

## TRÄNINGSUPPGIFTER FÖR ÅRSSKIFTET 2019–2020

Kom ihåg att det viktigaste är att motivera dina svar och skriva alla mellansteg. Att enbart skriva svaret räcker alltså inte, utan mycket viktigare än att få det rätta svaret är att visa hur du kommit fram till det. Skicka lösningarna per post senast i mitten av januari till adressen

Akseli Jussinmäki  
Tavastvägen 94 B 45  
00550 Helsingfors

eller via e-post till adressen

akseliju@kase.fi.

Lycka till och gott nytt år!

1. Om  $x + 2y = 84 = y + 2x$ , vad är  $x + y$ ?
2. Två olika tal har valts slumpmässigt från mängden  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Med vilken sannolikhet är deras summa större än deras produkt?
3. Om  $a = 2^{2011} + 2^{-2011}$  och  $b = 2^{2011} - 2^{-2011}$ , vad är  $a^2 - b^2$ ?
4. Bevisa att  $4^{2n} - 1$  är delbart med 15 för alla positiva heltal  $n$ .
5. Bevisa att för alla reella tal  $x$  och  $y$  gäller

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

6. Hur många tal mindre än 999 har siffran 1 då det skrivs i bas 10?
7. Vad är talet  $x$  om

$$4^{20} + 4^{20} = 2^x?$$

8. Två likbenta trianglar har spetsvinklarna  $30^\circ$  och  $60^\circ$ . Sidorna på motsatt sida av spetsvinklarna har längden 1. Bestäm ytornas proportioner.
9. Vilken är talets  $2^{2011} + 3^{2011}$  sista siffra?

10. a) Räkna

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100.$$

- b) Räkna

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199.$$

11. Förenkla

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{99}\right)\left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

12. Bestäm talen  $a$ ,  $b$  och  $c$ , då vi vet att

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \quad \text{ja} \quad abc = 1620.$$

13. Låt  $r$  vara ett reellt tal. Vilka av följande tal är i varje fall större än  $r$ ?

$$r + 1, \quad 2r, \quad r^{100} \quad \text{ja} \quad r^2 + 1.$$

14. Två hörnbitar på motsatta sidor har avlägsnats från ett vanligt  $8 \times 8$ -schackbräde. Bevisa att schackbrädet inte kan täckas med  $1 \times 2$ -dominobrickor.

15. åtta studeranden sitter runt ett runt bord. Varje studerandes ålder är medeltalet av åldern av de två studerandena bredvid henne. Bevisa att studerandena har alla samma ålder.