

试卷编号									
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

命题人: _____ 审核人: _____ 试卷分类 (A 卷)

齐鲁工业大学 试 卷

学期: 2020 至 2021 学年度 第二学期

课程: 线性代数 课程代号: 0500090

使用班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

题号	一	二	三	总分
得分				

一、

得分	
----	--

 计算

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{array} \right| \text{。 (本题 12 分)}$$

解

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{array} \right| \text{-----6 分}$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array} \right| = 40. \text{-----12 分}$$

二、

得分	
----	--

 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $3AB - 2A$ 及 $A^T B$. (本题 12 分)

更多考试真题

扫码关注 **【QLU 星球】**

回复：**真题** 获取



公众号 · QLU星球

$$\begin{aligned}
 \text{解: } 3AB - 2A &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{---6 分} \\
 A^T B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{---12 分}
 \end{aligned}$$

三、得分 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求解矩阵方程 $AX = B$ 。 (本题 12 分)

解

$$\begin{aligned}
 (A, B) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array} \right) \quad \text{---4 分} \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right), \quad \text{---8 分}
 \end{aligned}$$

可见 A 可逆, 且

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \quad \text{---12 分}$$

四、得分 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 计算 $|A^{-1}|$ 。(本题 12 分)

解: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$, -----6 分

则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$ 。-----12 分

五、得分 解方程组 (本题 13 分)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

解: 对线性方程组的增广矩阵施以初等行变换得

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{-----4 分}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{-----8 分}$$

于是方程组的通解为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3, \text{ 其中 } x_3 \text{ 为自由未知数.} \\ x_4 = -3 \end{cases}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

其中 c 为任意常数. -----13 分

六、得分 设有线性方程组
$$\begin{cases} 2\lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3\lambda x_3 = 3\lambda^2 \end{cases}$$

问 λ 为何值时,此方程组有唯一解、无解或有无穷多解? (本题 14 分)

解 (1) $\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 3 & 3\lambda \end{vmatrix} \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1, -2$ 时方程组有唯一解. -----4 分

(2) $R(A) < R(B)$

$$B = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 3 & 3 & 3\lambda & 3\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

由 $(1-\lambda)(2+\lambda) = 0, (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \neq 0$,

得 $\lambda = -2$ 时, 方程组无解. -----9 分

(3) $R(A) = R(B) < 3$, 由 $(1-\lambda)(2+\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$,

得 $\lambda = 1$ 时, 方程组有无穷多个解. -----14 分

七、得分 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的秩和一个最大无关组:
(本题 12 分)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

解: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ -----4 分

$$\begin{array}{l} r_3+r_2 \\ \sim \\ r_3 \leftrightarrow r_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{----- 8 分}$$

所以矩阵的列向量组的秩是 3, 第 1、2、3 列构成一个最大无关组. ----- 12 分

八、

得分	
----	--

 求下列齐次线性方程组的基础解系: (本题 13 分)

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

解: $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{----- 8 分}$

所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

取 $x_3 = 7, x_4 = 0$ 得 $x_1 = -9, x_2 = 1$

取 $x_3 = 0, x_4 = 2$ 得 $x_1 = 1, x_2 = -1$

因此基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{----- 13 分}$