

Syyskuun vaativimmat valmennustehtävät

Ratkaisuja voi lähettää seuraavaan valmennusviikonloppuun mennessä sähköpostitse osoitteeseen `joni.p.teravainen@utu.fi` tai postitse osoitteeseen

Joni Teräväinen

Reelinkikatu 5A 26

20810 Turku.

Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

1. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n , jotka ovat neliölukuja ja joiden kymmenjärjestelmäesitys sisältää korkeintaan kaksi nollasta poikkeavaa numeroa (toisin sanoen, jos kymmenjärjestelmäesityksen pituus on d , siinä on vähintään $d - 2$ nollaa).

2. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Sanotaan, että positiivinen kokonaisluku n on k -jaollinen, jos pätee

$$m \mid n, m + 1 \mid n + 1, \dots, m + k - 1 \mid n + k - 1$$

jollakin $m \geq 1$, $m \neq n$. Osoita, että jokaisella k on olemassa k -jaollinen luku.

3. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n luvun $n!^{n!} - 1$ pienin alkutekijä on pienin lukua n suurempi alkuluku.

4. Anna esimerkki ei-vakiosta kokonaislukukertoimisesta polynomista, jolla on nollakohtana luku $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

5. Määritellään kaksi lukujonoa asettamalla $x_0 = a, y_0 = b$ ja

$$x_{n+1} = x_n + y_n,$$

$$y_{n+1} = y_n - x_n,$$

kun $n \geq 0$. Määritä ne parit (a, b) reaalilukuja, joille ainakin toinen jonoista x_n ja y_n on rajoitettu (Jonon a_n sanotaan olevan rajoitettu, jos on olemassa M , jolle $|a_n| \leq M$ kaikilla n).

6. Määritä kaikki parit (C, D) reaalilukuja, joille pätee seuraavaa. Kaikilla $n \geq 1$ ja millä tahansa jonolla a_1, \dots, a_n reaalilukuja pätee

$$(a_1^2 + Ca_1 + D) \cdots (a_n^2 + Ca_n + D) \geq (a_1 \cdots a_n)^2 + C(a_1 \cdots a_n) + D.$$

7. Olkoon $F(n)$ lukumäärä niille n merkin jonoille, joissa kukin merkki on a tai b ja mitkään neljä peräkkäistä merkkiä eivät ole $abba$. Osoita, että

$$F(n) = 2F(n-1) - F(n-3) + F(n-4),$$

kun $n \geq 5$.

8. Olkoon $n \geq 1$, ja olkoon T joukko, joka koostuu n tason pisteestä. Osoita, että on olemassa ympyrä, jonka sisäpuolella on vähintään $\frac{n-1}{2}$ joukon T pistettä ja ulkopuolella vähintään $\frac{n-1}{2}$ joukon T pistettä (ympyrän kehäpisteet eivät ole ympyrän sisä- eivätkä ulkopuolella).

9. Kahdella ympyrällä O_1 ja O_2 on yhteinen tangentti, joka sivuaa niitä pisteissä A ja B vastaavasti. Olkoon AP ympyrän O_1 halkaisija ja oletetaan, että ympyrän O_2 tangentti pisteen P kautta sivuaa ympyrää O_2 pisteessä Q . Osoita, että $AP = BQ$.

10. Olkoon $ABPC$ suunnikas, jossa ABC on teräväkulmainen kolmio. Kolmion ABC ympärysympyrä kohtaa suoran CP myös pisteessä Q . Osoita, että $PQ = AC$ jos ja vain jos $\angle BAC = 60^\circ$.