齐鲁工业大学 2023/ 2024 学年第 2 学期《 线性代数Ⅰ 》期末考试试卷

（A 卷）参考答案　　　　　　　　（共 2 页）

一、选择题（本题共 24 分）

1-4：A B A C　　5-8：D D C B

二、填空题（本题共 16 分）

1. <　　2. $(a+2b)(a-b)^2$　　3. 6　　4. 2

三、计算题(本题共 55 分，其中第 1-3 题每题 9 分，第 4-5 题每题 14 分)

1. 解： $D=\begin{vmatrix}3&0&4&1\\2&3&1&4\\0&-7&8&3\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&3&1&4\\2&5&-1&6\\0&-7&8&3\\-1&0&0&0\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{4+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix}3&1&4\\5&-1&6\\-7&8&3\end{vmatrix}=-78$$

2. 解：（1）$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 A 可逆. 由 $A^2-AB=E$ 可得 $B=A-A^{-1}$.

由初等行变换计算可得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,

所以 $B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

3. 解：$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

所以 $R(A)=3$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个最大线性无关组，且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_4$.

4. $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&a-3&5\\-1&1&4-a\\a&-a&2a+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&a-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

因为方程组有非零解，所以$R(A)<3$，所以$a=1$

方程组的通解是$x=k(1,1,0)^T$， $k\in R$.

5. 解：二次型f的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$，

得特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$.

当$\lambda_1=\lambda_2=2$时，得特征向量$\xi_1=(1,1,0)^T$，$\xi_2=(0,0,1)^T$.

正交单位化得$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$，$\eta_2=(0,0,1)^T$.

当$\lambda_3=0$时，得特征向量$\xi_3=(-1,1,0)^T$，单位化得$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$.

记$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，作正交变换$x=Py$，二次型 f 可化为 $f=2{y_1}^2+2{y_2}^2+0{y_3}^2$.

四、综合题(本题共 5 分)

解：因为$R(A)=3$，所以齐次方程组$Ax=0$的基础解系中只含 1 个线性无关的解.

由ξ_1,ξ_2,ξ_3是$Ax=b$的解，所以$(\xi_2+\xi_3)-2\xi_1=(1,-1,2,1)^T$是$Ax=0$的解，也是它的基础解系.

所以$Ax=b$的通解是$x=k(1,-1,2,1)^T+(1,2,-1,1)^T,k\in R$.