Kotitehtävät, joulukuu 2011
Vaikeampi sarja

Palauta ratkaisusi 13.1. mennessä valmennusviikonlopun yhteydessä tai postitse Jouni Seppäselle.
Tiedustelut: `jks@iki.fi`, 050–524 9019.

1. Etsi kaikki positiivisten rationaalukujen parit (a, b), joille

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

2. Paroni von Münchhausen väittää keksineensä likimääräisen kaavan neliöjuurten laskemiseen. Kaavassa on joitakin vakioita ja yksi muuttuja (juurrettava), mutta erikoisinta on, että vakioille ja muuttujalle tehdään vain kaksi laskutoimitusta: yksi yhteenlasku ja yksi kertolasku. ”Jokaiselle reaaliluvulle välillä $[1000, 2000]$ kaavani virhe on alle $1/2$”, ylpeilee von Münchhausen. Voitko osoittaa, että paroni valehtelee?

3. Todista epäyhtälö

$$\sin^4(x - y) + \cos^4(x + y) \le 1 + \sin^2 2x \sin^2 2y$$

reaaliluvuille x, y.

4. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(x + y) = f(x)f(y + 1) + f(x + 1)f(y) - 1$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $s = (a_1, a_2, \ldots, a_{2^n})$ jono ei-negatiivisia kokonaislukuja. Asetetaan $f(s) = (|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_{2^n} - a_1|)$. Merkitään f_k:lla funktiota f sovellettuna k kertaa, siis $f_1(s) = f(s)$ ja $f_{k+1}(s) = f(f_k(s))$, kun $k = 1, 2, \ldots$. Osoita, että näillä oletuksilla $f_k(s) = (0, 0, \ldots, 0)$ jollain k, mutta vastaava tulos ei välttämättä päde, jos jonon s pituus ei ole kahden potenssi.

6. Kolmiossa ABC on $\angle B \ne \angle C$. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I ja kulman A vastaisen sivuympyrän[1] keskipiste J. Piste O on kulman A sisäisen puolittajan ja sivun BC keskinormaalin leikkauspiste, ja piste P on suoran BO leikkauspiste pisteen C kautta piirretyn suoran BC normaalin kanssa. Todista, että $IP \parallel BJ$.

7. Kolmion ABC sivuilla BC, CA ja AB on tässä järjestyksessä pisteet D, E ja F. Janat AD, BE ja CF leikkaavat pisteessä P. Todista, että

$$\frac{|AP|}{|PD|} \cdot \frac{|BP|}{|PE|} \cdot \frac{|CP|}{|PF|} - \left(\frac{|AP|}{|PD|} + \frac{|BP|}{|PE|} + \frac{|CP|}{|PF|} \right) = 2.$$

8. Mille positiivisille kokonaisluvuille a ja b on

$$\frac{a^3 + b^3}{11}$$

alkuluvun potenssi?

9. Etsi kaikki kokonaisluvut $n > 1$, joilla on seuraava ominaisuus: luvun $n^6 - 1$ jokainen alkutekijä jakaa luvun $n^2 - 1$ tai $n^3 - 1$.

10. Todista, että lukujono

$$\binom{2002}{2002}, \binom{2003}{2002}, \binom{2004}{2002}, \ldots$$

on jaksollinen modulo 2002 ja selvitä sen jakson pituus.

[1] J on siis kulman A sisäisen puolittajan ja kulmien B ja C ulkoisten puolittajien leikkauspiste. Nämä ulkoiset puolittajat puolittavat ne kulmat, jotka sivu BC muodostaa sivujen AB ja AC jatkeiden kanssa.