齐鲁工业大学考试试题纸（A 卷）

课程名称：高等数学 A（上）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
题分	15	15	14	14	21	5	5	5	6	100

备注：学生不得在试题纸上答题(含填空题、选择题等客观题)

一、单项选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

(1) $x\to 0$ 时，$(1+x)^x-1$ 是 x 的（　）阶无穷小。

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

(2) 函数 $y=\dfrac{2+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$ 在 $x=0$ 处是（　）间断点。

A. 可去　　**B.** 跳跃　　**C.** 无穷　　**D.** 振荡

(3) 设 $f(u)$ 是可导函数，则函数 $y=f(\sin^2 x)$ 的微分 $dy=$（　）

A. $f'(\sin^2 x)dx$　　**B.** $f'(\sin^2 x)d\sin^2 x$

C. $f'(2\sin x)d\sin x$　　**D.** $f'(\sin^2 x)2\cos xd\sin x$

(4) 函数 $\Phi(x)=\int_0^x f'(t^2)dt$ 是下列（　）函数的原函数。

A. $f'(x^2)$　　**B.** $f'(x)$　　**C.** $f(x^2)$　　**D.** $f(x)$

(5) 下列反常积分收敛的是（　）

A. $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx$　　**B.** $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$　　**C.** $\int_0^1\dfrac{1}{x}dx$　　**D.** $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

(1) 函数 $y=f(x)$ 的麦克劳林公式是 $f(x)=x-\dfrac{1}{5}x^3+\dfrac{1}{3}x^6+R_6(x)$，其中 $R_6(x)$ 是 $f(x)$ 的麦克劳林公式的拉格朗日型余项，则 $y^{(6)}(0)=$______________.

(2) 函数 $y=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$ 的单调减区间______________.

(3) 曲线 $y=xe^{-2x}$ 的凹区间______________.

(4) $\int_{-1}^{1}(e^{\sin x}-e^{-\sin x})dx=$______________.

(5) 曲线 $y=\int_0^x\sqrt{e^t-1}\,dt$ 在 $x\in[0,\ln 4]$ 上的一段长度 L=______________.

三、计算下列极限（本题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x-\frac{1}{2}x\sin 2x}{x^2(e^{x^2}-1)}$　　**（2）** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x-x}\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt$

四、计算下列导数或微分（本题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

(1) $\begin{cases} x=t+\frac{1}{2}t^2 \\ y=t^2+\frac{2}{3}t^3 \end{cases}$ $(t>0)$ ，　求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(2) $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)=x+y$ 所确定，　求 $y'(0)$

五、计算下列积分（本题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

(1) $\int \dfrac{x}{1+\cos x}dx$　　**（2）** $\int \arctan\sqrt{x-1}dx$

(3)　设 $f(x)+\sin^4 x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

六、计算题（本题满分 5 分）

设 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，对任意 x,y 有 $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$，且 $f(0)=g'(0)=0$， $g(0)=f'(0)=1$，求 $f'(x)$。

七、计算题（本题满分 5 分）

设 $f(x)=2nx(1-x)^n$，记 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 M_n，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$。

八、应用题（本题满分 5 分）

计算曲线 $y=\sin x$ 、 $y=\cos x$ 及 $x=0$ 、 $x=2\pi$ 所围成的平面图形的面积。

九、证明题（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有一阶连续的导数，且 $f'(\frac{1}{2})=0$，证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 使 $f'(\xi)=2\xi\left[f(\xi)-f(0)\right]$。