# 第一章 随机事件及其概率

## 一、填空题

1. 已知 $P(\overline{A})=0.5, P(\overline{A}B)=0.2, P(B)=0.4$，则 $P(AB)=$ ____0.2____，$P(A-B)=$ __0.3____，$P(A\cup B)=$ __0.7____，$P(\overline{A}\overline{B})=$ ____0.3____.

2. 当事件 A,B 满足 $B\subset A$,那么 $P(A-B)=\underline{P(A)-P(B)}$，若把条件 $B\subset A$ 去掉，则 $P(A-B)=\underline{P(A)-P(AB)}$.

3. 事件 A,B 满足 $\underline{AB=\Phi}$ 称为互不相容，事件 A,B 满足 $\underline{P(AB)=P(A)P(B)}$ 称为相互独立。当 $P(A)>0,\ P(B)>0$ 时，事件 A,B 互不相容____不能____（能或不能）推出 A,B 相互独立，事件 A,B 相互独立____不能______（能或不能）推出 A,B 互不相容.

4. 设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$，若 $A$，$B$ 互不相容，则 $P(B)=$ _0.3__，若 $A$，$B$ 相互独立，则 $P(B)=$ _0.5_.

5．设 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{3}$，$A_1, A_2, A_3$ 相互独立，则 $A_1, A_2, A_3$ 至少出现一个的概率为 $\underline{\dfrac{19}{27}}$；$A_1, A_2, A_3$ 恰好出现一个的概率为 $\underline{\dfrac{4}{9}}$；$A_1, A_2, A_3$ 最多出现一个的概率为 $\underline{\dfrac{20}{27}}$ .

6．三个人独立破译一密码，他们能单独译出的概率分别为 $\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$，则此密码被译出的概率为__0.6__.

7.条件概率 $P(A/B)=\underline{\dfrac{P(AB)}{P(B)}}$，当 A,B 相互独立时，$P(A/B)=\underline{P(A)}$

8．一袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球．今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是_0.4__ .

9．设在一次试验中，事件 $A$ 发生的概率为 $p$．现进行 $n$ 次独立重复试验，则事件 $A$

至少发生一次的概率为$\underline{1-(1-p)^n}$；而事件$A$至多发生一次的概率为

$\underline{(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}}$.

10．某射手射靶5次，各次命中的概率都为0.6，那么事件“前三次中靶、后两次脱靶”发生的概率为$\underline{0.6^3\times 0.4^2}$，事件“5次中恰好有3次中靶”发生的概率为$\underline{C_5^3 0.6^3\times 0.4^2}$

## 二、选择题

C　D　D　B　C　D

## 三、计算与证明题

1．解　（1）$A_1A_2A_3$；　（2）$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

（3）$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；　（4）$A_1+A_2+A_3$；

（5）$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

2．解　$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

3．解　（1）$P(A)=\dfrac{C_4^3\times 3\times 2\times 1}{4^3}=0.375$；

（2）$P(B)=\dfrac{C_4^1}{4^3}=0.0625$；　（3）$P(C)=\dfrac{C_4^1C_3^2C_3^1}{4^3}=0.5625.$

4．解　A={第$i$次取到的是黑球}，B={第$i$次才取到黑球}，C={前$i$次中能取到黑球}

把$i$个球一个个的取出来排成一列，共有$A_{a+b}^i$（样本空间的点数），事件A说明第i次为黑球而第i次之前可以取任何球，事件B等价于第i次之前都为白球而第i次为黑球，C等价于前i次（包括第i次）至少取到一个黑球，其对立事件为前i次都取到白球.

$$P(A)=\frac{C_a^1A_{a+b-1}^{i-1}}{A_{a+b}^i}=\frac{a}{a+b},\quad P(B)=\frac{C_a^1A_b^{i-1}}{A_{a+b}^i},\quad P(C)=1-\frac{A_b^i}{A_{a+b}^i}$$

5.解　$A_1,\cdots,A_5$互不相容的，但不相互独立。$A_2=A_1A_2+\overline{A}_1A_2=\overline{A}_1A_2$，同理$A_3=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，由乘法公式，得到

$$P(A_1)=\frac{1}{5}，\quad P(A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}，\quad P(A_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

6．解　设 A={所得的三个数都不一样}，B={含有 1 点}，那么 AB={有一个数为 1，另外两个数为 2,3,4,5,6 中的两个不同的数}

$$P(A)=\frac{6\times5\times4}{6^3}，\quad P(AB)=\frac{C_3^1\times5\times4}{6^3}$$

所求的概率为$P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}$

或 $P(B/A)=\dfrac{3\times5\times4}{6\times5\times4}=\dfrac{1}{2}$

7. 解　设 $A_i$ 表示第 i 次取到黑球，$i=1,2$

（1）$P(A_2/A_1)=\dfrac{2}{9}$

（2）$A_2=A_1A_2+\overline{A}_1A_2,$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2/A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{27}{90}$$

$$P(A_1/A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}}{\frac{27}{90}}=\frac{2}{9}$$

8．**解**　（1）设 $B_i$ ={10 个灯泡中有 $i$ 个坏灯泡}，$i=0,1,2$；

$A=${任取的 2 个灯泡都是好灯泡}；显然

$$P(B_i)=\frac{1}{3}，\quad P(A|B_i)=\frac{C_{10-i}^2}{C_{10}^2}，\quad i=0,1,2$$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{3}(1+\frac{C_9^2}{C_{10}^2}+\frac{C_8^2}{C_{10}^2})=\frac{109}{135}=0.82$$

（2）根据贝叶斯公式：

$$P(B_0\mid A)=\frac{P(B_0)P(A\mid B_0)}{P(A)}=\frac{1/3}{0.82}=0.41$$

9．**解**　设 $A=\{$发出信号“ · ”$\}$，　$\overline{A}=\{$发出信号“ — ”$\}$；

$B=\{$收到信号“ · ”$\}$，　$\overline{B}=\{$收到信号“ — ”$\}$；　则

$P(A)=0.6$，　$P(\overline{A})=0.4$，$P(B\mid A)=0.8$,

$P(B|\overline{A})=0.1$,　$P(\overline{B}\mid A)=0.2$,　$P(\overline{B}\mid\overline{A})=0.9$

于是根据全概率公式和贝叶斯公式：

（1）$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.6\times0.8+0.4\times0.1=0.52$

（2）$P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=0.6\times0.2+0.4\times0.9=0.48$

（3）$P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0.6\times0.8}{0.52}=0.9231$，

（4）$P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.4\times0.9}{0.48}=0.75$．

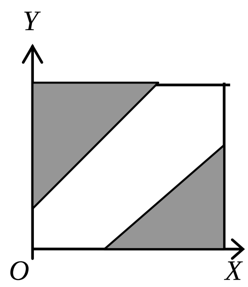
10．**解**　设甲乙两艘轮船到达码头的时刻分别为 $x$、$y$，则样本空间为边长为 24 的正方形 $\Omega$，

$$\Omega=\{(x,y)|\ 0\le x\le 24, 0\le y\le 24\}$$

令 $A$ 表示 “不需等候空出码头”，则：

$A=\{(x,y)|y-x\ge 1, x-y\ge 2\}$(图中阴影)

A 的面积：$\dfrac{1}{2}\left(23^2+22^2\right)$，所以 $P(A)=\dfrac{23^2+22^2}{2\cdot 24^2}=0.879$．




10 题图

# 第二章　随机变量（一）

## 一、填空题

1．写出随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$ 定义：$F(x)=\underline{P(X\le x)}$，$F(x)$ 表示随机变量 X 落入 $\underline{(-\infty,x]}$ 范围内的概率，它具有如下的基本性质：（1）单调不减函数；（2）有界性，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\underline{\quad 1\quad}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\underline{\quad 0\quad}$，（3）是___右___（左或右）连续。

2. 已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，用 $F(x)$ 来表示 $P(a<X\le b)=\underline{F(b)-F(a)}$，$P(X=a)=\underline{F(a)-F(a-0)}$，$P(a<X<b)=\underline{F(b-0)-F(a)}$ .

3．设随机变量 $X$ 的分布律为：$P\left(X=k\right)=c\left(\dfrac{2}{3}\right)^k, k=1,2,3$，则 $c=\underline{\dfrac{27}{38}}$.

4．设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 9/19, & 1\le x<2\\ 15/19, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$，写出 X 的概率分布表：

| X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| | 9/19 | 6/19 | 4/19 |

并求 $P(0.5\le X<2.5)=$____15/19____ .

5. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$（二项分布），它的概率分布为：$P\{X=k\}=\underline{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=01,2,\cdots,n}$，若随机变量 Y 服从参数为 $\lambda>0$ 的泊松分布，则 $P\{Y=k\}=\underline{\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,3,\cdots}$。由泊松定理可知，当 $B(n,p)$ 中 n 比较大 p 比较小时（$n\ge 20, p\le 0.05$），则 $B(n,p)$ 可近似看成参数为___np___ 的泊松分布。

6. 设 X 为连续性随机变量，则 $P(X=a)=$____0____，同时分布函数 $F(x)$ 为____连续____（左连续、右连续，连续）函数.

7. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$，则 $F'(x)=\underline{f(x)}$，$P(a<X<b)=\underline{F(b)-F(a)}$（用 $F(x)$ 表示），$P(a<X<b)=\underline{\int_a^b f(x)dx}$（用 $f(x)$

表示）

8. 设随机变量 $X$ 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 则 $A$ =__1__；

$P(\left|X\right|<\dfrac{\pi}{6})=$__0.5__；　$X$ 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0, & 其他\end{cases}$ .

9．设随机变量 $X$ 的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}k\,x^{b}, & 0<x<1,(b>0,k>0),\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

且 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}=0.75$，则 $k$ =__2__，$b$ =__1__.

## 二、选择题

D　A

## 三、计算与证明题

1. 解(1)由 $\begin{cases}F(+\infty)=A+B\cdot\dfrac{\pi}{2}=1\\ F(-\infty)=A-B\cdot\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}$　得到 $A=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{1}{\pi}$

(2) $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x$，$P\{\left|X\right|<1\}=P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\dfrac{1}{2}$

2．解　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，

所以 X 不是随机变量，而 Y 是随机变量

3. 解　$X$ 是任取的 3 个小球中白球的个数，

(1)有放回取法，$X\sim B(3,0.1)$ (二项分布)

$P(X=k)=C_3^k\,0.1^k\,0.9^{3-k},k=0,1,2,3.$

(2)无放回取法, $X \sim H(3,10,90)$（超几何分布）

$$P(X=k)=\frac{C_{10}^{k}C_{90}^{3-k}}{C_{100}^{3}}, k=0,1,2,3.$$

4. 解　X 的可能值为 2,3,4,…，当 X=k 时有这样的两种情形：前 k-1 次都是正面，最后一次是反面，或者前 k-1 次都是反面，最后一次是正面，即

$$P(X=k)=p^{k-1}(1-p)+(1-p)^{k-1}p, \qquad k=2,3,\cdots$$

5. **解**　设 $X$ 为一页书上印刷错误的个数，则 $P(X=k)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{k}k!}$, $k=0,1,2,\cdots$

一页书上印刷错误至少一个的概率为：

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-0.5}\approx 0.3935.$$

6.　解　设 X 表示出事故的次数，则 $X \sim B(2000,0.0001)$，因为 2000 很大而 0.0001 很小，从而 X 还可近似服从泊松分布 $P(0.2)$

$$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0.0175\text{(查表)}$$

7．解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{3}kxdx+\int_{3}^{4}(2-\frac{x}{2})dx=\frac{9}{2}k+\frac{1}{4}=1,\quad \therefore k=\frac{1}{6}$

（2）
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \int_{0}^{x}\frac{1}{6}xdx=\frac{1}{12}x^{2}, & 0<x\leq 3\\ \int_{0}^{3}\frac{1}{6}xdx+\int_{3}^{x}(2-\frac{1}{2}x)dx=2x-\frac{1}{4}x^{2}-3, & 3<x<4\\ 1, & x\geq 4\end{cases}$$

（3）$P(1<X\leq 7/2)=F(7/2)-F(1)=\dfrac{41}{48}$

或 $P(1<X\leq 7/2)=\int_{1}^{3}\frac{1}{6}xdx+\int_{3}^{7/2}(2-\frac{1}{2}x)dx=\dfrac{41}{48}$

8．**解**　方程有实根的充要条件是判别式 $(4X)^{2}-4\times4\times(X+2)\geq 0$，解得：

$$X\geq 2 \text{ 或 } X\leq -1,$$

注意到　$X\in[0,5]$, 舍去 $X\leq -1$．所求概率为：$P(X\geq 2)=\int_{2}^{5}\frac{1}{5}dt=\frac{3}{5}$.

9. 解　设灯管的使用寿命为 X，则 X 的概率密度和分布函数如下

$f(x)=\frac{1}{2000}e^{-\frac{x}{2000}},\quad x\ge 0,\qquad F(x)=1-e^{-\frac{x}{2000}},\ x\ge 0$

(1)$P(X>1000)=1-F(1000)=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0.6$

(2)令 Y 表示 5 个这种灯管中寿命大于 1000 小时以上的灯管数，则$Y\sim B$（5,0.6），

$\mathbf{P(Y\ge 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-0.4^5-5\times 0.6\times 0.4^4\approx 0.913}$

(3) $P(X\ge 2000\,|\,X\ge 1000)=P(X\ge 1000)=0.6$(指数分布具有无记忆性)

10．解　　$Y$ 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-\sqrt[3]{X}\le y)=P(\sqrt[3]{X}\ge 1-y)$

$$=P(X\ge(1-y)^3)=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(1+x)^2}=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3),$$

因此$Y$的密度函数为：　$f_Y(y)=(F_Y(y))'=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}$.

# 第二章　随机变量（二）

## 一、填空题

1．设(X,Y)的概率分布如右表，给出边缘概率分布，并求

$P(X\ne 0,\ Y=0)=$ ____0.05____，

$P(X\le 0,\ Y\le 0)=$ ____**0.3**____，

$P(XY=0)=$ ____**0.35**____，

$P(X=Y)=$ ____**0.3**____，

$P(|X|=|Y|)=$ ____**0.6**____.

| X \ Y | -1 | 0 | 2 | $p_x(\cdot)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0 | 0.3 |
| 1 | 0.3 | 0.05 | 0.1 | 0.45 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.1 | 0.25 |
| $p_y(\cdot)$ | 0.55 | 0.25 | 0.2 | 1 |

2. 设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}k(x^2+y^2), & 0<x<2,\quad 1<y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ 则常数$k$的值为____1/50____.

3．设平面区域$D$由曲线$y=\frac{1}{x}$及直线$y=0,x=1,x=e^2$所围成，二维随机变量$(X,Y)$

在区域 $D$ 服从均匀分布，则 $(X,Y)$ 的概率密度函数为 $f(x,y)=$ $\begin{cases}1/2, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$.

4. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为 $f(x,y)$，G 为 xoy 平面上的任一区域，则有 $P((X,Y)\in G)=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$

5. 二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为 $f(x,y)$，那么边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，当给定 $Y=y$ 且 $f_Y(y)>0$，条件密度函数 $f_{X/Y}(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_y(y)}$.

6. 当二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)=$ $F_X(x)F_Y(y)\quad \forall(x,y)\in R^2$ 时称为 X,Y 相互独立，此时若(X,Y)为连续型，则有 $f(x,y)=$ $f_X(x)f_Y(y)$ $\forall(x,y)\in R^2$，若(X,Y)为离散型，则有 $p(x_i,y_j)=$ $p_X(x_i)p_Y(y_j)\ \forall(x_i,y_j)$.

7. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为 $f(x,y)$,令 $Z=X+Y$，则和的分布为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$ .

8. 若 X,Y 相互独立都服从二项分布， $X\sim B(n_1,p),Y\sim B(n_2,p)$ ,那么 $X+Y\sim$ $B(n_1+n_2,p)$ 分布；独立的泊松分布 $\xi\sim P(\lambda_1),\eta\sim P(\lambda_2)$ ,那么 $\xi+\eta\sim$ $P(\lambda_1+\lambda_2)$ 分布。

9. 设 X,Y 独立同分布于参数为 2 的指数分布，令 $M=\max\{X,Y\},N=\min\{X,Y\}$，那么分布函数 $F_M(z)=(1-e^{-2z})^2,z>0$, $F_N(z)=1-e^{-4z},z>0$.

## 二、选择题

B　A　C　;

## 三、计算题

1．解

$$P(X_1X_2=0)=1 \Rightarrow P(X_1X_2\neq 0)=P(X_1=-1,\ X_2=1)+P(X_1=1,\ X_2=1)=0$$

$$\therefore P(X_1=-1,\ X_2=1)=P(X_1=1,\ X_2=1)=0$$

由联合分布和边缘分布的关系，很容易得到(X,Y)联合概率分布

| $X_2 \backslash X_1$ | $-1$ | $0$ | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $1/4$ | 0 | $1/4$ | $1/2$ |
| 1 | 0 | $1/2$ | 0 | $1/2$ |
| | $1/4$ | $1/2$ | $1/4$ | |

2. 解

$$P(X_1=1,X_2=1)=P(Y=1,Y=2)=0$$

$$P(X_1=1,X_2=0)=P(Y=1,Y\neq 2)=P(Y=1)=C_3^1\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$

$$P(X_1=0,X_2=1)=P(Y\neq 1,Y=2)=P(Y=2)=C_3^2(\frac{1}{3})^2\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(Y\neq 1,Y\neq 2)=P(Y=0)+P(Y=3)=(\frac{2}{3})^3+(\frac{1}{3})^3=\frac{3}{9}$$

| $X_1 \backslash X_2$ | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{3}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{5}{9}$ |
| 1 | $\frac{4}{9}$ | 0 | $\frac{4}{9}$ |
| | $\frac{7}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | 1 |

$(X,Y)$关于 $X,Y$ 的边缘分布分别为:

$$P(X_1=0)=\frac{5}{9},P(X_1=1)=\frac{4}{9};\quad P(X_2=0)=\frac{7}{9},P(X_2=1)=\frac{2}{9}$$

因为 $0=P(X_1=1,X_2=1)\neq P(X_1=1)P(X_2=1)=\frac{8}{81}$，所以 $X$ 与 $Y$ 不相互独立.

3．解

当 $x\le 0$ 或 $y\le 0$ 时，$F(x,y)=0.$

当 $x>0,y>0$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 6e^{-(2x+3y)}dxdy=(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}),$$

故 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0,\ y>0\,; \\ 0, & x\le 0 \text{ 或 } y\le 0\,.\end{cases}$

4. 解

$$P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{1/2}dx\int_0^2\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}$$

$$P(Y\le\frac{1}{2})=\int_0^{1}dx\int_0^{1/2}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{4}$$

$$P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})=\int_0^{1/2}dx\int_0^{1/2}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{8}$$

$$P(X\le\frac{1}{2}\text{或}Y\le\frac{1}{2})=P(X\le\frac{1}{2})+P(Y\le\frac{1}{2})-P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})=\frac{5}{8}$$

5. 解

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}dx=1+y, & -1<y<0\\ \int_{y}^{1}dx=1-y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立。

6．　解　　当 $x>0$ 时，有　$f_X(x)=\int_0^{\infty}\frac{2}{(1+x+y)^3}dy=\frac{1}{(1+x)^2}$.

故　$f_{Y|X}(y\mid x=1)=\dfrac{f(1,y)}{f_X(1)}=\begin{cases}\dfrac{8}{(2+y)^3}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

7．解　　因为 $X$ 与 $Y$ 相互独立，所以 $Z$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

为使被积函数不为零，$x$与$z$ 应满足下列不等式组：$\begin{cases}0\le x\le 1,\\ z-x>0.\end{cases}$

于是在满足被积函数不为零的情况下，

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\le 0, \\ \int_0^z e^{-(z-x)}dx, & 0<z\le 1, \\ \int_0^1 e^{-(z-x)}dx, & z>1. \end{cases}=\begin{cases} 0, & z\le 0, \\ 1-e^{-z}, & 0<z\le 1, \\ (e-1)e^{-z}, & z>1. \end{cases}$$

# 第三章　随机变量的数字特征

## 一、填空题

1．设随机变量 $X$ 的数学期望 $EX=2$，方差 $DX=4$，则 $EX^2$=___8___ .

2．设随机变量 $X\sim B(n,p)$，已知 $EX=1.6, DX=1.28$，则参数 $n$=_8_，$p$=_0.2_.

3．设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则 $EX$ =_2_， $DX$ =_2_

4. $X_1, X_2, X_3$ 都服从[0, 2 ]上的均匀分布，则 $E(3X_1-X_2+2X_3)$=___4___ .

5．设随机变量 $X$ 的数学期望为 $\mu$，均方差 $\sigma>0$，若 $E(a+bX)=0, D(a+bX)=1$，则 $a=\mp\dfrac{\mu}{\sigma}$ ， $b=\pm\dfrac{1}{\sigma}$ .

6. 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立时， $E(X_1\cdot X_2\cdots X_n)=$ $EX_1\cdot EX_2\cdots EX_n$，$D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=$ $DX_1+DX_2+\cdots+DX_n$.

7．设 $DX=4, DY=1, \rho_{XY}=0.6$，则 $D(3X-2Y)$=___25.6___ .

8. 随机变量 X,Y 的相关系数 $\rho$ 反映_X,Y 的线性相关程度_，当 $\rho=0$ 时称 X,Y _不相关_（独立或不相关），X,Y 独立___能___（能或不能）得出 X,Y 不相关.

9. 已知随机变量 X 的 $EX=\mu, DX=\sigma^2$，用切比雪夫不等式估计，$P(|X-\mu|<2\sigma)\ge$ _3/4._

10. 大数定律阐明了在一定条件下，_大量随机现象平均结果的稳定性_的一系列定律。伯努利大数定律从理论上论证了，大量重复独立试验中，事件 A 发生的 _频率_ 依概率收敛于_概率_，从而使概率的统计定义有了实际意义。

11. 随机从数集 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中有返回的取出 n 个数 $X_1, \cdots, X_n$，由辛钦大数定律，

当 $n\to\infty$ 时， $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于___3___， $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于_11_.

## 二、选择题

A　B　A　C　D .

-

## 三、计算题

1. 解　由已知知 $E(X)=0.6, E(Y)=0.2$，而 $XY$ 的概率分布为

| $XY$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.08 | 0.72 | 0.2 |

所以 $E(XY) = -0.08+0.2=0.12$杆

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0.12-0.6\times0.2=0$，从而 $\rho_{XY}=0$杆

2. 解　设圆的直径为 $X$，则 $X$ 在 $[a, b]$ 上服从均匀分布,概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

设圆的面积为 $Y$，则　$Y=\dfrac{\pi}{4}X^2$.

故　$EY=\int_a^b \dfrac{\pi}{4}x^2\cdot\dfrac{1}{b-a}dx=\dfrac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2)$.

3. 解　$EX=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=1$，

$$EX^2=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\frac{7}{6},$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{6}.$$

4. 解　$EX=\int_0^1 xdx\int_0^1(2-x-y)dy=\dfrac{5}{12}$，$EX^2=\int_0^1 x^2dx\int_0^1(2-x-y)dy=\dfrac{1}{4}$,

所以　$DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{11}{144}$,

又由对称性可知　$EY=\dfrac{5}{12}, DY=\dfrac{11}{144}$.

$$EXY=\int_0^1 xdx\int_0^1 y(2-x-y)dy=\frac{1}{6}, Cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=-\frac{1}{144},$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=-\frac{1}{11}$$

# 第四章　正态分布

## 一．填空题

1. 正态分布的随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,它的概率密度函数 $f(x)=\underline{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$，令

-

Y=$\underline{\dfrac{X-\mu}{\sigma}}$时，则有$Y\sim N(0,1)$；$P(a<X<b)=\underline{\Phi(\dfrac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})}$（用$\Phi(x)$表示）.

2．设$X\sim N(1,4)$,已知$\Phi(1)=0.8413$,则$P(-1<X<3)=$__0.6826____ .

3．设$X\sim N(2,\sigma^2)$,且$P(2<X<4)=0.3$，则$P(X<0)=$__0.2____ .

4．设$X\sim N(-2,9)$，$Y\sim N(3,16)$，且$X$与$Y$相互独立，则

（1）$2X-5\sim$__N(-9,36)____；（2）$X+Y\sim$__N(1,25)____ ；

（3）$2X-3Y\sim$__N(-13,180)______ .

5. 二维正态随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则边缘分布$X\sim \underline{N(\mu_1,\sigma_1^2)}$，$Y\sim \underline{N(\mu_2,\sigma_2^2)}$，$\mathrm{cov}(X,Y)=\underline{\rho\sigma_1\sigma_2}$，当$\rho=0$时，X,Y 不相关和 X,Y 独立是___等价___（等价或不等价）

6. 中心极限定理论证了，在一定条件下大量独立随机变量和的极限分布为_正态分布的一系列定理。独立同分布的中心极限定理表明，$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，且$EX_k=\mu,DX_k=\sigma^2\neq0,(k=1,2,\cdots)$，则当$n$充分大时，$\sum_{k=1}^{n}X_k$可近似服从$\underline{N(\mathrm{n}\mu,\mathrm{n}\sigma^2)}$分布。

7. 棣莫弗-拉普拉斯定理表明，二项分布$B(n,p)$当$n$充分大时，可近似服从$\underline{N(np,np(1-p))}$分布。

## 二、选择题

B　C　B　B　D

## 三、计算题

1．解 （1）$P(X>250)=1-P(X\leq250)=1-\Phi(\dfrac{250-300}{35})=1-\Phi(-1.43)$

$=\Phi(1.43)=0.9236$

(2) $P(300-x\leq X\leq300+x)=\Phi(\dfrac{x}{35})-\Phi(-\dfrac{x}{35})=2\Phi(\dfrac{x}{35})-1\geq0.9$

得到$\Phi(\dfrac{x}{35})\geq0.95$，查表得到$\dfrac{x}{35}\geq1.64$, 即$x\geq57.4$。

2. 解　Y 的可能值为$[1,+\infty)$，当$y\leq1$, $F_Y(y)=0$；当$y>1$时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X^2+1\le y)=P(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}})$$

$$=\Phi(\sqrt{\frac{y-1}{2}})-\Phi(-\sqrt{\frac{y-1}{2}})=2\Phi(\sqrt{\frac{y-1}{2}})-1$$

因此$Y$的密度函数为：

$$f_Y(y)=(F_Y(y))'=2f(\sqrt{\frac{y-1}{2}})\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}},\qquad y>1$$

3．**解** (1)

$$EZ=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3},\quad \mathrm{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=-\frac{1}{2}\times3\times4=-6$$

$$DZ=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}EY+\frac{1}{3}\mathrm{cov}(X,Y)=3$$

（2）$\mathrm{cov}(X,Z)=\mathrm{cov}(X,\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y)=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}\mathrm{cov}(X,Y)=0,\therefore\rho_{XZ}=0$

4. 解　Y 的可能值为 10，3，-5

$$P(Y=10)=P(X\le100)=\Phi(0)=0.5$$

$$P(Y=3)=P(100<X\le115)=\Phi(\frac{115-100}{5})-\Phi(0)=\Phi(3)-0.5=0.4987$$

$$P(Y=-5)=P(X>115)=1-\Phi(\frac{115-100}{5})=1-\Phi(3)=0.0013$$

$$EY=10\times0.5+3\times0.4987-5\times0.0013=6.4896$$

5. 解　易知：$E(V_k)=5$,　$D(V_k)=\frac{100}{12}$, $k=1,2,\ldots,20$杆

由中心极限定理知，随机变量$\sum_{k=1}^{20}V_k\overset{\text{近似}}{\sim}\mathrm{N}(20\times5,\frac{100}{12}\times20)$

于是$P\{V>105\}=P\left\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\times20}}>\frac{105-20\times5}{\frac{10}{\sqrt{12}}\times\sqrt{20}}\right\}$

$$=P\left\{\frac{V-100}{\frac{10}{\sqrt{12}}\times\sqrt{20}}>0.387\right\}\approx1-\Phi(0.387)=0.348,$$

6．解　设 X 为任选的 600 粒种子中良种的粒数，则 $X \sim B(600, \frac{1}{6})$

$EX = 100, DX = \frac{250}{3}$，所求的问题是 $P\left(\left|\frac{X}{600} - \frac{1}{6}\right| \le 0.02\right) = ?$

(1) $P\left(\left|\frac{X}{600} - \frac{1}{6}\right| \le 0.02\right) = P(|X - 100| \le 12) = P(|X - EX| \le 12)$

$$\ge 1 - \frac{DX}{12^2} = 1 - \frac{1}{144} \times \frac{250}{3} = 0.4213$$

（2）n=600 很大，由中心极限定理，X 可近似服从正态分布 $N(100, \frac{250}{3})$

$$P\left(\left|\frac{X}{600} - \frac{1}{6}\right| \le 0.02\right) = P(|X - 100| \le 12) = P\left(\left|\frac{X - 100}{\sqrt{250/3}}\right| \le \frac{12}{\sqrt{250/3}}\right)$$
$$= \Phi(1.3145) - \Phi(-1.3145) = 2\Phi(1.3145) - 1 = 0.8114$$

# 第五章　　数理统计的基本知识

## 一、填空题

1．若总体的分布函数为 $F(x)$，那么样本（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）的分布函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \underline{\prod_{i=1}^{n} F(x_i)}$，设总体 $X \sim e(\lambda)$，试写出样本（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）的概率密度函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \underline{\begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \cdots + x_n)}, & x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}}$ .

2．设有样本值 81.9, 89.4, 79.0, 81.4, 84.8, 85.9, 88.0, 80.3, 82.6, 83.5, 80.2, 85.2, ，试用计算器计算 $\bar{x}$ =<u>　　83.5　　</u>，$s^2$ =<u>　　10.4　　</u>

3. 设总体 X 的 $EX = \mu, DX = \sigma^2$，从总体 X 中抽取一组样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，$\bar{X}$ 为样本均值，则有 $E\bar{X} = \underline{\mu}$，$D\bar{X} = \underline{\sigma^2 / n}$, $\mathrm{cov}(X_1, \bar{X}) = \underline{\sigma^2 / n}$

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，则样本均值 $\bar{X}$ 服从 $\underline{N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}$ 分布，若 $a_i$ 为常数（$a_i \ne 0, i = 1, 2, \cdots, n$），则 $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

-

服从 $\underline{N\left(\mu\sum_{i=1}^{n}a_i,\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2\right)}$ 分布.

5．总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}$ 是样本均值，$S^2$ 是样本方差，$n$ 为样本容量，则常

用的统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim\underline{N(0,1)}$；$T=\underline{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$；

$\chi^2=\underline{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}\sim\chi^2(n-1)$；$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\underline{\chi^2(n)}$。

6. 设随机变量 $X_1,X_2,X_3,X_4$ 独立且都服从 $N(0,\frac{1}{2})$，则 $(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2$ 服从 $\underline{\chi^2(2)}$ 分布，若要使 $aX_1{}^2+b(X_2+X_3+X_4)^2\sim\chi^2(2)$，则需 $a=\underline{2}$，$b=\underline{\dfrac{2}{3}}$.

7．设 $X_1,X_2,X_3,X_4$ 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，则 $\dfrac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2{}^2+X_3{}^2+X_4{}^2}}$ 服从 $\underline{t(3)}$ 分布，$\dfrac{X_1{}^2+X_2{}^2}{X_3{}^2+X_4{}^2}$ 服从 $\underline{F(2,2)}$ 分布.

8. 从两个独立正态总体 $\mathrm{X}\sim\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2),\mathrm{Y}\sim\mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中分别抽取样本 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 和 $\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\cdots,\mathrm{y}_n$，则两样本均值差 $\overline{X}-\overline{Y}\sim\underline{N(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n})}$ 分布.

## 二、选择题

C　A.

## 三、计算题与证明题

1．解　$\overline{X}\sim N\left(52,\dfrac{6.3^2}{36}\right)=N(52,1.05^2)$,

$$P\{50.8<\overline{X}<53.8\}=P\{-1.14<\frac{\overline{X}-52}{1.05}<1.71\}=\Phi(1.71)-\Phi(-1.14)$$
$$=\Phi(1.17)+\Phi(1.14)-1=0.8293.$$

2．解　(1)　$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2=\dfrac{1}{0.5^2}\sum_{i=1}^{10}X_i{}^2\sim\chi^2(10)$,

$$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i\ge 4\}=P\{\frac{1}{0.5^2}\sum_{i=1}^{10}X_i\ge\frac{4}{0.5^2}=16\}=0.10\ (\text{查表}).$$

(2) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{0.5^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(9)$，

$$P\{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\ge 2.85\}=P\{\frac{1}{0.5^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\ge\frac{2.85}{0.5^2}=11.4\}$$
$$=0.25\ \text{(查表)}.$$

3. 解　令 $\overline{X}$ 的容量为 10 的样本均值，$\overline{Y}$ 为容量为 15 的样本均值,则 $\overline{X}$ ~$N$(20,310), $\overline{Y}$ ~$N(20,\frac{3}{15})$，且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立.

则 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(0,\frac{3}{10}+\frac{3}{15}\right)=N(0,0.5)$, 那么 $Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{0.5}}\sim N(0,1)$, 所以

$$P(|\overline{X}-\overline{Y}|>0.3)=P\left(|Z|>\frac{0.3}{\sqrt{0.5}}\right)=2[1-\Phi(0.424)]=2(1-0.6628)=0.6744.$$

# 第六章　参数估计

## 一. 填空题

1. 构造点估计量的两种常用方法是___矩估计法 ，极大似然估计法___。

2．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $X$ 的简单随机样本， $EX=\mu,DX=\sigma^2$， $\overline{X},S^2$ 分别为样本均值及样本方差，则 $\mu,\sigma^2$ 的矩估计量分别是 $\overline{X}$, $\frac{(n-1)S^2}{n}$ 。

3. 若未知参数 $\theta$ 的点估计量 $\hat{\theta}$ 满足 $E\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 无偏估计量.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $X$ 的简单随机样本，$EX=\mu,DX=\sigma^2$，$\overline{X},S^2$ 分别为样本均值及样本方差，$\overline{X}$ ___是___（是或不是）$\mu$ 的无偏估计量，$S^2$ ___是___（是或不是）$\sigma^2$ 的无偏估计量; 但是，$\overline{X}^2$ ___不是___（是或不是）$\mu^2$ 的无偏估计量，$S$ ___不是___（是或不是）$\sigma$ 的无偏估计量。

5．已知来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=5$，则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是［4.412，5.588］ .

## 二. 计算题

1．解　$EX_1=\cdots=EX_n=\mu$,　$DX_1=\cdots=DX_n=\sigma^2$，且 $X_{i+1},X_i$ 相互独立,

$EX_{i+1}^2=EX_i^2=DX_i+(EX_i)^2=\sigma^2+\mu^2$，$E(X_{i+1}X_i)=E(X_{i+1})E(X_i)=\mu^2$

于是，$EQ=c\sum_{i=1}^{n-1}[EX_{i+1}^2+EX_i^2-2E(X_{i+1}X_i)]$

$$=(n-1)c[2(\sigma^2+\mu^2)-2\mu^2]=2(n-1)\sigma^2c=\sigma^2$$

所以　$$c=\frac{1}{2(n-1)}.$$

2. 解　（1）$E(X)=\frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\theta^2}\left(\theta\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^\theta=\frac{\theta}{3}$,

令 $E(X)=\overline{X}$，　因此 $\frac{\theta}{3}=\overline{X}$

得到 $\theta$ 的矩估计量为　$\hat{\theta}=3\overline{X}$.

（2）$E(\hat{\theta})=3E(\overline{X})=3EX=3\times\frac{\theta}{3}=\theta$,

故 $\hat{\theta}=3\overline{X}$ 为 $\theta$ 的无偏估计量。

（3）$\overline{X}$ =（2.4+3+3.2+2.8+2.6+2.2+3.4+2.4）/8=2.75，

所以 $\theta$ 的矩估计值为　$\theta$=8.25

3．**解**　似然函数为：

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=X_i\}=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{X_i-1}p=p^n(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n},$$

两边取对数　$\ln L(p)=n\ln p+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\right)\ln(1-p)$,

令 $\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{1-p}=0$，得 $p$ 的极大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$.

4.　解（1）$EX=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=-2\theta+3$

令 $EX=-2\theta+3=\overline{X}$，得到 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{2}$

$\overline{X}=4/3$，所以 $\theta$ 的矩估计值 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$

（2）抽得一个样本 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$，相应的似然函数为

$$L(\theta)=\theta^2\cdot2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$$

$$\ln L(\theta)=\ln2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0$$

所以 $\theta$ 极大似然估计值 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$

5.　解　（1）　查标准正态分布表，得 $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96$，由样本观测值，得

$$\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=20.1-1.96\times\frac{0.21}{\sqrt{9}}=19.9628,$$

$$\overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=20.1+1.96\times\frac{0.21}{\sqrt{9}}=20.2372,$$

故μ对应于置信度为 0.95 的置信区间为［19.9628，20.2372］；

（2）查 $t$ 分布表，得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$，由样本观测值，得

$$\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\frac{s}{\sqrt{n}}=20.1-2.306\times\frac{0.203}{\sqrt{9}}=19.944,$$

$$\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\frac{s}{\sqrt{n}}=20.1+2.306\times\frac{0.203}{\sqrt{9}}=20.256,$$

故当σ未知时，μ对应于置信度为 0.95 的置信区间为［19.944，20.256］；

（3）查 $\chi^2$ 分布表，得 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=2.18$，由样本观测值，得

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=\frac{8\times0.203^2}{17.535}=0.0188,\quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=\frac{8\times0.203^2}{2.18}=0.1512,$$

故当μ未知时，$\sigma^2$ 对应于置信度为 0.95 的置信区间为［0.0188，0.1512］.

5．解　　本题是两个正态总体，已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，但其值未知，求期望差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间，由给定的两组样本观测值，有

$$n_1=8,\ \bar{x}=81.625,\ s_1^2=145.696,\quad n_2=8,\ \bar{y}=75.875,\ s_2^2=102.125,$$

$$s_w^2=\frac{7\times145.696+7\times102.125}{14}=123.910,\quad \bar{x}-\bar{y}=81.625-75.875=5.75,$$

查 $t$ 分布表，得　　$t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(14)=2.1448$，

从而 $\Delta=t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=2.1448\sqrt{123.91\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}=11.94$，

故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95％的置信区间为：

$$(\bar{x}-\bar{y}-\Delta,\ \bar{x}-\bar{y}+\Delta)=(5.75-11.94,\ 5.75+11.94)=(-6.19,\ 17.69).$$

# 第七章　假设检验

## 一、填空题

1．在显著性假设检验中，可能犯第一类错误是指<u>“弃真”</u>错误，第二类错误是指<u>“纳伪”</u>错误，若要使犯两类错误的概率同时减少，则只有增加<u>“样本容量”</u>.

2．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\sigma^2$ 未知，要检验假设 $H_0$：$\mu = \mu_0$，则应选取的统计量是 $\underline{T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}}$ ；当 $H_0$ 成立时，该统计量服从<u>自由度为 $n$-1 的 $t$</u> 分布；设显著水平为 $\alpha$，若备择假设为 $H_1$：$\mu \neq \mu_0$，则拒绝域为 $\underline{|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$ ；若备择假设为 $H_1$：$\mu > \mu_0$，则拒绝域为 $\underline{T > t_\alpha(n-1)}$ ；若备择假设为 $H_1$：$\mu < \mu_0$，则拒绝域为 $\underline{T < -t_\alpha(n-1)}$.

3．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\mu = \mu_0$ 已知，要检验假设 $H_0$：$\sigma^2 = \sigma_0^2$，则应选取的统计量是 $\underline{K = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2}}$ ；当 $H_0$ 成立时，该统计量服从 $\underline{\chi^2(n)}$ 分布；设显著水平为 $\alpha$，若备择假设为 $H_1$：$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$，则拒绝域为 $\underline{K < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\text{，或} K > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}$ ；若备择假设为 $H_1$：$\sigma^2 > \sigma_0^2$，则拒绝域为 $\underline{K > \chi^2_\alpha(n)}$ ；若备择假设为 $H_1$：$\sigma^2 < \sigma_0^2$，则拒绝域为 $\underline{K < \chi^2_{1-\alpha}(n)}$ .

## 二、选择题

B　C　A.

## 三、计算与证明题

1．解　设患者每分钟内的脉搏次数为 $X$，则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 把从 $X$ 中抽取的容量为 $n$ 的样本均值记为 $\bar{x}$，样本标准差记为 $s$，本题是在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$H_0: \mu = 72$； $H_1: \mu \neq 72$，拒绝域为 $|t| = \dfrac{|\bar{x} - 72|}{s}\sqrt{n} \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，

由样本观测值得

$$n = 10，\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 67.4，\quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 5.93，$$

查 $t$ 分布表得　　　　$t_{0.025}(10-1)=2.2622$，

于是　　　　$|\,t\,|=\dfrac{|\,67.4-72|}{5.93}\sqrt{10}=2.453>2.2622$ .

所以拒绝假设 $H_0:\mu=72$，即在显著性水平 0.05 下，认为患者与正常人的脉搏有显著差异.

2．解　设该次考试的考生成绩为 $X$，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 把从 $X$ 中抽取的容量为 $n$ 的样本均值记为 $\bar{x}$，样本标准差记为 $s$，本题是在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设

$$H_0:\mu\geq 70;\quad H_1:\mu<70,$$

拒绝域为　　　　$t=\dfrac{\bar{x}-70}{s}\sqrt{n}\leq -t_{\alpha}(n-1)$

由 $n$＝36，$\bar{x}$＝66.5，$s$＝15，查 $t$ 分布表得　$t_{0.05}(36-1)=1.6896$，算得

$$t=\frac{\bar{x}-70}{s}\sqrt{n}=-1.4>-1.6896,$$

所以接受假设 $H_0:\mu\geq 70$，即在显著性水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩不低于 70 分.

3．解　设元件的寿命为 $X$，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 把从 $X$ 中抽取的容量为 $n$ 的样本均值记为 $\bar{x}$，样本标准差记为 $s$，本题是在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设

$$H_{01}:\mu\geq 1200;\quad H_{11}:\mu<1200,$$

$$H_{02}:\sigma\leq 50;\quad H_{12}:\sigma>50.$$

假设 $H_{01}$ 的拒绝域为　　$t=\dfrac{\bar{x}-1200}{s}\sqrt{n}\leq -t_{\alpha}(n-1)$，

假设 $H_{02}$ 的拒绝域为　　$k=\dfrac{(n-1)s^2}{50^2}>\chi_{\alpha}{}^2(n-1)$，

由已知 $n=9$，$\bar{x}=1178$，$s=54$，查 $t$ 分布表得

$$t_{0.05}(9-1)=1.8595,$$

查 $\chi^2$ 分布表得　　　　$\chi^2_{0.05}(9-1)=15.507$，

于是算得

$$t=\frac{1178-1200}{54}\sqrt{9}=-1.22>-1.8595,$$

$$k=\frac{(9-1)54^2}{50^2}=9.3312<15.507,$$

所以接受假设 $H_{01}$ 和假设 $H_{02}$，即认为这批元件合乎要求.

4．　解　设两种温度下产品的断裂力分别为 $X$、$Y$，则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

（1）$\mu_1,\mu_2$ 未知，要检验假设：$H_0:\sigma_1=\sigma_2$ ；$H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$，

由样本观测值算得　$s_1^2=0.886,\ s_2^2=0.829$ ，查 $F$ 分布表，得

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(7,7)=4.99,$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(7,7)=\frac{1}{F_{0.025}(7,7)}\approx 0.2,$$

于是
$$0.2<F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{0.889}{0.829}=1.07<4.99,$$

所以接受原假设 $H_0$, 即认为两种温度下产品断裂力的方差是相等.

（2） 由（1）知：$\sigma_1=\sigma_2$, 要检验假设：

$$H_0:\mu_1=\mu_2\ ,\ H_1:\mu_1\neq\mu_2,$$

由样本观测值可算得

$$\bar{x}=20.4,\ s_1^2=0.889,\ n_1=8;\ \bar{y}=19.4,\ s_2^2=0.829,\ n_2=8,$$

查 $t$ 分布表得
$$t_{0.025}(14)=2.14,$$

于是
$$|T|=\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\ s_w}=2.16>2.14\ ,$$

所以拒绝原假设 $H_0$, 即认为两种温度下产品断裂力的平均值有显著差异.