齐鲁工业大学 22/23 学年第二学期《高等数学 I（下）》

期末考试试卷答案　　　（B 卷）

一、计算题（本题满分 30 分，每题 6 分）

1、求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x\mathrm{y}}y$　　（3 分）

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x\mathrm{y}}\lim\limits_{y\to 2}y$　　（2 分）

$=2$　　（1 分）

2、求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$ 的通解.

解：$\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}=e^{x}e^{y}$　　（2 分）

$e^{y}dy=e^{x}dx$　　（2 分）

$\int e^{y}dy=\int e^{x}dx$　　（1 分）

$e^{y}=e^{x}+\mathrm{c}$　　（1 分）

3、求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程.

解：$n_1=(1,0,-4)$　$n_2=(2,-1,-5)$　　（2 分）

$\mathrm{s}=n_1\times n_2$　　（1 分）

$=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}$　　（1 分）

$=-(4i+3j+k)$　　（1 分）

直线方程：$\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$　　（1 分）

4、设 $z = x^2 + y^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$，$dz$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ （2 分）

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y$ （2 分）

$dz = 2xdx + 2ydy$ （2 分）

5、讨论 $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2$ 的极值.

解： $f_x = 2x - 2y$， $f_y = -2x + y$ （1 分）

驻点（0，0） （1 分）

$A = f_{xx} = 2$， $B = f_{xy} = -2$， $C = f_{yy} = 1$ （3 分）

$AC - B^2 < 0$ 没有极值 （1 分）

二、 解答题（本题满分 20 分，每题 10 分）

6、求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解：特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$ （1 分）

特征值 $r_1 = -1$，$r_2 = 3$ （4 分）

得到两个不同的特解 $y_1 = e^{-x}$，$y_2 = e^{-3x}$ （4 分）

通解 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$ （1 分）

7、求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面和法线方程.

解： $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$ （2 分）

$n = (2x, 2y, 2z)$ （2 分）

$n_{（1，2，3）} = (2, 4, 6)$ （2 分）

切平面方程： $x + 2y + 3z - 14 = 0$ （2 分）

法线方程$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ （2 分）

三、积分题（本题满分 30 分，每题 10 分）

8、计算$\iint\limits_D xydxdy$，其中D是直线$y=x$， $y=1$， $x=2$所围成的闭区域.

解：积分区域画图 （2 分）

$\iint\limits_D xydxdy=\int_1^2(\int_1^x xydy)dx$ （2 分）

$=\int_1^2 \ x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_1^x dx$ （2 分）

$=(\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{4})\Big|_1^2$ （2 分）

$=\frac{9}{8}$ （2 分）

9、已知Ω由曲面$z=x^2+y^2$和平面$z=4$所围成的立体，求它在xoy坐标面上的投影，并计算$I=\iiint\limits_\Omega zdxdydz$.

解：画出闭区域Ω （2 分）

把Ω投影到xoy面上，得到$D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\}$ （1 分）

用柱面坐标$\begin{cases}\rho^2\le z\le 4\\0\le\theta\le 2\pi\\0\le\rho\le 2\end{cases}$ （3 分）

$I=\iiint\limits_\Omega zdxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^2\rho\int_{\rho^2}^4 zdzd\rho d\theta$ （3 分）

$=\frac{64}{3}\pi$ （1 分）

10、设L为正向圆周$x^2+y^2=a^2$，计算曲线积分$\oint\limits_L x^2ydx-xy^2dy$.

解：令$P=x^2y,Q=-xy^2$ （4 分）

格林公式：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-y^2-x^2$ （2 分）

$$\oint_L x^2ydx - xy^2dy = -\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$ （2 分）

$$= -\frac{\pi}{2}a^4$$ （2 分）

四、级数题（本题满分 20 分，每题 10 分）

11、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域、和函数 $s(x)$. 并判断数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$ 的敛散性，如果收敛求其和 s.

解：收敛域（-1，1） （2 分）

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'$$ （2 分）

$$= (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)'$$ （2 分）

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$ （2 分）

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$ 收敛 （1 分）

$s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = 4$ （1 分）

12、将函数 $f(x)=\frac{1}{x+3}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数，并求该幂级数的收敛域.

解： $f(x) = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{(x-1)+4}$ （2 分）

$$= \frac{1}{4(1+\frac{x-1}{4})}$$ （2 分）

因为 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1<x<1$ （2 分）

所以 $f(x) = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-1}{4})^n$ （2 分）

收敛域 $-3<x<5$ （2 分）