姓名________ 学号________ 专业班级________ 学院、系________

封 密

齐鲁工业大学 17 / 18 学年第一学期《 高等数学 I 》期末考试试卷

（A 卷及答案）　　（本试卷共 5 页）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

得分	
阅卷人	

一、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1、下列叙述正确的是（　C　）

A、有界数列一定有极限　　B、无界数列一定是无穷大量

C、无穷大数列必为无界数列　　D、无界数列未必发散

2、下列函数在$x=0$处不连续的为(　D　)

A、$f(x)=|x|$　　B、$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right), & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

C、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$　　D、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$

3、函数$f(x)$在$(a，b)$内存在零点的充分条件是(　D　)

A、$f(a)f(b)<0$　　B、$f(x)$在$[a，b]$上连续

C、$f(x)$在$(a，b)$上连续，且$f(a)f(b)<0$

D、$f(x)$在$[a，b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$

4、设：$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,据定积分的几何意义可知（　C　）

A、I是由曲线$y=f(x)$及直线$x=a，x=b$与x轴所围图形的面积

B、若$I=0$，则上述图形面积为零，从而图形的"高"$f(x)=0$

C、I是曲线$y=f(x)$及直线$x=a，x=b$与x轴之间各部分面积的代数和

D、I是曲线$y=|f(x)|$及直线$x=a$，$x=b$与x轴所围图形的面积

5、两曲线$y=f(x),y=g(x)$相交于点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),x_1<x_2$,且$f(x)>0,g(x)>0$。它们所围成的平面图绕$x$轴旋转一周所得的旋转体的体积$V$为（ C ）

A、$\int_{x_1}^{x_2}\pi[f(x)-g(x)]^2dx$　　B、$\int_{x_1}^{x_2}[\pi f(x)-\pi g(x)]^2dx$

C、$\int_{x_1}^{x_2}\pi|f^2(x)-g^2(x)|dx$　　D、$\int_{x_1}^{x_2}[\pi f(x)]^2dx-\int_{x_1}^{x_2}[\pi g(x)]^2dx$

得分	
阅卷人	

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1、已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=-3$，则$k=$___-3___。

2、$\cos y+\sin x=2y$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{2+\sin y}$。

3、极限$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=$ $\underline{e^{-2}}$。

4、设$f(x)$在$[-a,\ a]$上连续，则$\int_{-a}^{a}(\sin x)(f(x)+f(-x))dx=$__0__。

5、设曲线$y=ax^3+bx^2$以点$(1,3)$为拐点，则$(a,b)=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{2}\right)$。

得分	
阅卷人	

三、计算题（本题满分 35 分，每小题 5 分）

1、设 $y=\dfrac{e^{2x}}{x}$，求 y''。

解：$y'=-x^{-2}e^{2x}+2x^{-1}e^{2x}$ （2 分）

$y''=2x^{-3}e^{2x}-2x^{-2}e^{2x}-2x^{-2}e^{2x}+4x^{-1}e^{2x}$（2 分）

$=e^{2x}\left(\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x}\right)$ （1 分）

2、已知参数方程$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$。

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$ (3 分)

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \left.\dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1+0}{0-1} = -1$ (2 分)

3、设$y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$，求$\dfrac{dy}{dx}$。

解：对于$y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$两边取对数，得

$\ln y = \dfrac{1}{3}\left[\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln(x+3) - \ln(x+4)\right]$ (2 分)

两边对x求导，得$\dfrac{1}{y}y' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+4}\right)$ (2 分)

整理得$y' = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+4}\right)$ (1 分)

4、求极限$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan \ln(3x-2)}{e^{x+1} - e^{x^2+1}}$。

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sec^2 \ln(3x-2) \cdot \frac{3}{3x-2}}{e^{x+1} - 2xe^{x^2+1}}$ (3 分) $= -\dfrac{3}{e^2}$ (2 分)

5、求$\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2}$。

解：$\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{2}{3} + x^2}$ (3 分) $= \dfrac{1}{\sqrt{6}}\arctan\sqrt{\dfrac{3}{2}}x + c$ (2 分)

6、计算$\displaystyle\int_0^1 \left[\sqrt{1+x} + \frac{2x}{1+x^2}\right]dx$。

解：原式 $= \left(\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \ln(1+x^2)\right)\Big|_0^1$ (3 分) $= \dfrac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) + \ln 2$ (2 分)

7、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}$。

解： $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\int_0^x \arctan t dt\right]'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2}=\frac{1}{2}$$

(第一次洛必达求导 2 分，第二次洛必达 2 分，最后一步 1 分)

得分	
阅卷人	

四、解答题（本题满分 26 分，第 1、2 题每小题 8 分，第 3 题 10 分）

1、设 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x_1=1,x_2=2$ 时都取得极值，试确定 a,b 的值，并判断 $f(x)$ 在 x_1,x_2 是取得极大值还是极小值？

解：$f'(x)=a\dfrac{1}{x}+2bx+1$ ，$f(x)$ 在 $x_1=1,x_2=2$ 取得极值 （2 分）

则 $f'(1)=a+2b+1=0$，$f'(2)=a\dfrac{1}{2}+4b+1=0$，故 $a=-\dfrac{2}{3},b=-\dfrac{1}{6}$ （5 分）

又因 $f''(x)=-a\dfrac{1}{x^2}+2b$，故 $f''(2)=-a\dfrac{1}{4}+2b=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}<0$

$f(x)$ 在 $x_2=2$ 时取得极大值

$f''(1)=-a+2b=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}>0$

所以 $f(x)$ 在 $x_1=1$ 时取得极小值 （8 分）

2、求函数 $y=\ln(1+x^2)$ 图形的凹（凸）区间。

解： $y'=\dfrac{2x}{1+x^2},y''=\dfrac{2(1+x^2)-2x\,2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$.

令 $y''=0$,得 $x_1=-1,x_2=1$ （5 分）

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $y''<0$,因此函数在 $(-\infty,-1]$ 内是凸的

当 $x\in(-1,1)$ 时, $y''>0$,因此函数在 $[-1,1]$ 内是凹的

当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $y''<0$,因此函数在 $[1,+\infty)$ 内是凸的 （8 分）

3、求由抛物线$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围成的平面图形的面积。

解：$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$，$\dfrac{y^2}{2}=y+4$，$(y+2)(y-4)=0$

$y_1=-2,\ y_2=4$ （5 分）

$s=\int_{-2}^{4}(y+4-\dfrac{y^2}{2})dy=(\dfrac{1}{2}y^2+4y-\dfrac{y^3}{6})\Big|_{-2}^{4}=6+24-12=18$ （10 分）

得分	
阅卷人	

五、证明题（本题满分 9 分）设$-1<a<b<1$，利用拉格朗日中值定理证明$|\arcsin a-\arcsin b|\ge|a-b|$.

证明：取函数$f(x)=\arcsin x$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导 （2 分）

由拉格朗日中值定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$

使$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$ （6 分）

即$\arcsin a-\arcsin b=\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}(a-b)$

故$|\arcsin a-\arcsin b|=\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}|a-b|\ge|a-b|$ （9 分）

得分	
阅卷人	

六、附加题（本题满分 10 分）

备注：本试卷共出 110 分的题目，此题为附加题，若试卷总得分超过 100 分，按 100 分记。

已知$f(x)=\begin{cases} 1-\sin x, & x<0 \\ \cos^2 x, & x\ge 0 \end{cases}$，试讨论$f(x)$在0的连续性及可导性。

解：$f(0-0)=f(0+0)=f(0)=1$，$f(x)$在$x=0$处连续 （4 分）

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{1-\sin x-1}{x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos^2 x-1}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{-x^2}{x}=0$$

$f'(x)$在$x=0$处不存在 （10 分）