

Matematiikan olympiavalmennus

Lokakuun 2011 helppo tehtäväsarja

Seuraavat tehtävät on valikoitu kirjan **Pranesachar, Venhatachala, Yogananda:** *Problem primer for the Olympiad* luvusta Number Theory.

1. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku, jonka viimeinen numero kymmenjärjestelmäesityksessä on 7 ja joka viisinkertaistuu, kun tämä numero siirretään ensimmäiseksi.
2. Kaikki kaksinumeroiset kokonaisluvut luvusta 19 lukuun 93 on kirjoitettu peräkkäin numeroksi $N = 19202122 \dots 919293$. Etsi suurin luvun 3 potenssi 3^k , $k \in \mathbb{N}$, joka jakaa luvun N .
3. Olkoot x, y, z ja n positiivisia kokonaislukuja, joille $n > 1$ ja $x^n + y^n = z^n$. Osoita, että $x, y, z > n$.
4. Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 1$. Oletetaan, että $\text{sy}(m, n) = 1$. Osoita, että $\frac{\lg m}{\lg n} \notin \mathbb{Q}$.
5. Olkoot $a, b, x, y \in \mathbb{N}$ lukuja, joille $a, b, x, y > 1$, $\text{sy}(a, b) = 1$ ja $x^a = y^b$. Osoita, että $x = n^b$ ja $y = n^a$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
6. Etsi kaikki nelinumeroiset kokonaisluvut n , joilla on seuraavat omituisuudet: 1) n on kokonaisluvun neliö, 2) luvun n kaksi ensimmäistä numeroa ovat samat ja 3) luvun n kaksi viimeistä numeroa ovat samat.
7. Kun a, b ja c ovat kokonaislukuja, osoita, että $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$.
8. Määritä luvun $\binom{2000}{1000}$ suurin kolminumeroinen alkutekijä.
9. Todista, että kolmen peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo ei voi olla neliö.

Vastaukset mieluiten 3.12. mennessä osoitteeseen

Kerkko Luosto
Koroistentie 4d A10
00280 Helsinki