Kirjevalmennuksen vaikeamman sarjan ratkaisut (joulukuu 2016)

1. Koska $1 < \sqrt{2}$, niin $a_0 < a_1$. Oletetaan, että $a_n < a_{n+1}$ jollekin n. Koska eksponenttifunktio, jonka kantaluku $b > 1$, on kasvava, niin $\sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^{a_{n+1}}$ eli $a_{n+1} < a_{n+2}$. Tästä näemme, että a_n on kasvava sarja. Selvästi $a_0 < 2$. Oletetaan, että $a_n < 2$. Tällöin $\sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^2 = 2$, joten $a_{n+1} < 2$. Siten sarjalla a_n on yläraja 2.

2. Käytämme induktiota luvun N suhteen. Jaamme kaikki osajoukkojen joukot kahteen eri alijoukkoon: niihin, joissa on luku N, ja niihin, joissa ei ole lukua N. Ensimmäisen alijoukon alkioiden lukumäärä on induktio-oletuksen perusteella $N^2[(N-1)!-1]+N^2$ ja toisen alijoukon alkioiden lukumäärä on $N!-1$. Yhdistämällä nämä saamme $(N+1)!-1$.

3. Jaetaan neliö 25 pienempään neliöön, joiden sivut ovat 1/5. Yhdessä näistä ruuduista on oltava vähintään 3 hyönteistä; sen sivu on 1/5 ja diagonaali $\sqrt{2}/5$. Tämän neliön ympäri piirretyn ympyrän halkaisija on $\sqrt{2}/10 < 1/7$ ja se peittää kyseisen neliön, ja siten myös nämä vähintään 3 hyönteistä.

4. Kutsutaan kaikkien niiden rivien ja sarakkeiden lukumäärää, joilla on ainakin yksi kappale lukua n, luvun n jakaumaksi. Merkitsemme tätä jakaumaa I_n. Ensin osoitamme, että jokaisen luvun jakauma on vähintään 9. Jos jokin luku on x rivillä ja y sarakkeella, niin sitä ei löydy minkään muun rivien ja sarakkeiden leikkauspisteissä; siten se ei voi esiintyä enempää kuin $x \cdot y$ ruudussa. Siten pitää olla $x \cdot y \geq 17$. Epäyhtälöstä $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ seuraa, että $I = x+y \geq 2\sqrt{17} > 8$. Siten $I \geq 9$, koska I on luonnollinen luku. Seuraavaksi tarkastelemme summaa $S = I_1 + I_2 + \ldots + I_{17}$. Edellisistä päättelyistä seuraa, että $S \geq 9 \cdot 17 = 153$.
On selvää, että $I_1 + I_2 + \ldots + I_{17} = (r_1 + r_2 + \ldots + r_{17}) + (k_1 + k_2 + \ldots + k_{17})$, missä r_i on rivillä i olevien eri lukujen lukumäärä ja k_i on sarakkeella i olevien eri lukujen lukumäärä (jokainen luku, joka kuuluu tiettyyn riviin ja sarakkeeseen antaa "sijoituksen"2 kummallekin puolelle tätä yhtälöä). Koska 34 termin summa ei ole pienempi kuin 153, niin ainakin yksi näistä termeistä ei ole pienempi kuin $\frac{153}{34} = 4.5$. Koska kaikki luvut r_i ja k_i ovat luonnollisia lukuja, niin vastaava rivi tai sarake on se, mitä etsimme. Tehtävä on ratkaistu.

5. Olkoon $d(v)$ solmun v aste (siitä lähtevien särmien lukumäärä). Laskemme kaikkien solmujen asteet yhteen; tämä on sama kuin kaksi kertaa kaikkien särmien lukumäärä, koska jokaista särmää kohti tulee laskettua sen kumpikin pää kerran. Siten

$$\sum_v d(v) = 2e,$$

missä e on verkon särmien lukumäärä. Näin ollen verkon solmujen asteiden lukumäärän on oltava parillinen, mikä ei olisi mahdollista, jos parittomalla määrällä solmuja olisi pariton aste. Vastaavan ongelman todisti ensimmäisenä 1736 Euler (Königsbergin seitsemän sillan ongelma), ja sitä pidetään usein verkkoteorian aloittaneena todistuksena.

6. Tarkastellaan ensin vasenta puolta. Binomikertoimien tulo kertoo, kuinka monella tavalla voimme luvuista $\{1, 2, \ldots, n\}$ ensin k lukua, ja sen jälkeen näistä k luvusta r lukua.
Toisaalta, jos meillä on tietty r luvun joukko R, niin kuinka monta eri tapaa on valita joukko K, joka sisältää joukon R ja sisältyy joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(R \subseteq K \subseteq N))$? Joukossa K on kaikki joukon R alkiot, mutta kaikille muille $n-r$ alkiolle jokainen alkio voi joko olla joukossa K tai olla olematta joukossa K, joten eri joukkoja on 2^{n-r} kappaletta. Koska joukko R voidaan valita $\binom{n}{r}$ eri tavalla, saamme yhteensä $2^{n-r}\binom{n}{r}$ kappaletta. Koska laskimme samaa asiaa, yhtäsuuruusmerkin kummallakin puolella on oltava sama luku.

7. a) Tämä tehtävä on muotoa $x^2 \equiv -1 \pmod 3$, joten sillä ei ole ratkaisuja.
b) Vasen puoli on $(2x+3y)\cdot y$, ja oikea $3 \cdot 8$. Jos y on pariton, niin $2x+3y$ on pariton, jolloin vasen puoli olisi pariton. Siten on oltava $2|y$. Jos $8|y$, niin $2|(2x+3y)$ ja $16|y(2x+3y)$. Siten $8 \nmid y$. Jos $y \equiv 2 \pmod 4$, niin $4|(2x+3y)$ ja x on pariton. Jos taas $y \equiv 0 \pmod 4$, niin $2|(2x+3y)$ ja x on pariton. Joko $3|(2x+3y)$ tai $3|y$. Jos $3|(2x+3y)$, niin $3|x$. Näistä saamme luvulle y vaihtoehdot ± 2, ± 4, ± 6 ja ± 12. Näistä saamme seuraavat ratkaisut parille (x,y): $(3,2)$, $(-3,-2)$, $(-3,4)$, $(3,-4)$, $(-7,6)$, $(7,-6)$, $(-17,12)$, $(17,-12)$.

8. Muunnetaan yhtälö muotoon $(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2$. Sillä on ratkaisut $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$.

9. Jos kaikki luvut x, y ja z ovat parittomia, niin $3 \equiv 1 \pmod 8$.Jos yksi luvuista x, y, z on pariton, niin pariton=parillinen. Jos x ja y ovat parittomia ja z parillinen, niin $2 \equiv 1 \pmod 4$. Jos x tai y on pariton, mutta toinen näistä luvuista ja z ovat parillisia, niin $1 \equiv 0 \pmod 4$. Siten kaikkien luvuista x, y, z on oltava parillisia. Tämä aloittaa äärettömän laskeutumisen prosessin: olkoon $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$. Tällöin $x^2+y^2+z^2 = 4(x_1^2+y_1^2+z_1^2)$ ja $x^2y^2 = 16x_1^2y_1^2$ eli $x_1^2+y_1^2+z_1^2 = 4x_1^2y_1^2$. Vastaavilla päättelyillä kuin aluksi huomaamme, että x_1, y_1 ja z_1 ovat parillisia. Jatkamalla näin huomaamme, että luvut x, y ja z ovat jaollisia luvulla 2^n mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle n. Siten ainoa ratkaisu on $x=y=z=0$.

10. $y^2 = x^3+7 \leftrightarrow y^2+1 = x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$. Ensin huomaamme, että jos x on parillinen, niin $y^2 \equiv 7 \pmod 8$. Toisaalta tiedämme, että pariton neliöluku on muotoa $1 \pmod 8$. Siten luvun x on oltava pariton. Mutta $x^2-2x+4 = (x-1)^2+3 = 4k+3$. Tällä luvulla on oltava tekijä muotoa $3 \pmod 4$, sillä lukujen $1 \pmod 4$ tulo on myös muotoa $1 \pmod 4$.
Olkoon nyt q luvun y^2+1 alkutekijä. Tällöin $y^2 \equiv -1 \pmod q$. Fermat'n pienen lauseen perusteella pätee myös $y^{q-1} \equiv 1 \pmod q$. Koska $y^2 \equiv -1 \pmod q$, niin ei voi olla $q-1 \equiv 2 \pmod 4$ (eli $q \equiv 3 \pmod 4$), sillä tällöin olisi $y^{q-1} \equiv -1 \pmod q$. Siten pitää olla $4|q-1 \rightarrow q = 4k+1$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että yhtälön oikealla puolella on oltava alkutekijä muotoa $3 \pmod 4$.