齐鲁工业大学

2018 / 2019 学年第 1 学期期末考试试卷 A

（答案一律写在答题纸上，答在试题上无效，试卷附在答卷内交回）

课 程 名 称：数值分析

年　　级：____　　　　　　　　共 3 页

一、简答题（本题满分 10 分）

正方形的边长大约为 100cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过 1cm^2?

解：　设正方形的边长为 x，则其面积为 $y=x^2$。由题设知 x 的近似值 $x^*=100cm$。记 y^*为 y 的近似值，则

$$e(y^*)=y^*-y=(x^2)'\big|_{x=x^*}(x^*-x)=2x^*(x^*-x)=200(x^*-x)$$

又由题意知

$$\varepsilon(y^*)\approx 200\varepsilon(x^*)\le 1$$

故 $\varepsilon(x^*)<\dfrac{1}{200}=0.005(cm)$

二、计算题（本题满分 10 分）

用高斯（Gauss）消去法求解三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3=-6\\4x_1-3x_2-2x_3=8\\3x_1-2x_2+x_3=-1\end{cases}$$

解：　由题得增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & \vdots & -6 \\ 4 & -3 & -2 & \vdots & 8 \\ 3 & -2 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1.5)+r_3]{r_1\times(-2)+r_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & \vdots & -6 \\ 0 & -5 & -10 & \vdots & 20 \\ 0 & -3.5 & -5 & \vdots & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times(-0.7)+r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & \vdots & -6 \\ 0 & -5 & -10 & \vdots & 20 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

计算得方程组的解为

$$x = (2, 2, -3)^T$$

三、计算题（本题满分 10 分）

用高斯（Gauss）完全主元素消去法求解方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

解：　　由题得增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \vdots & b \\ 5 & 2 & 1 & \vdots & -12 \\ -1 & 4 & 1 & \vdots & 18 \\ 2 & -2 & 10 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_3]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & \vdots & b \\ 10 & -2 & 2 & \vdots & 6 \\ 1 & 4 & -1 & \vdots & 18 \\ 1 & 2 & 5 & \vdots & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{10}r_1]{r_2 - \frac{1}{10}r_1}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & \vdots & b \\ 10 & -2 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & \frac{21}{5} & -\frac{6}{5} & \vdots & \frac{87}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{24}{5} & \vdots & -\frac{63}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} x_3 & x_1 & x_2 & \vdots & b \\ 10 & 2 & -2 & \vdots & 6 \\ 0 & \frac{24}{5} & \frac{11}{5} & \vdots & -\frac{63}{5} \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{21}{5} & \vdots & \frac{87}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + \frac{1}{4}r_2} \begin{bmatrix} x_3 & x_1 & x_2 & \vdots & b \\ 10 & 2 & -2 & \vdots & 6 \\ 0 & \frac{24}{5} & \frac{11}{5} & \vdots & -\frac{63}{5} \\ 0 & 0 & \frac{95}{20} & \vdots & \frac{285}{20} \end{bmatrix}$$

计算得方程组的解为

$$x = (-4, 3, 2)^T$$

四、计算题（本题满分 15 分）

用雅可比（Jacobi）迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

要求写出其迭代格式，并进行 4 次迭代计算。

解： 方程组简化为

$$\begin{cases} x_1 = (\quad -2x_2 - x_3 - 12)/5 \\ x_2 = (\quad x_1 \quad - x_3 + 20)/4 \\ x_3 = (-2x_1 + 2x_2 \quad + 3)/10 \end{cases}$$

由上式构造迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(\quad -2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 12 \right)/5 \\ x_2^{(k+1)} = \left(x_1^{(k)} \quad - x_3^{(k)} + 20 \right)/4 \qquad k = 0,1,2\cdots \\ x_3^{(k+1)} = \left(-2x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} \quad + 3 \right)/10 \end{cases}$$

取迭代初始值为 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$

迭代计算得 $x^{(1)} = (-2.4,5,0.3)^T$ $\qquad x^{(2)} = (-4.46,4.325,1.78)^T$

$x^{(3)} = (-4.486,3.44,2.057)^T$ $\qquad x^{(4)} = (-4.1874,3.36425,1.8852)^T$

五、计算题（本题满分 10 分）

已知 $\sqrt{64}=8$, $\sqrt{81}=9$, 用 Lagrange 线性插值法计算 $\sqrt{71}$ 的近似值（结果取 3 位有效数字）。

解： 由题意应考虑函数 $y=f(x)=\sqrt{x}$ 在[64，81]上的 Lagrange 线性插值，

根据线性插值公式 $P_1(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$

用 P_1（71）作为 f(71)的近似值，即

六、计算题（本题满分 10 分）

测得函数 $y=f(x)$ 的一组实验数据：

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	24.8	30.3	35.1	39.5	45.4	49.8	51.1

试用最小二乘法拟合这组数据的多项式。

解： 数据对描成点用线连接，接近一条直线，故可用直线 $P_1(x)=a+bx$

来拟合数据。由实验数据知：

$$\sum_{i=0}^{6} x_i^0 = 7 \quad \sum_{i=0}^{6} x_i = 28 \quad \sum_{i=0}^{6} y_i = 276$$

$$\sum_{i=0}^{6} x_i^2 = 140 \qquad \sum_{i=0}^{6} x_i y_i = 1232.2$$

将以上数据代入正则方程组

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^0\right) a + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) b = \sum_{i=0}^{6} x_i y_i \end{cases}$$

得 $\begin{cases} 7a + 28b = 276 \\ 28a + 140b = 1232.2 \end{cases} \Rightarrow \quad a = 4.58, \quad b = 21.1$

从而得拟合直线 $P_1(x) = 4.58x + 21.1$

七、计算题（本题满分 15 分）

分别用矩形公式、梯形公式和抛物线公式计算定积分 $\frac{1}{2}\int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x}dx$ 的数值解（结果取 4 位有效数字）。

（已知：$\sqrt{2} = 1.414, \quad \sqrt{3} = 1.732, \quad \sqrt{10} = 3.162$）

解： 矩形公式为 $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad c = \frac{(b-a)}{2}$

代入数据可得 $\frac{1}{2}\int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x}dx = \frac{1}{2}(1.2-0.4)\sqrt{0.8} = 0.3577$

梯形公式为 $\int_a^b f(x)dx = \left[f(a) + f(b)\right]\frac{(b-a)}{2}$

代入数据可得 $\frac{1}{2}\int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x}dx = \frac{1}{2} \times \frac{(1.2-0.4)}{2}\left(\sqrt{0.4} + \sqrt{1.2}\right) = 0.3456$

抛物线公式为 $\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

代入数据可得 $\frac{1}{2}\int_{0.4}^{1.2}\sqrt{x}dx = \frac{1}{2}\times\frac{(1.2-0.4)}{6}\left(\sqrt{0.4}+4\sqrt{0.8}+\sqrt{1.2}\right)$

$=0.3537$

八、计算题（本题满分 10 分）

取步长 $h=0.2$，用 Euler 公式求解初始值问题

$y'=y^2,\quad y(0)=1\quad 0\le x\le 2$ 在各个节点上的数值解。

解：　根据题意，$f(x,y)=y^2$，步长 $h=0.2$，由 Euler 公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

得 $y_{n+1}=y_n+0.2y_n^2,\quad x_n=0.2n,\quad n=0,1,2,\cdots,10$

则各节点处的数值解为

九、计算题（本题满分 10 分）

用 Newton 迭代法求方程 $x-e^{-x}=0$ 在 0.6 附近的根

（结果取 4 位有效数字）。

解：　由 Newton 迭代公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，得迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+e^{x_k}}$$

取迭代初始值为 $x_0=0.6$ 可得前 4 次的迭代根为