Matematiikan olympiavalmennus
Valmennustehtävät, tammikuu 2018
Ratkaisuehdotuksia

Helpompia tehtäviä

1. Kolmion ABC ulkopuolelle piirretään neliö, jonka sivuista yksi on jana AB. Lisäksi piirretään toinen neliö, jonka sivuista yksi on jana BC. Osoita, että näiden neliöiden keskipisteet ja janan CA keskipiste muodostavat tasakylkisen suorakulmaisen kolmion.

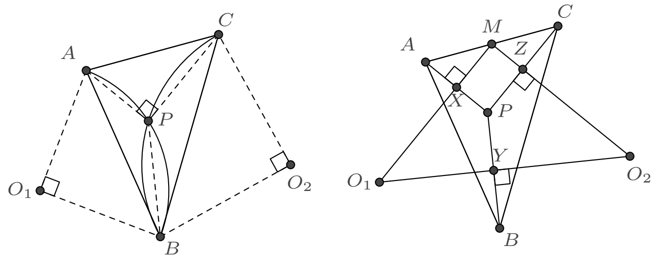
Ratkaisu. Olkoon piste P tehtävän neliöiden ympäripiirrettyjen ympyröiden leikkauspiste ($\neq B$). Kun kehäkulma on puolet keskuskulmasta $\measuredangle APB = 135°$ ja $\measuredangle BPC = 135°$. Siksi $\measuredangle CPA = 90°$ eli piste P on sellaisen ympyrän kehällä, jonka halkaisija on CA.

Merkitään neliöiden keskipisteitä O_1 ja O_2 ja sivun CA keskipistettä M. Merkitään janojen AP ja O_1M leikkauspistettä X, janojen PB ja O_1O_2 leikkauspistettä Y ja janojen O_2M ja PC leikkauspistettä Z.

Koska toisiaan leikkaavien ympyröiden keskipisteiden välinen jana on ympyröiden yhteisen jänteen keskinormaali tiedetään että $AP \perp O_1M$, $BP \perp O_1O_2$ ja $CP \perp O_2M$.

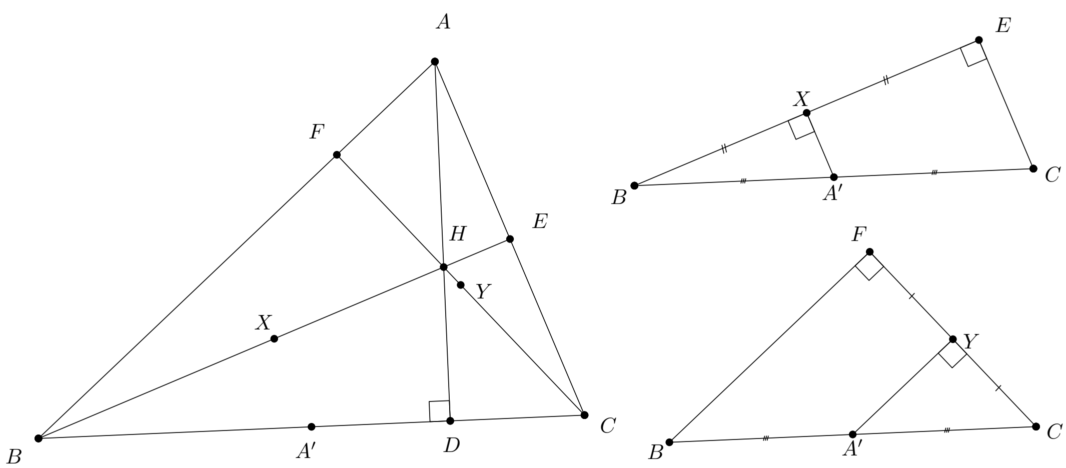
Nelikulmion kulmien astelukujen summa on $360°$ eli kun nelikulmioissa O_1YPX, O_2ZPY ja $MXPZ$ tiedetään kolme kulmaa, voidaan neljäs laskea.

Nyt $\measuredangle O_2MO_1 = \measuredangle XMZ = 360° - 90° - 90° - 90° = 90°$ ja $\measuredangle O_2O_1M = \measuredangle YO_1X = 360° - 135° - 90° - 90° = 45°$. Tämä on yhtäpitävä tehtävän väitteen kanssa.



2. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

Ratkaisu. Kolmion $A'DH$ ympäripiirretyn ympyrän halkaisija on jana $A'H$. Merkitään kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapistettä E ja kärjestä C lähtevän korkeusjanan kantapistettä F. Koska jana XA' on janan EC kuva homotetiakuvauksessa $B\left(\frac{1}{2}\right)$, kulma EXA' on suora. Siksi myös piste X on ympyrällä, jonka halkaisija on $A'H$. Samoin, kun jana YA' on janan FB kuva homotetiakuvauksessa $C\left(\frac{1}{2}\right)$, kulma $A'YF$ on suora. (Jos perustelu homotetiakuvauksen avulla tuntuu vaikealta, voit myös ajatella, että isompi ja pienempi kolmio ovat yhdenmuotoiset ja isompi on kaksi kertaa pienemmän kokoinen.) Siksi myös piste Y on ympyrällä, jonka halkaisija on $A'H$.



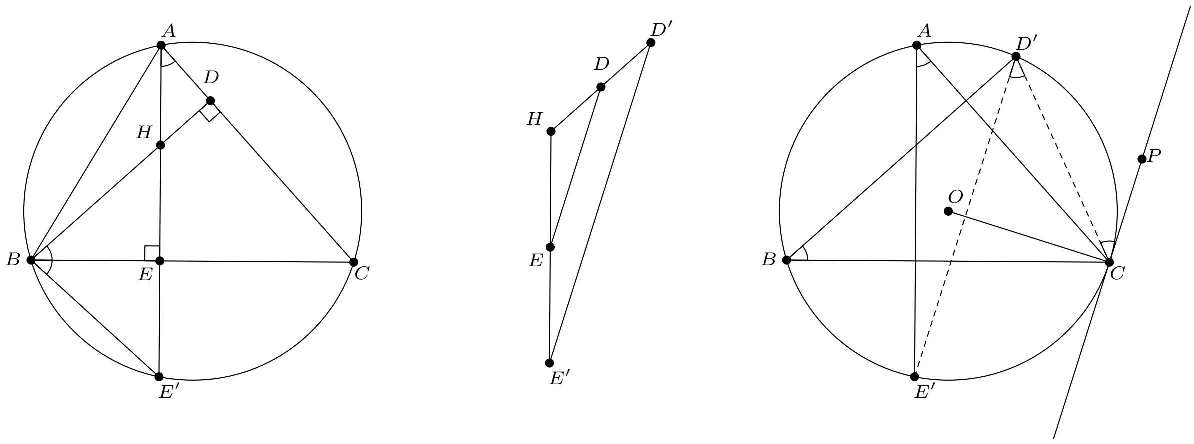
3. Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste ja piste E kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapiste. Olkoon kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O. Osoita, että $OC \perp DE$.

Ratkaisu. Jatketaan korkeusjanoja AE ja BD niin, että ne leikkaavat kolmion ympäripiirretyn ympyrän kehän pisteissä E' ja D'. Osoitetaan ensin aputulos $HE = EE'$, missä H on korkeusjanojen leikkauspiste. Kahden yhtäsuuren vastinkulman perusteella (ristikulmat $\angle DHA = \angle BHE$ ja $\angle ADH = \angle HEB = 90°$) kolmiot HDA ja HEB ovat yhdenmuotoisia. (Katso vasemmanpuoleista kuvaa.) Siksi myös $\angle HAD = \angle EBH$. Toisaalta kaarta $E'C$ vastaavina kulmina $\angle E'AC = \angle E'BC$. Nyt kolmiot BEH ja BEE' ovat yhtenevät. (Perustelu ksk: niillä on kaksi yhteistä vastinkulmaa ja yksi yhteinen vastinsivu.) Siksi $HE = EE'$.

Vastaavan päättelyn perusteella $HD = DD'$. Pisteen H keskisen homotetian perusteella $DE \parallel D'E'$. (Katso keskimmäistä kuvaa.)

Säde OC on kohtisuorassa ympyrän kehän pisteen C kautta kulkevaa tangenttia CP vastaan. Tangentin kehäkulmalauseen perusteella kaarta CD' vastaavina kehäkulmina $\angle PCD' = \angle CBD'$. Edellisen kohdan mukaan $\angle CBD' = \angle E'AC$. Kaarta $E'C$ vastaavina kehäkulmina $\angle E'AC = \angle CD'E'$. Siksi $D'E' \parallel CP$.

Nyt $OC \perp CP \parallel D'E' \parallel DE$.



4. Suorakulmainen lattia on määrä laatoittaa laatoilla, joiden muodot ovat 2×2 ja 1×4. Laattoja on tilattu sellaiset määrät, että laatoitus on mahdollista suorittaa. Yksi laatoista meni rikki, mutta saatavilla on ylimääräinen laatta toista muotoa. Osoita, että lattian laatoitus ei onnistu näillä laatoilla.

Ratkaisu. (Tehtäväsarjaan päätyi vahingossa tehtävä, joka on ekvivalentti yhden edeltävän sarjan tehtävän kanssa.) Ruudutetaan lattia ja kirjoitetaan ruutuihin numeroita:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\
2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \ldots \\
3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \ldots \\
4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots
\end{array}$$

Jokaisen 1×4-laatan peittämien numeroiden summa on $10 \equiv 2 \pmod 4$ ja 2×2-laatan summa on $\equiv 0 \pmod 4$. Jos 2×2-laatta vaihdetaan 1×4-laataksi tai päinvastoin, vaihdetaan 1×4-laattojen lukumäärän parillisuus, jolloin kaikkien peitettyjen numeroiden summan jakojäännos modulo 4 vaihtuisi joko $0 \mapsto 2$ tai $2 \mapsto 0$, eikä koko lattian peittäminen ole enää mahdollista.

5. Osoita, että kuuden henkilön joukossa on joko kolme henkilöä, jotka tuntevat kaikki toisensa, tai kolme henkilöä, joista ketkään kaksi eivät tunne toisiaan.

Ratkaisu. Piirretään kuusikulmio ja sille kaikki lävistäjät niin, että tehtävän henkilöt ovat kulmissa ja kahta henkilöä yhdistävä jana on punainen jos henkilöt tuntevat toisensa, muuten sininen. Valitaan yksi henkilö A. Hänen kulmastaan lähtee viisi janaa, joista ainakin kolme on samanvärisiä. Olkoot nämä AB, AC ja AD. Jos näiden janojen toisessa päässä olevien kulmien välissä, esimerkiksi henkilöitä B ja C yhdistämässä, on samanvärinen jana kuin nämä kolme, on löydetty yksivärinen kolmio ABC. Jos tällaista janaa ei ole, BCD on yksivärinen kolmio.

6. Olkoot $1, 4, \ldots$ ja $9, 16, \ldots$ kaksi aritmeettista jonoa. Muodostetaan joukko S yhdisteenä kummankin jonon 2018 ensimmäisestä alkiosta. Montako alkiota on joukossa S?

Ratkaisu. Pienin jonojen yhteinen luku on 16. Ensimmäisen jonon 2018. alkio on $1 + 3 \cdot 2017 = 6052$ ja toisen jonon 2018. alkio on $16 + 7 \cdot 2017 = 14135$. Koska jonojen erotusten 3 ja 7 pienin yhteinen monikerta on 21, luku esiintyy kummassakin jonossa jos ja vain jos se on muotoa $16 + 21k$, missä k on ei-negatiivinen kokonaisluku. Suurin kokonaisluku k, jolle $16 + 21k \leq 6052$, on 287, joten molemmissa jonoissa esiintyvät luvut $16 + 21k$, $0 \leq k \leq 287$. Siten yhdisteessä on $2 \cdot 2018 - 288 = 3748$ alkiota.

7. On annettuna kuuden positiivisen kokonaisluvun aidosti kasvava jono, jossa jokainen luku toisesta alkaen on edellisen luvun monikerta ja jonka kaikkien lukujen summa on 79. Mikä on jonon suurin luku?

Ratkaisu. Olkoot luvut $a_1 < a_2 < \cdots < a_6$. Jos $a_4 \geq 12$, niin $a_5 \geq 2a_4 \geq 24$ ja $a_6 \geq 2a_5 \geq 48$, jolloin $a_4 + a_5 + a_6 \geq 84$, mikä on liian paljon. Siten $a_4 < 12$. Tällöin ainoa tapa saada jonon ensimmäiset neljä lukua sopimaan tehtävän ehtoihin on asettaa $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ ja $a_4 = 8$. Olkoon $a_5 = ma_4 = 8m$ ja $a_6 = na_5 = 8mn$, missä kokonaisluvut $m, n \geq 2$. Saadaan $8m + 8mn = 79 - 15 = 64$ eli $m(1 + n) = 8$. Tämän yhtälön yksikäsitteinen ratkaisu on $m = 2$, $n = 3$. Siten $a_6 = 48$.

8. Konvehtirasiassa on 36 paikkaa ja konvehteja on 10 erilaista. Kuinka monta erilaista rasiaa voidaan tehdä, kun halutaan että jokaisessa rasiassa on ainakin yksi konvehti kutakin laatua? Konvehtien järjestyksellä rasiassa ei ole väliä, vain kunkin konvehtilaadun lukumäärällä.

Ratkaisu. Sijoitellaan vierekkäin konvehtirasian 36 paikkaa. Asetetaan joihinkin 10 paikkaan 10 konvehtia järjestyksessä vasemmalta oikealle $1, 2, \ldots, 10$. Aika moni paikka jää vielä tyhjäksi, mutta sovitaan, että täytetään kunkin konvehdin oikealle puolelle jääneet tyhjät paikat tällä samalla konvehdilla. Konvehti 1 on pakko asettaa vasemmanpuoleiseen paikkaan, mutta muut konvehdit voi asetella vapaasti. Jokaisella asettelutavalla saadaan tehtävän mielessä erilainen rasia, ja toisaalta jokainen mahdollinen rasia vastaa jotain tällaista asettelua. Koska konvehdin 1 paikka on kiinteä mutta muut konvehdit voi asetella vapaasti, asettelutapoja on $\binom{35}{9}$.

9. Osoita, että jos $n > 0$ ja $2n + 1$ ja $3n + 1$ ovat neliölukuja, niin $5n + 3$ ei ole alkuluku.

Ratkaisu. $2n + 1 = a^2, 3n + 1 = b^2 \Rightarrow 5n + 3 = 4(2n + 1) - (3n + 1) = 4a^2 - b^2 = (2a + b)(2a - b)$. Siten $2a - b = 1 \Rightarrow (b - 1)^2 = -2n$. Siten $2a - b \neq 1$.

10. Etsi luvun 7^{9999} kolme viimeistä numeroa. Luku lienee laskettavissa helpostikin moderneilla laskinohjelmilla, mutta esitä tulokselle perustelu joka ei perustu laskimen käyttöön.

Ratkaisu. Etsimme lukua $x \equiv 7^{9999} \mod 1000$ tai $7x \equiv 7^{1000} \mod 1000$. Nyt $\phi(1000) = 1000(1-1/2)(1-1/5) = 400$, joten $7^{400} \equiv 1 \mod 1000$. Koska $10000 = 25 \cdot 400$, niin $7x \equiv 1 \mod 1000$. Siten etsimme luvun $7 \mod 1000$ käänteislukua. Tämä voidaan tehdä ratkaisemalla $7x + 1000y = 1$ Euklideen algoritmilla. Mutta tässä tapauksessa voimme käyttää hyvin tunnettua yhtälöä $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Selvästi $1001 \equiv 1 \mod 1000$. Mutta $1001 = 143 \cdot 7$, joten $143 \cdot 7 \equiv 1 \mod 1000$. Siten $x = 143$.

Vaikeampia tehtäviä

11. Osoita, että jos p on pariton alkuluku, niin

a) $1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \mod p$.

b) $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 0 \mod p$.

Ratkaisu. a) Fermat'n pienen lauseen nojalla $1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1} \equiv 1+1+1+\cdots+1 = p-1 \equiv -1$ mod p.

b) Fermat'n pienen lauseen nojalla $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 1+2+3+\cdots+(p-1)$. On helppo induktiotodistus, että summa on $p(p-1)/2$, ja koska $p-1$ on parillinen, tämä on p:n monikerta.

12. Osoita, että $1982 \mid 222\cdots2$ (1980 kakkosta).

Ratkaisu. Jakamalla kahdella saamme $991 \mid \underbrace{11\cdots1}_{\text{1980 kertaa}}$. Mutta $\underbrace{11\cdots1}_{\text{1980 kertaa}} = (10^{1980}-1)/9$. Nyt $10^{1980}-1 = (10^{991}-1)(10^{991}+1)$. Koska 991 on alkuluku, niin Fermat'n pienen lauseen nojalla $991 \mid 10^{991-1}-1$. Tämä todistaa väitteen.

13. Etsi seuraavien 2017 luvun suurin yhteinen tekijä:

$$2017+1, 2017^2+1, 2017^3+1, \ldots, 2017^{2017}+1.$$

Ratkaisu. Koska kaikki luvut ovat parillisia, niiden s.y.t. on vähintään $d \geq 2$. Osoitamme, että $d = 2$. Tämä voitaisiin tehdä helposti laskemalla $2017+1$ ja 2017^2+1 ja löytämällä niiden s.y.t. On kuitenkin vieläkin helpompaa huomata, että d jakaa niiden erotuksen, jolloin d on luvun $(2017^2+1)-(2017+1) = 2017 \cdot 2016$ tekijä. Mutta s.y.t. luvuista $2017+1 = 2018$ ja 2016 on selvästi 2, koska se on niiden erotus. Tämä viimeistelee todistuksen.

14. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $\sigma(n)$ luvun n tekijöiden summa. Osoita, että on olemassa ääretön määrä positiivisia kokonaislukuja n, joille n jakaa luvun $2^{\sigma(n)}-1$.

Ratkaisu. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Valitsemme luvun $2^{2^j}+1$ alkulukutekijän p_j jokaiselle $0 \leq j < k$. Tällöin tulo $n_k = p_0 p_1 \cdots p_{k-1}$ on luvun $2^{2^k}-1 = \prod_{j=0}^{k-1}(2^{2^j}+1)$ tekijä. Koska n_k on pariton, niin $\sigma(n_k) = (p_0+1)\cdots(p_{k-1}+1)$ on jaollinen luvulla 2^k. Siten $2^{2^k}-1$ jakaa luvun $2^{\sigma(n_k)}-1$. Tästä seuraa, että $2^{\sigma(n_k)} \equiv 1$ mod n_k.

15. Olkoon n ja k kaksi positiivista kokonaislukua, joille $1 \leq n \leq k$. Osoita, että jos $d^k + k$ on alkuluku kaikille luvun n positiivisille tekijöille d, niin $n+k$ on alkuluku.

Ratkaisu. Kun $d = 1$, niin $k+1$ on alkuluku.
Kun $d = n$, niin $n^k + k$ on alkuluku. Koska $k+1$ ei ole luvun n tekijä (koska se on suurempi kuin n), niin Fermat'n pienestä lauseesta saamme $n^k \equiv 1 \mod k+1$, joten $n^k + k \equiv 0 \mod k+1$. Tästä seuraa, että $n^k + k = k+1$ eli $n = 1$. Huomasimme alussa, että $1+k$ on alkuluku.

16. Etsi yhtälön $19x^3 - 84y^2 = 1984$ kokonaislukuratkaisut.

Ratkaisu. Kirjoitetaan yhtälö muodossa $19(x^3-100) = 84(y^2+1)$. Yhtälön oikea puoli on luvun 7 monikerta, joten saman tulee päteä vasemmalle puolelle, eli $x^3 - 2 \equiv 0 \mod 7$. Mutta $x^3 \not\equiv 2 \mod 7$.

17. Etsi kaikki jatkuvat funktiot $f, g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille

$$f(x+y) = g(x) + h(y)$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Sijoittamalla $y = 0$ nähdään, että

$$f(x) = g(x) + h(0)$$

kaikille $x \in \mathbb{R}$. Samoin, sijoittamalla $x = 0$ saadaan

$$f(y) = g(0) + h(y)$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla nämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$f(x+y) = f(x) - h(0) + f(y) - g(0)$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}$, ja edelleen

$$f(x+y) - (g(0) + h(0)) = f(x) - (g(0) + h(0)) + f(y) - (g(0) + h(0)),$$

eli funktio $f - (g(0) + h(0))$ on jatkuva ratkaisu Cauchyn funktionaaliyhtälölle, ja on olemassa vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että $f(x) - (g(0) + h(0)) = cx$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Täten on oltava olemassa vakiot $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) = cx + a + b, \quad g(x) = cx + a, \quad \text{ja} \quad h(x) = cx + b$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Toisaalta, jos meillä on vakiot $a, b \in \mathbb{R}$, joille f, g ja h ovat nämä polynomit, niin silloin selvästi

$$f(x+y) = c(x+y) + a + b = cx + a + cy + b = g(x) + h(y).$$

18. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) + f(y) = 4y + 1$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Olkoon ensin $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jokin halutunlainen funktio. Sijoittamalla yhtälöön $x = y = 0$ saadaan suoraan $f(0) = 1$. Sijoittamalla siihen $x = 0$ nähdään, että

$$f(y) - f(-y) = 2y$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla $x = y$ saadaan

$$f(2y) + 2f(y) = 4y + 3$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla $x = -y$ saadaan

$$-2f(-2y) + f(-y) + f(y) = 4y$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$. Koska on oltava $2f(2y) - 2f(-2y) = 8y$ ja $f(y) - f(-y) = 2y$ kaikille $y \in \mathbb{R}$, saadaan edellisestä yhtälöstä

$$-2f(2y) + 8y + 2f(y) - 2y = 4y,$$

eli

$$-2f(2y) + 2f(y) = -2y$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$. Koska myös $2f(2y) + 4f(y) = 8y + 6$ kaikille $y \in \mathbb{R}$, saadaan laskemalla tämä puolittain yhteen edellisen yhtälön kanssa

$$6f(y) = 6y + 6$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$.

Siis ainoa mahdollinen ratkaisu on funktio $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, jolle $f(x) = x + 1$ kaikille $x \in \mathbb{R}$. Toisaalta on helppo nähdä, että tämä on ratkaisu, sillä tälle funktiolle kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ on

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) + f(y) = x + y + 1 - 2x + 2y - 2 + x + 1 + y + 1 = 4y + 1.$$

19. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$, joille pätee

$$f(f(m) + f(n)) = m + n$$

kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Ratkaisu. Selvästi identiteettifunktio $f = n \longmapsto n\colon \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ on eräs ratkaisu. Lopullinen tavoitteemme on todistaa induktiolla, että tämä on ainoa ratkaisu.

Aloitamme havaitsemalla, että funktio $f\colon \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ on injektio. Nimittäin, jos $m \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ ovat sellaisia, että $f(m) = f(n)$, niin $f(m) + f(n) = f(n) + f(n)$, ja edelleen $f(f(m) + f(n)) = f(f(n) + f(n))$, ja edelleen $m + n = n + n$, jolloin on oltava $m = n$.

Havaitsemme helposti myös, että jos lisäksi $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $k < n$, niin

$$f(f(m + k) + f(n - k)) = m + k + n - k = m + n = f(f(m) + f(n)).$$

Koska f tiedetään injektioksi, seuraa tästä, että

$$f(m + k) + f(n - k) = f(m) + f(n).$$

Oletetaan sitten, että $f(1) \geqslant 2$. Varmasti

$$f(2f(1)) = f(f(1) + f(1)) = 1 + 1 = 2$$

ja

$$f(f(1) + 2) = f(f(1) + f(2f(1))) = 1 + 2f(1).$$

Jos olisi $f(1) = 2$, olisi $f(4) = 2$ ja $f(4) = 5$, mikä on mahdotonta. Siten on oltava $f(1) \geqslant 3$. Mutta nyt

$$\begin{aligned} f(2f(1)) + f(1) &= f(2f(1) - (f(1) - 2)) + f(1 + (f(1) - 2)) \\ &= f(f(1) + 2) + f(f(1) - 1), \end{aligned}$$

mistä seuraa aiempien havaintojemme perusteella, että

$$2 + f(1) = 1 + 2f(1) + f(f(1) - 1).$$

Mutta tämän yhtälön mukaan olisi $f(f(1) - 1) = 1 - f(1) < 0$, mikä on selvästi mahdotonta. Siispä ei voi olla $f(1) \geqslant 3$. Koska ei voinut myöskään olla $f(1) = 2$, on ainoa jäljelle jäävä mahdollisuus siis, että $f(1) = 1$.

Oletetaan, nyt sitten, että $n \in \mathbb{Z}_+$ on sellainen, että $f(m) = m$ kaikille $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tällöin myös

$$n + 1 = f(f(n) + f(1)) = f(n + 1),$$

ja induktiolla nähdään, että on oltava $f(m) = m$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$, ja olemme valmiit.

20. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, joille

$$f((x - y)^2) = f^2(x) - 2xf(y) + y^2$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Sijoittamalla yhtälöön ensin $x = y = 0$ saadaan $f(0) = f^2(0)$, eli $f(0) = 0$ tai $f(0) = 1$. Oletetaan ensin, että $f(0) = 0$. Sijoittamalla yhtälöön $x = y$ saadaan

$$0 = f(0) = f((x - x)^2) = f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = (f(x) - x)^2,$$

kaikille $x \in \mathbb{R}$, mistä välittömästi seuraakin, että $f(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tämä funktio on myös helposti nähtävissä ratkaisuksi, sillä onhan tälle funktiolle

$$f((x - y)^2) = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = f^2(x) - 2xf(y) + y^2$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Oletetaan sitten, että $f(0) = 1$. Sijoittamalla yhtälöön $x = 0$ saadaan

$$f(y^2) = 1 + y^2$$

kaikille $y \in \mathbb{R}$, mistä seuraa välittömästi, että

$$f(x) = x + 1$$

kaikilla $x \in [0, \infty[$. Sijoittamalla yhtälöön jälleen $x = y$ saadaan

$$1 = f(0) = f((x-x)^2) = f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = (f(x) - x)^2$$

kaikille $x \in \mathbb{R}$, jolloin siis $f(x) - x = \pm 1$ jokaiselle $x \in \mathbb{R}$. Lopuksi, olkoon $x \in \mathbb{R}_-$ ja sijoitetaan yhtälöön $y = 0$, jolloin saadaan

$$x^2 + 1 = f(x^2) = f^2(x) - 2x,$$

eli

$$f^2(x) = (x+1)^2.$$

Nyt voi olla vain $f(x) = x + 1$, sillä jos olisi $f(x) = x - 1$, olisi

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = f^2(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

eli $x = 0$, mikä on ristiriita. Täten $f(x) = x + 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Toisaalta, tämänkin funktion voi helposti tarkistaa olevan ratkaisu, sillä sille pätee

$$\begin{aligned} f((x-y)^2) = 1 + (x-y)^2 = 1 + x^2 - 2xy + y^2 &= 1 + x^2 + 2x - 2x(y+1) + y^2 \\ &= (x+1)^2 - 2x(y+1) + y^2 = f^2(x) - 2xf(y) + y^2. \end{aligned}$$

Ainoat halutunlaiset funktiot ovat siis $f = x \longmapsto x \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ja $f = x \longmapsto x + 1 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

21. Määritellään $a_0 = a_1 = 3$ ja $a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1}$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että $a_n - 2$ on neliöluku jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$.

Ratkaisu. Määritellään $b_0 = -1$, $b_1 = 1$ ja $b_{n+1} = 3b_n - b_{n-1}$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Tavoitteemme on todistaa induktiolla, että $a_n - 2 = b_n^2$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Selvästi tämä pätee, kun $n \in \{0, 1\}$. Lisäksi on helppo laskea, että $a_2 = 18$, $b_2 = 4$, ja että $a_2 - 2 = 16 = 4^2 = b_2^2$. Oletetaan sitten, että $n \in \{2, 3, \ldots\}$ on sellainen, että $a_m - 2 = b_m^2$ kaikilla $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Koska

$$a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1} \quad \text{ja} \quad a_n = 7a_{n-1} - a_{n-2},$$

on

$$a_{n+1} = 8a_n - 8a_{n-1} + a_{n-2},$$

ja edelleen

$$a_{n+1} - 2 = 8(a_n - 2) - 8(a_{n-1} - 2) + a_{n-2} - 2.$$

Induktio-oletuksen nojalla siis

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= 8b_n^2 - 8b_{n-1}^2 + b_{n-2}^2 \\ &= 8b_n^2 - 8b_{n-1}^2 + (3b_{n-1} - b_n)^2 \\ &= 8b_n^2 - 8b_{n-1}^2 + 9b_{n-1}^2 + b_n^2 - 6b_{n-1}b_n \\ &= 9b_n^2 - 6b_nb_{n-1} + b_{n-1}^2 \\ &= (3b_n - b_{n-1})^2 = b_{n+1}^2, \end{aligned}$$

ja olemme valmiit.