

命题人：_____ 审核人：_____ 试卷分类（A 卷）

齐鲁工业大学 试 卷

学期： 2020 至 2021 学年度 第 一 学期

课程： 线性代数 课程代号： 0500090

使用班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

题号	一	二	三	总分
得分				

一、

得分	
----	--

 计算

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{。 (本题 12 分)}$$

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{-----6 分}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 40. \quad \text{-----12 分}$$

二、

得分	
----	--

 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $3AB - 2A$ 及 $A^T B$. (本题 12 分)

更多考试真题

扫码关注【**QLU 星球**】

回复：**真题** 获取



公众号 · QLU星球

解: $3AB - 2A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix} \text{-----6 分}$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \text{-----12 分}$$

三、

得分	
----	--

 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求解矩阵方程 $AX = B$ 。(本题 12 分)

解

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{-----4 分}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{-----8 分}$$

可见 A 可逆, 且

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \text{-----12 分}$$

四、

得分	
----	--

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 计算 $|A^{-1}|$ 。(本题 12 分)

解: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$, -----6 分

则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$ 。-----12 分

五、

得分	
----	--

解方程组 (本题 13 分)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

解: 对线性方程组的增广矩阵施以初等行变换得

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{-----4 分}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{-----8 分}$$

于是方程组的通解为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$, 其中 x_3 为自由未知数. 令 $x_3 = c$, 得解向量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

其中 c 为任意常数. -----13 分

六、

得分

设有线性方程组
$$\begin{cases} 2\lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3\lambda x_3 = 3\lambda^2 \end{cases}$$

问 λ 为何值时,此方程组有唯一解、无解或有无穷多解? (本题 14 分)

解 (1) $\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & 3 & 3\lambda \end{vmatrix} \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1, -2$ 时方程组有唯一解. -----4 分

(2) $R(A) < R(B)$

$$B = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 3 & 3 & 3\lambda & 3\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(2 + \lambda) & (1 - \lambda)(\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}$$

由 $(1 - \lambda)(2 + \lambda) = 0, (1 - \lambda)(\lambda + 1)^2 \neq 0$,

得 $\lambda = -2$ 时,方程组无解. -----9 分

(3) $R(A) = R(B) < 3$, 由 $(1 - \lambda)(2 + \lambda) = (1 - \lambda)(\lambda + 1)^2 = 0$,

得 $\lambda = 1$ 时,方程组有无穷多个解. -----14 分

七、

得分

利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的秩和一个最大无关组:
(本题 12 分)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

解: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ -----4 分

$$\begin{matrix} r_3 + r_2 \\ \sim \\ r_3 \leftrightarrow r_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{-----8 分}$$

所以矩阵的列向量组的秩是 3，第 1、2、3 列构成一个最大无关组。-----12 分

八、

得分	
----	--

 求下列齐次线性方程组的基础解系：（本题 13 分）

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

解： $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{-----8 分}$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 = -\frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$

取 $x_3 = 7, x_4 = 0$ 得 $x_1 = -9, x_2 = 1$

取 $x_3 = 0, x_4 = 2$ 得 $x_1 = 1, x_2 = -1$

因此基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{-----13 分}$