齐鲁工业大学 20/21 学年第二学期《高等数学Ⅰ（下）》

期末考试试卷答案（A 卷）　　（本答案共 4 页）

一、计算题(本题满分 18 分，每小题 6 分)

1、求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{x}$。

解：原式= $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\dfrac{y}{\cos(xy)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{y}{\cos(xy)}=2$ ……… $6'$

2、设 $z=(\dfrac{x}{y})^2\ln(3x-2y)$，求全微分 dz。

解：令 $u=\dfrac{x}{y}, v=3x-2y$，则 $z=u^2\ln v$，从而

$$dz=2u\ln v du+\frac{u^2}{v}dv=2\frac{x}{y}\ln(3x-2y)\frac{ydx-xdy}{y^2}+\frac{(\frac{x}{y})^2}{3x-2y}(3dx-2dy)$$

$$=\frac{2x(3x-2y)\ln(3x-2y)+3x^2}{y^2(3x-2y)}dx-\frac{2x^2(3x-2y)\ln(3x-2y)+2x^2y}{y^3(3x-2y)}dy \cdots\cdots\cdots 6'$$

3、求经过点 $A(1,0,-2)$ 且与平面 $3x-2y+z-2=0$ 平行的平面方程。

解：由题意，设所求平面方程为 $3x-2y+z=C$，将点 A 带入可得 $C=1$，从而所求平面方程为 $3x-2y+z=1$.　　…………………………………………… $6'$

二、求下列曲线积分和曲面积分（本题满分 30 分，每小题 10 分）

1、利用格林公式计算曲线积分 $\oint_L x^2ydx-xy^2dy$，其中 L 为正向圆周 $x^2+y^2=a^2$。

解：由格林公式，原式 $=-\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$　　……… $5'$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^3d\rho=-\frac{\pi}{2}a^4. \qquad \cdots\cdots\cdots 10'$$

2、计算 $\int_L yds$，其中 L 为 $y^2=2x$ 自点(0,0)到点(2,2)的一段弧。

解：　$L: x=\dfrac{y^2}{2}, 0\le y\le 2$　　…………… $4'$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy=\sqrt{1+y^2}dy$$ ………………..6'

$\therefore\quad \int_L y ds=\int_0^2 y\sqrt{1+y^2}dy=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$ ……………10′

3、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $0\le z\le 1$ 部分的下侧。

解：Σ 在 xoy 面的投影为 $\sigma_{xy}:x^2+y^2\le 1$，从而

$$I=\iint\limits_{\Sigma} zdxdy=-\iint\limits_{\sigma_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$ ………5′

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr=-\frac{2}{3}\pi.$$ ………10′

三、计算题(本题满分 30 分，每小题 10 分)

1、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{5+x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数。

解：$\dfrac{1}{5+x}=\dfrac{1}{6+(x-1)}=\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{6}}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\dfrac{x-1}{6})^n$ ………6′

$$=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n}(x-1)^n,\quad -5<x<7$$ ………10′

2、判定级数 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的敛散性。

解：$S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ ………6′

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$ ………………8′

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，从而所给级数收敛，且和为 1. ……………………………………10′

3、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数。

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n|}=1$，故收敛半径 $R=1$。

当$x=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{+\infty} n$，由于$\lim_{n\to\infty} n=+\infty$，故发散；

同理当$x=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n$也发散，

从而收敛区间为$(-1,1)$。 ……………… $2'$

$$s(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)' = x(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n)' \qquad \text{………………} 8'$$

$$=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}, \qquad x\in(-1,1) \qquad \text{………………} 10'$$

四、（本题满分 8 分）

求下列微分方程$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=4e^{-t}$的通解。

解：所对应的齐次方程为 $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=0$

特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$

特征根为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$ ……………... $3'$

齐次线性微分方程的特解为$x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$， ……………... $5'$

$\lambda=-1$是特征单根

故设特解形如$\varphi(t)=Cte^{-t}$， ……………...……………... $6'$

代入原方程，可得 $C=-1$

从而特解为$\varphi(t)=-te^{-t}$ ……………... ……………... $7'$

因此原方程的通解为$x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}-te^{t}$。 …………...……………... $8'$

五、应用题（本题满分 8 分）

某厂要用铁板做成一个体积为$2\mathrm{m}^3$的有盖长方体水箱。问当长、宽和高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省。

解：设水箱的长为x m，宽为y m，则其高应为$\frac{2}{xy}$ m。此水箱所用材料的面积为

$$\boldsymbol{A}=2(\boldsymbol{xy}+\boldsymbol{y}\cdot\frac{2}{\boldsymbol{xy}}+\boldsymbol{x}\cdot\frac{2}{\boldsymbol{xy}})=2(\boldsymbol{xy}+\frac{2}{\boldsymbol{x}}+\frac{2}{\boldsymbol{y}})\quad(\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{y}>0) \qquad \cdots\cdots\cdots 4'$$

令

$$\boldsymbol{A}_x=2(\boldsymbol{y}-\frac{2}{\boldsymbol{x}^2})=0,\ \boldsymbol{A}_y=2(\boldsymbol{x}-\frac{2}{\boldsymbol{y}^2})=0. \qquad \cdots\cdots\cdots 6'$$

解这方程组，得

$$\boldsymbol{x}=\sqrt[3]{2},\ \boldsymbol{y}=\sqrt[3]{2}.$$

由题意知，当 $\boldsymbol{x}=\sqrt[3]{2},\ \boldsymbol{y}=\sqrt[3]{2}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 取得最小值，即当水箱的长为 $\sqrt[3]{2}$ m、宽为 $\sqrt[3]{2}$ m、高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$ m 时，水箱所用的材料最省。 ………8′

六、综合题（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有二阶连续导数，且 $f(1)=2,\quad f'(x)-\frac{f(x)}{x}-\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt=0$，求满足条件的 $f(x)$。

解：由题意知 $f'(1)=2$， ……………... 2′

则原积分方程可化为二阶微分方程

$$\begin{cases} f''(x)-\frac{f'(x)}{x}=0 \\ f(1)=2,\ f'(1)=2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots 4'$$

通解为 $f(x)=C_1x^2+C_2$，从而原方程解 $f(x)=x^2+1$。 …………... 6′