Syyskuun vaikeammat valmennustehtävät

Ratkaisuja pyydetään seuraavaan valmennusviikonloppuun 18.-20.10. mennessä. Ratkaisut voi tuoda valmennusviikonlopulle, lähettää postitse osoitteeseen Katja Kulmala, Pekankatu 5A 25, 00700 Helsinki, tai lähettää sähköpostitse osoitteeseen katja.kulmala@helsinki.fi.

1. Kahden ympyrän keskipisteet ovat O_1 ja O_2 ja säteet r ja R vastaavasti. Oletetaan, että ympyrät leikkaavat kahdessa eri pisteessä A ja B ja että $O_1O_2 = 1$. Määritä kolmioiden O_1AB ja O_2AB pinta-alojen suhde.

2. Etsi kaikki parit (m, n) positiivisia kokonaislukuja, joille $2^m - 1 \mid 2^n + 1$.

3. Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Montako tornin reittiä on $n \times n$-shakkilaudan vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan seuraavilla ehdoilla:

- torni liikkuu joka siirrolla ylös tai oikealle ja
- torni ei kulje laudan keskiruutujen kautta (parillisilla n keskiruutuja on neljä ja parittomilla n yksi) ja
- reittejä pidetään samoina, jos ne kulkevat täsmälleen samojen ruutujen kautta?

4. Olkoot $a, b, c > 0$. Osoita, että $(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})^2 \geq (a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$.

5. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $\angle ABC = \angle ACB$. Olkoon sen ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O ja korkeusjanojen leikkauspiste H. Osoita, että pisteiden B, O ja H kautta kulkevan ympyrän keksipiste on suoralla AB.

6. Olkoon $x \geq 3$ kokonaisluku ja $n = x^6 - 1$. Oletetaan, että alkuluvulle p ja kokoaisluvulle $k \geq 0$ pätee $p^k \mid n$. Osoita, että $p^{3k} < 8n$.

7. Taululle on kirjoitettu $n \geq 2$ reaalilukua. Pelaajat A ja B pelaavat peliä vuorotellen; A aloittaa. Vuorollaan pelaaja valitsee taululta kaksi reaalilukua a ja b, pyyhkii ne ja kirjoittaa tilalle luvut $\frac{2(a+b)}{3}$ ja $\frac{2(a-b)}{3}$. Pelaajan B tavoite on saavuttaa tilanne, jossa kaikkien taulun lukujen itseisarvo on alle $\frac{1}{100}$. Pystyykö B välttämättä saavuttamaan tavoitteensa?

8. Olkoon P kolmion ABC sisäpiste siten, että $\angle ABP = \angle PCA$. Olkoon Q sellainen piste, että $PBQC$ on suunnikas. Todista, että $\angle QAB = \angle CAP$.

9. Osoita, ettei ole olemassa funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f(\frac{x+y}{2}) + |x - y|$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

10. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, joille $f(n!) = f(n)!$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $a-b \mid f(a)-f(b)$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}_+$, kun $a \neq b$.