齐鲁工业大学 2021/2022 学年第二学期《高等数学Ⅱ（下）》期末考试试卷（A 卷）答案

线　　封　　密

学院、系＿＿＿＿ 专业班级＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 姓名

一、解下列微分方程[每小题 8 分，满分 16 分]

1．求方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解：分离变 量：$\frac{dy}{y}=2xdx$　　3 分

积分：$\ln|y|=x^2+\ln c$　　6 分

$y=ce^{x^2}$　　8 分

2．求方程 $y''-6y'+9y=0$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解.

解：特征方程：$r^2-6r+9=0$　　2 分

特征根：$r_1=r_2=3$　　4 分

通解：$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$　　6 分

代入初始条件得：$C_1=0, C_2=1$

特解：$y=xe^{3x}$　　8 分

二、计算题[每小题 8 分，满分 40 分]

1．求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解：$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}$　　4 分

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}3(\sqrt{xy+1}+1)$　　6 分

$=6$　　8 分

2．设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求此方程确定的隐函数的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z=0$

$F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z-4$　　4 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y}{2-z}$　　8 分

3. 设 $u=x^2+y^2+z$，求 $\mathbf{d}u\big|_{(1,1,2)}$.

解：$u_x=2x$，$u_y=2y$，$u_z=1$ 4 分

$$\mathbf{d}u\big|_{(1,1,2)}=u_x dx+u_y dy+u_z dz$$

$$=2dx+2dy+1dz$$ 8 分

4. 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由直线 $y=1, x=2, y=x$ 所围成的闭区域.

解：$\iint\limits_D xydxdy$

$=\int_1^2 dx\int_1^x xydy$ 4 分

$=\int_1^2 \frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}dx$ 6 分

$=\frac{9}{8}$ 8 分

5. 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2+y^2 dxdy$.

解：$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2+y^2 dxdy$

$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^3 dr$ 4 分

$=\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}d\theta$ 6 分

$=\frac{\pi}{2}$ 8 分

三、解答题[每小题 8 分，满分 16 分]

1.一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a}=(2,1,1)$ 和 $\vec{b}=(1,-1,0)$，试求此平面方程.

解： 取平面法向量为

$$\vec{n}=a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(1,1,-3)$$ 4 分

则平面方程为 $(x-1)+(y-0)-3(z+1)=0$ 6 分

即 $x+y-3z-4=0$ 8 分

2．求曲面 $x^2-4y^2+2z^2=6$ 在点 $(2,2,3)$ 处的法线方程.

解：$\vec{n}=(\mathrm{F}_x,\mathrm{F}_y,\mathrm{F}_z)=(2x,-8y,4z)=(4,-16,12)=4(1,-4,3)$ 4 分

法线方程：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{3}$ 8 分

四、解答题[本题满分 8 分]

求函数 $f(x,y)=x^3+y^2-6xy-39x+18y+18$ 的极值

解：求驻点：$f_x=3x^2-6y-39=0$ $f_y=2y-6x+18=0$ 4 分

解得：驻点 $(1,-6),((5,6)$ 6 分

$A=f_{xx}=6x$，$B=f_{xy}=-6$，$C=f_{yy}=2$

$AC-B^2=12x-36$

$(5,6)$ 是极值点，都是极小值，$f(5,6)=-88$ 8 分

五、解答题[本题满分 8 分]

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 为正项级数，有比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^n}\cdot\frac{3^{n-1}}{n}=\frac{1}{3}<1$$ 4 分

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 收敛，所以原级数绝对收敛。 8 分

六、解答题［本题满分 10 分］

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域及和函数.

解：幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域：$(-1,1)$， 4 分

$$s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'$$ 6 分

$$=x(\frac{x}{1-x})'$$ 8 分

$$=\frac{x}{(1-x)^2}$$ 10 分