学院、系________ 专业班级________ 学号________ 姓名________

密……………………封……………………线

齐鲁工业大学 21/22 学年第一学期《线性代数 I》期末考试试卷

（A 卷）　　　　（本试卷共 4 页）

题号	一	二	三	四	总分
得分					

得分	
阅卷人	

一、计算题（本题满分 20 分，每题 10 分）

1. 判断二次型 $f = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ 的正定性.

2. 求行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 9 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ 的第一行元素的余子式之和.

得分	
阅卷人	

二、解答题（本题满分 30 分，每题 15 分）

1. 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = -E$，其中 E 是三阶单位阵，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 B 的行列式 $|B|$.

2. 已知 $\alpha_1 = (6,1,1,-1,2)^T$，$\alpha_2 = (1,0,2,3,-4)^T$，$\alpha_3 = (1,1,-9,-16,22)^T$，$\alpha_4 = (11,\ 2,0,-5,8)^T$，讨论该向量组的线性相关性，求它的一个最大无关组，并把其余向量用最大无关组线性表示.

得分	
阅卷人	

三、综合题（本题满分 40 分，每题 20 分）

1. 求方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ 满足条件 $x_3 + x_4 = 1$ 的解.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，(1) 求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(2) 若 $B = f(A) = A^2 - 2A + E$，求 $|B|$.

得分	
阅卷人	

四、证明题（本题满分 10 分，每题 5 分）

1. 设 A 是 3 阶矩阵，$|A| = \frac{1}{2}$，证明：$|(2A)^{-1} - 5A^*| = -16$.

2. 已知 A 是 3 阶对称矩阵，$|A| = -2$，A 的两个特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$，对应的特征向量分别是 $p_1 = (1,1,1)^T, p_2 = (2,-1,-1)^T$. 证明矩阵 A 的第三个特征值 $\lambda_3 = 2$，并求它对应的特征向量.