

《概率论与数理统计》期中测试卷

一、设事件 A, B 仅发生一个的概率为 0.3, 且 $P(A) + P(B) = 0.5$, 求 A, B 至少有一个不发生的概率.

二、设随机变量 X 服从泊松分布, 且 $P(X \leq 1) = 4P(X = 2)$, 求 $P(X = 3)$.

三、设随机变量 X 在区间 $(0, 2)$ 上服从均匀分布, 求随机变量 $Y = X^2$ 在区间 $(0, 4)$ 内的概率密度 $f_Y(y)$.

四、设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \theta > -1.$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的样本, 求未知参数 θ 的极大似然估计量.

五、已知一批产品中 90% 是合格品, 检查时, 一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05, 一个次品被误认为是合格品的概率为 0.02,

求 (1) 一个产品经检查后被认为是合格品的概率;

(2) 一个经检查后被认为是合格品的产品确是合格品的概率.

六、从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗, 假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的, 并且概率都是 $2/5$. 设 X 为途中遇到红灯的次数, 求 X 的分布列、分布函数、数学期望和方差.

七、设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ 上服从均匀分布.

求 (1) (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度; (2) $Z = X + Y$ 的分布函数与概率密度.

八、设某机器生产的零件长度 (单位: cm) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 今抽取容量为 16 的样本, 测得样本均值 $\bar{x} = 10$, 样本方差 $s^2 = 0.16$. (1) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间; (2) 检验假设 $H_0: \sigma^2 \leq 0.1$ (显著性水平为 0.05).

(附注) $t_{0.05}(16) = 1.746$, $t_{0.05}(15) = 1.753$, $t_{0.025}(15) = 2.132$,

$$\chi_{0.05}^2(16) = 26.296, \chi_{0.05}^2(15) = 24.996, \chi_{0.025}^2(15) = 27.488.$$

九、环境保护条例规定, 在排放的工业废水中, 某有害物质不得超过 0.5%, 假定有害物质含量 X 服从正态分布. 现在取 5 份水样, 测定该有害物质含量, 得如下数据:

0.530%, 0.542%, 0.510%, 0.495%, 0.515%

能否据此抽样结果说明有害物质含量超过了规定 ($\alpha = 0.05$)?

附表:

$$u_{0.975} = 1.96, u_{0.95} = 1.65, t_{0.975}(4) = 2.776, t_{0.95}(4) = 2.132, t_{0.975}(5) = 2.571, t_{0.95}(5) = 2.015$$