

# Esimerkkejä kilpailumatematiikan lajeista ja periaatteita

Tässä kokoelmassa esitetään näytteitä tyypillisistä kilpailumatematiikan tehtävistä. Matematiikkakilpailujen matematiikka jaetaan tavallisesti neljään pääalueeseen, jotka ovat algebra, geometria, lukuteoria, kombinatoriikka. Seuraavassa on jokaisesta alueesta viisi esimerkkiä. Tehtävien vaikeustaso liikkuu helpon ja keskitasoisen alueilla. Tehtäville esitetään myös ratkaisuehdotuksia. Niin kuin aina, kannattaa miettiä itse vielä toisen ja kolmannen kerran, ennen kuin alkaa tutkia ratkaisuosastoa. Saattaa vaikkapa keksiä parempia ratkaisuja kuin tässä esitetyt! Jos kilpailumatematiikka on sinulle uutta, kannattaa ratkaisuja tällä kertaa katsoa, koska niissä on yritetty hiukan laajemmin esitellä joitain kilpailutehtävien ratkaisemisessa huomioon otettavia asioita.

## Tehtävät

1. (A) Jos reaaliluvulle  $x$  on voimassa  $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$ , niin mitä on  $x^4 + \frac{1}{x^4}$ ?

2. (A) Osoita, että jos  $abc = 1$  ja

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

niin ainakin yksi luvuista  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on 1.

3. (A) Geometrisen jonon neljän peräkkäisen jäsenen summa on 13. Lukujen neliöiden summa on 1261. Määritä luvut.

4. (A) Olkoon  $a$  positiivinen luku ja olkoon  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, jolle pätee

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Osoita, että  $f$  on jaksollinen funktio. [Funktio  $f$  on jaksollinen, jos on olemassa  $b$  siten, että  $f(x+b) = f(x)$  kaikilla  $x$ .]

5. (A) Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$  on

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Osoita vielä, että luvun

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2}}$$

kokonaisosa on  $2m-2$  tai  $2m-1$ .

6. (G) Olkoon  $S$  jokin tason pistejoukko. Sanomme, että  $S$  näkyy pisteestä  $A \in S$ , jos jana  $AX$  on kokonaan joukossa  $S$  kaikilla  $X \in S$ . Osoita, että jos  $S$  näkyy pisteistä  $A$  ja  $B$ , niin se näkyy kaikista janan  $AB$  pisteistä.

7. (G) Kolmion sivujen pituudet ovat 10, 17 ja 21. Määritä kolmion lyhimmän korkeusjanan pituus.

8. (G) Suorakulmaisen kolmion  $ABC$  hypotenuusa on  $AB$ . Pisteet  $M$  ja  $N$  ovat kolmion sivuille  $BC$  ja  $AC$  niin, että  $AM$  ja  $BN$  ovat kolmion kulmanpuolittajia. Kolmion korkeusjana  $CH$  leikkaa janat  $AM$  ja  $BN$  pisteissä  $P$  ja  $Q$ . Osoita, että  $QN$ :n ja  $PM$ :n keskipisteiden kautta kulkeva suora on  $AB$ :n suuntainen.

9. (G) Kolmion  $ABC$  sivun  $BC$  keskipiste on  $M$  ja  $\angle MAC = 15^\circ$ . Määritä kulman  $\angle ABC$  suurin mahdollinen arvo.

10. (G) Ympyrän kehä jaetaan mielivaltaisella tavalla neljäksi kaareksi. Kaarien keskipisteet yhdistetään janoilla. Osoita, että kaksi näistä janoista on toisiaan vastaan kohtisuorassa.

11. (L) Kuinka monella tavalla luku 2014 voidaan kirjoittaa kahden neliöluvun erotuksena?

12. (L) Todista, että neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo ei ole neliöluku.

13. (L) Osoita, että  $2^{n+2}3^n + 5n - 4$  on kaikilla luonnollisilla luvuilla jaollinen 25:llä.

14. (L) Mikä on pienin kokonaisluku  $n > 1$ , jolla neliölukujen  $1^2, 2^2, \dots, n^2$  keskiarvo on neliöluku?

15. (L) Osoita, että jokainen rationaaliluku  $r$ , missä  $0 < r \leq 1$ , voidaan kirjoittaa äärellisen monen eri positiivisen kokonaisluvun käänteislukujen summaksi.

16. (K) Todista yhtälö

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

[Merkintä  $\binom{n}{k}$  tarkoittaa lukua  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  joka on sama kuin  $n$ -alkioisen joukon  $k$ -alkioisten osajoukkojen lukumäärä.]

17. (K) Joukko  $M$  on sellainen joukon  $\{1, 2, \dots, 15\}$  osajoukko, että minkään kolmen  $M$ :n alkion tulo ei ole neliöluku. Määritä  $M$ :n suurin mahdollinen alkioiden lukumäärä.

18. (K) Seitsemäntoista henkilöä käy kirjeenvaihtoa keskenään. Kirjeenvaihto käsittelee kolmea eri aihetta, mutta jokaiset kaksi kirjeenvaihtajaa käsittelevät keskenään vain yhtä aihetta. Osoita, että jotkin kolme näistä 17:stä käsittelevät keskinäisessä kirjeenvaihdossaan samaa aihetta.

**19.** (K) Pelaajat  $A$  ja  $B$  kirjoittavat vuorotellen lukuja  $5 \times 5$ -ruudukkoon.  $A$ , joka aloittaa, kirjoittaa aina luvun 1 ja  $B$  luvun 0. Kun ruudukko on täytetty, lasketaan jokaisen  $3 \times 3$ -osaneliön lukujen summa. Olkoon  $S$  näistä summista suurin. Määritä suurin  $S$ , jonka pelaaja  $A$  pystyy tuottamaan riippumatta siitä, miten  $B$  pelaa.

**20.** (K) Ympyrä on jaettu seitsemään yhtenevään sektoriin. Kukin näistä väritetään joko siniseksi, punaiseksi, keltaiseksi tai vihreäksi. Mitkään kaksi vierekkäistä sektoria eivät saa olla samanvärisiä. Monellako eri tavalla ympyrä voidaan värittää? (Kaksi väritystä, jotka voidaan muuntaa toisikseen kiertämällä ympyrää, ovat samat.)

## Ratkaisuja

**1.** Tehtävän ratkaisulinja näyttäisi olevan ”ratkaise  $x$  kuudennen asteen yhtälöstä  $x^6 - 18x^3 + 1 = 0$  ja sijoita saatu  $x$  lausekkeeseen  $x^4 + x^{-4}$ ”. Helpommin pääsee käyttämällä aika usein esiintyvää temppua. Merkitään

$$u = x + \frac{1}{x}$$

ja käytetään hyväksi oletusta. Saadaan

$$u^3 = x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 3u + 18.$$

Tästä kolmannen asteen yhtälöstä näkee melko helposti, että yksi ratkaisu on  $u = 3$ . (Jos haluaa edetä systemaattisesti, voi etsiä yhtälön mahdollisia kokonaislukuratkaisuja vakiotermin 18 tekijöiden  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 18$  joukosta.) On helppo päätellä (ts. tehdä jakolasku), että  $u^3 - 3u - 18 = (u - 3)(u^2 + 3u + 6)$ . Yhtälöllä  $u^2 + 3u + 6 = 0$  ei ole reaalityyppisiä ratkaisuja, koska sen diskriminantti on  $9 - 24 < 0$ . Tehtävän kannalta ainoa mahdollisuus on siis  $u = 3$ . Nyt päästään helposti eteenpäin: koska

$$9 = u^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

niin

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Edelleen

$$49 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4},$$

joten

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 47.$$

**2.** Poistetaan yhtälössä esiintyvistä luvuista nimittäjät. Koska  $abc = 1$ , vasen puoli voidaan kertoa 1:llä ja oikea puoli  $abc$ :llä. Tämä operaatio antaa tulokseksi  $a+b+c = bc+ca+ab$ . Kummaltakin puolelta voidaan vähentää 1; saadaan  $a+b+c-1 = -abc+bc+ca+ab$ . Kun kaikki termit kerätään samalle puolelle, saadaan  $0 = abc - bc - ca - ab + a + b + c - 1$ . Mutta oikea puoli on sama kuin  $(a-1)(b-1)(c-1)$ , joka voi olla  $= 0$  vain, jos jokin tulon tekijä on 0 eli jokin luvuista  $a, b, c$  on 1.

**3.** Olkoot jonon jäsenet  $a, aq, aq^2$  ja  $aq^3$ . Jonon jäsenten neliöt ovat  $a^2, a^2q^2, a^2q^4$  ja  $a^2q^6$ . Molemmat jonot ovat geometrisia; sovelletaan geometrisen jonon summan kaavaa ( $q \neq 1$ )

$$a + aq + \cdots + aq^k = a \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q},$$

(jonka perustelu on  $S = a + aq + \cdots + aq^k$ ,  $qS = aq + aq^2 + \cdots + aq^{k+1}$ , joista vähentämällä  $(1-q)S = a(1 - q^{k+1})$ .) Siis

$$a \frac{1 - q^4}{1 - q} = 13, \quad \text{ja} \quad a^2 \frac{1 - (q^2)^4}{1 - q^2} = 1261.$$

Jälkimmäisen yhtälön molemmat puolet voidaan jakaa tekijöihin ja vasemmalla puolella voidaan ottaa huomioon ensimmäinen yhtälö:  $1261 = 13 \cdot 97$  ja

$$a^2 \frac{1 - q^8}{1 - q^2} = a \frac{1 - q^4}{1 - q} \cdot a \frac{1 + q^4}{1 + q} = 13a \frac{1 + q^4}{1 + q}.$$

Ensimmäinen yhtälö ja supistettu jälkimmäinen yhtälö muodostavat yhdessä yhtälöparin

$$\begin{cases} a - aq^4 = 13 - 13q \\ a + aq^4 = 97 + 97q. \end{cases}$$

Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan  $2a = 110 + 84q$ . Siis  $a = 110 + 84q$ . Sijoitetaan tämä parin ensimmäiseen yhtälöön. Yhtälöä  $(55 + 2q)(1 - q^4) = 13(1 - q)$  supistetaan  $(1 - q)$ :lla. Poistetaan sulkeet ja jaetaan yhtälö  $q^2$ :lla. Saadaan

$$42q^4 + 97q^3 + 97q^2 + 97q + 42 = 0 \quad \text{ja} \quad 42 \left( q^2 + \frac{1}{q^2} \right) + 97 \left( q + \frac{1}{q} \right) + 97 = 0.$$

Neljannen asteen yhtälön ratkaisemiseksi sovelletaan nyt samaa ideaa kuin tehtävässä 1: otetaan käyttöön uusi tuntematon  $u = q + \frac{1}{q}$ . Silloin

$$u^2 = q^2 + \frac{1}{q^2} + 2.$$

Yhtälömme saa muodon

$$42(u^2 - 2) + 97u + 97 = 0 \quad \text{eli} \quad 42u^2 + 97u + 13 = 0.$$

Koska  $97^2 = 9409$ ,  $4 \cdot 41 \cdot 13 = 2184$  ja  $9409 - 2184 = 7225 = 85^2$ , toisen asteen yhtälön ratkaisukaava antaa suoraan

$$u = \frac{-97 \pm 85}{84}$$

eli  $u = -\frac{1}{7}$  tai  $u = -\frac{13}{6}$ . Koska  $|u| = \left|q + \frac{1}{q}\right| \geq 2$ , vain jälkimmäinen  $u$ :n arvo voi tulla kyseeseen. Toisen asteen yhtälön  $q + \frac{1}{q} = -\frac{13}{6}$  ratkaisut ovat  $q_1 = -\frac{3}{2}$  ja  $q_2 = -\frac{2}{3}$ . Jos  $q = -\frac{3}{2}$ , niin  $a = -8$  ja jonon luvut ovat  $-8, 12, -18, 27$ ; jos  $q = -\frac{2}{3}$ , niin  $a = 27$  ja jonon luvut ovat  $27, -18, 12, -8$ .

4. Tämä tehtävä on tyyppiä *funktionaaliyhtälö*, yhtälö, jossa etsittävä tuntematon ei ole luku vaan funktio – nyt ei kuitenkaan itse funktio ole haussa, vaan sen eräs mahdollinen ominaisuus, nimittäin jaksollisuus. Tällaisessa tehtävässä toimitaan yleensä niin, että oletetaan tuntematon funktio olemassa olevaksi ja etsitään sille sellaisia ominaisuuksia, joiden perusteella funktio tulisi tarkemmin yksilöityä. Tässä tapauksessa funktio  $f$  von jo olemassa, ja voidaan lähteä selvittämään, miten se käyttäytyy, jos sen argumenttia kasvatetaan  $a$ :n sijasta  $a$ :n monikerroilla. Selvintä on lähteä katsomaan, mitä on  $f(x+2a)$ . Nyt havaitaan heti, että tehtävässä annetusta ehdosta on seurauksia:  $f(x) \geq \frac{1}{2}$  ja  $f(x)^2 \leq f(x)$  eli  $f(x) \leq 1$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Siis mielivaltaisella reaalityluvulla pätee

$$\begin{aligned} f(x+2a) &= f((x+a)+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f(x+a)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - f(x)^2} - f(x) + f(x)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f(x)^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x). \end{aligned}$$

Funktio  $f$  on siis jaksollinen ja sen jakso on  $2a$ .

5. Erilaiset epäyhtälötehtävät ovat suosittuja kilpailutehtäviä. Itse asiassa kilpailijoiden oletetaan tuntevan muutamia perusepäyhtälötyyppejä, sillä kilpailutehtävät perustuvat usein niihin. Tämän tehtävän a-kohta ratkeaa kuitenkin algebrallisten lausekkeiden manipuloinnin avulla. Lausekkeita, joissa esiintyy neliöjuurien summia tai erotuksia voi usein kehittää identiteetin  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  avulla. Niin tässäkin:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

koska  $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ . Oikeanpuoleinen epäyhtälö tulee todistetuksi aivan samoin.

Tehtävän jälkimmäinen osa perustuu edelliseen osaan ja tärkeään ”teleskooppisumma”-ideaan. Teleskooppisumma on sellainen monen yhteenlaskettavan summa, jossa ensimmäistä ja viimeistä yhteenlaskettavaa lukuun ottamatta jokaisen yhteenlaskettavan kumoavat yhdessä edellinen ja seuraava termi. Merkitään lyhyiden vuoksi

$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2}}.$$

Kun edellä todistetuista epäyhtälöistä vasemmanpuolinen kirjoitetaan kaikilla  $n$ :n arvoilla 1:stä  $m^2$ :een ja kaikki epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$2 \left( (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{m^2} - \sqrt{m^2-1}) + (\sqrt{(m^2+1)} - \sqrt{m^2}) \right) < S$$

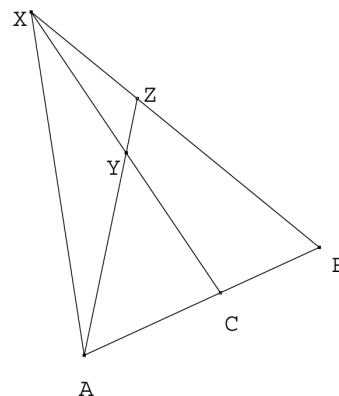
eli  $2(\sqrt{m^2+1} - 1) < S$  Koska  $\sqrt{m^2+1} > m$ , saadaan  $2m - 2 < S$ .  $S$ :n kokonaisosa on siis ainakin  $2m - 2$ . Vastaavasti tehtävän alussa todistetun epäyhtälön oikeat puolet antavat

$$S < 2 \left( (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \cdots + (\sqrt{m^2} - \sqrt{m^2-1}) \right) = 2m.$$

Luvun  $S$  kokonaisosan on siis oltava pienempi kuin  $2m$ . Tämä todistaa väitteen.

**6.** Tämä tehtävä on varsin tyypillinen geometrian tehtävä. Ratkaisu on puhdas päättely, ilman mitään laskennallisia elementtejä. Päättely on epäsuora. Kun on osoitettava, että  $S$  näkyy jokaisesta janan  $AB$  pisteestä, lähdetään oletuksesta, että näin ei olisikaan, ja katsotaan, mitä seuraa. Olkoon siis  $C$  jokin sellainen janan  $AB$  piste, että  $S$  ei näy  $C$ :stä. Se merkitsee, että  $S$ :ssä on ainakin yksi piste  $X$  niin, että jana  $CX$  ei kokonaan sisälly  $S$ :ään. Janalla  $CX$  on siis ainakin yksi piste  $Y$ , joka ei kuulu joukkoon  $S$ . Tarkastellaan kolmiota  $ABX$ .  $C$  on kolmion sivulla  $AB$ , joten jana

$CX$  ja piste  $Y$  ovat kolmion  $ABX$  sisällä. Puolisuora  $AY$  leikkaa kolmion sivun  $BX$ ; olkoon leikkauspiste  $Z$ . Koska  $S$  näkyy pisteestä  $B$  ja  $X$  on  $S$ :n piste, niin jana  $BX$  ja siis myös piste  $Z$  sisältyy joukkoon  $S$ . Koska joukko  $S$  näkyy pisteestä  $A$  ja  $Z$  on  $S$ :n piste, jana  $AZ$  ja siis sen piste  $Y$  sisältyy joukkoon  $S$ . Nyt on saatu kaksi keskenään ristiriitaista tulosta:  $Y$  ei ole joukon  $S$  piste ja  $Y$  on joukon  $S$  piste. Tämä merkitsee, että tehty oletus, jonka mukaan  $S$  ei näy pisteestä  $C$ , on väärä. Mutta näin onkin tullut todistetuksi se, mitä haluttiin.  $S$  näkyy jokaisesta janan  $AB$  pisteestä.

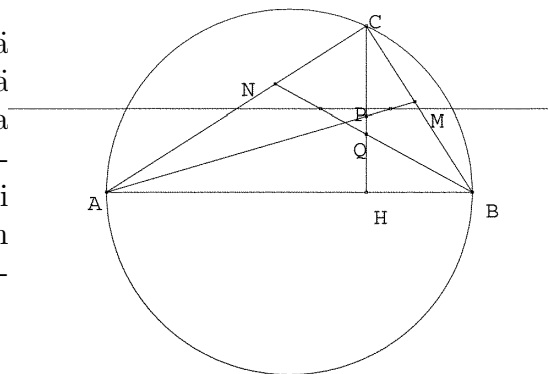


**7.** Tämä tehtävä on kilpailumatematiikan geometrinen laskutehtävien helpommasta päästä. Tarvitaan kuitenkin havainto, että kolmion lyhin korkeusjana on se, joka on piirretty pisintä sivua vastaan. Suoraviivainen ratkaisu etenee Pythagoraan lausetta hyödyntäen. Jos kolmio on  $ABC$  ja  $AB = 10$ ,  $BC = 21$ ,  $CA = 17$ , piirretään korkeusjana  $AD = h$  ja merkitään  $BD = x$ . Suorakulmaisista kolmioista  $ABD$  ja  $ADC$  saadaan

$h^2 + x^2 = 10^2 = 100$  ja  $h^2 + (21 - x)^2 = 17^2 = 289$ . Vähennetään jälkimmäisestä yhtälöstä edellinen. Saadaan  $(21 - x)^2 - x^2 = 189$  eli (koska  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ )  $21(21 - 2x) = 189$  eli  $21 - 2x = 9$  eli  $x = 6$ . Siis  $h^2 = 100 - x^2 = 64$  ja  $h = 8$ . – Toinen ratkaisu voisi perustua kolmion alan tuntemiseen. Heronin kaavan (joka kuuluu olevan koulussa ja ylioppilaskirjoituksissa jotenkin epäkelpo tieto, mutta kilpailumatematiikassa toki sallittua kalustoa) mukaan kolmion ala  $S$  toteuttaa yhtälön  $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$ , missä  $a, b$  ja  $c$  ovat kolmion sivujen pituudet ja  $2p = a + b + c$  on kolmion piirin pituus. Tässä  $2p = 21 + 17 + 10 = 48$ ,  $p = 24$ , ja  $S^2 = 24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ . Siis  $S = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84 = 4 \cdot 21$ . Koska  $2S = 21 \cdot h$ , on  $h = 8$ .

**8.** Tämän tehtävän ratkaisussa voidaan yhdistää ”puhdasta” geometrista päättelyä ja ”analyttistä geometriaa”. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusaa vastaan piirretty korkeusjana jakaa aina kolmion kahdeksi alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoiseksi kolmioksi. Merkitään kolmion sivuja tavan mukaan  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ . Mainitusta yhdenmuotoisuudesta seuraa

$$\frac{AH}{b} = \frac{b}{c}, \quad \frac{BH}{a} = \frac{a}{c}.$$



Laskuja yksinkertaistaaksemme oletamme, että  $CH = 1$ . Sijoitetaan vielä suorakulmainen koordinaatisto niin, että origo on  $H$ ,  $x$ -akseli hypotenuusan  $AB$  suuntainen suora ja  $y$ -akseli suora  $HC$ . Tehtävässä esiintyy kolmion kulmanpuolittajia. Silloin voi käyttää hyväksi geometrian perustulosta ”kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa”. Lasketaan tätä sääntöä käyttäen pisteiden  $P, Q, N$  ja  $M$   $y$ -koordinaatit. Koska pisteiden  $A, H$  ja  $B$   $y$ -koordinaatti on 0 ja pisteen  $C$   $y$ -koordinaatti on 1, saadaan heti

$$y_P = \frac{AH}{AH + b} = \frac{1}{1 + \frac{b}{AH}} = \frac{1}{1 + \frac{c}{b}} = \frac{b}{b + c},$$

$$y_Q = \frac{BH}{BH + a} = \frac{1}{1 + \frac{a}{BH}} = \frac{1}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a}{a + c},$$

$$y_M = \frac{c}{b + c}, \quad y_N = \frac{c}{a + c}.$$

Janan  $PM$  keskipisteen  $y$ -koordinaatti on sen päätepisteiden  $y$ -koordinaattien keskipiste:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{c}{b + c} + \frac{b}{b + c} \right) = \frac{1}{2}.$$

Vastaavasti janan  $QN$  keskipisteen  $y$ -koordinaatti on

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a}{a + c} + \frac{c}{a + c} \right) = \frac{1}{2}.$$

Koska näillä keskipisteillä on sama  $y$ -koordinaatti, pisteiden kautta kulkeva suora on  $x$ -akselin eli suoran  $AB$  suuntainen.

**9.** Tehtävän ratkaisussa esiintyy kaksi usein kilpailutehtävissä esiintyvää komponenttia: kehäkulma ja trigonometrinen päättely. Kolmion kärki  $A$  on aina ympyrällä, jonka jänne on  $MC$  ja jonka säteen määrittää se, että  $\angle MAC = 15^\circ$ . On selvää, että  $\angle ABC$  on suurin, kun  $A$  sijaitsee niin, että  $AB$  on tämän ympyrän tangentti. Nyt ympyrän kehäkulmien ominaisuuksien perusteella  $\angle BAM = \angle MCA$ . Tästä seuraa, että kolmiot  $ABM$  ja  $CBA$  ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{2 \cdot BM}.$$

Tämä merkitsee sitä, että  $AB = \sqrt{2} \cdot BM$ . Olkoon  $\angle AMC = \theta$ . Silloin  $\angle BAM = \angle MCA = 165^\circ - \theta$ . Sovelletaan sinilausetta kolmioon  $ABM$ ; otetaan huomioon, että  $\sin(\angle BMA) = \sin \theta$ . Saadaan

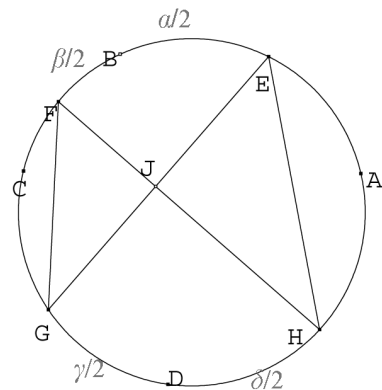
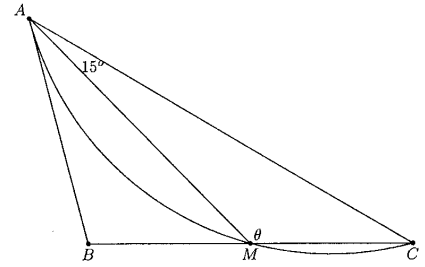
$$\frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} = \frac{AB}{BM} = \frac{\sin \theta}{\sin(165^\circ - \theta)} = \frac{\sin \theta}{\sin(15^\circ + \theta)}.$$

Siis  $\sin 45^\circ \sin \theta = \sin(15^\circ + \theta) = \cos 15^\circ \sin \theta + \sin 15^\circ \cos \theta$ . Tästä ratkaistaan

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 45^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ}{-2 \sin 30^\circ \sin 15^\circ} = -1.$$

(Tässä käytettiin hyväksi trigonometrista identiteettiä  $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ .)  
On siis  $\theta = 135^\circ$  joten  $\angle ABC = 180^\circ - (180^\circ - \theta) - (165^\circ - \theta) = 105^\circ$ .

**10.** Tässä tehtävässä keskeistä osaa näyttelee kehäkulmalause. Sama pätee suureen joukkoon geometrisia kilpailutehtäviä. Olkoot tehtävän kaaret ja niiden suuruudet asteissa  $\widehat{AB} = \alpha$ ,  $\widehat{BC} = \beta$ ,  $\widehat{CD} = \gamma$  ja  $\widehat{DA} = \delta$ . Olkoot vielä kaarien keskipisteet järjestyksessä  $E, F, G$  ja  $H$ . (Kun ”kehä on jaettu neljäksi kaareksi”, pisteiden järjestys ympyrän kehällä on  $AEBFCGDH$ , eli pelkästään päätepisteiden avulla ilmaistun kaaren ja sen keskipisteen kaksitulkitaisuus ei tässä pääse häirtämään.) Olkoon  $J$  janojen  $EG$  ja  $FH$  leikkauspiste. Nyt  $\widehat{EF} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ . Kehäkulma-





lauseen perusteella on siis  $\angle FHE = \frac{1}{4}(\alpha + \beta)$ . Aivan samoin perustein saadaan  $\angle HEG = \frac{1}{4}(\gamma + \delta)$ . Mutta  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ . Kolmiossa  $EJH$  on kulmien  $JHE$  ja  $HEJ$  summa  $\frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 90^\circ$ . Kolmion kolmas kulma  $\angle E J H$  on silloin  $90^\circ$ . Siis  $EG \perp FH$ .

**11.** Jos olisi  $2014 = 2 \cdot 1007 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ , niin toinen, mutta vain toinen tekijöistä  $x - y$  ja  $x + y$  olisi parillinen. Mutta jos  $x \pm y = 2k$ , niin  $x \mp y = x \pm y \mp 2y = 2(k \mp y)$ , joten luvut  $x + y$  ja  $x - y$  ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia. Lukua 2014 ei siis voi kirjoittaa kahden neliöluvun erotukseksi.

**12.** Neljä peräkkäistä kokonaislukua ovat  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$  ja  $n + 2$  ( $n \geq 2$ ). Niiden tulo on  $n(n+1)(n-1)(n+2) = (n^2+n)(n^2+n-2) = (n^2+n-1+1)(n^2+n-1-1) = (n^2+n-1)^2 - 1$ . Koska  $n \geq 2$ ,  $n^2 + n - 1 \geq 5$ . Ainoa neliöluku, joka on yhtä suurempi kuin toinen neliöluku on 1. Neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo ei siis ole neliöluku.

**13.** Kun tehtävä on osoittaa todeksi yhtälö kaikilla luonnollisilla luvuilla, induktiotodistus on usein järkevä vaihtoehto. "Luonnollisiin lukuihin" on Suomessa tapana lukea 0; tässä tapauksessa käytäntö on mukava, koska induktio on helppo käynnistää nolasta:  $2^2 \cdot 3^0 - 4 = 0$  ja 0 on jaollinen 25:llä. Otettavaksi jää vielä induktioaskel. Sitä varten oletetaan, että  $2^{k+2}3^k + 5k - 4 = 25m$ . Tällöin  $2^{(k+1)+2}3^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 6 \cdot 2^{k+2}3^k + 5k + 1 = 6(25m - 5k + 4) + 5k + 1 = 6 \cdot 25m - 25k + 25$ . Kuku  $2^{(k+1)+2}3^{k+1} + 5(k+1) - 4$  on siis jaollinen 25:llä. Tehtävän väite on tosi induktioperiaatteen nojalla.

**14.** Tämä tehtävä edellyttää hiukan muistamista. Tässä tapauksessa muistettava relaatio on

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(Jos kaavan muistaa suunnilleen, voi hakea tukea muistilleen kokeilemalla pieniä  $n$ :n arvoja. Kaavan voi todistaa oikeaksi induktiolla ja sen voi eri tavoin johtaa. Yksi tie on tehdä yrite  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ , sijoittaa kaavaan  $n = 1, 2, 3$  ja 4 ja ratkaista  $A, B, C$  ja  $D$  syntyneestä lineaarisesta yhtälöryhmästä.) Lukujen  $1^2, \dots, n^2$  keskiarvo on siis  $\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$ . Jotta tämä olisi neliöluku, sen on oltava kokonaisluku. Koska  $2n+1$  on pariton,  $n+1$  on parillinen. Siis  $n = 2k+1$ . Jos  $n$  olisi jaollinen kolmella, kumpikaan luvuista  $n+1$ ,  $2n+1$  ei olisi. Siis  $n$  on kolmella jaoton pariton luku eli muotoa  $6k \pm 1$  oleva luku. Oletetaan ensin, että  $n = 6k - 1$ . Silloin  $\frac{1}{6}(n+1)(2n+1) = k(12k-1)$ . Luvuilla  $p$  ja  $12p-1$  ei ole yhteisiä tekijöitä. Lukujen tulo voi olla neliöluku vain, jos  $k$  ja  $12k-1$  ovat neliölukuja. Koska  $(2r+1)^2 = 4(r^2+r)+1$ , jokainen pariton neliöluku antaa 4:llä jaettaessa jakojäännöksen 1.  $12k-1$  ei siis voi olla neliöluku. Tarkastellaan sitten tapausta  $n = 6k+1$ . Nyt  $\frac{1}{6}(n+1)(2n+1) = (3k+1)(4k+1)$ . Koska  $4(3k+1) - 3(4k+1) = 1$ , lukujen  $3k+1$  ja  $4k+1$  suurin yhteinen tekijä on 1. Molemmat ovat siis neliölukuja. Kun katsotaan tarkemmin äsken tehtyä päättelyä, jonka mukaan parittoman neliöluvun jakojäännös neljällä jaettaessa on 1, huomataan, että  $r(r+1)$  on aina parillinen luku, joten

itse asiassa  $(2r + 1)^2 = 8q + 1$ ; parittoman neliöluvun jakojäännös 8:lla jaettaessa on aina 1. Mutta tämä merkitsee, että  $4k + 1$  on neliöluku vain, kun  $k$  on parillinen. Mutta silloin myös  $3k + 1$  on pariton neliöluku ja senkin jakojäännös 8:lla jaettaessa on 1. Lukujen erotus, eli  $k$ , on siis jaollinen 8:lla:  $k = 8p$ . Siis  $32p + 1$  ja  $24p + 1$  ovat neliölukuja. Kokeilemalla huomataan, että pienin ehdon toteuttava  $p$  on 7:  $32p + 1 = 225 = 15^2$  ja  $24p + 1 = 169 = 13^2$ . Tällöin  $n = 6 \cdot 8 \cdot 7 + 1 = 337$ .

**15.** Tämän tehtävän ratkaisussa tulee esiin eräs keskeinen lukuteoriassa hyödynnettävä ilmiö. Jokaisessa positiivisten kokonaislukujen osajoukossa on pienin luku. Kirjoitetaan jokainen positiivinen rationaaliluku muotoon  $\frac{p}{q}$ , missä  $p$  ja  $q$  ovat positiivisia kokonaislukuja, joiden suurin yhteinen tekijä on 1. Jos nyt olisi sellaisia rationaalilukuja  $\frac{p}{q}$ ,  $p < q$ , joita ei voi kirjoittaa eri positiivisten kokonaislukujen käänteislukujen summaksi, olisi olemassa jokin sellainen luku, jolle  $p$  on mahdollisimman pieni. Joka tapauksessa  $p > 1$ . Olkoon  $\frac{p_0}{q_0}$  jokin tällainen luku. Olkoon nyt vielä  $n$  pienin positiivinen kokonaisluku, jolle

$$\frac{1}{n} < \frac{p_0}{q_0}.$$

Silloin on

$$\frac{1}{n} < \frac{p_0}{q_0} < \frac{1}{n-1}.$$

Siis

$$0 < \frac{p_0}{q_0} - \frac{1}{n} = \frac{p_0 n - q_0}{q_0 n}, \quad 0 < \frac{1}{n-1} - \frac{p_0}{q_0} = \frac{q_0 - p_0 n + p_0}{q_0(n-1)}.$$

Näin ollen  $0 < p_0 n - q_0 < p_0$ . Mutta

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{n} + \frac{p_0}{q_0} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{p_0 n - q_0}{q_0 n}.$$

Koska  $p_0$ :stä tehty oletus merkitsee, että  $\frac{p_0 n - q_0}{q_0 n}$  on sellainen rationaaliluku, joka voidaan kirjoittaa eri suurten positiivisten kokonaislukujen käänteislukujen summaksi. Ja

$$\frac{p_0 n - q_0}{q_0 n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n},$$

joten yksikään nimittäjä tässä summassa ei voi olla  $n$ . Todistus on valmis.

**16.** Tehtävän ratkaisu on tyypillinen laskennollisen kombinatoriikan tehtävän ratkaisu: lasketaan sama asia kahdella eri tavalla ja näin saadaan kaksi eri lauseketta, joiden onkin siis esitettävä samaa lukua. Tarkastellaan joukkoa  $A$ , jossa on  $m + n$  alkioita. Jaetaan se jollakin tavalla kahdeksi erilliseksi osajoukoksi  $B$  ja  $C$  niin, että  $B$ :ssä on  $m$  alkioita ja  $C$ :ssä on  $n$  alkioita. Nyt jokainen  $A$ :n  $r$ -alkiainen osajoukko  $E$  jakautuu kahdeksi osajoukoksi  $B \cap E$  ja  $C \cap E$ ; jos  $B \cap E$ :ssä on  $k$  alkioita, niin  $C \cap E$ :ssä on  $r - k$  alkioita. Toisaalta,

jos otetaan mikä hyvänsä  $B$ :n  $k$ -alkioinen osajoukko  $E_1$  ja  $C$ :n  $(r-k)$ -alkioinen osajoukko  $E_2$ , niin  $E_1 \cup E_2 = E$  on  $A$ :n  $r$ -alkioinen osajoukko. Nyt joukkoja  $E_1$  on  $\binom{m}{k}$  kappaletta ja joukkoja  $E_2$  on  $\binom{n}{r-k}$  kappaletta.  $A$ :n  $r$ -alkioinen osajoukko voidaan siis muodostaa valitsemalla jokin  $B$ :n  $k$ -alkioinen osajoukko ja liittämällä siihen jokin  $C$ :n  $(r-k)$ -alkioinen osajoukko kaikkiaan  $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k}$  eri tavalla. Mutta eri  $k$ :n arvoilla saadaan eri joukkoja, joten kaikkiaan  $\binom{m+n}{r}$  eli  $A$ :n  $r$ -alkioisten osajoukkojen lukumäärä on lukujen  $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k}$  summa eri  $k$ :n arvoilla. Mutta tämä yhtäsuuruus on juuri tehtävässä haettu yhtäsuuruus.

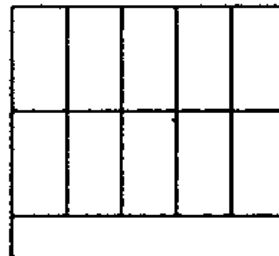
**17.** Tehtävä on lukuteorian ja kombinatoriikan rajamaastossa. Joukkoja käsitteleviä tehtäviä kuitenkin yleensä pidetään kombinatorisina. Havaitaan, että  $1 \cdot 4 \cdot 9 = 6^2$ ,  $2 \cdot 6 \cdot 12 = 12^2$ ,  $3 \cdot 5 \cdot 15 = 15^2$  ja  $7 \cdot 8 \cdot 14 = 28^2$ . Joukolla  $M$  ei voi olla osajoukkonaan mikään joukoista  $\{1, 4, 9\}$ ,  $\{2, 6, 12\}$ ,  $\{3, 5, 15\}$ ,  $\{7, 8, 14\}$ . Joukot ovat erillisiä, joten joka joukosta ainakin yhden luvun on oltava  $M$ :n ulkopuolella.  $M$ :ssä voi olla enintään  $15 - 4 = 11$  alkia. Jos lisäksi  $10 \notin M$ , niin  $M$ :än alkioden lukumäärä on enintään 10. Oletetaan että  $10 \in M$ . Silloin  $M$ :llä ei saa olla osajoukkonaan joukkoja  $\{2, 5\}$ ,  $\{6, 15\}$ ,  $\{1, 4, 9\}$  eikä  $\{1, 4, 9\}$ . Jos näiden ohella  $\{3, 12\}$  ei ole  $M$ :n osajoukko,  $M$ :ssä on enintään 10 alkia. Jos taas  $\{3, 12\} \subset M$ , niin mikään viidestä erillisestä joukosta  $\{1\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{9\}$ ,  $\{2, 6\}$ ,  $\{5, 15\}$  ei voi sisältyä  $M$ :ään. Tällöinkin  $M$  alkioden lukumäärä on enintään 10. On vielä esitettävä jokin tehtävän ehdon toteuttava 10-alkioinen  $M$ . Tällainen on

$$M = \{1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}.$$

**18.** Tehtävässä käsiteltävä rakenne on ns. verkko, jonka ”solmuja” ovat henkilöt ja ”särmiä” kirjeenvaihtosuhteet. Tehtävä olisi voitu muotoilla esimerkiksi näin. ”Verkossa on 17 solmua, ja jokainen on yhdistetty jokaiseen muuhun särmällä. Osoita, että jos kukin särmä väritetään siniseksi, punaiseksi tai keltaiseksi, verkossa on kolmio, jonka särmät ovat samanväriset.” – Tehtävän ratkaisu on tyypillinen ”laatikkoperiaatteen” sovellus. Valitaan kirjeenvaihtajista yksi; olkoon hän esimerkiksi  $A$ . Nyt  $A$  vaihtaa kirjeitä 16 muun kanssa ja käsittelee kunkin kanssa jotain kolmesta aiheesta. Ei voi olla niin, että  $A$  käsittelee kutakin aihetta enintään viiden muun kanssa. Jos näin olisi,  $A$ :lla olisi enintään 15 kirjeenvaihtokumppania. Jotakin aihetta, sanokaamme aihetta I,  $A$  siis käsittelee ainakin kuuden muun kanssa. Jos näiden kuuden muun joukossa on kaksi, sanokaamme  $B$  ja  $C$ , jotka käsittelevät aihetta I keskinäisessä kirjeenvaihdossaan,  $A$ ,  $B$  ja  $C$  muodostavat vaaditun kolmikon. Ellei näin ole, käsittelee ainakin kuusi henkilöä keskinäisissä kirjeenvaihdossaan vain aiheita II ja III. Otetaan näistä kuudesta yksi, sanokaamme  $D$ .  $D$  käsittelee viiden kirjeenvaihtokumppaninsa kanssa aiheita II ja III. Nämä viisi käsittelevät myös keskinäisissä kirjeenvaihdossaan vain aiheita II ja III. Nyt ei voi olla niin, että  $D$  käsittelee kumpaakin aihetta enintään kahden kumppanin kanssa, tällöinhän kumppaneita olisi enintään neljä. Voidaan siis olettaa, että on kolme henkilöä, joiden kanssa  $D$  käsittelee esimerkiksi aihetta

II. Jos näissä kolmessa on jotkin kaksi, esimerkiksi  $E$  ja  $F$ , jotka käsittelevät aihetta II keskinäisessä kirjeenvaihdossaan, niin  $D$ ,  $E$  ja  $F$  on vaadittu kolmikko. Ellei tällaista paria ole, on ainakin kolme kirjeenvaihtajaa, jotka kaikki käsittelevät aihetta III, ja todistus on valmis.

**19.** Pelit ja niiden voittostrategiat ovat suosittu kilpa-tehtävien aihepiiri. Tarkastelu on usein kaksisuuntainen: mitä toinen pelaaja ainakin voi saavuttaa ja mitä toinen pelaaja ainakin voi saavuttaa. Osoitetaan ensin, että  $B$  voi aina pelata niin, että  $S \leq 6$ . Sijoitetaan ruudukkoon kuvan mukaiset  $10 \ 1 \times 2$ -laattoja. Aina kun  $A$  kirjoittaa ykkösen toistaiseksi tyhjään laattaan,  $B$  kirjoittaa laatan toiseen ruutuun nollan. Jokainen  $3 \times 3$ -neliö sisältää ainakin kolme nollaa, joten  $S \leq 6$ .



Osoitetaan sitten, että  $A$  voi aina pelata niin, että  $S \geq 6$ . Numeroidaan ruudukon vaakarivit 1, 2, 3, 4, 5 ja pystyivät  $a, b, c, d, e$ .  $A$ :n ensimmäinen valinta on ruutu  $c3$ . Kiertosymmetrian vuoksi voidaan olettaa, että  $B$  sijoittaa ensimmäisen nollan riveille 4 ja 5.  $A$  laittaa sitten ykkösen ruutuun  $c2$ . Ellei  $B$  sijoita seuraavalla vuorolla nollaa ruutuun  $c1$ ,  $A$  laittaa siihen vuorollaan ykkösen. Tämän jälkeen ainakin toinen suorakaiteista  $[a1, b3]$  tai  $[d1, e3]$  on vielä tyhjä, ja  $A$  voi sijoittaa siihen ainakin kolme ykköstä. Tällöin  $S \geq 6$ . Jos taas  $B$  sijoittaa nollan  $c1$ :een, niin  $A$  pystyy saamaan kaksi ykköstä ”suikaleeseen”  $[b1, b3]$  ja ainakin kolme ykköstä yhteensä kahteen suikaleeseen  $[a1, a3]$ ,  $[d1, d3]$ . Silloin joko neliöön  $[a1, c3]$  tai neliöön  $[b1, d3]$  tulee ainakin kuusi ykköstä.

**20.** Tämän tehtävän ratkaisu saattaa olla helpompi, jos sen ”vierekkäiset sektorit” mallintaa merkkijonon kirjaimina. Olkoon  $s_n$  4:stä aakkosesta (esimerkiksi  $s, p, v$  ja  $k$  muodostettujen sellaisten  $n$ :n merkin pituisten jonojen lukumäärä, joissa koskaan ei sama merkki toistu. Selvästi  $S_1 = 4$  ja  $S_{n+1} = 3S_n$  (jokaisen  $n$ -jonon loppuun voidaan liittää jokin muu kuin jonossa oleva viimeinen merkki). Jos lisätään vaatimus, että jonon ensimmäinen ja viimeinen merkki eivät saa olla samoja, ja merkitään  $T_n$ :llä tällaisten, edelleen  $n$ :n pituisten jonojen määrää, niin  $n$ -jonoja, joissa ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat samat, on  $S_n - T_n$  kappaletta. Jokaiseen tällaiseen jonoon saa liittää jonkin kolmesta merkistä. Jokaiseen jonoon, joissa ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat erilaiset, voi liittää vain kaksi uutta merkkiä. Saadaan siis palautuskaava  $T_{n+1} = 3(S_n - T_n) + 2T_n = 3S_n - T_n = S_{n+1} - T_n$ . Tässä tehtävässä kiinnostaa  $T_7$ . Voidaan laskea suoraan:

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$s_n$	4	12	36	108	324	972	2916
$t_n$	0	12	24	84	240	732	2184

Jos nyt seitsemän merkin jono, jossa ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat eri merkkejä, kierretään renkaaksi, saadaan malli ympyrän seitsemän sektorin väritykselle eri värein. Toisaalta, jos rengas katkaistaan mistä paikasta tahansa, saadaan seitsemän merkin jono, jossa ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat eri merkkejä. Eri katkaisut tuottavat eri jonot.

Ellei näin olisi, eli jos paikasta  $j$  alkava jono olisi sama kuin paikasta  $j + p$  alkava, niin paikoissa  $j, j + p, j + 2p, \dots$ , olisi sama merkki; koska 7 on alkuluku, jono  $(j + p) \bmod 7$  käy läpi kaikki paikat; kaikki merkit olisivat siis samoja, vastoin oletusta. Keskenään erilaisia värityksiä on siis  $T_7/7 = 312$  kappaletta.