

齐鲁工业大学 23/24 学年第二学期 《线性代数 I》期末考试试卷
(A 卷) (本试卷共 5 页)

题号	一	二	三	四	总分
得分					

要求： 试卷必须用黑色签字笔在试题指定区域内作答。

得分	
阅卷人	

一、选择题 (本题共 28 分)

请将选择题答案写在右侧横线上： 1-4 _____ 5-8 _____

- 若 A 为三阶方阵, 且 $|A-E|=0$, $|A+E|=0$, $|A-2E|=0$, 则 $|A^{-1}|=(\quad)$.
A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 2
- 下列关于行列式的结论正确的是 ().
A. 行列式中元素 $a_{ij}=a_{ji}$, 则行列式的值等于零
B. 当改变行列式某行元素时, 该行元素的代数余子式不变
C. 行列式中每行元素之和都等于 1, 则行列式的值等于零
D. 行列式第 i 行的元素与第 $j(i \neq j)$ 行元素的代数余子式的乘积有可能不等于零
- 设 A, B 是 n 阶矩阵, 下列结论正确的是 ().
A. 若 A, B 都可逆, 则 AB 也可逆 B. 若 A, B 都可逆, 则 $A+B$ 也可逆
C. $|A+B|=|A|+|B|$ D. 若 $A, B, A+B$ 都可逆, 则 AB 也可逆 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$
- 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 有无穷多解的充要条件是 ().
A. $m < n$ B. $R(A) < m$ C. $R(A) < n$ D. $m=n$, 且 $R(A) < n$
- 关于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 以下结论正确的是 ().
A. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则任意两个向量成比例

- B. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中一定有一个是零向量
- C. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则任意一个向量都可以被其余向量线性表示
- D. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则一定有一个向量可以由其余向量线性表示

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = B$, 则 $B^{2024} - 2A^2 =$ ().

A. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. 方程 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 \end{vmatrix} = 0$ 的根的个数是 ().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 设 A 是正交矩阵, 下列结论不正确的是 ()

- A. $A^T = A^{-1}$ B. $|A^T| = 1$
- C. A 的每个列向量都是单位向量 D. A 的列向量组是正交向量组

得分	
阅卷人	

二、填空题 (本题共 12 分)

1. n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 $R(A)$ _____ n .

(选填 “ $\leq, <, >, \geq$ ”)

2. 三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} =$ _____.

3. 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (2, 0, t)^T, \alpha_3 = (1, -1, 5)^T$ 的秩为 2, 则 $t =$ _____.

4. 二次型 $f = -x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2$ 的负惯性指数为 _____.

线

封

密

得分	
阅卷人	

三、计算题(本题共 55 分, 其中第 1-3 题每题 9 分, 第 4-5 题每题 14 分)

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $A^2 - AB = E$, 求矩阵 B .

3. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 2)^T$, $\alpha_2 = (0, 2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (2, 0, 3, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, 1, 0, 4)^T$, 求该向量组的秩和一个最大线性无关组; 并把其余向量用此最大无关组表出.

4. 已知齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (a-3)x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + (4-a)x_3 = 0 \\ ax_1 - ax_2 + (2a+3)x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解, 求常数 a , 并求该方程

组的通解.

线

封

密

5. 求一个正交变换 $x = Py$ ，将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2$ 化为标准形.

得分	
阅卷人	

四、综合题(本题共 5 分)

设四元一次非齐次线性方程组 $Ax = b$ 系数矩阵的秩等于 3，已知 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是它的三个解向量，且 $\xi_1 = (1, 2, -1, 1)^T$ ， $\xi_2 + \xi_3 = (3, 3, 0, 3)^T$ ，求方程组 $Ax = b$ 的通解.