

Projektiivisen geometrian alkeita

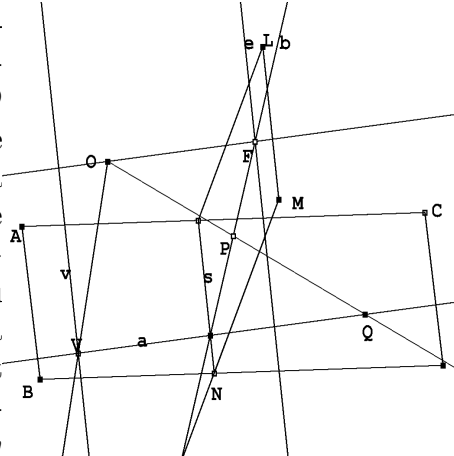
Jotkin kilpailutehtävät saattavat ratketa helpoimmin menetelmillä, jotka kuuluvat ns. *projektiivisen geometrian* alaan. Tässä esityksessä esitellään lyhyesti projektiivisen geometrian perusteita. Esitys on melko konkreettinen. Se perustuu ”tavalliseen” geometriaan ja sen elementtien intuitiiviseen täydentämiseen ”äärettömän kaukaisilla” elementeillä. Useimmat tehtävät ovat luonteeltaan esitystä täydentäviä harjoitustehtäviä, eivät kilpailutehtäviä.

1 Ideaaliset elementit ja keskusprojektio

Projektiivisen avaruuden alkioina voidaan ajatella olevan ”tavallisia” pisteitä, suoria ja tasoja. Lisäksi jokaisella suoralla on ”tavallisten” pisteiden yksi *ideaalielementti*, ”äärettömän kaukainen piste”. Jokaisella kahdella eri suoralla on tasan yksi yhteinen piste. Tavallisessa mielessä yhdensuuntaiset suorat leikkaavat toisensa ideaalipisteessä. Sen sijaan kahdella tavallisessa mielessä toisensa leikkaavalla suoralla on eri ideaalipisteet. Tason ideaalipisteet muodostavat tason ideaalisuoran. Keskenään yhdensuuntaisilla tasolla on sama ideaalisuora. Kaikki ideaalisuorat muodostavat avaruuden ideaalitason. – Ideaalipistettä merkitään usein äärettömän symbolilla ∞ . Koska ideaalipisteitä on enemmän kuin yksi, merkintä voi olla harhaanjohtava.

Piste ei jaa projektiivista suoraa kahdeksi osaksi; pisteen ”toiselle puolelle” pääsee kiertämällä ideaalipisteen kautta. Suora ei myöskään jaa projektiivista tasoa kahteen osaan: suoran a toiselta puolelta toiselle voi kiertää ideaalisuoran kautta pitkin sellaista suoraa b , joka leikkaa a :n muualla kuin ideaalipisteessä.

Ideaalielementtien olemusta selventää *keskusprojektion* tarkastelu. Olkoon O avaruuden piste. Projisoidaan tason ABC pisteet tasolle LMN . Pisteen Q projektio on suoran OQ ja tason LMN leikkauspiste P . Suora a tulee projisoitumaan O :n ja a :n kautta kulkevan tason ja tason LMN leikkaussuoraksi b . Se a :n piste V , jolle $OV \parallel LMN$, projisoituu tason suoran b ideaalipisteeksi. Suoran a ideaalipiste projisoituu sille b :n pisteelle F , jolle $OF \parallel a$. Kaikkien a :n kanssa yhdensuuntaisten suorien ideaalipisteet projisoituvat myös pisteelle F . Pisteen V kautta kulkevan, tason ABC ja LMN leikkaussuoran suuntaisen suoran v pisteet kuvautuvat kukin jollekin tason LMN ideaalisuoran pisteelle. Yksikäsitteinen vastaavuus suoran



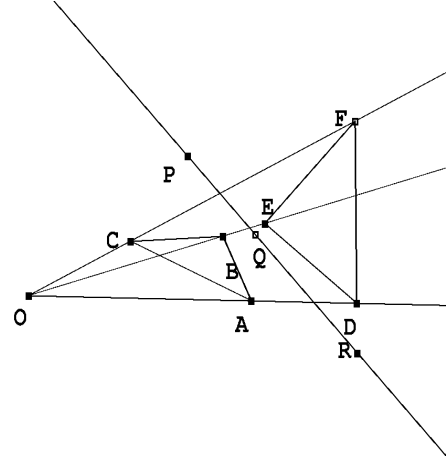
v ja LMN :n ideaalisuoran pisteiden välillä perustelee sen, että tason ideaalielementti on juuri suora eikä esimerkiksi piste. Vastaavasti tason ABC ideaalisuoran pisteet projisioituvat F :n kautta kulkevalle s :n suuntaiselle suoralle e .

Myös ideaalipistettä voidaan pitää projektiokeskuksena. Koska kaikki ideaalipisteen kautta kulkevat suorat ovat yhdensuuntaisia, keskusprojektio, jossa projektiokeskus on ideaalipiste, on sama kuin yhdensuuntaisprojektio.

Klassinen esimerkki ”projektiivisestä todistuksesta” on *Desarguesin lause*. Lauseen todistus voidaan rakentaa Menelaoksen lauseen pohjalle, mutta seuraava todistus on huomattavasti yksinkertaisempi. Lisäksi lauseen tekstissä mainitut leikkauspisteet voivat olla myös ideaalipisteitä.

Lause 1. Olkoot ABC ja DEF kolmioita. Suorat AD , BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä O silloin ja vain silloin, kun suorien AB ja DE leikkauspiste P , suorien BC ja EF leikkauspiste Q ja suorien CA ja FD leikkauspiste R ovat samalla suoralla.

Todistus. Oletetaan, että suorat AD , BE ja CF leikkaavat pisteessä O . Tulkitaan kuvio triedrin $OABC'$ keskusprojektioksi tasolle OAB . Valitaan siis tasoon OAB kuulumaton suora OC' ja sellainen projektio-piste, että C' projisoituu pisteeksi C . Tältä suoralta löytyy piste F' , joka projisoituu pisteeksi F . Janojen $C'A$, $C'B$, $F'E$ ja $F'D$ projektiot tasolle OAB ovat janat CA , CB , FE ja FD . Suorat $C'B$ ja $F'E$ ovat samassa tasossa (tasossa OBC'). Ne siis leikkaavat toisensa pisteessä Q' . Mutta $C'B$ on tasossa ABC' ja $F'E$ on tasossa EDF' . Piste Q' on siis näiden tasojen leikkaussuoralla ℓ . Samalla perusteella suorien $C'A$ ja $F'D$ leikkauspiste R' on suoralla ℓ ($C'A$ ja $F'D$ ovat molemmat tasossa OAC' ; $C'A$ on tasossa ABC' ja



$F'D$ on tasossa EDF'). Mutta AB on tasossa ABC' ja DE on tasossa EDF' , joten suorien AB ja DE leikkauspiste P on myös tasojen leikkaussuoralla ℓ . Mutta suora $\ell = PQ'R'$ projisoituu tason OAB suoraksi ja pisteet Q' ja R' projisoituvat BC :n ja EF :n leikkauspisteiksi Q ja AC :n ja DF :n leikkauspisteeksi R . Tästä seuraa, että P , Q ja R ovat samalla suoralla.

Lauseen käänteisen puolen todistus on tavanomaisen epäsuora. Jos P , Q ja R ovat samalla suoralla a , mutta CF ei kulje suorien AD ja BE leikkauspisteen O kautta, niin OC leikkaa (esimerkiksi) janat FD pisteessä F' . Sovelletaan lauseen jo todistettua alkuosaa kolmioihin ABC ja DEF' . AC :n ja DF' :n eli DF :n leikkauspiste R , AB :n ja DE :n leikkauspiste P ja BC :n ja EF' :n leikkauspiste Q' ovat samalla suoralla. Tämä suora on a . Koska BC :llä ja a :lla on vain yksi yhteinen piste Q , on oltava $Q' = Q$. Sekä F että F' ovat QE :n ja DF :n leikkauspisteitä, joten $F = F'$. \square

Tehtävä 1. Paperilla on piste A ja kaksi suoraa, joiden leikkauspiste O on paperin (ja kenties pöydän reunankin) ulkopuolella. Piirrä A :n kautta suora, joka (jatsettuna) kulkee O :n kautta.

2 Kaksoissuhde ja projektiiviset kuvaukset

Tarkastellaan neljän samalla suoralla olevan eri pisteen A , B , C ja D kaksoissuhdetta

$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Tässä suoralle on kiinnitetty suunta, ja jananpituudet on varustettu etumerkein. Jos jokin pisteistä on ideaalinen, määritellään kaksoissuhde niin, että ne janat, joiden päätepisteenä tämä ideaalipiste on, jätetään kaavasta pois, ja kaksoissuhteen korvaa pelkkä jakosuhte. Tämä sopii yhteen ”raja-arvoajattelun” kanssa, jonka mukaan ideaalipiste on ”äärettömän kaukana”.

Tehtävä 2. Olkoon $[A, B, C, D] = k$. Osoita, että

$$[B, A, D, C] = [C, D, A, B] = [D, C, B, A] = k$$

.

Tehtävä 3. $[A, B, C, D] = k$. Osoita, että

$$[A, B, D, C] = \frac{1}{k} \quad \text{ja} \quad [A, C, B, D] = 1 - k.$$

Tehtävä 4. Osoita, että $[A, B, C, D] \neq 1$.

Tehtävä 5. Pisteet A, B, C ja D voidaan kirjoittaa jonoon $4!$ eri tavalla. Montako eri arvoa voi olla pisteistä muodostetulla kaksoissuhteella?

Janan jakosuhte ja siis myös neljän pisteen kaksoissuhde säilyy yhdensuuntaisprojektiossa. Se säilyy myös mielivaltaisessa keskeisprojektiossa:

Lause 2. Olkoot A, B, C ja D suoran a pisteitä ja olkoon $O \notin a$. Leikatko suoraa OA, OB, OC ja OD suoran b , $O \notin b$, pisteissä A', B', C' ja D' . Silloin $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.

Todistus. Kiinnitetään suoralle a järjestys. Jos h on kolmioiden OAC, OAD, OBC ja OB yhteinen korkeus, niin kolmion alan laskukaavojen perusteella (kun kulmiin ja janoihin sovelletaan samaa etumerkkisääntöä) on

$$\begin{aligned} AC \cdot h &= OA \cdot OC \cdot \sin(\angle AOC), & AD \cdot h &= OA \cdot OD \cdot \sin(\angle AOD) \\ BC \cdot h &= OB \cdot OC \sin(\angle BOC) & BD \cdot h &= OB \cdot OD \cdot \sin(\angle BOD). \end{aligned}$$

Saadaan

$$[A, B, C, D] = \frac{\sin(\angle AOC) \cdot \sin(\angle BOD)}{\sin(\angle BOC) \cdot \sin(\angle AOD)}. \quad (1)$$

Koska kaksoissuhde riippuu vain O :n kautta kulkevien suorien välisistä kulmista, se on sama kaikille sellaisille pisteistöille, jotka syntyvät, kun jokin suora leikkaa nämä neljä suoraa. \square

Lauseen todistuksessa saatu neljän kulman sineistä koostuva lauseke (1) on saman pisteen O kautta kulkevien neljän suoran OA, OB, OC ja OD muodostaman suorakimpun *kaksoissuhde* $[OA, OB, OC, OD]$. Jos mikä hyvänsä suora leikkaa suorakimpun neljä suoraa, leikkauspisteiden kaksoissuhde on sama kuin suorakimpun kaksoissuhde.

Suoran pisteistöjen (A, B, C, D) ja (A', B', C', D') sanotaan olevan *perspektiivisiä* (pisteen O suhteen), jos jälkimmäisen jonon pisteet ovat edellisen jonon pisteiden projektioita keskusprojektiossa, jonka projektiokeskus on O . Relaatiota merkitään

$$(A, B, C, D) \overline{\overline{}} (A', B', C', D') \quad \text{tai} \quad (A, B, C, D) \overline{\overline{}}_O (A', B', C', D').$$

Pisteistöjen (A, B, C, D) ja (A', B', C', D') sanotaan olevan *projektiivisessä suhteessa* jos niillä on sama kaksoissuhde. Tätä relaatiota merkitään $(A, B, C, D) \overline{\overline{}} (A', B', C', D')$ tai $(A, B, C, D) \overline{\overline{}}_O (A', B', C', D')$. Lauseesta 2 seuraa, että perspektiiviset neliköt ovat projektiivisiä. Käänteinen relaatio ei luonnollisestikaan ole tosi. Mutta jos pisteistöillä on yhteinen alkio, projektiivisuus implikoi perspektiivisyyden. Projektiivisuus on transitiivinen relaatio.

Perspektiivisyys ja projektiivisuus voidaan yhtä hyvin määritellä suorakimpuille. Pisteen O kautta kulkevat suorat a, b, c ja d ja pisteen O' kautta kulkevat suorat a', b', c' ja d' ovat perspektiivisiä, $(a, b, c, d) \overline{\overline{}} (a', b', c', d')$, jos vastinsuorien (a :n ja a' :n jne.) leikkauspisteet A, B, C ja D ovat samalla suoralla. Kimput (a, b, c, d) ja (a', b', c', d') ovat projektiiviset, $(a, b, c, d) \overline{\overline{}} (a', b', c', d')$, jos $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

Lause 3. Olkoot A, B, C ja D saman suoran pisteitä ja A, B', C' ja D' saman suoran pisteitä. Jos $(A, B, C, D) \overline{\overline{}} (A, B', C', D')$, niin $(A, B, C, D) \overline{\overline{}} (A, B', C', D')$.

Todistus. Leikatko BB' ja CC' pisteessä O . Leikatko OD suoran AB' pisteessä D'' . Silloin $(A, B, C, D) \overline{\overline{}} (A, B', C', D'')$. Siis

$$(A, B', C', D') \overline{\overline{}} (A, B, C, D) \overline{\overline{}} (A, B', C', D'').$$

Tämä on mahdollista vain, jos $D' = D''$. \square

Todistetaan edellisen lauseen seurauksena klassinen *Pappuksen lause*.

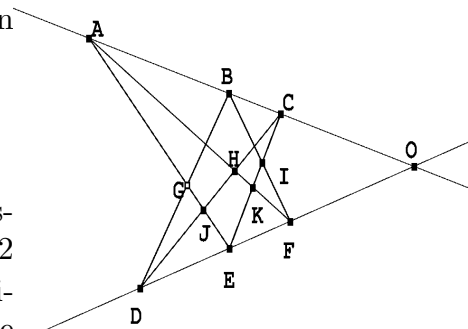
Lause 4. Olkoot A, B ja C suoran l ja D, E ja F suoran m pisteitä. Silloin AE :n ja BD :n leikkauspiste G , AF :n ja CD :n leikkauspiste H ja BF :n ja CE :n leikkauspiste I ovat samalla suoralla.

Todistus. Olkoot vielä J ja K AE :n ja CD :n sekä AF :n ja CE :n leikkauspisteet. Nyt

$$(A, G, J, E) \overline{\overline{}} (A, B, C, O) \overline{\overline{}} (K, I, C, E).$$

Koska perspektiivisyydestä seuraa projektiivinen vastaavuus, on $(A, G, J, E) \overline{\overline{}} (K, I, C, E)$. Lauseen 2 perusteella $(A, G, J, E) \overline{\overline{}} (K, I, C, E)$. Perspektiivikeskus on suorien AK ja CJ leikkauspiste. Tämä piste on H . Siis G ja I ovat samalla H :n kautta kulkevalla suoralla. \square

Tehtävä 6. Nelikulmio $ABCD$ on kupera. Suorat BC ja AD leikkaavat pisteessä J ja suorat AB ja CD leikkaavat pisteessä I . J :n kautta piirretty suora leikkaa CD :n pisteessä



F ja K kautta piirretty suora leikkaa BC :n pisteessä I . Olkoon G suorien JF ja KI leikkauspiste ja H suorien BF ja DI leikkauspiste. Osoita, että A , G ja H ovat samalla suoralla.

Tehtävä 7. Olkoot E ja F neliön $ABCD$ sivujen AB ja CD pisteitä niin, että $EF \parallel AD$. Olkoon G jokin janan EF piste, H AG :n ja BF :n leikkauspiste ja I DH :n ja BC :n leikkauspiste. Osoita, että $GI \parallel AB$.

3 Harmoniset pisteet ja täydellinen nelikulmio

Suoran pistenelikköä (A, B, C, D) sanotaan *harmoniseksi*, jos $[A, B, C, D] = -1$. Vastaavasti neljä saman pisteen kautta kulkevaa suoraa muodostaa harmonisen kimpun, jos niiden kaksoissuhde on -1 .

Jos (A, B, C, D) on harmoninen, niin $AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0$ eli $AC \cdot (BA + AD) + AD \cdot (BA + AC) = 0$. Kun tämä yhtälö jaetaan $AB \cdot AC \cdot AD$:llä, saadaan

$$-\frac{1}{AD} + \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = 0$$

eli

$$AB = \frac{2}{\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}}.$$

AB on siis AC :n ja AD :n harmoninen keskiarvo.

Harmoniset pisteet liittyvät inversioon: olkoon $AB = 2r$ ja O AB :n keskipiste. Edellinen relaatio voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r + OC} + \frac{1}{r + OD} \right).$$

Yksinkertaisten sievennyksien jälkeen saadaan $OC \cdot OD = r^2$. Pisteet C ja D ovat toistensa kuvia inversiossa ympyrässä, jonka halkaisija on AB .

Tehtävä 8. Millainen on harmoninen pisteistö silloin, kun yksi pisteistä on ideaalipiste?

Tehtävä 9. Mitä muita arvoja kuin -1 voi harmonisen pisteistön (A, B, C, D) pisteistä muodostetun jonon kaksoissuhde saada?

Olkoot A , B , C ja D neljä pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla.

Pisteet määrittävät *täydellisen nelikulmion* $ABCD$. Pisteet määrittävät yhteensä $\binom{4}{2} =$

6 suoraa, ja näillä on $\binom{6}{2} = 15$ leikkauspistettä. Jokainen pisteistä A , B , C ja D on kolmen suoraparin leikkauspiste, joten muita leikkauspisteitä on $15 - 4 \cdot 3 = 3$ kappaletta. Ne ovat AD :n ja BC :n leikkauspiste E , AB :n ja CD :n leikkauspiste F ja AC :n ja BD :n leikkauspiste G . Suorat EG , GF ja EF ovat nelikulmion $ABCD$ *lävistäjiä*.

Lause 5. Leikatkoon täydellisen nelikulmion $ABCD$ lävistäjä EG suoran AB pisteessä H ja suoran CD pisteessä I . Silloin (A, B, H, F) ja (D, C, I, F) ovat harmonisia.

Todistus. Tarkastellaan projektiokeskuksia E ja G . Huomataan, että

$$(A, B, H, F) \overline{\overline{}}_E (D, C, I, F) \overline{\overline{}}_G (B, A, H, F).$$

Lauseen 2 perusteella $[A, B, H, F] = [B, A, H, F]$. Mutta

$$[A, B, H, F] = \frac{1}{[B, A, H, F]}.$$

Koska eri pisteiden kaksoissuhde ei voi olla 1, ainoa mahdollisuus on, että $[A, B, H, F] = -1$. Koska $(A, B, H, F) \overline{\overline{}}_E (D, C, I, F)$, (D, C, I, F) on myös harmoninen. \square

Edellistä lausetta kutsutaan joskus *projektiivisen geometrian peruslauseeksi*. Sen perusteella on aina mahdollista – pelkkää viivoitinta käyttäen – konstruoida piste, joka muodostaa annettujen kolmen samalla suoralla olevan pisteen kanssa harmonisen pisteistön. Konstruktio on yksinkertainen. Olkoot A, H ja B ovat sanotut kolme pistettä ja olkoon H A :n ja B :n välissä. Valitaan piste E suoran AB ulkopuolelta. Piirretään AE, BE ja HE . Valitaan AE :ltä jokin piste D . Piirretään BD . Se leikkaa EH :n pisteessä G . Piirretään AG . Se leikkaa BE :n pisteessä C . Piirretään DC . Sen ja AB :n leikkauspiste F on kysytty piste.

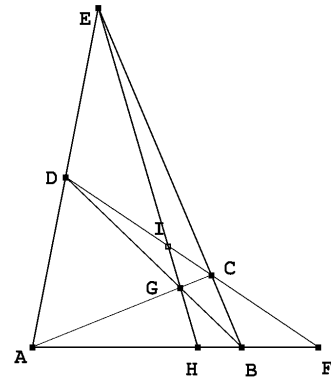
Koska janan päätepisteet, keskipiste ja ideaalipiste muodostavat harmonisen pisteistön, peruslauseita voidaan käyttää vaikkapa keskipisteen määrittämiseen.

Tehtävä 10. Suorita harmonisen pisteistön (A, B, H, F) täydentäminen tilanteessa, jossa tunnetaan A, B ja janan AB ulkopuolinen piste F .

Tehtävä 11. Määritä kahden yhdensuuntaisen eripituisten janan keskipisteet pelkällä viivoittimella.

Tehtävä 12. Tunnetaan jana CD ja sen keskipiste I . Piirrä pelkällä viivoittimella pisteen A kautta CD :n suuntainen suora.

Tehtävä 13. Olkoon kolmion ABC A :sta piirretty korkeusjana AD ja olkoon H jokin AD :n piste. Leikatkoort suorat BH ja CH kolmion sivut AC ja AB pisteissä E ja F . Osoita, että DA on kulman FDE puolittaja.



4 Pascalin lause

Todistetaan vielä kuuluisa Pascalin lause, joka koskee ympyrän sisään piirrettyä kuusikulmiota. Se perustuu olennaisesti seuraavaan havaintoon.

Jos A, B, C, D, E ja F ovat ympyrän kehän pisteitä, niin jos niistä kaksi, esimerkiksi E ja F , yhdistetään neljään muuhun, niin syntyneet suorakimput (EA, EB, EC, ED) ja

(FA, FB, FC, FD) ovat projektiivisia. Tämä seuraa välittömästi suorakimpun kaksois-suhteen määritelmästä suorien välisten kulmien sinien avulla ja kehäkulmalauseesta, jonka mukaan kulmat $\angle AEB$ ja $\angle AFB$ jne. ovat joko yhteneviä tai vieruskulmia.

Lause 6. Olkoot A, B, C, D, E ja F ympyrän pisteitä. Silloin suorien BC ja EF leikkauspiste Q , suorien CD ja FA leikkauspiste P ja suorien DE ja AB leikkauspiste R ovat samalla suoralla.

Todistus. Olkoon K suorien DC ja EF leikkauspiste ja L suorien ED ja AF leikkauspiste. Edellä esitetyn havainnon perusteella $[CE, CF, CD, CB] = [AE, AF, AD, AB]$. Suorakimpun ja kimpun suoria leikkaavan suoran ja kimpun suorien leikkauspisteitä koskevan kaksoissuhdetuloksen perusteella

$$[CE, CF, CD, CB] = [E, F, K, Q]$$

ja

$$[AE, AF, AD, AB] = [E, L, D, R].$$

Siis $(E, F, K, Q) \overline{\cap} (E, L, D, R)$. Lauseen 3 perusteella pisteistöt (E, F, K, Q) ja (E, L, D, R) ovat perspektiiviset. Perspektiivikeskus on suorien FL eli AF ja KD eli CD leikkauspiste, siis piste P . Myös vastinpisteet Q ja R ovat perspektiivikeskuksen kautta kulkevalla suoralla. Siis Q, P ja R ovat samalla suoralla. \square

Pascalin lause voidaan esittää huomattavasti yleisemmin ehdoin. Ympyrän tilalla voi olla mikä hyvänsä kartioleikkaus. Tämän seuraa siitä, että kartioleikkaukset ovat suoran ympyräkartion ja tason leikkauskäyriä, ja edellä todistettu ympyrää koskeva asiantila voidaan siirtää projektiossa, jonka projektiokeskus on kartion kärki, kartion ympyräleikkaukselta tuolle leikkaustasolle.

