齐鲁工业大学 16-17-2 期末考试《线性代数》（B 卷）

一. 选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.设 A,B 均为 n 阶方阵，则必有（ ）

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　(B) $AB=BA$

(C) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　(D) $|AB|=|BA|$

2. 已知 A,B 均为 n 阶实对称矩阵，且都正定，那么 AB 一定是( )

(A) 对称矩阵　　(B) 正定矩阵

(C) 可逆矩阵　　(D) 正交矩阵

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & ab+4 & 2 \\ 2 & 4 & a+2 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则( )

(A) $a=0,\ b=0$　　(B) $a=0,\ b\neq 0$

(C) $a\neq 0,\ b=0$　　(D) $a\neq 0,\ b\neq 0$

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|$=2，则 $\left|-2\boldsymbol{A}^*\right|=$（ ）

(A) -2^5　　(B) -2^3　　(C) 2^3　　(D) 2^5

5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|A|=0$，但 A 中某元素 a_{kl} 的代数余子式 $A_{kl}\neq 0$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系中解向量个数是( )

(A) 1　　(B) k　　(C) l　　(D) n

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

6．设四阶行列式 D 的第四列元素分别为 $1,0,2,3$ 且他们对应的余子式分别为 $2,-3,1,2$，则 D=______________.

7．向量 $\alpha=[1,4,0,2]$ 与 $\beta=[2,-2,1,3]$ 的距离和内积分别为__________和________.

8．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\beta}=(2,k,-1)^T,\boldsymbol{\gamma}=(-1,1,-4)^T$ 线性相关，则 $k=$______.

9．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$ 正定，则 λ 的取值范围为________.

10．Matlab 软件中，在命令窗口输入 rank(ones(2,3))，显示 ans=____.

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

11.(8分) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}$.

12.（8 分）计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

四、解方程组

13.（10分）λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=1\\ x_1+x_2-x_3=-1\\ 3x_1-x_2+\lambda x_3=-1\end{cases}$$

有唯一解、有无穷多解、没有解？并在有无穷多解时，求出它的通解.

五、解答题

14.（10 分）求向量组

$$\alpha_1=(2,1,3,-1)^T,\alpha_2=(3,-1,2,0)^T,\alpha_3=(1,3,4,-2)^T,\alpha_4=(4,-3,1,1)^T$$

的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

15. (7 分) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}.

16.(10 分）设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，对应的特征向量依次为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},.$$

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

（2）求 $\boldsymbol{A}^{2010}$.

17.（6 分） 求二次型 $f=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 的矩阵 A，并求 f 的秩.

六、证明题

18.(6 分) 设 A，B 都是 n 阶矩阵，$AB = A + B$，证明

（1）$A - E$，$B - E$ 都可逆;

（2）$AB = BA$.