GAMES102 作业六：极小曲面

马玺凯

2020 年 12 月 5 日

1 使用方法

1.1 作业框架

本次作业使用了 OpenMesh 与 libigl，主要使用 OpenMesh 的半边数据结构进行三角网格的操作，使用 libigl 的 viewer 进行网格的渲染与显示，没有使用 libigl 其他的内置函数。在 viewer 界面中，'=' 键进行十次最小曲面迭代，'2' 键可视化平均曲率，'3' 键可视化高斯曲率，'4' 键取消可视化。

1.2 极小曲面的局部迭代法

极小曲面的局部迭代法主要是基于以下思想，即对于非边界的点的位置用以下公式进行更新：

$$\boldsymbol{P}_{new} \leftarrow \boldsymbol{P}_{old} + \lambda H(\boldsymbol{P}_{old})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{P}_{old}) \ , \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 代表三角网格顶点位置，H 代表在某点的离散平均曲率，$\boldsymbol{n}$ 代表在某点的法向，λ 是用户自定的步长，根据实验一般取一个较小的值（如 0.001 ~ 0.01）能保证迭代的稳定性。
根据 Laplace-Beltrami 算子与平均曲率法向的关系：

$$\Delta_s \boldsymbol{x} = -2H\boldsymbol{n} \ , \tag{2}$$

又根据余切 Laplace-Beltrami 算子的定义：

$$\Delta f(v_i) = \frac{1}{2A_i} \sum_{v_j \in N_1(v_i)} (\cot \alpha_{i,j} + \cot \beta_{i,j})(f_j - f_i) \ , \tag{3}$$

其中 A_i 为该点邻域面积，取 Voronoi cell 面积如下：

$$A_i = \frac{1}{8} \sum_{j \in N_1(i)} (\cot \alpha_{i,j} + \cot \beta_{i,j}) \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|^2 \ , \tag{4}$$

得到

$$Hn(P_i) = \frac{1}{4A_i}\sum_j(\cot\alpha_{i,j} + \cot\beta_{i,j})(P_i - P_j)\ . \tag{5}$$

$\alpha_{i,j}$ 与 $\beta_{i,j}$ 是边 ij 所对的两个角度。

因此迭代的步骤是固定边界顶点不动，对每个内部顶点运用公式（1），直到收敛到最小曲面。

1.3 平均曲率与高斯曲率

本次作业还实现了平均曲率与高斯曲率的可视化，每点的平均曲率由下式计算：

$$H(v_i) = \frac{1}{2}\|\Delta \boldsymbol{x}_i\|\ , \tag{6}$$

其中 $\Delta \boldsymbol{x}$ 即公式（3）的 Laplace-Beltrami 算子，i 点的高斯曲率由下式给出：

$$K(v_i) = \frac{1}{A_i}\left(2\pi - \sum_{v_j\in N_1(v_i)}\theta_j\right)\ , \tag{7}$$

其中 A_i 由公式 (4) 得到。

2 实验结果

2.1 极小曲面

图 1 与图 2 给出了极小曲面的结果图。

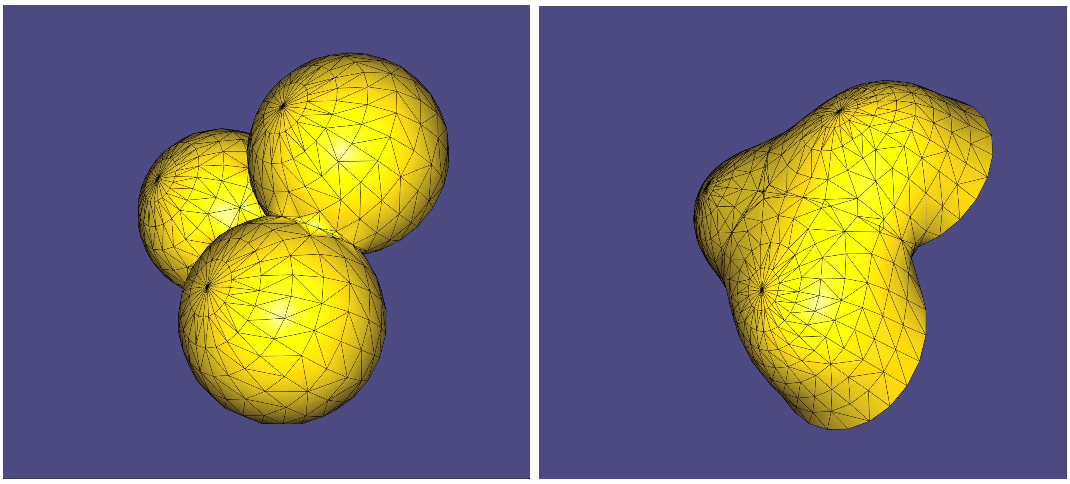

图 1: 原始带边界曲面（左）极小曲面（右）

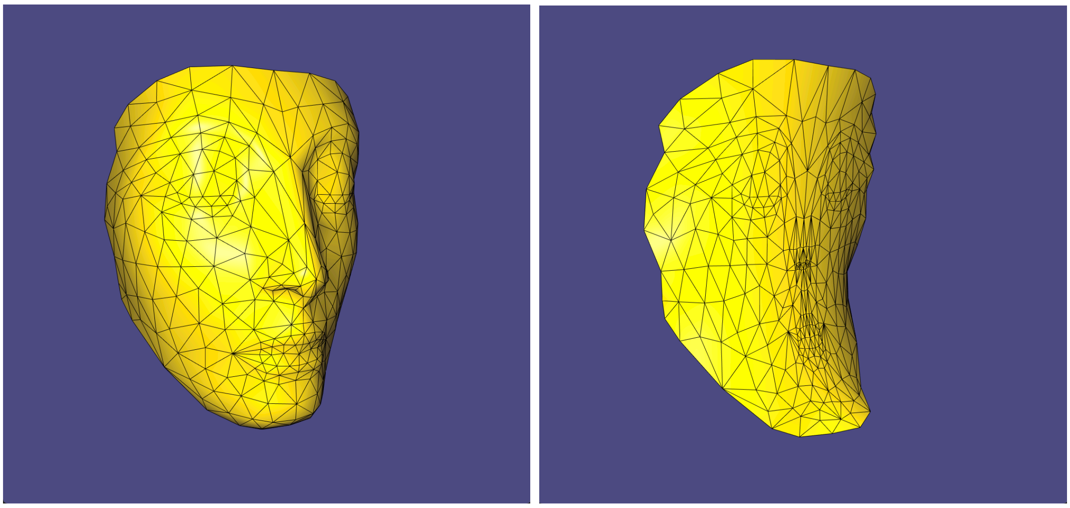

图 2: 原始带边界曲面（左）极小曲面（右）

2.2 平均曲率与高斯曲率

平均曲率与高斯曲率的可视化结果如图 3 所示，使用 libigl 自带的 color bar 绘制。

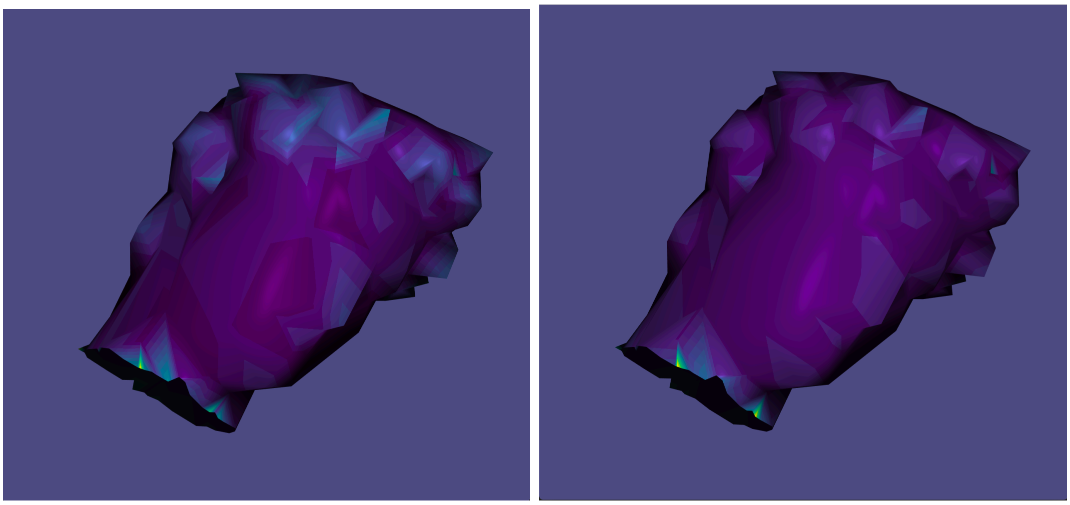

图 3: 平均曲率（左）高斯曲率（右）

2.3 实验结论

通过实验发现在极小曲面局部迭代法中，应使 λ 尽量小且多步迭代，这样才能保证算法的稳定性。在计算余切权重时，由于可能存在较差的三角剖分，因此需对负权重进行 clamp 处理，使其权重为 0 或一个很小的负值。