

## 数分 II (A)

使用专业、班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

本题得分

一、填空题【每小题 4 分, 共计 16 分】

1.  $\int_{-1}^1 \left( \frac{x^2 \sin x}{1+x^2} + x^2 \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 求曲线  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases}$  (其中  $a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$ ) 的弧长  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^p+1}}$  收敛的充要条件是  $p$  满足不等式  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 设  $z = x^2 - xy + y^2$  在点  $(-1, 1)$  处沿着方向  $(2, 1)$  的方向导数  $\frac{\partial z}{\partial l} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

本题得分

二、选择题【每小题 4 分, 共计 16 分】

(1) 下列广义积分收敛的是 ( )

(A)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

(B)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{1+x^2} dx$

(C)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad (p \leq 1)$

(D)  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx \quad (p \leq 1)$

(2) 下列级数中收敛的是 ( )

(A)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$

(B)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{n^2+5n}$

(C)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}.$

(D)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(3) 下列关于二元函数的结论正确的是 ( )

(A) 偏导数不连续, 则全微分必不存在 (B) 偏导数连续, 则全微分一定存在

(C) 全微分存在, 则偏导数必连续 (D) 全微分存在的充要条件: 偏导数存在.

(4) 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)\sin xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$  则 ( )

(A)  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  不连续; (B)  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  连续, 可微;(C)  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  连续, 不可微; (D)  $f(0, 1) = 1$ .

本题得分

三、计算题【每小题 6 分, 共计 36 分】

(1) 求定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x - 5} dx$  的值.

(2) 判断反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^p} dx$  (其中  $p \geq 0$ ) 是否收敛? 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

(3) 判断极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x+y+1} - 1}$  的存在性, 若存在, 求其值; 若不存在, 请说明理由.

(4) 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{n}{2} \pi}{3^n}$  是否收敛? 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

(5) 设  $u = f(xy, \frac{y}{x})$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

(6) 将函数  $f(x) = \arctan x$  展开成  $x$  的幂级数, 并求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  的和.

本题得分	
------	--

四、(本题 8 分) 证明: 级数  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \sqrt[3]{n}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且导函数连续.

本题  
得分

五、(本题 8 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n$  的收敛域与和函数.

本题  
得分

七、(本题 8 分) 设函数  $f(x,y) = \begin{cases} y \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ ,

证明:  $f(x,y)$  在点  $(0,0)$  处连续, 并讨论其偏导数的存在性及  $f(x,y)$  的可微性.

本题  
得分

六、(本题 8 分) 设函数  $f(x)$  在  $[a,b]$  上连续,  $f(x) > 0$ ,  
 $F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$ , 证明: (1)  $F'(x) \geq 2$ ; (2)  $F(x) = 0$  在  $[a,b]$  中有且

仅有一个根.

(3)