山东科技大学 2021—2022 学年第一学期

《工程数学（线性代数）》考试试卷参考答案及评分标准（B 卷）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. -7 ； 2. $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ； 3. -16； 4. $\frac{1}{2}$; 5. 2

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. C 2. C 3. D 4. B 5. A

三、计算题（每小题 8 分，共 24 分）

1．解： $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \overset{r_4+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix}$ ……………………………………3 分

$\overset{c_1-c_4}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix}$ ……………………………………6 分

$=a^2(a^2-1)$ ……………………………………8 分

2．解：$(A,B)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ …………2 分

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ …………6 分

于是A可逆，且$X=\begin{pmatrix} -2 & -\frac{8}{3} \\ 2 & 5 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ …………8 分

3．解：二次型f的矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ……………………………2 分

$a_{11}=1>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1>0,\ |A|=1>0$ ……………6 分

所以二次型f是正定的. ………………………………………8 分

四、解答题（每题 12 分，共 36 分）

1．解：$|A|=\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)(1+\lambda)^2$…………3 分

(1)当$|A|\neq 0$时,即当$\lambda\neq -4$且$\lambda\neq -1$时,$R(A)=3$,方程组有唯一解; ……………5 分

(2)当$\lambda=-1$时，增广矩阵$B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

知$R(A)=1,R(B)=2,R(A)\neq R(B)$,于是方程组无解; ……………8 分

(3)当$\lambda=-4$时，增广矩阵$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&2\\1&1&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-\frac{2}{3}\\0&1&-1&-\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

知$R(A)=R(B)=2<3$,方程组有无穷多解, …………10 分

取$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\eta=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{4}{3}\\0\end{pmatrix}$,则通解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\xi+\eta(C\in R)$. …………12 分

2. 解：(1)对A实行初等行变换化为行最简形矩阵

$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&2&1&-1\\2&0&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，知$R(A)=2$ ………………5 分

(2)因为$(a_1,a_2)\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$知$R(a_1,a_2)=2$ 故a_1，a_2为列向量组的一个最大无关组； ……8 分

(3) $a_3=\frac{3}{2}a_1+\frac{1}{2}a_2,a_4=\frac{3}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2$ ……………………12 分

3. 解：(1)二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+2{x_2}^2+3{x_3}^2+2x_1x_2$的矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2(1-\lambda)=0$$

得矩阵A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=3$. ……………………………3 分

对应于特征值$\lambda_1=1$,解方程$(A-E)x=0$，

$A-E=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系为$\xi_1=(-1,1,0)^T$.

对应的特征向量为$k_1\xi_1\ (k_1\neq 0)$. ………………………………5 分

对应于特征值$\lambda_2=\lambda_3=3$,解方程$(A-3E)x=0$，

$A-3E=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得基础解系为$\xi_2=(1,1,0)^T,\xi_3=(0,0,1)^T$.

对应的特征向量为$k_2\xi_2+k_3\xi_3(k_2,k_3$不同时为零) ……………………………7 分

（2）取$p_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$ ，

令$\eta_2=\xi_2,\eta_3=\xi_3-\frac{[\xi_3,\eta_2]}{\eta_2,\eta_2]}\eta_2=(0,0,1)^T$.

取$p_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T,p_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=(0,0,1)^T$. ………………………………10 分

令$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

取正交变换$x=Py$,有$f={y_1}^2+3{y_2}^2+3{y_3}^2$ ……………………………12 分

五、解答题（10 分）

解：设有x_1,x_2,x_3, 使$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$.

即$x_1(a_1-a_2)+x_2(2a_2+a_3)+x_3(a_1+a_2+2a_3)=0$

亦即$(x_1+x_3)a_1+(-x_1+2x_2+x_3)a_2+(x_2+2x_3)a_3=0$ ………………………… 3 分

因a_1,a_2,a_3线性无关，故有$\begin{cases}x_1+x_3=0\\-x_1+2x_2+x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$ ………………………………… 6 分

此方程组的系数矩阵$K=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$的行列式$|K|=2\neq 0$

故方程组只有零解$x_1=x_2=x_3=0$ ………………………… 8 分

所以向量组b_1,b_2,b_3线性无关。 ………………………… 10 分

注：也可以应用矩阵的秩的性质等方法。