Matematiikan kirjevalmennus, helpompi sarja, joulukuu 2016

Ratkaisuja voi lähettää osoitteeseen laurihallila@gmail.com tai
Lauri Hallila, Jussaarenkuja 5 J 104, 00840 Helsinki

1. Todista, että jos a, b ja c ovat sellaiset reaaliluvut, että $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, niin

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + cd \leq 1.$$

2. Olkoon $a_i \geq 1$ kaikille $i = 1, \ldots, n$. Osoita, että

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

3. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

4. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy.$$

5. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, joille pätee

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

kaikille $x, y \in \mathbb{Q}$.

6. Osoita, että jos yhtälöllä $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ on kolme toisistaan eroavaa nollakohtaa, niin $p^2 \geq 3q$.

7. Ratkaise yhtälö

$$4z^{11} + 4z^{10} - 21z^9 - 21z^8 + 17z^7 + 17z^6 + 17z^5 + 17z^4 - 21z^3 - 21z^2 + 4z + 4 = 0.$$

8. Ratkaise yhtälö

$$x^4 + a^4 - 3ax^3 + 3a^3x = 0.$$

9. Olkoon ABC kolmio. Piirretään neliöt, joiden sivut ovat AB, BC ja AC, suunnattuna kolmiosta ulospäin, ja olkoon näiden neliöiden keskipisteet C', A' ja B' (samassa järjestyksessä). Todista, että suorat CC', AA' ja BB' leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

10. Olkoon kolmion ABC kulman A kulmanpuolittaja AD, missä D on sivulla BC. Olkoon M janan AD keskipiste. Lisäksi BM leikkaa sivun AC pisteessä p. Tiedetään, että $\frac{AB}{AC} = \frac{q}{p}$ $(p, q \in \mathbb{Z}_+)$, missä $s.y.t.(q, p) = 1$ ja $\frac{CP}{PA} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $s.y.t.(m, n) = 1$. Ilmaise $m + n$ lukujen p ja q avulla.