

Studienprojekt

Der H-Kobordismus-Satz

Torge Graner

10. Januar 2026

Betreuer: Prof. Dr. Oliver Röndigs

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Mannigfaltigkeiten	2
1.1	Kobordismen	2
1.2	Isotopien und Tubenumgebungen	3
1.3	Nicht triviale wichtige Sätze	3
1.4	Verklebung von Mannigfaltigkeiten	5
1.4.1	Die Randsumme	5
2	Henkelkörper	7
2.1	Anbringen von Henkeln	7
2.1.1	Mannigfaltigkeiten mit Ecken	7
2.1.2	Randsumme mit der Einheitsscheibe	8
2.1.3	Äquivalenz der Ansätze	8
2.2	Vertauschung der Befestigungsreihenfolge	11
2.2.1	Allgemeine Vertauschung	11
2.2.2	Henkelzerlegungen	12
3	Etwas Morsetheorie	13
3.1	Morsefunktionen	13
3.2	Existenz einer Henkelzerlegung	13
4	Einfache Kürzungen	15
5	Homologie von Kobordismen	17
5.1	Henkuläre Homologie	17
5.1.1	Schnittzahlen und der Whitney-Trick	19
5.2	Homologie- und Modifikationslemmata	20
6	Entfernung der 0- und 1-Henkel	21
7	Der H-Kobordismus-Satz	23
7.1	Die Normalform	23
7.2	Differentialmatrizen	24

7.2.1	Elementare Zeilenoperationen	24
	Appendix	25
	Literaturverzeichnis	29

Kapitel 0

Einleitung

Der H-Kobordismus-Satz ist ein wichtiges Resultat der Differentialtopologie und ermöglicht unter anderem, in hinreichend großer Dimension zu entscheiden, ob zwei Mannigfaltigkeiten zueinander diffeomorph sind. Mit diesem lässt sich unter anderem die verallgemeinerte Poincaré-Vermutung für Dimensionen $n \geq 5$ beweisen, wofür Stephen Smale 1966 die Fields-Medaille erhielt. Weitere Beweise des Satzes lassen sich zum Beispiel in den Büchern „Differential Manifolds“ von Antoni Kosinski [Kos13], „Lectures on the h-Cobordism Theorem“, welches auf den Niederschriften von L. Siebenmann und J. Sondow eines Seminars von John Milnor basiert [MSS65], oder „A Basic Introduction to Surgery Theory“ von Wolfgang Lück [Lüc04] finden. Der Ansatz von Milnor ist hierbei einer sehr technischen Natur kommt komplett ohne die Erwähnung von Henkelzerlegungen aus. Ebenso vollständig und technisch ist der Ansatz von Kosinski. Da der H-Kobordismus Satz in Lücks Buch nur einen kurzen Teil einnimmt, ist der dort dargelegte Beweis etwas kürzer und nicht auf Details fokussiert. Ziel der folgenden Arbeit sei, die Beweiskette von Lück zu verfolgen, wobei einige Details und Definitionen eher an Kosinski angelehnt seien. Grundlagen über glatte Mannigfaltigkeiten lassen sich zum Beispiel in „Einführung in die Differentialtopologie“ von Klaus Jänich und Theodor Bröcker [Brö73], „Differential Topology“ von Morris Hirsch [Hir12] oder „Introduction to Smooth Manifolds“ von John M. Lee [Lee13]. Jegliche Ergebnisse der (algebraischen) Topologie können in „Algebraic Topology“ von Allen Hatcher [Hat02] gefunden werden. Letztlich sei noch angemerkt, dass der Inhalt des Appendix zwar für die eigentliche Arbeit ignoriert werden kann, jedoch einen enormen Zeitaufwand erfordert hat.

Kapitel 1

Mannigfaltigkeiten

Als glatte Mannigfaltigkeit sei im Weiteren stets ein zweitabzählbarer Hausdorff-Raum bezeichnet, der sich lokal in den $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}\}$ einbetten lasse und mit einer glatten Struktur versehen sei. Im ersten Fall handelt es sich um eine gewöhnliche glatte Mannigfaltigkeit, im zweiten um eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und im dritten um eine glatte Mannigfaltigkeit mit Ecken. Insbesondere sind Mannigfaltigkeiten mit Ecken nicht unbedingt Mannigfaltigkeiten mit Rand. **Alle Mannigfaltigkeiten seien im Folgenden glatte, kompakte Mannigfaltigkeiten mit (möglicherweise leerem) Rand.** Mannigfaltigkeiten mit leerem Rand heißen geschlossen.

1.1 Kobordismen

Definition 1 (Kobordismus).

Seien \mathcal{M}^n und \mathcal{N}^n geschlossene Mannigfaltigkeiten, so heiße eine Mannigfaltigkeit \mathcal{W}^{n+1} mit einer Zerlegung $\partial\mathcal{W} \cong \mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ ein Kobordismus von \mathcal{M} zu \mathcal{N} .

Es werde gelegentlich auch die Notation $\partial_-\mathcal{W} := \mathcal{M}$ und $\partial_+\mathcal{W} := \mathcal{N}$ genutzt.

Definition 2 (Diffeomorphie zweier Kobordismen).

Zwei Kobordismen $\mathfrak{W} = (\mathcal{W}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ und $\mathfrak{W}' = (\mathcal{W}', \mathcal{M}, \mathcal{N}')$ heißen diffeomorph relativ zu \mathcal{M} (im Folgenden einfach diffeomorph), falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{W} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{W}' & & \\ & \nearrow & & \exists & & \nwarrow & \\ \mathcal{N} & & & & & & \mathcal{N}' \\ & \nwarrow & \mathcal{M} & \nearrow & & \swarrow & \end{array}$$

kommutiert.

Ein zu $(\mathcal{M} \times \mathbb{I}, \mathcal{M}, \mathcal{M})$ diffeomorpher Kobordismus heiße trivial.

Definition 3 (H-Kobordismus).

Ein Kobordismus $(\mathcal{W}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ dessen Einbettungen $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{W}$ und $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{W}$ Homotopiequivalenzen sind.

1.2 Isotopien und Tubenumgebungen

Definition 4 (Isotopie).

Eine Isotopie zweier Einbettungen $\Psi, \Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sei eine glatte Abbildung $I: \mathcal{M} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{N}$, sodass die Abbildungen

$$I_t: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}, p \mapsto I(p, t)$$

für alle $t \in \mathbb{I}$ Einbettungen seien und $I_0 \equiv \Psi$ sowie $I_1 \equiv \Phi$ gelte. Dies sei durch $\Psi \simeq \Phi$ bezeichnet.

Eine Isotopie bei welcher $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ gilt, alle I_t Diffeomorphismen seien und $I_0 \equiv \mathbb{1}$ gelte heiße Diffeotopie. Ein wichtiger Begriff ist der der Tubenumgebung.

Definition 5 (Tubenumgebung von $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ in \mathcal{M} für $\partial\mathcal{M} = \emptyset$).

Eine Einbettung $h: E \hookrightarrow \mathcal{M}$ für ein Vektorbündel $\pi: E \rightarrow \mathcal{N}^k$ des Ranges $n - k$, sodass der Nullschnitt auf \mathcal{V}^k abgebildet wird.

Es lässt sich zeigen, dass π in diesem Fall bereits zu dem Normalenbündel isomorph ist. Zu einer weiteren Tubenumgebung $h': E' \hookrightarrow \mathcal{M}$ mit dem Vektorbündel $\pi': E' \rightarrow \mathcal{V}$ existiert stets ein Isomorphismus $\Gamma: \pi \rightarrow \pi'$, sodass $h' \simeq h \circ \Gamma$ gilt. Sind π und π' mit riemannsch, kann Γ als Isometrie angenommen werden.

Definition 6 (Tubenumgebung einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{V} \subseteq \partial\mathcal{M}$ in \mathcal{M}).

Die Fortsetzung einer Tubenumgebung $h: E \hookrightarrow \partial\mathcal{M}$ von \mathcal{V} zu einer Einbettung $\tilde{h}: E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \mathcal{M}$.

1.3 Nicht triviale wichtige Sätze

Zunächst ist es elementar, Isotopien von Einbettungen in den Rand einer Mannigfaltigkeit auf die gesamte Mannigfaltigkeit fortzusetzen, sodass eine Isotopie tatsächlich einen Diffeomorphismus induziert.

Proposition 1.

Für jede Isotopie $I: \mathcal{M} \times \mathbb{I} \rightarrow \partial\mathcal{N}$ existiert eine Diffeotopie $J: \mathcal{N} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{N}$ mit kompaktem Träger und $J_t \circ I_0 \equiv I_t$ für alle $t \in \mathbb{I}$.

Beweis. Siehe [Hir12] Kapitel 8 Satz 1.3.

q.e.d.

Proposition 2 (Schwacher Einbettungssatz von Whitney).

Für $n > 2m$ lässt sich jede stetige Abbildung $\mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ durch eine Einbettung approximieren.

Beweis. Siehe [Lee13] Satz 6.21.

q.e.d.

Proposition 3 (Eindeutigkeit einer Einbettung).

Ist $m \geq 2n + 2$, so sind zwei homotope Einbettungen $f, g: \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^m$ isotop.

Beweis. Siehe [Whi36] Satz 6.

q.e.d.

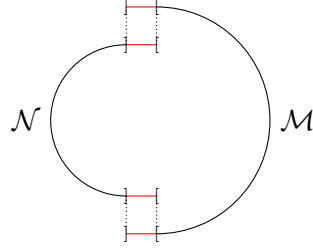


Abbildung 1.1: Die Notwendigkeit von α_E in der Verklebung zweier eindimensionaler Mannigfaltigkeiten entlang ihres Randes.

1.4 Verklebung von Mannigfaltigkeiten

1.4.1 Die Randsumme

Seien für $i \in \{1, 2\}$ jeweils \mathcal{M}_i^n Mannigfaltigkeiten, $\mathcal{V}_i^k \subseteq \partial\mathcal{M}_i$ Untermannigfaltigkeiten, $\pi: E \rightarrow \mathcal{N}$ ein riemannsches Vektorbündel und $h_i: E \hookrightarrow \partial\mathcal{M}_i$ Tubenumgebungen der \mathcal{V}_i in $\partial\mathcal{M}_i$. Seien $\tilde{h}_i: E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \mathcal{M}_i$ Fortsetzungen der h_i zu Tubenumgebungen der \mathcal{V}_i in \mathcal{M}_i . Sei zuletzt die Involution

$$\alpha_E: E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbf{0} \rightarrow E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbf{0}, v \mapsto \frac{v}{||v||^2}$$

gegeben, so setze

$$\mathcal{M}_1 \overset{\mathcal{V}_1}{+} \mathcal{M}_2 = (\mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{V}_2) / \left(\tilde{h}_2(x) \sim \tilde{h}_1 \circ \alpha_E(x), x \in E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbf{0} \right)$$

oder falls die Wahl der h_i wichtig ist auch

$$\mathcal{M}_1 \overset{h_2}{\underset{h_1}{+}} \mathcal{M}_2.$$

Diese Konstruktion ist bis auf Diffeomorphie unabhängig von der Wahl der Fortsetzung der h_i . Weiter ergeben isotope Einbettungen diffeomorphe Mannigfaltigkeiten. Die Notwendigkeit der Abbildung α_E ist in Abbildung [1.1] illustriert.

Für ein riemannsches Vektorbündel heiße im Folgenden das glatte Faserbündel der Vektoren mit Norm $\|v\| \leq 1$ das Einheitsscheibenbündel. Die Faser ist also diffeomorph zu \mathbb{D}^n .

Lemma 1 (Verklebung mit einem Scheibenbündel).

Sei $\pi: E \rightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ ein riemannsches Vektorbündel vom Rang $n - k$, \mathcal{B} das zugehörige Einheitsscheibenbündel und $s: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}' \subseteq \partial\mathcal{B}$ ein glatter Schnitt. Dann gilt

$$\mathcal{M} \overset{\mathcal{V}}{+} \mathcal{B} \cong \mathcal{M}.$$

Beweis. Sei $(\mathcal{V}')^\perp$ das Komplementärbündel des von \mathcal{V}' in E erzeugten Unterbündels. Dann ist

$$h_1: (\mathcal{V}')^\perp \hookrightarrow \partial\mathcal{B}, (p, v) \mapsto \frac{2v + (1 - \|v\|^2)p}{\|v\|^2 + 1}$$

eine Tubenumgebung von \mathcal{V}' in $\partial\mathcal{B}$ und

$$\tilde{h}_1: (\mathcal{V}')^\perp \times \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \mathcal{B}, (p, v, t) \mapsto \frac{2v + (1 - t^2 - \|v\|^2)p}{\|v\|^2 + (1 + t)^2}$$

eine Tubenumgebung von \mathcal{V}' in \mathcal{B} . Seien weiter

$$h_2: (\mathcal{V}')^\perp \hookrightarrow \partial\mathcal{M} \quad \text{und} \quad \tilde{h}_2: (\mathcal{V}')^\perp \times \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

beliebige Tubenumgebungen von \mathcal{V} in $\partial\mathcal{M}$ und \mathcal{M} . Dann lässt sich der Diffeomorphismus

$$\Phi: \mathcal{M} \overset{\mathcal{V}}{+} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}, z \mapsto \begin{cases} z & z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{V} \\ \tilde{h}_2 \left(\frac{2v + (1 - \|v\|^2 - t^2)p}{\|v\|^2 + (1 + t)^2} \right) & z = v + tp \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{V}' \end{cases}$$

definieren. Es lässt sich leicht (?) nachrechnen, dass dieser wohldefiniert ist (siehe Appendix [8]). Dies zeigt die Aussage für die explizite Wahl der Tubenumgebung h_1 und beliebige Tubenumgebungen h_2 . Da für jede andere Tubenumgebung $h: (\mathcal{V}')^\perp \rightarrow \partial\mathcal{B}$ eine Isometrie Γ existiert, sodass $h \simeq h_1 \circ \Gamma$ gilt, folgt dann aber bereits

$$\mathcal{M} \overset{h_2}{+}_h \mathcal{B} \cong \mathcal{M} \overset{h_2}{+}_{h_1 \circ \Gamma} \mathcal{B} = \mathcal{M} \overset{h_2 \circ \Gamma^{-1}}{+}_{h_1} \mathcal{B} \cong \mathcal{M},$$

gemäß dem oben Gezeigten, und da α mit Isometrien kommutiert. q.e.d.

Kapitel 2

Henkelkörper

2.1 Anbringen von Henkeln

Im Folgenden heiße $(x, y) \in \mathbb{D}^n$ stets $x \in \mathbb{D}^k$ und $y \in \mathbb{D}^k$. Weiter sei zum Beispiel \mathbb{S}^{k-1} durch $\mathbb{S}^{k-1} \times \{0\}^{n-k}$ als Untermannigfaltigkeit von $\partial\mathbb{D}^n$ aufgefasst.

2.1.1 Mannigfaltigkeiten mit Ecken

Sei \mathcal{W} eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Es kann die Mannigfaltigkeit mit Ecken $H^k := \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$ betrachtet werden. Ihr Rand ist gerade

$$\partial H^k = \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{D}^{n-k} \cup \mathbb{D}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1},$$

und lässt sich entlang einer Einbettung $\Psi^k: \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{D}^{n-k} \rightarrow \partial\mathcal{W}$ zu dem topologischen Raum

$$\mathcal{W} \overset{\Psi}{+} H^k := \left(\mathcal{W} \sqcup H^k \right) / \left(\forall p \in \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{D}^{n-k} : p \sim \Psi(p) \right)$$

verkleben. Dieser Raum ist zweitabzhlbar, hausdorffsch und lokal euklidisch. Das Problem besteht darin, dass es sich hierbei nicht unbedingt um eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand handelt, sondern vielmehr um eine glatte Mannigfaltigkeit mit Ecken, was den gesamten Beweis in die Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit Ecken verschiebt, was etwas lästig ist. Es ist möglich, diese Ecken zu glätten, also eine homöomorphe glatte Mannigfaltigkeit mit Rand zu finden. Dies ist nicht trivial und die Existenz einer Glättung müsste gezeigt werden, sowie dieser Umstand bei allen Beweisen beachtet werden. Abgesehen davon ist der Ansatz etwas intuitiver und in Abbildung [2.1] dargestellt.

2.1.2 Randsumme mit der Einheitsscheibe

Andererseits lässt sich das Anbringen eines Henkels als die Randsumme einer Mannigfaltigkeit mit der Einheitsscheibe beschreiben. Hierzu sei die Umgebung $U := \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{D}^{n-k}$ von \mathbb{S}^{k-1} in \mathbb{D}^n definiert. Diese ist das Bild einer geeigneten Tubenumgebung $\tilde{h}_1: E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ mit dem riemannschen Vektorbündel

$$\pi: E \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}, (p, x) \mapsto p$$

für $E := \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$ (siehe Appendix [8]). Unter dieser Einbettung ist $\alpha := \tilde{h}_1 \circ \alpha_E \circ \tilde{h}_1^{-1}$ gerade

$$\alpha: U \setminus \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow U \setminus \mathbb{S}^{k-1}, (x, y) \mapsto \left(x \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2}}{\|x\|}, y \frac{\|x\|}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right).$$

Die Einschränkung von \tilde{h} auf $E \times \{0\}$ ein, ergibt eine Tubenumgebung h von \mathbb{S}^{k-1} in $\partial \mathbb{D}^n$ mit dem Bild $U \cap \partial \mathbb{D}^n$. Sei eine Einbettung $\psi^k: \mathbb{S}^{k-1} \hookrightarrow \partial \mathcal{W}$ mit einer Fortsetzung $\Psi^k: U \cap \partial \mathbb{D}^n \hookrightarrow \partial \mathcal{W}$ und einer weiteren Fortsetzung $\tilde{\Psi}^k: U \hookrightarrow \mathcal{W}$ von Ψ^k gegeben, kann die Tubenumgebung $\tilde{h}_2 := \tilde{\Psi} \circ \tilde{h}_1$ von $\Lambda^k := \psi^k(\mathbb{S}^{k-1})$ in \mathcal{W} , und somit auch

$$\mathcal{W} + \Psi^k := \mathcal{W} \overset{\mathbb{S}^{k-1}}{+} \mathbb{D}^n$$

definiert werden. In dieser gilt die Identifikation $\tilde{h}_1(x) \sim \tilde{h}_2 \circ \alpha_E(x)$ für alle $x \in E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbf{0}$, und wegen

$$\tilde{h}_2 \circ \alpha_E(x) = \tilde{\Psi} \circ \tilde{h}_1 \circ \tilde{h}_1^{-1} \circ \alpha \circ \tilde{h}_1(x) = \tilde{\Psi} \circ \alpha \circ \tilde{h}_1(x)$$

auch $y \sim \tilde{\Psi} \circ \alpha(y)$ für $y \in U \setminus \mathbb{S}^{k-1}$. Folglich ist

$$\mathcal{W} + \Psi^k = \left(\mathcal{W} \setminus \Lambda^k \sqcup \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{k-1} \right) / \left(y \sim \tilde{\Psi} \circ \alpha(y), y \in U \setminus \mathbb{S}^{k-1} \right)$$

und es muss nicht mehr mit den tatsächlichen Tubenumgebungen gearbeitet werden. Ein Henkel sei das Tripel $(\psi^k, \Psi^k, \tilde{\Psi}^k)$, welches auch mit Ψ^k bezeichnet werde.

2.1.3 Äquivalenz der Ansätze

Die Räume aus den Abschnitten [2.1.1] und [1.4.1] sind zueinander homöomorph, sodass die zusammenhängende Summe entlang der eingebetteten Sphäre im Rand als Glättung der oben diskutierten Mannigfaltigkeit mit Ecken angesehen werden kann.

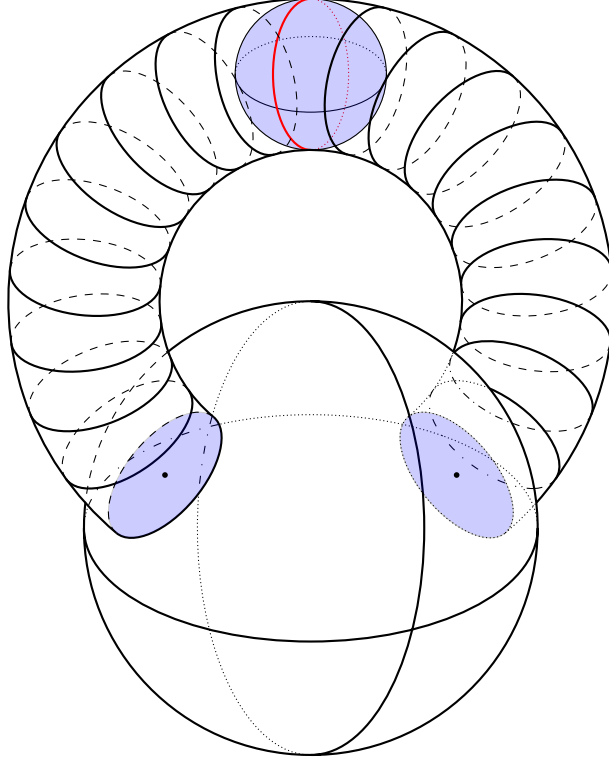


Abbildung 2.1: Eine 3-Vollkugel mit einem 1-Henkel, die gleichzeitig eine optische Täuschung ist. Dies ist homöomorph zu einem Torus, also einem Diskbündel des Ranges 2 über der 1-Sphäre (siehe Bemerkung [2.1.3] und Lemma [1]).

Notation

Sei Ψ^k ein Henkel, so heiße die durch Ψ^k eingebettete Sphäre Λ^k die Anklebesphäre von Ψ^k und $\Sigma^k := \mathbb{S}^{n-k-1}$ der Gürtel von Ψ^k . Hierbei gilt die Beziehung $\Sigma^k = \partial(\mathcal{W} + \Psi^k) \setminus \partial\mathcal{W}$. Der Kern von Ψ^k sei die abgeschlossene Hülle von $\mathring{\mathbb{D}}^{n-k}$ in $\mathcal{W} + \Psi^k$.

Lemma 2 (Henkel an der Einheitskugel).

Das Anbringen eines Henkels an \mathbb{D}^n entlang \mathbb{S}^{k-1} ist zu einem Scheibenbündel des Ranges $n - k$ diffeomorph.

Beweis. Sei die Anklebeabbildung durch $\psi^k: \mathbb{S}_1^{k-1} \rightarrow \mathbb{S}_2^{k-1}$ gegeben. Eine mögliche Fortsetzung von dieser ist

$$\dot{\Psi}^k: U_1 \cap \partial \mathbb{D}_1^n \rightarrow U_2 \cap \partial \mathbb{D}_2^n, (x, y) \mapsto \left(\|x\| \psi^k \left(\frac{x}{\|x\|} \right), y \right).$$

Sei $\ddot{\Psi}^k: U_1 \cap \partial \mathbb{D}_1^n \rightarrow U_2 \cap \partial \mathbb{D}_2^n$ eine weitere, beliebige Fortsetzung von ψ^k . Dann sind die zugehörigen Tubenumgebungen von \mathbb{S}_2^{k-1} in $\partial \mathbb{D}_2^n$ gerade

$$\dot{h}_2 = \dot{\Psi}^k \circ h_1 \quad \text{und} \quad \ddot{h}_2 = \ddot{\Psi}^k \circ h_1,$$

und es existiert eine Isometrie, sodass $\ddot{h}_2 \simeq \dot{h}_2 \circ \Gamma$, und somit auch

$$\ddot{\Psi}^k = \ddot{h}_2 \circ h_1^{-1} \simeq \dot{h}_2 \circ \Gamma \circ h_1^{-1} = \dot{\Psi}^k \circ h_1 \circ \Gamma \circ h_1^{-1}$$

gilt. Hierbei existiert eine glatte Abbildung $\gamma: \mathbb{S}_1^{k-1} \rightarrow O(n - k)$, sodass

$$h_1 \circ \Gamma \circ h_1^{-1}(x, y) = \left(x, \gamma \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot y \right)$$

ist. Folglich kann als Fortsetzung stets $\Psi^k := \dot{\Psi}^k \circ h_1 \circ \Gamma \circ h_1^{-1}$ gewählt werden, für welche

$$\Psi(x, y) = \left(\|x\| \psi^k \left(\frac{x}{\|x\|} \right), \gamma \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot y \right)$$

gilt. Eine Fortsetzung dieser ist

$$\tilde{\Psi}^k: U_1 \rightarrow U_2, z \mapsto \|z\| \Psi^k \left(\frac{z}{\|z\|} \right).$$

Diese Konstruktion ergibt nun

$$\mathbb{D}^n + \Psi^k = \left(\mathbb{D}_1^n \setminus \mathbb{S}_1^{k-1} \right) \sqcup \left(\mathbb{D}_2^n \setminus \mathbb{S}_2^{k-1} \right) / \left(z \sim \tilde{\Psi}^k \circ \alpha(z) \right)$$

und besitzt die Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{M} := \mathring{\mathbb{D}}_1^k \sqcup \mathring{\mathbb{D}}_2^k / \left(x \sim \tilde{\Psi}^k \circ \alpha(x) \right),$$

die zu der k -Sphäre homöomorph ist (!). Es lässt sich nachrechnen, dass diese Identifikationen mit der Projektion

$$\mathbb{D}^n + \Psi^k \rightarrow \mathcal{M}, (x, y) \mapsto x$$

kommutieren (siehe Appendix [8]), sodass sich eine Faserbündelstruktur ergibt, deren Fasern diffeomorph zu Scheiben sind. q.e.d.

2.2 Vertauschung der Befestigungsreihenfolge

Lemma 3 (Sortierungs-Lemma).

Sei \mathcal{W}^n ein Kobordismus und

$$\Psi^i: \mathbb{S}^{i-1} \rightarrow \partial_+ \mathcal{W} \quad \text{sowie} \quad \Psi^j: \mathbb{S}^{j-1} \rightarrow \partial_+ (\mathcal{W} + \Psi^i)$$

Henkel mit $j \leq i \leq n$. Dann existiert ein in $\partial_+ (\mathcal{W} + \Psi^i)$ zu Ψ^j isoto per Henkel $\Phi^j: \mathbb{S}^{j-1} \rightarrow \partial_+ \mathcal{W}$ derart, dass

$$(\mathcal{W} + \Psi^i) + \Psi^j \cong (\mathcal{W} + \Phi^j) + \Psi^i.$$

Beweis. Der Henkel Ψ^j ist isotop zu einem Henkel dessen Anklebesphäre Λ^j den Gürtel von Ψ^i transversal schneide. Da die Anklebesphäre die Dimension $j - 1$, und der Gürtel die Dimension $n - i - 1$ besitzt, kann die Dimension der Summe der Tangentialvektorräume in allen Schnittpunkten höchstens

$$(j - 1) + (n - i - 1) \leq n - 2 < n - 1 = \dim \partial_+ \mathcal{W}$$

betragen, sodass Transversalität nur im trivialen Fall gegeben sein kann, also wenn der Schnitt leer ist. Ist die Anklebesphäre jedoch disjunkt von dem Gürtel von Ψ^i , so liegt diese per Definitionem bereits komplett in $\partial_+ \mathcal{W}$. Jede Tubenumgebung von Λ^j kann durch eine weitere Isotopie derart geschrumpft werden, dass diese ebenso komplett in $\partial_+ \mathcal{W} \setminus \Lambda^i$ liegt. Das Anbringen des resultierenden Henkels Φ^j ist nun nicht mehr von Ψ^i abhängig, sodass die Reihenfolge vertauscht werden kann. q.e.d.

2.2.1 Allgemeine Vertauschung

Sei \mathcal{W} ein Kobordismus. Liegen für $1 \leq j \leq l$ Einbettungen

$$\Psi_j^k: \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \partial_+ \left(\mathcal{W} + \Psi_1^k + \Psi_2^k + \dots + \Psi_{j-1}^k \right)$$

vor, so zeigt eine zu dem Beweis des Lemmas sehr ähnliche Argumentation, dass für jedes Ψ_j^k eine isotope Einbettung

$$\Phi_j^k: \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \partial_+ \mathcal{W}$$

gefunden werden kann, deren Bild von allen anderen Anklebesphären disjunkt ist. Insbesondere muss bis auf Diffeomorphie bei der Definition nicht auf die zuvor angebrachten Henkel geachtet werden. Dies rechtfertigt die Schreibweise

$$\begin{aligned} \mathcal{W} + \sum_{j=1}^l \Psi_j^k &:= \left(\dots \left(\left(\mathcal{W} + \Psi_1^k \right) + \Psi_2^k \right) + \dots \right) + \Psi_l^k \\ &\cong \mathcal{W} + \Phi_1^k + \Phi_2^k + \dots + \Phi_l^k. \end{aligned}$$

2.2.2 Henkelzerlegungen

Der Vertauschungssatz ermöglicht nun eine gezielte Definition einer Henkelzerlegung eines Kobordismus $(\mathcal{W}^n, \mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Definition 7 (Henkelzerlegung).

Eine Folge von Kobordismen $(\mathcal{W}_k, \mathcal{M}, \partial_+ \mathcal{W}_k)$ mit $\mathcal{W}_{-1} = \mathcal{M} \times \mathbb{I}$, $\mathcal{W}_n \cong \mathcal{W}$ und Zahlen $p_k \in \mathbb{N}$ für $0 \leq k \leq n$, sowie Henkeln

$$\Phi_j^{k+1}: \mathbb{S}^k \rightarrow \partial_+ \mathcal{W}_k, \quad \text{sodass} \quad \mathcal{W}_{k+1} \cong \mathcal{W}_k + \sum_{j=1}^{p_k} \Phi_j^{k+1}$$

gilt und die Anklebesphären aller Φ_j^{k+1} voneinander disjunkt seien.

In der Anwendung des Sortierungs-Lemmas auf Henkel in einer Henkelzerlegung sei Obacht geboten. Durch die Diffeotopie werden auch möglicherweise die Anklebesphären von später angebrachten Henkeln verschoben.

Kapitel 3

Etwas Morsetheorie

3.1 Morsefunktionen

Ein kritischer Punkt $p \in \mathcal{W}$ einer glatten Funktion $f: \mathcal{W} \rightarrow [0, 1]$ heiße entartet, falls die Matrix der

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(q \mapsto \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \right|_q \right) \right|_p \in \mathbb{R}$$

singulär ist.

Definition 8 (Morse-Funktion).

Eine differenzierbare Abbildung $f: \mathcal{W} \rightarrow [0, 1]$, sodass alle kritischen Punkte weder auf dem Rand von \mathcal{M} liegen noch entartet sind, und $f^{-1}(\{0\}) = \mathcal{M}$ und $f^{-1}(\{1\}) = \mathcal{N}$ gelte.

Die Bedeutung von Morse-Funktionen sei hier nur angerissen und es werden keine Beweise gegeben. Für weitere Informationen siehe auch [\[Kos13\]](#) Kapitel 7.

3.2 Existenz einer Henkelzerlegung

Auf jedem Kobordismus $(\mathcal{W}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ existiert eine Morse-Funktion f mit kritischen Werten $0 < c_1 < \dots < c_l < 1$. Seien $d_k \in [0, 1]$ reguläre Werte, sodass

$$0 = d_0 < c_1 < d_1 < \dots < d_{l-1} < c_l < d_l = 1$$

gilt. Dann ist $\mathcal{M}_j := f^{-1}(\{d_j\})$ für $0 \leq j \leq l$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit, und $\mathcal{F}_j := f^{-1}([d_j, d_{j+1}])$ für $0 \leq j \leq l-1$ ein Kobordismus von \mathcal{M}_j zu \mathcal{M}_{j+1} . Aus

$$\mathcal{F}_j \overset{\mathcal{M}_{j+1}}{+} \mathcal{F}_{j+1} \cong f^{-1}([d_j, d_{j+2}])$$

folgt induktiv

$$\mathcal{W} \cong \mathcal{F}_0 \overset{\mathcal{M}_1}{+} \mathcal{F}_1 \overset{\mathcal{M}_2}{+} \dots \overset{\mathcal{M}_{l-2}}{+} \mathcal{F}_{l-2} \overset{\mathcal{M}_{l-1}}{+} \mathcal{F}_{l-1}.$$

Es lässt sich zeigen, dass für alle j ein i_j und ein Henkel $\Psi^{i_j} : \mathbb{S}^{i_j-1} \rightarrow \mathcal{M}_{j+1}$ existiert, sodass

$$\mathcal{F}_j \cong (\mathcal{M}_j \times \mathbb{I}) + \Psi^{i_j}$$

gilt. Es folgt erneut induktiv, dass

$$\mathcal{W} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{I} + \sum_{j=1}^l \Psi_j^{i_j}$$

gilt. Durch Sammeln aller k -Henkel mithilfe des Sortierungssatzes ergibt sich eine gewünschte Henkeldarstellung.

Duale Repräsentation

Die Funktion $1 - f$ ergibt einen Kobordismus von \mathcal{N} zu \mathcal{M} und eine Henkelzerlegung, in der jeder k -Henkel der originalen Zerlegung mit genau einem $n - k$ Henkel korrespondiert.

Kapitel 4

Einfache Kürzungen

Lemma 4.

Schneidet die Untermannigfaltigkeit \mathcal{V} eines glatten Faserbündels $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{N}$ jede Faser transversal und in genau einem Punkt, ist \mathcal{V} ein glatter Schnitt.

Beweis. Da jede Faser in genau einem Punkt geschnitten wird, kann eine zu π rechtsinverse Abbildung $s: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$ definiert werden. Es verbleibt zu zeigen, dass s glatt ist. Aus der Transversalitätsbedingung folgt, dass $T_p(\pi|_{\mathcal{V}})$ in jedem Punkt $p \in \mathcal{V}$ surjektiv (!), also ein Isomorphismus ist. Dann zeigt jedoch der Satz über die implizite Funktion, dass die lokale Umkehrfunktion, also s , in p glatt ist. q.e.d.

Satz 1 (Aufhebungssatz).

Schneidet die Anklebesphäre eines Henkels Ψ^{k+1} den Gürtel eines Henkels $\Psi^k: \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \partial_+ \mathcal{W}$ transversal und in genau einem Punkt, ist

$$\mathcal{W} \cong \mathcal{W} + \Psi^k + \Psi^{k+1}.$$

Beweis. Zunächst existiert ein Diffeomorphismus $\mathcal{W} \cong \mathcal{W} + \mathbb{D}^n$ für einen Punkt $*$ in $\partial_+ \mathcal{W}$. Da die Untermannigfaltigkeit $\Lambda^{k+1} \setminus \{x\} \cup \Lambda^k \subseteq \partial_+ \mathcal{W}$ eine Scheibe ist (!), kann eine Diffeotopie gefunden werden, die diese auf die Scheibe $\mathbb{S}_{\geq 0}^k \subseteq \mathbb{D}^n$, also Λ^k auf $\mathbb{S}^{k-1} \subseteq \mathbb{D}^n$ abbildet. Gemäß Satz [2] existiert eine Scheibenbündelstruktur $\pi: \mathbb{D}^n + \Psi^k \rightarrow \mathcal{M}$, wobei Λ^{k+1} in $\partial_+(\mathcal{W} + \Psi^k)$ auf $\mathbb{S}_{>0}^k \cup \{x\}$ abgebildet wird und aufgrund der Annahme alle Fasern von π transversal und in genau einem Punkt schneidet. Dies ist gemäß Satz [4] ein glatter Schnitt. Es folgt

$$\mathcal{W} + \Psi^k + \Psi^{k+1} \cong \mathcal{W} + \left(\mathbb{D}^n + \dot{\Psi}^k \right) + \dot{\Psi}^{k+1} \stackrel{[1]}{\cong} \mathcal{W} + \mathbb{D}^n \cong \mathcal{W}.$$

q.e.d.

Ein Henkel heiße trivial, falls die Anklebeabbildung durch \mathbb{D}^{n-1} faktori-
siere. In diesem Fall lässt sich ein additives Rechtsinverses explizit konstru-
ieren, was hier jedoch vermieden werde.

Korollar 1 (Ersetzungssatz).

Sei $1 \leq k \leq n - 3$. Die Anklebeabbildung eines Henkels Ψ^{k+1} schneide als
einzigen k -Gürtel den Gürtel von $\Psi_{c_k}^k$ transversal und in genau einem Punkt,
und sei in $\partial_+ \mathcal{W}_{k+1}$ isotop zu einem trivialen Henkel Φ^{k+1} . Dann existiert
eine Henkelzerlegung mit $c_k - 1$ k -Henkeln.

Beweis. Sei ein zu Φ^{k+1} additiv rechtsinverser Henkel durch Ψ^{k+2} gegeben.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{k+1} &\cong \mathcal{W}_{k+1} + \Phi^{k+1} + \Psi^{k+2} \\
&\cong \mathcal{W}_{k+1} + \Psi^{k+1} + \dot{\Psi}^{k+2} \\
&\stackrel{\text{Def.}}{\cong} \mathcal{W}_{k-1} + \sum_{j=1}^{c_k} \Psi_j^k + \sum_{j=1}^{c_{k+1}} \Psi_j^{k+1} + \Psi^{k+1} + \dot{\Psi}^{k+2} \\
&\stackrel{[3]}{\cong} \mathcal{W}_{k-1} + \sum_{j=1}^{c_k-1} \Psi_j^k + \Psi_{c_k}^k + \Psi^{k+1} + \sum_{j=1}^{c_{k+1}} \dot{\Psi}_j^{k+1} + \ddot{\Psi}^{k+2} \\
&\stackrel{[1]}{\cong} \mathcal{W}_{k-1} + \sum_{j=1}^{c_k-1} \Psi_j^k + \sum_{j=1}^{c_{k+1}} \ddot{\Psi}_j^{k+1} + \dot{\dot{\Psi}}^{k+2},
\end{aligned}$$

wobei die Akzente implizieren, dass es sich technisch gesehen nicht mehr um
die gleichen Henkel handle. q.e.d.

Kapitel 5

Homologie von Kobordismen

5.1 Henkuläre Homologie

Aus homologischer Sicht, ist die Henkelzerlegung sehr ähnlich zu der CW-Struktur eines zellulären Komplexes, auch wenn die Ansätze nicht identisch sind. Die Konstruktion der Verklebung eines Henkels als Randsumme mit der Einheitskugel ist bei diesen Überlegungen nachteilhaft, da dort keine kanonischen Inklusionen $\mathcal{W}, \mathbb{D}^n \hookrightarrow \mathcal{W} + \Psi^k$ existieren. Folglich sei $\mathcal{W} + \Psi^k$ im Folgenden als Summe von \mathcal{W} mit $\mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$ verstanden. Dies ist möglich da die beiden Ansätze homöomorphe Mannigfaltigkeiten liefern. Folgende Konstruktion verläuft nahezu analog zu [Hat02] [Section 2.2, Cellular Homology]. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Henkelzerlegung nicht von der leeren Menge ausgehend konstruiert wird, sodass statt der langen exakten Folge der Paare $(\mathcal{W}_k, \mathcal{W}_{k-1})$ eine lange exakte Folge von Tripeln $(\mathcal{W}_k, \mathcal{W}_{k-1}, \mathcal{M} \times \mathbb{I})$ betrachtet werden muss. Es gelten folgende Eigenschaften (Vergleiche Hatcher Section 2.2 Lemma 2.34)

Lemma 5.

Ist \mathcal{W} ein Kobordismus mit Henkelzerlegung \mathcal{W}_k , so gilt:

- i) $H_k(\mathcal{W}_m, \mathcal{W}_{m-1}) \neq 0$ genau dann, wenn $m = k$ ist. Dann ist diese frei abelsch und von den Kernen der k -Henkel erzeugt.*
- ii) Die Abbildung $H_k(\mathcal{W}_m, \mathcal{M}) \rightarrow H_k(\mathcal{W}, \mathcal{M})$ ist ein Isomorphismus für $k < m$ und ein Epimorphismus für $k = m$.*
- iii) $H_k(\mathcal{W}_m, \mathcal{M}) = 0$ für $k > m$.*

Beweis. i)

Die Projektion $(\mathbb{D}^m \times \mathbb{D}^{n-m}, \mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{D}^{n-m}) \rightarrow (\mathbb{D}^m, \mathbb{S}^{m-1})$ ist eine Homotopieäquivalenz, und bildet einen Henkel auf seinen Kern ab. Da ein Henkel

in \mathcal{W}_m stets an \mathcal{W}_{m-1} angebracht ist, gilt

$$\begin{aligned} H_k(\mathcal{W}_m, \mathcal{W}_{m-1}) &\cong \tilde{H}_k \left(\bigvee_{j=1}^{c_m} \mathbb{D}^m \times \mathbb{D}^{n-m} / \mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{D}^{n-m} \right) \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^{c_m} \tilde{H}_k(\mathbb{D}^m / \mathbb{S}^{m-1}) \cong \bigoplus_{j=1}^{c_m} \tilde{H}_k(\mathbb{S}^m) . \end{aligned}$$

Demnach ist $H_k(\mathcal{W}_k, \mathcal{W}_{k-1})$ für $m \neq k$ trivial und sonst zu \mathbb{Z}^{c_k} isomorph. Die Generatoren der \mathbb{Z} -Anteile stehen hierbei in bijektiver Korrespondenz zu den Kernen der Henkel, also auch zu den Henkeln selbst.

ii) & iii)

Die lange exakte Folge des Tripels $(\mathcal{W}_m, \mathcal{W}_{m-1}, \mathcal{M})$ ist gerade

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H_{k+1}(\mathcal{W}_m, \mathcal{W}_{m-1}) & \rightarrow & H_k(\mathcal{W}_{m-1}, \mathcal{M}) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & H_k(\mathcal{W}_m, \mathcal{M}) & \rightarrow & H_k(\mathcal{W}_m, \mathcal{W}_{m-1}) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Für $m \neq k$ oder $m \neq k-1$ ist entweder die erste oder letzte Gruppe trivial und die mittlere Abbildung damit ein Epimorphismus oder ein Monomorphismus. Dies zeigt ii). Mit $H_k(\mathcal{W}_{-1}, \mathcal{M}) = 0$ ergibt dies iii). q.e.d.

Durch dem aus der langen exakten Folge stammenden Differential

$$\partial_k: H_k(\mathcal{W}_k, \mathcal{W}_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{W}_{k-1}, \mathcal{M}) \quad (5.1)$$

und der von der Quotientenabbildung induzierten Abbildung

$$q_k^*: H_{k-1}(\mathcal{W}_{k-1}, \mathcal{M}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{W}_{k-1}, \mathcal{W}_{k-2})$$

kann nun ein weiteres Differential durch $d_k := q_k^* \circ \partial_k$ definiert werden, welches im Folgenden genauer untersucht werde. Die Homologiegruppen $H_k(\mathcal{W}_k, \mathcal{W}_{k-1})$ mit diesem Differential als Zellkomplex ergeben neue Homologiegruppen $H_k^{Hen}(\mathcal{W})$. Für diese gilt analog zu Hatcher Satz 2.35

$$H_*^{Hen}(\mathcal{W}) \cong H_*(\mathcal{W}, \mathcal{M}) ,$$

was jedoch im Folgenden nicht weiter benötigt werde.

Bemerkung 1.

Sei $(\mathcal{W}^n, \mathcal{M}, -)$ ein H-Kobordismus. Dann gilt wegen $\mathcal{M} \simeq \mathcal{W}$ auch

$$H_0(\mathcal{W}_1, \mathcal{M}) \cong H_0(\mathcal{W}, \mathcal{M}) \cong 0 .$$

Die lange exakte Folge des Paares $(\mathcal{W}_1, \mathcal{M})$ ist dann

$$\cdots \rightarrow H_1(\mathcal{W}_1, \mathcal{M}) \rightarrow H_0(\mathcal{M}) \xrightarrow{\iota^*} H_0(\mathcal{W}_1) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots ,$$

sodass ι^* ein Epimorphismus ist. Folglich kann \mathcal{W}_1 nicht mehr Zusammenhangskomponenten als \mathcal{M} besitzen.

Existieren keine j -Henkel für $j < k$, ist $\mathcal{W}_{k-1} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{I}$, und die Abbildung q_{k+1}^* ist gleich der Identität, sodass $d_{k+1} = \partial_{k+1}$ gilt. In diesem Fall existiert eine intuitive Beschreibung durch Schnittzahlen.

5.1.1 Schnittzahlen und der Whitney-Trick

Seien \mathcal{M}^k und \mathcal{N}^{n-k} transversale Untermannigfaltigkeiten von \mathcal{W}^n , wobei \mathcal{N} und das Normalenbündel von \mathcal{M} orientiert seien. Sei weiter $\mathcal{M} \subset U \subseteq \mathcal{W}$ eine Tubenumgebung, sodass in allen Punkten $p \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ die Faser U_p eine Umgebung von p in \mathcal{N} sei (aufgrund der Transversalität kann dies stets gewährleistet werden). Dann ergeben sich induzierte lokale Orientierungen

$$H_n(N\mathcal{M}) \cong H_n(U) \rightarrow H_n(U, U \setminus \mathcal{M}) \cong H_{n-k}(U_p, U_p \setminus \{0\})$$

und

$$H_{n-k}(\mathcal{N}) \cong H_{n-k}(\mathcal{N}, \mathcal{N} \setminus p) .$$

Da die Inklusion $U_p \rightarrow \mathcal{N}$ Isomorphismen

$$H_{n-k}(U_p, U_p \setminus p) \cong H_{n-k}(\mathcal{N}, \mathcal{N} \setminus p)$$

induziert, können diese lokalen Orientierungen verglichen werden. In einem Punkt p sei nun $\varepsilon_p = 1$, falls diese Orientierungen übereinstimmen, und -1 sonst. Die Schnittzahl sei

$$[\mathcal{M}, \mathcal{N}] := \sum_{p \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}} \varepsilon_p .$$

Seien nun alle Kerne von Henkeln Ψ^k, Ψ^{k+1} beliebig orientiert. Dies induziert sowohl eine Orientierung des Normalenbündels von Σ^k , als auch eine Orientierung der Anklebesphäre Λ^{k+1} . Folglich können im Falle eines transversalen Schnittes die Schnittzahlen $[\Sigma^k, \Lambda^{k+1}]$ betrachtet werden, und es gilt (!)

$$d\Psi^{k+1} = \sum_{j=1}^{c_k} \left[\Sigma_j^k, \Lambda^{k+1} \right] \Psi_j^k .$$

Proposition 4 (Whitneys Trick).

Seien \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n zusammenhängende Untermannigfaltigkeiten der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit \mathcal{V}^{n+m} , wobei $n + m \geq 5$, $n \geq 2$ und $m \geq 3$ gelte. Sei \mathcal{M} und das Normalenbündel von \mathcal{N} orientiert. Seien $p, q \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ derart, dass $\varepsilon_p + \varepsilon_q = 0$ gelte, so existiert eine Isotopie $h: \mathcal{M} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{V}$ die in einer Umgebung von $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \setminus \{p, q\}$ stationär ist, und $h_1(\mathcal{M}) \cap \mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \setminus \{p, q\}$ gilt.

Beweis. Siehe [MSS65] Seite 71 Satz 6.6.

qed

Die Forderung der hohen Dimensionalität ergibt sich daraus, dass eine 2-dimensionale Scheibe in \mathcal{M}^n eingebettet werden muss, wofür der schwache Einbettungssatz von Whitney benötigt wird. Folglich muss $n \geq 2 \cdot 2 + 1 = 5$ gelten.

5.2 Homologie- und Modifikationslemmata

Folgendes Lemma erklärt die simple Beziehung zwischen sich aufhebenden Henkeln und ist der Grund für die Forderung, dass der Kobordismus mindestens 6-dimensional ist. Es ist eine (fast) direkte Folgerung aus dem Whitney-Trick.

Satz 2 (Homologie-Lemma).

Besitzt eine Henkelzerlegung mit $\mathcal{W}_{k-1} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{I}$ eines mindestens 6-dimensionalen Kobordismus \mathcal{W} keine $(j < k)$ -Henkel und gilt $d\Psi^{k+1} = \Psi_i^k$, ist Ψ^{k+1} rechtsinvers zu Ψ_i^k .

Beweis. Der Kern eines Henkels wird unter dem Differential auf seinen Rand, also auf die Anklebesphäre abgebildet, die nach einer Isotopie als transversal zu allen Gürteln von k -Henkeln angenommen werden kann. Aus Dimensiongründen, sind dies lediglich endlich viele Punkte. Wegen

$$d\Psi^{k+1} = \sum_{j=1}^{c_k} \left[\Lambda^{k+1}, \Sigma_j^k \right] \Psi_j^k = \Psi_i^k,$$

muss für $j \neq i$ auch

$$\left[\Lambda^{k+1}, \Sigma_j^k \right] = \sum_{p \in \Sigma_j^k \cap \Lambda^{k+1}} \varepsilon_p = 0$$

gelten, sodass stets Paare $p, q \in \Lambda^{k+1} \cap \Sigma_j^k$ mit $\varepsilon_p + \varepsilon_q = 0$ existieren, die sich durch eine Isotopie gemäß dem Whitney-Trick aufheben. Für $i = j$ folgt analog, dass sich alle bis auf einen Punkt p mit $\varepsilon_p = 1$ paarweise aufheben. Da sich Ψ^{k+1} und Ψ_i^{k+1} nun transversal und nur in p schneiden lässt sich der Kürzungssatz anwenden. q.e.d.

Proposition 5 (Modifikationslemma).

Für Henkel Ψ_1^k und Ψ_2^k existiert ein in $\partial_+ \mathcal{W}_k$ isotoper Henkel $\Phi^k \simeq \Psi_1^k$ mit

$$d\Phi^k = d\Psi_1^k + d\Psi_2^k.$$

Beweis. Dies folgt aus [Kos13] Kapitel VIII Lemma 1.2.

q.e.d.

Kapitel 6

Entfernung der 0- und 1-Henkel

Um induktiv Henkel zu eliminieren, muss zunächst ein Induktionsanfang gezeigt werden. Hierzu müssen die 0- und 1-Henkel eliminiert werden.

Satz 3 (Entfernung der 0-Henkel).

Jeder H -Kobordismus besitzt eine Henkelzerlegung ohne 0-Henkel.

Beweis. Da die Anklebesphäre eines 0-Henkels Ψ^0 leer ist, gilt trivialerweise

$$\mathcal{M} \times \mathbb{I} + \Psi^0 = (\mathcal{M} \times \mathbb{I}) \sqcup \mathbb{D}^n,$$

sodass das Anbringen eines 0-Henkels eine Wegzusammenhangskomponente hinzufügt. Aufgrund von Bemerkung [1] kann \mathcal{W}_1 nicht mehr Wegzusammenhangskomponenten als \mathcal{M} besitzen. Demnach existiert ein 1-Henkel $\Psi^1: \mathbb{S}^0 \rightarrow \mathcal{W}_0$, der $\mathcal{M} \times \mathbb{I}$ mit \mathbb{D}^n verbindet. Die Anklebesphäre von Ψ^1 schneidet den Gürtel von Ψ^0 , also die gesamte Sphäre \mathbb{S}^{n-1} , nun transversal und in genau einem Punkt. Folglich heben sich die Henkel gemäß Satz [1] auf. q.e.d.

Um die 1-Henkel zu entfernen ist erstmals vonnöten, dass der H -Kobordismus einfach zusammenhängt.

Satz 4 (Entfernung der 1-Henkel).

Jeder zusammenhängende, mindestens 5-dimensionale H -Kobordismus besitzt eine Henkelzerlegung ohne 0- oder 1-Henkel.

Beweis. Zunächst sei $\gamma_1: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus \mathbb{S}^0 \subseteq \partial_+ \mathcal{W}_1$ ein Weg mit Endpunkten $x_1, x_2 \in \partial_+ \mathcal{W}_0$, der den Gürtel von Ψ^1 transversal und in genau einem Punkt schneide. Sind die 0-Henkel gemäß Satz [3] bereits eliminiert, ist $\partial_+ \mathcal{W}_0 \cong \mathcal{M}$ wegzusammenhängend, und es existiert ein Weg $\gamma_2 \subseteq \partial_+ \mathcal{W}_0$ von x_1 zu x_2 , der keine Anklebesphäre von 1-Henkeln (endlich viele Punkte) treffe. Dann induziert $\gamma_1 \gamma_2$ eine stetige Abbildung $\mathbb{S}^1 \rightarrow \partial_+ \mathcal{W}_1$, die mit dem schwachen

Einbettungssatz von Whitney [2] zuerst durch eine glatte Einbettung Ψ^1 approximiert, und dann derart isotopiert werden kann, dass sie die Anklebesphären aller 2-Henkel transversal schneide. Die resultierende Einbettung sei durch β bezeichnet. Aus Dimensionsgründen bedeute dies erneut, dass β von allen Anklebesphären disjunkt ist und somit als Abbildung nach $\partial_+ \mathcal{W}_2$ aufgefasst werden kann. Nun existiert stets ein trivialer Henkel Ψ^2 , dessen Anklebeabbildung wegen $\pi_1(\partial_+ \mathcal{W}_2) = 0$ (!) homotop zu β ist. Wegen $1 \cdot 2 + 2 = 4 \leq \dim \partial_+ \mathcal{W}$, sind diese gemäß Satz [3] in $\partial_+ \mathcal{W}_2$ sogar zueinander isotop, und Korollar [1] ermöglicht das Ersetzen von Ψ^1 . q.e.d.

Kapitel 7

Der H-Kobordismus-Satz

7.1 Die Normalform

Satz 5 (Existenz einer Normalform).

Jeder einfach zusammenhängende ($n \geq 6$)-dimensionalen H-Kobordismus besitzt für jedes $2 \leq k \leq n - 3$ eine Henkelzerlegung, die lediglich k - und $(k + 1)$ -Henkel besitzt.

Beweis. Es wird über Induktion nach k gezeigt, dass eine Darstellung ohne j -Henkel für $j < k$ existiert, also dass $\mathcal{W}_{k-1} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{I}$ gilt. Der Induktionsanfang $k = 2$ ist gerade die Aussage von Satz [4].

Induktionsschritt

Sei die Aussage für k bereits gezeigt, dann existiert eine Henkelzerlegung von \mathcal{W} mit $\mathcal{W}_{k-1} = \mathcal{M} \times \mathbb{I}$ und für das Differential in den Homologiegruppen gilt $d_{k+1} = \partial_{k+1}$. Dieses ist wegen der langen exakten Folge

$$\begin{array}{ccc} \cdots \longrightarrow H_{k+1}(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}_k) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & H_k(\mathcal{W}_k, \mathcal{M}) \\ & & \downarrow \\ & & H_k(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{M}) \cong H_k(\mathcal{W}, \mathcal{M}) \cong 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

ein Epimorphismus. Somit existiert für alle $\Psi^k \in H_k(\mathcal{W}_k, \mathcal{M})$ ein Element

$$\sum_{j=1}^{c_{k+1}} x_j \Psi_j^{k+1} \in H_{k+1}(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}_k), \quad \text{sodass} \quad \sum_{j=1}^{c_{k+1}} x_j d\Psi_j^{k+1} = \Psi^k \quad \text{gilt.}$$

Sei Φ^{k+1} ein trivialer Henkel, ist die Anklebesphäre kontrahierbar, und somit $d\Phi^{k+1} = 0$. Folglich existiert gemäß dem Modifikationssatz [5] ein zu Φ^{k+1} isotoper Henkel χ^{k+1} mit

$$d\chi^{k+1} = d\Phi^{k+1} + \sum_{j=1}^{c_{k+1}} x_j d\Psi_j^{k+1} = 0 + \Psi^k = \Psi^k.$$

Gemäß dem Homologie-Lemma [2] existiert ein zu χ^{k+1} isotoper Henkel, der den Gürtel von Ψ^k transversal und in genau einem Punkt schneide, sodass Korollar [1] die Ersetzung von Ψ^k mit einem $(k+2)$ -Henkel ermöglicht.

Durch Übergang zu der dualen Repräsentation können j -Henkel für $j > k+1$ in $(n-j)$ -Henkel überführt werden und eine Anwendung der oberen Induktion mit $k' = n - k$ zeigt die Aussage. q.e.d.

7.2 Differentialmatrizen

Sei $H^k(\mathcal{W}_k, \mathcal{W}_{k-1}) \cong \mathbb{Z}^{c_k}$ als \mathbb{Z} -Modul mit der kanonischen Basis aufgefasst, kann die Abbildungsmatrix $M_k \in \mathbb{Z}^{c_k \times c_{k-1}}$ des Differentials d_k definiert werden. Diese ist stets von der gegebenen Henkelzerlegung abhängig. Aus der Existenz einer Normalform folgt, dass lediglich ein k betrachtet werden muss. Elementare Zeilenoperationen auf dieser Matrix ergeben nun Matrizen, die mit weiteren Henkelzerlegungen von \mathcal{W} korrespondieren. Somit kann ein H-Kobordismus und das Entfernen oder Hinzufügen von Henkeln durch wenige Daten beschrieben, und mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens deutlich vereinfacht werden.

7.2.1 Elementare Zeilenoperationen

Dass eine Zeile zu einer andere Zeile addiert werden kann folgt aus dem Modifikationslemma. Ist die Matrix von der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ergibt das Homologie-Lemma [2] eine Henkelzerlegung mit Differentialmatrix B . Zeilenvertauschungen korrespondieren mit einer Umnummerierung der Henkel und eine Skalierung einer Zeile mit -1 ist äquivalent mit der Umorientierung des zugehörigen Kerns.

Satz 6 (H-Kobordismus-Satz).

Jeder mindestens 6-dimensionale, einfach zusammenhängende H-Kobordismus $(\mathcal{W}, \mathcal{M}, -)$ ist trivial.

Beweis. Anwenden des gaußschen Eliminationsverfahrens auf die Differentialmatrix einer Normalform ergibt eine Henkelzerlegung, deren Differentialmatrix die Identität ist. Wiederholte Reduktion dieser resultiert in der leeren Matrix, die eine Henkelzerlegung ohne Henkel repräsentiert. Es folgt

$$\mathcal{W} \cong \mathcal{W}_n \cong \mathcal{W}_{-1} = \mathcal{M} \times \mathbb{I}.$$

q.e.d.

Appendix

Wohldefiniertheit des Diffeomorphismus aus Satz [1]

Sei

$$\Phi(z) := \begin{cases} z & z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{V} \\ \tilde{h}_2 \left(\frac{2v + (1 - \|v\|^2 - t^2)\pi(z)}{\|v\|^2 + (1-t)^2} \right) & z = tp + v \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{V}' \end{cases},$$

und $z = v + tp \in (\mathcal{V}')^\perp \setminus \mathbf{0}$ die orthogonale Zerlegung bezüglich der riemannschen Metrik. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2(z) \sim \tilde{h}_1 \circ \alpha(z) &= \frac{\frac{2v}{\|z\|^2} + \left(1 - \left\| \frac{v}{\|z\|^2} \right\|^2 - \left(\frac{t}{\|z\|^2}\right)^2\right)p}{\left\| \frac{v}{\|z\|^2} \right\|^2 + \left(1 + \frac{t}{\|z\|^2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{2v}{\|z\|^2} + \left(1 - \frac{\|v\|^2}{\|z\|^4} - \frac{t^2}{\|z\|^4}\right)p}{\frac{\|v\|^2}{\|z\|^4} + \left(1 + \frac{t}{\|z\|^2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{2v}{\|z\|^2} + \left(1 - \frac{\|z\|^2}{\|z\|^4}\right)p}{\frac{\|v\|^2}{\|z\|^4} + 1 + \frac{2t}{\|z\|^2} + \frac{t^2}{\|z\|^4}} \\ &= \frac{\frac{1}{\|z\|^2} \left(2v + \left(\|v\|^2 + t^2 - 1\right)p\right)}{\frac{1}{\|z\|^2} \left(1 + \|z\|^2 + 2t\right)} \\ &= \frac{2v + \left(\|v\|^2 + t^2 - 1\right)p}{\|v\|^2 + (1+t)^2}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Sei nun

$$\beta := \|v\|^2 + (1+t)^2,$$

so gilt weiter

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_2^{-1} \circ \Phi \left(\tilde{h}_1 \circ \alpha(z) \right) &\stackrel{(8.1)}{=} \Phi \left(\frac{2v}{\beta} + \frac{\|v\|^2 + t^2 - 1}{\beta} p \right) \\
&= \frac{\frac{4v}{\beta} + \left(1 - \frac{4\|v\|^2}{\beta^2} - \left(\frac{\|v\|^2 + t^2 - 1}{\beta} \right)^2 \right) p}{\frac{4\|v\|}{\beta^2} + \left(1 - \frac{\|v\|^2 + t^2 - 1}{\beta} \right)^2} \\
&= \frac{\frac{4v}{\beta} + \frac{\beta^2 - 4\|v\|^2 - (\|v\|^2 + t^2 - 1)^2}{\beta^2} p}{\frac{4\|v\|}{\beta^2} + \left(1 - \frac{\|v\|^2 + t^2 - 1}{\beta} \right)^2} \tag{8.2} \\
&\stackrel{(8.3)}{=} \frac{\frac{4v}{\beta} + \frac{4t\beta p}{\beta^2}}{\frac{4\|v\|}{\beta^2} + \left(1 - \frac{\|v\|^2 + t^2 - 1}{\beta} \right)^2} \\
&\stackrel{(8.4)}{=} \frac{\frac{4v}{\beta} + \frac{4t\beta}{\beta^2} p}{\frac{4\|v\|}{\beta^2} + \frac{4(1+t)^2}{\beta^2}} = \frac{\frac{4}{\beta} (v + tp)}{\frac{4}{\beta} \left(\frac{\|v\|^2 + (1+t)^2}{\beta} \right)} \\
&= v + tp = z,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
&\beta^2 - 4\|v\|^2 - (\|v\|^2 + t^2 - 1)^2 \\
&= \|v\|^4 + 2\|v\|^2(1+t)^2 + (1+t)^4 - 4\|v\|^2 \\
&\quad - \|v\|^4 - 2\|v\|^2(t^2 - 1) - (t^2 - 1)^2 \\
&= \|v\|^4 + 2\|v\|^2 + 4\|v\|^2 t + 2\|v\|^2 t^2 + 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4 - 4\|v\|^2 \\
&\quad - \|v\|^4 - 2\|v\|^2 t^2 + 2\|v\|^2 - t^4 + 2t^2 - 1 \\
&= 4\|v\|^2 t + 4t + 8t^2 + 4t^3 \\
&= 4t \left(\|v\|^2 + 1 + 2t + t^2 \right) = 4t\beta
\end{aligned} \tag{8.3}$$

und

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\|v\|^2 + t^2 - 1}{\beta} \right)^2 &= \frac{\left(\|v\|^2 + 1 + 2t + t^2 - \|v\|^2 - t^2 + 1 \right)^2}{\beta^2} \\
&= \frac{4(1+t)^2}{\beta^2}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

seien. Schließlich ist also wegen $\tilde{h}_2(z) \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{V}$

$$\Phi \left(\tilde{h}_2(z) \right) \stackrel{\text{Def.}}{=} \tilde{h}_2(z) \stackrel{(8.2)}{=} \Phi \left(\tilde{h}_1 \circ \alpha(z) \right),$$

was die Aussage zeigt.

q.e.d.

Tubenumgebung der Sphäre

Vorüberlegungen

Zunächst seien die Diffeomorphismen

$$f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow]0, 1[, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad g:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

definiert. Diese sind zueinander invers, und es gilt

$$f\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \sqrt{1-x^2}. \quad (8.5)$$

Weiter existieren die Diffeomorphismen

$$\Phi: \mathring{\mathbb{D}}^k \times \mathbb{D}^{n-k} \rightarrow \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{k-1}, (x, y) \mapsto \left(x, y\sqrt{1-||x||^2}\right)$$

und für $\mathring{H}^k := (\mathring{\mathbb{D}}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{D}^{n-k}$ auch

$$\Lambda: \mathring{H}^k \rightarrow \mathring{H}^k, (x, y) \mapsto \left(x \frac{\sqrt{1-||x||^2}}{||x||}, y\right),$$

wobei Λ gleichzeitig eine Involution ist.

Die Tubenumgebung

Als Vektorbündel sei

$$\pi: E \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}, (p, v) \mapsto p \quad \text{mit} \quad E := \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

gewählt. Betrachte den Diffeomorphismus

$$G: E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbf{0} \rightarrow \mathring{H}^k, (p, z) \mapsto \left(f(||z||) \cdot p, \frac{x}{||z||}\right)$$

mit der Inversen

$$G^{-1}: \mathring{H}^k \rightarrow E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbf{0}, (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{||x||}, g(||x||) \left(y, \sqrt{1-||y||^2}\right)\right).$$

Die gesuchte Einbettung ist nun

$$\tilde{h}: E \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow U \subset \mathbb{D}^n, (p, z) \mapsto \begin{cases} F \circ G(p, z) & z \neq 0 \\ (p, 0) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Alpha

Es verbleibt zu zeigen, dass bei dieser Wahl der Einbettung $\tilde{h} \circ \alpha_E \circ \tilde{h}^{-1} = \alpha$ gilt. Zunächst sei angemerkt, dass $\alpha = F^{-1} \circ \Lambda \circ F$ ist, sodass lediglich $\Lambda = G \circ \alpha_E \circ G^{-1}$ gezeigt werden muss. Die Aussage folgt aus

$$\begin{aligned}
 G \circ \alpha_E \circ G^{-1}(x, y) &= G \circ \alpha_E \left(\frac{x}{\|x\|}, g(\|x\|) \cdot y, g(\|x\|) \sqrt{1 - \|y\|^2} \right) \\
 &= G \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{g(\|z\|)}, \frac{\sqrt{1 - \|y\|^2}}{g(\|z\|)} \right) \\
 &= \left(f \left(\frac{1}{g(\|z\|)} \right) \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{g(\|z\|)} g(\|z\|) \right) \\
 &\stackrel{(8.5)}{=} \left(x \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2}}{\|x\|}, y \right) = \Lambda(x, y).
 \end{aligned}$$

Wohldefiniertheit der Projektion aus Satz [2]

Zunächst gilt für $z = (x, y) \in U$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}(z) &= \|z\| \Psi\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \\
 &= \|z\| \left(\left\| \frac{x}{\|z\|} \right\| \psi\left(\frac{\frac{x}{\|z\|}}{\left\| \frac{x}{\|z\|} \right\|}\right), \gamma\left(\frac{\frac{x}{\|z\|}}{\left\| \frac{x}{\|z\|} \right\|}\right) \frac{y}{\|z\|} \right) \\
 &= \left(\|x\| \psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \gamma\left(\frac{x}{\|x\|}\right) y \right)
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

also

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi} \circ \alpha(z) &= \tilde{\Psi} \left(x \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2}}{\|x\|}, y \frac{\|x\|}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right) \\
 &\stackrel{(8.6)}{=} \left(\sqrt{1 - \|x\|^2} \psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{\|x\|}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \gamma\left(\frac{x}{\|x\|}\right) y \right)
 \end{aligned}$$

und somit

$$\pi\left(\tilde{\Psi} \circ \alpha(z)\right) = \sqrt{1 - \|x\|^2} \psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right),$$

sowie

$$\tilde{\Psi} \circ \alpha(\pi(z)) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2} \psi\left(\frac{x}{\|x\|}\right), 0 \right).$$

Literaturverzeichnis

- [Brö73] Klaus Bröcker, Theodor und Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer Berlin Heidelberg, 1973.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
- [Hir12] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [Kos13] Antoni A. Kosinski. *Differential Manifolds*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013.
- [Lee13] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Lüc04] Wolfgang Lück. A basic introduction to surgery theory, 2004. <http://www.math.uni-muenster.de/u/lueck/publ/lueck/ictp.pdf> [Zugriff: 05.09.2024].
- [MSS65] John Milnor, L. Siebemann, and J. Sondow. *Lectures on the H-Cobordism Theorem*. Princeton University Press, 1965.
- [Whi36] Hassler Whitney. Differentiable manifolds. *Annals of Mathematics*, 37(3):645–680, 1936.