齐鲁工业大学 21/22 学年第一学期《高等数学 I（上）》期末考试试卷 A 卷答案

一、计算题（本题满分 40 分，每题 8 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$ 4 分

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ 6 分

=1 8 分

2、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$ 3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$ 6 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1$ 8 分

3、方程 $e^{xy}+x+y=1$ 两边关于 x 求导数得：$e^{xy}\left(y+xy'\right)+1+y'=0$ 4 分

解得 $y'=\frac{-1-ye^{xy}}{1+xe^{xy}}$ 6 分

当 x=0 时，y=0，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-1$ 8 分

4、$\int\frac{x+\ln(x-1)}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln(x-1)}{x^2}\right)dx$ 2 分

$=\ln x+\int\frac{\ln(x-1)}{x^2}dx=\ln x-\int\ln(x-1)d\frac{1}{x}$ 4 分

$=\ln x-\left(\frac{1}{x}\ln(x-1)-\int\frac{1}{x(x-1)}dx\right)$ 6 分

$=\ln x-\left(\frac{1}{x}\ln(x-1)-\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx\right)=\ln x-\left(\frac{1}{x}\ln(x-1)-\ln\frac{x-1}{x}\right)+C$ 8 分

5、令 $\sqrt{x}=t,x=t^2,dx=2tdt,x:0\to\pi^2,t:0\to\pi$， 2 分

$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}dx = 2\int_0^{\pi} t\sin tdt$ 4 分

$= -2\int_0^{\pi} td\cos t$ 6 分

$= -2\left(t\cos t \Big|_0^{\pi} - \sin t \Big|_0^{\pi} \right) = 2\pi$ 8 分

二、 解答题（本题满分 36 分，每题 9 分）

6、$\lim_{x\to\infty}\left(ax+b-\frac{x^3+1}{x^2+1} \right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(ax+b)(x^2+1)-(x^3+1)}{x^2+1} \right)$ 3 分

$= \lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^3+bx^2+ax+b-1}{x^2+1} = 1$ 7 分

$a = b = 1$ 9 分

7、切点：$\left(a\frac{\sqrt{2}}{4}, a\frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ 1 分

$\frac{dy}{dx} = \frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\sin t\cos^2 t} = -\tan t$ 4 分

$\frac{dy}{dx}\Big|_{\frac{\pi}{4}} = -1$ 5 分

切线方程：$y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 7 分

法线方程：$y = x$ 9 分

8、函数 $y = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ 的间断点为 $x = 2, x = 3$ 3 分

因为 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3} = -4$，所以 $x = 2$ 是可去间断点 6 分

因为 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+2)}{(x-3)} = \infty$，所以 $x = 3$ 是无穷间断点 9 分

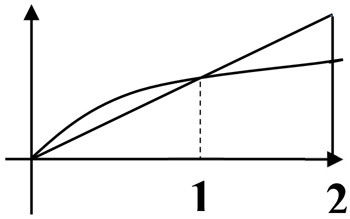
9、$P(0,1)$ 在曲线上得：$a + b = 1$ 3 分

$y' = e^x(ax+2a+b), y'' = e^x(ax+3a+b) \quad y''(0)=0$

得 $3a+b=0$ 7 分

由 $\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+b=0 \end{cases}$， $\Rightarrow a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$ 9 分

三、综合题（本题满分 14 分）



10、（1） $S=\int_1^2\left(x-\sqrt{x}\right)dx$ 4 分

$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2=\frac{13}{6}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ 7 分

（2） $V=\pi\int_1^2\left(x^2-x\right)dx$ 11 分

$=\pi\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{11}{6}\pi$ 14 分

四、证明题（本题满分 10 分，每题 5 分）

11、证明：（根的存在性） $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

$F(a)=\int_a^a f(t)dt+\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}dt<0 \qquad F(b)=\int_a^b\frac{1}{f(t)}dt>0$ 2 分

所以由零点定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，

即方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根. 3 分

（根的唯一性） $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$， $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，

所以方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有且仅有一个根. 5 分

12、证明：令 $F(x)=e^{-x}f(x)$， $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导 2 分

$F(0)=f(0)=0, F(1)=e^{-1}f(1)=0$， 4 分

由罗尔定理知存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\mathrm{F}'(\xi)=0$

即存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=f(\xi)$ 5 分