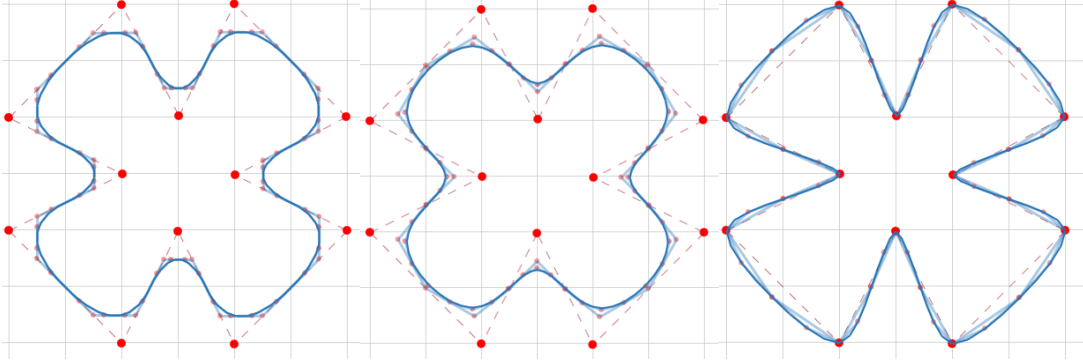


HW5 报告

ID: 16 NAME: 王宸



左: 二次 B 样条细分; 中: 三次 B 样条细分; 右: 4 点细分

任务

实现两种细分曲线的生成方法

- 逼近型细分: Chaiukin 方法 (二次 B 样条), 三次 B 样条细分方法
- 插值型细分: 4 点细分方法

实现方法与原理

Chaiukin逼近型细分

1. 二次 B 样条

给定 n 个点 $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$, 对于闭合曲线, 下一次细分的结果为:

$$\begin{aligned}v'_{2i} &= \frac{1}{4}v_{i-1} + \frac{3}{4}v_i \quad (0 < i \leq n-1) \\v'_{2i+1} &= \frac{1}{4}v_{i+1} + \frac{3}{4}v_i \quad (0 \leq i < n-1) \\v'_0 &= \frac{1}{4}v_{n-1} + \frac{3}{4}v_0, v'_{2n-1} = \frac{1}{4}v_0 + \frac{3}{4}v_{n-1}\end{aligned}$$

共 $2 \times n$ 个新节点。

对于开放曲线, 下一次细分的结果为:

$$\begin{aligned}xv'_{2i} &= \frac{1}{4}v_{i-1} + \frac{3}{4}v_i \quad (0 < i \leq n-1) \\v'_{2i+1} &= \frac{1}{4}v_{i+1} + \frac{3}{4}v_i \quad (0 \leq i < n-1)\end{aligned}$$

共 $2 \times n - 2$ 个新节点。

2. 三次 B 样条

给定 n 个点 $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$, 对于闭合曲线, 下一次细分的结果为:

$$v'_{2i} = \frac{1}{8}v_{i-1} + \frac{3}{4}v_i + \frac{1}{8}v_{i+1} \quad (0 < i < n-1)$$

$$v'_{2i+1} = \frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_{i+1} \quad (0 \leq i < n-1)$$

$$v'_0 = \frac{1}{8}v_{n-1} + \frac{3}{4}v_0 + \frac{1}{8}v_1, v'_{2n-1} = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

共 $2 \times n$ 个新节点。

对于开放曲线，下一次细分的结果为：

$$v'_{2i+1} = \frac{1}{8}v_{i-1} + \frac{3}{4}v_i + \frac{1}{8}v_{i+1} \quad (0 < i < n-1)$$

$$v'_{2i+2} = \frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_{i+1} \quad (0 \leq i < n-1)$$

$$v'_0 = \frac{1}{4}v_{n-1} + \frac{3}{4}v_0, v'_1 = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1, v'_{2n-1} = \frac{1}{4}v_0 + \frac{3}{4}v_{n-1}$$

为了让曲线更接近原始折线，在首位位置使用二次 B 样条增加两个点，

共 $2 \times n - 1$ 个新节点。

4 点细分

给定 n 个点 $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ ，对于闭合曲线，下一次细分的结果为：

$$v'_{2i+1} = \frac{1}{2}(v_i + v_{i+1}) + \alpha\left(\frac{P_i + P_{i+1}}{2} - \frac{P_{i-1} + P_{i+2}}{2}\right) \quad (0 < i < n-2)$$

$$v'_{2i} = v_i \quad (0 \leq i < n)$$

$$v'_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) + \alpha\left(\frac{P_0 + P_1}{2} - \frac{P_{n-1} + P_2}{2}\right)$$

$$v'_{2n-3} = \frac{1}{2}(v_{n-2} + v_{n-1}) + \alpha\left(\frac{P_{n-2} + P_{n-1}}{2} - \frac{P_{n-3} + P_0}{2}\right)$$

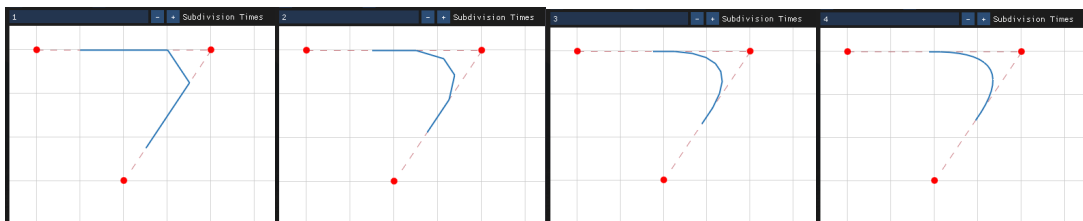
$$v'_{2n-1} = \frac{1}{2}(v_{n-1} + v_0) + \alpha\left(\frac{P_{n-1} + P_0}{2} - \frac{P_{n-2} + P_1}{2}\right)$$

共 $2n$ 个新节点

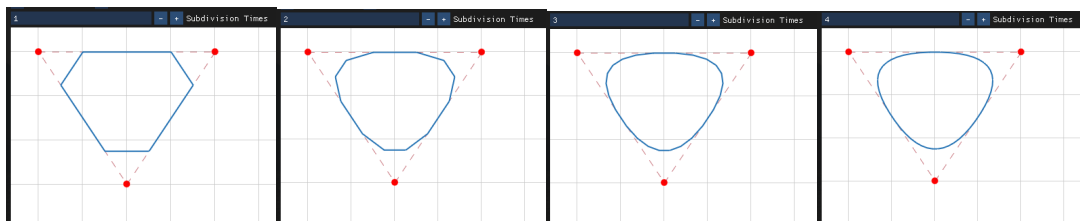
实验结果

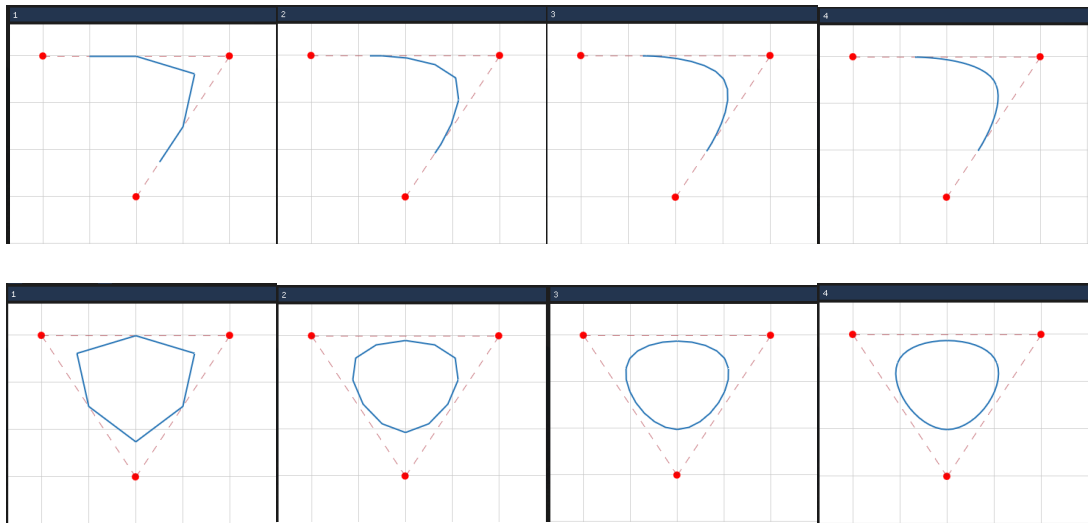
Chaiukin逼近型细分

1. 二次 B 样条



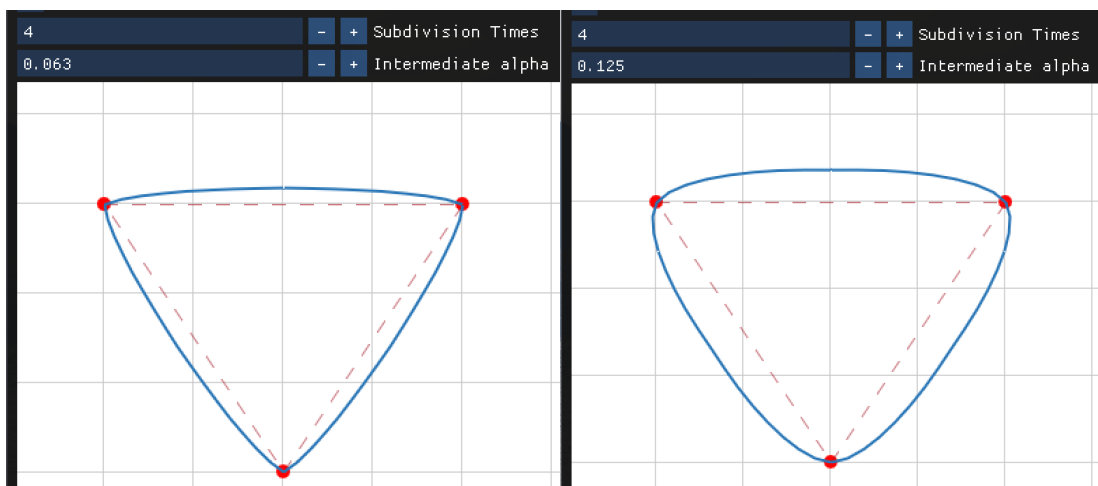
2. 三次 B 样条



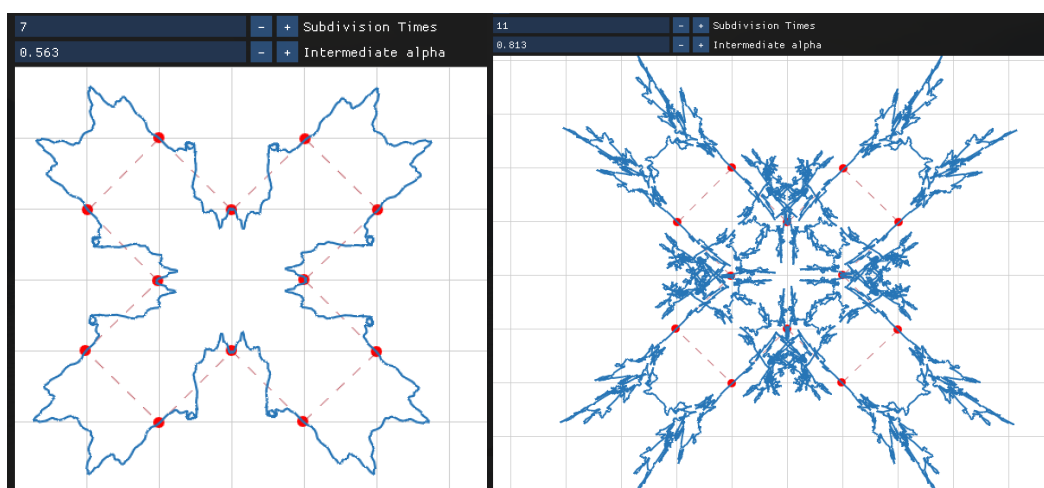


4 点细分

1. α 取值在区间 $(0, 0.125)$ 中



2. α 取值大于 0.125



总结

- 逼近型细分的曲线在给定点的凸包内，插值型细分的曲线向外凸出；
- 二次 B 样条比三次 B 样条的逼近型细分更接近原始折线；
- 插值型细分的结果与 α 的取值有关，在区间 $(0, 0.125)$ 内时， α 值越小，越接近不插值时的连线图形，当 α 取值大于 0.125 时，会出现明显不平滑的情况；
- 细分次数达到 4 次时，曲线已经基本平滑，算法效率很高，效果显著。

