齐鲁工业大学《数值分析》2017-2018学年第一学期期末试卷试题A

成绩

课程名称 数值分析 考试时间__年__月__日__时__分至__时__分

教 研 室 ______ 开卷 [ ] 闭卷 [√]

适用专业班级 ______ 提前 [ ] 期末 [√]

班 级 ______ 姓名 ______ 学号 ______

试题共3页 第1页

试题共 页 第1页

得分	

一、填空题（每空 2 分，共 10 分）

1.设近似数 $x_1^*=0.0235$ 和 $x_2^*=2.5160$ 都是四舍五入后的有效数，则相对误差限 $\varepsilon_r(x_1^* x_2^*)=$（$0.002525$ 或 0.0021475）.

2.设 $x^*=0.0142$ 关于真值 $x=0.0139$ 具有 （2）位有效数字.

3.牛顿—柯特斯求积公式的系数和 $\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}=$（1）

4.设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$，$cond(A)_\infty=$（21），解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法（收敛.）　（收敛还是发散?）.

得分	

二（12 分）、已知曲线 $y=x^3+2.89$ 与 $y=2.4$
(1.6,6.9)
附近相切.

(1) 试用牛顿迭代法求切点横坐标的近似值 x_{n+1}，要求当

$$|x_{n+1}-x_n|\le 10^{-5}$$ 时停止迭代.

(2) 讨论该迭代法的收敛阶.

解: 有切线斜率相等知，

$$3x^2 = 4.8x + 0.51, \text{即} 3x^2 - 4.8x - 0.51 = 0 \qquad (2\text{分})$$

故牛顿迭代格式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n^2 - 4.8x_n - 0.51}{6x_n - 4.8}. \qquad (2\text{分})$$

取迭代初值 $x_0 = 1.6$，得

$$x_1 = 1.70625, \quad x_2 = 1.70002, \quad x_3 = 1.70000, \quad x_4 = 1.70000. \qquad (2\text{分})$$

由上知，迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{3x^2 - 4.8x - 0.51}{6x - 4.8}. \qquad (2\text{分})$$

而

$$\varphi'(x) = \frac{6(3x^2 - 4.8x - 0.51)}{(6x - 4.8)^2}, \quad \varphi''(x) = \frac{6}{6x - 4.8} - \frac{72(3x^2 - 4.8x - 0.51)}{(6x - 4.8)^3}. \qquad (2\text{分})$$

易知 $\varphi'(x_4) \approx 0$，$\varphi''(x_4) \approx 1.111$，故收敛阶为 1。 (2 分)

得分	

三（10 分）、求超定方程组

[illegible]

的最小二乘解，并求误差平方和(保留 4 位有效数字).

解：将方程组改写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad (2\text{分})$$

则正规方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad (4\text{分})$$

即

$$\begin{bmatrix} 18 & -3 \\ -3 & 46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ 48 \end{bmatrix}, \text{解得} x_1 = 3.0403, \quad x_2 = 1.2418. \qquad (2\text{分})$$

误差 (2 分)

$$I = (11 - 11.0478)^2 + (3 - 2.9119)^2 + (6 - 5.5239)^2 + (7 - 7.3224)^2 = 0.3407$$

得分	

四（8分）、确定下列积分公式中的待定参数 A_1，A_2 和 A_3，使其代数精度尽可能高，并说明代数精度是多少?

$$\int_{h}^{h} f(x)dx \approx A_1 f(-h) + A_2 f(0) + A_3 f(h)$$

解：令公式对 $f(x)=1, x, x^2$ 都精确成立,则有

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2h \\ -hA_1 + hA_3 = 0 \\ h^2 A_1 + h^2 A_3 = 2h^3/3 \end{cases} .$$ (3分)

解得: $A_1 = A_3 = h/3$, $A_2 = 4h/3$.

故求积公式为

$$\int_{h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(-h) + 4f(0) + f(h)]$$ (3分)

$f(x)=x^3$ 时,左=右=0,公式也精确成立. $f(x)=x^4$ 时,左= $2h^5/5$,右= $2h^5/3$,公式不精确成立. 所以公式的代数精确为3. (2分)

得分	

五（10分）、有方程组 $Ax=b$,其中 A 为对称正定阵,且有迭代公式

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega(b - AX^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \cdots\cdots)$$

讨论使迭代序列收敛的 ω 的取值范围.

解：因为

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega(b - AX^{(k)}) \qquad (*)$$

即

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega b - \omega AX^{(k)} = (I - \omega A)X^{(k)} + \omega b$$ (2分)

迭代矩阵为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\omega A}$，设A的特征值为 λ，因A对称正定，故 λ >0，则B矩阵的特征多项式为

$$|\boldsymbol{\mu I} - \boldsymbol{B}| = |(\boldsymbol{\mu} - 1)\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\omega A}|$$ (2分)

显然，B 矩阵的特征值为 $\boldsymbol{\mu} = 1 - \boldsymbol{\omega\lambda}$，由 $|\boldsymbol{\mu}| < 1$ 解得：$0 < \boldsymbol{\omega} < 2/\boldsymbol{\lambda}$。 (3分)

设 $\rho(A) = \lambda_1$，则当 $0 < \omega < \dfrac{2}{\rho(A)}$ 时，$\rho(I - \omega A) < 1$，当然，$0 < \omega < \dfrac{2}{\|A\|}$ 时，也有

$$\rho(I - \omega A) < 1$$ (3分)

此时迭代序列(*)式收敛。

得分	

六（15分）、试用 Doolittle 分解法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 2 & 15 \\ 6 & 8 & -16 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

解： $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 10 \\ 4 & 6 & 2 & 15 & 3 \\ 6 & 8 & -16 & -5 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1.5 & 0.5 & 7 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ （4分）

所以有 $L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$， （2分）

$U=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0.5 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$， （2分）

$y=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$， （2分）

下求解 $Ux=y$， （2分）

得 $x=(1,\ 2,\ 1,\ -1)^T$ （3分）

得分	

七（10分）、已知函数 $y=f(x)$ 的数据如下表

x	0	1	2	3
y	1	3	9	27

试用 Newton 插值法作一个三次插值多项式 $P_3(x)$,利用 $P_3(x)$计算 $\sqrt{3}$.

解：令 $x_k=k$ ($k=0$，1，2，3)，则根据函数表有 $f(x_k)=3^k$。构造差商表

x	$f(x)$			
0	1			
1	3	2		
2	9	6	2	
3	27	18	6	4/3

（4分）

根据 Newton 插值公式

$$\boldsymbol{P_3(x)=1+2x+2x(x-1)+\frac{4}{3}x(x-1)(x-2)}$$ （4分）

$$\boldsymbol{=1+x\{2+(x-1)[2+\frac{4}{3}(x-2)]\}}$$

由于被插值函数 $\boldsymbol{f(x)=3^x}$，故取 $x=1/2$，便得

$$\boldsymbol{\sqrt{3}\approx P_3(1/2)=1+\frac{1}{2}\{2+(\frac{1}{2}-1)[2+\frac{4}{3}(\frac{1}{2}-2)]\}=2}.$$ （2分）

得分	

八（10分）、设 X 是 n 维向量，A 是 $n\times n$ 阶矩阵. 求证

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F\le\|A\|_2\le\|A\|_F$$

证明：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $A^TA=(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj})_{n\times n}$，该矩阵的迹（主对角元之和）为

$$tr(A^TA)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}a_{kj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=\|A\|_F$$ （2分）

根据矩阵特征值理论，n 阶方阵 A^TA 的特征值之和等于 A^TA 的迹，即

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A^TA)=tr(A^TA)=\|A\|_F$$ （3分）

所以

$$\|A\|_2^2=\lambda_{\max}(A^TA)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A^TA)=\|A\|_F^2$$

$$\|A\|_2^2=\lambda_{\max}(A^TA)\ge\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A^TA)=\frac{1}{n}\|A\|_F^2$$ （3分）

由上两式得

$$\| A \|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A^T A) = \frac{1}{n}\| A \|_F^2 \qquad (3 分)$$

由上两式得

$$\frac{1}{n}\| A \|_F^2 \leq \| A \|_2^2 \leq \| A \|_F^2 \quad 或 \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\| A \|_F \leq \| A \|_2 \leq \| A \|_F \qquad (2 分)$$

得分	

九（15 分）、证明下述 R-K 方法对任何参数 t 都是三阶方法.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases}$$

证：由于

$$K_2 = f_n + \frac{h}{2}\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{h}{2} f_n \frac{\partial f_n}{\partial y}$$
$$+ \frac{h^2}{8}\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \frac{h^2 f_n}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{h^2 f_n^2}{8}\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} + O(h^3) \qquad (2 分)$$

$$K_3 = f_n + h\frac{\partial f_n}{\partial x} + h(2K_2 - f_n)\frac{\partial f_n}{\partial y}$$
$$+ \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \frac{h^2(2K_2 - f_n)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{h^2(2K_2 - f_n)^2}{2}\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} + O(h^3)$$

(4 分)

所以有

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n\frac{\partial f_n}{\partial y})$$
$$+ \frac{h^3}{6}(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2f_n\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f_n^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} + (\frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n\frac{\partial f_n}{\partial y})\frac{\partial f_n}{\partial y}) + O(h^4) \qquad (4 分)$$

又因为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + O(h^4)$$

$$= y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n\frac{\partial f_n}{\partial y})$$
$$+ \frac{h^3}{6}[\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + 2f_n\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} + f_n^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} + (\frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n\frac{\partial f_n}{\partial y})\frac{\partial f_n}{\partial y}] + O(h^4)$$

(4 分)

于是有

于是有

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^4)，证毕. \qquad (1 分)$$