2024-2025 学年第一学期《高等代数与解析几何(1)》期末试卷（B）

使用专业、班级__________ 学号__________ 姓名__________

题数	一	二	三	四	五	总分
得分						

本题得分	

一、填空题〖每小题 4 分，共计 32 分〗

1、已知 3 维实向量 β 可由实向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表示法不惟一，则 $(\alpha_1\times\alpha_2)\cdot\alpha_3=$____.

2、三平面 $\pi_i: a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0, i=1,2,3$ 相交于一点，记 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$，

则 $r(A)=$____.

3、四阶行列式 $D_4=|a_{ij}|_{4\times4}$ 中，含 $a_{12}a_{34}$ 且带负号"−"的项为________.

4、设 $f(x)$ 是一个非零多项式，A 是一个 3 阶反对称实方阵，若 $f(A)=O$，则 $|A|+f(0)=$_____.

5、设 5 阶矩阵 A 满足 $A^2=O$，则 A^* 表示 A 的伴随矩阵，则 $tr(E_5-A^*)=$_____.

6、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 $(A^{2025})^{-1}=$__________.

7、设 A 是 n 阶实矩阵，A^T 表示 A 的转置矩阵，E_n 表示 n 阶单位矩阵，则齐次线性方程组 $(E_n-A+A^T)x=0$________（填："必有"或"没有"）非零解.

8、叙述两个 $m\times n$ 矩阵 n 阶等价的定义____________________;

设 A,B 是两个 n 阶可逆矩阵，问 A,B 是否等价________（填："等价"或"可能等价"或"不等价"）（本题每空 2 分）

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 信息与计算科学系 命题教师：________ 命题时间 2024.12.03

本题得分	

二、解答题〖每小题8分，共计24分〗

1、求通过点$P(1,2,-2)$且垂直于直线$L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{1}$的平面$\pi$的方程，并求向量$PP_1$的长度，其中$P_1$为直线$L$与平面$\pi$的交点.

2、计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1+x & 1+y & 1+z & 1+w \\ x+x^2 & y+y^2 & z+z^2 & w+w^2 \\ x^2+x^3 & y^2+y^3 & z^2+z^3 & w^2+w^3 \end{vmatrix}$.

3、讨论向量$\beta=(1,3,-3)$是否可由向量组

$\alpha_1=(1,2,0),\alpha_2=(1,a+2,-3a),\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)$线性表示，在能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示时，写出表示的一般形式.

本题得分	

三、【本题 12 分】设A,B是 3 阶矩阵，$A^*BA=2BA-8E_3$，$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵$B$.

α_3 线

本题得分	

四、〖本题 12 分〗 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解，求 a,b 的值及线性方程组的通解.

本题得分	

五、 证明题〖每小题 5 分，共 20 分〗

1、设 $f(x),g(x)$ 是数域 F 上两个多项式，证明：$f(x)\mid g(x)$ 当且仅当 $f^2(x)\mid g^2(x)$.

2、设 n 阶矩阵 $A,B,A+B$ 都是可逆矩阵，证明：$A^{-1}+B^{-1}$ 也是可逆矩阵.

3、设 A 是 n 阶矩阵，α 是 n 维列向量，k 是正整数，若 $A^k\alpha\neq 0$，$A^{k+1}\alpha=0$，

证明：$\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^k\alpha$ 线性无关.

4、设 A 是 n 阶矩阵，证明：矩阵方程 $AXA=A$ 有解.