

第五章 数理统计的基本知识

一、填空题

1. 若总体的分布函数为 $F(x)$ ，那么样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，设总体 $X \sim e(\lambda)$ ，试写出样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的概率密度函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

$$= P\{X_1 \leq x_1\} \cdot P\{X_2 \leq x_2\} \cdots P\{X_n \leq x_n\}$$

$$= F(x_1) \cdot F(x_2) \cdots F(x_n)$$

$$X \sim e(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, & x_i > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

2. 设有样本值 81.9, 89.4, 79.0, 81.4, 84.8, 85.9, 88.0, 80.3, 82.6, 83.5, 80.2, 85.2, ，试用计算器计算 $\bar{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $s^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\bar{x} = \frac{81.9 + 89.4 + \cdots + 85.2}{12}$$

$$s^2 = \frac{1}{11} [(81.9 - \bar{x})^2 + \cdots + (85.2 - \bar{x})^2]$$

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right]$$

$$\boxed{\text{Cov}(X, aY_1 + bY_2) = a\text{Cov}(X, Y_1) + b\text{Cov}(X, Y_2)}$$

3. 设总体 X 的 $EX = \mu, DX = \sigma^2$, 从总体 X 中抽取一组样本 X_1, X_2, \dots, X_n , \bar{X} 为样本均值, 则有 $E\bar{X} = \underline{\mu}$, $D\bar{X} = \underline{\frac{\sigma^2}{n}}$, $\text{Cov}(X_1, \bar{X}) = \underline{\quad}$.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, \bar{X}) &= \text{Cov}(X_1, \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \dots + \frac{1}{n}X_n) \\ &= \frac{1}{n}\text{Cov}(X_1, X_1) + \frac{1}{n}\text{Cov}(X_1, X_2) + \dots + \frac{1}{n}\text{Cov}(X_1, X_n) \\ &= \frac{1}{n}DX_1 = \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 则样本均值 \bar{X} 服从 $\underline{N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}$ 分布, 若 a_i 为常数 ($a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$), 则 $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ 服从 $\underline{\quad}$ 分布.

$$\begin{aligned}E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) &= a_1 EX_1 + a_2 EX_2 + \dots + a_n EX_n \\ &= a_1 \mu + a_2 \mu + \dots + a_n \mu = \mu \sum_{i=1}^n a_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) &= a_1^2 DX_1 + a_2^2 DX_2 + \dots + a_n^2 DX_n \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2\end{aligned}$$

$$N\left(\mu \sum_{i=1}^n a_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

5. 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, \bar{X} 是样本均值, S^2 是样本方差, n 为样本容量, 则常

用的统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \underline{N(0, 1)}$; $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$;

$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \underline{\chi^2(n)}$ 。

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

6. 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 独立且都服从 $N(0, \frac{1}{2})$, 则 $(X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2$ 服从_____分布, 若要使 $aX_1^2 + b(X_2 + X_3 + X_4)^2 \sim \chi^2(2)$, 则需 $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$ 。

$$X_1, X_2 \sim N(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(0, 1)$$

$$\text{同理, } X_3 + X_4 \sim N(0, 1)$$

$$\text{故 } (X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2 \sim \chi^2(2)$$

$$X_1 \sim N(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow \sqrt{a}X_1 \sim N(0, \frac{a}{2}) \quad \checkmark$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0, \frac{3}{2}) \Rightarrow \sqrt{b}(X_1 + X_2 + X_3) \sim N(0, \frac{3}{2}b) \quad \checkmark$$

$$\text{故 } \begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \\ \frac{3}{2}b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = \frac{2}{3}$$

√ v

7. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本, 则 $\frac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}}$ 服

从 $t(3)$ 分布, $\frac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2}$ 服从 $F(2, 2)$ 分布.

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim N(0, 2^2) \Rightarrow \frac{X_1}{2}, \frac{X_2}{2}, \frac{X_3}{2}, \frac{X_4}{2} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{X_1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{X_1}{2}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{2}\right)^2}{3}}}$$

二、选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 已知, 而 σ^2 是未知的, X_1, X_2, X_3 是总体的一个样本, 试问哪个不是统计量 (C).

(A) $\bar{X} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i$;

(B) $X_1 + X_3 - \mu$;

(C) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2$;

(D) $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2$.

2. 设总体 $X \sim N(1, 2^2)$, X_1, \dots, X_{100} 是来自总体 X 的样本, \bar{X} 为样本均值, 已知 $Y = a\bar{X} + b \sim N(0, 1)$, 则有 (A).

(A) $a = -5, b = 5$;

(B) $a = 5, b = 5$;

(C) $a = \frac{1}{5}, b = -\frac{1}{5}$;

(D) $a = -\frac{1}{5}, b = \frac{1}{5}$.

$$\bar{X} \sim N(1, \frac{2^2}{100}) \text{ 即 } \bar{X} \sim N(1, \frac{1}{25})$$

$$Y = a\bar{X} + b \sim N(a+b, \frac{a^2}{25})$$

$$\text{故 } \begin{cases} a+b=0 \\ \frac{a^2}{25}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-5 \\ b=5 \end{cases}$$

三、计算与证明题

1. 从正态总体 $N(52, 6.3^2)$ 中随机抽取容量为 36 的样本, 求样本均值 \bar{X} 落在 50.8 到 53.8 之间的概率.

$$\begin{aligned}\bar{X} &\sim N\left(52, \frac{6.3^2}{36}\right) \quad \text{即} \quad \bar{X} \sim N(52, 1.05^2) \\ P(50.8 < \bar{X} < 53.8) &= P\left(\frac{50.8-52}{1.05} < \frac{\bar{X}-52}{1.05} < \frac{53.8-52}{1.05}\right) \\ &= \Phi(\quad) - \Phi(\quad)\end{aligned}$$

2. 从正态总体 $N(\mu, 0.5^2)$ 中抽取样本 X_1, X_2, \dots, X_{10} , (1) 已知 $\mu = 0$, 求概率

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 4\right\}; (2) \text{ 未知 } \mu, \text{ 求概率 } P\left\{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 \geq 2.85\right\}.$$

$$\begin{aligned}(1) \quad X_i &\sim N(0, 0.5^2) \Rightarrow \frac{X_i - 0}{0.5} \sim N(0, 1) \\ \text{即} \quad &\boxed{2X_i \sim N(0, 1)} \quad \sim \chi^2(10) \\ P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 4\right\} &= P\left\{\sum_{i=1}^{10} (2X_i)^2 \geq 16\right\}\end{aligned}$$

$$(2) \quad P\left\{\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{0.5}\right)^2 \geq 11.6\right\} \\ \sim \chi^2(9)$$

第六章 参数估计

一. 填空题

- 构造点估计量的两种常用方法是_____。
- 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的简单随机样本, $EX = \mu, DX = \sigma^2$, \bar{X}, S^2 分别为样本均值及样本方差, 则 μ, σ^2 的矩估计量分别是 $\bar{X}, \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。 $\frac{n-1}{n} S^2$
- 若未知参数 θ 的点估计量 $\hat{\theta}$ 满足 $E\hat{\theta} = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 无偏估计量。
- 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的简单随机样本, $EX = \mu, DX = \sigma^2$, \bar{X}, S^2 分别为样本均值及样本方差, \bar{X} 是 (是或不是) μ 的无偏估计量, S^2 是 (是或不是) σ^2 的无偏估计量; 但是, \bar{X}^2 不是 (是或不是) μ^2 的无偏估计量, S 不是 (是或不是) σ 的无偏估计量。
- 已知来自正态总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 5$, 则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____。

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\left(5 - \frac{0.9}{\sqrt{9}} u_{0.025}, 5 + \frac{0.9}{\sqrt{9}} u_{0.025} \right)$$

二. 计算题

1. 设 X_1, X_2, \dots, X_n ($n \geq 2$) 为正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, $Q = c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计, 求 c .

$$EX_i^2 = (EX_i)^2 + DX_i = \mu^2 + \sigma^2$$

$$EQ = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} EQ &= c \sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1}^2 - 2X_i X_{i+1} + X_i^2) \\ &= c \sum_{i=1}^{n-1} (EX_{i+1}^2 - 2EX_i EX_{i+1} + EX_i^2) \\ &= c \sum_{i=1}^{n-1} (\mu^2 + \sigma^2 - 2\mu^2 + \mu^2 + \sigma^2) \\ &= 2c(n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\text{故 } c = \frac{1}{2(n-1)}$$

2. 设总体 X 的密度函数 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(1) X_1, X_2, \dots, X_n 为其样本, 试求参数 θ 的矩估计量. 大写

(2) 上述的矩估计量是 θ 的无偏估计量吗?

(3) 2.4, 3, 3.2, 2.8, 2.6, 2.2, 3.4, 2.4 为一组样本值, 求 θ 的矩估计值.

$$(1) EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^\theta x \cdot \frac{2}{\theta^2} (\theta - x) dx = \dots$$

$$\text{令 } EX = \bar{X} \text{ 得 } \hat{\theta} = \dots$$

$$(2) E\hat{\theta} \neq \theta$$

$$(3) \bar{x} = \frac{\dots + \dots + \dots + \dots}{8}$$

3. 总体 X 服从几何分布, 分布律为 $P\{X=x\} = (1-p)^{x-1}p$, $x=1, 2, \dots$, 其中 p 为未知参数, 且 $0 < p < 1$, 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为 X 的一个样本, 求 p 极大似然估计量.

似然函数 $L(p) = \prod_{i=1}^n (1-p)^{x_i-1} \cdot p = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - n}$

取对数, $\ln L(p) = n \ln p + (\sum_{i=1}^n x_i - n) \ln(1-p)$

令 $\frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p} (\sum_{i=1}^n x_i - n) = 0$

得 $\hat{p} = \dots$ (大写)

4. 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P_i	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 θ 为未知参数, 现抽得一个样本 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$, 求 θ 的矩估计值和极大似然估计值.

似然函数 $L(\theta) = \theta^2 \cdot 2\theta(1-\theta) \cdot \theta^2 = 2\theta^5(1-\theta)$

取对数 $\ln L(\theta) = \ln 2 + 5 \ln \theta + \ln(1-\theta)$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{5}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = 0$

得 $\hat{\theta} = \dots$

5. 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，现从总体 X 中抽取容量为 9 的样本，经观测与计算得样本均值 $\bar{x} = 20.1$ ，样本均方差 $s = 0.203$ 。

(1) 若已知 $\sigma = 0.21$ ，求 μ 对应于置信度为 0.95 的置信区间。

(2) 若 σ 未知，求 μ 对应于置信度为 0.95 的置信区间。

(3) 若 μ 未知，求 σ^2 对应于置信度为 0.95 的置信区间。

$$(1) \left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{0.025}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{0.025} \right) = \dots$$

$$(2) \left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.025}^{(8)}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.025}^{(8)} \right) = \dots$$

$$(3) \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.025}^2(8)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.975}^2(8)} \right) = \dots$$

$$\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = (9-1)s^2$$

7、设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自均匀分布 $U[0, \theta]$ 的一个样本，其中 $\theta > 0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 是一组观察值，则 θ 的极大似然估计量为($X_{(n)}$).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} \quad (0 \leq x_i \leq \theta)$

$L(\theta)$ 关于 $\theta \downarrow$ 故当 $\theta = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 时，

$L(\theta)$ 取最大值。因此， $\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$L(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^n} \quad \nearrow \quad \theta \leq x_i \leq 1$$

$$\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$\hat{\theta} = \min \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$$