cdot CU) \cdot (EV \cdot DU) \cdot (FV \cdot AW)} = \frac{VB \cdot VA}{EV \cdot FV} \cdot \frac{WC \cdot WD}{BW \cdot AW} \cdot \frac{UE \cdot UF}{CU \cdot DU} = 1.$$

Kun yhtälöt (1) kerrotaan keskenään, jää siis vain

$$\frac{UL}{LV} \cdot \frac{VK}{KW} \cdot \frac{WM}{MU} = -1.$$

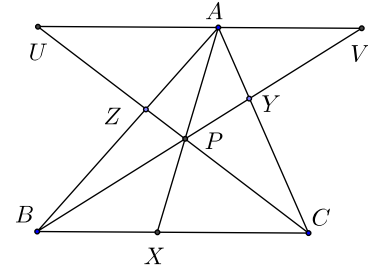
Kun Menelaoksen lauseen käänteispuolta sovelletaan kolmioon  $UVW$  ja pisteisiin  $L$ ,  $K$  ja  $M$ , nähdään, että  $LKM$  on suora.

**Cevan lause.** Jos  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  ovat kolmion  $ABC$  sivujen  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  pisteitä, niin janat  $AX$ ,  $BY$  ja  $CZ$  leikkaavat toisensa samassa pisteessä jos ja vain jos

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

(*Giovanni Ceva*, 1674–1734)

**Todistus.** Todistetaan ensin lauseen ”vain jos” -osa. Oletetaan, että  $AX$ ,  $BY$  ja  $CZ$  leikkaavat toisensa pisteessä  $P$ . Piirretään  $A$ :n kautta  $BC$ :n suuntainen suora. Leikatkoon suora  $BY$  sen pisteessä  $V$  ja suora  $CZ$  sen pisteessä  $U$ . Kolmiot  $BCY$  ja  $VAY$  ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis



$$\frac{CY}{YA} = \frac{BC}{AV}. \quad (1)$$

Kolmiot  $BCZ$  ja  $AUZ$  ovat yhdenmuotoisia (kk), Siis

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{AU}{BC}. \quad (2)$$

Kolmiot  $BXP$  ja  $VAP$  ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{BX}{AV} = \frac{PX}{PA}. \quad (3)$$

Kolmiot  $XCP$  ja  $AUP$  ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{XC}{AU} = \frac{PX}{PA}. \quad (4)$$

Yhtälöistä (3) ja (4) saadaan

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AV}{AU}. \quad (5)$$

Kerrotaan yhtälöt (5), (1) ja (2) puolittain. Saadaan

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{AV}{AU} \cdot \frac{BC}{AV} \cdot \frac{AU}{BC} = 1.$$

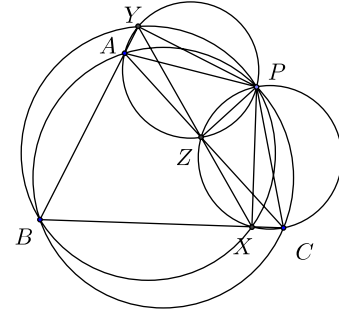
Todistetaan sitten lauseen käänteinen puoli tyypillisellä epäsuoralla päättelyllä. Olkoot  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  lauseen mukaisia kolmion sivujen pisteitä niin, että  $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$ . Leikatkoot  $BY$  ja  $CZ$  pisteessä  $P$ . Piirretään puolisuora  $AP$ ; leikatkoon se  $BC$ :n pisteessä  $X'$ . Jo todistetun lauseenpuolikkaan mukaan on  $\frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$ . Mutta tästä seuraa, että  $\frac{BX'}{X'C} = \frac{BX}{XC}$ . Koska vain yksi piste voi jakaa janan sisäpuolisesti annetussa suhteessa, on oltava  $X' = X$ . Mutta silloin jana  $AX = AX'$  kulkee janojen  $BY$  ja  $CZ$  leikkauspisteen  $P$  kautta.

Itse asiassa pisteiden  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  ei tarvitse olla kolmion  $ABC$  sivuilla eikä pisteen  $P$  kolmion sisällä. Edellä oleva todistus voidaan toistaa sanasta sanaan samana myös tapauksissa, joissa pisteistä yksi on kolmion sivulla ja kaksi kolmion sivujen jatkeilla.



**Simsonin suora.** Jos  $P$  on kolmion  $ABC$  ympärysympyrällä, niin  $P$ :n kohtisuorat projektiot suorilla  $AB$ ,  $BC$  ja  $CA$  ovat samalla suoralla. (Robert Simson, 1687–1768)

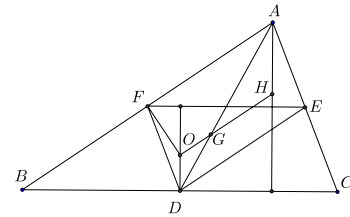
**Todistus.** Voidaan olettaa, että  $P$  on sillä kaarista  $AB$ , jolla  $B$  ei ole. Olkoot  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$   $P$ :n kohtisuorat projektiot suorilla  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$ . Koska kulmat  $BXP$  ja  $PZB$  ovat suoria, kulma  $XPZ$  on kulman  $ABC$  suplementtikulma. Myös kulma  $APC$  on kulman  $ABC$  suplementtikulma. Tästä seuraa, että  $\angle APZ = \angle CPX$ . Koska kulmat  $PYC$  ja  $PXC$  ovat suoria,  $PYXC$  on jännelikulmio ja  $\angle CYX = \angle CPX = \angle APZ$ . Mutta koska myös kulmat  $PZA$  ja  $PYA$  ovat suoria,  $ZAYP$  on jännelikulmio ja siis



$\angle AYZ = \angle APZ$ . Kaikkiaan siis  $\angle XYC = \angle ZYA$ . Jännelikulmion kulmia tarkastelemalla on helppo vakuttua siitä, että  $Z$  ja  $X$  eivät voi olla samalla puolella suoraa  $AC$ . Siis  $XYZ$  on suora.

**Eulerin suora.** Kolmion keskijanojen leikkauspiste, korkeusjanojen leikkauspiste ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ovat samalla suoralla. (Leonhard Euler, 1707–83)

**Todistus.** Olkoon  $G$  kolmion  $ABC$  keskijanojen leikkauspiste,  $H$  sen korkeusjanojen leikkauspiste eli ortokeskus ja  $O$  sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste eli sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Olkoot vielä  $D$ ,  $E$  ja  $F$  sivujen  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  keskipisteet. Osoitetaan kolmiot  $ODG$  ja  $HAG$  yhdenmuotoisiksi. Koska  $OD$  ja  $AH$  ovat molemmat kohtisuorassa suoraa  $BC$  vastaan, ne ovat yhdensuuntaiset. Tästä seuraa, että  $\angle ODG = \angle HAG$ . Kolmion keskijanojen tunnetun

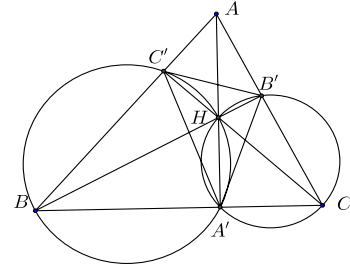


ominaisuuden perusteella  $AG = 2 \cdot GD$ . Kolmion tunnetun ominaisuuden mukaisesti  $EF$ ,  $FD$  ja  $DE$  ovat kukin pituudeltaan puolet sivuista  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  ja näiden sivujen suuntaisia. Kolmio  $EFD$  on siis yhdenmuotoinen kolmion  $BCA$  kanssa, ja yhdenmuotoisuussuhde on  $1 : 2$ . Suorat  $DO$ ,  $EO$  ja  $FO$  ovat kohtisuorassa kolmion  $BCA$  sivuja vastaan ja siis myös kohtisuorassa kolmion  $EFD$  sivuja vastaan. Ne ovat siis kolmion  $EFD$  korkeussuoria ja niiden yhteinen piste  $O$  on kolmion  $EFD$  ortokeskus. Kolmioiden  $EFD$  ja  $BCA$  yhdenmuotoisuussuhteesta seuraa, että  $AH = 2 \cdot DO$ . Mutta tästä seuraa, että kolmiot  $ODG$  ja  $HAG$  ovat yhdenmuotoisia (sks). Siis  $\angle OGD = \angle HGA$ .  $O$ ,  $G$  ja  $H$  ovat siis samalla suoralla.

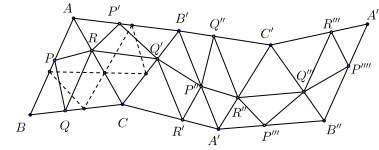
**Fagnanon lause.** Ortokolmion<sup>1</sup> piiri on lyhin sellaisen kolmion piiri, jonka kärjet ovat annetun teräväkulmaisen kolmion sivuilla. (Giovanni Fagnano, 1715–97)

<sup>1</sup> Kolmion ortokolmio on se kolmio, jonka kärjet ovat kolmion korkeusjanojen kantapisteet.

**Todistus.** Todistetaan ensin (tunnettu) aputulos: kolmion korkeusjanat ovat kolmion ortokolmion kulmanpuolittajia. Olkoon  $ABC$  teräväkulmainen kolmio ja  $A'B'C'$  sen ortokolmio ja  $H$  korkeusjanojen leikkauspiste eli ortokeskus. Koska  $\angle BC'H$  ja  $\angle BA'H$  ovat suoria,  $A'HC'B$  on jännenelikulmio. Samoin  $A'CB'H$  on jännenelikulmio. Siis  $\angle HA'C' = \angle HBC'$  ja  $\angle HA'B' = \angle HCB'$ . Mutta suorakulmaisista kolmioista  $ABB'$  ja  $AC'C$  nähdään, että  $\angle HBC' = \angle HCB'$ , joten  $A'A$  on kulman  $\angle C'A'B'$  puolittaja.



Fagnanon lauseen todistamiseksi lähdetään kolmiosta  $ABC$ , jossa  $\angle BAC = \alpha$  ja  $\angle ABC = \beta$ . Peilataan kolmio suoran  $AC$  yli kolmioksi  $ACB'$ , tämä suoran  $B'C$  yli kolmioksi  $A'B'C$ , tämä suoran  $A'B'$  yli kolmioksi  $A'C'B'$ , tämä suoran  $A'C'$  yli kolmioksi  $A'B''C'$  ja tämä viimein suoran  $B''C'$  yli kolmioksi  $A''C'B''$ . Tarkastellaan sivun  $AB$  muuttumista peilauksissa. En-



simmäisessä peilauksessa se kiertyy kulman  $2\alpha$  verran positiiviseen kiertosuuntaan, toisessa kulman  $2\beta$  verran positiiviseen kiertosuuntaan, kolmannessa pysyy paikallaan, neljännessä kiertyy kulman  $2\alpha$  verran negatiiviseen kiertosuuntaan ja viidennessä kulman  $2\beta$  verran negatiiviseen kiertosuuntaan. Tämä merkitsee sitä, että  $AB$  ja  $A''B''$  ovat yhdensuuntaisia ja  $ABB''A''$  on suunnikas. Jos  $P$  on sivun  $AB$ ,  $Q$  sivun  $BC$  ja  $R$  sivun  $CA$  piste, niin kolmion  $PQR$  kuvat peräkkäisissä peilauksissa ovat kolmiot  $P'RQ'$ ,  $P''Q'R'$ ,  $P''R''Q''$ ,  $P'''Q'''R''$  ja  $P''''Q''''R'''$ . Murtoviivan  $PRQ'P''R''Q'''P''''$  pituus on kaksi kolmion  $PQR$  piiriä, ja koska se yhdistää suunnikkaan  $ABB''A''$  sivut  $AB$  ja  $A''B''$ , sen pituus on enintään  $AA''$ . Mutta jos  $PQR$  on kolmion  $ABC$  ortokolmio, niin  $R$  ja kolmioiden  $ABC$  ja  $ACB'$   $B$ :stä ja  $B'$ :stä piirretyt korkeusjanat ovat suoralla  $BB'$  ja aputuloksen nojalla  $\angle PRB = \angle BRQ = \angle B'RQ'$ .  $P$ ,  $R$  ja  $Q'$  ovat siis samalla suoralla. Päätteleyä jatkamalla nähdään, että tässä tapauksessa yllä mainittu murtoviiva onkin jana  $PP''''$ , ja että murtoviivan pituus on tasan  $AA''$ :n pituus.

**Stewartin lause.** Olkoon  $X$  kolmion  $ABC$  sivun  $BC$  piste; olkoon  $p = AX$ ,  $m = BX$  ja  $n = XC$ . Silloin  $a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n$ . (Matthew Stewart, 1717–85)

**Todistus.** Koska kulmat  $BXA = \phi$  ja  $CXA$  ovat vieruskulmia, niiden kosinit ovat toisensa vastalukuja. Sovelletaan kosinilauseetta kolmioihin  $ABX$  ja  $AXC$ . Saadaan

$$\begin{aligned} c^2 &= m^2 + p^2 - 2mp \cos \phi \\ b^2 &= n^2 + p^2 + 2np \cos \phi. \end{aligned}$$

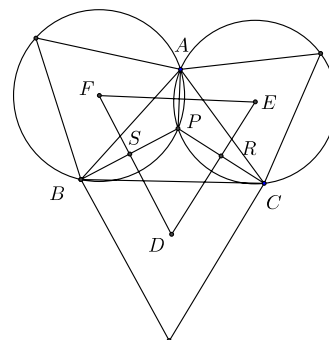
Eliminoidaan näistä  $\phi$  kertomalla edellinen yhtälö  $n$ :llä ja jälkimmäinen  $m$ :llä ja laskemalla yhteen. Kun vielä otetaan huomioon, että  $m + n = a$ , saadaan heti  $b^2m + c^2n = m^2n + np^2 + mn^2 + mp^2 = mn(m + n) + p^2(m + n) = a(p^2 + mn)$ .

**Varignonin lause.** Nelikulmion (tai sulkeutuvan nelisivuisen murtoviivan) sivujen keskipisteet muodostavat suunnikkaan. Jos nelikulmio on kupera, suunnikkaan ala on puolet nelikulmion alasta. (Pierre Varignon, 1654–1722)

**Todistus.** Jos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  ja  $Q$  ovat sivujen  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  ja  $DA$  keskipisteet, niin kolmiosta  $ABC$  saadaan  $MN \parallel AC$  ja  $MN = \frac{1}{2} \cdot AC$ . Kolmiosta  $ADC$  saadaan samoin  $PQ \parallel AC$  ja  $PQ = \frac{1}{2} \cdot AC$ . Nelikulmio, jolla on pari yhdensuuntaisia ja yhtä pitkiä vastakkaisia sivuja, on suunnikas. Jos  $ABCD$  on kupera, niin kolmio  $MBN$  ala on  $\frac{1}{4}$  kolmion  $ABC$  alasta ja kolmion  $PDQ$  ala on  $\frac{1}{4}$  kolmion  $CDA$  alasta. Kolmioiden  $MBN$  ja  $PDQ$  ala on siis  $\frac{1}{4}$  nelikulmion  $ABCD$  alasta. Samoin nähdään, että kolmioiden  $QAM$  ja  $NCP$  ala on  $\frac{1}{4}$  nelikulmion  $ABCD$  alasta. Suunnikkaan  $MNPQ$  ala on siis  $ABCD$ :n ala vähennettynä puolella  $ABCD$ :n alasta.

**Napoleonin lause.** Kolmion sivut kantoina piirrettyjen tasasivuisten kolmioiden keskipisteet ovat tasasivuisen kolmion kärjet. (Napoleon Bonaparte 1769–1821)

**Todistus.** Olkoot  $D$ ,  $E$  ja  $F$  sivut  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  sivuina piirrettyjen, kolmion  $ABC$  ulkopuolelle piirrettyjen tasasivuisten kolmioiden keskipisteet. Leikkaatko ne tasasivuisten kolmioiden ympäri piirretyt ympyrät, joiden keskipisteet ovat  $E$  ja  $F$ , (myös) pisteessä  $P$ . Jänne nelikulmioiden ominaisuuksien nojalla  $\angle CPA = 120^\circ$  ja  $\angle APB = 120^\circ$ . Mutta silloin myös  $\angle BPC = 120^\circ$ , ja piste  $P$  on myös  $D$ -keskisellä tasasivuisen kolmion ympäri piirretyllä ympyrällä. Olkoot  $R$  ja  $S$  janojen  $PC$  ja  $PB$  keskipisteet. Koska  $FD$  on janan  $PB$  keskinormaali ja  $ED$  on janan  $PC$  keskinormaali, nelikulmiossa  $PRDS$  on kaksi suoraa kulmaa ja

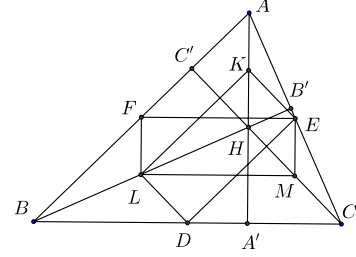


yksi  $120^\circ$ :en kulma. Siis  $\angle RDS = \angle FDE = 60^\circ$ . Samoin todistetaan, että kolmion  $FDE$  kaikki kulmat ovat  $60^\circ$ , joten  $FDE$  on tasasivuinen kolmio. – Todistus onnistuu suunnilleen samoin myös silloin, kun tasasivuiset kolmiot piirretään niin, että ne leikkaavat kolmiota  $ABC$ .

Lähes samalla vaivalla voi todistaa hiukan yleisemmän tuloksen. Jos kolmion sivuille piirretään kolme keskenään yhdenmuotoista kolmiota niin, että kolmioiden ”ulostyöntyvät” kärjet eivät ole vastinkärkiä, niin kolmioiden ympärysympyröiden keskipisteet muodostavat kolmen edellisen kolmion kanssa yhdenmuotoisen kolmion.

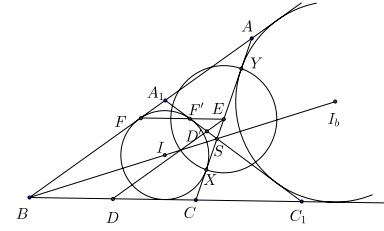
**Feuerbachin ympyrä.** Kolmion sivujen keskipisteet, korkeusjanojen kantapisteet ja pisteet ja kolmion kärjet korkeusjanojen leikkauspisteeseen yhdistävien janojen keskipisteet ovat samalla ympyrällä. Tämä ympyrä sivuaa kolmion sisäympyrää ja kaikkia sivuympyröitä. (Karl Feuerbach, 1800–34)

**Todistus.** Olkoon  $ABC$  kolmio,  $AA'$ ,  $BB'$  ja  $CC'$  sen korkeusjanat,  $D$ ,  $E$  ja  $F$  sivujen  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  keskipisteet,  $H$  ortokeskus ja  $K$ ,  $L$  ja  $M$  janojen  $AH$ ,  $BH$  ja  $CH$  keskipisteet. Osoitetaan ensin, että  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $K$ ,  $L$  ja  $M$  ovat samalla ympyrällä. Kolmion sivujen keskipisteiden yhdistysjanan tunnetun ominaisuuden nojalla  $FE = LM = \frac{1}{2} \cdot BC$  ja  $FE \parallel LM$ .  $FLME$  on siis suunnikas. Lisäksi  $FL \parallel AA' \perp BC \parallel LM$ .



Itse asiassa  $FLME$  on suorakaide. Samalla perusteella  $LDEK$  on suorakaide. Näillä kahdella suorakaiteella on yhteinen lävistäjä  $LE$ , joten suorakaiteiden kärjet  $F$ ,  $L$ ,  $D$ ,  $M$ ,  $E$  ja  $K$  ovat kaikki ympyrällä, jonka halkaisija on  $LE$ . Myös toiset lävistäjät  $FM$  ja  $DK$  ovat tämän ympyrän halkaisijoita.  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$  ovat kukin kärkiä suorakulmaisissa kolmioissa, joiden hypotenuusat ovat luetellut kolme lävistäjää eli ympyrän halkaisijaa. Thaleen lauseen nojalla korkeusjanojen kantapisteetkin ovat samalla ympyrällä. Ympyrää kutsutaan mm. kolmion  $ABC$  yhdeksän pisteen ympyräksi.

Lauseessa väitetty sivuamisominaisuus on todistettavissa muutamien inversiokuvauksen ominaisuuksien avulla, jotka tässä oletetaan tunnetuiksi. Tarkastetaan kolmion  $ABC$  sisäympyrää  $\Gamma$  ja esimerkiksi kulman  $\angle ABC$  aukeamassa olevaa sivuympyrää  $\Gamma_b$ . Olkoot  $X$  ja  $Y$  näiden ympyröiden ja sivun  $AC$  yhteiset pisteet. Jos kolmion sivut ovat  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $2s = a + b + c$ , niin (tunnetusti, tai helpon laskun avulla nähtävästi)  $CX = AY = s - c$ . Sivun  $AC$  keskipiste  $E$  on siis



myös janan  $XY$  keskipiste ja  $XY = b - 2(s - c) = c - a$ . Ympyröillä  $\Gamma$  ja  $\Gamma_b$  on yhteisinä tangentteina  $BA$ ,  $BC$  ja  $AC$ ; olkoot  $A_1$  ja  $C_1$  ne  $BA$ :n ja  $BC$ :n pisteet, joille  $A_1C_1$ :kin on ympyröiden yhteinen tangentti. Yhteiset tangentit ovat pareittain symmetrisiä ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevan suoran eli kulman  $\angle ABC$  puolittajan suhteen. Siis  $AC$ :n ja  $A_1C_1$ :n leikkauspiste  $S$  on tällä kulmanpuolittajalla. Leikatkoort  $DE$  ja  $FE$   $A_1C_1$ :n pisteissä  $D'$  ja  $F'$ .

Tarkastellaan nyt ympyrää  $\Omega$ , jonka keskipiste on  $E$  ja halkaisija  $XY$ .  $\Omega$  leikkaa ympyrät  $\Gamma$  ja  $\Gamma_b$  kohtisuorasti. Inversiokuvaus  $\Omega$ :ssa kuvaa silloin kummankin näistä ympyröistä itselleen.  $ABC$ :n yhdeksän pisteen ympyrä kulkee pisteiden  $D$ ,  $E$  ja  $F$  kautta. Koska  $E$  on  $\Omega$ :n keskipiste, yhdeksän pisteen ympyrän inversiokuva on suora. Osoitetaan, että tämä suora on suora  $F'D'$  eli suora  $A_1C_1$ . Nähdään, että  $AA_1 = C_1C = BA'BA_1 = BA - BC = c - a$ . Koska  $S$  on kulman  $\angle ABC$  puolittajalla,  $SC = \frac{ab}{a+c}$ ,  $SA = \frac{cb}{a+c}$  ja  $ES = \frac{b}{2} - \frac{ab}{a+c} = \frac{b(c-a)}{2(c+a)}$ . Kolmiot  $SEF'$  ja  $SCC_1$  ovat yhdenmuotoisia, joten

$$F'E = \frac{CC_1 \cdot ES}{CS} = \frac{(c-a)^2}{2a}.$$

Nyt  $FE = \frac{1}{2}a$ , joten  $EF \cdot EF' = \frac{(c-a)^2}{4}$ . Siis  $F'$  on  $F$ :n kuva ympyrässä  $\Omega$  tehtävässä inversiossa. Aivan samoin näytetään, että  $D'$  on  $D$ :n kuva. Yhdeksän pisteen ympyrä kuvautuu siis suoraksi  $A_1B_1$ , joka sivuaa  $\Gamma$ :aa ja  $\Gamma_b$ :tä. Koska nämä kaksi ympyrää kuvautuvat inversiossa itselleen, myös yhdeksän pisteen ympyrä sivuaa  $\Gamma$ :aa ja  $\Gamma_b$ :tä.

**Gergonnen piste.** *Kolmion kärjet ja kolmion sisään piirretyn ympyrän ja kolmion sivujen sivuamispisteet yhdistävät janat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.* (Joseph Diaz Gergonne, 1771–1859)

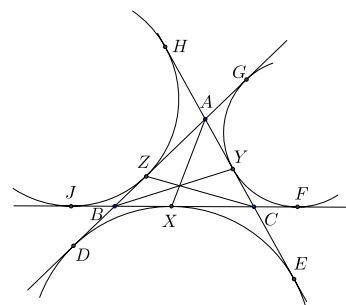
**Todistus.** Sivutkoon kolmion sisään piirretty ympyrä sivuja  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  pisteissä  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$ , tässä järjestyksessä. Koska  $AX$  ja  $AZ$  ovat ympyrän tangentteja,  $AX = AZ$ . Samoin  $BX = BY$  ja  $AY = AZ$ . Mutta näin ollen

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AY}{BX} = 1.$$

Väite seuraa heti Cevan lauseesta.

**Nagelin piste.** *Kolmion kärjet ja kolmion sivu ympyröiden ja kolmion sivujen sivuamispisteet yhdistävät janat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.* (Christian Heinrich von Nagel, 1803–82)

**Todistus.** Sivutkoot kolmion  $ABC$  sivu ympyrät (ympyrät, jotka sivuavat yhtä kolmion sivua ja kahden muun jatketta)  $BC$ :tä pisteessä  $X$ ,  $CA$ :ta pisteessä  $Y$  ja  $AB$ :tä pisteessä  $Z$ , olkoot  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  ja  $J$  pisteet, joissa sivu ympyrät sivuavat puolisuoria  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $BA$ ,  $CA$  ja  $CB$ , tässä järjestyksessä. Ympyrän tangenttien leikkauspisteen ja sivuamispisteiden väliset janat ovat yhtä pitkiä. Siis  $BD = BX$  ja  $CD = CX$  sekä  $AD = AE$ . Tästä seuraa, että murtoviivat  $ABX$  ja  $ACX$  ovat yhtä pitkät ja edelleen se, että  $AD$ :n ja  $AE$ :n pituus on puolet kolmion  $ABC$



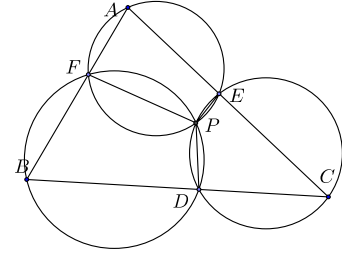
piiristä. Symmetrian vuoksi myös  $BF$ :n,  $BG$ :n,  $CH$ :n ja  $CJ$ :n pituus on sama. Mutta tästä seuraa, että  $BX = BD = AG = AY$ ,  $XC = CE = AH = AZ$  ja  $BZ = BD = CF = CY$ . Siis

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{AZ} \cdot \frac{BZ}{BX} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1.$$

Cevan lauseen nojalla  $AX$ ,  $BY$  ja  $CZ$  kulkevat saman pisteen kautta.

**Miquelin piste.** *Olkoot  $D$ ,  $E$  ja  $F$  kolmion  $ABC$  sivujen  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  pisteitä. Kolmioiden  $AFE$ ,  $BDF$  ja  $CED$  ympäri piirrettyt ympyrät leikkaavat toisensa samassa pisteessä.* (Auguste Miquel, syntymä- ja kuolinvuosi tuntemattomat, julkaisu 1836–46)

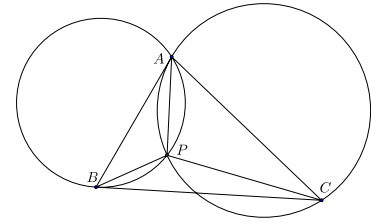
**Todistus.** Oletetaan, että kolmioiden  $BDF$  ja  $CED$  ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat toisensa pisteessä  $P \neq D$ . Jos  $P$  on kolmion  $ABC$  sisäpuolella, niin jännenelikulmioista  $BDPF$  ja  $CEPD$  saadaan  $\angle FPE = 360^\circ - (180^\circ - \angle FBD) - (180^\circ - \angle DCE) = \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ - \angle EAF$ . Nelikulmio  $AFPE$  on siis jännenelikulmio. Mutta tämän nelikulmion ympäri piirretty ympyrä on on juuri kolmion  $AFE$  ympäri piirretty ympyrä, joka siis leikkaa kolmioiden  $BDF$  ja  $CED$  ympäri piirretyt ympyrät samassa pisteessä.



Jos  $P$  on kolmion  $ABC$  ulkopuolella, saadaan kehäkulmalauseesta vastaavasti  $\angle FPE = \angle FPD + \angle DPE = \angle FPD + \angle DCE = \angle ABC + \angle ACB$ , ja voidaan tehdä sama johtopäätös kuin edellä. Jos viimein  $D$  on kolmioiden  $BDF$  ja  $CED$  ympäri piirrettyjen ympyröiden sivuamispiste, molempien ympyröiden keskipisteet ovat janalla  $BC$ , kulmat  $BFD$  ja  $DEC$  ovat suoria ja  $AD$  on kolmion  $AFE$  ympäri piirretyn ympyrä halkaisija. Väite on tässäkin tapauksessa tosi.

**Brocardin piste.** Kolmiossa  $ABC$  on tasan yksi piste  $P$ , jolle  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ . (Henri Brocard, 1845–1922)

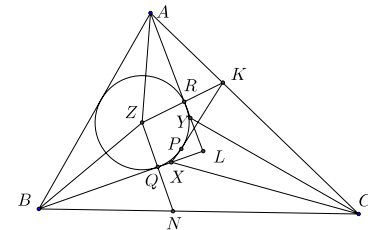
**Todistus.** Oletetaan, että  $P$  olisi (jokin) lauseessa määriteltä piste. Jos piirretään ympyrä  $\mathcal{Y}_1$   $A$ :n  $B$ :n ja  $P$  kautta, niin ympyrän kehäkulman  $PAB$  on oltava sama kuin  $\angle PBC$ . Tämä on mahdollista vain, jos  $BC$  on  $\mathcal{Y}_1$ :n tangentti. Samoin, jos piirretään ympyrä  $A$ :n  $C$ :n ja  $P$ :n kautta, niin ehto  $\angle PCA = \angle PAB$  voi toteutua vain, jos  $AB$  on  $\mathcal{Y}_2$ :n tangentti.  $P$ :n ainoa



mahdollinen sijainti on siis  $A$ :n ja  $B$ :n kautta piirretyn  $BC$ :n tangenttiympyrän ja  $A$ :n ja  $C$ :n kautta piirretyn  $AB$ :n tangenttiympyrän leikkauspiste. Tällaisia pisteitä on tasan yksi.

**Morleyn lause.** Suorat, jotka jakavat kolmion kulmat kolmeen yhtä suureen osaan, leikkaavat toisensa tasasivuisen kolmion kärjissä. (Frank Morley, 1860–1937)

**Todistus.** Kutsumme puolisuoria, jotka jakavat kulman kolmeen yhtä suureen osaan, *kolmijakajiksi*. Olkoon nyt  $ABC$  kolmio ja leikatkoot kulmien  $\angle ABC$  ja  $\angle BCA$  ne kolmijakajat, jotka ovat lähempänä sivua  $BC$ , pisteessä  $X$ , kulmien  $\angle BCA$  ja  $\angle CAB$  ne kolmijakajat, jotka ovat lähempänä sivua  $CA$  pisteessä  $Y$  ja kulmien  $\angle CAB$  ja  $\angle ABC$  ne kolmijakajat, jotka ovat lähempänä sivua  $AB$ , pisteessä  $Z$ . Osoitetaan, että  $XYZ$  on tasasivuinen kolmio.



Leikatkoot suorat  $AY$  ja  $BX$  pisteessä  $L$ . Koska  $AZ$  ja  $BZ$  ovat kolmion  $ABL$  kulmanpuolittajia, tämän kolmion sisäympyrän  $\Gamma$  keskipiste on  $Z$ .  $\Gamma$  sivuaa  $AL$ :ää pisteessä  $R$  ja

$BL$ :ää pisteessä  $Q$ . Olkoot vielä  $K$  ja  $N$  suorien  $ZR$  ja  $AC$  sekä  $ZQ$  ja  $BC$  leikkauspisteet. Pisteestä  $K$   $\Gamma$ :lle piirretyn tangentin sivuamispiste olkoon  $P$  ja leikatkoon  $KP$  suoran  $BL$  pisteessä  $F$ . Koska  $AR$  on kulman  $\angle ZAK$  puolittaja ja  $ZR \perp AR$ , niin  $ZR = RK$  ja  $ZP = 2 \cdot ZK$ . Koska  $KZP$  on suorakulmainen kolmio, niin  $\cos(\angle KZP) = \frac{1}{2}$  ja  $\angle KZP = 60^\circ$ ,  $\angle ZKP = 30^\circ$ . Jos kolmion  $ABC$  kulmat ovat  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ , niin  $\angle ABL = \frac{2}{3}\beta$  ja  $\angle BAL = \frac{2}{3}\alpha$ . Silloin  $\angle ALB = 180^\circ - \frac{2}{3}(\alpha + \beta)$  ja koska  $ZQLR$  on jänneelikulmio,  $\angle RZQ = \frac{2}{3}(\alpha + \beta) = 120^\circ - \frac{2}{3}\gamma$ . Koska  $BL$  on kulman  $\angle ZBN$  puolittaja, kolmiot  $FQN$  ja  $FQZ$  ovat yhteneviä, joten  $\angle FNQ = \angle FZQ = \frac{1}{2}\angle PZQ = \frac{1}{2}(\angle QZR - 60^\circ) = 30^\circ - \frac{1}{3}\gamma$ . Kolmio  $ZNK$  on tasakylkinen. Siis  $\angle ZNK = \angle ZKN = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle NZK) = \frac{1}{2}\angle QLR = 30^\circ - \frac{1}{3}\gamma$ . Siis  $\angle FNK = \angle ZNK - \angle FNQ = \frac{2}{3}\gamma$  ja  $\angle FKN = \angle ZKN - \angle ZKP = \frac{1}{3}\gamma$ . Koska siis  $\angle NCF = \angle NKF$ , pisteet  $K$ ,  $F$ ,  $N$  ja  $C$  ovat samalla ympyrällä ja  $\angle NCF = \angle NCX$ . Tästä seuraa, että  $F = X$ . Pisteestä  $K$   $\Gamma$ :lle piirretty tangentti kulkee  $X$ :n kautta. Samoin osoitetaan, että pisteestä  $N$   $\Gamma$ :lle piirretty tangentti kulkee  $Y$ :n kautta. Symmetrian perusteella on nyt  $\angle XZP = \angle XZQ = \angle RZY$ . Mutta koska  $\angle RZP = 60^\circ$ , on myös  $\angle YZX = 60^\circ$ . Samoin todistetaan, että kolmion  $XYZ$  muutkin kulmat ovat  $60^\circ$ , joten kolmio on tasasivuinen.