1 Joulukuun 2010 kirjevalmennustehtävät – helpot

Ratkaisuja voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen laurihallila@gmail.com, tavallisella postilla Lauri Hallila, Kalliorinteenkuja 1, 02770 Espoo, tai palauttaa seuraavan valmennusviikonlopun aikana.

1. Luokassa on 25 oppilasta. Todista, että ainakin kahdella oppilaalla on sama määrä ystäviä tässä luokassa (tehtävässä pätee, että jos A on B:n ystävä, niin myös B on A:n ystävä).

2. 6 ihmistä matkustaa bussilla. Todista, että heidän joukostaan voi löytää joko 3 henkilöä, jotka kaikki tuntevat toisensa, tai 3 sellaista henkilöä, joista ketkään kaksi ei tunne toisiaan.

3. $3x4$-ruudukossa on 7 pistettä. Osoita, että on olemassa kaksi pistettä, joiden etäisyys toisistaan on korkeintaan $\sqrt{5}$.

4. $3x4$-ruudukossa on 6 pistettä. Osoita, että on olemassa kaksi pistettä, joiden etäisyys toisistaan on korkeintaan $\sqrt{5}$.

5. Ympyrällä on kuusi pistettä. Pisteillä on numerot $1, 0, 1, 0, 0, 0$ (tässä järjestyksessä), kun ympyrä käydään läpi vastapäivään. Kahden vierekkäisen pisteet luvut voidaan tehdä yhtä suuremmiksi. Onko mahdollista saavuttaa näillä lisäyksillä tila, jossa jokaisessa pisteessä on sama numero?

6. n henkilöä istuu pyöreän pöydän ääressä. Kuinka moni $n!$ eri istumajärjestyksestä ovat toisistaan erillisiä (eli kuinka monta eri järjestystä on joissa naapuruussuhteet ovat erilaisia)?

7. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (m, n), joilla mxn on suorakulmio, ja niiden ruutujen lukumäärä, jotka koeskettavat suorakulmion reunaa, on sama, kuin niiden ruutujen lukumäärä, jotka eivät kosketa suorakulmion reunaa.

8. Opettaja pyytää Artoa valitsemaan luvun 2009^{10} positiivisia tekijöitä siten, että mikään valituista luvuista ei jaa toista valittua lukua. Kuinka monta tekijää Arto voi enintään valita?

9. Olkoon kolmion kulmat x, y ja z (asteina).

a Osoita, että jos $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ ja $\frac{z}{x}$ ovat kaikki rationaalilukuja, niin myös x, y ja z ovat rationaalilukuka.

b Osoita, että jos tasan yksi luvuista $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ ja $\frac{z}{x}$ on rationaaliluku, niin luvut x, y ja z ovat irrationaalilukuja.

10. Olkoon $n > 18$ positiivinen kokonaisluku siten, että $n - 1$ ja $n + 1$ ovat kumpikin alkulukuja. Osoita, että luvulla n on vähintään 8 eri positiivista tekijää.