线性代数期末考试试卷合集（共 8 套）

线性代数期末试卷及参考答案（第一套）

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ 满足 $AB=B$，则矩阵 $B=$ （　　）

(A) $\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix}k_1 & -k_2\\ -k_1 & k_2\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}-1 & k_1\\ 1 & k_2\end{pmatrix}$.（$k_1,k_2$ 为任意常数）

2、设 n 阶方阵 A，B 满足 $AB=E$，则下列一定成立的是 （　　）

(A) $A=B=E$ ；　(B) $A+B=E$ ；　(C) $|A|=1$ 或 $|B|=1$；　(D) $|A|\cdot|B|=1$.

3、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $R(A+E)+R(A-E)=$ （　　）

(A) 2；　(B) 3；　(C) 4；　(D) 5 .

4、设向量组 $A:\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r$ 可由向量组 $B:\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_s$ 线性表示，则正确的是 （　　）

(A)当 $r>s$ 时，向量组 A 必线性相关；　(B) 当 $r<s$ 时，向量组 A 必线性相关；

(C)当 $r>s$ 时，向量组 B 必线性相关；　(D) 当 $r<s$ 时，向量组 B 必线性相关.

5、设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，$A\vec{x}=\vec{0}$ 是非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是 （　　）

(A) 若 $A\vec{x}=\vec{0}$ 仅有零解，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解；

(B) 若 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多解，则 $A\vec{x}=\vec{0}$ 有非零解；

(C) 若 $m=n$，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解；

(D) 若 A 的秩 $R(A)<m$，则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有无穷多解.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、设方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$，当 a,b,c 满足________________________时，A 为可逆方阵.

2、若可逆方阵 A 的有一个特征值 3，则 $(3A)^{-1}$ 必有一个特征值为________________________.

3、设 A 为 4×5 的矩阵，且秩 $R(A)=2$，则齐次方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系所含向量个数是_____.

4、若三阶行列式 $\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ y & 0 & 2 \\ z & 2 & 2 \end{vmatrix}$=1，则行列式

$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 10 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$=________________________.

5、设向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性相关，则常数 $x=$______________.

三、计算题（本题共 6 小题，共 50 分）

1、(6 分)设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & a & b \end{pmatrix}$ 的秩 $R(A)=2$，求常数 a， b 及一个最高阶非零子式.

2、（8 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

3、（8 分）设 3 阶方阵 A 与 B 满足 $A^*BA=2A+2BA$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，求 B.

4、（10 分）设向量组 A：$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\9\\-1\\-3\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\10\\-7\\-7\end{pmatrix}$.

求: (1) 向量组 A 的秩;　　　(2) 向量组 A 的一个最大线性无关组;

(3) 将此最大无关组之外的其它向量用最大无关组线性表示.

5、（8 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+a\end{vmatrix}$，其中 $a\neq 0$.

6、(10分)设线性方程组 $\begin{cases}x_1-3x_2-x_3=0\\ x_1-4x_2-ax_3=b\\ 2x_1-x_2+3x_3=5\end{cases}$，问:当参数 a，b 取何值时，(1)此方程组有唯一解？ (2)此方程组无解？ (3)此方程组有无穷多解？并求出通解.

四、判断题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1、设矩阵 A,B 为 3 阶方阵，且 $|A|=2,|B|=4$，则 $|2AB^{-1}|=1$. (　　)

2、由 3 维向量构成的向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 中必有一个可由其余向量线性表示.　(　　)

3、对任意 n 阶方阵 A,B,C，若 $AB=AC$，且 $A\neq O$，则一定有 $B=C$.　(　　)

4、设向量 $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2$ 是线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解，则 $2\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2$ 也是此方程组的一个解.　(　　)

5、正交向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关.　(　　)

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1、设 n 阶对称矩阵 A 满足关系式 $A^2+6A+8E=O$，证明：

(1) $A+3E$ 是可逆矩阵，并写出逆矩阵;　　(2) $A+3E$ 是正交矩阵.

2、若 $\vec{a}_0$，$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_3$ 是 n 元非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的线性无关解，且 $R(A)=n-3$，

证明：$\vec{a}_1-\vec{a}_0$，$\vec{a}_2-\vec{a}_0$，$\vec{a}_3-\vec{a}_0$ 是其对应的齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系.

参考答案

一、选择题(本题 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. C;　2. D;　3. B;　4. A;　5. B.

二、填空题(本题 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. $ab\neq 2c$；2. $\frac{1}{9}$；　3. 3；　4. $-\frac{3}{2}$；　5. 5.

三、计算题(本题 6 小题, 共 50 分)

1. **解**: $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & a & 1\\ 0 & -7 & 1-2a & -2\\ 0 & 0 & -a-1 & b-2\end{pmatrix}$ (**2 分**)， 由 $R(\boldsymbol{A})=2$ 知，$\begin{cases}-a-1=0\\ b-2=0\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases}$，一个最高阶非零子式$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}$.

2．**解**: 由$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0,$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2.$

当$\lambda_1=-1$时, 解 $(A+E)\vec{x}=\vec{0}.$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系：$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, 对应$\lambda_1=-1$的全部特征向量为$k_1\vec{p}_1(k_1\neq 0)$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时, 解$(A-2E)\vec{x}=\vec{0}.$

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$ 得基础解系：$\vec{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{p}}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$,

对应$\lambda_2=\lambda_3=2$的特征向量为$\boldsymbol{k}_2\vec{\boldsymbol{p}}_2+\boldsymbol{k}_3\vec{\boldsymbol{p}}_3(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3$不全为0)

3. **解**:　$\boldsymbol{B}=2(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}$　　$|A|=12$

$$(|A|E-2A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\0&\frac{1}{6}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix},\quad B=2\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\0&\frac{1}{6}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

4. 解：$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)$

$$=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\4&9&0&10\\1&-1&-3&-7\\0&-3&-1&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-4&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以,秩 $R_A=3$,(**1 分**)一个最大线性无关组为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$,(**2 分**)且 $\vec{\alpha}_4=-2\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$

5. 解：$D=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a+10&2&3&4\\a+10&2+a&3&4\\a+10&2&3+a&4\\a+10&2&3&4+a\end{vmatrix}$

$$\overset{r_i-r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a+10&2&3&4\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^3(a+10)$$

6. 解：增广矩阵 $B=(A,\vec{b})=\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\1&-4&-a&b\\2&-1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&2-a&b+1\end{pmatrix}$

(1) 当 $a=2,b\neq-1$ 时，$R(A)=2<R(B)=3$，此时方程组无解.

(2) 当 $a\neq2,b$ 取任意数时，$R(A)=R(B)=3$，此时方程组有唯一解.

(3) 当 $a=2,b=-1$ 时，$R(A)=R(B)=2<3$，此时方程组有无穷多解.

$$B\to\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad 即\begin{cases}x_1=-2x_3+3\\x_2=-x_3+1\end{cases}$$

原方程组的通解为 $c\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\ (c\in R)$.

四、判断题(本题 5 小题，每小题 2 分，共 10 分)

1. ×； 2. √； 3. ×； 4. √； 5. √.

五、证明题(本题 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

1．证明: (1)由 $A^2+6A+8E=O$ 得 $A^2+6A+9E=E$，即 $(A+3E)(A+3E)=E$

所以 $A+3E$ 可逆，且 $(A+3E)^{-1}=A+3E$.

(2)由 A 为 n 阶对称矩阵知，$(A+3E)^T=A^T+(3E)^T=A+3E$，

故 $(A+3E)^T(A+3E)=(A+3E)(A+3E)=E$，所以 $A+3E$ 是正交矩阵.

2． 证明: $\because \vec{a}_0$， $\vec{a}_1$， $\vec{a}_2$， $\vec{a}_3$ 是 n 元非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解，

$\therefore \vec{a}_1-\vec{a}_0$， $\vec{a}_2-\vec{a}_0$， $\vec{a}_3-\vec{a}_0$ 是对应齐次方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解；

又 $R(A)=n-3$,所以 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系中含向量个数为 $n-R(A)=3$ 个；

下证 $\vec{a}_1-\vec{a}_0$， $\vec{a}_2-\vec{a}_0$， $\vec{a}_3-\vec{a}_0$ 线性无关即可.

设 $k_1(\vec{a}_1-\vec{a}_0)+k_2(\vec{a}_2-\vec{a}_0)+k_3(\vec{a}_3-\vec{a}_0)=\vec{0}$ 即 $k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+k_3\vec{a}_3-(k_1+k_2+k_3)\vec{a}_0=\vec{0}$

又 $\vec{a}_0$， $\vec{a}_1$， $\vec{a}_2$， $\vec{a}_3$ 线性无关， 故 $\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \\ -(k_1+k_2+k_3)=0 \end{cases}$ 有唯一解 $k_1=k_2=k_3=0$

所以 $\vec{a}_1-\vec{a}_0$， $\vec{a}_2-\vec{a}_0$， $\vec{a}_3-\vec{a}_0$ 线性无关,

从而 $\vec{a}_1-\vec{a}_0$， $\vec{a}_2-\vec{a}_0$， $\vec{a}_3-\vec{a}_0$ 是其对应的齐次方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系

线性代数期末试卷及参考答案（第二套）

一、填空题（本大题共 7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

1、设向量$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，则当$k=$___________时，$\vec{\alpha}$ 与 $k\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ 正交 .

2、设方阵A满足关系式$2A^2+3A=O$，则$(A+E)^{-1}$=________________________.

3、若三阶行列式$\begin{vmatrix}1&x&x\\x&2&0\\x&0&3\end{vmatrix}=-9$，则 $x=$__________________.

4、设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}$，多项式$f(x)=x^2+2x$，则$f(A)=$ __________________.

5、设向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\\lambda\\1\end{pmatrix}$线性相关，则常数$\lambda$=____________________.

6、n元非齐次线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$有无穷多解的充要条件是______________________.

7、设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的对应特征值$\lambda$的一个特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$,

则 $\lambda=$_______$,a=$________$,b=$_________.

二、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、设A，B是任意n阶方阵（$n\geq 2$），则下列各式正确的是 (　　)

(A) $|A+B|=|A|+|B|$；　　(B) $|A+B|\cdot|A-B|=|A^2-B^2|$；

(*C*)　$\left||A|B\right| = |A|\cdot|B|$；　　　　(*D*)　$\left|AB^T\right| = |B|\cdot|A|$.

2、下列 4 个条件中，①　A可逆　；　　　② A为列满秩（即A的秩等于A的列数）；

③　A的列向量组线性无关；　　④　$A\neq O$　；

可使推理“ 若$AB=O$， 则$B=O$ ”成立的条件个数是　　　　　　　(　　　)

(*A*)　1 个 ；　　(*B*)　2 个；　　(*C*)　3 个；　　　(*D*)　4 个.

3、向量组$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，…，$\vec{\alpha}_s$ $(s\geq 2)$线性无关，且可由向量组$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_s$线性表示，

则下列结论中<u>不成立</u>的是　(　　　)

(*A*)　向量组$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_s$线性无关；

(*B*)　对任一个$\vec{\alpha}_j$ $(1\leq j\leq s)$，向量组$\vec{\alpha}_j$，$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_s$线性相关；

(*C*)　存在一个$\vec{\alpha}_j$ $(1\leq j\leq s)$，向量组$\vec{\alpha}_j$，$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_s$线性无关；

(*D*)　向量组$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，…，$\vec{\alpha}_s$与向量组$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_s$等价.

4、设A，B均为 3 阶方阵，$R(A)=3$，$R(B)=2$，则$R(AB)=$　(　　　)

(*A*)　1；　　　(*B*)　2；　　　(*C*)　3；　　　(*D*)　6 .

5、设A为$m\times n$的矩阵，$R(A)=r$，则非齐次线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$　(　　　)

(*A*) 当$r=n$ 时有唯一解；　　(*B*) 当$r=m=n$ 时有唯一解；

(*C*) 当$m=n$ 时有唯一解；　　(*D*) 当$r<n$ 时有无穷多解.

三、计算题（本题共 6 小题，共 54 分）

1、(7 分)设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda & -1\\ 2 & 5 & -1 & \lambda\\ 1 & 1 & 10 & -6\end{pmatrix}$的秩$R(A)=2$，求常数$\lambda$及一个最高阶非零子式.

2、（9 分）求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$的全部特征值和特征向量.

3、（8 分）设 3 阶方阵A,B,C满足方程 $C(2A-B)=A$，试求矩阵A，其中

$$B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

4、（10 分）设向量组 A： $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\-6\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\13\\1\end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\-7\\-6\end{pmatrix}$.

求: (1) 向量组 A 的秩**;** (2) 向量组 A 的一个最大线性无关组**;**

(3) 将此最大无关组之外的其它向量用最大无关组线性表示.

5、（8分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}x&x&x&x\\a&-a&0&0\\0&b&-b&0\\0&0&c&-c\end{vmatrix}$， 其中 a,b,c,x 全不为0.

6、（12分）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0\\2x_1+x_2+ax_3=1\\3x_1+2x_2+4x_3=b\end{cases}$， 问:当参数 a**,** b 取何值时，

(1)此方程组有唯一解？ (2)此方程组无解？ (3)此方程组有无穷多解？并求出通解.

四、证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1、若向量 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关， 求证 $2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_2+4\vec{\alpha}_3$，$5\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1$ 也线性无关.

2、设矩阵 $A=E-\vec{\eta}\vec{\eta}^T$，其中 E 是 3 阶单位矩阵，$\vec{\eta}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是单位向量，

证明：(1) $A^2=A$； (2) A 不可逆.

参考答案

一、填空题(本题 7 小题, 每小题 3 分, 共 21 分)

1. $-\dfrac{5}{7}$； 2. $2A+E$； 3. $\pm\sqrt{3}$； 4. $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ ； 5. 6 ；

6. $R(A)=R(A,\vec{b})<n$ ； 7. -1 ，-3 ，0 .

二、选择题(本题 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. D; 2. C; 3. C; 4. B; 5. B.

三、计算题(本题 6 小题, 共 54 分)

1. **解**: $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda & -1\\ 0 & 1 & -1-2\lambda & \lambda+2\\ 0 & 0 & 9-3\lambda & \lambda-3\end{pmatrix}$ (**3 分**)， 由 $R(\boldsymbol{A})=2$ 知，$\begin{cases}9-3\lambda=0\\ \lambda-3=0\end{cases}$,

$\therefore\ \lambda=3$ (**2 分**)， 一个最高阶非零子式$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}$.

2．**解**: 由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda-1)^2=0,$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=5$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

当$\lambda_1=5$时, 解 $(A-5E)\vec{x}=\vec{0}$.

$$A-5E=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系：$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, 对应$\lambda_1=5$的全部特征向量为$k_1\vec{p}_1(k_1\neq 0)$

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时, 解$(A-E)\vec{x}=\vec{0}$.

$$A-E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$ 得基础解系：$\vec{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{p}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$,

对应$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量为$k_2\vec{p}_2+k_3\vec{p}_3(k_2,k_3\text{不全为}0)$.

3. 解: $(2C-E)A=CB$; $2C-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$; $(2C-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/5\end{pmatrix}$;

$$A=(2C-E)^{-1}\cdot CB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2/3&0\\0&0&3/5\end{pmatrix}.$$

4. 解: $A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)\to\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&17\\0&1&0&-6\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

（初等变换步骤不一，请酌情给分）

所以,秩 $R_A=3$, (**1 分**) 一个最大线性无关组为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$, (**2 分**)且 $\vec{\alpha}_4=17\vec{\alpha}_1-6\vec{\alpha}_2-2\vec{\alpha}_3$

5. 解: $D\ \underline{\underline{c_i+c_{i+1}(i=3,2,1)}}\ \begin{vmatrix}4x&3x&2x&x\\0&-a&0&0\\0&0&-b&0\\0&0&0&-c\end{vmatrix}=-4xabc$.

6. 解: 增广矩阵 $B=(A,\vec{b})=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\2&1&a&1\\3&2&4&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&4-a&-1\\0&0&2-a&b-1\end{pmatrix}$,

(1) 当 $a\neq 2$, b 取任意数时, $R(A)=R(B)=3$， 此时方程组有唯一解；

(2). 当 $a=2$, $b\neq 1$时, $R(A)=2<R(B)=3$，此时方程组无解；

(3) 当 $a=2$, $b=1$时, $R(A)=R(B)=2<3$，此时方程组有无穷多解.

$B\to\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 即 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=-2x_3-1\end{cases}$

原方程组的通解为 $c\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $(c\in R)$.

四、证明题(本题 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

1．证明：由题意 $(2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2\ ,\vec{\alpha}_2+4\vec{\alpha}_3\ ,5\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1)=(\vec{\alpha}_1\ ,\vec{\alpha}_2\ ,\vec{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&0\\0&4&5\end{pmatrix}$，记 $B=AK$.

$\because |K|=22\neq 0,\therefore K$ 可逆， 又 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$ 线性无关，

所以 $R(\ 2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2\ ,\vec{\alpha}_2+4\vec{\alpha}_3\ ,5\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1\ )=R(\ \vec{\alpha}_1,\ \vec{\alpha}_2,\ \vec{\alpha}_3)=3$，

即 $2\vec{\alpha}_1+3\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_2+4\vec{\alpha}_3$，$5\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1$ 也线性无关.

2． 证明：(1) $\because \vec{\eta}$ 为单位向量，$\therefore\ \vec{\eta}^T\vec{\eta}=1$，

$\therefore\ A^2=(E-\vec{\eta}\vec{\eta}^T)(E-\vec{\eta}\vec{\eta}^T)=E-\vec{\eta}\vec{\eta}^T-\vec{\eta}\vec{\eta}^T+\vec{\eta}(\vec{\eta}^T\vec{\eta})\vec{\eta}^T=E-\vec{\eta}\vec{\eta}^T=A$.

(2) 由(1)知，$A^2=A$， 即 $A(A-E)=O$，$\therefore\ R(A)+R(A-E)\leq 3$，

$\because \vec{\eta}$ 为单位向量，$\therefore\ A-E=-\vec{\eta}\vec{\eta}^T\neq O$， $R(A-E)\geq 1$，

从而 $R(A)\leq 2<3$， 所以 $|A|=0$， 故 A 不可逆.

另一证法： $\because\ A\vec{\eta}=(E-\vec{\eta}\vec{\eta}^T)\vec{\eta}=\vec{\eta}-\vec{\eta}\vec{\eta}^T\vec{\eta}=\vec{\eta}-\vec{\eta}=\vec{0}$ ，

$\therefore\ \vec{\eta}$ 为线性方程组 $A\vec{\eta}=\vec{0}$ 的非零解，

所以 $|A|=0$， 故 A 不可逆.

线性代数 期末试卷（A 卷）

题号	一	二	三				四	五	六	七	总分	核分人（填首卷）
			1	2	3	4						
分值	24	16	7	7	7	7	8	8	8	8	100	
得分												

一、（本大题共 8 小题，每题 3 分，共 24 分）

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵，则下面各式正确的是---------------------------------（ C ）

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(AB)^2 = A^2 B^2$ (C) $|AB| = |BA|$ (D) $AB = BA$

2. 下列命题正确的是---（ C ）

(A) 若 $A^2 = 0$，则 $A = 0$　　(B) 若 $A^2 = A$，则 $A = 0$ 或 $A = E$

(C) 若 $A = E$，则 $A^n = E$　　(D) 若 $A^2 = E$，则 $A = \pm E$

3. 若行列式的所有元素都变号，则--（ D ）

(A) 行列式一定变号　　(B) 行列式一定不变号

(C) 偶阶行列式变号　　(D) 奇阶行列式变号

4. 设 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & 2a_1 + 3a_2 & a_3 \\ b_1 & 2b_1 + 3b_2 & b_3 \\ c_1 & 2c_1 + 3c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$ -------------------------------（ B ）

(A) $6k$　(B) $3k$　(C) $2k$　(D) k

5. 若某线性方程组的系数行列式为零，则该方程组------------------------------（ D ）

(A) 有唯一解　(B) 有非零解　(C) 无解　(D) 有非零解或无解

6. 已知 $\alpha_1 = (1,1,1)^T, \alpha_2 = (1,2,3)^T, \alpha_3 = (1,3,t)^T$ 线性相关的，则 $t =$ -----（ B ）

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

7. 设方阵 A 相似于 $diag(1,1,-1)$，则 $A^{10} =$ --（ A ）

(A) E　(B) $10E$　(C) $-E$　(D) $-10E$

8. 设 A 为 n 阶方阵，则下列说法中正确的是--------------------------------------（ B ）

(A) 若 A 可对角化，则 A 为实对称阵　　(B) 若 A 为实对称阵，则 A 可对角化

(C) 若 A 可对角化，则 A 必可逆　　(D) 若 A 可逆，则 A 可对角化

二、填空题（本大题共 4 小题，每题 4 分，共 16 分）

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A^* = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$，$A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$。

2. 已知$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，则$\alpha^T\beta=$ __10__，$\alpha\ \beta^T=$ $\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$。

3. 设A是三阶方阵，$|A|=2$，则$|A^{-1}|=$ $\frac{1}{2}$，$|(2A^T)^{-1}|=$ $\frac{1}{16}$。

4. 已知三阶方阵A的特征值为$1,-2,3$，记$\varphi(A)=A^2-2A$，则$\varphi(A)$的特征值为 $-1,8,3$，$|\varphi(A)|=$ -24。

三、计算题（本大题共4小题，每题7分，共28分）

1. 计算行列式$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\1&2&3&4\\0&-2&0&0\\1&3&-2&2\end{vmatrix}$。

解：$D=(-2)(-1)^6\begin{vmatrix}3&4&0\\1&3&4\\1&-2&2\end{vmatrix}$ -- $3'$

$=(-2)\begin{vmatrix}3&4&0\\-1&7&0\\1&-2&2\end{vmatrix}=-2\times2\times(-1)^6\begin{vmatrix}3&4\\-1&7\end{vmatrix}=-100$ -------------------------------- $4'$

2．已知四阶行列式D中第一行元素为$2,3,8,-5$，其对应的余子式为$-1,0,6,9$，求D的值。

解：$D=2A_{11}+3A_{12}+8A_{13}-5A_{14}=2M_{11}-3M_{12}+8M_{13}+5M_{14}$ -------------- $4'$

$=2\times(-1)-3\times0+8\times6+5\times9=91$ --- $3'$

3．设方阵A满足$A^2-A-2E=0$，试证A及$(A-3E)$可逆并求A^{-1}及$(A-3E)^{-1}$。

解：由$A^2-A-2E=0$得$A(A-E)=2E$，-- $1'$

所以$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$，-- $2'$

由$A^2-A-2E=0$得$(A-3E)(A+2E)=-4E$，------------------------------ $2'$

所以$(A-3E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A+2E)$，--- $2'$

4. 求矩阵X，使$AX=B$，其中$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\\1&7\end{pmatrix}$。

解：$(A,B)=\begin{pmatrix}2&2&3&1&2\\2&-1&0&1&-1\\-1&0&1&1&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-3\\0&1&0&-1&-2\\0&0&1&1&4\end{pmatrix}$ ------------------ $5'$

所以，$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&-3\\-1&-2\\1&4\end{pmatrix}$ -- $2'$

四、计算题（本题8分）

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$ 的秩和 A 的列向量组的一个最大无关组。

解：记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\end{pmatrix}$，对 A 进行初等行变换得

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ --------------------------- $4'$

$\therefore\ R(A)=3$， --- $2'$

一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ -- $2'$

五、计算题（本题8分）

设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，且 $R(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2+2\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，求线性方程组 $Ax=b$ 的通解。

解：齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含向量个数为 $4-3=1$ ------------- $2'$

而 $A\alpha_i=b(i=1,2,3)\ \therefore A(3\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3)=0$ --------------------------------- $2'$

故 $3\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=(3,5,7,9)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系------------------- $2'$

$Ax=b$ 的通解为 $k(3,5,7,9)^T+(1,2,3,4)^T,k\in R$ ------------------------------ $2'$

六、讨论题（本题8分）

问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(4-\lambda)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(4-\lambda)x_3=-\lambda-2\end{cases}$

(1) 有唯一解； (2) 无解；（3）有无穷多个解？此时求出通解。

解：$|A|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 4-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$，------------------------------------ $2'$

当$|A|\neq 0$即$\lambda\neq 0,9$时，方程组有唯一解------------------------------------- $1'$

当$\lambda=0$时，$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & -2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$R(A)=R(A\,|\,b)<3$，故方程组有无穷多解

通解为$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$ ---------------------- $3'$

当$\lambda=9$时，$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ -2 & -4 & -5 & -11\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$R(A)\neq R(A\,|\,b)$，所以方程组无解--------------------------------------- $2'$

七、计算题（本题8分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3$，

（1）求该二次型的矩阵；

（2）求一个正交变换把二次型化为标准形。

解：（1）$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ --- $2'$

（2）$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-1)$

知$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$ --- $1'$

对$\lambda_1=0$有特征向量$\xi_1=(1,1,1)^T$，单位化后为$p_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$ ------------ $1'$

对$\lambda_2=1$有特征向量$\xi_2=(-1,0,1)^T$，单位化后为$p_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ --------- $1'$

对$\lambda_3=3$有特征向量$\xi_3=(1,-2,1)^T$，单位化后为$p_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T$ ------ $1'$

取 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

作正交变换 $X=PY$，则有 $f=y_2^2+3y_3^2$ -- $2'$

线性代数 期末试卷（B 卷）

题号	一	二	三				四	五	六	七	总分	核分人（填首卷）
			1	2	3	4						
分值	24	16	7	7	7	7	8	8	8	8	100	
得分												

一、选择题（本大题共8小题，每题3分，共24分）

1. 下列矩阵为行最简形的是--（ D ）

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 设 A,B 均为 n 阶方阵，则下面各式正确的是------------------------------------（ C ）

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(AB)^2 = A^2 B^2$ (C) $|AB| = |BA|$ (D) $AB = BA$

3. 设 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = k$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ b_1 & b_1 + b_2 \end{vmatrix} =$ --（ A ）

(A) k (B) $2k$ (C) $3k$ (D) $4k$

4. 设 A 为 n 阶方阵，λ 是非零常数，则 $|\lambda A| =$ ------------------------------------（ C ）

(A) $\lambda|A|$ (B) $|\lambda||A|$ (C) $\lambda^n|A|$ (D) $|\lambda^n||A|$

5. 在线性方程组 $Ax = b$ 中，下列关系式成立的是------------------------------（ C ）

(A) $R(A) < R(A,b)$ (B) $R(A) = R(A,b)$

(C) $R(A) \le R(A,b)$ (D) $R(A) > R(A,b)$

6. 已知 $\alpha_1 = (1,-2)^T, \alpha_2 = (2,x)^T$ 线性相关的，则 $x =$ -----------------------（ A ）

(A) -4 (B) -1 (C) 1 (D) 4

7. 设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的特征值,且齐次方程组 $(A - \lambda_0 E) = 0$ 的基础解系为 η_1, η_2，则 A 的所有属于 λ_0 的特征向量为

---（ D ）

(A) η_1 和 η_2 (B) $c_1\eta_1 + c_2\eta_2$（c_1, c_2 全不为零）

(C) η_1 或 η_2 (D) $c_1\eta_1 + c_2\eta_2$（c_1, c_2 不全为零）

8. 设 A 为 n 阶实对称方阵，则下列说法中正确的是-----------------------------（ C ）

(A) A 一定有 n 个不同的特征值 (B) A 不一定有 n 个线性无关的特征向量

(C) A 一定可对角化 (D) A 的特征值不一定都是实数

二、填空题（本大题共4小题，每题4分，共16分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ \underline{$diag(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$}，$\left|A^{-1}\right|=$ \underline{$\frac{1}{6}$}。

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$，则 $AB=$ \underline{$\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}$}，$\left|AB\right|=$ \underline{9}。

3. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$，则 $A^{*}=$ \underline{$\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$}，$A^{-1}=$ \underline{$\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$}。

4. 设 A 为三阶矩阵，已知线性方程组 $Ax=b$ 有两个解 $\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，则对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的一个非零解为 $\xi=$ \underline{$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$}，又若 $R(A)=2$，则方程组 $Ax=b$ 的通解为 $x=$ \underline{$k\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},k\in R$}。

三、计算题（本大题共 4 小题，每题 7 分，共 28 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&0&0&0\\0&0&4&0\\0&1&3&4\\0&1&-2&2\end{vmatrix}$。

解：$D=2\times(-1)^2\begin{vmatrix}0&4&0\\1&3&4\\1&-2&2\end{vmatrix}$ -- $3'$

$=2\times4(-1)^3\begin{vmatrix}1&4\\1&2\end{vmatrix}=16$ -- $4'$

2．已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，求 A^{-1}。

解：$\left|A\right|=10$，$A^{*}=\begin{pmatrix}10&0&0\\-10&5&0\\2&-4&2\end{pmatrix}$ --- $4'$

所以，$A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}A^{*}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$ --- $3'$

3．求矩阵 X，使 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$。

解：$(A,B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}$ ------------------------ $5'$

所以，$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}$ -- $2'$

4. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，试证 A 及 $\left(A+2E\right)$ 可逆并求 A^{-1} 及 $\left(A+2E\right)^{-1}$

解：由 $A^2-A-2E=0$ 得 $A(A-E)=2E$，-- $1'$

所以 $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$，-- $2'$

由 $A^2-A-2E=0$ 得 $(A-3E)(A+2E)=-4E$，---------------------------- $2'$

所以 $(A+2E)^{-1}=-\dfrac{1}{4}(A-3E)$，-- $2'$

四、计算题（本题8分）

问 t 取何值时，向量组 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3\\t\end{pmatrix}$ 线性相关?

解：$\begin{vmatrix}1&1&5\\1&3&3\\0&-1&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&5\\0&2&-2\\0&-1&t\end{vmatrix}=2t-2=0$， ------------------------------------- $4'$

当 $t=1$ 时，向量组 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3\\t\end{pmatrix}$ 线性相关-- $4'$

五、计算题（本题8分）

求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 的秩及一个最大无关组。

解：记 $A=\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\right)$，对 A 进行初等行变换得

$A=\begin{pmatrix}1&3&2&0\\1&4&4&1\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&0\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ --- $4'$

$\therefore\quad R(A)=2$，-- $2'$

一个最大无关组为α_1,α_2 --- $2'$

六、计算题（本题8分）

求解线性方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1\end{cases}$。

解：$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, ------------------------- $5'$

通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$ -------------------------------- $3'$

七、计算题（本题8分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$，

（1）求该二次型的矩阵；

（2）求一个正交变换把二次型化为标准形。

解：（1）$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$-- $2'$

（2）$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

知$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2$ -- $1'$

对$\lambda_1=0$有特征向量$\xi_1=(-1,1,0)^T$，单位化后为$p_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$ ----------- $1'$

对$\lambda_2=1$有特征向量$\xi_2=(0,0,1)^T\ =p_2$-- $1'$

对$\lambda_3=2$有特征向量$\xi_3=(1,1,0)^T$，单位化后为$p_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$ --------------- $1'$

取 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

作正交变换 $X=PY$，则有 $f=y_2^2+2y_3^2$ -- $2'$

线性代数 期末试卷（C卷）

一、 选择题（本大题共8小题，每题3分，共24分）

1. 设 A,B 为 n 阶方阵，满足 $A^2=B^2$，则必有--------------------------------（D）

（A）$A=B$　　（B）$A=-B$　　（C）$|A|=|B|$　　（D）$|A|^2=|B|^2$

2. 设 A 为 n 阶方阵，$n\geq 2$，则 $|-5A|=$ ---------------------------------------（A）

（A）$(-5)^n|A|$　　（B）$-5|A|$　　（C）$5|A|$　　（D）$5^n|A|$

3. 设 A,B,C 为 n 阶方阵，若 $ABC=E$，则 $B^{-1}=$ --------------------------（C）

（A）$A^{-1}C^{-1}$　　（B）$C^{-1}A^{-1}$　　（C）CA　　（D）AC

4. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 5a_{11}+2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 5a_{21}+2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 5a_{31}+2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的值为------------（A）

（A）6　　（B）15　　（C）-6　　（D）-15

5. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$（$s\geq 2$）线性无关的充分必要条件是--------------（D）

（A）$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 均不为零向量　　（B）$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 中任意两个不成比例

（C）$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 中任意 $s-1$ 个向量线性无关

（D）$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 中任意一个向量均不能用其余 $s-1$ 个向量线性表示

6．设3阶方阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，则下列矩阵可逆的是---------------------（D）

（A）$E-A$　　（B）$-E-A$　　（C）$2E-A$　　（D）$-2E-A$

7. 设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶矩阵，且 $A^2=E$，则必有-----------------------------------（C）

（A）A 的行列式等于1　　（B）A 的逆矩阵等于 E

（C）A 的秩等于 n　　（D）A 的特征值均为1

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则下列可作为该方程组基础解系的是 --（B）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2$　　（B）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$　　（D）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

二、填空题（本大题共4小题，每题4分，共16分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $AB=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$，$AB-BA=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=\underline{\frac{1}{16}A}$；若 A 可逆，且 $AB=0$，则 $B=\underline{\ 0\ }$。

3. 设 A 是三阶方阵，$|A|=3$，则 $|A^T|=\underline{\ 3\ }$，$|(2A)^{-1}|=\underline{\frac{1}{24}}$。

4. 设 $\lambda=0$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&a\end{pmatrix}$ 的两重特征值，则 $a=\underline{\ 2\ }$，A 的另一特征值为 $\underline{\ 4\ }$。

三、计算题（本大题共 4 小题，每题 7 分，共 28 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}4&-3&1&2\\-3&1&-1&0\\6&-2&2&4\\1&-1&2&1\end{vmatrix}$。

解：原式 $=\begin{vmatrix}-5&-3&-2&2\\0&1&0&0\\0&-2&0&4\\-2&-1&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-5&-2&2\\0&0&4\\-2&1&1\end{vmatrix}$ -------------------------------- $4'$

$=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-5&-2\\-2&1\end{vmatrix}=36$ -- $3'$

2．设 A 为 3 阶矩阵，若 $|A+E|=0$，$|A+2E|=0$，$|A-E|=0$

求 $|A^2+3A+E|$。

解：由 $|A+E|=0$，$|A+2E|=0$，$|A-E|=0$

得 A 的特征值为 $-1,-2,1$ --- $2'$

得 A^2+3A+E 的特征值为 $5,-1,5$ -- $3'$

所以 $|A^2+3A+E=-25$ --- $2'$

3．设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，试求 A^{-1} 及 $(A+3E)^{-1}$。

解：$A^2-A-2E=0$，$A\dfrac{A-E}{2}=E$， -- $2'$

$\therefore A^{-1}=\dfrac{A-E}{2}$ -- $1'$

又 $(A+3E)(A-4E)=-10E$ --- $3'$

$\therefore (A+3E)^{-1}=\dfrac{4E-A}{10}$ -- $1'$

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，且 $AX=2X+A$，求 X。

解：$AX=A+2X$，$(A-2E)X=A$ -- $1'$

$$(A-2E\mid A)=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&1&-1&-2&1&1\end{pmatrix} \text{---} 2'$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&-2&-2&2&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix} \text{------------------------} 3'$$

所以 $X=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ -- $1'$

四、计算题（本题8分）

利用初等行变换求矩阵 $\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-1&3&-3\\3&2&4&1\\-1&0&-2&1\end{pmatrix}$ 的列向量组的秩及一个最大无关组，并把其余向量用该最大无关组线性表示。

解：令 $\alpha_1=(2,1,3,-1)^T,\alpha_2=(3,-1,2,0)^T,\alpha_3=(1,3,4,-2)^T$，$\alpha_4=(4,-3,1,1)$

$$\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-1&3&-3\\3&2&4&1\\-1&0&-2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3&-3\\0&5&-5&10\\0&5&-5&10\\0&-1&1&-2\end{pmatrix} \text{--} 2'$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3&-3\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{--} 2'$$

所以该向量组的秩为 2，一个最大无关组为 α_1,α_2 ---------------------------------- $2'$

且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$ -- $2'$

五、计算题（本题8分）

设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 系数矩阵的秩为 3，已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，且 $2\eta_1+3\eta_2=(5,6,7,8)^T,\eta_3=(1,1,1,1)^T$，求线性方程组 $Ax=b$ 的通解。

解：齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含向量个数为 $4-3=1$ ---------------- $2'$

而 $A\eta_i = b(i=1,2,3)\ \therefore A(2\eta_1+3\eta_2-5\eta_3)=0$ --------------------------------- $2'$

故 $2\eta_1+3\eta_2-5\eta_3$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系-------------------------------------- $2'$

$Ax=b$ 的通解为 $k(0,1,2,3)^T+(1,1,1,1)^T, k\in R$ ------------------------------------- $2'$

六、讨论题（本题8分）

问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \end{cases}$，

(1) 有唯一解； (2) 无解；（3）有无穷多个解？此时求出通解。

解：$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$ -- $2'$

（1） 当 $|A|\neq 0$ 即 $\lambda\neq 1,-2$ 时，方程组有唯一解--------------------------------- $1'$

（2） $\lambda=1$ 时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A)=R(A\,|\,b)=1<3$，故方程组有无穷多解

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k_1,k_2\in R$ ------------------------------ $3'$

（3）$\lambda=-2$ 时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R(A)\neq R(A\,|\,b)$，故方程组无解-- $2'$

七、计算题（本题8分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，

求一个正交变换把二次型化为标准形。

解：此二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ -- $1'$

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0,$

得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$ -- $2'$

对 $\lambda_1 = 1$ 有特征向量 $p_1 = (2,1,-2)^T$，单位化后为 $e_1 = \dfrac{1}{3}(2,1,-2)^T$

对 $\lambda_2 = 4$ 有特征向量 $p_2 = (2,-2,1)^T$，单位化后为 $e_2 = \dfrac{1}{3}(2,-2,1)^T$

对 $\lambda_3 = -2$ 有特征向量 $p_3 = (1,2,2)^T$，单位化后为 $e_3 = \dfrac{1}{3}(1,2,2)^T$

取 $P = (e_1, e_2, e_3) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ -- $4'$

作正交变换 $X = PY$，则有 $f = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$ ------------------------------------- $1'$

线性代数 期末试卷（D卷）

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td rowspan="2">一</td><td rowspan="2">二</td><td colspan="4">三</td><td rowspan="2">四</td><td rowspan="2">五</td><td rowspan="2">六</td><td rowspan="2">七</td><td rowspan="2">总分</td><td rowspan="2">核分人
(填首卷)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>分值</td><td>24</td><td>16</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>100</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、选择题（本大题共8小题，每题3分，共24分）

1. 行列式$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$的元素$a_{23}$的代数余子式$A_{23}$是---------------------------（C）.

（A） 3　　（B）-3　　（C） 5　　（D）-5

2. 设A为3阶方阵,且$\left|-\frac{1}{3}A\right|=\frac{1}{3}$，则 $|A|=$ -------------------------------------（A）

（A）-9　　（B） -1　　（C） -3　　（D）9

3. 若A,B为$n(n\geq 2)$阶方阵,则下列各式正确的是--------------------------------（C）

（A）$|A+B|=|A|+|B|$　　（B）$(AB)^T = A^T B^T$

（C）$|AB|=|BA|$　　（D）$AB = BA$

4. 设3阶方阵A的秩为2，则与A等价的矩阵为--------------------------------（B）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. 矩阵A的秩为r，则--（C）
（A）A中任何$r+1$个列向量线性无关；（B）A中任何r个列向量线性相关；
（C） A中有r个列向量线性无关，A中任何$r+1$个列向量线性相关；
（D） A中线性无关的列向量最多有r个；

6. 设A为正交矩阵，且$|A|=-1$ 则$A^*=$---（B）

（A）A^T　　（B） $-A^T$　　（C） A　　（D） $-A$

7. 矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的特征值为--（$D$）

（A）1 ,1 , 0　　（B）1, -1, -2　　（C）1 ,1 , 2　　（D）1, -1, 2

8. 已知矩阵 A 与 $B=diag(1,-1,1)$ 相似，则 $A^2=$ --------------------------（C）

（A） A　　（B） B　　（C） E　　（D） $-E$

二、填空题（本大题共4小题，每题4分，共16分）

1. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$，则数 $a=$ __3__.

设方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+kx_2=0 \end{cases}$ 有非零解，则数 $k=$ __4__.

2. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$，$|AB|=$ __-2__.

3. 已知3阶矩阵 A 的3个特征值为 $1,2,3$，则 $|A|=$ __6__，$|A^*|=$ __36__.

4. 已知向量 $\alpha=(2,1,0,3)^T$，$\beta=(1,-2,1,k)^T$，α 与 β 的内积为3，则 $k=$ __1__.

设向量 $\alpha=(b,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ 为单位向量，则数 $b=$ __0__.

三、计算题（本大题共4小题，每题7分，共28分）

1．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 的值.

解：原式 $=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$ ------------------------------ $4'$

$=-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix}=-(-1)^{1+1}2\times\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}=-24$ ------------------------------------ $3'$

2．设2阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 B 满足关系式 $PB=A^*P$，计算行列式 $|B|$ 的值.

解：由 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，得 $|P|=-1$，所以 P 可逆，-------------------------------------- $1'$

又 $PB=A^*P$，得 $B=P^{-1}A^*P$ -- $3'$

所以$\left|B\right|=\left|P^{-1}A^{*}P\right|=\left|A^{*}\right|=\left|A\right|^{2-1}=-1$-- $3'$

3．已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，解矩阵方程$AX=B$.

解：$AX=B$，得$X=A^{-1}B$ -- $1'$

$$(A\mid B)=\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}$$ -------------- $2'$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&1&1&2&-1&1\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}$$ ------------------------ $3'$

所以$X=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$ -- $1'$

4. 设向量$\alpha=(1,-1,-1,1)$，$\beta=(-1,1,1,-1)$，求（1）矩阵$A=\alpha^{T}\beta$；（2）A^{10}.

解：$A=\alpha^{T}\beta=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$,-- $2'$

$A^{10}=(\alpha^{T}\beta)(\alpha^{T}\beta)\cdots(\alpha^{T}\beta)=\alpha^{T}(\beta\alpha^{T})^{9}\beta=(-4)^{9}\alpha^{T}\beta$ ---------------------- $2'$

$=(-4)^{9}\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$ -- $3'$

四、计算题（本题8分）

设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 系数矩阵的秩为3，已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，且 $\eta_1+\eta_2=(1,1,0,2)^T,\eta_2+\eta_3=(1,0,1,3)^T$，求线性方程组 $Ax=b$ 的通解.

解：齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含向量个数为 $4-3=1$ ---------------- $2'$

而 $\eta_1+\eta_2-\eta_2-\eta_3=(0,1,-1,-1)^T\neq 0$

即是 $Ax=0$ 的一个基础解系-- $2'$

$\eta^*=\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0,1\right)^T$ 为 $Ax=b$ 的特解------------------------------------- $2'$

$Ax=b$ 的通解为 $k(0,1,-1,-1)^T+(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0,1)^T,k\in R$ -------------------------------- $2'$

五、计算题（本题8分）

求向量组 $\alpha_1=(1,3,0,5)^T,\alpha_2=(1,2,1,4)^T,\alpha_3=(1,1,2,3)^T$， $\alpha_4=(0,1,2,4)^T$，$\alpha_5=(1,-3,0,-7)^T$ 的秩及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解：$\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&0\\5&4&3&4&-7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&-1&-2&1&-6\\0&1&2&2&0\\0&-1&-2&4&-12\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&2&2&0\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ---- $2'$

$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-3\\0&1&2&0&4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ -- $2'$

所以该向量组的秩为3，一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ ------------------------------ $2'$

且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$,$\alpha_5=-3\alpha_1+4\alpha_2-2\alpha_4$ -- $2'$

六、讨论题（本题8分）

问 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$

（1）有唯一解，（2）无解，（3）有无穷多解并求其通解.

解：$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\lambda^2$ --- $2'$

（1） 当 $|A|\neq 0$ 即 $\lambda\neq 0,-3$ 时，方程组有唯一解------------------------------------- $1'$

（2） $\lambda=-3$ 时，$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$R(A)=R(A\,|\,b)=2<3$，故方程组有无穷多解

通解为$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},k\in R$ -- $3'$

（3）$\lambda=0$ 时，$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$R(A)\neq R(A\,|\,b)$，故方程组无解--- $2'$

七、计算题（本题8分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解：由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0,$

得 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-2$ -- $2'$

对 $\lambda_1=1$ 有特征向量 $p_1=(2,1,-2)^T$，单位化后为 $e_1=\dfrac{1}{3}(2,1,-2)^T$

对 $\lambda_2=4$ 有特征向量 $p_2=(2,-2,1)^T$，单位化后为 $e_2=\dfrac{1}{3}(2,-2,1)^T$

对 $\lambda_3=-2$ 有特征向量 $p_3=(1,2,2)^T$，单位化后为 $e_3=\dfrac{1}{3}(1,2,2)^T$

取 $P=(e_1,e_2,e_3)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ --- $4'$

则 P 为正交矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & -2\end{pmatrix}$ -- $2'$

线性代数 期末试卷（E 卷）

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td rowspan="2">一</td><td rowspan="2">二</td><td colspan="4">三</td><td rowspan="2">四</td><td rowspan="2">五</td><td rowspan="2">六</td><td rowspan="2">七</td><td rowspan="2">总分</td><td rowspan="2">核分人
(填首卷)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>分值</td><td>24</td><td>16</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>100</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、选择题（本大题共8小题，每题3分，共24分）

1. 设 A 是 $p\times s$ 矩阵，C 是 $m\times n$ 矩阵，如果 AB^TC 有意义，则 B 是什么矩阵---（ D ）

（A）$p\times n$　　（B）$p\times m$　　（C）$s\times m$　　（D）$m\times s$

2. 设 A，B 均为 n 阶可逆矩阵，则下列各式中不正确的是-------------------（ B ）

（A）$(A+B)^T=A^T+B^T$　　（B）$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

（C）$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　　（D）$(AB)^T=B^TA^T$

3．设行列式 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则行列式 $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$----------------------------（ A ）

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）1　　（C）2　　（D）$\frac{8}{3}$

4. 线性方程组 $\begin{cases} ax \qquad +z=0 \\ 2x+ay+z=0 \\ ax-2y+z=0 \end{cases}$ 只有零解，则 a 的取值为-----------------------（ B ）

（A）$a=2$　　（B）$a\neq 2$　　（C）$a=1$　　（D）$a\neq 1$

5. 设 A 是 n 阶方阵，$|A|=0$，则下列结论中错误的是--------------------------（ B ）

（A）$R(A)<n$　　（B）A 有两行元素成比例

（C）A 的 n 个列向量线性相关（D）A 有一个行向量是其余 n 个行向量的线性组合

6. 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，非齐次线性方程组 $AX=b$ 对应的齐次线性方程组为 $AX=0$. 如果 $m<n$，则有--（ C ）

（A）$AX=b$ 必有无穷多解　　（B）$AX=b$ 必有唯一解

（C）$AX=0$ 必有非零解　　（D）$AX=0$ 只有零解

7. 已知 3 阶矩阵 A 相似于 B，A 的特征值为 2、3、4、E 为 3 阶单位矩阵，则 $|B-E|=$--（ A ）

（A）6；　（B）12；　（C）24；　（D）48

8. 下列矩阵中，不能与对角阵相似的是---　（ A ）

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$（$B$）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（$C$）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（$D$）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

二、填空题（本大题共4小题，每题4分，共16分）

1. $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$,则 $AB=\underline{\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}}$, $BA=\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

2.若 A , B 为3阶方阵，且 $|A|=2, |B|=2$,则 $|-2A|=$ __-16__, $|A^{-1}B^T|=$ __1__

3.设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩为__2__，线性方程组 $AX=O$ 的基础解系中向量个数为__3__。

4. 设 A 是三阶方阵， A 的特征值为 $2,3,\lambda$,且 $|2A|=48$ ，则 $\lambda=$ __1__， $R(A)=$ __3__。

三、计算题（本大题共4小题，每题7分，共28分）

1.计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

解： $D \overset{r_4-r_3}{\underset{\substack{r_3-r_2 \\ r_2-r_1}}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ --5 分

$=0$ --2 分

2. $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

求(1) $A_{11}+2A_{21}+4A_{31}$ （2） $4A_{21}+5A_{22}+6A_{23}$ （3） $7A_{31}+8A_{32}+9A_{33}$

其中 A_{ij} 表示 D 中 a_{ij} 的代数余子式。

解：(1) $A_{11}+2A_{21}+4A_{31}=D=18$ --2 分

(2) $4A_{21}+5A_{22}+6A_{23}=0$ --2 分

(3) $7A_{31}+8A_{32}+9A_{33}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\7&8&9\end{vmatrix}=27$ ---------------------3 分

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&3\\4&3&3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\-1&2&2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足方程 $AX=B^T$，求 X .

解：$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\-1&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$， ---------------------------------------1分

$AX=B^T\Rightarrow X=A^{-1}B^T$ --1分

$\left(A,B^T\right)\overset{r}{\sim}\left(E,X\right)$

$\begin{pmatrix}1&1&2&1&2&-1\\2&2&3&0&1&2\\4&3&3&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&3&4&-7\\0&1&0&-6&-8&14\\0&0&1&2&3&-4\end{pmatrix}$ ------------------------2 分

$X=\begin{pmatrix}3&-4&-7\\-6&-8&14\\2&3&-4\end{pmatrix}$ --3 分

4．已知3阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,-3$，矩阵 $B\ =A^2-2A$，

(1)求 B 的特征值　（2）B 能否对角化？若能，写出与其相似的对角阵。

解：（1）设 $f(t)=t^2-2t$，则 B 的特征值为 $f(\lambda)$，分别为 $-1,0,15$ ----------3 分

（2）因为 B 有 3 个互异的特征值，所以能够对角化-----------------------------------2 分

对其相似的对角阵为 $\begin{pmatrix}-1&&\\&0&\\&&15\end{pmatrix}$ --2 分

四、计算题（本题8分）

已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\\6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-7\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}5\\-8\\1\\2\end{pmatrix}$.

求向量组的秩及一个最大无关组，并把其余向量用该最大无关组线性表示。

五、证明题（本题8分）

设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关， $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$,

$\beta_3=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$，试证明 β_1,β_2,β_3 也线性无关。

证明：设存在k_1,k_2,k_3使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3\ =0$

整理得，$(k_1+2k_2+3k_3)\alpha_1+(k_1+3k_2+4k_3\ )\alpha_2+(-k_1-k_2+k_3)\alpha_3=0$ --------2 分

因为向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

所以$\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=0\\k_1+3k_2+4k_3=0\\-k_1-k_2+k_3=0\end{cases}$ （1），-----------------------------------2 分

因为$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&4\\-1&-1&1\end{vmatrix}=3\neq0$，所以（1）方程只有零解---------------------------------2 分

即$k_1=k_2=k_3=0$所以，β_1,β_2,β_3线性无关----------------------------2 分

六、讨论题（本题8分）

问λ为何值时，线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1-\ x_2-x_3=1\\-x_1+\lambda x_2-x_3=-\lambda\\-x_1\ \ -x_2\ \ +\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$

(1) 有唯一解； (2) 无解；（3）有无穷多个解？此时求出通解。

解：方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{pmatrix}$的行列式$|A|=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$ --------2 分

(1)当$\lambda\neq$-1且$\lambda\neq2$时，方程组有唯一解---------------------------2 分

(2)当λ=2时，方程组无解---------------------------2 分

(3)当λ=1时，$(A,b)\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，方程组有无穷多解

通解为$X=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},C_1,C_2\in R$ ---------------------------2 分

七、计算题（本题8分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2$的秩为2，

(1)写出二次型所对应的矩阵A，并求参数a

(2)求一个正交变换$X=PY$把二次型化为标准形。

解：（1）$A=\begin{pmatrix}a&-1&0\\-1&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$---2 分

$\because R(A)=2,\therefore |A|=0,\therefore a=1$ --1 分

（2）解特征方程$|A-\lambda E|=0$,得 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ ---------------------2 分

分别解方程组$(A-\lambda_i)X=0,i=1,2,3$　得单位特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ ---2 分

因此正交矩阵为 $P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，即通过正交变换 $X=PY$ 将二次型变换为标准型：

$f=2y_2^2+3y_3^2$ ---1 分

线性代数 期末试卷（F 卷）

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td rowspan="2">一</td><td rowspan="2">二</td><td colspan="4">三</td><td rowspan="2">四</td><td rowspan="2">五</td><td rowspan="2">六</td><td rowspan="2">七</td><td rowspan="2">总分</td><td rowspan="2">核分人
(填首卷)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>分值</td><td>24</td><td>16</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>100</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、选择题（本大题共8小题，每题3分，共24分）

1. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $s\times n$ 矩阵，C 是 $m\times s$ 矩阵，则下列运算有意义的是（ C）

（A） AB （B） BC （C） AB^T D. AC^T

2.设 A,B 为 n 阶矩阵，下列命题正确的是--（ C ）（A）$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

（B）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

（C）$A^2-E=(A+E)(A-E)$ （D）$(AB)^2=A^2B^2$

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$，其中 $a_ib_i\neq 0(i=1,2,3)$ 则 $R(A)=$--（ B ）

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

4. 在下列矩阵中，可逆的是--（ D ）

（A）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 如果行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=d\neq 0$，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{vmatrix}=$-----------（ B ）

（A）$2d$ （B）$6d$ （C）$3d$ （D）$-6d$

6. 设 A 为 n 阶方阵且 $|A|=0$，则--（ C ）

（A）A 中必有两行（列）的元素对应成比例；

（B）A 中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合；

（C）A 中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合；

（D）A 中至少有一行（列）的元素全为0

7.设 A 是 n 阶矩阵，则以下选项中错误的结论是--------------------------------（ C ）

（A）当 $AX=b$ 无解时，$|A|=O$ （B）当 $AX=b$ 有无穷多解时，$|A|=O$

（C）当 $|A|=O$ 时， $AX=b$ 无解 （D）当 $AX=b$ 有唯一解时，$|A|\neq O$

8. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$ 与下列哪个矩阵相似--（ C ）

（A）$\begin{pmatrix}2&0&3\\0&3&4\\0&0&1\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$（$C$）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

二、填空题（本大题共4小题，每题4分，共16分）

1. $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&b\\3&2\end{pmatrix}$，若 $AB=BA$, 则 $a=$ __8__，$b=$ __6__

2．若 A 为三阶方阵，$|2A|=1$, 则 $\left|A^{-1}\right|=$ __8__, $\left|A^{*}\right|=\dfrac{1}{64}$

3.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩为__2__，线性方程组 $AX=O$ 的基础解系中向量个数为__2__。

4. 设 λ_1,λ_2 是实对称阵的两个不同的特征值，p_1,p_2 是对应的特征向量，则 $\left[p_1,p_2\right]=$

__0__，p_1 与 p_2 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$。

三、计算题（本大题共4小题，每题7分，共28分）

1.计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}$

解：$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-2&-2&-2\\0&-7&-10&-12\\0&0&-3&-9\end{vmatrix}$ --3 分

$=6\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&0&1&3\\0&0&0&-4\end{vmatrix}$ ……………………………3分

$=-24$ ……………………………………………1分

2.设 $A=\begin{pmatrix}4&1\\-1&6\end{pmatrix}$,且 $AB=B+4E$, E 为二阶单位阵，求 $|B|$

解：由 $AB=B+4E$，得 $(A-E)B=4E$ ……………2分

两边同时取行列式得：$\left|(A-E)B\right|=\left|4E\right|,\therefore\left|A-E\right|\left|B\right|=4^2\left|E\right|=16$………3分

$\left|A-E\right|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=16,\therefore\left|B\right|=1$……………………………2分

3.设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$,求$A^n$

解：$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$ ---3 分

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$………………………3分

$=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$………………………1分

4.设三阶方阵 A,B 满足关系式，$A^{-1}BA=6A+BA$，且 $A=diag\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{7}\right)$，求 B 。

解：由 $A^{-1}BA=6A+BA$，得 $(A^{-1}-E)BA=6A$ ---------------------------------1 分

$\because\left|A\right|\neq 0, A$可逆，$A^{-1}=diag(3,4,7)$，两边同时右乘 A^{-1}

得 $(A^{-1}-E)B=6E$ --2 分

$A^{-1}-E=diag(2,3,6)$,可逆，且其逆为$diag(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6})$ -------------------------2 分

所以 $B=6(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$--2 分

四、讨论题（本题8分）

设 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 2,\ 3)^T$，$\alpha_3=(1,\ 3,\ k)^T$，问

(1) k 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关？

（2）k 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关？当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，将 α_3 表示成 α_1,α_2 的线性组合。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & k\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & k-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & k-5\end{pmatrix}$----------------2 分

（1）当$k\neq 5$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关--2 分

（2）当$k=5$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。--2 分

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$ --2 分

五、证明题（本题 8 分）

设向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,且

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4,\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$$
$$\beta_3=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4,\beta_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$$

证明向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关。

证明：设存在k_1,k_2,k_3,k_4使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$

整理得：
$$(k_1-k_2-k_3-k_4)\alpha_1+(-k_1+k_2-k_3-k_4)\alpha_2+(-k_1-k_2+k_3-k_4)\alpha_3+$$
$$(-k_1-k_2-k_3+k_4)\alpha_4=0 ---------------------2\text{ 分}$$

因为向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关

所以$\begin{cases}k_1-k_2-k_3-k_4=0\\-k_1+k_2-k_3-k_4=0\\-k_1-k_2+k_3-k_4=0\\-k_1-k_2-k_3+k_4=0\end{cases}$，-------------------------------------2 分

又因为$\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{vmatrix}\neq 0$-------------------------------------2 分

所以$k_1=k_2=k_3=k_4=0$

因此向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关。-------------------------------------2 分

六、计算题（本题 8 分）

设 A 是秩为 3 的 5×4 的矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的 3 个不同的解，若 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=(2,0,0,0)^T$，$3\alpha_1+\alpha_2=(2,4,6,8)^T$,求$AX=b$的通解。

解：$\because n=4,R(A)=3$

$\therefore AX=O$ 的基础解系中有 1 个解向量。-------------------------------------2 分

$(3\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)=(2,4,6,8)^T-(2,0,0,0)^T=(0,4,6,8)^T$ 是 $AX=O$ 的 一 个 解 。-------------------------------------2 分

$\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)=\left(\frac{1}{2},0,0,0\right)^T$ 是 $AX=b$ 的一个解，--------------------------2 分

因此，$AX=b$ 的通解为 $k(0,4,6,8)^T+\left(\frac{1}{2},0,0,0\right)^T$ ---------------------2 分

七、计算题（本题 8 分）

求一个正交变换 $X=PY$,将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2-4x_1x_3$ 化为标准形，写出正交矩阵 P ,及对应的标准形。

解：二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$-------------------------------------1 分

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-2\\0&1-\lambda&0\\-2&0&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(1-\lambda)=0$$

所以 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$ -------------------------------------2 分

当 $\lambda_1=0$ 时，其对应的全体特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},k_1\neq0,\text{取}p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=1$ 时，其对应的全体特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},k_2\neq0,\text{取}p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=4$，其对应的全体特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},k_3\neq0,\text{取}p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

-------------------------------------2 分

因为特征值互异，所以 p_1,p_2,p_3 正交，只要将其单位化：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\0\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\0\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$$ -------------------------------------2 分

因此 $P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,即通过 $X=PY$，将二次型化成标准形

$f(y_1,y_2,y_3)=y_2^2+4y_3^2$ --------------------------------------1 分