Lokakuun 2010 valmenustehtävät, helpommat. Ratkaisuja

1. Todista, että jos $p \geq 5$ on alkuluku, niin $p^2 - 1$ on jaollinen luvulla 24.

Ratkaisu. $24 = 2^3 \cdot 3$. Koska $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, niin $p+1$ ja $p+1$ ovat kaksi peräkkäistä parillista lukua. Toinen luvuista on varmasti jaollinen neljälläkin. Siis $p^2 - 1$ on jaollinen 2^3:lla. Koska p on alkuluku ja $p > 3$, niin p ei ole jaollinen 3:lla. Siis $p = 3k \pm 1$ ja $p^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$. Näin ollen $p^2 - 1 = 3(3k^2 \pm 2k)$ eli $p^2 - 1$ on jaollinen myös kolmella.

2. Oletetaan, että maassa I pelattavassa lotossa on 40 numeroa, joista arvotaan joka viikko kuuden numeron oikea rivi. Oletetaan, että lottoa on alettu järjestää vuoden 1980 alussa, että kuukaudessa on neljä viikkoa. Laske todennäköisyys sille, että viimeistään lokakuussa 2010 on saman kuukauden kahtena eri viikkona saatu sama oikea rivi. Laske myös, se aika, johon mennessä on todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ jossain kuussa saatu kaksi kertaa sama oikea rivi.

Ratkaisu. Erilaisia rivejä on yhtä monta kuin 40-alkioisella joukolla on kuusialkioisia osajoukkoja eli

$$\binom{40}{6} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 70 = 3838380.$$

Todennäköisyys saada oikea rivi on siis

$$p = \frac{1}{3838380} \approx 0{,}00000026.$$

Todennäköisyys, että kuukauden toisen viikon oikea rivi olisi sama kuin ensimmäisen on p; rivit eivät ole samat todennäköisyydellä $1-p$. Jos kahden ensimmäisen viikon rivit ovat eri rivejä, todennäköisyys, että kolmannen viikon rivi olisi sama kuin jompikumpi edellisestä kahdesta on $2p$. Todennäköisyys, että kolmen viikon riveistä mitkään kaksi eivät ole samoja on siis $(1-p)(1-2p)$. Edelleen, jos kolmen viikon aikana ei ole tullut kahta samaa riviä, niin neljännen viikon rivi on sama kuin jokin näistä todennäköisyydellä $3p$. Todennäköisyys, että neljän viikon aikana ei tule kahta samaa riviä on siis $(1-p)(1-2p)(1-3p) = 1 - 6p + 11p^2 - 6p^3$.

Vuoden 1980 alusta vuoden 2010 lokakuuhun on 370 kuukautta. Todennäköisyys, että minään näistä ei ole esiintynyt samaa oikeaa riviä kahdesti on

$$(1 - 6p + 11p^2 - 6p^3)^{370} = 1 - 370 \cdot 6p + \cdots \approx 1 - 370 \cdot 6p$$

ja todennäköisyys, että ainakin kerran tällaista on sattunut on noin

$$370 \cdot 6 \cdot p = \frac{1}{13 \cdot 19 \cdot 7} = \frac{1}{1729} \approx 0{,}00058.$$

[Yhteensattuma: 1729 on ns. Ramanujanin taksinumero; googlettakaa!.] Toiseen kysymykseen vastataksemme voimme vaikka lähteä siitä, että 370 kuukauden jaksossa ei esiinny kuukautta, jona oikea rivi toistuisi, todennäköisyydellä $\frac{1728}{1729}$. n:ssä tällaisessa jaksossa tällaista kuukautta ei esiinny todennäköisyydellä $\left(\frac{1728}{1729}\right)^n$. Luvun n on oltava niin suuri, että $\left(\frac{1728}{1729}\right)^n \leq \frac{1}{2}$. Eksponenttiepäyhtälön ratkaisemiseksi siirrytään logaritmeihin; yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{1728}{1729}\right)}$$

kanssa (on samantekevää, mitä logaritmijärjestelmän kantalukua käytetään). Tarvittavien kuukausien määrä on 370 kertaa yhtälön pienin ratkaisu; tämä luku on noin 443300. Vuosia menee siis noin 36941 ja vuosiluku tulee olemaan noin 38921. – Jos laskut suorittaa esimerkiksi Mathematica-ohjelmistolla, joka laskee (ainakin jokseenkin) tarkoilla arvoilla, päätyy hiukan suurempaan kuukausimäärään 443427 ja vuosilukuun 38932. Aikaa kuluu joka tapauksessa koko lailla paljon.

3. Olkoot $0 \leq x,\ y \leq 9$ kokonaislukuja. Tarkastellaan viisinumeroista lukua, jonka kymmenjärjestelmäesitys on $65x1y$. Onko tämä luku joskus jaollinen luvulla 12? Jos on, niin milloin?

Ratkaisu. Luku on jaollinen 12:lla, jos se on jaollinen sekä neljällä että kolmella. Luku on jaollinen neljällä jos ja vain jos sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen neljällä. Ainoa ykkösellä alkavat kaksinumeroiset neljällä jaolliset luvut ovat 12 ja 16. Ehdon täyttävissä luvuissa on oltava $y = 2$ tai $y = 6$. Luku on jaollinen kolmella jos ja vain jos sen numeroiden summa on jaollinen kolmella. Jos $y = 2$, numeroiden summa on $x + 14$. Tämä luku on jaollinen kolmella, kun $x = 1,\ 4,\ 7$. Jos $y = 6$, numeroiden summa on $18 + x$. Tämä on jaollinen kolmella, kun $x = 0,\ 3,\ 6,\ 9$. Ehdon täyttäviä lukuja ovat siis 65112, 65412, 65712, 65016, 65316, 65616 ja 65916 ja vain ne.

4. Ratkaise yhtälö $\sqrt{19 - x} + \sqrt{97 + x} = 14$.

Ratkaisu. Yhtälö voidaan ratkaista vakiomenetelmin korottamalla se puolittain neliöön, sieventämällä niin, että neliöjuuritermi on yhtälön toisella puolella, korottamalla jälleen neliöön ja ratkaisemalla syntynyt normaali toisen asteen yhtälö. Ratkaisuja tulee siis enintään kaksi. Kaksi ratkaisua löytää kuitenkin ilman suurempia laskemisia, kun huomaa, että $14 = 10+4 = \sqrt{100}+\sqrt{16}$. Jos $x = 3$, niin $19-x = 16$ ja $97+x = 100$ ja jos $x = -81$, niin $19 - x = 100$ ja $97 + x = 16$. Ratkaisut ovat siis $x = 3$ ja $x = -81$.

5. Laske $x^2 + y^2$, kun $x + y = 26$ ja $x^3 + y^3 = 5408$.

Ratkaisu. Huomataan, että $5408 = 8 \cdot 26^2$ ja että $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 26^2 - 2xy$. Toisaalta $26^3 = (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y) = 8\cdot 26^2+3\cdot 26\cdot xy$. Siis $3xy = 26^2-8\cdot 26 = 18 \cdot 26$ ja $xy = 6 \cdot 26$. Siis $x^2 + y^2 = 26^2 - 12 \cdot 26 = 14 \cdot 26 = 364$.

6. Määritä sellaiset kokonaisluvut, joilla luku $\dfrac{n+98}{n+19}$ on kokonaisluku.

Ratkaisu. Luku $k = \dfrac{n+98}{n+19}$ ei voi olla $= 1$. Ratkaistaan n:

$$n = \frac{98 - 19k}{k-1} = \frac{79}{k-1} - 19.$$

n on kokonaisluku silloin ja vain silloin, kun 79 on jaollinen luvulla $k-1$. Koska 79 on alkuluku, on oltava $k - 1 = \pm 1$ tai $k - 1 = \pm 79$. Mahdollisia k:n arvoja ovat siis 0, 2, -78 ja 80. Vastaavat n:n arvot ovat -98, 60, -20 ja -18.

7. Onko olemassa sellaista luonnollista lukua, että luvun $(2+\sqrt{2})^n$ etäisyys lähimmästä kokonaisluvusta on pienempi kuin 0,000001?

Ratkaisu. Tällaisia lukuja on olemassa. Olkoon $a_n = (2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n$. Kehitetään n:nnet potenssit binomikaavan mukaan:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 2^{\frac{n-k}{2}} + \sum_{k=0}^{n} 2^k (-1)^{n-k} 2^{\frac{n-2}{2}}.$$

Summista kumoutuvat vastakkaismerkkisinä kaikki ne termit, joissa $n-k$ on pariton. Silloin kun $n-k$ on parillinen, $2^{\frac{n-k}{2}}$ on kokonaisluku. Jokainen a_n on siis kokonaisluku. Nyt $2-\sqrt{2} < 0{,}6$, joten $(2-\sqrt{2})^5 < 0{,}6^5 = 0{,}07776 < 0{,}1$. Siis $(2\sqrt{2})^{30} < 0{,}1^6 < 0{,}000001$.

8. Osoita, että kaikilla luonnollisilla luvuilla luku $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ on pariton.

Ratkaisu. Samoin kuin edellisen tehtävän ratkaisussa nähdään, että luku $b_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ on parillinen kokonaisluku kaikilla luonnollisilla luvuilla n. [Sama voidaan todistaa induktiolla. Selvästi $b_0 = 2$ ja $b_1 = 4$. Jos $b_{n-1} = 2q$ ja $b_n = 2p$, niin $8p = ((2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3}))((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n) = b_{n+1}+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n = b_{n+1} + b_{n-1} = b_{n+1} + 2q$, sillä $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$. b_{n+1} on siis parillinen kokonaisluku, ja induktioaskel on otettu.] Nyt $1{,}7 < \sqrt{3} < 2$, joten $(2-\sqrt{3})^n \le 1$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n. Lukua $(2+\sqrt{3})^n$ lähinnä pienempi kokonaisluku on siis parillinen luku vähennettynä yhdellä, eli pariton luku.

9. Kutsutaan *kokonaiseksi kolmioksi* sellaista kolmiota, jonka kaikkien sivujen pituudet ovat kokonaislukuja. Etsi kaikki kokonaiset kolmiot, joiden piiri on sama kuin pinta-ala.

Ratkaisu. On luonnollisesti oletettava, että pituus ja ala mitataan toisiaan vastaavin mittayksiköin kuten esimerkiksi metrein ja neliömetrein. Olkoot kolmion sivut kokonaisluvut a, b ja c. Heronin kaavan perusteella lukujen on toteutettava yhtälö

$$\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = 4(a+b+c). \tag{1}$$

Merkitään $-a+b+c = x$, $a-b+c = y$ ja $a+b-c = z$; silloin $a = \dfrac{1}{2}(y+z)$, $b = \dfrac{1}{2}(z+x)$ ja $c = \dfrac{1}{2}(x+y)$ ja $a+b+c = x+y+z$. Jotta a, b ja c olisivat kokonaislukuja, x:n, y:n ja z:n on oltava joko kaikkien parillisia tai kaikkien parittomia. Yhtälö (1) saa nyt muodon

$$xyz = 16(x+y+z). \tag{2}$$

Nähdään, että x, y ja z ovat kaikki parillisia. Olkoon $x = 2p$, $y = 2q$ ja $z = 2r$. Yhtälö (2) saa muodon $pqr = 4(p + q + r)$. Voimme olettaa, että $r \le q \le p$ ja ratkaista

$$p = \frac{4(q + r)}{qr - 4}. \tag{3}$$

(Jos olisi $qr = 4$, olisi $3p + q + r = 0$, mikä on mahdotonta.) Koska $p \ge \frac{1}{2}(q + r)$, on $\frac{4}{qr - 4} \ge \frac{1}{2}$ eli $qr \le 12$. Koska $p > 0$, $qr > 4$. Käydään läpi kaikki kokonaisluvut q, r, $q \ge r$, joille $4 < qr \le 12$ ja joille yhtälöstä (3) laskettu p on kokonaisluku. Kolmikkoja löytyy viisi: $(p, q, r) = (10, 3, 2), (24, 5, 1), (6, 4, 2), (14, 6, 1)$ ja $(9, 8, 1)$. Vastaavat kolmion sivujen pituudet ovat $(a, b, c) = (5, 12, 13), (6, 25, 29), (6, 8, 10), (7, 15, 20)$ ja $(9, 10, 17)$.

10. Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä

$$\sin x = \frac{x}{100}?$$

Ratkaisu. Koska $|\sin x| \le 1$, ratkaisuja voi olla vain välillä $[-100, 100]$. Tarkastellaan ensin positiivisia x:n arvoja. Koska $\sin(2k\pi) = \sin(2k + 1)\pi) = 0$ ja $\sin\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi = 1$, niin käyrä $y = \sin x$ leikkaa suoran $y = \frac{x}{100}$ tasan kahdessa pisteessä välillä $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, (Visuaalisesti ilmeisen havainnon perustelemiseksi pitäisi vielä vedota käyrän $y = \sin x$ ylöspäin kuperuuteen, joka takaa sen, että leikkauspisteitä ei ole enempää.) Välillä $[(2k + 1)\pi, 2(k + 1)\pi]$ $\sin x$ on negatiivinen, eikä leikkauspisteitä ole. Nyt $31\pi < 31 \cdot 3{,}15 = 97{,}65 < 100$ ja $32\pi > 32 \cdot 3{,}14 = 100{,}48 > 100$. Välillä $[0, 100]$ on siis 15 sellaista väliä, $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ joilla kullakin yhtälöllä on kaksi ratkaisua; näitä ratkaisuja on siis 30 kappaletta. Symmetrian vuoksi välillä $[-100, 0]$ on myös 30 ratkaisua. $x = 0$ on kuitenkin laskettu kahdesti, joten yhtälön ratkaisujen määrä on kaikkiaan 59.

11. Osoita, että jos x_1 ja x_2 ovat yhtälön $x^2 - 6x + 1 = 0$ ratkaisut, niin $x_1^n + x_2^n$ on kaikilla luonnollisilla luvuilla a kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla n.

Ratkaisu. Olkoon $a_n = x_1^n + x_2^n$. Silloin $a_0 = 2$. Toisen asteen yhtälön ratkaisujen ominaisuuksien nojalla $x_1 + x_2 = a_1 = 6$ ja $x_1x_2 = 1$. Nyt (vertaa tehtävän 8 ratkaisun hakasulkuosuuteen) $6a_n = (x_1 + x_2)(x_1^n + x_2^n) = a_{n+1} + (x_1x_2)x_2^{n-1} + (x_2x_1)x_1^{n-1} = a_{n+1} + a_{n-1}$. Siis $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$. Koska a_0 ja a_1 ovat kokonaislukuja, nähdään induktiolla, että jokainen a_n on kokonaisluku. Koska $6 \equiv 1 \mod 5$, on $a_{n+1} \equiv a_n - a_{n-1} \mod 5$. Lasketaan jonon (a_n) alkua modulo 5: $a_0 \equiv 2$, $a_1 \equiv 1$, $a_2 \equiv -1$, $a_3 \equiv -2$, $a_4 \equiv -1$, $a_5 \equiv 1$, $a_6 \equiv 2$, $a_7 \equiv 1$. Jono jatkuu peräkkäisistä arvoista 2, 1 samalla tavoin; siinä ei siis esiinny nollaa. Mikään luvuista a_n ei ole viidellä jaollinen.