学院、系＿＿＿＿ 专业班级＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿

密 封 线

齐鲁工业大学 20/21 学年第二学期《高等数学Ⅰ（下）》期末考试试卷（A 卷）

（本试卷共 4 页）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

得分	
阅卷人	

一、计算题(本题满分 18 分，每小题 6 分)

1、求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{x}$。

解. 原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\tan(xy)}{xy}\cdot y$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} y$

$=2$

2、设 $z=(\dfrac{x}{y})^2\ln(3x-2y)$，求全微分 dz。

解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}\ln(3x-2y)+(\dfrac{x}{y})^2\cdot\dfrac{3}{3x-2y}=\dfrac{2x(3x-2y)\ln(3x-2y)+3x^2}{y^2(3x-2y)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2\cdot\dfrac{x}{y}\cdot(-\dfrac{x}{y^2})\ln(3x-2y)+(\dfrac{x}{y})^2\cdot\dfrac{-2}{3x-2y}=-\dfrac{2x^2(3x-2y)\ln(3x-2y)+2x^2y}{y^3(3x-2y)}$

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot dy=\cdots\cdots$

3、求经过点 $A(1,0,-2)$ 且与平面 $3x-2y+z-2=0$ 平行的平面方程。

解. 取 $\vec{n}=(3,-2,1)$，过点 $A(1,0,-2)$

则平面方程：$3(x-1)-2(y-0)+(z+2)=0$

化简，得 $3x-2y+z=1$

得分	
阅卷人	

二、求下列曲线积分和曲面积分

（本题满分 30 分，每小题 10 分）

1、利用格林公式计算曲线积分 $\oint_L x^2ydx - xy^2dy$，其中 L 为正向圆周 $x^2+y^2=a^2$。

解. 令 $P=x^2y$, $Q=-xy^2$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-(x^2+y^2)$

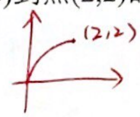
应用格林公式, 有 原式 $=-\iint_D (x^2+y^2)dxdy$.

$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \rho^2\cdot\rho d\rho = -2\pi\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^a$

$=-\frac{\pi}{2}a^4$

2、计算 $\int_L yds$，其中 L 为 $y^2=2x$ 自点(0,0)到点(2,2)的一段弧。

解. 此为第一类曲线积分.



L: $x=\frac{1}{2}y^2$. $0\le y\le 2$.

弧长元素 $ds=\sqrt{1+y^2}dy$.

x^2

则 原式 $=\int_0^2 y\cdot\sqrt{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+y^2}\,d(1+y^2)=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$

$2x^2y$

3、计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma zdxdy$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $0\le z\le 1$ 部分的下侧。

解. 此为第二类曲面积分.

Σ 向 xoy 面投影, 得 D_{xy}: $x^2+y^2\le 1$.

故 原式 $=-\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho\cdot\rho d\rho = -2\pi\cdot\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^1 = -\frac{2\pi}{3}$

得分	
阅卷人	

三、计算题(本题满分 30 分，每小题 10 分)

1、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{5+x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数。

解: $f(x)=\dfrac{1}{5+x}=\dfrac{1}{6+x-1}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{6}}$

已知 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n \quad (|x|<1)$

故 $f(x)=\dfrac{1}{6}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x-1}{6}\right)^n \quad \left(\left|\dfrac{x-1}{6}\right|<1 \Rightarrow -5<x<7\right)$

2、判定级数 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的敛散性。

解. ①法1. $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$S_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$=1-\dfrac{1}{n+1}\to 1 \ (n\to\infty)$

故 级数收敛, 且和为1

② 法2. $\forall n$, 恒有

一般项 $\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

因 大收敛 $\Rightarrow$ 小收敛

故原级数收敛.

③ 法3. 比较审敛法的极限形式.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$

而 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

故原级数收敛.

3、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数。

解. ①先求收敛域.

$a_n=n$.

则 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$

且 $x=\pm 1$ 时. 级数发散.

故收敛域为 $(-1,1)$

② $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n \quad x\in(-1,1)$

$=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\cdot\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'$

$=\dfrac{x}{(1-x)^2} \quad x\in(-1,1)$

得分	
阅卷人	

四、(本题满分 8 分)

求下列微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=4e^{-t}$ 的通解。

解. ① 先求对应齐次方程的通解.

特征方程: $r^2-2r-3=0$.

特征根: $r_1=3,\ r_2=-1$

故齐次通解:

$$x(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$$

② 求非齐次的一个特解.

$4e^{-t}$ 中的 $\lambda=-1$ 是特征单根.

故可设特解为 ate^{-t}.

代入原方程, 可得 $a=-1$

则特解为 $-te^{-t}$

综上所述, 原方程通解为

$$x(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}-te^{-t}$$

得分	
阅卷人	

五、应用题（本题满分 8 分）

某厂要用铁板做成一个体积为 2m^3 的有盖长方体水箱。

问当长、宽和高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省。

解. 设长、宽分别为 x, y, 则高为 $\frac{2}{xy}$.

水箱表面积 $S=2(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y})\quad(x>0,y>0)$

则 $S_x=2(y-\frac{2}{x^2})=0,\ S_y=2(x-\frac{2}{y^2})=0$

解得 $x=y=\sqrt[3]{2}$, 由题意可知 $x=y=z=\sqrt[3]{2}$ 时. 用料最省.

得分	
阅卷人	

六、综合题(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有二阶连续导数，且 $f(1)=2$,

$f'(x)-\frac{f(x)}{x}-\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt=0$，求满足条件的 $f(x)$。

解. 将 $x=1$ 代入方程. 有 $f'(1)-f(1)-\int_1^1\frac{f(t)}{t^2}dt=0$.

故 $f'(1)=2$

方程两端同时关于 x 求导. 有

$f''(x)-\frac{f'(x)}{x}+\cancel{\frac{f(x)}{x^2}}-\cancel{\frac{f(x)}{x^2}}\cdot 1=0$, 结合 $f(1)=2, f'(1)=2$. 有

解得 $f(x)=x^2+1$