

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

*Masterarbeit*

**Eigenschaften der Menge der  
H-Kobordismusklassen von  
Homotopie-Sphären**

Torge Graner

8. Januar 2026

Erstgutachter: Prof. Dr. math. Oliver Röndigs  
Zweitgutachter: Prof. Dr. math. Markus Spitzweck

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Mannigfaltigkeiten</b>	<b>5</b>
2.1	Orientierbarkeit und Poincaré-Dualität . . . . .	5
2.2	Die Schnittpaarung . . . . .	6
2.3	Immersionen und Whitneys Trick . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Verklebung von Mannigfaltigkeiten</b>	<b>9</b>
3.1	Allgemeine Verklebungen . . . . .	9
3.1.1	Tubenumgebungen . . . . .	10
3.1.2	Die Randsumme . . . . .	11
3.1.3	Homologie von Verklebungen am Rand . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Etwas Homotopietheorie</b>	<b>13</b>
4.1	Vektorbündel über Sphären . . . . .	14
4.2	Rahmungen . . . . .	15
4.2.1	Parallelisierbarkeit . . . . .	16
4.3	Die Einhängung . . . . .	17
4.3.1	Die Einhängung . . . . .	17
4.3.2	Die Stabilisierungsfolge der Sphäre . . . . .	18
4.3.3	Normalenbündel eingebetteter Sphären . . . . .	18
4.4	Homotopiesphären . . . . .	19
4.5	Die Thom-Pontrjagin-Konstruktion . . . . .	22
4.5.1	Thom-Pontrjagin-Kollapsabbildungen . . . . .	22
4.6	Der $J$ -Homomorphismus . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Chirurgie</b>	<b>25</b>
5.1	Definitionen . . . . .	25
5.2	Verbindung zu Henkeln . . . . .	25
5.2.1	Kombinatorische Chirurgie . . . . .	28
5.3	Chirurgie unterhalb mittlerer Dimension . . . . .	28
5.4	Gerahmte Chirurgie . . . . .	31
5.4.1	Strategie der Berechnung von $\Theta_k$ . . . . .	31
5.4.2	Rahmbarkeit und Reparametrisierung . . . . .	32

5.4.3	Gerahmte Henkel . . . . .	34
5.5	Probleme in gerader Dimension . . . . .	35
5.5.1	Repräsentierende Sphären . . . . .	35
5.5.2	Symplektische Basen . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Chirurgie in ungerader Dimension</b>	<b>39</b>
6.1	Die Berechnung von $P^{4m+1}$ . . . . .	40
6.2	Die Berechnung von $P^{4m+3}$ . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Die Berechnung von <math>P^{4m}</math></b>	<b>47</b>
7.1	Die Schnittpaarung in vierfacher Dimension . . . . .	48
7.2	Die Signatur . . . . .	49
7.3	Der Signatursatz von Hirzebruch . . . . .	52
7.3.1	Multiplikative Folgen . . . . .	52
7.4	Fast parallelisierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	54
7.4.1	Von fast- zu stabil parallelisierbar . . . . .	55
7.4.2	4k-dimensionale Vektorbündel . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Die Berechnung von <math>P^{4m+2}</math></b>	<b>58</b>
8.1	Die Kervaire-Invariante . . . . .	58
8.1.1	Quadratische Verfeinerungen . . . . .	58
8.1.2	Eine quadratische Verfeinerung der Schnittform . . . . .	59
8.1.3	Eigenschaften der Kervaire-Invariante . . . . .	61
<b>9</b>	<b>Die Berechnung von <math>\Theta_n</math></b>	<b>63</b>
9.1	Die Berechnung von $\partial P^n$ . . . . .	63
9.2	Finale Ergebnisse . . . . .	64
	<b>Appendix</b>	<b>66</b>
A.1	Relative Homologie einer Chirurgie . . . . .	66

# Kapitel 1

## Einleitung

Der zentrale Begriff, der benötigt wird, um die bekannte Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$  auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern, ist durch die differenzierbare Struktur gegeben. Erst durch diese ist es möglich die Differenzierbarkeit von Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten  $f: \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$  auf die bekannte Differenzierbarkeit zu reduzieren. Umso verblüffender ist es, dass bereits auf dem  $\mathbb{R}^4$ , aufgefasst als topologische Mannigfaltigkeit, unterschiedliche, nicht-äquivalente differenzierbare Strukturen existieren. Gleichmaßen lässt sich die  $n$ -Sphäre für gewisse  $n$  mit nicht-äquivalenten glatten Atlanten versehen. Auf diese Art und Weise ergeben sich die *exotischen Sphären*. Diese sind also gerade glatte Mannigfaltigkeiten, die homöomorph zu der  $n$ -Sphäre sind, und stehen über die verallgemeinerte Poincaré-Vermutung in einem engen Zusammenhang mit den Homotopiesphären, also jenen Mannigfaltigkeiten, die zu der  $n$ -Sphäre homotopieäquivalent sind. Es gilt:

**Proposition 1.0.1** (Verallgemeinerte Poincaré-Vermutung)  
*Jede  $n$ -Homotopiesphäre ist zu der  $n$ -Sphäre homöomorph.*

Die Menge der exotischen Sphären ist somit gleich der Menge der Diffeomorphieklassen von Homotopiesphären. In hohen Dimensionen, also für  $n \geq 5$  gilt zusätzlich der  $H$ -Kobordismus-Satz, also ist

**Proposition 1.0.2**  
*Für  $n \geq 5$  ist jeder einfach zusammenhängende Kobordismus von  $\mathcal{M}^n$  zu  $\mathcal{N}^n$ , der  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  als Deformationsretrakte enthält, zu  $\mathcal{M} \times \mathbb{I}$  diffeomorph. Insbesondere sind  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  diffeomorph.*

Ein derartiger Kobordismus heiße  $H$ -Kobordismus. Die Menge der  $H$ -Kobordismusklassen von Homotopiesphären ist somit für  $n \geq 5$  gerade die Menge der exotischen Sphären und sei durch  $\Theta_n$  bezeichnet. Die Frage nach einer geeigneten Gruppenstruktur und der Größe von  $\Theta_n$  solle im Folgenden geklärt werden. Obgar das Ziel dieser Arbeit ist eine *möglichst* geschlossene Form zu finden, ist dies in diesem Rahmen aufgrund der Komplexität nicht möglich. Insbesondere werden grundlegende Kenntnisse der algebraischen Topologie (siehe Allen Hatcher

„Algebraic Topology“ [Hat02]) und Differentialgeometrie vorausgesetzt. Der Arbeit zugrundeliegt das Paper „Groups of homotopy spheres: I“ von Michel Kervaire und John Milnor [KM62], dessen Inhalt jedoch in vielen anderen Werken aufbearbeitet wurde. Teil II wurde leider nie veröffentlicht. Viele Ideen entstammen Antoni Kosinskis „Differential manifolds“ [Kos92] und Jerome Levine „Lectures on groups of homotopy spheres“ [Lev85]. Jegliche benötigte Theorie zu Vektorbündeln lässt sich in Karlheinz Knapps „Vektorbündel“ [Kna13] oder John Milnors und James Stasheffs „Characteristic classes“ [MS74] finden. Ein besonderes Augenmerk wurde darauf gelegt, Mannigfaltigkeiten mit Ecken zu vermeiden, auch wenn es *offensichtlich* möglich ist diese zu glätten.

## Kapitel 2

# Mannigfaltigkeiten

Bevor damit begonnen werden kann überhaupt eine Gruppenstruktur auf  $\Theta_n$  zu definieren, müssen zunächst einige Vorbereitungen getroffen werden. Im Folgenden seien alle Mannigfaltigkeiten, soweit nicht anders spezifiziert, zweitabzählbar, kompakt und glatt (möglicherweise mit Rand). Die Annahme der Glattheit ist keine Einschränkung gegenüber der  $\mathcal{C}^k$ -Differenzierbarkeit, da zu jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit einer  $\mathcal{C}^k$ -Struktur  $\mathfrak{A}$  eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur  $\mathfrak{B}$  und ein  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus  $(\mathcal{M}, \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathfrak{B})$  existiert [Hir12] Satz 3.4. Eine kompakte Mannigfaltigkeit mit leerem Rand heiße **geschlossen**.

### 2.1 Orientierbarkeit und Poincaré-Dualität

Sei  $\mathcal{M}^n$  eine kompakte, topologische Mannigfaltigkeit. Ist diese geschlossen, ist sie genau dann orientierbar, wenn  $H_n(\mathcal{M}) \cong \mathbb{Z}$  gilt. Ist sie berandet, muss  $H_n(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M}) \cong \mathbb{Z}$  gelten. Eine Wahl eines Erzeugers dieser Gruppen korrespondiert mit der Wahl einer Orientierung von  $\mathcal{M}$ , heiße **Fundamentalklasse** von  $\mathcal{M}$  und wird gelegentlich unter leichtem Notationsmissbrauch mit  $[\mathcal{M}]$  bezeichnet. Ist  $\mathcal{M}$  nicht zusammenhängend, sei eine Orientierung eine Wahl von Fundamentalklassen aller Komponenten. Im Folgenden werden alle Mannigfaltigkeit als orientierbar angenommen. Wenn  $\iota: \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{W}$  eine Einbettung ist, kann  $[\mathcal{M}]$  als Element von  $H_n(\mathcal{W})$  aufgefasst werden. Schreibe für die inkludierte Homologieklass

$$[\mathcal{M} \mid \mathcal{W}] := \iota_*[\mathcal{M}] \in H_n(\mathcal{W}).$$

Ist  $\mathcal{M}$  geschlossen, sagt die **Poincaré-Dualität** nun gerade aus, dass der Homomorphismus

$$H^k(\mathcal{M}) \rightarrow H_{n-k}(\mathcal{M}), p \mapsto p \frown [\mathcal{M}]$$

ein Isomorphismus ist ([Hat02] Satz 3.30). Ist der Rand nicht leer, nimmt diese Isomorphie die Formen

$$H^k(\mathcal{M}) \cong H_{n-k}(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M}) \quad \text{und} \quad H^k(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M}) \cong H_{n-k}(\mathcal{M})$$

an. Im Folgenden sei das duale Element von  $x$  auch durch  $x^*$  gekennzeichnet. Ist  $\mathcal{W}^n$  ein Kobordismus mit  $\partial\mathcal{W} \cong \partial_-\mathcal{W} \sqcup \partial_+\mathcal{W}$ . Dann gilt die **Lefschetz-Dualität**, also ist

$$H^k(\mathcal{W}, \partial_-\mathcal{W}) \rightarrow H_{n-k}(\mathcal{W}, \partial_+\mathcal{W}), \sigma \mapsto \sigma \frown [\mathcal{W}].$$

ist ein Isomorphismus ([Hat02] Satz 3.43). Die langen exakten Folgen der Homologie und der Kohomologie sind dabei durch folgendes bis auf Vorzeichen kommutative Diagramm verbunden ([Dol80] Abschnitt VIII Satz 9.1), in welchem  $i + j = n$  gelte.

$$\begin{array}{ccccccc} H^{j-1}(\mathcal{W}) & \xrightarrow{\iota^*} & H^{j-1}(\partial\mathcal{W}) & \xrightarrow{\delta} & H^j(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) & \xrightarrow{q^*} & H^j(\mathcal{W}) \\ \downarrow \frown [\mathcal{W}] & & \downarrow \frown [\partial\mathcal{W}] & & \downarrow \frown [\mathcal{W}] & & \downarrow \frown [\mathcal{W}] \\ H_{i+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) & \xrightarrow{\partial} & H_i(\partial\mathcal{W}) & \xrightarrow{\iota_*} & H_i(\mathcal{W}) & \xrightarrow{q_*} & H_i(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) \end{array} \quad (2.1)$$

## 2.2 Die Schnittpaarung

Sei  $\mathcal{W}^n$  eine Mannigfaltigkeit und  $i + j = n$ . Dann lässt sich über die Kronecker-Paarung und Poincaré-Dualität eine Bilinearform

$$- \cdot - : H_i(\mathcal{W}) \otimes H_j(\mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{Z}, x \cdot y := \langle x^* \smile y^*, [\mathcal{W}] \rangle$$

definieren. Aus den Eigenschaften des Cup-Produktes folgt einerseits

$$x \cdot y = \langle x^* \smile y^*, [\mathcal{W}] \rangle = (-1)^{ij} \langle y^* \smile x^*, [\mathcal{W}] \rangle = (-1)^{ij} \langle y \cdot x \rangle, \quad (2.2)$$

aus den Eigenschaften der Kroneckerpaarung ergibt sich

$$x \cdot y = \langle x^* \smile y^*, [\mathcal{W}] \rangle = \langle q^* x^*, y^* \frown [\mathcal{W}] \rangle = \langle q^* x^*, y \rangle. \quad (2.3)$$

Da  $\mathcal{M}$  eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist, besitzt die Auswertungsabbildung eine besonders einfache Form. Es gilt:

### Lemma 2.2.1

Die Abbildung  $\text{Ad}: H_i(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}(H_j(\mathcal{M}), \mathbb{Z}), x \mapsto x \cdot (-)$  ist gleich der Komposition

$$H_i(\mathcal{M}) \xrightarrow{q_*} H_i(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M}) \xrightarrow{P.D.} H^j(\mathcal{M}) \xrightarrow{U.K.} \text{Hom}(H_j(\mathcal{M}), \mathbb{Z}).$$

*Beweis.* Die Komposition bildet  $x \in H_i(\mathcal{M})$  auf  $\langle (q_*(x))^*, - \rangle$  ab, wobei aus Diagramm 2.1 folgt, dass die Gleichung  $(q_*(x))^* = q^* x^*$  gilt. Dies zeigt

$$\langle (q_*(x))^*, - \rangle = \langle q^* x^*, - \rangle \stackrel{(2.3)}{=} x \cdot (-) = \text{Ad}(x).$$

q.e.d.

**Korollar 2.2.2**

Sei  $\mathcal{M}^{i+j}$  derart, dass  $H_i(\partial\mathcal{M}) = H_{i-1}(\partial\mathcal{M}) = 0$  gilt und  $H_{j-1}(\mathcal{M})$  frei ist. Dann ist  $-\cdot-$  unimodular.

*Beweis.* Betrachte die Faktorisierung

$$\text{Ad}: H_i(\mathcal{M}) \xrightarrow{q_*} H_i(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M}) \xrightarrow{\text{P.D.}} H^j(\mathcal{M}) \xrightarrow{\text{U.K.}} \text{Hom}(H_j(\mathcal{M}), \mathbb{Z})$$

gemäß Lemma 2.2.1. Aus den Annahmen folgt, dass alle Abbildungen isomorphismen sind. q.e.d.

Die derart definierte Schnittform ist besonders interessant, wenn  $\mathcal{M}$  gerade Dimension besitzt und  $i = j$  gilt. In diesem Fall heiße die Bilinearform **Schnittform**.

## 2.3 Immersionen und Whitneys Trick

Sei  $f: \mathcal{M} \looparrowright \mathcal{N}$  eine Immersion. Dann faktorisiert  $df$  durch die kanonische Abbildung  $f^*T\mathcal{N} \rightarrow T\mathcal{N}$  und es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & df & \\ T\mathcal{M} & \xrightarrow{\quad} & T\mathcal{N} \\ & \searrow g & \uparrow \\ & f^*T\mathcal{N} & \end{array}$$

sodass sich das Normalenbündel von  $f$  als  $\nu(f) := f^*T\mathcal{N}/g(T\mathcal{M})$  definieren lässt. Ist  $f$  eine Einbettung, entspricht dies gerade dem bekannten Normalenbündel. Analog zu der Schnittzahl zweier transversaler Mannigfaltigkeiten kann die Selbstschnittzahl einer Immersion  $f: \mathcal{M}^k \looparrowright \mathcal{N}^{2k}$  definiert werden. Es kann zunächst angenommen werden, dass  $f$  sich selbst transversal schneide und lediglich endlich viele Doppelpunkte  $f(p) = f(q)$  besitzt. Definiere  $\varepsilon_p$  als 1, wenn die zusammengesetzte Orientierung von

$$T_p\mathcal{N} = d_p f(T_p\mathbb{S}^k) \oplus d_q f(T_q\mathbb{S}^k)$$

der gewählten Orientierung von  $\mathcal{N}$  entspricht und  $-1$  sonst. Ist  $k$  gerade ist, sei die Selbstschnittzahl

$$I_f := \sum_{f(p)=f(q)} \varepsilon_p,$$

ist  $k$  ungerade sei sie eben jene Summe modulo zwei. Besonders wichtig ist diese Zahl in der Verwendung des starken Einbettungssatzes von Whitney, also auch in Whitneys Trick. Siehe Abbildung 2.1.



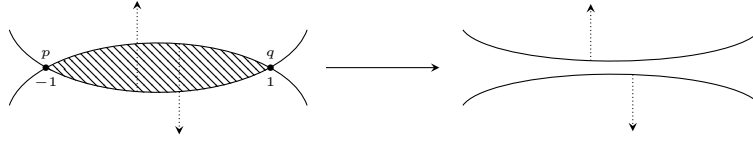


Abbildung 2.1: Die Idee von Whitneys Trick zur Eliminierung der Doppelpunkte  $p$  und  $q$  einer Immersion  $f: \mathbb{S}^1 \looparrowright \mathcal{N}$ . Der einfache Zusammenhang von  $\mathcal{N}$  garantiert, dass der schraffierte Bereich kontrahierbar ist.

**Proposition 2.3.1** (Whitneys Trick)

Sei  $k \geq 3$ ,  $\mathcal{N}^{2k}$  einfach zusammenhängend und  $f: \mathcal{M}^k \looparrowright \mathcal{N}$  eine Immersion. Übersteigt die Anzahl der Doppelpunkte von  $f$  die Zahl  $|I_f|$ , oder ist  $> 0$  für ungerade  $k$ , existiert eine regulär homotope Immersion  $g$ , die zwei Doppelpunkte weniger besitzt.

*Beweis.* Siehe [Whi44] Satz 4.

q.e.d.

**Korollar 2.3.2**

Sei  $k \geq 3$  ungerade,  $\mathcal{N}^{2k}$  einfach zusammenhängend und  $f: \mathcal{M}^k \looparrowright \mathcal{N}^{2k}$  eine Immersion. Die Selbstschnittzahl von  $f$  ist genau dann null, wenn  $f$  regulär homotop zu einer Einbettung ist.

**Proposition 2.3.3**

Es existiert eine Immersion  $h: \mathbb{S}^k \looparrowright \mathbb{R}^{2k}$  mit Selbstschnittzahl eins.

*Beweis.* Siehe [Whi44] Satz 3.

q.e.d.

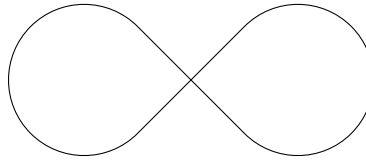


Abbildung 2.2: Eine Immersion  $f: \mathbb{S}^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$  mit Selbstschnittzahl eins.

## Kapitel 3

# Verklebung von Mannigfaltigkeiten

### 3.1 Allgemeine Verklebungen

In der algebraischen Topologie ist es oft relativ einfach, die Homotopiegruppen gezielt zu eliminieren. Betrachte hierzu einen CW-Komplex  $X$  und ein  $[\gamma] \in \pi_k(X)$ . Dann ergibt das Ankleben einer  $(k+1)$ -Zelle entlang der Anklebeabbildung  $\gamma: \mathbb{S}^k \rightarrow X$  einen CW-Komplex, in welchem  $\gamma$  nullhomotop ist. Die niederen Homotopiegruppen bleiben hierbei gleich, die höheren Homotopiegruppen nicht zwingendermaßen. Dieser Prozess versagt für Mannigfaltigkeiten (insbesondere glatte) auf ganzer Linie. Eine präzise Formulierung einer Verklebung für glatte Mannigfaltigkeiten lässt sich als *etwas haarig* beschreiben. Der naive Ansatz die Verklebung zweier glatte Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  entlang einer eingebetteten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{S}$  über das topologische Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \cup_{\mathcal{S}} \mathcal{N} \end{array}$$

zu definieren birgt allgemein keinen lokal euklidischen Raum. Selbst wenn sich eine topologische Mannigfaltigkeit ergibt, ist dies keine glatte Mannigfaltigkeit sondern eine *glatte Mannigfaltigkeit mit Ecken*. Diese können zwar geglättet werden (siehe Abbildung 3.1), was jedoch nicht sonderlich elegant ist und eine Reihe von weiteren Problemen einführt. Für die korrekte Verklebung müssen unterschiedliche Fälle unterschieden werden, die Vorgehensweise ist jedoch stets gleich. Seien  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  Mannigfaltigkeiten mit einer gemeinsamen Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{V}$ . Dann entstehe die Verklebung von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  entlang von  $\mathcal{V}$  durch das Identifizieren von Tubenumgebungen von  $\mathcal{V}$  in  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  über einen

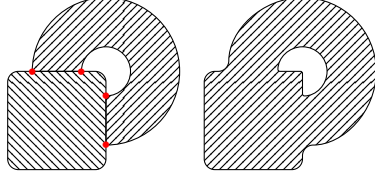
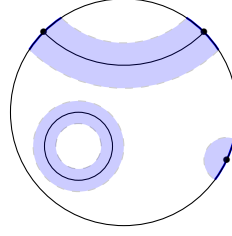


Abbildung 3.1: Abrunden der Ecken durch eine Homöomorphie.

Abbildung 3.2: Die drei unterschiedlichen Arten von Tubenumgebungen in  $\mathbb{D}^2$ .

orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus. Das Problem besteht darin, dass abgesehen von der Position von  $\mathcal{V}$  in  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  unterschiedliche Begriffe von Tubenumgebungen betrachtet werden müssen. Für alle nötigen Eindeutigkeitsbeweise siehe [Kos92] Kapitel VI Sektionen 1-5.

### 3.1.1 Tubenumgebungen

Sei  $\mathcal{V}^k \hookrightarrow \mathcal{M}^n$  eine Untermannigfaltigkeit. Die folgenden drei Positionen von  $\mathcal{V}$  in  $\mathcal{M}$  sind möglich und am einfachsten zu handhaben.

1.  $\mathcal{V} \subseteq \mathring{\mathcal{M}}$  ist geschlossen,
2.  $\mathcal{V} \subseteq \partial\mathcal{M}$  ist geschlossen,
3.  $(\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}) \subseteq (\mathcal{M}, \partial\mathcal{M})$  ist eine ordentliche Untermannigfaltigkeit.

Insbesondere sind auch drei unterschiedliche Begriffe von Tubenumgebungen erforderlich. Siehe Abbildung 3.2.

#### Untermannigfaltigkeiten des Inneren

Sei  $\iota: \mathcal{V}^k \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine geschlossene Untermannigfaltigkeit und  $0: \mathcal{V} \rightarrow N\mathcal{V}$  der Nullschnitt.

##### Definition 3.1.1 (Tubenumgebung für $\mathcal{V} \subseteq \mathring{\mathcal{M}}$ )

Ein riemannsches Vektorbündel  $\xi: E \rightarrow \mathcal{V}$  vom Rang  $n - k$  und eine Einbettung  $\Psi: E \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  sodass  $\Psi \circ 0 = \iota$  ist.

Es ist ein Standardresultat, dass derartige Tubenumgebungen existieren, bis auf Isotopie eindeutig bestimmt sind und  $\xi$  zu dem Normalenbündel isomorph ist.

#### Untermannigfaltigkeiten des Randes

Sei  $\iota: \mathcal{V}^k \hookrightarrow \partial\mathcal{M}^{n+1}$  eine geschlossene Untermannigfaltigkeit.

##### Definition 3.1.2 (Tubenumgebung für $\mathcal{V} \subseteq \partial\mathcal{M}$ )

Eine Tubenumgebung  $\Psi: E \hookrightarrow \partial\mathcal{M}$  mit einer Fortsetzung zu einer Einbettung  $\tilde{\Psi}: E \times \mathbb{R}_+ \hookrightarrow \mathcal{M}$ .

Eine derartige Tubenumgebung lässt sich mithilfe von einer Tubenumgebung in  $\partial\mathcal{M}$  und einer Kragenumgebung  $\partial\mathcal{M} \times \mathbb{R}_+ \hookrightarrow \mathcal{M}$  konstruieren und ist somit erneut bis auf Isotopie eindeutig bestimmt. Beachte hierbei, dass das Normalenbündel von  $\mathcal{V}$  in  $\mathcal{M}$  kein *Halbraumbündel*, sondern ein normales  $(n - k)$ -dimensionales Vektorbündel ist, weshalb nicht einfach eine Einbettung des Normalenbündels von  $\mathcal{V}$  in  $\mathcal{M}$  gewählt werden kann.

### Ordentliche Untermannigfaltigkeiten

Eine Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$  heiße ordentliche Untermannigfaltigkeit (neat submanifold), wenn:

i Es gelte  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{V} \cap \partial\mathcal{M}$

ii Für alle  $p \in \partial\mathcal{M}$  existiert eine Karte  $\alpha: \mathbb{R}_+^n \rightarrow U$  mit  $\alpha\mathbb{R}_+^k = U \cap \mathcal{V}$ .

#### Definition 3.1.3 (Ordentliche Tubenumgebung)

Ein riemannsches Vektorbündel  $\xi: E \rightarrow \mathcal{V}$  mit einer Einbettung  $\tilde{\Psi}: E \hookrightarrow \mathcal{M}$  die mit  $\iota$  kommutiert, sodass die Einschränkung  $\Psi: E|_{\partial\mathcal{V}} \hookrightarrow \partial\mathcal{M}$  eine Tubenumgebung von  $\partial\mathcal{V}$  in  $\partial\mathcal{M}$  ist.

### 3.1.2 Die Randsumme

Die Summe zweier Mannigfaltigkeiten ist stets die gleiche, auch wenn die Tubenumgebungen etwas unterschiedliche Formen besitzen. Die Konstruktion sei hier nur an der Randsumme erläutert, die anderen beiden Fälle verlaufen analog. Sei  $\xi: E \rightarrow \mathcal{V}$  ein riemannsches Vektorbündel und für  $i \in \{1, 2\}$  jeweils  $\mathcal{M}_i$  Mannigfaltigkeiten,  $\iota_i: \mathcal{V} \hookrightarrow \partial\mathcal{M}_i$  Untermannigfaltigkeiten mit Tubenumgebungen  $\psi_i: E \hookrightarrow \partial\mathcal{M}_i$  in  $\partial\mathcal{M}_i$ . Seien  $\Psi_i: E \times \mathbb{R}_+ \hookrightarrow \mathcal{M}_i$  Fortsetzungen der  $\psi_i$  zu Tubenumgebungen in  $\mathcal{M}_i$ . Sei zuletzt die diffeomorphe Involution

$$\alpha: (E \times \mathbb{R}_+) \setminus \mathbf{0} \rightarrow (E \times \mathbb{R}_+) \setminus \mathbf{0}, v \mapsto \frac{v}{\|v\|^2}$$

gegeben, so identifiziere

$$\Psi_1(x) \sim \Psi_2\alpha(x) \quad \forall x \in (E \times \mathbb{R}_+) \setminus \mathbf{0},$$

und setze

$$\mathcal{M}_1 \overset{\Psi_2}{+}_{\Psi_1} \mathcal{M}_2 = (\mathcal{M}_1 \setminus \iota_1(\mathcal{V}) \sqcup -\mathcal{M}_2 \setminus \iota_2(\mathcal{V})) / \sim.$$

Diese Konstruktion ist bis auf Diffeomorphie unabhängig von der Wahl der Fortsetzung der  $h_i$ . Weiter ergeben isotope Einbettungen diffeomorphe Mannigfaltigkeiten. Beachte, dass unterschiedliche  $\Psi$  allgemein jedoch sehr wohl den Diffeomorphietyp der Summe verändern kann.

### Die verbundene Summe

Ein Spezialfall tritt auf, wenn  $\mathcal{V}$  ein Punkt ist. In diesem Fall wird die Summe zweier Mannigfaltigkeiten auch verbundene Summe genannt. Siehe Abbildung 3.3.

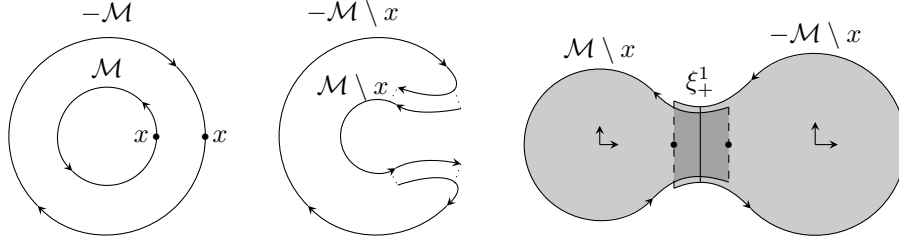


Abbildung 3.3: Die verbundenen Summe zweier Kreise und die verbundene Randsumme zweier Scheiben.

### 3.1.3 Homologie von Verklebungen am Rand

Sei  $\mathcal{V}^i$  eine gemeinsame Untermannigfaltigkeit der Ränder von  $\mathcal{M}^n$  und  $\mathcal{N}^n$  mit trivialen Normalenbündeln. Seien  $A_1$  und  $A_2$  die Bilder von  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{V}$  und  $\mathcal{N} \setminus \mathcal{V}$  in  $\mathcal{M} + \mathcal{V} \mathcal{N}$ . Dann ist die zugehörige Mayer-Vietoris Folge von der Form

$$H_*(A_1 \cap A_2) \rightarrow H_*(A_1) \oplus H_*(A_2) \rightarrow H_*(\mathcal{M} + \mathcal{V} \mathcal{N}) \rightarrow H_{*-1}(A_1 \cap A_2).$$

Hierbei ist  $A_1 \cap A_2$  zu einer Tubenumgebung von  $\mathcal{V}$  isomorph, aus welcher  $\mathcal{V}$  entfernt wurde. Da eine triviale Tubenumgebung in diesem Fall von der Form  $\mathcal{V} \times \mathbb{R}^{n-i-1} \times \mathbb{R}_+$  ist, enthält  $\mathcal{V} \times \mathbb{R}^{n-i-1} \times \mathbb{R}_+ \setminus \mathbf{0}$  den Raum  $\mathcal{V} \times \mathbb{S}_+^{n-i-1}$  als Deformationsretrakt, also folgt

$$H_*(A_1 \cap A_2) \cong H_*(\mathcal{V}) \quad \text{und per Ausschneidung} \quad H_*(\mathcal{M}, \mathcal{M} \setminus \mathcal{V}) = 0.$$

Aus  $H_*(\mathcal{M}, \mathcal{M} \setminus \mathcal{V}) = 0$  ergibt sich  $H_*(A_1) \cong H_*(\mathcal{M})$ . Die Mayer-Vietoris-Folge ist also

$$H_*(\mathcal{V}) \rightarrow H_*(\mathcal{M}) \oplus H_*(\mathcal{N}) \rightarrow H_*(\mathcal{M} + \mathcal{V} \mathcal{N}) \rightarrow H_{*-1}(\mathcal{V}).$$

Beispielsweise folgt daraus für die verbundene Randsumme für  $j > 0$

$$H_j(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong H_j(\mathcal{M}) \oplus H_j(\mathcal{N}).$$

Beachte, dass dies **nicht** für die normale Randsumme entlang des Inneren gilt. In diesem Fall gilt  $H_*(A_1 \cap A_2) \cong H_*(\mathbb{S}^{n-1})$ , also ist

$$H_j(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong H_j(\mathcal{M}) \oplus H_j(\mathcal{N})$$

lediglich für  $n - 1 > j > 0$ . Für orientierte Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  gilt dies auch für  $j = n - 1$ , da der Homomorphismus  $H_n(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  dann ein Isomorphismus ist.

**Beispiel 3.1.1.** Seien  $\mathcal{M}^{2k}$  und  $\mathcal{N}^{2k}$  Mannigfaltigkeiten, die die gleiche Homotopiesphäre  $\Sigma$  beranden. Dann ist die Verklebung von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  entlang  $\Sigma$  eine geschlossene Mannigfaltigkeit, und aus  $H_k(\Sigma) = H_{k-1}(\Sigma) = 0$  folgt

$$H_k(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong H_k(\mathcal{M}) \oplus H_k(\mathcal{N}).$$

## Kapitel 4

# Etwas Homotopietheorie

Verklebungen sind von besonders einfacher Natur, wenn das Normalenbündel der geteilten Mannigfaltigkeit trivial ist. Um dies zu entscheiden ist der Begriff der Kupplungsfunktion nötig. Durch diese lässt sich die Frage der Trivialität eines Vektorbündels über einer Sphäre auf ein algebraisches Element in  $[\gamma] \in \pi_k(\mathrm{SO}(n))$  reduzieren. Somit liegt es nahe, die Struktur dieser Gruppe zu untersuchen. Das kleine Problem besteht hierbei darin, dass die Berechnung dieser Gruppen im allgemeinen spektakulär aufwändig ist. Die niedrigdimensionalen Beispiele sind [Lun92]:

	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$
$\mathrm{SO}(3)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$
$\mathrm{SO}(4)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_2^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_2^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_{12}^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_2^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_2^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_3^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_{15}^{\oplus 2}$
$\mathrm{SO}(5)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_{120}$
$\mathrm{SO}(6)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{120}$
$\mathrm{SO}(7)$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_2^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_8$

Es lässt sich erkennen dass sich die  $\pi_k(\mathrm{SO}(n))$  für  $n \geq k + 2$  *stabilisieren*, es gilt also  $\pi_k(\mathrm{SO}(n)) \cong \pi_k(\mathrm{SO}(n + 1))$ . Dies führt zu dem Begriff der **stabilen Homotopiegruppen** von  $\mathrm{SO}(n)$ . Definiere durch die natürliche Inklusion

$$\mathrm{SO} := \varinjlim \mathrm{SO}(n),$$

so sind die Homotopiegruppen durch den Periodizitätssatz von Bott [Bot59] komplett bestimmt. Es gilt:

$n \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_n(\mathrm{SO})$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

## 4.1 Vektorbündel über Sphären

Die wichtige verbleibende Frage besteht nun darin zu entscheiden, wann ein Bündel trivial ist. Für Vektorbündel über Sphären ist dies etwas einfacher als für beliebige andere Räume. Sei  $\xi: E \rightarrow \mathbb{S}^{k+1}$  ein orientiertes Vektorbündel vom Rang  $n$ . Schreibe  $\mathbb{S}^{k+1} = H_1 \cup H_2$  als Vereinigung der oberen und unteren Hemisphäre. Beachte hierbei  $H_1 \cap H_2 = \mathbb{S}^k$ . Da die  $H_i$  kontrahierbar sind, sind die Vektorbündel  $E|_{H_i}$  jeweils trivial. Seien

$$h_i: E|_{H_i} \rightarrow H_i \times \mathbb{R}^n$$

Trivialisierungen. Dann existiert eine Funktion  $h_\xi: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathrm{GL}^+(n)$ , sodass für alle  $x \in \mathbb{S}^k$  und  $y \in \mathbb{R}^n$

$$h_2 h_1^{-1}(x, y) = (x, h_\xi(x) \cdot y)$$

gilt. Bezeichne diese Funktion  $h_\xi$  als **Kupplungsfunktion** (engl. Clutching-Function) von  $\pi$ . Umgekehrt kann zu einer beliebigen Funktion  $f: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathrm{GL}^+(n)$  ein orientiertes Vektorbündel über  $\mathbb{S}^{k+1}$  gebildet werden, indem zwei triviale Bündel über den  $H_i$  mithilfe von  $f$  verklebt werden. Setze also

$$(H_1 \times \mathbb{R}^n \sqcup H_2 \times \mathbb{R}^n) / (\forall x \in \mathbb{S}^k: (x, y) \sim (x, f(x) \cdot y))$$

mit der naheliegenden Projektion. Es lässt sich zeigen, dass homotope Kupplungsfunktionen mit orientiert isomorphen Vektorbündeln korrespondieren, sodass die Isomorphie

$$\mathrm{Vekt}_n^+(\mathbb{S}^{k+1}) \cong [\mathbb{S}^k, \mathrm{GL}^+(n)] \cong \pi_k(\mathrm{GL}^+(n)) \cong \pi_k(\mathrm{SO}(n)) \quad (4.1)$$

gilt. Siehe zum Beispiel [Kna13] Satz 3.1.11. Insbesondere ist ein Vektorbündel genau dann trivial, wenn die Kupplungsfunktion nullhomotop ist.

**Beispiel 4.1.1** (Möbius-Band). Das anschaulichste Beispiel einer nicht trivialen Kupplungsfunktion ist das (offene) Möbiusband, auch wenn dieses nicht orientierbar ist und somit streng genommen nicht unter die obere Definition fällt. Hierbei werden zwei triviale Vektorbündel  $\underline{\mathbb{R}}$  über  $\mathbb{D}^1$  entlang  $\partial\mathbb{D}^1 = \mathbb{S}^0$  verklebt. Die Kupplungsfunktion ist dabei

$$\varphi: \mathbb{S}^0 \rightarrow \mathrm{O}(1), x \mapsto \begin{cases} 1 & x = 1 \\ -1 & x = -1 \end{cases}$$

also nicht nullhomotop, sodass das Bündel nicht trivial ist.

$$\mathbb{M} := (\mathbb{D} \times \mathbb{R} \sqcup \mathbb{D} \times \mathbb{R}) / (\forall x \in \mathbb{S}^0 \times \mathbb{R}: (x, y)_1 \sim (x, \varphi(x) \cdot y)_2).$$

Beachte, dass dieses Bündel **nicht** orientierbar ist. Dies verändert die Diskussion der Kupplungsfunktionen, da  $\mathrm{GL}$  im Gegensatz zu  $\mathrm{GL}^+$  zwei Zusammenhangskomponenten besitzt.

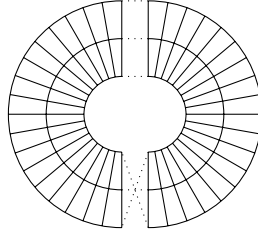


Abbildung 4.1: Das Möbius-Band als nicht-triviales Vektorbündel über der 1-Sphäre. Beachte, dass dieses nicht orientiert ist.

## 4.2 Rahmungen

Um einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  effektiv betrachten zu können, ist es stets nötig eine Basis  $\mathcal{B}$  zu wählen. Diese etabliert eine Vektorraumisomorphie  $\mathbb{R}^n \cong V$  und reduziert die Komplexität der abstrakten Struktur von  $V$  auf den einfachst möglichen Fall und etabliert einen *Referenzrahmen*. Die Verallgemeinerung einer Basis auf Vektorräume ist naheliegend, und besteht darin, dass auf stetige Art und Weise jeder Faser eine Basis zugeordnet wird. Hierbei existieren drei äquivalente Definitionen

**Definition 4.2.1** (Rahmen eines Vektorbündels)

Sei  $\xi: E \rightarrow B$  ein Vektorbündel. Ein Rahmen ist

- i eine Trivialisierung  $\xi \cong \underline{\mathbb{R}}^k$ ,
- ii die Wahl  $k$  linear unabhängiger Schnitte  $X_i: B \rightarrow E$  oder
- iii ein Schnitt im Rahmenbündel von  $\xi$ .

Im Gegensatz zu Vektorräumen, muss ein Rahmen keineswegs existieren. Viel eher ist die Existenz eines Rahmens eine starke Einschränkung, da dies bereits impliziert, dass  $\xi$  trivial ist. Weiter sind unterschiedliche Rahmen nicht unbedingt zueinander äquivalent. Ein Vektorbündel zusammen mit einem Rahmen heiße **gerahmtes Vektorbündel**. Die Wahl einer Rahmung von  $\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}$  liefert eine **stabile Rahmung**. Wenn  $\xi$  zusätzlich orientierbar ist, ist es möglich von orientierten Rahmungen zu sprechen. Im Folgenden seien alle Rahmungen orientiert. Seien  $F$  und  $G$  zwei Rahmungen eines Vektorbündels  $\xi: E \rightarrow B$ . Dann sind sowohl  $F(p)$  als auch  $G(p)$  Basen von  $\xi^{-1}(p)$ , und es kann der Basiswechsel  $M_{G(p)}^{F(p)} \in \mathrm{GL}^+(n)$  von  $F(p)$  zu  $G(p)$  betrachtet werden. Dies liefert eine stetige Funktion

$$M_G^F: B \rightarrow \mathrm{GL}^+(n), p \mapsto M_{G(p)}^{F(p)},$$

den **Rahmenwechsel** von  $F$  zu  $G$ .

**Beispiel 4.2.1** (Rahmenbündel der Sphäre). Der Tangentialvektorraum von  $\mathbb{S}^n$  an  $p$  kann als Untervektorraum des  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch  $T_p\mathbb{S}^n \cong \{p\}^\perp$  identifiziert werden. Eine gegebene Orthonormalbasis  $b_i$  von  $T_p\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  kann also stets



durch  $p$  zu einer Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^{n+1}$  ergänzt werden. Somit liegt die Matrix  $A := (p, b_1, \dots, b_n)^\top$  in  $\mathrm{SO}(n+1)$  und es gilt  $A \cdot e_1 = p$ . Umgekehrt beschreibt eine Matrix  $B \in \mathrm{SO}(n+1)$  mit  $B \cdot e_1 = p$  eine Orthonormalbasis von  $T_p \mathbb{S}^n$ . Diese Korrespondenz liefert einen Hauptfaserbündelisomorphismus des orientiert orthonormalen Rahmenbündels der Sphäre zu  $\mathrm{SO}(n+1)$ . Weiter stiftet die Einhängung

$$SA = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Inklusion  $S: \mathrm{SO}(n) \hookrightarrow \mathrm{SO}(n+1)$  und führt zu der im Folgenden außerordentlich wichtigen Faserung

$$\mathrm{SO}(n) \xrightarrow{S} \mathrm{SO}(n+1) \xrightarrow{\psi} \mathbb{S}^n.$$

Eine tangentielle Rahmung der Sphäre existiert nur für  $n \in \{1, 3, 7\}$ , da nur in diesem Fall nullteilerfreie Multiplikationen auf dem  $\mathbb{R}^{n+1}$  existieren.

#### 4.2.1 Parallelisierbarkeit

Sei  $\mathcal{V}$  eine Mannigfaltigkeit. Dann sind das Tangentialbündel und gegebenenfalls auch das Normalenbündel definiert. Die Frage nach der Trivialität dieser Bündel ermöglicht einige Aussagen über  $\mathcal{V}$  und möglicherweise den umliegenden Raum.  $\mathcal{V}$  heiße (stabil) tangential oder normal gerahmt, wenn  $T\mathcal{V}$  oder  $N\mathcal{V}$  mit einer (stabilen) Rahmung versehen sind. Eine Mannigfaltigkeit mit stabil trivialem Tangentialbündel heiße auch  **$\pi$ -Mannigfaltigkeit**. Die Signifikanz von  $\pi$ -Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  für die Chirurgietheorie besteht darin, dass eingebettete  $k$ -Sphären mit  $n \geq 2k$  ein stabil triviales Normalenbündel besitzen, die Frage nach der eigentlichen Trivialität etwas vereinfacht.

##### Satz 4.2.1

Sei  $\xi$  ein Vektorbündel vom Rang  $n$  über einem  $k$ -dimensionalen CW-Komplex  $X$  mit  $n > k$ . Dann ist  $\xi$  genau dann stabil trivial, wenn  $\xi$  bereits trivial ist.

*Beweis.* Sei  $F: \xi \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine Trivialisierung. Diese liefert in jeder Faser eine Einbettung  $\xi^{-1}(p) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , sei etwa

$$\xi^{-1}(p) \cong \{f(p)\}^\perp \cong T_{f(p)} \mathbb{S}^n$$

für eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow \mathbb{S}^n$ , die wegen  $n > k$  nullhomotop sein muss. Andererseits gilt nun  $\xi \cong f^*(T\mathbb{S}^n)$ , sodass  $\xi$  bereits trivial sein muss. q.e.d.

##### Satz 4.2.2

Eine Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{V}^k$  einer  $\pi$ -Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^n$  mit  $n \geq 2k$  ist genau dann eine  $\pi$ -Mannigfaltigkeit, wenn ihr Normalenbündel stabil trivial ist.

*Beweis.* Aus einer Zerlegung

$$T\mathcal{V} \oplus N\mathcal{V} \cong T\mathcal{M}|_{\mathcal{V}},$$

folgt

$$T\mathcal{V} \oplus N\mathcal{V} \oplus \mathbb{R} \cong T\mathcal{M}|_{\mathcal{V}} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1}.$$

Somit ist einerseits  $T\mathcal{V} \oplus \mathbb{R}^{n-k+1}$  trivial, wenn  $N\mathcal{V} \oplus \mathbb{R}$  es ist, und andererseits  $N\mathcal{V} \oplus \mathbb{R}^{k+1}$  trivial, wenn  $T\mathcal{V} \oplus \mathbb{R}$  es ist. Aus Satz 4.2.1 folgt, dass dann jeweils  $T\mathcal{V}$  und  $N\mathcal{V}$  stabil trivial sind. q.e.d.

### Korollar 4.2.3

*Jede in eine  $\pi$ -Mannigfaltigkeit eingebettete Sphäre  $S^k \hookrightarrow \mathcal{M}^n$  mit  $n \geq 2k$  besitzt ein stabil triviales Normalenbündel.*

*Beweis.* Das folgt aus Satz 4.2.2, da alle Sphären  $\pi$ -Mannigfaltigkeiten sind 7.4.5. q.e.d.

## 4.3 Die Einhängung

Das Normalenbündel einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^n$  ist stets von dem umliegenden Raum abhängig. Der Einbettungssatz von Whitney garantiert Einbettungen  $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$  für  $m \geq 2n$ . Für  $m \geq 2n + 2$  ist diese Einbettung bis auf Isotopie eindeutig bestimmt. Die Normalenbündel zweier solcher isotoper Einbettungen in einen  $\mathbb{R}^m$  sind isomorph, das Normalenbündel *stabilisiert* sich also. Dies motiviert den Begriff der Stabilisierung von Vektorbündeln.

### 4.3.1 Die Einhängung

Sei  $f \in \mathrm{SO}(n)$ . Dieses Element kann einerseits als stetige Abbildung

$$f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \quad \text{mit} \quad Sf: S\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow S\mathbb{S}^{n-1},$$

andererseits aber auch als lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad Sf: \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}, x \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

verstanden werden. Jeweils ist  $Sf \in \mathrm{SO}(n+1)$  und definiert eine Inklusion  $S: \mathrm{SO}(n) \hookrightarrow \mathrm{SO}(n+1)$ . Diese induziert offenbar einen Homomorphismus

$$\pi_k(\mathrm{SO}(n)) \xrightarrow{S_*} \pi_k(\mathrm{SO}(n+1)).$$

Die gesamte Konstruktion erklärt einen Zusammenhang zwischen der topologischen Einhängung und der direkten Summe mit  $\mathbb{R}$ . Zu einem orientierbaren Vektorbündel  $\xi: E \rightarrow \mathbb{S}^{k+1}$  mit Kupplungsfunktion  $\gamma: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathrm{SO}(n)$  lässt sich diese Korrespondenz derart beschreiben, dass das Vektorbündel  $\xi \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^{k+1}$ , die Kupplungsfunktion  $S\gamma$  besitzt.

### 4.3.2 Die Stabilisierungsfolge der Sphäre

Wie in Beispiel 4.2.1 ist das Rahmenbündel der Sphäre gerade  $\mathrm{SO}(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^n$ . Die Faser ist hierbei  $\mathrm{SO}(n)$ . Dies liefert die wichtige Faserung

$$\mathrm{SO}(n) \xrightarrow{S} \mathrm{SO}(n+1) \xrightarrow{\psi} \mathbb{S}^n,$$

wobei  $S$  erneut die Einhängung bezeichne, und  $\psi(A) = A \cdot e_1$  sei. Zugehörig zu jeder Faserung ist eine lange exakte Folge

$$\pi_{k+1}(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \pi_k(\mathrm{SO}(n)) \xrightarrow{S_*} \pi_k(\mathrm{SO}(n+1)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_k(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(\mathrm{SO}(n)).$$

Diese ist besonders für  $k = n$  von Interesse. In diesem Fall wird der Generator  $[\mathbb{1}] \in \pi_n(\mathbb{S}^n)$  durch  $\partial$  auf die Kupplungsfunktion des Tangentialbündels abgebildet. Siehe auch [Kna13] Korollar 3.3.4. Die Idee ist, dass sich die Identität zu einer Funktion  $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathrm{SO}(n+1)$  anheben lässt, die zu einer Rahmung des Tangentialbündels über der oberen Hemisphäre  $\mathbb{S}_+^n \cong \mathbb{D}^n$  homotop ist. Die Einschränkung dieser Anhebung auf  $\mathbb{S}^{n-1}$  ist dann gerade der Rahmenwechsel dieser Rahmung zu der Standardrahmung der unteren Hemisphäre. Ihre Homotopieklasse ist per Definition  $[\tau_n]$ . Der Kern  $\mathrm{Ker} S_* \cong \mathrm{Im} \partial$  wird also von  $[\tau_n]$  erzeugt.

### 4.3.3 Normalenbündel eingebetteter Sphären

Sei  $n \geq 2k$ ,  $\mathcal{M}^n$  eine  $\pi$ -Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{S}^k \hookrightarrow \mathcal{M}^n$  eine eingebettete Sphäre, die gemäß Korollar 4.2.3 ein stabil triviales Normalenbündel  $\nu$  besitzt. Es gelten also

$$0 = [\nu \oplus \mathbb{R}] = S_*[\nu] \quad \text{beziehungsweise} \quad [\nu] \in \mathrm{Ker} S_*.$$

Dann folgt aus dem Vorangegangenen, dass  $[\nu]$  ein Vielfaches von  $[\tau_k]$  ist. Weitere Kenntnisse über den Rang von  $[\tau_k]$  liefern

$$[\nu] \in \mathrm{Ker} S_* \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 2m \\ \mathbb{Z}_2 & k = 2m+1 \notin \{1, 3, 7\} \\ 0 & k \in \{1, 3, 7\} \end{cases}.$$

Siehe hierzu auch [Kna13] Abschnitt 3.3.1.

## 4.4 Homotopiesphären

Es ist nun naheliegend, die Menge  $\Theta_k$  mit der verbundenen Summe zu versehen. Es sind einige Lemmata notwendig, um zu zeigen, dass dies eine wohldefinierte Gruppenstruktur ergibt.

### Lemma 4.4.1

*Ein einfach zusammenhängender Kobordismus  $\mathcal{W}$  von  $\mathcal{M}$  zu  $\mathcal{N}$  ist genau dann ein H-Kobordismus, wenn  $H_*(\mathcal{W}, \mathcal{M}) = 0$  gilt.*

*Beweis.* Die Hinrichtung ist trivial. Seien nun  $H_*(\mathcal{W}, \mathcal{M}) = 0$  und  $\iota: \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{W}$  sowie  $j: \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{W}$  die Inklusionen. Aus der Annahme folgt, dass  $\iota$  ein Quasi-Isomorphismus ist. Dann folgt auch  $H^*(\mathcal{W}, \mathcal{M}) = 0$  und aus der Lefschetz-Dualität

$$H_*(\mathcal{W}, \mathcal{N}) \cong H^{n+1-*}(\mathcal{W}, \mathcal{M}) = 0,$$

sodass auch  $j_*$  ein Quasi-Isomorphismus ist. Da  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  einfach zusammenhängend sind, folgt aus dem Satz von Whitehead, zusammen mit dem Satz von Hurewicz, dass die Inklusionen auch Homotopieäquivalenzen sind. q.e.d.

Das additive Inverse in  $\Theta_k$  ist offenbar die H-Kobordismus-Klasse der Standardsphäre. Diese lässt sich wie folgt beschreiben.

### Lemma 4.4.2

*Eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^n$  ist genau dann Rand einer kontrahierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}^{n+1}$ , wenn sie zu der Standardsphäre H-kobordant ist.*

*Beweis. Hinrichtung*

Sei  $\mathcal{M}$  Rand der kontrahierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}$ . Sei  $\mathcal{D}$  eine eingebettete Scheibe und  $\mathcal{W}' := \mathcal{W} \setminus \mathring{\mathcal{D}}$ . Dann ist  $\partial\mathcal{W}' \cong \mathcal{M} \sqcup -\mathcal{S}$  und  $\mathcal{W}'$  ein Kobordismus. Per Ausschneidung folgt

$$H_*(\mathcal{W}', \partial\mathcal{D}) \stackrel{\text{Aus.}}{\cong} H(\mathcal{W}, \mathcal{D}) \cong \tilde{H}(\mathcal{W}) = 0,$$

da  $\mathcal{W}$  einfach zusammenhängend ist, folgt aus Lemma 4.4.1, dass  $\mathcal{W}'$  ein H-Kobordismus ist.

**Rückrichtung**

Sei  $\mathcal{M}$  mithilfe des Kobordismus  $\mathcal{W}'$  zu der  $n$ -Sphäre H-kobordant. Setze

$$\mathcal{W} := \mathcal{W}' \stackrel{\mathbb{S}^n}{+} \mathbb{D}^{n+1}.$$

Per Annahme gilt  $H_*(\mathcal{W}', \mathbb{S}^n) = 0$ , sodass erneut

$$H(\mathcal{W}, \mathcal{D}) \stackrel{\text{Aus.}}{\cong} H_*(\mathcal{W}', \partial\mathcal{D}) = 0$$

folgt. Da  $\mathcal{W}$  einfach zusammenhängend ist, ist sie zu dem kontrahierbaren Raum  $\mathcal{D}$  homotopieäquivalent und somit selbst kontrahierbar. q.e.d.

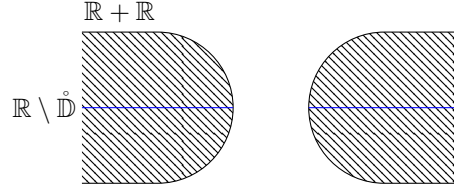


Abbildung 4.2: Eine Einbettung  $\mathbb{R} + \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{I} \times \mathbb{R}$ . Ihr Bild berandet die schraffierte Mannigfaltigkeit, die die blaue Mannigfaltigkeit als Deformationsretrakt enthält.

**Lemma 4.4.3**

Das additive Inverse einer Homotopiesphäre  $\mathcal{M}$  ist  $-\mathcal{M}$ .

*Beweis.* Wähle eine Einbettung  $\Psi: \mathbb{R}^n + \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$  wie in Abbildung 4.2. Für Details siehe [Kos92] Kapitel VI Satz 1.3. Zu einer Verklebeabbildung  $\Phi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{M}$  ergibt dies eine Einbettung

$$\text{Im } \Phi + \text{Im } \Phi \hookrightarrow \mathbb{I} \times \text{Im } \Phi \subseteq \mathbb{I} \times \mathcal{M}.$$

Wird diese Einbettung über  $\mathcal{M} \setminus \text{Im } \Phi \hookrightarrow 0 \times \mathcal{M}$  und  $-\mathcal{M} \setminus \text{Im } \Phi \hookrightarrow 1 \times \mathcal{M}$  zu einer Einbettung  $\mathcal{M} + (-\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{I}$  fortgesetzt, ergibt sich eine Situation analog zu Abbildung 4.2. Das Bild dieser Einbettung, also auch  $\mathcal{M} + (-\mathcal{M})$ , berandet eine Mannigfaltigkeit, die zu  $\mathcal{M}$ , aus der eine offene Scheibe entfernt wurde, homotopieäquivalent ist. Diese muss jedoch kontrahierbar sein, da  $\mathcal{M}$  eine Homotopiesphäre ist. Die Aussage folgt aus Lemma 4.4.2. q.e.d.

**Lemma 4.4.4**

Sind  $\mathcal{M}^n$  und  $\mathcal{M}'$  geschlossen, einfach zusammenhängend und  $H$ -kobordant, sind es auch  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  und  $\mathcal{M}' + \mathcal{N}$ .

*Beweis.* Es kann angenommen werden, dass  $n \geq 3$  ist. Sei  $\mathcal{W}_1$  ein  $H$ -Kobordismus mit  $\partial \mathcal{W}_1 = -\mathcal{M}' \sqcup \mathcal{M}$ . Da  $\mathcal{W}_1$  zusammenhängend ist, existiert eine Einbettung  $\iota: (\mathbb{I}, \partial \mathbb{I}) \hookrightarrow (\mathcal{W}_1, \partial \mathcal{W}_1)$  einer ordentlichen Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{I}$ , die Punkte  $p \in \mathcal{M}$  und  $p' \in \mathcal{M}'$  verbindet. Sei weiter  $\mathcal{W}_2 := \mathcal{N} \times \mathbb{I}$ . Definiere den Kobordismus

$$\mathcal{W} := \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 \quad \text{mit} \quad \partial \mathcal{W} \cong -(\mathcal{M}' + \mathcal{N}) \sqcup (\mathcal{M} + \mathcal{N}).$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Inklusionen  $\mathcal{M} + \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{W}$  und  $\mathcal{M}' + \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{W}$  Homotopieäquivalenzen sind. Betrachte zunächst die Inklusion  $\iota: \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{W}_1$ . Da  $\mathcal{I} \cong \mathbb{I}$  kontrahierbar ist, ist das Normalenbündel in  $\mathcal{W}_1$  trivial, sodass eine Umgebung von  $\mathcal{I}$  zu  $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$  diffeomorph ist. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathcal{M} \setminus p) & \xrightarrow{\cong} & H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}) \\ \downarrow \iota_* & & \downarrow \cong (0 \times \mathbb{I})_* \\ H_*(\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{I}) & \xrightarrow{\cong} & H_*(\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{I} \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0})) \end{array} \quad (4.2)$$

zeigt, dass die linke Abbildung ein Isomorphismus ist. Dann folgt aus dem Fünferlemma, dass auch die rechte Abbildung folgenden Diagrammes ein Isomorphismus sein muss.

$$\begin{array}{ccccc}
 H_*(\mathcal{M} \setminus p) & \longrightarrow & H_*(\mathcal{M}) & \longrightarrow & H_*(\mathcal{M}, \mathcal{M} \setminus p) \\
 \cong \downarrow (4.2) & & \cong \downarrow \text{H. Kob.} & & \cong \downarrow \text{Fünferlemma} \\
 H_*(\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{I}) & \longrightarrow & H_*(\mathcal{W}_1) & \longrightarrow & H_*(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{I})
 \end{array} \quad (4.3)$$

Betrachte nun die relative Mayer-Vietoris-Folge der Zerlegung von  $(\mathcal{W}, \mathcal{M} + \mathcal{N})$  durch die Bilder von  $(\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{I}, \mathcal{M} \setminus p)$  und  $(\mathcal{W}_2 \setminus \mathbb{I}, \mathcal{N} \setminus q)$ . Es gilt

$$H_*(\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{I} \cap \mathcal{W}_2 \setminus \mathbb{I}, \mathcal{M} \setminus p \cap \mathcal{N} \setminus q) \cong H_*(\mathbb{I} \times (\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}), \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}) = 0.$$

Aus der Exaktheit der Mayer-Vietoris-Folge

$$0 \stackrel{(4.3)}{=} H_*(\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{I}, \mathcal{M} \setminus p) \oplus H_*(\mathcal{W}_2 \setminus \mathbb{I}, \mathcal{N} \setminus p) \rightarrow H_*(\mathcal{W}, \mathcal{M} + \mathcal{N}) \rightarrow 0,$$

folgt nun, dass auch  $H_*(\mathcal{W}, \mathcal{M} + \mathcal{N}) = 0$  ist. Da  $\mathcal{W}$  für  $n \geq 3$  weiterhin einfach zusammenhängend ist, folgt die Aussage aus Lemma 4.4.1. q.e.d.

#### Lemma 4.4.5

*Die verbundene Summe zweier Homotopiesphären ist eine Homotopiesphäre.*

*Beweis.* Für  $0 < i < n$  gilt  $H_i(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong H_i(\mathcal{M}) \oplus H_i(\mathcal{N}) = 0$ , sodass  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  wegen

$$H_0(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong H_n(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad H_j(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = 0 \quad \text{für} \quad j > n$$

die gleichen Homologiegruppen wie die Sphäre besitzt. Aus dem Satz von Seifert-van-Kampen folgt

$$\pi_1(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong \pi_1(\mathcal{M}) \times \pi_1(\mathcal{N}) = 0$$

sodass  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  einfach zusammenhängend, und wegen dem Satz von Whitehead auch  $(n-1)$ -zusammenhängend ist. Aus dem Satz von Hurewicz folgt, dass ein

$$[f] \in \pi_n(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong H_n(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong \mathbb{Z},$$

also eine Abbildung  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{M} + \mathcal{N}$  des Grades eins existiert. Diese induziert in allen Dimensionen Isomorphismen  $f_*: H_i(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_i(\mathcal{M} + \mathcal{N})$ . Erneut folgt aus dem Satz von Whitehead, dass  $f$  eine Homotopieäquivalenz ist. q.e.d.

## 4.5 Die Thom-Pontrjagin-Konstruktion

Zwei geschlossene, normal gerahmte Untermannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}^n$  und  $\mathcal{V}^n$  einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{N}^{n+k}$  heißen gerahmt kobordant, falls ein

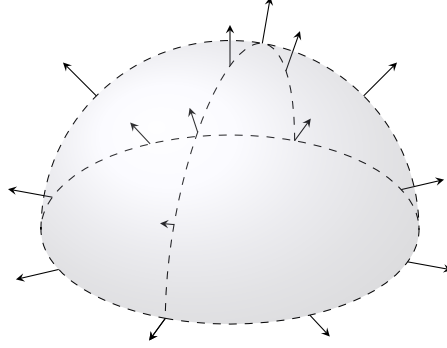


Abbildung 4.3: Die Standardrahmung von  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ , und der gerahmte Nullbordismus  $\mathbb{S}_+^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

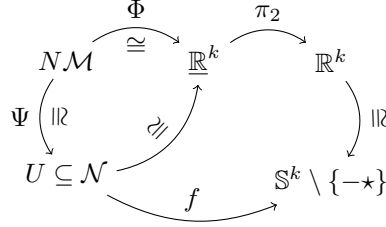
Kobordismus  $\mathcal{W}^{n+1} \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{I}$  mit einer Rahmung existiere, die mit den Rahmungen von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{V}$  übereinstimmt. Die Menge der Äquivalenzklassen zusammen mit der disunkten Vereinigung bildet für  $k \geq n + 2$  eine abelsche Gruppe [Kos92] Kapitel IX Satz 3.1. Das Nullelement ist hierbei trivialerweise die Äquivalenzklasse der leeren Mannigfaltigkeit. Ein Repräsentant dessen ist durch die Standardsphäre mit der *Standard-Rahmung* gegeben. Diese ist durch kanonische Identifizierungen des nach außen gerichteten Normalenvektors  $n(p) \in N_p \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$  zusammen mit den Vektoren  $e_{n+2}, \dots, e_{n+k}$  gegeben. Inverse Elemente sind Äquivalenzklassen der gleichen Mannigfaltigkeit, in welchem ein Basisvektor  $v$  mit  $-v$  ersetzt wurde. Die derartig erhaltene Gruppe sei durch  $\Omega_n^{\text{Fr}}(\mathcal{N})$  bezeichnet.

#### 4.5.1 Thom-Pontrjagin-Kollapsabbildungen

Nach dem Satz von Sard besitzt jede Funktion  $f: \mathcal{N}^{n+k} \rightarrow \mathbb{S}^k$  einen regulären Wert  $\star \in \mathbb{S}^k$ , wobei das Urbild eines regulären Wertes stets eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $f^{-1}(\star) \subseteq \mathcal{N}$  ergibt. Da  $\star$  eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit ist, besitzt diese ein triviales Normalenbündel. Eine Rahmung dieser (also eine Wahl einer positiv orientierten Basis  $\varphi$  von  $T_\star \mathbb{S}^k$ ) lässt sich zu einer normalen Rahmung von  $f^{-1}(\star)$  zurückziehen. Unterschiedliche reguläre Punkte oder unterschiedliche positiv orientierte Basen ergeben hierbei zueinander gerahmt kobordante Mannigfaltigkeiten. Folglich lässt sich die Abbildung

$$\tilde{p}: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbb{S}^k) \rightarrow \Omega_n^{\text{Fr}}(\mathcal{N}), f \mapsto [(f^{-1}(\star), (df)^*(\varphi))]$$

definieren. Eine glatte Homotopie  $H: \mathcal{N} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^k$  mit regulärem Punkt  $\star$  zwischen zwei Abbildungen  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbb{S}^k)$  birgt nun den gerahmten Kobordismus  $H^{-1}(\star) \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{I}$  zwischen  $f^{-1}(\star)$  und  $g^{-1}(\star)$ . Auf diese Art und Weise induziert  $\tilde{p}$  eine Abbildung  $p: [\mathcal{N}, \mathbb{S}^k] \rightarrow \Omega_n^{\text{Fr}}(\mathcal{N})$ . Umgekehrt lässt sich einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^n \subseteq \mathcal{N}^{n+k}$  mit einer Trivialisierung  $\Phi: N\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$  folgendermaßen eine Funktion  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{S}^k$  mit  $\mathcal{M} = f^{-1}(\star)$  zuordnen. Sei

Abbildung 4.4: Die Konstruktion einer  $\mathcal{M}$  generierenden Abbildung  $f$ .

$\Psi: N\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$  eine Tubenumgebung mit Bild  $U \subseteq \mathcal{N}$ . Dann kann gemäß Diagramm 4.4 eine glatte Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{S}^k \setminus \{-\star\}$  konstruiert werden, die durch

$$\tilde{f}: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{S}^k, x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in U \\ -\star & \text{sonst} \end{cases}$$

auf  $\mathcal{N}$  fortgesetzt werden kann,  $\tilde{f}^{-1}(\star) = \mathcal{M}$  erfüllt, und die Rahmung  $\Phi$  induziert. Bei der Konstruktion sei beachtet, dass sich unterschiedliche Basen von  $T_\star \mathbb{S}^n$  bezüglich einer Funktion zwar zu äquivalenten Rahmungen zurückziehen, dass eine Mannigfaltigkeit zu unterschiedlichen Rahmungen jedoch sehr wohl in unterschiedlichen gerahmten Kobordanzklassen liegen kann. Von besonderem Interesse ist der Fall  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^{n+k}$ , da  $[\mathbb{S}^{n+k}, \mathbb{S}^k] = \pi_{n+k}(\mathbb{S}^k)$  ist. Siehe für weitere Informationen [Mil65] §7.

**Proposition 4.5.1** (Thom-Pontrjagin)

Die Gruppen  $\Omega_n^{\text{Fr}}(\mathbb{S}^{n+k})$  und  $\pi_{n+k}(\mathbb{S}^k)$  sind isomorph.

Insbesondere wird die Folge der  $\pi_{n+k}(\mathbb{S}^k)$ , also auch die Folge der  $\Omega_n^{\text{Fr}}(\mathbb{S}^{n+k})$  für  $k \geq n+2$  stationär. Setze

$$\Omega_n^{\text{Fr}} := \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_n^{\text{Fr}}(\mathbb{S}^{n+k}) \cong \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(\mathbb{S}^k) = \Pi_n.$$

Es stellt sich in der obigen Definition die Frage, warum die disjunkte Summe anstatt der verbundenen Summe als Gruppenoperation gewählt wird. Die Antwort darauf liegt in dem durch die verbundene Randsumme erhaltenen Kobordismus

$$\mathcal{W} = \mathcal{M} \times \mathbb{I} + \mathcal{N} \times \mathbb{I} \quad \text{mit} \quad \partial \mathcal{W} \cong (-\mathcal{M}) \sqcup (-\mathcal{N}) \sqcup (\mathcal{M} + \mathcal{N}).$$

Gegebene Rahmungen  $F$  und  $G$  von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  induzieren eine Rahmung auf  $\mathcal{W}$  und damit auf  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ . Folglich sind  $(\mathcal{M}, F) \sqcup (\mathcal{N}, G)$  und  $(\mathcal{M} + \mathcal{N}, H)$  gerahmt kobordant, sodass die disjunkte Summe und die verbundene Summe tatsächlich die gleiche Gruppenoperation bestimmen.

## 4.6 Der $J$ -Homomorphismus

Sei  $\gamma: \mathbb{S}^n \rightarrow \text{SO}(k)$  glatt und  $(\mathbb{S}^n, E)$  die Standardsphäre mit der Standardrahmung des Normalenbündels im  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Dann existiert genau eine normale



Rahmung  $\Gamma$  von  $\mathbb{S}^n$ , sodass der Rahmenwechsel von  $E$  zu  $\Gamma$  gerade  $\gamma$  ist. Für  $\Gamma$  kann also

$$\Gamma_i(p) = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij}(p) E_j(p)$$

als Definition genutzt werden. Dies liefert die normal gerahmte Mannigfaltigkeit  $(\mathbb{S}^n, \Gamma) \in \Omega_n^{\text{Fr}}(\mathbb{S}^{n+k})$  und (auch wenn noch nicht klar ist dass diese wohldefiniert ist) eine Abbildung

$$J_n^k: \pi_n(\text{SO}(k)) \rightarrow \Omega_n^{\text{Fr}}(\mathbb{S}^{n+k}).$$

Sei nun  $[\gamma] \in \text{Ker } J_n^k$ , es gelte also  $J_n^k[\gamma] = 0$ . Dann ist  $(\mathbb{S}^n, \Gamma)$  gerahmt nullbordant. Das ist genau dann der Fall, wenn sich  $\Gamma$  auf eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}_+^{n+k+1}$  mit  $\partial\mathcal{M} \cong \mathbb{S}^n$  fortsetzen lässt. Für hinreichend großes  $k$ , also für  $k \geq n + 2$ , stabilisiert sich diese Definition, und es ergibt sich der **Hopf-Whitehead-J-Homomorphismus**

$$J_n: \pi_n(\text{SO}) \rightarrow \Pi_n.$$

**Proposition 4.6.1**

*Das Bild  $\text{Im } J_{4m-1}$  ist eine zyklische Gruppe des Ranges*

$$\text{Rang Im } J_{4m-1} = \text{Nenner} \left( \frac{B_{2m}}{4m} \right)$$

*und ein direkter Summand von  $\Pi_{4m-1}$ .*

*Beweis.* Siehe [Ada66] Satz 1.5.

q.e.d.

## Kapitel 5

# Chirurgie

Sei  $\mathcal{M}^n$  eine Mannigfaltigkeit und  $n = i + j + 1$ . Chirurgie ist der Prozess,  $\mathcal{M}$  mit der Standardsphäre  $\mathbb{S}^n$  entlang einer in das Innere von  $\mathcal{M}$  eingebetteten Sphäre mit trivialem Normalenbündel  $\mathbb{S}^i \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  zu verkleben. Dieser Prozess lässt sich auch derart beschreiben, dass eine eingebettete Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{S}^i \times \mathbb{D}^{j+1}$  herausgeschnitten, und die resultierende Mannigfaltigkeit entlang  $\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j$  mit  $\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{S}^j$  verklebt wird. Dies führt zu einer kontrollierten Veränderung der Homologie.

### 5.1 Definitionen

Sei  $\mathcal{S}^i \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine eingebettete Sphäre mit trivialem Normalenbündel. Die letzte Forderung bedeutet hierbei, dass  $N\mathcal{S} \cong \mathbb{R}^{j+1}$  gilt, sodass eine Tubenumgebung von  $\mathcal{S}$  zu  $\mathbb{R}^{j+1}$  isomorph ist. Als Anklebeabbildung sei also eine Einbettung  $\Phi: \mathbb{R}^{j+1} \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  gewählt. Da das Normalenbündel der eingebetteten Sphäre  $\mathbb{S}^i \times \{0\}^j \subset \mathbb{S}^n$  ebenso trivial ist, lassen sich  $\mathcal{M}$  und  $\mathbb{S}^n$  entlang  $\mathcal{S} \cong \mathbb{S}^i$  verkleben. Die entstehende Mannigfaltigkeit gehe durch **Chirurgie** an  $\mathcal{S}$  aus  $\mathcal{M}$  hervor. Die gängigste Bezeichnung ist hierbei wohl  $\chi(\mathcal{M}, \Phi)$ . Im Folgenden sei stattdessen

$$\mathcal{M} \multimap^{\Phi} \mathbb{S}^i := \mathcal{M} \dot{+} \mathbb{S}^n = \chi(\mathcal{M}, \Phi)$$

eben jene Chirurgie.

### 5.2 Verbindung zu Henkeln

Ein nah mit Chirurgie verbundener Vorgang ist das Anbringen eines Henkels. Sei hierzu  $\mathcal{W}^{n+1}$  eine Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{S}^i \hookrightarrow \partial\mathcal{W}$  eine eingebettete Sphäre mit trivialem Normalenbündel in  $\mathcal{W}$ . Erneut ist  $N\mathcal{S} \cong \mathbb{R}^{n+1}$  (nicht  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ ). Eine Tubenumgebung ist also eine Einbettung  $\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \hookrightarrow \mathcal{W}$ , die eine Tubenumgebung  $\Phi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \partial\mathcal{W}$  fortsetzt. Analoges gilt für  $\mathbb{S}^i \subset \partial\mathbb{D}^{n+1}$ . Die

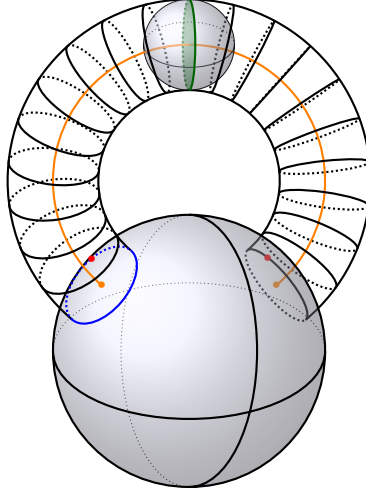


Abbildung 5.1: Eine Vollkugel mit einem Henkel. Farblich markiert sind **Kern**, **Kokern**, **Meridian** und **Äquator**.

Verklebung

$$\mathcal{W} \multimap \mathbb{D}^{i+1} := \mathcal{W} \overset{\tilde{\Phi}}{+} \mathbb{D}^{n+1},$$

gehe durch das **Anbringen eines Henkels** an  $\mathcal{S}$  aus  $\mathcal{W}$  hervor. Dieser Vorgang geschieht immer am Rand einer Mannigfaltigkeit. Naheliegenderweise gilt

$$\partial(\mathcal{W} \multimap \mathbb{D}^{i+1}) = \partial(\mathcal{W} \overset{\tilde{\Phi}}{+} \mathbb{D}^{n+1}) \cong \partial\mathcal{W} \overset{\Phi}{+} \partial\mathbb{D}^{n+1} = \partial\mathcal{W} \multimap \mathbb{S}^i,$$

der Rand der Anbringung eines Henkels an  $\mathcal{W}$  ist also die Chirurgie an  $\partial\mathcal{W}$ . Diese Konstruktion sei in Abbildung 5.1 verdeutlicht. Dies vereinfacht die Situation für geschlossene Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$ , da in diesem Fall  $\mathcal{M} \times \mathbb{I}$  eine  $(n+1)$ -Mannigfaltigkeit mit  $\partial\mathcal{W} \cong \mathcal{M} \sqcup (-\mathcal{M})$  ist. Es gilt also auch

$$\partial(\mathcal{M} \times \mathbb{I} \multimap \mathbb{D}^{i+1}) \cong \mathcal{M} \sqcup -(\mathcal{M} \multimap \mathbb{S}^i)$$

sodass  $\mathcal{M} \multimap \mathbb{S}^i$  und  $\mathcal{M}$  kobordant sind. Der Trick die Chirurgie derart als Rand darzustellen vereinfacht einige Überlegungen. Es sei jedoch Obacht geboten, da  $\mathcal{M} \times \mathbb{I}$  für glatte Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  mit nicht leerem Rand keine glatte Mannigfaltigkeit ergibt. Entlang der Strata  $\partial\mathcal{M} \times \partial\mathbb{I}$  lässt sich keine glatte Struktur angeben, die mit der glatten Struktur von  $\mathcal{M}$  übereinstimmt. Da im Folgenden lediglich Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  betrachtet werden, deren Rand leer oder eine Homotopiesphäre ist, kann dem folgendermaßen Abhilfe geschaffen werden.

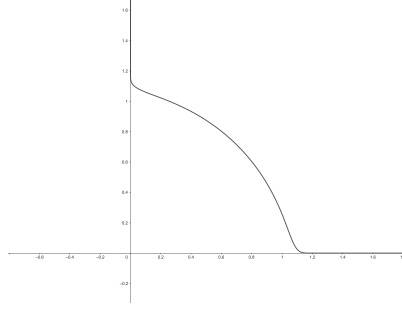


Abbildung 5.2: Eine glatte Kurve, sodass das oben rechts berandete Gebiet eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist, die zum  $\mathbb{R}_+^2$  homöomorph ist.

### Lemma 5.2.1

Zu jeder Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^n$  existiert eine Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{W}^{n+1} \subseteq \mathcal{M} \times \mathbb{I} \quad \text{mit} \quad \partial\mathcal{W} \cong \mathcal{M} \overset{\partial\mathcal{M}}{+} \mathcal{M}.$$

*Beweis.* Eine Kragenumgebung von  $\partial\mathcal{M}$  in  $\mathcal{M}$  kann zu einer topologischen Einbettung  $\partial\mathcal{M} \times \mathbb{R}_+^2 \hookrightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{I}$  fortgesetzt werden. Dann kann  $\mathbb{R}_+^2$  durch eine geeignete glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ersetzt werden. Eine Möglichkeit diese zu definieren wäre als jenes Gebiet  $Q \subseteq \mathbb{R}_+^2$ , welches durch die Kurve  $\gamma$  abgegrenzt wird, die durch

$$\gamma(t) := (1+t^2)(\cos(g(t)), \sin(g(t))) \quad \text{mit} \quad g(t) = \frac{h(t + \frac{1}{2})}{h(t + \frac{1}{2}) + h(\frac{1}{2} - t)}$$

und

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Siehe hierzu Abbildung 5.2. Bezeichne die resultierende Mannigfaltigkeit durch  $\mathcal{W}$ . Der Rand dieser Glättung ist gerade eine Glättung von

$$\partial(\mathcal{M} \times \mathbb{I}) = \partial\mathcal{M} \times \mathbb{I} \cup \mathcal{M} \times \partial\mathbb{I}.$$

Aus der Definition lässt sich erkennen, dass diese zu  $\mathcal{M} \overset{\partial\mathcal{M}}{+} \mathcal{M}$  diffeomorph ist. q.e.d.

Sei  $\mathcal{W}$  gemäß Lemma 5.2.1. Wird ein Henkel an dem Rand von  $\partial\mathcal{W}$  angebracht, ergibt sich

$$\partial(\mathcal{W} \multimap \mathbb{D}^{i+1}) \cong \mathcal{M} \overset{\partial\mathcal{M}}{+} (\mathcal{M} \multimap \mathbb{S}^i).$$

Wenn  $\partial\mathcal{M}$  zusätzlich leer oder eine Homotopiesphäre ist, folgt für  $0 < i < n$

$$H_i(\partial\mathcal{W}) \cong H_i(\mathcal{M}) \oplus H_i(\mathcal{M}).$$

Diese Mannigfaltigkeit verhält sich deshalb ähnlich genug zu  $\mathcal{M} \times \mathbb{I}$ .

### 5.2.1 Kombinatorische Chirurgie

Besonders im Rahmen homologischer Überlegungen ist die glatte Struktur der Mannigfaltigkeit nicht vonnöten, sodass in diesem Fall eine topologisch äquivalente und einfachere Notation genutzt werden kann. Sei eine glatte Einbettung  $\Phi: \mathbb{S}^i \times \mathbb{D}^{j+1} \hookrightarrow \mathcal{M}$  mit  $\mathcal{D} := \text{Im } \Phi$  gegeben. Setze  $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}}$  und betrachte das topologische Pushout

$$\mathcal{M}' := \mathcal{M}_0 \cup_{\partial \mathcal{D}} (\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{S}^j).$$

Ebenso lässt sich das Anbringen eines Henkels an  $\mathcal{W}^{n+1}$  durch

$$\mathcal{W} + H^i := \mathcal{W} \cup_{\mathcal{D}} (\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{D}^{j+1})$$

definieren. Die entstehende Mannigfaltigkeit sind hierbei homöomorph zu ihren oberen glatten Definitionen ([Kos92] Kapitel VI Proposition 8.1).

#### Meridian und Äquator einer Chirurgie

Diese Definition legt nahe, warum  $\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j$  bei dem Untersuchen von einer Chirurgie eine wichtige Rolle spielt. Für ein  $x \in \mathbb{S}^i$  und ein  $y \in \mathbb{S}^j$  sei  $\Phi(\{x\} \times \mathbb{S}^j)$  ein **Meridian** und  $\Phi(\mathbb{S}^i \times \{y\})$  ein **Äquator**.

#### Kern und Kokern eines Henkels

Der Anteil von  $\mathcal{W} \rightarrow \mathbb{D}^{i+1}$ , der mit  $\mathbb{D}^{i+1} \times 0$  korrespondiert heiße **Kern** und der Anteil  $0 \times \mathbb{D}^{j+1}$  heiße **Kokern**. Der Rand des Kernes ist gerade die Anklebesphäre, der Rand des Kokerns heiße transversale Sphäre. Diese Begriffe sind insbesondere im Rahmen des H-Kobordismus-Satzes wichtig.

## 5.3 Chirurgie unterhalb mittlerer Dimension

Der Effekt einer Chirurgie auf die niederen Homologiegruppen ist recht simpel. Sei  $n = i + j + 1$ ,  $\mathcal{M}^n$  eine Mannigfaltigkeit,  $\mathcal{S}^i \hookrightarrow \mathcal{M}$  eine eingebettete Sphäre mit trivialem Normalenbündel und  $\Phi: \mathbb{D}^{j+1} \hookrightarrow \mathcal{M}$  eine zugehörige Anklebeeinbettung. Setze  $\mathcal{D} := \text{Im } \Phi$  und

$$\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}} \quad \text{sowie} \quad \mathcal{M}' := \mathcal{M}_0 \cup_{\partial \mathcal{D}} (\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{S}^j).$$

Dann lassen sich die langen exakten Folgen der Paare  $(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0)$  und  $(\mathcal{M}', \mathcal{M}_0)$  zu folgendem Diagramm zusammensetzen:

$$\begin{array}{ccccc}
H_{k+1}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0) & & & H_k(\mathcal{M}') \longrightarrow H_k(\mathcal{M}', \mathcal{M}_0) \\
& \searrow & \nearrow & \\
& H_k(\mathcal{M}_0) & \\
& \nearrow & \searrow & \\
H_{k+1}(\mathcal{M}', \mathcal{M}_0) & & & H_k(\mathcal{M}) \longrightarrow H_k(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0)
\end{array}$$

Per Ausschneidung folgen

$$H_k(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0) \cong H_k(\mathbb{S}^i \times \mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k \in \{0, j+1\} \\ 0 & 0 < k < j+1 \end{cases}$$

und

$$H_k(\mathcal{M}', \mathcal{M}_0) \cong H_k(\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{S}^j, \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k \in \{0, i+1\} \\ 0 & 0 < k < i+1 \end{cases}.$$

Für die Berechnung siehe Appendix. Die Erzeuger der  $\mathbb{Z}$ -Anteile in Dimension  $i+1$  und  $j+1$  sind gerade die Bilder der Erzeuger von  $H_{i+1}(\mathbb{D}^{i+1}, \mathbb{S}^i)$  und  $H_{j+1}(\mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{S}^j)$  und stehen somit in Korrespondenz zu Fundamentalklassen eines Äquators  $e = \Phi(x \times \mathbb{S}^j)$  und einem Meridian  $m = \Phi(\mathbb{S}^i \times y)$ . Äquator und Meridian sind deswegen interessant, da sie beide in  $\mathcal{M}_0$  liegen, und die Beziehungen

$$[e \mid \mathcal{M}] = [\mathcal{S} \mid \mathcal{M}], \quad [m \mid \mathcal{M}] = 0 \quad \text{sowie} \quad [e \mid \mathcal{M}'] = 0$$

erfüllen. Die Sphäre heiße **primitiv**, wenn ein  $g \in H_j(\mathcal{M})$  mit  $g \cdot [\mathcal{S} \mid \mathcal{M}] = 1$  existiert.

### Lemma 5.3.1

*Chirurgie an einer Sphäre  $\mathcal{S}^i \hookrightarrow \mathcal{M}^n$  mit  $i < j$  eliminiert die Fundamentalklasse  $[\mathcal{S} \mid \mathcal{M}]$ .*

*Beweis.* Einerseits folgt für  $1 < k < i$  direkt

$$H_k(\mathcal{M}') \cong H_k(\mathcal{M}_0) \cong H_k(\mathcal{M}).$$

Das Diagramm nimmt für  $k = i$  die folgende Form an:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & & H_i(\mathcal{M}') \longrightarrow 0 \\
& \searrow & \nearrow & \\
& H_i(\mathcal{M}_0) & \\
& \nearrow & \searrow & \\
\mathbb{Z} & & & H_i(\mathcal{M}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

$\mathbb{Z} \xrightarrow{1 \mapsto [e \mid \mathcal{M}_0]} H_i(\mathcal{M}_0) \xrightarrow{1 \mapsto [e \mid \mathcal{M}]} H_i(\mathcal{M})$



$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & H_i(\mathcal{M}') & \longrightarrow & 0 & & H_{i-1}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0 \\
& \searrow & \uparrow & & \searrow & & \uparrow \\
& & H_i(\mathcal{M}_0) & & & & H_{i-1}(\mathcal{M}_0) \\
& \swarrow & \downarrow & & \swarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{1 \mapsto [e | \mathcal{M}]} & H_i(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1 \mapsto [m | \mathcal{M}']} & H_{i-1}(\mathcal{M}') \longrightarrow 0 \\
& \nwarrow & \uparrow & & \nwarrow & & \uparrow \\
& & H_{i-1}(\mathcal{M}_0) & & & & H_{i-1}(\mathcal{M}')
\end{array}$$

Wegen der Primitivität ist  $\varphi: H_i(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $x \mapsto x \cdot [\mathcal{S} | \mathcal{M}]$  ein Epimorphismus, also folgt

$$H_{i-1}(\mathcal{M}') \cong H_{i-1}(\mathcal{M}_0) \cong H_{i-1}(\mathcal{M}).$$

Weiter gilt

$$H_i(\mathcal{M}') \cong H_i(\mathcal{M}_0) / \langle [e | \mathcal{M}_0] \rangle \cong \text{Ker } \varphi / \langle [e | \mathcal{M}] \rangle.$$

Wegen  $\text{Ker } \varphi \subseteq H_i(\mathcal{M})$  wird  $[\mathcal{S} | \mathcal{M}]$  eliminiert, womöglich mehr. q.e.d.

## 5.4 Gerahmte Chirurgie

Sei  $n = i + j + 1$ ,  $\mathcal{M}^n$  eine  $\pi$ -Mannigfaltigkeit und  $\Psi: \mathbb{D}^{j+1} \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine beliebige Anklebeeinbettung. Bezeichne durch  $\mathcal{S} := \Psi(\mathbb{S}^i \times \mathbf{0})$  die Anklebesphäre. Die naive Chirurgie bezüglich dieser Daten kann unter Umständen eine Mannigfaltigkeit liefern, die nicht stabil parallelisierbar ist. Um dem beizukommen, reicht es aus, die Anklebeeinbettungen mithilfe von einer glatten Funktion  $\gamma: \mathbb{S}^i \rightarrow \text{SO}(j+1)$  informiert zu *verdrehen*.

Sei  $F$  eine stabile Rahmung von  $\mathcal{M}$ . Eine stabile Rahmung  $\overline{F}$  auf  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^i$  induziert offenbar eine Rahmung von  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}$ . Ist diese induzierte stabile Rahmung zu  $F$  homotop, heiße die Chirurgie gerahmt.

Zu einer Folge gerahmter Mannigfaltigkeiten  $(\mathcal{M}_i, F_i)$  mit  $1 \leq i \leq m$ , sodass  $\mathcal{M}_{i+1}$  durch gerahmte Chirurgie aus  $\mathcal{M}_i$  erhalten werden kann, heißen  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_m$  zueinander  **$\chi$ -quivalent**. Diese Relation ist offenbar reflexiv und transitiv. Sie ist symmetrisch, denn wird an der transversalen Sphäre einer  $i$ -Chirurgie eine  $j$ -Chirurgie durchgeführt, ergibt sich erneut die originale Mannigfaltigkeit. Derart ist also eine Äquivalenzrelation definiert.

### 5.4.1 Strategie der Berechnung von $\Theta_k$

Sei  $P^k$  die Menge der  $\chi$ -Äquivalenzklassen gerahmter Mannigfaltigkeiten, die Homotopiesphären beranden. Diese sei mit der verbundenen Randsumme versehen, sodass  $P^k$  die Struktur eines kommutativen Monoiden erhält. Da Chirurgie stets am Inneren vorgenommen wird, hat diese keinen Einfluss auf den Rand, sodass  $\chi$ -quivalente, gerahmte Mannigfaltigkeiten stets diffeomorphe Ränder



besitzen. Es folgt, dass der Randoperator  $\partial: P_k \rightarrow \Theta_k$  ein wohldefinierter Homomorphismus ist. Die Berechnung dieser Untergruppe ist der erste Schritt in der Berechnung von  $\Theta_k$ . Es existiert die offensichtliche exakte Folge

$$0 \rightarrow \text{Ker } \partial \rightarrow P^k \xrightarrow{\partial} \partial P^k \rightarrow 0.$$

Der Kern besteht hierbei gerade aus all den  $\chi$ -Äquivalenzklassen gerahmter Mannigfaltigkeiten, deren Rand zu der Standardsphäre diffeomorph ist. Um die Gruppe  $\partial P^k \subseteq \Theta_k$  zu berechnen wird eine Mannigfaltigkeit aus  $P^k$  nun so lange durch gerahmte Chirurgie bearbeitet, bis sie möglichst simpel ist.

### 5.4.2 Rahmbarkeit und Reparametrisierung

Sei erneut  $n = i + j + 1$ ,  $(\mathcal{M}, F)$  eine stabil gerahmte Mannigfaltigkeit und  $\Psi: \mathbb{D}^{j+1} \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine Anklebeeinbettung. Es soll untersucht werden, wann eine Verklebung mit der Standard-Sphäre  $(\mathbb{S}^n, E)$  eine stabil gerahmte Mannigfaltigkeit ergibt. Zunächst ist  $F(p)$  eine Basis von  $T_p \mathcal{M} \oplus \mathbb{R}$  und  $E(p)$  eine Basis von  $T_p \mathbb{S}^n \oplus \mathbb{R}$ . Wird eine Umgebung von  $\mathbb{S}^i \subseteq \mathbb{S}^n$  mit dem Definitionsbereich von  $\Psi$  identifiziert, ist die Einhängung des Differentials von  $\Psi$  eine Funktion

$$S(d_p \Psi): T_p \mathbb{S}^n \oplus \mathbb{R} \rightarrow T_{\Psi(p)} \mathcal{M} \oplus \mathbb{R}.$$

Derart wird  $E$  zu einer stabilen Rahmung von  $\text{Im } \Psi \subseteq \mathcal{M}$  transportiert. Bezeichne jene Rahmung durch  $d\Psi(E)$ . Sei  $\sigma(F, \Psi)$  der Rahmenwechsel von  $d\Psi(E)$  zu  $F$  auf  $\Psi(\mathbb{S}^i \times \mathbf{0})$ . Da der Basiswechsel der transportierten Basis zu  $F$  gerade die Abbildungsmatrix von  $S(d_p \Psi)$  bezüglich  $E$  und  $F$  ist, gilt mit  $q = \Psi(p, 0)$

$$\sigma(F, \Psi): \mathbb{S}^i \rightarrow \text{GL}^+(n+1), p \mapsto M_{F(q)}^{E(p,0)}(S(d_{(p,0)} \Psi)).$$

Derart wird ein Element  $\mathfrak{o}(F, \Psi) := [\sigma(F, \Psi)] \in \pi_i(\text{SO}(n+1))$  definiert. Wegen folgendem Lemma kann  $\mathfrak{o}(F, \Psi)$  als Obstruktion betrachtet werden.

#### Lemma 5.4.1

*Sei  $(\mathcal{M}, F)$  eine gerahmte Mannigfaltigkeit und  $\Psi: \mathbb{D}^{j+1} \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine Anklebeeinbettung. Dann ist die Verklebung von  $(\mathcal{M}, F)$  mit  $(\mathbb{S}^n, E)$  genau dann gerahmt, wenn  $\mathfrak{o}(F, \Psi) = 0$  gilt.*

*Beweis.* Sei  $(\mathcal{M} + \mathbb{S}^n, \bar{F})$  zunächst gerahmt, sodass  $\bar{F}$  und  $F$  auf  $\mathcal{M} \setminus \Psi(\mathbb{S}^i \times \mathbf{0})$  homotop sind. Der Rahmenwechsel von  $\bar{F}$  zu  $d\Psi(E)$  auf  $\Psi(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j)$  ist offenbar konstant, also ist der Rahmenwechsel von  $F$  zu  $d\Psi(E)$  auf  $\Psi(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j)$  nullhomotop. Es lässt sich leicht zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn eine nullhomotope Fortsetzung auf  $\Psi(\mathbb{S}^i \times \mathbb{D}^{j+1}) \simeq \Psi(\mathbb{S}^i \times \mathbf{0})$  existiert. Es folgt  $\mathfrak{o}(F, \Psi) = 0$ .

Sei umgekehrt  $\mathfrak{o}(F, \Psi) = 0$ , der Rahmenwechsel von  $F$  zu  $d\Psi(E)$  auf der Anklebesphäre sei also nullhomotop. Da diese ein Deformationsretrakt von  $\text{Im } \Psi$  ist, ist auch der Rahmenwechsel auf  $\text{Im } \Psi$  nullhomotop. Eine Nullhomotopie  $\text{Im } \Psi \times \mathbb{I} \rightarrow \text{GL}^+(n+1)$  zu der Identität kann mithilfe der Homotopieerweiterungseigenschaft zu einer Homotopie  $H: \mathcal{M} \times \mathbb{I} \rightarrow \text{GL}^+(n+1)$  fortgesetzt werden. Dann ist durch  $\bar{F}(p) := H(p, 1) \cdot F(p)$  eine Rahmung von  $\mathcal{M}$  definiert, die

einerseits zu  $F$  homotop ist, und andererseits auf  $\text{Im } \Psi$  mit  $d\Psi(E)$  übereinstimmt. Zusammen mit  $E$  induziert  $\bar{F}$  eine Rahmung auf  $\mathcal{M} + \mathbb{S}^n$ . q.e.d.

Sei  $n = i + j + 1$ ,  $\mathcal{M}$  eine Mannigfaltigkeit und  $\Psi: \underline{\mathbb{D}}^{j+1} \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine Anklebeeinbettung. Zu einer glatten Funktion  $\gamma: \mathbb{S}^{i-1} \rightarrow \text{SO}(j+1)$  lässt sich der Vektorbündelautomorphismus

$$\Gamma: \underline{\mathbb{D}}^{j+1} \rightarrow \underline{\mathbb{D}}^{j+1}, (x, y) \mapsto (x, \gamma(x) \cdot y)$$

definieren. Dann lässt sich die reparametrisierte Chirurgie mithilfe von  $\Psi\Gamma$  bilden. Besonders interessant ist hierbei der Effekt einer Reparametrisierung auf die Obstruktion der stabilen Parallelisierbarkeit. In folgendem Lemma bezeichne  $S^k: \text{SO}(m) \rightarrow \text{SO}(m+k)$  die  $k$ -fach iterierte Einhängung.

**Lemma 5.4.2**

Sei  $n = i + j + 1$ ,  $(\mathcal{M}^n, F)$  eine gerahmte Mannigfaltigkeit,  $\Psi: \underline{\mathbb{D}}^{j+1} \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine Anklebeeinbettung und  $\gamma: \mathbb{S}^i \rightarrow \text{SO}(j+1)$  glatt. Dann gilt die Gleichung

$$\mathfrak{o}(F, \Psi\Gamma) = \mathfrak{o}(F, \Psi) + S_*^{i+1}[\gamma] \in \pi_i(\text{SO}(n+1)). \quad (5.1)$$

*Beweis.* Für das Differential

$$d_{(p,q)}\Gamma: T_{(p,q)}(\mathbb{S}^i \times \underline{\mathbb{D}}^{j+1}) \rightarrow T_{(p,q)}(\mathbb{S}^i \times \underline{\mathbb{D}}^{j+1})$$

bezüglich der Standardbasis  $(e_k)_{1 \leq k \leq n} = E(p, q)$  gilt

$$J\Gamma(p, q) = M_{E(p,q)}^{E(p,q)}(d_{(p,q)}\Gamma) = \begin{pmatrix} I_i & J\gamma(p) \cdot q \\ 0 & \gamma(p) \end{pmatrix} \in \text{GL}^+(n).$$

Folglich gilt  $J\Gamma(p, 0) = S^i\gamma(p) \in \text{SO}(n)$ . Für  $p \in \mathbb{S}^i$  folgt

$$\begin{aligned} \sigma(F, \Psi\Gamma)(p) &\stackrel{\text{Def}}{=} M_{F(q)}^{E(p,0)}(S(d_{(p,0)}(\Psi\Gamma))) \\ &= M_{F(q)}^{E(p,0)}(S(d_{\Gamma(p,0)}\Psi) \circ S(d_{(p,0)}\Gamma)) \\ &= M_{F(q)}^{E(p,0)}(S(d_{(p,0)}\Psi)) \cdot M_{E(p,0)}^{E(p,0)}(S(d_{(p,0)}\Gamma)) \\ &= \sigma(F, \Psi)(p) \cdot S(J\Gamma(p, 0)) \\ &= \sigma(F, \Psi)(p) \cdot S^{i+1}\gamma(p). \end{aligned}$$

Dies zeigt  $\mathfrak{o}(F, \Psi\Gamma) = \mathfrak{o}(F, \Psi) + S_*^{i+1}[\gamma]$ . q.e.d.

Insbesondere hat Reparametrisierung mit  $[\gamma] \in \text{Ker } S_*^{i+1}$  keine Auswirkung auf stabile Parallelisierbarkeit.

**Satz 5.4.3**

Sei  $n = i + j + 1$ ,  $(\mathcal{M}^n, F)$  eine gerahmte Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{S}^i$  eine eingebettete Sphäre mit trivialem Normalenbündel. Gilt  $i \leq j$ , lässt sich an  $\mathcal{S}$  eine gerahmte Chirurgie durchführen.

*Beweis.* Sei  $\Psi: \mathbb{D}^{j+1} \rightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine beliebige Anklebeabbildung, sodass die Obstruktion  $\mathfrak{o}(F, \Psi) \in \pi_i(\mathrm{SO}(n+1))$  definiert ist. Aus der Annahme folgt, dass der von der  $i$ -fach iterierten Einhängung induzierte Homomorphismus

$$S_*^{i+1}: \pi_i(\mathrm{SO}(j+1)) \rightarrow \pi_i(\mathrm{SO}(n+1))$$

surjektiv ist, es existiert also ein  $[\gamma] \in \pi_i(\mathrm{SO}(j+1))$  mit einem glatten Repräsentanten  $\gamma$ , sodass für die Reparametrisierung  $\Gamma$  gemäß Lemma 5.4.2

$$\mathfrak{o}(F, \Psi\Gamma) = \mathfrak{o}(F, \Psi) + S_*^{i+1}[\gamma] = 0$$

gilt. Gemäß Lemma 5.4.1 ist eine Chirurgie an  $\mathcal{S}$  mittels  $\Psi\Gamma$  gerahmt. q.e.d.

**Satz 5.4.4**

Eine gerahmte Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}^n, F)$  mit  $n \geq 2k$  ist zu einer  $(k-1)$ -zusammenhängenden gerahmten Mannigfaltigkeit  $\chi$ -äquivalent.

*Beweis.* Es wird Induktion über  $k$  geführt. Durch 0-Chirurgie kann  $\mathcal{M}$  als zusammenhängend angenommen werden. Sei  $\mathcal{M}$  nun bereits  $(k-2)$ -zusammenhängend. Dann kann ein beliebiges Element in  $\pi_{k-1}(\mathcal{M})$  durch eine Einbettung  $\mathbb{S}^{k-1} \hookrightarrow \mathcal{M}$  repräsentiert werden. Da die Bildsphäre wegen Satz 4.2.1 ein triviales Normalenbündel besitzt, kann Chirurgie an ihr durchgeführt werden. Mithilfe von Satz 5.4.3 ergibt dies erneut eine gerahmte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}'$ . Wegen Lemma 5.3.2 ist  $\pi(\mathcal{M}')$  echt kleiner als  $\pi(\mathcal{M})$ . Endlich viele Schritte führen zu einer  $(k-1)$ -zusammenhängenden Mannigfaltigkeit. q.e.d.

**5.4.3 Gerahmte Henkel**

Die vorangegangenen Sätze gelten in ähnlicher Art und Weise, wenn mit Henkeln anstatt mit Chirurgie gearbeitet wird. Ein zu Lemma 5.4.1 nahezu analoger Beweis ergibt:

**Lemma 5.4.5**

Sei  $(\mathcal{W}, F)$  eine gerahmte Mannigfaltigkeit und  $\Psi: \mathbb{D}^{j+1} \hookrightarrow \partial\mathcal{W}$  eine Anklebe-einbettung und  $\tilde{\Psi}: \mathbb{D}^{j+1} \hookrightarrow \mathcal{W}$  eine Fortsetzung. Dann ist die Verklebung von  $(\mathcal{W}, F)$  mit  $(\mathbb{D}^n, E)$  genau dann rahmbar, wenn  $\mathfrak{o}(F|_{\partial\mathcal{W}}, \Psi) = 0$  gilt.

Die Obstruktionen der Rahmbarkeit von  $\mathcal{W} \rightarrow \mathbb{D}^{i+1}$  und  $\partial\mathcal{W} \rightarrow \mathbb{S}^i$  stimmen also überein. Eine Reparametrisierung ist nun eine Abbildung

$$\tilde{\Gamma}: \mathbb{D}^j \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{D}^j \times \mathbb{R}_+, (x, y, t) \mapsto (x, \gamma(x) \cdot y, t),$$

und setzt damit die Reparametrisierung der Chirurgie an  $\partial\mathcal{W}$  trivial fort. Für das folgende ist noch folgendes Lemma wichtig.

**Lemma 5.4.6**

Zu einer gerahmten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^n$  und  $i \leq j$  existiert eine gerahmte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}^{n+1}$  mit

$$\partial\mathcal{W} \cong \mathcal{M} \overset{\partial\mathcal{M}}{+} (\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^i).$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M} \times \mathbb{I}$  mit

$$\partial\mathcal{W} \cong \mathcal{M} \overset{\partial\mathcal{M}}{+} \mathcal{M}.$$

gemäß Lemma 5.2.1. Da die stabile Rahmung von  $\mathcal{M}$  eine Rahmung von  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$  induziert, induziert diese auch eine Rahmung von  $\mathcal{W}$ . Wegen  $i \leq j$  kann an  $\mathcal{W}$  derart ein gerahmter Henkel angebracht werden, dass die resultierende Mannigfaltigkeit dem Lemma genügt. q.e.d.

## 5.5 Probleme in gerader Dimension

Sei  $\mathcal{M}^{2k}$  eine  $(k-1)$ -zusammenhängende  $\pi$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 3$ , deren Rand entweder leer oder eine Homotopiesphäre ist. Um  $\mathcal{M}$  durch Chirurgie in eine  $k$ -zusammenhängende  $\pi$ -Mannigfaltigkeit zu überführen müssen einige Hindernisse beachtet werden. Einerseits muss das Normalenbündel einer eingebetteten  $k$ -Sphäre nicht unbedingt trivial sein, andererseits ist nicht jede Sphäre primitiv und vereinfacht somit nicht unbedingt die Homologie. In diesem Fall ist die mittlere Homologiegruppe  $H_k(\mathcal{M})$  jedoch frei, sodass keine Komplikationen durch Torsion auftreten.

**Lemma 5.5.1**

Sei  $\mathcal{M}^{2k}$  mit  $H_k(\partial\mathcal{M}) = H_{k-1}(\partial\mathcal{M}) = 0$  derart, dass  $H_{k-1}(\mathcal{M})$  frei ist. Dann ist auch  $H_k(\mathcal{M})$  frei.

*Beweis.* Aus der Annahme an den Rand folgt, dass  $q^*: H_k(\mathcal{M}) \rightarrow H_k(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M})$  ein Isomorphismus ist. Sei  $T_k$  die Torsionsuntergruppe von  $H_k(\mathcal{M})$ . Es folgt

$$H_k(\mathcal{M}) \overset{q^*}{\cong} H_k(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M}) \overset{\text{P.D.}}{\cong} H^k(\mathcal{M}) \overset{\text{U.K.}}{\cong} \text{Hom}(H_k(\mathcal{M}), \mathbb{Z}) \cong H_k(\mathcal{M})/T_k.$$

Somit muss  $T_k = 0$ , und  $H_k(\mathcal{M})$  frei sein. q.e.d.

### 5.5.1 Repräsentierende Sphären

Sei  $\mathcal{M}^{2k}$  eine  $(k-1)$ -zusammenhängende  $\pi$ -Mannigfaltigkeit und  $x \in H_k(\mathcal{M})$ . Gemäß dem Satz von Hurewicz ist

$$h: \pi_k(\mathcal{M}) \rightarrow H_k(\mathcal{M}), [\gamma] \mapsto \gamma_*([\mathbb{S}^k])$$

ein Isomorphismus. Es existiert also eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Funktion  $\varphi: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathcal{M}$  mit  $\varphi_*[\mathbb{S}^k] = x$ . Aufgrund eines Satzes von Haefliger

([Hae61] Satz 1) kann für  $k \geq 3$  angenommen werden dass  $\varphi$  eine Einbettung ist. Bezeichne die eingebettete Sphäre durch  $\mathcal{S}(x)$ . Diese ist für  $k \geq 4$  bis auf Isotopie eindeutig bestimmt, sodass sich die Homotopieklasse der Kupplungsfunktion des Normalenbündels von  $\mathcal{S}(x)$  in  $\mathcal{M}$  betrachten lässt. Für  $k \geq 4$  ist also die Funktion

$$\alpha: H_k(\mathcal{M}) \rightarrow \pi_{k-1}(\mathrm{SO}(k)), x \mapsto [\nu(\mathcal{S}(x))]$$

wohldefiniert. Aufgrund von  $\pi_2(\mathrm{SO}(3)) = 0$  lässt sich  $\alpha$  auch für  $k = 3$  definieren. Es folgt nun aus vorherigen Überlegungen 4.3.3, dass  $\alpha(x)$  ein ganzzahliges Vielfaches der Kupplungsfunktion des Normalenbündels ist, und

$$\alpha(x) \in \mathrm{Ker} S_* \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 2m \\ \mathbb{Z}_2 & k = 2m + 1 \notin \{3, 7\} \\ 0 & k \in \{3, 7\} \end{cases} \quad (5.2)$$

gilt. Die Entscheidung, wann das Normalenbündel trivial ist, hängt also von der Parität von  $k$  ab.

### 5.5.2 Symplektische Basen

**Definition 5.5.1** (Schwach symplektische Basis)

Sei  $M^{2k}$  ein freier  $R$ -Modul. Eine Basis  $(e_i, f_i)_{1 \leq i \leq k}$  von  $M$ , heiße schwach symplektisch bezüglich einer Bilinearform  $\beta: M \otimes M \rightarrow R$ , falls

$$\beta(e_i, f_j) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \beta(e_i, e_j) = \beta(f_i, f_j) = 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

Ist  $\beta$  schiefsymmetrisch, heiße sie symplektisch. Die Signifikanz dieser Basen liegt unter anderem in folgendem Satz.

#### Satz 5.5.2

Sei  $k \geq 3$  und  $\mathcal{M}^{2k}$  eine  $(k-1)$ -zusammenhängende, gerahmte Mannigfaltigkeit, deren Rand leer oder eine Homotopiesphäre ist, sodass  $H_k(\mathcal{M})$  eine schwach symplektische Basis  $e_i, f_i$  mit  $\alpha(e_i) = 0$  besitzt. Dann kann  $H_k(\mathcal{M})$  durch gerahmte Chirurgie vernichtet werden.

*Beweis.* Da  $e_1$  ein triviales Normalenbündel besitzt, kann Chirurgie an  $e_1$  durchgeführt werden. Sei  $\mathcal{S}$  die Anklebesphäre und  $\mathcal{M}'$  die resultierende Mannigfaltigkeit. Da die  $e_i, f_i$  eine schwach symplektische Basis bilden, ist  $e_1$  primitiv, und es gilt für

$$\varphi: H_i(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x \cdot e_1$$

gerade  $\mathrm{Ker} \varphi = H_i(\mathcal{M}) / \langle f_1 \rangle$ . Aus Satz 5.3.4 folgt

$$H_i(\mathcal{M}') \cong \mathrm{Ker} \varphi / \langle e_1 \rangle \cong H_i(\mathcal{M}) / \langle e_1, f_1 \rangle.$$

Über Transversalität kann angenommen werden, dass die Bilder  $e'_i, f'_i \in H_i(\mathcal{M}')$  durch Sphären in  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}$  repräsentiert werden, sodass sich die Schnittzahlen nicht ändern und die  $e'_i, f'_i$  erneut eine symplektische Basis mit  $\alpha(e'_i) = 0$  bilden. Die Aussage folgt rekursiv. q.e.d.

Es wird im Folgenden noch eine weitere symplektische Basis  $e_i, f_i \in H_k(\partial\mathcal{W})$  benötigt werden, wobei alle  $e_i$  im Kern der Inklusion  $\partial\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{W}^{2k+1}$  liegen. Hierbei sei stets an den Torus erinnert. Es gilt  $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , wobei die Erzeuger eine symplektische Basis bilden. Eines der Elemente liegt im Kern der Inklusion  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  des Torus als Rand des Volltorus. Es wird folgendes Lemma benötigt. Im folgenden Satz bezeichne  $\text{Ad}$  zu einem Körper  $\mathbb{K}$  die Abbildung

$$\text{Ad}: H_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}(H_{n-i}(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}), \mathbb{K}), x \mapsto x \cdot (-).$$

**Lemma 5.5.3**

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $\mathcal{W}^{2k+1}$  eine Mannigfaltigkeit,

$$A_i := \text{Ker}(\iota_*: H_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \rightarrow H_i(\mathcal{W}; \mathbb{K}))$$

und  $R: \text{Hom}(H_{n-i}(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}), \mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}(A_{n-i}, \mathbb{K})$  die Einschränkung, dann ist der Kern von  $F := R \circ \text{Ad}$  gerade  $A_i$ .

*Beweis.* Ein  $x \in H_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K})$  liegt genau dann in  $\text{Ker } F$ , wenn  $(A_{n-i}) \cdot x = 0$  ist. Betrachte das bis auf Vorzeichen kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-i}(\mathcal{W}; \mathbb{K}) & \xrightarrow{\iota^*} & H^{n-i}(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) & \xrightarrow{\delta} & H^{n-i+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \\ & & \downarrow \cap [\partial\mathcal{W}] & & \downarrow \cap [\mathcal{W}] \\ & & H_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) & \xrightarrow{\iota_*} & H_i(\mathcal{W}; \mathbb{K}) \end{array}$$

Für  $x \in H_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K})$  gilt

$$(A_{n-i}) \cdot x = \langle (\text{Ker } \iota_*)^*, x \rangle = \langle \text{Im } \iota^*, x \rangle = \langle H^{n-i}(\mathcal{W}; \mathbb{K}), \iota_* x \rangle.$$

Also liegt  $x$  genau dann im Kern von  $F$ , wenn  $\langle H^{n-i}(\mathcal{W}; \mathbb{K}), \iota_* x \rangle = 0$  ist. Da  $\mathbb{K}$  ein Körper und die Kronecker-Paarung nicht degeneriert ist, ist dies zu  $x \in \text{Ker } \iota_* = A_i$  äquivalent. q.e.d.

Die Beweisidee entstammt hierbei [Die08] Proposition 18.7.5. Es ergibt sich somit  $\dim_{\mathbb{K}} A_{n-i} = \dim_{\mathbb{K}} H_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) - \dim_{\mathbb{K}} A_i$ , insbesondere also

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) = 2 \dim_{\mathbb{K}} A_k = 2 \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \iota_*. \quad (5.3)$$

Beachte, dass die Forderung, dass  $\mathbb{K}$  ein Körper nötig ist, da  $H_k(\mathcal{W})$  Torsion aufweisen könnte. In diesem Fall könnte die Kronecker-Paarung degeneriert sein. Wird Torsion herausgeteilt, gilt der vorherige Satz auch für  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten. Siehe etwa [Hat02] Proposition 3.38. Für die Abbildung

$$\iota'_*: H_k(\partial\mathcal{W}) \xrightarrow{\iota_*} H_k(\mathcal{W}) \xrightarrow{p} H_k(\mathcal{W})/T_k(\mathcal{W})$$

gilt also gerade  $2 \text{Rang Ker } \iota'_* = \text{Rang } H_k(\partial\mathcal{W})$ . Da das Herausteilen der Torsion keinen Einfluss auf den Rang hat, gilt  $\text{Rang Ker } \iota_* = \text{Rang Ker } \iota'_*$  und

$$\text{Rang } H_k(\partial\mathcal{W}) = 2 \text{Rang Ker } \iota_*. \quad (5.4)$$

**Satz 5.5.4**

Sei  $k$  ungerade und  $\mathcal{M}^{2k}$  eine Mannigfaltigkeit mit  $H_k(\partial\mathcal{M}) = H_{k-1}(\partial\mathcal{M}) = 0$ .  
 Dann existiert eine symplektische Basis von  $H_k(\mathcal{M})$  mit  $e_i \in \text{Ker } \iota_*$ .

*Beweis.* Da  $k$  ungerade ist, besitzt  $H_k(\mathcal{M})$  geraden Rang, und es gilt  $x \cdot x = 0$  für alle  $x \in H_k(\mathcal{M})$ . Sei  $e_1 \in \text{Ker } \iota_*$ . Da die Schnittform unimodular ist, existiert ein  $f_1 \in H_k(\mathcal{M})$  mit  $e_1 \cdot f_1 = 1$ . Da die Schnittform unimodular ist, spaltet  $f_i$  von  $H_k(\mathcal{M})$  und  $e_i$  von  $\text{Ker } \iota_*$  ab, sodass die Aussage rekursiv folgt.      q.e.d.

## Kapitel 6

# Chirurgie in ungerader Dimension

Sei  $\mathcal{M}^{2k+1}$  eine  $\pi$ -Mannigfaltigkeit, deren Rand entweder leer oder eine Homotopiesphäre sei. Das Normalenbündel einer jeden eingebetteten  $k$ -Sphäre ist aus Dimensionsgründen 4.2.1 trivial, sodass stets Chirurgie durchgeführt werden kann. Leider ist  $H_k(\mathcal{M})$  in diesem Fall nicht zwingendermaßen frei. Der freie Anteil der Gruppe  $H_k(\mathcal{M})$  ist aufgrund des folgenden Lemmas kein Problem.

### Lemma 6.0.1

*Sei  $\mathcal{M}^{2k+1}$  eine gerahmte Mannigfaltigkeit, sodass  $H^k(\partial\mathcal{M}) = 0$  ist. Dann kann  $H_k(\mathcal{M})$  durch gerahmte Chirurgie auf ihre Torsionsgruppe reduziert werden.*

*Beweis.* Wenn  $\text{Rang } H_k(\mathcal{M}) = 0$  gilt, ist die Aussage trivial. Es existiere also ein Generator  $g$  eines direkten  $\mathbb{Z}$ -Summanden von  $H_k(\mathcal{M})$  und ein Homomorphismus  $f: H_k(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $f(g) = 1$ . Aus dem Satz über universelle Koeffizienten folgt, dass  $H^k(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}(H_k(\mathcal{M}), \mathbb{Z})$  surjektiv ist, sodass ein  $x \in H^k(\mathcal{M})$  mit  $f = \langle x, - \rangle$  existiert. Aus der Exaktheit der Folge

$$H^k(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M}) \xrightarrow{q^*} H^k(\mathcal{M}) \rightarrow H^k(\partial\mathcal{M}) = 0$$

folgt, dass auch ein  $h^* \in H^k(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M})$  mit  $q^*h^* = x$  existiert. Für das Duale  $h \in H_{k+1}(\mathcal{M})$  folgt

$$h \cdot g \stackrel{(2.3)}{=} \langle q^*h^*, g \rangle = \langle x, g \rangle = f(g) = 1.$$

Folglich ist  $g$  primitiv. Da  $g$  von einer eingebetteten Sphäre mit trivialem Normalenbündel repräsentiert werden kann, führt Chirurgie an  $g$  gemäß Lemma 5.3.3 zu einer Vereinfachung der Homologie. Die Aussage folgt rekursiv. q.e.d.

Es kann somit angenommen werden, dass  $H_k(\mathcal{M})$  eine Torsionsgruppe ist. Ob eine Chirurgie die Homologie vereinfacht hängt nun von der Parität von  $k$  ab.



## 6.1 Die Berechnung von $P^{4m+1}$

Der am einfachsten zu behandelnde Fall tritt ein, wenn  $k$  gerade ist. Dann ist der Effekt einer Chirurgie an einem Torsionselement, dass dieses durch ein zyklisch unendliches Element ersetzt wird. Somit wird die Gruppe zunächst zwar größer, die Torsionsgruppe wird jedoch definitiv kleiner. Da zyklisch unendliche Elemente mithilfe von Lemma 6.0.1 leicht vernichtet werden können, kann auf diese Art und Weise immer eine  $k$ -zusammenhängende  $\pi$ -Mannigfaltigkeit erhalten werden. Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Bezeichne

$$b_i(\mathcal{W}; \mathbb{K}) := \dim_{\mathbb{K}} H_i(\mathcal{W}; \mathbb{K}) \quad \text{und} \quad b_i(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) := \dim_{\mathbb{K}} H_i(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K}).$$

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  ist dies einfach die  $i$ -te Betti-Zahl von  $\mathcal{W}$ . Beachte, dass aus der Poincaré-Dualität bereits  $b_i(\mathcal{W}; \mathbb{K}) = b_{2\ell-i}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K})$  folgt. Betrachte zunächst folgenden Hilfssatz.

### Lemma 6.1.1

Die Schnittpaarung einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}^{2\ell}$  mit Werten in einem Körper  $\mathbb{K}$  besitzt Rang

$$r \equiv \chi(\mathcal{W}) + \sum_{i=0}^{\ell-1} b_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \pmod{2}. \quad (6.1)$$

*Beweis.* Der Rang der Schnittpaarung ist gerade der Rang der Abbildung

$$\text{Ad}: H_{\ell}(\mathcal{W}; \mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}(H_{\ell}(\mathcal{W}; \mathbb{K}), \mathbb{K}),$$

die gemäß Lemma 2.2.1 gleich der Komposition

$$H_{\ell}(\mathcal{W}; \mathbb{K}) \xrightarrow{q_*} H_{\ell}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \xrightarrow{\text{P.D.}} H^{\ell}(\mathcal{W}; \mathbb{K}) \xrightarrow{\text{U.K.}} \text{Hom}(H_{\ell}(\mathcal{W}; \mathbb{K}), \mathbb{K})$$

ist. Da die hinteren beiden Abbildungen Isomorphismen sind, ist der Rang von  $\text{Ad}$  einfach der Rang von  $q_*$ . Betrachte die lange exakte Folge

$$\cdots \rightarrow H_{\ell}(\mathcal{W}; \mathbb{K}) \xrightarrow{q_*} H_{\ell}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \xrightarrow{\partial} H_{\ell-1}(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \xrightarrow{\iota_*} H_{\ell-1}(\mathcal{W}; \mathbb{K}) \rightarrow \cdots$$

von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Aus dem Rangsatz folgt

$$\text{Rang } q_* \stackrel{\text{Def.}}{=} \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } q_* = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \partial = \dim_{\mathbb{K}} H_{\ell}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) - \text{Rang } \partial,$$

sodass sich induktiv ergibt, dass  $\text{Rang } q_*$  die alternierende Summe der Dimensionen aller Vektorräume rechts von  $H_{\ell}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K})$  ist. Modulo zwei ist also

$$\text{Rang } q_* \equiv \sum_{i=0}^{\ell-1} b_i(\mathcal{W}; \mathbb{K}) + \sum_{i=0}^{\ell-1} b_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) + \sum_{i=0}^{\ell} b_i(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \pmod{2}.$$

Wegen  $b_i(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) = b_{2\ell-i}(\mathcal{W}; \mathbb{K})$  folgt weiter

$$\text{Rang } q_* \equiv \sum_{i=0}^{2\ell} b_i(\mathcal{W}; \mathbb{K}) + \sum_{i=0}^{\ell-1} b_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \equiv \chi(\mathcal{W}) + \sum_{i=0}^{\ell-1} b_i(\partial\mathcal{W}; \mathbb{K}) \pmod{2}.$$

q.e.d.

**Lemma 6.1.2**

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $\mathcal{M}^{2k+1}$  eine  $(k-1)$ -zusammenhängende, geschlossene Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{W}^{2k+2} := \mathcal{M} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{D}^{k+1}$ , sodass die Schnittform von  $\mathcal{W}$  geraden Rang besitzt. Dann gilt  $b_k(\mathcal{M}; \mathbb{K}) \neq b_k(\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^k; \mathbb{K})$ .

*Beweis.* Setze  $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^k$ . Die Euler-Charakteristik einer kompakten Mannigfaltigkeit ungerade Dimension (mit oder ohne Rand) ist gleich null. Da  $\mathcal{W}$  homotopieäquivalent zu  $\mathcal{M}$  mit einer  $(k+1)$ -Zelle ist, gilt also

$$\chi(\mathcal{W}) = \chi(\mathcal{M}) + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}. \quad (6.2)$$

Da die Schnittpaarung auf  $\mathcal{W}$  geraden Rang besitzt, folgt

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(6.1)}{\equiv} \chi(\mathcal{W}) + \sum_{i=0}^k (b_i(\mathcal{M}; \mathbb{K}) + b_i(\mathcal{M}'; \mathbb{K})) \pmod{2} \\ &\stackrel{(6.2)}{\equiv} 1 + \sum_{i=0}^k b_i(\mathcal{M}; \mathbb{K}) + \sum_{i=0}^k b_i(\mathcal{M}'; \mathbb{K}) \pmod{2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Da  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  jeweils  $(k-1)$ -zusammenhängend sind, zeigt dies

$$b_k(\mathcal{M}; \mathbb{K}) = \sum_{i=1}^k b_i(\mathcal{M}; \mathbb{K}) \stackrel{(6.3)}{\neq} \sum_{i=1}^k b_i(\mathcal{M}'; \mathbb{K}) = b_k(\mathcal{M}'; \mathbb{K}).$$

q.e.d.

**Korollar 6.1.3**

Ist  $k$  gerade und  $\mathcal{M}^{2k+1}$  eine Mannigfaltigkeit, deren Rand leer oder eine Homotopiesphäre ist, verändert eine  $k$ -Chirurgie die  $k$ -te Betti-Zahl.

*Beweis.* Ist  $\mathcal{M}$  geschlossen, folgt dies aus Lemma 6.1.2, da die Schnittform auf  $\mathcal{M} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{D}^{k+1}$  schiefsymmetrisch ist, und deshalb geraden Rang besitzt. Sei nun  $\partial\mathcal{M}$  eine Homotopiesphäre. Betrachte die geschlossene Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{N} := \mathcal{M} \overset{\partial\mathcal{M}}{+} \mathcal{M}.$$

Dann gelten

$$H_k(\mathcal{N}) \cong H_k(\mathcal{M}) \oplus H_k(\mathcal{M}) \quad \text{und} \quad H_k(\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{S}^k) \cong H_k(\mathcal{M}) \oplus H_k(\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^k).$$

Also  $b_k(\mathcal{N}) = 2b_k(\mathcal{M})$  und  $b_k(\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{S}^k) = b_k(\mathcal{M}) + b_k(\mathcal{M}')$ . Da der Satz für geschlossene Mannigfaltigkeiten bereits gezeigt wurde, folgt

$$2b_k(\mathcal{M}) \neq b_k(\mathcal{M}) + b_k(\mathcal{M}') \quad \text{also} \quad b_k(\mathcal{M}) \neq b_k(\mathcal{M}').$$

q.e.d.

Damit sind bereits alle notwendigen Werkzeuge gegeben um  $P^{4m+1}$  zu berechnen.

**Satz 6.1.4**

Eine gerahmte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^{4m+1}$ , deren Rand leer oder eine Homotopiesphäre ist, ist zu einer  $k$ -zusammenhängenden gerahmten Mannigfaltigkeit  $\chi$ -äquivalent.

*Beweis.* Aus Lemma 6.0.1 folgt, dass  $\mathcal{M}^{2k}$  als  $(k-1)$ -zusammenhängend und  $H_k(\mathcal{M})$  als endlich angenommen werden kann, also Betti-Zahl null besitzt. Ist  $H_k(\mathcal{M}) = 0$  ist die Aussage trivial. Es existiere also ein nicht-triviales Element in  $H_k(\mathcal{M})$ , welches durch eine eingebettete Sphäre  $\mathcal{S}$  repräsentiert wird, die gemäß Satz 4.2.1 ein triviales Normalenbündel besitzt. Eine Chirurgie an  $\mathcal{S}$  ergibt gemäß Korollar 6.1.3 eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}'$  mit Betti-Zahl ungleich null. Da

$$H_k(\mathcal{M})/\langle [e \mid \mathcal{M}] \rangle \cong H_k(\mathcal{M}')/\langle [m \mid \mathcal{M}'] \rangle$$

gilt, die linke Gruppe endlich ist und  $H_k(\mathcal{M}')$  mindestens einen direkten  $\mathbb{Z}$ -Summanden besitzt, muss  $\langle [m \mid \mathcal{M}'] \rangle \cong \mathbb{Z}$  sein. Dies zeigt, dass die Torsionsuntergruppe von  $H_k(\mathcal{M}')$  zu einer Untergruppe von  $H_k(\mathcal{M})/\langle [e \mid \mathcal{M}] \rangle$  isomorph ist. Da  $\mathcal{M}'$  erneut durch Chirurgie in eine Mannigfaltigkeit überführt werden kann, deren  $k$ -te Homologiegruppe die Torsionsuntergruppe von  $H_k(\mathcal{M}')$  ist, kann  $H_k(\mathcal{M})$  durch zwei Chirurgen durch eine definitiv kleinere endliche Gruppe ersetzt werden. Die Aussage folgt rekursiv. q.e.d.

**Korollar 6.1.5**

Es gilt  $P^{4m+1} \cong 0$ .

## 6.2 Die Berechnung von $P^{4m+3}$

Sei  $k$  nun ungerade und  $\mathcal{M}^{2k}$  eine  $(k-1)$ -zusammenhängende  $\pi$ -Mannigfaltigkeit, sodass  $H_k(\mathcal{M})$  endlich ist. Sei  $x \in H_k(\mathcal{M})$  und  $\mathcal{S}$  eine repräsentierende Sphäre. Aus Dimensionsgründen 4.2.1 ist das Normalenbündel von  $\mathcal{S} \subseteq \mathring{\mathcal{M}}$  trivial, sodass eine gerahmte Chirurgie an  $\mathcal{S}$  durchgeführt werden kann. Das Problem in dieser Dimension besteht darin, dass eine derartige Chirurgie die Homologie nicht zwingendermaßen vereinfacht. Um dem beizukommen ist eine weitere sorgsame Reparametrisierung vonnöten.

**Effekt einer Reparametrisierung auf  $H_k(\mathcal{M}_0)$** 

Sei  $\Phi: \mathbb{D}^{k+1} \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine Anklebeeinbettung,  $\mathcal{D} := \text{Im } \Phi$  und  $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}}$ . Sei  $\mathcal{M}'$  die Chirurgie und  $\mathcal{M}'_\gamma$  die mit einem  $\gamma: \mathbb{S}^k \rightarrow \text{SO}(k+1)$  reparametrisierte Chirurgie. Beachte, dass  $\partial \mathcal{D} \cong \mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^k$  gilt. Seien  $e, m \in H_k(\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^k)$  die Fundamentalklassen eines Äquators  $\mathbb{S}^k \times y$  und eines Meridians  $x \times \mathbb{S}^k$ . Sei

$$\bar{\Gamma}: \mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^k, (x, y) \mapsto (x, \gamma(x) \cdot y)$$

die zugehörige Reparametrisierungsabbildung. Dann folgt über den Satz von Hurewicz, dass in  $H_k(\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^k)$  die Gleichungen

$$e^\gamma := \bar{\Gamma}_* e = e + \psi_*([\gamma]) m \quad \text{und} \quad \bar{\Gamma}_* m = m. \quad (6.4)$$

gelten. Es folgt, dass dies auch für die Inkludierten  $e_0$ ,  $e_0^\gamma$  und  $m_0$  in  $H_k(\mathcal{M}_0)$  gilt. Wie zuvor kann stets eine Reparametrisierung mit einem Element des Kernes der iterierten Einhängung  $S_*^{k+1}$  vorgenommen werden. Aus Stabilisierungsgründen ist dies gerade die rechte Abbildung in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_k(\mathrm{SO}(k)) & & \\
 & & \downarrow S_* & & \\
 \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{k+1}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_k(\mathrm{SO}(k+1)) & \xrightarrow{S_*} & \pi_k(\mathrm{SO}(k+2)) \\
 & & \downarrow \psi_* & & \\
 & & \pi_k(\mathbb{S}^k) & & 
 \end{array}$$

Erneut wird  $\mathrm{Ker} S_*$  von dem Tangentialbündel der Sphäre erzeugt, und ist für gerade  $k$  zyklisch unendlich. Diese wird unter  $\psi_*$  auf das Doppelte eines Erzeugers abgebildet. Somit kann  $\psi_*[\gamma]$  als jedes beliebige Vielfache von 2 gewählt werden.

#### Effekt einer Reparametrisierung auf den Rang von $H_k(\mathcal{M}')$

Seien  $e' \in H_k(\mathcal{M})$ ,  $m' \in H_k(\mathcal{M}')$  und  $m'_\gamma \in H_k(\mathcal{M}'_\gamma)$ . Sei  $\ell$  der Rang von  $e'$ . Dann folgt aus der exakten Folge

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda} H_k(\mathcal{M}_0) \rightarrow H_k(\mathcal{M}) \rightarrow 0,$$

dass  $\ell e_0 \in \mathrm{Im} \lambda$  liegt. Dieses Bild besteht gerade aus den Vielfachen von  $m_0$ , also existiert eine Abhängigkeit

$$\ell e_0 + \ell' m_0 = 0.$$

Hierbei ist  $\ell'$  der Rang von  $m'$ . Wegen  $e_0^\gamma = e_0 + \psi_*([\gamma])m_0$  folgt

$$0 = \ell e_0 + \ell' m_0 = \ell(e_0^\gamma - \psi_*([\gamma])m_0) + \ell' m_0 = \ell e_0^\gamma + (\ell' - \ell \psi_*([\gamma]))m_0.$$

Folglich besitzt  $m'_\gamma$  den Rang  $|\ell' - \ell \psi_*([\gamma])|$ . Da weiterhin

$$H_k(\mathcal{M}'_\gamma)/\langle m'_\gamma \rangle \cong H_k(\mathcal{M})/\langle e' \rangle$$

gilt, ist  $H_k(\mathcal{M}'_\gamma)$  kleiner als  $H_k(\mathcal{M})$ , wenn  $0 \leq \mathrm{Rang} m'_\gamma < \mathrm{Rang} e'$  also

$$0 \leq |\ell' - \ell \psi_*([\gamma])| < \ell$$

ist. Da  $[\gamma] \in \mathrm{Ker} S_*$  so gewählt werden kann, dass  $\psi_*([\gamma])$  eine beliebige gerade Zahl ist, kann dies, insofern  $\ell'$  nicht von  $\ell$  geteilt wird, stets möglich. Um das Teilungsverhalten von  $\ell'$  und  $\ell$  zu untersuchen wird die Verschlingungszahl benötigt.

**Die Verschlingungszahl**

Sei  $\mathcal{M}^n$  eine orientierte Mannigfaltigkeit und  $n = i + j + 1$ . Die kurze exakte Folge von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow C_*(\mathcal{M}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p} C_*(\mathcal{M}; \mathbb{Q}) \rightarrow C_*(\mathcal{M}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

induziert eine lange exakte Folge

$$H_{i+1}(\mathcal{M}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_i(\mathcal{M}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} H_i(\mathcal{M}; \mathbb{Q}) \rightarrow H_i(\mathcal{M}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Seien  $x \in H_i(\mathcal{M})$  und  $y \in H_j(\mathcal{M})$  endlichen Ranges. Dann gilt  $p_*x = 0$ , sodass  $x$  zu einem  $\mu \in H_{i+1}(\mathcal{M}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  mit  $\partial\mu = x$  zurückgezogen werden kann. Definiere die **Verschlingungszahl** (Linking number) von  $x$  und  $y$  als Schnitzzahl repräsentierender Ketten von  $x$  mit  $\mu$ . Die derart erhaltene Bilinearform ist nicht entartet, und es gilt

$$L(x, y) + (-1)^{ij} L(y, x) = 0.$$

**Lemma 6.2.1**

Sei  $k > 1$  ungerade und  $\mathcal{M}^{2k+1}$  eine Mannigfaltigkeit, sodass  $H_k(\mathcal{M})$  endlich ist. Wird  $x \in H_k(\mathcal{M})$  vom Rang  $\ell$  durch Chirurgie an  $x$  durch ein Element vom Rang  $\ell'$  ersetzt, gilt  $\ell'/\ell = \pm L(x, x) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Sei  $z_1, z_2 \in C_k(\mathcal{M}_0)$  Zyklen, die  $e_0$  und  $m_0$  repräsentieren. Wegen  $0 = \ell e_0 + \ell' m_0$ , existiert eine Kette  $c \in C_{k+1}(\mathcal{M}_0)$  mit

$$\partial c = \ell z_1 + \ell' z_2.$$

Sei  $c_1 \in C_{k+1}(\mathcal{M})$  der durch  $\Phi(x \times \mathbb{D}^{k+1})$  definierte Zyklus mit  $\partial c_1 = z_2$ . Ist  $c_2$  jene durch  $\Phi(\mathbb{S}^k \times 0)$  definierte Kette, die  $e$  repräsentiert, so gilt

$$\partial(c - \ell' c_1)/\ell = z_1 \quad \text{und somit} \quad L(e, e) = (c - \ell' c_1)/\ell \cdot c_2,$$

Da  $c_2$  und  $c$  disjunkt sind gilt  $c \cdot c_2 = 0$ , und da  $c_1$  und  $c_2$  genau einen Schnittpunkt in  $(x, 0)$  besitzen gilt  $c_1 \cdot c_2 = \mp 1$ . Es folgt  $L(e, e) = \mp \ell'/\ell$ . q.e.d.

**Korollar 6.2.2**

Sei  $k > 1$  ungerade und  $\mathcal{M}^{2k+1}$  eine gerahmte Mannigfaltigkeit, sodass  $H_k(\mathcal{M})$  endlich ist. Existiert ein  $x \in H_k(\mathcal{M})$  mit  $L(x, x) \neq 0$ , kann  $H_k(\mathcal{M})$  durch eine gerahmte Chirurgie verkleinert werden.

Auf diese Art und Weise kann  $H_k(\mathcal{M})$  so lange weiter verkleinert werden, bis keine  $x$  mit  $L(x, x) \neq 0$  mehr existieren. Dann besitzt die Gruppe wegen folgendem Lemma jedoch eine besonders einfache Struktur.

**Lemma 6.2.3**

Sei  $k > 1$  ungerade und  $\mathcal{M}^{2k+1}$  eine Mannigfaltigkeit, sodass  $H_k(\mathcal{M})$  endlich ist. Gilt  $L(x, x) = 0$  für alle  $x \in H_k(\mathcal{M})$ , ist  $H_k(\mathcal{M}) \cong \mathbb{Z}_2^{\oplus s}$ .

*Beweis.* Aus  $L(\varepsilon, \delta) + (-1)^k L(\delta, \varepsilon) = 0$  folgt, dass die Verschlingungspaarung für  $i = j$  symmetrisch ist. Da  $L(x, x) = 0$  für alle  $x \in H_k(\mathcal{M})$  gilt, ergibt sich

$$0 = L(\varepsilon + \delta, \varepsilon + \delta) = L(\varepsilon, \varepsilon) + 2L(\varepsilon, \delta) + L(\delta, \delta) = 2L(\varepsilon, \delta).$$

Da die Verschlingungspaarung nicht entartet ist, folgt aus  $L(2\varepsilon, \delta) = 0$  für alle  $\delta$  bereits  $2\varepsilon = 0$ . q.e.d.

**Lemma 6.2.4**

Sei  $k > 1$  ungerade. Ist  $\mathcal{M}^{2k+1}$  eine geschlossene  $(k-1)$ -zusammenhängende gerahmte Mannigfaltigkeit mit  $H_k(\mathcal{M}) \cong \mathbb{Z}_2^{\oplus s}$ , kann eine gerahmte Chirurgie an  $\mathcal{M}$  durchgeführt werden, sodass

$$H_k(\mathcal{M}') \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{\oplus(s-2)} \quad \text{oder} \quad H_k(\mathcal{M}') \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2^{\oplus(s-2)} \quad (6.5)$$

ist.

*Beweis.* Sei  $x \in H_k(\mathcal{M})$ . Setze  $\mathcal{W} := \mathcal{M} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{D}^{k+1}$  und  $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^k$  so dass die Anklebesphäre  $x$  repräsentiere. Für das  $k$ -te Steenrod-Quadrat gilt

$$\text{Sq}^k : H^{k+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2k+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}; \mathbb{F}_2) \cong H_1(\mathcal{W}; \mathbb{F}_2) = 0$$

sodass aus der Adem-Beziehung  $\text{Sq}^{k+1} = \text{Sq}^1 \smile \text{Sq}^k$  bereits  $\text{Sq}^{k+1} = 0$  folgt. Dies zeigt für alle  $x \in H_{k+1}(\mathcal{W}; \mathbb{F}_2)$  die Gleichung

$$x \cdot x = \langle x^* \smile x^*, [\mathcal{W}] \rangle = \langle \text{Sq}^{k+1}(x^*), [\mathcal{W}] \rangle = 0,$$

sodass die Schnittform auf  $H_{k+1}(\mathcal{W}; \mathbb{F}_2)$  geraden Rang besitzt. Gemäß Lemma 6.1.2 folgt, dass  $\dim_{\mathbb{F}_2} H_k(\mathcal{M}'; \mathbb{F}_2) \neq \dim_{\mathbb{F}_2} H_k(\mathcal{M}; \mathbb{F}_2)$  gilt. Eine Chirurgie kann wie zuvor so reparametrisiert werden, dass  $x$  durch ein Element  $x' \in H_k(\mathcal{M}')$  geraden Ranges  $\ell'$  mit  $0 \leq \ell' \leq 2$  ersetzt wird. Somit ist  $\ell'$  entweder null oder zwei. Aus

$$H_k(\mathcal{M}')/\langle x' \rangle \cong H_k(\mathcal{M})/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\oplus(s-1)}$$

folgt die Existenz einer kurzen exakten Folge

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{\ell'} \rightarrow H_k(\mathcal{M}') \rightarrow \mathbb{Z}_2^{\oplus(s-1)} \rightarrow 0.$$

Beachte  $\mathbb{Z}_0 \cong \mathbb{Z}$ . Würde diese spalten, gälte  $H_k(\mathcal{M}'; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2^{\oplus(s-1)}$ , was ein Widerspruch gegen den Fakt wäre, dass die Chirurgie die  $\mathbb{F}_2$ -Dimension verändert. Folglich bleiben lediglich die Möglichkeiten aus Gleichung 6.5. q.e.d.

**Lemma 6.2.5**

Sei  $k > 1$  ungerade und  $\mathcal{M}^{2k+1}$  eine  $(k-1)$ -zusammenhängende gerahmte Mannigfaltigkeit, deren Rand leer oder eine Homotopiesphäre ist sodass  $H_k(\mathcal{M})$  endlich ist. Existiert **kein**  $x \in H_k(\mathcal{M})$  mit  $L(x, x) \neq 0$ , kann  $H_k(\mathcal{M})$  trotzdem durch eine gerahmte Chirurgie verkleinert werden.

*Beweis.* Da  $L(x, x) = 0$  für alle  $x \in H_k(\mathcal{M})$  gilt, folgt aus Lemma 6.2.3  $H_k(\mathcal{M}) \cong \mathbb{Z}_2^{\oplus s}$ . Dann ist

$$\mathcal{N} := \mathcal{M} \overset{\partial \mathcal{M}}{+} \mathcal{M} \quad \text{mit} \quad H_k(\mathcal{N}) \cong H_k(\mathcal{M}) \oplus H_k(\mathcal{M}) \cong \mathbb{Z}_2^{\oplus 2s}$$

eine geschlossene Mannigfaltigkeit. Gemäß Lemma 6.2.4 kann an  $\mathcal{N}$  eine Chirurgie durchgeführt werden, sodass

$$\mathbb{Z}_2^{\oplus s} \oplus H_k(\mathcal{M} \multimap \mathbb{S}^k) \cong H_k(\mathcal{N} \multimap \mathbb{S}^k) \cong \mathbb{Z}_2^{\oplus s} \oplus \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{\oplus(s-2)} \\ \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2^{\oplus(s-2)} \end{cases}$$

gilt. Da  $\mathbb{Z}_2^{\oplus s}$  gekürzt werden kann, ist  $H_k(\mathcal{M} \multimap \mathbb{S}^k)$  entweder zu  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2^{\oplus(s-2)}$  oder zu  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{\oplus(s-2)}$  isomorph. Im ersten Fall ergibt dies direkt eine kleinere Gruppe als  $H_k(\mathcal{M})$ , im zweiten Fall muss vorher der direkte  $\mathbb{Z}$ -Summand mithilfe von Lemma 6.0.1 eliminiert werden. q.e.d.

Aus Korollar 6.2.2 und Lemma 6.2.5 folgt zusammen:

**Korollar 6.2.6**

Es gilt  $P^{4m+3} = 0$ .

## Kapitel 7

# Die Berechnung von $P^{4m}$

Sei  $k$  gerade und  $\mathcal{M}^{2k}$  eine  $4m$ -dimensionale  $\pi$ -Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine *topologische* Kobordismus-Invariante die genutzt werden kann um zu entscheiden ob eine Chirurgie an einer  $k$ -Sphäre die Homologie vereinfacht. Zudem existiert mit Satz 7.1.3 eine relativ einfache Methode um zu entscheiden, wann das Normalenbündel einer eingebetteten Sphäre trivial ist. In Folge dessen, ist es relativ einfach  $P_{4m}$  zu berechnen. Im Gegensatz dazu steht die Berechnung von  $\partial P_{4m}$ , die sich als deutlich aufwändiger erweist, und einige Kenntnisse zu *fast parallelisierbaren* Mannigfaltigkeiten benötigt. Die Anzahl der Elemente in  $\partial P^{4k}$  ist gerade

$$2^{2k-3}(2^{2k-1} - 1)(3 + (-1)^{k+1}) \text{ Zähler} \left( \frac{B_{2k}}{4k} \right),$$

Dieser zunächst kurios erscheinende Term setzt sich aus einigen unterschiedlichen Ausdrücken zusammen, wie zum Beispiel den Koeffizienten der Potenzreihe

$$\frac{\sqrt{t}}{\sinh(2\sqrt{t})} = \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k}(2^{2k-1} - 1)B_{2k}}{(2k)!} t^k$$

und dem Rang des Bildes des  $J$ -Homomorphismus

$$\text{Rang Im } J_{4k-1} = \text{Nenner} \left( \frac{B_{2k}}{4k} \right).$$



## 7.1 Die Schnittpaarung in vierfacher Dimension

Zunächst ist es vonnöten zu entscheiden, wann das Normalenbündel  $\nu$  einer in eine eingebetteten Sphäre nicht nur stabil trivial, sondern bereits trivial ist. Da  $\nu$  stabil trivial ist, liegt es in  $\text{Ker } S_*$ . Betrachte hierzu zunächst die Abbildung

$$\Phi: \text{Ker } S_* \rightarrow \mathbb{Z}, [\xi] \mapsto \langle e(\xi), [\mathbb{S}^k] \rangle.$$

Aus den Eigenschaften der Euler-Klasse folgt, dass dies ein wohldefinierter Homomorphismus ist. Dieser ist jedoch für ungerade  $k$  trivial, da in diesem Fall  $\text{Ker } S_* \cong \mathbb{Z}_2$  endlich ist.

### Lemma 7.1.1

Für gerade  $k$  ist  $\Phi$  ein Monomorphismus, der lediglich gerade Werte annimmt.

*Beweis.* Der Kern  $\text{Ker } S_*$  wird von  $[\tau_k]$  erzeugt, und ist, da  $k$  gerade ist, zyklisch unendlich. Folglich ist jedes  $[\xi] \in \text{Ker } S_*$  ein Vielfaches von  $[\tau_k]$ , sei etwa  $[\xi] = \beta \cdot [\tau_k]$ . Da die Euler-Klasse von  $\tau_k$  das Doppelte eines Erzeugers  $g \in H^k(\mathbb{S}^k)$  ist (Siehe [Hat17] Proposition 3.14), gilt

$$\Phi([\xi]) = \langle e(\xi), [\mathbb{S}^k] \rangle = 2\beta \cdot \langle g, [\mathbb{S}^k] \rangle.$$

Da  $\langle g, [\mathbb{S}^k] \rangle \neq 0$  ist, ist dies genau dann null, wenn  $\beta = 0$ , und somit  $[\xi] = 0$  ist. q.e.d.

Sei  $\mathcal{M}^{2k}$  eine  $\pi$ -Mannigfaltigkeit, und  $\mathcal{S}^k \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine eingebettete Sphäre. Dann folgt aus dem vorangegangenen Lemma, dass das Normalenbündel  $\nu$  von  $\mathcal{S}$  genau dann trivial ist, wenn  $\Phi(\nu) = 0$  gilt. Um dies zu entscheiden ist das folgende Lemma hilfreich.

### Lemma 7.1.2

Sei  $\mathcal{M}^{i+j}$  eine orientierte Mannigfaltigkeit und  $\iota: \mathcal{V}^i \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine geschlossene Untermannigfaltigkeit mit Normalenbündel  $\nu$ . Dann gilt

$$e(\nu) = \pm \iota^* q^* [\mathcal{V} \mid \mathcal{M}]^* \quad \text{also} \quad \langle e(\nu), [\mathcal{V}] \rangle = \pm [\mathcal{V} \mid \mathcal{M}] \cdot [\mathcal{V} \mid \mathcal{M}]. \quad (7.1)$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{D} \subseteq \mathring{\mathcal{M}}$  eine geschlossene Tubenumgebung von  $\mathcal{V}$ . Betrachte die kanonischen Inklusionen

$$d: (\mathcal{D}, \partial\mathcal{D}) \hookrightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}}) \quad \text{und} \quad f: (\mathcal{M}, \partial\mathcal{M}) \hookrightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}}).$$

Sei  $X := f_*[\mathcal{M}] = d_*[\mathcal{D}]$ . Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_i(\mathcal{M}) & \xleftarrow[\cong]{\cap [\mathcal{M}]} & H^j(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M}) & \xrightarrow{q^*} & H^j(\mathcal{M}) \\
 & \nearrow \nu^* & \downarrow \mathbb{1} & & \uparrow f^* & & \downarrow \mathbb{1} \\
 H_i(\mathcal{V}) & \longrightarrow & H_i(\mathcal{M}) & \xleftarrow{X} & H^j(\mathcal{M}, \mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}}) & \xrightarrow{q^*} & H^j(\mathcal{M}) \longrightarrow H^j(\mathcal{V}) \\
 & \searrow \cong & \uparrow d_* & & \downarrow d^* & & \downarrow d^* \\
 & & H_i(\mathcal{D}) & \xleftarrow[\cong]{\cap [\mathcal{D}]} & H^j(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D}) & \xrightarrow{q^*} & H^j(\mathcal{D})
 \end{array}$$

Hierbei korrespondiert ein Generator von  $H^j(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D})$  mit der Thom-Klasse von  $\nu$ , und wird deshalb in  $H^j(\mathcal{V})$  auf die Euler-Klasse von  $\nu$  abgebildet. Durch eine Jagd der Fundamentalklasse  $[\mathcal{V}] \in H_i(\mathcal{V})$  durch die obere und untere Zeile ergibt sich

$$\pm \iota^* q^* [\mathcal{V} | \mathcal{M}]^* = e(\nu).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \mp \langle e(\nu), [\mathcal{S}] \rangle &= \langle \iota^* q^* [\mathcal{S} | \mathcal{M}]^*, [\mathcal{S}] \rangle \\ &= \langle q^* [\mathcal{S} | \mathcal{M}]^*, [\mathcal{S} | \mathcal{M}] \rangle \stackrel{(2.3)}{=} [\mathcal{S} | \mathcal{M}] \cdot [\mathcal{S} | \mathcal{M}]. \end{aligned}$$

q.e.d.

Der Beweis orientiert sich an einem ähnlichen Lemma aus Lecture 11 von [Aur12].

### Satz 7.1.3

Sei  $k \geq 3$  gerade und  $\mathcal{M}^{2k}$  eine  $(k-1)$ -zusammenhängende  $\pi$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist die Schnittpaarung gerade, und es gilt  $x \cdot x = 0$  genau dann, wenn  $\alpha(x) = 0$  ist.

*Beweis.* Zunächst gilt  $\alpha(x) \in \text{Ker } S_*$  gemäß Gleichung 5.2. Sei  $\iota: \mathcal{S} \hookrightarrow \mathring{\mathcal{M}}$  eine  $x$  repräsentierende Einbettung mit Normalenbündel  $\nu$ . Dann gelten per Definitionem  $x = [\mathcal{S} | \mathcal{M}]$  und  $\alpha(x) = [\nu]$ . Zusammen ergibt dies

$$x \cdot x = [\mathcal{S} | \mathcal{M}] \cdot [\mathcal{S} | \mathcal{M}] \stackrel{(7.1)}{=} \mp \langle e(\nu), [\mathcal{S}] \rangle = \mp \Phi(\alpha(x)).$$

Dann ist die Aussage des Satzes eine direkte Konsequenz von Lemma 7.1.1.

q.e.d.

## 7.2 Die Signatur

Da  $k$  gerade und die Schnittform symmetrisch ist, kann diese über  $\mathbb{R}$  diagonalisiert werden. Sei  $n_+$  die Anzahl der positiven und  $n_-$  die Anzahl der negativen Einträge einer Diagonalisierung. Die **Signatur** von  $\mathcal{M}$  sei definiert als  $\sigma(\mathcal{M}) := n_+ - n_-$ . Für ungerade  $k$ , also wenn die Schnittform schiefsymmetrisch ist, sind alle Eigenwerte komplex, sodass keine Diagonalisierung über  $\mathbb{R}$  existieren kann.

### Satz 7.2.1

Für kompakte, orientierte topologische Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}^n, \mathcal{N}^n$  gilt

- i Für eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}^{4m+1}$  gilt  $\sigma(\partial\mathcal{W}) = 0$
- ii  $\sigma(\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}) = \sigma(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \sigma(\mathcal{M}) + \sigma(\mathcal{N})$
- iii Es gilt  $\sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) = \sigma(\mathcal{M})\sigma(\mathcal{N})$
- iv Die Signatur einer geraden, unimodularen Form teilt acht

*Beweis.* **Behauptung  $i$**

Aus Gleichung 5.3 folgt

$$2 \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \iota_* = \dim_{\mathbb{R}} H_k(\partial \mathcal{W}; \mathbb{R}).$$

Weiter verschwindet  $Q(x) := x \cdot x$  auf  $\operatorname{Ker} \iota_*$ , also folgt

$$|\sigma(\partial \mathcal{W})| = |\sigma(Q)| \leq \dim_{\mathbb{R}} H_k(\partial \mathcal{W}; \mathbb{R}) - 2 \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \iota_* = 0$$

und somit  $\sigma(\partial \mathcal{W}) = 0$ .

**Behauptung  $ii$**

Das folgt, da die mittlere Homologiegruppe der disjunkten Vereinigung, der verbundene Summe und der verbundene Randsumme spaltet, und somit zu  $H_k(\mathcal{M}) \oplus H_k(\mathcal{N})$  isomorph ist. q.e.d.

Der Beweis von  $i$  folgt [Dol80] Proposition 9.6. Für einen Beweis von  $iii$  siehe [Die08] Proposition 18.7.3. Obwohl Satz 7.2.1 keine glatte Struktur fordert folgt aus ihr nur, dass die Signatur eine Chirurgie-Invariante für geschlossene Mannigfaltigkeiten ist. Ist  $\mathcal{M}$  eine Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand, ist  $\mathcal{M} \times \mathbb{I}$  zwar erneut eine Mannigfaltigkeit mit Rand, jedoch gilt

$$\partial(\mathcal{M} \times \mathbb{I}) = \partial \mathcal{M} \times \mathbb{I} \cup \mathcal{M} \times \partial \mathbb{I}.$$

### **Lemma 7.2.2**

*Eine freie abelsche Gruppe mit einer unimodularen, geraden quadratischen Form  $\beta$  mit Signatur null besitzt eine schwach symplektische Basis.*

*Beweis.* Da die Signatur null ist, ist die Form indefinit, und besitzt gemäß [Mil61] Lemma 8 eine nicht-triviale Nullstelle  $e_1$ . Da die Form unimodular ist, existiert ein  $\alpha \in H_k(\mathcal{M})$  mit  $\beta(\alpha, e_1) = 1$ . Da sie gerade ist, lässt sich

$$f_1 := \alpha - \frac{\beta(\alpha, \alpha)}{2} e_1$$

definieren. Es folgen

$$\beta(e_1, f_1) = \beta(e_1, \alpha) - \frac{\beta(\alpha, \alpha)}{2} \beta(e_1, e_1) = 1$$

und

$$\beta(f_1, f_1) = \beta(\alpha, \alpha) - \frac{2\beta(\alpha, \alpha)}{2} \beta(\alpha, e_1) + 0 = 0.$$

Aus der Unimodularität folgt weiter, dass  $H$  in die direkte Summe der Untergruppe  $\langle e_1, f_1 \rangle$  und des orthogonalen Komplements spaltet. Die Aussage folgt über eine Induktion über den Rang der Gruppe. q.e.d.

**Satz 7.2.3**

Die Signatur induziert einen Monomorphismus  $\sigma: P^{4m} \rightarrow \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* **Wohldefiniertheit**

Sei  $n = i + j + 1$ . Es reicht aus  $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{N})$  für  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^i$  zu zeigen. Es kann zudem angenommen werden, dass  $i \leq j$  gilt, denn lässt sich  $\mathcal{N}$  durch gerahmte  $i$ -Chirurgie aus  $\mathcal{M}$  erhalten, lässt sich  $\mathcal{M}$  durch gerahmte  $j$ -Chirurgie aus  $\mathcal{N}$  erhalten. Gemäß Lemma 5.4.6 existiert eine gerahmte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}^{n+1}$  mit

$$\partial \mathcal{W} \cong \mathcal{M} \overset{\partial \mathcal{M}}{+} \mathcal{N}.$$

Aus Proposition 7.2.1 folgt  $\sigma(\partial \mathcal{W}) = 0$ , da  $\partial \mathcal{M}$  eine Homotopiesphäre ist, ist weiter

$$H_k(\partial \mathcal{W}) \cong H_k(\mathcal{M}) \oplus H_k(\mathcal{N}),$$

also  $0 = \sigma(\partial \mathcal{W}) = \sigma(\mathcal{M}) - \sigma(\mathcal{N})$  und somit  $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{N})$ .

**Injektivität**

Sei  $k$  gerade und  $(\mathcal{M}^{2k}, F)$  eine gerahmte Mannigfaltigkeit in  $\text{Ker } \sigma$ . Da  $\partial \mathcal{M}$  eine Homotopiesphäre ist, ist  $H_k(\mathcal{M})$  gemäß Lemma 5.5.1 frei. Da die Schnittform symmetrisch, gerade 7.1.3 und unimodular 2.2.2 ist und  $\sigma(\mathcal{M}) = 0$  gilt, besitzt  $H_k(\mathcal{M})$  gemäß Satz 7.2.2 eine schwach symplektische Basis  $e_i, f_i$  mit

$$e_i \cdot e_j = f_i \cdot f_j = 0 \quad \text{und} \quad e_i \cdot f_j = \delta_{ij}.$$

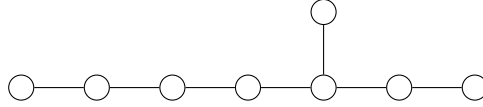
Aus Satz 7.1.3 folgt, dass  $\alpha(e_i) = 0$  gilt, sodass  $\mathcal{M}$  gemäß Satz 5.5.2 zu einer  $k$ -zusammenhängenden gerahmten Mannigfaltigkeit  $\chi$ -äquivalent ist und damit das triviale Element in  $P_{4m}$  repräsentiert. Die Homomorphismus-Eigenschaft folgt aus Lemma 7.2.1. q.e.d.

**Beispiel 7.2.1** (Milnor-Mannigfaltigkeit). Es existiert eine  $4n$ -Mannigfaltigkeit  $M(4n)$ , deren Schnittform durch die Matrix

$$\Gamma_8 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \textcolor{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \textcolor{red}{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Durch eine Rechnung folgt  $\det(\Gamma_8) = 1$  und  $\sigma(\Gamma_8) = 8$ . Es gilt also  $\sigma(M(4n)) = 8$ . Diese lässt sich konstruieren, indem an eine  $2k$ -Scheibe acht  $k$ -Henkel angebracht werden. Hierzu werden disjunkte Anklebeabbildungen  $\varphi_i: \mathbb{S}^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^{2k}$ , die sich für  $k \geq 3$  zu disjunkten eingebetteten Scheiben fortsetzen lassen. In der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{D}$ , welche durch das Anbringen

von Henkeln entlang der  $\varphi$  entsteht, können nun diese eingebetteten Scheiben als untere-, und die Kerne der Henkel als obere Hemisphären aufgefasst werden. Für jeden Henkel ergibt sich derart eine  $k$ -Sphäre. Es lässt sich zeigen, dass sich die Anklebeabbildungen derart wählen lassen, dass zu gegebenen Elementen  $[\gamma_i] \in \pi_{k-1}(\mathrm{SO}(k))$  die Kupplungsfunktionen der Normalenbündel der Präsentationssphären gerade die  $\gamma_i$  sind. Wird nun acht mal  $\tau_k$  gewählt, ergibt sich die Milnor-Mannigfaltigkeit. Die Schnittform wird durch die Matrix  $\Gamma_8$  beschrieben, dass zugehörige Gitter ist durch das außerordentliche Dynkin-Diagramm  $E_8$  klassifiziert.

**Satz 7.2.4**

Es gilt  $P^{4m} \cong \mathrm{Im} \sigma = 8\mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Sei  $(\mathcal{M}, F) \in P^{4m}$ . Dann ist  $\sigma(\mathcal{M})$  gemäß 7.2.1 durch acht teilbar. Da  $\sigma$  gemäß 7.2.3 ein Monomorphismus ist, ist  $P^{4m}$  zu einer Untergruppe von  $8\mathbb{Z}$  isomorph. Die Aussage folgt, da die Milnor-Mannigfaltigkeit  $M(4m)$  in  $P^{4m}$  liegt und Signatur 8 besitzt 7.2.1. q.e.d.

## 7.3 Der Signaturesatz von Hirzebruch

Ein wichtiger Satz, welcher für die Berechnung von  $P_{4k}$  benötigt wird, ist der Signaturesatz von Hirzebruch. Er besagt, dass ein bestimmtes Polynom  $L_k$  existiert, sodass sich die Signatur durch die Pontrjagin-Klassen des Tangentialbündels  $p_i$  wie folgt darstellen lässt:

$$\sigma(\mathcal{M}) = \langle L_k(p_1, \dots, p_k), [\mathcal{M}] \rangle.$$

Um diese  $L$ -Polynome zu definieren, ist etwas Kombinatorik vonnöten. Das Folgende sei nur ein kurzer Anriss der eigentlichen Thematik, für eine präzisere Abhandlung des Satzes siehe zum Beispiel [MS74] §19.

### 7.3.1 Multiplikative Folgen

Eine Folge  $K_i \in \Lambda[X_1, \dots, X_i]$  homogener Polynome  $i$ -ten Grades heiße multiplikativ, wenn  $K_0 = 1$  ist und für alle formalen Potenzreihen  $a, b, c \in \Lambda[[t]]$  mit Leitkoeffizient 1 und  $c = ab$  die Gleichung

$$\sum_{i \geq 0} K_i(c_1, \dots, c_i) t^i = \left( \sum_{i \geq 0} K_i(a_1, \dots, a_i) t^i \right) \left( \sum_{i \geq 0} K_i(b_1, \dots, b_i) t^i \right),$$

gilt. Schreibe auch  $K(ab) = K(a)K(b)$ . Zu jeder multiplikativen Folge gehört nun die **charakteristische Potenzreihe**  $K(1+t) \in \Lambda[[t]]$ . Dass die Korrespondenz von multiplikativen Folge zu ihren charakteristischen Potenzreihen bijektiv ist, ist durch folgenden Satz gegeben.

**Proposition 7.3.1**

Zu jeder Potenzreihe  $f \in \Lambda[[t]]$  existiert genau eine multiplikative Folge  $K_i$  mit  $K(1+t) = f(t)$ .

Die zu der Potenzreihe

$$\frac{\sqrt{x}}{\tanh(\sqrt{x})} = \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^k$$

gehörende Folge sei im Folgenden mit  $L_k$  bezeichnet, für eine  $4k$ -dimensionale geschlossene und orientierte Mannigfaltigkeit sei

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) := \langle L_k(p_1, \dots, p_k), [\mathcal{M}] \rangle$$

der **L-Genus**, wobei  $p_j$  die  $j$ -te Pontrjagin-Klasse von  $T\mathcal{M}$  bezeichne. Die Wahl der charakteristischen Potenzreihe wirkt zunächst etwas willkürlich, kann jedoch als Normalisierung verstanden werden. Durch sie kann

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}P^{2m}) = 1$$

garantiert werden.

**Der orientierte Kobordismusring**

Zusammen mit der disjunkten Vereinigung bildet die Menge der orientierten Kobordismusklassen orientierter geschlossener Mannigfaltigkeiten  $\Omega_k^{\text{or}}$  eine abelsche Gruppe. Diese wird von den Produkten  $\mathbb{C}P^{2n_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{2n_\ell}$  für alle Zerlegungen  $\sum n_i = k$  erzeugt. Dann erhält

$$\Omega_*^{\text{or}} := \bigoplus_{k \geq 0} \Omega_{4k}^{\text{or}}.$$

mithilfe des kartesischen Produkts die Struktur eines graduierten Ringes. Insbesondere bilden die  $\mathbb{C}P^{2k}$  eine Basis des torsionsbefreiten Kobordismusrings  $\Omega_*^{\text{or}} \otimes \mathbb{Q}$ .

**Proposition 7.3.2**

Die Abbildung  $\mathcal{L}: \Omega_*^{\text{or}} \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{M})$  ist ein Ringhomomorphismus.

Der Signatursatz von Hirzebruch ist nun eine direkte Konsequenz aus dem vorangegangenen Satz. Sowohl  $\sigma$  als auch  $\mathcal{L}$  definieren Ringhomomorphismen  $\Omega_*^{\text{or}} \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , und auf der Menge der Generatoren  $\mathbb{C}P^{2k}$  gilt

$$\sigma(\mathbb{C}P^{2k}) = 1 = \mathcal{L}(\mathbb{C}P^{2k}).$$

Dies zeigt:

**Proposition 7.3.3** (Signatursatz von Hirzebruch)

Die Signatur  $\sigma(\mathcal{M})$  einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist gleich dem L-Genus  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ .

Für das Folgende ist noch ein weiterer Satz vonnöten.

**Proposition 7.3.4**

Der Koeffizient von  $p_k$  in  $L_k(p_1, \dots, p_k)$  ist

$$s_k = (-1)^k \frac{2^{2k}(2^{2k-1} - 1)B_{2k}}{(2k)!}.$$

*Beweis.* Siehe [HBS66] Lemma 1.4.1 und Abschnitt 1.5.

q.e.d.

Die in diesem Satz auftauchenden Koeffizienten berechnen sich hierbei aus den Koeffizienten der Potenzreihe

$$\frac{x}{\sinh(2x)} = \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k}(2^{2k-1} - 1)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

## 7.4 Fast parallelisierbare Mannigfaltigkeiten

Das Tangentialbündel einer  $n$ -Sphäre ist für  $n \notin \{1, 3, 7\}$  nie trivial. Wird jedoch aus der Sphäre eine kleine Scheibe entfernt, ergibt sich eine kontrahierbare Mannigfaltigkeit. Über einem kontrahierbaren Raum ist hingegen jedes Vektorbündel trivial. Dies motiviert folgende Definition:

**Definition 7.4.1** (Fast gerahmtes Vektorbündel)

Ein Vektorbündel  $\xi: E \rightarrow \mathcal{M}$  über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit mit einer Einbettung  $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{M}$  und einer Rahmung der Einschränkung von  $\xi$  auf  $\mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}}$ .

Eine Mannigfaltigkeit mit einem fast gerahmten (stabilen) Tangentialbündel heiße fast (stabil) gerahmt. Eine Mannigfaltigkeit, dessen Tangentialbündel fast (stabil) gerahmt werden kann heiße fast (stabil) parallelisierbar.

**Satz 7.4.1**

Für  $n > 1$  sind zusammenhängende und geschlossene  $\pi$ -Mannigfaltigkeiten fast parallelisierbar.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{M}^n$  eine zusammenhängende, geschlossene  $\pi$ -Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{M}$  eine eingebettete Scheibe mit  $p \in \mathcal{D}$ . Zunächst sind  $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}}$  und  $\mathcal{M} \setminus p$  homotopieäquivalent. Offenbar ist  $T\mathcal{M}|_{\mathcal{M}_0}$  stabil trivial. Weiter ist  $\mathcal{M} \setminus p$  eine nicht-kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit, und enthält somit einen  $(n - 1)$ -dimensionalen CW-Komplex  $X$  als Deformationsretrakt (siehe etwa [NR04] Satz 2.2). Ist  $f: X \rightarrow \mathcal{M}_0$  eine Homotopieäquivalenz, folgt die Aussage, da  $f^*(T\mathcal{M}|_{\mathcal{M}_0})$  aufgrund von Satz 4.2.1 trivial ist. q.e.d.

Es stellt sich die Frage nach der Umkehrung dieses Satzes. Analog ergibt sich, dass eine Mannigfaltigkeit genau dann fast parallelisierbar ist, wenn sie fast stabil parallelisierbar ist. Folgendes folgt nahe [Kos92] Kapitel IX Abschnitt 8.

**Die Gruppe  $\Omega_n^{\text{Fast}}$** 

Die Bedeutung der fast stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeit liegt in der folgenden Überlegung. Sei  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, F)$  eine fast stabil gerahmte Mannigfaltigkeit. Dann kann an  $\mathcal{M}$  eine Chirurgie durchgeführt werden. Ist das Anklebegebiet der Chirurgie von  $\mathcal{D}$  disjunkt, und die zugehörige Chirurgie an  $\mathcal{M}_0$  gerahmt, heiße diese Chirurgie fast gerahmt. Zwei fast stabil gerahmte Mannigfaltigkeiten heißen fast  $\chi$ -quivalent, wenn eine durch eine endliche Folge von fast gerahmten Chirurgien aus der anderen erhalten werden kann. Die Menge der fast stabil gerahmten Mannigfaltigkeiten modulo fast- $\chi$ -Äquivalenz sei durch  $\Omega_n^{\text{Fast}}$  bezeichnet. Dann ist die Abbildung

$$c: \Omega_n^{\text{Fast}} \rightarrow P^n, [(\mathcal{M}, \mathcal{D}, F)] \mapsto [(\mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}}, F)]$$

per Konstruktion wohldefiniert und injektiv. Folglich erbt  $\Omega_n^{\text{Fast}}$  eine kommutative Monoidstruktur von  $P^n$ , sodass

$$0 \longrightarrow \Omega_n^{\text{Fast}} \xrightarrow{c} P^n \xrightarrow{\partial} \partial P^n \longrightarrow 0 \quad (7.2)$$

eine kurze exakte Folge ist. Es gilt also gerade  $\Omega_n^{\text{Fast}} \cong \text{Ker } \partial$ . Für  $n > 5$  ist dies eine abelsche Gruppe.

**7.4.1 Von fast- zu stabil parallelisierbar**

Sei  $(\xi, \mathcal{D}, F)$  ein fast gerahmtes Vektorbündel über  $\mathcal{M}$ . Wird  $F$  als Trivialisierung der Einschränkung von  $\xi$  auf  $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M} \setminus \mathring{\mathcal{D}}$  aufgefasst, lässt sich das kollabierte Bündel  $\mu := \xi/F$  über dem Quotienten

$$\mathcal{M}/\mathcal{M}_0 \cong \mathcal{D}/\partial\mathcal{D} \cong \mathbb{S}^n$$

bilden. Für die Quotientenabbildung  $q: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}_0 \cong \mathbb{S}^n$  gilt  $\xi \cong q^*\mu$ . Diese Abbildung besitzt offenbar Grad eins. Durch die Standarddrahmung der Scheibe ist weiter eine Trivialisierung  $E$  der Einschränkung von  $\xi$  auf  $\mathcal{D}$  gegeben. Es lässt sich erkennen, dass die Kupplungsfunktion von  $\mu$  gerade der Rahmenwechsel von  $F|_{\partial\mathcal{D}}$  zu  $E|_{\partial\mathcal{D}}$  ist. Besitzt  $\xi$  den Rang  $k \geq n$ , so gilt

$$S_*[\mu] \in \pi_{n-1}(\text{SO}(k+1)) \cong \pi_{n-1}(\text{SO}).$$

Gemäß dem Periodizittssatz von Bott gilt:

$n \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_{n-1}(\text{SO})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0

Für  $n \bmod 8 \in \{3, 5, 6, 7\}$  folgt direkt  $S_*[\mu] = 0$ . Wegen  $S\xi = f^*(S\mu)$  ist  $\xi$  also bereits stabil trivial.



**Satz 7.4.2**

Ist  $n \neq 4k$ , ist jede fast parallelisierbare Mannigfaltigkeit stabil parallelisierbar.

*Beweis.* Es muss gezeigt werden, dass das Normalenbündel  $\nu$  von  $\mathcal{M}^n$  in einem hinreichend großen  $\mathbb{R}^{n+k+1}$  trivial ist. Sei  $\nu = q^*\mu$ . Dann ist  $J\mu$  die normal gerahmte Mannigfaltigkeit  $(\mathbb{S}^n, G)$  im  $\mathbb{R}^{n+k}$ , und  $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathbb{R}_+^{n+k+1}$  ein gerahmter Nullbordismus, sodass  $\mu \in \text{Ker } J_n^k$  folgt. Da der stabile  $J$ -Homomorphismus  $J_n$  für  $n \in \{1, 2\}$  injektiv ist, folgt somit  $\mu = 0$  also  $\nu = 0$ . q.e.d.

**7.4.2 4k-dimensionale Vektorbündel**

Sei erneut  $\xi = q^*\mu$ . Dann gilt für die Pontrjagin-Klassen  $p_i(\xi) \in H^{4i}(\mathcal{M})$  und  $p_i(\mu) \in H^{4i}(\mathbb{S}^{4m})$

$$p_i(\xi) = p_i(q^*\mu) = q^*p_i(\mu).$$

Da für  $i < k$  stets  $H^{4i}(\mathbb{S}^{4m}) = 0$  gilt, müssen also alle niederen Pontrjagin-Klassen von  $\xi$  null sein. Dann ist durch

$$P: \pi_{4m-1}(\text{SO}) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \eta \mapsto \langle p_k(\eta), [\mathbb{S}^{4m}] \rangle$$

ein Homomorphismus definiert. Dass dies tatsächlich ein Homomorphismus ist, folgt aus der Natürlichkeit der Pontrjagin-Klassen. Gemäß [Ker59] ist  $P$  ein Monomorphismus, und es gilt

$$p(x) \quad \text{ist ein Vielfaches von} \quad \frac{3 + (-1)^{m+1}}{2} (2m - 1)!. \quad (7.3)$$

**Lemma 7.4.3**

Ein  $4m$ -dimensionales, fast parallelisierbares Vektorbündel  $\xi$  über  $\mathcal{M}^{4m}$  ist genau dann stabil trivial, wenn  $p_m(\xi) = 0$  ist.

*Beweis.* Ist  $\xi$  stabil trivial, ist  $p_m(\xi) = 0$ . Sei umgekehrt  $p_m(\xi) = 0$  und  $\xi \cong q^*\mu$ . Da  $q$  den Grad eins besitzt, muss auch  $p_m(\mu) = 0$  sein. Dann ist

$$P(\mu \oplus \mathbb{R}) = \langle p_m(\mu \oplus \mathbb{R}), [\mathbb{S}^n] \rangle = \langle p_m(\mu), [\mathbb{S}^n] \rangle = 0,$$

da  $P$  ein Monomorphismus ist, ist  $\mu$  und somit auch  $\xi$  stabil trivial. q.e.d.

**Satz 7.4.4**

Eine fast parallelisierbare Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^{4m}$  ist genau dann stabil parallelisierbar, wenn  $\sigma(\mathcal{M}) = 0$  gilt.

*Beweis.* Sei  $p_i := p_i(T\mathcal{M})$ . Es sei daran erinnert, dass  $p_i = 0$  für  $i < m$  ist. Der Signaturesatz von Hirzebruch impliziert deshalb, dass die Signatur ein nicht-triviales Vielfaches von  $\langle p_m, [\mathcal{M}] \rangle$  ist. Somit ist  $p_m = 0$  genau dann, wenn  $\sigma(\mathcal{M}) = 0$  ist. Die Aussage folgt aus Lemma 7.4.3. q.e.d.

**Korollar 7.4.5**

Homotopiesphären sind  $\pi$ -Mannigfaltigkeiten.

**Satz 7.4.6**

Das Bild von  $\sigma: \Omega_{4m}^{\text{Fast}} \rightarrow \mathbb{Z}$  besitzt ist gerade  $|t_m| \cdot \mathbb{Z}$  mit

$$t_m := 2^{2m} (2^{2m-1} - 1) (3 + (-1)^{m+1}) \text{Zähler} \left( \frac{B_{2m}}{4m} \right).$$

*Beweis.* Sei  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, F) \in \Omega_{4m}^{\text{Fast}}$  eine fast gerahmte Mannigfaltigkeit. Sei  $\nu$  das Normalenbündel von  $\mathcal{M}$  in einem hinreichend großen  $\mathbb{R}^m$ , und  $\nu = q^* \mu$  für ein Vektorbündel  $\mu$  über  $\mathbb{S}^{4m}$ . Erneut liegt die Kupplungsfunktion von  $\mu$  im Kern des stabilen  $J$ -Homomorphismus  $J_{4m-1}$ . Sei  $g \in \pi_{4m}(\text{SO}) \cong \mathbb{Z}$  ein Generator. Da das Bild von  $J_{4m-1}$  eine zyklische Gruppe des Ranges  $j_{4m-1}$  ist, sind Elemente dieses Kernes Vielfache von

$$j_{4m-1} \cdot g \stackrel{4.6.1}{=} \text{Nenner} \left( \frac{B_{2m}}{4m} \right) \cdot g.$$

Somit folgt zusammen mit (7.3) bereits, dass

$$P(\mu) \quad \text{ein Vielfaches von} \quad \text{Nenner} \left( \frac{B_{2m}}{4m} \right) \frac{3 + (-1)^{m+1}}{2} (2m - 1)!$$

ist. Da  $q$  vom Grad eins ist gilt weiter

$$\langle p_m(\nu), [\mathcal{M}] \rangle = \langle q^* p_m(\mu), [\mathcal{M}] \rangle = \langle p_m(\mu), q_* [\mathcal{M}] \rangle = \langle p_m(\mu), [\mathbb{S}^{4m}] \rangle = P(\mu).$$

Sei  $\tau$  das Tangentialbündel von  $\mathcal{M}$ , so gilt

$$0 = p_m(\tau) = p_m(\nu) + p_m(\tau) \quad \text{also} \quad p_m(\tau) = \pm p_m(\nu) = \pm p_m(\mu).$$

Aus dem Signatarsatz 7.3.3 zusammen mit Proposition 7.3.4 folgt

$$\sigma(\mathcal{M}) = (-1)^m \frac{2^{2m} (2^{2m-1} - 1) B_{2m}}{(2m)!} \langle p_m(\tau), [\mathcal{M}] \rangle$$

und ist deshalb ein Vielfaches von

$$\begin{aligned} & \frac{2^{2m} (2^{2m-1} - 1) B_{2m}}{(2m)!} \text{Nenner} \left( \frac{B_{2m}}{4m} \right) \frac{3 + (-1)^{m+1}}{2} (2m - 1)! \\ &= \frac{2^{2m} (2^{2m-1} - 1) B_{2m}}{4m} \text{Nenner} \left( \frac{B_{2m}}{4m} \right) (3 + (-1)^{m+1}) \end{aligned}$$

ist. Der Nenner lässt sich weiter vereinfachen, denn aus

$$x = \frac{\text{Zähler}(x)}{\text{Nenner}(x)} \quad \text{folgt} \quad \frac{B_{2m}}{4m} \text{Nenner} \left( \frac{B_{2m}}{4m} \right) = \text{Zähler} \left( \frac{B_{2m}}{4m} \right).$$

Zusammen ist also  $\sigma(\mathcal{M})$  ein Vielfaches von  $t_m$ . Umgekehrt lässt sich eine Mannigfaltigkeit mit Signatur  $t_m$  konstruieren. q.e.d.

## Kapitel 8

# Die Berechnung von $P^{4m+2}$

### 8.1 Die Kervaire-Invariante

Ähnlich der Signatur lässt sich eine Invariante gerahmter Kobordismen definieren, die **Kervaire-Invariante**, welche dafür genutzt werden kann zu entscheiden, wann eine  $2k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k$  ungerade zu einer  $k$ -zusammenhängenden Mannigfaltigkeit gerahmt kobordant ist. Die Definition dieser ist jedoch etwas komplizierter, als die der Signatur.

#### 8.1.1 Quadratische Verfeinerungen

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Wenn  $\mathbb{K}$  von der Charakteristik  $\neq 2$  ist, korrespondiert jede Bilinearform  $\beta: V \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$  mit einer quadratischen Form  $q: V \rightarrow \mathbb{K}$  über die Korrespondenz

$$\beta(x, y) := \frac{q(x + y) - q(x) - q(y)}{2} \quad \text{und} \quad q(x) := \beta(x, x).$$

Dies ändert sich, wenn  $\mathbb{K}$  die Charakteristik zwei besitzt. In diesem Fall muss eine quadratische Verfeinerung betrachtet werden.

**Definition 8.1.1** (Quadratische Verfeinerung)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum und  $\beta: V \otimes V \rightarrow \mathbb{F}_2$  eine Bilinearform. Eine Funktion  $q: V \rightarrow \mathbb{F}_2$  heiße quadratische Verfeinerung, wenn fur alle  $x, y \in V$  die Gleichung

$$\beta(x, y) = q(x + y) + q(x) + q(y)$$

gelte.

Die Existenz einer solchen Verfeinerung ist nicht trivial.

**Definition 8.1.2** (Arf-Invariante einer quadratischen Form)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum mit einer symplektischen Basis  $e_i, f_i \in V$  bezüglich einer Bilinearform  $\beta: V \otimes V \rightarrow \mathbb{F}_2$  mit quadratischer Verfeinerung  $q: V \rightarrow \mathbb{F}_2$  besitzt. Setze

$$\text{Arf}(\beta, q) := \sum_{i=1}^k q(e_i)q(f_i).$$

Die Arf-Invariante hängt hierbei nicht von der gewählten symplektischen Basis ab.

**8.1.2 Eine quadratische Verfeinerung der Schnittform**

Sei  $\mathcal{M}$  eine  $(k-1)$ -zusammenhängende  $\pi$ -Mannigfaltigkeit. Über die Schnittform wird auf den  $\mathbb{F}_2$ -Vektorräumen  $H_k(\mathcal{M}; \mathbb{F}_2)$

$$H_k(\mathcal{M}; \mathbb{F}_2) \otimes H_k(\mathcal{M}; \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathbb{F}_2, x \otimes y \mapsto x \cdot y$$

eine unimodulare, schiefsymmetrische Bilinearform definiert. Es stellt sich die Frage nach einer geeigneten quadratischen Verfeinerung. Der wohl einfachste Kandidat hierzu wurde bereits zuvor definiert, und ist durch jene Abbildung  $\alpha$  gegeben, die einer eingebetteten Sphäre, die  $x \in H_k(\mathcal{M})$  repräsentiert, die Kupplungsfunktion ihres Normalenbündels zuordnet. Für  $k \in \{3, 7\}$  ist bereits  $\alpha(x) \in \text{Ker } S_* = 0$ , die Funktion  $\alpha$  ist also trivial.

**Satz 8.1.1**

Sei  $\mathcal{M}^{2k}$  eine  $(k-1)$ -zusammenhängende  $\pi$ -Mannigfaltigkeit und  $k$  ungerade. Dann gilt für  $x, y \in H_k(\mathcal{M})$  die Gleichung

$$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y) + [\tau_k] \cdot (x \cdot y) \in \text{Ker } S_*. \quad (8.1)$$

*Beweis.* Seien  $f: \mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathcal{M}$  und  $g: \mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathcal{M}$  zwei Einbettungen, die  $x$  und  $y$  repräsentieren. Analog zu der Konstruktion der Addition der Homotopiegruppen ist eine stetige Funktion  $f + g: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathcal{M}$  definiert. Siehe auch Abbildung 8.1. Aus der Natürlichkeit des Hurewicz-Homomorphismus folgt, dass  $[f + g] = [f] + [g] \in \pi_k(\mathcal{M})$  die Klasse  $x + y$  repräsentiert. Es kann angenommen werden, dass  $f + g$  eine sich selbst transversal schneidende Immersion, nicht zwingendermaßen jedoch eine Einbettung, ist. Die Selbstschnittszahl  $\beta$  von  $f + g$  ist gerade die Summe von  $\pm 1$  über alle Doppelpunkte von  $f + g$ . Da weder  $f$  noch  $g$  Doppelpunkte besitzen, muss

$$\beta(f + g) = [\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2] = x \cdot y$$

gelten. Weiter ergibt sich aus der Konstruktion der Kupplungsfunktionen, dass  $\nu(f + g) = \nu(f) + \nu(g)$  gilt.

**Der Fall  $x \cdot y = 0$** 

Es folgt  $\beta(f + g) = 0$ , sodass  $f + g$  gemäß Korollar 2.3.2 regulär homotop zu einer Einbettung  $\iota$  ist, die  $x + y$  repräsentiert. Dann gilt aber

$$\alpha(x + y) = [\nu(\iota)] = [\nu(f + g)] = [\nu(f)] + [\nu(g)] = \alpha(x) + \alpha(y).$$

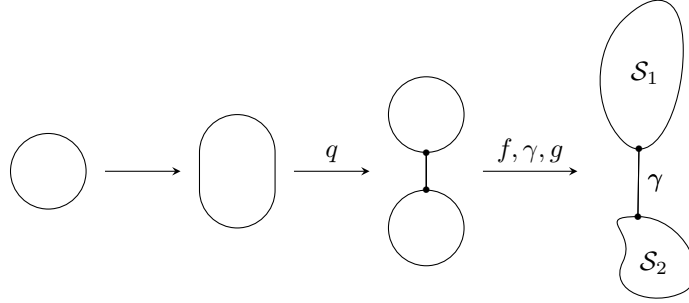


Abbildung 8.1: Die Konstruktion von  $f + g$  über eine Kurve  $\gamma$ . Die resultierende immensierte Mannigfaltigkeit kann als verbundenen Summe  $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$  verstanden werden.

### Der Fall $x \cdot y = 1$

Sei  $h: \mathbb{S}^k \looparrowright \mathcal{M}$  eine nullhomotope Immersion mit Selbstschnittzahl eins. Eine solche existiert im  $\mathbb{R}^{2k}$  gemäß 2.3.3, also über eine Karte  $\mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathcal{M}$  auch in  $\mathcal{M}$ . Es folgt, dass  $f + g + h$  Selbstschnittzahl null besitzt, regulär homotop zu einer Einbettung  $\iota$  ist, und die, da  $h$  nullhomotop ist,  $x + y$  repräsentiert. Es folgt

$$\alpha(x + y) = [\nu(\iota)] = [\nu(f + g + h)] = \alpha(x) + \alpha(y) + [\nu(h)]. \quad (8.2)$$

### Das Normalenbündel von $h$

Da  $h$  über eine Karte definiert ist, ist  $\nu(h) \in \text{Ker } S_*$  nicht von  $\mathcal{M}$  abhängig, somit reicht es aus,  $\nu(h) = \tau_k$  für  $\mathcal{M} = \mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^k$  zu zeigen. Es gilt  $H_k(\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^k) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Seien  $x$  und  $y$  von den Einbettungen  $f = \mathbb{S}^k \times p$  und  $g = p \times \mathbb{S}^k$  repräsentiert. Diese besitzen triviale Normalenbündel und es gilt  $x \cdot y = 1$ . Bekannterweise ist  $f + g$  zu der Diagonalen in  $\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^k$  homotop. Diese besitzt gemäß [MS74] Satz 11.5 Normalenbündel  $\tau_k$ . Aus  $\alpha(x) = \alpha(y) = 0$  folgt

$$[\nu(h)] \stackrel{(8.2)}{=} \alpha(x + y) = [\nu(f + g)] = [\tau_k].$$

Somit gilt allgemein

$$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y) + [\tau_k] \cdot (x \cdot y).$$

q.e.d.

Dies ermöglicht nun für  $k \notin \{3, 7\}$  endlich die Definition einer quadratischen Verfeinerung. Die Funktion

$$\Psi: H_k(\mathcal{M}; \mathbb{F}_2) \cong H_k(\mathcal{M}) \otimes \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\alpha \otimes 1} \mathbb{F}_2$$

erfüllt offenbar erneut  $\Psi(x + y) = \Psi(x) + \Psi(y) + x \cdot y \in \mathbb{F}_2$ . Die Arf-Invariante bezüglich dieser Verfeinerung heiße **Kervaire-Invariante**, und hängt nicht von

der Wahl einer Rahmung ab. Es lässt sich erkennen, dass für eine symplektische Basis  $e_i, f_i$  von  $H_k(\mathcal{M})$  nun

$$\kappa(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha(e_i) \alpha(f_i) \mod 2$$

gilt.

### 8.1.3 Eigenschaften der Kervaire-Invariante

Sei erneut  $k \notin \{3, 7\}$  ungerade. Das vorherige Vorgehen definiert die Kervaire-Invariante für alle  $(k-1)$ -zusammenhängenden  $\pi$ -Mannigfaltigkeiten. Für derartige Mannigfaltigkeiten hängt die Invariante von keiner gewählten Rahmung ab.

#### Lemma 8.1.2

*Zwei  $\chi$ -äquivalente,  $(k-1)$ -zusammenhängende, gerahmte Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}^{2k}$  und  $\mathcal{N}^{2k}$ , deren Ränder leer oder Homotopiesphären sind, besitzen gleiche Kervaire-Invariante.*

*Beweis.* Sei  $n = i + j + 1$ . Es reicht aus den Satz für  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^i$  mit  $i \leq j$  zu zeigen. Dann existiert gemäß Lemma 5.4.6 eine gerahmte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}^{2k+1}$  mit

$$\partial \mathcal{W} \cong \mathcal{M} \overset{\partial \mathcal{M}}{+} \mathcal{N}.$$

Diese kann durch endlich viele Chirurgen durch eine  $(k-1)$ -zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit gleichem Rand ersetzt werden. Sei  $\iota: \partial \mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{W}$  die kanonische Einbettung. Wähle gemäß Satz 5.5.4 eine symplektische Basis von  $H_k(\partial \mathcal{W})$  mit  $e_i \in \text{Ker } \iota_*$ . Sei  $f: \mathbb{S}^k \hookrightarrow \partial \mathcal{W}$  eine  $e_i$  repräsentierende Einbettung. Aus dem Satz von Hurewicz folgt, dass eine stetige Fortsetzung  $\tilde{f}: \mathbb{D}^{k+1} \looparrowright \mathcal{W}$  existiert. Diese kann als Immersion mit wohldefiniertem Normalenbündel angenommen werden kann. Da  $\mathbb{D}^{k+1}$  kontrahierbar ist, müssen  $\nu(\tilde{f}) = 0$  und  $\nu(f) = 0$  gelten. Es folgt  $\alpha(e_i) = [\nu(f)] = 0$ , also auch  $\kappa(\partial \mathcal{W}) = 0$ . Da  $\partial \mathcal{M}$  leer oder eine Homotopiesphäre ist, gilt

$$H_k(\partial \mathcal{W}) \cong H_k(\mathcal{M} \overset{\partial \mathcal{M}}{+} \mathcal{N}) \cong H_k(\mathcal{M}) \oplus H_k(\mathcal{N}),$$

symplektische Basen von  $H_k(\mathcal{M})$  und  $H_k(\mathcal{N})$  bilden zusammen also eine Basis von  $H_k(\partial \mathcal{W})$ . Dies zeigt  $\kappa(\mathcal{M}) + \kappa(\mathcal{N}) = 0$ , also  $\kappa(\mathcal{M}) = \kappa(\mathcal{N})$ . q.e.d.

Sei  $(\mathcal{M}, F)$  eine gerahmte Mannigfaltigkeit, deren Rand leer ist oder eine Homotopiesphäre berande. Diese ist zu einer  $(k-1)$ -zusammenhängenden gerahmten Mannigfaltigkeiten  $(\mathcal{M}', F')$   $\chi$ -äquivalent, für welche die Kervaire-Invariante bereits definiert ist. Setze also  $\kappa(\mathcal{M}, F) := \kappa(\mathcal{M}')$ . Das vorangegangene Lemma garantiert, dass dies wohldefiniert ist.

**Lemma 8.1.3**

Die Kervaire-Invariante ist bezüglich der verbundenen Summe additiv.

*Beweis.* Für  $(k-1)$ -zusammenhängende  $\pi$ -Mannigfaltigkeiten folgt das aus

$$H_k(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \cong H_k(\mathcal{M}) \oplus H_k(\mathcal{N}),$$

da die Vereinigung symplektischer Basen von  $H_k(\mathcal{M})$  und  $H_k(\mathcal{N})$  eine symplektische Basis von  $H_k(\mathcal{M} + \mathcal{N})$  ergibt. q.e.d.

**Lemma 8.1.4**

Eine gerahmte Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, F)$ , deren Rand leer oder eine Homotopiesphäre ist, sodass  $\kappa(\mathcal{M}, F) = 0$  gilt, ist zu einer  $k$ -zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $\chi$ -äquivalent.

*Beweis.* Es kann angenommen werden, dass  $\mathcal{M}$  bereits  $(k-1)$ -zusammenhängend ist. Sei  $e_i, f_i$  für  $1 \leq i \leq \ell$  eine symplektische Basis von  $H_k(\mathcal{M})$ . Dann gilt

$$\kappa(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha(e_i) \alpha(f_i) \pmod{2}.$$

Wenn  $\alpha(e_i) \alpha(f_i) = 0$  ist, setze

$$e'_i := \begin{cases} e_i & \alpha(e_i) = 0 \\ f_i & \alpha(e_i) = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad f'_i := \begin{cases} f_i & \alpha(e_i) = 0 \\ e_i & \alpha(e_i) = 1 \end{cases}.$$

Wegen  $\kappa(\mathcal{M}) = 0$  gilt  $\alpha(e_i) \alpha(f_i) = 1$  für eine gerade Anzahl von  $i$ . Für ein Paar  $\alpha(e_i) \alpha(f_i) = \alpha(e_j) \alpha(f_j) = 1$  kann durch die Substitutionen

$$e'_i := e_i + e_j \quad \text{und} \quad e'_j := f_j - f_i$$

und

$$f'_i := f_i \quad \text{und} \quad f'_j := e_i$$

$\alpha(e'_i) = \alpha(e'_j) = 0$  erreicht werden. Insgesamt bilden die  $e'_i, f'_i$  eine symplektische Basis, in der  $\alpha(e'_i) = 0$  für alle  $i$  gilt. Lemma 5.5.2 besagt nun, dass  $\mathcal{M}$  zu einer  $k$ -zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $\chi$ -äquivalent ist. q.e.d.

**Satz 8.1.5**

Die Kervaire-Invariante  $\kappa: P^{2k} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  ist ein Isomorphismus.

*Beweis.* Sei  $(\mathcal{M}, F) \in P^{2k}$  mit  $\kappa(\mathcal{M}, F) = 0$ . Gemäß Lemma 8.1.4 ist  $\mathcal{M}$  zu einer  $k$ -zusammenhängenden, also einer kontrahierbaren, Mannigfaltigkeit  $\chi$ -äquivalent, und repräsentiert somit das Nullelement in  $P^{2k}$ . Die Aussage folgt, da sich durch Klempern eine  $2k$ -Mannigfaltigkeit in  $P^{2k}$  mit Kervaire-Invariante eins konstruieren lässt. q.e.d.

## Kapitel 9

# Die Berechnung von $\Theta_n$

### 9.1 Die Berechnung von $\partial P^n$

Betrachte erneut die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \Omega_n^{\text{Fast}} \xrightarrow{c} P^n \xrightarrow{\partial} \partial P^n \longrightarrow 0.$$

Den Korollaren 6.1.5 und 6.2.6 zufolge gilt  $P^{4m+1} = P^{4m+3} = 0$ , sodass sich direkt  $\partial P^{4m+1} = \partial P^{4m+3} = 0$  ergibt.

#### Die Berechnung von $\partial P_{4m}$

Für  $4m \geq 8$  gelten  $P^{4m} \cong 8\mathbb{Z}$  gemäß Satz 7.2.4 und  $\Omega_{4m}^{\text{Fast}} \cong |t_m| \cdot \mathbb{Z}$  gemäß Satz 7.4.6. Somit existiert eine exakte Folge

$$0 \rightarrow |t_m| \cdot \mathbb{Z} \rightarrow 8\mathbb{Z} \rightarrow \partial P^{4m} \rightarrow 0,$$

und es ergibt sich

$$\partial P^{4m} \cong 8\mathbb{Z}/|t_m| \cdot \mathbb{Z}.$$

Folglich besitzt  $\partial P^{4m}$  für  $4m \geq 8$  die Kardinalität

$$\frac{|t_m|}{8} = 2^{2m-3}(2^{2m-1} - 1)(3 + (-1)^{m+1}) \text{ Zähler} \left( \frac{|B_{2m}|}{4m} \right).$$

Beispielsweise ist wegen  $B_4 = -1/30$

$$\frac{|t_8|}{8} = 2^1(2^3 - 1)(3 + (-1)^3) \text{ Zähler} \left( \frac{1}{4 \cdot 30} \right) = 28, \quad (9.1)$$

also  $\partial P^8 \cong \mathbb{Z}_{28}$ .



**Die Berechnung von  $\partial P_{4k+2}$** 

Gemäß Satz 8.1.5 gilt  $P^{4k+2} \cong \mathbb{Z}_2$  für  $4k+2 \notin \{6, 14\}$ , sodass in diesen Fällen  $\partial P^{4k+2} \cong \mathbb{Z}_2$  oder  $\partial P^{4k+2} = 0$  gelten muss. Eine Erweiterung der Definition der Kervaire-Invariante (siehe Levine) oder ein direkter Beweis (siehe Kosinski) zeigt  $\partial P^{4k+2} = 0$  für  $4k+2 \in \{2, 6, 14\}$ . Es folgt  $\Omega_{4k+2}^{\text{Fast}} \subseteq \mathbb{Z}_2$ . Die Frage nach der Kardinalität von  $\Omega_n^{\text{Fast}}$  ist beträchtlich schwieriger. Browder zeigte 1969 [Bro69], dass geschlossene Mannigfaltigkeiten mit Kervaire-Invariante eins lediglich in Dimensionen der Form  $n = 2^k - 2$ , und zwar genau dann existieren, wenn ein gewisses Element der Adams-Spektralfolge ein  $\theta_{k-1} \in \Pi_{2^k-2}$  repräsentiert. Weiter konnte 2009 von Hill et al. [HHR09] gezeigt werden, dass hierbei auch alle  $k \geq 8$  ausgeschlossen werden können, sodass lediglich die Fälle  $n \in \{30, 62, 126\}$  verblieben. Nun existiert in Dimensionen  $n = 30$  eine explizite Konstruktion einer derartigen Mannigfaltigkeit von Jones [Jon78], und in Dimension  $n = 62$  ein Existenzbeweis von  $\theta_5$  von Barratt et al. [BJM84]. In einem noch nicht verifizierten Pre-Print von Lin et al. aus dem Jahr 2025 [LWX25] wird die Existenz von  $\theta_6$  gezeigt. Werden diese Sätze angenommen, folgt

$$\partial P^{4k+2} \cong \begin{cases} 0 & 4k+2 \in \{2, 6, 14, 30, 62, 126\} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{sonst} \end{cases}.$$

**9.2 Finale Ergebnisse**

Sei  $p: \Omega_n^{\text{Fr}} \rightarrow \Pi_n$  der stabile Thom-Pontrjagin-Isomorphismus, und  $p(\mathcal{M}) \subseteq \Pi_n$  die Menge jener stabilen Kollapsabbildungen, die mit verschiedenen normalen Rahmungen von  $\mathcal{M}$  in hinreichend großen  $\mathbb{R}^{n+k}$  korrespondieren. Sei  $\Sigma_n \subseteq \Pi_n$  die Menge der Abbildungen, die mit gerahmten Homotopiesphären korrespondieren.

**Satz 9.2.1**

Die Menge  $p(\mathbb{S}^n) \subseteq \Sigma_n$  ist ein Normalteiler und

$$\Phi: \Theta_n \rightarrow \Sigma_n / p(\mathbb{S}^n), [\Sigma] \mapsto p(\Sigma)$$

ein wohldefinierter Epimorphismus.

*Beweis.* Es gelten

- i  $\mathcal{M} + \mathbb{S}^n \cong \mathcal{M}$  für geschlossene Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  und
- ii  $\Sigma + (-\Sigma) \cong \mathbb{S}^n$  für Homotopiesphären  $\Sigma$ .

Dass  $p(\mathbb{S}^n)$  ein Normalteiler ist, folgt aus  $\mathbb{S}^n + \mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^n$ . Für gerahmte Homotopiesphären  $(\Sigma, F)$  gilt einerseits

$$-p(\Sigma, F) + p(\Sigma, F') = p(\mathbb{S}^n, H) \quad \text{also} \quad p(\Sigma, F') = p(\Sigma, F) + p(\mathbb{S}^n, H),$$

also  $p(\Sigma) \subseteq p(\Sigma, F) + p(\mathbb{S}^n)$ . Andererseits gilt

$$p(\Sigma, F) + p(\mathbb{S}^n, G) \in p(\Sigma)$$

und somit  $p(\Sigma, F) + p(\mathbb{S}^n) \subseteq p(\Sigma)$ . Folglich ist  $p(\Sigma)$  eine Nebenklasse von  $p(\mathbb{S}^n)$ . Sind zwei Homotopiesphären H-Kobordant, ergibt ein H-Kobordismus eine Homotopie  $p(\Sigma_1, F_1) \simeq p(\Sigma_2, F_2)$ . Die Surjektivität folgt, da jede Homotopiesphäre gemäß Korollar 7.4.5 eine  $\pi$ -Mannigfaltigkeit ist, sodass ihr stabiles Normalenbündel eine Rahmung zulässt und deshalb im Bild von  $\Phi$  liegt. q.e.d.

Beachte, dass  $p(\mathbb{S}^n)$  gerade das Bild des  $J$ -Homomorphismus  $J_n$  ist. Somit existiert eine Folge

$$0 \rightarrow \partial P^{n+1} \xrightarrow{\Phi} \Sigma_n / \text{Im } J_n \rightarrow 0. \quad (9.2)$$

Wenn  $\Phi(\Sigma) = 0$  gilt, existiert eine Rahmung von  $\Sigma$ , bezüglich welcher  $(\Sigma, F)$  gerahmt nullbordant ist. Somit muss  $\Sigma \in \partial P^{n+1}$  liegen, also ist Folge 9.2 exakt. Da  $\Sigma_n / \text{Im } J_n$  der Quotient der Untergruppe  $\Sigma_n \subseteq \Pi_n$  und  $\Pi_n$  endlich ist, folgt:

**Korollar 9.2.2**

Die Kervaire-Milnor-Gruppe  $\Theta_k$  ist für  $k \geq 4$  endlich.

Zusammen mit der kurzen exakten Folge

$$0 \rightarrow \Sigma_k / \text{Im } J_k \rightarrow \Pi_k / \text{Im } J_k \rightarrow \Pi_k / \Sigma_k \rightarrow 0,$$

in welcher der mittlere Term gerade Coker  $J_k$  ist, ergibt sich für eine Berechnung von  $\Theta_k$  die exakte Folge

$$0 \rightarrow \partial P^{k+1} \rightarrow \Theta_k \rightarrow \text{Coker } J_k \rightarrow \Pi_k / \Sigma_k \rightarrow 0. \quad (9.3)$$

Es gilt ([Kos92] Kapitel IX Satz 6.7)

$$\Pi_k / \Sigma_k \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & k \in \{2, 6, 14, 30, 62, 126\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da das Bild von  $J_k$  bekannt ist, reduziert sich die Berechnung der Gruppe der Homotopiesphären  $\Theta_k$  somit auf die stabilen Homotopiegruppe der Sphäre  $\Pi_k$ , die größtenteils unbekannt sind. Beispielsweise ergibt dies für  $n = 7$

$$0 \rightarrow \partial P^8 \rightarrow \Theta_7 \rightarrow \text{Coker } J_7 \rightarrow 0.$$

Wegen  $\Pi_7 \cong \text{Im } J_7$  folgt

$$\Theta_7 \cong \partial P^8 \cong \mathbb{Z}_{28}^{(9,1)},$$

also existieren genau 28 exotische Sphären der Dimension 7.

# Appendix

## A.1 Relative Homologie einer Chirurgie

### Satz A.1.1

Für  $i \leq j - 1$  gelten

$$H_k(\mathcal{M}', \mathcal{M}_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k \in \{0, i+1\} \\ 0 & 1 < k < i+1 \end{cases}$$

und

$$H_k(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k \in \{0, j+1\} \\ 0 & 1 < k < j+1 \end{cases}.$$

Erzeuger der  $\mathbb{Z}$ -Anteile in Dimension  $i+1$  und  $j+1$  sind der Kern  $(\mathbb{D}^{i+1}, \mathbb{S}^i)$  und der Kokern  $(\mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{S}^j)$ .

*Beweis.* Die lange exakte Folge des Tripels  $(\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{S}^j, \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j)$  ist von der Form

$$\begin{array}{ccc} H_{k+1}(\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) & \xrightarrow{\cong} & H_k(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{k+1}(\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{S}^j) & \xrightarrow{\cong} & H_k(\mathbb{S}^j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k(\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{S}^j, \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) & \xrightarrow{:=} & A_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k(\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) & \xrightarrow{\cong} & H_{k-1}(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k(\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{S}^j) & \xrightarrow{\cong} & H_{k-1}(\mathbb{S}^j) \end{array}$$

Ebenso ist die lange exakte Folge für  $(\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{S}^i \times \mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j)$  von der Form

$$H_k(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) \rightarrow H_k(\mathbb{S}^i) \rightarrow B_k \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{S}^i).$$

Aus  $k \notin \{j, j+1\}$  folgt direkt

$$A_k := H_k(\mathbb{D}^{i+1} \times \mathbb{S}^j, \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) \cong H_{k-1}(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j), \quad (\text{A.1})$$

aus  $k \notin \{i, i+1\}$

$$B_k := H_k(\mathbb{S}^i \times \mathbb{D}^{j+1}, \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j) \cong H_{k-1}(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j). \quad (\text{A.2})$$

Dies impliziert  $A_k = 0$  für  $1 < k < j$  und  $B_k = 0$  für  $1 < k < i$ . Interessant ist nun das Verhalten von  $\{i, i+1\} \cap \{j, j+1\}$ . Es gibt drei Fälle:  $i = j-1$ ,  $i = j$  und  $i = j+1$ . Hierbei übernehmen  $i$  und  $j$  für  $A_i$  und  $B_i$  duale Stellungen, sodass in den langen exakten Folgen von oben essenziell drei Fälle eintreten können.

### Fall 1

Es ergeben sich die exakten Folgen

$$0 \rightarrow A_{i+2} \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \rightarrow A_{i+1} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{für } i = j+1,$$

$$0 \rightarrow B_{j+2} \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \rightarrow B_{j+1} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{für } j = i+1,$$

also folgt  $A_{i+2} \cong \text{Ker } 1 = 0$ . Da die Identität surjektiv ist, ist der Morphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow A_{i+1}$  gleich null, also folgt  $A_{i+1} \cong \mathbb{Z}$ . Komplet analog folgen  $B_{j+2} = 0$  und  $B_{j+1} \cong \mathbb{Z}$ .

### Fall 2

Sei  $i = j$ . Dann ergeben sich die exakten Folgen

$$0 \rightarrow A_{i+1} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Z} \rightarrow A_i \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow B_{j+1} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{Z} \rightarrow B_j \rightarrow 0$$

Der mittlere Homomorphismus ist surjektiv, also gelten

$$A_{i+1} \cong \text{Ker } \pi_2 = \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad A_i \cong \text{coker } \pi_2 = 0,$$

und analog  $B_{j+1} \cong \mathbb{Z}$  und  $B_j = 0$ .

### Fall 3

Es ergeben sich die exakten Folgen

$$0 \rightarrow A_{i+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow A_i \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \rightarrow A_{i-1} \rightarrow 0 \quad \text{für } i = j-1.$$

$$0 \rightarrow B_{j+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow B_j \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \rightarrow B_{j-1} \rightarrow 0 \quad \text{für } j = i-1.$$

Direkt folgen  $A_{i+1} \cong \mathbb{Z}$  und  $B_{j+1} \cong \mathbb{Z}$ , sowie

$$A_i \cong B_j \cong \text{Ker } 1 = 0 \quad \text{und} \quad A_{i-1} \cong B_{j-1} \cong \text{coker } 1 = 0.$$

q.e.d.

# Literatur

- [Ada66] J.F. Adams. „On the groups  $J(X)$ —IV“. In: *Topology* 5.1 (1966), S. 21–71.
- [Aur12] Denis Auroux. „Algebraic Topology“. Lecture 11: Poincaré duality and the Euler class. 2012. URL: <https://people.math.harvard.edu/~auroux/215Bs12>.
- [BJM84] M. G. Barratt, J. D. S. Jones und M. E. Mahowald. „Relations Amongst Toda Brackets and the Kervaire Invariant in Dimension 62“. In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-30.3 (1984), S. 533–550.
- [Bot59] Raoul Bott. „The Stable Homotopy of the Classical Groups“. In: *Annals of Mathematics* 70.2 (1959), S. 313–337.
- [Bro69] William Browder. „The Kervaire Invariant of Framed Manifolds and its Generalization“. In: *Annals of Mathematics* 90.1 (1969), S. 157–186.
- [Die08] Tammo tom Dieck. *Algebraic Topology*. EMS textbooks in mathematics. European Mathematical Society, 2008. ISBN: 9783037190487.
- [Dol80] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Zweite Edition. Springer Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [Hae61] André Haeffliger. „Differentiable imbeddings“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 67 (1961), S. 109–112.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780521795401.
- [Hat17] A. Hatcher. „Vector Bundles and K-Theory“. Version 2.2. 2017.
- [HBS66] Friedrich Hirzebruch, Armand Borel und Rolph L.E. Schwarzenberger. *Topological methods in algebraic geometry*. Bd. 175. Springer Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
- [HHR09] Michael A. Hill, Michael J. Hopkins und Douglas C. Ravenel. „On the non-existence of elements of Kervaire invariant one“. In: *Annals of Mathematics* 184.1 (2009), S. 1–262.
- [Hir12] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781468494495.

- [Jon78] John D.S. Jones. „The Kervaire invariant of extended power manifolds“. In: *Topology* 17.3 (1978), S. 249–266.
- [Ker59] Michel A. Kervaire. „A Note on Obstructions and Characteristic Classes“. In: *American Journal of Mathematics* 81.3 (1959), S. 773–784.
- [KM62] Michel A. Kervaire und John W. Milnor. „Groups of Homotopy Spheres: I“. In: *Annals of Mathematics* 77.3 (1962), S. 504–537.
- [Kna13] Karlheinz Knapp. *Vektorbündel - Vom Möbius-Bündel bis zum J-Homomorphismus*. Springer Spektrum Wiesbaden, 2013. ISBN: 978-3-658-03114-5.
- [Kos92] Antoni A. Kosinski. *Differential Manifolds*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1992. ISBN: 9780486318158.
- [Lev85] J. P. Levine. „Lectures on groups of homotopy spheres“. In: *Algebraic and Geometric Topology*. Hrsg. von Andrew Ranicki, Norman Levitt und Frank Quinn. Springer Berlin Heidelberg, 1985, S. 62–95. ISBN: 978-3-540-39413-6.
- [Lun92] Albert T. Lundell. „Concise tables of James numbers and some homotopy of classical Lie groups and associated homogeneous spaces“. In: *Algebraic Topology Homotopy and Group Cohomology*. Hrsg. von Jaume Aguadé, Manuel Castellet und Frederick Ronald Cohen. Springer Berlin Heidelberg, 1992, S. 250–272. ISBN: 978-3-540-46772-4.
- [LWX25] Weinan Lin, Guozhen Wang und Zhouli Xu. *On the Last Kervaire Invariant Problem*. 2025. URL: <https://arxiv.org/abs/2412.10879>.
- [Mil61] John Milnor. „A Procedure for Killing Homotopy Groups of Differentiable Manifolds“. In: *Proceedings of symposia in pure mathematics*. American Mathematical Society. 1961, S. 39–55.
- [Mil65] John Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, 1965.
- [MS74] John W. Milnor und James D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1974. ISBN: 9780691081229.
- [NR04] Terrence Napier und Mohan Ramachandran. *Elementary construction of subharmonic exhaustion functions*. 2004. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0405533>.
- [Whi44] Hasseler Whitney. „The Self-Intersections of a Smooth  $n$ -Manifold in  $2n$ -space“. In: *Annals of Mathematics* 45.2 (1944), S. 220–246.