Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, tammikuu 2018

Ratkaisuja toivotaan seuraavaan valmennusviikonloppuun 23.2. mennessä henkilökohtaisesti viikonloppuna ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku.

Palautuspäivämääristä on usein jonkin verran joustettu, mutta tällä kertaa EGMO-joukkueen valinta täytyy tehdä jo seuraavan valmennusviikonlopun aikana. Siksi tässä tapauksessa aikaraja perjantai 23.2. on ehdoton (tasavertaisuussyistä myös niille, jotka eivät ole kelpoisia osallistumaan EGMO-kilpailuun).

Helpompia tehtäviä

1. Kolmion ABC ulkopuolelle piirretään neliö, jonka sivuista yksi on jana AB. Lisäksi piirretään toinen neliö, jonka sivuista yksi on jana BC. Osoita, että näiden neliöiden keskipisteet ja janan CA keskipiste muodostavat tasasivuisen suorakulmaisen kolmion.

2. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

3. Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste ja piste E kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapiste. Olkoon kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O. Osoita, että $OC \perp DE$.

4. Suorakulmainen lattia on määrä laatoittaa laatoilla, joiden muodot ovat 2×2 ja 1×4. Laattoja on tilattu sellaiset määrät, että laatoitus on mahdollista suorittaa. Yksi laatoista meni rikki, mutta saatavilla on ylimääräinen laatta toista muotoa. Osoita, että lattian laatoitus ei onnistu näillä laatoilla.

5. Osoita, että kuuden henkilön joukossa on joko kolme henkilöä, jotka tuntevat kaikki toisensa, tai kolme henkilöä, joista ketkään kaksi eivät tunne toisiaan.

6. Olkoot $1, 4, \ldots$ ja $9, 16, \ldots$ kaksi aritmeettista jonoa. Muodostetaan joukko S yhdisteenä kummankin jonon 2018 ensimmäisestä alkiosta. Montako alkiota on joukossa S?

(Aritmeettisessa jonossa peräkkäisten lukujen erotus on vakio, ts. aritmeettinen jono on muotoa $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$.)

7. On annettuna kuuden positiivisen kokonaisluvun aidosti kasvava jono, jossa jokainen luku toisesta alkaen on edellisen luvun monikerta ja jonka kaikkien lukujen summa on 79. Mikä on jonon suurin luku?

8. Konvehtirasiassa on 36 paikkaa ja konvehteja on 10 erilaista. Kuinka monta erilaista rasiaa voidaan tehdä, kun halutaan että jokaisessa rasiassa on ainakin yksi konvehti kutakin laatua? Konvehtien järjestyksellä rasiassa ei ole väliä, vain kunkin konvehtilaadun lukumäärällä.

Vihje: tätä tehtävää varten kannattaa tutustua esim. Wikipedian avulla binomikertoimiin, jos ne eivät ole vielä tuttuja. Jos kysyttäisiin, monellako tavalla 36 eri konvehtilaadusta voidaan valita 10, vastaus olisi binomikerroin $\binom{36}{10}$.

9. Osoita, että jos $2n+1$ ja $3n+1$ ovat neliölukuja, niin $5n+3$ ei ole alkuluku.

(Neliöluku tarkoittaa kokonaisluvun neliötä, alkuluku sellaista kokonaislukua $p > 1$, joka on jaollinen vain p:llä ja 1:llä.)

10. Etsi luvun 7^{9999} kolme viimeistä numeroa. Luku lienee laskettavissa helpostikin moderneilla laskinohjelmilla, mutta esitä tulokselle perustelu joka ei perustu laskimen käyttöön.

Vaikeampia tehtäviä

11. Osoita, että jos p on pariton alkuluku, niin

a) $1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \mod p$.

b) $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 0 \mod p$.

12. Osoita, että $1982 \mid 222\cdots 2$ (1980 kakkosta).

13. Etsi seuraavien 2017 luvun suurin yhteinen tekijä:

$$2017+1, 2017^2+1, 2017^3+1, \ldots, 2017^{2017}+1.$$

14. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $\sigma(n)$ luvun n tekijöiden summa. Osoita, että on olemassa ääretön määrä positiivisia kokonaislukuja n, joille n jakaa luvun $2^{\sigma(n)} - 1$.

15. Olkoon n ja k kaksi positiivista kokonaislukua, joille $1 \leq n \leq k$. Osoita, että jos $d^k + k$ on alkuluku kaikille luvun n positiivisille tekijöille d, niin $n + k$ on alkuluku.

16. Etsi yhtälön $19x^3 - 84y^2 = 1984$ kokonaislukuratkaisut.

17. Etsi kaikki jatkuvat funktiot $f, g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille

$$f(x+y) = g(x) + h(y)$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}$.

18. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) + f(y) = 4y + 1$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

19. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$, joille pätee

$$f(f(m) + f(n)) = m + n$$

kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

20. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille

$$f((x-y)^2) = f^2(x) - 2xf(y) + y^2$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

21. Määritellään $a_0 = a_1 = 3$ ja $a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1}$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että $a_n - 2$ on neliöluku jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$.