

Matematiikan olympiavalmennus

Toukokuun 2012 helpommat valmennustehtävät

Ratkaisut kesäkuun loppuun mennessä osoitteeseen Matti Lehtinen, Taskilantie 30a, 90580 Oulu tai matti.lehtinen@helsinki.fi. Jos toivot palautetta, etkä ole varma, että ML muistaa osoitteesi, niin laita ratkaisuihisi yhteystietojasi.

1. Määritä sellaisen kolmion ala, jonka kaksi kulmaa ovat 60° ja 45° ja jonka pisimmän sivun pituus on 1.
2. Osoita: jos $n > 3$, niin lukujen $n, n+1, \dots, n+5$ joukossa on enintään kaksi alkulukua.
3. Olkoon P jokin kolmion ABC piirin piste. Selvitä, miten löydetään sellainen kolmion piirin piste Q , että jana PQ jakaa kolmion kahdeksi sama-alaiseksi monikulmioksi.
4. Piste O keskipisteenä piirretty ympyrä Γ ja kaksi pistettä A ja B on annettu. Tiedetään lisäksi, että suora AB leikkaa Γ :n, muttei kulje pisteen O kautta. Määritä näiden tietojen perusteella suoran AB ja ympyrän Γ leikkauspisteet pelkästään harppia apuna käyttäen.
5. Määritä kaikki ne positiiviset kokonaisluvut n , joille $2^n + 1$ on jaollinen kolmella. Perustele!
6. Todista, että ympyrän sisään piirretty puolisuunnikas on tasakylkinen.
7. Ympyrän sisään piirretyn monikulmion kaikki kulmat ovat keskenään yhtä suuret, mutta sivujen joukossa on ainakin kaksi eripituista. Osoita, että monikulmion sivujen lukumäärä on parillinen.
8. Positiivisella kokonaisluvulla n on m kappaletta tekijöitä. Osoita, että tekijöiden tulo on $\sqrt{n^m}$.
9. Putki, joka on ainakin 18 m pitkä, sahataan palasiksi. Palasia voidaan myydä ainoastaan seuraavin ehdoin: 5 m pala maksaa 4 euroa, 7 m pala 8 euroa, 11 m pala 13 euroa ja 13 m pala 16 euroa. Putki paloitellaan niin, että osista saatava hinta on mahdollisimman suuri. Osoita, että mikään pala ei ole 5 m pituinen.
10. Määritä ne positiiviset kokonaisluvut n , joille $n^2 + 15n$ on neliöluku.
11. Olkoon ℓ suora ja A ja B kaksi (ℓ :n sisältävän tason) pistettä, jotka eivät ole suoralla ℓ . Määritä ne ℓ :n pisteet C , joille AC :n ja ℓ :n välinen kulma on $\angle ACB$.
12. Kolmion yhden sivun pituus on enintään 1, toisen sivun pituus enintään 2 ja kolmannen enintään 3. Määritä tällaisen kolmion suurin mahdollinen ala.

13. Kuperan nelikulmion lävistäjät jakavat nelikulmion neljäksi kolmioksi. Kolmen näistä alat ovat A_1 , A_2 ja A_3 . Määritä nelikulmion ala.

14. Olkoon $f(x) = x^{1/2}$ ja $g(x) = \frac{32x + 17}{48}$. Määritä ne luvut x , $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$, joille $f(x)$:n ja $g(x)$:n erotus on mahdollisimman suuri.

15. Tiedämme, että eräässä viiden henkilön ryhmässä vallitsee seuraava tilanne: jos jotkin kaksi ryhmän jäsentä eivät tunne toisiaan, niin he tuntevat yhteensä ainakin viisi ryhmän jäsentä (kun molempien tuttavat lasketaan kahdesti). Osoita, että ryhmän jäsenet voidaan asettaa istumaan pyöreän pöydän ympärille niin, että jokainen tuntee vierustoverinsa.

16. Piste P on säännöllisen monikulmion \mathcal{M} sisäpuolella. Osoita että P :n kaikkien \mathcal{M} :n sivujen kautta kulkevista suorista laskettujen etäisyyksien summa on riippumaton P :n sijainnista.

17. Erään saariryhmän jokaisen kahden saaren välillä on joko lentoyhteys tai laivayhteys. Osoita, että on mahdollista käydä kaikilla saarilla niin, että käyttää vain lentoyhteyksiä tai vain laivayhteyksiä.

18. On annettu suorat ℓ ja ℓ' sekä suoran ℓ piste A , joka ei ole suoralla ℓ' . Selvitä, miten konstruoidaan ympyrä, jonka keskipiste on suoralla ℓ , joka kulkee A :n kautta ja joka sivuaa suoraa ℓ' .

19. Osoita, että $k(n - k + 1) \geq n$, kun $1 \leq k \leq n$. Osoita, että $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n .

20. Onko yhtälöllä $16 + 4x = y^2 - x^2$ positiivisia kokonaislukuratkaisuja?