# 第 1 章

# 楕円曲線とテータ関数

## 1.1　楕円曲線

Definition 1.1.1. (楕円曲線)

パラメータ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ に対して, 曲線 $C(\lambda) \subset \mathbb{P}^2$ を

$$C(\lambda) = \{[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2] \in \mathbb{P}^2 \mid \zeta_2^2 \zeta_0 = \zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \lambda\zeta_0)\}$$

で定め, $C(\lambda)$ の $U_0 = \{\zeta_0 \neq 0\}$ へのアファイン化を

$$C_0(\lambda) = \{(v, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = v(v-1)(v-\lambda)\}$$

と表す.

Remark 1.1.2.

直線 $\zeta_0 = 0$ は $C(\lambda)$ と $P_\infty$ でのみ交わる. 即ち, $C(\lambda) \setminus C_0(\lambda) = \{P_\infty = [0:0:1]\}$ である. 実際,

$$\begin{cases} \zeta_2^2 \zeta_0 = \zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \lambda\zeta_0) \\ \zeta_0 = 0 \end{cases}$$

を解くと, $\zeta_1^3 = 0$ となり, $P_\infty$ は重複度 3 の点となることから $\zeta_0 = 0$ と $C(\lambda)$ の交点は $P_\infty$ のみから成る.

$P(u,v) = v^2 - u(u-1)(u-\lambda)$ とおくとき, $\partial P/\partial v = 2v$ より, $P(a,b) = P_v(a,b) = 0$ となる点 $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ は, $(a,b) = (0,0), (1,0), (\lambda, 0)$ である. $S = \{0, 1, \lambda\}$ とおく. また, $\mathscr{X} = \{(u,v) \in (\mathbb{C} \setminus S) \times \mathbb{C} \mid P(u,v) = 0\}$ とおく. これは Riemann 面である.

Proposition 1.1.3.

第 1 射影[a] $\mathrm{pr}_1 \colon \mathscr{X} \to \mathbb{C} \setminus S = \mathbb{P}^1 \setminus (S \cup \{\infty\}); (u,v) \mapsto u$ は $C(\lambda)$ 上の固有正則写像 $\mathrm{pr} \colon C(\lambda) \to \mathbb{P}^1$ に拡張される.

[a] これは固有な局所同相写像

Proof.

今野 [?] 命題 4.15 を適応せよ. □

Proposition 1.1.4.

$C(\lambda)$ の種数は 1 であり, 正則写像 pr は $P_0=[1:0:0], P_1=[1:1:0], P_\lambda=[1:\lambda:0], P_\infty=[0:0:1]$ で分岐する二重被覆である.

Proof.

今野 [?] 例 4.16 によると, $w^2-z(z-\lambda)(z-1)$, $\lambda\neq 0,1$ より $C(\lambda)$ の種数 1 であり, pr は $z=0,\lambda,1,\infty$ で分岐する二重被覆である.

具体的に局所座標と局所表示を求める.

$U_0$ 上, $z=\frac{\zeta_1}{\zeta_0}$, $w=\frac{\zeta_2}{\zeta_0}$ とすれば, $z\neq 0,\lambda,1$ のとき $w\neq 0$ であることから $z$ が局所座標となる. $z=0,\lambda,1$ のとき, $z_j=z-j,\ j=0,\lambda,1$ とすれば,

$$w_j=\frac{w}{\sqrt{z(z-\lambda)(z-1)}}$$

とおけば, $|z_j|$ が十分小さいとき, $w_j^2=z_j$ となることから $w_j$ が局所座標となる.

$C(\lambda)\setminus C_0(\lambda)=\{P_\infty\}$ であるから, $[\zeta_0:\zeta_1:\zeta_2]=[0:0:1]$ の周りの局所座標のみ与えればよい. $u=\zeta_0/\zeta_1$, $t=\zeta_2/\zeta_1$ とすれば, $\zeta_2^2\zeta_0=\zeta_1(\zeta_1-\zeta_0)(\zeta_1-\lambda\zeta_0)$ は $u=t(t-u)(t-\lambda u)$ となる. $g(u,t)=u-t(t-u)(t-\lambda u)$ は $g_u(0,0)=1-2\lambda ut+(1+\lambda)t^2|_{u=t=0}=1\neq 0$ より陰関数定理から $t$ は $(u,t)=(0,0)$ の周りの局所座標となっていて, $u=c_\infty t^3+O(t^4)$, $c_\infty\neq 0$ と展開される. 従って $t$ が局所座標となる.

以上により, pr の ramification point は, $P_0=[1:0:0], P_1=[1:1:0], P_\lambda=[1:\lambda:0], P_\infty=[0:0:1]$ であり, branched point は, $\mathrm{pr}(P_0)=[1:0], \mathrm{pr}(P_1)=[1:1], \mathrm{pr}(P_\lambda)=[1:\lambda]$ であり, $\mathrm{pr}(P_\infty)=[0:1]$ である. また, 分岐指数はそれぞれ 2 である. これによって $(\mathrm{pr}, C(\lambda))$ は $P_0,\ P_1,\ P_\lambda,\ P_\infty$ で分岐する $\mathbb{P}^1$ の二重被覆であることがわかる. □

Remark 1.1.5.

自己同相写像 $f\colon C(\lambda)\to C(\lambda)$ で $\mathrm{pr}=\mathrm{pr}\circ f$ を満たすものを被覆変換という. また, 被覆変換全体 $\mathrm{Deck}(C(\lambda)/\mathbb{P}^1)$ は写像の合成によって群になり, これを被覆変換群という.

双正則写像

$$\rho\colon C(\lambda)\to C(\lambda); [\zeta_0:\zeta_1:\zeta_2]\to[\zeta_0:\zeta_1:-\zeta_2]$$

は被覆変換であり, $\rho\circ\rho=\mathrm{id}_{C(\lambda)}$, $\rho(P_j)=P_j\ (j=0,1,\lambda,\infty)$ を満たす.

## 1.2 $C(\lambda)$ 上の微分形式

$g(C(\lambda))=1$ より, $\dim_{\mathbb{C}}\Omega^1(C(\lambda))=1$ であるから, 1 つ 1-形式を見つければ $C(\lambda)$ 上の正則微分は全てその定数倍で書ける.

Proposition 1.2.1.

$C_0^\circ(\lambda)=C_0(\lambda)\setminus\{P_0,P_1,P_\lambda\}$ 上で定義された 1-形式

$$\varphi=\frac{dv}{w}=\frac{dv}{\sqrt{v(v-1)(v-\lambda)}}$$

は非零な $C(\lambda)$ 上の 1-形式に $\varphi$ 拡張される.

Proof.

$v \neq 0, 1, \lambda$ なら, $w \neq 0$ であるから, $C_0^\circ(\lambda)$ 上 $\varphi \neq 0$ である. $P_j$ $(j = 0, 1, \lambda)$ の周りでは, $v - j = c_j w^2 + O(w^3)(c_j \neq 0)$ と展開されることから,

$$\frac{dv}{w} = \frac{1}{w}\frac{dv}{dw}dw = (2c_j + O(w^2))dw$$

と表される. 従って, $C_0(\lambda)$ 上 $\varphi$ は非零な正則微分である. $C(\lambda)$ は無限遠 $P_\infty$ で局所座標 $t$ によって, $u = c_\infty t^3 + O(t^4)$ と展開されるのであった. $v = t/u, w = 1/u$ より, $P_\infty$ の近傍で $\varphi$ は

$$\begin{aligned}
\varphi &= ud\left(\frac{t}{u}\right) \\
&= (c_\infty t^3 + O(t^4))\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{(c_\infty t^3 + O(t^4))}\right) \\
&= (c_\infty t^3 + O(t^4))\left(\frac{1}{(c_\infty t^3 + O(t^4))} - t\frac{3c_\infty t^2 + O(t^3)}{(c_\infty t^3 + O(t^4))^2}\right) \\
&= 1 - \frac{3c_\infty t^3 + O(t^4)}{c_\infty t^3 + O(t^4)}
\end{aligned}$$

と表される. 従って $\varphi(P_\infty) = (1-3)dt = -2dt \neq 0$ であるから $\varphi$ は $C(\lambda)$ 上非零な正則微分である.[*1] □

## 1.3　1 次ホモロジー群 $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底

$\lambda$ によって定まる $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を定める. $P_0 \in C_0(\lambda)$ を $C(\lambda)$ の基点とする. まず, $\lambda \in (0,1)$ に対して定める.

$\ell_{\infty,0}, \ell_{0,\lambda}, \ell_{\lambda,1}, \ell_{1,\infty}$ をそれぞれ, $P_i$ から $P_j$ への曲線で次を満たすものとする: $\mathrm{pr}(\ell_{i,j}([0,1])) = [i,j]$, $(i,j) = (\infty,0), (0,\lambda), (\lambda,1), (1,\infty)$[*2] かつ, これらの曲線の $w = \sqrt{v(v-\lambda)(v-1)}$ における偏角が次の表 (1.1) で与えられる[*3].

| $v$ | $-\infty$ | $\ell_{\infty,0}$ | $0$ | $\ell_{0,\lambda}$ | $\lambda$ | $\ell_{\lambda,1}$ | $1$ | $\ell_{1,\infty}$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\arg(v)$ | $*$ | $\pi$ | $*$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $*$ |
| $\arg(v-\lambda)$ | $*$ | $\pi$ | $\pi$ | $\pi$ | $*$ | $0$ | $0$ | $0$ | $*$ |
| $\arg(v-1)$ | $*$ | $\pi$ | $\pi$ | $\pi$ | $\pi$ | $*$ | $0$ | $0$ | $*$ |
| $\arg(w)$ | $*$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $*$ | $\pi$ | $*$ | $\frac{\pi}{2}$ | $*$ | $0$ | $*$ |

表 1.1　$\arg(w)$

即ち, $\ell_{\infty,0}$, $\ell_{1,\infty}$ は $w$ 上 $\sqrt{1} = 1$ となる分枝で, $\ell_{0,\lambda}$, $\ell_{\lambda,1}$ は $w$ 上 $\sqrt{1} = -1$ となる分枝である. こうして得られた曲線によって $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $A, B$ を構成する: Remark (5) で与えられた被覆変換 $\rho$ によって終点が $P_0 = [1:0:0]$ であるような曲線 $A, B$ を

$$A = \ell_{\infty,0} \cdot (-\rho(\ell_{\infty,0})),\ B = (-\ell_{0,\lambda}) \cdot \rho(\ell_{0,\lambda})$$

と定める. ただし, 曲線 $c_1$, $c_2$ に対して, 曲線 $c_2 \cdot c_1$ を

$$c_2 \cdot c_1(t) = \begin{cases} c_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

[*1] 正則微分の空間 $\Omega^1(X)$ の基底は共通零点を持たないことから, $\varphi$ は零点を持たない.
[*2] $\ell_{i,j}$ の pr による像が $\mathbb{P}^1$ の各平面の実軸上にあることだと思う.
[*3] 各曲線を上半平面 $\mathbb{H}$ を通じて解析接続することにより表の偏角が得られる.

で定める．これを

$$A=(1-\rho)\cdot\ell_{\infty,0},\ B=-(1-\rho)\cdot\ell_{0,\lambda}$$

と表す．$-B\cdot A$ は 0 の周りを負の方向に周る閉曲線となるから, 交点数は $-B\cdot A=-1$ となる．よって $A\cdot B=-1$ となることから交点行列は,

$$\begin{pmatrix} A\cdot A & A\cdot B \\ B\cdot A & B\cdot B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, $A,\ B$ は $H_1(C(\lambda),\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底である．

任意の $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ に対して $A,B$ を定める．$(0,1)$ のある一点に対して定まる $\ell_{j,k}$ と $A,\ B$ を $\lambda$ への曲線によって解析接続することにより定める．これは経路の取り方によるが, 周期の違いを除けば一意に定まる．

## 1.4 Abel-Jacobi 写像

これまでで得られたシンプレクティック基底 $A,\ B$ と正則微分の空間の基底 $\varphi$ によって Abel-Jacobi 写像を定義していく．これらの基底に関する周期行列は,

$$\Pi=\begin{pmatrix} \frac{\tau_A}{\tau_B} \\ 1 \end{pmatrix},\ \tau_A=\int_A\varphi,\ \tau_B=\int_B\varphi$$

であり, Riemann の双線形関係[*4] から $\tau=\frac{\tau_A}{\tau_B}$ は $\mathrm{Im}\,(\tau)>0$ を満たす．

**Definition 1.4.1. (Abel-Jacobi 写像, 周期写像)**

$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ に対して定まるシンプレクティック基底 $A,\ B$ と正則微分 $\varphi$, 周期行列

$$\Pi=\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix},\ \tau_A=\int_A\varphi,\ \tau_B=\int_B\varphi,\ \tau=\frac{\tau_A}{\tau_B}$$

を取り, $L_\tau=\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$ とするとき, Abel-Jacobi 写像を

$$j\colon C(\lambda)\to\mathbb{C}/L_\tau=E_\tau; P\mapsto\frac{1}{\tau_B}\int_{P_0}^{P}\varphi$$

と定める．これは $P_0$ から $P$ への経路の取り方の違いから出る積分は $L_\tau$ に入るため well-defined である．
また, 各 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ に対して $\tau$ が定まったことから, 周期写像を

$$\mathrm{per}\colon\mathbb{C}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{H};\lambda\mapsto\tau$$

と定める．ただしこれは $(0,1)$ から $\lambda$ への解析接続による違いがあるため多価関数である．

Remark 1.4.2.

種数 $g>0$ の閉 Riemann 面の上の Abel-Jacobi 写像は埋め込みになっていた[*5]ことから $\jmath$ は全単射正則写像であり, 周期写像 per は単射であった [?]. 従って, $C(\lambda)$ は Abel-Jacobi 写像を通して複素トーラス $E_\tau$ に Riemann 面と

---

*4 一般に種数 $g$ の閉 Riemann 面上のシンプレクティック基底と正規基底から定める周期行列 $\Pi$ は, $\Pi=\begin{pmatrix} Z \\ I_g \end{pmatrix}$ であり, Riemann の双線形関係は $Z-{}^tZ=O_g,\ i(\bar{Z}-{}^tZ)>0$ である．

*5 全射性は Abel-Jacobi 写像を $\mathrm{Div}(X)$ にまで拡張すると得られる．

して同型である．従って，$z \in E_\tau$ に対して，$j(P)=z$ を満たす $P=(u,v)\in C(\lambda)$[*6] となるものが唯一つ存在する．

**Theorem 1.4.3.**

Abel-Jacobi 写像の逆写像 $\jmath^{-1}\colon E_\tau \to C(\lambda); z \mapsto (v,w)$ は，テータ関数を用いて

$$v = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^2},$$
$$w = -\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^3}$$

と表される．

また，周期写像 per の逆写像 $\mathrm{per}^{-1}\colon \mathrm{per}(\mathbb{C}\setminus\{0,1\})\to\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ は，

$$\lambda = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}$$

によって与えられる．

Proof.

まず，$\jmath(P_\jmath)$ を求める．$P_0$ は Abel-Jacobi 写像の基点であったため，$\jmath(P_0)\equiv 0$ であることは明らかである．
$\rho$ によってもう一つの分枝に写るとき，$\sqrt{z}$ は $-\sqrt{z}$ になることに注意すると，

$$\int_A \varphi = \int_{(1-\rho)\cdot\ell_{\infty,0}} \varphi = 2\int_{-\ell_{\infty,0}} \varphi$$
$$\int_B \varphi = \int_{(\rho-1)\cdot\ell_{0,\lambda}} \varphi = 2\int_{\ell_{0,\lambda}} \varphi$$

より，

$$\int_{P_0}^{P_\infty} \varphi = \frac{\tau_A}{2}$$
$$\int_{P_0}^{P_\lambda} \varphi = \frac{\tau_B}{2}$$

であるから，

$$\jmath(P_\lambda) = \frac{1}{\tau_B}\int_{P_0}^{P_\lambda}\varphi = \frac{1}{2}$$
$$\jmath(P_\infty) = \frac{1}{\tau_B}\int_{P_0}^{P_\infty}\varphi = \frac{1}{\tau_B}\frac{\tau_A}{2} = \frac{\tau}{2}$$

である．また，$(1-\rho)\cdot\ell_{\lambda,1}$ は $B$ とのみ交点を持つことから，$H_1(C(\lambda),\mathbb{Z})$ のサイクルとして $(1-\rho)\cdot\ell_{\lambda,1} = -A$[*7] であるから，

$$\int_{-A}\varphi = \int_{(1-\rho)\cdot\ell_{\lambda,1}}\varphi = 2\int_{P_\lambda}^{P_1}\varphi$$

より，

$$\int_{P_\lambda}^{P_1}\varphi = -\frac{1}{2}\int_A\varphi = -\frac{\tau_A}{2} \equiv \frac{\tau_A}{2}$$

[*6] $U_0$ や $U_2$ で $\mathbb{C}^2$ と同一視している

[*7] 1 を始点とするサイクル

従って，

$$\begin{aligned}\jmath(P_1) &= \frac{1}{\tau_B}\int_{P_0}^{P_1}\varphi \\ &= \frac{1}{\tau_B}\left(\int_{P_0}^{P_\lambda}+\int_{P_\lambda}^{P_1}\right)\varphi \\ &= \jmath(P_\lambda)+\frac{1}{\tau_B}\frac{\tau_A}{2} = \frac{1+\tau}{2}\end{aligned}$$

である．以上により，

$$\jmath(P_0)=0,\ \jmath(P_\lambda)=\frac{1}{2},\ \jmath(P_\infty)=\frac{\tau}{2},\ \jmath(P_1)=\frac{1+\tau}{2}$$

を得る．

$U_0$ 上の局所座標 $(v,w)$ は $(v,w)=(0,0)$ の周りで，$v=cw^2+O(w^3)$，$c\neq 0$，$U_2$ 上の局所座標 $(u,t)$ は $(u,t)=(0,0)$ の周りで $v=t/u=t/(c_\infty t^3+O(t^3))$，$c_\infty\neq 0$ と展開できたことから，$v$ を $P_0$ で 2 位の零を持ち，$P_\infty$ で 2 位の極を持つ有理型関数と見做すことができる．$\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)$ は $z=0(=\jmath(P_0))$ で 1 位の零を持ち，$\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)$ は $z=\frac{\tau}{2}(=\jmath(P_\infty))$ で 1 位の零を持つのであった．

$$h(z,\tau)=\frac{\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^2}$$

は，$\vartheta_{a,b}(z+1,\tau)=\exp(2\pi ia)\vartheta_{a,b}(z,\tau)$，$\vartheta_{a,b}(z+\tau,\tau)=\exp(-2\pi ib)\exp(-\pi i(\tau+2z))\vartheta_{a,b}(z,\tau)$ より，$h(z+p\tau+q,\tau)=h(z,\tau)(p,\ q\in\mathbb{Z})$ を満たすことから $E_\tau$ 上の有理型関数と見做すことができる．これを Abel-Jacobi 写像 $\jmath$ によって引き戻し $C(\lambda)$ 上の有理型関数だと思うと，

$$v=c_v\frac{\vartheta_{[1,1]}(\jmath(P),\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(\jmath(P),\tau)^2}$$

となる定数 $c_v\in\mathbb{C}$ が取れる．この定数 $c_v$ を確定させる．$\jmath(P_1)=(1+\tau)/2, P_1=(1,0)\in C_0(\lambda)$ より，

$$\begin{aligned} 1 &= c_v\frac{\vartheta_{[1,1]}\left(\frac{1+\tau}{2},\tau\right)^2}{\vartheta_{[0,1]}\left(\frac{1+\tau}{2},\tau\right)^2} \\ \iff\ c_v &= \frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\end{aligned}$$

よって，

$$v=\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\frac{\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^2}$$

を得る．

$P_\lambda=[1:\lambda:0]$ より，$\lambda=v|_{P_\lambda}$ であるから，$z=\jmath(P_\lambda)=\frac{1}{2}$ を代入すると，

$$\lambda=\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\frac{\vartheta_{[1,1]}(\frac{1}{2},\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(\frac{1}{2},\tau)^2}=\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}$$

を得る．

$w$ を $P_0$, $P_\lambda$, $P_1$ で 1 位の零を持ち，$P_\infty$ で 3 位の極を持つ[*8] $E_\tau$ 上の有理型関数と見做す．$v$ のときと同様，

$$\frac{\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^3}$$

[*8] $U_2$ で $w=1/u$, $u=c_\infty t^3+O(t^4)$ という表示を持つことから従う．

は $C(\lambda)$ 上の有理型関数と見做すと,

$$w=c_w\frac{\vartheta_{[0,0]}(\jmath(P),\tau)\vartheta_{[1,0]}(\jmath(P),\tau)\vartheta_{[1,1]}(\jmath(P),\tau)}{\vartheta_{[0,1]}(\jmath(P),\tau)^3}$$

を満たす定数 $c_w\in\mathbb{C}$ が取れる．これを求める．$w^2=v(v-\lambda)(v-1)$ に代入すると,

$$\begin{aligned}&c_w^2\frac{\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)^2\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^6}\\ =&\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\frac{\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^2}(v-\lambda)(v-1)\\ \Longleftrightarrow\ &c_w^2\frac{\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^4}=\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}(v-\lambda)(v-1)\end{aligned}$$

より, $z\to 0$ と極限を取ると, $\vartheta_{[1,1]}(0,\tau)=0$ より, $v\to 0$ であるから,

$$c_w^2\frac{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4}=\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\lambda$$

となり,

$$\begin{aligned}c_w^2&=\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\lambda\\ &=\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}\lambda=\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}=\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^8}\end{aligned}$$

を得る．よって,

$$c_w=\pm\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}$$

を得る． 符号を確定させればよい． $\lambda\in(0,1)$ と $P=(v_1,w_1)$ を $\ell_{0,\lambda}$ の内部から取る． このとき, $w_1^2=v_1(v_1-\lambda)(v_1-1)>0$ より, $w_1\in\mathbb{R}$ であり, 表 (1.1) から, $\arg(w)=\pi$ であるから, $w_1<0$ となる．$\tau_A$ は純虚数[*9]であり, $\tau_B\in\mathbb{R}$ である[*10]ため, $\tau=\tau_A/\tau_B$ は純虚数となる．また, $\jmath(P)=z_1$ と表すと,

$$z_1=\int_{P_0}^{P}\varphi=\frac{1}{\tau_B}\int_0^{v_1}\frac{-dv}{\sqrt{v(v-\lambda)(v-1)}}\text{[*11]}$$

は

$$0<\int_0^{v_1}\frac{dv}{\sqrt{v(v-\lambda)(v-1)}}<\int_0^{\lambda}\varphi=\tau_B$$

より, $-1<z_1<0$ を満たす．テータ関数の連続性や微分公式から, $\vartheta_{[0,0]}[\tau]$, $\vartheta_{[0,1]}[\tau]$, $\vartheta_{[1,0]}[\tau]$, $\vartheta_{[p,q]}(z,\tau)>0$ となることが分かる．$w_1<0$ であることから $c_w<0$ となり符号が確定し,

$$w=-\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^3}$$

を得る． □

---

[*9] $v,\ v-\lambda,\ v-1<0$ となるから, $w=\sqrt{v(v-1)(v-\lambda)}$ は純虚数となる．
[*10] $v>0,\ v-\lambda,\ v-1<0$ より, $w^2=v(v-\lambda)(v-1)>0$ となるから．
[*11] 分枝の取り方から符号はマイナス

# 第 2 章

# Jacobi の周期公式

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt = B(\alpha,\gamma-\alpha)F(\alpha,\beta,\gamma;x)$$

より,

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-xt)^{-\frac{1}{2}}dt = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;x\right) = \pi F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;x\right)$$

$s = xt$ とおく. このとき, $ds = xdt$ より,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-xt)^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{s}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}}\frac{ds}{x} \\
&= \int_0^x s^{-\frac{1}{2}}(x-s)^{-\frac{1}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}}ds \\
&= -\int_0^x s^{-\frac{1}{2}}(s-x)^{-\frac{1}{2}}(s-1)^{-\frac{1}{2}}ds \\
&= \int_0^x \frac{-dt}{\sqrt{t(t-x)(t-1)}}
\end{aligned}$$

である. 従って,

$$\pi F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right) = \int_0^x \frac{-dt}{\sqrt{t(t-\lambda)(t-1)}} \tag{2.1}$$

である. また,

$$f_{\infty 0} = e^{\pi i(1-\alpha)}B(\alpha,\beta-\gamma+1)F(\alpha,\beta\alpha+\beta-\gamma+1;1-x)$$

より,

$$\pi i F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-x\right) = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}} \tag{2.2}$$

である.

**Theorem 2.0.1. (Jacobi's period formula)**

$\tau \in \left\{\tau \in \mathbb{H} \mid -1 < \mathrm{Re}(\tau) < 1,\ |\tau - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2},\ |\tau + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\right\}$ と $\lambda(\tau) = \dfrac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}$ に対し,

$$\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2 = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda(\tau)\right)$$

が成立. ただし, $F$ は Gauss の超幾何関数である.

Proof.

$$w=-\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^3}$$

より,

$$-\frac{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4\vartheta_{[0,1]}(\jmath(P),\tau)^3}{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[0,0]}(\jmath(P),\tau)\vartheta_{[1,0]}(\jmath(P),\tau)}=\frac{\vartheta_{[1,1]}(\jmath(P),\tau)}{w}$$

である. ただし, $P=(v,w)\in C_0(\lambda)$ は $P_0=(0,0)$ の近傍から取り,

$$\jmath(P)=\frac{1}{\tau_B}\int_{P_0}^{P}\frac{dv}{w},\ \tau_B=2\int_0^\lambda\frac{-dv}{\sqrt{v(v-\lambda)(v-1)}}\underset{(2.1)}{=}2\pi F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)$$

とする. $P\to P_0$ と極限を取ると, 左辺は

$$-\frac{\vartheta_{[0,0]}[\tau]^3\vartheta_{[0,1]}[\tau]}{\vartheta_{[1,0]}[\tau]^3}$$

に収束する. $w^2=v(v-\lambda)(v-1)\iff v=\frac{w^2}{\lambda}-\frac{v^3-(\lambda+1)v^2}{\lambda}$ より, $P_0$ の周りの局所座標 $(v,w)$ は

$$v(w)=\frac{w^2}{\lambda}+O(w^3)$$

と展開できる. Abel-Jacobi 写像は積分で定義されていたことを思い出すと, l'Hôpital の定理より,

$$\begin{aligned}&\lim_{w\to 0}\frac{\vartheta_{[1,1]}(\jmath(P),\tau)}{w}\\ =&\lim_{w\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial z}\vartheta_{[1,1]}(\jmath(P),\tau)\cdot\frac{1}{\tau_B}\frac{\frac{d}{dw}v(w)}{w}\right)\\ =&\vartheta'_{[1,1]}(0,\tau)\frac{2}{2\pi\lambda F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)}\end{aligned}$$

である. Jacobi の微分公式から

$$\begin{aligned}\vartheta'_{[1,1]}(0,\tau)\frac{2}{2\pi\lambda F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)}&=-\pi\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)\frac{2}{2\pi\lambda F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)}\\ &=\frac{-\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)}{\lambda F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)}\end{aligned}$$

である. よって,

$$-\frac{\vartheta_{[0,0]}[\tau]^3\vartheta_{[0,1]}[\tau]}{\vartheta_{[1,0]}[\tau]^3}=\frac{-\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)}{\lambda F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)}=\frac{\vartheta_{[0,0]}[\tau]^4}{\vartheta_{[1,0]}[\tau]^4}\frac{-\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)}$$

を得る. これを整理すると

$$\vartheta_{[0,0]}[\tau]^2=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)$$

となる. □

Remark 2.0.2.

この等式は上半平面 $\mathbb{H}$ 全体に解析接続できるが, $\mathbb{H}$ が単連結にもかかわらず, $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)$ は一価ではない.

$$g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma(2,4)$$

の作用のもと, $\lambda(g\cdot\tau)=\lambda(\tau)$ であるが, $\vartheta_{[0,0]}[\tau]^2$ は $\Gamma(2,4)$ に関するウェイト 1 のモジュラー形式であることから

$$\vartheta_{[0,0]}(0,g\cdot\tau)^2=(c\tau+d)\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2=(c\tau+d)F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)$$

となる.

Corollary 2.0.3.

$\lambda\in\{\lambda\in\mathbb{C}\mid|\lambda|<1,\ |\lambda-1|<1\}$ と

$$\tau(\lambda)=\frac{\tau_A}{\tau_B}=\frac{iF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-\lambda\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)}$$

に対して,

$$\vartheta_{[0,0]}(0,\tau(\lambda))^2=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)$$

は $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 全体に解析接続することができる.

Proof.

$$\begin{aligned}\tau_A&=2\int_{\infty}^{0}\frac{dv}{\sqrt{v(v-\lambda)(v-1)}}\underset{(2.1)}{=}2\pi iF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1-\lambda\right)\\ \tau_B&=2\int_{0}^{\lambda}\frac{-dv}{\sqrt{v(v-\lambda)(v-1)}}\underset{(2.2)}{=}2\pi F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda\right)\end{aligned}$$

より従う. □