Matematiikan olympiavalmennus: valmennustehtävät, huhtikuu 2020

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää – `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista. Kuuleman mukaan ainakin Maunulassa on järjestetty ryhmäratkomistilaisuuksia.

Kirjeen liitteenä on itseopiskelumateriaalina Anne-Maria Ernvall-Hytösen esitelmäkalvot, joista voi olla apua tehtävissä 14 ja 15.

Ratkaisuja toivotaan 10.5.2020 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna tai sähköpostitse. Helpommat tehtävät: `n.palojarvi@gmail.com`, vaativammat: `olli.jarviniemi@gmail.com`.

Joukkuevalinnat perustuvat kokonaisharkintaan, jossa otetaan huomioon palautetut tehtävät ja menestyminen kilpailuissa ja valintakokeissa.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Huomioi tietosuojalauseke:
`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Tekeillä on taas haastavia **viikottaisia harjoituskokeita**, joihin voi ilmoittautua ja joista saa lisätietoa sähköpostitse Olli Järviniemeltä (sähköpostiosoite yllä).

Helpompia tehtäviä

1. Pyöreän pöydän ympärillä on n tuolia. Monellako tavalla n ihmistä voi istua pöydän ympärille? Moniko näistä tavoista on aidosti erilainen (kaksi istumajärjestystä ovat erilaiset, jos löytyy henkilöt A ja B jotka istuvat vierekkäin toisessa, mutta eivät toisessa istumajärjestyksessä)?

2. Huvipuiston laitteessa on l lasten istumapaikkaa ja a aikuisten istumapaikkaa, $l \leq a$. Kaikki istumapaikat ovat peräkkäin ja muodostavat jonon.

Lapset alkavat riehua, jos he ovat jonossa peräkkäin. Monellako tavalla istumapaikkojen järjestys voidaan valita niin, että lapset eivät ole missään kohtaa peräkkäin?

3. Todista väite $\binom{n}{s} = \frac{n}{s}\binom{n-1}{s-1}$

- ”laskemalla” eli nojautuen termin $\binom{n}{k}$ matemaattiseen kaavaan $n!/((n-k)!k!)$
- nojautuen termin $\binom{n}{k}$ kombinatoriseen määritelmään eli ”montako k:n alkion osajoukkoa on n:n alkion joukolla”. Vihje: voit ajatella n:ää henkilöä, joista pitää valita s:n henkilön hallitus, jossa yksi hallituksen jäsenistä on puheenjohtaja.

4. Todista väite $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$ kun $n \geq r \geq k$

- ”laskemalla” eli nojautuen termin $\binom{n}{k}$ matemaattiseen kaavaan $n!/((n-k)!k!)$
- nojautuen termin $\binom{n}{k}$ kombinatoriseen määritelmään eli ”montako k:n alkion osajoukkoa on n:n alkion joukolla”. Vihje: Valitaan hallitus ja hallituksen sisältä johtoryhmä.

5. Kokonaisluvuilla $a, b > 1$ pätee $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$. Etsi pienin mahdollinen luvun $a + b$ arvo.

6. Osoita, että kaikki jonon $10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$ jäsenet ovat yhdistettyjä lukuja.

7. Tutkitaan tasossa xy-koordinaatistossa niiden pisteiden (x, y) muodostamaa aluetta, joille

$$|x| + |y| + |x + y| \leq 2.$$

Mikä on tämän alueen pinta-ala?

8. Kuinka monella eri tavalla $2 \times n$-ruudukko voidaan peittää 1×2-dominolaatoilla?

9. Olkoot $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ja $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n a_{n-1}}{a_{n-2}}$, kun $n \geq 3$. Osoita, että kaikki luvut a_n ovat kokonaislukuja.

10. Mikä on seuraavien 4040 luvun mediaani?

$$1, 2, 3, ..., 2020, 1^2, 2^2, 3^2, ..., 2020^2$$

11. Kokonaisluvulle n pätee $(n+1)! + (n+2)! = n! \cdot 440$. Mikä on luvun n numeroiden summa?

12. Valitaan joukosta $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ kuusi eri lukua. Kuinka todennäköisesti valituista luvuista toiseksi pienin on luku 3?

13. Tasakylkisessä kolmiossa AMC on $AM = AC$. Mediaanit MV ja CU ovat kohtisuorassa toisiaan vasten ja $MV = CU = 12$. Mikä on kolmion AMC pinta-ala?

14. Todista, että

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

kun $x > 0$.

15. Todista, että

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq abc,$$

kun $a, b, c > 0$.

Vaativampia tehtäviä

16. Positiiviset kokonaisluvut $x_1, x_2, \dots, x_7$ toteuttavat ehdot $x_6 = 144$ ja $x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n)$, kun $n = 1, 2, 3, 4$. Etsi luvun x_7 kolme viimeistä numeroa.

17. Määritellään lukujono $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ asettamalla $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$. Osoita, että pätee $a_0 < a_1 < a_2, \dots$ jos ja vain jos $a_0 = \frac{1}{5}$.

18. Olkoon (a_n) rajoitettu lukujono, jolle pätee

$$a_n < \frac{1}{2n+2007} + \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{a_k}{k+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Osoita, että $a_n < \dfrac{1}{n}$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$.

19. Määritä kaikki välin $0 \leq x \leq 2\pi$ luvut x, jotka toteuttavat epäyhtälöt

$$2\cos x \leq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leq \sqrt{2}.$$

20. Olkoot $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_5 \leq 1$. Todista epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^3}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 - x_i^5 + 5} \leq \frac{3}{5}.$$

21. Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ reaalilukuja ja olkoon $n > 3$. Oletetaan, että pätee

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \quad \text{ja} \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq n^2.$$

Osoita, että $\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 2$.

22. OIlkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja olkoot M, N ja P kolmion keskipisteestä (eli painopisteestä eli mediaanien leikkauspisteestä) sivuille piirrettyjen kohtisuorien kantapisteet. Osoita, että

$$\frac{4}{27} < \frac{|MNP|}{|ABC|} \leq \frac{1}{4}$$

23. Olkoot x, y ja z epänegatiivisia reaalilukuja ja oletetaan, että $x + y + z = 1$. Osoita, että

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$$

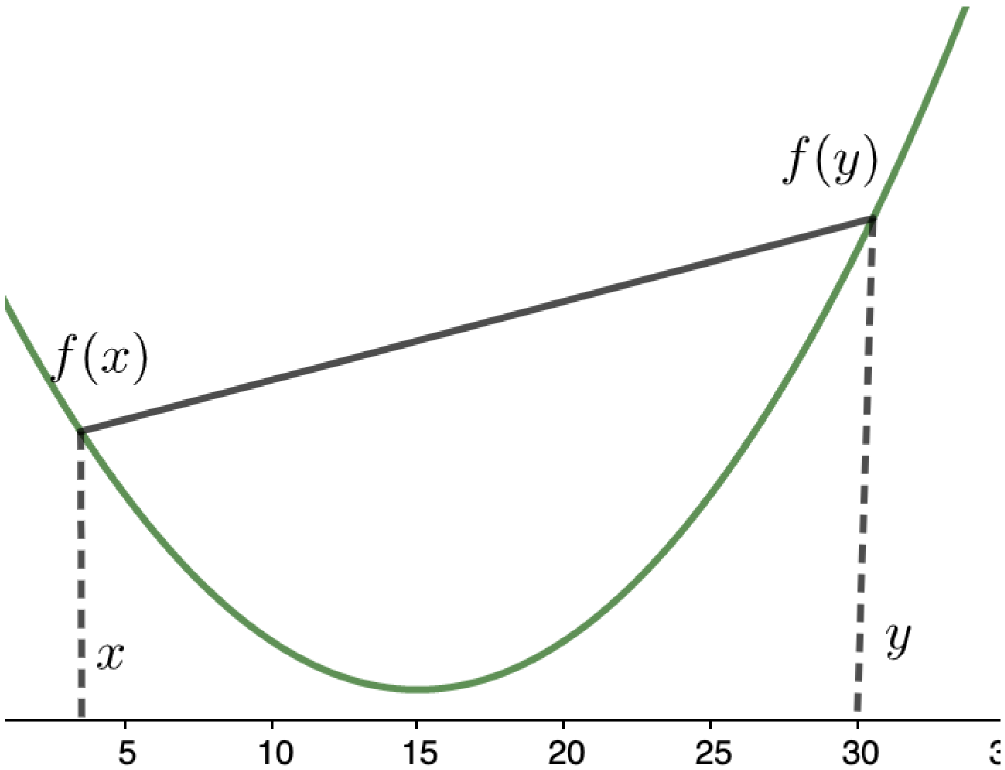
ja määritä milloin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus.

Jensenin epäyhtälö ja aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

3. huhtikuuta 2020

Konveksi funktio

Funktiota kutsutaan konveksiksi, mikäli millä tahansa kahdella funktion pisteellä pätee, että niiden väliin piirretty jana on funktion yläpuolella tällä välillä. Täsmällisesti konveksisuus tarkoittaa sitä, että jos $0 \leq \alpha \leq 1$, niin $\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geq f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right)$.



Konveksit funktiot ja derivaatta

Mikäli funktio $f(x)$ on kahdesti derivoituva, voi konveksisuusehdon kirjoittaa muodossa $f''(x) \geq 0$. Esimerkiksi siis $f(x) = x^2$ on konveksi, sillä $f''(x) = 2 > 0$. Konveksisuuden näkee tässä tapauksessa nopeasti kuvaajastakin. Toisaalta funktio $g(x) = x^3 - 5x^2$ ei ole kaikkialla konveksi, sillä $g''(x) = 6x - 10$, joka ei ole aina vähintään nolla. Kannattaa huomata, että jos funktio $f(x)$ on kahdesti derivoituva ja $f''(x) \leq 0$, niin funktio $-f(x)$ on konveksi.

Jensenin epäyhtälö

Jensenin epäyhtälön mukaan konveksille funktiolle $f(x)$ pätee

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \geq f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\right),$$

kun $0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leq 1$ ja $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$.
Todistetaan tämä induktiolla.

Induktiotodistuksen alku

Induktiotodistuksen alkuaskel on tosi, sillä $0 \leq \alpha \leq 1$, niin
$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geq f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right)$ kuten jo aiemmin todettiin.
Tämä vastaa tapausta $n = 2$.
Tehdään induktio-oletus: Väite pätee jollain arvolla k.
Induktioväite on, että todistettava väite pätee arvolla $k+1$.

Induktio-oletus

Induktio-oletus siis sanoo, että

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_k f(x_k) \geq f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k\right),$$

kun $0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \leq 1$ ja $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$.
Siirrytään nyt induktioväitteen todistukseen.

Induktioväitteen todistus

Haluamme siis todistaa väitteen

$$\beta_1 f(x_1)+\beta_2 f(x_2)+\cdots+\beta_{k+1} f(x_{k+1}) \geq f\left(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_{k+1} x_{k+1}\right),$$

kun $0 < \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k+1} \leq 1$ ja $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k+1} = 1$.
Otetaan ensimmäiset k termiä. Induktio-oletuksen nojalla pätee:

$$\frac{\beta_1}{1-\beta_{k+1}} f(x_1) + \frac{\beta_2}{1-\beta_{k+1}} f(x_2) + \cdots + \frac{\beta_k}{1-\beta_{k+1}} f(x_k)$$

on vähintään yhtä suuri kuin

$$f\left(\frac{\beta_1}{1-\beta_{k+1}} x_1 + \frac{\beta_2}{1-\beta_{k+1}} x_2 + \cdots + \frac{\beta_k}{1-\beta_{k+1}} x_{k+1}\right).$$

Huomaa, että $\frac{\beta_1}{1-\beta_{k+1}} + \frac{\beta_2}{1-\beta_{k+1}} + \cdots + \frac{\beta_k}{1-\beta_{k+1}} = 1$.

Induktioväitteen todistus jatkuu

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2) + \cdots + \beta_{k+1} f(x_{k+1})$$

$$= (1-\beta_{k+1})\left(\frac{\beta_1}{1-\beta_{k+1}} f(x_1) + \cdots + \frac{\beta_k}{1-\beta_{k+1}} f(x_k)\right) + \beta_{k+1} f(x_{k+1})$$

ja tämän voidaan arvioida olevan vähintään

$$(1-\beta_{k+1}) f\left(\frac{\beta_1}{1-\beta_{k+1}} x_1 + \cdots + \frac{\beta_k}{1-\beta_{k+1}} x_{k+1}\right) + \beta_{k+1} f(x_{k+1}),$$

mutta tämähän onkin Jensenin epäyhtälön vasen puoli, kun $n = 2$,

Induktioväitteen todistuksen loppu

joten tämän voidaan arvioida olevan vähintään

$$f\left((1-\beta_{k+1})f\left(\frac{\beta_1}{1-\beta_{k+1}}x_1+\cdots+\frac{\beta_k}{1-\beta_{k+1}}x_{k+1}\right)+\beta_{k+1}f(x_{k+1}\right)$$

$$=f\left(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_{k+1}x_{k+1}\right)$$

Miten tätä käytetään?

Funktio $f(x)$ paikalle voi siis laittaa minkä tahansa konveksin funktion. Esimerkiksi $f(x) = x^2$ on tällainen. Kertoimiksi a_i voi asettaa esimerkiksi luvun $\frac{1}{n}$, eli $a_i = \frac{1}{n}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin sijoitus Jensenin epäyhtälöön antaa

$$\frac{1}{n}x_1^2 + \frac{1}{n}x_2^2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n^2 \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2,$$

eli

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{n}.$$

Harjoitustehtäviä

Ennen kuin jatketaan teorian kanssa, harjoitellaan vähän:

1. Osoita, että $g(x) = x^3$ on konveksi, kun $x \geq 0$ ja kirjoita Jensenin epäyhtälö kertoimilla $a_i = \frac{1}{n}$ tälle funktiolle.
2. Osoita, että $h(x) = \frac{1}{x}$ on konveksi, kun $x > 0$ ja kirjoita Jensenin epäyhtälö kertoimilla $a_i = \frac{1}{n}$ tälle funktiolle. Saatko jonkin epäyhtälön, jonka tunnistat?

Ratkaisu ensimmäiseen harjoitustehtävään

Funktio $g(x)$ on konveksi, kun $x \geq 0$, sillä $g''(x) = 6x$. Vastaavasti kuin aiemmin sijoitus Jensenin epäyhtälöön antaa

$$\frac{1}{n}x_1^3 + \frac{1}{n}x_2^3 + \cdots + \frac{1}{n}x_n^3 \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^3,$$

eli

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3}{n^2}.$$

Ratkaisu toiseen harjoitustehtävään

Funktio $h(x)$ on konveksi, kun $x \geq 0$, sillä $h''(x) = \frac{2}{x^3}$. Vastaavasti kuin aiemmin sijoitus Jensenin epäyhtälöön antaa

$$\frac{1}{nx_1} + \frac{1}{nx_2} + \cdots + \frac{1}{nx_n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n},$$

Tämä epäyhtälö tunnetaan myös aritmeettis-harmoonisena epäyhtälönä. Tämä epäyhtälö on sama kuin minkä mukaan kuluu pidemmän aikaa, 120km matkustamiseen, jos ensin ajaa 60km nopeudella 30km/h ja sitten loput nopeudella 90km/h kuin jos ajaisi koko ajan tasaisella nopeudella 60km/h.
Nyt onkin aika jatkaa teoriaa ja siirtyä aritmeettis-geometriseen epäyhtälöön.

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

Olkoot luvut $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Nyt

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Tätä tulosta kutsutaan aritmeettis-geometriseksi epäyhtälöksi. Ennen kuin todistetaan tämä käyttäen Jensenin epäyhtälöä, tehdään huomio, että toisella puolella on summa, toisella tulo, tarvitaan siis Jenseniin epäyhtälöön funktio, joka sujuvasti muuttaa tuloja summiksi. Tällainen on logaritmi. (Tämä yleisfilosofisena ohjeena: summan ja tulon välin kulkemiseen epäyhtälöissä on jokin logaritmin johdannainen hyvä idea.)

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistus

Olkoon $f(x) = -\ln x$. Nyt $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Käytetään kertoimia $a_i = \frac{1}{n}$. Tällöin

$$-\frac{1}{n}\ln x_1 - \frac{1}{n}\ln x_2 - \cdots - \frac{1}{n}\ln x_n \geq -\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

joka on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \geq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

kanssa. Tästä väite seuraakin logaritmin kasvavuuden nojalla.

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö muutamalla muuttujalla

Kaksi hyödyllistä erikoistapausta:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

ja

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

kun $a, b, c > 0$.

Muutama harjoitustehtävä

1. Todista, että
$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$
kun $x > 0$.
2. Todista, että
$$\frac{a+b}{2}\frac{a+c}{2}\frac{b+c}{2} \geq abc,$$
kun $a, b, c > 0$.