齐鲁工业大学《概率论与数理统计》2021-2022学年第一学期期末试卷

一	二	三	四	总分

得 分

一、填空题（每小题3分，满分15分．把答案填在题中横线上）

1.设 X 的概率密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，对固定的 x_0，若使

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{kf(x)}{1-F(x_0)}, & x\ge x_0\\ 0, & x<x_0\end{cases}$$ 为某随机变量的概率密度，则常数 $k=$______．

2.某人进行独立重复的射击试验，每次射击的命中率为 $\dfrac{1}{2}$，当他连续射击3次后检查目标，发现靶已命中，则他在第一次射击时就命中的概率等于_______．

3.设离散型随机变量 X 服从二项分布 $B(4,\dfrac{1}{4})$,则 $E(X^2)=$_______．

4.若随机变量 X 与 Y 满足 $Y=1-\dfrac{X}{2}$，则相关系数 $\rho(X,Y)=$_______

5.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，其中 $\sigma>0$,则统计量 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从分布．

得 分

二、选择题（每小题3分，满分15分．每小题只有一个选项符合题目要求，把正确选项前的字母填在题后括号内）

1.设相互独立的随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则随机变量 $Y=\min(X_1,X_2)$ 的概率密度 $f(x)$ 等于（　）

(A) $f_1(x)f_2(x)$；　(B) $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$；　(D) $f_1(x)[1-F_2(x)]+f_2(x)[1-F_1(x)]$．

2.设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其概率密度 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有驻点，且 $f(1)=1,$ 则（　）

(A) $\mu=1,\sigma^2=1$；　(B) $\mu=1,\sigma^2=\dfrac{1}{2\pi}$；

(C) $\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$； (D) $\mu=0,\sigma^2=1$.

3.已知(X,Y)服从二维正态分布，则X与Y的相关系数$\rho_{XY}=0$是X与Y相互独立的（ ）

(A) 充分条件，但不是必要条件； (B) 必要条件，但不是充分条件；

(C) 充分必要条件； (D) 既不是充分也不是必要条件.

4.设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ^2未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为取自总体X的样本，则参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为（ ）

(A) $(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}})$； (B) $(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n),\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n))$；

(C) $(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n))$； (D) $(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$.

5.在假设检验中，如果待检验的原假设为H_0，那么犯第二类错误是指（）

(A) H_0不成立，接受H_0； (B) H_0成立，接受H_0；

(C) H_0成立，拒绝H_0； (D) H_0不成立，拒绝H_0.

得 分

三、按照要求解答下列各题（每小题10分，满分40分）

1.随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{3a}{8}, & 4\le x\le 6\\ 0, & 其他\end{cases}$，（1）求常数 a；（2）X 的分布函数 $F(x)$.

2.设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，令 $X=\begin{cases}-1 & 若U\le -1\\ 1 & 若U>-1\end{cases}$；$Y=\begin{cases}-1 & 若U\le 1\\ 1 & 若U>1\end{cases}$，求（1）$(X,Y)$ 概率分布；（2）$Z=X+Y$ 的概率分布.

3.设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

4.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，统计量 $T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$，证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

得分

四、证明题（按照要求解答下列各题，每题15分，满分30分）

1.设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+3y)}, x>0, y>0,\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，

（1）求常数 A；（2）X 的边缘概率密度 $f_X(x)$；（3）条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；

（4）计算概率 $P(X<2|Y<1)$；（5）判断 X 与 Y 是否相互独立.

2. 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\beta)=\begin{cases}1-(\frac{1}{x})^{\beta}, x>1,\\ 0, x\le 1.\end{cases}$ 其中参数 $\beta>1$ 是未知参数. 又 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的随机样本，求参数 β 的矩估计量和最大似然估计量.