齐鲁工业大学 2021/2022 学年第一学期《高等数学Ⅱ（上）》期末考试试卷（A 卷答案）（本试卷共 4 页）

线

封

密

学院、系________ 专业班级________ 学号________ 姓名

一、求下列极限[每小题 8 分，满分 16 分]

1．计算 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n}$ （x 为不等于 0 的常数，$n\in N_+$）

$=\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\cdot\dfrac{x}{2^n}$ 4 分

$=x$ 8 分

2．计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^{\frac{1}{2}}}(1-\cos t^2)dt}{x^{\frac{5}{2}}}$

解： $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}}$ 2 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot}{5x^2}$ 4 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{5x^2}$ 6 分

$=\dfrac{1}{10}$ 8 分

二、求下列导数[每小题 8 分，满分 16 分]

1. 求由方程 $xy=\mathrm{e}^{x+y}$ 所确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解：方程两边同时求导： $y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x+y}(1+\dfrac{dy}{dx})$ 4 分

移项 $(x-\mathrm{e}^{x+y})\dfrac{dy}{dx}=\mathrm{e}^{x+y}-y$ 6 分

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}$ 8 分

2. 已知$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$，求当$t = \dfrac{\pi}{3}$时$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的值。

解：由参数方程确定的函数导数公式$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$　　2 分

$$= \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t}$$ 4 分

$$= \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$$ 6 分

$$= \left.\frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$$ 8

三、求下列积分[每小题 8 分，满分 24 分]

1.计算$\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$

解：$= \displaystyle\int \sqrt{1+\ln x}\,\mathrm{d}\ln x$　　4 分

$= \displaystyle\int \sqrt{1+\ln x}\,\mathrm{d}(\ln x + 1)$　　6 分

$= \dfrac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$　　8 分

2. 计算$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

解：令$\sqrt[4]{x} = t, x = t^4, dx = 4t^3 dt$　　1 分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3 \mathrm{d}t}{t^2 + t} = \int \frac{4t^2 \mathrm{d}t}{t+1}$$ 3 分

$$= 4\int \frac{t^2 -1+1 \mathrm{d}t}{t+1} = 4\int t - 1 + \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$$ 5 分

$$= 2t^2 - 4t + 4\ln|t+1| + C$$ 7 分

$$= = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|\sqrt[4]{x} + 1\right| + C$$ 8 分

线

封

密

姓名

学号______

专业班级______

学院、系______

3. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^7+\sin^4 x)\cos x\mathrm{d}x$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x\mathrm{d}x$ 　　2 分

$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x\mathrm{d}x$ 　　4 分

$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}\sin x$ 　　6 分

$=2\cdot\frac{\sin^4 x}{5}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ 　　7 分

$=\frac{2}{5}$ 　　8 分

四、证明题[每小题 8 分，满分 16 分]

1. 证明不等式：当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$ 。

证明：设 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$ 　　$f(0)=0$ 　　2 分

又 $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}})>0$ 　　4 分

$x>0$，单调递增，$f(x)>f(0)=0$ 　　6 分

所以 当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$ 　　8 分

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(1)+f(2)+f(3)=3,\ f(0)=1$，证明：至少存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$ 。

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，一定有最大值 M 和最小值 m 　　2 分

$3m\le f(1)+f(2)+f(3)\le 3M$

所以 $m\le 1\le M$，有介值定理： 　　4 分

至少存在 $c\in(0,3)$，使 $f(c)=1$，又因为 $f(0)=1$ 　　6 分

在 $(0,c)$ 应用罗尔中值定理得：

至少存在 $\xi\in(0,c)$，使 $f'(\xi)=0$ 　　8 分

五、解答题[本题满分 14 分]

如图所示，欲制造一个容积为 V 的圆柱形有盖容器，问如何设计高度 h 和底面半径 r 可

使材料最省？

解： $S=2\pi r^2+2\pi rh$ 1 分

$V=\pi r^2 h,\therefore h=\dfrac{V}{\pi r^2}$ 2 分

$S=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$ 4 分

$\because \dfrac{dS}{dr}=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$ 6 分

令 $\dfrac{dS}{dr}=0$，解得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，为唯一的驻点

从而当 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，即 $h=2r$ 时，取得最小值。 8 分

六、解答题［本题满分 14 分］

设抛物线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $x+y=2$ 及 x 轴所围成平面图形 D，求（1）求 D 的面积；（2）求 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

解：作出草图. ……2 分

由方程组 $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ x+y=2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线与抛物线的交点为 $(1,1)$. ……4 分

$\therefore$（1）D 的面积为 $A=\int_0^1[(2-y)-y^2]\mathrm{d}y$

$$=[2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3]_0^1=\frac{7}{6}.$$ ……8 分

或 $A=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{6}.$

（2） $V_x=\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2\mathrm{d}x+\pi\int_1^2(2-x)^2\mathrm{d}x$

$$=\pi[\frac{x^2}{2}]_0^1-\pi[\frac{(2-x)^2}{3}]_1^2=\frac{5\pi}{6}.$$ ……12 分