第 1 章

テータ関数

1.1 テータ関数

Definition 1.1.1. (テータ関数)

$(z,\tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ に対して, 以下の級数は広義一様絶対収束する:

$$\vartheta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i(n^2\tau + 2nz)\right)$$

これをテータ関数という. また, 指標付きテータ関数を $a, b \in \mathbb{Q}$ に対し,

$$\vartheta_{a,b}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i((n+a)^2\tau + 2(n+a)(z+b))\right)$$

と定める.

Proposition 1.1.2.

$p, q \in \mathbb{Z}$ に対して以下が成立:

- $\vartheta_{0,0}(z,\tau) = \vartheta(z,\tau)$
- $\vartheta_{a,b}(z,\tau) = \exp(\pi i a^2\tau + 2\pi i a(z+b))\vartheta(z + a\tau + b, \tau)$,
- $\vartheta_{a,b}(z+q,\tau) = \exp(2\pi i a q)\vartheta_{a,b}(z,\tau)$
- $\vartheta_{a,b}(z+p\tau,\tau) = \exp(-2\pi i b p)\exp(-\pi i(p^2\tau + 2pz))\vartheta_{a,b}(z,\tau)$
- $\vartheta_{a+p,b+q}(z,\tau) = \exp(2\pi i a q)\vartheta_{a,b}(z,\tau)$

1.2 Riemann's theta relation

Theorem 1.2.1. (Riemann's theta relation)

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)T$ とするとき,

$$\sum_{a,b\in\{0,1/2\}} \vartheta_{a,b}(z_1,\tau)\vartheta_{a,b}(z_2,\tau)\vartheta_{a,b}(z_3,\tau)\vartheta_{a,b}(z_4,\tau) = 2\vartheta_{a,b}(w_1,\tau)\vartheta_{a,b}(2_2,\tau)\vartheta_{a,b}(w_3,\tau)\vartheta_{a,b}(w_4,\tau)$$

Definition 1.2.2.

$a, b \in \{0, \frac{1}{2}\}$ に対し,

$$\vartheta_{[2a,2b]}(z) = \vartheta_{a,b}(z,\tau)$$

と定める.

Proposition 1.2.3.

$$\begin{aligned}
&z \mapsto -z && z \mapsto z + \frac{\tau}{2} \\
&\vartheta_{[0,0]}(-z) = \vartheta_{[0,0]}(z) && \vartheta_{[0,0]}\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = \exp\left(-\pi i \left(\frac{\tau}{4} + z\right)\right)\vartheta_{[1,0]}(z) \\
&\vartheta_{[1,0]}(-z) = \vartheta_{[1,0]}(z) && \vartheta_{[1,0]}\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = \exp\left(-\pi i \left(\frac{\tau}{4} + z\right)\right)\vartheta_{[0,0]}(z) \\
&\vartheta_{[0,1]}(-z) = \vartheta_{[0,1]}(z) && \vartheta_{[0,1]}\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = -i\exp\left(-\pi i \left(\frac{\tau}{4} + z\right)\right)\vartheta_{[1,1]}(z) \\
&\vartheta_{[1,1]}(-z) = -\vartheta_{[1,1]}(z) && \vartheta_{[1,1]}\left(z + \frac{\tau}{2}\right) = -i\exp\left(-\pi i \left(\frac{\tau}{4} + z\right)\right)\vartheta_{[0,1]}(z) \\
&z \mapsto z + \frac{1}{2} && z \mapsto z + \frac{\tau+1}{2} \\
&\vartheta_{[0,0]}\left(z + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_{[0,1]}(z) && \vartheta_{[0,0]}\left(z + \frac{\tau+1}{2}\right) = -i\exp\left(-\pi i \left(\frac{\tau}{4} + z\right)\right)\vartheta_{[1,1]}(z) \\
&\vartheta_{[1,0]}\left(z + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_{[1,1]}(z) && \vartheta_{[1,0]}\left(z + \frac{\tau+1}{2}\right) = -i\exp\left(-\pi i \left(\frac{\tau}{4} + z\right)\right)\vartheta_{[0,1]}(z) \\
&\vartheta_{[0,1]}\left(z + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_{[0,0]}(z) && \vartheta_{[0,1]}\left(z + \frac{\tau+1}{2}\right) = \exp\left(-\pi i \left(\frac{\tau}{4} + z\right)\right)\vartheta_{[1,0]}(z) \\
&\vartheta_{[1,1]}\left(z + \frac{1}{2}\right) = -\vartheta_{[1,0]}(z) && \vartheta_{[1,1]}\left(z + \frac{\tau+1}{2}\right) = -\exp\left(-\pi i \left(\frac{\tau}{4} + z\right)\right)\vartheta_{[0,0]}(z)
\end{aligned}$$

Corollary 1.2.4.

$p, q \in \{0,1\}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b\in\{0,1\}} (-1)^{aq+bp}\vartheta_{[a,b]}(z_1)\vartheta_{[a,b]}(z_2)\vartheta_{[a,b]}(z_3)\vartheta_{[a,b]}(z_4)\\
=&2\vartheta_{[p,q]}(w_1)\vartheta_{[p,q]}(w_2)\vartheta_{[p,q]}(w_3)\vartheta_{[p,q]}(w_4),\\
&\sum_{a,b\in\{0,1\}} (-1)^{aq+bp}\vartheta_{[a,b]}(z_1)\vartheta_{[a,b]}(z_2)\vartheta_{[a,1-b]}(z_3)\vartheta_{[a,1-b]}(z_4)\\
=&2(-1)^p\vartheta_{[p,1-q]}(w_1)\vartheta_{[p,1-q]}(w_2)\vartheta_{[p,q]}(w_3)\vartheta_{[p,q]}(w_4),\\
&\sum_{a,b\in\{0,1\}} (-1)^{aq+bp}\vartheta_{[a,b]}(z_1)\vartheta_{[a,b]}(z_2)\vartheta_{[1-a,b]}(z_3)\vartheta_{[1-a,b]}(z_4)\\
=&2\vartheta_{[p,q]}(w_1)\vartheta_{[p,q]}(w_2)\vartheta_{[1-p,q]}(w_3)\vartheta_{[1-p,q]}(w_4),\\
&\sum_{a,b\in\{0,1\}} (-1)^{aq+bp}\vartheta_{[a,b]}(z_1)\vartheta_{[a,b]}(z_2)\vartheta_{[1-a,1-b]}(z_3)\vartheta_{[1-a,1-b]}(z_4)\\
=&2(-1)^p\vartheta_{[p,1-q]}(w_1)\vartheta_{[p,1-q]}(w_2)\vartheta_{[1-p,q]}(w_3)\vartheta_{[1-p,q]}(w_4),\\
&\sum_{a,b\in\{0,1\}} (-1)^{aq+bp}\vartheta_{[a,b]}(z_1)\vartheta_{[a,1-b]}(z_2)\vartheta_{[1-a,b]}(z_3)\vartheta_{[1-a,1-b]}(z_4)\\
=&2(-1)^{p+q}\vartheta_{[1-p,1-q]}(w_1)\vartheta_{[1-p,q]}(w_2)\vartheta_{[p,1-q]}(w_3)\vartheta_{[p,q]}(w_4)
\end{aligned}$$

が成立. ただし, $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)T$

1.3 Addition formulas

Theorem 1.3.1. (Addition formulas)

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{[0,0]}(z_1+z_3)\vartheta_{[0,0]}(z_1-z_3)\vartheta_{[0,0]}(0)^2\\
=&\vartheta_{[0,0]}(z_1)^2\vartheta_{[0,0]}(z_3)^2+\vartheta_{[1,1]}(z_1)^2\vartheta_{[1,1]}(z_3)^2\\
=&\vartheta_{[0,1]}(z_1)^2\vartheta_{[0,1]}(z_3)^2+\vartheta_{[1,0]}(z_1)^2\vartheta_{[1,0]}(z_3)^2
\end{aligned}$$

Corollary 1.3.2. (Addition formulas)

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{[0,1]}(z_1+z_3)\vartheta_{[0,1]}(z_1-z_3)\vartheta_{[0,1]}(0)^2\\
=&\vartheta_{[0,0]}(z_1)^2\vartheta_{[0,0]}(z_3)^2-\vartheta_{[1,0]}(z_1)^2\vartheta_{[1,0]}(z_3)^2\\
=&\vartheta_{[0,1]}(z_1)^2\vartheta_{[0,1]}(z_3)^2-\vartheta_{[1,1]}(z_1)^2\vartheta_{[1,1]}(z_3)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{[1,0]}(z_1+z_3)\vartheta_{[1,0]}(z_1-z_3)\vartheta_{[1,0]}(0)^2\\
=&\vartheta_{[0,0]}(z_1)^2\vartheta_{[0,0]}(z_3)^2-\vartheta_{[0,1]}(z_1)^2\vartheta_{[0,1]}(z_3)^2\\
=&\vartheta_{[1,0]}(z_1)^2\vartheta_{[1,0]}(z_3)^2-\vartheta_{[1,1]}(z_1)^2\vartheta_{[1,1]}(z_3)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{[1,1]}(z_1+z_3)\vartheta_{[1,1]}(z_1-z_3)\vartheta_{[0,0]}(0)^2\\
=&\vartheta_{[1,1]}(z_1)^2\vartheta_{[0,0]}(z_3)^2-\vartheta_{[0,0]}(z_1)^2\vartheta_{[1,1]}(z_3)^2\\
=&\vartheta_{[0,1]}(z_1)^2\vartheta_{[1,0]}(z_3)^2-\vartheta_{[1,0]}(z_1)^2\vartheta_{[0,1]}(z_3)^2
\end{aligned}$$

Corollary 1.3.3.

$$\begin{aligned}&\vartheta_{[1,1]}(z_1+z_2)\vartheta_{[0,1]}(z_1-z_2)\vartheta_{[1,0]}(0)\vartheta_{[0,0]}(0)\\=&\vartheta_{[0,0]}(z_1)\vartheta_{[1,0]}(z_1)\vartheta_{[0,1]}(z_2)\vartheta_{[1,1]}(z_2)+\vartheta_{[0,1]}(z_1)\vartheta_{[1,1]}(z_1)\vartheta_{[0,0]}(z_2)\vartheta_{[1,0]}(z_2)\\=&\vartheta_{[1,0]}(z_1)\vartheta_{[0,0]}(z_1)\vartheta_{[1,1]}(z_2)\vartheta_{[0,1]}(z_2)+\vartheta_{[1,1]}(z_1)\vartheta_{[0,1]}(z_1)\vartheta_{[1,0]}(z_2)\vartheta_{[0,0]}(z_2)\end{aligned}$$

1.4 Algebraic relations among $\vartheta_{[a,b]}(z)$

Theorem 1.4.1. (Algebraic relations among $\vartheta_{[a,b]}(z)$)

$$\begin{aligned}\vartheta_{[0,0]}(z)^2\vartheta_{[0,0]}(0)^2&=\vartheta_{[0,1]}(z)^2\vartheta_{[0,1]}(0)^2+\vartheta_{[1,0]}(z)^2\vartheta_{[1,0]}(0)^2\\\vartheta_{[1,1]}(z)^2\vartheta_{[0,0]}(0)^2&=\vartheta_{[0,1]}(z)^2\vartheta_{[1,0]}(z)^2-\vartheta_{[1,0]}(z)^2\vartheta_{[0,1]}(0)^2\\\vartheta_{[0,0]}(0)^4&=\vartheta_{[0,1]}(0)^4+\vartheta_{[1,0]}(0)^4\end{aligned}$$

最後の等式を Jacobi の恒等式という.

Corollary 1.4.2.

$\varphi\colon E_\tau\to\mathbb{P}^3$ を

$$\varphi_2(z)=[\zeta_0:\zeta_1:\zeta_2:\zeta_3]=[\vartheta_{[0,0]}(2z):\vartheta_{[0,1]}(2z):\vartheta_{[1,0]}(2z):\vartheta_{[1,1]}(2z)]$$

と定める. このとき, φ の像 $\varphi_2(E_\tau)$ は,

$$\Theta_2=\left\{[\zeta_0:\zeta_1:\zeta_2:\zeta_3]\in\mathbb{P}^3\;\middle|\;\begin{matrix}\zeta_0^2\vartheta_{[0,0]}(0)^2=\zeta_1^2\vartheta_{[0,1]}(0)^2+\zeta_2^2\vartheta_{[1,0]}(0)^2\\\zeta_3^2\vartheta_{[0,0]}(0)^2=\zeta_1^2\vartheta_{[1,0]}(0)^2-\zeta_2^2\vartheta_{[0,1]}(0)^2\end{matrix}\right\}$$

で与えられる.

Theorem 1.4.3. (2τ-formula)

$$\begin{aligned}&T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}, && (w_1,w_2)=(z_1,z_2)T=\left(\frac{z_1+z_2}{2},\frac{z_1-z_2}{2}\right)\\&(c_1,c_2)=\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1-a_2}{2}\right), && (d_1,d_2)=\left(\frac{b_1+b_2}{2},\frac{b_1-b_2}{2}\right)\end{aligned}$$

とするとき, 次が成立:

$$\begin{aligned}&2\vartheta_{a_1,b_1}(z_1,\tau)\vartheta_{a_2,b_2}(z_2,\tau)\\=&\vartheta_{2c_1,d_1}\left(w_1,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_{2c_2,d_2}\left(w_2,\frac{\tau}{2}\right)+\exp(-2\pi i a_1)\vartheta_{2c_1,d_1+\frac{1}{2}}\left(w_1,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_{2c_2,d_2+\frac{1}{2}}\left(w_2,\frac{\tau}{2}\right)\end{aligned}$$

Corollary 1.4.4.

$$
\begin{aligned}
2\vartheta_{[0,0]}(z,2\tau)^2 &= \vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[0,0]}(0,\tau) + \vartheta_{[0,1]}(z,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau) \\
2\vartheta_{[0,1]}(z,2\tau)^2 &= \vartheta_{[0,1]}(z,\tau)\vartheta_{[0,0]}(0,\tau) + \vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau) \\
2\vartheta_{[1,0]}(z,2\tau)^2 &= \vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[0,0]}(0,\tau) - \vartheta_{[0,1]}(z,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau) \\
2\vartheta_{[1,1]}(z,2\tau)^2 &= \vartheta_{[0,1]}(z,\tau)\vartheta_{[0,0]}(0,\tau) - \vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)
\end{aligned}
$$

Corollary 1.4.5.

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{[0,0]}(0,2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2 + \vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2}{2} \\
\vartheta_{[0,1]}(0,2\tau)^2 &= \vartheta_{[0,0]}(0,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau) \\
\vartheta_{[1,0]}(0,2\tau)^2 &= \frac{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2 - \vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2}{2}
\end{aligned}
$$

1.5 Jacobi's derivative formula

Theorem 1.5.1.

$$
\frac{\partial}{\partial z}\vartheta_{[1,1]}(0,\tau) = -\pi\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)
$$

1.6 An infinite product expression of the theta function

Theorem 1.6.1.

$$
\begin{aligned}
\vartheta(z,\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}&(1-\exp(2\pi i m\tau)) \\
&\times \prod_{m=0}^{\infty}(1+\exp(\pi i((2m+1)\tau - 2z))) \\
&\times \prod_{m=0}^{\infty}(1+\exp(\pi i((2m+1)\tau + 2z)))
\end{aligned}
$$

Corollary 1.6.2.

$q = \exp(\pi i\tau)$, $q^{1/4} = \exp(\pi i\tau/4)$, $w = \exp(\pi iz)$ とするとき,

$$\vartheta_{[0,0]}(z,\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})\prod_{m=0}^{\infty}(1+q^{2m+1}w^2)(1+q^{2m+1}w^{-2}),$$
$$\vartheta_{[0,1]}(z,\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})\prod_{m=0}^{\infty}(1-q^{2m+1}w^2)(1-q^{2m+1}w^{-2}),$$
$$\vartheta_{[1,0]}(z,\tau) = q^{1/4}(w+w^{-1})\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m}w^2)(1+q^{2m}w^{-2}),$$
$$\vartheta_{[1,1]}(z,\tau) = iq^{1/4}(w-w^{-1})\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m}w^2)(1-q^{2m}w^{-2}).$$

Corollary 1.6.3.

$$\vartheta_{[0,0]}(0,\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})\prod_{m=0}^{\infty}(1+q^{2m+1})^2,$$
$$\vartheta_{[0,1]}(0,\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m q^{m^2} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})\prod_{m=0}^{\infty}(1-q^{2m+1})^2,$$
$$\vartheta_{[1,0]}(0,\tau) = q^{1/4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2+m} = 2q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m})^2,$$
$$\vartheta'_{[1,1]}(0,\tau) = -\pi q^{1/4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m(2m+1)q^{m^2+m} = -2\pi q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^3.$$

Corollary 1.6.4.

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m q^{3m^2+m} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})$$

Corollary 1.6.5.

$$\vartheta_{1/6,1/2}(0,3\tau)^3 = \frac{1}{2\pi i}\vartheta'_{1/2,1/2}(0,\tau)$$

Definition 1.6.6.

Jacobi's Δ-function を

$$\vartheta_{1/6,1/2}(0,3\tau)^24 = \exp(2\pi i\tau)\prod_{m=1}^{\infty}(1-\exp(2\pi im\tau))^24$$

で定める.

第 2 章

テータ関数とモジュラー形式

2.1 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のテータ関数への作用

Proposition 2.1.1.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ に次のように作用する:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (z, \tau) = \left(\frac{z}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right)$$

Definition 2.1.2.

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群を次のように定める:

$$\Gamma_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| ab, cd \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| \begin{array}{l} a \equiv d \equiv 1 \pmod 2 \\ b \equiv c \equiv 0 \pmod 2 \end{array} \right\}$$

$$\Gamma(2,4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| \begin{array}{l} a \equiv d \equiv 1 \pmod 4 \\ b \equiv c \equiv 0 \pmod 2 \end{array} \right\}$$

Proposition 2.1.3.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, 次が成立:

1. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle J, T \rangle$
2. $\Gamma_{1,2} = \langle J, T^2 \rangle$
3. $\Gamma(2) = \langle -I_2, T^2, {}^tT^2 \rangle$
4. $\Gamma(2,4) = \langle T^2, {}^tT^2 \rangle$

Proposition 2.1.4.

$$\vartheta(T^2\cdot(z,\tau))=\vartheta(z,\tau+2)=\vartheta(z,\tau)$$
$$\vartheta(J\cdot(z,\tau))=\vartheta\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{-i\tau}\exp\left(\pi i\frac{z^2}{\tau}\right)\vartheta(z,\tau)$$

ただし, $\sqrt{-i\tau}$ の分枝は, τ が純虚数のとき $\sqrt{-i\tau}>0$ となるように定める.

Theorem 2.1.5.

任意の

$$g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(2,4)$$

に対して,

$$\vartheta\left(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^2=(c\tau+d)\exp\left(\frac{2\pi icz^2}{c\tau+d}\right)\vartheta(z,\tau)^2$$

が成立.

Theorem 2.1.6.

$c>0$ または, $c=0,\ d>0$ を満たすような

$$g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(2,4)$$

に対して,

$$\vartheta\left(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^2=\kappa(g)(c\tau+d)\exp\left(\frac{2\pi icz^2}{c\tau+d}\right)\vartheta(z,\tau)^2$$

が成立. ただし,

$$\kappa(g)=\begin{cases}i^{d-1} & c\in2\mathbb{Z},\ d\notin2\mathbb{Z}\\ i^{-c} & c\notin2\mathbb{Z},\ d\in2\mathbb{Z}\end{cases}$$

Lemma 2.1.7.

$$\vartheta_{a,b}(T\cdot(z,\tau))=\exp(-\pi i(a^2+a))\vartheta_{a,a+b+1/2}(z,\tau)$$

Corollary 2.1.8.

$$\vartheta_{[0,0]}(z,\tau+1)=\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)$$
$$\vartheta_{[0,1]}(z,\tau+1)=\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)$$
$$\vartheta_{[1,0]}(z,\tau+1)=\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)$$
$$\vartheta_{[1,1]}(z,\tau+1)=\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)$$

Corollary 2.1.9.

$$\vartheta_{a,b}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \exp(2\pi iab)\sqrt{-i\tau}\exp\left(\frac{\pi iz^2}{\tau}\right)\vartheta_{b,-a}(z,\tau)$$

Corollary 2.1.10.

$$\begin{aligned}
\vartheta_{[0,0]}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau}\exp\left(\frac{\pi iz^2}{\tau}\right)\vartheta_{[0,0]}(z,\tau),\\
\vartheta_{[0,1]}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau}\exp\left(\frac{\pi iz^2}{\tau}\right)\vartheta_{[1,0]}(z,\tau),\\
\vartheta_{[1,0]}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau}\exp\left(\frac{\pi iz^2}{\tau}\right)\vartheta_{[0,1]}(z,\tau),\\
\vartheta_{[1,1]}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= -i\sqrt{-i\tau}\exp\left(\frac{\pi iz^2}{\tau}\right)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau).
\end{aligned}$$

Theorem 2.1.11.

任意の $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して,

$$\vartheta_{[1,1]}\left(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^2 = \kappa_0(g)(c\tau+d)\exp\left(\frac{2\pi icz^2}{c\tau+d}\right)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2$$

2.2 モジュラー形式

Theorem 2.2.1.

$\vartheta_{a,b}[\tau] = \vartheta_{a,b}(0,\tau)$, $(a, b \in \mathbb{Q})$ を $\tau \in \mathbb{H}$ の関数とするとき, $\vartheta_{[0,0]}[\tau]^2$ は $\Gamma(2,4)$ に関するウェイト 1 のモジュラー形式である.

Remark 2.2.2.

$$\vartheta_{0,1/2}[{}^tT^2 \cdot \tau]^2 = -(2\tau+1)\vartheta_{0,1/2}[\tau]^2,\ \vartheta_{1/2,0}[{}^tT^2 \cdot \tau]^2 = -\vartheta_{1/2,0}[\tau]^2$$

より, $\vartheta_{0,1/2}[\tau]^2$, $\vartheta_{1/2,0}[\tau]^2$ は $\Gamma(2,4)$ に関するウェイト 1 のモジュラー形式ではない.

Proposition 2.2.3.

Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の正規部分群とするとき, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$ は Γ に関するウェイト k のモジュラー形式全体 $\mathrm{Mod}^k(\Gamma)$ に次のように作用する:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

に対して $\nu(g,\tau) = (c\tau+d)^k$ とするとき, $f(\tau) \in \mathrm{Mod}^k(\Gamma)$ に対して,

$$f^g(\tau) = \nu(\gamma,\tau)^{-1}f(g\cdot\tau).$$

Theorem 2.2.4.

$\vartheta_{[0,0]}[\tau]^4$, $\vartheta_{[0,1]}[\tau]^4$, $\vartheta_{[1,0]}[\tau]^4$ は $\Gamma(2)$ に関するウェイト 2 のモジュラー形式である.

Theorem 2.2.5.

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{[0,0]}[\tau]^8 + \vartheta_{[0,1]}[\tau]^8 + \vartheta_{[1,0]}[\tau]^8 \\
&\vartheta_{[0,0]}[\tau]^8\vartheta_{[0,1]}[\tau]^8 + \vartheta_{[0,1]}[\tau]^8\vartheta_{[1,0]}[\tau]^8 + \vartheta_{[1,0]}[\tau]^8\vartheta_{[0,0]}[\tau]^8 \\
&\vartheta_{[0,0]}[\tau]^8\vartheta_{[0,1]}[\tau]^8\vartheta_{[1,0]}[\tau]^8
\end{aligned}$$

はそれぞれ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関するウェイト 4, 8, 12 のモジュラー形式である.

第 3 章

楕円曲線とテータ関数

3.1 楕円曲線

Definition 3.1.1. (楕円曲線)

パラメータ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ に対して, 曲線 $C(\lambda) \subset \mathbb{P}^2$ を

$$C(\lambda) = \{[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2] \in \mathbb{P}^2 \mid \zeta_2^2\zeta_0 = \zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \lambda\zeta_0)\}$$

で定め, $C(\lambda)$ の $U_0 = \{\zeta_0 \neq 0\}$ へのアファイン化を

$$C_0(\lambda) = \{(v,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = v(v-1)(v-\lambda)\}$$

と表す.

Remark 3.1.2.

直線 $\zeta_0 = 0$ は $C(\lambda)$ と P_∞ でのみ交わる. 即ち, $C(\lambda) \setminus C_0(\lambda) = \{P_\infty = [0:0:1]\}$ である. 実際,

$$\begin{cases} \zeta_2^2\zeta_0 = \zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \lambda\zeta_0) \\ \zeta_0 = 0 \end{cases}$$

を解くと, $\zeta_1^3 = 0$ となり, P_∞ は重複度 3 の点となることから $\zeta_0 = 0$ と $C(\lambda)$ の交点は P_∞ のみから成る.

$P(u,v) = v^2 - u(u-1)(u-\lambda)$ とおくとき, $\partial P/\partial v = 2v$ より, $P(a,b) = P_v(a,b) = 0$ となる点 $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ は, $(a,b) = (0,0), (1,0), (\lambda,0)$ である. $S = \{0,1,\lambda\}$ とおく. また, $\mathscr{X} = \{(u,v) \in (\mathbb{C} \setminus S) \times \mathbb{C} \mid P(u,v) = 0\}$ とおく. これは Riemann 面である.

Proposition 3.1.3.

第 1 射影[a] $\mathrm{pr}_1 \colon \mathscr{X} \to \mathbb{C} \setminus S = \mathbb{P}^1 \setminus (S \cup \{\infty\}); (u,v) \mapsto u$ は $C(\lambda)$ 上の固有正則写像 $\mathrm{pr} \colon C(\lambda) \to \mathbb{P}^1$ に拡張される.

[a] これは固有な局所同相写像

Proof.

今野 [1] 命題 4.15 を適応せよ. □

Proposition 3.1.4.

$C(\lambda)$ の種数は 1 であり, 正則写像 pr は $P_0 = [1:0:0], P_1 = [1:1:0], P_\lambda = [1:\lambda:0], P_\infty = [0:0:1]$ で分岐する二重被覆である.

Proof.

今野 [1] 例 4.16 によると, $w^2 - z(z-\lambda)(z-1)$, $\lambda \neq 0, 1$ より $C(\lambda)$ の種数 1 であり, pr は $z = 0, \lambda, 1, \infty$ で分岐する二重被覆である.

具体的に局所座標と局所表示を求める.

U_0 上, $z = \frac{\zeta_1}{\zeta_0}$, $w = \frac{\zeta_2}{\zeta_0}$ とすれば, $z \neq 0, \lambda, 1$ のとき $w \neq 0$ であることから z が局所座標となる. $z = 0, \lambda, 1$ のとき, $z_j = z - j,\ j = 0, \lambda, 1$ とすれば,

$$w_j = \frac{w}{\sqrt{z(z-\lambda)(z-1)}}$$

とおけば, $|z_j|$ が十分小さいとき, $w_j^2 = z_j$ となることから w_j が局所座標となる.

$C(\lambda) \setminus C_0(\lambda) = \{P_\infty\}$ であるから, $[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2] = [0:0:1]$ の周りの局所座標のみ与えればよい. $u = \zeta_0/\zeta_1$, $t = \zeta_2/\zeta_1$ とすれば, $\zeta_2^2\zeta_0 = \zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \lambda\zeta_0)$ は $u = t(t-u)(t-\lambda u)$ となる. $g(u,t) = u - t(t-u)(t-\lambda u)$ は $g_u(0,0) = 1 - 2\lambda ut + (1+\lambda)t^2|_{u=t=0} = 1 \neq 0$ より陰関数定理から t は $(u,t) = (0,0)$ の周りの局所座標となっていて, $u = c_\infty t^3 + O(t^4)$, $c_\infty \neq 0$ と展開される. 従って t が局所座標となる.

以上により, pr の ramification point は, $P_0 = [1:0:0], P_1 = [1:1:0], P_\lambda = [1:\lambda:0], P_\infty = [0:0:1]$ であり, branched point は, $\mathrm{pr}(P_0) = [1:0], \mathrm{pr}(P_1) = [1:1], \mathrm{pr}(P_\lambda) = [1:\lambda]$ であり, $\mathrm{pr}(P_\infty) = [0:1]$ である. また, 分岐指数はそれぞれ 2 である. これによって $(\mathrm{pr}, C(\lambda))$ は $P_0,\ P_1,\ P_\lambda,\ P_\infty$ で分岐する $\mathbb{P}^1$ の二重被覆であることがわかる. □

Remark 3.1.5.

自己同相写像 $f\colon C(\lambda) \to C(\lambda)$ で $\mathrm{pr} = \mathrm{pr} \circ f$ を満たすものを被覆変換という. また, 被覆変換全体 $\mathrm{Deck}(C(\lambda)/\mathbb{P}^1)$ は写像の合成によって群になり, これを被覆変換群という.

双正則写像

$$\rho\colon C(\lambda) \to C(\lambda); [\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2] \to [\zeta_0 : \zeta_1 : -\zeta_2]$$

は被覆変換であり, $\rho \circ \rho = \mathrm{id}_{C(\lambda)}$, $\rho(P_j) = P_j\ (j = 0, 1, \lambda, \infty)$ を満たす.

3.2 $C(\lambda)$ 上の微分形式

$g(C(\lambda)) = 1$ より, $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(C(\lambda)) = 1$ であるから, 1 つ 1-形式を見つければ $C(\lambda)$ 上の正則微分は全てその定数倍で書ける.

Proposition 3.2.1.

$C_0^\circ(\lambda) = C_0(\lambda) \setminus \{P_0, P_1, P_\lambda\}$ 上で定義された 1-形式

$$\varphi = \frac{dv}{w} = \frac{dv}{\sqrt{v(v-1)(v-\lambda)}}$$

は非零な $C(\lambda)$ 上の 1-形式に φ 拡張される.

Proof.

$v \neq 0, 1, \lambda$ なら, $w \neq 0$ であるから, $C_0^\circ(\lambda)$ 上 $\varphi \neq 0$ である. P_j $(j = 0, 1, \lambda)$ の周りでは, $v - j = c_j w^2 + O(w^3)(c_j \neq 0)$ と展開されることから,

$$\frac{dv}{w} = \frac{1}{w}\frac{dv}{dw}dw = (2c_j + O(w^2))dw$$

と表される. 従って, $C_0(\lambda)$ 上 φ は非零な正則微分である. $C(\lambda)$ は無限遠 P_∞ で局所座標 t によって, $u = c_\infty t^3 + O(t^4)$ と展開されるのであった. $v = t/u, w = 1/u$ より, P_∞ の近傍で φ は

$$\begin{aligned}\varphi &= ud\left(\frac{t}{u}\right)\\ &= (c_\infty t^3 + O(t^4))\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{(c_\infty t^3 + O(t^4))}\right)\\ &= (c_\infty t^3 + O(t^4))\left(\frac{1}{(c_\infty t^3 + O(t^4))} - t\frac{3c_\infty t^2 + O(t^3)}{(c_\infty t^3 + O(t^4))^2}\right)\\ &= 1 - \frac{3c_\infty t^3 + O(t^4)}{c_\infty t^3 + O(t^4)}\end{aligned}$$

と表される. 従って $\varphi(P_\infty) = (1-3)dt = -2dt \neq 0$ であるから φ は $C(\lambda)$ 上非零な正則微分である.[*1] □

3.3 1 次ホモロジー群 $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底

λ によって定まる $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を定める. $P_0 \in C_0(\lambda)$ を $C(\lambda)$ の基点とする. まず, $\lambda \in (0, 1)$ に対して定める.

$\ell_{\infty,0}, \ell_{0,\lambda}, \ell_{\lambda,1}, \ell_{1,\infty}$ をそれぞれ, P_i から P_j への曲線で次を満たすものとする: $\mathrm{pr}(\ell_{i,j}([0,1])) = [i, j]$, $(i, j) = (\infty, 0), (0, \lambda), (\lambda, 1), (1, \infty)$[*2] かつ, これらの曲線の $w = \sqrt{v(v-\lambda)(v-1)}$ における偏角が次の表 3.1 で与えられる[*3].

v	$-\infty$	$\ell_{\infty,0}$	0	$\ell_{0,\lambda}$	λ	$\ell_{\lambda,1}$	1	$\ell_{1,\infty}$	∞
$\arg(v)$	$*$	π	$*$	0	0	0	0	0	$*$
$\arg(v-\lambda)$	$*$	π	π	π	$*$	0	0	0	$*$
$\arg(v-1)$	$*$	π	π	π	π	$*$	0	0	$*$
$\arg(w)$	$*$	$\frac{3\pi}{2}$	$*$	π	$*$	$\frac{\pi}{2}$	$*$	0	$*$

表 3.1　$\arg(w)$

即ち, $\ell_{\infty,0}$, $\ell_{1,\infty}$ は w 上 $\sqrt{1} = 1$ となる分枝で, $\ell_{0,\lambda}$, $\ell_{\lambda,1}$ は w 上 $\sqrt{1} = -1$ となる分枝である. こうして得られた曲線によって $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 A, B を構成する: Remark 3.1.5 で与えられた被覆変換 ρ によって終点が $P_0 = [1:0:0]$ であるような曲線 A, B を

$$A = \ell_{\infty,0} \cdot (-\rho(\ell_{\infty,0})),\ B = (-\ell_{0,\lambda}) \cdot \rho(\ell_{0,\lambda})$$

と定める. ただし, 曲線 c_1, c_2 に対して, 曲線 $c_2 \cdot c_1$ を

$$c_2 \cdot c_1(t) = \begin{cases} c_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

[*1] 正則微分の空間 $\Omega^1(X)$ の基底は共通零点を持たないことから, φ は零点を持たない.

[*2] $\ell_{i,j}$ の pr による像が $\mathbb{P}^1$ の各平面の実軸上にあることだと思う.

[*3] 各曲線を上半平面 $\mathbb{H}$ を通じて解析接続することにより表の偏角が得られる.

で定める．これを

$$A = (1-\rho)\cdot \ell_{\infty,0},\ B = -(1-\rho)\cdot \ell_{0,\lambda}$$

と表す．$-B\cdot A$ は 0 の周りを負の方向に周る閉曲線となるから, 交点数は $-B\cdot A = -1$ となる．よって $A\cdot B = -1$ となることから交点行列は,

$$\begin{pmatrix} A\cdot A & A\cdot B \\ B\cdot A & B\cdot B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, $A,\ B$ は $H_1(C(\lambda),\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底である．

任意の $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ に対して A, B を定める．$(0,1)$ のある一点に対して定まる $\ell_{j,k}$ と $A,\ B$ を λ への曲線によって解析接続することにより定める．これは経路の取り方によるが, 周期の違いを除けば一意に定まる．

3.4 Abel-Jacobi 写像

これまでで得られたシンプレクティック基底 $A,\ B$ と正則微分の空間の基底 φ によって Abel-Jacobi 写像を定義していく．これらの基底に関する周期行列は,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{\tau_A}{\tau_B} \\ 1 \end{pmatrix},\ \tau_A = \int_A \varphi,\ \tau_B = \int_B \varphi$$

であり, Riemann の双線形関係[*4] から $\tau = \frac{\tau_A}{\tau_B}$ は $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ を満たす．

Definition 3.4.1. (Abel-Jacobi 写像, 周期写像)

$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ に対して定まるシンプレクティック基底 $A,\ B$ と正則微分 φ, 周期行列

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix},\ \tau_A = \int_A \varphi,\ \tau_B = \int_B \varphi,\ \tau = \frac{\tau_A}{\tau_B}$$

を取り, $L_\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ とするとき, Abel-Jacobi 写像を

$$j\colon C(\lambda) \to \mathbb{C}/L_\tau = E_\tau; P \mapsto \frac{1}{\tau_B}\int_{P_0}^{P}\varphi$$

と定める．これは P_0 から P への経路の取り方の違いから出る積分は L_τ に入るため well-defined である．
また, 各 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ に対して τ が定まったことから, 周期写像を

$$\mathrm{per}\colon \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{H}; \lambda \mapsto \tau$$

と定める．ただしこれは $(0,1)$ から λ への解析接続による違いがあるため多価関数である．

Remark 3.4.2.

種数 $g > 0$ の閉 Riemann 面の上の Abel-Jacobi 写像は全射かつ埋め込みになっていたことから $\jmath$ は全単射正則写像であり, 周期写像 per は単射であった [1]．従って, $C(\lambda)$ は Abel-Jacobi 写像を通して複素トーラス E_τ に Riemann 面として同型である．従って, $z\in E_\tau$ に対して, $j(P) = z$ を満たす $P = (u,v)\in C(\lambda)$[*5] となるものが唯一つ存在する．

*4 一般に種数 g の閉 Riemann 面上のシンプレクティック基底と正規基底から定める周期行列 Π は, $\Pi = \begin{pmatrix} Z \\ I_g \end{pmatrix}$ であり, Riemann の双線形関係は $Z - {}^tZ = O_g,\ i(\bar{Z} - {}^tZ) > 0$ である．

*5 U_0 や U_2 で $\mathbb{C}^2$ と同一視している

Theorem 3.4.3.

Abel-Jacobi 写像の逆写像 $\jmath^{-1}\colon E_\tau \to C(\lambda); z \mapsto (v,w)$ は, テータ関数を用いて

$$v = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^2}, \tag{3.1}$$

$$w = -\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^3} \tag{3.2}$$

と表される.

また, 周期写像 per の逆写像 $\mathrm{per}^{-1}\colon \mathrm{per}(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}) \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ は,

$$\lambda = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4} \tag{3.3}$$

によって与えられる.

Proof.

まず, $\jmath(P_\jmath)$ を求める. P_0 は Abel-Jacobi 写像の基点であったため, $\jmath(P_0) \equiv 0$ であることは明らかである.

ρ によってもう一つの分枝に写るとき, $\sqrt{z}$ は $-\sqrt{z}$ になることに注意すると,

$$\int_A \varphi = \int_{(1-\rho)\cdot\ell_{\infty,0}} \varphi = 2\int_{-\ell_{\infty,0}} \varphi$$
$$\int_B \varphi = \int_{(\rho-1)\cdot\ell_{0,\lambda}} \varphi = 2\int_{\ell_{0,\lambda}} \varphi$$

より,

$$\int_{P_0}^{P_\infty} \varphi = \frac{\tau_A}{2}$$
$$\int_{P_0}^{P_\lambda} \varphi = \frac{\tau_B}{2}$$

であるから,

$$\jmath(P_\lambda) = \frac{1}{\tau_B}\int_{P_0}^{P_\lambda} \varphi = \frac{1}{2}$$
$$\jmath(P_\infty) = \frac{1}{\tau_B}\int_{P_0}^{P_\infty} \varphi = \frac{1}{\tau_B}\frac{\tau_A}{2} = \frac{\tau}{2}$$

である. また, $(1-\rho)\cdot\ell_{\lambda,1}$ は B とのみ交点を持つことから, $H_1(C(\lambda),\mathbb{Z})$ のサイクルとして $(1-\rho)\cdot\ell_{\lambda,1} = -A$[*6] であるから,

$$\int_{-A} \varphi = \int_{(1-\rho)\cdot\ell_{\lambda,1}} \varphi = 2\int_{P_\lambda}^{P_1} \varphi$$

より,

$$\int_{P_\lambda}^{P_1} \varphi = -\frac{1}{2}\int_A \varphi = -\frac{\tau_A}{2} \equiv \frac{\tau_A}{2}$$

[*6] 1 を始点とするサイクル

従って,

$$\begin{aligned}
\jmath(P_1) &= \frac{1}{\tau_B}\int_{P_0}^{P_1}\varphi \\
&= \frac{1}{\tau_B}\left(\int_{P_0}^{P_\lambda}+\int_{P_\lambda}^{P_1}\right)\varphi \\
&= \jmath(P_\lambda)+\frac{1}{\tau_B}\frac{\tau_A}{2} = \frac{1+\tau}{2}
\end{aligned}$$

である. 以上により,

$$\jmath(P_0)=0,\ \jmath(P_\lambda)=\frac{1}{2},\ \jmath(P_\infty)=\frac{\tau}{2},\ \jmath(P_1)=\frac{1+\tau}{2}$$

を得る.

U_0 上の局所座標 (v,w) は $(v,w)=(0,0)$ の周りで, $v=cw^2+O(w^3)$, $c\neq 0$, U_2 上の局所座標 (u,t) は $(u,t)=(0,0)$ の周りで $u=t/u=t/(c_\infty t^3+O(t^3))$, $c_\infty\neq 0$ と展開できたことから, v を P_0 で 2 位の零を持ち, P_∞ で 2 位の極を持つ有理型関数と見做す. $\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)$ は $z=0(=\jmath(P_0))$ とで 1 位の零を持ち, $\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)$ は $z=\frac{\tau}{2}(=\jmath(P_\infty))$ で 1 位の零を持つのであった.

$$h(z,\tau)=\frac{\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^2}$$

は, $\vartheta_{a,b}(z+1,\tau)=\exp(2\pi ia)\vartheta_{a,b}(z,\tau)$, $\vartheta_{a,b}(z+\tau,\tau)=\exp(-2\pi ib)\exp(-\pi i(\tau+2z))\vartheta_{a,b}(z,\tau)$ より, $h(z+p\tau+q,\tau)=h(z,\tau)(p,\ q\in\mathbb{Z})$ を満たすことから E_τ 上の有理型関数と見做すことができる. これを Abel-Jacobi 写像 $\jmath$ によって引き戻し $C(\lambda)$ 上の有理型関数だと思うと,

$$v=c_v\frac{\vartheta_{[1,1]}(\jmath(P),\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(\jmath(P),\tau)^2}$$

となる定数 $c_v\in\mathbb{C}$ が取れる. この定数 c_v を確定させる. $\jmath(P_1)=(1+\tau)/2, P_1=(1,0)\in C_0(\lambda)$ より,

$$\begin{aligned}
1 &= c_v\frac{\vartheta_{[1,1]}\left(\frac{1+\tau}{2},\tau\right)^2}{\vartheta_{[0,1]}\left(\frac{1+\tau}{2},\tau\right)^2} \\
\iff\ c_v &= \frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}
\end{aligned}$$

よって,

$$v=\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\frac{\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^2}$$

を得る.

$P_\lambda=[1:\lambda:0]$ より, $\lambda=v|_{P_\lambda}$ であるから, $z=\jmath(P_\lambda)=\frac{1}{2}$ を代入すると,

$$\lambda=\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\frac{\vartheta_{[1,1]}(\frac{1}{2},\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(\frac{1}{2},\tau)^2}=\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}$$

を得る.

w を P_0, P_λ, P_1 で 1 位の零を持ち, P_∞ で 3 位の極を持つ[*7] E_τ 上の有理型関数と見做す. v のときと同様,

$$\frac{\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^3}$$

[*7] U_2 で $w=1/u$, $u=c_\infty t^3+O(t^4)$ という表示を持つことから従う.

は $C(\lambda)$ 上の有理型関数と見做すと,

$$w = c_w \frac{\vartheta_{[0,0]}(\jmath(P),\tau)\vartheta_{[1,0]}(\jmath(P),\tau)\vartheta_{[1,1]}(\jmath(P),\tau)}{\vartheta_{[0,1]}(\jmath(P),\tau)^3}$$

を満たす定数 $c_w \in \mathbb{C}$ が取れる．これを求める．$w^2 = v(v-\lambda)(v-1)$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
&c_w^2 \frac{\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)^2\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^6} \\
&= \frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\frac{\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^2}(v-\lambda)(v-1) \\
\iff &c_w^2 \frac{\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^4} = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}(v-\lambda)(v-1)
\end{aligned}$$

より, $z \to 0$ と極限を取ると, $\vartheta_{[1,1]}(0,\tau) = 0$ より, $v \to 0$ であるから,

$$c_w^2 \frac{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4} = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\lambda$$

となり,

$$\begin{aligned}
c_w^2 &= \frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2}\lambda \\
&= \frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}\lambda = \frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}\frac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4} = \frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^4\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^8}
\end{aligned}$$

を得る．よって,

$$c_w = \pm \frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}$$

を得る．符号を確定させればよい．$\lambda \in (0,1)$ と $P = (v_1, w_1)$ を $\ell_{0,\lambda}$ の端点以外から取る．このとき, $w_1^2 = v_1(v_1-\lambda)(v_1-1) > 0$ より, $w_1 \in \mathbb{R}$ であり, 表 3.1 から, $\arg(w) = \pi$ であるから, $w_1 < 0$ となる．τ_A は純虚数であり, $\tau_B \in \mathbb{R}$ であるため, $\tau = \tau_A/\tau_B$ は純虚数となる．また, $\jmath(P) = z_1$ と表すと,

$$z_1 = \int_{P_0}^{P} \varphi = \frac{1}{\tau_B}\int_0^{v_1} \frac{-dv}{\sqrt{v(v-\lambda)(v-1)}}$$

は

$$0 < \int_0^{v_1} \frac{dv}{\sqrt{v(v-\lambda)(v-1)}} < \int_0^{\lambda} \varphi = \tau_B$$

より, $-1 < z_1 < 0$ を満たす．

$$\vartheta_{p,q}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i(n+p)^2\tau + 2\pi i(n+p)(z+q)\right)$$

より, $p, q \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ のとき,

$$\vartheta_{[p,q]}(0,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i(n+p)^2\tau + 2\pi i(n+p)q\right)$$

であるから,

$$\pi i(n+p)^2\tau + 2\pi i(n+p)q = \begin{cases} \pi i n^2\tau & [p,q] = [0,0] \\ \pi i(n^2+n+\frac{1}{4})\tau & [p,q] = [1,0] \\ \pi i(n^2\tau + n) & [p,q] = [0,1] \end{cases}$$

より, τ が純虚数の場合, $\exp(\pi i(n+p)^2\tau + 2\pi i(n+p)q) > 0$ となり, $\vartheta_{[0,0]}(0,\tau),\ \vartheta_{[0,1]}(0,\tau), \vartheta_{[1,0]}(0,\tau) \in \mathbb{R}_{>0}$ となる. また,

$$\vartheta_{p,q}(z_1,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i(n+p)^2\tau + 2\pi i(n+p)(z_1+q)\right)$$

より,

$$\begin{aligned}
\pi i(n+p)^2\tau + 2\pi i(n+p)(z_1+q) &= \begin{cases} \pi i(n^2\tau + 2nz_1) & [p,q]=[0,0] \\ \pi i((n+1/2)^2\tau + 2(n+1/2)z_1) & [p,q]=[1,0] \\ \pi i(n^2\tau + 2n(z_1+1/2)) & [p,q]=[0,1] \\ \pi i((n+1/2)^2\tau + 2(n+1/2)(z_1+1/2)) & [p,q]=[1,1] \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi i n^2\tau + 2n\pi i z_1 & [p,q]=[0,0] \\ \pi i(n+1/2)^2\tau + 2\pi i(n+1/2)z_1 & [p,q]=[1,0] \\ \pi i n^2\tau + 2n\pi i(z_1+1/2) & [p,q]=[0,1] \\ \pi i(n+1/2)^2\tau + 2\pi i(n+1/2)(z_1+1/2) & [p,q]=[1,1] \end{cases}
\end{aligned}$$

ここが分からない $\vartheta_{[p,q]}(z_1,\tau) > 0$ となる. 以上により, $w_1 < 0$ であることから $c_w < 0$ となり符号が確定し,

$$w = -\frac{\vartheta_{[0,1]}(0,\tau)^2\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^2\vartheta_{[0,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,0]}(z,\tau)\vartheta_{[1,1]}(z,\tau)}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4\vartheta_{[0,1]}(z,\tau)^3}$$

を得る. $\square$

第 4 章

Jacobi の周期公式

Theorem 4.0.1. (Jacobi's period formula)

$\tau \in \left\{\tau \in \mathbb{H} \mid -1 < \mathrm{Re}(\tau) < 1,\ |\tau - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2},\ |\tau + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\right\}$ と $\lambda(\tau) = \dfrac{\vartheta_{[1,0]}(0,\tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^4}$ に対し,

$$\vartheta_{[0,0]}(0,\tau)^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda(\tau)\right)$$

が成立. ただし, F は Gauss の超幾何関数である.

第 5 章

算術幾何平均

5.1 Gauss の算術幾何平均

Definition 5.1.1.

$0 < b < a$ に対し, 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$ を次のように定める:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ a_1 = a,\ b_1 = b$$

であり, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は共通の極限を持つ.

Proposition 5.1.2.

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1$$

Proof.

$$\begin{aligned} 4a_{n+1}^2 - 4b_{n+1}^2 &= a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 - 4a_n b_n \\ &= a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2 = (a_n - b_n)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

より, $b_{n+1} \leq a_{n+1}$ である. また,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n \end{aligned}$$

より前半の主張を得る.

よって $\{a_n\}, \{b_n\}$ は有界な単調列であるから極限を持つ.

$$\lim a_n = \alpha,\ \lim b_n = \beta$$

とすると,

$$\alpha = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

より, $\alpha = \beta$ となり主張を得る. □

Definition 5.1.3. (算術幾何平均)

この共通の極限 $\alpha(=\beta)$ を a, b の算術幾何平均といい, $\mu(a,b)$ と表す.

参考文献

[1] 今野一宏. **リーマン面と代数曲線**. 共立出版, 2015.