1 Joulukuun 2010 kirjevalmennustehtävät – vaikeat

Ratkaisuja voi lähettää sähköpostilla osoitteeseen laurihallila@gmail.com, tavallisella postilla Lauri Hallila, Kalliorinteenkuja 1, 02770 Espoo, tai palauttaa seuraavan valmennusviikonlopun aikana.

1. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla on olemassa tasan $2n$ sellaista positiivisten kokonaislukujen paria (a, b), joilla $1 \leq a < b \leq n$ ja b jakaa a:n.

2. Kutsutaan positiivista kokonaislukua *maagiseksi*, jos luvun numeroiden summa on sama kuin luvun numeroiden tulo.

   a Osoita, että kaikille $n = 1, 2, \ldots, 10$ on olemassa maaginen luku, jossa on tasan n numeroa.

   b Osoita, että on olemassa äärettömän monta maagista lukua.

3. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen kolmikot (x, y, z), jotka toteuttavat ehdon $99x + 100y + 101z = 2009$.

4. Osoita, että positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee

$$\frac{(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3}{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3} > 8abc,$$

kun $a \neq b \neq c$.

5. Tarkastellaan kaikkia n kirjaimen sanoja, jotka muodostuvat kirjaimista $\{0, 1, 2, 3\}$. Kuinka monessa sanassa on parillinen lukumäärä a) nollia? b) nollia ja ykkösiä?

6. Lotossa luvuista $\{1, 2, \ldots, 49\}$ valitaan 6 lukua. Kuinka moni näistä 6 luvun joukoista on sellaisia, joissa esiintyy kaksi peräkkäistä lukua?

7. Olkoon n sellainen ei-negatiivinen kokonaisluku, että $3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n}$ ei ole neliöluku. Osoita, että n on neljällä jaollinen.

8. Etsi kaikki sellaiset reaaliluvut a, että polynomilla $x^3 + ax - 2(a + 4)$ on tasan kaksi reaalijuurta.

9. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}$.

   a Osoita, että $f(0) = 0$.

   b Etsi $f(1994)$.

10. Olkoon $\mathbb{N}$ kaikkien positiivisten kokonaislukujen joukko. Tarkastellaan funktioita $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, joille $f(n) \geq 2$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja

$$f(n) + f(n + 2) = f(n + 4)f(n + 6) - 1997.$$

   a Etsi $f(1997)$ ja $f(1999)$, kun $f(1) = 2$.

   b Kuvaile kaikki annetut ehdot toteuttavat funktiot.

1 12/2010 kirjevalmennustehtävien ratkaisut – vaikeat

1. Vastaus: 15. Olkoon niiden lukuparien, joissa ensimmäinen luku jakaa n:n (ja on pienempi kuin n) ja toinen on n, lukumäärä $g(n)$. Selvästi $g(1) = 0$. Olkoon $n > 1$. Parit, joiden toinen komponentti on korkeintaan $n-1$, on jo laskettu, kun päästään lukuun $n-1$. Siten lukuun n päästessä meidän tulee lisätä parit, joissa toisena lukuna on n ja ensimmäisenä luvun n aito ($\neq n$) tekijä. Merkitsemällä luvun n aitoja tekijöitä $d(n)$:llä saamme

$$g(n) = g(n-1) + d(n).$$

Teemme taulukon tämän kaavan pohjalta:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
d(n)	0	1	1	2	1	3	1	3	2	3	1	5	1	3	3	4	1
g(n)	0	1	2	4	5	8	9	12	14	17	18	23	23	27	30	34	35

Huomaamme, että ainoastaan $n = 15$ toteuttaa ehdot lukujen $1 - 17$ välillä. Huomaa, että kahdella peräkkäisellä numerolla, jotka ovat neljää suurempia, on yhteensä vähintään 4 aitoa tekijää. Tämä seuraa siitä, että toinen näistä on parillinen luku, joka on suurempi kuin 4 ja sillä on vähintään 3 aitoa tekijää (1, 2 ja puolikas itsestään) ja toisella on ainakin 1 aito tekijä (luku 1). Siten kaikille $n \geq 4$ saamme $g(n+4) \geq g(n) + 4$. Tästä seuraa, että jos jollekin n $g(n) > 2n$, niin $g(n+2) \geq g(n) + 4 > 2n + 4 = 2(n+2)$. Koska epäyhtälö pätee luvuille $n = 16$ ja $n = 17$, niin saamme induktiolla, että $g(n) > 2n$ mille tahansa $n \geq 16$. Siten ei ole muita lukuja, jotka toteuttavat tehtävän ehdot.

2. a) Luvut 1, 22, 123, 1124, 11125, 111126, 1111127, 11111128, 111111129 ja 1111111144 ovat maagisia.
b) Jos meillä on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku, jonka numeroiden tulo on suurempi kuin niiden summa, niin saamme maagisen numeron lisäämällä sopivan lukumäärän ykkösiä perään: jokainen ykkönen lisää summaa yhdellä, kun tulo pysyy samana. Mille tahansa $n > 0$ lukujen $\underbrace{22\ldots2}_{n}$ tulo on $2^n \geq 2n$, joka on numeroiden summa, joten mille tahansa n voimme luoda maagisen numeron, jossa on vähintään n numeroa.

3. Vastaus: $(1, 9, 10)$, $(2, 7, 11)$,$(3, 5, 12)$,$(4, 3, 13)$,$(5, 1, 14)$.
Ratkaisu: Saamme kummallekin puolelle epäyhtälöt:

$$2009 = 99x + 100y + 101z \leq 101(x + y + z),$$

$$2009 = 99x + 100y + 101z \geq 99(x + y + z).$$

Järjestämällä nämä uudelleen saamme $19 < \frac{2009}{101} \leq x + y + z \leq \frac{2009}{99} < 21$, mistä seuraa $x + y + z = 20$. Kirjoittamalla alkuperäinen yhtälö muodossa $100(x + y + z) + z - x = 2009$, saamme nyt $z = x + 9$. Sijoittamalla tämä yhtälöön $x + y + z = 20$ saamme nyt $y = 11 - 2x$. Koska x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja, niin pitää olla $0 < x \leq 5$. Luvun x arvot $1, 2, 3, 4, 5$ johtavat ratkaisuihin $(1, 9, 10)$, $(2, 7, 11)$, $(3, 5, 12)$, $(4, 3, 13)$ ja $(5, 1, 14)$.

4. Merkitään $a - b = x$ ja $b - c = y$; tällöin $c - a = -(x + y)$. Epäyhtälön

vasemman puolen nimittäjälle saamme

$$\begin{aligned}(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 &= x^3+y^3-(x+y)^3\\ &= -3x^2y-3xy^2\\ &= -3xy(x+y)\\ &= 3(a-b)(b-c)(c-a).\end{aligned}$$

Osoittajalle saamme vastaavasti

$$(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3 = 3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2).$$

Siten $\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3} = (a+b)(b+c)(c+a)$, joten annettu epäyhtälö on sama kuin epäyhtälö $(a+b)(b+c)(c+a) > 8abc$. Tämä epäyhtälö seuraa aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä (käytä epäyhtälöä $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ja huomaa että $a \neq b$; samoin muille pareille).

5. n-sanojen lukumäärä joukosta $\{0,1,2,3\}$, joissa on parillinen määrä nollia, on

$$E_n = 3^n + \binom{n}{2}3^{n-2} + \binom{n}{4}3^{n-4} + \cdots$$

ja niiden, joissa on pariton määrä nollia, on

$$O_n = \binom{n}{1}3^{n-1} + \binom{n}{3}3^{n-3} + \cdots .$$

Lisäämällä ja vähentämällä saamme

$$E_n + O_n = (3+1)^n = 4^n$$

ja

$$E_n - O_n = (3-1)^n = 2^n.$$

Lisäämällä ja vähentämällä jälleen, saamme

$$2E_n = 4^n + 2^n \to E_n = \frac{4^n+2^n}{2}$$

ja

$$2O_n = 4^n - 2^n \to O_N = \frac{4^n-2^n}{2}.$$

6. Tarkastelemme niitä kuuden luvun joukkoja, joissa ei ole peräkkäisiä lukuja. Ajatelkaamme 49 lukua rivinä, jossa on 49 palloa, joista 43 palloa, joita ei ole valittu, on maalattu valkoisiksi ja 6 valittua lukua mustiksi. Mitkään kaksi mustaa palloa eivät voi olla vierekkäin. Siten niille on 44 mahdollista paikkaa. Kuusi näistä paikoista voidaan valita $\binom{44}{6}$ eri tavalla. Siten kokonaisuudessaan on olemassa

$$\binom{49}{6} - \binom{44}{6}$$

kuuden luvun joukkoa, joissa ainakin kaksi valituista luvuista ovat peräkkäisiä. Tämä on 49.5% kaikista vaihtoehdoista.

7. Summaamalla lauseke geometrisena summana saamme

$$3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n} = 3^n \cdot (1 + 3 + \ldots + 3^n) = 3^n \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Tekijät 3^n ja $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ ovat keskenään jaottomia: ensimmäisellä voi olla vain 3 alkulukutekijänä, kun taas jälkimmäinen ei ole luvulla 3 jaollinen. Koska tulo on neliöluku, niin molemmat tekijät ovat neliölukuja. Tekijän 3^n perusteella luvun n pitää olla parillinen.
Oletetaan nyt, että n ei ole neljällä jaollinen. Koska n on parillinen, niin $n \equiv 2 \mod 4$, joten $n + 1 \equiv 3 \mod 4$. Huomaa, että $3^4 = 81$; koska $16|80$, niin $3^4 \equiv 1 \mod 16$, mistä $3^{n+1} \equiv 3^3 \equiv 11 \mod 16$ ja $3^{n+1} - 1 \equiv 10 \mod 16$, joten $\frac{3^{n+1}-1}{2} \equiv 5 \mod 8$. Mutta neliöluku ei voi olla muotoa $5 \mod 8$.

8. Vastaus: -12 ja -3.
Ratkaisu: Huomaa, että $x^3 + ax - 2(a+4) = (x-2) \cdot \big(x^2 + 2x + (a+4)\big)$. Siten 2 on polynomin juuri riippumasta luvusta a. Tarkastellaan kahta tapausta:
1) Jos $x = 2$ on yksinkertainen juuri, niin toisen asteen yhtälöllä $x^2+2x+(a+4)$ täytyy olla tasan yksi (kaksinkertainen) reaalijuuri, eli ratkaisussa $\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(a+4)}}{2}$ pitää diskriminantin olla 0. Siten $4 - 4(a+4) = 0$, mistä saamme $a = -3$.
2) Jos $x = 2$ on kaksinkertainen juuri, niin luvun $x = 2$ pitää olla lausekkeen $x^2 + 2x + (a+4)$ tekijä, joten $2^2 + 2 \cdot 2 + (a+4) = 0$, mistä saamme $a = -12$. Koska $x^2 + 2x - 8 \neq (x-2)^2$, niin toinen juuri on todellakin jokin muu luku kuin 2. Siten olemme saaneet ratkaisut $a = -3$ ja $a = -12$.

9. a) Tarkastelemalla alkuperäistä yhtälöä arvoilla x ja $-x$ saamme, että $f(x)^2 = f(-x)^2$. Tästä seuraa, että jokaisella x funktio toteuttaa joko ehdon $f(x) = f(-x)$ tai $f(-x) = -f(-x)$. Osoitamme, että f on bijektio; tästä seuraa, että ei voi olla $f(x) = f(-x)$ millekään x. Valitsemme $x = 0$, jolloin

$$f(f(y)) - y = f(0)^2 = vakio.$$

Valitsemalla nyt reaaliluvut, joille $f(x_1) = f(x_2)$ saamme ensimmäisen yhtälön avulla, että $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ eli $x_1 = x_2$. Siten f on bijektio. Koska f on nyt pariton funktio, niin $f(0) = -f(0)$ ja siten $f(0) = 0$.
b) Valitsemalla $x = 1$ ja $y = 0$ saamme $f(1) = f(1)^2$. Koska $f(1) = 0$, niin $x = 0$ ja $y = 1$ avulla $f(f(1)) = 1$, mikä on mahdotonta. Siten $f(1) = 1$. Oletamme, että $f(n) = n$, jolloin

$$f(n+1) = f(1^2 + f(n)) = n + f(1)^2 = n + 1.$$

Induktiolla saamme $f(1994) = 1994$.

10. a) Sijoitetaan n:n paikalle $n+2$ ja vähennetään tämä alkuperäisestä yhtälöstä, jolloin saadaan

$$f(n) - f(n+4) = f(n+6)\left((f(n+4) - f(n+8)\right).$$

Soveltumalla tätä yhtälöä toistuvasti saamme ensin

$$f(n) - f(n+4) = f(n+6)f(n+10)\left((f(n+8) - f(n+12)\right)$$

ja jatkamalla samaan malliin lopulta

$$f(n) - f(n+4) = f(n+6)f(n+10)\ldots f(n+(4k+2))\left(f(n+4k) - f(n+(4k+4))\right)\ldots,$$

missä $f(m) \geq 2$, joten $f(n) = f(n+4)$ (sillä näiden erotus on äärellinen luku). Tämän avulla saamme tehtävän alkuperäisen yhtälön muotoon

$$(f(n)-1)(f(n+2)-1) = 1998,$$

ja koska $f(1) = 2$, niin $f(1997) = 2$ ja $f(1999) = 1999$.
b) Merkitsemme $f(1) = a$ ja $f(2) = b$. Tällöin

$$f(3) = \frac{1998}{a-1} + 1, f(4) = \frac{1998}{b-1} + 1,$$

mikä tarkoittaa myös, että $a-1|1998$ ja $b-1 = 1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Ensimmäiset neljä arvoa määrittävät funktion yksikäsitteisesti; luvut a ja b voimme valita mielivaltaisesti.