《高等数学 I》(下)期末考试模拟试题（ A 卷）

参考答案与评分标准

一、单项选择题

1、C　**2**、D　**3**、 A　4、C　5、A

二、填空题

1、 $dz = e^{xy}(ydx + xdy)$　**2**、 $C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{5x}$　**3**、 $\frac{4}{3}\pi$　4、a

5、 $2\pi a^3$　6、 $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} f(x,y)dx$

三、解答下列各题

1、解： 因为 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$　　$x \in (-1,\ 1)$ ………… 2 分

由 $\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n$ ………… 6 分

收敛域 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ………… 7 分

2、 解：记 $F(x,y,z) = e^{-xy} - 2z + e^z$ ……….2 分

则 $F_y = -xe^{-xy}$, $F_z = -2 + e^z$， ………… 4 分

所以 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{-2+e^z}$ ………… 7 分

3、解：方程对应的齐次线性微分方程的特征方程是：

$r^2 + r = 0$，其两个特征根分别为$r = 0, -1$

所以原方程的一个特解可以设为：

$y^* = (Ax + B)xe^{0x} = Ax^2 + Bx$ ……….3 分

将其代入方程得 $2Ax + 2A + B = x$ ………….3 分

比较系数得 $\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$

解之得 $\begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-1 \end{cases}$ …………5 分

所以原方程的一个特解是 $y^*=\dfrac{1}{2}x^2-x$ ………… 7 分

四、解答下列各题

1、解由 $\begin{cases} f_x=2x-2=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$，得驻点 $(1,\ 0)$ ………. 3 分

$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=2$ …… 5 分

$AC-B^2=4>0,\quad A>0$

点 $(1,0)$ 是函数的极小值点， …………7 分

函数在点 $(1,0)$ 处取极小值 $f(1,0)=0$。 ………… 9 分

2、解：积分曲面 Σ 的方程为 $z=5-y$，它在 xOy 面上的投影为闭区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 25\}$$ ………. 2 分

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$$

$$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x+y+5-y)dxdy=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x+5)dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5(5+r\cos\theta)rdr=125\sqrt{2}\pi$$ ………. 8 分

3、解：设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

易知收敛半径为 R=1 ………. 3 分

所以在区间（-1,1）内可逐项积分，得

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^x nx^{n-1}dx)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{x}{1-x}$$ ………. 6 分

两边对 x 求导得 $s(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$，收敛区间为$|x|<1$ ……….9 分

五、解：因为$\frac{\partial T}{\partial t} = -ab^2 e^{-ab^2 t}\sin bx$，$\frac{\partial T}{\partial x} = be^{-ab^2 t}\cos bx$ ………. 4 分

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -b^2 e^{-ab^2 t}\sin bx$$ ………. 6 分

所以 $$a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -ab^2 e^{-ab^2 t}\sin bx = \frac{\partial T}{\partial t}$$ ……….8 分