

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Bachelorarbeit

**Einbettungen von differenzierbaren
Mannigfaltigkeiten im euklidischen
Raum**

Torge Graner

24.11.2023

Erstgutachter: Prof. Dr. math. Oliver Röndigs
Zweitgutachter: M.Sc. Xiaowen Dong

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Einleitung	2
2	Topologische Mannigfaltigkeiten	4
2.1	Topologische Mannigfaltigkeiten	4
2.2	Parakompaktheit	5
3	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	9
3.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	9
3.2	Untermannigfaltigkeiten	13
4	Teilung der Eins	16
4.1	Gute Atlanten	16
4.1.1	Erzwingen der Überdeckungseigenschaft endlicher Atlanten	17
4.1.2	Existenz eines guten Atlas	18
4.2	Konstruktion einer Zerlegung der Eins	20
4.3	Beispiel Teilung der Eins	21
4.3.1	Visualisierung	22
5	Der Immersionssatz	24
6	Der Einbettungssatz	30

Notation	Bedeutung
$U \subset V$	U ist echte Teilmenge von V
$U \subseteq V$	U ist Teilmenge von V
$U \cong V$	Homöomorphie topologischer Räume
$U \simeq V$	Homotopieäquivalenz topologischer Räume
$p \in U \subseteq V$	Eine Menge U derart, dass $p \in U$ und $U \subseteq V$ ist
p	Elemente topologischer Räume
\mathbf{x}	Elemente eines \mathbb{R}^n
B_r	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x} < r\}$

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einleitung

Ein zentraler Begriff in der Differentialgeometrie/-topologie ist der der Mannigfaltigkeit. Das wohl einfachste nicht triviale Beispiel ist dabei gerade die 1-Sphäre, also die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$. Intuitiv erscheint es plausibel, dass diese in irgendeiner Art ähnlich zu der reellen Gerade ist. Idealerweise (im Sinne der Topologie) ließe sich also Homöomorphismus $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ angeben. Da jedoch mit Hilfe einer stereographischen Projektion $\mathbb{R} \cong S^1 \setminus \{e_1\}$ folgt, kann solch ein φ nicht existieren. Dies liegt anschaulich daran, dass ein Homöomorphismus die reelle Gerade an den „Enden“ nicht „zusammenkleben“ kann. Andererseits können wir S^1 mit offenen Mengen überdecken, die homöomorph zu dem euklidischen Raumes sind. Dies wären zum Beispiel $S^1 \setminus \{p_1\} \cong \mathbb{R}$ und $S^1 \setminus \{p_2\} \cong \mathbb{R}$ mit $p_1 \neq p_2$, erneut mit zwei stereographische Projektionen. Nun begibt es sich, dass Gleichungen in der Mathematik recht häufig auftreten, und das soeben beschriebene Phänomen keinen Einzelfall darstellt. Ebenso sind auch andere Räume, die sich lokal wie der euklidische Raum verhalten, nicht selten anzutreffen. Solche Konstrukte werden auch (topologische) Mannigfaltigkeiten genannt. Insbesondere ist es oft recht leicht eine Mannigfaltigkeit abstrakt zu definieren, anstatt sie direkt als Teilmenge des \mathbb{R}^n aufzufassen und explizite Karten anzugeben, obwohl bekannterweise eine solche Einbettung existiert. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist der Torus, der sich simpel als $S^1 \times S^1$ definieren lässt. Als Produkt von Mannigfaltigkeiten ist \mathbb{T} dann erneut eine Mannigfaltigkeit, und sind $V_1 \cong U_1 \subset S^1$ und $V_2 \cong U_2 \subset S^1$ eine gewünschte Überdeckung von S^1 , so sind die $U_i \times U_j \cong V_i \times V_j$ für $1 \leq i, j \leq 2$ eine Überdeckung von \mathbb{T} . Den Torus als Teilmenge des dreidimensionalen Raumes aufzufassen ist im Vergleich aufwändiger. Ebenso ist es von Interesse Konzepte wie die Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten zu untersuchen, was zu zusätzlichen Strukturen führt. Der Kernbegriff der folgenden Arbeit ist hierbei die *differenzierbare Mannigfaltigkeit*, den wir später noch präzisieren wollen. Wie

bereits am Beispiel des Torus erwähnt, ist es unter Umständen möglich, eine Mannigfaltigkeit in den euklidischen Raum einzubetten. Dies ist besonders hilfreich, da auf reellen Mannigfaltigkeiten einige Konzepte wie zum Beispiel die Integration bereits definiert sind, was auf beliebigen Räumen nicht immer der Fall sein wird. Wir wollen im Folgenden den schwachen Whitney'schen Einbettungssatz beweisen, welcher uns garantiert, dass eine differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit stets eine Einbettung in den \mathbb{R}^{2m+1} besitzt. Wie der Name bereits impliziert, existiert ebenso ein starker Einbettungssatz, der eine Einbettung in den \mathbb{R}^{2m} garantiert. Dieser wurde 1944 von Hassler Whitney bewiesen [9] und baut auf dem schwachen Einbettungssatz auf, benötigt jedoch noch einige etwas aufwändigere Konzepte. Nun zeigen Beispiele wie die eindimensionale Mannigfaltigkeit S^1 , die sich nicht in den \mathbb{R}^1 einbetten lässt, dass sich dieses Ergebnis im Allgemeinen nicht verbessern lässt. Andererseits lässt sich jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ (die sich ebenso als m -dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen lässt) bereits trivial in den \mathbb{R}^m einbetten, in Sonderfällen ist also auch eine Einbettung in einen kleineren euklidischen Raum möglich.

Die folgende Beweiskette basiert im Kern auf [1], wobei einige Sätze zur Parakompaktheit auf [6] basieren.

Kapitel 2

Topologische Mannigfaltigkeiten

2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Ein topologischer Raum \mathcal{T} besitzt im Folgenden eine Eigenschaft **lokal**, wenn jeder Punkt $p \in \mathcal{T}$ und jede Umgebung $p \in U \subseteq \mathcal{T}$ eine weitere Umgebung $p \in V \subseteq U$ enthält, die die Eigenschaft besitzt. Eine **topologische Einbettung** ist eine Abbildung, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

Definition 2.1.1 (Zweitabzählbarer Raum).

Ein topologischer Raum, der einer höchstens abzählbaren Basis besitzt.

Definition 2.1.2 (Topologische Mannigfaltigkeit).

Ein zweitabzählbarer Hausdorff-Raum \mathcal{M} , der sich lokal topologisch in den \mathbb{R}^m einbetten lässt.

In dieser Definition sei $m \in \mathbb{N}$ konstant, sodass wir von der **Dimension** m einer Mannigfaltigkeit sprechen. Dass eine Mannigfaltigkeit die Dimension m besitzt, wird im Folgenden stets durch die Hochstellung \mathcal{M}^m impliziert. Oft wird auch von einer m -Mannigfaltigkeit gesprochen. Für jeden Punkt $p \in \mathcal{M}^m$ existiert also eine Umgebung U und eine Einbettung $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Da diese gerade ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist, erhalten wir mit $V := \varphi(U)$ eine Homöomorphie $U \cong V$. Etwas allgemeiner besitzt \mathcal{M} eine offene Überdeckung

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} U_i, \quad \text{wobei} \quad U_i \cong V_i \subseteq \mathbb{R}^m$$

vermöge Homöomorphismen $\alpha_i: V_i \rightarrow U_i$ ist. Die α_i^{-1} sind hierbei gerade die Einbettungen der Definition. Diese α_i werden auch **Karten** genannt (in Literatur meistens umgekehrt, also $\alpha_i: U_i \rightarrow V_i$), und die Menge der Tupel (V_i, α_i) ein **Atlas**, welcher im Weiteren auch mit $\{\alpha_i: V_i \rightarrow U_i\}$ bezeichnet

werde. Die Forderung der Zweitabzählbarkeit einer Mannigfaltigkeit ist nicht allgemeingültig, für unsere Zwecke jedoch vonnöten, da aus dieser erst die Parakompaktheit, und damit die Existenz einer Teilung der Eins folgt.

Beispiel 2.1.1.

Alle offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ sind trivialerweise m -Mannigfaltigkeiten, wobei die Identität $\text{id}: U \rightarrow U$ einen Atlas mit einer Karte darstellt.

Beispiel 2.1.2 (Sphäre).

Die n -dimensionale Sphäre $S^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ ist wie zuvor angesprochen ebenso eine topologische Mannigfaltigkeit, die sich nicht von einer einzigen Karte überdecken lässt. Dennoch ist mithilfe einer stereographischen Projektion zum Beispiel eine Karte gegeben, die den \mathbb{R}^n homöomorph auf $S^n \setminus \{p\}$ für ein Projektionszentrum $p \in S^n$ abbildet. Für $p = e_{n+1}$ ist diese zum Beispiel durch

$$\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{e_{n+1}\}, \mathbf{x} \mapsto e_{n+1} \cdot \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - 1}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} + \mathbf{x} \cdot \frac{2}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}$$

gegeben. Komponiert man diese Karte mit einer (bijektiven) Rotationsabbildung, die e_{n+1} auf p abbildet, erhält man eine Karte $\mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{p\}$. Zwei Karten mit ungleichen Projektionszentren bilden dann einen Atlas.

2.2 Parakompaktheit

Bevor wir uns dem zentralen Begriff dieser Arbeit zuwenden, müssen wir uns noch etwas mit topologischen Mannigfaltigkeiten beschäftigen. Insbesondere benötigen wir für eine spätere Konstruktion die sogenannte Parakompaktheit, die wir im Folgenden herleiten wollen. Dies zeigt, dass wir, obwohl wir intrinsisch keine Aussagen über \mathcal{M} treffen können, über die lokale Homöomorphie bereits einige extrinsische Aussagen erhalten. Wir benötigen hierzu einige Vorbereitungen. Ein topologischer Raum \mathcal{T} heißt hierbei wenig überraschend **lokalkompakt**, wenn er lokal kompakt ist, jede Umgebung eines Punktes $p \in \mathcal{T}$ also eine kompakte Umgebung enthält.

Satz 2.2.1.

Eine topologische Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m ist lokalkompakt.

Beweis. Sei $p \in \mathcal{M}$ und $p \in U' \subseteq \mathcal{M}$ eine offene Umgebung. Da sich \mathcal{M} lokal in den \mathbb{R}^m einbetten lässt, existiert eine Karte $\alpha: V \rightarrow U$ mit $U \subseteq U'$. Hierbei ist V offen und es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$K := \overline{B}_{\varepsilon/2}(y) \subset B_\varepsilon(y) \subseteq V.$$

Es folgt

$$\alpha(K) \subset \alpha(V) = U \subseteq U',$$

wobei $\alpha(K)$ kompakt ist, da α^{-1} stetig, K kompakt und \mathcal{M} ein Hausdorff-Raum ist. q.e.d.

Im Verlauf der weiteren Arbeit werden wir noch von einigen gesonderten Überdeckungsbegriffen Gebrauch ergreifen.

Definition 2.2.1.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Eine weitere Überdeckung $(W_j)_{j \in J}$ heißt

- *Teilüberdeckung*, wenn die W_j eine Teilfamilie der U_i sind,
- *Verfeinerung*, wenn für alle W_j ein U_i existiert sodass $W_j \subseteq U_i$,
- *lokal endlich*, wenn jedes $p \in \mathcal{T}$ in bloß endlich vielen W_j enthalten ist.

Satz 2.2.2 (von Lindelöf).

Jede offene Überdeckung in einem zweitabzählbaren, topologischen Raum \mathcal{T} besitzt eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung.

Beweis. Sei \mathfrak{U} eine offene Überdeckung von \mathcal{T} , und \mathcal{B} eine höchstens abzählbare Basis der Topologie von \mathcal{T} . Dann existiert für jedes $p \in \mathcal{T}$ eine Umgebung $p \in U_p \in \mathfrak{U}$, und da U_p Vereinigung von Mengen in \mathcal{B} ist, auch eine Umgebung $p \in B_p \in \mathcal{B}$ sodass $B_p \subseteq U_p$. Aufgrund der Abzählbarkeit von \mathcal{B} existiert eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung $(B_p)_{p \in \mathcal{T}'}$ von $(B_p)_{p \in \mathcal{T}}$, $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ sei also höchstens abzählbar. A fortiori ist $(U_q)_{q \in \mathcal{T}'}$ eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von \mathfrak{U} . q.e.d.

Einen solchen Raum, in dem jede offene Überdeckung eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung besitzt nennt man auch einen **Lindelöf-Raum**. Als unmittelbare Folgerung des vorangegangenen Satz ergibt sich noch folgendes Korollar.

Korollar 2.2.1 (Abzählbare Atlanten).

Jeder Atlas einer topologische Mannigfaltigkeit enthält einen höchstens abzählbaren Atlas.

Der Satz von Lindelöf ermöglicht nun weiter den folgenden Satz. Hierbei heiße eine Menge $A \subseteq \mathcal{T}$ **relativ kompakt**, wenn \overline{A} kompakt ist.

Lemma 2.2.1 (Relativ kompakte Überdeckung).

Jeder lokalkompakte, zweitabzählbare topologische Raum \mathcal{T} besitzt eine offene aber relativ kompakte, höchstens abzählbare Überdeckung.

Beweis. Man wähle für alle $p \in \mathcal{T}$ offene Umgebungen $p \in U_p \subseteq \mathcal{T}$, und mithilfe der Lokalkompaktheit eine kompakte Umgebung $p \in K_p \subseteq U_p$. Da dies eine Umgebung ist, enthält K_p erneut eine offene Umgebung von p , sodass p im Inneren von K_p liegt. Somit bilden die $(\mathring{K}_p)_{p \in \mathcal{T}}$ eine offene Überdeckung, die nach Satz 2.2.2 eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung enthält. q.e.d.

Bemerkung 2.2.1.

Ist der unterliegende topologische Raum *nicht* kompakt, kann natürlich keine endliche kompakte Überdeckung existieren, da dann \mathcal{T} als endliche Vereinigung der kompakten Mengen aus der Überdeckung doch kompakt wäre. Ist \mathcal{T} hingegen kompakt, ist die Familie, die \mathcal{T} als einziges Glied enthält bereits eine relativ kompakte Überdeckung.

Lemma 2.2.2 (Kompakte, echt aufsteigende Überdeckung).

Ein lokalkompakter, zweitabzählbarer topologischer Raum \mathcal{T} der nicht kompakt ist, besitzt eine kompakte Überdeckung $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ derart, dass $A_{k-1} \subset \mathring{A}_k$.

Beweis. Wir wählen gemäß Lemma 2.2.1 eine offene aber relativ kompakte Überdeckung und eine Abzählung $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Wir setzen $A_1 := \overline{U}_1$ und gehen induktiv vor. Sei die Folge bis zum $(k-1)$ -ten Glied bereits konstruiert, so setzen wir

$$A_k := \bigcup_{i=1}^{r_k} \overline{U}_i, \quad \text{wobei} \quad r_k := \min \left\{ j \in \mathbb{N} \mid A_{k-1} \subset \bigcup_{i=1}^j U_i \right\} \quad \text{sei.}$$

Dieses Minimum existiert, da A_{k-1} kompakt ist. Dann ist A_k als endliche Vereinigung kompakter Mengen erneut kompakt und es folgt

$$A_{k-1} \subset \bigcup_{i=1}^{r_k} U_i = \mathring{A}_k.$$

Da die Inklusion echt ist, gilt $r_{k-1} < r_k$, und die Folge bildet tatsächlich eine Überdeckung. q.e.d.

Schließlich können wir den Hauptsatz dieses Abschnitts formulieren.

Definition 2.2.2 (Parakompakt).

Ein topologischer Raum \mathcal{T} heißt parakompakt, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.

Satz 2.2.3.

Ein lokalkompakter, zweitabzählbarer Hausdorff-Raum \mathcal{T} ist parakompakt.

Beweis. Ist \mathcal{T} kompakt, existiert bereits zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, die auch trivialerweise lokal endlich ist. Sei \mathcal{T} nun also nicht kompakt. Wir wählen gemäß Lemma 2.2.2 eine kompakte Überdeckung $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $A_{k-1} \subset \mathring{A}_k$. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine weitere beliebige offene Überdeckung von \mathcal{T} . Dann ist $A_k \setminus \mathring{A}_{k-1}$ kompakt und kann von endlich vielen U_{i_j} überdeckt werden. Wir definieren hierzu die offenen Mengen

$$V_{k,j} := U_{i_j} \cap \left(\mathring{A}_{k+1} \setminus A_{k-2} \right) \quad \text{für } j \in J_k \subseteq I \quad \text{mit} \quad |J_k| < \infty,$$

die offenbar eine Verfeinerung der U_i darstellen.

Lokale Endlichkeit

Sei $p \in A_k \setminus A_{k-1}$. Da die A_k eine aufsteigende Folge sind, gilt für $s \geq k+2$

$$p \in A_k \subseteq A_{s-2}, \quad \text{also auch} \quad p \notin \mathring{A}_{s+1} \setminus A_{s-2}$$

und folglich $p \notin V_{s,j}$. Ist andererseits $s \leq k-2$, so gilt $A_{s+1} \subseteq A_{k-1}$ also auch

$$p \notin A_{k-1} \supseteq A_{s+1}, \quad \text{also auch} \quad p \notin \mathring{A}_{s+1} \setminus A_{s-2}$$

und erneut $p \notin V_{s,j}$. Somit kann p lediglich in den endlich vielen $V_{s,j}$ mit $k+1 \leq s \leq k-1$ liegen. Dies ergibt die lokale Endlichkeit.

Überdeckungseigenschaft

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &\supseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in J_k} V_{k,j} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\mathring{A}_{k+1} \setminus A_{k-2} \right) \cap \bigcup_{j \in J_k} U_{i_j} \\ &\supseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\mathring{A}_{k+1} \setminus A_{k-2} \right) \cap (A_k \setminus \mathring{A}_{k-1}) \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \setminus \mathring{A}_{k-1} = \mathcal{T}, \end{aligned}$$

da die letzte Vereinigung teleskopiert, und jedes $p \in \mathcal{T}$ für hinreichend großes k in einem der A_k liegt. q.e.d.

Als Korollar erhalten wir nun unser gewünschtes Ergebnis.

Korollar 2.2.2.

Jede topologische Mannigfaltigkeit ist parakompakt.

Kapitel 3

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

3.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Um effektiv analytische Methoden auf einer topologischen Mannigfaltigkeit anwenden zu können, müssen wir weitere Forderungen stellen. Da wir, wie bereits angesprochen, kaum intrinsischen Aussagen über \mathcal{M} treffen können, müssen wir den Umweg über die Karten gehen. Insbesondere sind für einen bekannten Atlas $\{\alpha_i: V_i \rightarrow U_i\}$ die Verknüpfungen

$$\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i: \alpha_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \alpha_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

aufgrund von $\alpha_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\alpha_j^{-1}(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^m$ reelle Abbildungen, die bereits mit Hilfe von analytischen Methoden gut bekannt sind. Wenig überraschend fordern wir nun, dass die Kartenwechsel \mathcal{C}^k -differenzierbar sind, und nennen einen derartigen Atlas einen \mathcal{C}^k -Atlas. Siehe auch Abbildung 3.1. Zwei \mathcal{C}^k -Atlanten von \mathcal{M} und \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 seien äquivalent, falls ihre Vereinigung erneut ein \mathcal{C}^k -Atlas ist. Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation heißen **differenzierbare k -Strukturen**. Dies ermöglicht die Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Definition 3.1.1 (Differenzierbare \mathcal{C}^k -Mannigfaltigkeit).

Eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren k -Struktur.

Anmerkungen zu differenzierbaren Strukturen

Zunächst sehen wir, dass die Angabe eines solchen Atlas bereits eine differenzierbare Struktur auf unserer Mannigfaltigkeit fixiert, und somit zeigt, dass eine differenzierbare Mannigfaltigkeit vorliegt. Weiter ist der Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit erneut unabhängig von einem externen Raum. Beispielsweise ist der Graph einer nirgends differenzierbaren aber

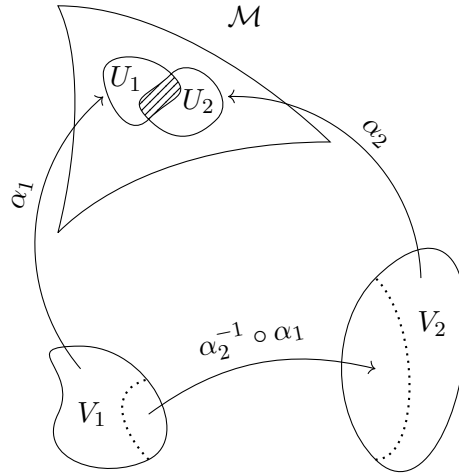


Abbildung 3.1: Prinzip der Kartenwechsel

stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Man betrachte hierzu $\alpha: x \mapsto (x, f(x))^T$ und $\alpha^{-1}: (x, y) \mapsto x$. Diese Abbildung ist, aufgefasst im \mathbb{R}^2 nicht differenzierbar, da wir jedoch nur eine Karte haben existieren keine Kartenwechsel, trivialerweise ist unsere Definition erfüllt. Dies mag unintuitiv erscheinen, liegt jedoch daran, dass unsere Intuition der Differenzierbarkeit in diesem Fall auf dem umliegenden \mathbb{R}^2 basiert, über den wir keine Aussage tätigen wollen. Diese Intuition gleicht dem Begriff der Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Trotz diesem Beispiel existieren dennoch topologische Mannigfaltigkeiten, die keine differenzierbare Struktur zulassen [3], sowie andere Mannigfaltigkeiten, die unterschiedliche differenzierbare Strukturen ermöglichen wie die exotische 7-Sphäre [5]. Es lässt sich außerdem zeigen, dass Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \leq 3$ lediglich eine solche differenzierbare Struktur ermöglichen. Für $n > 4$ gilt weiter, dass für jede n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit lediglich endlich viele differenzierbare Strukturen existieren, für $n = 4$ ist diese Frage nicht schlussendlich geklärt.

Im Folgenden werden wir uns auf C^1 -Mannigfaltigkeiten beschränken. Da sich diese bereits in den euklidischen Raum einbetten lassen, ist die Forderung höherer Differenzierbarkeit nicht vonnöten.

Beispiel 3.1.1.

Wir wollen den \mathbb{R}^n als Mannigfaltigkeit auffassen. Wir bemerken zunächst, dass $\{\text{id}\}$ bereits trivialerweise einen Atlas darstellt und somit eine differenzierbare Struktur induziert. Für jedes $n \neq 4$ existiert tatsächlich auch lediglich eine differenzierbare Struktur (ein Fakt der keineswegs trivial ist, siehe [7]), für $n = 4$ jedoch überabzählbar viele (siehe [8]). Wenn im Folgenden der \mathbb{R}^n als Mannigfaltigkeit aufgefasst wird, sei dieser im Fall $n = 4$

stets mit der Struktur versehen, die von der Identität induziert wird. Mit dieser Struktur ist jede Karte ein Diffeomorphismus, da ja

$$\text{id}^{-1} \circ \alpha \quad \text{sowie} \quad \alpha^{-1} \circ \text{id}$$

jeweils Diffeomorphismen sind.

Wir können natürlich auch das Konzept der differenzierbaren Funktionen aus dem euklidischen Raum in naheliegender Weise auf Mannigfaltigkeiten übertragen.

Definition 3.1.2 (Differenzierbare Abbildung).

Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so heißt eine Abbildung $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ differenzierbar, falls

$$\beta^{-1} \circ F \circ \alpha$$

für Karten α (von \mathcal{M}) und β (von \mathcal{N}) es ist.

Der **Rang** in einem Punkt $p \in \mathcal{M}$ ist dabei der Rang der Jacobimatrix im Punkt $\alpha^{-1}(p)$. Eine differenzierbare Abbildung heißt **regulär**, falls sie in jedem Punkt vollen Rang besitzt, sonst **singulär**. Dass die Differenzierbarkeit unabhängig von den gewählten Karten ist folgt direkt aus der Diffeomorphisms-eigenschaft der Kartenwechsel. Ist nämlich $\beta^{-1} \circ F \circ \alpha$ differenzierbar, so ist es auch

$$(\beta_2^{-1} \circ \beta_1) \circ (\beta_1^{-1} \circ F \circ \alpha) = \beta_2^{-1} \circ F \circ \alpha,$$

beziehungsweise

$$(\beta^{-1} \circ F \circ \alpha_1) \circ (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2) = \beta^{-1} \circ F \circ \alpha_2,$$

für weitere Karten. Die Unabhängigkeit der Regularität folgt, da

$$D_x (\beta^{-1} \circ F \circ \alpha_1) \quad \text{und} \quad D_x (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2)$$

jeweils injektiv sind, ist es mit $y := (\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1)(x)$, also auch

$$\begin{aligned} D_x (\beta^{-1} \circ F \circ \alpha_2) &= D_x ((\beta^{-1} \circ F \circ \alpha_2) \circ (\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1)) \\ &= D_y (\beta_1^{-1} \circ F \circ \alpha_2) \circ D_x (\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1) \end{aligned}$$

als Verknüpfung zweier bijektiver Funktionen. Analog lässt sich β austauschen. Ein **regulärer Wert** ist ein Punkt $q \in \mathcal{N}$ derart, dass F in allen $p \in F^{-1}(\{q\})$ regulär ist.

Tangentialraum

Eine grundlegende und in der Differentialgeometrie/-topologie sehr wichtige Konstruktion ist durch den Tangentialvektorraum gegeben. Diese ermöglicht es, die Differenzierbarkeit einer Funktion weiter zu verallgemeinern, ist allerdings für den Beweis des Einbettungssatzes nicht zwingend nötig. Es gibt mehrere Arten den Tangentialraum in einem Punkt $p \in \mathcal{M}$ zu definieren, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Definition 3.1.3 (Immersion).

Eine differenzierbare Abbildung $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, die in jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ regulär ist.

Definition 3.1.4 (Einbettung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit).

Eine topologische Einbettung, die eine Immersion ist.

Eine hilfreiche Eigenschaft einer differenzierbaren Einbettung, die in unserem Fall nachgewiesen werden wird, ist die Folgende. Teile der Beweisidee entstammen hierbei [4] Satz A.57.

Satz 3.1.1.

Eine differenzierbare Abbildung $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist genau dann eine Einbettung, wenn sie eine eigentliche injektive Immersion ist.

Beweis. Dass eine solche Einbettung eine eigentliche, injektive Immersion ist, ist trivial. Sei also nun F eine eigentliche, injektive Immersion. Dann ist F stetig und wegen der Injektivität eine Bijektion auf ihr Bild. Lediglich die Stetigkeit der Umkehrabbildung $(F(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M})$ verbleibt zu zeigen. Dies ist genau dann der Fall, wenn F abgeschlossen ist. Sei also $A \subseteq \mathcal{M}$ abgeschlossen, $y \in \mathcal{N} \setminus F(A)$ und V eine offene aber relativ kompakte Umgebung von y . Da F eigentlich ist, ist $E := F^{-1}(\overline{V}) \cap A$ kompakt. Aufgrund der Stetigkeit von F ist dann auch weiter das Bild von E also $F(E) = \overline{V} \cap F(A)$ kompakt, und als Teilmenge des Hausdorff-Raumes \mathcal{N} auch abgeschlossen. Also ist $V \setminus F(E)$ eine offene Umgebung von y , die wegen

$$F(A) \cap (V \setminus F(E)) = F(A) \cap V \setminus (\overline{V} \cap F(A)) = F(A) \cap V \setminus F(A) = \emptyset$$

disjunkt von $F(A)$ ist. Folglich ist $\mathcal{N} \setminus F(A)$ offen, und $F(A)$ abgeschlossen.
q.e.d.

Satz 3.1.2.

Eine Immersion $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist lokal bijektiv.

Beweis. Aufgrund der Regularität ist $\beta^{-1} \circ F \circ \alpha$ gemäß dem Satz über die implizite Funktion lokal diffeomorph. Dann muss F lokal injektiv, also auch lokal bijektiv sein.
q.e.d.

Ein für den späteren Verlauf wichtiger Satz ist der Satz von Sard. Dieser garantiert, dass die Menge der singulären Werte einer differenzierbaren Funktion $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ „dünn gesät“ sind.

Satz 3.1.3 (Sard).

Das Bild der Menge der singulären Werte C einer differenzierbaren Funktion $F: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ unter F ist eine Lebesgue-Nullmenge.

Beispielsweise impliziert dies, dass wir stets reguläre Werte finden können, die beliebig nahe am Ursprung liegen. Für einen Beweis, siehe zum Beispiel [1] §6.

3.2 Untermannigfaltigkeiten

Definition 3.2.1 (\mathcal{C}^k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n).

Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass für jeden Punkt $p \in \mathcal{M}$ eine Umgebung $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ mit regulärem Wert 0 existiert, sodass $F^{-1}(\{0\}) = \mathcal{M} \cap U$.

Im Gegensatz zu der vorher genannten differenzierbaren Mannigfaltigkeit, wird bei der Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n die differenzierbare Struktur des umliegenden Raumes vererbt. Demnach ist der Graph der Betragsfunktion zwar eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, ist jedoch auch die Nullstellenmenge der Funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - |\mathbf{x}|$, die bei $\mathbf{x} = 0$ nicht differenzierbar ist. Wir betrachten noch den allgemeineren Begriff der Untermannigfaltigkeit.

Definition 3.2.2 (Untermannigfaltigkeit).

Eine Teilmenge \mathcal{M}^m einer topologischen Mannigfaltigkeit \mathcal{N}^n sodass für alle $p \in \mathcal{M}$ eine Karte $\alpha: V \rightarrow U$ mit $p \in U$ existiert, sodass

$$\mathcal{M} \cap U = \alpha((\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}) \cap V) .$$

Diese beiden Begriffe implizieren bereits einen Zusammenhang, dass dies tatsächlich der Fall ist, zeigt der folgende Satz. Wie bereits zuvor angemerkt, ist hierbei der \mathbb{R}^n stets mit der differenzierbaren Standardstruktur versehen.

Satz 3.2.1.

Eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , wenn sie eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist.

Beweis. Hinrichtung

Sei \mathcal{M} eine Untermannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^n . Dann existiert ein Diffeomorphismus $\alpha: V \rightarrow U$, sodass

$$\alpha((\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}) \cap V) = \mathcal{M} \cap U$$

gilt. Für $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ist nun $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{M}$ genau dann, wenn $\mathbf{y} = 0$ ist. Wir betrachten die Abbildung

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}, \mathbf{z} \mapsto (\pi_{m+1}^n \circ \alpha^{-1})(\mathbf{z})$$

wobei π_{m+1}^n die Projektion auf die letzten $n - m$ Komponenten sei. Dann gilt

$$\begin{aligned} & F(\mathbf{z}) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\pi_{m+1}^n \circ \alpha^{-1})(\mathbf{z}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha^{-1}(\mathbf{z}) \in (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}) \cap V \\ \Leftrightarrow & \mathbf{z} \in \alpha((\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}) \cap V) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{z} \in \mathcal{M} \cap U. \end{aligned}$$

Da α ein Diffeomorphismus ist, ist F differenzierbar und im Ursprung regulär.

Rückrichtung

Sei \mathcal{M} eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und $p \in \mathcal{M}$. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion $F: W \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ mit $\mathcal{M} \cap W = F^{-1}(\{0\})$, es gelte also $F(p) = 0$. Wir schreiben $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Dann existieren Umgebungen $p_1 \in V_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ und $p_2 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, sodass $V_1 \times V_2 \subseteq W$. Gemäß dem Satz von der impliziten Funktion gibt es dann Teilumgebungen $p_1 \in V \subseteq V_1$, $p_2 \in U \subseteq U_2$ und eine differenzierbare Funktion $h: V \rightarrow U$ mit $F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in V$. Schließlich bildet

$$\alpha: V \rightarrow \alpha(V), p \mapsto \begin{pmatrix} p \\ h(p) \end{pmatrix}$$

eine gewünschte Karte.

q.e.d.

Des Weiteren ist für eine Einbettung einer Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^n noch interessant, dass eine Mannigfaltigkeit, die eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ist, auch bereits eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist. Die Beweisidee entstammt hierbei [2] §9 Satz 2.

Satz 3.2.2.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Beweis. Sei $\alpha: V \rightarrow U$ eine Karte von \mathcal{M} mit $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$. Für festes \mathbf{x} ist die Jacobi-Matrix von α eine invertierbare $(m \times m)$ -Matrix, nach einer Umordnung der Koordinaten sei also

$$\tilde{\alpha}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}, \mathbf{x} \mapsto (\alpha_1(\mathbf{x}), \dots, \alpha_m(\mathbf{x}))$$

ein Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\alpha \circ \tilde{\alpha}^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_m, f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{n-m}(\mathbf{x})),$$

und mit $f = (f_1, \dots, f_{n-m})$ besitzt

$$F: \tilde{U} \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{y} - f(\mathbf{x})$$

die gewünschten Eigenschaften.

q.e.d.

Korollar 3.2.1.

Eine Einbettung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} in den \mathbb{R}^n ist eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Beweis. Sei Φ eine derartige Einbettung und $\{\alpha_i: V_i \rightarrow U_i\}$ ein Atlas von \mathcal{M} . Dann bildet $\{\Phi \circ \alpha_i: V_i \rightarrow \Phi(U_i)\}$ einen Atlas von $\Phi(\mathcal{M}) \subseteq \mathbb{R}^n$, die Aussage folgt aus Satz 3.2.2.

q.e.d.

Kapitel 4

Teilung der Eins

Der Begriff einer Mannigfaltigkeit basiert per Definition auf lokalen Eigenschaften. Da dennoch sehr häufig globale Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten diskutiert werden wollen, wird eine Methode benötigt, aus dem Lokalen ins Globale überzugehen. Eine übliche Möglichkeit dies zu tun, ist die Teilung der Eins, mit welchem gewisse lokale Eigenschaften aufrecht erhalten werden, und so immer weiter zu einem globalen Ergebnis ergänzt werden können. Dies könnte bereits aus der Integrationstheorie auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n bekannt sein, in dem das gleiche Konzept genutzt wurde, um das Integral auf Mannigfaltigkeiten zu definieren.

Definition 4.0.1 (Teilung der Eins).

Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Eine Familie von Funktionen $\vartheta_i: \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$, $i \in I$ derart, dass

1. $\vartheta_i|_{\mathcal{M} \setminus U_i} = 0$
2. $\sum_{i \in I} \vartheta_i = 1$

Ähnlich, wie in der Integrationstheorie verlangt wird, dass alle dieser Funktionen integrierbar sind, fordern wir nun, dass alle ϑ_i differenzierbar sind. Zusätzlich werden wir verlangen dass alle Träger $\text{supp}(\vartheta_i)$ kompakt sind. Wir wollen nun zu einer gegebenen Mannigfaltigkeit eine solche Zerlegung der Eins konstruieren, hierzu benötigen wir den Begriff des guten Atlas.

4.1 Gute Atlanten

Definition 4.1.1 (Untergeordneter guter Atlas).

Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von \mathcal{M} . Ein Atlas $\{\alpha_j: B_1 \rightarrow V_j, j \in J\}$ heißt ein \mathfrak{U} untergeordneter guter Atlas, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $(V_j)_{j \in J}$ ist eine lokal endliche Verfeinerung von \mathfrak{U}
2. $(\alpha_j(B_{1/3}))_{j \in J}$ ist eine offene Überdeckung von \mathcal{M} .

Hierbei werden zu allen V_j differenzierbare Funktionen $\delta_j: V_j \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\delta_i|_{\mathcal{M} \setminus V_i} = 0 \quad \text{und} \quad \delta_i|_{\alpha_i(B_{1/3})} \neq 0$$

konstruiert. Wegen Eigenschaft 1) ist ihre Summe für alle $p \in \mathcal{M}$ dann endlich, und wegen 2) ungleich null. Die Funktionen

$$\vartheta_k := \frac{\delta_k}{\sum_{i \in I} \delta_i}$$

bilden eine gewünschte Partition der Eins.

4.1.1 Erzwingen der Überdeckungseigenschaft endlicher Atlanten

Obgleich folgendes für den weiteren Beweis des Einbettungssatzes nicht von weiterer Relevanz sein wird, sei dennoch hier eine Möglichkeit aufgezeigt in einem Anwendungsfall (wie unter anderem der Erstellung eines Beispiels zu einer Zerlegung Eins) eine derartige Zerlegung der Eins zu konstruieren. Sei hierzu \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\{\alpha_i: B_1 \rightarrow \mathcal{M}\}$. Wir konstruieren Diffeomorphismen $\mathcal{F}_i: B_1 \rightarrow B_1$, sodass $\{(\alpha_i \circ \mathcal{F}_i): B_1 \rightarrow \mathcal{M}\}$ die Eigenschaft 2 erfüllt. Hierfür sei für $p \in \mathbb{R}_+$

$$f_p:]-\infty, 1[\rightarrow]-\infty, 1[, \quad x \mapsto 1 - (1 - x)^p.$$

Diese Funktion ist bijektiv, glatt und für $x \in [0, 1]$ gilt

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 1 - (1 - x)^p = 1 - 0 = 1. \quad (4.1)$$

Weiter lässt sich ihre Umkehrfunktion leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} f_p(x) &= 1 - (1 - x)^p = y \\ \Leftrightarrow 1 - y &= (1 - x)^p \\ \Leftrightarrow (1 - y)^{\frac{1}{p}} &= 1 - x \\ \Leftrightarrow x &= 1 - (1 - y)^{\frac{1}{p}} = f_{1/p}(y). \end{aligned}$$

Demnach ist f_p ein \mathcal{C}^∞ -Diffeomorphismus. Es sei angemerkt, dass dies nur gilt, da die eins nicht im Definitionsbereich enthalten ist. Aufgrund von der Eigenschaft (4.1) können diese Funktionen nun genutzt werden um eine glatte Funktion $B_1 \rightarrow B_1$ zu definieren, die Kreise mit geringem Radius (z.B.

$r = 1/3$) auf Kreise mit beliebig großen Radius $0 < r < 1$ abbildet. Explizit ergibt das die Funktion

$$F_p: B_1 \rightarrow B_1, \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \neq 0 \\ \frac{f_p(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es gilt wieder $F_p^{-1} = F_{1/p}$, was mithilfe von

$$\begin{aligned} F_{1/p}(F_p(\mathbf{x})) &= \frac{f_{1/p}\left(\left|\frac{f_p(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x}\right|\right)}{\left|\frac{f_p(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x}\right|} \frac{f_p(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} \\ &= \frac{f_{1/p}(f_p(|\mathbf{x}|))}{|f_p(|\mathbf{x}|)|} \frac{f_p(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} = \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

aus Symmetriegründen folgt. Hierbei gilt $|f_p(|\mathbf{x}|)| = f_p(|\mathbf{x}|)$, da f_p das Einheitsintervall bijektiv auf sich selbst abbildet. Dies ist gerade die Funktion, die einen Punkt mit Radius r auf ein skalares Vielfaches von sich selbst mit Radius $f_p(r)$ abbildet. Da f_p diffeomorph ist, ist es damit auch F_p . Unter F_p gilt zum Beispiel für $r \in]0, 1[$

$$F_p(B_r) = B_{f_p(r)} \uparrow_{p=1}^{\infty} B_1.$$

Konstruktion eines neuen Atlas

Sei bereits ein beliebiger *endlicher* \mathcal{C}^k -Atlas $\{\beta_i: B_1 \rightarrow U_i\}$ bekannt. Wegen der Endlichkeit sind beliebige Schnitte der U_i erneut offen (eine Schlussfolgerung der *möglicherweise* auch lokale Endlichkeit genügen würde) sodass stets p_i derart existieren, dass die $\beta_i \circ F_{p_i}$ die Bedingung 2 erfüllen. Definieren wir $\mathcal{F}_i := F_{p_i}$, erhalten wir die gewünschten Karten. Da nun jede Kette von Abbildungen nur so differenzierbar ist wie ihr schwächstes Glied, bilden die $\alpha_i := \beta_i \circ \mathcal{F}_i$ erneut einen \mathcal{C}^k -Atlas. Die Auswirkung der F_p auf die Karten kann in 4.1 erkannt werden.

4.1.2 Existenz eines guten Atlas

Wir wenden uns nun der Existenz eines guten Atlas zu. Der Beweis beruht grundlegend auf der echt aufsteigenden kompakten Überdeckung aus Lemma 2.2.1. Folgende Beweisidee ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Wir wenden uns nun der Existenz eines guten Atlas zu. Der Beweis beruht grundlegend auf der echt aufsteigenden kompakten Überdeckung aus Lemma 2.2.1, und verläuft ähnlich zu dem der Parakompaktheit. Folgende Beweisidee ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

Satz 4.1.1 (Existenz eines guten Atlas).

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{M} besitzt zu jeder beliebigen offenen Überdeckung \mathfrak{U} einen untergeordneten guten Atlas.

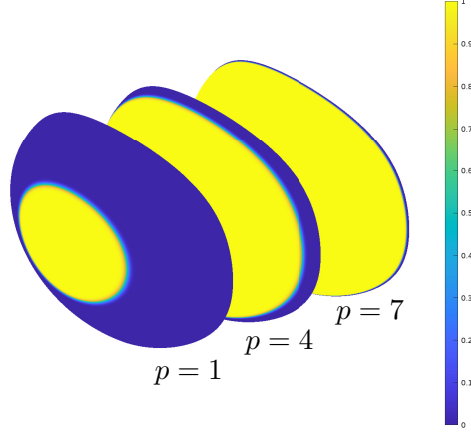


Abbildung 4.1: Auswirkung des p der F_p auf die resultierenden Karten der Konstruktion 4.1.1.

Beweis. Da \mathcal{M} lokalkompakt und zweitabzählbar ist, existiert nach Lemma 2.2.2 eine echt aufsteigende kompakte Überdeckung A_k . Seien

$$S_k^1 := A_k \setminus \mathring{A}_{k-1} \quad \text{und} \quad S_k^2 := A_{k+1} \setminus \mathring{A}_{k-2}$$

erneut kompakt. Weiter gibt es für jedes $\mathbf{y} \in S_k^1$ eine Karte $\alpha_{i_{\mathbf{y}}} : V_{i_{\mathbf{y}}} \rightarrow U_{i_{\mathbf{y}}}$ mit $U_{i_{\mathbf{y}}} \subseteq S_k^2$, sei also $\mathbf{x} = \alpha_{i_{\mathbf{y}}}^{-1}(\mathbf{y})$. Da $\alpha_{i_{\mathbf{y}}}$ stetig ist, ist das Urbild von $U_{i_{\mathbf{y}}} \cap \mathring{S}_k^2$ unter $\alpha_{i_{\mathbf{y}}}$ offen (und nicht leer), und wir können einen Radius $\varepsilon_{\mathbf{y}}$ finden, sodass

$$\Delta_{\mathbf{y}} := B_{\frac{\varepsilon_{\mathbf{y}}}{3}}(\mathbf{x}) \subset B_{\varepsilon_{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}) \subseteq \alpha_{i_{\mathbf{y}}}^{-1}(U_{i_{\mathbf{y}}} \cap \mathring{S}_k^2). \quad (4.2)$$

Die $(\alpha_{i_{\mathbf{y}}}(\Delta_{\mathbf{y}}))_{\mathbf{y} \in S_k^1}$ bilden nun offenbar eine offene Überdeckung von S_k^1 . Da S_k^1 kompakt ist, besitzt diese eine endliche Teilüberdeckung, es existiert also eine endliche Teilmenge $S'_k \subset S_k^1$, sodass

$$S_k^1 \subset \bigcup_{\mathbf{z} \in S'_k} \alpha_{i_{\mathbf{z}}}(\Delta_{\mathbf{z}}) \stackrel{(4.2)}{\subset} \mathring{S}_k^2 \cap \bigcup_{\mathbf{z} \in S'_k} U_{i_{\mathbf{z}}} \subseteq \mathring{S}_k^2 \quad (4.3)$$

gilt. Wir definieren

$$\beta_{\mathbf{y}} : B_1 \rightarrow \alpha_{i_{\mathbf{y}}}(B_{\varepsilon_{\mathbf{y}}}), \quad \mathbf{z} \mapsto \alpha_{i_{\mathbf{y}}}(\varepsilon_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{y} \in S'_k,$$

und erhalten letztenendes mit

$$\{\beta_{\mathbf{y}} : B_1 \rightarrow \alpha_{i_{\mathbf{y}}}(B_{\varepsilon_{\mathbf{y}}}) \mid \forall \mathbf{y} \in S'_k : \forall k \in \mathbb{N}\}$$

den gesuchten abzählbaren Atlas. Die lokale Endlichkeit folgt dabei aus 4.3. q.e.d.

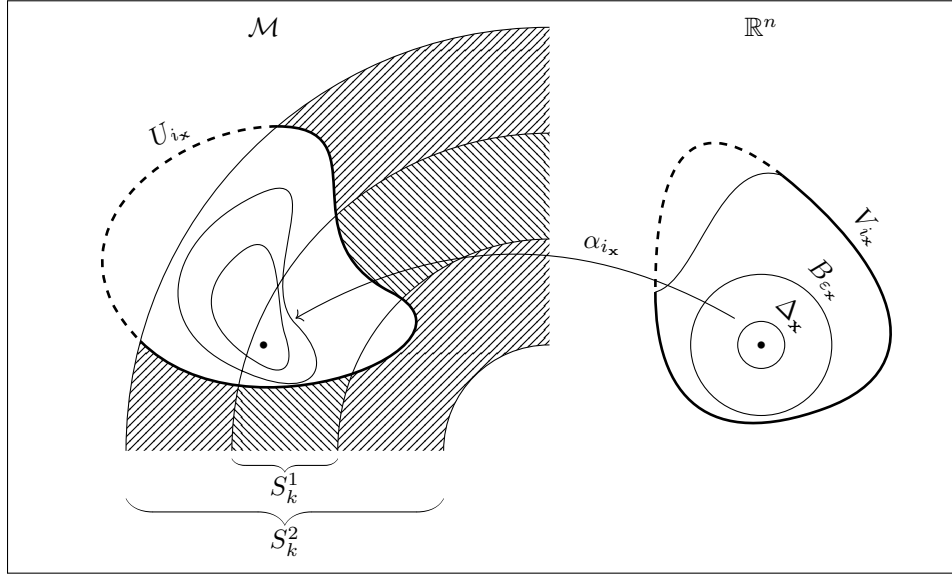


Abbildung 4.2: Konstruktion eines guten Atlas

4.2 Konstruktion einer Zerlegung der Eins

Ein gegebener guter Atlas ermöglicht uns nun, eine Zerlegung der Eins zu konstruieren. Sei hierzu zunächst

$$\lambda: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man sieht, dass die Ableitung dieser Funktion

$$\frac{d^n \lambda}{d^n t} = r_n(t) \lambda(t)$$

mit einer rationalen Funktion r_n ist. Wir zeigen mittels Induktion, dass λ glatt ist. Sowohl der Induktionsanfang als auch der Induktionsschritt folgen aus

$$\lambda^{(n)}(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\lambda^{(n-1)}(h) - \lambda^{(n-1)}(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{r_{n-1}(h) e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = 0.$$

Der Träger von λ ist $\text{supp}(\lambda) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir setzen nun

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], t \mapsto \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \lambda(1-t)},$$

sodass wir eine differenzierbare Funktion erhalten, die für $t \leq 0$ verschwindet und für $t \geq 1$ gleich eins ist. Sei weiter

$$\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1], \mathbf{x} \mapsto 1 - \varphi(3 \|\mathbf{x}\| - 1),$$

eine Funktion mit Träger $\overline{B_{2/3}}$. Wir definieren für $i \in \Lambda$ die Funktionen

$$\omega_i: \mathcal{M} \rightarrow [0, 1], \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} (\psi \circ \alpha_i^{-1})(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \alpha_i(B_{2/3}(0)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

die aufgrund der lokalen Endlichkeit summierbar sind - für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ sind lediglich endlich viele $\omega_i(\mathbf{x}) \neq 0$. Da die $\alpha_i(B_{2/3}(0))$ immer noch eine Überdeckung von \mathcal{M} bilden, ist die Summe außerdem überall ungleich null. Wir erhalten final die nun wohldefinierten

$$\vartheta_i := \frac{\omega_i}{\sum_{j \in \Lambda} \omega_j},$$

die wegen

$$\sum_{i \in \Lambda} \vartheta_i = \frac{\sum_{i \in \Lambda} \omega_i}{\sum_{j \in \Lambda} \omega_j} = 1$$

eine Teilung der Eins darstellen. Da der Nenner stets mindestens so groß wie der Zähler ist, ist zudem $0 < \vartheta_i \leq 1$.

4.3 Beispiel Teilung der Eins

Bezeichne im Folgenden stets

$$E_{a,b} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2} \leq 1 \right\}$$

die Ellipse mit Radien a und b . Wir betrachten die Nullstellenmenge des Gleichungssystems

$$\cos(x) + \cos(y) - z^2 = 1 \tag{4.4}$$

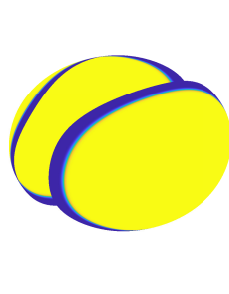
im \mathbb{R}^3 . Sei \mathcal{M} die Zusammenhangskomponente nahe des Ursprungs. Lösen wir jeweils in eine Richtung auf, erhalten wir naiv sechs Karten. Mit den Bezeichnungen $U = \{0 < \cos(x) - y^2 \leq 1\}$ und $V = \{1 < \cos(x) + \cos(y) \leq 2\}$ ergeben sich explizit

$$\gamma_{1,2}: U \rightarrow \mathcal{M}, \mathbf{x} \mapsto (\pm \arccos(\cos(x) - y^2 - 1), x, y)^T$$

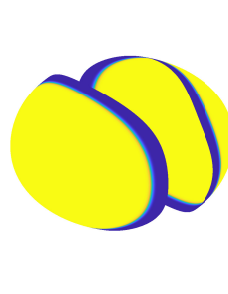
$$\gamma_{3,4}: U \rightarrow \mathcal{M}, \mathbf{x} \mapsto (x, \pm \arccos(\cos(x) - y^2 - 1), y)^T$$

$$\gamma_{5,6}: V \rightarrow \mathcal{M}, \mathbf{x} \mapsto (x, y, \pm \sqrt{\cos(x) + \cos(y) - 1})^T.$$

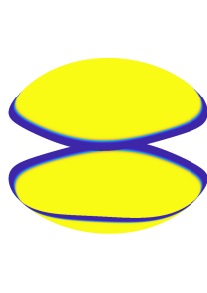
Obleich es sicher scheint, dass B_1 , U und V zueinander diffeomorph sind, ist es nicht einfach explizite Diffeomorphismen anzugeben. Anstelle dessen



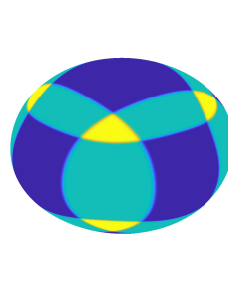
(a) Die Karten α_1 und α_2 .



(b) Die Karten α_3 und α_4 .



(c) Die Karten α_5 und α_6 .



(d) Die Summe der ϑ_i auf M .

Abbildung 4.3: Die sechs Karten von \mathcal{M} für $p = 4$. Die Farbe beschreibt die Magnitüde der zugehörigen ϑ_i .

betrachten wir die hinreichend großen einfacheren Teilmengen $E_{3/2,9/10} \subset U$ und $B_{4/3} \subset V$ und die induzierten Karten

$$\beta_i := \begin{cases} \gamma_i \mid_{E_{3/2,9/10}} & 1 \leq i \leq 4 \\ \gamma_i \mid_{B_{4/3}} & \text{sonst} \end{cases},$$

die immer noch einen Atlas von \mathcal{M} bilden (ohne Beweis). Da der Atlas endlich ist, können wir Wie in Sektion 4.1.1 beschrieben erhalten wir aus den β_i nun einen Atlas $\{\alpha_i \rightarrow M\}$, der aufgrund der Endlichkeit des vorherigen Atlas auch gut ist. Dieser, und die von ihm implizierte Teilfunktionen der Zerlegung der eins sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

4.3.1 Visualisierung

Um eine gut konditionierte Parametrisierung von \mathcal{M} (Abbildung 4.3d) zu erhalten wurde eine Einheitssphäre parametrisiert (Kugelkoordinaten) und für jeden Punkt $(x, y, z)^T \in S^2$ das Newton-Verfahren auf die Funktion

$$f(r) = \cos(rx) + \cos(ry) - (rz)^2 - 1$$

angewandt, also einige Iterationen

$$r_{n+1} = r_n + \frac{\cos(r_n x) + \cos(r_n y) - (r_n z)^2 - 1}{x \sin(r_n x) + y \sin(r_n y) + 2z^2 r_n}$$

mit $r_0 = \frac{\pi}{4}$ berechnet. Da dieses gegen eine Nullstelle von f konvergiert, konvergiert $r_n \cdot (x, y, z)^T$ gegen einen Punkt in $\{\cos(x) + \cos(y) - z^2 = 1\}$, also auch wahrscheinlich gegen einen Punkt in M . Auch wenn das Ergebnis aus der Perspektive wie eine Kugel aussieht, ist dies nicht der Fall. Die Visualisierung erfolgte in Matlab R2023a.

Kapitel 5

Der Immersionssatz

Im folgenden Abschnitt wollen wir den Immersionssatz beweisen. Dieser garantiert, dass eine differenzierbare Funktion $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ für hinreichend großes n beliebig gut durch eine Immersion approximieren lässt. Dieses Ergebnis wird später noch weiter verfeinert werden.

Sei $\|\cdot\|_1$ die Summennorm auf dem \mathbb{R}^n , $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, und $H \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$. Im Folgenden wollen wir den Raum $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$ mit einer Topologie versehen. Sei hierzu

$$\|H\|_C := \max_{p \in C} (\|H(p)\|_1)$$

die Supremumsnorm auf der kompakten Menge $C \subset U$, und weiter

$$\|H\| := \|H\|_C + \sum_{j=1}^m \left\| \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\|_C.$$

Dies definiert keine Norm auf $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$, da H lediglich auf C betrachtet wird, nicht jedoch $U \setminus C$. Demnach folgt aus $\|H\| = 0$ nicht dringend $H = 0$. Dennoch induziert diese Seminorm eine Topologie, welche wir im Weiteren betrachten wollen. Es sei angemerkt, dass bei der Definition dieser Seminorm lediglich die erste Ableitung in das Ergebnis einfließt. Zwar ist es möglich dies zu verallgemeinern indem alle Supremumsnormen partieller Ableitungen vom Grad $\leq k$ aufsummiert werden, jedoch ist dies für den schwachen Einbettungssatz nicht vonnöten - Lediglich die erste Ableitung muss sich einigermaßen friedlich verhalten.

Satz 5.0.1 (Die Menge der regulären Funktionen ist offen).

Sei $m \leq n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $K \subset U$ kompakt, so ist die Menge der in K regulären Funktionen offen in $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Unter der zuvor definierten Seminorm ist die Abbildung

$$\Phi: \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, F \mapsto J_{\mathbf{x}} F$$

stetig. Sei hierzu der $\mathbb{R}^{n \times m}$ mit der Spaltensummennorm versehen. Dies mag beliebig wirken, ist jedoch dadurch gerechtfertigt, dass alle Normen auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum äquivalent sind. Sei weiter $0 < \delta \leq \varepsilon$ und $\|F - G\| < \delta$. Es folgt

$$\begin{aligned} \|J_{\mathbf{x}}(F - G)\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq m} \left\| \frac{\partial(F - G)}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right\|_1 \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq m} \left\| \frac{\partial(F - G)}{\partial x_j} \right\|_K \\ &< \|F - G\| < \delta < \varepsilon \end{aligned}$$

und aus dem ε - δ -Kriterium die Stetigkeit der Abbildung $H \mapsto J_{\mathbf{x}}H$. Dieses gilt weiterhin, da die Topologie mittels der Seminorm definiert wurde. Wir betrachten weiter die stetige Abbildung

$$\Psi: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \sum_{\substack{B \text{ ist } m \times m \\ \text{Untermatrix} \\ \text{von } A}} |\det(B)|.$$

Wenn A den Rang m besitzt, so existiert bekanntermaßen eine invertierbare $m \times m$ Untermatrix von A . Somit gilt $\Psi(A) \neq 0$. Aufgrund der Stetigkeit ist nun

$$\Psi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{B \in \mathbb{R}^{n \times m} : \text{rang}(B) = m\} =: B'$$

offen, sodass auch

$$\Phi^{-1}(B') = \left\{ F \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n) : \text{rang}(F) = m \right\}$$

offen ist.

q.e.d.

Der Beweis des Faktes, dass die Menge der Matrizen mit vollem Rang offen ist, wurde [?] entnommen.

Satz 5.0.2.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt, so ist die Menge der in K regulären Funktionen dicht in $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$, wenn $n \geq 2m$.

Beweis. Sei $F \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$. Wir konstruieren für $1 \leq k \leq m$ Funktionen $G_k: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass die ersten k Ableitungsvektoren $\partial G_k / \partial x_j$ voneinander linear unabhängig sind. Per Konstruktion ist dann $G := G_m$ regulär. Sei $G_0 := F$, G_{k-1} bereits konstruiert und

$$c := \max_{\substack{\mathbf{x} \in C \\ 1 \leq j \leq m}} |x_j|. \quad (5.1)$$

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\Phi_k: \mathbb{R}^{k-1} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, \left(\begin{matrix} \lambda \\ \mathbf{x} \end{matrix} \right) \mapsto \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \frac{\partial G_{k-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}),$$

dann finden wir mithilfe des Satzes von Sard aufgrund von

$$\dim(\mathbb{R}^k \times U) = k + m - 1 < 2m \leq n$$

ein $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Bild}(\Phi_k)$, sodass

$$\|\mathbf{a}_k\| < \frac{\varepsilon}{m(c+1)}. \quad (5.2)$$

Wir setzen

$$G_k := G_{k-1} + x_k \cdot \mathbf{a}_k,$$

dann sind

$$\frac{\partial G_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial G_{k-1}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{für } 1 \leq i < k \quad \text{und} \quad \frac{\partial G_k}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}_k.$$

Die ersten k dieser Vektoren sind nun für alle $\mathbf{x} \in U$ linear unabhängig, da sonst

$$\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \frac{\partial G_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial G_k}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \frac{\partial G_{k-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_k$$

ein Widerspruch gegen die Definition von \mathbf{a}_k wäre. Letztlich sei $G := G_m$, so ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|G - F\| &= \|G_m - G_0\| = \left\| \sum_{k=1}^m G_k - G_{k-1} \right\| \\
&\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^m \|G_k - G_{k-1}\| \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^m \|x_k \cdot \mathbf{a}_k\| \\
&= \sum_{k=1}^m \left(\max_{\mathbf{x} \in C} |x_k| \|\mathbf{a}_k\|_1 + \|\mathbf{a}_k\|_1 \right) \stackrel{(5.1)}{\leq} \sum_{k=1}^m \|\mathbf{a}_k\| (c+1) \\
&\stackrel{(5.2)}{<} \frac{1+c}{1+c} \cdot \varepsilon \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 5.0.3 (Whitneyscher Immersionssatz).

Sei $n \geq 2m$, \mathcal{M}^m eine differenzierbare Mannigfaltigkeit sowie $\delta > 0$ und $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär in der abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathcal{M}$. Dann existiert eine Immersion $G: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derart, dass $G|_A = F|_A$ und für alle $p \in \mathcal{M}$ die Abschätzung $\|F(p) - G(p)\| < \delta$ gilt.

Beweis. Da der Rang von F lokal nicht fallen kann, existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathcal{M}$ von A , auf der F weiterhin vollen Rang besitzt. Wir betrachten die offene Überdeckung $\{U, \mathcal{M} \setminus A\}$ von \mathcal{M} und wählen mithilfe von Satz 4.1.1 einen untergeordneten guten Atlas $\{\alpha_k: B_1 \rightarrow V_k\}$, sowie eine zugehörige Zerlegung der Eins $\vartheta_k: \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ gemäß Sektion 4.2.

$$K := \overline{B_{2/3}} \quad , \quad U_k := \alpha_k(B_{1/3}) \quad \text{sowie} \quad W_k := \alpha_k(B_{2/3}) \quad .$$

Wir konstruieren nun für $k \geq 1$ eine Folge von Funktionen G_k mit folgenden Eigenschaften

$$G_k(p) = G_{k-1}(p) \quad \forall p \in \mathcal{M} \setminus W_k \quad (5.3)$$

$$G_k \text{ ist regulär in } R_k := \bigcup_{j=0}^k \overline{U_j} \quad (5.4)$$

$$\|G_k(p) - G_{k-1}(p)\| < \frac{\delta}{2^k} \quad \forall p \in \mathcal{M} \quad (5.5)$$

wobei $G_0 := F$ sei. Sei G_{k-1} bereits konstruiert, so betrachten wir die Hilfsfunktion

$$H_k: B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto (G_{k-1} \circ \alpha_k)(\mathbf{x})$$

die nun aufgrund von Bedingung 5.4 in der kompakten Menge

$$C_k := \alpha_k^{-1}(R_{k-1} \cap \overline{W_k}) \subseteq \alpha_k^{-1}(\overline{W_k}) = \overline{B_{2/3}} = K$$

regulär ist. Da gemäß Satz 5.0.1 die Menge der in C_k regulären Funktionen offen ist, existiert nun ein $\kappa > 0$ derart, dass aus

$$\|H_k - P\|_C < \kappa \quad \text{folgt, dass } P \text{ regulär ist.} \quad (5.6)$$

Da außerdem gemäß Satz 5.0.2 die Menge der in K regulären Funktionen dicht in $\mathcal{C}(B_1, \mathbb{R}^n)$ (versehen mit der zugehörigen K -Norm) ist, existiert nun außerdem eine Funktion Q derart, dass Q in K regulär ist, und

$$\|H_k - Q\|_{C_k} \leq \|H_k - Q\|_K < \zeta := \min \left\{ \kappa, \frac{\delta}{2^k} \right\} \quad (5.7)$$

gilt. Wir setzen

$$G_k(p) := \begin{cases} G_{k-1}(p) + \vartheta_k(p) \cdot ((Q \circ \alpha_k^{-1})(p) - G_{k-1}(p)) & p \in V_k \\ G_{k-1}(p) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es verbleibt die Bedingungen 5.3 - 5.5 zu zeigen.

Bedingung 5.3)

Aufgrund der disjunkten Zerlegung $\mathcal{M} \setminus W_k = (\mathcal{M} \setminus V_k) \cup (V_k \setminus W_k)$ ist entweder $p \in V_k \setminus W_k$ - also per Definitionem $\vartheta(p) = 0$ - oder $p \in \mathcal{M} \setminus V_k$. In beiden Fällen folgt direkt $G_{k+1}(p) = G_k(p)$.

Bedingung 5.4)

Aufgrund von Bedingung 5.3 und der Regularität von G_{k-1} besitzt G_k bereits vollen Rang auf $(\mathcal{M} \setminus W_k) \cap R_{k-1}$. Weiter gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|G_k \circ \alpha_k - G_{k-1} \circ \alpha_k\|_C &= \|(\vartheta_k \circ \alpha_k) \cdot (Q - G_{k-1} \circ \alpha_k)\|_{C_k} \\ &= \|(\vartheta_k \circ \alpha_k) \cdot (Q - H_k)\|_{C_k} \\ &\leq \|Q - H_k\|_{C_k} \\ &< \zeta \leq \kappa, \end{aligned} \quad (5.8)$$

sodass $G_k \circ \alpha_k$ nach 5.6 regulär in C_k , und damit G_k in $\alpha_k(C) = W_k \cap R_{k-1}$ sein muss. Schließlich gilt per Definitionem auf $\overline{U_k}$ noch $\vartheta_k = 1$, also ist dort $G_k = Q \circ \alpha_k^{-1}$, und G_k auch dort regulär. Insgesamt ergibt dies Regularität auf der Vereinigung

$$\begin{aligned} \overbrace{((\mathcal{M} \setminus W_k) \cap R_{k-1})}^{(5.3)} \cup \overbrace{(W_k \cap R_{k-1})}^{(5.8)} \cup \overline{U_k} &= (\mathcal{M} \cap R_{k-1}) \cup \overline{U_k} \\ &= R_{k-1} \cup \overline{U_k} = R_k. \end{aligned}$$

Bedingung 5.5)

Ist $p \in \mathcal{M} \setminus W_k$, so ist diese Aussage per Definitionem trivial. Sei also $p \in W_k$ und $\mathbf{x} = \alpha^{-1}(p) \in K$, so gilt

$$\begin{aligned}
\|G_k(p) - G_{k-1}(p)\| &= \|\vartheta_k(p) ((Q \circ \alpha_k^{-1})(p) - G_{k-1}(p))\| \\
&\leq \|(Q \circ \alpha_k^{-1})(p) - G_{k-1}(p)\| \\
&= \|Q(\mathbf{x}) - (G_{k-1} \circ \alpha_k)(\mathbf{x})\| \\
&= \|Q(\mathbf{x}) - H_k(\mathbf{x})\| \\
&\leq \|H_k - Q\|_K \\
&< \zeta \leq \frac{\delta}{2^k}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Dies beendet die induktive Konstruktion der Folge der G_k . Nicht unerwartet setzen wir nun

$$G := \lim_{k \rightarrow \infty} G_k.$$

Aufgrund der lokalen Endlichkeit der Überdeckung ist diese Grenzfunktion dabei differenzierbar. Final gilt

$$\begin{aligned}
\|G(p) - F(p)\| &= \|G(p) - G_0(p)\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (G_{k+1}(p) - G_k(p)) \right\| \\
&\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k+1}(p) - G_k(p)\| \stackrel{(5.9)}{<} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Kapitel 6

Der Einbettungssatz

Wir haben bisher gezeigt, dass wir jede differenzierbare Funktion durch eine Immersion beliebig gut approximieren können. Wir werden dieses Ergebnis noch insofern verbessern, zusätzlich Injektivität der Approximationsimmersion fordern können.

Lemma 6.0.1 (Approximation mittels injektiver Immersionen).

Sei $n > 2m$, \mathcal{M}^m eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $U \subseteq \mathcal{M}$ offen, $\delta > 0$ und $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine in U injektive Immersion. Dann existiert zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset U$ eine injektive Immersion $G: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derart, dass $G|_A = F|_A$ und G eine δ -Approximation von F ist.

Beweis. Zunächst können wir aufgrund des Immersionssatzes annehmen, dass F eine Immersion ist, die aufgrund von Satz 3.1.2 eine lokale Immersion und damit lokal injektiv ist. Damit existiert eine offene Überdeckung $(W_i)_{i \geq 2}$ von $\mathcal{M} \setminus U$ derart, dass die Einschränkungen $F|_{W_i}$ Einbettungen sind. Wir setzen $U_i := W_i \cap (\mathcal{M} \setminus A)$ und $U_0 := U$, sodass wir mit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von \mathcal{M} erhalten. Wir wählen einen dieser Überdeckung untergeordneten guten Atlas $\{\alpha_k: B_1 \rightarrow V_k\}$ gemäß Satz 4.1.2 und einer Zerlegung der Eins ϑ_k gemäß Sektion 4.2. Wie im Immersionssatz konstruieren wir induktiv eine Folge injektiver Immersion die gegen unser gesuchtes G konvergiert.

Sei also erneut $G_0 := F$ und G_{k-1} bereits konstruiert. Ist $V_k \subseteq U$, setzen wir $G_k = G_{k-1}$. Sei also $V_k \subset \mathcal{M} \setminus U$, so betrachten wir die Menge $N := \{\omega_n(p) \neq \omega_n(q)\} \subset \mathcal{M}^2$ und die Hilfsfunktion

$$H_k: N \rightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto -\frac{G_{k-1}(p) - G_{k-1}(q)}{\vartheta_k(p) - \vartheta_k(q)}.$$

Wie in Satz 5.0.2 wählen wir aufgrund von

$$\dim(N) = \dim(\mathcal{M}^2) = 2m < n = \dim(\mathbb{R}^n)$$

mithilfe des Satzes von Sard einen Punkt \mathbf{a}_k aus dem Komplement des Bildes von H_n mit

$$\|\mathbf{a}_k\| < \frac{\delta}{2^k} \quad (6.1)$$

wählen. Sei nun

$$G_k := G_{k-1} + \vartheta_k \cdot \mathbf{a}_k$$

und

$$G := \lim_{k \rightarrow \infty} G_k.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass G injektiv ist. Seien also $p, q \in \mathcal{M}$. Da die V_k eine lokal endliche Überdeckung von \mathcal{M} bilden, existiert ein i derart, dass $G(p) = G_i(p)$ und $G(q) = G_i(q)$. Einerseits folgt aus

$$\begin{aligned} G(p) &= G(q) \\ \Leftrightarrow G_i(p) &= G_i(q) \\ \Leftrightarrow G_{i-1}(p) - G_{i-1}(q) &= -(\vartheta_i(p) - \vartheta_i(q)) \cdot \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (6.2)$$

nun, dass $\vartheta_i(p) \neq \vartheta_i(q)$ gelten muss, da sich anderenfalls durch ihre Differenz teilen ließe und sich der Widerspruch

$$-\frac{G_{i-1}(p) - G_{i-1}(q)}{\vartheta_i(p) - \vartheta_i(q)} = H_i(p, q) \neq \mathbf{a}_i$$

ergäbe. Folglich gilt $\vartheta_i(p) = \vartheta_i(q)$ und demnach auch $G_{i-1}(p) = G_{i-1}(q)$. Es ergibt sich rekursiv $G(p) = G_0(p) = F(p) = F(q)$.

Andererseits bilden die $\alpha_k(B_{1/3})$ immernoch eine Überdeckung von \mathcal{M} und es existiert ein $j \leq i$ derart, dass $p \in \alpha_j(B_{1/3})$ und somit auch $\vartheta_j(p) = 1$ ist. Aus $\vartheta_j(q) = \vartheta_j(p) = 1$ folgt, dass q ebenso in $\alpha_j(B_{1/3})$, also im gleichen Kartengebiet wie p liegt. Da F auf allen Kartengebieten injektiv ist, ergibt sich schließlich $p = q$. Dass G eine δ -Approximation von F ist ergibt sich erneut daraus, dass für alle p ein k existiert, sodass $G(p) = G_k(p)$ ist, was die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|G(p) - F(p)\| &= \|G(p) - G_0(p)\| = \left\| \sum_{j=1}^k G_j(p) - G_{j-1}(p) \right\| \\ &\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{j=1}^k \|G_j(p) - G_{j-1}(p)\| \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^k \|\vartheta_j(p) \cdot \mathbf{a}_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^k \|\mathbf{a}_j\| \stackrel{(6.1)}{<} \sum_{j=1}^k \frac{\delta}{2^j} = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \delta < \delta. \end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 6.0.2.

Es existiert eine differenzierbare eigentliche Abbildung $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Beweis. Man wählt einen guten Atlas, eine untergeordnete Zerlegung der Eins ϑ_i und setzt

$$\Theta := \sum_{k=1}^{\infty} k \vartheta_k .$$

Es ist

$$\Theta^{-1}(K) \subseteq \Theta^{-1}(\overline{B_r}) \subset \bigcup_{k=1}^r \text{supp}(\vartheta_k) .$$

Aufgrund der Stetigkeit von Θ ist $\Theta^{-1}(K)$ abgeschlossen, und somit als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge in einem Hausdorff-Raum erneut kompakt. Dies ergibt eine eigentliche Abbildung $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, setzt man für eine Abbildung $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nun Θ als erste Komponente, erhält man das gewünschte Ergebnis. q.e.d.

Der Einbettungssatz ist jetzt eine einfache Folgerung der vorherigen Ergebnisse.

Korollar 6.0.1 (Whitneyscher Einbettungssatz).

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m lässt für $n > 2m$ eine Einbettung in den \mathbb{R}^n zu.

Beweis. Gemäß Lemma existiert eine eigentliche Abbildung $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und nach Satz eine δ -Approximierung dieser mit einer injektiven Immersion und $\delta > 0$. Für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ existiert stets ein Radius $r > 0$ mit $K \subseteq \overline{B_r}$. Sei $y \in G^{-1}(\overline{B_r})$, dann folgt

$$\|F(y)\| = \|F(y) - G(y) + G(y)\| \leq \|G(y)\| + \|F(y) - G(y)\| < r + \delta .$$

Da F eigentlich ist, liegt y nun in der kompakten Menge $F^{-1}(\overline{B_{r+\delta}})$ also ist

$$G^{-1}(\overline{B_r}) \subset F^{-1}(\overline{B_{r+\delta}}) .$$

Da G stetig ist, ist das Urbild abgeschlossen, und da M ein Hausdorff-Raum ist, ist eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Teilmenge erneut kompakt. Folglich ist auch G eigentlich. Aufgrund von Satz 3.1.1 ist eine eigentliche injektive Immersion eine Einbettung. q.e.d.

Dieses Resultat ermöglicht es, von jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Untermannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n zu denken. Sei $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung, so ist $\mathcal{M}' := \Phi(\mathcal{M})$ natürlich erneut eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit den Karten $\Phi \circ \alpha_i$ (möglicherweise mit geänderten Bildbereich). Dann ist \mathcal{M}' aber aufgrund von Satz 3.2.2 eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Literaturverzeichnis

- [1] Theodor Bröcker and Klaus Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Heidelberger Taschenbücher. Springer-Verlag, 1973.
- [2] Otto Forster. *Differentialrechnung im R^n , gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [3] Michel M. Kervaire. A manifold which does not admit any differentiable structure. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 34:257–270, 1960.
- [4] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] John Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64:399–405, 1956.
- [6] Milton Persson. The whitney embedding theorem, 2014.
- [7] John Stallings. The piecewise-linear structure of euclidean space. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 58(3):481–488, 1962.
- [8] Clifford Henry Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 25(3):363 – 430, 1987.
- [9] Hassler Whitney. The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space. *Annals of Mathematics*, 45:220–246, 1944.