Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, lokakuu 2019

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa. Näissä näkyvät itsenäisen harjoittelun tulokset.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan 29.11.2019 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Matematik och Statistik
Åbo Akademi
Domkyrkotorget 1
20500 Åbo

Huomioi tietosuojalauseke: `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Helpompia tehtäviä

Osassa seuraavia tehtäviä saattaa olla apua invarianssiperiaatteen tuntemisesta.

1. Pingisturnaukseen osallistui 25 pelaajaa. Osoita, että turnauksen lopuksi niiden pelaajien määrä, jotka pelasivat parittoman määrän pelejä, oli parillinen.

2. (a) On annettu reaalilukujen kolmikko (x, y, z). Yhdellä askeleella kaksi kolmikon luvuista, olkoot ne a ja b, voidaan muuttaa luvuiksi $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ ja $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Voidaanko tällaisia askelia toistamalla muuttaa kolmikko $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ kolmikoksi $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$?

(b) Yhdellä askeleella $m \times n$-suklaalevy voidaan katkaista jotain riviä tai saraketta pitkin. Etsi pienin mahdollinen määrä askelia, joilla $m \times n$-suklaalevy voidaan jakaa 1×1-paloihin.

3. Joukko S koostuu avaruudessa $\mathbb{Z}^3$ olevan kuution seitsemästä kärjestä. Joukkoa S voidaan laajentaa peilaamalla joukon S piste A jonkin avaruuden $\mathbb{Z}^3$ pisteen $X \neq A$ suhteen. Onko mahdollista, että jossain vaiheessa myös alussa tarkastellun kuution kahdeksas kärki kuuluu joukkoon S?

4. Riviin on kirjoitettu jokin määrä positiivisia kokonaislukuja. A valitsee toistuvasti kaksi vierekkäistä lukua x ja y, joille $x > y$ ja x on luvun y vasemmalla puolella, ja korvaa parin (x, y) joko parilla $(y+1, x)$ tai parilla $(x-1, x)$. Todista, että hän voi tehdä tämän vain äärellisen monta kertaa.

5. Olkoon AH tasasivuisen kolmion $\triangle ABC$ korkeusjana. Lisäksi olkoon I kolmion $\triangle ABH$ sisään piirretyn ympyrän keskipiste sekä pisteet L, K ja J kolmioiden $\triangle ABI$, $\triangle BCI$ ja $\triangle CAI$ sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. Kuinka suuri kulma $\angle KJL$ on?

6. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, (missä $\mathbb{N}_0$ on ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko) jotka toteuttavat ehdon $f(f(n)) = f(n) + 1$ kaikille $n \in \mathbb{N}_0$ ja joille lisäksi joukon $\{ f(0), f(1), f(2), \dots \}$ pienin luku on 1.

7. Olkoon $\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, \dots \}$. Etsi kaikki funktiot $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $f(n) < f(n+1)$ kaikille $n \in \mathbb{N}_0$;
2. $f(2) = 2$;
3. $f(mn) = f(m)f(n)$ kaikille $m, n \in \mathbb{N}_0$.

8. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon $f(x+y) \le f(x) + f(y) \le x + y$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat yhtälön $f(x)f(y) + f(x+y) = xy$ kaikille reaaliluvuille x ja y.

10. (Kanadan IMO-valmennuskilpailu 1996). Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy.$$

11. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ehdot $f(x) \leq x$ ja $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

12. Onko mahdollista, että kokonaiskertoimisilla polynomeilla

$$ax^2 + bx + c \qquad \text{ja} \qquad (a+1)x^2 + (b+1)x + c + 1$$

on molemmilla kaksi kokonaislukujuurta?

Vaativampia tehtäviä

13. Pöydällä on rivissä n lappua, joiden toinen puoli on valkoinen ja toinen musta. Kustakin lapusta on valkoinen puoli näkyvillä. Jos mahdollista, niin yhdellä askeleella valitaan yksi lappu, jonka valkoinen puoli on näkyvillä ja joka ei ole rivin reunimmaisena, käännetään valitun lapun viereiset laput ja poistetaan valittu lappu. Osoita, että lopussa voi olla tasan kaksi lappua jäljellä jos ja vain jos $3 \nmid n - 1$.

14. Taululle on kirjoitettu 30 reaalilukua. Ne voi jakaa pareihin, joista kunkin summa on 1. Kun luvut jaetaan pareihin eri tavalla, huomataan että kunkin parin tulo, yhtä paria lukuunottamatta, on 1. Todista, että viimeisenkin parin tulo on 1.

15. Todista kolmion sivuille a, b ja c epäyhtälö

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3.$$

16. Todista, että on olemassa sellaiset aidosti kasvavat kokonaislukujen jonot (a_n) ja (b_n), että $a_n(a_n+1)$ jakaa luvun (b_n^2+1) kaikilla n.

17. Olkoon $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ei-negatiivisten reaalilukujen joukko. Kun a ja b ovat positiivisia reaalilukuja, todista että funktionaaliyhtälöllä

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

18. Olkoon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ funktio, jolla

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x))$$

kaikilla kokonaisluvuilla x ja y. Osoita, että f on rajoitettu, eli siis että on olemassa sellainen kokonaisluku M, että kaikilla x pätee $-M \leq f(x) \leq M$.

19. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, joilla

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n ja m.

20. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

21. Todista, että yhtälöllä

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) + 5 = 0$$

ei ole rationaaliratkaisuja.

22. Etsi yhtälön

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$$

kokonaislukuratkaisut.

23. $n \times n$-neliöruudukon ($n \geq 3$) vasen ja oikea reuna liimataan yhteen niin, että muodostuu lieriö. Osa ruuduista väritetään mustiksi. Todista, että on kaksi yhdensuuntaista n:n ruudun jonoa (vaaka- tai pystysuoria tai diagonaalisia) joissa on yhtä monta mustaa ruutua.

24. Kolmion ABC sisäympyrän keskipiste on I ja sisäympyrä sivuaa kolmion sivuja AB, BC ja CA pisteissä K, M ja N. Mediaani BB_1 leikkaa janan KM pisteessä D. Osoita, että pisteet I, D ja N ovat samalla suoralla.