Matematiikan olympiavalmennus 2015 – huhtikuun tehtävät

Vastaukset osoitteeseen `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu` tai sähköpostitse `matti.lehtinen@spangar.fi`, huhtikuun loppuun mennessä!

1. Olkoon $n > 1$ pariton kokonaisluku, ja $k = (n-1)/2$. Todista, että lukujonossa

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k}$$

on pariton määrä parittomia lukuja.

2. Kuinka moni lukua 2015 pienempi positiivinen kokonaisluku on jaollinen 3:lla tai 4:llä mutta ei 5:llä?

3. Hämähäkillä on kahdeksan jalkaa ja kutakin jalkaa varten sukka ja kenkä. Monessako järjestyksessä se voi pukea sukat ja kengät, kun kuhunkin jalkaan on puettava sukka ennen kenkää?

4. Määritellään funktio f rationaaliluvuille kaavalla $f(m/n) = mn$, missä m/n on rationaaliluvun täysin supistettu muoto, eli m ja n ovat kokonaislukuja, joiden suurin yhteinen tekijä on 1. Kuinka monelle rationaaliluvulle r, $0 < r < 1$, on $f(r) = 20!$?

5. 7×7-shakkilaudan ruuduista kaksi väritetään keltaisiksi ja loput vihreiksi. Lautaa tasossa kiertämällä saatavia värityksiä pidetään samoina. Montako erilaista väritystä on olemassa?

6. Olkoot A ja B joukkoja, joiden leikkaus on tyhjä ja joiden yhdiste on positiivisten kokonaislukujen joukko. Todista, että kaikilla kokonaisluvuilla n on olemassa erisuuret $a, b > n$, joille

$$\text{joko} \quad \{\, a, b, a+b \,\} \subseteq A \quad \text{tai} \quad \{\, a, b, a+b \,\} \subseteq B.$$

7. Sanotaan, että positiivisten kokonaislukujen joukolla on kolmio-ominaisuus, jos siinä on kolme eri lukua, jotka ovat mahdolliset kolmion sivun pituudet (kolmiolla on oltava positiivinen pinta-ala). Peräkkäisten kokonaislukujen joukon $\{\, 4, 5, 6, \ldots, n \,\}$ kaikilla kymmenalkioisilla osajoukoilla on kolmio-ominaisuus. Mikä on suurin mahdollinen n:n arvo?

8. Merkitään Fibonaccin lukuja $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, jne. Todista, että jos m on n:n tekijä, niin F_m on F_n:n tekijä.

9. $ABCD$ on suorakulmio ja P mielivaltainen tason piste. Osoita, että $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

10. Jännenelikulmion lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Osoita, että jos nelikulmion lävistäjien leikkauspisteen kautta kulkeva suora on kohtisuorassa jotain jännenelikulmion sivua vastaan, niin se puolittaa jännenelikulmion vastakkaisen sivun.

11. Kolmiot ARB, BPC ja CQA on piirretty kolmion ABC ulkopuolelle. Lisäksi $\angle ARB + \angle BPC + \angle CQA = 180°$. Osoita, että kolmioiden ARB, BPC ja CQA ympärysympyrät leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

12. Tarkastelleen kolmioon ABC ja pisteeseen P liittyviä Simsonin suoria. Milloin Simsonin suora on suora AB?

13. Olkoot ℓ ja ℓ' pisteisiin P ja P' liittyvät (kolmion ABC) Simsonin suorat. Osoita, että ℓ:n ja ℓ': välinen kulma on puolet kaaresta $\overset{\frown}{PP'}$ (kun kaari mitataan kulmayksiköin).

14. Osoita: nelikulmion vastakkaisten sivujen keskipisteiden kautta kulkevat suorat ja nelikulmion lävistäjien keskipisteiden kautta kulkeva suora keikkaavat toisensa samassa pisteessä.

15. Määritä kaikki ne positiivisten kokonaislukujen parit (a, b), joille $a^a = b^{4b}$.

16. Mille positiivisille kokonaisluvuille n pätee $n \mid a^8 - 1$ kaikilla kokonaisluvuilla a, jotka ovat yhteistekijättömiä luvun n kanssa?

17. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille luvulla n^2 on jokin tekijä, joka kuuluu väliin $[n - \sqrt{n}, n[$.

18. Olkoon p alkuluku. Osoita, että luvun $2^p - 1$ kaikki alkutekijät ovat vähintään $2p + 1$ suuruisia. Päättele tästä, että on olemassa äärettömän monta alkulukua.