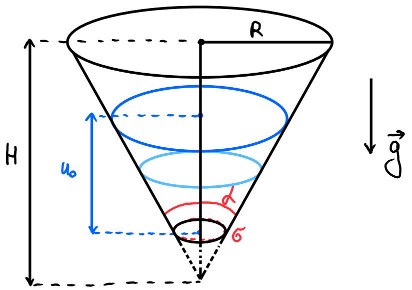
Формулировка задачи



Сосуд для жидкости представляет собой коническую воронку (усечённый конус, поставленный на малый круг в основании) с углом раствора α и отверстием для слива площадью σ, расположенным на дне воронки.

Истечение жидкости из отверстия описывается дифференциальным уравнением:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{-0.6\sqrt{2g}\,\sigma}{(tg\,\alpha/2)^2\,\pi\cdot u^{3/2}} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его

σ - площадь отверстия

α - угол раствора

$u(x)$ - высота столба жидкости в момент времени x

$u_0(x_0)$ - высота столба жидкости в момент времени $x_0 = 0$

g - ускорение свободного падения

Обозначим $\dfrac{-0.6\sqrt{2g}\,\sigma}{(tg\,\alpha/2)^2\pi} = A$, т.к. это константа

Тогда $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{A}{u^{3/2}}$

$$u^{3/2}\,du = A\,dx$$

$$\frac{2u^{5/2}}{5} = Ax + C$$

Подставим начальные условия $u(0) = u_0$: $C = \frac{2}{5}u_0^{5/2}$

Получим общее решение: $\dfrac{2}{5}u^{5/2} = \dfrac{-0.6\sqrt{2g}\,\sigma}{(tg\,\alpha/2)^2\pi}x + \dfrac{2}{5}u_0^{5/2}$

$$u^{5/2} = \frac{-1.5\sqrt{2g}\,\sigma}{(tg\,\alpha/2)^2\pi}x + u_0^{5/2}$$

$$\boxed{u = \left(\frac{-1.5\sqrt{2g}\,\sigma}{(tg\,\alpha/2)^2\pi}x + u_0^{5/2}\right)^{2/5}}$$ - аналитическое решение

Анализ параметров. Физический смысл.

Если угол раствора α очень маленький, то $(tg\,\alpha/2)^2$ стремится к 0.
Вследствии этого, в соответствии с ДУ (1), $\frac{du}{dx}$, т.е скорость истечения жидкости также стремится к 0

Если площадь отверстия σ очень большая, то в соответствии с ДУ (1), $\frac{du}{dx}$, т.е. скорость истечения жидкости очень большая.

Причём α и σ не зависят друг от друга, т.е при большом α можно выбрать и маленькое, и большое σ
И наоборот:
при большом σ можно выбрать и маленькое, и большое α

Формулы численных методов

Для нахождения решения ДУ (1) был выбран явный метод Рунге-Кутта 4-го порядка

Если в ДУ (1) $u(x)$- точное решение, то здесь ввели переобозначение, теперь $\vartheta(x)$- численное решение

$$\begin{cases} x_0, \ \vartheta_0 = u_0 \\ x_{n+1} = x_n + h_n \\ \vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \frac{h_n}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ k_1 = f(x_n, \vartheta_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, \ \vartheta_n + \frac{h_n}{2} k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, \ \vartheta_n + \frac{h_2}{2} k_2\right) \\ k_4 = f\left(x_n + h_n, \ \vartheta_n + h_n k_3\right) \end{cases}, \text{ где } \ f(x_n, \vartheta_n) = \frac{-0.6\sqrt{2g}\,\sigma}{(tg\,\alpha/2)^2\,\pi \cdot \vartheta_n^{3/2}}$$

Контроль локальной погрешности за счёт использования двойного счета с половинным шагом

Пусть (x_n, ϑ_n) – текущая точка численной траектории

$(x_n, \vartheta_n) \to (x_{n+1}, V_{n+1})$ использовали шаг h.

$(x_n, \vartheta_n) \to (x_{n+1/2}, \vartheta_{n+1/2})$ использовали шаг $h/2$

$(x_{n+1/2}, \vartheta_{n+1/2}) \to (x_{n+1}, \tilde{\vartheta}_{n+1})$

Вычислим контрольную величину $S = \frac{|V_{n+1} - \tilde{\vartheta}_{n+1}|}{2^p - 1}$, p - порядок метода

Выбираем малый параметр контроля локальной погрешности $\varepsilon > 0$

если $\frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \leq |S| \leq \varepsilon$, то принимаем точку (x_{n+1}, V_{n+1}), продолжаем с тем же шагом $h_{n+1} = h_n$

если $|S| \leq \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}$, то принимаем точку (x_{n+1}, V_{n+1}), продолжаем с шагом $h_{n+1} = 2h_n$

если $|S| > \varepsilon$, то пересчитываем точку (x_{n+1}, V_{n+1}) с шагом $h_n = \frac{h_n}{2}$.

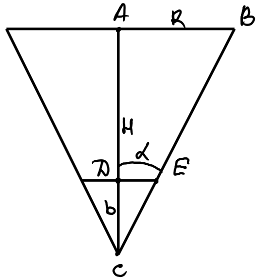
Критерии остановки счета

Последняя вычисляемая точка численной траектории определяется условиями:

1) счёт с выходом за значение u искомой функции $u(x)$ снизу (в соответствии с физическим смыслом задачи: уровень столба жидкости не может быть отрицательным)
 если на шаге с номером N $\vartheta_N \in [u - \varepsilon_{гр}, u]$, вычисляем точку (x_N, ϑ_N) и прекращаем счёт
 получим, что численная траектория вышла за значение u „снизу" с погрешностью не более $\varepsilon_{гр}$.
2) счёт с ограничением на максимальное число шагов N_{max}
 буду использовать в сочетании с 1) вариантом.

Найдем связь параметров системы (α, σ) с H и R, посмотрим, однозначно ли они определяются при введенных параметрах.

Рассмотрим осевое сечение конуса



1) $tg\,\alpha = \frac{R}{H}$

2) Т.к. σ вычисляется как $\sigma = \pi(DE)^2$, то $DE = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}$

3) $\triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{R}{DE} = \frac{H}{H-b}$, где $b = DC$

Из 2) и 3) получаем: $\frac{R}{H} = \frac{\sqrt{\sigma/\pi}}{H-b}$, но $b = \frac{DE}{tg\,\alpha} = \frac{\sqrt{\sigma/\pi}}{tg\,\alpha}$

С учетом 1) получаем: $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{\sigma/\pi}}{H - \frac{\sqrt{\sigma/\pi}}{tg\,\alpha}}$

Преобразуем: $\boxed{H = \frac{2\sqrt{\sigma/\pi}}{tg\,\alpha} \quad (*)}$

Из 1) получаем, что $\boxed{R = 2\sqrt{\sigma/\pi} \quad (**)}$

Из $(*)$, $(**)$ получаем, что при заданных значениях α и σ, R и H вычисляются единственным образом