Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, helmikuu 2019
Ratkaisuja

Helpompia tehtäviä

1. Mikä numero on satojen kohdalla luvussa $(20! - 15!)$? (Kun n on positiivinen kokonaisluku, niin merkinnällä $n!$ tarkoitetaan lukua $n \cdot (n-1) \cdots 1$. Esimerkiksi on $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.)

Ratkaisu. Luku $15!$ on jaollinen luvulla $5 \cdot 10 \cdot 15$ ja täten se on jaollinen luvulla 5^3. Vastaavasti luku $15!$ on jaollinen luvulla $2 \cdot 4 = 8$. Näin ollen luku $15!$ on jaollinen luvulla $5^3 \cdot 2^3 = 1000$. Siispä sen kolme viimeistä numeroa ovat 000. Koska lisäksi on $20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!$, niin myös luvun $20!$ kolme viimeistä numeroa ovat 000. Siispä luvun $20! - 15!$ satoja merkitsevä numero on 0.

2. Tarkastellaan oheista 3×3-taulukkoa. Jos taulukossa on n lukua, joiden suurin yhteinen tekijä on täsmälleen n, niin yhdellä askeleella niiden kaikkien paikat voidaan vaihtaa niin, etteivät mitkään näistä n luvusta ole enää samalla paikalla kuin ennen askeleen ottoa. Esimerkiksi taulukossa lukujen 4 ja 6 paikat voidaan vaihtaa keskenään, sillä $\mathrm{syt}(4, 6) = 2$. Voidaanko näitä askeleita toistamalla saada aikaan taulukko, joka on alkuperäisen taulukon pelikuva diagonaalin $1, 8, 20$ suhteen? Entäpä, onko tämä mahdollista toisen diagonaalin suhteen?

1	3	4
6	8	9
10	12	20

Ratkaisu. Taulukko saadaan sallituilla askeleilla muutettua peilikuvakseen diagonaalin $1, 8, 20$ *suhteen, mutta ei toisen diagonaalin suhteen.* Todetaan ensin, että haluttu toimenpide on mahdollista tehdä diagonaalin $1, 8, 20$ suhteen. Koska $\mathrm{syt}(4, 10) = 2$, niin lukujen 4 ja 10 paikkoja voidaan vaihtaa. Tämän jälkeen luvut 4 ja 10 ovat niillä paikoilla kuin niiden halutaankin olevan taulukossa. Lisäksi on $\mathrm{syt}(3, 6, 9) = 3$, joten näiden kolmen paikat voidaan vaihtaa kiertämällä niiden paikkoja vastapäivään yhden pykälän verran. Tämän askeleen jälkeen luku 6 on oikealla paikalla. Lopuksi vielä havaitaan, että $\mathrm{syt}(3, 9, 12) = 3$ ja niiden paikat voidaan vaihtaa kiertämällä paikkoja vastapäivään yhden pykälän verran. Näin saatu taulukko on alkuperäisen taulukon peilikuva diagonaalin $1, 8, 20$ suhteen. Askeleet on esitetty vielä alla.

1	3	4		1	3	10		1	9	10		1	12	10
6	8	9	$\mapsto$	6	8	9	$\mapsto$	3	8	6	$\mapsto$	9	8	6
10	12	20		4	12	20		4	12	20		4	3	20

Toisen diagonaalin suhteen taas ei saada peilikuvaa aikaiseksi sallituilla askeleilla. Nimittäin luvun 1 paikka pitäisi vaihtaa, mikä ei ole mahdollista, sillä luvun 1 suurin yhteinen tekijä muiden lukujen kanssa on yksi.

3. Kokonaisluku A koostuu 600 kutosesta ja jostain määrästä nollia. Voiko luku A olla neliöluku?

Ratkaisu. Jos luku A olisi neliöluku, sen täytyisi loppua parilliseen määrään nollia. Poistetaan luvun lopussa olevat nollat ja saadaan neliöluku $2B$, missä B on kokonaisluku. Luku B koostuu 600 kutosesta ja jostain määrästä nollia sekä loppuu numeroon 3. Täten luku B on pariton, eikä luku $2B$ voi olla neliöluku, sillä se on parillinen luku, joka ei ole jaollinen luvulla 4. Siis luku A ei voi olla neliöluku.

4. Osoita, että minkä tahansa 23 erisuuren kokonaisluvun joukosta löytyy vähintään kaksi eri lukua, joiden neliöiden erotus on jaollinen luvulla 100.

Ratkaisu. On osoitettava, että 23 erisuuren kokonaisluvun joukosta löytyvät erisuuret kokonaisluvut x ja y, joille $x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{100}$. Kiinalaisen jäännöslauseen mukaan tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että on voimassa

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{25} \end{cases}.$$

Tarkastellaan nyt, mitä arvoja luku n^2 voi saada modulo 4 ja modulo 25, kun n on kokonaisluku. Todetaan ensin, että on voimassa

$$n \equiv 0, 1, 2, -1 \pmod 4 \quad \text{ja}$$
$$n \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \pm 12 \pmod{25}.$$

Siis on

$$n^2 \equiv 0, 1 \pmod 4 \quad \text{ja} \quad n^2 \equiv 0, \pm 1, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 11 \pmod{25}.$$

Täten kiinalaisen jäännöslauseen nojalla luku n^2 voi saada $2 \cdot 11 = 22$ eri jäännöstä modulo 100. Näin ollen 23 erisuuren kokonaisluvun joukosta löytyy varmasti kaksi eri lukua, joiden neliöiden jakojäännökset sadalla jaettaessa ovat samat ja täten näiden neliöiden erotus on sadalla jaollinen.

5. Kukin positiivisista kokonaisluvuista $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on pienempi kuin 1951. Kuitenkin minkä tahansa kahden edellisen luvun pienin yhteinen jaettava on suurempi kuin 1951. Osoita, että

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

Ratkaisu. Välillä $[1, m]$ on $\lfloor \frac{m}{b} \rfloor$ luvulla b jaollista kokonaislukua. Koska minkä tahansa kahden (eri) luvun a_i pienin yhteinen jaettava on suurempi kuin 1951, niin mikään luvuista $1, 2, \ldots, 1951$ ei voi olla samanaikaisesti jaollinen kahdella eri luvulla a_i. Näin ollen luvuista $1, 2, \ldots, 1951$

$$\left\lfloor \frac{1951}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1951}{a_2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{1951}{a_n} \right\rfloor \leq 1951$$

kappaletta on jaollisia jollain luvuista $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Täten on

$$\frac{1951}{a_1} - 1 + \frac{1951}{a_2} - 1 + \ldots + \frac{1951}{a_n} - 1 < 1951$$

eli saadaan

$$\frac{1951}{a_1} + \frac{1951}{a_2} + \ldots + \frac{1951}{a_n} < 1951 + n < 2 \cdot 1951.$$

Näin ollen on

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

6. Oletetaan, että m on positiivinen kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin 1000, ja että murtolukua $\dfrac{m+4}{m^2+7}$ ei voi sieventää. Montako mahdollista m:n arvoa on?

Ratkaisu. Määritettävä niiden positiivisten kokonaislukujen $m \leq 1000$ lukumäärä, joilla murtoluku $\frac{m+4}{m^2+7}$ on loppuun asti supistetussa muodossa, ts. $\mathrm{syt}(m+4, m^2+7) = 1$. Tarkastellaan ensin suurinta yhteistä tekijää. Yritetään kirjoittaa se jossakin helposti käsiteltävässä muodossa:

$$\begin{aligned} \mathrm{syt}(m^2+7, m+4) &= \mathrm{syt}(m^2+7-m(m+4), m+4) = \mathrm{syt}(7-4m, m+4) = \mathrm{syt}(4m-7, m+4) \\ &= \mathrm{syt}(4m-7-4(m+4), m+4) = \mathrm{syt}(23, m+4) = 1, \end{aligned}$$

jos $m \not\equiv -4 \equiv 19 \bmod 23$. Koska $1000 = 43 \cdot 23 + 11$, on ainoastaan 43 arvoa, joilla murtoluku ei ole loppuun asti sievennetty. Lopuilla $1000 - 43 = 957$ m:n arvolla näin siis on.

7. *[Uniikit erot]* Joukossa on 8 eri luonnollista lukua, jotka eivät ole suurempia kuin 15. Osoita, että näiden lukujen erotusten joukosta löytyy ainakin kolme samaa lukua.

Ratkaisu. Asetetaan luvut suuruusjärjestykseen ja tarkastellaan ainoastaan peräkkäisten lukujen välisiä erotuksia, joita on seitsemän. Oletetaan, että kukin mahdollinen erotus esiintyy enintään kahdesti. Erotuksista enintään kaksi voi olla 1, enintään kaksi voi olla 2, enintään kaksi voi olla 3 ja ainakin yhden on oltava vähintään 4. Siten pienimmän ja suurimman luvun erotus on vähintään $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16$, mikä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä.

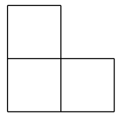
8. *[Liikaa kuninkaita]* Mikä on suurin mahdollinen määrä kuninkaita, joka voidaan asettaa shakkilaudalle siten, että mitkään kaksi eivät uhkaa toisiaan?

Ratkaisu. Jaetaan lauta kuuteentoista 2×2-osaan. Kuhunkin osaan voi laittaa enintään yhden kuninkaan. Toisaalta laittamalla kuninkaat samaan kulmaan kussakin osassa laudalle voidaan asettaa 16 kuningasta.

9. *[Liikaa rahaa]* Pudotamme sattumanvaraisesti 51 pisteen kokoista kolikkoa neliöön, jonka sivu on 1 metri. Osoita, että on aina mahdollista peittää ainakin kolme kolikkoa neliönmuotoisella paperinpalalla, jonka koko on 20cm $\times$ 20cm!

Ratkaisu. Peitetään koko neliö erillisillä paperinpaloilla, joita kuluu $5 \times 5 = 25$. Jos kunkin palan alalla on enintään kaksi kolikkoa, kolikoita on enintään 50.

10. Mikä on pienin mahdollinen määrä 'kulmia' (ks. kuvaa), jotka voidaan leikata 8×8-ruudukosta siten, että ei ole mahdollista leikata yhtään uutta kulmaa kyseisestä ruudukosta?



Ratkaisu. Jaetaan ruudukko kuuteentoista 2×2-osaan. Kustakin osasta on leikattava vähintään kaksi ruutua, muuten siitä voi leikata uuden kulman. Siten kulmien yhteinen pinta-ala on vähintään 32, mihin tarvitaan 11 kulmaa. Toisaalta tämä määrä kulmia voidaan leikata kuvan osoittamalla tavalla.

	A	A			C	C	
	A		B	B		C	
	D	D	B		E	E	
	D			F		E	
	G	G	F	F	H	H	
	G			J		H	
	I	I	J	J	K	K	
	I					K	

	♗	♗	♗	♗	♗	♗	
♗	♗	♗	♗	♗	♗	♗	♗

11. Mikä on suurin mahdollinen määrä lähettejä, joita voi asettaa shakkilaudalle siten, että mitkään kaksi eivät uhkaa toisiaan (oletamme tässä, että samanväriset lähetit uhkaavat toisiaan)?

Ratkaisu. Shakkilaudalla on 15 koillis–lounaissuuntaista vaihtelevan mittaista diagonaalia, joista mihinkään ei voi laittaa enempää kuin yhden lähetin. Näistä kaksi koostuvat kumpikin vain yhdestä ruudusta, jotka osuvat vastakkaisensuuntaiselle diagonaalille, joten ylärajaksi saadaan 14. Toisaalta 14 lähettiä voidaan asettaa laudalle esimerkiksi niin, että 8 on alimmalla rivillä ja 6 ylimmällä rivillä. Siten vastaus on 14.

Vaativampia tehtäviä

12. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja, joille $a+b+c+d=1$. Todista, että

$$6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) \geq \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\frac{1}{8}.$$

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että jos määritellään

$$f(x) = 6x^3 - x^2,$$

niin $f(x) \geq \frac{5x-1}{8}$, kun $0 < x < 1$. Tämä on totta, sillä

$$f(x) - \frac{5x-1}{8} = \frac{1}{8}\left(48x^3 - 8x^2 - 5x + 1\right) = \frac{1}{8}(4x-1)^2(3x+1) \geq 0.$$

Täten

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)=f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq \frac{5(a+b+c+d)-4}{8}=\frac{1}{8}$$

ja väite on todistettu.

Epäyhtälö on todistettavissa myös esimerkiksi aritmeettis–geometrisen ja suuruusjärjestysepäyhtälön yhteiskäytöllä tai potenssikeskiarvojen ja Cauchy–Schwarzin yhdistelmällä.

13. Laske seuraavan lausekkeen arvo:

$$\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots+\frac{100}{1+100^2+100^4}.$$

(Tehtäväkirjeeseen oli pujahtanut tämän sijasta hankalampi lauseke, jolle ei löytynyt nättiä sievennystä.)

Ratkaisu. Laskettava summa

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{n}{1+n^2+n^4}.$$

Muokataan termejä. Tavoitteena on jollain keinolla runnoa summa selvästi teleskooppaavaan muotoon. Havaitaan, että $1+n^2+n^4=(n^6-1)/(n^2-1)$, kun $n\geq 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{100}\frac{n}{1+n^2+n^4}&=\sum_{n=2}^{100}\frac{n^3-n}{n^6-1}=\sum_{n=2}^{100}\frac{n^3-n}{(n^3-1)(n^3+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{100}\left(\frac{n^3-n}{n^3-1}-\frac{n^3-n}{n^3+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{100}\left(\frac{n^3-1+1-n}{n^3-1}-\frac{n^3+1-1-n}{n^3+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{100}\left(1+\left(\frac{1-n}{n^3-1}\right)-\left(1-\frac{1+n}{n^3+1}\right)\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{100}\left(\frac{1+n}{n^3+1}-\frac{n-1}{n^3-1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{100}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{100}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2-2+1}-\frac{1}{101^2-101+1}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{20202}.
\end{aligned}$$

Tulos on siis

$$\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{20202}=\frac{1}{2}-\frac{1}{20202}.$$

14. (Balkanin matematiikkaolympialaiset 2001) Todista, että jos konveksi viisikulmio täyttää seuraavat ehdot, se on säännöllinen viisikulmio:

1. kaikki viisikulmion sisäkulmat ovat yhtäsuuret,
2. kaikki viisikulmion sivujen pituudet ovat rationaalilukuja.

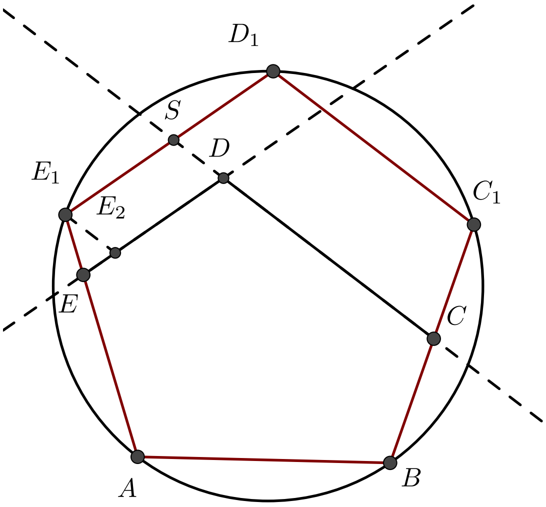
Ratkaisu. Käytetään seuraavia tietoja:

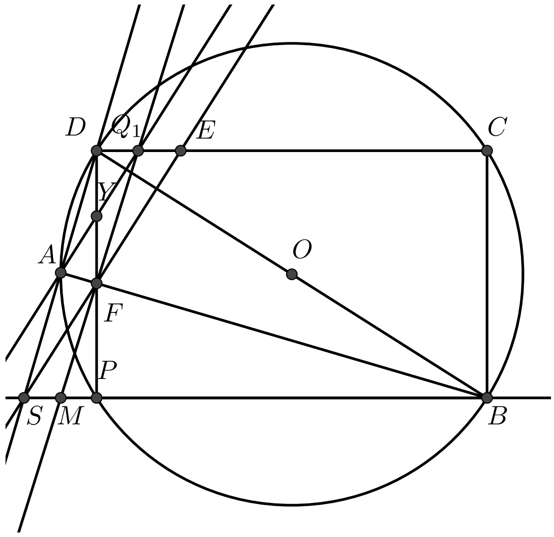
1. konveksi viisikulmio, jonka sisäkulmat ovat yhtäsuuret ja jolla on enemmän kuin kaksi yhtä pitkää sivua, on säännöllinen,
2. $\sin 18^\circ$ on irrationaaliluku,
3. tasakylkisen kolmion ABC, jossa $AB=AC$ ja $\angle A=36^\circ$, kaikki sivut eivät voi olla rationaalisen pituisia.

Olkoon $ABCDE$ tehtävän viisikulmio, jossa kaikki sisäkulmat ovat $108°$ ja sivujen pituudet rationaalilukuja. Voidaan olettaa, että AB ei ole lyhyempi kuin muut sivut, ja lisäksi (jos viisikulmio ei ole säännöllinen), että

$$AB \geq BC, \quad AB > CD, \quad AB > DE, \quad AB > EA.$$

Tarkastellaan säännöllistä viisikulmiota $ABC_1D_1E_1$ (voi olla $C_1 = C$). Olkoon $E_1E_2 \parallel C_1D_1$. Jos $E \neq E_1$, niin $\angle EE_1E_2 = 36°$ ja tasasivuisen kolmion E_1EE_2 sivut ovat rationaalilukuja, sillä $E_1E_2 = E_1E = AB - AE \in \mathbb{Q}$ ja $EE_2 = DE - DE_2 = DE - SE_1 = DE - BC \in \mathbb{Q}$. Tämä on ristiriita, joten $E = E_1$, $C = C_1$ ja $D = D_1$.





15. Olkoon $PBCD$ suorakulmio ja DP sen ympäripiirretyn ympyrän kaari, joka ei sisällä suorakulmion muita kärkipisteitä, ja olkoon A tämän kaaren piste. Piirretään A:n kautta suora, joka on yhdensuuntainen sivun DP kanssa; olkoon tämän suoran ja suoran BP leikkauspiste Z. Olkoon F suorien AB ja DP leikkauspiste ja Q suorien ZF ja DC leikkauspiste. Osoita, että suorat AQ ja BD ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Ratkaisu. Ratkaistaan yhtäpitävä tehtävä: Olkoon $PBCD$ suorakulmio, jonka kärjet ovat O-keskisellä ympyrällä. Olkoon DP ympyrän kaari, joka ei sisällä suorakulmion muita kärkipisteitä, ja olkoon A tämän kaaren piste. Olkoon Q_1 sivulla DC sellainen piste, että $AQ_1 \perp DB$. Olkoon F suorien AB ja DP leikkauspiste ja M suorien Q_1F ja BP leikkauspiste. Osoita, että suorat AM ja DP ovat yhdensuuntaiset.

Jos tämä tehtävä saadaan ratkaistuksi, on $M = Z$ ja $Q_1 = Q$, mistä alkuperäisen tehtävän todistus seuraa.

Piirretään suoralle BD pisteen F kautta normaali, joka leikkaa DC:n pisteessä E ja BP:n pisteessä S. Silloin $SE \parallel AQ_1$. Olkoon $Y = DF \cap AQ_1$. Kolmiot FMS ja FEQ_1 ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{MF}{FQ_1} = \frac{SF}{FE} = \frac{AY}{YQ_1}.$$

Siten $AM \parallel YF \parallel DP$.

16. Polynomin $ax^3 + bx^2 + cx + d$ kertoimet ovat kokonaislukuja, ad on pariton ja bc on parillinen. Osoita, että ainakin yksi polynomin nollakohta on irrationaalinen.

Ratkaisu. Olkoot $x_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 1, 2, 3)$ polynomin juuret. Silloin

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \implies (ax)^3 + b(ax)^2 + ac(ax) + a^2d = 0.$$

Asettamalla $y = ax$ saadaan

$$y^3 + by^2 + acy + a^2d = 0.$$

Koska $y_i = ax_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ovat tämän yhtälön rationaalijuuria, ne ovat kokonaislukuja. Koska ne jakavat luvun a^2d, niiden täytyy olla parittomia. Koska $y_1 + y_2 + y_3 = -b$ ja $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = ac$, lukujen b ja ac täytyy olla parittomia, jolloin b ja c ovat parittomia, mikä on ristiriidassa tehtävän oletuksen kanssa.

17. Olkoon $\frac{3}{4} < a < 1$. Osoita, että yhtälöllä

$$x^3(x+1) = (x+a)(2x+a)$$

on neljä eri reaalilukuratkaisua. Määritä nämä.

Ratkaisu. Tarkastellaan annettua yhtälöä a:n toisen asteen yhtälönä:

$$a^2 + 3xa + 2x^2 - x^3 - x^4 = 0.$$

Yhtälön diskriminantti on $9x^2 - 8x^2 + 4x^3 + 4x^4 = (x + 2x^2)^2$. Siten $a = \dfrac{-3x \pm (x+2x^2)}{2}$. Ensimmäisestä vaihtoehdosta $a = -x + x^2$ saadaan toisen asteen yhtälö $x^2 - x - a = 0$, jonka ratkaisut ovat

$$x = \frac{(1 \pm \sqrt{1+4a})}{2}.$$

Toisesta vaihtoehdosta $a = -2x - x^2$ saamme toisen asteen yhtälön $x^2 + 2x + a = 0$, jonka ratkaisut ovat $-1 \pm \sqrt{1-a}$. Epäyhtälöistä

$$-1 - \sqrt{1-a} < -1 + \sqrt{1-a} < \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

seuraa, että nämä neljä ratkaisua ovat eri lukuja. Tosiaan,

$$-1 + \sqrt{1-a} < \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}$$

sievenee muotoon $2\sqrt{1-a} < 3 - \sqrt{1+4a}$, joka on ekvivalentti epäyhtälön $6\sqrt{1+4a} < 6 + 8a$ kanssa ja edelleen ehdon $3a < 4a^2$ kanssa, joka puolestaan seuraa tehtävän ehdosta helposti.

18. Määritä kaikki kahden positiivisen kokonaisluvun funktiot f, joille

$$f(x,x) = x, \quad f(x,y) = f(y,x) \quad \text{ja} \quad (x+y)f(x,y) = yf(x,x+y).$$

Ratkaisu. Väitämme, että $f(x,y) = \mathrm{pyj}(x,y)$, pienin yhteinen jaettava luvuista x ja y. On selvää, että $\mathrm{pyj}(x,x) = x$ ja $\mathrm{pyj}(x,y) = \mathrm{pyj}(y,x)$. Huomaa, että $\mathrm{pyj}(x,y) = \dfrac{xy}{\mathrm{syt}(x,y)}$ ja $\mathrm{syt}(x,y) = \mathrm{syt}(x,x+y)$, missä $\mathrm{syt}(u,v)$ on lukujen u ja v suurin yhteinen tekijä. Tällöin

$$(x+y)\cdot \mathrm{pyj}(x,y) = (x+y)\cdot \frac{xy}{\mathrm{syt}(x,y)} = y \cdot \frac{x(x+y)}{\mathrm{syt}(x,x+y)} = y \cdot \mathrm{pyj}(x,x+y).$$

Nyt todistamme, että on olemassa vain yksi funktio, joka toteuttaa tehtävän ehdot. Tätä varten teemme vastaoletuksen, että on olemasa funktio $g(x,y)$, joka myös toteuttaa tehtävän ehdot. Olkoon S niiden positiivisten kokonaislukuparien joukko (x,y), joille pätee $f(x,y) \neq g(x,y)$, ja olkoon (m,n) näistä sellainen pari, jossa summa $m+n$ on pienin mahdollinen. On selvää, että $m \neq n$, sillä muutoin

$$f(m,n) = f(m,m) = m = g(m,m) = g(m,n).$$

Symmetrian vuoksi ($f(x,y) = f(y,x)$) voimme olettaa, että $n - m > 0$. Huomaa, että

$$nf(m,n-m) = [m + (n-m)]f(m,n-m) = (n-m)f(m,m+(n-m)) = (n-m)f(m,n)$$

eli

$$f(m,n-m) = \frac{n-m}{n}\cdot f(m,n).$$

Samoin

$$g(m,n-m) = \frac{n-m}{n}\cdot g(m,n).$$

Koska $f(m,n) \neq g(m,n)$, niin $f(m,n-m) \neq g(m,n-m)$. Siten $(m,n-m) \in S$. Mutta $(m,n-m)$:n summa $m + (n-m) = n$ on pienempi, ristiriita. Siten meidän oletuksemme on väärä ja $f(x,y) = \mathrm{pyj}(x,y)$ on ainoa ratkaisu.

19. Määritä rationaalilukukolmikko (a,b,c), jolle pätee

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Ratkaisu. Olkoon $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ ja $y = \sqrt[3]{2}$. Tällöin $y^3 = 2$ ja $x = \sqrt[3]{y-1}$. Huomaa, että

$$1 = y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1),$$

ja

$$y^2+y+1 = \frac{3y^2+3y+3}{3} = \frac{y^3+3y^2+3y+1}{3} = \frac{(y+1)^3}{3},$$

mistä seuraa, että

$$x^3 = y-1 = \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{3}{(y+1)^3}$$

eli

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y+1}. \tag{1}$$

Toisaalta

$$3 = y^3+1 = (y+1)(y^2-y+1),$$

mistä seuraa, että

$$\frac{1}{y+1} = \frac{y^2-y+1}{3}. \tag{2}$$

Yhdistämällä yhtälöt (1) ja (2) saamme

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1\right).$$

Tästä saamme halutun ratkaisun

$$(a,b,c) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right).$$

20. Luvut x, y, z ja w toteuttavat yhtälöt

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2^2-1^2} + \frac{y^2}{2^2-3^2} + \frac{z^2}{2^2-5^2} + \frac{w^2}{2^2-7^2} &= 1,\\
\frac{x^2}{4^2-1^2} + \frac{y^2}{4^2-3^2} + \frac{z^2}{4^2-5^2} + \frac{w^2}{4^2-7^2} &= 1,\\
\frac{x^2}{6^2-1^2} + \frac{y^2}{6^2-3^2} + \frac{z^2}{6^2-5^2} + \frac{w^2}{6^2-7^2} &= 1,\\
\frac{x^2}{8^2-1^2} + \frac{y^2}{8^2-3^2} + \frac{z^2}{8^2-5^2} + \frac{w^2}{8^2-7^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Määritä $x^2+y^2+z^2+w^2$.

Ratkaisu. Väite, että annetut yhtälöt toteutuvat luvuilla x^2, y^2, z^2 ja w^2 on ekvivalentti seuraavan väitteen kanssa: Yhtälö

$$\frac{x^2}{t-1^2} + \frac{y^2}{t-3^2} + \frac{z^2}{t-5^2} + \frac{w^2}{t-7^2} = 1$$

toteutuu luvuilla $t = 4, 16, 36$ ja 64. Kertomalla nimittäjät pois polynomi muuttuu muotoon (ehdolla $t \neq 1, 9, 25, 49$)

$$P(t) = 0,$$

missä

$$\begin{aligned} P(t) = (t-1)(t-9)(t-25)(t-49) \\ - x^2(t-9(t-25)(t-49) - y^2(t-1)(t-25)(t-49) \\ - z^2(t-1)(t-9)(t-49) - w^2(t-1)(t-9)(t-25). \end{aligned}$$

Koska $\deg P(t) = 4$, on yhtälöllä $P(t) = 0$ tasan neljä nollakohtaa $t = 4, 16, 36$ ja 64, eli

$$P(t) = (t-4)(t-16)(t-36)(t-64).$$

Vertaamalla termin t^3 kertoimia näissä kahdessa $P(t)$:n esitysmuodossa saamme

$$1 + 9 + 25 + 49 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4 + 16 + 36 + 64,$$

mistä seuraa, että

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 36.$$

21. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y.$$

Ratkaisu. Olkoon $f(0) = a$. Sijoittamalla $x = 0$ tehtävän yhtälöön saamme

$$f(f(y)) = a^2 + y$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$. Koska luvut $a^2 + y$ käyvät läpi kaikki reaaliluvut, kun y käy kaikki reaaliluvut läpi, pitää funktion f olla surjektiivinen. Siten on olemassa $b \in \mathbb{R}$ siten, että $f(b) = 0$. Sijoittamalla $x = b$ tehtävän yhtälöön saamme

$$f(f(y)) = f(bf(b) + f(y)) = (f(b))^2 + y = y$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$. Tästä seuraa, että kaikille $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f(x))^2 + y &= f(xf(x) + f(y)) \\ &= f[f(f(x))f(x) + f(y)] = f[f(x)f(f(x)) + y] \\ &= f(f(x))^2 + y = x^2 + y \end{aligned}$$

eli

$$(f(x))^2 = x^2. \tag{3}$$

On selvää, että $f(x) = x$ toteuttaa tehtävän ehdot. Oletetaan, että $f(x) \neq x$. Tällöin on olemassa reaaliluku c ($c \neq 0$) siten, että $f(c) = -c$. Sijoittamalla $x = cf(c) + f(y)$ ehtoon (3) saamme

$$[f(cf(c) + f(y))]^2 = [cf(c) + f(y)]^2 = [-c^2 + f(y)]^2$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$, ja sijoittamalla $x = c$ tehtävän yhtälöön saamme

$$f(cf(c) + f(y)) = (f(c))^2 + y = c^2 + y$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$. Huomaa, että $(f(y))^2 = y^2$. Näistä seuraa, että

$$[-c^2 + f(y)]^2 = (c^2 + y)^2,$$

mistä saamme

$$f(y) = -y$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$, funktio, joka toteuttaa tehtävän ehdot. Siten saamme kaikki ratkaisut, $f(x) = x$ ja $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.