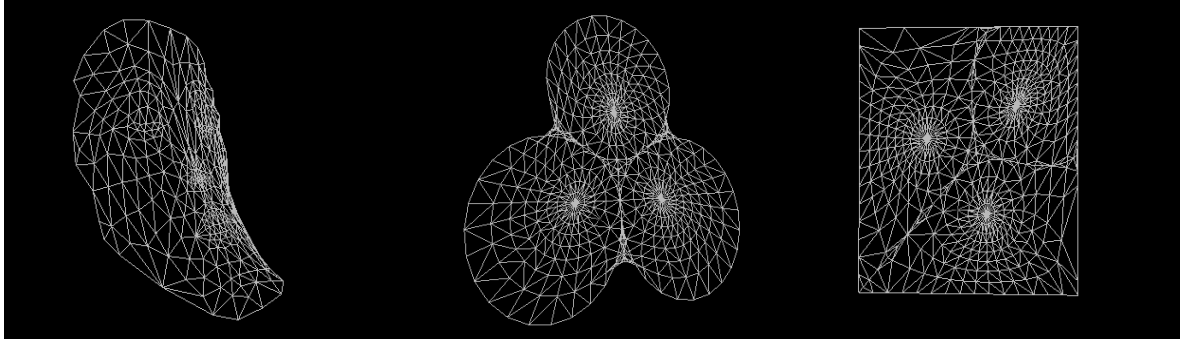


HW7 报告

ID: 16 NAME: 王宸



任务

- 实现极小曲面的全局方法：边界固定，求解方程组
- 实现曲面参数化：边界映射到平面，求解方程组

实现方法与原理

极小化曲面的全局方法

极小曲面满足平均曲率处处为 0，因此对于三角网格的每一点都满足：

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2A} \sum_{j \in N_1(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$
$$\kappa = \frac{1}{2} \|\mathbf{K}(\mathbf{x}_i)\| = 0$$

即满足： $\mathbf{x}_i - \sum_{j \in N_1(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \mathbf{x}_j = 0$

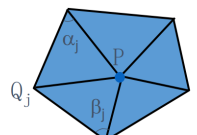
n 个点有 n 个方程，联立可得线性齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ，其中 \mathbf{b} 是零向量。

其中 \mathbf{A} 为 Laplace 矩阵，所以求解方程组可分为以下三个步骤：

1. 构建 Laplace 矩阵

$$L_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\omega_{i,j}, & j \in N_1(i) \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

其中 $j \in N_1(i)$ 指点 v_j 在点 v_i 的 1 领域内， $-\omega_{i,j}$ 是 v_i 和 v_j 的 cot 权：



$$\omega_{i,j} = \frac{\cot\alpha_{i,j} + \cot\beta_{i,j}}{\sum_{k \in N_1(i)} \cot\alpha_{i,k} + \cot\beta_{i,k}}, \quad j \in N_1(i)$$

2. 约束边界

全局化方法需要保证边界固定不动，因此添加以下条件：

$$[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}] \cdot \mathbf{x} = v_i, \quad v_i \text{ is on boundary}$$

$$[b_{x_i}, b_{y_i}, b_{z_i}] = v_i$$

而，只有 λ_i 为 1，其余都是 0，因此，可以将 Laplace 矩阵的第 i 行换成 $[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]$

此时矩阵 L 依然是 $n \times n$ ，列向量 b 在第 i 行将 0 换成该点的坐标。

3. 解方程组

参数化方法

与上述原理类似，仅仅在约束边界时不同，将边界映射到圆周或矩形四边上，本实验两种方法分别实现如下：（圆形边界等距离映射，方形边界按弦长比例映射）

■ 圆形边界：

将边界点按极坐标逆时针（或顺时针）排序，映射函数如下：

$$x_i = -\cos\left(\frac{i \times 2\pi}{n}\right)$$

$$y_i = -\sin\left(\frac{i \times 2\pi}{n}\right)$$

$$z_i = 0$$

■ 方形边界：

同样将边界点按极坐标排序，每条边包含 $n/4$ 个点，如果 n 不被 4 整除，如 $n\%4 == 1$ 则第一条边包含 $n/4 + 1$ 个点，如 $n\%4 == 2$ 则第一、二条边包含 $n/4 + 1$ 个点，如 $n\%4 == 3$ 则前三条边包含 $n/4 + 1$ 个点。

对于每条边，点从 1 到 m ：

$$D = \sum_{i=1}^{m-1} \text{distance}(v_i, v_{i+1})$$

$$\text{step}_i = \frac{\text{distance}(v_i, v_{i+1})}{D}$$

正方形左边： $x = -1, y_i = y_{i-1} - \text{step}_i, y_0 = 1$

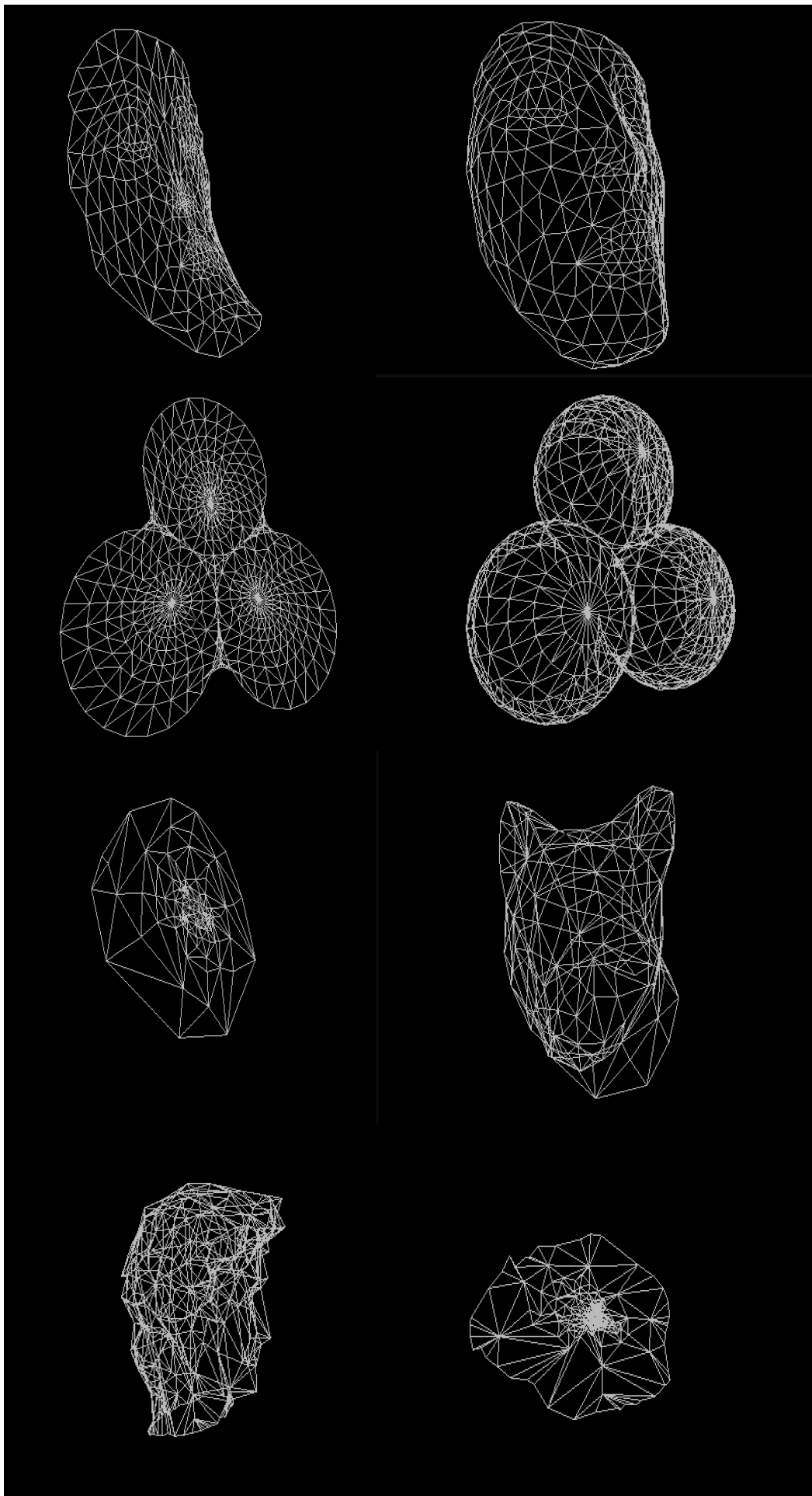
正方形下边： $x_i = x_{i-1} + \text{step}_i, y_i = -1, x_0 = -1$

正方形右边： $x = 1, y_i = y_{i-1} + \text{step}_i, y_0 = -1$

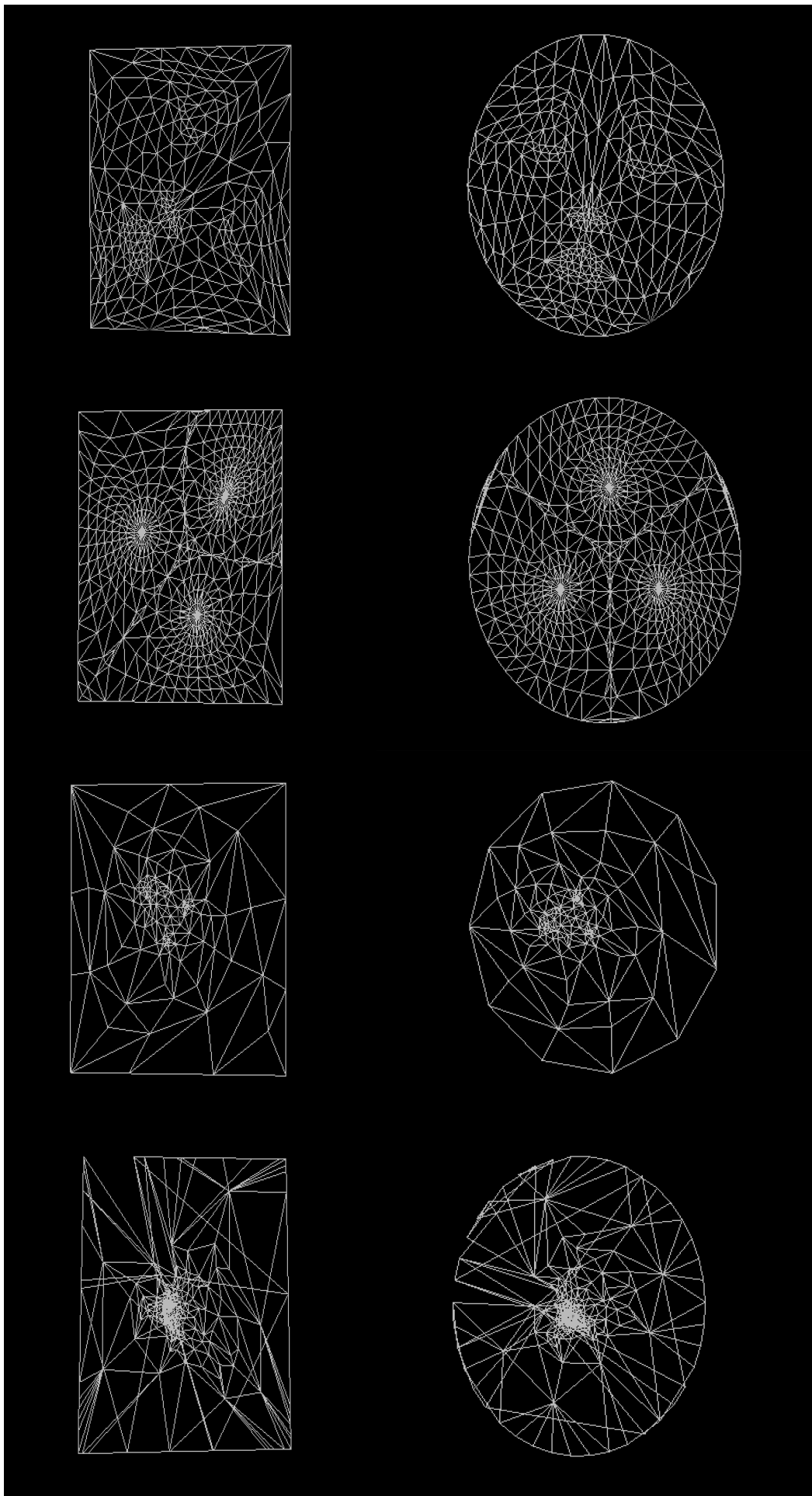
正方形上边： $x = x_{i-1} + \text{step}_i, y_i = 1, x_0 = 1$

实验结果

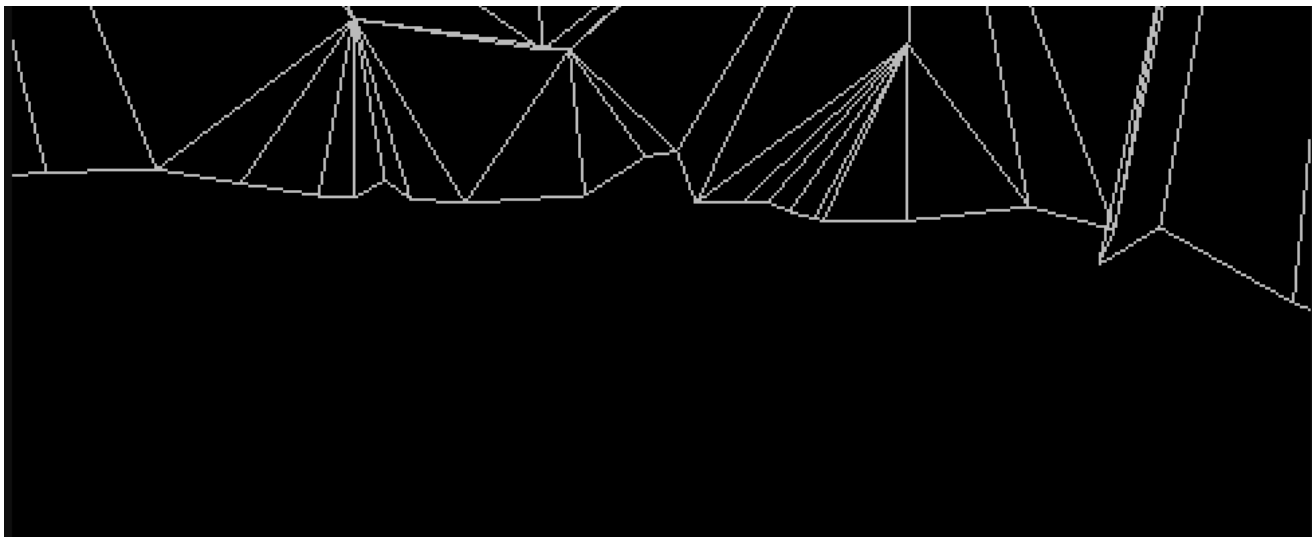
1. 极小曲面



2. 参数化



在最后一个模型中，参数化有部分点发生了偏离，在原图中，我们放大边界处，可以发现很多边界点距离很小且有一处断口，可能是数据精度的问题导致了最后一个模型中参数化的异常。



总结与反思

- 全局化方法比局部方法更加稳定快速；
- 参数化方法如果将边界均匀地分布到图形边界，可能导致网格形状变化过大，而用弦长比例分布，可能由于数据精度的问题产生一些异常。