

ELOKUUN VALMENNUSTEHTÄVÄSARJA 2011

Ratkaisuja kaivataan 1.9.2011 osoitteeseen Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Purpuripolku 7-9 B 10, 00420 Helsinki.

- (1) Mikä on pienin määrä lukuja, jotka pitää poistaa joukosta $\{1, 2, \dots, 20\}$, jotta minkään kahden jäljellä olevan keskenään erisuuren joukon alkion summa ei ole kokonaisluvun neliö?
- (2) Osoita, että

$$\left| a\sqrt{3} - b\sqrt{5} \right| > \frac{4}{4a + 5b}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b .

- (3) Pisteet M ja N ovat kolmion ABC sivujen AC ja BC keskipisteet. Osoita, että pisteiden C , M ja N kautta kulkeva ympyrä sivuaa sivua AB , jos ja vain jos $AB = \frac{AC+BC}{\sqrt{2}}$.
- (4) Etsi kaikki reaaliset a , joilla on olemassa funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdon

$$f(\sin x) + af(\cos x) = \cos 2x$$

kaikilla reaalilla x .

- (5) Teräväkulmaisen kolmion sivulla AB on pisteet L ja H siten, että CL on kulmanpuolitaja ja CH on korkeusjana. Olkoot P ja Q sivuilla AC ja BC pisteistä L piirrettyjen kohtisuorien leikkauspisteet. Osoita, että $AP \cdot BH = BQ \cdot AH$.
- (6) Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$m^2 + 2 \cdot 3^n = m(2^{n+1} - 1)$$

epänegatiivisten kokonaislukujen joukossa.

- (7) Nollasta poikkeavat reaaliluvut toteuttavat ehdon
- (1) $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$.
- (a) Mitä on $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c - 2)$?
- (b) Onko olemassa pareittain erisuuria lukuja a , b ja c , jotka toteuttavat ehdon (1)?
- (8) $n \times n$ -ruudukon jokaisessa ruudussa istuu koppakuoriainen. Täsmälleen kello kaksitoista jokainen koppakuoriainen ryömii johonkin naapuriruutuun (ruudut ovat naapureita, jos ja vain jos niillä on yhteinen sivu). Kuinka monta ruutua voi korkeintaan jäädä kertaluonteisen ryöminnin seurauksena tyhjäksi, jos
- (a) $n = 8$
- (b) $n = 9$?
- (9) Etsi reaalilukujen joukossa määritellyt reaaliarvoiset funktiot f ja g , jotka toteuttavat ehdon $f(f(x + y)) = xf(y) + g(x)$ kaikilla x ja y .
- (10) Onko olemassa sellaisia luonnollisia lukuja m , x ja y , että

$$2011^x - 1007^y \mid m^2 + 25$$