齐鲁工业大学 22/23 学年第二学期《高等数学 I（下）》

期末考试试卷答案（A 卷）

一、计算题（本题满分 30 分，每题 6 分）

1、解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$ （2 分）

$= \dfrac{1}{2}$ （1 分）

$\because f(0,0)=0$ （1 分）

$\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \dfrac{1}{2} \neq 0$ （1 分）

不连续 （1 分）

2、解：$\because p(x)=2, q(x)=8$ （1 分）

$y = e^{-\int 2dx}(\int 8e^{\int 2dx}dx + C)$ （2 分）

$= e^{-2x}(4e^{2x}+C) = 4+Ce^{-2x}$ （1 分）

$\because \mathrm{y}|_{x=0}=0$，$C=-4$ （1 分）

$\therefore y = 4-4e^{-2x}$ （1 分）

3、解：$n \perp (5,2,1)$，$n \perp (1,-4,2)$ （2 分）

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (8,-9,-22)$$

（2 分）

$8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0$ 或 $8x-9y-22z-59=0$ （2 分）

4、解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x}$ （2 分）

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y}$ （2 分）

$dz = \dfrac{1}{x}dx + \dfrac{1}{y}dy$ （2 分）

5、解: $\begin{cases} f_x = 4-2x=0 \\ f_y = -4-2y=0 \end{cases}$ （2 分）

得驻点 $(2,-2)$ （2 分）

$f_{xx}=-2, f_{yy}=-2, f_{xy}=0$ （1 分）

$\therefore f(2,-2)=8$ 是极大值 （1 分）

二、 解答题（本题满分 20 分，每题 10 分）

6、解：齐次方程得特征方程 $r^2-6r+9=0$ （2 分）

特征值 $r_{1,2}=3$ （2 分）

齐次方程得通解 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ （2 分）

特解形式 $y^*=kx^2e^{3x}$ （2 分）

$k=\frac{1}{2}$ （1 分）

通解 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{1}{2}x^2e^{3x}$ （1 分）

7、**解：对 x 求导得：** $\begin{cases} 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1 \\ y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-x \end{cases}$ （2 分）

$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -x & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix}}=\frac{-z+x}{z-y}$ $\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & -x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix}}=\frac{-x+y}{z-y}$ （2 分）

$(1,-2,1)$ 处得切向量 $(1,\frac{x-z}{z-y},\frac{y-x}{z-y})_{(1,-2,1)}=(1,0,-1)$ （2 分）

切线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$ （2 分）

法平面方程 $(x-1)-(z-1)=0$ 即 $x-z=0$ （2 分）

三、积分题（本题满分 30 分，每题 10 分）

8、解：积分区域 D 画图 （2 分）

化成 x 型： $0<x<\pi, 0<y<x$ （4 分）

$$\iint_D \frac{\sin x}{x} dxdy = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \int_0^x dy$$ （2 分）

$$= \int_0^{\pi} \sin x dx$$ （1 分）

=2 （1 分）

9、解：画出 Ω 图 （2 分）

得投影方程：$D: x^2 + y^2 \le 1$ （2 分）

柱面坐标：$$\begin{cases} \rho < z < \sqrt{2-\rho^2} \\ 0 < \rho < 1 \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$ （3 分）

$$I = \iiint_{\Omega} zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} zdz$$ （2 分）

$$= \frac{\pi}{2}$$ （1 分）

10、解：画图 （2 分）

用格林公式

$$P = x + 2y, Q = x - 2y$$ （2 分）

$$I = \oint_l (x+2y)dx + (x-2y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$ （2 分）

$$= \iint_D (-1) dxdy$$ （2 分）

$$= -\frac{1}{6}$$ （2 分）

四、级数题（本题满分 20 分，每题 10 分）

11、解：收敛域（-1，1） （2 分）

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x(\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)')$$ （2 分）

$$= x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)'$$ （2 分）

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$ （2分）

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛 （1 分）

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$$ （1 分）

12、解: $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ （4 分）

$$\frac{1}{(1+x)^2}=-(\frac{1}{1+x})'$$ （2 分）

$$=-(1-x+x^2-x^3+\cdots)'$$

$$=1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots$$ （2 分）

$$\therefore f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$$ （1 分）

收敛域（-1，1） （1 分）