Kotitehtävät, joulukuu 2011
Helpompi sarja

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$x^2 + y^2 = 2z$$
$$y^2 + z^2 = 2x$$
$$z^2 + x^2 = 2y$$

reaaliluvuilla x, y ja z.

Ratkaisu. Jokainen luvuista on puolet kahden neliön summasta ja siten välttämättä ei-negatiivinen. Vähennetään toinen yhtälö ensimmäisestä: $2(z - x) = x^2 - z^2 = (x - z)(x + z)$. Koska $x + z \neq -2$, on oltava $x = z$. Vastaavasti päätellään $x = y$ ja ratkaistavaksi jää yhtälö $x^2 = x$, jonka ratkaisut ovat 0 ja 1. Siis ratkaisut ovat $x = y = z = 0$ ja $x = y = z = 1$.

2. Olkoon a reaaliluku ja n positiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$\lfloor a \rfloor = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor.$$

Tässä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin x.

Ratkaisu. Vasemman puolen lauseke on askelfunktio $f(a)$, jonka arvo nousee yhdellä jokaisen kokonaisluvun a kohdalla.

Oikean puolen lauseke on summa askelfunktioista $f_k(a) = \lfloor \frac{a+k}{n} \rfloor$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, joista kunkin arvo nousee yhdellä joka n:nnen kokonaisluvun a kohdalla, nimittäin silloin kun $a + k \equiv 0 \pmod{n}$. Koska jokaisella kokonaisluvulle a on täsmälleen yksi $k = 0, 1, \ldots, n-1$, jolla ehto toteutuu, kumpikin puoli kasvaa yhdellä silloin, kun lukua a kasvatetaan yhdellä. Koska kumpikin puoli on nolla silloin, kun $a = 0$, yhtälö on tosi.

3. Etsi kaikki positiivisten rationaalilukujen parit (a, b), joille

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Ratkaisu. Korotetaan yhtälö puolittain neliöön: $a + b + 2\sqrt{ab} = 2 + \sqrt{3}$. Koska $\sqrt{3}$ ei ole rationaaliluku, täytyy olla $a+b = 2$ ja $4ab = 3$. Kun ratkaistaan b jälkimmäisestä yhtälöstä ja sijoitetaan edelliseen, saadaan $a + \frac{3}{4a} - 2 = 0$ eli $a^2 - 2a + \frac{3}{4} = 0$. Tästä saadaan helposti ratkaisut $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$ ja $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$. On myös helppo tarkastaa, että ratkaisut toteuttavat yhtälön.

4. Koodilukossa on kymmenen näppäintä $0, 1, \ldots, 9$. Se avataan näppäilemällä nelinumeroinen koodi (jonka numeroissa voi olla toistoja). Lukko aukeaa heti, kun oikea lukujono on syötetty peräkkäisillä näppäilyillä siitä riippumatta, mitä näppäimiä on painettu aiemmin. Jos koodi sattuisi olemaan 2011, lukko aukeaisi esimerkiksi näppäilysarjalla 45652032011 mutta ei sarjalla 20011. Mikä on lyhyin lukujono, jonka näppäileminen avaa lukon varmasti, on sen koodi mikä hyvänsä?

Ratkaisu. (Tarkoitus oli kysyä, kuinka pitkä lukujonon on vähintään oltava. Minimaalisen pituisia ehdon täyttäviä lukujonoja on toki monta.)

Lukujonon pituuden on selvästi oltava vähintään 10003.

Muodostetaan kolminumeroisista lukujonoista suunnattu verkko, jossa lukujonoa ABC vastaavasta solmusta on kaari jokaista lukujonoa BCD vastaavaan solmuun. Saatu verkko on yhtenäinen eli jokaisesta solmusta on reitti jokaiseen toiseen solmuun (reittiä voi seurata näppäilemällä jälkimmäisen solmun lukujonon). Jokaisen solmun tuloaste eli siihen tulevien kaarten lukumäärä on 10, samoin jokaisen solmun lähtöaste eli siitä lähtevien kaarten lukumäärä.

Siten verkossa on suunnattu Eulerin kehä eli sellainen reitti kaaria pitkin, että jokainen kaari tulee käydyksi tasan kerran ja lopuksi päädytään aloitussolmuun. Kun näppäillään aluksi aloitussolmun numerot ja sitten tällaisen kehän kaaria vastaavat numerot, tullaan näppäilleeksi jokainen mahdollinen nelinumeroinen koodi. Koska kaaria on 10000, näppäilyjä tarvitaan 10003.

(Eulerin kehän olemassaolon voi todistaa esim. seuraavasti. Aloitetaan ensin etsimällä verkosta jonkinlainen kehä, esim. 000 $\to$ 001 $\to$ 010 $\to$ 100 $\to$ 000. Poistetaan tämän kehän kulkemat kaaret verkosta, jolloin solmujen tulo- ja lähtöasteet pienenevät, mutta jokaisen solmun tulo- ja lähtöaste ovat edelleen yhtäsuuret. Sitten toistetaan seuraavaa operaatiota: valitaan kehältä jokin solmu, jonka lähtö- (ja siten myös tulo-) aste on nollaa suurempi. Etsitään jäljellä olevasta verkosta kehä, joka kulkee tämän solmun kautta; tämä on mahdollista, koska kun seurataan valitusta solmusta lähtien kaaria ja merkitään niitä käytetyiksi, jokaisen kuljetun solmun tulo- ja lähtöaste pienenevät molemmat yhdellä, eli umpikujaan ei voida joutua ennen kuin palataan aloitussolmuun. Lopulta ollaan tilanteessa, jossa kehän jokaisen solmun lähtöaste on nolla. Tällöin alkuperäisen verkon jokaisen kaaren on oltava osana kehää, koska yhtenäisyyden takia jokaiseen kaareen on reitti aloitussolmusta.)

5. Olkoot $a \le b \le c$ suorakulmaisen kolmion sivut. Todista, että

$$a > 2(c-b).$$

Ratkaisu. Pythagoraan lauseen mukaan $a^2 = c^2 - b^2$. Koska $b \ge a$ ja $c > a$ (tasasivuinen kolmio ei ole suorakulmainen), on $a^2 = (c+b)(c-b) > 2a(c-b)$ eli $a > 2(c-b)$.

6. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jossa $\angle A = 90°$. Olkoon M sivun AB keskipiste. Pisteen A kautta suoraa CM vastaan kohtisuoraan piirretty suora leikkaa sivun BC pisteessä P. Osoita, että $\angle AMC = \angle BMP$.

Ratkaisu. Täydennetään kolmio neliöksi $ABKC$. Olkoon suoran AP ja sivun BK leikkauspiste N. Kolmiot AMC ja BNA ovat yhdenmuotoiset, koska niiden vastinsivut ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, ja yhtenevät, koska $AC = BA$. Siten $BM = AM = BN$ ja $\angle AMC = \angle BNA$. Kolmiot BPM ja BPN ovat yhtenevät (sks), joten $\angle BMP = \angle BNP = \angle BNA = \angle AMC$.

7. Olkoot x, y ja z positiivisia kokonaislukuja, joille $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Olkoon h lukujen suurin yhteinen tekijä. Todista, että $hxyz$ on kokonaisluvun neliö.

Ratkaisu. Olkoon $x = ha$, $y = hb$ ja $z = hc$. Silloin $\mathrm{syt}(a,b,c) = 1$, ja tehtävän yhtälöstä seuraa $c(b-a) = ab$. Silloin $hxyz = h^4abc = h^4c^2(b-a)$, joten riittää todistaa, että $b-a$ on neliöluku. Riittää todistaa, että luvun $b-a$ tekijöihinjaossa jokaisen alkuluvun eksponentti on parillinen. Olkoon $p \mid b-a$. Koska $c(b-a) = ab$, on $p \mid ab$, joten joko $p \mid a$ tai $p \mid b$. Koska $p \mid b-a$, kummassakin tapauksessa p jakaa molemmat luvut a ja b. Koska $\mathrm{syt}(a,b,c) = 1$, $p \nmid c$.

Riittää todistaa, että alkuluvun p eksponentti luvun ab tekijöihinjaossa on parillinen. Osoitetaan, että p:n eksponentit lukujen a ja b tekijöihinjaoissa ovat yhtäsuuret. Olkoon $a = sp^t$, $b = up^v$, missä $p \nmid s$, $p \nmid u$. Jos esimerkiksi $v > t \ge 1$, olisi $b - a = p^t(up^{v-t} - s)$, missä $p \nmid up^{v-t} - s$. Siten suurin p:n potenssi, joka jakaa luvun $c(b-a)$, olisi p^t, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että luvun $ab = c(b-a)$ jakaa p^{v+t}. Tapaus $t > v \ge 1$ on symmetrinen. Siis $t = v$.

8. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $s = (a_1, a_2, \ldots, a_{2^n})$ jono ei-negatiivisia kokonaislukuja. Asetetaan $f(s) = (|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_{2^n} - a_1|)$. Merkitään f_k:lla funktiota f sovellettuna k kertaa, siis $f_1(s) = f(s)$ ja $f_{k+1}(s) = f(f_k(s))$, kun $k = 1, 2, \ldots$. Osoita, että näillä oletuksilla $f_k(s) = (0, 0, \ldots, 0)$ jollain k, mutta vastaava tulos ei välttämättä päde, jos jonon s pituus ei ole kahden potenssi.

Ratkaisu. Todistetaan, että jonossa $f_{2^n}(s)$ jokainen luku on parillinen, jonossa $f_{2^{n+1}}(s)$ jokainen luku on neljällä jaollinen, jne. Koska jonon $f(s)$ suurin alkio on aina enintään yhtä suuri kuin jonon s suurin alkio, tästä seuraa että jono nollautuu lopulta. Toinen väittämä on helppo todeta tarkastelemalla, miten f kuvaa jonon $(0,1,1)$: $(0,1,1) \mapsto (1,0,1) \mapsto (1,1,0) \mapsto (0,1,1)$.

Todistetaan luvattu väittämä. Tarkastellaan jonoja modulo 2 ja määritellään niille yhteenlasku alkioittain: kun $s = (a_1, \dots, a_{2^n})$ ja $t = (b_1, \dots, b_{2^n})$, jono $s + t$ on $(a_1 + b_1, \dots, a_{2^n} + b_{2^n})$. Silloin $f(s+t) \equiv f(s) + f(t) \pmod 2$ (kun kongruenssi tulkitaan samoin alkioittain).

Koska jokaisen jonon s voi esittää modulo 2 summana joukosta jonoja, joista kussakin on yksi 1 ja muuten nollia, ja koska f on kierron suhteen symmetrinen, riittää osoittaa, että $f_{2^n}(1, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0)$. Mutta

$$\begin{aligned}
f(1, 0, \dots, 0) &= (1, 0, \dots, 0, 1), \\
f_2(1, 0, \dots, 0) &= f(1, 0, \dots, 0) + f(0, 0, \dots, 0, 1) \\
&= (1, 0, \dots, 1) + (0, 0, \dots, 1, 1) \equiv (1, 0, \dots, 0, 1, 0) \\
f_4(1, 0, \dots, 0) &= f_2(1, 0, \dots, 0) + f_2(0, 0, \dots, 0, 1, 0) \\
&\equiv (1, 0, \dots, 1, 0) + (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 1, 0) \equiv (1, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

jne. Induktiolla voidaan osoittaa, että $f_{2^k}(1, 0, 0, \dots, 0) \equiv (1, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$, missä loppunollien lukumäärä on $2^k - 1$. Siten $f_{2^n} \equiv (1, 0, \dots, 0) + (1, 0, \dots, 0) \equiv (0, 0, \dots, 0)$.

9. Mille positiivisille kokonaisluvuille a ja b on

$$\frac{a^3 + b^3}{11}$$

alkuluvun potenssi?

Ratkaisu. Oletetaan, että $\dfrac{a^3 + b^3}{11}$ on alkuluvun p potenssi. Oletetaan ensin, että a ja b ovat suhteelliset alkuluvut, ja kirjoitetaan

$$a^3 + b^3 = (a + b)\big((a + b)^2 - 3ab\big).$$

Koska a ja b ovat suhteelliset alkuluvut,

$$\operatorname{syt}\big(a + b, \big((a + b)^2 - 3ab\big) = \operatorname{syt}(a + b, 3ab) \in \{\,1, 3\,\}. \tag{1}$$

Siten 11 on täsmälleen yhden luvuista $a + b$ ja $(a + b)^2 - 3ab$ tekijä. Siten 11 ei voi olla kummankaan luvuista a ja b tekijä, koska muuten se olisi molempien tekijä. Siis $a^{10} \equiv b^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Koska $11 \mid a^3 + b^3$ eli $a^3 \equiv -b^3 \pmod{11}$, on myös $a^9 \equiv -b^9$ ja edellisen nojalla $a^{10}a^{-9} \equiv b^{10}(-b)^{-9}$ eli $a \equiv -b \pmod{11}$; jakolasku on mahdollinen, koska $\operatorname{syt}(a, 11) = \operatorname{syt}(b, 11) = 1$. Siis 11 jakaa luvun $a + b$ eikä jaa lukua $(a + b)^2 - 3ab$.

Tarkastellaan tapausta, jossa $3 \mid a + b$, jolloin $p = 3$ ja $a + b \in \{\,33, 99, 297, \dots\,\} = \{\,11 \cdot 3^u, u = 1, 2, 3, \dots\}$ ja $(a + b)^2 - 3ab = 3^t$, $t = 1, 2, 3, \dots$. Jos $a + b = 33$, saadaan $3ab = (a + b)^2 - 3^t$ eli $ab = 363 - 3^{t-1}$. Yhtälöparilla

$$\begin{cases} a + b = 33, \\ ab = 363 - 3^{t-1} \end{cases}$$

ei ole ratkaisua: tapaukset $t = 1, 2, 3, 4, 5$ on tarkastettava erikseen, ja suuremmilla t:n arvoilla ab olisi negatiivinen. Jos $a + b \in \{\,99, 297, \dots\,\}$, ehdon (1) takia on oltava $(a + b)^2 - 3ab \le 3$, mutta $(a + b)^2 - 3ab = (a - b)^2 + ab \ge ab$, eikä voi olla $ab \le 3$, jos $33 \mid a + b$.

Siten $3 \nmid a + b$, ja $\operatorname{syt}\big(a + b, \big((a + b)^2 - 3ab\big) = 1$. Koska $(a + b)^2 - 3ab = (a - b)^2 + ab \ge ab > 1$, on oltava $a + b = 11$ ja $(a + b)^2 - 3ab = p^t$. Tutkimalla kaikki tapaukset löydetään ratkaisut

$$(a, b) \in \{\,(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\,\},$$

joille $p = 67, 7, 37, 31, 31, 37, 7, 67$.

Jos ei oleteta, että $\operatorname{syt}(a, b) = 1$, luvulla $\operatorname{syt}(a, b)$ on silti oltava enintään yksi alkutekijä, joten $\operatorname{syt}(a, b) = p^k$ jollain kokonaisluvulla k. Olkoon $a = a'p^k$ ja $b = b'p^k$, jolloin saadaan

$$\frac{a^3 + b^3}{11} = p^{3k}\frac{a'^3 + b'^3}{11}.$$

Taas on luvun $\dfrac{a'^3 + b'^3}{11}$ oltava alkuluvun potenssi, joten tämä tapaus palautuu jo käsiteltyyn. Ratkaisut ovat siis

$$\begin{aligned}(a,b) \in \{\,&(2\cdot 67^k, 9\cdot 67^k), (3\cdot 7^k, 8\cdot 7^k), (4\cdot 37^k, 7\cdot 37^k), (5\cdot 31^k, 6\cdot 31^k),\\ &(6\cdot 31^k, 5\cdot 31^k), (7\cdot 37^k, 4\cdot 37^k), (8\cdot 7^k, 3\cdot 7^k), (9\cdot 67^k, 2\cdot 67^k)\,\},\end{aligned}$$

missä $k = 0, 1, 2, \ldots$.

10. Etsi kaikki kokonaisluvut $n > 1$, joilla on seuraava ominaisuus: luvun $n^6 - 1$ jokainen alkutekijä jakaa luvun $n^2 - 1$ tai $n^3 - 1$.

Ratkaisu. Luku 2 on selvästi tällainen: luvun $2^6 - 1 = 63$ alkutekijät ovat $3 = 2^2 - 1$ ja $7 = 2^3 - 1$. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole.

Tehdään oletus, että n toteuttaa tehtävän ehdon. Käytetään tekijöihinjakoa

$$n^6 - 1 = (n^2 - n + 1)(n + 1)(n^3 - 1).$$

Luvulla $n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$ on selvästi pariton alkutekijä p. Silloin $p \mid (n^2 - n + 1)(n + 1) = n^3 + 1$, joten $p \nmid n^3 - 1$. On siis oltava $p \mid n^2 - 1$. Siten $p \mid (n^3 + 1) + (n^2 - 1) = n^2(n + 1)$. Koska $p \nmid n$, on oltava $p \mid n + 1$. Myös $p \mid (n^2 - 1) - (n^2 - n + 1) = n - 2$, joten on oltava $p = 3$. Siis $n^2 - n + 1 = 3^r$ (koska jokainen sen alkutekijä on 3), joten toisen asteen yhtälön $n^2 - n + (1 - 3^r)$ diskriminantti $1 - 4(1 - 3^r) = 4 \cdot 3^r - 3 = 3(4 \cdot 3^{r-1} - 1)$ on neliöluku. Kun $r > 1$, diskriminantti on jaollinen kolmella vain yhden kerran, joten on oltava $r = 1$ ja siis $n = 2$.

Kotitehtävät, joulukuu 2011
Vaikeampi sarja

1. (Helpompi sarja, t. 3)

2. Paroni von Münchhausen väittää keksineensä likimääräisen kaavan neliöjuurten laskemiseen. Kaavassa on joitakin vakioita ja yksi muuttuja (juurrettava), mutta erikoisinta on, että vakioille ja muuttujalle tehdään vain kaksi laskutoimitusta: yksi yhteenlasku ja yksi kertolasku. "Jokaiselle reaaliluvulle välillä $[1000, 2000]$ kaavani virhe on alle $1/2$", ylpeilee von Münchhausen. Voitko osoittaa, että paroni valehtelee?

Ratkaisu. Paroni ei jää kiinni valheesta. Kaava voi olla esimerkiksi

$$f(x) = \frac{45-31}{45^2-31^2}(x-31^2) + 31 + \frac{1}{3} = \frac{1}{76}x + \frac{4261}{228}.$$

Tämän funktion kuvaaja on suora, jota on siirretty hieman ylöspäin sekantista, joka leikkaa neliöjuurifunktion kuvaajan pisteissä $(31^2, 31)$ ja $(45^2, 45)$. Virhe mainitun välin päätepisteissä on sallituissa rajoissa,

$$f(961) = f(31^2) = 31\frac{1}{3}, \quad \text{ja} \quad f(2025) = f(45^2) = 45\frac{1}{3},$$

joten jos pystytään osoittamaan, että maksimaalinen virhe välin sisällä on tarpeeksi pieni, kaava on osoitettu riittäväksi. Etsitään piste, jossa neliöjuurifunktion tangentti on suoran $y = f(x)$ suuntainen. Tangentin kulmakerroin on $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, joten on ratkaistava

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{76},$$

mistä saadaan $x = 38^2 = 1444$. Kaava antaa tässä pisteessä tuloksen

$$f(1444) = 37\frac{157}{228},$$

jonka virhe on alle $1/2$.

3. Todista epäyhtälö

$$\sin^4(x-y) + \cos^4(x+y) \le 1 + \sin^2 2x \sin^2 2y$$

reaaliluvuille x, y.

Ratkaisu. Käyttämällä trigonometrisia identiteettejä

$$\begin{aligned}
\sin^2(x-y) &= \frac{1-\cos(2x-2y)}{2}, \\
\cos^2(x+y) &= \frac{1+\cos(2x+2y)}{2}, \\
\cos(2x \pm 2y) &= \cos 2x \cos 2y \mp \sin 2x \sin 2y
\end{aligned}$$

saadaan epäyhtälön vasen puoli muotoon

$$\begin{aligned}
\sin^4(x-y) + \cos^4(x+y) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x-2y) + \frac{1}{4}\cos^2(2x-2y) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x+2y) + \frac{1}{4}\cos^2(2x+2y) \\
&= \frac{1}{2} - \sin 2x \sin 2y + \frac{1}{2}(\cos^2 2x \cos^2 2y + \sin^2 2x \sin^2 2y).
\end{aligned}$$

On siis todistettava

$$\frac{1}{2} - \sin 2x \sin 2y + \frac{1}{2}(\cos^2 2x \cos^2 2y + \sin^2 2x \sin^2 2y) \le 1 + \sin^2 2x \sin^2 2y$$

mistä termejä järjestämällä ja kahdella kertomalla saadaan

$$\cos^2 2x \cos^2 2y \le 1 + 2\sin 2x \sin 2y + \sin^2 2x \sin^2 2y$$

eli

$$(\cos 2x \cos 2y)^2 \le (1 + \sin 2x \sin 2y)^2.$$

Kirjoitetaan tämä lausekkeiden neliöjuurien vertailuksi:

$$-1 - \sin 2x \sin 2y \le \cos 2x \cos 2y \le 1 + \sin 2x \sin 2y.$$

Tämä saadaan tehtävän alkupuolella käytetyllä identiteetillä muotoiltua epäyhtälöiksi

$$-1 \le \cos(2x - 2y), \quad 1 \ge \cos(2x + 2y)$$

jotka seuraavat kosinin määritelmästä.

4. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(x + y) = f(x)f(y + 1) + f(x + 1)f(y) - 1$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Olkoon $a = f(0)$ ja $b = f(1)$. Sijoittamalla $x = y = 0$ saadaan $a = 2ab - 1$, mistä seuraa $a \neq 0$ ja $b \neq 1/2$. Sijoittamalla $x = y = 1$ saadaan $f(2) = 2bf(2) - 1$, mistä seuraa $f(2) = 1/(2b-1) = a$. Sijoittamalla $x = 0$ ja $y = 2$ saadaan $af(3) = 1 + a - ab = ab$, mistä seuraa $f(3) = b$. Sijoittamalla $y = 2$ saadaan

$$f(x + 2) = f(3)f(x) + f(2)f(x + 1) - 1 = f(1)f(x) + f(0)f(x + 1) - 1 = f(x).$$

Sijoittamalla $y = x$ saadaan $f(2x) = 2f(x)f(x + 1) - 1$ ja sijoittamalla $y = x + 1$ saadaan $f(2x + 1) = f(x)^2 + f(x + 1)^2 - 1$, joista seuraa

$$f(2x + 1) - f(2x) = \big(f(x) - f(x + 1)\big)^2 \ge 0$$

kaikilla reaalisilla x. Siten

$$f(x) = f(x + 2) = f\Big(2\frac{x + 1}{2} + 1\Big) \ge f(x + 1) = f\Big(2\frac{x}{2} + 1\Big) \ge f(x),$$

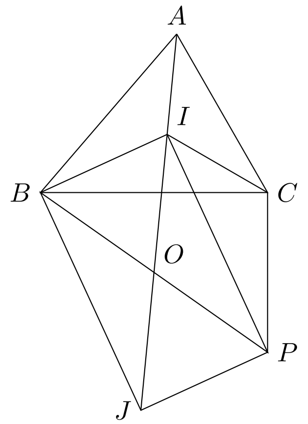
joten $f(x) = f(x + 1)$ kaikilla reaalisilla x. Erityisesti $a = b$, jolloin $a = 2a^2 - 1$ eli $a = 1$ tai $a = -1/2$. Sijoittamalla $y = 0$ saadaan $f(x) = 2af(x) - 1$, mistä seuraa että $f(x) = 1/(2a - 1) = a$ on vakio. Siis ratkaisut ovat $f(x) \equiv 1$ ja $f(x) \equiv -1/2$.

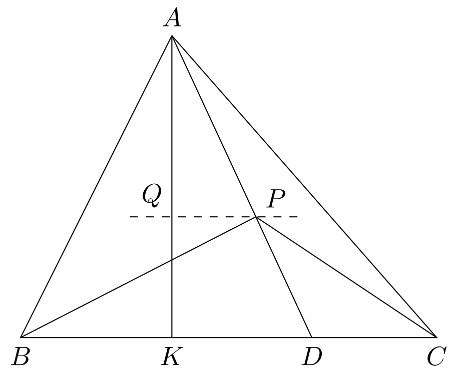
5. (Helpompi sarja, t. 8)

6. Kolmiossa ABC on $\angle B \neq \angle C$. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I ja kulman A vastaisen sivuympyrän[1] keskipiste J. Piste O on kulman A sisäisen puolittajan ja sivun BC keskinormaalin leikkauspiste, ja piste P on suoran BO leikkauspiste pisteen C kautta piirretyn suoran BC normaalin kanssa. Todista, että $IP \parallel BJ$.

Ratkaisu. Ensinnäkin $|OB| = |OP|$, koska pisteiden projektioilla suoralle BC on sama ominaisuus. Kulman sisäinen ja ulkoinen puolittaja ovat toisiinsa nähden suorassa kulmassa, joten kulmat $\angle JBI$ ja $\angle ICJ$ ovat suoria. Siten $BJCI$ on jännenelikulmio ja IJ tämän ympäri piirretyn ympyrän halkaisija. Myös jänteen BC keskinormaali on halkaisija, joten pisteen O on oltava ympyrän keskipiste. Siis $|OP| = |OB| = |OJ| = |OI|$, joten $BJPI$ on suunnikas (ja itse asiassa suorakulmio), joten $IP \parallel BJ$.

[1] J on siis kulman A sisäisen puolittajan ja kulmien B ja C ulkoisten puolittajien leikkauspiste. Nämä ulkoiset puolittajat puolittavat ne kulmat, jotka sivu BC muodostaa sivujen AB ja AC jatkeiden kanssa.





7. Kolmion ABC sivuilla BC, CA ja AB on tässä järjestyksessä pisteet D, E ja F. Janat AD, BE ja CF leikkaavat pisteessä P. Todista, että

$$\frac{|AP|}{|PD|}\cdot\frac{|BP|}{|PE|}\cdot\frac{|CP|}{|PF|}-\left(\frac{|AP|}{|PD|}+\frac{|BP|}{|PE|}+\frac{|CP|}{|PF|}\right)=2.$$

Ratkaisu. Olkoon AK kolmion korkeusjana ja Q sellainen piste tällä janalla, että $QP \parallel BC$. Silloin

$$\frac{|PD|}{|AD|}=\frac{|QK|}{|AK|}=\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}},$$

missä S_{XYZ} tarkoittaa kolmion XYZ alaa. Vastaava pätee symmetrisesti muillekin pisteille, joten

$$\frac{|PD|}{|AD|}+\frac{|PE|}{|BE|}+\frac{|PF|}{|CF|}=\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{PCA}}{S_{ABC}}+\frac{S_{PAB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

Merkitään

$$x=\frac{|AP|}{|PD|},\quad y=\frac{|BP|}{|PE|},\quad z=\frac{|CP|}{|PF|}.$$

Silloin

$$\frac{|PD|}{|AD|}=\frac{|PD|}{|AP|+|PD|}=\frac{1}{\frac{|AP|}{|PD|}+1}=\frac{1}{x+1}$$

ja symmetrisesti muille suhteille. Siis

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1,$$

mistä seuraa tehtävän väite

$$xyz-(x+y+z)=2.$$

8. (Helpompi sarja, t. 9)

9. (Helpompi kirje, t. 10)

10. Todista, että lukujono

$$\binom{2002}{2002},\binom{2003}{2002},\binom{2004}{2002},\ldots$$

on jaksollinen modulo 2002 ja selvitä sen jakson pituus.

Ratkaisu. Koska $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, riittää selvittää jakso modulo kukin näistä alkuluvuista. Todistetaan, että jonon

$$\binom{n}{m}, \binom{n+1}{m}, \binom{n+2}{m}, \dots \pmod p$$

jakso on $p^{\lfloor \log_p m \rfloor + 1}$, kun $n \geq m$.

Käytetään Lucas'n lausetta[2], jonka mukaan

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{j=0}^{k} \binom{m_j}{n_j} \pmod p,$$

kun p on alkuluku ja lukujen m ja n p-kantaiset esitykset ovat

$$\begin{aligned} m &= m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + m_{k-2} p^{k-2} + \dots + m_0, \\ n &= n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + n_{k-2} p^{k-2} + \dots + n_0. \end{aligned}$$

Kun luku m esitetään kannassa p, suurin p:n potenssi on $\lfloor \log_p m \rfloor$; merkitään $J = \lfloor \log_p m \rfloor + 1$. Olkoot $N_1, N_2 \geq m$ sellaiset luvut, että $N_1 \equiv N_2 \pmod{p^J}$, jolloin niillä on p-kantaiset esitykset

$$\begin{aligned} N_1 &= n_{J+k}^{(1)} p^{J+k} + \dots + n_{J+1}^{(1)} p^{J+1} + n_J^{(1)} p^J + n_{J-1} p^{J-1} + \dots + n_0, \\ N_2 &= n_{J+k}^{(2)} p^{J+k} + \dots + n_{J+1}^{(2)} p^{J+1} + n_J^{(2)} p^J + n_{J-1} p^{J-1} + \dots + n_0, \end{aligned}$$

joissa matalimmat J jakojäännöstä ovat siis samat. Silloin

$$\begin{aligned} \binom{N_1}{m} &\equiv \binom{n_{J+k}^{(1)}}{0} \cdots \binom{n_{J+1}^{(1)}}{0} \cdot \binom{n_J^{(1)}}{0} \cdot \binom{n_{J-1}}{m_{J-1}} \cdots \binom{n_0}{m_0} \pmod p, \\ \binom{N_2}{m} &\equiv \binom{n_{J+k}^{(2)}}{0} \cdots \binom{n_{J+1}^{(2)}}{0} \cdot \binom{n_J^{(2)}}{0} \cdot \binom{n_J}{m_{J-1}} \cdots \binom{n_0}{m_0} \pmod p. \end{aligned}$$

Siten $\binom{N_1}{m} \equiv \binom{N_2}{m} \pmod p$, joten lukujonolla on jaksollinen ainakin jaksolla p^J. Lukujonon jakso (eli lyhyimmän jakson pituus) on siten p^J:n tekijä.

Oletetaan, että jakso on p^K, missä $K < J$. Välttämättä $p^K \mid p^{J-1}$. Olkoot

$$\begin{aligned} N_3 &= p^J + m_{J-1} p^{J-1} + m_{J-2} p^{J-2} + \dots + m_1 p^1 + m_0 = p^J + m, \\ N_4 &= p^J + \phantom{m_{J-1} p^{J-1}} + m_{J-2} p^{J-2} + \dots + m_1 p^1 + m_0. \end{aligned}$$

Selvästi $N_3 - N_4$ on jaollinen p^{J-1}:llä, joten $\binom{N_3}{m} \equiv \binom{N_4}{m} \pmod p$. Toisaalta Lucas'n lauseesta seuraa

$$\begin{aligned} \binom{N_3}{m} &\equiv \binom{1}{0} \cdot \binom{m_{J-1}}{m_{J-1}} \cdot \binom{m_{J-2}}{m_{J-2}} \cdots \binom{m_1}{m_1} \cdot \binom{m_0}{m_0} \equiv 1 \pmod p, \\ \binom{N_4}{m} &\equiv \binom{1}{0} \cdot \binom{0}{m_{J-1}} \cdot \binom{m_{J-2}}{m_{J-2}} \cdots \binom{m_1}{m_1} \cdot \binom{m_0}{m_0} \equiv 0 \pmod p, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita, joten jakson on oltava p^J.

Koska $2^{10} = 1024 \leq 2002 < 2048 = 2^{12}$, $\lfloor \log_2 2012 \rfloor = 10$, joten jakson pituus, kun lukujonoa tarkastellaan modulo 2, on 2^{11}. Samaan tapaan saadaan 2002:n muita alkutekijöitä vastaavien jaksojen pituuksiksi 7^4, 11^4 ja 13^3. Siis kysytty jakson pituus on $2^{11} 7^4 11^4 13^3$.

[2] Esim. `http://en.wikipedia.org/wiki/Lucas'_theorem`