GAMES102 作业九：曲面简化

马玺凯

2020 年 12 月 31 日

1 作业框架与使用方法

本次作业使用 OpenMesh 的半边数据结构进行网格简化操作，使用 libigl 的 Viewer 进行网格的渲染与显示，曲面简化方法使用的是 QEM（Quadric Error Metrics），主要思想是基于边收缩，对每一条可以收缩的边计算一个代价值，每次收缩代价值最低的那一条边并更新相关代价值，不断迭代直到满足要求即可。

2 实现细节

2.1 矩阵 Q 的计算

回忆起三维空间中每个平面可以由以下方程表示

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{1}$$

根据论文的推导，每个面的 $\boldsymbol{K_p}$ 矩阵以下式计算:

$$\boldsymbol{K_p} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

对每个顶点，我们则近似的取其 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵为其相邻平面 $\boldsymbol{K_p}$ 矩阵的和。

2.2 有效点对的选择

计算出每个点的 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵之后，我们进行有效点对的选择，这些点对作为收缩操作的候选。QEM 方法可以对非流形进行简化，具体方法是在点对的选择中，不仅仅将边作为候选对象，而将距离足够近的两点也当作候选对象，具体来说，选择有效点对（即收缩候选边）的标准如下：

1. $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ 是原网格的一条边

2. $\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\| < t$，$t$ 是一个用户自定阈值

但由于实验所用网格均为流形，我们将 t 设为 0，这样可以省去对任意两个点求距离的操作，该操作的时间复杂度为 $O(n^2)$。

2.3 收缩目标的选择以及代价计算

针对每一个点对 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$，其收缩后的新矩阵 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 由 $\bar{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2$ 近似计算，对任意收缩点 $\boldsymbol{v}$，代价值为：

$$cost = \boldsymbol{v}^T \bar{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{v} \tag{3}$$

含义为收缩后的点到未收缩前与点对相邻平面的距离，注意到如果不收缩，代价为 0。根据最小二乘法，我们通过以下方程选择收缩位置 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 使得代价最小：

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

若左侧方程不可逆，我们直接选择 $\bar{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)/2$ 作为收缩位置。

在该步中，我们对所有候选点对计算收缩位置及代价。

2.4 迭代过程

我们将上文计算出的点对与收缩点以代价为衡量标准放入一个小顶堆中，具体实现中我们使用优先级队列。每次取队首的点对，将其收缩，注意要更新受影响的点对的代价，具体来说，与 $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ 相关的点对均需更新。

3 结果演示

下图展示了一个由 8800 个顶点以及 17596 个面的松鼠模型简化到 275 个顶点与 546 个面的过程

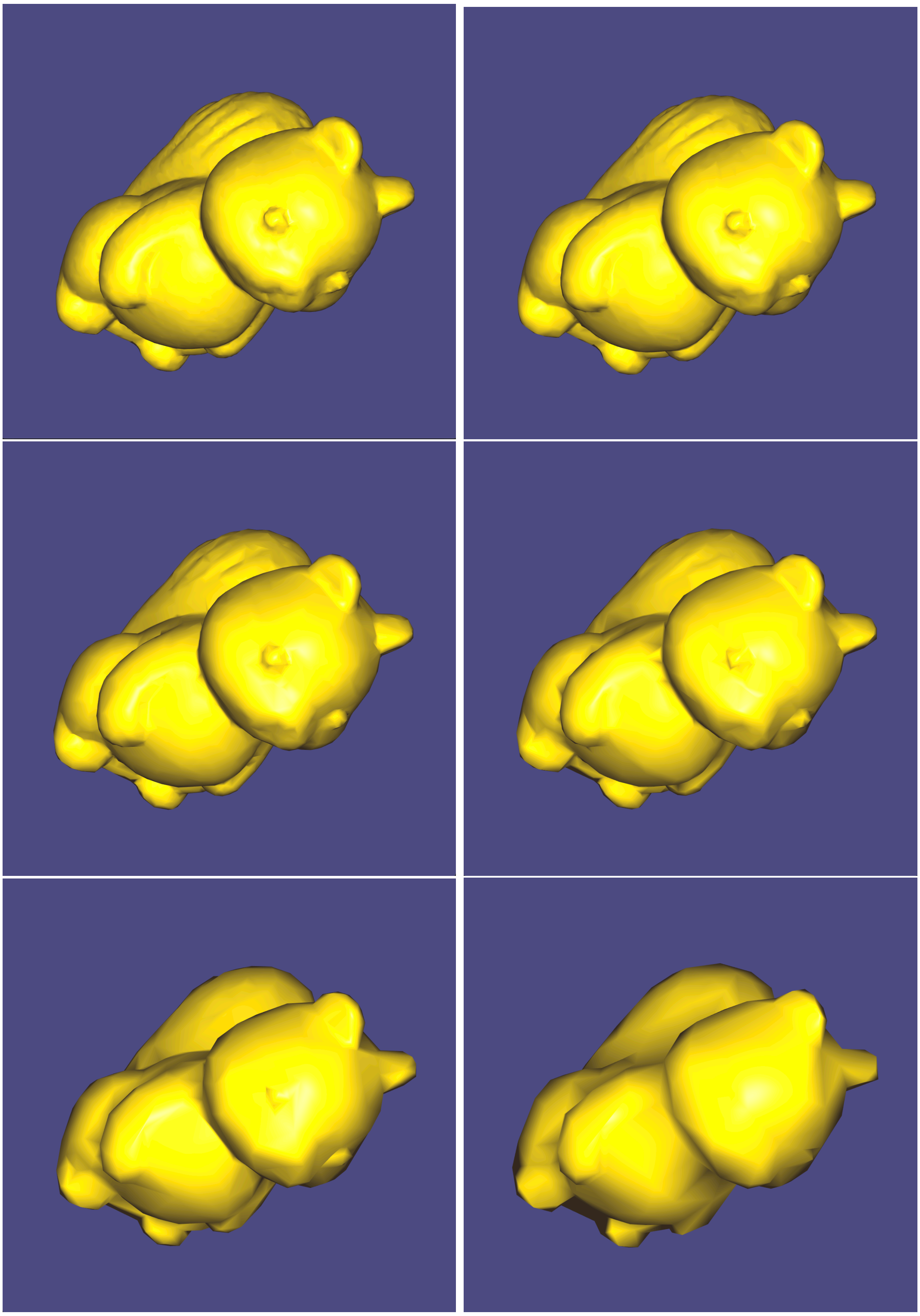

图 1: 松鼠模型简化过程，从左到右从上到下：(V1 = 8800, F1 = 17596), (V2 = 4400, F2 = 8796), (V3 = 2200, F3 = 4396), (V4 = 1100, F4 = 2196), (V5 = 550, F5 = 1096), (V6 = 275, F6 = 546)

可以看出虽然顶点数和面数显著下降，网格并没有太明显的外观改变，QEM 网格简化方法具有不错的效果。