Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, huhtikuu 2018

Ratkaisuja toivotaan seuraavan valmennustapahtuman ensimmäiseen päivään 7.5. mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku.

Kilpailujoukkueisiin valinnan välttämätön (muttei riittävä) ehto on, että asianomainen on kilpailua edeltävänä aikana suorittanut merkittävän osan annetuista tehtävistä. Erityisesti matematiikkaolympiajoukkue valitaan toukokuun valmennusviikolla, joten joukkueeseen pyrkivien on palautettava ratkaisut siihen mennessä.

Helpompia tehtäviä

1. Olkoon ABC kolmio, missä $\angle ABC = 90°$, $AC = 26$ ja $BC = 24$. Olkoon piste D sivulla BC pisteiden B ja C välissä. Lisäksi olkoon E sellainen piste, jolle $\angle CDE = 90°$, $\angle ECD = \angle BCA$ ja $CE = 13$. Laske AE.

2. Kolmiossa ABC kulman $\angle A$ puolittaja, janan BC keskinormaali ja kärjestä B piirretty korkeusjana leikkaavat pisteessä E. Osoita, että kulman $\angle A$ puolittaja, janan AC keskinormaali ja kärjestä C piirretty korkeusjana leikkaavat samassa pisteessä.

3. Olkoon kolmiossa ABC kulma $\angle CAB$ suora. Lisäksi olkoon piste L sivulla BC pisteiden B ja C välissä. Merkitään pisteiden A, B ja L sekä A, C ja L kautta kulkevia ympyröitä merkinnöillä ω_1 ja ω_2 vastaavasti. Ympyrät ω_1 ja ω_2 leikkaavat suorat AC ja AB pisteissä M ja N vastaavasti. Osoita, että L, M ja N ovat samalla suoralla.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja $f(1) = 2$. Etsi kaikki funktiot f, joille pätee

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}$.

6. a) Etsi kaikki surjektiiviset funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ yhtälön

$$f(x + f(y)) = f(x+y) + 1.$$

b) Etsi kaikki injektiiviset funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ yhtälön

$$f(x + f(y)) = f(x+y) + 1.$$

7. Etsi kaikki sellaiset positiivisia kokonaislukuarvoja saavat funktiot $f(n)$, jotka ovat määriteltyjä kaikille positiivisille kokonaisluvuille n ja jotka toteuttavat kaikilla tällaisilla luvuilla n ehdon $f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$.

8. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(10 + x) = f(10 - x), \qquad f(20 + x) = -f(20 - x).$$

Osoita, että f on pariton jaksollinen funktio.

9. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

mille tahansa $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Osoita, että $f(0) = 0$.

b) Etsi $f(1994)$.

10. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ yhtälön

$$f(x)f(y) = f(x-y).$$

Vaikeampia tehtäviä

11. Erisäteiset ympyrät Γ_1, Γ_2, Γ_3 ja Γ_4 sivuavat toisiaan pareittain ulkoisesti. Todista, että on olemassa ympyrä ω, joka sivuaa ympyröitä Γ_1 ja Γ_2 ja leikkaa ympyröitä Γ_3 ja Γ_4 kohtisuorasti.

12. Kuusitahokkaan eli heksaedrin kahdeksasta kärjestä seitsemän on samalla pallolla. Todista, että myös kahdeksas kärki on tällä pallolla.

13. ABC on kolmio ja I sen sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Suora BI leikkaa sivun AC pisteessä D ja suora CI sivun AB pisteessä E. Suora AI leikkaa suoran DE pisteessä P. Oletetaan, että $PD = PI$. Laske kulma ACB.

14. Olkoon c positiivinen kokonaisluku. Tason hilapisteet (parit (n, m), $n, m \in \mathbb{Z}$) väritetään c:llä värillä. Todista, että kaikilla $k \geq 1$ löytyy luvut $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ ja $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ siten, että pisteet (a_i, b_j) ovat samanvärisiä kaikilla $1 \leq i, j \leq k$.

15. Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ äärellinen jono positiivisia kokonaislukuja. Todista, että jollain $n \geq k$ jonoa voidaan jatkaa erisuurilla luvuilla $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ siten, että

$$a_i \mid (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

kaikilla $1 \leq i \leq n$.

16. Olkoot a_1 ja a_2 positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon kaikilla $n \geq 2$ luku a_{n+1} yhtä suurempi kuin summan $a_n + a_{n-1}$ suurin pariton tekijä. Osoita, että jono $a_1, a_2, \ldots$ on jostain alkiostaan lähtien jaksollinen. Missä tapauksissa jono on jaksollinen jo ensimmäisestä alkiostaan lähtien?

17. Etsi kaikki polynomit $P(x)$, joiden kertoimet ja nollakohdat ovat reaalilukuja ja jotka toteuttavat yhtälön

$$P(x^2 - 1) = P(x)P(-x).$$

18. Olkoon $0 < a < 1/4$. Etsi yhtälön

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$$

reaalijuuret.

19. Olkoot $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ reaalilukuja. Järjestä ne jonoksi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ siten, että summa

$$(b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n)^2 + (b_n - b_1)^2$$

on mahdollisimman pieni.