Kotitehtävät, tammikuu 2011
Vaikeampi sarja

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 4, \\ wx + wy + wz + xy + xz + yz &= 2, \\ wxy + wxz + wyz + xyz &= -4, \\ wxyz &= -1. \end{aligned}$$

Ratkaisu. Yhtälöryhmän ratkaisut (w, x, y, z) ovat yhtälön

$$t^4 - 4\,t^3 + 2\,t^2 + 4\,t - 1 = 0$$

ratkaisuja, mikä nähdään kertomalla auki lauseke $(t-w)(t-x)(t-y)(t-z)$. Sijoittamalla $t = u+1$ saadaan

$$u^4 - 4\,u^2 + 2 = 0,$$

jonka neljä ratkaisua saadaan valitsemalla kaikki etumerkkiyhdistelmät lausekkeesta

$$\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}.$$

Siis

$$\{\, w, x, y, z \,\} = \left\{\, 1 + \sqrt{2+\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2+\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{2-\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2-\sqrt{2}} \,\right\}.$$

2. P on neljännen asteen reaalikertoiminen polynomi, jonka nollakohdat ovat reaalisia ja muodostavat aritmeettisen jonon. Todista, että P:n derivaatan nollakohdat muodostavat aritmeettisen jonon.

Ratkaisu. P:n derivaatan nollakohdat ovat Rollen lauseen nojalla reaalisia. Olkoot P:n nollakohdat $x_j = a + jd$, $j = 0, 1, 2, 3$, ja olkoon nollakohtien keskiarvo λ. Silloin

$$P(x) = m \prod_{j=0}^{3} (x - x_j) = m(x^2 - 2\lambda\, x + p)(x^2 - 2\lambda\, x + q),$$

missä m on nollasta eroava reaaliluku, $p = x_0 x_3$ ja $q = x_1 x_2$. Kummankin sulkulausekkeen derivaatta on $2(x - \lambda)$, joten polynomin derivaatta on

$$P'(x) = 4m(x - \lambda)\Big(x^2 - 2\lambda\, x + \frac{p+q}{2}\Big).$$

Sen nollakohdat ovat λ ja kaksi reaalilukua, joiden summa on 2λ, joten ne muodostavat aritmeettisen jonon.

3. Etsi kaikki reaalikertoimiset polynomit P, joille

$$P(x)P(2x^2 - 1) = P(x^2)P(2x - 1)$$

kaikilla reaaliluvuilla x.

Ratkaisu. Olkoon polynomin aste $\deg P = n$. Kertoimia vertailemalla nähdään, että $P(2x-1) = 2^n\,P(x) + R(x)$, missä $\deg R < n$. Yhtälö saadaan muotoon

$$P(x)\Big(\,2^n P(x^2) + R(x^2)\,\Big) = P(x^2)\Big(\,2^n P(x) + R(x)\,\Big).$$

Siten $P(x)R(x^2) = P(x^2)R(x)$. Jos polynomi R ei ole identtisesti nolla ja sen aste on m, saadaan $n + 2m = m + 2n$ eli $m = n$, mikä on ristiriita. Siis $P(2x-1) = 2^n P(x)$ eli $P(2x+1) = 2^n P(x+1)$. Siten polynomille $Q(x) = P(x+1)$ pätee $Q(2x) = 2^n Q(x)$. Kirjoitetaan $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Jokaiselle kertoimelle pätee $2^i a_i = 2^n a_i$, joten $a_i = 0$, kun $i < n$. Siis mahdollisia ratkaisuja P ovat vakiopolynomit $P(x) = c$ ja polynomit $P(x) = c(x-1)^n$, missä $c \in \mathbb{R}$ ja $n \geq 1$. On helppo tarkistaa, että nämä myös toteuttavat tehtävän ehdon.

4. Todista, että yhtälöistä

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y &= 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y &= 0 \end{aligned}$$

seuraa yhtälö

$$xy - 12x + 15y = 0.$$

Ratkaisu. Arvataan, että $(Ax + By + C)(x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y) + (Dx + Ey + F)(x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y) = xy - 12x + 15y$ ja yritetään löytää sopivat kertoimet A, B, C, D, E ja F. Kerrotaan tulot auki:

$$\begin{aligned} &(Ax + By + C)(x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y) \\ &\qquad = Ax^3 + (-3A + B)x^2y + (2A - 3B)xy^2 + 2By^3 \\ &\qquad\quad + (A + C)x^2 + (-A + B - 3C)xy + (-B + 2C)y^2 + Cx - Cy \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} &(Dx + Ey + F)(x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y) \\ &\qquad = Dx^3 + (-2D + E)x^2y + (D - 2E)xy^2 + Ey^3 \\ &\qquad\quad + (-5D + F)x^2 + (7D - 5E - 2F)xy + (7E + F)y^2 - 5Fx + 7Fy. \end{aligned}$$

Tulojen summassa on useiden termien kerrointen oltava nollia. Kertoimia tarkastelemalla nähdään, että on oltava mm. $A = -D$, $E = -2B$ ja $-3A + B - 2D + E = 0$, mistä seuraa $A = -B$. Asetetaan kokeeksi $A = 1$ ja $B = -1$, jolloin $D = -1$ ja $E = 2$ ja kaikki kolmannen asteen termit kumoutuvat. Termien x^2 ja y^2 kertoimista saadaan $6 + C = -F$ ja $-2C = 15 + F$ eli $C = -9$ ja $F = 3$. Tulojen summaksi saadaan

$$\begin{aligned} &(-A + B - 3C + 7D - 5E - 2F)xy + (C - 5F)x + (-C + 7F)y \\ &\qquad = 2xy - 24x + 30y = 2(xy - 12x + 15y), \end{aligned}$$

joten arvausta pitää korjata kertoimella $1/2$: valitsemalla $A = 1/2$, $B = -1/2$, $C = -9/2$, $D = -1/2$, $E = 1$ ja $F = 3/2$ saadaan arvaus voimaan, ja siitä väite seuraa.

5. Millä n:n ja p:n positiivisilla kokonaislukuarvoilla yhtälöparilla

$$x + py = n,$$
$$x + y = p^z$$

on ratkaisu (x, y, z) positiivisten kokonaislukujen joukossa?

Ratkaisu. Havaitaan ensin, että jos $p = 1$, jälkimmäisellä yhtälöllä ei voi olla ratkaisua. Ratkaistaan jälkimmäisestä yhtälöstä y ja sijoitetaan ensimmäiseen:

$$x + py = x + p(p^z - x) = x(1-p) + p^{z+1} = n$$

eli koska $p - 1 \neq 0$,

$$x = \frac{p^{z+1} - n}{p-1} = \frac{p^{z+1} - 1}{p-1} - \frac{n-1}{p-1}.$$

Sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön x:n lauseke:

$$y = p^z - \frac{p^{z+1} - n}{p-1} = \frac{p^{z+1} - p^z - p^{z+1} + n}{p-1} = \frac{n - p^z}{p-1} = \frac{n-1}{p-1} - \frac{p^z - 1}{p-1}.$$

Kun $z \geq 1$, osamäärä $(p^z - 1)/(p-1) = p^{z-1} + p^{z-2} + \cdots + 1$ on kokonaisluku. Siten x ja y voivat olla kokonaislukuja vain, jos $n - 1$ on jaollinen $p - 1$:llä. Luku x on positiivinen vain, jos $p^{z+1} > n$, ja luku y vain, jos $p^z < n$. Siis molemmat ovat positiivisia vain, jos $p^z < n < p^{z+1}$.

Saatiin ratkaisun olemassaololle välttämättömät ehdot:

- $p > 1$;
- $n - 1$ on $p - 1$:n monikerta;
- n ei ole p:n kokonaislukupotenssi.

Ehdot ovat myös riittävät, koska z:n arvo määräytyy ehdosta $p^z < n < p^{z+1}$ yksikäsitteisesti, minkä jälkeen x ja y ratkeavat saaduilla kaavoilla.

6. Osoita, että kun x, y, z ja α ovat ei-negatiivisia reaalilukuja,

$$x^\alpha(x-y)(x-z) + y^\alpha(y-x)(y-z) + z^\alpha(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Osoita, että yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos joko $x = y = z$ tai luvuista x, y ja z kaksi on yhtäsuuria ja kolmas on nolla.

Ratkaisu. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $0 \leq x \leq y \leq z$. Tällöin summan ensimmäinen termi on selvästi ≥ 0. Jälkimmäisten termien summa on

$$y^\alpha(y-x)(y-z) + z^\alpha(z-x)(z-y) = (z-y)\big(z^\alpha(z-x) - y^\alpha(y-x)\big).$$

Suuruusjärjestysoletuksesta seuraa, että $z^\alpha \geq y^\alpha$ ja $z - x \geq y - x$, joten summa vähintään 0.

Jos yhtäsuuruus on voimassa, täytyy sekä ensimmäisen termin että jälkimmäisten termien summan olla 0. Jotta ensimmäinen termi on 0, on oltava $x = 0$, $x = y$ tai $x = z$.

(1) Jos $x = 0$, jälkimmäisten termien summa on $y^{\alpha+1}(y-z) + z^{\alpha+1}(z-y) = (z-y)\big(z^{\alpha+1} - y^{\alpha+1}\big)$, joka on 0 vain jos $y = z$.

(2) Jos $x = y$, jälkimmäisten termien summa on $z^{\alpha}(z-x)^2$, joka on 0 vain jos joko $z = 0$ tai $x = z$.

(3) Jos $x = z$, suuruusjärjestysoletuksen nojalla $x = y = z$.

Tehtävän epäyhtälö tunnetaan *Schurin epäyhtälönä.*

7. Todista, että jos $0 < m = x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n = M < \infty$ ja $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ovat ei-negatiivisia lukuja, joiden summa on 1,

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{1}{x_j}\Big) \le \frac{\mu^2}{\gamma^2},$$

missä $\mu = (m+M)/2$ ja $\gamma = \sqrt{mM}$.

Ratkaisu. Jos jokainen luvuista $m = x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n = M$ kerrotaan samalla positiivisella vakiolla, epäyhtälön kumpikaan puoli ei muutu. Siksi voidaan olettaa, että $\gamma = 1$, jolloin $M = 1/m$ ja epäyhtälö saadaan muotoon

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{1}{x_j}\Big) \le \mu^2.$$

Koska $m \le x_j \le 1/m$, on $x_j + 1/x_j \le 1/m + m = 2\mu$. Siten

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\Big) + \Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{1}{x_j}\Big) \le 2\mu,$$

mistä väite seuraa soveltamalla aritmeettis-geometrista epäyhtälöä.

8. Todista, että kun $0 \le x, y, z \le 1$,

$$\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x+y} + x^2(y^2-1)(z^2-1) \le 2.$$

Ratkaisu. Merkitään vasenta puolta $f(x, y, z)$. Todistetaan, että f on kunkin muuttujan suhteen konveksi, kun kaksi muutta muuttujaa pysyvät vakioina. Muuttujan x suhteen f:n lauseke on

$$c_1 \cdot x^2 + \frac{c_2}{c_3 + x} + c_4,$$

missä c_1, c_2, c_3 ja c_4 ovat ei-negatiivisia vakioita. Koska $c_1 \cdot x^2$ ja $c_2/(c_3+x)$ ovat konvekseja funktioita (niiden toiset derivaatat ovat ei-negatiivisia), myös f on x:n suhteen konveksi. Sama pätee y:n ja z:n suhteen.

Olkoon (x_0, y_0, z_0) jokin piste kuutiossa $0 \le x, y, z \le 1$. Konveksiudesta seuraa

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &\le \max(f(0, y_0, z_0), f(1, y_0, z_0)) \le \max(f(0,0,z_0), f(0,1,z_0), f(1,0,z_0), f(1,1,z_0)) \\ &\le \max(f(0,0,0), f(0,0,1), f(0,1,0), f(0,1,1), f(1,0,0), f(1,0,1), f(1,1,0), f(1,1,1)). \end{aligned}$$

Riittää laskea f:n arvot kuution kärkipisteissä:

$$\begin{array}{llll} f(0,0,0)=0, & f(0,0,1)=1, & f(0,1,0)=1, & f(0,1,1)=1, \\ f(1,0,0)=2, & f(1,0,1)=3/2, & f(1,1,0)=3/2, & f(1,1,1)=4/3. \end{array}$$

Siis $f(x_0,y_0,z_0)\le 2$.

9. Onko olemassa funktioita $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, joille

$$f(g(x))=x^2 \qquad \text{ja} \qquad g(f(x))=x^4$$

kaikilla $x\in\mathbb{R}$?

Ratkaisu. Yhtälöistä seuraa $f(x^4)=f(g(f(x)))=f(x)^2$. Tämän yhtälön ratkaisemiseksi rajoitutaan ensin tapaukseen $x\ge 1$ ja kokeillaan sijoitusta

$$f(x)=a^{F(\log_b x)},$$

missä $F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$. Funktiota f koskeva yhtälö saadaan muotoon

$$a^{F(4\log_b x)}=a^{2F(\log_b x)},$$

mistä saadaan funktiolle F ehto

$$F(4x)=2F(x).$$

Tälle on helppo löytää ratkaisu $F(x)=\sqrt{x}$. Saatiin siis yrite

$$f(x)=a^{\sqrt{\log_b x}}.$$

Funktiolle g saadaan vastaavasti yhtälö $g(x^2)=g(f(g(x)))=g(x)^4$. Sijoituksesta $g(x)=c^{G(\log_d x)}$ saadaan ehto $G(2x)=4G(x)$, jonka toteuttaa $G(x)=x^2$, joten funktiolle g saatiin yrite

$$g(x)=c^{(\log_d x)^2}.$$

On selvitettävä, toteutuvatko alkuperäiset yhtälöt joillakin vakioiden a,b,c ja d arvoilla. Sijoitetaan yritteet yhtälöihin: ensinnäkin

$$x^2=f(g(x))=a^{\sqrt{\log_b c^{(\log_d x)^2}}}=a^{\sqrt{\log_b c}\,(\log_d x)}.$$

Kokeillaan valita $d=a$, jolloin saadaan

$$x^2=x^{\sqrt{\log_b c}}$$

eli $\log_b c=4$ eli $c=b^4$. Tällöin myös toinen yhtälö toteutuu:

$$x^4=b^{4(\log_a f(x))^2}=b^{4(\sqrt{\log_b x})^2}=b^{4\log_b x}.$$

Voidaan valita esim. $a=b=d=2$ ja $c=2^4=16$.

Yhtälö on ratkaistu tapauksessa $x \geq 1$, ja ratkaisufunktioiden arvojoukot ovat myös $[1, \infty)$. Yritetään laajentaa ratkaisua. Välillä $I = (0,1)$ voidaan asettaa $f(x) = 1/f(1/x)$ ja $g(x) = 1/f(1/x)$. Tällöin $f(x), g(x) \in I$, kun $x \in I$, joten

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{g(1/x)}\right) = \frac{1}{f(g(1/x))} = \frac{1}{(1/x)^2} = x^2$$

ja vastaavasti $g(f(x)) = x^4$, kun $x \in I$. Negatiivisille x voidaan määritellä $f(x) = f(-x)$ ja $g(x) = g(-x)$, jolloin yhtälöt saadaan selvästi voimaan. Käsittelemättä on enää tapaus $x = 0$, mutta asettamalla $f(0) = g(0) = 0$ saadaan yhtälöt toteutumaan.

10. Kolmion pinta-ala T ja kulma γ on annettu. Määritä sivut a ja b niin, että kulman γ vastainen sivu c on mahdollisimman lyhyt.

Ratkaisu. Kosinilauseen mukaan $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos\gamma)$. Lisäksi $2T = ab\sin\gamma$, joten $2ab = 4T/\sin\gamma$. Siten

$$c^2 = (a-b)^2 + 4T\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = (a-b)^2 + 4T\tan\frac{\gamma}{2}.$$

Kun T ja γ on annettu, jälkimmäinen termi on vakio. Ensimmäinen termi on pienimmillään silloin, kun $a = b$ eli kun kolmio on tasakylkinen. Tällöin $a = b = \sqrt{2T/\sin\gamma}$.