

## 第五章 数理统计的基本知识

### 一、填空题

1. 若总体的分布函数为  $F(x)$ , 那么样本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的分布函数

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots$ , 设总体  $X \sim e(\lambda)$ , 试写出样本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的概率密度函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots$ .

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

$$= P\{X_1 \leq x_1\} \cdot P\{X_2 \leq x_2\} \cdots P\{X_n \leq x_n\}$$

$$= F(x_1) \cdot F(x_2) \cdots F(x_n)$$

$$X \sim e(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, & x_i > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

2. 设有样本值 81.9, 89.4, 79.0, 81.4, 84.8, 85.9, 88.0, 80.3, 82.6, 83.5, 80.2, 85.2, , 试用计算器计算  $\bar{x} = \dots$ ,  $s^2 = \dots$ .

$$\bar{x} = \frac{81.9 + 89.4 + \dots + 85.2}{12}$$

$$s^2 = \frac{1}{11} [(81.9 - \bar{x})^2 + \dots + (85.2 - \bar{x})^2]$$

$$\boxed{\text{, , } \nu \cdot 1 \nu \cdot \dots \cdot 1 \nu, \nu \cdot \nu + k \ln v(x, Y_2)}$$

$$\text{Cov}(x, aY_1 + bY_2) = a \text{Cov}(x, Y_1) + b \text{Cov}(x, Y_2)$$

3. 设总体  $X$  的  $EX = \mu, DX = \sigma^2$ , 从总体  $X$  中抽取一组样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $\bar{X}$  为样本均值, 则有  $E\bar{X} = \underline{\mu}$ ,  $D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$ ,  $\text{cov}(X_1, \bar{X}) = \underline{\quad}$ .

$$\begin{aligned}\text{Cov}(x, \bar{x}) &= \text{Cov}(x, \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n) \\ &= \frac{1}{n} \text{Cov}(x, x_1) + \frac{1}{n} \text{Cov}(x, x_2) + \dots + \frac{1}{n} \text{Cov}(x, x_n) \\ &= \frac{1}{n} DX_1 = \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

4. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的一个简单随机样本, 则样本均值  $\bar{X}$  服从  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  分布, 若  $a_i$  为常数 ( $a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ ), 则  $\sum_{i=1}^n a_i X_i$  服从 \_\_\_\_\_ 分布.

$$\begin{aligned}E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) &= a_1 EX_1 + a_2 EX_2 + \dots + a_n EX_n \\ &= a_1 \mu + a_2 \mu + \dots + a_n \mu = \mu \sum_{i=1}^n a_i \\ D(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) &= a_1^2 DX_1 + a_2^2 DX_2 + \dots + a_n^2 DX_n \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2\end{aligned}$$

$$N\left(\mu \sum_{i=1}^n a_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

5. 总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\bar{X}$  是样本均值,  $S^2$  是样本方差,  $n$  为样本容量, 则常

$$\text{用的统计量 } U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1); \quad T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1);$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1); \quad \chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n).$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

6. 设随机变量  $X_1, X_2, X_3, X_4$  独立且都服从  $N(0, \frac{1}{2})$ , 则  $(X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2$  服从\_\_\_\_\_分布, 若要使  $aX_1^2 + b(X_2 + X_3 + X_4)^2 \sim \chi^2(2)$ , 则需  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$$X_1, X_2 \sim N(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(0, 1)$$

$$\text{同理. } X_3 + X_4 \sim N(0, 1)$$

$$\text{故 } (X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2 \sim \chi^2(2)$$

$$X_1 \sim N(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow \sqrt{a} X_1 \sim N(0, \frac{a}{2}) \quad \checkmark$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0, \frac{3}{2}) \Rightarrow \sqrt{b}(X_1 + X_2 + X_3) \sim N(0, \frac{3}{2}b) \quad \checkmark$$

$$\text{故 } \begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \\ \frac{3}{2}b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = \frac{2}{3}$$

7. 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是来自正态总体  $N(0, 2^2)$  的简单随机样本, 则  $\frac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}}$  服从  $t(3)$  分布,  $\frac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2}$  服从  $F(2, 2)$  分布.

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim N(0, 2^2) \Rightarrow \frac{X_1}{2}, \frac{X_2}{2}, \frac{X_3}{2}, \frac{X_4}{2} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{X_1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{X_1}{2}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{2}\right)^2}{3}}}$$

## 二、选择题

1. 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu$  已知, 而  $\sigma^2$  是未知的,  $X_1, X_2, X_3$  是总体的一个样本, 试问哪个不是统计量 ( C ).

- (A)  $\bar{X} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i$ ; (B)  $X_1 + X_3 - \mu$ ;  
 (C)  $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2$ ; (D)  $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2$ .

2. 设总体  $X \sim N(1, 2^2)$ ,  $X_1, \dots, X_{100}$  是来自总体  $X$  的样本,  $\bar{X}$  为样本均值, 已知  $Y = a\bar{X} + b \sim N(0, 1)$ , 则有 ( A ).

- (A)  $a = -5, b = 5$ ; (B)  $a = 5, b = 5$ ;  
 (C)  $a = \frac{1}{5}, b = -\frac{1}{5}$ ; (D)  $a = -\frac{1}{5}, b = \frac{1}{5}$ .

$$\bar{X} \sim N(1, \frac{2^2}{100}) \text{ 即 } \bar{X} \sim N(1, \frac{1}{25})$$

$$Y = a\bar{X} + b \sim N(a+b, \frac{a^2}{25})$$

$$\text{故 } \begin{cases} a+b=0 \\ \frac{a^2}{25}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-5 \\ b=5 \end{cases}$$

### 三、计算与证明题

1. 从正态总体  $N(52, 6.3^2)$  中随机抽取容量为 36 的样本, 求样本均值  $\bar{X}$  落在 50.8 到 53.8 之间的概率.

$$\bar{X} \sim N(52, \frac{6.3^2}{36}) \quad \text{即} \quad \bar{X} \sim N(52, 1.05^2)$$

$$P(50.8 < \bar{X} < 53.8) = P\left(\frac{50.8 - 52}{1.05} < \frac{\bar{X} - 52}{1.05} < \frac{53.8 - 52}{1.05}\right)$$

$$= \Phi(\ ) - \Phi(\ )$$

2. 从正态总体  $N(\mu, 0.5^2)$  中抽取样本  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ , (1) 已知  $\mu = 0$ , 求概率

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 4\right\}; \quad (2) \text{ 未知 } \mu, \text{ 求概率 } P\left\{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 \geq 2.85\right\}.$$

$$(1) \quad X_i \sim N(0, 0.5^2) \Rightarrow \frac{X_i - 0}{0.5} \sim N(0, 1)$$

$$\text{即 } \underbrace{2X_i \sim N(0, 1)}_{\sim \chi^2(10)}$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 4\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{10} (2X_i)^2 \geq 16\right\}$$

$$(2) \quad P\left\{\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{0.5}\right)^2 \geq 11.6\right\}$$

$$\sim \chi^2(9)$$

## 第六章 参数估计

### 一. 填空题

1. 构造点估计量的两种常用方法是\_\_\_\_\_.
2. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为总体  $X$  的简单随机样本,  $EX = \mu, DX = \sigma^2$ ,  $\bar{X}, S^2$  分别为样本均值及样本方差, 则  $\mu, \sigma^2$  的矩估计量分别是  $\bar{X}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X})^2$ .
3. 若未知参数  $\theta$  的点估计量  $\hat{\theta}$  满足  $E\hat{\theta} = \theta$ , 则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  无偏估计量.
4. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为总体  $X$  的简单随机样本,  $EX = \mu, DX = \sigma^2$ ,  $\bar{X}, S^2$  分别为样本均值及样本方差,  $\bar{X}$  是 (是或不是)  $\mu$  的无偏估计量,  $S^2$  是 (是或不是)  $\sigma^2$  的无偏估计量; 但是,  $\bar{X}^2$  不是 (是或不是)  $\mu^2$  的无偏估计量,  $S$  不是 (是或不是)  $\sigma$  的无偏估计量.
5. 已知来自正态总体  $X \sim N(\mu, 0.9^2)$  容量为 9 的简单随机样本, 样本均值  $\bar{x} = 5$ , 则未知参数  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间是\_\_\_\_\_.

$$\left( \bar{x} - \frac{6}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{6}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\left( 5 - \frac{0.9}{\sqrt{9}} u_{0.025}, 5 + \frac{0.9}{\sqrt{9}} u_{0.025} \right)$$

## 二. 计算题

1. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) 为正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本,  $Q = c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  为  $\sigma^2$  的无偏估计, 求  $c$ .

$$EX_i^2 = (EX_i)^2 + DX_i = \mu^2 + \sigma^2$$

$$EQ = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} EQ &= c \sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1}^2 - 2X_i X_{i+1} + X_i^2) \\ &= c \sum_{i=1}^{n-1} (EX_{i+1}^2 - 2EX_i EX_{i+1} + EX_i^2) \\ &= c \sum_{i=1}^{n-1} (\underline{\mu^2 + \sigma^2} - 2\underline{\mu^2} + \underline{\mu^2 + \sigma^2}) \\ &= 2c(n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\text{故 } c = \frac{1}{2(n-1)}$$

2. 设总体  $X$  的密度函数  $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(1)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为其样本, 试求参数  $\theta$  的矩估计量.

(2) 上述的矩估计量是  $\theta$  的无偏估计量吗?

(3) 2.4, 3, 3.2, 2.8, 2.6, 2.2, 3.4, 2.4 为一组样本值, 求  $\theta$  的矩估计值.

$$(1) EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^\theta x \cdot \frac{2}{\theta^2}(\theta-x) dx = \dots$$

$$\text{令 } EX = \bar{x} \text{ 得 } \hat{\theta} = \dots$$

$$(2) E\hat{\theta} \neq \theta$$

$$(3) \bar{x} = \frac{\dots + \dots + \dots}{8}$$

3. 总体  $X$  服从几何分布, 分布律为  $P\{X = x\} = (1-p)^{x-1} p$ ,  $x = 1, 2, \dots$ , 其中  $p$  为未知参数, 且  $0 < p < 1$ , 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $X$  的一个样本, 求  $p$  极大似然估计量.

$$\text{似然函数 } L(p) = \prod_{i=1}^n (1-p)^{x_i-1} \cdot p = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - n}$$

$$\text{取对数. } \ln L(p) = n \ln p + (\sum_{i=1}^n x_i - n) \ln(1-p)$$

$$\therefore \frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p} (\sum_{i=1}^n x_i - n) = 0$$

$$\text{得 } \hat{p} = \dots \quad (\text{大写})$$

4. 设总体  $X$  的概率分布为

$X$	1	2	3
$P_x$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中  $\theta$  为未知参数, 现抽得一个样本  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$ , 求  $\theta$  的矩估计值和极大似然估计值。

$$\text{似然函数 } L(\theta) = \theta^2 \cdot 2\theta(1-\theta) \cdot \theta^2 = 2\theta^5(1-\theta)$$

$$\text{取对数 } \ln L(\theta) = \ln 2 + 5 \ln \theta + \ln(1-\theta)$$

$$\therefore \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{5}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = 0$$

$$\text{得 } \hat{\theta} = \dots$$

5. 总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 现从总体  $X$  中抽取容量为 9 的样本, 经观测与计算得样本均值  $\bar{x} = 20.1$ , 样本均方差  $s = 0.203$ .

(1) 若已知  $\sigma = 0.21$ , 求  $\mu$  对应于置信度为 0.95 的置信区间.

(2) 若  $\sigma$  未知, 求  $\mu$  对应于置信度为 0.95 的置信区间.

(3) 若  $\mu$  未知, 求  $\sigma^2$  对应于置信度为 0.95 的置信区间.

$$(1) \left( \bar{x} - \frac{6}{\sqrt{n}} U_{0.025}, \bar{x} + \frac{6}{\sqrt{n}} U_{0.025} \right) = \dots$$

$$(2) \left( \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.025}^{(8)}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.025}^{(8)} \right) = \dots$$

$$(3) \left( \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}^{(8)}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}^{(8)}} \right) = \dots$$

$$\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = (9-1)s^2$$

7、设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自均匀分布  $U[0, \theta]$  的一个样本，其中  $\theta > 0$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是一组观察值，则  $\theta$  的极大似然估计量为 ( $\hat{X}_{(n)}$ )。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

似然函数  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} \quad (0 \leq x_i \leq \theta)$

$L(\theta)$  关于  $\theta$  ↓ 故当  $\theta = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  时，

$L(\theta)$  取最大值。因此,  $\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$L(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^n} \nearrow \theta \leq x_i \leq 1$$

$$\hat{\theta} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$\hat{\theta} = \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$