Matematiikan olympiavalmennus 2015 – helmikuun vaikeammat tehtävät

Vastaukset seuraavaan valmennusviikonvaihteeseen Päivölään tai osoitteeseen `Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu` tai sähköpostitse `matti.lehtinen@spangar.fi`. – Jos haluat, että ratkaisusi otetaan huomioon, kun valitaan Suomen edustajia kevään Pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun, lähetä vastauksesi niin, että ne ovat perillä viimeistään 9.3.

1. Olkoon $p \geq 1$ ja $x, y, z > 0$. Osoita, että

$$\frac{1}{2}3^{2-p}(x+y+z)^{p-1} \leq \frac{x^p}{y+z} + \frac{y^p}{x+z} + \frac{z^p}{x+y}.$$

2. Olkoot luvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivisia, ja olkoon S niiden summa. Osoita, että

$$\frac{n^2}{2n-1} \leq \frac{S}{2S-x_1} + \frac{S}{2S-x_2} + \cdots + \frac{S}{2S-x_n}.$$

3. a) Todista, että jos kolmion sivut ovat a, b, c, sivua $a$vastaaava kulma on α ja kolmion ala on A, niin

$$a^2 = (b-c)^2 + 4A\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

b) Osoita, että a)-kohdan merkintöjä käyttäen kolmioille pätee

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4\sqrt{3}A$$

4. Olkoot $a, b, c > 0$, ja lisäksi pätee $a + b + c = abc$. Todista, että

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

(Vihje: Voisivatko luvut a, b, c liittyä jotenkin kolmioon?)

5. Olkoot a_0, ..., a_n lukuja välillä $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ niin, että

$$\tan\left(a_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(a_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \tan\left(a_n - \frac{\pi}{4}\right) \geq n - 1.$$

Osoita, että $\tan a_0 \tan a_1 \cdots \tan a_n \geq n^{n+1}$.

6. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$, joille kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

7. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$, joille kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ja

$$f(n+1) - 3f(n) + f(n-1) = 2(-1)^n.$$

8. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, joille pätee

$$f(f(x)) = 6x - f(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$.

9. Olkoon $f\colon \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ kasvava funktio, jolle $f(mn) = f(m)f(n)$ kaikilla keskenään yhteistekijättömillä luvuilla m, $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että on olemassa kokonaisluku $\alpha \geqslant 0$ siten, että $f(n) = n^\alpha$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

10. Mitkä säännölliset monikulmiot ovat tason ja kuution mahdollisia leikkauksia?

11. Olkoon P tetraedrin $ABCD$ sisäpiste ja olkoot x_1, x_2, x_3, x_4 P:n etäisyydet tasoista BCD, ACD, ABD, ABC sekä h_1, h_2, h_3, h_4 tetraedrin kärjistä A, B, C, D piirretyt korkeusjanat. Osoita, että

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{h_i} = 1.$$

12. Olkoot M ja K tetraedrin $ABCD$ särmien AB ja CD keskipisteet. Osoita, että jokainen pisteiden M ja K kautta kulkeva taso jakaa $ABCD$:n kahdeksi tilavuudeltaan yhtä suureksi monitahokkaaksi.

13. Olkoot a, b, c, d reaalilukuja ja $a + b + c = 0$. Osoita: A, B, C pisteitä avaruudessa, niin kaikki pisteet P, joille $a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 = d$, ovat samassa tasossa.

14. Olkoon $\mathcal{P}$ pallo ja pisteet A ja B sen ulkopuolella. Osoita, että ne pisteet, joissa A:sta ja B:stä $\mathcal{P}$:lle piirretyt tangentit voivat leikata, ovat kahdessa tasossa. [Vihje: edellisestä tehtävästä on hyötyä.]