Matematiikan olympiavalmennus 2015 – helmikuun helpommat tehtävät

Ratkaisuja

1. *Määritä kolmiot, joiden kulmille* α, β, γ *pätee* $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1$.

Ratkaisu. Koska $0 < \sin\gamma \le 1$, täytyy olla $1 \ge \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ge \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 1$. Yhtälö toteutuu vain, jos $\cos(\alpha-\beta) = 1$ ja $\sin\gamma = 1$ eli kun $\gamma = 90^\circ$ ja $\alpha = \beta$. Tehtävän ehdon täyttävät kolmiot ovat siis tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita.

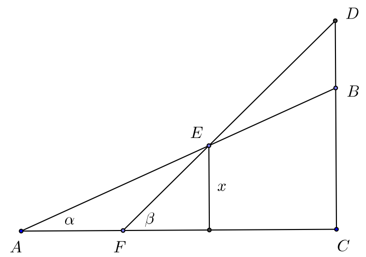
2. *Kolmion kulmat ovat* α, β, γ. *Määritä lausekkeen* $\sin^2\alpha + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$ *suurin mahdollinen arvo.*

Ratkaisu. Jos $\alpha = 90^\circ$, niin lausekkeen arvo on 1; jos $\alpha > 90^\circ$, niin $\cos\alpha < 0$ ja lausekkeen arvo on varmasti < 1. Olkoon sitten $\alpha < 90^\circ$. Silloin $\beta+\gamma = 180^\circ - \alpha$ ja $\sin^2\alpha + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos\alpha\left(\frac{1}{2}\left(\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)\right)\right) = \sin^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\left(\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha\right)$. Lauseke saa suurimman mahdollisen arvonsa $\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha(1+\cos\alpha) = 1 + \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos^2\alpha)$, kun $\beta = \gamma$. Tunnetusti funkktio $f(t) = t - t^2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ saa suurimmaksi arvokseen $\frac{1}{4}$, kun $t = \frac{1}{2}$. Tehtävän lauseke saa siis suurimmaksi arvokseen $1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{8}$, kun $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ eli kun $\alpha = 60^\circ$. Koska tällöin $\beta = \gamma$, on oltava $\beta = \gamma = 60^\circ$. Kolmio, jolla suurin arvo saadaan, on tasasivuinen kolmio.

3. *ABC on suorakulmainen kolmio. Piste F on kateetilla AC ja E hypotenuusalla AB; suora FE ja puolisuora CB leikkaavat pisteessä D. Määritä pisteen E etäisyys x suorasta AC kulmien $\alpha = \angle BAC$ ja $\beta = \angle DFC$ ja hypotenuusien $AB = c$ ja $FD = d$ funktiona.*

Ratkaisu. Selvästi

$$AE = \frac{x}{\sin\alpha}, \quad EF = \frac{x}{\sin\beta},$$



joten

$$EB = \frac{c\sin\alpha - x}{\sin\alpha}, \quad ED = \frac{d\sin\beta - x}{\sin\beta}.$$

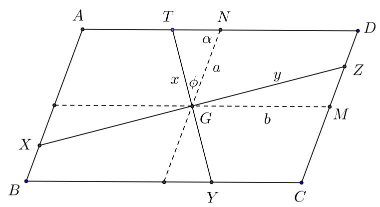
Janojen EB ja ED projektiot AC:n suuntaisilla suorilla ovat samat, eli $EB\cos\alpha = ED\cos\beta$. Näin ollen x voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\frac{c\sin\alpha - x}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{d\sin\beta - x}{\sin\beta\cos\alpha}.$$

Saadaan

$$x = \frac{\dfrac{d}{\cos\alpha} - \dfrac{c}{\cos\beta}}{\dfrac{1}{\sin\beta\cos\alpha} - \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\beta}} = \frac{d\cos\beta - c\cos\alpha}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{d\cos\beta - c\cos\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha}.$$

4. *On annettu suunnikas. Määritä pienin mahdollinen vinoneliö, jonka jokainen kärki on yhdellä suunnikkaan sivuista.*



Ratkaisu. Olkoon suunnikas $ABCD$ ja vinoneliö $XYZT$ niin, että X on janalla AB. Olkoon G suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste; G on silloin myös suunnikkaan vastakkaisten sivujen keskipisteitä yhdistävien janojen leikkauspiste. Vinoneliön keskipisteen on oltava molemmilla äsken mainituilla janoilla, joten keskipiste on G. Olkoon M ja N CD:n ja AD:n keskipisteet $GM = b$, $GN = a$, $GT = x$ ja $GZ = y$. Olkoon vielä $\angle TGN = \phi$ ja $\angle GNZ = \alpha$. Kulma ϕ määrittää $XYZT$:n.
Koska vinoneliön lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja puolittavat toisensa, $XYZT$:n ala on $2xy$. Ala minimoituu, kun ϕ valitaan niin, että xy minimoituu. Määritetään x ja y sinilauseen avulla kolmioista GNT ja GMZ. Havaitaan, että $\angle NTG = 180° - (\phi + \alpha)$. Siis

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\phi+\alpha)}. \tag{1}$$

Koska $\angle NGM = \alpha$, $\angle ZGM = \alpha + \phi - 90°$ ja $\angle GMZ = 180° - \alpha$, niin $\angle MZG = 90° - \phi$. Siis

$$\frac{y}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(90° - \phi)} = \frac{b}{\cos\phi}. \tag{2}$$

Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa, että xy on pienin mahdollinen, kun $\sin(\phi+\alpha)\cos\phi$ on suurin mahdollinen. Mutta $2\sin(\phi+\alpha)\cos\phi = \sin(2\phi+\alpha) - \sin\alpha$. Lauseke on suurin mahdollinen, kun $2\phi + \alpha = 90°$ eli kun $\phi = 45° - \frac{1}{2}\alpha$. – Koska $\angle NGD = \frac{1}{2}\alpha$, minimivinoneliö on se vinoneliö, jonka lävistäjiern välisen kulman puolittaja yhtyy suunnikkaan lävistäjään.

5. *Osoita, että kolmiossa kärkeä C vastassa olevan sivuympyrän säde on* $r_c = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, *missä R on kolmion ympärysympyrän säde ja α, β, γ kolmion kulmat.*

Ratkaisu. [Käytetään hyväksi tekstin ”Trigonometriaa: kolmioita ja kaavoja” (http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/trig.pdf) antamaa mallia.] Sievennetään ensin (vertaa mainitun jutun numero 19) ottamalla huomioon kolmion kulmien summa, kahden sinin summan kaava ja kaksinkertaisen kulman sinin kaava:

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) = 4\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Kolmion kaksinkertainen ala on $T = ab\sin\gamma = 2r_c(p-c) = r_c(a+b-c)$ (mainitun jutun kohta 9). Sinilauseen mukaan tämä on sama kuin $4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2r_cR(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma)$. Kaksinkertaisen kulman sinin kaava ja edellä tehty sievennys antavat (vertaa trigonometriajutun numeroon 20)

$$\frac{r_c}{R} = \frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma} = \frac{16\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

niin kuin pitääkin.

6. *Todista, että jos x, y, z ovat positiivisia lukuja, niin*

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}.$$

Ratkaisu. Koska

$$0 \leq \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) - 2\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right),$$

väite seuraa.

7. *Luvut x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, toteuttavat ehdon $0 \leq x_i < 1$. Todista, että*

$$2^{n-1}(1 + x_1x_2\cdots x_n) \geq (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n).$$

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla. Asia on selvä, kun $n = 1$. Kun $n = 2$, väite on $2(1 + x_1x_2) \geq (1 + x_2)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2$ eli $(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 0$; väite on tosi. Oletetaan sitten, että väite on tosi, kun $n = k$, $k \geq 2$ ja että luvut $x_1, \ldots, x_{k+1}$ ovat väliltä $]0, 1[$. Induktio-oletuksen perusteella

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \leq 2^{k-1}(1 + x_1x_2\cdots x_k)(1+x_{k+1}). \tag{1}$$

Mutta luvut $x_1x_2\cdots x_k$ ja x_{k+1} ovat välin $]0, 1[$ lukuja, joten siitä, että tehtävän väite on tosi, kun $n = 2$, seuraa, että $(1 + x_1x_2\cdots x_k)(1 + x_{k+1}) \leq 2(1 + x_1x_2\cdots x_kx_{k+1})$. Kun tämä sijoitetaan epäyhtälöään (1), saadaan väite arvolla $n = k + 1$. Induktioaskel on otettu ja väite todistettu.

8. *Olkoon* $x > 0$ *ja* n *positiivinen kokonaisluku. Osoita, että*

$$\frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} \geq (2n + 1)x^n.$$

Ratkaisu. [Tehtävän oletuksisssa olisi tietysti pitänyt olla $x \neq 1$.] Epäyhtälön vasen puoli on $1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}$ ja epäyhtälö siis sama kuin $1 + x + \cdots + x^{n-1} + x^{n+1} + \cdots + x^{2n} \geq 2nx^n$. Jaetaan epäyhtälö puolittain x^n:llä ja ryhmitellään yhteenlaskettavat uudelleen. Alkuperäinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\left(x^n + x^{-n}\right) + \left(x^{n-1} + x^{1-n}\right) + \cdots + \left(x + x^{-1}\right) \geq 2n$$

kanssa. Mutta $a + \frac{1}{a} \geq 2$ kaikilla positiivisilla luvuilla a. Kun tätä sovelletaan (1):n vasemman puolen n:ään yhteenlaskettavaan, nähdään, että (1) pitää paikkansa.

9. *Olkoot* a, b, c, d *positiivisia lukuja. Osoita, että*

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} + \frac{b^2 + c^2 + d^2}{b + c + d} + \frac{c^2 + d^2 + a^2}{c + d + a} + \frac{d^2 + a^2 + b^2}{d + a + b} \geq a + b + c + d.$$

Ratkaisu. Osoitetaan, että jos x, y, z ovat positiivisia lukuja, niin

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} \geq \frac{x + y + z}{3}. \qquad (1)$$

Tämä on suora seuraus Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä tai epäyhtälöstä $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$. Kun epäyhtälöä (1) sovelletaan väite-epäyhtälön vasemman puolen jokaiseen neljään yhteenlaskettavaan, nähdään, että vasen puoli on suurempi tai yhtä suuri kuin

$$\frac{1}{3}\left((a + b + c) + (b + c + d) + (c + d + a) + (d + a + b)\right) = a + b + c + d.$$

10. *Todista, että kaikilla reaaliluvuilla* x, y, z *pätee*

$$x^4(1 + y^4) + y^4(1 + z^4) + z^4(1 + x^4) \geq 6x^2y^2z^2.$$

Ratkaisu. Esimerkiksi aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä seuraa, että $1 + y^4 \geq 2y^2$, $1 + z^4 \geq 2z^2$ ja $1 + x^4 \geq 2x^2$. Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että

$$x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 \geq 3x^2y^2z^2.$$

Koska $x^2y^2z^2 = \sqrt[3]{x^4y^2y^4z^2z^4x^2}$, jälkimmäinen väite seuraa kolmen luvun aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä.

11. *Etsi kaikki funktiot* $f\colon \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$, *joille kaikilla* $n \in \mathbb{Z}_+$ *pätee*

$$f(f(n)) = n + 1.$$

Ratkaisu. Tällaisia funktioita joutuu etsimään turhaan, sillä niitä ei ole. Jos f olisi tällainen funktio, niin ensinnäkin olisi $f(1) > 1$. Jos nimittäin olisi $f(1) = 1$, olisi $2 = 1 + 1 = f(f(1)) = f(1) = 1$. On siis $f(1) = k > 1$. Toisaalta kaikilla n on $f(n+1) = f(f(f(n))) = f(n) + 1$. Tästä seuraa, että $f(2) = k + 1$, $f(3) = k + 2$ jne.; siis $f(n) \geq k$ kaikilla n. Mutta $k = (k-1) + 1 = f(f(k-1))$, joten on oltava $f(k-1) = 1 < k$. Tultiin ristiriitaan. Tehtävän ehdon toteuttavia funktioita f ei ole olemassa.

12. *Etsi kaikki funktiot* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *joille kaikilla* x, $y \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$f(xf(y)) = xy.$$

Ratkaisu. Olkoon $f(1) = a$. Silloin $1 = 1 \cdot 1 = f(1f(1)) = f(1 \cdot a) = f(a)$ ja $1 = f(a) = f(a \cdot 1) = f(a \cdot f(a)) = a^2$. Siis joko $a = 1$ tai $a = -1$. Jos $a = 1$, niin $f(x) = f(xf(1)) = x$ kaikilla a, jos $a = -1$, niin $f(x) = f((-x)(-1)) = f(-xf(1)) = -x$ kaikilla x. Nähdään helposti, että funktiot $f(x) = x$ ja $f(x) = -x$ toteuttavat tehtävän ehdon.

13. *Määritellään jono* a_1, a_2, a_3, ... *positiivisia reaalilukuja asettamalla* $a_1 = 1$ *ja*

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$$

jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. *Osoita, että luvut* a_1, a_2, ... *ovat kaikki kokonaislukuja.*

Ratkaisu. Nähdään heti, että $a_2 = 3$ ja $a_3 = 11$. Jos luvut a_1, a_2, ..., a_{n+1} ovat kokonaislukuja, niin $\sqrt{3a_n^2 - 2}$ on kokonaisluku. Jonon seuraava luku a_{n+2} on kokonaisluku, jos $3a_{n+1}^2 - 2$ on neliöluku. Näin todella on, sillä

$$\begin{aligned} 3a_{n+1}^2 - 2 &= 3\left(4a_n^2 + 4a_n\sqrt{3a_n^2 - 2} + 3a_n^2 - 2\right) - 2 = 21a_n^2 + 12a_n\sqrt{3a_n^2 - 2} - 8 \\ &= 4(3a_n^2 - 2) + 2 \cdot 3a_n \cdot 2\sqrt{3a_n^2 - 2} + 9a_n^2 = \left(2\sqrt{3a_n^2 - 2} + 3a_n\right)^2. \end{aligned}$$

2. ratkaisu. Vähentämällä puolittain $2a_n$ ja neliöimällä puolittain saadaan

$$(a_{n+1} - 2a_n)^2 = 3a_n^2 - 2, \quad \text{eli} \quad a_{n+1}^2 + a_n^2 - 4a_n a_{n+1} = -2,$$

mikä pätee kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Tästä seuraa myös valittömästi, että

$$a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_{n+2} = -2,$$

jälleen kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Ku kaksi viimeisestä yhtälöä vöhennetään toisistaan, saadaan

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 + 4a_n a_{n+1} - 4a_{n+1}a_{n+2} = 0,$$

mikä sievenee muotoon

$$(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 4a_{n+1}) = 0.$$

Tämä yhtälö pätee kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi varmasti $a_{n+1} > a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, eli on oltava $a_{n+2} \neq a_n$. Siispä

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Koska $a_1 = 1$ ja $a_2 = 2 \cdot 1 + \sqrt{3 \cdot 1^1 - 2} = 2 + 1 = 3$ ovat kokonaislukuja, seuraa väite induktiolla viimeisimmästä rekursioyhtälöstä.

14. *Etsi kaikki funktiot* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, joille pätee*

$$2f(x) + f(-x) = x^3$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$*.*

Ratkaisu. Jokaisella reaaliluvulla x on $2f(x) + f(-x) = x^3$. Siis erityisesti $2f(-x) + f(x) = (-x)^3 = -x^3$. Kun lasketaan edelliset yhtälöt puolittain yhteen, saadaan $3(f(x) + f(-x)) = 0$. Siis $f(-x) = -f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Täten $x^3 = 2f(x) - f(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.