

22-23-2 《线性代数 I》(A卷) 参考答案

一、填空题 (每题 3 分, 满分 18 分)

1. -4; 2. 5; 3. $R(A) = R(A, B)$; 4. 2; 5. 7; 6. 36

二、简答题 (每题 8 分, 满分 16 分)

1. 解: 二次型 f 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & t & -1 \\ t & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

由 f 是正定二次型, 所以

$$D_1 = 2 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, D_3 = \begin{vmatrix} 2 & t & -1 \\ t & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - t^2 > 0.$$

解得 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

2. 解: 由 $\xi = (2, 1, 2)^T$ 是方阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & a \\ -4 & -2 & b \end{pmatrix}$ 的特征值 λ 对应的特征向量, 所以 $A\xi = \lambda\xi$,

$$\text{即 } \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & a \\ -4 & -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{从而 } \begin{cases} 6 - 2 - 8 = 2\lambda \\ -4 + 6 + 2a = \lambda \\ -8 - 2 + 2b = 2\lambda \end{cases}, \text{解得 } \lambda = -2, a = -2, b = 3$$

三、计算题 (每题 12 分, 满分 36 分)

1. 解: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 9 & -8 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 向量组的秩 $R=2$.

(2) 向量组的一个最大无关组是 α_1, α_2 . $\alpha_3 = -3\alpha_1 + 6\alpha_2$, $\alpha_4 = 6\alpha_1 - 7\alpha_2$, $\alpha_5 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2$.

2. 解: 原矩阵方程可化为 $(A - 2E)X = B$, 由于 $|A - 2E| \neq 0$, 所以 $X = (A - 2E)^{-1}B$.

$$(A - 2E, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } (A - 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } X = (A - 2E)^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -16 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{解: } D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 81$$

四、解答题（每题 15 分，满分 30 分）

1. 解:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & a-6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

由方程组有无数解可得 $R(A) = R(A, b)$, $\therefore a = 3$.

$$\text{方程组的同解方程组是} \begin{cases} x_1 = x_3 - 5 \\ x_2 = -2x_3 + 11 \\ x_4 = -4 \end{cases}$$

令 $x_3 = k$, 可得方程组的通解 $x = (k-5, -2k+11, k, -4)^T$.

$$2. \text{解: } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-5)^2 = 0, \text{ 得特征值 } \lambda_1 = \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 0.$$

(1) 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ 时,

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 解得特征向量 } \xi_1 = (1, -2, 0)^T, \xi_2 = (0, 0, 1)^T.$$

两者已正交，单位化得 $p_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)^T, p_2 = (0, 0, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = 0$ 时，

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 解得特征向量 } \xi_3 = (2, 1, 0)^T.$$

单位化得 $p_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)^T$.

记 $P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 所以正交变换 $x = Py$ 使得二次型可以化为标准形

$$f = 5y_1^2 + 5y_2^2 + 0y_3^2.$$