

Лабораторна робота 5 КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ БІОСИГНАЛІВ

Мета роботи:

1. Ознайомитися з властивостями кореляційних функцій біомедичних сигналів.
2. Отримати навички кореляційного аналізу біомедичних сигналів із використанням MATLAB

Короткі теоретичні відомості

Кореляційний аналіз є ефективним засобом виявлення кількісного зв'язку між парами біосигналів чи відліками одного сигналу і може застосовуватись для виявлення детермінованого сигналу у присутності шумів і оцінювання часу затримки між двома детермінованими або стохастичними біосигналами.

Кореляційні функції обчислюють за експериментальними даними за однією реалізацією випадкового процесу обмеженої тривалості у припущенні, що випадковий процес – ергодичний. Зазвичай біосигнали $x(t)$ та $y(t)$ представляються своїми дискретними відліками $x(n)$ та $y(n)$, де $n = 0, 1, \dots, N-1$, отриманих з інтервалом дискретизації T .

Незміщені оцінки автокореляційної (АКФ) і взаємнокореляційної (ВКФ) функцій обчислюють за формулами:

$$R_x(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)x(n+k), \quad R_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)y(n+k),$$

де $k = 0, 1, \dots, M$.

Використовується також зміщені оцінки АКФ

$$\tilde{R}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k} x(n)x(n+k), \quad \tilde{R}_{xy}(k) = \frac{N-k}{N} R_{xy}(k).$$

Для великих значень N та при $M \ll N$ зміщені і незміщені оцінки кореляційних функцій відрізняються несуттєво, але зміщені оцінки простіші для обчислення.

В практичних задачах щоб отримати оцінки АКФ з прийнятною дисперсією необхідно мати декілька тисяч відліків процесу.

Дисперсію оцінок АКФ та ВКФ можна зменшити до допустимого рівня, якщо виконати умови:

$$T > 5T_p, \quad M \leq 0,1 \dots 0,5N,$$

де T_p – найбільший період частотного компоненту, що є в сигналі;

M – максимальне значення зсуву при обчисленні АКФ.

Основні властивості АКФ

$$1) R_x(0) = \overline{X}^2; \quad 2) R_x(\tau) = R_x(-\tau); \quad 3) |R_x(0)| \leq R_x(\tau),$$

де \overline{X}^2 – середній квадрат процесу.

Для центрованих процесів середній квадрат дорівнює дисперсії цього процесу.

Основні властивості ВКФ

$$1) R_{xy}(0) = R_{yx}(0); \quad 2) R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau).$$

$$3) |R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)}.$$

Теорема Вінера-Хінчина встановлює зв'язок між кореляційною функцією та спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ через перетворення Фур'є:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Для двох випадкових процесів $x(t)$ та $y(t)$ формули Вінера-Хінчина зв'язують ВКФ і взаємну спектральну щільність:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Застосування АКФ і ВКФ при аналізі ЕЕГ. У загальному випадку ЕЕГ є нестационарним випадковим процесом, тому, зазвичай, аналізують частину сигналу (який іноді називають *epoch*) тривалістю декілька секунд. На основі використання АКФ виявляють гармонічні коливання у випадковому процесі, яким є ЕЕГ. Доцільно перед початком обчислення АКФ виділити основні частотні ритми смуговими фільтрами. За АКФ оцінюють такі характеристики гармонійної складової:

1) середній період – середній час між вершинами хвиль у АКФ:

$$T_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i,$$

де N – кількість вершин хвиль; t_i – інтервал часу між вершинами сусідніх хвиль;

2) коефіцієнт періодичності,

$$k_p = A_p / A_r,$$

який характеризує періодичність процесу через відношення амплітуд періодичної A_p та випадкової A_r складових.

Середня амплітуда періодичних коливань обчислюється за формулою

$$A_p = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N A_i,$$

де A_i – амплітуда від піку до піку кожного коливання корелограмів.

Амплітуда випадкової складової визначається як:

$$A_r = R(0) - A_p;$$

3) стійкість періодичної складової – час, за який амплітуда періодичних коливань на корелограмі зменшується до $0,1A_{\max}$.

За допомогою ВКФ можна визначити ступінь статистичних зв'язків ЕЕГ різних точок мозку, виділити періодичні складові, що є спільними для досліджуваних сигналів. Ступінь статистичного зв'язку між сигналами визначається коефіцієнтом взаємної кореляції, що має нормовані значення в діапазоні $-1 \leq r_{xy} \leq 1$. Чим більше незалежних складових у двох сигналах, тим менше цей коефіцієнт. При аналізі ЕЕГ часто використовують такі параметри:

1) ступінь взаємного кореляційного зв'язку, що визначається за формулою:

$$k_1 = R_{xy}(0) / R_{xx}(0), \quad k_2 = R_{xy}(0) / R_{yy}(0);$$

2) часовий зсув максимуму, що характеризує часові співвідношення у двох процесах.

Команди MATLAB для вивчення

За допомогою команди `help` у MATLAB вивчіть призначення та варіанти застосування таких функцій: `fix`, `fft`, `log10`.

Завдання і методичні вказівки до виконання роботи

1. Виявлення гармонійних коливань із суміші з шумом

1.1. Змодельуйте стаціонарний випадковий процес $x(t) = s(t) + v(t)$, де $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, $A = 0,5$ В, $f_0 = 5$ Гц, $v(t)$ – нормальний білий шум з дисперсією $D = 0,25$ В². Тривалість реалізації 5 с.

Побудуйте в одному графічному вікні графіки процесу $x(t)$ та його складових $s(t)$ і $v(t)$. Подайте графіки у звіті.

1.2. Обчисліть оцінки дисперсії шуму, дисперсії сигналу (функція `var`) та відношення шум/сигнал (виразити в дБ).

Запишіть отримані значення у звіті.

1.3. Обчисліть незміщені оцінки АКФ процесу $x(t)$ (функція `xcorr` з параметром 'unbiased') та побудуйте графік АКФ. Максимальну затримку сигналу при обчисленні його АКФ виберіть в межах 0,1... 0,3 тривалості сигналу. Для більш наочного спостереження виберіть діапазон по осі часу мінус 5 ... 5 с.

Яке максимальне значення АКФ? Якому параметру процесу дорівнює значення кореляційної функції при нульовій затримці?

1.4. Обчисліть зміщені оцінки АКФ процесу $x(t)$ (у функції `xcorr` встановити параметр 'biased'). Для більшого ефекту треба збільшити максимальну затримку сигналу до 0,7... 0,9 тривалості сигналу.

Побудуйте графік АКФ та подайте його у звіті.

Чим відрізняються зміщені та незміщені оцінки АКФ?

1.5. Обчисліть оцінки АКФ сигналу $x(t)$ при збільшенні тривалості процесу, наприклад, до 100 с та 1000 с.

Побудуйте відповідні графіки та подайте їх у звіті.

Як впливає тривалість процесу на оцінки періодичної складової АКФ?

2. Аналіз ЕЕГ за допомогою АКФ

2.1. Завантажте сигнал ЕЕГ з файла `eeg1-p4.dat` (функція `load`) Частота дискретизації $f_s = 100$ Гц. Виконайте центрування сигналу (функція `detrend`). Побудуйте графік сигналу, подайте його у звіті.

2.2. Виберіть з повного сигналу частину (епоху) в інтервалі від 4,7 до 5,8 с. Номер відліку n_k у момент часу t_k можна обчислити як $n_k = t_k f_s$. Для реалізації в MATLAB необхідно враховувати, що

нумерація відліків починається з одиниці, тому номер відліку, що відповідає моменту t_k обчислюється кодом:

$$nk = \text{fix}(tk*fs) + 1;$$

Побудуйте графік вибраної епохи сигналу.

2.3. Обчисліть незміщені оцінки АКФ сигналу ЕЕГ, побудуйте графік, подайте його у звіті.

При яких відмітках часу АКФ має пікові значення?

2.4. Обчисліть, користуючись графіком, середній період і середню частоту виявленого періодичного процесу в ЕЕГ.

Якому ритму ЕЕГ відповідає цей періодичний процес?

2.5. Обчисліть спектральну щільність сигналу на підставі теореми Вінера–Хінчина, тобто застосуванням перетворення Фур'є до АКФ (функція `fft`). Спектральна щільність процесу є модулем обчисленого перетворення Фур'є. Оцінки спектральної щільності, що отримані за допомогою цієї функції, треба розділити на кількість точок реалізації, щоб вони не залежали від її тривалості. Таким способом отримують двосторонню спектральну щільність, за якої потужність сигналу розподілена між позитивними і негативними частотами. Для отримання односторонньої спектральної щільності треба помножити на два всі відліки спектральної щільності, крім першого і останнього. Це виконується таким програмним кодом:

$$Sxx = \text{abs}(\text{fft}(\text{ecg}))/\text{length}(\text{ecg});$$

$$Sxx = [Sxx(1), 2*Sxx(2:\text{end}-1), Sxx(\text{end})];$$

Побудуйте графік спектральної щільності і подайте його у звіті. Відліки частотної осі графіку формують таким кодом:

$$N = \text{length}(Sy); f = (0:N-1)/N*fs;$$

Якій частоті відповідає пік на графіку? Яка роздільна здатність за частотою оцінок спектральної щільності?

2.6. Завантажте сигнал ЕЕГ з файлу `eeg1-f3.dat` ($f_s = 100$ Гц). Виберіть з сигналу епоху на інтервалі від 4,2 с до 4,96 с. Повторіть для цього сигналу обчислення та отримайте графіки, як вказано у п. п. 2.2 – 2.5.

Чи є періодична складова в сигналі? Відповідь обґрунтуйте.

3. Аналіз ЕЕГ за допомогою ВКФ

3.1. Завантажте два сигнали ЕЕГ з файлів eeg1-o2.dat і eeg1-c3.dat ($f_s = 100$ Гц). Виконайте центрування сигналів (функція detrend). Побудуйте графіки сигналів і збережіть їх у звіті.

3.2. Виділіть із сигналів епоху на інтервалі 5,71 ... 6,78 с. Побудуйте графік вибраної епохи сигналів.

3.3. Обчисліть ВКФ сигналів ЕЕГ, побудуйте графік. Збережіть графік у звіті.

3.4. Обчисліть взаємну спектральну щільність сигналу застосуванням перетворення Фур'є до ВКФ. Побудуйте графік взаємної спектральної щільності (функція plot) і подайте його у звіті.

Чи є періодична складова в сигналах?

3.5. Повторіть завдання п. п. 3.1 – 3.4 для двох ЕЕГ сигналів eeg1-p3.dat і eeg1-p4.dat на інтервалі 4,7... 5,8 с.

Зробіть висновки про наявність кореляційного зв'язку між сигналами.

3.6. Повторіть завдання п. п. 3.1 – 3.4 для двох ЕЕГ сигналів eeg1-f3.dat і eeg1-f4.dat на інтервалі 4,13 ... 4,96 с.

Зробіть висновки про наявність кореляційного зв'язку між сигналами.

Контрольні запитання

1. Які основні властивості має автокореляційна функція стаціонарного випадкового процесу?

2. Які основні властивості має взаємнокореляційна функція стаціонарного випадкового процесу?

3. За якої умови кореляційна функція сигналу збігається з коваріаційною?

4. Який вигляд має кореляційна функція білого шуму?

5. За якої умови потужність стаціонарного випадкового процесу дорівнює його дисперсії?

6. У чому суть теореми Вінера–Хінчина?