山东科技大学 2021—2022 学年第一学期

《线性代数》考试试卷（A 卷答案）

一、填空题

1． $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{55}-a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{52}$. 2． $\begin{bmatrix}2 & 4\\6 & 10\end{bmatrix}$　3． $\frac{1}{2}(A-E)$　4． $a=-1$　5. 9

二、选择题

A　B　D　B　C

三、原式 $=\begin{vmatrix}a+(n-1)x & a+(n-1)x & \cdots & \cdots & a+(n-1)x\\x & a & \cdots & \cdots & x\\x & x & \cdots & \cdots & x\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\x & x & \cdots & \cdots & a\end{vmatrix}$

$=[a+(n-1)x]\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\x & a & \cdots & x\\x & x & \cdots & x\\x & x & \cdots & a\end{bmatrix}$

$=[a+(n-1)][(a-x)]^{n-1}$

四、解：记 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ 由 $|A|=10\neq 0$，$|B|=1$

A与B 可逆，

故可用

$X=A^{-1}CB^{-1}$,其中

$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

$X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}35 & -14 & -17\\10 & -2 & -6\end{bmatrix}$

五、解：$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\2 & 5-\lambda & -4\\-2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 0\\2 & 5-\lambda & 1-\lambda\\0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-(\lambda-10)(\lambda-1)^2$

当 $|A|\neq 0$ 时，即当 $\lambda\neq 1$，$\lambda\neq 10$ 时，$R(A)=3$，方程组有唯一解。

当$\lambda=10$时，增广矩阵$B=\begin{bmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-5&-4&2\\0&1&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

可见$R(A)=2$，$R(B)=3$，$R(A)\neq R(B)$，于是方程组无解

当$\lambda=1$时

$$B=\begin{bmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可见$R(A)=R(B)=1<3$，方程有无穷多解

取$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$， $\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，则通解$X=C_1\xi_1+C_2\xi_2+\eta$

六、解：$\because (b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

令$B=AK$.设$Bx=0$,把$B=AK$ 代入得$A(Kx)=0$,因为 A 可逆，知$Kx=0$.

又因为$|K|=0$,知$Kx=0$有非零解

故b_1,b_2,b_3线性相关。

七、解：对A实行初等行变换化为行阶梯形矩阵

$$A\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&1\\-2&1&1&-1\\2&-3&1&-1\\-3&-6&9&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1\\0&-5&5&-3\\0&3&-3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

知$R(A)=3$

由$R(A)=3$知列向量组的最大无关组含 3 个向量，而三个非零行的非零首元在 1，2，4 三列，故a_1，a_2，a_4为列向量组的一个最大无关组。

对A实行初等行变换化为行最简形矩阵$A\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，故$a_3=-a_1-a_2$

八、解：f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&2\end{bmatrix}$$

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&2\\0&2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3&2\\2&\lambda-3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-1)$

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=1$

对应 $\lambda_1=2$ 解方程 $(A-2E)X=0$ 特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

对应 $\lambda_2=5$ 解方程 $(A-5E)X=0$ 特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，

对应 $\lambda_2=1$ 解方程 $(A-E)X=0$ 特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$$