

第 1 章

楕円曲線とテータ関数

1.1 楕円曲線

Definition 1.1.1. (楕円曲線)

パラメータ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ に対して, 曲線 $C(\lambda) \subset \mathbb{P}^2$ を

$$C(\lambda) = \{[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2] \in \mathbb{P}^2 \mid \zeta_2^2 \zeta_0 = \zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \lambda \zeta_0)\}$$

で定め, $C(\lambda)$ の $U_0 = \{\zeta_0 \neq 0\}$ へのアファイン化を

$$C_0(\lambda) = \{(v, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = v(v-1)(v-\lambda)\}$$

と表す.

Remark 1.1.2.

直線 $\zeta_0 = 0$ は $C(\lambda)$ と P_∞ でのみ交わる. 即ち, $C(\lambda) \setminus C_0(\lambda) = \{P_\infty = [0 : 0 : 1]\}$ である. 実際,

$$\begin{cases} \zeta_2^2 \zeta_0 = \zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \lambda \zeta_0) \\ \zeta_0 = 0 \end{cases}$$

を解くと, $\zeta_1^3 = 0$ となり, P_∞ は重複度 3 の点となることから $\zeta_0 = 0$ と $C(\lambda)$ の交点は P_∞ のみから成る.

$P(u, v) = v^2 - u(u-1)(u-\lambda)$ とおくとき, $\partial P / \partial v = 2v$ より, $P(a, b) = P_v(a, b) = 0$ となる点 $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ は, $(a, b) = (0, 0), (1, 0), (\lambda, 0)$ である. $S = \{0, 1, \lambda\}$ とおく. また, $\mathcal{X} = \{(u, v) \in (\mathbb{C} \setminus S) \times \mathbb{C} \mid P(u, v) = 0\}$ とおく. これは Riemann 面である.

Proposition 1.1.3.

第 1 射影^a $\text{pr}_1: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C} \setminus S = \mathbb{P}^1 \setminus (S \cup \{\infty\}); (u, v) \mapsto u$ は $C(\lambda)$ 上の固有正則写像 $\text{pr}: C(\lambda) \rightarrow \mathbb{P}^1$ に拡張される.

^a これは固有な局所同相写像

Proof.

今野 [?] 命題 4.15 を適応せよ.

□

Proposition 1.1.4.

$C(\lambda)$ の種数は 1 であり, 正則写像 pr は $P_0 = [1 : 0 : 0], P_1 = [1 : 1 : 0], P_\lambda = [1 : \lambda : 0], P_\infty = [0 : 0 : 1]$ で分岐する二重被覆である.

Proof.

今野 [?] 例 4.16 によると, $w^2 - z(z - \lambda)(z - 1)$, $\lambda \neq 0, 1$ より $C(\lambda)$ の種数 1 であり, pr は $z = 0, \lambda, 1, \infty$ で分岐する二重被覆である.

具体的に局所座標と局所表示を求める.

U_0 上, $z = \frac{\zeta_1}{\zeta_0}, w = \frac{\zeta_2}{\zeta_0}$ とすれば, $z \neq 0, \lambda, 1$ のとき $w \neq 0$ であることから z が局所座標となる. $z = 0, \lambda, 1$ のとき, $z_j = z - j$, $j = 0, \lambda, 1$ とすれば,

$$w_j = \frac{w}{\sqrt{z(z - \lambda)(z - 1)}}$$

とおけば, $|z_j|$ が十分小さいとき, $w_j^2 = z_j$ となることから w_j が局所座標となる.

$C(\lambda) \setminus C_0(\lambda) = \{P_\infty\}$ であるから, $[\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2] = [0 : 0 : 1]$ の周りの局所座標のみ与えればよい. $u = \zeta_0/\zeta_1$, $t = \zeta_2/\zeta_1$ とすれば, $\zeta_2^2\zeta_0 = \zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \lambda\zeta_0)$ は $u = t(t - u)(t - \lambda u)$ となる. $g(u, t) = u - t(t - u)(t - \lambda u)$ は $g_u(0, 0) = 1 - 2\lambda ut + (1 + \lambda)t^2|_{u=t=0} = 1 \neq 0$ より陰関数定理から t は $(u, t) = (0, 0)$ の周りの局所座標となっていて, $u = c_\infty t^3 + O(t^4)$, $c_\infty \neq 0$ と展開される. 従って t が局所座標となる.

以上により, pr の ramification point は, $P_0 = [1 : 0 : 0], P_1 = [1 : 1 : 0], P_\lambda = [1 : \lambda : 0], P_\infty = [0 : 0 : 1]$ であり, branched point は, $\text{pr}(P_0) = [1 : 0], \text{pr}(P_1) = [1 : 1], \text{pr}(P_\lambda) = [1 : \lambda]$ であり, $\text{pr}(P_\infty) = [0 : 1]$ である. また, 分岐指数はそれぞれ 2 である. これによって $(\text{pr}, C(\lambda))$ は $P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty$ で分岐する \mathbb{P}^1 の二重被覆であることがわかる. \square

Remark 1.1.5.

自己同相写像 $f: C(\lambda) \rightarrow C(\lambda)$ で $\text{pr} = \text{pr} \circ f$ を満たすものを被覆変換という. また, 被覆変換全体 $\text{Deck}(C(\lambda)/\mathbb{P}^1)$ は写像の合成によって群になり, これを被覆変換群という.

双正則写像

$$\rho: C(\lambda) \rightarrow C(\lambda); [\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2] \rightarrow [\zeta_0 : \zeta_1 : -\zeta_2]$$

は被覆変換であり, $\rho \circ \rho = \text{id}_{C(\lambda)}$, $\rho(P_j) = P_j$ ($j = 0, 1, \lambda, \infty$) を満たす.

1.2 $C(\lambda)$ 上の微分形式

$g(C(\lambda)) = 1$ より, $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(C(\lambda)) = 1$ であるから, 1 つ 1-形式を見つければ $C(\lambda)$ 上の正則微分は全てその定数倍で書ける.

Proposition 1.2.1.

$C_0^\circ(\lambda) = C_0(\lambda) \setminus \{P_0, P_1, P_\lambda\}$ 上で定義された 1-形式

$$\varphi = \frac{dv}{w} = \frac{dv}{\sqrt{v(v-1)(v-\lambda)}}$$

は非零な $C(\lambda)$ 上の 1-形式に φ 拡張される.

Proof.

$v \neq 0, 1, \lambda$ なら, $w \neq 0$ であるから, $C_0^o(\lambda)$ 上 $\varphi \neq 0$ である. P_j ($j = 0, 1, \lambda$) の周りでは, $v - j = c_j w^2 + O(w^3)$ ($c_j \neq 0$) と展開されることから,

$$\frac{dv}{w} = \frac{1}{w} \frac{dv}{dw} dw = (2c_j + O(w^2)) dw$$

と表される. 従って, $C_0(\lambda)$ 上 φ は非零な正則微分である. $C(\lambda)$ は無限遠 P_∞ で局所座標 t によって, $u = c_\infty t^3 + O(t^4)$ と展開されるのであった. $v = t/u, w = 1/u$ より, P_∞ の近傍で φ は

$$\begin{aligned} \varphi &= ud \left(\frac{t}{u} \right) \\ &= (c_\infty t^3 + O(t^4)) \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{(c_\infty t^3 + O(t^4))} \right) \\ &= (c_\infty t^3 + O(t^4)) \left(\frac{1}{(c_\infty t^3 + O(t^4))} - t \frac{3c_\infty t^2 + O(t^3)}{(c_\infty t^3 + O(t^4))^2} \right) \\ &= 1 - \frac{3c_\infty t^3 + O(t^4)}{c_\infty t^3 + O(t^4)} \end{aligned}$$

と表される. 従って $\varphi(P_\infty) = (1 - 3)dt = -2dt \neq 0$ であるから φ は $C(\lambda)$ 上非零な正則微分である.^{*1} □

1.3 1 次ホモロジー群 $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底

λ によって定まる $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を定める. $P_0 \in C_0(\lambda)$ を $C(\lambda)$ の基点とする. まず, $\lambda \in (0, 1)$ に対して定める.

$\ell_{\infty,0}, \ell_{0,\lambda}, \ell_{\lambda,1}, \ell_{1,\infty}$ をそれぞれ, P_i から P_j への曲線で次を満たすものとする: $\text{pr}(\ell_{i,j}([0, 1])) = [i, j]$, $(i, j) = (\infty, 0), (0, \lambda), (\lambda, 1), (1, \infty)$ ^{*2} かつ, これらの曲線の $w = \sqrt{v(v - \lambda)(v - 1)}$ における偏角が次の表 1.1 で与えられる^{*3}.

v	$-\infty$	$\ell_{\infty,0}$	0	$\ell_{0,\lambda}$	λ	$\ell_{\lambda,1}$	1	$\ell_{1,\infty}$	∞
$\arg(v)$	*	π	*	0	0	0	0	0	*
$\arg(v - \lambda)$	*	π	π	π	*	0	0	0	*
$\arg(v - 1)$	*	π	π	π	π	*	0	0	*
$\arg(w)$	*	$\frac{3\pi}{2}$	*	π	*	$\frac{\pi}{2}$	*	0	*

表 1.1 $\arg(w)$

即ち, $\ell_{\infty,0}, \ell_{1,\infty}$ は w 上 $\sqrt{1} = 1$ となる分枝で, $\ell_{0,\lambda}, \ell_{\lambda,1}$ は w 上 $\sqrt{1} = -1$ となる分枝である. こうして得られた曲線によって $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 A, B を構成する: Remark 1.1.5 で与えられた被覆変換 ρ によって終点が $P_0 = [1 : 0 : 0]$ であるような曲線 A, B を

$$A = \ell_{\infty,0} \cdot (-\rho(\ell_{\infty,0})), \quad B = (-\ell_{0,\lambda}) \cdot \rho(\ell_{0,\lambda})$$

と定める. ただし, 曲線 c_1, c_2 に対して, 曲線 $c_2 \cdot c_1$ を

$$c_2 \cdot c_1(t) = \begin{cases} c_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

^{*1} 正則微分の空間 $\Omega^1(X)$ の基底は共通零点を持たないことから, φ は零点を持たない.

^{*2} $\ell_{i,j}$ の pr による像が \mathbb{P}^1 の各平面の実軸上にあることだと思う.

^{*3} 各曲線を上半平面 \mathbb{H} を通じて解析接続することにより表の偏角が得られる.

で定める. これを

$$A = (1 - \rho) \cdot \ell_{\infty,0}, \quad B = -(1 - \rho) \cdot \ell_{0,\lambda}$$

と表す. $-B \cdot A$ は 0 の周りを負の方向に周る閉曲線となるから, 交点数は $-B \cdot A = -1$ となる. よって $A \cdot B = -1$ となることから交点行列は,

$$\begin{pmatrix} A \cdot A & A \cdot B \\ B \cdot A & B \cdot B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, A, B は $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底である.

任意の $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ に対して A, B を定める. $(0, 1)$ のある一点に対して定まる $\ell_{j,k}$ と A, B を λ への曲線によって解析接続することにより定める. これは経路の取り方によるが, 周期の違いを除けば一意に定まる.

1.4 Abel-Jacobi 写像

これまでで得られたシンプレクティック基底 A, B と正則微分の空間の基底 φ によって Abel-Jacobi 写像を定義していく. これらの基底に関する周期行列は,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tau_A \\ \tau_B \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_A = \int_A \varphi, \quad \tau_B = \int_B \varphi$$

であり, Riemann の双線形関係^{*4} から $\tau = \frac{\tau_A}{\tau_B}$ は $\text{Im}(\tau) > 0$ を満たす.

Definition 1.4.1. (Abel-Jacobi 写像, 周期写像)

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ に対して定まるシンプレクティック基底 A, B と正則微分 φ , 周期行列

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_A = \int_A \varphi, \quad \tau_B = \int_B \varphi, \quad \tau = \frac{\tau_A}{\tau_B}$$

を取り, $L_\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ とするとき, Abel-Jacobi 写像を

$$j: C(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}/L_\tau = E_\tau; P \mapsto \frac{1}{\tau_B} \int_{P_0}^P \varphi$$

と定める. これは P_0 から P への経路の取り方の違いから出る積分は L_τ に入るため well-defined である.

また, 各 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ に対して τ が定まったことから, 周期写像を

$$\text{per}: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{H}; \lambda \mapsto \tau$$

と定める. ただしこれは $(0, 1)$ から λ への解析接続による違いがあるため多価関数である.

Remark 1.4.2.

種数 $g > 0$ の閉 Riemann 面の上の Abel-Jacobi 写像は全射かつ埋め込みになっていたことから j は全単射正則写像であり, 周期写像 per は単射であった [?]. 従って, $C(\lambda)$ は Abel-Jacobi 写像を通して複素トーラス E_τ に Riemann 面として同型である. 従って, $z \in E_\tau$ に対して, $j(P) = z$ を満たす $P = (u, v) \in C(\lambda)$ ^{*5} となるものが唯一存在する.

^{*4} 一般に種数 g の閉 Riemann 面上のシンプレクティック基底と正規基底から定める周期行列 Π は, $\Pi = \begin{pmatrix} Z \\ I_g \end{pmatrix}$ であり, Riemann の双線

形関係は $Z - {}^t Z = O_g, i(\bar{Z} - {}^t Z) > 0$ である.

^{*5} U_0 や U_2 で \mathbb{C}^2 と同一視している

Theorem 1.4.3.

Abel-Jacobi 写像の逆写像 $j^{-1}: E_\tau \rightarrow C(\lambda); z \mapsto (v, w)$ は、テータ関数を用いて

$$v = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[1,1]}(z, \tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[0,1]}(z, \tau)^2}, \quad (1.1)$$

$$w = -\frac{\vartheta_{[0,1]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[0,0]}(z, \tau) \vartheta_{[1,0]}(z, \tau) \vartheta_{[1,1]}(z, \tau)}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^4 \vartheta_{[0,1]}(z, \tau)^3} \quad (1.2)$$

と表される.

また, 周期写像 per の逆写像 $\text{per}^{-1}: \text{per}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ は,

$$\lambda = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^4} \quad (1.3)$$

によって与えられる.

Proof.

まず, $j(P_j)$ を求める. P_0 は Abel-Jacobi 写像の基点であったため, $j(P_0) \equiv 0$ であることは明らかである.

ρ によってもう一つの分枝に写るとき, \sqrt{z} は $-\sqrt{z}$ になることに注意すると,

$$\begin{aligned} \int_A \varphi &= \int_{(1-\rho) \cdot \ell_{\infty,0}} \varphi = 2 \int_{-\ell_{\infty,0}} \varphi \\ \int_B \varphi &= \int_{(\rho-1) \cdot \ell_{0,\lambda}} \varphi = 2 \int_{\ell_{0,\lambda}} \varphi \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^{P_\infty} \varphi &= \frac{\tau_A}{2} \\ \int_{P_0}^{P_\lambda} \varphi &= \frac{\tau_B}{2} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} j(P_\lambda) &= \frac{1}{\tau_B} \int_{P_0}^{P_\lambda} \varphi = \frac{1}{2} \\ j(P_\infty) &= \frac{1}{\tau_B} \int_{P_0}^{P_\infty} \varphi = \frac{1}{\tau_B} \frac{\tau_A}{2} = \frac{\tau}{2} \end{aligned}$$

である. また, $(1-\rho) \cdot \ell_{\lambda,1}$ は B とのみ交点を持つことから, $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ のサイクルとして $(1-\rho) \cdot \ell_{\lambda,1} = -A$ ^{*6} であるから,

$$\int_{-A} \varphi = \int_{(1-\rho) \cdot \ell_{\lambda,1}} \varphi = 2 \int_{P_\lambda}^{P_1} \varphi$$

より,

$$\int_{P_\lambda}^{P_1} \varphi = -\frac{1}{2} \int_A \varphi = -\frac{\tau_A}{2} \equiv \frac{\tau_A}{2}$$

^{*6} 1 を始点とするサイクル

従って,

$$\begin{aligned} j(P_1) &= \frac{1}{\tau_B} \int_{P_0}^{P_1} \varphi \\ &= \frac{1}{\tau_B} \left(\int_{P_0}^{P_\lambda} + \int_{P_\lambda}^{P_1} \right) \varphi \\ &= j(P_\lambda) + \frac{1}{\tau_B} \frac{\tau_A}{2} = \frac{1+\tau}{2} \end{aligned}$$

である. 以上により,

$$j(P_0) = 0, \quad j(P_\lambda) = \frac{1}{2}, \quad j(P_\infty) = \frac{\tau}{2}, \quad j(P_1) = \frac{1+\tau}{2}$$

を得る.

U_0 上の局所座標 (v, w) は $(v, w) = (0, 0)$ の周りで, $v = cw^2 + O(w^3)$, $c \neq 0$, U_2 上の局所座標 (u, t) は $(u, t) = (0, 0)$ の周りで $u = t/u = t/(c_\infty t^3 + O(t^4))$, $c_\infty \neq 0$ と展開できたことから, v を P_0 で 2 位の零を持ち, P_∞ で 2 位の極を持つ有理型関数と見做す. $\vartheta_{[1,1]}(z, \tau)$ は $z = 0 (= j(P_0))$ とで 1 位の零を持ち, $\vartheta_{[0,1]}(z, \tau)$ は $z = \frac{\tau}{2} (= j(P_\infty))$ で 1 位の零を持つのであった.

$$h(z, \tau) = \frac{\vartheta_{[1,1]}(z, \tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z, \tau)^2}$$

は, $\vartheta_{a,b}(z+1, \tau) = \exp(2\pi ia)\vartheta_{a,b}(z, \tau)$, $\vartheta_{a,b}(z+\tau, \tau) = \exp(-2\pi ib)\exp(-\pi i(\tau+2z))\vartheta_{a,b}(z, \tau)$ より, $h(z+p\tau+q, \tau) = h(z, \tau)(p, q \in \mathbb{Z})$ を満たすことから E_τ 上の有理型関数と見做すことができる. これを Abel-Jacobi 写像 j によって引き戻し $C(\lambda)$ 上の有理型関数だと思ふと,

$$v = c_v \frac{\vartheta_{[1,1]}(j(P), \tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(j(P), \tau)^2}$$

となる定数 $c_v \in \mathbb{C}$ が取れる. この定数 c_v を確定させる. $j(P_1) = (1+\tau)/2$, $P_1 = (1, 0) \in C_0(\lambda)$ より,

$$\begin{aligned} 1 &= c_v \frac{\vartheta_{[1,1]}(\frac{1+\tau}{2}, \tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(\frac{1+\tau}{2}, \tau)^2} \\ \iff c_v &= \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2} \end{aligned}$$

よって,

$$v = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[1,1]}(z, \tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[0,1]}(z, \tau)^2}$$

を得る.

$P_\lambda = [1 : \lambda : 0]$ より, $\lambda = v|_{P_\lambda}$ であるから, $z = j(P_\lambda) = \frac{1}{2}$ を代入すると,

$$\lambda = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[1,1]}(\frac{1}{2}, \tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[0,1]}(\frac{1}{2}, \tau)^2} = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^4}$$

を得る.

w を P_0, P_λ, P_1 で 1 位の零を持ち, P_∞ で 3 位の極を持つ^{*7} E_τ 上の有理型関数と見做す. v のときと同様,

$$\frac{\vartheta_{[0,0]}(z, \tau) \vartheta_{[1,0]}(z, \tau) \vartheta_{[1,1]}(z, \tau)}{\vartheta_{[0,1]}(z, \tau)^3}$$

^{*7} U_2 で $w = 1/u$, $u = c_\infty t^3 + O(t^4)$ という表示を持つことから従う.

は $C(\lambda)$ 上の有理型関数と見做すと,

$$w = c_w \frac{\vartheta_{[0,0]}(j(P), \tau) \vartheta_{[1,0]}(j(P), \tau) \vartheta_{[1,1]}(j(P), \tau)}{\vartheta_{[0,1]}(j(P), \tau)^3}$$

を満たす定数 $c_w \in \mathbb{C}$ が取れる. これを求める. $w^2 = v(v - \lambda)(v - 1)$ に代入すると,

$$\begin{aligned} c_w^2 \frac{\vartheta_{[0,0]}(z, \tau)^2 \vartheta_{[1,0]}(z, \tau)^2 \vartheta_{[1,1]}(z, \tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z, \tau)^6} \\ = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[1,1]}(z, \tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[0,1]}(z, \tau)^2} (v - \lambda)(v - 1) \\ \iff c_w^2 \frac{\vartheta_{[0,0]}(z, \tau)^2 \vartheta_{[1,0]}(z, \tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(z, \tau)^4} = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2} (v - \lambda)(v - 1) \end{aligned}$$

より, $z \rightarrow 0$ と極限を取ると, $\vartheta_{[1,1]}(0, \tau) = 0$ より, $v \rightarrow 0$ であるから,

$$c_w^2 \frac{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2}{\vartheta_{[0,1]}(0, \tau)^4} = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2} \lambda$$

となり,

$$\begin{aligned} c_w^2 &= \frac{\vartheta_{[0,1]}(0, \tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2} \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2} \lambda \\ &= \frac{\vartheta_{[0,1]}(0, \tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^4} \lambda = \frac{\vartheta_{[0,1]}(0, \tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^4} \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^4} = \frac{\vartheta_{[0,1]}(0, \tau)^4 \vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^8} \end{aligned}$$

を得る. よって,

$$c_w = \pm \frac{\vartheta_{[0,1]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^4}$$

を得る. 符号を確定させればよい. $\lambda \in (0, 1)$ と $P = (v_1, w_1)$ を $\ell_{0,\lambda}$ の端点以外から取る. このとき, $w_1^2 = v_1(v_1 - \lambda)(v_1 - 1) > 0$ より, $w_1 \in \mathbb{R}$ であり, 表 1.1 から, $\arg(w) = \pi$ であるから, $w_1 < 0$ となる. τ_A は純虚数であり, $\tau_B \in \mathbb{R}$ であるため, $\tau = \tau_A/\tau_B$ は純虚数となる. また, $j(P) = z_1$ と表すと,

$$z_1 = \int_{P_0}^P \varphi = \frac{1}{\tau_B} \int_0^{v_1} \frac{-dv}{\sqrt{v(v - \lambda)(v - 1)}}$$

は

$$0 < \int_0^{v_1} \frac{dv}{\sqrt{v(v - \lambda)(v - 1)}} < \int_0^\lambda \varphi = \tau_B$$

より, $-1 < z_1 < 0$ を満たす.

$$\vartheta_{p,q}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i(n + p)^2 \tau + 2\pi i(n + p)(z + q))$$

より, $p, q \in \{0, \frac{1}{2}\}$ のとき,

$$\vartheta_{[p,q]}(0, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i(n + p)^2 \tau + 2\pi i(n + p)q)$$

であるから,

$$\pi i(n + p)^2 \tau + 2\pi i(n + p)q = \begin{cases} \pi i n^2 \tau & [p, q] = [0, 0] \\ \pi i(n^2 + n + \frac{1}{4})\tau & [p, q] = [1, 0] \\ \pi i(n^2 \tau + n) & [p, q] = [0, 1] \end{cases}$$

より, τ が純虚数の場合, $\exp(\pi i(n+p)^2\tau + 2\pi i(n+p)q) > 0$ となり, $\vartheta_{[0,0]}(0, \tau), \vartheta_{[0,1]}(0, \tau), \vartheta_{[1,0]}(0, \tau) \in \mathbb{R}_{>0}$ となる. また,

$$\vartheta_{p,q}(z_1, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i(n+p)^2\tau + 2\pi i(n+p)(z_1 + q))$$

より,

$$\begin{aligned} \pi i(n+p)^2\tau + 2\pi i(n+p)(z_1 + q) &= \begin{cases} \pi i(n^2\tau + 2nz_1) & [p, q] = [0, 0] \\ \pi i((n+1/2)^2\tau + 2(n+1/2)z_1) & [p, q] = [1, 0] \\ \pi i(n^2\tau + 2n(z_1 + 1/2)) & [p, q] = [0, 1] \\ \pi i((n+1/2)^2\tau + 2(n+1/2)(z_1 + 1/2)) & [p, q] = [1, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \pi i n^2\tau + 2n\pi i z_1 & [p, q] = [0, 0] \\ \pi i(n+1/2)^2\tau + 2\pi i(n+1/2)z_1 & [p, q] = [1, 0] \\ \pi i n^2\tau + 2n\pi i(z_1 + 1/2) & [p, q] = [0, 1] \\ \pi i(n+1/2)^2\tau + 2\pi i(n+1/2)(z_1 + 1/2) & [p, q] = [1, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

ここが分からない $\vartheta_{[p,q]}(z_1, \tau) > 0$ となる. 以上により, $w_1 < 0$ であることから $c_w < 0$ となり符号が確定し,

$$w = - \frac{\vartheta_{[0,1]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^2 \vartheta_{[0,0]}(z, \tau) \vartheta_{[1,0]}(z, \tau) \vartheta_{[1,1]}(z, \tau)}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^4 \vartheta_{[0,1]}(z, \tau)^3}$$

を得る. □

第 2 章

Jacobi の周期公式

Theorem 2.0.1. (Jacobi's period formula)

$\tau \in \{\tau \in \mathbb{H} \mid -1 < \operatorname{Re}(\tau) < 1, |\tau - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}, |\tau + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$ と $\lambda(\tau) = \frac{\vartheta_{[1,0]}(0, \tau)^4}{\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^4}$ に対し,

$$\vartheta_{[0,0]}(0, \tau)^2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda(\tau)\right)$$

が成立. ただし, F は Gauss の超幾何関数である.