概率论与数理统计期末复习题一

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1、设 X 为连续型随机变量，则 P{X=1}=(0).

2、袋中有 50 个球,其编号从 01 到 50,从中任取一球,其编号中有数字 4 的概率为(14/50 或 7/25).

3、若随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=C(2/3)^k$,k=1,2,3,4,则 C=(81/130).

4、设 X 服从 N（1，4）分布，Y 服从 P(1)分布，且 X 与 Y 独立，则

E（XY+1-Y）=（ 1 ），D（2Y-X+1）=（ 17 ）.

5、已知随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,(X-5)/4 服从 N(0,1),则μ=(5);σ=(4).

6、已知随机变量(X,Y)的分布律为：

X　Y	1	2
3	0.15	0.15
4	A	B

且 X 与 Y 相互独立。

则 A=(0.35),B=(0.35).

7、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自均匀分布 U[0,θ]的一个样本，其中θ>0, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是一组观察值，则θ的极大似然估计量为($X_{(n)}$).

二、计算题（每题 12 分，共 48 分）

1、钥匙掉了,落在宿舍中的概率为 40%,这种情况下找到的概率为 0.9; 落在教室里的概率为 35%,这种情况下找到的概率为 0.3; 落在路上的概率为 25%,这种情况下找到的概率为 0.1,求(1)找到钥匙的概率;(2)若钥匙已经找到,则该钥匙落在教室里的概率.

解：(1)以 A_1,A_2,A_3 分别记钥匙落在宿舍中、落在教室里、落在路上，以 B 记找到钥匙.则

$P(A_1)=0.4,P(A_2)=0.35,P(A_3)=0.25, P(B|A_1)=0.9 ,P(B|A_2)=0.3,P(B|A_3)=0.1$

所以, $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.4\times0.9+0.35\times0.3+0.25\times0.1=0.49$

(2) $P(A_2\mid B)=(0.35\times0.3)/0.49=0.21$

2、已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}A\lambda^2e^{-\lambda x} & x\geq0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

其中λ>0 为已知参数.(1)求常数 A; (2)求 P{-1＜X＜1/λ)}; (3)F(1).

解：(1) 由归一性：$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty} A\lambda^{2} e^{-\lambda x}dx=-A\lambda e^{-\lambda x}\big|_0^{+\infty}=A\lambda,所以A=1/\lambda$

(2) $P\{-1<X<1/\lambda\}=\int_0^{1/\lambda}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-1/e=0.36$

(3) $F(1)=\int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda}$

3、设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

且 $Y=X^2+2X$，求(1) $E(X)$；　(2) $E(Y)$；　(3) $D(X)$.

解：(1) $E(X)=-1\times0.1+0\times0.2+1\times0.3+2\times0.4=1$

(2) $E(X^2)=1\times0.1+0\times0.2+1\times0.3+4\times0.4=2$

$E(Y)=E(X^2+2X)=E(X^2)+2E(X)=2+2=4$

(3) $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-1=1$

4、若 X～N(μ,σ²),求μ, σ²的矩估计.

解：(1) E(X)=μ　令μ= $\bar{X}$　所以μ的矩估计为 $\hat{\mu}=\bar{X}$

(2) D(X)=E(X²)-[E(X)]²　又 E(X²)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

D(X)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - $\bar{X}$ = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sigma^2$

所以σ²的矩估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

三、解答题（12 分）

设某次考试的考生的成绩 X 服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分,标准差为 15 分,问在显著性水平 0.05 下,是否可以认为在这次考试中全体考生的平均成绩为 70 分?

解：提出假设检验问题：H_0: μ=70, H_1 ：μ≠70,

$t=\frac{\bar{X}-70}{S/\sqrt{n}}$ ～t(n-1),其中 n=36, $\bar{x}$ =66.5,s=15,α=0.05,$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.03$…6

$|t|=\frac{|66.5-70|}{15/\sqrt{36}}=1.4<2.03$

所以,接受 H_0,在显著性水平 0.05 下,可认为在这次考试中全体考生的平均成绩为 70 分

四、综合题（每小题 4 分，共 20 分）

设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{3x}y^2, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

试求: (1) 常数 C ；(2) $f_X(x)$ ，$f_Y(y)$ ；(3) X 与 Y 是否相互独立?

(4) $E(X), E(Y), E(XY)$；　　(5) $D(X), D(Y)$.

附：Φ（1.96）=0.975； Φ（1）=0.84；　Φ（2）=0.9772

$t_{0.05}(9)$= 1.8331 ； $t_{0.025}(9)$=2.262；$t_{0.05}(8)=1.8595$， $t_{0.025}(8)=2.306$

$t_{0.05}(36)$= 1.6883 ； $t_{0.025}(36)$=2.0281；$t_{0.05}(35)=1.6896$， $t_{0.025}(35)=2.0301$

解：(1)$1=\int_0^1\int_0^1 ce^{3x}y^2dxdy=c\int_0^1 e^{3x}dx\cdot\int_0^1 y^2dy=c\cdot\frac{1}{3}e^{3x}|_0^1\cdot\frac{1}{3}y^3|_0^1=\frac{c}{9}(e^3-1)$

所以,c=9/(e^3-1)

(2) 当$0\le x\le 1, f_X(x)=\int_0^1\frac{9}{e^3-1}e^{3x}y^2dy=\frac{3}{e^3-1}e^{3x}$

当x为其它情况时，$f_X(x)=0$

所以, $f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{e^3-1}e^{3x}, 0\le x\le 1\\ 0, 其它\end{cases}$

同理, $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, 0\le y\le 1\\ 0, 其它\end{cases}$

(3)因为: $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{e^3-1}e^{3x}\cdot 3y^2, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, 其它\end{cases}=f(x,y)$

所以,X 与 Y 相互独立.

(4)

$$EX=\int_0^1 x\cdot\frac{3}{e^3-1}e^{3x}dx=\frac{1}{e^3-1}\int_0^1 xde^{3x}$$

$$=\frac{1}{e^3-1}(y\cdot e^{3x}|_0^1-\int_0^1 e^{3x}dx)$$

$$=\frac{2e^3+1}{3(e^3-1)}$$

$$EY=\int_0^1 y\cdot 3y^2dx=\frac{3}{4}y^4\Big|_0^1=\frac{3}{4} \qquad E(XY)=EX\cdot EY=\frac{2e^3+1}{4(e^3-1)}$$

(5) $DX=EX^2-(EX)^2$

$$EX^2=\int_0^1 x^2\cdot\frac{3}{e^3-1}e^{3x}dy=\frac{1}{e^3-1}\left[x^2\cdot e^{3x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{3x}\cdot 2xdx\right]$$
$$=\frac{1}{e^3-1}\left[e^3-\frac{2}{3}(xe^{3x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{3x}dx)\right]$$
$$=\frac{5e^3-2}{9(e^3-1)}$$

$$\therefore\ DX=\frac{5e^3-2}{9(e^3-1)}-\frac{1}{9(e^3-1)^2}(2e^3+1)^2$$
$$=\frac{e^6-11e^3+1}{9(e^3-1)^2}$$

$$DY=EY^2-(EY)^2$$

$$EY^2=\int_0^1 y^2\cdot 3y^2dy=\frac{3}{5}y^5\Big|_1^0=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad DY=\frac{3}{5}-(\frac{3}{4})^2=\frac{3}{80}$$

概率论与数理统计期末复习题二

一、计算题（每题 10 分，共 70 分）

1、设 P（A）=1/3，P（B）=1/4，P（A∪B）=1/2.求 P（AB）、P（A-B）.

解：P（AB）= P（A）+P（B）- P（A∪B）=1/12

P（A-B）= P（A）-P（AB）=1/4

2、设有甲乙两袋，甲袋中装有 3 只白球、2 只红球，乙袋中装有 2 只白球、3 只红球.今从甲袋中任取一球放入乙袋，再从乙袋中任取两球，问两球都为白球的概率是多少?

解：用 A 表示“从甲袋中任取一球为红球”， B 表示“从乙袋中任取两球都为白球”。则 $P(A)=\frac{2}{5}$。由全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{5}\cdot\frac{C_2^2}{C_6^2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{11}{75}$$

3、已知随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 2-Ax & 1<x\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

（1）求 A.（2）X 的分布函数$F(x)$.

解：（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1$得 A=1。

（2）$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \int_0^x ydy=\frac{1}{2}x^2 & 0<x\le 1 \\ \int_0^1 ydy+\int_1^x (2-y)dy=2x-\frac{1}{2}x^2-1 & 1<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$

4、若X，Y为相互独立的分别服从$[0，1]$上均匀分布的随机变量，试求$Z=X+Y$的分布密度函数.

解：显然(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=1,\ 0<x<1,0<y<1$；否则，$f(x,y)=0$。先求Z的分布函数$F(z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$。

当$z\le 0$时，$F(z)=0$

当$0<z<1$时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_0^{z-x} dy=\frac{z^2}{2}$

当$1\le z<2$时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^{z-1} dx\int_0^1 dy+\int_{z-1}^1 dx\int_0^{z-x} dy=2z-\frac{z^2}{2}-1$

当$z\ge 2$时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 dy=1$

所以，Z的分布密度函数

$$f_Z(z)=F'(z)=\begin{cases} z,\ 0<z<1 \\ 2-z,\ 1<z<2 \\ 0,\ \text{其他} \end{cases}$$

5、某镇年满 18 岁的居民中 20%受过高等教育.今从中有放回地抽取 1600 人的随机样本，求样本中 19%和 21%之间的人受过高等教育的概率.

解：设X表示抽取的 1600 人中受过高等教育的人数，则$X\sim B(1600,0.2)$，$EX=320,\mathrm{DX}=16^2$

$$P\{0.19\times 1600\le X\ge 0.21\times 1600\}=P\{\frac{304-320}{16}\le\frac{X-320}{16}<\frac{336-320}{12}\}$$

$$P\{-1\le\frac{X-320}{16}<1\}\approx\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1\ \ =2\times 0.8413-1=0.6826$$。

6、某单位职工每天的医疗费服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现抽查了 25 天，得$\bar{x}=170$元，$S=30$元，求职工

每天医疗费均值 μ 的双侧 0.95 置信区间.

解：由于 σ^2 未知，故 μ 的 0.95 双侧置信区间为

$$[\overline{X}-t_{0.025}(24)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{0.025}(24)\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

代入数据得 $\overline{X}=170,\ S=30,\ n=25,\ t_{0.025}(24)=2.0639$，得 μ 的 0.95 双侧置信区间观测值为

$$[170-2.0639\times\frac{30}{\sqrt{25}},\ 170+2.0639\times\frac{30}{\sqrt{25}}]=[157.4,\ 182.6]$$

7、设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & other\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数，且 $\theta>0$。求 θ 的矩估计与极大的似然估计量。

解：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体的样本。因为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\theta x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}$$

令 $EX=\overline{X}$ 解得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$。由 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}(\theta X_i^{\theta-1})=\theta^n\prod\limits_{i=1}^{n}X_i^{\theta-1}$

$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i=0$，解得 θ 的极大的似然估计为 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$

二、解答题（9 分）

某校数学教学从初一开始实行了某项改革。三年后在初中毕业数学考试中，全市平均成绩为 80 分，从该校抽取的 49 名学生成绩的平均数为 85 分。已知该校这次考试分数服从 $N(\mu,\ 14^2)$ 分布。问该校这次考试的平均成绩与全市平均成绩差异如何？（$\alpha=0.05$）

解：$H_0:\mu=80\qquad H_1:\mu\neq 80$

由于 σ 已知，用 Z 检验。算得 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}=\dfrac{85-80}{14}\times 7=2.5$

由表查得 $z_{0.025}=1.96$。由于 $Z>z_{0.025}$ 所以拒绝 H_0，认为该校这次考试的平均成绩与全市平均成绩差异显著

三、综合题（15 分）

设随机变量(X,Y)具有下列概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} cx & 0<x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 & others \end{cases}$$

(1) 求c。(2) X与Y是否独立？为什么？(3) 求$f_{Y|X}(y|x)$。

(1) 由$1=\int_0^1 dx\int_0^x cxdy=c\int_0^1 x^2dx=\frac{c}{3}$得$c=3$。

(2) X的概率密度$f_X(x)=\int_0^x 3xdy=3x^2, 0<x<1$，否则$f_X(x)=0$；

Y的边缘概率密度$f_Y(y)=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2),\ 0<y<1$，否则$f_Y(y)=0$。

由于$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以X与Y不独立。

(3) $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, 0\le y\le x \\ 0,\ 0ther\end{cases}, 0<x<1$

四、证明题（6分）

设随机变数ξ具有对称的分布密度函数$p(x)$，$p(x)=p(-x)$, 证明：对任意的$a>0$, 有$F(-a)=1-F(a)=\frac{1}{2}-\int_0^a p(x)dx$。.

附：$\Phi(1)=0.84$, $\Phi(1.96)=0.975$

$t_{0.05}(24)=1.7109$, $t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.05}(25)=1.7081$, $t_{0.025}(25)=2.0595$

证：$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a} p(x)dx=1-\int_{-a}^{+\infty} p(x)dx$

$=1+\int_a^{-\infty} p(-x)dx=1-\int_{-\infty}^{a} p(x)dx$

$=1-F(a)=1-\int_{-\infty}^{0} p(x)dx-\int_0^a p(x)dx=\frac{1}{2}-\int_0^a p(x)dx$

概率论与数理统计期末复习题三

一、计算题（每题 10 分，共 70 分）

1、设 P（A）=1/4，P（A-B）=1/8，且 A、B 独立。求：P（B）、P（A∪B）。

解：由 1/8=P（A-B）= P（A）-P（AB）=P（A）-P（A）P（B）得：P（B）=1/2

P（A∪B）==P（A）+P（B）-P（AB）= P（A）+P（B）-P（A）P（B）=5/8

2、某地有甲乙两种彩票，它们所占份额比 3 ：2 。甲的中奖率为 0.1, 乙的中奖率为 0.3 。任购 1 张彩票，求中奖的概率。

解：设 A_1="任购 1 张彩票，购到甲两种彩票"， A_2="任购 1 张彩票，购到乙两种彩票"， B="任购 1 张彩票，购到中奖彩票"。则

P（A_1）=3/5， P（A_0）=2/5，P（B|A_1）=0.1， P（B|A_2）=0.3

P（B）= P（A_1）P（B|A_1）+P（A_2）P（B|A_2）=9/50

3、设随机变数 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ Ax^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

（1） 求常数 A。（2）求 X 的密度函数。

解：（1）因为 $F(1-0)=F(1)$，所以 $A=1$

（2）X 的密度函数 $p(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

4、某镇年满 18 岁的居民中受过高等教育的 10%年收入超过 10 万。今从中有放回地抽取 1600 人的随机样本，求样本中不少于 11%的人年收入超过 10 万的概率。

解:设 X 表示抽取的 1600 人年收入超过 10 万的人数，则

$X\sim B(1600,0.1)$， $EX=160,\mathrm{DX}=16\times 9$

$$P\{X\ge 0.11\times 1600\}=1-P\{X<176\}=1-P\{\frac{X-160}{12}<\frac{16}{12}\}$$

$$\approx 1-\Phi(\frac{4}{3})=1-0.9082=0.0918$$

5、设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta},0<x<1\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

其中θ是未知参数，且$\theta>0$。求θ的矩估计与极大的似然估计量。

解：$E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，令$\overline{X}=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，故$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$。另，似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}X_i^{\theta},0<X_i<1\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$$

解得θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=-1-\dfrac{1}{\overline{X}}$

6、某银行要测定在业务柜台上处理每笔业务所花费的时间，假设处理每笔业务所需时间服从正态分布，现随机地抽取 16 笔业务，测得所需时间为$x_1,\cdots,x_{16}$（min）。由此算出$\bar{x}=13$min，$S=5.6$min，求处理每笔业务平均所需时间的双侧 0.95 置信区间。

解：由于σ^2未知，故μ的 0.95 双侧置信区间为

$$[13-t_{0.025}(15)\frac{5.6}{\sqrt{16}},\ 13+t_{0.025}(15)\frac{5.6}{\sqrt{16}}]=[10.0159,\ 15.9841]$$

其中$t_{0.025}(15)=2.1315$由表查得

7、设随机变量X与Y独立，且X服从$[0,\ 1]$上的均匀分布，Y服从参数为 1 的指数分布，试求$Z=X+Y$的概率密度。

解：显然(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y},\ 0<x<1,y>0\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

先求Z的分布函数$F(z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$。

当$z\le 0$时，$F(z)=0$

当$0<z<1$时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=z-1+e^{-z}$

当$z\ge 1$时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=1-e^{-z}(e-1)$

所以，Z 的分布密度函数

二、解答题（9 分）

某校数学教学从初一开始实行了某项改革。三年后在初中毕业数学考试中，全市平均成绩为 80 分，从该校抽取的 49 名学生成绩的平均数为 85 分。已知该校这次考试分数服从 $N(\mu,\ 14^2)$ 分布。问该校这次考试的平均成绩与全市平均成绩差异如何？（$\alpha = 0.05$）

解：$H_0: \mu = 80 \qquad H_1: \mu \neq 80$

由于 σ 已知，用 Z 检验。算得 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \dfrac{85-80}{14} \times 7 = 2.5$

由表查得 $z_{0.025} = 1.96$ 。由于 $Z > z_{0.025}$ 所以拒绝 H_0，认为该校这次考试的平均成绩与全市平均成绩差异显著

三、综合题（15 分）

设随机变量 (X,Y) 具有下列概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & |y| < x,\ 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 c。(2) X 与 Y 是否独立？为什么？（3）求 $f_{Y|X}(y|x)$。

解：(1) 由 $1 = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} c dy = c\int_0^1 2x dx = c$ 得 $c = 1$。

(2) X 的概率密度为 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-x}^{x} dx = 2x,\ 0 < x < 1$，

故 $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。$Y$ 的概率密度 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

当 $0 \le y < 1$ 时 $f_Y(y) = \int_y^1 dx = 1 - y = 1 - |y|$

当 $-1 < y < 0$ 时 $f_Y(y) = \int_{-y}^1 dx = 1 + y = 1 - |y|$

故 Y 的概率密度：$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & |y| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$。

由于 $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立。

(3) $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

四、证明题（6 分）

设随机变数 ξ **具有对称的分布密度函数** $p(x)$ **，即** $p(x)=p(-x)$, **证明：对任意的** $a>0$, **有 P（**$|\xi|<a)=2F(a)-1$。

证明: $P(|\xi|<a=\int_{-a}^{a}p(x)dx=2\int_{0}^{a}p(x)dx=2[F(a)-\frac{1}{2}]=2F(a)-1$

附:

$\Phi(\frac{4}{3})=0.9082$，$\Phi(1.96)=0.975$

$t_{0.05}(15)=1.7531,\ t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.05}(16)=1.7459,\ t_{0.025}(16)=2.1199$

概率论与数理统计期末复习题四

一、计算题（共 66 分）

1、(8 分）设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=p,P(B)=q$，求下列事件的概率:

$P(AB),P(A\cup B),P(A\overline{B}),P(\overline{A}\overline{B})$。

A 与 B 互不相容，所以 $P(AB)=P(\phi)=0$，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=p+q$；由于 A 与 B 互不相容，这时 $A\overline{B}=A$，从而 $P(A\overline{B})=P(A)=p$；由于 $\overline{A}\overline{B}=\overline{A\cup B}$，从而

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(p+q)$。

2、（9 分）某地有甲乙两种彩票，它们所占份额比 3 ：2。甲的中奖率为 0.1， 乙的中奖率为 0.3 。任购 1 张彩票，求中奖的概率。

设 A_1="购到甲种彩票"， A_2="购到乙两种彩票"， B="购到中奖彩票"。则 P（A_1）=3/5， P（A_0）=2/5，P（B|A_1）=0.1， P（B|A_2）=0.3。

P（B）= P（A_1）P（B|A_1）+P（A_2）P（B|A_2）=9/50。

3、(10 分）设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ Ax^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

(1）求常数 A。(2）求 X 的密度函数。

1）因为 $F(1-0)=F(1)$，所以 $A=1$

（2）X 的密度函数 $p(x)=F'(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

4、(12 分) 设随机向量(X,Y)具有下列概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & |y|<x,\ 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(1) 求c。(2) X与Y是否独立？为什么？ (3) 求$f_{Y|X}(y|x)$。

(1) 由$1=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} cdy = c\int_0^1 2xdx = c$得$c=1$。

(2) X的概率密度为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-x}^{x} dx = 2x,\ 0<x<1$，

故$f_X(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。$Y$的概率密度$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

当$0\le y<1$时$f_Y(y)=\int_y^1 dx = 1-y = 1-|y|$

当$-1<y<0$时$f_Y(y)=\int_{-y}^{1} dx = 1+y = 1-|y|$

故Y的概率密度$f_Y(y)=\begin{cases} 1-|y|, & |y|<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。

由于$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以X与Y不独立。

(3) $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(y)}=\begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & |y|<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

5、(11 分) 设总体X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & other \end{cases}$$

其中θ是未知参数，且$\theta>0$。求θ的矩估计与极大似然估计量。

$E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，令$\overline{X}=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，故$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$。另，似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases} (\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta}, 0<X_i<1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$$

解得θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=-1-\dfrac{1}{\overline{X}}$。

6、(8 分)设 X_1,X_2,X_3,X_4 是取自总体 X 的样本。X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

写出 X_1,X_2,X_3,X_4 联合概率密度 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$。

联合概率密度 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)=\begin{cases}16e^{-2\sum_{i=1}^{4}x_i}, x_i>0, i=1,2,3,4\\ \quad 0 \quad ,otuhre\end{cases}$

7、(8 分)设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从 $[0，1]$ 上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，试求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

显然 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y},\ 0<x<1, y>0\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

先求 Z 的分布函数 $F(z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$。

当 $z\le 0$ 时，$F(z)=0$

当 $0<z<1$ 时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=z-1+e^{-z}$

当 $z\ge 1$ 时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=1-e^{-z}(e-1)$

所以，Z 的分布密度函数

$$f(z)=F'(z)=\begin{cases}0,\ \ z\le 0\\ 1-e^{-z}, 0<z\le 1\\ (e-1)e^{-z}, z>1\end{cases}$$

二、应用题（共 34 分）

1、(9 分)某商店负责供应某地区 10000 人所需商品，其中一商品在一段时间每人需要一件的概率为 0.8，假定在这一段时间内各人购买与否彼此无关，问商店应预备多少件这种商品，才能以 97.5%的概率保证不会脱销？（假定该商品在某一段时间内每人最多可以买一件）。

解：设应预备 n 件，并设 X 表示某地区 10000 人需要件数，则 X~B（10000，0.8），则由中心极限定理得 $P\{X\le n\}\approx\Phi\left(\dfrac{n-8000}{40}\right)\ge 0.975$

则 $\dfrac{n-8000}{40}\ge 1.96, n\ge 8078.4$（件）。

2、（8 分）若某班某次考试的平均分为 80 分，标准差为 10，试用切比雪夫不等式估计及格率至少为多少?

解：用随机变量 X 表示学生成绩，则数学期望 E(X) = 80，方差 D(X) = 100，所以 P{60 ≤ X ≤ 100} ≥ P{60 < X < 100}= P{|X – 80| < 20}$\geq 1-\frac{100}{400}=0.75$

所以及格率至少为 75%。

3、（8 分）某厂生产的灯泡寿命（小时）近似服从正态分布 N(8000, 1600)，抽取 16 个灯泡的样本。求平均寿命小于 7975 小时概率。

解：设灯泡寿命总体为 X，因为 X ~ N(8000，1600), n=16，所以样本均值 $\bar{X} \sim N(8000,\ 100)$，

$P\{\bar{X}<7975\}=\Phi\left(\frac{7975-8000}{10}\right)=1-\Phi(2.5)=0.0062$。

4、（9 分）已知维尼纶纤度在正常条件下服从 $N(1.405,\ 0.048^2)$。某日抽取 5 根维尼纶，计算得样本均值与样本方差分别为 $\bar{x}=1.414,\ s^2=0.03112$。问这一天纤度总体标准差是否正常?（$\alpha=0.05$）

解 $H_0:\sigma=0.048$，$H_1:\sigma\neq 0.048$

计算

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(5-1)\times 0.03112^2}{0.048^2}=13.5$$

查表得 $\chi^2_{0.025}(4)=11.1,\ \chi^2_{0.975}(4)=0.484$。由于 $\chi^2>\chi^2_{0.025}(4)$，所以拒绝 H_0，即认为这一天纤度总体标准差与 0.048 有显著差异。

附：$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(2.5)=0.9938$　$\chi^2_{0.025}(4)=11.1,\ \chi^2_{0.975}(4)=0.484$

概率论与数理统计期末复习题五及答案

一．计算题（本题满分 30 分，共有 5 道小题，每道小题 6 分）.

1．设 A、B 是随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P\left(\overline{AB}\right)$．

解答：由于 $A=AB\cup A\bar{B}$，所以 $P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})=P(AB)+P(A-B)$

所以， $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4$**，**

$P\left(\overline{AB}\right)=1-P(AB)=1-0.4=0.6$.

2．设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}\quad(-\infty<x<+\infty)$，求 $E(X)$ 与 $D(X)$.

解：因为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}\exp\left\{-\dfrac{(x-1)^2}{2\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}\quad(-\infty<x<+\infty)$

所以，$X\sim N\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ ，所以，$E(X)=1$，$D(X)=\dfrac{1}{2}$.

3．袋中有红球 4 只，黑球 3 只，从中任意取出 2 只，求这 2 只球的颜色不相同的概率 .

解答：设 $A=\{\text{任取2只球，颜色不相同}\}$，则 $P(A)=\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$.

4．设随机变量 X 服从区间 $(0,\ 2)$ 上的均匀分布，求 $\dfrac{D(X)}{E(X^2)}$.

解答：由于随机变量 X 服从区间 $(0,\ 2)$ 上的均匀分布，所以 $E(X)=1$，$D(X)=\dfrac{2^2}{12}=\dfrac{1}{3}$. 所以，

$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\dfrac{1}{3}+1^2=\dfrac{4}{3}$. 所以，$\dfrac{D(X)}{E(X^2)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{4}$.

5．设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^\alpha & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\alpha>-1$ 为未知参数，$(X_1,\ \cdots,\ X_n)$ 是从总体 X 中抽取的一个样本，求 α 的矩估计量 .

解答： $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot(\alpha+1)x^\alpha dx=\int_0^1(\alpha+1)x^{\alpha+1}dx=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$.

得方程 $E(X)=\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}$，解方程，得 $\alpha=\dfrac{2E(X)-1}{1-E(X)}$.

将 $\overline{X}$ 替换成 $E(X)$，得 α 的矩估计量为 $\hat{\alpha}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

二．计算题（本题满分 40 分，共有 5 道小题，每道小题 8 分）.

6．已知男人中有 5.4%是色盲患者，女人中有 0.27%是色盲患者．并且某学校学生中男、女生的比例为 2∶1，现从这批学生中随机地选出一人，发现此人是色盲患者，试问此人是男生的概率为多少？

解答：设 $A=\{选出的学生为男生\}$，$B=\{选出的学生为色盲患者\}$，则由 Bayes 公式，得

$$P(A|B)=\frac{P(A)\times P(B|A)}{P(A)\times P(B|A)+P(\overline{A})\times P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times 0.054}{\frac{2}{3}\times 0.054+\frac{1}{3}\times 0.0027}=0.9756\ .$$

7．设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x \quad (-\infty<x<+\infty)$$

试求：(1). 系数 A 与 B；(2). 概率 $P\{-1<X<1\}$；(3). 随机变量 X 的密度函数．

解：

(1). 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$， $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，得

$$1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(A+B\arctan x)=A+\frac{\pi}{2}B$$

$$0=\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}(A-B\arctan x)=A-\frac{\pi}{2}B$$

解方程组 $\begin{cases}A+\frac{\pi}{2}B=1\\ A-\frac{\pi}{2}B=0\end{cases}$ ，得 $A=\frac{1}{2}$， $B=\frac{1}{\pi}$

所以，

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x \quad (-\infty<x<+\infty)$$

(2). $P\{-1<X<1\}$

$$=F(1)-F(-1)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(-1)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

(3). X 的密度函数为

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

8．设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 服从平面区域

$$D=\{(x,\ y):\ x^2+y^2\le 1\}$$

上的均匀分布．

(1). 试求二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合密度函数；

(2). 求随机变量 X 及 Y 各自的边缘密度函数；

(3). 求 $E(X)$，$E(Y)$ 及 $E(XY)$；

(4) 判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立？是否不相关？

解：

(1)．平面区域 D 的面积为 π，所以，二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & (x,\ y)\in D\\ 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}$$

(2). 当 $-1\le x\le 1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

所以，随机变量 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases};$$

同理，随机变量 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}.$$

(3). 由对称性，得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,\quad y)dxdy=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le 1} xydxdy=0$$

(4) 由于$\operatorname{cov}(X,\quad Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，所以，随机变量$X$与$Y$不相关．但是，

$$f(x,\quad y)\neq f_X(x)f_Y(y)\quad \left(x^2+y^2\le 1\right)$$

所以，随机变量X与Y不相互独立．

9．设随机变量$X\sim N(0,\quad 1)$，$Y=X^2+1$，试求随机变量Y的密度函数．

解：

随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad (-\infty<x<+\infty)$$

设随机变量Y的分布函数为$F_Y(y)$，则有

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{X^2+1\le y\right\}=P\left\{X^2\le y-1\right\}$$

①. 如果$y-1\le 0$，即$y\le 1$，则有$F_Y(y)=0$；

②. 如果$y>1$，则有

$$F_Y(y)=P\left\{X^2\le y-1\right\}=P\left\{-\sqrt{y-1}\le X\le \sqrt{y-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\sqrt{y-1}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

即

$$F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{y-1}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx & y>1\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

所以，

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y-1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y-1}} & y>1\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y-1}}e^{-\frac{y-1}{2}} & y>1\\ 0 & y\le 0\end{cases}.$$

10．某单位有 200 台分机，每台分机有 5%的时间要使用外线通话．假定每台分机是否使用外线是相互独立的，试用中心极限定理估计该单位至少要装多少条外线，才能以 99%以上的概率保证分机使用外线时不等待．

（已知 $\Phi(2.33)=0.99$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0,\ 1)$ 的分布函数．）

解：

设 $A=\{\text{某台分机使用外线}\}$，则 $P(A)=0.05$

设 X：该单位某时刻使用外线的分机数．则 $X\sim B(200,\ 0.05)$．

设需要给单位安装 n 条外线，则要使分机使用外线时不等待，必须 $X\le n$，所以，

$$P\{\text{使用外线时不等待}\}=P\{X\le n\}$$

$$=P\left\{\frac{X-200\times 0.05}{\sqrt{200\times 0.05\times 0.95}}\le\frac{n-200\times 0.05}{\sqrt{200\times 0.05\times 0.95}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{n-200\times 0.05}{\sqrt{200\times 0.05\times 0.95}}\right)=\Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right)$$

由题意，$P\{\text{使用外线时不等待}\}\ge 0.99$，即

$$\Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right)\ge 0.99$$

查表，得 $\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\ge 2.33$

所以，$n\ge 2.33\times\sqrt{9.5}+10=17.18$

因此，至少要装 18 条外线，才能满足要求．

三．计算题（本题满分 30 分，共有 3 道小题，每道小题 10 分）．

11．设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数，$(X_1,\ \cdots,\ X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本．

(1). 求未知参数θ的矩估计$\hat{\theta}$；

(2). 求$D(\hat{\theta})$．

解：

(1). $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^\theta \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)dx=\frac{\theta}{2}$ ，

所以，$\theta=2E(X)$ ，将$E(X)$用样本均值$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$来替换，得未知参数$\theta$的矩估计为

$$\hat{\theta}=2\overline{X}$$

(2). $D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)$，而

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\int_0^\theta \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)dx-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{20}$$

所以，$D(\hat{\theta})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{4}{n}\times\frac{\theta^2}{20}=\frac{\theta^2}{5n}$

12．设随机变量X与Y相互独立，且都服从标准正态分布$N(0,\ 1)$．令随机变量

$$Z=\sqrt{X^2+Y^2}\ .$$

(1) 试求随机变量Z的密度函数$f_Z(z)$．(2) 试求$E(Z)$．

解：

(1) 由题意，得

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty<x<\infty),$$

$$f_y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \qquad (-\infty<y<\infty)\ .$$

设随机变量$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布函数为$F_Z(z)$，则

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}$$

当$z\le 0$时，$F_Z(z)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=P(\varnothing)=0$；

当$z>0$时，$F_Z(z)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

作极坐标变换$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$，则有

$$F_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr$$

所以，随机变量$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布函数为$F_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

所以，随机变量$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的密度函数为$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

(2) $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_z(z)dz=\int_0^{+\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$．

13．已知总体X的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$0<\theta<1$是未知参数，$(X_1,\ X_2,\ X_3)$是从中抽取的一个样本，试求当样本观测值为$(x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=1)$时，参数$\theta$的最大似然估计值．

解：

$P(X_1=1,\ \ X_2=2,\ \ X_3=1)=P(X_1=1)P(X_2=2)P(X_3=1)$

$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$．

所以当样本观测值为$(x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=1)$时，似然函数为

$L(\theta)=2\theta^5(1-\theta)$

所以，$L'(\theta)=5\theta^4(5-6\theta)$．

令$L'(\theta)=0$，得$5\theta^4(5-6\theta)=0$，由此得似然函数$L(\theta)$在区间$(0,\ \ 1)$上的驻点为$\theta_0=\frac{5}{6}$．并且θ_0是似然函数$L(\theta)$在区间$(0,\ \ 1)$上的唯一驻点．因此此时似然函数$L(\theta)$的最大值点为$\theta_0=\frac{5}{6}$．即当样本观测值为$(x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=1)$时，参数$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\frac{5}{6}$．

概率论与数理统计期末复习题六及答案

一．（本题满分 35 分，共有 5 道小题，每道小题 7 分）．

1．掷 2 颗均匀的骰子，令：

$$A=\{第一颗骰子出现4点\}，\quad B=\{两颗骰子出现的点数之和为7\}．$$

(1) 试求 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$；(2) 判断随机事件 A 与 B 是否相互独立？

解：（1）掷 2 颗骰子，共有 $6^2=36$ 种情况（样本点总数）．

A 事件含有 6 个样本点，故 $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$．

B 事件含有 6 个样本点，故 $P(B)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$．

AB 事件含有 1 个样本点，故 $P(AB)=\dfrac{1}{36}$．

(2) 由于 $P(AB)=\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=P(A)P(B)$，所以随机事件 A 与 B 相互独立．

2．设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} cx & 0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2} & 3\le x\le 4 \\ 0 & 其它 \end{cases},$$

求：(1) 常数 c；(2) 概率 $P\{2<X<6\}$．

解：(1) 由密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{+\infty} f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{3} cxdx+\int_{3}^{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)dx+\int_{4}^{+\infty} 0dx$$

$$=\frac{c}{2}x^2\Big|_0^3+\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_3^4=\frac{9}{2}c+\left(2-\frac{7}{4}\right)=\frac{9}{2}c+\frac{1}{4}$$

所以，得 $c=\dfrac{1}{6}$．即随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6} & 0\le x<3\\ 2-\dfrac{x}{2} & 3\le x\le 4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}.$$

(2) $P\{2<X<6\}=\int_2^6 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$

$=\int_2^3 \frac{x}{6}dx+\int_3^4\left(2-\frac{x}{2}\right)dx+\int_4^6 0dx$

$=\left.\frac{x^2}{12}\right|_2^3+\left.\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)\right|_3^4=\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$.

3．设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别是 -2 和 2，方差分别是 1 和 4，而相关系数为 -0.5 ．

(1) 求 $E(X+Y)$ 及 $D(X+Y)$；(2) 试用切比雪夫（Chebyshev）不等式估计概率 $P\{|X+Y|\ge 6\}$．

解：(1) 令 $Z=X+Y$，则有

$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-2+2=0$

$D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,\ Y)$

$=D(X)+D(Y)+2\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\cdot\rho_{X,\ Y}$

$=1+4+2\sqrt{1}\times\sqrt{4}\times(-0.5)=3$

(2) 根据切比雪夫不等式，有

$P\{|X+Y|\ge 6\}=P\{|Z|\ge 6\}=P\{|Z-E(Z)|\ge 6\}\le\frac{D(Z)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

4．在总体 $X\sim N(52,\ 6.3^2)$ 中随机抽取一个容量为 36 的样本，求 $P\{50.8\le\overline{X}\le 53.8\}$．

(附，标准正态分布 $N(0,\ 1)$ 的分布函数 $\Phi(x)$ 的部分值：

x	0.19	0.29	1.14	1.09	1.63	1.71
$\Phi(x)$	0.5753	0.6141	0.8729	0.8621	0.9484	0.9564

解 由于总体 $X\sim N(52,\ 6.3^2)$，而且样本量 $n=36$，所以 $\overline{X}\sim N\left(52,\ \dfrac{6.3^2}{36}\right)$.

所以，$P\{50.8 \le \overline{X} \le 53.8\} = P\left\{\frac{50.8-52}{\frac{6.3}{6}} \le \frac{\overline{X}-52}{\frac{6.3}{6}} \le \frac{53.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right\}$

$$= \Phi\left(\frac{53.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right) - \Phi\left(\frac{50.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right) = \Phi(1.71) - \Phi(-1.14)$$

$$= \Phi(1.71) + \Phi(1.14) - 1 = 0.9564 + 0.8729 - 1 = 0.8293 .$$

5．设总体 X 的二阶矩存在，记 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，且 μ 与 σ^2 都未知，$-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma^2>0$．$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$是从总体 X 中抽取的一个样本，求 μ 与 σ^2 的矩估计量．

解：记 $\alpha_k = E(X^k)\quad (k=1,\ 2)$．则有

$$\begin{cases} \mu = \alpha_1 \\ \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \end{cases},$$

将 α_1 与 α_2 分别用样本 $(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 的样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 与样本的二阶原点矩 $A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 来替换，得到 μ 与 σ^2 的矩估计量为

$\hat{\mu} = \overline{X}$，

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - (\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = B_2 .$$

二．(本题满分 45 分，共有 5 道小题，每道小题 9 分)．

6．甲、乙、丙三人独立地破译一份密码．已知甲、乙、丙三人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$．

(1) 求密码能被破译的概率．(2) 已知密码已经被破译，求破译密码的人恰是甲、乙、丙三人中的一个人的概率．

解 (1) 设 $A=\{$甲破译出密码$\}$，$B=\{$乙破译出密码$\}$，$C=\{$丙破译出密码$\}$．

$D=\{$密码被破译$\}$．

则 $D = A\cup B\cup C$，因此，

$$P(D) = P(A\cup B\cup C) = 1 - P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right) = 1 - P\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\right)$$

$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

(2) $D_1=\{$破译密码的人恰是甲、乙、丙三人中的一个人$\}$，则

$D_1=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$，所以

$P(D_1)=P(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$

$=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$

$=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{13}{30}$

注意到 $D_1\subset D$，所求概率为 $P(D_1|D)=\frac{P(D_1D)}{P(D)}=\frac{P(D_1)}{P(D)}=\frac{\frac{13}{30}}{\frac{3}{5}}=\frac{13}{18}$.

7．某学生参加一项考试，他可以决定聘请 5 名或者 7 名考官．各位考官独立地对他的成绩做出判断，并且每位考官判断他通过考试的概率均为 0.3，如果至少有 3 位考官判断他通过，他便通过该考试．试问该考生聘请 5 名还是 7 名考官，能使得他通过考试的概率较大?

解：设 $A=\{$一位考官判断他通过考试$\}$，则 $P(A)=0.3$.

$B=\{$该考生通过考试$\}$.

由于各位考官独立地对他的成绩做出判断，因此考生聘请 n 位考官，相当于做一个 n 重 Bernoulli 试验．令 X 表示判断他通过考试的考试人数，则 $X\sim B(n,\ 0.3)$，因此

$P\{X=k\}=C_n^k\times 0.3^k\times 0.7^{n-k}$，$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$.

(1) 若考生聘请 5 位考官，相当于做一个 5 重 Bernoulli 试验．所以，

$P(B)=P\{X\geq 3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}$

$=C_5^3\times 0.3^3\times 0.7^2+C_5^4\times 0.3^4\times 0.7^1+C_5^5\times 0.3^5\times 0.7^0=0.16308$.

(2) 若考生聘请 7 位考官，相当于做一个 7 重 Bernoulli 试验．所以，

$P(B)=P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}=1-\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}$

$=1-(C_7^0\times 0.3^0\times 0.7^7+C_7^1\times 0.3^1\times 0.7^6+C_7^2\times 0.3^2\times 0.7^5)=0.3529305$.

所以聘请 7 位考官，可以使该考生通过考试的概率较大．

8．设二维随机变量$(X,\quad Y)$的联合密度函数为

$$f(x,\quad y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(1)．求$E(X)$，$E(Y)$及$E(XY)$；

(2)．分别求出求X与Y的边缘密度函数；

(3)．判断随机变量X与Y是否相关？是否相互独立？

解：(1)． $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\quad y)dxdy=\dfrac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^3ydy=\dfrac{21}{8}\int_{-1}^{1}x^3\left(1-x^4\right)dx=0$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,\quad y)dxdy=\dfrac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^2y^2dy=\dfrac{7}{4}\int_{-1}^{1}x^2\left(1-x^6\right)dx=\dfrac{7}{2}\int_{0}^{1}x^2\left(1-x^6\right)dx=\dfrac{7}{9}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,\quad y)dxdy=\dfrac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^3y^2dy=\dfrac{7}{4}\int_{-1}^{1}x^3\left(1-x^6\right)dx=0$

(2)．当$-1\le x\le 1$时，

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\quad y)dy=\dfrac{21}{4}\int_{x^2}^{1}x^2ydy=\dfrac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right)$

所以，随机变量X的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right) & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}；$$

当$0\le y\le 1$时，

$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\quad y)dx=\dfrac{21}{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2ydx=\dfrac{7}{2}yx^3\Big|_0^{\sqrt{y}}=\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}$

所以，随机变量X的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}=\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(3)．由于$\operatorname{cov}(X,\quad Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，所以$X$与$Y$不相关．

$f(x,\quad y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以$X$与$Y$不独立．

9．设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从标准正态分布 $N(0,\ 1)$，令 $Z=X+Y$ ．

(1) 用求独立随机变量和的密度函数的计算公式（卷积公式），求出随机变量 Z 的密度函数． (2) 判断随机变量 Z 是否服从正态分布，并指出 $E(Z)$ 与 $D(Z)$ ．

解：随机变量 X 与 Y 的密度函数分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \qquad (-\infty<y<+\infty)$$

设随机变量 Y 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{2x^2+z^2-2xz}{2}\right\}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\left(x^2-xz+\frac{1}{2}z^2\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx$$

作变换 $x-\dfrac{z}{2}=\dfrac{u}{\sqrt{2}}$，则 $dx=\dfrac{du}{\sqrt{2}}$，当 $x\to-\infty$ 时，$u\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$u\to+\infty$ ．所以

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

因此，$f_Z(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}$，$(-\infty<z<+\infty)$ ．

所以 $Z=X+Y$ 服从正态分布，且 $E(X)=0$，$D(X)=2$ ．

10．某快餐店出售四种快餐套餐，这四种快餐套餐的价格分别为 6 元、10 元、15 元和 18 元．并且这 4 种快餐套餐售出的概率分别为 0.2、0.45、0.25 和 0.1 ．若某天该快餐店售出套餐 500 份，试用中心极限定理计算：(1) 该快餐店这天收入至少为 5500 元的概率．(2) 15 元套餐至少售出 140 份的概率．

（附，标准正态分布 $N(0,\ 1)$ 的分布函数 $\Phi(x)$ 的部分值：

x	0.39	0.48	1.48	1.55

$\Phi(x)$	0.6517	0.6844	0.9306	0.9394

解：

(1) 设 X 表示售出一份套餐的收入，则 X 的分布律为

X	6	10	15	18
P	0.2	0.45	0.25	0.1

则 $E(X)=6\times 0.2+10\times 0.45+15\times 0.25+18\times 0.1=11.25$，

$E(X^2)=6^2\times 0.2+10^2\times 0.45+15^2\times 0.25+18^2\times 0.1=140.85$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=140.85-11.25^2=14.2875$．

令 X_i 表示出售的第 i 套快餐套餐的收入，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 500)$．则 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{500}$ 独立同分布，且 $X_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 500)$ 的分布都与 X 的分布相同．则

$$P\left\{\sum_{i=1}^{500}X_i\geq 5500\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{500}X_i-11.25\times 500}{\sqrt{500\times 14.2875}}\geq\frac{5500-11.25\times 500}{\sqrt{500\times 14.2875}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{500}X_i-11.25\times 500}{\sqrt{500\times 14.2875}}<-1.48\right\}\approx 1-\Phi(-1.48)=\Phi(1.48)=0.9306$$

(2) 设 Y 表示售出的 500 份套餐中 15 套餐的份数，则 $Y\sim B(500,\ 0.25)$．则

$$P\{Y\geq 140\}=P\left\{\frac{Y-500\times 0.25}{\sqrt{500\times 0.25\times 0.75}}\geq\frac{140-500\times 0.25}{\sqrt{500\times 0.25\times 0.75}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{Y-500\times 0.25}{\sqrt{500\times 0.25\times 0.75}}<1.55\right\}\approx 1-\Phi(1.55)=1-0.9394=0.0606\ .$$

三．(本题满分 20 分，共有 2 道小题，每道小题 10 分)．

11．设随机变量 ξ 与 η 相互独立，且服从同一分布．ξ 的分布律为

$$P\{\xi=i\}=\frac{1}{3}\qquad(i=1,\ 2,\ 3)\ .$$

又设 $X=\max(\xi,\ \eta)$，$Y=\min(\xi,\ \eta)$．(1) 求出二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合分布律及随机变量 X 及 Y

各自的边缘分布律；(2) 求$E(X)$、$E(Y)$及$E(XY)$．

解：(1) 由ξ与η的取值都是$1,\ 2,\ 3$，可知$X=\max(\xi,\ \eta)$与$Y=\min(\xi,\ \eta)$的取值也是$1,\ 2,\ 3$．

$P\{X=1,\ Y=1\}=P\{\xi=1,\ \eta=1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；

$P\{X=1,\ Y=2\}=P(\varnothing)=0$；$P\{X=1,\ Y=3\}=P(\varnothing)=0$；

$P\{X=2,\ Y=1\}=P\{\xi=1,\ \eta=2\}+P\{\xi=2,\ \eta=1\}$

$=P\{\xi=1\}P\{\eta=2\}+P\{\xi=2\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$；

$P\{X=2,\ Y=2\}=P\{\xi=2,\ \eta=2\}=P\{\xi=2\}P\{\eta=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；

$P\{X=2,\ Y=3\}=P(\varnothing)=0$；

$P\{X=3,\ Y=1\}=P\{\xi=3,\ \eta=1\}+P\{\xi=1,\ \eta=3\}$

$=P\{\xi=3\}P\{\eta=1\}+P\{\xi=1\}P\{\eta=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$；

$P\{X=3,\ Y=2\}=P\{\xi=3,\ \eta=2\}+P\{\xi=2,\ \eta=3\}$

$=P\{\xi=3\}P\{\eta=2\}+P\{\xi=2\}P\{\eta=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$；

$P\{X=3,\ Y=3\}=P\{\xi=3,\ \eta=3\}=P\{\xi=3\}P\{\eta=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；

联合分布律表格略因此二维随机变量$(X,\ Y)$的联合分布律及X的边缘分布律为

(2) $E(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{5}{9}=\frac{22}{9}$，$E(Y)=1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{1}{9}=\frac{14}{9}$，

$E(XY)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}+6\times\frac{2}{9}+9\times\frac{1}{9}=4$．

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{3}{9}$
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	

12．设总体 $X \sim N\left(0,\ \sigma^2\right)$，$\left(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\right)$是取自该总体中的一个样本．

(1) 求 σ^2 的极大似然估计量；(2)

解：

(1). 总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (-\infty < x < +\infty)\ .$$

所以似然函数为

$$L\left(\sigma^2\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\} \qquad \left(-\infty < x_i < +\infty,\quad i=1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n\right)$$

所以，取对数，得

$$\ln L\left(\sigma^2\right)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \qquad \left(-\infty < x_i < +\infty,\quad i=1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n\right)$$

所以，

$$\frac{d}{d\left(\sigma^2\right)}\ln L\left(\sigma^2\right)=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$$

解方程 $\frac{d}{d\left(\sigma^2\right)}\ln L\left(\sigma^2\right)=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=0$，得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，所以 σ^2 的极大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \ .$$

(2) 由于$\lambda=P\{X\le1\}=P\left\{\frac{X}{\sigma}\le\frac{1}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$，并且$\sigma^2$的极大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \ .$$

又函数$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$具有单值反函数，因此σ的极大似然估计量为

$$\sqrt{\hat{\sigma}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2} \ .$$

又函数$\lambda=\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$具有单值反函数，因此$\lambda$的极大似然估计量为

$$\hat{\lambda}=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}}\right) \ .$$

求$p=P\{X\le1\}$的极大似然估计量．

数理统计练习

一、填空题

1、设 A、B 为随机事件，且 P(A)=0.5，P(B)=0.6，P(B|A)=0.8，则 P(A+B)=__0.7__。

2、某射手对目标独立射击四次，至少命中一次的概率为$\frac{80}{81}$，则此射手的命中率$\frac{2}{3}$。

3、设随机变量 X服从[0，2]上均匀分布，则$\frac{D(X)}{[E(X)]^2}=$__1/3________。

4、设随机变量X服从参数为λ的泊松（*Poisson*）分布，且已知$E[(X-1)(X-2)]=1$，则$\lambda=$__1___。 5、一次试验的成功率为p，进行 100 次独立重复试验，当$p=$1/2____时，成功次数的方差的值最大，最大值为__25_。

6、（X，Y）服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X的边缘分布为___$N(\mu_1,\sigma_1^2)$__。

7、已知随机向量（X, Y）的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}xy^2, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 E(X)=$\underline{\frac{4}{3}}$。

8、随机变量 X 的数学期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，k、b 为常数，则有 $E(kX+b)$=__$k\mu+b$,；$D(kX+b)$=$\underline{k^2\sigma^2}$。

9、若随机变量 $X\sim N(-2, 4)$，$Y\sim N(3, 9)$，且 X 与 Y 相互独立。设 $Z=2X-Y+5$，则 $Z\sim$ __N(-2, 25)___。

10、$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是常数 θ 的两个_无偏__估计量，若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

1、设 A、B 为随机事件，且 P(A)=0.4, P(B)=0.3, $P(A\cup B)$=0.6，则 $P(A\overline{B})$=_0.3_。

2、设 X~B(2,p)，Y~B(3,p)，且 $P\{X\ge 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y\ge 1\}=\frac{19}{27}$。

3、设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，且 Y =3X -2, 则 E(Y)=4__。

4、设随机变量 X 服从[0,2]上的均匀分布，Y=2X+1，则 D(Y)= 4/3___。

5、设随机变量 X 的概率密度是：

$f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，且 $P\{X\ge\alpha\}=0.784$，则 α =0.6__。

6、利用正态分布的结论，有

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-4x+4)e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx=$ _1___。

7、已知随机向量（X, Y）的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}xy^2, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 E(Y)=_3/4___。

8、设（X, Y）为二维随机向量，D(X)、D(Y)均不为零。若有常数 a>0 与 b 使

$P\{Y=-aX+b\}=1$，则 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} = -1_。

9、若随机变量 $X\sim N(1, 4)$，$Y\sim N(2, 9)$，且 X 与 Y 相互独立。设 $Z=X-Y+3$，则 $Z\sim$ _N (2, 13)_。

10、设随机变量 X~ N(1/2, 2)，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中“$X\le 1/2$”出现的次数，则 $P\{Y=2\}$=_3/8_。

1、设 A，B 为随机事件，且 P(A)=0.7，P(A − B)=0.3，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$=0.6_ 。

2、四个人独立地破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$，则密码能被译出的概率是_11/24_。

5、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $3P\{X=2\}=P\{X=4\}$，则 $\lambda=$ 6 。

6、设随机变量 $X\sim N(1,4)$，已知Φ(0.5)=0.6915，Φ(1.5)=0.9332，则 $P\{|X|<2\}=$ 0.6247 。

7、随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 $E(X)=$ 1 。

8、已知总体 $X\sim N(0,1)$，设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本，则 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim \underline{x^2(n)}$。

9、设 T 服从自由度为 n 的 t 分布，若 $P\{|T|>\lambda\}=\alpha$，则 $P\{T<-\lambda\}=\frac{a}{2}$。

10、已知随机向量（X，Y）的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $E(X)=$ 4/3 。

1、设 A，B 为随机事件，且 P(A)=0.6, P(AB)= $P(\overline{A}\overline{B})$，则 $P(B)=$ 0.4 。

2、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1\\ \hline P & 0.5 & 0.5\end{array}$，$\begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1\\ \hline P & 0.5 & 0.5\end{array}$，则 $P(X=Y)=$ 0.5 。

3、设随机变量 X 服从以 n, p 为参数的二项分布，且 EX=15，DX=10，则 n= 45 。

4、设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}$，则 $\mu=$ 2 。

5、设随机变量 X 的数学期望 EX 和方差 DX>0 都存在，令 $Y=(X-EX)/\sqrt{DX}$，则 DY= 1 。

6、设随机变量 X 服从区间[0，5]上的均匀分布，Y 服从 $\lambda=5$ 的指数分布，且 X，Y 相互独立，则(X, Y)的联合密度函数 $f(x,y)$=

$\begin{cases}e^{-5y} & 0\le x\le 5, y\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$。

7、随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $D(X)$=4，$D(Y)$=2，则 $D(3X-2Y)=$ 44。

8、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，则 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从的分布为 $\underline{x^2(n-1)}$。

9、三个人独立地向某一目标进行射击，已知各人能击中的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3}$，则目标能被击中的概率是 3/5 。

10、已知随机向量(X, Y)的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}4xe^{-2y}, & 0\le x\le 1, y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$，

则 E$\boldsymbol{Y}$ = 1/2 。

1、设 A,B 为两个随机事件，且 P(A)=0.7, P(A-B)=0.3，则 $P(\overline{AB})$= 0.6 。

2、设随机变量 X 的分布律为 $\begin{array}{c|c|c} X & 0 & 1 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$，且 X 与 Y 独立同分布，则随机变量 Z = max{X,Y}的分布律为 $\begin{array}{c|c|c} Z & 0 & 1 \\ P & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$。

3、设随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$，且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$，则 $P\{X < 0\}$ = 0.2 。

4、设随机变量 X 服从 $\lambda = 2$ 泊松分布，则 $P\{X \geq 1\} = 1 - e^{-2}$。

5、已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，令 $Y = -2X$，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为 $\frac{1}{2} f_X(-\frac{y}{2})$。

6、设 X 是 10 次独立重复试验成功的次数，若每次试验成功的概率为 0.4，则 $D(X)$ = 2.4 。

7、X_1，X_2，…，X_n 是取自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim x^2(n-1)$。

8、已知随机向量($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$)的联合概率密度 $f(x,y) = \begin{cases} 4xe^{-2y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，则 E$\boldsymbol{X}$ = 2/3 。

9、称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的 无偏 估计量，如果 $E(\hat{\theta}) = \theta$。

10、概率很小的事件在一次试验中几乎是不可能发生的，这个原理称为 小概率事件原理。

1、设 A、B 为两个随机事件，若 P(A)=0.4，P(B)=0.3，$P(A \cup B) = 0.6$，则 $P(A\overline{B})$ = 0.3 。

2、设 X 是 10 次独立重复试验成功的次数，若每次试验成功的概率为 0.4，则 $E(X^2)$ = 18.4 。

3、设随机变量 $X \sim N(1/4, 9)$，以 Y 表示对 X 的 5 次独立重复观察中"$X \leq 1/4$"出现的次数，则 $P\{Y = 2\}$ = 5/16 。

4、已知随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 P(X=2)=P(X=4)，则 $\lambda = 2\sqrt{3}$。

5、称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的无偏估计量，如果 $E(\hat{\theta})$ = θ 。

6、设 $X \sim N(0,1), Y \sim x^2(n)$，且 X，Y 相互独立，则 $\frac{X}{\sqrt{Y}}\sqrt{n} \sim$ t(n) 。

7、若随机变量 $\boldsymbol{X} \sim N(3, 9)$，$\boldsymbol{Y} \sim N(-1, 5)$，且 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立。设 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} - 2\boldsymbol{Y} + 2$，则 $\boldsymbol{Z} \sim$ N (7，29) 。

8、已知随机向量($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$)的联合概率密度 $f(x,y) = \begin{cases} 6xe^{-3y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，则 E$\boldsymbol{Y}$ = 1/3 。

9、已知总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，要检验 H_o：$\sigma^2=\sigma_0^2$，则采用的统计量是 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$。

10、设随机变量 T 服从自由度为 n 的 t 分布，若 $P\{|T|>\lambda\}=\alpha$，则 $P\{T<\lambda\}=1-\dfrac{a}{2}$。

1、设 A、B 为两个随机事件，P(A)=0.4，P(B)=0.5，$P(A|B)=0.7$，则 $P(A\cup B)=$ 0.55 。

2、设随机变量 $X\sim B(5, 0.1)$，则 $D(1-2X)=$ 1.8 。

3、在三次独立重复射击中，若至少有一次击中目标的概率为 $\dfrac{37}{64}$，则每次射击击中目标的概率为 1/4 。

4、设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=0.2, P(X=2)=0.3, P(X=3)=0.5$，则 X 的期望 EX= 2.3。

5、将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于 −1。

6、设(***X***, ***Y***)的联合概率分布列为

	−1	0	4
−2	1/9	1/3	2/9
1	1/18	a	b

若 ***X***、***Y*** 相互独立，则 a = 1/6 ，b = 1/9 。

7、设随机变量 X 服从[1，5]上的均匀分布，则 $P\{2\le X\le 4\}=$ 1/2 。

8、三个人独立地破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}$，则密码能被译出的概率是 3/5 。

9、若 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差，则 $\dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S}$ ~ t (n-1) 。

10、$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是常数 θ 的两个无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效 。

1、已知 P(A)=0.8，P(A−B)=0.5，且 A 与 B 独立，则 P(B) = 3/8 。

2、设随机变量 ***X*** ~ N(1，4)，且 P{ ***X*** ≥ a }= P{ ***X*** ≤ a }，则 a = 1 。

3、随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布，$P(X=-1)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}$，$P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$，则 $P(X=Y)=\underline{0.5}$。

4、已知随机向量(X, Y)的联合分布密度 $f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，则 EY=__2/3__。

5、设随机变量 $X\sim N(1, 4)$，则 $P\{|X|>2\}=$ _0.3753__。（已知Φ(0.5)=0.6915，Φ(1.5)=0.9332）

6、若随机变量 $\boldsymbol{X}\sim N(0, 4)$，$\boldsymbol{Y}\sim N(-1, 5)$，且 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立。设 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}-3$，则 $\boldsymbol{Z}\sim$ _N(－4，9)_。

7、设总体 $X\sim N(1, 9)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体X的简单随机样本，$\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值与样本方差，则

$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\underline{\chi^2(8)}$；$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim\underline{\chi^2(9)}$。

8、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $3P\{X=2\}=P\{X=4\}$，则 $\lambda=$ _6___。

9、袋中有大小相同的红球4只，黑球3只，从中随机一次抽取2只，则此两球颜色不同的概率为_4/7___。

10、在假设检验中，把符合 H_0 的总体判为不合格 H_0 加以拒绝，这类错误称为_一错误；把不符合 H_0 的总体当作符合 H_0 而接受。这类错误称为_二__错误。

1、设A、B为两个随机事件，P(A)=0.8，P(AB)=0.4，则 P(A－B)=_0.4_。

2、设 X 是10次独立重复试验成功的次数，若每次试验成功的概率为0.4，则 $D(X)=$ _2.4_。

3、设随机变量 X 的概率分布为

X	－1	0	1	2
P	0.1	0.3	0.2	0.4

则 $P\{X^2\ge 1\}$=_0.7__。

4、设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 $\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

5、袋中有大小相同的黑球7只，白球3只，每次从中任取一只，有放回抽取，记首次抽到黑球时抽取的次数为 $\boldsymbol{X}$，则 $P\{\boldsymbol{X}=10\}$＝_0.39*0.7__。

6、某人投篮，每次命中率为0.7，现独立投篮5次，恰好命中4次的概率是 $\underline{C_5^4\times 0.7^4\times 0.3^1}$。

7、设随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{2}}$，且 $P\{X\ge c\}=P\{X\le c\}$，则 c = -2 。

8、已知随机变量 $U=4-9X$，$V=8+3Y$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=1$，则 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV} = －1。

9、设 $X\sim N(0,1), Y\sim x^2(n)$，且 X，Y 相互独立，则 $\frac{X}{\sqrt{Y}}\sqrt{n}\sim$ t (n)

10、概率很小的事件在一次试验中几乎是不可能发生的，这个原理称为 小概率事件原理 。

1、随机事件 A 与 B 独立，$P(A\bigcup B)=0.7, P(A)=0.5,$ 则$P(B)=$ 0.4 。

2、设随机变量 X 的概率分布为则 X^2 的概率分布为

3、设随机变量 X 服从[2，6]上的均匀分布，则 $P\{3<X<4\}=$ 0.25 。

4、设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，且每次命中率为 0.4，则 EX^2 = 18.4 。

5、随机变量 $X\sim N(\mu,4)$，则 $Y=\frac{X-\mu}{2}\sim$ N(0,1) 。

6、四名射手独立地向一目标进行射击，已知各人能击中目标的概率分别为 1/2、3/4、2/3、3/5，则目标能被击中的概率是 59/60 。

7、一袋中有 2 个黑球和若干个白球，现有放回地摸球 4 次，若至少摸到一个白球的概率是 $\frac{80}{81}$，则袋中白球的个数是 4 。

8、已知随机变量 $U=1+2X$，$V=2-3Y$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-1$，则 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV} = 1 。

9、设随机变量 $X\sim N(2，9)$，且 P{ $X\ge a$ }= P{ $X\le a$ }，则 a = 2 。

10、称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的无偏估计量，如果 $E(\hat{\theta})$ = θ

二、选择题

1、设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>P(B)>0$，则（ D ）。

A． $P(A)=1-P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$　　C． $P(A\cup B)=1$　　D． $P(\overline{AB})=1$

2、将两封信随机地投入四个邮筒中，则未向前面两个邮筒投信的概率为（ A ）。

A. $\frac{2^2}{4^2}$　　B. $\frac{C_2^1}{C_4^2}$　　C. $\frac{2!}{P_4^2}$　　D. $\frac{2!}{4!}$

3、已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，令 $Y=-2X$，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为（　D　）。

A. $2f_X(-2y)$　　B. $f_X(-\frac{y}{2})$　　C. $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$　　D. $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$

4、设随机变量 $X \sim f(x)$，满足 $f(x)=f(-x)$，$F(x)$ 是 x 的分布函数，则对任意实数 a 有（　B　）。

A. $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$　　B. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$　　C. $F(-a)=F(a)$　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

5、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A发生；}\\ 0, & \text{否则；}\end{cases}$　$i=1, 2, \cdots, 100$，且 $P(A)=0.8$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（　B　）。

A. $\Phi(y)$　　B．$\Phi(\frac{y-80}{4})$　　C．$\Phi(16y+80)$　　D．$\Phi(4y+80)$

1、设 A，B 为随机事件，$P(B)>0$，$P(A|B)=1$，则必有（　A　）。

A. $P(A\cup B)=P(A)$　　B. $A\supset B$　　C. $P(A)=P(B)$　　D. $P(AB)=P(A)$

2、某人连续向一目标射击，每次命中目标的概率为 $3/4$，他连续射击直到命中为止，则射击次数为 3 的概率是（　C　）。

A. $(\frac{3}{4})^3$　　B. $(\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{4}$　　C. $(\frac{1}{4})^2\times\frac{3}{4}$　　D. $C_4^2(\frac{1}{4})^2$

3、设 X_1, X_2 是来自总体 X 的一个简单随机样本，则最有效的无偏估计是(　A　)。

A. $\hat{\mu}=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$　　B. $\hat{\mu}=\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$　　C. $\hat{\mu}=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$　　D. $\hat{\mu}=\frac{2}{5}X_1+\frac{3}{5}X_2$

4、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A发生；}\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$　$i=1, 2, \cdots, 100$，且 $P(A)=0.1$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（　B　）。

A. $\Phi(y)$　　B．$\Phi(\frac{y-10}{3})$　　C．$\Phi(3y+10)$　　D．$\Phi(9y+10)$

5、设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 $N(1, 2^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列结论中正确的是（　D　）。

A. $\frac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim t(n)$；　B. $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim F(n,1)$；　C. $\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$；　D. $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim \chi^2(n)$；

1、已知 A、B、C 为三个随机事件，则 A、B、C 不都发生的事件为（A）。

A. $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$　　B. $\overline{ABC}$　　C. $A+B+C$　　D. ABC

2、下列各函数中是随机变量分布函数的为（　B　）。

A. $F(x)=\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$　　B. $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \end{cases}$

C. $F(x)=e^{-x}, -\infty < x < \infty$　　D. $F(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}arctgx, \ -\infty < x < \infty$

3、(X,Y) 是二维随机向量，与 $Cov(X,Y)=0$ 不等价的是（　D　）

A. $E(XY)=E(X)E(Y)$　B. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　C. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$　D. X 和 Y 相互独立

4、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases} 1, & \text{事件 A发生} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$　$i=1, 2, \cdots, 100$，且 $P(A)=0.2$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（　B　）。

A. $\Phi(y)$　　B．$\Phi(\frac{y-20}{4})$　　C．$\Phi(16y-20)$　　D．$\Phi(4y-20)$

5、设总体 $X \sim N(\mu, 2^2)$，其中 μ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体的样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 s^2，则下列各式中不是统计量的是（　C　）。

A. $2\overline{X}$　　B. $\frac{s^2}{\sigma^2}$　　C. $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$　　D. $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

1、若随机事件 A 与 B 相互独立，则 $P(A+B)$ =（　B　）。

A. $P(A)+P(B)$　B. $P(A)+P(B)-P(A)P(B)$　C. $P(A)P(B)$　D. $P(\overline{A})+P(\overline{B})$

2、设总体 X 的数学期望 EX= μ，方差 DX= σ^2，X_1，X_2，X_3，X_4 是来自总体 X 的简单随机样本，则下列 μ 的估计量中最有效的是（　D　）

A．$\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{3}X_3+\frac{1}{3}X_3$　B．$\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

C．$\frac{3}{5}X_1+\frac{4}{5}X_2-\frac{1}{5}X_3-\frac{1}{5}X_4$　D．$\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3+\frac{1}{4}X_4$

3、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A 发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$　$i=1，2,\cdots，100,$ 且 $P(A)=0.3$，$X_1，X_2,\cdots，X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（　B　）。

A. $\Phi(y)$　B．$\Phi(\frac{y-30}{\sqrt{21}})$　C．$\Phi(\frac{y-30}{21})$　D．$\Phi(y-30)$

4、设离散型随机变量的概率分布为 $P(X=k)=\frac{k+1}{10}$，$k=0,1,2,3$，则 $E(X)$ =（　B　）。

A.　1.8　B.　2　C.　2.2　D.　2.4

5、在假设检验中，下列说法错误的是（　C　）。

A. H_1 真时拒绝 H_1 称为犯第二类错误。　B. H_1 不真时接受 H_1 称为犯第一类错误。

C. 设 $P\{拒绝H_0 \mid H_0真\}=\alpha$，$P\{接受H_0 \mid H_0不真\}=\beta$，则 α 变大时 β 变小。

D. α、β 的意义同（C），当样本容量一定时，α 变大时则 β 变小。

1、若 A 与 B 对立事件，则下列错误的为（　A　）。

A. $P(AB)=P(A)P(B)$　B. $P(A+B)=1$　C. $P(A+B)=P(A)+P(B)$　D. $P(AB)=0$

2、下列事件运算关系正确的是（　A　）。

A. $B=BA+B\overline{A}$　B. $B=\overline{BA}+\overline{B}A$　C. $B=BA+\overline{B}A$　D. $B=1-\overline{B}$

3、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A 发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$　$i=1，2,\cdots，100,$ 且 $P(A)=0.4$，$X_1，X_2,\cdots，X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心

极限定理知Y的分布函数$F(y)$近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　B．$\Phi(\frac{y-40}{\sqrt{24}})$　C．$\Phi(y-40)$　D．$\Phi(\frac{y-40}{24})$

4、若$E(XY)=E(X)E(Y)$，则（D ）。

A. X和Y相互独立　B. X与Y不相关　C. $D(XY)=D(X)D(Y)$　D. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

5、若随机向量（X,Y）服从二维正态分布，则①X,Y一定相互独立；②若$\rho_{XY}=0$，则X,Y一定相互独立；③X和Y都服从一维正态分布；④若X,Y相互独立，则

Cov (*X*, *Y*) =0。几种说法中正确的是（ B ）。

A. ① ② ③ ④　B. ② ③ ④　C. ① ③ ④　D. ① ② ④

1、设随机事件 A、B 互不相容，$P(A)=p,\ P(B)=q$，则$P(\overline{A}B)$ =（ C ）。

A. $(1-p)q$　B. pq　C. q　D. p

2、设*A*，*B*是两个随机事件，则下列等式中（ C ）是不正确的。

A. $P(AB)=P(A)P(B)$，其中*A*，*B*相互独立　B. $P(AB)=P(B)P(A|B)$，其中$P(B)\neq 0$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$，其中*A*，*B*互不相容　D. $P(AB)=P(A)P(B|A)$，其中$P(A)\neq 0$

3、设$\Phi(x)$为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A发生} \\ 0, & \text{否则}\end{cases}$　$i=1,\ 2,\cdots,\ 100$，且$P(A)=0.5$，$X_1, X_2,\cdots, X_{100}$相互独立。令$Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知Y的分布函数$F(y)$近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　B．$\Phi(\frac{y-50}{5})$　C．$\Phi(y-50)$　D．$\Phi(\frac{y-50}{25})$

4、设随机变量***X***的密度函数为 *f*(*x*)，则 ***Y*** = 5 — 2***X***的密度函数为（ B ）

A．$-\frac{1}{2}f(-\frac{y-5}{2})$　B．$\frac{1}{2}f(-\frac{y-5}{2})$

C．$-\frac{1}{2}f(-\frac{y+5}{2})$　D．$\frac{1}{2}f(-\frac{y+5}{2})$

5、设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是一组样本观测值，则其标准差是（ B ）。

A. $\frac{1}{n-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$　　C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})$

1、若 A、B 相互独立，则下列式子成立的为（　A　）。

A. $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$　　B. $P(AB)=0$　　C. $P(A|B)=P(B|A)$　　D. $P(A|B)=P(B)$

2、若随机事件 A,B 的概率分别为 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$，则 A 与 B 一定（D　　）。

A. 相互对立　　B. 相互独立　　C. 互不相容　　D.相容

3、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A 发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$　$i=1, 2, \cdots, 100$，且 $P(A)=0.6$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（B　　）。

A. $\Phi(y)$　　B．$\Phi(\frac{y-60}{\sqrt{24}})$　　C．$\Phi(y-60)$　　D．$\Phi(\frac{y-60}{24})$

4、设随机变量 X ~N(μ，81)，Y ~N(μ，16)，记 $p_1=P\{X\le\mu-9\}, p_2=\{Y\ge\mu+4\}$，则（ B　）。

A. $p_1<p_2$　　B. $p_1=p_2$　　C. $p_1>p_2$　　D. p_1 与 p_2 的关系无法确定

5、设随机变量 ***X*** 的密度函数为 $f(x)$，则 ***Y*** = 7 — 5***X*** 的密度函数为（　B　）

A. $-\frac{1}{5}f(-\frac{y-7}{5})$　　B. $\frac{1}{5}f(-\frac{y-7}{5})$

C. $-\frac{1}{5}f(-\frac{y+7}{5})$　　D. $\frac{1}{5}f(-\frac{y+7}{5})$

1、对任意两个事件 A 和 B，若 $P(AB)=0$，则（　D　）。

A. $AB=\phi$　　B. $\overline{A}\overline{B}=\phi$　　C. $P(A)P(B)=0$　　D. $P(A-B)=P(A)$

2、设 A、B 为两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有（　B　）。

A. $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$　　C. $P(AB)\ne P(A)P(B)$　　D. A、B 互不相容

3、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A 发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$　$i=1, 2, \cdots, 100$，且 $P(A)=0.7$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心

极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　　B．$\Phi(\frac{y-70}{\sqrt{21}})$　　C．$\Phi(y-70)$　　D．$\Phi(\frac{y-70}{21})$

4、已知随机变量 X 和 Y 相互独立，且它们分别在区间[－1，3]和[2，4]上服从均匀分布，则 $E(XY)=$（ A ）。

A. 3　　B. 6　　C. 10　　D. 12

5、设随机变量 $X\sim N(\mu, 9)$，$Y\sim N(\mu, 25)$，记 $p_1=P\{X\le\mu-3\}, p_2=\{Y\ge\mu+5\}$，则（ B ）。

A. $p_1<p_2$　　B. $p_1=p_2$　　C. $p_1>p_2$　　D. p_1 与 p_2 的关系无法确定

1、设 A_1, A_2 两个随机事件相互独立，当 A_1, A_2 同时发生时，必有 A 发生，则（ A ）。

A. $P(A_1A_2)\le P(A)$　B. $P(A_1A_2)\ge P(A)$　C. $P(A_1A_2)=P(A)$　D. $P(A_1)P(A_2)=P(A)$

2、已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，令 $Y=-2X+3$，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为（ A ）。

A. $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y-3}{2})$　B. $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y-3}{2})$　C. $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y+3}{2})$　D. $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y+3}{2})$

3、两个独立随机变量 X, Y，则下列不成立的是（ C ）。

A. $EXY=EXEY$　B. $E(X+Y)=EX+EY$　C. $DXY=DXDY$　D. $D(X+Y)=DX+DY$

4、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A 发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$　$i=1, 2, \cdots, 100$，且 $P(A)=0.9$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　　B．$\Phi(\frac{y-90}{3})$　　C．$\Phi(y-90)$　　D．$\Phi(\frac{y-90}{9})$

5、设总体 X 的数学期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，X_1，X_2，X_3 是来自总体 X 的简单随机样本，则下列 μ 的估计量中最有效的是（ B ）

A．$\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3$　　B．$\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

C．$\frac{3}{5}X_1+\frac{4}{5}X_2-\frac{2}{5}X_3$　　D．$\frac{1}{6}X_1+\frac{2}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$

1、若事件 A_1, A_2, A_3 两两独立，则下列结论成立的是（ B ）。

A. A_1, A_2, A_3 相互独立　　B. $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ 两两独立

C. $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$　　D. $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ 相互独立

2、连续型随机变量 ***X*** 的密度函数 $f(x)$必满足条件（ C ）。

A. $0 \le f(x) \le 1$　　B. 在定义域内单调不减

C. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$　　D. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

3、设 X_1, X_2 是任意两个互相独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则（ B ）。

A. $f_1(x)+f_2(x)$ 必为密度函数　　B. $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 必为分布函数

C. $F_1(x)+F_2(x)$ 必为分布函数　　D. $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 必为密度函数

4、设随机变量 ***X***, ***Y*** 相互独立，且均服从[0，1]上的均匀分布，则服从均匀分布的是（ B ）。

A. ***X Y***　　B. (***X***, ***Y***)　　C. ***X*** — ***Y***　　D. ***X*** + ***Y***

5、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{事件 A 发生} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$　$i = 1, 2, \cdots, n$，且 $P(A) = p$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立。令 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　　B. $\Phi(\frac{y-np}{\sqrt{np(1-p)}})$　　C. $\Phi(y-np)$　　D. $\Phi(\frac{y-np}{np(1-p)})$

三（5）、市场上出售的某种商品由三个厂家同时供货，其供应量第一厂家为第二厂家的两倍，第二、第三厂家相等，且第一、第二、第三厂家的次品率依次为 2%，2%，4%。若在市场上随机购买一件商品为次品，问该件商品是第一厂家生产的概率为多少？

解 设 A_i 表示产品由第 i 家厂家提供，i=1, 2, 3；B 表示此产品为次品。

则所求事件的概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1|B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)} = \frac{\frac{1}{2}\times 0.02}{\frac{1}{2}\times 0.02+\frac{1}{4}\times 0.02+\frac{1}{4}\times 0.04}=0.4$$

答：该件商品是第一产家生产的概率为 0.4。

三 **(6)**、甲、乙、丙三车间加工同一产品，加工量分别占总量的 25%、35%、40%，次品率分别为 0.03、0.02、0.01。现从所有的产品中抽取一个产品，试求（1）该产品是次品的概率；（2）若检查结果显示该产品是次品，则该产品是乙车间生产的概率是多少？

解：设 A_1，A_2，A_3 表示甲乙丙三车间加工的产品，B 表示此产品是次品。

（1）所求事件的概率为

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.25\times 0.03+0.35\times 0.02+0.4\times 0.01=0.0185$$

（2）$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.35\times 0.02}{0.0185}\approx 0.38$

答：这件产品是次品的 概率为 0.0185，若此件产品是次品，则该产品是乙车间生产的概率为 0.38。

三 **(7)**、一个机床有 1/3 的时间加工零件 A，其余时间加工零件 B。加工零件 A 时停机的概率是 0.3，加工零件 A 时停机的概率是 0.4。求（1）该机床停机的概率；（2）若该机床已停机，求它是在加工零件 A 时发　　　　　生停机的概率。

解：设 C_1，C_2，表示机床在加工零件 A 或 B，D 表示机床停机。

（1）机床停机夫的概率为

$$P(B)=P(C_1).P(D|C_1)+P(C_2).P(D|A_2)=\frac{1}{3}\times 0.3+\frac{2}{3}\times 0.4=\frac{11}{30}$$

（2）机床停机时正加工零件 A 的概率为

$$P(C_1|D)=\frac{P(C_1).P(D|C_1)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.3}{\frac{11}{30}}=\frac{3}{11}$$

三 **(8)**、甲、乙、丙三台机床加工一批同一种零件，各机床加工的零件数量之比为 5：3：2，各机床所加工的零件合格率依次为 94%，90%，95%。现从加工好的整批零件中随机抽查一个，发现是废品，判断它是由甲机床加工的概率。

解 设 A_1，A_2，A_3 表示由甲乙丙三机床加工，B 表示此产品为废品。(2 分)

则所求事件的概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1|B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)} \qquad =\frac{\frac{1}{2}\times 0.06}{0.5\times 0.06+0.3\times 0.10+0.2\times 0.05}=\frac{3}{7}$$

答：此废品是甲机床加工概率为 3/7。

三（9）、某人外出可以乘坐飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，其概率分别为 5％、15％、30％、50％，乘坐这几种交通工具能如期到达的概率依次为 100％、70％、60％、90％。已知该人误期到达，求他是乘坐火车的概率。（10 分）

解：设 A_1，A_2，A_3，A_4 分别表示乘坐飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，B 表示误期到达。

则 $$P(A_2|B)=\frac{P(A_2|B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)} \qquad =\frac{0.15\times 0.3}{0.05\times 0+0.15\times 0.3+0.3\times 0.4+0.5\times 0.1}=0.209$$

答：此人乘坐火车的概率为 0.209。

三（10）、某人外出可以乘坐飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，其概率分别为 5％、15％、30％、50％，乘坐这几种交通工具能如期到达的概率依次为 100％、70％、60％、90％。求该人如期到达的概率。

解：设 A_1，A_2，A_3，A_4 分别表示乘坐飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，B 表示如期到达。

则 $$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i) \qquad =0.05\times 1+0.15\times 0.7+0.3\times 0.6+0.5\times 0.9=0.785$$

答：如期到达的概率为 0.785。

四（1） 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} Ax, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求（1）A;　（2）X 的分布函数 $F(x)$;　　（3）　$P(0.5 < X < 2)$。

解：　(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 Axdx=\frac{A}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{A}{2}=1$$

$$A=2$$

（2）当$x<0$时，　$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$

当$0\le x<1$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} 2tdt=x^2$

当$x\ge 1$时，　$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{1} 2tdt=1$

$$故\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

(3) P（1/2<X<2）=F(2)—F(1/2)=3/4

四（2）、已知连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}kx+1, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求（1）k；（2）分布函数 $F(x)$;　（3）$P(1.5<X<2.5)$

解:（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{2}(kx+1)dx=(\frac{k}{2}x^2+x)|_0^2=2k+2=1$

$k=-1/2$

（2）当$x<0$时，　$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$

当$0\le x<2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x}(-0.5t+1)dt=-\frac{x^2}{4}+x$

当$x\ge 2$时，　$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=1$

$$故\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -\frac{x^2}{4}+x, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

(3) P（1.5<X<2.5）=F(2.5)—F(1.5)=1/16

四（3）、已知连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}a\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求（1）a;（2）X 的分布函数 $F(x)$;（3）$P(X>0.25)$。

解: (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 a\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}a = 1$

$a = 3/2$

（2）当$x<0$时，　$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

当$0 \le x < 1$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{3}{2}\sqrt{t}dt = x^{3/2}$

当$x \ge 1$时，　$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$

故 $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^{3/2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

(3) P（X>1/4）=1—F(1/4)=7/8

四（4）、已知连续型随机变量 *X* 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0, A) \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求（1）*A*;（2）分布函数 *F*(*x*);（3） *P*(－0.5 < *X* <1)。　　　　　　　　　　　)

解: (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^A 2xdx = A^2 = 1$

$A = 1$

（2）当$x<0$时，　$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

当$0 \le x < 1$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 2tdt = x^2$

当$x \ge 1$时，　$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$

故 $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

(3) P（-0.5<X<1）=F(1)—F(-0.5)=1

四（5）、已知连续型随即变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求（1）*c*;　（2）分布函数 *F*(*x*);（3） *P*(-0.5 < *X* < 0.5)。

解: (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \dfrac{c}{\sqrt{1\text{-}x^2}}dx = c\arcsin x|_{-1}^{1} = c\pi = 1$

$c = 1/\pi$

（2）当$x < -1$时， $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

当$-1 \le x < 1$时， $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{x} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt = \dfrac{1}{\pi}\arcsin t|_{-1}^{x}$

$$= \frac{1}{\pi}(\arcsin x + \frac{\pi}{2})$$

当$x \ge 1$时， $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{1}{\pi}(\arcsin x + \dfrac{\pi}{2}), & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

(3) P（-0.5<X<0.5）=F(0.5)—F(-0.5)=1/3

四（6）、已知连续型随机变量 *X* 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求（1）*A*，*B*; （2）密度函数 *f*(*x*);（3）*P*(1<*X*<2)。

解: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = A = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = A + B = 0$

$B = -1$

（2）

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

(3) P（1<X<2）=F(2)—F(1)= $e^{-1/2} - e^{-2}$

四（7）、已知连续型随机变量 *X* 的分布函数为

$$F(x) = A + B\arctan x$$

求（1）*A*，*B*; （2）密度函数 *f*(*x*);（3）*P*(1<*X*<2)。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = A + \dfrac{\pi}{2}B = 1$

解: $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = A - \dfrac{\pi}{2}B = 0$

$\mathrm{A} = 1/2, \qquad B = 1/\pi$

（2）

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

(3) P（0<X<2）=F(2)—F(0)= $\dfrac{1}{\pi}\arctan 2$

四（8）、已知连续型随机变量 *X* 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ A\sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

求（1）*A*; （2）密度函数 *f*(*x*)；（3）*P*(0< *X*< 0.25)。

解: (1) $\lim\limits_{x\to1} F(x) = A = 1$

$A = 1$

⑵

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(3) P（0<*X*<0.25）=1/2

四（9）、已知连续型随机变量 *X* 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{A}{x^2}, & x > 2 \\ 0, & x \le 2 \end{cases}$$

求（1）*A*; （2）密度函数 *f*(*x*)；（3）*P*(0 ≤ *X* ≤ 4)。

、解: (1) $\lim\limits_{x\to2} F(x) = 1 - A/4 = 0$

$A = 4$

⑵

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{x^3}, & x>2 \\ 0, & x\le 2 \end{cases}$$

(3) P（0<X<4）=3/4

四（10）、已知连续型随机变量 *X* 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & x\in(0,a)\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求（1）a;　（2）分布函数 $F(x)$;（3）$P(-0.5<X<0.5)$。

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^a \dfrac{2x}{\pi^2}dx=1$

$a=\pi$

(2) 当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$

当$0\le x<\pi$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_0^x \dfrac{2t}{\pi^2}dt=\dfrac{x^2}{\pi^2}$

当$x\ge\pi$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=1$

故 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{\pi^2}, & 0\le x<\pi\\ 1, & x\ge\pi\end{cases}$$

(3) P（-0.5<X<0.5）=F(0.5)—F(-0.5)= $\dfrac{1}{4\pi^2}$

五（1）、设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1，L_2 并联而成，且 L_1、L_2 的寿命分别服从参数为 $\alpha,\beta(\alpha\neq\beta)$ 的指数分布。求系统 L 的寿命 Z 的密度函数。

解：令 X、Y 分别为子系统 L_1、L_2 的寿命，则系统 L 的寿命 $Z=\max(X, Y)$。

显然，当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(\max(X, Y)\leqslant z)=0$;

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(\max(X, Y)\leqslant z)$

$=P(X\leqslant z, Y\leqslant z)=P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)=\int_0^z \alpha e^{-\alpha x}dx\int_0^z \beta e^{-\beta y}dy=(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z})$。

因此，系统 L 的寿命 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

五（2）、已知随机变量 $X\sim N$（0，1），求随机变量 $Y=X^2$ 的密度函数。

解：当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=0$;

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

因此，$f_Y(y) = \dfrac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi\, y}}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

五（3）、设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1、L_2 串联而成，且 L_1、L_2 的寿命分别服从参数为 $\alpha, \beta(\alpha \ne \beta)$ 的指数分布。求系统 L 的寿命 Z 的密度函数。

解：令 X、Y 分别为子系统 L_1、L_2 的寿命，则系统 L 的寿命 $Z = \min(X, Y)$。

显然，当 $z \leqslant 0$ 时，$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(\min(X, Y) \leqslant z) = 0$；

当 $z > 0$ 时，$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(\min(X, Y) \leqslant z) = 1 - P(\min(X, Y) > z)$

$= 1 - P(X > z, Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - \int_z^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \int_z^{+\infty} \beta e^{-\beta y} dy = 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}$。

因此，系统 L 的寿命 Z 的密度函数为

$f_Z(z) = \dfrac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} -(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$

五（4）、已知随机变量 $X \sim N(0, 1)$，求 $Y = |X|$ 的密度函数。

解：当 $y \leqslant 0$ 时，$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(|X| \leqslant y) = 0$；

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(|X| \leqslant y) = P(-y \le X \le y)$

$$= \int_{-y}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 2\int_{-0}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

因此，$f_Y(y) = \dfrac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} e^{-y^2/2} & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

五（5）、设随机向量（X，Y）联合密度为

$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

（1） 求系数 A；

（2） 判断 ***X***，***Y*** 是否独立，并说明理由；

（3） 求 P{ 0≤X≤2，0≤Y≤1}。

解：（1）由 1 = $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-(2x+3y)}dxdy = A\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-3y}dy = A(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty})(-\frac{1}{3}e^{-3y}\Big|_0^{+\infty}) = \frac{A}{6}$，

可得 $A=6$。

（2）因（X，Y）关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$ 和 $f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y>0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$，

则对于任意的 $(x,y)\in R^2$，均成立 $f(x, y)= f_X(x)* f_Y(y)$，所以 ***X*** 与 ***Y*** 独立。

（3）$P\{0≤X≤2，0≤Y≤1\} = \int_0^2\int_0^1 6e^{-(2x+3y)}dxdy = \int_0^2 2e^{-2x}dx \cdot \int_0^1 3e^{-3y}dy$

$$= (-e^{-2x}\Big|_0^2)(-e^{-3y}\Big|_0^1) = (1-e^{-4})(1-e^{-3}).$$

五（6）、设随机向量（***X***，***Y***）联合密度为

$f(x, y)= \begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（1） 求系数 A；

（2） 判断 ***X***，***Y*** 是否独立，并说明理由；

（3） 求 $P\{0≤X≤1，0≤Y≤1\}$。

解：（1）由 1 = $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-(3x+4y)}dxdy = A\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-4y}dy$

$= A(-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty})(-\frac{1}{4}e^{-4y}\Big|_0^{+\infty}) = \frac{A}{12}$，可得 $A=12$。

（2）因（X，Y）关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x>0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$ 和 $f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y>0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$，

则对于任意的 $(x,y)\in R^2$，均成立 $f(x, y)= f_X(x)* f_Y(y)$，所以 ***X*** 与 ***Y*** 独立。

（3）$P\{0\leqslant X\leqslant 1，0\leqslant Y\leqslant 1\}=\int_0^1\int_0^1 12e^{-(3x+4y)}dxdy=\int_0^{+\infty}3e^{-3x}dx\cdot\int_0^{+\infty}4e^{-4y}dy$

$$=(-e^{-3x}\Big|_0^1)(-e^{-4y}\Big|_0^1)=(1-e^{-3})(1-e^{-4}).$$

五（7）、设随机向量（*X*，*Y*）联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（1） 求（***X***，***Y***）分别关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（2） 判断 ***X***，***Y*** 是否独立，并说明理由。

解：（1）当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_x^1 6xdy=6x(1-x).$

因此，（*X*，*Y*）关于 *X* 的边缘概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}6x-6x^2, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

当 $y<0$ 或 $y>1$ 时，$f_Y(y)=0$；

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^y 6xdx=3x^2\mid_0^y=3y^2.$

因此，（*X*，*Y*）关于 *Y* 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（2）因为 $f(1/2, 1/2)=3/2$，而 $f_X(1/2)\,f_Y(1/2)=(3/2)*(3/4)=9/8\neq f(1/2, 1/2)$，

所以，*X* 与 *Y* 不独立。

五（8）、设二维随机向量（*X*，*Y*）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（1） 求（*X*，*Y*）分别关于 *X* 和 *Y* 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（2） 判断 *X* 与 *Y* 是否相互独立，并说明理由。

解：（1）当 $x\leqslant 0$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $x>0$ 时，$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x}^{+\infty} e^{-y}dy = e^{-x}$.

因此，（X，Y）关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

当 $y \leqslant 0$ 时，$f_Y(y) = 0$；

当 $y>0$ 时，$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{y} e^{-y}dx = ye^{-y}$.

因此，（X，Y）关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（2）因为 $f(1, 2) = e^{-2}$，而 $f_X(1)\, f_Y(2) = e^{-1} * 2e^{-2} = 2\, e^{-3} \neq f(1, 2)$，

所以，X 与 Y 不独立。

五（9）、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

设 $F(x)$ 是 X 的分布函数，求随机变量 $Y=F(X)$ 的密度函数。

解：当 $y<0$ 时，$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(F(X) \leqslant y) = 0$；

当 $y>1$ 时，$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(F(X) \leqslant y) = 1$；

当 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时，$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P((F(X) \leqslant y) = P(X \le F^{-1}(y))$

$= F(F^{-1}(y)) = y$

因此，$f_Y(y) = \dfrac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

五（10）、设随机向量（***X***，***Y***）联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le y \le 1; \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

（1）求（***X***，***Y***）分别关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（2）判断 ***X***，***Y*** 是否独立，并说明理由。

解：（1）当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_x^1 8xydy=4x\cdot y^2\mid_x^1=4x(1-x^2).$

因此，（X，Y）关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$

当 $y<0$ 或 $y>1$ 时，$f_Y(y)=0$；

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^y 8xydx=4y\cdot x^2\mid_0^y=4y^3.$

因此，（X，Y）关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$

（2）因为 $f(1/2, 1/2)=2$，而 $f_X(1/2)\ f_Y(1/2)=(3/2)*(1/2)=3/4\neq f(1/2, 1/2)$，

所以，X 与 Y 不独立。

六（1）、已知随机向量（X，Y）的协方差矩阵 V 为 $\begin{pmatrix}7 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$

求随机向量（$X+Y$，$X—Y$）的协方差矩阵与相关系数矩阵。

解：$D(X+Y)=DX+DY+2\text{Cov}(X,Y)=7+9+2*6=28$

$D(X-Y)=DX+DY-2\text{Cov}(X,Y)=7+9-2*6=4$

$\text{Cov}(X+Y,X-Y)=DX-DY=7-9=-2$

$$\rho_{X+Y,X-Y}=\frac{Cov(X+Y,X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)}\sqrt{D(X-Y)}}=\frac{-2}{\sqrt{28}*\sqrt{4}}=\frac{-1}{\sqrt{28}}$$

所以，（$X+Y$，$X—Y$）的协方差矩阵与相关系数矩阵分别为 $\begin{pmatrix}28 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1 & \frac{-1}{\sqrt{28}}\\ \frac{-1}{\sqrt{28}} & 1\end{pmatrix}$

六（2）、已知随机向量（X，Y）的协方差矩阵 V 为 $\begin{pmatrix}9 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

求随机向量（$X+Y$，$X—Y$）的协方差矩阵与相关系数矩阵。

解：$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y)$=9+1+2*2=14

$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{Cov}(X,Y)$=9+1-2*2=6

$\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=DX-DY$=9-1=8

$$\rho_{X+Y,X-Y}=\frac{Cov(X+Y,X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)}\sqrt{D(X-Y)}}=\frac{8}{\sqrt{14}*\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{21}}$$

所以，（***X+ Y***，***X—Y***）的协方差矩阵与相关系数矩阵分别为 $\begin{pmatrix}14 & 8\\ 8 & 6\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{\sqrt{21}}\\ \frac{4}{\sqrt{21}} & 1\end{pmatrix}$

六（3）、已知随机向量（X，Y）的协方差矩阵 V 为 $\begin{pmatrix}9 & -6\\ -6 & 6\end{pmatrix}$

求随机向量（***X—Y***，***X+ Y***）的协方差矩阵与相关系数矩阵。

解：$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{Cov}(X,Y)$=9+6-2*(-6)=27

$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y)$=9+6+2*(-6)=3

$\mathrm{Cov}(X-Y,X+Y)=DX-DY$=9-6= 3

$$\rho_{X-Y,X+Y}=\frac{Cov(X-Y,X+Y)}{\sqrt{D(X-Y)}\sqrt{D(X+Y)}}=\frac{3}{\sqrt{27}*\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

所以，（***X—Y***，***X+ Y***）的协方差矩阵与相关系数矩阵分别为 $\begin{pmatrix}27 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$

六（4）、已知随机向量（X，Y）的协方差矩阵 V 为 $\begin{pmatrix}4 & -5\\ -5 & 9\end{pmatrix}$

求随机向量（***X—Y***，***X+ Y***）的协方差矩阵与相关系数矩阵。

解：$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{Cov}(X,Y)$=4+9-2*(-5)=23

$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y)$=4+9+2*(-5)=3

$\mathrm{Cov}(X-Y,X+Y)=DX-DY$=4-9= -5

$$\rho_{X-Y,X+Y} = \frac{Cov(X-Y, X+Y)}{\sqrt{D(X-Y)}\sqrt{D(X+Y)}} = \frac{-5}{\sqrt{23}*\sqrt{3}} = \frac{-5}{\sqrt{69}}$$

所以，（*X*—*Y*, *X*+ *Y*）的协方差矩阵与相关系数矩阵分别为 $\begin{pmatrix} 23 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{\sqrt{69}} \\ \frac{-5}{\sqrt{69}} & 1 \end{pmatrix}$

六（5）、已知随机向量（*X*, *Y*）的协方差矩阵 V 为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

求随机向量（*X*—*Y*, *X*+ *Y*）的协方差矩阵与相关系数矩阵。

解：$D(X-Y)= DX+DY-2Cov(X, Y)=1+4-2*(-1)= 7$

$D(X+Y)= DX+DY+2Cov(X, Y)=1+4+2*(-1)=3$

$Cov(X-Y, X+Y)= DX-DY =1-4= -3$

$$\rho_{X-Y,X+Y} = \frac{Cov(X-Y, X+Y)}{\sqrt{D(X-Y)}\sqrt{D(X+Y)}} = \frac{-3}{\sqrt{7}*\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{21}}$$

所以，（*X*—*Y*, *X*+ *Y*）的协方差矩阵与相关系数矩阵分别为 $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{\sqrt{21}} \\ \frac{-3}{\sqrt{21}} & 1 \end{pmatrix}$

求随机向量（*X*+ *Y*, *X*—*Y*）的协方差矩阵与相关系数矩阵。

解：$D(X+Y)= DX+DY+2Cov(X, Y)=5+4+2*2=13$

$D(X-Y)= DX+DY-2Cov(X, Y)=5+4-2*2=5$

$Cov(X+Y, X-Y)= DX-DY =5-4=1$

$$\rho_{X+Y,X-Y} = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)}\sqrt{D(X-Y)}} = \frac{1}{\sqrt{13}*\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{65}}$$

七（1）、设总体 *X* 的概率密度函数是

$$f(x;a) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

其中$\alpha>0$为未知参数。x_1，x_2，…，x_n是一组样本值，求参数α的最大似然估计。

解：似然函数$L=\prod_{i=1}^{n}\alpha x_i^{\alpha-1}=\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}$　　$\ln L=n\ln\alpha+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$$\frac{d\ln L}{d\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0 \qquad \hat{\alpha}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

七（3）、设总体X的概率密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}2\lambda x\exp\{-\lambda x^2\}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$\lambda>0$为未知参数，$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$是一组样本值，求参数λ的最大似然估计。

解：似然函数$L=\prod_{i=1}^{n}(2\lambda x_i\exp\{-\lambda x_i^{2}\})=(2^n\lambda^n\prod_{i=1}^{n}x_i\exp\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}\})$　　$\ln L=n\ln(2\lambda)+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}$

$$\frac{d\ln L}{d\alpha}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}=0 \qquad \hat{\alpha}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}$$

七（4）、设总体的概率密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}3\lambda x^2\exp\{-\lambda x^3\}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

其中$\lambda>0$是未知参数，$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$是一组样本值，求参数λ的最大似然估计。

解：似然函数$L=\prod_{i=1}^{n}(3\lambda x_i^2\exp\{-\lambda x_i^{3}\})=(3^n\lambda^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{2}\exp\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^{3}\})$　　$\ln L=n\ln(3\lambda)+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{2}-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^{3}$

$$\frac{d\ln L}{d\alpha}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{3}=0 \qquad \hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{3}}$$

七（5）、设总体X服从参数为λ的泊松分布$P(\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$　（x=0，1，　⋯），其中$\lambda>0$为未知参数，$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$是

一组样本值，求参数λ的最大似然估计。

解：似然函数 $L=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda x_i}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}$ $\quad \ln L=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)-n\lambda$

$$\frac{d\ln L}{d\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n=0 \qquad \hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x}$$

七（6）、设总体X的概率分布为$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1$。设$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$为总体$X$的一组简单随机样本，试用最大似然估计法求$p$的估计值。

解：$L=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}\left(1-p\right)^{1-x_i}$ $\quad \ln L=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\left(1-p\right)$

$$\frac{d\ln L}{dp}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{p}-\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{1-p}=0 \qquad \hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$$

七（7）、设总体X服从参数为$\frac{1}{\theta}$的指数分布，$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$是一组样本值，求参数θ的最大似然估计。

解：$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x_i}=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$ $\quad \ln L=n\ln\left(\frac{1}{\theta}\right)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0 \qquad \hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$$

七（8）、设总体X服从参数为λ的指数分布，$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$是一组样本值，求参数λ的最大似然估计。

解：似然函数 $L=\lambda^n\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda x_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$ $\quad \ln L=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0 \qquad \hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{x}}$$

七（9）、设总体X的概率密度函数是

$$f(x;\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}, \qquad -\infty<x<+\infty$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是一组样本值，求参数 μ 的最大似然估计?

解：似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right\} \qquad \ln L=-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{d\ln L}{d\mu}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0 \qquad \hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$$

七（10）、设总体 X 的概率密度函数是

$$f(x;\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}e^{-\frac{x^2}{2\delta}}, \qquad -\infty<x<+\infty$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 是一组样本值，求参数 δ 的最大似然估计?

解：似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}})^n e^{-\frac{x_i^2}{2\delta}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\delta}\right)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\delta}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}\right\} \qquad \ln L=-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\right)-\frac{n}{2}\ln\delta-\frac{1}{2\delta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\frac{d\ln L}{d\delta}=-\frac{n}{2\delta}+\frac{1}{2\delta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \qquad \hat{\delta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}$$

八（1）、从某同类零件中抽取 9 件，测得其长度为（ 单位：mm ）：

6.0　5.7　5.8　6.5　7.0　6.3　5.6　6.1　5.0

设零件长度 X 服从正态分布 N(μ,1)。求μ的置信度为 0.95 的置信区间。(已知：$t_{0.05}(9)=2.262$, $t_{0.05}(8)=2.306$, $U_{0.025}=1.960$)

、解：由于零件的长度服从正态分布,所以 $U=\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 　　$P\{|U|<u_{0.025}\}=0.95$

所以 μ 的置信区间为 $(\overline{x}-u_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 　　经计算　$\overline{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=6$

μ 的置信度为 0.95 的置信区间为　$(6-1.96\times\frac{1}{3},6+1.96\times\frac{1}{3})$　即(5.347，6.653)

八（2）、某车间生产滚珠，其直径 $X\sim N(\mu, 0.05)$，从某天的产品里随机抽出 9 个量得直径如下（单位：毫米 ）：

14.6 15.1 14.9 14.8 15.2 15.1 14.8 15.0 14.7

若已知该天产品直径的方差不变，试找出平均直径μ的置信度为 0.95 的置信区间。

(已知：$t_{0.05}(9)$=2.262, $t_{0.05}(8)$=2.306, $U_{0.025}$ =1.960)

解：由于滚珠的直径 X 服从正态分布,所以$U=\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ $P\{|U|<u_{0.025}\}=0.95$

所以μ的置信区间为：$(\overline{x}-u_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 经计算 $\overline{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=14.911$

μ的置信度为 0.95 的置信区间为

$(14.911-1.96\times\frac{\sqrt{0.05}}{3},14.911+1.96\times\frac{\sqrt{0.05}}{3})$ 即(14.765，15.057)

八（3）、工厂生产一种零件,其口径 *X*(单位:毫米)服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,现从某日生产的零件中随机抽出 9 个,分别测得其口径如下:

14.6 14.7 15.1 14.9 14.8 15.0 15.1 15.2 14.7

已知零件口径 *X* 的标准差$\sigma=0.15$，求μ的置信度为 0.95 的置信区间。

(已知：$t_{0.05}(9)$=2.262, $t_{0.05}(8)$=2.306, $U_{0.025}$ =1.960)

解：由于零件的口径服从正态分布,所以$U=\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ $P\{|U|<u_{0.025}\}=0.95$

所以μ的置信区间为：$(\overline{x}-u_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 经计算 $\overline{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=14.9$

μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(14.9-1.96\times\frac{0.15}{3},14.9+1.96\times\frac{0.15}{3})$ 即(14.802 ,14.998)

八（4）、随机抽取某种炮弹 9 发做实验，测得炮口速度的样本标准差 *S*=3(m/s)，设炮口速度服从正态分布，求这种炮弹的炮口速度的方差σ^2的置信度为 0.95 的置信区间。

(已知：$\chi_{0.025}{}^2(8)=17.535$，$\chi_{0.975}{}^2(8)=2.18$；$\chi_{0.025}{}^2(9)=19.02$，$\chi_{0.975}{}^2(9)=2.7$)

因为炮口速度服从正态分布，所以

$W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $P\{\chi_{0.025}{}^2(8)\le W\le\chi_{0.975}{}^2(8)\}=0.95$

σ^2 的置信区间为: $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)}\right)$

σ^2 的置信度 0.95 的置信区间为 $\left(\frac{8\times 9}{17.535}, \frac{8\times 9}{2.180}\right)$ 即 $(4.106, 33.028)$

八（5）、设某校女生的身高服从正态分布，今从该校某班中随机抽取 9 名女生，测得数据经计算如下：$\bar{x} = 162.67cm,\ s = 4.20cm$。求该校女生身高方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。

(已知：${\chi_{0.025}}^2(8) = 17.535$，${\chi_{0.975}}^2(8) = 2.18$；${\chi_{0.025}}^2(9) = 19.02$，${\chi_{0.975}}^2(9) = 2.7$)

解：因为学生身高服从正态分布，所以

$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ $\quad P\{{\chi_{0.025}}^2(8) \le W \le {\chi_{0.975}}^2(8)\} = 0.95$

σ^2 的置信区间为: $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)}\right)$ σ^2 的置信度 0.95 的置信区间为 $\left(\frac{8\times 4.2^2}{17.535}, \frac{8\times 4.2^2}{2.180}\right)$ 即 $(8.048, 64.734)$

八（6）、一批螺丝钉中,随机抽取 9 个，测得数据经计算如下：$\bar{x} = 16.10cm,\ s = 2.10cm$。设螺丝钉的长度服从正态分布，试求该批螺丝钉长度方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。

(已知：${\chi_{0.025}}^2(8) = 17.535$，${\chi_{0.975}}^2(8) = 2.18$；${\chi_{0.025}}^2(9) = 19.02$，${\chi_{0.975}}^2(9) = 2.7$)

解：因为螺丝钉的长度服从正态分布，所以

$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ $\quad P\{{\chi_{0.025}}^2(8) \le W \le {\chi_{0.975}}^2(8)\} = 0.95$

σ^2 的置信区间为: $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.025}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.975}^2(n-1)}\right)$

σ^2 的置信度 0.95 的置信区间为 $\left(\frac{8\times 2.10^2}{17.535}, \frac{8\times 2.10^2}{2.180}\right)$ 即 $(2.012, 16.183)$

八（7）、从水平锻造机的一大批产品随机地抽取 20 件，测得其尺寸 的平均值 $\bar{x} = 32.58$，样本方差 $S^2 = 0.097$。假定该产品的尺寸 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,其中 σ^2 与 μ 均未知。求 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。

(已知：$\chi_{0.025}{}^2(20)=34.17$，$\chi_{0.975}{}^2(20)=9.591$；$\chi_{0.025}{}^2(19)=32.852$，$\chi_{0.975}{}^2(19)=8.907$) 解: 由于该产品的尺寸服从正态分布，所以

$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\quad\quad P\{\chi_{0.025}{}^2(19)\le W\le\chi_{0.975}{}^2(19)\}=0.95$

σ^2 的置信区间为: $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$

σ^2 的置信度 0.95 的置信区间为 $\left(\frac{19\times0.097}{32.852},\frac{19\times0.097}{8.907}\right)$ 即$(0.056,0.207)$

八 **(8)**、已知某批铜丝的抗拉强度 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。从中随机抽取 9 根，经计算得其标准差为 8.069。求 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。

（已知：$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$ ）

解：由于抗拉强度服从正态分布所以，

$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\quad\quad P\{\chi_{0.025}{}^2(8)\le W\le\chi_{0.975}{}^2(8)\}=0.95$

σ^2 的置信区间为: $(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)})$

σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为$\left(\frac{8\times8.069^2}{17.535},\frac{8\times8.069^2}{2.180}\right)$ ，即 $(29.705,238.931)$

八 **(9)**、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取容量为 16 的一个样本，样本方差 $S^2=0.07$，试求总体方差的置信度为 0.95 的置信区间。

(已知：$\chi_{0.025}{}^2(16)=28.845$，$\chi_{0.975}{}^2(16)=6.908$；$\chi_{0.025}{}^2(15)=27.488$，$\chi_{0.975}{}^2(15)=6.262$) 解: 由于 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，所以

$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\quad\quad P\{\chi_{0.025}{}^2(15)\le W\le\chi_{0.975}{}^2(15)\}=0.95$

σ^2 的置信区间为: $(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)})$

σ^2 的置信度 0.95 的置信区间为 $\left(\frac{15\times0.07}{27.488},\frac{15\times0.07}{6.262}\right)$，即 $\left(0.038,0.168\right)$

八（10）、某岩石密度的测量误差 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，取样本观测值 16 个，得样本方差 $S^2=0.04$，试求 σ^2 的置信度为 95%的置信区间。

(已知：$\chi_{0.025}{}^2(16)=28.845,\ \chi_{0.975}{}^2(16)=6.908;\ \chi_{0.025}{}^2(15)=27.488,\ \chi_{0.975}{}^2(15)=6.262$) 解：由于 $X\sim\ N\left(\mu,\sigma^2\right)$，所以

$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\qquad P\{\chi_{0.025}{}^2(15)\le W\le\chi_{0.975}{}^2(15)\}=0.95$

σ^2 的置信区间为：$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}\left(n-1\right)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}\left(n-1\right)}\right)$

σ^2 的置信度 0.95 的置信区间为：$\left(\frac{15\times0.04}{27.488},\frac{15\times0.04}{6.262}\right)$ 即 $\left(0.022,0.096\right)$

九（1）、某厂生产铜丝，生产一向稳定,现从其产品中随机抽取 10 段检查其折断力，测得 $\bar{x}=287.5,\ \sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=160.5$。假定铜丝的折断力服从正态分布，问在显著水平 $\alpha=0.1$ 下，是否可以相信该厂生产的铜丝折断力的方差为 16?

(已知：$\chi_{0.05}{}^2(10)=18.31,\ \chi_{0.95}{}^2(10)=3.94;\ \chi_{0.05}{}^2(9)=16.9,\ \chi_{0.95}{}^2(9)=3.33$)

解：待检验的假设是 $H_0:\sigma^2=16$ 选择统计量 $W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 在 H_0 成立时 $W\sim\chi^2(9)$

$P\{\chi^2{}_{0.05}(9)>W>\chi^2{}_{0.95}(9)\}=0.90$

取拒绝域 $w=\{W>16.92,W<3.33\}$

由样本数据知 $(n-1)S^2=160.5$ $\qquad W=\frac{160.5}{16}=10.03$ $\qquad 16.92>10.03>3.33$

接受 H_0，即可相信这批铜丝折断力的方差为 16。

九（2）、已知某炼铁厂在生产正常的情况下，铁水含碳量 X 服从正态分布，其方差为 0.03。在某段时间抽测了 10 炉铁水，测得铁水含碳量的样本方差为 0.0375。试问在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，这段时间生产的铁水含碳量方差与正常情况下的方差有无显著差异?

(已知：$\chi_{0.025}{}^2(10)=20.48$，$\chi_{0.975}{}^2(10)=3.25$，$\chi_{0.025}{}^2(9)=19.02$，$\chi_{0.975}{}^2(9)=2.7$)

解：待检验的假设是 $H_0:\sigma^2=0.03$ 选择统计量 $W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 在 H_0 成立时 $W\sim\chi^2(9)$

$$P\{\chi^2{}_{0.025}(9)>W>\chi^2{}_{0.975}(9)\}=0.95$$

取拒绝域 $w=\{W>19.023, W<2.700\}$

由样本数据知 $W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{9\times0.0375}{0.03}=11.25$

$19.023>11.25>2.700$

接受 H_0，即可相信这批铁水的含碳量与正常情况下的方差无显著差异。

九（3）、某厂加工一种零件，已知在正常的情况其长度服从正态分布 $N(\mu,0.9^2)$，现从一批产品中抽测 20 个样本，测得样本标准差 S=1.2。问在显著水平 $\alpha=0.1$ 下，该批产品的标准差是否有显著差异？

(已知：$\chi_{0.05}{}^2(19)=30.14$，$\chi_{0.95}{}^2(19)=10.12$；$\chi_{0.05}{}^2(20)=31.41$，$\chi_{0.95}{}^2(20)=10.85$)

解：待检验的假设是 $H_0:\sigma=0.9$ 选择统计量 $W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 在 H_0 成立时 $W\sim\chi^2(19)$

$$P\{\chi^2{}_{0.05}(19)>W>\chi^2{}_{0.95}(19)\}=0.90$$

取拒绝域 $w=\{W>30.114, W<10.117\}$

由样本数据知 $W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{19\times1.2^2}{0.9^2}=33.778$ $33.778>30.114$

拒绝 H_0，即认为这批产品的标准差有显著差异。

九（4）、已知某炼铁厂在生产正常的情况下，铁水含碳量 X 服从正态分布 $N(4.55,0.11^2)$。现抽测了 9 炉铁水,算得铁水含碳量的平均值 $\bar{x}=4.445$，若总体方差没有显著差异，即 $\sigma^2=0.11^2$，问在 $\alpha=0.05$ 显著性水平下，总体均值有无显著差异?

(已知：$t_{0.05}(9)=2.262$，$t_{0.05}(8)=2.306$，$U_{0.025}=1.960$)

解：待检验的假设是 $H_0: \mu = 4.55$ 选择统计量 $U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 在 H_0 成立时 $U \sim N(0,1)$

$P\{|U| > u_{0.025}\} = 0.05$ 取拒绝域 w={$|U| > 1.960$}

由样本数据知 $|U| = \left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{4.445-4.55}{0.11/3}\right| = 2.864$ $|U| > 1.960$ 拒绝 H_0，即认为总体均值有显著差异。

九（5）、已知某味精厂袋装味精的重量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ=15，$\sigma^2 = 0.09$，技术革新后，改用新机器包装。抽查 9 个样品，测定重量为（单位：克）

14.7 15.1 14.8 15.0 15.3 14.9 15.2 14.6 15.1

已知方差不变。问在 $\alpha = 0.05$ 显著性水平下，新机器包装的平均重量是否仍为 15?

(已知：$t_{0.05}(15)$=2.131, $t_{0.05}(14)$=2.145, $U_{0.025}$ =1.960)

解：待检验的假设是 $H_0: \mu = 15$ 选择统计量 $U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 在 H_0 成立时 $U \sim N(0,1)$

$P\{|U| > u_{0.025}\} = 0.05$ 取拒绝域 w={$|U| > 1.960$}

经计算 $\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 14.967$ $|U| = \left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{14.967-15}{0.3/3}\right| = 0.33$ $|U| < 1.960$

接受 H_0，即可以认为袋装的平均重量仍为 15 克。

九（6）、某手表厂生产的男表表壳在正常情况下，其直径(单位:mm)服从正态分布 $N(20, 1)$。在某天的生产过程中，随机抽查 4 只表壳，测得直径分别为: 19.5 19.8 20.0 20.5.

问在 $\alpha = 0.05$ 显著性水平下，这天生产的表壳的均值是否正常?

(已知：$t_{0.05}(4)$=2.776, $t_{0.05}(3)$=3.182, $U_{0.025}$ =1.960)

解： 待检验的假设为 H_0: $\mu = 20$ 选择统计量 $U = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 当 H_0 成立时， $U \sim N(0,1)$

$P\{|U| > u_{0.025}\} = 0.05$

取拒绝域 w={$|U|>1.960$}　　经计算　$\overline{x}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i=19.95$　　$|U|=\left|\frac{19.95-20}{1/2}\right|=0.1$

$|U|<1.960$

接受 H_0，即认为表壳的均值正常。

九（7）、某切割机在正常工作时，切割得每段金属棒长服从正态分布，且其平均长度为 10.5cm，标准差为 0.15cm。今从一批产品中随机抽取 16 段进行测量，计算平均长度为 $\overline{x}$ =10.48cm。假设方差不变，问在 $\alpha=0.05$ 显著性水平下，该切割机工作是否正常?

(已知：$t_{0.05}(16)$=2.12, $t_{0.05}(15)$=2.131, $U_{0.025}$ =1.960)

解：　待检验的假设为　H_0：　$\mu=10.5$ 选择统计量 $U=\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$　　当 H_0 成立时，　$U\sim N(0,1)$

$P\{|U|>u_{0.025}\}=0.05$　　取拒绝域 w={$|U|>1.960$}

由已知 $|U|=\left|\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{10.48-10.5}{0.15/4}\right|=\frac{8}{15}=0.533$　　接受 H_0，即认为切割机工作正常。

$|U|<1.960$

九（8）、某厂生产某种零件，在正常生产的条件下，这种零件的周长服从正态分布，均值为 0.13 厘米。如果从某日生产的这种零件中任取 9 件测量后得 $\overline{x}$ =0.146 厘米，S =0.016 厘米。问该日生产的零件的平均轴长是否与往日一样?

（ 已知：$\alpha=0.05$, $t_{0.05}(9)=2.262$, $t_{0.05}(8)=2.306$, $u_{0.025}=1.96$ ）

解：　待检验的假设为　H_0：　$\mu=0.13$ 选择统计量 $T=\frac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$　　当 H_0 成立时，　$T\sim t(8)$

$P\{|T|>t_{0.05}(8)\}=0.05$　　取拒绝域 w={$|T|>2.306$}

由已知

$$|T|=\left|\frac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{0.146-0.13}{0.016/3}\right|=3$$

拒绝 H_0，即认为该生产的零件的平均轴长与往日有显著差异。

$|T|>2.306$

九、某灯泡厂生产的灯泡平均寿命是 1120 小时，现从一批新生产的灯泡中抽取 9 个样本，测得其平均寿命为 1070 小时，样本标准差 $S=109$ 小时。问在 $\alpha=0.05$ 显著性水平下，检测灯泡的平均寿命有无显著变化?

(已知：$t_{0.05}(9)=2.262$, $t_{0.05}(8)=2.306$, $U_{0.025}=1.960$)

解:　待检验的假设为　H_0:　$\mu=1120$

选择统计量 $T=\dfrac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$　　当 H_0 成立时，　$T\sim t(8)$　　$P\{|T|>t_{0.05}(8)\}=0.05$

取拒绝域 w={$|T|>2.306$}　　由已知

$$|T|=\left|\frac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{1070-1120}{109/3}\right|=1.376$$

接受 H_0，即认为检测灯泡的平均寿命无显著变化。

$|T|<2.306$

九、正常人的脉搏平均为 72 次/分，今对某种疾病患者 9 人，测得其脉搏为（次/分）:

68　65　77　70　64　69　72　62　71

设患者的脉搏次数 X 服从正态分布，经计算得其标准差为 4.583。试在显著水平 α =0.05 下，检测患者的脉搏与正常人的脉搏有无显著差异?

(已知：$t_{0.05}(8)=2.306$, $t_{0.05}(9)=2.262$, $U_{0.025}=1.960$)

解:　待检验的假设为　H_0:　$\mu=72$

选择统计量 $T=\dfrac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$　　当 H_0 成立时，　$T\sim\ t(8)$

$P\{|T|>t_{0.05}(8)\}=0.05$

取拒绝域 w={$|T|>2.306$}　　经计算　$\overline{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=68.667$

$$|T|=\left|\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{68.667-72}{4.583/3}\right|=2.182$$

$$|T|<2.306$$

接受H_0，检测者的脉搏与正常的脉搏无显著差异。

概率论与数理统计复习题

一：全概率公式和贝叶斯公式

例：某厂由甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，它们的产量之比为 3：2：1，各车间产品的不合格率依次为 8%，9%, 12% 。现从该厂产品中任意抽取一件，求：（1）取到不合格产品的概率；（2）若取到的是不合格品，求它是由甲车间生产的概率。（**同步 45 页三、1**）

解：设 A_1，A_2，A_3分别表示产品由甲、乙、丙车间生产，B 表示产品不合格，则 A_1，A_2，A_3为一个完备事件组。$P(A_1)=1/2$, $P(A_2)=1/3$, $P(A_3)=1/6$,
$P(B|A_1)=0.08$，$P(B|A_2)=0.09$，$P(B|A_3)=0.12$。
由全概率公式 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.09$
由贝叶斯公式：$P(A_1|B)=P(A_1B)/P(B)=4/9$

练习：市场上出售的某种商品由三个厂家同时供货，其供应量第一厂家为第二厂家的 2 倍，第二、三两厂家相等，而且第一、二、三厂家的次品率依次为 2%，2%，4% 。若在市场上随机购买一件商品为次品，问该件商品是第一厂家生产的概率是多少？（**同步 49 页三、1**）　【 **0.4** 】

练习：设两箱内装有同种零件，第一箱装 50 件，有 10 件一等品，第二箱装 30 件，有 18 件一等品，先从两箱中任挑一箱，再从此箱中前后不放回地任取 2 个零件，求：（**同步 29 页三、5**）
（1）取出的零件是一等品的概率；
（2）在先取的是一等品的条件下，后取的仍是一等品的条件概率。

解：设事件 A_i ={从第 i 箱取的零件}，B_i ={第 i 次取的零件是一等品}

（1）$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=\frac{1}{2}\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\frac{18}{30}=\frac{2}{5}$

（2）$P(B_1B_2)=\frac{1}{2}\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2}+\frac{1}{2}\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}=0.194$，则 $P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=0.485$

二、连续型随机变量的综合题

例：设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda x & 0<x<2\\ 0 & others\end{cases}$

求：（1）常数λ；（2）EX；(3)P{1<X<3}；（4）X 的分布函数 F(x)（**同步 47 页三、2**）

解：(1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 \lambda x dx = 1$ 得到λ = 1/2

(2) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{4}{3}$

(3) $P\{1 < x < 3\} = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{2}xdx = \frac{3}{4}$

(4)当 x<0 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

当 0≤x<2 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x \frac{1}{2}tdt = \frac{1}{4}x^2$

当 x≥2 时，F（x）=1

故 $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$

练习：已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} ax + b & 0 \le x \le 1 \\ 0 & others \end{cases}$

且 E(X)=7/12。求：（1）a , b ；（2）X 的分布函数 F(x) （**同步 49 页三、2**）

练习：已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & others \end{cases}$

求：（1）X 的分布函数 F(x) ；（2）P{0.3<X<2}（**同步 45 页三、3**）

三、离散型随机变量和分布函数

例：设 *X* 的分布函数 *F*(x)为：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.4 & -1 \le x < 1 \\ 0.8 & 1 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases},$$ 则 *X* 的概率分布为（ ）。

分析：其分布函数的图形是阶梯形，故 x 是离散型的随机变量

[答案： P(X=-1)=0.4,P(X=1)=0.4,P(X=3)=0.2.]

练习：设随机变量 *X* 的概率分布为 P(X=1)=0.2,P(X=2)=0.3,P(X=3)=0.5,写出其分布函数 *F(x)*。

[答案：当 $x<1$ 时，*F(x)*=0; 当 $1 \leqslant x < 2$ 时，*F(x)*=0.2;

当 $2 \leqslant x < 3$ 时，*F(x)*=0.5;当 $3 \leqslant x$ 时，*F(x)*=1

四、二维连续型随机向量

例： 设 X 与 Y 相互独立，且 X 服从 $\lambda=3$ 的指数分布，Y 服从 $\lambda=4$ 的指数分布，试求：

（1）(X,Y) 联合概率密度与联合分布函数；（2）$P(X<1,Y<1)$；

（3）(X,Y) 在 $D=\{(x,y)|x>0,y>0,3x+4y<3\}$ 取值的概率。

解:（1）依题知

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

所以 (X,Y) 联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-3x-4y}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当 $x>0,y>0$ 时，有

$$F(x,y)=\int_0^x dt\int_0^y 12e^{-3t-4s}ds=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y})$$

所以 (X,Y) 联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0,y>0;\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（2）$P(X<1,Y<1)=F(1,1)=(1-e^{-3})(1-e^{-4})$；

（3）$P((X,Y)\in D)=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{3-3x}{4}} 12e^{-3x-4y}dy=1-4e^{-3}$

练习： 设二元随机变量（X，Y）的联合密度是 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2500}\,e^{-\frac{1}{50}(x+y)} & x>0,\ y>0\\ 0 & others\end{cases}$

求：（1）关于 X 的边缘密度函数 $f_X(x)$；（2）P{X≥50，Y≥50}

（**同步 52 页三、4**）

五、二维离散型随机向量

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机向量 (X,Y) 的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值,试将其他数值填入表中的空白处。

Y / X	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

[答案:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

]

六、协差矩阵

例：已知随机向量（X,Y）的协差矩阵 V 为 $V=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$

计算随机向量（X＋Y, X－Y）的协差矩阵（**课本 116 页 26 题**）

解：DX=4, DY=9, COV(X,Y)=6

D(X＋Y)= DX + DY +2 COV(X,Y)=25

D(X-Y) = DX + DY -2 COV(X,Y)=1

COV（X＋Y, X－Y）=DX-DY=-5

故（X＋Y, X－Y）的协差矩阵 $\begin{pmatrix}25 & -5\\ -5 & 1\end{pmatrix}$

练习：随机向量（X,Y）服从二维正态分布，均值向量及协差矩阵分别为

$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}$ $V=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$

计算随机向量（9X＋Y, X－Y）的协差矩阵（**课本 116 页 33 题**）

解：E(9X+Y)= 9EX+ E Y＝$9\mu_1+\mu_2$

E(X－Y)= EX－E Y＝$\mu_1-\mu_2$

D(9X＋Y)=81DX + DY +18 COV(X,Y)=$81\sigma_1^2+18\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2$

D(X－Y)= DX + DY －2 COV(X,Y)=$\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2$

COV（9X＋Y, X－Y）=9DX-DY－8 COV(X,Y)= $9\sigma_1^2-8\rho\sigma_1\sigma_2-\sigma_2^2$

然后写出它们的矩阵形式（略）

七、随机变量函数的密度函数

例：设 $X\sim U(0,2)$,则 $Y=X^2$ 在**(0,4)**内的概率密度 $f_Y(y)=$（ ）。

[答案 填：$\frac{1}{4\sqrt{y}}$]

解：$\because X\sim U(0,2)$ $\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,0\le x\le 2\\ 0, & others\end{cases}$,

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)dx$，

求导出 $f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{y}}-f_X(-\sqrt{y})(-\dfrac{1}{2\sqrt{y}})=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$ （$0<y<4$）

练习：设随机变量 *X* 在区间[1，2]上服从均匀分布，求 $Y=e^{2X}$ 的概率密度 *f(y)*。

[答案：当 $e^2\le y\le e^4$ 时，*f(y)*=$\dfrac{1}{2y}$，当 *y* 在其他范围内取值时，*f(y)*=0.]

八、中心极限定理

例：设对目标独立地发射 400 发炮弹，已知每一发炮弹地命中率等于 0.2。请用中心极限定理计算命中 60 发到 100 发的概率。（**同步 46 页四、1**）

解：设 X 表示 400 发炮弹的命中颗数，则 X 服从 B(400,0.2),EX=80，DX=64,
由中心极限定理：X 服从正态分布 N(80,64)
P{60<X<100}=P{-2.5<(X-80)/8<2.5}=2φ(2.5)－1＝0.9876

练习：袋装食盐，每袋净重为随机变量，规定每袋标准重量为 500 克，标准差为 10 克，一箱内装 100 袋，求一箱食盐净重超过 50250 克的概率。（**课本 117 页 41 题**）

九、最大似然估计

例：设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0\quad, & \text{其他}\end{cases}$$

其中未知参数 $\theta>-1$，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自总体的简单随机样本，用极大似然估计法求 θ 的估计量。

解：设似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}\ \ (0<x_i<1;\ i=1,2,\cdots,n)$

对此式取对数，即：

$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ 且 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0$，可得 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，此即 θ 的极大似然估计量。

例：设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}e^{-\lambda x^{a}}, & x>0\\ 0\quad, & x\le 0\end{cases},(\lambda>0,a>0)$$

据来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，求未知参数 λ 的最大似然估计量。（同步 39 页三、3）

解：由 $X \sim f(x)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}e^{-\lambda x^a}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

得总体 X 的样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的似然函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\lambda a x_i^{a-1}e^{-\lambda x_i^a}=(\lambda a)^n\exp[-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i{}^a]\sum_{i=1}^{n}x_i^{a-1}$$

再取对数得:

$$\ln L=n\ln(\lambda a)-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i{}^a+(a-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

再求 $\ln L$ 对 λ 的导数: $\dfrac{d\ln L}{d\lambda}=\dfrac{an}{\lambda a}-\sum_{i=1}^{n}x_i{}^a$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\lambda}=\dfrac{an}{\lambda a}-\sum_{i=1}^{n}x_i{}^a=0$，得 $\lambda=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^a}$

所以未知参数 λ 的最大似然估计量为 $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^a}$。

练习：设总体 X 的密度函数为 $f(x,\alpha)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1} & 0<x<1\\ 0 & others\end{cases}\quad(\alpha>0)$

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是取自总体 X 的一组样本，求参数α的最大似然估计（同步 52 页三、5）

十、区间估计

总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为 X 的一个样本

1：σ^2 已知,求μ的置信度为 1-α置信区间

$$(\bar{X}-u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

2：σ^2 未知,求μ的置信度为 1-α置信区间

$$(\bar{X}-t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$

3：求σ2 置信度为 1-α的置信区间

例： 设某校学生的身高服从正态分布，今从该校某班中随机抽查 10 名女生，测得数据经计算如下：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}(n-1)}}\right)$$

$\bar{x}=162.67, s^2=18.43$ 。求该校女生平均身高的 95%的置信区间。

解：$T=\frac{\overline{X}-u}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$,由样本数据得 $n=10,\bar{x}=162.67,s^2=18.43,\alpha=0.05$

查表得：$t_{0.05}$(?)=2.2622，故平均身高的 95 % 的置信区间为

$$(\bar{x}-t_{0.05}(9)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{0.05}(9)\frac{s}{\sqrt{n}})=(159.60,165.74)$$

例： 从总体 X 服从正态分布 N(μ，σ^2)中抽取容量为 10 的一个样本，样本方差 $S^2=0.07$,试求总体方差σ^2的置信度为 0.95 的置信区间。

解：因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,所以 σ^2 的 95%的置信区间为:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)}\right),$$ 其中 $S^2=0.07$,

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)=\chi_{0.025}{}^2(9)=19.023,\ \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)=\chi_{0.975}{}^2(9)=2.70$$,所以

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)}\right)=\left(\frac{9\times0.07}{19.023},\frac{9\times0.07}{2.70}\right)$$

=（0.033,0.233）

例： 已知某种材料的抗压强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现随机地抽取 10 个试件进行抗压试验，测得数据如下: 482, 493, 457, 471, 510, 446, 435, 418, 394, 469.

(1)求平均抗压强度 μ 的点估计值;

(2)求平均抗压强度 μ 的 95%的置信区间;

(3)若已知 σ =30，求平均抗压强度 μ 的 95%的置信区间;

(4)求 σ^2 的点估计值;

(5)求σ^2的 95%的置信区间;

解: (1) $\hat{u}=\overline{X}=457.50$

(2) 因为$T=\dfrac{\overline{X}-u}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，故参数$\mu$的置信度为 0.95 的置信区间是:

$\{\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$，经计算$\overline{x}=457.50$,s = 35.276, n =10,

查自由度为 9 的分位数表得，$t_{0.05}(9)=2.262$,故

$\{\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\}$ = $\{457.50-\dfrac{35.22}{\sqrt{10}}\times 2.262,457.50+\dfrac{35.22}{\sqrt{10}}\times 2.262\}$ ={432.30, 482.70}

(3) 若已知σ =30，则平均抗压强度μ的 95%的置信区间为:

$\{\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\}$ = $\{457.50-\dfrac{30}{\sqrt{10}}\times 1.96,457.50+\dfrac{30}{\sqrt{10}}\times 1.96\}$

={438.90,476.09}

(4) $\hat{\sigma}^2$ =S^2=1 240.28

(5) 因为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,所以$\sigma^2$的 95%的置信区间为:

$\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)}\}$,其中 S^2=1 240.28,

$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)=\chi_{0.025}^{2}(9)=19.023,\ \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)=\chi_{0.975}^{2}(9)=2.70$,所以

$\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2}(n-1)}\}=\{\dfrac{9\times 1\ 240.28}{19.023},\dfrac{9\times 1\ 240.28}{2.70}\}$

={586.79,4134.27}

十一、假设检验

1． 已知方差σ^2,关于期望μ的假设检验

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\quad(\sigma_0\text{为已知})$$

2．　未知方差σ2,关于期望μ的假设检验

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

3．　**未知期望μ,关于方差σ2 的假设检验**

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

例：已知某铁水含碳量在正常情况下服从正态分布 N(4.55,0.11^2),现在测定了 9 炉铁水，含碳量平均数 $\overline{x}=4.445$，样本方差 S^2 = 0.0169。若总体方差没有变化，即σ^2 = 0.121，问总体均值μ有无显著变化？（α = 0.05）（**同步 50 页四、1**）

解：原假设 H$_0$：μ = 4.55

统计量 $U=\frac{\overline{x}-4.55}{0.11/\sqrt{9}}$，当 H$_0$成立时，U 服从 N（0，1）

对于α = 0.05，U$_{0.025}$=1.96

$$|U|=\frac{4.445-4.55}{0.11/\sqrt{9}}=2.86>1.96$$

故拒绝原假设，即认为总体均值μ有显著变化

练习：某厂生产某种零件，在正常生产的情况下，这种零件的轴长服从正态分布，均值为 0.13 厘米。若从某日生产的这种零件中任取 10 件，测量后得 $\overline{x}=0.146$
厘米，S=0.016 厘米。问该日生产得零件得平均轴长是否与往日一样？（α = 0.05）
（**同步 52 页四、2**）**【 不一样 】**

例：设某厂生产的一种钢索，其断裂强度 X kg/cm^{2}服从正态分布 $N(\mu,40^2)$．从中选取一个容量为 9 的样本，得 $\overline{X}=780$　kg/cm^2．能否据此认为这批钢索的断裂强度为 800 kg/cm^2 ($\alpha=0.05$).

解：　H$_0$：u=800.

采用统计量 $U=\frac{\overline{X}-u_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

其中σ=40, u_0=800, n=9,

$\alpha=0.05$，查标准正态分布表得 $U_{\frac{\alpha}{2}}$=1.96

$$|U|=|\frac{780-800}{40/\sqrt{9}}|=1.5,$$

$|U|<U_{\frac{\alpha}{2}}$，应接受原假设,即可以认为这批钢索的断裂强度为 800kg/cm^2.

练习：某厂生产铜丝，生产一向稳定。现从该厂产品中随机抽出 10 段检查其折断力，测后经计算：

$\overline{X}=287.5,\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2=160.5$ 。假定铜丝折断力服从正态分布，问是否可相信该厂生产的铜丝的折断力方差为 16? （α＝0.1）
（**同步 46 页四、2**）**【是】**

十二、证明题：

例： 总体 $X\sim U(\theta,2\theta)$，其中 $\theta>0$ 是未知参数，又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自该总体的样本，$\overline{X}$ 为样本均值. 证明: $\hat{\theta}=\frac{2}{3}\overline{X}$ 是参数 θ 的无偏估计. （**同步 39 页四、2**）

证明: 因为 $E\hat{\theta}=\frac{2}{3}E\overline{X}=\frac{2}{3}EX=\frac{2}{3}\frac{3\theta}{2}=\theta$，故 $\hat{\theta}=\frac{2}{3}\overline{X}$ 是参数 θ 的无偏估计.

例： 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量，$D(\hat{\theta})>0$，证明: $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

证明: 因为 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量，所以 $E(\hat{\theta})=\theta$，$D(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}^2)-(E\hat{\theta})^2=E(\hat{\theta}^2)-\theta^2>0$，即 $E(\hat{\theta}^2)>\theta^2$，

故 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量. （**同步 39 页四、3**）

其它证明题见同步练习 46 页五、50 页五、

十三、其它题目

例： 设随机变量 X 在区间[2，5]上服从均匀分布，求对 X 进行的三次独立观测中，至少有两次的观测值大于 3 的概率。

解：P(X＞3)= $\int_3^5\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}$，则所求概率即为 $C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$

练习： 设测量误差 $X\sim N(0，100)$，求在 100 次独立重复测量中至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率，并用泊松分布求其近似值（精确到 0.01）。

解：由于 $X\sim N(0，100)$，则

$P(|X|>19.6)=1-P(|X|\le 19.6)=2[1-\Phi(1.96)]=0.05$ 且显然 $Y\sim B(100,0.05)$,故 $P(Y\ge 3)$

$=1-P(Y\le 2)=1-0.95^{100}-100\times 0.05\times 0.95^{99}-C_{100}^2\times 0.05^2\times 0.95^{98}$

设 $\lambda=np=100\times 0.05=5$，且 $Y\sim P(5)$,则

$P(Y\ge 3)=1-P(Y\le 2)=1-\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}5^k e^{-5}=1-0.124652=0.875348$

例： 对某地抽样调查的结果表明，考生的外语成绩（按百分制计）近似服从正态分布，平均 72 分,且 96 分以上的考生数占 2.3%。求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率。

解：设 X 表示考生的外语成绩，且 $X\sim N(72,\sigma^2)$,则

$P(X>96)=1-P(X\le 96)=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.023$,

即Φ （$\frac{24}{\sigma}$)=0.977,查表得$\frac{24}{\sigma}$=2，则σ =12，即且 $X\sim N(72,144)$，

故 $P(60\le X\le 84)=P(-1\le \frac{X-72}{12}\le 1)=2\Phi(1)-1=0.682$

其它题目（主要是选择题和填空题，见同步练习后面的 5 套模拟题），具体题号如下：

同步练习：模拟题一：42 页 一 1，2，3，4，5，7，8，二 1，3

模拟题二：44 页 一 1，4，7，8，9 二 4，5

模拟题三：46 页 一 1 ，2，5 二 1，2，4

模拟题四：48 页 一 1，2，3，4，6，7 二 1，2，3

模拟题五：51 页 一 1，2，3，4，5 二 2，3，4，5，6

一、填空题

1、已知 P(A)=P(B)=P(C)=0.25，P(AC)=0，P(AB)=P(BC)=0.15，则 A、B、C 中至少有一个发生的概率为 ___0.45___。

2、A、B 互斥且 A=B，则 P(A)=___0___。

3、设 A、B 为二事件，P(A)=0.8,P(B)=0.7，P(A｜$\overline{B}$)=0.6，则 P(A∪B)= ___0.88___。

4、设 X、Y 相互独立，$X\sim U(0,3)$,Y 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, & x>0\\ 0 & ,其它\end{cases}$，则$E(2X-5Y+3)=$ ___-14___，$D(2X-3Y+4)=$ ___147___。

5、设某试验成功的概率为 0.5，现独立地进行该试验 3 次，则至少有一次成功的概率为 ___0.875___

6、已知$E(X)=3$，$D(X)=$2，由切比雪夫不等式估计概率

$P(|X-3|\geq 4)\leq$ 0.125 。

7、设 $X\sim B(100,0.2)$，则概率 $P(|X-20|\leq 4)\approx$ 0.68 （$\Phi(1)=0.84$）。

8.设 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1-\dfrac{1}{x^2}, & x\geq 1\end{cases}$，则 $E(X)=$ 2

9.已知随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X\geq 2)=0.5, P(X\geq 5)=\Phi(-1)$，则 $\mu=$ 2

，$\sigma^2=$ 9 。

10．设 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，Y 在 $[0,4]$ 上服从均匀分布，则 X 与 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & -\infty<x<+\infty, 0\leq y\leq 4\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$

11．把 9 本书任意地放在书架上，其中指定 3 本书放在一起的概率为 $\frac{1}{12}$

12. 已知 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.8$，则 $P(AB)$ 的最大值为 0.6

，最小值为 0.4 。

13.已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(\overline{A}\,\overline{B})=0.2$，则 $P(AB)$ = 0.3

14、设 A、B 为随机事件，且 P(A)=0.5，P(B)=0.6，P(B|A)=0.8，则 P(A+B)=__ 0.7 __。

15、某射手对目标独立射击四次，至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则此射手的命中率 $\frac{2}{3}$。

16、设随机变量 X 服从[0，2]上均匀分布，则 $\dfrac{D(X)}{[E(X)]^2}=$ 1/3 。

17、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松（Poisson）分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$ 1 。 5、一次试验的成功率为 p，进行 100 次独立重复试验，当 $p=$ 1/2 时，成功次数的方差的值最大，最大值为 25 。

18、(X，Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X 的边缘分布为 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 。

19、已知随机向量（X，Y）的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}xy^2, & 0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 E(X)= $\frac{4}{3}$。

20、随机变量 X 的数学期望 $EX = \mu$，方差 $DX = \sigma^2$，k、b 为常数，则有 $E(kX+b)$ = $k\mu + b,$；$D(kX+b)$ = $k^2\sigma^2$。

21、若随机变量 X ~N (−2, 4), Y ~N (3, 9), 且 X 与 Y 相互独立。设 Z＝2X－Y＋5，则 Z ~ N(-2, 25) 。

22、$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$是常数$\theta$的两个 无偏 估计量，若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

23、设 A、B 为随机事件，且 P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A∪B)=0.6，则 P($A\overline{B}$)=_0.3__。

24、设 X~B(2,p)，Y~B(3,p)，且 P{X ≥ 1}=$\frac{5}{9}$，则 P{Y≥ 1}=$\frac{19}{27}$。

25、设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，且 Y =3X -2, 则 E(Y)=4 。

26、设随机变量 X 服从[0,2]上的均匀分布，Y=2X+1，则 D(Y)= 4/3 。

27、设随机变量 X 的概率密度是:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

，且 $P\{X \geq \alpha\} = 0.784$，则$\alpha$ =0.6 。

28、利用正态分布的结论，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2 - 4x + 4)e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx =$$ 1 。

29、已知随机向量（X，Y）的联合密度函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}xy^2, & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则 E(Y)= 3/4 。

30、设（X，Y）为二维随机向量，D(X)、D(Y)均不为零。若有常数 a>0 与 b 使

$P\{Y = -aX + b\} = 1$，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} =$ -1 。

31、若随机变量 X ~N (1, 4), Y ~N (2, 9), 且 X 与 Y 相互独立。设 Z＝X－Y＋3，则 Z ~ N (2, 13) 。

32、设随机变量 X~N (1/2, 2)，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中“$X \le 1/2$”出现的次数，则 $P\{Y = 2\}$ = 3/8 。

33、设 A，B 为随机事件，且 P(A)=0.7，P(A－B)=0.3，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=$ 0.6 。

34、四个人独立地破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$，则密码能被译出的概率是 11/24 。

35、射手独立射击 8 次，每次中靶的概率是 0.6，那么恰好中靶 3 次的概率是 $C_8^3\times0.6^3\times0.4^5$ = 0.123863 。

36、已知随机变量 X 服从[0, 2]上的均匀分布，则 D (X)= 1/3 。

37、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $3P\{X=2\}=P\{X=4\}$，则 λ = 6 。

38、设随机变量 X ~ N (1, 4)，已知Φ(0.5)=0.6915，Φ(1.5)=0.9332，则 $P\{|X|<2\}=$ 0.6247 。

39、随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 E(X)= 1 。

40、已知总体 X ~ N (0, 1)，设 X1，X2，⋯，Xn 是来自总体 X 的简单随机样本，则 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ ~ $x^2(n)$。

41、设 T 服从自由度为 n 的 t 分布，若 $P\{|T|>\lambda\}=\alpha$，则 $P\{T<-\lambda\}=\frac{a}{2}$。

42、已知随机向量（X，Y）的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 E(X)= 4/3 。

1、设 A，B 为随机事件，且 P(A)=0.6, P(AB)= P($\overline{A}\overline{B}$)，则 P(B)= 0.4 。

2、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline P & 0.5 & 0.5\end{array}$，$\begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1 \\ \hline P & 0.5 & 0.5\end{array}$，则 P(X =Y)=_ 0.5_。

3、设随机变量 X 服从以 n, p 为参数的二项分布，且 EX=15，DX=10，则 n= 45 。

4、设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}$，则 μ = 2 。

5、设随机变量 X 的数学期望 EX 和方差 DX>0 都存在，令 $Y=(X-EX)/\sqrt{DX}$，则 DY= 1 。

6、设随机变量 X 服从区间[0，5]上的均匀分布，Y 服从 $\lambda=5$ 的指数分布，且 X，Y 相互独立，

则(X, Y)的联合密度函数 f (x, y)= $\begin{cases} e^{-5y} & 0 \le x \le 5, y \ge 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$ 。

7、随机变量 X 与 Y 相互独立，且 D(X)=4，D(Y)=2，则 D(3X − 2Y) = 44。

8、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X ~ N (0, 1)的简单随机样本，则 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 服从的分布为 $x^2(n-1)$。

9、三个人独立地向某一目标进行射击，已知各人能击中的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$，则目标能被击中的概率是 3/5 。

10、已知随机向量(X, Y)的联合概率密度 $f(x,y) = \begin{cases} 4xe^{-2y}, & 0 \le x \le 1, y > 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，

则 EY = 1/2 。

1、设 A,B 为两个随机事件，且 P(A)=0.7, P(A-B)=0.3，则 P($\overline{AB}$)=__0.6 __。

2、设随机变量 X 的分布律为 $\begin{array}{c|c|c} X & 0 & 1 \\ \hline p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$，且 X 与 Y 独立同分布，则随机变量 Z = max{X,Y }的分布律为 $\begin{array}{c|c|c} Z & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$。

3、设随机变量 X ~ N (2，σ^2)，且 P{2 < X <4} = 0.3，则 P{X < 0} = 0.2 。

4、设随机变量 X 服从 $\lambda = 2$ 泊松分布，则 $P\{X \ge 1\} = 1 - e^{-2}$。

5、已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，令 $Y = -2X$，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为 $\frac{1}{2} f_X(-\frac{y}{2})$。

6、设 X 是 10 次独立重复试验成功的次数，若每次试验成功的概率为 0.4，则 $D(X) =$ 2.4 。

7、X1，X2，…，Xn 是取自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$ ~ $x^2(n-1)$。

8、已知随机向量(X, Y)的联合概率密度 $f(x,y) = \begin{cases} 4xe^{-2y}, & 0 \le x \le 1, y > 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，则 EX = 2/3 。

9、称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的 无偏 估计量，如果 $E(\hat{\theta}) = \theta$。

10、概率很小的事件在一次试验中几乎是不可能发生的，这个原理称为 小概率事件原理。

1、设 A、B 为两个随机事件，若 P(A)=0.4，P(B)=0.3，$P(A\cup B)=0.6$，则$P(A\overline{B})=$ 0.3 。

2、设 X 是 10 次独立重复试验成功的次数，若每次试验成功的概率为 0.4，则$E(X^2)=$ 18.4 。

3、设随机变量 X ~ N (1/4，9)，以 Y 表示对 X 的 5 次独立重复观察中"$X\le 1/4$"出现的次数，则$P\{Y=2\}$= 5/16 。

4、已知随机变量 X 服从参数为λ的泊松分布，且 P(X=2)=P(X=4)，则$\lambda=2\sqrt{3}$。

5、称统计量$\hat{\theta}$为参数θ的无偏估计量，如果$E(\hat{\theta})$=θ 。

6、设$X\sim N(0,1), Y\sim x^2(n)$，且 X，Y 相互独立，则$\frac{X}{\sqrt{Y}}\sqrt{n}\sim$ t(n) 。

7、若随机变量 X ~ N (3，9)，Y ~ N (－1，5)，且 X 与 Y 相互独立。设 Z = X－2Y + 2，则 Z ~ N (7，29) 。

8、已知随机向量(X, Y)的联合概率密度$f(x,y)=\begin{cases}6xe^{-3y}, & 0\le x\le 1, y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，则 EY = 1/3 。

9、已知总体$X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体 X 的样本，要检验$H_o$：$\sigma^2=\sigma_0^2$，则采用的统计量是$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 。

10、设随机变量 T 服从自由度为 n 的 t 分布，若$P\{|T|>\lambda\}=\alpha$，则$P\{T<\lambda\}=1-\frac{a}{2}$。

1、设 A、B 为两个随机事件，P(A)=0.4，P(B)=0.5，$P(A|B)=0.7$，则$P(A\cup B)=$ 0.55 。

2、设随机变量 X ~ B (5, 0.1)，则 D (1－2X) = 1.8 。

3、在三次独立重复射击中，若至少有一次击中目标的概率为$\frac{37}{64}$，则每次射击击中目标的概率为 1/4 。

4、设随机变量X的概率分布为$P(X=1)=0.2, P(X=2)=0.3, P(X=3)=0.5$，则$X$的期望 EX= 2.3。

5、将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于－1。

6、设(X, Y)的联合概率分布列为

Y X	－1	0	4
－2	1/9	1/3	2/9
1	1/18	a	b

若 X、Y 相互独立，则 a = 1/6 ，b = 1/9 。

7、设随机变量 X 服从[1，5]上的均匀分布，则 $P\{2 \le X \le 4\} =$ 1/2 。

8、三个人独立地破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3}$，则密码能被译出的概率是 3/5 。

9、若 $X \sim N(\mu_1,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差，则 $\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S}$ ~ t (n-1) 。

10、$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 是常数 θ 的两个无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效 。

1、已知 P (A)=0.8，P (A－B)=0.5，且 A 与 B 独立，则 P (B) = 3/8 。

2、设随机变量 X～N(1，4)，且 P{ X ≥ a }= P{ X ≤ a }，则 a = 1 。

3、随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布，$P(X=-1)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}$，$P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$，则 $P(X=Y)=\underline{0.5}$。

4、已知随机向量(X, Y)的联合分布密度 $f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，则 EY= 2/3 。

5、设随机变量 X～N (1，4)，则 $P\{|X|>2\}$ = 0.3753 。(已知Φ(0.5)=0.6915，Φ(1.5)=0.9332)

6、若随机变量 X ~ N (0，4)，Y ~ N (－1，5)，且 X 与 Y 相互独立。设 Z = X + Y－3，则 Z ~ N (－4，9) 。

7、设总体 X ~ N(1，9)，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}, S^2$分别为样本均值与样本方差，则$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim$ $\chi^2(8)$;；$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim$ $\chi^2(9)$。

8、设随机变量 X 服从参数为λ的泊松分布，且$3P\{X=2\}=P\{X=4\}$，则λ = 6 。

9、袋中有大小相同的红球 4 只，黑球 3 只，从中随机一次抽取 2 只，则此两球颜色不同的概率为 4/7 。

10、在假设检验中，把符合 H0 的总体判为不合格 H0 加以拒绝，这类错误称为 一错误；把不符合 H0 的总体当作符合 H0 而接受。这类错误称为 二 错误。

1、设 A、B 为两个随机事件，P(A)=0.8，P(AB)=0.4，则 P(A－B)= 0.4 。

2、设 X 是 10 次独立重复试验成功的次数，若每次试验成功的概率为 0.4，则$D(X)=$ 2.4 。

3、设随机变量 X 的概率分布为

X	－1	0	1	2
P	0.1	0.3	0.2	0.4

则$P\{X^2 \geq 1\}$= 0.7 。

4、设随机变量 X 的概率密度函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则$\sqrt{D(X)}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

5、袋中有大小相同的黑球 7 只，白球 3 只，每次从中任取一只，有放回抽取，记首次抽到黑球时抽取的次数为 X，则 P {X = 10} = 0.39*0.7 。

6、某人投篮，每次命中率为 0.7，现独立投篮 5 次，恰好命中 4 次的概率是$C_5^4 \times 0.7^4 \times 0.3^1$。

7、设随机变量 X 的密度函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{2}}$，且$P\{X \geq c\}=P\{X \leq c\}$，则 c = -2 。

8、已知随机变量 U = 4－9X，V= 8＋3Y，且 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} =1，则 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV} = －1。

9、设 $X \sim N(0,1), Y \sim x^2(n)$，且 X，Y 相互独立，则 $\frac{X}{\sqrt{Y}}\sqrt{n} \sim$ t (n)

10、概率很小的事件在一次试验中几乎是不可能发生的，这个原理称为 小概率事件原理 。

1、随机事件 A 与 B 独立，$P(A \cup B)=0.7, P(A)=0.5,$ 则 $P(B)=$ 0.4 。

2、设随机变量 X 的概率分布为则 X2 的概率分布为

3、设随机变量 X 服从[2，6]上的均匀分布，则 $P\{3<X<4\}=$ 0.25 。

4、设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，且每次命中率为 0.4，则 EX^2 =_18.4__。

5、随机变量 $X \sim N(\mu,4)$，则 $Y=\frac{X-\mu}{2} \sim$ N(0,1) 。

6、四名射手独立地向一目标进行射击，已知各人能击中目标的概率分别为 1/2、3/4、2/3、3/5，则目标能被击中的概率是 59/60 。

7、一袋中有 2 个黑球和若干个白球，现有放回地摸球 4 次，若至少摸到一个白球的概率是 $\frac{80}{81}$，则袋中白球的个数是 4 。

8、已知随机变量 U = 1＋2X，V= 2－3Y，且 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} = －1，则 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV} = 1 。

9、设随机变量 X ~ N (2，9)，且 P{ X ≥ a }= P{ X ≤ a }，则 a = 2 。

10、称统计量 $\hat{\theta}$为参数 θ 的无偏估计量，如果 $E(\hat{\theta})$ = θ

二、选择题

1.抛掷 3 枚均匀对称的硬币，恰好有两枚正面向上的概率是

。

（A）0.125，（B）0.25，（C）0.375，（D）0.5

2.有γ个球，随机地放在 n 个盒子中（γ≤n），则某指定的γ个盒子中各有一球的概率为　　　。

（A）$\frac{\gamma!}{n^{\gamma}}$　（B）$C_n^r \frac{\gamma!}{n^{\gamma}}$　（C）$\frac{n!}{\gamma^{n}}$　（D）$C_{\gamma}^{n} \frac{n!}{\gamma^{n}}$

3.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ce^{-|x|}$，则 c =　　　。

（A）$-\frac{1}{2}$　（B）0　（C）$\frac{1}{2}$　（D）1

4.掷一颗骰子 600 次，求“一点” 出现次数的均值为　　　。

（A）50　（B）100　（C）120　（D）150

5.设总体 X 在$(\mu-\rho,\mu+\rho)$上服从均匀分布，则参数μ的矩估计量为　　　。

（A）$\frac{1}{\bar{\bar{x}}}$　（B）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$　（C）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　（D）$\bar{x}$

1、设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>P(B)>0$，则（ D ）。

A．$P(A)=1-P(B)$　B．$P(AB)=P(A)P(B)$　C．$P(A\cup B)=1$　D．$P(\overline{AB})=1$

2、将两封信随机地投入四个邮筒中，则未向前面两个邮筒投信的概率为（ A ）。

A. $\frac{2^2}{4^2}$　B. $\frac{C_2^1}{C_4^2}$　C. $\frac{2!}{P_4^2}$　D. $\frac{2!}{4!}$

3、已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，令 $Y=-2X$，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为（ D ）。

A. $2f_X(-2y)$　B. $f_X(-\frac{y}{2})$　C. $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$　D. $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$

4、设随机变量 $X\sim f(x)$，满足 $f(x)=f(-x)$，$F(x)$ 是 x 的分布函数，则对任意实数 a 有（ B ）。

A. $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$　B. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$　C. $F(-a)=F(a)$　D. $F(-a)=2F(a)-1$

5、设$\Phi(x)$为标准正态分布函数,

$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A发生;}\\ 0, & \text{否则;}\end{cases}$ $i=1, 2, \cdots, 100,$ 且$P(A)=0.8$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$相互独立。令

$Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$，则由中心极限定理知Y的分布函数$F(y)$近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　B． $\Phi(\frac{y-80}{4})$　C． $\Phi(16y+80)$　D． $\Phi(4y+80)$

1、设A，B为随机事件，$P(B)>0$，$P(A|B)=1$，则必有（ A ）。

A. $P(A\cup B)=P(A)$　B. $A\supset B$　C. $P(A)=P(B)$　D. $P(AB)=P(A)$

2、某人连续向一目标射击，每次命中目标的概率为$3/4$，他连续射击直到命中为止，则射击次数为3的概率是（ C ）。

A. $(\frac{3}{4})^3$　B. $(\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{4}$　C. $(\frac{1}{4})^2\times\frac{3}{4}$　D. $C_4^2(\frac{1}{4})^2$

3、设X_1, X_2是来自总体X的一个简单随机样本，则最有效的无偏估计是(A)。

A. $\hat{\mu}=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$　B. $\hat{\mu}=\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$　C. $\hat{\mu}=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$　D. $\hat{\mu}=\frac{2}{5}X_1+\frac{3}{5}X_2$

4、设$\Phi(x)$为标准正态分布函数,

$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A发生;}\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$ $i=1, 2, \cdots, 100,$ 且$P(A)=0.1$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$相互独立。令

$Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$，则由中心极限定理知Y的分布函数$F(y)$近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　B． $\Phi(\frac{y-10}{3})$　C． $\Phi(3y+10)$　D． $\Phi(9y+10)$

5、设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为总体$N(1, 2^2)$的一个样本，$\overline{X}$为样本均值，则下列结论中正确的是（ D ）。

A. $\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim t(n)$; B. $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim F(n,1)$; C. $\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$; D. $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim \chi^2(n)$;

1、已知 A、B、C 为三个随机事件，则 A、B、C 不都发生的事件为（A)。

A. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ B. $\overline{ABC}$ C. A+B+C D. ABC

2、下列各函数中是随机变量分布函数的为（ B ）。

A. $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2},-\infty<x<\infty$ B. $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{1+x} & x\geq 0\end{cases}$

C. $F(x)=e^{-x},-\infty<x<\infty$ D. $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}arctgx,\ -\infty<x<\infty$

3、(X,Y)是二维随机向量，与$Cov(X,Y)=0$不等价的是（ D ）

A. $E(XY)=E(X)E(Y)$ B. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ C. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$ D. X 和Y相互独立

4、设$\Phi(x)$为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$ $i=1, 2,\cdots, 100,$ 且$P(A)=0.2$，$X_1, X_2,\cdots, X_{100}$相互独立。令$Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知Y的分布函数$F(y)$近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$ B．$\Phi(\dfrac{y-20}{4})$ C．$\Phi(16y-20)$ D．$\Phi(4y-20)$

5、设总体$X\sim N(\mu,2^2)$，其中μ未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体的样本，样本均值为$\overline{X}$，样本方差为s^2， 则下列各式中不是统计量的是（ C ）。

A. $2\overline{X}$ B. $\dfrac{s^2}{\sigma^2}$ C. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$ D. $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

1、若随机事件 A 与 B 相互独立，则 $P(A+B)$ = （　B　）。

A. $P(A)+P(B)$　　B. $P(A)+P(B)-P(A)P(B)$　　C. $P(A)P(B)$　　D. $P(\overline{A})+P(\overline{B})$

2、设总体 X 的数学期望 EX＝μ，方差 DX＝σ2，X1，X2，X3，X4 是来自总体 X 的简单随机样本，则下列μ的估计量中最有效的是（　D　）

A. $\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{3}X_3+\frac{1}{3}X_3$　　B. $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

C. $\frac{3}{5}X_1+\frac{4}{5}X_2-\frac{1}{5}X_3-\frac{1}{5}X_4$　　D. $\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3+\frac{1}{4}X_4$

3、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$　$i=1,2,\cdots,100,$ 且 $P(A)=0.3$，$X_1, X_2,\cdots, X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（　B　）。

A. $\Phi(y)$　　B. $\Phi(\frac{y-30}{\sqrt{21}})$　　C. $\Phi(\frac{y-30}{21})$　　D. $\Phi(y-30)$

4、设离散型随机变量的概率分布为 $P(X=k)=\frac{k+1}{10}$，$k=0,1,2,3$，则 $E(X)$ = （　B　）。

A.　1.8　　B.　2　　C.　2.2　　D.　2.4

5、在假设检验中，下列说法错误的是（　C　）。

A. H_1 真时拒绝 H_1 称为犯第二类错误。　　B. H_1 不真时接受 H_1 称为犯第一类错误。

C. 设 $P\{拒绝H_0 \mid H_0真\}=\alpha$，$P\{接受H_0 \mid H_0不真\}=\beta$，则 α 变大时 β 变小。

D. α、β 的意义同（C），当样本容量一定时，α 变大时则 β 变小。

1、若 A 与 B 对立事件，则下列错误的为（　A　）。

A. $P(AB)=P(A)P(B)$　　B. $P(A+B)=1$　　C. $P(A+B)=P(A)+P(B)$　　D. $P(AB)=0$

2、下列事件运算关系正确的是（　A　）。

A. $B=BA+B\overline{A}$　　B. $B=\overline{BA}+\overline{B}A$　　C. $B=BA+\overline{B}A$　　D. $B=1-\overline{B}$

3、设$\Phi(x)$为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases}1, & 事件\ A\ 发生\\ 0, & 否则\end{cases}$ $i=1, 2, \cdots, 100,$ 且$P(A)=0.4$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$相互独立。令$Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知$Y$的分布函数$F(y)$近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$ B．$\Phi(\frac{y-40}{\sqrt{24}})$ C．$\Phi(y-40)$ D．$\Phi(\frac{y-40}{24})$

4、若$E(XY)=E(X)E(Y)$，则（D ）。

A. X和Y相互独立 B. X 与 Y 不相关 C. $D(XY)=D(X)D(Y)$ D. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

5、若随机向量（X, Y）服从二维正态分布，则①X, Y一定相互独立； ② 若$\rho_{XY}=0$，则X, Y一定相互独立；③X和Y都服从一维正态分布；④若X, Y相互独立，则Cov (X, Y) =0。几种说法中正确的是（ B ）。

A. ① ② ③ ④ B. ② ③ ④ C. ① ③ ④ D. ① ② ④

1、设随机事件 A、B 互不相容，$P(A)=p,\ P(B)=q$，则$P(\bar{A}B)$ = （ C ）。

A. $(1-p)q$ B. pq C. q D. p

2、设 A，B 是两个随机事件，则下列等式中（ C ）是不正确的。

A. $P(AB)=P(A)P(B)$，其中 A，B 相互独立 B. $P(AB)=P(B)P(A|B)$，其中$P(B)\neq 0$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$，其中 A，B 互不相容 D. $P(AB)=P(A)P(B|A)$，其中$P(A)\neq 0$

3、设$\Phi(x)$为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases}1, & 事件\ A\ 发生\\ 0, & 否则\end{cases}$ $i=1, 2, \cdots, 100,$ 且$P(A)=0.5$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$相互独立。令$Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知$Y$的分布函数$F(y)$近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　　B. $\Phi(\frac{y-50}{5})$　　C. $\Phi(y-50)$　　D. $\Phi(\frac{y-50}{25})$

4、设随机变量 X 的密度函数为 f (x)，则 Y = 5 — 2X 的密度函数为（ B ）

A. $-\frac{1}{2}f(-\frac{y-5}{2})$　　B. $\frac{1}{2}f(-\frac{y-5}{2})$

C. $-\frac{1}{2}f(-\frac{y+5}{2})$　　D. $\frac{1}{2}f(-\frac{y+5}{2})$

5、设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一组样本观测值，则其标准差是（ B ）。

A. $\frac{1}{n-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$　　C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$

1、若 A、B 相互独立，则下列式子成立的为（ A ）。

A. $P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)$　　B. $P(AB)=0$　　C. $P(A|B)=P(B|A)$　　D. $P(A|B)=P(B)$

2、若随机事件 A, B 的概率分别为 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$，则 A 与 B 一定（D ）。

A. 相互对立　　B. 相互独立　　C. 互不相容　　D.相容

3、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$X_i=\begin{cases}1, & 事件\ A\ 发生\\ 0, & 否则\end{cases}$　$i=1, 2, \cdots, 100,$ 且 $P(A)=0.6$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（B ）。

A. $\Phi(y)$　　B. $\Phi(\frac{y-60}{\sqrt{24}})$　　C. $\Phi(y-60)$　　D. $\Phi(\frac{y-60}{24})$

4、设随机变量 X ～N(μ，81)，Y ～N(μ，16)，记 $p_1=P\{X\le\mu-9\}, p_2=\{Y\ge\mu+4\}$，则（ B ）。

A. p1<p2　　B. p1 = p2　　C. p1>p2　　D. p1 与 p2 的关系无法确定

5、设随机变量 X 的密度函数为 f (x)，则 Y = 7 — 5X 的密度函数为（ B ）

A. $-\frac{1}{5}f(-\frac{y-7}{5})$　　B. $\frac{1}{5}f(-\frac{y-7}{5})$

C. $-\frac{1}{5}f(-\frac{y+7}{5})$　　D. $\frac{1}{5}f(-\frac{y+7}{5})$

1、对任意两个事件A和B， 若$P(AB)=0$， 则（ D ）。

A. $AB=\phi$　　B. $\overline{A}\overline{B}=\phi$　　C. $P(A)P(B)=0$　　D. $P(A-B)=P(A)$

2、设A、B为两个随机事件，且$0<P(A)<1$， $0<P(B)<1$， $P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$， 则必有（ B ）。

A. $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$　　C. $P(AB)\neq P(A)P(B)$　　D. A、B互不相容

3、设$\Phi(x)$为标准正态分布函数，

$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A 发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$ $i=1, 2, \cdots, 100,$ 且$P(A)=0.7$， $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$相互独立。令$Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$， 则由中心极限定理知$Y$的分布函数$F(y)$近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　　B. $\Phi(\frac{y-70}{\sqrt{21}})$　　C. $\Phi(y-70)$　　D. $\Phi(\frac{y-70}{21})$

4、已知随机变量X和Y相互独立，且它们分别在区间[－1，3]和[2，4]上服从均匀分布，则$E(XY)=$（ A ）。

A. 3　　B. 6　　C. 10　　D. 12

5、设随机变量 X ～N(μ，9)，Y ～N(μ，25)，记$p_1=P\{X\le\mu-3\}, p_2=\{Y\ge\mu+5\}$，则（ B ）。

A. p1<p2　　B. p1＝p2　　C. p1>p2　　D. p1 与 p2 的关系无法确定

1、设A_1, A_2两个随机事件相互独立，当A_1, A_2同时发生时，必有A发生，则（ A ）。

A. $P(A_1A_2)\le P(A)$　　B. $P(A_1A_2)\ge P(A)$　　C. $P(A_1A_2)=P(A)$　　D. $P(A_1)P(A_2)=P(A)$

2、已知随机变量X的概率密度为$f_X(x)$，令$Y=-2X+3$，则 Y 的概率密度$f_Y(y)$为（ A ）。

A. $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y-3}{2})$　B. $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y-3}{2})$　C. $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y+3}{2})$　D. $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y+3}{2})$

3、两个独立随机变量X,Y，则下列不成立的是（ C ）。

A. $EXY=EXEY$　B. $E(X+Y)=EX+EY$　C. $DXY=DXDY$　D. $D(X+Y)=DX+DY$

4、设$\Phi(x)$为标准正态分布函数，$X_i=\begin{cases}1, & \text{事件 A发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$　$i=1, 2, \cdots, 100,$ 且$P(A)=0.9$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$相互独立。令$Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知$Y$的分布函数$F(y)$近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$　B．$\Phi(\frac{y-90}{3})$　C．$\Phi(y-90)$　D．$\Phi(\frac{y-90}{9})$

5、设总体 X 的数学期望 EX＝μ，方差 DX＝σ2，X1，X2，X3 是来自总体 X 的简单随机样本，则下列μ的估计量中最有效的是（ B ）

A．$\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3$　B．$\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

C．$\frac{3}{5}X_1+\frac{4}{5}X_2-\frac{2}{5}X_3$　D．$\frac{1}{6}X_1+\frac{2}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$

1、若事件A_1, A_2, A_3两两独立，则下列结论成立的是（ B ）。

A. A_1, A_2, A_3相互独立　B. $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$两两独立

C. $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$　D. $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$相互独立

2、连续型随机变量 X 的密度函数 f (x)必满足条件（ C ）。

A. $0\le f(x)\le 1$　B. 在定义域内单调不减

C. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$　D. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$

3、设X_1, X_2是任意两个互相独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$，分布函数分别为$F_1(x)$和$F_2(x)$，则（ B ）。

A. $f_1(x)+f_2(x)$必为密度函数　B. $F_1(x)\cdot F_2(x)$必为分布函数

C. $F_1(x)+F_2(x)$必为分布函数　D. $f_1(x)\cdot f_2(x)$必为密度函数

4、设随机变量 X, Y 相互独立，且均服从[0，1]上的均匀分布，则服从均匀分布的是（ B ）。

A. X Y B. (X, Y) C. X — Y D. X + Y

5、设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{事件 A发生} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n,$ 且 $P(A) = p$ ， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立。令 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（ B ）。

A. $\Phi(y)$ B． $\Phi(\frac{y-np}{\sqrt{np(1-p)}})$ C． $\Phi(y-np)$ D． $\Phi(\frac{y-np}{np(1-p)})$

三、计算题（满分 60 分）

1.某商店拥有某产品共计 12 件，其中 4 件次品，已经售出 2 件，现从剩下的 10 件产品中任取一件，求这件是正品的概率。

2.设某种电子元件的寿命服从正态分布 N（40，100），随机地取 5 个元件，求恰有两个元件寿命小于 50 的概率。（ $\Phi(1) = 0.8413$ ， $\Phi(2) = 0.9772$ ）

3.在区间（0，1）中随机地取两个数，求事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$ ”的概率。

4.一台设备由三个部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率分别为 0.2，0.3，0.4，各部件的状态相互独立，求需要调整的部件数 X 的期望 EX 和方差 DX。

5.从一正态总体中抽取容量为 10 的样本，假定有 2%的样本均值与总体均值之差的绝对值在 4 以上，求总体的标准差。

（ $\Phi(2.055) = 0.98, \Phi(2.325) = 0.99)$

6.设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可认为这次考试全体考生的平均成绩

为 70 分？并给出检验过程。($t_{0.025}(35)=2.0301$ ， $t_{0.025}(36)=2.0281$)

三（1）、已知 5%的男性和 0.25%的女性是色盲，假设男性女性各占一半。现随机地挑选一人，求此人恰好是色盲者的概率。

设 A：表示此人是男性；　B：表示此人是色盲。

则所求的概率为 $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})$

$=0.5\times 0.05+0.5\times 0.0025=0.02625$

答：此人恰好是色盲的概率为 0.02625。

三（2）、已知 5%的男性和 0.25%的女性是色盲，假设男性女性各占一半。若随机地挑选一人，发现此人不是色盲，问此人是男性的概率。

设 A：表示此人是男性；　B：表示此人是色盲。

则所求的概率为

$$P(A\mid \bar{B})=\frac{P(A)P(\bar{B}\mid A)}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)P(\bar{B}\mid A)}{1-P(B)}=\frac{P(A)P(\bar{B}\mid A)}{1-[P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})]}$$

$$=\frac{0.5\times 0.95}{1-0.02625}\approx 0.4878$$

答：此人是男人的概率为 0.4878。　　　。

三（3）、一袋中装有 10 个球，其中 3 个白球，7 个红球。现从中采用不放回方式摸球两次，每次一个，求第二次取得白球的概率。

解 设 A_i 表示表示第 i 次取得白球，i=1,2。

则所求事件的概率为

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid \bar{A}_1)\quad =\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$$

答：第二次取得白球的概率为 3/10。

三（4）、一袋中装有 10 个球，其中 3 个白球，7 个红球。现从中采用不放回方式摸球两次，

每次一个，若第二次取得白球，则第一次也是白球的概率。

解 设 A_i 表示表示第 i 次取得白球，i=1,2 。

则所求事件的概率为

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)} = \frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{9}$$

答：第二次摸得白球，第一次取得也是白球的概率为 2/9。

三（5）、市场上出售的某种商品由三个厂家同时供货，其供应量第一厂家为第二厂家的两倍，第二、第三厂家相等，且第一、第二、第三厂家的次品率依次为 2%，2%，4%。若在市场上随机购买一件商品为次品，问该件商品是第一厂家生产的概率为多少？

解 设 A_i 表示产品由第 i 家厂家提供，i=1, 2, 3； B 表示此产品为次品。

则所求事件的概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1|B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}\times 0.02}{\frac{1}{2}\times 0.02+\frac{1}{4}\times 0.02+\frac{1}{4}\times 0.04}=0.4$$

答：该件商品是第一产家生产的概率为 0.4。

三（6）、甲、乙、丙三车间加工同一产品，加工量分别占总量的 25%、35%、40%，次品率分别为 0.03、0.02、0.01。现从所有的产品中抽取一个产品，试求（1）该产品是次品的概率；（2）若检查结果显示该产品是次品，则该产品是乙车间生产的概率是多少？

解：设 A_1， A_2， A_3 表示甲乙丙三车间加工的产品，B 表示此产品是次品。

（1）所求事件的概率为

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$=0.25\times0.03+0.35\times0.02+0.4\times0.01=0.0185$

（2）$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.35\times0.02}{0.0185}\approx0.38$

答：这件产品是次品的 概率为 0.0185，若此件产品是次品，则该产品是乙车间生产的概率为 0.38。

三（7)、一个机床有 1/3 的时间加工零件 A，其余时间加工零件 B。加工零件 A 时停机的概率是 0.3，加工零件 A 时停机的概率是 0.4。求（1）该机床停机的概率；（2）若该机床已停机，求它是在加工零件 A 时发 生停机的概率。

解：设 C_1，C_2，表示机床在加工零件 A 或 B，D 表示机床停机。

（1）机床停机夫的概率为

$$P(B)=P(C_1).P(D|C_1)+P(C_2).P(D|A_2)=\frac{1}{3}\times0.3+\frac{2}{3}\times0.4=\frac{11}{30}$$

（2）机床停机时正加工零件 A 的概率为

$$P(C_1|D)=\frac{P(C_1).P(D|C_1)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{3}\times0.3}{\frac{11}{30}}=\frac{3}{11}$$

三（8)、甲、乙、丙三台机床加工一批同一种零件，各机床加工的零件数量之比为 5：3：2，各机床所加工的零件合格率依次为 94%，90%，95%。现从加工好的整批零件中随机抽查一个，发现是废品，判断它是由甲机床加工的概率。

解 设 A_1，A_2，A_3表示由甲乙丙三机床加工，B 表示此产品为废品。(2 分)

则所求事件的概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1|B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{1}{2}\times0.06}{0.5\times0.06+0.3\times0.10+0.2\times0.05}=\frac{3}{7}$$

答：此废品是甲机床加工概率为 3/7。

三（9)、某人外出可以乘坐飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，其概率分别为 5%、15%、

30%、50%，乘坐这几种交通工具能如期到达的概率依次为 100%、70%、60%、90%。已知该人误期到达，求他是乘坐火车的概率。（10 分）

解：设 A_1，A_2，A_3，A_4 分别表示乘坐飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，B 表示误期到达。

则 $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2|B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}$ $=\dfrac{0.15\times0.3}{0.05\times0+0.15\times0.3+0.3\times0.4+0.5\times0.1}=0.209$

答：此人乘坐火车的概率为 0.209。

三（10）、某人外出可以乘坐飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，其概率分别为 5%、15%、30%、50%，乘坐这几种交通工具能如期到达的概率依次为 100%、70%、60%、90%。求该人如期到达的概率。

解：设 A_1，A_2，A_3，A_4 分别表示乘坐飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，B 表示如期到达。

则 $P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)$ $=0.05\times1+0.15\times0.7+0.3\times0.6+0.5\times0.9=0.785$

答：如期到达的概率为 0.785。

四（1）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ax, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）A；（2）X 的分布函数 F (x)；（3）P (0.5 < X <2)。

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 Axdx=\dfrac{A}{2}x^2|_0^1=\dfrac{A}{2}=1$

$A=2$

（2）当$x<0$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=0$

当$0\le x<1$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{x}2tdt=x^{2}$

当$x\ge 1$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{1}2tdt=1$

故 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

(3) P（1/2<X<2）=F(2)—F(1/2)=3/4

四（2)、已知连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}kx+1, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）k ；（2）分布函数 F (x)； （3）P (1.5 <X <2.5)

解:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{2}(kx+1)dx=(\frac{k}{2}x^{2}+x)|_{0}^{2}=2k+2=1$

$k=-1/2$

（2）当$x<0$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=0$

当$0\le x<2$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{x}(-0.5t+1)dt=-\frac{x^{2}}{4}+x$

当$x\ge 2$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=1$

故 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -\frac{x^{2}}{4}+x, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

(3) P（1.5<X<2.5）=F(2.5)—F(1.5)=1/16

四（3)、已知连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}a\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）a;（2）X 的分布函数 F (x);（3）P (X >0.25)。

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 a\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}a = 1$$

解: $a = 3/2$

（2）$当x<0时，\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

$当0 \le x < 1时，\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \tfrac{3}{2}\sqrt{t}dt = x^{3/2}$

$当x \ge 1时，\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$

$$故\ F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^{3/2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

(3) P（X>1/4）=1—F(1/4)=7/8

四（4）、已知连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in(0,A) \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求（1）A;（2）分布函数 F (x);（3）P (− 0.5 < X <1)。 ）

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^A 2xdx = A^2 = 1$$

解: $A = 1$

（2）$当x<0时，\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

$当0 \le x < 1时，\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 2tdt = x^2$

$当x \ge 1时，\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$

$$故\ F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

(3) P（-0.5<X<1）=F(1)—F(-0.5)=1

四（5）、已知连续型随即变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求（1）c;　（2）分布函数 F (x);（3）　P (-0.5 < X < 0.5)。

$$\text{(1)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{c}{\sqrt{1\text{-}x^2}}dx = c\arcsin x\,|_{-1}^{1} = c\pi = 1$$

解: $c = 1/\pi$

(2) 当$x < -1$时， $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

当$-1 \le x < 1$时， $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{x} \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{\pi}\arcsin t\,|_{-1}^{x}$

$$= \frac{1}{\pi}(\arcsin x + \frac{\pi}{2})$$

当$x \ge 1$时， $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$

$$\text{故}\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{\pi}(\arcsin x + \frac{\pi}{2}), & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

(3) P（-0.5<X<0.5） =F(0.5)—F(-0.5)=1/3

四（6)、已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求（1） A，B;　（2）密度函数 f (x);（3） P (1<X<2)。

$$\text{(1)}\quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = A = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = A + B = 0$$

解: $B = -1$

(2)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

(3) P（1<X<2） =F(2)—F(1)= $e^{-1/2} - e^{-2}$

四（7)、已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = A + B\arctan x$$

求（1） A，B;　（2）密度函数 f (x);（3） P (1<X<2)。

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = A + \frac{\pi}{2}B = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = A - \frac{\pi}{2}B = 0$$

解: $\mathrm{A} = 1/2, \qquad B = 1/\pi$

（2）

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

(3) P（0<X<2）=F(2)—F(0)= $\frac{1}{\pi}\arctan 2$

四（8)、已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ A\sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

求（1）A; （2）密度函数 f (x)；（3）P (0< X< 0.25)。

解: $(1)\ \lim_{x\to1} F(x) = A = 1$

$A = 1$

(2)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) P（0<X<0.25）=1/2

四（9)、已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{A}{x^2}, & x > 2 \\ 0, & x \le 2 \end{cases}$$

求（1）A; （2）密度函数 f (x)；（3）P (0 ≤ X ≤ 4)。

、解: $(1)\ \lim_{x\to2} F(x) = 1 - A/4 = 0$

$A = 4$

(2)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3}, & x > 2 \\ 0, & x \le 2 \end{cases}$$

(3) P（0<X<4）=3/4

四（10)、已知连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & x\in(0,a)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）a；（2）分布函数 F (x)；（3）P (− 0.5 < X < 0.5)。

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^a\frac{2x}{\pi^2}dx=1$

$a=\pi$

(2) 当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=0$

当 $0\le x<\pi$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x\frac{2t}{\pi^2}dt=\frac{x^2}{\pi^2}$

当 $x\ge\pi$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=1$

故 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{\pi^2}, & 0\le x<\pi\\ 1, & x\ge\pi\end{cases}$

(3) P（-0.5<X<0.5）=F(0.5)—F(-0.5)= $\frac{1}{4\pi^2}$

五（1）、设系统 L 由两个相互独立的子系统 L1，L2 并联而成，且 L1、L2 的寿命分别服从参数为 $\alpha,\beta(\alpha\neq\beta)$ 的指数分布。求系统 L 的寿命 Z 的密度函数。

解：令 X、Y 分别为子系统 L1、L2 的寿命，则系统 L 的寿命 Z = max (X, Y)。

显然，当 z≤0 时，F Z (z) = P (Z≤z) = P (max (X, Y)≤z) = 0；

当 z>0 时，F Z (z) = P (Z≤z) = P (max (X, Y)≤z)

= P (X≤z, Y≤z) = P (X≤z)P (Y≤z) = $\int_0^z\alpha e^{-\alpha x}dx\int_0^z\beta e^{-\beta y}dy$ = $(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z})$ 。

因此，系统 L 的寿命 Z 的密度函数为

f Z (z) = $\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

五（2）、已知随机变量 X ~ N（0，1），求随机变量 Y = X 2 的密度函数。

解：当 y≤0 时，F Y (y) = P (Y≤y) = P (X 2≤y) = 0；

当 y>0 时，F Y (y) = P (Y≤y) = P (X 2≤y) = $P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

因此，f Y (y) = $\frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi\, y}}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

五（3）、设系统 L 由两个相互独立的子系统 L1、L2 串联而成，且 L1、L2 的寿命分别服从参数为$\alpha, \beta(\alpha \ne \beta)$的指数分布。求系统 L 的寿命 Z 的密度函数。

解：令 X、Y 分别为子系统 L1、L2 的寿命，则系统 L 的寿命 Z = min (X, Y)。

显然，当 z≤0 时，F Z (z) = P (Z≤z) = P (min (X, Y)≤z) = 0；

当 z>0 时，F Z (z) = P (Z≤z) = P (min (X, Y)≤z) = 1 − P (min (X, Y)>z)

= 1 − P (X>z, Y>z) = 1 − P (X>z)P (Y>z) = $1 - \int_z^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \int_z^{+\infty} \beta e^{-\beta y} dy$ = $1 - e^{-(\alpha+\beta)z}$ 。

因此，系统 L 的寿命 Z 的密度函数为

f Z (z) = $\frac{d}{dz}F_Z(z) = \begin{cases} -(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$

五（4）、已知随机变量 X ~ N（0，1），求 Y = |X|的密度函数。

解：当 y≤0 时，F Y (y) = P (Y≤y) = P (|X |≤y) = 0；

当 y>0 时，F Y (y) = P (Y≤y) = P (|X |≤y) = $P(-y \le X \le y)$

$= \int_{-y}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 2\int_{-0}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

因此，f Y (y) = $\frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-y^2/2} & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

五（5）、设随机向量（X，Y）联合密度为

f(x, y)= $\begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

（1） 求系数 A；

（2） 判断 X，Y 是否独立，并说明理由；

（3） 求 P{ 0≤X≤2，0≤Y≤1}。

解：（1）由 1 = $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-(2x+3y)}dxdy = A\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-3y}dy$ =

$A(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty})(-\frac{1}{3}e^{-3y}\Big|_0^{+\infty}) = \frac{A}{6},$

可得 A = 6。

（2）因（X，Y）关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

fX (x) = $\begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$ 和 fY (y) = $\begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$，

则对于任意的 $(x,y) \in R^2$，均成立 f (x, y)= fX (x)* fY (y)，所以 X 与 Y 独立。

（3）P{ 0≤X≤2，0≤Y≤1} = $\int_0^2\int_0^1 6e^{-(2x+3y)}dxdy = \int_0^2 2e^{-2x}dx \cdot \int_0^1 3e^{-3y}dy$

= $(-e^{-2x}\Big|_0^2)(-e^{-3y}\Big|_0^1) = (1-e^{-4})(1-e^{-3}).$

五（6）、设随机向量（X，Y）联合密度为

f (x, y)= $\begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（1） 求系数 A；

（2） 判断 X，Y 是否独立，并说明理由；

（3） 求 P{ 0≤X≤1，0≤Y≤1}。

解：（1）由 1 = $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-(3x+4y)}dxdy = A\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-4y}dy$

= $A(-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty})(-\frac{1}{4}e^{-4y}\Big|_0^{+\infty}) = \frac{A}{12},$ 可得 A = 12。

（2）因（X，Y）关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

fX (x) = $\begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$ 和 fY (y) = $\begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0; \\ 0, & 其它. \end{cases}$，

则对于任意的 $(x,y) \in R^2$，均成立 f (x, y)= fX (x)* fY (y)，所以 X 与 Y 独立。

（3）P{ 0≤X≤1，0≤Y≤1} = $\int_0^1\int_0^1 12e^{-(3x+4y)}dxdy = \int_0^{+\infty} 3e^{-3x}dx \cdot \int_0^{+\infty} 4e^{-4y}dy$

= $(-e^{-3x}\Big|_0^1)(-e^{-4y}\Big|_0^1) = (1-e^{-3})(1-e^{-4}).$

五（7）、设随机向量（X，Y）联合密度为

f(x, y)= $\begin{cases} 6x, & 0 \le x \le y \le 1; \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（1） 求（X，Y）分别关于 X 和 Y 的边缘概率密度 fX(x)，fY(y)；

（2） 判断 X，Y 是否独立，并说明理由。

解：（1）当 x<0 或 x>1 时，fX (x) = 0；

当 0≤x≤1 时，fX (x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^1 6xdy = 6x(1-x).$

因此，（X，Y）关于 X 的边缘概率密度 fX (x) = $\begin{cases} 6x-6x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

当 y<0 或 y>1 时，fY (y) = 0；

当 0≤y≤1 时，fY (y) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^y 6xdx = 3x^2 \,|_0^y = 3y^2.$

因此，（X，Y）关于 Y 的边缘概率密度 fY (y) = $\begin{cases} 3y^2, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（2）因为 f (1/2, 1/2) = 3/2，而 fX (1/2) fY (1/2) = (3/2)*(3/4) = 9/8≠f (1/2, 1/2),

所以，X 与 Y 不独立。

五（8）、设二维随机向量（X，Y）的联合概率密度为

f (x, y)= $\begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y; \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（1） 求（X，Y）分别关于 X 和 Y 的边缘概率密度 fX(x)，fY(y)；

（2） 判断 X 与 Y 是否相互独立，并说明理由。

解：（1）当 x≤0 时，fX (x) = 0；

当 x>0 时，fX (x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^{+\infty} e^{-y}dy = e^{-x}.$

因此，（X，Y）关于 X 的边缘概率密度 fX (x) = $\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

当 y≤0 时，fY (y) = 0；

当 y>0 时，fY (y) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}.$

因此，（X，Y）关于 Y 的边缘概率密度 fY (y) = $\begin{cases} ye^{-y}, & y>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（2）因为 f (1, 2) = e-2，而 fX (1) fY (2) = e-1*2e-2 = 2 e-3≠f (1, 2),

所以，X 与 Y 不独立。

五（9）、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

设 F(x)是 X 的分布函数，求随机变量 Y=F(X)的密度函数。

解：当 y<0 时，F Y (y) = P (Y≤y) = P (F(X)≤y) = 0；

当 y>1 时，F Y (y) = P (Y≤y) = P (F(X)≤y) = 1；

当 0≤y≤1 时，F Y (y) = P (Y≤y) = P ((F(X)≤y) = $P(X \le F^{-1}(y))$

= $F(F^{-1}(y)) = y$

因此，f Y (y) = $\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0\le y\le 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

五（10）、设随机向量（X，Y）联合密度为

f(x, y)= $\begin{cases} 8xy, & 0\le x\le y\le 1; \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（1）求（X，Y）分别关于 X 和 Y 的边缘概率密度 fX(x)，fY(y)；

（2）判断 X，Y 是否独立，并说明理由。

解：（1）当 x<0 或 x>1 时，fX (x) = 0；

当 0≤x≤1 时，fX (x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^1 8xydy = 4x \cdot y^2 |_x^1 = 4x(1-x^2).$

因此，（X，Y）关于 X 的边缘概率密度 fX (x) = $\begin{cases} 4x-4x^3, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

当 y<0 或 y>1 时，fY (y) = 0；

当 0≤y≤1 时，fY (y) = $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^y 8xydx = 4y \cdot x^2 |_0^y = 4y^3.$

因此，（X，Y）关于 Y 的边缘概率密度 fY (y) = $\begin{cases} 4y^3, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

（2）因为 f (1/2, 1/2) = 2， 而 fX (1/2) fY (1/2) = (3/2)*(1/2) = 3/4≠f (1/2, 1/2),

所以，X 与 Y 不独立。

《概率论与数理统计》 试卷 A

（考试时间：90 分钟；　　考试形式：闭卷）

（注意：请将答案填写在答题专用纸上，并注明题号。答案填写在试卷和草稿纸上无效）

一、单项选择题(本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分)

1、A，B 为二事件，则 $\overline{A \cup B} = ($　　$)$

A、AB　B、$\overline{A}\,\overline{B}$　C、$A\overline{B}$　D、$\overline{A} \cup \overline{B}$

2、设 A，B，C 表示三个事件，则 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 表示 $($　　$)$

A、A，B，C 中有一个发生

B、A，B，C 中恰有两个发生

C、A，B，C 中不多于一个发生　D、A，B，C 都不发生

3、A、B 为两事件，若 $P(A \cup B) = 0.8$，$P(A) = 0.2$，$P(\overline{B}) = 0.4$，

则 $($　　$)$ 成立

A、$P(A\overline{B}) = 0.32$　　B、$P(\overline{A}\,\overline{B}) = 0.2$

C、$P(B-A) = 0.4$　　D、$P(\overline{B}A) = 0.48$

4、设 A，B 为任二事件，则 $($　　$)$

A、$P(A-B)=P(A)-P(B)$　　B、$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$

C、$P(AB)=P(A)P(B)$　　D、$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$

5、设事件 A 与 B 相互独立，则下列说法错误的是（　　）

A、A 与 $\overline{B}$ 独立　　B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立

C、$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$　　D、A 与 B 一定互斥

6、设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

其分布函数为 $F(x)$，则 $F(3)=$（　　）

A、0　B、0.3　C、0.8　D、1

7、设离散型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} cx^4, & x\in[0,1] \\ 0, & 其它 \end{cases}$，则常数 $c=$（　　）

A、$\dfrac{1}{5}$　B、$\dfrac{1}{4}$　C、4　D、5

8、设 $X \sim N(0,1)$，密度函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，则 $\varphi(x)$ 的最大值是（　　）

A、0　B、1　C、$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$　D、$-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

9、设随机变量 X 可取无穷多个值 0,1,2,…,其概率分布为 $p(k;3)=\dfrac{3^k}{k!}e^{-3}, k=0,1,2,\cdots$，则下式成立的是

（　　）

A、$EX=DX=3$　B、$EX=DX=\dfrac{1}{3}$

C、$EX=3$，$DX=\dfrac{1}{3}$　D、$EX=\dfrac{1}{3}$，$DX=9$

10、设 X 服从二项分布 B(n,p),则有（　　）

A、$E(2X-1)=2np$　B、$D(2X+1)=4np(1-p)+1$

C、$E(2X+1)=4np+1$　D、$D(2X-1)=4np(1-p)$

11、独立随机变量 X，Y，若 X ~ N(1,4)，Y ~ N(3,16)，下式中不成立的是（　　）

A、$E(X+Y)=4$ B、$E(XY)=3$ C、$D(X-Y)=12$ D、$E(Y+2)=16$

12、设随机变量 X 的分布列为:

X	1	2	3
p	1/2	c	1/4

则常数 c=( )

A、0 B、1 C、$\frac{1}{4}$ D、$-\frac{1}{4}$

13、设 $X \sim N(0,1)$,又常数 c 满足 $P\{X \geq c\}=P\{X<c\}$,则 c 等于( )

A、1 B、0 C、$\frac{1}{2}$ D、-1

14、已知 $EX=-1,\ DX=3$,则 $E\left[3\left(X^2-2\right)\right]=$( )

A、9 B、6 C、30 D、36

15、当 X 服从( )分布时,$EX=DX$ 。

A、指数 B、泊松 C、正态 D、均匀

16、下列结论中,( )不是随机变量 X 与 Y 不相关的充要条件。

A、$E(XY)=E(X)E(Y)$ B、$D(X+Y)=DX+DY$

C、$Cov(X,Y)=0$ D、 X 与 Y 相互独立

17、设 $X \sim b(n,p)$ 且 $EX=6,DX=3.6$, 则有( )

A、$n=10,p=0.6$ B、$n=20,p=0.3$

C、$n=15,p=0.4$ D、$n=12,p=0.5$

18、设 $p(x,y),p_{\xi}(x),p_{\eta}(y)$ 分别是二维随机变量 (ξ,η) 的联合密度函数及边缘密度函数,则( )是 ξ 与 η 独立的充要条件。

A、$E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$ B、$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$

C、ξ 与 η 不相关 D、对 $\forall x,y$, 有 $p(x,y)=p_{\xi}(x)p_{\eta}(y)$

19、设是二维离散型随机变量,则 X 与 Y 独立的充要条件是( )

A、$E(XY)=EXEy$ B、$D(X+Y)=DX+DY$ C、X 与 Y 不相关

D、对 (X,Y) 的任何可能取值 (x_i,y_j) $P_{ij}=P_{i\cdot}P_{\cdot j}$

20、设 (X,Y) 的联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases} 4xy, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$,

若 $F(x,y)$ 为分布函数，则 $F(0.5,2)=($　　$)$

A、0　　B、$\frac{1}{4}$　　C、$\frac{1}{2}$　　D、1

二、计算题(本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分)

1、若事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.8$　$P(B)=0.6$。求：$P(A+B)$ 和 $P\{\overline{A}|(A+B)\}$

解：∵A 与 B 相互独立

$\therefore P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ ………（1 分）

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ ………（1 分）

$=0.8+0.6-0.8\times0.6$

$=0.92$ ………（1 分）

又 $P(\overline{A}|A+B)=\dfrac{P[\overline{A}(A+B)]}{P(A+B)}$ ………（1 分）

$=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(A+B)}=\dfrac{P(\overline{A})P(B)}{P(A+B)}$ ………（2 分）

$=0.13$ ………（1 分）

2、设随机变量 $X\sim N(2,4)$，且 $\Phi(1.65)=0.95$。求 $P(X\geq 5.3)$

解：$P(X\geq 5.3)=1-\Phi\left(\dfrac{5.3-2}{2}\right)$

$=1-\Phi(1.65)=1-0.95=0.05$

3、已知连续型随机变量ξ的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\leq 4\\ 1, & x>4\end{cases}$，求 Eξ 和 Dξ。

解：由已知有 $\xi\sim U(0,4)$

则：$E\xi=\dfrac{a+b}{2}=2$

$D\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{4}{3}$

4、设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+Barctgx \qquad -\infty<x<+\infty$

求：（1）常数 A 和 B;

（2）X 落入（-1，1）的概率;

（3）X 的密度函数 $f(x)$

解：(1)由 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$

有：$\begin{cases} A-\dfrac{\pi}{2}B=0 \\ A+\dfrac{\pi}{2}B=1 \end{cases}$

解之有：$A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{\pi}$

(2) $P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\dfrac{1}{2}$

(3) $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

5、某射手有 3 发子弹，射一次命中的概率为 $\dfrac{2}{3}$，如果命中了就停止射击，否则一直独立射到子弹用尽。

求：（1）耗用子弹数 X 的分布列；（2）EX；（3）DX

解：(1)

X	1	2	3
P	2/3	2/9	1/9

(2) $EX=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i=1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{13}{9}$

(3) $\because EX^2=\sum_{i=1}^{3}x_i^2 p_i=1^2\times\dfrac{2}{3}+2^2\times\dfrac{2}{9}+3^2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{23}{9}$

$\therefore DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{23}{9}-(\dfrac{13}{9})^2=\dfrac{38}{81}$

6、设 (ξ,η) 的联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases} 4xy, & 0\le x,y\le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，

求：（1）边际密度函数 $p_\xi(x),p_\eta(y)$；（2）$E\xi,E\eta$；(3) ξ 与 η 是否独立

解：(1) $\because p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^1 4xydy=2x$

$\therefore p_\xi(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

同理：$p_\eta(x)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

(2) $E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_\xi(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$

同理：$E\eta=\frac{2}{3}$

(3) $\because p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$

$\therefore \xi$ 与 η 独立

三、解答题(本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分)

1、设 X_1，X_2 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的样本，下列三个估计量是不是参数 μ 的无偏估计量，若是无偏估计量，试判断哪一个较优？

$\widehat{\mu}_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$，$\widehat{\mu}_1=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$，$\widehat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$。

解：$\because E\widehat{\mu}_1=E(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2)=\mu$

同理：$E\widehat{\mu}_2=E\widehat{\mu}_3=\mu$

$\therefore \widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2,\widehat{\mu}_3$ 为参数 μ 的无偏估计量

又 $\because D\widehat{\mu}_1=D(\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2)=\frac{4}{9}DX_1+\frac{1}{9}DX_2=\frac{5}{9}\sigma^2$

同理：$D\widehat{\mu}_2=\frac{10}{16}\sigma^2$，$D\widehat{\mu}_3=\frac{2}{4}\sigma^2$

且 $D\widehat{\mu}_3<D\widehat{\mu}_1<D\widehat{\mu}_2$

$\therefore \widehat{\mu}_3$ 较优

2、设 $\xi\sim f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$ $(\theta>0)$ $x_1,x_2,\dots,x_n$。为 ξ 的一组观察值，求 θ 的极大似然估计。

解：$x_1,x_2,\dots,x_n$ 的似然函数为：

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$Ln(L) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{dLn(L)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

解之有： $\hat{\theta} = \frac{1}{\ }\sum^{n} x_i = \overline{X}$

一、(共 30 分,每题 5 分)

1、设事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.5, P(A\cup B)=0.8$，求 $P(A\overline{B})$.

解：因为事件 A 与 B 相互独立，所以

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

由 $P(A)=0.5, P(A\cup B)=0.8$，得 $P(B)=0.6$

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.2$$

2、三人独立地去破译一份密码，他们译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$.

求能将此密码译出的概率.

解：$P=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{5}$

3、设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	0.125	0.25	0.25	0.375

求 $Y=X^2+1$ 的分布律，并计算 $P(1\le X<3)$.

解：

Y	1	2	5
p	0.25	0.375	0.375

$$P(1\le X<3)=0.625$$

4、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$ 求 λ.

解：$E(X)=D(X)=\lambda$，

$$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)$$
$$=D(X)+[E(X)]^2-3E(X)+2=1$$

所以$\lambda^2-2\lambda+1=0$，得$\lambda=1$.

5、为检查某食用动物含某种重金属的水平，假设重金属的水平服从正态分布$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ均未知，现抽取容量为 25 的一个样本，测得样本均值为 186，样本标准差为 10，求μ的置信度为 0.95 的置信区间.

解：总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$(\overline{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1))$$

即 $(186\pm\frac{10}{5}\times 2.0639)$ …….2 分

所求置信区间为（181.8722，190.1278） …….1 分

6、某车间用一台包装机包装葡萄糖.包得的袋装糖重量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 当机器正常时，其均值$\mu=0.5$公斤，标准差$\sigma=0.015$公斤.某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖 9 袋，称得平均重量为 0.511 公斤，问这天包装机工作是否正常？（取显著水平$\alpha=0.05$）

解：由题意设 $H_0:\mu=0.5;H_1:\mu\neq 0.5$ ……….1 分

拒绝域为 $|\frac{\overline{X}-0.5}{\sigma/\sqrt{n}}|\geq z_{0.025}$ ……….1 分

由于$|\frac{\overline{X}-0.5}{\sigma/\sqrt{n}}|=|\frac{0.511-0.5}{0.015/\sqrt{9}}|=2.2$ ，$z_{0.025}=1.96,$ ……….2 分

即 2.2>1.96,拒绝原假设，认为这天包装机工作不正常. ……….1 分

二、(共 18 分,每题 6 分)

1、设随机变量 X 和 Y 相互独立，概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

求:（1） $E(2X-3Y)$;　（2） $D(2X-3Y)$;（3） ρ_{XY}.

解:（1） $E(2X-3Y)=2E(X)-3E(Y)=2\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{3}=0$;　....2 分

（2） $D(2X-3Y)=4D(X)+9D(Y)=4\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{9}=2$;　....2 分

（3）因为量 X 和 Y 相互独立，所以 $\rho_{XY}=0$.　　....2 分

2、已知随机变量 $X\sim N(1,25), Y\sim N(2,36)$，$\rho_{XY}=0.4$，

求：$U=3X+2Y$ 与 $V=X-3Y$ 的协方差.

解：$Cov(U,V)=Cov(3X+2Y,X-3Y)$

$=3D(X)-9Cov(X,Y)+2Cov(X,Y)-6D(Y)$....3 分

$=3D(X)-7\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}-6D(Y)$

$=3\times 25-7\times 0.4\times 5\times 6-6\times 36=-225$　　....3 分

3、设 $X_1,X_2,\cdots,X_{13}$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的一个样本，且已知随机变量 $Y=a(\sum_{i=1}^{4}X_i)^2+b(\sum_{i=5}^{13}X_i)^2$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布，

求 a,b 的值.

解：因为 $X_i\sim N(0,1)$ 且相互独立，$i=1,2,\cdots,13$.

所以，$\sum_{i=1}^{4}X_i\sim N(0,4)$，$\sum_{i=5}^{13}X_i\sim N(0,9)$，　....2 分

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}X_i\sim N(0,1)$，$\frac{1}{3}\sum_{i=5}^{13}X_i\sim N(0,1)$，且相互独立　....2 分

三、(共 18 分,每题 6 分)

1、设总体 $X \sim N(52, 6^2)$,现随机抽取容量为 36 的一个样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落入（50.8，53.8）之间的概率.

解：$\overline{X} \sim N(52,1)$， ……….2 分

$P\{50.8 < \overline{X} < 53.8\} = \Phi(53.8-52) - \Phi(50.8-52)$

$= \Phi(1.8) - \Phi(-1.2) = 0.9641 - 1 + 0.8849$ ….3 分

$= 0.849$ ……….1 分

2、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} Ae^x, & x \le 0, \\ B, & 0 < x \le 1, \\ 1 - Ae^{-(x-1)}, & x > 1. \end{cases}$

求：(1) A , B 的值；(2) $P\{X > \frac{1}{3}\}$.

解：(1) 由连续型随机变量分布函数的连续性，得

$\lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = F(0)$， $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = F(1)$，

即 $\begin{cases} A = B \\ B = 1 - A \end{cases}$ 解得 $A = B = 0.5$ ……….3 分

(2) $P\{X > \frac{1}{3}\} = 1 - F(\frac{1}{3}) = 1 - 0.5 = 0.5$ ……….3 分

3、箱子中有一号袋 1 个，二号袋 2 个.一号袋中装 1 个红球，2 个黄球，二号袋中装 2 个红球，1 个黄球，今从箱子中任取一袋，从中任取一球，结果为红球，求这个红球是从一号袋中取得的概率.

解：设 A_i ={从箱子中取到 i 号袋}，$i=1,2$

B={抽出的是红球}

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$ ……….2 分

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$$ ……….1 分

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{1}{5}$$ ……….3 分

四、（8 分） 设随机变量 X 具有密度函数 $f(x)=\begin{cases}Ax, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

求（1）常数 *A*；（2）*X* 的分布函数.

（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ ……….2 分

所以 $A\int_0^1 xdx=1$ 得 $A=2$ ……….2 分

（2）$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \int_0^x 2xdx, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$ ……….4 分

五、（8 分）某箱装有 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 60、30、10 件，现从中随机抽取一件，记

$X_i=\begin{cases}1, & 若抽到 i 等品,\\ 0, & 没有抽到 i 等品.\end{cases}$ 求 X_1，X_2 的联合分布律.

解：设 A_1,A_2,A_3 分别表示抽到一、二、三等品，

$P(X_1=0,X_2=0)=P(A_3)=0.1$，$P(X_1=1,X_2=0)=P(A_1)=0.6$

$P(X_1=0,X_2=1)=P(A_2)=0.3$，$P(X_1=1,X_2=1)=0$

X_1，X_2 的联合分布律为

X_1 \ X_2	0	1
0	0.1	0.3
1	0.6	0.0

……….8 分（每个 2 分）

六、（10 分）设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（1）求边缘概率密度；（2）判断随机变量 X 和 Y 是否独立.

解：（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ ……….1 分

$$=\begin{cases}\frac{15}{2}x^2(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$ ……….2 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ ……….1 分

$$=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$ ……….2 分

（2）因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以随机变量 X 和 Y 不独立.

……….4 分

七、（8 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 为一相对应的样本观测值，总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta\, x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求参数 θ 的矩估计和极大似然估计.

解：（1）矩估计 $E(X)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\dfrac{\theta}{\theta+1}$， …….2 分

由 $A_1=\mu_1$ 得 $\dfrac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$ …….2 分

（2）似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$

对数似然函数 $LnL(\theta)=nLn\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}Lnx_i$ …….2 分

令 $\dfrac{dLnL(\theta)}{d\theta}=0$，得 $\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}Lnx_i=0\Rightarrow\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}Lnx_i}$

参数 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}LnX_i}$ …….2 分

附 $\Phi(1.8)=0.9641$，$\Phi(1.2)=0.8849$，$\Phi(1.5)=0.9332$，$\Phi(2.2)=0.0.9861$，

$Z_{0.025}=1.96$，$Z_{0.05}=1.645$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$