齐鲁工业大学　试卷 A 答案及评分标准

学期：＿2016＿至＿2017＿学年度　第＿一＿学期

课程：＿概率论与数理统计＿　课程代号：＿0500110＿

班级：140902、140903 等＿　姓名：＿＿＿＿学号：＿＿＿＿

★特别提示：请遵守考场纪律，如发现有违纪或作弊行为，将严格按照规定处理！

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、| 得分 | |　填空题（每小题 3 分，总共 15 分）

1、从一副扑克牌中（52 张），任抽两张牌，问抽出的牌一张为黑桃、另一张为红桃的概率是：$\dfrac{C_{13}^1 C_{13}^1}{C_{52}^2}$；

2、已知 $P(\bar{A})=3/4$，$P(B|A)=1/3$，$P(A|B)=1/2$，则 $P(A\cup B)=$＿1/3＿；

3、设随机变量 X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} a(1-\dfrac{1}{x^2}), & 1\le x\le 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$　则 $a=$＿2＿；

4、设 (X,Y) 的联合分布函数为 $\mathrm{F}(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$，那么 X 的边缘分布函数为：$\mathrm{F}_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$；

5、若随机变量 $X\sim b(4,\ 1/2)$，则 $D(2X-3)=$＿4＿；

二、| 得分 | |　在秋菜运输中，某汽车可能到 A，B，C 三地去拉菜，设到此三处拉菜的概率分别是 0.2，0.5，0.3，已知 A 地一级菜的概率为 10%，B 地一级菜的概率为 30%，C 地一级菜的概率为 70%。问（1）汽车拉到一级菜的概率是多少？（2）如果汽车拉到一级菜，问该菜是 B 地拉来的概率为多少？(本题 10 分)

解：（1）设 A=“汽车拉到的是一级菜”，$B_i(i=1,2,3)=$“买到的元件是由 A、B 或 C 三地提供的”，　---------------------------------------2 分

依题设可知

$P(B_1)=0.2$，$P(B_2)=0.5$，$P(B_3)=0.3$，$P(A|B_1)=0.1$，$P(A|B_2)=0.3$，$P(A|B_3)=0.7$。

---------------------------------4 分

那么 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{38}{100}$。---------------------7 分

（2） $P(B_2|A)=\frac{0.5\times0.3}{0.38}=\frac{15}{38}$。---9 分

答：汽车拉到一级菜的概率是 38%。如果汽车拉到一级菜，该菜是 B 地拉来的概率为 15/38。

---10 分

三、| 得分 | |

设顾客在某餐厅的茶位等待服务的时间 X (min)服从指数分布，其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5} & x>0,\\ 0 & \text{其他。}\end{cases}$$

某顾客在茶位等待服务，若超过 10min，他就会离开。他一个月要到该餐厅 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开的次数。求 Y 的分布律，并求 $P\{Y\le 1\}$。（本题 10 分）

解：因为 X (min)服从指数分布，所以顾客在某餐厅的茶位等待服务的时间超过 10min 的概率为：

$$p=\int_{10}^{\infty}1/5e^{-x/5}dx=e^{-2}，$$ -------------------------------4 分

所以顾客去餐厅一次未等到服务而离开的概率为 e^{-2}。从而 $Y\sim b(5,\quad e^{-2})$，Y 的分布律为：

$P\{Y=k\}=C_5^k(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{5-k},k=0,1,2,3,4,5.$------------------7 分

$P\{Y\le1\}=P\{Y=0\}+P\{Y=1\}=C_5^0(e^{-2})^0(1-e^{-2})^5+C_5^1(e^{-2})^1(1-e^{-2})^4$。---------------10 分

四、| 得分 | |

设随机变量 X 的分布律为：

X	-1	0	1	2
P_k	1/6	k	1/2	1/4

求常数 k；求 X 的分布函数 F(x) 求 $P\{-1<X<2\}$；求 $Y=X^2$ 的分布律；求随机变量 X 的方差 D(X)。(本题 13 分)

解： （1）因为 $\frac{1}{6}+k+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$， 所以 $k=\frac{1}{12}$ …………2 分

（2）$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 1/6, & -1\le x<0\\ 3/12, & 0\le x<1\\ 9/12, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$ …………6 分

（3）$P\{-1<x<2\}=F(2)-F(-1)-P\{X=2\}=7/12$ …………8 分

（4）$Y=X^2$ 的分布律为：

Y=X^2	0	1	4
P_k	1/12	8/12	3/12

--------------------10 分

（5）$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=20/12-100/144=35/36$ …………13 分

五、| 得分	

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} A-e^{-\frac{x}{2}}, & x>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

1) 确定常数 A；
2) 求 $P\{X>\frac{1}{2}\}$，$P\{-1<X\le\frac{3}{2}\}$；
3) 求 X 的概率密度函数 $f(x)$；
4) 求 $D(X)$。（本题 12 分）

解：（1）由连续型随机变量其分布函数的定义可知

$F(\infty)=1$，所以 A=1；----------------------------2 分

(2) 由连续型随机变量其分布函数和概率密度函数的定义可知 $F^{'}(x)=f(x)$，所以

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$ ------------------6 分

（3）$P\{X>\frac{1}{2}\}=1-F(1/2)=e^{-1/4}$，$P\{-1<X\le 3/2\}=F(3/2)-F(-1)=1-e^{-3/4}$；----9 分

（4）$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=2$，

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=8$，

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=4$。---------------12 分

六、| 得分	

已知某小学学生身高 X 的分布服从参数为 $\mu=90(cm)$，$\sigma^2=6^2$ 的正态分布，假设校车车门的高度为 h，问车门的高度 h 最少应为多少，才能保证 $P\{X>h\}\le 0.01$？(已知 $\Phi(2.33)=0.9901\ge 0.99$)　(本题 10 分)

解：设 X= “学生身高”，由题设可知 $X\sim N(90,6^2)$. 则 $\frac{X-90}{6}\sim N(0,1)$。---4 分

所以

$$P\{X>h\}=1-P\{\frac{X-90}{6}\le\frac{h-90}{6}\}$$
$$=1-\Phi(\frac{h-90}{6})\le 0.01$$
$$\Rightarrow \Phi(\frac{h-90}{6})\ge 0.99$$

所以 h 最少应为 $90+6\times 2.33=104cm$ ------------------------9 分

答：车门的高度 h 最少应为 104cm。---------------10 分

七、| 得分 | |

某工厂由机器人完成紧固 2 支螺丝和焊接 2 处焊点的工序，X 表示螺丝紧固不良的个数，Y 表示焊点焊接不良的个数。据以往积累的资料知(X, Y) 的联合分布律为：

Y \ X	0	1	2
0	1/4	1/8	0
1	0	1/3	0
2	1/6	0	1/8

1）求 X 和 Y 的边缘分布律；
2）求在螺丝紧固不良的个数为 1 时，焊点焊接不良个数的条件分布律；
3）判断 X 与 Y 的独立性？(本题 10 分)

解：（1）X 和 Y 的边缘分布律为：----------------6 分

X	0	1	2
P_k	5/12	11/24	1/8

Y	0	1	2
P_k	3/8	1/3	14/24

（2）在 $X=1$ 的条件下，Y 的条件分布律为：------------8 分

Y	0	1	2
P_k	3/11	8/11	0

（3）因为 $P\{X=0,Y=0\}=1/4 \neq P\{X=0\}P\{Y=0\}=5/12\times 3/8$，
所以 X 与 Y 不是相互独立的。----------------------10 分

八、| 得分 | |

设二维随机变量(X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求（1）边缘概率密度 $f_Y(y)$，（2）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$。（10 分）

解：（1）因为，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$， ------------1 分

所以当 $y < o或y > 1$时：$f_Y(y)=0$--------------------------------3 分

当$0\le y\le 1$时：

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 21/4x^2ydx=\frac{7}{2}y^{5/2}$$ 。--------------------5 分

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{5/2}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）当$0<y<1$时

$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}3/2x^2y^{-3/2} & -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}\\ 0 & 其他\end{cases}$ 。------------10 分

九、| 得分	

已知 $X \sim \pi(4)$，$Y \sim N(2,2^2)$，设 $Z=\frac{X}{4}-\frac{Y}{2}+8$，分别在下列 2 种情况下求 E(Z) 和 D(Z)。（I）X 与 Y 相互独立；（II）X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$。（本题 10 分）

解：（I）由题设可知 E(X)=4，D(X)=4，E(Y)=2，D(Y)=4，则------------2 分

E(Z)=1/4E(X)-1/2E(Y)+8=8，

D(Z)=D(1/4X-1/2Y)=1/16D(X)+1/4D(Y)=5/4。------------------------5 分

（II）由题设可知 Cov(X,Y)= $\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$ =-2，则----------6 分

E(Z)= 1/4E(X)-1/2E(Y)+8=8，

D(Z)=D(1/4X-1/2Y)=D(1/4X)+D(-1/2Y)+2Cov(1/4X,-1/2Y)

=1/16D(X)+1/4D(Y)-1/4Cov(X,Y)=7/4。---10 分