

VUODENVAIHTTEEN 2017–8 VALMENNUSTEHTÄVÄSARJA

Ratkaisuja toivotaan tammikuun puoliväliin mennessä postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12A1
20100 Turku

tai sähköpostitse osoitteeseen

npalojar@abo.fi.

Työn iloa ja hyvää uutta vuotta!

1. Jos $x + 2y = 84 = y + 2x$, niin mitä on $x + y$?
2. Kaksi eri lukua on valittu satunnaisesti joukosta $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Millä todennäköisyydellä niiden summa on suurempi kuin niiden tulo?
3. Jos $a = 2^{2011} + 2^{-2011}$ ja $b = 2^{2011} - 2^{-2011}$, niin mitä on $a^2 - b^2$?
4. Osoita, että $4^{2n} - 1$ on jaollinen luvulla 15 kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n .
5. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla x ja y pätee

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

6. Miten monella lukua 999 pienemmällä positiivisella kokonaisluvulla on numero 1 kymmenjärjestelmäesityksessä?

7. Mikä on luvun x arvo, jos

$$4^{20} + 4^{20} = 2^x?$$

8. Kahden tasakylkisen kolmion kannat ovat pituudeltaan 1. Niiden kärkikulmat ovat 30° ja 60° . Määritä alojen suhde.

9. Mikä on luvun $2^{2011} + 3^{2011}$ viimeinen numero?

10. a) Laske

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100.$$

- b) Laske

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199.$$

11. Sievennä

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{99}\right)\left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

12. Etsi luvut a , b ja c , kun tiedetään, että

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \quad \text{ja} \quad abc = 1620.$$

13. Olkoon r reaaliluku. Mitkä seuraavista ovat varmasti suurempia kuin r ?

$$r + 1, \quad 2r, \quad r^{100} \quad \text{ja} \quad r^2 + 1.$$

14. Tavallisesta 8×8 -shakkilaudasta on järsitty pois kaksi vastakkaista kulmaa. Osoita, että shakkilautaa ei voida peittää 1×2 -dominonappuloilla.

15. Kahdeksan opiskelijaa istuu pyöreän pöydän ympärillä. Jokaisen ikä on kahden viereisen opiskelijan ikien keskiarvo. Osoita, että opiskelijat ovat samikäisiä.