

作业 4

ID: 06

姓名: 陈文博

任务

模仿 PowerPoint 写一个曲线设计与编辑工具

- 输入有序点列（型值点），实时生成分段的三次样条曲线
- 可修改拖动型值点的位置（保持整条曲线 C^2 ）
- 可编辑型值点处的切线信息，成为 G^1 或 G^0

目的

- 学习三次样条函数的求解
- 了解曲线设计和编辑工具的原理

问题描述

- 输入：给定平面上型值点 $\mathbf{k}_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$
- 输出：使用分段三次样条曲线进行拟合的曲线

算法描述

参数化

对点列 $\{\mathbf{k}_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 进行参数化得到序列 $\{t_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

这里使用Chordal参数化

$$t_{i+1} - t_i = \|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\|$$

拟合条件

对于 $n + 1$ 个型值点需要 n 段三次函数进行拟合，设每段

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i t + \mathbf{c}_i t^2 + \mathbf{d}_i t^3, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1$$

插值条件：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i t_i + \mathbf{c}_i t_i^2 + \mathbf{d}_i t_i^3 &= \mathbf{k}_i, \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i t_{i+1} + \mathbf{c}_i t_{i+1}^2 + \mathbf{d}_i t_{i+1}^3 &= \mathbf{k}_{i+1} \\ i &= 0, 1, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

满足 C^1 条件：

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_{i-1}(t_i) &= \mathbf{y}'_i(t_i) \\ i &= 1, 2, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

满足 C^2 条件：

$$\begin{aligned} \mathbf{y}''_{i-1}(t_i) &= \mathbf{y}''_i(t_i) \\ i &= 1, 2, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

使用自然边界条件, 即

组装为线性系统

$$Mx = b$$

其中, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{4n}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4n}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ p_i \\ p_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6t_0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^2 & 0 & -1 & -2t_1 & -3t_1^2 & & & & & & & & & & & \\ & & 2 & 6t_1 & 0 & 0 & -2 & -6t_1 & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 2t_2 & 3t_2^2 & 0 & -1 & -2t_2 & -3t_2^2 & & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & 2 & 6t_{n-1} & 0 & 0 & -2 & -6t_{n-1} & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & t_{n-1}^3 & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & t_n & t_n^2 & t_n^3 & & & & \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 2 & 6t_n & & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

使用LU分解进行求解得到三次函数的参数

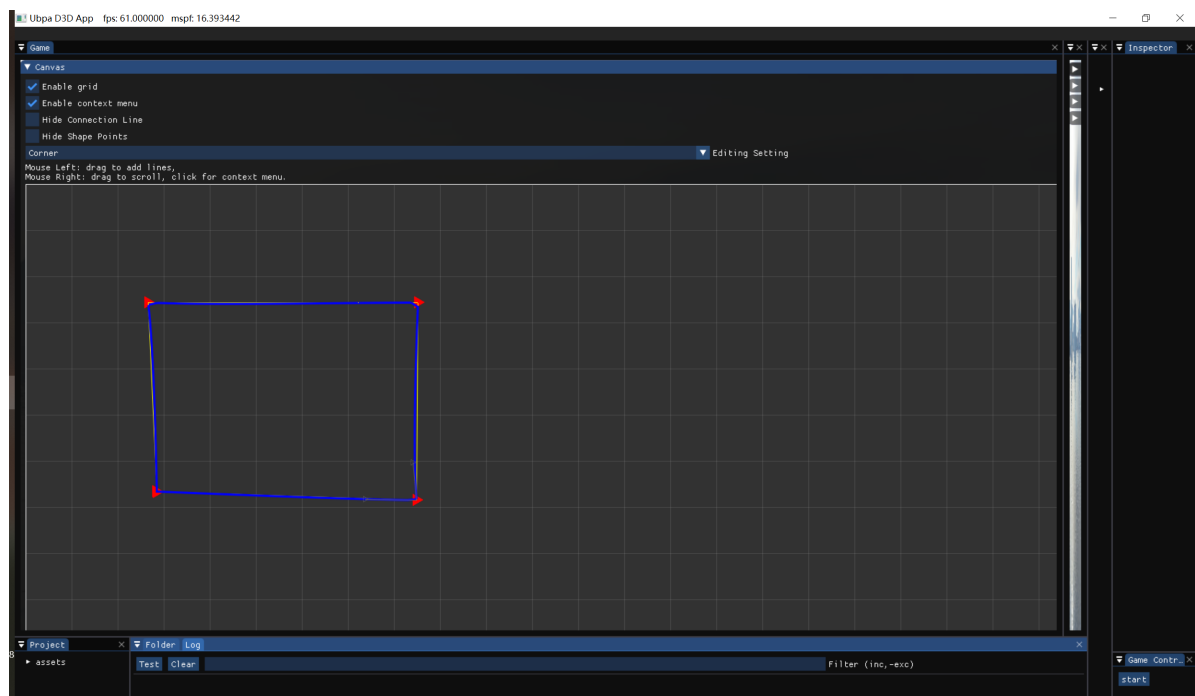
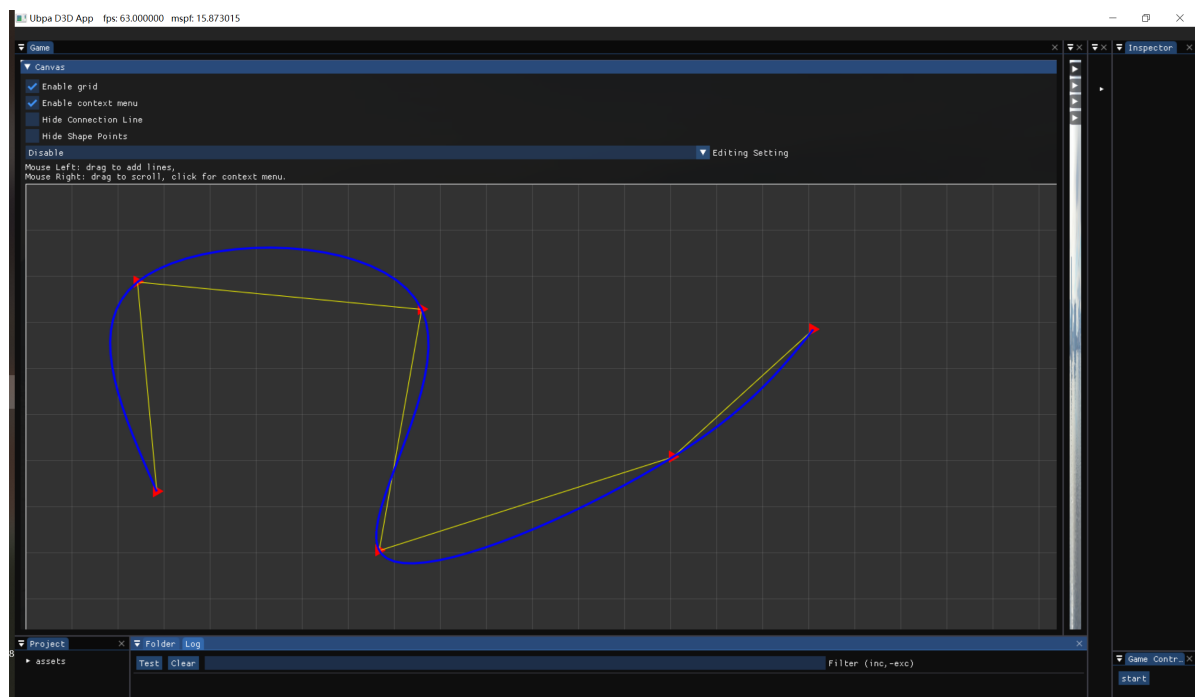
切线编辑

程序能够实现对型值点处两段曲线切线的编辑, 编辑时破坏了原有的 G^2 连续, 重新设定一阶导数的值

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'_{i-1}(t_i) &= \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{y}'_i(t_i) &= \mathbf{m}_2\end{aligned}$$

- 当要求型值点为平滑点时, $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2$
- 当要求型值点为直线点时, $\frac{\mathbf{m}_1}{\|\mathbf{m}_1\|} = \frac{\mathbf{m}_2}{\|\mathbf{m}_2\|}$
- 当要求型值点为尖点时, 则不作任何约束

实验结果



[演示视频](#)