齐鲁工业大学 22/23 学年第二学期《高等数学 II（下）》期末考试试卷（B 卷）答案

一、计算题（本题满分 40 分，每题 8 分）

1、求微分方程 $y' = e^{x-y}$ 的通解.

解：$\dfrac{dy}{dx} = e^x e^{-y}$ 3 分

$e^y dy = e^x dx$ 5 分

$e^y = e^x + C$ 8 分

2、设 $z = x^2 + y^2$，求 dz .

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$ 4 分

所以 $dz = 2xdx + 2ydy$ 8 分

3、求过点 $A(0,1,2)$ 且与直线 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$ 垂直的平面方程.

解：$\vec{n} = \vec{s} = (2,3,1)$ 3 分

所以平面方程为 $2x + 3(y-1) + (z-2) = 0$

即：$2x + 3y + z - 5 = 0$ 8 分

4、设 $z = x^3 y^2 + x^2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y$ 4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y$ 8 分

5、求微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的通解.

解：特征方程：$r^2-5r+6=0$ 4分

$r=2,r=3$ 6分

通解为：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ 8分

二、 解答题（本题满分27分，每题9分）

6、D 是由 $y=x^2,y=x$ 在第一象限围成的部分，求 $\iint\limits_D xydxdy$

解：$D:0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le x$ 3分

$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x xydy$ 6分

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^3-x^5\right)dx=\frac{1}{24}$ 9分

7、求 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$.

解：D的极坐标表示为：$D:0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le r\le 1$ 3分

$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr$ 6分

$=-\frac{1}{2}2\pi e^{-r^2}\Big|_0^1=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$ 9分

8、讨论函数 $z=x^2+xy$ 的极值.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x=0$ 3分

得 $x=y=0$ 5分

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\mathrm{B}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$

$AC-B^2<0$

所以 $z=x^2+xy$ 无极值 9分

三、应用题（每题 12 分）

9、曲线在任意一点的切线斜率等于e^x+y，求曲线的表达式.

解：由已知条件得$\dfrac{dy}{dx}=e^x+y$，　　2 分

则$\dfrac{dy}{dx}-y=e^x$　　6 分

$y=e^x\left(\int e^{-\int dx}e^x+C\right)=e^x\left(x+C\right)$　　12 分

四、级数题（本题满分 21 分，每题 7 分）

10、判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$是绝对收敛还是条件收敛.

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$　　2 分

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=1$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right|$发散，　　4 分

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$满足(1)$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\to 0$（2）$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$单调递减

由莱布尼兹判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$收敛

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$条件收敛

11、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$的和函数$s(x)$.

解： $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，收敛域为$(-1,1)$ 2 分

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'$$ 4 分

$$=\frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$$ 7 分

12、将$f(x)=\ln(1-x)$展成x的幂级数.

解: $f'(x)=\frac{-1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 3 分

$$f(x)=\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}(-1\le x<1)$$ 7 分