Matematiikan olympiavalmennus 2015 – toukokuun tehtävät

1. Kuperan viisikulmion jokainen lävistäjä on jonkin viisikulmion sivun suuntainen. Osoita, että jokaisessa tällaisessa parissa lävistäjän ja sivun pituuksien suhde on sama. Määritä tämä suhde.

2. Olkoot n ja r positiivisia kokonaislukuja ja olkoon A jokin sellainen tason hilapisteiden (siis kokonaislukukoordinaattisten pisteiden) joukko, että jokainen r-säteinen (avoin) ympyrä sisältää ainakin yhden A:n pisteen. Osoita, että jos A:n pisteet väritetään n:llä eri värillä, niin jotkin neljä samanväristä pistettä ovat suorakulmion kärjet.

3. Olkoon $u(k)$ positiivisen kokonaisluvun k suurin pariton tekijä. Todista, että

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{u(k)}{k} \geq \frac{2}{3}.$$

* * *

4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Sanomme, että positiivinen kokonaisluku k toteuttaa ehdon C_n, jos on olemassa $2k$ eri positiivista kokonaislukua a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_k, b_k, niin, että summat a_1+b_1, a_2+b_2, $\ldots$, a_k+b_k ovat kaikki eri lukuja ja pienempiä kuin n.

(a) Osoita, että jos k toteuttaa ehdon C_n, niin $k \leq \dfrac{2n-3}{5}$.

(b) Osoita, että luku 5 toteuttaa ehdon C_{14}.

(c) Osoita, että jos $\dfrac{2n-3}{5}$ on kokonaisluku, se toteuttaa ehdon C_n.

5. Olkoon ABC kolmio, joka ei ole tasakylkinen. Pisteistä A, B, C piirrettyjen keskijanojen jatkeet leikkaavat kolmion ympärysympyrän pisteissä L, M, N. Osoita, että jos $LM = LN$, niin $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.

6. Olkoon $x > 1$ reaaliluku, muttei kokonaisluku. Asetetaan $a_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x\lfloor x^n \rfloor$, kun $n = 1, 2, \ldots$. Osoita, että jono (a_n) ei ole jaksollinen.

* * *

7. Osoita, että jos $n \geq 71$, niin kuutio voidaan jakaa täsmälleen n:ksi pienemmäksi kuutioksi.

8. Määritä kaikki alkuluvut p ja q, joille $a^{3pq} \equiv a \mod 3pq$ kaikilla kokonaisluvuilla a.

9. Olkoot x, y, z reaalilukuja. Osoita, että seuraavat ehdot (i) ja (ii) ovat yhtäpitäviä.

(i) $x, y, z > 0$ ja $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq 1$.

(ii) Jokaiselle nelikulmiolle, jonka sivujen pituudet ovat a, b, c, d pätee $a^2x + b^2y + c^2z > d^2$.

* * *

10. Määritä $f(1)$, kun $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funktio, jolle pätee
(a) f on aidosti kasvava;
(b) $f(x) > -\dfrac{1}{x}$ kaikilla $x > 0$;
(c) $f(x)f\left(f(x) + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ kaikilla $x > 0$.

11. Olkoon A sellaisten positiivisten kokonaislukujen joukko, jotka voidaan esittää muodossa $a^2 + 2b^2$, missä a ja b ovat kokonaislukuja ja $b \neq 0$. Osoita, että jos p on alkuluku ja $p^2 \in A$, niin $p \in A$.

12. Kolmion ABC sivut ovat a, b, c, I on sen sisäympyrän keskipiste, G painopiste ja r sisäympyrän säde.
(a) Osoita, että kolmion CIG ala on $\dfrac{1}{6}|a - b|r$.
(b) Osoita, että jos $a = c + 1$ ja $b = c - 1$, niin $IG \| AB$. Määritä tässä tapauksessa janan IG pituus.

* * *

13. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja O sen ympärysympyrän keskipiste. Suorat CA ja CB leikkaavat kolmion AOB ympärysympyrän myös pisteissä P ja Q. Osoita, että $PQ \perp CO$.

14. Olkoon $n \geq 2$ annettu positiivinen kokonaisluku ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia lukuja, joiden summa on 1. Osoita, että aina. kun positiivisten lukujen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ summa on 1, pätee

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1 - a_i}.$$

Milloin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

15. Määritä kaksi luvun 2438100000001 alkutekijää (ilman koneapua).

Tehtävät ovat Etelä-Afrikan IMO-joukkueen harjoitusleirin viisi koetta vuodelta 2008, kukin $4\frac{1}{2}$ mittainen. Useimmat tehtävät ovat alkuaan jostain kansallisesta matematiikkakilpailusta. Lähetä ratkaisusi postitse (mieluummin) tai sähköpostitse kesäkuun puoliväliin mennessä. Osoitteet `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu` ja `matti.lehtinen@spangar.fi`.