# 齐鲁工业大学 20/21 学年第二学期《高等数学 II(下)》
# 期末考试试卷 (A) 参考答案及评分细则



一、计算(本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分)

1、解：由一阶线性微分方程的通解公式得

$$y=e^{-\int 1dx}\left(\int\left(e^{\int 1dx}\cdot e^{-x}\right)dx+C\right)$$ ……………………..3 分

$$=e^{-x}\left(\int e^{x}\cdot e^{-x}dx+C\right)$$

$$=e^{-x}\left(x+C\right)$$ ……………………..6 分

2、解：$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)e^{x^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{e^{x^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{(x^2+y^2)^2}{2}}{x^2+y^2}$$ …………..5 分

$$=0$$ ……………………..6 分

3、 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{x}+\dfrac{1}{x+y^2}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2}$ … …….. …………4 分

$$dz=(e^{x}+\frac{1}{x+y^2})dx+\frac{2y}{x+y^2}dy$$ ………………………..6 分

4、解： 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=2-2x=0 \\ f_y(x,y)=-2-2y=0 \end{cases}$ ……………………..2 分

得驻点坐标$\left(1,-1\right)$ …………… ……….3 分

$f_{xx}(x,y)=-2; f_{xy}(x,y)=0; f_{yy}(x,y)=-2$ ………………4 分

在驻点$\left(1,-1\right)$处， $A=C=-2$， $B=0,$

$AC-B^2=4>0$，取得极大值 $f(1,-1)=2$ ………………..6 分

5、解： 令 $u_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

$$\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{2^n}}{\dfrac{n}{2^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1,$$ …………4 分

得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n}{2^{n-1}}\right|$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^{n-1}}$ 绝对收敛. …6 分

二、计算(本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分)

1、解： 令 $p=y'$， 则原方程化为$xp'+p=0$． ………………………1 分

由一阶齐次线性微分方程的通解公式得

$p=C_1e^{-\int\frac{1}{x}dx}=C_1e^{-\ln x}=\frac{C_1}{x}$ 即 $y'=\frac{C_1}{x}$． ……………….4 分

又$x=1$时，$y'(1)=1$，所以$C_1=1$, ………………….5 分

所以$y=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C_2$ ………………….6 分

又$x=1$时，$y(1)=1$，所以$C_2=1$, ………………….7 分

所求特解为$y=\ln|x|+1$． ……….. ……..8 分

2、解： $x'(t)=1$，$y'(t)=2t$，$z'(t)=3t^2$ ………………………2 分

$t_0=1$对应的点坐标为$(1,1,1)$，该点的切向量为 $(1,2,3)$ ……………4 分

所以该点的切线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ …………………..6 分

法平面方程为$x-1+2(y-1)+3(z-1)=0$

即 $x+2y+3z=6$ ……………………..8 分

三、计算(本题共 4 小题，满分 34 分)

1、解：(8 分) 对应的齐次方程的特征方程$r^2+r-2=0$, ……………….2 分

特征根为$r_1=-2,r_2=1$ ……………………3 分

齐次方程的通解为$y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$ ……………4 分

设非齐次方程特解为 $y^*=Axe^x$,代入方程得$A=\frac{2}{3}$，

所求特解为$y^*=\frac{2}{3}xe^x$, ………………….7 分

所以非齐次方程的通解为

$y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\frac{2}{3}xe^x,C_1,C_2$ 为任意常数. ……………8 分

2、解：(8 分)$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'y^2+f_2'$ ……………………..2 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2(f_{11}''y^2+f_{12}'')+f_{21}''y^2+f_{22}''=y^4f_{11}''+2y^2f_{12}''+f_{22}''$ …………5 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf_1'+y^2(f_{11}''\cdot 2xy+f_{12}'')+f_{21}''\cdot 2xy+f_{22}''$

$$= 2yf_1' + 2xy^3 f_{11}'' + (y^2 + 2xy) f_{12}'' + f_{22}''$$ ……………….8 分

3、解：(9 分)　方程两边分别对 $x$、$y$ 求偏导，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-z}(1 - \frac{\partial z}{\partial x})\text{，}\quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-z}(-\frac{\partial z}{\partial y}) + 2$$ …………….5 分

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^{x-z}}{1+e^{x-z}}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{1+e^{x-z}}$. ……………..9 分

4、解：(9 分)因为 $\iint\limits_D (e^{x^2+y^2} + xy)\,dxdy = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$ …………..3 分

令 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$

原式 $= \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 e^{\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho$ …………..7 分

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} e^{\rho^2} /_0^2 = \pi(e^4 - 1)$$ ………..9 分

四、计算(本题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分)

1、解：X一型区域 $D_X : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2 \end{cases}$；Y一型区域 $D_Y : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$ …….1 分

图略 ………………………………….3 分

原式 $= \iint\limits_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^y e^{-y^2}\,\mathrm{d}x$ ……………………………6 分

$= \int_0^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}x = \int_0^2 ye^{-y^2}\mathrm{d}y$ ……………………………8 分

$= -\frac{1}{2} e^{-y^2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-4})$ ………………..10 分

2、解：$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$，收敛区间为(-1,1) ….2 分

当 $x = -1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；当 $x = 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. …….3 分

所以收敛域为[-1,1). …………….4 分

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x^2 f(x)$ …………….5 分

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ …………….7 分

两边积分得：$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$ …….9 分

又 $\because f(0)=0$

$\therefore S(x)=-x^2\ln(1-x)$，$-1\le x<1.$ …………….10 分