Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, tammikuu 2018

Ratkaisuja toivotaan seuraavaan valmennusviikonloppuun 6.4. mennessä henkilökohtaisesti viikonloppuna ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku.

Helpompia tehtäviä

1. Mikä on suurin positiivinen kokonaisluku n, jolle $n^3 + 100$ on jaollinen $n + 10$:llä?

2. a) Olkoon $n > 2$ kokonaisluku. Todista, että murtoluvuista

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

parillinen lukumäärä on supistumattomia.

b) Osoita, että murtoluku $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ on supistumaton, kun n on positiivinen kokonaisluku.

3. Osoita, että

$$2 \cdot 3^n \leq 2^n + 4^n, \ n = 1, 2, \ldots$$

Osoita lisäksi, että epäyhtälö on aito, kun $n \neq 1$.

4. Olkoot a, b, c positiivisia lukuja. Osoita, että

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1\right)^2 \geq (2a + b + c)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

ja että epäyhtälössä on yhtäsuuruus jos ja vain jos $a = b = c$.

5. A ja B leipovat maanantaina kakkuja. A leipoo kakun joka viides päivä ja B leipoo kakun joka toinen päivä. Kuinka monen päivän jälkeen he molemmat leipovat seuraavan kerran kakun maanantaina?

6. Onko mahdollista, ettei vuoden minkään kuun ensimmäinen päivä ole maanantai?

7. Positiivisten kokonaislukujen jonossa termi saadaan lisäämällä edelliseen termiin sen suurin numero. Mikä on suurin mahdollinen määrä peräkkäisiä parittomia lukuja, joita jonossa voi olla?

8. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen luvulla 24. Osoita, että luvun $n-1$ positiivisten tekijöiden summa on myös jaollinen luvulla 24.

9. Välitunnilla n lasta istuu ympyrässä opettajan ympärillä ja pelaa peliä. Pelissä opettaja kiertää ympyrää myötäpäivään ja antaa oppilaille karkkeja seuraavan säännön mukaisesti: Ensin opettaja antaa jollekin oppilaista karkin. Sitten hän hyppää yhden oppilaan yli ja antaa seuraavalle oppilaalle karkin, sitten hän hyppää kahden oppilaan yli ja antaa karkin, seuraavaksi kolmen oppilaan yli ja niin edelleen. Etsi kaikki luvut n, joilla lopulta, mahdollisesti monen kierroksen jälkeen, jokaisella lapsella on ainakin yksi karkki.

10. Yksi Eulerin konjektuureista kumottiin 1960-luvulla, kun kolme amerikkalaista matemaatikkoa osoitti, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolle

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5.$$

Etsi luku n.

Vaikeampia tehtäviä

11. Olkoot a, b, c, d positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq 2abcd - 1.$$

12. Olkoot x, y, z reaalilukuja, jotka toteuttavat ehdot $x + y \geq 2z$ ja $y + z \geq 2x$. Osoita, että

$$5(x^3 + y^3 + z^3) + 12xyz \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)$$

ja että yhtäsuuruus vallitsee jos ja vain jos $x + y = 2z$ tai $y + z = 2x$.

13. Osoita, että jos x ja y ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$(x + y)^5 \geq 12xy(x^3 + y^3)$$

ja että vakio 12 on paras mahdollinen (eli jos se se korvataan jollain suuremmalla vakiolla, niin on olemassa positiiviset luvut x ja y, joilla epäyhtälö ei päde).

14. Kuusitiellä on n asukasta ja m kerhoa. Minkään kerhon jäsenmäärä ei ole kuudella jaollinen. Toisaalta minkä tahansa kahden kerhon yhteisten jäsenten määrä on kuudella jaollinen. Todista, että $m \leq 2n$.

15. $A_1, \ldots, A_m$ ovat joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ aitoja osajoukkoja, ja millä tahansa eri luvuilla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on täsmälleen yksi A_k, joka sisältää molemmat. Todista, että $m \geq n$.

16. Määritä kaikki parit (x, y) kokonaislukuja, joille $x^2 = y(2x - y) + 1$.

17. Määritä kaikki parit (x, y) positiivisia kokonaislukuja, joille $x^y = y^x$.

18. Määritä kaikki parit (p, q) alkulukuja, joille $p \mid 2q + 1$ ja $q \mid 2p + 1$.

19. Olkoot x, y ja z kokonaislukuja, joille $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$. Osoita, että $x = y = z = 0$.

20. Sanotaan, että kolmio on *täydellinen*, jos sen sivujen pituudet ovat kokonaislukuja ja sen piiri on yhtäsuuri kuin sen ala. Määritä kaikki täydelliset kolmiot.