

VERRYTTELYTEHTÄVIÄ LUKUTEORIASTA

Alkuluvuksi kutsutaan sellaista lukua, joka ei ole jaollinen millään muulla positiivisella kokonaisluvulla kuin ykkäsellä ja itsellään. Ensimmäiset alkuluvut ovat 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

- (1) Olkoon p alkuluku. Millä alkuluvuilla $p^2 - 1$ on pariton? Entä parillinen?
- (2) Olkoon p alkuluku. Millä alkuluvuilla $p^2 - 1$ on kolmella jaollinen?
- (3) Olkoon p alkuluku. Millä alkuluvuilla $p^2 - 1$ on neljällä jaollinen? Entä kahdeksalla?

Kokonaisluvun a jakojäännös kokonaisluvulla b jaettaessa on sellainen kokonaisluku c , että $0 \leq c < b$ ja luku $a - c$ on jaollinen luvulla b (eli luku $\frac{a-c}{b}$ on kokonaisluku). Tämä on nyt oikeasti ihan sama määritelmä kuin joskus muinoin koulussa laskettaessa, että $\frac{33}{7} = 4$, jää 5.

- (1) Luvun $x = 49871340981230812498176413489712948612948613353936729129123091823$ jakojäännös kymmenellä jaettaessa on kolme. (Miksi?) Mikä on luvun x^2 jakojäännös kymmenellä jaettaessa? Entä luvun x^3 ?
- (2) Tarkastellaan yhä edellisen tehtävän lukua x . Mikä on pienin positiivinen kokonaisluku y , niin että $x - y$ on jaollinen sadalla?

Toisinaan on hyödyllistä tarkastella suuruuksia. Luvusta $\frac{a}{b}$ tiedetään, että luvut a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja. Lisäksi $2,3 < \frac{a}{b} < 2,4$.

- (1) Voiko $\frac{a}{b}$ olla kokonaisluku?
- (2) Voiko $\frac{a^2}{b^2}$ olla kokonaisluku?
- (3) Voiko $\frac{a^3}{b^3}$ olla kokonaisluku?

Perustele miksi ei voi olla tai anna esimerkki, miksi on mahdollista!