高数2A15

选择题 （总分：80.00）

1. 向量 $\vec{a}=(1,0,3)$，$\vec{b}=(1,-1,2)$；则 a×b= ________

A. 6

B. -6

C. (3, 1, -1)

D. (3, -1, -1)

正确答案: C

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展成 $x-3$ 的幂级数为 ________

A. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}(x-3)^{n+1}, x\in(0,6)$

B. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}(x-3)^{n}, x\in(0,6)$

C. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}(x-3)^{n}, x\in(0,6)$

D. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^{n-1}}(x-3)^{n}, x\in(0,6)$

正确答案: B

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}(x-3)^n\left|\frac{x-3}{3}\right|<1$$

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛域为 ________

A. $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

B. $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

C. $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

D. $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

正确答案: D

缺项时用比值法：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(2n+1)x^{2n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{(2n-1)x^{2n-1}}{2^n}}=\dfrac{1}{2}x^2<1$，所以 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，

在端点处都发散

4. 计算二重积分 $\iint_D x^3y^2dxdy$，其中区域 D： $x^2+y^2\le R^2$． ________

A. 1
B. -1
C. 0
D. 1/2

正确答案: C

积分区域 D 关于 y 轴对称，被积函数关于 x 是奇函数，利用对称性即得.

5. 微分方程 $yy''+2y'^2=0$ 的通解为 ________

A. $y^3=C_1x+C_2$.

B. $y^2=C_1x+C_2$.

C. $y^3=C_1x^2+C_2$.

D. $y^2=C_1x^2+C_2$.

正确答案: A

令 $y'=p$, 则 $y''=p'=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$ 且原方程可化为 $yp\frac{dp}{dy}+2p^2=0$, 分离变量得 $\frac{dp}{p}=-2\frac{dy}{y}$,

积分得 $\ln|p|=\ln\frac{1}{y^2}+\ln C_0$, 即 $y'=p=\frac{C_0}{y^2}$, 分离变量，得 $y^2dy=C_0dx$. 积分得 $y^3=3C_0x+C_2$.

即通解为 $y^3=C_1x+C_2$.

6. 两平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$， $2x+3y-4z=1$ 的位置关系是 ________

A. 平行但不重合

B. 重合

C. 相交但不垂直

D. 垂直

正确答案: C

7. 微分方程$y'=e^{2x-y}, y|_{x=0}=0$的特解为 ______

A. $y=\ln\frac{e^{2x}+1}{2}$

B. $y=\ln\frac{e^{2x}+1}{3}$

C. $y=\ln\frac{e^{2x}+3}{2}$

D. $y=\ln\frac{2e^{2x}+1}{2}$

正确答案: A

原方程分离变量，得$e^{y}dy=e^{2x}dx$，两端积分得$e^{y}=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

由$y|_{x=0}=0$,得$1=e^{0}=\frac{1}{2}e^{0}+C$,故$C=\frac{1}{2}$,得故$e^{y}=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$,

于是所求特解为，$y=\ln\frac{e^{2x}+1}{2}$.

8. 微分方程$\frac{dy}{dx}+3y=8, y|_{x=0}=2$的特解为______

A. $y=\frac{2}{3}(4-e^{-3x})$.

B. $y=\frac{2}{3}(4x-e^{-3x})$.

C. $y=\frac{2}{3}(4-e^{-2x})$.

D. $y=\frac{2}{3}(4x-e^{-2x})$.

正确答案: A

$$y=e^{-\int 3dx}\left(\int 8e^{\int 3dx}dx+C\right)=e^{-3x}\left(\int 8e^{3x}dx+C\right)=e^{-3x}\left(\frac{8}{3}e^{3x}+C\right)=\frac{8}{3}+Ce^{-3x}.$$

9.

一平面过直线 x+5y+z=0 , x-z+4=0，且与平面 x-4y-8z+12=0 垂直，求该平面______方程

A. 4x+5y+2z+12=0

B. 4x+5y-2z+12=0

C. 4x+5y-2z-12=0

D. 4x-5y+2z+12=0

正确答案: B

x+5y+z+a(x-z+4)=0

(1+a)x+5y+(1-a)z+4a=0

因为该平面和已知平面 x-4y-8z+12=0 垂直

所以法向量垂直

所以 1*（1+a）-4*5-8-（1-a）=0

a=3

所以 4x+5y-2z+12=0

10.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$ (1)与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ (2)，其敛散性的判定结果(

______

A. (1)(2)都收敛

B. (1)发散，(2)收敛

C. (1)(2)都发散

D. (1)收敛，(2)发散

正确答案: D

$2^n \sin\frac{\pi}{3^n} \sim \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛故(1)收敛。$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1 \neq 0$ 故(2)发散

11. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y^2-e^z=z$ 所确定,则 ________

A. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{1+e^z}$

B. $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+e^z}$

C. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-1}{1+e^z}$

D. $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2y}{1+e^z}$

正确答案: B

解法一: 方程确定的隐函数 $z=z(x,y)$,方程两边同时对 x 求导得

$1\text{-}e^z\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}$,即 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+e^z}$,同理得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+e^z}$.

解法二: 公式法,令 $F(x,y,z)=x+y^2-e^z\text{-}z$,则 $F_x=1$, $F_y=2y$,

$F_z=-(1+e^z)$,所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{1+e^z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+e^z}$.

12. 设函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$,则在点 $(1,1)$ 处 ________

A.取极大值-2

B.取极小值-2

C.不取极值

D.根据所给条件无法判定

正确答案: B

因为 $f_x(x,y)=4x^3-2(x+y)=0$, $f_y(x,y)=4y^3-2(x+y)=0$,即驻点坐标为

$(0,0)$, $(\text{-}1,\text{-}1)$, $(1,1)$,又 $f_{xx}(x,y)=12x^2-2$, $f_{xy}(x,y)=-2$,

$f_{yy}(x,y)=12y^2-2$,在点 $(1,1)$ 处, $A=f_{xx}(1,1)=10$, $B=f_{xy}(1,1)=-2$,

$C=f_{yy}(1,1)=10$, $AC-B^2>0$,所以在点 $(1,1)$ 取极小值 $f(1,1)=-2$.

13. 曲线$x=t^2, y=\frac{1+t}{t}, z=\frac{t}{1+t}$在点$t=1$处的法平面方程为 ______

A. $8x+4y+z-3=0$

B. $8x-4y+z-\frac{1}{2}=0$

C. $2x+8y+z-1=0$

D. $8x+4y+16z-3=0$

正确答案: B

因为在$t=1$处对应$x=1, y=2, z=\frac{1}{2}$, $x'=2t$, $y'=-\frac{1}{t^2}$, $z'=\frac{1}{(1+t)^2}$,

所以对应法平面的法向量可表示为$\vec{n}=(2,-1,\frac{1}{4})$,则法平面方程为

$2(x-1)-1(y-2)+\frac{1}{4}(z-\frac{1}{2})=0$,即$8x-4y+z-\frac{1}{2}=0$.

14. 设D是由x轴和$y=\sin x$ $(x\in[0, \pi])$所围成的闭区域，则积分$\iint\limits_D y d\sigma=$ ______

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

正确答案: B

$$\iint\limits_D y d\sigma=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}ydy=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin^2 x dx=\frac{\pi}{4}.$$

15.

微分方程 $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$通解为 ————

A. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2+3x)$

B. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$

C. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$

D. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$

正确答案: C

齐次方程的特征方程为 $r^2+3r+2=0$,解得 $r_1=-1$, $r_2=-2$,故对应的齐次方程的通解

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$因为 $f(x)=3xe^{-x}$, $\lambda=-1$**是特征方程的单根**, 故可设 $y*=xe^{-x}(ax+b)$是原

方程的一个特解，代入原方程得 $2ax+(2a+b)=3x$,有 $a=\frac{3}{2}$, $b=-3$, 即 $y*=e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$故原

方程的通解为

$$y=Y+y*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$$

16.

设 D 由 $\frac{1}{4}\le x^2+y^2\le 1$ 确定，若 $I_1=\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2}d\sigma$， $I_2=\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，

$I_3=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)d\sigma$，则 I_1， I_2， I_3 之间的大小顺序为 ________

A. $I_1<I_2<I_3$ B. $I_1<I_3<I_2$ C. $I_2<I_3<I_1$ D. $I_3<I_2<I_1$

正确答案: D

17. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$在$(-1,1)$内的和函数为________

A. $-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$

B. $\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$

C. $-\frac{x^2}{1-x}$

D. $\frac{x^2}{1-x}$

正确答案: B

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x^2(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$$

18. 二次积分$I = \int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy =$ ________

A. $1-\sin 1$

B. $\frac{1}{2}(1-\sin 1)$

C. $2(1-\sin 1)$

D. $\frac{1}{3}(1-\sin 1)$

正确答案: A

改变积分次序;按先x后y积分次序计算

$$I = \int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy = \int_0^1 \sin y dy - \int_0^1 y\sin y dy = 1-\sin 1.$$

19. 函数 $w=f(x-y,xy^2)$，f 具有一阶连续偏导数,则 ________

A. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y$

B. $\dfrac{\partial w}{\partial y}=-f_2'\cdot 1$

C. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot 2xy$

D. $\dfrac{\partial w}{\partial y}=-f_1'\cdot 1+f_2'\cdot 2xy$.

正确答案: D

因为 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y^2$，$\dfrac{\partial w}{\partial y}=-f_1'\cdot 1+f_2'\cdot 2xy$.

20. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 ________

A. 连续，偏导数存在

B. 连续，偏导数不存在

C. 不连续，偏导数存在

D.不连续，偏导数不存在

正确答案: C

因为当动点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

k 值不同,极限不同,所以极限不存在,所以不连续.

因为 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$,

由对称性得 $f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0}{\Delta y}=0$,所以偏导数存在.

简答题 （总分：20.00）

1. **极坐标系下的二重积分**（分值：10.00）

设区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$,计算二重积分$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

参考答案:

解: $\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$的计算利用对称性.

$$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1}{1+r^2}rdr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\mid_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2\,.$$

2. **曲面的切平面和法线**（分值：10.00）

求旋转抛物面$z=x^2+y^2-1$在点（2, 1, 4）处的切平面及法线方程。

参考答案:

解： $\vec{n}\big|_{(2,1,4)}=(2x, 2y, -1)\big|_{(2,1,4)}=(4,2,-1)$

切平面方程 $4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0, \Rightarrow \quad 4x+2y-z-6=0,$

法线方程 $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$