HELMIKUUN 2014 VALMENNUSTEHTÄVÄT

HELPOMPI JA VAIKEAMPI SARJA

Ohessa lokakuun valmennustehtäväsarja. Kannattaa huomioida, että valmennustehtäväaktiivisuudella on yhä suurempi vaikutus joukkuevalintoihin. Valmennustehtävien aktiivinen ratkaiseminen on myös välttämätöntä, mikäli haluaa kilpailumatematiikkaa oppia.

Ratkaisuja kaivataan marraskuun loppuun mennessä osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Matematik och Statistik, Åbo Akademi, Fänriksgatan 3, 20500 Åbo. Mahdollisista epäselvyyksistä tehtävissä voi kysyä soittamalla 041-5228141 tai lähettämällä sähköpostia aernvall@abo.fi.

Helpommat tehtävät

(1) Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\leqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

(2) Olkoot x, y ja z sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $x^2+y^2+z^2=xyz$. Osoita, että

$$x+y+z\geqslant 9,\quad xy+yz+zx\geqslant 27,\quad \text{ja}\quad xyz\geqslant 27.$$

(3) Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja. Mikä on lausekkeen

$$x^6+y^6+z^6-6xyz$$

pienin mahdollinen arvo?

(4) Olkoot a, b, c ja d sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $a+b+c+d=1$. Osoita, että

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right)\geqslant 625.$$

(5) Seitsemäntoista tutkijaa käyvät kaikki keskenään kirjeenvaihtoa kolmesta eri aiheesta. Osoita, että jotkin kolme tutkijaa käyvät keskenään kirjeenvaihtoa samasta aiheesta.

(6) Olkoot a_1, a_2, …, a_n kokonaislukuja Osoita, että joidenkin näistä luvuista summa on jaollinen luvulla n.

(7) Todista, että jokaisessa kymmenen kaksinumeroisen luvun joukossa on kaksi erillistä osajoukkoa, joiden elementtien summat ovat yhtä suuret.

(8) Kuinka moni lukua 400 pienempi positiivinen kokonaisluku on jaollinen täsmälleen kahdella luvuista kaksi, viisi ja seitsemän?

(9) Miten monella tavalla voidaan järjestää kirjaimet ABCABC niin, että millään paikalla ei ole samaa (samanlaista) kirjainta kuin alunperin? (eli A ei saa olla ensimmäisenä, C ei saa olla kolmantena, jne)

Vaikeammat tehtävät

(1) Ratkaise yhtälö
$$|2x + |x| + 1| = 3.$$
(2) Määritä ne luvut a, joille yhtälöllä
$$a3^x + 3^{-x} = 3$$
on tasan yksi ratkaisu x.

(3) Laske $a + b$, kun
$$x + \frac{1}{x} = 3,\ x^2 + \frac{1}{x^2} = a \text{ ja } x^3 + \frac{1}{x^3} = b.$$
(4) Yhtälöillä
$$x^2 + 2ax + b^2 = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + 2bx + c^2 = 0$$
on kummallakin kaksi erisuurta reaalista ratkaisua. Kuinka monta reaalista ratkaisua on yhtälöllä
$$x^2 + 2cx + a^2 = 0?$$
(5) Yhtälön $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kahden ratkaisun summa on 0. Osoita, että $c = ab$.

(6) Kun polynomi $P(x)$ jaetaan binomilla $x - 2001$, on jakojäännös 2001. Kun jakajana on $x + 2001$, on jakojäännös -2001. Mikä on jakojäännös, kun jakajana on ?

(7) Olkoot a, b ja c sellaisia ei-negatiivisia reaalilukuja, että $a + b + c = 2$. Osoita, että
$$a^4 + b^4 + c^4 + abc \geqslant a^3 + b^3 + c^3.$$
(8) Olkoot a, b ja c reaalilukuja väliltä $[0, 2]$, ja oletetaan, että $a + b + c = 5$. Osoita, että
$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9.$$
(9) Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $27ab + 2bc + 18ca = 81$. Osoita, että
$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geqslant 3.$$
(10) Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille $x + y + z = 3$. Osoita, että
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geqslant xy + yz + zx.$$