7.1

Vi skal i denne oppgaven jobbe med konstruksjon av delmengder av de vanlige tallmengdene N, Z, Q og R

a)

Konstruer delmengdene:

i) Delmengden av N bestående av alle partall.

ii) Delmengden av N bestående av alle partall mindre enn 100.

iii) Delmengden av Z bestående av alle negative heltall.

iv) Delmengden av Q bestående av alle brøker hvor telleren er et partall.

v) Delmengden av Q bestående av alle brøker mellom 0 og 1.

i) Delmengde $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \; x = 2y\}$

ii) Delmengde $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 100 \mid \exists y \in \mathbb{N} \; x = 2y\}$

iii) Delmengde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$

iv) Delmengde $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \; x = 2y \mid \exists z \in \mathbb{Z} \mid q = \frac{x}{z}\}$

..denne fungerer bare for positiv teller...

$A = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \exists m \in \mathbb{N} \; a = 2m\}$

denne er hentet fra fasit (også positiv teller)

v) Delmengde $A = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a = 1 \mid 1 > b \vee 1 = b\}$

fasit: $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q < 1\}$

Forklaring av i)

Logisk utsagn 1 og 2

$\{\underbrace{x \in \mathbb{N}}_{1} \mid \underbrace{\exists y \in \mathbb{N} \; x = 2y}_{2}\}$

Vi bruker variablene x og y til å konstruere 2 logiske utsagn.

Alle x som er naturlig tall

og logisk utsagn som sier at minst 1 y som også er naturlig tall kan ganges med 2 for å få x.

b) Konstruer løsningsmengden $\mathcal{L}$ av Pythagoras ligning, dvs. ligning $a^2 + b^2 = c^2$ som mengden av alle tupler (a, b, c) hvor a, b, c ∈ N

Løsningsmengden $\mathcal{L} = \{(a,b,c) \in \mathbb{N} \mid a^2 + b^2 = c^2\}$

7.2

Snitt, union og differanse mellom intervaller

Vi har gitt intervallene:

$$I_1 = [-1,\ 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$$
$$I_2 = [0,\ 4\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\}$$
$$I_3 = [2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\}$$
$$I_4 = \langle 0.9,\ 1.1\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid 0.9 < x < 1.1\}$$

Finn mengdene:

a) $I_1 \cap I_2$

b) $I_1 \cup I_2$

c) $I_1 - I_4$

d) $I_2 \cap I_3$

e) $(I_2 \cap I_3) - I_1$

Dere skal bruke formen $A = \{x \in A \mid p(x)\}$ hvor $p(x)$ er en logisk formel som er oppfylt for alle elementene x i mengden. Her må dere altså finne de korrekte logiske formlene.
Et naturlig tall n er et *partall* dersom det finnes et heltall m slik at $n = 2m$.
I en brøk $\frac{a}{b}$, kalles a *telleren* og b *nevneren*.

a) Snittet $I_1 \cap I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{0 \leq x \leq 3}\} = \underline{\underline{[0, 3]}}$ $p(x)$

b) Unionen $I_1 \cup I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\} = \underline{\underline{[-1, 4\rangle}}$

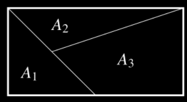
c) Differansen $I_1 - I_4 = [-1, 3] - \langle 0.9, 1.1\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0{,}9 \lor 1{,}1 < x \leq 3\} = \underline{\underline{[-1, 0.9 \cup 1.1, 3]}}$

d) Snittet $I_2 \cap I_3 = [0, 4\rangle - [2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 4\} = \underline{\underline{[2, 4\rangle}}$

e) Differansen (snittet $I_2 \cap I_3) - I_1 =$ Vi tar svaret fra oppg "d" $[2, 4\rangle - [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 4\} = \underline{\underline{[3, 4\rangle}}$

7.3

En 3-partisjon av en mengde A, er 3 *disjunkte* delmengder A_1, A_2 og A_3 slik at $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$



Anta vi har gitt mengden $A = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$.

Finn alle mulige 3-partisjoner av mengden A.

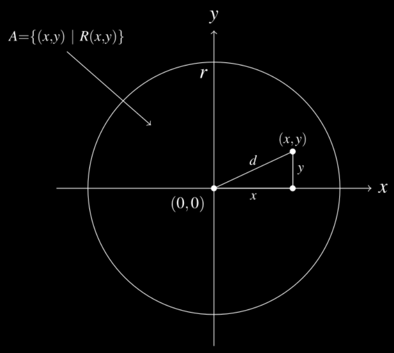
Det er 6 mulige disjunkte mengder

1. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3,4\}$
2. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{2,4\}$
3. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{4\}$, $A_3 = \{2,3\}$
4. $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{1,4\}$
5. $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{4\}$, $A_3 = \{1,3\}$
6. $A_1 = \{3\}$, $A_2 = \{4\}$, $A_3 = \{1,2\}$

7.4 a)

Anta du er eier et sirkulært område A med radius r. Plasser et (x, y)-koordinatsystem midt i sirkelen, som vist i figuren.

Figur →



Sirkulært område.

Bestem mengden $A = \{(x, y) \mid R(x, y)\}$ som definerer det sirkulære området i figuren.

Bruk at avstanden d mellom origo og et punkt (x, y) er gitt ve

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Avstanden "d" bestemmer hvor langt fra Origo vi kan bevege oss dersom vi holder oss innenfor en spesifikk radius "r" som ikke går lengre ut enn radiusen.

Vi beskriver "d" som radius "r" og restriksjon R.

$$R(x,y) = r \le \sqrt{x^2+y^2}$$

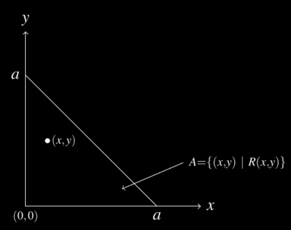
Her kommer mengden A som har mengden av alle x og y som tilfredsstillor R(x,y)

$$A = \{R(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le r\}$$

7.4 b)

Anta du eier et *triangulært* område A som utgjør en rettvinklet likebeint trekant hvor katetene (de korte sidene) har lengde a. Plasser (x,y)-koordinatsystemet hvor origo ligger i hjørnet hvor katetene krysser, som vist i figur 1.16.

Definer mengden $A = \{(x,y) \mid R(x,y)\}$.



Figur 1.16: Triangulært område.

Bruk at den lengste siden (hypotenusen) er gitt ved punktene (x,y) som oppfyller ligningen $y = -x + a$

Noen observasjoner:

- x og y kan ikke være < 0
- trekanten er likebeint, så derfor er begge makslengdene x og y like.
- vinklene for trekanten er $90° + 45° + 45°$

... disse observasjonene gjør at det blir litt enklere å definere lengden.

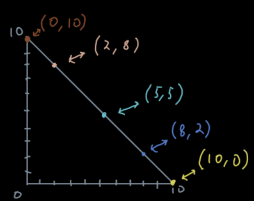
Som beskrevet i ligningen $y = -x + a$ så sier den at for hver x vi beveger oss i positiv retning så må vi ta den hele lengden "a" og trekke fra "x".

Vi kan bevise at det fungerer med enkel illustrering.

Si at $\underbrace{a = 10}$ ... hvis $x = 10$ så er $y = -x + a = 0$ $y = 0$

... hvis $x = 9$ så er $y = -x + a = 1$ $y = 1$

... hvis $x = 2$ så er $y = -x + a = 8$ $y = 8$



Vi vet nå at $x + y$ ikke kan overskride "a" elle $(x+y) \leq a$

Vi setter restriksjon om at $x + y \leq a$.

Det logiske utsagnet for å definere løsningsmengden blir:

$R(x,y) = 0 \leq x \leq a \land 0 \leq y \leq (-x+a)$

fasit sier

$R(x,y) = 0 \leq x \leq a \land 0 \leq y \leq a \land y = -x + a$

Vi få bruke fasit slik at vi er sikker på at det blir riktig

Da blir mengden av A

$$A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a \land 0 \leq y \leq a \land y = -x + a\}$$