Valmennustehtävien ratkaisuja, lokakuu 2013
Helpompi sarja

1. Etsi kaikki reaalikertoimiset polynomit f, joille

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

kaikilla reaalikertoimisilla polynomeilla g ja kaikilla reaaliluvuilla x.

Ratkaisu. Valitaan g:ksi vakiopolynomi $g(x) = a$, missä a on mikä tahansa reaaliluku.. Saadaan $f(a) = a$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$, joten funktion f on pakko olla identiteettifunktio $f(x) = x$. Se on selvästi polynomi.

2. Todista positiivisille reaaliluvuille x ja y epäyhtälö

$$x^{2013}y + xy^{2013} \leq x^{2014} + y^{2014}.$$

Ratkaisu. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $x \leq y$. Silloin $x^{2013} \leq y^{2013}$, ja suuruusjärjestysepäyhtälöstä saadaan tulos

$$x^{2013}y + y^{2013}x \leq x^{2013}x + y^{2013}y.$$

3. Saarella oli viisi merirosvoa ja apina. Merirosvot olivat saaneet päivän aikana saaliikseen paljon kolikoita. Yöllä yksi merirosvoista heräsi ja päätti kätkeä osansa saaliista. Hän jakoi kolikot viiteen kasaan ja huomasi, että yksi jäi yli; sen hän heitti apinalle ja vei oman osansa piiloon. Sitten heräsi toinen merirosvo ja ensimmäisestä tietämättä jakoi kolikot viiteen kasaan, ja taas jäi yli yksi kolikko, jonka hän heitti apinalle ja vei yhden kasan omaan piiloonsa. Lopuille merirosvoille kävi samoin: kukin heräsi, piilotti viidesosan jäljellä olevasta saaliista ja heitti jakojäännökseksi jääneen yhden kolikon apinalle. Seuraavana päivänä merirosvot jakoivat lopun saaliin viiteen osaan, ja taas jäi yksi kolikko yli. Mikä on pienin mahdollinen määrä kolikoita alkuperäisessä saaliissa?

Ratkaisu. Olkoon kysytty lukumäärä N. Ensimmäisen ehdon mukaan $N \equiv 1 \pmod 5$ eli $N = 5k+1$, missä k on jokin kokonaisluku. Toisen ehdon mukaan $4k = (4/5)(N-1) \equiv 1 \pmod 5$, mistä saadaan helposti $k \equiv 4 \pmod 5$ ja edelleen $N = 5k+1 \equiv 21 \pmod{25}$. Vastaavasti kolmannesta ehdosta voidaan laskea N:n jakojäännös modulo 125, neljännestä modulo 625, viidennestä modulo 3125 ja viimeisestä (lopullisesta saaliinjaosta) modulo 15625. Nämä välivaiheet voitaisiin haluttaessa laskea, mutta ovelampaa on todeta, että ratkaisu $N = -4$ täyttää kaikki luetellut ehdot. (Jos kolikoita on -4, heittämällä yksi apinalle jää -5, ja kun yksi merirosvo on vienyt -1:n kolikon, kasaan jää -4, joten jokainen vaihe jättää kasan ennalleen.)

Ratkaisun on tietysti oltava positiivinen, ja pienin positiivinen ratkaisu on $N = -4 + 15625 = 15621$.

4. Šakkilaudalta on valittu 16 ruutua, jokaiselta riviltä ja jokaisesta sarakkeesta kaksi. Todista, että valittuihin ruutuihin voidaan asettaa kahdeksan valkeaa ja kahdeksan mustaa sotilasta siten, että jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa on yksi kumpaakin väriä.

Ratkaisu. Asetetaan johonkin valituista ruuduista valkea sotilas. Samalla rivillä sen kanssa on täsmälleen yksi muu valittu ruutu, joten "kuljetaan" siihen riviä pitkin ja asetetaan siihen musta sotilas. Samassa sarakkeessa sen kanssa on täsmälleen yksi muu valittu ruutu, joten kuljetaan siihen saraketta pitkin ja asetetaan siihen valkea sotilas. Jatketaan näin, kunnes törmätään ruutuun, johon on jo asetettu sotilas. Koska jokaiseen ruutuun pääsee vain kahta reittiä, tämän ruudun on pakko olla aloitusruutu, ja siihen on pakko kulkea saraketta pitkin (riviä pitkin kuljettiin alussa), jolloin viimeisenä asetettiin musta sotilas. Jos kaikki sotilaat on asetettu, ollaan valmiita. Muussa tapauksessa on käytetty kaikki valitut ruudut joiltakin riveiltä ja sarakkeilta, joten voidaan aloittaa asettelu uudestaan jostain käyttämättömästä ruudusta.

5. Tarkastellaan $m\times n$–ruudukkoja, joiden jokaiseen ruutuun on kirjoitettu numero 0 tai 1. Montako sellaista ruudukkoa on, joissa jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen summa on parillinen?

Ratkaisu. Kutsutaan ehdon täyttäviä ruudukkoja kelvollisiksi. Kelvollisia ruudukkoja on $2^{(m-1)((n-1)}$, mikä voidaan nähdä siitä, että jokainen nollista ja ykkösistä muodostettu $(m-1)\times(n-1)$-ruudukko vastaa yksikäsitteisesti yhtä kelvollista $m\times n$-ruudukkoa. Merkitään tämän osoittamiseksi mielivaltaista 0–1-ruudukkoa

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Täydennetään se $m\times n$-kokoiseksi ruudukoksi

$$A'=\begin{bmatrix} & & & & a_{1,n} \\ & A & & & a_{2,n} \\ & & & & \vdots \\ & & & & a_{m,n-1} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Viimeisen sarakkeen $n-1$ ensimmäisen luvun on oltava 0, jos A:n vastaavan rivin summa on parillinen, ja 1, jos rivisumma on pariton. Samoin viimeisen rivin $n-1$ ensimmäistä lukua määräytyvät A:n sarakesummien parillisuudesta. Vastaava pätee lukuun $a_{m,n}$: sen on oltava 1, jos ja vain jos parittomia rivisummia on pariton määrä, ja toisaalta myös, jos ja vain jos parittomia sarakesummia on pariton määrä. Nämä ehdot eivät voi olla keskenään ristiriidassa, koska parittomia rivisummia on pariton määrä täsmälleen silloin, kun A:n alkioiden summa on pariton, ja vastaava pätee myös sarakesummiin.

6. Ratkaise kokonaislukuyhtälö

$$x^3+2y^3=4z^3.$$

Ratkaisu. Ainoa ratkaisu on $(x,y,z)=(0,0,0)$. Jos (x,y,z) on ratkaisu, $x=2(2z^3-y^3)$ on parillinen. Merkitään $x=2w$, jolloin

$$4w^3+y^3=2z^3.$$

Vähennetään puolittain y^3, jolloin saadaan

$$(-y)^3+2z^3=4w^3.$$

Siis jos (x,y,z) on ratkaisu, myös $(-y,z,x/2)$ on ratkaisu. Soveltamalla samaa päättelyä vielä kahdesti saadaan ratkaisu $(-x/2,-y/2,-z/2)$. Koska tätä päättelyä voidaan toistaa mielivaltaisen monta kertaa, mielivaltaisen suuren kahden potenssin on jaettava luvut x,y ja z. Siten on oltava $x=y=z=0$.

7. Onko olemassa positiivista kokonaislukua, jonka kaikki alkutekijät kuuluvat joukkoon $\{2,3,5,7\}$ ja jonka viimeiset numerot ovat 11? Jos on, etsi pienin tällainen luku. Jos ei, todista, ettei sellaista ole.

Ratkaisu. Jos luvulla on tekijänä 2 tai 5, sen viimeinen numero on 0, 2 tai 5. Riittää siis rajoittua alkutekijöihin 3 ja 7. Jos $3^m7^n=100k+11$ jollakin k, on erityisesti

$$3^m7^n\equiv 11 \pmod{20}.$$

Koska $3^4=81\equiv 1 \pmod{20}$, $7^4=2401\equiv 1 \pmod{20}$ ja $3\cdot 7\equiv 1 \pmod{20}$, saadaan kongruenssit

$$3^m7^n\equiv 3^{m-4}7^n\equiv 3^{m-1}7^{n-1}\equiv 3^m7^{n-4} \pmod{20},$$

joista kukin on voimassa, jos sen eksponentit ovat ei-negatiivisia. Näitä toistuvasti soveltamalla saadaan tulos, että 3^m7^n on kongruentti modulo 20 jonkin luvuista 1, 3, 3^2, 3^3, 7, 7^2 ja 7^3 kanssa. Mikään näistä ei ole 11 $\pmod{20}$, joten niin ei ole myöskään 3^m7^n.

8. Onko olemassa äärettömän monta kokonaislukua, joiden neliö päättyy numeroihin 444?

Ratkaisu. Koska $38^2 = 1444$, on ainakin yksi tällainen kokonaisluku. Samoin lukujen 1038, 2038, ... neliöt päättyvät samoihin numeroihin, koska $(1000k+38)^2 = 1000000k^2+2\cdot 38\cdot 1000k+1444 \equiv 444 \pmod{1000}$. Tällaisia lukuja on siis äärettömän monta.

9. Todista, että missä tahansa kolmiossa enintään yksi sivu voi olla lyhyempi kuin sen vastaisesta kärjestä piirretty korkeusjana.

Ratkaisu. Olkoot kolmion ABC korkeusjanat AD ja BE niiden vastaisia sivuja BC ja AC pidemmät. Kolmio ADC on suorakulmainen ja sen hypotenuusa AC on kateettia AD pitempi. Vastaavasti kolmiosta BCE saadaan $BC > BE$. Siis

$$AD > BC > BE > AC > AD,$$

mikä on ristiriita.

10. Pisteiden A ja B etäisyys toisistaan on 1. Etsi ne suoran AB pisteet P, joille $\dfrac{1}{1+AP} + \dfrac{1}{1+BP}$ on maksimaalinen.

Ratkaisu. Jos piste P ei ole janalla AB, voidaan olettaa, että $PA < PB$. Silloin $PB > AB$ ja $\dfrac{1}{1+AP}+\dfrac{1}{1+BP} < 1+\dfrac{1}{1+AB}$, minkä oikea puoli on lausekkeen arvo, kun $P = A$. Siten maksimin on oltava janalla AB. Olkoon $AP = x$, $0 \le x \le 1$. Silloin

$$\frac{1}{1+AP} + \frac{1}{1+BP} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} = \frac{3}{2+x-x^2}.$$

Siis maksimi saavutetaan, kun $2 + x - x^2 = 2 + x(1-x)$ saavuttaa minimin, mikä tapahtuu, kun $x = 0$ tai $x = 1$ (sillä $x(1-x) > 0$). Maksimi siis saavutetaan, kun $P = A$ tai $P = B$.

Valmennustehtävien ratkaisuja, lokakuu 2013
Vaikeampi sarja

1. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Etsi suurin 3:n potenssi, joka jakaa luvun $10^k - 1$.

Ratkaisu. Kirjoitetaan $k = 3^m n$, missä $3 \nmid n$. Todistetaan, että $3^{m+2} \mid 10^k - 1$ mutta $3^{m+3} \nmid 10^k - 1$.

Käytetään induktiota luvun m suhteen ja tietoa, että luku on jaollinen kolmella (yhdeksällä), kun sen numeroiden summa on jaollinen kolmella (yhdeksällä). Kun $m = 0$, k ei ole kolmella jaollinen, ja

$$10^k - 1 = 9 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{k \text{ numeroa}}.$$

Luvun $111\ldots1$ numeroiden summa on k, joten $10^k - 1$ on jaollinen 3^2:lla mutta ei 3^3:lla.

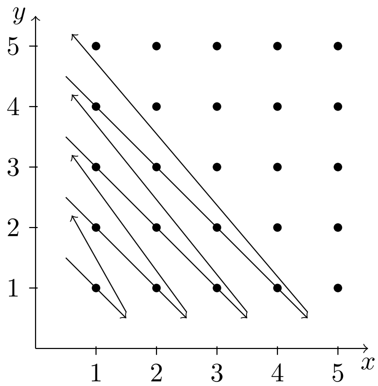
Oletetaan, että väite pätee m:lle, ja olkoon $k = 3^{m+1}n$, missä $3 \nmid n$. Silloin

$$10^k - 1 = (10^{3^m n})^3 - 1 = (10^{3^m n} - 1)(10^{2\cdot 3^m n} + 10^{3^m n} + 1).$$

Induktio-oletuksen mukaan 3 jakaa ensimmäisen tekijän 3^{m+2} kertaa. Toisen tekijän numeroiden summa on 3, joten se on jaollinen 3:lla mutta ei 3^2:lla.

2. Olkoon a positiivinen kokonaisluku. Todista, että on olemassa yksikäsitteinen pari (x, y) positiivisia kokonaislukuja, joille $x + \frac{1}{2}(x + y - 1)(x + y - 2) = a$.

Ratkaisu. Järjestetään lukuparit (x, y) ensisijaisesti summan $x + y$ mukaan ja toissijaisesti luvun x mukaan:



1. $(1, 1)$ (summa 2)
2. $(1, 2)$ (summa 3)
3. $(2, 1)$
4. $(1, 3)$ (summa 4)
5. $(2, 2)$
6. $(3, 1)$
7. $(1, 4)$ (summa 5)
8. $(2, 3)$

$\vdots$

Lukua n pienempien positiivisten kokonaislukujen summa on $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Parin (x, y) järjestysluku saadaan laskemalla yhteen pienempisummaisten parien lukumäärä $\frac{1}{2}(x+y-1)(x+y-2)$ ja parin (x, y) järjestysluku samansummaisten joukossa, joka on x. Jokaisen positiivisen kokonaisluvun a on oltava täsmälleen yhden parin järjestysluku, mistä väite seuraa.

3. Etsi kaikki kolmioluvut, jotka ovat myös neliölukuja.
(Kolmiolukuja ovat 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, ..., ja neliölukuja $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, ...)

Ratkaisu. Olkoon $n^2 = \frac{1}{2}m(m+1)$. Saadaan

$$8n^2 = 4m^2 + 4m = (2m+1)^2 - 1 \qquad \text{eli} \qquad (2m+1)^2 - 8n^2 = 1.$$

Tämä on Pellin yhtälö[1] luvuille $A = 2m + 1$ ja $B = 2n$:

$$A^2 - 2B^2 = 1.$$

Kokeilemalla löydetään ratkaisu $A = 3$, $B = 2$, ja yleinen ratkaisu on

$$a_k + \sqrt{2}b_k = (3 + 2\sqrt{2})^k,$$

jolle saadaan binomilausetta soveltamalla suljettu muoto

$$a_k = \frac{(3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k}{2}, \quad b_k = \frac{(3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}}.$$

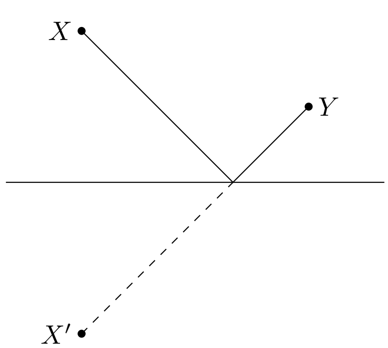
Tehtävässä kysyttyjä lukuja on äärettömän monta, ja ne ovat muotoa

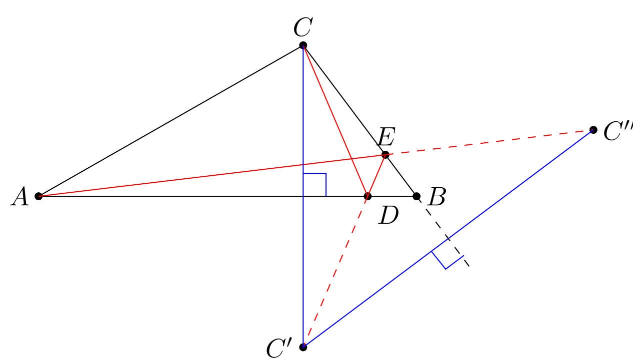
$$\left(\frac{b_k}{2}\right)^2 = \frac{\left((3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k\right)^2}{32}.$$

4. Tarkastellaan kolmiota ABC, jonka kulmille α, β, γ (kärjissä A, B, C) pätee $\alpha \le \beta \le \gamma$. Mikä ehto pitää asettaa kulmille, jotta on mahdollista suunnata valonsäde pisteestä C sivua AB kohti, se voi heijastua siitä sivulle BC ja siitä pisteeseen A?

Ratkaisu. Välttämätön ja riittävä ehto on $45° - \frac{1}{2}\alpha < \beta < 60°$.

Kun valo kulkee pisteestä X pisteeseen Y heijastuen suorasta, se saapuu samasta suunnasta kuin pisteen X kuva peilauksessa saman suoran suhteen.





[1] http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/pell.pdf

Jos säde kulkee reittiä $C \to D \to E \to A$, se näyttää tulevan pisteeseen E pisteen C' suunnasta, missä C' on piste C heijastettuna suoran AB suhteen, ja pisteeseen A pisteen C'' suunnasta, missä piste C'' on piste C' heijastettuna suoran BC suhteen. Pisteen C'' on oltava kulman $\angle BAC$ sisällä ja pisteen C' on oltava kulman $\angle ACB$ sisällä. Jälkimmäinen ehto toteutuu aina, koska kulmat α ja β ovat teräviä. Edellisen ehdon toteutumiseksi on oltava sekä $\angle C''BA < 180°$ että $\angle ACC'' < 180°$.

Symmetrian nojalla $\angle C''BC = \angle CBC' = 2\beta$, joten $C''BA = 3\beta$, mistä saadaan ehto $\beta < 60°$.

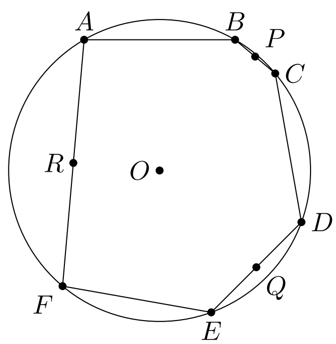
Heijastuksista seuraa, että $BC = BC' = BC''$, joten $\triangle CBC''$ on tasakylkinen. Siten

$$\angle BCC'' = \frac{1}{2}(180° - \angle C''BC) = 90° - \beta,$$

ja ehto $\angle ACC'' < 180°$ saadaan muotoon $\gamma + 90° - \beta < 180°$ eli $270° - \alpha - 2\beta < 180°$ eli $45° - \frac{1}{2}\alpha < \beta$.

5. Kuusikulmion $ABCDEF$ kärkipisteet ovat ympyrällä, jonka säde on r. Sivuista AB, CD ja EF jokaisen pituus on r. Todista, että muiden kolmen sivun keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion.

Ratkaisu. Olkoon ympyrän keskipiste O, ja olkoot sivujen BC, DE ja FA keskipisteet P, Q ja R. Valitaan O koordinaatiston origoksi, jolloin $P = \frac{1}{2}(B + C)$, $Q = \frac{1}{2}(D + E)$ ja $R = \frac{1}{2}(F + A)$.



Saadaan

$$\overline{PQ} = Q - P = \frac{1}{2}(\,D + E - B - C\,).$$

Merkitään ρ:lla 60°:een vastapäiväistä kiertoa O:n ympäri. Oletusten nojalla $\rho(B) = A$ ja $\rho(D) = C$. Nelikulmion $OFE\rho(E)$ jokaisen sivun pituus on r, joten se on suunnikas ja $\rho(E) = \overline{O\rho(E)} = \overline{FE} = E - F$. Vastaavasti $\rho(C) = C - D$. Vektorin $\overline{PQ}$ kuva tässä kierrossa on

$$\begin{aligned}\overline{\rho(P)\rho(Q)} = \rho(Q) - \rho(P) &= \frac{1}{2}(\,\rho(D) + \rho(E) - \rho(B) - \rho(C)\,)\\ &= \frac{1}{2}(\,C + E - F - A - C + D\,)\\ &= \frac{1}{2}(\,D + E - F - A\,)\\ &= Q - R = \overline{RQ}.\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $PQ = QR$ ja $\angle PQR = 60°$, joten PQR on tasasivuinen kolmio.

6. Kahden pelaajan pelissä yhdistetään $m \times n$–hilan hilapisteitä. Vuorollaan kumpikin pelaaja piirtää janan, joka yhdistää kaksi hilapistettä kulkematta minkään muun hilapisteen kautta ja leikkaamatta aiemmin piirrettyjä janoja. Viimeisen janan piirtäjä voittaa. Kummalla pelaajalla on voittostrategia ja millainen se on?

Ratkaisu. Toisella pelaajalla on voittostrategia, jos mn on pariton, muuten ensimmäisellä.

Olkoon hilan keskipiste Z. Voittostrategia perustuu kummassakin tapauksessa janojen peilaamiseen Z:n suhteen. Merkitään pisteen X peilikuvaa pisteen Z suhteen X':lla.

Oletetaan, että yksi pelaajista tekee sallitun siirron janalla PQ, kun jo piirrettyjen janojen joukko on symmetrinen Z:n suhteen. Milloin on mahdotonta vastata tähän janalla $P'Q'$? Jana $P'Q'$ ei voi kulkea hilapisteiden kautta, koska muuten jana PQ olisi kulkenut hilapisteen kautta. Jana $P'Q'$ ei voi leikata sellaista janaa RS, joka on piirretty ennen janaa PQ, koska muuten myös jana $R'S'$ olisi piirretty sitä ennen, ja janat PQ ja $R'S'$ olisivat leikanneet toisensa. Ainoa mahdollisuus on, että janat PQ ja $P'Q'$ leikkaavat. Mutta jos niillä on yhteinen piste W, myös piste W' on yhteinen, samoin kaikki niiden väliset pisteet, myös Z. Tämä on mahdollista vain, jos Z ei ole hilapiste.

Jos Z ei ole hilapiste, mikä on yhtäpitävää sen kanssa että vähintään toinen luvuista m ja n on parillinen, ensimmäisen pelaajan voittostrategia on piirtää ensin jokin jana XX' ja sen jälkeen vastata janaan PQ janalla $P'Q'$. Edellä esitetyn päättelyn nojalla $P'Q'$ on aina mahdollinen siirto.

Jos Z on hilapiste, mikään sellainen jana ei ole sallittu, joka sisältää Z:n sisäpisteenä. Toisen pelaajan voittostrategia on vastata janaan PQ janalla $P'Q'$, mikä on jälleen edellä esitetyn päättelyn nojalla mahdollista.

7. 10×10–ruudukon ruuduista osa on aluksi valkeita ja osa mustia. Jokaisella aikayksiköllä maalataan mustiksi sellaiset valkeat ruudut, joilla oli edellisellä aikayksiköllä vähintään kaksi mustaa naapuria (ruutua, jolla on yhteinen sivu). Onko sellaista väritystä, jossa mustia ruutuja on

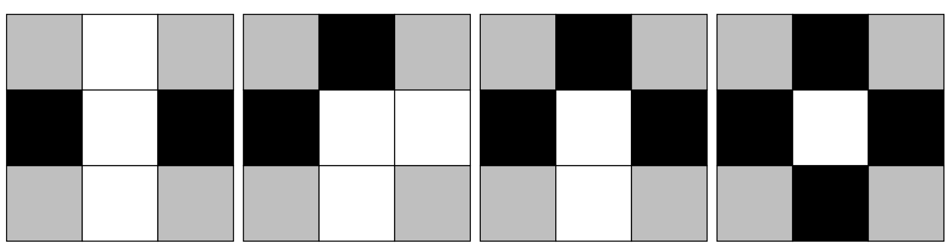
(a) yhdeksän

(b) kymmenen

ja josta aloitettaessa koko ruudukko muuttuu lopulta mustaksi?

Ratkaisu. Ratkaistaan ensin helpompi b-kohta: jos lävistäjän ruudut ovat aluksi mustia, musta väri leviää aikayksiköllä t ruutuihin, joiden etäisyys lävistäjästä on t, ja siten lopulta koko ruudukkoon.

A-kohdassa kysyttyä väritystä ei ole olemassa. Tarkastellaan tämän todistamiseksi mustan alueen piiriä, ts. sellaisia ruutujen sivuja, joiden toisella puolella on musta ruutu ja toisella ei. Yhdeksän ruudun värityksessä piiri on enintään 36, ja koko ruudukon värityksessä 40, joten jos voidaan todistaa, että piiri ei voi kasvaa, väite on todistettu. Ruutujen maalaamista voidaan tarkastella erikseen, sillä ylimääräisten ruutujen maalaaminen voi enintään muuttaa muiden maalaamista aiemmaksi, millä ei ole vaikutusta lopulliseen tulokseen. Tilanteita, joissa ruutu maalataan, ovat oleellisesti seuraavat:



Kaavioiden värityksessä harmaa tarkoittaa ruutua, jolla ei ole väliä, ja valkoinen tai harmaa ruutu voivat olla myös ruudukon ulkopuolista aluetta. Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa mustan alueen piiri pysyy ennallaan, kolmannessa pienenee kahdella ja neljännessä pienenee neljällä.

8. Onko olemassa funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille $f(g(x)) = x^2$ ja $g(f(x)) = x^4$?

Ratkaisu. Rajoitutaan ensin joukossa $[1, \infty)$ määriteltyihin funktioihin. Oletuksista seuraa

$$f(x^4) = f(g(f(x))) = f(x)^2.$$

Tehdään sijoitus

$$f(x) = a^{F(\log_b x)}, \quad a > 0,\ b > 0,$$

jolloin aiempi yhtälö muuttuu muotoon

$$F(4y) = 2F(y),$$

kun $x \geq 0$ ja $y = \log_b x$. Tälle löytyy helposti ratkaisu, esim. $F(x) = \sqrt{x}$. Päädytään ratkaisuehdokkaaseen

$$f(x) = a^{\sqrt{\log_b x}}, \quad x \geq 1.$$

Toisaalta

$$g(x^2) = g(f(g(x))) = g(x)^4,$$

ja jälleen sijoituksella $g(x) = c^{G(\log_d x)}$ saadaan funktionaaliyhtälö $G(2y) = 4G(y)$, jolla on esim. ratkaisu $G(x) = x^2$. Saadaan ratkaisuehdokas

$$g(x) = c^{(\log_d x)^2}, \quad x \geq 1.$$

Vakiot a, b, c ja d pitää valita sopivasti. Sijoittamalla alkuperäisiin yhtälöihin keksitään melko helposti ratkaisut

$$f(x) = 2^{\sqrt{\log_2 x}} \quad \text{ja} \quad g(x) = 16^{(\log_2 x)^2}, \quad x \geq 1.$$

Välillä $x \in (0,1)$ voidaan määritellä $f(x) = 1/f(1/x)$ ja $g(x) = 1/g(1/x)$. Edelleen voidaan asettaa $f(0) = 0$ ja $g(0) = 0$. Negatiivisilla x voidaan määritellä $f(x) = f(-x)$.

Halutunlaiset funktiot ovat siis olemassa.

9. Todista, että jos a, b ja c ovat positiivisia reaalilukuja, joille $abc \geq 2^9$, pätee epäyhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{1+(abc)^{1/3}}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}}\right).$$

Ratkaisu. Jos voitaisiin olettaa $a, b, c \geq 2$, voitaisiin asettaa $a = e^{a_0}$ jne. ja soveltaa Jensenin epäyhtälöä. Funktio $x \mapsto 1/\sqrt{1+\exp(x)}$ on kuitenkin konveksi vain, kun $x \geq \ln 2$.

Väite seuraa epäyhtälöistä

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}, \quad x, y > 0, xy \geq 2^6, \tag{1}$$

ja

$$\frac{2}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2 y}}}, \quad x, y > 0, x^2 y \geq 2^9. \tag{2}$$

Voidaan nimittäin olettaa, että $a \geq b \geq c$, jolloin $ab \geq 2^6$ (koska muuten $abc < 2^9$). Saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{ab}}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}},$$

joka on tehtävän väite.

Todistetaan epäyhtälö (1). Tarkastellaan funktiota $f(x) = 1/\sqrt{1+x} + 1/\sqrt{1+p/x}$, kun $x > 0$ ja $p \geq 2^6$. Funktion derivaatta on

$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x)^{3/2}} + \frac{p}{2(1+p/x)^{3/2}x^2}$$

ja

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{p}{2(1+p/x)^{3/2}x^2} \geq \frac{1}{2(1+x)^{3/2}} \iff p^2(1+x)^3 \geq x^4(1+p/x)^3 = x(x+p)^3$$

Tavoite on todistaa, että $f(x)$:n minimi on $x = \sqrt{p}$, joten erotetaan vasemman ja oikean puolen erotuksesta tekijäksi $p - x^2$:

$$\begin{aligned} p^2(1+x)^3 - x(x+p)^3 &= p^2(1+3x+3x^2+x^3) - x(x^3+3x^2p+3xp^2+p^3) \\ &= -x^4 + (p^2-3p)x^3 + (3p^2-p^3)x + p^2 = (p-x^2)(x^2+(3p-p^2)x+p). \end{aligned}$$

Ensimmäisellä toisen asteen polynomilla on yksinkertainen juuri $\sqrt{p}$:ssä. Jälkimmäisellä toisen asteen polynomilla on kaksi reaalijuurta, jos $(3p-p^2)^2 > 4p$ eli $p^4 - 6p^3 + 9p^2 - 4p > 0$. Tämä toteutuu, jos esim. $p > 6$, koska silloin $p^4 - 6p^3 + 9p^2 - 4p > (p-6)p^3 + 9p(p-1) > 0$. Juurien summa on $p^2 - 3p > 0$ ja tulo on p. Tästä seuraa, että juuret ovat positiivisia ja $\sqrt{p}$:n eri puolilla. Olkoot juuret $\alpha \in (0, \sqrt{p})$ ja toinen $\beta \in (\sqrt{p}, \infty)$, jolloin polynomien tulon (ja siten derivaatan $f'(x)$) etumerkki on seuraava:

x	0		α		$\sqrt{p}$		β		∞
$p - x^2$		+	+	+	0	$-$	$-$	$-$	
$x^2 + (3p-p^2)x + p$		+	0	$-$	$-$	$-$	0	+	
tulo		+	0	$-$	0	+	0	$-$	

Siis f:llä on paikallinen minimi $\sqrt{p}$:ssä. Rajoilla $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ ja $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, joten $f(\sqrt{p}) = 2/\sqrt{1+\sqrt{p}}$ on globaali minimi, kunhan $p > 9$.

Todistetaan epäyhtälö (2). Tällä kertaa tarkastellaan funktiota $g(x) = 2/\sqrt{1+x} + 1/\sqrt{1+q/x^2}$, kun $q \geq 2^9$ ja $x > 0$. Derivaatta on

$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^{3/2}} + \frac{q}{(1+q/x^2)^{3/2}x^3} = \frac{-(x^2+q)^{3/2} + q(x+1)^{3/2}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+q}\,(x^3+x^2+qx+q)}$$

ja sillä on sama etumerkki kuin lausekkeella

$$q^{2/3}(x+1) - (x^2+q).$$

Tämän polynomin yksi juuri on $\sqrt[3]{q}$ ja toinen on $q^{2/3} - q^{1/3}$. Siten $g(x)$:llä on paikallinen minimi kohdassa $x = \sqrt[3]{q}$, ja koska $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1 \geq g(\sqrt[3]{q})$, kun $x \geq 2^9$, tämä on myös globaali minimi.

10. Etsi kaikki reaaliluvut $x, y, z \geq 1$, joille

$$\min(\sqrt{x+xyz}, \sqrt{y+xyz}, \sqrt{z+xyz}) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Ratkaisu. Olkoot $a, b, c \geq 0$ luvut, joille $x = 1+a^2$, $y = 1+b^2$ ja $z = 1+c^2$. Voidaan olettaa, että c on luvuista pienin, jolloin tehtävän ehto on

$$(1+c^2)[1+(1+a^2)(1+b^2)] = (a+b+c)^2.$$

Cauchyn–Schwartzin epäyhtälö jonoille $(1, a+b)$ ja $(c, 1)$ on

$$(a+b+c)^2 \leq [1+(a+b)^2](1+c^2)$$

joten

$$(1+a^2)(1+b^2) \leq (a+b)^2,$$

mistä saadaan $(1-ab)^2 \leq 0$ eli $ab = 1$. Tällöin jälkimmäisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus, samoin Cauchyn–Schwartzin epäyhtälössä, joten $c(a+b) = 1$. Toisaalta oletuksista $ab = 1$ ja $c(a+b) = 1$ seuraa $c = 1/(a+b) < 1/b = a$ ja vastaavasti $c < b$, jolloin tehtävän ehto on voimassa.

Siis ratkaisut ovat

$$\{x, y, z\} = \left\{1+a^2, 1+\frac{1}{a^2}, 1+\left(\frac{a}{a^2+1}\right)^2\right\}$$

kaikilla $a > 0$.