齐鲁工业大学 <u>23/ 24</u> 学年第<u>一</u>学期《<u>线性代数 I</u>》期末考试试卷

（A 卷）参考答案　　　　（共 4 页）

一、填空题（每题 2 分，满分 16 分）

1.9；　2.+；　3. $-\frac{4}{3}$；　4.2；　5.1；　6. $R(A)=R(A,b)$；　7. $n-R(A)$；　8. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

二、计算题（每题 8 分，满分 32 分）

9.解：因为 $[A\ E]=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{bmatrix}$

10.解：移项得 $(A^*-2E)B=A^{-1}$

则 $B=(A^*-2E)^{-1}A^{-1}$

$=\left[A(A^*-2E)\right]^{-1}$

$=\left[AA^*-2A\right]^{-1}$

$=\left[|A|E-2A\right]^{-1}$

又 $|A|=2$,故

$$B=\left[2E-2A\right]^{-1}=\frac{1}{2}\left[E-A\right]^{-1}\quad=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & & \\ & -1 & \\ & & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

11. 解：设 $\boldsymbol{k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0.}$

代入，有 $k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_1(2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)+k_3(\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)=0$

整理，得 $\left(\boldsymbol{k}_1+2\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\left(-\boldsymbol{k}_2+2\boldsymbol{k}_3\right)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_1+2\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3=\mathbf{0} \\ -\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3=\mathbf{0} \\ -\boldsymbol{k}_2+2\boldsymbol{k}_3=\mathbf{0} \end{cases}$$

解得，$k_1=k_2=k_3=0$ 是其唯一解，因此 β_1,β_2,β_3 线性无关.

12. 解： $A_{21}-A_{22}+2A_{24}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

=18

三、综合题（每题 14 分，满分 42 分）

13.解： 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为列构成矩阵，作初等行变换，先化行阶梯再化行最简，

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -21 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）向量组的秩 R=3.

（2）向量组的一个最大无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

$\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\alpha_3,\alpha_5=-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$， .

14.解： $|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -4\\ 2 & 5-\lambda & \lambda-9\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(\lambda-10)$

因此，当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq10$时，方程组有唯一解.

当$\lambda=1$时，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$知$R(A)=R(B)=2$，故方程组有无限多个解.

且通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}(c_1,c_2\in R)$$

当$\lambda=10$时，$B=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ -2 & -4 & -5 & -11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

知$R(A)=2$， $R(B)=3$，故方程组无解.

15.解： f 的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ -1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$

求得A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=0$

对应$\lambda_1=1$解方程$(A-E)X=0$得基础解系$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$，

对应$\lambda_2=2$解方程$(A-2E)X=0$得基础解系$\xi_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$

对应 $\lambda_3=0$ 解方程 $AX=0$ 得基础解系 $\xi_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

将 ξ_1，ξ_2，ξ_3 单位化,得

$$e_1=\left(0,1,0\right)^T,e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^T,e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

令正交阵 $P=\left[e_1\quad e_2\quad e_3\right]=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

经正交变换 $X=Py$， f 化为标准形： $f=y_1^2+2y_2^2$

四、简答题（每题 5 分，满分 10 分）

16.解：二次型 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&6&0\\-1&0&4\end{pmatrix}$.

其各顺序主子式分别为

$$D_1=2>0,D_2=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&6\end{vmatrix}=11>0,D_3=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-1&6&0\\-1&0&4\end{vmatrix}=38>0.$$

故此二次型是正定二次型.

17.解： 因 $A^2+A-4E=O$

故 $(A+2E)(A-E)-2E=0$

即 $(A+2E)(A-E)=2E$

$$(A+2E)\frac{(A-E)}{2}=E$$

因此， $(A+2E)^{-1}=\dfrac{(A-E)}{2}$