Harjoitustehtävät, joulukuu 2013, helpommat

Ratkaisuja

1. *Juna kulkee vakionopeudella tietyn matkan. Jos nopeutta lisättäisiin* 10 km/h, *matka taittuisi* 40 *minuuttia nopeammin. Jos nopeutta vähennettäisiin* 10 km/h, *matkaan kuluisi yksi tunti enemmän. Miten pitkästä matkasta on kysymys?*

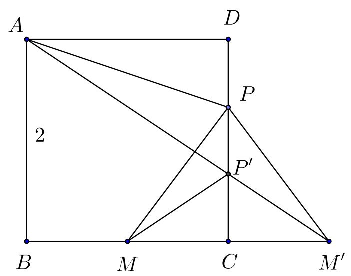
Ratkaisu. Käytetään ajan yksikkönä tuntia, ja matkan kilometriä. Jos matkan pituus on s ja siihen nopeudella v ajettaessa kuluva aika on t, niin $s = vt = (v+10)\left(t - \frac{2}{3}\right) = (v-10)(t+1)$. Kun yhtälöistä eliminoidaan vt, jää yhtälöpari

$$\begin{cases} 10t - \frac{2}{3}v = \frac{20}{3} \\ 10t - v = -10, \end{cases}$$

josta ratkaistaan $v = 50$, $t = 4$. Matka on siis $4 \cdot 50 = 200$ km.

2. *Neliön $ABCD$ sivun pituus on 2. Piste M on sivun BC keskipiste ja piste P on jokin sivun CD piste. Määritä murtoviivan APM lyhin mahdollinen pituus.*

Ratkaisu. Olkoon M' se puolisuoran BC piste, jolle $MC = CM'$. Murtoviivat APM ja APM' ovat yhtä pitkät. Murtoviiva APM' on lyhin mahdollinen, kun se on jana, eli kun $P = P' =$ janojen AM' ja CD leikkauspiste. Koska $AB = 2$ ja $BM' = BC + CM' = 3$, saadaan Pythagoraan lauseen perusteella janan AM' pituudeksi $\sqrt{2^2 + 3^3} = \sqrt{13}$.



3. *Vuoden joululahjaidea BabyMath-yritykseltä on yhdeksänosainen sarja tasan toistensa sisään mahtuvia vuorotellen kuution ja pallon muotoisia avattavia muovikoteloita. Uloin ja sisin kotelo on kuution muotoinen. Mikä on suurimman ja pienimmän kuution särmien pituuksien suhde?*

Ratkaisu. Lelussa on viisi kuutiota ja neljä palloa. Jos kuution särmä on a, sen avaruuslävistäjän pituus on $\sqrt{3} \cdot a$. Kuution ympäri piirretyn pallon halkaisija on sama kuin kuution avaruusläsitäjä ja pallon ympäri piirretyn kuution särmä on sama kuin pallon halkaisija. Jos sisimmän kuution särmä on a, seuraavan kuution särmä on $\sqrt{3} \cdot a$, seuraavan $3a$, seuraavan $3\sqrt{3} \cdot a$ ja uloimman $9a$. Kysytty suhde on siis 9.

4. *Yhtälöllä $x^2 + (a-2)x - (a+3) = 0$ on kaikilla a:n arvoilla kaksi reaalilukuratkaisua x_1 ja x_2. Määritä a niin, että $x_1^2 + x_2^2$ on mahdollisimman pieni.*

Ratkaisu. Toisen asteen yhtälön ratkaisujen yleisten ominaisuuksien perusteella $x_1 + x_2 = -(a-2)$ ja $x_1 x_2 = -(a+3)$. Siis $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-2)^2 + 2(a+3) = a^2 - 2a + 10 = (a-1)^2 + 8 \geq 8$. Lausekkeen pienin arvo 8 saadaan, kun $a = 1$.

5. *Erään kokonaisluvun x toisen potenssin x^2 toiseksi viimeinen numero on 7. Mikä on x^2:n viimeinen numero?*

Ratkaisu. Luku x voidaan kirjoittaa muotoon $x = 10y+z$, missä y ja z ovat kokonaislukuja ja $0 \le z \le 9$. Silloin $x^2 = 100y^2 + 20yz + z^2$. Luvun x^2 toiseksi viimeinen numero on luvun $2yz$ viimeinen numero lisättynä luvun z^2 ensimmäisellä numerolla (ja tarpeen mukaan kymmenellä vähennettynä). $2yz$:n viimeinen numero on 0, 2, 4, 6 tai 8. x^2 toiseksi viimeinen numero voi olla 7 yhteenlaskujen $0+7$, $2+5$, $4+3$, $6+1$ tai $8+9$ tuloksena. z^2 ei kuitenkaan voi alkaa numeroilla 7, 5 tai 9. Ainoat tehtävän tuloksen mahdolliseksi tekevät neliöluvut ovat 16 ja 36. x^2:n viimeinen numero on siis 6.

6. *Osoita, että luku $n!$ ei millään n:n arvolla voi päättyä yhteentoista nollaan.*

Ratkaisu. Luku $n!$ päättyy tasan k:hon nollaan, jos se on jaollinen luvulla $10^k = 2^k5^k$, mutta ei luvulla $10^{k+1} = 2^{k+1}5^{k+1}$. Luvuissa 45!, 46!, 47!, 48! ja 49! on tekijänä 5^{10} (9 viidellä jaollista lukua $5k$ sekä 25, joka tuottaa kaksi viitosta). Luku 50 on jaollinen 5^2:lla, joten 50! päättyy 12 nollaan. Jokainen $n!$, $n \ge 50$, päättyy ainakin 12 nollaan.

7. *Olkoon* $123456789101112\ldots998999$ *luku, jonka saadaan kirjoittamalla* $1, 2, 3, \ldots, 999$ *peräkkäin. Mikä on luvun* 2013. *numero?*

Ratkaisu. Luvussa on kaikkiaan $9 + 2\cdot 90 + 3\cdot 900 = 2889$ numeroa. Koska $2889 - 2013 = 876 = 3\cdot 292$, lopusta on poistettava 292 kolmen numeron sarjaa. Viimeinen jäljelle jäävä kolminumeroinen luku on silloin $999 - 292 = 707$. Luvun 2013. numero on 7.

8. *Määritä luonnollisten lukujen parit (x, y), jotka toteuttavat yhtälön*

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 2013.$$

Ratkaisu. $x^2 - xy + 2x - 3y = -y(x+3) + (x+3)(x-1) + 3 = (x+3)(x-1-y) + 3$. Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $(x+3)(x-1-y) = 2010$. Koska x ja y ovat luonnollisia lukuja, $x+3$ ja $x-1-y$ ovat luvun $2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ tekijöitä ja $x+3$ on tekijöistä suurempi. Mahdollisuudet ovat $x+3 = 2010$ ja $x-1-y = 1$ eli $x = 2007$ ja $y = 2005$; $x+3 = 1005$ ja $x-1-y = 2$ eli $x = 1002$ ja $y = 999$; $x+3 = 670$ ja $x-1-y = 3$ eli $x = 667$ ja $y = 663$; $x+3 = 402$ ja $x-1-y = 5$ eli $x = 399$ ja $y = 393$; $x+3 = 335$ ja $x-1-y = 6$ eli $x = 332$ ja $y = 325$; $x+3 = 201$ ja $x-1-y = 10$ eli $x = 198$ ja $y = 187$; $x+3 = 134$ ja $x-1-y = 15$ eli $x = 131$ ja $y = 115$; $x+3 = 67$ ja $x-1-y = 30$ eli $x = 64$ ja $y = 33$.

9. *Ratkaise (reaalilukujen joukossa) yhtälö*

$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3.$$

Ratkaisu. Osoitetaan, että ratkaisut ovat $x = 2$, $\frac{1}{2}$ ja 1. Merkitään $2^x = t$. Silloin $4^x = t^2$. Kun sovelletaan identiteettiä $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, saadaan yhtälö muotoon

$$\big((t-4) + (t^2-2)\big)\big((t-4)^2 - (t-4)(t^2-2) + (t^2-2)^2\big) = (t^2+t-6)^3.$$

Jos $t^2+t-6 \neq 0$, voidaan supistaa. Jäljelle jäävä yhtälöä $(t-4)^2-(t-4)(t^2-2)+(t^2-2)^2 = (t^2+t-6)^2$ voidaan edelleen muokata muotoon $\big((t-4)+(t^2-2)\big)^2 - 3(t-4)(t^2-2) = (t^2+t-6)^2$ eli $(t-4)(t^2-2) = 0$. Koska $t > 0$, yhtälön ratkaisut ovat $t = 4$ ja $t = \sqrt{2}$ eli $x = 2$ ja $x = \frac{1}{2}$. Yhtälön toteuttava myös ne t:n arvot, joilla $t^2+t-6 = 0$. Koska $t > 0$, vain $t = 2$ eli $x = 1$ on mahdollinen.

10. *Kolmannen asteen polynomin $x^3+2x^2-3x-5 = 0$ nollakohdat ovat a, b ja c. Määritä kolmannen asteen polynomi, jonka nollakohdat ovat $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ ja $\frac{1}{c}$.*

Ratkaisu. Mikään luvuista a, b, c ei ole nolla. Kysytty polynomi on $1+2x-3x^2-5x^3$. Esimerkiksi $1 + 2\frac{1}{a} - 3\frac{1}{a^2} - 5\frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^3}(a^3+2a^2-3a-5) = 0$. (Yleisesti: jos $a \neq 0$ on polynomin $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ nollakohta, niin $a^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{a} + \cdots + a_1\frac{1}{a^{n-1}} + a_0\frac{1}{a^n}\right) = 0$, joten $\frac{1}{a}$ on polynomin $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ nollakohta.)

11. *Positiivisille luvuille p ja q pätee $p + q = 1$. Osoita, että*

$$\frac{25}{2} \le \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2.$$

Ratkaisu. Epäyhtälön oikea puoli on

$$p^2 + 2 + \frac{1}{p^2} + q^2 + 2 + \frac{1}{q^2}.$$

Jos $p = \frac{1}{2} + a$, niin $q = \frac{1}{2} - a$ ja $p^2 + q^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2a^2 \ge \frac{1}{2}$. Vastaavasti

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-a\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}+2a^2}{\left(\frac{1}{4}-a^2\right)^2} \ge \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4^2}} = 8.$$

Siis

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \ge 4 + \frac{1}{2} + 8 = \frac{25}{2}.$$

12. *Määritä kaikki sellaiset viiden peräkkäisen kokonaisluvun jonot, joissa kolmen ensimmäisen luvun neliöitten (= toisten potenssien) summa on sama kuin kahden viimeisen luvun neliöitten summa.*

Ratkaisu. Jos luvuista keskimmäinen on n, niin tehtävän ehto toteutuu, kun

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2.$$

Yhtälö sievenee muotoon $n^2 - 12n = 0$. Ainoat mahdolliset n:t ovat 0 ja 12. Ehdon toteuttavat todellakin jonot -2, -1, 0, 1, 2 ja 10, 11, 12, 13, 14.

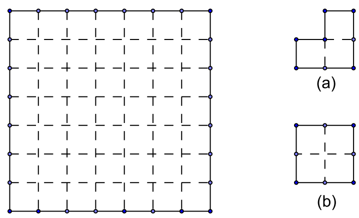
13. *Kuinka monta erilaista (ei keskenään yhtenevää) sellaista suorakulmaista kolmiota on, joissa toinen kateetti on* 2014 *ja toisenkin kateetin sekä hypotenuusan pituudet ovat kokonaislukuja?*

Ratkaisu. Olkoon kolmion hypotenuusa c ja toinen kateetti a. Pythagoraan lauseen nojalla

$$(c+a)(c-a) = c^2 - a^2 = 2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2.$$

Kokonaisluvuista $c + a$ ja $c - a$ ainakin toisen on oltava parillinen, mutta koska $c + a = (c-a)+2a$, luvut ovat molemmat parillisia. Koska $c+a > 2014 > c-a$, parin $(c+a,\ c-a)$ mahdolliset arvot ovat $(2\cdot 19^2\cdot 53^2,\ 2)$, $(2\cdot 19\cdot 53^2,\ 2\cdot 19)$, $(2\cdot 19^2\cdot 53,\ 2\cdot 53)$, $(2\cdot 53^2,\ 2\cdot 19^2)$. Helposti nähdään, että jos $c + a$ ja $c - a$ ovat parillisia kokonaislukuja, niin c ja a ovat kokonaislukuja. Kysyttyjä kolmioita on siis neljä.

14. 7×7 *ruudukko leikataan paloiksi, jotka ovat joko kolmesta ruudusta muodostuvia L:n muotoisia paloja (a) tai neljästä ruudusta muodostuvia neliönmuotoisia paloja (b). Todista, että b-paloja on tasan yksi.*

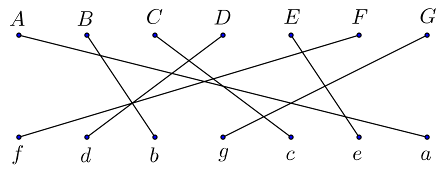


Ratkaisu. Olkoon (a)-paloja x ja (b)-paloja y kappaletta. Koska ruutuja on 49, on oltava $3x + 4y = 49$. Väritetään ruudukon joka toisen vaakarivin joka toinen ruutu mustaksi, alkaen vasemmasta yläkulmasta. Rivejä, joilla on mustia ruutuja, on 4, ja joka rivillä on 4 mustaa ruutua; mustia ruutuja on siis 16. Mikään (a)- tai (b)-tyypin laatta ei peitä mustista ruuduista kuin enintään yhden. Koska kaikki mustat ruudut peittyvät, on $x+y \geq 16$ ja $3x + 3y \geq 48$. Koska $3x + 3y + y = 49$, on $y \leq 1$. Ei voi olla $y = 0$, koska 49 ei ole jaollinen 3:lla. Siis $y = 1$.

15. *Tasossa on kuusi ympyrää, ja yhdenkään keskipiste ei ole toisen ympyrän sisällä. Osoita, että mikään tason piste ei kuulu kaikkiin kuuteen ympyrään.*

Ratkaisu. Oletetaan, että piste A todella kuuluisi jokaisen kuuteen ympyrään. Olkoot O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 näiden ympyröiden keskipisteet. Yhdistetään A kaikkiin keskipisteisiin. Keskipisteiden numerointi voidaan tehdä niin, että janat AO_1, AO_2, $\ldots$, AO_6 seuraavat toisiaan järjestyksessä. Kulmien $\angle O_1AO_2$, $\angle O_2AO_3$, $\ldots$, O_6AO_1 summa on $360°$. Jokin kulmista on silloin $\leq 60°$. Voidaan olettaa, että $\angle O_1AO_2 \leq 60°$. Silloin O_1O_2 ei ole kolmion AO_1O_2 muita sivuja pitempi. Voidaan olettaa, että $AO_1 \geq AO_2$. Nyt AO_1 on enintään O_1-keskisen ympyrän säteen pituinen, Siis myös O_1O_2 on enintään O_1-keskisen ympyrän säteen pituinen, ja O_2 näin ollen kuuluu tähän ympyrään, toisin kuin tehtävässä oletettiin. Ei siis ole mahdollista, että A kuuluisi kaikkiin ympyröihin.

16. *Tanssisalin seinustalla istuu rinnakkain seitsemän herraa A, B, C, D, F ja G ja vastakkaisella seinustalla seitsemän daamia a, b, c, d, e, f ja g jossain järjestyksessä. Kun musiikki alkaa ja herrat kävelevät kumartamaan daameille, niin huomataan, että ainakin kaksi herraa kävelee yhtä pitkän matkan. Käykö aina näin? (Kuviossa on esimerkki, jossa $|Bb| = |Ee|$ ja $|Cc| = |Dd|$.)*



Ratkaisu. Näin todellakin aina käy. Voidaan olettaa, että A kumartaa a:lle, B b:lle jne. Sijoitetaan x-akseli tuolirivien suuntaisesti. Voidaan olettaa, että herrojen koordinaatit A, ..., G ja daamien koordinaatit a, ..., g ovat kokonaisluvut 1, 2, ..., 7 jossain järjestyksessä. Silloin $A+B+\cdots+G = a+b+\cdots+g$ ja siis $(A-a)+(B-b)+\cdots+(G-g) = 0$. Jos kaikki herrat kulkisivat eri matkan, olisivat edellisen summan yhteenlaskettavien itseisarvot 0, 1, ..., 6 jossain järjestyksessä. Summassa olisi silloin kolme paritonta yhteenlaskettavaa, joten se ei voisi olla nolla, joka on parillinen. Siis ainakin jotkin kaksi erotusta ovat itseisarvoltaan yhtä suuret, eli ainakin jotkin kaksi herraa kävelevät yhtä pitkän matkan.