Kirjevalmennus, maalis-/huhtikuu 2017

Ratkaisuita toivotaan huhtikuun loppuun mennessä postitse osoitteeseen

Jouni Seppänen
Ahmatie 8 A 3
00800 Helsinki

tai sähköpostitse osoitteeseen jks@iki.fi.

Helpompia tehtäviä

1. Taululle on kirjoitettu luvut $1, 2, \dots, 2017$. Yhdellä askelella jotkin kaksi lukua pyyhitään ja tilalle kirjoitetaan niiden summa. Onko näitä askelia toistamalla mahdollista saada taululle luvut, jotka kaikki ovat jaollisia luvulla 7?

2. Olkoon $f(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Tiedetään, että $f(20) = 14$ ja $f(17) = 15$. Onko olemassa kokonaisluku n, jolle $f(n)$ on jaollinen luvulla 210?

3. Suorakulmaisen särmiön sivujen pituudet ovat positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että suorakulmaisen särmiön tilavuus on (mittayksiköitä huomioimatta) yhtä suuri kuin sen pinta-ala (tahkojen yhteenlaskettu ala). Osoita, ettei särmiön minkään sivun pituus voi olla 14.

4. Olkoon $f(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Osoita, että on olemassa enintään yksi alkulukupari (p, q), jolle $(f(p^2) - f(6q^2))(p^2 + q^2 - 12)$ on alkuluku.

5. Olkoot $n > 1$ kokonaisluku ja p alkuluku. Osoita, että jos $n \mid (p - 1)$ ja $p \mid (n^3 - 1)$, niin $4p - 3$ on neliöluku.

6. Etsi kaikki alkuluvut p, joilla yhtälöparilla

$$\begin{cases} p + 1 = 2m^2 \\ p^2 + 1 = 2n^2 \end{cases}$$

on kokonaislukuratkaisu (m, n).

7. Binomikertoimeksi kutsutaan lukua $\binom{n}{k}$, joka kertoo, monellako tavalla n:n alkion perusjoukosta voidaan valita k:n alkion osajoukko. Nimitys tulee binomin potenssin kaavasta

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n.$$

Binomikertoimelle on algebrallinen kaava $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Todista seuraavat binomikerroinkaavat, mieluummin kombinatorisella argumentilla (bijektioilla tai laskemalla sama joukko kahdella eri tavalla) kuin binomikertoimen algebrallisen kaavan avulla.

(a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$,

(b) $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$,

(c) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$,

(d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots$.

8. Kuinka monta erilaista tapaa on värittää neliön jokainen sivu eri värillä, kun väritykset lasketaan samanlaisiksi, jos ne saadaan kääntämällä neliötä tasossa? (Peilaaminen vaatii neliön kääntämistä tason ulkopuolisen avaruuden kautta, joten sellaiset väritykset ovat keskenään erilaisia, jotka saadaan toisistaan ainoastaan peilaamalla eikä tason käännöllä.)

9. Kuinka monta tapaa on värittää kuution jokainen tahko eri värillä, kun kuutiota avaruudessa kääntelemällä saadut väritykset ovat keskenään samanlaisia?

Vaativampia tehtäviä

10. Monellako tavalla voi laatoittaa $2 \times n$-suorakulmion 2×2-neliöillä ja L:n muotoisilla kolmen ruudun palasilla?

11. Monellako tavalla voi laatoittaa $4 \times n$-suorakulmion 3×1-laatoilla?

12. Monellako tavalla voi täyttää $2\times2\times n$-laatikon $1\times1\times2$-tiiliskivillä? Todista myös, että jos n on parillinen, tapojen määrä on neliöluku.

13. Fibonaccin luvut määritellään alkuehdoilla $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$ sekä palautuskaavalla $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Todista, että

(a) $F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}$,

(b) $F_n^2 + 2F_{n-1}F_n = F_{2n}$,

(c) $F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{2n}$.

14. Joukon *permutaatio* on sen bijektio itselleen eli tapa järjestää sen alkiot. Kaikkiaan n-alkioisella joukolla on $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ permutaatiota. Montako sellaista joukon $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ permutaatiota p on, joille $|p(i) - i| \leq 2$ kaikilla i? Vastaukseksi riittää antaa alkuehdot ja palautuskaava joka esittää permutaatioiden lukumäärän $f(n)$ lukujen $f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-k)$ avulla jollakin vakiolla k. Suljettua muotoa ei tarvitse ratkaista.

15. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja ja n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että
$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

16. Pöydällä on 101 kolikkoa klaava ylöspäin. Voimme valita mitkä tahansa neljä kolikkoa ja kääntää ne kaikki toisin päin. Onko tätä operaatiota toistamalla mahdollista kääntää pöydän kolikoita niin, että lopuksi niissä on kaikissa kruuna ylöspäin?

17. Tasossa on annettu n pistettä ja n suoraa, joista mitkään kaksi eivät ole yhdensuuntaisia. Onko mahdollista nimetä pisteet luvuilla 1, 2, $\ldots$, n ja suorat samoin luvuilla 1, 2, $\ldots$, n siten, että kun piirretään kullakin luvun i arvolla 1, 2, $\ldots$, n jana pisteestä i kohtisuoraan suoralle i saakka, mitkään kaksi näistä n janasta eivät leikkaa toisiaan?

18. Todista, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k on olemassa k peräkkäistä kokonaislukua, joilla on kaikilla vähintään 10^{100} tekijää.

19. Tutkitaan monikulmioita, joiden kärkipisteet ovat tason hilapisteissä, eli pisteissä, joiden molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Jos n-kulmion P kärkien koordinaatit ovat (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), sanotaan, että P on (a, b)-monikulmio, jos pätee
$$a = \max_{1\leq i\leq n} x_i - \min_{1\leq i\leq n} x_i \qquad \text{ja} \qquad b = \max_{1\leq i\leq n} y_i - \min_{1\leq i\leq n} y_i,$$
eli monikulmio mahtuu juuri ja juuri johonkin $a \times b$ -suorakulmioon.

Olkoot $a, b > 1$. Todista, että on olemassa (a, b)-monikulmio, jonka ala on korkeintaan $\sqrt{2\max(a, b)}$.

20. Matilla on $n + 1$ korttia, jotka on numeroitu luvuilla $0, 1, 2, \ldots, n-1$ ja n. Kortit $1, 2, \ldots$ ja n ovat sekaisin pakassa. Matti haluaa järjestää kortit seuraavalla tavalla:

(i) Ensin Matti laittaa kortin numero 0 pakan pohjalle.

(ii) Sitten Matti toistaa seuraavaa ”siirtoa”: jos pakan päällimmäinen kortti on numeroltaan k, hän siirtää kortin paikalle $k+1$. Tällöin k seuraavaa korttia siirtyvät pakassa yhden askeleen ylemmäs. Muiden korttien järjestys ei tässä siirrossa muutu.

(iii) Jos pakan päällimmäinen kortti on kortti numeroltaan 0, Matti lopettaa.

Jos siis esimerkiksi korttipakka olisi alussa järjestyksessä $(2, 4, 1, 3, 0)$, missä 2 ja 0 ovat päällimmäinen ja alimmainen kortti, vastaavasti, ensin Matti siirtää päällimmäisen kortin 2 kolmanneksi, eli järjestys on $(4, 1, 2, 3, 0)$, ja seuraavaksi Matti siirtää kortin numero 4 viimeiseksi, ja järjestys on $(1, 2, 3, 0, 4)$.

Todista, että riippumatta pakan alkuperäisestä järjestyksestä, ennen pitkää kortti 0 on päällimäisenä, ja Matti voi lopettaa järjestämisen. Todista lisäksi, että tällöin kortit ovat järjestyksessä $(0, 1, 2, \ldots, n)$. Olkoon lisäksi $f(n)$ pienin positiivinen kokonaisluku k, jolle minkä tahansa korttien $0, 1, \ldots, n$ sekoituksen järjestäminen kestää korkeintaan k siirtoa. Määritä $f(n)$.