测度论与概率论基础

lw2333

2023 年 11 月 14 日

Chapter 1

可测空间和可测映射

1.1 集合及其运算

Definitions

称任意一个非空集合 X 为空间. X 的子集称为这个空间的**集合**. 空集记为 $\varnothing$. X 的成员称为元素.

定义 X 上的实函数

$$I_A = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

称为 A 的指示函数.

集合 $A^c := \{x : x \notin A\}$ 称为集合 A 的余.

集合 $A \backslash B := \{x \in A \wedge x \notin B\}$ 称为集合 A 和 B 的差或真差.

集合 $A \Delta B := (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A)$ 称为 A 和 B 的对称差.

设 $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$.如果对每个 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $A_n \in A_{n+1}$ 则称 A_n 为非降的, 记为 $A_n \uparrow$. 并称 $\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{\infty} A_n$ 为它的极限.

类似地, 定义非增的, 并称它们的交为它的极限.

统称二者为单调序列. 因此, 单调序列总有极限. (为什么？)

因为 $\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\} \uparrow$, $\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\} \downarrow$

因而分别有极限

$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

分别称作 A_n 的下极限和上极限

$x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ 意味着除去 A_n 的有限个集合外, x 属于该序列的其他集合

$x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ 意味着 x 属于 A_n 中无穷多个集合

于是我们有

$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$

如果二者相等, 认为 A_n 的极限存在, 记作 $\lim_{n\to\infty} A_n$

1.2 集合系

Definitions

空间 X 上由集合为元素组成的集合称作集合 X 上的集合系, 常用 $\mathscr{A},\mathscr{B}\ldots$ 等表示

π 系:

如果 X 上的非空集合系 $\mathscr{P}$ 对于集合交的运算是封闭的, 即:
$A,B\in\mathscr{P}\longrightarrow A\bigcap B\in\mathscr{P}$

半环:

满足下列条件的 π 系 $\mathscr{Q}$ 被称为半环：
$\forall A,\ B\in\mathscr{Q}$ 且 $B\subseteq A$, $\exists$有限个两两不交的 $\{C_k\in\mathscr{Q},k=1,2,3\ldots\}$
使得 $A\backslash B=\bigcup_{k=1}^{n}C_k$

环:

如果非空集合系 $\mathscr{R}$ 对并和差的运算是封闭的，即
$A,B\in\mathscr{R}\Longrightarrow A\bigcap B,A-B\in\mathscr{R}$
则称 $\mathscr{R}$ 为环

域:

满足下列条件的 π 系称为域:
$X\in\mathscr{A}$
$\forall\, A\in\mathscr{A},\Longrightarrow A^c\in\mathscr{A}$
有的文献中，也把域叫做代数

命题 1.2.1
半环是 π 系，环必是半环，域必是环

Definitions

一些可列封闭的集合系:

单调系:

如果对集合系 $\mathscr{M}$ 中的任何单调序列 $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$

均有 $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{M}$ 则把 $\mathscr{M}$ 叫做单调系

λ **系:**

集合系 $\mathscr{L}$ 称为 λ 系，如果它满足条件:

$X \in \mathscr{L}$

$\forall\,(A, B \in \mathscr{L},\, B \subseteq A) \Longrightarrow A\backslash B \in \mathscr{L}$

$\forall\,(A_n \in \mathscr{L},\, A_n \uparrow) \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$

σ **系:**

集合系 $\mathscr{F}$ 称为 σ 系，如果它满足条件:

$X \in \mathscr{F}$

$\forall\, A \in \mathscr{F} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{F}$

$\forall\,(A_n \in \mathscr{L},\, n = 1, 2, \ldots) \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

也称 σ 系为 σ 代数。有两个特殊的 σ 域，$\{\varnothing,\, X\}$ 和 $\{A :\, A \subseteq X\}$

设 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域，那么

$A_n \in \mathscr{F}\; n = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\}^c \in \mathscr{F}$

故它对可列交也是封闭的。故得到:

$A,\, B \in \mathscr{F} \Longrightarrow A \bigcap B = A \bigcap B \bigcap X \ldots$

因此, σ 域是域

命题1.2.2

λ 系是单调系; σ 域是 λ 系

总结以上，得到由宽到紧的关系:

π 系 $\to$ 半环 $\to$ 环 $\to$ 域 $\to$ σ 域

单调系 $\to$ λ系 $\to$ σ域

一个非空集合 X 和它上的 σ 域 $(X, \mathscr{F})$ 称为可测空间

命题1.2.3

一个既是单调系又是域的集合系必是 σ 域

命题1.2.4

一个既 λ 系又是 π 的集合必是 σ 域

一个对可列并封闭的环是 σ 环；一个包含 X 的 σ 环是 σ 域

1.3 σ 域的生成

定义 1.3.1

形式化语言略去. 由集合系 $\mathscr{E}$ 生成的环 $\mathscr{L}$ 就是包含 $\mathscr{E}$ 的最小环

其他数据结构同理

命题 1.3.1

由任意集合系生成的环、单调系、lambda系和sigma域均存在

THM 1.3.2

把由集合生成的环、单调系、λ 系、σ 域分别记作 r, m, l, σ

半环 $\mathscr{R}$ 生成的环

$r(\mathscr{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : \{A_k \in \mathscr{R}, k = 1, 2, \ldots\} A_i \bigcap A_j = \varnothing\}$

THM 1.3.3

如果 $\mathscr{A}$ 是域，则 $\sigma(\mathscr{A}) = m(\mathscr{A})$

推论 1.3.4

如果 $\mathscr{A}$ 是域，$\mathscr{M}$ 是单调系，则

$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M} \Longleftarrow \sigma(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{M}$

THM 1.3.5

如果 $\mathscr{P}$ 是 π 系，则 $\sigma(\mathscr{P}) = l(\mathscr{P})$

推论 1.3.6

如果 $\mathscr{P}$ 是 π 系， λ