Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, joulukuu 2018

Huomioi **tietosuojalauseke:** `https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`

Ratkaisuja toivotaan seuraavaan valmennusviikonloppuun 11.1.2019 mennessä henkilökohtaisesti ojennettuna, sähköpostitse osoitteeseen `npalojar@abo.fi` tai postitse osoitteeseen

Neea Palojärvi
Ratapihankatu 12 A 1
20100 Turku.

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. **Sinnikäs yrittäminen kannattaa.** Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella.

Kilpailujoukkueisiin valinnan välttämätön (muttei riittävä) ehto on, että asianomainen on kilpailua edeltävänä aikana suorittanut merkittävän osan annetuista tehtävistä.

Tehtäviin pujahtaa joskus **virheitä**. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla `https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Uutena kokeiluna myös **viikkotehtävät:**

`https://keskustelu.matematiikkakilpailut.fi/c/viikkotehtavat`

Helpompia tehtäviä

1. $ABCDEF$ on säännöllinen kuusikulmio ja G on sivun AB keskipiste. Mikä on kuusikulmion $ABCDEF$ pinta-alan suhde kolmion GDE pinta-alaan?

2. Polynomille $f(x)$ pätee $f(5-x) = f(5+x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Yhtälöllä $f(x) = 0$ on neljä erisuurta reaalista ratkaisua. Selvitä ratkaisujen summa.

3. Tarkastellaan lukua

$$S = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots111}_{\text{2002 numeroa}}.$$

(a) Mitkä ovat luvun S kymmenjärjestelmäesityksen viisi viimeistä numeroa?
(b) Montako kertaa numero 1 esiintyy luvun S kymmenjärjestelmäesityksessä?

4. Positiivisten kokonaislukujen jonolle $a_1, a_2, \ldots$ pätee $a_{a_n} + a_n = 2n$ kaikilla $n \geq 1$. Todista, että $a_n = n$ kaikilla n.

5. Olkoon $P(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Kokonaislukujonolle $x_1, x_2, \ldots$ pätee $x_1 = x_{2000} = 1999$ ja $x_{n+1} = P(x_n)$, kun $n \geq 1$. Laske

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{1999}}{x_{2000}}.$$

6. Todista:

$$\frac{x_1^3}{x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \cdots + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + 5} \leq \frac{3}{5},$$

kun $x_1, x_2, \ldots, x_6 \in [0, 1]$ ovat reaalilukuja.

7. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, AA_1, BB_1 ja CC_1 sen korkeusjanat ja O mielivaltainen kolmion $A_1B_1C_1$ sisäpiste. Olkoon

- M pisteen O projektio suoralle AA_1;
- N pisteen O projektio suoralle BC;
- P pisteen O projektio suoralle BB_1;
- Q pisteen O projektio suoralle CA;
- R pisteen O projektio suoralle CC_1; ja
- S pisteen O projektio suoralle AB.

Todista, että suorat MN, PQ ja RS leikkaavat yhdessä pisteessä.

8. Kun a on positiivinen kokonaisluku, määritellään jono $\langle a_n \rangle$ säännöillä $a_0 = a$ ja $a_n = a_{n-1} + 40^{n!}$, kun $n \geq 2$. Todista, että jokaisessa tällaisessa jonossa on äärettömän monta lukua, jotka ovat jaollisia 2009:llä.

9. Kirjoitetaan neliön kunkin sivun viereen positiivinen kokonaisluku punaisella värillä. Kirjoitetaan neliön kunkin kärkipisteen viereen vihreällä värillä viereisten punaisten lukujen tulo. Vihreiden lukujen summa on 40. Mitkä ovat mahdollisia punaisten lukujen summia?

Vaativampia tehtäviä

10. Olkoon x ja y ei-negatiivisia reaalilukuja. Todista epäyhtälö

$$(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4x^2y^2.$$

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

11. Tarkstellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}$. Selvitä ne a:n arvot, joille epäyhtälö $|f(x)| \leq 1$ on tosi kaikilla $x \in [0, 1]$.

12. Luonnolliset luvut $1, 2, \ldots, 100$ asetetaan mielivaltaiseen järjestykseen ympyrän kehälle. Kunkin kolmen peräkkäisen luvun summa lasketaan. Todista, että näiden summien joukossa on kaksi lukua, joiden erotus on enintään 2.

13. Selvitä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$x \cdot f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot f(\{x\}) + \{x\} \cdot f(\lfloor x \rfloor)$$

kaikilla x, missä $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on enintään x, ja $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

14. Etsi kolmannen asteen reaalikertoiminen polynomi, jonka juurista kukin on polynomin

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 9x + 9$$

yhden juuren neliö.

15. Kun $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ja $x = \sqrt[3]{abc}$, todista epäyhtälö

$$(a + b + x)^{-1} + (b + c + x)^{-1} + (c + a + x)^{-1} \leq x^{-1}.$$

16. Tasasivuisen kolmion ABC sivu on 2. Osoita, että jos P on kolmion sisäympyrän mielivaltainen piste, niin $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 5$.

17. Pyöreän pöydän ympärillä istuu 2019 henkilöä. Heidät on numeroitu juoksevasti myötäpaivään. Numero 1 aloittaa sanomalla ”yksi”. Tämän jälkeen jokainen istuja sanoo järjestyksessä ”kaksi”, ”kolme”, ”yksi”, ”kaksi” jne. Jokainen, joka sanoo ”kaksi” tai ”kolme” poistuu heti. Minkänumeroinen istuja jää poydän äareen?

18. Kolmion ABC sivujen pituudet ovat a, b ja c. Kolmion ympäryskeskus on O ja sisäkeskus I, $I \neq O$. Olkoon vielä M ABC:n keskijanojen leikauspiste. Osoita, että $IM \perp BC$, jos ja vain jos $b = c$ tai $b + c = 3a$.

19. Olkoon M kolmion ABC sivun BC keskipiste. Ympyrä Γ, jonka halkaisija on AM, leikkaa AB:n myös pisteessä D ja AC:n myös pisteessä E. Γ:n pisteisiin D ja E piirretyt tangentit leikkaavat pisteessä P. Osoita, että $PB = PC$.

20. Olkoon X joukko, jossa on n alkiota, ja olkoot $A_1, \ldots, A_m$ sen sellaisia osajoukkoja, että

(i) $|A_i| = 3$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$

(ii) $|A_i \cap A_j| \leq 1$ kaikilla $i \neq j$.

Todista, että joukolla X on osajoukko, jossa on ainakin $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ alkiota ja jolla ei ole osajoukkonaan mitään joukoista A_i.